N° d'ordre 98 ISAL 0045 Année 1998

THÈSE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

FORMATION DOCTORALE : Mécanique
ÉCOLE DOCTORALE : École Doctorale des Sciences de l'Ingénieur de Lyon : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

PAR

Christophe MONTERNOT
Maître ès Sciences de l'Université Claude Bernard (LYON I)

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS DE PUISSANCE PAR COURROIE DENTÉE

Soutenue le :	22 juin 1998	devant la Commission d'Examen
Jury MM.	J. Richard	Président
	J.-P. Pelle	Rapporteur
	J.-P. Lallemand	Rapporteur
	D. Play	Directeur de Thèse
	M. Bonis	
	C. Ispas	
	J.-M. Dancé	
	P. Gauch	
	M. Travert	

Cette thèse a été préparée
au Laboratoire de Conception et Analyse de Systèmes Mécaniques de l'INSA de LYON

La dynamique classique, qui est sans doute la science théorique la plus achevée, n'est pas une science "fermée" : on peut poser, dans le cadre de cette théorie, nombre de questions significatives qui n'ont pas encore de réponses.

Ilya Prigogine

Physique, Temps et Devenir (p. 31).

Avant Propos

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de **Conception et Analyse de Systèmes Mécaniques** (C.A.S.M.) de l'**Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**, sous la direction de Monsieur le Professeur Daniel Play.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur **D. Play** pour m'avoir fait confiance, pour mener à bien ce travail. Je lui témoigne également ma profonde reconnaissance pour m'avoir apporté un soutien indéfectible tout au long de ce travail, tout particulièrement dans les moments difficiles.

Cette étude s'inscrit principalement en continuité des travaux effectués par **J.-M. Dancé** du laboratoire C.A.S.M. Je le remercie également pour m'avoir initié et aidé avec compétence et bienveillance. Je lui suis vivement reconnaissant d'avoir accepté d'être membre du Jury.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs les Professeurs **G. Lallemand** de la Faculté des Sciences de Besançon, et **J.-P. Pelle** de l'École Normale Supérieure de Cachan en acceptant de juger ce travail, et d'en être rapporteur et membre du Jury.

Je souhaite également exprimer mes plus sincères remerciements à Messieurs les Professeurs **M. Bonis** de l'Université Technologique de Compiègne, **J. Richard** de l'Institut Universitaire Technologique de Cachan, et **C. Ispas** de l'Université Polytechnique de Bucarest pour l'importance qu'ils accordent à mon travail en acceptant d'être membre du Jury.

Je tiens à remercier vivement Messieurs **M. Travert** et **P. Gauch** de la société PSA Peugeot Citroën pour leur contribution à ce travail et d'avoir accepté d'être membre du Jury.

Je remercie tout particulièrement Madame **C. Contet**, secrétaire au laboratoire C.A.S.M., pour sa gentillesse, son dévouement, et son soutien constant. Je remercie également Messieurs **D. Berjoan** et **P. Soleilhac**, techniciens au laboratoire C.A.S.M., pour leur aide patiente et compétente.

Je désire exprimer mes remerciements à **K. Benhamadouche** et **K. Yakhou**, chercheurs au laboratoire CASM, pour leur collaboration à ce travail. J'adresse également mes remerciements à l'ensemble de l'équipe du Laboratoire CASM pour leur sympathie.

Enfin, je désire remercier le **Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche** pour avoir financé la réalisation de ce travail pendant trois ans.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIÈRES **11**

INTRODUCTION GÉNÉRALE **13**

CHAPITRE I : ACQUISITION DES CONNAISSANCES PAR LA BIBLIOGRAPHIE **15**

I.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE SUR LES COURROIES DENTÉES **16**

I.1.1. HISTORIQUE 16
I.1.2. SYNTHÈSE DES ÉTUDES EN STATIQUE 16
I.1.3. SYNTHÈSE DES ÉTUDES EN DYNAMIQUE 17

I.2. PRÉSENTATION DES MODÈLES DE ROTATION EN DYNAMIQUE **22**

I.2.1. MODÉLISATION POUR LES TRANSMISSIONS PAR COURROIE POLY-V 22
I.2.2. MODÉLISATION DES TRANSMISSIONS SYNCHRONES PAR COURROIE DENTÉE 73
I.2.3. CONCLUSION SUR LA PRÉSENTATION DES MODÈLES EN ROTATION 81

CHAPITRE II : MODÉLISATION D'UNE TRANSMISSION COMPLEXE PAR COURROIE DENTÉE ET PROGRAMMATION **83**

II.1. INTRODUCTION **85**

II.2. HYPOTHÈSES DE TRAVAIL **85**

II.2.1. LA COURROIE 85
II.2.2. LA POULIE 92
II.2.3. LE TENDEUR DYNAMIQUE 98
II.2.4. L'ACTION DE LA PESANTEUR 98

II.3. MODÉLISATION ET STRUCTURE DU PROGRAMME **99**

II.3.1. ENTRÉES DU MODÈLE 100
II.3.2. 1ER MODULE : CALCUL DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DE LA TRANSMISSION 102
II.3.3. 2ÈME MODULE : CALCUL DE LA TENSION DANS LES BRINS 104
II.3.4. 3ÈME MODULE : CALCUL DES CHARGES ET DES DÉFORMATIONS SUR LES DENTS DE COURROIE ENROULÉES 115
II.3.5. 4ÈME MODULE : CALCUL DES RAIDEURS ET AMORTISSEMENTS ÉQUIVALENTS POUR LE MODÈLE FINAL 131
II.3.6. 5ÈME MODULE : RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT 146
II.3.7. SORTIES DU MODÈLE 162

II.4. CONCLUSION **162**

CHAPITRE III : MESURES ET VALIDATION **163**

II.1. INTRODUCTION **164**

III.2. PRÉSENTATION TECHNIQUE DES COURROIE DAYCO DE TYPE ISORAN® **164**

III.3. MESURES SUR UN BANC DE SIMULATION D'UNE TRANSMISSION PAR COURROIE DENTÉE 165
III.3.1. MÉTHODOLOGIE DES MESURES ET DU CALCUL DE LA RAIDEUR DES BRINS 166
III.3.2. RÉSULTAT POUR UNE CONFIGURATION DE TRANSMISSION 170
III.4. MESURES DES CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES D'UNE COURROIE DE TYPE ISORAN® 173
III.4.1. MÉTHODOLOGIES MISES EN ŒUVRE 173
III.4.2. CONCLUSION SUR LE MESURAGE DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE COURROIE 194
III.5. VALIDATION STATIQUE DU MODÈLE 194
III.5.1. VALIDATION DU CALCUL DES TENSIONS 194
III.5.2. VALIDATION DU CALCUL DE LA ROTATION DES POULIES 197
III.6. CONCLUSION 199
CHAPITRE IV : CALCUL ET DISCUSSION 201
V.1. INTRODUCTION 202
IV.2. PORTRAIT DE LA TRANSMISSION DE DISTRIBUTION 202
IV.3. EXPLOITATION ET ANALYSE D'UNE TRANSMISSION SIMPLIFIÉE 205
IV.3.1. IDENTIFICATION DES MODES CRITIQUES 207
IV.3.2. ÉVOLUTION DE LA TRAJECTOIRE DES PALIERS 219
IV.3.3. ÉVOLUTION DE LA TENSION DANS LES BRINS 225
IV.3.4. COMPORTEMENT DU TENDEUR DYNAMIQUE (DISCUSSION SUR LA CONSTANTE D'EFFICACITÉ DU TENDEUR η) 230
IV.3.5. CHARGE SUR L'ÂME ET LES DENTS DE COURROIE 235
IV.4. CAS INDUSTRIEL D'UNE TRANSMISSION DE DISTRIBUTION 240
IV.5. CONCLUSION 243
CONCLUSION GÉNÉRALE 245
BIBLIOGRAPHIE 249
ANNEXE I 256
ANNEXE II 262
ANNEXE III 264
ANNEXE IV 267
ANNEXE V 269
ANNEXE VI 276

Introduction Générale

Dix-sept septembre 1995 : La motocyclette n° 19 s'élance en première position de la prestigieuse course *" Le Bol d'Or "* [Bussilet et al., 1995]. Ses performances laissent présager une victoire. Elle est animée par un bicylindre dont la principale particularité est sa distribution desmodromique entraînée par courroie dentée (photo 1). Mais une double rupture consécutive d'une des deux courroies de distribution provoque l'abandon de l'équipe. La situation dans le domaine grand public n'est pas plus brillante. Un article du magazine Auto-Plus (1996), intitulé avec justesse *" Courroie de distribution: le grand fléau "*, témoigne du désarroi des usagers de l'automobile : *" La courroie de distribution qui casse, c'est LE gros problème mécanique d'aujourd'hui. "*.

Paradoxalement, l'emploi de la courroie dentée peu appréciée des utilisateurs en raison de son manque de fiabilité, s'est considérablement accru, en particulier dans le domaine hautement concurrentiel de l'automobile. En effet, les concepteurs de bureau d'études apprécient la courroie pour sa souplesse d'utilisation. Cependant, pour assurer la pérennité de ce mode de transmission sur des groupes motopropulseur de plus en plus performant, il faut s'efforcer de résoudre les problèmes inhérents à ce type de transmission :

- la longévité de la courroie,
- le niveau de bruit et le confort acoustique,
- l'erreur de transmission,
- la tenue du matériau sur une large gamme de puissance avec un encombrement réduit.

La résolution des trois premiers points passe par la compréhension du comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée. En effet, une courroie dentée est un matériau composite constitué d'éléments plus ou moins déformables. Ainsi, de nombreux problèmes apparaissent. Au niveau local, les éléments, en particulier la denture, interagissent entre eux, ainsi qu'avec la denture de la poulie. Ces interférences génèrent du bruit d'engrènement et fatiguent la courroie. Au niveau global, ces difficultés sont accentuées par les phénomènes vibratoires perturbant le fonctionnement de la transmission. Deux types de mouvements vibratoires sont présents dans les transmissions par courroie dentée. En premier lieu, les vibrations de rotation des poulies sont responsables d'une erreur dynamique de transmission importante, qui peut largement dépasser le degré dans les distributions de moteur automobile. Ces vibrations peuvent être couplées avec les vibrations transversales des brins.

Naturellement, les constructeurs automobiles sont attentifs à ces problèmes. Le problème industriel posé se résume ainsi : *comment concevoir une transmission par courroie dentée au bureau d'études, c'est-à-dire garantir un fonctionnement adapté pour une durée suffisante.* L'enjeu de ces recherches est donc de pouvoir proposer un modèle prédictif du comportement

dynamique pour une transmission quelconque. En intégrant tous ces aspects, on peut définir l'objectif de la thèse comme suit :

- **Modélisation et compréhension du comportement dynamique des transmissions de puissance par courroie dentée.**

- **Passage du comportement global au comportement local des dentures.**

D'un point de vue scientifique, de nombreuses voies de recherche ont été poursuivies ces deux dernières décennies aux États-Unis, au Japon, et en Europe. Notamment, deux thèses ont été présentées au laboratoire. L'une portait sur l'étude expérimentale des distributions de charge en statique entre les dents de la courroie, alors que la seconde thèse portait sur la modélisation fine d'un arc de courroie enroulé sur une poulie. Le chapitre I présente une analyse de l'ensemble de ces travaux de recherche. L'accent est porté sur les modèles en rotation des transmissions par courroie Poly-V et dentée. Le chapitre II détaille la modélisation d'une transmission par courroie dentée avec ou sans tendeur dynamique. Le comportement local de la courroie au niveau de sa denture, et la souplesse des paliers sont pris en compte. Le chapitre III est consacré à la validation en statique du modèle, et développe les méthodes employées pour la caractérisation mécanique de la courroie. Le quatrième chapitre exploite le modèle sur la base d'une transmission simple. Une analyse exhaustive est menée, ce qui permet d'une part, la compréhension du comportement dynamique de la transmission étudiée, et d'autre part, de passer du comportement global au comportement local de la denture de la courroie. À terme, ce travail permettra d'établir des règles de conception pour maîtriser le comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée, en particulier, la durée de vie et le bruit rayonné.

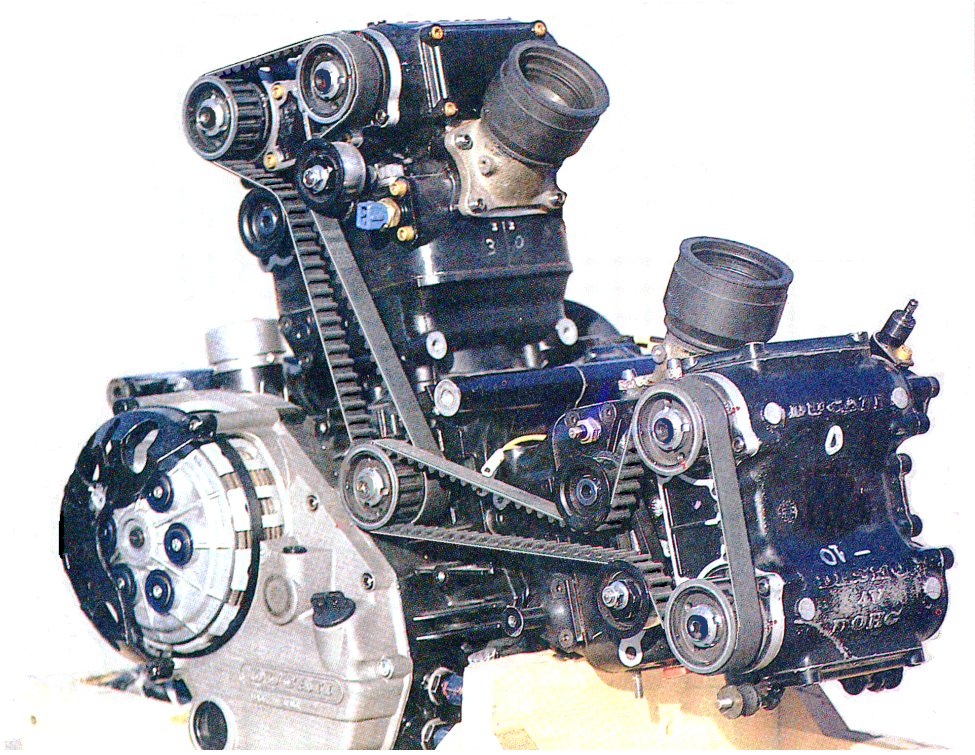


Photo 1 : Ce moteur Ducati V2 très performant, comprend deux transmissions par courroie dentée constituées de trois poulies de même diamètre et de deux galets tendeurs fixes [TPM, 1990]

PREMIER CHAPITRE

Acquisition des connaissances par la bibliographie.

SOMMAIRE

I.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE SUR LES COURROIES DENTÉES 16

I.1.1. HISTORIQUE 16
I.1.2. SYNTHÈSE DES ÉTUDES EN STATIQUE 16
I.1.3. SYNTHÈSE DES ÉTUDES EN DYNAMIQUE 17
I.1.3.1. Phénomènes vibratoires 17
I.1.3.2. Lien des tensions dans les brins avec la durée de vie 18
I.1.3.3. Lien des tensions dans les brins avec le bruit 20
I.1.3.4. Conclusion sur la synthèse des études en dynamique 21

I.2. PRÉSENTATION DES MODÈLES DE ROTATION EN DYNAMIQUE 22

I.2.1. MODÉLISATION POUR LES TRANSMISSIONS PAR COURROIE POLY-V 22
I.2.1.1. Modèle élémentaire de Fawcett et al. (1989) 22
I.2.1.2. Modèle généralisé de Gasper et Hawker (1989) 24
I.2.1.3. Modèle généralisé de Yang et Barker (1989) avec tendeur 25
I.2.1.4. Modèle généralisé de Hwang et al. (1994) avec tendeur 33
I.2.1.5. Modèle avec glissement de Debbabi (1990) 39
I.2.1.6. Modèle couplé rotation/mouvement transversal de Beikmann (1992) 49
I.2.1.6.1. Modélisation du système 49
I.2.1.6.2. Contante d'efficacité du tendeur η 54
I.2.1.6.3. Analyse du modèle linéaire de vibration 59
I.2.1.6.4. Analyse du modèle non-linéaire de vibration 67
I.2.1.6.5. Résultats expérimentaux 72
I.2.2. MODÉLISATION DES TRANSMISSIONS SYNCHRONES PAR COURROIE DENTÉE 74
I.2.2.1. Modèle élémentaire de Mizuno et al. (1988) 74
I.2.2.2. Modèles pour deux transmissions à deux poulies de Banaszek et al. (1993) 78
I.2.3. CONCLUSION SUR LA PRÉSENTATION DES MODÈLES EN ROTATION 82

I.1.Présentation générale sur les courroies dentées

I.1.1. Historique

Les transmissions par courroie dentée ont été inventées par Richard Case en 1946, afin de synchroniser le mouvement de l'aiguille et de la bobine d'une machine à coudre. Celles-ci sont nées de la nécessité de disposer d'un type de transmission intermédiaire entre la chaîne (trop lourde, trop bruyante et nécessitant un système de lubrification) et de la courroie plate ou à section trapézoïdale (encombrement important, charge élevée sur les paliers, rendement médiocre et surtout rapport de transmission inconstant). La courroie dentée permet d'éliminer les inconvénients susnommés des deux types de transmission auxquels elle s'apparente et par conséquent de faire des économies.

Cependant, le fort développement des courroies dentées dans les moteurs automobiles a mis en relief les limites de ce type de transmission dans un domaine très concurrentiel, ainsi que les carences de nos connaissances sur le comportement mécanique de la courroie en fonctionnement. En effet, les premières études scientifiques, spécifiques aux courroies dentées, ne débutent qu'à la fin des années 70, et leur nombre reste encore aujourd'hui limité.

I.1.2. Synthèse des études en statique

En statique, de nombreuses études ont été effectuées dans divers domaines : Comportement des dents, [Atouf, 1992], répartition des charges sur les dents, [Dancé, 1992 - Gerbert, 1978 - Koyama, 1979 - Childs et al., 1990], erreur de transmission quasi-statique appelé aussi erreur cinématique,.[Kagotani et al., 1993 - Firbank, 1977 - Daabin et al., 1991], saut de dent, [Gerbert, 1991], forme de la courroie, [Fosdick & Villagio, 1989 - Gervas, 1967]. Ces dernières décennies, les constructeurs de courroie ont dirigé leurs efforts sur l'accroissement de la puissance transmise, en optimisant, en particulier, la forme de denture permettant une meilleure répartition de la charge sur la dent (figure I.1). Les différents matériaux utilisés dans une courroie crantée (figure I.2) ont également évolué, dans le but d'une plus grande tenue dans le temps. Ces matériaux diffèrent suivant le domaine d'utilisation. En matière automobile, le câblage en acier des débuts a laissé place au fibres de verre, ou parfois en aramide, qui sont moins sujettes à la fatigue en flexion. Le polychloroprène est depuis longtemps un standard pour la constitution du corps de la courroie. Cependant, d'autres matériaux (ACSM : Alkylated Chlorosulphonated Polyethylene, HNBR : Hydrogenated Nitrile Rubber, EAM : Ethylene Acrylic Rubber) offrant plus de résistance à la température, à l'huile et à l'ozone, sont de plus en plus utilisés [Pillow, 1994].

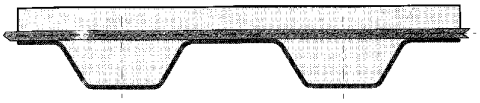
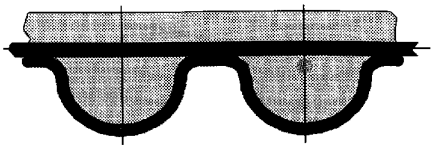
	**profil trapézoïdal** 1946
	**profil H.T.D.** (High Transmission Drive) années 80 capacité de puissance amélioré de 30% par rapport au profil trapézoïdal
	profil curviligne (ou corrigé) années 90 capacité de puissance amélioré de 130% par rapport au profil H.T.D.

Figure I. 1 : Évolution historique des profils de courroies (profils DAYCO).

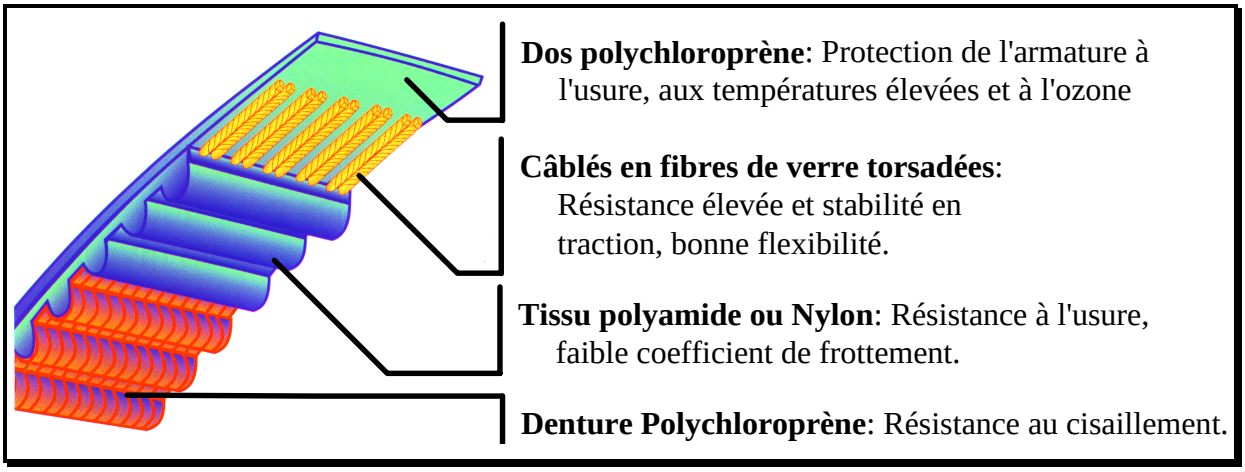


Figure I. 2 : Description des éléments d'une courroie

I.1.3. Synthèse des études en dynamique

I.1.3.1. Phénomènes vibratoires

En dynamique, des phénomènes vibratoires perturbent le fonctionnement de la courroie, malgré sa légèreté qui la favorise par rapport aux chaînes. On considère dans la littérature trois types de mouvement vibratoire dans les transmissions par courroie dentée :

1) Les vibrations en rotation des poulies sont responsables d'une erreur dynamique de transmission importante qui peut dépasser le degré dans les distributions automobiles

entraînées par des courroies dentées [Banaszek et al., 1993 - Uchida et al., 1991 - Sabanchiev, 1983 - Fawcett et al., 1989 - Monternot, 1996 - Heiduk & Arnold, 1994]. L'erreur de transmission des transmissions par courroie Poly-V est plus généralement étudiée [Hwang et al., 1994 - Gasper & Hawker, 1989 - Yang & Barker, 1989 - Debbabi et al., 1990 - Beikmann et al., 1996 (a) et (b) - Beikmann et al., 1997]. On note une grande variété de vocabulaire dans les publications analysées. On trouve quatre termes désignant le même phénomène à l'origine de l'erreur dynamique : vibration axiales, vibration torsionnelle des poulies, vibration longitudinale, vibration angulaire. Pour notre part, nous retiendrons le terme de vibration en rotation résultant de l'oscillation des poulies responsable de l'erreur de transmission. L'étude de ce phénomène très préjudiciable, est l'objet de cette thèse.

2) Ces vibrations en rotation peuvent être couplées avec les vibrations transversales (ou de flexion si le modèle utilisé est celui de la poutre) des brins libres entre les poulies [Mockensturm et al., 1996 - Beikmann et al., 1996 (a) et (b) - Beikmann et al., 1997 - Yue, 1993 - Fawcett & Burdess, 1980 - Watanabe et al, 1990 - Simpson, 1973 - Lai & Chen, 1971 - Abrate, 1986 - Tokoro, 1997]. L'étude de ces vibrations est souvent effectuée en liaison avec des considérations acoustiques. Ce domaine est de loin le plus étudié et les investigations sont très variés : vibrations forcées ou libres, stabilité, modèle de la corde ou de poutre (stationnaire ou en déplacement), linéarité ou non linéarité, calcul analytique ou par différences finies ou par éléments finis.

3) Les vibrations torsionnelles des brins libres sont également l'objet des préoccupations des industriels, mais les études universitaires sont rares et anciennes [Alspaugh, 1967]. Ces vibrations semblent apparaître avec un mauvais alignement des arbres [Fawcett & Burdess, 1980]. D. W. Alspaugh et C. D. Mote (1965, 1972) évoquent le couplage des vibrations torsionnelles avec les vibrations transversales.

Ces deux derniers phénomènes ne seront pas étudiés lors de cette étude. **L'enjeu de cette thèse est de proposer un modèle prédictif de l'erreur de transmission dynamique pour une transmission quelconque en tenant compte du comportement local de la courroie au niveau des poulies**. Ce modèle devra en particulier calculer la tension dynamique dans les brins libres et enroulés (reliée à la charge sur les dents enroulées) de la courroie, car celle-ci est difficilement mesurable expérimentalement[1]. La connaissance des tensions permettra d'élaborer des modèles prédictifs d'endommagement d'une courroie et de son bruit rayonné, comme le montrent les deux parties suivantes.

I.1.3.2. Lien des tensions dans les brins avec la durée de vie

La durée de vie des courroies dentées est un domaine important où se focalise nombre de recherches [Childs et al., 1990 - Childs, 1991, Lizuka, 1994 - Lizuka & Gerbert, 1996 - Koyama et al., 1979 (b) - Koyama et al., 1980 Ueda et al., 1996 - Dalgarno, 1991]. L'article de Dalgarno et al., résume les quatre modes de défaillance rencontrés en automobile :

[1] Un premier cas de mesure des tensions dynamiques dans les brins rapporté dans la bibliographie est brièvement décrit par C. Debbabi (1990) grâce à l'utilisation d'une caméra ultra-rapide et d'une grille de déformation tracée sur la courroie (chapitre I.I.2.1.5). Un deuxième cas de mesure utilisé dans l'industrie automobile est décrit par H. Tokoro et al. (société Toyota) en utilisant des jauges sur les paliers.

1. La rupture à la base de la dent (tooth root cracking) intervient lorsque le tissu protecteur (figure I.2) se dégrade (figure I.3 a). K. W. Dalgarno (1991) montre que ce phénomène dépend de la charge tangentielle sur la dent de courroie.

2. Le délaminage des câbles (cord delamination) débute avec la sortie partielle d'un câble sur le côté de la courroie (figure I.3 b). De petites fibres s'échappant du câble initie probablement ce phénomène qui peut entraîner la sortie complète du câble. Les variations de tension dans le câble, ainsi que sa qualité, provoque vraisemblablement, selon K. W. Dalgarno et al. (1994 b), la dégradation progressive de la courroie.

3. Le corps de la courroie en élastomère peut se séparer (fabric separation) de la nappe de câble (figure I.3 c). L'assemblage de ces deux matériaux sans affinités chimiques, impose l'emploi d'une couche adhésive intermédiaire. Cette couche reliant deux zones hétérogènes de transmission d'effort est située dans un secteur de très forte contrainte. Cela a été visualisé par J.-M. Dancé (1992) en effectuant des mesures qualitatives de photoélasticité sur un modèle de courroie en élastomère photoélastique. Ce fait est confirmé par M. Atouf (1992) avec la méthode du speckle vidéo (E.S.P.I. Electronic Speckle Patterns Interferometry). Ce type de défaillance est donc provoqué par le niveau de charge sur la dent et la tension dans l'âme (ou le câblé) de la courroie.

4. Des fentes apparaissent sur le dos de la courroie (back cracking) pouvant aboutir à la rupture de la courroie. Cette défaillance est due à des courbures de la courroie trop prononcée sur les galets.

Les trois premiers modes de défaillance dépendent donc du niveau de charge sur les dents et le câblé. Les travaux de K. W. Dalgarno montrent en effet une excellente corrélation entre la charge des dents de courroie en prise et la durée de vie d'une courroie (figure I.4) quelque soit son mode de défaillance. La simulation numérique de ces charges aidera donc à l'élaboration d'une loi d'endommagement d'une courroie crantée.

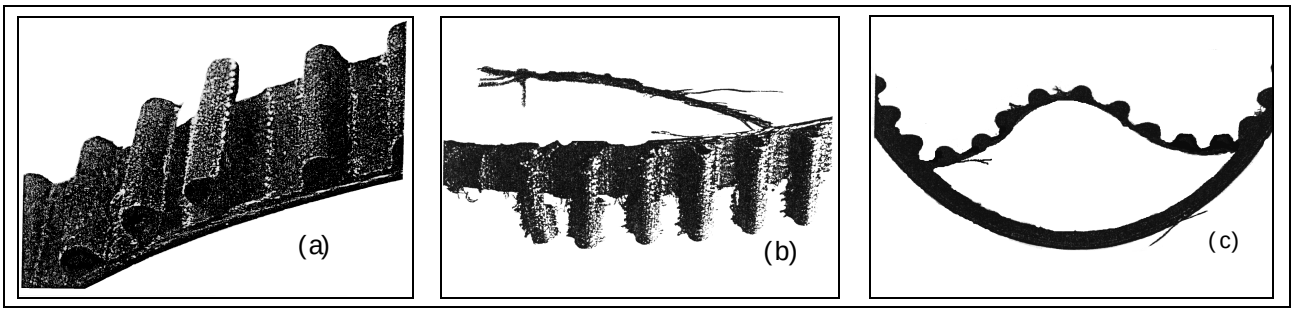


Figure I. 3 : Modes de défaillance d'une courroie dentée [Dalgarno, 1991] : (a) rupture de la dent, (b) délamination du câblé, (c) séparation des éléments de la courroie.

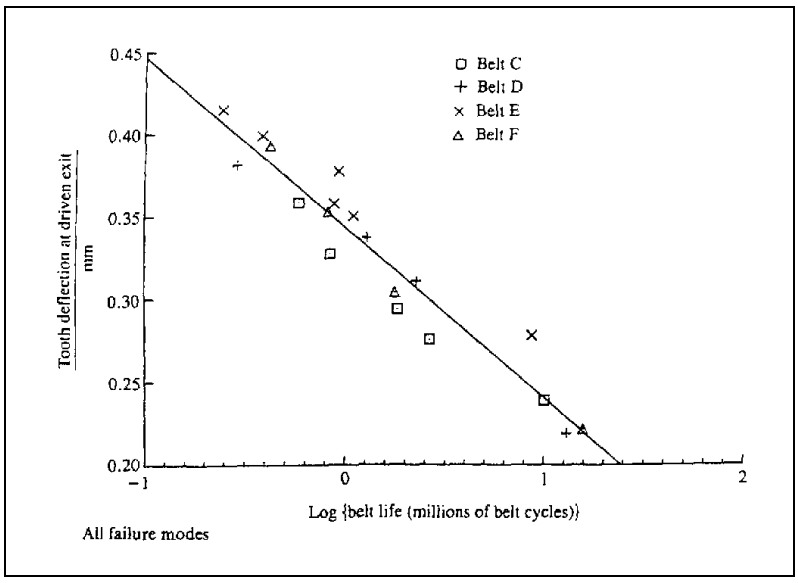


Figure I. 4 : Corrélation entre la dernière dent enroulée sur la poulie menée d'un banc de simulation avec la durée de vie de plusieurs types de courroie [Dalgarno et al., 1994 (a)].

I.1.3.3. Lien des tensions dans les brins avec le bruit

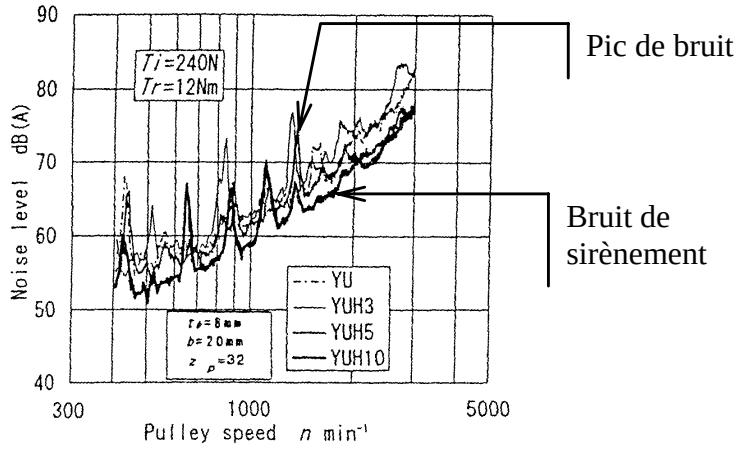


Figure I. 5 : Relation entre le niveau de bruit et la vitesse de rotation pour quatre types de courroie [Ueda, et al.].

Une transmission émet plusieurs types de bruit. Le bruit de sirènement (running noise) est le plus étudié dans la littérature. Le bruit de sirènement est défini en fréquence par le fondamental et les harmoniques de la fréquence d'engrènement des dents de courroie. Son intensité en décibel est proportionnelle à la vitesse de rotation de la transmission (figure I.5). Les causes majeures sont l'impact des dents de courroie sur les dents de poulie lors de l'engrènement [Kagotani, 1981], et les vibrations transversales des brins libres de la courroie [Ueda et al., 1996

- Kubo et al., 1971]. Les vibrations transversales sont engendrées par le mouvement vertical alterné aux deux extrémités du brin causé par l'effet polygonal (description au chapitre II.2.2.2.3) et l'excentricité des poulies. Lorsque ces vibrations entrent en résonance, le niveau sonore augmente brutalement de 10 à 15 dB (pics de bruit sur la figure I.5). Pour les brins courts, les causes peuvent être l'effet polygonal [Tokoro et al., 1997]. Pour les brins plus longs, l'excitation peut être paramétrique, le plus souvent avec la variation harmonique de la tension dans le brin (chapitre II.2.1.4). La résonance du mouvement transversal s'aggrave aussi lorsque celle-ci correspond à la résonance du mouvement en rotation des poulies, d'où l'importance de bien les identifier [Waugh et al., 1980 - Beikmann et al., 1996 (b)].

La connaissance des tensions dans les brins libres (amplitude et fréquence) par un modèle de rotation peut ainsi permettre une meilleure compréhension du bruit rayonné par les vibrations transversales. Le calcul simultané de la répartition des charges sur les dents engrenées et dépendant des tensions dans les brins, permettra aussi de relier la charge sur la première dent avec le bruit d'impact. Des mesures internes au laboratoire ont permis de confirmer le lien entre la charge des dents et le bruit de sirènement. H Tokoro et al. (1997) relie en outre la charge sur la première dent engrenée avec les vibrations transversales génératrice de pic de bruit. Le rôle proéminent de la tension dans le bruit est confirmé expérimentalement par T. Koyama (1990). Il obtient une variation de la tension en jouant sur les excentricités des poulies (voir chapitre II.2.2.2.1). T. Koyama observe alors une réduction de 10 dB. des pics de bruits mais une augmentation de 4 à 5 dB. du bruit de sirènement.

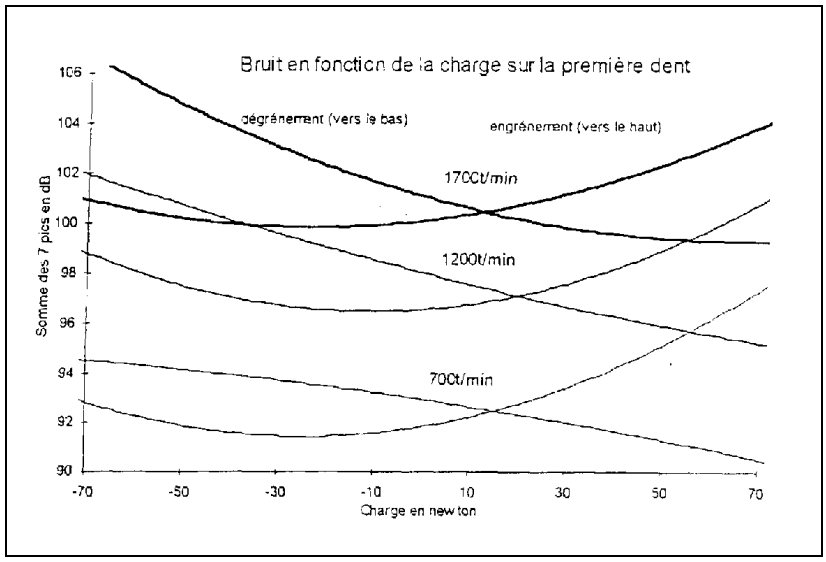


Figure I. 6 : Relation entre le niveau de bruit de sirènement et la charge sur la première dent de courroie en prise sur une poulie.

I.1.3.4. Conclusion sur la synthèse des études en dynamique

Ces trois problèmes (erreur de transmission, bruit rayonné, longévité) rencontrés actuellement par les constructeurs automobiles justifient l'élaboration d'un modèle de mouvement rotationnel des poulies, qui permettra de dégager les paramètres importants pour une transmission générale.

I.2.Présentation des modèles de rotation en dynamique

Différents modèles en rotation ont été élaborés pour des transmissions par lien souple. Les constructeurs automobiles disposent aujourd'hui de modèles simples du mouvement en rotation des poulies entraînées par courroie dentée, s'apparentant étroitement avec les modèles élaborés pour les transmissions par courroie Poly-V. En raison de la similitude du comportement de ces deux types de transmissions, nous considérons uniquement dans l'étude bibliographique ces deux types de transmissions par courroie.

I.2.1. Modélisation pour les transmissions par courroie poly-V

La plupart des modèles en rotation ont été développé pour des transmissions par courroie Poly-V (ou dite striée). Ces courroies sont rainurées dans le sens de la longueur par des dents de section triangulaire. Utilisée dès les années 60 sur les moteurs Diesel des engins agricoles, ce type de transmission n'entraînait à partir du vilebrequin, qu'un ou deux organes auxiliaires. Aujourd'hui, les contraintes en matière de coûts, de poids, et d'encombrement, obligent les constructeurs automobile à entraîner tous les accessoires par une courroie unique (gain de 10 kg en moyenne). La complexité accrue de ce type de transmission, appelée *serpentine* à cause de sa forme tortueuse (figure I.7), contraint les fabricants de courroie à élaborer des modèles dynamiques en rotation, afin de simuler le comportement dynamique. Il est intéressant de considérer le cas simple en raison de l'absence de denture, de ces modèles appliqués aux serpentines.

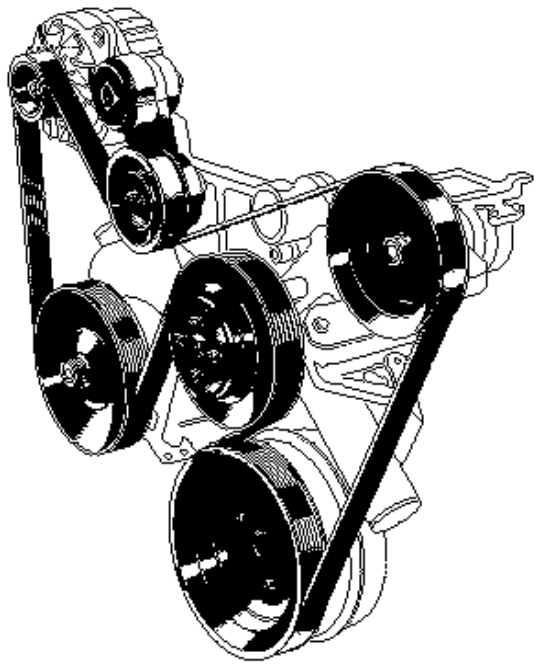


Figure I. 7 : Transmission par courroie Poly-V dite serpentine.

Les hypothèses communes à tous les modèles sont :

1. la courroie ne glisse pas sur les poulies,
2. la courroie est considérée parfaite sur le plan géométrique et mécanique,
3. les vibrations en rotation des poulies sont découplées des vibrations transversales des brins.
4. le moment de flexion et l'inertie de la courroie sont négligés.

I.2.1.1. Modèle élémentaire de Fawcett et al. (1989)

Un modèle élémentaire (figure I.8) pour une transmission à deux poulies par courroie poly-V, est décrit par J. N. Fawcett et al (1989).

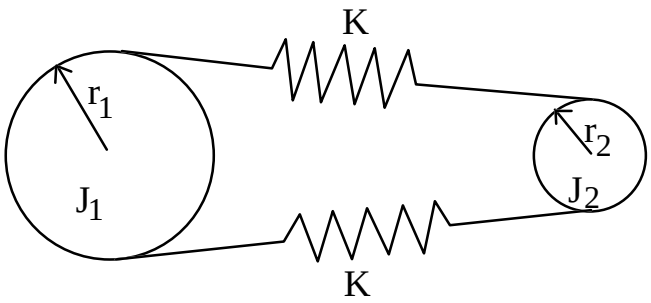


Figure I. 8 : Vibration en rotation d'une transmission à deux poulies.

L'équation d'équilibre des moments exprimée au centre de chaque poulie donne :

$$J_i\ddot{\theta}_i = r_i\left(T_{i-1} - T_i\right) + C_i \qquad \text{Equ. I. 1}$$

avec J_i : moment d'inertie,
θ_i : déplacement angulaire de la poulie i,
r_i : rayon de la poulie i,
T_i : tension du brin i,
C_i : couple appliqué sur la poulie i (par les arbres à cames ou les accessoires moteurs).

La relation entre la tension dans un brin T_i et la rotation des poulies θ_i est :

$$T_i = T_0 + K\left(r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1}\right) \qquad \text{Equ. I. 2}$$

avec T_0 : tension de pose de la courroie,
K : raideur d'un brin libre et enroulé.

Nous obtenons les équations du mouvement en combinant les équations I. 1 et I. 2 :

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + 2K\begin{bmatrix} r_1^2 & -r_1r_2 \\ -r_1r_2 & r_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 3}$$

Les pulsations propres ω du système vérifient :

$$\det\begin{bmatrix} -J_1\omega^2 + 2Kr_1^2 & -2Kr_1r_2 \\ -2Kr_1r_2 & -J_2\omega^2 + 2Kr_2^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{Equ. I. 4}$$

Comme on a un premier mode du corps solide, le système n'a qu'une fréquence de résonance :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2K(r_2^2 J_1 + r_1^2 J_2)/(J_1 J_2)} \qquad \text{Equ. I. 5}$$

Aucun résultat expérimental n'est publié. Toutes les modélisations proposées dans la littérature ne s'écartent guère en substance de la modélisation élémentaire proposée par J. N. Fawcett. Ce modèle se généralise aisément pour plusieurs poulies.

I.2.1.2. Modèle généralisé de Gasper et Hawker (1989)

R. G. S. Gasper et L. E. Hawker (1989) proposent une généralisation des équations pour une transmission par courroie poly-V avec un nombre arbitraire de poulies. Seule la rotation des poulies est considérée. Les brins sont modélisés par des ressorts linéaire sans masse couplés avec un amortisseur visqueux linéaire (Figure I. 9 b). L'adjonction d'un amortisseur visqueux de torsion (coefficient b_i dans Figure I. 9 b) à la poulie i est unique dans la littérature et la raison n'est pas donnée. L'application des lois de Newton sur la poulie i conduit à :

$$\begin{aligned} &J_i\ddot{\theta}_i + \left[(c_{i-1}+c_i)r_i^2 + b_i\right]\dot{\theta}_i + (k_{i-1}+k_i)r_i^2\theta_i = \\ &\pm c_{i-1}r_i r_{i-1}\dot{\theta}_{i-1} \pm c_i r_i r_{i+1}\dot{\theta}_{i+1} \pm k_{i-1}r_i r_{i-1}\theta_{i-1} \pm k_i r_i r_{i+1}\theta_{i+1} + \Delta M \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 6}$$

avec J_i moment d'inertie massique,
θ_i déplacement angulaire,
c_i coefficient d'amortissement de la courroie,
r_i rayon de la poulie,
b_i coefficient d'amortissement angulaire,
k_i raideur de la courroie,
ΔM variation du moment extérieur.

Le signe ± de l'équation I.6 dépend de la configuration des poulies illustrée en Figure I. 9 a. L'application de l'équation I.6 à toutes les poulies, s'exprime par un système matriciel :

$$[J]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{F\} \qquad \text{Equ. I. 7}$$

Des méthodes classiques sont ensuite décrites pour obtenir les modes propres. Aucun résultat de calcul n'est donné et n'a été confronté à des mesures.

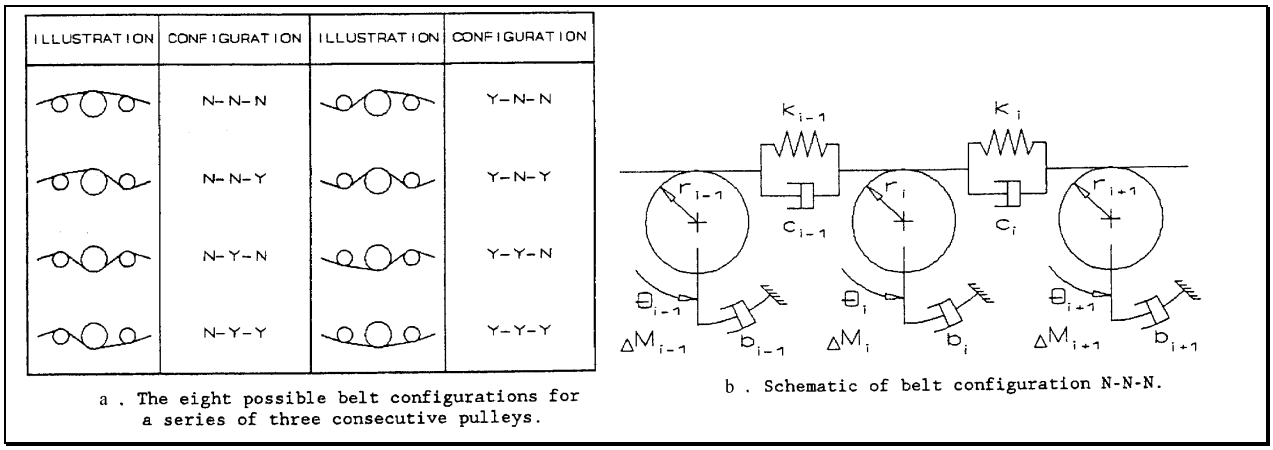


Figure I. 9 : Modélisation de la rotation pour une transmission par courroie Poly-V.

I.2.1.3. Modèle généralisé de Yang et Barker (1989) avec tendeur

Yung-Lin Yang (1989) considère une transmission serpentine (figure I.10). La poulie 1 est liée au vilebrequin dont il connaît à chaque instant la position angulaire θ_1 et la vitesse. La deuxième poulie entraîne le ventilateur et la pompe à eau. L'assistance de la direction du véhicule est assurée par la troisième poulie. La quatrième poulie n'a qu'un rôle de guide. La cinquième poulie entraîne l'alternateur. La sixième poulie assure la tension de tout le système par l'intermédiaire du bras 8 et d'un ressort. La septième poulie assure l'air conditionné. Des discussions avec le personnel de Dayco Technical Center ressort qu'un modèle simplifié est suffisant pour décrire le comportement dynamique en rotation d'une transmission par courroie Poly-V, si toutefois on néglige les vibrations transversales. Il se dégage également des discussions avec les ingénieurs que le glissement de la courroie sur la poulie peut être négligé. Cela est en contradiction avec les conclusions de C. Debbabi (1990) sur la visualisation à l'aide d'une caméra ultra-rapide (4000 images/seconde) d'une courroie en fonctionnement sur un moteur au ralenti. Il note des glissements de la courroie très importants, confirmés par des mesures sur un moteur instrumenté.

Le même type de modélisation que J. N. Fawcett (1989) et R. G. S. Gasper (1989) avec des brins de courroie considérés comme des raideurs linéaires sans masse, est repris. Seul un tendeur est ajouté. Le but poursuivi est la modélisation du mouvement en rotation des poulies durant des montées en régime du moteur.

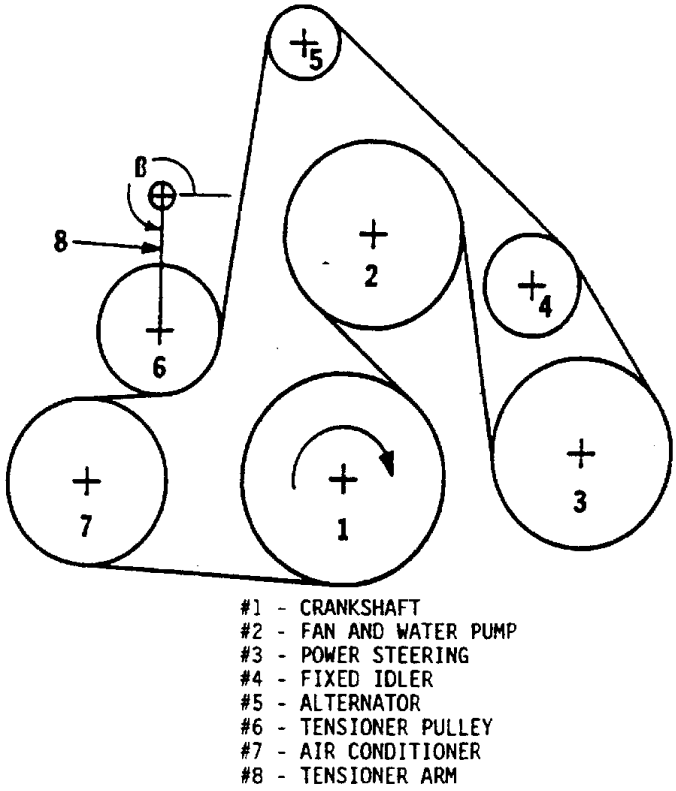


Figure I. 10 : Configuration de la transmission serpentine.

L'équilibre des moments par rapport au centre de la poulie i conduit à des équations du mouvement similaires à l'équation I.3 :

$$I_i\ddot{\theta}_i = r_i\left(T_{i-1} - T_i\right) - TLi \qquad \text{Equ. I. 8}$$

avec I_i : moment d'inertie,
θ_i : déplacement angulaire de la poulie i,
r_i : rayon de la poulie i,
T_i : tension du brin i,
TLi : couple appliqué sur la poulie i.

Il faut donc pouvoir relier la tension dans les brins T_n en fonction de l'angle de rotation θ_n de la poulie n. Pour cela, on considère l'allongement des brins Δ_n, la raideur du brin K_n et l'amortissement du brin D_n :

$$T_n = T_0 + K_n\Delta_n(\theta_n, \theta_{n+1}) + D_n\dot{\Delta}_n(\dot{\theta}_n, \dot{\theta}_{n+1}) \qquad \text{Equ. I. 9}$$

- *calcul de K_n et de D_n*

La raideur et l'amortissement des brins libres de la courroie sont calculés comme suit (succession de ressort et d'amortisseur de longueur unité en série) :

$$K_n = \frac{K_{val}}{l_n} \quad \text{avec } K_{val} = 15.6.10^4 \text{ N.} \quad \text{pour n=1...7} \qquad \text{Equ. I. 10}$$

$$D_n = \frac{D_{val}}{l_n} \quad (D_{val} \text{ non indiqué}) \quad n=1...7 \qquad \text{Equ. I. 11}$$

En connaissant les coordonnées (x_i, y_i) du centre des poulies dans le repère donné, nous pouvons calculer la longueur d'un brin l_i :

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 - (r_i + r_{i+1})^2} \qquad \text{Equ. I. 12}$$

◆ *calcul de Δ_n*

La variation de longueur Δ_i (i=1,2,3,4,7) se calcule de la manière suivante :

$$\Delta_i = r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1} \qquad \text{Equ. I. 13}$$

La vitesse de variation est ainsi : $\dot{\Delta}_i = r_i\dot{\theta}_i - r_{i+1}\dot{\theta}_{i+1}$

Le tendeur est étudié à part comme le montre la figure I.11. La position de la poulie 6 est déterminée par l'angle β :

$$\begin{aligned} x_6 &= x_8 + r_8\cos\beta \\ y_6 &= y_8 + r_8\sin\beta \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 14}$$

ce qui permet de déterminer les longueurs de brin l_5 et l_6. L'auteur détermine également les angles ψ_i :

$$\psi_5 = \tan^{-1}\frac{y_5 - y_6}{x_5 - x_6} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{l_5}{r_5 + r_6} \qquad \text{Equ. I. 15}$$

$$\psi_6 = \tan^{-1}\frac{y_6 - y_7}{x_6 - x_7} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{l_6}{r_6 + r_7} \qquad \text{Equ. I. 16}$$

Les variations de longueurs des brins l_5 et l_6 sont déterminées par la rotation des poulies ($r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1}$ pour i=5,6) puisque la courroie reste "collée", par la variation géométrique des longueurs due à la rotation du bras du tendeur (l_i-l_{i0} pour i=5,6), et par la variation des angles formé par les brins 5 et 6 ($\psi_i - \psi_{i0}$ pour i=5,6) :

$$\Delta_5 = (l_5 - l_{50}) + (r_5\theta_5 - r_6\theta_6) + (r_5 + r_6)(\psi_5 - \psi_{50}) \qquad \text{Equ. I. 17}$$

$$\Delta_6 = (l_6 - l_{60}) + (r_6\theta_6 - r_7\theta_7) - (r_6 + r_7)(\psi_6 - \psi_{60}) \qquad \text{Equ. I. 18}$$

En dérivant, on obtient également $\dot{\Delta}_5$ et $\dot{\Delta}_6$.

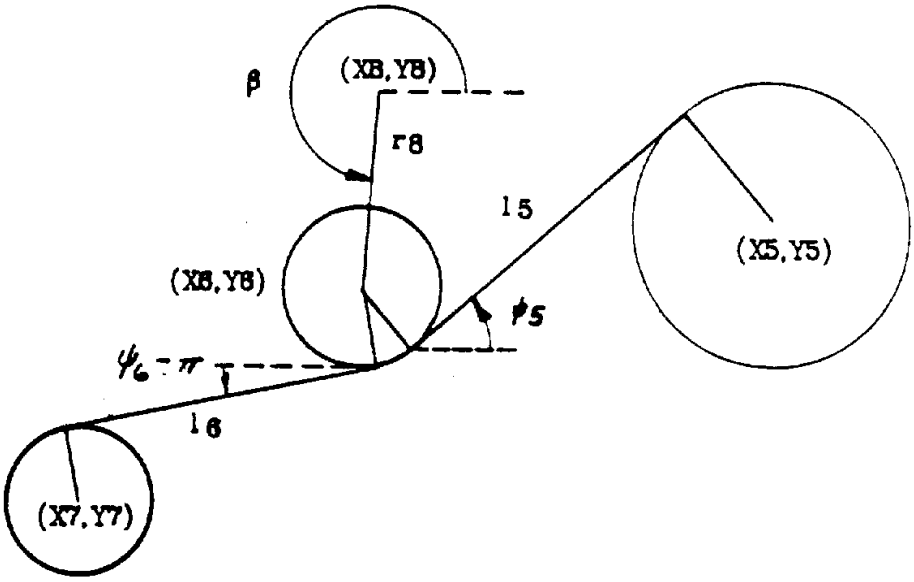


Figure I. 11 : Effet de la position du tendeur sur les longueurs de brins.

Les mesures effectuées par Dayco Technical Center montrent un comportement fortement non linéaire du tendeur avec une friction importante. Le tendeur ne bouge pas alors que les tensions dans les brins varient sensiblement. Au delà d'une certaine tension, le tendeur se caractérise par une raideur torsionnelle lorsque le tendeur s'éloigne de la courroie et par une autre raideur torsionnelle lorsque le tendeur s'approche de la courroie. Aucune information sur l'amortissement du tendeur n'est donnée.

En considérant les équations I.9, I.13, I.17 et I.18, nous obtenons la tension dans un brin :

$$T_i = T_0 + K_i\left(r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1}\right) + D_i\left(r_i\dot{\theta}_i - r_{i+1}\dot{\theta}_{i+1}\right) \quad i = 1, 2, 3, 4, 7 \qquad \text{Equ. I. 19}$$

$$\begin{aligned} T_5 &= T_0 + K_5\left(r_5\theta_5 - r_6\theta_6\right) + \left(l_5 - l_{50}\right) + \left(r_5 + r_6\right)\left(\psi_5 - \psi_{50}\right) \\ &\quad + D_5\left(r_5\dot{\theta}_5 - r_6\dot{\theta}_6\right) + \dot{l}_5 + \left(r_5 + r_6\right)\dot{\psi}_5 \\ T_6 &= T_0 + K_6\left(r_6\theta_6 - r_7\theta_7\right) + \left(l_6 - l_{60}\right) + \left(r_6 + r_7\right)\left(\psi_6 - \psi_{60}\right) \\ &\quad + D_6\left(r_6\dot{\theta}_6 - r_7\dot{\theta}_7\right) + \dot{l}_6 + \left(r_6 + r_7\right)\dot{\psi}_6 \end{aligned}$$

Les équations I.8 et I.19 donnent les équations du mouvement en rotation des poulies auxquelles il faut ajouter l'équation du mouvement du tendeur :

$$\begin{aligned} \left(I_8 + M_8 r_8^2\right)\ddot{\beta} + K_8\beta + D_8\dot{\beta} &= TL80 + K_8\beta_0 \\ &\quad + r_8\left[T_5\sin\left(\psi_5 - \beta\right) - T_6\sin\left(\psi_6 - \beta\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 20}$$

avec $\left(I_8 + M_8 r_8^2\right)$ moment d'inertie du tendeur par rapport à son pivot,
K_8 raideur en torsion du tendeur,
D_8 amortissement en torsion du tendeur,
$TL80 + K_8\beta_0 = 0$ équilibre des couples à l'instant initial.

Les équations du mouvement sont non-linéaires en raison de la présence du tendeur. L'auteur linéarise donc les équations en bloquant le tendeur :

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = [F] \qquad \text{Equ. I. 21}$$

où :

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{Bmatrix} \qquad [F] = \begin{bmatrix} K_1 r_2 r_1 \theta_1 + D_1 r_2 r_1 \dot{\theta}_1 - TL2 \\ -TL3 \\ 0 \\ -TL5 \\ 0 \\ K_7 r_7 X + D_7 r_7 \dot{X} - TL7 \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 \end{bmatrix}$$

avec TLi : couple sur la poulie i,

$$[C] = \begin{bmatrix} r_2^2(D_1+D_2) & -D_2r_2r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_2r_2r_3 & r_3^2(D_2+D_3) & -D_3r_3r_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_3r_3r_4 & r_4^2(D_3+D_4) & -D_4r_4r_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_4r_4r_5 & r_5(D_4+D_5) & -D_5r_5r_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_5r_5r_6 & r_6^2(D_5+D_6) & -D_6r_6r_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_6r_6r_7 & r_7^2(D_6+D_7) \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} r_2^2(K_1+K_2) & -K_2r_2r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2r_2r_3 & r_3^2(K_2+K_3) & -K_3r_3r_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3r_3r_4 & r_4^2(K_3+K_4) & -K_4r_4r_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4r_4r_5 & r_5^2(K_4+K_5) & -K_5r_5r_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5r_5r_6 & r_6^2(K_5+K_6) & -K_6r_6r_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_6r_6r_7 & r_7^2(K_6+K_7) \end{bmatrix}$$

En entrée du modèle, Y.-L. Yang considère :

1- l'acyclisme du moteur $r_1\theta_1$ et $r_1\dot{\theta}_1$ mesuré expérimentalement sont la seule excitation du système,

2- les différents couples résistants TLi en fonction de la vitesse,

Seule une analyse fréquentielle est présentée par l'auteur. La matrice d'amortissement est considéré comme proportionnelle à la matrice de raideur et à la matrice d'inertie ce qui permet de découpler le problème modal. Ensuite la méthode classique vectorielle d'itération inverse est utilisée pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. Les six fréquences naturelles non amorties trouvées sont :

ω_1=53,853 Hz =3231 tr/min

ω_2=126,643 Hz =7599 tr/min

ω_3=167,777 Hz =10066 tr/min

ω_4=348,392 Hz =20903 tr/min

ω_5=1055,96 Hz =63358 tr/min

ω_6=1438,73 Hz =86324 tr/min

Le taux d'amortissement ξ_n et la pulsation amortie ω_n sont donnés pour chaque mode dans le tableau I.1 pour des amortissements de courroie D_{val} variant de 0 à 10. Pour ce dernier amortissement, le sixième mode dépasse l'amortissement critique.

	Dval=0	Dval=0.1	Dval=1	Dval=10
ω_{d1}	53.85329	53.85329	53.85267	53.79037
ζ_1	0.00000	0.00048	0.00483	0.04833
ω_{d2}	126.6426	126.6425	126.6344	125.8210
ζ_2	0.00000	0.00114	0.01137	0.11372
ω_{d3}	167.7773	167.7772	167.7583	165.8572
ζ_3	0.00000	0.00151	0.01509	0.15086
ω_{d4}	348.3923	348.3906	348.2220	330.9300
ζ_4	0.00000	0.00313	0.03126	0.31262
ω_{d5}	1055.964	1055.917	1051.211	336.8100
ζ_5	0.00000	0.00948	0.09478	0.94777
ω_{d6}	1438.728	1438.608	1426.677	---------
ζ_6	0.00000	0.01292	0.12916	1.29161

Table I. 1 : Taux d'amortissement ξ et la pulsation amortie ω_d avec tendeur bloqué.

Yung-Lin Yang calcule la réponse fréquentielle dans le cas où le tendeur est bloqué et en négligeant les couples résistants. L'excitation due à la poulie 1 est approximée. Deux résultats sont présentés (figures I.12 et I.13). On remarque la similitude de la réponse entre les poulies du tendeur et de la direction assistée (figure I.10). On retrouve les fréquences de résonance de la table I.1.

Aucun résultat n'est présenté avec le tendeur libre. Toutefois, une analyse expérimentale suggère que les fréquences naturelles s'abaissent lorsque le tendeur est libre.

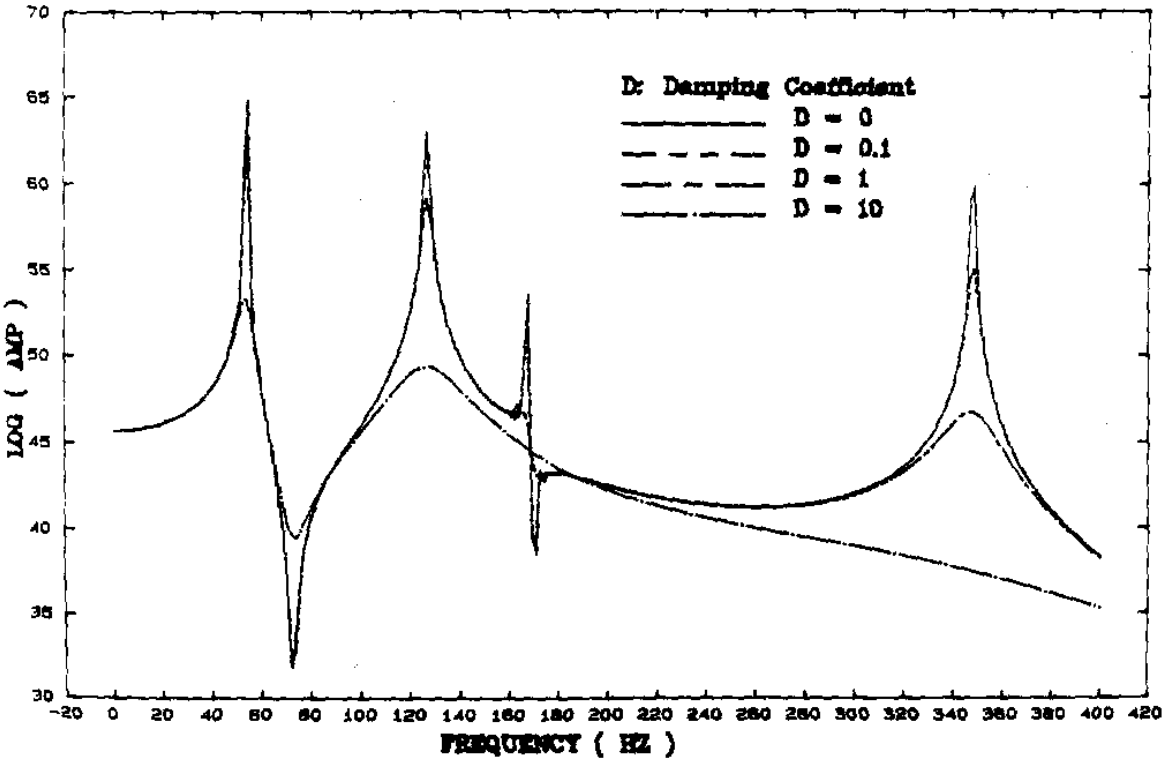


Figure I. 12 : Réponse fréquentielle de la poulie de la direction assistée.

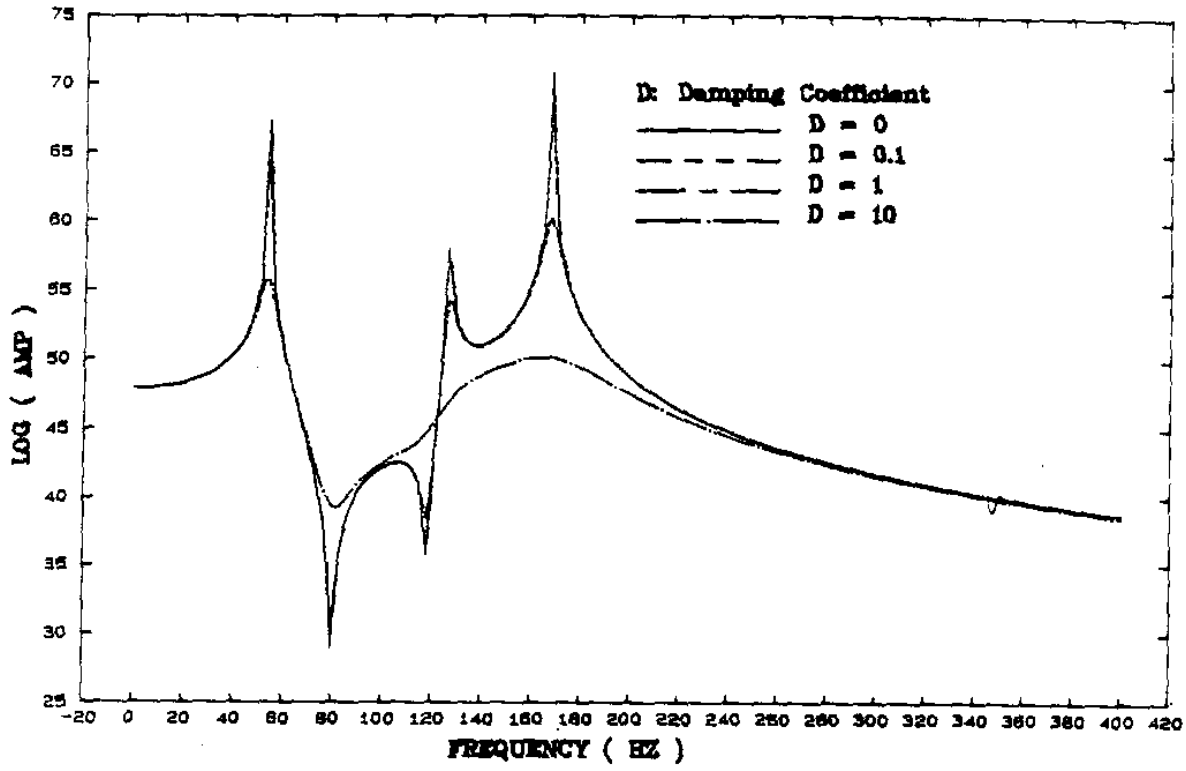


Figure I. 13 : Réponse fréquentielle de la poulie du tendeur.

I.2.1.4. Modèle généralisé de Hwang et al. (1994) avec tendeur

Hwang, et al. (1994) développent en collaboration avec Ford, un modèle complet pour une transmission en serpentine spécifique (figure I.14).

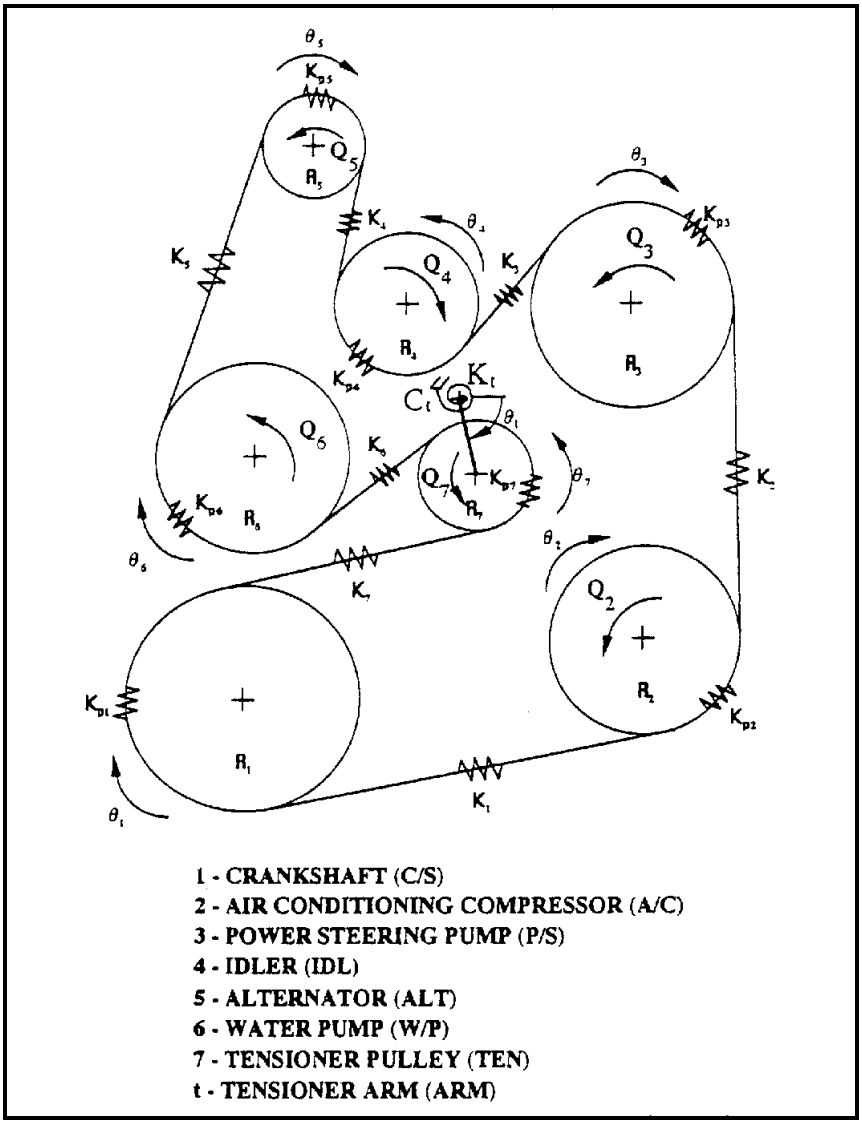


Figure I. 14 : Schéma de définition pour une transmission *serpentine*.

Les équations du mouvement sont toujours identiques à l'équation I.1 :

$$I_i\ddot{\theta}_i = R_i\left(T_{i-1} - T_i\right) - Q_i \qquad 2 \le i \le 6 \qquad \text{Equ. I. 22}$$

avec I_i : moment d'inertie de la poulie i et de la chaîne cinématique aval,
θ_i : déplacement angulaire de la poulie i,
R_i : rayon de la poulie i,
T_i : tension du brin i,
Q_i : couple appliqué sur la poulie i.

Une autre équation est développée pour le galet tendeur pour tenir compte de sa rotation autour du pivot tendeur (figure I.15). Le poids du tendeur est également pris en compte.

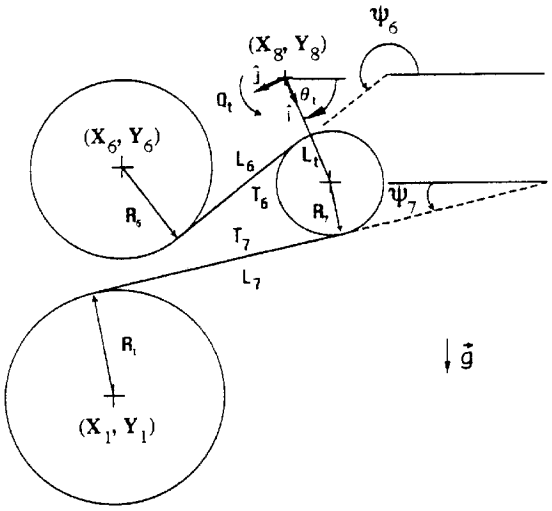


Figure I. 15 : Gros plan sur le tendeur.

S. J. Hwang considère un volume de contrôle *vc* incluant le bras du tendeur et son galet. La somme des moments pour le volume de contrôle par rapport au pivot donne :

$$r \times F_{sc} + \int_{vc} r \times g\rho_p \, dV + Q_{sc} - \int_{vc} r \times \left[2\omega \times v + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r\right]\rho_p \, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} r \times v\rho_p \, dV + \int_{sc} (r \times v)\rho_b \, (v \cdot dA) \qquad \text{Equ. I. 23}$$

Dans l'équation I.23, le vecteur de position r et de vitesse v sont mesurés dans le référentiel non galiléen $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ lié au bras du tendeur et d'origine le pivot. On retrouve donc les termes d'accélération de Coriolis et d'entraînement liés à la vitesse de rotation ω du référentiel. Le vecteur F_{sc} représente les forces extérieures appliquées à la surface du volume de contrôle et $g\rho_p dV$ les forces de volume. Le vecteur Q_{sc} représente les couples extérieurs appliqués à la surface du volume. ρ_p et ρ_b sont respectivement les densités massiques de la poulie et de la courroie. L'évaluation de chaque terme de l'équation I.23 donne :

$$r \times F_{sc} = \left\{T_6\left[-L_t \sin(\Psi_6 + \theta_t) - R_7\right] + T_7\left[L_t \sin(\Psi_7 + \theta_t) + R_7\right]\right\} \hat{k}$$

$$\int_{vc} r \times g\rho_p \, dV = m_{eff} L_{eff} \, g \cos(\theta_t) \, \hat{k}$$

$$Q_{sc} = \left\{K_t(\theta_0 - \theta_t) - C_t\dot{\theta}_t - Q_t\right\} \hat{k}$$

$$\int_{vc} r \times \left[2\omega \times v + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r\right]\rho_p \, dV = \left(I_t + I_{7t}\right)\ddot{\theta}_t \, \hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} r \times v\rho_p \, dV = -I_7\ddot{\theta}_7 \, \hat{k}$$

$$\int_{sc} (r \times v)\,\rho_b\,(v \cdot dA)\,dV = \rho_b A\left(R_7\dot{\theta}_7\right)^2 L_t \times \left[-\sin\left(\Psi_6 + \theta_t\right) + \sin\left(\Psi_7 + \theta_t\right)\right]\hat{k}$$

où I_t est le moment d'inertie du bras du tendeur par rapport au pivot, I_{7t} le moment d'inertie du galet par rapport au pivot. θ_0 est l'angle du tendeur au repos et Q_t sa précharge. La masse totale du galet et du tendeur est m_{eff}. Le centre de masse du galet et du tendeur est situé à une longueur L_{eff} du pivot. L_t est la longueur du bras du tendeur. L'intensité de la gravité est g. Les angles Ψ_6 et Ψ_7 représentent les angles de contact poulie - courroie (figure I.15) :

$$\begin{cases} \Psi_6\left(\theta_t\right) = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left[\dfrac{Y_6 - Y_7}{X_7 - X_6}\right] - \tan^{-1}\left[\dfrac{L_6}{R_6 + R_7}\right] \\ \Psi_7\left(\theta_t\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left[\dfrac{Y_7 - Y_1}{X_7 - X_1}\right] + \tan^{-1}\left[\dfrac{L_7}{R_7 + R_1}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_7 = X_8 + L_t\cos\theta_t \\ Y_7 = Y_8 - L_t\cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_6\left(\theta_t\right) = \sqrt{\left(X_6 - X_7\right)^2 + \left(Y_6 - Y_7\right)^2 - \left(R_6 - R_7\right)^2} \\ L_7\left(\theta_t\right) = \sqrt{\left(X_7 - X_1\right)^2 + \left(Y_7 - Y_1\right)^2 - \left(R_7 - R_1\right)^2} \end{cases}$$

Finalement, il vient de l'équation I.23 :

$$\begin{aligned} &\left(I_t + I_{7t}\right)\ddot{\theta}_t - I_7\ddot{\theta}_7 + C_t\dot{\theta}_t + K_t\left(\theta_t - \theta_0\right) = \\ &R_7\left(T_7 - T_6\right) - Q_t + m_{eff}L_{eff}\,g\cos\theta_t - \\ &L_t\sin\left(\Psi_6 + \theta_t\right)\left[T_6 - \rho_b A\left(R_7\dot{\theta}_7\right)^2\right] + L_t\sin\left(\Psi_7 + \theta_t\right)\left[T_7 - \rho_b A\left(R_7\dot{\theta}_7\right)^2\right] \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 24}$$

avec K_t et C_t, raideur et amortissement du bras du tendeur, A aire de la section de la courroie.

En considérant un autre volume de contrôle constitué du galet seul et en sommant les moments par rapport au centre du galet d'une manière analogue à celle décrite plus haut, S. J. Hwang obtient une deuxième équation décrivant le comportement du tendeur :

$$I_7\left(\ddot{\theta}_7 - \ddot{\theta}_t\right) = R_7\left(T_7 - T_6\right) - Q_7 \qquad \text{Equ. I. 25}$$

On remarque dans les équations I.24 et I.25 le couplage inertiel entre $\ddot{\theta}_7$ et $\ddot{\theta}_t$. Ce couplage entre la rotation propre du galet tendeur et du mouvement de son centre de masse n'apparaît nul part ailleurs dans la bibliographie et n'a pas lieu d'être si on considère le contact sans glissement entre la poulie et la courroie. Une discussion à ce sujet est donné dans la deuxième partie du chapitre II.3.6.3. On peut noter aussi que S. J. Hwang est le seul à prendre en considération le poids du tendeur.

S. J. Hwang obtient finalement trois équations (I.22, I.24 et I.25) reliant l'accélération des rotations avec les tensions dans les brins. Il faut maintenant relier les tensions aux angles θ_i pour établir les équations du mouvement :

$$T_i = T_0 + K_i \Delta_i \qquad 1 \le i \le 7$$

$$\text{avec} \quad \Delta_i = R_i \theta_i - R_j \theta_j - \delta_j \quad \text{et} \begin{vmatrix} j = i+1 \\ j = 1 \text{ si } i = 7 \end{vmatrix} \qquad \text{Equ. I. 26}$$

Comme la raideur K_i n'est celle que du $i^{ème}$ brin libre, il faut aussi considérer la raideur K_{pj} du brin enroulé sur la $j^{ème}$ poulie. Celle-ci est inclue dans le terme d'élongation du brin enroulé δ_i (équation I.13). L'élongation δ_i est calculée d'après la tension dans le brin enroulé considéré comme étant la moyenne des tensions des brins libres adjacents à la poulie.

$$T_i + T_{i+1} = 2\left(T_0 + K_{p(i+1)} \delta_{i+1}\right) \qquad \text{Equ. I. 27}$$

L'application des équations I.26 et I.27 mène aux relations suivantes entre les tensions T_i dans les brins libres et la rotation θ_i des poulies :

$$\left(1 + \frac{K_i}{2K_{p(i+1)}}\right) T_i + \frac{K_i}{2K_{p(i+1)}} T_{i+1} = \left(1 + \frac{K_i}{K_{p(i+1)}}\right) T_0 + K_i \left(R_i \theta_i - R_{i+1} \theta_{i+1}\right) \quad 1 \le i \le 5 \quad \text{Equ. I. 28}$$

L'influence du tendeur est à prendre en compte pour les brins 6 et 7 :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K_6}{2K_{p7}}\right) T_6 + \frac{K_6}{2K_{p7}} T_7 &= \left(1 + \frac{K_6}{K_{p7}}\right) T_0 + K_6 \left(R_6 \theta_6 - R_7 \theta_7\right) \\ &\quad + K_6 \left[\left(L_6 - L_{60}\right) + \left(R_6 + R_7\right)\left(\Psi_6 - \Psi_{60}\right)\right] \\ \left(1 + \frac{K_7}{2K_{p1}}\right) T_7 + \frac{K_7}{2K_{p1}} T_1 &= \left(1 + \frac{K_7}{K_{p1}}\right) T_0 + K_7 \left(R_7 \theta_7 - R_1 \theta_1\right) \\ &\quad + K_7 \left[\left(L_7 - L_{70}\right) + \left(R_7 + R_1\right)\left(\Psi_7 - \Psi_{70}\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 29}$$

Les équations I.28 et I.29 insérées dans les équations I.22, I.24 et I.25 donnent les équations non-linéaires du mouvement. Ces équations sont linéarisées autour de l'état de mouvement stationnaire de la transmission pour obtenir une équation différentielle à coefficient constant :

$$M\ddot{\xi} + C\dot{\xi} + K\xi = 0 \qquad \text{Equ. I. 30}$$

avec $\xi = \left\langle \theta_t, \theta_2, \ldots, \theta_7 \right\rangle^T$. θ_1 est le mouvement du vilebrequin imposé dans le modèle.

Ensuite les modes de rotation sont calculés de manière classique.

Les équations d'équilibre sont obtenues en éliminant les termes de dérivées temporelles dans les équations I.22, I.23 et I.24 :

$$R_i \left(T_{i-1} - T_i\right) = Q_i \qquad 2 \le i \le 7 \qquad \text{Equ. I. 31}$$

$$R_7 \left(T_7 - T_6\right) = -Q_t + K_t \left(\theta_0 - \theta t\right) + m_{eff} L_{eff} g \cos \theta_t$$

$$- L_t \sin(\Psi_6 + \theta_t)[T_6 - \rho_b A V^2] + L_t \sin(\Psi_7 + \theta_t)[T_7 - \rho_b A V^2] \quad \text{Equ. I. 32}$$

avec V : vitesse de la courroie.

L'équation I.32 donne pour $T_6 = T_7 = T_0$ et V=0 la tension de pose pour un angle θ_t donné :

$$T_0 = \frac{K_t(\theta_0 - \theta t) - Q_t + + m_{eff} L_{eff} g \cos\theta_t}{L_T[\sin(\Psi_6 + \theta_t) - \sin(\Psi_7 + \theta_t)]} \quad \text{Equ. I. 33}$$

Les treize équations I.28, I.29, I.31 sont linéaires selon les treize variables T_i (i = 1, 2, ..., 7) et θ_i (i = 2, ..., 7). On peut alors résoudre T_6 et T_7 avec θ_t comme paramètre. L'équation I.32 est alors résolue par itération selon le schéma de Newton-Raphson pour obtenir le paramètre θ_t. Ce paramètre connu, les treize autres variables sont calculées par les équations I.28, I.29, et I.30. Ainsi est défini l'état d'équilibre à partir duquel est linéarisé l'équation du mouvement en dynamique. La linéarisation impose de faibles variations de couple devant le couple moyen de chaque poulie si on veut rester dans le domaine de validité des équations non-linéaires. Le tendeur doit également avoir une faible amplitude de mouvement. Ces restrictions sont acceptables pour une transmission par courroie Poly-V, dont les accessoires entraînés (des pompes et l'alternateur) ont de très faibles variations de couple à une vitesse de rotation donnée. Par contre, ces conditions ne sont pas du tout remplies dans le cas d'une transmission par courroie crantée d'une distribution automobile. Les variations de couple aux arbres à cames peut dépasser 60 N.m autour d'une valeur moyenne proche de zéro. Cela entraîne un déplacement important du tendeur. Dans le cadre des transmissions par courroie crantée, il convient donc d'utiliser une équation différentielle du mouvement non-linéaire à coefficients variables.

Une étude théorique du glissement sur les poulies est aussi présentée par S. J. Hwang. Ce domaine, spécifique aux transmissions par courroie Poly-V, ne sera pas abordé dans cette bibliographie.

Pulley No. i	Type	$X_i - Y_i$ Location (mm)	R_i (mm)	I_i (kgm^2)	μ
1	C/S	(0, 0)	81.25	0.122	1.2
2	A/C	(261.5, 60)	64.50	0.00415	1.2
3	P/S	(252, 234)	70.60	0.00131	1.2
4	IDL	(90.3, 251.1)	41.15	0.000263	0.5
5	ALT	(86, 354)	30.00	0.00421	1.2
6	W/P	(0, 167.5)	67.50	0.00176	1.2
7	TEN	(151.2,155.3)	38.10	0.000207	0.5

TENSIONER ARM

$X_8 - Y_8$ Location (mm)	θ_o (deg)	I_t (kgm^2)	I_{7t} (kgm^2)	m_{eff} (kg)
(151.2. 207.5)	80	0.00102	0.000404	0.458
L_{eff} (mm)	L_t (mm)	Q_t (Nm)	C_t (Nmsec)	K_t (Nm/rad)
25	53	25.19	2.26	28.25

Table I. 2 : Données de la transmission.

Des résultats sont présentés sur la base d'une transmission serpentine d'un moteur de série de cylindrée 3.0 litres (figure I.14). Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la transmission sont présentées dans le tableau I.2. S. J. Hwang note comme S. L. Yang (et Barker) le comportement non-linéaire du tendeur en raideur et en amortissement. La courbe mesurée de la raideur du tendeur est linéarisée au point d'équilibre pour obtenir la valeur du tableau I.1. L'amortissement est calculé d'après l'hystérésis de la courbe mesurée (couple, angle du tendeur).

Un codeur optique est monté sur la poulie du vilebrequin ce qui permet de connaître l'excitation angulaire $\dot{\theta}_1$ de la transmission qui est une donnée du modèle :

$$\dot{\theta}_1(t) = \left[477.5 + 18\cos(48\pi t)\right]\frac{2\pi}{60} \quad \text{tr / mn} \qquad \text{Equ. I. 34}$$

Le moteur tourne ici au ralenti à 477 tr/mn. La fréquence d'excitation de 24 Hz, soit trois fois la fréquence de rotation, permet de penser qu'on a affaire à un moteur V6 avec un vilebrequin à trois manetons. Les couples appliqués aux différentes poulies sont constants : $Q_2 = Q_4 = Q_5 = Q_7 = 0$, $Q_3 = 24.40$, $Q_6 = 1.36$. L'acyclisme moteur est donc la seule excitation.

Deux autres codeurs optiques sont montés sur la poulie de la pompe de la direction assistée et la poulie de l'alternateur ce qui permet la comparaison des résultats calculés et expérimentaux (figure I.16). Nous constatons sur la figure I.16 que la vitesse angulaire calculée (trait plein) de la poulie de l'alternateur (ALT) et celle de la poulie de la pompe de la direction assistée (P/S) concordent bien avec la vitesse mesurée (trait discontinu). L'alternateur a une plus grande vitesse angulaire du fait du petit rayon de sa poulie. Les traits discontinus et pleins sont confondus pour le vilebrequin car sa vitesse angulaire est une donnée d'entrée.

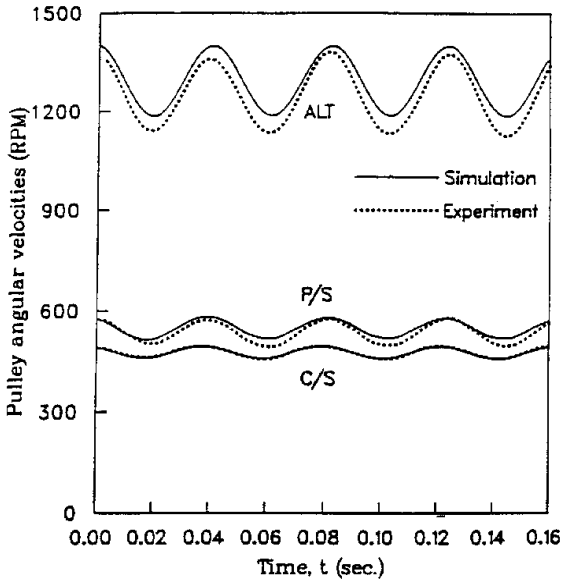


Figure I. 16 : Vitesse angulaire calculée et expérimentale pour le vilebrequin (C/S), la pompe de la direction assistée (A/C), et l'alternateur (ALT) pour une excitation par le vilebrequin.

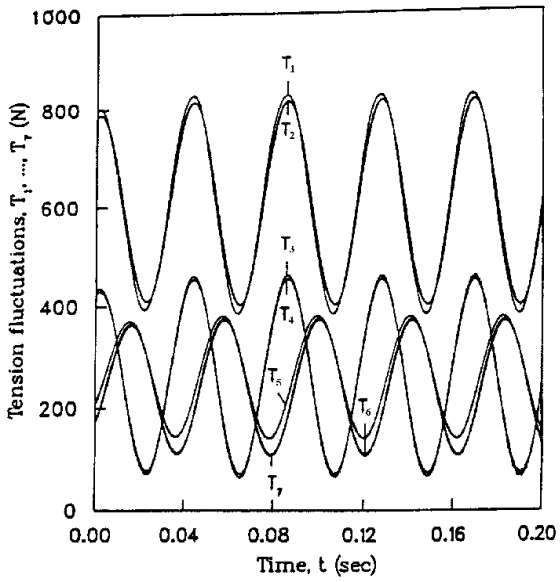


Figure I. 17 : Fluctuations de tensions sous l'action du vilebrequin.

La figure I.17 montre les variations de tension pour tous les brins. Du fait des couples nuls aux poulies 2, 4, et 7, nous retrouvons des tensions quasiment égales dans les brins 1 et 2, les brins 3 et 4, et les brins 5 et 6. Par contre, la tension dans les brins 4 et 5 est presque en opposition de phase alors que le couple sur la poulie 5 est nul. Cela signifie certainement qu'on a passé un mode par rapport à l'état quasi-statique des tensions. Pourtant le premier mode est à 1146 tr/mn et les poulies 4, 5 et 6, adjacentes aux brins 4 et 5, sont en phase sur ce mode (figure I.18). Le deuxième mode à 5778 tr/mn, et le troisième qui lui est proche à 6222 tr/mn sont surtout des modes de tendeur, c'est-à-dire avec une grande amplitude de rotation du tendeur. Ces deux modes expliquent aussi difficilement pourquoi les tensions dans les brins 4 et 5 sont quasiment en opposition de phase. Malheureusement, l'auteur ne mène aucune analyse modale des résultats, ce qui permettrait une véritable compréhension des phénomènes de vibration en rotation. Aucune courbe du mouvement du tendeur n'est également disponible.

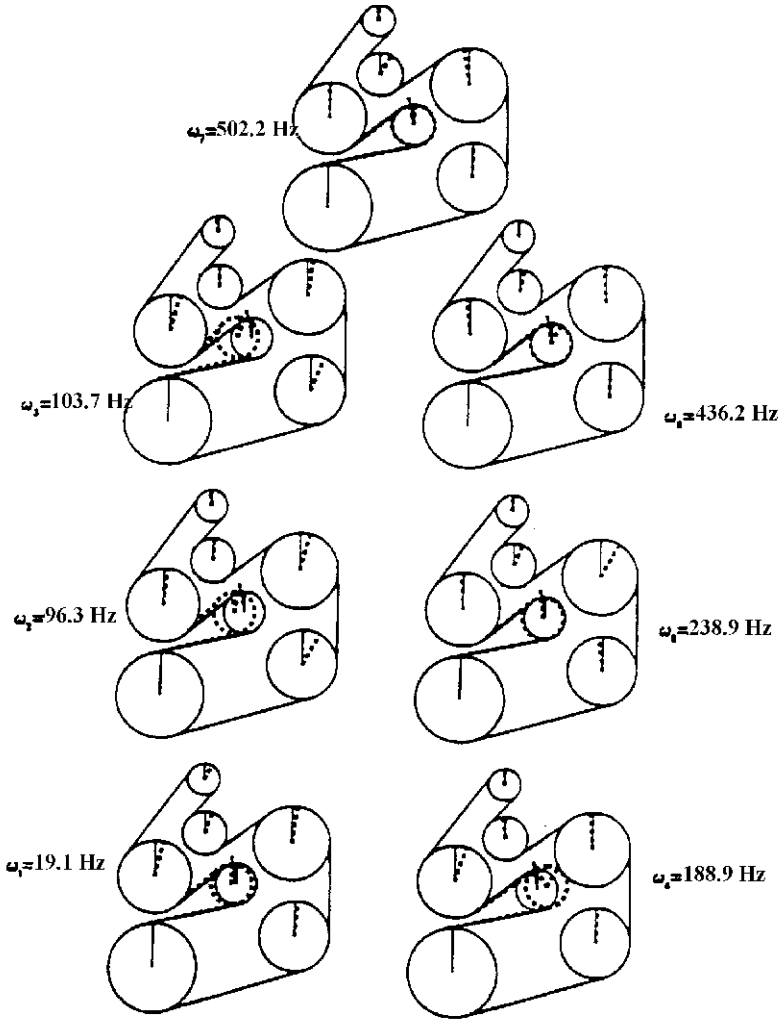


Figure I. 18 : Modes de rotation pour une transmission à 477.5 tr/mn.

I.2.1.5. Modèle avec glissement de Debbabi (1990)

C. Debbabi (1990) une étude originale tant sur les hypothèses que sur le type de modélisation développée.

L'étude expérimentale des paramètres principaux qui caractérisent la transmission par courroie Poly-V dans les conditions sévères du fonctionnement sur des moteurs automobiles, conduit C. Debbabi à retenir que le facteur principal est l'existence d'irrégularité cyclique de vitesse engendrant des taux de glissement instantané de la courroie. Cette hypothèse qui mène à la caractérisation fine du glissement de la courroie, se démarque des études précédentes qui considèrent toutes le glissement comme négligeable.

La modélisation est également originale car basée sur les équations des milieux continus. Le modèle a été développé dans l'optique de calculer principalement ces trois grandeurs: (1) la déformation ξ en chaque point de la courroie, (2) la vitesse V de la courroie permettant de caractériser le glissement, (3) la tension T dans la courroie.

La courroie est assimilée à un solide unidimensionnel de section constante, dont le point courant est repéré par son abscisse curviligne s. Le problème étant plan, il est exprimé dans le repère de Frenet : $\vec{\tau}$ (vecteur unitaire tangent) et $\vec{n}$ (vecteur unitaire normal avec $\vec{n} = R\,d\vec{\tau}/ds$ et R(s), rayon de courbure de la courroie).

La cinématique de la courroie est décrite par le déplacement tangentiel (ou axial) $\xi(s,t)$ suivant $\vec{\tau}$ et la rotation $\phi(s,t) = \xi(s,t)/R(s)$ de la section droite autour du vecteur binormal $\vec{b}$. L'hypothèse des petites déformations est adoptée.

L'état des déformations est alors :

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon(s,t) = \dfrac{\partial \xi(s,t)}{\partial s} \quad \text{(déformation axiale)} \\ \gamma_b = \dfrac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} \quad \text{(courbure suivant le vecteur binormale } \vec{b}) \end{array}\right. \qquad \text{Equ. I. 35}$$

En négligeant le moment de flexion (suivant $\vec{b}$) ainsi que l'effort tranchant devant l'effort $\vec{T}$, nous obtenons les relations du mouvement :

$$\left|\begin{array}{l} \left(m_0 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_\tau + \dfrac{\partial T}{\partial s} \right).\vec{\tau} \\ \left(m_0 \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = F_n + \dfrac{T}{R} \right).\vec{n} \end{array}\right. \qquad \text{Equ. I. 36}$$

dans lesquelles m_0 désigne la masse linéique de la courroie, F_τ et F_n les densités linéiques d'effort de contact sollicitant la courroie.

La loi de comportement retenue est celle d'un solide linéairement élastique à amortissement visqueux. Il vient pour la tension T :

$$T(s,t) = K \frac{\partial \xi(s,t)}{\partial s} + C \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi(s,t)}{\partial s} \right) \qquad \text{Equ. I. 37}$$

avec K, raideur longitudinale de la courroie et C, son coefficient d'amortissement.

En chaque point, la masse de la courroie est obtenue à partir de la loi de conservation de la masse :

$$m(s,t) = \frac{m_0}{1 + \frac{\partial \xi(s,t)}{\partial s}} \qquad \text{Equ. I. 38}$$

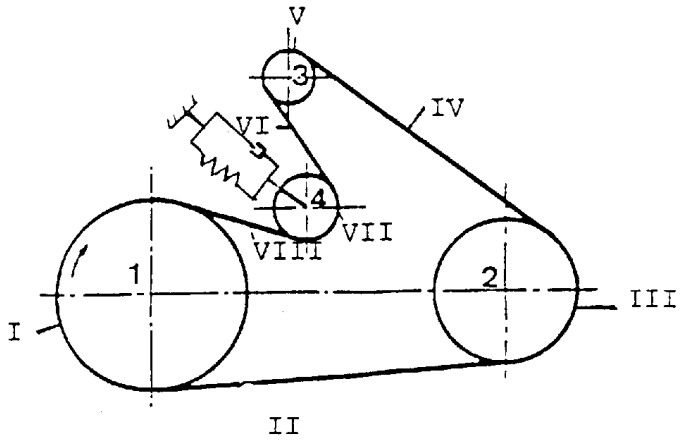


Figure I. 19 : Discrétisation de la courroie en brins I à VIII.

La courroie est décomposée en quatre sous-domaines (brins numérotés de I à VIII sur la figure I.19) déterminés par la forme géométrique de la courroie et dont les particularités sont :

1. Les brins libres qui n'ont aucun contact surfacique avec les poulies et qui ne sont pas liés au galet tendeur, possède un rayon de courbure R infini. Donc les équations du mouvement se réduisent à :

$$m_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T(s,t)}{\partial s} \quad (F_\tau \text{ et } F_n \text{ sont nuls}) \qquad \text{Equ. I. 39}$$

2. Les brins libres qui sont en contact avec le galet tendeur doivent tenir compte du mouvement X_{tend} du centre du galet tendeur (figure I.21). Les équations I.36 à I.38 s'écrivent alors avec un déplacement axial supplémentaire ξ_{tend} :

$$\xi'(s,t) = \xi(s,t) \pm \xi_{tend}(s,t) \qquad \text{Equ. I. 40}$$

Le signe ± dépend du sens de déplacement du galet tendeur par rapport à la trajectoire du brin étudié (AB ou CD sur la figure I.20). L'auteur admet une évolution linéaire du déplacement ξ_{tend} dont la valeur est toujours nulle en A pour devenir $\xi_{tend} = X_{tend} \cos\alpha$ en B. Il en résulte :

$$\xi_{tend}(s,t) = X_{tend}(s,t) \frac{s}{L} \cos\alpha \qquad \text{Equ. I. 41}$$

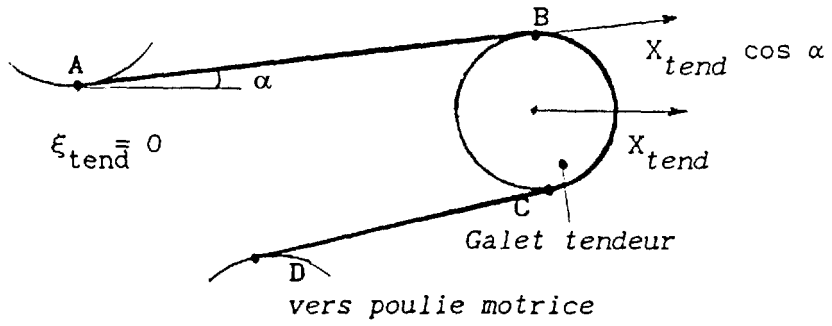


Figure I. 20 : Brins en relation avec le galet tendeur.

3. Les brins enroulés sur une poulie peuvent être soit en adhérence, soit en glissement. Dans ce cas, le frottement courroie - poulie est caractérisé par une loi "semi - empirique" décrite plus loin. Les équations sont réécrites dans un repère cylindrique (r,θ) avec comme origine, le centre de la poulie. Le rayon r est constant et est égale à R, rayon de la poulie. On a alors pour les équations I.36 à 38 :

$$ds = R\,d\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi(s,t)}{\partial s} = \frac{1}{R}\frac{\partial \xi(\theta,t)}{\partial \theta} \qquad \text{Equ. I. 42}$$

4. Le brin enroulé sur le galet tendeur subit un mouvement de translation. En conséquence, la variable r du repère cylindrique n'est plus constante. Les équations deviennent alors en considérant deux variables d'espace r et θ :

- Équation de continuité : $m(r,\theta,t) = \dfrac{m_0}{1 + \dfrac{\partial \xi_r(r,\theta,t)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial \theta}}$

- Équations du mouvement :

$$\left|\begin{array}{l} \left\{ m_0 \left[\dfrac{\partial^2 \xi_r(r,\theta,t)}{\partial t^2} - \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial t} \right]^2 \right] = -\dfrac{T(r,\theta,t)}{r} + F_n \right\}.\vec{n} \\ \left\{ m_0 \left[\dfrac{\partial^2 \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial t^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial t}\dfrac{\partial \xi_r(r,\theta,t)}{\partial t} \right] = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial \theta} + F_\tau \right\}.\vec{\tau} \end{array}\right.$$

- Loi de comportement :

$$T(s,t) = K\left[\frac{\xi_r(r,\theta,t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial \theta} \right] + C\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\xi_r(r,\theta,t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta(r,\theta,t)}{\partial \theta} \right]$$

Dans le cas du glissement sur les brins enroulés, une condition supplémentaire apparaît :

$$F_\tau = \mu F_n \qquad \text{Equ. I. 43}$$

Ensuite, les brins sont reliés par les conditions limites de chaque sous-domaine pour obtenir le comportement général de la courroie.

- *modélisation du tendeur*

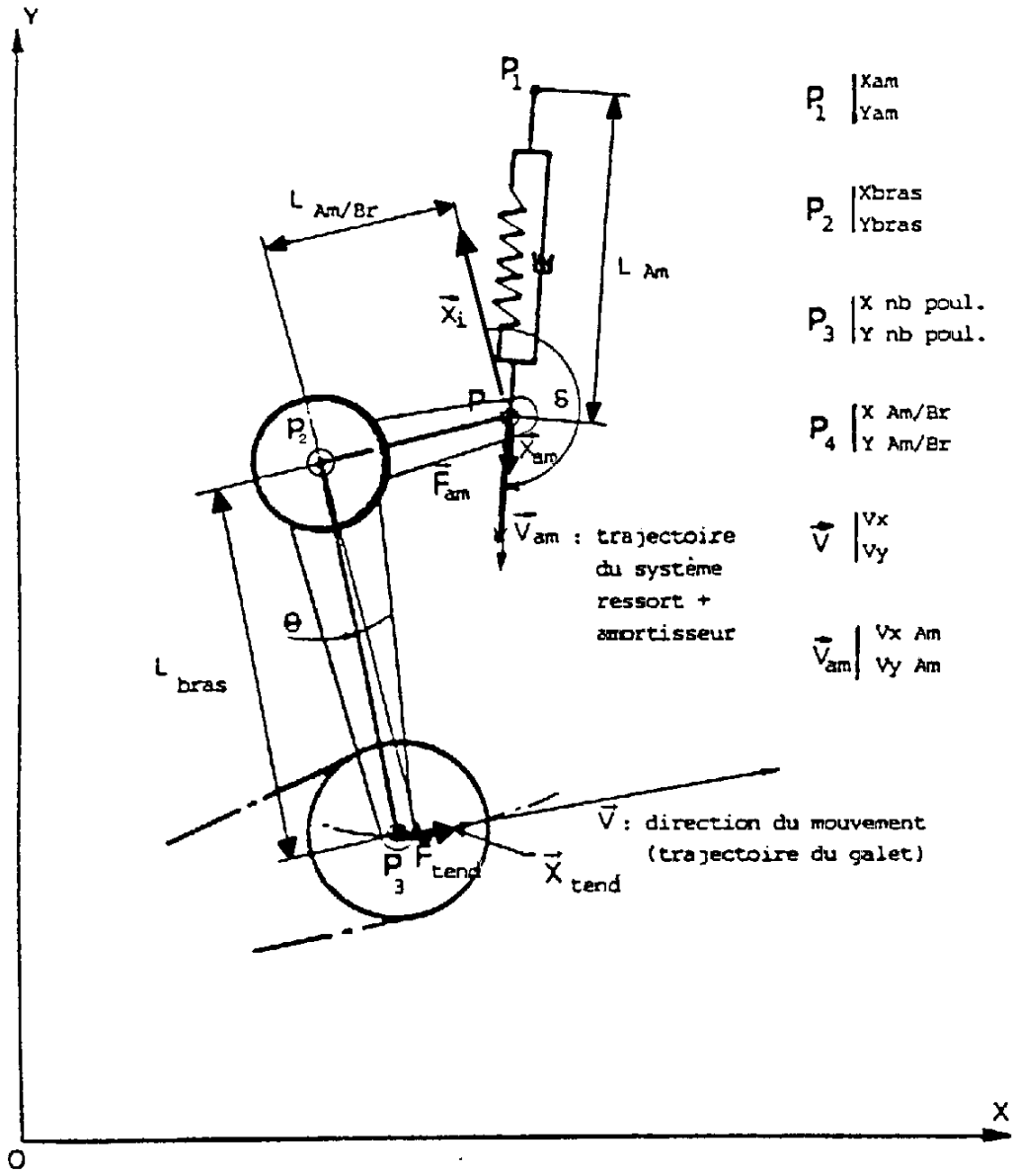


Figure I. 21 : Mécanisme du système tendeur.

C. Debbabi définit un tendeur équivalent à partir de la géométrie représentée sur la figure I.21. L'équation d'équilibre des moments appliquée au système tendeur oscillant autour du point P_2 s'écrit :

$$J_s \frac{d^2\theta}{dt^2} = C_{ressort+amortisseur} + C_{courroie/galet} \qquad \text{Equ. I. 44}$$

avec θ position angulaire du bras tendeur,
J_s moment d'inertie total du système tendeur.

La trajectoire du centre du galet tendeur est circulaire. On obtient donc :

$$X_{tend} = L_{bras}\,\theta \qquad \text{Equ. I. 45}$$

En conséquence, nous avons :

$$J_s \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{J_s}{L_{bras}} \frac{d^2 X_{tend}}{dt^2} \qquad \text{Equ. I. 46}$$

Le couple de la courroie sur le tendeur s'écrit :

$$C_{courroie/galet} = F_{tend}\, L_{bras} \qquad \text{Equ. I. 47}$$

Le couple du ressort et de l'amortisseur par rapport au pivot est :

$$C_{ressort+amortisseur} = \left(- K X_{am} - f \frac{dX_{am}}{dt} \right) L_{am/br} \cos\delta \qquad \text{Equ. I. 48}$$

Il reste à calculer X_{am} en fonction de X_{tend}. Le déplacement de l'extrémité du ressort - amortisseur X_i s'écrit :

$$X_i = L_{am/br}\,\theta = \frac{L_{am/br}}{L_{bras}} X_{tend} \qquad \text{Equ. I. 49}$$

On en déduit la projection X_{am} du déplacement X_i sur la direction du ressort - amortisseur :

$$X_{am} = X_i \cos\delta = \frac{L_{am/br}}{L_{bras}} \cos\delta\, X_{tend} \qquad \text{Equ. I. 50}$$

C. Debbabi considère la trajectoire X_{tend} du centre du galet tendeur rectiligne, en raison des faibles amplitudes enregistrées du tendeur. On obtient ainsi une équation du mouvement en translation du galet tendeur :

$$M_{éq} \frac{d^2 X_{tend}}{dt} + f_{éq} \frac{dX_{tend}}{dt} + K_{éq} X_{tend} = F_{tend} \qquad \text{Equ. I. 51}$$

avec $M_{éq} = \frac{J_s}{L_{bras}^2}$

$$K_{éq} = K\left[\frac{L_{am/br}}{L_{bras}}\cos\delta\right]^2$$

$$f_{éq} = f\left[\frac{L_{am/br}}{L_{bras}}\cos\delta\right]^2$$

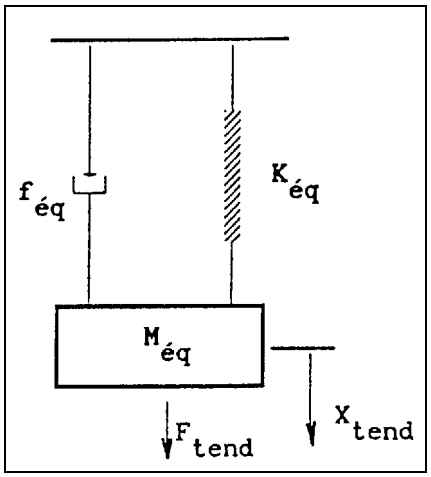


Figure I. 22 : Système équivalent au système tendeur.

L'équation I.49 permet de définir un tendeur équivalent en translation schématisé à la figure I.22 et d'obtenir à tout moment X_{tend}.

La méthode numérique pour résoudre les équations aux dérivées partielles consiste à établir un schéma aux différences finies.

La loi de frottement poulie - courroie PolyV est issue d'une part du modèle de Schallamach. La force de frottement des élastomères sur des surfaces solides lisses ou rugueuses est entièrement conditionnée par l'importance de l'aire de contact, compte tenu de la grande souplesse du caoutchouc. Le modèle de Schallamach représente la surface de l'élastomère par des sphères (tableau I.3). Le coefficient de frottement est alors proportionnel à $P^{-1/3}$ (P, pression de contact).

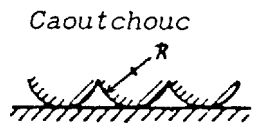
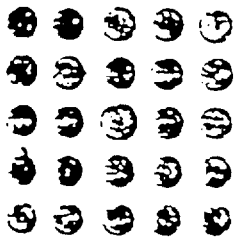
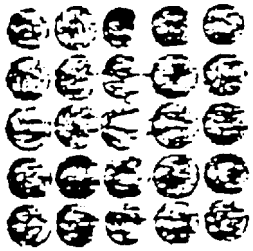
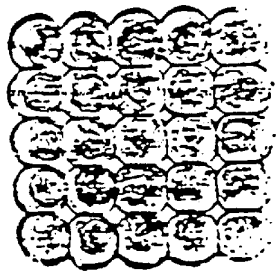
	Évolution de la surface de contact		
Type d'aspérités	Pression = 0.21 Mpa	Pression = 0.78 Mpa	Pression = 6.6 Mpa
 Sphères multiples et indépendantes			

Table I. 3 : Modèle de Schallamach.

La deuxième partie de la loi de frottement est issue des résultats de mesure. Il faut tout d'abord noter l'influence du temps d'essais. L'examen de la courbe de la figure I.23 montre qu'il existe trois phases principales de rodage :

1. Une première phase dite de rodage instantané (abrasion et mise en conformité des surfaces).

2. Une deuxième phase de rodage retardé ou de transition qui résulte de l'accommodation des surfaces par transfert de caoutchouc et des modifications des propriétés mécaniques de l'élastomère.

3. Une troisième et dernière phase de régime stabilisé où le coefficient de frottement tend vers une valeur asymptotique.

Ces trois phases ont été confirmées par une analyse de l'état de surface de l'élastomère.

Par ailleurs, les mesures ont montré que le coefficient de frottement croît avec le logarithme décimal de la vitesse de glissement. Le coefficient de frottement que propose C. Debbabi, sur la base du modèle de Schallamach et des constatations expérimentales, est :

$$\mu = \left[56.5 + 12.58.\log_{10} V_{gl}\right].P^{-1/3} \qquad \text{Equ. I. 52}$$

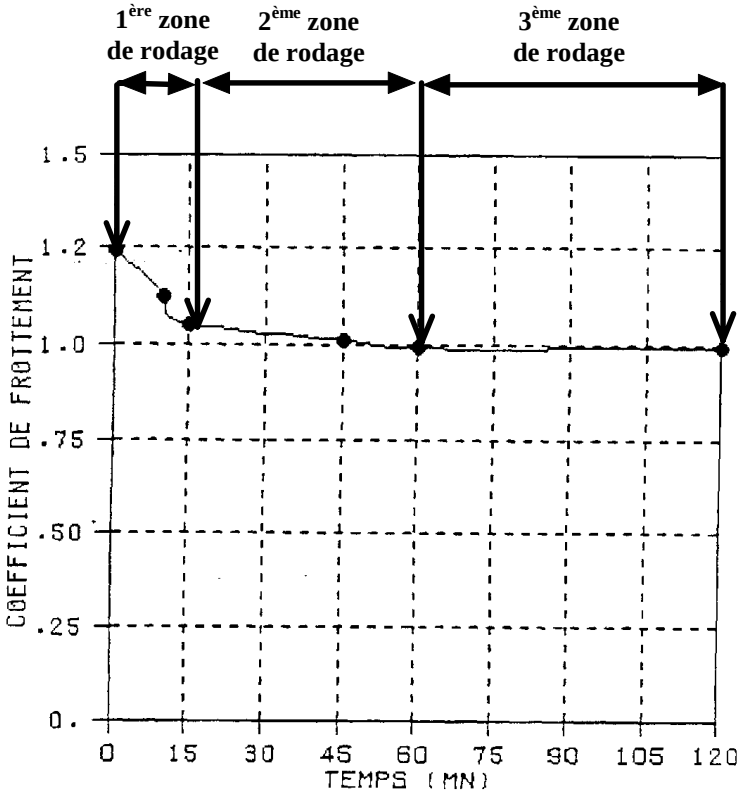


Figure I. 23 : Influence du temps d'essais dans des conditions très sévères sur le coefficient de frottement.

