



N° d'ordre NNT : 2020LYSEI030

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'INSA de Lyon

Ecole Doctorale N° ED162 : MEGA
Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique

Spécialité/ discipline de doctorat :

Mécanique

Soutenue publiquement le 21/04/2020, par :
Alexis BONETTO

**Etude de l'indentation et de la fatigue
des contacts roulants**

Devant le jury composé de :

POMMIER	Sylvie	Professeure	Université Paris-Saclay	Présidente
CALLOCH	Sylvain	Professeur	ENSTA Bretagne	Rapporteur
BRUNETIERE	Noël	Directeur de Recherche	Université de Poitiers	Rapporteur
NELIAS	Daniel	Professeur	INSA de Lyon	Directeur de thèse
CHAISE	Thibaut	Maître de Conférences	INSA de Lyon	Encadrant
ZAMPONI	Laurent	Docteur	Airbus	Encadrant

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie RICARD-BLUM Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Curien - 3ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tel : +33(0)4 72 44 82 32 sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Hamamache KHEDDOUCI Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tel : 04.72.44.83.69 hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Véronique GUICHARD INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 veronique.cervantes@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr

Remerciements

Je remercie tout d'abord Airbus pour le financement de mes travaux de recherche. Plus particulièrement, j'adresse un grand merci à Laurent Zamponi pour son accompagnement durant ces trois années, mais aussi et surtout, pendant les longs mois d'attente avant le lancement de cette thèse. Au cours de cette période, son soutien et ses actions ont été essentiels pour que ce projet se concrétise. Je remercie également l'ensemble des membres du service ETMT pour leur accueil et leur aide.

Je tiens à remercier les membres du labo que j'ai eu le plaisir de connaître et notamment Isabelle qui est un peu notre maman à tous au sein des équipes Mimesis et Multimap. J'adresse toute ma gratitude aux doctorants avec qui j'ai vécu cette superbe expérience. Une pensée pour ceux déjà docteurs depuis longtemps, Thibaut, Sergent, Thibault et Pierre. Un grand merci à la team de Coinche, Thomas, Médéric, Djoudjou, Zi, Marie, Efoe, Florian et Karine, pour le nombre incalculable de parties que nous avons pu jouer. Merci à, Ethel, Nicolas, Zhaofeng, Du, Haoming, autres membres de "la communauté de l'algeco", pour les échanges que nous avons eu et surtout pour les gâteaux du vendredi (ou viennoiseries pour les tricheurs) que nous avons partagé. Enfin, j'adresse des remerciements particuliers à la bande d'Esparron avec qui j'ai vécu des moments fantastiques et qui sont devenus bien plus que des amis. Marilu, co-FIPEuse qui a permis de relever le niveau musical de cette équipe. Thomasseuh, inventeur de la "butternut shape". Médéricu, tricoteur de fibres. Djourachkovitchuru, créateur de TopOp et Abaqos. Zi San, puits de science, maître jédi, oracle. Votre bonne humeur et votre aide ont été d'un grand secours, surtout sur la période de rédaction.

J'adresse toute ma reconnaissance à mon encadrant, Thibaut Chaise, pour son soutien technique mais aussi et surtout pour avoir partagé avec moi, à de nombreuses reprises, son expérience de thèse et son recul sur celle-ci, me permettant de me sentir moins seul dans les moments les plus ardues. À mon directeur de thèse, Daniel Nélias, va ma profonde gratitude pour son engagement dans le lancement de cette thèse et pour ses précieux conseils qui m'ont guidé tout au long de ces trois années. À vous deux, de nouveau, un grand merci, pour cette expérience et pour la chance que vous m'avez accordé.

Je remercie du plus profond du coeur mes parents pour leur soutien de tout temps et pour avoir su me pousser dans les études étant plus jeune. Sans vous, je ne serais jamais arrivé où j'en suis aujourd'hui. Je remercie également mon petit frère, qui n'est d'ailleurs plus si petit que ça. Je termine en remerciant Rébecca, pour m'avoir accompagné tout au long de cette aventure et pour m'avoir soutenu de son amour.

Résumé

La fatigue de surface est aujourd'hui la principale cause de défaillances des roulements. Ce type de fatigue peut se développer du simple fait de la rugosité des surfaces mais est exacerbée par la présence de défauts de surface tels que les indents. La gestion de la pollution des lubrifiants, à l'origine de l'indentation des surfaces, est très coûteuse et ne peut être parfaite puisque la pollution est à la fois présente dans les huiles neuves, générée de manière continue par les systèmes lubrifiés et introduite lors des opérations sur le système. En conséquence, les huiles charrient systématiquement des particules d'origines variées qui sont amenées dans les contacts par les systèmes de lubrification. Au passage entre les surfaces, les particules sont écrasées et indentent les surfaces, créant ainsi des défauts qui seront les sites privilégiés d'amorçage de fatigue au cours des cycles de fonctionnement suivants. Ne pouvant se prémunir de l'indentation des surfaces, une bonne compréhension des mécanismes d'indentation et de fatigue sur indent est nécessaire pour garantir la fiabilité des roulements ainsi que pour réduire les coûts liés à leur maintenance.

Au cours de cette thèse, un premier modèle numérique est mis au point pour reproduire la genèse de l'indent. Le modèle éléments finis utilise la modélisation eulérienne pour la représentation de la particule afin de s'affranchir des problématiques de distorsion importante du maillage tandis que la représentation lagrangienne classique est conservée pour le reste du modèle, donnant lieu à l'appellation "couplé Euler-Lagrange". Par cette modélisation, les coûts de calcul sont fortement réduits au prix de l'introduction d'une erreur minime causée par la gestion du contact entre modélisation eulérienne et lagrangienne. Une étude paramétrique exhaustive est menée pour identifier les effets des paramètres de fonctionnement du roulement ainsi que des propriétés des différents corps en contact sur le processus d'indentation. La taille des particules, la nature des matériaux en contact ainsi que le glissement sont identifiés comme les paramètres les plus influents sur le processus tandis que le chargement du roulement n'a qu'un impact mesuré.

La fatigue des surfaces indentées se manifeste notamment par l'apparition de microfissures localisées sur le bord de l'indent dans la direction opposée aux forces de frottement. La compréhension des mécanismes régissant la formation de ces microfissures ainsi que la définition d'un critère à-même de localiser les zones de leur amorçage font l'objet de la seconde partie des travaux présentés ici. Un outil de calcul de contact semi-analytique est utilisé pour réaliser des simulations de roulement sur indent de manière rapide tout en tenant compte de la plasticité des matériaux et des contraintes résiduelles d'indentation. Le comportement du lubrifiant et son effet sur le contact ne sont alors pas considérés. Plusieurs critères de fatigue usuels, basés sur des composants et mécanismes différents, sont alors comparés. Cette étude montre la prépondérance des effets de cisaillement sur la formation des microfissures. Le critère de Brown-Miller ainsi que le terme de cisaillement du critère de Dang Van II se révèlent très efficaces pour localiser les sites d'amorçage de la fatigue. Un nouveau critère, inspiré de ces derniers, est alors proposé et permet la localisation des zones d'initiation ainsi qu'une estimation correcte des plans critiques. L'étude paramétrique menée sur l'indentation est ensuite poursuivie, mettant en avant

trois paramètres critiques pour la durée de vie, la charge du roulement, le glissement et la hauteur des bourrelets de l'indent.

Enfin, un solveur multigrilles est utilisé pour résoudre l'équation de Reynolds dans le but d'étudier le rôle du lubrifiant sur la fatigue des surfaces indentées. Si les résultats obtenus sont très proches du contact sec en condition de roulement pur, l'introduction de glissement dans le contact fait surgir un nouvel effet. Le fluide contenu dans l'indent à l'entrée du contact se déplace à une vitesse différente de celle de la surface indentée provoquant sa sortie de l'indent dans la direction du glissement. Ce mouvement du fluide s'accompagne d'une très forte augmentation de la pression au voisinage de l'indent. Un second stigmate de la fatigue sur indent est la présence d'une zone de matage de la matière en forme de croissant de lune en bord d'indent, localisée dans la direction du glissement. Cette zone de matage voit ensuite apparaître du micro-écaillage qui tend à se propager avec les cycles de roulement. L'analyse du champ de pression en présence de glissement montre une bonne corrélation entre la surpression générée par la sortie du fluide de l'indent et la zone de matage.

Le cycle de vie d'un indent dans un roulement a été étudié, de sa formation à l'apparition des marqueurs de la fatigue. L'utilisation d'un modèle couplé Euler-Lagrange pour reproduire le passage d'une particule dans un contact roulant a permis d'identifier les effets des paramètres de fonctionnement du roulement sur les indents créés. La fatigue de la surface indentée a ensuite été analysée. Par l'emploi d'une méthode semi-analytique, des cycles de roulement sec ont pu être simulés efficacement et des critères de fatigue appliqués aux surfaces indentées. Un lien entre les effets de cisaillement et l'apparition de micro-fissures en bord d'indent a ainsi été établi. Il apparaît aussi que la criticité de l'indent en terme de durée de vie repose essentiellement sur la hauteur des bourrelets, le glissement et la charge appliquée. L'ajout des effets élasto-hydrodynamiques par le biais d'un solveur multigrilles a relié le matage constaté en bord d'indent à la forte surpression causée par la sortie du lubrifiant de l'indent en condition de glissement. Les signes de la fatigue peuvent donc s'expliquer d'une part par le cisaillement en surface, dans le sens opposé aux forces de frottement, et, d'autre part, par la sortie du fluide dans le sens du glissement provoquant une forte hausse de la pression en bord d'indent.

Mots clés: Roulement, Fatigue, Indentation, CEL, Méthode semi-analytique, Multigrilles, EHD

Abstract

Surface fatigue is the main cause of failure in rolling element bearings. This type of fatigue can initiate from the sole asperities on the surfaces but is promoted by the presence of surface defects such as dents. The control of lubricant contamination, responsible for the indentation of the surfaces, is both expensive and imperfect since brand new oils are already contaminated. Moreover, the systems in which they are used generate particles during their operations and particles are introduced during maintenance operations. Therefore, the lubricant drags particles directly into the bearings that are then crushed when they pass through the contact, leaving dents on the surfaces. These defects become favorite sites for fatigue initiation during the following rolling cycles. The suppression of debris denting being impossible, since no filter can be fully efficient, understanding how dents are generated and how fatigue phenomena are driven is essential to ensure the reliability of rolling element bearings and the reduction of the maintenance expenses.

A numerical model is developed to reproduce the debris denting process. The eulerian representation is used to cope with mesh distortion issues caused by the important deformations of the particle when it passes through the contact. The standard lagrangian representation is applied to the rest of the model hence the so-called "coupled Euler-Lagrange" model. Accepting small errors caused by the handling of the eulerian-lagrangian contact, this modelling technique enables the reproduction of the denting process with reduced computational costs. A parametric study is conducted to identify the relative influence of operating parameters and material properties. The size of the particle, the nature of the materials and the presence of sliding are found to be the most influent parameters on debris denting while the bearing load has only limited effects.

One of the consequences of surface fatigue is the appearance of micro-cracks at the edge of the dent located in the direction opposite to the friction forces. The second part of this work is dedicated to the identification of the mechanisms driving the formation of these cracks and of fatigue criteria that are able to locate the correct initiation site. A contact solver based on semi-analytical methods is used to compute rolling cycles over dented surfaces in a fast and cost-efficient way. Lubricant effects are not considered but the solver includes the effect of plasticity and residual stresses from the denting process. Several usual fatigue criteria, based on different stress and strain components, are compared revealing the key role of shear mechanisms on the appearance of cracks. The Brown-Miller criterion as well as the shear component of the Dang Van II criterion are found to be efficient to locate the areas where cracks are found experimentally. These two criteria are taken as a basis to propose a new criterion able to locate the area of crack initiation and a good estimation of the critical plane orientation. The parametric study started during the study of the debris denting process is continued and highlights the bearing load, the sliding and the height of the dent's shoulders as critical parameters for the fatigue life.

Finally, the effects of the lubricant are introduced thanks to a multigrid solver used to solve the Reynolds equation. It appears that the lubricant has nearly no effects on the contact in pure rolling conditions since the results obtained are close to those in dry

contact. On the other hand, the introduction of sliding reveals an unsuspected behaviour of the fluid. The lubricant located in the dent when it enters the contact and the dented surface move at different speeds leading to the fluid leaving the cavity in the direction of the sliding. This displacement creates an important increase of the pressure at the edge of the dent due to the high viscosity of the fluid. Another consequence of the fatigue is the appearance of a dark area shaped like a crescent moon at the edge of the dent in the direction of the sliding. With the rolling cycles, micropitting develops at the boundary of this area and tends to spread on the surface. The analysis of the pressure distribution shows good agreement between the shapes of the overpressure area and dark area observed experimentally.

The cycle of life of a dent in a rolling element bearing has been studied, from the indentation to the appearance of fatigue phenomena. Using a coupled Euler-Lagrange model, the realistic debris denting process was reproduced and key parameters of the process were identified. The surface fatigue of dented surfaces was then investigated, in dry contact conditions first, thanks to semi-analytical tools. A direct link between shear mechanisms and micro-cracks was revealed. The fatigue life was found to depend strongly on the bearing load, the sliding and the height of the dent's shoulder. Adding elasto-hydrodynamic effects with the help of a multigrid solver, the appearance of a dark area at the edge of the dent in the direction of the sliding was related to the important overpressure generated by the relative motion between the fluid and the dented surfaces in sliding conditions. The two consequences of surface fatigue on dented surfaces can then be explained. On one hand, by the effect of shear stress at the edge of the dent in the direction opposite to the friction force and, on the other hand, by the fluid leaving the cavity in the direction of the sliding generating an increase of the pressure in this area.

Keywords: Rolling element bearings, Fatigue, Debris denting, CEL, Semi-analytical methods, Multigrid solver, EHL

Table des matières

Table des matières	i
Introduction générale	1
1 Indentation des contacts roulants	9
1.1 Introduction	11
1.2 État de l'art	11
1.3 Outils numériques	19
1.3.1 Modélisation couplée Euler-Lagrange	19
1.4 Validation	23
1.4.1 Référence expérimentale	23
1.4.2 Validation numérique du modèle	25
1.4.3 Validation expérimentale du modèle	27
1.5 Étude paramétrique	33
1.5.1 Paramètres étudiés	33
1.5.2 Influence de la taille de la particule	33
1.5.3 Influence du chargement	37
1.5.4 Influence du coefficient de frottement entre la particule et les surfaces	38
1.5.5 Influence du glissement	40
1.5.6 Influence de la nature de la particule	44
1.5.7 Influence de la nature des composants du roulement	45
1.5.8 Influence des contraintes résiduelles	51
1.5.9 Synthèse	53
1.6 Conclusion	54
2 Fatigue des surfaces indentées	55
2.1 Introduction	57
2.2 État de l'art	57
2.3 Méthodes semi-analytiques pour la résolution des problèmes de contact	60
2.3.1 Définition du problème de contact	60
2.3.2 Liens entre chargement, déplacements et contraintes	61
2.3.3 Formulation du problème de contact	64
2.3.4 Résolution du problème de contact	68

2.3.5	Schéma global de l'outil de calcul	78
2.4	Définition des critères et des variables utiles	80
2.4.1	Variables utiles	80
2.4.2	Critères de fatigue à invariants de contraintes	83
2.4.3	Critères de fatigue en contraintes	84
2.4.4	Critères de fatigue en déformations	84
2.4.5	Critères énergétiques	85
2.4.6	Paramètres de fatigue utilisés	85
2.5	Étude comparative des critères de fatigue	87
2.5.1	Définition des conditions de l'étude	88
2.5.2	Critères à invariants de contraintes	92
2.5.3	Critère en contraintes	96
2.5.4	Critères en déformations	98
2.5.5	Critère énergétique	103
2.5.6	Influence des paramètres de fatigue	104
2.5.7	Définition d'un nouveau critère	106
2.6	Application à un indent réel	109
2.7	Étude paramétrique de la fatigue des surfaces indentées	111
2.7.1	Effets de la hauteur des bourrelets	111
2.7.2	Effets de la charge	112
2.7.3	Effets du glissement	112
2.7.4	Effets des matériaux	112
2.7.5	Effets des traitements thermo-chimiques	113
2.7.6	Synthèse	113
2.8	Conclusion	114
3	Modélisation du contact élasto-hydrodynamique en présence d'indent	115
3.1	Introduction	117
3.2	État de l'art	117
3.2.1	Modélisation du contact EHD	117
3.2.2	Étude du contact EHD en présence d'indent	119
3.3	Modélisation du contact EHD transitoire	121
3.3.1	Équation de Reynolds	121
3.3.2	Relations viscosité-pression et densité-pression	121
3.3.3	Épaisseur du film d'huile	123
3.3.4	Équilibre de la charge	123
3.3.5	Adimensionnement	123
3.4	Résolution du contact EHD transitoire	125
3.4.1	Discrétisation	125
3.4.2	Relaxation	127
3.4.3	Méthode de résolution multigrilles	130
3.4.4	Application au contact EHD	138
3.5	Validation du solveur	146

3.5.1	Simulations de coupure de vitesse	146
3.5.2	Passage de rugosités transverses dans le contact	151
3.5.3	Passage d'un indent dans le contact	157
3.6	Contact EHD en présence d'indent	160
3.6.1	Limites de la modélisation	160
3.6.2	Effets de la taille de l'indent	161
3.6.3	Effets du glissement	164
3.6.4	Effets de la taille du contact	168
3.7	Conclusion	170
Conclusion et perspectives		171
Annexe A : Passage d'une particule dans le contact		175
Annexe B : Coefficients d'influence		179
Annexe C : Roulement sur indent		183
Bibliographie		197

Introduction générale

Roulements : Présentation et définitions

Un roulement est un élément permettant la mise en rotation relative entre deux pièces autour d'un axe commun. Les roulements permettent également la reprise des efforts liés au chargement des pièces en question. Un roulement classique, tel que celui visible sur la FIG.I, est composé des éléments suivants :

- une bague extérieure et une bague intérieure, chacune étant liée à l'une des deux pièces en rotation relative ;
- des corps roulants, pouvant être de différents types et assurant la mobilité relative des deux bagues ;
- une cage, ayant pour but le maintien de la séparation entre les corps roulants et la bonne distribution de ces derniers.

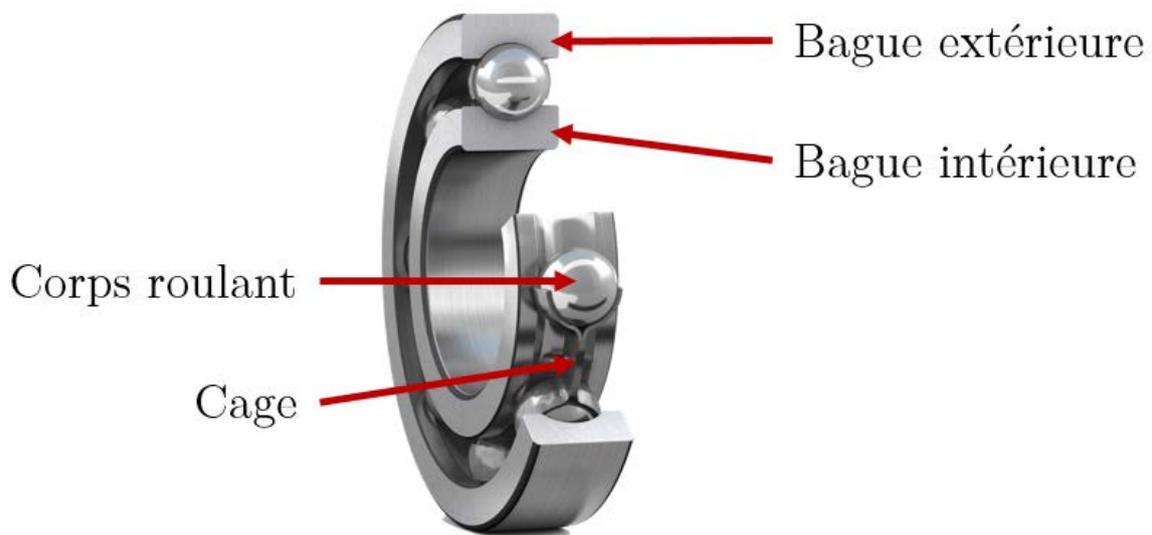


FIGURE I – Composition d'un roulement à billes d'emploi courant (SKF).

Le bon fonctionnement du roulement passe également par la bonne lubrification du contact. Celle-ci peut être réalisée par une huile ou une graisse, dépendamment des condi-

tions opératoires. Ainsi, un roulement fonctionnant à très haute vitesse dans un milieu fermé et nécessitant un refroidissement important sera lubrifié par huile tandis qu'un roulement fonctionnant à faible vitesse et à l'air libre sera plutôt lubrifié par graisse.

Les roulements sont présents dans tous les domaines industriels, dès lors que des mouvements de rotation sont en jeu. Ils sont ainsi employés dans les applications de transmission de puissance comme c'est le cas dans les hélicoptères pour faire la liaison entre le ou les moteurs et le rotor. La transmission de la puissance se fait par l'intermédiaire d'une boîte de transmission principale (BTP) telle que celle visible sur la FIG.II. La rupture d'un roulement peut, dans des cas extrêmes, conduire à la perte de la transmission de puissance et à des situations catastrophiques en vol. La bonne compréhension de ces composants jusque dans leur mode de rupture est donc cruciale.



FIGURE II – BTP de l'hélicoptère EC225, Airbus Helicopters.

Roulements : Modes de défaillance

Les roulements sont des composants dimensionnés pour effectuer des dizaines voire des centaines de millions de cycles, c'est pourquoi le terme de fatigue sera utilisé pour définir les modes de défaillance usuels du roulement. Deux types de fatigue sont à distinguer, la fatigue de sous-couche d'une part et la fatigue de surface d'autre part.

Fatigue de sous-couche

La fatigue de sous-couche est, comme son nom l'indique, initiée en profondeur dans le matériau. Les fortes charges appliquées sur le roulement, notamment dans les roulements aéronautiques, couplée à la présence d'hétérogénéités dans le matériau entraîne une modification de la microstructure et l'apparition de fissures. Le phénomène de papillons de fatigue, illustré par la FIG.III, est un cas classique de fatigue initié en sous-couche. D'autres manifestations de la modification microstructurale, telles que les "white etching

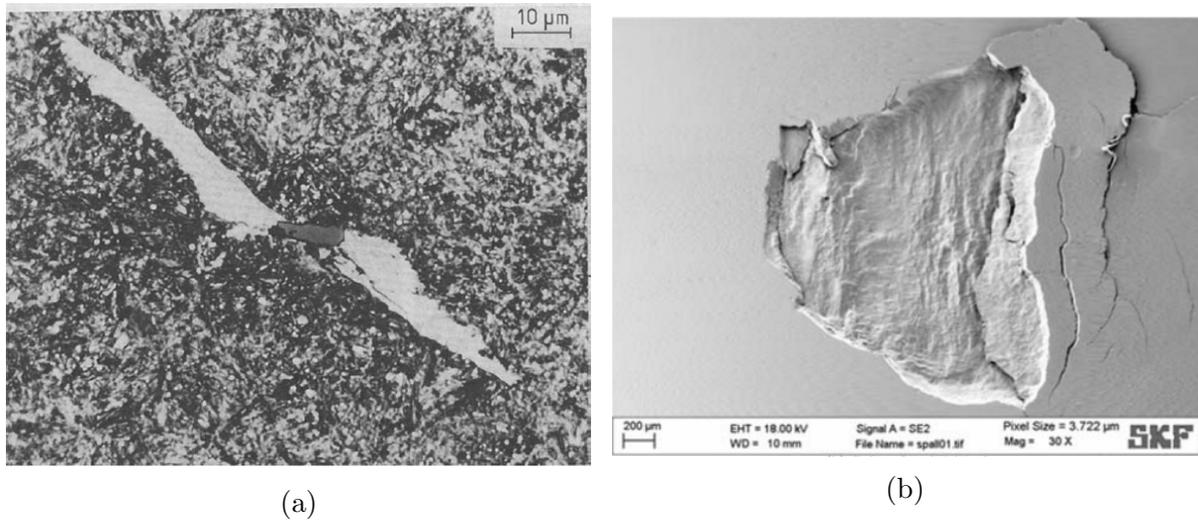


FIGURE III – Papillon de fatigue formé autour d’une inclusion, d’après [SCH 88] (a) et écaillage initié en sous-couche (b), d’après [MOR 15b].

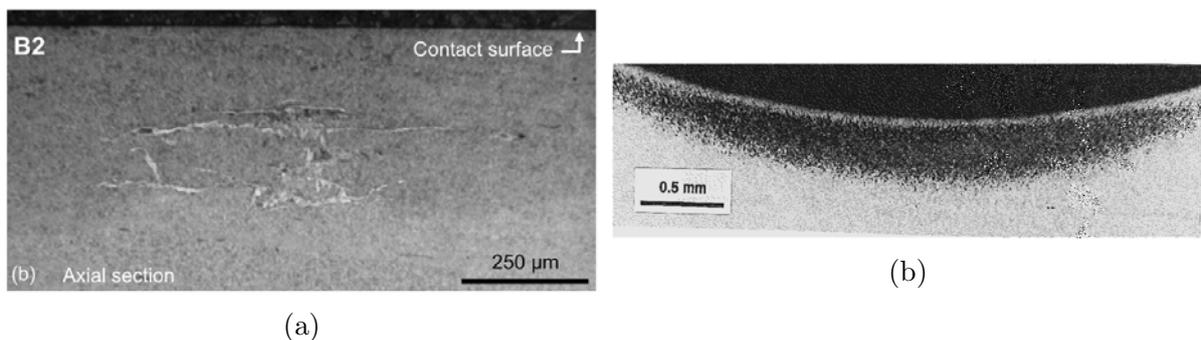


FIGURE IV – ”White etching cracks”, d’après [EVA 13] (a) et ”dark etching regions” (b) dans la sous-couche d’une piste de roulement à billes, d’après [VOS 97].

cracks” ou les ”*dark etching regions*”, sont également présentées sur la FIG.IV. Les fissures ainsi initiées se propagent jusqu’à remonter en surface en emportant avec elles une écaille de matière. Le terme d’écaillage sera utilisé ici puisque la taille des écailles est de l’ordre de grandeur de la taille du contact. La dégradation de la surface conduit alors à une rupture rapide du roulement.

Si la fatigue de sous-couche était la principale cause de défaillance des roulements, l’amélioration de la qualité des matériaux ainsi que la réduction des chargements maximum en font une cause secondaire depuis les deux dernières décennies.

Fatigue de surface

La fatigue de surface est initiée par la présence de défauts de surface ou par les seules rugosités de surface qui, au passage de la charge, vont être des zones de concentration de contraintes importantes. La répétition des cycles de chargement va alors mener à

l'apparition de micro-fissures qui se propagent en proche surface et entraîne le détachement de micro-écailles de matière. Le terme de micro-écaillage sera utilisé ici car la taille des écailles est de l'ordre de celle des rugosités. Si la taille du défaut ainsi créé n'est pas nécessairement problématique, c'est la génération de nouvelles micro-écailles à partir de ce défaut qui va conduire à la ruine du composant comme illustré par la FIG.V. Dans le cas de défauts de surface sévères comme les indents, de l'écaillage peut également survenir.

La fatigue de surface est à l'heure actuelle la cause principale de défaillance dans les roulements.

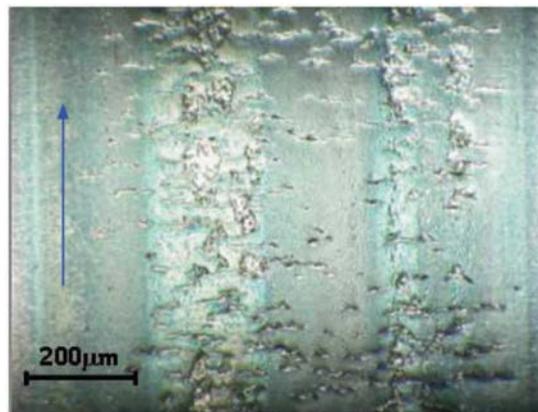


FIGURE V – Micro-écaillage généralisé à la surface d'une piste de roulement, d'après [MOR 11a].

Pollution et indentation des roulements

La lubrification, mais surtout le refroidissement des contacts nécessitent l'utilisation massive d'huile dans les systèmes de transmission de puissance. La pollution de ces huiles est donc un problème majeur car les particules en suspension sont amenées directement dans le roulement. Ces particules qui peuvent être métalliques, minérales ou organiques, sont d'origine diverses :

- Ville [VIL 98a] montre qu'elles sont déjà présentes dans les huiles neuves et en plus grande quantité dans les grands contenants (FIG.VI) ;
- la fabrication des pièces du système de transmission génère aussi des particules, métalliques lors des opérations d'usinage ou de sable lors des opérations de fonderie de carter par exemple, qui ne sont pas systématiquement éliminées par les opérations de rinçage pré-assemblage ;
- le fonctionnement naturel du système de transmission entraîne également la formation de particule d'usure ;
- les particules extérieures peuvent s'insinuer dans les systèmes en cas de défaut d'étanchéité ou plus simplement lors des opérations de maintenance comme le remplissage des réservoirs d'huile.

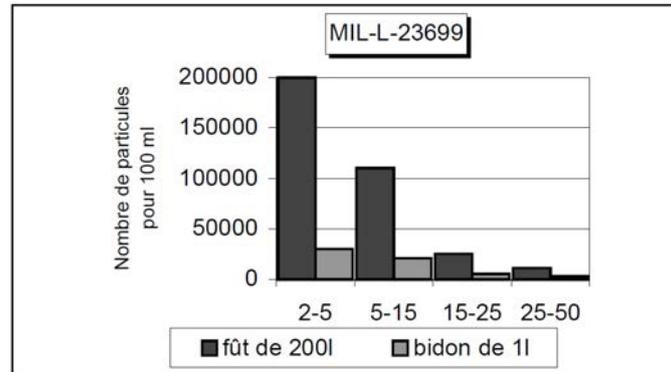


FIGURE VI – Taux de particules et distribution de la taille des particules dans une huile neuve, d'après [VIL 98a].

Au passage dans le contact, les particules indentent les surfaces, comme le montre la FIG.VII. Un profil type d'indent est donné en FIG.VIII. Un indent se caractérise par sa largeur, sa profondeur et la hauteur de son bourrelet.

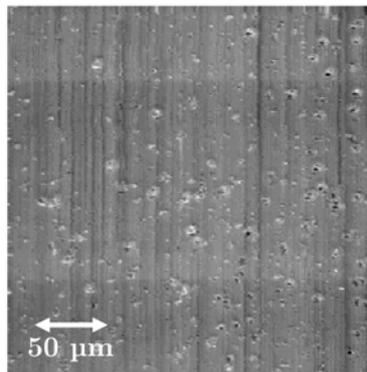


FIGURE VII – Surface indentée par des particules en carbure de silicium (SiC), d'après [VIL 98b].

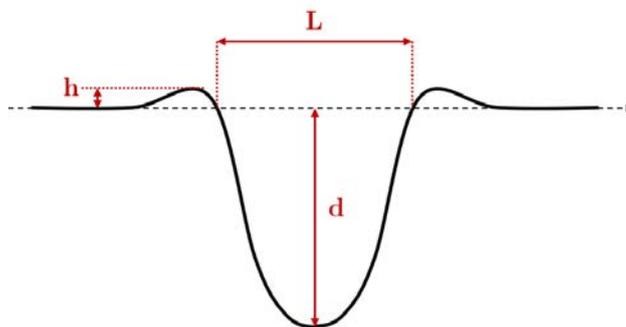


FIGURE VIII – Profil type d'un indent.

La fatigue des surfaces indentées se traduit par deux phénomènes visibles sur la FIG.IX :

- une zone de matage en bord d'indent dans le sens du glissement dans laquelle apparaît du micro-écaillage ;
- l'apparition de fissures en bord d'indent dans la direction opposée à la force de frottement.

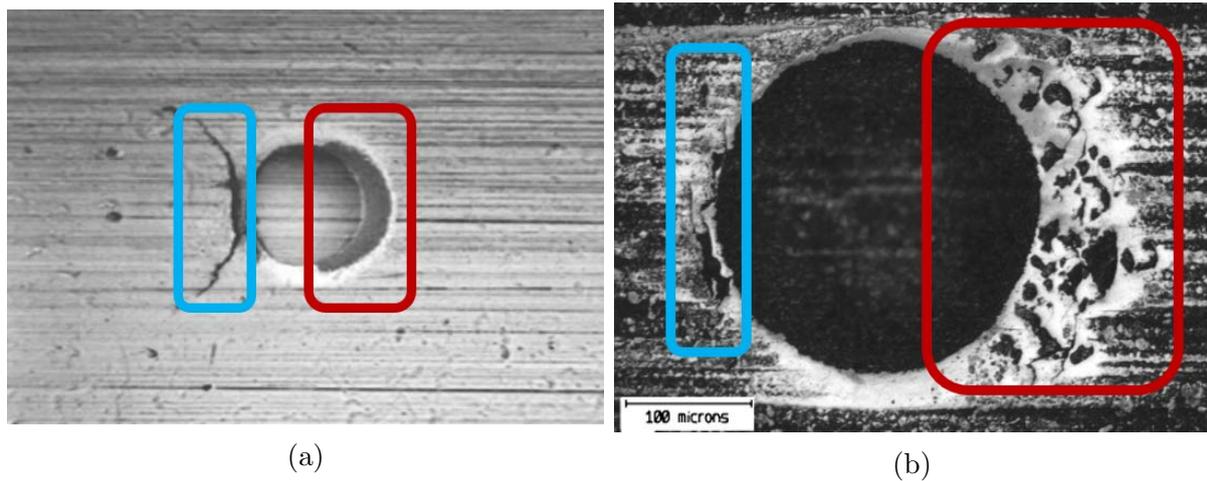


FIGURE IX – Fatigue autour d'un indent avec apparition de fissures (bleu) et de matage et micro-écaillage (rouge), d'après [MOR 15a] (a) et [TON 12b] (b).

Une distinction est faite ici entre la direction de glissement et la direction des forces de frottement. Le glissement repose sur l'existence d'une vitesse relative entre les surfaces tandis que les forces de frottement reposent, comme leur nom l'indique, sur le frottement entre les surfaces. Les deux concepts, bien que liés, ne traduisent pas les mêmes effets. La FIG.X illustre les directions des forces de frottement s'appliquant sur les surfaces suivant les vitesses relatives de ces dernières. Ces principes seront régulièrement rappelés tout au long de ce manuscrit du fait de leur importance dans la fatigue des surfaces indentées.

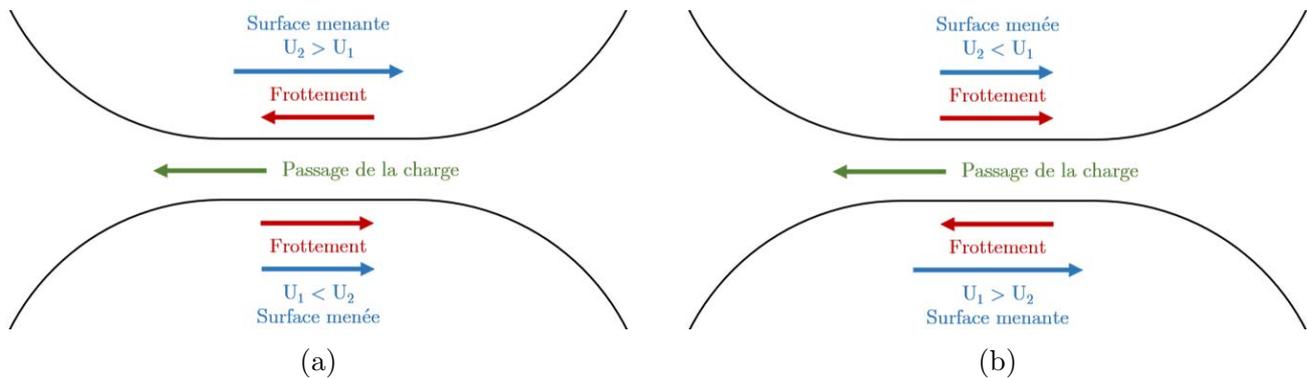


FIGURE X – Illustration des directions de frottement suivant la vitesse relative des surfaces.

Problématique industrielle

L'élimination complète de la pollution, même à coût élevé, est impossible. Par conséquent, la bonne compréhension des mécanismes d'indentation des surfaces et de la fatigue des surfaces indentées est cruciale pour se prémunir des défaillances anticipées. Les objectifs à grande échelle pour augmenter la fiabilité des pièces et réduire leur coût de maintenance sont donc :

- La définition de règles de conception ou d'orientation de choix pour limiter les effets de l'indentation ;
- La mise en place d'outils permettant de prédire la durée de vie des surfaces indentées ;
- La mise en place de règles d'aide à la décision de remise en service ou non des pièces passant en révision ;
- La définition des informations nécessaires à la mise en place d'opérations de réparation des pièces.

Pour répondre à ces problématiques, les travaux menés ici se décomposent en trois phases :

- La mise en place d'un modèle numérique permettant de reproduire le processus d'indentation réel des roulements. L'identification des paramètres influents sur le processus par une étude paramétrique ;
- La détermination des mécanismes à l'origine de l'apparition des stigmates de fatigue observés dans la littérature ainsi que la définition des paramètres critiques régissant la durée de vie des surfaces indentées ;
- L'étude de l'impact de la lubrification sur la fatigue des surfaces par la mise en place d'un outil numérique de calcul élasto-hydrodynamique.

Chapitre 1

Indentation des contacts roulants

Ce chapitre traite de l'étude de la genèse des indents dans les contacts roulants. Un modèle numérique dit "couplé Euler Lagrange" est développé afin de reproduire le passage d'une particule sphérique dans un contact cylindre-plan. Le modèle est ensuite validé par confrontation aux résultats expérimentaux de la littérature. S'en suit une étude paramétrique exhaustive du processus d'indentation dans le but d'en définir les paramètres les plus influents. Les résultats obtenus mettent l'accent sur l'importance des propriétés mécaniques des trois corps en présence ainsi que sur l'équilibre de ces propriétés dans la formation de l'indent. La taille de la particule se trouve être proportionnelle à la taille de l'indent généré tant que la particule est de taille inférieure à la largeur du contact. Lorsque la particule, une fois écrasée, devient plus grande que la largeur de contact, la relation est sensiblement modifiée. Enfin, la présence de glissement dans le contact modifie considérablement la forme de l'indent en augmentant l'étalement de la particule entre les surfaces, menant à des indents plus superficiels. Le modèle numérique mis en place permet la génération d'un indent réel présentant une asymétrie dans son profil mais aussi dans la distribution des contraintes résiduelles qu'il génère.

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	État de l'art	11
1.3	Outils numériques	19
1.3.1	Modélisation couplée Euler-Lagrange	19
1.4	Validation	23
1.4.1	Référence expérimentale	23
1.4.2	Validation numérique du modèle	25
1.4.3	Validation expérimentale du modèle	27
1.5	Étude paramétrique	33
1.5.1	Paramètres étudiés	33
1.5.2	Influence de la taille de la particule	33
1.5.3	Influence du chargement	37
1.5.4	Influence du coefficient de frottement entre la particule et les surfaces	38
1.5.5	Influence du glissement	40
1.5.6	Influence de la nature de la particule	44
1.5.7	Influence de la nature des composants du roulement	45
1.5.8	Influence des contraintes résiduelles	51
1.5.9	Synthèse	53
1.6	Conclusion	54

1.1 Introduction

Ce premier chapitre est consacré à la modélisation et l'étude du processus d'indentation réel survenant dans les contacts roulants. Après une étude de la littérature sur le sujet, un modèle numérique reproduisant le passage d'une particule sphérique dans un contact cylindre-plan sera présenté. Ce modèle sera ensuite confronté à des données expérimentales d'indentation naturelle dans le but de le valider. Enfin, une étude paramétrique exhaustive de l'indentation sera menée pour définir l'impact des conditions de fonctionnement du roulement, de la nature de ses composants et de celle des particules sur les indents produits.

1.2 État de l'art

L'étude de la fatigue de surface causée par la contamination des lubrifiants nécessite la prise en compte des conditions dans lesquelles les indents sont générés. Toutefois, les études de fatigue sont réalisées sur la base d'indents produits artificiellement, par indenteurs sphériques par exemple. Ceci pour garantir une répétabilité des essais mais aussi une plus grande généralité des modèles mis en place. Xu et al. [XU 97b] ont étudiés les contraintes résiduelles générées par l'indentation et leur effet sur la fatigue par le biais d'une modélisation éléments finis en déformation plane reproduisant l'indentation artificielle d'une surface. Warhadpande et Sadeghi [WAR 10], dans leur étude numérique de la fatigue des surfaces indentées prenant en compte la microstructure du matériau, réalisèrent également des indents artificiels par l'intermédiaire d'un modèle éléments finis axisymétrique. Plus tard, Morales et Gabelli [MOR 11b, MOR 15a, MOR 16] utilisèrent des indents artificiels pour faire l'étude numérique et expérimentale du comportement des surfaces indentées en condition de lubrification elasto-hydrodynamique. À ces recherches s'ajoutent aussi les travaux expérimentaux de Diab et al. [DIA 03], Coulon et al. [COU 05], Nélias et al. [NEL 05], Antaluca et al. [ANT 08] ou plus récemment Vieillard et al. [VIE 16], tous menés sur la base d'indents artificiels.

Les indents naturels, de par leurs grandes diversités, sont donc écartés des études de fatigue des surfaces et font plutôt l'objet de travaux dédiés qui sont principalement expérimentaux et plus rarement numériques.

Études expérimentales

Wan et Spikes [WAN 88], Dwyer-Joyce et al. [DWY 90, DWY 92], Dwyer-Joyce [DWY 05] ainsi que Cann et al. [CAN 96] ont étudié le comportement des particules en suspension dans le lubrifiant au cours de leur passage dans le contact. À l'aide de montages optiques permettant la réalisation de microphotographies, telles que celle présentée en FIG.1.1, ils ont pu montrer des différences de comportement suivant la nature de la particule. Les particules ductiles subissent un écrasement tout au long de leur passage dans le contact, tandis que les particules fragiles éclatent en tout début de processus et créées des nuées d'indents, comme schématisé sur la FIG.1.2.

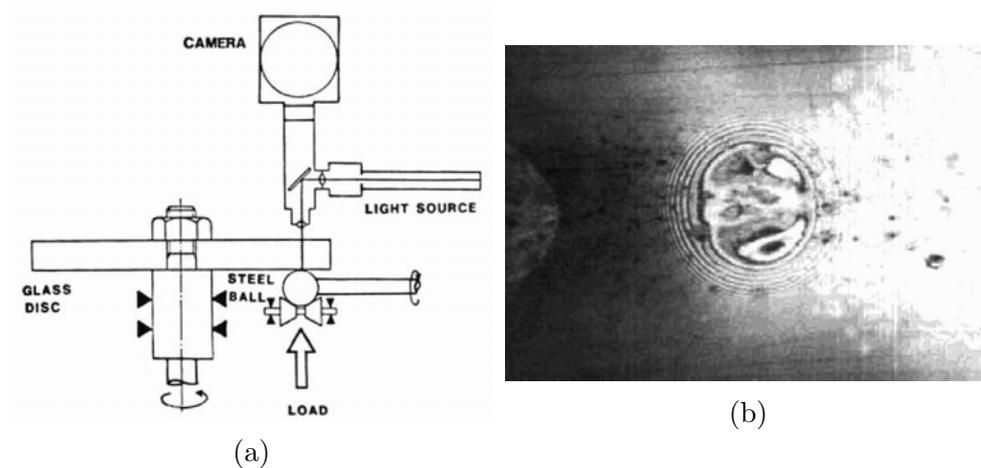


FIGURE 1.1 – Montage d’observation du contact EHD (a) et microphotographie montrant le passage de particule SAE 30 dans le contact (b), d’après [WAN 88].

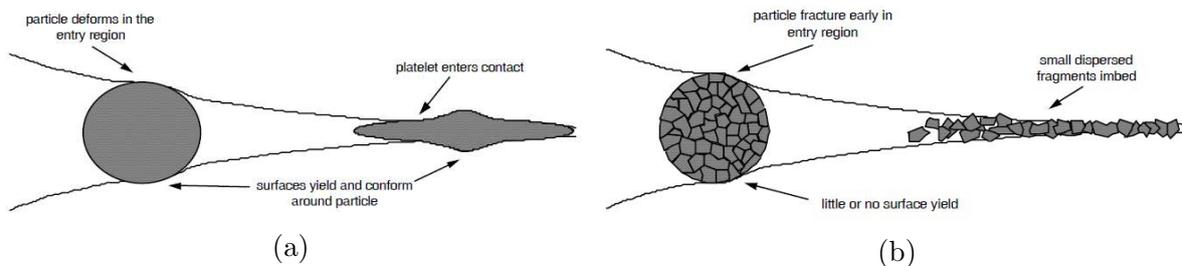


FIGURE 1.2 – Comportement d’une particule ductile (a) et d’une particule fragile (b) lors du passage dans le contact, d’après [DWY 92].

Dwyer-Joyce et al. [DWY 92] ont établi un lien entre la taille de la particule, la géométrie des surfaces et le coefficient de frottement pour définir la taille maximale de particule pouvant entrer dans le contact. Enfin, Cann et al. [CAN 96] ont comparé les profils d’indents obtenus en présence ou non de lubrifiant pour des particules en fer de diamètre 30-60 μm . En présence de lubrifiant, une réduction de la profondeur de l’indent est constatée, comme illustrée sur la FIG.1.3. Cette réduction est de l’ordre de grandeur de l’épaisseur du film de lubrifiant.

Ville et Nélias dans leurs différents travaux [VIL 98a, VIL 98b, VIL 99b, NEL 00] ont mis au point un banc de pollution. Ce montage permet de compter le nombre de particules introduites et donc de maîtriser la concentration en particules du lubrifiant pour étudier l’indentation d’un contact entre galets bi-disques en acier AISI 52100. Ils concluent qu’une relation linéaire existe entre le nombre d’indents comptés sur les surfaces et le produit de la concentration en particules du lubrifiant et de la durée de l’essai, comme illustré par la FIG.1.4.

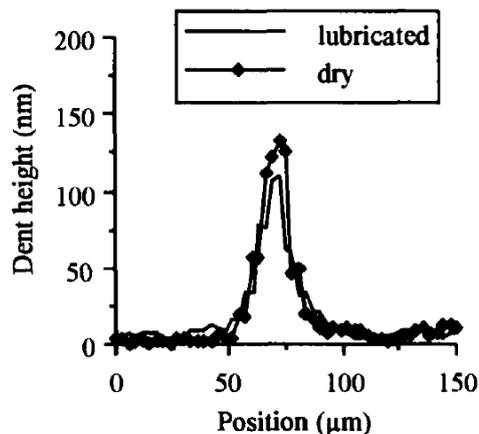


FIGURE 1.3 – Profils d'indents obtenus pour des particules en fer de diamètre initial 30-60 μm en conditions de contact sec ou lubrifié, d'après [CAN 96].

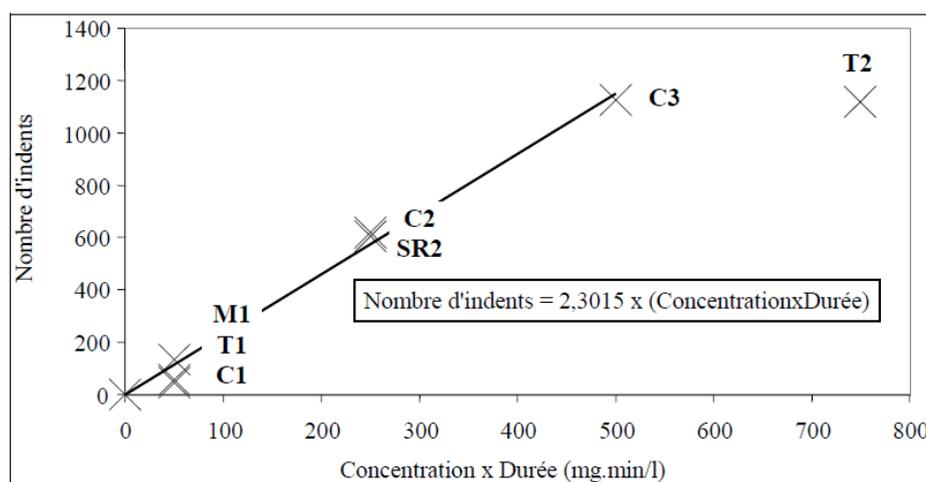


FIGURE 1.4 – Nombre d'indents comptés sur les surfaces en fonction du produit concentration-durée, d'après [VIL 99b].

Par l'emploi de particules en acier M50 ductiles et en carbure de silice SiC fragiles ou encore de sable SAE AFTD [VIL 98b], les différences de comportement observées dans la littérature ont été confirmées. Une relation directe entre la taille des particules et les dimensions de l'indent a été tirée par les auteurs suite à l'utilisation de particules de différentes tailles allant de 10-20 μm à 40-50 μm . Il apparaît également que le glissement relatif des surfaces tend à étaler les particules dans la direction du frottement. Ces conditions mènent à des indents plus allongés mais aussi à l'incrustation des particules dans les surfaces, comme montré par la FIG.1.5. Enfin, par comparaison d'essais réalisés à des vitesses différentes [VIL 98a], le constat fait par Cann et al. [CAN 96] sur la réduction de la profondeur de l'indent en contact lubrifié qui est de l'ordre de l'épaisseur de film est partagé.

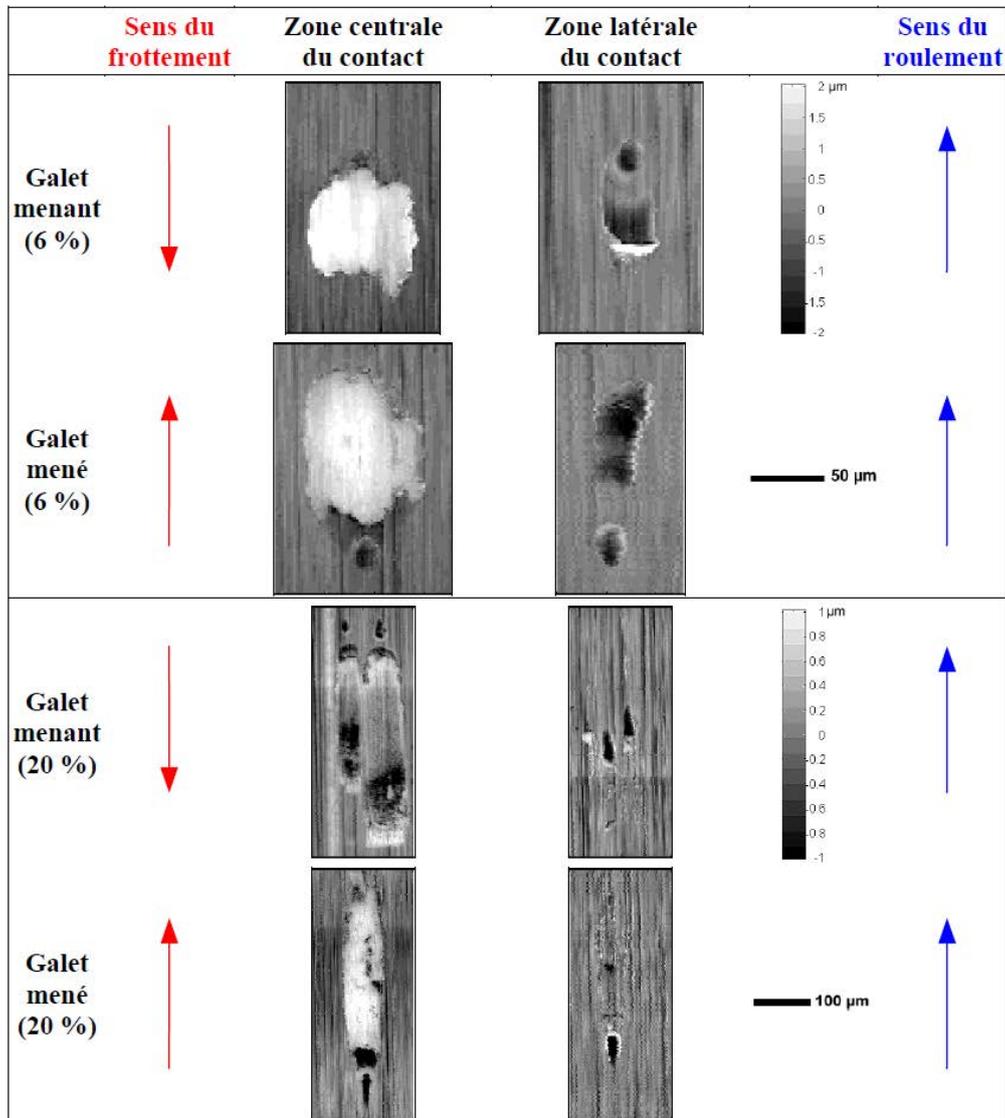


FIGURE 1.5 – Effet du glissement sur l'indentation, d'après [VIL 99b].

Avec la démocratisation des roulements hybrides à corps roulants en céramique, Toniccello et al. [TON 12a] se sont penchés sur les effets de la dualité des surfaces en contact. La comparaison des contacts acier-acier et acier-céramique les ont amenés à conclure que de par sa plus grande rigidité, le corps en céramique se trouve protégé de l'indentation. Cette protection se fait au détriment de la surface en regard qui présente un indente plus profond. Ce constat est également fait par Strubel et al. [STR 16, STR 17] après avoir obtenu des résultats semblables, montrés sur la FIG.1.6. Ils ajoutent que le taux de captation de particules n'est pas altéré par la nature du contact, comme illustré par la FIG.1.7.

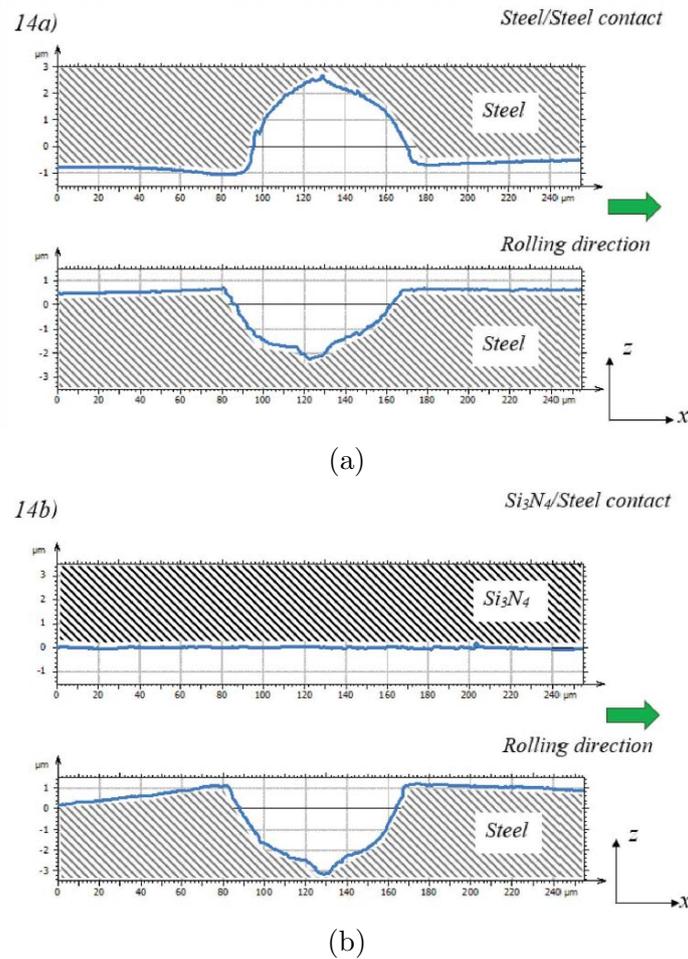


FIGURE 1.6 – Profils des indents obtenus pour un contact acier-acier (a) et hybride (b), d'après [STR 16].

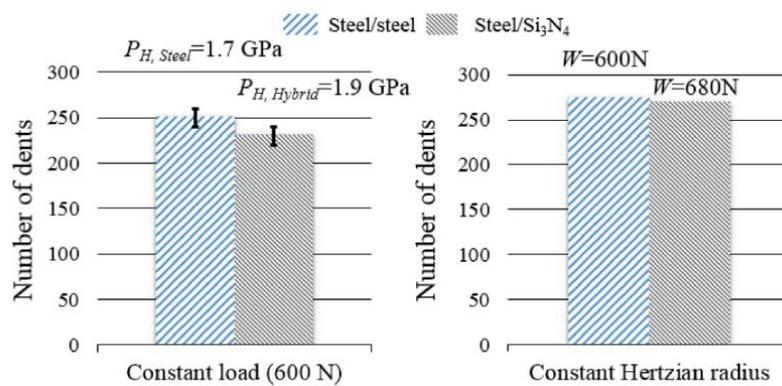


FIGURE 1.7 – Taux de captation de particules pour des contacts acier-acier ou hybride à charge constante et taille de zone de Hertz constante, d'après [STR 16].

Études numériques

De plus rares études analytiques ou numériques ont été menées pour modéliser le passage d'une particule dans un contact roulant. Hamer et al. [HAM 87, HAM 89] proposent une première approximation du phénomène en le rapprochant de l'écrasement d'une particule sphérique entre deux surfaces planes. Ils donnent ainsi une expression analytique du champ de pression axisymétrique et de la forme de l'indent illustrés sur la FIG.1.8. Cette approche est en adéquation avec les essais menés par les mêmes auteurs et a montré la capacité de particules dites "molles" à endommager des surfaces plus dures par l'effet du confinement de la particule dans le contact.

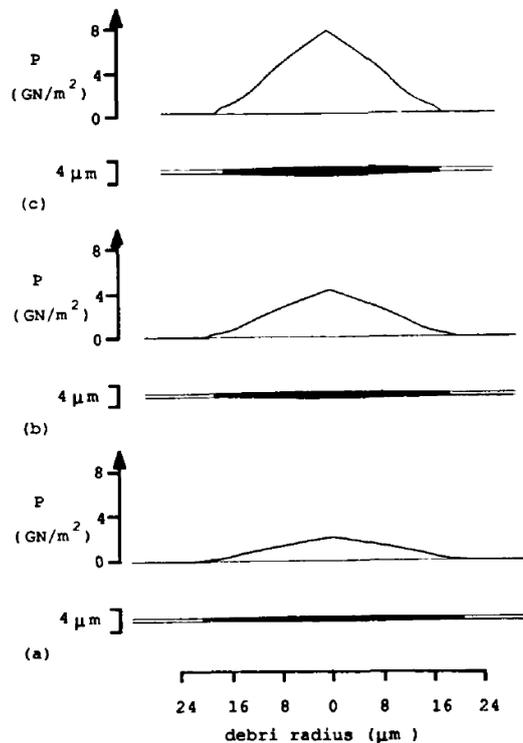


FIGURE 1.8 – Profil de pression et forme de l'indent pour des particules, de haut en bas, en acier faiblement allié, en acier doux et en cuivre, d'après [HAM 87].

Peu après, Ko et Ioannides [KO 89] ont développé deux modèles éléments finis présentés sur la FIG.1.9, l'un axisymétrique, l'autre en déformation plane. Ces modèles reproduisant l'écrasement d'une particule sphérique et d'une particule cylindrique, basés sur les travaux de Hamer et al. [HAM 87, HAM 89], ont permis l'étude des contraintes résiduelles post-indentation. Kang et al. [KAN 04] développeront plus tard un modèle éléments finis, présenté sur la FIG.1.10a, reproduisant le passage d'une particule dans un contact bi-disques, introduisant ainsi l'effet du roulement à la modélisation. Ce modèle a permis une étude paramétrique de l'indentation ayant donnée des résultats en accord avec les essais de Ville et Nélias [VIL 98a, VIL 98b, VIL 99b, NEL 00]. L'étude s'arrête également sur l'effet du coefficient de frottement entre la particule et les surfaces (FIG.1.10b). Il apparaît

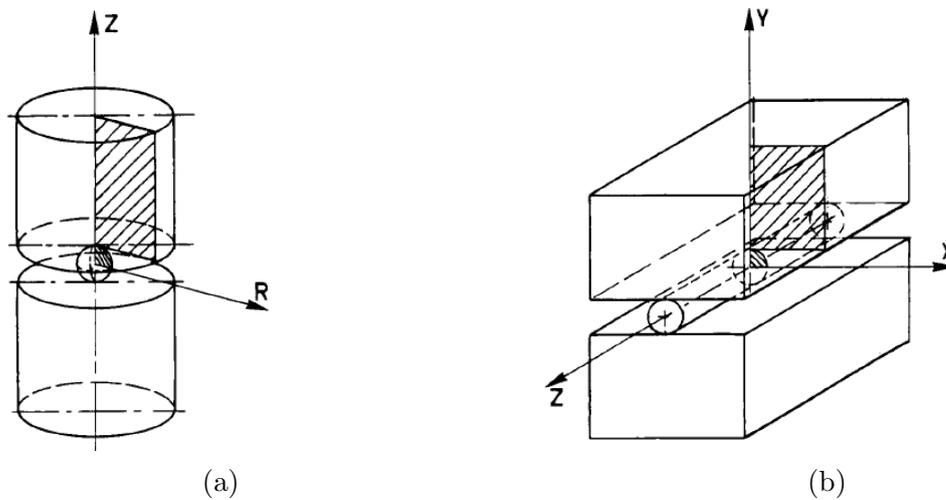


FIGURE 1.9 – Modèle EF axisymétrique (a) et déformations planes (b), d'après [KO 89].

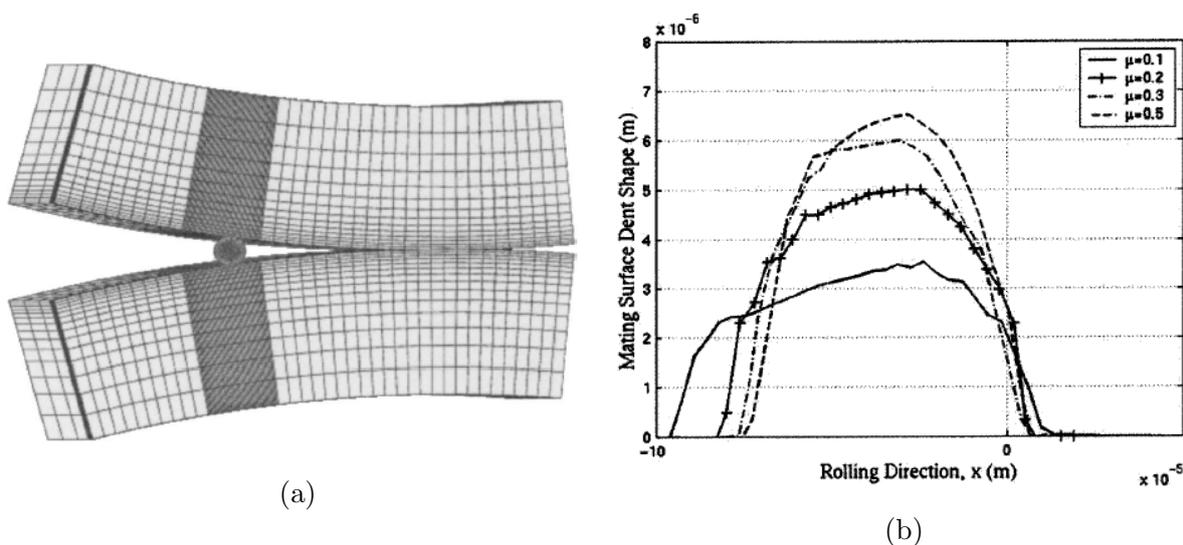


FIGURE 1.10 – Modèle éléments finis reproduisant le passage d'une particule sphérique dans un contact bi-disque (a) et profils d'indents obtenus avec ce modèle pour différentes valeurs de coefficient de frottement (b), d'après [KAN 04].

que la diminution du coefficient de frottement s'accompagne de la diminution des forces de frottement s'opposant à l'étalement de la particule entre les surfaces, menant à des indents de plus en plus larges et superficiels.

Plus récemment, Nikas [NIK 12] a mis au point un modèle analytique permettant de simuler l'indentation des contacts roulants. Ce modèle tient compte de la plasticité des matériaux, de la présence de glissement ou encore de la lubrification du contact. Le modèle est ensuite enrichi en y ajoutant tour à tour les effets thermiques [NIK 13] et les effets de vitesse de déformation [NIK 14]. Nikas montre que l'échauffement dû au travail

plastique et à la friction mène à des températures très élevées dans la particule au cours de son passage dans le contact. Ces températures peuvent même atteindre la température de fusion de manière ponctuelle, comme illustré sur la FIG.1.11. L'accent est aussi mis sur l'importance de la prise en compte des effets visco-plastiques dans le comportement de la particule par l'intermédiaire d'une loi de comportement de type Johnson-Cook [JOH 83].

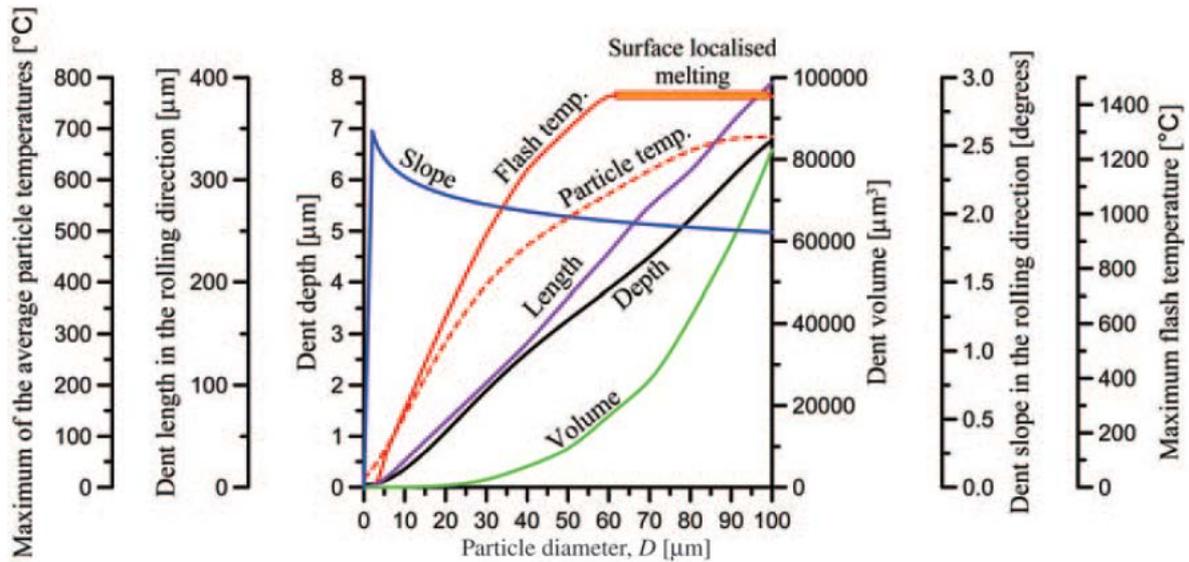


FIGURE 1.11 – Effets de la taille de la particule sur la température de la particule, et les dimensions de l'indent pour un contact acier-acier avec une particule en acier, d'après [NIK 13].

Synthèse

Les études expérimentales sur l'indentation naturelle montrent que les indents créés sur les surfaces dépendent beaucoup des paramètres du contact. Il est donc nécessaire, pour étudier au mieux la fatigue des surfaces indentées, de partir d'indents réalisés dans des conditions proches si ce n'est identiques aux conditions de fonctionnement du système étudié. Un outil numérique d'indentation flexible est donc requis. Afin de permettre une utilisation simple et par le plus grand nombre dans un contexte industriel, une modélisation de type éléments finis est privilégiée. Les modèles de ce type exposés précédemment se trouvent toutefois limités par la négligence des effets thermiques et des effets visqueux dont Nikas [NIK 12, NIK 13, NIK 14] a montré l'importance. Ces modèles sont aussi, et surtout, limités par les coûts de calculs importants qu'ils engendrent.

Il s'agira donc ici de mettre en œuvre un modèle éléments finis polyvalent, prenant en compte les effets thermiques et visco-plastiques et à coût de calcul raisonnable.

1.3 Outils numériques

1.3.1 Modélisation couplée Euler-Lagrange

Afin d'étudier le processus d'indentation réelle et son effet sur les surfaces, un modèle éléments finis permettant de reproduire le passage d'une particule dans un contact roulant cylindre-plan est développé sous le logiciel ABAQUS™.

1.3.1.1 Choix de la modélisation

Lors du passage de la particule dans le contact, celle-ci est très fortement déformée et sa forme est profondément modifiée, passant d'une sphère à un disque de faible épaisseur. Dans un calcul classique éléments finis, la modélisation lagrangienne est utilisée, les solides sont discrétisés en un maillage qui suit les déplacements et les déformations de la matière. L'application de cette méthode de modélisation à la particule fait surgir un problème majeur qui est la distorsion du maillage. En effet, tout comme la particule, le maillage subit d'importants changements d'aspect qui se traduisent par des résultats de mauvaise qualité ou une divergence du calcul. Pour pallier ce problème, il est possible de réduire drastiquement la taille des éléments utilisés pour limiter leur changement de forme. Cette amélioration se fait au prix de la mémoire et du temps de calcul nécessaires du fait de l'ajout d'éléments et de la diminution du pas de temps critique dont la formule est donnée par l'équation (1.1). Ce pas de temps critique, ratio de la distance caractéristique L_c et de la vitesse de propagation des ondes de dilatation dans le milieu c_d , garantit qu'une onde de dilatation ne peut pas traverser entièrement un élément du modèle entre deux pas de temps. Dans le cas d'un maillage structuré la distance caractéristique L_c se rapproche de la taille du plus petit élément du modèle. Le pas de temps critique diminue donc avec la taille du maillage et augmente avec la densité du matériau permettant l'emploi du principe de "Mass scaling" lorsque les effets inertiels sont ignorés. Cet artefact consistant à augmenter volontairement la masse volumique du matériau afin d'obtenir un pas de temps critique plus important et donc des calculs plus rapides n'est pas employé ici.

$$\Delta t_{crit} = \frac{L_c}{c_d} \quad (1.1)$$

$$c_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (1.2)$$

Le présent modèle d'indentation se veut aussi complet que possible en terme de modélisation tout en restant simple à utiliser et à coût de calcul raisonnable. La réduction de la taille des éléments n'est donc pas une solution envisageable ici car extrêmement coûteuse. Il faut donc s'orienter vers une nouvelle technique de modélisation permettant de s'affranchir des problématiques de distorsion du maillage ayant lieu dans la particule.

Les travaux menés par Xie et al. [XIE 15] sur la modélisation numérique du procédé de revêtement par *cold spray* ont montrés la capacité de la technique de modélisation eulérienne à reproduire le comportement des solides soumis à de grandes déformations.

Cette méthode donne des résultats de meilleure qualité que les modélisations lagrangienne, arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) ou encore smoothed-particle hydrodynamics (SPH). Ce type de modélisation consiste non plus à définir un maillage sur la matière mais à mailler l'espace 3-D, créant ainsi des points de contrôle au travers desquels la matière est observée. Le maillage étant fixe, les problématiques de distorsion sont écartées et des résultats précis peuvent être obtenus à l'aide d'un maillage de taille raisonnable. La modélisation eulérienne est employée pour la particule dans le présent modèle d'indentation. Les autres composants du modèle restent eux modélisés de manière classique, lagrangienne, donnant lieu à l'appellation "couplé Euler-Lagrange" du modèle.

1.3.1.2 Modélisation et maillage

La symétrie du cas de calcul par rapport au plan de roulement permet la réduction de moitié de la modélisation. Le modèle comporte, un rouleau, une piste, une particule placée à la surface de la piste, en son centre, et un plan rigide servant à appliquer le chargement au roulement. Ces éléments sont présentés sur la FIG.1.12.

Le rouleau ainsi que la piste sont modélisés avec des éléments briques linéaires à 8 nœuds à intégration réduite dénommés *C3D8R*. Afin de supprimer les répercussions d'ondes longitudinales dans le modèle causées par le déplacement du rouleau, des éléments "infinis" *CIN3D8* sont ajoutés au pourtour de la piste. Ces éléments, visibles en rouge sur la FIG.1.12, miment la présence de conditions limites situées infiniment loin.

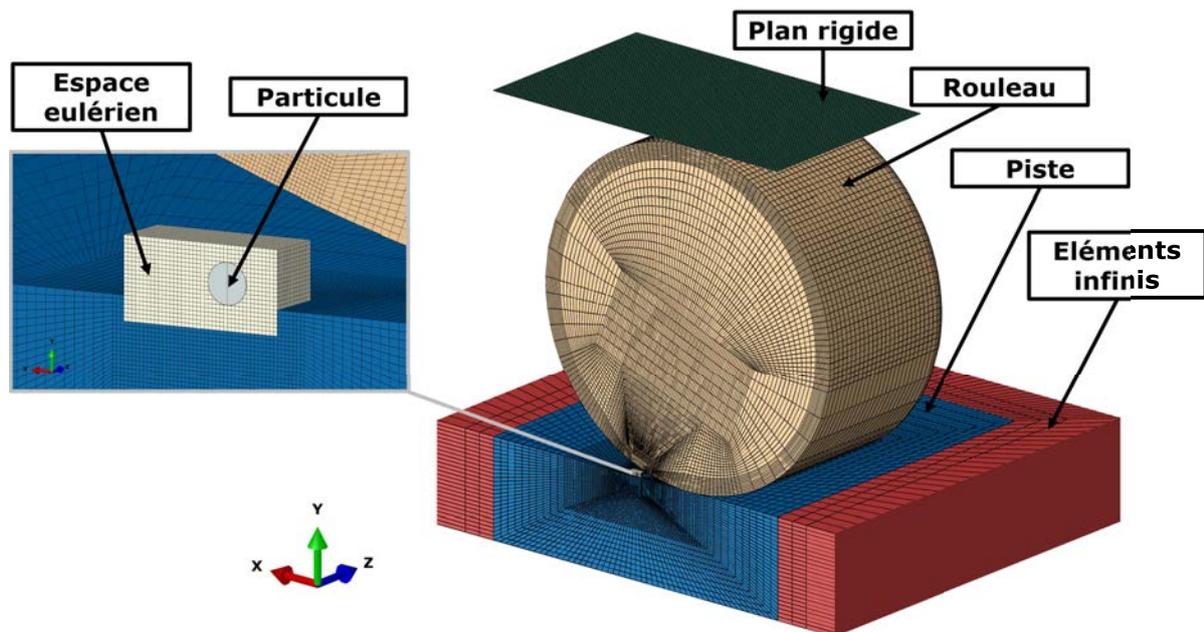


FIGURE 1.12 – Modèle éléments finis d'indentation.

L'espace de contrôle eulérien qui sert à suivre le comportement de la particule est défini de manière identique aux solides lagrangiens précédents. Seuls les éléments utilisés pour son maillage changent, ici des éléments hexaédriques eulériens linéaires à 8 nœuds à intégration réduite *EC3D8R* sont employés. La particule est générée dans le modèle par la définition d'un volume de remplissage dans l'espace de contrôle auquel est appliqué le matériau de la particule. Une variable de taux de remplissage est alors affectée à chaque élément de l'espace eulérien, comme montré sur la FIG.1.13. À l'état initial, l'espace de contrôle eulérien est donc composé d'éléments vides, d'éléments pleins au centre de la particule et d'éléments partiellement remplis à sa surface.

Une plaque rigide, maillée en éléments *R3D4*, est utilisée pour appliquer le chargement sur le roulement lors d'une première étape de chargement puis pour le maintenir au cours de la phase de roulement.

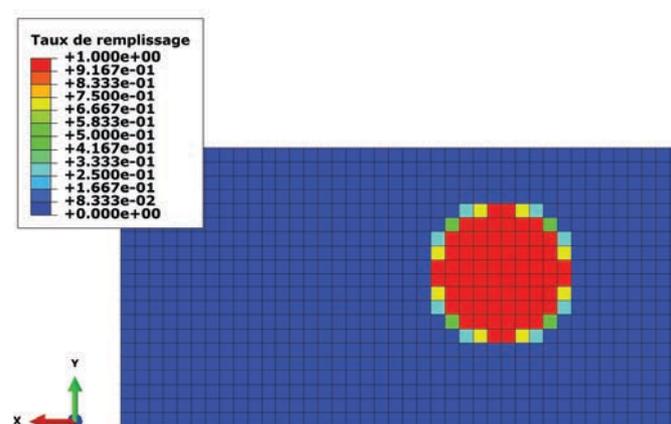


FIGURE 1.13 – Taux de remplissage du volume des éléments de l'espace de contrôle eulérien

1.3.1.3 Comportement mécanique et thermique

Le passage de la particule dans le contact et donc l'indentation de la surface se font sur un intervalle de temps faible, environ $100 \mu s$ dans les conditions nominales de Ville et Nélis [VIL 99b], c'est-à-dire pour une vitesse de roulement de $20 m.s^{-1}$. De plus, l'indentation engendre de hauts niveaux de déformations inélastiques et, par conséquent, de très grandes vitesses de déformation et la génération de chaleur par travail plastique. Ainsi, la seule prise en compte des déformations plastiques dans la modélisation du comportement inélastique des différents matériaux ne peut suffire à décrire correctement le processus d'indentation. L'introduction des effets visqueux et thermiques dans la loi de comportement est donc nécessaire, comme l'a montré Nikas [NIK 13, NIK 14]. La loi de Johnson-Cook, proposée par Johnson et Cook [JOH 83], est choisie pour la modélisation du rouleau, de la particule et de la piste. Son expression est donnée par l'équation (1.3).

$$\sigma_y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \theta) = [A + B(\varepsilon_p)^n] \cdot [1 + C \ln(\dot{\varepsilon}_p)] \cdot [1 - T^{*m}] \quad (1.3)$$

où σ_y est la limite d'écoulement du matériau, ε_p la déformation plastique équivalente, $\dot{\varepsilon}_p$ la vitesse de déformation plastique, $T^* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$ la température homologuée, avec θ la température, θ_0 la température de référence de l'essai quasi-statique réalisé pour le calage de la loi, habituellement prise à la température ambiante, θ_m est la température de fusion du matériau et enfin A , B , n , C et m sont les paramètres de la loi Johnson-Cook. Cette loi est employée de manière classique pour la modélisation du comportement mécanique des métaux soumis à grandes vitesses de déformation dans des applications telles que les impacts ou l'usinage haute vitesse. Elle a été utilisée par Nikas [NIK 13, NIK 14] dans le cadre de l'indentation des roulements. La détermination des paramètres de cette loi empirique passe par la réalisation d'essais de type barre d'Hopkinson (Dorogoy et Rittel [DOR 09]) ou par la corrélation entre essais et simulations d'usinage haute vitesse (Su [SU 06], Ramesh et Melkote [RAM 08] et Shrot et Bäker [SHR 12]). Une des difficultés de calibrage des paramètres réside dans le manque de maîtrise des effets thermiques intervenant dans ces essais de par leur rapidité et leur aspect très localisé. Enfin, il est nécessaire d'ajuster le jeu de paramètres à la gamme de vitesse de déformation de l'application. Un même jeu de paramètres ne peut décrire efficacement le comportement du matériau sur tout le spectre de vitesse de déformation.

