

THÈSE

ANALYSE ET VALIDATION EXPÉRIMENTALE D'UN MODÈLE DE ROULEMENT À BILLES À QUATRE POINTS DE CONTACT À BAGUES DÉFORMABLES PAR DÉCOUPLAGE DES EFFETS LOCAUX ET STRUCTURAUX

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Samy LACROIX
Ingénieur en Mécanique

Thèse soutenue le 11 juillet 2014 devant la Commission d'examen

Jury

JERÔME ANTONI	Professeur	Président du jury
ALAIN DAIDIÉ	Professeur	Rapporteur
MIHAI ARGHIR	Professeur	Rapporteur
FABRICE THOUVEREZ	Professeur	Examineur
JOSU AGUIRREBEITIA	Professeur associé	Examineur
BRUNO DRUEZ	Ingénieur	Examineur
DANIEL NÉLIAS	Professeur	Directeur de thèse
ALEXANDRE LEBLANC	Maître de conférences	Co-directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales –
Quinquennal 2011-2015

Sigle	École doctorale	Nom et coordonnées du responsable
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3e etage 04.72.43.80.46 Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.13.95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://eдея.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04.78.43.37.17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Darwin - UCB Lyon 1 04.72.43.28.91 Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Hôpital Louis Pradel - Bron 04.72.68.49.09 Insa : M. LAGARDE Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3e etage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax : 04.72.43.85.28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.72.37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo ¹ http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr

(1) ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Je tiens à remercier les nombreuses personnes qui, au LaMCoS et à SNECMA, ont contribué à la réalisation de ma thèse. Daniel Nélias, mon directeur de thèse, pour son attention, ses précieux enseignements et son accompagnement lors de mes premiers pas dans le monde de la recherche. Bruno Druetz, mon lien avec l'entreprise, pour son encadrement, pour ces conseils et sa disponibilité. Des remerciements particuliers à Alexandre Leblanc qui a soulevé de judicieuses questions et a apporté de nombreux éléments de réponse, merci pour le soutien et le souffle de motivation à chaque rencontre.

Je voudrais remercier vivement l'ensemble de mes collègues doctorants du laboratoire, qui ont participé à la bonne ambiance de travail et au partage de connaissances pendant ces trois années de préparation. Merci à Yannick pour ta présence Ensmatique au labo, à Pipo pour ta joie de vivre, à Alexandre mon présumé « co-thésard » à mi-temps, à Nicolas pour tous tes glaçons et les bonnes adresses de restaurants, à Eric pour ses poignées de main togolaises, à Espoir pour son indéfectible présence au bureau, à Lan pour nos conversations en anglais. Merci à Robin, Titi, Clément, Damien, Paul, Louis, pour vos points au tarot. Corentin, merci pour le soin apporté aux plantes, pour ta vision de poète, et pour la joie que tu transmets. Merci Pierrot, pour les randos, pour le renforcement de mon mental de chips (j'arriverai bien à la traverser un jour cette slack), pour ton ouverture d'esprit. De sincères remerciements à David, pour les excellents moments passés ensemble, pour la richesse de tes conseils, pour ton expérience, et pour ton soutien dans les moments difficiles.

Je tiens à remercier ma famille. Ma grand-mère, Huguette, pour sa tendresse inaltérable. Mon frère, Boris, qui reste mon exemple de sérénité. Déborah, ma sœur aînée pour avoir ouvert la voie. Mes parents qui m'ont permis d'aborder ces années de thèse l'esprit libre, merci pour leur écoute.

Enfin, je tiens à remercier Michèle, sans qui ce manuscrit serait incompréhensible. Merci pour les heures de relecture. Merci de m'avoir encouragé sans relâche pendant ces semaines de rédaction. En fait, merci pour tout, tu sais.

Résumé

Les roulements à billes sont l'un des composants les plus importants et les plus critiques dans les turbomachines ou dans les éoliennes. Ils nécessitent un dimensionnement soigné pour allier fiabilité et pertinence économique, aboutissant à des roulements compacts, de fortes capacités en charges statique et dynamique. Ainsi, les butées à billes rencontrées dans les pieds de pales d'éoliennes doivent supporter des chargements très élevés, avec des bagues très fines par rapport aux dimensions du palier. Le roulement à quatre points de contact à haute vitesse est un autre exemple de bagues minces, où la cinématique interne est fortement liée à la géométrie des pistes qui elle, dépend de la rigidité des bagues et des logements. Pour cette application, les pistes intérieures et extérieures sont archées et bien souvent constituées de deux demi-bagues. La souplesse de ces dernières ainsi que celle du logement modifie la géométrie interne et l'interaction entre les composants. Cela implique une modification de la distribution de pression et simultanément des vitesses internes. Par conséquent, la souplesse du roulement et de son environnement est un paramètre important à prendre en compte pour mieux estimer le domaine des chargements admissibles pour le roulement.

Il est proposé dans cette thèse un modèle permettant de dimensionner des roulements à billes à quatre points de contact, principalement dans le domaine d'application des turbines aéronautiques. Ce modèle est capable de rendre compte des déformations globales des bagues et de leur logement et environnement proche. Un ensemble de travaux existants et différentes possibilités envisagées pour la mise en place d'un modèle de roulement à bagues déformables est présenté pour définir une stratégie de couplage efficace entre un modèle analytique et un modèle éléments finis.

La prise en compte de la souplesse des bagues s'appuie sur la résolution préalable d'un problème semi analytique de modélisation avec bagues rigides. Ensuite un couplage entre les résultats de ce modèle et un modèle éléments finis est réalisée pour prendre en compte la souplesse des bagues. Des choix sont nécessaires pour ce couplage, notamment sur la modélisation des contacts billes/bagues par l'utilisation de forces nodales pour simuler fidèlement ces contacts. Plusieurs méthodes sont ainsi évaluées pour calculer au mieux la nouvelle géométrie de la bague, en observant son comportement lorsqu'elle est soumise au contact d'une bille. Finalement, cette souplesse est intégrée au modèle semi analytique pour comparer le comportement d'un roulement à bagues rigides à celui d'un roulement à bagues souples. Des premiers résultats numériques sur une géométrie académique montrent des variations des grandeurs internes du roulement (angles de contact, ellipse de contact) ainsi qu'une meilleure répartition du chargement. Des essais ont été réalisés pour valider expérimentalement le modèle développé dans cette thèse. Les comparaisons par mesures du déplacement axial des bagues et

des ondulations en surface des bagues montrent que la souplesse du support n'est pas négligeable, même dans le cas de bagues larges. Également, ces essais ont démontré la pertinence du couplage entre un modèle analytique et un modèle éléments finis pour rendre compte des déformations de bagues de roulements à billes à quatre points de contact.

Table des matières

Résumé	7
Notations	11
1 Introduction	13
1.1 État de l'art	13
1.1.1 Description d'un roulement à billes	13
1.1.2 Modélisation d'un roulement à bagues rigides	14
1.1.3 Modélisation d'un roulement à bagues souples	15
1.2 Approche générale et méthodologie de notre étude	18
2 Description d'un roulement à quatre points de contact	21
2.1 Définition des repères	21
2.1.1 Repères liés aux bagues	21
2.1.2 Repères liés aux billes	23
2.1.3 Repères liés à la cage	25
2.2 Caractérisation du roulement	26
2.2.1 Définition des bagues	26
2.2.2 Hauteur de tronçature : η_i, η_o	26
2.2.3 Angles de contact radial : α_o^0, α_i^0	27
2.2.4 Jeu diamétral, espace diamétral : J_d, P_d	27
2.2.5 Angle de contact libre : α_f	29
3 Équations d'équilibre du roulement	31
3.1 Relations géométriques	31
3.1.1 Cas des bagues rigides	31
3.1.2 Cas des bagues déformables	36
3.2 Équilibre quasi statique	39
3.2.1 Équilibre des billes	39
3.2.2 Équilibre de la cage	42
3.2.3 Équilibre de la bague intérieure	43
4 Prise en compte de la souplesse des bagues	47
4.1 Modélisation du contact	48
4.1.1 Théorie du contact	48
4.1.2 Application au contact bille/plan	50
4.1.3 Application au contact bille/bague	59
4.2 Calcul de la nouvelle géométrie des bagues	64
4.2.1 Voisinage du point de contact	64
4.2.2 Conformités et déplacements des centres de courbure	66
4.2.3 Résultats préliminaires	66

4.3	Cartographie de la nouvelle géométrie	69
4.3.1	Présentation du calcul	69
4.3.2	Cas du roulement R_{20}^{10}	70
4.3.3	Calcul du déplacement moyen	81
4.4	Couplage avec un code de calcul éléments finis	82
4.4.1	Intégration au modèle semi analytique	83
4.4.2	Déroulement du calcul éléments finis	84
4.5	Impact sur le comportement du roulement	85
4.5.1	Chargement axial	86
4.5.2	Chargement axial et radial	86
4.5.3	Chargement axial et radial avec moment	89
5	Validation expérimentale	93
5.1	Présentation des essais	93
5.1.1	Dispositif expérimental	93
5.1.2	Adaptation du modèle numérique	95
5.2	Résultats	96
5.2.1	Déplacement de corps rigide	96
5.2.2	Loi de comportement	104
	Conclusion	107
A	Forces hydrodynamiques	109
A.1	Interaction entre la cage et les bagues	109
A.2	Interaction entre la cage et les billes	110
A.2.1	Effet tonneau/plan	110
A.2.2	Effet de palier hydrodynamique	111
B	Dimensions des roulements simplifiés	113
C	Dimensions du roulement de référence	115
D	Dimensions du roulement fin	117
	Bibliographie	127

Notations

α_{xx}	: angle de contact.
α_i^0, α_o^0	: angles de contact radial.
α_f	: angle de contact libre.
B_i, B_o	: largeurs des bagues.
β, β'	: angles de positionnement du vecteur de rotation propre d'une bille.
C_c	: point de contact.
C_{xx}	: centre de courbure des pistes.
D	: diamètre des billes.
D_{al}	: diamètre des alvéoles de la cage.
d_i	: diamètre intérieur de la bague intérieure.
d_m	: diamètre moyen du roulement à billes.
δ_{xx}	: déplacement de la bille dans la bague causé par le contact Hertzien.
δ_{xx}^a	: déplacement axial des centres de courbure.
δ_{xx}^r	: déplacement radial des centres de courbure.
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$: translations de la bague intérieure.
E_p	: jeu axial.
f_i, f_o	: conformité des pistes.
F_X, F_Y	: forces tangentielles au contact bille/bague.
F_c	: force centrifuge exercée sur la bille.
F_x, F_y, F_z	: forces exercées sur la bague intérieure.
G	: centre d'un repère.
g_i, g_o	: troncature des bagues.
h_{ir}	: hauteur du lubrifiant au niveau des contacts bille/bague.
J_d	: jeu diamétral.
M_{Rxx}	: moment de frottement par roulement (<i>Rolling</i>).
M_{Sxx}	: moment de frottement par glissement (<i>Spinning</i>).
M_{Yxx}	: moment créé par le contact bille/bague.
M_Y, M_Z	: moments créés sur la bille par les effets d'inertie.
M_y, M_z	: moment exercés sur la bague intérieure.
N	: nombre de billes.
Ω, ω	: vitesse de rotation.
ω_m	: vitesse de rotation propre d'une bille.
ω_{Ca}	: vitesse de rotation de la cage.
Q	: force normale au contact bille/bague.
R_{Ca}, r_{Ca}, L_{Ca}	: rayon extérieur, intérieur et largeur de la cage.
r_i, r_o	: rayon des pistes ($r_i = f_i D$; $r_o = f_o D$).
θ	: angle de rotation.
θ_y, θ_z	: rotations de la bague intérieure.
ψ	: position angulaire des billes.