◆ *Validation du modèle*

La validation du modèle est effectuée sur deux configurations :

1. Un premier montage d'une transmission simple s'inspirant d'un cas existant (figure I.47) est réalisé sur un banc d'essais. La figure I.25 montre l'excellente concordance des résultats pour les vitesses calculées et mesurées de la poulie menée.

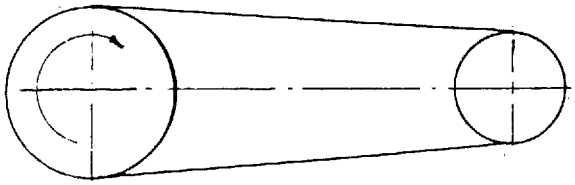


Figure I. 24 : Montage à deux poulies (type moteur PSA XUD9).

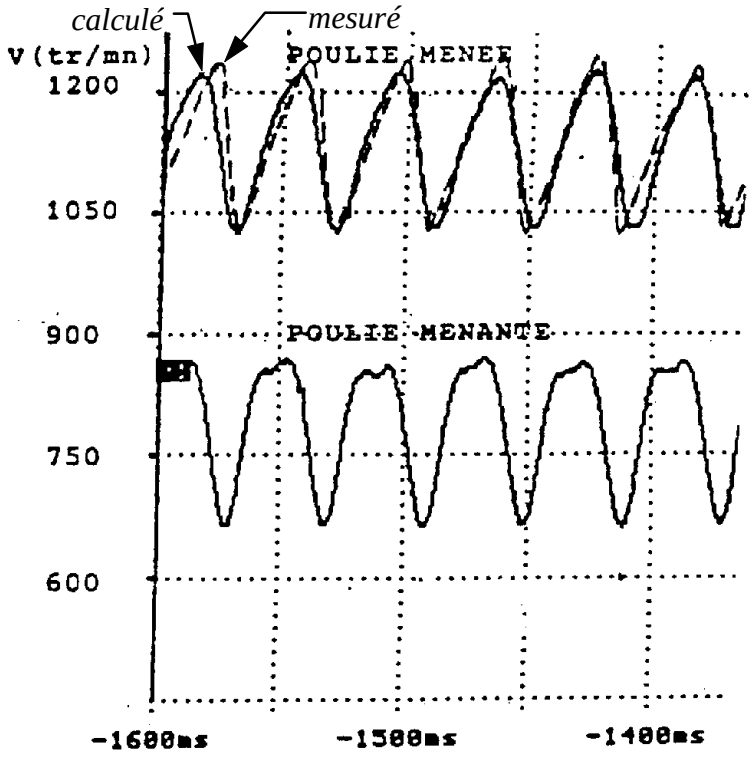


Figure I. 25 : Comparaison de la vitesse calculée et mesurée pour la poulie menée et vitesse imposée pour la poulie menante.

2. Un second montage comportant une poulie motrice, trois poulies réceptrices, un galet de retournement et un tendeur automatique est réalisé (figure I.26). Les écarts en amplitude de la vitesse enregistrée à l'aide de capteurs optiques et la vitesse calculée ne dépassent 4 % pour les poulies 2 et 4 (figure I.27). Il y a néanmoins une différence sur la forme du signal de vitesse pour la poulie 2. C. Debbabi pense que cela peut venir des couples récepteurs pris constants lors du calcul mais certainement fluctuants dans la réalité.

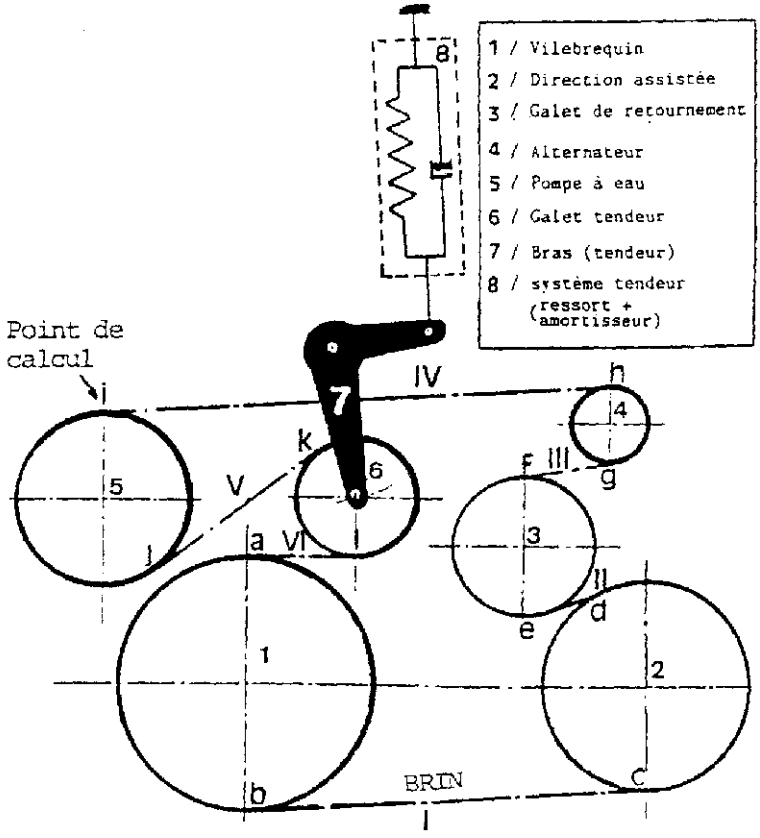


Figure I. 26 : Montage en serpentine d'un moteur 6 cylindres BMW M51.

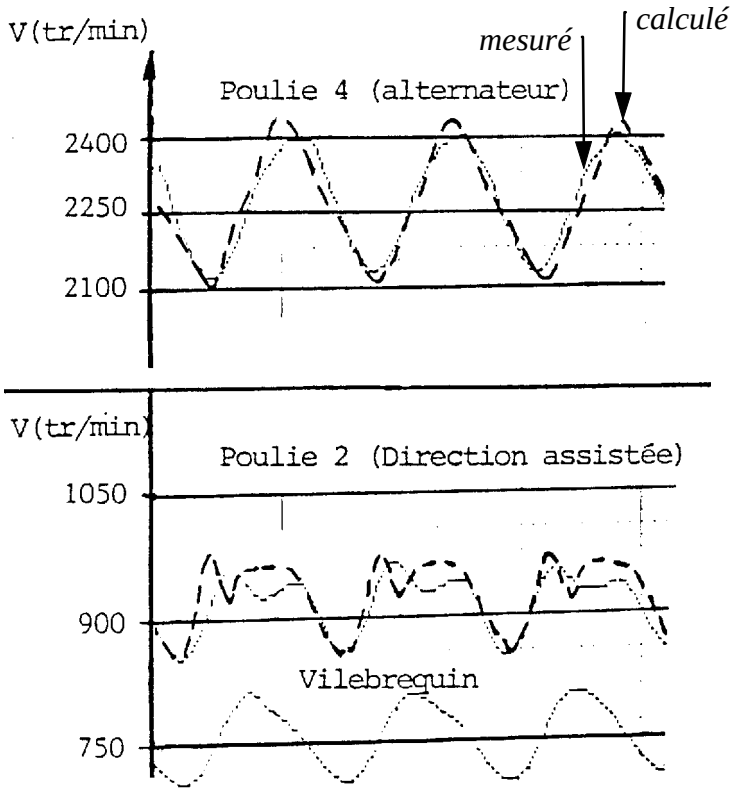


Figure I. 27 : Vitesses calculées et mesurées.

La figure I.28 représente la projection sur le brin de la courroie de l'effort exercé par le galet tendeur. Cet effort s'équilibre avec les tensions dans les deux brins adjacents. La comparaison de l'effort mesuré et calculé est satisfaisante. L'allure générale des deux courbes diffère avec la présence d'une fréquence plus élevée pour la courbe calculée. C. Debbabi pense que cela provient d'une mauvaise évaluation de l'amortissement du tendeur.

Un écart négatif de 50 N. pour une amplitude d'effort totale de 400 N. est également visualisé pour la courbe calculée de la figure I.28. C. Debbabi ne fait pas de commentaire mais cela peut venir en partie de l'omission de l'effet centrifuge égal à mc^2 (annexe IV). Or, la masse linéique m donnée pour le montage de la figure I.26 est 0.143 kg/m. Le diamètre primitif de la poulie du vilebrequin est 153.2 mm. La vitesse de rotation est 750 tr/mn. La tension retranchée dans la courroie due à l'effet centrifuge est donc de 20.7 N. La tension centrifuge vient donc soulager le tendeur d'un peu moins de 2 x 20.7 N. (en raison des deux brins adjacents non parallèles), et la courbe d'effort réelle se rapproche ainsi de zéro. Cette tension croît selon le carré de la vitesse. Cela sous-entend qu'un tel modèle n'est prévu en l'état que pour les très faibles régimes de rotation.

On peut noter également que C. Debbabi mesure la tension dynamique dans la courroie. Le principe est la visualisation grâce à une caméra ultra-rapide (4000 images/seconde) des déformations de raies blanches préalablement tracées sur la courroie. Or, la comparaison des tensions calculées et mesurées n'est pas faite, ce qui permettrait pourtant d'avancer dans l'analyse.

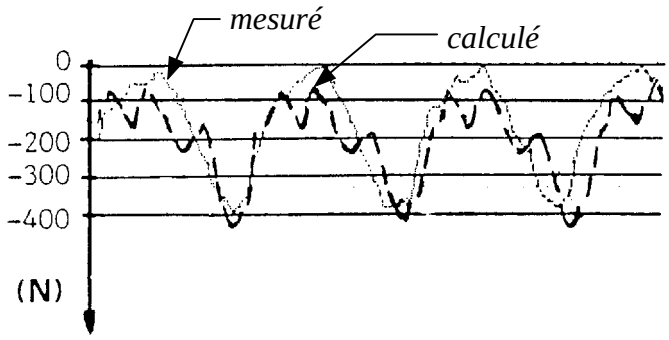


Figure I. 28 : Effort exercé par le galet tendeur.

I.2.1.6. Modèle couplé rotation/mouvement transversal de Beikmann (1992)

R. S. Beikmann a publié en 1992 le seul modèle en rotation couplé avec les vibrations en flexion des brins libres d'une courroie Poly-V. Son travail se focalise essentiellement sur le couplage rotation/flexion d'une transmission serpentine en particulier incluant un tendeur dynamique.

I.2.1.6.1. Modélisation du système

Pour les transmissions serpentines, les variations de couple aux différentes poulies sont faibles. L'auteur les considère donc négligeable par rapport à la diminution de la tension due à l'effet centrifuge (annexe IV). La tension totale P_0 est alors la somme de la tension de traction P_t et de la tension centrifuge P_c :

$$P_o = P_t + P_c \qquad \text{Equ. I. 53}$$

avec $P_c = mc^2$; m, masse linéaire; c, vitesse axiale de la courroie.

En plus des hypothèses présentées au chapitre I.I.2.1 (l'hypothèse 3 sur le couplage flexion/rotation n'est pas reprise), R. S. Beikmann considère les simplifications suivantes :

1. La raideur de flexion de la courroie est négligée. En conséquence, le modèle de la corde est pris pour les vibrations transversales.

2. La vitesse axiale c de la courroie est constant et uniforme.

3. L'amortissement du système est négligé.

4. L'inertie de la courroie est négligée.

5. La tension de la courroie varie linéairement sur les parties enroulées de la courroie. (*remarque: La théorie d'Euler prévoit une variation exponentielle - annexe IV*).

6. Les points de contact entre la courroie et les poulies ne varient pas de ceux calculés à l'équilibre.

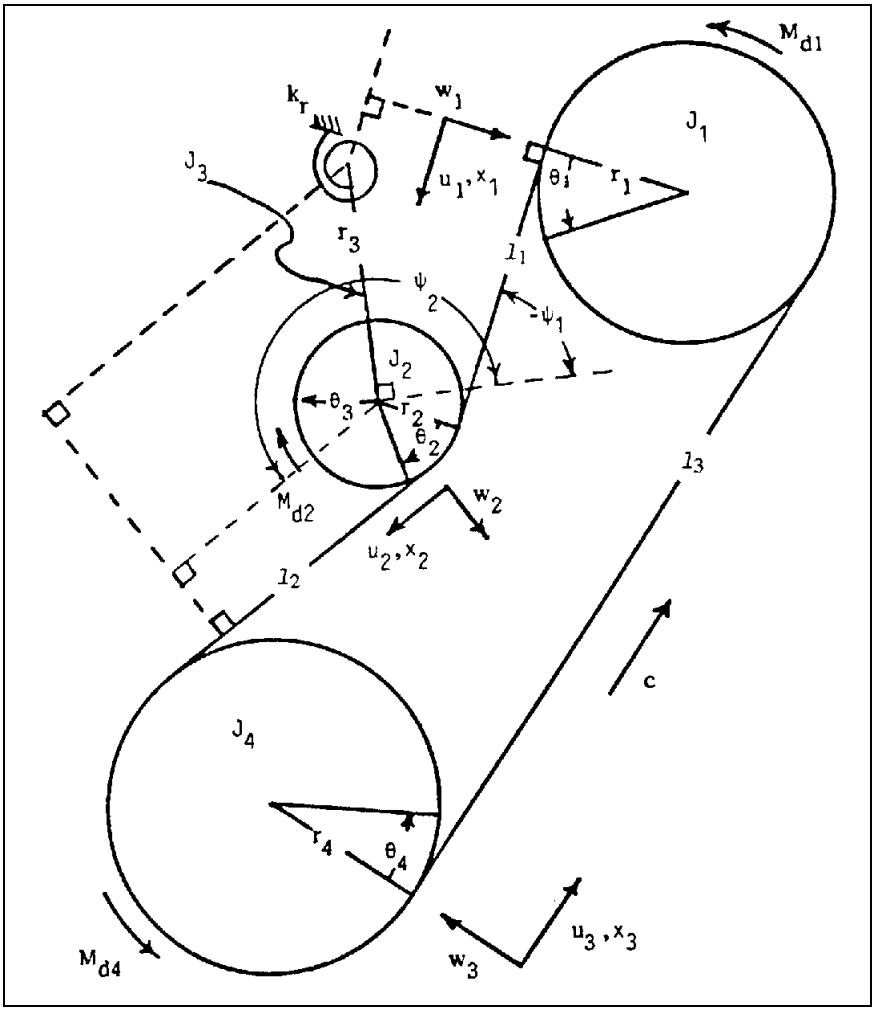


Figure I. 29 : Transmission à trois poulies avec la nomenclature.

L'énergie cinétique du système illustré sur la figure I.29 est :

$$T = \frac{1}{2}J_1\left(\frac{c}{r_1}+\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\frac{c}{r_2}+\dot{\theta}_2\right)^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}J_4\left(\frac{c}{r_4}+\dot{\theta}_4\right)^2$$
$$+\int_0^{L_1}\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dw_1}{dt}(t,x)\right)^2+\left(\frac{du_1}{dt}(t,x)+c\right)^2\right\}dx_1$$
$$+\int_0^{L_2}\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dw_2}{dt}(t,x)\right)^2+\left(\frac{du_2}{dt}(t,x)+c\right)^2\right\}dx_2 \qquad \text{Equ. I. 54}$$
$$+\int_0^{L_3}\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dw_3}{dt}(t,x)\right)^2+\left(\frac{du_3}{dt}(t,x)+c\right)^2\right\}dx_3$$

avec J_i moment d'inertie pour la poulie i,
c vitesse axiale constante de la courroie,
r_i rayon de la poulie i,
θ_i rotation de la poulie i à partir de l'équilibre,
θ_3 rotation du bras du tendeur,
m masse de la courroie par unité de longueur,
L_i longueur du brin libre i,
w_i déplacement transversal du brin i,
u_i déplacement longitudinal du brin i.

L'énergie potentielle du système provient du tendeur et de l'extension de la courroie. La variation de longueur d'un brin libre i par unité de longueur est :

$$\Delta L_{bli} = \frac{P_{Oi}}{EA} + \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2$$

avec EA, raideur longitudinale de la courroie.

La tension totale avec le taux de variation de longueur est donc (avec $\left(\partial u_i/\partial x\right)^2 << \left(\partial w_i/\partial x\right)^2$) :

$$P_i(x_i) = P_{Oi} + EA\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2\right) \qquad \text{Equ. I. 55}$$

La variation par unité de la longueur d'un brin enroulé sur une poulie i tient compte d'une variation linéaire de la tension totale dans un premier brin adjacent j au deuxième brin adjacent k :

$$\Delta L_{bei} = \frac{P_j(L_j)}{EA} + \frac{\sigma_i}{\phi_i}\left(\frac{P_k(0)}{EA} - \frac{P_j(L_j)}{EA}\right)$$

avec ϕ_i angle d'enroulement de la courroie sur la poulie i,
σ_i coordonnée axiale le long de l'angle d'enroulement.

Il en résulte l'énergie potentielle du système illustré sur la figure I.29 :

$$U = \frac{1}{2}k_r\left(\theta_3 + \theta_{3r}\right)^2 + \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_1}\left(\frac{P_3(L_3)}{EA} + \frac{\sigma_1}{\phi_1}\left(\frac{P_1(0)}{EA} - \frac{P_3(L_3)}{EA}\right)\right)^2 r_1 d\sigma_1$$
$$+ \frac{EA}{2}\int_0^{L_1}\left(\frac{P_{01}}{EA} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)^2 dx_1 + \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_2}\left(\frac{P_1(L_1)}{EA} + \frac{\sigma_2}{\phi_2}\left(\frac{P_2(0)}{EA} - \frac{P_1(L_1)}{EA}\right)\right)^2 r_2 d\sigma_2$$
$$+ \frac{EA}{2}\int_0^{L_2}\left(\frac{P_{02}}{EA} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right)^2 dx_2 + \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_4}\left(\frac{P_2(L_2)}{EA} + \frac{\sigma_4}{\phi_4}\left(\frac{P_3(0)}{EA} - \frac{P_2(L_2)}{EA}\right)\right)^2 r_4 d\sigma_4 \qquad \text{Equ. I. 56}$$
$$+ \frac{EA}{2}\int_0^{L_3}\left(\frac{P_{03}}{EA} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)^2\right)^2 dx_3$$

avec k_r raideur en torsion du tendeur,
θ_{3r} positon de référence du bras du tendeur.

Le travail effectué par les forces extérieures est :

$$W = \sum_{i=1}^{4} M_i \theta_i \qquad \text{Equ. I. 57}$$

Le principe d'Hamilton est maintenant appliqué à partir des équations I54, I.56 et I.57 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial(T - U + W)dt = 0$$

Après intégration et simplification ($P_0/EA << 1$), les équations de champ et du mouvement sont :

Mouvement transversal :

$$m\left(-\ddot{w}_i - 2c\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial x} - c^2\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right) + \left(P_{di} + P_{0i}\right)\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Equ. I. 58}$$

Mouvement longitudinal :

$$\ddot{u}_i + 2c\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} + c^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Equ. I. 59}$$

Mouvement en rotation :

poulie #1 : $\left(P_{d1} + P_{01}\right)r_1 - \left(P_{d3} + P_{03}\right)r_1 + M_1 = J_1\ddot{\theta}_1$ Equ. I. 60

poulie #2 : $-\left(P_{d1} + P_{01}\right)r_2 + \left(P_{d2} + P_{02}\right)r_2 + M_2 = J_2\ddot{\theta}_2$ Equ. I. 61

tendeur :

$$\begin{aligned} J_3\ddot{\theta}_3 = &\left[mc\dot{w}_1(L_1) + \left(mc^2 - \left(P_{d1} + P_{01}\right)\right)\frac{\partial w_1}{\partial x}(L_1)\right] r_3 \cos\left(\theta_3 + \alpha_1\right) + \\ &\left(mc^2 - \left(P_{d1} + P_{01}\right)\right) r_3 \sin\left(\theta_3 + \alpha_1\right) + \\ &\left[mc\dot{w}_2(0) + \left(-mc^2 + \left(P_{d2} + P_{02}\right)\right)\frac{\partial w_2}{\partial x}(0)\right] r_3 \cos\left(-\theta_3 + \alpha_2\right) + \\ &\left(-mc^2 + \left(P_{d2} + P_{02}\right)\right) r_3 \sin\left(-\theta_3 + \alpha_2\right) + M_3 - k_r\left(\theta_3 + \theta_{3r}\right) \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 62}$$

poulie #4 : $-\left(P_{d2} + P_{02}\right) r_4 + \left(P_{d3} + P_{03}\right) r_4 + M_4 = J_4\ddot{\theta}_4$ Equ. I. 63

avec la tension dynamique P_{di} définie tel que :

$$P_{di}(t) = \frac{EA}{L_i}\left[\underbrace{u_i(L_i, t) - u_i(0, t)}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}(x_i, t)\right)^2 dx_i}_{\text{terme non linéaire}} \right] \qquad \text{Equ. I. 64}$$

Les angles α_1 et α_2 repèrent le bras du tendeur par rapport aux deux brins de courroie adjacents tels qu'ils sont définis sur la figure I.30.

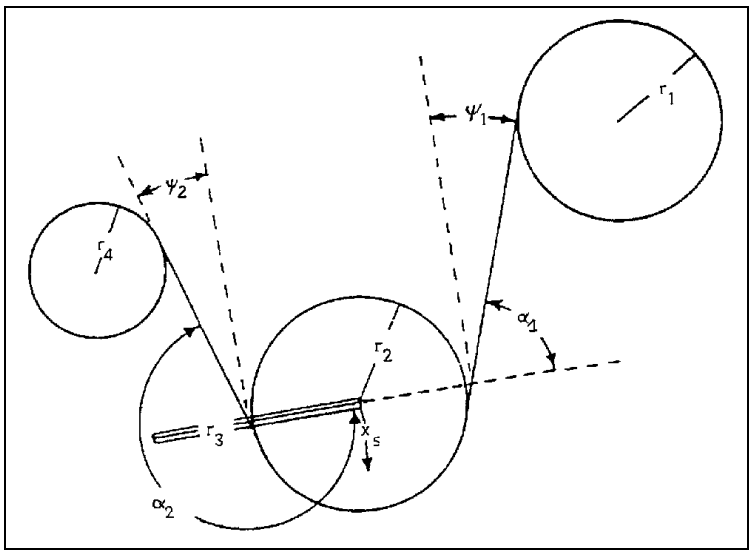


Figure I. 30 : Nomenclature concernant le tendeur.

R. S. Beikmann calcule à partir des équations I.58 à I.63 l'équilibre du système à une vitesse de rotation donnée avec (1) une méthode itérative numérique et (2) une méthode analytique approchée. C'est cette deuxième méthode qui sera étudiée car elle définit une

constante d'efficacité η pour le tendeur, utile pour prévoir la tendance du comportement du tendeur à une variation de tension.

I.2.1.6.2. Contante d'efficacité du tendeur η

De façon similaire à l'équation I.53, nous pouvons retrancher à la tension totale P_0 une petite variation de tension ΔP quelconque (R. S. Beikmann considère la tension centrifuge P_c mais le raisonnement est généralisable) :

$$P_o = P_t + \Delta P \qquad \text{Equ. I. 65}$$

Le but du tendeur est de rattraper la variation de tension ΔP pour maintenir constante la tension de traction. La tension totale P_0 peut être aussi attachée à la tension initiale ou tension de pose P_r et une variation de tension ΔP :

$$P_0 \approx P_r + \eta \Delta P \qquad \text{Equ. I. 66}$$

En combinant les équations I.65 et I.66, nous avons également :

$$P_t \approx P_r - \kappa \Delta P \qquad \text{Equ. I. 67}$$

avec $\eta = 1-\kappa$

Il en résulte : $\kappa = \left.\dfrac{dP_t}{d\Delta P}\right|_{P_t}$ Equ. I. 68

En conséquence, un excellent tendeur qui maintient la tension de traction ($dP_t/d\Delta P = 0$) aura une constante proche de 1. En revanche, un tendeur médiocre aura une constante η proche de 0. La constante η définit donc la capacité du tendeur à rattraper une petite variation de tension ΔP. On remarque qu'un tendeur avec une constante $\eta>1$ fait plus que rattraper la tension puisqu'elle s'accroît au delà de la variation de tension.

Une première relation géométrique dL/dx_S (L, longueur de la courroie) pouvant être définie comme un "gain de compensation" du tendeur, s'écrit :

$$dL/dx_S = \cos\psi_1 + \cos\psi_2 \qquad \text{Equ. I. 69}$$

Les angles ψ_1 et ψ_2 sont complémentaires aux angles α_1 et α_2 (figure I.30).

L'accroissement de longueur dL est causé d'une part par l'accroissement de la tension dP_t et d'autre part par l'accroissement $d\Delta P$. En conséquence, l'équation I.69 devient :

$$\left(\cos\psi_1 + \cos\psi_2\right)dx_S = \left(L/EA\right)d\Delta P + \left(L/EA\right)dP_t \qquad \text{Equ. I. 70}$$

Une deuxième relation impliquant dP_t est définie en équilibrant tout d'abord les forces s'appliquant sur la poulie du tendeur dans la direction du mouvement x_S. Ensuite, la dérivation suivant x_S conduit à :

$$\frac{dP_t}{dx_S} = -\frac{P_t(\zeta_1 + \zeta_2) + k_S}{\cos\psi_1 + \cos\psi_2} \qquad \text{Equ. I. 71}$$

avec $k_S = k_r/r_3^2$

$$\zeta_1 = \frac{d(\cos\psi_1)}{dx_S} = -\sin\psi_1\left(-\frac{1}{r_3} - \frac{L_{1b}}{L_{12}^2} + \frac{(r_1 + r_2)L_{1a}}{L_{12}^2 L_1}\right) \qquad \text{Equ. I. 72}$$

$$\zeta_2 = \frac{d(\cos\psi_2)}{dx_S} = -\sin\psi_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{L_{2b}}{L_{22}^2} + \frac{(r_2 + r_4)L_{2a}}{L_{22}^2 L_2}\right) \qquad \text{Equ. I. 73}$$

L_1 et L_2 longueur des brins 1 et 2 (figure I.31)
L_{12} et L_{22} entr'axe des poulies 1, 2 et 4 (figure I.31),
L_{1a} et L_{1b} projection de l'entr'axe L_{12} sur les directions parallèle et perpendiculaire au bras du tendeur (figure I.31),
L_{2a} et L_{2b} projection de l'entr'axe L_{22} sur les directions parallèle et perpendiculaire au bras du tendeur (figure I.31),

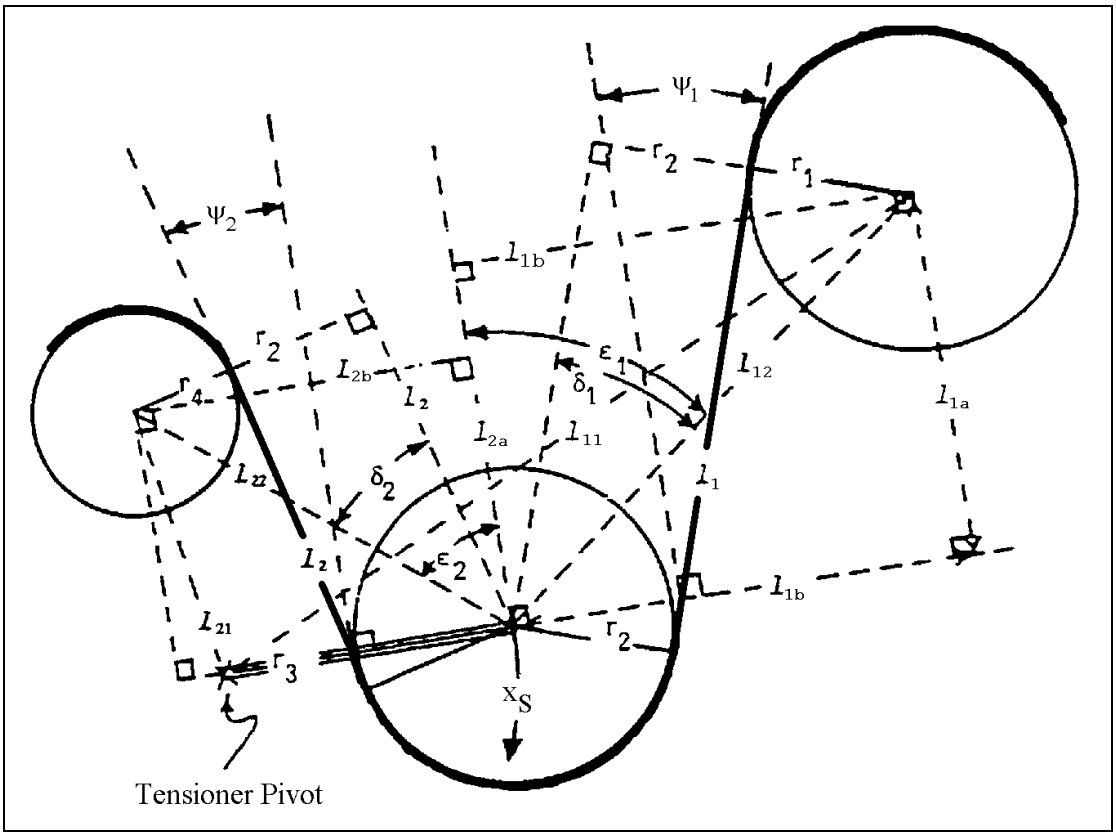


Figure I. 31 : Détails sur la région du tendeur.

La combinaison des équations I.70 et I.71 conduit à :

$$dP_t = \frac{-d\Delta P}{\frac{EA}{L}\left(\frac{\left(\cos\psi_1 + \cos\psi_2\right)^2}{P_t\left(\zeta_1 + \zeta_2\right) + k_S}\right)} \qquad \text{Equ. I. 74}$$

D'après l'équation I.68, nous obtenons :

$$\kappa = \frac{1}{\frac{EA}{L}\left(\frac{\left(\cos\psi_1 + \cos\psi_2\right)^2}{P_t\left(\zeta_1 + \zeta_2\right) + k_S}\right)} \qquad \text{Equ. I. 75}$$

où, en utilisant l'équation I.65 différenciée :

$$\eta = \frac{1}{\frac{L}{EA}\left(\frac{P_r\left(\zeta_1 + \zeta_2\right) + k_S}{\left(\cos\psi_1 + \cos\psi_2\right)^2}\right) + 1} \qquad \text{Equ. I. 76}$$

La dérivation faite pour obtenir la constante η n'est valable que pour des rotations infinitésimales du tendeur. R. S. Beikmann utilise cette constante à partir de l'état initial (c=0 et $x_S = r_3\left(\theta_3 - \theta_{3r}\right) = 0$ - figure I.30) pour obtenir l'équilibre (ou du moins une tendance) du système en fonctionnement avec la variation de tension P_c dans la courroie due à l'effet centrifuge.

En réorganisant l'équation I.76, nous avons la forme suivante :

$$\eta = \frac{k_b}{k_b + k_g + k_S} \qquad \text{Equ. I. 77}$$

avec $k_b = \left(EA/L\right)\left(\cos\psi_1 + \cos\psi_2\right)^2$

$k_g = P_r\left(\zeta_1 + \zeta_2\right)$

$k_S = k_r / r_3^2$

La constante η devient un rapport de trois types de raideur :

1. k_b est la raideur de courroie provenant de l'allongement de celle-ci. Elle est toujours positive.

2. k_g est la raideur géométrique provenant des variations des angles ψ_1 et ψ_2 formés par le bras du tendeur et les brins adjacents. Elle peut être négative ou positive. k_g peut être exprimé aussi comme :

$$k_g = P_r \frac{d^2 L}{dx_S^2} \qquad \text{Equ. I. 78}$$

k_g devient donc nul lorsque le gain de compensation du tendeur (dL/dx_S) est maximum.

1. k_S est la raideur associé au tendeur. Elle est toujours positive.

La question de la stabilité du tendeur est également essentielle. Pour la déterminer, l'énergie potentielle U du système est calculée :

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{EA}{L}\right)\left(L - L_U\right)^2 + \frac{1}{2}k_S x_S^2 \qquad \text{Equ. I. 79}$$

avec L longueur totale de la courroie,
L_U longueur au repos de la courroie.

La condition requise pour la stabilité ($d^2U/dx_S^2 > 0$) entraîne :

$$\eta > 0 \qquad \text{Equ. I. 80}$$

La constante η est donc un paramètre complet pour la conception d'une transmission synchrone avec un tendeur dynamique. La stabilité et l'efficacité du tendeur est souvent jaugée intuitivement dans les bureaux d'études. La constante η apporte par conséquent une aide précieuse à la conception, car elle permet, sous sa forme de l'équation I.77, une analyse simplifiée de la transmission.

Un exemple d'analyse est présentée sur la base de la transmission présentée sur la figure I.32. L'angle du bras du tendeur γ_1 avec l'horizontale varie sur un tour alors que les coordonnées de la poulie tendeur restent constantes. Les quatre courbes de la figure I.33 correspondent à quatre valeurs de raideur de tendeur.

Pour la plus forte valeur de raideur, $k_r = 5440$, la constante η atteint logiquement les plus faibles valeurs selon l'équation I.77. Le maximum est atteint pour $\gamma_1 = 0$ et 180° lorsque k_g s'annule, c'est-à-dire lorsque le gain de compensation du tendeur (dL/dx_S) est maximum (figure I.34). Au fur et à mesure que la raideur k_r diminue en valeur, la constante η s'approche de la valeur recherchée 1. Pour les très basses valeurs de raideur k_r, la constante η dépasse la valeur unité. Pour $82° < \gamma_1 < 98°$, le comportement devient instable ($\eta < 0$). Ce résultat se comprend intuitivement si on considère que le bras du tendeur est à la bissectrice de l'angle formé par les deux brins adjacents. Cette situation est donc à éviter. D'autre paramètres peuvent aussi contribuer à augmenter la constante η comme la longueur du bras r_3 et la raideur longitudinale EA de la courroie (équation I.77).

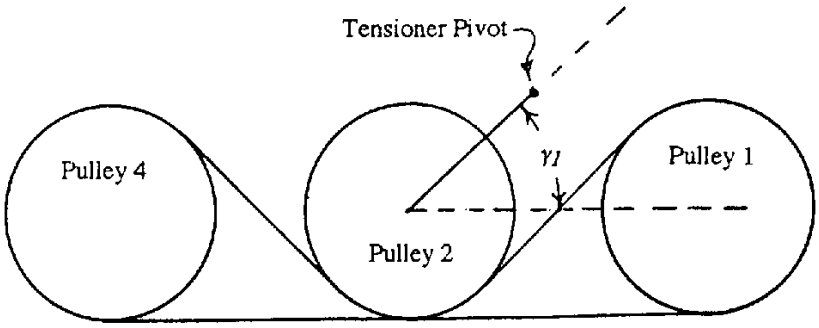


Figure I. 32 : Exemple d'une transmission à trois poulies.

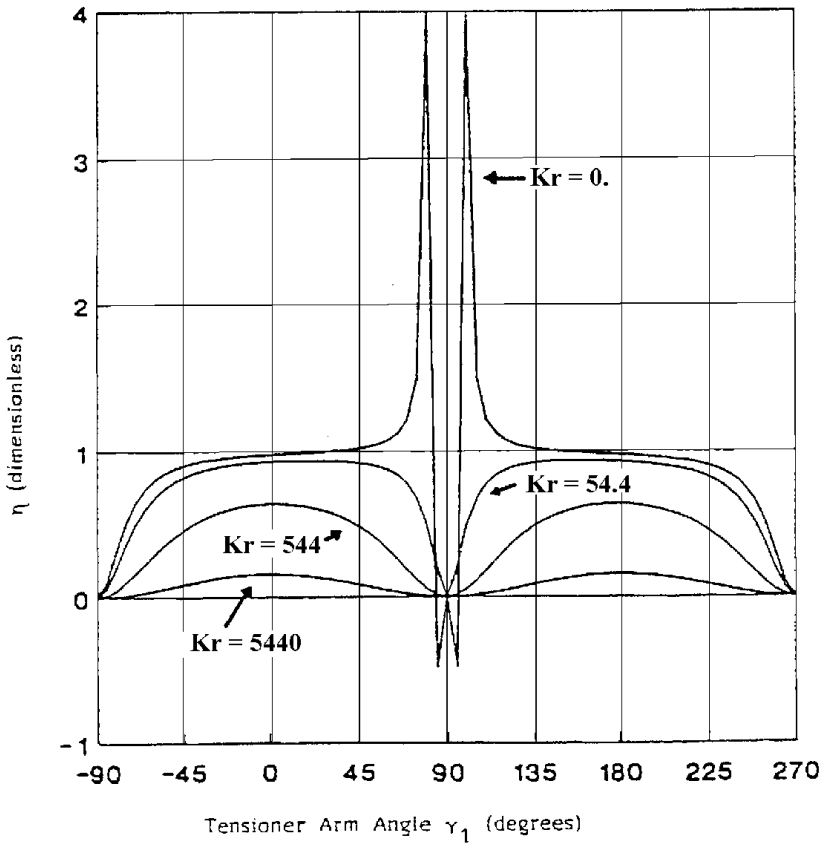


Figure I. 33 : Variation de la constante η en rapport avec l'angle du bras du tendeur γ_1.

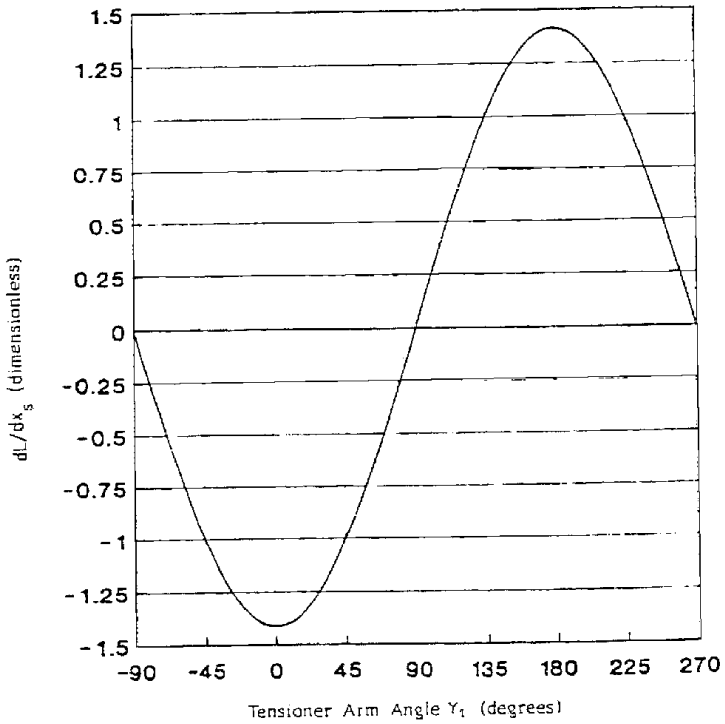


Figure I. 34 : Variation du gain de compensation dL/dx_S en rapport avec l'angle du bras du tendeur γ_1.

I.2.1.6.3. Analyse du modèle linéaire de vibration

Cette étape de l'analyse du modèle linéarisé est nécessaire pour calculer les modes du système, et qui seront ensuite utilisés pour l'analyse du modèle non-linéaire.

Le modèle est linéarisé pour de petites oscillations autour de l'équilibre. En exprimant les équations I.60, I.61 et I.63 en terme de déplacement $\chi_i = r_i\theta_i$, nous obtenons :

$$\begin{cases} P_{d1} - P_{d3} + F_{d1} = m_1\ddot{\chi}_1 \\ P_{d2} - P_{d1} + F_{d2} = m_2\ddot{\chi}_2 \\ P_{d3} - P_{d2} + F_{d4} = m_4\ddot{\chi}_4 \end{cases} \qquad \text{Equ. I. 81}$$

avec $F_{di} = M_{di}/r_i$ et $m_i = J_i/r_i^2$

Le terme non-linéaire de la tension dynamique P_{di} est négligé (équation I.64). La tension dans les brins ne dépend donc plus que des mouvements en rotation des poulies et du tendeur :

$$\begin{cases} P_{d1} = k_1(\chi_3\cos\psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \\ P_{d2} = k_2(\chi_3\cos\psi_2 + \chi_4 - \chi_2) \\ P_{d3} = k_3(\chi_1 - \chi_4) \end{cases} \qquad \text{Equ. I. 82}$$

avec $k_i = EA/L_i$

La combinaison des équations I.82 et I.81 montre que dans le cas linéaire, les oscillations transversales sont découplées des vibrations en rotation.

Le mouvement linéaire des brins en transversal est :

$$m\left(\ddot{w}_i + 2c\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial x}\right) - P_{ti}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0 \quad i = 1, 2,3 \qquad \text{Equ. I. 83}$$

Le retrait des termes non-linéaires de l'équation I.62 fournit l'équation du mouvement linéarisé du tendeur :

$$\begin{aligned} m_3\ddot{\chi}_3 = &-\left(k_S + k_{gr}\right)\chi_3 \\ &+\left(-P_{t1}\frac{\partial w_1}{\partial x}(l_1,t) + mc\dot{w}_1(l_1,t)\right)\sin\psi_1 \\ &+\left(-P_{t2}\frac{\partial w_2}{\partial x}(0,t) - mc\dot{w}_2(0,t)\right)\sin\psi_2 \\ &-k_1\left(\chi_3\cos\psi_1 + \chi_2 - \chi_1\right)\cos\psi_1 \\ &-k_2\left(\chi_3\cos\psi_2 + \chi_4 - \chi_2\right)\cos\psi_2 \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 84}$$

avec $k_S = k_r / r_3^2$ et $k_{gr} = \left(P_{t1}\sin\psi_1 - P_{t2}\sin\psi_2\right)/r_3$

L'équation I.84 couple le mouvement du bras du tendeur et le mouvement transversal des brins adjacents en fixant les conditions limites du mouvement transversal. Le couplage ne se fait donc qu'au niveau du tendeur car les autres poulies sont fixes en translation.

Un cas particulier de l'équation I.84 est obtenu lorsque l'inertie de la courroie est négligée. Dans ce cas, le modèle décrit un mouvement purement rotationel :

$$\begin{aligned} m_3\ddot{\chi}_3 \;=\; &-\left(k_S \;+\; k_{gr} \;+\; k'\right)\chi_3 \\ &-\; k_1\left(\chi_2 \;-\; \chi_1\right)\cos\psi_1 \\ &-\; k_2\left(\chi_4 \;-\; \chi_2\right)\cos\psi_2 \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 85}$$

avec $k' = k_1\cos^2\psi_1 + k_2\cos^2\psi_2$

Les équations I.81 à I.84 sont réécrites sous la forme d'un opérateur :

$$M\ddot{W} + G\dot{W} + KW = 0 \qquad \text{Equ. I. 86}$$

Le vecteur déplacement W est défini comme :

$$W(t) = \begin{Bmatrix} w \\ \chi \end{Bmatrix}$$

L'opérateur de masse M est défini comme :

$$M = \begin{bmatrix} M_{CC} & [0] \\ [0] & M_{DD} \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 87}$$

avec :

$$M_{CC} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_{DD} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

L'opérateur gyroscopique est défini comme :

$$G = \begin{bmatrix} G_{CC} & [0] \\ G_{DC} & [0] \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 88}$$

avec :

$$G_{CC} = \begin{bmatrix} 2mc\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 2mc\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 2mc\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_{DC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -mc\sin\psi_1\big|_{L_1} & -mc\sin\psi_2\big|_{0_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'opérateur de raideur K est défini comme :

$$K = \begin{bmatrix} K_{CC} & [0] \\ K_{DC} & K_{DD} \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 89}$$

avec :

$$K_{CC} = \begin{bmatrix} -P_{t1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -P_{t2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -P_{t3}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{DD} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_1\cos\psi_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 - k_2 & k_1\cos\psi_1 - k_2\cos\psi_2 & -k_2 \\ -k_1\cos\psi_1 & k_1\cos\psi_1 - k_2\cos\psi_2 & k_1\cos^2\psi_1 + k_2\cos^2\psi_2 + k_4 & k_2\cos\psi_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2\cos\psi_2 & k_2 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$K_{DC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_{t1}\sin\psi_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{L_1} & -P_{t2}\sin\psi_2 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R. S. Beikmann démontre que l'opérateur K est symétrique et défini positif, les opérateurs G et K étant également symétriques (dit biaisé) et définis semi-positif . Le système admet un mode de corps rigide lié à la vitesse de translation c uniforme de la courroie. Le système étant aussi conservatif et gyroscopique, l'équation I.86 admet par conséquent des valeurs propres imaginaires pures conjuguées $\pm\omega_r$.

La méthode de Holzer [Meirovitch, 1986] est utilisée pour évaluer les modes propres du système linéairement couplé. Elle consiste à chercher une solution harmonique pour la tension dynamique P_d et le mouvement de rotation des poulies χ :

$$P_{di} = \hat{P}_{di}\cos\omega t \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{Equ. I. 90}$$

et

$$\chi_i = \hat{\chi}_i \cos\omega t \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{Equ. I. 91}$$

Les fréquences naturelles ω sont déterminées selon deux boucles itératives :

<u>1ère boucle</u> :

La première boucle commence avec une valeur initiale arbitraire de ω et χ_4. Les équations I.81 et I.82 sont utilisées pour déterminer les vecteurs $\hat{P}_{di}$ et $\hat{\chi}_i$ pour une fréquence ω donnée :

$$\hat{P}_{d3} = \hat{P}_{d2} - m_4\omega^2\hat{\chi}_4 \qquad \text{Equ. I. 92}$$

$$\hookrightarrow \hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_4 + \hat{P}_{d3}/k_3$$

$$\hookrightarrow \hat{P}_{d1} = \hat{P}_{d3} - m_1\omega^2\hat{\chi}_1$$

$$\hookrightarrow \hat{\chi}_2 = \left(\hat{P}_{d1} - \hat{P}_{d2}\right)\Big/ m_2\omega^2$$

$$\hookrightarrow \hat{\chi}_3 = \left(\hat{P}_{d1}/k_1 + \hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\right)\Big/\cos\psi_1$$

$$\hookrightarrow \hat{P}_{2a} = k_2\left(\hat{\chi}_3\cos\psi_2 - \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_4\right) \;\blacktriangleright\; \text{retour à l'équ. I.92 avec } \hat{P}_{d2} \mapsto \hat{P}_{2a}$$

La première boucle se termine lorsque $\hat{P}_{d2} = \hat{P}_{2a}$.

<u>2ème boucle</u> :

La deuxième boucle commence avec la solution générale de l'équation I.83 pour le brin 1 :

$$w_1(x,t) = a_1 \sin\left(\omega x \frac{c_1}{c_1^2 - c^2}\right)\cos\left(\omega t + \omega\left(\left(x - L_1\right)\frac{c}{c_1^2 - c^2}\right)\right) \qquad \text{Equ. I. 93}$$

avec c, vitesse axiale de la courroie et $c_1 = \sqrt{P_{O1}/m}$, vitesse transversale.

Les conditions limites ($w_1(0,t) = 0$ et $w_1(L_1,t) = \hat{\chi}_3 \sin\psi_1 \cos\omega t$) conduisent à :

$$a_1 = \frac{\hat{\chi}_3 \sin\psi_1}{\sin\left(\omega L_1 \frac{c_1}{c_1^2 - c^2}\right)}$$

La solution générale de l'équation I.83 pour le brin 2 est :

$$w_2(x,t) = \left[a_2 \sin\left(\omega x \frac{c_2}{c_2^2 - c^2}\right) + \hat{\chi}_3 \sin\psi_2 \cos\left(\omega x \frac{c_2}{c_2^2 - c^2}\right)\right]\cos\left(\omega\left(t + x\frac{c}{c_2^2 - c^2}\right)\right) \qquad \text{Equ. I. 94}$$

avec c, vitesse axiale de la courroie et $c_2 = \sqrt{P_{O2}/m}$, vitesse transversale.

L'équation I.94 satisfait la condition limite $w_2(0,t) = \hat{\chi}_3 \sin\psi_2 \cos\omega t$ quelque soit a_2. Le paramètre a_2 est déterminé en utilisant les équations I.93 et I.94 dans l'équation du mouvement du tendeur I.84. Cela conduit à :

$$a_2 = \frac{P_{t1} a_1 \omega \frac{c_1}{c_1^2 - c^2}\cos\left(\omega L_1 \frac{c_1}{c_1^2 - c^2}\right)\sin\psi_1 + \hat{P}_{d1}\cos\psi_1 + \hat{P}_{d2}\cos\psi_2 + \left(k_4 - m_3\omega^2\right)\hat{\chi}_3}{P_{t2}\,\omega \frac{c_2}{c_2^2 - c^2}\sin\psi_2}$$

Utilisant cette valeur de a_2, on vérifie si la condition limite $w_2(L_2,t) = 0$ est vérifiée :

$$w_{2error} = \left[a_2 \sin\left(\omega L_2 \frac{c_2}{c_2^2 - c^2}\right) + \hat{\chi}_3 \sin\psi_2 \cos\left(\omega L_2 \frac{c_2}{c_2^2 - c^2}\right)\right] \qquad \text{Equ. I. 95}$$

La fréquence ω est alors ajustée et la première boucle répétée, jusqu'à ce que l'équation I.95 soit vérifiée. On obtient alors les modes propres du système linéarisé.

Le brin 3 n'étant pas couplé au reste du système, son traitement reste identique au problème classique de la corde vibrante.

Les calculs sont effectués pour deux transmissions différentes 1 et 2 (figure I.35) qui se différencient par la position du pivot tendeur. Le but est de faire varier la constante η.

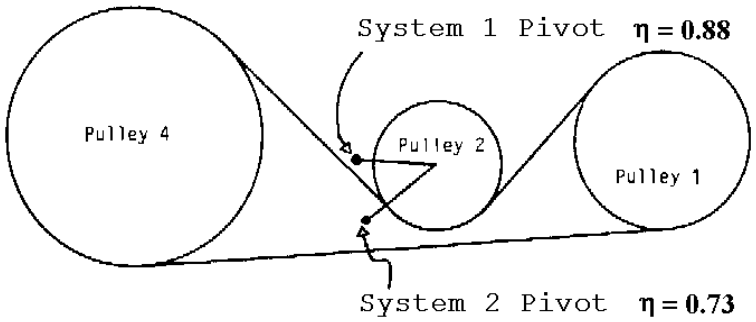


Figure I. 35 : Transmission serpentine 1 et 2.

La première conséquence de la variation de la constante η est la sensibilité des modes à la vitesse c de la courroie. Lorsque le problème est découplé, deux types de modes se distinguent :

1. les modes de rotation de poulie qui dépendent de la raideur longitudinale de la courroie. Ces modes sont donc indépendant de la vitesse de translation c de la courroie.

2. Les modes de flexion de courroie qui dépendent de la vitesse de translation c de la courroie (équation I.83).

En revanche, par couplage, les modes intègrent aussi bien de l'énergie de rotation que transversale. Les modes dominés par la rotation des poulies sont moins sensibles à la vitesse de translation c de la courroie, que les modes dominés par le mouvement transversal des brins. La figure I.36 montre les six premières fréquences naturelles du système 1 en omettant les modes découplés du brin 3. On observe distinctement les deux types de comportement modal susnommés en fonction de la vitesse de rotation : Certaines fréquences dominées par le mouvement transversal des brins décroissent plus rapidement alors que les autres fréquences restent plus longtemps constantes.

On peut observer sur la figure I.37 les six premières fréquences naturelles du système 2. Celles-ci décroissent plus rapidement en fonction de la vitesse de rotation que pour le système 1. Ce résultat est attendu car la constante η est plus faible (figure I.35) pour le système 2. L'équation I.67 montre, que pour une constante η plus faible, le tendeur est moins apte à rattraper la diminution de la tension de traction P_t due à l'effet centrifuge $\Delta P = mc^2$.

La deuxième conséquence de la baisse de la constante η s'observe sur la fréquence dominée par la rotation du bras du tendeur. Pour le système 1 ($\psi_1 = 40.1°$, $\psi_2 = 46.0°$), cette fréquence est à 265.1 Hz pour une vitesse de rotation nulle (figure I.36). Pour le système 2 ($\psi_1 = 85.1°$, $\psi_2 = 1.0°$), cette fréquence se situe à 215.5 Hz. Cette baisse de fréquence est liée selon R. S. Beikmann à la baisse de la raideur k' (équation I.85). Cependant, cette conclusion est remise en question au chapitre IV.3.4.

L'étude des couplages entre le mouvement des éléments discrets (poulies) et des éléments continus (brins) se fait par un paramètre θ_e. Ce paramètre caractérise la distribution entre l'énergie des éléments discrets E_D et l'énergie des éléments continus E_C :

$$\theta_e = a\sin\sqrt{\frac{E_D}{E_C + E_D}} \qquad \text{Equ. I. 96}$$

Nous avons donc :

- $0° \le \theta_e < 25°$: Le mode est essentiellement composé du mouvement transversal du brin.
- $25° \le \theta_e \le 75°$: Le mode est mixte indiquant un haut degré de couplage.
- $75° < \theta_e \le 90°$: Le mode est essentiellement composé du mouvement en rotation des poulies.

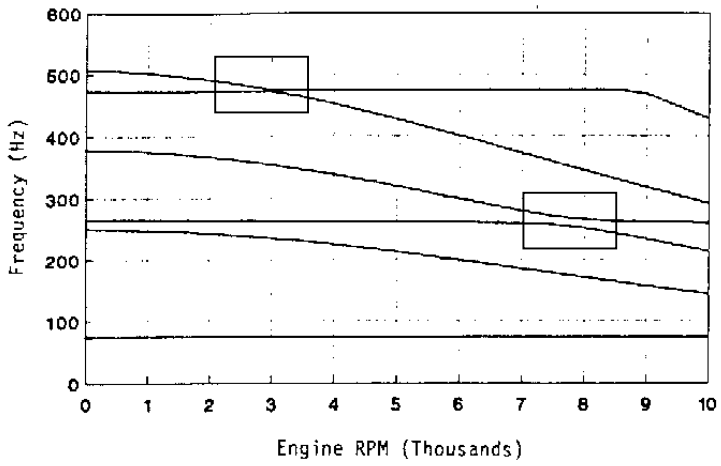


Figure I. 36 : Diagramme de Campbell pour le système 1.

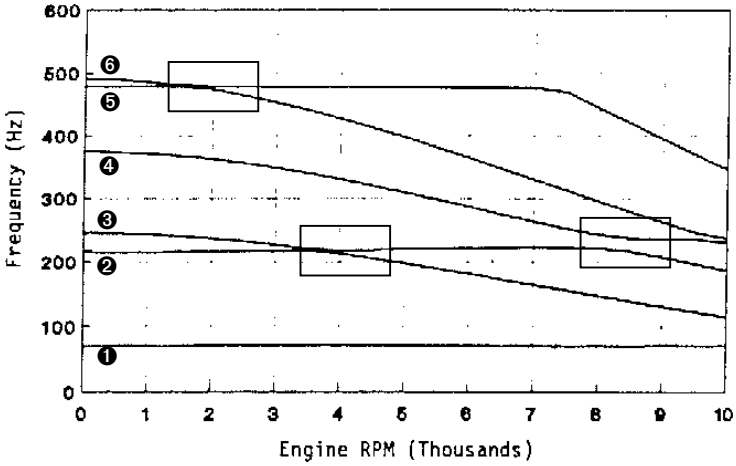


Figure I. 37 : Diagramme de Campbell pour le système 2.

L'examen du tableau I.4 montre que les modes du système 2 sont peu couplés à vitesse nulle. Toutefois, au fur et à mesure que la vitesse de rotation de la transmission augmente, le

couplage entre les modes de mouvement transversal et de rotation est responsable d'une inflexion de la courbe des fréquences. Ce phénomène appelé *curve veering*, est mis en relief par des encadrés sur les figures I.36 et I.37. Pour le système 2, nous avons $\sin\psi_1 = 0.996$ et $\sin\psi_2 = 0.017$. Il en résulte selon l'équation I.84 un couplage du bras du tendeur beaucoup plus fort avec le brin 1 qu'avec le brin 2. Le degré de couplage est visualisé par l'importance de l'inflexion entre deux courbes de fréquence sur le diagramme de Campbell. Cela est observable sur la figure I.37 où l'inflexion à 3700 tr/mn entre le mode ❷ (rotation du tendeur) et le mode ❸ (mouvement transversal du brin 2) est moins prononcée que pour l'inflexion entre le mode ❸ et le mode ❹ (mouvement transversal du brin 1) à 8100 tr/mn.

L'inflexion observée à 3700 tr/mn sur la figure I.37 laisse à penser que les courbes ❷ et ❸ de fréquence se croisent. Il n'en est rien comme le montre l'agrandissement visualisé sur la figure I.38. En fait, les deux courbes se rapprochent puis s'infléchissent. En revanche, nous avons bien dans le même temps un changement de nature des deux modes comme le montre la figure I.39. Il se passe un échange d'énergie durant l'inflexion où il y a un fort degré de couplage ($\theta_e \approx 45°$). Le mode de mouvement transversal d'un brin devient un mode de rotation et vice-versa. À ce moment, le mouvement transversal des brins peut être facilement excité par la rotation des brins, donc par le couple appliqué sur les poulies. Cette forme d'excitation des brins est à distinguer de l'excitation paramétrique due aux couplages non-linéaire.

Les modes pour le modèle linéaire ayant été établis, nous pouvons poursuivre avec l'examen des couplages non-linéaires.

Numéro du mode	Fréquence naturelle (Hz)	θ_e (en degré)
❶	74.4	87.68
❷	249.0	84.19
❸	265.1	0.72
❹	378.1	5.58
❺	473.1	87.93
❻	506.5	0.56

Table I. 4 : Fréquences naturelles et distribution de l'énergie pour chaque mode du système 2 à vitesse nulle.

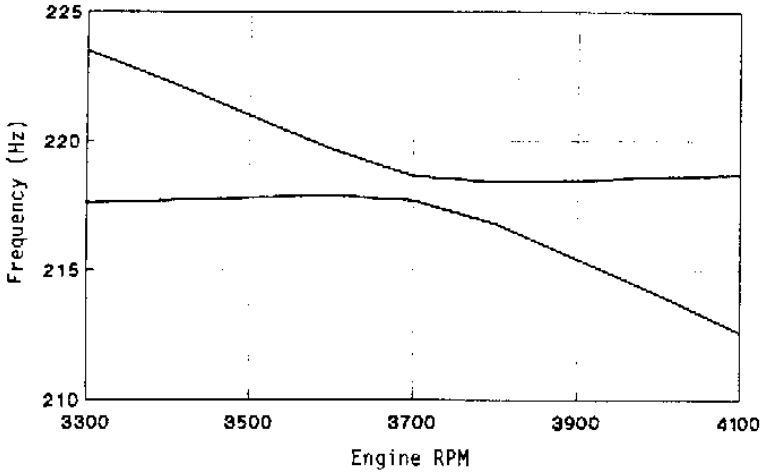


Figure I. 38 : Inflexion des fréquences naturelles (système 2).

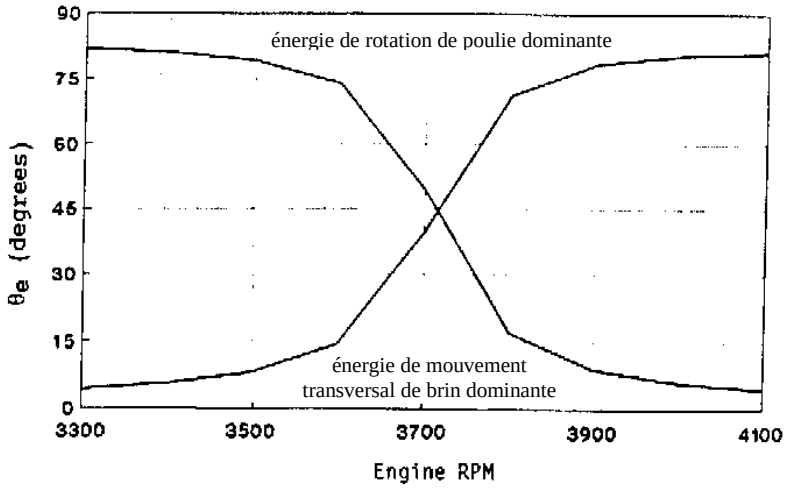


Figure I. 39 : Distribution de l'énergie modale pendant l'inflexion des fréquences naturelles (système 2).

I.2.1.6.4. Analyse du modèle non-linéaire de vibration

Les équations non-linéaires du mouvement I.58 à I.63 sont reprises et réécrites sous la même forme de l'équation I.86 :

$$M\ddot{W} + G\dot{W} + KW = Q \qquad \text{Equ. I. 97}$$

Les éléments du premier ordre (linéaire) sont rassemblés à gauche de l'égalité I.86. Ainsi, les opérateurs M, G, et K ne changent pas des équations I.87 à I.89. À droite de l'égalité I.86 sont rassemblés dans l'opérateur Q les termes non-linéaires :

$$Q = \begin{Bmatrix} P_{d1}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ P_{d2}\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \\ P_{d3}\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \\ P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1} \\ P_{d2NL} - P_{d1NL} \\ -P_{d1NL}\cos\psi_1 - P_{d2NL}\cos\psi_2 \\ P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 98}$$

avec $F_{di} = M_{di}/r_i$ où M_{di}, est le couple appliqué sur la poulie i,

$P_{diNL}(t) = \dfrac{EA}{2L_i}\int_0^{L_i}\left(\dfrac{\partial w_i}{\partial x}(x_i,t)\right)^2 dx_i$: tension dynamique non-linéaire.

L'équation I.97 est réarrangé en une expression du premier ordre :

$$A\dot{U} + BU = X(t) \qquad \text{Equ. I. 99}$$

avec comme variable d'état : $U(t) = \begin{Bmatrix} \dot{W}(t) \\ W(t) \end{Bmatrix}$

et : $A = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} G & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}$ $X(t) = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix}$

La symétrie de K et la symétrie baisée de G sont consécutives à la définition du produit de vecteur donnée avec l'équation I.104. La symétrie vérifie $\langle AY, Z\rangle = \langle AZ, Y\rangle$ et $\langle BY, Z\rangle = -\langle BZ, Y\rangle$, où Y et Z sont deux vecteurs arbitraires de la forme définie avec l'équation I.100. Le système associé à l'équation homogène ($X(t) \equiv 0$) est conservatif et gyroscopique. L'équation I.86 admet par conséquent des valeurs propres imaginaires pures conjuguées $\pm\omega_r$ avec des vecteurs propres associés complexes conjugués de la forme :

$$\hat{U} = \begin{Bmatrix} \lambda\hat{W} \\ \hat{W} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 100}$$

où

$$\hat{W} = \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\chi} \end{Bmatrix} \qquad \hat{w} = \begin{Bmatrix} \hat{w}_2(x) \\ \hat{w}_2(x) \\ \hat{w}_3(x) \end{Bmatrix} \qquad \hat{\chi} = \begin{Bmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \hat{\chi}_2 \\ \hat{\chi}_3 \\ \hat{\chi}_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 101}$$

La méthode de calcul approché des modes est décrite au chapitre I.I.2.1.6.3. Il en résulte la matrice modale :

$$P = \left[\overline{Y}_1 \overline{Z}_1 \overline{Y}_2 \overline{Z}_2 \ldots\ldots \overline{Y}_n \overline{Z}_n\right] \qquad \text{Equ. I. 102}$$

où $\overline{Y}_r$ et $\overline{Z}_r$ sont les parties réelles et imaginaires du vecteur propre $\overline{U}_r$. Notons que les vecteurs propres surmontés d'une barre sont normalisés pour vérifier $\langle Y, AY\rangle = \langle Z, AZ\rangle = 1$, alors que ceux surmontés d'un accent circonflexe sont normalisés pour vérifier $\langle U, AU\rangle = 1$. Ainsi, la matrice modale vérifie les conditions d'orthogonalités :

$$\langle P, AP\rangle = I \quad \langle P, BP\rangle = H \qquad \text{Equ. I. 103}$$

où I est la matrice identité et H, la matrice des valeurs propres :

$$H = \langle P, BP \rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. I. 104}$$

Les conditions d'orthogonalités utilisent le produit de vecteurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_r, \hat{U}_s \rangle = & \int_0^{l_1} \left(\omega_r \omega_s \hat{w}_{1r}(x) \hat{w}_{1s}^*(x) + \hat{w}_{1r}(x) \hat{w}_{1s}^*(x) \right) dx \\ & + \int_0^{l_2} \left(\omega_r \omega_s \hat{w}_{2r}(x) \hat{w}_{2s}^*(x) + \hat{w}_{2r}(x) \hat{w}_{2s}^*(x) \right) dx \\ & + \int_0^{l_3} \left(\omega_r \omega_s \hat{w}_{3r}(x) \hat{w}_{3s}^*(x) + \hat{w}_{3r}(x) \hat{w}_{3s}^*(x) \right) dx \\ & + \omega_r \omega_s \hat{\chi}_r^T \hat{\chi}_s^* + \hat{\chi}_r^T \hat{\chi}_s^* \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 105}$$

où * symbolise la conjugaison complexe.

La variable d'état U(t) est projetée sur l'espace modale associé à l'équation homogène linéaire :

$$U(t) \approx \sum_{r=1}^{n} \left(\xi_r(t) \overline{Y}_r + \eta_r(t) \overline{Z}_r \right) = PV(t) \qquad \text{Equ. I. 106}$$

où

$$V(t) = \left[\xi_1(t)\ \eta_1(t)\ \xi_2(t)\ \eta_2(t) \ldots \xi_n(t)\ \eta_n(t) \right]^T$$

est le vecteur des coordonnées modales. La substitution de l'équation I.106 dans l'équation I.97 conduit à :

$$AP\dot{V}(t) + BPV(t) = X(t) \qquad \text{Equ. I. 107}$$

En multipliant l'équation I.107 par P, nous obtenons :

$$\langle P, AP \rangle \dot{V}(t) + \langle P, BP \rangle V(t) = \langle P, X(t) \rangle$$

Puis, en utilisant les propriétés d'orthogonalité de l'équation I.103 :

$$I\dot{V}(t) + HV(t) = R(t) \qquad \text{Equ. I. 108}$$

où les termes non-homogènes sont groupés dans :

$$\begin{aligned} R(T) &= \langle P, X(t) \rangle \\ &= \left[S_1(t)\, T_1(t)\, S_2(t)\, T_2(t) \ldots\ldots S_n(t)\, T_n(t) \right]^T \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 109}$$

où :

$$S_r = \langle \overline{Y}_r, X(t) \rangle \qquad T_r = \langle \overline{Z}_r, X(t) \rangle \qquad \text{Equ. I. 110}$$

Ainsi, pour chaque mode r, l'équation I.108 conduit à une paire d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r(t) - \omega_r \eta_r(t) = S_r(t) \\ \dot{\eta}_r(t) - \omega_r \xi_r(t) = T_r(t) \end{cases} \qquad \text{Equ. I. 111}$$

Les termes d'excitations modale, S_r et T_r, sont développés dans le cas particulier de la transmission à trois poulies (figure I.29). Il est intéressant d'étudier ces termes dans leur forme car ils mènent à des excitations non-linéaires quadratiques. Pour le premier mode, les équations régissant la partie réelle et imaginaire des coordonnées modales sont :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 - \omega_1 \eta_1 = {} & P_{d1}\left(\xi_1 C_{1111} + \eta_1 D_{1111} + \xi_2 C_{1211} + \eta_2 D_{1211}\right) \\ & + P_{d2}\left(\xi_1 C_{2111} + \eta_1 D_{2111} + \xi_2 C_{2211} + \eta_2 D_{2211}\right) \\ & - 2\zeta_1 \omega_1 \xi_1 \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 112}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 - \omega_1 \xi_1 = {} & P_{d1}\left(\xi_1 C_{1112} + \eta_1 D_{1112} + \xi_2 C_{1212} + \eta_2 D_{1212}\right) \\ & + P_{d2}\left(\xi_1 C_{2112} + \eta_1 D_{2112} + \xi_2 C_{2212} + \eta_2 D_{2212}\right) \\ & + \left[- P_{d1NL} \cos\psi_1 + P_{d2NL} \cos\psi_2 \right] \omega_1 \bar{a}_{61} \\ & + \left[P_{d3NL} - P_{d1NL} + F_{d4} \right] \omega_1 \bar{a}_{71} \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 113}$$

avec C_{ijkl} et D_{ijkl} constantes d'intégration dépendantes des vecteurs propres,
$\bar{a}_{ir}$ $i^{ème}$ composante de $\overline{W}$ ou $(i-3)^{ème}$ composante de $\overline{\chi}$ (équation I.101),
ζ_r coefficient d'amortissement modal obtenu expérimentalement.

Le mode 2 est similaire au mode 1. Le mode 3 concerne le mouvement transversal linéairement découplé du brin 3 :

$$\dot{\xi}_3 - \omega_3 \eta_3 = P_{d3}\left(\xi_3 C_{3331} + \eta_3 D_{3331}\right) - 2\zeta_2 \omega_3 \xi_3 \qquad \text{Equ. I. 114}$$

$$\dot{\eta}_3 + \omega_3 \xi_3 = P_{d3}\left(\xi_3 C_{3332} + \eta_3 D_{3332}\right) \qquad \text{Equ. I. 115}$$

On rappelle que la tension dynamique totale P_d s'écrit :

$$P_{di} = P_{diL} + P_{diNL} \qquad \text{Equ. I. 116}$$

R. S. Beikmann montre que la partie linéaire de la tension dynamique P_{diL} est proportionnelle à ξ_1 et ξ_2, et que la partie non-linéaire P_{diNL} est proportionnelle à ξ_1^2, $\xi_1\eta_1$, $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\eta_2$, η_1^2, $\xi_2\eta_1$, ξ_2^2, $\eta_1\eta_2$, $\xi_2\eta_2$, et η_2^2.

L'examen des équations modales révèle le processus non-linéaire menant à la résonance paramétrique (annexe 1). Lors de ce processus, deux modes s'excitent mutuellement en s'échangeant de l'énergie.

La résonance venant de termes quadratiques peut être décrite par exemple en prenant l'équation I.112 régissant ξ_1. Au second membre apparaît un terme quadratique proportionnel à $\xi_1^2 C_{1211}$. Si la réponse libre de ξ_2 contient une fréquence ω_2 tel que $\xi_2 = A\cos(\omega_2 t)$, alors $\xi_2^2 = A^2\left(1+\cos(2\omega_2 t)\right)/2$. Le terme ξ_2^2 provoque alors une résonance dans l'équation gouvernant ξ_1 si $\boldsymbol{\omega_2 = 2\omega_1}$. Le mode 3 a aussi des couplages quadratiques avec les deux autres modes et est donc susceptible d'entrer en résonance 1:2.

La résonance peut venir également des termes cubiques issus de la partie non-linéaire de la tension dynamique. Par exemple, le terme proportionnel à $\xi_1^2\xi_2$ provoque une résonance si $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_1}$ ou $\boldsymbol{\omega_2 = 3\omega_1}$.

Les équations modales sont intégrées suivant le schéma de Runge-Kutta. Un exemple de calcul est donnée avec la figure I.40 et la figure I.41. Le mode 1 à dominante de mouvement en rotation de la poulie 4 et dont la fréquence naturelle est 261 Hz (1 % d'amortissement modal), est excité sur sa fréquence naturelle. Le mode 2 qui correspond au mouvement transversal du brin 3 et dont sa fréquence naturelle 130.5 Hz (0.3 % d'amortissement modal), est alors excité selon un couplage quadratique avec une résonance de type 1:2. Pour cela, il faut que les conditions initiales du mode 2 soient non nulles.

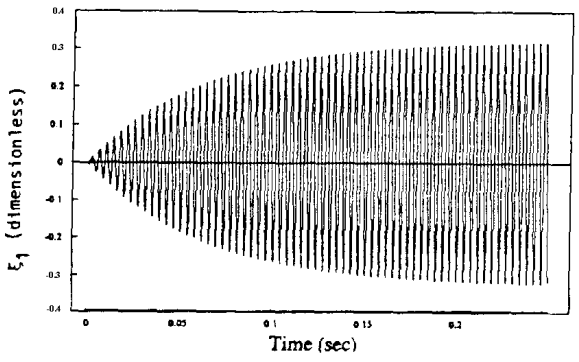


Figure I. 40 : Résonance paramétrique du mode 1 (dominante en rotation).

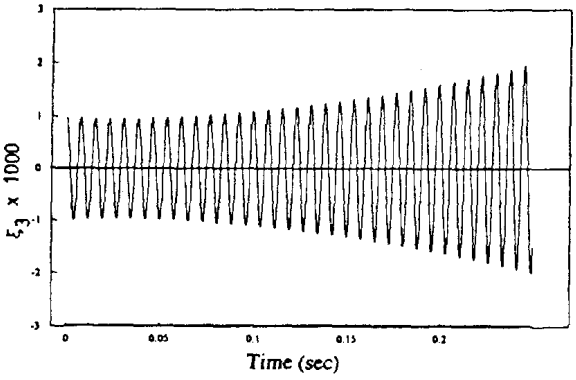


Figure I. 41 : Résonance paramétrique du mode 2 (dominante en transversale).

I.2.1.6.5. Résultats expérimentaux

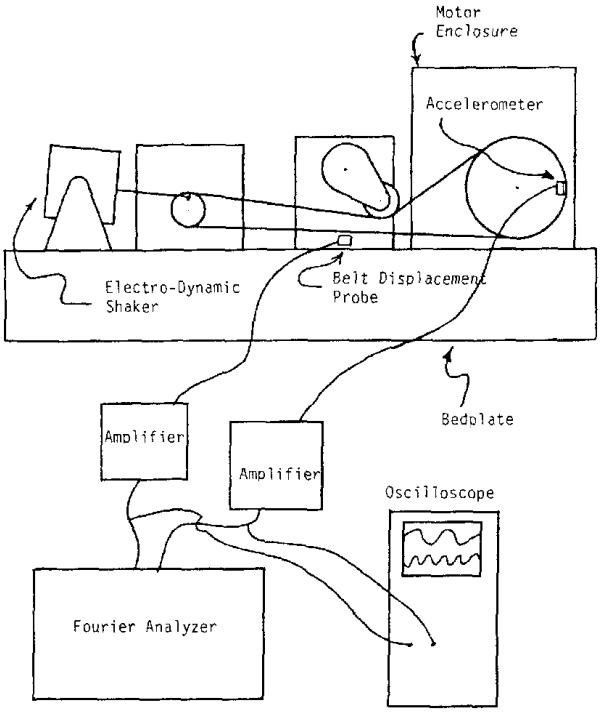


Figure I. 42 : Banc de mesure.

Les résultats calculés sont comparés à ceux mesurés en utilisant un banc de mesure décrit sur la figure I.42. Une transmission de référence est utilisée avec un mode dominée par la rotation dont la fréquence naturelle (ω_1 = 62.5 Hz) est environ deux fois la fréquence naturelle (ω_3 = 33 Hz) du mode du mouvement transversal du brin 3.

Une première mesure est faite sur la fréquence du mouvement transversal du brin 3 (figure I.43). On constate une bonne corrélation avec le calcul quelque soit la vitesse du moteur.

D'autres observations sont issues du banc avec la transmission au repos (c = 0), dont la poulie 4 est excitée par un pot d'excitation électro-dynamique. La figure I.44 montre l'amplitude stationnaire de la réponse du brin 3 en fonction de l'amplitude de l'excitation. Nous voyons que l'amplitude reste minime en deçà d'un certain seuil d'amplitude d'excitation, pour ensuite faire un bond de plus de 50 dB mm. Le cycle limite est alors largement visible à l'œil nu et entraîne un élévation brusque du niveau sonore. Ce phénomène est classique pour les système non-linéaires (annexe 1 - figure 5). Autre phénomène attendu est la sensibilité aux conditions initiales. La figure I.44 confirme une variation de 4 dB N. du seuil de saut lorsque le brin de courroie est initialement pincé ou non.

Concernant les systèmes non-linéaires, la figure 1 de l'annexe 1 montre un accroissement de la zone instable avec une augmentation de l'amplitude d'excitation (h pour l'annexe 1). La figure I.45 illustre ce comportement en montrant la réponse fréquentielle en amplitude du brin 3 pour deux niveaux d'excitation. On constate que la zone d'instabilité double avec une hausse de 6 dB N. rms de l'amplitude d'excitation.

Nous savons également qu'une petite modification sur la transmission peut avoir de grands effets. En effet, une petite masse de 76 grammes ajoutée au centre de la poulie du tendeur abaisse la fréquence naturelle du mode dominée par la rotation de 62.5 Hz à 58.0 Hz. L'excitation sur la poulie 4 étant toujours à 66 Hz, l'amplitude nécessaire pour déstabiliser le brin 3 est beaucoup plus forte, éloignant le seuil de 15 dB N. rms (figure I.46). Le comportement de la transmission est donc radicalement différent.

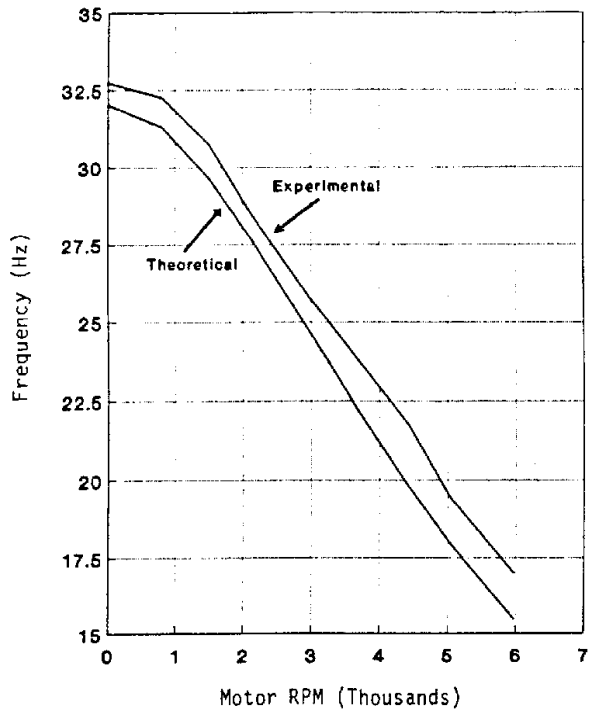


Figure I. 43 : Fréquence du mouvement transversal du brin 3 en fonction de la vitesse du moteur.

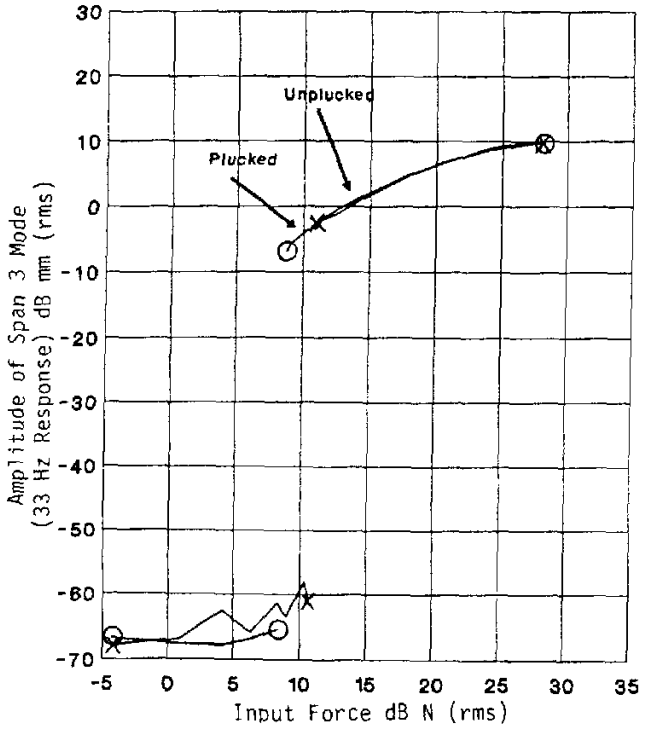


Figure I. 44 : Amplitude stationnaire de la réponse du brin 3, pincé ou non comme condition initiale.

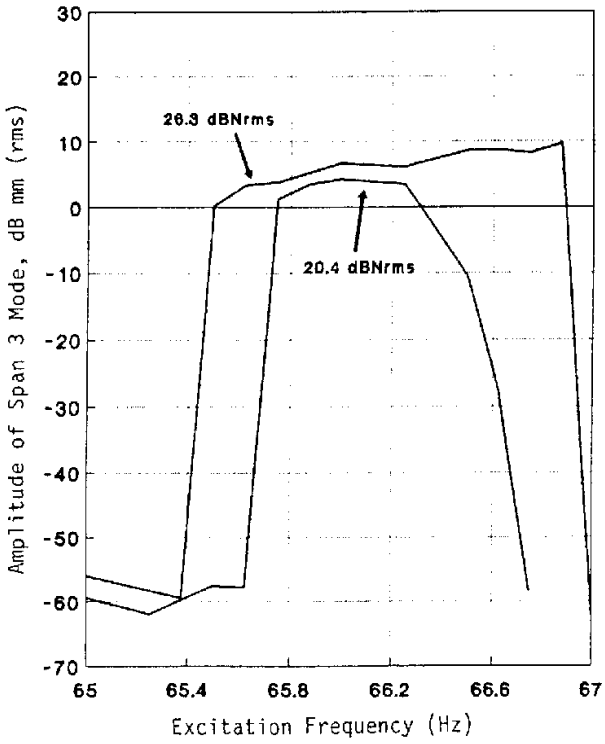


Figure I. 45 : Réponse fréquentielle du mode associé au brin 3.

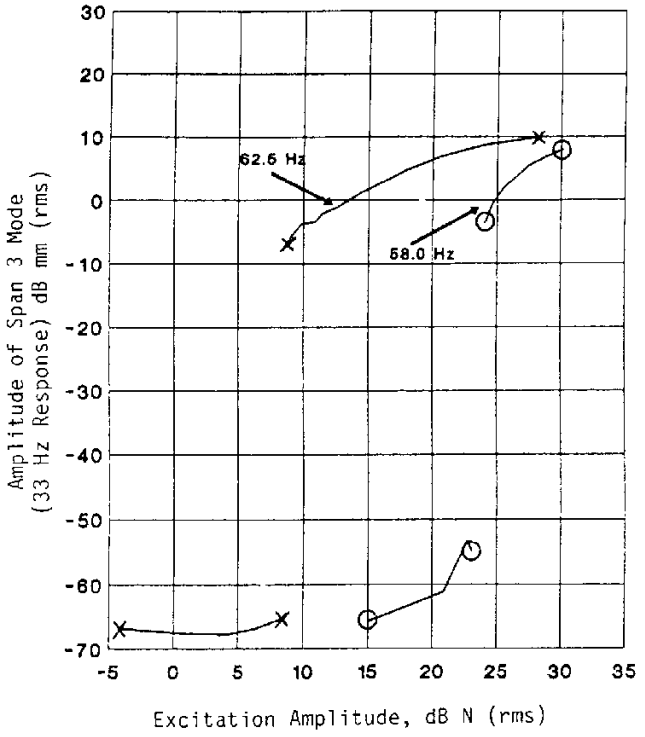


Figure I. 46 : Amplitude stationnaire de la réponse du brin 3 pour la transmission de base et modifiée avec une masse.

I.2.2. Modélisation des transmissions synchrones par courroie dentée

Le problème suscité par les courroies dentées est plus complexe que pour les courroies à transmission par frottement. La présence d'une denture déformable et interagissante ne facilite pas la modélisation. D'autre part, les transmissions complexes entraînées par courroie dentée ne se sont développées que tout récemment - à l'instar de la transmission de distribution du moteur V6 PSA-Renault (figure I.47) sorti en 1997 et qui entraîne pas moins de dix éléments avec une courroie de deux mètres (courroie présentée au tableau III.1) - à l'opposé des transmissions complexes entraînées par courroie Poly-V (serpentine). Ces deux facteurs évoqués précédemment peuvent expliquer la rareté des modèles en rotation pour les courroies dentées vis-à-vis de ceux développés pour les courroies Poly-V.

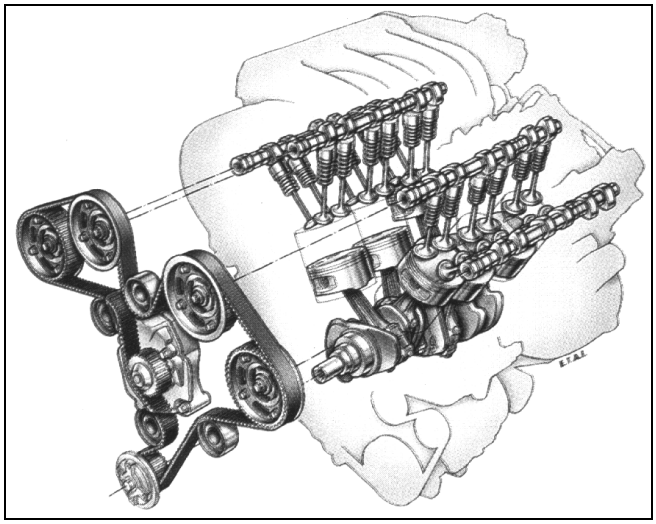


Figure I. 47 : Équipage mobile et distribution du nouveau V6 PSA-Renault [Auto Concept].

I.2.2.1. Modèle élémentaire de Mizuno et al. (1988)

N. Mizuno et al. (1988) modélisent une transmission de distribution par courroie dentée. La figure I.48 présente les éléments d'un modèle élémentaire à un degré de liberté en rotation d'un simple arbre à came en tête :

1. La raideur de la courroie est prise comme non-linéaire en raison de la présence de la denture.

2. Seul le moment d'inertie de l'arbre à cames est considéré. Le moment d'inertie du moteur étant largement plus important que celui de la distribution, l'auteur considère le vilebrequin comme fixe. N. Mizuno estime donc que l'acyclisme du vilebrequin n'a pas d'influence sur le mouvement en rotation de la transmission.

3. Les variations de couple au niveau de l'arbre à cames soumettent la courroie à d'importantes fluctuations de charges dynamiques autour d'une faible valeur moyenne.

4. Un amortissement visqueux est considéré pour tenir compte du frottement au niveau des axes de transmission et de l'amortissement de la courroie.

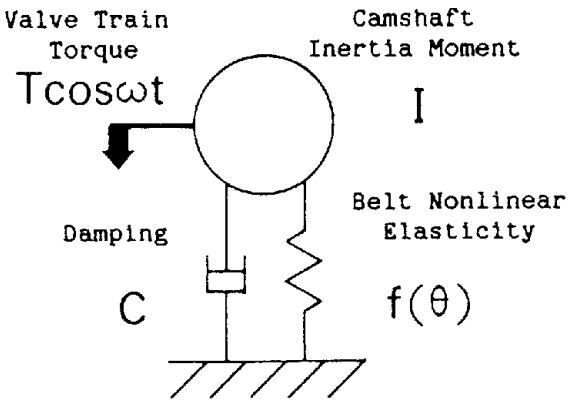


Figure I. 48 : Modèle d'une transmission par courroie dentée.

La raideur de la courroie est mesurée sur une transmission avec le vilebrequin bloqué. Les soupapes sont enlevées de façon à permettre la rotation libre de l'arbre à cames (figure I.49) lorsqu'on applique un couple T. Les mesures sont faites avec deux tensions de pose 120 et 30 N.

La figure I.50 montre un assouplissement de la courroie lorsque la tension de pose diminue. La loi de raideur est de la forme:

$$T = k_1\theta + k_3\theta^3 \qquad \text{Equ. I. 117}$$

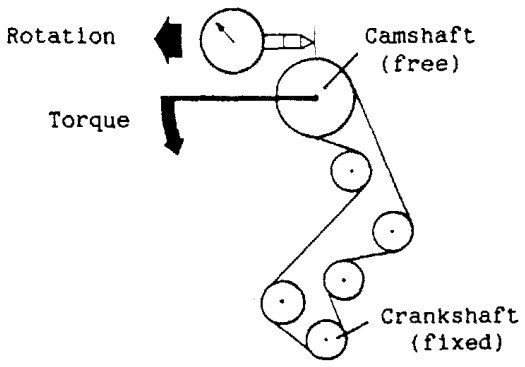


Figure I. 49 : Technique de mesure de la raideur de la courroie.

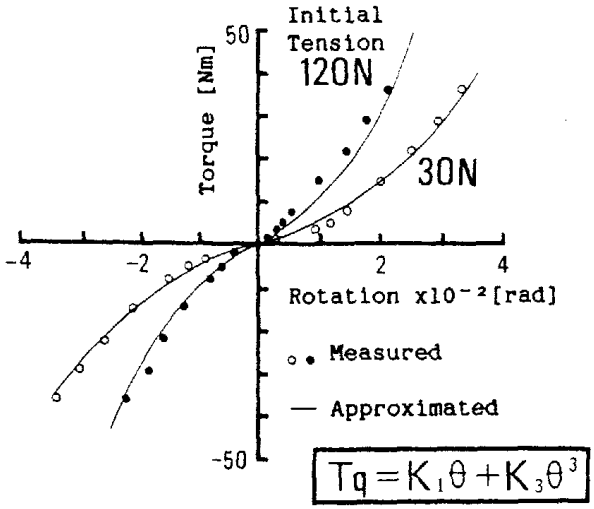


Figure I. 50 : Caractéristiques de la raideur de la courroie.

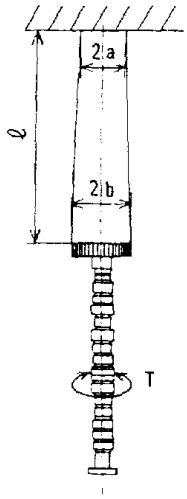


Figure I. 51 : Mesure du moment d'inertie de l'arbre à cames.

Le moment d'inertie I de l'arbre à cames est calculé simplement en mesurant la période d'oscillation T d'un pendule de torsion constitué de deux fils (figure I.51) :

$$I = \frac{WabgT^2}{(2\pi)^2 l}$$

avec
- I moment d'inertie,
- T période d'oscillation,
- W masse de la poulie et de l'arbre à cames,
- g accélération de la gravité,
- l longueur entre le bâti et la pièce attachée aux fils,
- a distance entre les deux points où les fils sont fixés,
- b distance entre les deux points où les fils sont attachés à la poulie.

De l'équation I.117 est tirée l'équation du mouvement de l'arbre à cames :

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k_1\theta + k_3\theta^3 = T\cos(\omega t + \tau) \qquad \text{Equ. I. 118}$$

où I est le moment d'inertie de l'arbre à cames, C l'amortissement du caoutchouc constituant la courroie. L'équation I.118 appartient à la classe des équations de Duffing. Le mouvement oscillatoire est supposé symétrique. La solution contient donc une première et une troisième harmonique :

$$\theta = A\cos\omega t + A'\cos^3\omega t \qquad \text{Equ. I. 119}$$

Les équation I.118 et I.119 produisent :

$$\left\{(k_1 - I\omega^2)A + \frac{3}{4}k_3A^3\right\}^2 + (-C\omega A)^2 = T^2$$

Finalement, l'amplitude du mouvement peut être obtenue en résolvant selon A^2 :

$$\left\{\left(k_1 - I\omega^2 + \frac{3}{4}k_3A^2\right)^2 + (C\omega)^2\right\}A^2 = T^2 \qquad \text{Equ. I. 120}$$

La figure I.52 visualise pour deux tensions de pose les résultats calculés de l'amplitude du mouvement A (trait plein) avec les paramètres suivants : T = 5 N.m, I = 2.10^{-3} kg.m², C = 0.3 kg.m/s. L'amplitude du mouvement de l'arbre à cames est mesurée in situ sur un moteur 4 cylindres 1300 cm^3, et visualisée en traits discontinus sur le figure I.52. La comparaison des deux courbes montre l'excellente concordance sur toute la plage de régime moteur des résultats calculés et mesurés. Un pic est observé à 2600 tr/mn pour une tension de pose de 30 N. Il disparaît lorsque la tension de pose est augmentée.

La figure I.53 visualise l'amplitude du mouvement du vilebrequin. Elle reste en deçà du dixième de l'amplitude du mouvement de l'arbre à cames. Selon l'auteur, cela vérifie l'hypothèse du vilebrequin fixe. La très bonne concordance des résultats lui permet de conclure à la suffisance d'un modèle à un degré de liberté pour décrire le comportement d'une transmission par courroie dentée.

Néanmoins, aucune analyse fréqentielle n'est faite. Elle paraît pourtant indispensable pour caractériser l'apport d'une excitation éventuelle du vilebrequin. En effet, la part de l'énergie du vilebrequin apportée au système de la transmission ne dépend pas seulement de l'amplitude de son mouvement. On peut noter que d'autres auteurs arrivent à des conclusions contraires sur l'importance du rôle joué par le vilebrequin [Hwang et al., 1994]. C. Debabbi et al. (1990), montrent expérimentalement sur un moteur Diesel au ralenti que l'irrégularité cyclique du moteur est un paramètre primordial. Il serait également intéressant de vérifier la pertinence du modèle sur d'autres types de géométrie de transmission afin de vérifier si l'inertie ou le couple des autres poulies n'entre jamais en ligne de compte.

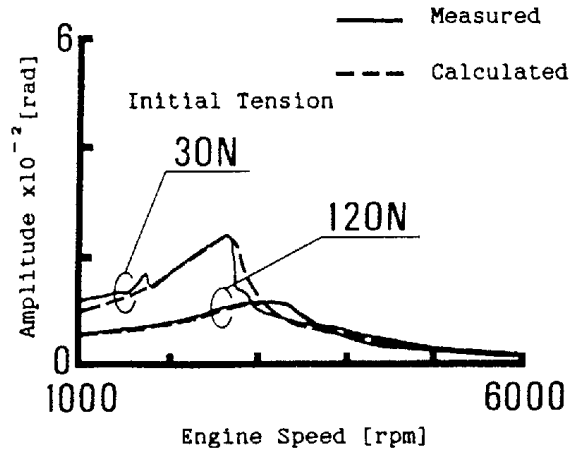


Figure I. 52 : Comparaison de l'amplitude du mouvement de l'arbre à cames calculée et mesurée.

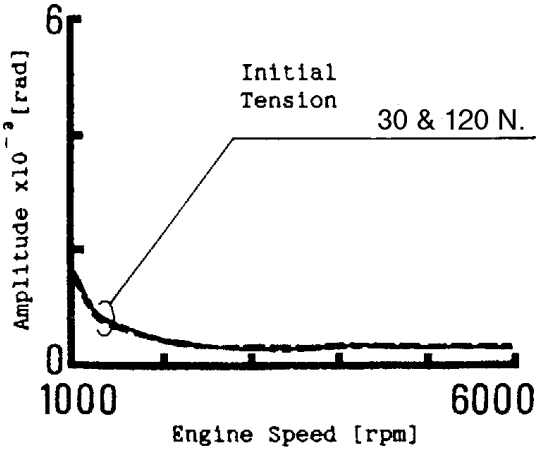


Figure I. 53 : Amplitude du mouvement du vilebrequin mesurée.

Une analyse paramétrique est effectuée :

1. L'amplitude du couple T varie de 2 à 20 N.m dans l'équation I.118 (figure I.54). Bien entendu, l'amplitude du mouvement de l'arbre à cames croît avec l'amplitude du couple T. On observe alors un phénomène caractéristique de saut AA' et BB', dû au raidissement de la courroie pour les fortes amplitudes de mouvement (annexe 1 - figure 5). Lorsque le régime moteur augmente, l'amplitude du mouvement diminue brusquement de A à A' sans que la fréquence moteur varie. Le phénomène inverse se produit de B à B' lorsque le régime moteur ω diminue. Ce phénomène a été vérifié expérimentalement.

2. Les figures I.55 à I.57 montrent les variation de l'amplitude du mouvement en fonction de la vitesse de rotation moteur lorsque varie le moment d'inertie ou les coefficients de raideur. On constate l'évolution des pics de résonance en fonction de ces paramètres.

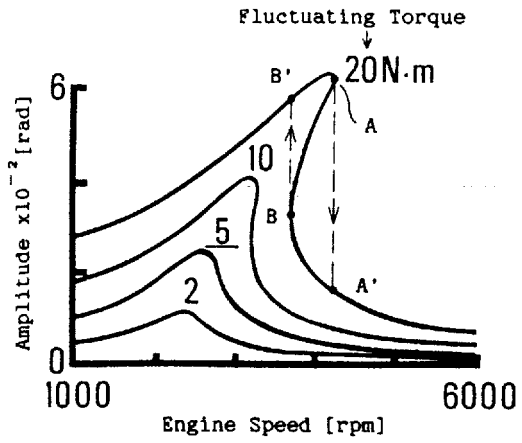


Figure I. 54 : Influence de l'amplitude du couple.

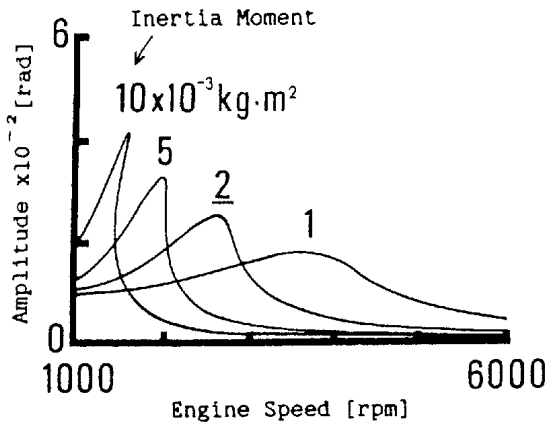


Figure I. 55 : Influence du moment d'inertie.

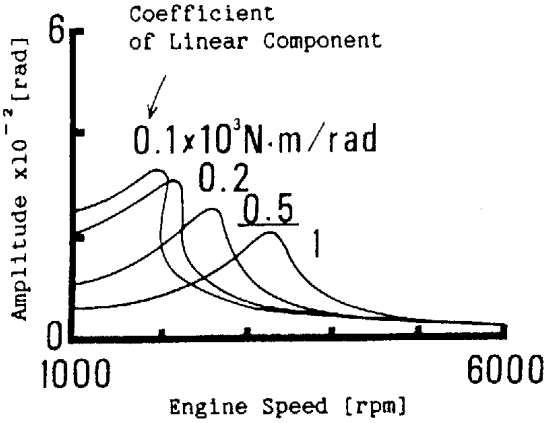


Figure I. 56 : Influence de la composante linéaire de la raideur k_1.

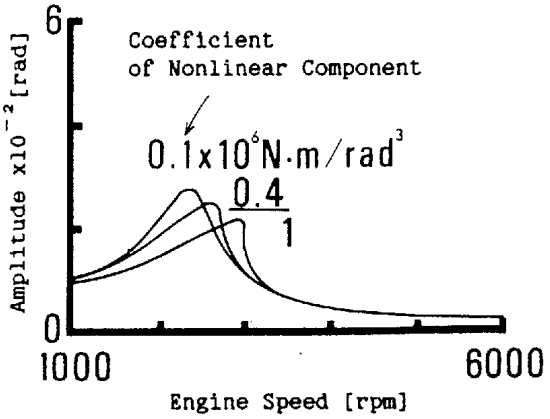


Figure I. 57 : Influence de la composante quadratique de la raideur k_3.

I.2.2.2. Modèles pour deux transmissions à deux poulies de Banaszek et al. (1993)

G. Banaszek (1993) propose deux types de modèle. Le premier est basé sur une discrétisation de la courroie en élément ressort-amortisseur. Le deuxième modèle est basé sur une discrétisation par éléments finis.

La figure I.58 représente la transmission modélisée. Il s'agit en fait de deux transmissions élémentaires à deux poulies et de rapport inverse. Ainsi, on retrouve théoriquement le même angle entre la poulie 1 et 4.

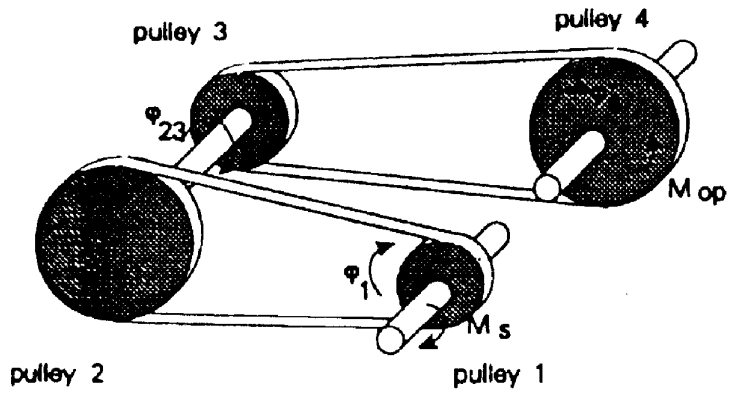


Figure I. 58 : Double transmission par courroie crantée.

◆ *Première formulation masse-ressort*

Les équations du mouvement sont calculées à partir des formules de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=f \qquad \text{Equ. I. 121}$$

où T énergie cinétique du système,
U énergie potentielle du système,
D dissipation d'énergie du système,
f forces généralisées associées aux coordonnées généralisées,
q coordonnées généralisées.

La courroie est discrétisée pour chaque pas en élément ressort-amortisseur en parallèle (figure I.59). Chaque élément i de la courroie peut se déformer d'une quantité q_i. Les éléments de l'âme étant en série, leur déformation est $q_i - q_{i-1}$. La déformation d'une dent i en prise sur la poulie j est $R_j\varphi_j - q_i$. On obtient ainsi l'énergie potentielle calculée à partir de la déformation de l'âme et des dents de la courroie :

$$\begin{aligned} U = &\sum_{i=1}^{Z_p-1}\frac{1}{2}C_R(q_{i+1}-q_i)^2+\sum_{j=1}^{Z_{p1}}\frac{1}{2}C_Z(\varphi_1R_1-q_j)^2 \\ &+\sum_{k=1}^{Z_{p2}}\frac{1}{2}C_Z(\varphi_{23}R_2-q_k)^2+\sum_{l=1}^{Z_{p3}}\frac{1}{2}C_Z(\varphi_{23}R_3-q_l)^2 \\ &+\sum_{m=1}^{Z_{p4}}\frac{1}{2}C_Z(\varphi_4R_4-q_m)^2 \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 122}$$

où C_R, C_Z raideur d'une dent et d'un pas de courroie,
$Z_{p1}, Z_{p2}, Z_{p3}, Z_{p4}$ nombre de dents de courroie engrenées sur chaque poulie,
Z_p nombre de pas de la courroie crantée,
R_1, R_2, R_3, R_4 rayon de chaque poulie.

L'énergie cinétique du système est calculée à partir de la vitesse de rotation des quatre poulies $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_{23}$ (poulies 2 et 3) ,$\dot{\varphi}_4$ et de la vitesse de déformation $\dot{q}_i$ de chaque pas de courroie :

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^{\,2} + \frac{1}{2} I_{23} \dot{\varphi}_{23} + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4 + \sum_{i=1}^{Z_p} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^{\,2} \qquad \text{Equ. I. 123}$$

avec I_1, I_{23}, I_4 moment d'inertie des poulies,
m_i masse de chaque élément de la courroie.

L'énergie de dissipation est calculée de la même manière :

$$\begin{aligned} D = & \sum_{i=1}^{Z_p - 1} \frac{1}{2} L_R (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i)^2 + \sum_{j=1}^{Z_{p1}} \frac{1}{2} L_Z (\dot{\varphi}_1 R_1 - \dot{q}_j)^2 \\ & + \sum_{k=1}^{Z_{p2}} \frac{1}{2} L_Z (\dot{\varphi}_{23} R_2 - \dot{q}_k)^2 + \sum_{l=1}^{Z_{p3}} \frac{1}{2} L_Z (\dot{\varphi}_{23} R_3 - \dot{q}_l)^2 \\ & + \sum_{m=1}^{Z_{p4}} \frac{1}{2} L_Z (\dot{\varphi}_4 R_4 - \dot{q}_m)^2 \end{aligned} \qquad \text{Equ. I. 124}$$

où L_R, L_Z : coefficient d'amortissement d'une dent et d'un pas de courroie.

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \qquad \text{Equ. I. 125}$$

avec : M matrice masse
C matrice amortissement
K matrice raideur

G. Banaszek utilise aussi le modèle Kelvin-Voigt pour l'amortissement visqueux comme variante, pour obtenir la matrice d'amortissement :

$$C = \frac{\eta}{E_{dyn}} K$$

avec : E_{dyn} module de Young dynamique,
$\eta = EQ^{-1}/\omega$ facteur d'amortissement,
$Q^{-1} = \delta/\pi$ facteur de qualité,
δ décrément logarithmique,
et $E_{dyn} = E_{stat}\left[1 + \exp(-50\varepsilon_d) + Q_f \log(f)\right]$,
avec : ε_d déformation dynamique,
Q_f facteur fonction de la fréquence et du type de matériaux,
f fréquence.

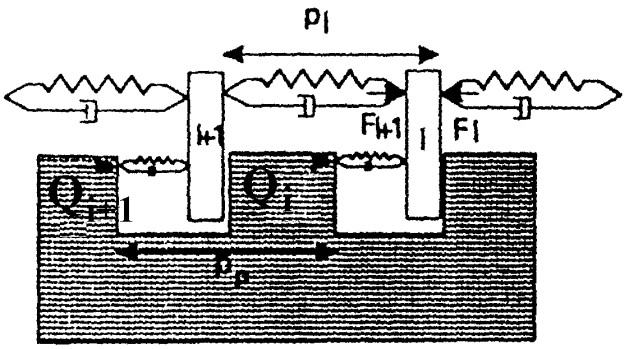


Figure I. 59 : Modèle ressort-amortisseur pour les dents et l'âme.

◆ *Deuxième formulation par éléments finis*

La deuxième formulation utilise des éléments finis isoparamétriques à huit nœuds et deux degrés de liberté par nœud (figure I.60). Un super élément représentant un pas de courroie est développé sur la base de trois éléments à huit nœuds (figure I.61). Les câbles de l'âme de la courroie sont représentés par une raideur supplémentaire connectant les nœuds 4 et 8. Le comportement de l'élastomère est pris en compte par une formulation viscohyperélastique.

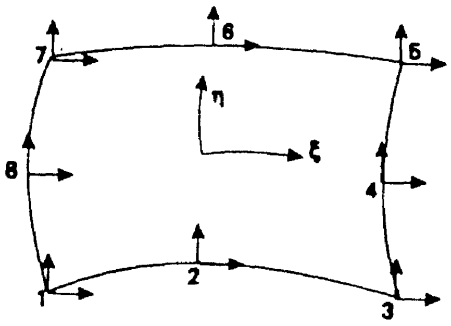


Figure I. 60 : Élément isoparamétrique à huit nœuds.

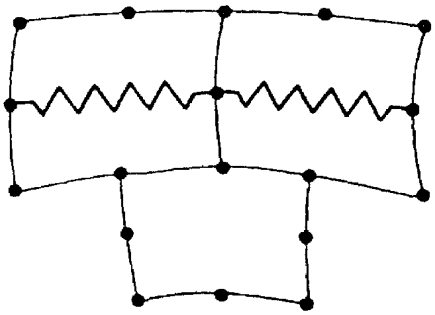


Figure I. 61 : Représentation d'un pas de courroie en super élément.

◆ *Résultats*

Pour les deux formulations, la réponse temporelle est intégrée par la méthode de Newmark. Un module d'élasticité de Young dynamique E_{dyn} est utilisé :

$$E_{dyn} = E_{stat}\left[1+\exp(-50\varepsilon_d)+Q_f\log(f)\right] \qquad \text{Equ. I. 126}$$

avec E_{stat} = 1258 Mpa module de Young statique mesuré d'après des essais,
ε_d taux d'allongement dynamique,
Q_f facteur de raidissement en fréquence (dépend du type d'élastomère),
f fréquence.

Les calculs montrent que le modèle élément finis, bien qu'il soit plus sophistiqué, n'apporte rien de plus que le modèle classique. Le seul apport du modèle élément finis est la caractérisation fine de l'élastomère constituant la dent et sa prise en compte pour l'âme. Les résultats identiques des deux modèles signifient donc qu'il suffit de considérer la raideur du câblage pour l'âme de la courroie et une raideur globale de la dent.

Les résultats numériques calculés à partir d'un échelon en entrée (figure I.62) sont en accord (9% de différence sur l'amplitude des pics) avec les mesures expérimentales.

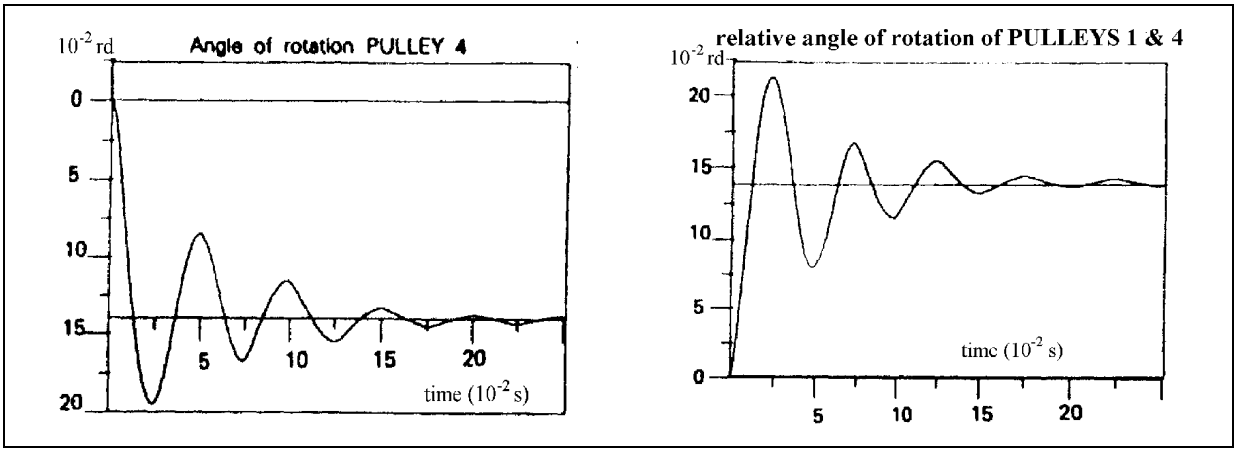


Figure I. 62: Réponse temporelle.

I.2.3. Conclusion sur la présentation des modèles en rotation

Nous constatons d'emblée le faible nombre d'études concernant les vibrations en rotations pour les transmissions par courroies dentées, sujet de notre étude, comparativement aux courroies Poly-V.

N. Mizuno et al. montrent expérimentalement la non-linéarité d'un modèle de rotation pour une transmission par courroie dentée (équation I.117). Ils proposent un modèle à un degré de liberté remarquablement recalé (figure I.52). Toutefois, la contribution du vilebrequin est négligée.

G. Banaszek et al. proposent un modèle plus complexe s'appuyant sur une double transmission à deux poulies (figure I.58). Ils proposent deux formulations, une classique par ressort-amortisseur et une autre par éléments finis. La conclusion principale est l'égalité des résultats calculés par les deux modèles. Seule la réponse libre de la transmission a été confronté à l'expérience.

En revanche, les modèles développés sur les transmissions par courroie Poly-V sont plus nombreux, et plus intéressants par leur diversité. Cependant, toute les conclusions ne sont pas transposables pour les transmissions par courroie dentée.

Quatre premières modélisations, suivant une complexité croissante du système étudié, sont présentées (chapitres I.I.2.1.1 à I.I.2.1.4). Cependant, le fond de la modélisation ne varie pas. Nous retrouvons systématiquement les équations I.1 et 2 de Fawcett (et al.) avec les termes d'amortissement en plus pour Yang (et Barker) et Hwang (et al.). Ces deux derniers auteurs présentent en plus un modèle avec tendeur. Les équations du mouvement du tendeur diffèrent pour Yang et Hwang (respectivement les équations I.20 et I..24). Ce dernier considère le poids du tendeur, et surtout une rotation du galet tendeur du même angle que l'angle de rotation du tendeur lorsque celui-ci tourne (rotation en bloc). Ceci est vrai si on isole le système tendeur-galet de la courroie. Par contre, Y. L. Yang tient compte de la liaison entre le galet et la courroie. On n'a donc plus de rotation en bloc du tendeur *avec* son galet. Par conséquent, l'équation I.20 ne considère que l'inertie du tendeur (en utilisant le théorème de Huygens) sans prendre en compte celle de son galet.