Devant la rapidité de l'indentation, le processus est considéré comme adiabatique et les transferts de chaleur entre les solides ainsi que la diffusion de la chaleur au sein même d'un solide sont négligés. Seul l'échauffement de la matière par le travail plastique est pris en compte et est incorporé au modèle via l'équation (1.4).

$$\Delta T = \frac{\eta}{\rho C_p} \bar{\sigma} : \bar{\Delta \varepsilon}_p \quad (1.4)$$

où ρ est la masse volumique du matériau, C_p la chaleur spécifique, $\bar{\sigma} : \bar{\Delta \varepsilon}_p$ le produit tensoriel des tenseurs de contraintes et d'incrément de déformations plastiques et η la fraction de travail plastique transformée en chaleur, aussi appelée coefficient de Taylor-Quinney [TAY 34]. La valeur de η est usuellement prise à 0,9 (Taylor et Quinney [TAY 34], Clifton et al. [CLI 84], Simo et Miehe [SIM 92] et Zhou et al. [ZHO 96]). Cette méthode de calcul de l'échauffement produit par l'écrasement de la particule est une approche très simplifiée mais constitue un premier pas vers l'intégration des aspects thermiques dans la modélisation de l'indentation.

1.4 Validation

1.4.1 Référence expérimentale

Les travaux expérimentaux menés par Fabrice Ville durant sa thèse [VIL 98a] constituent une base de données très intéressante pour la validation du modèle CEL. Le cas nominal de ces essais, dont les caractéristiques sont données dans le TAB.1.1, est pris comme cas de référence pour la présente étude.

Paramètre	Valeur
Galets	AISI 52100
Particule	M50
ϕ_0	40-50 μm
Chargement	$P_h = 1,5 \text{ GPa}$
Vitesse	20 $m.s^{-1}$
Glissement / Roulement pur	Roulement pur

TABLEAU 1.1 – Conditions des essais nominaux de Ville [VIL 98a]

Afin de correspondre au mieux aux essais pris pour référence, seuls deux écarts aux conditions expérimentales ont été faits dans la modélisation.

- Le premier est la nature de la particule. Peu de données sont disponibles dans la littérature sur le comportement plastique de l'acier M50, notamment pour la loi de Johnson-Cook. De plus, les propriétés élastiques des aciers M50 et AISI 52100 (E , ν , limite élastique) sont suffisamment proches pour considérer que le remplacement du premier par le second ne changera pas significativement les résultats. La particule est donc modélisée en acier AISI 52100 dont le comportement inélastique est bien connu.
- Le second est la taille de la particule. Les plus grosses particules utilisées lors des essais sont de diamètre 40 à 50 μm . Dans un premier temps, pour des considérations de temps et de coût de calcul lors du développement du modèle CEL, la particule considérée a été prise de diamètre ϕ_p , d'un ordre de grandeur proche des particules expérimentales.

Le rouleau de diamètre 10 mm et de longueur utile 9 mm est soumis à un effort résultant en une pression maximale de Hertz P_0 comparable à celles des travaux expérimentaux de référence. Les paramètres de la loi de Johnson-Cook sont tirés des travaux de Su [SU 06] sur la modélisation des contraintes résiduelles générées par les opérations d'usinage haute vitesse, dont les gammes de vitesses de déformations correspondent à celles observées lors des simulations d'indentation. Les vitesses de déformations en jeu sont détaillées dans une section suivante. Les paramètres utiles à la modélisation des matériaux sont donnés dans le TAB.1.2.

Les frottements issus des contacts entre les différents corps sont régis par la loi de Coulomb. Le contact entre le rouleau et la piste est assimilé à un contact en régime élasto-hydrodynamique (EHD). Sous ce régime de lubrification typique des contacts

1. Indentation des contacts roulants

E (GPa)	ν	ρ (kg.m ⁻³)	C_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	θ_m (K)	A (MPa)	B (MPa)	n	C	m
201	0,3	7800	472	1723	1712	408	0,391	0,021	1,21

TABLEAU 1.2 – Propriétés de l'acier AISI 52100

aéronautiques, le coefficient de frottement μ est inférieur à 0,1 comme l'ont montré Zhu et Hu [ZHU 01a]. Sous cette valeur de coefficient de frottement, l'effet de ce dernier sur le contact est assez limité comme l'a montré Johnson [JOH 87] et comme illustré sur la FIG.1.14 par le calcul des contraintes en sous-couche. Par conséquent, un coefficient de frottement $\mu_{rouleau,piste} = 0,01$ est pris pour cette interaction. Le second contact, entre la particule et les surfaces du rouleau et de la piste ne peut pas être considéré comme un contact EHD. En effet, un contact de ce type se traduit par une épaisseur centrale de film de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres, négligeable devant la taille de la particule. Toutefois, les contacts étant abondamment lubrifiés, du lubrifiant reste présent à l'interface entre la particule et les surfaces, écartant l'hypothèse d'un contact sec. Aussi, un contact en régime mixte est supposé ici, résultant en un coefficient de frottement $\mu_{particule} = 0,2$ à l'image des travaux de Nikas sur l'indentation [NIK 12, NIK 13, NIK 14].

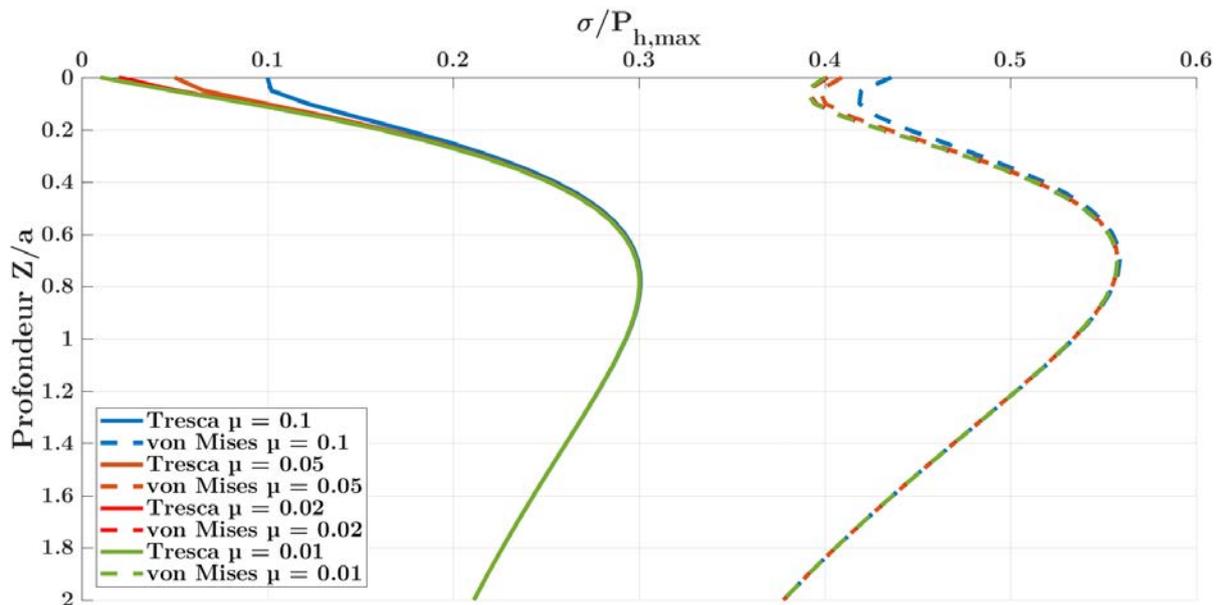


FIGURE 1.14 – Contraintes de Tresca et von Mises au centre du contact calculées de manière analytiques d'après [JOH 87] et selon le coefficient de frottement.

1.4.2 Validation numérique du modèle

Avant de confronter le modèle aux essais disponibles dans la littérature, une première validation du choix de la taille de maille est nécessaire. Pour cela, une simulation d'écrasement de la particule sur la piste par le plan rigide a été réalisée. Le profil de l'indent laissé sur la piste en fonction de la taille de maille est visible sur la FIG.1.15. Il apparaît qu'au-delà d'une taille de maille de $\phi_p/10$ dans la zone d'indentation les résultats ne sont pas indépendants de ce paramètre. À compter de cette taille en revanche, les résultats restent consistants. Pour la suite des travaux, la taille de maille sera fixée à $\phi_p/10$ ou à un dixième du diamètre de la particule lorsque celle-ci est de diamètre initial inférieur à ϕ_p .

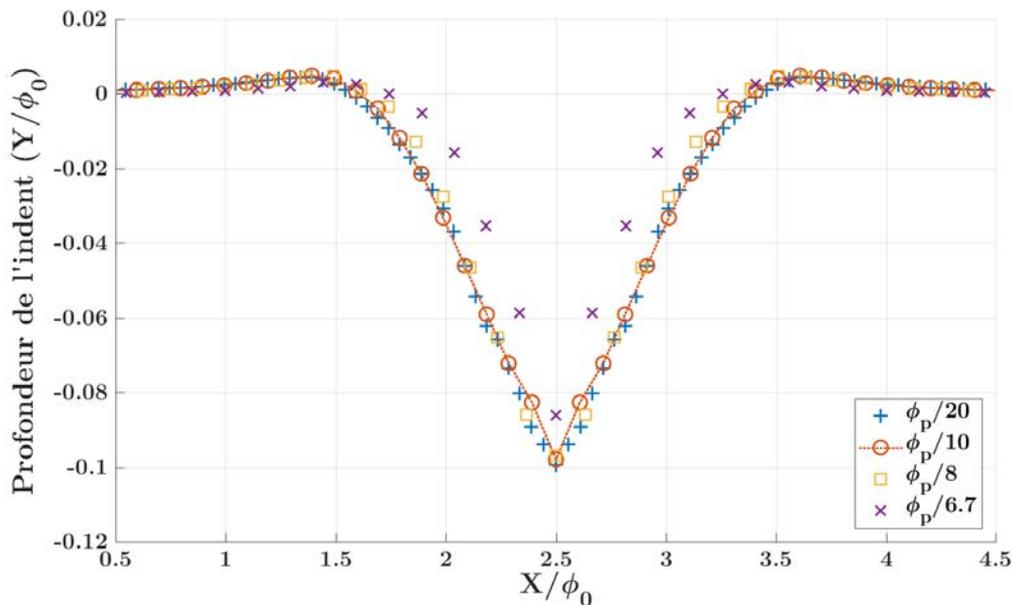


FIGURE 1.15 – Profil de l'indent pour différentes tailles de maillage

Le choix des éléments a également été étudié. Les éléments quadratiques ont été rapidement écartés pour des raisons de coût de calcul rédhibitoire. Le choix d'éléments linéaires à intégration complète ou réduite, illustrés sur la FIG.1.16, a été fait par comparaison des résultats obtenus avec les deux formulations. La FIG.1.17 montre les profils d'indents obtenus avec les deux types d'éléments. L'aspect général des indents est identique, avec des largeurs et des pentes équivalentes. La différence entre les deux formulations se voit sur le fond de l'indent, sur la profondeur maximum, et sur le bourrelet de sortie du contact qui sont sensiblement accentués en intégration complète. On peut toutefois observer un décrochage sur le profil sur la pente de sortie qui traduit une certaine instabilité dans le contact en formulation complète. L'intégration complète ne semble donc pas donner des résultats significativement meilleurs que la formulation réduite en terme de géométrie d'indent. En formulation à intégration complète, l'état de contraintes résiduelles généré par l'indentation présente de très forts gradients de contrainte à la surface de la zone

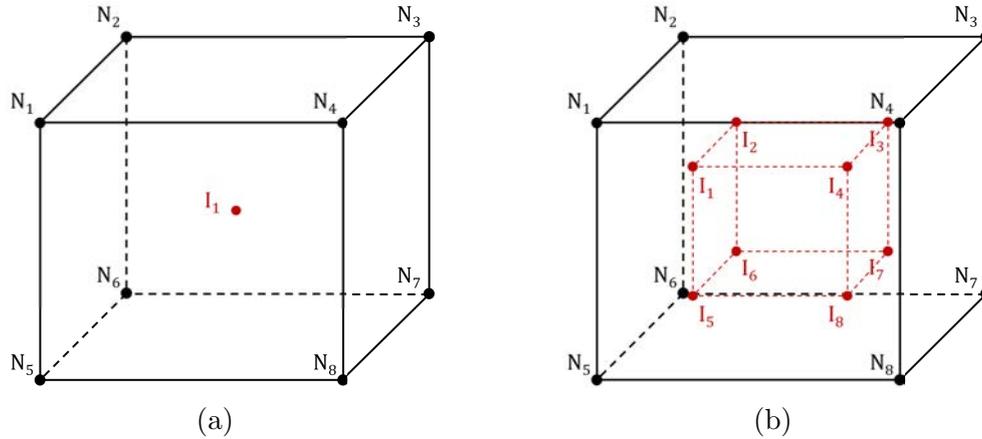


FIGURE 1.16 – Visualisation des éléments C3D8R (a) et C3D8 (b).

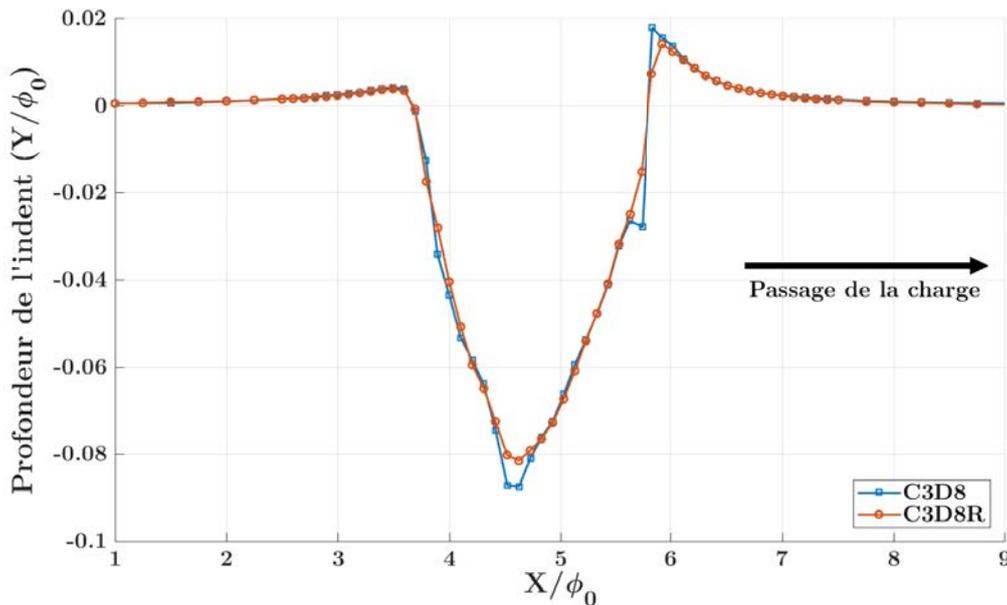
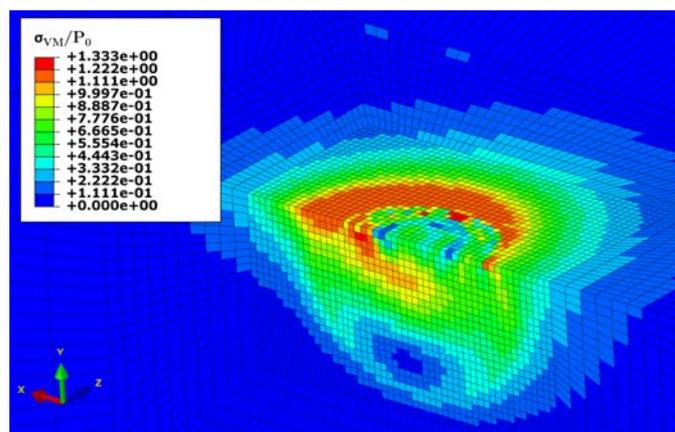


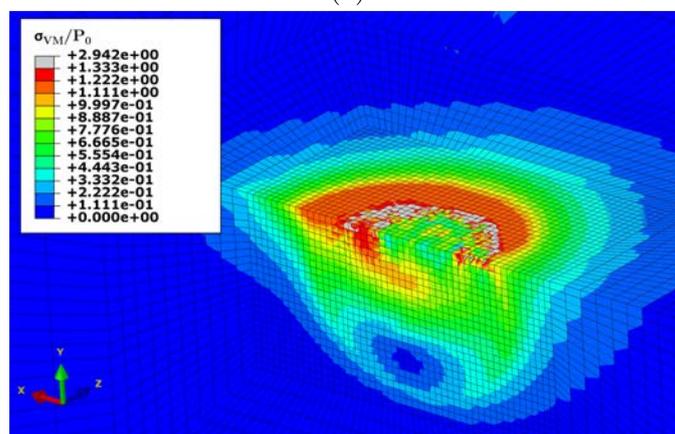
FIGURE 1.17 – Profil de l'indent en fonction du type d'éléments utilisé

indentée, FIG.1.18b, avec des valeurs de contrainte de von Mises allant jusqu'à $2,94 P_0$ pour des valeurs moyennes de $1,33 P_0$. Le bruit dans les valeurs de contraintes est donc extrêmement élevé, signe de la difficulté de gestion du contact avec cette formulation. La formulation à intégration réduite, FIG.1.18a, présente quant à elle des résultats plus lissés, avec des gradients de contrainte bien plus faibles. Le contact est donc mieux géré dans cette configuration.

Le schéma à intégration complète donne des résultats peu satisfaisants pour un coût de calcul bien plus important que le schéma à intégration réduite. La simulation complète d'indentation, sur le modèle présenté et comprenant $1,2 \cdot 10^6$ ddls, sur une machine à 8 cœurs de 2,2 GHz nécessite environ 10 heures pour des éléments à intégrations réduites.



(a)



(b)

FIGURE 1.18 – Contrainte de von Mises résiduelle après indentation avec des éléments à intégration réduite (a) et à intégration complète (b).

Dans le cadre d'éléments à intégration complète, cette même résolution prend plus de deux jours. Par conséquent, les calculs suivants seront effectués avec des éléments à intégration réduite.

1.4.3 Validation expérimentale du modèle

Les paramètres utiles au calcul du cas nominal sont rappelés dans le TAB.1.3. Le modèle CEL reproduit bien le passage de la particule dans le contact, comme illustré sur la FIG.1.19. La particule est tout d'abord piégée entre les surfaces (FIG.1.19a), puis écrasée par l'avancement de la charge jusqu'à être complètement enfermée dans le contact (FIG.1.19c), les contraintes sont alors maximales dans les solides. La particule est ensuite expulsée du contact par la relaxation des déformations élastiques emmagasinées lors du passage de la charge (FIG.1.19d). Le passage de la particule dans le contact est également détaillé en Annexe A.

1. Indentation des contacts roulants

Paramètre	Valeur
Rouleau / Piste	AISI 52100
Particule	AISI 52100
ϕ_0	ϕ_p
Chargement	$P_h = P_0$
Vitesse	20 m.s^{-1}
Glissement / Roulement pur	Roulement pur
Coefficient de frottement	$\mu_{particule} = 0,2 /$ $\mu_{rouleau,piste} = 0,01$

TABLEAU 1.3 – Paramètres du cas nominal d'indentation naturelle.

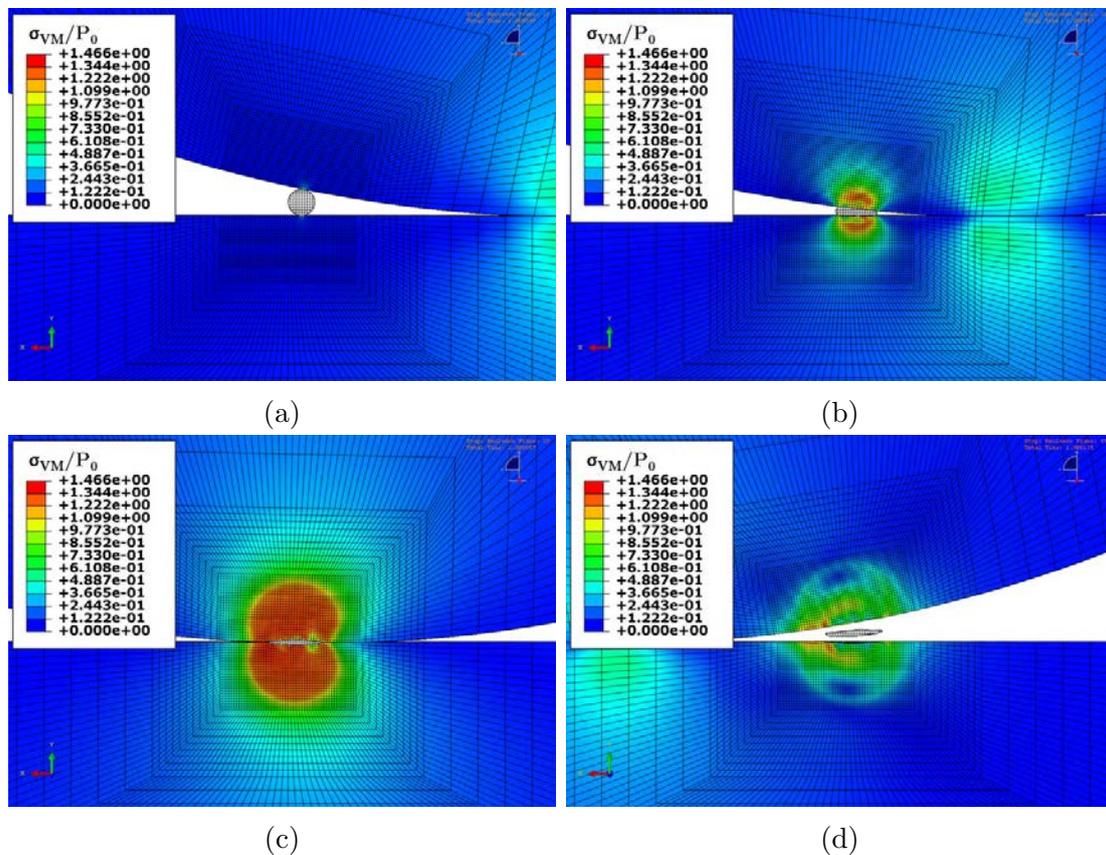


FIGURE 1.19 – Contrainte de von Mises au cours du passage de la particule dans le contact, $t=39 \mu s$ (a), $t=63 \mu s$ (b), $t=87 \mu s$ (c), $t=135 \mu s$ (d).

L'écrasement de la particule laisse apparaître un indent sur la piste, représenté sur la FIG.1.20 à côté d'un indent obtenu par Ville dans ses travaux expérimentaux [VIL 98a, VIL 98b, VIL 99b].

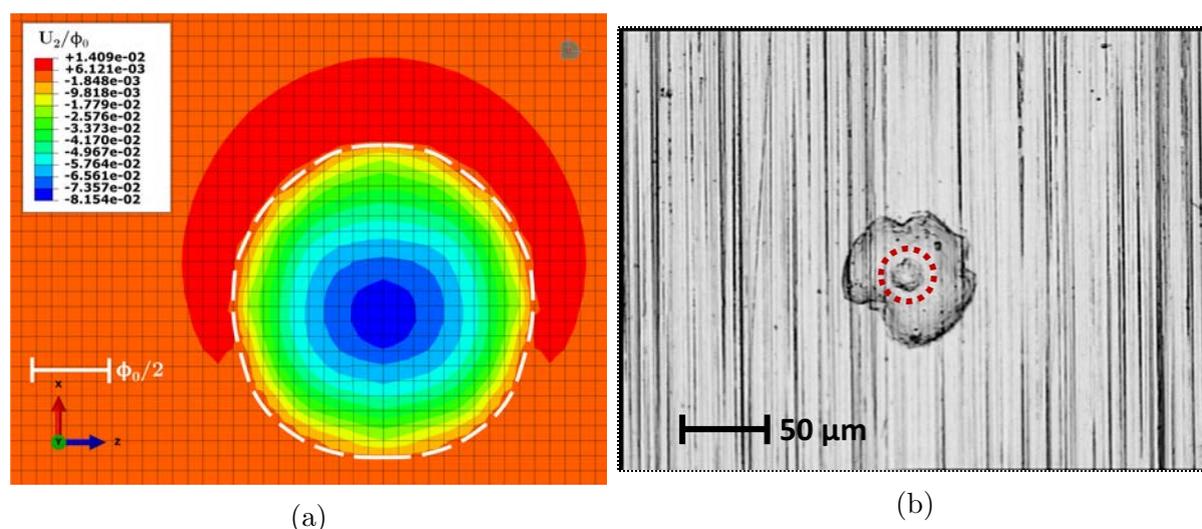


FIGURE 1.20 – Indent numérique produit sur la piste avec isovaleur $U_2 = 0$ mm en ligne discontinue (a) et indent expérimental tiré de [VIL 98a, VIL 98b, VIL 99b] (b) avec indication du trou en fond d’indent.

Le profil de l’indent numérique est également comparé à des profils d’indents expérimentaux pour des particules de diamètre initial $40\text{-}50\ \mu\text{m}$ sur le graphe adimensionné par le diamètre initial de la particule FIG.1.21. La forme de l’indent numérique est en adéquation avec celle observée en essais. D’une profondeur égale à $8,15\%$ du diamètre initial de la particule pour des valeurs expérimentales variant de 9 à 11% . La largeur de l’indent numérique est de $2,14\ \phi_0$, parfaitement dans l’intervalle expérimental de $1,8$ à $2,5\ \phi_0$. Enfin, le modèle numérique produit des bourrelets autour de l’indent se confondant avec les résultats expérimentaux, tant en terme de hauteur qu’en terme d’allure. Le bourrelet d’entrée est d’une hauteur de $0,38\%\ \phi_0$ et le bourrelet de sortie d’une hauteur de $1,41\%\ \phi_0$ tandis que les indents expérimentaux ont des bourrelets d’entrée et de sortie de hauteurs respectives $0,8\text{-}1,2\%\ \phi_0$ et $0,9\text{-}3,3\%\ \phi_0$. Du fait de l’équivalence des matériaux du rouleau et de la piste ainsi que de son rayon de courbure très grand devant la taille de la particule, le rouleau présente un indent identique à celui de la piste comme le montre la FIG.1.22. Des fluctuations sont visibles sur le profil de l’indent laissé sur le rouleau, notamment du côté du bourrelet d’entrée. Celles-ci sont causées par l’application du mouvement couplé de translation-rotation sur le rouleau qui malgré une discrétisation temporelle très fine présente une légère désynchronisation.

Les essais menés par Ville [VIL 98a] et Ville et Nélias [VIL 98b, VIL 99b] ont montrés la présence régulière d’un trou en fond d’indent, cerclé en rouge sur la FIG.1.20b et visible sur le profil présenté FIG.1.21. La formation de ce trou intervient en tout début du processus d’indentation, au moment de la capture de la particule dans le contact comme illustré par la FIG.1.23. Si le trou n’apparaît pas en fin de simulation avec le modèle CEL, l’analyse du profil de l’indent au cours du processus d’indentation (FIG.1.23b) montre sa formation au cours des premiers instants de l’écrasement de la particule. À $t=45\ \mu\text{s}$, la

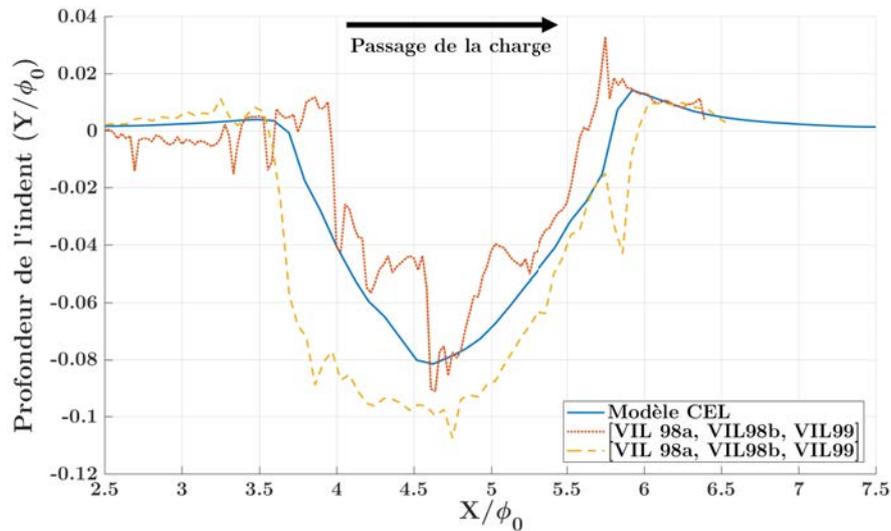


FIGURE 1.21 – Comparaison des indents numérique et expérimentaux dans le cas nominal.

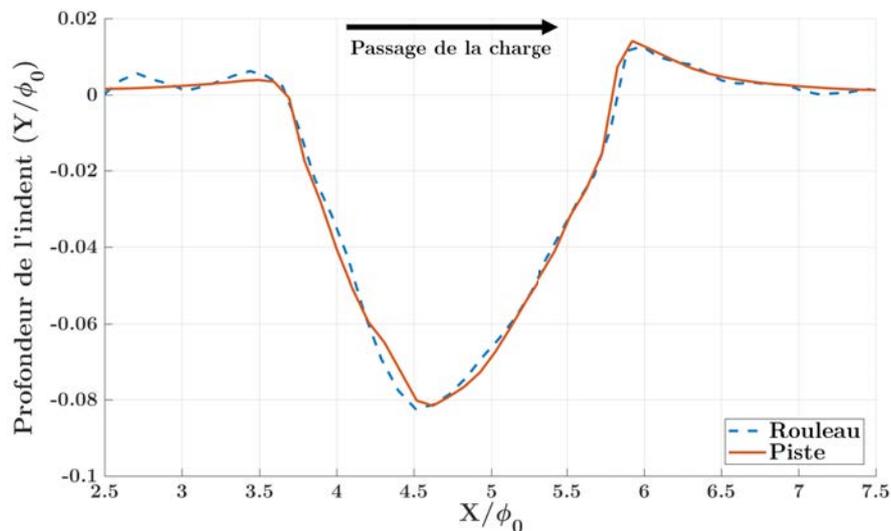


FIGURE 1.22 – Comparaison des indents numériques sur la piste et le rouleau.

phase d'indentation élasto-plastique causée par l'impact entre les surfaces et la particule est bien visible. Dès $t=63 \mu s$, l'écrasement de la particule commence et deux niveaux se dégagent sur le profil de l'indent, correspondant aux deux premières étapes du processus théorique décrit par la FIG.1.23a. Au cours de l'écrasement de la particule, le trou est progressivement effacé dans le modèle numérique et à compter de $t=90 \mu s$ il n'est plus visible, même après la relaxation des déformations élastiques après le passage de la charge à $t=300 \mu s$.

Au cours de son passage dans le contact, la particule est soumise à d'importantes déformations plastiques en un temps très court. Les niveaux de vitesses de déformations

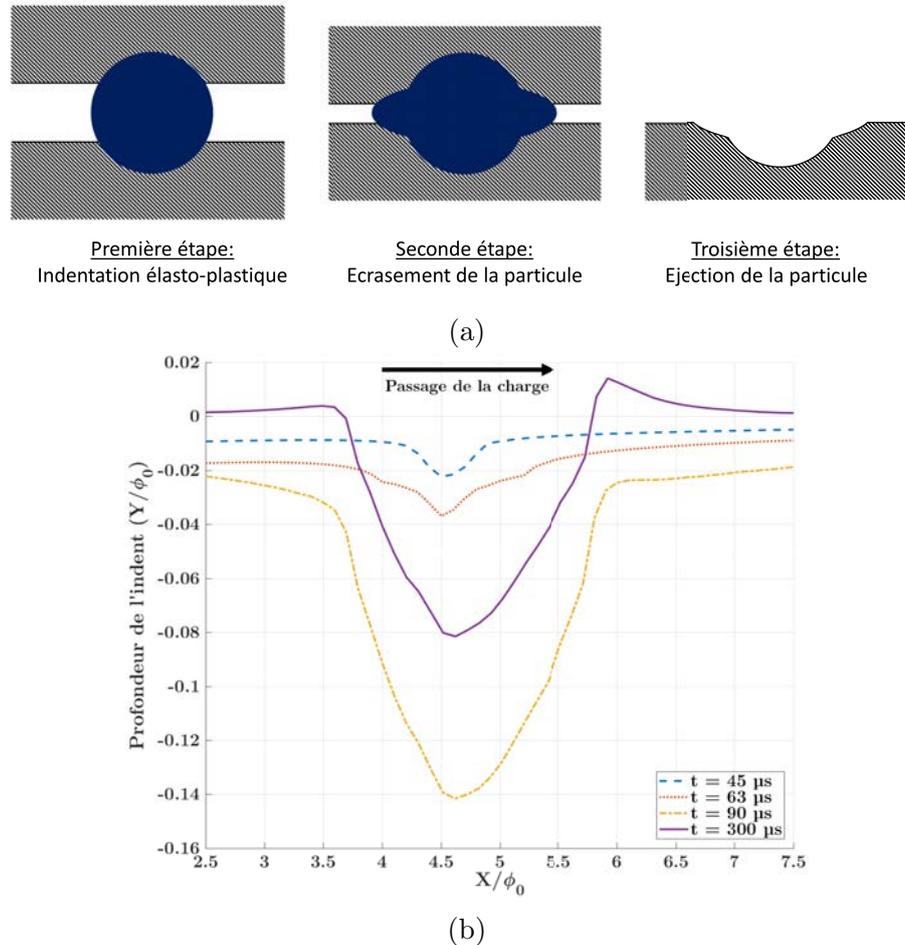


FIGURE 1.23 – Processus d’indentation théorique [VIL 98a] (a) et évolution du profil de l’indent au cours du passage de la charge (b).

atteints sont en moyenne de l’ordre de 10^5 s^{-1} avec des valeurs maximales pouvant atteindre 10^6 s^{-1} comme le montre la FIG.1.24a. Bien que les niveaux de déformations plastiques soient plus faibles pour le rouleau et la piste, les vitesses de déformations dans la zone d’indentation de ces éléments sont en moyenne de l’ordre de 10^3 s^{-1} et peuvent aller jusqu’à 10^4 s^{-1} (FIG.1.24b). À de tels niveaux, les effets visco-plastiques deviennent non négligeables, rappelant l’importance d’utiliser une loi de comportement incluant ces effets.

L’observation du profil de l’indent (FIG.1.21) et de la distribution de contraintes résiduelles présentée sur la FIG.1.25 montrent que l’indentation des contacts roulants n’est pas un phénomène axisymétrique. Géométriquement, l’indent présente un bourrelet de sortie 3,7 fois plus haut que le bourrelet d’entrée. La contrainte hydrostatique, σ_H (FIG.1.25a), fait apparaître une zone en compression en sortie de l’indent et une zone en traction à l’entrée. Ceci laisse à penser que la particule subit deux chargements, un écrasement vertical et un étalement dans le sens du roulement, causés par l’avancée du

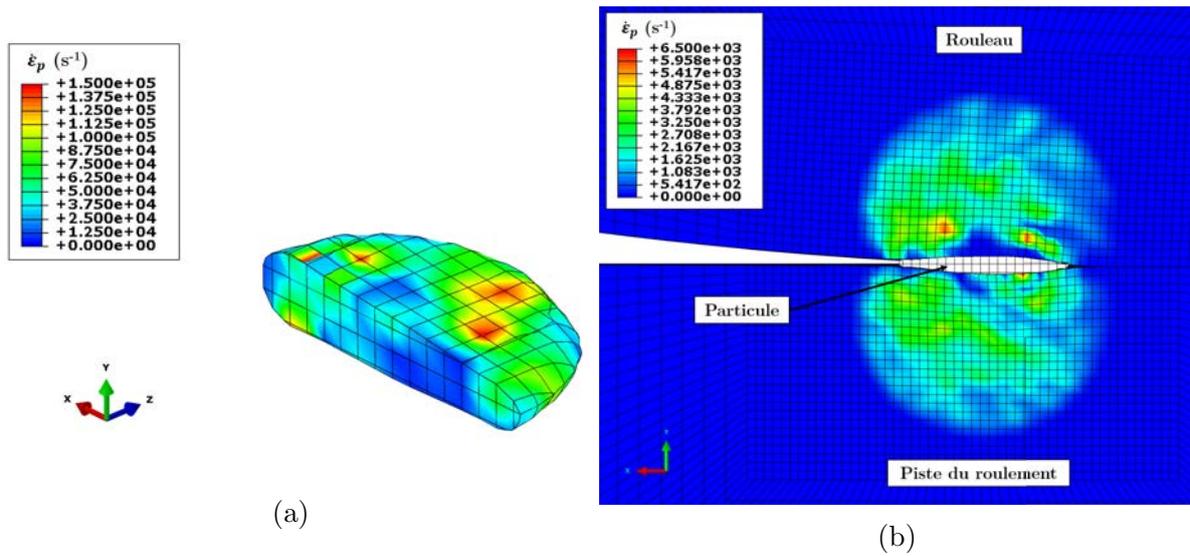


FIGURE 1.24 – Vitesses de déformation plastique de la particule à $t=63 \mu s$ (a), du rouleau et de la piste à $t=81 \mu s$ (b).

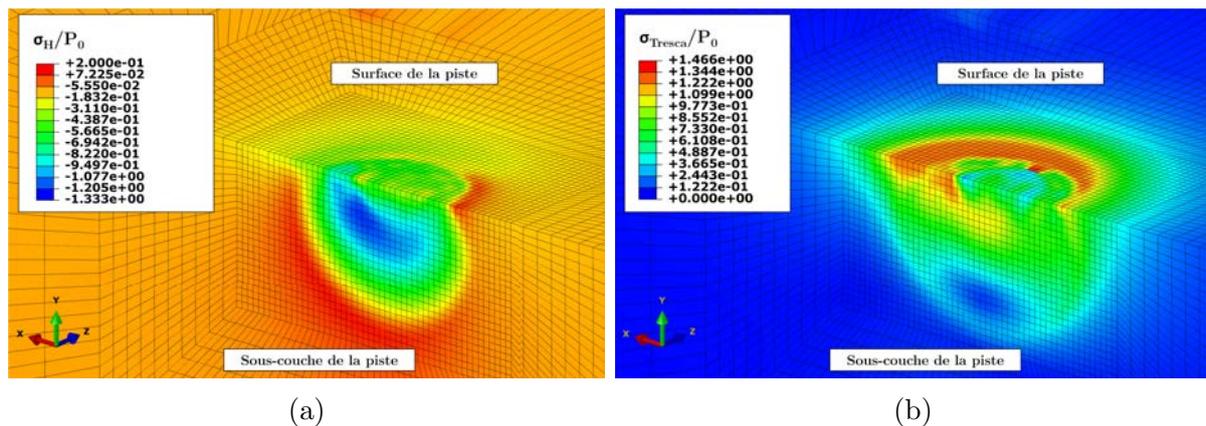


FIGURE 1.25 – Contraintes résiduelles après indentation, contrainte hydrostatique (a) et contrainte de Tresca (b).

rouleau. De manière analogue, la répartition de la contrainte de Tresca (FIG.1.25b) montre une concentration significative du côté du bourrelet de sortie tandis que la zone en amont du bourrelet d'entrée est moins sollicitée.

Il s'agit là d'une différence fondamentale avec les cas d'indents axisymétriques qui sont utilisés pour l'étude de la fatigue dans les études actuelles telles que celles de Warhadpande et Sadeghi [WAR 10], Morales-Espejel et Gabelli [MOR 11b, MOR 15a, MOR 16], Vieillard et al. [VIE 16] ou encore Liu et al. [LIU 18]. Mais aussi avec les modèles calibrés sur des données expérimentales tels que dans les travaux de Needelman et Zaretsky [NEE 15]. Le modèle CEL permet la génération d'un indent initial plus fidèle au processus réel pour les calculs de fatigue des surfaces indentées.

1.5 Étude paramétrique

1.5.1 Paramètres étudiés

Le modèle CEL est à présent utilisé pour étudier l'influence de la nature des matériaux, de la taille des particules et des conditions de contact sur le processus d'indentation. Les paramètres, leurs valeurs, ainsi que les références bibliographiques faisant état de leur influence sont donnés dans le TAB.1.4. Les propriétés matériaux utiles à cette étude sont présentées dans le TAB.1.5.

Paramètre	Valeurs	Références biblio.
Diamètre de particule ϕ_0	$\phi_p/2 / \phi_p / 2\phi_p$	[VIL 98a], [VIL 98b, VIL 99b], [KAN 04]
Chargement	$P_0/3 / P_0 / 1,67P_0$	[VIL 98a], [VIL 98b, VIL 99b], [KAN 04]
$\mu_{particule}$	0,1 / 0,2 / 0,3 / 0,5	[KAN 04]
Glissement (SRR)	-6% / -3% / 0% / 3% / 6% / 9% / 20%	[VIL 98a], [VIL 98b, VIL 99b] [DWY 92], [DWY 05], [VIL 98a], [VIL 98b, VIL 99b], [NIK 12, NIK 13, NIK 14]
Nature de la particule	AISI 52100 / Cuivre	[VIL 98a], [VIL 98b, VIL 99b], [NIK 12, NIK 13, NIK 14]
Matériau du roulement	AISI 52100 / Si ₃ N ₄ / 60NiTi	[STR 16, STR 17]
Contraintes résiduelles	Sans / Sur la piste uniquement	N/A

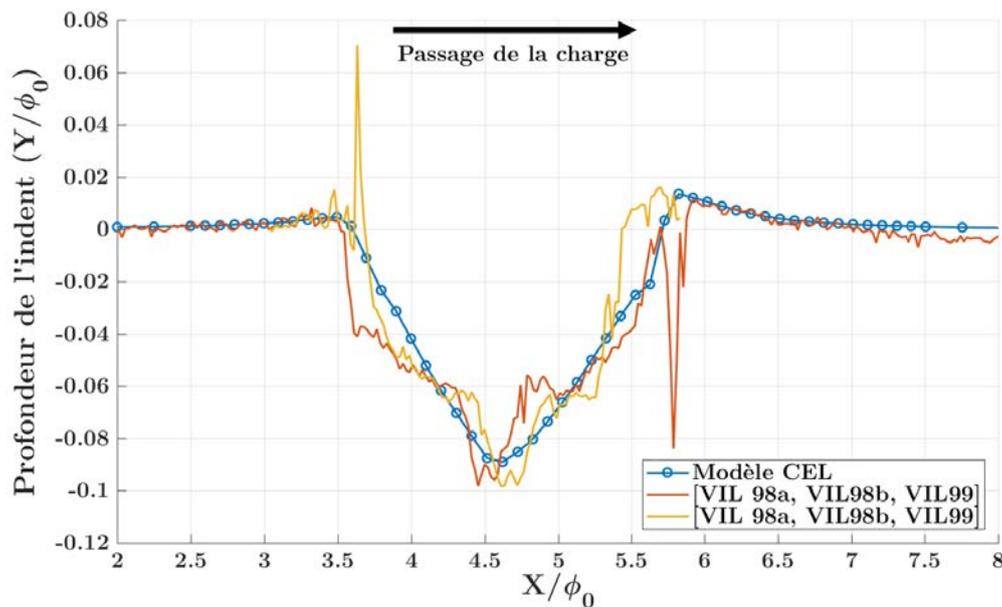
TABLEAU 1.4 – Détails de l'étude paramétrique et références bibliographiques associées.

1.5.2 Influence de la taille de la particule

Des diamètres de particule de $\phi_p/2$ et $2\phi_p$ ont été testés en plus du cas nominal à ϕ_p . La particule de diamètre $\phi_p/2$ a été étudiée avec un maillage à $\phi_0/10$, soit $\phi_p/20$, et la particule de taille $2\phi_p$ avec un maillage de $\phi_p/10$, conformément aux observations faites lors de l'étude de convergence. La comparaison du profil d'indent obtenu avec la particule de diamètre $\phi_p/2$, présenté sur la FIG.1.26, avec les données expérimentales tirées des travaux de Ville [VIL 98a] pour des particules de diamètre 40-50 μm montre une très bonne corrélation. Les profils numériques obtenus aux trois diamètres sont donnés par la FIG.1.27. Une proportionnalité entre la taille de la particule initiale et les dimensions

	Cuivre	Si ₃ N ₄	60NiTi
E (GPa)	130	305	95
ν	0,34	0,26	0,34
ρ (kg.m ⁻³)	8900	3260	6700
C_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	383	—	—
θ_m (K)	1356	—	—
A (MPa)	90	—	—
B (MPa)	292	—	—
n	0,31	—	—
C	0,025	—	—
m	1,09	—	—
σ_{y0} (MPa)	—	10 000	2700
K (MPa)	—	—	5000

TABLEAU 1.5 – Propriétés des matériaux utilisés au cours de l'étude paramétrique

FIGURE 1.26 – Comparaison des indents numérique et expérimentaux pour des particules de 50 μm .

de l'indent final se dégage à l'observation des indents à $\phi_p/2$ et ϕ_p . Ces résultats sont en accord avec les observations expérimentales issues des travaux de Ville [VIL 98a] et avec les résultats numériques obtenus par Kang et Sadeghi [KAN 04].

La comparaison des profils adimensionnés par le diamètre initial, visibles sur la FIG.1.28, révèle que la forme de l'indent est sensiblement modifiée pour la plus grosse particule. L'indent ainsi obtenu est moins profond, 7% du diamètre initial contre 8 à 9% pour les particules plus petites, mais aussi plus large, $2,5 \phi_0$ contre $2,1 \phi_0$ pour les parti-

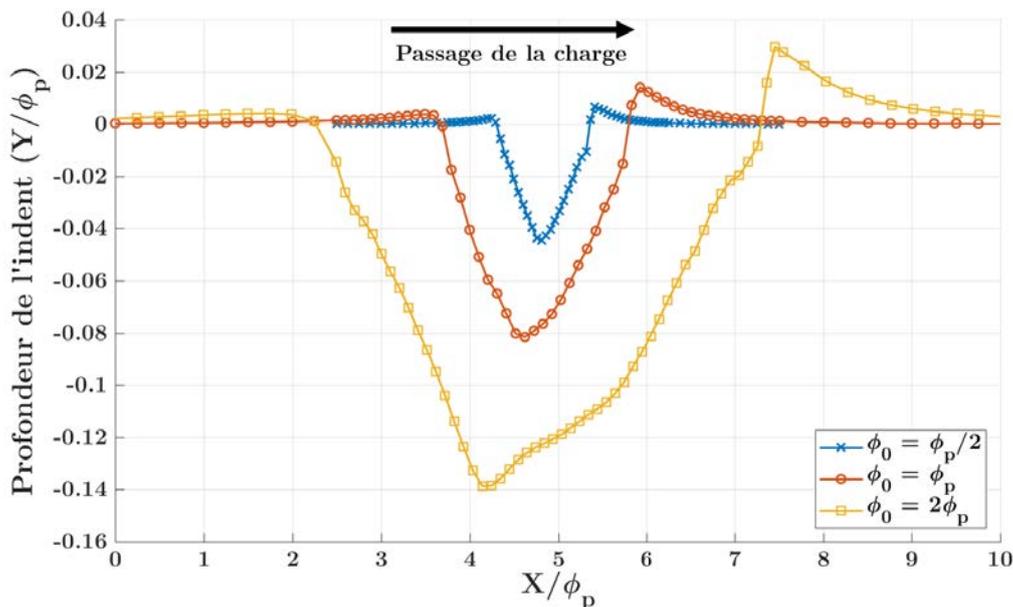


FIGURE 1.27 – Comparaison des indents numériques pour des particules de $\phi_p/2$, ϕ_p et $2\phi_p$.

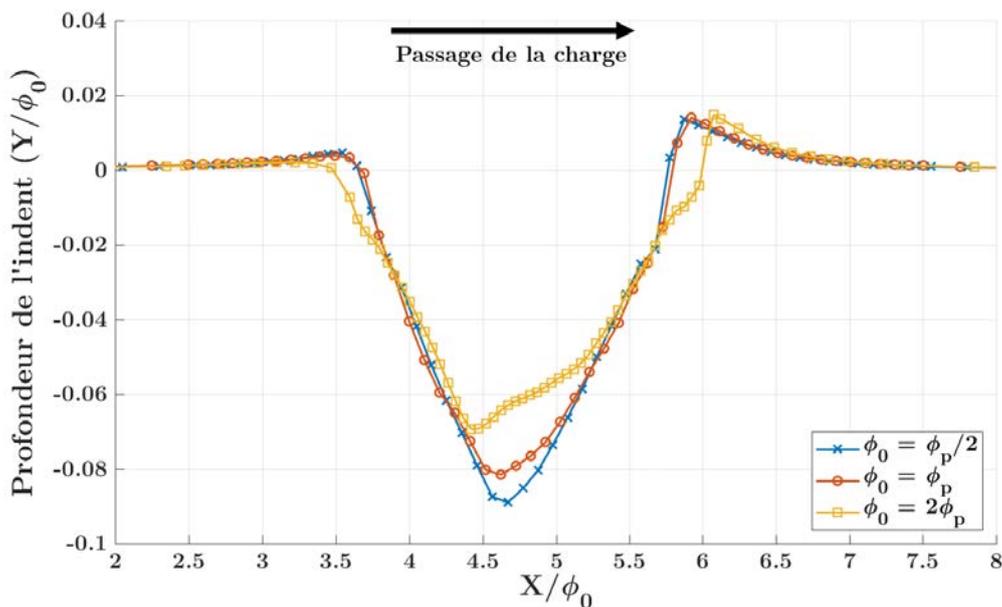


FIGURE 1.28 – Profils adimensionnés des indents pour des particules de $\phi_p/2$, ϕ_p et $2\phi_p$.

cules de diamètres inférieurs. Les bourrelets restent toutefois de dimensions comparables à ceux obtenus pour d'autres diamètres. Ce changement de forme de l'indent peut s'expliquer par le fait que la taille de la particule une fois écrasée, $2,19 \phi_0$, est bien supérieure à la largeur du contact qui est de $1,36 \phi_0$. Lors du passage de la charge, la particule n'est jamais complètement enfermée dans le contact et est donc étalée entre les surfaces

donnant lieu à un indent moins profond et plus large.

Tout comme la géométrie de l'indent, le volume de matière affecté par l'indentation est également dépendant de la taille de la particule comme le montre la FIG.1.29. La relation entre la taille de la particule et le volume plastifié est équivalente à celle entre la taille de la particule et les dimensions de l'indent. Pour les petites particules, le volume est une demi-ellipsoïde de largeur $2,7 \phi_0$ et de profondeur $1,8 \phi_0$, tandis que pour la grande particule, la largeur est sensiblement supérieure, $2,9 \phi_0$, et la profondeur plus faible, $1,6 \phi_0$. Si, très localement, le calcul avec une particule de diamètre $2\phi_p$ donne des niveaux de déformation plastique équivalente plus élevée, les valeurs sous l'indent sont en moyenne de même ordre pour toutes les tailles de particule.

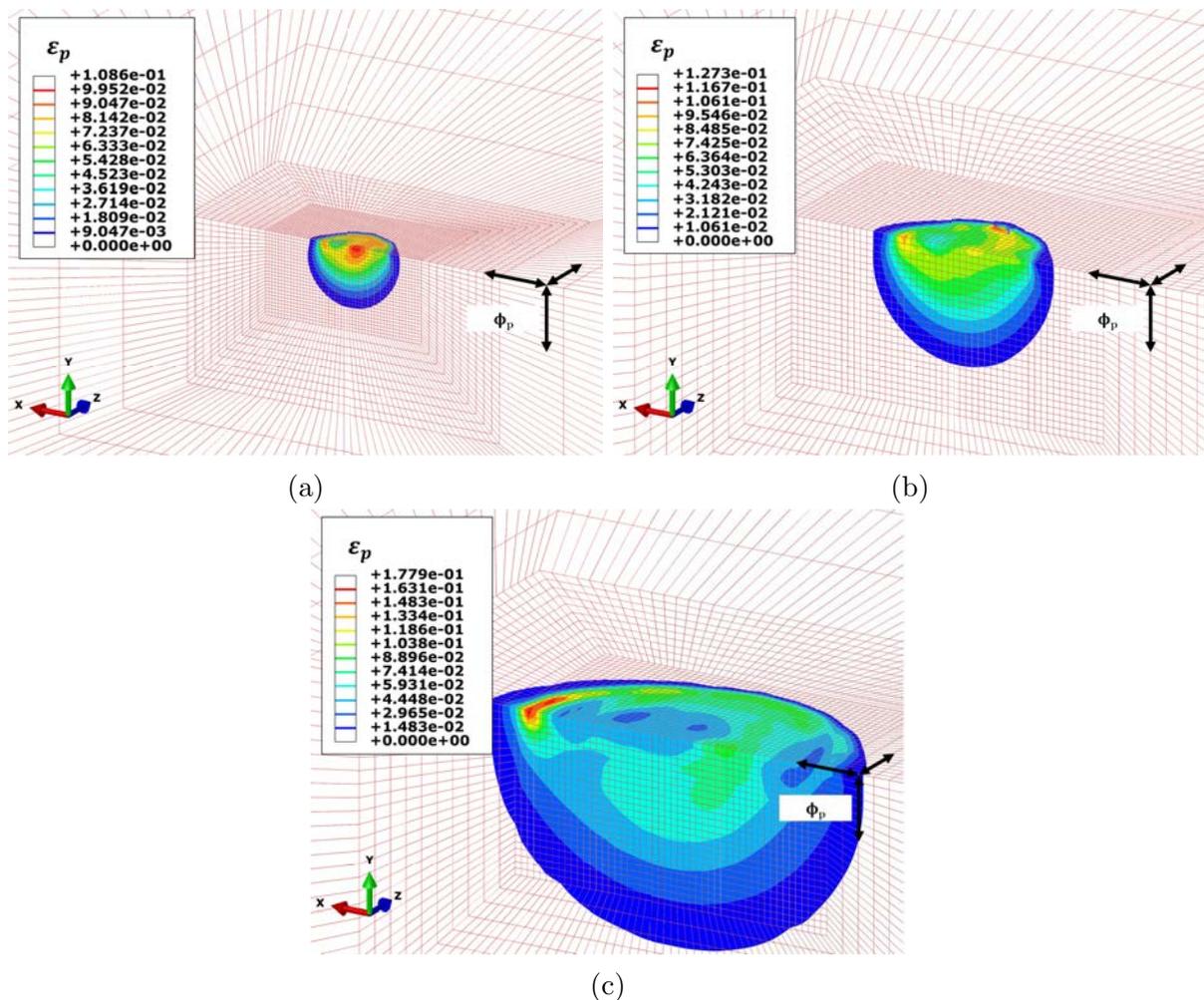


FIGURE 1.29 – Volume de matière plastifiée sur la piste pour différentes tailles de particule, $\phi_p/2$ (a), ϕ_p (b) et $2\phi_p$ (c).

1.5.3 Influence du chargement

Des simulations d'indentation sous différents chargements normaux résultant en des pressions maximales selon la théorie de Hertz [HER 81] de $P_0/3$, P_0 et $1,67P_0$ ont été réalisées. Les profils d'indents, présentés sur la FIG.1.30, montrent une influence faible de la charge sur la géométrie de l'indent. L'écart, en termes de profondeur, entre les cas à $P_0/3$ et $1,67P_0$ n'est que de +15% quand la pression est multipliée par 5. De manière générale, une charge plus importante augmente sensiblement la profondeur de l'indent et la hauteur de ses bourrelets mais dans des proportions très limitées. Ces résultats vont dans le sens des observations faites par Ville [VIL 98a] et Kang et Sadeghi [KAN 04] sur l'effet de la charge.

La FIG.1.31 illustre les contraintes de von Mises dans le rouleau et la piste au passage de la charge sur la particule. Il apparaît que les niveaux de surcontraintes générés par la présence de la particule sont similaires dans les trois cas de chargement, expliquant les faibles différences de résultats entre les chargements.

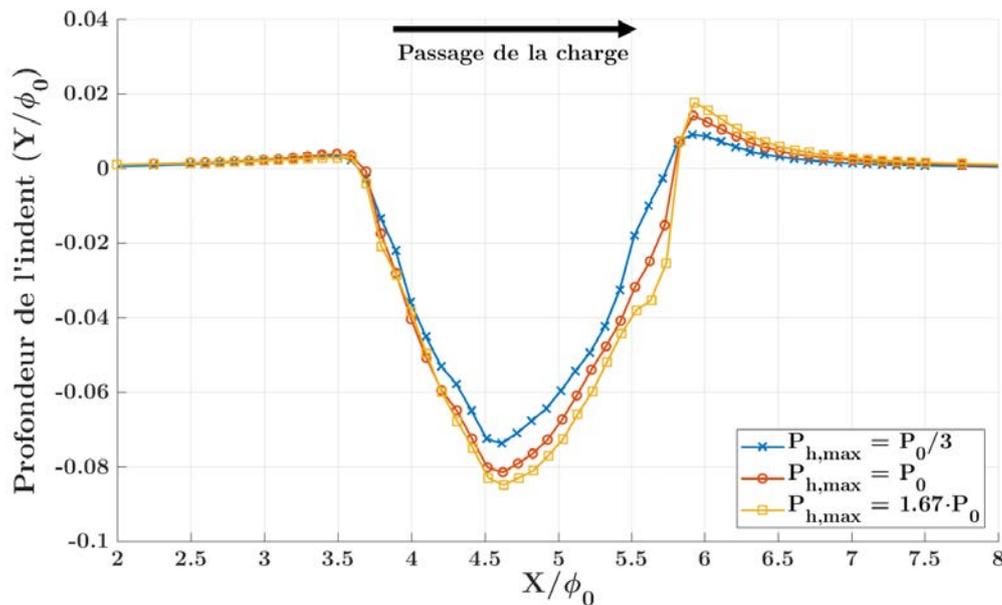


FIGURE 1.30 – Profils des indents pour des pressions maximales de contact de $P_0/3$, P_0 et $1,67P_0$.

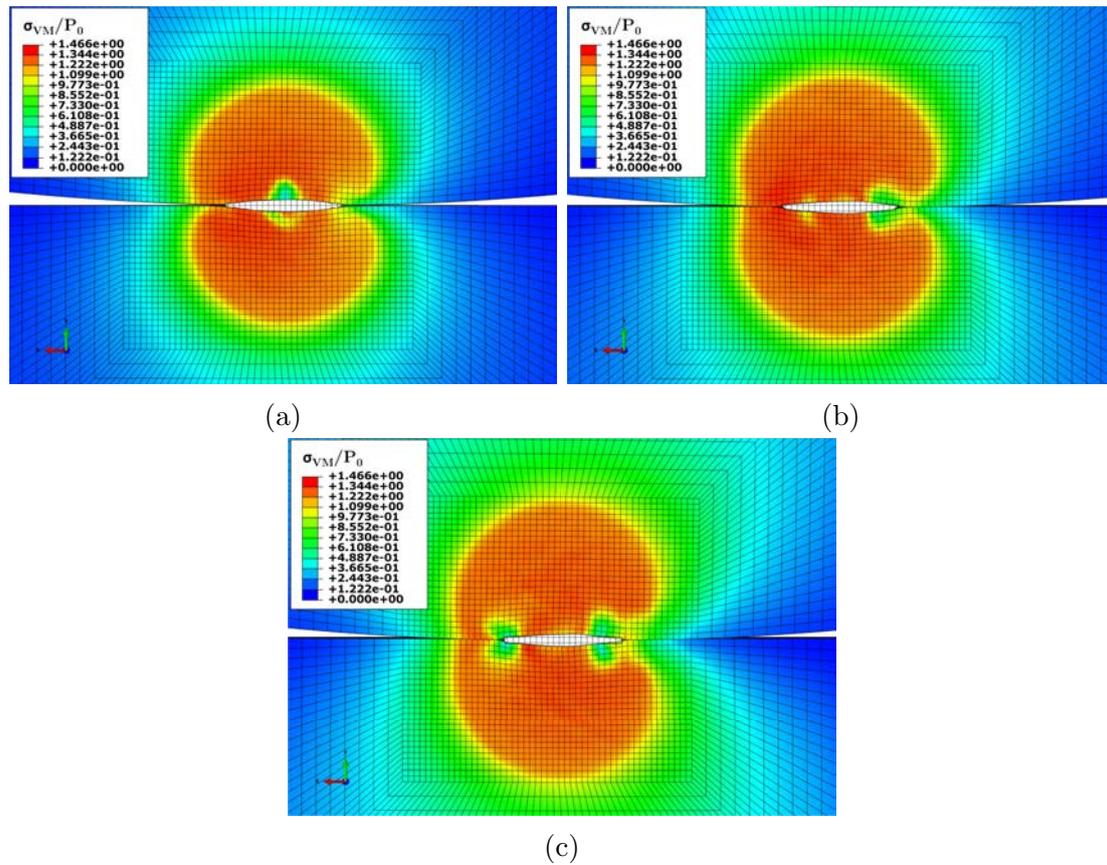


FIGURE 1.31 – Contrainte de von Mises lors du passage de la charge pour des pressions maximales de contact de $P_0/3$ (a), P_0 (b) et $1,67P_0$ (c).

1.5.4 Influence du coefficient de frottement entre la particule et les surfaces

La valeur du coefficient de frottement entre les surfaces du rouleau et de la piste sous un régime de lubrification EHD ne varie que sensiblement en fonction des conditions de fonctionnement, de la nature des matériaux ou de la composition des lubrifiants. Le contact entre la particule et les surfaces étant plus proche d'un régime mixte, le coefficient de frottement est en revanche plus fortement dépendant de ces paramètres et peut donc varier de manière plus vaste. Plusieurs valeurs de $\mu_{particule}$ sont étudiées, donnant lieu aux résultats présentés sur la FIG.1.32. À mesure que le coefficient de frottement augmente, les forces de frottement entre la particule et les surfaces sont accrues. Ces forces s'opposent alors plus fortement à l'étalement de la particule qui est maintenue plus compacte dans le contact générant des indents plus étroits et plus profonds. Les profils obtenus pour des coefficients de 0,2 à 0,5 montrent bien cet effet. À contrario, pour un $\mu_{particule}$ inférieur à 0,2, un changement significatif de forme de l'indent est observé. La profondeur est drastiquement réduite quand la largeur est augmentée, le fond de l'indent est également plus plat. Ceci est le signe que les forces de frottement n'ont pas suffi à contenir l'étalement

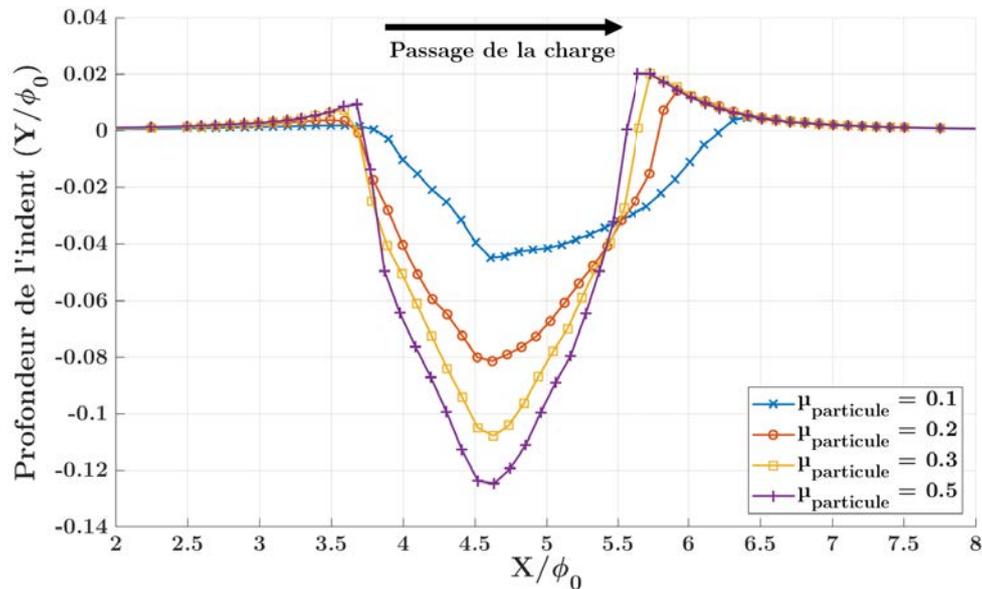


FIGURE 1.32 – Profils des indents pour des coefficients $\mu_{particule}$ de 0,1, 0,2, 0,3 et 0,5.

de la particule dans le contact. Les travaux numériques de Kang et Sadeghi [KAN 04] ont montrés des effets similaires.

Il est à noter que pour des coefficients de frottement plus faibles que 0,1, le modèle CEL aboutit à une expulsion de la particule lors du contact avec le rouleau. Ce constat est en accord avec les conclusions de Dwyer-Joyce et al. [DWY 92] sur le lien entre rayons des surfaces en contact, coefficient de frottement et taille maximale de particule pouvant entrer dans le contact. En effet, le cas modélisé de contact cylindre plan présente une taille limite de particule pouvant entrer dans le contact qui correspond aux résultats présentés sur la FIG.1.33, pour un coefficient de frottement de 0,1.

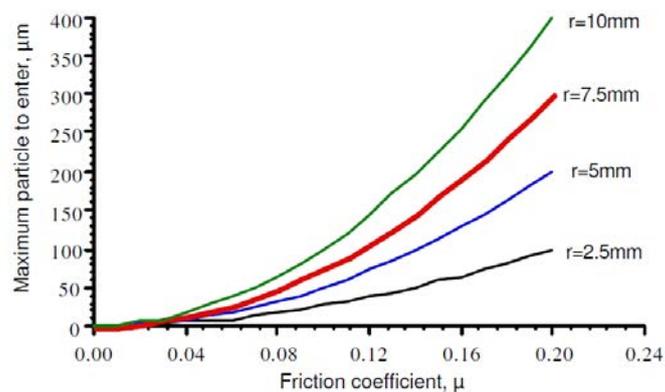


FIGURE 1.33 – Taille maximale des particules entrant dans le contact roulant en fonction du coefficient de frottement pour différents rayons, d'après [DWY 92].

1.5.5 Influence du glissement

Les travaux menés par Ville [VIL 98a] et Ville et Nélías [VIL 98b, VIL 99b] ont montré que l'influence des conditions de contact est du premier ordre sur l'indentation. L'introduction de glissement entre les surfaces se traduit par un étalement prononcé des particules dans le sens du glissement comme le montre la FIG.1.34. Deux phénomènes sont observés expérimentalement en présence de glissement positif, le décalage du trou, qui était précédemment situé au fond de l'indent, en amont de celui-ci et l'incrustation des particules dans les surfaces.

Le glissement dans le contact est quantifié par le slide-to-roll ratio (SRR) dont la formule est donnée par l'équation (1.5).

$$SRR = \frac{(U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)} \quad (1.5)$$

avec, U_1 et U_2 les vitesses des surfaces telles que définies sur la FIG.1.35.

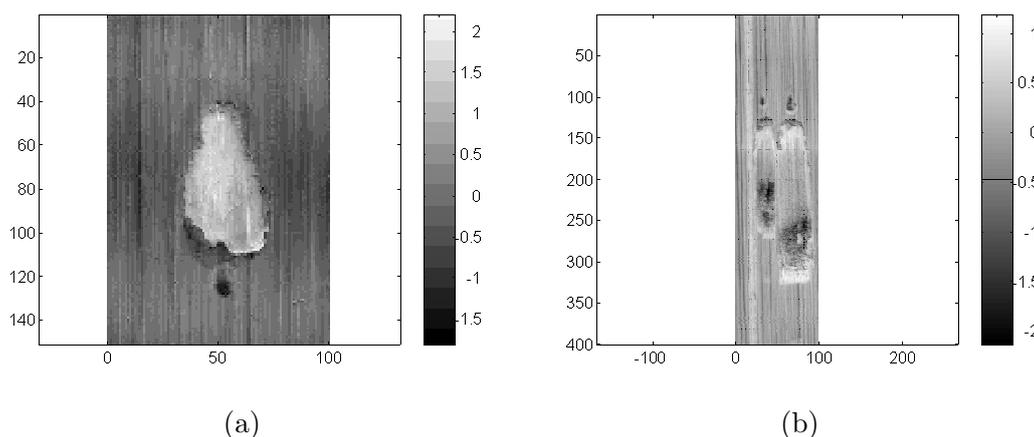


FIGURE 1.34 – Indents expérimentaux tirés des travaux de Ville [VIL 98a] et Ville et Nélías [VIL 98b, VIL 99b] sous $SRR=6\%$ (a) et $SRR=20\%$ (b).

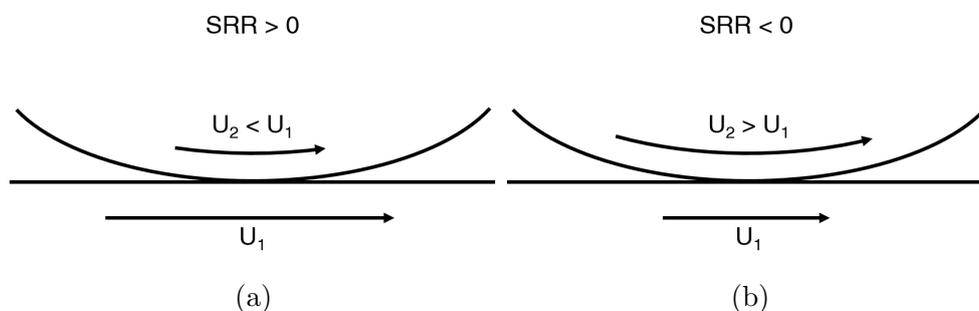


FIGURE 1.35 – Illustration des cas en SRR positif (a) et négatif (b).

Les simulations réalisées en présence de glissement positif, dont les résultats sont présentés sur la FIG.1.36, montrent une tendance à accentuer l'étalement de la particule créant ainsi des indents plus élancés et moins profonds qu'en roulement pur. Le cas du $SRR = 3\%$ montre qu'un glissement faible entraîne également l'accentuation de la hauteur du bourrelet de sortie, passant ici d'une hauteur de $1,4\%$ de ϕ_0 en roulement pur à $3,1\%$. Cette accentuation du bourrelet de sortie est réduite à mesure que le SRR augmente jusqu'à avoir un bourrelet de sortie plus petit qu'en roulement pur pour un SRR de 20% . Le bourrelet d'entrée est annihilé dès l'introduction du glissement positif, même faible. Lorsque le niveau de SRR devient grand, les simulations reproduisent bien le décalage du trou en amont de l'indent observé expérimentalement.

Les effets du glissement négatif sont visibles sur la FIG.1.37. De manière similaire au glissement positif, la profondeur des indents est réduite en présence de glissement négatif. Cependant, la largeur des indents n'est pas augmentée de manière significative, $2,2 \phi_0$ pour les SRR négatifs contre $2,1 \phi_0$ en roulement pur, car dans ces conditions le glissement s'oppose à l'étalement naturelle de la particule dans la direction de roulement provoqué par l'avancée de la charge. Un effet sur les bourrelets est aussi constaté, identique à celui du glissement positif mais inverse en direction, avec une réduction du bourrelet de sortie et une augmentation sensible du bourrelet d'entrée. Les proportions de cette augmentation sont toutefois moindre qu'en glissement positif, avec une hauteur de $0,8\%$ de ϕ_0 à $SRR = -3\%$ pour $0,4\%$ en roulement pur.

Le glissement se révèle donc un paramètre de premier ordre dans l'indentation. Les modifications de géométrie engendrées par ces conditions peuvent être pénalisantes pour la fatigue de contact et le glissement positif semble plus critique que le glissement négatif par la nette augmentation de la hauteur du bourrelet de sortie qu'il provoque notamment

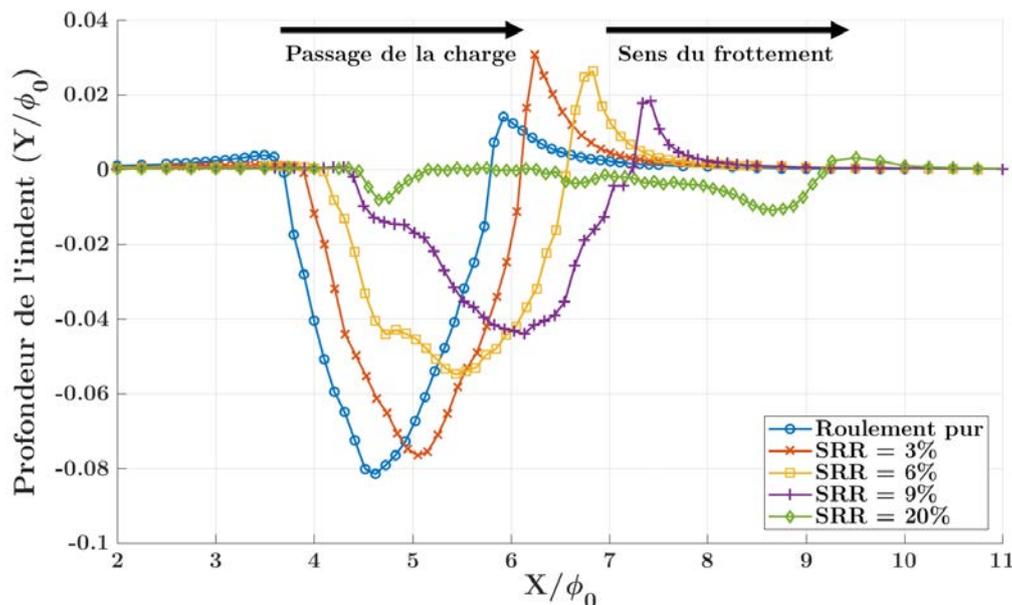


FIGURE 1.36 – Profils des indents obtenus pour différents SRRs positifs.

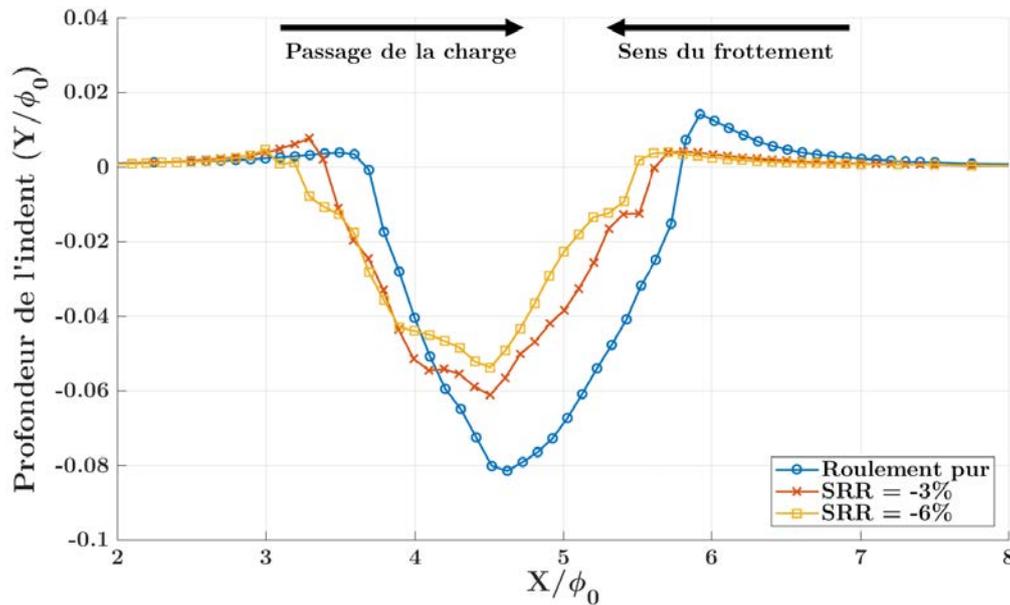


FIGURE 1.37 – Profils des indents obtenus pour différents SRRs négatifs.

à faible SRR.

La FIG.1.38 présente les profils d'indents expérimentaux [VIL 98a] et numériques obtenus pour un SRR de 6%. Les profils expérimentaux montrent la présence d'une particule incrustée dans la surface dont on peut considérer que la hauteur se dégageant de la surface est équivalente à la profondeur à laquelle elle est enfoncée. La profondeur présumée de l'indent est tracée en ligne discontinue sur le graphe de la FIG.1.38. Il apparaît dès lors que le profil numérique correspond bien aux observations expérimentales, tant en termes de largeur que de profondeur. Pour un SRR de 20%, les profils présentés FIG.1.39 montrent un écart très important entre les essais et la simulation. Si l'allure de l'indent numérique est similaire à celle de l'indent expérimental, avec le trou décalé en amont de l'indent, une profondeur qui augmente de manière progressive dans la direction de roulement et une remontée à pente élevée, les dimensions sont inférieures d'un facteur 2. Le taux de glissement très important génère un chargement tangentiel élevé pouvant être à l'origine de phénomène de rupture par cisaillement exacerbant ainsi l'étalement de la particule. Or, le modèle CEL ne prend pas en compte les aspects de rupture, ce qui peut expliquer la différence importante de largeur entre l'indent numérique et les constatations expérimentales. De plus, de part cet étalement très important, l'épaisseur de la particule devient très faible et la taille de maille employée pour ces calculs peut se retrouver trop grande pour obtenir des résultats qualitatifs. Le modèle CEL semble donc valable pour des SRR faibles mais ne peut donner qu'une tendance lorsque le SRR devient important.