Indices

Ca	: cage
G	: repère global
i	: bague intérieure (<i>inner</i>)

<i>o</i>	: bague extérieure (<i>outer</i>)
<i>r</i>	: piste droite d'une bague (<i>right</i>)
<i>l</i>	: piste gauche d'une bague (<i>left</i>)

Introduction

1.1	État de l’art	13
1.1.1	Description d’un roulement à billes	13
1.1.2	Modélisation d’un roulement à bagues rigides	14
1.1.3	Modélisation d’un roulement à bagues souples	15
1.2	Approche générale et méthodologie de notre étude	18

1.1 État de l’art

Le guidage du mouvement de rotation d’un élément tournant est réalisé principalement par deux moyens, soit l’utilisation d’un palier lisse, soit l’utilisation d’un palier à roulement. Les paliers possèdent une large gamme de géométrie pour s’adapter au chargement appliqué (forces axiales, radiales, moments) et au type de guidage souhaité (palier porteur ou de butée). Les paliers étant universellement présents lorsqu’il s’agit de guider une rotation, d’importantes recherches sont effectuées afin d’en améliorer les performances. Ainsi, la taille et la masse des paliers diminuent, leur durée de vie et leur capacité de charge augmentent.

Le palier à roulement permettent de transformer les efforts de glissement des paliers lisses en efforts de roulement. Ainsi ces deux éléments ne sont pas utilisés dans le mêmes cas de figure.

Les paliers lisses comportent peu de pièce, et sont généralement moins encombrant qu’un roulement. De plus, ce faible nombre de pièces en mouvement leur donne l’avantage d’être peu bruyant. Les paliers lisses sont indiqués lorsque les charges sont légères et que les vitesses de rotations sont lentes ou de faible amplitude.

Les roulements sont généralement utilisés lorsque les charges sont élevées et la vitesse de rotation importante.

1.1.1 Description d’un roulement à billes

Dans notre étude, nous nous intéressons particulièrement aux roulements à billes. Ceux-ci sont composés de plusieurs éléments :

la bague extérieure qui est liée à l’un des deux éléments à guider (appelé logement ou support). Elle est le plus souvent cylindrique sur sa partie externe. Dans sa partie interne est creusée une gorge, dans laquelle les billes du roulement se déplacent ;

la bague intérieure qui est liée à l’autre élément à guider (appelé arbre). Elle est construite de manière similaire à la bague extérieure ;

les billes sont les éléments qui transmettent les efforts entre la bague intérieure et la bague extérieure. Ces éléments roulent entre les deux bagues du roulement ;

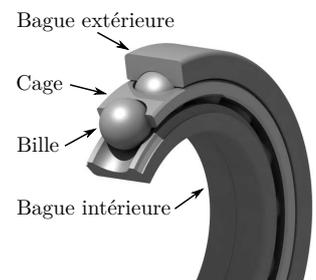


FIGURE 1.1 – Éléments d’un roulement à billes.

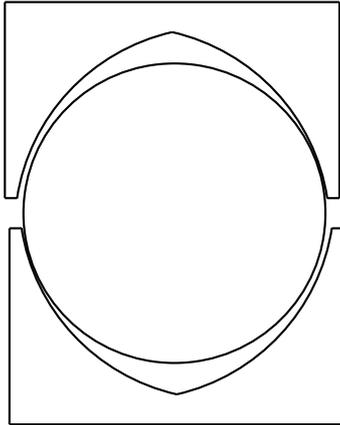


FIGURE 1.2 – Roulement à quatre points de contact.

la **cage** qui permet de maintenir un espacement régulier entre les billes du roulement.

Le roulement représenté sur la figure 1.1 est un roulement à une rangée de billes à gorge profonde. Les pistes sur les bagues extérieure et intérieure sont toriques d'un diamètre supérieur au diamètre d'une bille. Celle-ci possède donc deux points de contact : un avec la bague intérieure et un avec la bague extérieure. Il s'agit d'un type de roulement couramment utilisé dans les assemblages mécaniques. Il supporte des charges radiales principalement, et possède une légère mobilité en rotation.

Les roulements que nous étudions ici sont des roulements à quatre points de contact. Géométriquement, très ressemblants aux roulements à deux points de contact, les pistes intérieure et extérieure formant une arche (FIG. 1.2), la bille peut posséder jusqu'à quatre points de contact (deux sur la bague extérieure et deux autres sur celle intérieure). Nous différencions donc quatre pistes : intérieure droite et gauche, et extérieure droite et gauche.

Le premier avantage de cette arche est l'espace libre en son sommet, qui permet un meilleur drainage du lubrifiant. Il est également possible d'y ajouter des orifices d'évacuation et d'alimentation en lubrifiant.

Le second avantage est que la partie archée des pistes lui permet d'avoir un comportement qui se rapproche des roulements à contact oblique, c'est à dire qu'il supporte mieux les chargements axiaux que les chargements radiaux. Il est ainsi plus compact que deux roulements à contact oblique installés côte à côte et les chargements sont plus répartis sur les différentes pistes.

Par contre, le fait les billes puissent avoir trois ou quatre points de contact, rend impossible le contact par roulements en tout lieu et simultanément. De manière générale, il y a donc un glissement plus prononcé au niveau des points de contact, ce qui augmente la puissance dissipée d'une part, et l'usure des pistes d'autre part.

Ces roulements sont utilisés dans les turbomachines, sur l'arbre principal, pour reprendre les efforts axiaux, le plus souvent conjointement à un roulement à rouleaux qui lui transmet les efforts radiaux. Ils sont également utilisés dans les pieds de grues, ou de pales d'éolienne. Leur grande raideur en rotation est appréciée dans ces domaines où des moments importants sont à transmettre.

1.1.2 Modélisation d'un roulement à bagues rigides

Modéliser un roulement à billes consiste à prévoir le fonctionnement de celui-ci. Il s'agit par exemple de déterminer le déplacement des bagues l'une par rapport à l'autre, la répartition des charges internes, les vitesses de glissement, pour éventuellement déterminer sa durée de vie ou la puissance dissipée. Lorsque le roulement est chargé, ses billes se déplacent et rentrent en contact avec les bagues au niveau de leurs pistes. Les contacts créent alors de faibles déformations et engendrent un déplacement supplémentaire des bagues. Ces déformations hertziennes restent dans un faible volume (quelques millimètres cube) elles sont appelées déformations locales.

Les modèles analytiques prennent rapidement en compte ces déformations locales mais font l'hypothèse que les bagues conservent leur forme circulaires, leur ovalisation ou leur torsion sont considérées nulles, et nous parlons alors de modèle à bagues rigides. Citons particulièrement les travaux de Jones [26] en 1959 qui établissent une formulation analytique à la base du

modèle présenté dans cette étude. En 1973, Hamrock et Anderson [18], s'en inspirent pour étudier des roulements à pistes archées, et prennent en compte les efforts centrifuges créés par les vitesses de rotation élevés. Des modèles récents sont encore développés pour suivre les spécificités des roulements actuels. En 1979, Gupta [16, 17], prend en compte les effets dynamiques. Ces différents modèles, permettent d'obtenir un ensemble de grandeurs internes permettant de pouvoir estimer des durées de vie, des capacités de charge, mais également des lois de comportements. Des modèles simplifiés permettent la détermination rapide et robuste du déplacement des bagues : Houpert [21], en 1997, propose une méthode unique pour les roulements à billes et à rouleaux.

Plusieurs études récentes traitent de cas proches celui des roulements à quatre points de contact de notre étude :

- en 2003, Amasorrain [22] traite, les butées à billes à quatre points de contact ;
- en 2006, Antoine *et al.* proposent un méthode pour la détermination des angles de contact dans les roulements à contact angulaire ;
- en 2010, Jedrzejewski [23] propose un modèle pour ces mêmes roulements, mais en prenant en compte les grandes vitesses.

1.1.3 Modélisation d'un roulement à bagues souples

Pour des roulements faiblement chargés ou à bagues large, l'hypothèse de bague rigide s'avère satisfaisante. Les grands roulements rencontrés dans les grues, les éoliennes, au pied de structures tournantes, ont un rôle multiple. Ils guident la rotation, supportent une masse élevée et parfois servent d'engrenage. De tels roulements, dit de pivotement (FIG. 1.3), font partie de la structure complète, et se déforment comme chacun de ses éléments. Du fait, des très faibles vitesse de rotation de ces roulements, une étude statique de l'état de déformation des bagues peut se révéler suffisante.

Dans des turboréacteurs, les déformations globales des bagues apparaissent pour d'autres raisons. Les exigences en matière de performance et de consommation induisent en outre des diminutions de masse des divers composants des moteurs.

Plusieurs pistes peuvent être envisagées. Il est par exemple possible de changer les matériaux utilisés pour la réalisation des roulements : l'utilisation de céramique permet en effet de réaliser cette diminution de masse. L'utilisation de sphères creuses à la place de billes contribue à cette réduction de masse. Darji [9] montre en 2008 leur bénéfice en terme de durée de vie.

Il est également possible de regrouper les fonctions des composants : les bagues sont utilisées comme support ou comme roue dentée. Dans ces cas, le roulement est alors intimement lié à la structure.

Enfin, une réduction de l'épaisseur des bagues permet également la réduction de la masse des roulements. Nous traitons particulièrement ces deux derniers phénomènes dans cette étude. Ces deux derniers points incitent à ne plus considérer les bagues comme des éléments rigides pour le dimensionnement des roulements.

La prise en compte des déformations des bagues et de l'environnement d'un roulement à billes est un phénomène ancien. En 1964, Eimer [10] réalise une étude photo élastique d'un roulement à rouleaux, permettant de visualiser les déformations des bagues du roulement, mais également celle



FIGURE 1.3 – Roulement de pivotement. Aguirrebeitia, 2012, [2].



FIGURE 1.4 – Étude photo élastique d'un roulement à rouleaux. Eimer, 1964, [10].

du support.

Modèles analytiques - Les premiers modèles mis en place pour la prise en compte de ces déformations furent des modèles analytiques. Dans le but d'étudier des roulements où la bague extérieure est la roue dentée d'un système d'engrenage, Harris et Jones [25] proposent dans un premier temps d'étudier les déformations des bagues lorsqu'elles sont soumises à des chargements en divers points de sa surface. Ils utilisent pour cela la théorie des poutres courbées de Timoshenko [36] afin de développer une formulation basée sur une décomposition en série de Fourier. Cette formulation est explicitée par Harris [19].

Roark et Young [39] établissent des formules analytiques permettant de déterminer les déformations d'anneaux élastiques soumis à des chargements radiaux. Les déformations calculées restant dans le plan des anneaux, cette formulation est particulièrement adaptée pour les roulements principalement soumis à des efforts radiaux (roulements à rouleaux par exemple). Une contrainte de ce modèle est que l'anneau étudié doit posséder une géométrie axisymétrique. Cependant, comme cette formulation analytique ne dépend que des chargements et de la géométrie des bagues, son calcul est aisé et rapide. Elle est donc adaptée à l'intégration à des codes de calcul de roulements à rouleaux pour une première approche des effets des bagues déformables. Cavallaro et Nélias [6] utilisent cette formulation dans un code de dimensionnement de roulements à rouleaux. Leur études permettent de confirmer les résultats démontrés par Harris :

- l'ovalisation des bagues modifie la répartition des charges à l'intérieur du roulement. Les efforts sont mieux distribués ;
- la souplesse des bagues tend à réduire la raideur du roulement.

Le principal avantage de ces méthodes analytiques est leur simplicité de mise en œuvre et leur rapidité de calcul. Elles sont cependant limitées par :

- la nécessité d'une axisymétrie des bagues. Ce qui est problématique lorsque l'on souhaite modéliser des bagues complexes où les systèmes de fixation (vis, écrous, trous) sont usinés sur les bagues elles-mêmes ;
- leur incapacité à prendre en compte les déformations hors plan des bagues. Ce qui est problématique lorsque l'on souhaite modéliser des roulements à contact oblique où les chargements axiaux sont prédominants.

Modèles éléments finis utilisant des éléments de poutres - Récemment, Yao [38] utilise des éléments de poutres courbées de Timoshenko (FIG. 1.5) pour étudier la réponse dynamique des bagues d'un roulement à billes. Cette technique permet d'obtenir des résultats rapides en termes de calcul et possède l'avantage de pouvoir prendre en compte des géométries plus complexes que les modèles analytiques. De plus ces résultats sont obtenus sans utiliser de calcul de contact en éléments finis, ce qui est un bon point pour une application industrielle car un tel calcul est coûteux en temps. Cependant les bagues étant modélisées par des éléments de poutre, il n'est pas possible de positionner le chargement dans la piste des bagues car celle-ci n'est pas représentée par ces éléments. Il est de plus impossible d'étudier la géométrie d'une piste déformée.