Le modèle suivant développé par C. Debbabi (1990) au chapitre I.I.2.1.5 se différencie en modélisant la courroie à l'aide d'équations des milieux continus, plutôt que de modéliser les poulies par un modèle discret. C. Debbabi met en évidence un glissement important de la courroie Poly-V sur un moteur automobile de grande série ce qui le mène à orienter ses travaux sur le glissement de la courroie. Cette vue est originale dans la littérature mais les conclusions ne sont pas exploitables pour un modèle concernant les courroies dentées. Le recalage montre quelques différences, certainement dues à la non-prise en compte de la tension centrifuge.

Le travail effectué par R. S. Beikmann (chapitre I.I.2.1.6) est complet car il élabore d'une part une aide à la conception grâce à la constante d'efficacité du tendeur η et étudie d'autre part, en détail le couplage entre les mouvements vibratoires des éléments continus (les brins) et des éléments discrets (les poulies). Toutefois, il ne prend pas en compte, à l'instar de C. Debabbi, le glissement de la courroie Poly-V sur les poulies. Aucune cause d'excitation des brins autre que la rotation des poulies et du tendeur n'est considérée (l'excentricité des poulies est par exemple une cause patente). Tout d'abord, l'équilibre statique stationnaire en fonctionnement est recherchée, puis le comportement dynamique non-linéaire est calculé autour de l'équilibre statique en fonctionnement sur une base modale issue du modèle linéaire. Les transferts d'énergie entre les composants continus et discrets de la transmission sont localisés et étudiés dans leur processus. Les phénomènes classiques de bifurcation (annexe I) sont également décrits.

D'une manière générale, on peut s'étonner que les modèles soient tous présentés, parfois avec des hypothèses contradictoires, comme excellemment validés. On comprend ici l'importance du contexte de la validation et des objectifs poursuivis. R. S. Beikmann, à l'instar de G. Banaszek, entérine leur modélisation sur un banc de simulation éloigné du contexte réel d'une transmission automobile. N. Mizuno valide bien son modèle à un degré de liberté sur une véritable transmission automobile mais la réduit également à un degré de liberté en bloquant le vilebrequin. Seuls S. J. Hwang et C. Debbabi se confrontent réellement à une transmission automobile.

Nous pouvons conclure en définitive que la pauvreté constatée des études concernant les transmissions par courroie dentée justifie l'élaboration d'un modèle complet. Le chapitre suivant présente ce modèle.

DEUXIÈME CHAPITRE

Modélisation d'une Transmission Complexe par Courroie Dentée et Programmation.

SOMMAIRE

II.1. INTRODUCTION 85

II.2. HYPOTHÈSES DE TRAVAIL 85

II.2.1. LA COURROIE 85
II.2.1.1. Caractéristiques géométriques de la courroie 85
II.2.1.2. Forme des brins libres de la courroie 87
II.2.1.3. Caractéristiques mécaniques de la courroie 87
II.2.1.3.1. Raideur de l'âme de la courroie 87
II.2.1.3.2. Raideur d'une dent de courroie 88
II.2.1.3.3. Amortissement de la courroie 89
II.2.1.3.4. Inertie de la courroie 89
II.2.1.4. Vibrations transversales des brins de courroie 90
II.2.1.5. Vibrations longitudinales des brins de courroie 92
II.2.2. LA POULIE 92
II.2.2.1. Élasticité des supports 92
II.2.2.2. La géométrie des poulies 92
II.2.2.2.1. L'excentricité 93
II.2.2.2.2. Le balourd 94
II.2.2.2.3. L'effet polygonal 95
II.2.2.3. Frottement poulie-courroie 96
II.2.3. LE TENDEUR DYNAMIQUE 98
II.2.4. L'ACTION DE LA PESANTEUR 98

II.3. MODÉLISATION ET STRUCTURE DU PROGRAMME 99

II.3.1. ENTRÉES DU MODÈLE 100
II.3.1.1. Géométrie de la transmission 100
II.3.1.2. Caractéristiques dynamiques 101
II.3.1.3. Contraintes extérieures au système 101
II.3.2. 1ER MODULE : CALCUL DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DE LA TRANSMISSION 102
II.3.3. 2ÈME MODULE : CALCUL DE LA TENSION DANS LES BRINS 104

II.3.3.1. Modélisation du calcul de la tension dans les brins *104*
II.3.3.2. Bibliographie concernant la forme d'une courroie due à sa raideur de flexion ... *107*
II.3.3.3. Calcul de la longueur L_{i0} d'un brin i sous une tension T *114*
II.3.3.4. Calcul non-linéaire des tensions *115*
II.3.4. 3ÈME MODULE : CALCUL DES CHARGES ET DES DÉFORMATIONS SUR LES DENTS DE COURROIE ENROULÉES 115
II.3.4.1. Modèle Gerbert (1978) *116*
II.3.4.1.1. Modèle sans frottement 116
II.3.4.1.2. Modèle avec frottement 117
II.3.4.1.3. Conclusion 119
II.3.4.2. Modèle Dancé (1992) appliqué au modèle dynamique de rotation *119*
II.3.4.2.1. Définition des paramètres de la géométrie d'engrènement 119
II.3.4.2.2. Modèle de répartition des charges sur les dents engrenées 123
II.3.5. 4ÈME MODULE : CALCUL DES RAIDEURS ET AMORTISSEMENTS ÉQUIVALENTS POUR LE MODÈLE FINAL 131
II.3.5.1. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins de courroie enroulés *132*
II.3.5.2. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins libres de courroie et les brins enroulés sur les galets *139*
II.3.5.3. Passage au modèle final *142*
II.3.5.3.1. Cas d'un lien entre deux poulies 142
II.3.5.3.2. Cas d'un lien entre une poulie et un galet 144
II.3.5.3.3. Cas d'un lien entre deux galets 146
II.3.6. 5ÈME MODULE : RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT 146
II.3.6.1. Établissement des équations du mouvement *146*
II.3.6.2. Définition des variables du système *147*
II.3.6.3. Energie cinétique d'une poulie *147*
II.3.6.4. Torseur d'effort au centre de rotation de chaque palier *150*
II.3.6.4.1. Efforts extérieurs au système 150
II.3.6.4.2. Efforts simulant l'erreur de transmission cinématique 151
II.3.6.4.3. Efforts dus aux variations globales de tension 151
II.3.6.5. Travaux virtuels dus aux paliers *151*
II.3.6.6. Travaux virtuels dus aux brins "globaux" *152*
II.3.6.7. Travail virtuel du tendeur *153*
II.3.6.8. Réduction du système dans le cas de l'utilisation d'un tendeur *156*
II.3.6.9. Énergie cinétique du balourd *158*
II.3.6.10. Énergie cinétique d'un pas de brin enroulé sur une poulie *159*
II.3.6.11. Énergie cinétique d'un pas de courroie d'un brin libre *160*
II.3.6.12. Résolution des équations du mouvement *161*
II.3.7. SORTIES DU MODÈLE 162

II.4. CONCLUSION 162

II.1.Introduction

L'objectif de la thèse est de développer un modèle complet permettant d'étudier l'influence sur le comportement dynamique de la transmission d'un grand nombre de paramètres. Tous les modèles examinés dans la bibliographie (chapitre I.2) ont une approche globale. C'est-à-dire, seuls les "macro-paramètres" tels que l'angle de rotation θ et la tension dans les brins T, décrivant l'état global de la transmission, sont étudiés. En tant que non-spécialiste des transmissions par courroie dentée, les acousticiens et les fiabilistes suivent généralement cette première approche en considérant la tension T. Cependant, une approche locale, ou fine, apporte d'avantage d'indications. Des "micro-paramètres", tels que la charge sur chaque dent de courroie engrenée, peuvent être examinés en relation avec les "macro-paramètres", comme la tension, en ce qui concerne la charge sur les dents. Cette démarche est celle suivie par K. W. Dalgarno et T. H. C. Childs. Ceux-ci concluent au terme d'une étude sur les paramètres influant la durée de vie d'une courroie dentée, que la déformation de la première et de la dernière dent de courroie engrenée sur une poulie est un paramètre primordial. Nous adoptons également cette approche locale. Tous les paramètres locaux au niveau des arcs de courroie enroulée (déformation des brins et des dents de courroie) seront calculés au même titre que les "macro-paramètres" (déplacement et rotation des poulies, tension dans les brins). Cette démarche doit apporter en définitive la compréhension du fonctionnement d'une transmission par courroie dentée.

La discussion amenée par une telle démarche doit être faite en toute connaissance des limites de la modélisation. Il convient donc de détailler les hypothèses qui cadreront précisément le modèle. Une analyse exhaustive sera effectuée au chapitre II.2 afin de retenir un certain nombres d'hypothèses pertinentes pour la compréhension et la simulation du fonctionnement d'une transmission par courroie dentée.

Une fois le contexte de l'étude défini, la structure du programme sera détaillée au chapitre II.3. Les sous-chapitres développeront la modélisation concernant chaque partie du programme et en particulier : (1) le calcul itératif non-linéaire des tensions dans les brins libres, (2) le calcul itératif des tensions dans les brins enroulés sur les poulies dentées en liaison avec la charge sur les dents de courroie, (3) et l'élaboration de "brins globaux" prenant en compte un brin libre de courroie et les deux brins enroulés sur les deux poulies adjacentes.

II.2.Hypothèses de travail

Des propositions sont maintenant énoncées et discutées pour encadrer la modélisation dans des limites cohérentes et pas trop complexes.

II.2.1. La courroie

II.2.1.1. Caractéristiques géométriques de la courroie

La géométrie de la courroie est loin d'être parfaite. J.-M. Dancé (1992) a mesuré les

caractéristiques géométrique d'une courroie avec un projecteur de profil. Certains paramètres ont jusqu'à 30 % d'écart avec les valeurs normales. D'autre part, ces paramètres ne sont pas constant tout au long de la courroie. Par exemple, M. Kagotani (1993) a suivi l'évolution du pas de courroie dont la valeur normale est 9.525 mm. Les écarts importants enregistrés et visualisés sur la figure II.1 sont imputés au processus de fabrication et à la variation de l'épaisseur du Nylon recouvrant la courroie.

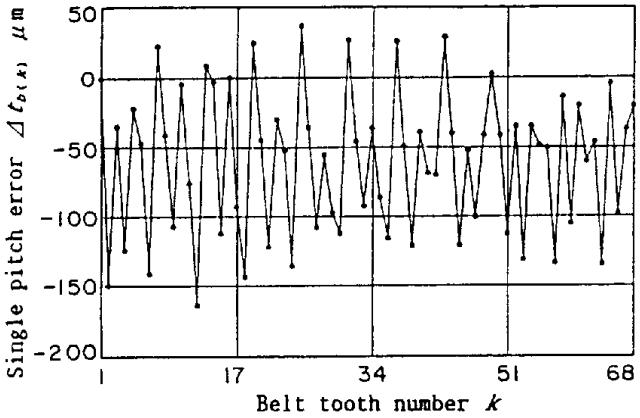


Figure II. 1 : Variation du pas pour une courroie de 68 dents enroulée sur une poulie de 18 dents [Kagotani et al., 1993].

Les implications sur l'erreur de transmission quasi-statique sont connus. M. Kagotani attribue la variation de pas, la variation de la section du câblage, et la variation du facteur d'élasticité du câblage à une erreur de transmission typique dont la période est celle de la révolution de la courroie (figure II.2). Néanmoins, les effets des imperfections de la courroie ne sont pas connus sur l'erreur de transmission dynamique. En revanche, H. Tokoro et al. (1997) quantifient la part de l'effet de l'hétérogénéité longitudinale de la courroie à 30 N. sur une amplitude de variation de tension en dynamique de 270 N. En conséquence, l'erreur de transmission quasi-statique due aux imperfections de la courroie sera prise en compte (Annexe V - chapitre I.3 - questions 13 et 14).

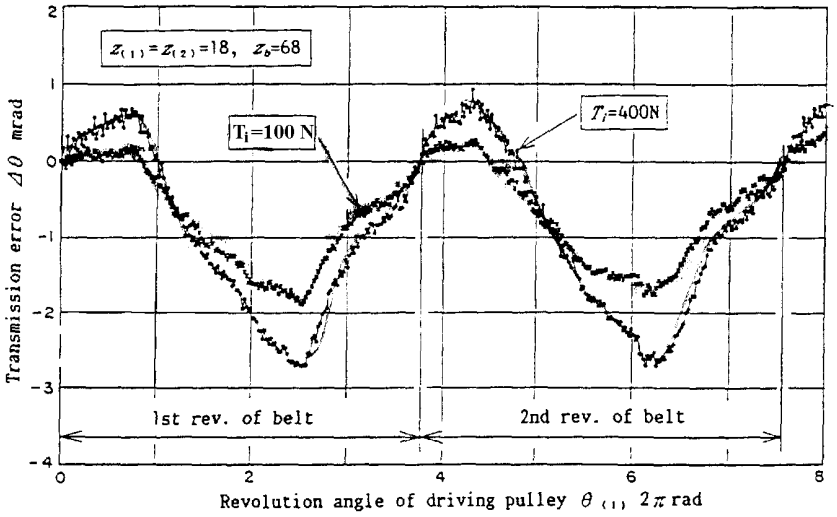


Figure II. 2 : Mesure de l'erreur de transmission cinématique due à l'imperfection de la courroie pour deux tension de pose 100 et 400 N. [Kagotani, et al.].

II.2.1.2. Forme des brins libres de la courroie

La raideur en flexion de la courroie impose sur les brins libres une forme apparentée à une chaînette (figure II.25 page 115). Suite à la validation du calcul des tensions dans les brins, il est apparu nécessaire de tenir compte de la forme non-rectiligne de la courroie. En effet, lorsque la tension est faible dans le brin, celui-ci reste tendu grâce à la raideur de flexion. D. L. Waugh et al. (1980) soulignent aussi la nécessité de considérer la raideur de flexion et G. Gerbert (1991) en tient compte pour un calcul élémentaire de tension autour d'une poulie. Une bibliographie exhaustive sur la forme du brin est présentée au chapitre II.II.3.3.2. Par contre, nous pouvons remarquer que tous les modèles de rotation détaillés au premier chapitre considère les brins libres droits. En effet, seule la longueur du brin est utile (pour calculer la raideur du brin) dans un modèle de rotation. La longueur du brin droit est une bonne approximation de la longueur de la chaînette si la tension est suffisante. D'autre part, si la tension est insuffisante, il peut se produire le phénomène du saut de dent. Nous pouvons donc simplifier le modèle de rotation en considérant des brins droits.

II.2.1.3. Caractéristiques mécaniques de la courroie

II.2.1.3.1. Raideur de l'âme de la courroie

La grande raideur de l'âme est due au câblage. La mesure de la raideur est faite sur une machine de traction classique (chapitre III.4.1.1.4). Selon des mesures précises effectuées par J.-M. Dancé (1992), la raideur longitudinale de la courroie est linéaire (figure II.3). On peut toutefois remarquer que M. Atouf (1992) obtient une raideur d'âme très faiblement non-linéaire par une mesure speckle sur deux pas de courroie HTD. La raideur sera considéré comme constante tout au long de la courroie bien que le câblage ne soit pas homogène.

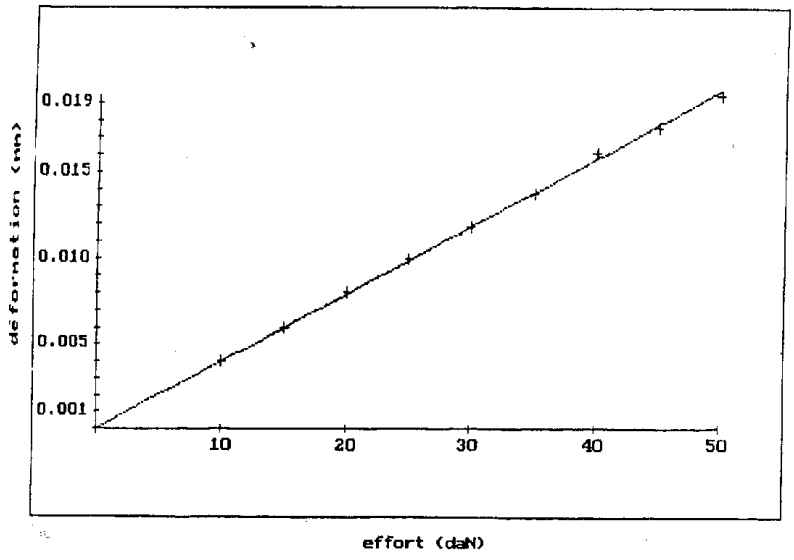


Figure II. 3 : Loi d'allongement d'un pas de courroie [Dancé, 1992].

Le raidissement dynamique ne sera pas considéré dans cette étude. C. Debbabi (1990) a tenté d'établir une loi d'évolution du module dynamique en fonction de divers facteurs mais a dû renoncer. Le module dynamique est sensible principalement à la fréquence et à l'amplitude de

l'excitation, mais surtout à la température interne au polymère (vrai aussi pour le module statique). Le facteur température ne sera pas pris en compte non plus lors de cette étude, bien qu'il soit très important. La figure II.4 illustre les variations importantes du module de Young mesurées par Jakowluk et Dudziak (1975) en fonction de la température sur une courroie à section trapézoïdale.

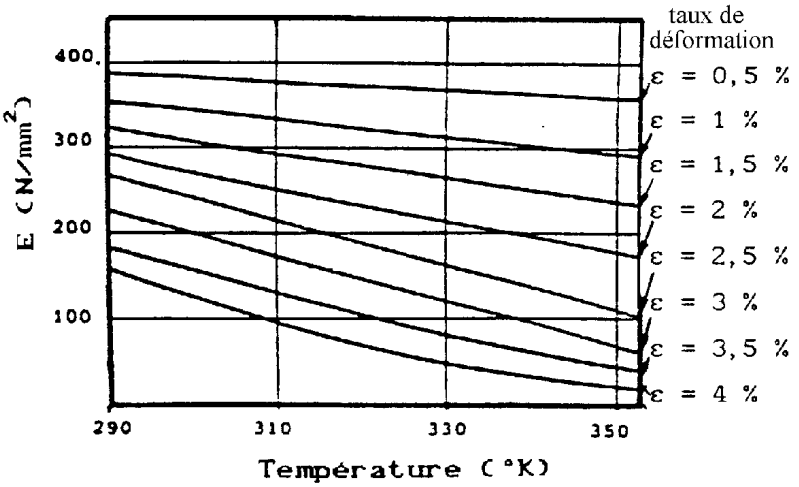


Figure II. 4 : Évolution du module d'élasticité d'une courroie trapézoïdale en fonction de la température, pour différentes amplitudes d'excitation [Jakowluk & Dudziak, 1975].

II.2.1.3.2. Raideur d'une dent de courroie

La plupart des auteurs de la littérature utilisent une raideur de dent linéaire. J.-M. Dancé montre l'importance sur la répartition des charges sur un arc de courroie enroulée, d'utiliser une raideur non linéaire (figure II.5). D'autres mesures montrent un assouplissement important de la dent avec la charge longitudinale (Fig. III.14). Il importe donc d'utiliser une raideur non linéaire.

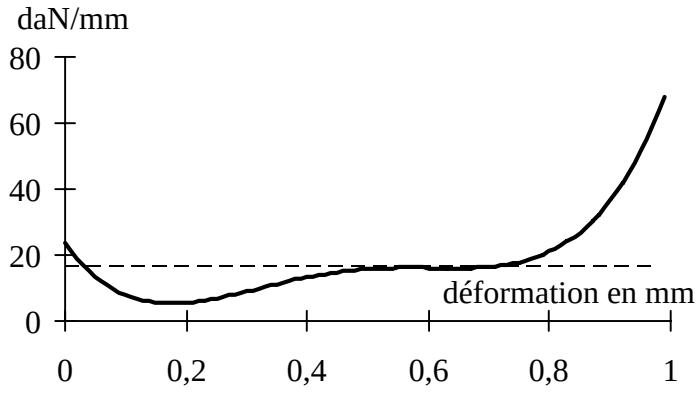


Figure II. 5 : Raideur linéaire et non-linéaire d'une dent de profil H.T.D. [Dancé, 1992].

Toute les dents suivront la même loi de raideur dans le modèle développé. La loi de raideur prendra en compte le paramètre de déformation de la dent tel que l'a explicité J.-M. Dancé. La validation statique du modèle a mis en lumière la nécessité de considérer un deuxième

paramètre: la pression radiale ou normale exercée sur la dent. N. Mizuno et al. avaient déjà décelé un résultat similaire (figure I.50) en faisant varier la tension de pose. Ainsi, chaque dent aura une raideur différente. Comme pour l'âme, le raidissement dynamique ne sera pas considéré. La température est un autre facteur important. La figure II.6 illustre les variations de la raideur de dent de six types de courroies (géométrie identique mais matériaux différents) dans une gamme de température qu'on peut retrouver sous un capotage de transmission par courroie dentée de distribution de moteur automobile. Nous constatons globalement 50 % de variation de la raideur. Cette sensibilité à la température de la raideur de dent ne sera pas prise en compte mais il est important de garder à l'esprit cet aspect lors d'une validation sur un moteur automobile.

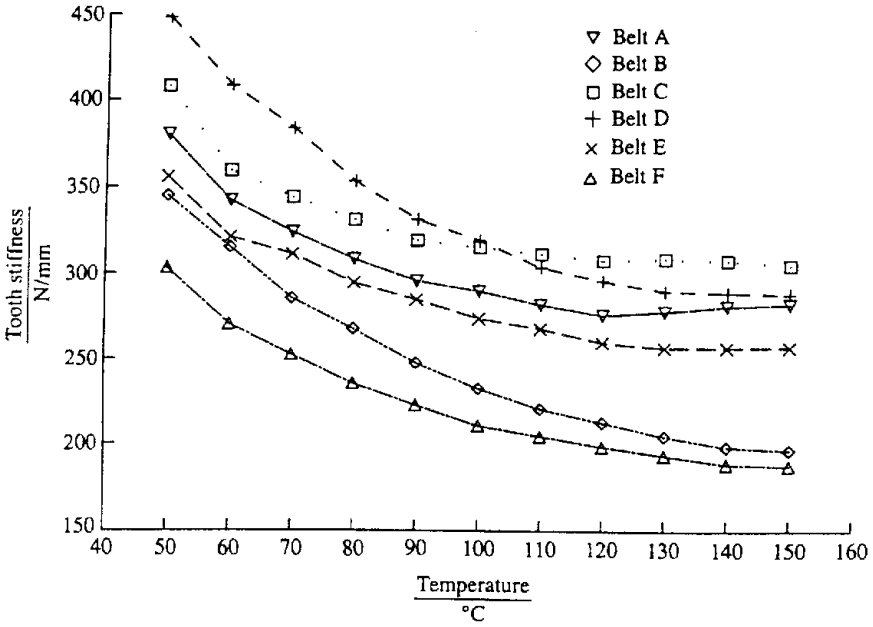


Figure II. 6 : Raideur de dent en fonction de la température pour six types de courroie (pas de 5.525 mm avec six types d'élastomère différents pour le corps et deux types de tissu protecteur en Nylon) [Dalgarno, 1994 (a)].

II.2.1.3.3. Amortissement de la courroie

Les dissipations viennent des frottements internes au polychloroprène du corps de la courroie, et des frottements entre les éléments constitutifs de la courroie. Il en résulte un amortissement essentiellement structural du matériaux. Connaître les caractéristiques d'amortissement (structural et visqueux) du polymère en situation réaliste nécessiterait une expérimentation longue et coûteuse. La plupart des auteurs résolvent le problème en adoptant un facteur d'amortissement visqueux équivalent caractérisant l'ensemble des forces de frottement interne. La même démarche sera suivie pour la modélisation dans cette étude. On peut aussi noter la remarque de S. Abrate (1986) sur l'absence d'étude sur l'amortissement longitudinal de la courroie.

II.2.1.3.4. Inertie de la courroie

Quelques auteurs ([Mote, 1965], [Beikmann et al., 1997]) tiennent compte de l'impact de l'inertie de la courroie sur la tension dans une courroie. La force centrifuge provoque un décollement de la partie de la courroie enroulée sur une poulie et s'oppose à la tension de la courroie. Il s'en suit une baisse de la tension effective sur la poulie. La tension effective (ou

appelée tension de traction) est la tension plaquant la courroie sur la poulie et qui permet seule la transmission du couple par adhérence pour les courroies plates, trapézoïdale et Poly-V. Cette diminution de la tension effective est uniforme sur toute la courroie et correspond à la tension centrifuge (annexe IV) :

$$T_{centrifuge} = mc^2 \qquad \text{Equ. II. 1}$$

où m est la masse linéique de la courroie et c, sa vitesse linéaire.

Pour vérifier l'influence de la tension centrifuge, nous considérons une courroie DAYCO de type ISORAN® et un pas de 8 mm, enroulée sur une poulie de rayon primitif 60 mm. Sa masse linéique est de 0.155 kg/m (Tableau III.1). La part de la tension centrifuge dans la tension totale dans la courroie est alors de 6 N. à 1000 tr/mn. et de 221 N. à 6000 tr/mn. La tension centrifuge ne peut donc être négligée.

Le modèle dynamique développé ici considère des paliers souples (chapitre II.II.2.2.1).Le décollement de la courroie sur les poulies entraîne un déplacement des poulies du côté où la courroie s'enroule et par conséquent, une augmentation uniforme sur toute la courroie de la tension effective compensant la force centrifuge. L'un des rôles du tendeur qu'on peut considérer comme un palier très souple est justement de rattraper la baisse de la tension effective en augmentant la tension de pose, c'est-à-dire la partie de la tension uniforme sur toute la courroie [Beikmann et al., 1997]. L'influence de l'inertie de la courroie sur les paliers sera donc prise en compte au chapitre II.II.3.6.4.3. Le couplage inertiel entre les poulies et la courroie sera également considéré. On peut noter que la force centrifuge a de surcroît une influence sur la forme courbe des brins libres abordée au chapitre précédent, mais ne sera pas prise en compte.

II.2.1.4. Vibrations transversales des brins de courroie

Les brins libres de la courroie vibrent transversalement en permanence excités par l'effet polygonal et l'excentricité des poulies qui agissent comme un piston aux extrémités des brins. Cependant, les variations de tension causées par la rotation des poulies sont une cause majeure d'excitation des brins en transversales.

En effet, si on considère l'équilibre d'un segment infinitésimal de poutre en translation à vitesse constante, le mouvement vertical w vérifie :

$$-\frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_0^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\ddot{w}\right] - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - k\dot{w} = 0 \quad \text{[Harrison, 1992]}$$

avec
- $w(x,t)$ déplacement vertical d'un point du brin,
- x abscisse axiale,
- k amortissement,
- EI raideur longituginale,
- μ masse linéique,
- $c_0^2 = \left(aT_0 + EI\pi\right)/\mu a$ célérité d'onde du brin,
- v vitesse axiale constante.

Dans le cas où $\mu c_0^2 >> EI$ et $c_0 >> v$, nous pouvons introduire une variation de tension à une fréquence double de la fréquence naturelle du brin :

$$T(t) = T_0 + \Delta T_0 \cos 2\omega t$$

Avec une solution particulière non-forcée,

$$w(x,t) = A_m \sin \lambda x \phi(t)$$

nous aboutissons à une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + r\frac{d\phi}{dz} + (p + q\cos z)\phi = 0$$

avec $z = 2\omega t$

$\lambda = m\pi a$

$p = \left(c_0 \lambda / 2\omega\right)^2$

$q = p\left(\Delta T_0 / T_0\right)$

$r = k/(2\omega)^2$

Cette équation est notable car c'est une équation dite de Mathieu (annexe I). Il n'est donc pas surprenant que A. Harrisson (1992) mesure un mouvement transversal de bande transporteuse (analogue aux courroies de transmission) cahotique. La figure II.7 montre le caractère imprévisible des vibrations de chaque brin d'une bande porteuse en fonction du temps, ce qui certifie expérimentalement le couplage entre les vibrations en rotation des poulies et transversales des brins.

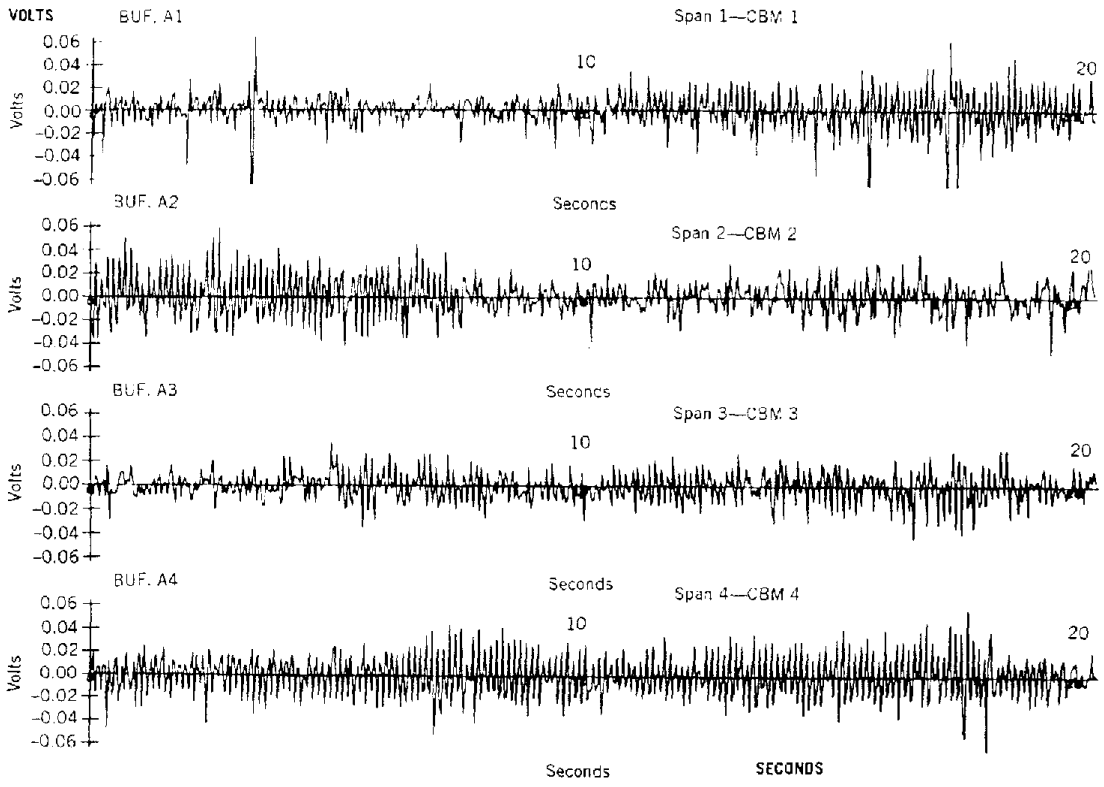


Figure II. 7 : Enregistrement pendant 20 secondes sur quatre brins d'une bande transporteuse du mouvement transversal qui se révèle cahotique [Harrison, 1992].

Cependant, la question se pose : Quel impact ont les vibrations transversales sur la rotation des poulies ? R. S. Beikmann et al. (1996 a) montrent que des transferts d'énergie se font entre les deux types de mouvement (figure I.39). Toutefois, ces transferts ne se font qu'à certaines fréquences de rotation (phénomène de *curve veering* encadré sur la figure I.37). En dehors de ces zones de transfert d'énergie, les modes de fonctionnement sont bien typés rotation ou transversal (table I.4). On peut donc considérer que les modes sont découplés. Le modèle de rotation développé durant ce travail reprend l'hypothèse de découplage des vibrations transversales et de rotation. Néanmoins, l'expérimentateur qui confronte le modèle aux mesures de rotation sur une transmission de distribution automobile doit garder à l'esprit la possibilité de couplage linéaire et non-linéaire entre les vibrations transversales et de rotation.

Nous pouvons aussi remarquer que la méthode modale utilisé par R. S. Beikmann (1992) n'est pas applicable sur les transmissions par courroie dentée en raison de la complexité accrue de ce type de transmission. Le modèle de rotation est fortement non-linéaire à cause du comportement de la denture (équation I.117). D'autre part, contrairement aux transmissions serpentines par courroie Poly-V, les variations de couples aux arbres à cames sont très fortes par rapport au couple moyen (chapitre IV.2). Il n'est donc pas possible de déterminer une position d'équilibre moyenne à partir de laquelle on définit les modes du système linéarisé, pour calculer ensuite de *petits* déplacements autour de la position d'équilibre.

II.2.1.5. Vibrations longitudinales des brins de courroie

R. S. Beikmann (1992) montre l'absence d'interaction des vibrations longitudinales avec les autres types de vibrations (équation I.59). Les vibrations longitudinales n'ont donc pas lieu d'être dans notre modèle de rotation.

II.2.2. La poulie

II.2.2.1. Élasticité des supports

Les professionnels de la réparation automobile savent que l'usure des paliers et en particulier des galets provoque une usure prématurée de la courroie de distribution [Auto-Plus, 1996]. Il est donc conseillé de changer les galets à chaque changement de courroie. D'autre part, une étude sur les transmissions par engrenages montre qu'une partie significative de l'énergie vibratoire passe par les paliers [Bourdon et al.]. Dans le cadre des transmissions par courroie dentée, l'élasticité des paliers et des carters ainsi que la flexion des arbres de poulies peuvent introduire des variations d'entr'axes dont les effets sur le comportement dynamique et notamment sur les variations de tension, restent inconnus. C. D. Mote (1965) avait montré l'impact de l'élasticité des paliers sur les vibrations transversales mais rien n'a été fait sur les vibrations en rotation. Cet aspect sera donc pris en compte dans le modèle par des raideurs et des amortissements de paliers (chapitre II.II.3.6.5). Le comportement est considéré comme linéaire bien que ce ne soit généralement pas le cas, en particulier avec les paliers fluides. Les variations d'entr'axes dues à la dilatation thermique sont prises en compte par des forces s'exerçant sur les paliers.

II.2.2.2. La géométrie des poulies

Par construction, les poulies dentées présentent nombre de défauts. Nous conviendrons

néanmoins que le profil de la denture est parfait et que son pas reste constant. Nous considérons que la poulie et le galet est infiniment rigide comparé à la souplesse du palier. D'autre part, certains défauts présentés dans les deux chapitres suivants ne peuvent être escamotés de la modélisation.

II.2.2.2.1. L'excentricité

L'excentricité des poulies, c'est-à-dire la distance entre le centre de rotation et le centre de la poulie, intervient à la fois sur la rotation des poulies et sur les efforts aux paliers.

◆ *Effet sur la rotation*

L'excentricité est la cause majeure de l'erreur de transmission quasi-statique. Elle se reconnaît à sa fréquence qui est une combinaison linéaire des fréquences de rotation des différentes poulies et galets. La figure II.8 illustre l'erreur de transmission quasi-statique dans le cas d'une transmission à deux poulies de rapport de transmission 1:1. On observe clairement que l'erreur de transmission a une période de révolution due au tour poulie. L'erreur de transmission peut aussi devenir considérable dans certaines conditions de déphasage de l'excentricité entre les différentes poulies. Une mesure expérimentale de cette erreur de transmission introduite dans le modèle dynamique, permettra de tenir compte de ses effets sur la position angulaire des poulies.

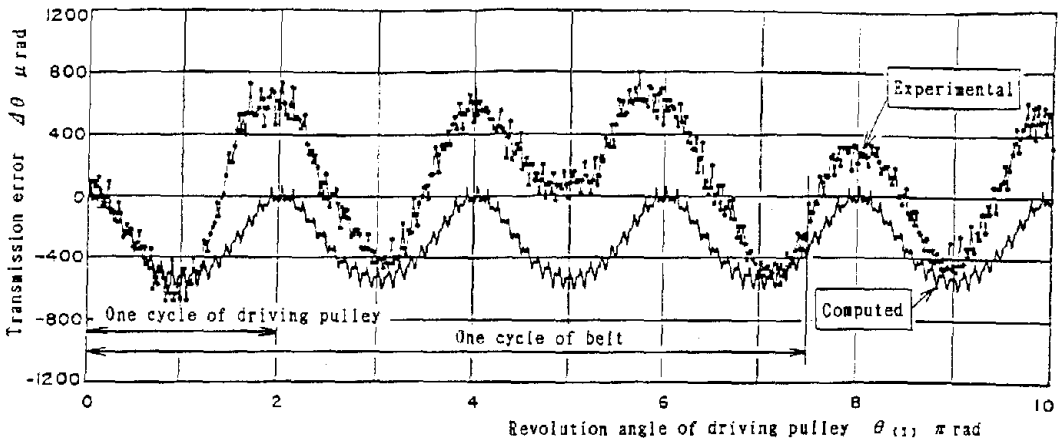


Figure II. 8 : Erreur de transmission mesurée et calculée due à l'excentricité des poulies [Kagotani, 1991].

◆ *Effets sur les paliers et la courroie*

L'excentricité des poulies provoque un allongement de la courroie. Il en résulte un effort important au niveau des paliers. La mesure au laboratoire de ces efforts grâce à des capteurs de force piézo-électrique 3D placés sous les paliers, permet de remonter à la variation des efforts dans la courroie. La figure II.9 montre des variations notables de la tension de pose. L'écart de tension peut atteindre 55 Newton pour une excentricité de l'ordre de 40 µm. H. Tokoro et al. (1997) quantifient en dynamique, pour leur part, la part de l'excentricité des poulies à 0.6 N./µm sur une variation totale de tension de 270 N. En conséquence, ces variations de tension sont imposées en entrée dans le modèle (Annexe V - chapitre I.3 - Demande 15).

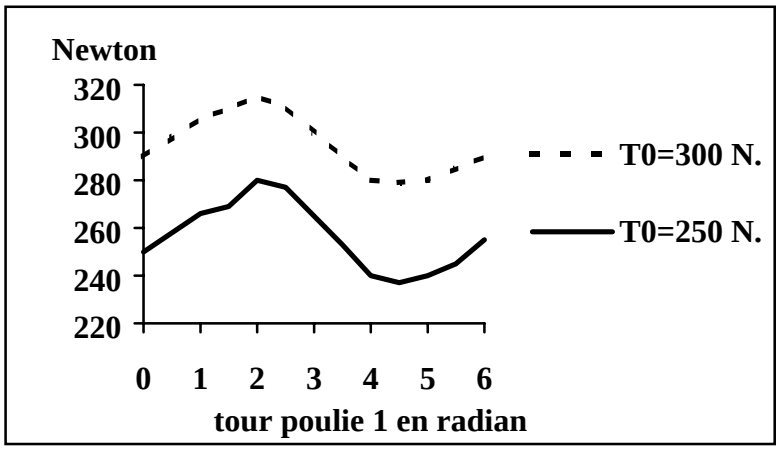


Figure II. 9 : Variation de la tension de pose T_0 en régime de rotation quasi-statique.

II.2.2.2.2. Le balourd

Les masses tournantes d'un système mécanique ne sont jamais parfaitement équilibrées. Le centre de masse de la poulie (et de son arbre) sont en général différent de son centre de rotation. Il en résulte une vibration au niveau du palier concerné, mais que la courroie retransmet sur les autres paliers. La figure II.10 illustre un ventilateur sur un site industriel entraîné par un moteur électrique par l'intermédiaire d'une courroie Poly-V. Un capteur horizontal placé sur le moteur enregistre l'accélération due aux balourd de la poulie du ventilateur. D'autre part, un capteur placé verticalement enregistre aussi d'une manière très nette (figure II.11) le balourd de la poulie du ventilateur. Ce résultat inattendu montre la complexité des phénomènes dynamiques de la transmission notamment dus au balourd. Cet aspect sera considéré dans la modélisation afin de comprendre l'influence du balourd (chapitre II.II.3.6.9).

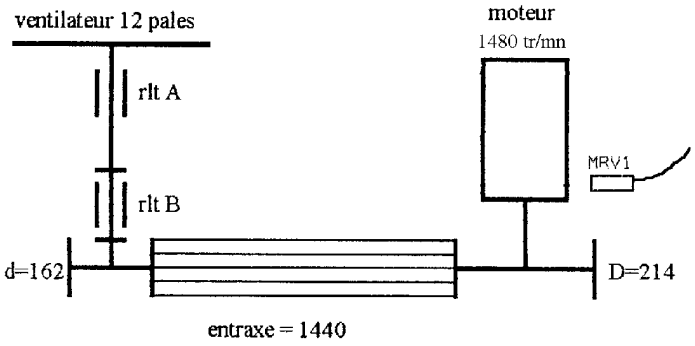


Figure II. 10 : Schéma cinématique d'une transmission par courroie Poly-V.

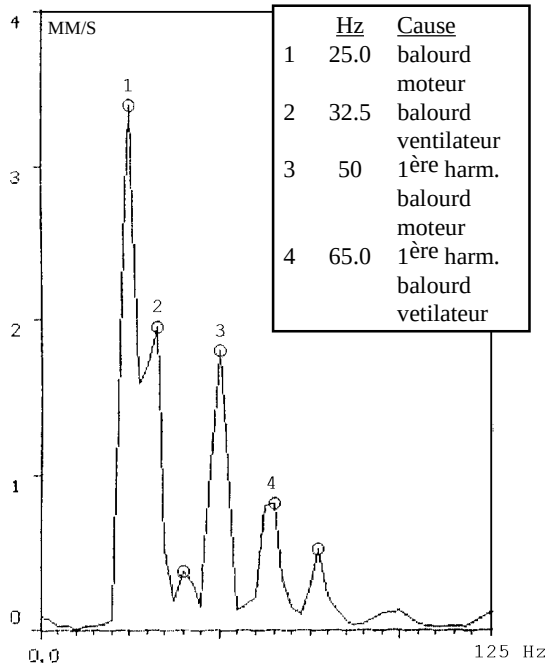


Figure II. 11 : Spectre en fréquence du signal de l'accéléromètre MRV1 placé en position vertical.

II.2.2.2.3. L'effet polygonal

L'enroulement de la courroie sur une poulie ne se fait pas sur un cercle parfait. En réalité, le profil de la poulie dentée s'apparente d'avantage à un polygone. En affinant, J.-M. Dancé (1992) distingue trois phases d'engrènement sur la poulie (figure II.12) :

- Phase 1 : La courroie s'enroule sur le diamètre extérieur de la poulie (arc CD de la figure II.12).
- Phase 2 : La courroie s'enroule autour du rayon de raccordement (arc DE de la figure II.12) entre le diamètre extérieur et le creux de dent.
- Phase 3 : La courroie s'enroule autour du rayon de raccordement (arc BC de la figure II.12) opposé au précédent.

Durant les deux dernières phases, le rayon d'enroulement r_i de la courroie varie. Or, l'erreur de transmission quasi-statique ($\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_1 r_1 / r_i$) dépend du rayon d'enroulement d'où un écart angulaire dû à l'effet polygonal.

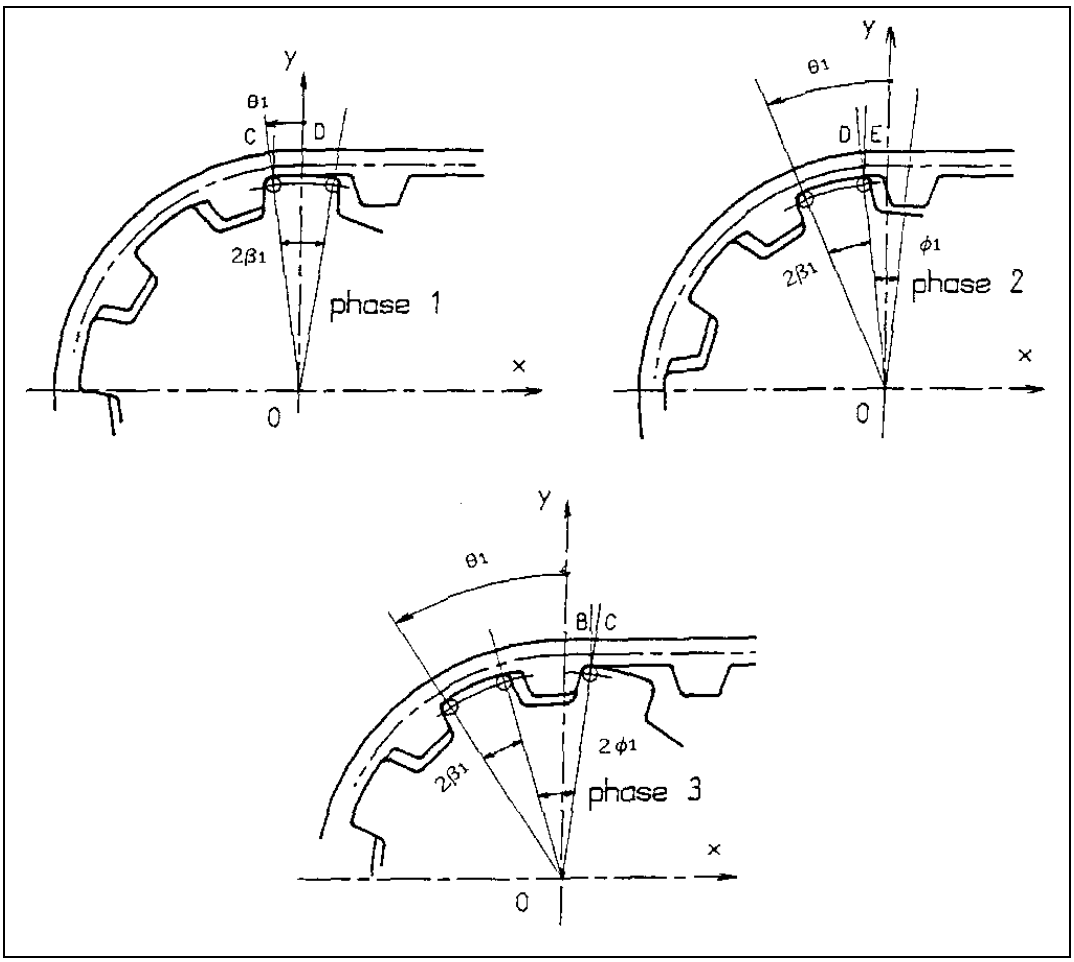


Figure II. 12 : Définition des trois phases d'engrènement [Dancé, 1992].

Le passage de la phase 2 à la phase 3 provoque un raccourcissement de la longueur du brin de courroie. Cette différence entraîne une élongation de la courroie qui entre en jeu dans

l'erreur de transmission.. M. Kagotani (1983) met en évidence par des calculs les deux phénomènes associés de l'effet polygonal et de l'élongation du brin dans l'erreur de transmission. La figure II.13 représente , sur la rotation d'un angle de pas de la poulie menée, l'erreur de transmission globale (figure II.13 b), la contribution de l'effet polygonal (figure II.13 c) et la contribution des déformations (figure II.13 a). L'étude de M. Kagotani s'effectue en quasi-statique. Il est donc intéressant d'inclure dans la modélisation l'erreur de transmission quasi-statique pour en étudier les répercussions sur le plan dynamique.

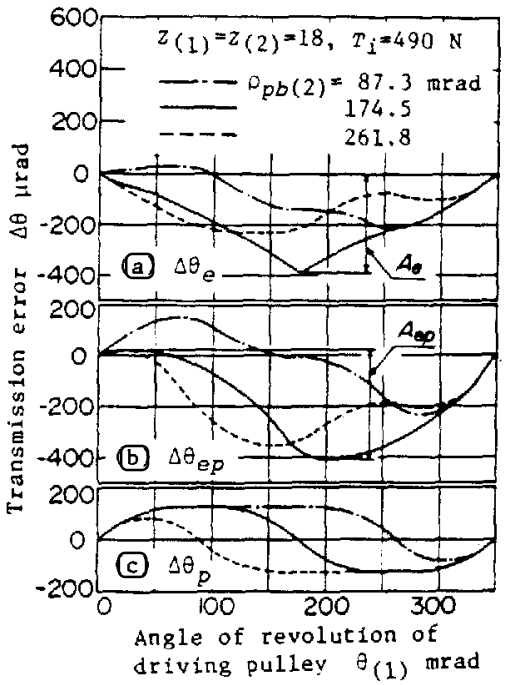


Figure II. 13 : Erreur de transmission due à l'effet polygonal et à l'élongation de la courroie [Kagotani, 1983].

II.2.2.3. Frottement poulie-courroie

La transmission de l'effort entre la poulie et la courroie se fait par obstacle (dent) mais aussi par adhérence sur le rayon extérieur de la poulie. Le frottement est à l'origine de l'adhérence. On distingue deux types de frottement: (1) Un frottement (ou adhérence) statique, et (2) un frottement (ou glissement) dynamique se produisant lorsqu'il y a perte d'adhérence. On distingue à nouveau deux types de glissement: (1) Le glissement fonctionnel, et (2) le patinage.

Le glissement fonctionnel est principalement dû à l'élasticité de la courroie. En effet, une poulie soumise à un couple à un brin tendu M et un brin mou N. Le brin le plus tendu subit un allongement; alors que la partie du brin enroulé sur le côté opposé subit une contraction. La longueur par unité de masse du brin M devient supérieure à celle du brin N. Dans ces conditions, pour, qu'à un instant et en un point donnés, défile une masse de courroie constante, il faut que la vitesse linéaire du brin M soit supérieure à celle du brin N. Le passage d'une vitesse à l'autre s'effectue donc sur la poulie et entraîne un mouvement relatif par rapport à la poulie, d'où le glissement fonctionnel. Ce phénomène est accentué par les variations de couple et les effets d'inertie. Le glissement fonctionnel est souvent exprimé selon un taux (en %) qui est le rapport entre la vitesse de glissement et celle de la poulie. Le patinage apparaît lorsque généralement le taux de glissement dépasse 1 %.

La complexité des propriétés tribologiques du caoutchouc et des conditions de fonctionnement (illustrées dans le tableau II.1) entraîne une méconnaissance de la loi de glissement de la courroie sur la poulie. Par conséquent, C. Debabbi et al. (1990) mesurent, pour les transmissions par courroie Poly-V, le glissement fonctionnel entre la courroie et la poulie (figure II.14) pour en tirer une loi "semi-expérimentale" (équation I.53).

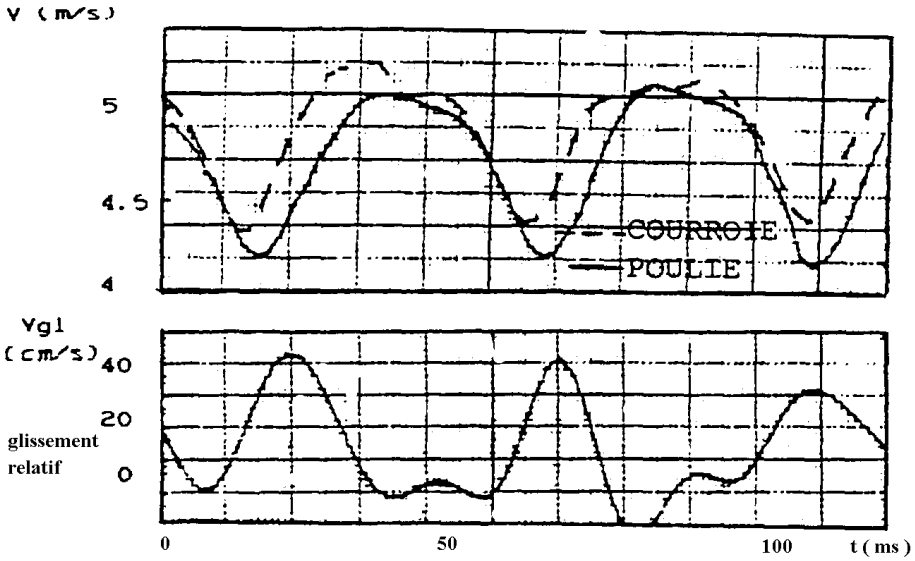


Figure II. 14 : Vitesses linéaires de la courroie et de la poulie de l'alternateur; vitesse de glissement de la courroie [debbabi et al.].

Conditions de fonctionnement	Propriétés mécaniques des surfaces en contact	Autres facteurs
• surface réelle de contact • effort normal (pression) • vitesse de glissement • température • degré d'humidité • durée de contact	• rugosités • module d'élasticité • contrainte de cisaillement • propriétés visco-élastique	• degré de cristallinité • contaminations diverses ◊ eau ◊ oxydes ◊ lubrifiants ◊ poussières ◊ débris d'usure

Tableau II. 1 : Facteurs intervenant dans la loi de frottement [Debbabi et al.].

C. Debbabi constate que le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation de la vitesse de glissement et avec la diminution de la pression de contact. Il simplifie la loi de frottement dynamique en ne gardant que les deux paramètres précités qu'il juge prépondérant. Toutefois, ces constatations sur la loi de frottement ne peuvent s'appliquer sur les courroies dentées. En effet, ces courroies possèdent un revêtement de Nylon (figure I.2) dont les propriétés tribologiques sont très différentes de celles du caoutchouc. Nous remarquons également que les autres auteurs ayant étudiés les courroies Poly-V, considèrent qu'il n'y a pas de glissement entre la courroie et la poulie.

Dans les transmissions par courroie dentée, les galets sont au contact avec le dos de la courroie. Normalement, ces galets sont fous (ou libres) entraînant une faible différence de tension dans les brins adjacents. On peut donc tout à fait considérer une adhérence entre les galets et le

dos de la courroie dentée.

Le problème pour les poulies dentées est différent. La présence des dents de courroie empêche à priori le patinage de la courroie sur le sommet de la dent de poulie. Le glissement fonctionnel n'est pas non plus forcément présent bien qu'on ait un brin tendu et un brin mou. En effet, la courroie ne patinant pas, le glissement fonctionnel ne se fait que sur une partie de l'arc d'enroulement sur la dent de poulie (arc AD sur la figure II.30 page 120). Cette partie de l'arc peut être insignifiante si la différente de tension n'est pas suffisante entre deux pas de courroie (cela ne dépasse jamais quelque Newton). Toutefois, tous les auteurs de modèle de répartition des tension dans une courroie dentée enroulée sur une poulie considèrent un glissement intégral (c'est-à-dire le patinage ou glissement sur tout l'arc d'enroulement) sur les dents de poulies. Cela est vrai si la différence de tension entre chaque pas de courroie est suffisamment importante. Nous utiliserons quant à nous un modèle de répartition des tension dans une courroie dentée avec un angle de glissement fonctionnel qu'il suffira d'adapter en fonction des couples employés.

La loi simple d'Euler (rappelée à l'annexe IV) est utilisée pour modéliser le glissement fonctionnel avec un coefficient de frottement constant. Ce coefficient varie de 0.1 à 0.4 selon les auteurs. T. H. C. Childs (et al.) et J.-M. Dancé (1992) différencient en outre la poulie motrice des poulies réceptrices par le sens du frottement. Le modèle de répartition de charge sur les dents en prise de J.-M. Dancé sera repris dans notre modèle de rotation en dynamique.

II.2.3. Le tendeur dynamique

Le tendeur dynamique a pour fonction de rattraper les variations de tension dans les brins causées par : (1) Les variations d'entr'axes dues à la dilatation du bâti (le bloc moteur), (2) la baisse de la tension due à l'effet centrifuge de la courroie, (3) les variations de couples et les effets d'inertie, (4) les vibrations transversales non traitées dans cette étude.

Dans les transmissions de distribution automobile, le tendeur est toujours en rotation autour d'un pivot (figure I.18). Pour simplifier le problème, une raideur équivalente de torsion sera considérée prenant en compte la géométrie du système et la raideur du ressort de contrainte du tendeur. Ce tendeur équivalent sera en rotation alors que celui de C. Debbabi (1990) est en translation (chapitre I.2.1.5). La raison vient de la forte variation des couples résistants dans les transmissions par courroie dentée pouvant causer des mouvements du tendeur d'une telle amplitude que la trajectoire ne peut plus être assimilée à une droite.

La bibliographie a montré le comportement non linéaire du tendeur avec notamment un phénomène de "Stick & Slip" (mouvement saccadé), caractéristique du frottement sec mais non considéré dans le modèle. Conformément aux informations pratiques, deux amortissements visqueux seront considérés suivant le sens de déplacement du tendeur. Mais une seule raideur est considérée. La géométrie et le palier du pivot du tendeur sont considérées suffisamment robuste pour ne pas se déformer. C. Debbabi et A. de Lamy signalent que le premier mode de déformation du tendeur est par conception assez élevé pour ne pas se trouver dans la plage de fréquence du fonctionnement du système. Le modèle pourra comporter ou non un tendeur dynamique.

II.2.4. L'action de la pesanteur

Un des avantages des courroies dentées étant leur légèreté, la force de la pesanteur ne sera pas prise en compte.

II.3.Modélisation et Structure du programme

Le programme a une structure modulaire, ou par bloc, présentée en figure II.15. Le problème de la modélisation est ainsi divisé en sous-problèmes. Chaque module du programme (figure II.15) est alors développé et incorporé indépendamment dans le programme. Des programmes déjà existant comme celui du module sur le calcul des charges sur les dents de courroie sont ainsi incorporés et modifiés plus facilement. Le développement informatique, la localisation des erreurs et les interventions ultérieures comme une éventuelle extension du programme sont ainsi facilités par une plus grande souplesse. Mais surtout la modélisation est plus précise car chaque module représente un modèle développé à part. On peut donc aller plus loin dans la finesse de la modélisation nécessaire pour un module mais non nécessaire dans un autre module. Par exemple, le besoin impérieux de prendre en compte la courbure des brins libres de courroie s'est fait sentir pour le calcul de la tension dans ces brins lors de la validation de ce module. Un modèle "tout-en-un" comme celui de S. J. Hwang et al. (chapitre I.2.1.4) n'aurait pas permis l'assimilation de la courbure des brins car il aurait fallu en tenir compte dans *tout* le programme d'où une complexité lourde à gérer. La structure modulaire permet ainsi de découpler les problèmes et d'apporter une réponse propre. Ainsi, le deuxième module permet un calcul fin de la répartition des charges sur les dents de courroie engrenées grâce à un algorithme spécifique. Au contraire, G. Banaszek et al. (1993) considère un modèle élémentaire de répartition des charges sur les dents de courroie (figure I.18) intégré dans un modèle global "tout-en-un" peu évolutif. La modularité permet donc une grande souplesse au niveau de la modélisation, la programmation et les développements ultérieurs.

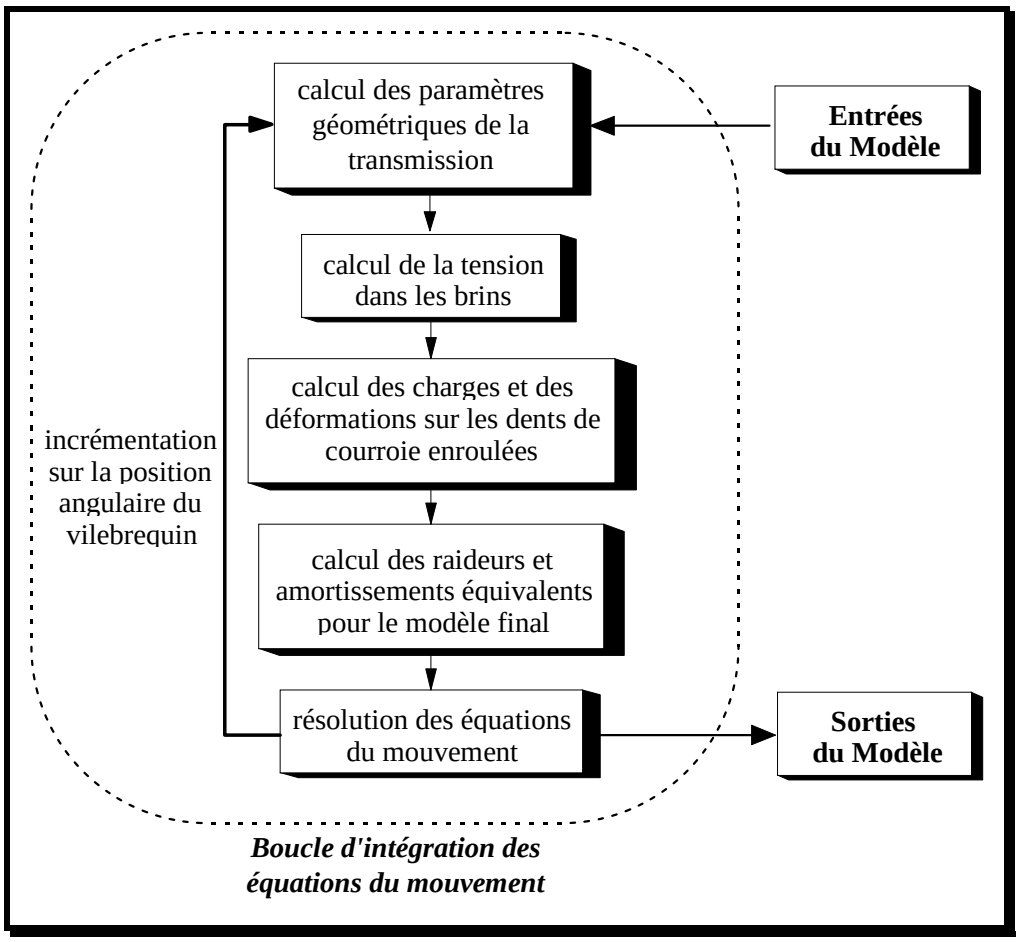


Figure II. 15 : Structure modulaire du programme associé à la modélisation.

Les chapitres suivant décrivent individuellement chaque module du programme associé à

la modélisation.

II.3.1. Entrées du Modèle

Une transmission synchrone se caractérise par des poulies dentées, des galets tendeurs fixes ou mobiles et une courroie dentée. Un arbre moteur entraîne par l'intermédiaire de la courroie des arbres récepteurs. Les galets tendeurs fixes sont placés de manière à augmenter l'angle d'enroulement. La figure II.16 illustre une transmission complexe de distribution de moteur à explosion. La poulie 1, 25 dents est motrice (vilebrequin). Les poulies 3-4 et 6-7 de 25 dents entraîne les quatre arbres à cames des deux culasses. Les roues 2, 5 et 10 sont des galets tendeurs fixes. La roue 8 est un galet tendeur mobile. La poulie 9, 28 dents est liée à la pompe à eau.

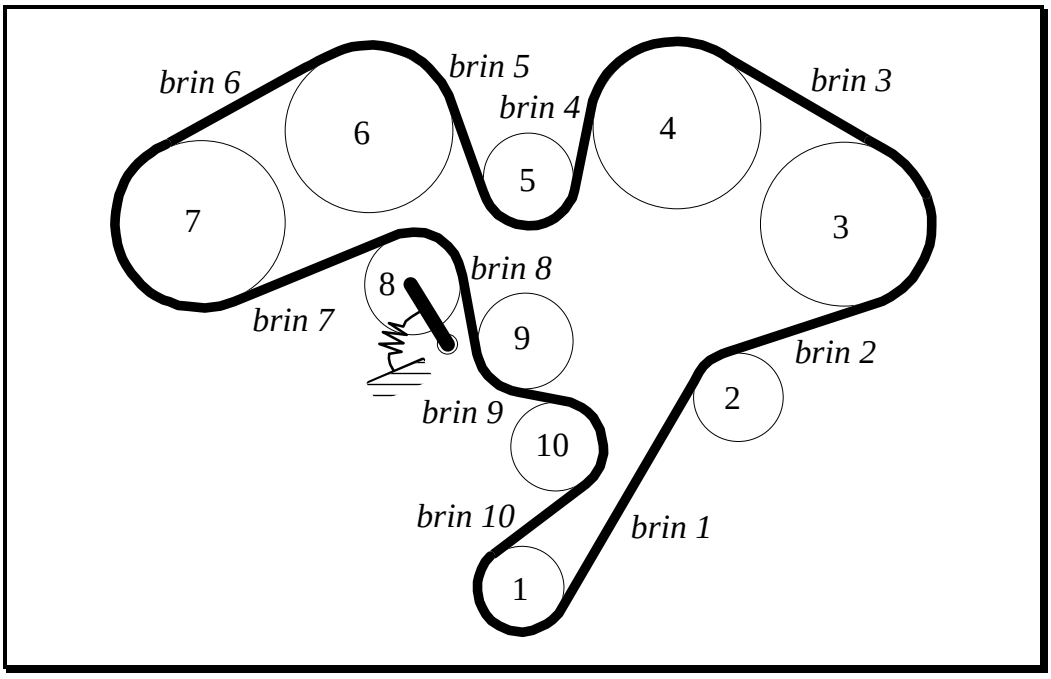


Figure II. 16 : Transmission de la distribution du nouveau V6 PSA-Renault (voir figure I.16).

Le programme demande tous les renseignements nécessaires pour caractériser la transmission sur le plan géométrique, mécanique et sur ses sollicitations. Ceux-ci sont saisis directement par le clavier ou par l'intermédiaire de fichiers (annexe II).

II.3.1.1. Géométrie de la transmission

La position des poulies dentées et des galets est demandée lorsque la courroie est soumise à la tension de pose. Les poulies dentées sont situées à l'intérieur du lacet formé par la courroie et s'appuie donc sur la face dentée de celle-ci. Par contre, les galets sont situés à l'extérieur du lacet formé par la courroie. En connaissant la nature des roues (poulie dentée ou galet) et leur rayon primitif, nous pouvons reconstituer le cheminement de la courroie.

D'autres indications comme le nombre de dent, le pas angulaire, la différence de pas poulie-courroie, le jeu et le coefficient de frottement poulie-courroie sont nécessaires pour calculer la répartition des charges sur les dents de courroie en prise sur une poulie (chapitre

II.II.3.4). Les coordonnées du pivot du tendeur sont également demandées.

La longueur de la courroie au repos est exigée pour le calcul de la tension de pose. Si la transmission dispose d'un tendeur dynamique, le galet du tendeur peut être ajusté pour avoir une tension de pose spécifiée.

En résumé, les entrées caractérisant la transmission sont :

- Nature (galet ou poulie dentée), position et rayon primitif des poulies.
- Nombre de dents, pas angulaire pour les poulies dentées.
- Différence de pas, jeu et coefficient de frottement poulie - courroie.
- Longueur de la courroie non chargée.
- Position du pivot du tendeur.
- Tension de pose initiale de la courroie.

II.3.1.2. Caractéristiques dynamiques

Les masses et les moments d'inertie par rapport à leur axe de rotation pour les poulies et un pas de courroie sont nécessaires pour l'équation du mouvement.

Les lois de déformation d'un pas de l'âme et d'une dent de courroie sont entrées sous forme de polynômes. L'amortissement est aussi requis.

Les raideurs et amortissements des paliers et du tendeur sont également entrés.

En résumé, nous avons :

- Masse et moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.
- Loi de déformation pour les dents et l'âme de la courroie.
- Raideur et amortissement pour les paliers
- Raideur et amortissement non linéaire pour le tendeur.

II.3.1.3. Contraintes extérieures au système

Le mouvement imposé au système, c'est-à-dire la rotation du vilebrequin ajoutée de l'acyclisme est entré sous forme de coefficient de Fourier. Les couples résistants peuvent être saisis sous leur forme temporelle ou par ses coefficients de Fourier. Les calculs sont menés à régime stabilisé.

L'acyclisme cinématique ou quasi-statique θ_{ic} pour chaque poulie i est également une entrée du modèle.

En résumé, nous avons :

- L'acyclisme moteur.
- Les couples résistants (et couple de traînée sur les galets).
- L'erreur de transmission quasi-statique de chaque poulie.

II.3.2. 1er module : Calcul des paramètres géométriques de la transmission

Les poulies de la transmission sont repérés par les coordonnées (x_i, y_i) de leur centre auxquelles on ajoute les variables du mouvement (u_i, v_i) nulles à l'instant initial. La connaissance du rayon primitif permet ensuite de calculer les paramètres géométriques de la transmission (figure II.17 et II.18).

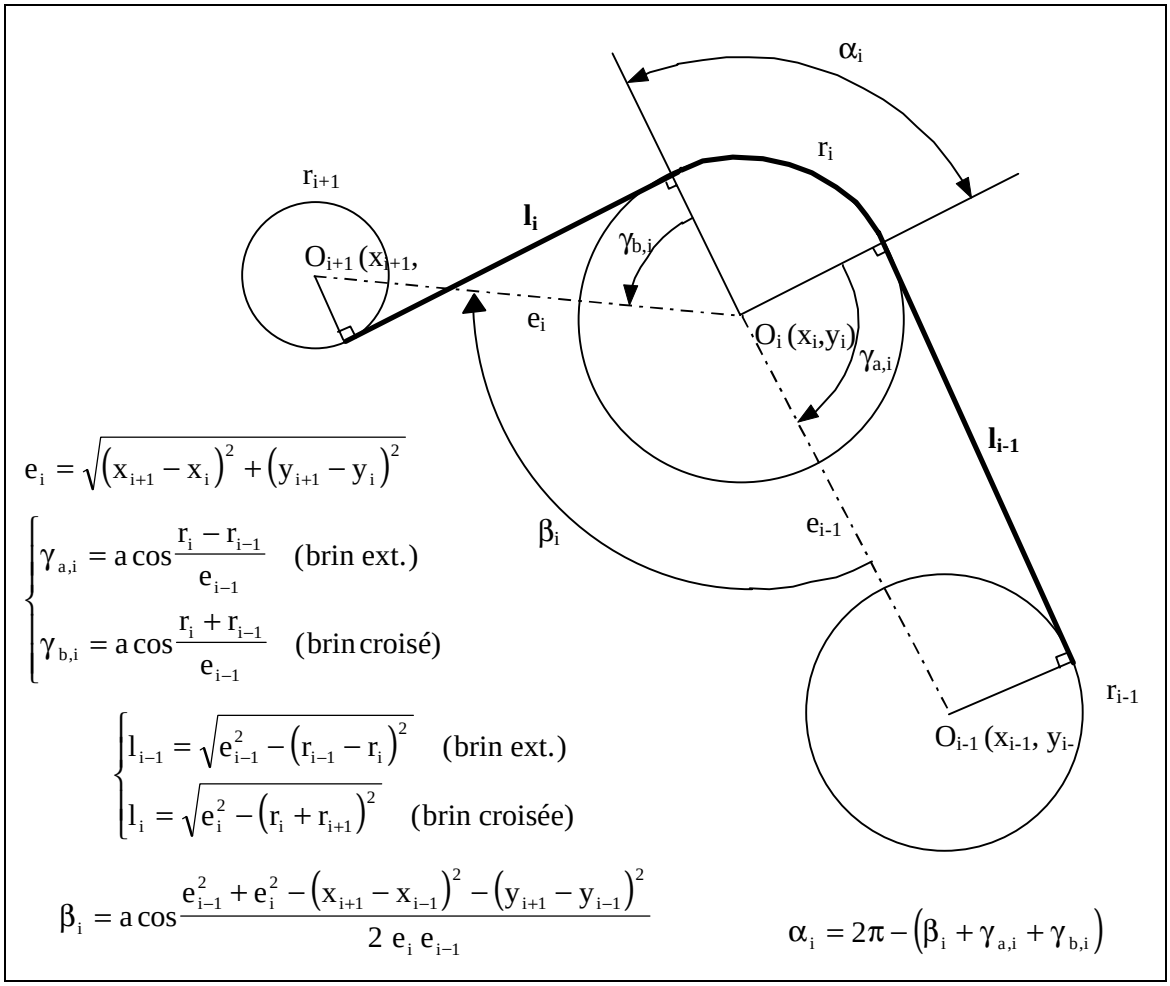


Figure II. 17 : Définition des paramètres géométriques pour un cas type.

La première étape est le calcul des entr'axes e_i. La longueur des brins l_i considérés comme rectiligne est ensuite calculée. On doit distinguer pour cela deux cas : (1) La courroie chemine à l'extérieur de deux poulies consécutives (cas entre la poulie i-1 et i de la figure II.17). (2) La courroie se croise entre deux poulies. L'une des deux poulies est à l'intérieur du lacet formé par la courroie tandis que la deuxième est à l'extérieur (cas entre la poulie i et i+1). La même

distinction est faite pour le calcul des angles γ_a et γ_b (figure II.17). La connaissance des longueurs l_i et du pas de la courroie permet de calculer le nombre de pas par brin.

L'angle $\beta_i = (O_{i-1}\, O_i\, O_{i+1})$ est ensuite calculé pour chaque poulie en s'aidant du produit vectoriel $O_{i+1}O_i \wedge O_{i-1}O_i$.

L'angle d'enroulement géométrique α_i (à distinguer de l'angle d'enroulement réel tenant compte des zones de décollement - voir la figure II.21) est le complément à 2π des angles β et γ. Si la poulie est à l'extérieur du lacet formé par la courroie, la formule est alors $\alpha_i = \beta_i - \gamma_{a,i} - \gamma_{b,i}$. Connaissant l'angle α_i, le rayon primitif r_i et le pas de la courroie, on est en mesure de calculer le nombre de dents enroulées sur la poulie i.

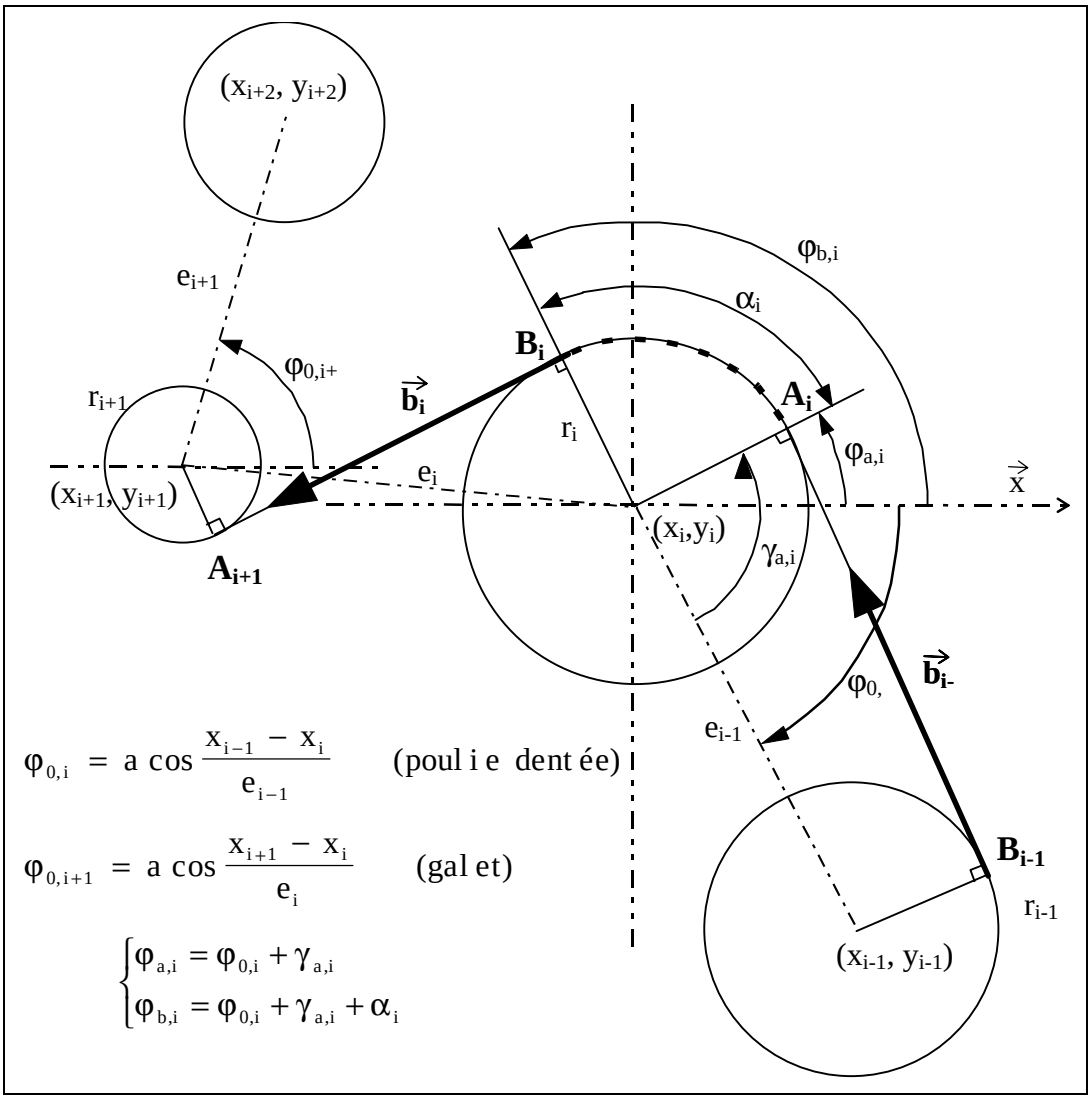


Figure II. 18 : Définition de paramètres vectoriels pour un cas type.

Le calcul de l'énergie cinétique des dents de courroie en prise sur une poulie nécessite la connaissance des coordonnées polaires (r_i, φ_i) de chaque dent (chapitre II.II.3.6.10). De plus, la projection des efforts interne aux brins de courroie (chapitre II.II.3.6.6) implique le calcul des vecteur brin b_i (figure II.18). Les vecteurs brin b_i permettent en outre le calcul de la constante d'efficacité du tendeur η élaborée par R. S. Beikmann (chapitre I.2.1.6.2).

Pour ces raisons, il faut déterminer les angles $\varphi_{a,i} = \varphi_{0,i} + \gamma_{a,i}$ et $\varphi_{b,i} = \varphi_{0,i} + \gamma_{a,i} + \alpha_i$ pour chaque poulie. L'angle φ_0 est calculé par un produit vectoriel et un produit scalaire :

$$\begin{cases} \varphi_{01} = a\sin\dfrac{\left|\vec{x} \wedge \overrightarrow{O_{i+k}O_{i+k-1}}\right|}{\overline{O_{i+k}O_{i+k-1}}} = a\sin\dfrac{y_{i+k-1} - y_{i+k}}{e_{i+k-1}} \\ \varphi_{02} = a\cos\dfrac{\vec{x} \cdot \overrightarrow{O_{i+k}O_{i+k-1}}}{\overline{O_{i+k}O_{i+k-1}}} = a\cos\dfrac{x_{i+k-1} - x_{i+k}}{e_{i+k-1}} \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} k = 0 \text{ pour une poulie dentée} \\ k = 1 \text{ pour un galet} \end{cases}$$

$$\text{Si } \varphi_{01} \le 0 \text{ alors } \varphi_{0,i} = -\varphi_{02}\text{, sinon } \varphi_{0,i} = +\varphi_{02} \qquad \text{Equ. II. 2}$$

Ainsi, la dent de courroie j sur la poulie i est repérée par $\left(r_i, \varphi_i = \varphi_{a,i} + p_i/2 + \sum_2^j p_i\right)$ avec p_i, pas angulaire de la poulie i.

Le calcul des coordonnées des points de tangence A_i et B_i est immédiat :

$$A_i\begin{pmatrix} x_i + r_i.\cos\varphi_{a,i} \\ y_i + r_i.\sin\varphi_{a,i} \end{pmatrix} \text{ et } B_i\begin{pmatrix} x_i + r_i.\cos\varphi_{b,i} \\ y_i + r_i.\sin\varphi_{b,i} \end{pmatrix} \qquad \text{Equ. II. 3}$$

L'équation 3 permet de calculer sans difficultés les coordonnées des vecteurs brin $\vec{b}_i$ normalisés à 1.

En raison du mouvement constant des poulies, l'ensemble de ces paramètres géométriques est recalculé à chaque itération de l'intégration des équations du mouvement.

II.3.3. 2ème module : Calcul de la tension dans les brins

II.3.3.1. Modélisation du calcul de la tension dans les brins

Tous les auteurs étudiés au chapitre I relie la tension dans les brins à la rotation des poulies, à l'image de J. N. Fawcett et al. :

$$T_i = T_0 + K\left(r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1}\right) \qquad \text{id. Equ. I.3}$$

Y.-L. Yang (et Barker) incorpore en plus l'amortissement du brin (équation I.10). En considérant la forme d'une équation type du mouvement ($I\ddot{\theta} + K\theta = C$), nous percevons l'équivalence entre $K\theta$ et $C - I\ddot{\theta}$. Nous pouvons donc rattacher la tension dans un brin au couple C et à l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$. C'est le cas de la modélisation développée ici. Celle-ci est basée sur un calcul de tension dans les brins en statique développé par J.-M. Dancé (1992). Cette modélisation est reprise et généralisée pour le cas dynamique en tenant compte de la rigidité de flexion dans les brins.

On considère n poulies (figure II.19). Nous avons alors n relations d'équilibre pour chaque brin :

$T_i = t_{i+1}$ pour $2 \le i \le n-1$ Equ. II. 4

et $T_1 = T_n$; $t_1 = t_2$

Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de chaque poulie donne n relations supplémentaires :

$$I_{i/\theta_i}\ddot{\theta}_i + I_{i/u_i}\ddot{u}_i + I_{i/v_i}\ddot{v}_i = C_i + (t_{i+1} - T_{i+1})r_i \qquad 1 \le i \le n-1 \qquad \text{Equ. II. 5}$$

$$I_n.\ddot{\theta}_{n/\theta_i} + I_{n/u_i}\ddot{u}_n + I_{n/v_i}\ddot{v}_n = C_n + (T_1 - t_1)r_n$$

avec C_i couple extérieur au système s'appliquant sur chaque poulie i,
I_{i/θ_i} moment d'inertie par rapport au centre la rotation de la poulie,
$I_{i/u_i}, I_{i/v_i}$ termes de couplage inertiel avec u et v.

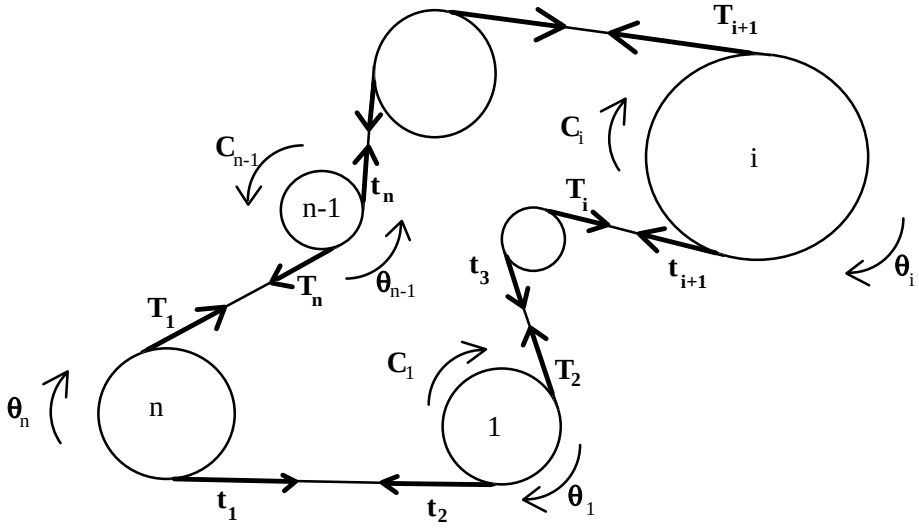


Figure II. 19 : Tension dans les brins.

Le système d'équation II.4 et 5 est indéterminé. En effet, plusieurs tension T_i peuvent donner le même couple et la même accélération. Une relation supplémentaire est nécessaire pour déterminer les tensions T_i et t_i. Cette relation est obtenue en écrivant que la longueur géométrique de la courroie ne varie pas (relation analogue à la conservation de la masse) car les paliers sont considérés comme fixe à l'instant t.

Sous une tension de pose T_0, un brin a une longueur L_{i0}. Sous une tension $T_i = t_{i+1}$, le brin de courroie (brin libre plus les deux demi-brins enroulés sur les poulies) a une longueur L_{iT}, tel que :

$$L_{iT} = L_{i0} + L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)$$

où μ est le coefficient d'allongement de la courroie.

Le calcul des longueurs de brin L_{i0} sera traité au chapitre II.II.3.3.3. Toutefois, la longueur totale géométrique de la courroie ne varie pas. On écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} L_{i0} = L_{n0} + L_{n0}\mu(t_1 - T_0) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[L_{i0} + L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)\right] \qquad \text{Equ. II. 6}$$

où $\sum_{i=1}^{n} L_{i0}$ représente la longueur de la courroie sous tension T_0.

Développons l'équation II.6 :

$$\sum_{i=1}^{n} L_{i0} = \sum_{i=1}^{n} L_{i0} + L_{n0}\mu(t_1 - T_0) + \sum_{i=1}^{n-1} L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)$$

Ce qui donne après simplification :

$$T_0 \sum_{i=1}^{n} L_{i0} = t_1 . L_{n0} + \sum_{i=1}^{n-1} L_{i0} T_{i+1} \qquad \text{Equ. II. 7}$$

L'équation II.4 est introduite dans l'équation II.5. L'équation $I_1\ddot{\theta}_1 = C_1 + (t_2 - T_2)r_1$ est remplacée par l'équation II.7 ce qui donne :

$$\begin{cases} t_1 L_{10} + \sum_{i=2}^{n} L_{i0} T_i = T_0 \sum_{i=1}^{n} L_{i0} \\ T_i r_i - T_{i-1} r_i = C_i - I_{i/\theta_i}\ddot{\theta}_i - I_{i/u_i}\ddot{u}_i - I_{i/v_i}\ddot{v}_i \quad \text{pour } 2 \le i \le n \\ T_1 = T_n \end{cases}$$

On obtient un système linéaire (équation II.8) facilement résoluble par la méthode "LU" (décomposition en deux matrices triangulaires *Lower* et *Upper*). Il permet de connaître la tension dans tous les brins en fonction des longueurs de brins courbes L_{i0} et de la tension T_0. Cette tension T_0 dépend uniquement de la position ($x_i + u_i$, $y_i + v_i$) des poulies calculée lors de l'intégration de l'équation du mouvement, et qui serait celle de toute la courroie si aucun couple n'était appliqué à la transmission. À l'instant initial, la tension T_0 est donc la tension de pose. Ce calcul a l'avantage déterminant d'éviter d'avoir à connaître le couple appliqué sur la poulie 1, soit le vilebrequin.

$$\begin{bmatrix} L_{n0} & L_{10} & L_{20} & \cdots & L_{i-1,0} & L_{i0} & \cdots & L_{n-2,0} & L_{n-1,0} \\ 0 & -r_2 & r_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 & \ddots & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & -r_i & r_i & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & -r_{n-1} & r_{n-1} \\ r_n & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & -r_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0 \sum_{i=1}^{n} L_{i0} \\ C_2 - I_{2/\theta_i}\ddot{\theta}_2 - I_{2/u_i}\ddot{u}_2 - I_{2/v_i}\ddot{v}_2 \\ C_3 - I_{3/\theta_i}\ddot{\theta}_3 - I_{3/u_i}\ddot{u}_3 - I_{3/v_i}\ddot{v}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_i - I_{i/\theta_i}\ddot{\theta}_i - I_{i/u_i}\ddot{u}_i - I_{i/v_i}\ddot{v}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n - I_{n/\theta_i}\ddot{\theta}_n - I_{n/u_i}\ddot{u}_n - I_{n/v_i}\ddot{v}_n \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 8}$$

Le chapitre II.II.3.3.4 décrit l'algorithme de convergence du calcul de la tension dans les

brins. Durant la convergence, une tension de brin négative peut être calculée. Cet état n'est pas physique et la tension la plus faible est ramenée dans ce cas à 18 N. Cette tension seuil est choisie d'après les résultats expérimentaux (chapitre III.5.1). La tension dans les autres brins est augmentée de la même valeur. Dans ce cas, l'équation II.8 est toujours vérifiée avec T_0 augmenté également de la même valeur.

La résolution de l'équation II.8 passe par la connaissance de la longueur des brins L_{i0}. La bibliographie suivante montre que la longueur d'un brin dépend de la tension dans ce brin, et développe les équations décrivant ce phénomène.

II.3.3.2. Bibliographie concernant la forme d'une courroie due à sa raideur de flexion

C. A. Coulomb (1785) a étudié pour la première fois la forme d'une courroie plate sur une transmission à deux poulies de même rayon R (figure II.20).

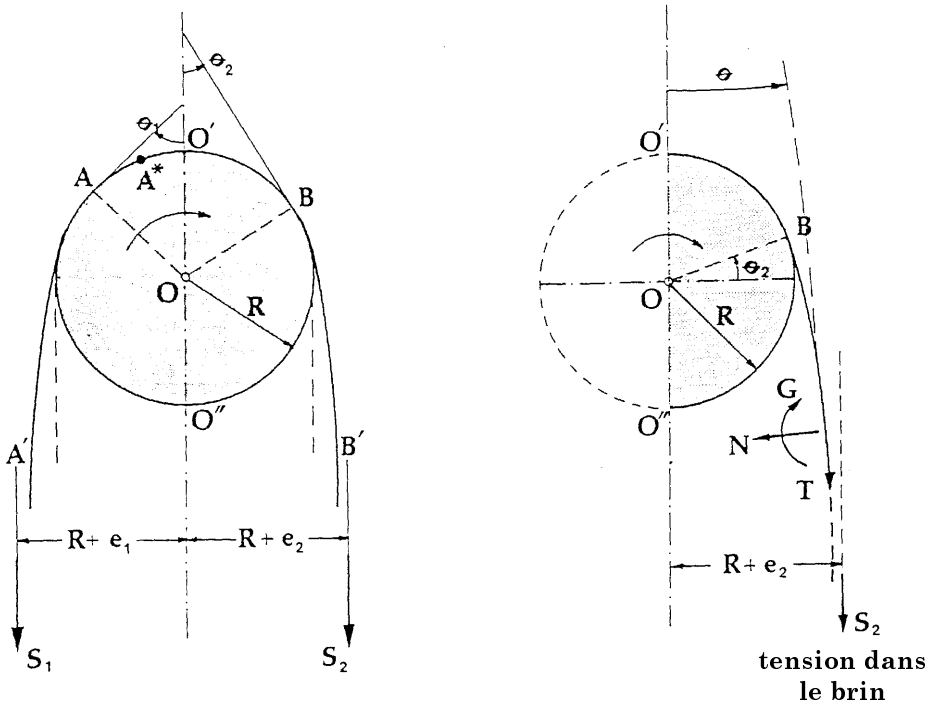


Figure II. 20 : Paramètres de courbure de courroie [Fosdick et Villaggio].

Si les deux brins sont suffisamment long, ils ont tendance à s'approcher de deux lignes asymptotiques à la distance ($R+e_1$) et ($R+e_2$) de la ligne médiane passant par O. C. A. Coulomb propose, sur la base d'observations expérimentales, cette loi pour e_1 et e_2 :

$$e_1 + e_2 = \delta^n \left(a + \frac{b}{S_\infty} \right) \qquad \text{Equ. II. 9}$$

où δ est l'épaisseur de la courroie, $S_\infty = (S_1 + S_2)/2$, S_1 et S_2 sont les tensions dans les brins, et a,b,n sont des paramètres déterminés expérimentalement. La formule a plus tard été simplifié[1] par :

[1] Eytelwein, J. A., 1808, '' Handuck der Statik Fester Korper'', Bd. II, Berlin.

$$e_1 + e_2 = c.\delta^2 \qquad \text{Equ. II. 10}$$

G. Hamel propose pour la première fois en 1927, une justification théorique des formules empiriques 1 et 2, en considérant la courroie comme une poutre élastique. R. Fosdick et P. Villaggio reprennent les travaux de Hamel. Ils proposent une révision pour éliminer certaines erreurs commises dans les conditions limites ainsi qu'une généralisation en utilisant une loi d'élasticité en grand déplacement non linéaire. L'auteur considère les non-linéarités dans la loi contrainte-déformation comme non négligeables. En conséquence, on obtient des brins rectilignes parallèles à une distance finie de la poulie. À contrario, la forme rectiligne ne s'obtient qu'à une distance infinie de la poulie lorsque la courroie est linéairement élastique. L'effet de la pesanteur sur la forme de la courroie est négligée.

L'équilibre d'une portion élémentaire de courroie sur l'arc BB' (figure II.20) est décrite en termes classiques[2] :

$$T = S_2 \cos\theta, \quad N = S_2 \sin\theta, \quad \frac{dG}{ds} + N = 0. \qquad \text{Equ. II. 11}$$

avec T(s), tension, N(s), effort tranchant, G(s), moment de flexion, θ, angle tangent à la courbe, et s, coordonnée curviligne de la courroie s'annulant en O'.

On considère les vecteurs x, y, et z du repère principal centrés sur une section de courroie, avec x dans l'axe de N, y, axe du moment G, et z, dans l'axe de T. Si la courroie est suffisamment fine, le taux de déformation est exprimé proportionnellement à la courbure de la courroie (théorie des poutres fines de Kirchhoff) :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{d\theta}{ds} x \qquad \text{Equ. II. 12}$$

La loi non-linéaire reliant le taux de déformation ε_{zz} à la contrainte normale σ_{zz} est suggérée par certaines expérimentations[3 et 4] :

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}^{n} \quad (n = 1,3,5,\ldots) \qquad \text{Equ. II. 13}$$

On obtient ainsi l'expression du moment fléchissant G :

$$G = \iint_A -x\sigma_{zz}\,dxdy = -D_n\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^n \quad \text{avec} \quad D_n = E\iint_A x^{n+1}dxdy \qquad \text{Equ. II. 14}$$

Pour n=1, on retrouve la raideur de flexion linéaire D_1= EI (E, module d'élasticité longitudinal et I, moment d'inertie de la section et perpendiculaire au plan de flexion). En combinant les équations II.11 et 14, nous obtenons l'équation différentielle :

$$D_n \frac{d}{ds}\left[\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^n\right] - S_2 \sin\theta = 0 \quad s_2 \le s \le \infty \qquad \text{Equ. II. 15}$$

---

[2] Love, A. E. H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th Ed., The University Press, Cambridge.
[3] Bach, "Maschineneelemente", Berlin, 1920.
[4] Poschl, T, "Der Stoss", Handbuch der Physic, Bd. VI, Springer, Berlin., 1928.

où s_2 est la longueur de l'arc O'B. En multipliant l'équation II.15 par dθ/ds, celle-ci se réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{n}{n+1}D_n\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^{n+1}+S_2\cos\theta\right]=0 \qquad \text{Equ. II. 16}$$

Nous obtenons l'intégrale première :

$$\frac{n}{n+1}D_n\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^{n+1}+S_2\cos\theta=\text{const.}=S_2 \qquad \text{Equ. II. 17}$$

où la constante est déterminée par les conditions limites $\theta(s\to+\infty)=0$ et $d\theta/ds(s\to+\infty)=0$. Finalement :

$$\frac{n}{n+1}D_n\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^{n+1}-2.S_2\sin^2\frac{\theta}{2}=0 \qquad \text{Equ. II. 18}$$

La courbure peut maintenant être explicitée :

$$\frac{d\theta}{ds}=\sqrt[n+1]{2\frac{n+1}{n}\frac{S_2}{D_n}\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad \text{Equ. II. 19}$$

où seul la racine négative est considérée, puisque θ décroît suivant s.

On peut obtenir dès maintenant l'angle $\theta_2=\theta(s_2)$, déterminé par la condition $d\theta/ds(s=s_2)=-1/R$:

$$\theta_2=2\arcsin\sqrt{\frac{1}{R^{n+1}}\frac{n}{2.(n+1)}\frac{D_n}{S_2}} \qquad \text{Equ. II. 20}$$

Nous constatons que la courroie se désengrène de la poulie lorsque la tension S_2 diminue. Le saut de dent est vraisemblablement initié par ce phénomène, réduisant le nombre de dents de courroie en prise sur la poulie.

Les variables de l'équation II.19 sont séparées pour obtenir :

$$\frac{d\theta}{\sin^{2/(n+1)}\frac{\theta}{2}}=\sqrt[n+1]{2\frac{n+1}{n}\frac{S_2}{D_n}}ds \qquad n=1,3,5,\ldots \qquad \text{Equ. II. 21}$$

La solution de l'équation II.19, satisfaisant la condition limite $\theta_2=\theta(s_2)$, a la forme[5] :

n=1

[5] Gradshteyn, I. S., Ryzhyk, I. M, "Tables of Integrals, Series, and Products", New York :Academic Press, 1965.

$$\tan\frac{\theta}{4} = \tan\frac{\theta_2}{4} e^{\sqrt{S_2/D_1}(s_2 - s)} \qquad s_2 \le s \le \infty \qquad \text{Equ. II. 22}$$

n= 3, 5, ...

$$B_{\sin^2\theta/2}\left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2}\right] = B_{\sin^2\theta_2/2}\left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2}\right] - \sqrt[n+1]{2\frac{n+1}{n}\frac{S_2}{D_n}}(s - s_2) \quad s_2 \le s \le \infty \quad \text{Equ. II. 23}$$

où $B_{|x|\le 1}[p,q] = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \Big/ \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ est la fonction beta incomplète.

Nous pouvons également expliciter s(θ) :

n=1

$$s(\theta) = \sqrt{\frac{S_2}{D_1}}\left[\ln\left(\tan\frac{\theta_2}{4}\right) - \ln\left(\tan\frac{\theta}{4}\right)\right] + s_2 \qquad \text{Equ. II. 24}$$

n= 3, 5, ...

$$s(\theta) = \frac{B_{\sin^2\theta_2/2}\left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2}\right] - B_{\sin^2\theta/2}\left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2}\right]}{\sqrt[n+1]{2\frac{n+1}{n}\frac{S_2}{D_n}}} + s_2 \qquad \text{Equ. II. 25}$$

L'équation II.19 indique que le brin reste droit (dθ/ds = 0) une fois que θ = 0. Or l'équation II.22 montre que pour n=1, on a θ = 0 lorsque $s \to \infty$. Le brin libre ne devient donc jamais rectiligne. Par contre, pour $n \neq 1$, l'équation montre que θ s'annule pour une valeur finie de s :

$$s(\theta = 0) = \frac{B_{\sin^2\theta_2/2}\left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2}\right]}{\sqrt[n+1]{2\frac{n+1}{n}\frac{S_2}{D_n}}} + s_2 \qquad \text{Equ. II. 26}$$

Un brin de courroie étant en réalité rectiligne, le modèle développé par R. Fosdick et P. Villagio est donc plus réaliste pour n= 3, 5 , ... G. Gerbert (1981) constate également que le modèle pour n=1 diffère de la réalité : *"... expériments show that the measured lack of contact angle* [angle de décollement θ] *differs considerably from the estimated one."*.

R. Fosdick et P. Villagio développent également une solution approchée en tenant compte de l'inertie de la courroie pour une faible vitesse constante de translation. Les équations d'équilibre de l'arc de courroie BB' (figure II.20), deviennent :

$$\frac{dT}{ds} - N_k = 0, \quad \frac{dN}{ds} + T_k = -\rho A v^2 \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{dG}{ds} + N = -\rho I v^2 \frac{d^2\theta}{ds^2} \qquad \text{Equ. II. 27,}$$

avec T(s), tension, N(s), effort tranchant, G(s), moment de flexion, θ, angle tangent à la courbe, s, coordonnée curviligne de la courroie s'annulant en O', ρ, densité massique de la courroie, A, aire d'une section, v, vitesse stationnaire de la courroie, et J, moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation y.

L'auteur obtient :

$$\theta_2 = 2\arcsin\sqrt{\frac{\frac{1}{R^{n+1}}\frac{n}{2.(n+1)}\frac{D_n}{S_2-\rho A v^2}}{\left[1+\frac{1}{2n}\frac{\rho I v^2}{D_n}R^{n-1}\right]^{n+1}}} \qquad \text{Equ. II. 28}$$

En comparant les équations II.20 et 28, nous pouvons apprécier l'impact de l'inertie de la courroie sur l'angle de décollement θ_2. Dans ce but, nous considérons une section de courroie ISORAN® PIRELLI. La hauteur h d'une section varie si on prend en compte ou non une dent de courroie. Celle-ci est moyennée à 3.6 mm. La largeur L est de 310 mm. La densité massique ρ est de 0.14 kg/m. La raideur de flexion D_1 = 9e-3 N.m² est déterminée par le recalage des tensions dans les brins. Le rayon R de la poulie est de 0.06 mm et la vitesse de rotation de 1000 tr/mn. Nous avons en outre :

$I = A.h^2 / 12 = 1.2e\text{-}9\ m^4$

$E = D_1/I = 7.75e6\ kg/m^2$

$$D_n = E\int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-h/2}^{+h/2} x^{n+1}dx = \frac{2EL}{n+2}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2} = \frac{4.8e+6}{n+2}(1.8e-3)^{n+2}$$

A= L.h = 1.116e-3 m.

v = 6.28 m/s.

Nous obtenons :

$$\frac{D_n}{S_2-\rho A v^2} = \frac{D_n}{S_2-6e-3} \approx \frac{D_n}{S_2}$$

$$1+\frac{1}{2n}\frac{\rho I v^2}{D_n}R^{n-1} = 1+\frac{n+2}{n}\frac{6.9e-16}{(1.8e-3)^{n+2}}0.06^{n-1} \approx 1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 3$$

L'inertie de la courroie est donc négligeable pour des faibles valeurs de n, et bien sûr, de vitesse v.

En raison de la complexité des équations décrivant la forme d'un brin libre, il est nécessaire de se restreindre au cas linéaire n=1, pour développer davantage les équations tout en pouvant les exploiter informatiquement d'une manière simple. C'est la démarche suivie par G. Gerbert (1991). Il retrouve les formules II.19, 22 et 24 pour n=1 :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{2\sqrt{T_*}}{R}\sin\frac{\theta}{2} \qquad \text{Equ. II. 29}$$

$$\tan\frac{\theta}{4} = \tan\frac{\theta_c}{4}e^{-\sqrt{T_*}\frac{s}{R}} \qquad \text{Equ. II. 30}$$

$$s = \frac{R}{\sqrt{T_*}}\left[\ln\left(\tan\frac{\theta c}{4}\right) - \ln\left(\tan\frac{\theta}{4}\right)\right] \qquad \text{Equ. II. 31,}$$

avec $T_*=TR^2/S$ tension adimensionalisée, S raideur de flexion, T tension dans le brin, θ_c angle de décollement (figure II.21).

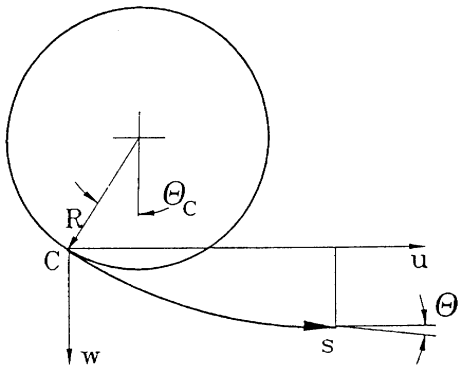


Figure II. 21 : Géométrie d'un brin libre [Gerbert, 1991].

D'après la figure II.21, nous avons :

$$\begin{cases} du = ds\cos\theta \\ dw = ds\sin\theta \end{cases} \qquad \text{Equ. II. 32}$$

La différence δ entre la longueur s de la courbe, et de l'abscisse u est :

$$d\delta = ds - du = \frac{ds}{d\theta}(1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{R}{\sqrt{T_*}}\sin\frac{\theta}{2}d\theta \qquad \text{Equ. II. 33}$$

D'où :

$$\delta = s - u = \frac{2R}{\sqrt{T_*}}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta_c}{2}\right] \qquad \text{Equ. II. 34}$$

$$w = \frac{2R}{\sqrt{T_*}}\left[\sin\frac{\theta_c}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right] \quad \text{(le 2 manque dans [Gerbert, 1991])} \qquad \text{Equ. II. 35}$$

Un développement au premier ordre des équations II.31 et 34, nous mènent à :

$$\theta = \theta_c e^{-\sqrt{T_*}\frac{u}{R}}$$ Equ. II. 36

L'équation 12 devient (à condition que $1/\sqrt{T_*} << 1$) :

$$\theta_c = 1/\sqrt{T_*}$$ Equ. II. 37

Nous obtenons alors au premier ordre ($1/\sqrt{T_*} << 1$) :

$$w = \frac{2R}{\sqrt{T_*}}\left[1 - e^{-\sqrt{T_*}\frac{u}{R}}\right]$$ Equ. II. 38

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{T_*}} e^{-\sqrt{T_*}\frac{u}{R}}$$ Equ. II. 39

$$s = u + \frac{R}{4T_*^{3/2}}\left[1 - e^{-2\sqrt{T_*}\frac{u}{R}}\right]$$ Equ. II. 40

G. Gerbert (1981) développe d'autres équations en considérant le brin libre symétrique autour de son point milieu A (figure II.22), considéré comme l'origine du repère (u, w). Cela implique d'autres conditions limites : L'effort tranchant Q (figure II.23), la déflexion w et sa dérivée w' sont considérés comme nuls pour u=0 (au point A). La dérivée seconde w'' est égale à la courbure de la poulie 1/R pour $u=u_c$. On obtient la loi :

$$w = \frac{S}{TR}\frac{\cosh\sqrt{\frac{T}{S}}u - 1}{\cosh\sqrt{\frac{T}{S}}u_c}$$ Equ. II. 41,

avec S, rigidité de flexion, T, tension dans le brin, R, rayon de la poulie. Au point C_0, nous retrouvons, en développant au premier ordre, la formule II.37 :

$$w_c' = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{S}{T}}$$ Equ. II. 42

Nous pouvons noter que M. Y. Yue (1993) utilise aussi les formules II.41 et 42 dans son étude de vibrations transversales de courroie (figure II.22).

Connaissant maintenant les équations décrivant la forme d'un brin libre de courroie, nous pouvons mettre en place une méthodologie informatique de calcul de la longueur des brins.

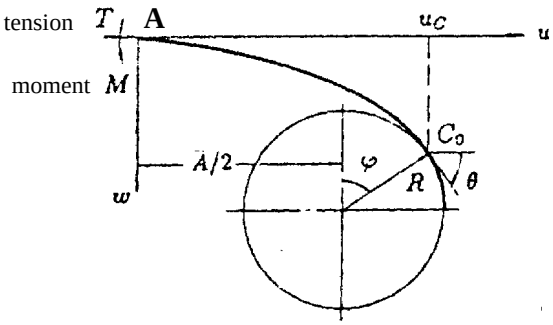


Figure II. 22 : Géométrie d'un brin libre [Yue, 1993].

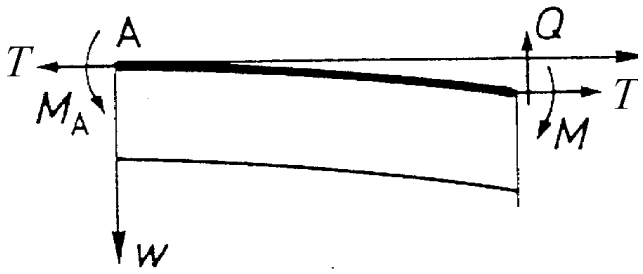


Figure II. 23 : Chargement d'un brin libre [Gerbert, 1981].

II.3.3.3. Calcul de la longueur L_{i0} d'un brin i sous une tension T

Après de multiples essais de formulation, le meilleur résultat acquis lors de la validation du calcul des tensions dans les brins, est obtenu par une application simple de l'équation II.40 :

$$s_i = u_c + \frac{R_i}{4T_*^{3/2}}\left[1 - e^{-2\sqrt{T_*}\frac{u_c}{R_i}}\right] \qquad \text{id. Equ. II. 40}$$

avec s_i longueur du demi-brin courbe (figure II.24),
u_c abscisse curviligne du brin,
R_i rayon de la poulie,
$T_*=TR^2/S$ tension adimensionnée.

L'abscisse u_c est définie en toute rigueur par : $u_c = l_i/2 + R_i \sin\varphi_i$. La longueur du brin rectiligne l_i est facilement calculée (figure II.17). Pour de petits angles φ_i, nous avons $R_i \sin\varphi_i \approx R_i \varphi_i$. Or l'équation II.40 n'est valable que pour des petits angles φ_i (ou pour $1/\sqrt{T_*} << 1$). En effet, pour de grands angles φ_i, nous obtenons la longueur du demi-brin courbe s_i inférieure à la longueur du demi-brin droit ajoutée de l'arc $R_i\varphi_i$ (c'est-à-dire $s_i \le l_i/2 + R_i \varphi_i$). Cela n'est évidemment pas physique (voir le commentaire en italique de G. Gerbert page 110). Pour obtenir des longueurs de brin plus précises quelque soit la valeur de l'angle φ_i, la formulation suivante de l'abscisse curviligne s_i est adoptée :

$$u_c = l_i/2 + R_i \varphi_i \qquad \text{Equ. II. 43}$$

Ainsi, le critère géométrique sur les longueurs ($s_i \ge l_i/2 + R_i \varphi_i$) est toujours vérifié. La longueur du brin courbe L_i est alors :

$$L_i = s_i + s_{i+1} \qquad \text{Equ. II. 44}$$

La longueur des brins L_i dépendant à la fois des tensions et utilisée pour le calcul des tensions (équation II.8), un calcul itératif s'impose. Il est décrit au chapitre suivant.

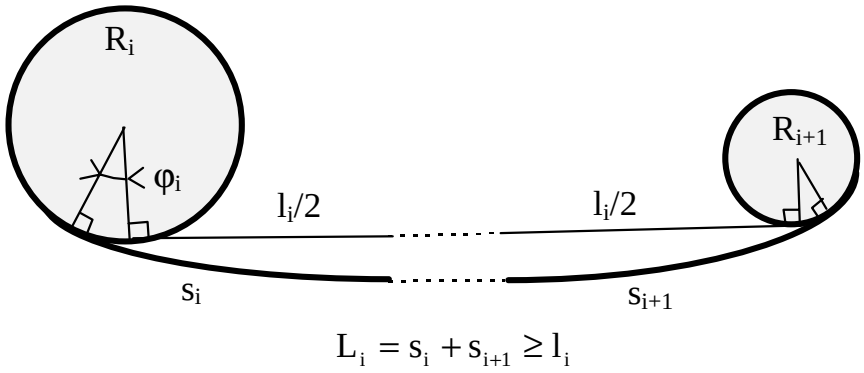


Figure II. 24 : Calcul de la longueur d'un brin courbe.

II.3.3.4. Calcul non-linéaire des tensions

La résolution itérative des systèmes non linéaire multidimensionnels est en général très difficile. Le problème de convergence est donc ramené à un paramètre unique : ΔT. La tension dans les brins de l'instant précédent est utilisée pour un premier calcul des tension dans les brins (équation II.8). Or la différence des tensions $\left\{T_i - T_j, \forall (i,j) \subset [1,n]^2\right\}$ est uniquement déterminée par le couple $C_i - I_i\ddot{\theta}_i$ de chaque poulie. Par conséquent, cette différence reste constante quelque soit la longueur des brins. La tension finalement obtenue au cours de l'itération est donc la tension initiale au processus de convergence ajoutée d'un paramètre ΔT identique pour tous les brins. La convergence est ainsi assurée par un seul paramètre ΔT et par une méthode classique de bissection. La convergence est difficile et de petit pas doivent être adoptés. En effet, pour les forts couples, la tension dans le brin mou décroît très faiblement (figure III.30). Or, une variation de quelques dixièmes de Newton dans le brin mou provoque une variation de quelques dizaines de Newton dans le brin tendu. Une telle sensibilité dans la valeur des tensions entraîne par conséquent une convergence lente du calcul non-linéaire des tensions avec pour chaque itération le calcul complet des longueurs de brin courbes. En conséquence, le calcul itératif est long et peut prendre jusqu'à 50 % du temps de calcul total du programme.

II.3.4. 3ème module : Calcul des charges et des déformations sur les dents de courroie enroulées

Cinq modèles de répartition des charges sur les dents de courroie enroulées sont présentés dans la littérature avec un degré de sophistication croissant. G. Gerbert a publié la premier en 1978, deux modèles mathématiques simples qui font l'objet du chapitre II.II.3.4.1. Le premier modèle, sans frottement, est repris pour la mesure de la loi de déformation d'une dent de courroie (chapitre III.3.1.1.3.2). Ensuite, T. Koyama (1979) publie un modèle intégrant la différence de pas entre la courroie et la poulie et une loi non linéaire de déformation d'une dent de courroie. T. H. C. Childs et al. reprennent la modélisation de T. Koyama, mais en différenciant la poulie menée et la poulie motrice par le sens du frottement. Enfin, J.-M. Dancé synthétise en 1992 les modèles proposés par T. H. C. Childs et T. Koyama. Ce modèle, incorporé dans notre modélisation dynamique, est présentée dans le chapitre II.II.3.4.2. Un second modèle s'appuyant sur la géométrie fine d'une courroie à profil trapézoïdale et H.T.D. est développé par J.-M. Dancé et D. Play (1991).