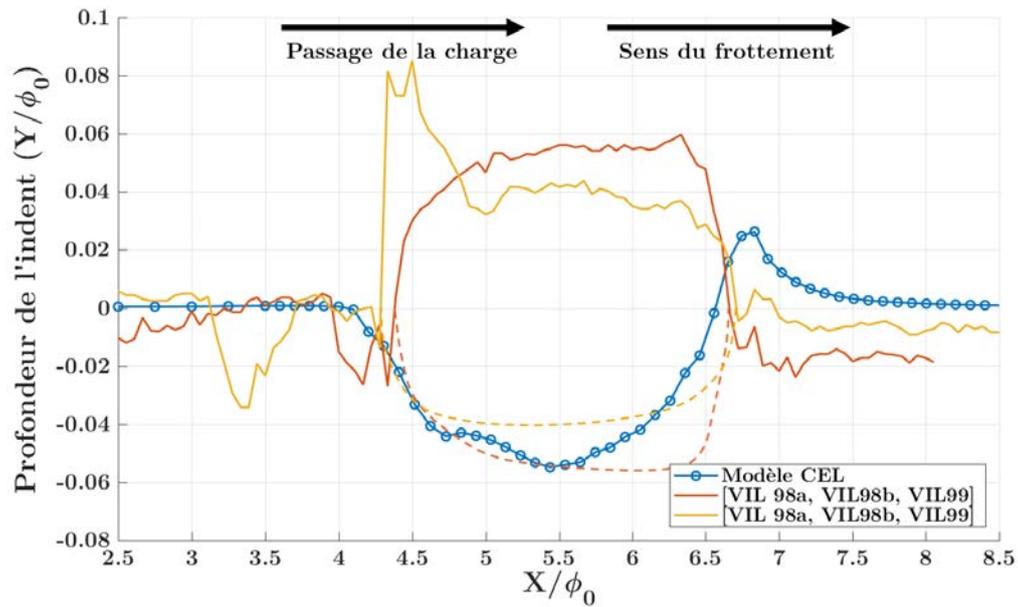


FIGURE 1.38 – Profils des indents numérique et expérimentaux pour un SRR = 6%.

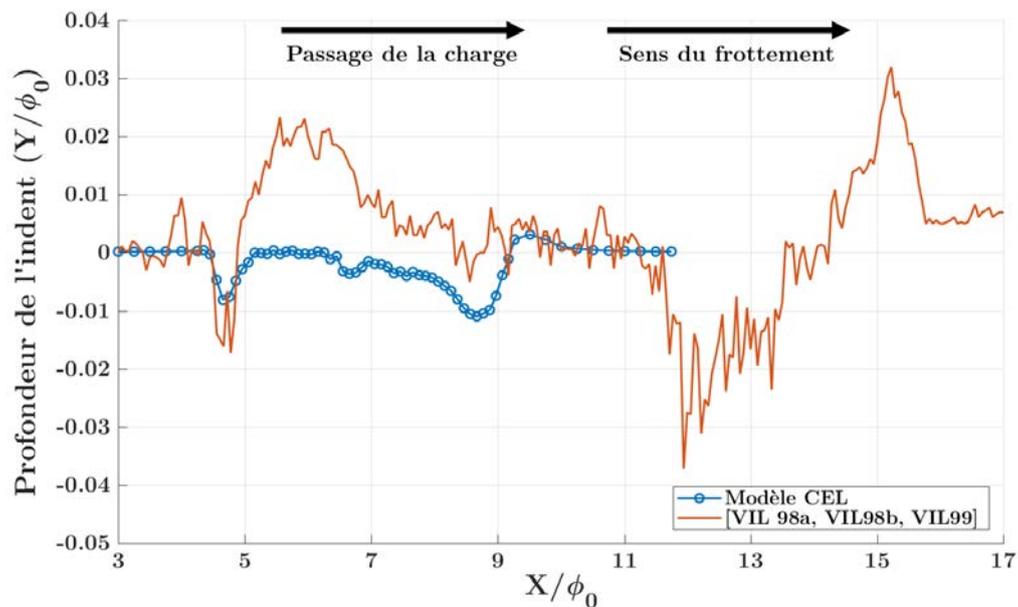


FIGURE 1.39 – Profils des indents numérique et expérimentaux pour un SRR = 20%.

1.5.6 Influence de la nature de la particule

La nature des polluants dans les systèmes de transmission peut être très diverse. Particules organiques présentes lors de l'assemblage, sable s'introduisant durant l'opération du système en extérieur et particules d'usures venant de l'intérieur même du système sont susceptibles de passer dans les contacts roulants. L'effet de la nature de la particule a donc été étudié numériquement pour le cas d'une particule de cuivre. Pour de plus amples informations sur les effets de particules fragiles tels que les particules de sables, le lecteur est dirigé vers les travaux de Ville [VIL 98a]. Ce type de matériau n'a pas été étudié ici car le comportement fragile de la particule se traduit par un éclatement de celle-ci en sous-particules, non reproductible avec le modèle numérique développé. Le comportement mécanique du cuivre est modélisé par la loi de Johnson-Cook dont les paramètres sont tirés des travaux originaux de Johnson et Cook [JOH 83], réutilisés par Nikas dans ces travaux sur l'indentation [NIK 12, NIK 13, NIK 14] et données dans le TAB.1.5.

La comparaison des indents présentés sur la FIG.1.40 permet de constater une réduction de la profondeur de l'indent de 46% et de la hauteur des bourrelets de 65% sur le bourrelet de sortie. La largeur de l'indent est en revanche accrue de 8% par rapport à une particule en acier AISI 52100, à autres paramètres identiques. Ces effets sont corroborés par les essais menés par Dwyer-Joyce et al. [DWY 92] et Dwyer-Joyce [DWY 05] ayant donnés des indents de largeur 100-150 μm et de profondeur 0,6-1,0 μm à partir de particule de cuivre de diamètre initial 35 μm . Le modèle numérique donne donc la bonne tendance, à savoir que la plus grande ductilité de la particule donne lieu à des indents moins marqués, mais semble sous-estimer l'écrasement de la particule donnant une profondeur d'indent supérieure et une largeur inférieure à ce qui est observé expérimentalement. Cet écart notable avec les valeurs expérimentales peut être attribué à la simplicité de la modélisation des effets thermiques dans le modèle CEL. De plus, l'indent obtenu expérimentalement avec une particule de cuivre est d'une profondeur d'environ 2% du diamètre initial de la particule. L'épaisseur de la particule une fois écrasée correspond approximativement au double de la profondeur de l'indent, soit 4% du diamètre initial. La taille de maille, ici de $\phi_0/10$, peut donc constituer un frein à la bonne reproduction de l'indentation avec particule en cuivre.

Il est donc possible à partir de particules très ductiles d'indenter des surfaces dont les propriétés mécaniques sont significativement supérieures par le piégeage de la particule dans le contact et par les effets d'incompressibilité associés.

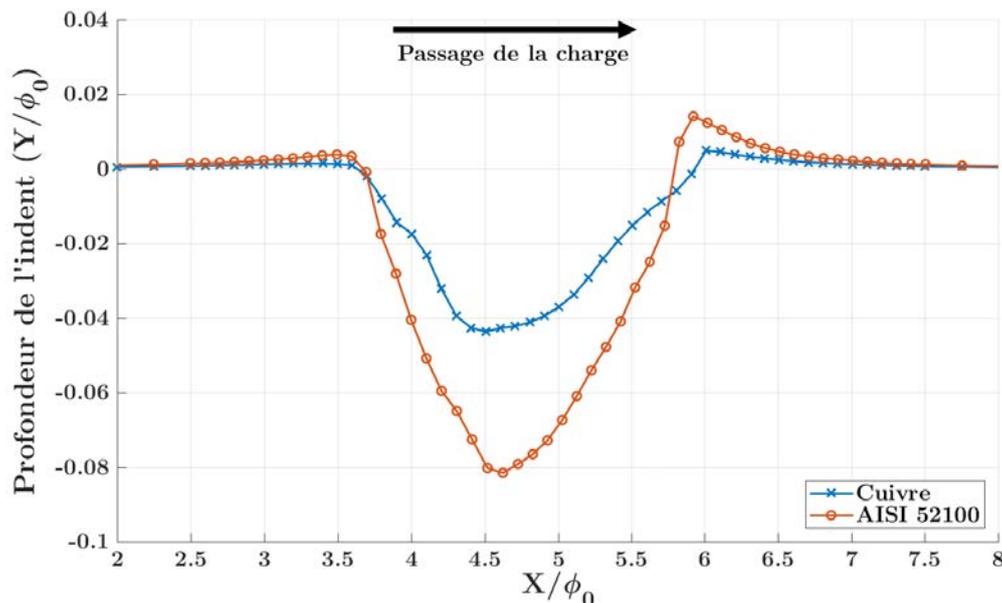


FIGURE 1.40 – Profils des indents numériques pour des particules en acier AISI 52100 et en cuivre.

1.5.7 Influence de la nature des composants du roulement

La nature des composants du roulement peut être amenée à varier, notamment avec l'utilisation de plus en plus courante de roulements dits hybrides ayant des corps roulants en céramique. Tout comme la nature de la particule, le type de matériau utilisé pour les composants du roulement modifie la réponse à l'indentation.

Roulements hybrides

Une simulation de type roulement hybride avec une piste en acier AISI 52100 et un rouleau en céramique Si_3N_4 est réalisée. Les propriétés mécaniques de la céramique Si_3N_4 sont issues des travaux de Strubel et al. [STR 17] et Azeggagh et al. [AZE 15b, AZE 15a] et sont données dans le TAB.1.5. Le Si_3N_4 est un matériau fragile dont le domaine plastique est restreint et dont la limite d'élasticité est très élevée. Par conséquent, une hypothèse de comportement purement élastique est faite pour la simulation, validée par l'analyse a posteriori des contraintes de von Mises dans le rouleau (FIG.1.41).

Le profil de l'indent obtenu avec le roulement hybride est donné sur la FIG.1.42. L'indent généré sur la piste est plus profond, 15,2% de ϕ_0 , mais conserve une largeur identique à celui obtenu pour un roulement tout-acier, les bourrelets sont également rehaussés d'environ 150%. Ces résultats sont en accord avec les travaux de Strubel et al. [STR 16, STR 17]. La rigidité du Si_3N_4 alliée à sa limite élastique élevée, mènent au transfert complet de l'indentation sur la piste en acier AISI 52100 et donc à un indent plus profond et des déformation plastiques et contraintes résiduelles plus importantes sur la piste, comme illustré sur la FIG.1.43.

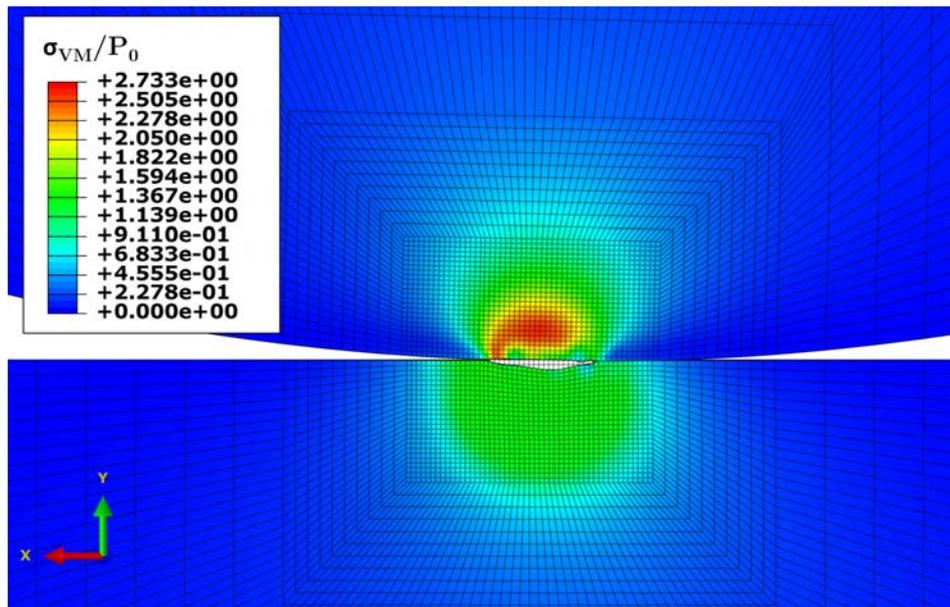


FIGURE 1.41 – Contrainte de von Mises dans le roulement hybride (piste AISI 52100 et rouleau Si_3N_4) au cours du passage d’une particule en acier AISI 52100.

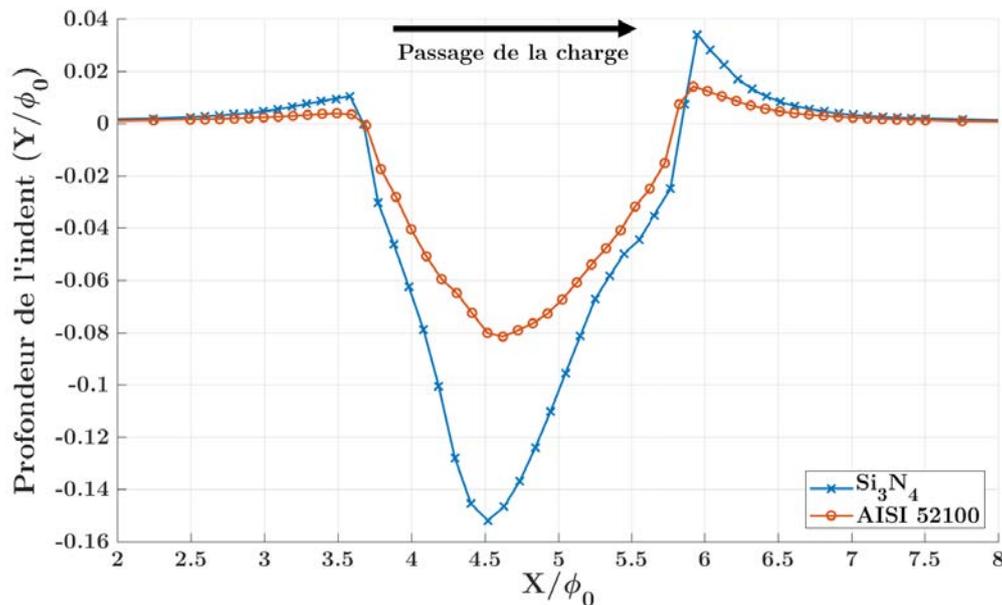


FIGURE 1.42 – Comparaison des profils des indents pour des roulements hybride (piste AISI 52100 et rouleau Si_3N_4) et tout-acier avec une particule en acier AISI 52100.

Alliage 60NiTi

La variété des applications nécessitant l’utilisation de contacts roulants amène à des besoins spécifiques et au développement de nouveaux matériaux. Les alliages nickel-titane sont étudiés par la NASA depuis les années 50, notamment par Buehler et al. [BUE 63]

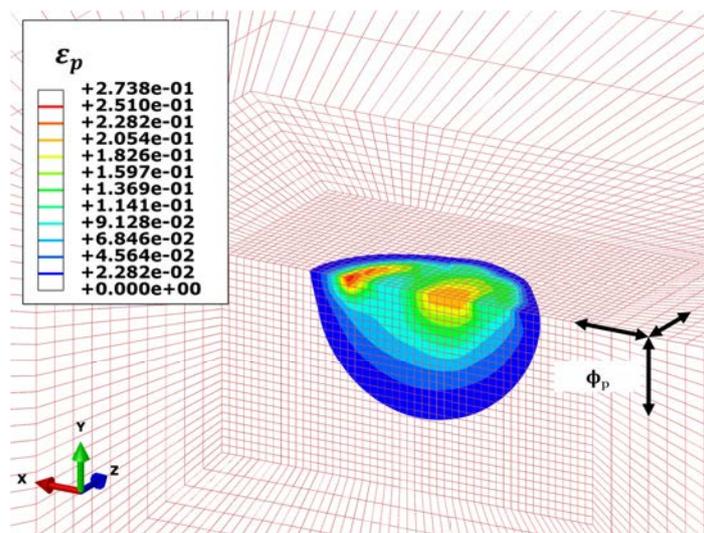


FIGURE 1.43 – Déformation plastique équivalente de la piste pour un roulement hybride.

et plus récemment par DellaCorte et al. [DEL 12, DEL 13, DEL 14]. Ils présentent une faible densité, une excellente résistance à la corrosion et une limite d'élasticité élevée pour un module de Young réduit leur conférant un domaine élastique très étendu donnant lieu à l'appellation de matériau "superélastique". Ces caractéristiques en font des candidats idéaux pour les applications où la corrosion et la résistance aux chocs sont des critères de premier ordre dans le choix des matériaux.

L'utilisation de l'alliage 60NiTi face à l'indentation dans les roulements est étudiée pour un roulement mixte avec rouleau en 60NiTi et une piste en acier AISI 52100 et pour un roulement entièrement en 60NiTi. L'étude du comportement plastique de cet alliage n'est pas monnaie courante dans la littérature, aussi, l'utilisation d'une loi de Johnson-Cook pour sa modélisation nécessiterait une batterie d'essais pour en déterminer les paramètres, ce qui n'est pas l'objet de ces travaux. Une loi d'érouissage linéaire isotrope simple, dont l'expression est donnée par l'équation (1.6), est donc utilisée.

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + K\varepsilon_p \quad (1.6)$$

avec σ_y la limite d'écoulement, σ_{y0} la limite d'élasticité, K le coefficient d'érouissage et ε_p la déformation plastique équivalente.

Les paramètres de cette loi sont déterminés par comparaison essais-simulations basés sur les essais d'indentation de pièce en 60NiTi par un indenteur sphérique en Si_3N_4 de DellaCorte et al. [DEL 12]. Un modèle éléments finis axisymétrique, présenté sur la FIG.1.44, a été développé pour simuler les essais d'indentation. La FIG.1.45 montre la comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus après recalage des paramètres de plasticité dont les valeurs sont données dans le TAB.1.5.

L'utilisation d'un roulement mixte mène, sur la piste (FIG.1.46a), à un indent plus profond de 22% par rapport au roulement tout-acier, les bourrelets de l'indent sont également rehaussés tandis que la largeur reste quasi-identique. À l'inverse, l'indent généré sur le rou-

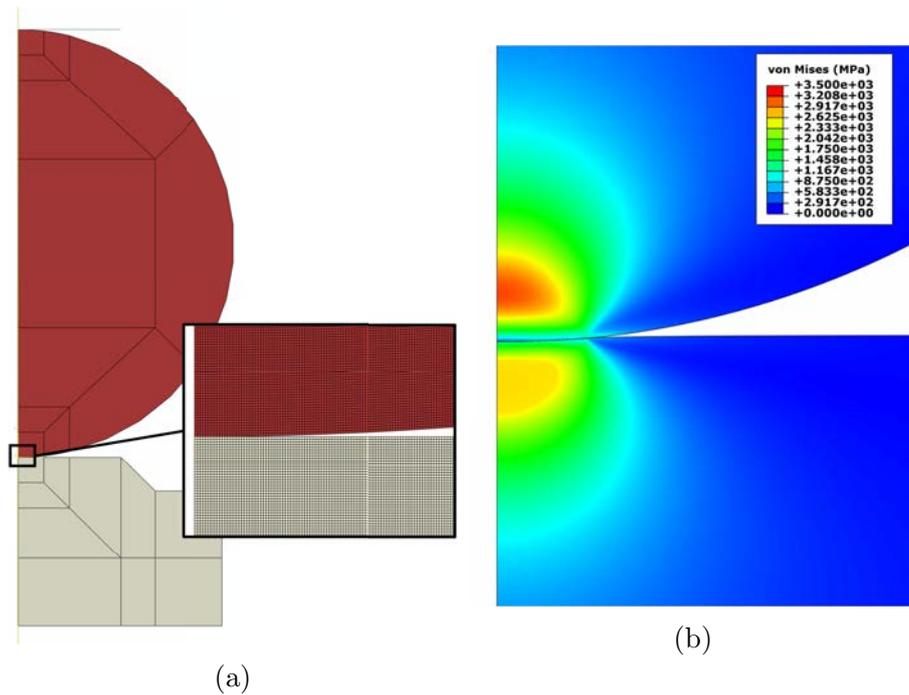


FIGURE 1.44 – Modélisation axisymétrique de l’indentation statique d’un plot en 60NiTi par une sphère en Si_3N_4 (a) et contrainte de von Mises dans les corps sous un chargement normal de 4415 N (b).

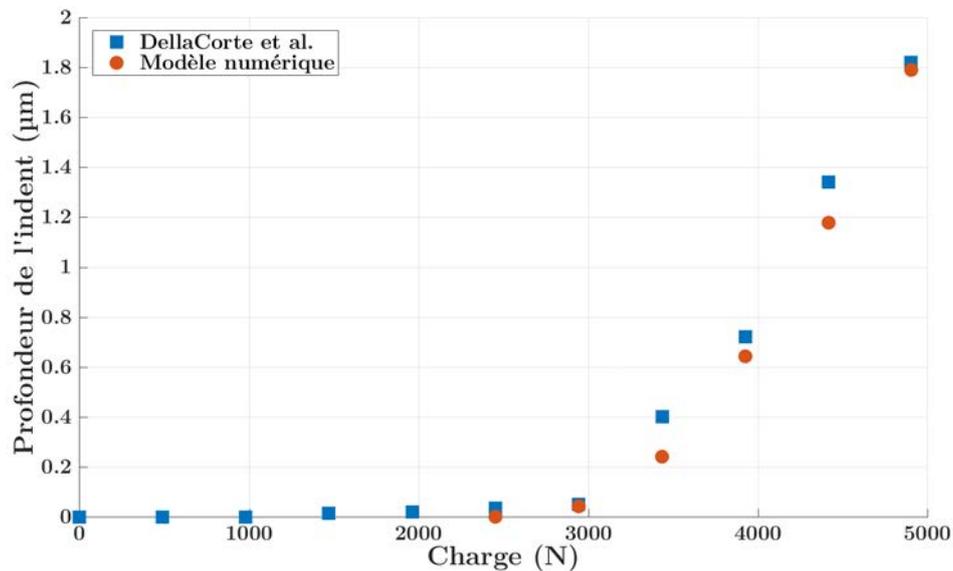


FIGURE 1.45 – Résultats expérimentaux [DEL 12] et numériques d’indentation du 60NiTi par une sphère en Si_3N_4 .

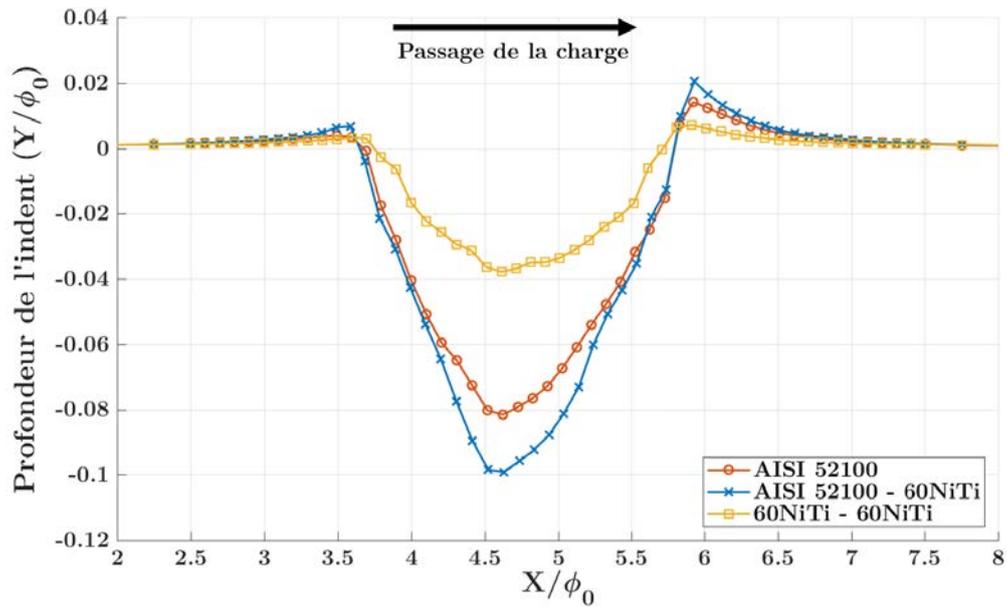
leau en 60NiTi (FIG.1.46b) est plus superficiel, présentant une profondeur réduite de 65%, des bourrelets moins hauts et une largeur identique. La différenciation des matériaux du

roulement entraîne ici, comme pour les roulements hybrides, un transfert du processus d'indentation sur la piste. L'association du faible module de Young et de la haute limite d'élasticité du 60NiTi, très supérieure à celle de l'acier AISI 52100, permet une meilleure accommodation des déformations dues au passage de la particule dans le contact. Le niveau des contraintes dans le contact est alors augmenté, engendrant ainsi davantage de plastification de la piste.

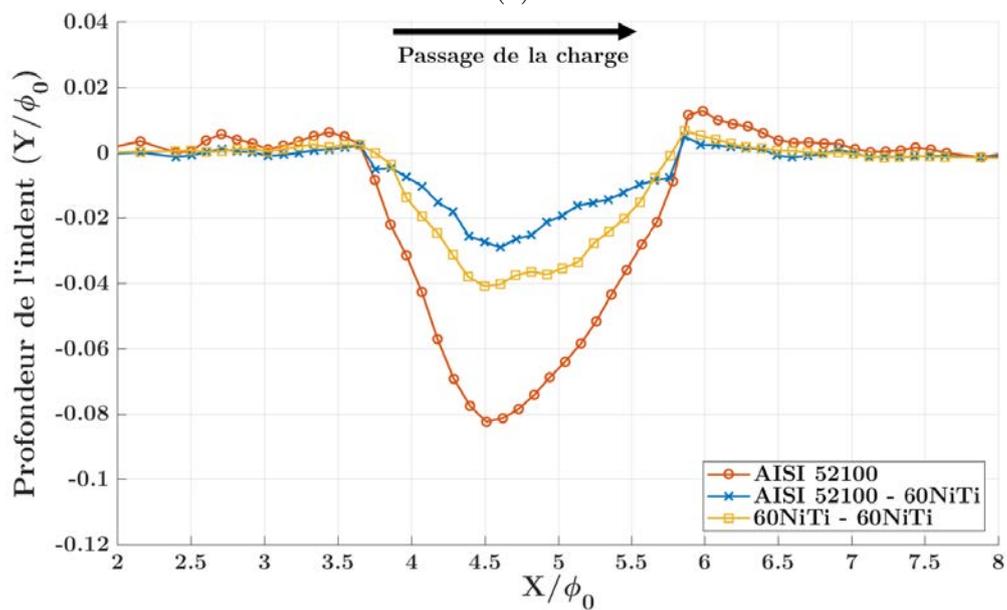
Dans la configuration où la piste et le rouleau sont en 60NiTi, les indents redeviennent équivalents sur les deux surfaces. Par rapport au roulement de référence tout-acier, l'indent présente un aspect plus rond, la profondeur et la hauteur du bourrelet de sortie sont réduits d'environ 50% et la largeur de 8,4%. Le vaste domaine élastique du 60NiTi confère donc à ce roulement une plus grande résistance à l'indentation que les aciers à roulement usuels.

Synthèse

L'étude de roulements à composants de nature différente a montré l'existence d'un équilibre de l'endommagement des surfaces déterminé par les propriétés mécaniques de celles-ci. Ainsi, dans les configurations hybride et mixte 60NiTi, la réduction de la profondeur des indents et de la hauteur de leur bourrelet sur le rouleau engendre une augmentation de ces dimensions sur les indents de la piste.



(a)



(b)

FIGURE 1.46 – Profils des indents générés sur la piste (a) et le rouleau (b) en roulement tout acier, mixte (piste AISI 52100 et rouleau 60NiTi) et complètement 60NiTi.

1.5.8 Influence des contraintes résiduelles

L'utilisation de traitements de surface thermo-chimiques tels que la nitruration ou la cémentation ou de traitements mécaniques tels que le grenailage permettent l'augmentation des capacités mécaniques des surfaces par l'introduction de contraintes résiduelles de compression dans la profondeur du matériau. Une distribution standard de ces contraintes est visible sur la FIG.1.47a. L'impact de ces traitements sur l'indentation des roulements est étudié par l'application de contraintes de compressions σ_{xx} et σ_{zz} dans la profondeur de la piste selon une distribution simplifiée présentée sur la FIG.1.47b.

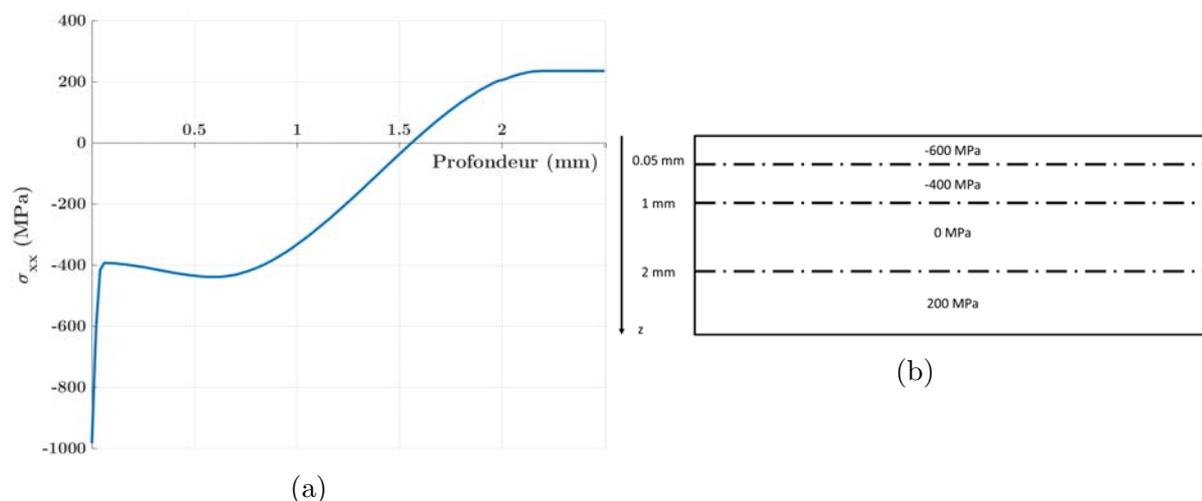
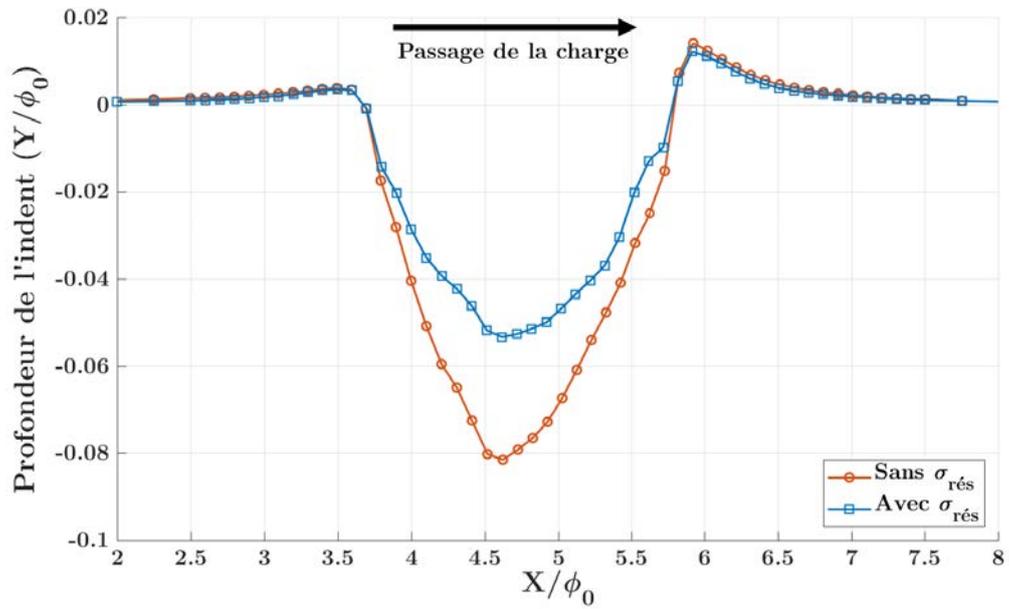
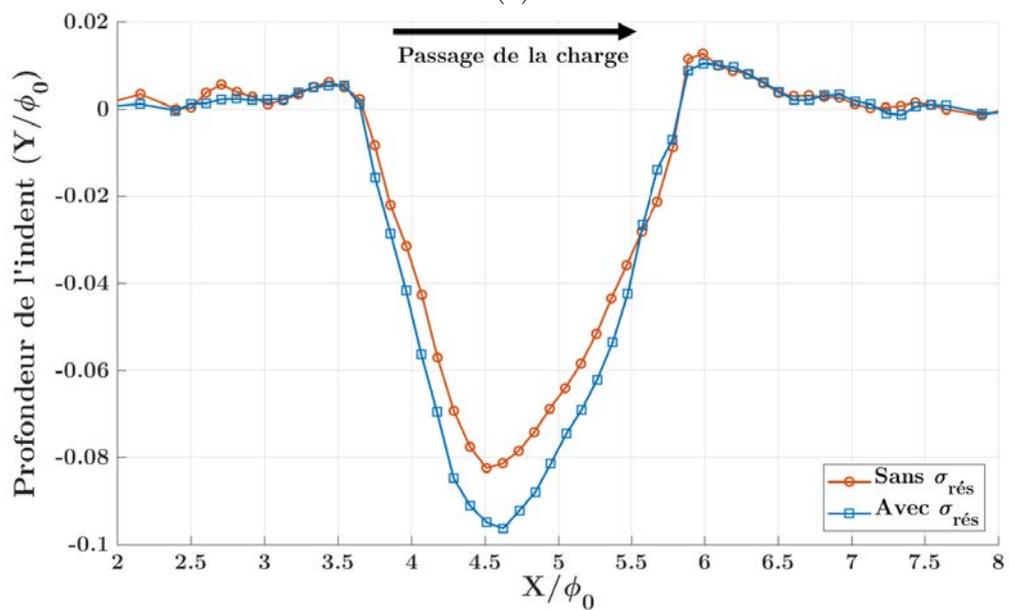


FIGURE 1.47 – Distribution usuelle des contraintes résiduelles de compression dans la profondeur du matériau après nitruration (a) et discrétisation utilisée pour la modélisation (b).

Comme attendu, la présence des contraintes résiduelles à la surface de la piste augmente sa résistance face au passage de la particule dans le contact, comme le montre le profil de l'indent FIG.1.48. Seule la profondeur de l'indent est modifiée, avec une réduction de 35% par rapport au matériau vierge. La surface opposée, non traitée dans cette configuration, s'en trouve plus endommagée avec une augmentation de la profondeur de l'indent de 17%. Le constat est ici identique à celui fait pour les composants de nature différente. La protection d'une des deux surfaces par modification de ses capacités mécaniques se fait toujours au détriment de la seconde surface.



(a)



(b)

FIGURE 1.48 – Profils des indents générés sur la piste (a) et le rouleau (b) en présence ou non de contraintes résiduelles sur la piste.

1.5.9 Synthèse

Suite à l'étude paramétrique, l'influence relative des paramètres sur le processus a pu être évaluée et est résumée dans le TAB.1.6. La taille de particule a un effet linéaire sur les dimensions de l'indent généré et le volume de matière affecté pour les petites particules. Lorsque la particule devient grande et que sa taille une fois écrasée surpasse la largeur du contact, la linéarité se perd légèrement et les indents deviennent plus larges et moins profonds. La nature des matériaux des trois corps est également un facteur de premier ordre gouvernant l'indentation. Les particules plus ductiles génèrent des indents moins marqués mais malgré des capacités mécaniques bien plus faibles, elles peuvent toujours endommager les surfaces plus dures. Ceci par l'effet du confinement de la particule dans le contact lorsque celle-ci est de petite taille. La nature des pièces du roulement joue à la fois sur le niveau et sur la répartition des dommages entre les surfaces, montrant que la protection de celles-ci doit se faire en prenant en compte les deux composants du contact roulant. Les conditions d'opérations ont aussi été étudiées menant à la conclusion que le niveau de charge du roulement n'a que peu d'effets sur l'indent final. La présence de glissement a en revanche été confirmée comme un paramètre de premier ordre ayant un fort effet sur l'étalement de la particule et la hauteur des bourrelets. Enfin, le coefficient de frottement entre la particule et les surfaces a aussi montré une influence de premier ordre sur l'indentation. Une bonne connaissance de ce coefficient est donc nécessaire pour une reproduction fidèle du processus d'indentation expérimental.

Paramètre	Influence sur l'indentation
Diamètre de particule	++
Chargement	-
$\mu_{particule}$	+
Glissement (SRR)	++
Nature de la particule	++
Matériau du roulement	++
Contraintes résiduelles	+

++ : *Influence forte* ; + : *Influence moyenne* ; - : *Influence faible*

TABLEAU 1.6 – Influence relative des paramètres sur le processus d'indentation.

1.6 Conclusion

La pollution des lubrifiants est l'une des sources de l'apparition de fatigue de surface dans les contacts hautes pressions qui est désormais la principale cause de défaillance des composants. L'utilisation de la modélisation eulérienne a permis le développement d'un modèle élément finis "Couplé Euler-Lagrange" reproduisant, de manière fidèle et à coût de calcul réduit, l'indentation des surfaces par le passage d'une particule dans un contact roulant. La comparaison des résultats aux données expérimentales de la littérature a validée les performances du modèle sur le cas d'un roulement en acier AISI 52100 soumis à la contamination par une particule de même nature. La polyvalence du modèle a rendu possible une étude paramétrique exhaustive ayant permis l'identification des paramètres les plus influents sur l'indentation naturelle tels que la taille des particules, la nature des matériaux constituant le trio des corps en contact ou encore la présence de glissement. L'aspect non symétrique de l'indentation naturelle, tant en termes de géométrie que d'état de contraintes résiduelles, mis au jour par l'outil numérique signale la différence pouvant exister entre les études consacrées à la fatigue des surfaces indentées réalisées sur indent artificiel et le phénomène réel de fatigue sur indent naturel.

Chapitre 2

Fatigue des surfaces indentées

Ce second chapitre traite de la vie et de la fatigue des surfaces en contact après indentation. La fatigue se manifeste autour des indents par l'apparition de fissures se propageant jusqu'à l'écaillage de la surface et pouvant mener à la ruine du composant. L'objectif est ici d'identifier les mécanismes à l'origine de l'apparition des fissures de fatigue causées par la présence du défaut. Pour cela, un outil de résolution semi-analytique du problème de contact est utilisé pour réaliser des cycles de roulements sur les surfaces indentées. Plusieurs critères de fatigue usuels sont comparés dans le but de déterminer les plus enclins à localiser les zones d'amorçage de fissures en bords d'indents. Il apparaît alors que la formation des fissures repose sur des mécanismes de cisaillement et que le sens du glissement définit leur localisation. L'analyse des résultats de cette étude comparative amène au développement d'un nouveau critère dérivé du critère de Dang Van II. L'étude paramétrique débutée au chapitre précédent est poursuivie en appliquant le nouveau critère aux surfaces indentées avec le modèle CEL. La charge du roulement, le glissement et la hauteur des bourrelets sont identifiés comme les paramètres les plus influents sur la durée de vie des surfaces indentées.

Sommaire

2.1	Introduction	57
2.2	État de l'art	57
2.3	Méthodes semi-analytiques pour la résolution des problèmes de contact	60
2.3.1	Définition du problème de contact	60
2.3.2	Liens entre chargement, déplacements et contraintes	61
2.3.3	Formulation du problème de contact	64
2.3.4	Résolution du problème de contact	68
2.3.5	Schéma global de l'outil de calcul	78
2.4	Définition des critères et des variables utiles	80
2.4.1	Variables utiles	80
2.4.2	Critères de fatigue à invariants de contraintes	83
2.4.3	Critères de fatigue en contraintes	84
2.4.4	Critères de fatigue en déformations	84
2.4.5	Critères énergétiques	85
2.4.6	Paramètres de fatigue utilisés	85
2.5	Étude comparative des critères de fatigue	87
2.5.1	Définition des conditions de l'étude	88
2.5.2	Critères à invariants de contraintes	92
2.5.3	Critère en contraintes	96
2.5.4	Critères en déformations	98
2.5.5	Critère énergétique	103
2.5.6	Influence des paramètres de fatigue	104
2.5.7	Définition d'un nouveau critère	106
2.6	Application à un indent réel	109
2.7	Étude paramétrique de la fatigue des surfaces indentées	111
2.7.1	Effets de la hauteur des bourrelets	111
2.7.2	Effets de la charge	112
2.7.3	Effets du glissement	112
2.7.4	Effets des matériaux	112
2.7.5	Effets des traitements thermo-chimiques	113
2.7.6	Synthèse	113
2.8	Conclusion	114

2.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude de la fatigue des surfaces indentées. L'objectif est ici de déterminer les mécanismes à l'origine de l'apparition de fatigue prématurée en présence d'indents. Pour cela, la simulation de cycles de roulement sur indent est nécessaire. Un outil de calcul de contact semi-analytique développé par de nombreux auteurs [JAC 01, ANT 05, GAL 07, BOU 08, CHA 11, TON 12b, KOU 15, AMU 16] sera utilisé pour réaliser ces cycles de manière rapide. Des modifications y seront apportées afin de pouvoir incorporer la surface indentée au calcul. Une présentation de la méthode semi-analytique fera l'objet d'une première partie. L'analyse de la fatigue sera ensuite faite par l'intermédiaire de critères de fatigue tirés de la littérature et appliqués au cycle de roulement. Ces critères seront présentés et comparés sur un cas de roulement sur indent artificiel dans une seconde partie. Enfin, le ou les critères permettant d'identifier les zones d'apparition de la fatigue seront retenus pour une application sur les indents réels produits au chapitre précédent.

2.2 État de l'art

La présence d'indents sur la surface des pistes de roulement est un facteur important de réduction de la durée de vie des composants. La modification de géométrie entraîne à son tour une modification du chargement. Numériquement, il est montré que les bords de l'indent causent l'apparition d'importants pics de pression [VIL 98a, JAC 01, TON 12b, MOR 15a] visibles sur la FIG.2.1.

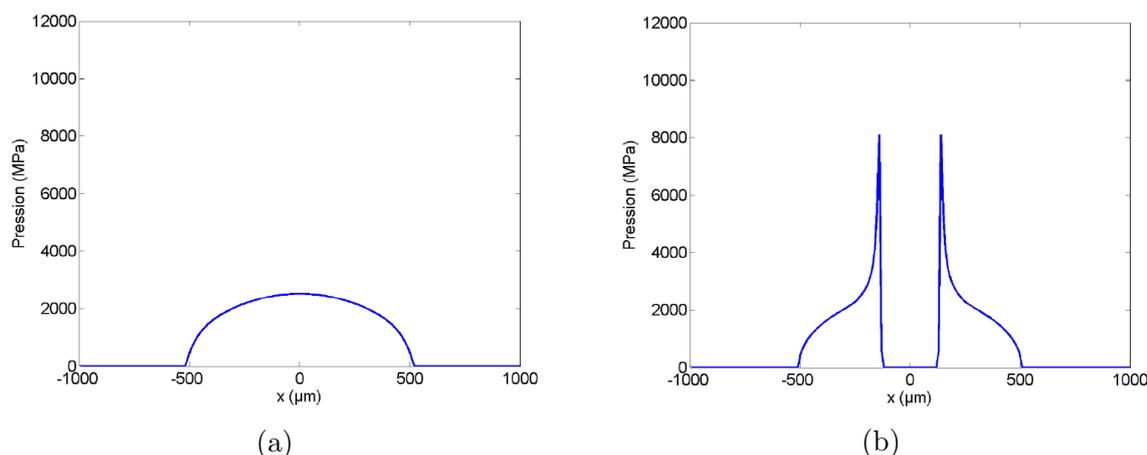


FIGURE 2.1 – Profil de pression dans la direction de roulement sur une surface lisse (a) et en présence d'un indent (b) sous une pression de Hertz de $2,5 \text{ GPa}$ et pour un contact sphère-plan, d'après [TON 12b].

Les travaux expérimentaux menés par Ville [VIL 98a], Ville et Nélias [VIL 98b, NEL 00], Jacq [JAC 01] ou encore Tonicello [TON 12b], montrent dans un premier temps

l'influence des conditions de contact sur la fatigue des surfaces. Ainsi, la présence de glissement dans le contact s'avère être un facteur très pénalisant en terme de durée de vie. De plus, le glissement influe sur la zone d'apparition de l'endommagement au bord de l'indent, comme illustré sur la FIG.2.2. Dans la direction des forces de frottement, qui est aussi la direction du glissement, apparaît une zone de matage de la surface sur laquelle se développe du micro-écaillage. Ce comportement est également observé par d'autres

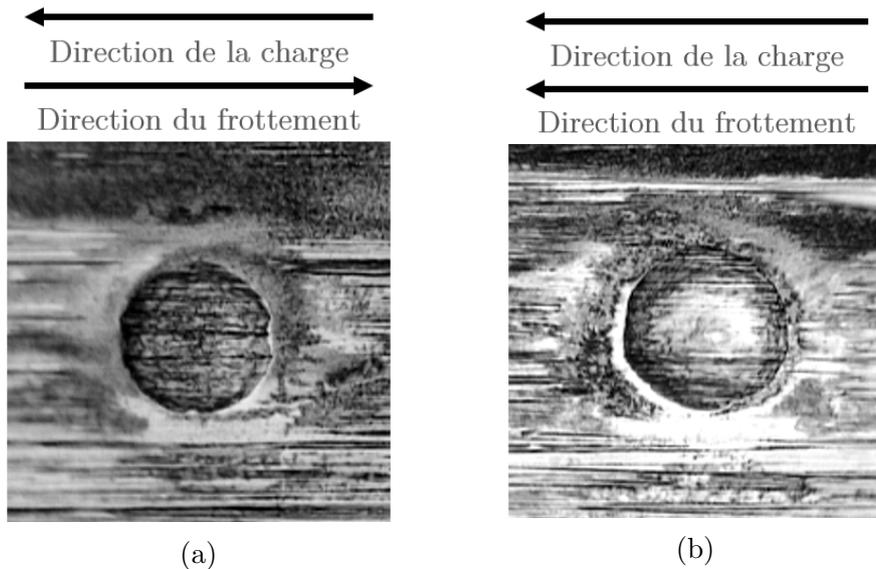


FIGURE 2.2 – Effet du sens de glissement sur la zone d'apparition du micro-écaillage autour de l'indent en glissement négatif (a) et en glissement positif (b), d'après [NEL 00].

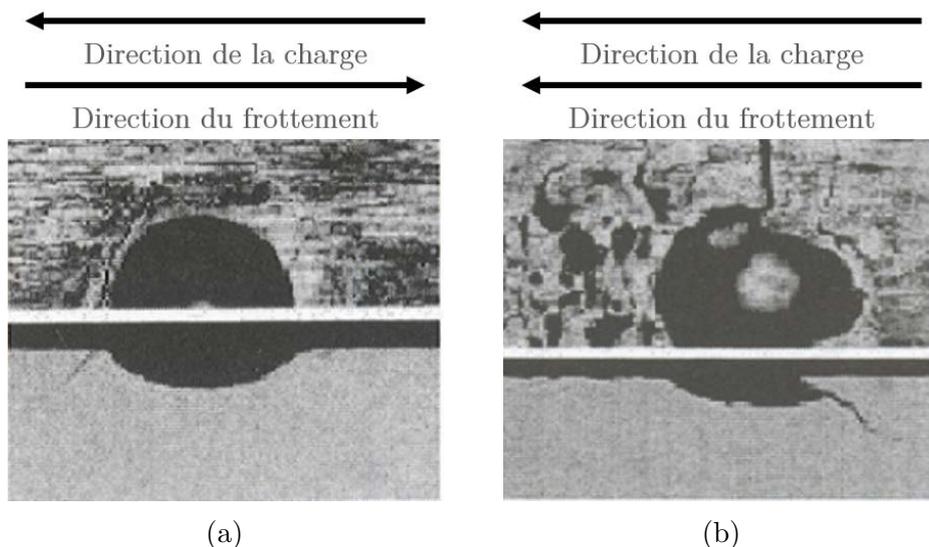


FIGURE 2.3 – Effet du sens de glissement sur le côté d'apparition des fissures autour de l'indent en glissement négatif (a) et en glissement positif (b), d'après [DIA 03].

auteurs [COU 05, NEL 05]. L'apparition de micro-écaillage mène à terme à l'écaillage de la surface. Xu et al. [XU 97a, XU 98] attribuent ce phénomène à l'accumulation de déformations plastiques dans la zone au cours des cycles successifs de roulement. À l'aide d'un modèle d'endommagement basé sur cette accumulation, ils modélisent l'apparition d'écaillage en bords d'indents. Des approches similaires, basées sur des modèles d'endommagement, sont également mises en place par Warhadpande et al. [WAR 10] et Golmohammadi et al. [GOL 19].

Les travaux de Diab et al. [DIA 03] et Tonicello [TON 12b] font également état de l'apparition de micro-fissures sur le bord de l'indent dans la direction opposée aux forces de frottement. Ces fissures sont visibles sur la FIG.2.3 et se développent avec un angle caractéristique avec la surface allant de 30° à 45° . Les travaux de Morales-Espejel et al. [MOR 15a] montrent également l'apparition de ce type de fissure qui se développe en "V-shape" et mène à l'écaillage de la piste (FIG.2.4).

La fatigue sur indent se manifeste donc de différentes manières. D'un côté, le micro-écaillage qui suit un mécanisme d'endommagement continu lié à la plastification de la matière. De l'autre, l'écaillage causé par l'apparition de fissures qui se propagent et causent un arrachement important de matière. La présence d'indents met donc en jeu des mécanismes de fatigue différents, nécessitant un traitement individuel. Nous nous attacherons ici à l'étude de l'apparition des fissures dans la direction opposée au frottement.

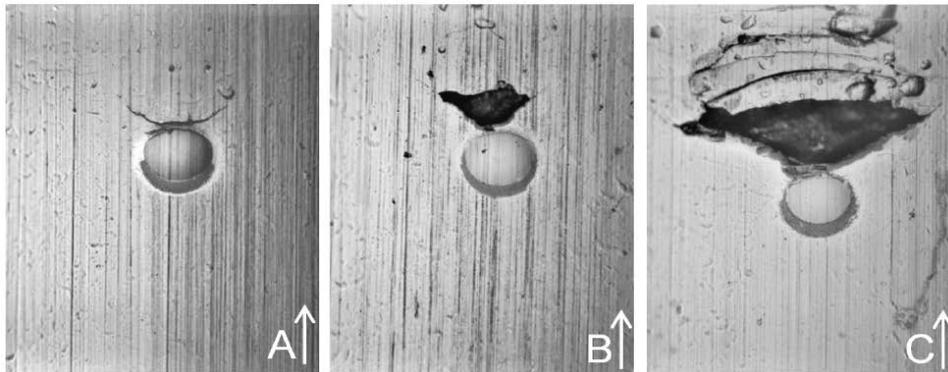


FIGURE 2.4 – Évolution de l'écaillage sur le bord opposé à la direction du frottement autour d'un indent artificiel, d'après [MOR 15a].

2.3 Méthodes semi-analytiques pour la résolution des problèmes de contact

2.3.1 Définition du problème de contact

Considérons deux corps élastiques, notés 1 et 2, en contact dans le plan (OXY) comme illustré par la FIG.2.5. Les surfaces non-déformées des corps sont définies par les fonctions $h_1(x, y)$ et $h_2(x, y)$. La séparation initiale des corps est alors définie par :

$$h_0(x, y) = h_2(x, y) - h_1(x, y) \quad (2.1)$$

L'application d'un chargement normal W sur les surfaces entraîne un rapprochement de corps rigide, $\delta = \delta_1 - \delta_2$ et la déformation élastique des surfaces notée $\bar{u}_z = u_{z,1} + u_{z,2}$. Les variables δ_i et $u_{z,i}$ représentent respectivement le déplacement de corps rigide et la déformation élastique dans la direction z de la surface i . Ainsi, la séparation des corps sous charge est définie par l'équation suivante :

$$h(x, y) = h_0(x, y) + \bar{u}_z(x, y) - \delta \quad (2.2)$$

Il est dès lors possible de définir la condition de contact comme suit :

$$h(x, y) = 0, \quad \text{dans la zone de contact} \quad (2.3)$$

$$h(x, y) > 0, \quad \text{hors de la zone de contact} \quad (2.4)$$

L'étude du contact tangentiel nécessite l'introduction du vecteur *glissement*, noté \mathbf{s} . Nous noterons \mathbf{s}^t le vecteur *glissement* à l'instant t , $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$ l'opérateur de dérivation temporel. Soit \mathbf{x}_1^t et \mathbf{x}_2^t les coordonnées de deux points des corps 1 et 2 en contact à l'instant t et $\mathbf{u}_{\tau,1}^t$ et $\mathbf{u}_{\tau,2}^t$ les déplacements élastiques tangentiels des surfaces. Le glissement est défini entre les instants t et t' par :

$$\mathbf{s}^t = \dot{\mathbf{s}}^t(t - t') = \left[(\mathbf{u}_{\tau,1}^t - \mathbf{u}_{\tau,2}^t) - (\mathbf{u}_{\tau,1}^{t'} - \mathbf{u}_{\tau,2}^{t'}) \right] - (\dot{\mathbf{x}}_1^t - \dot{\mathbf{x}}_2^t)(t - t') \quad (2.5)$$

Le second terme de l'équation traduit les déplacements de corps rigide et peut se ramener à l'expression suivante :

$$(\dot{\mathbf{x}}_1^t - \dot{\mathbf{x}}_2^t)(t - t') = (\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_1^{t'}) - (\mathbf{x}_2^t - \mathbf{x}_2^{t'}) \quad (2.6)$$

$$(\dot{\mathbf{x}}_1^t - \dot{\mathbf{x}}_2^t)(t - t') = \begin{pmatrix} \delta_{x,1}^t - \delta_{x,1}^{t'} + \delta_{x,2}^t - \delta_{x,2}^{t'} \\ \delta_{y,1}^t - \delta_{y,1}^{t'} + \delta_{y,2}^t - \delta_{y,2}^{t'} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$(\dot{\mathbf{x}}_1^t - \dot{\mathbf{x}}_2^t)(t - t') = \begin{pmatrix} \Delta\delta_{x,1}^t + \Delta\delta_{x,2}^t \\ \Delta\delta_{y,1}^t + \Delta\delta_{y,2}^t \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Finalement, le vecteur *glissement* s'écrit :

$$\mathbf{s}^t = \begin{pmatrix} \Delta u_x^t - \Delta \delta_x^t \\ \Delta u_y^t - \Delta \delta_y^t \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

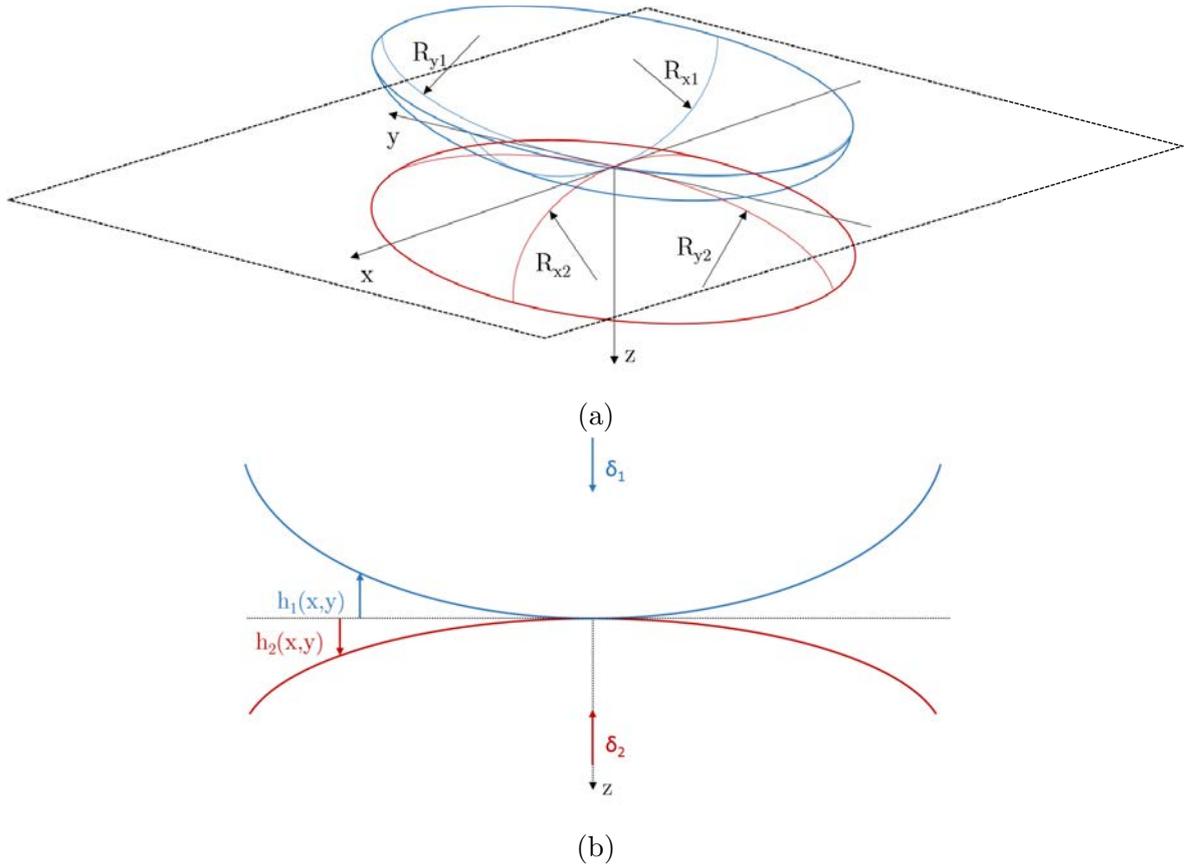


FIGURE 2.5 – Définition des surfaces en contact.

2.3.2 Liens entre chargement, déplacements et contraintes

La résolution du problème de contact, qu'il soit normal et/ou tangentiel, requiert l'établissement d'un lien entre la distribution du chargement d'une part et les déplacements et contraintes qu'il induit d'autre part. Dans le cadre de massifs semi-infinis, élastiques, homogènes et isotropes, Boussinesq [BOU 85] et Cerruti [CER 82] définissent par la théorie des potentiels le lien entre le chargement et les champs de contraintes et de déformations qu'il induit. Par une approche similaire, Love [LOV 52] définira plus tard la relation entre une pression uniforme agissant sur une zone rectangulaire et le déplacement normal qu'elle produit. Vergne [VER 85] développera une solution équivalente pour le problème tangentiel.

Ainsi, pour une zone rectangulaire de taille $\Delta x * \Delta y$ centrée en O et soumise à un chargement, p , q_x ou q_y constant, les contraintes induites par le chargement en un point $M(x, y, z)$ quelconque du massif sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{p} &= C_{i,j}^p(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &\quad + S_{i,j}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{q_x} &= C_{i,j}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &\quad + S_{i,j}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{q_y} &= C_{i,j}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &\quad + S_{i,j}^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

De manière analogue, les déplacements causés par le chargement en un point $M(x, y, z = 0)$ de la surface sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{p} &= K_i^p(x, y, z = 0, E, \nu) \\ &= U_i^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{q_x} &= K_i^{q_x}(x, y, z = 0, E, \nu) \\ &= U_i^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{q_y} &= K_i^{q_y}(x, y, z = 0, E, \nu) \\ &= U_i^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les coefficients $S_{i,j}$ et U_i sont détaillés en Annexe B.

À partir de ces solutions élémentaires, et en utilisant le principe de superposition, il devient alors possible de résoudre le problème de contact de manière simple. Définissons, à la surface des massifs semi-infinis, une grille de points au nombre de $N_p = N_x * N_y$ avec un pas Δx selon la direction x et Δy selon la direction y . Chaque point est ainsi le centre d'une zone rectangulaire d'aire $S = \Delta x * \Delta y$ sur laquelle nous considérerons les chargements normaux et tangentiels comme constants, comme illustré par la FIG.2.6. Le champ de contrainte en un point $M(x, y, z)$ d'un massif est alors obtenu par :

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(x, y, z) = & \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} p(x_m, y_n) (C_{i,j}^p(x_m - x, y_n - y, z, E, \nu)) \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_x(x_m, y_n) (C_{i,j}^{q_x}(x_m - x, y_n - y, z, E, \nu)) \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_y(x_m, y_n) (C_{i,j}^{q_y}(x_m - x, y_n - y, z, E, \nu)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les déplacements relatifs des surfaces s'obtiennent de manière similaire. Nous prêterons attention à la différence de repère entre les surfaces 1 et 2 et à l'opposition de signe des termes de cisaillement q_x et q_y entre les deux surfaces. Pour un point $M(x, y)$ de la surface, il vient alors :

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(x, y) = & \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} p(x_m, y_n) [K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) + K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_x(x_m, y_n) [K_z^{q_x}(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) - K_z^{q_x}(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_y(x_m, y_n) [K_z^{q_y}(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) - K_z^{q_y}(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

et pour les déplacements relatifs tangentiels en x ou y :

$$\begin{aligned} \bar{u}_\tau(x, y) = & \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} p(x_m, y_n) [K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) - K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_x(x_m, y_n) [K_z^{q_x}(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) + K_z^{q_x}(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} q_y(x_m, y_n) [K_z^{q_y}(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) + K_z^{q_y}(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

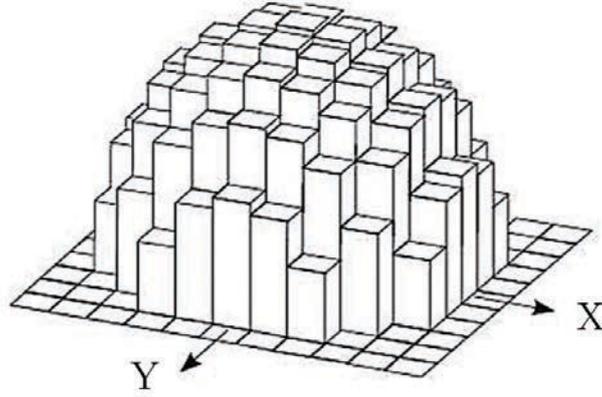


FIGURE 2.6 – Discrétisation du chargement en une somme de chargements constants.

Pour la suite, nous préférons les notations sous forme matricielle suivantes :

$$\bar{\mathbf{u}}_z^p = \mathbf{A}_z^p \mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{u}}_z^{qx} = \mathbf{A}_z^{qx} \mathbf{q}_x, \quad \bar{\mathbf{u}}_z^{qy} = \mathbf{A}_z^{qy} \mathbf{q}_y \quad (2.19)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_x^p = \mathbf{A}_x^p \mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{u}}_x^{qx} = \mathbf{A}_x^{qx} \mathbf{q}_x, \quad \bar{\mathbf{u}}_x^{qy} = \mathbf{A}_x^{qy} \mathbf{q}_y \quad (2.20)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_y^p = \mathbf{A}_y^p \mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{u}}_y^{qx} = \mathbf{A}_y^{qx} \mathbf{q}_x, \quad \bar{\mathbf{u}}_y^{qy} = \mathbf{A}_y^{qy} \mathbf{q}_y \quad (2.21)$$

2.3.3 Formulation du problème de contact

2.3.3.1 Contact normal

La résolution du problème de contact normal nécessite la définition d'un système d'équations représentatives des conditions à l'interface de contact. Nous nous intéresserons ici au cas d'un chargement piloté en effort, pour lequel l'effort normal W est connu et la zone de contact Γ_c est à priori inconnue. La résolution du problème en déplacement imposé se fait de manière équivalente et ne sera donc pas détaillée ici. Le problème fait intervenir :

- L'écart entre les surfaces h défini par l'équation (2.2),
- Le déplacement normal relatif des surfaces $\bar{\mathbf{u}}_z^p$ (2.19),
- Le déplacement de corps rigide normal δ_z ,
- La pression de contact p ,
- La zone de contact Γ_c ,
- La zone potentielle de contact Γ_p ,
- L'effort normal W .

Sous forme discrétisée, le problème de contact normal s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} h_{ij} = 0 \\ p_{ij} > 0 \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in \Gamma_c \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} h_{ij} > 0 \\ p_{ij} = 0 \end{cases}, \quad \forall (i, j) \notin \Gamma_c \quad (2.23)$$

$$\sum_{\Gamma_p} p_{ij} \cdot S = W \quad (2.24)$$

2.3.3.2 Contact tangentiel

Le problème de contact tangentiel doit être résolu dès lors que les déplacements tangentiels sont non nuls. C'est le cas lorsqu'un effort tangentiel Q est appliqué ou que la différence de propriétés élastiques des deux surfaces introduit un couplage entre le problème normal et le problème tangentiel. Le problème tangentiel fait intervenir :

- Les déplacements tangentiels relatifs des surfaces $\bar{\mathbf{u}}_x^q$ (2.20) et $\bar{\mathbf{u}}_y^q$ (2.21),
- Les déplacements de corps rigides tangentiels δ_x et δ_y ,
- Les amplitudes de glissement s_x et s_y ainsi que le vecteur glissement \mathbf{s} défini par l'équation (2.9),
- Les cisaillements q_x et q_y ,
- La zone de glissement Γ_{sl} ,
- La zone d'adhérence Γ_{st} ,
- L'effort tangentiel Q .

La loi de Coulomb est utilisée pour définir la relation entre pression et cisaillement. Sous forme discrétisée, le problème tangentiel s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau,ij}^t - \Delta \delta_{\tau}^t = \mathbf{s}_{ij}^t \neq 0 \\ \mathbf{q}_{ij} = -\mu p_{ij} \cdot \frac{\mathbf{s}_{ij}^t}{\|\mathbf{s}_{ij}^t\|} \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in \Gamma_{sl} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau,ij}^t - \Delta \delta_{\tau}^t = \mathbf{s}_{ij}^t = 0 \\ \|\mathbf{q}_{ij}\| < \mu p_{ij} \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in \Gamma_{st} \quad (2.26)$$

$$\sum_{\Gamma_p} \mathbf{q}_{ij} \cdot S = Q \quad (2.27)$$

2.3.3.3 Formulations variationnelles

La résolution du problème de contact est équivalente à la minimisation de l'énergie complémentaire, c'est-à-dire de l'énergie de déformation élastique exprimée en fonction de p et q . Cette minimisation s'accompagne de contraintes à respecter, à savoir, la positivité des pressions et la loi de Coulomb qui borne le cisaillement. La formulation variationnelle du problème s'écrit alors :

$$\min \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(h_0 - \delta_z + \frac{1}{2} \bar{u}_z \right) p \, dS + \int_{\Gamma_c} \left(-\Delta \delta_\tau^t + \frac{1}{2} \bar{u}_\tau^t - \bar{u}_\tau^{t-1} \right) q \, dS \right\} \quad (2.28)$$

$$p \geq 0 \quad (2.29)$$

$$q \leq \mu p \quad (2.30)$$

Considérons pour le moment les problèmes comme découplés. En supposant que le problème tangentiel est résolu, la formulation variationnelle discrète du problème de contact normal s'écrit :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{p} + c_\tau \right\} \quad (2.31)$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad (2.32)$$

avec $\mathbf{h}^{*T} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{A}_z^q \mathbf{q} - \delta_z$. La constante c_τ est l'énergie complémentaire du problème tangentiel et est supposée connue puisque le problème tangentiel est résolu. Il vient alors $c_\tau = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + (-\Delta \delta_\tau^t - \bar{\mathbf{u}}_\tau^{t-1}) \mathbf{q}$. La résolution du problème de contact normal se ramène alors à un problème de minimisation sous contraintes.

Supposons à présent le problème normal résolu, la formulation variationnelle discrète du problème de contact tangentiel s'écrit :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{q} + c_p \right\} \quad (2.33)$$

$$\|\mathbf{q}_{ij}\| \leq \mu p_{ij} \quad (2.34)$$

avec $\mathbf{W}^{*T} = -\Delta \delta_\tau^t + \mathbf{A}_\tau^p \mathbf{p} - \bar{\mathbf{u}}_\tau^{t-1}$. La constante c_p est l'énergie complémentaire du problème normal qui est supposée connue. Il vient alors $c_p = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + (\mathbf{h}_0 - \delta_z) \mathbf{p}$.

Les problèmes de contact normal et tangentiel sont donc des problèmes de minimisation sous contraintes. À des fins de généralités, définissons le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(\mathbf{x}) \geq 0, & i \in \mathcal{I} \end{cases} \quad (2.35)$$

où \mathcal{E} est l'ensemble des points i donnant des contraintes d'égalité et \mathcal{I} est l'ensemble des points i donnant des contraintes d'inégalité. Le Lagrangien du problème de minimisation s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

Les multiplicateurs de Lagrange, notés λ_i , sont des scalaires. Il y en a autant que de contraintes. La résolution du problème de minimisation sous contraintes est équivalente à la résolution des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Celles-ci s'écrivent :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad (2.37)$$

$$c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E} \quad (2.38)$$

$$c_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.39)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.40)$$

$$\lambda_i c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I} \quad (2.41)$$

La condition de complémentarité, définie par l'équation (2.41), peut se réécrire sous la forme :

$$c_i(\mathbf{x}) > 0, \quad \lambda_i = 0 \quad (2.42)$$

$$c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (2.43)$$

L'application des conditions de KKT au problème de contact normal permet sa réécriture sous la forme suivante :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{p} + c_\tau \right\} \Leftrightarrow \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} - \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.44)$$

$$p_{ij} > 0, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad (2.45)$$

$$p_{ij} = 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad (2.46)$$

λ_{ij} est donc la séparation des surfaces h_{ij} .

Le problème tangentiel peut également être réécrit par l'application des conditions de KKT. Après transformation de la contrainte $\|\mathbf{q}_{ij}\| \leq \mu p_{ij} \rightarrow -\frac{\mathbf{q}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij}}{2\mu p_{ij}} + \frac{\mu p_{ij}}{2} \geq 0$, il vient :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{q} + c_p \right\} \Leftrightarrow \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} + \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{x,ij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{y,ij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

$$\|\mathbf{q}_{ij}\| < \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad (2.48)$$

$$\|\mathbf{q}_{ij}\| = \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad (2.49)$$

λ_{ij} est ici la norme du vecteur glissement s_{ij} .

2.3.4 Résolution du problème de contact

2.3.4.1 Méthode DC-FFT

Les déplacements en surface sont liés au chargement par les équations discrètes (2.13), (2.14) et (2.15). Dans le cadre du contact normal, il s'agit de calculer le déplacement normal causé par la pression :

$$\bar{u}_z^p(x, y) = \sum_{m=1, N_x} \sum_{n=1, N_y} p(x_m, y_n) [K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_1, \nu_1) + K_z^p(x_m - x, y_n - y, E_2, \nu_2)] \quad (2.50)$$

Le calcul du déplacement est nécessaire à la résolution mais s'avère très couteux du fait de la double sommation sur le domaine qui doit être effectuée en chacun des points de calculs. Pour une grille de discrétisation de N_p points, le calcul du déplacement en un unique point se fait en $O(N_p^2)$ opérations. Apparaît dès lors un besoin de réduire le coût de cette opération pour maintenir des temps de calculs raisonnables. La méthode proposée par Ju et Farris [JU 96] et améliorée plus tard par Liu et al. [LIU 00] consiste à utiliser les propriétés des produits de convolution discrète dans le domaine fréquentiel.

Convolution linéaire et transformée de Fourier

Rappelons dans un premier temps que la transformée de Fourier $\tilde{f}(\omega)$ d'une fonction $f(t)$ est définie comme :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp^{-i\omega t} dt \quad (2.51)$$

La transformée de Fourier inverse, du domaine fréquentiel vers le domaine temporel d'une fonction $\tilde{f}(\omega)$ est elle définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp^{i\omega t} dt \quad (2.52)$$

La convolution linéaire continue $f(t)$ de deux fonctions $g(t)$ et $h(t)$, notée $g(t) * h(t)$ s'écrit sous la forme :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (2.53)$$

L'application de la transformée de Fourier (2.51) au produit de convolution (2.53) donne, par le théorème de convolution continue :

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega) \quad (2.54)$$

Il apparaît alors que le calcul du produit de convolution peut être substitué par le calcul de la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier.

Les définitions précédentes sont transposables au cas des produits de convolution discrète. Nous définirons ainsi, sur un domaine à N valeurs et sous écriture indicielle, le produit de convolution discrète :

$$f_j = \sum_{r=0}^{N-1} g_r \cdot h_{j-r}, \quad j = [0, N-1] \quad (2.55)$$

La transformée de Fourier discrète et sa forme inverse s'écrivent :

$$\hat{f}_s = \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cdot \exp^{-2i\pi rs/N}, \quad s = [0, N-1] \quad (2.56)$$

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \hat{f}_r \cdot \exp^{2i\pi rj/N}, \quad j = [0, N-1] \quad (2.57)$$

Le théorème de convolution discrète s'écrit alors :

$$\hat{f}_s = \hat{g}_s \cdot \hat{h}_s, \quad s = [0, N-1] \quad (2.58)$$

Il est à noter que la convolution discrète introduit une périodicité implicite pour couvrir les cas où le terme $j - r$ est négatif. Cette périodicité est source d'un problème qui sera traité dans le paragraphe suivant.

L'utilisation de la transformée de Fourier rapide ou Fast-Fourier Transform (FFT) ainsi que de la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) permettent une réduction du coût de la transformation en terme de nombres d'opérations. Cette méthode, appliquée à notre problème de convolution discrète, devient très intéressante lorsque le nombre de points discrets devient important.

Zero-padding et Wrap-around order

Comme mentionné dans le paragraphe précédent, le produit de convolution discrète introduit une périodicité dans le calcul. Or, le calcul du déplacement normal fait intervenir la pression et les coefficients d'influence qui ne sont ni l'un ni l'autre périodique. La périodicité cyclique de la pression introduite par la convolution entraîne un recouvrement par les coefficients d'influence K , comme illustré par la FIG.2.7a. La méthode dite de "zero-padding" permet de résoudre ce problème par l'extension des termes de N à $2N$ par ajout de zéros. Ainsi, le recouvrement est neutralisé comme le montre la FIG.2.7b.

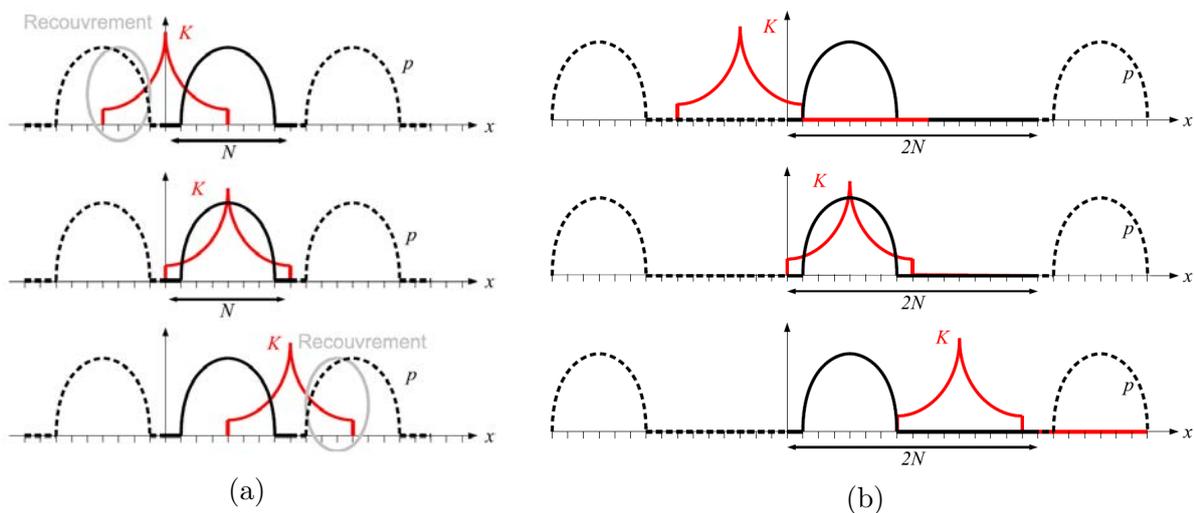


FIGURE 2.7 – Illustration du problème de recouvrement (a) et résolution par "zero-padding" (b), d'après [GAL 07].

Le "zero-padding" est appliqué à la pression. Les coefficients d'influence sont quant à eux étendus par "wrap-around order", c'est-à-dire en mettant le terme N à 0 et en remplissant les coefficients $N + 1$ à $2N - 1$ par symétrie ou antisymétrie suivant la parité de la fonction des coefficients d'influence. Cette méthode est illustrée sur la FIG.2.8 pour le cas pair et sur la FIG.2.9 pour le cas impair. Le "wrap-around order" permet l'économie du calcul des coefficients sur l'ensemble du domaine grâce aux propriétés de symétrie ou d'antisymétrie des coefficients et à la périodicité introduite par la transformée de Fourier.

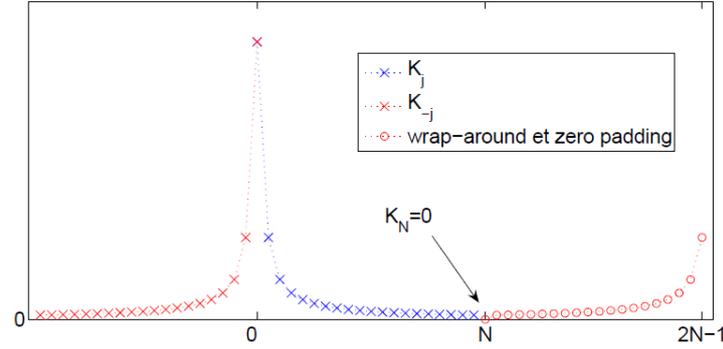


FIGURE 2.8 – Illustration de la méthode de "wrap-around order" dans le cas d'une fonction paire, d'après [GAL 07].

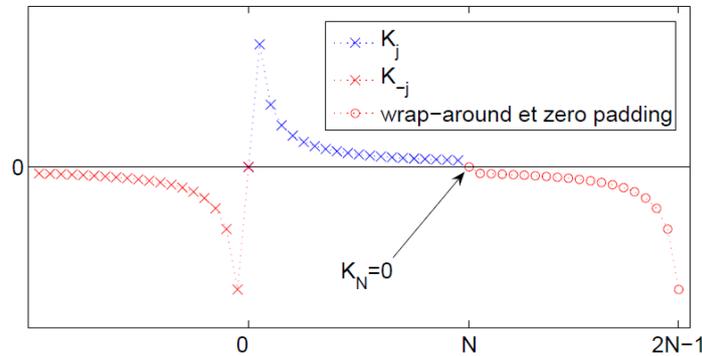


FIGURE 2.9 – Illustration de la méthode de "wrap-around order" dans le cas d'une fonction impaire, d'après [GAL 07].

Application au problème de contact normal

L'application de la méthode DC-FFT exposée par Liu et al. [LIU 00] au problème de contact normal est détaillée ci-dessous.