Modèles éléments finis pour déterminer une matrice de raideur - La raideur du roulement devant être intégrée pour dimensionner un arbre de

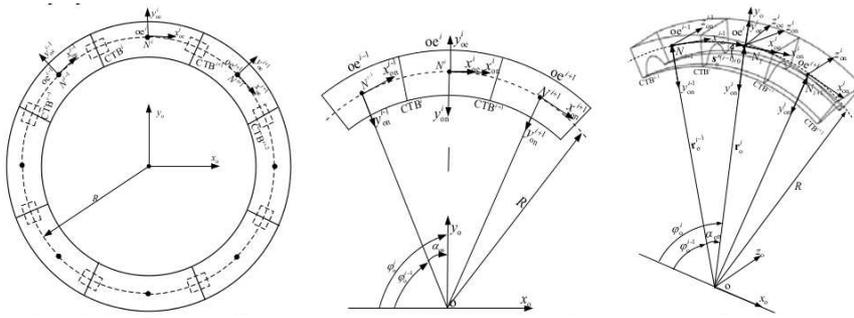


FIGURE 1.5 – Modèle éléments finis utilisé par Yao [38], 2012.

turbine, plusieurs études montre qu'il est possible de la déterminer en utilisant les éléments finis. En 2001, Zupan et Prebil [41] étudient un roulement à billes à quatre points de contact de grande dimension. La structure étudiée est complexe : plusieurs liaisons boulonnées sont présentes sur les bagues, et la bague extérieure est une roue dentée. La souplesse des bagues est prise en compte en déterminant par éléments finis la matrice de raideur des bagues du roulement. La méthode proposée ne permet cependant pas de prendre en compte un éventuel changement dans la conformité du roulement.

Wensing [37], utilise un modèle éléments finis pour déterminer les modes de vibration des bagues de roulement et de leur support. Il détermine alors les matrices de raideur et d'amortissement des bagues afin d'effectuer des études dynamiques sur toute une ligne d'arbre.

Modèles éléments finis utilisant des ressorts non linéaires - Dans le but de modéliser un roulement à billes plus fidèlement par éléments finis, tout en évitant le calcul des contacts, Filetti et Rumbarger [11] proposent en 1970 de remplacer les billes par des ressorts non linéaires reliant les bagues extérieures et les bagues intérieures. Il s'agit là d'une première forme de couplage car la raideur des ressorts est calculée analytiquement par la théorie du contact de Hertz. Plus récemment, en 2008, Daidié [8], utilise une technique similaire pour le cas particulier de grands roulements à quatre points de contact rencontrés dans les pieds de grues. Le chargement est donc principalement statique (faible vitesse de rotation). La souplesse des bagues extérieures et intérieures est prise en compte, et les ressorts non linéaires sont fixés entre les centres de courbures des pistes (FIG. 1.6).

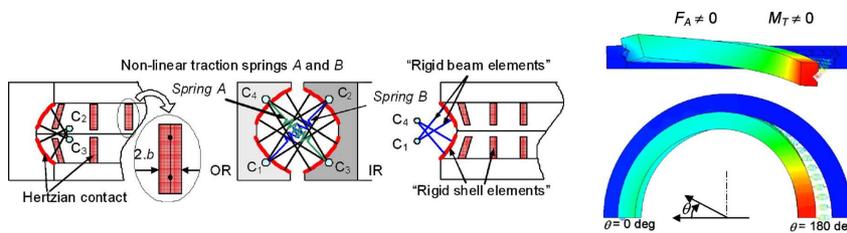


FIGURE 1.6 – Modèle éléments finis utilisé par Daidié [8], 2008.

Les résultats sont obtenus avec un temps de calcul faible ce qui présente un avantage certain. Par ailleurs le modèle utilisé montre une bonne corrélation avec des mesures expérimentales.

Plus récemment, en 2012, Aguirrebeitia *et al.* [2] utilisent également

cette méthodologie sur des roulements à quatre points de contact pour en déterminer la capacité statique de charge et ainsi valider numériquement leur modèle analytique [3].

En utilisant cette technique, Chen et Wen [7] montrent, la même année, l'influence des différents éléments du support d'un roulement de moyeu éolienne et Kania *et al.* [28] déterminent la capacité de roulement de pivotement (pied de grue par exemple).

Cependant, cette méthode ne peut être utilisée qu'en première approche dans les cas de turbines. En effet, dans les turbo machines, les effets d'inertie ne sont pas négligeables et font apparaître des configurations dans les contacts des billes qu'il n'est pas possible de modéliser avec des ressorts non linéaires (le cas de trois points de contact en particulier).

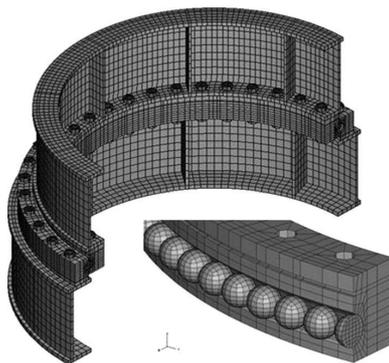


FIGURE 1.7 – Modèle éléments finis utilisé par Olave, [35], 2010.

Modèles éléments finis utilisant des simulations multicorps Avec un niveau de complexité plus élevé, la simulation multicorps permet de modéliser tous les éléments du roulement à billes. Une telle simulation nécessite la résolution de nombreux problèmes de contact simultanément ce qui demande des ressources de calcul importantes et un temps de calcul élevé. En 2006, Kania [27] étudie la loi de comportement (force/déformation) d'une piste et un rouleau de roulement, il pointe alors la difficulté de pouvoir modéliser complètement un roulement par éléments finis. En 2010, Olave [35], met en œuvre une telle simulation sur un roulement à billes à quatre points de contact possédant une géométrie non axi symétrique (FIG. 1.7). Ce modèle lui permet de visualiser les points où le système de fixation (assemblage boulonné) possède une raideur plus importante. Citons également Laniado-Jacome *et al.* [30] qui étudient le glissement dans les roulements à rouleaux avec un modèle multi corps en 2010.

Cependant, afin de modéliser les roulements à grande vitesse, il est nécessaire de pouvoir accéder à des grandeurs, comme par exemple les vitesses de glissement ou les puissances dissipées aux contacts. Ces grandeurs sont difficiles à obtenir par éléments finis.

Modèles éléments finis utilisant un couplage Afin de conserver la souplesse de la modélisation éléments finis, tout en ayant la richesse de résultats des modèles analytiques, le couplage de codes s'avère une piste judicieuse. En 2004, Cavallaro [5] propose un couplage, entre un code analytique pour roulement à deux rangées de billes et un code de calcul éléments finis. Ce couplage consiste à faire réaliser par un calcul éléments finis le calcul de la géométrie des pistes déformées par les forces exercées par les billes. Puis à utiliser cette géométrie par un modèle semi analytique traitant le cas de bagues rigides.

1.2 Approche générale et méthodologie de notre étude

Pour notre part, nous proposons un modèle permettant de dimensionner des roulements à billes à quatre points de contact, principalement dans le domaine d'application des turbines aéronautiques. Il devra rendre compte des déformations globales des bagues, de leur logement et de son environnement proche. En effet, un roulement s'intégrant dans le système d'un arbre de turbine dont le comportement dynamique nécessite d'être maîtrisé, la

raideur et la souplesse des bagues sont souvent un paramètre cible dans la phase de développement. Ces paramètres peuvent s'ajuster en faisant varier les grandeurs internes du roulement, mais également la géométrie des bagues. Le cas de bagues extérieures dites en cage d'écureuil illustrent ces possibilités 1.8.

Notre approche s'appuie sur un modèle semi analytique développé par Leblanc [31, 32]. Afin d'appréhender ce modèle, nous commencerons par décrire un roulement à quatre points de contact dans le chapitre 2. Dans un premier temps la définition des repères que nous utiliserons permettra de constater les différentes mobilités en jeu dans le roulement. Dans un deuxième temps nous présenterons les grandeurs qui permettent de caractériser un roulement à billes.

Une fois ces quantités présentées nous pourrons, dans le chapitre 3 établir le système d'équations à résoudre : un ensemble de relations géométriques et d'équations d'équilibre. Ce chapitre rend compte des liens et des interactions qu'il existe entre les différents composants d'un roulement.

Le chapitre 4 présentera la méthode retenue pour prendre en compte la souplesse des bagues. Nous serons amenés à faire des choix dans la modélisation par éléments finis du contact entre une bille et une bague ; puis nous étudierons plusieurs méthodes pour calculer la nouvelle géométrie de la bague, en observant son comportement lorsqu'elle est soumise au contact d'une bille. Enfin, nous intégrerons cette souplesse au modèle semi analytique afin de comparer le comportement d'un roulement à bagues rigides et d'un roulement à bagues souples. Cette dernière partie nous permettra de finaliser le choix de nos options de modélisation.

Le dernier chapitre traitera d'essais réalisés sur deux roulements à billes commerciaux afin de valider expérimentalement notre modèle. Les comparaisons se feront sur des mesures de déplacements axial des bagues et des ondulations en surface des bagues.

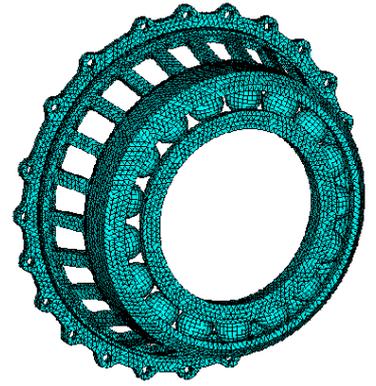


FIGURE 1.8 – Roulement avec bague extérieure en cage d'écureuil. George *et al.*, 2007, [14].

Description d'un roulement à quatre points de contact

2.1	Définition des repères	21
2.1.1	Repères liés aux bagues	21
2.1.2	Repères liés aux billes	23
2.1.3	Repères liés à la cage	25
2.2	Caractérisation du roulement	26
2.2.1	Définition des bagues	26
2.2.2	Hauteur de troncature : η_i, η_o	26
2.2.3	Angles de contact radial : α_o^0, α_i^0	27
2.2.4	Jeu diamétral, espace diamétral : J_d, P_d	27
2.2.5	Angle de contact libre : α_f	29

Le roulement représenté dans notre modèle semi-analytique comporte quatre points de contact et cinq degrés de liberté (DDL). Ces DDL correspondent aux mobilités de la bague intérieure : trois translations, et deux rotations. La bague extérieure est considérée immobile dans le repère global. Afin de pouvoir décrire le comportement du roulement à billes, et d'établir le système d'équations, nous détaillons dans un premier temps les repères qui sont utilisés pour exprimer les différentes interactions. Puis dans un second temps, nous présenterons les grandeurs caractéristiques du roulement qui sont utilisées pour décrire sa géométrie.

2.1 Définition des repères

2.1.1 Repères liés aux bagues

2.1.1.1 Repère global : \mathcal{R}_G

Le repère \mathcal{R}_G est le repère global du roulement à billes, considéré galiléen. Il permet de positionner les éléments du roulement à l'état initial du roulement :

$$\mathcal{R}_G = \{G, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G\} \tag{2.1}$$

Le centre G de ce repère est confondu avec le centre géométrique de la bague extérieure, et de la bague intérieure lorsque celle-ci est dans son état initial. L'axe \mathbf{x}_G définit la symétrie axiale de la bague extérieure. \mathbf{y}_G et \mathbf{z}_G forment le plan médian de la bague extérieure. Dans la suite, \mathbf{x}_G sera appelé l'axe du roulement, \mathbf{z}_G l'axe horizontal du roulement, et \mathbf{y}_G l'axe vertical du roulement. Notons que ce repère est orienté dans le sens indirect. Le torseur des efforts appliqués à la bague intérieure est défini dans ce repère.

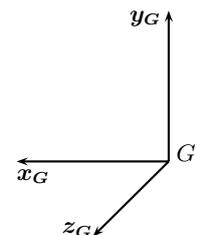


FIGURE 2.1 – Définition du repère \mathcal{R}_G .

2.1.1.2 Positionnement de la bague intérieure : \mathcal{R}_{i1}

Le chargement exercé sur la bague intérieure, associé à la présence de jeu dans le roulement et aux déformations locales des bagues, entraîne le déplacement en translation et en rotation de la bague intérieure.