II.3.4.1. Modèle Gerbert (1978)

II.3.4.1.1. Modèle sans frottement

La transmission d'un couple sur une poulie par une courroie dentée, induit une différence de tension sur les deux extrémités de la courroie : T tension dans le brin tendu, t tension dans le brin mou (figure II.25). Les charges se répartissent sur les différentes dents en contact, le frottement est négligé dans un premier temps.

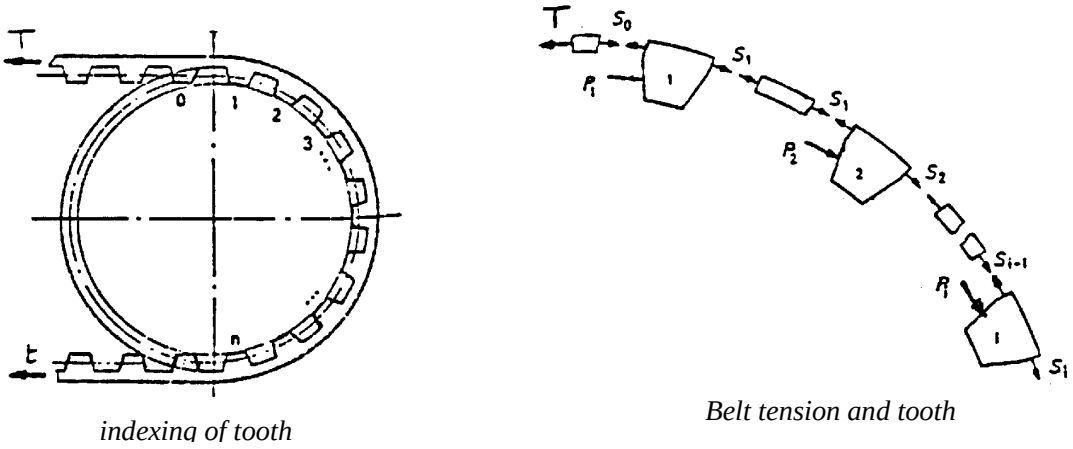


Figure II. 25 : Numérotation des dents et équilibre [Gerbert, 1978].

Pour la dent en contact i, nous avons (figure II.25) :

$$P_i = S_{i-1} - S_i \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \qquad \text{Equ. II. 45}$$

Aux conditions limites : $T = S_0$ et $t = S_n$

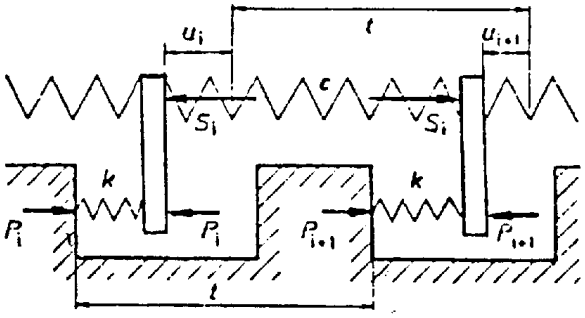


Figure II. 26 : Modèle ressort [Gerbert, 1978].

Le système d'équation II.45 est hyperstatique. Une relation supplémentaire entre les déformations de dent de courroie est donc introduite (figure II.26) :

$$u_{i+1} = u_i - du_i \qquad \text{Equ. II. 46}$$

avec u_i déformation de la dent de courroie i,
du_i déformation de l'âme de courroie i.

La courroie est constituée d'une âme de rigidité k, et d'une dent de rigidité K. On écrit alors :

$$\begin{cases} P_i = K.u_i \\ S_i = k.du_i \end{cases} \qquad \text{Equ. II. 47}$$

L'équation II.46 devient :

$$k_0^2.S_i = P_i - P_{i+1} \qquad (\text{avec } k_0 = \sqrt{K/k}) \qquad \text{Equ. II. 48}$$

En combinant les équations II.45 et 48, G. Gerbert obtient :

$$S_{i+1} - 2.S_i + S_{i-1} = \Delta^2(S_i) = k_0^2.S_i \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n-1 \qquad \text{Equ. II. 49}$$

avec Δ, opérateur des différences finies ($\Delta(S_i) = S_{i+1} - S_i$).

Au premier ordre, l'équation II.49 s'écrit :

$$\frac{d^2S_i}{di^2} = k_0^2.S_i \qquad \text{Equ. II. 50}$$

La solution de l'équation II.50 est de la forme :

$$S_i = A.sh(k_0 i) + B.ch(k_0 i) \qquad \text{Equ. II. 51}$$

Les conditions aux limites (i=0 S_0=T , i=n S_n=t) permettent de déterminer A et B. On obtient finalement :

$$S_i.sh(k_0 n) = t.sh(k_0 i) + T.sh(k_0 (n-i)) \qquad \text{Equ. II. 52}$$

Les charges sur les dents P_i sont obtenues en utilisant l'équation II.48:

$$P_i.sh(k_0 n) = t.\left[sh(k_0(i-1)) - sh(k_0 i)\right] + T.\left[sh(k_0(n+1-i)) - sh(k_0(n-i))\right] \qquad \text{Equ. II. 53}$$

G. Gerbert publie un modèle plus complet en introduisant le frottement au niveau du contact de la dent de poulie sur le tissu recouvrant la courroie.

II.3.4.1.2. Modèle avec frottement

Contrairement au chapitre précédent, il faut maintenant dissocier l'équilibre de la dent seule et l'équilibre de l'âme (figure II.27) :

Équilibre de la dent: $P_i = S_{i-1,b} - S_{i,a}$ Equ. II. 54

Équilibre de l'âme (poulie menée) : $S_{i,a} = S_{i,b}.e^{f\theta}$ Equ. II. 55

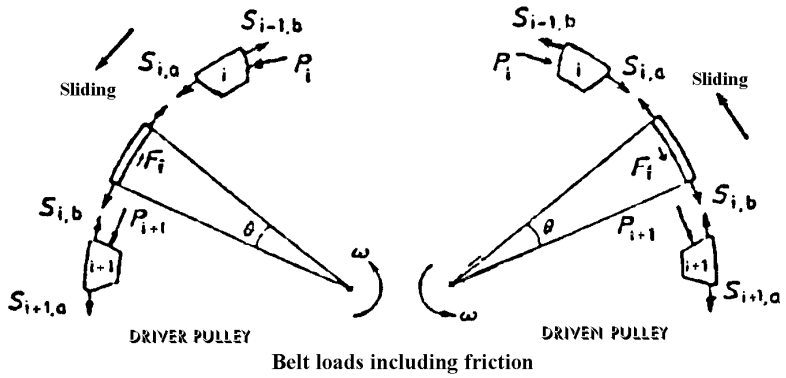


Figure II. 27 : Frottement de la courroie sur la poulie [Gerbert, 1978].

La relation supplémentaire entre les déformation de dents (équation II.46) conduit à une relation de déformation similaire à l'équation II.48:

$$k_0^2.S_{i,moy} = P_i - P_{i+1} \qquad \text{Equ. II. 56}$$

avec $S_{i,moy}$, la tension moyenne dans l'âme :

$$S_{i,moy} = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} S_{i,b}.e^{f\beta}d\beta = \frac{S_{i,b}}{f\theta}\cdot\left(e^{f\theta}-1\right)$$

L'équation II.54 permet d'obtenir P_{i+1} en fonction de $S_{i,a}$ et $S_{i,b}$, d'où en utilisant les équations II.55 et 56:

$$S_{i+1,b} - \left[1+e^{-f\theta}+(k_0/\theta f).(1-e^{-f\theta})\right].S_{i,b} + e^{-f\theta}.S_{i-1,b} = 0 \qquad \text{Equ. II. 57}$$

En développant à l'ordre 2 le terme $(k_0/\theta f).(1-e^{-f\theta})$, l'équation II.57 devient:

$$S_{i+1,b} + \alpha.S_{i,b} + e^{-f\theta}.S_{i-1,b} = 0 \qquad \text{Equ. II. 58}$$

avec $\alpha = 1+e^{-f\theta}+(1-f\theta/2)k_0$

La résolution directe du système d'équation II.58 conduit après introduction des conditions aux limites à:

$$\frac{S_{i,b}}{T} = \frac{1}{r_1^n - r_2^n}\left[r_1^n.r_2^i - r_2^n.r_1^i + \frac{t}{T}\left(r_1^i - r_2^i\right)\right] \qquad \text{Equ. II. 59}$$

avec $2r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4e^{-f\theta}}$ et $2r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4e^{-f\theta}}$

La répartition des charges sur les dents est déduite des équations II.54, 55 et 59. Les équations restent valable pour la poulie menée. Il suffit de remplacer le coefficient de frottement f par -f.

II.3.4.1.3. Conclusion

Les deux modèles précédemment exposés ne sont pas exploitables dans le cadre de notre modélisation dynamique. Ils ne tiennent pas compte de paramètres essentiels comme la différence de pas entre la courroie et la poulie [Dancé, 1992]. Surtout, la rigidité des dents est constante et ne tient pas compte des facteurs de la pression radiale exercée sur la courroie et sa non linéarité suivant la déformation de la dent. En revanche, le modèle de J.-M. Dancé détaillé au chapitre suivant, tient compte de la non linéarité de la loi de déformation de la dent. Une évolution de ce modèle incorpore également le paramètre de la pression radiale.

II.3.4.2. Modèle Dancé (1992) appliqué au modèle dynamique de rotation

II.3.4.2.1. Définition des paramètres de la géométrie d'engrènement

Le modèle de répartition des charges sur les dents engrenées utilise différentes variables afférentes à la géométrie d'engrènement. Ce chapitre définit le jeu longtudinal entre la dent de poulie et de courroie, l'angle d'enroulement de la courroie sur une dent de poulie, et le pas d'engrènement nécessaire pour comprendre les interférences de bases entre la poulie et la courroie.

- *Jeu longitudinal BL entre la dent de poulie et de courroie*

Les dents de courroies engrenées n'emplissent pas le volume du creux de poulie. Apparaît alors la notion de jeu longitudinal pour des dents non chargées. Le jeu BL est l'espace ménagé entre la dent de courroie et la dent de poulie (figure II.28). Il est constant pour le profil trapézoïdal mais ne l'est pas pour un profil général comme le profil H.T.D. On définit alors un jeu BL moyen, situé à mi-hauteur de la dent de poulie. Il est compris en général entre 1 et 5/10 millimètre.

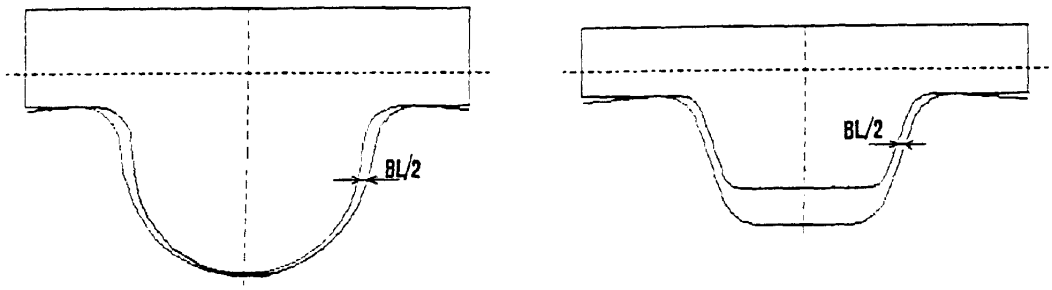


Figure II. 28: Jeu longitudinal BL pour le profil H.T.D. et trapézoïdal.

- *Angle d'enroulement β' de la courroie sur une dent de poulie*

La partie de la courroie enroulée sur le diamètre extérieur de la poulie est soumise à une force de frottement. On peut diviser cette partie en trois zones (figure II.29) : (1) et (3) La courroie s'enroule sur deux petits rayons de raccordement entre le diamètre extérieur de la poulie et le creux (ou la gorge) de poulie. (2) Une zone de contact sur le diamètre extérieur de la poulie. Ces trois zones définissent un angle d'enroulement β' de la courroie sur une dent de poulie. Cet angle est en général proche du tiers du pas angulaire de la poulie (nombre de dents de poulie divisé par 2π).

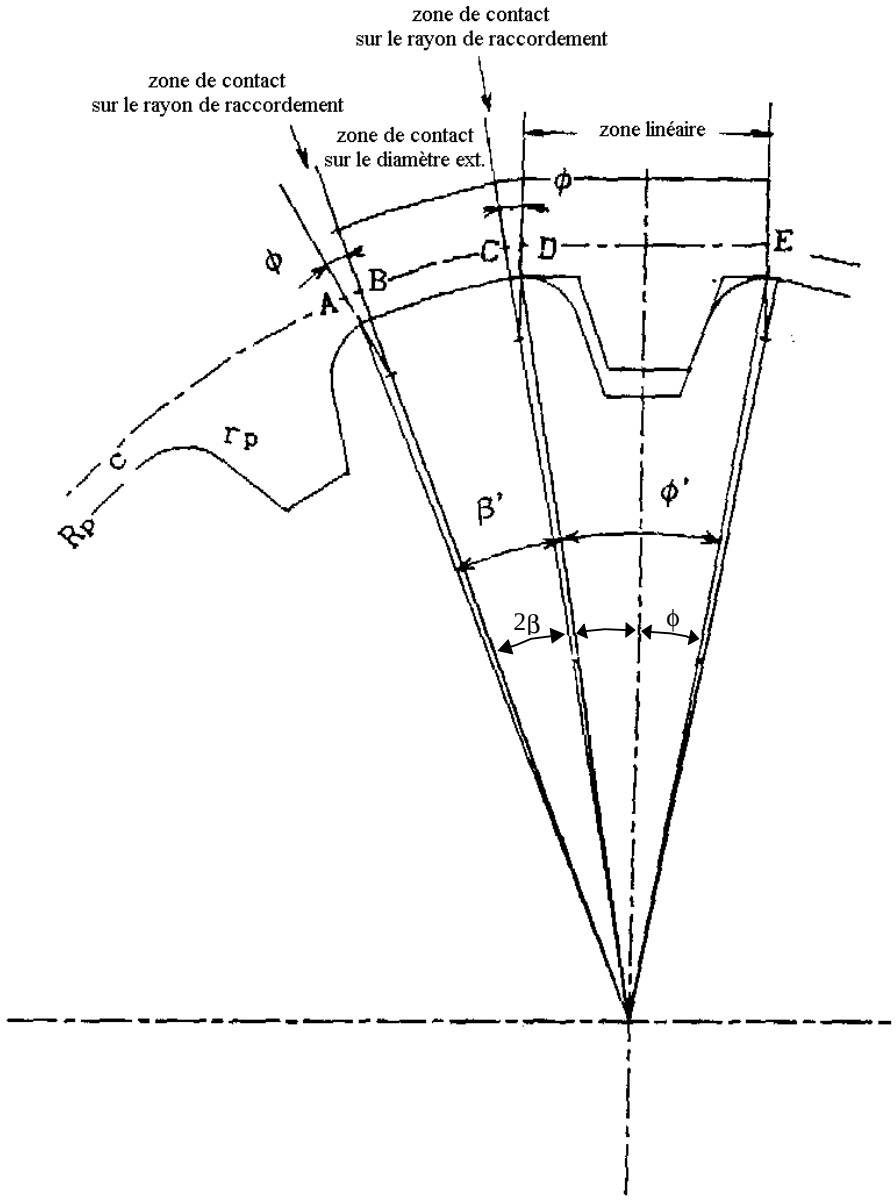


Figure II. 29 : Géométrie d'engrènement.

◆ *Le pas d'engrènement* t'_p

Préalablement aux calculs des interférences de bases, il faut définir le pas d'engrènement. La longueur d'enroulement sur un pas de poulie s'appelle le pas d'engrènement t'_p. La courroie s'enroule sur la partie supérieure des dents de la poulie, et reste linéaire entre les dents de la poulie (figure II.29) :

$$t'_p = AE = AB + BC + CD + DE$$

Il est à noter que le pas d'engrènement diffère du pas de la poulie t_P, ce dernier étant mesuré sur le diamètre primitif de la poulie (t_P = arc AE). Le pas d'engrènement est calculé à partir de quatre paramètres de poulie (figure II.30) :

1. θ demi-angle de creux,
2. β demi-angle d'enroulement,
3. r_p rayon de sommet ou de raccordement,
4. R_p rayon extérieur ou de tête,

et d'un paramètre courroie :

5. c distance entre le câblage de la courroie et la tête de poulie.

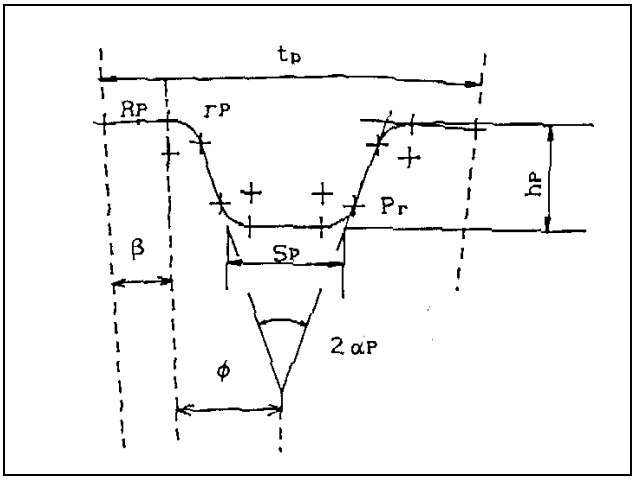


Figure II. 30 : paramètres géométriques de poulie.

On obtient (figure II.29) :

$$t'_p = 2(R_p - r_p).\sin\phi + 2(r_p + c).\phi + 2(R_p + c).\beta \qquad \text{Equ. II. 60}$$

◆ *Interférences de bases B et C entre la poulie et la courroie*

Le pas de courroie t_B et le pas de poulie d'engrènement t'_p n'étant pas égaux, il n'y a pas coïncidence des pas. Cette différence de pas ($\Delta t = t_B - t'_p$) entraîne d'autre type de jeux ou interférences de base. On distingue deux types d'interférences complémentaires (figure II.31) :

Jeux : C(I) du côté du brin tendu

B(I) du côté du brin mou

avec $1 \le I \le N$ et N, nombre de dents en contact.

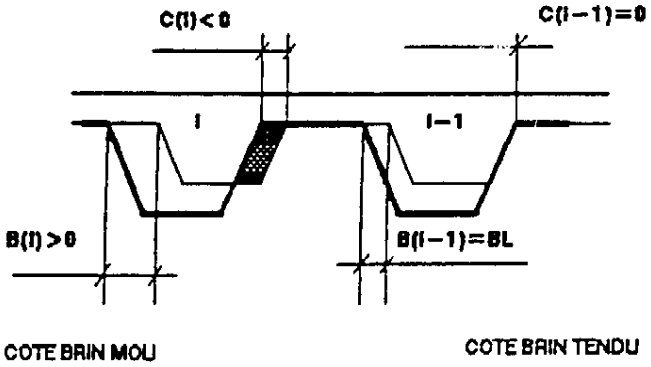


Figure II. 31 :Définition des interférences B et C.

La figure II.32 montre que plusieurs cas peuvent se produire. On notera que les jeux C(I) et B(I) peuvent prendre des valeurs négatives. Dans ce cas, les dents de la courroie sont déjà chargées. Il s'agit donc d'une précharge. Dans certain cas, les efforts seront transmis sur les dents situées du côté du brin mou ($\Delta t < 0$). Inversement, on peut voir que si $\Delta t > 0$, ce sont les premières dents en prises qui transmettront essentiellement les efforts. Pour déterminer les interférences de bases, on peut écrire:

$$C(I) = (I - m).\Delta t$$
$$B(I) = BL - C(I) \qquad \text{pour } 1 \le I \le N,$$

où m est un paramètre représentant le point d'équilibre du système poulie - courroie. Le paramètre m est défini tel que C(m) = 0. Dans le cas où on porte sur la première dent, m=N. Dans le cas où on porte sur la dernière dent, m = 1. Le paramètre m est donc compris entre 1 et N. Et ce paramètre n'est pas forcément un nombre entier.

Lorsque les dents sont chargées, c'est-à-dire que les d'interférence sont négatives (C(I) < 0 et B(I) < 0), la condition d'équilibre sur la partie de la courroie enroulée se traduit par:

$$K.\left(\sum C(I) < 0\right) = K..\left(\sum B(I) < 0\right) \qquad \text{Equ. II. 61}$$

avec K, raideur de la dent et de l'âme de la courroie.

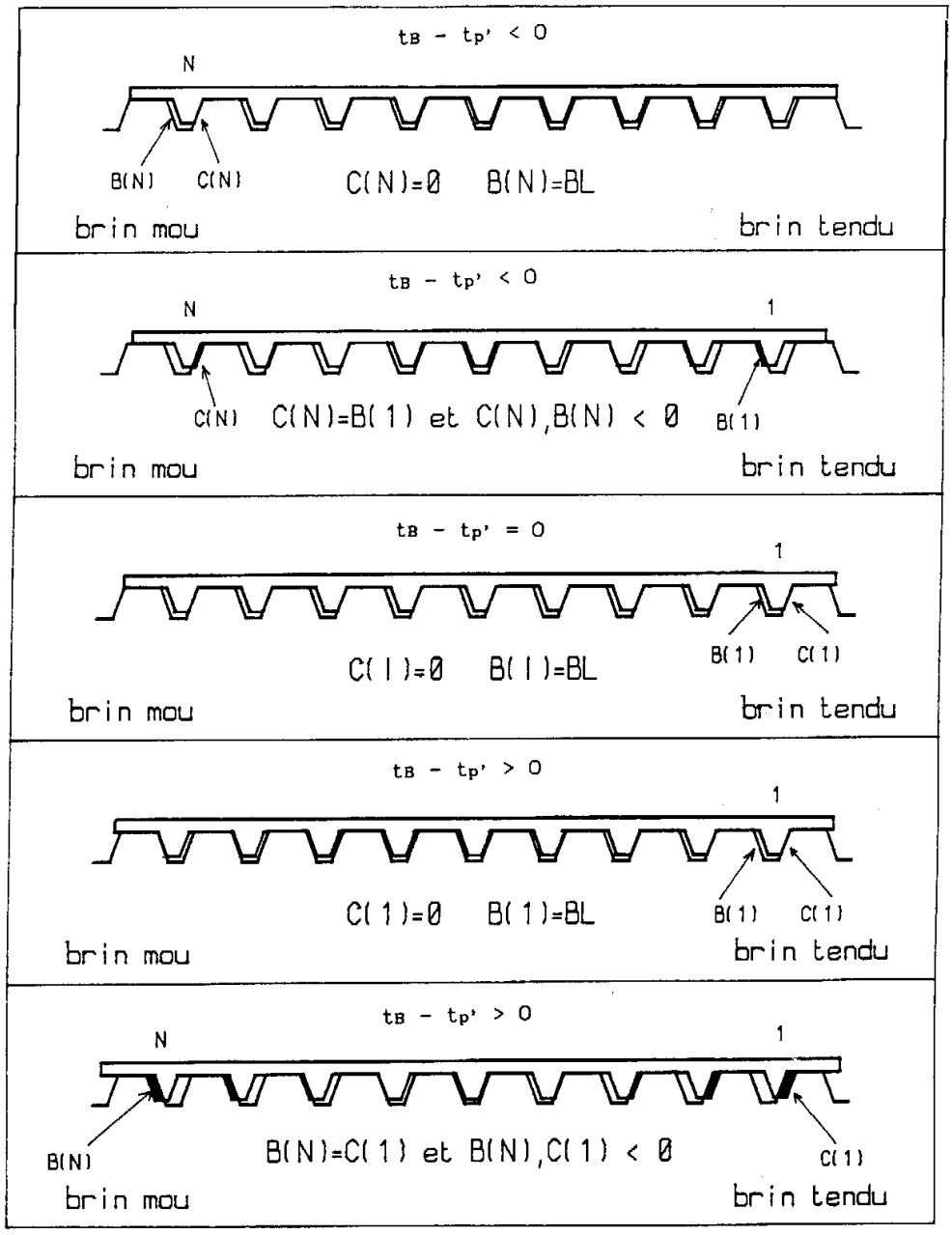


Figure II. 32 : Interférences de bases, cas types.

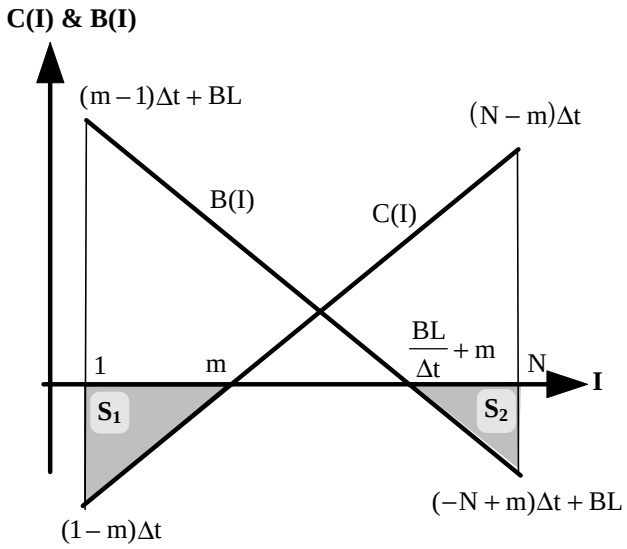


Figure II. 33 : Condition d'équilibre.

On peut écrire:

$$C(I) = I.\Delta t - m.\Delta t$$
$$B(I) = -I.\Delta t + m.\Delta t + BL$$

C(I) et B(I) peuvent être représentées par des "droites" de pentes respectives Δt et -Δt (figure II.33). L'équilibre des forces traduite par l'équation II.61 est satisfaite lorsqu'on a égalité des aires S1 et S2 :

$$(m-1) = N - \frac{\left[m + BL/(t_B - t'_p)\right]}{2}$$

Cette équation permet de déterminer le paramètre m en fonction de N (nombre de dents en contact), BL (jeu entre les dents) et la différence de pas $\Delta t = (t_B - t'_p)$. On déduit les interférences de base:

$$C(I) = (I - m).(t_B - t'_p)$$

B(I)=BL-C(I) pour $1 \le I \le N$

II.3.4.2.2. Modèle de répartition des charges sur les dents engrenées

Il s'agit d'un modèle déroulé bi-axial avec frottement développé sur la base du modèle uniaxiale de J.-M. Dancé. Les paramètres de la géométrie d'engrènement, comme le jeu et les interférences de bases, sont considérés constant tout au long de l'arc d'enroulement, bien que cela ne soit pas le cas, notamment près des zones d'engrènement. Le problème est discrétisé en pas (figure II.34 a). Le calcul des charges tangentielles de la courroie est ramené sur l'axe longitudinal de la courroie (figure II.34 b) en intégrant les charges radiales (figure II.37 page 128). Nous ne disposons ainsi que d'une seule équation de projection. Cette hypothèse simplificatrice revient à dérouler la courroie. Le frottement est introduit au niveau du contact de l'âme sur la partie supérieure de la dent de poulie. L'effet de la force centrifuge (décollement de la courroie au niveau des zones de frottement et pression radiale moindre s'appliquant sur la dent) est implicitement prise en compte en prenant la tension effective dans les brins (annexe IV).

◆ *Équations d'équilibre sur un pas de courroie (figure II.34)*

Équilibre d'une dent :

$T'(I) = T(I-1) - Q(I)$ pour $2 < I < N-1$ Equ. II. 62

avec $T'(1) = T - Q(1)$

$t = T'(N) = T(N-1) - Q(N)$

N : nombre de dents en contact défini d'après l'angle d'enroulement α (figure II.17) et le nombre de dents dégrenées à cause de la forme courbe du brin,

T : tension dans le brin tendu,

t : tension dans le brin mou.

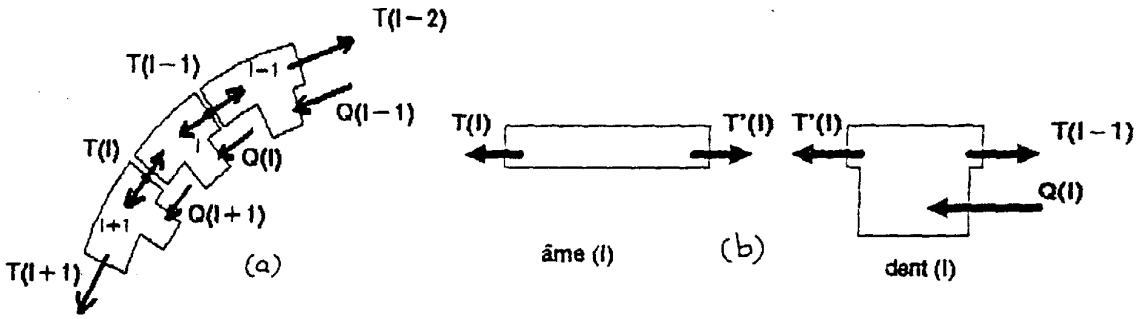


Figure II. 34 : Équilibre dans le sens longitudinal.

Équilibre de l'âme :

Les deux cas, poulie menante ($C + I\ddot{\theta} > 0$) et poulie menée ($C + I\ddot{\theta} < 0$), doivent être dissociées en raison du sens du frottement. Si la poulie est libre ($C + I\ddot{\theta} = 0$), aucun frottement n'est considéré (coefficient de frottement f nul). La loi d'Euler est appliquée sur un arc δ_p caractérisant le glissement fonctionnel de la courroie sur le sommet de dent de poulie. L'arc de glissement δ_p peut être égal (patinage de la courroie) à l'angle β' d'enroulement de la dent de poulie (figure II.29) ou nul (adhérence totale). Nous avons donc :

$$0 \le \delta_p \le \beta'$$

Équilibre pour la poulie menée (figure II.35) : La dent passe de la position i+1 à la position i. Si le déplacement réel de la dent λ(I+1) est inférieur au déplacement réel de la dent λ (I) alors la courroie se déplace de i+1 vers i, sinon la courroie se déplace de i vers i+1.

$$\lambda(I+1) < \lambda(I) \quad \text{alors} \quad T'(I) = e^{f2\beta}.T(I) \qquad \text{Equ. II. 63}$$
$$\lambda(I+1) > \lambda(I) \quad \text{alors} \quad T'(I) = e^{-f2\beta}.T(I)$$

Équilibre pour la poulie menante (figure II.35) : La dent passe de la position i à la position i+1. Si le déplacement réel de la dent λ(I) est supérieur au déplacement réel de la dent λ (I+1) alors la courroie se déplace de i vers i+1.

$$\lambda(I+1) < \lambda(I) \quad \text{alors} \quad T'(I) = e^{-f2\beta}.T(I) \qquad \text{Equ. II. 64}$$
$$\lambda(I+1) > \lambda(I) \quad \text{alors} \quad T'(I) = e^{f2\beta}.T(I)$$

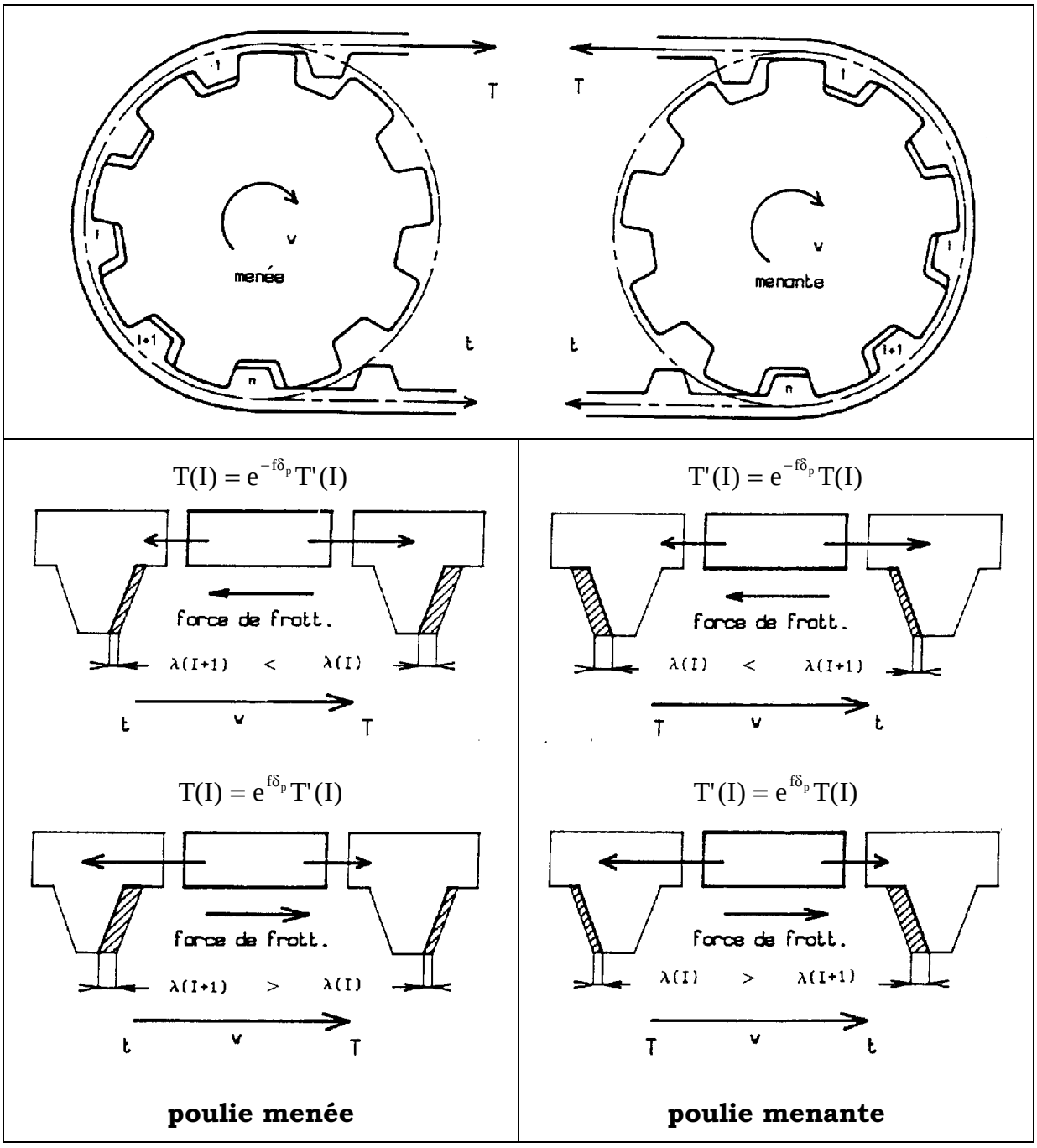


Figure II. 35 : Différence entre poulie menante et menée.

◆ *Relation entre le déplacement des dents*

Le déplacement d'une dent comprend sa déformation propre et son glissement sur le flanc du creux de poulie. On peut écrire que la déplacement de la dent I est égal au déplacement de la dent I-1, moins l'allongement du pas I-1 :

$$\delta(I) = \delta(I-1) - Al(I-1) \quad \text{pour} \quad I = 2, N \qquad \text{Equ. II. 65}$$

$\delta(I)$: déplacement de la dent I (sans interférences),

Al(I) : allongement du pas I.

Soit N-1 équations supplémentaires. Ces relations sont établies pour une différence de pas nulle (sans interférences).

◆ *Relation entre la déplacement réel λ et le déplacement sans interférence δ*

Compte tenu des interférences C(I) et B(I) dues à la différence de pas, il faut soit ajouter, soit retrancher au déplacement δ(I), l'interférence C(I) ou B(I), afin d'obtenir le déplacement réel λ(I). La figure II.36 résume les différents cas :

δ(K) > 0 : le déplacement sans interférence de la dent est du côté brin tendu.

δ(K) < 0 : le déplacement sans interférence de la dent est du côté brin mou.

En résumé, et en fonction des différents tests, le déplacement réel λ(K) peut prendre une des trois valeurs suivantes :

$$\lambda(I) = \delta(I) - C(I)$$

$$\lambda(I) = \delta(I) + B(I)$$

$$\lambda(I) = O \qquad \text{Equ. II. 66}$$

C(I), B(I) : interférences de base

λ(I) : déplacement réel de la dent (I)

δ(I) : déplacement sans interférences de la dent (I)

◆ *Relation allongement de pas et charge dans l'âme*

Il s'agit d'une relation expérimentale définie au chapitre III.4 :

$$Al(I) = \sum_{i=1}^{5} a_i . T^i(I) \qquad \text{Equ. II. 67}$$

fonction polynomiale de degré 5, de coefficient a_i , et de variable T, tension dans l'âme.

◆ *Relation déplacement de la dent et charge sur la dent*

Il s'agit d'une relation expérimentale définie au chapitre III.4 :

$$Q_x(I) = \left(\sum_{i=1}^{5} b_i . \lambda^i(I) \right) . Q_y(I) \qquad \text{Equ. II. 68}$$

fonction polynomiale de degré 5, de coefficient b_i , et de variables λ, déplacement réel de la dent et Q_y, charge radiale sur la dent.

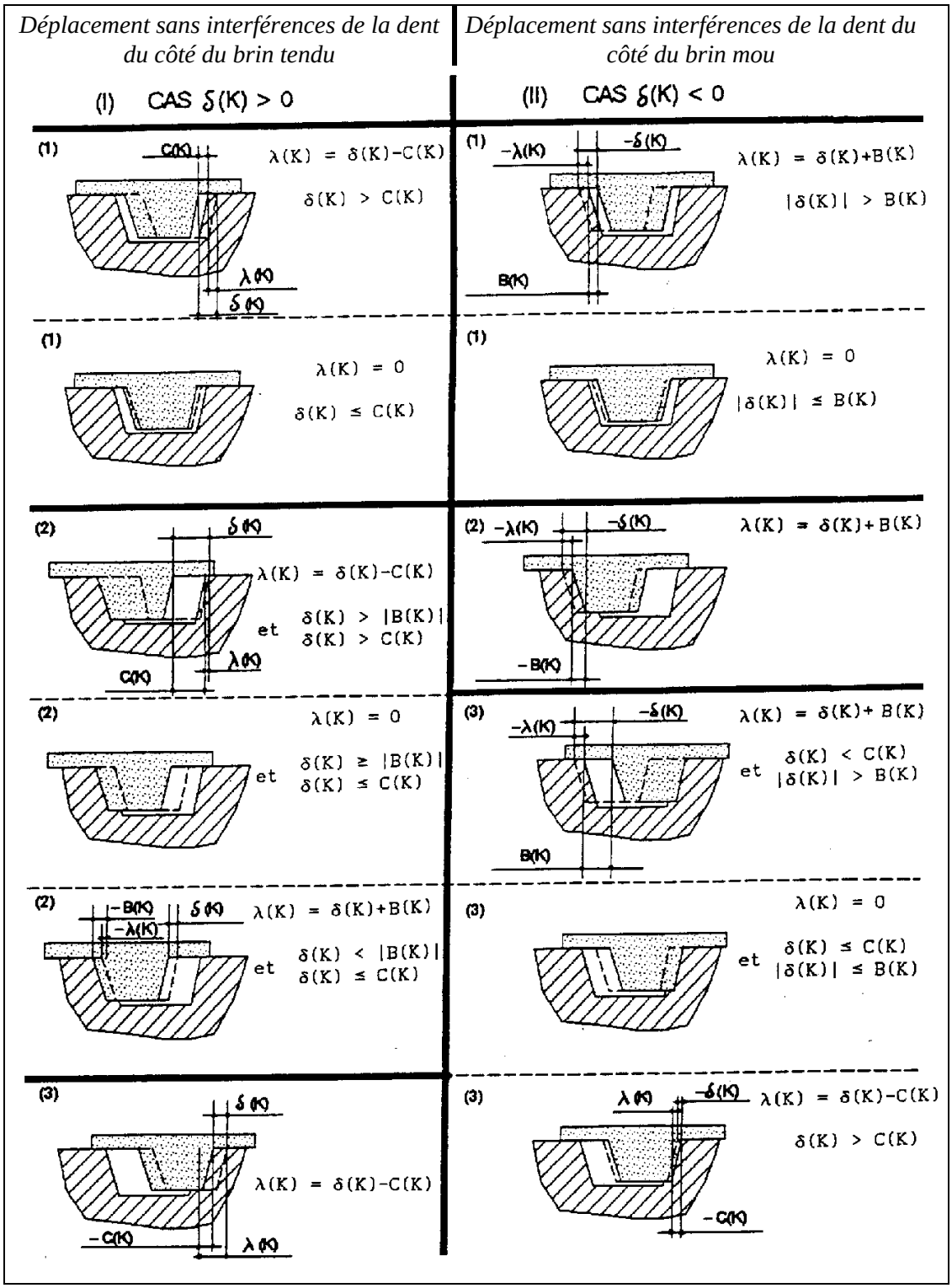


Figure II. 36 : Déplacement réel de la dent.

Les essais permettent de déterminer les lois globales de comportement sur l'axe principal de la courroie. Cet axe principal coïncide avec la nappe de câbles de la courroie. On peut ainsi déduire du calcul toutes les données relatives à cet axe principal, c'est-à-dire les tensions T(I), T'(I) et la charge Q_x(I) (projection de la charge sur la dent sur l'axe principal).

Les tensions T(I) et T(I-1) qui s'appliquent de part et d'autre d'un pas de courroie I (figure II.37) sont peu différentes (quelques Newton au plus). On peut donc évaluer la charge radiale $Q_y(I)$ sur une dent I d'après la moyenne des tensions (T(I) + T(I-1)) / 2 s'appliquant sur un pas de courroie :

$$Q_y(I) = \left(\frac{T(I-1) + T(I)}{2} \right) \sin \frac{\beta + \phi}{2} \qquad \text{Equ. II. 69}$$

avec $\beta + \phi = 2\pi/Z$ pas angulaire de la poulie (figure II.29 page 120),

Z nombre de dents de la poulie.

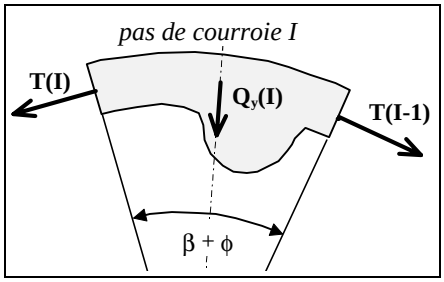


Figure II. 37 : Calcul de $Q_y(I)$

Il faut alors résoudre le système d'équations II.62 à II.69 par une méthode de résolution itérative. La difficulté vient des déplacements réels $\lambda(I)$, $\lambda(I+1)$ qui conditionnent le sens du frottement sur la poulie. Un premier calcul itératif sans frottement permet d'évaluer approximativement ces déplacements et par conséquent le sens du frottement. Le calcul itératif peut alors être repris en intégrant le coefficient de frottement. Naturellement, il faut vérifier les sens de frottement. Si les tests $\lambda(I) < \lambda(I+1)$ ou $\lambda(I) > \lambda(I+1)$ sont validés, alors le calcul est terminé. Sinon, il faut itérer jusqu'à validation des tests. La figure II.38 illustre l'algorithme de calcul sans frottement qui permet d'approcher les déplacements réels $\lambda(I)$. La recherche s'effectue par dichotomie en encadrant largement le déplacement sur la première dent de contact. On calcule alors T(N) qui doit être la tension dans le brin mou t. Le test d'arrêt de l'itération est alors défini par l'égalité de T(N) avec t. L'algorithme de la figure II.39 est répété jusqu'à ce que les tests sur les déplacements soient satisfaisants.

Dans certains cas, la solution exacte ne peut être trouvée. Un test supplémentaire de convergence a été introduit afin d'assurer la convergence du programme de calcul. Un test d'accélération de la convergence a été également introduit de manière à accélérer le calcul et afin d'éviter le dépassement de la limite physique sur les déplacements de dent (ce qui correspondrait au saut de dent).

Enfin, une dernière boucle est faite sur l'ensemble du programme de répartition des charges selon la charge radiale Q_y calculée à partir des tension T(I). Une à deux itérations suffisent généralement.

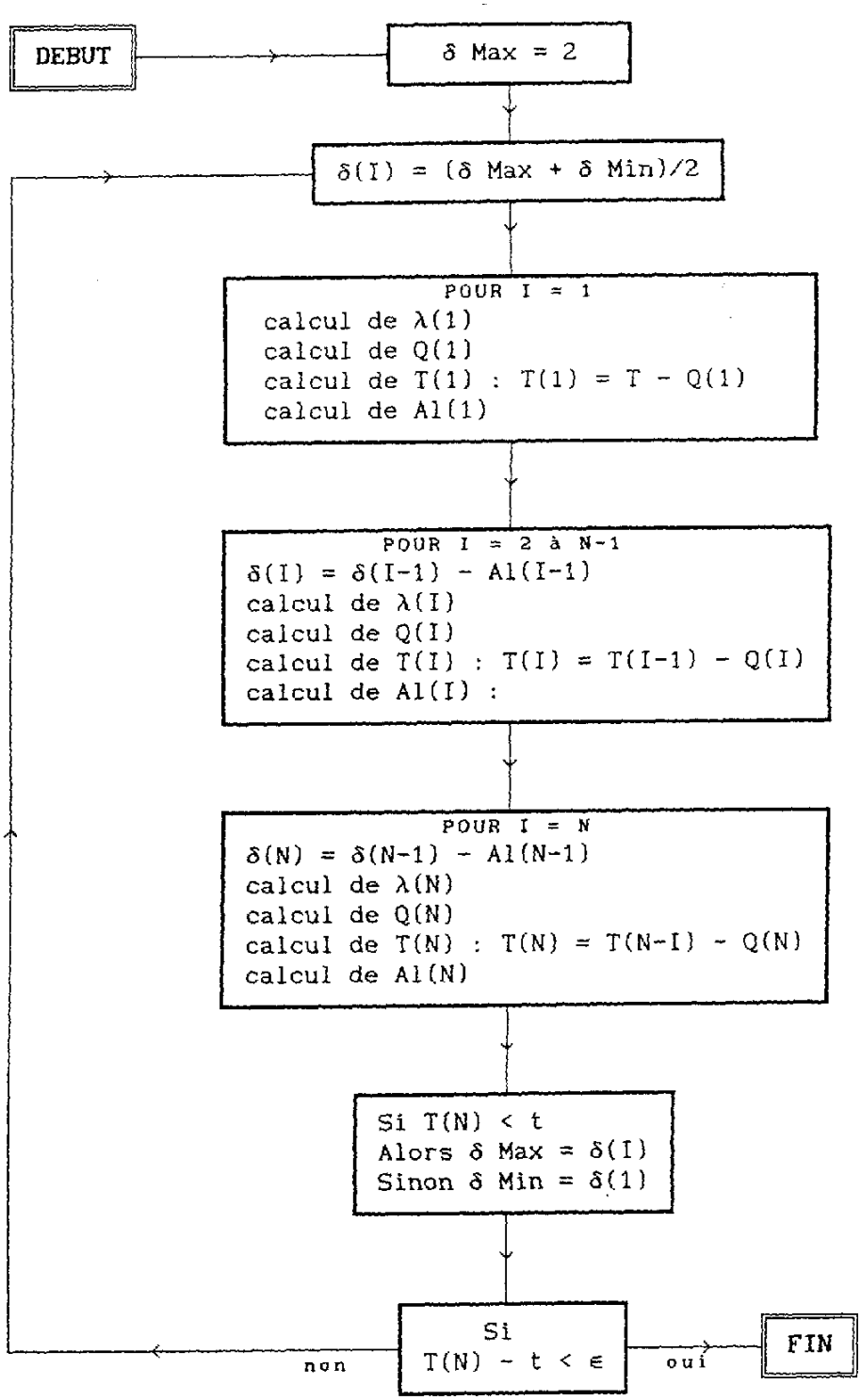


Figure II. 38 : Algorithme de la phase itérative sans frottement.

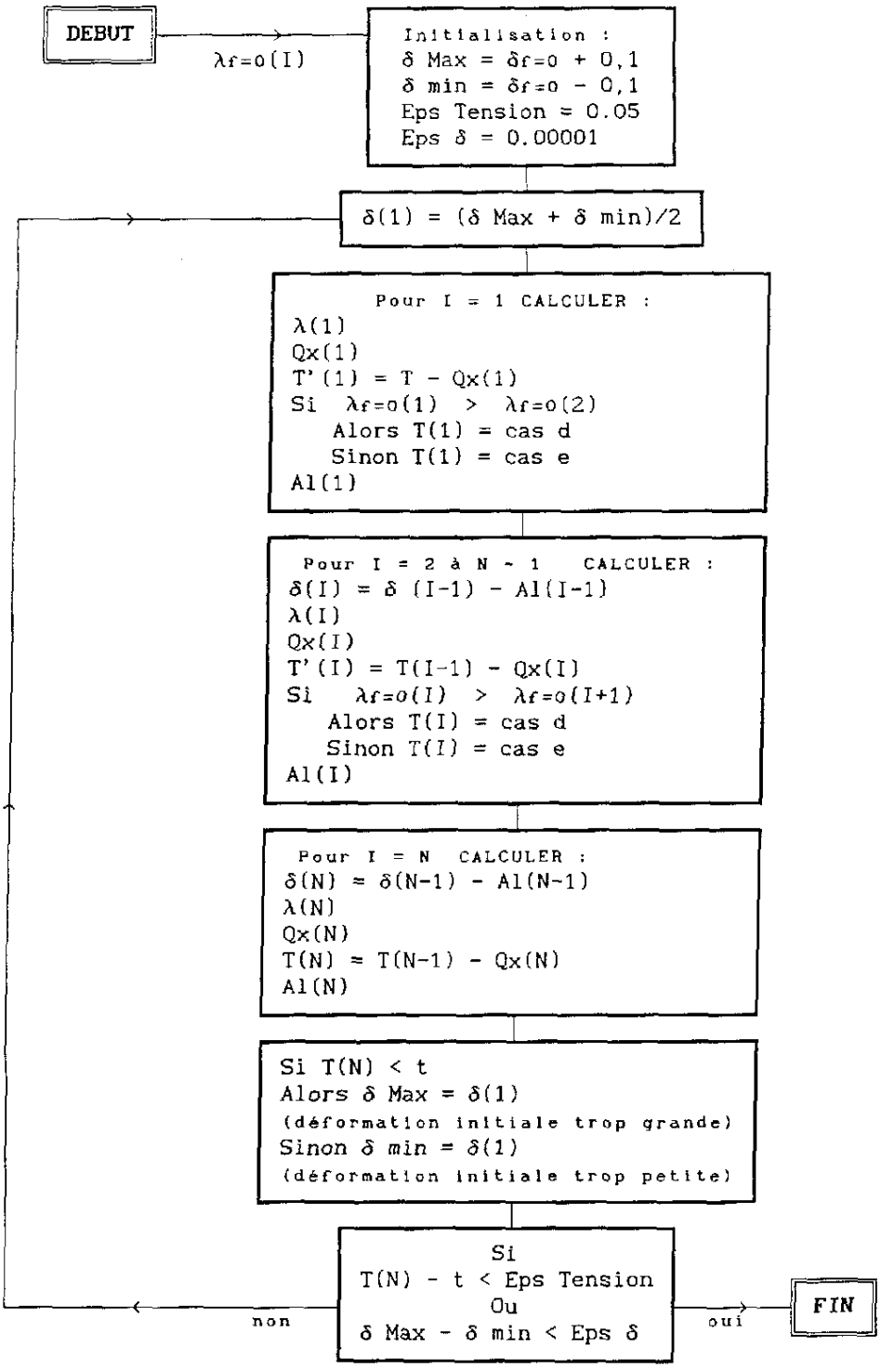


Figure II. 39 : Algorithme de la phase itérative avec frottement (poulie menée).

II.3.5. 4ème module : Calcul des raideurs et amortissements équivalents pour le modèle final

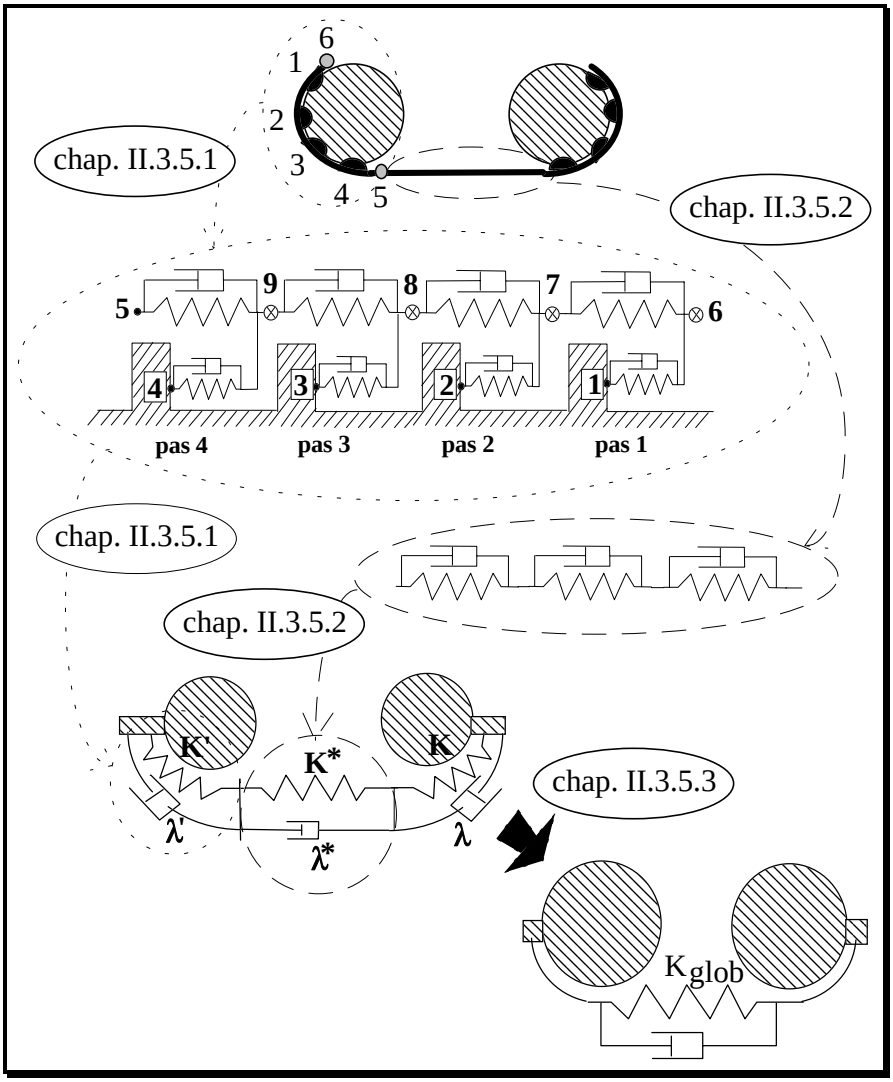


Figure II. 40 : Étapes pour la réduction du modèle.

Ce module a pour tâche de simplifier considérablement le calcul d'équation du mouvement. L'aspect local au niveau des arcs d'enroulement est pris en charge au niveau du 3ème module (chapitre II.II.3.4). L'aspect macroscopique est le sujet de ce 4ème module. Strictement, le modèle dispose trois degrés de liberté de translation longitudinale par pas de courroie (deux au niveau de l'âme et un au niveau de la dent). Cette pléthore de variables (la courroie utilisée pour cette étude possède 250 pas) entraîne un surdimensionnement du système en regard des besoins. En effet, seul nous intéresse au niveau macroscopique la rotation θ des poulies et leurs déplacements horizontal u, et vertical v; et non la déformation de chaque pas et de chaque dent sur toute la courroie. De plus, le temps et l'imprécision du calcul numérique sur les systèmes matriciels est généralement proportionnel à N^3 (N dimension du système). On a donc un gros intérêt à réduire au maximum le nombre de variables. Le but poursuivi est donc la réduction du modèle afin de ne retrouver plus que trois degrés de liberté par poulie : La rotation θ et les déplacements horizontal u et vertical v.

Dans ce but, une partie de la transmission, deux poulies avec leur lien, est isolée (figure II.40). La transmission complète est alors la somme de ces parties élémentaires de la transmission. Chaque pas de courroie est modélisé par deux couples de ressort - amortisseur sans masse (dent et âme). Le chapitre II.II.3.5.1 proposera une méthode pour réduire les parties enroulées de la courroie sur les poulies dentées. Le chapitre II.II.3.5.2 s'appliquera à réduire les brins libres et les brins enroulés sur un galet. Le chapitre II.II.3.5.3 fera la synthèse pour aboutir à un modèle final très simple.

II.3.5.1. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins de courroie enroulés

Une poulie isolée avec son brin de courroie enroulée (figure II.41 a) et dont une extrémité est fixe, constitue un oscillateur. L'équation du mouvement de cet oscillateur est :

$$-C_i + I_i\ddot{\theta}_i = -Y_H\sum_{d=1}^{N} Q_x(\theta_i)(d) - R_i\sum_{d=1}^{N} Q_f(\theta_i)(d) \qquad \text{Equ. II. 70}$$

avec
- C_i couple appliqué sur la poulie i,
- I_i moment d'inertie de la poulie i par rapport à son axe de rotation,
- θ_i angle de rotation de la poulie i,
- $Q_x(d)$ effort de la dent de courroie d sur la poulie,
- N nombre de dents de courroie enroulées sur la poulie,
- $Q_f(d)$ effort dû au frottement de la courroie sur le sommet de la dent de poulie.

Dans le but de simplifier l'équation II.70, l'angle de rotation θ_i est décomposé selon sa valeur (figée) à un instant donné ou de référence t, $\theta_i\big|_t$, et son accroissement à l'instant postérieur $t+\Delta t$, $\Delta\theta_i$:

$$\theta_i\big|_{t+\Delta t} = \theta_i\big|_t + \Delta\theta_i \qquad \text{Equ. II. 71}$$

L' accélération de la rotation est alors $\ddot{\theta}_i = \Delta\ddot{\theta}_i$. L'effort Q_x d'une dent dépend de sa déformation λ dépendant elle-même de la rotation de la poulie. Pareillement, la force de frottement $Q_f = T_i(e^{f\delta_p} - 1)$ dépend de la tension T_i dans l'âme et par conséquent de la rotation de la poulie. Nous pouvons donc écrire au premier ordre :

$$Q_x(\theta_i\big|_{t+\Delta t}) = Q_x(\theta_i\big|_t) + \underbrace{\left.\frac{dQ_x}{d\theta_i}\right|_{\theta_i|_t}}_{\substack{\text{raideur non linéaire}\\ \text{de la dent au point}\\ \text{d'équilibre de référence}}} \Delta\theta_i \qquad \text{Equ. II. 72}$$

$$Q_f(\theta_i\big|_{t+\Delta t}) = Q_f(\theta_i\big|_t) + \underbrace{\left.\frac{dQ_f}{d\theta_i}\right|_{\theta_i|_t}}_{\substack{\text{taux d'accroissement}\\ \text{de la force de frottement}}} \Delta\theta_i \qquad \text{Equ. II. 73}$$

Le comportement de la courroie enroulée est non linéaire. Le problème est linéarisé

autour du point de fonctionnement ou de référence (équation II.72 et II.73) déterminé par le modèle de répartition des charges sur l'arc enroulé (chapitre II.II.3.4.2.2). L'équilibre à l'instant de référence peut maintenant se définir comme suit :

$$C_i = Y_H \sum_{d=1}^{N} Q_x(\theta_i|_t)(d) + R_i \sum_{d=1}^{N} Q_f(\theta_i|_t)(d) \qquad \text{Equ. II. 74}$$

Le couple de la poulie i est équilibré à un instant donné par l'action des dents de courroie sur les dents de poulie et par l'action du frottement de la courroie sur les dents de poulie. En simplifiant l'équation II.70 avec les équations II.72, II.73, II.74, nous obtenons l'équation du mouvement simplifiée autour du point de référence :

$$I_i \Delta\ddot{\theta}_i + \left[Y_H \sum \frac{dQ_x}{d\theta}\bigg|_{\theta_i|_t} + R_i \sum \frac{dQ_f}{d\theta}\bigg|_{\theta_i|_t} \right] \theta_{A_i} = 0 \qquad \text{Equ. II. 75}$$

L'équation du mouvement II.75 est celle d'un oscillateur simplifié ou équivalent (figure II.41 c). Nous constatons que la force due au frottement intervient toujours ce qui complique sensiblement l'établissement d'une rigidité équivalente $K_{équ} = \left[Y_H \sum \frac{dQ_x}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_{i,s}} + R_i \sum \frac{dQ_f}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_{i,s}} \right]$ pour une position d'équilibre donnée.

La détermination de la rigidité équivalente pour les brins enroulés est établie à partir du modèle déroulé de la figure II.41 b. Sur cette figure, est représentée, l'ensemble des pas de courroie enroulé sur une poulie.

La figure II.41 b définit les conditions aux limites telles qu'elles ont été entérinées par la validation statique du modèle (chapitre III.5.2). Le nœud N+1 est bloqué ($x_{N+1} = 0$) alors que le nœud N+2 est libre ($T_{N+2} = 0$). Les nœuds 1 à N de dent de courroie subissent un déplacement $R_i\theta_{i,v}$ à une vitesse $R_i\dot{\theta}_{i,v}$ dû à la rotation de la poulie θ_i. Les ressorts de raideurs k_i (raideur de la dent i) sont reliés aux ressorts de raideur $K_{â}$ (raideur de l'âme) aux nœuds N+2 à 2N+1. L'objectif est de trouver la tension au noeud N+1 en fonction du déplacement et de la vitesse des nœuds 1 à N. Le rapport à ce déplacement et à cette vitesse donnera pour le nœud N+1 la rigidité équivalente K_i et l'amortissement équivalent λ_i.

La raideur k_I de la dent I est obtenue en dérivant la relation expérimentale II.68 par rapport au déplacement de la dent λ :

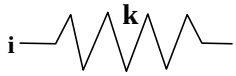
$$k_I(\lambda) = \frac{\partial Q_x}{\partial \lambda}(I)(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{4} i.\, b_i.\, \lambda^i(I) \right). Q_y(I) \qquad \text{Equ. II. 76}$$

La raideur de chaque dent I est obtenue à partir des valeurs de déplacements $\lambda(I)$ et de la charge radiale $Q_y(I)$ calculée lors de la position de référence calculée au deuxième module.La raideur K_I de l'âme est obtenue également en dérivant la relation force(déplacement) T(Al(I)) obtenue expérimentalement (inverse à la relation II.67), par rapport au déplacement Al de l'âme sur un pas :

$$k_I(\lambda) = \sum_{i=1}^{4} c_i . Al^i(I) \qquad \text{Equ. II. 77}$$

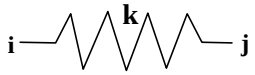
Il peut arriver pour des différences de pas extrêmes entre la poulie et la courroie, qu'une partie des dents de l'arc enroulée portent sur les flancs passifs des dents de la poulie, alors que la plus grande partie de la denture enroulée de la courroie se porte sur les flancs actifs des dents de la poulie. Néanmoins, nous remarquons sur la figure II.41 (b) que les dents de courroie portent toutes (ou ne portent pas si la raideur est nulle) sur le même flanc actif des dents de poulie. Cela nécessite de poser l'hypothèse selon laquelle le pas d'enroulement de la courroie ne soit pas trop différent de celui du pas de la poulie pour éviter qu'une dent porte sur le flanc opposé.

La relation classique force-déplacement pour un ressort dont les nœuds sont i et j s'écrit :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 78}$$

Avec l'opérateur ⊗ qu'on observe sur la figure II.41 b, La relation force - déplacement pour un ressort devient lorsqu'on tient compte du frottement sur la partie supérieure des dents de poulie :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 79}$$

avec $\eta = \pm 1$ selon le sens de la force de frottement entre la poulie et la courroie, calculé lors de l'équilibre statique (équ. II.63 et 64),

f coefficient de frottement,

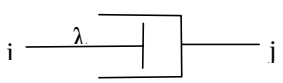
δ_p angle de non adhérence.

Le relation II.79 est employée pour tous les ressorts situés à droite ou en dessous d'un nœud marqué du signe ⊗. Par exemple, pour le ressort de dent situé entre les nœuds 1 et N+2 (figure II.41 b), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} T \\ T' \end{Bmatrix} = k_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \\ N+2 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_{N+2} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 80}$$

L'explication de l'emploi de cette forme de matrice inusitée est fournie en annexe III.

Une relation identique à l'équation II.78 est utilisée pour un amortisseur visqueux :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_j \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 81}$$

L'équilibre global du système ressort - amortisseur pour chaque nœud permet d'obtenir en

associant toute les matrices comme l'équation II.80, l'équation II.82.

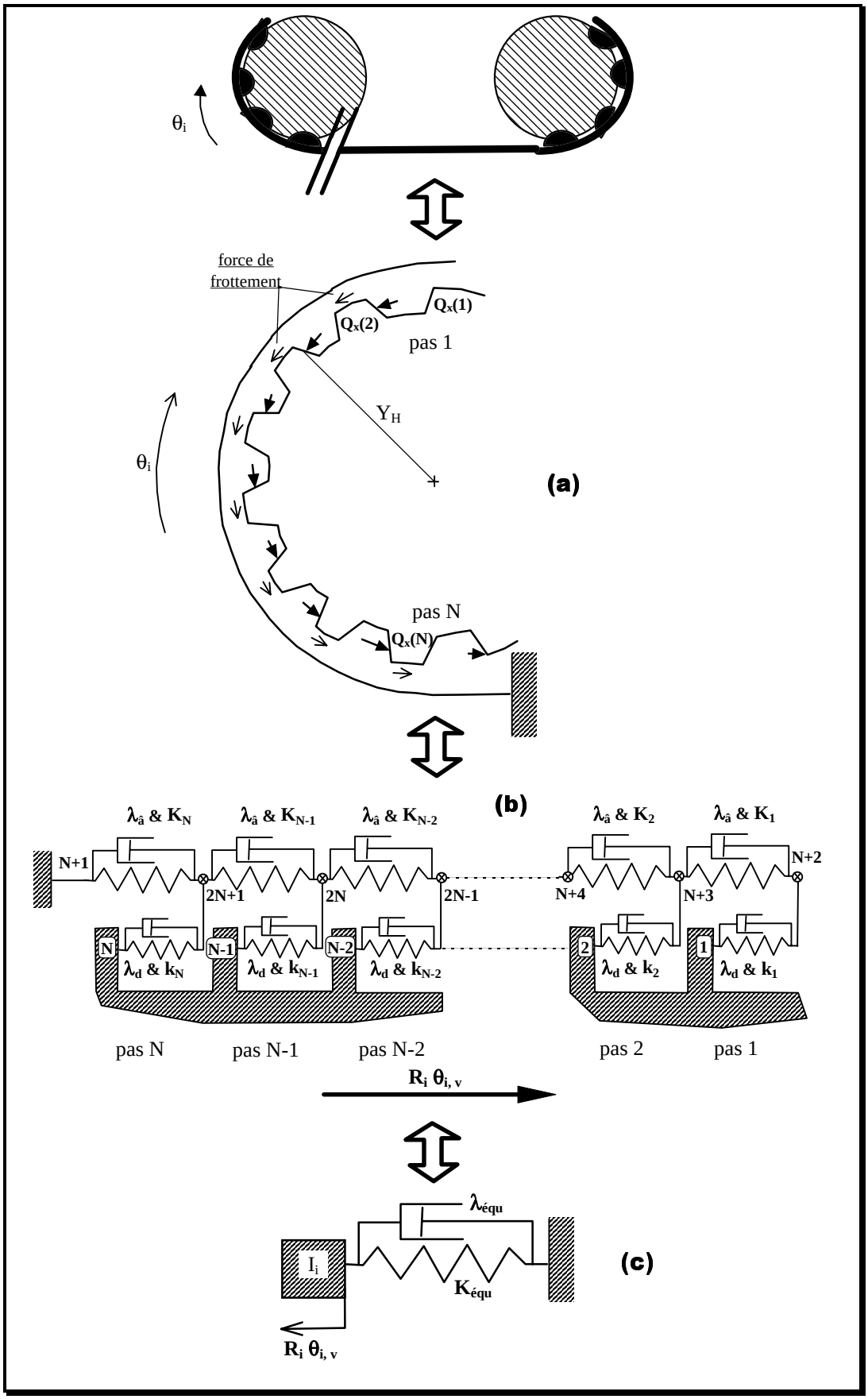
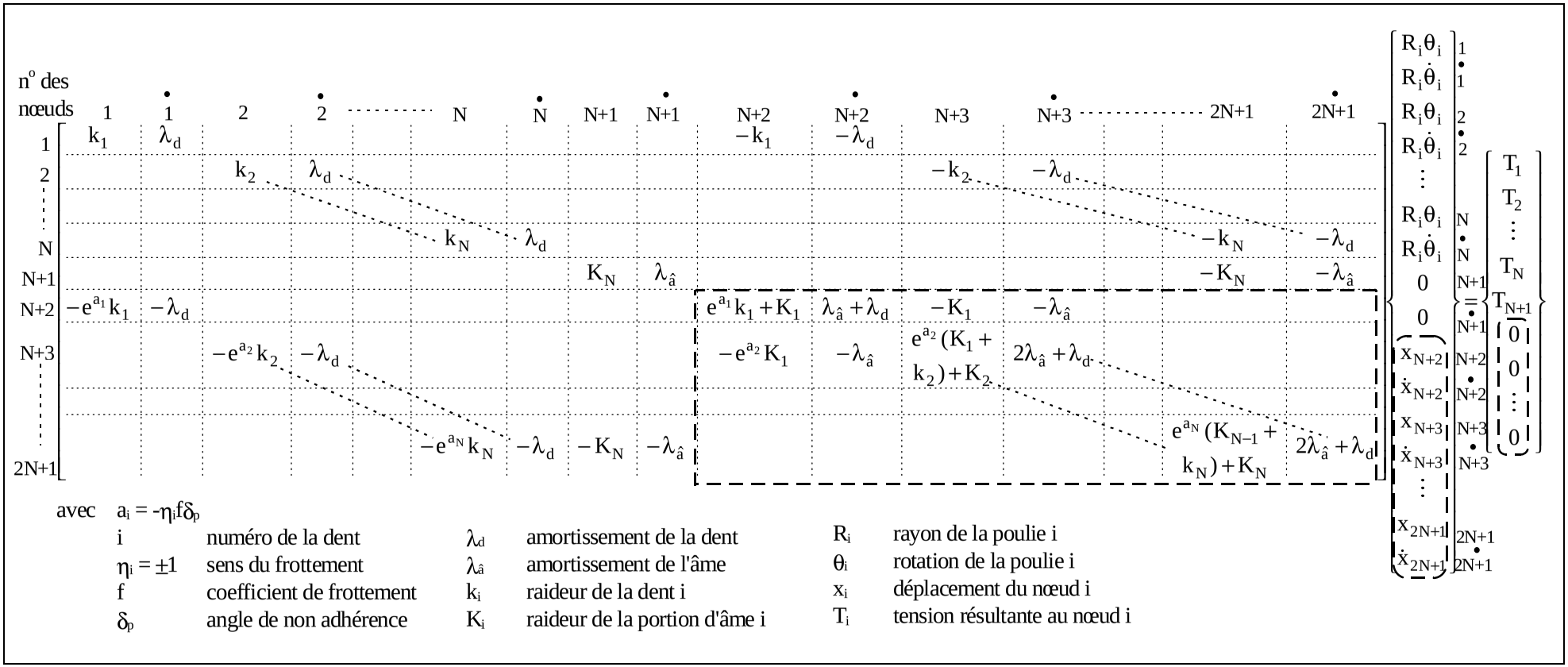


Figure II. 41 : Rigidité et amortissement équivalent pour les brins enroulés.



Equ. II. 82 : Équilibre pour chaque nœud du modèle déroulé d'un brin de courroie en prise sur une poulie dentée.

L'équation II.82 peut se réécrire de la façon suivante :

$$[D].\{V\} = \{T\} \qquad \text{id. Equ. II.82}$$

avec $[D]$ matrice de la forme : $\begin{bmatrix} . & . \\ . & [E] \end{bmatrix}$ ($[E]$ étant la matrice encadrée d'un trait discontinu gras page 136),

$\{V\}$ vecteur déplacement/vitesse :

$$^{t}\langle r_i\theta_i \quad r_i\dot{\theta}_i \quad \dots \quad r_i\theta_i \quad r_i\dot{\theta}_i \quad x_{N+1}=0 \quad \dot{x}_{N+1}=0 \quad x_{N+2} \quad \dot{x}_{N+2} \quad \dots \quad x_{2N+1} \quad \dot{x}_{2N+1}\rangle$$

$\{T\}$ vecteur second membre tension résultante aux nœuds :

$$^{t}\langle T_1 \quad \dots \quad T_{N+1} \quad T_{N+2}=0 \quad \dots \quad T_{N+1}=0\rangle$$

L'objectif est de calculer la tension T_{N+1} en fonction de la rotation de la poulie θ_i. L'équation II.82 montre que la tension T_{N+1} dépend du déplacement et de la vitesse au nœud 2N+1 :

$$T_{N+1} = - K_N x_{2N+1} - \lambda_{\hat{a}}\ \dot{x}_{2N+1} \qquad \text{Equ. II. 83}$$

L'interdépendance des nœuds nous astreint au calcul du déplacement et de la vitesse de tous les nœuds pour connaître le déplacement et la vitesse au nœud 2N+1. Dans cet objectif, on écrit le sous-système déduit de l'équation II.82 :

$$[E]\begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} = \{S\} \qquad \text{Equ. II. 84}$$

avec $\{X\} = \begin{Bmatrix} x_{N+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2N+1} \end{Bmatrix}$ et $\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{N+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{2N+1} \end{Bmatrix}$

et $\{S\} = \{A\}r_i\theta_i + \{B\}r_i\dot{\theta}_i$

L'équation se décompose alors suivant cette équation différentielle au premier ordre de dimension N :

$$[K]\{X\} + [\lambda]\{\dot{X}\} = \{A\}r_i\theta_i + \{B\}r_i\dot{\theta}_i \qquad \text{Equ. II. 85}$$

avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} e^{a_1}k_1 + K_1 & -K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e^{a_2}K_1 & e^{a_2}(k_2 + K_1) + K_2 & -K_2 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & e^{a_{N-1}}(k_{N-1} + K_{N-2}) + K_{N-1} & & -K_{N-1} \\ 0 & & -e^{a_N}K_{N-1} & & e^{a_N}(k_N + K_{N-1}) + K_N \end{bmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{â} + \lambda_d & -\lambda_{â} & & 0 \\ -\lambda_{â} & 2\lambda_{â} + \lambda_d & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\lambda_{â} \\ 0 & & -\lambda_{â} & 2\lambda_{â} + \lambda_d \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} e^{a_1} k_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{a_N} k_N \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} \lambda_d \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_d \end{Bmatrix}$$

La solution générale $\{X\}$ de l'équation II.85 est constituée d'une solution particulière $\{X_1\}$ indépendante du temps et de la solution $\{X_2\}$ à l'équation homogène constituant la partie transitoire. Cependant, des simulations montrent que la partie transitoire est négligeable en raison de sa brièveté. La validation statique a permis de confirmer le rejet de la partie transitoire. On ne retient donc que la partie asymptotique : $\{X\} = \{X_1\}$. La solution particulière $\{X_1\}$ vérifie l'équation suivante :

$$[K]\{X\} = \{A\} r_i \theta_i + \{B\} r_i \dot{\theta}_i \qquad \text{Equ. II. 86}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \{X\} &= [K]^{-1}\{A\} r_i \theta_i + [K]^{-1}\{B\} r_i \dot{\theta}_i \\ &= \{A'\} r_i \theta_i + \{B'\} r_i \dot{\theta}_i \end{aligned} \qquad \text{Equ. II. 87}$$

Le calcul de $\{A'\}$ et de $\{B'\}$ est effectué numériquement avec la méthode d'inversion de matrice LU (décomposition en matrice triangulaire Left - Upper). La vitesse $\{\dot{X}\}$ est obtenue en comparant le déplacement $\{X^i\}$ à l'itération i de l'intégration de l'équation du mouvement (figure II.15), avec le déplacement $\{X^{i-1}\}$ à l'itération précédente :

$$\{\dot{X}\} = \frac{\{X^i - X^{i-1}\}}{\Delta t} = \{C'\} r_i \theta_i + \{D'\} r_i \dot{\theta}_i \qquad \text{Equ. II. 88}$$

avec Δt, pas de temps d'intégration des équations du mouvement.

L'équation II.83 permet alors d'obtenir la tension au nœud N+1 proportionnée à $r_i \theta_{i,v}$ et $r_i \dot{\theta}_{i,v}$:

$$\begin{aligned} T_{N+1} &= -\underbrace{\left[K_N A'(2N+1) + \lambda_{â} C'(2N+1)\right]}_{\text{raideur équivalente } K_{équ}} r_i \theta_i \\ &\quad - \underbrace{\left[K_N B'(2N+1) + \lambda_{â} D'(2N+1)\right]}_{\text{amortissement équivalent } \lambda_{équ}} r_i \dot{\theta}_i \end{aligned} \qquad \text{Equ. II. 89}$$

La raideur $K_{équ}$ et l'amortissement équivalent $\lambda_{équ}$ des brins enroulés sont déterminés par l'équation II.89. Le terme $r_i \theta_i$ étant une longueur, la raideur $K_{équ}$ est bien en N/m et par conséquent compatible avec la raideur des brins libres.

II.3.5.2. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins libres de courroie et les brins enroulés sur les galets

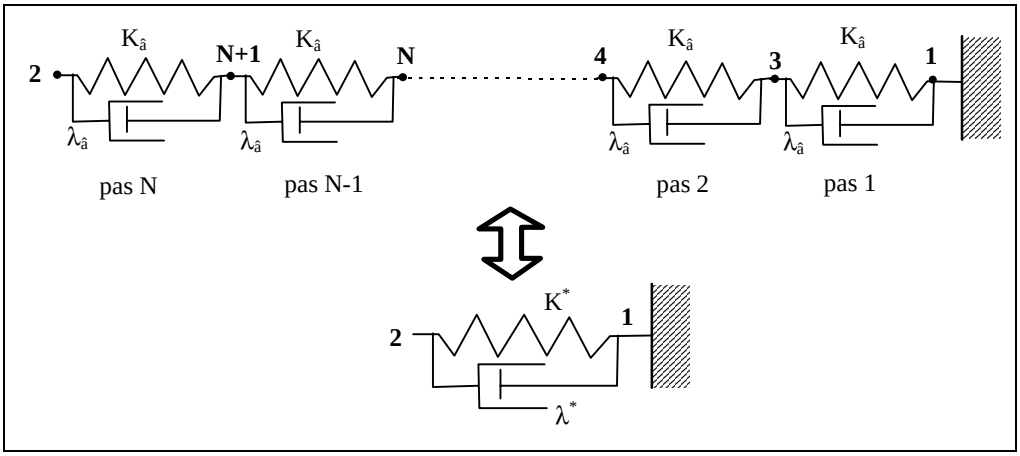


Figure II. 42 : Rigidité et amortissement équivalent pour les brins libres et les brins enroulés sur les galets.

La figure II.42 montre la schématisation d'un brin libre avec N pas de courroie. Le nombre de pas est déterminé par le rapport de la longueur l_i du brin libre (figure II.17) ajoutée de la longueur de courroie enroulée sur un éventuel galet, et de la longueur d'un pas. Le noeud 1 est bloqué et le noeud 2 est libre. Chaque pas de courroie est modélisé par un ressort de raideur $K_{â}$ et un amortisseur de coefficient $\lambda_{â}$. L'amortissement $\lambda_{â}$ est une donnée expérimentale. La tension dans le brin T permet de connaître la déformation d'un pas de courroie en utilisant la relation expérimentale II.67. Ensuite, la relation II.77 donne la raideur $K_{â}$ de l'âme pour un pas de courroie. Dans le but de la détermination de la raideur équivalente, nous cherchons la tension nécessaire au point 2 (T_2) pour produire un déplacement x_2 avec une vitesse $\dot{x}_2$.

L'équilibre global du système ressort - amortisseur pour chaque nœud du brin libre permet d'obtenir en utilisant les matrices II.78 et II.81, l'équation II.90 :

$$\begin{bmatrix} K_{â} & \lambda_{â} & & & -K_{â} & -\lambda_{â} & & & & & & & \\ & & K_{â} & \lambda_{â} & & & & & & & & -K_{â} & -\lambda_{â} \\ -K_{â} & -\lambda_{â} & & & 2K_{â} & 2\lambda_{â} & -K_{â} & -\lambda_{â} & & & & & \\ & & & & -K_{â} & -\lambda_{â} & 2K_{â} & 2\lambda_{â} & & & & & \\ & & & & & & & & & 2K_{â} & 2\lambda_{â} & -K_{â} & -\lambda_{â} \\ & & -K_{â} & -\lambda_{â} & & & & & & -K_{â} & -\lambda_{â} & 2K_{â} & 2\lambda_{â} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \\ \dot{x}_N \\ x_{N+1} \\ \dot{x}_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equ. II. 90

Il vient de l'équation II.90 :

$$T_2 = K_{\hat{a}}\left(x_2 - x_{N+1}\right) + \lambda_{\hat{a}}\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_{N+1}\right) \qquad \text{Equ. II. 91}$$

La connaissance du déplacement et de la vitesse du point N+1 passe par la résolution du sous-système entouré d'un trait discontinu dans l'équation II.90. Le développement du sous-système aboutit à :

$$\begin{bmatrix} 2K_{\hat{a}} & -K_{\hat{a}} & & 0 \\ -K_{\hat{a}} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -K_{\hat{a}} \\ 0 & & -K_{\hat{a}} & 2K_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_N \\ x_{N+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda_{\hat{a}} & -\lambda_{\hat{a}} & & 0 \\ -\lambda_{\hat{a}} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\lambda_{\hat{a}} \\ 0 & & -\lambda_{\hat{a}} & 2\lambda_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \\ \dot{x}_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{\hat{a}} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{\hat{a}} \end{Bmatrix} \dot{x}_2$$

Equ. II. 92

La solution particulière $\{X_1\}$ de l'équation II.92 est tout d'abord calculée :

$$\begin{bmatrix} 2K_{\hat{a}} & -K_{\hat{a}} & & 0 \\ -K_{\hat{a}} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -K_{\hat{a}} \\ 0 & & -K_{\hat{a}} & 2K_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ \vdots \\ x_{1,N} \\ x_{1,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{\hat{a}} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{\hat{a}} \end{Bmatrix} \dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 93}$$

La première ligne donne : $x_{1,3} = x_{1,4}/2$,

et les lignes suivantes : $x_{1,i} = \dfrac{i-2}{i-1} x_{1,i+1}$.

L'avant-dernière ligne donne : $x_{1,N} = \dfrac{N-2}{N-1} x_{1,N+1}$,

et la dernière ligne : $\dfrac{N}{N-1} K_{\hat{a}} x_{1,N+1} = K_{\hat{a}} x_2 + \lambda_{\hat{a}} \dot{x}_2$

Par conséquent, nous avons la solution particulière :

$$x_{1,i} = \frac{i-2}{N} x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{K_{\hat{a}}} \frac{i-2}{N} \dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 94}$$

Nous cherchons maintenant la solution $\{X_2\}$ de l'équation homogène sous la forme :

$$\{X_2\} = \{P\} e^{-\rho t} \quad \text{avec } \rho \geq 0 \qquad \text{Equ. II. 95}$$

Nous obtenons un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha & & & 0 \\ -\alpha & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \alpha = K_{\hat{a}} - \rho\lambda_{\hat{a}} \qquad \text{Equ. II. 96}$$

La structure de la matrice de l'équation II.96 est bien connue puisqu'on la retrouve souvent avec la technique des différences finis. Nous désirons $\{P\} \neq 0$, par conséquent le déterminant Δ_n de cette matrice (n, dimension de la matrice) doit être nul :

$$\Delta_n = (2n-1)\alpha^n = 0$$

n est un entier, donc : $K_{\hat{a}} - \rho\lambda_{\hat{a}} = 0$

Nous avons donc n racines $\rho = K_{\hat{a}} / \lambda_{\hat{a}}$ avec n=N-2.

Le vecteur $\{P\}$ est déterminé d'après les conditions initiales $x_i = 0$ et $\dot{x}_i = 0$ pour $3 \le i \le N+1$. Finalement :

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/N \\ 2/N \\ \vdots \\ N-1/N \end{Bmatrix} \left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\right)\left(x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{K_{\hat{a}}}\dot{x}_2\right) \qquad \text{Equ. II. 97}$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/N \\ 2/N \\ \vdots \\ N-1/N \end{Bmatrix} e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\left(\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}x_2 + \dot{x}_2\right) \qquad \text{Equ. II. 98}$$

L'équation II.91 devient :

$$\begin{aligned} T_2 = &\left[1 - \frac{N-1}{N}\left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\right) - \frac{N-1}{N}e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\right]K_{\hat{a}}x_2 + \\ &\left[1 - \frac{N-1}{N}\left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\right) - \frac{N-1}{N}e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t}\right]\lambda_{\hat{a}}\dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 99} \\ = &\frac{K_{\hat{a}}}{N}x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{N}\dot{x}_2 \end{aligned}$$

La raideur équivalente est donc : $K^* = K_{\hat{a}} / N$,

et l'amortissement équivalent : $\lambda^* = \lambda_{\hat{a}} / N$.

Les brins des différentes parties de la courroie ayant été réduits, nous obtenons le système "pré-final" de la figure II.43. Le chapitre suivant traitera de la réduction du modèle "pré-final" en un modèle final.

II.3.5.3.Passage au modèle final

À ce niveau du calcul, les brins de courroie enroulée sur une poulie dentée ou sur un galet, et les brins libres ont été réduit en un seul couple ressort - amortisseur. Le système global de la transmission s'en trouve considérablement simplifié.

Le lien entre deux poulies contient 3 couples ressort - amortisseur (deux brins enroulées et un brin libre). Un lien entre une poulie et un galet ne comporte que deux couples, et un lien entre deux galets ne comporte qu'un couple ressort - amortisseur. L'objectif des trois prochains chapitres est de réduire à nouveau pour chaque cas (poulie et/ou galet) chaque lien pour n'avoir plus qu'un couple ressort - amortisseur global.

Pour calculer les raideurs et amortissements globaux tenant compte de l'ensemble des brins pour chaque lien, la méthode décrite dans les deux chapitres précédents est reprise pour N = 3 si on considère deux poulies i et i+1, N = 2 ou N = 1 si on a des galets.

II.3.5.3.1. Cas d'un lien entre deux poulies

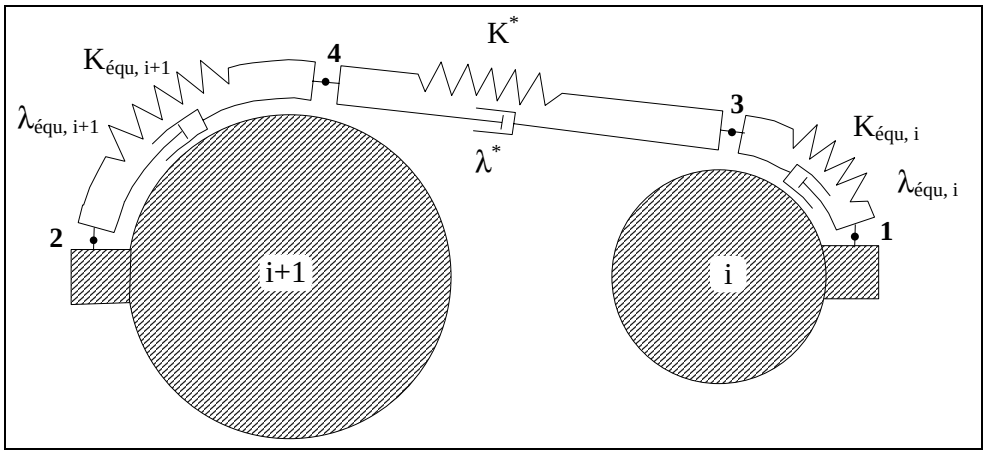


Figure II. 43 : Modèle "pré-final" pour deux poulies dentées.

Pour le cas d'un lien à deux poulies visualisé sur la figure II.43, on cherche un couple ressort - amortisseur ($K^{glob.}$-$\lambda^{glob.}$) équivalent à la série de trois couples ressort - amortisseur représentant le brin libre (K^*-λ^*) et les brins enroulés ($K_{équ}$-$\lambda_{équ}$) tel qu'ils sont représentés sur la figure II.44.

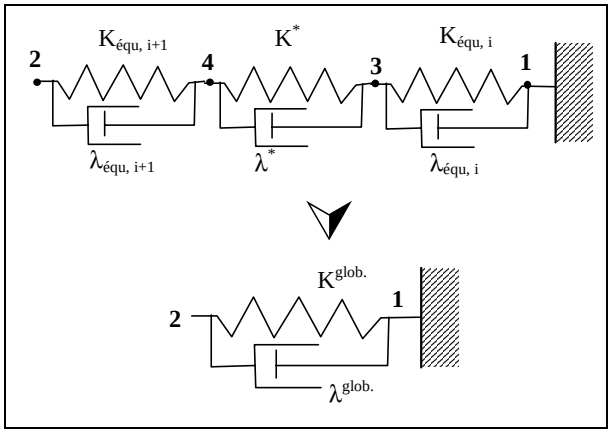


Figure II. 44 : Rigidité et amortissement global pour un lien entre deux poulies.

L'équilibre aux nœuds 1 à 4 de la figure II.44 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{équ,i} & \lambda_{équ,i} & 0 & 0 & -K_{équ,i} & -\lambda_{équ,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{équ,i+1} & \lambda_{équ,i+1} & 0 & 0 & -K_{équ,i+1} & -\lambda_{équ,i+1} \\ -K_{équ,i} & -\lambda_{équ,i} & 0 & 0 & K_{équ,i}+K^* & \lambda_{équ,i}+\lambda^* & -K^* & -\lambda^* \\ 0 & 0 & -K_{équ,i+1} & -\lambda_{équ,i+1} & -K^* & -\lambda^* & K^*+K_{équ,i+1} & \lambda_{équ,i}+\lambda_{équ,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equation II. 100

Selon la deuxième ligne de l'équation II.100, T_2 vérifie :

$$T_2 = K_{équ,i+1}\left(x_2 - x_4\right) + \lambda_{équ,i+1}\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_4\right) \qquad \text{Equ. II. 101}$$

Il nous faut donc connaître le déplacement et la vitesse au nœud 4. Il est alors nécessaire de résoudre le sous-système des déplacements inconnus de l'équation II.100 :

$$\begin{bmatrix} K_{équ,i}+K^* & -K^* \\ -K^* & K^*+K_{équ,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{équ,i}+\lambda^* & -\lambda^* \\ -\lambda^* & \lambda_{équ,i}+\lambda_{équ,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ K_{équ,i+1} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_{équ,i+1} \end{Bmatrix} x_2$$

Equation II. 102

La solution particulière ou statique de l'équation II.102 est :

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_{équ,i}K^* + K_{équ,i+1}K^* + K_{équ,i}K_{équ,i+1}} \left[\begin{Bmatrix} K_{équ,i+1}K^* \\ \left(K_{équ,i}+K^*\right)K_{équ,i+1} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} \lambda_{équ,i+1}K^* \\ \left(K_{équ,i}+K^*\right)\lambda_{équ,i+1} \end{Bmatrix} \dot{x}_2 \right]$$

Equation II. 103

Si nous calculons la partie transitoire de l'équation II.103, on s'aperçoit que le mouvement des nœuds 3 et 4 est différent si nous bloquons le nœud 1 ou inversement le nœud 2, du fait de la non symétrie des raideurs et amortisseurs. Cela engendre une raideur globale différente si la poulie i tourne alors que le poulie i+1 reste bloquée, et inversement (figure II.43). On obtient ainsi une matrice de raideur non symétrique. Or, les mesures sur banc de la matrice de raideur (chapitre III.3.1) montrent que celle-ci est symétrique. Par conséquent, seule la partie particulière de l'équation II.102 sera considérée puisqu'elle rend symétrique la raideur globale (équation II.104). L'équation II.103 avec l'équation II.101 (et $\dot{x}_4 = 0$) permet d'obtenir la raideur et l'amortissement global du modèle final (figure II.45) :

$$T_2 = \underbrace{\frac{K^*K_{équ,i}K_{équ,i+1}}{K^*\left(K_{équ,i}+K_{équ,i+1}\right)+K_{équ,i}K_{équ,i+1}}}_{\text{raideur globale } K^{glob.}} x_2 + \underbrace{\frac{K^*K_{équ,i}\lambda_{équ,i+1}}{K^*\left(K_{équ,i}+K_{équ,i+1}\right)+K_{équ,i}K_{équ,i+1}}}_{\text{amortissement global } \lambda^{glob.}} \dot{x}_2$$

Equation II. 104

Nous vérifions sur l'équation II.104 que la raideur globale ne change pas si les raideurs $K_{équ,\ i}$ et $K_{équ,\ i+1}$ sont permutées.

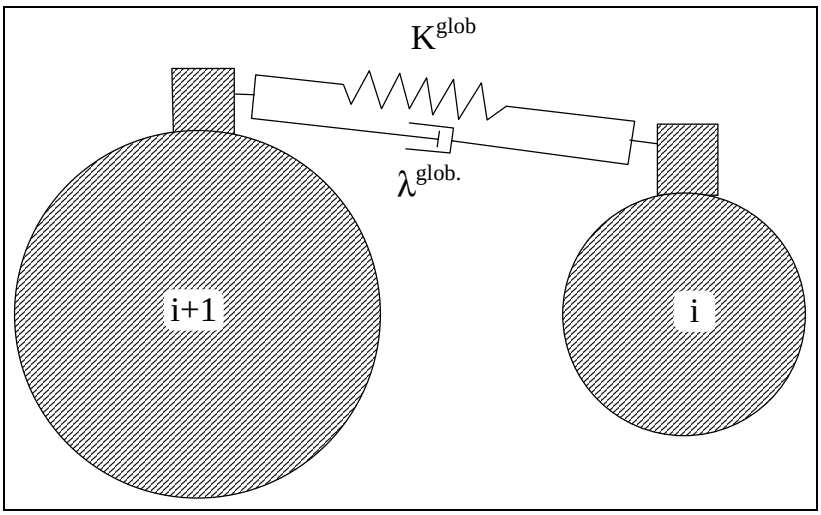


Figure II. 45 : Modèle final.

II.3.5.3.2. Cas d'un lien entre une poulie et un galet

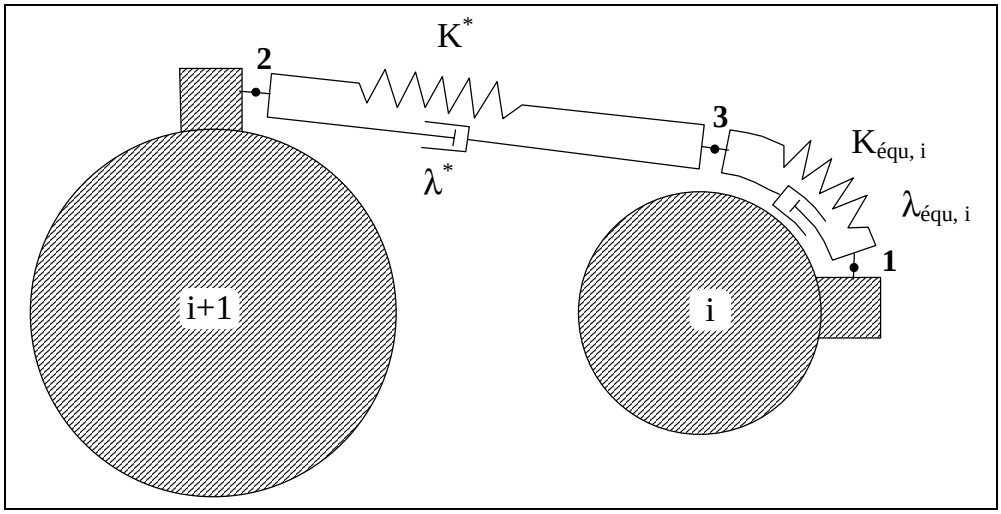


Figure II. 46 : Modèle "pré-final" pour une poulie dentée i et un galet i+1.

Pour le cas d'un lien entre une poulie dentée et un galet (figure II.46), on cherche un couple ressort - amortisseur ($K^{glob.}$-$\lambda^{glob.}$) équivalent à la série de deux couples ressort-amortisseur représentant d'une part le brin libre et le brin enroulé sur la galet (K^{*}-λ^{*}) et d'autre part, le brin enroulé sur la poulie dentée ($K_{équ}$-$\lambda_{équ}$), tel qu'ils sont représentés sur la figure II.47.

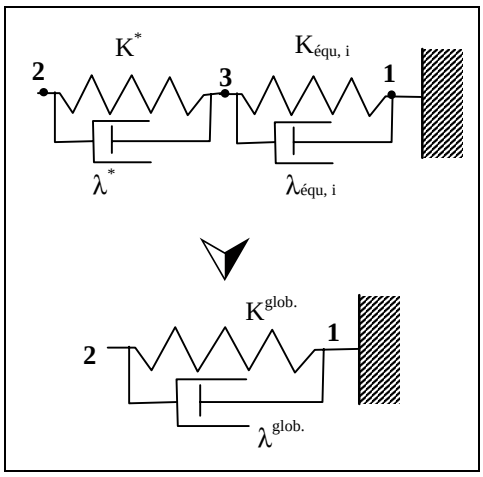


Figure II. 47 : Rigidité et amortissement global pour un lien entre une poulie dentée et un galet.

L'équilibre aux nœuds 1 à 3 de la figure II.47 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{équ,i} & \lambda_{équ,i} & 0 & 0 & -K_{équ,i} & -\lambda_{équ,i} \\ 0 & 0 & K^* & \lambda^* & -K^* & -\lambda^* \\ -K_{équ,i} & -\lambda_{équ,i} & -K^* & -\lambda^* & K_{équ,i}+K^* & \lambda_{équ,i}+\lambda^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equation II. 105

Selon la deuxième ligne de l'équation II.105, T_2 vérifie :

$$T_2 = K^*(x_2 - x_3) - \lambda^*(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \qquad \text{Equ. II. 106}$$

Il faut donc connaître le déplacement et la vitesse au nœud 3. Il est alors nécessaire de résoudre l'équation du déplacement du nœud 3 :

$$(K_{équ,i} + K^*)x_3 + (\lambda_{équ,i} + \lambda^*)\dot{x}_3 = K^* x_2 + \lambda^* \dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 107}$$

La solution particulière ou statique de l'équation II.107 est :

$$x_3 = \frac{K^*}{K_{équ,i} + K^*} x_2 + \frac{\lambda^*}{K_{équ,i} + K^*} \dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 108}$$

Pour les mêmes raisons énoncées au chapitre II.II.3.5.3.1, la partie transitoire de l'équation II.108 n'est pas calculée car on se place à l'asymptote. L'équation II.108 avec l'équation II.106 (et $\dot{x}_3 = 0$) permet d'obtenir la raideur et l'amortissement global du modèle final (figure II.45) :

$$T_2 = \underbrace{\frac{K^* K_{équ,i}}{K^* + K_{équ,i}}}_{\text{raideur globale } K^{glob.}} x_2 + \underbrace{\lambda^* \left(1 - \frac{\lambda^*}{K^* + K_{équ,i}}\right)}_{\text{amortissement global } \lambda^{glob.}} \dot{x}_2 \qquad \text{Equ. II. 109}$$

Nous retrouvons avec la raideur globale le résultat classique de deux ressorts en série.

II.3.5.3.3. Cas d'un lien entre deux galets

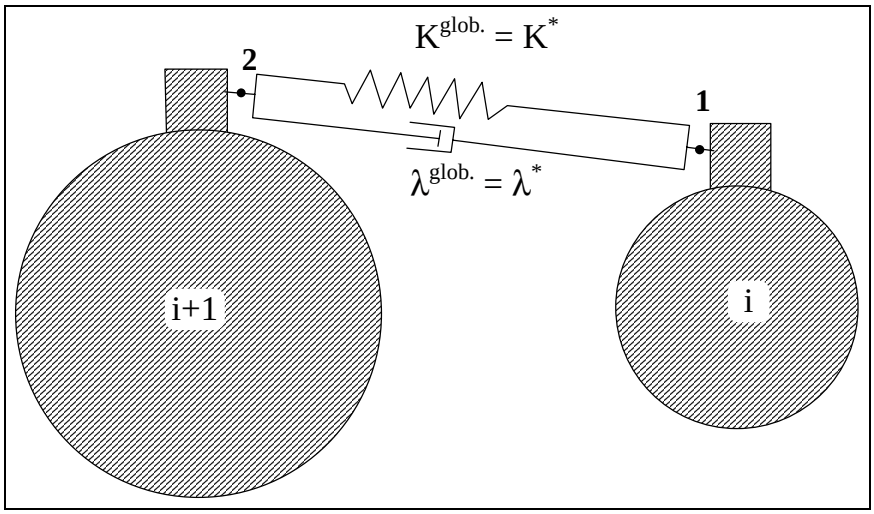


Figure II. 48 : Modèle "pré-final" et final pour deux galets.

Le cas de deux galets consécutifs est traité bien qu'improbable. Le lien entre deux galets ne comprend qu'un couple ressort - amortisseur. On trouve donc immédiatement la raideur et l'amortissement global (figure II.48).

II.3.6. 5ème module : Résolution des équations du mouvement

II.3.6.1. Établissement des équations du mouvement

Nous considérons d'abord la transmission comme un système constitué de solides indéformables et de liaisons parfaites (puissance virtuelle nulle pour un mouvement virtuel rigidifiant figé). Les efforts extérieurs appliqués au système sont introduits par leur torseur d'effort s'appliquant sur les paliers. Les liaisons internes (paliers et courroie) sont modélisées par des ressorts. Les efforts, internes et externes, Q_i dérivent donc d'un potentiel E_p ($Q_i = -\frac{\partial E_p(q,t)}{\partial q_i}$). Nous pouvons donc appliquer le formalisme lagrangien. Celui-ci consiste à additionner l'énergie cinétique E_c et potentielle E_p pour chaque élément du système formant ainsi le lagrangien :

$$L(q,\dot{q},t) = E_c(q,\dot{q},t) - E_p(q,t) \quad \text{avec q, coordonnées généralisées du système.}$$

Les équations de Lagrange qui, avec l'aide des conditions initiales, détermine le mouvement q(t) du système, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Les chapitres suivants déterminent les équations de Lagrange pour chaque élément du système, en conformité avec les hypothèses de travail. L'équation différentielle régissant le mouvement du système ainsi obtenue est conservative. Toutefois, dans tout mouvement réel, la puissance réelle des efforts de liaison est négative. On ajoute donc au système, des forces de frottement R_i de type visqueux dépendant d'un pseudo-potentiel des dissipations ($R_i = -\frac{\partial E_p(q,t)}{\partial \dot{q}_i}$). On obtient ainsi une équation du mouvement de la forme :

$$\underbrace{[M]}_{\text{matrice d'inertie}} \{\ddot{q}\} + \underbrace{[C]}_{\text{matrice d'amortissement}} \{\dot{q}\} + \underbrace{[K]}_{\text{matrice de raideur}} \{q\} = \underbrace{\{F\}}_{\text{vecteur des efforts appliqués}}$$

Il faut maintenant définir les coordonnées généralisées du système q_i.

II.3.6.2. Définition des variables du système

Initialement, les centres des poulies sont à la position (x_i, y_i). Leurs déplacements dans le plan sont (u_i, v_i). Le déplacement total d'une poulie dans le plan est donc (x_i+u_i, y_i+v_i). La poulie est également repérée par son angle θ_i. Celui-ci comporte deux parties $\theta_{i,s}$ et $\theta_{i,v}$.

1. $\theta_{i,s}$ est l'angle de rotation quasi-statique (appelé parfois normalisé) dû à la rotation d'une transmission géométriquement parfaite. Cet angle se calcule à partir de la vitesse de rotation moyenne $\dot{\theta}_{1,s}$ de la poulie motrice (toujours numérotée 1) : $\theta_{is} = \frac{R_1}{R_i}\left(\dot{\theta}_1 t\right)$.

2. $\theta_{i,v}$ est l'angle "variable" du système qui une inconnue de l'équation du mouvement. Cet angle est la conséquence en dynamique de l'élasticité du système en rotation. Il comprend l'acyclisme cinématique $\theta_{i,c}$ dû aux imperfections des poulies (excentricité) et de la courroie (non homogénéité de la courroie); et l'acyclisme dynamique $\theta_{i,d}$. On a donc $\theta_{i,v} = \theta_{i,c} + \theta_{i,d}$. Pour le vilebrequin, $\theta_{i,v}$ correspond à l'acyclisme moteur.

Le déplacement angulaire total d'une poulie est donc ($\theta_{i,s}$+$\theta_{i,v}$). On a alors trois coordonnées généralisées (u_i, v_i, $\theta_{i,v}$) pour chaque poulie. L'acyclisme moteur est imposée. L'angle "variable" $\theta_{1,v}$ est une donnée d'entrée et n'est donc pas une variable. Ainsi, pour un système à n poulies, nous avons 3n-1 variables. Le système comporte une liaison supplémentaire si un tendeur dynamique fait partie de la transmission. Celui-ci impose une trajectoire circulaire au galet supporté par le tendeur. Dans ce cas, on peut restreindre le paramétrage d'une variable : le système n'a plus que 3n-2 degrés de liberté.

II.3.6.3. Energie cinétique d'une poulie

La poulie restant dans le même plan (figure II.49), le torseur cinétique $\Im|_{C_i/R_0}$ dans le repère fixe $R_{0|_{xyz}}$, au centre de la poulie C_i, est :

$$\Im|_{C_i/R_0} \begin{cases} \text{quantité de mouvement} = \underbrace{M_i}_{\text{masse}} \dot{u}_i \vec{x} + M_i \dot{v}_i \vec{y} \\ \text{moment cinétique} = \underbrace{I_i}_{\substack{\text{moment} \\ \text{d'inertie}}} \dot{\theta}_i \vec{z} \end{cases}$$

On obtient l'énergie cinétique pour la poulie i :

$$E_c^i = \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^{\,2} + \frac{1}{2} M_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2)$$

On pose $\theta_i = \theta_{is} + \theta_{iv}$:

$$E_c^i = \frac{1}{2} I_i (\dot{\theta}_{i,s} + \dot{\theta}_{i,v})^2 + \frac{1}{2} M_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2)$$

L'application du théorème de Lagrange donne les actions d'inertie de la poulie i. La partie associée à θ_{is} sera mise dans le second membre car θ_{is} est l'angle de rotation imposée au système :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_c^i}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \dfrac{\partial E_c^i}{\partial \theta_i} = I_i \ddot{\theta}_{i,s} + I_i \ddot{\theta}_{i,v} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_c^i}{\partial \dot{u}_i}\right) - \dfrac{\partial E_c^i}{\partial u_i} = M_i \ddot{u}_i \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_c^i}{\partial \dot{v}_i}\right) - \dfrac{\partial E_c^i}{\partial v_i} = M_i \ddot{v}_i \end{cases} \qquad \text{Equ. II. 110}$$

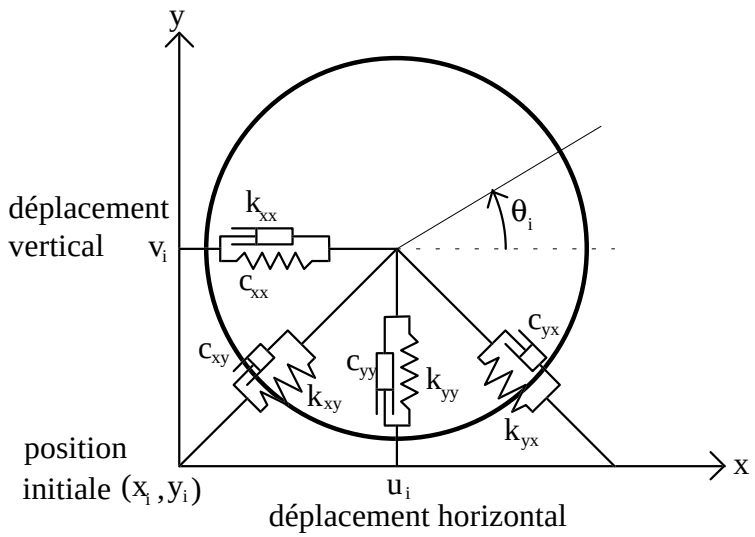


Figure II. 49 :Repérage d'une poulie i et caractéristiques mécaniques de sa liaison pivot.

On remarque pour les équations II.110 l'absence de couplage inertiel entre u, v et θ, comme c'est le cas dans l'article de S. J. Hwang (chapitre I.2.1.4) pour le galet tendeur (équation I.24 et I.25). On peut rapidement retrouver les forces d'inertie calculées par S. J. Hwang en déterminant l'énergie cinétique du galet tendeur rattachée au bras du tendeur de longueur l_t en rotation d'un angle θ_t autour d'un point fixe (figure I.8). L'énergie cinétique de la poulie dans le référentiel associé à son centre de masse (référentiel en translation par rapport au référentiel

galiléen du laboratoire et d'origine le centre de masse) est $I_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2 / 2$. On ajoute l'énergie de translation du centre de masse à l'énergie de rotation (théorème de Kœnig) pour obtenir l'énergie cinétique du galet. L'énergie du bras du tendeur ne dépend que de l'angle θ_t :

$$E_{galet+tendeur} = \frac{I_i}{2}\left(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t\right)^2 + \frac{M_i}{2}\left(l_t\dot{\theta}_t\right)^2 + E_{tendeur}\left(\dot{\theta}_t\right)$$

Nous retrouvons l'équation de Lagrange concernant θ_i identique à l'équation I.25 :

$$I_i(\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_t) = \sum \text{moment des efforts ext. au syst. tendeur + galet} \qquad \text{id. Équ. I.25}$$

L'équation précédente présente un couplage inertiel entre la rotation θ_i et le déplacement du galet lié à θ_t. Cependant, il faut aussi prendre en compte la condition de contact sans glissement entre le galet et la courroie.

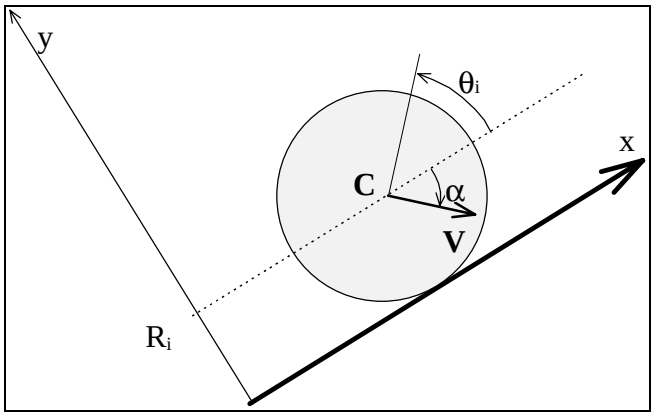


Figure II. 50 : Galet en contact ponctuel avec un axe.

Pour simplifier, nous considérons un contact ponctuel entre un galet et un axe x symbolisant la courroie (figure II.50). La condition de non-glissement est une vitesse nulle selon x du point du galet en contact à l'instant considéré avec l'axe x, c'est-à-dire :

$$V\cos\alpha + R_i\dot{\theta}_i = 0 \qquad \text{Equ. II. 111}$$

V est la vitesse du centre C du galet. Dans le cas du tendeur : $V = l_t\dot{\theta}_t$ (d'après la nomenclature de la figure I.15).

En intégrant l'équation II.111, nous obtenons à une constante près :

$$\theta_i = -\frac{l_t}{R_i}\theta_t\cos\alpha \qquad \text{Equ. II. 112}$$

L'énergie cinétique devient alors :

$$\frac{1}{2}I_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2 = \frac{1}{2}I_i\left\{-\dot{\theta}_t\left(1 + \frac{l_t}{R_i}\cos\alpha\right)\right\}^2 \qquad \text{Equ. II. 113}$$

Pour le cas invraisemblable (tendeur instable) où $\alpha = 0$ (courroie en position a sur la figure II.51), nous avons alors un couplage maximum entre la rotation du tendeur et la rotation du galet. En revanche, pour le cas plus efficace où $\alpha = 90°$ (courroie en position b sur la figure II.51), l'énergie cinétique devient $I_i\dot{\theta}_t^2 / 2$. Il n'y a plus de couplage inertiel dans ce second cas entre la rotation du galet et le déplacement de son centre lié à θ_t. Pour le galet tendeur, on peut finalement estimer, comme Y. L. Yang (chapitre I.2.1.3), qu'il n'y a pas de couplage inertiel entre le déplacement du centre du galet et son déplacement angulaire θ_t car la configuration d'un tendeur efficace sera toujours plus proche du cas b que du cas a. Qu'en est-il des autres galets et poulies ?