1. Calculer les coefficients d'influence $\{K_j\}_N$,
2. Étendre les coefficients d'influence par "zero-padding" et "wrap-around order", $\{K_j\}_{2N}$,
3. Faire la transformée de Fourier des coefficients d'influence, $\{\hat{K}_s\}_{2N}$,
4. Définir les pressions $\{p_j\}_N$,
5. Étendre les pressions par "zero-padding", $\{p_j\}_{2N}$,
6. Faire la transformée de Fourier de la pression, $\{\hat{p}_s\}_{2N}$,
7. Effectuer le produit des termes de pression et de coefficients d'influence dans le domaine fréquentiel, $\{\hat{u}_s\}_{2N}$,
8. Faire la transformée de Fourier inverse du déplacement, $\{u_j\}_{2N}$,
9. Conserver les termes u_j pour $j \in [0, N - 1]$

2.3.4.2 Algorithme du gradient conjugué

L'algorithme du gradient conjugué est une méthode itérative de résolution de système d'équation proposée par Hestenes [HES 78] et particulièrement bien adaptée au système linéaire de type :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.59)$$

avec A une matrice de taille $N \times N$ symétrique définie positive. Ce problème est équivalent à la minimisation de la forme quadratique suivante :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad (2.60)$$

Le gradient conjugué permet donc également la résolution des problèmes de minimisation de formes quadratiques convexes.

La méthode étant itérative, la solution est obtenue à partir des vecteurs direction de descente \mathbf{d}_k successifs. Il vient alors :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (2.61)$$

La méthode du gradient conjugué est dérivée de la méthode des directions conjuguées. Les vecteurs \mathbf{d}_k sont conjugués par rapport à l'application linéaire définie par \mathbf{A} , d'où $\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0$ lorsque $i \neq j$.

Le gradient conjugué est une méthode exacte permettant la minimisation de Φ en N itérations, mais surtout, la convergence de la méthode est très rapide sur les premières itérations. Nous pouvons donc, au prix d'une approximation, réduire drastiquement le coût de calcul de la solution. De plus, les directions de descente \mathbf{d}_k sont obtenues par combinaison linéaire de \mathbf{d}_{k-1} et du résidu \mathbf{r}_k de (2.59) comme détaillé par (2.62). Le stockage nécessaire pour la résolution est donc limité.

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1} \quad (2.62)$$

L'algorithme du gradient conjugué exact se présente comme suit :

Initialisation : $\mathbf{r}_0 \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{d}_0 \leftarrow \mathbf{r}_0$, $k \leftarrow 0$

while $\mathbf{r}_k \neq 0$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (2.64)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} \leftarrow \mathbf{r}_k + \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{d}_k \quad (2.65)$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{d}_{k+1} \leftarrow -\mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{d}_k \quad (2.67)$$

$$k \leftarrow k + 1 \quad (2.68)$$

end while

2.3.4.3 Résolution du problème de contact normal

Polonsky et Keer [POL 99] propose un algorithme de résolution du problème par le gradient conjugué et l'utilisation des formulations variationnelles décrites précédemment. On rappelle l'expression du problème sous forme variationnelle ainsi que sa forme après application des conditions de KKT.

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{p} + c_\tau \right\} \Leftrightarrow \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} - \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.69)$$

$$p_{ij} > 0, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad (2.70)$$

$$p_{ij} = 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad (2.71)$$

L'application de l'algorithme du gradient conjugué à la partie droite de l'équation (2.69) ainsi que l'application des conditions de complémentarités permet de trouver la distribution de pression satisfaisant le problème. En cas de pilotage en effort, une estimation de δ_z est nécessaire à la résolution. Cette estimation est donnée par :

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \delta_z = \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} (\bar{u}_{z,ij}^p + \bar{u}_{z,ij}^q + h_{0,ij}) \quad (2.72)$$

L'algorithme de résolution du problème de contact normal suit les étapes ci-dessous :

1. Initialisation de \mathbf{p} devant respecter l'équilibre de la charge. Toute la zone potentielle de contact Γ_p est supposée en contact, soit $\lambda_{ij} = 0$. Une variable ξ est initialisée à 0;

2. Calcul de $\bar{\mathbf{u}}_z^p$ par DC-FFT.

En cas de calcul en effort imposé, δ_z est approché par l'équation (2.72) ;

3. Calcul de la séparation des corps dans la zone courante de contact Γ'_c . Il s'agit également du résidu de l'équation linéaire à résoudre (2.69).

$$g_{ij} = \bar{u}_{z,ij}^p + h_{ij}^* \quad (2.73)$$

4. Application du gradient conjugué et calcul de la direction de descente à partir de (2.66) et (2.67) :

$$d_{ij} \leftarrow -g_{ij} + \xi \frac{G}{G_{old}} d_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma'_c \quad (2.74)$$

$$d_{ij} \leftarrow 0, \quad (i, j) \notin \Gamma'_c \quad (2.75)$$

avec, $G = \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} g_{ij}^2$

$$G_{old} \leftarrow G \quad (2.76)$$

$$\xi = 1 \quad (2.77)$$

5. Application de la DC-FFT au calcul de $\mathbf{r}_z^p = \mathbf{A}_z^p \mathbf{d}$ pour le calcul du pas de descente (2.63) :

$$\alpha = \frac{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} g_{ij}^2}{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} d_{ij} r_{ij}} \quad (2.78)$$

6. Mise à jour des pressions selon (2.65) :

$$p_{ij} \leftarrow p_{ij} + \alpha d_{ij} \quad (2.79)$$

7. Vérification des conditions de complémentarité :

Si $p_{ij} < 0$, $(i, j) \in \Gamma'_c$ alors $p_{ij} \leftarrow 0$, $\Gamma'_c \leftarrow \Gamma'_c \setminus (i, j)$

Si $\lambda_{ij} < 0$, $(i, j) \notin \Gamma'_c$ alors $p_{ij} \leftarrow -\alpha g_{ij}$, $\xi \leftarrow 0$, $\Gamma'_c \leftarrow \Gamma'_c \cup (i, j)$

8. Forçage de l'équilibre de la charge :

$$\forall (i, j) \in \Gamma'_c \quad p_{ij} \leftarrow p_{ij} + \frac{W}{\sum_{(i,j) \in \Gamma_p} p_{ij} \Delta x \Delta y} \quad (2.80)$$

9. Calcul du critère de convergence :

$$\varepsilon = \frac{\sum_{(i,j) \in \Gamma_p} (p_{ij} - p_{old,ij})}{\sum_{(i,j) \in \Gamma_p} p_{ij}} \quad (2.81)$$

Stockage des pressions, $\mathbf{p}_{old} \leftarrow \mathbf{p}$

La variable ξ permet la réinitialisation de l'algorithme de gradient conjugué dans l'éventualité où un nouveau point est ajouté à la zone courante de contact Γ'_c . En effet, l'ajout d'un nouveau point modifie complètement le jeu de direction de descente et nécessite donc de reprendre le calcul des directions de descente depuis le début. L'algorithme est répété tant que le critère de convergence reste supérieur à une valeur seuil ε_0 définie.

2.3.4.4 Résolution du problème de contact tangentiel en glissement partiel

La résolution du problème de contact tangentiel en glissement partiel, c'est-à-dire lorsque $\|\mathbf{Q}\| \leq \mu P$ s'appuie sur les mêmes mécanismes que celle du problème de contact normal. Rappelons la formulation variationnelle du problème de contact tangentiel :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{q} + c_p \right\} \Leftrightarrow \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} + \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{x,ij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{x,ij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (2.82)$$

$$\|\mathbf{q}_{ij}\| < \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad (2.83)$$

$$\|\mathbf{q}_{ij}\| = \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad (2.84)$$

La partie droite de l'équation (2.82) peut se réécrire sous la forme $(\mathbf{A}_\tau^q + \mathbf{B})\mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} = 0$, avec \mathbf{B} la matrice diagonale de terme $\frac{\lambda_{ij}}{\mu p_{ij}}$.

Dans le cadre du problème tangentiel, les multiplicateurs de Lagrange sont donnés par $\lambda_{ij} = -\|\mathbf{s}_{ij}\| \cdot \text{signe}(\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij})$. La résolution du problème dans le cas d'un pilotage en effort nécessite l'estimation de $\Delta\delta_x$ et $\Delta\delta_y$. Ces estimations sont données par :

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \Delta\delta_x = \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \left(\Delta\bar{u}_{x,ij} + \lambda_{ij} \frac{q_{x,ij}^t}{\mu p_{ij}} \right) \quad (2.85)$$

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \Delta\delta_y = \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \left(\Delta\bar{u}_{y,ij} + \lambda_{ij} \frac{q_{y,ij}^t}{\mu p_{ij}} \right) \quad (2.86)$$

Enfin, le forçage de l'équilibre des charges est réalisé uniquement dans la zone d'adhérence Γ'_{st} dans la mesure où la loi de Coulomb fixe la valeur de \mathbf{q} dans la zone de glissement :

$$\forall (i, j) \in \Gamma'_{st} \quad q_{x,ij} \leftarrow q_{x,ij} + \frac{Q_x - \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} q_{x,ij} \Delta x \Delta y}{N_{st}} \quad (2.87)$$

$$\forall (i, j) \in \Gamma'_{st} \quad q_{y,ij} \leftarrow q_{y,ij} + \frac{Q_y - \sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} q_{y,ij} \Delta x \Delta y}{N_{st}} \quad (2.88)$$

où N_{st} est le nombre de points dans la zone d'adhérence Γ'_{st} .

L'algorithme de résolution du problème de contact tangentiel en glissement partiel suit les étapes ci-dessous :

1. Initialisation de \mathbf{q} devant respecter l'équilibre de la charge. Toute la zone de contact est supposée en adhérence, soit $\lambda_{ij} = 0$. Une variable ξ est initialisée à 0. En cas de couplage entre le problème normal et le problème tangentiel, la DC-FFT est appliquée au calcul de $\bar{\mathbf{u}}_\tau^p$;

2. Calcul de $\Delta\bar{\mathbf{u}}_\tau^q$ par DC-FFT.

En cas de calcul en effort imposé, $\Delta\delta_x$ et $\Delta\delta_y$ sont approchés par les équations (2.85) et (2.86) ;

3. Calcul du glissement :

$$\mathbf{s} = \Delta\bar{\mathbf{u}}_\tau^q + \Delta\bar{\mathbf{u}}_\tau^p + \Delta\boldsymbol{\delta}_\tau \quad (2.89)$$

4. Calcul des multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_{ij} = - \|\mathbf{s}_{ij}\| \cdot \text{signe}(\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij}) \quad (2.90)$$

5. Contrôle des conditions de complémentarités sur les multiplicateurs de Lagrange :

Si $\lambda_{ij} < 0$, alors $\lambda_{ij} = 0$, $\Gamma'_{st} \leftarrow \Gamma'_{st} \setminus (i, j)$ et $\xi = 0$

Calcul de l'erreur de non-colinéarité des vecteurs cisaillement et glissement dans la zone de glissement :

$$\varepsilon_{sl} = \frac{\sum_{\Gamma'_{sl}} \left\| \mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right\|}{\sum_{\Gamma'_{sl}} \lambda_{ij}} \quad (2.91)$$

6. Application du gradient conjugué et calcul de la direction de descente à partir de (2.66) et (2.67) :

$$\forall (i, j) \in \Gamma'_{st} \quad \mathbf{d}_{ij} \leftarrow \mathbf{s}_{ij} + \xi \frac{G}{G_{old}} \mathbf{d}_{ij} \quad (2.92)$$

$$\forall (i, j) \in \Gamma'_{sl} \quad \mathbf{d}_{ij} \leftarrow \mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} + \xi \frac{G}{G_{old}} \mathbf{d}_{ij} \quad (2.93)$$

avec,

$$G = \sum_{\Gamma'_c} \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right) \cdot \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right) \quad (2.94)$$

$$G_{old} \leftarrow G \quad (2.95)$$

$$\xi = 1 \quad (2.96)$$

7. Application de la DC-FFT au calcul de $\mathbf{r}_\tau^q = \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{d}$ puis $\mathbf{r}_\tau^q = \mathbf{r}_\tau^q + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\mu p_{ij}}$.
 Calcul du pas de descente : (2.63)

$$\alpha = \frac{\sum_{\Gamma'_c} \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right) \cdot \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right)}{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{r}_{ij}} \quad (2.97)$$

8. Mise à jour des cisaillements selon (2.65) :

$$\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mathbf{q}_{ij} + \alpha \mathbf{d}_{ij} \quad (2.98)$$

9. Vérification des conditions de complémentarité :

Si $\|\mathbf{q}_{ij}\| > \mu p_{ij}$, $(i, j) \in \Gamma'_{st}$ alors $\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mu p_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\|\mathbf{q}_{ij}\|}$, $\Gamma'_{st} \leftarrow \Gamma'_c \cup (i, j)$, $\xi \leftarrow 0$.

10. Forçage de l'équilibre de la charge par les équations (2.87) et (2.88) ;

11. Calcul du critère de convergence :

$$\varepsilon_c = \frac{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \sqrt{(q_{x,ij} - q_{x,old,ij})^2 + (q_{y,ij} - q_{y,old,ij})^2}}{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} \sqrt{q_{x,ij}^2 + q_{y,ij}^2}} \quad (2.99)$$

Stockage des cisaillements, $\mathbf{q}_{old} \leftarrow \mathbf{q}$

La variable ξ permet la réinitialisation de l'algorithme de gradient conjugué dans l'éventualité où un point passe de la zone d'adhérence à la zone de glissement ou inversement.

2.3.4.5 Résolution du problème de contact tangentiel en glissement total

La problématique posée par la condition de glissement total est la quantification du déplacement de corps rigide $\Delta \delta_\tau$. Ainsi, en cas de pilotage en déplacement, le contact tangentiel en glissement total est résolu de manière identique au contact en glissement partiel. La résolution du problème en pilotage en effort nécessite un traitement particulier qui ne sera pas exposé ici. Pour plus d'informations, le lecteur est renvoyé vers les travaux de Gallego [GAL 07].

2.3.5 Schéma global de l'outil de calcul

Le solveur semi-analytique utilisé permet la résolution du problème de contact normal et du problème de contact tangentiel par les méthodes exposées précédemment. La résolution du problème de contact fournit les champs de pression et de cisaillements en surface. Par l'intermédiaire de l'équation (2.16) et des coefficients d'influence détaillés en Annexe B, ces champs permettent à leur tour le calcul des contraintes élastiques dans le massif semi-infini. Dans le cadre d'un calcul élasto-plastique, un algorithme de "*return mapping*" est employé pour le calcul des déformations plastiques et des déplacements résiduels qu'elles provoquent en surface [BOU 08, CHA 11, AMU 16]. Un bouclage est alors mis en place pour assurer que le problème de contact est bien résolu sur la géométrie déformée plastiquement.

Le solveur semi-analytique propose également d'autres fonctionnalités, non utilisées et donc non abordées ici, telles que le calcul en présence d'hétérogénéités [AMU 16] ou la prise en compte de la visco-élasticité [KOU 15].

Un schéma global du fonctionnement du solveur est illustré sur la FIG.2.10.

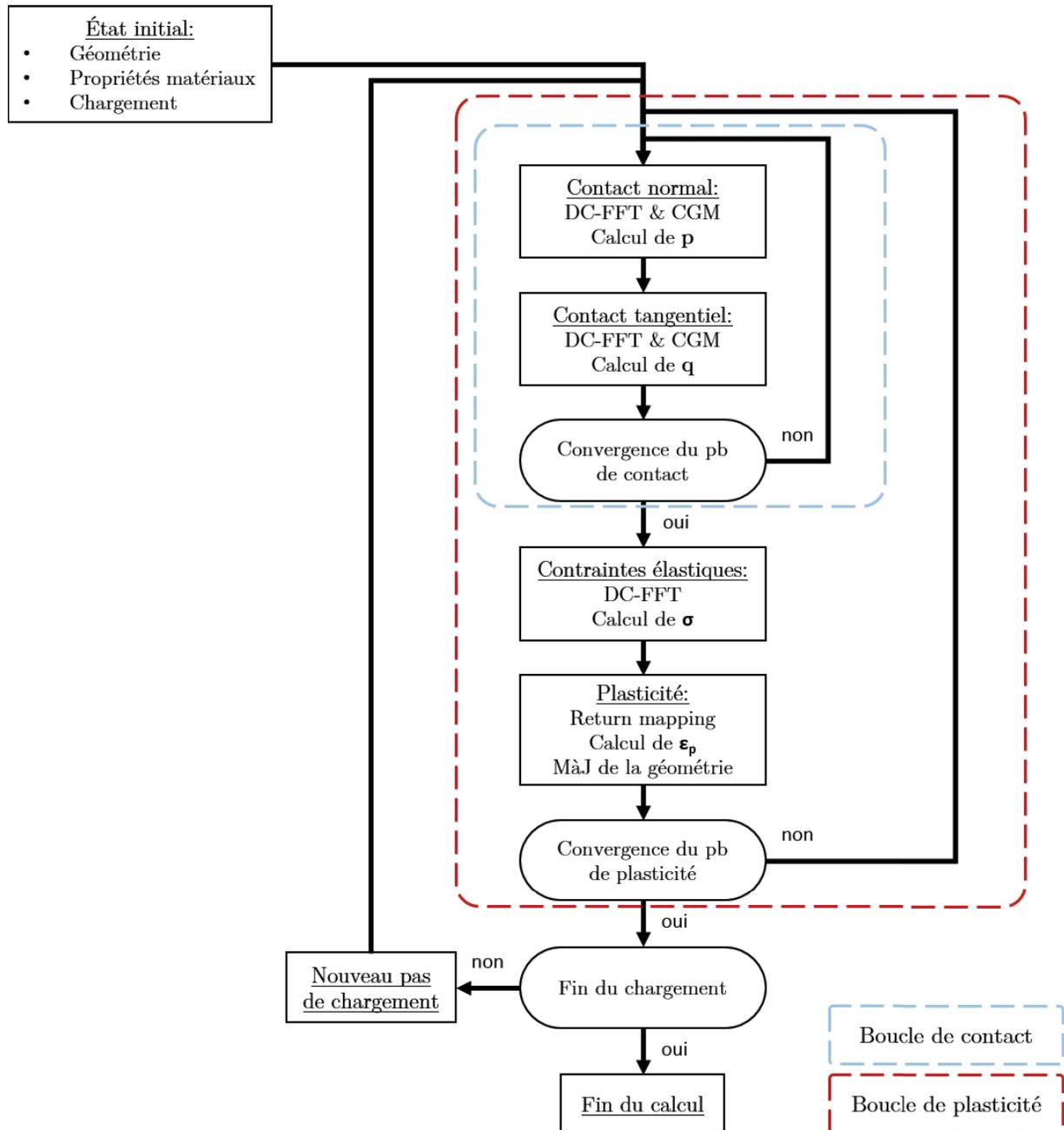


FIGURE 2.10 – Schéma global du fonctionnement du solveur semi-analytique.

2.4 Définition des critères et des variables utiles

2.4.1 Variables utiles

L'utilisation de critères de fatigue nécessite au préalable la définition de variables issues des tenseurs de contraintes ou de déformations. Les variables utilisées lors de ces travaux sont présentées ci-après.

2.4.1.1 Invariants de contraintes

Considérons un volume de matière soumis à un tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Le tenseur se décompose en une partie déviatorique \mathbf{s} et une partie hydrostatique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_H \mathbf{I}_3 \quad (2.100)$$

où \mathbf{I}_3 est la matrice identité. La contrainte hydrostatique σ_H est le premier invariant de contrainte et est définie par :

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.101)$$

Sur un cycle de chargement, la contrainte hydrostatique maximale ainsi que la contrainte hydrostatique moyenne sont définies comme :

$$\sigma_{H,max} = \max_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} \quad (2.102)$$

$$\sigma_{H,moy} = \frac{1}{2} \left\{ \max_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} + \min_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} \right\} \quad (2.103)$$

Le tenseur déviatorique des contraintes \mathbf{s} sert à la définition du second invariant de contraintes, noté J_2 :

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad (2.104)$$

Sur un cycle de chargement, le tenseur déviatorique peut être décomposé comme la somme d'une partie moyenne, \mathbf{s}_{moy} , et d'une partie alternée, \mathbf{s}_a . Il vient alors :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_a(t) + \mathbf{s}_{moy} \quad (2.105)$$

Le tenseur déviatorique est défini dans un espace Euclidien de dimension 6 et décrit au cours d'un cycle une courbe dans cet espace. La définition de sa valeur moyenne, \mathbf{s}_{moy} , et de sa partie alternée \mathbf{s}_a est alors non triviale et passe par la recherche de la plus petite hypersphère de dimension 6 circonscrite à la courbe. Le centre de cette hypersphère est \mathbf{s}_{moy} et son rayon est s_a .

$$\mathbf{s}_{moy} = \min_{\mathbf{s}'} \{ \max_t \{ \| \mathbf{s}(t) - \mathbf{s}' \| \} \} \quad (2.106)$$

$$s_a = \max_t \{ \| \mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_m \| \} \quad (2.107)$$

La recherche du centre et du rayon de l'hypersphère peut se faire via des algorithmes de minimisation, notamment ceux disponibles dans les logiciels commerciaux tels que MatlabTM, ou par l'utilisation d'un algorithme dédié. Welzl [WEL 91] propose un algorithme permettant de déterminer de manière exacte le centre et le rayon de la plus petite sphère circonscrite à une courbe jusqu'en dimension 3. Gärtner [GÄR 99] étend l'algorithme aux hypersphères de dimension $n \leq 10$.

Nous définirons alors l'amplitude du second invariant de contraintes, $J_{2,a}$, comme :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{2} s_a} \quad (2.108)$$

Enfin, par application du critère de Tresca sur la partie alternée du tenseur des contraintes déviatoriques, \mathbf{s}_a , le composant τ_{pr} est défini comme :

$$\tau_{pr}(t) = \frac{1}{2} (s_{1,a}(t) - s_{3,a}(t)) \quad (2.109)$$

où $s_{1,a}(t)$ et $s_{3,a}(t)$ sont respectivement les valeurs principales maximale et minimale du tenseur $\mathbf{s}_a(t)$.

2.4.1.2 Variables agissant sur un plan

Considérons à nouveau un volume élémentaire de matière soumis au tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi qu'un plan (Δ) de normal \vec{n} . Le vecteur de contraintes agissant sur le plan, noté \mathbf{S}_n est défini par :

$$\mathbf{S}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (2.110)$$

Ce vecteur peut se décomposer en un vecteur de contrainte normale, \mathbf{N} , et un vecteur de contrainte de cisaillement, \mathbf{C} . Ces vecteurs sont illustrés sur la FIG.2.11 et sont définis comme suit :

$$\mathbf{N} = (\vec{n} \cdot \mathbf{S}_n) \vec{n} \quad (2.111)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_n - \mathbf{N} \quad (2.112)$$

La valeur moyenne, N_{moy} , et la valeur maximale, N_{max} , sur un cycle du vecteur de contrainte normale sont définies par :

$$N_{moy} = \frac{1}{2} \{ \max_t (\mathbf{N}(t)) + \min_t (\mathbf{N}(t)) \} \quad (2.113)$$

$$N_{max} = \max_t (\mathbf{N}(t)) \quad (2.114)$$

Au cours d'un cycle, le vecteur de cisaillement \mathbf{C} décrit une courbe sur le plan (Δ) comme le montre la FIG.2.12. Tout comme pour le tenseur de contraintes déviatoriques, la recherche de la valeur moyenne et de la partie alternée du vecteur \mathbf{C} passe par la recherche de la plus petite sphère circonscrite à cette courbe. Nous définirons \mathbf{C}_m , valeur moyenne de \mathbf{C} , comme le centre de cette sphère et C_a comme son rayon.

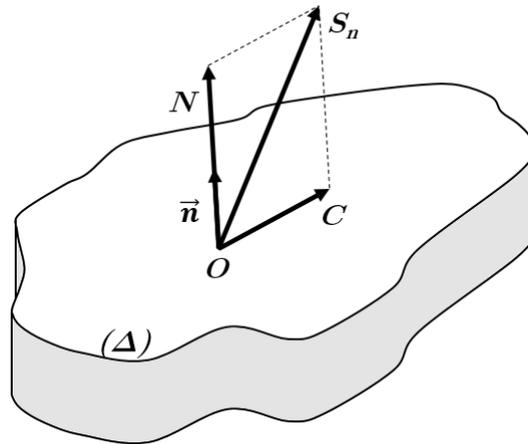


FIGURE 2.11 – Vecteur de contrainte normale \mathbf{N} et de cisaillement \mathbf{C} agissant sur un plan (Δ) .

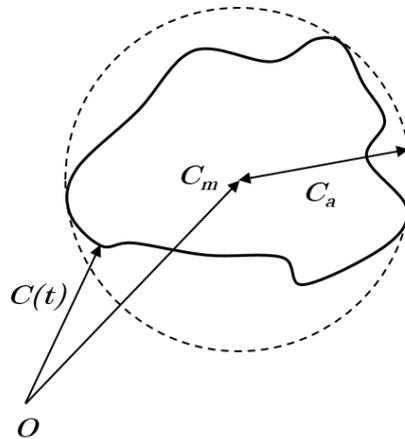


FIGURE 2.12 – Trajet de chargement décrit par \mathbf{C} au cours d'un cycle.

De manière analogue, considérant un tenseur de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, nous définirons le vecteur de déformations agissant sur le plan (Δ) comme :

$$\mathbf{E}_n = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \quad (2.115)$$

La décomposition de ce vecteur en une partie normale et une partie en cisaillement est identique à celle des contraintes :

$$\boldsymbol{\epsilon}_n = (\vec{n} \cdot \mathbf{E}_n) \vec{n} \quad (2.116)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{E}_n - \boldsymbol{\epsilon}_n \quad (2.117)$$

Nous noterons $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n$ l'amplitude du vecteur de déformation normale au plan :

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n = \frac{1}{2} \{ \max_t(\boldsymbol{\epsilon}_n(t)) - \min_t(\boldsymbol{\epsilon}_n(t)) \} \quad (2.118)$$

Enfin, la déformation en cisaillement maximale sur le cycle agissant sur le plan (Δ) est définie comme :

$$\gamma_{n,max} = \max_t(\boldsymbol{\gamma}_n(t)) \quad (2.119)$$

Il est à noter ici que la déformation de cisaillement maximale, tous plans confondus, à un instant t peut être calculée par l'intermédiaire des valeurs propres du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\gamma_{max} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{2} \quad (2.120)$$

où ε_1 et ε_3 sont respectivement les déformations principales maximale et minimale. De plus, cette déformation en cisaillement maximale se trouve sur deux plans orthogonaux de vecteurs normaux :

$$\vec{n}_1 = \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}{\|\vec{e}_1 + \vec{e}_3\|} \quad (2.121)$$

$$\vec{n}_2 = \frac{(\vec{e}_1 - \vec{e}_3)}{\|\vec{e}_1 - \vec{e}_3\|} \quad (2.122)$$

où \vec{e}_1 et \vec{e}_3 sont respectivement les directions principales maximale et minimale de $\boldsymbol{\epsilon}$.

2.4.2 Critères de fatigue à invariants de contraintes

Les critères de fatigue basés sur l'utilisation des invariants de contraintes présentent l'avantage d'être simple à mettre en place et rapide à calculer. Cependant, aucune information ne peut être obtenue concernant l'orientation des fissures de fatigue. Un premier critère à invariants de contraintes est proposé par Crossland [CRO 56]. Le critère met en jeu l'amplitude du second invariant de contraintes, $J_{2,a}$, ainsi que la contrainte hydrostatique maximale au cours du cycle, $\sigma_{H,max}$.

$$Cr = \sqrt{J_{2,a}} + \kappa \sigma_{H,max} \quad (2.123)$$

avec, $\kappa = 3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}$. La variable t_{-1} représente la limite d'endurance en torsion alternée et la variable f_{-1} la limite d'endurance en flexion alternée.

Un second critère à invariants de contraintes est le critère de Sines, dans sa version proposée par Sines et Oghi [SIN 81]. Son expression est similaire à celle du critère de Crossland (2.123) mais fait intervenir la contrainte hydrostatique moyenne plutôt que sa valeur maximale.

$$Si = \sqrt{J_{2,a}} + \kappa \sigma_{H,moy} \quad (2.124)$$

$$\text{avec, } \kappa = 3 \frac{t_{-1}}{f_0} - \sqrt{3}.$$

La limite de fatigue en flexion répétée, f_0 , étant difficile à obtenir dans la littérature, nous préférons utiliser l'alternative proposée par Papadopoulos et al. [PAP 97], $f_0 = f_{-1}/(1 + f_{-1}/\sigma_r)$. Il vient alors, $\kappa = \sqrt{3} \frac{f_{-1}}{\sigma_r}$, où σ_r est la limite de rupture en traction du matériau.

2.4.3 Critères de fatigue en contraintes

Le critère de Dang Van [VAN 84, VAN 89] est un critère très répandu dans l'industrie et existant sous deux versions. La première version du critère [VAN 84] fait appel à une recherche de plan critique qui, dans le cadre d'un problème 3D, s'avère extrêmement coûteuse. En 1989, Dang Van et al. [VAN 89] proposent une seconde version simplifiée du critère ne nécessitant pas de recherche de plan critique. Son expression est donnée ci-après :

$$DVII = \max_t \{ \tau_{pr}(t) + \alpha \sigma_H(t) \} \quad (2.125)$$

avec $\alpha = 3 \left(\frac{t_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right)$. La variable σ_{-1} représente la limite d'endurance en traction alternée.

L'emploi du composant τ_{pr} permet de définir deux plans orthogonaux sur lesquels le critère est trouvé. Cependant, aucun de ces plans ne peut être identifié comme plan critique puisque σ_H est invariant.

2.4.4 Critères de fatigue en déformations

Kandil et al. [KAN 82] proposent en 1982 une version modifiée du critère de Brown-Miller [BRO 73] prenant en compte les chargements non-proportionnels. Ce critère s'exprime comme suit :

$$BM = \frac{\Delta \gamma_{max}}{2} + \kappa \Delta \epsilon_n \quad (2.126)$$

où $\Delta \gamma_{max}$ est l'amplitude de la déformation en cisaillement dans le plan de cisaillement maximal et $\Delta \epsilon_n$ est l'amplitude de déformation normale à ce plan. La constante κ est ici

égale au rapport entre la limite élastique et la limite de fatigue du matériau [NEU 00],

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{\sigma_f}$$

Une autre version dérivée du critère de Brown-Miller originel est proposée par Fatemi et Socie [FAT 88]. Son expression est donnée par la formule :

$$FS = \gamma_{max} \left(1 + n \frac{\sigma_{n,max}}{\sigma_y} \right) \quad (2.127)$$

où, $\sigma_{n,max}$ est la contrainte normale maximum agissant sur le plan critique défini comme le plan de déformation en cisaillement maximale. La constante n est déterminée par corrélation d'essais de fatigue uniaxiaux et en torsion pure.

2.4.5 Critères énergétiques

Une autre catégorie de critères est la famille des critères énergétiques, dont l'un des plus répandus est le critère de Smith-Watson-Topper (SWT). Ce critère, notamment utilisé dans les problèmes de fretting fatigue, est proposé en 1970 par Smith et al. [SMI 70]. Son expression pour un chargement proportionnel est la suivante :

$$SWT = \sigma_{1,max} \frac{\Delta \varepsilon_1}{2} \quad (2.128)$$

où $\Delta \varepsilon_1$ est l'amplitude de la déformation principale maximale et $\sigma_{1,max}$ est la contrainte normale maximale au plan de déformation principale maximale. Dans le cadre d'un chargement non-proportionnel, les directions principales changent au cours du cycle et deux interprétations du critère sont alors possibles [SOC 87]. Le critère peut être calculé soit sur le plan qui maximise l'amplitude de déformation normale, soit sur le plan qui maximise le critère complet. Dans le cadre de ces travaux, c'est la première interprétation qui est choisie, donnant lieu à l'expression suivante :

$$SWT = \sigma_{n,max} \frac{\Delta \varepsilon_n}{2} \quad (2.129)$$

2.4.6 Paramètres de fatigue utilisés

Les paramètres de fatigue utilisés dans les critères présentés précédemment sont tirés de la littérature et sont résumés dans le TAB.2.1.

L'acier AISI 52100 a fait l'objet de nombreuses études sur la fatigue. Les travaux de Shiozawa et al. [SHI 01] sur le SUJ2, l'équivalent japonais du AISI 52100, ont montrés l'existence d'un palier dans la relation entre la limite de fatigue en flexion rotative et le nombre de cycles à la rupture entre 10^4 et 10^7 cycles. Ce palier est bien visible sur le graphe présenté par la FIG.2.13 et est causé par le passage d'un mode de fatigue surfacique à un mode de fatigue sur inclusion. La limite de fatigue en torsion alternée, étudiée notamment par Shimizu et al. [SHI 09], évolue quant à elle de manière continue avec le nombre de cycles. Ainsi, sur l'intervalle de nombres de cycles allant de 10^4 à 10^7 cycles, le rapport

t_{-1}/f_{-1} varie de 0,8 à 0,4 et la constante κ du critère de Crossland de 0,7 à -0,5. La variation étant significative, il est impossible de définir une valeur pour le paramètre de Crossland à partir de la limite en flexion alternée pour l'acier AISI 52100.

L'analyse des paramètres de fatigue d'autres aciers durs utilisés dans de nombreuses études [PAP 97, KIM 03, GON 05, LIU 05] montre que le rapport t_{-1}/f_{-1} se situe dans l'intervalle 0,6-0,7 et le rapport f_{-1}/σ_r dans l'intervalle 0,35-0,5. En conséquence, les calculs des critères de Crossland et Sines seront réalisés en prenant les ratios $t_{-1}/f_{-1} = 0,65$ et $f_{-1}/\sigma_r = 0,4$.

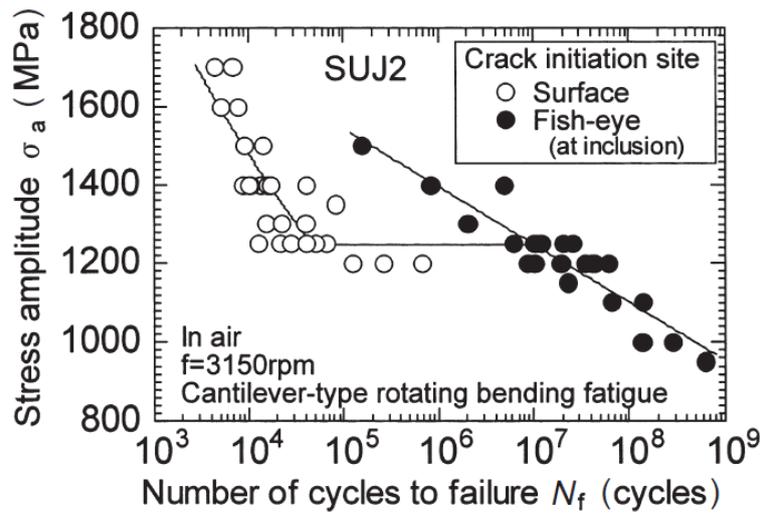


FIGURE 2.13 – Amplitude de la contrainte en fonction du nombre de cycles à la rupture pour l'acier SUJ2 (équivalent AISI 52100), d'après [SHI 01].

Critère	Paramètres	Références
Crossland	$\kappa = 0,22$	[PAP 97]
Sines	$\kappa = 0,69$	[PAP 97]
Dang Van II	$\alpha = 0,232$	[MOR 11a]
Brown-Miller	$\kappa = 2$	[SU 06, GAB 12]
Fatemi-Socie	$n = 1 ; \sigma_y = 1712 \text{ MPa}$	[HIR 11, SU 06]

TABLEAU 2.1 – Paramètres de fatigue utilisés pour le calcul des critères.

2.5 Étude comparative des critères de fatigue

Les critères présentés précédemment sont appliqués sur des cycles de roulement sur indent en présence de glissement. La pertinence d'un critère dans le cadre de ce problème de fatigue sera jugée sur sa capacité à prédire l'apparition des micro-fissures observées dans la littérature, notamment par Diab et al. [DIA 03] (FIG.2.3). Nous chercherons donc un critère mettant en valeur les sites d'amorçage de ces fissures et, lorsque c'est possible, donnant l'orientation correcte du plan critique. Nous rappellerons enfin que les calculs menés ici, notamment l'orientation du plan critique, ne portent que sur la phase d'amorçage des fissures. Ils ne présument en rien de son évolution durant la phase de propagation dans la mesure où la présence d'une fissure modifie l'état de contrainte à son voisinage.

Une synthèse des zones d'amorçage de fissures ainsi que les conventions de sens de roulement et de frottement pour les figures de cette section est donnée sur la FIG.2.14.

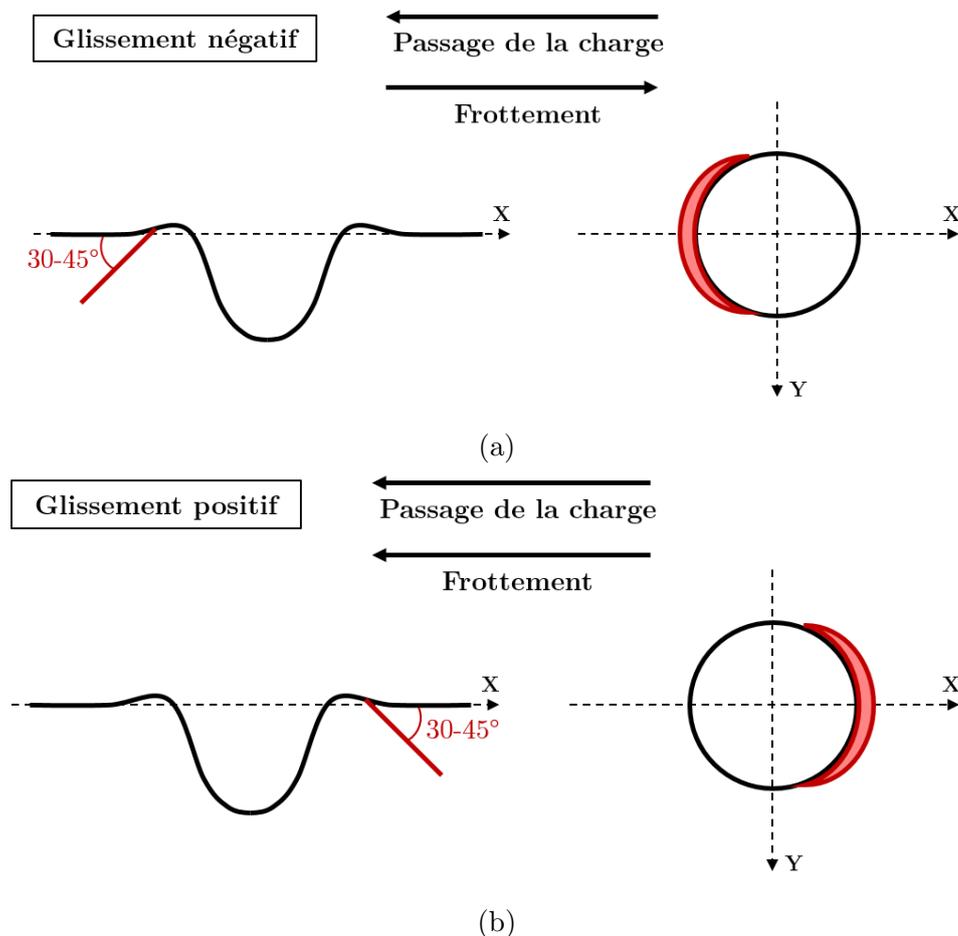


FIGURE 2.14 – Définition des sens de roulement et de frottement ainsi que des zones d'initiation de fissures en glissement négatif (a) et positif (b).

2.5.1 Définition des conditions de l'étude

L'étude de la fatigue des surfaces indentées, qu'elle soit expérimentale [VIL 99b, NEL 00, DIA 03, COU 05] ou numérique [WAR 10, MOR 11b, MOR 15a, GOL 19], est majoritairement réalisée sur la base d'indents artificiels. Le but est ici de généraliser les résultats, de garantir la répétabilité, mais aussi de ne pas créer de sites préférentiels d'amorçage de fatigue de manière involontaire. L'étude comparative des critères de fatigue est donc également menée sur une surface indentée artificiellement. L'indent est réalisé numériquement à l'aide d'un modèle éléments finis axisymétrique et présente des dimensions très proches de l'indent nominal du chapitre précédent. La géométrie de l'indent est visible sur la FIG.2.16a. Le tenseur des déformations plastiques de la surface indentée est importé du modèle éléments finis vers le solveur semi-analytique. Les déplacements résiduels calculés à partir de ce tenseur permettent alors de recréer la géométrie de l'indent. Les contraintes résiduelles d'indentation sont également importées. Les paramètres utiles à l'étude de ce contact cylindre-plan en acier AISI 52100 sont donnés dans le TAB.2.2.

Le comportement plastique de l'acier AISI 52100 est modélisé par la loi d'écrouissage isotrope de Ramberg-Osgood, dont l'expression est donnée par l'équation (2.130). Cette loi s'apparente à une simplification de la loi de Johnson-Cook utilisée au chapitre précédent. Les paramètres communs sont d'ailleurs pris identiques à ceux des travaux sur l'indentation et sont rappelés dans le TAB.2.2.

$$\sigma_y(\varepsilon_p) = A + B(\varepsilon_p)^n \quad (2.130)$$

Paramètres		Valeur
Rayons	R_x / R_y (mm)	5 / 500
Module de Young	E (GPa)	201
Chargement	W (N)	W_0
Pression de Hertz	P_h (GPa)	P_0
Demi-largeur de contact	a (μm)	$1,35 \phi_p$
Coefficient de frottement	μ	0,1
Diamètre de l'indent	ϕ_{indent} (μm)	$2,14 \phi_p$
Hauteur initiale du bourrelet	$h_{b,0}$ (μm)	$0,72\% \phi_p$
Profondeur de l'indent	h_{indent} (μm)	$10,7\% \phi_p$

TABLEAU 2.2 – Paramètres des simulations de roulement sur indent artificiel.

En plus du roulement pur, deux cas de chargement en glissement pur positif et négatif sont considérés. En effet, les travaux de Diab et al. [DIA 03] ont montré que le glissement est un catalyseur de la fatigue en présence d'indent et détermine la localisation des fissures. Les critères seront donc comparés sur la base de ces conditions critiques.

Le calcul des critères de fatigue nécessite d'effectuer un cycle complet de chargement sur l'indent. Ainsi, la position initiale de la charge ainsi que la distance de roulement sont déterminées de sorte qu'en positions initiale et finale, les contraintes résiduelles d'indentation et les contraintes de chargement ne se superposent pas. Ce principe est illustré sur

la FIG.2.15. La limite de ces zones de contraintes est définie comme la frontière au-delà de laquelle la contrainte de von Mises est inférieure à 1% de sa valeur maximale dans la zone. Le calcul est réalisé avec une discrétisation spatiale de $\phi_p/10$ dans les trois directions de l'espace, comme pour les simulations d'indentation. Ce faisant, la grille du problème de contact compte 305×503 points. Le calcul des contraintes est effectué sur un volume réduit centré sur l'indent et comptant $105 \times 105 \times 55$ points. Ce volume englobe la zone de contraintes résiduelles d'indentation. Dans ces conditions, le calcul d'un cycle de roulement complet nécessite environ 10 heures sur un processeur de 2,2 GHz. Le passage de la charge sur l'indent est détaillé en Annexe C.

Le calcul des critères est réalisé en post-traitement avec le logiciel Matlab™. À l'exception du critère SWT, les critères à plan critique sélectionnés permettent l'obtention de ce plan par les directions principales des tenseurs de déformations ou de contraintes, ce qui réduit fortement les temps de calcul. Le calcul des critères est également réalisé par plan et non pas sur le volume complet. En effet, malgré la méthode de détermination des plans critiques, les durées de calcul restent élevées. Il faut ainsi compter une dizaine de minutes pour le calcul du seul critère de Dang Van II sur le plan $X = 0$ comptant 105×55 points.

Les premiers cycles de passage de charge sur l'indent engendrent des déformations plastiques se traduisant par une modification sensible de la géométrie. Ces modifications sont illustrées sur les profils en roulement pur (FIG.2.16a et 2.16b), en glissement négatif (FIG.2.16c et 2.16d) et en glissement positif (FIG.2.16e et 2.16f). L'accumulation des déformations plastiques est détaillée en Annexe C. Notons que la modification de la géométrie de l'indent au cours des premiers cycles dépend du type de chargement. Ainsi, un chargement en roulement pur atténue les bourrelets de manière équivalente autour de l'indent (FIG.2.16b). En revanche, l'introduction de glissement entraîne une atténuation supérieure du bourrelet dans la direction opposée au frottement (FIG.2.16d et FIG.2.16f). Le calcul des critères est donc systématiquement précédé d'une phase de rodage des sur-

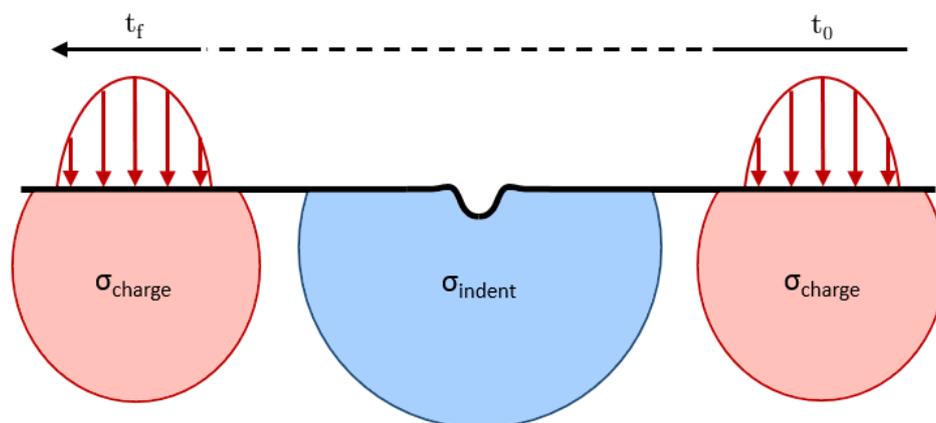


FIGURE 2.15 – Séparation des zones de contraintes de chargement et d'indentation.

2. Fatigue des surfaces indentées

faces permettant la stabilisation de la géométrie de l'indent. Cette phase est ici de 10 cycles et se fait dans les conditions de roulement ou de glissement identiques à celles du calcul des critères.

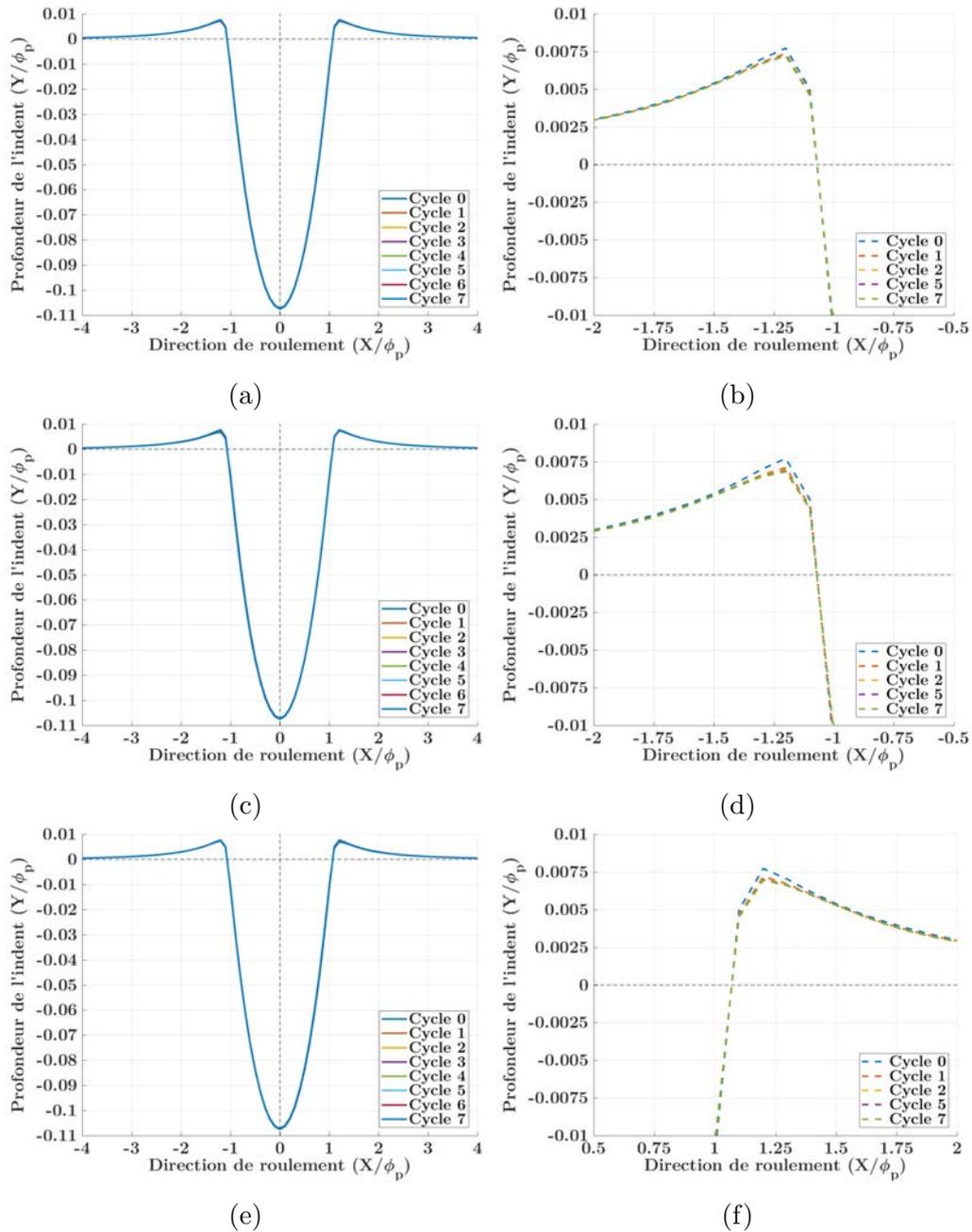


FIGURE 2.16 – Évolution du profil de l'indent au cours des premiers cycles de roulement après indentation en roulement pur (a,b), glissement négatif (c,d) et glissement positif (e,f) pour un coefficient de frottement $\mu = 0,1$.

La méthode complète de calcul des critères de fatigue appliquée aux surfaces indentées est explicitée sur la FIG.2.17.

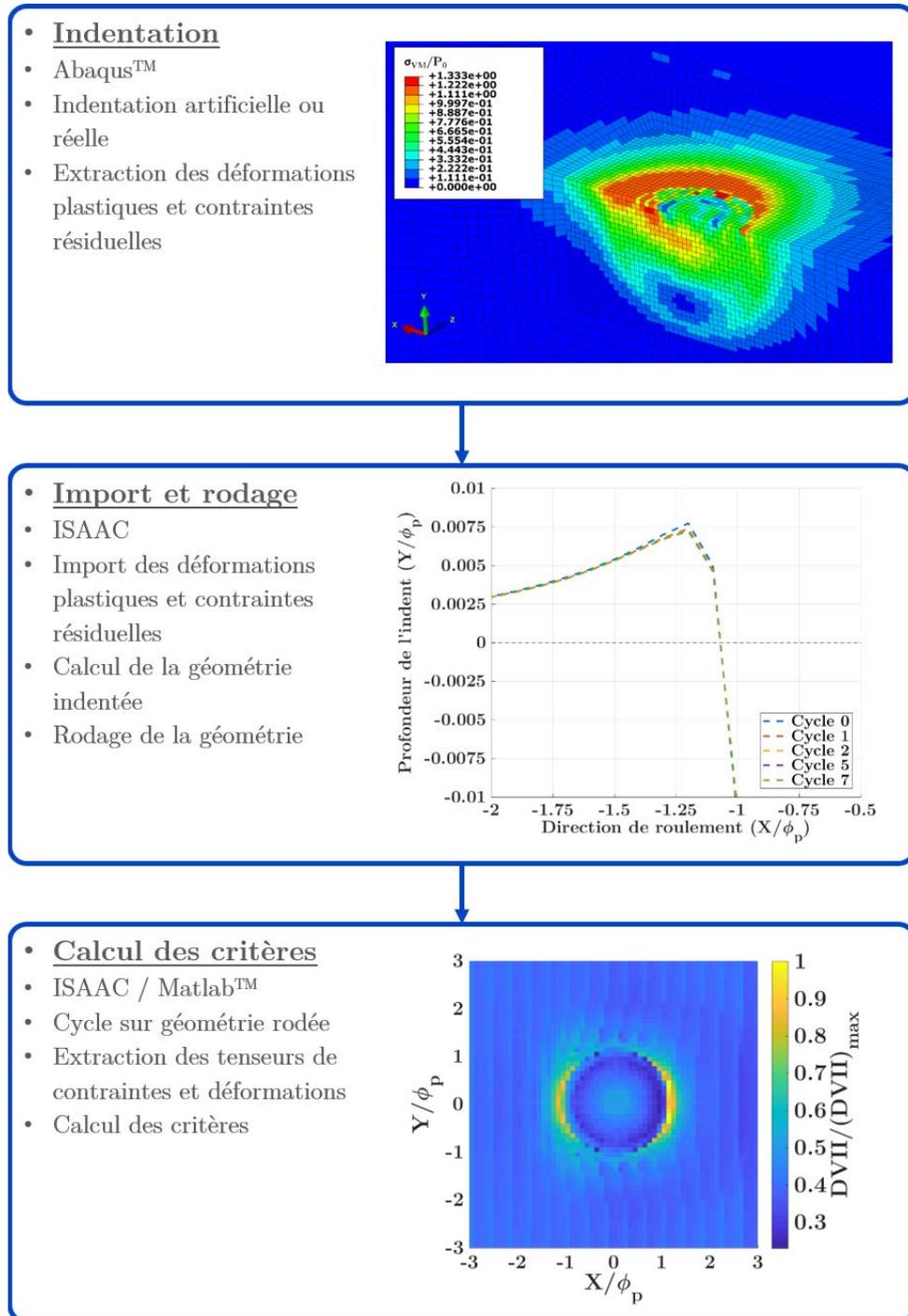


FIGURE 2.17 – Méthode de calcul des critères de fatigue appliquée aux surfaces indentées.

2.5.2 Critères à invariants de contraintes

Les critères de Crossland et de Sines sont appliqués et les résultats sont présentés sur les FIG.2.18 et 2.19. Une différence minimale entre les deux formulations apparaît. En sous-couche, un volume important à valeurs négatives est présent sous l'indent, encerclé d'une zone à valeurs positives. Un lien direct entre cette zone et les contraintes résiduelles d'indentation, illustrées sur la FIG.2.20, peut être identifié. En effet, la comparaison des distributions de critères en sous-couche avec la contrainte hydrostatique résiduelle après indentation montre une bonne concordance. Les bourrelets de l'indent, sièges de l'amorçage des fissures de fatigue, correspondent également à des valeurs négatives pour les deux critères. C'est ici le pic de pression généré par les bords de l'indent au passage de la charge qui mène à ces valeurs. La distinction entre les deux critères se fait en proche surface, là où l'effet de la pression de contact est maximum. Aucun des critères à invariants de contraintes ne permet une mise en valeur des zones d'amorçage de fissures attendues.

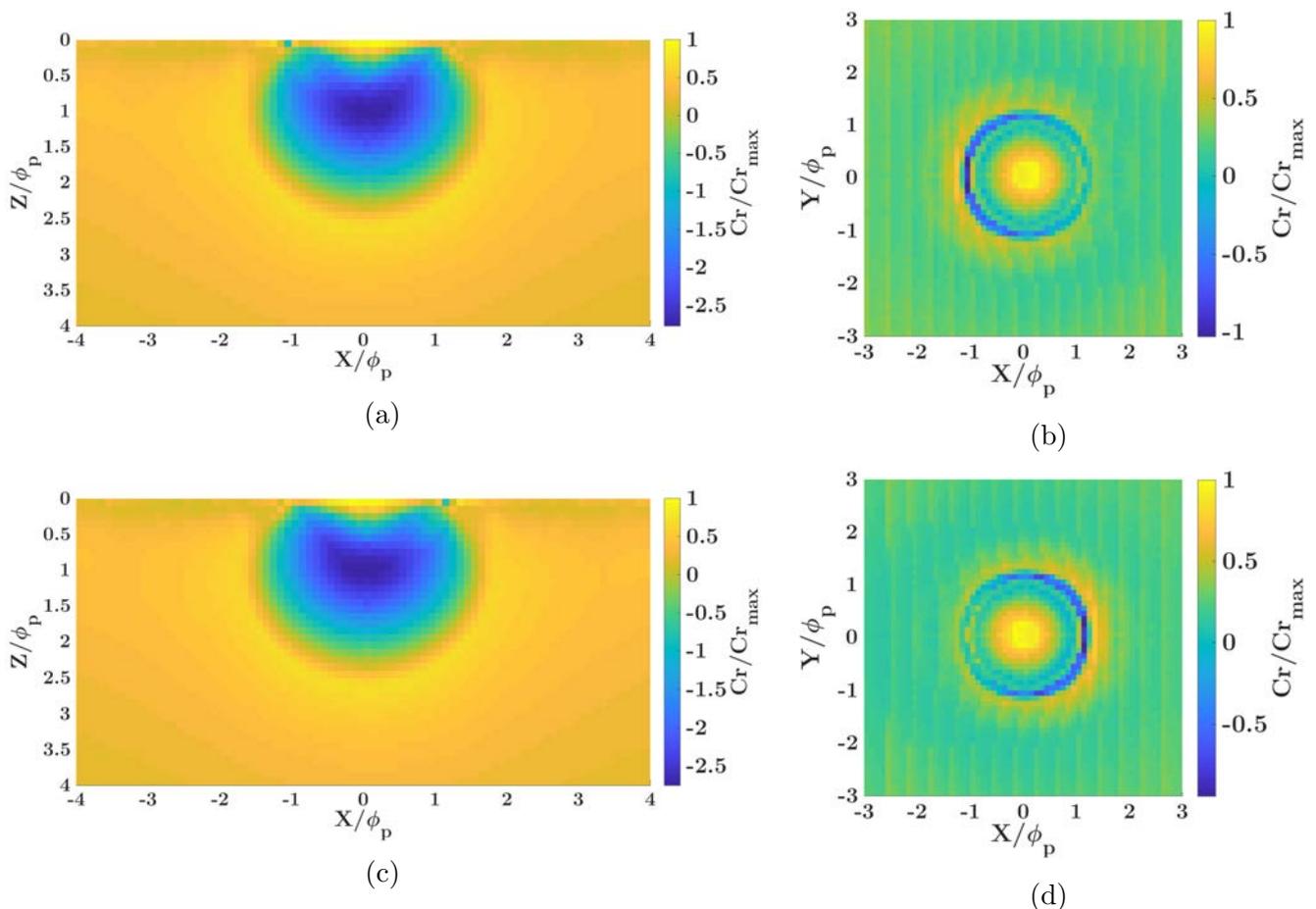


FIGURE 2.18 – Critère de Crossland appliqué à l'indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

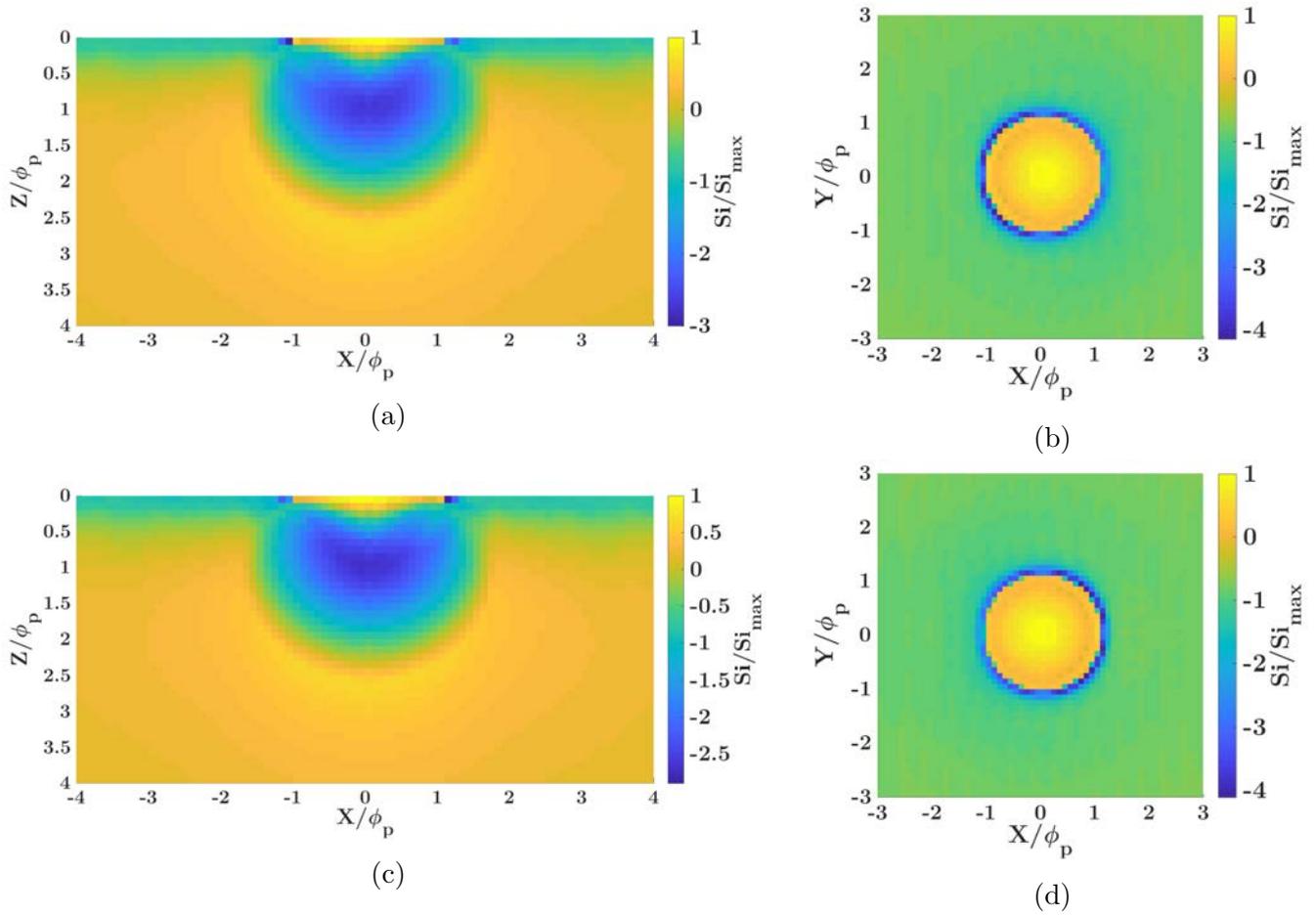


FIGURE 2.19 – Critère de Sines appliqué à l’indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

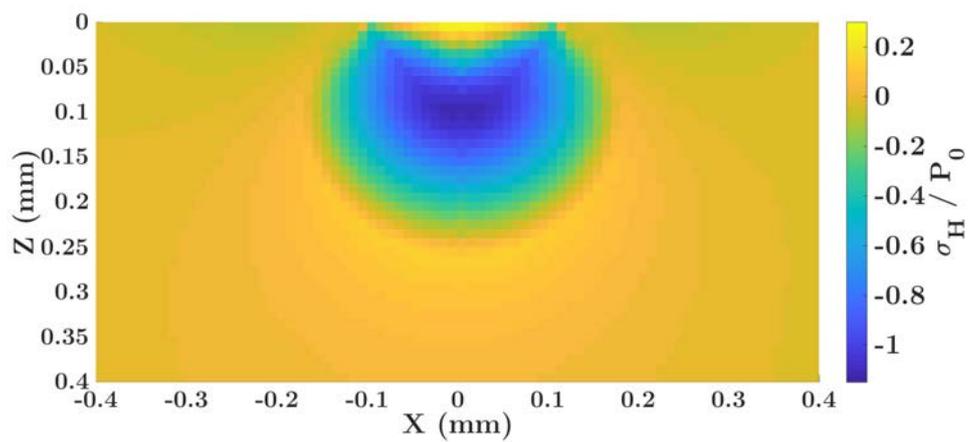


FIGURE 2.20 – Contrainte hydrostatique résiduelle après indentation.

La FIG.2.21 permet l'étude individuelle des composants des critères en glissement négatif. Nous remarquons la prédominance du terme hydrostatique sur la valeur globale des critères. L'influence du terme en cisaillement n'est que marginale alors même que ses valeurs maximales sont obtenues au niveau des bourrelets, dans les zones d'initiation de fissures.

Il est à retenir que les critères de Crossland et de Sines sont ici peu pertinents pour deux raisons. D'une part, la présence de contraintes résiduelles importantes dans la zone de l'indent influence fortement les critères en sous-couche. D'autre part, l'utilisation du composant hydrostatique sur un chargement à dominante compressive gomme la contribution du terme en cisaillement qui, lui, pointe les zones d'initiation de fissures. Le cisaillement semble donc être un acteur de la formation des fissures de fatigue.

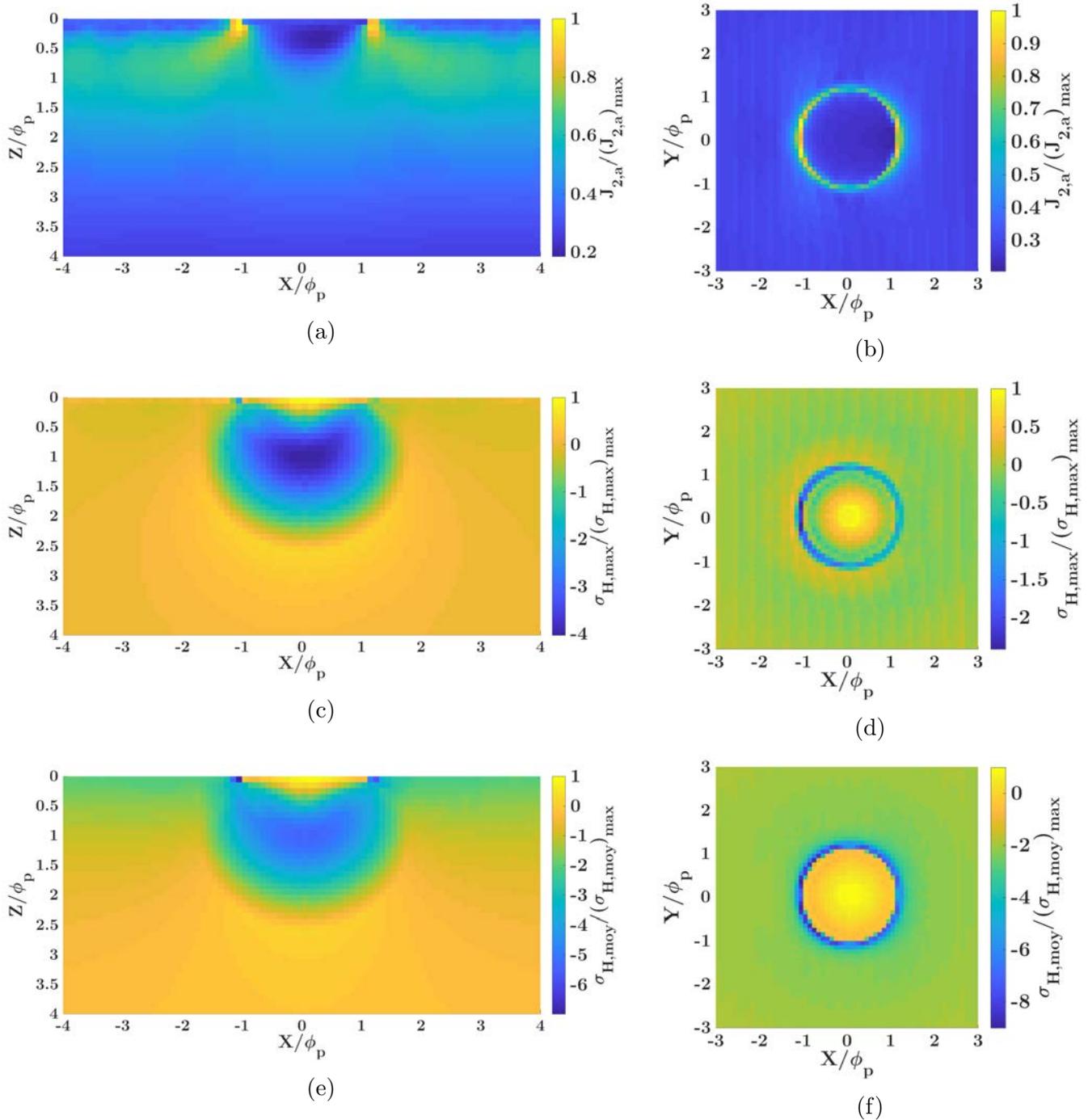


FIGURE 2.21 – Décomposition des termes des critères de Crossland et Sines en glissement négatif.

2.5.3 Critère en contraintes

Le critère de Dang Van II présente une formulation proche de celles des critères présentés au paragraphe précédent. Il n'est donc pas surprenant de retrouver des similitudes dans les résultats obtenus, comme le montre la FIG.2.22. Ainsi, la zone de contraintes résiduelles d'indentation apparaît nettement et s'accompagne de valeurs fortement négatives. Toutefois, le critère étant basé sur la valeur maximale de la somme de ses composants, l'apport du terme en cisaillement est plus visible, notamment en surface. Les bords de l'indent correspondent aux valeurs maximales du critère et une alternance du bord le plus critique suivant le sens du glissement est constatée. Cependant, le bord critique au sens du critère ne correspond pas à celui identifié par la littérature.

La décomposition du critère (FIG.2.23) permet de dresser le même constat que précédemment, à savoir que le terme hydrostatique est prédominant en sous-couche en raison des fortes contraintes résiduelles liées à l'indentation. Le terme en cisaillement, τ_{pr} , se révèle efficace pour mettre en valeur les bords de l'indent. Le bord situé dans la

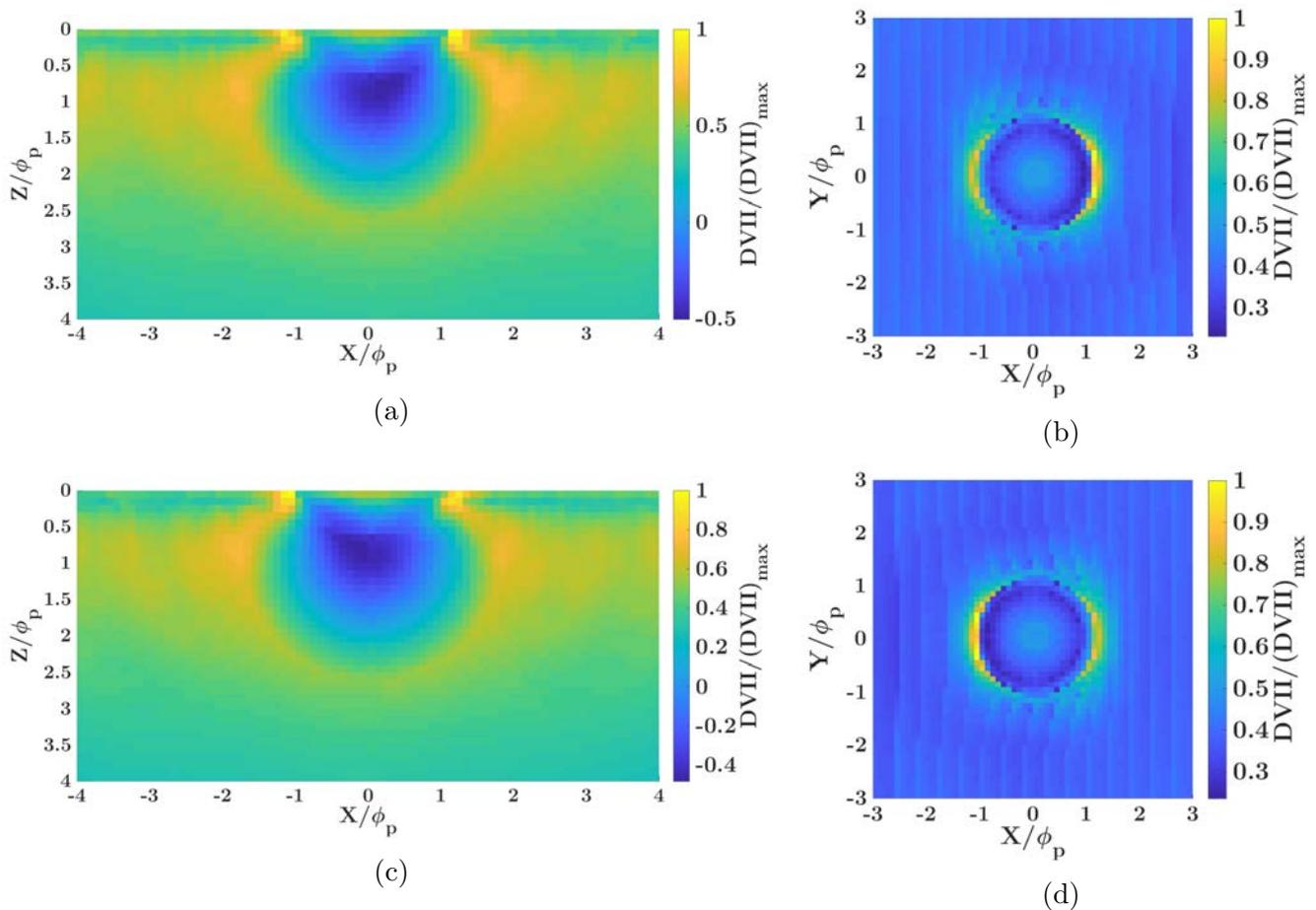


FIGURE 2.22 – Critère de Dang Van II appliqué à l'indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

direction opposée aux forces de frottement, identifié dans la littérature comme le site d'initiation des fissures de fatigue, est le plus critique au sens de ce composant. L'analyse de ce composant révèle enfin la présence d'une bande en proche surface qui est en fait la zone de cisaillement maximal donnée par la théorie de Hertz.

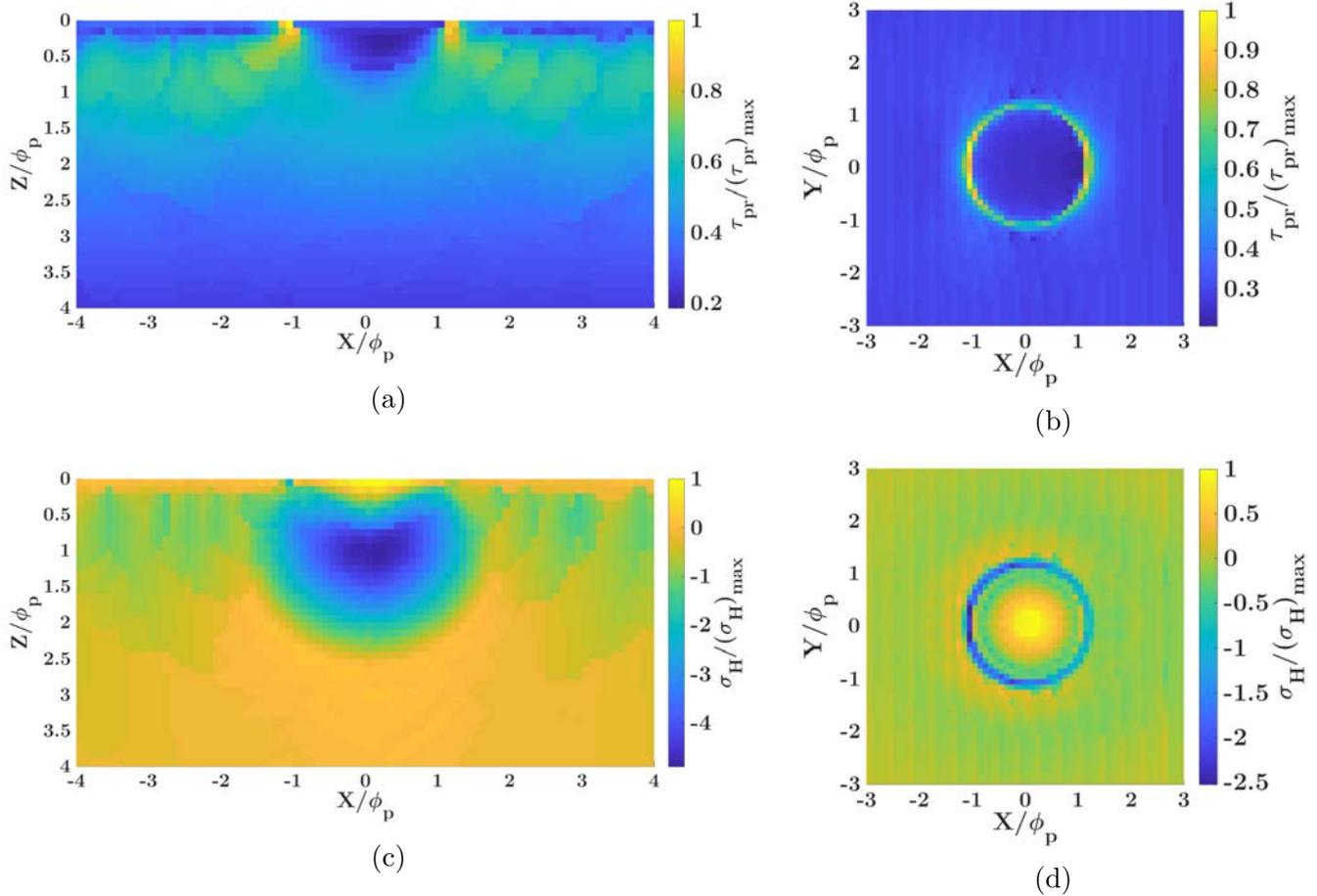


FIGURE 2.23 – Décomposition du critère de Dang Van II en glissement négatif.

L'application du critère de Dang Van II mène aux mêmes conclusions que les critères à invariants. Les contraintes résiduelles de l'indentation perturbent le critère en sous-couche en agissant sur le terme σ_H tandis que les fortes pressions causées par les bourrelets gênent l'identification du bord critique. Toutefois, l'apport du terme τ_{pr} se fait mieux sentir dans les zones d'apparition de fissures, confirmant le rôle du cisaillement sur la formation de ces dernières.