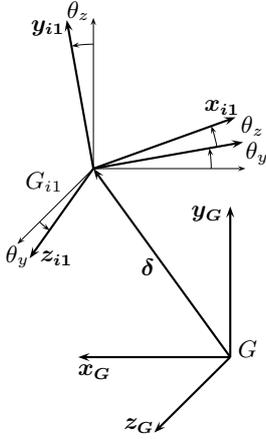


FIGURE 2.2 – Définition du repère \mathcal{R}_{i1} .

$$\mathcal{R}_{i1} = \{G_{i1}, \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{y}_{i1}, \mathbf{z}_{i1}\} \quad (2.2)$$

Le centre G_{i1} est confondu avec le centre géométrique de la bague intérieure soumise à une translation δ par rapport à sa position initiale. L'axe \mathbf{x}_{i1} est colinéaire, et de sens contraire à l'axe de symétrie de la bague intérieure. Cet axe peut subir les rotations successives θ_y autour de (G_{i1}, \mathbf{y}_G) et θ_z autour de $(G_{i1}, \mathbf{z}_{i1})$.

Il serait d'usage de définir le torseur des efforts appliqués à la bague dans ce repère. Cependant, du fait des faibles rotations θ_y et θ_z , et du faible déplacement δ , les repères \mathcal{R}_G et \mathcal{R}_{i1} sont pratiquement confondus, et finalement, nous définirons les efforts dans le repère \mathcal{R}_G .

Le déplacement δ est défini dans le repère global, il est noté :

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} \quad (2.3)$$

Les rotations successives θ_y et θ_z sont classiquement définies par des matrices de rotation. Sur la figure 2.2 les angles représentés sont positifs. On appellera par la suite, Θ la rotation de la bague intérieure, définie par le produit matriciel :

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On explicite ici les relations de changement de repère :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} + \begin{bmatrix} -\cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{i1}} \quad (2.5)$$

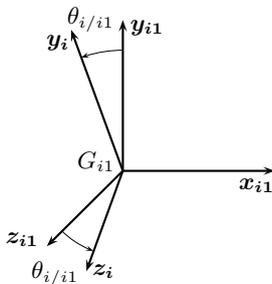


FIGURE 2.3 – Définition du repère \mathcal{R}_i .

2.1.1.3 Repère lié à la bague intérieure : \mathcal{R}_i

La bague intérieure est en rotation autour de l'axe $(G_{i1}, \mathbf{x}_{i1})$. Le repère \mathcal{R}_i permet de décrire ce mouvement de rotation, il s'agit du repère propre de la bague intérieure.

$$\mathcal{R}_i = \{G_{i1}, \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i\} \quad (2.6)$$

Ce repère est la rotation d'angle $\theta_{i/i1}$ du repère \mathcal{R}_{i1} autour de $(G_{i1}, \mathbf{x}_{i1})$. Les angles représentés sur la figure 2.3 sont positifs. On appelle ω_i la vitesse de rotation, cette quantité correspond à la dérivée temporelle de l'angle $\theta_{i/i1}$. On note le vecteur vitesse de rotation :

$$\mathbf{\Omega}_{i/i1} = \dot{\theta}_{i/i1} \cdot \mathbf{x}_{i1} = \omega_i \cdot \mathbf{x}_{i1} \quad (2.7)$$

2.1.2 Repères liés aux billes

2.1.2.1 Mouvement orbital de la bille : \mathcal{R}_{b1}^j

Une bille d'indice j décrit un mouvement de rotation autour de l'axe (G, \mathbf{x}_G) , ce mouvement est appelé mouvement de rotation orbital de la bille.

$$\mathcal{R}_{b1}^j = \{G, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j, \mathbf{z}_{b1}^j\} \quad (2.8)$$

Ce repère est la rotation d'angle ψ^j du repère \mathcal{R}_G autour de (G, \mathbf{x}_G) .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi^j & -\sin \psi^j \\ 0 & \sin \psi^j & \cos \psi^j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b1}^j} \quad (2.9)$$

La matrice de rotation définie précédemment est notée ψ^j . L'angle ψ^j est appelé l'angle de position angulaire de la bille j . Sa dérivée temporelle, noté ω_m^j , est appelée vitesse de rotation orbitale de la bille j . Et on note le vecteur rotation :

$$\mathbf{\Omega}_{b1}^j = \dot{\psi}^j \cdot \mathbf{x}_G = \omega_m^j \cdot \mathbf{x}_G \quad (2.10)$$

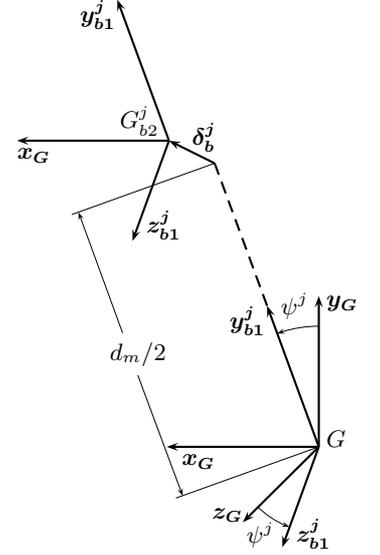


FIGURE 2.4 – Définition des repères \mathcal{R}_{b1}^j et \mathcal{R}_{b2}^j .

2.1.2.2 Position du centre de la bille : \mathcal{R}_{b2}^j

Ce repère (FIG. 2.4) rend compte de la translation de la position du centre de la bille j dans le repère \mathcal{R}_{b1}^j . Cette translation est la contribution du déplacement vers le centre de l'alvéole d'une part, $d_m/2 \cdot \mathbf{y}_{b1}^j$, et de l'écart δ_b^j du centre de la bille par rapport au centre de l'alvéole d'autre part.

Le vecteur δ_b^j n'a pas de composante selon l'axe \mathbf{z}_{b1}^j , ce choix est discuté en section 3.1.1. La quantité d_m correspond au diamètre moyen initial du roulement (EQ. 2.37).

$$\mathcal{R}_{b2}^j = \{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j, \mathbf{z}_{b1}^j\} \quad (2.11)$$

On explicite le changement de repère :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b1}^j} = \begin{bmatrix} \delta_{bx}^j \\ \delta_{by}^j + \frac{d_m}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad (2.12)$$

2.1.2.3 Rotation propre de la bille : \mathcal{R}_{b3}^j

Le repère \mathcal{R}_{b3}^j permet de décrire l'axe de rotation propre de la bille j dans le repère \mathcal{R}_{b2}^j . Pour définir ce repère, nous utilisons un repère intermédiaire, $\mathcal{R}_{b2\beta'}^j$, permettant de définir les angles de positionnement β et β' .

$$\mathcal{R}_{b3}^j = \{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{b3}^j, \mathbf{y}_{b3}^j, \mathbf{z}_{b3}^j\} \quad (2.13)$$

Ce repère est la rotation d'angle β du repère $\mathcal{R}_{b2\beta'}^j$ autour de l'axe $(G_{b2}^j, \mathbf{z}_{b2\beta'}^j)$. L'angle β est créé par les effets gyroscopiques exercés sur la bille. On explicite le changement de repère :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2\beta'}^j} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b3}^j} \quad (2.14)$$

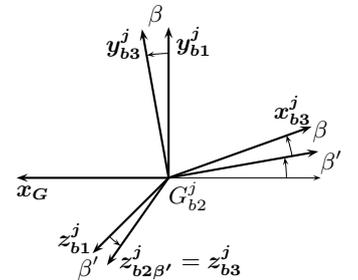


FIGURE 2.5 – Définition des repères \mathcal{R}_{b3}^j et $\mathcal{R}_{b2\beta'}^j$.

2.1.2.4 Repère intermédiaire : $\mathcal{R}_{b2\beta'}^j$

Ce repère (cf FIG. 2.5) est le repère intermédiaire permettant de positionner le repère \mathcal{R}_{b3}^j .

$$\mathcal{R}_{b2\beta'}^j = \{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{b2\beta'}^j, \mathbf{y}_{b1}^j, \mathbf{z}_{b2\beta'}^j\} \quad (2.15)$$

Il est la rotation du repère \mathcal{R}_{b2}^j d'angle β' autour de l'axe $(G_{b2}^j, \mathbf{y}_{b1}^j)$. L'angle β' est créé par les effets centrifuges exercés sur la bille. Le changement de repère est défini par :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} = \begin{bmatrix} -\cos \beta' & 0 & -\sin \beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta' & 0 & \cos \beta' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2\beta'}^j} \quad (2.16)$$

2.1.2.5 Repère point de contact : \mathcal{R}_{cxx}^j

Pour chacun des points de contact de la bille j , il faut associer un repère. La bille j est susceptible d'avoir quatre points de contact avec les bagues. Nous utilisons, ici, xx pour désigner soit la piste intérieure droite (ir), soit la piste intérieure gauche (il), soit la piste extérieure droite (or), soit encore la piste extérieure gauche (ol). Les repères en chaque point de contact sont définis comme suit :

- l'axe \mathbf{z}_{cxx}^j est la normale au point de contact dirigée de la piste xx vers le centre de la bille.
- l'axe \mathbf{y}_{cxx}^j est colinéaire et de même sens que l'axe $-\mathbf{z}_{b1}^j$.
- l'axe \mathbf{x}_{cxx}^j complète \mathbf{y}_{cxx}^j et \mathbf{z}_{cxx}^j pour former une base directe.

Le point C_{cxx}^j est le point de contact entre la bille j et la piste xx .

$$\mathcal{R}_{cxx}^j = \{C_{cxx}^j, \mathbf{x}_{cxx}^j, -\mathbf{z}_{b1}^j, \mathbf{z}_{cxx}^j\} \quad (2.17)$$

Une hypothèse est faite à cette étape : il est supposé que les points de contact restent coplanaires, dans le plan $\{G_{b1}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j\}$, cette hypothèse est discutée dans la partie 3.1.1.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} = \delta_{cxx}^j + \alpha_{cxx}^j \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{cxx}^j} \quad (2.18)$$

Les angles de contact sont définis, différemment selon que le contact est avec la bague extérieure ou avec la bague intérieure, à droite ou à gauche (cf FIG. 2.6).

$$\delta_{cil}^j = \frac{D}{2} \begin{bmatrix} \sin \alpha_{il}^j \\ -\cos \alpha_{il}^j \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad \alpha_{cil}^j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{il}^j & 0 & -\sin \alpha_{il}^j \\ -\sin \alpha_{il}^j & 0 & \cos \alpha_{il}^j \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\delta_{cir}^j = \frac{D}{2} \begin{bmatrix} -\sin \alpha_{ir}^j \\ -\cos \alpha_{ir}^j \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad \alpha_{cir}^j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{ir}^j & 0 & \sin \alpha_{ir}^j \\ \sin \alpha_{ir}^j & 0 & \cos \alpha_{ir}^j \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

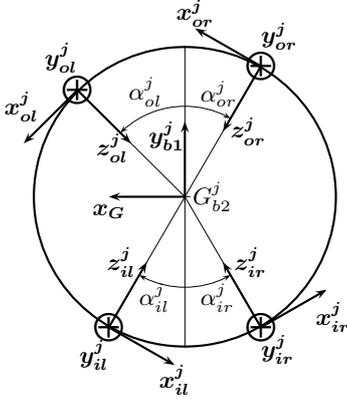


FIGURE 2.6 – Définition des repères \mathcal{R}_{cxx}^j .

$$\delta_{col}^j = \frac{D}{2} \begin{bmatrix} \sin \alpha_{ol}^j \\ \cos \alpha_{ol}^j \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad \alpha_{col}^j = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ol}^j & 0 & -\sin \alpha_{ol}^j \\ -\sin \alpha_{ol}^j & 0 & -\cos \alpha_{ol}^j \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\delta_{cor}^j = \frac{D}{2} \begin{bmatrix} -\sin \alpha_{or}^j \\ \cos \alpha_{or}^j \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad \alpha_{cor}^j = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{or}^j & 0 & \sin \alpha_{or}^j \\ \sin \alpha_{or}^j & 0 & -\cos \alpha_{or}^j \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.3 Repères liés à la cage