Les deux cas de la figure II.51 représentent des contacts galet-courroie ponctuels. Or dans une transmission par courroie crantée, il est nécessaire d'avoir un arc d'enroulement autour des poulies suffisamment important pour avoir un nombre de dents de courroie en prise satisfaisant. Si l'arc d'enroulement est π radians, nous comprenons que la poulie ne tourne pas si son centre se déplace suivant u ou v. Étant donné la difficulté d'exprimer la loi $\theta_i(u,v)$ pour avoir l'énergie de rotation $I_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2/2$ de la poulie ou du galet, on admet que les arcs d'enroulement sont suffisamment importants pour que la rotation θ^* induite par u et v soit négligée. À l'instar de tous les auteurs de modélisation de transmission en rotation, excepté S. J. Hwang, nous négligeons donc le couplage inertiel entre la rotation propre θ_i du galet ou de la poulie, et du déplacement de son centre.

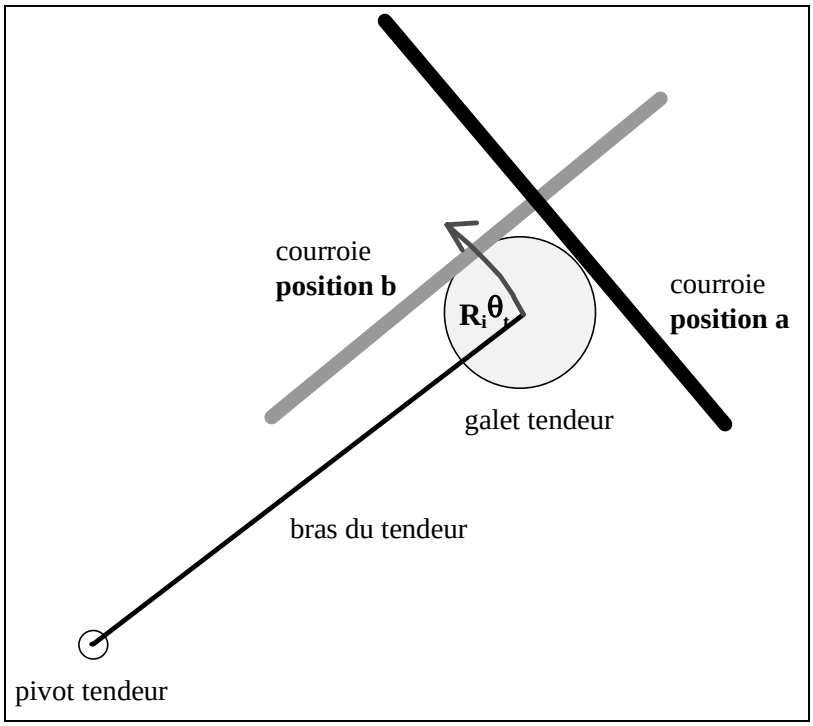


Figure II. 51 : Schéma cinématique du galet tendeur en fonction de la position de la courroie.

II.3.6.4. Torseur d'effort au centre de rotation de chaque palier

II.3.6.4.1. Efforts extérieurs au système

Le torseur des efforts extérieurs se réduit au centre de rotation du palier ou de la poulie sous forme de série de Fourier :

$$\Im\big|_{\text{effort}/R_0}\begin{cases}\text{résultante des forces} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta_i} + a\left(b - e^{-ct}\right)\vec{x}}_{F_u} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{in\theta_i} + a'\left(b' - e^{-c't}\right)\vec{y}}_{F_v} \\ \text{moment des forces} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(d_n e^{in\theta_i} + \eta C_f\right)\vec{z}\end{cases}$$

Equ. II. 114

La partie de la résultante des forces en e^{-t} permet de simuler une force due à la dilatation thermique du carter sur le palier. L'accroissement des entr'axes résultant de la dilatation thermique permet de compenser, dans une mesure restant à déterminer, la baisse de la tension due à l'effet centrifuge. Le rôle du tendeur dynamique reste aussi à déterminer. Une force périodique peut être également appliquée sur les paliers.

Le couple appliqué aux poulies est développé en série de Fourier. À ce couple s'ajoute pour les galets un couple de frottement C_f provenant du frottement du joint d'étanchéité du roulement. Le paramètre η égal à ± 1 dépend du sens de rotation du galet.

II.3.6.4.2. Efforts simulant l'erreur de transmission cinématique

L'erreur de transmission cinématique θ_{ic} pour la poulie i, causée par les imperfections de la courroie (figure II.2), l'excentricité des poulies (figure II.8) et par l'effet polygonal (figure II.13), est décomposée en série de Fourier à partir d'une mesure expérimentale. Pour ajouter cette erreur cinématique à l'angle de calcul θ_{iv}, nous calculons un couple équivalent $C_{err.\ cin.}$ d'après l'équation régissant le mouvement du système $\xi(u_i, v_i, \theta_{iv})$:

$$\underbrace{[M]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{de masse}}} \left\{\ddot{\xi}(\ddot{u}_i, \ddot{v}_i, \ddot{\theta}_{iv})\right\} + \underbrace{[\lambda]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{d'amortissement}}} \left\{\dot{\xi}(\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{\theta}_{iv})\right\} + \underbrace{[K]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{de raideur}}} \left\{\xi(u_i, v_i, \theta_{iv})\right\} = \{C\} \qquad \text{id. Equ. II.155}$$

Le couple équivalent à l'erreur cinématique est par conséquent :

$$[M]\left\{\ddot{\xi}(0,0,\ddot{\theta}_{ic})\right\} + [\lambda]\left\{\dot{\xi}(0,0,\dot{\theta}_{ic})\right\} + [K]\left\{\xi(0,0,\theta_{ic})\right\} = \left\{C_{err.\,cin.}\right\} \qquad \text{Equ. II. 115}$$

En ajoutant au second membre des équations du mouvement, nous retrouvons donc pour des régimes de rotation quasi-statique, l'erreur de transmission cinématique. Nous remarquons que le déplacement aux paliers en régime quasi-statique est pris pour nul à défaut. En effet, cela nécessiterait de mesurer aussi les lois u_{ic} et v_{ic} ce que personne n'a fait jusqu'à présent.

II.3.6.4.3. Efforts dus aux variations globales de tension

Des variations globales de tension sur toute la courroie ont deux origines : (1) la tension centrifuge $T_c = mc^2$ (annexe IV) et (2) la surtension T_{exc} causée par l'excentricité des poulies (figure II.9). On nomme la variation de tension totale : $\Delta T = T_c + T_{exc}$. La résultante sur la poulie i de la figure II.18 est :

$$\begin{cases} F_u = \Delta T(\sin\varphi_{a,i} - \sin\varphi_{b,i}) \\ F_v = \Delta T(\cos\varphi_{b,i} - \cos\varphi_{a,i}) \end{cases}$$

II.3.6.5. Travaux virtuels dus aux paliers

Le travail virtuel dû à un palier se décompose comme suit (figure II.49) :

$$\begin{aligned} \partial W = &-k_{xx}u_i\partial u_i - k_{yx}u_i\partial v_i - k_{yy}v_i\partial v_i - k_{xy}v_i\partial u_i \\ &- c_{xx}\dot{u}_i\partial u_i - c_{yx}\dot{u}_i\partial v_i - c_{yy}\dot{v}_i\partial v_i - c_{xy}\dot{v}_i\partial u_i \end{aligned}$$

D'où la force généralisée :

$$\begin{Bmatrix} F_{u_i} \\ F_{v_i} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 116}$$

II.3.6.6. Travaux virtuels dus aux brins "globaux"

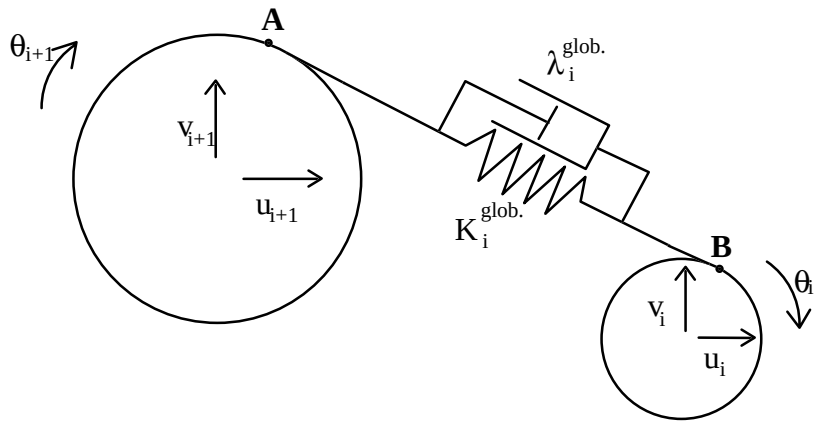


Figure II. 52 : Schéma du brin libre "global".

Le travail virtuel d'un brin "global" (défini au chapitre II.II.3.5.3) est :

$$\partial W = \underbrace{F_A \vec{b}_i * R_{i+1}\partial\theta_{i+1,v}(-\vec{b}_i) + F_B \vec{b}_i * R_i \partial\theta_{i,v}(-\vec{b}_i)}_{\text{travail dû à la rotation des poulies}} + \underbrace{F_B * \partial u_i \vec{b}_i.\vec{x} + F_B * \partial v_i \vec{b}_i.\vec{y} + F_A * \partial u_{i+1}\vec{b}_i.\vec{x} + F_A * \partial v_{i+1}\vec{b}_i.\vec{y}}_{\text{travail dû à la translation des poulies}} \qquad \text{Equ. II. 117}$$

avec $\vec{b}_i$ vecteur brin normalisé (figure II.18),
F_A et F_B force exercée par le brin sur les points A et B.

Nous avons d'après le principe de la réaction : $F_A = -F_B$.

D'autre part, la force exercée par le ressort sur le point A est :

$$F_A \vec{b}_i = -K_i^{glob.}\left(+R_i\theta_{i,v} - R_{i+1}\theta_{i+1,v} + dl_i(u_i) + dl_i(u_{i+1}) + dl_i(v_i) + dl_i(v_{i+1})\right)\vec{b}_i$$

avec $dl_i(u_i)$ variation de la longueur du brin i l_i avec le déplacement u_i.

Comme u et v sont très petit vis à vis de la longueur des brins, nous pouvons calculer l'allongement dl_i au premier ordre du brin i, lorsqu'une des deux poulies se déplace. D'après la formulation de la longueur d'un brin l_i énoncée sur la figure II.17, nous obtenons :

$$dl_i(u_{i+1}) = -\frac{-x_{i+1} + x_i}{l_i}u_{i+1}$$

$$\left|\begin{array}{l} dl_i(u_i) = +\dfrac{-x_{i+1}+x_i}{l_i}u_i \\ dl_i(v_{i+1}) = -\dfrac{-y_{i+1}+y_i}{l_i}v_{i+1} \\ dl_i(v_i) = +\dfrac{-y_{i+1}+y_i}{l_i}v_i \end{array}\right.$$

Ces quatre équations sont aussi valables si le brin se croise entre les deux poulies.

Connaissant les allongements dl_i, nous pouvons maintenant définir le travail virtuel fourni par le ressort et l'amortisseur en fonction des déplacements virtuels rigidifiants du système :

$$\begin{aligned} \partial W = &-K_i^{glob.}\left[-R_{i+1}\theta_{i+1,v}+R_i\theta_{iv}-\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{l_i}\right)u_{i+1}+\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{l_i}\right)u_i-\left(\frac{y_i-y_{i+1}}{l_i}\right)v_{i+1}+\left(\frac{y_i-y_{i+1}}{l_i}\right)v_i\right] \\ &.\partial\left[-R_{i+1}\theta_{i+1,v}+R_i\theta_{iv}+b_{i,x}u_{i+1}-b_{i,x}u_i+b_{i,y}v_{i+1}-b_{i,y}v_i\right] \\ &-\lambda_i^{glob.}\left[-R_{i+1}\dot\theta_{i+1,v}+R_i\dot\theta_{iv}-\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{l_i}\right)\dot u_{i+1}+\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{l_i}\right)\dot u_i-\left(\frac{y_i-y_{i+1}}{l_i}\right)\dot v_{i+1}+\left(\frac{y_i-y_{i+1}}{l_i}\right)\dot v_i\right] \\ &.\partial\left[-R_{i+1}\theta_{i+1,v}+R_i\theta_{iv}+b_{i,x}u_{i+1}-b_{i,x}u_i+b_{i,y}v_{i+1}-b_{i,y}v_i\right] \end{aligned}$$

avec $b_{i,x} = \vec{b}_i.\vec{x}$ et $b_{i,y} = \vec{b}_i.\vec{y}$

Nous obtenons ainsi les forces généralisées pour le brin i :

$$\begin{Bmatrix} F_{u_i} \\ F_{v_i} \\ F_{\theta_i} \\ F_{u_{i+1}} \\ F_{v_{i+1}} \\ F_{\theta_{i+1}} \end{Bmatrix} = [C]\left(-K_i^{glob.}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_{i+1} \\ v_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} - \lambda_i^{glob.}\begin{Bmatrix} \dot u_i \\ \dot v_i \\ \dot\theta_i \\ \dot u_{i+1} \\ \dot v_{i+1} \\ \dot\theta_{i+1} \end{Bmatrix}\right) \qquad \text{Equ. II. 118}$$

avec
$$[C] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -b_{i,x}\underline{x}_i & -b_{i,x}\underline{y}_i & -b_{i,x}R_i & +b_{i,x}\underline{x}_i & +b_{i,x}\underline{y}_i & +b_{i,x}R_{i+1} \\ -b_{i,y}\underline{x}_i & -b_{i,y}\underline{y}_i & -b_{i,y}R_i & +b_{i,y}\underline{x}_i & +b_{i,y}\underline{y}_i & +b_{i,y}R_{i+1} \\ R_i\underline{x}_i & R_i\underline{y}_i & R_i^2 & -R_i\underline{x}_i & -R_i\underline{y}_i & -R_iR_{i+1} \\ \hdashline +b_{i,x}\underline{x}_i & +b_{i,x}\underline{y}_i & +b_{i,x}R_i & -b_{i,x}\underline{x}_i & -b_{i,x}\underline{y}_i & -b_{i,x}R_{i+1} \\ +b_{i,y}\underline{x}_i & +b_{i,y}\underline{y}_i & +b_{i,y}R_i & -b_{i,y}\underline{x}_i & -b_{i,y}\underline{y}_i & -b_{i,y}R_{i+1} \\ -R_{i+1}\underline{x}_i & -R_{i+1}\underline{y}_i & -R_{i+1}^2 & +R_{i+1}\underline{x}_i & +R_{i+1}\underline{y}_i & +R_{i+1}R_{i+1} \end{array}\right]$$

$$\underline{x} = \left(\frac{x_i-x_{i+1}}{l_i}\right) \quad \text{et} \quad \underline{y} = \left(\frac{y_i-y_{i+1}}{l_i}\right)$$

II.3.6.7. Travail virtuel du tendeur

Conformément aux hypothèses (chapitre II.II.2.3), le modèle (figure II.53) s'appuie sur un

tendeur de mouvement circulaire autour d'un pivot fixe de coordonnées (x_t, y_t).

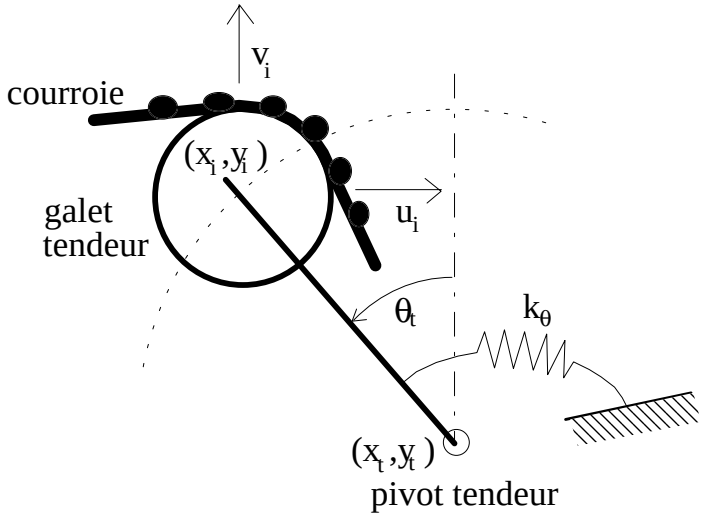


Figure II. 53 : Schéma du tendeur.

Le couple de rappel de ce tendeur est :

$$C_{torsion} = -k_\theta\left(\theta_t - \theta_{t,0}\right) - \lambda_\theta \dot{\theta}_t \qquad \text{Equ. II. 119}$$

avec k_θ raideur de torsion équivalente du tendeur,
λ_θ amortissement de torsion équivalent du tendeur,
$\theta_{t,0}$ angle de référence où le couple est nul (en statique).

En général, l'amortissement est non linéaire. Le tendeur est très amorti lorsqu'il s'écarte de la courroie. Inversement, le tendeur est peu amorti lorsqu'il s'approche de la courroie. Cette condition est incluse dans le modèle en tenant compte du sens de rotation (signe de $\dot{\theta}_t$).

En statique, le couple de torsion du tendeur peut s'écrire :

$$C_{torsion} = -k_\theta\left(\theta_t - \theta_{t,i} + \theta_{t,i} - \theta_{t,0}\right) \qquad \text{Equ. II. 120}$$

avec $\theta_{t,i}$, angle initial repérant le tendeur.

À l'instant initial, nous avons un équilibre statique entre l'action de la courroie et celle du tendeur (figure II.54) :

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{T_{0/M_1}} + \overrightarrow{0M_2} \wedge \overrightarrow{T_{0/M_2}} - k_\theta\left(\theta_{t,i} - \theta_{t,0}\right) = 0 \qquad \text{Equ. II. 121}$$

Nous pouvons ainsi simplifier l'équation II.119 en ne gardant que la partie du couple qui travaille :

$$C_{torsion} = -k_\theta\left(\theta_t - \theta_{t,i}\right) - \lambda_\theta \dot{\theta}_t \qquad \text{Equ. II. 122}$$

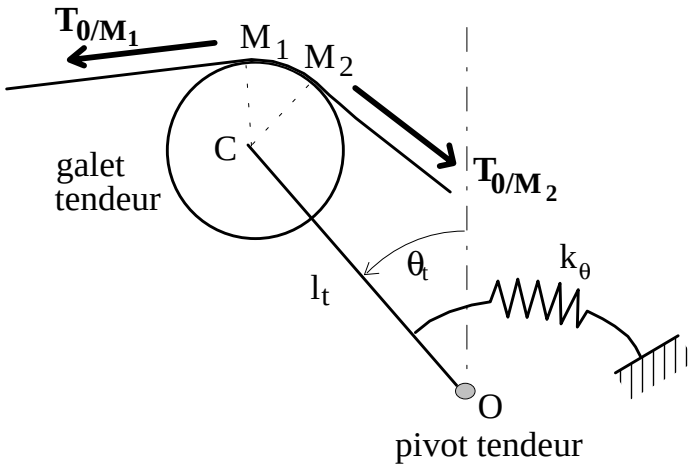


Figure II. 54 : Équilibre du tendeur.

Les degrés de liberté du système concernant le galet (θ_i, u_i, v_i) sont rattachés à l'angle de rotation θ_t du tendeur. Cet angle s'écrit :

$$\theta_t = a\tan\left(\frac{x_i + u_i - x_t}{y_t - y_i - v_i}\right) = a\tan\left(\frac{X}{Y}\right) \qquad \text{Equ. II. 123}$$

avec (x_i, y_i) position initiale du galet tendeur,
(u_i, v_i) déplacements du galet tendeur,
(x_t, y_t) position du pivot du tendeur.

$$\text{on pose : } \begin{cases} X = x_i + u_i - x_t \\ Y = y_t - y_i - v_i \end{cases} \qquad \text{Equ. II. 124}$$

On a donc $\theta_t = 0$ lorsque le tendeur est situé à la verticale (modulo-π). Le sens positif de rotation est le sens trigonométrique (figure II.54).

La rotation du tendeur impose une contrainte géométrique :

$$X^2 + Y^2 = l_t^2 \qquad \text{avec } l_t \text{ longueur de la tige du tendeur} \qquad \text{Equ. II. 125}$$

En pratique, le déplacement circulaire du galet tendeur est toujours faible en regard de son rayon. Nous pouvons donc linéariser le mouvement autour de sa position d'équilibre statique initiale. La formule de Taylor est appliquée au premier ordre à l'équation II.123 :

$$a\tan\left(\frac{x_i + u_i - x_t}{y_t - y_i - v_i}\right) \approx a\tan\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i + \frac{1}{1+\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} v_i$$

$$\theta_t - \theta_{t,i} \approx \frac{1}{1+\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i + \frac{1}{1+\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} v_i \qquad \text{Equ. II. 126}$$

L'angle initial du tendeur étant : $\theta_{t,i} = \arctan\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)$

Nous choisissons d'utiliser un paramétrage restreint dû à la trajectoire imposée du galet tendeur. Des équations II.124 et II.125, nous tirons :

$$v_i = -Y + y_t - y_i \qquad \text{Equ. II. 127}$$

On obtient également :

$$\partial v_i = \frac{X}{Y}\partial u_i \quad \text{et} \quad \dot{v}_i = \frac{X}{Y}\dot{u}_i \qquad \text{Equ. II. 128}$$

L'équation II.126 devient :

$$\theta_t - \theta_{t,i} = \frac{1 + \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} X/Y}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i = T.\, u_i \qquad \text{Equ. II. 129}$$

Pour simplifier, nous posons : $T = \frac{1 + \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} X/Y}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2}$

On obtient de l'équation II.123 :

$$\partial\theta_t = \frac{1}{Y}\partial u_i \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_t = \frac{1}{Y}\dot{u}_i \qquad \text{Equ. II. 130}$$

ou de l'équation II.129 : $\partial\theta_t = T\partial u_i$ Equ. II. 131

On peut maintenant définir le travail virtuel fourni par le tendeur à partir des équations II.122 et II.129 :

$$\begin{aligned} \partial W &= -k_\theta T u_i \partial\theta_t - \lambda_\theta \frac{\dot{u}_i}{Y}\partial\theta_t \\ &= -\left(k_\theta T^2 u_i + \frac{\lambda_\theta}{Y^2}\dot{u}_i\right)\partial u_i \end{aligned} \qquad \text{Equ. II. 132}$$

L'équation II.131 est utilisée pour le travail du ressort de torsion et l'équation II.130 pour l'amortiseur, afin d'avoir systématiquement un terme de raideur et d'amortissement au carré.

II.3.6.8. Réduction du système dans le cas de l'utilisation d'un tendeur

L'utilisation d'un paramétrage restreint est requise si la transmission utilise un tendeur. Le déplacement vertical du galet v_i est supprimé de l'équation du mouvement ce qui réduit le nombre de degré de liberté du système. Pour cela, il faut exprimer v_i et ses dérivées en fonction des autres variables du système.

À partir de l'équation II.125, nous obtenons :

$$v_i = y_t - y_i - \frac{l_t^2 - (x_i - x_t).X}{Y} + \frac{X}{Y} u_i = \alpha . u_i + \delta \qquad \text{Equ. II. 133}$$

avec $\alpha = X^{n-1} / Y^{n-1}$

$$\delta = y_t - y_i - \frac{l_t^2 - (x_i - x_t).X^{n-1}}{Y^{n-1}}$$

Les coefficients α et δ sont calculées d'après les valeurs de u_i^{n-1} et v_i^{n-1} à l'instant précédent (n-1). On rappelle l'équation II.128 :

$$\dot{v}_i = \frac{X}{Y} \dot{u}_i = \beta \dot{u}_i \qquad \text{Equ. II. 134}$$

avec $\beta = \alpha$

L'équation II.134 est dérivée une fois de plus :

$$\ddot{v}_i = \frac{X}{Y} \ddot{u}_i + \frac{\dot{u}_i}{Y}\left[1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2\right] \dot{u}_i = \gamma \ddot{u}_i + \varepsilon \dot{u}_i \qquad \text{Equ. II. 135}$$

avec $\gamma = \alpha$

$$\varepsilon = \frac{\dot{u}_i^{n-1}}{Y^{n-1}}\left[1 + \left(\frac{X^{n-1}}{Y^{n-1}}\right)^2\right]$$

La force généralisée associée à v_i doit aussi être exprimé comme une force associé à la variable u_i. Lorsqu'on applique une force g selon la direction y, celle-ci se décompose en une force radiale qui contraint la tige du tendeur et une force tangentielle responsable du mouvement circulaire du tendeur. Ayant considéré dans les hypothèses que le tendeur est infiniment rigide, nous ne nous préoccupons pas de la force radiale. Une force f selon la direction x (figure II.54) tel que :

$$f = g \tan\theta_t \quad \text{avec } \theta_t \neq \frac{\pi}{2} \qquad \text{Equ. II. 136}$$

a une projection sur la tangente de la trajectoire identique à la force g. D'après l'équation II.136, le tendeur ne peut pas être horizontal. Le problème se partage donc en deux demi-plan. Le tendeur doit rester dans le même demi-plan vertical, ce qui est généralement la situation observée sur les moteurs automobiles.

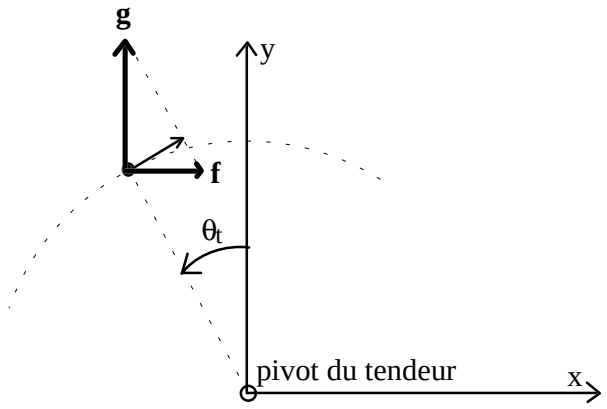


Figure II. 55 : Composantes des forces s'appliquant sur le galet tendeur.

Les équations II.133 à II.135 permettent ainsi d'exprimer le déplacement vertical du galet v_i et de ses dérivées en fonction du déplacement horizontal u_i et de ses dérivées. Les équations du mouvement se présentent alors comme l'équation II.137. x et y représente des variables quelconques. L'objectif est de supprimer la $k^{ième}$ ligne et la $k^{ième}$ colonne à l'aide des équations II.133 à II.135. Nous obtenons alors l'équation II.138.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice d'inertie}} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u}_i \\ \ddot{v}_i = \gamma\ddot{u}_i + \varepsilon\dot{u}_i \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} & c_{ik} & c_{il} \\ c_{ji} & c_{jj} & c_{jk} & c_{jl} \\ c_{ki} & c_{kj} & c_{kk} & c_{kl} \\ c_{li} & c_{lj} & c_{lk} & c_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice d'amortissement}} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_i \\ \dot{v}_i = \beta\dot{u}_i \\ \dot{y} \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{il} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jl} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kl} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{lk} & k_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de raideur}} \begin{Bmatrix} x \\ u_i \\ v_i = \alpha u_i + \delta \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ g \\ f_k \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. II. 137}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} m_{ii} & m_{ij} + \gamma m_{ik} & m_{il} \\ \hline m_{ji} + m_{ki}\tan\theta_t & m_{jj} + \gamma m_{jk} + (m_{kj} + \gamma m_{kk})\tan\theta_t & m_{jl} + m_{kl}\tan\theta_t \\ \hline m_{li} & m_{lj} + \gamma m_{lk} & m_{ll} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u}_i \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c|c} c_{ii} & c_{ij} + \beta c_{ik} + \varepsilon m_{ik} & c_{il} \\ \hline c_{ji} + c_{ki}\tan\theta_t & c_{jj} + \beta c_{jk} + \varepsilon m_{jk} + (c_{kj} + \beta c_{kk} + \varepsilon m_{kk})\tan\theta_t & c_{jl} + c_{kl}\tan\theta_t \\ \hline c_{li} & c_{lj} + \beta c_{lk} + \varepsilon m_{lk} & c_{ll} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_i \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c|c} k_{ii} & k_{ij} + \alpha k_{ik} & k_{il} \\ \hline k_{ji} + k_{ki}\tan\theta_t & k_{jj} + \alpha k_{jk} + (k_{kj} + \alpha k_{kk})\tan\theta_t & k_{jl} + k_{kl}\tan\theta_t \\ \hline k_{li} & k_{lj} + \alpha k_{lk} & k_{ll} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x \\ u_i \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i - k_{ik}\delta \\ f_j - k_{jk}\delta + (g - k_{kk}\delta)\tan\theta_t \\ f_l - k_{lk}\delta \end{Bmatrix}$$

Equ. II. 138

II.3.6.9. Énergie cinétique du balourd

Le balourd est défini par une masse m_i située à une distance r_i du centre géométrique de la roue (figure II.57). Le balourd est repéré par l'angle θ_i et sa position angulaire initiale φ_i. Sa vitesse V dans le repère fixe est :

$$V = \begin{Bmatrix} \dot{u}_i - r_i\dot{\theta}_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \\ \dot{v}_i + r_i\dot{\theta}_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \end{Bmatrix}$$

D'où son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m_i \left\{ \dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + r_i^2\dot{\theta}_i^2 + 2r_i\left(-\sin(\theta_i + \varphi_i)\dot{u}_i + \cos(\theta_i + \varphi_i)\dot{v}_i\right)\dot{\theta}_i \right\} \qquad \text{Equ. II. 139}$$

Les équations de Lagrange appliquées à l'équation II.139 donnent une action d'inertie et une force centrifuge :

$$F_\theta = \underbrace{m_i r_i^2 \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i)\ddot{u}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i)\ddot{v}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i r_i^2 \ddot{\theta}_{i,s}}_{\substack{\text{excitation due à} \\ \text{l'accélération de la rotation}}} \qquad \text{Equ. II. 140}$$

$$F_u = \underbrace{m_i \ddot{u}_i}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i)\ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_{i,v}}_{\text{amortissement dû à la force centrifuge}} - \underbrace{\left(m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i)\ddot{\theta}_{i,s} + m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_{i,s}\right)}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \qquad \text{Equ. II. 141}$$

$$F_v = \underbrace{m_i \ddot{v}_i}_{\text{action d'inertie}} + \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i)\ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_{i,v}}_{\text{amortissement dû à la force centrifuge}} - \underbrace{\left(m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i)\ddot{\theta}_{i,s} - m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_{i,s}\right)}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \qquad \text{Equ. II. 142}$$

L'angle θ_i est pris à l'instant précédent.

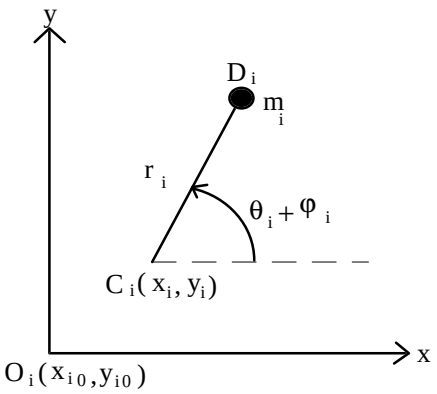


Figure II. 56 : Repérage du balourd.

II.3.6.10. Énergie cinétique d'un pas de brin enroulé sur une poulie

L'énergie cinétique d'un pas j de brin enroulé sur une poulie i est semblable à celle d'un balourd auquel on ajoute l'énergie de rotation :

$$E_c\big|_{\text{pas j}} = \frac{1}{2} m_p \left\{ \dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + R_i^2\dot{\theta}_i^2 + 2R_i\left(-\sin(\theta_i + \varphi_j)\dot{u}_i + \cos(\theta_i + \varphi_j)\dot{v}_i\right)\dot{\theta}_i \right\} + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_i^2 \qquad \text{Equ. II. 143}$$

avec J_p moment d'inertie d'un pas de courroie.

Nous obtenons les actions d'inertie :

$$F_\theta = \underbrace{\left(J_p + m_i R_i^2\right)\ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i R_i \sin\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{u}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i R_i \cos\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{v}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{\left(J_p + m_i R_i^2\right)\ddot{\theta}_{i,s}}_{\substack{\text{excitation due à} \\ \text{l'accélération de la rotation}}} \quad \text{Equ. II. 144}$$

$$F_u = \underbrace{m_i \ddot{u}_i}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i R_i \sin\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i R_i \sin\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{\theta}_{i,s}}_{\substack{\text{terme d'excitation dû à} \\ \text{l'accélération de la rotation}}} \quad \text{Equ. II. 145}$$

$$F_v = \underbrace{m_i \ddot{v}_i}_{\text{action d'inertie}} + \underbrace{m_i R_i \cos\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i R_i \cos\left(\theta_i + \varphi_i\right)\ddot{\theta}_{i,s}}_{\substack{\text{terme d'excitation dû à} \\ \text{l'accélération de la rotation}}} \quad \text{Equ. II. 146}$$

Nous ajoutons l'action de tous les pas enroulés pour obtenir l'action totale sur une poulie i.

La force centrifuge est retranchée des équations II.145 et II.146 car elle est déjà comptée dans la tension comme le montre le chapitre II.II.3.6.4.3.

II.3.6.11. Énergie cinétique d'un pas de courroie d'un brin libre

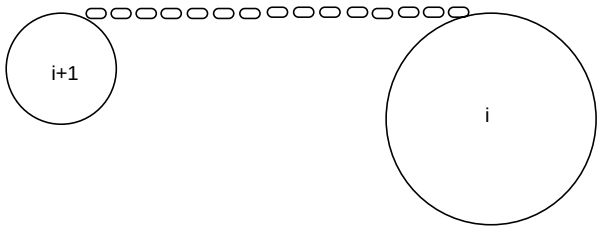


Figure II. 57 :Discrétisation en pas d'un brin libre.

Les vibrations longitudinales ne sont pas prises en compte dans le brin. En outre, les variations de vitesse du brin libre, dues aux variations de tension (chapitre II.II.2.2.3), à la variation de la vitesse angulaire et aux vitesses linéaires de translation des poulies adjacentes, sont négligeables. Par conséquent, l'énergie cinétique est calculée à partir de la vitesse moyenne du brin libre i :

$$E_c = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{R_i \dot{\theta}_i + R_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}}{2} \right)^2$$

On obtient pour un pas de brin libre i :

$$F_\theta = m_i \frac{R_i^2}{4} \ddot{\theta}_{i,v} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i+1,v} + \underbrace{m_i \frac{R_i^2}{4} \ddot{\theta}_{i,s} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i+1,s}}_{\text{terme d'excitation au second membre}}$$

$$F_{\theta+1} = m_i \frac{R_{i+1}^2}{4} \ddot{\theta}_{i+1,v} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i,v} + \underbrace{m_i \frac{R_{i+1}^2}{4} \ddot{\theta}_{i+1,s} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{terme d'excitation au second membre}} \quad \text{Equ. II. 147}$$

L'addition de tous les pas sur un brin donne la force inertielle totale pour un brin de courroie i.

II.3.6.12. Résolution des équations du mouvement

L'adjonction de toutes les actions développées dans les chapitre précédents aboutit à l'équation du mouvement de la forme :

$$\underbrace{[M]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{de masse}}}\{\ddot{\xi}\}+\underbrace{[\lambda]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{d'amortissement}}}\{\dot{\xi}\}+\underbrace{[K]}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{de raideur}}}\{\xi\}=\{C\} \qquad \text{Equ. II.148}$$

L'espace de configuration du système, composé de n poulies, de n paliers et de la courroie, possède 3n-1 ou 3n-2 (si présence d'un tendeur dynamique) degrés de liberté. Le vecteur ξ des variables du mouvement du système s'écrit :

$$\xi=\langle u_1 \quad v_1 \quad \theta_2 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad \dots \quad \theta_n \quad u_n \quad v_n \rangle^t$$

La résolution de l'équation du mouvement utilise le schéma d'intégration du 4ème ordre de S. Gill (1951). La solution de l'équation du mouvement ramenée au premier ordre $\dot{y}=f(t,y)$ et discrétisée est :

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}\left[k_1+2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2+2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3+k_4\right] \qquad \text{Equ. II.149}$$

avec
$$\begin{cases} k_1=f(t_i,y_i) \\ k_2=f(t_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(t_i+\frac{h}{2},y_i+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2) \\ k_4=f(t_i+h,y_i-\frac{1}{\sqrt{2}}hk_2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk3) \end{cases}$$

Pour assurer la convergence de l'intégration, le pas de temps h doit inférieur au dixième de la plus petite période du système rencontrée au niveau des paliers. Le pas de temps h est généralement de l'ordre de 10^{-5} seconde. En revanche, le problème de stabilité s'est avéré plus délicat à résoudre et a focalisée toute les attentions.

Le premier problème rencontré provient de la non-linéarité générale de l'équation du mouvement. En effet, tous les termes de la matrice de raideur (et d'amortissement) varient dans le même temps en permanence et sont tributaires de l'erreur d'arrondi et de troncature. La stabilité absolue (une perturbation δ au point y_i n'entraîne pas une perturbation supérieure à δ au point y_m avec m>i) s'est avérée impossible à atteindre pour tous les schémas d'intégrations essayés (méthode de Gear généralisée, méthode de Newmark, méthodes de Runge-Kutta explicite non-linéaire et implicite, et la méthode de Runge-Gill retenue) avec des temps de calcul raisonnables. La solution adoptée est un lissage de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_i$ des poulies par une transformée de Fourier.

Le deuxième problème identifié provient aussi de la variation permanente de tous les membres de la matrice de raideur et d'amortissement. Cette variation se produit à la fréquence d'intégration 1/h de l'équation du mouvement (équation II.149). Il faut alors veiller à ce que la fréquence d'intégration ne soit pas un multiple des plus hautes fréquences du système. Sinon, nous obtenons une résonance paramétrique des paliers due à la variation d'origine numérique des termes de l'équation du mouvement (annexe I).

La programmation est assurée en langage Fortran 77. Le programme est appelé DYNAPOUL. Un exemple de temps de calcul est fournis sur la base d'une transmission simple appelée "cas d'école" (chapitre IV.3). Le temps de calcul CPU pour un couple C = 4.sin(12Nt) et N=7000 tr/mn, se monte à 1 minute et 40 secondes pour effectuer 4 tours de pignon moteur, ce qui est amplement suffisant pour assurer la convergence pour ce cas simple. Le temps de calcul est inversement proportionnel à la vitesse de rotation N du pignon moteur (donc plus de 10mn à 700 tr/mn pour l'exemple fourni). L'ordinateur utilisé est une station de travail IBM RISC System/6000 43P-140 (processeur POWERPC 604e cadencé à 233 MHz).

II.3.7. Sorties du Modèle

Au cours des calculs, le programme mémorise les données suivantes en fonction de la rotation de la poulie motrice :

Comportement des poulies

- L'angle de rotation θ_i et ses dérivés sont enregistrés pour chaque poulie. L'erreur de transmission dynamique $\theta_i - R_i\theta_1/R_1$ est ainsi déduite.
- Le déplacement horizontal u et vertical v de chaque poulie ainsi que ses dérivées est stockés. Si la transmission comporte un tendeur dynamique, l'angle de rotation du bras du tendeur est également stocké.

Comportement de la courroie

- La tension dynamique dans les brins libres est enregistrée ainsi que les variations de la tension globale (tension uniforme dans toute la courroie lorsqu'on n'applique pas de couple sur les poulies).
- La tension et la déformation des brins enroulés sur les poulies dentées est mémorisée. La charge et la déformations des dents de courroie en prise sur les poulies dentées sont aussi mémorisées.

II.4.Conclusion

Le comportement d'une transmission par courroie dentée n'est pas aisé à modéliser car il faut tenir compte de la souplesse de tous les éléments : l'âme et la denture de la courroie et les paliers. Le chapitre II.II.2 expose en outre les difficultés inhérentes aux imperfections de la courroie et des poulies, ainsi que les facteurs pouvant influencer le comportement de la transmission. Une fois le contexte de la modélisation défini, la modélisation du comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée a été présentée. Celle-ci se base sur cinq modules reliant les aspects locaux (déformation de la denture) aux aspects globaux (erreur de transmission et tension dans les brins). Des aspects particuliers de la transmission ont été pris en compte indépendamment dans chaque module. La courbure des brins libres a été incorporée dans le calcul de la tension dans les brins (module 2), alors que les brins libres sont pris rectilignes pour le calcul des paramètres géométriques de la transmission (module 1). Le comportement non-linéaire de la courroie intervient dans les modules 3 et 4. La souplesse des paliers est prise en compte dans le module 5.

On dispose donc maintenant d'un logiciel de simulation de comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée. Le troisième chapitre va maintenant présenter les mesures concernant la validation statique du logiciel.

TROISIÈME CHAPITRE

Mesures et Validation

SOMMAIRE

III.1. INTRODUCTION 164

III.2. PRÉSENTATION TECHNIQUE DES COURROIE DAYCO DE TYPE ISORAN® 164

III.3. MESURES SUR UN BANC DE SIMULATION D'UNE TRANSMISSION PAR COURROIE DENTÉE .. 165

III.3.1. MÉTHODOLOGIE DES MESURES ET DU CALCUL DE LA RAIDEUR DES BRINS 166

III.3.1.1. Erreur sur le calcul de la matrice de raideur 168

III.3.1.2. Lissage et interpolation de la matrice de raideur 169

III.3.1.3. Ajustement de la matrice de raideur par rapport à la modélisation de la transmission170

III.3.2. RÉSULTAT POUR UNE CONFIGURATION DE TRANSMISSION 171

III.4. MESURES DES CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES D'UNE COURROIE DE TYPE ISORAN® 173

III.4.1. MÉTHODOLOGIES MISES EN ŒUVRE 173

III.4.1.1. Mesures de raideur en statique 173

III.4.1.1.1. Bibliographie 173

III.4.1.1.1.1. Méthode Gerbert (1978) 174

III.4.1.1.1.2. Méthode Koyama (1979) 174

III.4.1.1.1.3. Méthode Childs (1990) 175

III.4.1.1.1.4. Méthode Dancé (1992) 176

III.4.1.1.2. Analyse et conclusion sur la bibliographie 177

III.4.1.1.3. Nouvelle méthodologie de mesure de la raideur d'une dent de courroie 179

III.4.1.1.3.1. Aspect pratique 179

III.4.1.1.3.2. Aspect théorique 180

III.4.1.1.4. Mesure pour l'âme d'une courroie de type ISORAN® 182

III.4.1.1.5. Mesure sur une dent de courroie de type ISORAN® 182

III.4.1.1.5.1. Résultat de mesure par la nouvelle méthode 182

III.4.1.1.5.2. Vérification par une mesure directe sur une dent unique 185

III.4.1.2. Mesures de raideur et d'amortissement en dynamique 188

III.4.1.2.1. Mesure de la fréquence de résonance et du taux d'amortissement 188

III.4.1.2.2. Mesure des caractéristiques de l'âme d'une courroie de type ISORAN® 190

III.4.1.2.3. Mesures sur une dent de courroie de type ISORAN® 193

III.4.2. CONCLUSION SUR LE MESURAGE DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE COURROIE 195

III.5. VALIDATION STATIQUE DU MODÈLE 195

III.5.1. VALIDATION DU CALCUL DES TENSIONS 195

III.5.2. VALIDATION DU CALCUL DE LA ROTATION DES POULIES 198

III.6. CONCLUSION 200

III.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les vérifications des performances du programme DYNAPOUL. Un type de courroie équipant le nouveau moteur V6 PSA-Renault (Fig. I.47) a été sélectionné. Le chapitre III.III.2 en fait la description.

Le modèle issu du chapitre II calcule pas à pas l'équation du mouvement, c'est-à-dire la matrice d'inertie, d'amortissement, et de raideur. L'obtention de la matrice d'inertie ne pose pas de problèmes majeurs à l'heure où la conception assistée par ordinateur, de plus en plus systématique, des transmissions permet de connaître aisément les moments d'inertie de chaque pièce. La matrice d'amortissement ne joue pas un rôle fondamental dans la forme des modes. Par conséquent, on s'attachera à vérifier le calcul de la matrice de raideur. Celle-ci sera établie expérimentalement au chapitre III.III.3 à partir d'un banc de simulation de transmission par courroie dentée. Dans le même temps, la mesure des tensions dans les brins sera effectuée pour être comparée, au chapitre III.III.5, au calcul non-linéaire des tensions. Le chapitre III.III.5 aborde également la confrontation de la rotation mesurée des poulies avec la rotation calculée à partir de la matrice de raideur du modèle.

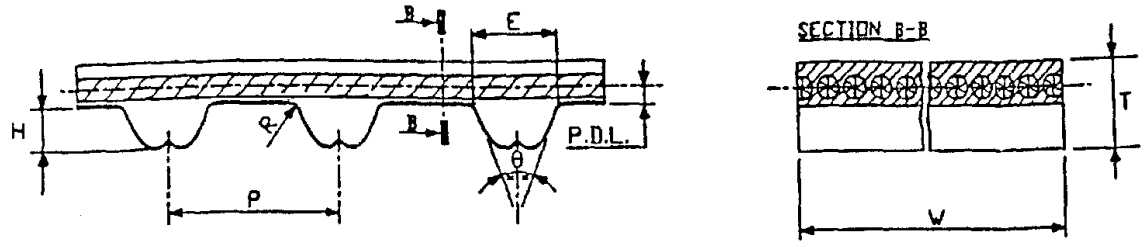
Cette étape de la validation sur la matrice de raideur permet d'estimer la représentativité du modèle avec des méthodes simples puisque les mesures se font en statique. La validation du modèle en dynamique s'effectue actuellement dans le cadre d'une autre étude.

Le modèle exige également la connaissance des lois globales de raideur et d'amortissement de l'âme et d'une dent de courroie. La chapitre III.III.4 expose les méthodes utilisées pour caractériser la courroie. En particulier, une nouvelle méthode de caractérisation de la courroie a été développé pour correspondre aux exigences du modèle.

Tous les calculs effectués dans ce chapitre III ont été fait sous l'environnement MATLAB®.

III.2. Présentation technique des courroie DAYCO de type ISORAN®

L'ensemble des mesures a été effectuée sur une courroie de type ISORAN® fabriqué en Italie par DAYCO et PIRELLI. Ses caractéristiques principales sont sa longueur primitive de plus de deux mètres et son profil de dent curviligne avec un pas de 8 mm. Une description complète est présentée au tableau III.1.



CARACTÉRISTIQUES	UNITÉ	SYMBOLE	VALEUR
Angle de denture	degré	θ	34 +/- 3°
Hauteur d'une dent	mm	H	2.6 +/- 0.15
Largeur d'une dent	mm	E	5.3 +/- 0.15
P.D.L.	mm		0.75
Rayon de base ou de raccordement	mm	R	1.0 +/- 0.15
Épaisseur totale de la courroie	mm	T	5.0 +/- 0.25
Largeur de la courroie	mm	W	32.0 +/- 0.8
Nombre de dents		Z	259
Pas	mm	P	8
Développement primitif (ou longueur initiale) de la courroie	mm		2072
Masse linéaire	g/m		155
Nombre de spires en fibre de verre			24 +/- 1

Tableau III. 1 : Caractéristiques d'une courroie DAYCO ISORAN®.

III.3. Mesures sur un banc de simulation d'une transmission par courroie dentée

La première étape de la validation du programme Dynapoul consiste à mesurer la rotation de chaque poulie d'une transmission sous l'action d'un couple. Dans le même temps, la tension est mesurée dans chaque brin. Ensuite, la raideur globale de chaque brin (brin libre + brins enroulés adjacents) peut être calculée, à partir de la rotation mesurée de chaque poulie, afin d'extrapoler les tendances qui guideront la validation. Pour cela, une série de mesure a été effectuée sur un banc de simulation de transmission par courroie dentée sur une géométrie choisie de transmission.

III.3.1. Méthodologie des mesures et du calcul de la raideur des brins

Le calcul de la raideur des brins nécessite le calcul de la matrice de raideur de l'équation d'équilibre des moments pour la transmission étudiée (figure III.1). Dans ce but, un couple est appliqué sur chaque poulie. On mesure alors la rotation de chaque poulie par des codeurs optiques à arbre creux et 2048 raies fixés sur chaque arbre. Ces codeurs sont reliés à des compteurs d'impulsions, mesurant ainsi la rotation de chaque poulie. Le déterminant de la matrice de raideur étant nul, le déterminant de la matrice de couple [C] doit être par conséquent également nul (équation III.1).

$$\begin{bmatrix} \\ K \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \Theta \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +C & -\frac{r_1}{r_3}C & 0 \\ -\frac{r_2}{r_1}C & 0 & +C \\ 0 & +C & -\frac{r_3}{r_2}C \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 1}$$

La transmission est réduite à trois poulies dentées ce qui permet sans difficultés de connaître le couple sur les trois poulies avec les conditions suivantes : Un couple connu est appliqué successivement sur une des trois poulies de la transmission. Une deuxième poulie est laissé folle (C=0). La somme des puissances est donc nulle (couples résistants mesurés de l'ordre du centième de N.m donc négligeables) ce qui permet de calculer le couple appliqué sur la troisième poulie. L'application du couple se fait par l'intermédiaire d'une barre fixée sur une poulie, maintenue horizontalement, et centrée par rapport au centre de rotation de la poulie pour éviter que son poids propre interfère sur le calcul du couple (figure III.1). Le couple est connu en fixant à l'une des extrémités de la barre, un poids à une distance connue du centre de rotation de la poulie.

La mesure de la tension dans les brins de courroie peut s'effectuer en statique, en mesurant la flèche du brin de courroie au milieu duquel on applique une force perpendiculaire connue. Une méthode plus précise est la mesure de la fréquence fondamentale du brin de courroie [Koyama et al., 1984; Fawcett, 1994]. Cette fréquence est mesurée par un microphone situé au milieu d'un brin de courroie qu'on écarte initialement avant de le lâcher (figure III.1).

Le brin de courroie est modélisé par une poutre prétendue stationnaire [Abrate, 1992]. Cela permet de tenir compte de la raideur de flexion de la courroie qui joue un rôle important pour les basses tensions. L'équation à résoudre est donc :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \text{Equ. III. 2}$$

avec EI moment de flexion,
T tension dans le brin de courroie,
ρ masse linéique.

Les pulsations propres ω_n du brin sont alors :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}\left(1+n^2\pi^2\frac{EI}{Tl^2}\right)} \qquad \text{Equ. III. 3}$$

Le module de flexion EI est choisi d'après la valeur présentée par M. G. Yue (1993) :

$EI=10^{-2}$ N.m²

La tension dans le brin est déterminée à partir de la fréquence fondamentale f (n=1) :

$$T_0 = \rho 4l^2 f^2 - \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad \text{Equ. III. 4}$$

La tension de pose T_0 est moyennée à partir des mesures faites sur les trois brins sans couple appliqué sur les poulies. Trois positions angulaires différentes de la poulie motrice sont considérées pour avoir une tension de pose moyenne en raison de l'influence de l'excentricité des poulies (figure II.9). Une poulie de la transmission doit être au minimum bloquée. Sinon, toute la courroie se met à vibrer faussant la mesure de la fréquence f (écart de 20 %).

Le chargement des dents de courroie engrenées sur la poulie évolue avec le couple appliqué sur la transmission. Il faut donc calculer la matrice de raideur pour différentes valeurs de couple pour quantifier l'influence du couple. La gamme de couple choisie est de 10 à 90 N.m par pas de 10. En dessous de 10 N.m, la rotation est trop faible pour être mesurée par un disque de 2048 raies. L'influence de la tension de pose sur la rotation des poulies a été relevée par N. Mizuno (figure I.50). Des mesures sont donc faites avec trois tensions de pose (T_0 bas = 83, T_0 moyen = 303 et T_0 haut = 546 N.).

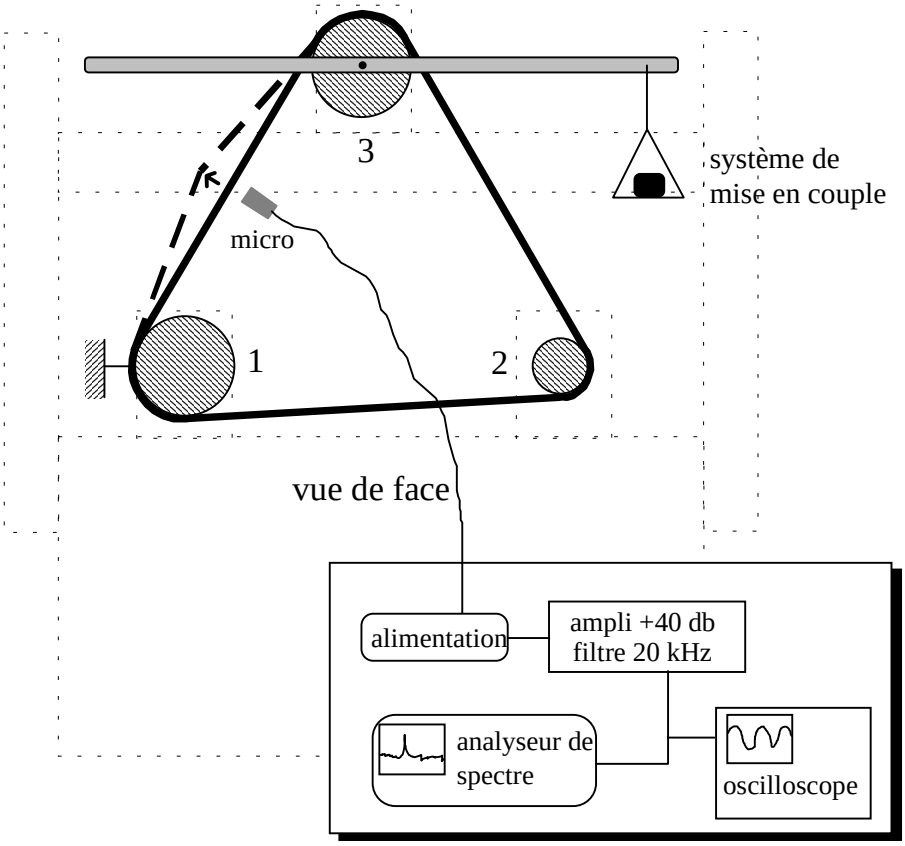


Figure III. 1 : Vue de face du banc et mesure de la tension.

III.3.1.1. Erreur sur le calcul de la matrice de raideur

La raideur s'exprime par : $K.\Theta = C$

En conséquence, l'erreur relative est : $\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta \Theta}{\Theta}$

L'erreur relative due au couple ($\Delta C / C$) est montrée négligeable face à l'erreur due à la rotation. La précision maximale pour la rotation est d'une demi-raie (ou une raie comptée pour un aller et retour, soit un chargement puis un déchargement du couple sur la poulie). Or, pour les faibles chargements, une raie peut être seulement comptée en raison de la faible précision du disque optique prévu pour des mesures en dynamique. Dans ce cas, nous avons 50 % d'erreur relative en rotation. Pour cette raison, il est nécessaire de calculer l'erreur sur le calcul de la matrice de raideur pour retenir le cas le plus favorable.

Seul l'écart $\Delta\Theta$ dû à la mesure de la rotation est donc retenu pour le calcul de l'écart $[\Delta K]$ résultant sur chaque terme de la matrice de raideur $[K]_{calculé}$.:

$$[\Delta K] = -[\Delta\Theta][K]_{calculé}[\Theta]^{-1}_{mesuré} \qquad \text{Equ. III. 5}$$

Les pourcentages d'erreur sur le calcul de la matrice de raideur peuvent être assez importants (annexe VI) en raison de la faible précision de la mesure. Des essais supplémentaires pourront donc éventuellement avoir lieu si une plus grande précision est requise à la suite des

travaux de validation.

III.3.1.2. Lissage et interpolation de la matrice de raideur

Pour chaque tension de pose et pour un couple donné, nous disposons d'une matrice de raideur $[K]_{calculé}$ obtenue par:

$$[K]_{calculé} = [C][\Theta]^{-1}_{mesuré} \qquad \text{Equ. III. 6}$$

Toute les matrices sont affichées dans les tableaux de l'annexe VI. Le but est de trouver une loi reliant la matrice de raideur $[K]_{calculé}$ au couple et à la tension de pose. Cette loi permettra de calculer la matrice de raideur quelque soit le couple et la tension de pose. L'opération consiste à ajuster au mieux les termes K_{ij} issus des mesures, à une parabole $y(couple) = a + b.(couple) + c.(couple)^2$, afin de visualiser des éventuelles non-linéarités. Pour cela, les paramètres (a, b, c) doivent minimiser la variable statistique $\aleph^2(a,b,c)$ au sens des moindres carrés :

$$\aleph^2(a,b,c) = \sum_{couple} \frac{\left(K_{ij,calculé}(couple) - y_{ij}(couple,a,b,c)\right)^2}{\Delta K_{ij}^2} \qquad \text{Equ. III. 7}$$

avec $K_{ij,calculé}$:Terme de la i^{ème} ligne et de la j^{ème} colonne de la matrice de raideur $[K]_{calculé}$ et dépendant du couple,
y_{ij} : Terme lissé de la i^{ème} ligne et de la j^{ème} colonne de la matrice de raideur lissée,
ΔK^2 : Variance associée à K.

L'opération est répétée pour les trois tensions de pose. Ainsi, trois séries de paramètres (a_i, b_i, c_i, $1 \le i \le 3$) sont obtenues. Chaque paramètre (a_i, b_i, c_i, $1 \le i \le 3$) est ensuite interpolé par un polynôme du second degré $K_{ij,interpolé}(tension) = \alpha + \beta(tension) + \gamma(tension)^2$. Ces paramètres vérifient les équations III.8, III.9, et III.10 :

$$\begin{bmatrix} 1 & T_0\,bas & (T_0\,bas)^2 \\ 1 & T_0\,moyen & (T_0\,moyen)^2 \\ 1 & T_0\,fort & (T_0\,fort)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{T_0\,bas} \\ a_{T_0\,moyen} \\ a_{T_0\,fort} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & T_0\,bas & (T_0\,bas)^2 \\ 1 & T_0\,moyen & (T_0\,moyen)^2 \\ 1 & T_0\,fort & (T_0\,fort)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{T_0\,bas} \\ b_{T_0\,moyen} \\ b_{T_0\,fort} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & T_0\,bas & (T_0\,bas)^2 \\ 1 & T_0\,moyen & (T_0\,moyen)^2 \\ 1 & T_0\,fort & (T_0\,fort)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{T_0\,bas} \\ c_{T_0\,moyen} \\ c_{T_0\,fort} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 10}$$

Nous obtenons ainsi pour chaque terme de la matrice de raideur lissée et interpolée $[K]_{interpolé}$, une fonction quadratique (équation III.11) de la tension de pose et du couple appliqué

à la transmission selon l'équation III.1.

$$K_{ij,interpolé} = \begin{Bmatrix} 1 & T_0 & T_0^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ couple \\ couple^2 \end{Bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 11}$$

L'ensemble des termes $K_{ij,\ interpolé}$ se trouve dans l'annexe VI.

III.3.1.3. Ajustement de la matrice de raideur par rapport à la modélisation de la transmission

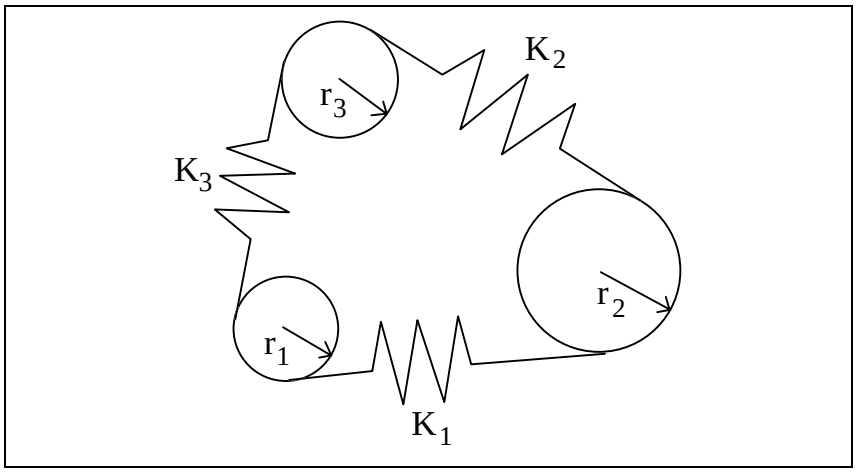


Figure III. 2 : Modélisation d'une transmission à trois poulies.

L'équation III.12 permet de retrouver la raideur des brins $K_i^{glob.}$, $1 \le i \le 3$, à partir de la matrice de raideur calculée. Mais il faut avant s'assurer que la matrice de raideur calculée est conforme à l'équation III.12.

$$[K]_{mod\,el} = \begin{bmatrix} \left(K_1^{glob.} + K_3^{glob.}\right) r_1^2 & -K_1^{glob.} r_1 r_2 & -K_3^{glob.} r_1 r_3 \\ -K_1^{glob.} r_1 r_2 & \left(K_1^{glob.} + K_2^{glob.}\right) r_2^2 & -K_2^{glob.} r_3 r_2 \\ -K_3^{glob.} r_1 r_3 & -K_2^{glob.} r_3 r_2 & \left(K_2^{glob.} + K_3^{glob.}\right) r_3^2 \end{bmatrix} \qquad \text{Equ. III. 12}$$

On peut à l'aide de l'équation III.12 établir un critère imposé par la modélisation. En effet, on remarque que la matrice de raideur de l'équation 13 doit vérifier:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \left(\kappa_{ij} + \kappa_{ji}\right) = 0 \quad \text{pour } 1 \le j \le 3 \\ \text{avec } \kappa_{ij} = K_{ij} \big/ \left(r_i r_j\right) \end{cases} \qquad \text{Equ. III. 13}$$

Ce critère permet de vérifier la conformité de la matrice de raideur expérimentale $[K]_{interpolé}$ par rapport au modèle numérique (équation III.12). Il permet aussi d'ajuster chaque terme de la matrice de raideur expérimentale $[K]_{interpolé}$ au modèle car il serait étonnant que l'équation III.13 appliquée à $[K]_{interpolé}$, soit nulle. En réalité, nous avons:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\kappa_{ij}+\kappa_{ij}\right)=\varepsilon_j\neq 0 \quad \text{pour } 1\le j\le 3 \qquad \text{Equ. III. 14}$$

Pour que l'équation III.13 soit vérifiée, chaque terme de la matrice de raideur $[K]_{interpolé}$ est réajusté (équation III.16) proportionnellement à un écart ou dispersion d_{ij}. Cet écart est la somme pour différents couples et tensions de pose des différences entre le terme lissé puis interpolé $K_{ij,interpolé}$, et le terme directement calculé à partir de la mesure $K_{ij,calculé}$:

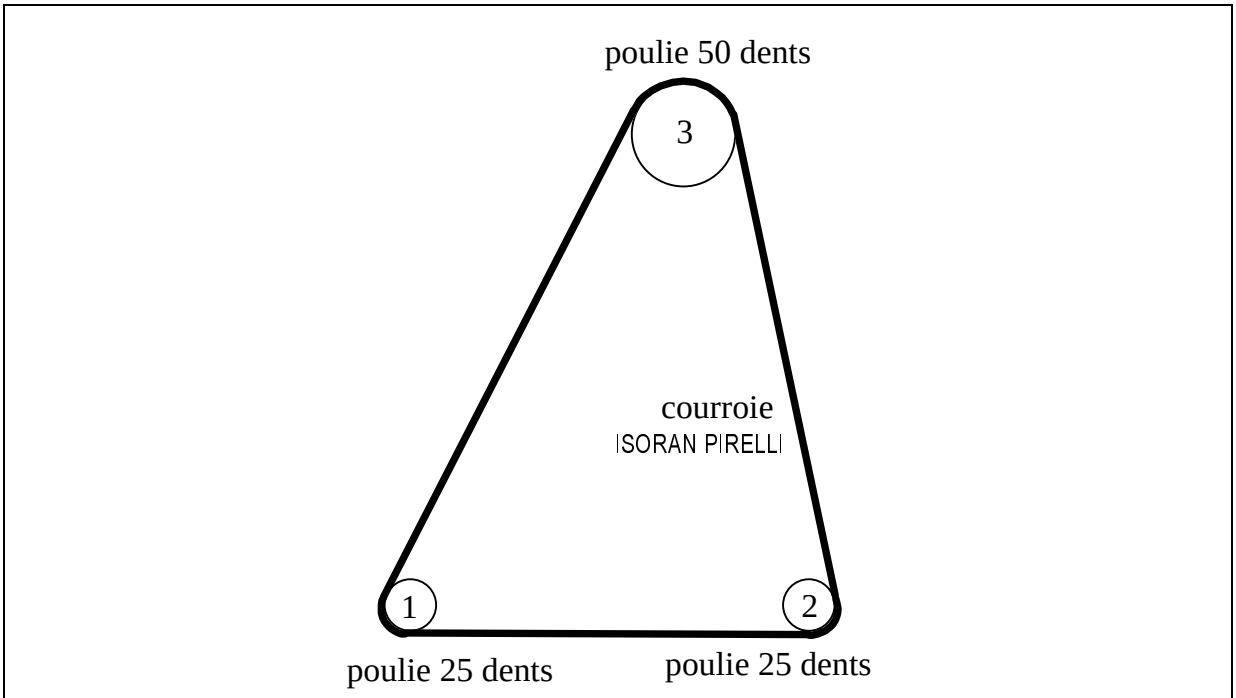
$$d_{ij}=\sqrt{\frac{\sum\sum_{\text{tension couple}}\left(K_{ij,\text{calculé}}(\text{tension},\text{couple})-K_{ij,\text{interpolé}}(\text{tension},\text{couple})\right)^2}{\text{nombre de points}-1}} \qquad \text{Equ. III. 15}$$

On obtient alors la matrice de raideur finale $[K]_{fin}$, lissée, interpolée, puis corrélée avec le modèle numérique:

$$2K_{ij,fin}=(\kappa_{ij}+\kappa_{ji}-\frac{d_{ij}+d_{ji}}{\sum_{i=1}^{3}\left(d_{ij}+d_{ji}\right)}\varepsilon_j)r_i r_j \qquad \text{Equ. III. 16}$$

On remarque que la matrice de raideur finale est symétrique. L'équation III.12 permet ensuite de remonter au raideurs globales $K_i^{glob.}$, $1\le i\le 3$, dans les brins.

III.3.2. Résultat pour une configuration de transmission



	(x, y) en mm.	diam. primitif en mm.	nombre de dents	pas en mm.
poulie 1	(0, 0)	63.562	25	7.987
poulie 2	(502, 0)	63.562	25	8.000 (nominal)

poulie 3	(345, 592)	127.224	50	7.994
courroie PIRELLI ISORAN®			256	8.012

Tableau III. 2 : Caractéristique de la transmission.

Le tableau III.2 illustre les caractéristiques de la transmission. L'équation III.17 détaille les lois de variation de la raideur globale de chaque brin en fonction du couple et de la tension de pose. La figure III.3 visualise les variations de la raideur globale $K_i^{glob.}$ des brins.

Il apparaît clairement que le facteur essentiel de variation de la raideur est la tension de pose T_0. La tendance est au net raidissement des brins lorsque la tension de pose augmente. Ce fait est confirmé par les mesures de N. Mizuno (figure I.50). Or, la raideur de la nappe de câble est constante. Par conséquent, le brin libre n'est pas en jeu dans ce raidissement. La différence de raideur vient donc de la partie enroulée de la courroie sur les poulies. La tension de pose modifiant le pas de la courroie, on peut penser que la différence de raideur des brins provient d'une répartition des charges des dents différentes sur l'arc de courroie enroulé. En réalité, la différence de raideur provient de l'augmentation de la charge radiale causée par l'augmentation de la tension de pose. L'importance de la charge radiale sur le comportement d'une dent vu par M. Atouf (1992), est confirmée par M. Conte avec la méthode d'Ombre Optique par les Caustiques [Conte, 1997]. Une dent de courroie a été reconstituée dans un matériau photo-élastique PSM4. Les contraintes normales ou tangentielles imposées à cette dent ont pour effet de modifier l'épaisseur et la densité du matériau et par conséquent ses propriétés optiques (indice de réfraction). Soumis à un faisceau lumineux à rayons parallèles, les zones en sur-contrainte dévient les rayons autour d'une surface appelée caustique. Ainsi, l'importance du chargement radial (ou normal) vis-à-vis du chargement tangentiel sur une dent a pu être visualisée rapidement. Cette expérience montre la complexité de phénomènes en jeu dans une dent de courroie et la nécessité d'inclure dans une modélisation d'une transmission par courroie dentée la partie enroulée de la courroie[1].

En revanche, l'effet du couple sur la raideur des brins ne fait pas apparaître de tendance significative en général.

La rotation des poulies et les tensions dans les brins en fonction du couple sont visualisées au chapitre III.III.5.2 concernant la validation statique du modèle.

$$\begin{cases} K_1^{glob.}(T_0, couple) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 1.0345e+6 & -1.7017e+4 & 2.8275e+2 \\ -1.1502e+3 & 1.8478e+2 & -2.2596e+0 \\ 6.7233e+0 & -3.4292e-1 & 3.5080e-3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ couple \\ couple^2 \end{Bmatrix} \\ K_2^{glob.}(T_0, couple) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 9.0262e+5 & -3.2680e+3 & -4.9420e+1 \\ 7.7335e+1 & 6.3809e+1 & -5.0282e-1 \\ 2.7936e+0 & -1.0741e-1 & 8.1614e-4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ couple \\ couple^2 \end{Bmatrix} \\ K_3^{glob.}(T_0, couple) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 1.6314e+6 & -4.8184e+4 & 6.5861e+2 \\ -3.8379e+3 & 3.1152e+2 & -4.0236e+0 \\ 8.0199e+0 & -4.4664e-1 & 5.3905e-3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ couple \\ couple^2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad \text{Equ. III. 17}$$

[1] Les modèles élémentaires en usage dans l'industrie automobile ne tiennent pas compte de la denture de la courroie en prise sur les poulies.

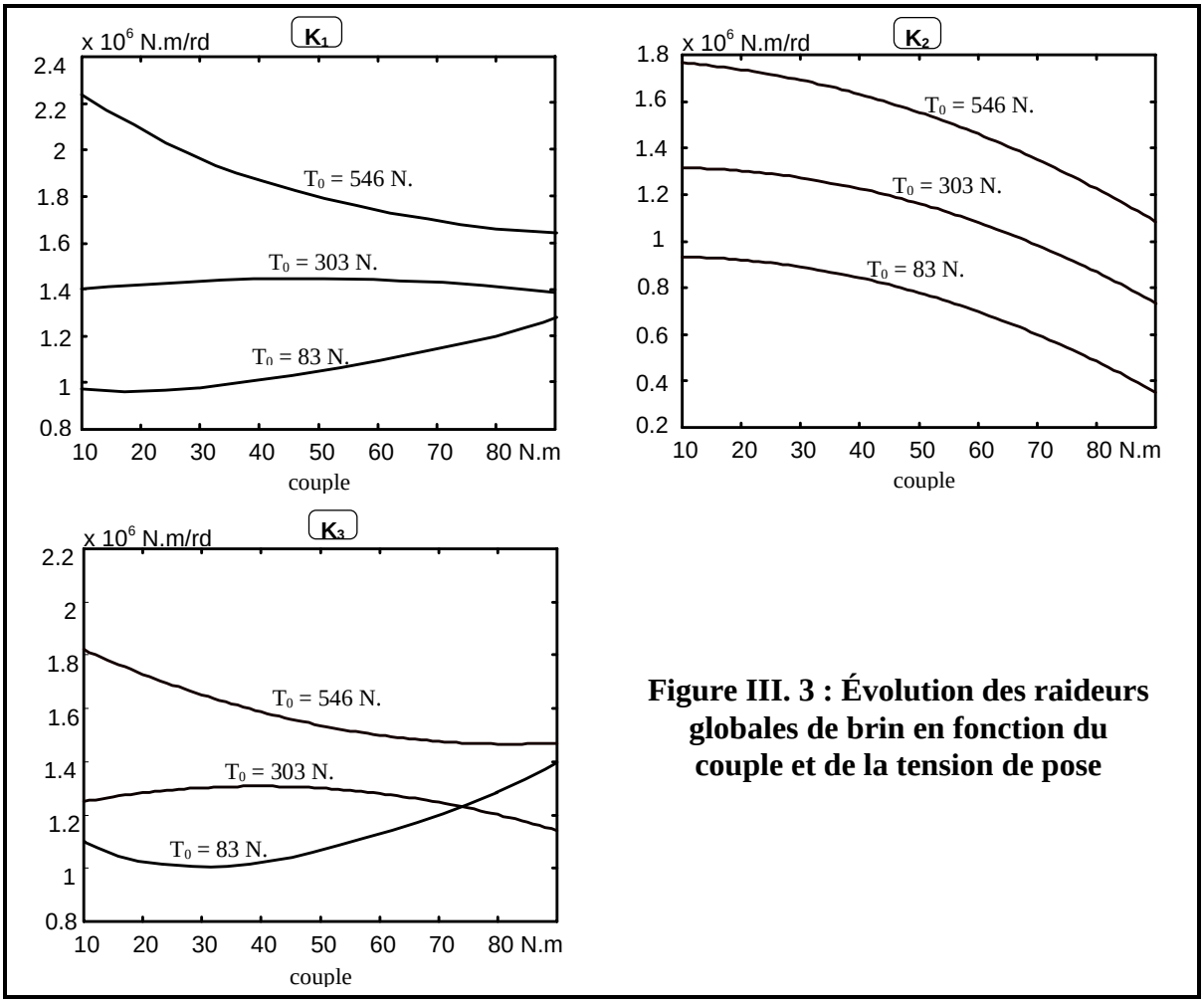


Figure III. 3 : Évolution des raideurs globales de brin en fonction du couple et de la tension de pose

III.4. Mesures des caractéristiques mécaniques d'une courroie de type ISORAN®

III.4.1. Méthodologies mises en œuvre

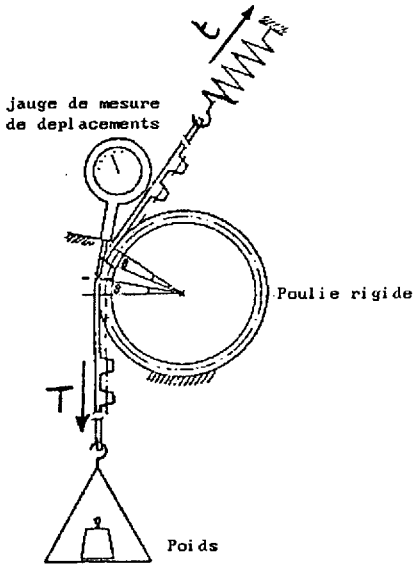
Le programme DYNAPOUL nécessite la connaissance des lois de raideur et d'amortissement de l'âme et d'une dent de courroie, suivant leur comportement global en traction. Les mesures de raideur s'effectuent en statique par un essai de traction. Puis, les résultats sont corrélés en dynamique en mesurant la fréquence de résonance f_r du matériau et le taux d'amortissement α.

III.4.1.1. Mesures de raideur en statique

III.4.1.1.1. Bibliographie

III.4.1.1.1.1. Méthode Gerbert (1978)

Une méthode directe est utilisée pour mesurer le déplacement d'une dent de courroie(figure III.4). Le déplacement de la dent se mesure à l'aide d'un comparateur. La courroie est édentée de part et d'autre de la dent choisie. Le frottement de la courroie sur l'arc d'enroulement est pris en compte pour calculer la raideur de la dent.



Drive	1	2
Belt type	Synchroflex	Power Grip
Pitch t (mm)	10	12.7
Belt width b (mm)	25	25.4
Cord material	Steel wire	Glass fiber
Tooth material	Urethane	Neoprene
Coefficient of friction μ	0.20	0.20
Spring constant of the belt c (N/mm)	43,000	25,000
Spring constant of tooth k (N/mm)	210	240
$k_0 = k/c$	0.005	0.010
Number of teeth of the pulleys z	40	32

Figure III. 4 : Mesure de la raideur d'une dent [Gerbert, 1978].

La mesure de la raideur de l'âme se fait sur une machine à traction classique.

III.4.1.1.1.2. Méthode Koyama (1979)

La raideur de la dent est mesurée par le dispositif illustré sur la figure III.5. La loi cherchée est une fonction polynômiale du 3ème ordre.

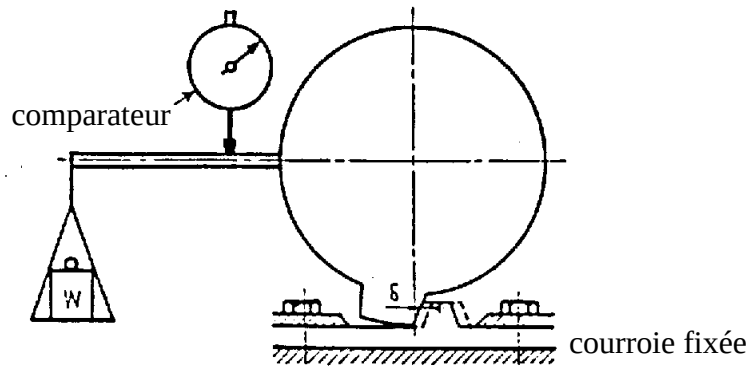


Figure III. 5 : Mesure de la raideur d'une dent [Koyama et al., 1979 (a)].

La raideur de l'âme est calculée analytiquement. La connaissance du module d'élasticité du câble permet de déterminer la raideur globale en appliquant la loi de Hooke.

Les valeurs moyennes de rigidité présentées sont :

Nature du matériaux	Module de Young pour l'âme		Raideur d'une dent	Nature du matériaux
câble acier	11000 daN/mm²		0.018 mm/daN	polyuréthane
câble fibre de verre	5000 daN/mm²		0.03 mm/daN	polychloroprène

Tableau III. 3 : Raideurs présentées par T. Koyama et al. (1979 - a).

III.4.1.1.1.3. Méthode Childs (1990)

Une machine de traction comme celle utilisée par les constructeurs de courroie (figure III.6 a) est utilisée pour mesurer la raideur de l'âme. La courroie est placée sur son dos pour éliminer l'influence des dents. Pour mesurer la raideur des dents (figure III.6 b), quatre demi-poulies sont appliquées avec une force latérale sur deux dents mises dos à dos. On note sur la figure III.7 une large boucle d'hystérésis due à l'amortissement important de l'élastomère constituant la courroie. Les raideurs données dans l'article sont :

âme : 4000 daN./mm dent : 300 N/mm

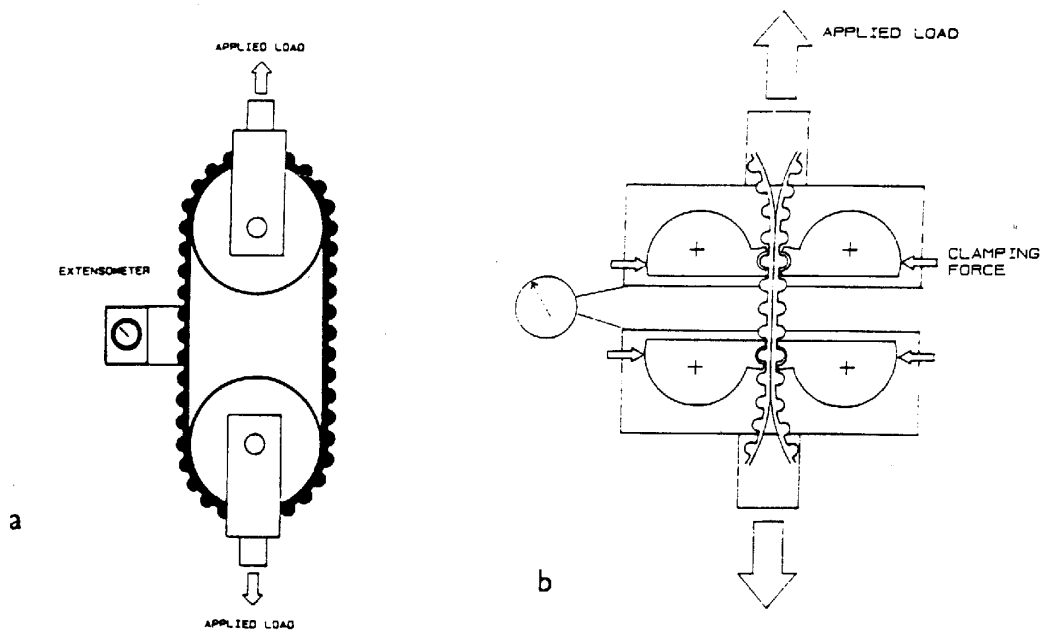


Figure III. 6 : Mesures des raideurs âme et dent [Childs et al., 1990].

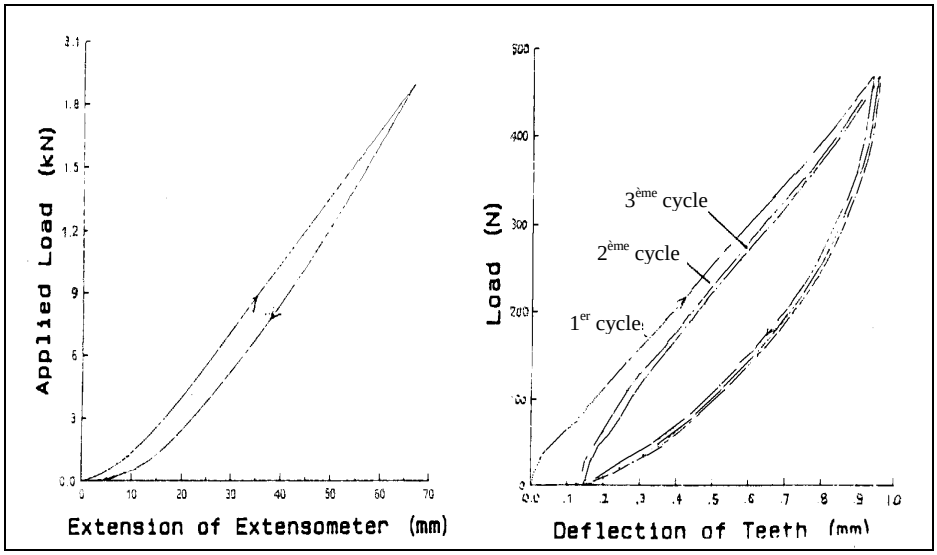


Figure III. 7 : Courbe de raideur âme et dent [Childs et al., 1990].

III.4.1.1.1.4. Méthode Dancé (1992)

La méthode élaborée par J.-M. Dancé pour obtenir le déplacement d'une dent de courroie en fonction de la charge appliquée, se distingue des précédentes méthodes de mesure directe. En effet, l'expérimentateur remarque que le déplacement d'une dent chargée dépend de la façon dont elle est logée dans le creux de poulie. On ne peut donc négliger l'environnement de la dent, c'est-à-dire les interactions avec les autres dents en prise sur la poulie. Cette méthode mesure donc, avec un palpeur, le déplacement de la première dent Δl_1, avec un nombre variable de dents de courroie N en contact avec la poulie (figure III.8 a). La tension T_N dans le brin est mesurée avec un dynamomètre. La tension t dans le brin mou est également mesurée avec un dynamomètre dans le but de la garder constante. Le brin mou est donc déchargé au fur et à mesure que le brin tendu est chargé. Le nombre de dent N peut varier par exemple de 4 à 11 dents. On dispose alors, pour un nombre de dents en prise N donné, d'un ensemble de points tension-déplacement (T_N, $\Delta l_1(T_N)$). Un polynôme de degré 5 est ajusté à la série de mesures (T_N, $\Delta l_1(T_N)$) par la méthode des moindres carrés, avec un fort poids pour le point (0, 0) (figure III.9). On obtient alors 6 coefficients polynômiaux a_i pour chaque N :

N=4	$a_1^{N=4}$	$a_2^{N=4}$	$a_3^{N=4}$	$a_4^{N=4}$	$a_5^{N=4}$	$a_6^{N=4}$
⋮	⋮					
N=11	$a_1^{N=11}$	$a_2^{N=11}$	$a_3^{N=11}$	$a_4^{N=11}$	$a_5^{N=11}$	$a_6^{N=11}$

avec $T_N = a_1^N + a_2^N \Delta l_1 + a_3^N \Delta l_1^2 + a_4^N \Delta l_1^3 + a_5^N \Delta l_1^4 + a_6^N \Delta l_1^5$

L'hypothèse suivante est maintenant considérée. Pour une dent en prise, nous avons (figure III.8 b) :

$$T_1 = Q_x(1) \qquad \text{Equ. III. 18}$$

Cette hypothèse ne peut être admise que si la tension dans le brin mou t est négligeable

devant T. Cela sous-entend que cette démarche est limitée pour les faibles déformations où la tension T est trop faible pour négliger la tension t.

La tension T_1 est obtenue à partir de la loi polynômiale $T_{N=1}$ déduite des lois $T\ 4 \le N \le 11$ obtenues auparavant. Pour éviter une extrapolation hasardeuse, la loi $T_{N=0}$ est ajoutée. En l'absence de dents en prise (N=0), il n'y a pas de déplacement sur la dent. Donc les coefficients $a_i^{N=0}$ sont nuls. Une loi polynômiale $a_i(N)$ est alors ajustée par rapport aux valeurs a_i connues (N=0 et $4 \le N \le 11$), avec un fort poids pour la valeur $a_i^{N=0} = 0$. On peut alors en déduire $a_i(N=1) = a_i^{N=1}$ et ainsi la loi polynômiale $T_{N=1}$ (figure III.10).

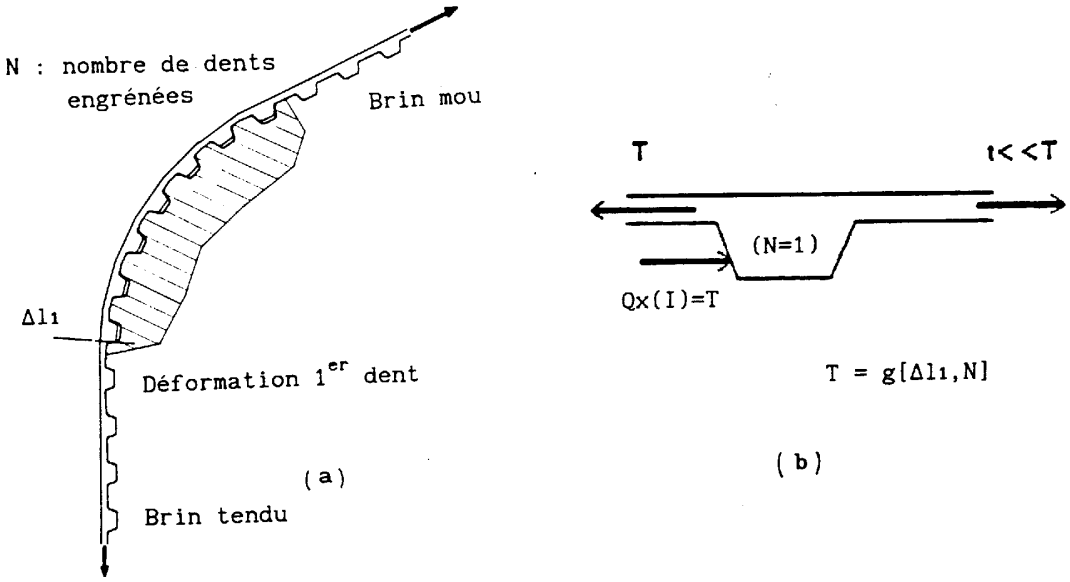


Figure III. 8 : Mesure de la déformation globale d'une dent [Dancé, 1992].

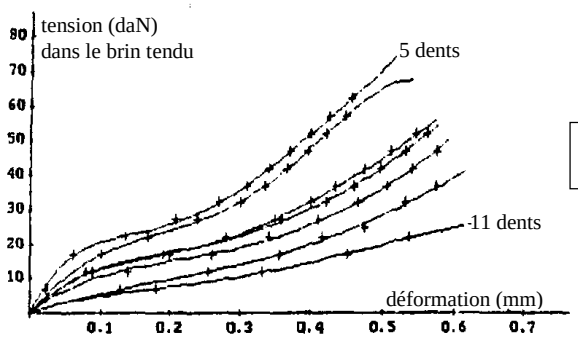


Figure III. 9 : Lissage par moindres carrés de 5 à 11 dents en prise.

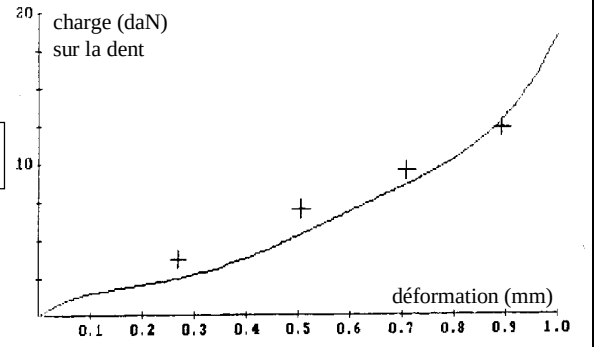


Figure III. 10 : Loi globale de déformation d'une dent H.T.D. obtenue par interpolation.

III.4.1.1.2. Analyse et conclusion sur la bibliographie

Les lois de comportement global jouent un rôle crucial car elles interviennent sur la répartition des charges sur un brin de courroie enroulée mais également sur la rigidité des brins,

d'où le soucis de bien caractériser ces lois. La détermination de la raideur de l'âme est relativement aisée du fait du comportement linéaire et de la grande raideur du câblage. En revanche, le problème est nettement plus complexe pour la rigidité de la denture et différentes méthodes sont employées par les auteurs. On peut classer les méthodes de mesures de la rigidité d'une dent de courroie en deux grandes catégories :

1- *Mesure directe de la rigidité d'une dent* : La déformation d'une dent unique est évaluée sous une charge appliquée sur cette dent. Les inconvénient d'une mesure directe sont (1) que les interactions entre plusieurs dents en prise ne sont pas considérées, (2) que la dent en question n'est pas dans son environnement réel. Or, l'expérience montre que ces deux facteurs sont essentiels. Notamment, la position relative de la dent de courroie par rapport à la dent de poulie affecte jusqu'à 50 % la valeur de rigidité de dent mesurée. On peut remarquer que la méthode de G. Gerbert et T. Koyama nécessite la destruction de la courroie (arrachement de dent). Cela doit être absolument évité car de grandes différences de comportement existent entre deux courroies même issue d'un lot identique (différences mises en valeur par la comparaison de la signature acoustique et l'erreur de transmission cinématique de la courroie). Il faut donc pouvoir garder la même courroie pour la faire ensuite fonctionner sur une transmission. La méthode mise au point par T. H. C. Childs ne détruit pas la courroie mais nécessite une force normale à la courroie. Or, cette force normale influence beaucoup la raideur de la dent.

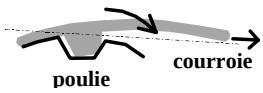
2- *Mesure indirecte de la rigidité d'une dent* : La méthode élaborée par J.-M. Dancé constitue une avancée majeure car elle est beaucoup plus proche des conditions réelles de fonctionnement. En effet, la raideur d'une dent est mesurée à partir de l'ensemble de l'arc enroulé de la courroie. Toutefois, diverses limites se dégagent :

- la méthode exige que la différence de pas entre la courroie et la poulie soit nulle. Sinon, cette différence peut fausser les mesures,

- lorsque la dent est pas ou peu chargée ($\Delta l_1=0$), nous avons alors $T \approx t$ (figure III.8). L'équation III.18 n'est alors plus vérifiée. La méthode perd donc de sa validité pour de faible chargement,

- cette méthode est délicate à utiliser en pratique, car le résultat varie sensiblement suivant le degré (choisi par l'utilisateur) des différentes lois polynomiales considérées et le poids (choisi par l'utilisateur) des différents points de mesure,

- la mesure de la déformation se fait sur la première dent de l'arc enroulée ce qui enlève une bonne partie de l'intérêt de cette méthode. En effet, cette dent s'appuie mal sur la dent de poulie du fait de la raideur de flexion de la courroie (voir schéma). Ainsi, l'effet de bord est supérieur aux interactions des autres dents de l'arc enroulé, au moins pour les faibles tensions de traction dans le brin libre. Une médiocre répétitivité des mesures de déplacement par différents manipulateurs est la conséquence d'une assise initiale de la première dent très difficile à régler,



- la faible tension t dans le brin mou conduit rapidement au saut de dent ce qui limite fortement le nombre de mesures ainsi que leur qualité,

- l'effet important de la charge radiale (voir la conclusion du chapitre III.III.3.2) sur la dent n'est pas prise en compte,

- les légères fluctuations de la tension t dans le brin mou durant le chargement du brin tendu et le fluage de la dent entraîne une imprécision de la mesure qui peut se révéler très néfaste lorsque ces fluctuations sont combinées à un phénomène alterné de glissement-frottement (stick-slip) des dents de courroie sur la poulie.

Une nouvelle méthode de mesure plus précise, plus fiable, et tenant compte des remarques précédentes, de la raideur d'une dent de courroie, est proposée dans le cadre de cette étude.

III.4.1.1.3. Nouvelle méthodologie de mesure de la raideur d'une dent de courroie

III.4.1.1.3.1. Aspect pratique

Un banc de traction de dent de courroie (figure III.11) a été mis au point afin de pouvoir mesurer précisément et de façon fiable (c'est-à-dire répétitive) la déformation d'une dent. La courroie s'enroule autour d'un pignon fixe dont l'immobilité est vérifiée par un comparateur micrométrique. La courroie est attachée à deux endroits par deux mors qui lui permettent de continuer librement son chemin. Ainsi, il n'est pas nécessaire de détruire la courroie. Le brin mou est libre et est fixé à un poids de masse connue que l'on fait varier. Il s'enroule autour d'un galet. La tension dans le brin mou est donc connue et reste en permanence constante. En outre, le galet peut se déplacer pour augmenter ou diminuer l'arc d'enroulement. La tension dans le brin tendu est mesurée par un dynamomètre. Le déplacement de deux dents est mesuré à l'aide d'un palpeur et d'un petit dé collé sur le dos de la courroie. Les deux mesures simultanées augmente la qualité de l'évaluation du déplacement d'une dent sous une charge donnée. Ces deux dents doivent être placées au milieu de l'arc enroulé afin de supprimer les effets de bord dus à la raideur de flexion de la courroie. Le mesurage du déplacement des dents s'effectue en faisant varier trois paramètres : (1) la tension t dans le brin mou en modifiant la masse; (2) la tension T dans le brin tendu, celle-ci variant de la tension t jusqu'au phénomène du saut de dent; (3) le nombre de dent n en prise variant à l'aide du galet.

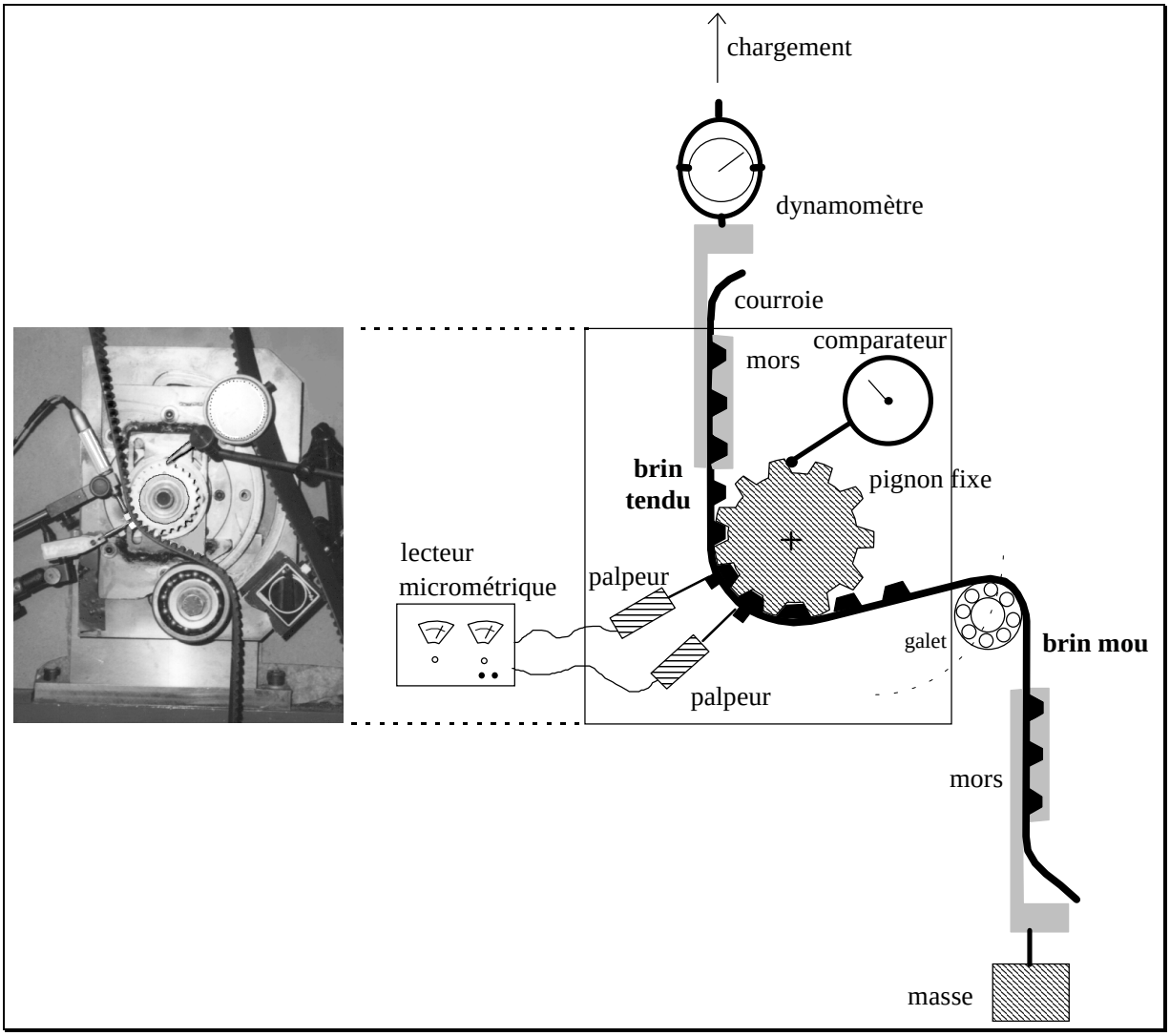


Figure III. 11 : Schématisation du banc de traction de dent.

III.4.1.1.3.2. Aspect théorique

L'objectif est d'obtenir la loi P (u ,Q) (selon les notations de la figure II.26). P représente la charge tangentielle sur une dent de courroie, u est le déplacement de la dent et Q est la charge radiale (ou normale) sur cette dent. Cette loi est obtenue à l'issue de plusieurs séries de points de mesure (T ,u_i) (u_i déplacement de la dent i) avec à chaque fois, un nombre de dent enroulé n précisé ainsi que la tension t dans le brin mou.

La charge P_i sur la $i^{ème}$ dent de l'arc enroulé comprenant n dents, est obtenue à partir de l'équation II.53, rappelé ici :

$$P_i.\mathrm{sh}(k_0 n) = t.\left[\mathrm{sh}\left(k_0(i-1)\right) - \mathrm{sh}\left(k_0 i\right)\right] + T.\left[\mathrm{sh}\left(k_0(n+1-i)\right) - \mathrm{sh}\left(k_0(n-i)\right)\right] \qquad \text{id. Equ. II.53}$$

avec $k_0 = \sqrt{K/k}$,

K raideur de l'âme,

k raideur de la dent.

Le nombre de dent en prise n, la tension dans le brin tendu T, la tension dans le brin mou t, le numéro i de la dent mesuré, et la raideur de l'âme k sont des éléments connus de l'équation II.53. Seules P_i et la raideur de la dent K sont inconnues. Ces deux inconnues nécessitent une deuxième équation : $P_i = K.u_i$ où u_i est connu par la mesure. La raideur de dent K est calculée à partir de la variable k_0, obtenue en résolvant par dichotomie avec $10^{-6} \le k_0 \le 1$, l'équation pour chaque couple (T, u_i) :

$$k.k_0^2.u_i.sh(k_0 n) = t.\left[sh\left(k_0(i-1)\right) - sh\left(k_0 i\right)\right] + T.\left[sh\left(k_0(n+1-i)\right) - sh\left(k_0(n-i)\right)\right] \quad \text{Equ. III. 19}$$

Ensuite, l'équation II.53 est appliquée à nouveau pour obtenir la série de points (P_i, u_i) à partir des couples (T, u_i) issue de chaque essais avec un nombre de dent enroulée n différent et une tension t dans le brin mou différente.

Le calcul de la charge radiale Q_i sur la dent i nécessite le calcul des tension dans l'âme S_i à partir de l'équation II.52, rappelée ici :

$$S_i.sh(k_0 n) = t.sh\left(k_0 i\right) + T.sh\left(k_0(n-i)\right) \quad \text{id. Equ. II.52}$$

L'hypothèse est faite que S_i n'est pas trop différent de S_{i+1}. Nous comprenons à l'aide de la figure II.25 que la charge radiale Q_i sur la dent i peut être alors évaluée comme suit :

$$Q_i = \frac{S_i + S_{i+1}}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{Equ. III. 20}$$

avec S_i tension dans l'âme calculée à partir de l'équation II.52,
θ pas angulaire de la poulie.

Nous obtenons maintenant, pour chaque mesure, une série (P , Q ,u) (figure III.12) concernant la charge tangentielle P, la charge radiale Q, et le déplacement u d'une dent. Pour chaque mesure, le nombre n de dents enroulées varie de 2 à 12. La tension t dans le brin mou varie également dans une large proportion (5 à 500 N.) ce qui permet une grande plage de variation de la charge radiale Q. Les différentes séries sont moyennées par la méthode des moindres carrés pour obtenir (figure III.13) la loi polynômiale P (u ,Q) définie comme suit :

$$P = Q\left(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5\right) \quad \text{Equ. III. 21}$$

avec P charge tangentielle sur la dent,
Q charge radiale sur la dent,
u déplacement de la dent.

Un polynôme d'ordre 5 pour le déplacement u s'est avéré, à l'instar de la méthode Dancé, la meilleure solution. Une loi linéaire selon Q est adoptée. La raideur de la dent est $\partial P/\partial u$ (figure III.14). Les essais confirment que la raideur est nulle si aucune charge radiale n'est appliquée sur la dent.

En conclusion :

- la méthode permet de mesurer la raideur d'une dent dans son contexte réel d'utilisation avec un traitement mathématique simplifié (un seul lissage par moindres carrés) par rapport à la méthode Dancé (plusieurs lissages par moindres carrés suivi d'une interpolation sur chaque coefficient du polynôme de la charge tangentielle). Ce

traitement simplifié permet une utilisation assouplie et fiable par un utilisateur non-spécialisé,

- la tension t dans le brin mou est pris en compte ce qui permet d'indexer la charge tangentielle de la dent à sa charge radiale conformément aux conclusions du chapitre III.III.3.2 sur l'importance de la charge radiale,
- les mesures sont fiabilisées en considérant deux dents au milieu de l'arc d'enroulement pour éviter les effets de bord,
- la méthode peut aisément évoluer en prenant une autre loi de répartition des charges (par exemple le modèle de Gerbert avec frottement - chapitre II.3.4.1.2 - ou le modèle plus complet de Dancé - chapitre II.3.4.2) pour calculer la charge tangentielle et radiale sur une dent de l'arc de courroie enroulée (équations III.19 et III.20). Ainsi, il est possible de prendre en compte le frottement ainsi que la différence de pas poulie-courroie améliorant la précision des résultats.

III.4.1.1.4. Mesure pour l'âme d'une courroie de type ISORAN®

Un essais de traction classique est réalisé sur une courroie de type ISORAN®. Une mesure élémentaire est faite avec un pied à coulisse sur deux plots collés sur le dos de la courroie produisant une première estimation de la raideur. L'âme de la courroie a été soumis à une traction de 1297 N. Le brin de 89 mm s'est allongé de 0.16 mm. Un pas de courroie mesure 8.012 mm. On obtient ainsi une raideur de **9.10^3 daN./mm/pas**.

III.4.1.1.5. Mesure sur une dent de courroie de type ISORAN®

III.4.1.1.5.1. Résultat de mesure par la nouvelle méthode

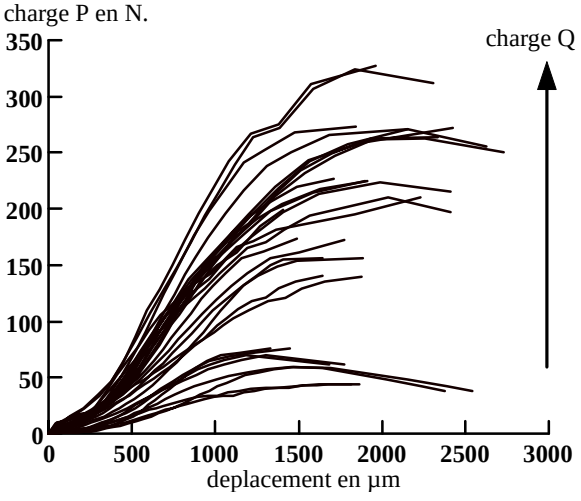


Figure III. 12 : Charge tangentielle P d'une dent issue des mesures en fonction du déplacement u pour différentes charges radiales Q.

La figure III.12 illustre le déplacement u d'une dent d'après sa charge tangentielle P et sa charge radiale Q (chapitre III.III.4.1.1.3.2). Les essais se sont déroulés sur un arc de courroie avec 3 à 7 dents en prise sur une poulie de 25 dents. La tension dans le brin mou varie de 20 à 277 N. Il en résulte une variation de la charge radiale Q sur la dent de 2 à 137 N. Pour les fortes charges radiales, la tension dans le brin tendu peut atteindre 2000 N. Dans ce cas, le déplacement de la dent dépasse 2.5 mm.

La charge tangentielle P d'une dent est ajustée selon le polynôme de l'équation III.21 :

$$P = Q\left(3.02.10^{3}u - 1.93.10^{5}u^{2} - 1.38.10^{9}u^{3} + 6.86.10^{11}u^{4} - 8.83.10^{13}u^{5}\right) \quad \text{Equ. III. 22}$$

avec P, Q et u en unité S.I.

La figure III.13 trace la loi de variation de la charge tangentielle P. Avec la figure III.14, nous constatons que la raideur d'une dent décroît en permanence. Ce résultat est notablement différent de celui illustré sur la figure II.5 avec un raidissement très fort. Pour comprendre ce résultat, il faut analyser le déplacement de la dent sous charge. On distingue trois phases détaillées sur la figure III.15 :

a) Une phase de déformation de la dent qui se révèle tout d'abord linéaire, à l'image d'une poutre en flexion-compression [Atouf, 1992], puis se raidit rapidement. Il s'agit principalement de cette phase de déformation que montre la figure II.5.

b) Le raidissement structurel de la dent entraîne rapidement un glissement de celle-ci hors de son logement. La diminution de la raideur de la figure III.14 tient donc compte du phénomène de glissement en plus de la déformation propre de la dent, ce qui est plus réaliste.

c) Le glissement de la dent entraîne à forte charge le phénomène du saut de dent. Ce phénomène apparaît lorsque le maximum est atteint sur les courbes de traction de la figure III.12. Au-delà, la raideur de la dent devient négative (elle est alors fixé à zéro). Le saut de dent est initié sur l'arc enroulé de courroie du côté du brin mou comme le montre la partie c de la figure III.15.

Figure III. 13 : Vue 2D et 3D de la charge tangentielle P d'une dent en fonction du déplacement de la dent u et de la charge radiale Q.

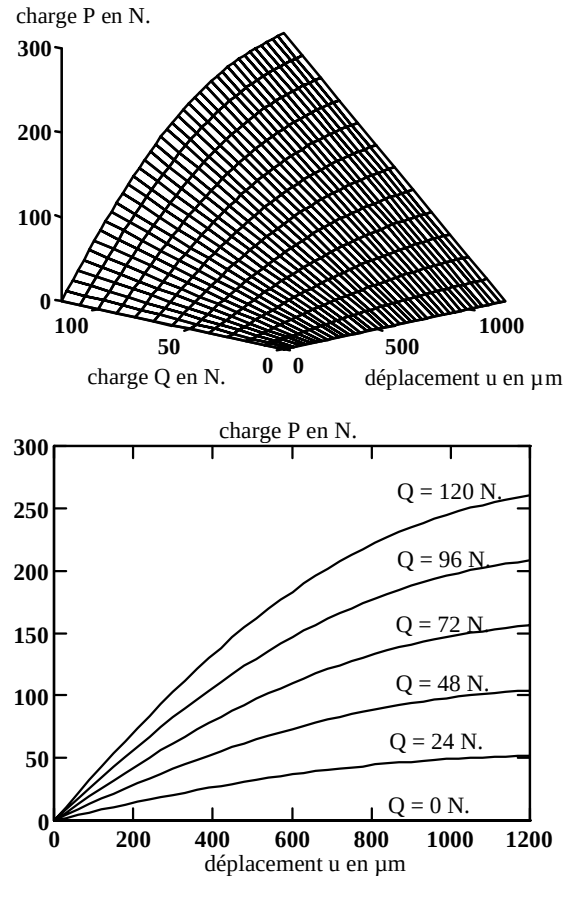
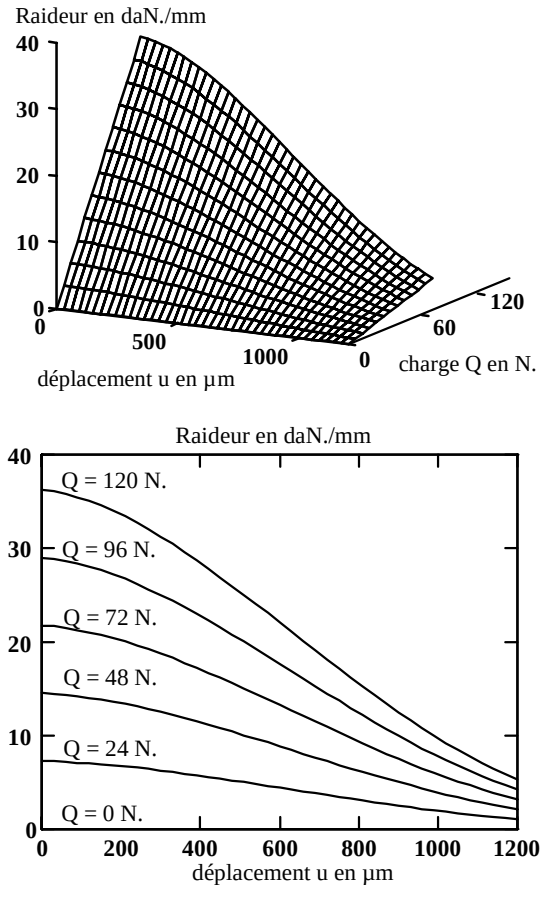


Figure III. 14 : Vue 2D et 3D de la raideur tangentielle d'une dent en fonction du déplacement de la dent u et de la charge radiale Q.