2.5.4 Critères en déformations

Critère de Fatemi-Socie

Le critère de Fatemi-Socie [FAT 88] donne les résultats illustrés par la FIG.2.24. Les zones à proximité des bourrelets concentrent l'essentiel du critère, traduisant bien le caractère surfacique de la fatigue sur indent. Une différence de côté critique entre la surface et la proche surface apparaît à la comparaison des résultats dans le plan XZ et le plan XY. Ainsi, le côté de l'indent situé dans la direction des forces de frottement est le plus critique à la surface tandis que le bord opposé est le plus critique immédiatement sous la surface. Cette différence est directement liée au terme de contrainte du critère illustré sur la FIG.2.25. Celui-ci est fortement négatif à la surface du bourrelet situé dans la direction de frottement et réduit donc la contribution du terme en cisaillement dans cette zone. La distribution du terme de contraintes se rapproche, ici encore, de celle des contraintes résiduelles d'indentation (FIG.2.20). Immédiatement sous la surface, le composant en contraintes prend des valeurs moins élevées et laisse la place au terme en cisaillement

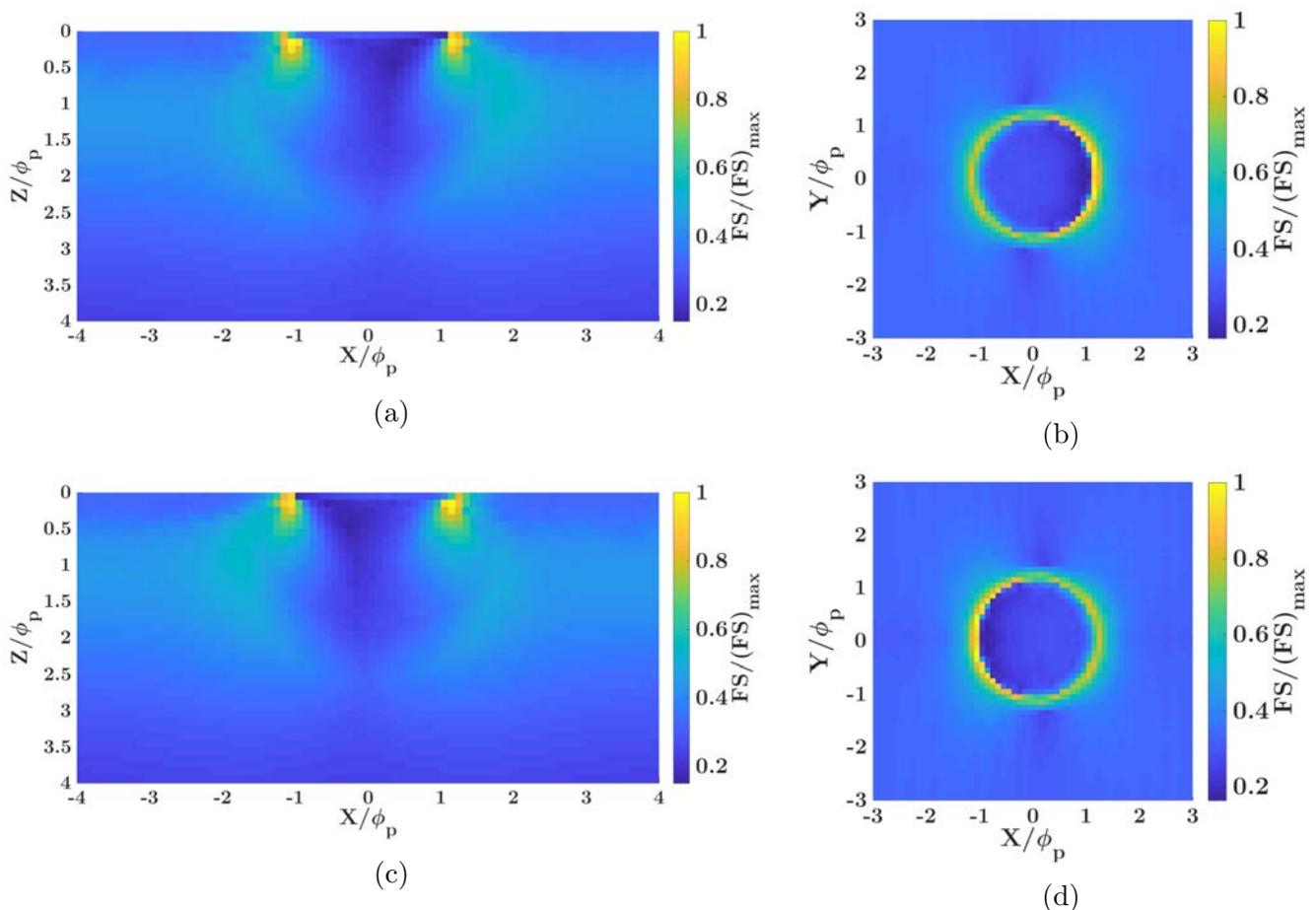


FIGURE 2.24 – Critère de Fatemi-Socie appliqué à l'indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

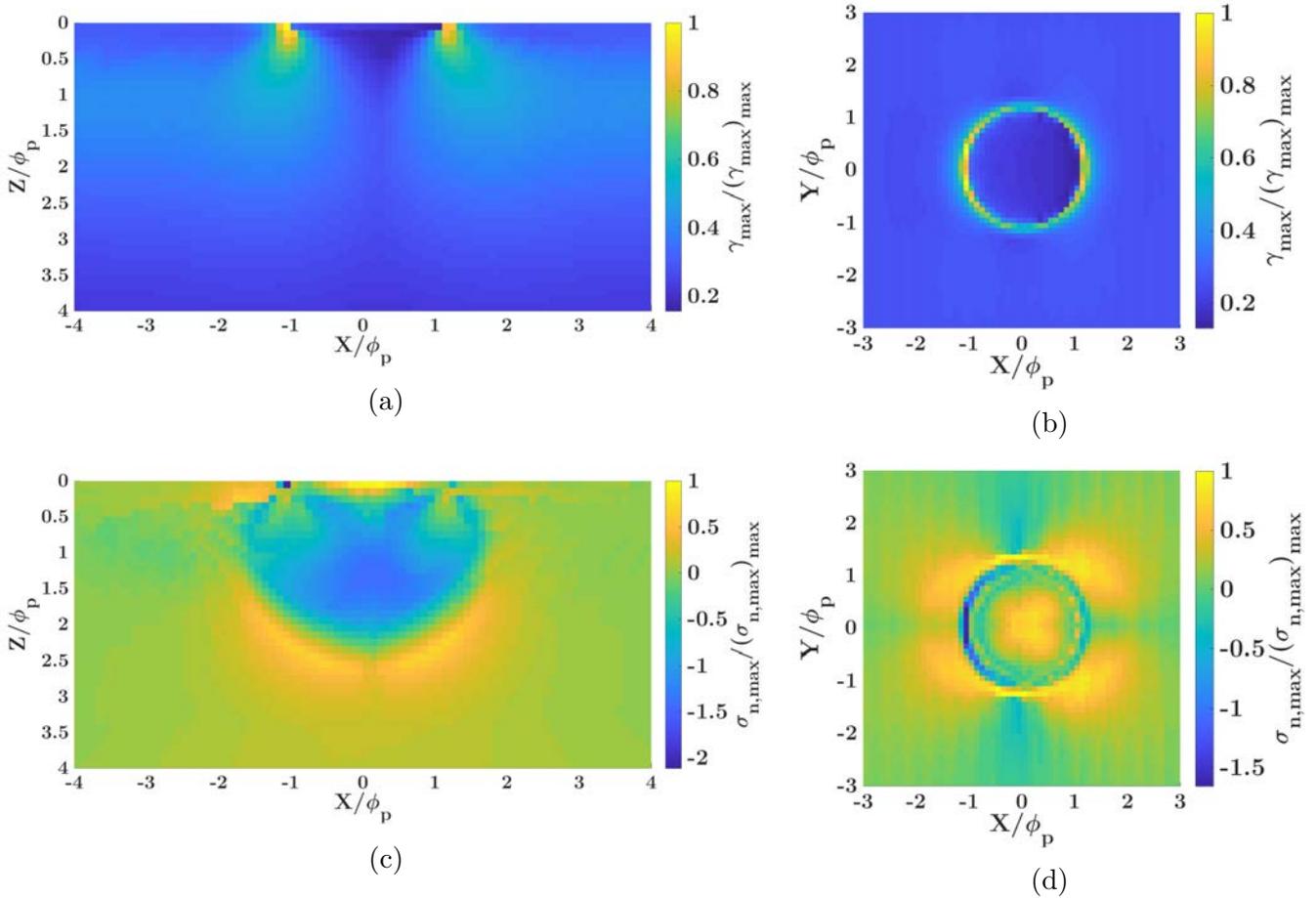


FIGURE 2.25 – Décomposition du critère de Fatemi-Socie en glissement négatif.

dans le critère. La décomposition du critère montre d'ailleurs que la localisation du cisaillement maximum correspond bien à la zone d'initiation des fissures.

Le critère de Fatemi-Socie est un critère à plan critique. L'orientation des plans, illustrée sur la FIG.2.26, peut donc être analysée dans la zone d'initiation des fissures. Celle-ci se trouve être en désaccord avec les observations de la littérature. Les plans indiqués sont quasi-parallèles à la surface. Dans le critère de Fatemi-Socie, l'orientation du plan dépend du plan de cisaillement maximum, qui est double. C'est la contrainte normale au plan qui définit lequel est le plan critique. La distribution des plans montre que la présence des contraintes résiduelles d'indentation mène à la sélection d'un plan incohérent.

Nous constatons donc une fois de plus l'intérêt du cisaillement, ici par la déformation de cisaillement maximale, dans la formation des fissures. En revanche, l'utilisation d'un terme de contrainte simple est une nouvelle fois pénalisante pour l'expression globale du critère. Les contraintes résiduelles d'indentation perturbent la sélection du plan critique.

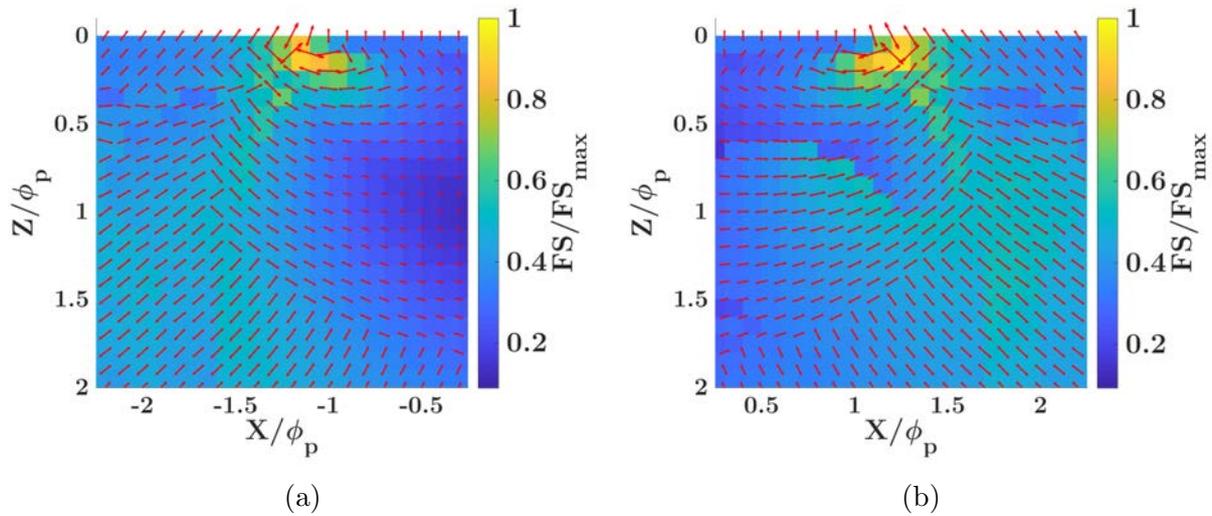


FIGURE 2.26 – Orientation des plans critiques de Fatemi-Socie dans le plan XZ en glissement négatif (a) et positif (b) au niveau du bourrelet critique.

Critère de Brown-Miller

Le critère de Brown-Miller modifié par Kandil et al. [KAN 82] est le second critère en déformation utilisé. À la différence du critère de Fatemi-Socie, il ne fait intervenir que des termes en déformations. Une première constatation découlant de cette formulation est donc l'absence des effets résiduels d'indentation. Les résultats, présentés par la FIG.2.27, montrent une concentration du critère sur les bords de l'indent sans dégager nettement de bord critique en surface. En sous-couche, le bord opposé aux forces de frottement se trouve être celui présentant les plus hautes valeurs du critère.

La décomposition du critère, visible en glissement négatif sur la FIG.2.28, met en évidence la capacité du terme en cisaillement à cibler la bonne zone d'amorçage des fissures en surface. Sous la surface, c'est l'amplitude des déformations normales au plan qui indique cette zone. D'un point de vue plus global, il apparaît que les distributions des deux termes du critère sont proches en sous-couche. Tout comme cela était le cas avec le terme en cisaillement du critère de Dang Van II, nous observons une bande de valeurs importantes tout au long du chemin de roulement. Cette bande se situe autour d'une profondeur correspondant à la zone de cisaillement maximum donnée par la théorie de Hertz.

L'analyse des plans critiques dans la zone d'initiation, illustrée sur la FIG.2.29, montre une orientation allant de 75° en surface à 30° en sous-couche. L'angle formé en surface est donc surestimé par rapport aux observations de la littérature. Néanmoins, cet angle diminue rapidement dans la profondeur pour retomber dans l'intervalle de 30° à 45° . L'orientation des plans autour de la valeur maximale du critère est très variée. Les plans orientés vers la profondeur et ceux presque parallèles à la surface s'entremêlent, ne permettant pas une lecture claire autour de cette zone critique. La distribution des plans permet toutefois de voir apparaître une tendance dans leur orientation qui rappelle la

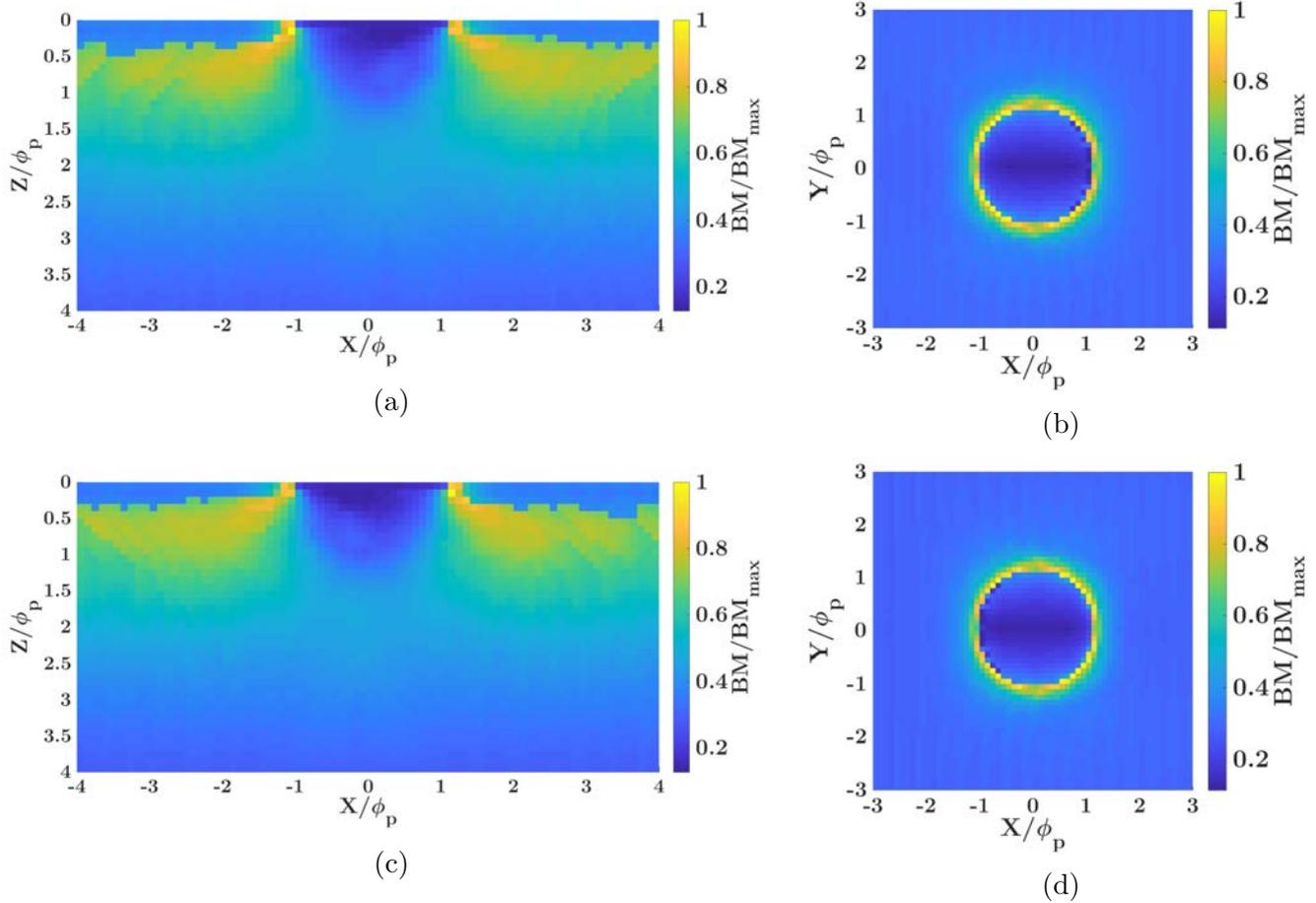


FIGURE 2.27 – Critère de Brown-Miller appliqué à l’indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

forme des fissures attendues.

Le critère de Brown-Miller permet l’identification des sites d’amorçage de fissures. L’emploi de l’amplitude de la déformation normale au plan se trouve être complémentaire du terme de cisaillement. L’orientation des plans critiques fournie par le critère s’approche de l’intervalle des observations de la littérature et malgré des orientations variées autour de la valeur maximale du critère, une tendance en accord avec le chemin des fissures se dégage.

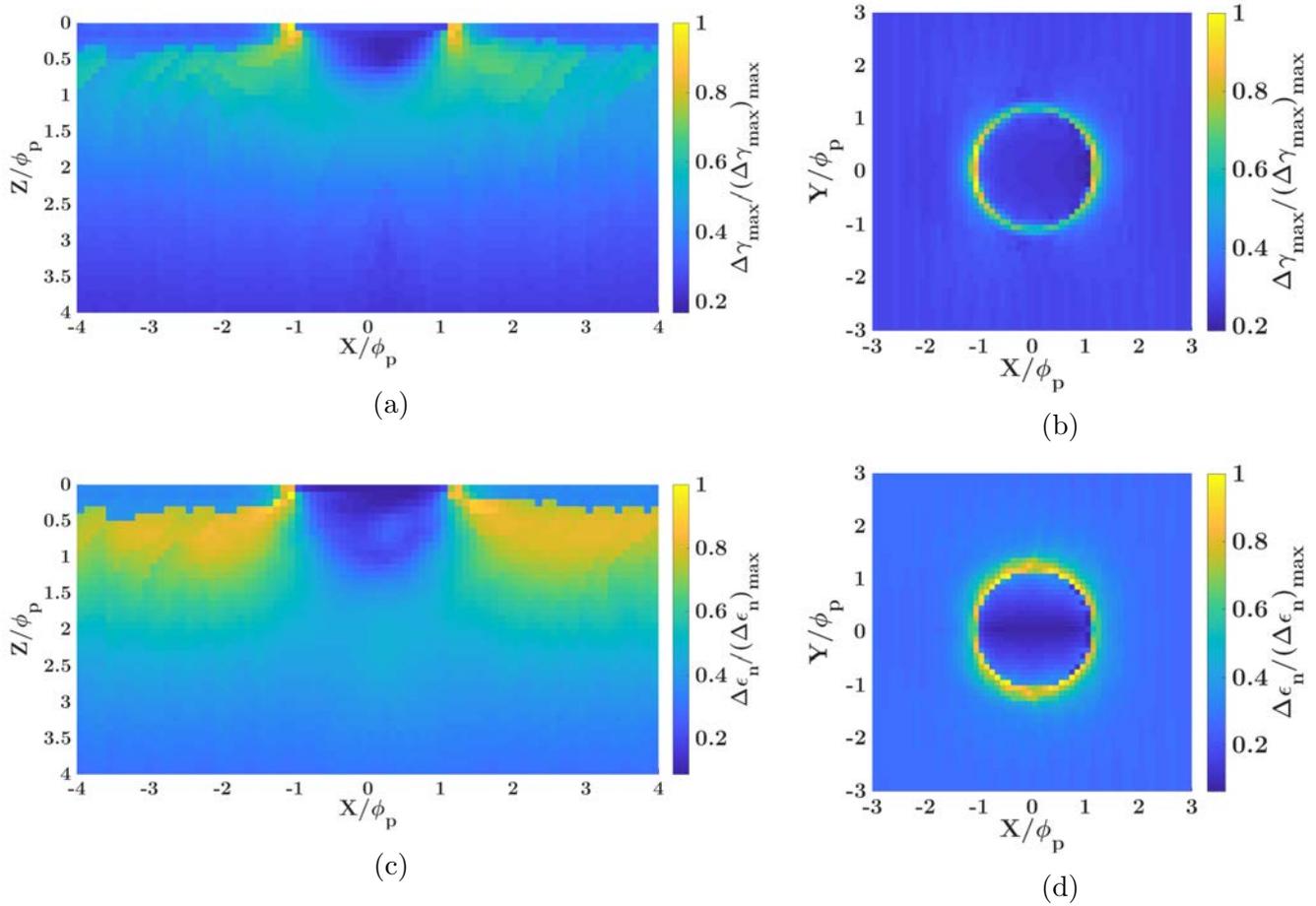


FIGURE 2.28 – Décomposition du critère de Brown-Miller en glissement négatif.

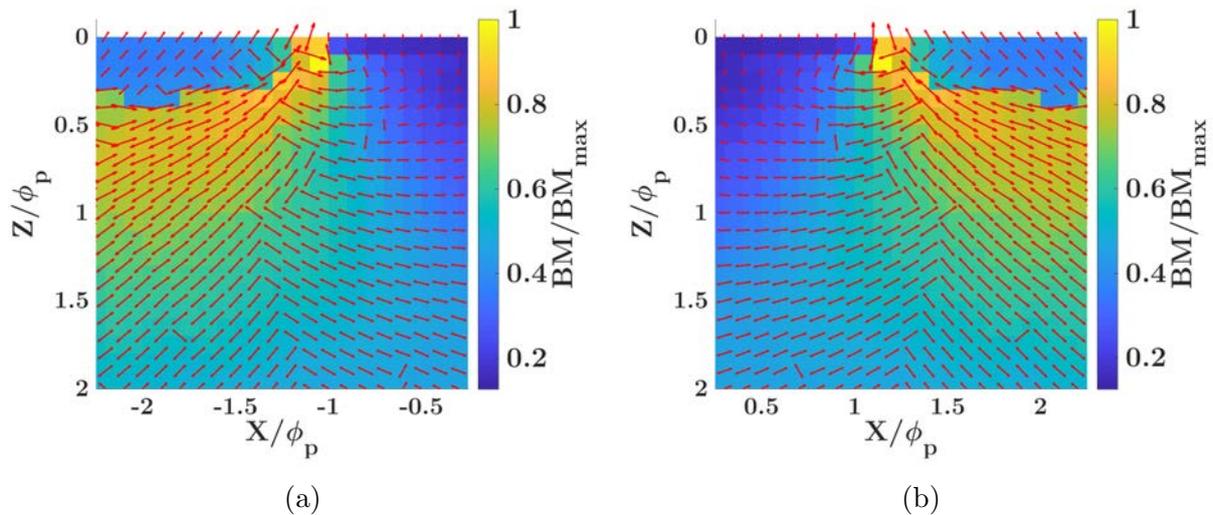


FIGURE 2.29 – Orientation des plans critiques de Brown-Miller dans le plan XZ en glissement négatif (a) et positif (b) au niveau du bourrelet critique.

2.5.5 Critère énergétique

Le critère de Smith-Watson-Topper, dans sa version adaptée aux chargements non-proportionnels [SOC 87], est appliqué et les résultats sont présentés sur la FIG.2.30. Contrairement aux autres critères à plan critique sélectionnés pour cette étude, le critère SWT nécessite une "vraie" recherche de plan critique. Le caractère multi-axiale du chargement exclu une recherche incrémentale de celui-ci car bien trop longue. Un algorithme de minimisation, disponible dans Matlab™, est donc utilisé pour accélérer cette recherche. La convergence de cet algorithme vers un minimum local est à l'origine de l'aspect discontinu des résultats, notamment en sous-couche. Les valeurs prises par le critère se trouvent être majoritairement négatives que ce soit en sous-couche ou dans les zones d'intérêts en surface. Ce signe du critère s'explique par la nature du chargement qui est essentiellement compressif. En sous-couche, l'emploi d'un terme de contrainte dans l'expression du critère fait apparaître les effets résiduels de l'indentation. À la surface, le bord de l'indent sur lequel les fissures sont observées est très nettement pointé par le critère qui y prend de loin ses valeurs les plus négatives. Cette observation mène à la conclusion que le mode de fatigue ciblé par le critère de Smith-Watson-Topper, à savoir la fatigue en traction, n'est pas à l'origine des fissures apparaissant en bord d'indent. Ce critère ne sera donc pas retenu pour la suite des études de fatigue sur indent.

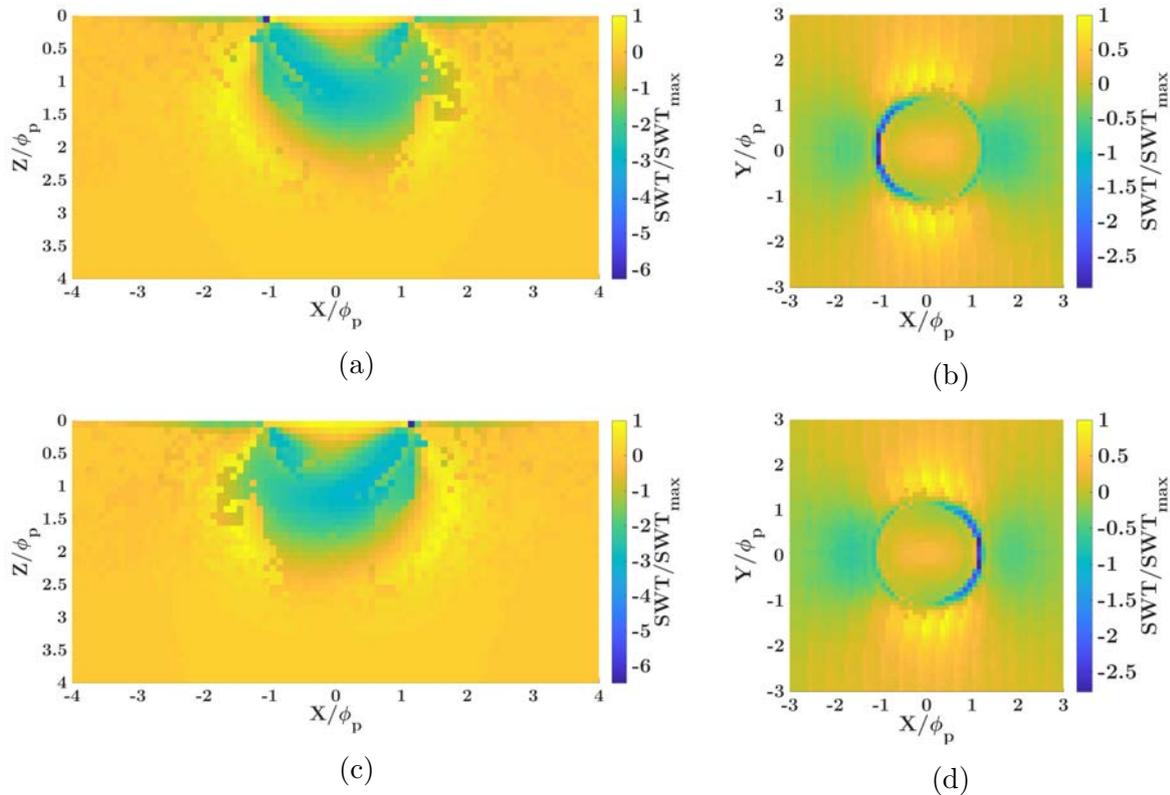


FIGURE 2.30 – Critère de Smith-Watson-Topper appliqué à l'indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

2.5.6 Influence des paramètres de fatigue

Suite à l'étude des critères de fatigue sélectionnés, il a été constaté que l'apparition des fissures de fatigue est bien identifiée par l'emploi de termes de cisaillement. Toutefois, l'ajout d'un terme de pression (Sines, Crossland, Dang Van II) ou de contrainte normale (Fatemi-Socie) tend à réduire la contribution du cisaillement ou à perturber l'orientation des plans critiques. Ce constat est particulièrement vrai pour le critère de Dang Van II. Le composant τ_{pr} s'est avéré très efficace mais sa contribution au critère est atténuée par l'ajout de la contrainte hydrostatique, σ_H . Se pose alors la question de l'étalonnage des paramètres des critères faisant la balance entre la contribution des deux termes. Ces paramètres sont déterminés par l'intermédiaire d'essais de fatigue uniaxiale. Leur transposition directe à des problèmes de fatigue multi-axiale aussi complexe que le roulement sur indent peut donc être remise en cause.

Une étude de l'influence de la valeur du paramètre α sur le critère de Dang Van II dans le cadre du roulement sur indent est menée. Les conditions de contact sont identiques à celles de l'étude comparative précédente en glissement négatif. Des valeurs de paramètre allant de 0 à 0,3 sont appliquées, donnant les résultats présentés sur la FIG.2.31.

Les bourrelets de l'indent restent les zones où le critère prend ces valeurs maximales, indépendamment du choix de α . Toutefois, la concentration du critère dans ces zones diminue à mesure que α , et donc que la contribution de la contrainte hydrostatique, augmente. De plus, l'analyse des résultats en surface montre un basculement du côté le plus critique autour de $\alpha = 0,25$. En-dessous de cette valeur, c'est le bord situé dans la direction opposée aux forces de frottement qui présente les valeurs de critère les plus élevées, en accord avec les sites d'initiation de fissures. Au-delà de cette valeur, c'est l'autre bord qui est identifié comme critique et le critère ne semble donc plus adapté au calcul de fatigue sur indent. La valeur de α issue de la littérature [MOR 11a] se trouve donc être la valeur de basculement.

L'étalonnage classique du paramètre α confère au critère sa polyvalence dans des cas de chargements simples. Toutefois, l'étude menée ici suggère qu'un ré-étalonnage est nécessaire pour les chargements multi-axiaux tels que le roulement sur indent.

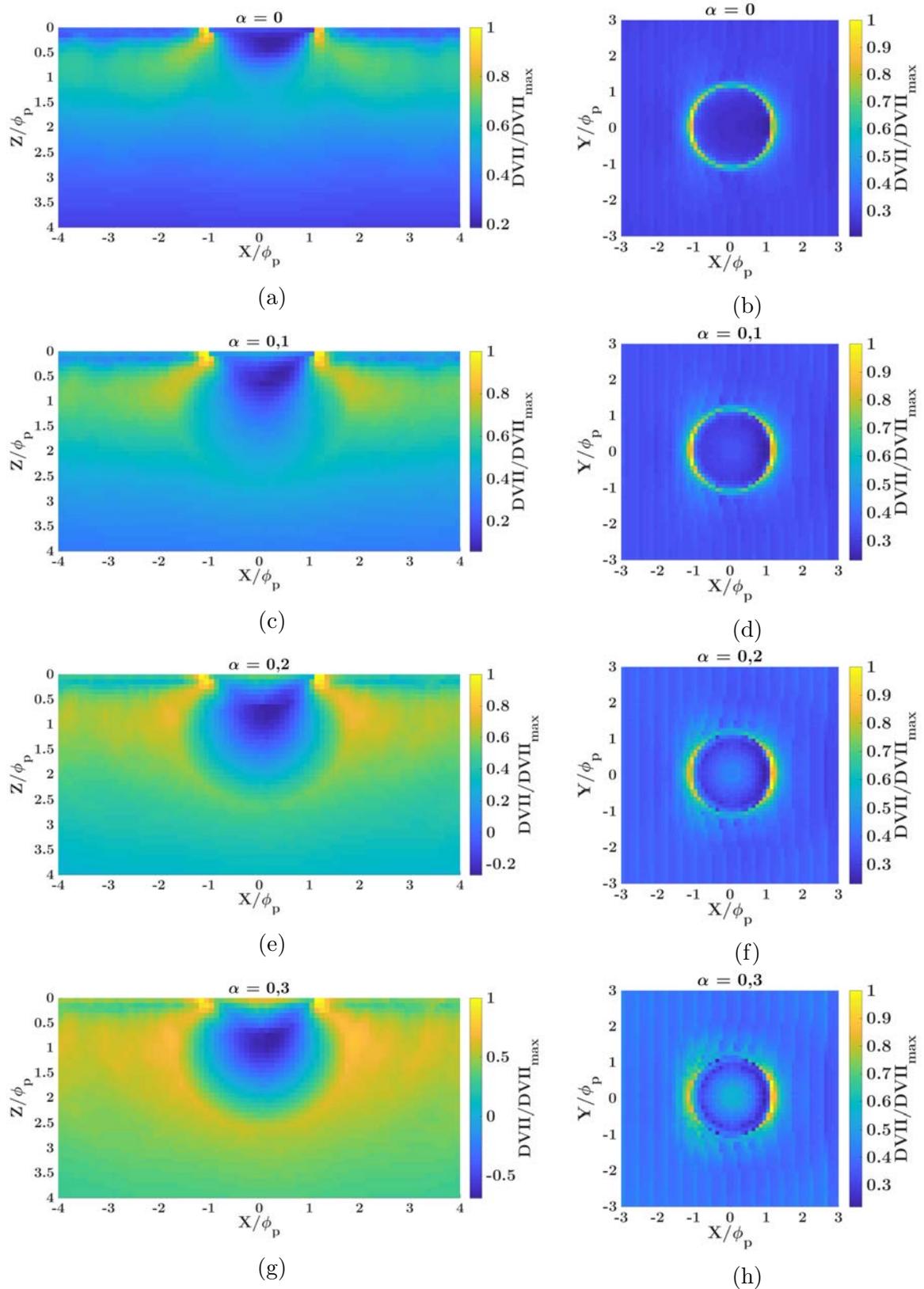


FIGURE 2.31 – Critère de Dang Van II appliqué au glissement négatif sur indente pour des valeurs de $\alpha = 0$ (a,b), 0,1 (c,d), 0,2 (e,f) et 0,3 (g,h).

2.5.7 Définition d'un nouveau critère

Des critères issus de la littérature, le critère de Brown-Miller est celui ayant fourni les meilleurs résultats. L'orientation des plans critiques dans la zone d'apparition des fissures n'a néanmoins pas donné entière satisfaction. D'autre part, certains composants des critères ont montré un intérêt. Ainsi, le terme de cisaillement du critère de Dang Van II, τ_{pr} , localise clairement les zones d'initiation de fissures. L'utilisation d'un terme en amplitude de déformation normale au plan dans le critère de Brown-Miller, $\Delta\epsilon_n$, s'est aussi révélé complémentaire du terme en cisaillement. Partant de ce constat, une nouvelle expression de critère est proposée :

$$NC = \max_t \{ \tau_{pr}(t) \} + \alpha \Delta\sigma_n \quad (2.131)$$

avec $\Delta\sigma_n$ l'amplitude de la contrainte normale au plan défini par $\tau_{pr,max}$. Rappelons ici que le calcul de τ_{pr} par l'intermédiaire des directions principales donne deux plans orthogonaux. Le plan critique est défini comme celui de ces deux plans qui maximise le critère et donc celui pour lequel l'amplitude de contrainte normale est la plus grande. Le fait d'utiliser le terme τ_{pr} , qui est basé sur la partie alternée du tenseur déviatorique, et le terme en amplitude de contrainte normale au plan retire les contraintes résiduelles d'indentation du calcul de critère. Les effets indésirables de ces contraintes, observés précédemment, sont donc écartés. Il est important de préciser ici que si les contraintes résiduelles n'interviennent pas directement dans le calcul du critère, elles jouent tout de même un rôle dans la fatigue. En effet, leur présence modifie la phase de rodage des surfaces et donc les cycles de chargement de l'indent. La formulation du nouveau critère étant proche de celle de Dang Van II, la constante α est prise identique à celle des travaux de Morales-Espejel et Brizmer [MOR 11a], c'est-à-dire $\alpha = 0,232$.

Ce critère est appliqué sur l'indent axisymétrique. Les résultats sont présentés sur la FIG.2.32. Comme espéré, le critère identifie bien le bord de l'indent opposé à la direction de frottement comme le plus critique grâce au terme en cisaillement du critère de Dang Van II. De plus, le terme de contrainte normale, représenté en glissement négatif sur la FIG.2.33, affiche une bonne complémentarité avec le terme de cisaillement. L'effet de complémentarité de ce type de composant constaté dans le cas du critère de Brown-Miller et recherché dans ce nouveau critère est donc bien reproduit.

L'analyse des plans critiques indiqués par le critère montre une meilleure corrélation avec les observations expérimentales que les critères précédents. Ainsi, comme le montre la FIG.2.34, les plans critiques à la surface et à proximité du bourrelet où s'amorcent les fissures font un angle de 45° à 75° . Ces valeurs restent toutefois supérieures à celles observées expérimentalement, 30° à 45° . Sous la surface, une diminution des angles jusqu'à 30° est constatée lorsque la profondeur augmente de quelques dizaines de micromètres seulement. Ces valeurs sont alors plus en phase avec la littérature. L'orientation des plans est également plus nette que pour le critère de Brown-Miller. Le changement du sens des fissures selon la direction de glissement est bien reproduit et le cas en glissement positif présente des résultats similaires à celui en glissement négatif.

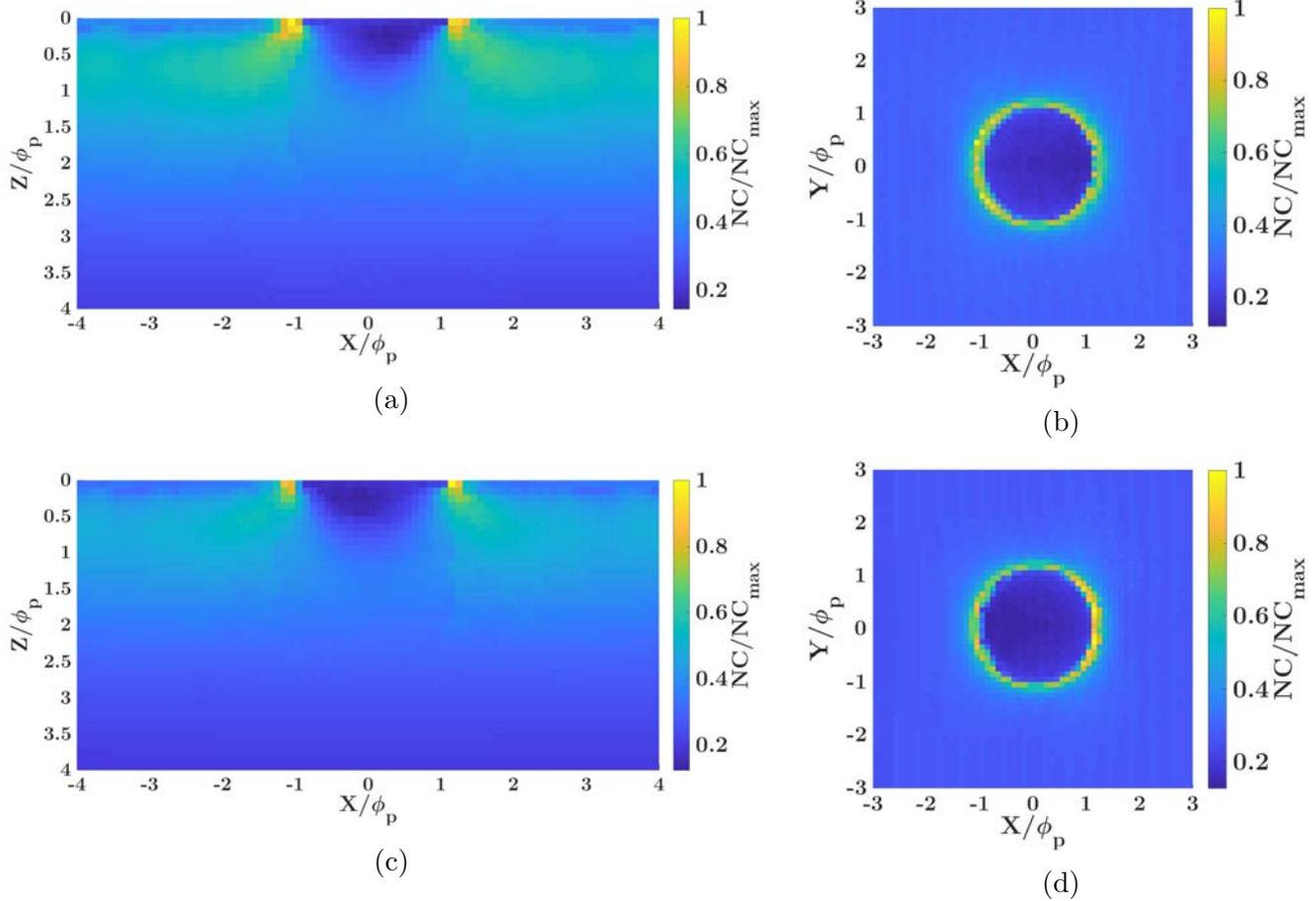


FIGURE 2.32 – Nouveau critère appliqué à l’indent axisymétrique en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

Le nouveau critère permet donc une localisation efficace des zones d’amorçage de fissures grâce à l’emploi d’un terme de cisaillement auquel est adjoint l’effet des contraintes normales au plan de cisaillement. L’orientation des fissures indiquée par le critère avoisine les valeurs de la littérature mais les angles prédits à la surface sont supérieurs aux valeurs espérées. Bien qu’imparfait sur la prédiction des angles de plans critiques, ce nouveau critère a donné de meilleurs résultats que les critères issus de la littérature. Il sera donc utilisé dans la suite de l’étude.

2. Fatigue des surfaces indentées

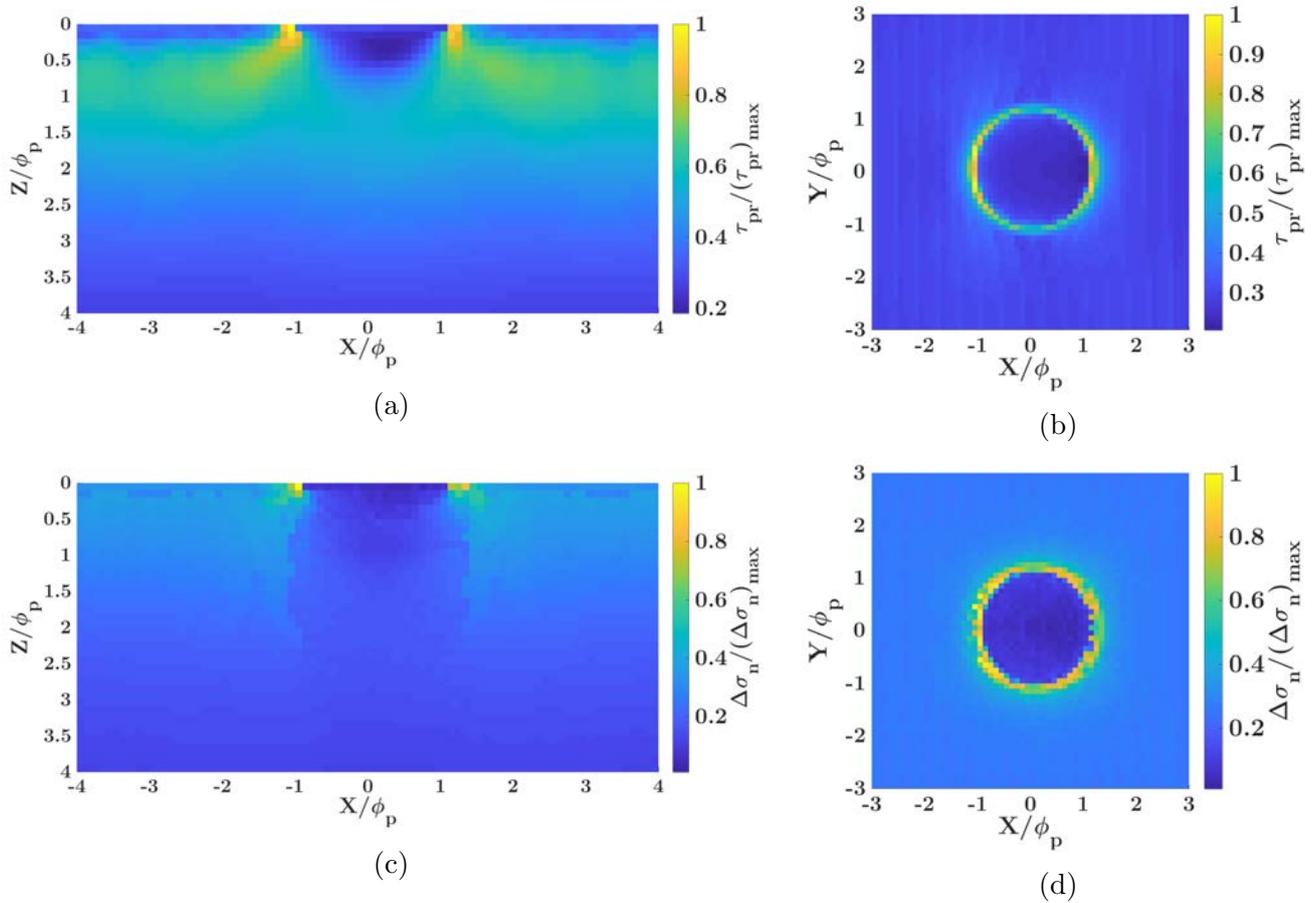


FIGURE 2.33 – Décomposition du nouveau critère appliqué à l'indent axisymétrique en glissement négatif.

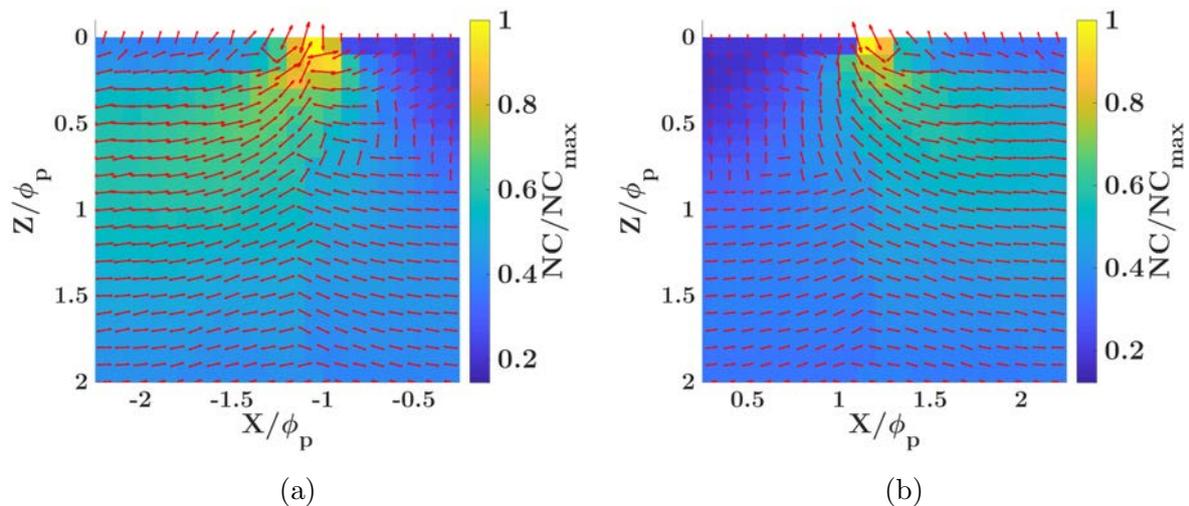


FIGURE 2.34 – Orientation des plans critiques du nouveau critère dans le plan XZ en glissement négatif (a) et positif (b) au niveau du bourrelet critique.

2.6 Application à un indent réel

Le nouveau critère présenté ci-dessus est à présent appliqué à un indent réel. L'indent utilisé est celui obtenu dans le cas nominal de l'étude sur l'indentation du chapitre précédent. Son profil est donné sur la FIG.2.35 et les conditions dans lesquelles il est généré sont fournies par le TAB.2.3. L'indent est soumis à des cycles de glissement positif et négatif. Comme précédemment, le calcul du critère n'est réalisé qu'après plusieurs cycles de chargement et la stabilisation de la géométrie.

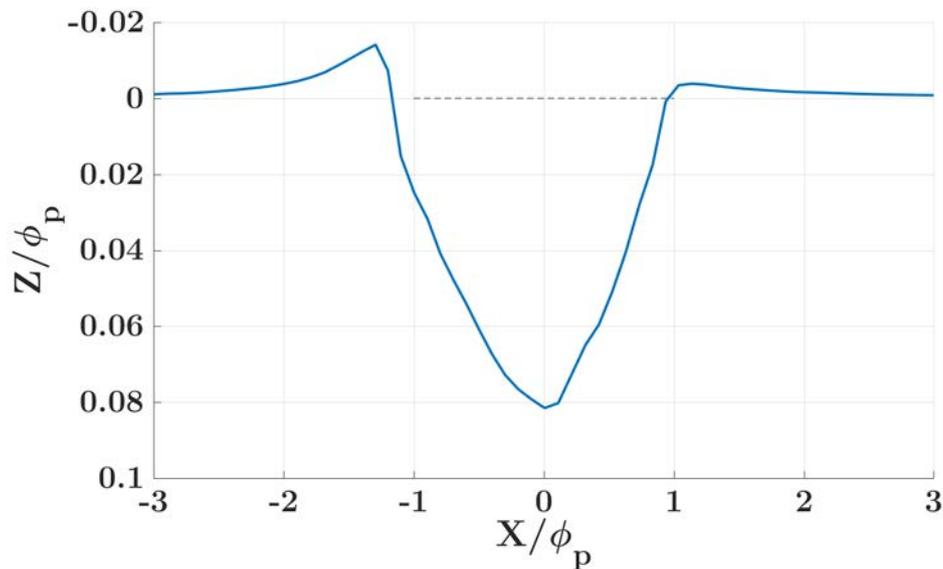


FIGURE 2.35 – Profil de l'indent nominal obtenu avec le modèle CEL.

Paramètre	Valeur
Rouleau / Piste	AISI 52100
Particule	M50
ϕ_0	ϕ_p
Chargement	$P_h = P_0$
Demi-largeur de contact	$a = 1,36 \phi_p$
Vitesse	20 m.s^{-1}
Glissement / Roulement pur	Roulement pur
Coefficient de frottement	$\mu_{particule} = 0,2 / \mu_{rouleau,piste} = 0,01$
Diamètre de l'indent	$\phi_{indent} = 2,14 \phi_p$
Hauteur initiale du bourrelet	$h_{b,0} = 1,41 \% \phi_p$
Profondeur de l'indent	$h_{indent} = 8,15 \% \phi_p$

TABLEAU 2.3 – Paramètres du cas nominal d'indentation naturelle.

L'indent naturel donne des résultats comparables à ceux obtenus avec l'indent artificiel (FIG.2.36). Le critère identifie les bords de l'indent comme les zones les plus sensibles. Néanmoins, le sens du glissement ne modifie pas la localisation du bord critique. C'est toujours le bord de sortie, dans la direction du passage de la charge, qui concentre les plus fortes valeurs du critère. Le glissement positif augmente sensiblement les valeurs du critère sur le bord d'entrée, sans pour autant approcher significativement celles obtenues sur le bord de sortie. Cette localisation systématique du bord critique s'explique par la différence géométrique entre l'indent naturel et l'indent artificiel. L'indent naturel présente un bourrelet de sortie 3,7 fois plus prononcé que celui d'entrée. La surcontrainte générée par ce bourrelet est donc elle aussi démultipliée dans de telles proportions que l'effet du sens de glissement n'est plus visible.

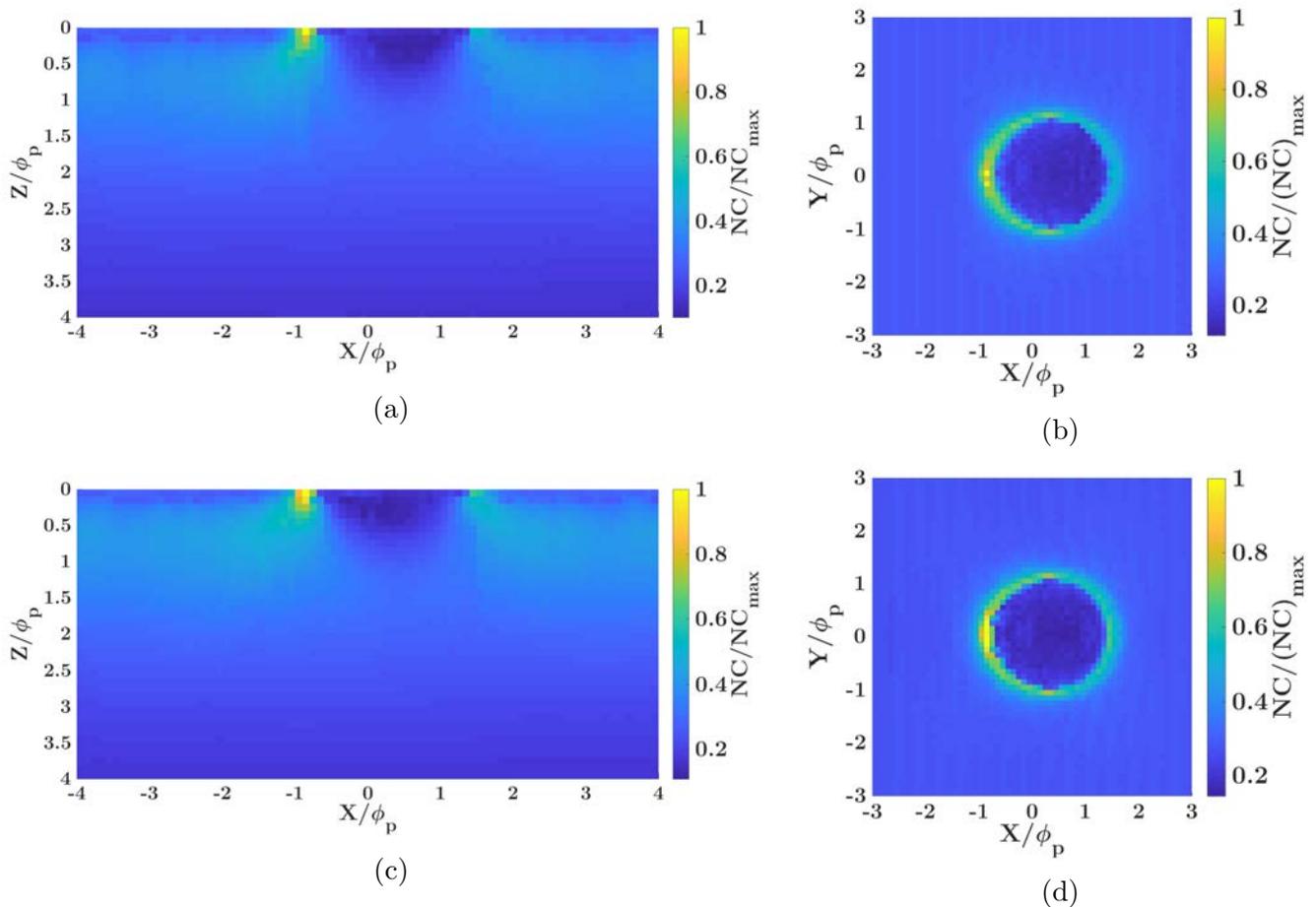


FIGURE 2.36 – Nouveau critère appliqué à l'indent nominal en glissement négatif (a,b) et positif (c,d).

2.7 Étude paramétrique de la fatigue des surfaces indentées

Dans l'optique de déterminer les paramètres clés de la fatigue des surfaces indentées, l'étude paramétrique débutée avec le modèle CEL d'indentation est poursuivie. Les indents ayant été générés au chapitre précédent sont soumis à des cycles de chargement dans des conditions identiques à celles de leur création. Les conditions du cas nominal sont rappelées dans le TAB.2.3. Les résultats du calcul de critère sur les différents indents sont donnés dans le TAB.2.4.

Cas d'étude	Conditions de contact	Hauteur du bourrelet ($\% \phi_p$)	NC_{max}
Nominal	Roulement pur	1,14	$1,23 \cdot 10^3$
$P_h = P_0/3$	Roulement pur	0,85	$0,55 \cdot 10^3$
$P_h = 1,67P_0$	Roulement pur	1,08	$1,61 \cdot 10^3$
$\phi_0 = \phi_p/2$	Roulement pur	0,56	$0,97 \cdot 10^3$
$\phi_0 = 2\phi_p$	Roulement pur	2,43	$1,34 \cdot 10^3$
$\mu_{particule} = 0,1$	Roulement pur	0,43	$0,70 \cdot 10^3$
$\mu_{particule} = 0,3$	Roulement pur	1,44	$1,24 \cdot 10^3$
$\mu_{particule} = 0,5$	Roulement pur	1,53	$1,23 \cdot 10^3$
SRR = 6%	Glissement positif	1,83	$1,42 \cdot 10^3$
SRR = 20%	Glissement positif	0,39	$0,78 \cdot 10^3$
SRR = -6%	Glissement négatif	0,36	$0,93 \cdot 10^3$
Particule cuivre	Roulement pur	0,41	$0,69 \cdot 10^3$
Rouleau Si_3N_4	Roulement pur	2,01	$1,78 \cdot 10^3$
Rouleau 60NiTi	Roulement pur	1,58	$1,14 \cdot 10^3$
σ_{res} piste	Roulement pur	1,00	$1,09 \cdot 10^3$

TABLEAU 2.4 – Résultats de l'étude paramétrique des surfaces indentées

Les valeurs de critère données ici sont purement indicatives et ne servent qu'à juger de la criticité relative des indents et des conditions de fonctionnement.

2.7.1 Effets de la hauteur des bourrelets

La comparaison des résultats des calculs en conditions nominales, à différents coefficient de frottement et pour différentes tailles de particule mettent en évidence un lien entre la hauteur des bourrelets et la valeur du critère. Plus le bourrelet est haut, plus le critère atteint des valeurs élevées. L'évolution de la valeur maximale du critère avec la hauteur du bourrelet n'est toutefois pas linéaire. En effet, pour des coefficients de frottement de 0,3 et 0,5, les valeurs maximales de critères sont identiques à celle du cas nominal présentant pourtant un bourrelet plus faible. Avec une particule de taille $2\phi_p$, on constate seulement une augmentation de 10% de la valeur maximale alors que le bourrelet est 2,1 fois plus haut. On a donc une forte influence de la hauteur lorsque celle-ci est faible et

une influence plus modeste lorsque le bourrelet atteint une certaine hauteur, ici autour de $1\% \phi_p$.

2.7.2 Effets de la charge

La comparaison des résultats obtenus pour des pressions de Hertz de $P_0/3$ à $1,67P_0$ mène à la conclusion que la charge joue un rôle de premier plan dans la fatigue de la surface. L'augmentation de la charge entraîne une augmentation des contraintes au passage sur l'indent qui est restituée dans le critère.

La comparaison du cas à $P_h = 1,67P_0$ et de celui à $\phi_0 = 2\phi_p$ montre que l'influence de la charge est supérieure à celle de la hauteur du bourrelet. En effet, sous une pression 40% plus faible mais avec un bourrelet 2,2 fois plus haut, l'indent produit avec une particule de taille $2\phi_p$ donne une valeur maximale de critère bien inférieure à celle à plus forte pression.

2.7.3 Effets du glissement

L'interprétation des résultats en glissement est délicate. De prime abord, les calculs réalisés suggèrent une plus grande sévérité des conditions à faible taux de glissement. Ces résultats doivent cependant être interprétés en gardant à l'esprit que le taux de glissement est un facteur de premier ordre dans la génération de l'indent. La géométrie initiale de l'indent est donc très différente entre des SRR de 6% et 20% comme cela a été observé au premier chapitre. Le bourrelet créé en sortie d'indent à 6% de glissement est très accentué tandis qu'un taux plus élevé augmente l'étalement de la particule et diminue la hauteur des bourrelets de l'indent. De plus, les simulations de roulement sur indent sont menées en glissement total. La différence de taux de glissement n'est donc pas retranscrite dans ces simulations.

La comparaison des cas à 20% et -6% de glissement avec ceux à $\mu_{particule} = 0,1$ et particule en cuivre permet de conclure que pour une hauteur de bourrelet équivalente, la présence de glissement est plus pénalisante pour la durée de vie.

2.7.4 Effets des matériaux

L'emploi d'un rouleau en Si_3N_4 lors des simulations d'indentation a montré que la rigidité du carbure de silicium génère un indent plus profond et à bourrelets plus hauts sur la piste en acier AISI 52100. Cette différence géométrique est une première explication au fait que ce contact amène à un critère plus élevé que le cas nominal. Un second effet, là aussi lié à la nature du rouleau, est la surpression générée par le passage du rouleau sur le bourrelet. Celle-ci est plus importante avec un rouleau en céramique qu'avec un rouleau en acier. C'est ce qui explique pourquoi, alors que la hauteur des bourrelets est supérieure, l'indent généré avec une particule de taille $2\phi_p$ présente une valeur maximale de critère plus faible.

Ces résultats suggèrent donc que les roulements hybrides possèdent une moins bonne résistance à la pollution que les roulements en acier. Les travaux de Strubel et al. [STR 16, STR 17] ont pourtant démontrés des propriétés inverses. Une explication tient au choix du type d'écrouissage pour la modélisation de l'acier AISI 52100. Ici, une loi d'écrouissage isotrope est utilisée, ne traduisant pas l'aspect cyclique de la plasticité. Il est donc probable que par les plus grandes pressions générées au passage sur l'indent et la répétition des cycles, l'écrasement réel du bourrelet soit supérieur en réalité que dans les simulations. Ceci au point de donner à ces contacts une plus grande longévité malgré la plus grande sévérité de l'indent initial qu'ils génèrent.

Lors de la phase d'indentation, l'utilisation d'un rouleau en 60NiTi a aussi mené à la création d'un indent plus profond et à bourrelets plus hauts. Cependant, les calculs de fatigue montrent que cette configuration est moins critique que le roulement entièrement en acier. Le module de Young du 60NiTi étant significativement plus faible que celui de l'acier, le rouleau en alliage de nickel-titane accommode mieux le passage de l'indent dans le contact. Les pressions et les contraintes générées sont alors plus faibles. C'est la raison pour laquelle les valeurs de critère sont réduites par rapport au cas nominal.

2.7.5 Effets des traitements thermo-chimiques

Un calcul a été mené en présence de contraintes résiduelles de compression dues aux traitements de surface. Les résultats obtenus suggèrent une plus grande résistance de la surface indentée que dans le cas nominal. Les contraintes résiduelles n'ayant pas d'effet direct sur le calcul du critère, c'est donc la plus faible hauteur du bourrelet qui est la raison de cette diminution des valeurs du critère. Or, comme cela a été montré au chapitre précédent, la protection de l'une des surfaces par traitements thermo-chimiques expose davantage l'autre surface et génère sur celle-ci des indents plus profonds. En ce qui concerne la durée de vie, nous observons donc une augmentation de celle de la surface traitée et une diminution de celle de la surface vierge.

2.7.6 Synthèse

L'application du critère à des indents générés dans différentes conditions a mis en avant le rôle de trois paramètres dans la fatigue. Le chargement, tout d'abord, influence directement la durée de vie. Ce paramètre, qui n'avait montré qu'une influence minimale sur le processus d'indentation et la géométrie de l'indent se trouve être critique dans la phase de roulement sur indent. La présence de glissement dans le contact est également un facteur aggravant pour la durée de vie. Les observations expérimentales de la littérature posaient déjà ce constat qui est confirmé ici. L'influence du glissement doit être couplée à celle du coefficient de frottement entre les surfaces qui régit le niveau des contraintes de cisaillement. Enfin, la hauteur des bourrelets est un facteur de réduction de la durée de vie ayant une influence forte lorsque le bourrelet est faible mais diminuant lorsque le bourrelet atteint une certaine hauteur qui dans notre étude se trouve autour de $1\% \phi_p$. Par conséquent, l'ensemble des paramètres identifiés au chapitre précédent comme étant

à l'origine d'une augmentation de la hauteur des bourrelets de l'indent influencent eux aussi la durée de vie de manière indirecte.

2.8 Conclusion

Une méthode semi-analytique de résolution du problème de contact normal et tangentiel a été employée. Cet outil, développé successivement par de nombreux auteurs [JAC 01, ANT 05, BOU 08, TON 12b, KOU 15, AMU 16], a permis la réalisation de cycles de roulement sur indent. Ceci en prenant en compte les contraintes résiduelles d'indentation ainsi que la plastification supplémentaire de la surface intervenant dans les premiers cycles après la création de l'indent.

Plusieurs critères de fatigue issus de la littérature ont été sélectionnés afin de comprendre les phénomènes à l'origine de l'apparition de fissures de fatigue en bords d'indent. Ces fissures sont observées expérimentalement en présence de glissement et se forment sur le bord de l'indent opposé à la direction de frottement. Parmi les critères issus de la littérature, le critère de Brown-Miller a donné des résultats satisfaisants même si l'orientation des plans critiques sous le bourrelet de l'indent n'est pas optimale. Le critère de Dang Van II s'est également révélé performant à conditions de prendre le paramètre α inférieur à 0,25. L'étude comparative sur indent axisymétrique a permis de montrer la prépondérance du cisaillement dans la formation des fissures. De plus, l'intérêt des actions normales au plan de cisaillement maximal a aussi été montré. Un nouveau critère basé sur le terme de cisaillement de Dang Van II et sur l'amplitude de la contrainte normale au plan de cisaillement a alors été défini. Ce critère s'est montré efficace dans la localisation des zones d'initiation de fissures et a donné de meilleurs résultats que les précédents dans la définition des orientations des plans critiques.

Le passage à un indent réel a montré que l'asymétrie de la géométrie prend le pas sur la direction de glissement. Le bourrelet de sortie, plus haut que celui d'entrée, devient alors le site préférentiel de fatigue. La charge du roulement, la présence de glissement et la hauteur des bourrelets ont été identifiées comme les paramètres influents sur la durée de vie lors d'une étude paramétrique menée en prolongement de l'étude sur le processus d'indentation.

Chapitre 3

Modélisation du contact élasto-hydrodynamique en présence d'indent

Dans ce chapitre, l'effet de la lubrification sur les conditions de contact et a fortiori sur la fatigue des surfaces est étudié. Un solveur multigrilles est mis en place pour résoudre l'équation de Reynolds transitoire et le problème de contact EHD. L'analyse du passage d'un indent dans le contact révèle un effet limité du lubrifiant en roulement pur puisque les résultats sont très proches de ceux obtenus en contact sec. En revanche, l'introduction de glissement modifie fortement l'impact du fluide sur le chargement. Le fluide, se déplaçant à la vitesse moyenne des surfaces, est poussé à sortir de l'indent dans la direction du glissement. De par son état vitreux, la poche de fluide s'échappant de l'indent entraîne alors une forte augmentation de la pression dans la zone de sortie. Cette zone de forte pression présente une forme caractéristique similaire à la zone de matage constatée expérimentalement en bord d'indent. Le matage et le micro-écaillage qui en découle semblent donc liés aux effets de la sortie du fluide de l'indent en présence de glissement. Sur le bord opposé de l'indent, la hauteur de film se trouve être minimale. Une rupture locale du film d'huile et un contact direct entre les surfaces dans cette zone sont donc à craindre. Dans ce cas, le coefficient de frottement est fortement augmenté et avec lui le cisaillement, dont le rôle dans la formation des fissures de fatigue a été montré au chapitre précédent.

Sommaire

3.1	Introduction	117
3.2	État de l'art	117
3.2.1	Modélisation du contact EHD	117
3.2.2	Étude du contact EHD en présence d'indent	119
3.3	Modélisation du contact EHD transitoire	121
3.3.1	Équation de Reynolds	121
3.3.2	Relations viscosité-pressure et densité-pressure	121
3.3.3	Épaisseur du film d'huile	123
3.3.4	Équilibre de la charge	123
3.3.5	Adimensionnement	123
3.4	Résolution du contact EHD transitoire	125
3.4.1	Discrétisation	125
3.4.2	Relaxation	127
3.4.3	Méthode de résolution multigrilles	130
3.4.4	Application au contact EHD	138
3.5	Validation du solveur	146
3.5.1	Simulations de coupure de vitesse	146
3.5.2	Passage de rugosités transverses dans le contact	151
3.5.3	Passage d'un indent dans le contact	157
3.6	Contact EHD en présence d'indent	160
3.6.1	Limites de la modélisation	160
3.6.2	Effets de la taille de l'indent	161
3.6.3	Effets du glissement	164
3.6.4	Effets de la taille du contact	168
3.7	Conclusion	170

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet du lubrifiant sur le contact élasto-hydrodynamique en présence d'indent et sur la fatigue qui en découle. À cette fin, un solveur multigrilles permettant la résolution de l'équation de Reynolds stationnaire sera enrichi afin de prendre en compte les effets transitoires. La méthode multigrilles et son application au contact EHD transitoire seront présentées dans une première partie. Le solveur mis au point sera ensuite validé sur différents cas d'étude issus de la littérature. Enfin, l'effet du passage d'un indent dans le contact sera étudié sous diverses conditions. L'impact de la présence du lubrifiant sur la fatigue sera alors analysé.

3.2 État de l'art

3.2.1 Modélisation du contact EHD

La modélisation de l'écoulement du fluide dans les contacts élasto-hydrodynamiques (EHD) est mise en équation par Reynolds [REY 86] en 1886. Toutefois, l'équation de Reynolds telle que nous la connaissons est, pour l'époque, difficile à résoudre et seules des approximations de la hauteur de film seront disponibles avant l'avènement des méthodes numériques modernes. Ainsi, en 1916, Martin [MAR 16] et Gumbel [GUM 16] proposent une première approximation de la hauteur de film minimum dans les engrenages. Pour cela, ils considèrent le contact comme un contact cylindre/cylindre et ne tiennent pas compte des déformations élastiques des surfaces, de la compressibilité et de la piézoviscosité du fluide pourtant mise en évidence par Barus [BAR 93] en 1893.

$$\bar{h}_{min} = 2,45 M^{-1}, \quad \text{avec} \quad \bar{h}_{min} = \frac{h_{min}}{R(2U^{-1/2})} \quad (3.1)$$

avec, $M = W/U^{-0,75}$ le paramètre de Moes adimensionné pour un contact circulaire, $U = \eta_0 u_m / E' R$ le paramètre de vitesse adimensionné et $W = w / E' R^2$ le paramètre de chargement adimensionné. R est le rayon équivalent des surfaces, E' le module de Young équivalent des surfaces, η_0 la viscosité du fluide à pression atmosphérique, u_m la vitesse moyenne des surfaces et w le chargement normal du contact.

La déformation élastique ainsi que la piézoviscosité du fluide seront introduites dans le calcul de la hauteur de film minimum par Ertel [ERT 39] et Grubin [GRU 49].

$$\bar{h}_{min} = 0,99 M^{-1/8} L^{3/4} \quad (3.2)$$

avec, $L = GU^{-0,25}$ le paramètre de Moes adimensionné, où $G = \alpha E'$ est le produit du coefficient de piézo-viscosité du fluide et du module de Young équivalent des surfaces.

Petrusevich [PET 51] donnera en 1951 la première solution numérique au problème de contact lubrifié, mettant ainsi au jour la présence d'un pic de pression en sortie du contact, visible sur la FIG.3.1. En 1966, Dowson et Higginson [DOW 66] publient une première résolution du contact cylindre-plan, donnant lieu à la création d'abaques et d'une équation donnant la hauteur minimum de film. S'en suit la résolution du contact elliptique par Hamrock et Dowson [HAM 76a, HAM 76b, HAM 77a, HAM 77b].

$$\bar{H}_{min} = 2,266 U^{0,68} G^{0,49} W^{-0,073} (1 - e^{-0,68k}) \quad (3.3)$$

$$\bar{H}_{cen} = 1,691 U^{0,67} G^{0,53} W^{-0,067} (1 - 0,61e^{-0,73k}) \quad (3.4)$$

avec, $k = 1,03 \left(\frac{R_z}{R_x} \right)^{0,64} \geq 1$.

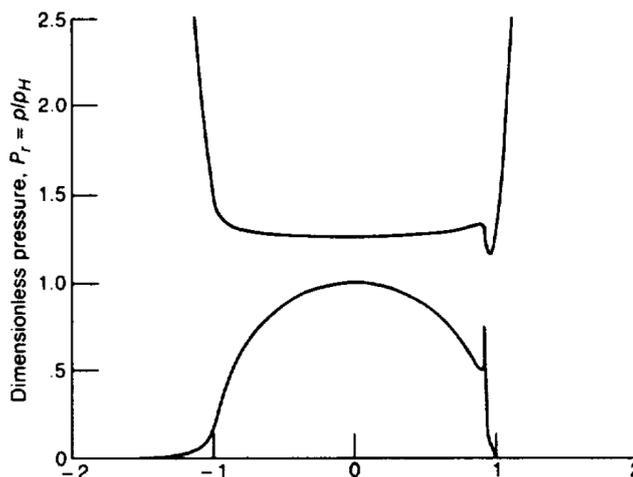


FIGURE 3.1 – Pression et épaisseur de film dans un contact EHD avec fluide compressible, d'après [HAM 88].

Les méthodes numériques modernes font leur apparition à partir des années 70. Brandt [BRA 73, BRA 77] participe au développement des méthodes multigrilles d'un point de vue mathématique au début des années 70. Elles sont alors appliquées au problème EHD par Lubrecht [LUB 87b], Lubrecht et al. [LUB 86, LUB 87a] puis par Venner [VEN 91, VEN 94a] et Venner et Bos [VEN 94b]. Plus récemment, la méthode de réduction d'amplitude a été introduite, permettant le calcul semi-analytique des contacts rugueux par l'utilisation de solutions élémentaires. Nous pouvons citer sur ce sujet les travaux de Greenwood et Morales-Espejel [GRE 94], Morales-Espejel et al. [MOR 00, MOR 03], Hooke et al. [HOO 07a, HOO 07b], Venner et al. [VEN 97] ou encore ceux plus récents de Šperka et al. [ŠPE 10, ŠPE 17].

3.2.2 Étude du contact EHD en présence d'indent

L'étude expérimentale des effets du passage d'indents dans le contact EHD par Cheng et al. [CHE 94] montre l'apparition de micro-écaillage en bord d'indent, comme illustré sur la FIG.3.2. La localisation de cet endommagement change avec le sens du glissement et se situe toujours dans la direction de celui-ci. Kaneta et al. [KAN 97] ont réalisé des essais de passage d'indents dans un contact EHD en condition de glissement sévère. L'observation directe, par interférométrie, de l'épaisseur de film dans le contact met en évidence l'apparition d'une poche de fluide dans la direction de glissement. Cette poche est formée par la sortie du fluide présent dans l'indent du fait de la différence de vitesse entre le fluide, qui se déplace à la vitesse moyenne des surfaces, et la surface indentée.

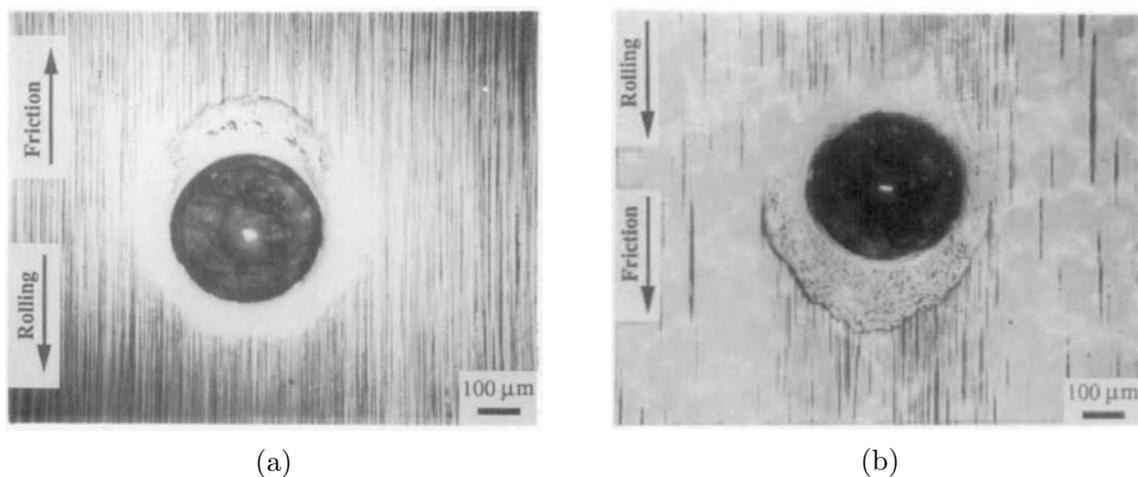


FIGURE 3.2 – Effet du sens de glissement sur la localisation du micro-écaillage autour d'un indent, d'après Cheng et al. [CHE 94].

Par la méthode de microspectrométrie de Raman, Coulon et al. [COU 04] mesurent la pression dans les contacts EHD en présence de glissement lors du passage d'indents. Il est alors montré que le glissement introduit une asymétrie du profil de pression avec un pic plus marqué dans la direction du glissement, comme illustré sur la FIG.3.3. Le niveau de glissement influence également directement le niveau de ce pic de surpression.

Ces observations expérimentales sont confirmées numériquement par Ai et al. [AI 94, AI 96] qui montrent que l'augmentation de la pression et l'apparition de la poche de fluide, visibles sur la FIG.3.4, sont corrélées. Ils confirment également que la hausse du niveau de glissement entraîne une hausse du pic de pression et augmente le volume de matière surcontraint. Enfin, les travaux expérimentaux et numériques de Ville et Nélías [VIL 99a, NEL 00], ou plus récemment, Křupka et al. [KŘU 07, KŘU 09] et Morales-Espejel et Gabelli [MOR 11b] aboutissent aux mêmes conclusions.

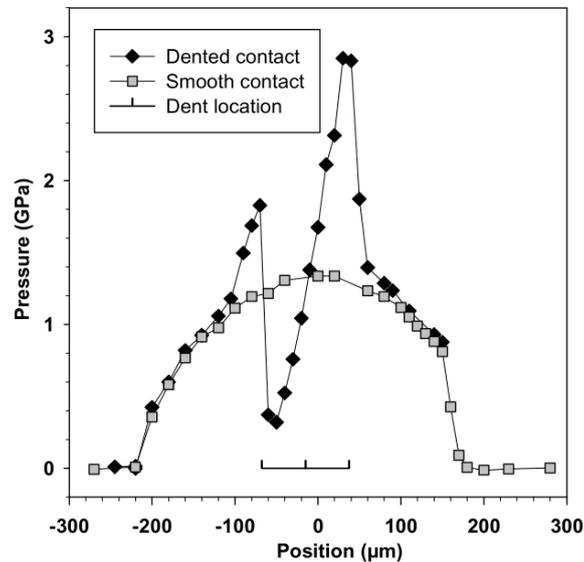


FIGURE 3.3 – Comparaison des profils de pression en présence ou non d'indent pour une vitesse de glissement de 25 mm.s^{-1} , d'après [COU 04].