2.1.3.1 Repère de la cage : \mathcal{R}_{Ca}

Nous définissons le repère lié à cage dans son état le plus général (six degrés de liberté), l'ensemble des degrés de liberté définis ici ne seront pas tous utilisés par la suite. Le centre géométrique de la cage, est nommé G_{Ca} , sa position est définie dans le repère global du roulement \mathcal{R}_G . Le repère cage est noté \mathcal{R}_{Ca} (FIG. 2.7) il est défini par :

$$\mathcal{R}_{Ca} = \{G_{Ca}, \mathbf{x}_{Ca}, \mathbf{y}_{Ca}, \mathbf{z}_{Ca}\} \quad (2.23)$$

La cage est définie par une translation et trois rotations successives :

$$\Theta_{Ca} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{xCa} & -\sin \theta_{xCa} \\ 0 & \sin \theta_{xCa} & \cos \theta_{xCa} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_{yCa} & 0 & \sin \theta_{yCa} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{yCa} & 0 & \cos \theta_{yCa} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_{zCa} & -\sin \theta_{zCa} & 0 \\ \sin \theta_{zCa} & \cos \theta_{zCa} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

On explicite les équations de changement de repère :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} \delta_{xCa} \\ \delta_{yCa} \\ \delta_{zCa} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} + \Theta_{Ca} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{Ca}} \quad (2.25)$$

La bague est en rotation autour de l'axe \mathbf{x}_G à la vitesse ω_{Ca} . Et on note le vecteur rotation :

$$\Omega_{Ca} = \dot{\theta}_{xCa} \cdot \mathbf{x}_{Ca} = \omega_{Ca} \cdot \mathbf{x}_{Ca} \quad (2.26)$$

2.1.3.2 Repère alvéole : \mathcal{R}_{al}^j

La cage est constituée d'un cylindre de rayon intérieur r_{Ca} , de rayon extérieur R_{Ca} et de largeur L_{Ca} . Les alvéoles, pour permettre le positionnement des billes, sont supposées centrées sur la largeur de la cage et réparties régulièrement autour de la cage. Chaque alvéole est repérée par un indice j , et possède un diamètre D_{al} . Il est bien sûr nécessaire que le diamètre

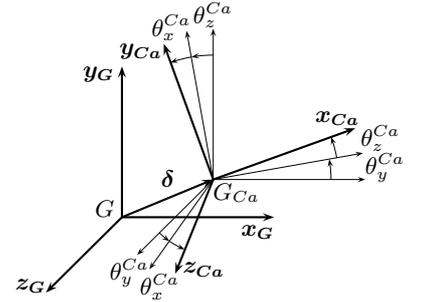


FIGURE 2.7 – Définition du repère \mathcal{R}_{Ca} .

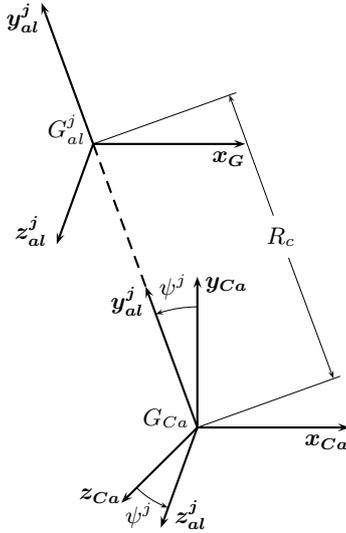


FIGURE 2.8 – Définition du repère \mathcal{R}_{al}^j .

de l'alvéole soit supérieur au diamètre des billes. L'espace maximal entre la bille et les parois de l'alvéole, $D_{al} - D$ est appelé jeu alvéolaire.

Chacune des alvéoles est repérée par son centre, et par un système d'axe issu d'une rotation et d'une translation d'une repère \mathcal{R}_{Ca} .

$$\mathcal{R}_{al}^j = \{G_{al}^j, \mathbf{x}_{Ca}, \mathbf{y}_{al}^j, \mathbf{z}_{al}^j\} \quad (2.27)$$

Le changement de repère est défini de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{Ca}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_c \cos \psi^j \\ R_c \sin \psi^j \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{Ca}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi^j & -\sin \psi^j \\ 0 & \sin \psi^j & \cos \psi^j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{al}^j} \quad (2.28)$$

où, $R_c = (r_{Ca} + R_{Ca})/2$.

2.2 Caractérisation du roulement

Nous définissons ici l'ensemble des grandeurs caractéristiques qui permettent de définir complètement le roulement.

2.2.1 Définition des bagues

Les bagues modélisées dans notre modèle semi-analytique sont constituées d'un seul bloc. Elles comportent chacune deux pistes de roulement, l'axe \mathbf{x}_G est dirigé de la droite vers la gauche. Sur chacune de ces pistes, la bille possède au plus un point de contact.

Pour une même hauteur d'épaule à droite et à gauche, les bagues modélisées sont à symétrie de révolution, et possèdent un plan de symétrie :

- $(G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G)$ est le plan de symétrie de la bague extérieure,
- $(G_{i1}, \mathbf{y}_{i1}, \mathbf{z}_{i1})$ est le plan de symétrie de la bague intérieure.

Pour définir géométriquement la bague intérieure, sept paramètres sont nécessaires :

- d_i : le diamètre intérieur de la bague intérieure,
- B_i : la largeur de la bague intérieure,
- H_{eil}, H_{eir} : les hauteurs gauche et droite de la bague intérieure,
- f_i : la conformité initiale des pistes gauche et droite,
- C_{ir}^r : le positionnement radial des centres de courbure de la piste intérieure droite,
- C_{ir}^a : le positionnement axial des centres de courbure de la piste intérieure droite,

De même, pour définir la bague extérieure, sept paramètres suffisent : $d_o, B_o, H_{eol}, H_{eor}, f_o, C_{or}^r, C_{or}^a$.

Il n'est pas nécessaire de disposer de la position des centres de courbure gauche (C_{il} et C_{ol}) puisque les pistes sont symétriques par rapport au plan $(G, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ du repère propre de chaque bague. Les paramètres décrits ci-dessus ne sont pas usuellement utilisés dans le domaine des roulements à billes. Nous détaillons dans la suite quelques grandeurs courantes des quelles peuvent se déduire les paramètres géométriques que nous venons de lister.

2.2.2 Hauteur de troncature : η_i, η_o

Les arches formant les bagues intérieures et extérieures définissent des arcs de cercles tronqués. La troncature g_o de la bague extérieure (respectivement g_i pour la bague intérieure) est l'épaisseur de la partie d'une bague

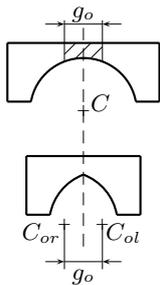


FIGURE 2.9 – Définition de la troncature g_o .

à gorge circulaire qu'il faut enlever pour obtenir la gorge archée. La troncation est réalisée de manière symétrique au plan $(G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G)$ (respectivement $(G_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ pour la bague intérieure). Cette troncation modifie le diamètre de fond de gorge. La différence entre les deux rayons de fond de gorge, avant et après troncation, est appelé hauteur de troncation, η_o (respectivement η_i pour l'intérieur).

La hauteur de troncation, grandeur positive, se calcule à partir du rayon de gorge r_o ($r_o = f_o \cdot D$) et de la troncation g_o (respectivement r_i et g_i pour l'intérieur). Pour la bague extérieure, la hauteur de troncation est :

$$\eta_o = r_o - \sqrt{r_o^2 - \left(\frac{g_o}{2}\right)^2} \quad (2.29)$$

De même, pour la bague intérieure :

$$\eta_i = r_i - \sqrt{r_i^2 - \left(\frac{g_i}{2}\right)^2} \quad (2.30)$$

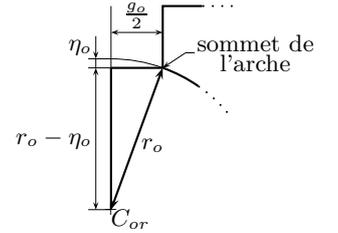


FIGURE 2.10 – Définition de la hauteur de troncation η_o .

2.2.3 Angles de contact radial : α_o^0, α_i^0

Une des positions de référence d'un roulement est le contact radial. Pour obtenir cette position, il suffit de translater, à partir de la position initiale, la bague intérieure dans le plan $(G, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G)$ en direction de l'une des billes jusqu'à ce que celle-ci soit en contact avec la bague intérieure et la bague extérieure.

Cette configuration permet de définir les angles de contact radial intérieur, α_i^0 et extérieur α_o^0 . La figure 2.11, représente le détail du contact radial entre la bille et la bague extérieure. La distance $G_{b2}^j C_{or}$ est égale à $r_o - D/2$, il est donc possible d'exprimer l'angle α_o^0 en fonction de la troncation g_o du rayon de la piste extérieure r_o et du diamètre des billes D :

$$\alpha_o^0 = \arcsin\left(\frac{g_o}{2r_o - D}\right) \quad (2.31)$$

De même, pour l'angle de contact radial intérieur :

$$\alpha_i^0 = \arcsin\left(\frac{g_i}{2r_i - D}\right) \quad (2.32)$$

2.2.4 Jeu diamétral, espace diamétral : J_d, P_d

Lorsqu'une bille est en contact radial pur avec la bague extérieure (respectivement intérieure), la distance qui sépare le sommet de l'arche du sommet de la bille est noté h_o (respectivement h_i). Cette distance peut être calculée en fonction de l'angle de contact radial, du diamètre des billes et du rayon des pistes du roulement.

D'une manière similaire au calcul de l'angle de contact radial, il est possible de calculer la distance d_x (FIG. 2.11).

$$d_x = \left(r_o - \frac{D}{2}\right) \cos \alpha_o^0 \quad (2.33)$$

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\left(\frac{g_o}{2}\right)^2 + \left(d_x + \frac{D}{2} + h_o\right)^2 = r_o^2 \quad (2.34)$$

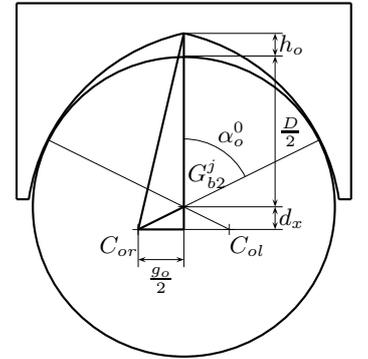


FIGURE 2.11 – Contact radial avec la piste extérieure.

Et donc, en substituant la valeur de g_o et d_x :

$$h_o = \sqrt{r_o^2 - \left(r_o - \frac{D}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha_o^0} - \left(r_o - \frac{D}{2}\right) \cos \alpha_o^0 - \frac{D}{2} \quad (2.35)$$

Pour retrouver, la formulation utilisée par Hamrock [18], il suffit de remplacer $\sin^2 \alpha_o^0$ par $1 - \cos^2 \alpha_o^0$ et de factoriser par $1/4$ sous la racine carrée :

$$h_o = \frac{1}{2} \sqrt{D(4r_o - D) + (2r_o - D)^2 \cos^2 \alpha_o^0} - \left(r_o - \frac{D}{2}\right) \cos \alpha_o - \frac{D}{2} \quad (2.36)$$

Hamrock [18] définit le jeu diamétral J_d comme l'amplitude totale du déplacement radial autorisé par la bague intérieure selon l'axe (G, \mathbf{y}_G) . Il faut alors distinguer deux cas¹ : le cas où le nombre de billes est pair, du cas où le nombre de billes est impair.

Sans jeu, les billes seraient initialement toutes en configuration de contact radial (avec les deux bagues). En ajoutant du jeu, ce n'est plus le cas, il faut alors définir une position initiale du roulement. Cette position est fictive, aucune des billes n'étant en contact avec les bagues. Dans cette position, les repères propres des bagues sont coïncidant, et l'espace supplémentaire créé par le jeu est réparti équitablement entre le sommet de la bille et les sommets de l'arche des bagues intérieure et extérieure. Appelons d_i^a le diamètre de la bague intérieure (respectivement d_o^a pour l'extérieur) pris au niveau du sommet de l'arche, et d_m le diamètre du cercle créé par la position initiale du centre des billes. Par définition, d_m est défini par la relation :

$$\left(\frac{d_m}{2} - \frac{D}{2} - h_i\right) - \frac{d_i^a}{2} = \frac{d_o^a}{2} - \left(\frac{d_m}{2} + \frac{D}{2} + h_o\right) \quad (2.37)$$

Cette relation traduit le fait que l'espace supplémentaire créé par le jeu est réparti équitablement de chaque côté de la bille. Nous appellerons dans la suite Q_r l'espace créé par le jeu selon un rayon :

$$\begin{aligned} \frac{Q_r}{2} &= \left(\frac{d_m}{2} - \frac{D}{2} - h_i\right) - \frac{d_i^a}{2} \\ &= \frac{d_o^a}{2} - \left(\frac{d_m}{2} + \frac{D}{2} + h_o\right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'objectif ici est d'obtenir des relations permettant de calculer P_d , l'espace vide diamétral, et d_m , le diamètre moyen, grâce aux paramètres géométriques du roulement.