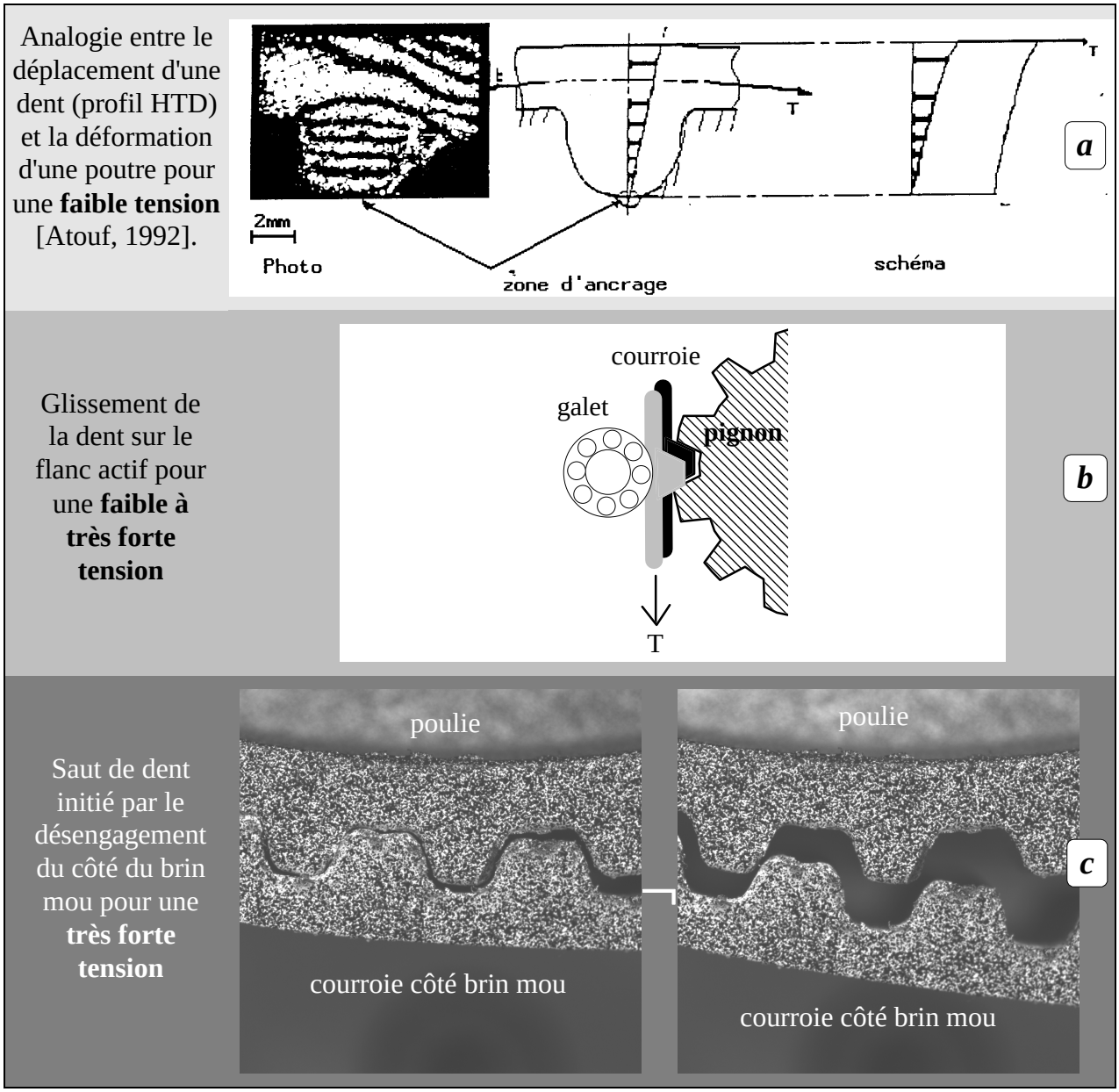


Figure III. 15 : Analyse du déplacement d'une dent de courroie.

La courroie étudiée est du type ISORAN®. Celle-ci a été préalablement rodée sur $7{,}7.10^6$ cycles courroie sur un banc de simulation d'une transmission de trois poulies (50 dents) et deux galets. La tension de pose était 300 N. Le couple moteur et récepteur était égale à 10 N.m. La vitesse de rotation des poulies était égale à 1500 tr/mn.

On peut noter que la raideur d'une dent de la même courroie, encore neuve (c'est-à-dire non rodée), a été mesurée. La loi de variation de la charge tangentielle calculée est :

$$P = Q\left(4.89.10^3 u - 3.72.10^6 u^2 + 1.01.10^9 u^3 + 1.21.10^{11} u^4 - 6.25.10^{13} u^5\right) \qquad \text{Equ. III. 23}$$

La loi P (u,Q) pour la courroie neuve est tracée sur la figure III.16. La raideur obtenue par dérivation est tracé sur la figure III.17. En comparant les figures III.14 et III.17, nous constatons que la raideur d'une dent non rodée est nettement plus forte. Pour un déplacement u nul et une charge radiale Q de 120 N., la raideur est de 36.2 daN./µm pour la dent rodée, et de 58.7

daN./µm pour la même dent neuve. Cette différence importante de raideur peut s'expliquer par le polissage du tissu protecteur recouvrant la partie de la courroie en contact avec la poulie. Dans notre réflexion, nous pouvons faire l'analogie avec l'évolution du coefficient de frottement lors d'une phase de rodage avec une courroie Poly-V (Fig. I.23), en gardant à l'esprit qu'il s'agit dans ce cas de caoutchoucs, et non de Nylon, en contact avec la poulie. La rectification du profil de la dent de courroie est une voie de réflexion supplémentaire. Le tissu protecteur permet aussi de contenir la dent dans son volume initial lors d'un chargement. L'assouplissement d'une dent de courroie lors du rodage pourrait alors venir d'un relâchement de la trame du tissu protecteur. En effet, l'allongement de la courroie lors de la phase de rodage, plaide en faveur d'une modification de la trame du tissu.

Figure III. 16 : Vue 2D et 3D de la charge tangentielle P d'une dent non rodée en fonction du déplacement de la dent u et de la charge radiale Q.

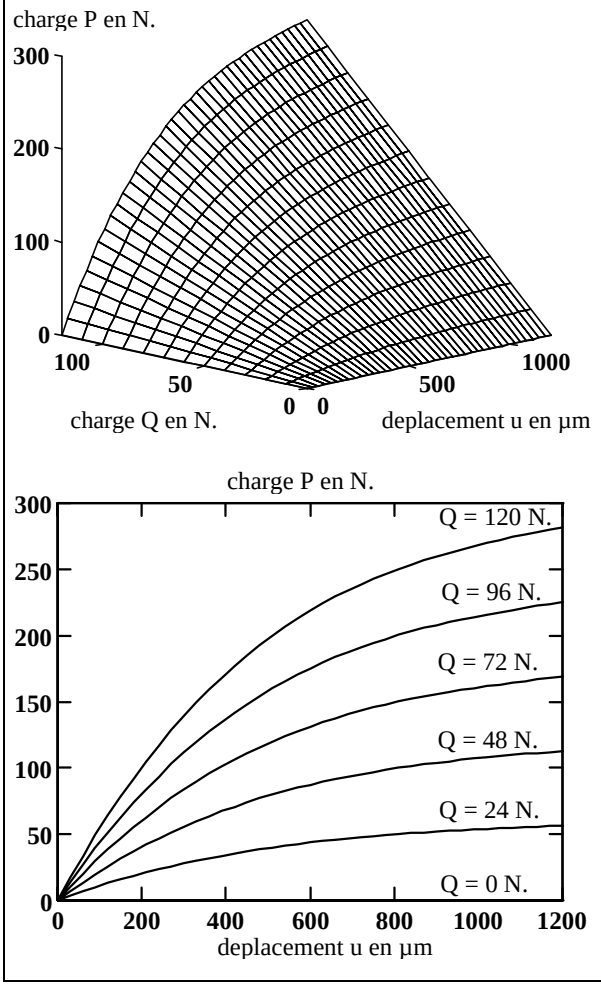
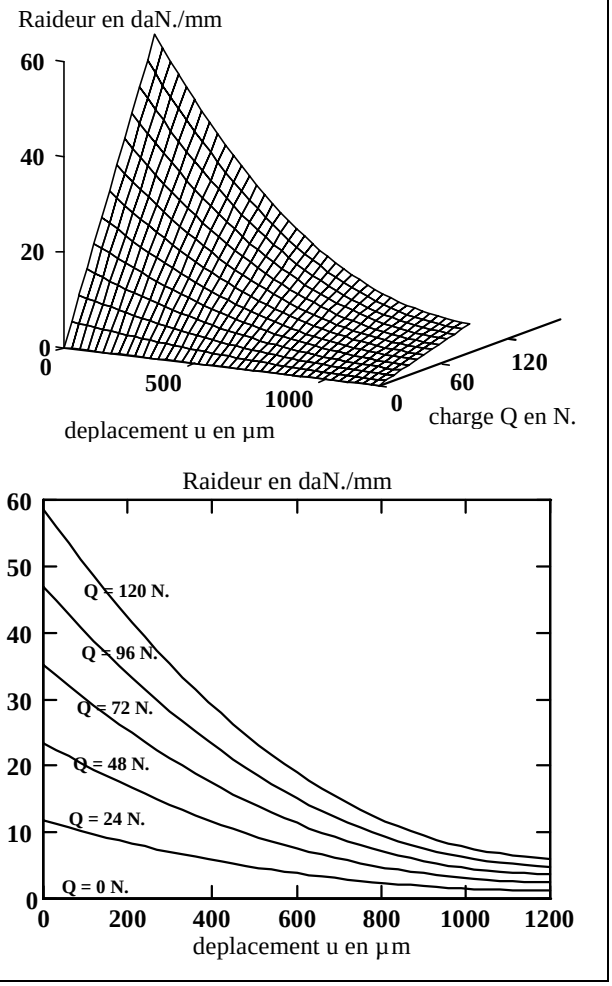


Figure III. 17 : Vue 2D et 3D de la raideur tangentielle d'une dent non rodée en fonction du déplacement de la dent u et de la charge radiale Q.



III.4.1.1.5.2. Vérification par une mesure directe sur une dent unique

Une mesure directe du déplacement d'une dent en fonction d'une charge appliquée, est réalisée afin de valider la nouvelle méthode de calcul de la raideur d'une dent. Dans ce but, une seule dent de courroie est coincée par un galet dans une poulie fixe de 25 dents (figure III.18). Le

galet permet le mouvement longitudinal de la courroie. La petite longueur de courroie située entre le mors et la dent en prise, a une souplesse négligeable vis-à-vis de la dent. L'autre extrémité de la courroie est laissée libre.

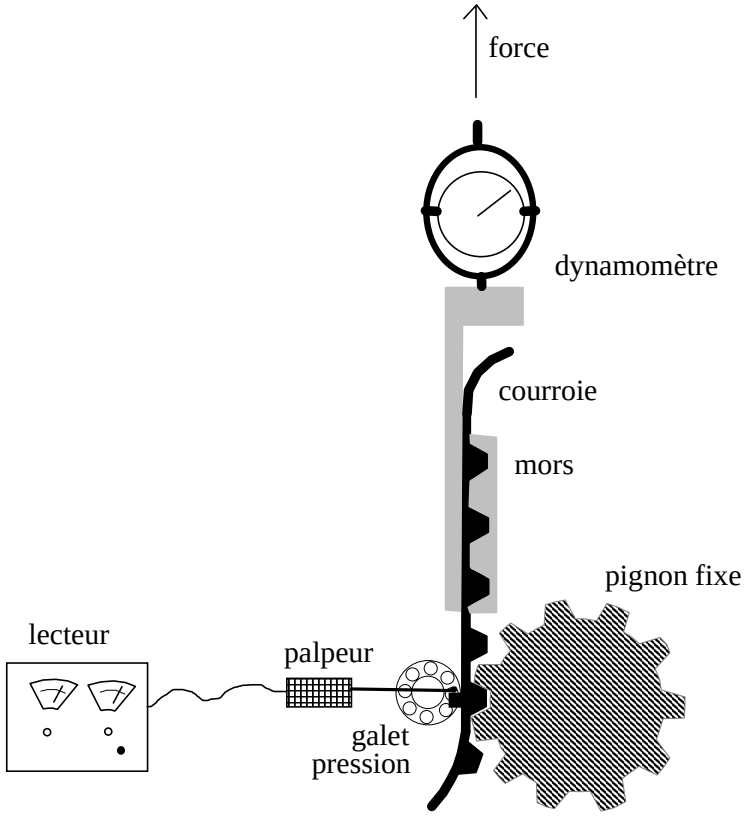


Figure III. 18 : Principe de mesure directe de la déformation d'une dent.

La pression exercée par le galet sur la courroie n'est pas connu. En conséquence, trois essais ont été menés avec différentes pressions afin d'obtenir une tendance moyenne du comportement de la dent. Chaque essais a été lissé par un polynôme de degré 3 passant par zéro par la méthode des moindres carrés. Des problèmes de matrices mal conditionnées sont apparus en considérant la tension en fonction du déplacement. Donc le lissage a été effectué sur le déplacement en fonction de la tension (figure III.19). Les coefficients des trois polynômes du déplacement de la dent, u(P), en fonction de la tension sont:

	essais 1	essais 2	essais 3
x^1	+1.9548e-6	+2.1417e-6	+4.4886e-7
x^2	-2.2182e-9	+1.6557e-9	+3.3577e-9
x^3	+6.1358e-12	-1.5462e-12	-1.2246e-12

Tableau III. 4 : Coefficients des polynômes u(P) .

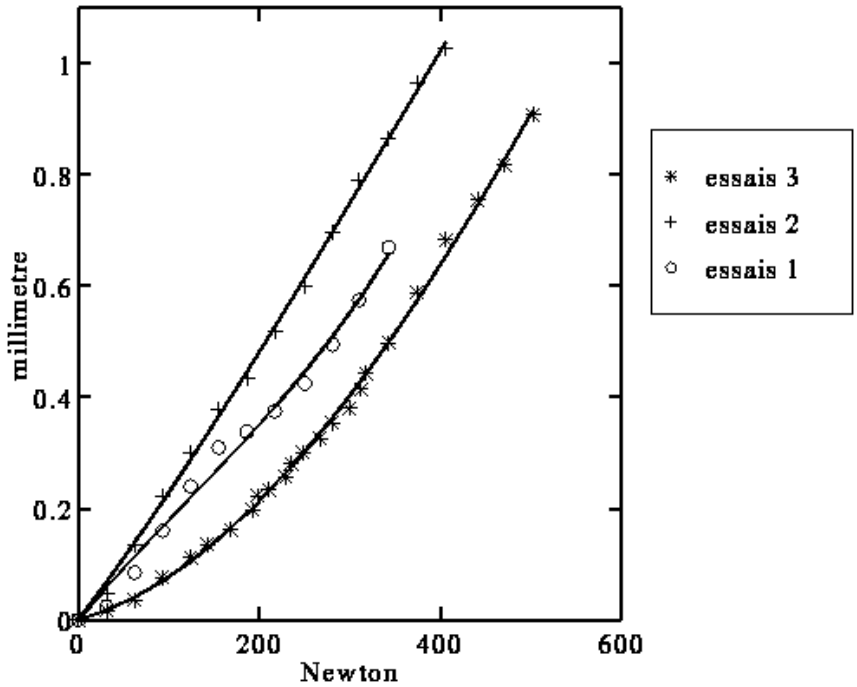


Figure III. 19 : Lissage sur les mesures de déplacement d'une dent de courroie.

Les coefficients du tableau III.4 sont moyennés pour obtenir la loi polynômiale de la charge d'une dent P (en N.) en fonction de son déplacement u (en m.) :

$$P = 4.8870.10^{5}\,u - 1.1334.10^{8}\,u^{2} + 2.3254.10^{9}\,u^{3} + 1.4531.10^{13}\,u^{4} - 4.3724.10^{15}\,u^{5}$$

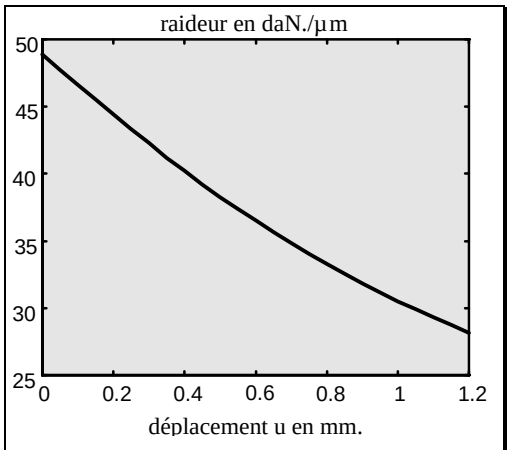


Figure III. 20 : Raideur d'une dent de courroie.

La raideur obtenue de la dent en dérivant la loi P(u) est tracée sur la figure III.20. La courroie utilisée est celle, non-rodée, caractérisée au chapitre III.III.4.1.1.5.1. Nous pouvons donc comparer la figure III.20 avec la figure III.17. Nous constatons que l'ordre de grandeur est identique pour les deux courbes de raideur. Nous observons également la même tendance d'assouplissement de la dent pour un déplacement u croissant. Pour les faibles déplacements, la courbe semble suivre la loi de raideur pour environ 100 N. de charge radiale Q observée sur la figure III.17. Toutefois, la loi de raideur, pour la mesure directe, diminue nettement moins que pour la mesure indirecte du chapitre III. III.4.1.1.5.1. Ce comportement est dû au galet bloquant le mouvement radial de la dent. Nous avons donc, avec ce système de mesure, une augmentation de la charge radiale Q avec le déplacement de la dent. Pour développer d'avantage l'analyse, il aurait été souhaitable d'instrumenter l'arbre supportant galet pour obtenir la pression radiale exercé par le galet sur la dent. Toutefois, nous pouvons déjà conclure à un bon accord des résultats entre les deux méthodes de mesure.

Nous avons également relevé dans la bibliographie des valeurs de raideur de dent comparables (tableau III.5). Il faut toutefois prendre des précautions dans la comparaison des valeurs car les courroies ne sont pas définies avec précision. Des différences peuvent être dues au

profil et à la largeur de la dent, au matériau utilisé, mais aussi à la méthode de mesure de la raideur utilisée. Toutefois, l'ordre de grandeur de ces valeurs approche les valeurs de la nouvelle méthode développée de caractérisation de la raideur d'une dent. Nous pouvons conclure à la validation de cette méthode développée pour cette étude et décrite au chapitre III.III.4.1.1.3.

Auteur	T. H. C. Childs profil H.T.D.	T. Koyama profil trapézoïdal (polyuréthane)	T. Koyama profil trapézoïdal (polychloroprène)	J.-M. Dancé profil H.T.D.
Valeur de la raideur d'une dent	55 daN./mm	55 daN./mm	33 daN./mm	14 daN./mm

Tableau III. 5 : Valeurs de raideur d'une dent rencontrées dans la bibliographie.

III.4.1.2. Mesures de raideur et d'amortissement en dynamique

L'objectif est de mesurer la fréquence de résonance f_r et le taux d'amortissement α de l'âme et de la dent de la courroie. Nous pouvons ensuite déduire la raideur et l'amortissement visqueux du matériau étudié (Annexe II - Equ. 7).

III.4.1.2.1. Mesure de la fréquence de résonance et du taux d'amortissement

La fréquence de résonance f_r et le taux d'amortissement α peuvent se déduire principalement par trois techniques différentes :

- La fréquence de résonance peut être obtenue par une transformée de Fourier discrète sur l'accélération du matériau. Le facteur d'amortissement est calculé par la méthode de la largeur de bande (f_1-f_2), située autour de la fréquence de résonance f_r tel que l'amplitude de la réponse pour les fréquences f_1 et f_2 soit égale à l'amplitude de la réponse à la résonance divisée par $\sqrt{2}$, soit -3 dB. en échelle logarithmique. Nous avons:

$$\frac{f_2 - f_1}{f_r} = 2\alpha \quad \text{avec } 20\log\frac{x(f_2)}{x(f_r)} = -3\text{dB} \qquad \text{Equ. III. 24}$$

  Pour bien appliquer cette méthode, il faut que les modes soient suffisamment découplés.

- Le décrément logarithmique δ peut être utilisé pour la mesure du facteur d'amortissement α:

$$\delta = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+b}}\right) \qquad \text{Equ. III. 25}$$

  avec x_n et x_{n+b}, deux pics positifs séparés de b oscillations.

  On obtient ainsi le facteur d'amortissement α:

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \qquad \text{Equ. III. 26}$$

  Pour une bonne estimation, cette méthode nécessite un nombre suffisant d'oscillations.

Un autre inconvénient est qu'on mesure la contribution de tous les modes sur l'amplitude du signal.

- Une méthode d'identification modale à partir des résultats expérimentaux permet d'obtenir une bien meilleure précision car elle lisse la fonction de transfert et permet de découpler les modes. Cette méthode est appelée "Least Square Complex Exponentiel Method" [Ewins, 1986]. Le point de départ de la méthode est l'expression générale pour un système à plusieurs degrés de liberté, de la réceptance R(ω) (Annexe II - Equ. 5) dans le domaine fréquentiel :

$$R_{jk}(\omega) = \left(\frac{x_j}{f_k}\right) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{{}_rA_{jk}}{\omega_r\alpha_r + i(\omega - \omega_r')} \qquad \text{Equ. III. 27}$$

avec $\omega_r' = \omega_r\sqrt{1-\alpha_r^2}$: pulsation du système amorti pour le r^ième mode,
ω_r : pulsation du système non amorti pour le r^ième mode,
α_r : taux d'amortissement du r^ième mode,
${}_rA_{jk}$: constante modale pour le r^ième mode,
N: nombre de modes considérés.

En appliquant une transformée de Fourier inverse à R(ω), on obtient la fonction de transfert impulsionnelle correspondant par définition à la réponse du système à une excitation de type Dirac et d'amplitude unitaire.

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_rA_{jk}e^{s_rt} \quad \text{avec} \quad s_r = -\omega_r\alpha_r + i\omega_r' \qquad \text{Equ. III. 28}$$

La fonction de transfert h(t) est connue de manière discrète (q mesures: h_0, h_1,...,h_q) avec une résolution en fréquence $\Delta f=1/T$. Un système d'équations est formé à partir de l'équation III.28 aux différents instants $t_\ell = \ell\Delta t$:

$$\begin{cases} h_0 = {}_1A & + {}_2A & \cdots + {}_{2N}A \\ h_1 = {}_1A\,e^{s_1\Delta t} & + {}_2A\,e^{s_2\Delta t} & \cdots + {}_{2N}A\,e^{s_{2N}\Delta t} \\ h_2 = {}_1A\,e^{s_1 2\Delta t} & + {}_2A\,e^{s_2 2\Delta t} & \cdots + {}_{2N}A\,e^{s_{2N} 2\Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_q = {}_1A\,e^{s_1 q\Delta t} & + {}_2A\,e^{s_2 q\Delta t} & \cdots + {}_{2N}A\,e^{s_{2N} q\Delta t} \end{cases} \qquad \text{Equ. III. 29}$$

À la condition que le nombre d'instants q soit supérieur à 4 fois le nombre de modes (4N), ce système peut être converti en un problème aux valeurs propres qui conduit à la détermination des fréquences propres complexes s_r et des constantes modales A_r, par la méthode de résolution de Prony [Ewins, 1986].

Démarche pour l'identification modale:

Le déplacement ou l'accélération à un point donné est acquis en même temps que la force d'impulsion du marteau. L'amplitude des signaux pour chaque fréquence est obtenue par une transformée de Fourier. Le rapport des amplitudes donne la fonction de transfert R(ω) (Annexe II - Equ. 5). La démarche d'identification commence par le choix

du nombre de degré de liberté N. Ensuite, les paramètres modaux $\omega_r', \alpha_r, {}_rA$ sont obtenus par la résolution du système III.29. La fonction de transfert supposée, est alors reconstituée à partir des paramètres obtenus. La visualisation des deux fonctions de transfert dans un diagramme de Bode permet alors d'apprécier la justesse de l'identification modale. Le calcul de l'erreur au sens des moindres carrés, entre la courbe reconstituée et expérimentale, peut aussi aider à la décision.

III.4.1.2.2. Mesure des caractéristiques de l'âme d'une courroie de type ISORAN®

Le principe est de suspendre une masse à la courroie pour obtenir un système masse-ressort amorti (figure III.21). La longueur de brin l (752 mm.) et la masse m (45 kg.) sont suffisamment importantes pour se rapprocher au mieux de l'idéalisation du modèle. La fréquence recherchée est ainsi suffisamment abaissée pour être écartée des fréquences dues au montage (première fréquence à 2600 Hz). La grande longueur de brin permet aussi d'avoir une valeur de raideur moyenne, celle-ci variant en réalité tout au long de la courroie.

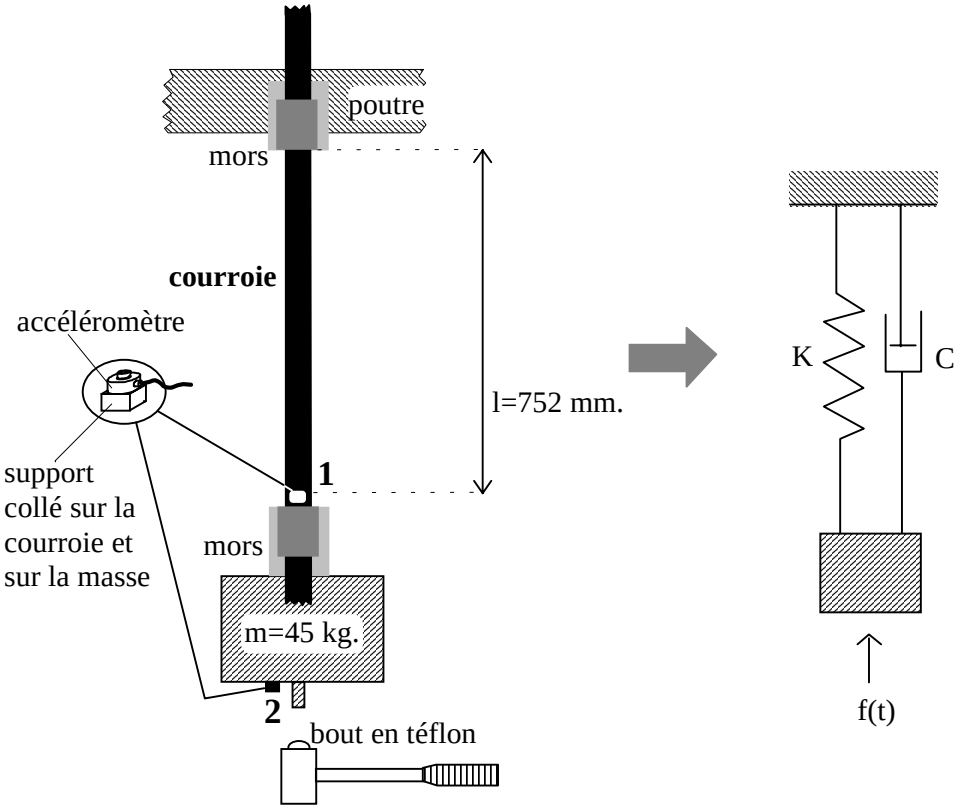


Figure III. 21 : Montage pour mesurer l'accélération longitudinale de l'âme.

Pour mesurer la fonction de transfert désirée (figure III.23), trois aspects sont considérés :

- L'excitation longitudinale de la courroie est assurée par un marteau à impulsion avec capteur de force intégré. Son bout en téflon excite la courroie jusqu'à 1000 Hertz. Ainsi, la structure n'est pas sollicitée. Il est essentiel de "choquer" la courroie dans son axe, si on ne veut pas générer des vibrations transversales compliquant la mesure. Il n'est donc pas possible d'exciter directement la courroie. Diverses positions d'impact ont été tentées. Seule la position de la figure III.21 a été retenue.

- L'enregistrement du signal est assurée par deux accéléromètres miniatures de type piézo-électrique à électronique intégrée. Le premier est collé sur la courroie en position 1 (figure III.21). Le deuxième est collé près de la zone d'impact du marteau en position 2. La comparaison du spectre d'énergie (figure III.22) de l'accéléromètre en position 1 (trait clair) et de l'accéléromètre en position 2 (trait gras) montrent que l'énergie d'impact du marteau se transmet bien à la courroie jusqu'à 300 Hertz., zone de la fréquence fondamentale de la courroie. Les deux spectres se différencient surtout à partir de 1000 Hertz. Cette vérification permet de valider l'utilisation d'une fonction de transfert entre l'excitation et la réponse de la courroie.

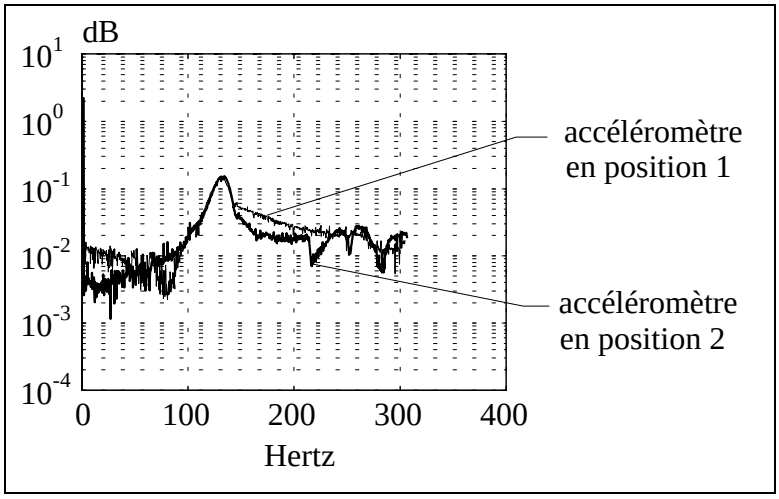


Figure III. 22 : Comparaison des spectres d'énergie des deux accéléromètres.

- La partie acquisition (figure III.23) comprend un amplificateur avec un filtre intégré passe-bas pour le marteau et les deux accéléromètres. la fréquence de coupure du filtre est de 1 kHz. Un analyseur spectral permet de vérifier l'absence de bruit ou de signaux perturbateurs avant le prélèvement des données. Ensuite, une carte d'acquisition enregistre 30000 échantillons à une fréquence de 2.5 kHz pour respecter le théorème d'échantillonage de Shannon.

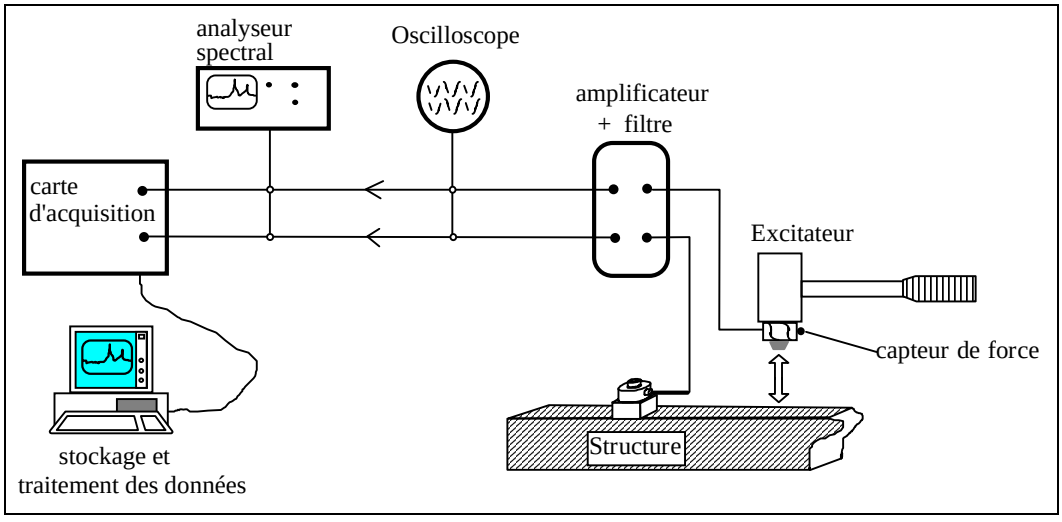


Figure III. 23 : Chaîne de mesure.

Le signal enregistré à partir de l'accéléromètre 1 fixé sur la courroie (figure III.21), est enregistré puis filtré à 300 Hz pour faciliter l'identification modale.

Par la méthode "Least Square Complex Exponentiel Method", nous obtenons :

- Pour le modèle à 5 degrés de liberté (figure III.24): α=4.8 % et f_r=129.9 Hz.
- Pour le modèle à 15 degrés de liberté: α=4.8 % et f_r=130.0 Hz.

Nous retenons donc comme résultats: **α=4.8 %** et **f_r=130.0 Hz**.

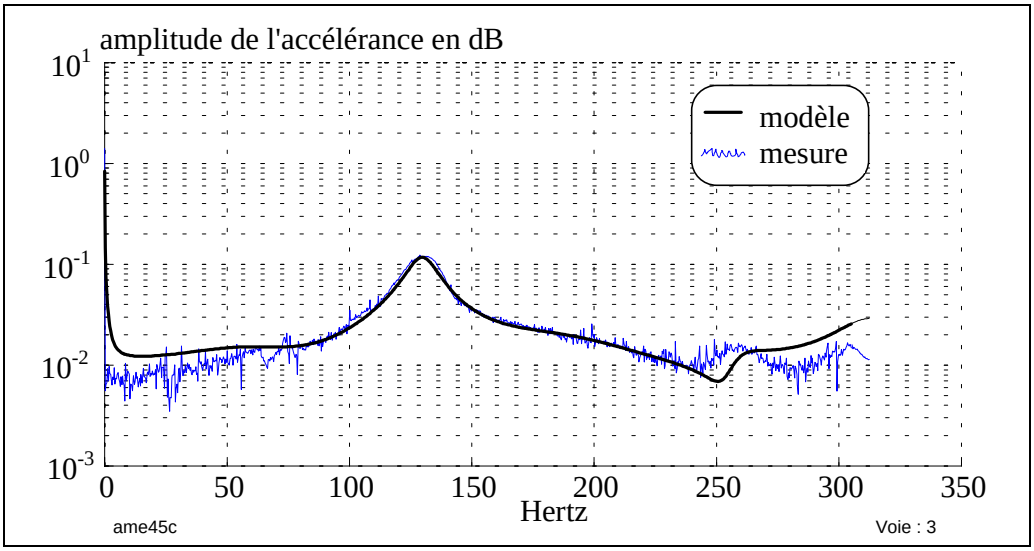


Figure III. 24 : Reconstitution des amplitudes par un modèle à cinq degrés de liberté.

On peut directement vérifier ces résultats sur le signal temporel (figure III.25). Les cinq oscillations entre les points 1 et 2 permettent de trouver une fréquence de 128.8 Hz. L'équation III.26 permet de trouver le coefficient d'amortissement d'après les ordonnées : α=5.6 %. Ces résultats concordent avec les résultats de la méthode "Least Square Complex Exponentiel Method".

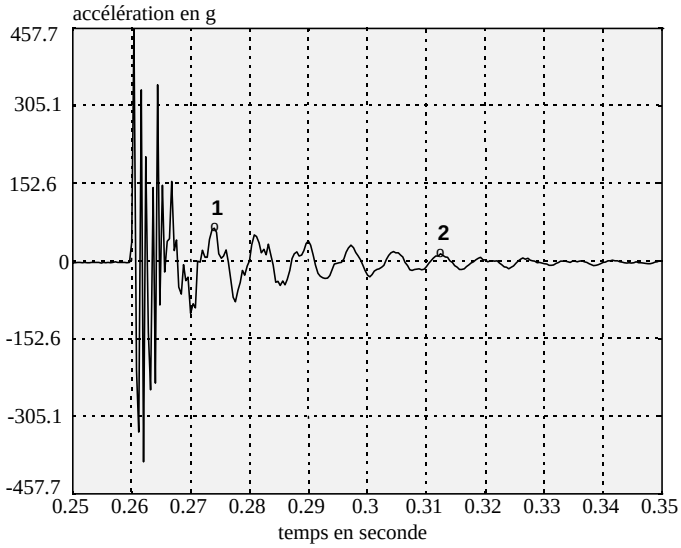


Figure III. 25 : Signal temporel de l'accélération.

En appliquant l'équation 7 de l'annexe II, nous trouvons:

$$\begin{cases} k = 762256\ N/m \\ c = 562\ N/m/s \end{cases}$$

Nous désirons la raideur pour un pas. La longueur du brin est de 752 mm. Un pas de courroie mesure 8.012 mm. Finalement, on obtient (à 20°C) :

$$\begin{cases} K_{â} = 71544769\ N/m/pas \\ \lambda_{â} = 52772\ N/m/s/pas \end{cases}$$

La valeur de la raideur est du même ordre de grandeur que celle trouvée avec le pied à coulisse. (chapitre III.III.4.1.1.4).

III.4.1.2.3. Mesures sur une dent de courroie de type ISORAN®

La mesure de l'accélération de la dent s'est révélé beaucoup plus délicate que dans le cas de l'âme. En effet, le signal est très amorti (3 oscillations) et son amplitude, faible (figure III.28). Il en ressort un pic très aplati sur le spectre d'amplitude (figure III.27). Plusieurs types de montage ont été essayé pour avoir le meilleur signal possible. Le montage retenu est décrit sur la figure III.26. Une courroie a du être coupée pour être collé sur une platine. La structure est optimisée pour une absence totale de bruit jusqu'à 1000 Hz (visualisé jusqu'à 300 Hz sur la figure III.27). Les oscillations pendulaires, d'amplitude réduite, ont été identifiées à 7.6 Hz.

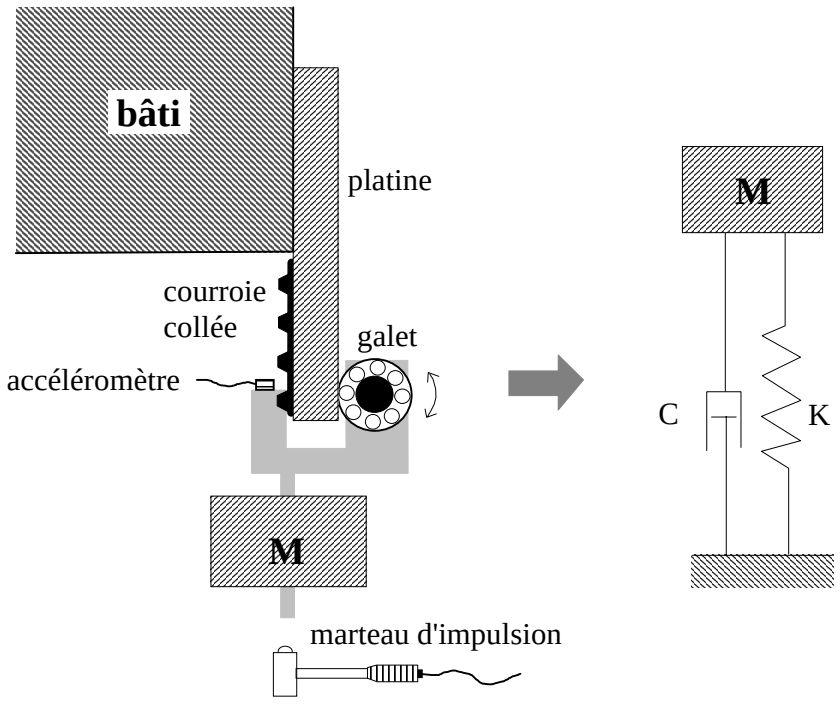


Figure III. 26 : Principe de mesure sur la dent de courroie.

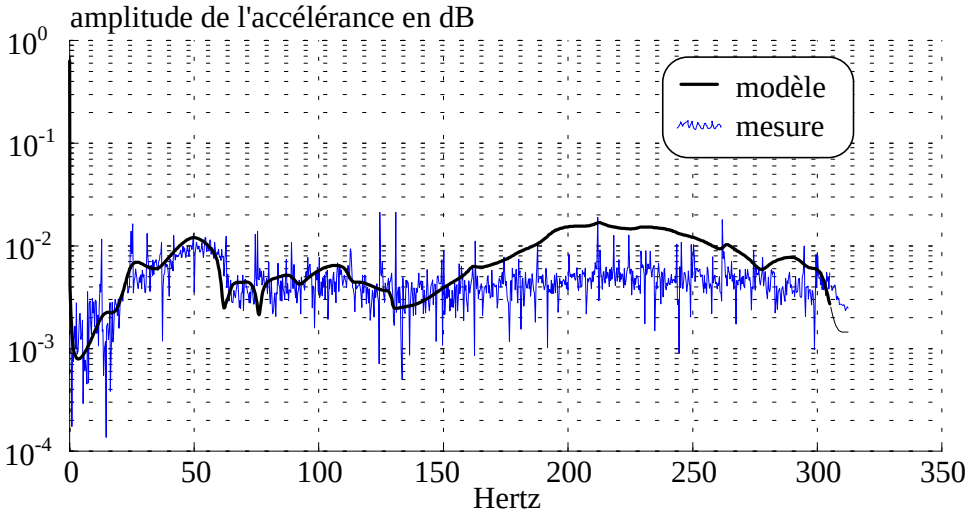


Figure III. 27 : Reconstitution des amplitudes par un modèle à 25 degrés de liberté.

La structure mobile (figure III.26) est excitée avec un marteau d'impulsion avec un bout en téflon. Bien qu'il n'ait pas été possible de vérifier que l'énergie de l'impact du marteau soit intégralement retransmise à la dent, nous supposons que la structure mobile est suffisamment rigide pour que ce soit le cas en dessous de 1000 Hz. Le signal est filtré à 1000 Hz et échantillonné à 2500 Hz. La masse suspendue à la dent est de 9 kg. L'identification modale (figure III.27), assez délicate, identifie la fréquence de résonance f_r à **50 Hz** et le taux d'amortissement α à **20 %**. Une vérification par le décrément logarithmique n'est pas possible en raison du trop faible nombre d'oscillations.

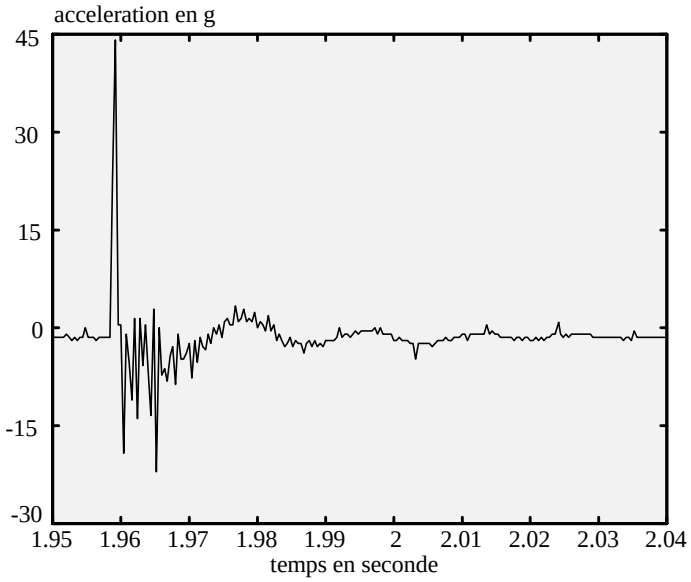


Figure III. 28 : Signal temporel de l'accélération d'une dent.

En appliquant l'équation 7 de l'annexe II, nous trouvons (à 20°C) :

k = 23.44 daN./ mm.
λ_d = 184 N./m./s.

III.4.2. Conclusion sur le mesurage des caractéristiques d'une courroie

Plusieurs méthodes de mesure des caractéristiques de la courroie ont été utilisées, nous permettant de vérifier les résultats.

En ce qui concerne la raideur de dent, le chapitre III.III.3 a permis de mettre en valeur le rôle de la charge radiale sur une dent. En conséquence, une nouvelle méthode, fiable et précise, de mesure de la raideur de dent longitudinale en statique a été mise au point (chapitre III.III.4.1.1.3). Les résultats sont confortés par les valeurs de raideur extraites de la bibliographie. En outre, la valeur de raideur issue des mesures en dynamique (chapitre III.III.4.1.2.3) corrobore la loi de raideur calculée en statique. Ainsi, la valeur d'amortissement issue de la mesure en dynamique se trouve également confortée. Toutefois, l'amortissement d'une dent est essentiellement structural. Cela signifie que l'amortissement varie avec la fréquence d'excitation, et est en général très sensible à la température. D'autre part, il est logique de penser que l'amortissement est non-linéaire, à l'instar de la raideur, selon le déplacement longitudinal de la dent. La charge radiale de la dent est certainement un facteur supplémentaire pour l'amortissement de la dent. La valeur d'amortissement, mesurée en dynamique au chapitre III.III.4.1.2.3, est donc une valeur moyenne que nous estimons représentative par analogie avec la valeur de la raideur issue de la même mesure. Mesurer l'amortissement d'une dent est très difficile. Il est donc peu envisageable de mesurer l'amortissement aussi précisément que la raideur.

La raideur de l'âme de la courroie est obtenue par un essais classique de traction en statique, puis par une mesure plus précise en dynamique. La valeur d'amortissement est obtenue par le décrément logarithmique et la méthode dite "Least Square Complex Exponentiel Method". Ainsi, les valeurs de raideur et d'amortissement sont assurées à chaque fois par deux méthodes.

L'étape suivante est la validation statique du modèle en utilisant les valeurs mesurées de raideur et d'amortissement de la courroie.

III.5. Validation statique du modèle

La validation porte sur deux résultats calculés du modèle : La tension dans les brins et la rotation des poulies sous l'effet d'un couple. La validation est faite, expérimentalement et numériquement sur des cas en statique. Cela permet d'avoir un bon aperçu de la représentativité du modèle.

III.5.1. Validation du calcul des tensions

Une campagne d'essais de mesure des tensions a été effectuée en statique sur les trois brins de la transmission (figure III.29), pour une série de couple. Le couple est appliqué sur la troisième poulie par l'intermédiaire d'une barre centrée et d'un poids connu. La deuxième poulie est laissé folle ($C \approx 0$). La méthodologie de mesure est décrite au chapitre III.III.3.1.

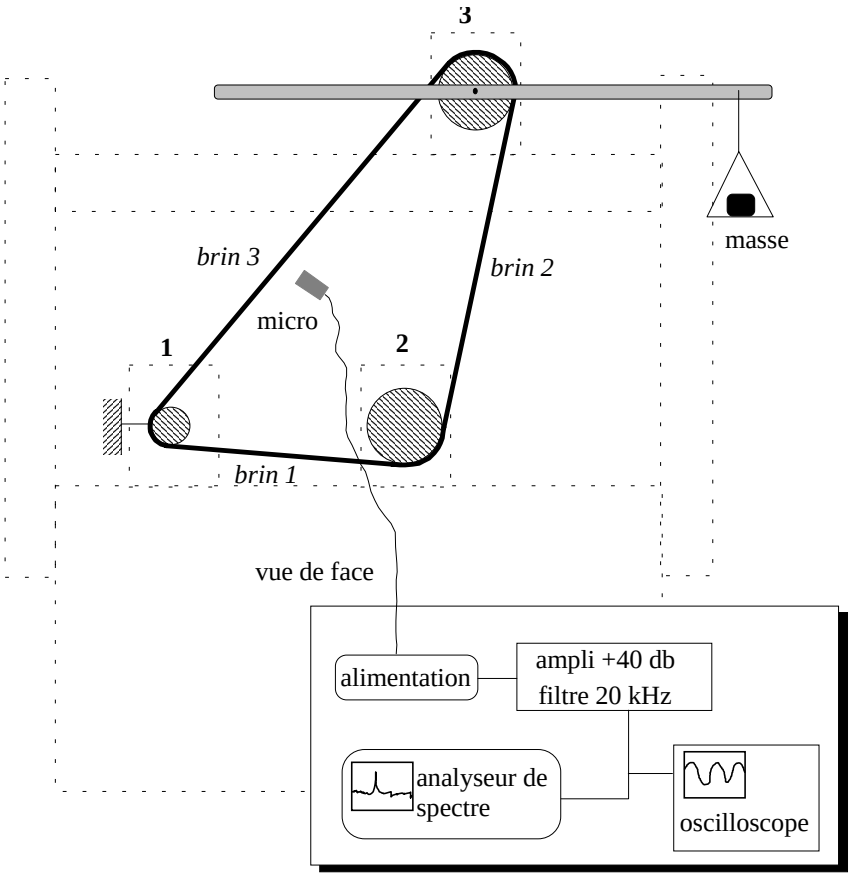


Figure III. 29 : Géométrie de la transmission utilisée pour la mesure des tensions.

	(x, y) en mm.	Rayon primitif en mm.	Nombre de dents
Poulie 1	(0.0, 0.0)	31.781	25
Poulie 2	(397.9, 0.0)	63.612	25
Poulie 3	(519.8, 567.0)	63.612	50
courroie ISORAN®			256

Tableau III. 6 : Caractéristiques de la transmission.

La masse linéique ρ est 0.155 kg/m. La validation sur le calcul des tensions indique une raideur de flexion de $0.5.10^{-2}$ N.m². La tension de pose est de 95 Newton. On visualise immédiatement sur la figure III.30 que le principal effet de la rigidité de flexion est que la tension dans le brin mou ne devient jamais nulle contrairement à la tension obtenue par un calcul linéaire. Dans ce cas de la configuration de la transmission, la tension mesurée dans le brin mou ne franchit pas la barre de 30 Newton. L'explication physique se trouve dans le décollement de la partie de courroie enroulée du côté du brin mou. Ainsi, pour les basses tensions dans le brin mou, la rotation de la poulie n'accroît pas la longueur de courroie du brin mou puisque cette longueur se retrouve au niveau de l'arc enroulé. Par conséquent, la tension reste constante dans le brin mou.

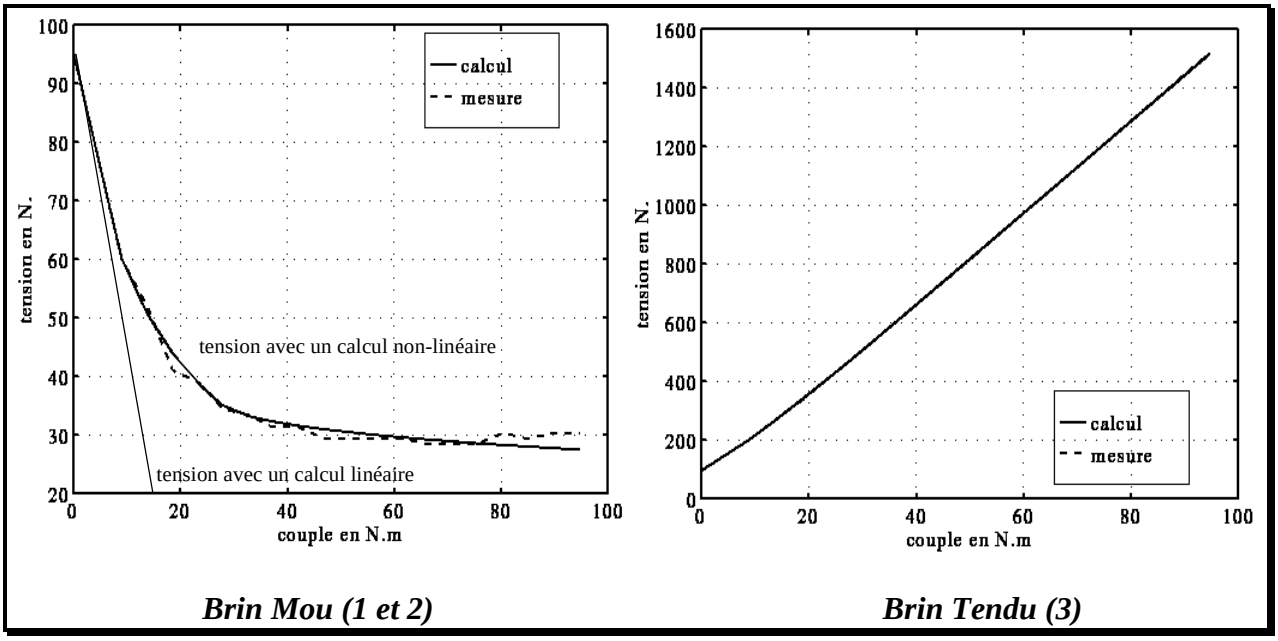


Figure III. 30 : Recalage des tensions en fonction du couple appliqué sur la poulie 3.

Une très bonne corrélation est obtenue entre les résultats calculés et mesurés. On ne distingue pas la tension calculée et mesurée pour le brin tendu pour des raisons d'échelle.

Il est intéressant de visualiser la sensibilité de la tension en fonction de la rigidité de flexion. On constate sur la figure III.31 que la tension dans le brin mou est très sensible à la rigidité de flexion. Pour un couple de 9 N.m, nous avons une pente de 5177.7 m^{-2}. Cinq Newton sont donc ajoutés dans tous les brins lorsque la rigidité de flexion augmente de 0.001 N.m², pour un couple de 9 N.m. Cette sensibilité diminue lorsque la valeur du couple augmente. On peut donc s'attendre à une hausse de la tension dans les brins lorsque l'épaisseur de la courroie augmente.

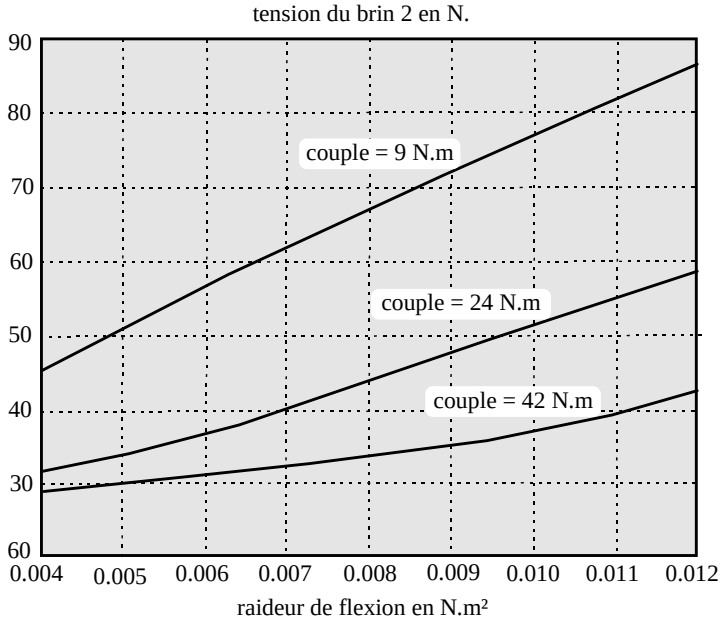


Figure III. 31 : Tension dans le brin mou pour trois couples en fonction de la raideur de flexion.

III.5.2. Validation du calcul de la rotation des poulies

La validation du calcul de la rotation des poulies se fait avec une courroie de type ISORAN® sur la transmission visualisée sur la figure III.1. Un couple variable est appliqué sur la poulie 3. La poulie 1 est bloquée. La comparaison de la rotation mesurée et calculée des poulies 2 et 3 permet de savoir si la matrice de raideur de l'équation du mouvement est correctement calculée.

Nous constatons l'excellente concordance des rotations calculées et mesurées des poulies 2 et 3 sur les figure III.32 à III.34. Elle est notamment remarquable pour les couples de moins de 40 N.m imposés à la poulie 3.

La courbe de rotation des poulies 2 et 3 est globalement linéaire quelque soit la tension de pose ce qui pourrait sous-entendre que les dents de courroie n'interviennent pas. Toutefois, nous remarquons que la rotation varie de 0.02 à 0.035 rd pour un couple de 90 N.m. Il y a donc un assouplissement avec la baisse de la tension ce qui indique que la raideur des dents intervient dans la raideur globale des brins. La courbe linéaire de rotation des poulies 2 et 3 indique que l'assouplissement des dents avec leurs déformations propres (figure III.17) est compensée par une augmentation de leur charge radiale entraînant un durcissement de celles-ci (figure III.16).

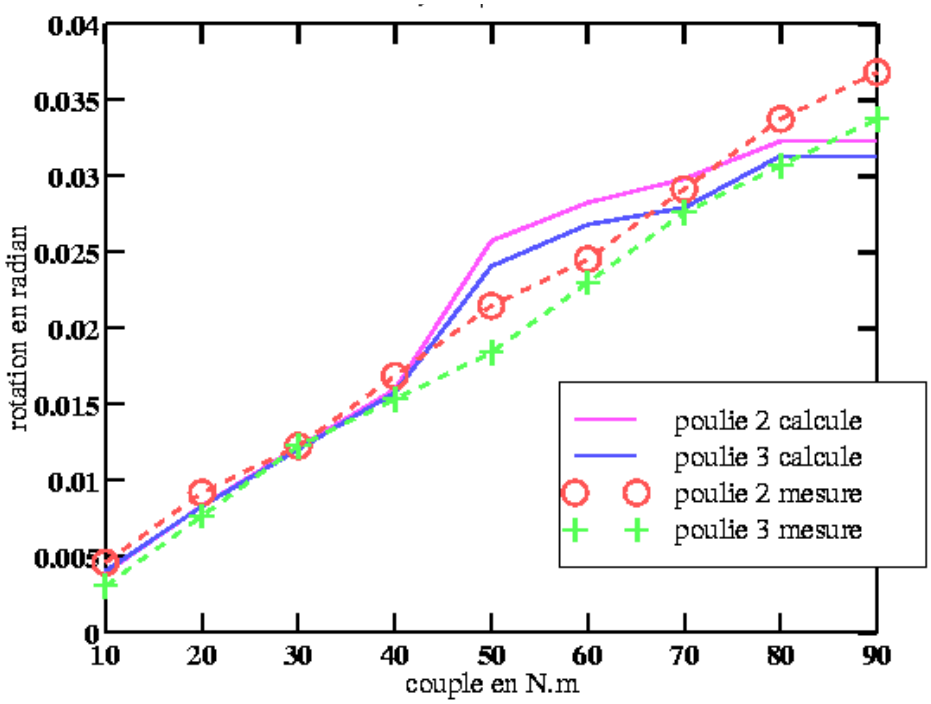


Figure III. 32 : Rotations mesurées et calculées des poulies 2 et 3 pour T_0 = 83 N.

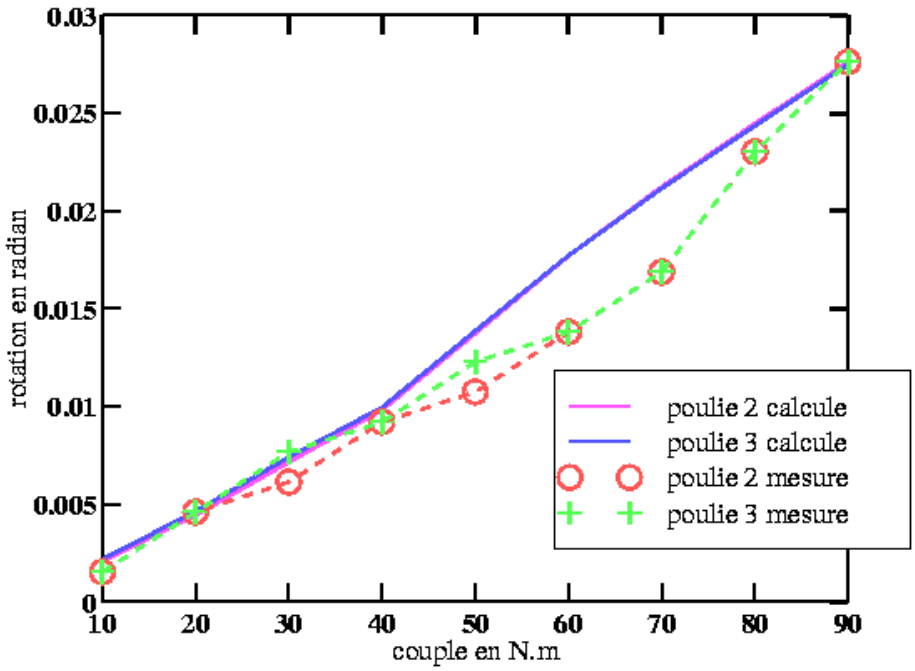


Figure III. 33 : Rotations mesurées et calculées des poulies 2 et 3 pour T_0 = 303 N.

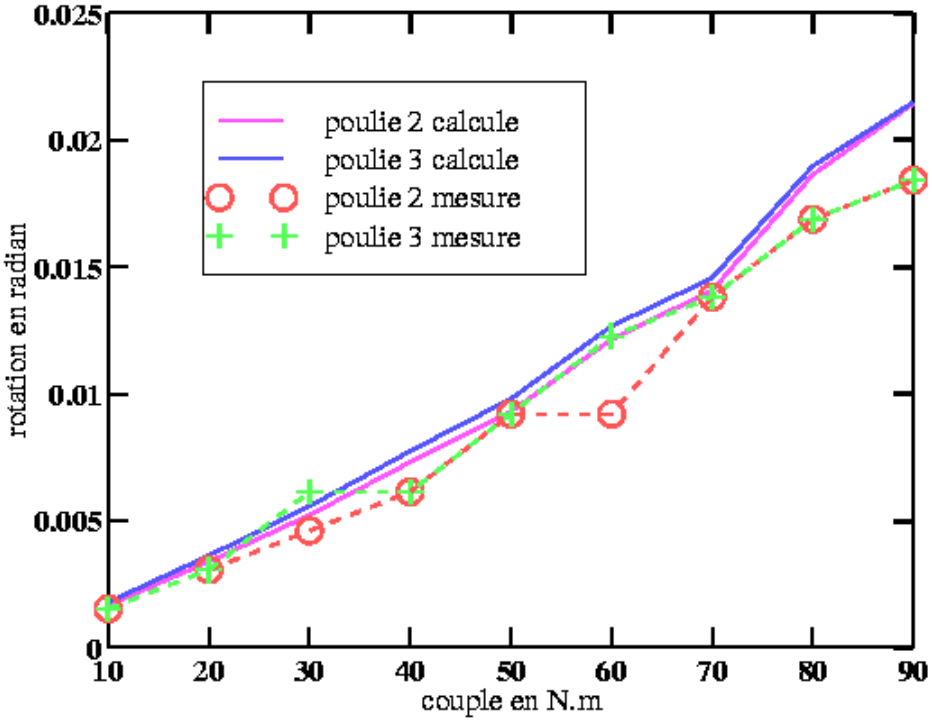


Figure III. 34 : Rotations mesurées et calculées des poulies 2 et 3 pour T_0 = 546 N.

III.6. Conclusion

La confrontation des mesures de tension dans les brins et de rotation des poulies avec les résultats calculés est encourageante. Le modèle de tension non-linéaire est bien recalé en statique sur une grande plage de couple. En outre, le modèle de tension montre l'importance de la rigidité de flexion dans le calcul des tensions dans les brins. Une variation de la rigidité de flexion pourrait avoir des répercussions sur le fonctionnement de la transmission en dynamique. D'autre part, la présence des dents de courroie rend la rigidité de flexion variable le long d'un brin. L'impact de cette variation reste à étudier, notamment sur les vibrations transversales. Le décollement d'une partie de la courroie enroulée sur la poulie (figure II.22) pourrait expliquer le phénomène acoustique de claquage qu'on entend parfois dans ce type de transmission. Le claquage de la courroie contre la poulie entraînant une expulsion d'air peut être à l'origine de ce bruit. Le décollement d'une partie de la courroie enroulée est pris en compte lors du calcul de la répartition des charges sur les dents de courroie en prise sur la poulie.

La rotation des poulies calculée par le modèle est assez proche de celle mesurée sur le banc. En conséquence, nous pouvons conclure à une bonne représentativité du calcul de la matrice de raideur de l'équation du mouvement. Ce calcul fait apparaître le rôle de la denture de la courroie en prise sur les poulies Toutefois, la représentativité reste à confirmer avec d'autres géométrie de transmission et d'autres courroies. Alors, l'étape suivante concernant une validation sur des cas en dynamique, pourra s'effectuer.

Ces résultats n'ont pu être obtenus qu'avec l'élaboration d'une nouvelle méthode de caractérisation de la raideur d'une dent de courroie en fonction de sa charge tangentielle et radiale. Cette méthode utilisée ensuite par un technicien, a montré sa fiabilité et sa simplicité d'usage.

QUATRIÈME CHAPITRE

Calcul et Discussion

SOMMAIRE

IV.1. INTRODUCTION 202

IV.2. PORTRAIT DE LA TRANSMISSION DE DISTRIBUTION 202

IV.3. EXPLOITATION ET ANALYSE D'UNE TRANSMISSION SIMPLIFIÉE 205

IV.3.1. IDENTIFICATION DES MODES CRITIQUES 207
IV.3.1.1. Mode critique de rotation du galet tendeur 209
IV.3.1.2. Mode critique de rotation de la poulie réceptrice 212
IV.3.1.3. Mode critique du déplacement du tendeur 215
IV.3.1.4. Modes critiques des paliers 217
IV.3.1.5. Évolution des modes critiques 219
IV.3.2. ÉVOLUTION DE LA TRAJECTOIRE DES PALIERS 220
IV.3.3. ÉVOLUTION DE LA TENSION DANS LES BRINS 225
IV.3.4. COMPORTEMENT DU TENDEUR DYNAMIQUE (DISCUSSION SUR LA CONSTANTE D'EFFICACITÉ DU TENDEUR η) 231
IV.3.5. CHARGE SUR L'ÂME ET LES DENTS DE COURROIE 235

IV.4. CAS INDUSTRIEL D'UNE TRANSMISSION DE DISTRIBUTION 240

IV.5. CONCLUSION 243

IV.1. Introduction

Le troisième chapitre a permis de valider certaines parties du logiciel DYNAPOUL. Une analyse systématique des résultats de calcul en dynamique permet en outre de vérifier la cohérence des résultats, notamment avec ceux présentés dans la bibliographie. Une campagne de simulations numériques est donc menée sur la base d'une transmission simplifiée (chapitre IV.IV.3) par courroie dentée. Une telle transmission facilite l'analyse scientifique du problème. L'objectif est de déterminer les paramètres influents sur le comportement dynamique de la transmission. Les effets étudiés sont la tension dans les brins, le déplacement des paliers, le comportement du tendeur, l'acyclisme des poulies, et l'évolution de la tension en un point de la courroie. Ce travail d'analyse introduit la validation complète du modèle sur moteur automobile, et à terme, l'ébauche de lois de conception des transmissions de distribution de moteur automobile.

En dernière partie (chapitre IV.IV.4), une simulation sur un cas industriel permet d'illustrer l'utilité d'un tel modèle dans l'industrie automobile. Mais, au préalable, une description des transmissions de distribution de moteur automobile permet de comprendre les différents types de sollicitations.

IV.2. Portrait de la transmission de distribution

La transmission d'une distribution d'un moteur à combustion interne est soumise à des excitations qui lui sont externes. Principalement, il s'agit des variations de couples aux arbres à cames et l'acyclisme du pignon moteur relié au vilebrequin. Une analyse pertinente du comportement d'une transmission de distribution ne peut se réaliser qu'à partir d'une bonne intelligence des phénomènes excitateurs. Ce chapitre décrit donc les caractéristiques des couples aux arbres à cames et l'acyclisme du pignon moteur.

♦ *Couple à l'arbre à cames :*

La distribution permet la régulation des échanges gazeux qui interviennent dans la chambre de combustion, par l'intermédiaire des soupapes. Celles-ci sont actionnées par des cames et des ressorts engendrant un couple résistant au niveau de l'arbre à cames. Le calage entre le mouvement des cames activant les soupapes d'échappement et les cames des soupapes d'admission, est défini par le diagramme de la distribution (figure IV.1).

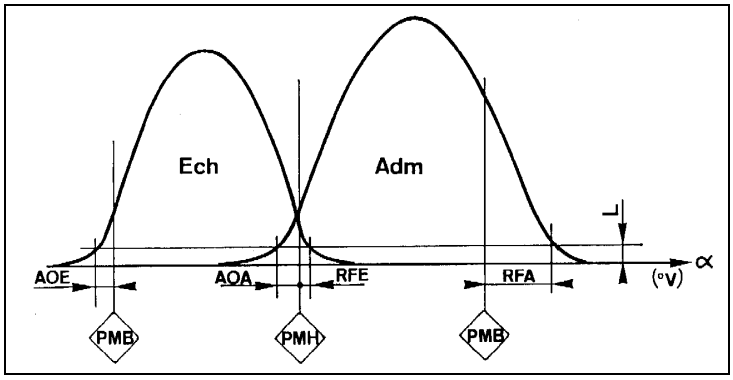


Figure IV. 1 : Calage de la distribution.

Ce calage influe sur la résultante des couples exercés par les cames sur l'arbre à cames. Cependant, la

vitesse de rotation est le facteur majeur affectant le couple sur l'arbre (figure IV.2). À basse vitesse, le couple est sinusoïdal de fréquence 1.5N (N étant la fréquence de rotation du pignon moteur) dans le cas du moteur 3 cylindres de la figure IV.2. Le couple moyen est de 6.2 N.m ce qui est peu en regard de l'amplitude d'oscillation. Nous constatons, en revanche, que la loi du couple à l'arbre à cames devient plus complexe avec des harmoniques bien marquées (le 5ème harmonique, soit 9N, présente encore une amplitude de 19.1 N.m) et une amplitude globale du signal en fort accroissement. Les harmoniques de plus haut degré ne sont pas à négliger, car elles sont susceptibles d'exciter les modes de transmission liés aux paliers.

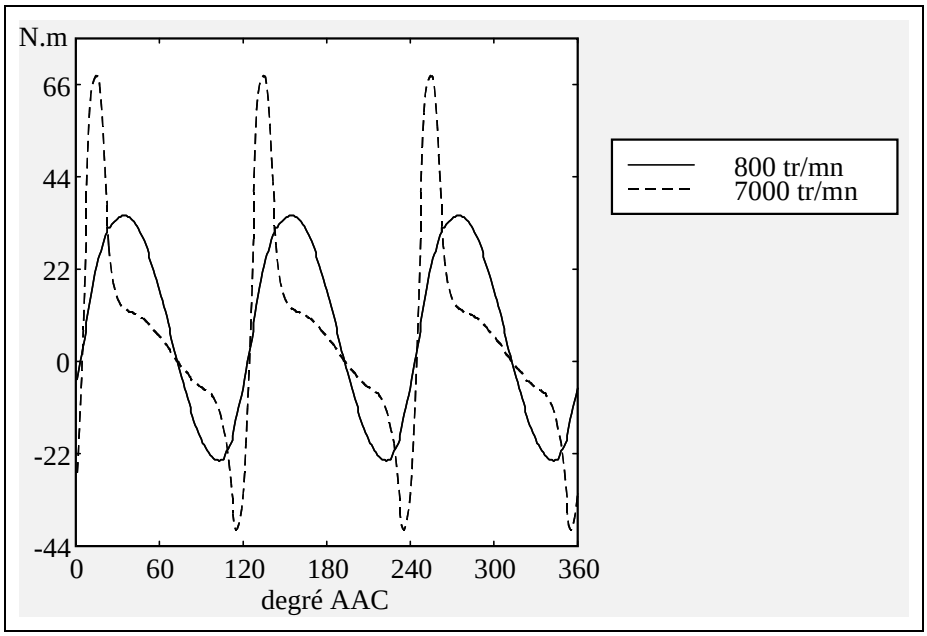


Figure IV. 2 : Couple pour un simple arbre à cames en tête d'un moteur 3 cylindres à tendance sportive avec comme diagramme de distribution AOA=-15° RFA=45° AOE=45° RFE=-15°.

♦ ***Acyclisme du pignon moteur :***

L'acyclisme moteur provient de l'irrégularité du couple issue du groupe moto-propulseur. Ce couple est la composition de deux actions distinctes : (1) les actions d'inerties dues aux masses en rotation (les arbres dont le vilebrequin) et les masses en translation (bielles et pistons) ; (2) les actions motrices dues à la combustion des gaz. Pour un bas régime de rotation, le couple moteur est essentiellement dû à la combustion des gaz. Le couple issu de la combustion s'oppose au couple inertiel dû à la bielle et au piston. En effet, lors de combustion des gaz, l'ensemble bielle-piston est dans une phase d'accélération. L'inertie de l'ensemble s'oppose donc à la rotation du vilebrequin. On dit alors que l'inertie compense la charge. Cela est surtout vrai à haut régime de rotation où l'inertie prend le pas sur l'action des gaz. La figure IV.3 montre que le couple maximum pour un monocylindre à 5400 tr/mn est supérieure, lorsqu'on ne considère que les actions d'inertie (308 N.m pour le cas sans charge), au couple maximum pour le cas avec l'action des gaz (307 N.m pour le cas avec charge). Il s'ensuit des formes complexes du couple instantané, et par conséquent de l'acyclisme moteur. Les facteurs importants sont la masse et la géométrie (notamment le rapport de longueur bielle/maneton) des pièces du moteur en mouvement, ainsi que la courbe de pression des gaz.

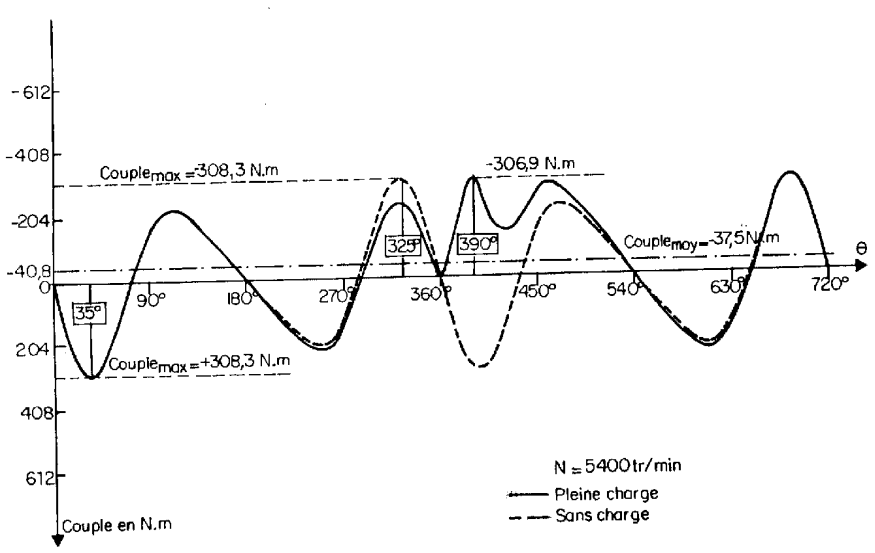


Figure IV. 3 : Couple moteur pour un monocylindre.

Pour les moteurs multicylindres, le couple instantané dépend, en plus des facteurs précédemment nommés, de l'architecture adoptée pour le moteur, soit :

- ◊ du nombre de cylindres et de leur disposition (en ligne ou en V),
- ◊ du type de vilebrequin utilisé (pour un V6 ouvert à 60°, un vilebrequin à trois ou six manetons peut être par exemple utilisé, ce qui modifie le couple inertiel sur le vilebrequin),
- ◊ de l'ordre d'allumage et de l'intervalle entre deux allumages. Ce point est imposé par les deux facteurs précédents. Par exemple, un V6 ouvert à 60°peut présenter un allumage équidistant tout les 120° ou un allumage par période de 60° puis 180°.

La figure IV.4 illustre le cas du V6 ouvert à 90° à 3200 tr/mn. À ce régime, le couple dû aux gaz est prédominant. On distingue alors sur la figure les fréquences d'allumage à 90° et 180°. La décomposition sur une base de fonction circulaire (figure IV.5) montre un grand nombre de fortes harmoniques de périodicité 0.5N (soit 0.5, 1, 1.5, 2, ...N) avec une prépondérance des harmoniques 1.5N. Nous constatons; en définitive avec le couple aux arbres à cames et le couple moteur, qu'*un grand nombre de fréquence* est susceptible d'exciter la transmission de la distribution.

Pour conclure ce chapitre sur les excitations externes, nous pouvons également examiner les accessoires qui peuvent être entraînés par la transmission de la distribution. Il peut s'agir de la pompe à eau ou de la pompe à huile.

La *pompe à eau* est du type centrifuge avec en général, 7 ou 8 pales. La fréquence d'excitation est alors égale au nombre de pales de la turbine par tour de rotation de l'arbre de la pompe. Les *pompes à huile* du type trochoïdale tendent à se généraliser sur les moteurs modernes nécessitant un graissage performant. La pression d'aspiration et de refoulement est obtenue grâce à l'engrènement de deux rotors. La fréquence d'excitation est alors égale à la fréquence d'engrènement, soit le nombre de dents du rotor intérieur (moins d'une dizaine) par tour du rotor intérieur.

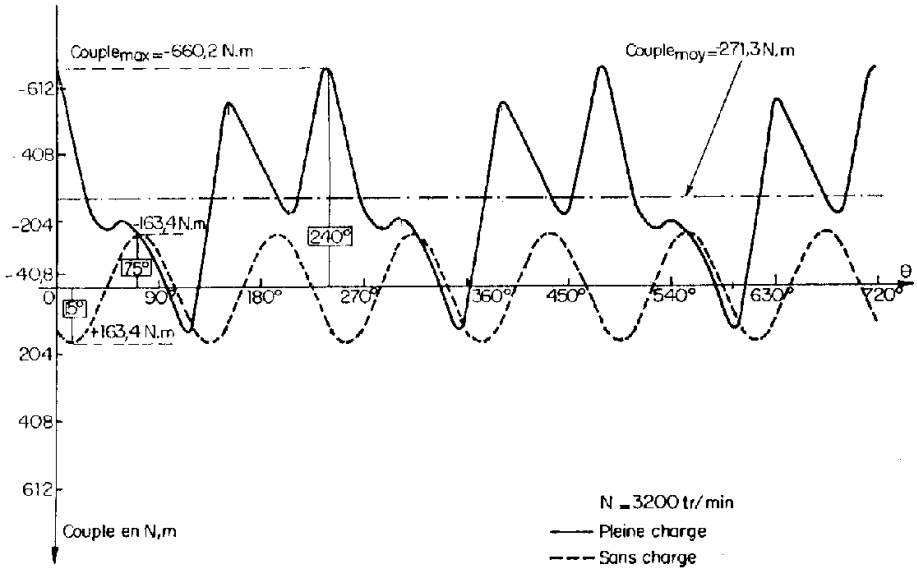


Figure IV. 4 : Couple moteur pour un V6 ouvert à 90°.

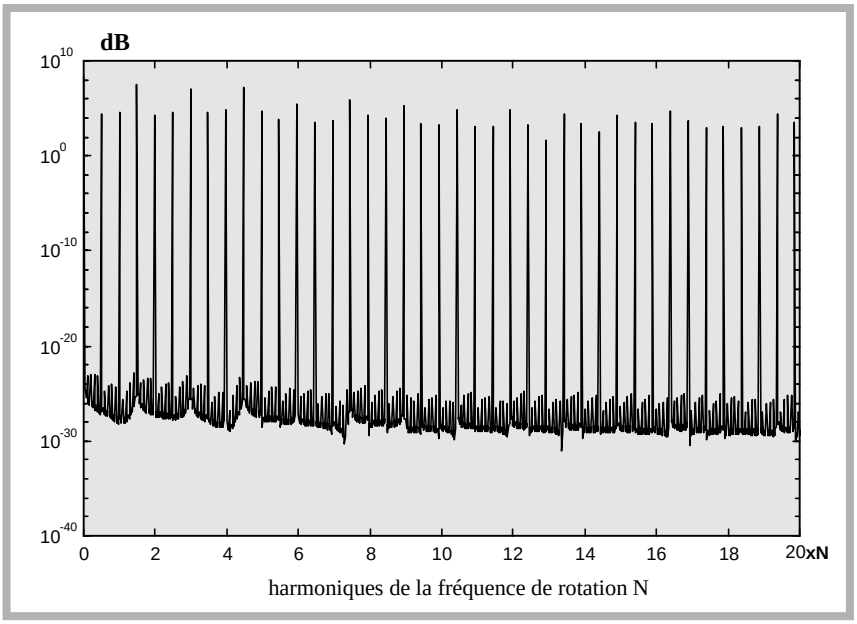


Figure IV. 5 : spectre de puissance du couple d'un V6 ouvert à 90°.

IV.3.Exploitation et analyse d'une transmission simplifiée

L'étape préliminaire pour la compréhension des phénomènes de base sur le comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée est l'étude d'une transmission simplifiée appelée aussi cas d'école.

Le cas d'école est composé de deux poulies dentées et d'un galet associé à un tendeur dynamique, représenté sur la figure IV.6. La courroie mesure 1.1 mètre de long et ses

caractéristiques mécaniques se rapprochent de celles d'une courroie ISORAN® étudiée au chapitre III.4.1.1.5. La tension de pose est 200 N. La raideur en torsion du tendeur (60 N.m/rd) est du même ordre de grandeur que d'autres valeurs présentées dans la bibliographie (28.25 N.m/rd [Hwang et al., 1994] - 54.37 N.m/rd [Beikmann et al., 1996 (a)] - 20.37 N.m/rd [Beikmann et al., 1997]). L'amortissement du tendeur est nul ce qui permet de visualiser son rôle. Deux cas seront considérés quant à l'amortissement des paliers : amortis (valeur sur la figure IV.6) ou non amortis.

L'acyclisme de la poulie motrice 1 est nul. L'erreur cinématique est nulle sur toutes les poulies (chapitre II.3.6.4.2). Le torseur des efforts extérieurs est nul pour chaque poulie (chapitre II.3.6.4.1). Seule la poulie réceptrice 2 est excitée par un couple d'amplitude et de fréquence variable suivant les cas de calcul.

La compréhension des résultats de calcul passe par l'analyse des modes critiques effectuée au chapitre IV.IV.3.1. Ensuite vient la description du comportement des paliers à différentes fréquences d'excitation (chapitre IV.IV.3.2). Puis les paramètres influents sur la tension dans les brins sont décrits méthodiquement (chapitre IV.IV.1IV.3.3). Le comportement du tendeur est étudié par la suite en relation avec la constante d'efficacité du tendeur de R. S. Beikmann (chapitre IV.IV.3.4). Finalement, la tension d'un point de l'âme de la courroie et d'une dent est comparée suivant la différence de pas entre la poulie et la courroie (chapitre IV.IV.3.5).

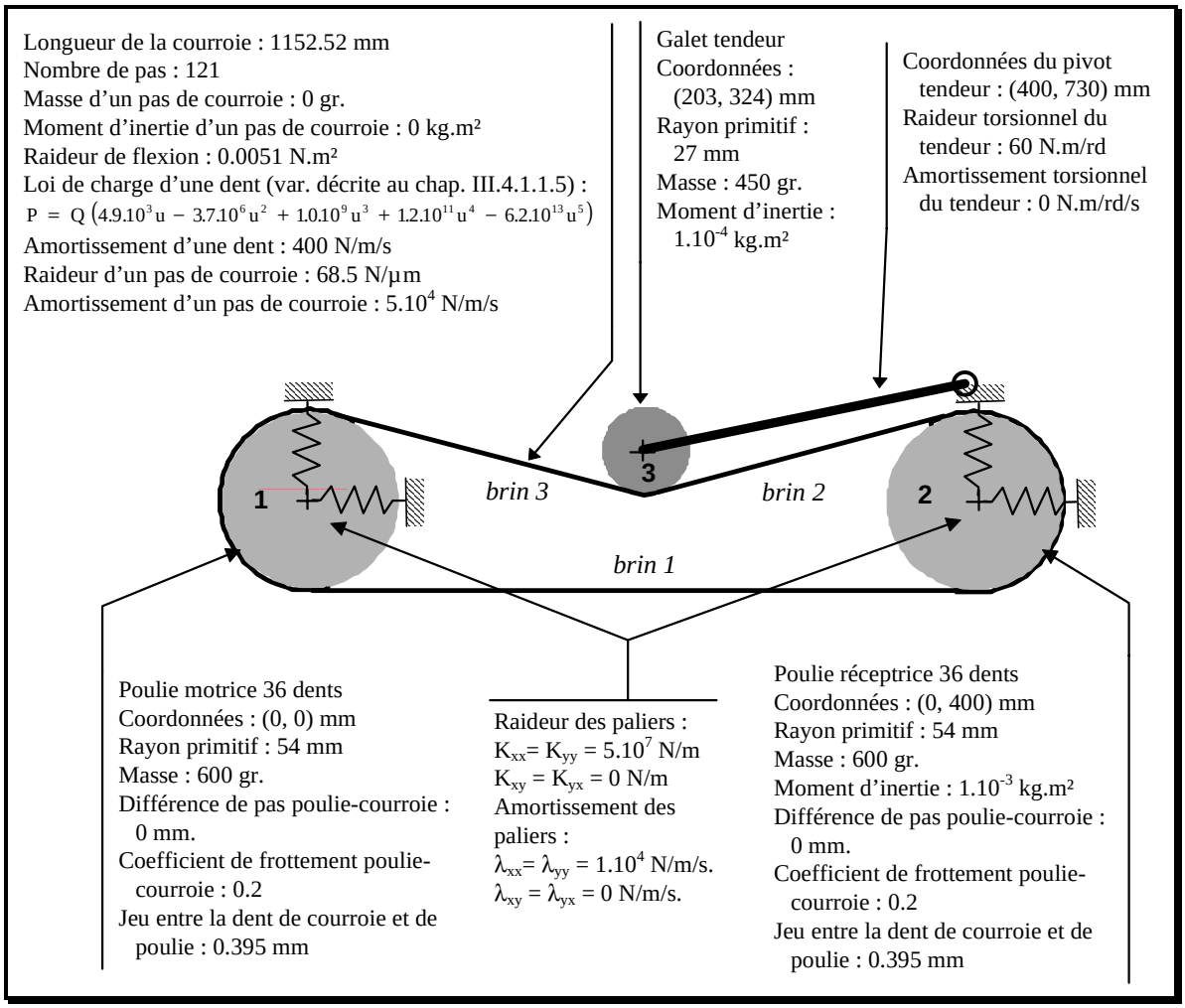


Figure IV. 6 : Caractéristiques du cas d'école.

IV.3.1. Identification des modes critiques

Le problème du mouvement des poulies est non linéaire. Dans ce cas , il n'existe pas réellement de mode de transmission constant. Nous avons en réalité "une tendance de mode" que nous pouvons calculer à partir des matrices de raideur et d'inertie moyenne. Ces modes "moyens" sont parfois appelés "modes critiques". Nous retiendrons cette dernière terminologie. Pour simplifier, l'amortissement n'est pas pris en compte dans le calcul des modes critiques. Le cas d'école comporte 7 degrés de liberté. Les sept modes résultants sont d'abord présentés selon leur forme et leur énergie dans deux figures complémentaires (figures IV.7 et IV.8), indépendamment de leur fréquence critique. Deux types d'analyses sont alors présentés afin d'identifier et d'ordonner les modes critiques selon leur importance :

- Il s'agit en premier lieu d'une *analyse formelle* visualisant sur la figure IV.7 la forme des modes critiques. Les pointillés représentent la position au repos de la transmission. La forme des modes critiques est calculée à partir des vecteurs propres contenant le déplacement en rotation et en translation des poulies. La rotation des poulies est évoquée par les secteurs angulaires de couleur claire. La flèche indique le sens de la rotation. L'amplitude maximum de la rotation de chaque poulie pour un mode critique est toujours schématisée par un secteur angulaire de 162° (ou 0.9π rd). La représentation des rotations propres aux poulies est donc relative à la plus grande amplitude de rotation. Le déplacement propre aux poulies est visualisé par la représentation des poulies vis-à-vis de leur représentation au repos en pointillé. De façon identique à la rotation, la visualisation des translations propres aux poulies est relative à la plus grande amplitude de déplacement.

- La représentation de la figure IV.7 ne donne toutefois pas la nature énergétique de chaque mode. Une *analyse énergétique* est donc effectuée en décomposant l'*énergie cinétique propre* de chaque mode ($\omega_i^2 {}^T\{\phi_i\}[M]\{\phi_i\}/2$ avec M, matrice de masse, ϕ_i, vecteur propre du mode critique i et ω_i, sa pulsation critique) en énergie élémentaire de translation (mouvement horizontal u et vertical v) et de rotation (θ_V) pour chaque poulie, par la décomposition de la matrice masse. En complément, la figure IV.8 visualise donc les couplages et l'énergie en jeu dans chaque type de mouvement pour chaque mode critique. Les barres minces concernent l'énergie cinétique des poulies en rotation. La couleur des barres précise la poulie à laquelle l'information se rapporte. Les barres larges concernent l'énergie de translation, c'est-à-dire selon le déplacement horizontal u et le déplacement vertical v. La longueur de chaque barre représente une énergie relative à l'énergie totale (100 %) du mode. L'énergie totale d'un mode critique est calculée à partir du modèle. Les variables de déplacement θ_i u_i v_i et leur vitesse sont obtenues par le calcul. Nous pouvons alors calculer l'*énergie cinétique moyenne* d'un mode critique à partir de la moyenne des carrés de la vitesse des degrés de liberté du modèle ($\dot{\theta}_i$, $\dot{u}_i$, $\dot{v}_i$) transposées dans l'espace modal. Cela permet de classer les modes critiques selon leur énergie cinétique calculée à partir du modèle et de comparer les énergies en faisant varier certains paramètres (exemple de la figure IV.12).

Les modes critiques sont calculés pour le cas d'école avec un couple égal à $4.\sin(2\pi.12N.t)$ et N = 6000 tr/mn. Des différences sur les modes peuvent apparaître avec la fréquence d'excitation et l'amplitude du couple. Il s'agit essentiellement d'un raidissement, donc d'une augmentation de la fréquence critique, avec l'importance du couple et de la fréquence d'excitation. Muni des informations fournies par les figures IV.7 et IV.8, nous pouvons analyser dans les chapitres suivants chaque mode critique.

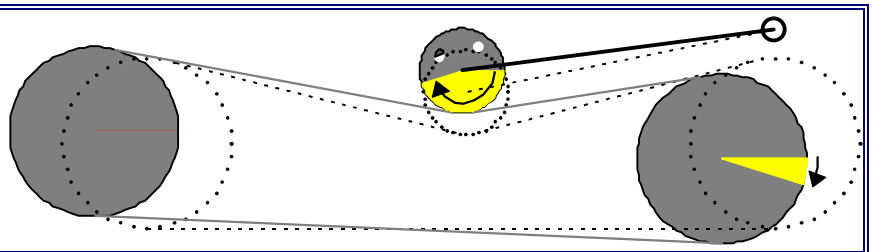
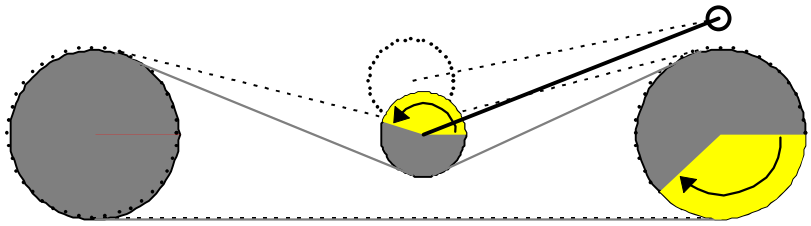
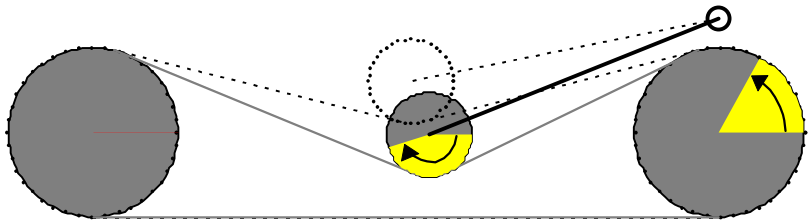
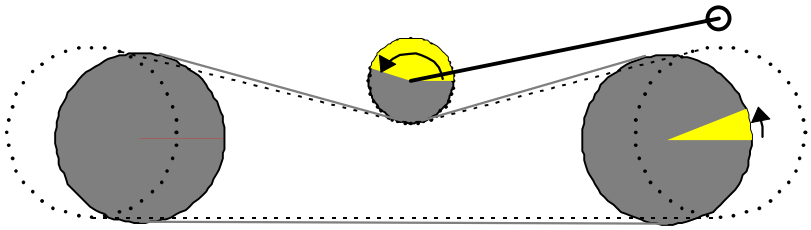
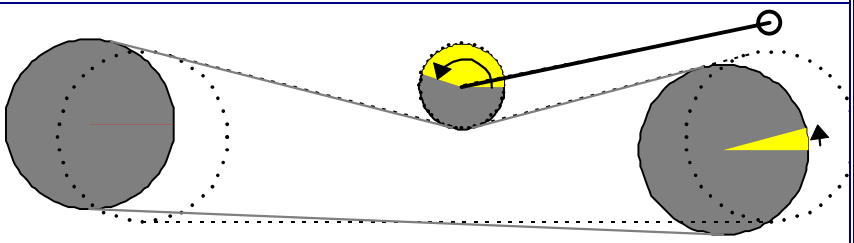
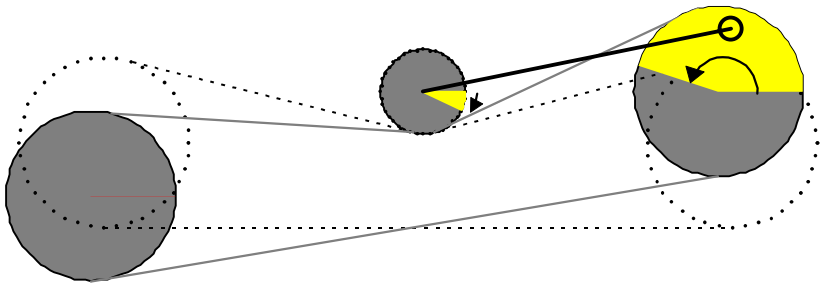
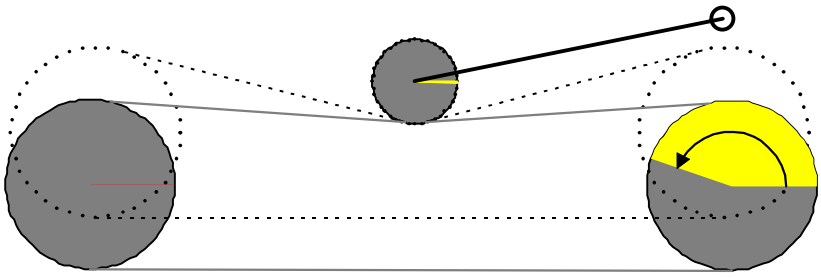
Mode 1 fréquence critique = 949.8 Hz	
Mode 2 fréquence critique = 397.7 Hz	
Mode 3 fréquence critique = 67.85 Hz	
Mode 4 fréquence critique = 1517.2 Hz	
Mode 5 fréquence critique = 1510.5 Hz	
Mode 6 fréquence critique = 1452.9 Hz	
Mode 7 fréquence critique = 1454.0 Hz	

Figure IV. 7 : Modes critiques du système conservatif pour le cas d'école.

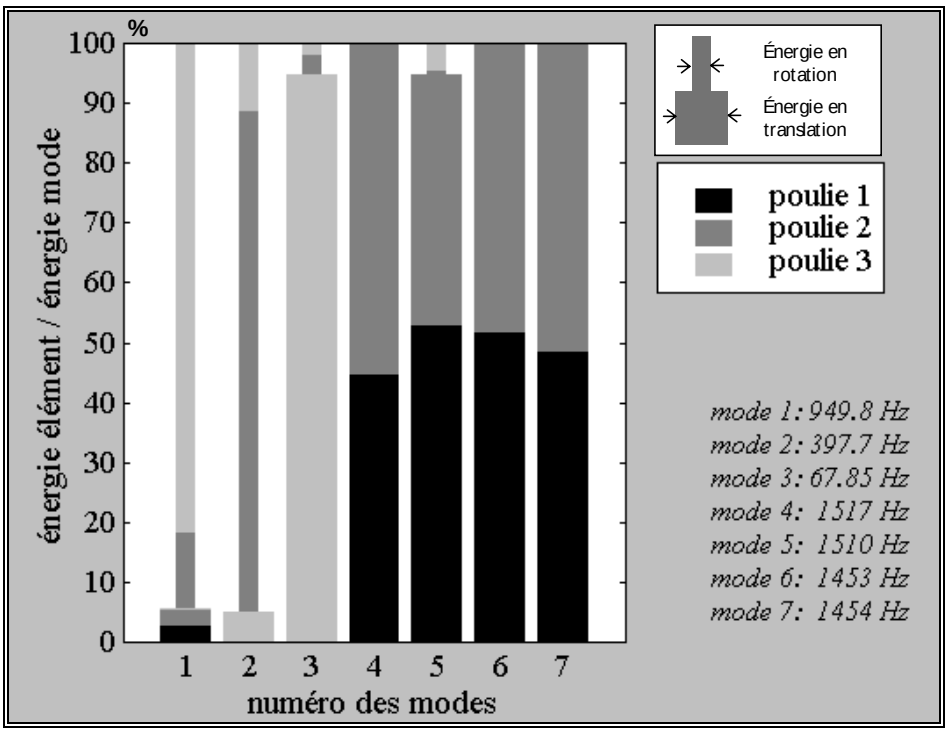


Figure IV. 8 : Visualisation des énergies cinétiques de translation et de rotation pour chaque poulie propres à chaque mode critique en rapport avec leur énergie totale pour le cas d'école.

IV.3.1.1. Mode critique de rotation du galet tendeur

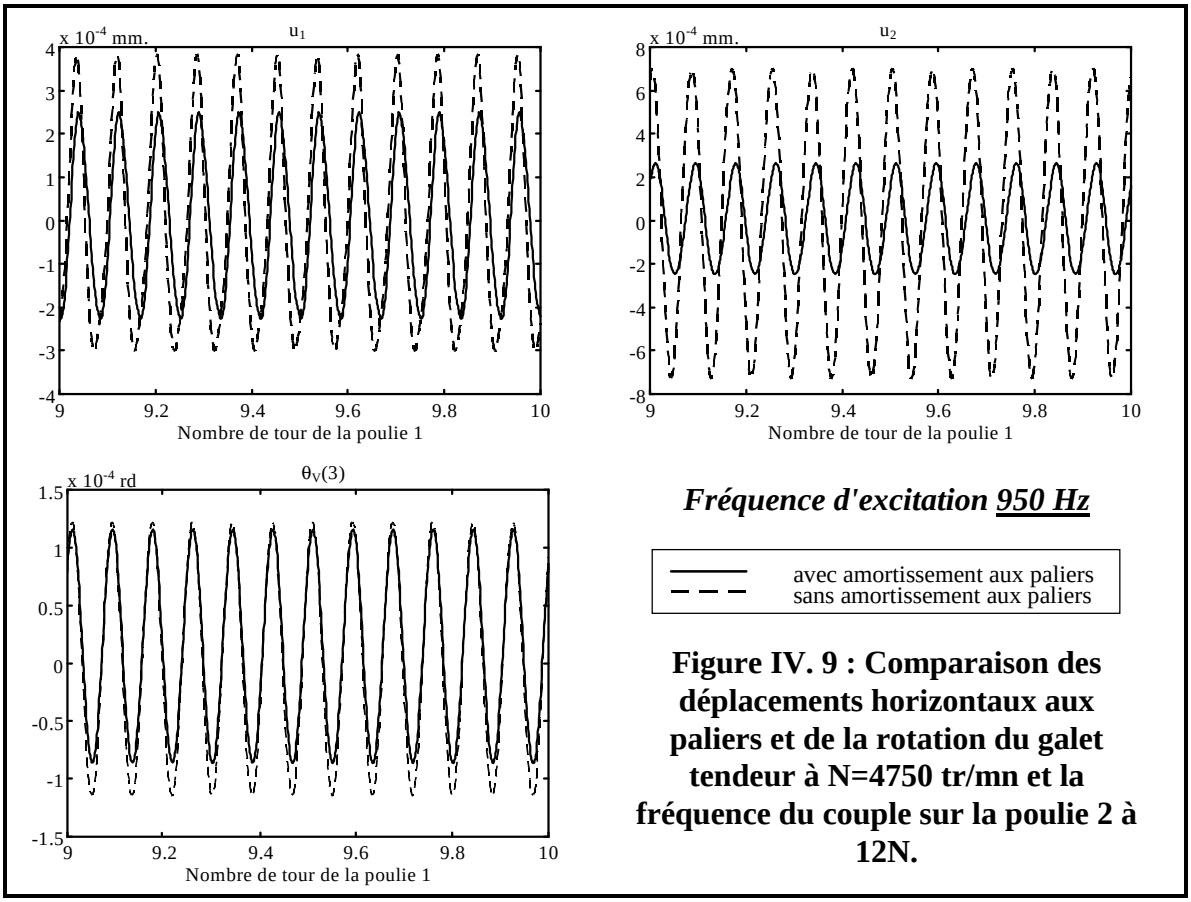


Figure IV. 9 : Comparaison des déplacements horizontaux aux paliers et de la rotation du galet tendeur à N=4750 tr/mn et la fréquence du couple sur la poulie 2 à 12N.

Nous constatons sur la figure IV.8 que le premier mode critique (950 Hz) est associé à la rotation de la poulie 3, c'est-à-dire du galet tendeur. Nous pouvons vérifier sur la figure IV.7 que la rotation du galet tendeur s'accompagne pour le mode 1 du mouvement horizontal des poulies 1 et 2. La rotation de la poulie 2 s'oppose à celle du galet tendeur. Le couplage avec la poulie 2 rend donc ce mode excitable par le couple appliqué sur la poulie 2. En outre, le comportement des paliers 1 et 2 a un effet sur la rotation du galet tendeur. Cela est confirmé par un calcul à 4750 tr/mn (figure IV.9). Le couple imposé sur la poulie 2 est $4.\sin(2\pi.12N.t)$. La fréquence d'excitation est par conséquent de 950 Hz ce qui permet d'exciter le mode 1. Nous obtenons une différence de comportement aux paliers en amortissant ceux-ci ($c_{xx} = c_{yy} = 1.10^4$ N/m/s et $c_{xy} = c_{yx} = 0$. d'après les variables du chapitre II.3.6.5) ou en annulant l'amortissement. Nous observons sur la figure IV.9 une nette diminution de l'amplitude du mouvement horizontal u pour les paliers 1 et 2, lorsque nous amortissons les paliers. Cette diminution s'accompagne d'une diminution de 21 % de l'amplitude de l'acyclisme du galet tendeur. Cette diminution est relativement faible, car les paliers 1 et 2 sont presque en opposition de phase (les paliers se rapprochent et s'éloignent en même temps) à 950 Hz (figure IV.11). Or, le mode 1 réagit lorsque les paliers sont en phase (figure IV.7 - mode 1). Nous pouvons constater sur la figure IV.11 que les paliers 1 et 2 se déplacent en phase lorsque les paliers ne sont plus amortis. Cela provient du mode critique de palier 5 (chapitre IV.IV.3.1.4) décrivant un mouvement horizontal des paliers en phase (figure IV.7 - mode 5). Cette évolution de la différence des phases entre le mouvement horizontal des paliers 1 et 2 engendre une forte diminution (de 29 à 10.10^{-5} rd) de l'amplitude de la rotation du galet tendeur lorsque nous amortissons les paliers. Le mode critique 1 devient alors le plus énergétique (figure IV.12). Contrairement à ce qu'on pouvait attendre, le mode 1 à 950 Hz ne réagit pas toujours sur sa fréquence critique, mais sous certaines conditions, lorsque les paliers 1 et 2 sont en phases. Les paliers jouent donc un rôle fondamental sur la rotation du galet tendeur.

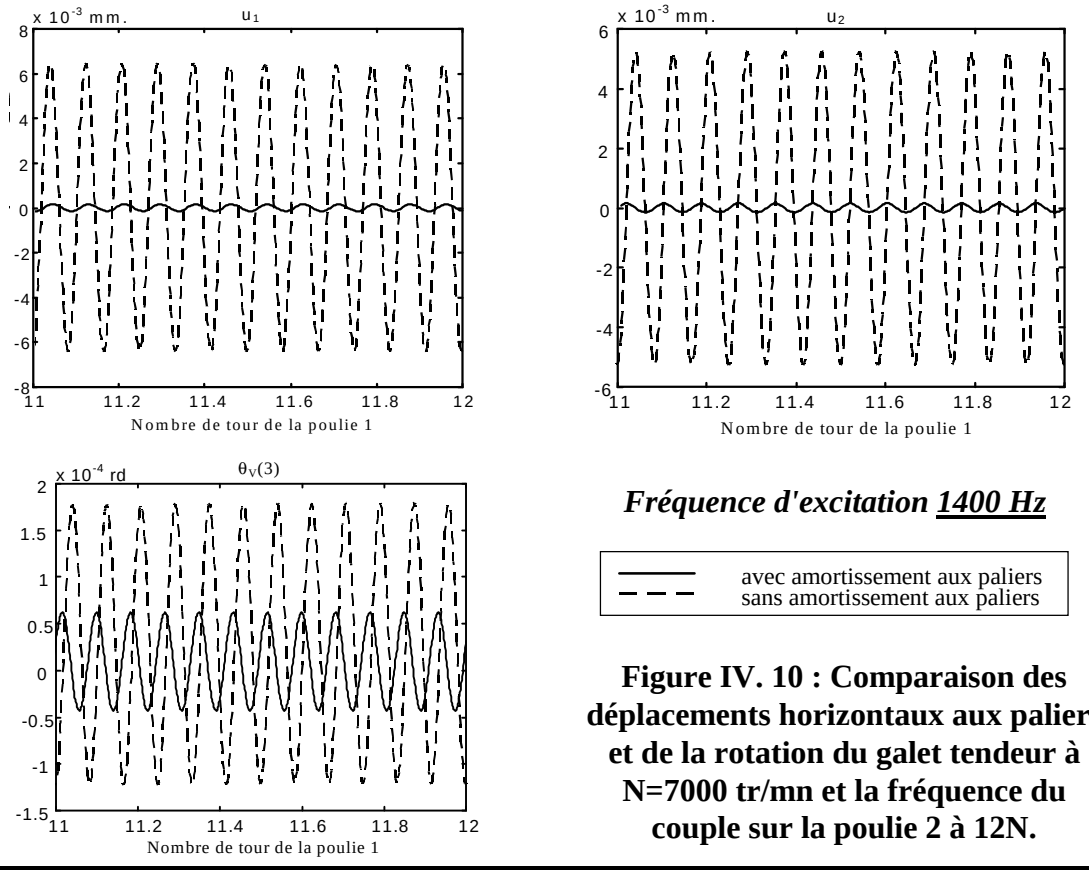


Figure IV. 10 : Comparaison des déplacements horizontaux aux paliers et de la rotation du galet tendeur à N=7000 tr/mn et la fréquence du couple sur la poulie 2 à 12N.

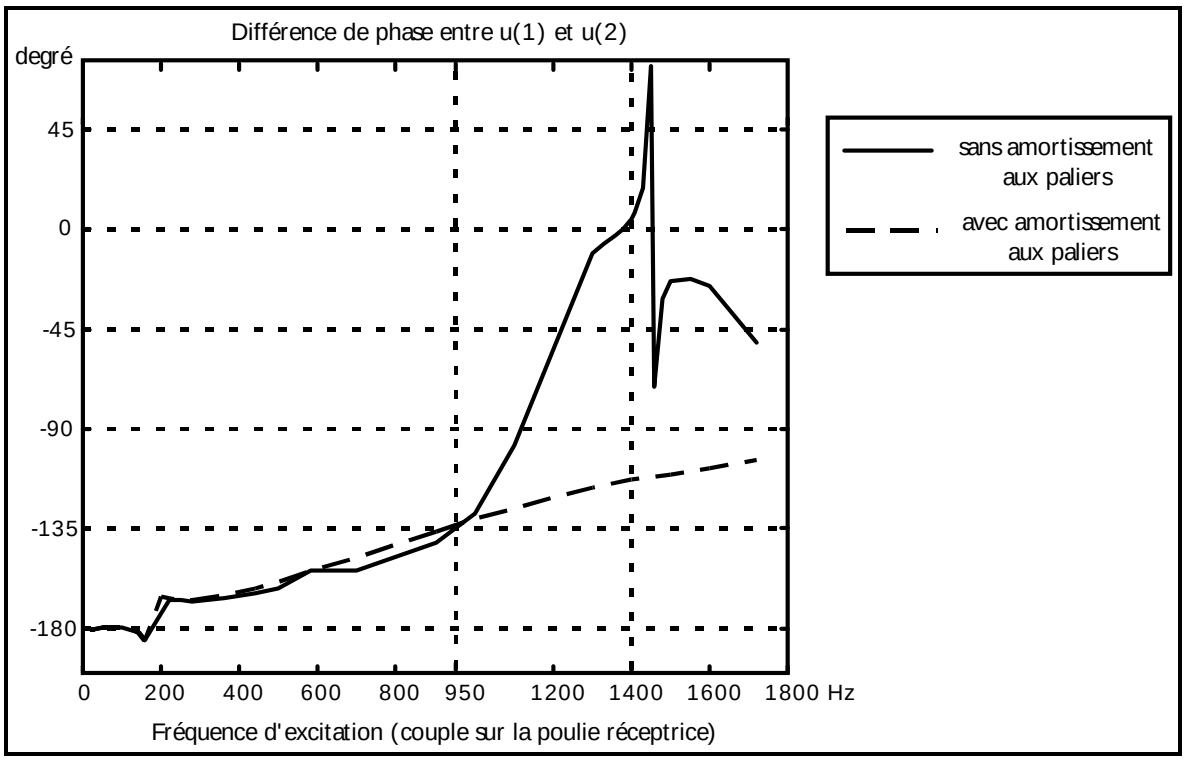


Figure IV. 11 :Comparaison pour deux cas d'amortissement aux paliers, des phases entre les déplacements horizontaux u des poulies 1 et 2 du cas d'école.

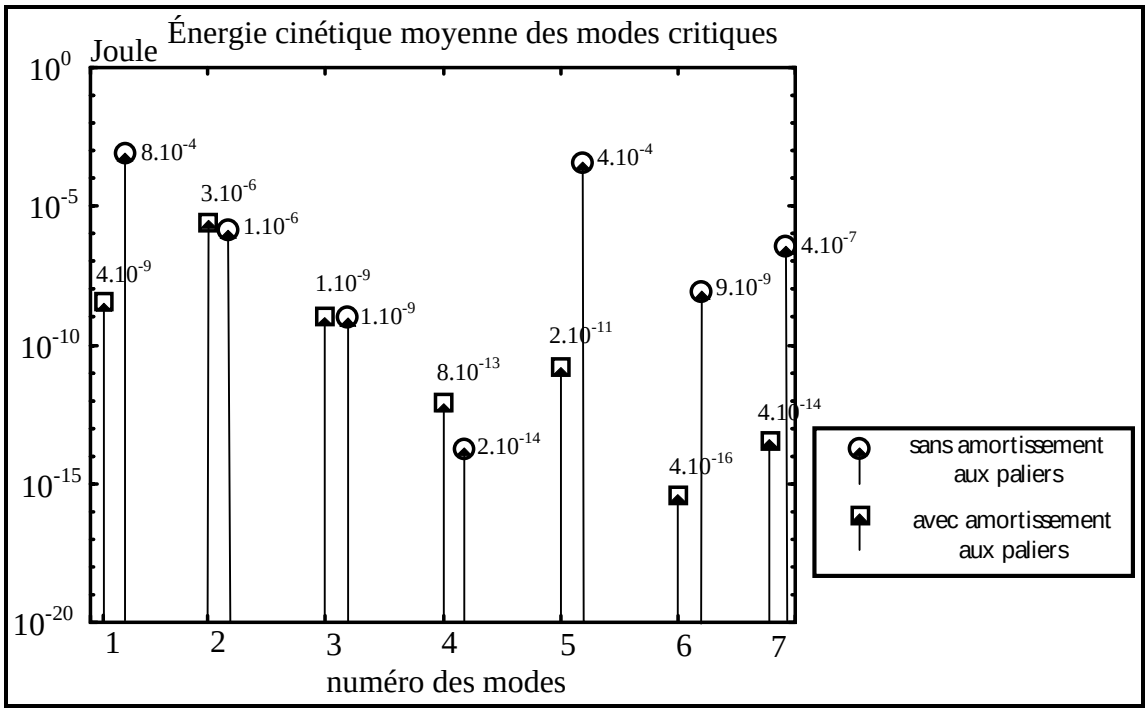


Figure IV. 12 : Évolution pour deux cas d'amortissement aux paliers, des énergies cinétique moyennes des modes critiques pour le cas d'école avec un couple sur la poulie réceptrice à 1400 Hz.

IV.3.1.2. Mode critique de rotation de la poulie réceptrice

Le deuxième mode critique *(398 Hz)* concerne la rotation de la poulie 2 (figure IV.8). Il est donc directement excité lorsqu'on applique un couple sur la poulie 2. Cela explique qu'il soit parmi les modes critiques les plus énergétiques quelle que soit la fréquence d'excitation du couple (figure IV.13). La variation périodique de la raideur globale et de l'amortissement global (voir chapitre II.3.5.3) des brins à la fréquence d'excitation (figure IV.14), accentue la prédominance de ce mode. L'annexe I rappelle qu'une résonance dite paramétrique se produit lorsque la fréquence de variation d'un paramètre est égale à n fois une fréquence naturelle d'un système. Un cas de calcul est effectué avec une excitation (couple sur la poulie 2) à 1200 Hz, soit environ 3 fois la fréquence critique du mode 2, avec les matrices d'amortissement et de raideur de l'équation du mouvement fluctuantes (calcul normal) ou constantes (fixées sur la valeur moyenne de celles-ci). Nous notons un écart de 22 % de l'énergie du mode 2 entre les deux cas de calcul (tableau IV.1). L'écart de 9.10^{-7} Joule de l'énergie calculée pour le mode 2 est d'autant plus remarquable qu'il est largement supérieur à l'énergie du mode 1, le deuxième mode le plus énergétique (tableau IV.1). Toutefois, le phénomène d'excitation paramétrique est très sensible à l'amortissement. Or, le polymère constitutif des courroies est très dissipateur. La validation en dynamique du modèle devra donc s'attacher à recaler la matrice d'amortissement, élément important pour l'excitation paramétrique.