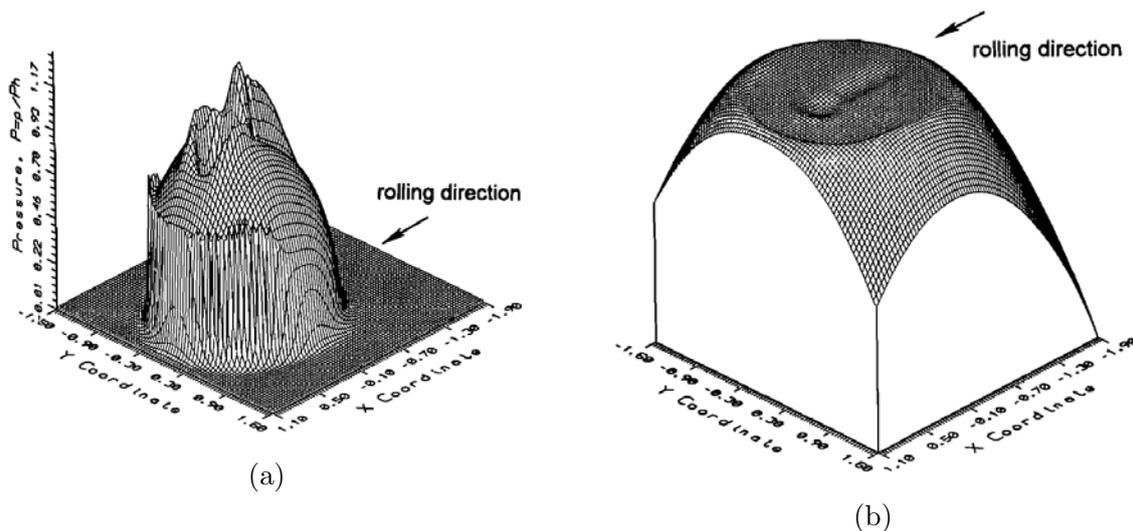


FIGURE 3.4 – Pression (a) et épaisseur de film (b) au passage d'un indent dans un contact EHD en présence de glissement, d'après Ai et al. [AI 94].

3.3 Modélisation du contact EHD transitoire

3.3.1 Équation de Reynolds

Le comportement du fluide dans le contact est dérivé de l'équation de Navier-Stokes par l'ajout d'hypothèses. Tout d'abord, la haute viscosité du fluide dans le contact rend les forces d'inertie et les forces extérieures négligeables devant les forces de viscosité. De plus, la faible dimension de l'épaisseur de film devant les directions longitudinale et transverse permet une simplification du profil de vitesse le long de cette direction. Le comportement du fluide est alors modélisé par l'équation de Reynolds (3.5) à laquelle est adjointe une condition de non-cavitation (3.6), sans quoi les pressions deviendraient fortement négatives dans le divergent, en sortie de contact. La cavitation se produit lorsque la pression du fluide devient inférieure à sa pression de vapeur saturante. Cette pression étant très faible, elle est ici prise comme nulle et la condition de non-cavitation se résume à forcer la pression à être positive ou nulle.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

$$\forall(x, y, t) \quad p(x, y, t) \geq 0 \quad (3.6)$$

Avec, ρ la masse volumique du fluide, h l'épaisseur du film d'huile entre les surfaces, η la viscosité dynamique du fluide, p la pression et u_m la vitesse moyenne des surfaces $u_m = \frac{u_1 + u_2}{2}$.

3.3.2 Relations viscosité-pression et densité-pression

Relation viscosité-pression

Les pressions dans les contacts EHD étant élevées, leurs effets sur la viscosité et la densité du fluide ne peuvent être négligés. La relation viscosité-pression peut être modélisée de manière simple par la loi de Barus [BAR 93] dont l'expression est :

$$\eta(p) = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (3.7)$$

où η_0 est la viscosité de référence à pression atmosphérique et α est le coefficient de piézo-viscosité. Cette loi empirique trouve rapidement sa limite lorsque la pression devient importante, ce qui est le cas dans les contacts EHD faisant l'objet de la présente étude. En effet, le terme exponentiel en pression entraîne une explosion de la viscosité comme le montre la FIG.3.5. Dans le cadre de pressions élevées, au-delà de 1 *GPa*, la loi de Roelands [ROE 66] est privilégiée. Son expression, plus complexe, est donnée par l'équation (3.8).

$$\eta(p) = \eta_0 \exp \left((\ln(\eta_0) + 9,67) \left(-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right) \quad (3.8)$$

où z est l'indice de piézo-viscosité et p_0 est une constante.

La comparaison entre cette loi et la loi de Barus est faite sur la FIG.3.5, montrant une meilleure gestion de la viscosité à hautes pressions. Les paramètres utilisés pour cette comparaison sont tirés des travaux de Morales-Espejel et Gabelli [MOR 15a] sur la fatigue des roulements indentés.

Relation densité-pression

La relation entre densité et pression est définie par la loi de Dowson-Higginson [DOW 66] dont l'expression est donnée par l'équation (3.9) et l'effet est visible sur la FIG.3.6.

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34p}{5,9 \cdot 10^8 + p} \quad (3.9)$$

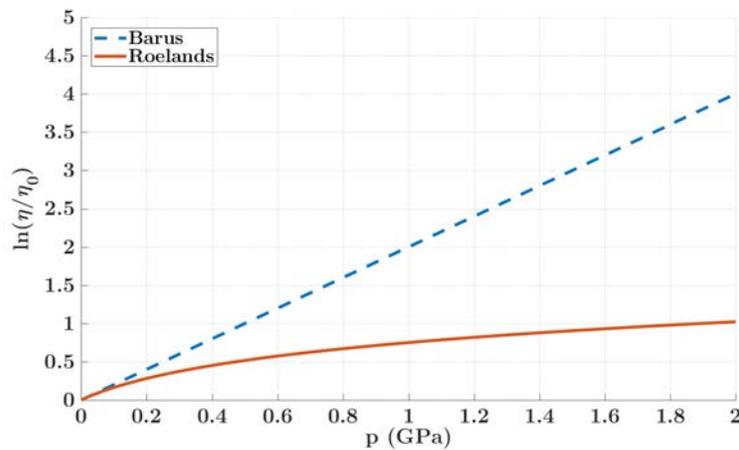


FIGURE 3.5 – Viscosité relative selon la pression pour $\alpha = 2 \text{ GPa}^{-1}$, $\eta_0 = 0,0338 \text{ Pa.s}$ et $z = 0,0624$, d'après [MOR 15a].

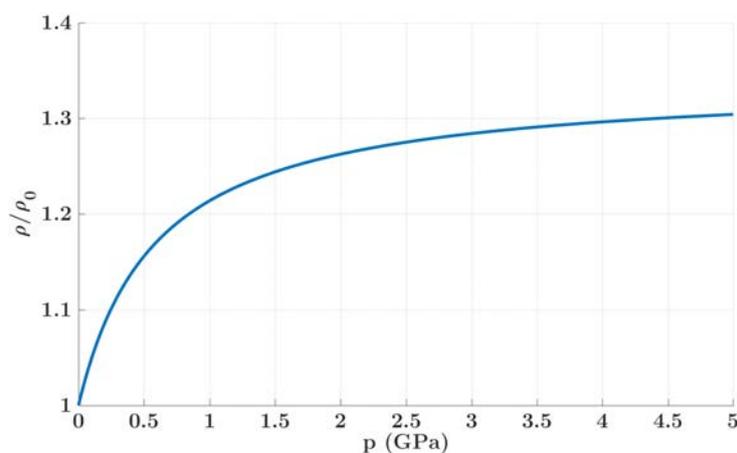


FIGURE 3.6 – Masse volumique relative en fonction de la pression d'après la loi de Dowson-Higginson [DOW 66].

3.3.3 Épaisseur du film d'huile

L'épaisseur du film d'huile dans le contact est définie ici de manière analogue à ce qui a été présenté dans le chapitre précédent pour le contact sec. Dans le cadre d'un contact elliptique, la hauteur de film est donnée par l'équation (3.10).

$$h(x, y) = h_0(x, y) - r(x, y, t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + w(x, y) \quad (3.10)$$

où h_0 est le déplacement de corps rigide, r est le terme de rugosité des surfaces, R_x et R_y sont les rayons de courbures équivalents et $w(x, y)$ représente les déformations élastiques des massifs. Une expression des déformations élastiques causées par le chargement est donnée par l'équation (3.11), sous couvert des hypothèses suivantes :

- Les solides ont un comportement élastique linéaire et isotrope
- Les dimensions du contact sont petites devant celles des solides, permettant une approximation en massifs semi-infinis.

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (3.11)$$

où E' est le module de Young équivalent qui s'exprime comme suit :

$$\frac{2}{E'} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \quad (3.12)$$

3.3.4 Équilibre de la charge

La résolution du problème de contact EHD requiert l'équilibrage des forces de pression et du chargement extérieur. Cet équilibre est donné par l'équation (3.13).

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x', y') dx' dy' \quad (3.13)$$

où w est le chargement normal appliqué sur le contact.

3.3.5 Adimensionnement

Dans un but de simplification de la présentation des équations mais aussi pour assurer leur bon conditionnement, plusieurs paramètres adimensionnés sont introduits.

Équation de Reynolds

À partir des résultats théoriques de Hertz pour un contact sec, nous introduisons les paramètres suivants :

$$P = \frac{p}{p_h}, \quad X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad H = \frac{hR_x}{a^2} \quad (3.14)$$

Sont aussi introduits le paramètre de temporalité et les paramètres liés au lubrifiant, dont les expressions sont données par l'équation (3.15)

$$T = \frac{u_m t}{a}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.15)$$

En utilisant ces paramètres, l'équation de Reynolds transitoire (3.5) devient :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{a^3 p_h}{12\eta_0 R_x^2} \frac{\bar{\rho} H^3}{12\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{a^3 p_h}{12\eta_0 R_x^2} \frac{\bar{\rho} H^3}{12\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - u_m \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - u_m \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \quad (3.16)$$

Enfin, en introduisant les paramètres ξ et $\bar{\lambda}$ définis par l'équation (3.17), l'équation de Reynolds transitoire adimensionnée ainsi que la condition de non-cavitation sont données par les équations (3.18) et (3.19).

$$\xi = \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \bar{\lambda}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{12u_m \eta_0 R_x^2}{a^3 p_h} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \quad (3.18)$$

$$\forall (X, Y, T) \quad P(X, Y, T) \geq 0 \quad (3.19)$$

Épaisseur de film

Avec les paramètres définis ci-dessus, l'équation d'épaisseur du film d'huile peut se réécrire sous la forme :

$$H(X, Y, T) = H_0(T) - \frac{R_x}{a^2} r(X, Y, T) + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + \frac{2R_x p_h}{\pi a E'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(X', Y') dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \quad (3.20)$$

En introduisant le paramètre de rugosité $\mathcal{R} = \frac{R_x}{a^2} r$ et puisque la théorie de Hertz donne $\frac{p_h}{a} = \frac{E'}{\pi R_x}$, l'équation adimensionnée de l'épaisseur du film d'huile s'écrit :

$$H(X, Y, T) = H_0(T) - \mathcal{R}(X, Y, T) + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(X', Y') dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \quad (3.21)$$

Équilibre de la charge

L'équation d'équilibre de la charge (3.13) se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{w}{p_h a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X', Y') dX' dY' \quad (3.22)$$

Ici encore, l'utilisation de la théorie de Hertz permet une dernière simplification :

$$w = \frac{2\pi p_h a^2}{3} \quad (3.23)$$

L'équation adimensionnée d'équilibre de la charge est alors donnée par l'expression suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X', Y') dX' dY' = \frac{2\pi}{3} \quad (3.24)$$

3.4 Résolution du contact EHD transitoire

3.4.1 Discrétisation

Équation de Reynolds

La discrétisation de l'équation de Reynolds adimensionnée (3.18) est scindée en deux parties. Les termes de Poiseuille sont tout d'abord discrétisés par l'intermédiaire d'une dérivée centrée du second ordre réalisée sur des points fictifs d'indice $\pm 1/2$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right) \right)_{i,j} = \frac{\left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{i+1/2,j} - \left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{i-1/2,j}}{h_X} \quad (3.25)$$

La même discrétisation est ensuite utilisée pour les dérivées aux points fictifs.

$$\left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{i+1/2,j} = \xi_{i+1/2,j} \left(\frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_X} \right) \quad (3.26)$$

$$\left(\xi \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{i-1/2,j} = \xi_{i-1/2,j} \left(\frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_X} \right) \quad (3.27)$$

avec,

$$\xi_{i+1/2,j} = \frac{\xi_{i,j} + \xi_{i+1,j}}{2} \quad \xi_{i-1/2,j} = \frac{\xi_{i-1,j} + \xi_{i,j}}{2} \quad (3.28)$$

$$\xi_{i,j} = \frac{\bar{\rho}_{i,j} H_{i,j}^3}{\bar{\eta}_{i,j} \bar{\lambda}} \quad (3.29)$$

La discrétisation du terme de Couette et du terme transitoire dit de "squeeze" est obtenue par approximation arrière du second ordre dont l'expression générale est donnée ci-après.

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial \theta}\right)_{i,j} = \frac{1, 5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0, 5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}}{h_\theta} \quad (3.30)$$

L'équation de Reynolds adimensionnée se discrétise donc au second ordre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i-1/2,j,k}P_{i-1,j,k} - (\xi_{i-1/2,j,k} + \xi_{i+1/2,j,k})P_{i,j,k} + \xi_{i+1/2,j,k}P_{i+1,j,k}}{h_X^2} + \\ & \frac{\xi_{i,j-1/2,k}P_{i,j-1,k} - (\xi_{i,j-1/2,k} + \xi_{i,j+1/2,k})P_{i,j,k} + \xi_{i,j+1/2,k}P_{i,j+1,k}}{h_Y^2} \\ & \frac{1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i-1,j,k}H_{i-1,j,k} + 0, 5\bar{\rho}_{i-2,j,k}H_{i-2,j,k}}{h_X} - \\ & \frac{1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i,j,k-1}H_{i,j,k-1} + 0, 5\bar{\rho}_{i,j,k-2}H_{i,j,k-2}}{h_T} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Épaisseur du film d'huile

L'équation régissant l'épaisseur du film d'huile (3.21) s'exprime, après discrétisation de la double intégrale et en considérant la pression constante par partie, sous la forme suivante :

$$H_{i,j,k} = H_{0_{i,j,k}} - \mathcal{R}_{i,j,k} + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'} P_{i',j'} \quad (3.32)$$

Les coefficients $K_{i,i',j,j'}$, traduisent l'impact de la pression agissant au point $(X_{i'}, Y_{j'})$ sur le point (X_i, Y_j) et sont donnés par l'équation suivante :

$$K_{i,i',j,j'} = \frac{2}{\pi^2} \int_{X_i-h_X/2}^{X_i+h_X/2} \int_{Y_j-h_Y/2}^{Y_j+h_Y/2} \frac{dX' dY'}{\sqrt{(X_i - X')^2 + (Y_j - Y')^2}} \quad (3.33)$$

Ces coefficients peuvent également être calculés de manière analytique via l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 K_{i,i',j,j'} = & \frac{2}{\pi^2} \left[|X_p| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Y_p}{X_p} \right) + |Y_p| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{X_p}{Y_p} \right) \right. \\
 & - |X_m| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Y_p}{X_m} \right) - |Y_p| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{X_m}{Y_p} \right) \\
 & - |X_p| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Y_m}{X_p} \right) - |Y_m| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{X_p}{Y_m} \right) \\
 & \left. + |X_m| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Y_m}{X_m} \right) + |Y_m| \operatorname{arcsinh} \left(\frac{X_m}{Y_m} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

où,

$$\begin{aligned}
 X_p &= X_i - X_{i'} + h_X/2 \\
 X_m &= X_i - X_{i'} - h_X/2 \\
 Y_p &= Y_j - Y_{j'} + h_Y/2 \\
 Y_m &= Y_j - Y_{j'} - h_Y/2
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Équilibre de la charge

L'équation d'équilibre de la charge est elle aussi obtenue en considérant la pression constante par partie. Il vient alors :

$$h_X h_Y \sum_i \sum_j P_{i,j} = \frac{2\pi}{3} \tag{3.36}$$

3.4.2 Relaxation

Le problème EHD est résolu de manière itérative. Cette résolution passe par l'emploi de méthodes de relaxation. Les deux types de relaxation ainsi que le schéma de relaxation globale adopté sont présentés ci-après. Pour des raisons de clarté, les méthodes seront tout d'abord exposées sur un cas simple, décrit par les équations (3.37) et (3.38). L'application de ces principes au cas du problème EHD sera détaillée par la suite.

$$\mathcal{L}u = f \tag{3.37}$$

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j} \tag{3.38}$$

Dans cette partie, la notation $\tilde{u}_{i,j}$ est utilisée pour désigner l'approximation actuelle de la solution de l'équation (3.38) et la notation $\bar{u}_{i,j}$ désigne la nouvelle approximation.

Relaxation de Jacobi

La méthode de relaxation de Jacobi appliquée au problème de référence consiste à calculer la nouvelle approximation de la manière suivante :

$$\bar{u}_{i,j} = \tilde{u}_{i,j} + \omega \delta_{i,j} \quad (3.39)$$

avec ω le coefficient de sous-relaxation et,

$$\delta_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{\left(\frac{\partial(L\underline{u})_{i,j}}{\partial u_{i,j}}\right)} = -\frac{r_{i,j}}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}} \quad (3.40)$$

où L est la discrétisation de l'opérateur \mathcal{L} et $r_{i,j}$ est le résidu de l'équation (3.38) dont l'expression est :

$$r_{i,j} = f_{i,j} - (L\underline{u})_{i,j} = f_{i,j} - \frac{\tilde{u}_{i-1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{\tilde{u}_{i,j-1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.41)$$

La nouvelle approximation $\bar{u}_{i,j}$ est ici calculée en chaque point à partir de l'approximation précédente seulement.

Relaxation de Gauss-Seidel

La méthode de relaxation de Gauss-Seidel se différencie de la méthode de Jacobi par la prise en compte, pour le calcul de la nouvelle approximation au point (i,j), des nouvelles approximations déjà calculées en d'autres points. Ainsi, dans le cas où la résolution se fait par ordre croissant d'indice, le calcul du résidu se fait comme suit :

$$r_{i,j} = f_{i,j} - (L\underline{u})_{i,j} = f_{i,j} - \frac{\bar{u}_{i-1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{\bar{u}_{i,j-1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.42)$$

Il importe donc de connaître l'ordre de résolution pour mettre en place cette méthode de relaxation.

Relaxation du problème EHD

Intéressons nous à présent au cas du contact EHD, décrit par les équations de Reynolds (3.31), d'épaisseur de film (3.32) et de conservation de la charge (3.36). L'équation de Reynolds peut être décomposée en deux parties, la première composée des deux premiers termes de Poiseuille régissant la zone basse pression du contact et la seconde composée des deux termes suivants, de Couette et de *squeeze*, régissant la partie haute pression du contact. Cette décomposition mène à des comportements très différents et nécessite donc une différenciation des méthodes de relaxation suivant la zone de résolution ou plutôt suivant les termes prépondérants de l'équation. De plus, une relaxation en ligne selon la direction de roulement X et par indice j croissant, plutôt que point par point, sera utilisée.

Ainsi, lorsque ξ prend des valeurs importantes dans la zone basse pression, l'équation est dominée par les termes de Poiseuille et les variations de pression influent très peu sur la valeur de H . Une relaxation de type Gauss-Seidel est alors privilégiée et se présente de la façon suivante :

$$\bar{P}_{i,j,k} = \tilde{P}_{i,j,k} + \omega_{GS} \delta_{GS\ i,j,k} \quad (3.43)$$

avec,

$$A^{j,k} \underline{\delta}_{j,k} = \underline{r}_{j,k} \quad (3.44)$$

où $\underline{\delta}_{j,k}$ est le vecteur des corrections $\delta_{i,j,k}$ et $\underline{r}_{j,k}$ est le vecteur des résidus actuels $r_{i,j,k}$. La matrice $A^{j,k}$ est définie comme suit :

$$A_{i,l}^{j,k} = \frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l,j,k}} \quad (3.45)$$

La résolution de l'équation (3.45), permet la relaxation sur la ligne j . Il est à noter ici que le calcul des coefficients $A_{i,l}^{j,k}$ n'est pas nécessaire sur tout le domaine car la valeur des coefficients $K_{l,0}$ diminue avec la distance, caractérisée par l'indice l . Ainsi, Venner et Lubrecht [VEN 00] se limitent au calcul de $A_{i,l}^{j,k}$ pour $i - 3 \leq l \leq i + 2$.

Lorsque ξ prend des valeurs faibles dans la zone haute pression, l'équation est dominée par le terme de Couette et le terme de "squeeze" et les variations de pression causent des déformations élastiques importantes modifiant la valeur locale de l'épaisseur du film. Une relaxation de type Jacobi est alors privilégiée. Toutefois, la modification de la pression en un point se répercute sur l'ensemble des points de la solution par l'intermédiaire du calcul de la déformation élastique qu'elle provoque. Au bout du compte, la modification de pression au point se trouve surpassée par la somme des effets de la modification de la pression aux autres points du domaine et le schéma de relaxation est instable. La méthode du tripôle de Jacobi permet de s'affranchir de cet effet en appliquant le changement au point mais également à ses voisins immédiats. La nouvelle approximation est alors définie par :

$$\bar{P}_{i,j,k} = \tilde{P}_{i,j,k} + \omega_{JA} \left(\delta_{JA\ i,j,k} - \frac{1}{4} (\delta_{JA\ i-1,j,k} + \delta_{JA\ i+1,j,k} + \delta_{JA\ i,j-1,k} + \delta_{JA\ i,j+1,k}) \right) \quad (3.46)$$

Les résidus sont définis par la résolution de l'équation (3.44) avec :

$$A_{i,l}^{j,k} = \frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l,j,k}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l+1,j,k}} + \frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l-1,j,k}} + \frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l,j+1,k}} + \frac{\partial(LP)_{i,j,k}}{\partial P_{l,j-1,k}} \right) \quad (3.47)$$

Comme précédemment, le calcul des coefficients $A_{i,l}^{j,k}$ peut être limité au cas où $i - 3 \leq l \leq i + 2$.

La distinction des méthodes de relaxation du problème EHD est donc faite sur la valeur du paramètre ξ . Venner et Lubrecht [VEN 00] conseillent de fixer une limite $\xi_{lim} = 0,3$,

ainsi, lorsque $\xi/h^2 > \xi_{lim}$ la relaxation de Gauss-Seidel en ligne est appliquée et lorsque $\xi/h^2 \leq \xi_{lim}$ la méthode du tripôle de Jacobi en ligne est appliquée.

Conditions de complémentarité

Précédemment la condition était appliquée après modification de la pression en forçant les pressions négatives à être nulle. Avec l'utilisation de la méthode du tripôle de Jacobi et la modification des points voisins, cette méthode ne peut être appliquée sans risquer une perte de convergence. Pour remédier à ce problème, la modification des points voisins ne se fait qu'à la condition qu'aucun de ces points ne présentent une pression nulle. Dans le cas contraire, seul le terme central de modification de la pression est utilisé.

Relaxation de l'équation d'équilibre de la charge

Enfin, la relaxation de l'équation d'équilibre de la charge se fait par la modification de \tilde{H}_0 après plusieurs relaxations de la pression. La mise à jour se fait comme suit :

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 + \omega_H \left(w_f - h_x h_y \sum_i \sum_j \tilde{P}_{i,j,k} \right) \quad (3.48)$$

où w_f est le terme de droite de l'équation d'équilibre de la charge (3.36).

3.4.3 Méthode de résolution multigrilles

Principe

La résolution du problème de manière itérative par l'utilisation des méthodes de relaxation présentées ci-dessus engendre une réduction rapide, en terme de nombre de relaxations, des erreurs dites hautes fréquences, c'est-à-dire des erreurs dont la longueur d'onde est petite devant la taille de discrétisation. Les erreurs dites basses fréquences, dont la longueur d'onde est grande devant la taille de discrétisation, sont en revanche plus lentes à corriger. Ainsi, la vitesse de convergence de la méthode diminue avec le nombre de relaxations à mesure que les erreurs hautes fréquences sont corrigées et que persistent les erreurs basses fréquences. Le constat peut alors être fait que, l'erreur étant désormais lissée, le problème peut être résolu avec une discrétisation plus grossière avec deux avantages à la clé. Tout d'abord, une grille plus grossière signifie moins de points de calculs et donc une économie de nombre d'opérations. Ensuite, l'erreur qui était basse fréquence sur la grille fine devient haute fréquence sur la grille grossière et la vitesse de convergence est alors élevée. Une fois le problème résolu sur la grille grossière, la solution est interpolée sur la grille fine et sert de correction à l'approximation précédente. C'est là le principe des méthodes multigrilles, évoqué ici pour deux grilles mais qui peut s'appliquer de manière récursive à un nombre plus important de grilles.

La méthode se présente donc de la manière suivante :

- Pré-relaxations sur la grille fine pour supprimer les erreurs hautes fréquences ;
- Relaxations sur la grille grossière ;
- Interpolation de la solution sur la grille fine ;
- Correction de l'approximation de la grille fine avec la solution de la grille grossière ;
- Post-relaxations sur la grille fine pour gommer les erreurs d'interpolation et de correction.

La mise en place de cette méthode est présentée de manière générale dans cette partie. Une fois l'ensemble des outils introduits, l'application à la résolution du problème EHD sera détaillée.

Transfert inter-grilles

Pour la suite de la présentation de la méthode multigrilles, h désignera la grille fine et H la grille grossière. La communication entre les grilles est assurée par des opérateurs de transfert dit de *restriction* lorsque le transfert se fait de la grille fine vers la grille grossière et d'*interpolation* lorsque le transfert se fait de la grille grossière vers la grille fine.

Restriction

Le principe de la restriction à une dimension est schématisé sur la FIG.3.7. Elle peut se faire de manière très simple, par injection, auquel cas l'opérateur de restriction en deux dimensions s'exprime comme suit :

$$I_h^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

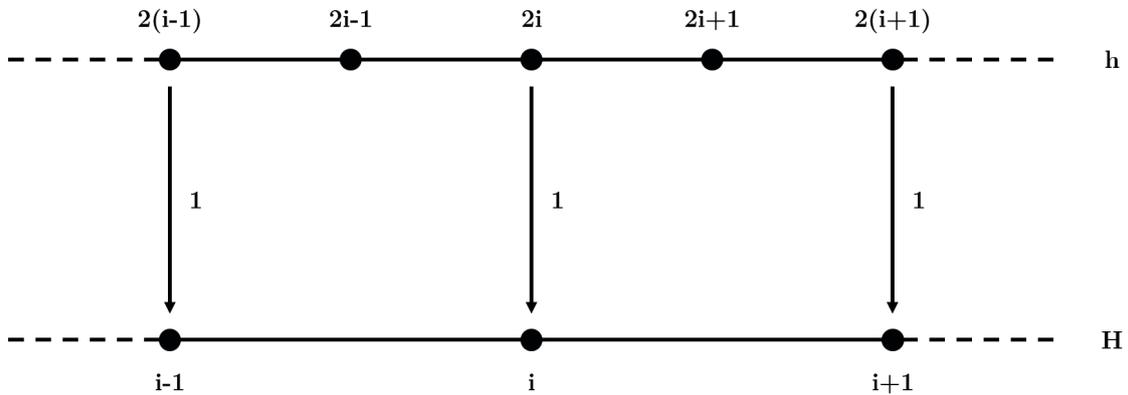
La restriction peut également être réalisée de manière plus complexe par pondération complète. L'opérateur de restriction en deux dimensions prend alors la forme suivante :

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

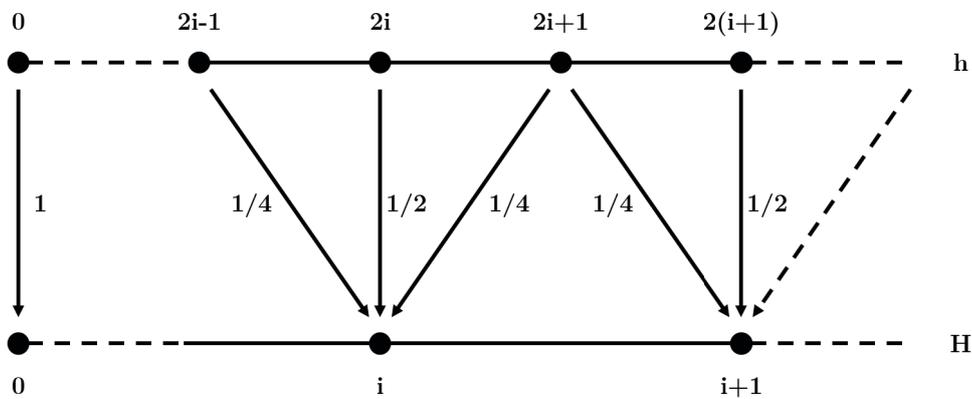
Interpolation

Le principe de l'interpolation à une dimension est schématisé sur la FIG.3.8. En deux dimensions, l'opérateur d'interpolation prend la forme suivante :

$$I_H^h = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$



(a)



(b)

FIGURE 3.7 – Illustration des méthodes de restriction par injection (a) et par pondération complète (b).

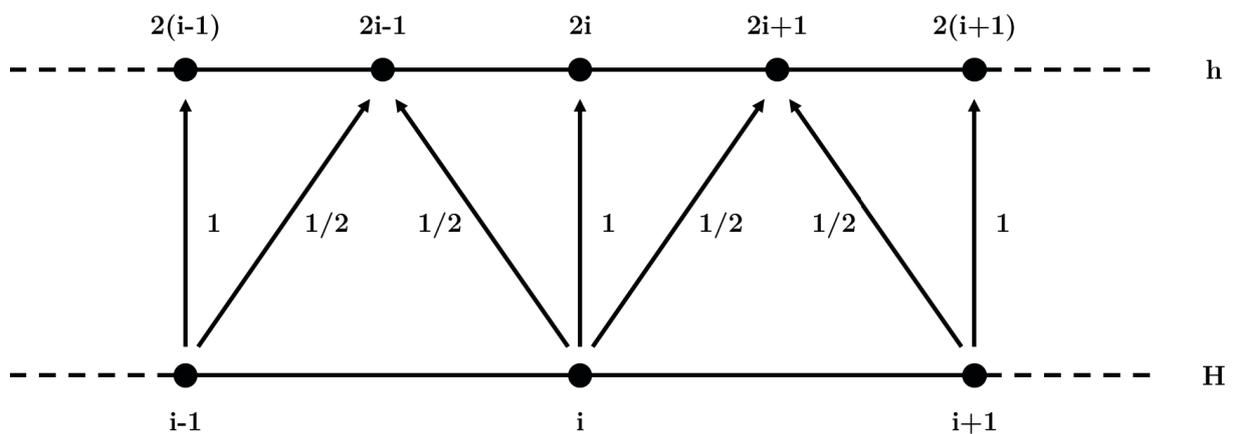


FIGURE 3.8 – Illustration de la méthode d'interpolation.

Correction de l'approximation

Deux méthodes de correction de l'approximation sont présentées ici. La première utilise le *schéma de correction* et est applicable à la résolution d'équations linéaires. La seconde utilise le *schéma d'approximation globale* et s'étend aux équations non-linéaires. C'est cette seconde méthode qui sera retenue pour la résolution du problème EHD.

Schéma de correction

Considérons le problème linéaire suivant :

$$L^h \underline{u}^h = \underline{f}^h \quad (3.52)$$

Nous noterons \tilde{u}^h l'approximation de la solution exacte \underline{u}^h obtenue après les pré-relaxations. Le résidu de l'équation (3.52) est définie par :

$$\underline{r}^h = \underline{f}^h - L^h \tilde{u}^h \quad (3.53)$$

or,

$$\underline{f}^h = L^h \underline{u}^h \quad (3.54)$$

Il vient alors :

$$\underline{r}^h = L^h \underline{u}^h - L^h \tilde{u}^h = L^h (\underline{u}^h - \tilde{u}^h) \quad (3.55)$$

Définissons le vecteur \underline{v}^h représentant l'erreur d'approximation \tilde{u}^h :

$$\underline{v}^h = \underline{u}^h - \tilde{u}^h \quad (3.56)$$

L'équation (3.55) se réécrit :

$$L^h \underline{v}^h = \underline{r}^h \quad (3.57)$$

C'est cette équation, faisant intervenir l'erreur d'approximation, qui est à résoudre sur la grille grossière. Pour cela, l'opérateur de restriction est appliqué à l'équation (3.57) :

$$I_h^H (L^h \underline{v}^h) = I_h^H \underline{r}^h \quad (3.58)$$

En remplaçant $\underline{v}^h = I_H^h \underline{v}^H$ il vient :

$$(I_h^H L^h I_H^h) \underline{v}^H = I_h^H \underline{r}^h \quad (3.59)$$

Nous pouvons alors définir L^H comme :

$$L^H = (I_h^H L^h I_H^h) \quad (3.60)$$

Toutefois, le gain en précision étant faible devant le surcoût de calcul entre cette formulation et l'application directe de L à la grille grossière [VEN 00], c'est l'application

directe qui sera privilégiée pour la suite des travaux. Ainsi, le problème à résoudre sur la grille grossière s'exprime comme :

$$L^H \underline{v}^H = I_h^H \underline{r}^h \quad (3.61)$$

Après résolution du problème sur la grille grossière, la correction de l'approximation sur la grille fine se fait par :

$$\underline{\bar{u}}^h = \underline{\tilde{u}}^h + I_H^h \underline{v}^H \quad (3.62)$$

Schéma d'approximation globale

Considérons à présent le problème défini par l'équation (3.52) comme non-linéaire. En utilisant les équations (3.53), (3.54) et (3.56), il vient :

$$L^h (\underline{\tilde{u}}^h + \underline{v}^h) = \underline{r}^h + L^h \underline{\tilde{u}}^h \quad (3.63)$$

C'est maintenant cette équation qui va être résolue sur la grille grossière et qui s'exprime sur celle-ci comme :

$$L^H \underline{w}^H = \underline{g}^H \quad (3.64)$$

avec,

$$\underline{w}^H = I_h^H (\underline{\tilde{u}}^h + \underline{v}^h) = I_h^H \underline{\tilde{u}}^h + \underline{v}^H \quad (3.65)$$

$$\underline{g}^H = I_h^H \underline{r}^h + L^H (I_h^H \underline{\tilde{u}}^h) \quad (3.66)$$

La relaxation de ce problème sur la grille grossière permet d'obtenir une solution approchée $\underline{\tilde{w}}^H$ qui est ensuite utilisée pour la correction de l'approximation $\underline{\tilde{u}}^h$ sur la grille fine :

$$\underline{\bar{u}}^h = \underline{\tilde{u}}^h + I_H^h (\underline{\tilde{w}}^H - I_h^H \underline{\tilde{u}}^h) \quad (3.67)$$

Algorithmes multigrilles

L'ensemble des points utiles à la définition d'un algorithme multigrilles ont été détaillés. La construction du schéma multi-niveau standard, appliqué au problème général défini par l'équation (3.52) est présentée ci-dessous. Quatre paramètres servent à sa définition, à savoir : k le niveau de grille, ν_0 le nombre de relaxations à faire sur le plus bas niveau de grille, ν_1 le nombre de pré-relaxations, ν_2 le nombre de post-relaxations et γ le nombre de répétitions du schéma.

Schéma Multi-niveau $(k, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \gamma)$

– Si $k > 1$:

- Faire ν_1 pré-relaxations de $L^k \underline{u}^k = \underline{f}^k \longrightarrow \tilde{\underline{u}}^k$.
- Restriction et définition du problème au niveau $k - 1$ par le schéma d'approximation globale :

$$L^H \underline{w}^{k-1} = \underline{g}^{k-1} \quad (3.68)$$

avec,

$$\underline{w}^{k-1} = I_k^{k-1} \tilde{\underline{u}}^k + \underline{v}^{k-1} \quad (3.69)$$

et

$$\underline{g}^{k-1} = I_k^{k-1} \underline{r}^k + L^{k-1} (I_k^{k-1} \tilde{\underline{u}}^k) \quad (3.70)$$

- Faire γ fois Schéma Multi-niveau $(k - 1, \nu_1, \nu_2, \gamma)$ pour obtenir une approximation $\tilde{\underline{w}}^{k-1}$ à l'équation (3.68).
- Corriger l'approximation $\tilde{\underline{u}}^k$:

$$\bar{\underline{u}}^k = \tilde{\underline{u}}^k + I_{k-1}^k (\tilde{\underline{w}}^{k-1} - I_k^{k-1} \tilde{\underline{u}}^k) \quad (3.71)$$

- Faire ν_2 post-relaxations de $L^k \underline{u}^k = \underline{f}^k$.

– Sinon :

- Faire ν_0 relaxations de $L^k \underline{u}^k = \underline{f}^k$.

Lorsque γ vaut 1, l'algorithme décrit un cycle en V illustré sur la FIG.3.9. Lorsque γ vaut 2, l'algorithme décrit un cycle en W illustré sur la FIG.3.10.

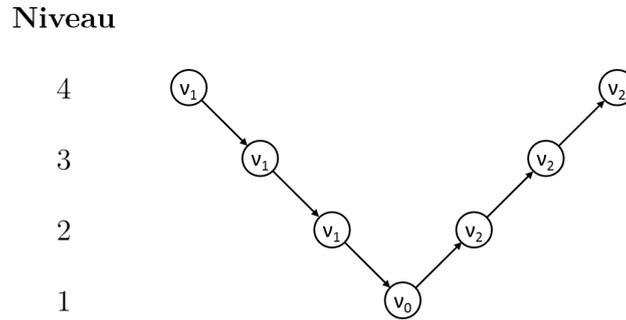


FIGURE 3.9 – Illustration du principe de cycle en V .

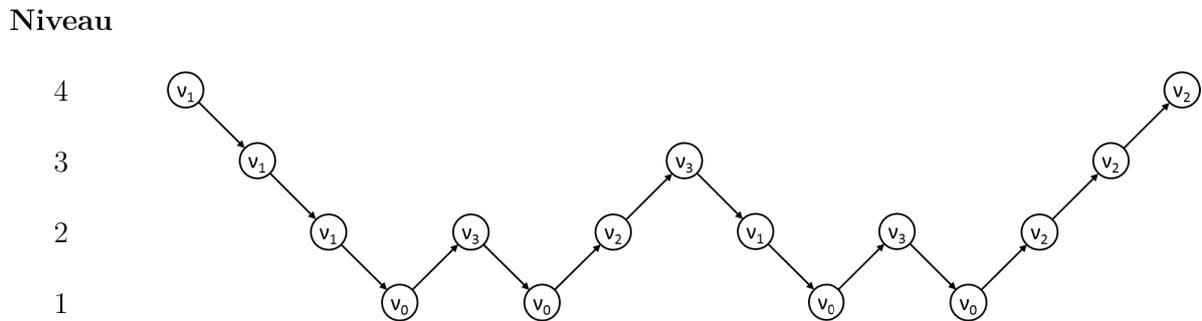


FIGURE 3.10 – Illustration du principe de cycle en W , $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$.

Une amélioration du schéma standard est possible par l'utilisation de la solution convergée sur la grille grossière en tant que première approximation sur la grille fine. Se faisant, la résolution débute sur la grille de plus bas niveau comme illustré sur la FIG.3.11. L'interpolation de la solution convergée vers la grille supérieure nécessite, à des fins de meilleures précisions, l'emploi d'une interpolation d'ordre supérieure à celle utilisée pour la communication inter-grille. Nous choisirons ici une interpolation d'ordre 4 décrite par la FIG.3.12.

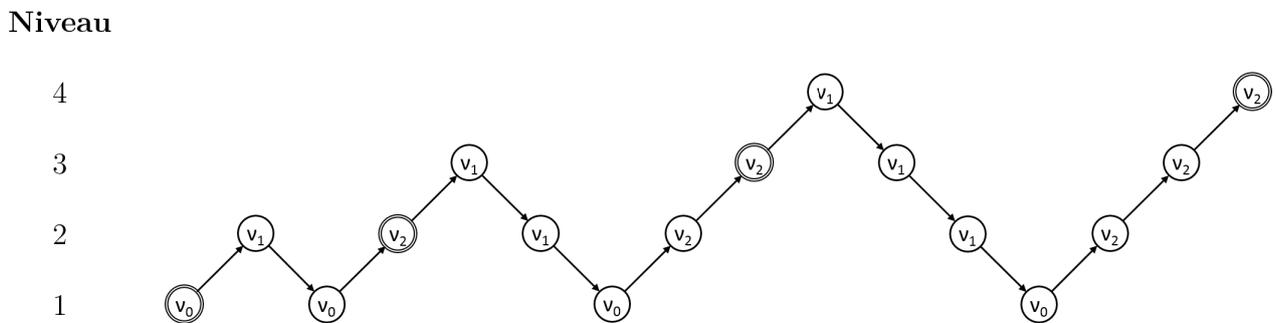


FIGURE 3.11 – Illustration du schéma multi-niveau complet avec un cycle en V .

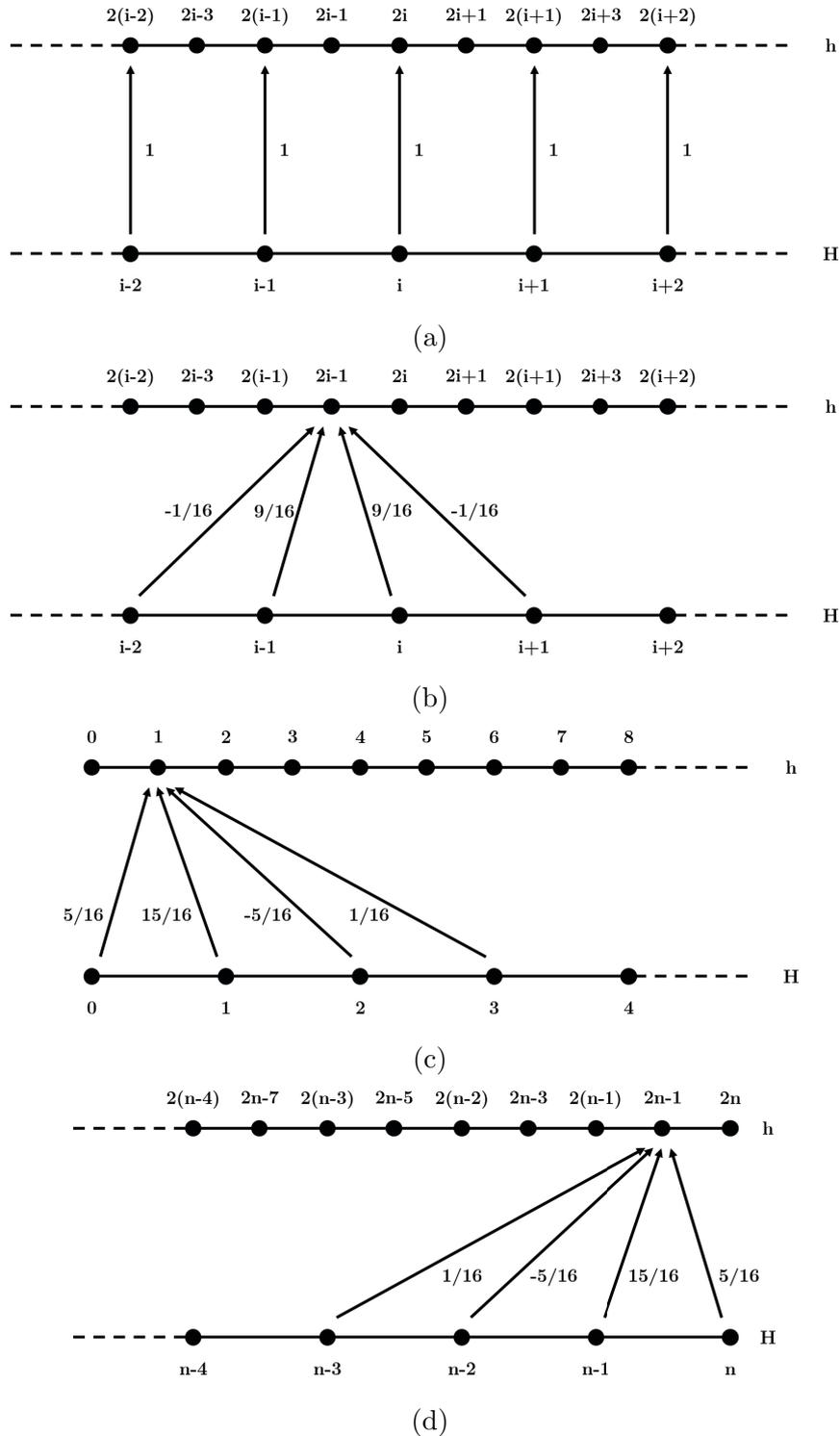


FIGURE 3.12 – Illustration de la méthode d'interpolation d'ordre 4 utilisée pour le schéma multi-niveau complet.

Le schéma prend alors le nom de schéma multi-niveau complet ou *Full Multigrid* (FMG) et utilise les mêmes paramètres que le schéma standard plus le paramètre M qui est le nombre de cycles standard à réaliser. Son principe est détaillé ci-après :

Schéma Multi-niveau complet $(k, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \gamma, M)$

– Si $k > 1$:

- Faire Schéma Multi-niveau complet $(k - 1, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \gamma, M)$.
- Interpoler la solution du niveau $k - 1$ et l'utiliser comme première approximation au niveau k :

$$\underline{\tilde{u}}^k = \mathbb{I}_{k-1}^k \underline{\tilde{u}}^{k-1} \quad (3.72)$$

- Faire M fois Schéma Multi-niveau $(k, \nu_1, \nu_2, \gamma)$.

– Sinon :

- Faire ν_0 relaxations de $L^k \underline{u}^k = \underline{f}^k$.

Le schéma multi-niveau complet offre également la possibilité de débiter le calcul par une approximation sur une grille intermédiaire en remplaçant la condition $Si\ k > 1$ par une condition $Si\ k > k_{start}$. On parle alors de schéma *tronqué*.

3.4.4 Application au contact EHD

Intégration multi-niveau

Le calcul de la déformation élastique, même sous sa forme discrétisée donnée dans l'équation d'épaisseur du film (3.32), peut s'avérer très coûteux sur les grilles de niveau élevé. Ainsi, une méthode d'accélération utilisant les grilles grossières pour le calcul de ce terme est utilisée. La méthode d'intégration rapide, développée par Brandt [BRA 11] est ici présentée pour le cas général suivant :

$$w(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy \quad (3.73)$$

où x et y sont respectivement les points d'évaluation et les points d'interpolation dans l'espace de dimension d . L'équation (3.73) est discrétisée sur la grille h sous la forme :

$$w_i^h = h^d \sum_j K_{i,j}^{h,h} u_j^h \quad (3.74)$$

Les indices i et j désignent respectivement l'évaluation de la fonction en x_i et y_j . Par la suite, la résolution du problème sera effectuée sur deux grilles h et H telles que $x_{2I}^h = x_I^H$ et $y_{2J}^h = y_J^H$. L'opérateur d'interpolation permettant le calcul de w_i^h à partir de w_J^H est défini par :

$$w_i^h = [\mathbb{I}_H^h w^H]_i \quad (3.75)$$

Le point dans l'équation (3.75) symbolise le fait que l'interpolation est ici réalisée par rapport à I . Le transfert de la grille fine vers la grille grossière est assuré par la transposée de l'opérateur d'interpolation, $(\mathbb{I}_H^h)^T$, et sera appelé anterpolation. L'anterpolation de u_j^h s'écrit :

$$u_J^H = 2^{-d} [(\mathbb{I}_H^h)^T u^h]_J \quad (3.76)$$

Le point dans l'équation (3.76) symbolise le fait que l'opération est réalisée par rapport à J .

Noyau monotone

À des fins de clarté, considérons tout d'abord que le noyau K est suffisamment monotone sur l'ensemble du domaine pour permettre une bonne approximation de $K^{h,h}$ par interpolation de $K^{H,H}$. Définissons une première approximation de $K^{h,h}$ au point y_j^h par interpolation de ses valeurs en y_J^H :

$$\tilde{K}_{i,j}^{h,h} = [\mathbb{I}_H^h K_{i,\cdot}^{h,H}]_j \quad (3.77)$$

Il est alors possible d'évaluer une approximation \tilde{w}_i^h de w_i^h par :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i^h &= h^d \sum_j \tilde{K}_{i,j}^{h,h} u_j^h = h^d \sum_j [\mathbb{I}_H^h K_{i,\cdot}^{h,H}]_j u_j^h \\ &= h^d \sum_j K_{i,J}^{h,H} [(\mathbb{I}_H^h)^T u^h]_J \\ &= H^d \sum_J K_{i,J}^{h,H} u_J^H \end{aligned} \quad (3.78)$$

Définissons maintenant une seconde approximation de $K^{h,h}$, cette fois au point x_i^h par interpolation de ses valeurs en x_I^H :

$$\hat{K}_{i,j}^{h,h} = [\mathbb{I}_H^h K_{\cdot,j}^{H,h}]_i \quad (3.79)$$

En introduisant cette nouvelle approximation dans (3.78), il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i^h &= H^d \sum_J K_{i,J}^{h,H} u_J^H = H^d \sum_J [\mathbb{I}_H^h K_{\cdot,J}^{H,H}]_i u_J^H \\ &= [\mathbb{I}_H^h w^H]_i \end{aligned} \quad (3.80)$$

avec,

$$w_I^H = \tilde{w}_{2I}^h = H^d \sum_J K_{I,J}^{H,H} u_J^H \quad (3.81)$$

Il est donc possible d'obtenir une approximation de w_i^h par interpolation de w_I^H , dont la précision dépend de l'opérateur d'interpolation choisi. Le schéma de résolution est le suivant :

Intégration rapide à noyau monotone

- Anterpolation de u_j^h sur la grille H :

$$u_J^H = 2^{-d} \left[(\mathbb{I}_H^h)^T u_i^h \right]_J \quad (3.82)$$

- Calcul de w_I^H :

$$w_I^H = H^d \sum_J K_{I,J}^{H,H} u_J^H \quad (3.83)$$

- Interpolation de w_I^H sur h :

$$w_i^h = [\mathbb{I}_H^h w_I^H]_i \quad (3.84)$$

Noyau à singularité

Dans le cadre du contact EHD, le noyau utilisé présente une singularité lorsque x tend vers y et ne peut donc pas être considéré comme monotone au voisinage de x . Toutefois, lorsque $|x - y|$ augmente, le noyau retrouve son caractère monotone. Il est donc possible, à partir de la méthode précédente, de construire un schéma d'intégration rapide pour ce type de noyau par l'ajout d'une correction au voisinage de la singularité.

Prenons tout d'abord le cas où le point i auquel w_i^h est évalué est "pair" et appartient donc également à la grille H (i.e. $i = 2I$).

$$\begin{aligned} w_i^h &= h^d \sum_j K_{i,j}^{h,h} u_j^h = h^d \sum_j \tilde{K}_{i,j}^{h,h} u_j^h + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \\ &= H^d \sum_J K_{i,J}^{h,H} u_J^H + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \end{aligned} \quad (3.85)$$

Puisque i est pair, $K_{i,J}^{h,H} = K_{I,J}^{H,H}$ et :

$$w_i^h = w_I^H + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \quad (3.86)$$

Lorsque $|i-j| \rightarrow \infty$, la correction $\left(K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h} \right) \rightarrow 0$ puisque $K^{h,h}$ devient monotone et que $\tilde{K}^{h,h}$ est obtenu par son interpolation. Au prix de l'introduction d'une approximation, nous pouvons donc restreindre le terme de correction au voisinage de la singularité, c'est-à-dire pour $i-m \leq j \leq i+m$, où m est une constante à déterminer. Il vient alors :

$$w_i^h \simeq w_I^H + h^d \sum_{i-m \leq j \leq i+m} \left(K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \quad (3.87)$$

Si i est impair et n'appartient donc pas à la grille grossière, w_i^h est obtenu par interpolation de w_I^H . En utilisant (3.79) dans (3.74) :

$$\begin{aligned} w_i^h &= h^d \sum_j K_{i,j}^{h,h} u_j^h = h^d \sum_j \hat{K}_{i,j}^{h,h} u_j^h + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \\ &= h^d \sum_j \left[\mathbb{I}_H^h K_{i,j}^{H,h} \right]_i u_j^h + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \\ &= h^d \sum_j K_{I,j}^{H,h} \left[\left(\mathbb{I}_H^h \right)^T u^h \right]_J + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \\ &= h^d \sum_j \left[\mathbb{I}_H^h K_{I,j}^{H,H} \right]_j \left[\left(\mathbb{I}_H^h \right)^T u^h \right]_J + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \\ &\simeq \left[\mathbb{I}_H^h w^H \right]_i + h^d \sum_j \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \end{aligned} \quad (3.88)$$

Comme pour le cas pair, il est possible de réduire le terme de correction et, au prix d'une approximation, d'obtenir la formulation suivante :

$$w_i^h \simeq \left[\mathbb{I}_H^h w^H \right]_i + h^d \sum_{i-m \leq j \leq i+m} \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \quad (3.89)$$

Le schéma d'intégration rapide pour un noyau à singularité se présente comme suit :

Intégration rapide à noyau à singularité

- Anterpolation de u_j^h sur la grille H :

$$u_J^H = 2^{-d} \left[(\mathbb{I}_H^h)^T u^h \right]_J \quad (3.90)$$

- Calcul de w_I^H :

$$w_I^H = H^d \sum_J K_{I,J}^{H,H} u_J^H \quad (3.91)$$

- Correction des points pairs :

$$w_I^H \leftarrow w_I^H + h^d \sum_{2I-m \leq j \leq 2I+m} \left(K_{2I,j}^{h,h} - \tilde{K}_{2I,j}^{h,h} \right) u_j^h \quad (3.92)$$

- Interpolation de w_I^H sur h :

$$w_i^h = \left[\mathbb{I}_H^h w^H \right]_i \quad (3.93)$$

- Correction des points impairs :

$$w_i^h \leftarrow \left[\mathbb{I}_H^h w^H \right]_i + h^d \sum_{i-m \leq j \leq i+m} \left(K_{i,j}^{h,h} - \hat{K}_{i,j}^{h,h} \right) u_j^h \quad (3.94)$$

Dans le cadre de la résolution du contact EHD, le nombre de points de correction dans la direction de roulement est pris égal à $m_1 = 3 + \ln(n_x)$, où n_x est le nombre de points de la grille d'évaluation dans la direction x . Dans la direction transverse, nous prendrons $m_2 = 2$.

Interpolation

La précision de la méthode d'intégration rapide repose essentiellement sur l'ordre d'interpolation choisi pour l'opérateur \mathbb{I}_H^h . Pour la résolution du problème EHD, une interpolation d'ordre six est choisie faisant émerger le problème du traitement des points en bords de grille. En effet, ces points requièrent une interpolation décentrée et font naître un nombre important de cas particuliers dans le traitement de l'interpolation. Il est possible de s'affranchir de cette contrainte par l'ajout sur chaque grille de points supplémentaires au-delà des limites de la grille servant au calcul de l'intégration rapide. Leur nombre dépend de l'ordre d'interpolation choisi. Ainsi, pour une interpolation d'ordre six, quatre points supplémentaires sont nécessaires, comme illustré par la FIG.3.13.

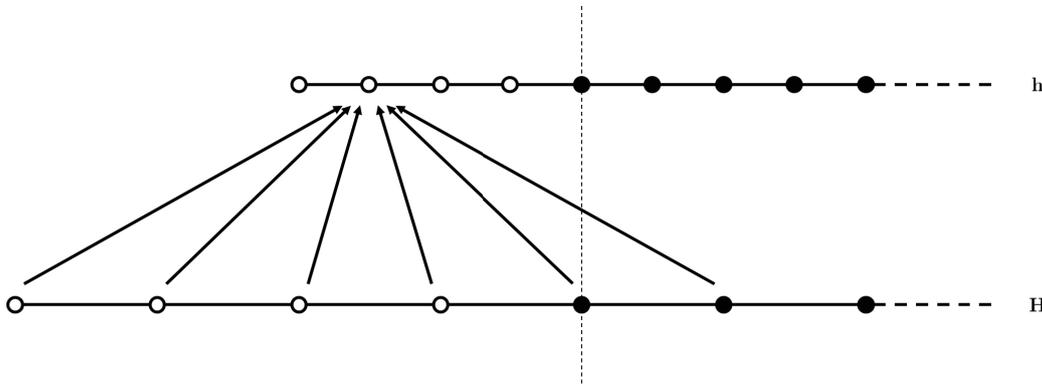


FIGURE 3.13 – Illustration de la méthode d'interpolation d'ordre six et de l'ajout des points supplémentaires hors grille pour l'intégration rapide.

Relaxation de H_0

La mise à jour du terme de déplacement de corps rigide H_0 par l'équation (3.48) introduit un important changement "basse fréquence" dans le problème. Par conséquent, la relaxation de l'équation d'équilibre de la charge n'est réalisée que de manière ponctuelle et sur la grille la plus grossière, là où la convergence après modification est la plus rapide.

F-cycle

Pour la résolution du problème EHD en transitoire, une bonne première approximation de la solution consiste à prendre la solution convergée du pas de temps précédent. L'utilisation du F-cycle, illustré sur la FIG.3.14 et exposé par Brandt et Greenwald [BRA 91], pour le calcul de l'incrément de la solution est une méthode efficace de résolution du problème transitoire. Cette méthode n'est toutefois pas utilisée dans ces travaux car non implémentée au moment où les calculs présentés ci-après ont été réalisés.

Discrétisation de l'équation transitoire

La discrétisation de l'équation de Reynolds présentée en (3.31) se veut générale et simple à mettre en oeuvre. Toutefois, il est à noter que dans cette expression, les termes

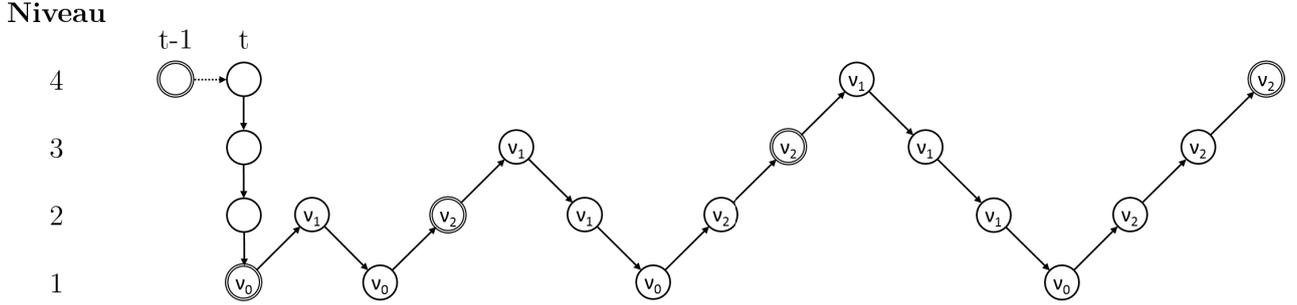


FIGURE 3.14 – Illustration du principe de F-cycle.

de Couette et de "squeeze" forment un terme d'advection qui impose une discrétisation similaire, pour ne pas dire identique, en X et en T . Une autre discrétisation de ces termes, propre à la dynamique des fluides est possible et se présente sous la forme :

- Si $\frac{1}{h_x} \geq \frac{1}{h_t}$:

$$\left(\frac{1}{h_x} - \frac{1}{h_t}\right) (1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i-1,j,k}H_{i-1,j,k} + 0, 5\bar{\rho}_{i-2,j,k}H_{i-2,j,k}) + \frac{1}{h_t} (1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i-1,j,k-1}H_{i-1,j,k-1} + 0, 5\bar{\rho}_{i-2,j,k-2}H_{i-2,j,k-2}) \quad (3.95)$$

- Sinon :

$$\left(\frac{1}{h_t} - \frac{1}{h_x}\right) (1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i,j,k-1}H_{i,j,k-1} + 0, 5\bar{\rho}_{i,j,k-2}H_{i,j,k-2}) + \frac{1}{h_x} (1, 5\bar{\rho}_{i,j,k}H_{i,j,k} - 2\bar{\rho}_{i-1,j,k-1}H_{i-1,j,k-1} + 0, 5\bar{\rho}_{i-2,j,k-2}H_{i-2,j,k-2}) \quad (3.96)$$

Cette forme de discrétisation permet de minimiser l'erreur de troncature de la discrétisation pour $h_x = h_t$, mais aussi pour $h_x = 2h_t$ et $h_x = \frac{1}{2}h_t$. Pour plus d'informations, le lecteur est dirigé vers [VEN 99].

Résolution du contact EHD transitoire

L'utilisation des techniques présentées dans la première partie de ce chapitre pour résoudre le problème de contact EHD transitoire est synthétisée sur la FIG.3.15 pour un cas à deux niveaux de grille.

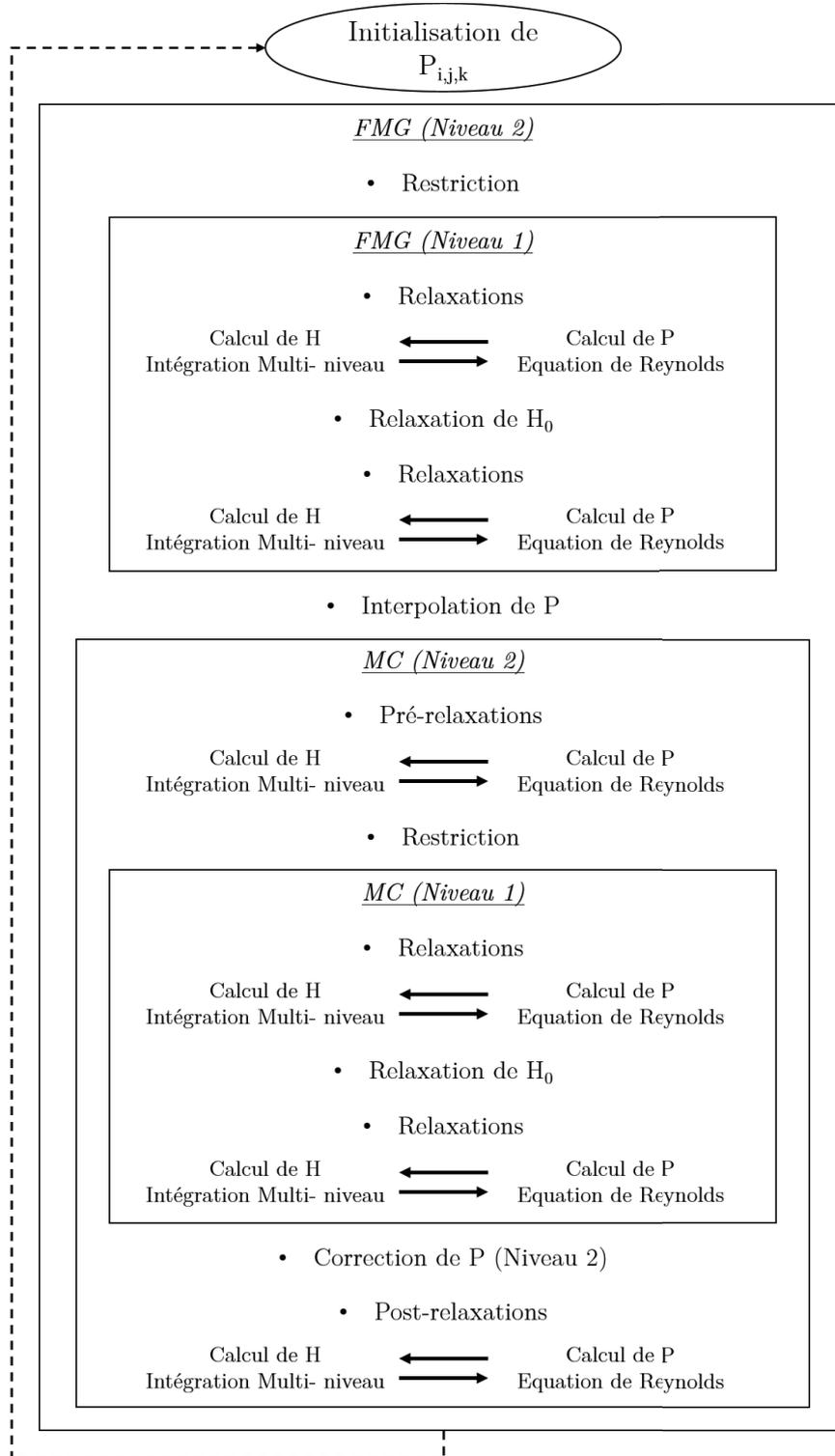


FIGURE 3.15 – Principe de résolution du contact EHD transitoire sur deux niveaux de grille.

3.5 Validation du solveur

Afin de valider le bon fonctionnement du solveur multigrilles mis au point, une confrontation à des résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature est nécessaire. Le solveur est donc contrôlé dans trois conditions.

Le premier type de simulation mené consiste en un essai de coupure de vitesse durant lequel la vitesse des surfaces est rapidement réduite jusqu'à l'arrêt complet. L'évolution de l'épaisseur de film dans le contact sert alors de base de validation de l'outil de calcul. L'objectif de ce cas test est de vérifier le bon fonctionnement de la partie transitoire du solveur multigrilles. Le second type de simulation intègre la présence de rugosités transverses dans le contact. Dans ce cas, l'objectif est de s'assurer que les rugosités sont bien prises en compte dans le solveur et de doubler la validation de la partie transitoire. Enfin, le dernier type de simulation consiste à faire passer un indent dans le contact. Pour ce dernier cas test, l'objectif est de vérifier que le solveur est capable de traiter le passage d'un indent dans un contact EHD.

3.5.1 Simulations de coupure de vitesse

Les essais de coupure de vitesse consistent en un contact entre une sphère en acier et un disque en verre, en accord avec le montage utilisé par Glovnea et Spikes [GLO 00], dont le principe est détaillé sur la FIG.3.16, ainsi qu'avec les travaux numériques de Zhao et Sadeghi [ZHA 02] basés sur les mêmes essais. Leurs essais en roulement pur serviront ici de références pour la validation du solveur EHD. Les paramètres utiles à la modélisation sont donnés dans le TAB.3.1.

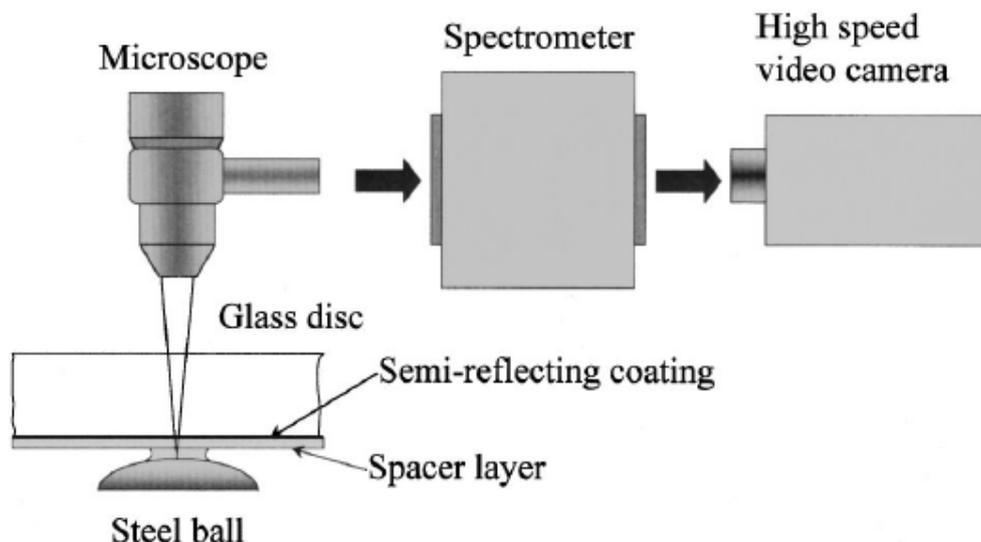


FIGURE 3.16 – Principe du montage d'observation du film d'huile en coupure de vitesse, d'après [GLO 00].

Paramètres		Glovnea et Spikes [GLO 00]	Zhao et Sadeghi [ZHA 02]
Rayon équivalent	R_x (mm)		9,5
Module de Young équivalent	E' (GPa)		112,8
Chargement	w (N)		20
Pression de Hertz	P_h (GPa)		0,515
Demi-largeur de contact	a (mm)		0,136
Viscosité de référence	η_0 (Pa.s)		0,245
Coefficient de piézo-viscosité	α (Pa ⁻¹)	$2,66 \cdot 10^{-8}$	$1,65 \cdot 10^{-8}$

TABLEAU 3.1 – Paramètres des essais de coupure de vitesse

L'évolution de la vitesse moyenne des surfaces est définie par l'équation (3.97). La vitesse moyenne initiale est $u_{m,0} = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$.

$$u_m = \begin{cases} u_{m,0} - \gamma t, & t \leq \frac{u_{m,0}}{\gamma} \\ 0, & t > \frac{u_{m,0}}{\gamma} \end{cases} \quad (3.97)$$

Comparaison à Zhao et Sadeghi [ZHA 02]

Les profils d'épaisseur de film obtenus par Zhao et Sadeghi pour une décélération $\gamma = 100 \text{ m.s}^{-2}$ sont illustrés sur la FIG.3.17. Deux phases se distinguent, correspondant aux deux phases de l'essai. Une première phase, rapide, voit l'épaisseur du film chuter progressivement de l'avant vers l'arrière du contact. Cette phase dure jusqu'à la "fermeture" du contact qui intervient légèrement après que la vitesse soit devenue nulle. La seconde phase est beaucoup plus lente et consiste en l'effondrement du film enfermé dans le contact sous l'effet du terme d'écrasement. C'est alors la fuite de l'huile par les bords du contact qui entraîne une diminution de l'épaisseur du film.

Les résultats donnés par le solveur EHD développé dans ces travaux sont présentés sur la FIG.3.18 et montrent une évolution de l'épaisseur de film similaire aux résultats de la littérature. Les résultats montrent aussi un léger écart sur la valeur initiale de l'épaisseur de film avec les calculs de Zhao et Sadeghi qui se maintient au long du calcul.

3. Modélisation du contact élasto-hydrodynamique en présence d'indent

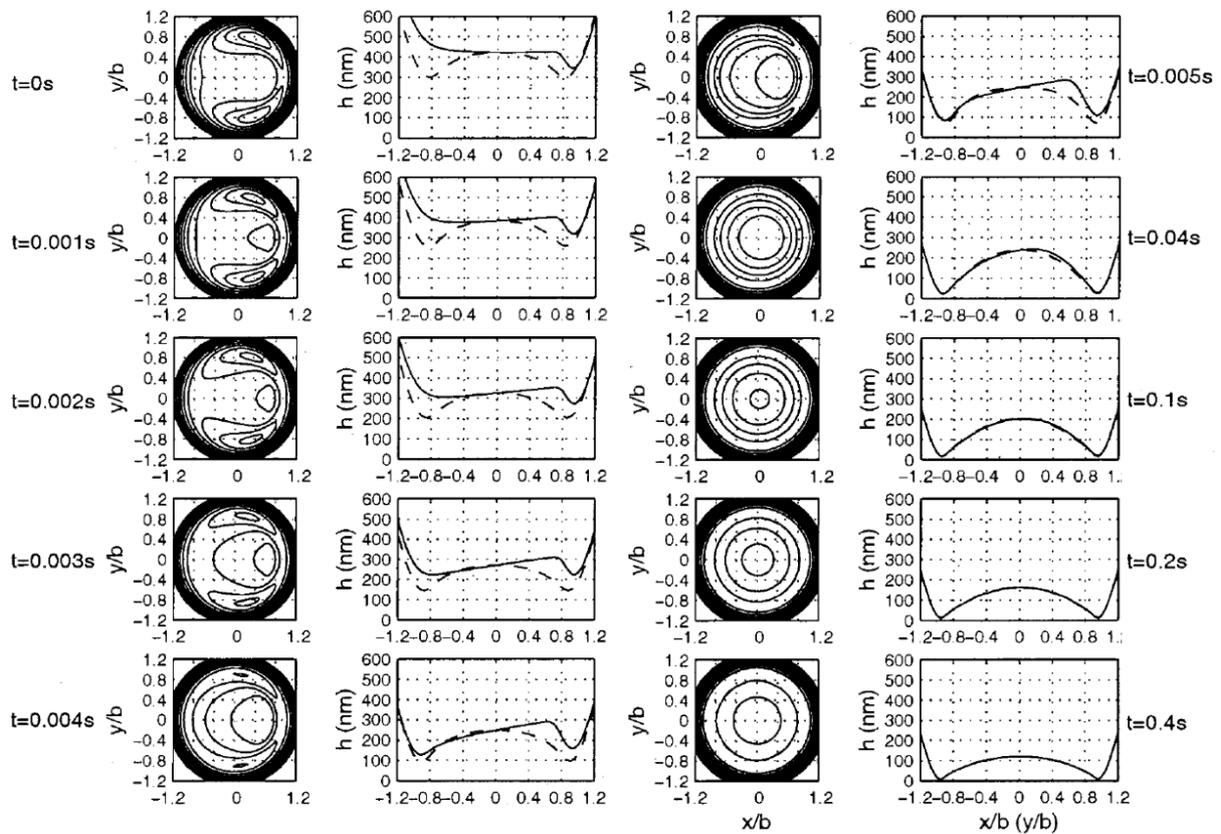


FIGURE 3.17 – Évolution de l'épaisseur de film dans les directions longitudinale et transverse pour $\gamma = 100 \text{ m.s}^{-2}$, d'après [ZHA 02].

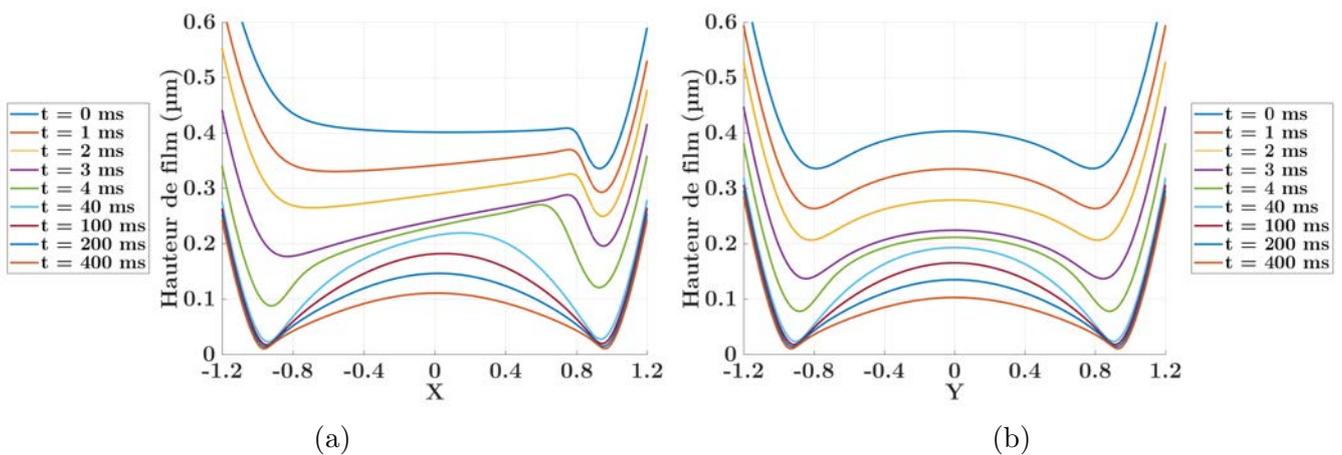


FIGURE 3.18 – Profils de l'épaisseur de film dans le contact dans les directions longitudinale (a) et transverse (b) pour $\gamma = 100 \text{ m.s}^{-2}$.

Comparaison à Glovnea et Spikes [GLO 00]

Les essais réalisés par Glovnea et Spikes sont identiques au cas numérique de Zhao et Sadeghi présenté ci-dessus, à la différence du coefficient de piézo-viscosité du fluide qui est plus élevé. Les tracés de l'épaisseur centrale de film en fonction du temps présentés sur la FIG.3.19 montrent une excellente corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques dans la phase de décélération.

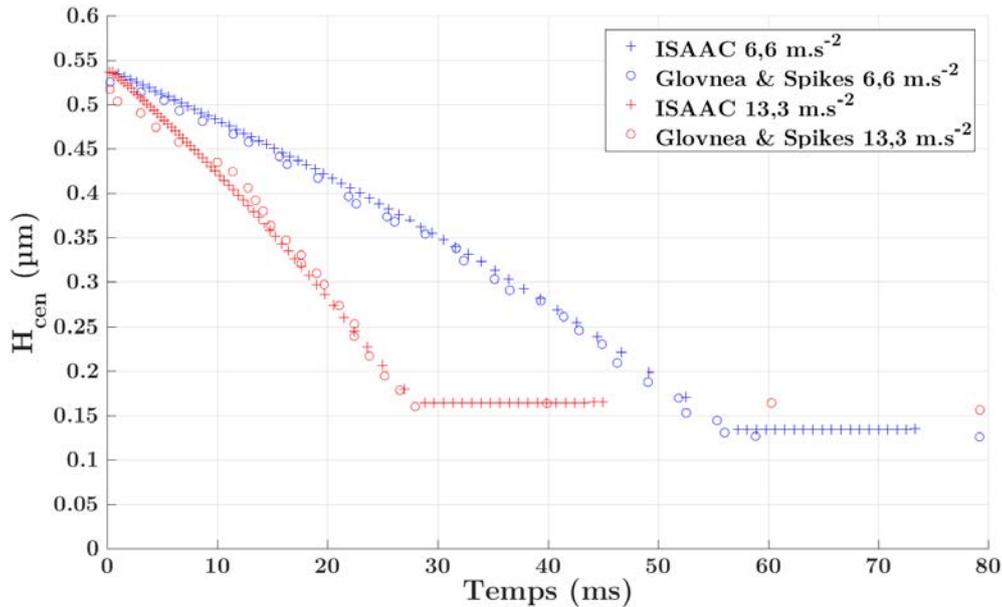
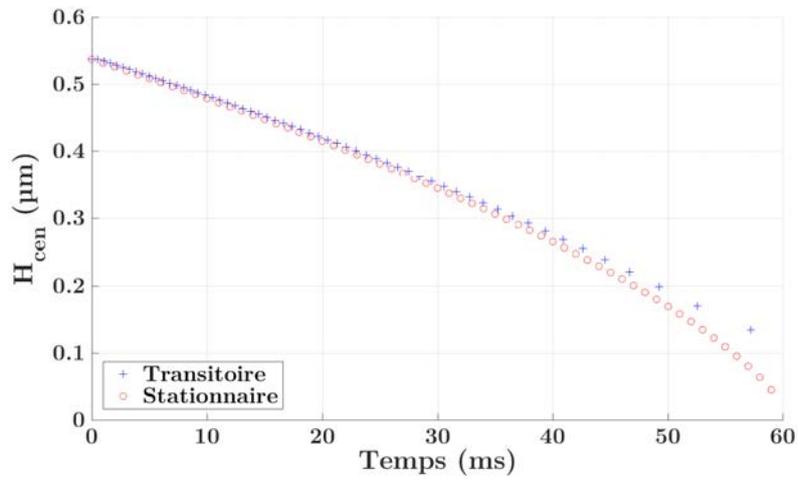


FIGURE 3.19 – Évolution de l'épaisseur centrale de film pour $\gamma = 6,6 \text{ m.s}^{-2}$ (bleu) et $\gamma = 13,3 \text{ m.s}^{-2}$ (rouge) et comparaison aux mesures de Glovnea et Spikes [GLO 00].