2.2.4.1 Nombre de billes pair

Ce cas est le plus simple, il suffit de représenter le roulement dans sa position initiale dans le plan de coupe $(G, \mathbf{x}_G, \mathbf{z}_G)$. Dans ce cas particulier, le jeu diamétral total est donc simplement : $J_d = 2Q_r$. Ainsi, l'espace vide diamétral total $P_d = d_o^a - 2D - d_i^a$ est relié avec J_d par la relation :

$$P_d = J_d + 2(h_i + h_o) \quad (2.39)$$

Donc finalement,

$$J_d = d_o^a - 2D - d_i^a - 2(h_i + h_o) \quad (2.40)$$

1. Hamrock [18] ne fait pas cette distinction, et considère implicitement que le nombre de billes est pair.

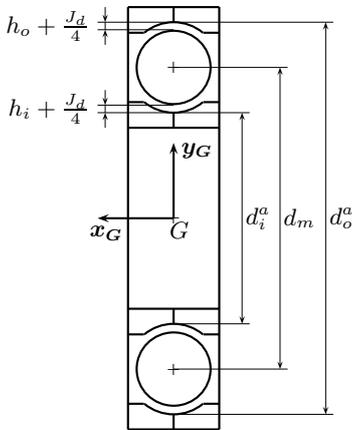


FIGURE 2.12 – Définition de P_d avec un nombre de billes pair.

Et le diamètre d_m se détermine par la relation :

$$\begin{aligned} d_m &= d_i^a + \frac{J_d}{2} + D + 2h_i \\ &= d_o^a - \frac{J_d}{2} - D - 2h_o \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2.4.2 Nombre de billes impair

Dans ce cas il n'est plus possible d'utiliser les notations de Hamrock [18] et Leblanc [31]. Il suffit d'utiliser le Q_r défini précédemment.

Pour déterminer le jeu diamétral total, on représente le roulement en position initial dans le plan $(G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G)$. Sur la figure 2.13 est représenté la position de deux billes, une selon l'axe vertical, et l'autre, la plus proche de l'axe vertical du roulement, l'angle ψ^0 représentant l'écart angulaire entre deux billes $\psi^0 = 2\pi/N$. Le jeu diamétral apparaît clairement :

$$J_d = Q_r \left(1 + \cos \frac{\psi^0}{2} \right) \quad (2.42)$$

L'espace vide diamétral n'a dans ce cas plus de sens, il est inutile de chercher à le calculer. Il vaut mieux utiliser la notation Q_r qui ne dépend pas de la parité du nombre de billes.

2.2.5 Angle de contact libre : α_f

À partir de la position initiale du roulement, la translation de la bague intérieure le long de l'axe \mathbf{x}_G mène à la position de contact axial. Cette position permet de définir l'angle de contact libre α_f . L'angle de contact est l'angle formé par l'axe \mathbf{y}_{b1}^j et l'axe $\mathbf{G}_{b2}^j \mathbf{C}_c^j$. Où \mathbf{C}_c^j est le point de contact étudié de la bille j .

Dans cette configuration de contact, chaque bille ne possède que deux points de contact. L'équilibre des forces sur la bille impose que les angles de contact intérieur et extérieur soient égaux, de plus, les points \mathbf{C}_{or} , \mathbf{C}_{il} et \mathbf{G}_{b2}^j sont alignés. La distance $\mathbf{C}_{or} \mathbf{C}_{il}$ est donc égale à $r_o + r_i - D$:

$$\mathbf{C}_{or} \mathbf{C}_{il} = (f_o + f_i - 1) D = A \quad (2.43)$$

Pour atteindre la position de contact axial, il suffit de translater la bague intérieure, ainsi la projection du vecteur $\mathbf{C}_{or} \mathbf{C}_{il}$ sur l'axe \mathbf{y}_{b1} n'est pas modifiée :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{or} \mathbf{C}_{il} \cdot \mathbf{y}_{b1}^j &= r_o - \eta_o - h_o - \frac{Q_r}{2} - D - \frac{Q_r}{2} - h_i - \eta_i + r_i \\ &= A - (Q_r + h_o + h_i) - \eta_o - \eta_i \end{aligned} \quad (2.44)$$

Et finalement, le calcul de l'angle α_f est possible :

$$\alpha_f = \arccos \frac{A - (Q_r + h_o + h_i) - \eta_o - \eta_i}{A} \quad (2.45)$$

Dans le cas d'un nombre de billes pair, il est possible d'utiliser la notation P_d , pour retrouver la formulation de Leblanc [31] :

$$\alpha_f = \arccos \frac{A - \frac{P_d}{2} - \eta_o - \eta_i}{A} \quad (2.46)$$

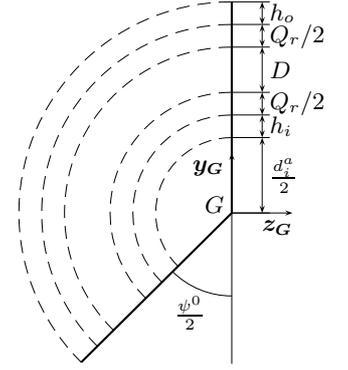


FIGURE 2.13 – Définition de P_d avec un nombre de billes impair.

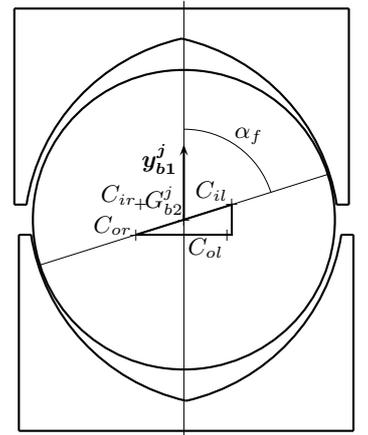


FIGURE 2.14 – Définition de α_f bille en contact radial.

La configuration de contact axial permet de définir le jeu axial E_p . Il s'agit de l'amplitude totale du déplacement axial possible par la bague intérieure. Donc, lorsque la bague intérieure est en contact axial (FIG. 2.14) son déplacement par rapport à la position initiale correspond au demi jeu axial :

$$\frac{1}{2}E_p = C_{or}C_{il} \sin \alpha_f - \left(\frac{g_i}{2} + \frac{g_o}{2} \right) \quad (2.47)$$

Donc, le jeu axial est défini par :

$$E_p = 2A \sin \alpha_f - g_i - g_o \quad (2.48)$$

Enfin, l'angle de contact radial permet de définir la position des centres de courbure :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{i1} \mathbf{C}_{ir}^j &= \begin{bmatrix} - \left(f_i - \frac{1}{2} \right) D \sin \alpha_i^0 \\ \left(\frac{d_m}{2} + \left(f_i - \frac{1}{2} \right) D \cos \alpha_f \right) \cos \psi^j \\ \left(\frac{d_m}{2} + \left(f_i - \frac{1}{2} \right) D \cos \alpha_f \right) \sin \psi^j \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{i1}} \\ &= \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \cos \psi^j \\ R_2 \sin \psi^j \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{i1}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{G}_{i1} \mathbf{C}_{il}^j = \begin{bmatrix} R_1 + g_i \\ R_2 \cos \psi^j \\ R_2 \sin \psi^j \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{i1}} \quad (2.50)$$

Équations d'équilibre du roulement

3.1	Relations géométriques	31
3.1.1	Cas des bagues rigides	31
3.1.2	Cas des bagues déformables	36
3.2	Équilibre quasi statique	39
3.2.1	Équilibre des billes	39
3.2.2	Équilibre de la cage	42
3.2.3	Équilibre de la bague intérieure	43

La détermination de l'état d'équilibre quasi statique du roulement à billes est réalisé en résolvant un système d'équations analytiques caractérisant son équilibre. Le système se compose de deux types d'équations :

- des relations géométriques qui traduisent les liens qu'il existe entre la position des billes et la position des bagues,
- des équations d'équilibre qui traduisent l'équilibre des forces et des moments qui s'exercent sur les billes, sur les bagues et sur la cage.

3.1 Relations géométriques

Lors de l'application du chargement sur la bague intérieure et de sa mise en rotation, chacun des éléments du roulement se déplace. La bague intérieure peut translater ou tourner, la cage peut se déplacer entre les deux bagues, les billes bougent dans l'alvéole de la cage et entre les bagues. Ces mouvements ont lieu sous contraintes. Par exemple, la cage est confinée entre les deux bagues, les billes ne peuvent sortir de leurs alvéoles et restent entre les bagues intérieure et extérieure. Pour introduire ces contraintes dans le système d'équations, nous les traduisons en équations de fermetures géométriques. Dans ces équations, l'hypothèse est faite que la bague extérieure est immobile, il s'agit de notre référentiel.

3.1.1 Cas des bagues rigides

Dans un premier temps, les bagues sont considérées rigides, seule la déformation locale due à la présence du contact est prise en compte.

Pour chaque bille, nous pouvons représenter un diagramme traduisant la position des centres de courbure des pistes et du centre de la bille. Pour une bille j , ce diagramme est représenté dans le plan $(G_{b1}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j)$.

La figure 3.1 est souvent représentée dans le cas du contact axial. Ici, le contact est envisagé dans sa configuration la plus générale. Cependant, deux hypothèses supplémentaires sont faites :

- les centres de courbures sont fixes dans le repère \mathcal{R}_{i1} ;

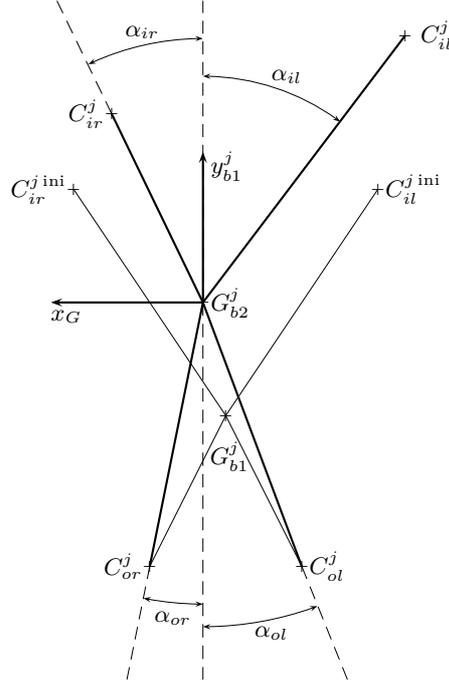


FIGURE 3.1 – Déplacements des centres de courbures

- l'ensemble des centres de courbure correspondant à la bille j restent dans le plan $(G_{b1}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j)$, c'est à dire que nous négligeons le déplacement des centres de courbures selon l'axe \mathbf{z}_{b1}^j . Le fait que la bague intérieure tourne selon les axes (G_{i1}, \mathbf{y}_G) et $(G_{i1}, \mathbf{z}_{i1})$ crée un déplacement selon \mathbf{z}_{b1}^j des centres C_{ir}^j et C_{il}^j qui, compte tenu des faibles angles de rotation, restent négligeables (SECT. 3.1.1).

Les équations géométriques utilisent des fermetures géométriques sur les vecteurs $G_{b2}^j C_{xx}^j$, ainsi, les distances entre les centres de courbure et le centre de la bille sont très souvent sollicitées. Cette distance est simple à calculer, nous détaillons ici le calcul pour la distance $G_{b2}^j C_{ir}^j$. Le point de contact intérieur droit est sur la droite $(G_{b2}^j C_{ir}^j)$, donc :

$$G_{b2}^j C_{ir}^j = f_i D + \delta_{ir}^j - \frac{D}{2} - h_{ir}^j \quad (3.1)$$

Où δ_{ir}^j correspond au déplacement de la bille dû aux déformations au niveau du point de contact, et h_{ir}^j correspond à l'épaisseur du film de lubrifiant. Ces deux grandeurs sont calculées analytiquement à l'aide de la théorie du contact élastohydrodynamique ().