Le deuxième mode critique concernant la rotation de la poulie 2, nous vérifions sur la figure IV.15 (c) que l'acyclisme de la poulie 2 est en quadrature de phase avec le couple à la fréquence critique d'environ 400 Hz. Les figures IV.15 (a) et (b) décrivent le décalage temporel entre le couple et l'acyclisme de la poulie 2.

Nous constatons également sur la figure IV.8 le couplage de la rotation de la poulie 2 avec le mouvement en translation du galet tendeur. Ces deux mouvements sont en opposition de phase (figure IV.7 - mode 2). En effet, lorsque la poulie 2 tourne d'un angle positif (c'est le cas sur la figure IV.7 - mode 2), le tendeur doit se lever pour compenser l'augmentation de la tension dans les brins 2 et 3. Les deux mouvements sont alors en phase. Pour une excitation de couple de fréquence faible (< 100 Hz), nous vérifions sur la figure IV.16 que le mouvement en translation du tendeur et la rotation de la poulie 2 sont bien en phase. Or, la forme du mode 2 montre que le tendeur s'abaisse lorsque la poulie tourne dans le sens positif (opposition de phase). Nous retrouvons ce comportement pour les fréquences plus élevées (figure IV.16) où le mouvement du tendeur passe la quadrature de phase (90°) pour se rapprocher de l'opposition de phase avec la rotation de la poulie 2. Ceci confirme la domination du mode 2 sur les autres modes. Ce déphasage de plus de 90° du déplacement vertical v_3 du tendeur par rapport à la rotation $\theta_V(2)$, déphasage imposé par le mode, ajouté au déphasage de 90° de la rotation $\theta_V(2)$ vis-à-vis du couple (figure IV.15 c), implique un déphasage de plus de 180° du déplacement vertical v_3 du tendeur avec le couple excitateur (figure IV.17). Le déphasage du déplacement vertical v_3 du tendeur avec le couple excitateur peut avoir des conséquences sur la variation des tensions dans les brins. Cependant, l'amplitude du déplacement du tendeur n'est pas suffisante à la fréquence critique de 398 Hz (figure IV.18) pour perturber la tension dans les brins. La discussion sur ce point continue au chapitre suivant.

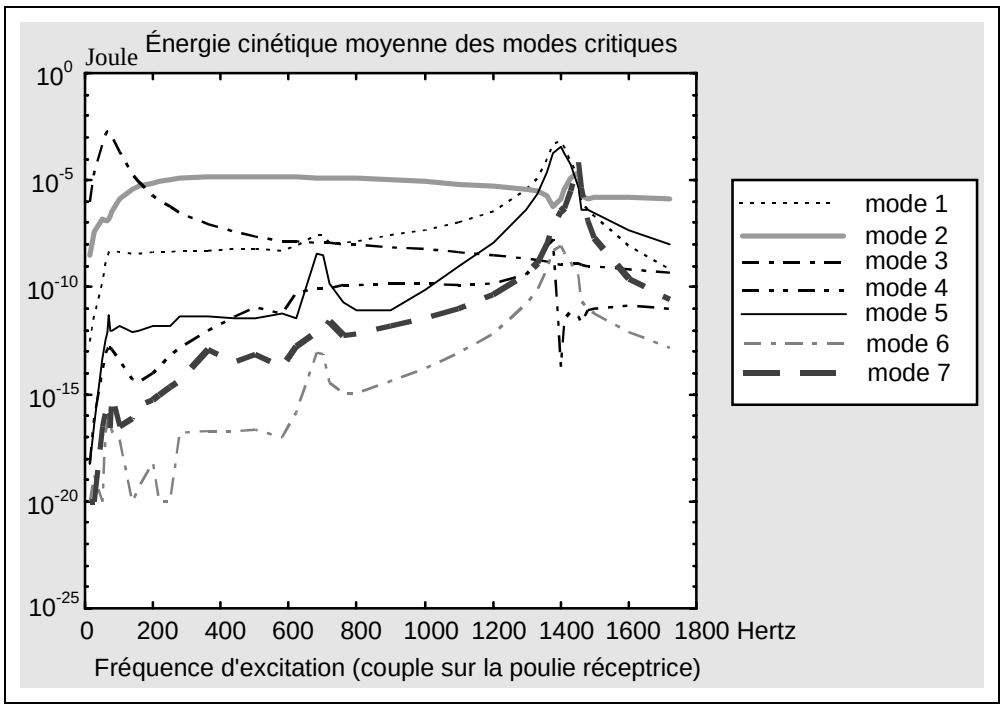


Figure IV. 13 : Spectre en fréquence de l'énergie cinétique moyenne par mode pour le cas d'école (tendeur et palier non amorti).

	Énergie (Joule)	
	Matrice de raideur et d'amortissement constante	Matrice de raideur et d'amortissement périodique
Mode critique 1	**$4.509.10^{-9}$**	**$7.0029.10^{-9}$**
Mode critique 2	**$3.9586.10^{-6}$**	**$4.8348.10^{-6}$**

Tableau IV. 1 : Énergie des deux modes les plus énergétiques avec une fréquence d'excitation 1200 Hz du couple (12N avec N=6000 tr/mn) appliqué sur la poulie 2 du cas d'école (paliers amortis).

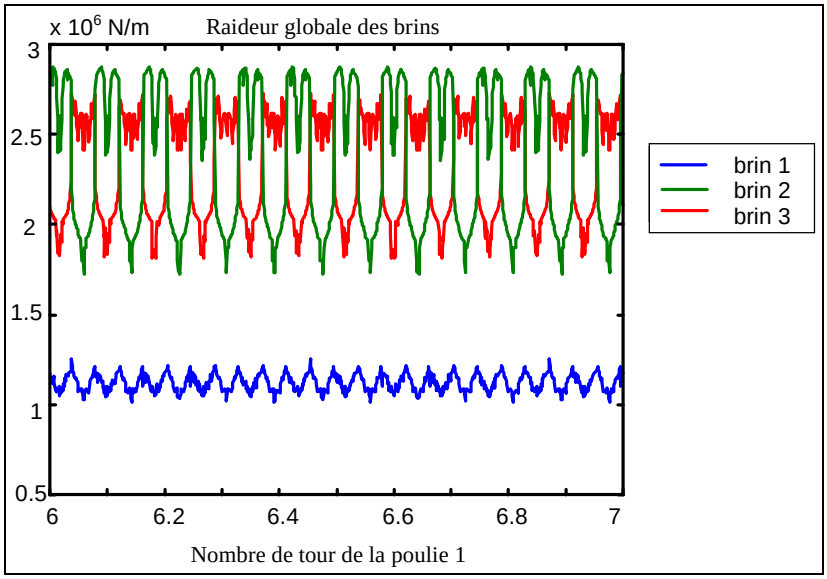


Figure IV. 14 : Variation de la raideur globale des brins à la fréquence d'excitation 1200 Hz du couple (12N avec N=6000 tr/mn) appliqué sur la poulie 2 du cas d'école (paliers amortis).

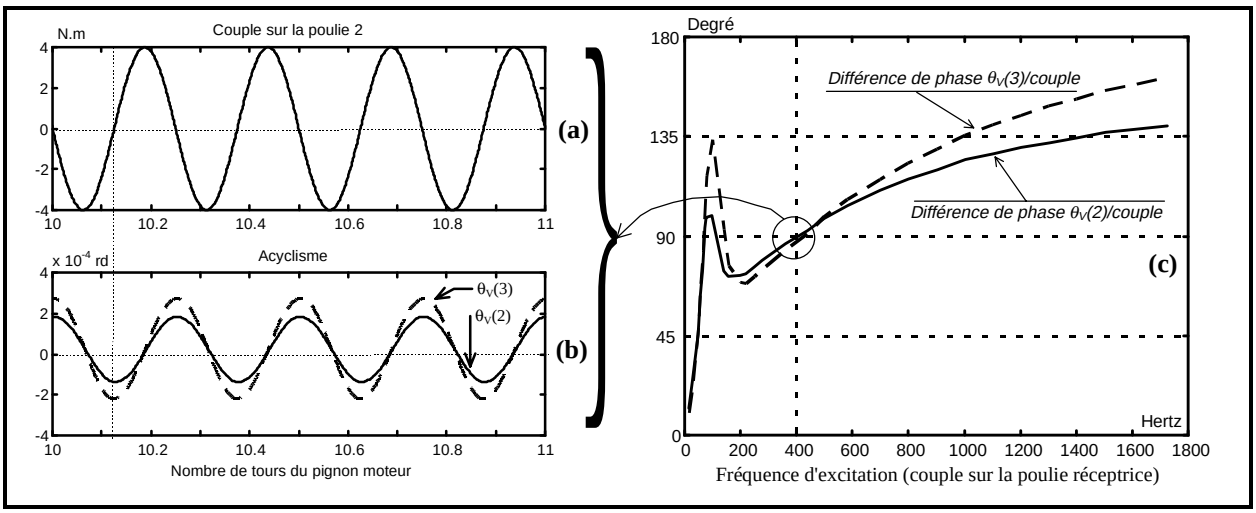


Figure IV. 15 : Visualisation du déphasage entre l'acyclisme des poulies 2 et 3 et le couple à 400 Hz pour le cas d'école (paliers amortis).

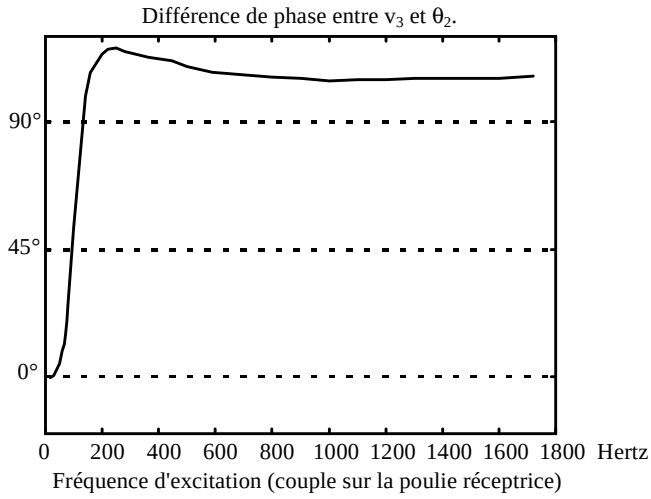


Figure IV. 16 : Spectre en fréquence du déphasage entre le mouvement vertical v_3 du tendeur et la rotation θ_2 de la poulie 2 pour le cas d'école (paliers amortis).

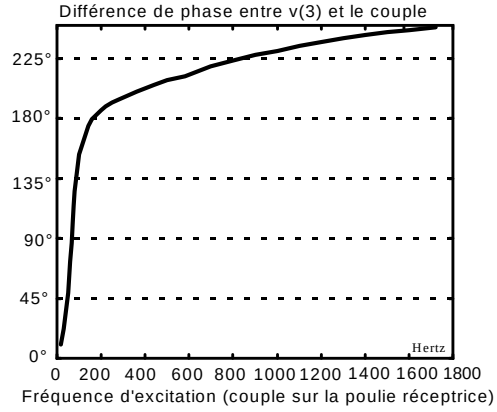


Figure IV. 17 : Spectre en fréquence du déphasage entre le mouvement vertical v3 du tendeur et le couple à 400 Hz pour le cas d'école (paliers amortis).

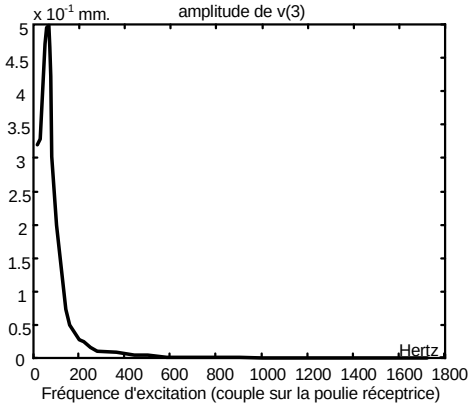


Figure IV. 18 : Spectre en fréquence de l'amplitude entre le mouvement vertical v3 du tendeur et le couple à 400 Hz pour le cas d'école (paliers amortis).

IV.3.1.3. Mode critique du déplacement du tendeur

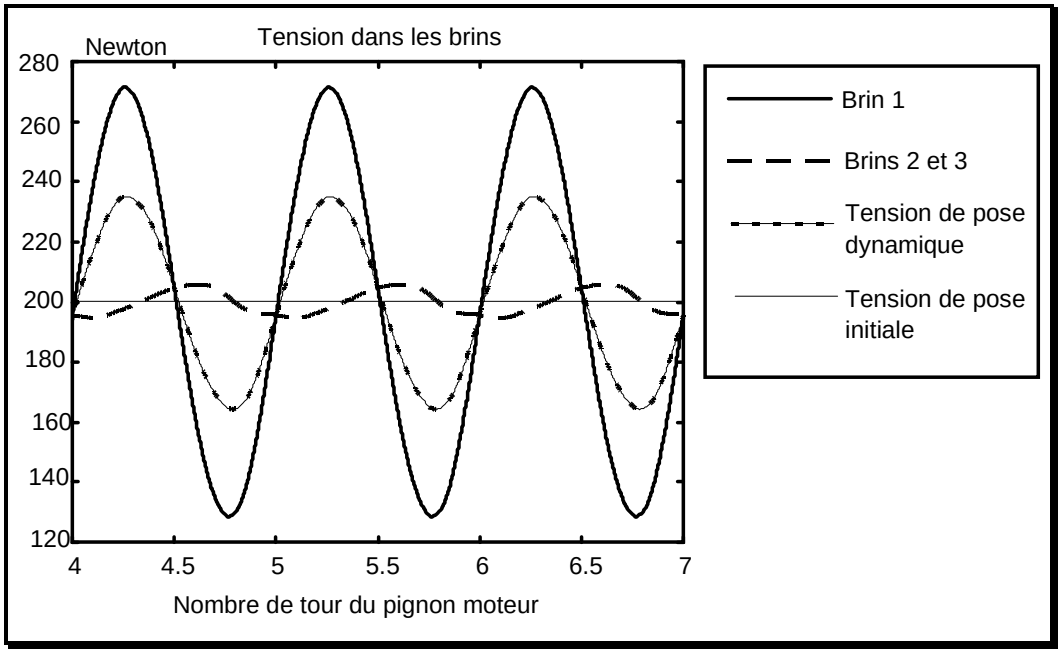


Figure IV. 19 : Tension dans les brins libres pour le cas d'école (palier amorti) avec le couple excitateur C=4.sint(2π.N.t) et N=900 tr/mn.

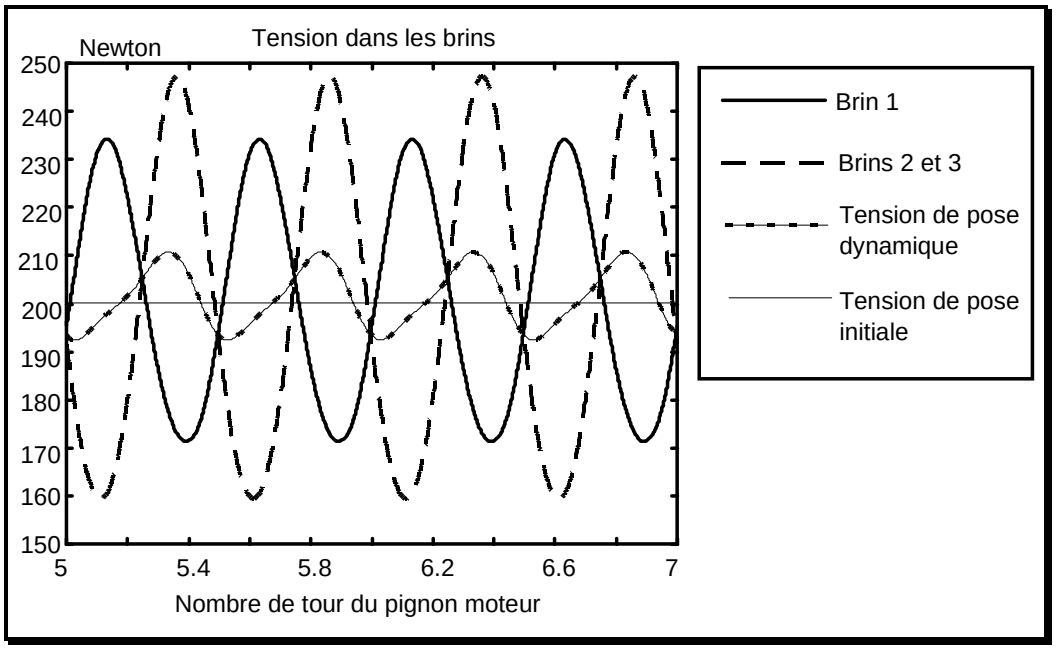


Figure IV. 20 : Tension dans les brins libres pour le cas d'école (palier amorti) avec le couple excitateur C=4.sint(2π.2N.t) et N=3000 tr/mn.

La figure IV.8 montre que le troisième mode critique *(68 Hz)* concerne le déplacement du galet tendeur, c'est-à-dire du tendeur dynamique. Le mouvement du tendeur est uniquement couplé à la rotation de la poulie 2 et du galet tendeur. La fréquence critique du mode 3 étant très basse (proche du régime quasi-statique), il est logique de constater sur la figure IV.7 que les trois

mouvements (rotation de la poulie 2, rotation et déplacement du galet tendeur) décrit par le mode sont en phases. Ces trois mouvements sont donc tous les trois en quadrature de phase (90°) à la fréquence critique de 68 Hz (figure IV.15 et figure IV.17). La fréquence critique très basse explique aussi la réaction importante du mode (figure IV.13) et l'amplitude importante du déplacement du tendeur (figure IV.18) à basse fréquence. L'importance de la réponse du tendeur nécessite une étude de son impact sur la tension des brins.

Pour les fréquences d'excitation inférieures à la fréquence critique de 68 Hz, le tendeur est en phase avec le couple (figure IV.17), et par conséquent, avec la tension dans les brins 2 et 3. Dans ce cas, avec une fréquence d'excitation du couple sur la poulie 2 de 15 Hz ($C=4.\sin(2\pi.N.t)$ et N=900 tr/mn), nous constatons sur la figure IV.19 que le tendeur remplit parfaitement son rôle. La tension dans les brins 2 et 3 n'évoluent quasiment pas. En compensation, l'amplitude de la tension 1 est amplifiée de la variation de la "tension de pose dynamique". La tension de pose dynamique dépend de la variation des entr'axes causée par le déplacement des poulies. Lorsque la tension augmente dans les brins 2 et 3, le tendeur se lève et abaisse ainsi la tension de pose. La conséquence est un abaissement de la tension dans les brins 2 et 3, mais également dans le brin 1. Lorsque la tension diminue dans les brins 2 et 3, le tendeur s'abaisse et la tension dans le brin 1 augmente. Ainsi, lorsque la tension dans les brins 2 et 3 reste constante, l'amplitude de la tension dans le brin 1 est doublée !

Pour les fréquences d'excitation supérieures à la fréquence critique de 68 Hz, le tendeur est en opposition de phase avec le couple (figure IV.17). Dans ce cas, avec une fréquence d'excitation du couple sur la poulie 2 de 100 Hz ($C=4.\sin(2\pi.2N.t)$ et N=3000 tr/mn), nous constatons sur la figure IV.20 que l'amplitude de la tension dans les brins 2 et 3 sont supérieures à l'amplitude de la tension dans le brin 1. La tension dans le brin 1 n'est pas complètement amortie pour trois raisons : (1) l'amplitude du déplacement du tendeur est inférieure à celle provoquée à 15 Hz (figure IV.18), (2) le tendeur n'est que partiellement en opposition de phase (130°), (3) Les effets de la raideur de flexion amplifient l'amplitude de la tension du brin le plus long (chapitre IV.IV.3.3).

On en vient à la conclusion que le tendeur ne peut qu'augmenter l'amplitude des tensions de certains brins, qui dépendent de la différence de phase avec le couple excitateur, ceci dans le cas où les variations de tension sont provoquées par un couple. On peut donc être tenté de diminuer la fréquence critique du mode tendeur pour éviter que le tendeur dynamique réagisse et amplifie de telles fluctuations de tension. Le tendeur doit toutefois rattraper les variations de la tension de pose (c'est-à-dire les variations de tension uniformément dans toute la courroie). Les causes peuvent être l'effet centrifuge de la courroie et la dilatation thermique du carter supportant la transmission. Le tendeur peut toujours rattraper ces variations à très basse fréquence de la tension de pose (spécifiquement pour ce cas d'école, car en réalité la constante d'efficacité du tendeur η intervient - chapitre IV. IV.3.4). Cependant, des variations de la tension de pose à plus haute fréquence peuvent être causées par l'excentricité des poulies (figure II.9). Le tendeur peut être aussi excité par des causes propres : le balourd du galet et le passage des corps roulants[1]. Si la fréquence critique du mode tendeur est trop basse, le tendeur réagira alors en opposition de phase avec les variations de tension de pose de fréquence supérieure à la fréquence critique du

[1] Des mesures effectuées par K. Yakhou (laboratoire CASM - INSA Lyon) sur des paliers à roulement d'une boite à vitesse, montrent une variation d'effort radial d'au minimum de 10 % de la charge radial à la fréquence de passage des corps roulants. Il est donc raisonnable de s'attendre à une variation d'effort de quelques dizaines de Newton dans le cas d'un galet, susceptible de l'exciter. On peut aussi s'interroger sur l'impact des défauts de roulements. En effet, les professionnels de la réparation conseille de changer les galets en même temps que la courroie [Auto-Plus, 1996].

tendeur, lorsque le régime de rotation du pignon est suffisamment élevé. Le tendeur amplifie alors les variations de tension de pose. Nous voyons que le choix de la fréquence critique du mode tendeur est un problème délicat pour le concepteur d'une transmission avec un tendeur dynamique.

IV.3.1.4. Modes critiques des paliers

Les modes de paliers se distinguent par une fréquence critique nettement supérieure à celle des autres modes (figure IV.8 -modes 4 à 7). Les fréquences critiques sont regroupées par paire.

Nous trouvons d'abord à 1453 et 1454 Hertz, les modes critiques de déplacement vertical v des paliers 1 et 2 (figure IV.7 - mode 6 et 7). Le premier mode critique (1453 Hz) présente des déplacements en opposition de phase (l'un monte alors que le second palier descend). Le deuxième mode critique (1454 Hz) présente des déplacements en phase. Seul ce deuxième mode est excité à 1454 Hz comme l'indique la figure IV.13 (mode 7). La figure IV.22 atteste un maximum des déplacements verticaux v_1 et v_2 à la même fréquence. Toutefois, un palier amorti ($c_{xx} = c_{yy} = 1.10^4$ N/m/s et $c_{xy} = c_{yx} = 0$. d'après les variables du chapitre II.3.6.5) ne réagit plus sur ce mode (mode 7).

Nous trouvons ensuite à 1510 et 1517 Hz, les modes critiques de déplacement horizontal u des paliers 1 et 2 (figure IV.7 - mode 4 et 5). Le premier mode critique (1510 Hz) présente des déplacements de paliers en phase (les deux paliers se déplacent selon la même direction). Le deuxième mode critique à 1517 Hz présente des déplacements de paliers en phase. On note sur la figure IV.8 que le mode 5 (1510 Hz) est couplé avec la rotation de la poulie 3 ce qui le rend d'avantage excitable que les autres modes critiques de paliers. La figure IV.13 confirme la prédominance du mode critique 5 à 1400 Hz, associée avec le mode critique 1. Or, le mode critique 1 concerne la rotation de la poulie 3. Le raisonnement développé au chapitre IV.IV.3.1.1 montre que les deux modes critiques s'épaulent et deviennent alors très énergétiques à 1400 Hz.

On constate sur la figure IV.13 que l'énergie du mode critique 5 atteint son maximum à 1400 Hz. La figure IV.21 montre que l'amplitude des déplacements horizontaux u_1 et u_2 atteint son maximum à 1400 Hz. La quadrature des phases des déplacements horizontaux u_1 et u_2 vis-à-vis de l'excitation montre avec certitude que 1400 Hz est une fréquence critique. On peut s'en étonner si on considère la fréquence critique de 1510 Hz du mode 5. La fréquence critique de 1510 Hz est obtenue à partir du système conservatif. Or, nous pouvons remarquer sur la matrice d'amortissement $[\lambda]$ (pour le cas d'école avec paliers sans amortissement), consigné à la suite, que le mouvement horizontal u_1 et u_2 des paliers est très amorti par rapport au mouvement vertical v_1 et v_2 des paliers. Le très fort amortissement de la courroie en est la cause. Il s'ensuit un décalage de la fréquence critique par rapport au mode issu du système conservatif. Cela diminue aussi fortement l'amplitude maximum du mouvement horizontal des paliers, qui est inférieure à l'amplitude maximum du mouvement vertical des paliers (figures IV.21 et IV.22).

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 3238.29 & -301.307 & 110.454 & -2042.12 & -.120546E-03 & -33.3052 & -2654.15 \\ -301.307 & 75.8976 & .652008E-05 & -.120546E-03 & -.601482E-07 & 8.38942 & 668.566 \\ 110.454 & .652008E-05 & 18.6028 & 115.453 & 58.9822 & -6.30397 & 59.4995 \\ -2042.12 & -.120546E-03 & 115.453 & 6083.32 & 1055.12 & -112.770 & 1064.37 \\ -.120546E-03 & -.601482E-07 & 58.9822 & 1055.12 & 275.480 & -29.4431 & 277.896 \\ -33.3052 & 8.38942 & -6.30397 & -112.770 & -29.4431 & 4.07419 & 44.1992 \\ -2654.15 & 668.566 & 59.4995 & 1064.37 & 277.896 & 44.1992 & 6169.58 \end{bmatrix}$$

u_1 v_1 u_2 v_2

Nous pouvons également faire une remarque sur une méthode de mesure des tensions très utilisée actuellement. Celle-ci est basée sur la mesure des efforts supportés par les paliers. Ces efforts sont considérés comme la résultante des tensions dans les deux brins adjacents à la poulie. Ainsi, la connaissance de l'effort dans la direction de la résultante des tensions supporté par chaque palier permet de remonter aux tensions dans les brins. Toutefois, une telle méthode ne tient pas compte de la dynamique des paliers. Or, le mouvement des paliers peut être en opposition de phase avec les tensions ce qui remet en cause la validité de la méthode.

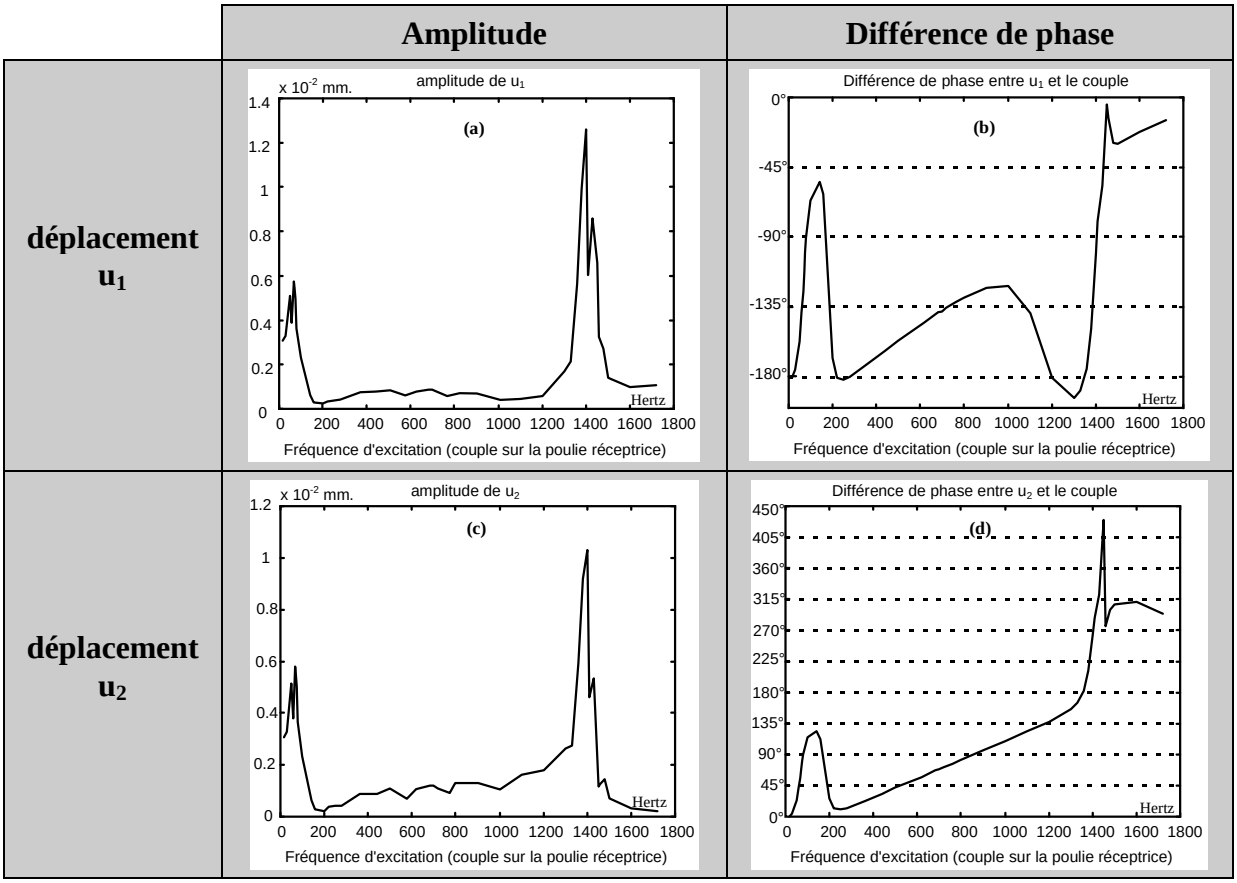


Figure IV. 21 : Différences de phase et amplitudes totale du signal pour les déplacements horizontaux u_1 et u_2.

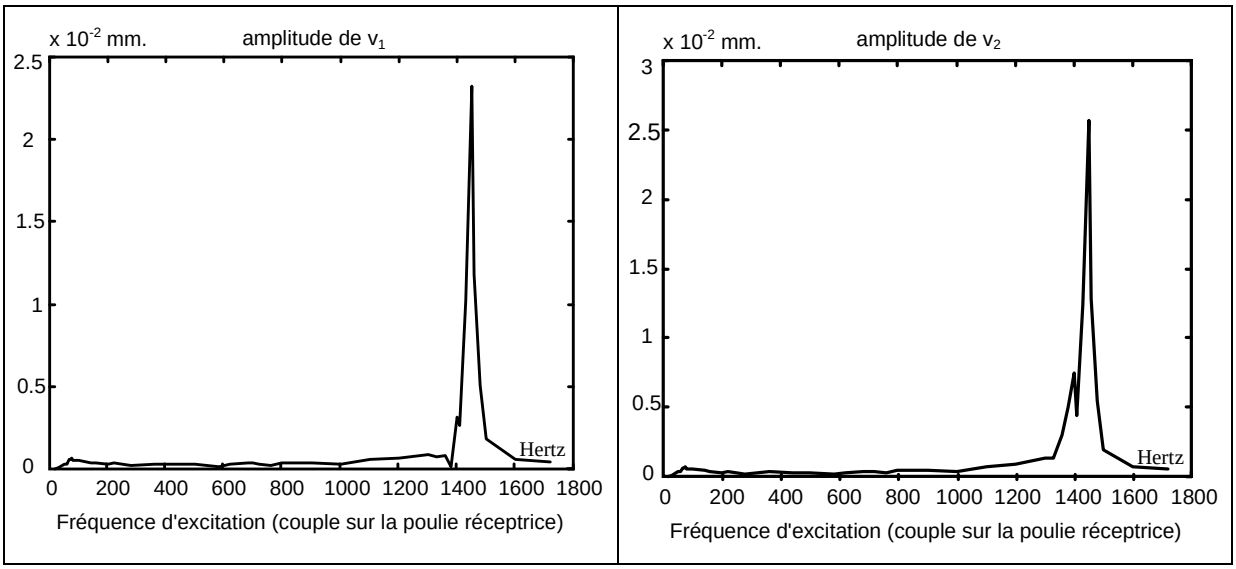


Figure IV. 22 : Amplitude des déplacements verticaux v_1 et v_2.

IV.3.1.5. Évolution des modes critiques

Du fait de la non-linéarité du modèle, la fréquence des modes critiques évolue suivant divers critères. En général, un raidissement, engendrant une légère hausse des fréquences critiques, est constaté, lorsque la fréquence d'excitation ou l'amplitude du couple excitateur augmente. Le mode tendeur et les modes de rotation y sont plus sensibles.

D'autres facteurs comme la géométrie de la transmission interviennent. Nous choisissons de modifier l'orientation du tendeur de la transmission du cas d'école. Cette nouvelle transmission est illustrée sur la figure IV.33 (transmission 2 - page 231). La forme des modes critiques, ainsi que leur fréquence, évolue. La comparaison de la figure IV.8 et de la figure IV.23 montre une chute de la fréquence critique du mode tendeur (mode 3). La rotation du galet tendeur intervient aussi plus fortement dans l'énergie de ce mode, faisant disparaître quasiment tout couplage avec d'autres poulies. Par conséquent, le mode critique de rotation du galet tendeur (mode 1) est également modifié. La part dans l'énergie du mode de la rotation du galet tendeur diminue au profit du mouvement en translation du tendeur. Toutefois, contrairement au mode de translation du tendeur (mode 3), la fréquence critique du mode de rotation du galet tendeur (mode 1) augmente. Les modes critiques de paliers 4 et 5 sont également modifiés dans leur composition énergétique. Le mode 4 devient presque exclusivement le mode de translation de la poulie 1, alors que le mode 5 devient le mode de translation de la poulie 2. Le couplage entre les deux poulies est donc très atténué. Malgré les modifications sur les modes, nous retrouvons globalement les mêmes tendances de la réponse énergétique des modes, bien que localement des différences considérables apparaissent, en faisant varier la fréquence d'excitation du couple résistant sur la poulie 2 (figure IV.24). La nature de ces modes ayant évoluée, le comportement en rotation et en translation des poulies diffère aussi. L'évolution de la trajectoire des paliers ou de la tension dans les brins, décrite dans les chapitres suivants pour le cas d'école avec un tendeur horizontal, diffère donc avec l'orientation du tendeur.

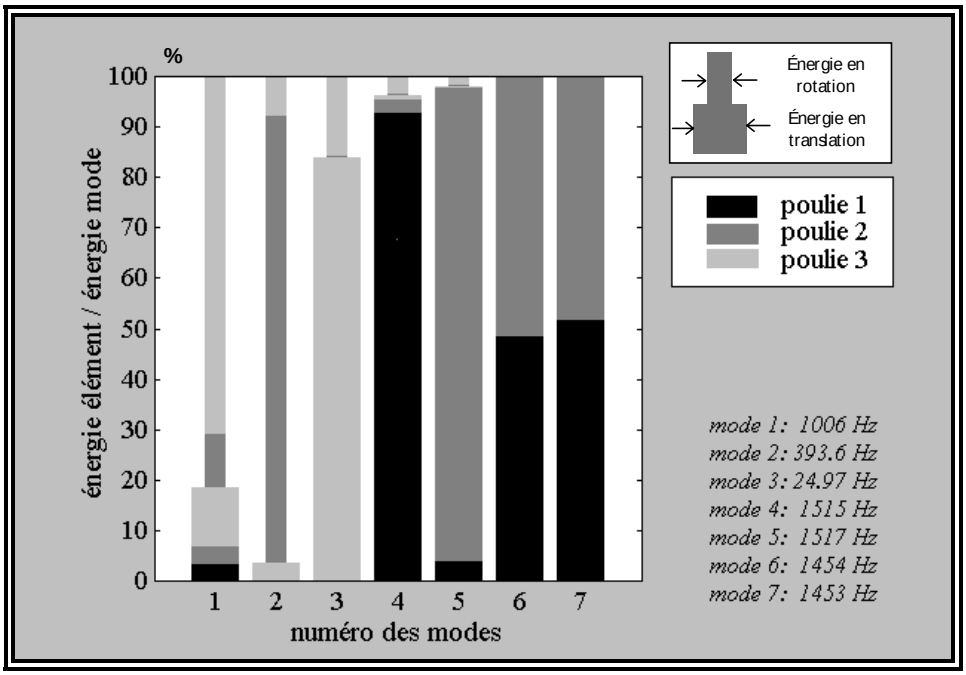


Figure IV. 23 : Visualisation des énergies cinétiques de translation et de rotation pour chaque poulie propres à chaque mode critique en rapport avec leur énergie totale pour la transmission 2 du cas d'école (figure IV.33).

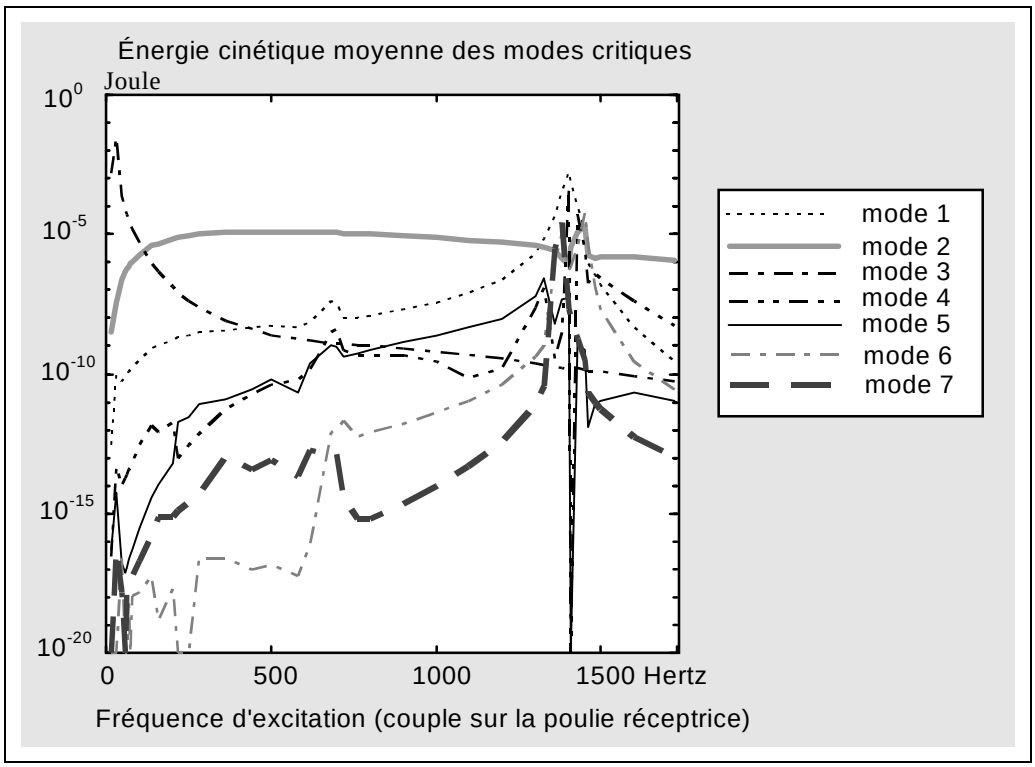


Figure IV. 24 : Spectre en fréquence de l'énergie cinétique moyenne par mode pour la transmission 2 du cas d'école (figure IV.33).

IV.3.2. Évolution de la trajectoire des paliers

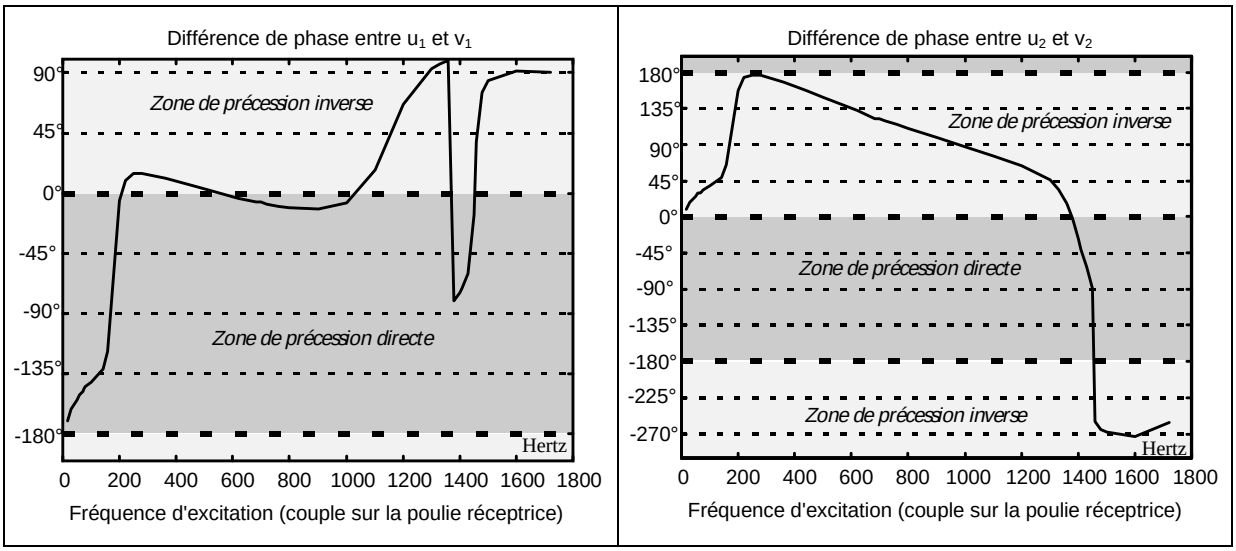


Figure IV. 25 : Évolution de la différence de phase entre le déplacement horizontal u et le déplacement vertical v pour chaque palier (cas d'école sans amortissement aux paliers).

La description des modes critiques au chapitre précédent a montré le rôle que peuvent avoir les paliers sur le reste de la transmission (figures IV.9 à IV.12). Le passage des différents modes critiques avec l'augmentation de la fréquence d'excitation, provoque une évolution de la

trajectoire des paliers (figure IV.24). Cette évolution diffère avec l'amortissement de la courroie et des paliers. La transmission retenue est celle du cas d'école avec un amortissement de la courroie assez fort et un amortissement aux paliers nul. Le couple oscillant imposé à la poulie 2 est assez faible en amplitude (8 N.m d'amplitude totale du signal) ce qui entraîne une faible amplitude des déplacements aux paliers.

L'évolution des trajectoires est décrite par l'évolution de la différence de phase entre le déplacement horizontal u et le déplacement vertical v pour chaque palier. Pour décrire un cercle, il faut que le déplacement u soit déphasé de 90 ou 270° par rapport au déplacement vertical v (v est à son maximum lorsque u est nul). Lorsque le déphasage entre le déplacement u et le déplacement v est de 0 ou 180°, la trajectoire est alors un segment de droite. La direction du segment est donnée par la valeur du déphasage vis-à-vis du couple excitateur. Dans le cas d'un cercle, nous comprenons qu'un déphasage de 90° entre le déplacement horizontal u et le déplacement vertical v d'un palier, indique que la trajectoire est parcouru dans le sens trigonométrique, et dans le sens contraire pour un déphasage de 270°. D'une manière plus générale, une poulie parcourt une trajectoire dans le même sens de sa rotation propre (précession directe), c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre, lorsque la différence de phase entre son déplacement u et le déplacement v est compris entre 0 et -90°. Les domaines de précession directe et inverse (parcours de la trajectoire en sens inverse de la rotation propre de la poulie) pour la poulie sont indiqués sur la figure IV.25.

À la très basse fréquence d'excitation de **15 Hz**, la trajectoire des paliers est dans le cas de deux segments de droite parcouru dans un sens opposé (figure IV.24) . En effet, le déphasage entre u et v pour le premier palier est de 180°, alors qu'il est nul pour le deuxième palier (figure IV.25). Le cas à **80 Hertz** permet de mieux discerner la direction des trajectoires des paliers. La direction de la résultante sur chaque palier dépend de la direction des brins attenants à la poulie. Nous vérifions effectivement, en cohérence avec la géométrie de la transmission du cas d'école illustrée sur la figure IV.6, que les deux poulies ont bien une trajectoire descendante en direction du centre de la transmission.

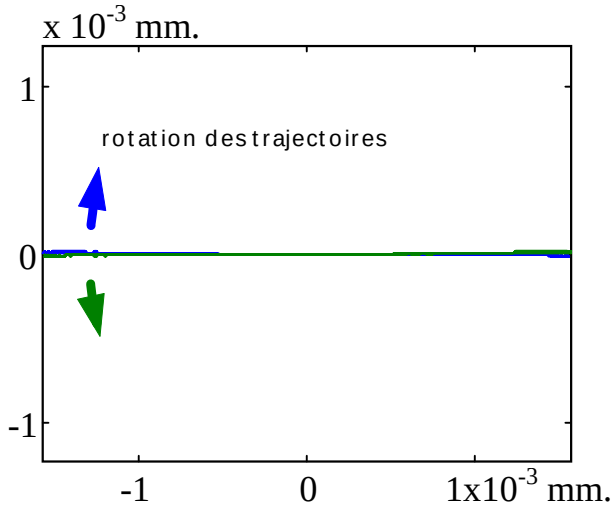
Nous observons sur la figure IV.25 que le déphasage est proche de -90° et +90°, respectivement pour les paliers 1 et 2, pour une fréquence d'excitation de **160 Hertz**. Il s'ensuit un arrondissement de la trajectoire des deux paliers que nous constatons sur la figure IV.24 pour une fréquence d'excitation de 160 Hertz. Ensuite, nous observons sur la figure IV.25 un changement rapide de la différence de phase entre le déplacement u et le déplacement v pour les deux paliers. Ce phénomène signale indubitablement une fréquence critique [Morel, 1992] qui semble causée par le mode critique associé au tendeur dynamique (chapitre IV.IV.3.1.3). La conséquence du passage de cette fréquence critique est la rotation de la trajectoire des poulies : les deux points les plus éloignés du centre (0, 0) décrivent pour chaque trajectoire, un arc de cercle, comme cela est indiqué par des flèches sur la figure IV.24 (fréquence d'excitation de 15 à 280 Hz). Nous retrouvons ainsi, pour les fréquences d'excitation de **200 Hertz** et **280 Hertz** supérieures à la fréquence critique(environ 170 Hz), deux trajectoires montantes en direction du centre de la transmission. Nous avons donc pour un régime de rotation N courant (par exemple N = 4200 tr/mn avec un couple $C = 4.\sin(2\pi.4N.t)$) un comportement des paliers contraire à celui obtenu en régime quasi statique (trajectoire descendante en direction du centre de la transmission). Les différences de phase entre le mouvement u et le mouvement v sont proches de 0 et 180° pour les paliers 1 et 2. Les trajectoires sont donc aplaties et tortillées du fait du changement du sens de la vitesse de précession. À 200 Hertz, le palier 1 s'apprête à changer de sens de rotation en adoptant une trajectoire de la forme d'un 8 tortillé. Nous vérifions sur la figure IV.24 que la poulie 1 est en précession inverse à 280 Hz. Ensuite, la

poulie 1 revient en précession directe pour une fréquence d'excitation de 600 Hertz. Dans le même temps, la poulie 2 reste en précession inverse. Toutefois, nous constatons sur la figure IV.25 que la différence de phase entre le déplacement u et le déplacement v pour la poulie est très proche de 180° pour la poulie 2. Il en résulte une forme très tortillée de la trajectoire du palier 2, hésitant entre le précession directe et la précession inverse.

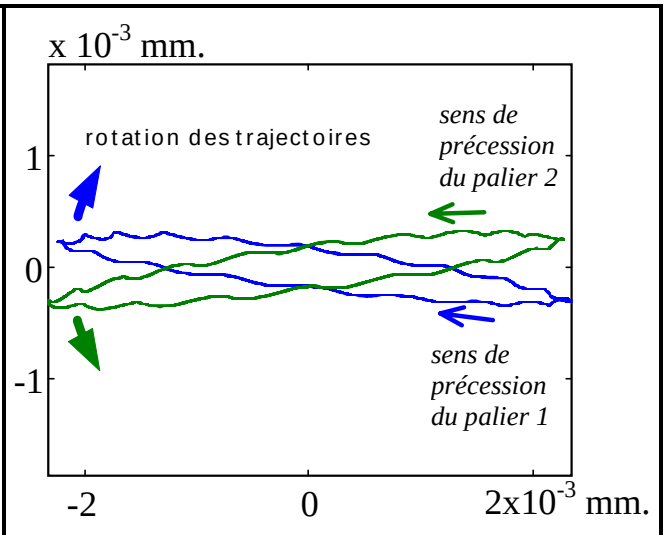
Pour les fréquences d'excitation supérieures à 400 Hz, la trajectoire se différencie pour les deux paliers : la différence de phase entre le mouvement u et le mouvement v pour le premier palier reste au voisinage de 0° alors que la différence de phase pour le deuxième palier s'approche de 90° (figure IV.25). Nous obtenons ainsi une trajectoire circulaire pour le deuxième palier à **1000 Hz** (figure IV.24) et une trajectoire aplatie pour le deuxième palier.

La figure IV.25 montre un changement très rapide de la différence de phase pour le premier palier à 1380 Hertz, révélant une fréquence critique associée au mode critique 5 (chapitre IV.IV.3.1.4). La différence de phase entre le mouvement u et le mouvement v passe très rapidement de +90° à -90° ce qui indique une inversion du sens de rotation du palier 1 sur sa trajectoire. La différence de phase pour le palier 2 change de signe (figure IV.25) ce qui indique aussi une inversion du sens de rotation du palier sur sa trajectoire. La figure IV.24 illustre le passage de cette fréquence critique de **1360 Hertz** à **1380 Hertz** avec les changements de sens de rotation. Ensuite, une deuxième fréquence critique est identifiée sur la figure IV.25 pour une fréquence d'excitation de 1450 Hertz. La différence de phase entre le mouvement u et le mouvement v subit un changement très rapide pour le palier 2, passant de -90° à -270° (ou +90°), et moins rapide pour le palier 1. Nous avons donc de nouveau un changement du sens de rotation des deux paliers sur leur trajectoire respective, visualisé sur la figure IV.24 avec les fréquences d'excitation de **1450 Hertz** et **1460 Hertz**. Cette fréquence critique est associée au mode critique 7 (chapitre IV.IV.3.1.4). Il s'ensuit des trajectoires proches de la verticale pour les deux paliers. Un lien peut être alors fait avec des résultats expérimentaux issus d'un site industriel et rapportés au chapitre II.2.2.2.2. La figure II.11 illustre le spectre en fréquence de l'accéléromètre placé verticalement sur le moteur d'une transmission par courroie Poly-V, et met en évidence le balourd du ventilateur accolé à la poulie réceptrice. On peut aussi préciser que l'accéléromètre vertical donne une réponse plus forte sur la fréquence du balourd du ventilateur que l'accéléromètre placé horizontalement. Suite aux résultats numériques concernant la trajectoire des paliers, et suivant l'amortissement longitudinal de la courroie et des paliers, nous pouvons conclure que le balourd du ventilateur peut effectivement exciter le palier afférent au moteur, de telle manière qu'il réagisse suivant une trajectoire verticale.

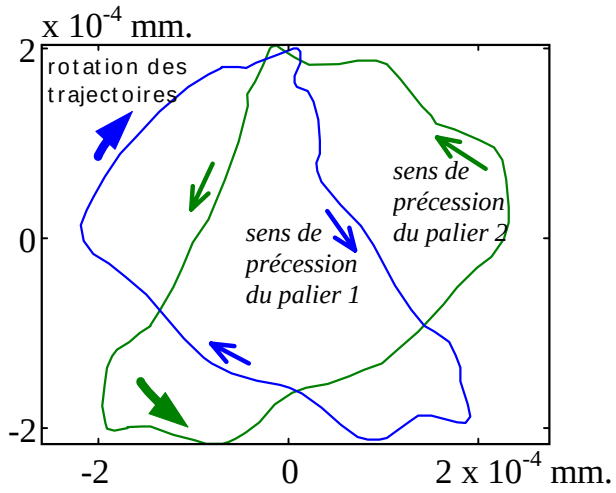
Enfin, pour des fréquences d'excitation supérieures à 1460 Hertz, les trajectoires ont tendance à s'arrondir comme le confirme conjointement les figures IV.23 et IV.24 (1500 Hz) et la précession est inversée pour les deux poulies dentées.



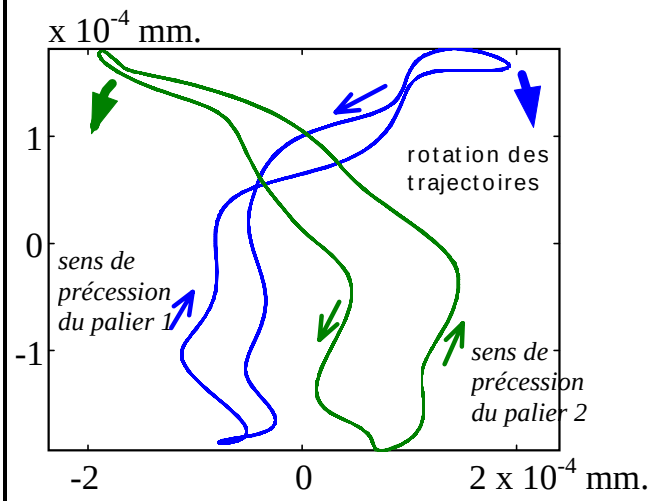
15 Hertz



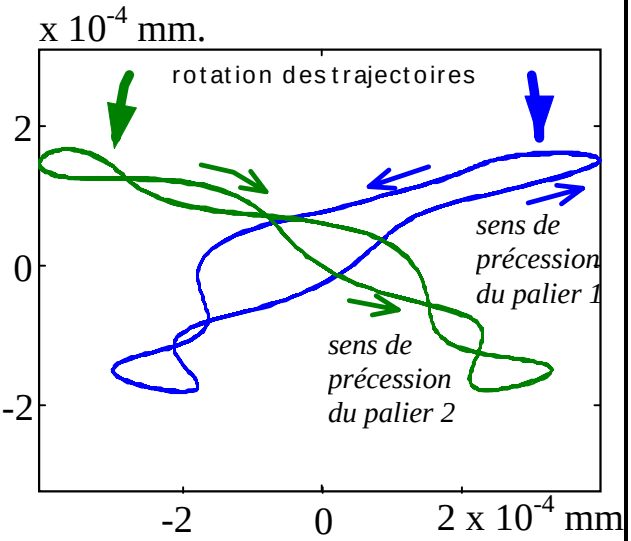
80 Hertz



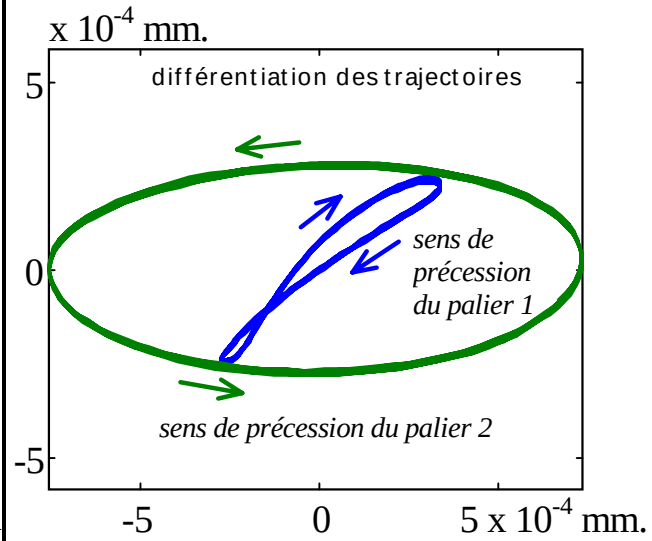
160 Hertz



200 Hertz



280 Hertz



1000 Hertz

Figure IV. 24 (1ère partie) : Comparaison des trajectoires des poulies 1 (courbe bleu) et poulie 2 (courbe verte) pour différentes fréquences d'excitation du couple sur la poulie réceptrice (cas d'école sans amortissement aux paliers).

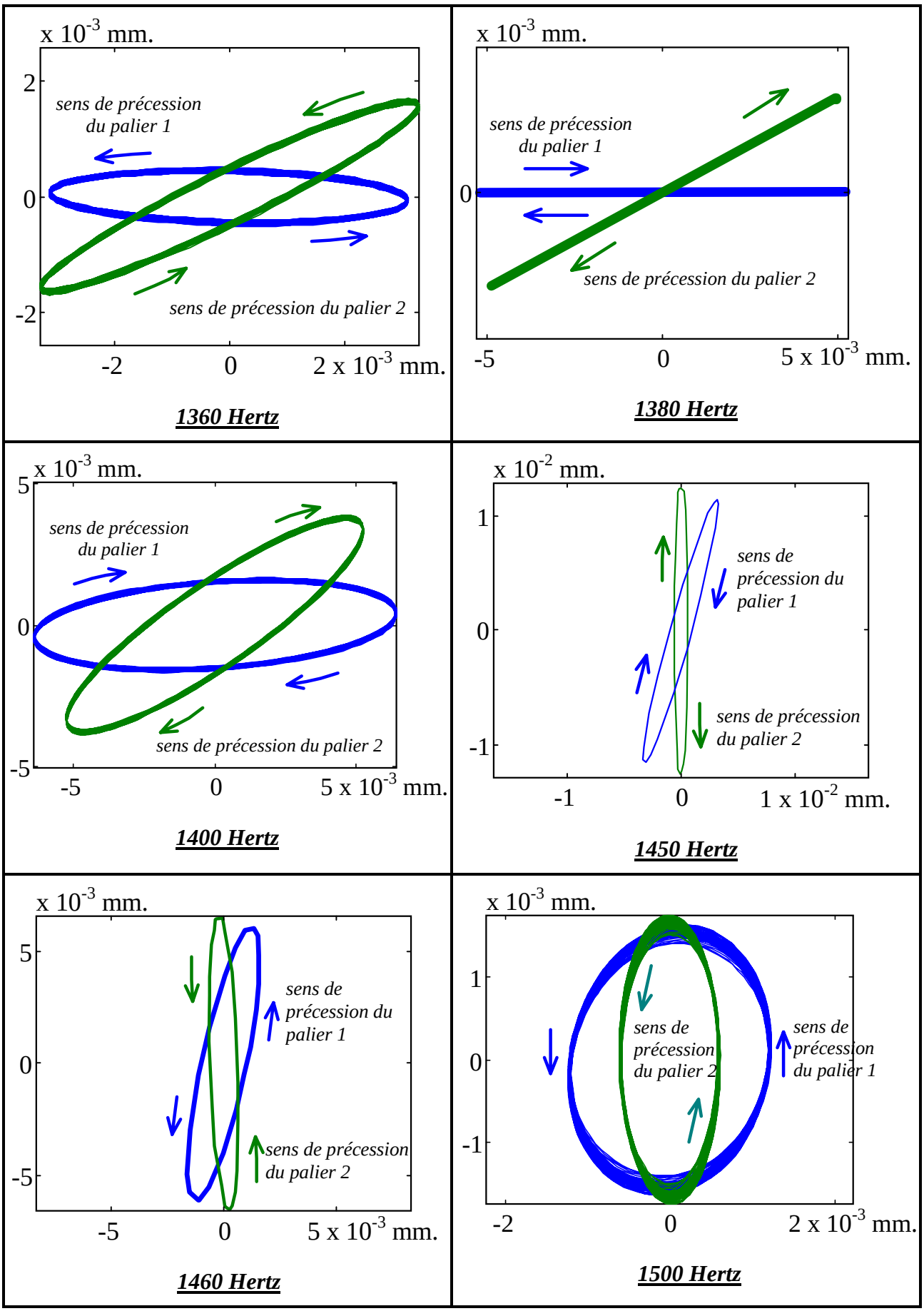


Figure IV. 24 (2ème partie) : Comparaison des trajectoires des poulies 1 (courbe bleu) et poulie 2 (courbe verte) pour différentes fréquences d'excitation du couple sur la poulie réceptrice (cas d'école sans amortissement aux paliers).

IV.3.3. Évolution de la tension dans les brins

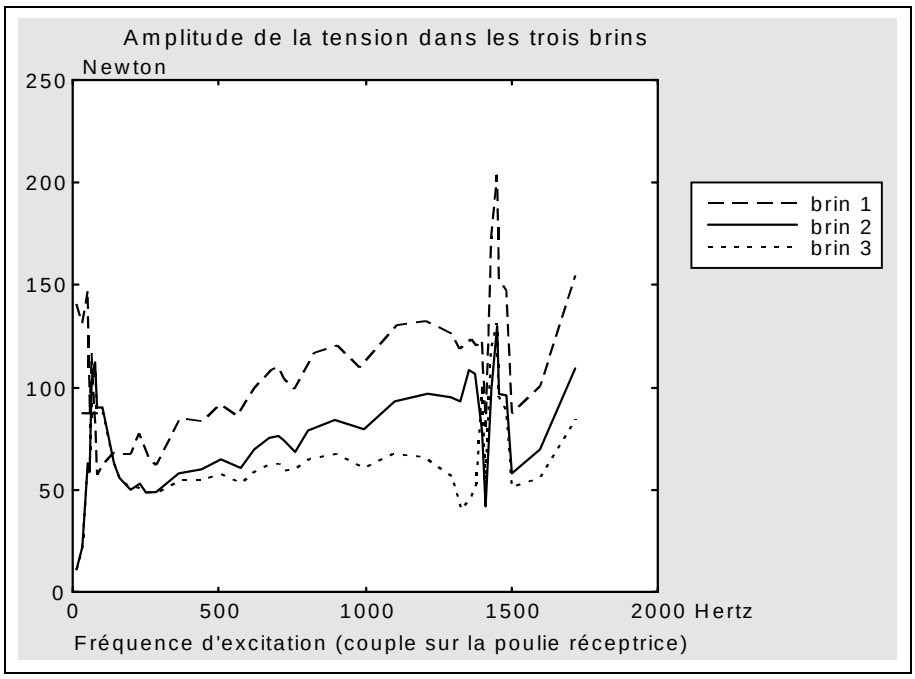


Figure IV. 27 : Évolution de l'amplitude totale de la tension dans les trois brins du cas d'école (paliers non amortis).

La figure IV.27 trace l'évolution de l'amplitude totale de la tension dans les trois brins du cas d'école. Les variations de tension sont causées par un couple d'amplitude 4 Newton et de fréquence d'excitation variable. Nous constatons d'emblée les fortes variations de l'amplitude de la tension dans les brins alors que l'amplitude du couple imposé sur la poulie 2 ne varie pas ! À la vue des interprétations, il se dégage deux domaines d'influence.

Le premier domaine, situé en deçà d'une fréquence d'excitation de 100 Hertz, délimite la zone où les tensions sont sous l'influence du tendeur. L'impact du tendeur a déjà été traité au chapitre IV.IV.3.1.3. Le tendeur est en premier lieu en phase avec le couple ce qui a pour effet d'augmenter fortement l'amplitude de la tension du brin 1 (figure IV.19). Passé la fréquence critique de 68 Hertz, le tendeur est en opposition de phase avec le couple ce qui a pour effet d'augmenter l'amplitude de la tension des brins 2 et 3 (figure IV.20). Nous retrouvons ainsi sur la figure IV.27, deux pics, espacés d'une cinquantaine de hertz, de la tension dans le brin 1 et de la tension dans les brins 2 et 3 autour de la fréquence d'excitation de 68 Hz.

Le deuxième domaine, situé en delà d'une fréquence d'excitation de 100 Hertz, délimite la zone où l'amplitude des tensions subit l'influence deux facteurs : (1) la raideur de flexion de la courroie et (2) l'accélération en rotation $\ddot{\theta}$ des poulies. L'influence de la raideur de flexion est visible par ses effets sur la tension de pose dynamique, c'est-à-dire la tension qui tend uniformément la courroie à un instant donné lorsqu'aucun couple n'est appliqué sur les poulies de la transmission. Trois types d'action peuvent être à l'origine de la variation de la tension de pose : (1) l'effet de l'excentricité des poulies (figure II.9), (2) la variation des entr'axes, et (3) la variation de longueur due à la raideur de flexion de la courroie. Les simulations montrent que les variations d'entr'axes des poulies n'ont aucun effet sur la tension de pose. Au delà de 100 Hertz,

le tendeur n'a plus une amplitude suffisante pour exercer une influence. Toutefois, pour une excentricité des poulies imposée comme nulle, la figure IV.28 (a) montre une variation de la tension de pose importante. Celle-ci est due à la raideur de flexion de la courroie. La figure II.24 et l'équation II.40 (chapitre II.3.3.3) montre que la raideur de flexion implique une variation de la longueur d'un brin libre lorsque la tension dans celle-ci varie. La figure IV.28 (b) illustre cette variation de la longueur dans les brins pour le cas d'école et un couple faible ($C=4.\sin(2\pi.12N.t)$ et N=1000 tr/mn) appliqué sur la poulie 2. Lorsque la tension dans le brin 1 est forte, la longueur du brin 1 est minimale. Au même instant, la tension dans les brins 2 et 3 est faible ce qui entraîne un accroissement de la longueur des brins 2 et 3. En tenant compte également de la variation des angles d'enroulement réels de la courroie autour des poulies (dépendant de l'angle φ_i de la figure II.24), nous obtenons la variation totale de la longueur de la courroie illustrée sur la figure IV.28 (c). Dans le cas où la tension dans le brin 1 est forte, et faible dans les brins 2 et 3, il résulte de la variation de longueur dans les brins libres un accroissement de la longueur totale de la courroie. En comparant cette longueur sous tension de la courroie à la longueur non contrainte, nous obtenons alors un accroissement de la tension de pose dynamique visualisé sur la figure IV.28 (a). Par conséquent, la tension dans les brins augmente. Lorsque la tension dans les brins 2 et 3, et la tension dans le brin 1 faible, le phénomène s'inverse et il en résulte une baisse de la tension de pose dynamique et de la tension dans les brins. Nous constatons donc que la raideur de flexion de la courroie *amplifie l'amplitude de la tension dans le brin le plus long*. Ceci est confirmé sur la figure IV.27 où l'amplitude de la tension dans le brin 1 est systématiquement la plus élevée.

D'autres conséquences peuvent être tirées des phénomènes induits par la raideur de flexion de la courroie. Lorsqu'un fort couple $C=40.\sin(2\pi.12N.t)$ (N=1000 tr/mn) est appliqué sur la poulie 2, nous observons sur la figure IV.29 (c) *un doublement de la fréquence de variation de la longueur* de la courroie. Il s'ensuit une première harmonique à 400 Hz très forte pour la tension de pose dynamique, qui se répercute sur la tension dans les brins (figure IV.30). Ce phénomène a sans doute des répercutions sur le niveau sonore de la transmission et sur la tenue en fatigue de la courroie. Il a pour origine la grande longueur du brin 1 devant celle des deux autres brins. Cette grande longueur permet une grande variation de longueur du brin 1 illustrée sur la figure IV.29 (b). Ainsi, lorsque la tension du brin 1 est minimale, l'accroissement de la longueur du brin 1 est suffisamment forte pour compenser la diminution de la longueur des deux autres brins. Il en résulte une augmentation de la longueur totale de la courroie chaque fois que la tension dans un brin augmente. Toutefois, l'augmentation est moindre dans le cas où la tension est maximale dans les brins 2 et 3, que dans le cas inverse. La conséquence est une "tension seuil" minimale plus élevée pour les brins courts (environ 100 N.) que pour les brins longs (environ 30 N.). Une autre conséquence concerne le tendeur dynamique. La valeur moyenne de la tension de pose dynamique est plus élevée que la tension de pose initiale (200 N.) du fait du doublement de sa fréquence de variation. Par conséquent, le tendeur a une position moyenne qui s'écarte de la courroie (figure IV.32).

Le second facteur intervenant dans le calcul des tensions est l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ des poulies (équation II.8). Nous constatons sur la figure IV.31 que l'amplitude de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ croit proportionnellement à la fréquence d'excitation. Dans le même temps, le déphasage avec le couple varie de -180° à 0°. L'amplitude de la tension diminue pour -180° de déphasage ,alors qu'elle augmente lorsque l'accélération $\ddot{\theta}_2$ est en phase avec le couple. L'effet combiné de l'augmentation de l'accélération $\ddot{\theta}_2$ et de la diminution du déphasage de $-\ddot{\theta}_2$ avec le couple provoque donc une augmentation de l'amplitude des tensions, visible sur la figure IV.27. La distinction croissante entre l'amplitude de la tension dans le brin 2 et le brin 3 est causée par

l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_3$ du galet 3. À 1450 Hz de fréquence d'excitation, la déphasage avec le couple de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ s'approche rapidement et brièvement de 0° (figure IV.31). Il s'ensuit un très fort pic d'amplitude pour la tension dans les brins à 1450 Hertz (figure IV.27). L'amplitude totale la variation de tension est alors de plus de 200 N. alors que le couple est égal à $C=4.\sin(2\pi.12N.t)$ (N=1000 tr/mn). Un calcul élémentaire montre alors que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ amplifie de 275 % la tension dans les brins. Ce pic d'amplitude peut se révéler dangereux pour une transmission de distribution de moteur automobile si la fréquence d'excitation est atteinte avec une vitesse de rotation du moteur élevée (plus de 5000 tr/mn). À ces régimes de rotation, le couple résistant aux arbres à cames est très important (chapitre IV.IV.2), et engendre alors de très forte tension dans la courroie. En outre, la tension que subit la courroie diffère rapidement au voisinage d'une vitesse critique du moteur. Certains régimes moteurs peuvent donc s'avérer très dommageable pour la courroie. Il s'agit donc de minimiser ce problème lors de la conception de la transmission, par exemple en cherchant à augmenter le déphasage entre l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ et le couple appliqué sur la même poulie.

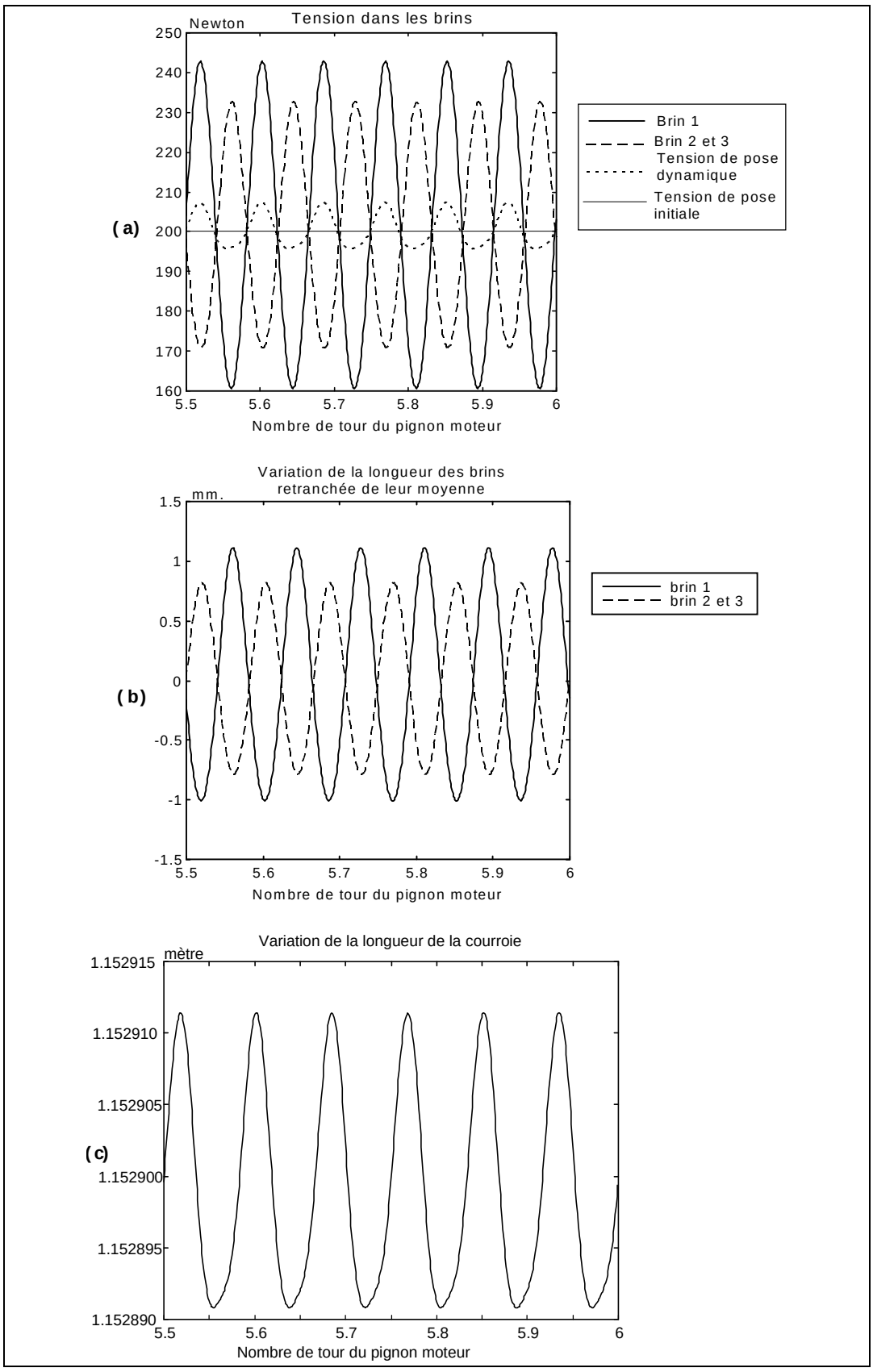


Figure IV. 28 : Variation des tensions et de la longueur des brins libres et de la courroie pour un couple C=4.sin(2π.12N.t) et N=1000 tr/mn, soit une fréquence d'excitation de 200 Hertz.

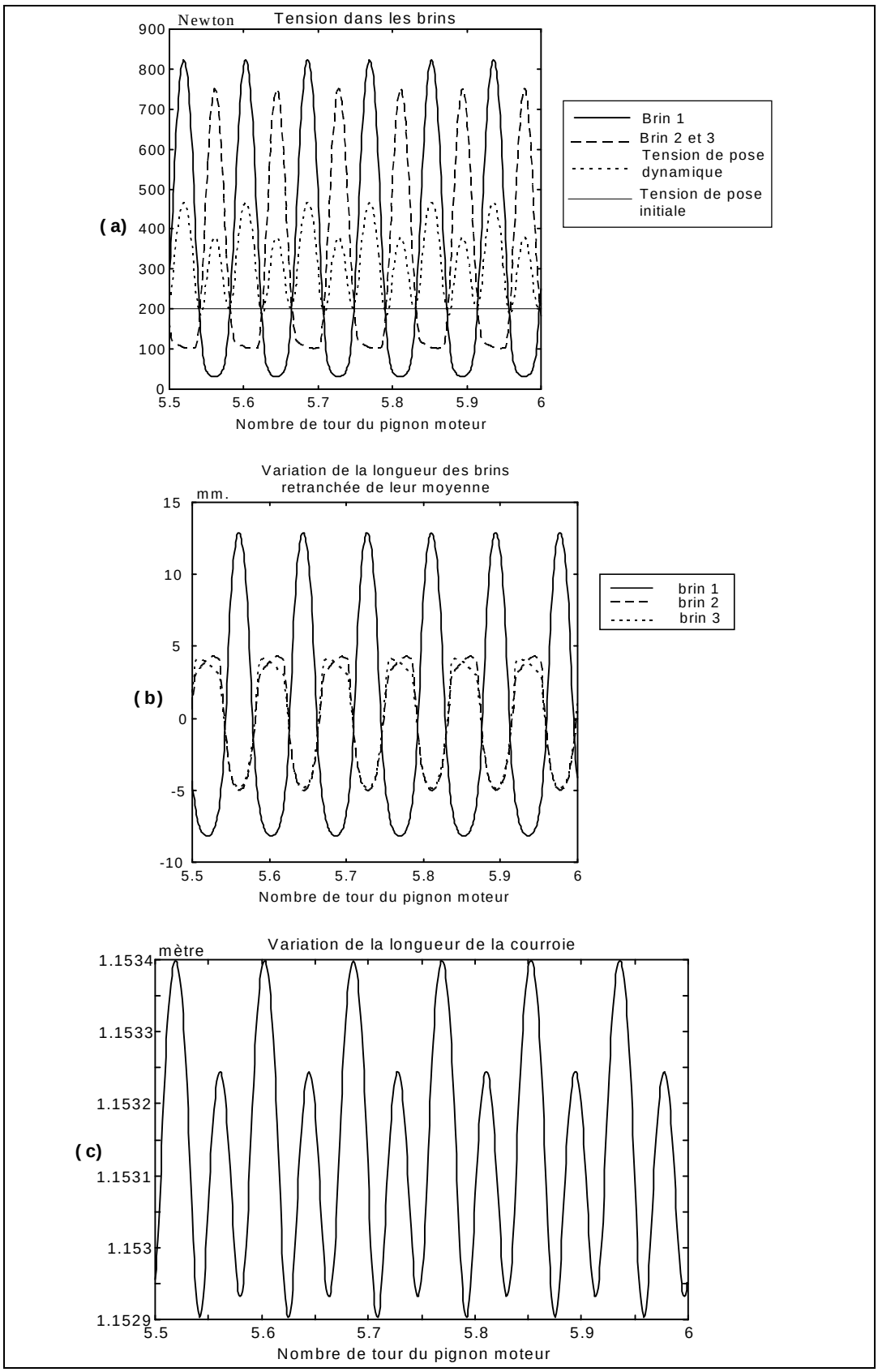


Figure IV. 29 : Variation des tensions et de la longueur des brins libres et de la courroie pour un couple C=40.sin(2π.12N.t) et N=1000 tr/mn, soit une fréquence d'excitation de 200 Hertz.

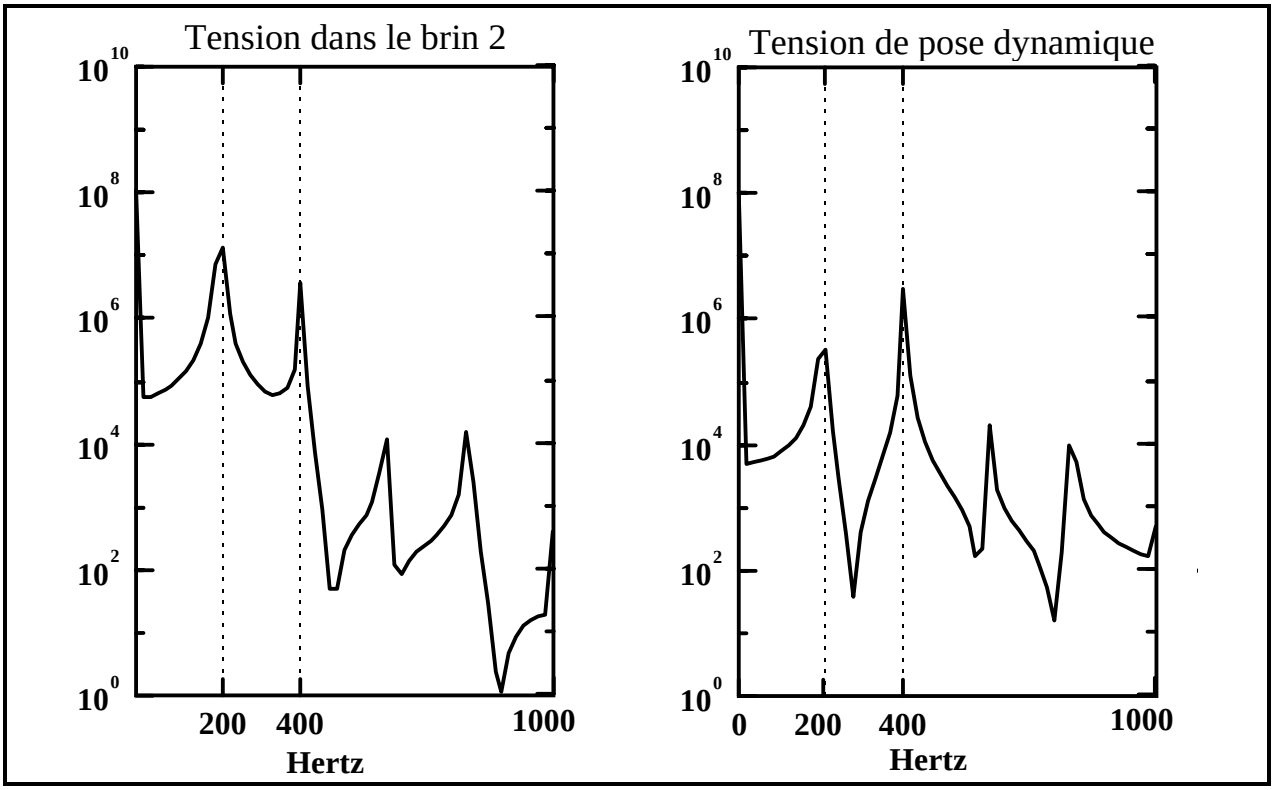


Figure IV. 30 : Spectre de puissance en dB de la tension dans le brin 2 et la tension de pose dynamique.

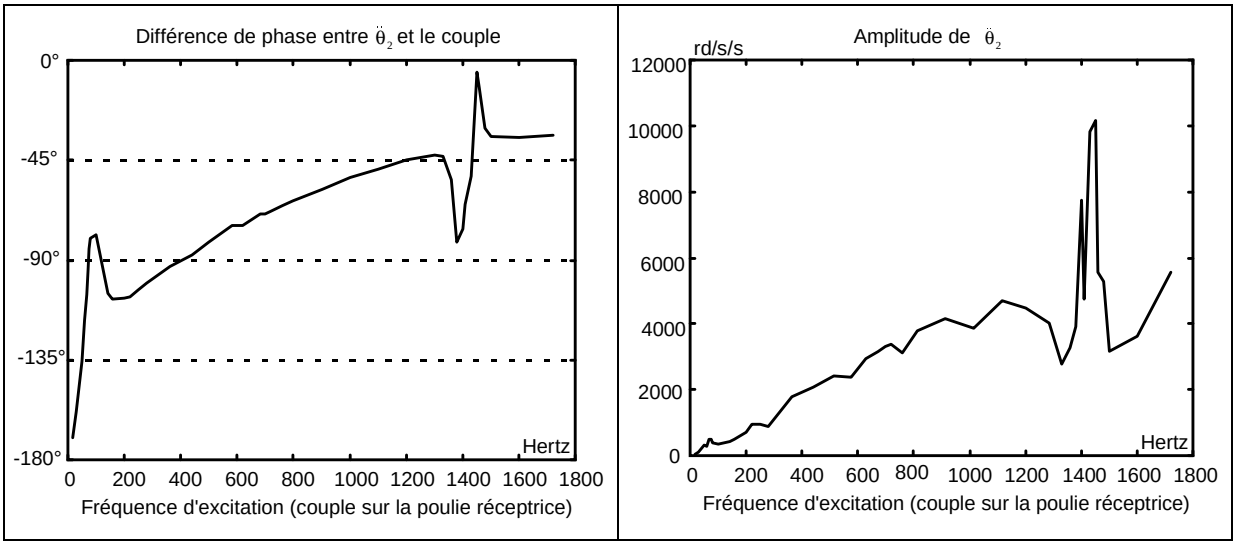


Figure IV. 31 : Amplitude et différence de phase de l'accélération en rotation $\ddot{\theta}_2$.

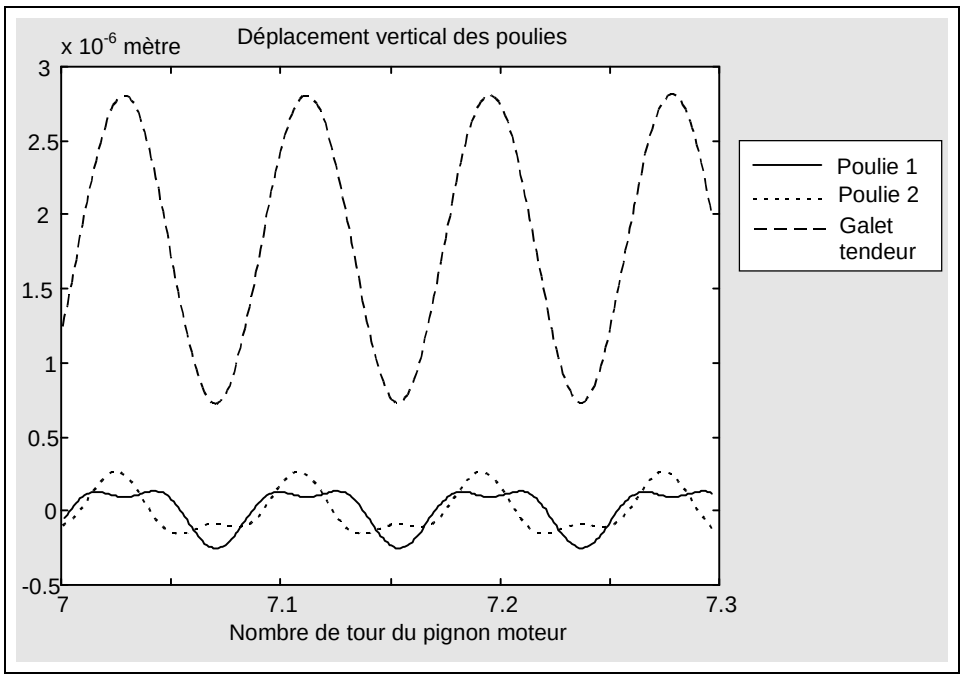


Figure IV. 32 : Déplacement vertical v_3 du galet tendeur (cas d'école avec une fréquence d'excitation à 700 Hz).

IV.3.4. Comportement du tendeur dynamique (discussion sur la constante d'efficacité du tendeur η)

Les travaux de R. S. Beikmann sur l'équilibre d'une transmission par Poly-V, l'ont conduit a élaborer une constante d'efficacité du tendeur η présentée au chapitre I.2.1.6.2. Cette constante évalue la capacité du tendeur dynamique a rattraper un écart de tension, et se révèle donc un outil précieux pour la conception des transmissions par courroie. Sa formulation est rappelée ici :

$$\eta = \frac{k_b}{k_b + k_g + k_S} \qquad \text{id. Equ. I.77}$$

avec $k_b = (EA/L)(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)^2$

$k_g = P_r(\zeta_1 + \zeta_2)$

$k_S = k_r / r_3^2$

Les brins de courroie tangents au galet tendeur sont repérés par rapport au bras du tendeur par les angles ψ_1 et ψ_2 (figure I.31). Nous pouvons obtenir deux valeurs de la raideur de courroie k_b en faisant varier les angles ψ_1 et ψ_2. Deux configurations de transmission sont ainsi obtenues avec deux valeurs de constante η différentes et présentées sur la figure IV.33. Les caractéristiques mécaniques des deux transmissions restent identiques à celles présentées sur la figure IV.6. Toutefois, les paliers 1 et 2 ne sont pas amortis. Aucun couple n'est appliqué sur les poulies. La masse réelle de la courroie (de type ISORAN®) est prise en compte, soit 1 gramme par pas et un moment d'inertie autour de son axe de rotation de 1.10^{-4} g.m². Il en découle une baisse importante de la tension due à l'effet centrifuge de la courroie (chapitre II.2.1.3.4) de 121 N. à

6000 tr/mn. Le but est de déterminer dans quelle mesure le tendeur rattrape cette baisse de tension et de vérifier la validité de certaines des conclusions de R. S. Beikmann sur sa discussion sur la constante η (figure I.35).

Nous constatons sur le tableau IV.2 que la constante d'efficacité du tendeur η est égale à 1 pour la première transmission de la figure IV.33. Cela signifie que le tendeur rattrape parfaitement un écart de tension, provoqué en l'occurrence par la force centrifuge de la courroie. Nous vérifions sur la figure IV.34 que le tendeur rattrape effectivement la différence de tension. La tension dans tous les brins se stabilise à la tension de pose initiale de 200 Newton.

La constante d'efficacité du tendeur η est légèrement plus faible (η = 0.999995) pour la deuxième configuration de la transmission. L'orientation très différente du tendeur permet une forte baisse de la raideur de courroie k_b (tableau IV.2) qui n'est pas suffisante pour faire baisser sensiblement la constante η. Ceci est dû à la très forte raideur longitudinale EA de la courroie intervenant dans le calcul de k_b. Nous constatons sur la figure IV.34 que le tendeur rattrape la différence de tension. Cependant, le temps passé pour le tendeur à stabiliser la tension de la courroie à la tension de pose initiale est beaucoup plus long que dans le cas de la première transmission.

Afin d'obtenir une constante η faible, nous prenons une raideur de tendeur très forte ($k_r = 6.10^7$ N.m/rd) sur la base de la deuxième transmission. La constante η est alors égale à 0.13 (tableau IV.2). Comme attendu, le tendeur ne rattrape plus la différence de tension négative due à la force centrifuge de la courroie. La figure IV.34 montre que la tension dans les brins se stabilise à 141 Newton. Nous retrouvons le même résultat pour une différence de tension positive causée par la dilatation thermique du carter supportant la transmission. La figure IV.35 montre l'évolution de l'entr'axe entre les poulies 1 et 2. Nous constatons sur la figure IV.36 la médiocre capacité du tendeur, très raide, de la transmission 2 à rattraper la différence de tension. La constante d'efficacité du tendeur η est donc bien une aide pertinente pour la prévision du comportement du tendeur. En outre, le comportement du tendeur a été validé expérimentalement par R. S. Beikmann (Figure I.43). La similitude du comportement du tendeur calculé avec DYNAPOUL permet donc de **valider** la modélisation du tendeur faite aux chapitres II.2.6.7 et II.2.6.8.

On constate aussi que le tendeur dynamique réagit toujours bien en réponse à une différence de tension pour une transmission équipée de la même courroie utilisée pour les calculs. En effet, les simulations sur plusieurs configurations du cas d'école, avec des valeurs réelles (la valeur de raideur du tendeur k_r prise précédemment est beaucoup trop forte pour être un cas réel), montre que la constante η reste très proche de 1. Ce comportement est dû à la raideur longitudinale EA exceptionnellement forte de la courroie en raison de sa longueur importante (2 mètres). En revanche, les transmissions équipées de petites courroies moins raides et d'un tendeur dynamique, peuvent avoir une constante η moins favorable.

Toutefois, il est difficile d'extrapoler un raisonnement à partir de la constante η dans le cas dynamique. R. S. Beikmann relie la baisse de la fréquence du mode tendeur à la constante η lors de sa discussion sur la constante η (figure I.35). R. S. Beikmann explique la baisse de la fréquence du mode tendeur par la baisse de la raideur k' (Equ. I.83). Or, le tableau IV.2 montre deux fréquences du mode tendeur (25 Hz et 1270 Hz) pour deux valeurs identiques de la raideur k'. Nous constatons aussi pour la transmission 1 et 2 que la fréquence du mode tendeur baisse alors que la raideur k' augmente. Nous ne pouvons pas non plus, corréler l'évolution de la

fréquence du mode tendeur avec les raideurs k_g, k_b, k_s et la constante η. La prudence s'impose donc vis-à-vis des conclusions de R. S. Beikmann sur la relation entre l'évolution de la fréquence du mode tendeur et de la constante η.

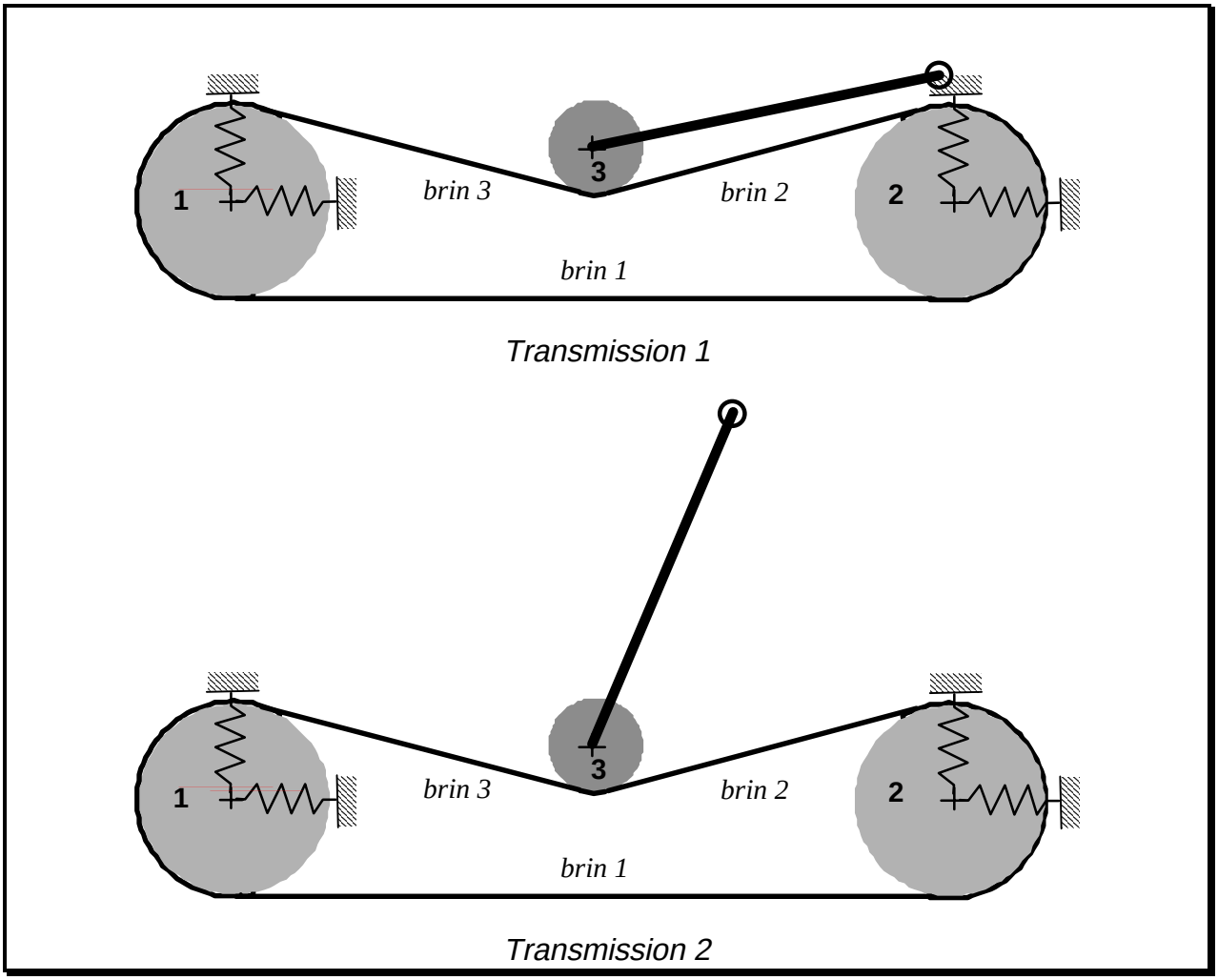


Figure IV. 33 : Transmissions avec deux orientations différentes du tendeur.

Constantes	k_b	k_g	k_s	η	k'	fréqu. tendeur
Transmission ***1***	**$1.48.10^9$**	**-1729**	**1489**	**1.000000**	**$7.31.10^9$**	**68 Hz**
Transmission ***2***	**$2.29.10^8$**	**-354**	**1489**	**0.999995**	**$6.23.10^{10}$**	**25 Hz**
Transmission ***2*** avec tendeur très raide	**$2.29.10^8$**	**-354**	**$1.49.10^9$**	**0.133188**	**$6.23.10^{10}$**	**1270 Hz**

Tableau IV. 2 : Différentes valeurs des constantes de R. S. Beikmann et de la fréquence critique du mode tendeur.

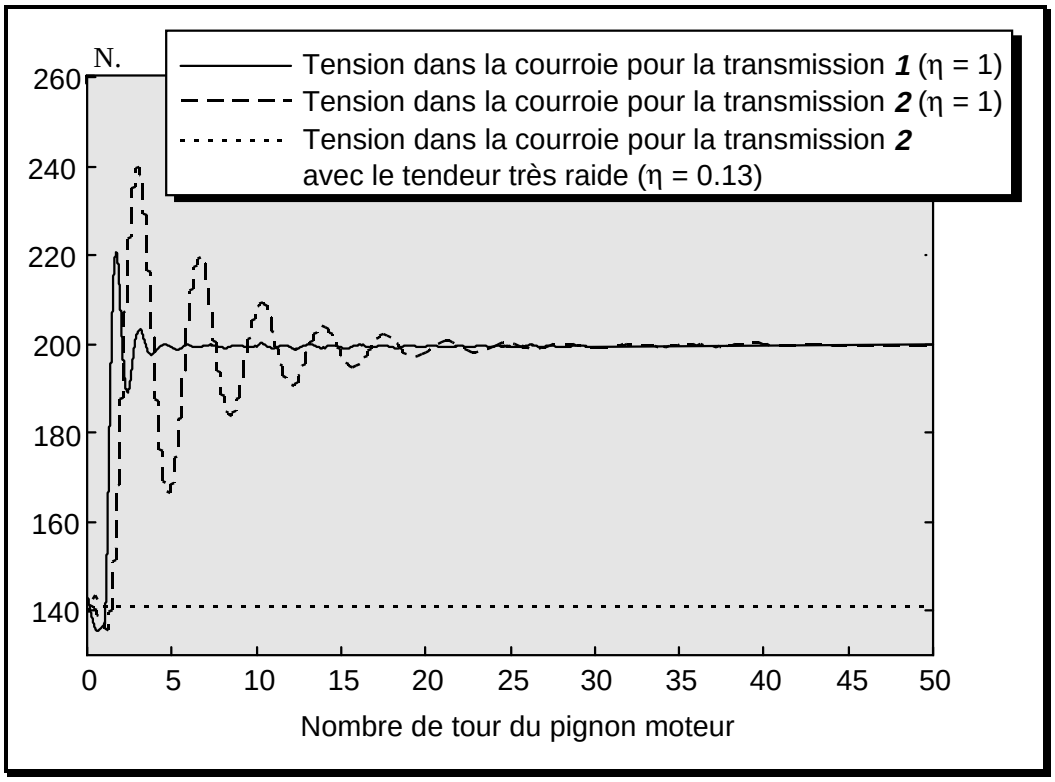


Figure IV. 34 : Rattrapage par le tendeur de la tension de pose initiale de 200 N. en réponse d'une soustension causée par la force centrifuge de la courroie (à 6000 tr/mn).

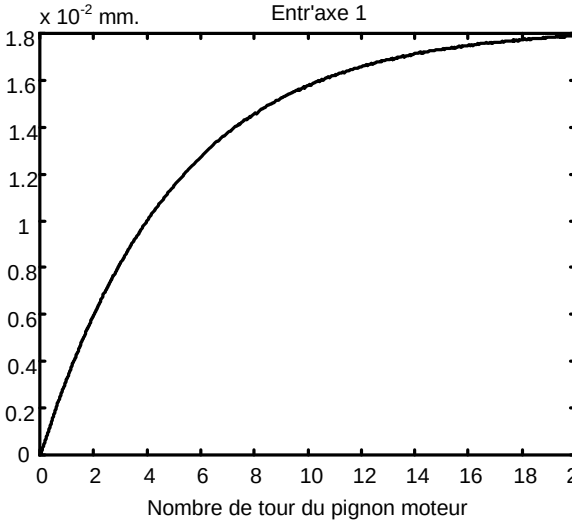


Figure IV. 35 : Évolution de l'entr'axe poulie 1 - poulie 2 suivant une dilatation thermique accélérée du support (transmission 1 et 2 à 6000 tr/mn).

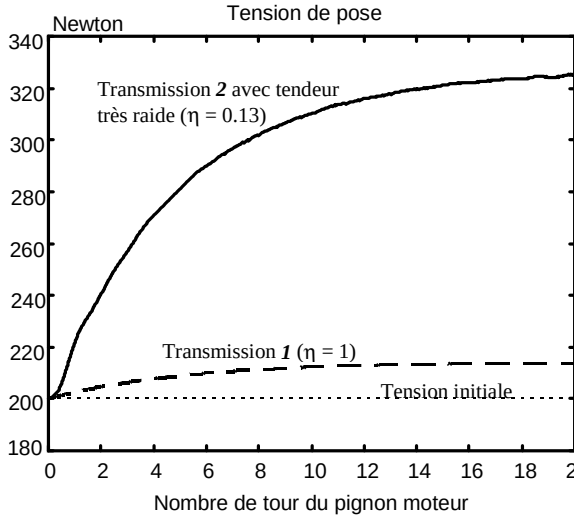


Figure IV. 36 : Évolution de la tension de pose suivant une dilatation thermique accélérée du support (à 6000 tr/mn).

IV.3.5. Charge sur l'âme et les dents de courroie

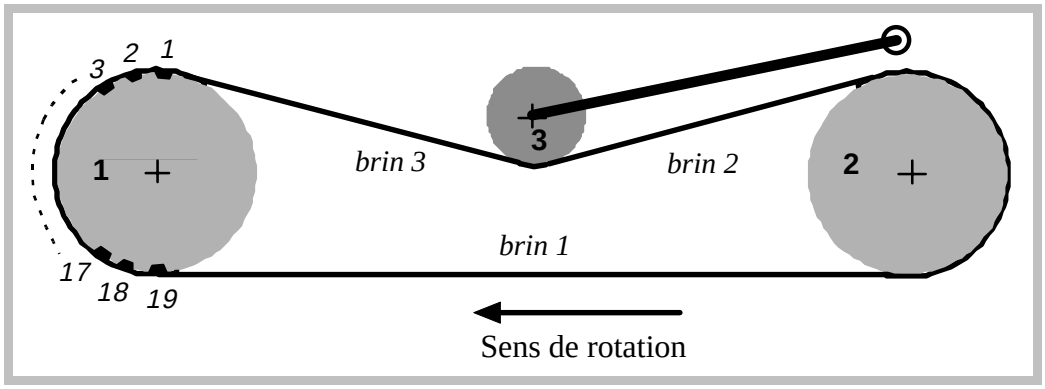


Figure IV. 37 : Numérotation des dix-neuf dents en prise sur la poulie 1.

Le rôle primordial de la charge des dents de courroie en prise sur les poulies sur la durée de vie de la courroie, les vibrations transversales des brins, et le bruit émis par la transmission, est décrit succinctement aux chapitres I.1.3.2 et I.1.3.3. Le calcul des niveaux de charge subit par la courroie profitera ainsi largement aux domaines de l'acoustique et de la fiabilité. Les résultats du calcul, basé sur le modèle validé de J.-M. Dancé (chapitre II.3.4.2), sont présentés dans ce chapitre.

La transmission étudiée est le cas d'école avec un couple appliqué sur la poulie 2 égale à $C = 4.\sin(2\pi.12N.t)$ et N = 7000 tr/mn. Le jeu entre les dents de courroie et de la poulie est de 0.395 mm. Le coefficient de frottement entre la poulie et la courroie est 0.2. Un calcul est mené d'abord avec une différence de pas entre la poulie et la courroie nulle.

La figure IV.38 (a) illustre les variations de déplacement des 19 dents de courroie en prise sur la poulie 1 pour une différence de pas poulie-courroie nulle. Le déplacement est positif dans le sens de rotation de la transmission. La figure IV.37 référence la position géométrique fixe des 19 dents de courroie en prise. Le sens de rotation (figure IV.37) indique les dents de courroie vont de la position 19 à la position 1 sur la poulie 1. La courbe grise de la figure IV.38 (a) retrace partiellement le parcours d'une dent de courroie de la position 19 vers la position 13. Nous avons 12 périodes du couple pour un tour de poulie, soit 36 dents. Une dent de courroie passe donc par exemple de la position 19 à la position 16 durant une période du couple. Nous pouvons ainsi tracer l'historique du déplacement ou, comme c'est le cas sur la figure IV.39, de la charge d'une dent de courroie. La raideur de chaque dent de courroie, qui est fonction du déplacement de la dent (figure III.17), est obtenue simultanément (figure IV.38 b). Le saut de dent peut être visualisé par la raideur longitudinale des dents en prise, qui devient dans ce cas nulle (chapitre III.4.1.1.5.1). La déformation de l'âme de la courroie est également obtenue (figure IV.38 c). L'historique de la charge de l'âme est tracée sur la figure IV.40.

Le calcul de l'historique des charges sur la courroie est important, car il permettra d'établir une loi d'endommagement statistique de la courroie. Sur la figure IV.39, nous distinguons deux zones bien définies concernant la charge d'une dent. En effet, son chargement est nul lorsqu'elle se trouve dans un brin libre. Les zones de charge régulièrement espacées représentent le passage de la dent sur les poulies 1 et 2. Un agrandissement de cette zone est visible sur la figure IV.44. La figure IV.40 visualise l'historique de la charge sur l'âme de la courroie. L'amplitude de la

charge est beaucoup plus forte que dans le cas des dents. En effet, le câblage de l'âme supporte seul la tension dans les brins libres. L'amplitude des charges dépend de la tension dans le brin. La figure IV.27 nous rappelle que l'amplitude de tension la plus forte est dans le brin 1, puis, par ordre décroissant, le brin 2 et 3. Cela permet d'identifier sur la figure IV.40 le brin dans lequel la courroie passe. Entre les brins se trouvent des zones d'amplitudes plus faible correspondant au passage du pas sur une poulie. La charge est alors plus faible, car elle est supportée en partie par les dents.

Les calculs sont maintenant effectués avec deux autres valeurs de différence de pas entre la poulie et la courroie, soit au total :-0.02 / 0.0 / 0.02 mm. Nous pouvons apprécier l'impact de la différence de pas sur le déplacement des dents en comparant la figure IV.38 (a) et la figure IV.41 (a) et (b). Pour 7.85 tours du pignon moteur, la tension dans le brin 1 est forte, alors qu'elle est faible dans le brin 3 (figure IV.42). Les déplacements des dents sont alors négatif, selon la règle choisie. Suivant la différence de pas, nous constatons trois comportements différents. Avec une différence de pas positive (figure IV.41 b), les dents les plus proches du brin 1 sont les plus déplacées (dent 19 déplacée de -0.27 mm.), alors que les dernières dents ne se déplacent pas. Pour une différence de pas nulle (figure IV.38 a), nous constatons une homogénéisation de la charge sur les dents de l'ensemble de l'arc enroulée. La dent 19 reste la plus déplacée, mais la valeur de son déplacement baisse en valeur absolue à -0.15 mm. Avec une différence de pas négative (figure IV.41 a), la dent 19 n'est plus chargée alors qu'elle est située près du brin le plus chargé. Seules les dents 1 à 6 sont chargées. Elles sont toutefois moins chargées (la dent 1 se déplace de -0.1 mm.) que dans le cas où seules les dents proches du brin tendu sont les plus chargés. Cela s'explique par la contribution du frottement entre la poulie et l'arc de contact, d'où la nécessité de le prendre en compte. En effet, lorsque les dents les plus chargées se trouvent du côté du brin mou, nous avons alors une contribution des forces de frottement sur tout l'arc enroulé, ce qui soulage les dents de courroie. L'explication de la différence des déplacements suivant la différence de pas est résumée sur la figure IV.43. Une différence de pas positive, c'est-à-dire le pas de la courroie supérieur au pas de la poulie, reporte toute la charge sur les premières dents du côté du brin tendu. À l'inverse, pour une différence de pas négative, nous observons que seules les dernières dents en prise sont en contact avec la poulie.

L'historique de la charge d'une dent de passage sur une poulie pour les trois différences de pas, est visualisé sur la figure IV.44. Nous observons que les courbes sont inversées entre les deux cas avec une différence de pas négative et positive. Nous pouvons vérifier que le cas, avec une différence de pas nulle, est le plus favorable pour la dent. L'amplitude des charges est plus faible, car toutes les dents de l'arc de courroie enroulée participe à la répartition de la charge. Nous vérifions également que la dent subit plus de six oscillations de charge lorsqu'elle parcourt l'arc de courroie enroulée. En effet, nous avons douze oscillations du couple pour un tour de poulie, soit six oscillations pour un demi-tour. Sur la figure IV.45 est visualisée l'historique de la charge de l'âme de passage sur une poulie pour les trois différences de pas. Il n'y a pas de différences entre les trois cas lorsque le pas de courroie se trouve sur un brin libre. La tension de pose initiale est de 200 N. Nous constatons donc le chargement de l'âme est globalement en-dessous de la tension initiale pour le cas avec une différence de pas positive. Nous retrouvons le phénomène inverse avec une différence de pas négative.

En conséquence, la différence de pas est donc un paramètre significatif au niveau local d'une transmission par courroie dentée. En revanche, le comportement reste fondamentalement identique au niveau global. Nous obtenons en effet qu'une légère variation des rigidités globales moyennes des brins (figure II.45) d'environ 1% dans les deux cas d'une différence de pas poulie-courroie positive et négative.

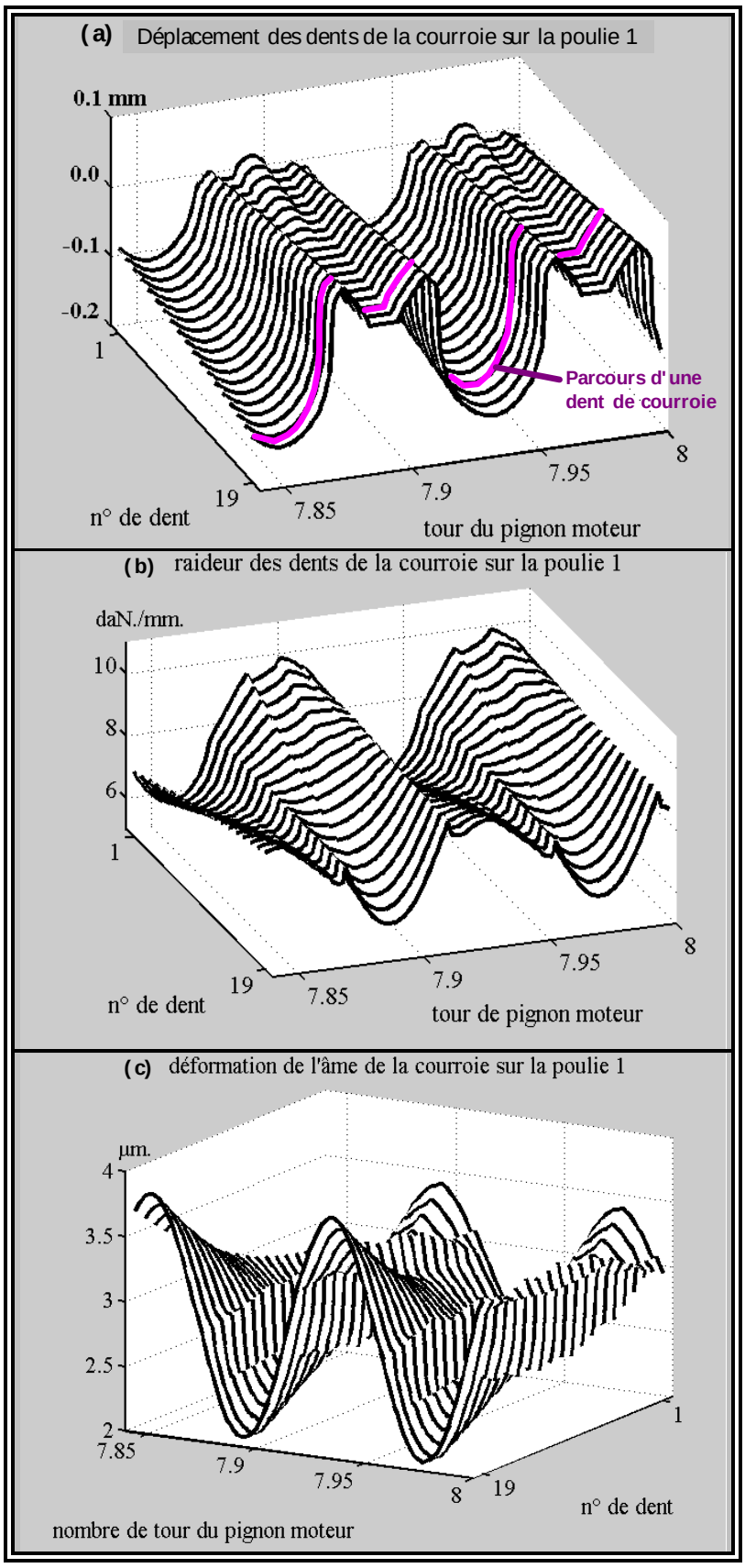


Figure IV. 38 : Déplacement et raideur des dents, et déformation de l'âme de l'arc de courroie enroulé sur la poulie 1 avec une différence de pas entre la poulie et la courroie nulle.