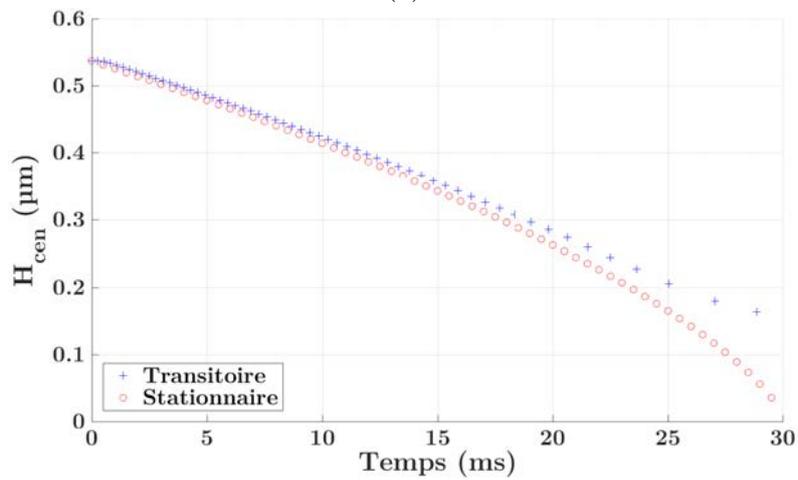
L'importance de considérer les effets transitoires dans ces essais de coupure de vitesse est confirmée par la comparaison des résultats stationnaires et transitoires pour $\gamma = 6,6 / 13,3 / 100 \text{ m.s}^{-2}$ sur la FIG.3.20. Pour des décélérations de 6,6 et 13,3 m.s^{-2} , l'écart entre la solution stationnaire et la solution transitoire n'apparaît clairement que lorsque la vitesse devient très faible. En revanche, pour une forte décélération de 100 m.s^{-2} , le décrochage des deux solutions se manifeste dès l'amorce de la baisse de vitesse. Alors que la solution stationnaire prédit une diminution immédiate du film d'huile, la solution transitoire montre un palier en début de décélération avant de voir l'épaisseur de film diminuer. Ce maintien de la hauteur de film est causé par les effets inertiels.

Synthèse

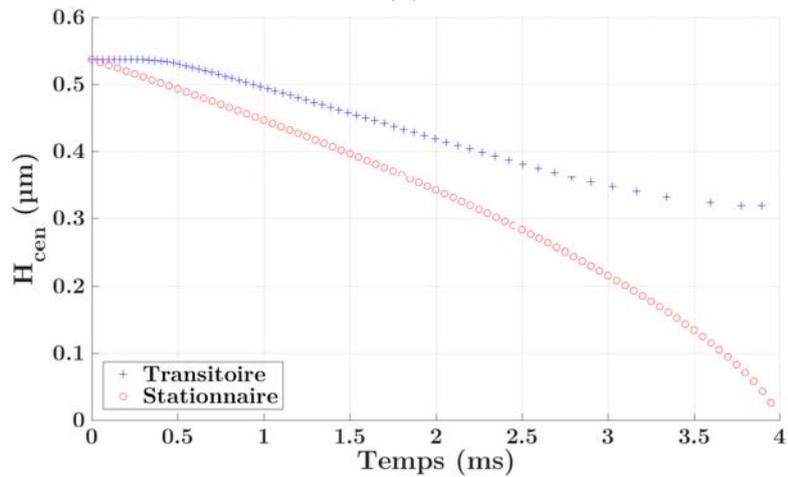
La confrontation du modèle numérique aux données disponibles dans la littérature montre une bonne corrélation des résultats en coupure de vitesse. La distinction des deux phases d'évolution du film est bien reproduite numériquement.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.20 – Comparaison des évolutions de l'épaisseur centrale de film entre les solutions stationnaire et transitoire pour des décélérations $\gamma = 6,6 \text{ m.s}^{-2}$ (a), $\gamma = 13,3 \text{ m.s}^{-2}$ (b) et $\gamma = 100 \text{ m.s}^{-2}$ (c).

3.5.2 Passage de rugosités transverses dans le contact

La présence de rugosités transverses nécessite la prise en compte de l'aspect transitoire de l'équation de Reynolds. Aussi, le modèle numérique est confronté aux travaux numériques de Venner et Lubrecht [VEN 95] sur le passage de rugosités sinusoïdales dans un contact circulaire en conditions de roulement pur et de glissement. L'équation (3.98) définit la géométrie de la surface, dont le profil est visible sur la FIG.3.21. Les paramètres utiles à la définition du problème sont donnés dans le TAB.3.2 et sont identiques aux paramètres des simulations de Venner et Lubrecht.

$$\mathcal{R}(X, Y, T) = \begin{cases} 0, & X \geq X_d \\ \mathcal{A} \sin\left(2\pi \frac{X_d - X}{\mathcal{W}}\right), & X < X_d \end{cases} \quad (3.98)$$

où $\mathcal{A} = \frac{AR_x}{a^2}$ et $\mathcal{W} = \omega/a$ sont respectivement l'amplitude et la période adimensionnées des oscillations et X_d est la position du début des rugosités par rapport au centre du contact.

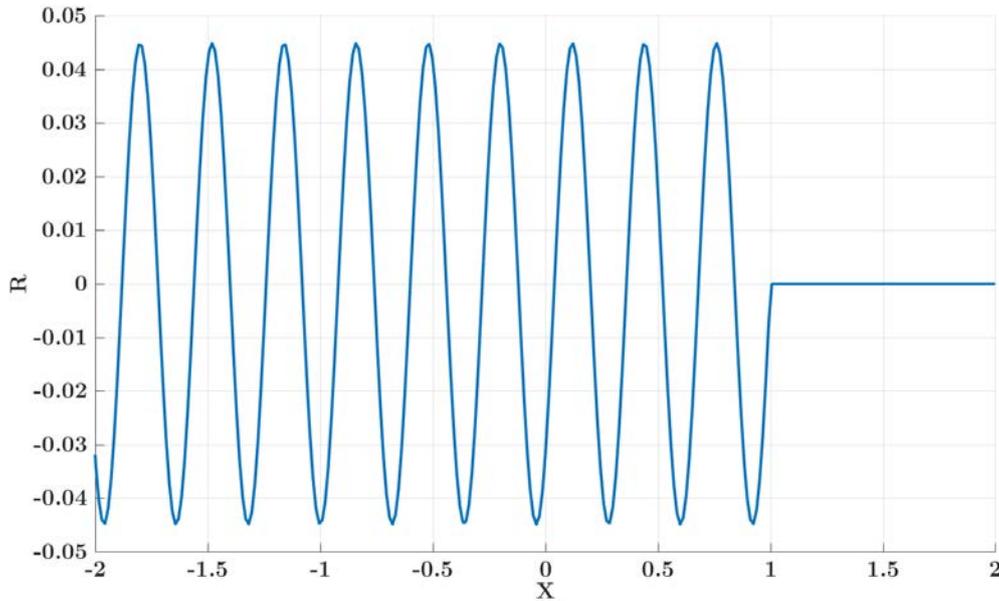


FIGURE 3.21 – Profil des rugosités dans la direction longitudinale à $X_d = 1$.

Les paramètres liés au solveur multigrilles sont également pris identiques à la littérature et sont donnés dans le TAB.3.3. Le calcul est effectué sur l'intervalle $X_d \in [-2, 0 ; 2, 0]$ afin de s'assurer que l'état initial n'est pas perturbé par la présence des rugosités et de voir un passage complet des défauts dans le contact.

Paramètres		Valeur
Rayon équivalent	R_x (mm)	12,7
Module de Young équivalent	E' (GPa)	117
Chargement	w (N)	38,5
Pression de Hertz	P_h (GPa)	0,54
Demi-largeur de contact	a (mm)	0,184
Viscosité de référence	η_0 (Pa.s)	1,22
Coefficient de piézo-viscosité	α (Pa ⁻¹)	$2,2 \cdot 10^{-8}$
Vitesse moyenne des surfaces	u_m (m.s ⁻¹)	0,048
Amplitude des oscillations	\mathcal{A}	0.045
Période des oscillations	\mathcal{W}	0.32

TABLEAU 3.2 – Paramètres des essais de passage de rugosités transverses.

Paramètres	Valeur
X_a	-2,5
X_b	1,5
Y_a	-2,0
Y_b	2,0
Nb de niveaux	4
$h_{X,Y} / h_{x,y}$	$1,5625 \cdot 10^{-2} / 2,875 \mu m$
h_T / h_t	$1,5625 \cdot 10^{-2} / 59,9 \mu s$
$n_x \times n_y$	257×257

TABLEAU 3.3 – Paramètres du solveur EHD pour le calcul de passage de rugosités transverses.

Les résultats en roulement pur sont comparés aux données issues des travaux de Venner et Lubrecht [VEN 95] sur la FIG.3.22. L'analyse des profils d'épaisseur de film montre une corrélation entre le solveur développé et les données de la littérature. L'arrivée des oscillations dans le contact entraîne aussi l'apparition d'oscillation sur l'épaisseur de film. L'effet des oscillations sur la pression est aussi visible. Tout comme pour l'épaisseur de film, le profil de pression présente des perturbations sinusoïdales en phase avec les rugosités de surface. La comparaison avec les résultats de la littérature montre des tendances identiques mais également un écart important sur l'amplitude des oscillations de pression. Les pics et creux de pression sont bien moins prononcés avec le présent modèle.

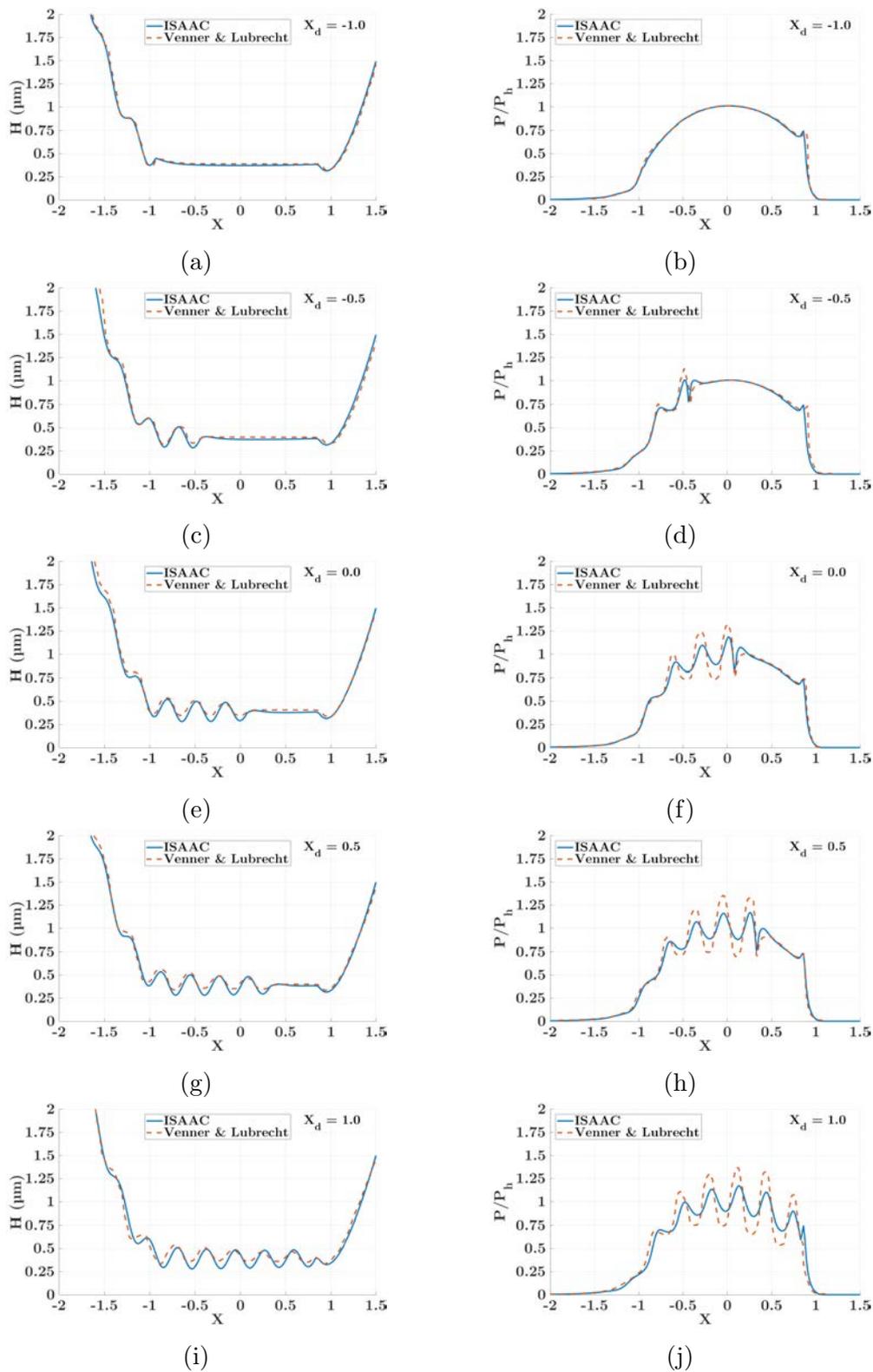


FIGURE 3.22 – Comparaison des profils d'épaisseur de film et de pression, dans la direction longitudinale et en roulement pur, avec les données tirées de [VEN 95].

Les calculs sont également réalisés en présence de glissement, dont le niveau est défini dans les travaux de Venner et Lubrecht par l'équation (3.99), la surface 2 étant celle qui porte les rugosités. Les résultats obtenus pour des valeurs de U_r de 0,25 et 0,75 sont présentés sur les FIG.3.23 et FIG.3.24 respectivement.

$$U_r = \frac{U_2}{U_1 + U_2} \quad (3.99)$$

Lorsque $U_r = 0,25$, les rugosités sont plus lentes que le lubrifiant, qui s'écoule à la vitesse moyenne des surfaces, et celui-ci tend donc à sortir des rugosités par l'avant de celles-ci. Du fait de son état vitreux dans la zone haute pression du contact, le fluide vient donc déformer les surfaces pour suivre son écoulement. Nous voyons alors apparaître sur les profils de hauteur de film, en aval des pics liés aux rugosités, des bosses supplémentaires en lieu et place des creux observés en roulement pur traduisant la présence de ces poches de lubrifiant. Ces déformations s'accompagnent de fortes surpressions, surpassant les niveaux observés en roulement pur. Il est à noter que, dans ces conditions, les résultats obtenus avec notre modèle numérique sont identiques aux résultats issus de la littérature, même sur les profils de pression.

Quand le sens de glissement est inversé et que les rugosités deviennent plus rapides que le fluide, pour $U_r = 0,75$, nous voyons apparaître l'effet inverse. Le fluide tend cette fois à s'extraire des creux des rugosités par l'arrière de ceux-ci. C'est donc en amont des pics de rugosités que l'on voit apparaître les poches de fluide. L'effet reste en revanche identique, la déformation de la surface causée par la sortie du fluide se traduit par de fortes surpressions de niveaux équivalents à ceux obtenus pour $U_r = 0,25$. Là encore, le modèle numérique est en accord avec la littérature.

Synthèse

Les résultats obtenus ici montrent le bon accord entre le modèle numérique développé et les modèles disponibles dans la littérature. L'effet important du glissement sur la pression en présence de rugosités est également mis en avant mais doit être relativisé. Tout d'abord parce que les niveaux de glissement utilisés dans les calculs sont extrêmement élevés. Ils ne correspondent donc pas aux conditions de fonctionnement nominales des roulements, mais sont en revanche plus proches du contact entre dentures d'engrenages. D'autre part, les matériaux sont ici considérés comme purement élastiques ce qui entraîne une surestimation des niveaux de pression par l'absence de modifications de la géométrie des surfaces par plasticité. Enfin, les hypothèses de comportement newtonien du fluide et d'adhérence parfaite aux surfaces peuvent être mises à mal dans des conditions aussi sévères.

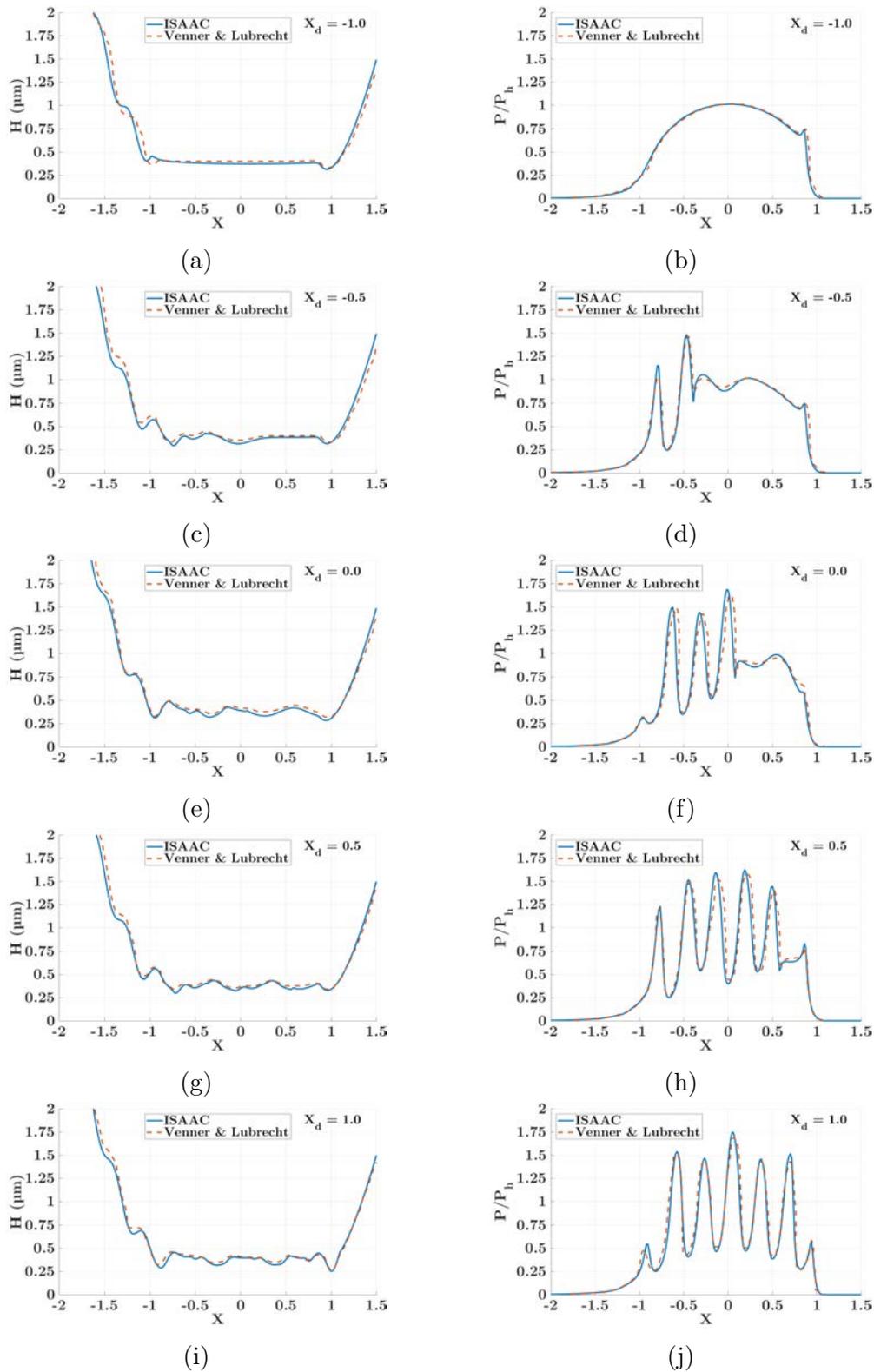


FIGURE 3.23 – Comparaison des profils d'épaisseur de film et de pression, dans la direction longitudinale et pour $U_r = 0,25$, avec les données tirées de [VEN 95].

3. Modélisation du contact élasto-hydrodynamique en présence d'indent

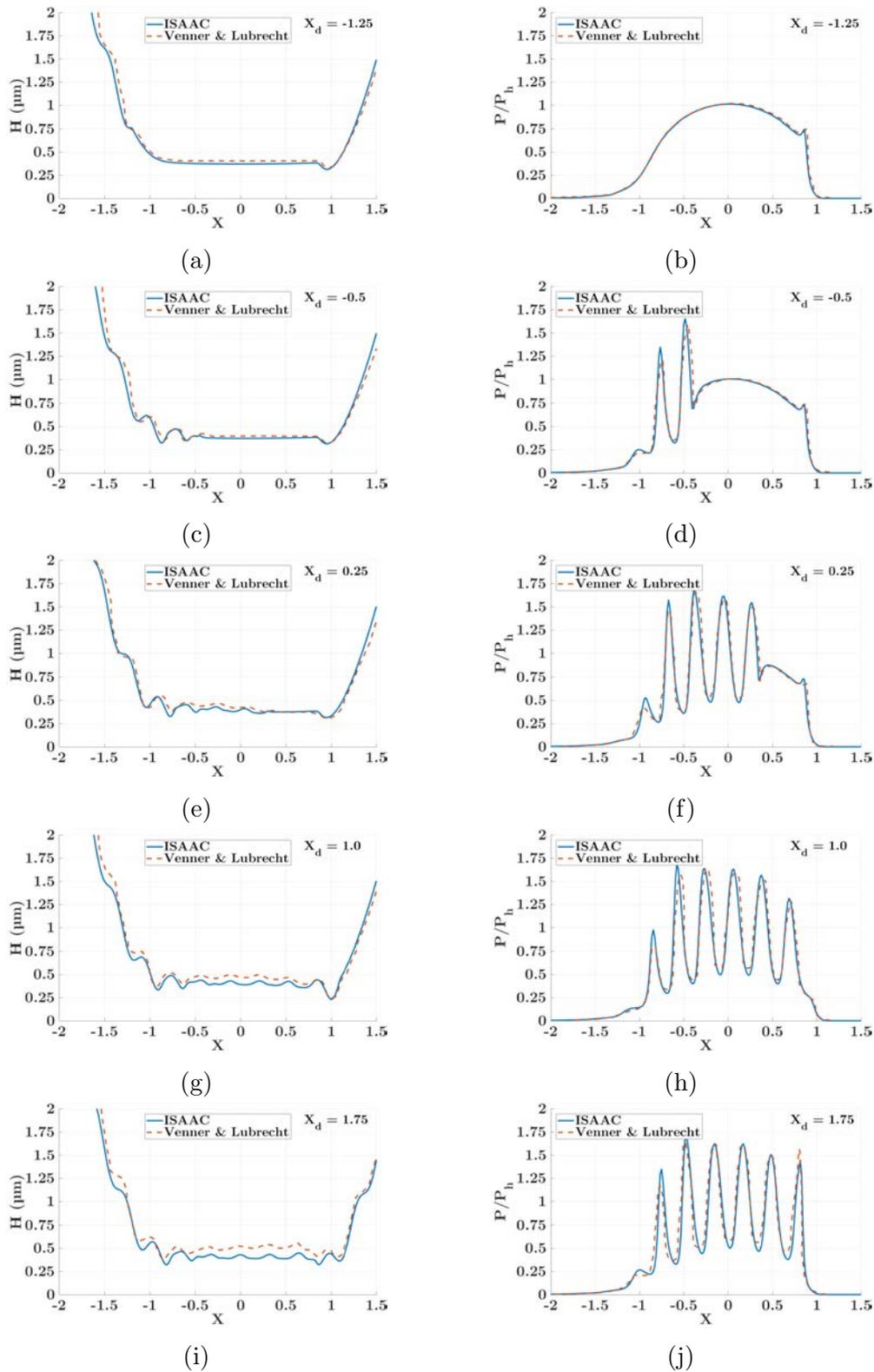


FIGURE 3.24 – Comparaison des profils d'épaisseur de film et de pression, dans la direction longitudinale et pour $U_r = 0,75$, avec les données tirées de [VEN 95].

3.5.3 Passage d'un indent dans le contact

Kaneta et al. [KAN 97] ont étudié les effets du passage d'indents dans les contacts EHD à l'aide d'un montage similaire à celui utilisé par Glovnea et Spikes [GLO 00]. Le constat est proche de celui fait pour les rugosités transverses. En condition de roulement pur, la présence de l'indent entraîne un changement de hauteur de film et des surpressions au niveau de ces bords mais les résultats ne sont pas significativement différents du contact sec. L'introduction de glissement, ici quantifié par la variable Σ dont l'expression est donnée par l'équation (3.100), provoque en revanche des changements importants liés à la tendance du fluide piégé dans l'indent à sortir de celui-ci. Les interférogrammes réalisés par Kaneta et al. et présentés sur la FIG.3.25 montrent l'apparition d'une poche de fluide en aval de l'indent lorsque la surface indentée est plus lente que le fluide. Cette même poche se forme en amont de l'indent lorsque la surface indentée est plus rapide que le fluide.

$$\Sigma = \frac{(u_1 - u_2)}{u_1 + u_2} \quad (3.100)$$

avec la surface 1 lisse et la surface 2 porteuse de l'indent.

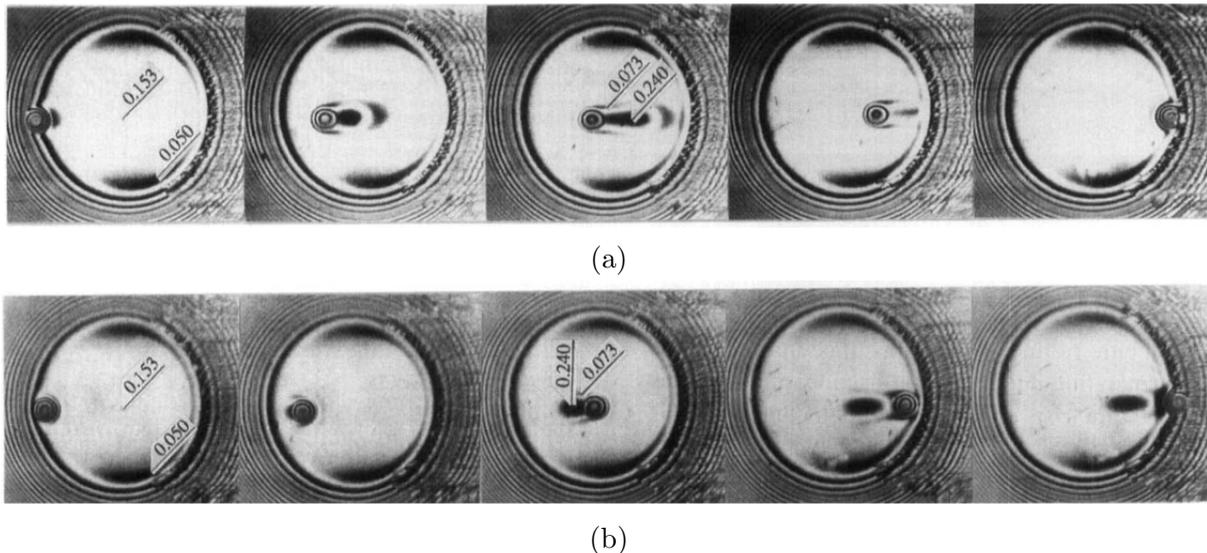


FIGURE 3.25 – Interférogrammes du passage d'un indent dans un contact EHD pour $\Sigma = 0,5$ (a) et $\Sigma = -0,5$ (b), d'après [KAN 97].

Les essais avec des indents d'une largeur d'environ $100 \mu m$ et d'une profondeur d'environ $0,5 \mu m$, référencés sous l'appellation "type C" dans les travaux menés par Kaneta et al. [KAN 97], sont reproduits avec le modèle numérique EHD. Les paramètres utiles à la modélisation sont donnés dans le TAB.3.4. En roulement pur, $\Sigma = 0$, les résultats obtenus sont proches des résultats en contact sec comme le montre la FIG.3.26. La présence de l'indent ne perturbe que localement le film d'huile sans effets particuliers sur le contact.

Paramètres	Valeur
E'	116,5 <i>GPa</i>
R_x	12,7 <i>mm</i>
W	139,2 <i>N</i>
a	186 μm
P_h	543 <i>MPa</i>
α	22,5 $GP a^{-1}$
η_0	2,97 <i>Pa.s</i>
u_m	4,5 $mm.s^{-1}$

TABLEAU 3.4 – Paramètres du contact EHD avec indent de type C, d'après [KAN 97].

Il est à noter que malgré le profil axisymétrique de l'indent modélisé, un pic dans la hauteur de film apparaît du côté aval de l'indent uniquement. Si les résultats expérimentaux font état d'une symétrie des pics de hauteur de film, il apparaît que le profil de l'indent type n'est pas exactement symétrique et que le bourrelet amont est significativement plus haut que le bourrelet aval. Cette différence de géométrie des bourrelets de l'indent peut expliquer les écarts constatés entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux.

De manière analogue aux rugosités transversales et comme observé expérimentalement, l'introduction de glissement change le comportement du fluide dans le contact. Les profils de hauteur de film, présentés par la FIG.3.26, montrent bien l'apparition d'une poche de fluide aux abords de l'indent. La position de cette poche par rapport à l'indent change en fonction du sens du glissement. Ainsi, lorsque la surface indentée est plus rapide, la poche de fluide s'extrait par l'arrière de l'indent, tandis qu'elle s'extrait par l'avant de celui-ci lorsque la surface indentée est plus lente. La hauteur de cette poche est de 0,39 μm pour $\Sigma = -0,5$ et de 0,36 μm pour $\Sigma = 0,5$, soit des dimensions comparables à la profondeur de l'indent. Ces valeurs sont surestimées par rapport aux mesures expérimentales donnant une hauteur de film dans la poche de 0,240 μm . L'écart peut ici être expliqué par les hypothèses faites dans la modélisation, à savoir le comportement newtonien du lubrifiant, l'exclusion des effets thermiques ou encore l'adhérence parfaite du fluide aux surfaces. La présence de glissement entraîne également une modification de la distribution de pression dans le contact. Nous voyons ainsi apparaître un pic de pression bien plus prononcé dans le sens du glissement, ce qui est également observé expérimentalement par Coulon et al. [COU 04]. De plus, une zone de forte pression se déplaçant avec la poche de fluide sortant de l'indent est également visible.

Synthèse

Le modèle numérique développé permet la simulation du passage d'un indent dans un contact EHD. Les phénomènes observés expérimentalement par Kaneta et al. [KAN 97] et Coulon et al. [COU 04], à savoir l'apparition d'une poche de fluide aux abords de l'indent en présence de glissement ainsi que l'augmentation de la pression causée par cette poche, sont bien reproduits.

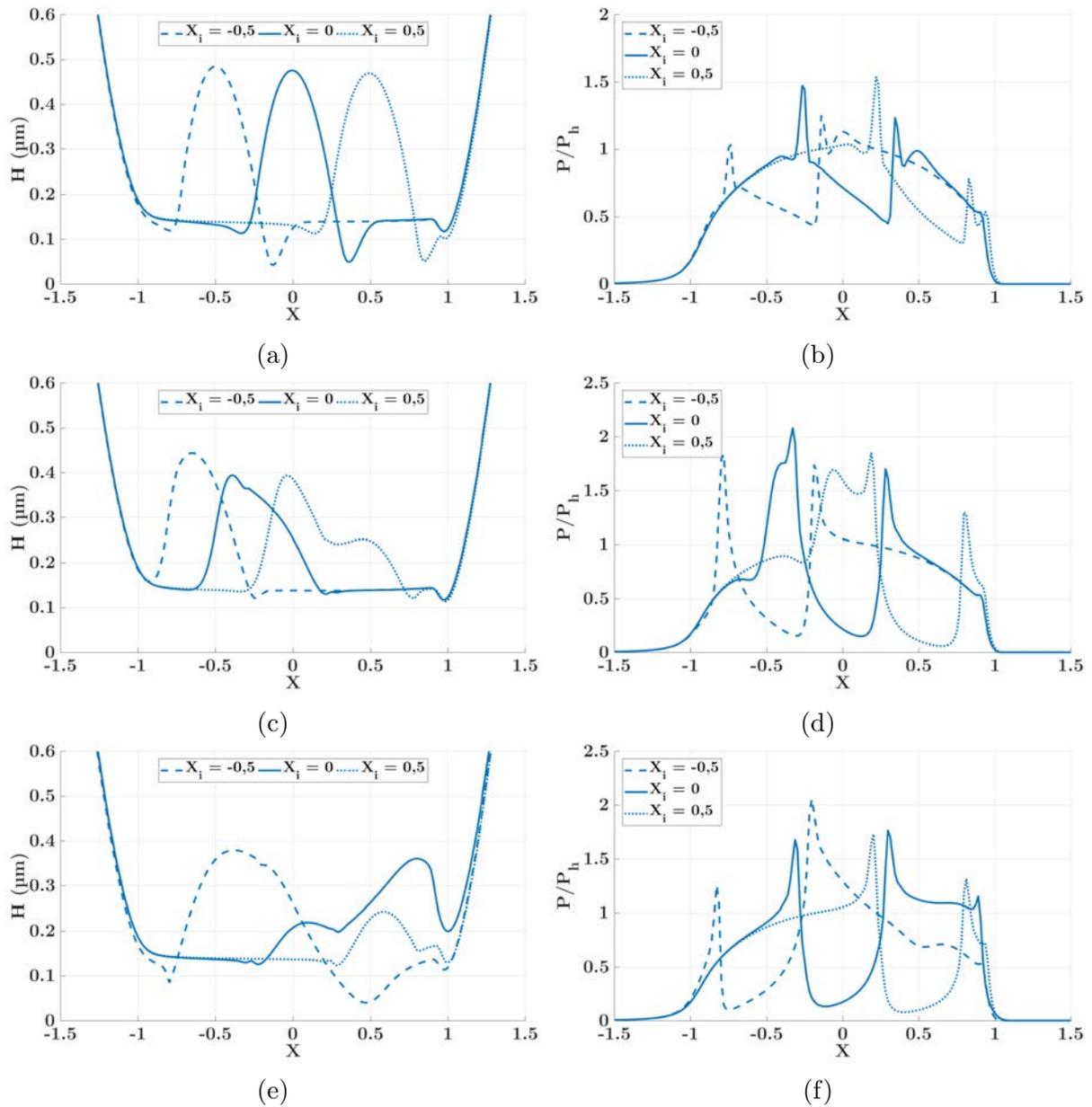


FIGURE 3.26 – Profils de hauteur de film et de pression au passage d'un indenteur pour $\Sigma = 0$ (a,b), $\Sigma = -0,5$ (c,d) et $\Sigma = 0,5$ (e,f).

3.6 Contact EHD en présence d'indent

3.6.1 Limites de la modélisation

Les conditions de fonctionnement en contact EHD mènent à des films très minces, de hauteur centrale de l'ordre de la centaine de nanomètre. La simulation du passage d'un indent de taille réelle dans ce type de contact se heurte alors à deux problèmes majeurs, la gestion de la cavitation à l'intérieur de l'indent et la prise en compte du contact sec au niveau des bourrelets. En effet, comme montré au chapitre 1, une particule en acier AISI 52100 de diamètre ϕ_p génère, à son passage dans un roulement de même nature, un indent d'une profondeur de l'ordre de 10% ϕ_p . Les bourrelets de l'indent dépassent eux 1% ϕ_p , et sont alors bien supérieurs à la hauteur du film quand bien même les cycles de roulement successifs tendent à atténuer les bourrelets.

La prise en compte du contact mixte dans un solveur EHD est abordée dans les nombreux travaux de Zhu et Hu [HU 99, ZHU 99, HU 01, ZHU 01b, ZHU 07]. Le contact direct avec les aspérités y est considéré comme une extension du contact lubrifié lorsque la hauteur de film, h , tend vers 0. Dans ces conditions, les termes de Poiseuille deviennent négligeables et l'équation de Reynolds (3.18) est réduite au terme de Couette et de "squeeze". Par l'introduction de deux valeurs seuils ε_1 et ε_2 , le système d'équations employé est alors décrit par les équations (3.101) et (3.102).

$$\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} = 0, \quad \text{si } H \leq \varepsilon_1 \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \quad \text{si } H \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial X} \leq \varepsilon_2 \quad (3.102)$$

Cette méthode nécessite toutefois de prendre de nombreuses précautions sur la discrétisation employée, principalement sur la grille la plus grossière, comme expliqué par Venner [VEN 05]. La mise en place de cette méthode dans le présent travail s'est révélée infructueuse car nécessitant des ajustements systématiques des paramètres de résolution.

En conséquence, les résultats présentés dans cette partie se limiteront à des conditions dans lesquelles le contact entre les bourrelets et la surface en regard est évité et où la profondeur de l'indent n'entraîne pas la cavitation du fluide.

3.6.2 Effets de la taille de l'indent

Le passage d'un indent dans un contact EHD génère trois types de comportement liés à la taille de l'indent. Pour étudier ces trois comportements, une série de simulations avec des indents de différentes tailles est réalisée. Les conditions de fonctionnement sont données dans le TAB.3.5. Le profil de l'indent utilisé est illustré sur la FIG.3.27 pour un indent de profondeur $2 \mu m$. Tous les indents étudiés sont obtenus par homothétie dans la direction verticale.

Paramètres		Valeur
Rayon équivalent	R_x (mm)	20
Module de Young équivalent	E' (GPa)	230,8
Chargement	w (N)	90
Pression de Hertz	P_h (MPa)	833
Demi-largeur de contact	a (μm)	227
Viscosité de référence	η_0 (Pa.s)	0,066
Coefficient de piézo-viscosité	α (Pa^{-1})	$2,78 \cdot 10^{-8}$
Vitesse moyenne des surfaces	u_m ($m.s^{-1}$)	2,2

TABLEAU 3.5 – Paramètres des simulations pour différentes tailles d'indent.

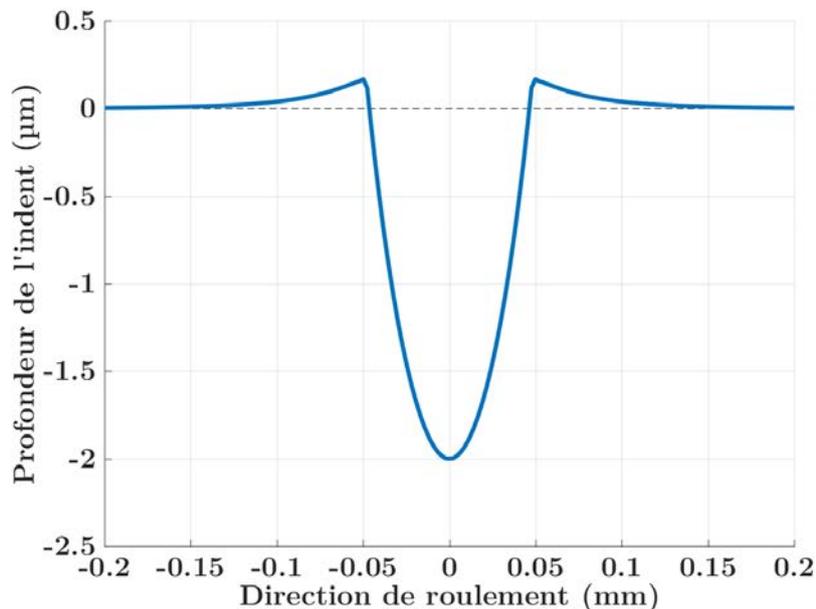


FIGURE 3.27 – Profil type de l'indent de profondeur $2 \mu m$ utilisé pour l'étude de l'effet de la taille de l'indent.

La position du centre de l'indent par rapport au centre du contact est représentée par la variable X_d . Afin d'observer les effets du passage de l'indent sur le contact EHD le roulement est effectué de $X_d = -3a$ à $X_d = 2a$. L'état initial du calcul n'est ainsi pas perturbé par la présence de l'indent. Les paramètres propres au solveur multigrilles sont donnés dans le TAB.3.6. La simulation complète du passage d'indent dans le contact sur un processeur de 2,2 GHz nécessite environ 18 heures.

Paramètres	Valeur
X_a	-2,5
X_b	2,0
Y_a	-2,0
Y_b	2,0
Nb de niveaux	4
$h_{X,Y} / h_{x,y}$	$1,5625 \cdot 10^{-2} / 3,55 \mu m$
h_T / h_t	$1,5625 \cdot 10^{-2} / 1,61 \mu s$
$n_x \times n_y$	287×257

TABLEAU 3.6 – Paramètres du solveur EHD pour le calcul de passage d'indent.

Des indents de profondeur $0,1 / 2 / 6 \mu m$ sont modélisés et permettent, via l'analyse des profils de pression FIG.3.28, de distinguer les régimes de fonctionnement évoqués. Lorsque l'indent est petit, comme c'est le cas ici pour l'indent de profondeur $0,1 \mu m$, le défaut de surface est compensé par l'écrasement des surfaces dans le contact et la pression n'est que faiblement affectée par le passage de l'indent (FIG.3.28b). À mesure que l'indent gagne en profondeur et en hauteur de bourrelet, la déformation des surfaces ne suffit plus à combler le défaut géométrique et la distribution de pression est modifiée. Une chute de la pression est constatée autour des bourrelets qui génèrent, eux, une forte surpression. C'est le cas pour l'indent de $2 \mu m$ de profondeur. Enfin, l'indent de $6 \mu m$ de profondeur fait apparaître un nouveau comportement. Le profil de pression montre un plateau de pression en fond d'indent n'ayant que peu de sens physique. Nous touchons ici aux limites du modèle dans sa capacité à gérer la cavitation dans l'indent. Le plateau de pression devrait être remplacé par une zone de pression faible sinon nulle traduisant la cavitation du fluide.

D'une manière générale, nous constatons que plus les bourrelets de l'indent sont hauts, plus le pic de pression qu'ils génèrent est élevé, constat qui était déjà fait pour le contact sec.

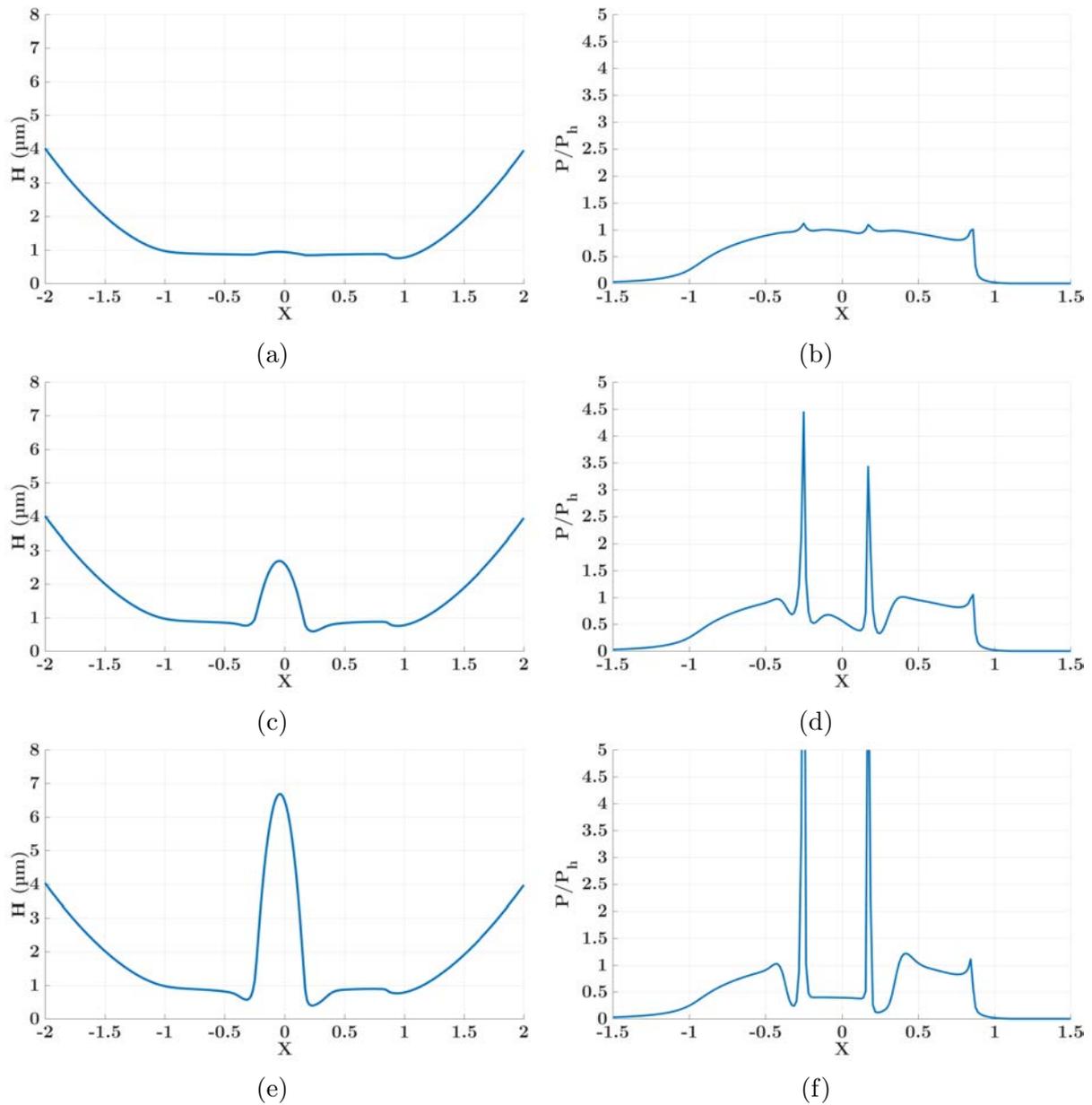


FIGURE 3.28 – Profils de hauteur de film et de pression pour des indents de profondeur $0,1 \mu\text{m}$ (a,b), $2 \mu\text{m}$ (c,d) et $6 \mu\text{m}$ (e,f).

3.6.3 Effets du glissement

L'impact du glissement sur le contact EHD a en partie été étudié lors de la validation du modèle. Une étude plus complète est ici conduite sur la base de l'indent de profondeur $2 \mu\text{m}$ et pour des taux de glissement allant de -12% à $+12\%$.

Sens du glissement

Les résultats pour des taux de glissement de -6% et $+6\%$ sont représentés sur la FIG.3.29. Ils permettent de constater, comme précédemment, l'effet du signe du taux de glissement et donc de la direction du glissement sur la sortie de la poche de fluide de l'indent. Ainsi, pour un taux de glissement positif, la surface indentée est plus lente que le fluide, qui pour rappel se déplace à la vitesse moyenne des surfaces. Celui-ci sort alors

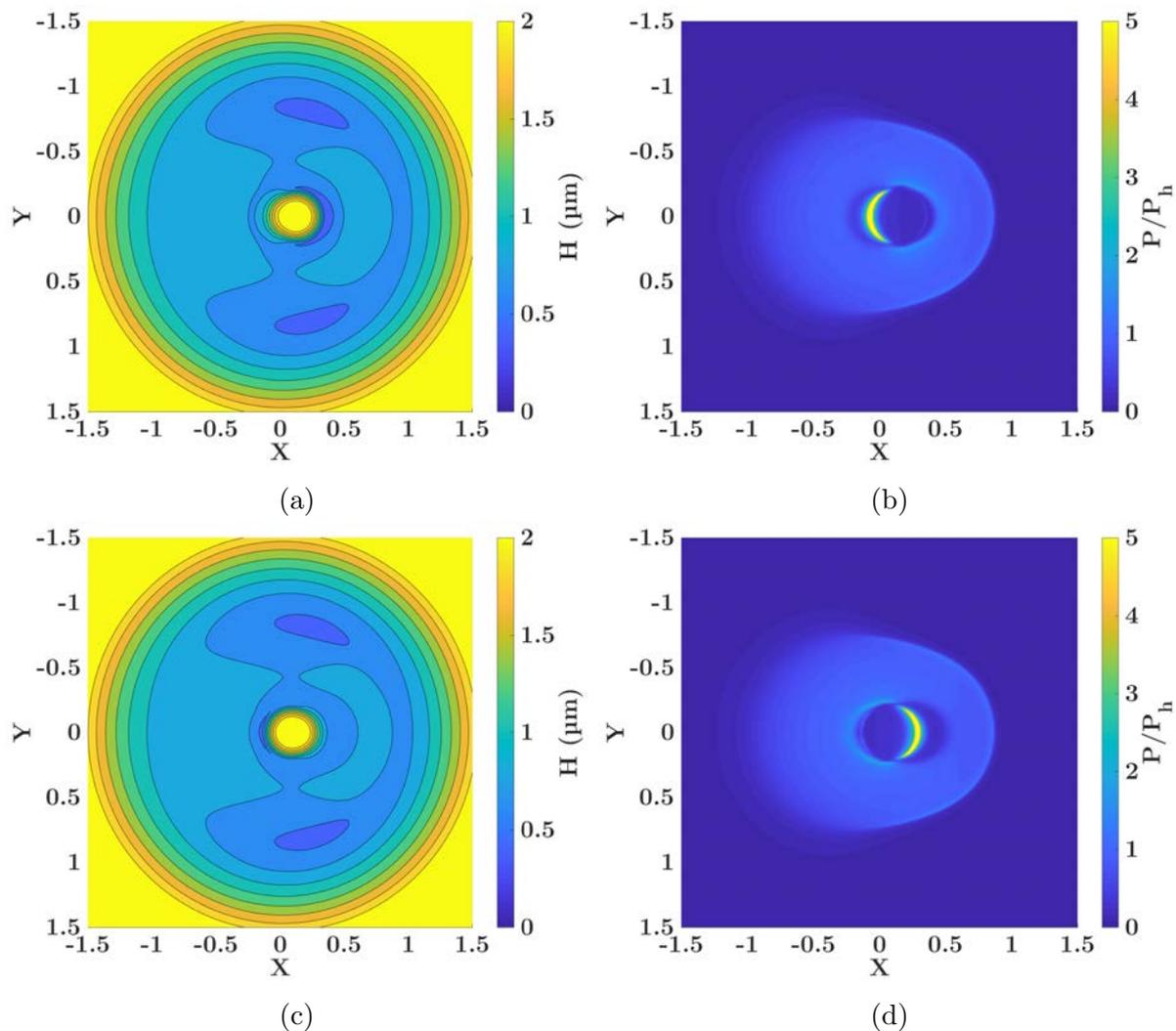


FIGURE 3.29 – Hauteur de film et pression pour des taux de glissement de -6% (a,b) et $+6\%$ (c,d) pour un indent de profondeur $2\mu\text{m}$.

dans la direction du roulement comme le montre le profil de hauteur de film. À l'inverse, pour un taux de glissement négatif, synonyme d'une surface indentée plus rapide que le fluide, celui-ci sort de l'indent dans la direction opposée au roulement. Dans chacun des cas de glissement présentés, une baisse de la hauteur de film est constatée sur le bord de l'indent opposé à la direction de sortie du fluide. Cette chute de la hauteur de film peut mener à des interactions directes entre les surfaces. Dans ces conditions, le coefficient de frottement augmente fortement et avec lui le cisaillement en surface. La valeur du coefficient de frottement dépend alors des additifs présents dans le lubrifiant. C'est dans cette zone qu'apparaissent les fissures de fatigue étudiées au chapitre précédent et dont la formation repose sur le cisaillement.

La sortie du fluide s'accompagne d'une forte augmentation de la pression bien visible sur les profils de la FIG.3.29. Nous constatons également que le niveau de pression est significativement plus élevé au niveau du bord de sortie du fluide, alors même que le bord opposé présente une hauteur de film réduite du fait du bourrelet de l'indent qui est moins écrasé. Les niveaux de glissement étant ici plus faibles que dans les essais de Kaneta et al. [KAN 97], la poche de fluide reste à proximité du bord de l'indent tout au long du passage de ce dernier dans le contact.

Niveau de glissement

Le niveau de glissement joue également un rôle de premier ordre. Comme illustré sur la distribution de hauteur de film des FIG.3.30 et 3.31, plus le niveau de glissement est important, plus la poche de fluide sort loin de l'indent durant le passage dans le contact. La surface en sortie d'indent voyant la surpression causée par la sortie du fluide est alors étendue. De plus, l'augmentation du niveau de glissement entraîne aussi une augmentation de la surpression. Il est à noter que la forme en croissant de lune de la zone de surpression correspond bien à la zone de matage observée expérimentalement durant les essais de fatigue de surface indentée, comme l'illustre la FIG.3.32. Nous pouvons donc relier l'apparition de cet endommagement à la sortie du fluide de l'indent en condition de glissement.

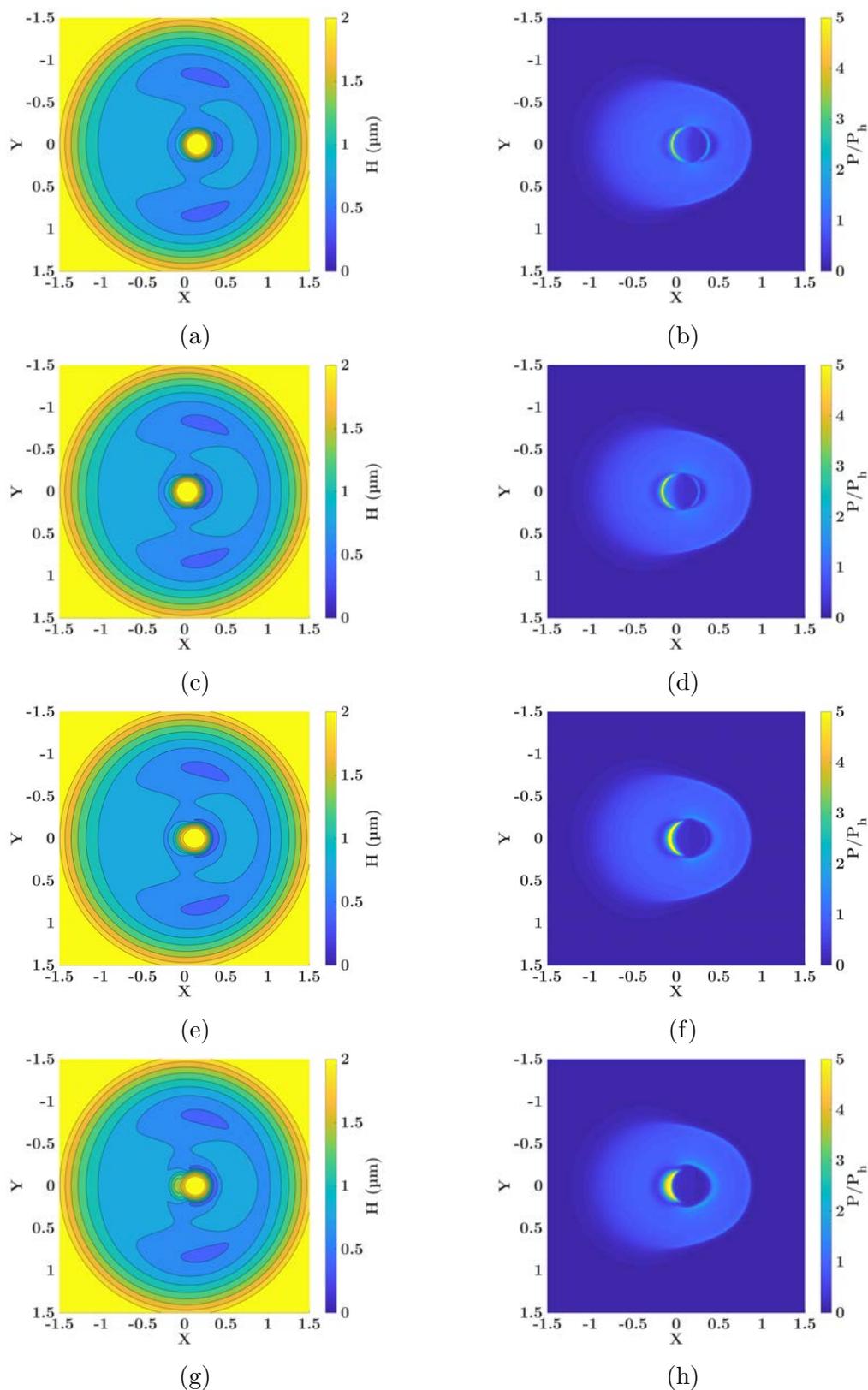


FIGURE 3.30 – Hauteur de film et pression pour des taux de glissement de $-1, 5\%$ (a,b), -3% (c,d), -6% (e,f) et -12% (g,h) pour un indent de profondeur $2 \mu\text{m}$.

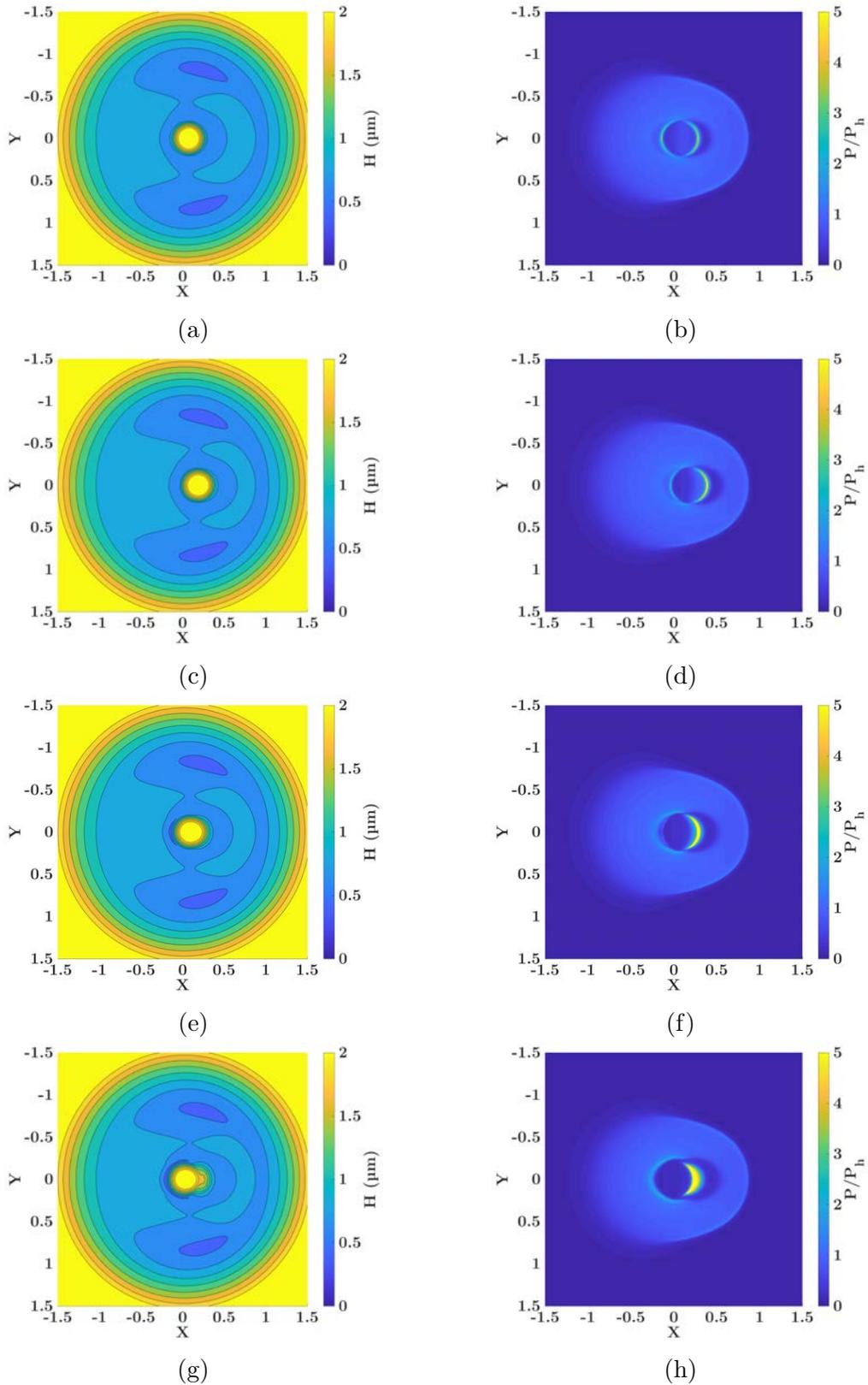


FIGURE 3.31 – Hauteur de film et pression pour des taux de glissement de +1, 5% (a,b), +3% (c,d), +6% (e,f) et +12% (g,h) pour un indent de profondeur $2 \mu\text{m}$.

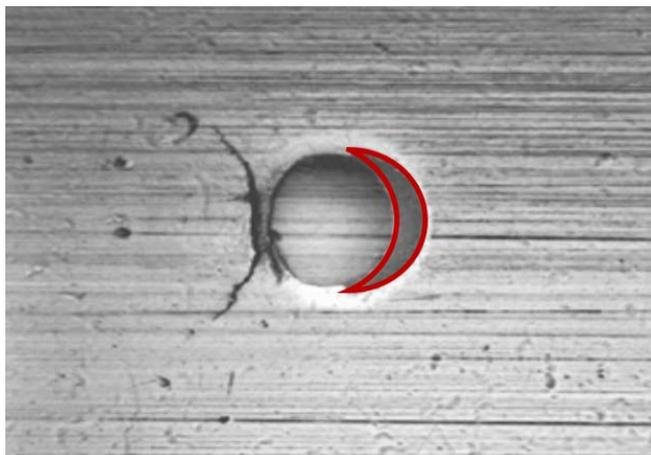


FIGURE 3.32 – Zone de matage sur le bord d'un indent artificiel pour un taux de glissement de +5,8%, d'après [MOR 15a].

3.6.4 Effets de la taille du contact

Un contact deux fois plus large que le précédent, dont les paramètres sont donnés dans le TAB.3.7 est simulé. Les résultats sont présentés sur la FIG.3.33 pour des taux de glissement de -6% et $+6\%$. Nous pouvons constater, en comparant ces résultats au cas précédent (FIG.3.29), qu'à niveau de glissement équivalent la poche de fluide se propage ici plus loin de l'indent tout en causant une forte hausse de la pression. Les contacts plus larges semblent donc plus pénalisés par la présence de l'indent en condition de glissement.

Paramètres		Valeur
Rayon équivalent	R_x (mm)	40
Module de Young équivalent	E' (GPa)	230,8
Chargement	w (N)	360
Pression de Hertz	P_h (MPa)	833
Demi-largeur de contact	a (μm)	454
Viscosité de référence	η_0 (Pa.s)	0,066
Coefficient de piézo-viscosité	α (Pa^{-1})	$2,78 \cdot 10^{-8}$
Vitesse moyenne des surfaces	u_m ($m.s^{-1}$)	2,2

TAB. 3.7 – Paramètres des simulations pour une taille de contact augmentée.

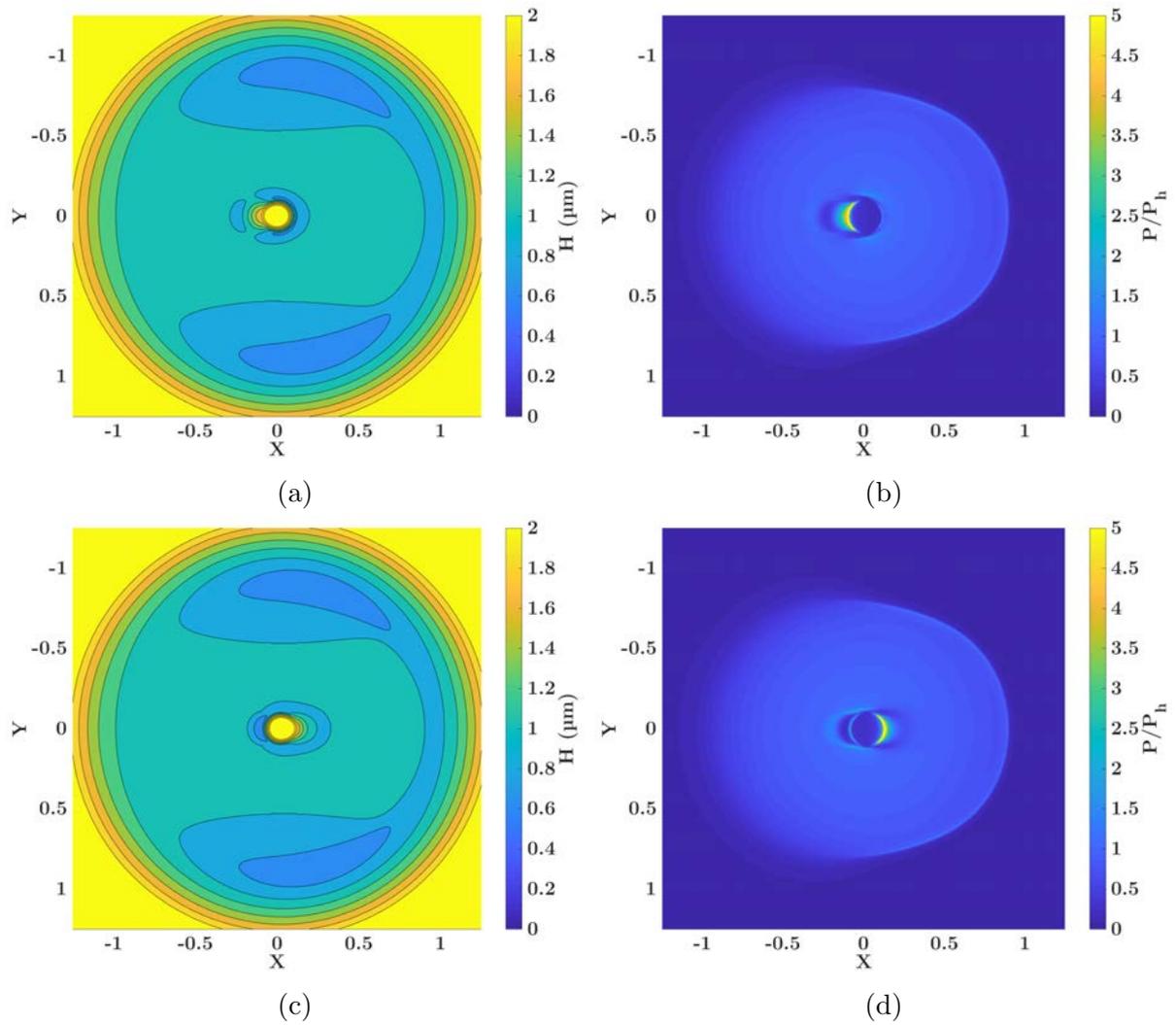


FIGURE 3.33 – Hauteur de film et pression pour des taux de glissement de -6% (a,b) et $+6\%$ (c,d) pour une largeur de contact $a = 454 \mu\text{m}$.

3.7 Conclusion

L'utilisation des méthodes multigrilles permet la résolution du problème EHD et l'introduction de l'effet du lubrifiant dans l'étude du roulement sur indent. Il apparaît alors qu'en condition de roulement pur, l'effet du lubrifiant est quasi-imperceptible tant les résultats sont proches de ceux obtenus en contact sec. L'introduction de glissement dans le contact fait cependant surgir un nouveau phénomène. Le fluide contenu dans l'indent se déplaçant à la vitesse moyenne des surfaces, un déplacement relatif entre celui-ci et l'indent apparaît et mène à la sortie de ce fluide de la cavité. Le sens ainsi que le niveau de glissement dans le contact influent sur la direction dans laquelle le fluide sort de l'indent ainsi que sur la distance de sortie. La sortie du fluide s'accompagne d'une forte augmentation de la pression au bord de l'indent dans la direction du glissement et sur une zone en forme de croissant de lune correspondant aux zones de matage observées expérimentalement. Il semble donc que l'endommagement survenant dans la direction du glissement soit à attribuer à l'action du lubrifiant. Enfin, il convient de noter que sur le bord opposé à la sortie du fluide, l'épaisseur du film est minimale. Il y a donc un risque accru de rupture locale du film et de contact direct entre les surfaces dans cette zone.

Conclusion et perspectives

La fatigue des roulements est aujourd'hui principalement surfacique. L'apparition de cette fatigue tient à la présence de défauts géométriques qui peuvent être présents à l'origine sur les pièces, comme les rugosités de surfaces, mais est accentuée par la création de défauts plus grossiers au cours du fonctionnement du système, comme les indents. Ces indents sont causés par les lubrifiants qui charrient des particules jusque dans les contacts. L'écrasement des particules entre les surfaces crée un indent qui va modifier le chargement pour les cycles suivants et mener à l'apparition de la fatigue sous la forme de fissures ou de micro-écaillage.

L'étude de l'indentation des surfaces par le passage d'une particule dans un contact Hertzien est réalisée par un modèle éléments finis. L'emploi d'une modélisation eulérienne pour la particule s'est révélé très efficace pour lever les problématiques numériques posées par sa forte déformation au passage dans le contact. La très bonne corrélation des résultats obtenus avec le modèle "couplé Euler-Lagrange" (CEL) mis au point et des essais d'indentation naturelle de la littérature a permis la validation de l'outil numérique. Il a alors été constaté que l'indentation naturelle des roulements n'est pas un phénomène symétrique et que l'indent présente un bord plus haut dans la direction du passage de la charge. Le modèle CEL a par la suite été utilisé pour mener une étude paramétrique du processus d'indentation. Il est alors apparu que les propriétés mécaniques et la taille de la particule sont des facteurs de premier ordre dans la génération de l'indent. Une particule dure générera un indent étroit et profond avec des bourrelets hauts tandis qu'une particule ductile mènera à un indent plus large et moins profond avec des bourrelets plus faibles. La taille de la particule est, elle, proportionnelle à celle de l'indent créé, avec toutefois une tendance à obtenir des indents plus larges et moins profonds lorsque la particule devient très grosse. Les propriétés mécaniques du couple de surfaces jouent également un rôle de premier rang sur l'indentation. Il a ainsi été observé qu'un déséquilibre des propriétés mène à une indentation réduite de la surface aux capacités mécaniques les plus élevées et à des effets plus sévères sur la surface opposée. L'ajout de glissement dans le contact modifie drastiquement la forme des indents obtenus. L'étalement de la particule entre les surfaces crée des indents plus étendus et superficiels à mesure que le niveau de glissement augmente. Enfin, le chargement du roulement s'est révélé peu influent sur le processus d'indentation.

La fatigue des surfaces indentées se manifeste notamment par l'apparition de fissures sur le bord de l'indent situé dans la direction opposée aux forces de frottement en présence de glissement. Afin d'étudier la formation de ces fissures, un outil de calcul de contact

basé sur des méthodes semi-analytiques a été utilisé pour simuler le passage de la charge sur la surface indentée. Des critères de fatigue issus de la littérature ont été appliqués sur ces cycles de passage de charge et comparés pour déterminer les mécanismes à l'origine de la fissuration. Le cisaillement s'est alors révélé être un mécanisme moteur de ce type de fatigue. Si aucun des critères de fatigue usuels n'a donné pleine satisfaction lors de cette étude comparative, leur analyse a permis d'identifier des composants d'intérêt. Ainsi, à partir des critères de Brown-Miller et de Dang Van II, un nouveau critère a été mis au point. Celui-ci a fourni de bons résultats dans la localisation et la prédiction de l'orientation des fissures. L'étude paramétrique menée sur le processus d'indentation a été poursuivie sur la fatigue, mettant en avant trois paramètres dont l'augmentation entraîne la réduction de la durée de vie, à savoir, la charge, le glissement et la hauteur des bourrelets.

Le rôle du lubrifiant sur la fatigue a pu être étudié par l'utilisation d'un solveur EHD multigrilles. Le comportement d'un fluide piézo-visqueux, compressible et newtonien a pu être simulé. La comparaison des résultats avec ceux obtenus avec l'outil de contact sec semi-analytique a montré que l'effet du lubrifiant est négligeable en roulement pur. Cependant, l'introduction de glissement dans le contact modifie radicalement le chargement. Le fluide, se déplaçant à la vitesse moyenne des surfaces, est alors en mouvement relatif avec la surface indentée. La poche de fluide contenue dans l'indent est ainsi amenée à sortir de celui-ci dans la direction du glissement. La compression du fluide, déjà à l'état vitreux, lors de sa sortie de l'indent génère une très forte surpression en bord d'indent sur une zone en forme de croissant de lune. Cette forme caractéristique correspond bien à celle de la zone d'apparition de la plastification et du micro-écaillage constatée dans la littérature. Les deux phénomènes sont donc liés. Il a été observé que le niveau de glissement ainsi que la taille du contact modifient la distance de sortie du fluide et donc la taille de la zone de surpression.

Les phénomènes de fatigue observés autour d'un indent sont donc d'origines diverses et sont résumés sur la FIG.XI. Dans la direction du glissement, le mouvement relatif entre le fluide et l'indent mène à l'apparition de micro-écaillage en sortie d'indent. Sur le bord opposé, le cisaillement conduit à l'apparition de fissures qui à terme entraîne l'écaillage de la surface. Le cisaillement peut être exacerbé dans cette zone par le contact mixte entre les surfaces lorsque la hauteur du bourrelet est suffisamment grande devant la hauteur du film d'huile. La hauteur du bourrelet est quant à elle directement liée aux conditions dans lesquelles l'indent a été créé.

Pour aller plus loin, l'enrichissement du modèle CEL d'indentation par l'ajout des effets thermiques donnera des résultats de meilleure qualité pour les particules très ductiles comme dans le cas des particules de cuivre. Dans un second temps, l'introduction des mécanismes de rupture des particules fragiles étendra le domaine d'application du modèle à l'ensemble des particules rencontrées dans les boîtes de transmission. Enfin, le développement d'un modèle réduit sur l'indentation serait un atout majeur dans l'aide à la conception des systèmes.

La gestion du contact mixte dans le solveur EHD n'est à l'heure actuelle pas maîtrisée. Le développement d'une méthode permettant son intégration serait un pas en avant im-

portant pour l'étude du contact sur indent. De manière plus raisonnable, l'ajout d'un modèle d'endommagement plastique aux outils utilisés durant ces travaux permettrait de reproduire le micro-écaillage survenant en sortie d'indent. Finalement, une campagne d'essais de fatigue sur indents offrira la possibilité de calibrer le nouveau critère de fatigue et le modèle d'endommagement et ainsi de quantifier les durées de vie restantes des pièces lors de leur passage en révision.