Nous rappelons que les bagues sont considérées indéformables, la prise en compte des déformations interviendra ultérieurement (SECT. 3.1.2). La première fermeture permet de traduire le fait que la bague extérieure ne s'est pas déplacée :

$$C_{or}^j C_{ol}^j = -g_o \mathbf{x}_G \quad (3.2)$$

En décomposant cette équation en utilisant le point G_{b2}^j et en la projetant

sur les axes \mathbf{x}_G et \mathbf{y}_{b1}^j , nous obtenons les premières équations géométriques :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{or}^j - h_{or}^j \right] \sin \alpha_{or}^j \\ & - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \sin \alpha_{ol}^j + g_o = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{or}^j - h_{or}^j \right] \cos \alpha_{or}^j \\ & - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \cos \alpha_{ol}^j = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous effectuons maintenant une fermeture géométrique sur les centres de courbure intérieurs, pour traduire cette fois-ci la rotation de la bague intérieure :

$$\mathbf{C}_{ir}^j \mathbf{C}_{il}^j = g_i \mathbf{x}_{i1} \quad (3.5)$$

Nous allons décomposer l'équation de la même façon que précédemment. Cependant, il faut exprimer le vecteur \mathbf{x}_{i1} dans le repère \mathcal{R}_{b2}^j :

$$\mathbf{x}_{i1} = \psi^j \cdot \Theta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

C'est à dire :

$$\mathbf{x}_{i1} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z \\ -\sin \psi^j \sin \theta_z - \cos \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad (3.7)$$

Ainsi, les deux équations géométriques résultant de la relation 3.5 sont :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \sin \alpha_{ir}^j \\ & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{il}^j - h_{il}^j \right] \sin \alpha_{il}^j \\ & + g_i (\cos \theta_y \cos \theta_z) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \cos \alpha_{ir}^j \\ & + \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{il}^j - h_{il}^j \right] \cos \alpha_{il}^j \\ & - g_i (\cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'expression de \mathbf{x}_{i1} (EQ. 3.7) amène à éclaircir plusieurs points. Dans un premier temps, nous constatons que la rotation de la bague intérieure induit le déplacement des centres de courbure hors du plan $(G_{b1}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j)$, cela est déduit de la projection non nulle du vecteur \mathbf{x}_{i1} sur \mathbf{z}_{b1}^j . Il est alors possible de projeter la relation 3.5 sur ce vecteur. Mais, nous rappelons que nous faisons l'hypothèse de négliger les déplacements hors plan du centre de courbure, c'est pourquoi, les angles de contact sont définis tels que sur la figure 3.1.

L'incohérence apparaît :

- S'il est choisit de négliger les déplacements hors plan de C_{ir}^j et C_{il}^j , alors cela équivaut à négliger la quantité $-\sin \psi^j \sin \theta_z - \cos \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z$ (EQ. 3.7) devant $\cos \theta_y \cos \theta_z$ pour les petits angles θ_y et θ_z , ce qui est alors tout à fait légitime. Mais, dans ce cas, pourquoi prendre en compte le terme $\cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z$, dans l'écriture de \mathbf{x}_{i1} alors qu'ils sont tous deux du même ordre de grandeur? Cela reviendrait à négliger les termes en $\sin \theta$ devant les termes en $\cos \theta$ (ou effectuer des développements limités d'ordre 1 en θ_y et θ_z). Si nous effectuons cette opération pour ces équations géométriques, il faut donc le faire pour toutes les autres équations.
- S'il est choisit de ne pas négliger les déplacements hors plan, alors il faut définir autrement les angles de contact intérieurs et ajouter une mobilité supplémentaire à la bille (déplacement hors plan). Le vecteur δ_b^j possède alors une composante non nulle selon \mathbf{z}_{b1}^j (cf FIG. 2.4 et EQ. 2.12). Procéder ainsi a un impact important car il faut ajouter des équations au système. Ces équations vont naturellement découler des projections des équations géométriques sur l'axe \mathbf{z}_{b1}^j

Il faut, bien sûr, être conscient que nous manipulons ici de faibles nuances, cependant le fait est qu'il y a une incohérence dans les simplifications effectuées dans la prise en compte ou non des angles θ_y et θ_z . Nous conservons cependant les hypothèses faites initialement. Il s'agissait juste ici de souligner ce point pour le prendre en compte lors de l'interprétation des résultats.

Revenons aux équations géométriques. Jusqu'à présent, les équations ne permettent pas de prendre en compte le déplacement relatif des bagues. Pour cela, il suffit d'utiliser une fermeture géométrique utilisant au moins un centre de courbure intérieur et un extérieur. Par exemple :

$$C_{ir}^j G_{b2}^j + G_{b2}^j C_{ol}^j + C_{ol}^j C_{ir}^{j \text{ ini}} = C_{ir}^j G_{i1} + G_{i1} G + G C_{ir}^{j \text{ ini}} \quad (3.10)$$

Nous détaillons le calcul des vecteurs au second membre dans l'équation précédente, dans le repère \mathcal{R}_{b1}^j :

$$C_{ir}^j G_{i1} = \psi^{j-1} \cdot \Theta \cdot \begin{bmatrix} -R_1 \\ -R_2 \cos \psi^j \\ -R_2 \sin \psi^j \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$G_{i1} G = \psi^{j-1} \cdot \begin{bmatrix} -\delta_x \\ -\delta_y \\ -\delta_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$G C_{ir}^{j \text{ ini}} = \psi^{j-1} \cdot \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \cos \psi^j \\ R_2 \sin \psi^j \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Comme pour les autres équations, nous projetons cette relation sur les axes \mathbf{x}_G et \mathbf{y}_{b1}^j :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1; N|], \quad & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \sin \alpha_{ir}^j \\
& - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \sin \alpha_{ol}^j \\
& + \left(\frac{g_o}{2} + \frac{g_i}{2} \right) \\
= & \\
& - \delta_x + R_1 (\cos \theta_y \cos \theta_z - 1) \\
& - R_2 \cos \psi^j \cos \theta_y \sin \theta_z + R_2 \sin \psi^j \sin \theta_y
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1; N|], \quad & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \cos \alpha_{ir}^j \\
& - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \cos \alpha_{ol}^j \\
& + A \cos \alpha_f \\
= & \\
& \left[-\delta_y - R_1 \sin \theta_z + R_2 \cos \psi^j (-\cos \theta_z + 1) \right] \cos \psi^j \\
& + \left[-\delta_z + R_1 \sin \theta_y \cos \theta_z - R_2 \cos \psi^j \sin \theta_y \sin \theta_z + \right. \\
& \quad \left. R_2 \sin \psi^j (-\cos \theta_y + 1) \right] \sin \psi^j
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Une rapide analyse des relations 3.14 et 3.15 permet de mieux comprendre leur utilité. Comme il a déjà été dit, elles permettent de prendre en compte le déplacement de la bague intérieure. En effet, dans le cas du contact axial pur, comme sur la figure 2.14 mais avec contact sur les pistes intérieure droite et extérieure gauche et en l'absence de lubrifiant, nous avons :

- $\delta_{ir}^j = \delta_{ol}^j = 0$, car contact ponctuel ;
- $h_{ir}^j = h_{ol}^j = 0$, car absence de lubrifiant ;
- $\alpha_{ir}^j = \alpha_{ol}^j = \alpha_f$, car contact axial pur ;
- $\theta_y = \theta_y = 0$ car contact axial pur ;
- $(g_i + g_o) / 2 = A \sin \alpha_f - E_p / 2$, d'après la définition du jeu axial (EQ. 2.48).

Dans ce cas l'équation géométrique 3.14 devient :

$$\begin{aligned}
& - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D \right] \sin \alpha_f - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D \right] \sin \alpha_f \\
& + (f_o + f_i - 1) D \sin \alpha_f - \frac{1}{2} E_p \\
= & - \delta_x
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Une fois simplifiée, cette relation traduit le fait que le déplacement de la bague correspond au demi jeu axial $\delta_x = E_p / 2$

L'équation 3.15 devient :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1; N|], \quad & - \left[\left(f_i - \frac{1}{2} \right) D \right] \cos \alpha_f - \left[\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D \right] \cos \alpha_f \\
& + (f_i + f_o - 1) D \cos \alpha_f \\
= & - \delta_y \cos \psi^j - \delta_z \sin \psi^j
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Les N équations donnent alors $\delta_y = \delta_z = 0$ ce qui est conforme au contact axial pur. Pour retrouver le fait que les rotations θ_y et θ_z de la bague intérieure sont effectivement nulles, il suffit d'utiliser les relations géométriques 3.9 et 3.8 qui mènent au système à $N + 1$ équations :

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket, & \cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z = 0 \\ & \cos \theta_y \cos \theta_z = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Et donc, nous obtenons finalement $\theta_y = \theta_z = 0$.

Cependant les équations géométriques 3.14 et 3.15 engendrent un sens préférentiel pour le roulement. En effet, la fermeture géométrique 3.10 n'est pas symétrique, le contact axial intérieur droit / extérieur gauche est privilégié. Lorsque le contact est dans l'autre sens, il est impossible d'évaluer cette équation.

3.1.2 Cas des bagues déformables

Dans le cas des bagues déformables, la figure 3.1 doit être modifiée. En effet, la déformation des bagues se traduit d'une part par la modification de la conformité, et d'autre part par un déplacement des centres de courbures des pistes. Les déplacements des centres de courbures des pistes sont exprimés dans les repères propres au bagues.

Ainsi, en ajoutant ces déplacements supplémentaires sur la figures 3.1, on obtient :

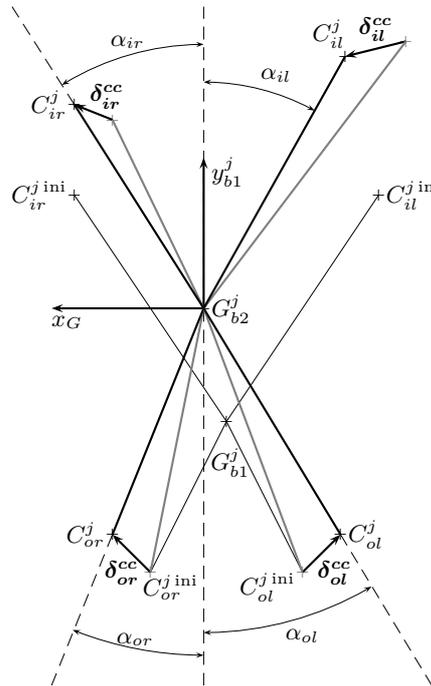


FIGURE 3.2 – Déplacements des centres de courbures, dans le cas de bagues déformables

Les déplacements des centres de courbures sont définis dans le repère local de chaque bague. Ainsi, pour chaque point de contact, nous introduisons de nouveaux paramètres :

- f_{ir}^j, f_{il}^j , la nouvelle conformité des pistes intérieures droites et gauches ;
- f_{or}^j, f_{ol}^j , la nouvelle conformité des pistes extérieures droites et gauches ;

- $\delta_{ir}^{aj}, \delta_{il}^{aj}$, les déplacements axiaux (selon $-\mathbf{x}_{i1}$) des centres de courbure de la piste intérieure ;
- $\delta_{or}^{aj}, \delta_{ol}^{aj}$, les déplacements axiaux (selon \mathbf{x}_G) des centres de courbure de la piste extérieure ;
- $\delta_{ir}^{rj}, \delta_{il}^{rj}$, les déplacements radiaux (selon $\cos \psi^j \mathbf{y}_{i1} + \sin \psi^j \mathbf{z}_{i1}$) des centres de courbure de la piste intérieure ;
- $\delta_{or}^{rj}, \delta_{ol}^{rj}$, les déplacements radiaux (selon \mathbf{y}_{b1}^j) des centres de courbure de la piste extérieure.

Ainsi, par exemple, le vecteur $\mathbf{G}_{b2}^j \mathbf{C}_{ol}^j$ s'écrit dorénavant :

$$\mathbf{G}_{b2}^j \mathbf{C}_{ol}^j = \begin{bmatrix} - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \sin \alpha_{ol}^j \\ - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \cos \alpha_{ol}^j \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{R}_{b2}^j \quad (3.19)$$

La présence de ces paramètres n'introduit pas de nouvelles inconnues à trouver. En effet, tous ces paramètres seront calculés de manière indépendante à partir des résultats de calculs éléments finis (voir chapitre 4). Cependant, il faut modifier certaines équations pour prendre en compte ces changements.