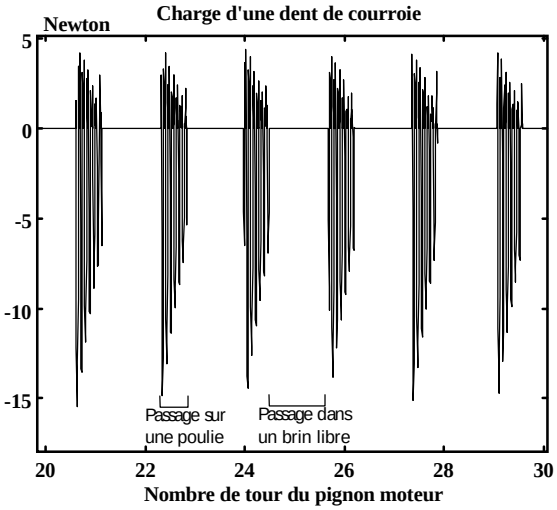


Figure IV. 39 : Historique de la charge d'une dent de courroie pour une différence de pas poulie-courroie nulle.

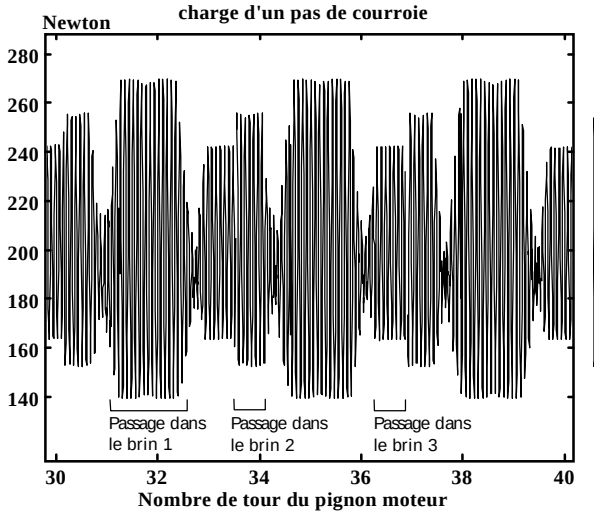


Figure IV. 40 : Historique de la charge d'un pas de courroie pour une différence de pas poulie-courroie nulle.

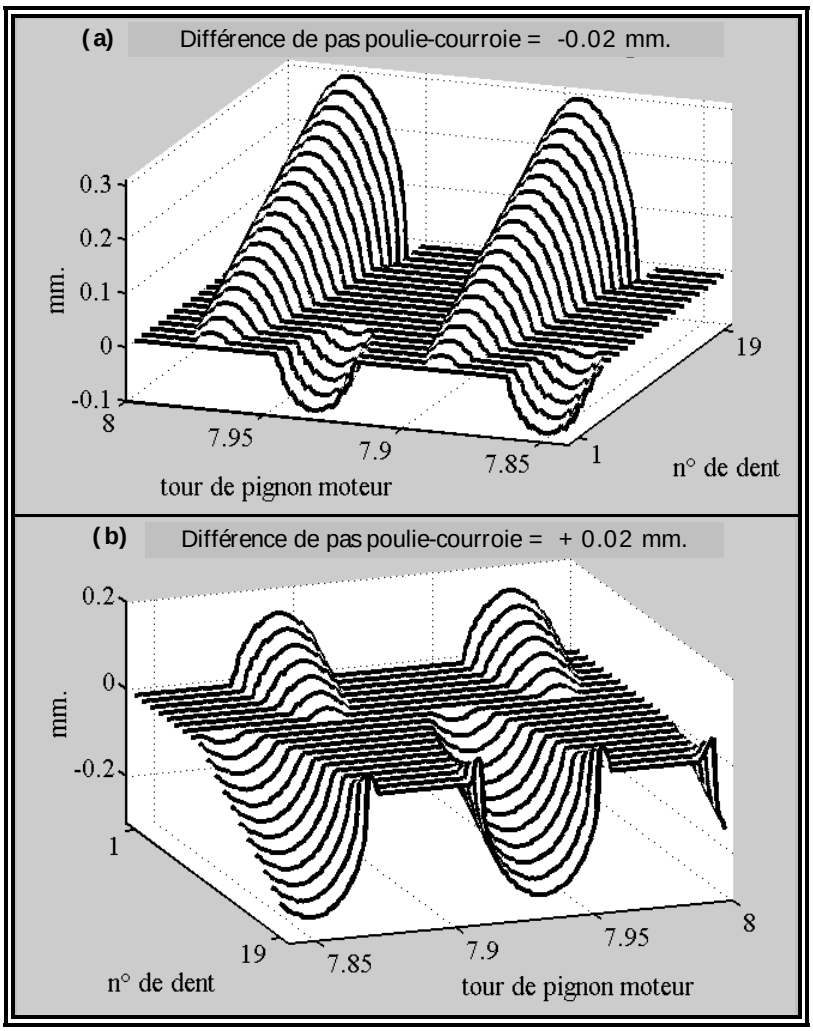


Figure IV. 41 : Déplacement des dents de l'arc de courroie enroulé sur la poulie 1 avec deux différences de pas entre la poulie et la courroie.

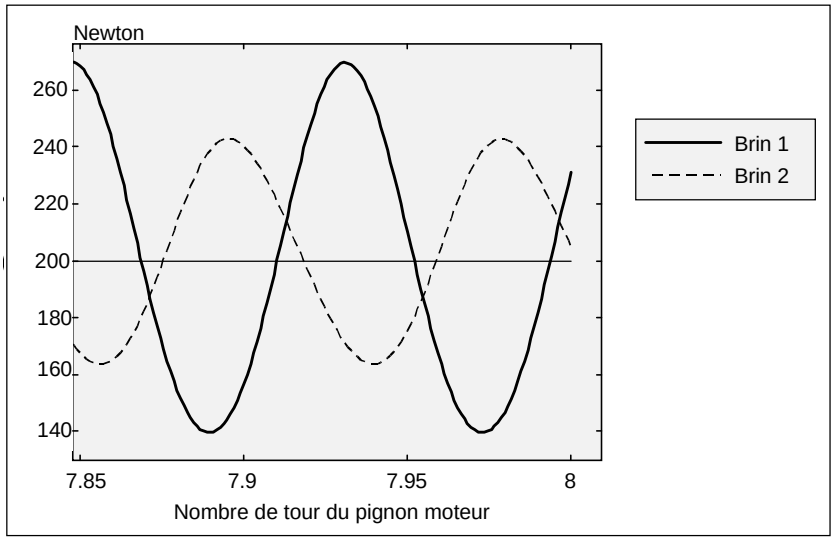


Figure IV. 42 : Tension dans les brins 2 et 3.

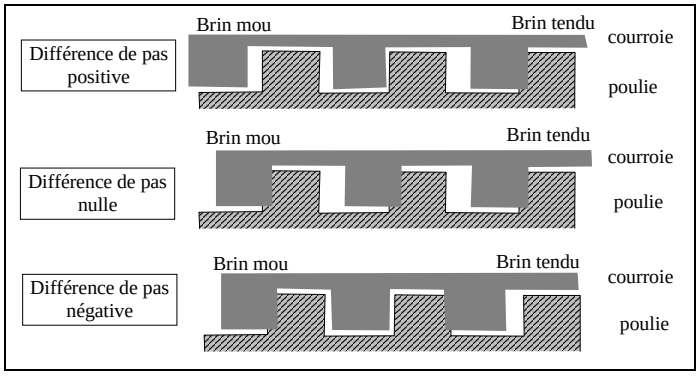


Figure IV. 43 : Visualisation des différence de pas entre la poulie et la courroie.

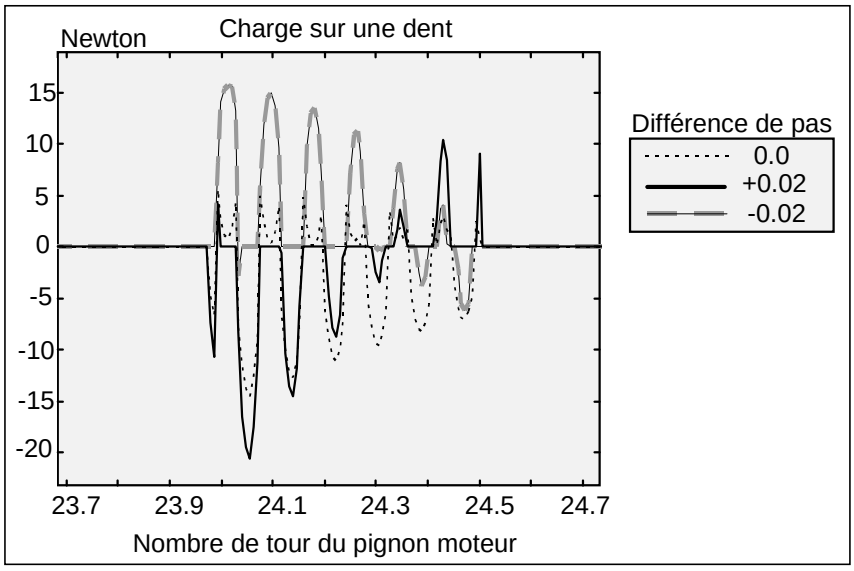


Figure IV. 44 : Charge sur une dent de courroie enroulé sur la poulie 1 avec trois différences de pas entre la poulie et la courroie nulle.

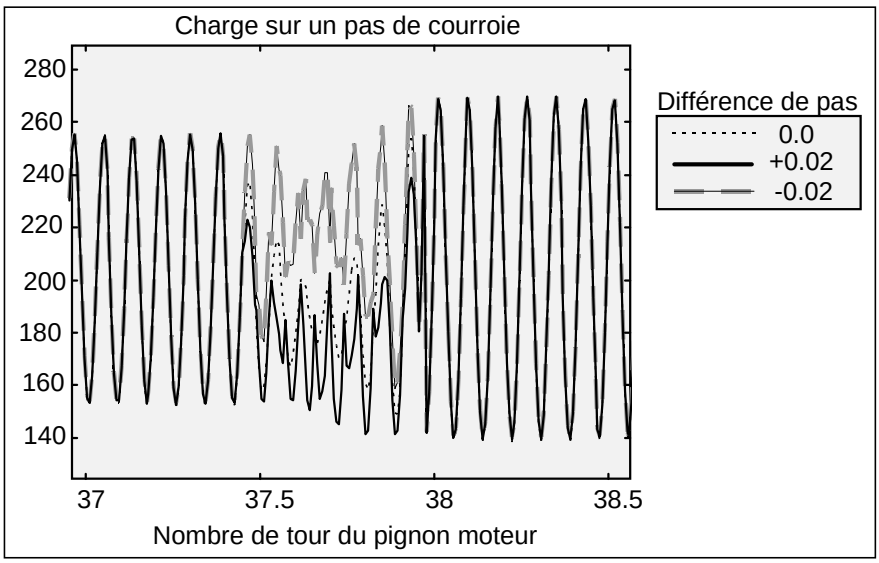


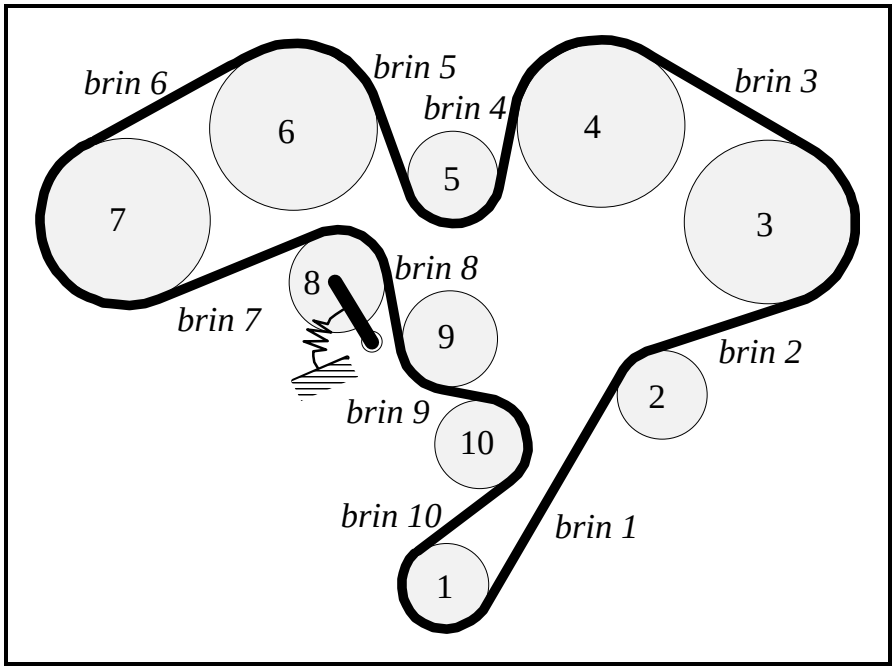
Figure IV. 45 : Charge sur un pas de courroie enroulé sur la poulie 1 avec trois différences de pas entre la poulie et la courroie nulle.

IV.4. Cas industriel d'une transmission de distribution

Un cas industriel est présenté sur la base de la transmission de distribution du nouveau moteur V6 Renault-PSA. La géométrie de la transmission est rappelée sur la figure IV.16. Les données d'entrées sont confidentielles.

Nous pouvons noter la variation de tension importante dans le brin 4, adjacent au galet central. La tension dans le brin 5 étant quasiment identique au brin 4, nous pouvons avoir une idée de la variation de charge verticale s'appliquant sur le galet. Nous trouvons une confirmation avec le déplacement vertical important du galet sur la figure IV.47 (poulie 5) en regard de l'amplitude de la trajectoire des autres poulies. Nous vérifions sur la figure IV.47 que la direction de la trajectoire de la poulie 1 est bien conforme à la direction des ses deux brins adjacents. La forme de la trajectoire des poulies 3 et 4 est plus complexe. Leur forme torsadée s'apparente à un changement du sens de précession des deux poulies. Nous notons sur la figure IV.48 l'acyclisme important de la poulie 3. Nous visualisons une différenciation des deux culasses. En effet, l'acyclisme de la poulie 6 se distingue tant en amplitude qu'en fréquence de la poulie 3.

Cet exemple de simulation sur un cas industriel complexe (10 poulies - courroie de 2 mètres) montre les possibilités d'utilisation du programme DYNAPOUL développé dans le cadre de ce travail. En effet, la compréhension du comportement dynamique par la simulation d'une transmission par courroie dentée en fonctionnement dans un contexte automobile, permettra de dégager pour le bureau d'étude des lois de conception, réduisant ainsi le temps et le coût de la genèse d'un moteur.



Rappel de la figure II.16 : Transmission de la distribution du nouveau V6 PSA-Renault

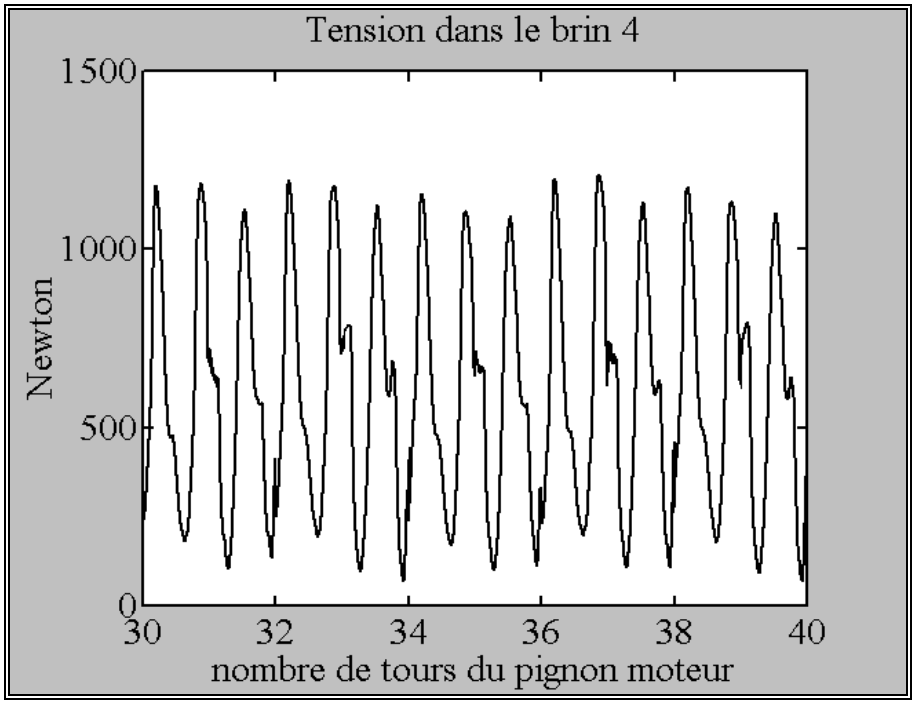


Figure IV. 46 : Tension dans le brin 4 entre les deux culasses.

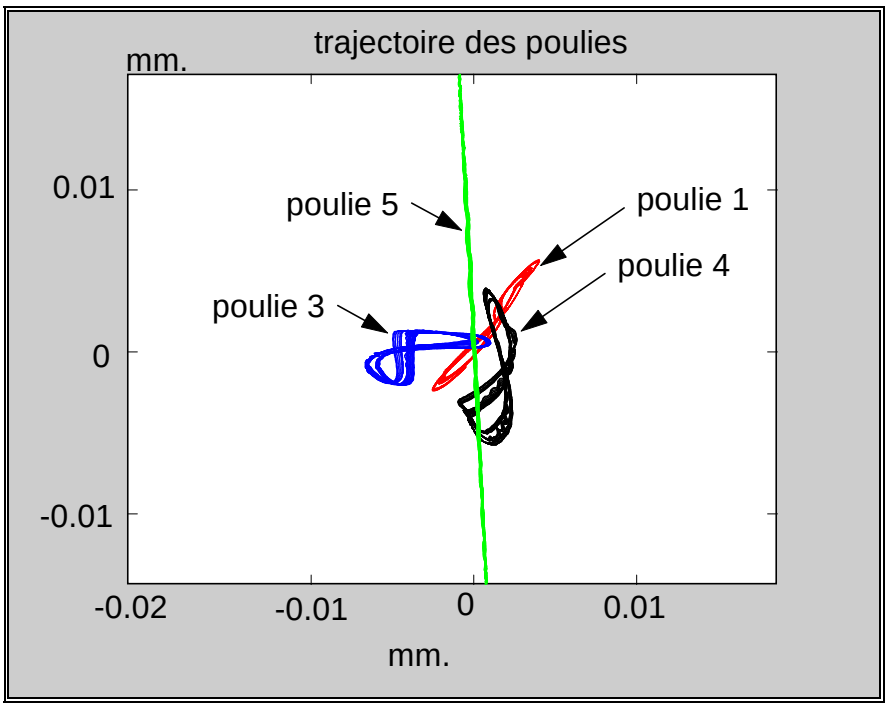


Figure IV. 47 : Trajectoire des poulies 1, 3, 4, 5.

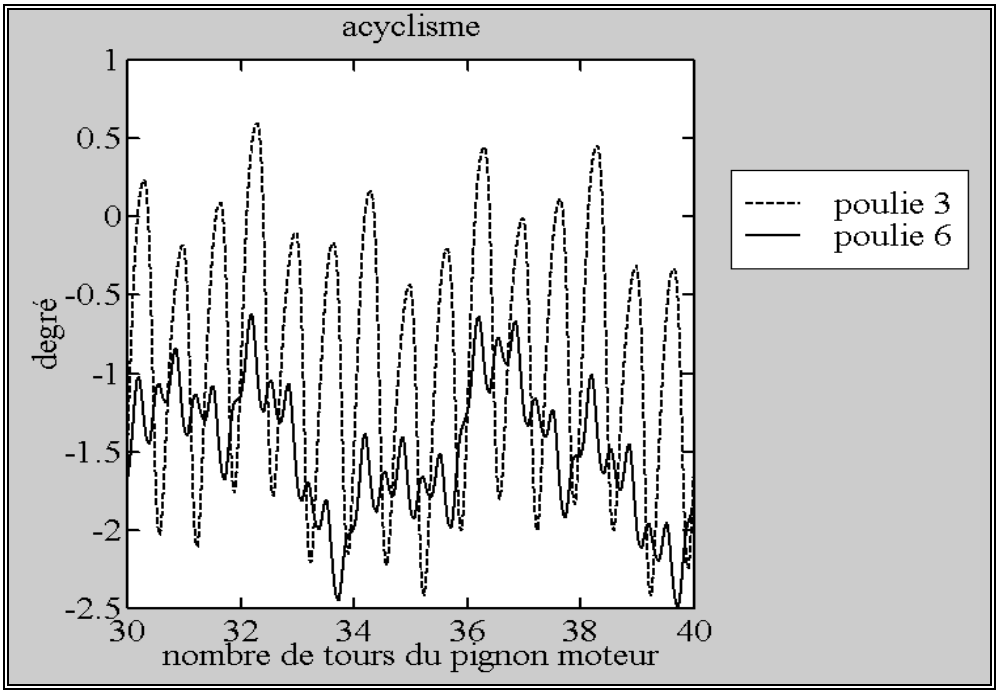


Figure IV. 48 : Acyclisme des poulies 3 et 6.

IV.5. Conclusion

L'exploitation du programme DYNAPOUL par une campagne de simulation sur une transmission simplifiée a permis de dégager certaines lois de comportement d'une transmission par courroie dentée.

L'analyse des modes a permis de connaître les fréquences critiques du système et les énergies en jeu pour les différentes poulies. Le couplage entre le mouvement de translation et la rotation des poulies a été mis en évidence (chapitre IV.IV.3.1.1). Le mouvement de translation des poulies suit en général une trajectoire elliptique qui se torsade lorsque le mouvement de précession s'inverse (chapitre IV.IV.3.2). Le mode, globalement le plus énergétique, est identifié comme le mode correspondant au mode de rotation de la poulie excitée (chapitre IV.IV.3.1.2). Une excitation paramétrique de ce mode est mise en évidence. Celle-ci souligne l'importance de la détermination de l'amortissement longitudinal de la courroie dont dépend son amplitude. Le rôle du tendeur a été défini aux chapitres IV.IV.3.1.3 et IV.IV.3.4. Pour les excitations de fréquences quasiment nulles, le comportement du tendeur est décrit par la valeur de la constante d'efficacité du tendeur η. Toutefois, le comportement en dynamique du tendeur n'est pas corrélé avec la constante η. Le tendeur ne joue un rôle qu'aux basses fréquences de variation de tension. Dans le cas où les variations de tension sont provoquées par un couple, le tendeur amplifie inévitablement l'amplitude de tension dans l'un des brins. Les autres facteurs jouant un rôle dans les tensions (outre le couple) sont énoncés au chapitre IV.IV.3.3. Il y est montré que la tension dans le brin le plus long est amplifiée vis-à-vis de la tension dans les autres brins. L'accélération angulaire des poulies joue également un rôle pour les fortes fréquences.

Deux axes peuvent se dégager à court terme pour continuer cette étude. La validation du modèle et le recalage des paramètres sur un banc de simulation dynamique constitue une première voie. Le banc de simulation permet de contrôler un à un tous les paramètres en corrélation avec une campagne de simulation numérique. Une étape supplémentaire de qualification industrielle du programme sur une transmission de distribution de moteur est nécessaire, mais non sans peine, car elle intègre toutes les influences connues et non-connues d'un moteur automobile. Le second axe d'étude, initié par le chapitre IV.IV.4, est l'analyse de simulations numériques de transmissions complexes placées dans un contexte de moteur automobile. Jusqu'à présent, nous avons étudié une transmission simplifiée avec une excitation unique. Du fait de la non-linéarité du problème, une transmission complexe soumise à un grand nombre d'excitations de nature et de fréquences variées, se révélera sans doute difficile à analyser. Toutefois, cela mènera à la compréhension des phénomènes complexes agissant dans une transmission de distribution.

Conclusion Générale

Les transmissions de puissance par courroie dentée sont utilisées notamment dans l'industrie automobile pour entraîner la distribution des moteurs à combustion interne. L'intégration de transmission par courroie dentée dans un produit aussi complexe qu'un moteur automobile, génère pour le concepteur des contraintes en termes de résistance, durée de vie, et rayonnement acoustique de la courroie. L'objectif du chef de projet est de traiter ces contraintes le plus en amont possible, dès la conception du produit, afin de réduire les temps de projet et les coûts. Le concepteur doit alors disposer d'outil permettant d'assimiler le comportement de la transmission par courroie dentée en liaison avec l'ensemble du système mécanique du produit. Ce constat constitue la motivation de ce travail de thèse. Il s'agit d'élaborer un modèle prédictif du comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée, simulant aussi bien le comportement des poulies (mouvement en rotation et en translation), que celui de la courroie (tension dans l'âme et charge sur la denture).

Ce type de modèle, se rapportant aux transmissions par courroie dentée, est peu présent dans la littérature scientifique, en raison de la complexité des interactions entre l'âme de la courroie, sa denture, et les poulies. Le chapitre I montre que les modèles concernant les transmissions par courroie Poly-V, sont plus nombreux et plus développés. Toutefois, les conclusions ne sont pas toutes transposables dans le cas d'une transmission par courroie dentée. Ce travail de thèse a donc abouti à un travail ***original*** de modélisation d'une transmission par courroie dentée. L'originalité de la modélisation ressort *d'une part* de l'intégration dans une modélisation globale de plusieurs modèles (constituant cinq modules) développés indépendamment. La synthèse de plusieurs modèles permet une modélisation globale avec "effet d'échelle", c'est-à-dire une précision de modélisation adaptée pour chaque module. La discrétisation de la modélisation ne concerne pas les éléments ou la géométrie d'un mécanisme complexe (exemple des boîtes à vitesses avec A. Bourdon [1997]), mais s'applique au comportement de la transmission. En conséquence, l'un des modèles traite à part le comportement local de la transmission (module du calcul de la répartition des charges de la denture de la courroie), alors que d'autres modèles traitent du comportement global de la transmission (calcul de la tension dans les brins, calcul des raideurs et amortissements globaux).

Le chapitre II montre que l'originalité de la modélisation vient *d'autre part*, tant des solutions variées adoptées pour les différents modèles, que du traitement complet des problèmes posés par le fonctionnement d'une transmission par courroie dentée.

En effet, la modélisation discrétisée en plusieurs modules permet la prise en compte de l'ensemble des caractéristiques de la courroie, selon leur implication dans un des aspects de la transmission. L'inertie et la raideur de flexion de la courroie sont incluses dans le calcul de la

tension. L'amortissement et la non-linéarité de la raideur de la denture sont considérés dans le calcul des raideurs et amortissements globaux du système. L'effet de l'imperfection de la courroie, ainsi que l'effet polygonal dû à la denture, sont introduits dans le modèle par une erreur cinématique de transmission. Les imperfections des poulies sont également assimilées dans le modèle. L'excentricité de celles-ci sont responsables d'une erreur cinématique de transmission et d'une variation de la tension de pose. Le balourd est également intégré dans la modélisation. Les facteurs intervenant sur les interactions entre les poulies et la courroie, tels que le frottement et la différence de pas, sont pris en compte. La considération de la souplesse des paliers, est un aspect supplémentaire de l'originalité du modèle.

Toutes ces caractéristiques de la transmission interviennent dans cinq modules. Le premier module concerne le calcul des paramètres géométriques de la transmission. Le second calcule la tension dans les brins en dynamique, en intégrant la forme courbe des brins libres. Les résultats sont originaux, car ils montrent que la tension n'est jamais nulle dans la courroie. Des phénomènes complexes, comme l'apparition d'une première harmonique très nette de la fréquence fondamentale de la variation de la tension dans les brins, sont mis en évidence. Le troisième module calcule la répartition des charges des dents de courroie en prise sur les poulies. Son originalité vient de la prise en compte du raidissement d'une dent de courroie avec l'accroissement de sa charge radiale. Cet aspect est très important, car il permet de calculer correctement la rotation d'une poulie sous l'effet d'un couple. En effet, les courbes de rotation mesurées de poulie en fonction du couple sont globalement linéaires, alors qu'une dent de courroie s'assouplit avec la charge tangentielle appliquée. D'autre part, les courbes de rotation mesurées de poulie diffèrent selon la tension de pose ce qui rend nécessaire l'intégration du facteur de la charge radiale. Le quatrième module ramène les aspects locaux de la transmission à un aspect global permettant de réduire substantiellement la complexité du problème. L'amortissement et la raideur de chaque pas et de chaque dent de la courroie est pris en compte dans le calcul d'une raideur et d'un amortissement équivalent pour chaque brin libre de la transmission. En conséquence, le modèle est capable de simuler le comportement dynamique de n'importe quelle transmission, avec la seule connaissance des caractéristiques mécaniques de la courroie. Le cinquième module calcule l'intégration des équations du mouvement.

Outre la modélisation, une méthode originale a été développée pour caractériser la raideur d'une dent de courroie. Le chapitre III montre que cette méthode se distingue des précédentes méthodes par la prise en compte de la charge radiale d'une dent, ainsi que par sa précision. Le banc de mesure permet de mesurer précisément la raideur d'une dent dans son contexte réel d'utilisation avec un traitement mathématique fiable, et susceptible d'évoluer en incorporant davantage de paramètres. Une seconde méthode appelée "Least Square Complex Exponentiel Method", a été employée pour caractériser en dynamique l'amortissement et la raideur de la courroie.

Une fois les caractéristiques de la courroie connues, il a été possible de vérifier les performances en statique du modèle sur le cas de la transmission d'un banc de simulation. Une excellente adéquation entre les tensions mesurées et calculées a permis de conclure à la validité du calcul non-linéaire des tensions. La comparaison des rotations mesurées et calculées des poulies de la transmission a permis également de conclure à la validité du modèle. Le comportement du tendeur dynamique a pu aussi être corrélé avec la constante d'efficacité du tendeur η définie dans la bibliographie. Ces résultats encourageants ont été obtenus sur une grande plage de couple et de tension de pose. Toutefois, la représentativité en

statique et en dynamique du modèle reste à confirmer avec d'autres géométries de transmission et d'autres courroies sur banc de simulation. La dernière étape de la qualification du modèle est la confrontation des résultats de simulation numérique aux résultats expérimentaux sur banc moteur. La difficulté viendra alors de l'intégration de toute les influences connues et non-connues d'un moteur automobile. En particulier, les effets de la température restent à préciser. La présence de vibration transversale dans les brins ne simplifie pas non plus la validation du modèle. H. Tokoro (1997) souligne en outre la difficulté d'obtenir des mesures répétitives. Une campagne de qualification expérimentale en dynamique est actuellement en cours.

Une analyse des résultats de simulation numérique est effectuée au quatrième chapitre sur la base d'une transmission simplifiée à deux poulies dentées et un galet porté par un tendeur dynamique. Les modes critiques de la transmissions sont présentés selon leur nature énergétique. Le mode critique de la rotation de la poulie réceptrice est globalement le plus excité. En outre, une excitation paramétrique du mode critique de rotation de la poulie réceptrice due à la variation cyclique de la raideur et de l'amortissement global des brins équivalents, a été mise en évidence. L'importance de ce phénomène est largement tributaire de l'amortissement global des brins équivalents, ce qui souligne l'intérêt à porter à l'amortissement de la courroie. L'influence du mouvement des paliers sur la rotation du galet a été montrée par l'existence d'un mode de couplage entre les paliers et la rotation du galet. Ce mode n'est pas davantage excité sur sa fréquence critique, mais en fait lorsque les conditions de couplage sont favorables. Le rôle du tendeur dynamique a été précisé. Celui-ci ne rattrape pas les variations de tension causées par un couple appliqué à une poulie. Il peut toutefois rattraper les variations de la tension de pose à basse fréquence lorsque la constante d'efficacité du tendeur η (chapitre I) est proche de l'unité. Toutefois, il convient de bien choisir la fréquence critique du mode de translation du galet tendeur pour ne pas être en opposition de phase avec la variation de la tension de pose. Car dans ce cas, la variation de la tension de pose serait amplifiée. L'analyse de la trajectoire des paliers, a montré à la fois une évolution de la trajectoire en fonction de la fréquence d'excitation, et des changements, parfois rapide, du sens de précession des poulies. Un intérêt particulier a été porté à l'évolution de la tension dans les brins en fonction de la fréquence d'excitation, car ce paramètre intervient à la fois dans les modèles d'endommagement de courroie, et dans les modèles acoustiques de transmission par courroie. Trois facteurs interviennent dans l'évolution de la tension. Pour les basses fréquences d'excitation, le tendeur amplifie la tension dans certains brins. Un deuxième facteur identifié est la raideur de flexion de la courroie. Celle-ci provoque une amplification de la tension dans les brins les plus longs. Le troisième facteur est l'accélération du mouvement en rotation des poulies, dont l'amplitude augmente avec la vitesse de rotation de la transmission. Ce phénomène peut devenir dangereux pour la transmission si, pour des régimes de rotation élevés, l'accélération angulaire d'une ou plusieurs poulies est en phase avec le couple appliqué sur ces poulies. Le calcul de la tension dans les brins libres et enroulés sur les poulies, permet d'obtenir l'historique de la charge d'un pas de courroie au cours du cycle de la courroie. La connaissance de ce paramètre autorise l'élaboration d'un spectre de charge de la courroie qui peut mener à la détermination, par une approche probabiliste, de la durée de vie de la courroie. Un deuxième paramètre intervenant également dans les modèles d'endommagement de courroie et dans les modèles acoustiques de transmission par courroie, est l'historique de la charge d'une dent au cours du cycle de la courroie. L'historique de la charge sur la courroie (dent et âme) a été visualisé faisant apparaître un lien avec certains paramètres géométriques comme la différence de pas entre les poulies et la courroie.

Un exemple de simulation sur un cas industriel (nouveau moteur V6 PSA-Renault) est présenté. En effet, l'exploitation systématique du logiciel et la compréhension du comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée, permettra de dégager pour le bureau d'études des lois de conception pour les transmissions de distribution. Conformément avec la motivation industrielle de ce travail de thèse, le logiciel a été transféré chez un grand constructeur automobile français.

Outre les perspectives industrielles de ce travail, une continuation sur le plan scientifique est souhaitable. En effet, en plus des couplages avec les paliers, les couplages avec les vibrations transversales des brins sont très importants. Le chapitre I montre que des modes peuvent être dominés par le mouvement transversal des brins. Ces modes se trouvent dans la même gamme de fréquence, que les modes dominés par le mouvement en rotation des poulies. Cela rend beaucoup plus probable les couplages du mouvement de rotation des poulies avec le mouvement transversal des brins, que des couplages avec le mouvement en translation des paliers. De tels couplages interviennent de deux façons : (1) Un mode dominé par la rotation des poulies peut alors devenir un mode dominé par le mouvement transversal des brins par échange d'énergie dû à un couplage *linéaire* entre deux modes de nature différente. (2) Un couplage *non-linéaire* causé par une excitation paramétrique du mouvement transversal des brins, engendre des instabilités avec des sauts d'amplitude du mouvement transversal des brins très élevés néfastes pour le niveau sonore et la durée de vie de la courroie. Une meilleure représentativité du modèle développé durant ce travail de thèse passe donc par l'incorporation d'un modèle de vibration transversale. La prise en compte du mouvement des paliers permettra en outre de définir de façon plus réaliste les conditions limites du mouvement transversal des brins, ce qui n'a pas été fait jusqu'à présent dans un modèle global. D'autre part, le mouvement des paliers constitue une source supplémentaire d'excitation paramétrique du mouvement transversal des brins. En conséquence, une plus grande précision peut être également obtenue pour la modélisation du mouvement transversal des brins, ce qui permettrait une meilleure localisation des zones d'instabilités très sensibles aux conditions initiales et aux paramètres de la transmission. La validation d'un modèle plus représentatif incorporant le mouvement transversal des brins serait en outre simplifiée. On peut également noter la possibilité de calculer de façon fiable avec un modèle de vibrations transversales, la tension dans un brin en mesurant la fréquence de battement du brin.

En définitive, La modélisation développée lors de ce travail constitue un outil important dans la compréhension globale et locale du comportement des transmissions par courroie dentée en fonctionnement, et une étape essentielle dans l'élaboration de règle de conception pour les bureaux d'études.

Bibliographie

[Abrate, 1986] - Abrate, S., "Noise and Vibration in Power Transmission Belts", SAE Transaction 860428 (Society of Automotive Engineers), 1986, pp. 1028-1037.

[Abrate, 1992] - Abrate, S., "Vibrations of Belts ans Belt Drives", Mech. Mach. Theor, 1992, Vol.27, N°6, pp. 645-649.

[Alspaugh, 1967] - Alspaugh, D. W., "Torsionel Vibration of a Moving Band", Journal of Franklin Institute, 1967, Vol. 283, N° 4, pp. 328-338.

[Atouf, 1992] - Atouf, M., " Étude du Comportement Mécanique des Dentures de Courroies Synchrones: Application aux Courroies de type H.T.D.", thèse de doctorat, déc. 1992, n° 92 ISAL 0063, INSA de Lyon, 209 pages.

[Auto-Concept, 1996] - Auto Concept, sept.-oct.. 1996, pp 20-24.

[Auto-Plus, 1996] - "Courroie de distribution : le grand fléau.", Auto Plus, janv. 1996, n° 384, pp 32-34.

[Banaszek et al., 1993] - Banaszek, G., Wittbrodt, E., Esat, "Dynamic Behaviour of Belt Driven Gears", International Conference FEMCAD CRASH, Paris, June 1993, pp. 105-119.

[Beikmann, 1992] - Beikmann, R. S., "Static and Dynamic Behavior of Serpentine Belt Drive Systems : Theory and Experiment.", The University of Michigan, Ph. D., Order Number DA9308273, 1992, 173 s.

[Beikmann et al., 1996 (a)] - Beikmann, R. S., Perkins, N. C., Ulsoy, A. G., "Free Vibration of Serpentine Drive Systems", Journal of Vibration and Acoustics, 1996, Vol. 118, No 3, pp. 406-413.

[Beikmann et al., 1996 (b)] - Beikmann, R. S., Perkins, N. C., Ulsoy, A. G., "Nonlinear Coupled Vibration Response of Serpentine Belt Drive Systems.", Journal of Vibration and Acoustics, 1996, Vol. 118, No 4, pp. 567-574.

[Beikmann et al., 1997] - Beikmann, R. S., Perkins, N. C., Ulsoy, A. G., "Design and Analysis of Automotive Serpentine Belt Drive Systems for Steady State Performance", Journal of Mechanical Design, June 1997, Vol. 119, pp. 162-168.

[Bergé et al., 1984] - Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, C., "L'ordre dans le Chaos.", Paris : Hermann, 1984, 353 pages, ISBN 2705659803.

[Bourdon et al., 1995] - Bourdon, A., Rigal, J.-F., Play, D., "Numerical Modal Result Processings using computer aided design for analysing the global vibrating behavior of gearboxes.", Proc. Inter. Congress Gear Transmission, Sofia, Bulgaria, Sept. 1995, Vol. II, pp. 104-110.

[Bourdon, 1995] - Bourdon, A., "Modélisation Dynamique Globale des Boites à Vitesse Automobile.", Thèse de Doctorat, Sept. 1997, n° 97 ISAL 0084, INSA de Lyon, 221 p.

[Bussilet et al., 1995] - Bussilet, B., Orluc, P., Maurice, E., "La Logique et l'Inespéré.", Moto Journal, sept. 1995, n° 1197, pp 64-79.

[Childs et al., 1990] - Childs, T. H. C., Parker, I. K., Coutsoucos, A., Day, A. J., Dalgarno, K. W.., "Tooth loading and Life of automotive timing belts", Proc. 17th Leeds Lyon Symposium on Tribology, LEEDS, UK, Sept. 1990, pp.341-48.

[Childs, 1991] - Childs, T. H. C, Coutsoucos, A., Dalgarno, K. W., Day, A. J., Parker, I. K., "Life Prediction of Automotive Timing Belts", Proceedings of International Conference on Motion and Power transmission, Japan Society of Mechanical Engineering, Hiroshima, Japan, 1991, pp. 376-81.

[Conte, 1997] - Conte, M., "Contraintes par les caustiques. Déterminations : Des K_I et K_{II} suivant l'ordre des chargements pour une fissure et pour deux fissures du déchargement en mode ii de l'une ou l'autre.", 10è séminaire "Holographie et Technique Opto-Électroniques.", Paris, 9-10 oct. 1997, pp. 79-89.

[Coulomb, 1785] - Coulomb, C. A., "Théories des machines simples en ayant égard au frottement de leur parties.", Académie Royale des Sciences, Mémoire de mathématique et de physique, 1785, volume X, p. 16.

[Daabin et al., 1991] - Daabin, A., Fawcett, J.-N., Burdess, J. S., "An experimental study of the parameters influencing transmission error in toothed belt drives.", Proc. Eighth world congress on the theory of machines and mechanisms, Prague, Czechoslovakia, 1991, Vol.2, pp.547-551.

[Dalgarno, 1991] - Dalgarno, K. W., "Synchronous belt materials; durability and performance.", PHD thesis, University of Bradford, 1991, 290 s.

[Dalgarno et al., 1994 (a)] - Dalgarno, K. W. , Day, A. J., Childs, T. H. C., "Synchronous Belt Materials and Belt Life Correlation.", Journal of Automotive Engineering, 1994, Vol. 208, Part D, pp. 37-48.

[Dalgarno et al., 1994 (b)] - Dalgarno, K. W., Day, A. J., Moore, R. B., "Lifetime Dependant Properties of Automotive Power Transmission Belts.", European Seminar on Belt Drives S172, London, Feb. 1994, non-paginated.

[Dancé & Play, 1991] - Dancé, J.-M., Play, D., "Geometrical Design Parameters Influence on Timing Belt Load Distribution.", JSME International Conference on Motion and Power Transmission, Hiroshima, Japan, Nov. 1991, pp.357-62.

[Dancé, 1992] - Dancé, J.-M., "Comportement Statique et Cinématique des Transmissions par Courroies Synchrones. Modélisation et Détermination des Paramètres Prépondérants.", thèse de doctorat, déc. 1992, n° 92 ISAL 0082, INSA de Lyon, 239 pages.

[Debbabi, 1990] - Debbabi, C., "Contribution à l'Étude Dynamique des Courroies de Transmission Soumises aux Irrégularités Cycliques de Vitesse des Moteurs.", Thèse de Doctorat de l'Université Pierre & Marie Curie (Paris VI), 1990, 182 pages.

[Debbabi et al., 1990] - Debbabi, C., Simon, J.-M., Vialard, S., "Identification dynamique de la fonction transmission par courroie striée cas des moteurs à combustion interne.", Mécanique Matériaux Électricité, 1990, No 435, pp. 31-36.

[Debbabi & de Lamy, 1996] - Debbabi, C., de Lamy, A., "Simulation Numérique de la fonction transmission des accessoires sur moteur automobile.", Ingénieurs de l'Automobile, nov.-dec. 1996, pp. 56-61.

[Ewins, 1986] - Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice.", Letchworth : Research Studies Press, 1986, 269 s., ISBN 0 86380 017.

[Fawcett & Burdess, 1980] - Fawcett, J. N., Burdess, J. S., "An Experimental Investigation of the Vibration of Toothed Belts", ASME paper, 80-C2/DET-94, Presentation at the Century 2 International Power Transmission & Gearing Conference, San Francisco, California, Aug. 1980, pp. 1-4.

[Fawcett et al., 1989] - Fawcett, J. N., Burdess, J. S., Hewit, J. R., 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, IL, Apr. 1989, pp. 25-28.

[Fawcett, 1994] - Fawcett, J. N., "Advances in Belt Tensioning Techniques", European Seminar on Belt Drives, S17, London, Feb. 1994, non-paginated.

[Firbank, 1977] - Firbank, T. C., "On the kinematics of synchronous belt drives.", Engineer's Digest, 1977, Vol. 38, No 77, pp. 39-41.

[Fosdick & Villagio, 1989] - Fosdick, R., Villagio, P., "Influence of the Bending Stiffness on the Shape of a Belt in Steady Motion", Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME), June 1986, Vol. 53, pp. 266-70.

[Gasper & Hawker, 1989] - Gasper, R. G. S., Hawker, L. E., "Resonance Frequency Prediction of Automotive Serpentine Belt Drive Systems by Computer Modelling.", 12th ASME Biennal Conf. Mech. Vibr. Noise, Montreal, Canada, Sept. 1989,pp.13-16.

[Gerbert, 1978] - Gerbert G, "Load distribution in timing belts", Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), Apr. 1978, Vol. 100, pp. 208-215.

[Gerbert, 1981] - Gerbert, G., "Some Notes on V-Belt Drives", Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), January 1981, Vol. 103, pp. 8-18.

[Gerbert, 1991] - Gerbert, G., "Timing Belt Jumping at Driven Pulleys", JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, Japan, Nov. 1991, pp. 368-375.

[Gervas, 1967] - Gervas, K. I., "Determining the mechanical properties of V-belts in flexure", translated by P. G. WILLIAMS, Soviet rubber Technologie, 1967, Vol. 26, No 2, pp. 28-31.

[Gill, 1951] - Gill, S., "A Process for the Step by Step Integration of Differential Equations in an Automatic Computing Machine.", Proc. Cambridge Phil. Soc., 1951, Vol. 47, pp. 431-437.

[Hamel, 1927] - Hamel, G., ‘‘Uber Seilsteifigkeit.’’, Zeit. Angew. Math. Mech., 1927, Vol. 7, No. 2, pp. 113-119.

[Harrison, 1992] - Harrison, A., "Dynamic Instabilities and Chaos in Running Belts and Their Cleaning Devices.", in *Applied Chaos* edited by Jong Hyun Kim & John Stringer, New-York : John Wiley & Sons, 1992, chap. 3, pp. 51-86, ISBN 0471544531.

[Heiduk & Arnold, 1994] - Heiduk, Th., Arnold, M., "Influence of Different Excitations on the Dynamic Behaviour of Toothed Belt Drives", European Seminar on Belt Drives S172, London, Feb. 1994, non-paginated.

[Hwang et al., 1994] - Hwang, S.-J., Perkins, N. C., Ulsoy, A. G., Meckstroth, R. J., "Rotational Response and Slip Prediction of Serpentine Belt Drive Systems.", Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of ASME, January 1994, Vol. 116, pp. 71-78.

[Jakowluk & Dudziak, 1975] - Jakowluk, Dudziak, "Investigation of the Effect of Mechanical Stabilization and Temperature on the loading characteristics and the differential Young moduli of the V-Belts.", Bulletin de l'Académie des sciences polonaise, 1975, Vol. 22, No 7.

[Kagotani, 1981] - Kagotani, M., Aida, T., Koyama, T., Sato, S., Hoshiro, T., "Some Methods to Reduce Noise in Toothed Belt Drives", Bulletin of the JSME, apr. 1981, Vol. 24, No 190, pp.723-728.

[Kagotani, 1983] - Kagotani, M., Aida, T., Koyama, T., Sato, S., Hoshiro, T., "A study on Transmission Characteristics of Toothed Belt Drives (2nd report, Transmission Error under a State of Applied Initial Tension, Theoretical Analysis)",Bulletin of the JSME, 1983, Vol. 26, No. 211, pp. 132-139.

[Kagotani, 1991] - Kagotani, M., Koyama, T., Ueda, H., "A Study on Transmission Error in Timing Belt Drives (Effect of Eccentric Phase Angle of Pulley and Belt Width)", JSME International Conference on Motion and Power transmissions, Hiroshima, Japan, Nov. 1991, pp. 363-367.

[Kagotani et al., 1993] - Kagotani, M., Koyama, T., Ueda, H., "A Study on Transmission Error in Timing Belt Drives: Effect of Production Error in Polychloroprene Rubber Belt", Journal of Mechanical Design (Transaction of the ASME), Dec. 1993, Vol. 115, pp. 1038-1043.

[Koyama et al., 1979 (a)] - Koyama, T., Kagotani, M., Shibata, T., Hoshiro, T., "A Study on Strength of Tooth Belt (2nd Report, influence of pitch difference on load distribution)", Bulletin of JSME, 1979, Vol. 22, No 181, pp.1235-1239.

[Koyama et al., 1979 (b)] - Koyama, T., Kagotani, M., Shibata, T., Sato, S., Hoshiro, T., "A Study on strength of thoothed belt (3rd report, fatigue strength and features of fracture).", Bull. of the JSME, 1979, Vol. 23, No169, pp.988-993.

[Koyama et al., 1980] - Koyama, T., Kagotani, M., Shibata, T., Hoshiro, T., "A Study on strength of thoothed belt (5rd report, effect of pitch difference on fatigue strength of toothed belt). Bull. of the JSME, 1980, Vol. 23, No 181, pp.1240-44.

[Koyama et al., 1984] - Koyama, T., Kagotani, M., Hoshiro, T., "Life Transmission Error and Noise of Toothed Belt Drives for Automobiles Engines", ASME, 1984, publication 84-DET-217

[Koyama et al., 1990] - Koyama, T., et al., "A Study on Timing Belt Noise (How to Reduce Resonant Noise)", Journal of Mechanical Design, Sept 1990, Vol. 112, pp. 419-423.

[Kubo et al., 1971] - Kubo, A., Ando, T., Sato, S., Aida, T., Hoshiro; T."On the Running Noise of Toothed Belt Drives (2nd report: Influence of Running Conditions and Some Noise Reduction Methods)", Bulletin of the JSME, 1971; Vol. 14, No 75, pp. 998-1107.

[Lai & Chen, 1971] - Lai, J.-L., Chen, C. H., "Vibration and Dynamic Stability of an Axially Moving Belt.", ASME paper, Presentation at the Vibrations Conference and the International Design Automation Conference (ASME), Toronto, CANADA., Sept. 1971, pp. 2-8.

[Lizuka, 1994] - Iizuka, H., Watanabe, K., Mashimo, S., "Observation of fatigue failure in Synchronous belts.", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structure, 1994, Vol. 17, pp. 783-790.

[Lizuka & Gerbert, 1996] - Iizuka, H., Gerbert, G., "Fatigue Failure Mechanism of Synchronous Belts.", DE-Vol. 88, Power Transmission and Gearing Conference, ASME, San Diego, California, USA, oct. 1996, pp. 319-325.

[Meirovitch, 1986] - Meirovitch, L., "Elements of Vibration Analysis", 2nd Edition, New York : MacGraw Hill, 1986, pp. 290-296.

[Mizuno et al., 1988] - Mizuno, N., Inagaki, H., Nakakubo, Nakada, M., "Analysis of Synchronous Belt Vibration in Automotive Valve Train", SAE Paper 880077, 1988, p. 7.

[Mockensturm et al., 1996] - Mockensturm, E. M., Perkins, N. C., Ulsoy, A. G., "Stability and Limit Cycles of Parametrically Excited, Axially Moving Strins.", Journal of Vibration and Acoustics, July 1996, Vol. 118, pp. 346-351.

[Morel, 1992] - Morel, J., "Vibration des Machines et Diagnostic de leur État Mécanique.", Paris : Eyrolles, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 1992, 378 p.

[Mote, 1965] - Mote, C. D., Jr, "A Study of Band Saw Vibrations", Journal of the Franklin Institute, 1965, Vol. 279, No. 6, pp. 430-444.

[Mote, 1972] - Mote, C. D., Jr, "Dynamic Stability of Axially Moving Materials", Shock and Vibration Digest, 1972, Vol. 4, No.4, pp. 2-11.

[Pillow, 1994] - Pillow, J., "Review of Materials for Power Transmission Belts", European Seminar on Belt Drives S172, London, Feb. 1994, non-paginated.

[Sabanchiev, 1983] - Sabanchiev, Kh. Kh., "Influence of Pitch Difference on Torsional Vibrations of Pulleys of a Three-Shaft Toothed Belt Transmission", Vestnik Mashinostroeniya, 1983, Vol. 63, Issue 6, pp. 32-34.

[Simpson, 1973] - Simpson, A., "Transverse Modes and Frequencies of Beams Translating Between Fixed End Support.", Journal of Mechanical Engineering Science, 1973, Vol. 15, No. 3, pp. 159-164.

[Tokoro et al., 1997] - Tokoro, H., Nakamura, M., Sugiura, N., Tani, H., Yamamoto, K.-I., Shuku, T., "Analysis of Transverse Vibration in Engine Timing Belt.", JSAE Review, 1997, Vol. 18, pp. 33-38.

[TPM, 1990] - "Ducati 851 Superbike : L'épouvantail Italien", Technique & Pratique Moto, 1990, N° 8, p. 2-18.

[Uchida et al., 1991] - Uchida, T., Yamaji, Y., Hanada, N., "The Analysis of a Load on Each Tooth of 4 Cycle Gasoline Engine's Cam Pulley.", Int. Conf. On Belt Transmission, Osaka, Japan, 1991, pp. 22-27.

[Ueda, et al., 1996] - Ueda, H., Kagotani, M., Koyama, T., Nishioka, M., "Noise and Life of Helical Timing Belt Drives.", DE-Vol. 88, Power Transmission and Gearing Conference, ASME, San Diego, California, USA., oct. 1996, pp. 305-309.

[Yang & Barker, 1989] - Yang, Y.-L., Barker, C. R., "Dynamic Analysis of an Automotive Belt Drive System", Proceeding of The First International Applied Mechanical Systems Design Conference (IAMSDC-1), Nashville, Tennessee, June 1989, pp. 75.1 - 75.10.

[Yue, 1993] - Yue, M. G., "Belt Vibration Considering Moving Contact and Parametric Excitation", Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), Dec. 1993, Vol. 115, pp.1024-1029.

[Watanabe et al, 1990] - Watanabe, K., Koyama, T., Nagai, K., Kagotani, "A Study on Timing Belt Noise (Theoretical Analysis for Forced Transverse Vibration of Timing Belt With Parametric Excitation)", Journal of Mechanical Design (Transaction of the ASME), Sept. 1990, Vol. 112, pp. 424-429.

[Waugh et al., 1980] - Waugh, D. L., Fisher, D. G., Gayer, M. D., "Torsional Frequency.', DAYCO Corporation Belt Drive Design Handbook, DAYCO Corporation Belt Technical Belt Technical Center, Springfield (Missouri), 1980.

Rapports de Contrat (Sogedac 85286724 11 Z10 - confidentiels)

Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Présentation du Modèle Dynamique de Vibration Longitudinale.", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, fév.. 1995, 21 p., Réf. 2802RAP3.1.

Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Actualisation du Modèle et Notice d'utilisation du Programme de dynamique d'une Transmission par Courroie crantée.", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, juin.. 1995, 27 p., Réf. 3006RAP3.2.

Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Rapport final - Modèle dynamique de vibration longitudinale.", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, oct. 1995, 35 p., Réf. 3010FIN3.

Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Présentation de résultats de calcul", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, déc. 1995, 17 p.

Monternot, C., "Notice d'utilisation du programme DYNAPOUL", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, avr. 1996, 16 p.

Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Validation Numérique de DYNAPOUL", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, juillet 1996, 33 p., Réf. VALIDNUM.

Rapports d'Activité (confidentiels)

Monternot, C., "Présentation des essais sur le banc d'essais courroie CASM-INSA", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, oct. 1996, 25 p.

Monternot, C., "Validation du calcul des tensions", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, nov. 1996, 16 p.

Monternot, C., "Détermination de la rigidité de dent d'une courroie synchrone", Villeurbanne : INSA de Lyon - Laboratoire CASM, janv. 1997, 30 p.

Publications Personnelles

[Monternot et al., 1996] - Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Dynamic Transmission Error and Load Distribution For Timing Belt Drives", 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, USA. , oct. 1996, pp. 297-304.

[Dancé et al., 1997] - Dancé, J.-M., Monternot, C., Play, D., "Comportement Statique et Dynamique des Transmissions par courroie Synchrone.", Rencontre de la Mécanique, Roanne, France, Juin 1997, 20 p.

[Monternot et al., 1996] - Monternot, C., Bourdon, A., et al., "Analyse et Conception des systèmes mécaniques", 2ème colloque des doctorants, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, avr. 1996, 2 p.

[Monternot & Benhamadouche, 1998] - Monternot, C., Benhamadouche, K., "Dynamique des transmissions par courroie dentée", 3ème colloque des doctorants, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, mai 1998, 1 p.

[Monternot et al., 1998] - Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Dynamic Behavior of Toothed Belt Power Transmission", Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), 1998, to be published.

[Monternot et al., 1999] - Monternot, C., Dancé, J.-M., Play, D., "Dynamic Behavior Simulation and Load Distribution For Timing Belt Drives", 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris-La Défense, France, march 1999, to be published.

Annexe I

Rappels sur les oscillateurs paramétriquement entretenus [Bergé et al., 1984]

♦ *Stabilité de l'oscillateur paramétrique*

L'exemple le plus simple d'un oscillateur paramétrique est celui du pendule simple de longueur L et placé dans un champ de pesanteur d'intensité g. L'équation des petits mouvements du pendule est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \text{Equation 1}$$

Nous pouvons entretenir le mouvement du pendule en soumettant le point O de suspension (et du centre de rotation) à un mouvement vertical alternatif. Suivant les principes généraux de la dynamique, il reviendrait au même de placer le pendule dans un champ de pesanteur g dépendant du temps :

$$\ddot{\theta} + \frac{g(t)}{L}\theta = 0 \qquad \text{Equation 2}$$

avec $g(t) = g_0 + \beta(t)$

Dans le cas où la fonction g(t) est périodique, l'équation du mouvement porte alors le nom *d'équation de Hill*. En simplifiant davantage, nous pouvons prendre une fonction circulaire pour $\beta(t)$. On aboutit alors à la forme des *équations de Mathieu* :

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(2\omega t)$$

Il vient ainsi :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(1 + h\cos(2\omega t)\right)\theta = 0 \qquad \text{Equation 3}$$

en posant : $h = g_1/g_2$ et $\omega_0^2 = g_0/L$

Remarque : Le problème énoncé par l'équation 3 peut être étendu au problème général des couplages d'oscillateurs. Introduisant la variable $\alpha = h\cos(2\omega t)$, on substitue à l'équation 2 les deux équations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1+\alpha)\theta = 0$$
$$\ddot{\alpha} + (2\omega)^2\alpha = 0$$

La théorie de Floquet des équations linéaires à coefficients périodiques montre que les solutions de l'équation de Mathieu sont de la forme :

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t)$$

P(t) est une classe de fonctions périodiques (de la même période $T = \pi/\omega$ du terme d'excitation $h\cos(2\omega t)$) appelées *fonctions de Mathieu*. Le signe de la partie réelle de l'exposant caractéristique μ détermine la stabilité de la solution.

Pour de faibles valeurs de l'excitation, c'est-à-dire au voisinage de h = 0, l'exposant μ peut être déterminé par un calcul de perturbation. On sait en effet que pour h = 0, la solution générale de l'équation 3 s'écrit :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{Equation 4}$$

Par raison de continuité, pour h voisin de zéro, la solution $e^{\mu t} P(t)$ doit être nécessairement très proche de l'équation 4. On en conclut que l'approximation :

$$\theta \approx e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{Equation 5}$$

est satisfaisante à condition que μ soit petit et ω proche de ω_0. En substituant l'équation 5 dans l'équation de Mathieu, il vient :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2)\cos(\omega t + \phi) - 2\omega\mu \sin(\omega t + \phi) + \frac{h}{2}\omega_0^2 \cos(\omega t - \phi) + \frac{h}{2}\omega_0^2 \cos(3\omega t + \phi) \right] e^{\mu t} = 0$$

Equation 6

En laissant de côté le terme en cos(3ω+ϕ), dont un calcul plus poussé montre qu'il est négligeable, les conditions d'annulation de l'équation 6 quelque soit t deviennent :

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2}\omega_0^2 \right)\cos\phi - 2\omega\mu \sin\phi = 0 \\ 2\omega\mu \cos\phi + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 - \frac{h}{2}\omega_0^2 \right)\sin\phi = 0 \end{cases}$$

Ces deux équation linéaires homogènes en $\cos\phi$ et $\sin\phi$ n'ont de solutions que si le déterminant du système est nul, soit :

$$\mu^4 + 2(\omega_0^2 - \omega^2)\mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{h^2}{4}\omega_0^4 = 0 \qquad \text{Equation 7}$$

Cette équation du second degré en μ^2 a une somme des racines toujours négative et un discriminant toujours positif. Elle possède donc deux racines réelles, dont l'une au moins est négative. Étant donné qu'à toute valeur négative de μ^2 est associé un exposant caractéristique μ imaginaire pur, celle-ci ne peut être source d'instabilité. À l'opposé, la solution correspondante, de l'équation 3 est instable lorsqu'existe une racine en μ^2 - par conséquent une valeur de μ - réelle positive. La condition correspondante est que le produit des racines soit négatif, soit :

$$h > 2\left|1 - \omega^2/\omega_0^2\right| \qquad \text{Equation 8}$$

Dans le plan des paramètres de l'excitation (h,ω), l'équation 8 définit un secteur de sommet (h = 0, $\omega/\omega_0=1$) et de branche en ω^2 (figure 1).

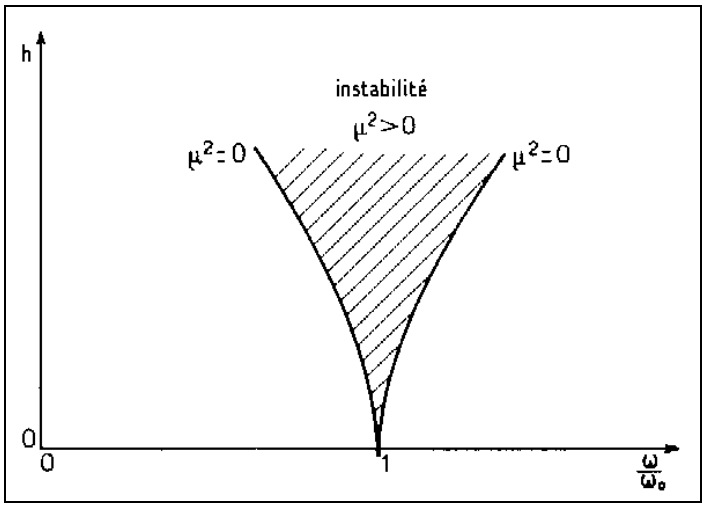


Figure 1 : Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu dans le plan (h,ω).

À l'intérieur de la zone hachurée, il y a une racine en μ^2 positive et l'équation 3 n'a pas de racine stable, c'est-à-dire qu'il existe des conditions initiales très voisines qui sont à l'origine de trajectoires s'écartant exponentiellement. Au voisinage de la résonance exacte ($\omega = \omega_0$), ceci est vrai même pour une amplitude d'excitation h très faible. Ce type d'instabilité est souvent qualifié de sous-harmonique , car il conduit le pendule à osciller avec une fréquence $\omega/2\pi$ (équation 5) égale à la moitié de la fréquence $2\omega/2\pi$ de l'excitation externe. Ce résultat peut être généralisé en considérant que la résonance exacte arrive à chaque fois que :

$$\frac{n\,\omega}{\omega_0} = 1$$

Dans le domaine stable, les deux racines en μ^2 sont négatives. Pour ω voisin de ω_0 et h petit, on vérifie sans peine que l'une des valeurs imaginaires correspondantes de μ est proche de 0, tandis que l'autre est sensiblement égale à $2i\omega_0$. L'effet résultant est alors le suivant :

- La fréquence de base est légèrement modifiée par la présence d'un exposant caractéristique μ voisin de $2i\omega_0$.

- La racine en μ^2 négative presque nulle entraîne une modulation à basse fréquence des oscillations. L'oscillateur est alors qualifié de quasi-statique.

Lorsque les caractéristiques (h, ω) de l'excitation se rapproche du domaine d'instabilité, la basse fréquence de modulation diminue et tend vers 0. Elle s'annule comme la racine μ^2 correspondante sur la frontière de ce domaine. Là, l'exponentielle $e^{\mu t}$ de la théorie de Floquet se trouve remplacée par un terme polynomial du temps. Puis, à l'intérieur du secteur instable, l'exponentielle devient réelle. L'équation 5 n'est plus valable dans ce secteur où les effets non-linéaires deviennent prépondérants. On observe donc un changement complet de comportement du pendule en se déplaçant dans l'espace des paramètres; lequel se visualise par

des bifurcations en faisant une coupe dans l'espace des phases.

♦ ***Bifurcation entre les zones stables et instables***

Un autre type d'oscillateur paramétriquement entretenu est celui de Van der Pol. L'équation de son mouvement est d'une manière générale :

$$\ddot{\theta} - (\varepsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0 \qquad \text{Equation 9}$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous constatons que le terme d'amortissement $-(\varepsilon - \theta^2)$ est négatif, donc apporte de l'énergie, pour les amplitudes vérifiant $\theta < \sqrt{\varepsilon}$. Les trajectoires divergent donc dans ce cas. En revanche, le terme d'amortissement est positif, donc consomme de l'énergie, pour les fortes amplitudes de mouvement. Les trajectoires ont donc tendance à se rapprocher d'un *cycle limite* (figure 2).

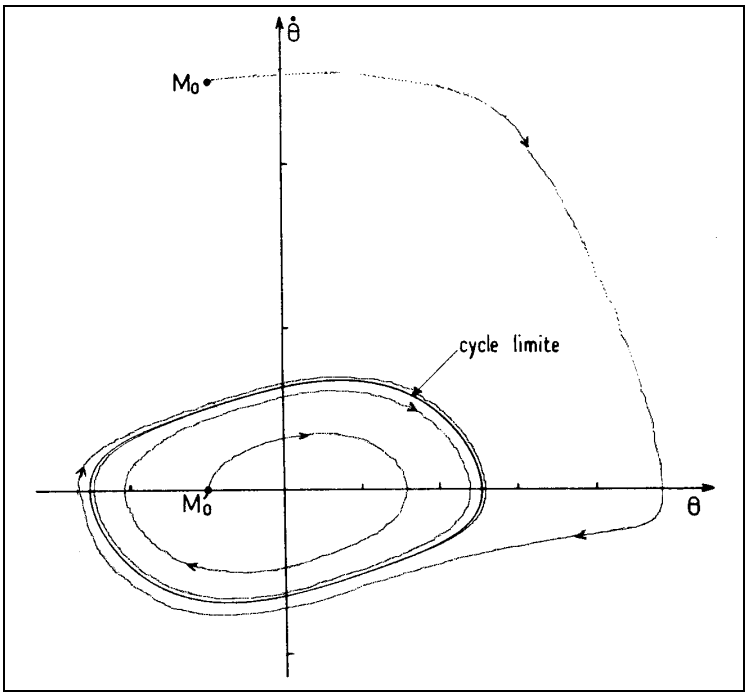


Figure 2 : Portrait de phases de l'équation de Van Der Pol (ε = 0.4).

Nous voyons sur la figure 2 que toute trajectoire de phases, située aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du cycle limite, tend asymptotiquement vers lui. Un tel cycle limite est appelé un attracteur.

Le cycle limite est développable en série de Fourier. Au premier ordre, nous pouvons assimiler le cycle limite à un cercle de rayon ρ. En rattachant le rayon de ce cercle à l'énergie de l'oscillateur, nous pouvons montrer que :

$$\rho \approx 2\sqrt{\varepsilon} \qquad \text{Equation 10}$$

Nous constatons que l'origine $\theta = \dot{\theta} = 0$ est toujours un point singulier quelque soit le signe du paramètre ε. L'origine est stable, donc attracteur, pour $\varepsilon < 0$; mais il devient instable pour $\varepsilon > 0$ et cède sa place à un autre attracteur : Le cycle limite. Un changement dans la nature de la solution stable intervient donc pour la valeur critique $\varepsilon_c = 0$. Ce changement peut être visualisé par un diagramme de bifurcation (figure 3) en faisant une coupe dans l'espace des phases pour chaque paramètre ε (figure 2). Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_c$, l'élongation maximale, qu'on peut assimiler au premier ordre au rayon ρ, est nulle. Ensuite, pour $\varepsilon > \varepsilon_c$, l'élongation maximale ou le rayon ρ du cycle limite progresse selon l'équation 10. Ainsi, un point a donné naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique d'un paramètre.

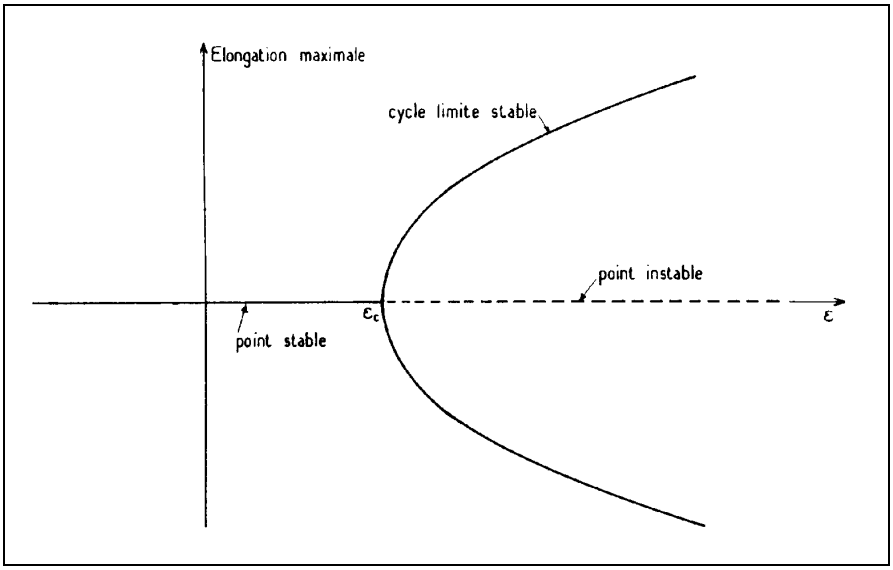


Figure 3 : Diagramme de bifurquation de l'équation de Van der Pol.

La bifurcation de la figure 3 est dite surcritique. Cela résulte de la présence du terme $+\theta^2\dot{\theta}$ dans l'équation 9, dont l'effet est antagoniste de celui de l'instabilité puisqu'il absorbe de l'énergie.

On peut créer une situation opposée en changeant le signe du terme $\theta^2\dot{\theta}$ ce qui aura pour effet d'amplifier l'instabilité à basse amplitude et de rajouter un terme d'ordre supérieur ($+\theta^4\dot{\theta}$ par exemple) pour stabiliser les oscillations de grandes amplitudes. On a donc une équation avec un amortissement λ du type :

$$\ddot{\theta} - \lambda\left(\varepsilon, +\theta^2, -\theta^4\right)\dot{\theta} + \theta = 0 \qquad \text{Equation 11}$$

On peut remarquer que la discussion menée ici est générale car toute linéarité peut être développée au sens de Taylor à l'instar de l'équation 11.

L'amortissement λ est un polynôme en θ^2 d'ordre 2. Suivant la valeur d'epsilon, nous pouvons avoir une ou deux racines $\theta_c'(\varepsilon)$ et $\theta_c(\varepsilon)$. Dans le cas de deux racines ($\varepsilon_c' \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c$ sur la figure 4), -λ est positif si θ^2 est à l'extérieur des racines. Nous constatons alors qu'une solution stable peut être obtenue avec deux valeurs d'amplitude θ. Lorsque θ^2 est à l'intérieur

des racines, on est dans le cas du cycle limite instable illustré sur la figure 4.

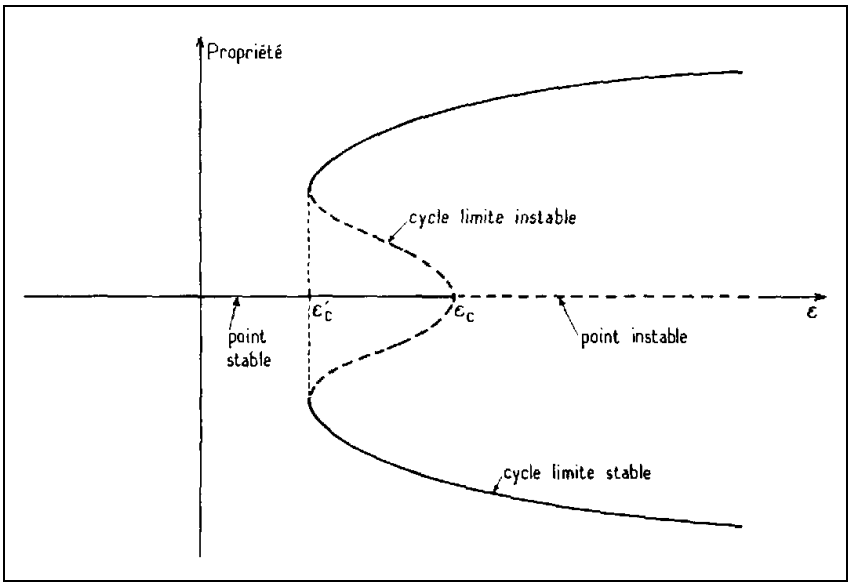


Figure 4 : Exemple type de bifurcation sous-critique.

À l'intérieur du domaine $\left[\varepsilon_c^{'};\varepsilon_c\right]$ de la figure 4 coexistent deux solutions toutes deux stables : L'une est stationnaire (point attracteur), l'autre oscillante (cycle limite).

Ces deux solutions ne sont pas observables simultanément. C'est la condition initiale qui détermine la solution stable adoptée comme on peut le constater sur la figure 5. Lorsque ε augmente, la propriété, qui peut être l'amplitude maximale, passe de la solution 1 à la solution 2; et inversement si le paramètre ε diminue.

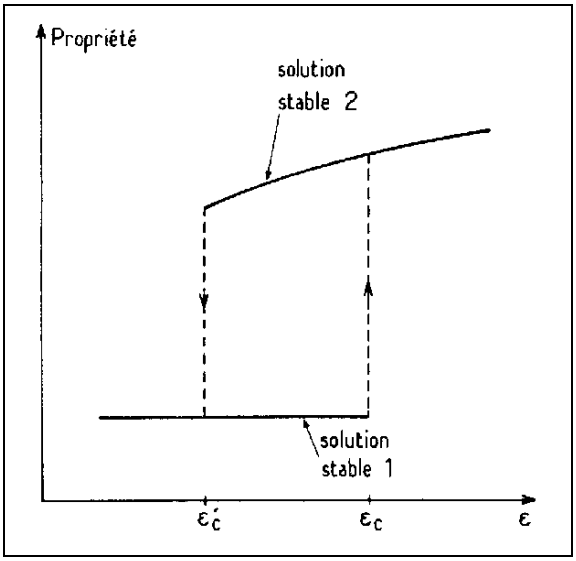


Figure 5 : Phénomène d'hystérésis associé à une bifurcation sous-critique.

Annexe II

Rappels théoriques sur les systèmes vibratoires

Pour un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté, excité ou non, l'équation du mouvement est de la forme:

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = \begin{cases} 0 & (*) \\ f\,e^{i\omega t} & (**) \end{cases} \qquad \text{Equ. 1}$$

avec m: masse du système,

c: amortissement visqueux du système,

k: raideur du système.

La solution pour le système libre (*) (Equ. 1), est de la forme $x(t) = Xe^{rt}$. Le mouvement est harmonique (r imaginaire pur) si $c < c_{critique} = 2\sqrt{Km}$. Le taux d'amortissement α est alors définit comme:

$$\alpha = c/c_{critique} = c/2\sqrt{km} \qquad \text{Equ. 2}$$

La solution de l'équation 1 dans le cas libre, est alors égale à:

$$x(t) = Xe^{-\frac{c}{2m}t}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \qquad \text{Equ. 3}$$

La fréquence de résonance f_r du système libre (*), est donc:

$$f_r = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}}{2\pi} = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}}{2\pi} \qquad \text{Equ. 4}$$

avec ω': pulsation propre du système amorti,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre du système non amorti,

α: facteur d'amortissement.

Dans le cas de la réponse forçée (**), nous présumons que la réponse est de la forme $x(t) = Xe^{i\omega t}$. Nous obtenons alors de l'équation 1 la fonction de transfert R(ω), appelée réceptance:

$$R(\omega) = \frac{X}{f} = \frac{1}{(k-\omega^2 m)+i\omega c} \qquad \text{Equ. 5}$$

L'accélération étant de la forme $\ddot{x}(t) = \ddot{X}e^{i\omega t}$, nous pouvons aussi définir la fonction de transfert appelée accélérance:

$$A(\omega) = \frac{\ddot{X}}{f} = -\omega^2 R(\omega) \qquad \text{Equ. 6}$$

Obtention de la raideur k et de l'amortissement visqueux c:

Si le taux d'amortissement α et la fréquence de résonance f_r sont connus, nous pouvons résoudre le système des équations 2 et 4, afin d'obtenir la raideur k et l'amortissement visqueux c d'un système à un degré de liberté. On obtient:

$$\begin{cases} k = \dfrac{m}{1-\alpha^2} f_r^2 \\ c = 2mf_r \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \end{cases} \qquad \text{Equ. 7}$$

Annexe III

Exemple d'Intégration du Frottement sur le Calcul des Raideurs Équivalentes

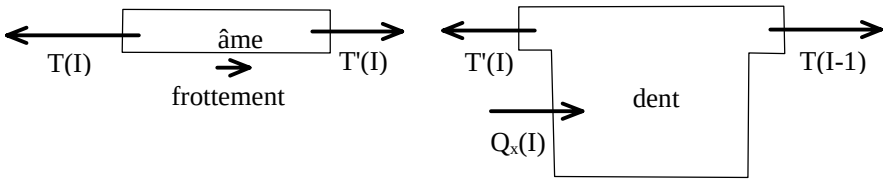


Figure 1 : Modélisation du pas de courroie I.

L'équilibre des forces sur un pas de courroie déroulée tels qu'il est représenté sur la figure 2, doit incorporer la force de frottement. Sur la figure 1, le pas de courroie est divisée en deux parties. L'équilibre des forces est :

dent : $T'(I) = T(I-1) + Q_x(I)$

âme : $T'(I) = e^{\eta f \delta_p} T(I)$ d'après les équation II.63 et 64 ($\eta = \pm 1$ détermine le sens du frottement).

Par conséquent, nous avons :

$$T(I) = e^{-\eta f \delta_p} (T(I-1) + Q_x(I)) \qquad \text{Equation 1}$$

Par soucis de simplicité, deux pas de courroie engrenés seulement sont considérés. L'amortissement est négligé :

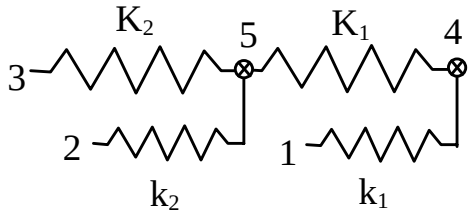


Figure 2 : Équilibre pour chaque nœud du modèle déroulé de deux pas de courroie en prise sur une poulie dentée.

L'équilibre global du système de la figure 2 est fait grâce à l'emploi des équations 2.

(a)

(b)

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix}$$

Equations 2

avec $\eta = \pm 1$ sens du frottement,
f coefficient de frottement,
δ_p angle de non adhérence.

Le relation 2 (a) est employée pour tous les ressorts situés à droite ou en dessous d'un nœud marqué du signe ⊗. Par exemple, pour le ressort situé entre les points 2 et 5 (figure 2), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} T \\ T' \end{Bmatrix} = k_2 \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{Bmatrix}$$

Equation 3

Pour le ressort situé entre les points 3 et 5, donc à gauche du signe ⊗, la relation 2 (b) est employée :

$$\begin{Bmatrix} T \\ T' \end{Bmatrix} = K_2 \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{Bmatrix}$$

Equation 4

Toutes les sous - matrices comme les équations 3 et 4 sont assemblées pour former l'équation 5.

numéro des nœuds	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*				
1	k_1	0	0	$-k_1$	0		x_1		T_1
2	0	k_2	0	0	$-k_2$		x_2		T_2
3	0	0	K_2	0	$-K_2$	x	x_3	=	T_3
4	$-e^{-\eta f \delta_p} k_1$	0	0	$e^{-\eta f \delta_p} k_1 + K_1$	$-K_1$		x_4		$e^{-\eta f \delta_p} T_4$
5	0	$-e^{-\eta f \delta_p} k_2$	$-K_2$	$-e^{-\eta f \delta_p} K_1$	$e^{-\eta f \delta_p} (k_2 + K_1) + K_2$		x_5		0

Equation 5

Le développement de la 5ème ligne de l'équation 5 donne l'équilibre des forces au nœud 5 :

$$e^{-\eta f \delta_p} k_2 (x_5 - x_2) + e^{-\eta f \delta_p} K_1 (x_5 - x_4) + K_2 (x_5 - x_3) = 0 \qquad \text{Equation 6}$$

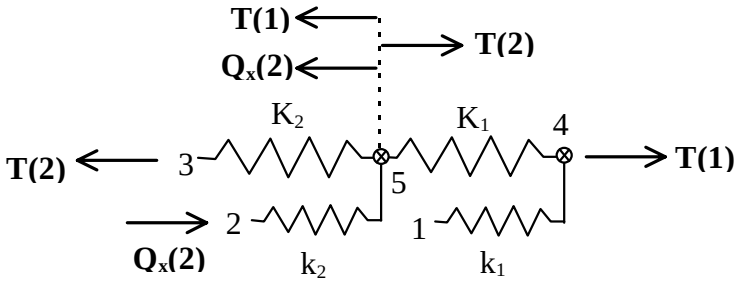


Figure 3 : Équilibre pour le nœud 5.

Les forces en présence au nœud 5 sont notées sur la figure 3 d'après les notations de la figure 1 pour le pas numéroté 2. L'équation 6 peut alors être renommée comme suit :

$$- e^{-\eta f \delta_p} Q_x(2) - e^{-\eta f \delta_p} T(1) + T(2) = 0 \qquad \text{Equation 7}$$

avec $Q_x(2) = - k_2 (x_5 - x_2)$
$T(1) = - K_1 (x_5 - x_4)$
$T(2) = K_2 (x_5 - x_3)$

Nous retrouvons alors l'équation 1 ce qui justifie l'emploi de la matrice 2. Nous pouvons continuer en développant la 4ème ligne de l'équation 5 :

$$e^{-\eta f \delta_p} k_1 (x_4 - x_1) + K_1 (x_4 - x_5) = e^{-\eta f \delta_p} T_4 \qquad \text{Equation 8}$$

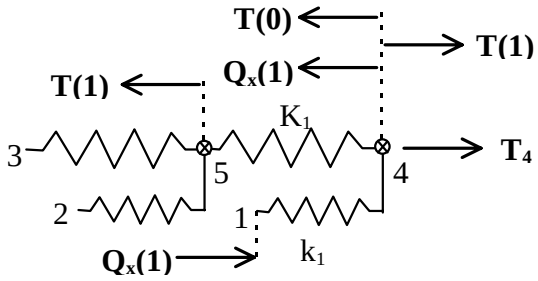


Figure 4 : Équilibre pour le nœud 4.

Les forces en présence au nœud 4 sont notées sur la figure 4 d'après les notations de la figure 1 pour le pas numéroté 1. L'équation 8 est alors renommée comme suit :

$$- e^{-\eta f \delta_p} Q_x(1) - e^{-\eta f \delta_p} T(0) + T(1) = 0 \qquad \text{Equation 9}$$

avec $Q_x(1) = - k_1 (x_4 - x_1)$
$T(1) = - K_1 (x_5 - x_4)$
$T(0) = -T_4$ (action de l'extérieur sur le nœud 4 d'après l'équation 5)

Nous retrouvons à nouveau l'équation 1 pour le premier pas de courroie.

Annexe IV

Formule d'Euler pour le Glissement

Euler fut l'un des précurseurs (avec Coulomb) au dix-huitième siècle des études sur le fonctionnement d'une courroie. Il a notamment établi une loi qui a pris son nom.

Pour l'établir, nous considérons une poulie sur laquelle s'enroule une courroie parfaitement flexible (figure 1). T_1 est la tension dans le brin tendu et T_2, la tension dans le brin mou. On considère également la force centrifuge f_i due à l'inertie de la courroie :

$f_i = dm.c^2 / R$
avec R, rayon de la poulie,
c, vitesse linéaire de la courroie,
$dm = m.Rd\alpha$, masse d'un morceau infinitésimal de courroie,
m, masse linéique de la courroie.

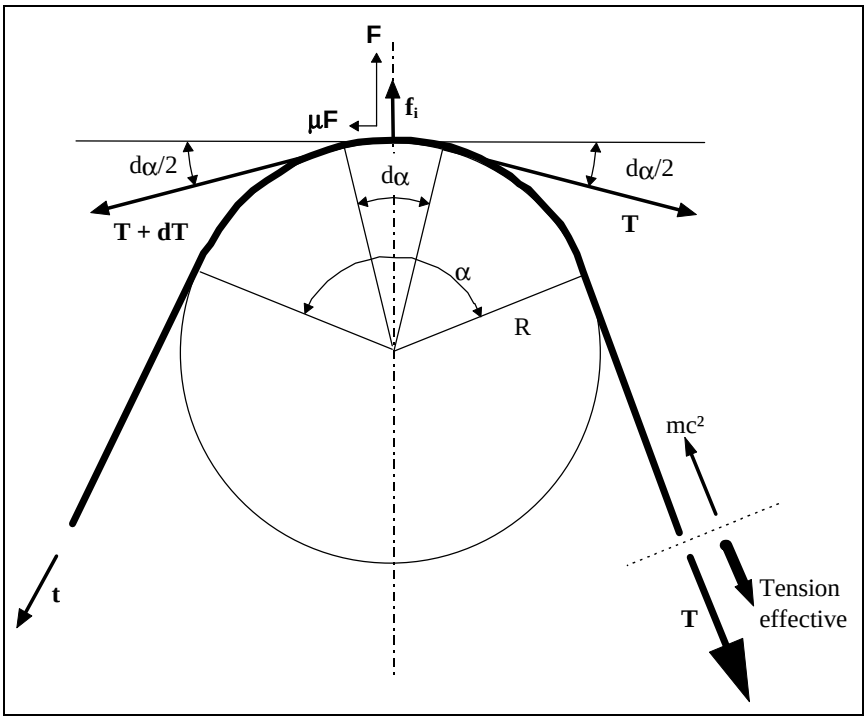


Figure 1 : Équilibre d'un élément de courroie.

À l'instant même où apparaît un glissement relatif avec la poulie, l'équation d'équilibre d'un élément de courroie projetée sur les directions radiales et tangentielles s'écrit:

Projection sur la direction radiale :

$$(T + dT)\sin\frac{d\alpha}{2} + T\sin\frac{d\alpha}{2} - dm.\frac{c^2}{R} = F$$

$d\alpha$ étant très petit, $\sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Ainsi et en négligeant le terme $dT\frac{d\alpha}{2}$, on obtient :

$$F = (T - m.c^2)d\alpha$$

Projection sur la direction tangentielle :

$$(T + dT) - T = \mu F$$

soit : $dT = \mu F = \mu\, d\alpha\, (T - mc^2)$

ou $\underline{\frac{dT}{d\alpha} - \mu T = -\mu mc^2}$

La solution de l'équation différentielle est: $T(\alpha) = Ae^{\mu\alpha} + mc^2$

Pour $\alpha = 0$, nous avons $T(\alpha) = t$

On obtient :

$\left|\underline{\frac{T - mc^2}{t - mc^2} = e^{\mu\alpha}}\right.$ avec μ coefficient de frottement pris constant.

Nous voyons que la somme des effets de la force centrifuge s'appliquant sur la partie enroulée de la courroie revient à retrancher uniformément sur toute la courroie la force dite centrifuge mc^2 qui s'oppose à la tension t ou T dans le brin (figure 1). La tension résultante est appelée effective ou de traction (pour les courroies travaillant par adhérence).

Annexe V

Notice du programme DYNAPOUL

Les entrées peuvent s'effectuer soit par le clavier, soit par fichier, enfin par bloc de trois. Ce chapitre se décompose en deux sous-chapitres indépendants suivant le mode de saisie, par fichier ou par clavier.

1. Saisie par le clavier

1.1. Première partie de la saisie

Le programme commence par une question:

1 - « Voulez-vous lire dans un fichier les paramètres du système ? (<o>/n) »

« oui » est la réponse par défaut. Entrer « n » pour avoir la saisie par clavier.

Ensuite, il est spécifié que la poulie 1 est toujours la poulie motrice, que la numérotation des poulies, des brins et des dents de poulie se fait dans le sens trigonométrique.

Puis les questions posées sont :

2 - « entrer le nombre total de poulies: »

exemple pour le cas d'école: 3

Ensuite pour la **poulie xx :**

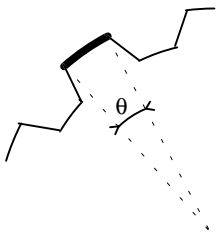
3 - « type (galet = 0; poulie dentée = 1) ? »

Définit le type d'une poulie.

- *CAS D'UNE POULIE DENTÉE :*

4 - « nombre de dents de la poulie ? »

5 - « angle d'enroulement sur le sommet d'une dent de poulie (en rd) »



La connaissance de cet angle est nécessaire pour le calcul de répartition des charges sur les dents enroulées. En général, cet angle est voisin du tiers du pas angulaire.

6 - « entrer l'erreur de pas courroie-poulie (en mm) : »

La différence de pas courroie-poulie est un paramètre fondamental pour le calcul de la répartition des charges sur les dents enroulées. Il est positif ou négatif de l'ordre du centième de millimètre. 0 peut être une valeur par défaut.

7 - « entrer le jeu entre les dents de courroie et de poulie (en mm) »

Le calcul du jeu nécessite normalement la connaissance de la géométrie fine de la dent de courroie et de poulie. Le jeu doit être supérieur à un dixième de millimètre.

- *CAS D'UN GALET :*

8 - « couple de frottement sur le galet (en N.m) ? »

Ce couple est provoqué par le frottement du joint d'étanchéité du galet. On peut mettre un couple nul par défaut.

➢ *DANS LES DEUX CAS (POULIE OU GALET) :*

9 - « entrer ses coordonnées (courroie tendue) et son rayon primitif (en m) »

Les trois valeurs sont à entrer en mètre, espacées d'un blanc ou d'un retour chariot.

10 - « entrer sa masse (en gr) : »

Il faut considérer une masse supérieure à celle de la poulie car c'est tout l'ensemble mobile qu'il faut prendre en compte. En effet, l'élasticité en flexion de l'arbre porteur contribue au déplacement de la poulie.

11 - « entrer son moment d'inertie (en kg.m^2): »

Il s'agit là aussi de l'inertie de l'ensemble mobile, donc de la poulie, de l'arbre à cames et des cames s'il s'agit par exemple d'une poulie réceptrice.

Remarque: on peut mettre zéro pour la poulie 1 car cette valeur ne sert pas.

12 - « entrer le coefficient de frottement: »

Les valeurs de 0.2 à 0.4 sont donnés dans la bibliographie.

13 - « entrer r (en m), thêta (en rd) et la masse du balourd (en kg): »

r et thêta sont les coordonnées polaires du balourd à l'instant initial.

14 - « numéro du galet du tendeur (0 si pas de tendeur): »

Exemple du cas d'école : 3

➢ *SI PRÉSENCE D'UN TENDEUR :*

15 - « coordonnées du pivot du tendeur (en m): »

Rappel : L'origine est placée au centre du pignon moteur.

16 - « raideur de torsion équivalente pour le tendeur: »

La raideur de torsion équivalente est calculée d'après la géométrie du tendeur.

Le programme rappelle ensuite que l'angle repérant la position de la tige du tendeur est compté positif dans le sens trigonométrique.

17 - « amortissement équivalent du tendeur lorsque sa vitesse angulaire est positive (en Nm/rd/s): » puis **« amortissement équivalent du tendeur lorsque sa vitesse angulaire est négative (en Nm/rd/s):»**

18 - « masse du tendeur (en g) : »

La masse du tendeur sert uniquement à corriger la masse du galet tendeur auquel on ajoute un quart de la masse du tendeur.

19 - « longueur de la courroie à vide (en m) »

20 - « nombre de pas de la courroie: »

21 - « masse d'un pas de courroie (en g.): »

22 - « moment d'inertie d'un pas de courroie (en kg.m²) »

Cette valeur est définie par rapport à l'axe de rotation d'un pas de courroie lorsque celui-ci de trouve sur une poulie.

La saisie étant finie pour cette partie, le programme demande:

23 - « Voulez vous écrire dans un fichier les paramètres du système ?(<o>/n) »

La réponse est oui par défaut.

1.2. Deuxième partie de la saisie

Le programme interroge à nouveau :

1 - « Voulez vous lire les raideurs et amortissements du système ? (<o>/n) »

La réponse est oui par défaut.

Puis les questions posées sont:

2 - « tension initiale ? »

Cette valeur n'a pas d'importance si la transmission ne comporte pas de tendeur. Dans ce cas, la tension obtenue est affichée à l'écran. Dans le cas d'un tendeur, la position du galet du tendeur est ajustée afin d'obtenir la tension de pose désirée. Toutefois, il est nécessaire que la position du galet-tendeur saisie soit proche de la position réelle qui sera calculée pour avoir la tension demandée. Ce n'est, en effet, qu'une correction.

3 - « loi polynomiale Tension tangentielle en Newton en fonction du déplacement en mètre d'une dent de courroie : »

« écrire les coefficients du degré 1 à 15 : »

Les coefficients sont obtenus par la nouvelle méthode décrite au chapitre III.4.1.1.3.

4 - « amortissement d'une dent de courroie (en N/m/s et non nul): »

La valeur d'amortissement doit être non-nul.

5 - « loi tension(déplacement) de l'âme (polynôme de degré 5) en N.
écrire les coefficients du degré 0 à 5: »

Il est possible d'entrer une loi non linéaire.

6 - « loi déplacement(tension) de l'âme (polynôme de degré 5) en m.
écrire les coefficients du degré 0 à 5: »

Il s'agit de la loi inverse à la loi précédente.

7 - « amortissement de l'âme de la courroie (en N/m/s et non nul) : »

La valeur d'amortissement doit être non-nul.

8 - « raideur de flexion EI (N.m²) de la courroie : »

9 - « raideur Kxx, Kxy, Kyy et Kyx des paliers de la poulie xx : »

Les termes de couplage K_{xy} et K_{yx} ont une valeur généralement faible.

10 - « amortissement Cxx, Cxy, Cyy et Cyx des paliers de la poulie xx : »

Les valeurs d'amortissements dépendent beaucoup du type de palier utilisé.

La saisie étant finie pour cette partie, le programme demande:

11 - « Voulez vous écrire dans un fichier les paramètres du système ?(<o>/n) »

La réponse est oui par défaut.

1.3. Troisième partie de la saisie

Ensuite, le programme demande:

1 - « Calcul sur combien de tours de vilebrequin ? »

2 - « Enregistrement des résultats à partir de quel tour de pignon moteur ? »

On peut gagner de la place mémoire sur l'unité de stockage des fichiers résultats, en ne conservant que les derniers tours calculés.

3 - « Voulez vous lire dans un fichier l'évolution des couples extérieurs au système et de l'acyclisme en vitesse du vilebrequin ? (<o>/n) »

La réponse est oui par défaut.

Puis les données sont réclamées pour les différentes poulies :

4 - « Couple en N.m (positif dans le sens de rotation de la poulie) en fonction de la position angulaire de la poulie s'appliquant sur la poulie xx »

5 - « Entrée du couple en temporel ou fréquentiel (t/<f>) »

L'entrée du couple en fréquentiel est par défaut. Dans ce cas, le programme demande les coefficients de Fourier complexes du couple. Sinon, un fichier du couple suivant la rotation de la poulie, est demandée. Le programme calcule alors les coefficients de Fourier. Ces deux parties ne sont pas détaillées ici.

6 - « Entrer le module (ordre 1→12) en rd/s de la décomposition en série de Fourrier de la vitesse de rotation du vilebrequin en fonction de sa position moyenne du vilebrequin »

On entre donc les 12 coefficients rhô de la décomposition de l'acyclisme en vitesse de la poulie motrice en fonction de son angle de rotation 'quasi-statique':

$$\dot{\theta}_{1v} = \sum_{k=1}^{12} \rho_k \sin(k.\theta_{1s} + \phi_k)$$

7 - « Entrer la phase (ordre 1→12) en rd de la décomposition en série de Fourrier de la vitesse de rotation du vilebrequin en fonction de sa position moyenne du vilebrequin»

On entre donc les 12 coefficients phi de la décomposition précédente.

8 - « Entrer la vitesse moyenne de rotation (en trs/mn): »

Il s'agit de la vitesse de rotation de la poulie 1.

Ensuite, l'acyclisme angulaire du pignon moteur est automatiquement intégré et le résultat est affiché à l'écran. Les données suivantes sont demandées pour chaque poulies :

9 - « Entrer les 9 modules (harm. N/2 → 8N) en rad. de la décomposition en série de Fourrier de l'erreur cinématique (positive dans le sens de rotation de la poulie) due à l'excentricité en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

Cela correspond aux 9 coefficients rhô de la décomposition de l'acyclisme dû à l'excentricité pour la poulie xx:

$$\theta_{xx,c} = \rho_{1/2} \sin\left(\theta_1 / 2 + \phi_{1/2}\right) + \sum_{k=1}^{8} \rho_k \sin(k.\theta_1 + \phi_k)$$

Cette décomposition s'obtient à partir de mesures expérimentales sur la transmission à très basse vitesse (<100 trs/mn).

10 - « Entrer les 9 phases (harm. N/2→8N) en rad. de la décomposition en série de Fourrier de l'erreur cinématique due à l'excentricité en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

On entre donc les 12 coefficients phi de la décomposition précédente.

11 - « Entrer le module en rad. de l'erreur cinématique due à l'effet polygonal et à la déformation des dents en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

L'effet polygonal est la partie de l'erreur cinématique oscillant à la fréquence d'engrènement. On a donc: $\theta_{xx,c} = \rho \sin(Z\theta_1 + \phi)$ avec Z, nombre de dents de la poulie xx. La valeur demandée est rhô.

12 - « Entrer la phase en rad. de l'erreur cinématique due à l'effet polygonal et à la déformation des dents en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

La valeur demandée est phi de la décomposition précédente.

13 - « Entrer le module en rad. de l'erreur cinématique due aux imperfections géométriques de la courroie en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

Cela représente la partie de l'erreur cinématique oscillant à la fréquence du tour courroie (nombre de dents poulie 1 / nombre de dents courroie) :

$$\theta_{xx,c} = \rho' \sin\left(\frac{Z_1}{Z_c}\theta_1 + \phi'\right)$$ avec Z_1 nombre de dents de la poulie 1,

Z_c nombre de dents pour la courroie.

La valeur demandée est rhô-prime.

14 - « Entrer la phase en rad. de l'erreur cinématique due aux imperfections géométriques de la courroie en fonction de la position instantanée du vilebrequin pour la poulie xx »

La valeur demandée est phi-prime de la décomposition précédente.

15 - « Entrer sur la même ligne le rang (mettre 0 pour finir), le module (en N.) puis la phase (en rd) de la décomposition en série de sinus de la surtension causé par l'excentricité des poulies en fonction de la position angulaire de la poulie 1 »

Les efforts sur les paliers afférents à chaque poulie, sont maintenant demandés :

16 - « EFFORTS SUR LES PALIERS = a.(b-exp(-c.temps)) + somme(rho.sin(omega.t+phi)) »

- « Entrer sur la 1ere ligne a, b et c, puis < rho(N.) omega(Hz) phi(rd) > sur les lignes suivantes. »

- « efforts sur le palier xx : »

- « direction y : »

- « direction y : »

Nous pouvons entrer un effort harmonique sous la forme de somme de sinus, ou d'un effort monotone sous la forme d'une fonction exponentielle.

La saisie étant finie pour cette partie, le programme demande:

17 - « voulez vous écrire les coefficients dans un fichier ?(<o>/n) »

La réponse est oui par défaut.

1.4. Saisie par fichier

Des commentaires étant inscrits dans les fichiers de données, on peut également effectuer des changements de données directement dans ces fichiers sans repasser par la saisie fastidieuse par écran.

1.4.1. Première partie de la saisie

Le programme commence par une question:

1 - « Voulez-vous lire dans un fichier les paramètres du système ? (<o>/n) »

« oui » est la réponse par défaut.

2 - « nom du fichier ? »

Entrer le nom du fichier correspondant aux données demandées. Ensuite vient une série de "pause' permettant de visualiser les données.

1.4.2. Deuxième partie de la saisie

Le programme continue par cette question:

1 - « voulez vous lire les raideurs et amortissements du système ? (<o>/n) »

« oui » est la réponse par défaut.

2 - « nom du fichier ? »

Entrer le nom du fichier correspondant aux données demandées. Les données sont alors visualisées à l'écran.

1.4.3. Troisième partie de la saisie

Le programme demande à nouveau le nombre de tour de vilebrequin pour effectuer la calcul, ainsi la période d'enregistrement (début du chapitre 2.1.3). Ensuite, le programme interroge :

1 - « voulez vous lire dans un fichier l'évolution des couples extérieurs au système et de l'acyclisme en vitesse du vilebrequin ? (<o>/n) »

2 - « nom du fichier ? »

Entrer le nom du fichier correspondant aux données demandées. Les données sont alors visualisées à l'écran avec une 'pause'.

2. Sorties à l'écran

1 - « xx pas d'intégration par module de la poulie 1

(soit environ yy pas par degré) »

Cette valeur est là pour renseigner l'utilisateur sur le temps de calcul.

Si il y a un tendeur, le programme affiche :

2 - « position corrigée du galet tendeur: »

Le programme corrige automatiquement la position entrée du galet tendeur afin d'avoir la tension de pose désirée (on suppose que le galet est déjà suffisamment proche).

3 - « Tension de pose : xx »

La tension de pose est égale à la tension demandée si la transmission comporte un tendeur dynamique. Sinon, la tension de pose est calculée à partir des valeurs de position de poulie saisies.

4 - « Soustension due à l'effet centrifuge : xx »

La valeur affichée indique à l'utilisateur la tension centrifuge que le tendeur doit rattraper. Cela permet de comprendre le mouvement du tendeur.

5 - « nombre de dents enroulées sur la poulie [ou le galet] xx : yy »

Ces valeurs sont données à une dent près à titre d'information sur la géométrie du système.

6 - « Voulez-vous avoir tous les fichiers (o,<n>) ? »

La réponse est non par défaut.

Annexe VI

Matrice de raideur calculée à partir de la rotation des poulies mesurée sur banc

Les trois tableaux suivants montrent la matrice de raideur $[K]_{calculé} = [C][\Theta]^{-1}_{mesuré}$ calculée pour chaque couple et tension de pose :

Tension de pose = 83 Newton		
Couple (N.m)	**Matrice de raideur $[K]_{calculé}$ (N.m/raie)**	**Pourcentage d'incertitude (%)**
10	$\begin{bmatrix} 2.9 & -1.1 & -3.3 \\ -1.3 & 2.9 & -4.3 \\ -3.4 & -3.6 & 15.4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 21.7 \\ 0.0 & 0.0 & 31.3 \\ 0.0 & 0.0 & 27.1 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} 2.8 & -0.9 & -2.9 \\ -1.7 & 2.9 & -3.5 \\ -2.3 & -4.0 & 12.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 6.4 \\ 3.0 & 0.3 & 13.7 \\ 6.6 & 0.6 & 10.4 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 2.9 & -0.9 & -2.8 \\ -1.7 & 2.8 & -2.8 \\ -2.6 & -3.8 & 11.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 3.2 \\ 1.0 & 0.1 & 7.4 \\ 1.9 & 0.3 & 5.3 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 3.2 & -0.8 & -3.0 \\ -1.8 & 2.5 & -2.8 \\ -2.9 & -3.5 & 11.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 2.2 \\ 0.8 & 0.3 & 6.9 \\ 1.3 & 0.5 & 4.4 \end{bmatrix}$
50	$\begin{bmatrix} 3.3 & -0.7 & -3.3 \\ -1.7 & 2.4 & -2.8 \\ -3.2 & -3.5 & 12.4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 1.6 \\ 0.4 & 0.3 & 6.0 \\ 0.5 & 0.5 & 3.6 \end{bmatrix}$
60	saut de dent sur la poulie 25 dents bloquée	
70	saut de dent sur la poulie 25 dents bloquée	
80	saut de dent sur la poulie 25 dents bloquée	
90	saut de dent sur la poulie 25 dents bloquée	

Tension de pose = 303 Newton		
Couple (N.m)	**Matrice de raideur $[K]_{calculé}$ (N.m/raie)**	**Pourcentage d'incertitude (%)**
10	$\begin{bmatrix} 5.6 & -2.0 & -7.9 \\ -2.9 & 5.4 & -5.4 \\ -5.4 & -6.9 & 26.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.9 & 26.6 & 60.9 \\ 2.4 & 6.6 & 61.3 \\ 6.6 & 25.9 & 61.0 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} 4.7 & -2.5 & -4.0 \\ -2.4 & 4.6 & -4.6 \\ -4.8 & -4.2 & 17.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 & 1.2 & 15.8 \\ 0.5 & 0.9 & 18.2 \\ 0.8 & 3.4 & 17.1 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 4.6 & -2.2 & -4.2 \\ -2.9 & 4.5 & -3.6 \\ -3.4 & -4.7 & 15.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4 & 1.2 & 8.7 \\ 0.7 & 0.7 & 11.9 \\ 2.2 & 2.4 & 10.2 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 4.5 & -1.8 & -4.8 \\ -2.4 & 3.8 & -3.8 \\ -4.3 & -4.0 & 17.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 7.3 \\ 0.1 & 0.2 & 10.8 \\ 0.2 & 0.9 & 8.9 \end{bmatrix}$
50	$\begin{bmatrix} 4.4 & -1.6 & -4.5 \\ -2.5 & 3.6 & -2.9 \\ -3.9 & -4.0 & 15.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 & 4.3 \\ 0.3 & 0.0 & 6.7 \\ 0.7 & 0.0 & 5.3 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 4.5 & -1.3 & -5.1 \\ -2.4 & 3.4 & -3.1 \\ -4.3 & -4.3 & 16.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 3.6 \\ 0.0 & 0.0 & 6.9 \\ 0.0 & 0.0 & 4.9 \end{bmatrix}$
70	$\begin{bmatrix} 4.6 & -1.2 & -4.9 \\ -2.3 & 3.1 & -2.9 \\ -4.5 & -3.9 & 15.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 2.5 \\ 0.1 & 0.2 & 6.9 \\ 0.2 & 0.6 & 3.8 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 4.2 & -0.8 & -4.6 \\ -2.3 & 2.6 & -2.7 \\ -3.8 & -3.6 & 14.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 1.8 \\ 0.2 & 0.1 & 5.7 \\ 0.3 & 0.3 & 3.2 \end{bmatrix}$
90	glissement de la poulie 50 dents sur son axe	

Tension de pose = 546 Newton		
Couple (N.m)	**Matrice de raideur $[K]_{calculé}$ (N.m/raie)**	**Pourcentage d'incertitude (%)**
10	$\begin{bmatrix} 6.5 & -4.0 & -5.9 \\ -3.5 & 6.0 & -6.0 \\ -6.0 & -4.0 & 24.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.3 & 8.5 & 63.8 \\ 2.5 & 5.8 & 64.2 \\ 5.8 & 34.6 & 64.0 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} 6.2 & -2.6 & -7.2 \\ -2.4 & 5.3 & -5.3 \\ -7.6 & -5.3 & 25.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.8 & 6.2 & 27.9 \\ 6.3 & 2.0 & 25.0 \\ 10.3 & 10.2 & 26.6 \end{bmatrix}$
30	$\begin{bmatrix} 5.1 & -2.6 & -5.5 \\ -3.2 & 5.2 & -3.9 \\ -3.8 & -5.4 & 19.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.7 & 3.5 & 14.6 \\ 0.7 & 1.1 & 13.4 \\ 3.1 & 5.6 & 14.1 \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} 5.7 & -2.7 & -6.3 \\ -3.1 & 5.1 & -4.4 \\ -5.2 & -4.7 & 21.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 1.3 & -11.0 \\ 0.2 & 0.5 & -12.0 \\ 0.5 & 2.8 & -11.5 \end{bmatrix}$
50	$\begin{bmatrix} 5.4 & -2.5 & -5.3 \\ -2.9 & 4.8 & -4.3 \\ -5.1 & -4.6 & 19.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 7.0 \\ 0.2 & 0.5 & 8.6 \\ 0.5 & 1.9 & 7.7 \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} 5.0 & -2.1 & -5.5 \\ -3.0 & 4.5 & -3.2 \\ -4.1 & -4.8 & 17.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 5.4 \\ 0.1 & 0.2 & 6.1 \\ 0.5 & 1.1 & 5.7 \end{bmatrix}$
70	$\begin{bmatrix} 5.3 & -2.0 & -6.0 \\ -2.5 & 4.2 & -4.4 \\ -5.6 & -4.5 & 21.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 5.3 \\ 0.7 & 0.2 & 7.0 \\ 1.3 & 0.8 & 6.0 \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} 4.7 & -1.6 & -5.3 \\ -2.4 & 3.8 & -3.4 \\ -4.7 & -4.3 & 18.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 3.7 \\ 0.2 & 0.2 & 5.4 \\ 0.5 & 0.8 & 4.4 \end{bmatrix}$
90	$\begin{bmatrix} 4.8 & -1.3 & -5.9 \\ -2.4 & 3.3 & -3.2 \\ -5.0 & -4.1 & 18.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 3.2 \\ 0.4 & 0.1 & 5.5 \\ 0.8 & 0.4 & 4.0 \end{bmatrix}$

La matrice de raideur lissée et interpolée $[K]_{interpolé}$ est calculée à partir de l'équation III.11 :

$$
\begin{cases}
[K]_{\text{int erpolé}}(\text{N.m / rad.}) = \begin{bmatrix} K_{11}(T_0,\text{couple}) & K_{12}(T_0,\text{couple}) & K_{13}(T_0,\text{couple}) \\ K_{21}(T_0,\text{couple}) & K_{22}(T_0,\text{couple}) & K_{23}(T_0,\text{couple}) \\ K_{31}(T_0,\text{couple}) & K_{32}(T_0,\text{couple}) & K_{33}(T_0,\text{couple}) \end{bmatrix} \\
K_{11}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 1.0511e+3 & -1.7343e+1 & 2.8501e-1 \\ -1.3069e+0 & 1.9159e-1 & -2.3194e-3 \\ 7.0876e-3 & -3.5727e-4 & 3.6319e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{12}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 4.0310e+2 & -1.4349e+1 & 8.6441e-2 \\ -1.0895e+1 & 2.6374e-1 & -1.5672e-3 \\ 1.5188e-2 & -4.2909e-4 & 2.7583e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{13}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} -1.5675e+3 & 4.2363e+1 & -5.4968e-1 \\ 7.8626e+0 & -4.6579e-1 & 4.8423e-3 \\ -1.6986e-2 & 7.6949e-4 & -7.4883e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{21}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} -1.2556e+2 & -1.7782e+1 & 2.1890e-1 \\ -2.1811e+0 & 6.6137e-2 & -9.4765e-4 \\ 1.1075e-3 & -7.3079e-5 & 1.2346e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{22}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 9.0505e+2 & -3.1307e+0 & -5.1362e-2 \\ 1.4688e-1 & 6.2291e-2 & -4.9091e-4 \\ 2.6978e-3 & -1.0486e-4 & 7.9720e-7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{23}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} -1.7219e+3 & 5.4731e+1 & -7.7230e-1 \\ 1.4623e-1 & -1.7225e-1 & 3.3289e-3 \\ 1.6176e-4 & 1.5880e-4 & -3.5896e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{31}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} -1.8128e+3 & 6.9312e+1 & -1.0123e+0 \\ 6.0515e+0 & -4.8410e-1 & 6.3016e-3 \\ -1.4500e-2 & 7.9144e-4 & -9.1722e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{32}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} -2.6636e+3 & 3.6150e+1 & -8.0099e-2 \\ 2.1982e+1 & -6.6734e-1 & 4.2354e-3 \\ -3.6646e-2 & 1.0935e-3 & -7.3021e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix} \\
K_{33}(T_0,\text{couple}) = \langle 1 \quad T_0 \quad T_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 6.6178e+3 & -1.9558e+2 & 2.6832e+0 \\ -1.5054e+1 & 1.2448e+0 & -1.6211e-2 \\ 3.1291e-2 & -1.7591e-3 & 2.1470e-5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{couple} \\ \text{couple}^2 \end{Bmatrix}
\end{cases}
$$