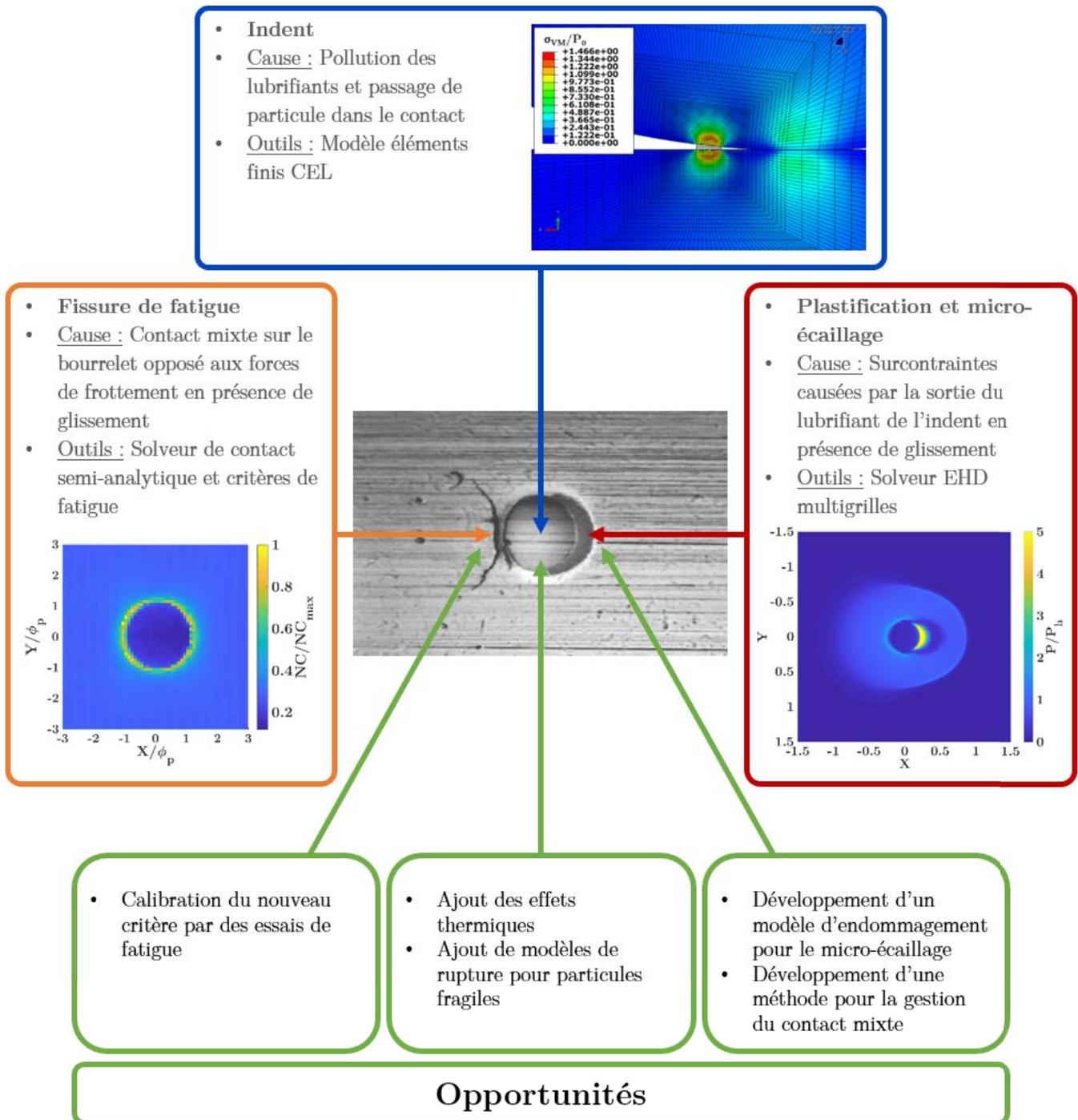
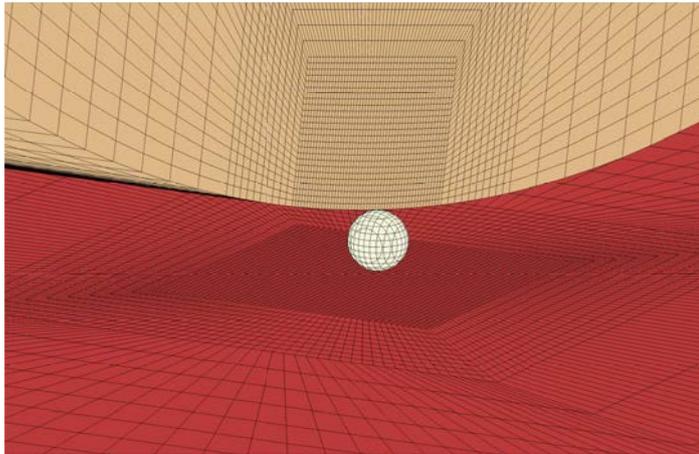
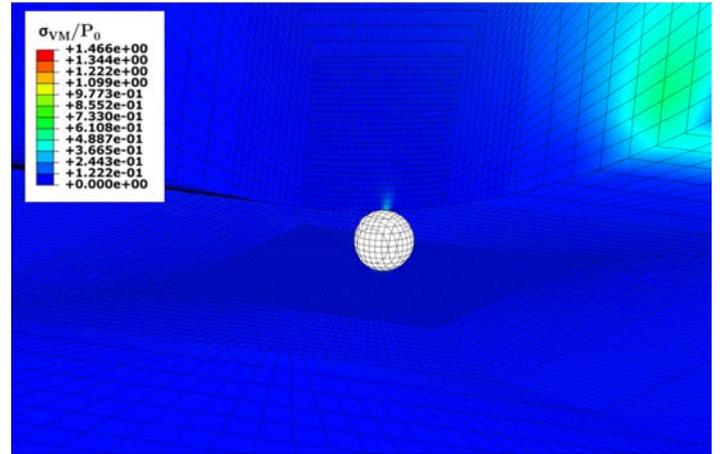


FIGURE XI – Schéma récapitulatif de l'étude des surfaces indentées

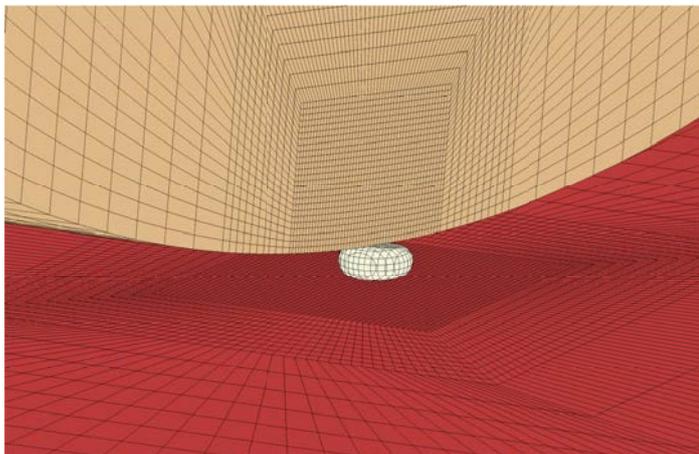
Annexe A : Passage d'une particule dans le contact



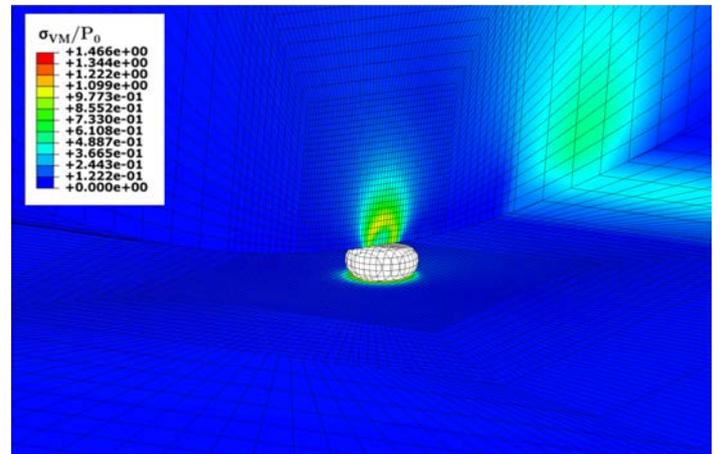
(a)



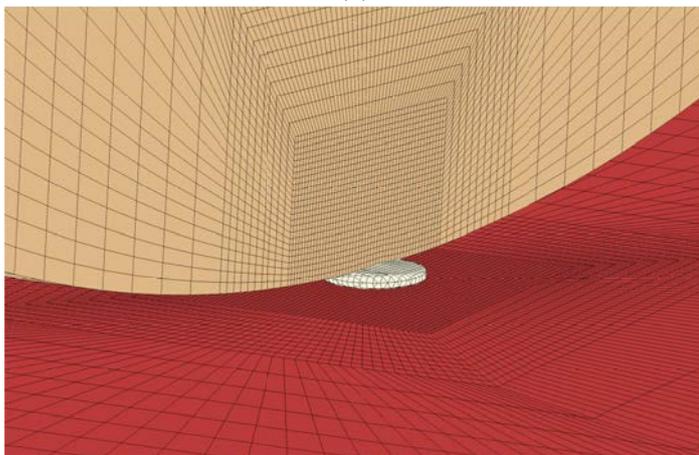
(b)



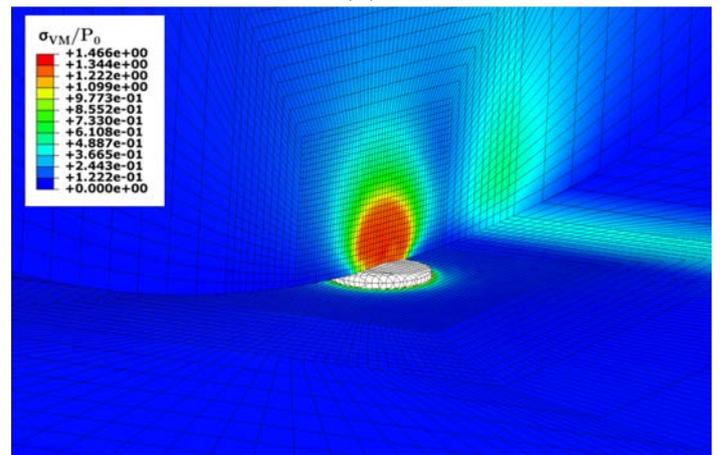
(c)



(d)

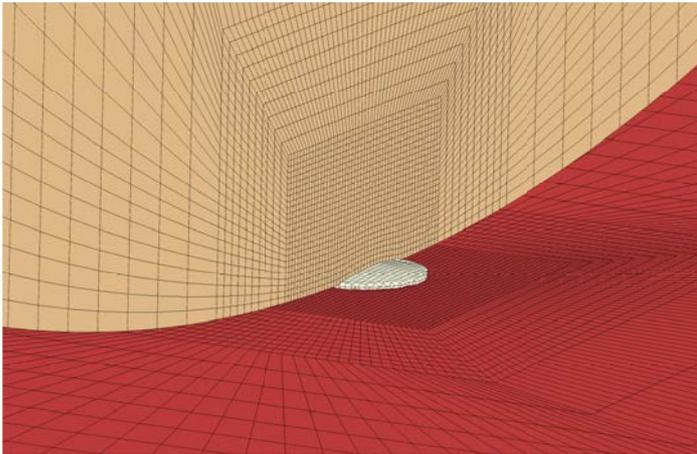


(e)

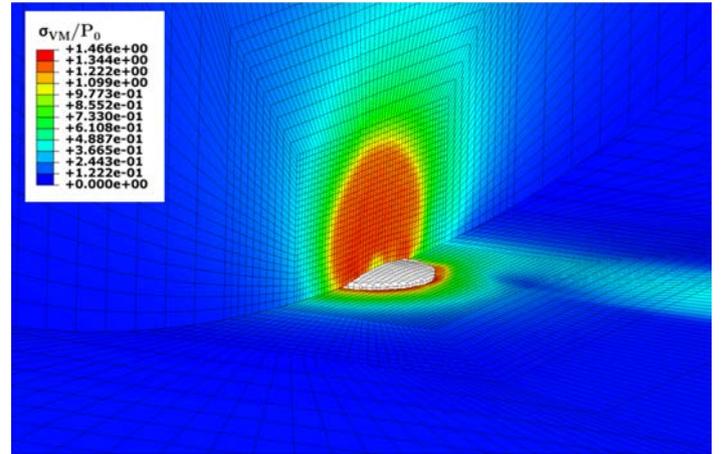


(f)

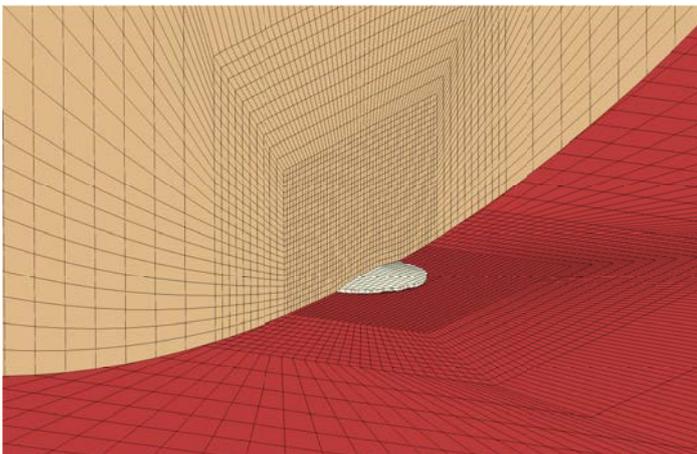
FIGURE A.1 – Passage d'une particule en acier AISI 52100 de diamètre ϕ_p dans le contact à $t = 39 \mu s$ (a,b) / $54 \mu s$ (c,d) / $69 \mu s$ (e,f).



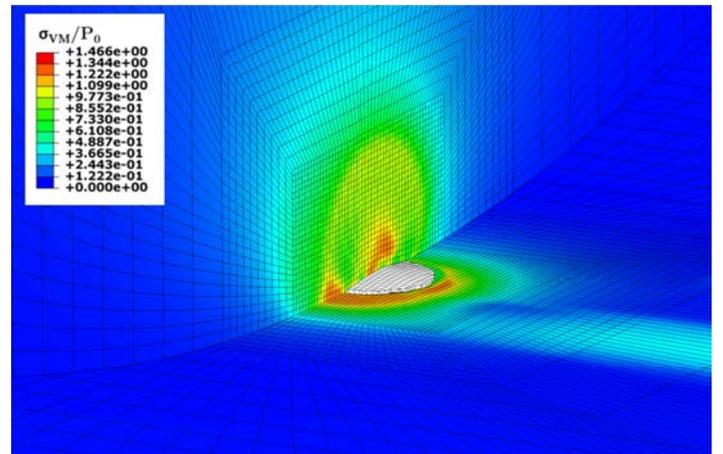
(a)



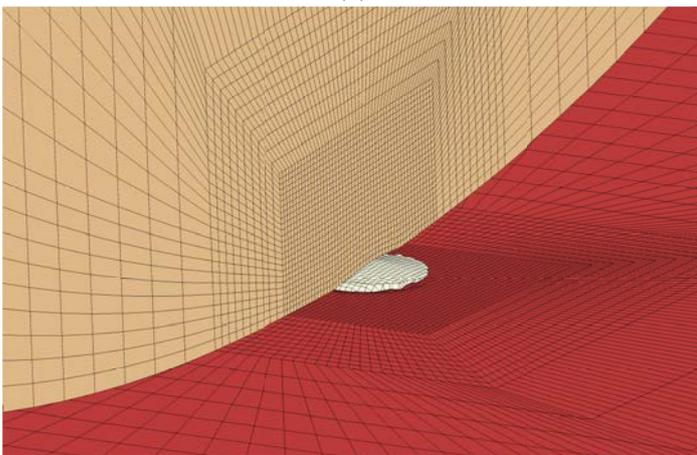
(b)



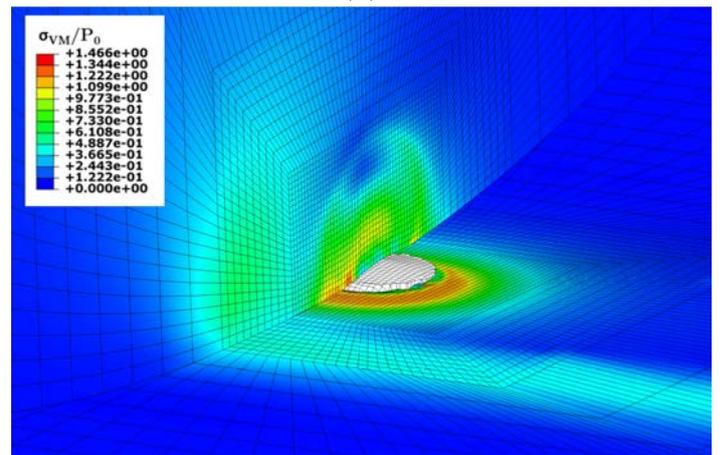
(c)



(d)

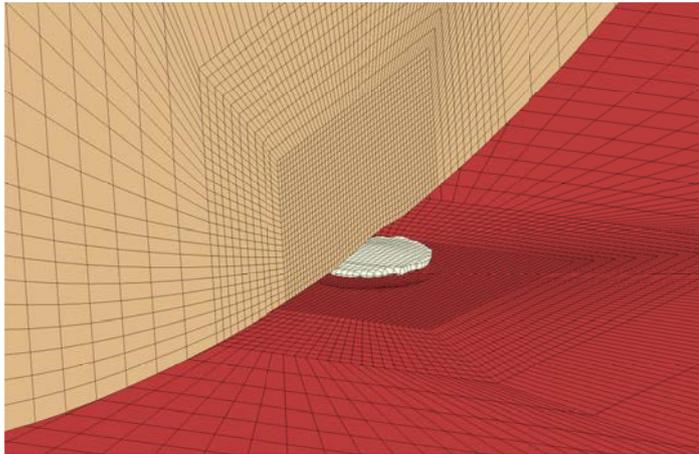


(e)

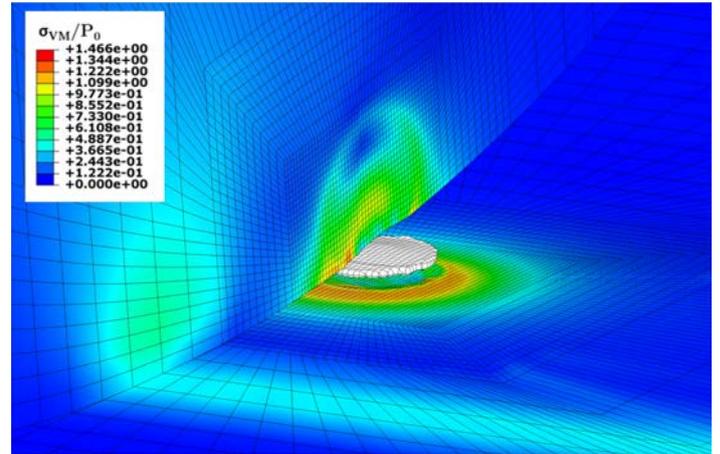


(f)

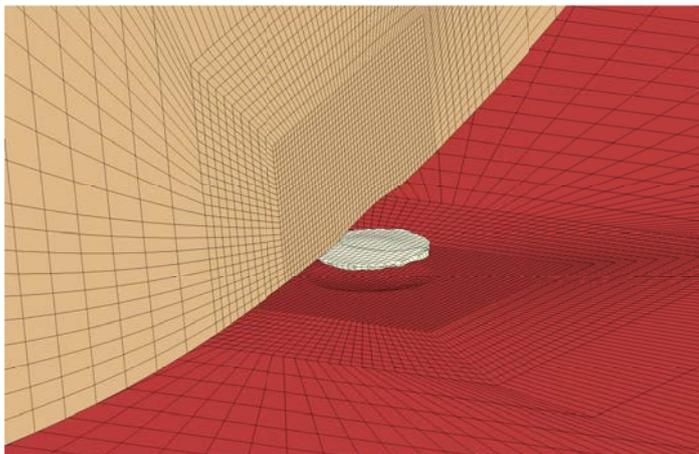
FIGURE A.2 – Passage d'une particule en acier AISI 52100 de diamètre ϕ_p dans le contact à $t = 84 \mu s$ (a,b) / $99 \mu s$ (c,d) / $114 \mu s$ (e,f).



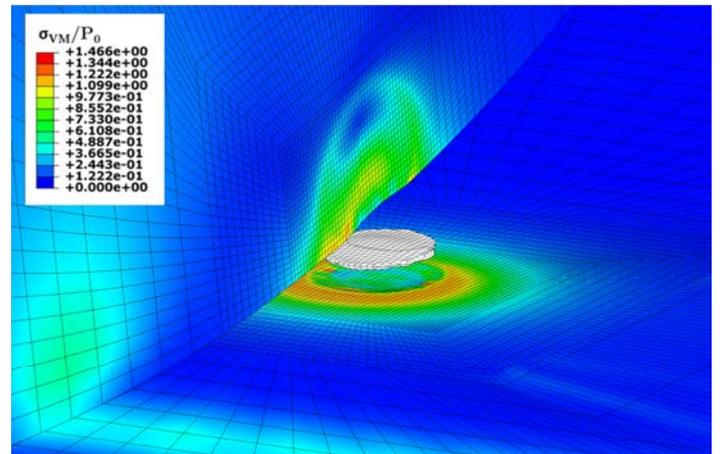
(a)



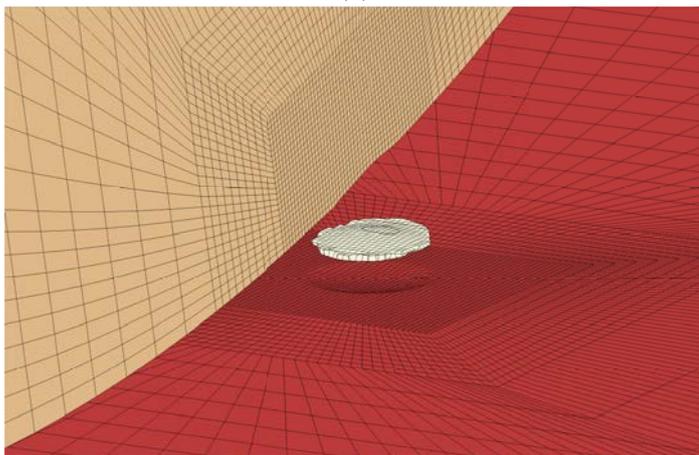
(b)



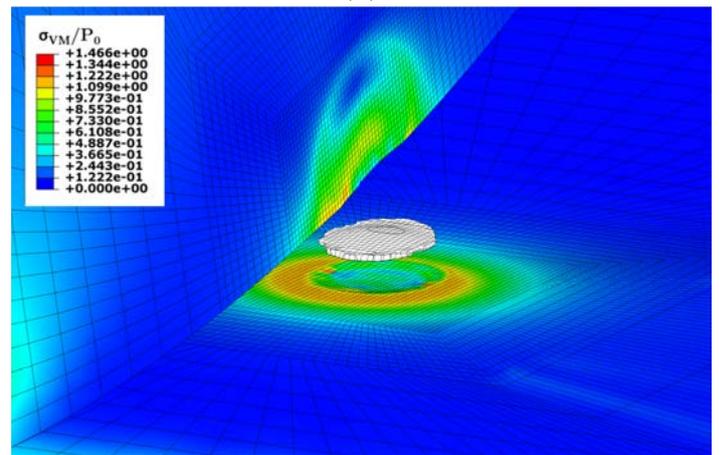
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE A.3 – Passage d'une particule en acier AISI 52100 de diamètre ϕ_p dans le contact à $t = 129 \mu s$ (a,b) / $144 \mu s$ (c,d) / $159 \mu s$ (e,f).

Annexe B : Coefficients d'influence

Coefficients d'influence de contraintes

Considérons une zone rectangulaire de taille $\Delta x * \Delta y$ centrée en O et soumise à un chargement constant de pression, p , ou de cisaillement q_x ou q_y . Le champ de contraintes en un point $M(x, y, z)$ du massif semi-infini est obtenu par les coefficients d'influence définis ci-après. On notera $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Contribution de la pression

La contribution de la pression p est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{p} &= C_{i,j}^p(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &\quad + S_{i,j}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.103)$$

avec,

$$S_{xx}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - y + z}{x}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(x^2 + z^2)\rho}, \quad (3.104)$$

$$S_{yy}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + x^2 - x\rho}{zy}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x + z}{y}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(y^2 + z^2)\rho}, \quad (3.105)$$

$$S_{zz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) - \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho} \left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2}\right), \quad (3.106)$$

$$S_{xy}^p(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln(\rho + z), \quad (3.107)$$

$$S_{xz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + z^2)\rho}, \quad (3.108)$$

$$S_{yz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{x}{(y^2 + z^2)\rho}, \quad (3.109)$$

Contribution du cisaillement

La contribution du cisaillement q_x est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{q_x} &= C_{i,j}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &+ S_{i,j}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.110)$$

avec,

$$S_{xx}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{-x^2 + zy}{(\rho + z)(\rho - y)}\right) + \frac{\nu}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - y), \quad (3.111)$$

$$S_{yy}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{y}{\rho(\rho + z)} - \frac{\nu}{\pi} \left(\frac{y}{\rho + z} + \ln(\rho - y)\right), \quad (3.112)$$

$$S_{zz}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{\rho(x^2 + z^2)}, \quad (3.113)$$

$$S_{xy}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{\nu}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - x), \quad (3.114)$$

$$S_{xz}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho(x^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right), \quad (3.115)$$

$$S_{yz}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho}, \quad (3.116)$$

La contribution du cisaillement q_y est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i,j}}{q_y} &= C_{i,j}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) \\ &= S_{i,j}^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ &+ S_{i,j}^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{i,j}^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

avec,

$$S_{xx}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{\nu}{\pi} \left(\frac{x}{\rho + z} + \ln(\rho - x)\right), \quad (3.118)$$

$$S_{yy}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{-y^2 + zx}{(\rho + z)(\rho - x)}\right) + \frac{\nu}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - x), \quad (3.119)$$

$$S_{zz}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{x}{\rho(y^2 + z^2)}, \quad (3.120)$$

$$S_{xy}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{y}{\rho(\rho + z)} - \frac{\nu}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - y), \quad (3.121)$$

$$S_{xz}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho}, \quad (3.122)$$

$$S_{yz}^{q_y}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho(y^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + x^2 - x\rho}{zy}\right), \quad (3.123)$$

Coefficients d'influence de déplacements

Considérons une zone rectangulaire de taille $\Delta x * \Delta y$ centrée en O et soumise à un chargement constant de pression, p , ou de cisaillement q_x ou q_y . Le champ de déplacement en un point $M(x, y)$ de la surface est obtenu par les coefficients d'influence définis ci-après. On notera $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Contribution de la pression

La contribution de la pression p est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{p} &= K_i^p(x, y, E, \nu) \\ &= U_i^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.124)$$

avec,

$$U_x^p = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \left(2x \arctan\left(\frac{\rho - y}{x}\right) - y \ln(\rho) \right) \quad (3.125)$$

$$U_y^p = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \left(2y \arctan\left(\frac{\rho - x}{y}\right) - x \ln(\rho) \right) \quad (3.126)$$

$$U_z^p = -\frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} (y \ln(\rho - x) + x \ln(\rho - y)) \quad (3.127)$$

Contribution du cisaillement

La contribution du cisaillement q_x est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{q_x} &= K_i^{q_x}(x, y, , E, \nu) \\ &= U_i^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.128)$$

avec,

$$U_x^{q_x} = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} (x \ln(\rho - y)) - \frac{1+\nu}{\pi E} \ln(\rho - x) \quad (3.129)$$

$$U_y^{q_x} = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \rho \quad (3.130)$$

$$U_z^{q_x} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left(-2x \arctan\left(\frac{\rho-y}{x}\right) + y \ln(\rho) \right) \quad (3.131)$$

La contribution du cisaillement q_y est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{q_y} &= K_i^{q_y}(x, y, , E, \nu) \\ &= U_i^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ &\quad + U_i^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_i^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (3.132)$$

avec,

$$U_x^{q_y} = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \rho \quad (3.133)$$

$$U_y^{q_y} = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} (y \ln(\rho - x)) - \frac{1+\nu}{\pi E} \ln(\rho - y) \quad (3.134)$$

$$U_z^{q_y} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left(-2y \arctan\left(\frac{\rho-x}{y}\right) + x \ln(\rho) \right) \quad (3.135)$$

Annexe C : Roulement sur indent

Le passage de la charge sur un indent artificiel ainsi que l'accumulation des déformations plastiques supplémentaires dans la phase de rodage des surfaces sont détaillés ci-après. Les conditions de contact sont celles de l'étude comparative des critères de surface menée au chapitre 2. Elles sont rappelées dans le TAB.C.1.

Paramètres		Valeur
Rayons	$R_x / R_y (mm)$	5 / 500
Module de Young	$E (GPa)$	201
Chargement	W	W_0
Pression de Hertz	P_h	P_0
Demi-largeur de contact	a	$1,35 \phi_p$
Coefficient de frottement	μ	0,1
Diamètre de l'indent	ϕ_{indent}	$2,14 \phi_p$
Hauteur initiale du bourrelet	$h_{b,0}$	$0,72 \% \phi_p$
Profondeur de l'indent	h_{indent}	$10,7 \% \phi_p$

TABLEAU C.1 – Paramètres des simulations de roulement sur indent artificiel.

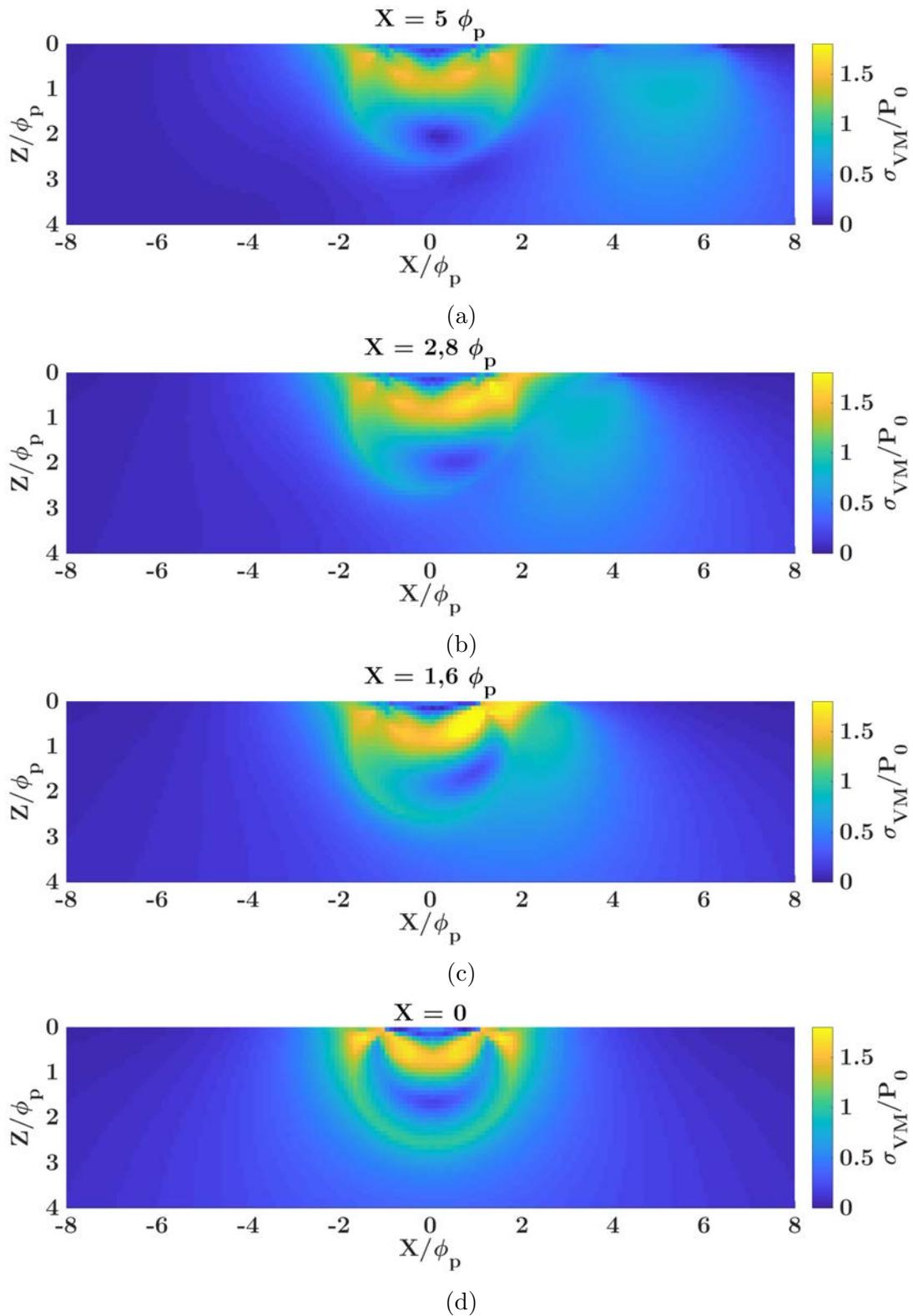


FIGURE C.1 – Contrainte de von Mises au passage de la charge sur un indented artificiel en roulement pur.

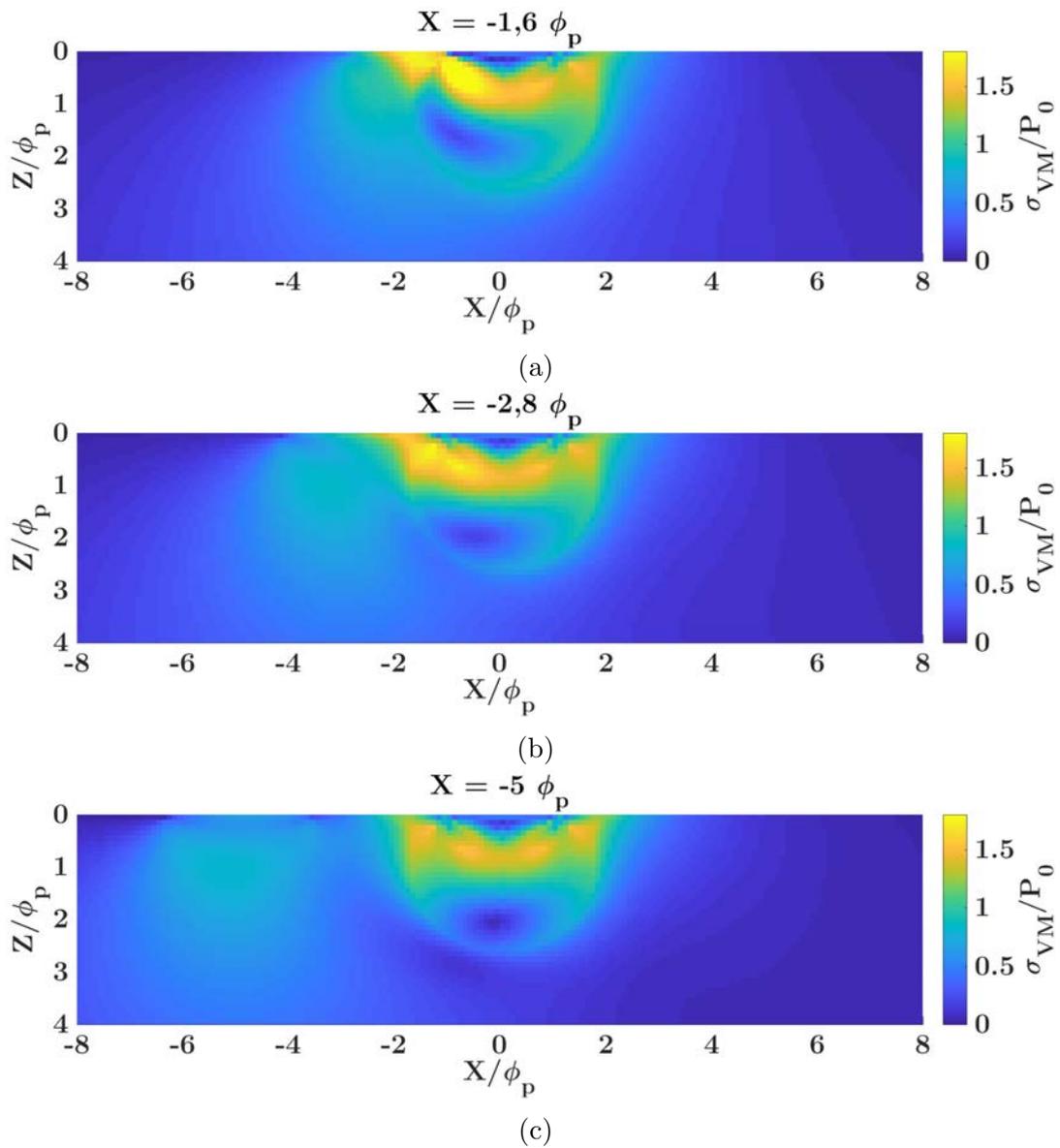


FIGURE C.2 – Contrainte de von Mises au passage de la charge sur un indente artificiel en roulement pur (suite).

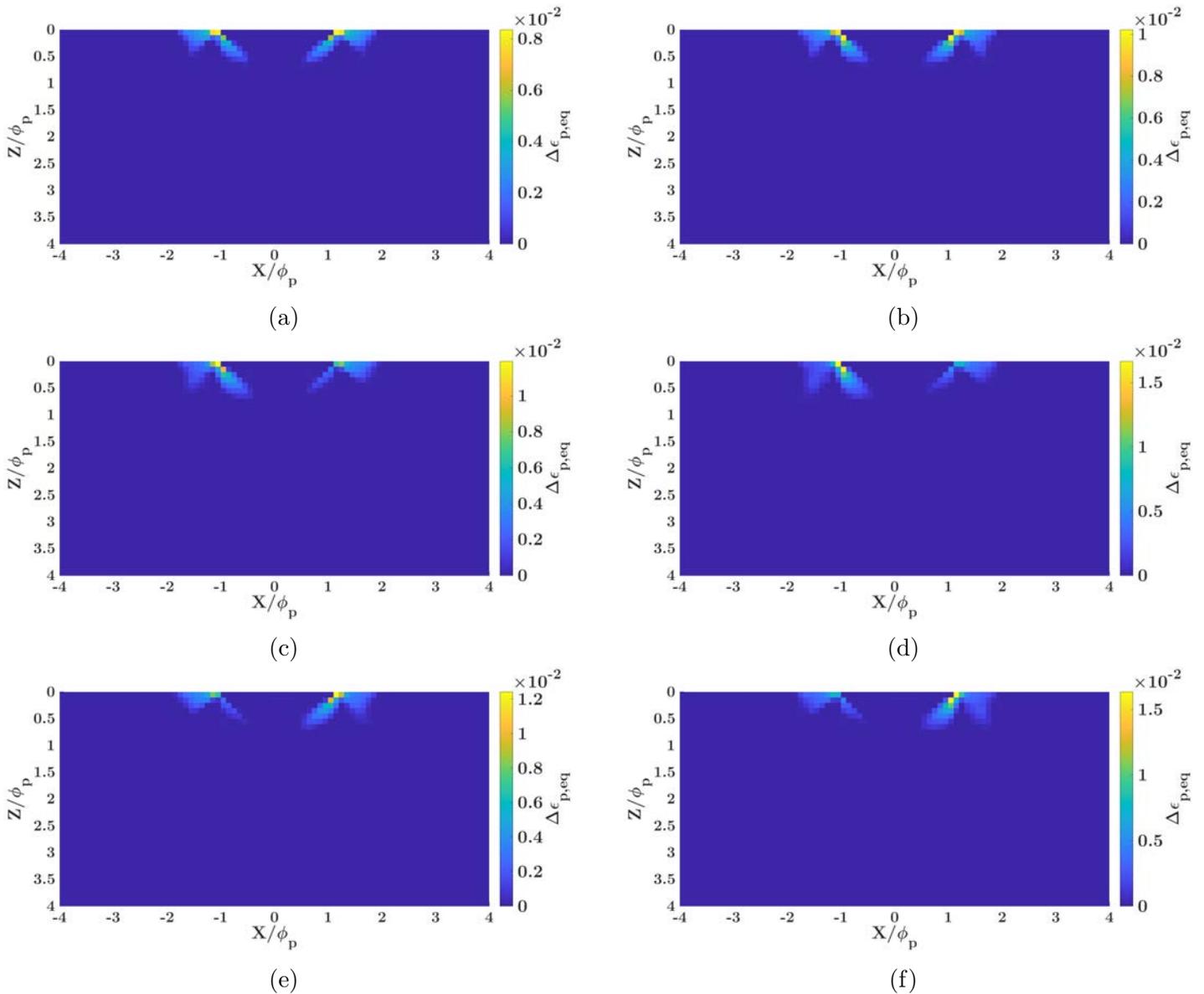


FIGURE C.3 – Déformation plastique équivalente supplémentaire après 1 cycle et 7 cycles pour un indent artificiel en roulement pur (a,b), glissement négatif (c,d) et glissement positif (e,f).

Nomenclature

Chapitre 1

$\bar{\Delta}\varepsilon_p$	Tenseur d'incrément des déformations plastiques
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes
ΔT	Incrément de température
$\Delta t_{crit} = \frac{L_c}{c_d}$	Pas de temps critique
$\dot{\varepsilon}_p$	Vitesse de déformation plastique
η	Coefficient de Taylor-Quinney
μ	Coefficient de frottement
$\mu_{particule}$	Coefficient de frottement entre la particule et les surfaces
ν	Coefficient de Poisson
ϕ_0	Diamètre initial de la particule
ρ	Masse volumique
σ_y	Limite d'écoulement
σ_{res}	Contraintes résiduelles de traitements thermo-chimiques
σ_{y0}	Limite d'élasticité de la loi d'érouissage linéaire isotrope
θ	Température
θ_0	Température de référence
θ_m	Température de fusion
ε_p	Déformation plastique équivalente
A	Paramètre de la loi de Johnson-Cook
B	Paramètre de la loi de Johnson-Cook
C	Paramètre de la loi de Johnson-Cook
$c_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$	Vitesse de propagation des ondes dans le milieu

C_p	Chaleur spécifique
E	Module de Young
K	Coefficient d'écroutissage de la loi d'écroutissage linéaire isotrope
L_c	Longueur caractéristique
m	Paramètre de la loi de Johnson-Cook
n	Paramètre de la loi de Johnson-Cook
P_h	Pression de Hertz
$SRR = \frac{(U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)}$	Taux de glissement (<i>Slide-to-roll ratio</i>)
$T^* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$	Température homologue
U_1	Vitesse de la surface 1 (piste)
U_2	Vitesse de la surface 2 (rouleau)

Chapitre 2

$\alpha = 3\left(\frac{t_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2}\right)$	Constante du critère de Dang Van II
$\bar{u}_z = u_{z,1} + u_{z,2}$	Déplacement élastique relatif des surfaces dans la direction z
$\bar{u}_\tau = u_{\tau,1} + u_{\tau,2}$	Déplacement élastique tangentiel relatif des surfaces
ϵ_n	Vecteur de déformation normale au plan
σ	Tenseur des contraintes
ϵ	Tenseur des déformations
s	Tenseur déviatorique des contraintes
$\delta = \delta_1 - \delta_2$	Rapprochement de corps rigide
$\Delta\epsilon_n$	Amplitude du vecteur de déformation normale au plan
δ_1	Déplacement de corps rigide du corps 1
δ_2	Déplacement de corps rigide du corps 2
Γ'_c	Zone courante de contact
Γ'_{sl}	Zone courante de glissement
Γ'_{st}	Zone courante d'adhérence
Γ_c	Zone de contact
Γ_p	Zone potentielle de contact
γ_{max}	Déformation en cisaillement maximale

Γ_{sl}	Zone de glissement
Γ_{st}	Zone d'adhérence
$\kappa = 3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}$	Constante du critère de Crossland
$\kappa = 3 \frac{t_{-1}}{f_0} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \frac{f_{-1}}{\sigma_f}$	Constante du critère de Sines
$\kappa = \frac{\sigma_y}{\sigma_f}$	Constante du critère de Brown-Miller
μ	Coefficient de frottement
$\mu_{particule}$	Coefficient de frottement entre la particule et les surfaces
ϕ_0	Diamètre initial de la particule
σ_f	Limite de fatigue
σ_H	Contrainte hydrostatique
σ_r	Limite de rupture en traction
σ_y	Limite élastique
σ_{-1}	Limite de fatigue en traction-compression alternée
σ_{res}	Contraintes résiduelles de traitements thermo-chimiques
τ_{pr}	Composant en cisaillement du critère de Dang Van II [VAN 89]
\mathbf{A}_{is}^j	Matrice des coefficients d'influence du chargement j sur le déplacement u_i
\mathbf{s}	Vecteur glissement
$\mathbf{u}_{\tau,1}$	Déplacement élastique tangentiel d'un point de la surface 1
$\mathbf{u}_{\tau,2}$	Déplacement élastique tangentiel d'un point de la surface 2
\mathbf{x}_1^t	Vecteur coordonnées d'un point du corps 1
\mathbf{x}_2^t	Vecteur coordonnées d'un point du corps 2
ε_p	Déformation plastique équivalente
A	Paramètre de la loi de Ramberg-Osgood
a	Demi-largeur de contact
B	Paramètre de la loi de Ramberg-Osgood
$C_{i,j}^{p,q_x,q_y}$	Coefficient d'influence du chargement p, q_x ou q_y sur la contrainte $\sigma_{i,j}$
c_p	Énergie complémentaire du problème normal
c_τ	Énergie complémentaire du problème tangentiel

E	Module de Young
f_{-1}	Limite de fatigue en flexion alternée
f_0	Limite de fatigue en flexion répétée
h	Séparation des surfaces sous charge
$h_0 = h_2 - h_1$	Séparation initiale, non déformée, des corps
h_1	Surface non déformée du corps 1
h_2	Surface non déformée du corps 2
J_2	Second invariant de contraintes
$J_{2,a}$	Amplitude du second invariant de contraintes
K_i^j	Coefficient d'influence du chargement j sur le déplacement u_i
n	Constante du critère de Fatemi-Socie
n	Paramètre de la loi de Ramberg-Osgood
$N_p = N_x * N_y$	Nombre de points de la grille
N_x	Nombre de points de la grille selon la direction x
N_y	Nombre de points de la grille selon la direction y
p	Pression
P_h	Pression de Hertz
Q	Effort tangentiel
q_x	Cisaillement selon x
q_y	Cisaillement selon y
R_x	Rayon équivalent dans la direction x
R_y	Rayon équivalent dans la direction y
$S_{i,j}^{p,q_x,q_y}$	Coefficient d'influence du chargement p, q_x ou q_y sur la contrainte $\sigma_{i,j}$
$SRR = \frac{(U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)}$	Taux de glissement (<i>Slide-to-roll ratio</i>)
t_{-1}	Limite de fatigue en torsion alternée
U_i^j	Coefficient d'influence du chargement j sur le déplacement u_i
U_1	Vitesse de la surface 1 (piste)
U_2	Vitesse de la surface 2 (rouleau)
$u_{z,1}$	Déplacement élastique de la surface 1 dans la direction z
$u_{z,2}$	Déplacement élastique de la surface 2 dans la direction z

W	Effort normal
Chapitre 3	
α	Coefficient de piézo-viscosité du fluide
$\bar{\eta} = \eta/\eta_0$	Viscosité adimensionnée
$\bar{\lambda} = \frac{12u_m\eta_0 R_x^2}{a^3 p_h}$	Coefficient de l'équation de Reynolds
$\bar{\rho} = \rho/\rho_0$	Masse volumique adimensionnée
$\bar{h}_{min} = \frac{h_{min}}{R'(2U^{-1/2})}$	Épaisseur minimale de film adimensionnée de Martin, Gumbel, Ertel et Grubin
η	Viscosité dynamique
η_0	Viscosité dynamique à la pression de référence
$\mathcal{A} = \frac{AR_x}{a^2}$	Amplitude adimensionnée des oscillations de Venner et Lubrecht [VEN 95]
$\mathcal{R} = \frac{rRx}{a^2}$	Hauteur des rugosités adimensionnée
$\mathcal{W} = \omega/a$	Période adimensionnée des oscillations de Venner et Lubrecht [VEN 95]
w	Effort normal
ν_1	Coefficient de Poisson de la surface 1
ν_2	Coefficient de Poisson de la surface 2
ω	Période des oscillations de Venner et Lubrecht [VEN 95]
ρ	Masse volumique
ρ_0	Masse volumique à pression atmosphérique
$\Sigma = \frac{(u_1 - u_2)}{u_1 + u_2}$	Taux de glissement
$\xi = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\bar{\lambda}}$	Coefficient de l'équation de Reynolds
A	Amplitude des oscillations de Venner et Lubrecht [VEN 95]
a	Demi-largeur de contact dans la direction de roulement
$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}$	Module de Young équivalent
E_1	Module de Young de la surface 1
E_2	Module de Young de la surface 2

$G = \alpha E'$	Paramètre matériau adimensionné
$H = \frac{hR_x}{a^2}$	Hauteur de film adimensionnée
h	Épaisseur de film
$H_0 = \frac{h_0R_x}{a^2}$	Déplacement de corps rigide adimensionné
h_0	Déplacement de corps rigide
$h_T = \frac{h_t u_m}{a}$	Discrétisation temporelle adimensionnée
h_t	Discrétisation temporelle
$h_X = h_x/a, h_Y = h_y/a$	Discrétisation spatiale adimensionnée
h_x, h_y	Discrétisation spatiale
h_{min}	Épaisseur minimale de film
K	Noyau des déformations
$L = GU^{-0,25}$	Paramètre de Moes adimensionné
$M = \frac{W}{U^{-0,5}}$	Paramètre de Moes adimensionné pour un contact linéique
$M = \frac{W}{U^{-0,75}}$	Paramètre de Moes adimensionné pour un contact circulaire
n_x, n_y	Nombre de points de la grille en x et en y
$P = \frac{p}{p_h}$	Pression adimensionnée
p	Pression
p_0	Coefficient de l'équation de Roelands
p_h	Pression de Hertz
r	Hauteur des rugosités
$R_x = \frac{R_{x1}R_{x2}}{R_{x1} + R_{x2}}$	Rayon de courbure équivalent dans la direction de roulement
$R_z = \frac{R_{z1}R_{z2}}{R_{z1} + R_{z2}}$	Rayon de courbure équivalent dans la direction transverse au roulement
R_{x1}	Rayon de courbure de la surface 1 dans la direction de roulement
R_{x2}	Rayon de courbure de la surface 2 dans la direction de roulement
R_{z1}	Rayon de courbure de la surface 1 dans la direction transverse au roulement
R_{z2}	Rayon de courbure de la surface 2 dans la direction transverse au roulement

$T = \frac{u_m t}{a}$	Temps adimensionné
t	Temps
$U = \frac{\eta_0 u_m}{E' R_x}$	Paramètre de vitesse adimensionné
u_1	Vitesse de la surface 1
u_2	Vitesse de la surface 2
$u_m = \frac{u_1 + u_2}{2}$	Vitesse moyenne des surfaces
$U_r = \frac{u_2}{u_1 + u_2}$	Taux de glissement de Venner et Lubrecht [VEN 95]
$W = \frac{w}{E' R_x^2}$	Paramètre de chargement adimensionné
w	Déformations élastiques des surfaces
$X = x/a, Y = y/a$	Coordonnées adimensionnées
x, y	Coordonnées
X_a, X_b, Y_a, Y_b	Bornes du domaine de calcul EHD
z	Indice de piézo-viscosité du fluide du modèle de Roelands

Bibliographie

- [AI 94] AI X., CHENG H. S.
The influence of moving dent on point EHL contacts. *Tribology Transactions*, vol. 37, n° 2, 1994, p. 323–335.
- [AI 96] AI X., LEE S. C.
Effect of slide-to-roll ratio on interior stresses around a dent in EHL contacts. *Tribology Transactions*, vol. 39, n° 4, 1996, p. 881–889.
- [AMU 16] AMUZUGA K.
Damage mechanism related to plasticity around heterogeneous inclusions under rolling contact loading in hybrid bearings ceramic/steel. PhD thesis, INSA de Lyon, 2016.
- [ANT 05] ANTALUCA E.
Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques –effet d'un chargement normal et tangentiel–. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005.
- [ANT 08] ANTALUCA E., NÉLIAS D.
Contact fatigue analysis of a dented surface in a dry elastic–plastic circular point contact. *Tribology Letters*, vol. 29, n° 2, 2008, p. 139–153.
- [AZE 15a] AZEGGAGH N., JOLY-POTTUZ L., CHEVALIER J., OMORI M., HASHIDA T., NÉLIAS D.
Indentation strength of silicon nitride ceramics processed by spark plasma sintering technique. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 644, 2015, p. 159–170.
- [AZE 15b] AZEGGAGH N.
Damage mechanisms in silicon nitride materials under contact loading. PhD thesis, INSA de Lyon, 2015.
- [BAR 93] BARUS C.
Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity. *American Journal of Science (1880-1910)*, vol. 45, n° 266, 1893, page 87.
- [BOU 85] BOUSSINESQ J.
Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1885.
- [BOU 08] BOUCLY V.
Semi-analytical modeling of the transient thermal-elastic-plastic contact and its application to asperity collision, wear and running-in of surfaces. PhD thesis, INSA de Lyon, 2008.

- [BRA 73] BRANDT A.
Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems. *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, 1973, p. 82–89.
- [BRA 77] BRANDT A.
Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, vol. 31, n° 138, 1977, p. 333–390.
- [BRA 91] BRANDT A., GREENWALD J.
Parabolic Multigrid Revisited, *Multigrid Methods III*, p. 143–154, Birkhäuser Basel, Basel, 1991.
- [BRA 11] BRANDT A., LIVNE O. E.
Multigrid techniques : 1984 guide with applications to fluid dynamics, vol. 67. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [BRO 73] BROWN M. W., MILLER K. J.
A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress-Strain Conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 187, n° 1, 1973, p. 745–755.
- [BUE 63] BUEHLER W. J., GILFRICH J., WILEY R.
Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi. *Journal of Applied Physics*, vol. 34, n° 5, 1963, p. 1475–1477.
- [CAN 96] CANN P. M., SAYLES R., SPIKES H., IOANNIDES E., HAMER J.
Direct observation of particle entry and deformation in a rolling EHD contact. *Tribology Series*, vol. 31, p. 127–134, 1996.
- [CER 82] CERRUTI V.
Ricerche intorno all'equilibrio de'corpi elastici isotropi : memoria. Coi tipi del Salviucci, 1882.
- [CHA 11] CHAISE T.
Mechanical simulation using a semi analytical method : from elasto-plastic rolling contact to multiple impacts. PhD thesis, INSA de Lyon, 2011.
- [CHE 94] CHENG W., CHENG H., KEER L. M.
Experimental investigation on rolling/sliding contact fatigue crack initiation with artificial defects. *Tribology Transactions*, vol. 37, n° 1, 1994, p. 1–12.
- [CLI 84] CLIFTON R., DUFFY J., HARTLEY K., SHAWKI T.
On critical conditions for shear band formation at high strain rates. *Scripta Metallurgica*, vol. 18, n° 5, 1984, p. 443–448.
- [COU 04] COULON S., JUBAULT I., LUBRECHT A. A., VILLE F., VERGNE P.
Pressure profiles measured within lubricated contacts in presence of dented surfaces. Comparison with numerical models. *Tribology International*, vol. 37, n° 2, 2004, p. 111–117.
- [COU 05] COULON S., VILLE F., LUBRECHT A. A.
Experimental investigations of rolling contact fatigue of dented surfaces using artificial defects. *Tribology and Interface Engineering Series*, vol. 48, p. 691–702, 2005.

- [CRO 56] CROSSLAND B.
Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*, vol. 138 Institution of Mechanical Engineers London, 1956, page 12.
- [DEL 12] DELLACORTE C., MOORE III L. E., CLIFTON J. S.
Static indentation load capacity of the superelastic 60NiTi for rolling element bearings. *NASA/TM-2012-216016*, , 2012.
- [DEL 13] DELLACORTE C., MOORE III L. E., CLIFTON J. S.
The effect of pre-stressing on the static indentation load capacity of the superelastic 60NiTi. *NASA/TM-2013-216479*, , 2013.
- [DEL 14] DELLACORTE C., MOORE III L. E.
The effect of indenter ball radius on the static load capacity of the superelastic 60NiTi for rolling element bearings. *NASA/TM-2014-216627*, , 2014.
- [DIA 03] DIAB Y., COULON S., VILLE F., FLAMAND L.
Experimental investigations on rolling contact fatigue of dented surfaces using artificial, defects : Subsurface analyses. *Tribology Series*, vol. 41, p. 359–366, 2003.
- [DOR 09] DOROGOY A., RITTEL D.
Determination of the Johnson–Cook material parameters using the SCS specimen. *Experimental Mechanics*, vol. 49, n° 6, 2009, page 881.
- [DOW 66] DOWSON D., HIGGINSON G.
Elastohydrodynamic Lubrication, The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [DWY 90] DWYER-JOYCE R., HAMER J., SAYLES R., IOANNIDES E.
Surface damage effects caused by debris in rolling bearing lubricants, with an emphasis on friable materials. *Rolling Element Bearings : Towards the 21st Century* Mechanical Engineering Publications for the I. Mech. E., 1990, p. 1–8.
- [DWY 92] DWYER-JOYCE W. R. S., HAMER J. C., SAYLES R. S., IOANNIDES E.
Lubricant Screening for Debris Effects to Improve Fatigue and Wear Life. *Tribology Series*, vol. 21, p. 57 - 63, 1992.
- [DWY 05] DWYER-JOYCE R.
The life cycle of a debris particle. *Tribology and Interface Engineering Series*, vol. 48, 2005, p. 681–690.
- [ERT 39] ERTEL A.
Hydrodynamic lubrication based on new principles. *Akad. Nauk. SSSR, Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 3, n° 2, 1939, p. 41–52.
- [EVA 13] EVANS M.-H., RICHARDSON A., WANG L., WOOD R.
Serial sectioning investigation of butterfly and white etching crack (WEC) formation in wind turbine gearbox bearings. *Wear*, vol. 302, n° 1, 2013, p. 1573 - 1582.
- [FAT 88] FATEMI A., SOCIE D. F.
A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading.

- Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 11, n° 3, 1988, p. 149–165.
- [GAB 12] GABELLI A., LAI J., LUND T., RYDÉN K., STRANDELL I., MORALES-ESPEJEL G. E.
The fatigue limit of bearing steels – Part II : Characterization for life rating standards. *International Journal of Fatigue*, vol. 38, 2012, p. 169 - 180.
- [GAL 07] GALLEGO L.
Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [GÄR 99] GÄRTNER B.
Fast and robust smallest enclosing balls. *European Symposium on Algorithms*, 1999, p. 325–338.
- [GLO 00] GLOVNEA R., SPIKES H.
Elastohydrodynamic film collapse during rapid deceleration. Part I—experimental results. *Journal of Tribology*, vol. 123, n° 2, 2000, p. 254–261.
- [GOL 19] GOLMOHAMMADI Z., SADEGHI F.
A coupled multibody finite element model for investigating effects of surface defects on rolling contact fatigue. *Journal of Tribology*, vol. 141, n° 4, 2019.
- [GON 05] GONÇALVES C. A., ARAÚJO J. A., MAMIYA E. N.
Multiaxial fatigue : a stress based criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, n° 2, 2005, p. 177 - 187.
- [GRE 94] GREENWOOD J., MORALES-ESPEJEL G.
The behaviour of transverse roughness in EHL contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 208, n° 2, 1994, p. 121–132.
- [GRU 49] GRUBIN A.
Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces. *Investigation of the Contact Machine Components*, vol. 2, 1949, Central Scientific Institute for Technology and Mechanical Engineering.
- [GUM 16] GUMBEL L.
Über Geschmierte Arbeitsvader. *Z. ges. Turbinenwesen*, vol. 13, 1916, page 357.
- [HAM 76a] HAMROCK B. J., DOWSON D.
Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts : Part 1—Theoretical Formulation. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 98, n° 2, 1976, p. 223-228.
- [HAM 76b] HAMROCK B. J., DOWSON D.
Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts : Part II—Ellipticity Parameter Results. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 98, n° 3, 1976, p. 375-381.
- [HAM 77a] HAMROCK B. J., DOWSON D.
Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts : Part III—Fully Flooded Results. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 99, n° 2, 1977, p. 264-275.

- [HAM 77b] HAMROCK B. J., DOWSON D.
Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts : Part IV—Starvation Results. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 99, n° 1, 1977, p. 15-23.
- [HAM 87] HAMER J., SAYLES R., IOANNIDES E.
Deformation mechanisms and stresses created by 3rd body debris contacts and their effects on rolling bearing fatigue. *Tribology Series*, vol. 12, p. 201–208, 1987.
- [HAM 88] HAMROCK B. J., PAN P., LEE R.-T.
Pressure Spikes in Elastohydrodynamically Lubricated Conjunctions. *Journal of Tribology*, vol. 110, n° 2, 1988, p. 279-284.
- [HAM 89] HAMER J., SAYLES R., IOANNIDES E.
Particle deformation and counterface damage when relatively soft particles are squashed between hard anvils. *Tribology Transactions*, vol. 32, n° 3, 1989, p. 281–288.
- [HER 81] HERTZ H.
Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, 1881, p. 156–171.
- [HES 78] HESTENES M. R.
Conjugate direction methods in optimization. *Optimization Techniques Part 1*, p. 8–27, 1978.
- [HIR 11] HIRSCH M., NEU R.
Fretting damage in thin sheets : Analysis of an experimental configuration. *Tribology International*, vol. 44, n° 11, 2011, p. 1503 - 1510.
- [HOO 07a] HOOKE C., LI K., MORALES-ESPEJEL G.
Rapid calculation of the pressures and clearances in rough, rolling-sliding elastohydrodynamically lubricated contacts. Part 1 : low-amplitude, sinusoidal roughness. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 221, n° 5, 2007, p. 535–549.
- [HOO 07b] HOOKE C., LI K., MORALES-ESPEJEL G.
Rapid calculation of the pressures and clearances in rough, rolling-sliding elastohydrodynamically lubricated contacts. Part 2 : general, non-sinusoidal roughness. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 221, n° 5, 2007, p. 551–562.
- [HU 99] HU Y.-Z., ZHU D.
A full numerical solution to the mixed lubrication in point contacts. *Journal of Tribology*, vol. 122, n° 1, 1999, p. 1–9.
- [HU 01] HU Y.-z., WANG H., WANG W.-z., ZHU D.
A computer model of mixed lubrication in point contacts. *Tribology International*, vol. 34, n° 1, 2001, p. 65–73.
- [JAC 01] JACQ C.
Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitruré en présence d'indentations. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2001.

- [JOH 83] JOHNSON G. R.
A constitutive model and data for materials subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures. *Proceeding of the 7th International Symposium on Ballistics*, , 1983, p. 541–547.
- [JOH 87] JOHNSON K. L., JOHNSON K. L.
Contact mechanics. Cambridge university press, 1987.
- [JU 96] JU Y., FARRIS T. N.
Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *Journal of Tribology*, vol. 118, n° 2, 1996, p. 320-328.
- [KAN 82] KANDIL F. A., BROWN M. W., MILLER K.
Biaxial low-cycle fatigue failure of 316 stainless steel at elevated temperatures. *Mechanical behaviour and nuclear applications of stainless steel at elevated temperatures*, 1982.
- [KAN 97] KANETA M., KANADA T., NISHIKAWA H.
Optical interferometric observations of the effects of a moving dent on point contact EHL. *Tribology Series*, vol. 32, p. 69–79, 1997.
- [KAN 04] KANG Y. S., SADEGHI F., HOEPRICH M. R.
A finite element model for spherical debris denting in heavily loaded contacts. *Journal of Tribology*, vol. 126, n° 1, 2004, p. 71–80.
- [KIM 03] KIM T. W., CHO Y. J., AN D. M., LEE H. W.
The Fatigue Crack Initiation Life Prediction Based on Several High-Cycle Fatigue Criteria under Spherical Rolling Contact. *Tribology Transactions*, vol. 46, n° 1, 2003, p. 76-82.
- [KO 89] KO C., IOANNIDES E.
Debris denting - The associated residual stresses and their effect on the fatigue life of rolling bearing : An FEM analysis. *Tribology Series*, vol. 14, p. 199–207, 1989.
- [KOU 15] KOUMI K. E.
Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2015.
- [KŘU 07] KŘUPKA I., HARTL M., URBANEC L., ČERMÁK J.
Single dent within elastohydrodynamic contact-comparison between experimental and numerical results. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 221, n° 6, 2007, p. 635–644.
- [KŘU 09] KŘUPKA I., VRBKA M., VAVERKA M., POLIŠČUK R., HARTL M.
Effect of surface dents on contact pressure in elastohydrodynamic contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 223, n° 4, 2009, p. 683–693.
- [LIU 00] LIU S., WANG Q., LIU G.
A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, vol. 243, n° 1, 2000, p. 101 - 111.

- [LIU 05] LIU Y., MAHADEVAN S.
Multiaxial high-cycle fatigue criterion and life prediction for metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, n° 7, 2005, p. 790 - 800.
- [LIU 18] LIU J., WU H., SHAO Y.
A theoretical study on vibrations of a ball bearing caused by a dent on the races. *Engineering Failure Analysis*, vol. 83, 2018, p. 220–229.
- [LOV 52] LOVE A. E. H.
A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge university press, 1952.
- [LUB 86] LUBRECHT A. A., TEN NAPEL W. E., BOSMA R.
Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profiles in elastohydrodynamically lubricated line contacts. *Journal of Tribology*, vol. 108, n° 4, 1986, p. 551–556.
- [LUB 87a] LUBRECHT A. A., BREUKINK G. A. C., MOES H., TEN NAPEL W. E., BOSMA R.
Solving Reynolds equation for EHL line contacts by application of a multigrid method. *Proceedings of Thirteenth Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds*, 1987, p. 175–182.
- [LUB 87b] LUBRECHT A. A.
The Numerical Solution of the Elastohydrodynamically Lubricated Line-and Point Contact Problem Using Multigrid Techniques. PhD thesis, University of Twente, 1987.
- [MAR 16] MARTIN H.
Lubrication of gear teeth. *Engineering*, vol. 102, 1916, page 119.
- [MOR 00] MORALES-ESPEJEL G., VENNER C., GREENWOOD J.
Kinematics of transverse real roughness in elastohydrodynamically lubricated line contacts using Fourier analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 214, n° 6, 2000, p. 523–534.
- [MOR 03] MORALES-ESPEJEL G., LUGT P., VAN KUILENBURG J., TRIPP J.
Effects of surface micro-geometry on the pressures and internal stresses of pure rolling EHL contacts. *Tribology Transactions*, vol. 46, n° 2, 2003, p. 260–272.
- [MOR 11a] MORALES-ESPEJEL G. E., BRIZMER V.
Micropitting Modelling in Rolling–Sliding Contacts : Application to Rolling Bearings. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 4, 2011, p. 625-643.
- [MOR 11b] MORALES-ESPEJEL G. E., GABELLI A.
The behavior of indentation marks in rolling–sliding elastohydrodynamically lubricated contacts. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 4, 2011, p. 589–606.
- [MOR 15a] MORALES-ESPEJEL G. E., GABELLI A.
The progression of surface rolling contact fatigue damage of rolling bearings with artificial dents. *Tribology Transactions*, vol. 58, n° 3, 2015, p. 418–431.
- [MOR 15b] MORALES-ESPEJEL G. E., GABELLI A., DE VRIES A. J. C.
A Model for Rolling Bearing Life with Surface and Subsurface Survival—Tribological Effects. *Tribology Transactions*, vol. 58, n° 5, 2015, p. 894-906.

- [MOR 16] MORALES-ESPEJEL G. E., GABELLI A.
A model for rolling bearing life with surface and subsurface survival : sporadic surface damage from deterministic indentations. *Tribology International*, vol. 96, 2016, p. 279–288.
- [NEE 15] NEEDELMAN W. M., ZARETSKY E. V.
Recalibrated equations for determining effect of oil filtration on rolling bearing life. *Tribology Transactions*, vol. 58, n° 5, 2015, p. 786–800.
- [NEL 00] NELIAS D., VILLE F.
Detrimental effects of debris dents on rolling contact fatigue. *Journal of Tribology*, vol. 122, n° 1, 2000, p. 55–64.
- [NEL 05] NELIAS D., JACQ C., LORMAND G., DUDRAGNE G., VINCENT A.
New methodology to evaluate the rolling contact fatigue performance of bearing steels with surface dents : application to 32CrMoV13 (nitrided) and M50 steels. *Journal of Tribology*, vol. 127, n° 3, 2005, p. 611–622.
- [NEU 00] NEU R. W., PAPE J. A., SWALLA D. R.
Methodologies for linking nucleation and propagation approaches for predicting life under fretting fatigue. *Fretting Fatigue : Current Technology and Practices*, p. 369–388, 2000.
- [NIK 12] NIKAS G. K.
An experimentally validated numerical model of indentation and abrasion by debris particles in machine-element contacts considering micro-hardness effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 226, n° 5, 2012, p. 406–438.
- [NIK 13] NIKAS G. K.
Debris particle indentation and abrasion of machine-element contacts : An experimentally validated, thermoelastoplastic numerical model with micro-hardness and frictional heating effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 227, n° 6, 2013, p. 579–617.
- [NIK 14] NIKAS G. K.
Strain-rate effects on the plastic indentation and abrasion of elasto-hydrodynamic contacts by debris particles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 228, n° 1, 2014, p. 22–45.
- [PAP 97] PAPADOPOULOS I. V., DAVOLI P., GORLA C., FILIPPINI M., BERNASCONI A.
A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 19, n° 3, 1997, p. 219–235.
- [PET 51] PETRUSEVICH A. I.
Fundamental conclusions from the contact-hydrodynamic theory of lubrication. *Izv. Akad. Nauk SSR (OTN)*, vol. 2, 1951, p. 209–233.
- [POL 99] POLONSKY I., KEER L.
A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-

- summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, vol. 231, n° 2, 1999, p. 206 - 219.
- [RAM 08] RAMESH A., MELKOTE S. N.
Modeling of white layer formation under thermally dominant conditions in orthogonal machining of hardened AISI 52100 steel. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 48, n° 3-4, 2008, p. 402–414.
- [REY 86] REYNOLDS O.
IV. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, , n° 177, 1886, p. 157–234.
- [ROE 66] ROELANDS C.
Correlation Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils. PhD thesis, Technical University of Delft, The Netherlands, 1966.
- [SCH 88] SCHLICHT H., SCHREIBER E., ZWIRLEIN O.
Effects of material properties on bearing steel fatigue strength, HOO J., Ed., *Effect of steel manufacturing processes on the quality of bearing steels*, p. 81–101, 1988.
- [SHI 01] SHIOZAWA K., LU L., ISHIHARA S.
S–N curve characteristics and subsurface crack initiation behaviour in ultra-long life fatigue of a high carbon-chromium bearing steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 24, n° 12, 2001, p. 781-790.
- [SHI 09] SHIMIZU S., TSUCHIYA K., TOSHA K.
Probabilistic Stress-Life (P-S-N) Study on Bearing Steel Using Alternating Torsion Life Test. *Tribology Transactions*, vol. 52, n° 6, 2009, p. 807-816.
- [SHR 12] SHROT A., BÄKER M.
Determination of Johnson–Cook parameters from machining simulations. *Computational Materials Science*, vol. 52, n° 1, 2012, p. 298–304.
- [SIM 92] SIMO J., MIEHE C.
Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 98, n° 1, 1992, p. 41–104.
- [SIN 81] SINES G., OHGI G.
Fatigue Criteria Under Combined Stresses or Strains. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 103, n° 2, 1981, p. 82-90.
- [SMI 70] SMITH K. N., WATSON P., TOPPER T. H.
A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, vol. 5, 1970, p. 767–778.
- [SOC 87] SOCIE D.
Multiaxial Fatigue Damage Models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 109, n° 4, 1987, p. 293-298.

- [ŠPE 10] ŠPERKA P., KŘUPKA I., HARTL M.
Experimental study of real roughness attenuation in concentrated contacts. *Tribology International*, vol. 43, n° 10, 2010, p. 1893–1901.
- [ŠPE 17] ŠPERKA P., KŘUPKA I., HARTL M.
Prediction of shallow indentation effects in a rolling-sliding EHL contact based on amplitude attenuation theory. *Tribology Online*, vol. 12, n° 1, 2017, p. 1–7.
- [STR 16] STRUBEL V., FILLOT N., VILLE F., CAVORET J., VERGNE P., MONDELIN A., MAHEO Y.
Particle entrapment in hybrid lubricated point contacts. *Tribology Transactions*, vol. 59, n° 4, 2016, p. 768–779.
- [STR 17] STRUBEL V., FILLOT N., VILLE F., CAVORET J., VERGNE P., MONDELIN A., MAHEO Y.
Particle Entrapment in Rolling Element Bearings : The Effect of Ellipticity, Nature of Materials, and Sliding. *Tribology Transactions*, vol. 60, n° 2, 2017, p. 373–382.
- [SU 06] SU J.-C.
Residual stress modeling in machining processes. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2006.
- [TAY 34] TAYLOR G. I., QUINNEY H.
The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 143, n° 849, 1934, p. 307–326.
- [TON 12a] TONICELLO E., GIRODIN D., SIDOROFF C., FAZEKAS A., PEREZ M.
Rolling bearing applications : some trends in materials and heat treatments. *Materials Science and Technology*, vol. 28, n° 1, 2012, p. 23–26.
- [TON 12b] TONICELLO E.
Etude et modélisation de la fatigue de contact en présence d’indentation dans le cas de roulements tout acier et hybrides. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2012.
- [VAN 84] VAN K. D., LE DOUARON A., LIEURADE H.
Multiaxial fatigue limit : a new approach. *Fracture 84*, p. 1879–1885, 1984.
- [VAN 89] VAN K. D., GRIVEAU B., MESSAGE O.
On a new multiaxial fatigue limit criterion : theory and application. *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, 1989, p. 479–496.
- [VEN 91] VENNER C. H.
Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems. PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1991.
- [VEN 94a] VENNER C. H.
Higher-order multilevel solvers for the EHL line and point contact problem. *Journal of Tribology*, vol. 116, n° 4, 1994, p. 741–750.
- [VEN 94b] VENNER C. H., BOS J.
Effects of lubricant compressibility on the film thickness in EHL line and circular contacts. *Wear*, vol. 173, n° 1-2, 1994, p. 151–165.

-
- [VEN 95] VENNER C. H., LUBRECHT A. A.
Numerical simulation of waviness in a circular EHL contact, under rolling/sliding. *Tribology Series*, vol. 30, p. 259–272, 1995.
- [VEN 97] VENNER C. H., COUHIER F., LUBRECHT A. A., GREENWOOD J. A.
Amplitude reduction of waviness in transient EHL line contacts. *Tribology Series*, vol. 32, p. 103–112, 1997.
- [VEN 99] VENNER C. H., MORALES-ESPEJEL G.
Amplitude reduction of small-amplitude waviness in transient elastohydrodynamically lubricated line contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 213, n° 6, 1999, p. 487–504.
- [VEN 00] VENNER C. H., LUBRECHT A. A.
Multilevel methods in lubrication. *Tribology Series*, vol. 37, 2000.
- [VEN 05] VENNER C. H.
EHL film thickness computations at low speeds : risk of artificial trends as a result of poor accuracy and implications for mixed lubrication modelling. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 219, n° 4, 2005, p. 285–290.
- [VER 85] VERGNE F.
Calcul des déplacements et des contraintes dans un demiespace élastique chargé en surface par des actions distribuées normales et tangentielles quelconques. Master's thesis, INSA de Lyon, 1985.
- [VIE 16] VIEILLARD C., KADIN Y., MORALES-ESPEJEL G. E., GABELLI A.
An experimental and theoretical study of surface rolling contact fatigue damage progression in hybrid bearings with artificial dents. *Wear*, vol. 364, 2016, p. 211–223.
- [VIL 98a] VILLE F.
Pollution solide des lubrifiants, indentation et fatigue des surfaces. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1998.
- [VIL 98b] VILLE F., NELIAS D.
Influence of the nature and size of solid particles on the indentation features in EHL contacts. *Tribology Series*, vol. 34, p. 399–409, 1998.
- [VIL 99a] VILLE F., NELIAS D.
Early fatigue failure due to dents in EHL contacts. *Tribology Transactions*, vol. 42, n° 4, 1999, p. 795–800.
- [VIL 99b] VILLE F., NELIAS D.
An Experimental Study on the Concentration and Shape of Dents Caused by Spherical Metallic Particles in EHL Contacts. *Tribology Transactions*, vol. 42, n° 1, 1999, p. 231–240.
- [VOS 97] VOSKAMP A. P.
Microstructural changes during rolling contract fatigue : Metal fatigue in the subsurface region of deep groove ball bearing inner rings. PhD thesis, Delft University of Technology, 1997.
-

- [WAN 88] WAN G. T. Y., SPIKES H. A.
The Behavior of Suspended Solid Particles in Rolling and Sliding Elastohydrodynamic Contacts. *Tribology Transactions*, vol. 31, n° 1, 1988, p. 12-21.
- [WAR 10] WARHADPANDE A., SADEGHI F.
Effects of surface defects on rolling contact fatigue of heavily loaded lubricated contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 224, n° 10, 2010, p. 1061–1077.
- [WEL 91] WELZL E.
Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). MAURER H., Ed., *New Results and New Trends in Computer Science*, 1991, p. 359–370.
- [XIE 15] XIE J., NELIAS D., WALTER-LE BERRE H., OGAWA K., ICHIKAWA Y.
Simulation of the cold spray particle deposition process. *Journal of Tribology*, vol. 137, n° 4, 2015, page 041101.
- [XU 97a] XU G., SADEGHI F., COGDELL J. D.
Debris Denting Effects on Elastohydrodynamic Lubricated Contacts. *Journal of Tribology*, vol. 119, n° 3, 1997, p. 579-587.
- [XU 97b] XU G., SADEGHI F., HOEPRICH M.
Residual stresses due to debris effects in EHL contacts. *Tribology Transactions*, vol. 40, n° 4, 1997, p. 613–620.
- [XU 98] XU G., SADEGHI F., HOEPRICH M. R.
Dent Initiated Spall Formation in EHL Rolling/Sliding Contact. *Journal of Tribology*, vol. 120, n° 3, 1998, p. 453-462.
- [ZHA 02] ZHAO J., SADEGHI F.
Analysis of EHL circular contact shut down. *Journal of Tribology*, vol. 125, n° 1, 2002, p. 76–90.
- [ZHO 96] ZHOU M., RAVICHANDRAN G., ROSAKIS A.
Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates—II. Numerical simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 6, 1996, p. 1007–1032.
- [ZHU 99] ZHU D., HU Y.-Z.
The study of transition from elastohydrodynamic to mixed and boundary lubrication. 1999, p. 150–156.
- [ZHU 01a] ZHU D., HU Y.-Z.
A computer program package for the prediction of EHL and mixed lubrication characteristics, friction, subsurface stresses and flash temperatures based on measured 3-D surface roughness. *Tribology Transactions*, vol. 44, n° 3, 2001, p. 383–390.
- [ZHU 01b] ZHU D., HU Y.-Z.
Effects of rough surface topography and orientation on the characteristics of EHD and mixed lubrication in both circular and elliptical contacts. *Tribology Transactions*, vol. 44, n° 3, 2001, p. 391–398.

[ZHU 07] ZHU D.

On some aspects of numerical solutions of thin-film and mixed elastohydrodynamic lubrication. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 221, n° 5, 2007, p. 561–579.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : BONETTO

DATE de SOUTENANCE : 21/04/2020

Prénoms : Alexis

TITRE : Etude de l'indentation et de la fatigue des contacts roulants

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2020LYSEI030

Ecole doctorale : ED 162 MEGA

Spécialité : Mécanique

RESUME :

La fatigue de surface est aujourd'hui la principale cause de défaillances des roulements. Ce type de fatigue peut se développer du simple fait de la rugosité des surfaces mais est exacerbée par la présence de défauts de surface tels que les indents. La gestion de la pollution des lubrifiants, à l'origine de l'indentation des surfaces, est très coûteuse et ne peut être parfaite puisque la pollution est à la fois présente dans les huiles neuves, générée de manière continue par les systèmes lubrifiés et introduite lors des opérations sur le système. En conséquence, les huiles charrient systématiquement des particules d'origines variées qui sont amenées dans les contacts par les systèmes de lubrification. Au passage entre les surfaces, les particules sont écrasées et indentent les surfaces, créant ainsi des défauts qui seront les sites privilégiés d'amorçage de fatigue au cours des cycles de fonctionnement suivants. Ne pouvant se prémunir de l'indentation des surfaces, une bonne compréhension des mécanismes d'indentation et de fatigue sur indent est nécessaire pour garantir la fiabilité des roulements ainsi que pour réduire les coûts liés à leur maintenance. Au cours de cette thèse, un modèle éléments finis « couplé Euler-Lagrange » est développé pour reproduire le processus d'indentation réel des roulements et en étudier les effets. Dans un second temps, la fatigue des surfaces est étudiée par l'emploi de critères de fatigue issus de la littérature dans le cadre d'un contact sec. Enfin, l'effet du lubrifiant est ajouté par la mise en place d'un solveur multigrilles permettant la résolution du problème EHD transitoire.

MOTS-CLÉS : Roulement, Fatigue, Indentation, CEL, Méthode semi-analytique, Multigrilles, EHD

Laboratoire (s) de recherche : LaMCoS

Directeur de thèse: Daniel NELIAS

Présidente de jury : Sylvie POMMIER

Composition du jury : Sylvain CALLOCH, Noël BRUNETIERE, Daniel NELIAS, Thibaut CHAISE, Laurent ZAMPONI