Les deux premières équations (EQ. 3.3 et 3.4) sont issues de la projection sur les axes \mathbf{x}_G et \mathbf{y}_{b1}^j de l'équation 3.2 :

$$\mathbf{C}_{or}^j \mathbf{C}_{ol}^j = -g_o \mathbf{x}_G \quad (3.2)$$

Le fait que la bague extérieure se déforme entraîne une modification dans le second membre de l'équation :

$$\mathbf{C}_{or}^j \mathbf{C}_{ol}^j = \left(-g_o - \delta_{or}^{aj} + \delta_{ol}^{aj} \right) \mathbf{x}_G + \left(-\delta_{or}^{rj} + \delta_{ol}^{rj} \right) \mathbf{y}_{b1}^j \quad (3.20)$$

Les équations géométriques 3.3 et 3.4 sont donc remplacées par :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_{or}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{or}^j - h_{or}^j \right] \sin \alpha_{or}^j \\ & - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \sin \alpha_{ol}^j \\ & + g_o + \delta_{or}^{aj} - \delta_{ol}^{aj} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \forall j \in [1; N], \quad & \left[\left(f_{or}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{or}^j - h_{or}^j \right] \cos \alpha_{or}^j \\ & - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \cos \alpha_{ol}^j \\ & + \delta_{or}^{rj} - \delta_{ol}^{rj} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

De la même manière, l'équation 3.5 devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ir}^j \mathbf{C}_{il}^j = & \left(g_i + \delta_{ir}^{aj} - \delta_{il}^{aj} \right) \mathbf{x}_{i1} \\ & + \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \cos \psi^j \mathbf{y}_{i1} \\ & + \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \sin \psi^j \mathbf{z}_{i1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Et donc, les équations 3.8 et 3.9 sont remplacées par :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_{ir}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \sin \alpha_{ir}^j \\
& - \left[\left(f_{il}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{il}^j - h_{il}^j \right] \sin \alpha_{il}^j \\
& + \left(g_i + \delta_{ir}^{aj} - \delta_{il}^{aj} \right) \cos \theta_y \cos \theta_z \\
& - \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \cos \psi^j \cos \theta_y \sin \theta_z \\
& + \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \sin \psi^j \sin \theta_y \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_{ir}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \cos \alpha_{ir}^j \\
& + \left[\left(f_{il}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{il}^j - h_{il}^j \right] \cos \alpha_{il}^j \\
& - \left(g_i + \delta_{ir}^{aj} - \delta_{il}^{aj} \right) \left(\cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z \right) \\
& - \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \cos \psi^j \left(\cos \psi^j \cos \theta_z + \sin \psi^j \sin \theta_y \sin \theta_z \right) \\
& - \left(-\delta_{ir}^{rj} + \delta_{il}^{rj} \right) \sin \psi^j \sin \psi^j \cos \theta_y \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Il ne reste plus qu'à modifier l'équation 3.10, car maintenant $C_{or}^j \neq C_{or}^{j \text{ ini}}$:

$$\begin{aligned}
C_{ir}^j G_{b2}^j + G_{b2}^j C_{ol}^j - \delta_{ol}^{aj} \mathbf{x}_G - \delta_{ol}^{rj} \mathbf{y}_{b1}^j + C_{ol}^{j \text{ ini}} C_{ir}^{j \text{ ini}} \\
= C_{ir}^j G_{i1}^j + G_{i1}^j \mathbf{G} + G C_{ir}^{j \text{ ini}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

L'expression de l'ensemble des vecteurs au premier membre ayant déjà été étudiée (EQ. 3.11 3.12, 3.13), nous ne les détaillerons pas ici. Nous rappelons simplement l'expression du vecteur :

$$C_{ir}^j G_{i1}^j = \psi^{j-1} \cdot \Theta \cdot \begin{bmatrix} -(R_1 - \delta_{ir}^{aj}) \\ -(R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \cos \psi^j \\ -(R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \sin \psi^j \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

La projection de l'équation 3.26 sur les axes \mathbf{x}_G et \mathbf{y}_{b1}^j donne :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [1; N], \quad & - \left[\left(f_{ir}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \sin \alpha_{ir}^j \\
& - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \sin \alpha_{ol}^j \\
& - \delta_{ol}^{aj} + \left(\frac{g_o}{2} + \frac{g_i}{2} \right) \\
& = \\
& + (R_1 - \delta_{ir}^{aj}) \cos \theta_y \cos \theta_z \\
& - (R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \cos \psi^j \cos \theta_y \sin \theta_z \\
& + (R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \sin \psi^j \sin \theta_y - \delta_x - R_1
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\forall j \in [|1; N|], \quad & - \left[\left(f_{ir}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ir}^j - h_{ir}^j \right] \cos \alpha_{ir}^j \\
& - \left[\left(f_{ol}^j - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right] \cos \alpha_{ol}^j \\
& - \delta_{ol}^{rj} + A \cos \alpha_f \\
= & \\
& - (R_1 - \delta_{ir}^{aj}) (\cos \psi^j \sin \theta_z - \sin \psi^j \sin \theta_y \cos \theta_z) \\
& - (R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \cos \psi^j (\cos \psi^j \cos \theta_z + \sin \psi^j \sin \theta_y \sin \theta_z) \\
& - (R_2 + \delta_{ir}^{rj}) \sin \psi^j \sin \psi^j \cos \theta_y \\
& - \delta_y \cos \psi^j - \delta_z \sin \psi^j + R_2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2 Équilibre quasi statique

Les équations suivantes traduisent l'équilibre des forces et des moments sur les différents éléments composant le roulement. Nous étudions le roulement en régime permanent. L'équilibre que nous allons décrire est donc un équilibre quasi statique :

- Pour chaque bille :
 - équilibre des forces ;
 - équilibre des moments au centre de la bille G_{b2}^j .
- Pour la bague intérieure :
 - équilibre des forces ;
 - équilibre des moments au centre du roulement G .

3.2.1 Équilibre des billes

Nous étudions dans cette partie l'équilibre quasi statique de la bille j . Elle est soumise à plusieurs forces et moments :

- en chacun des points de contact, efforts de contact créés par la bague sur la bille : torseurs \mathcal{T}_{cxx}^j ;
- efforts d'inertie : torseur \mathcal{T}_G^j ;
- efforts de traînée créés par le déplacement de la bille dans un mélange d'air et de lubrifiant : torseur \mathcal{T}_{tr}^j ;
- efforts créés par l'interaction avec la cage au niveau des alvéoles : torseur \mathcal{T}_{al}^j .

Le torseur des efforts de contact créés par la bague sur la bille s'écrit dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{cxx}^j, \mathbf{y}_{cxx}^j, \mathbf{z}_{cxx}^j\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{cxx}^j &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{cxx}^j \\ \mathbf{M}_{cxx}^j \end{array} \right\} \{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{cxx}^j, \mathbf{y}_{cxx}^j, \mathbf{z}_{cxx}^j\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} F_{Xxx}^j & F_{Yxx}^j & Q_{xx}^j \\ M_{Rxx}^j & -M_{Yxx}^j & -M_{Sxx}^j \end{array} \right\} \{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{cxx}^j, \mathbf{y}_{cxx}^j, \mathbf{z}_{cxx}^j\}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Il est important de remarquer que le torseur des efforts de contact n'est pas défini aux points de contact mais au centre de la bille. La définition des

moments $M_{Y_{xx}}^j$ et $M_{S_{xx}}^j$ est faite pour coïncider avec les notations introduites par Jones [26], ce qui explique la présence des signes négatifs dans l'expression du torseur \mathcal{T}_{cx}^j .

Le torseur des efforts inertiels exercés sur la bille par la bague s'écrit dans le repère \mathcal{R}_{b2}^j :

$$\mathcal{T}_G^j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_G^j \\ \mathbf{M}_G^j \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & F_c^j & 0 \\ 0 & M_Z^j & M_Y^j \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad (3.31)$$

La force centrifuge est donnée par l'expression :

$$F_c^j = \frac{m}{2} d_m \omega_m^j{}^2 \quad (3.32)$$

où ω_m^j est la vitesse de rotation orbitale de la bille et m la masse d'une bille.

Les moments d'inertie sont donnés par les relations :

$$M_Y^j = J \omega_r^j \omega_m^j \sin \beta^j \quad (3.33)$$

$$M_Z^j = J \omega_r^j \omega_m^j \cos \beta^j \sin \beta'^j \quad (3.34)$$

où J est le moment d'inertie de la bille, ω_r^j la vitesse de rotation propre de la bille, β^j et β'^j les angles de positionnement du vecteur rotation de la bille (SECT. 2.1.2.3 en page 23).

L'effort de traînée créé par le déplacement de la bille dans un nuage de lubrifiant se traduit par la création d'une force de direction opposée au mouvement de la bille. Le torseur des efforts associés s'exprime donc simplement :

$$\mathcal{T}_{tr}^j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{tr}^j \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & F_{tr}^j \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad (3.35)$$

L'expression de F_{tr}^j est donnée par la formulation classique de la traînée aérodynamique :

$$F_{tr}^j = -\frac{1}{2} C_d \rho_m \frac{\pi D^2}{4} \frac{\omega_m^j d_m}{2} \quad (3.36)$$

où C_d est le coefficient de traînée d'une bille et ρ_m est la masse volumique du mélange d'air et de lubrifiant dans lequel la bille se déplace.

Le coefficient de traînée, n'est pas celui d'une bille isolée dans un écoulement turbulent. Compte tenu des nombres de Reynolds rencontrés dans les roulements à billes (environ 45 000), le coefficient de traînée pour une bille isolée est de 0,45. Cependant une bille se trouve dans un environnement confiné, entourée par deux bagues et par la cage, précédée et suivie par d'autres billes. Dans ce cas particulier, citons les travaux de Marchesse [33] qui se basent sur des calculs de dynamique des fluides pour montrer qu'en l'occurrence le coefficient de traînée d'une bille est proche de 0,12.

Les efforts créés par la cage sur les billes sont causés par des effets hydrodynamiques :

$$\mathcal{T}_{al}^j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{al}^j \\ \mathbf{M}_{al}^j \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} = \left\{ \begin{array}{ccc} F_{xal}^j & F_{yal}^j & F_{zal}^j \\ M_{xal}^j & M_{yal}^j & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{b2}^j} \quad (3.37)$$

Ces efforts sont la somme de deux effets :

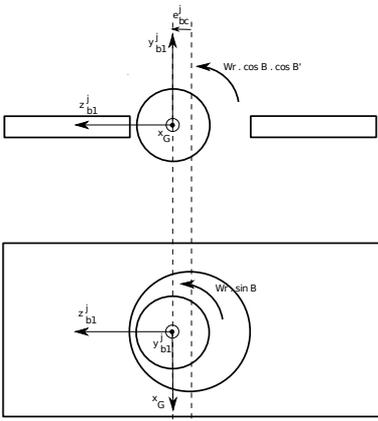


FIGURE 3.3 – Déplacement d'une bille dans son alvéole. Effet de palier hydrodynamique et effet tonneau/plan.

- palier hydrodynamique infiniment court, créé par la composante de la rotation propre de la bille selon l'axe \mathbf{y}_{b1}^j (FIG. 3.3) ;
- contact tonneau/plan, créé par la composante de la rotation propre de la bille selon l'axe \mathbf{x}_G . Cet effet se situe en deux positions dans l'alvéole : à l'avant et à l'arrière (FIG. 3.3).

Une mobilité des billes est ajoutée afin de pouvoir étudier l'importance de la cage dans l'équilibre quasi statique du roulement. Les alvéoles des cages sont des trous cylindriques de diamètre légèrement supérieur au diamètre des billes (présence d'un jeu alvéolaire J_a). Les billes peuvent se déplacer d'avant en arrière dans cette alvéole. Il s'agit d'un déplacement hors plan qui n'est pas pris en compte dans les autres équations géométriques (voir remarques en page 33). Nous notons e_{al}^j le déplacement de la bille j dans son alvéole. La connaissance de cette quantité permet de calculer les efforts exercés par la cage sur la bille.

Le détail de la détermination de ces efforts est donnée en annexe A. Nous utilisons pour cela les théories de la lubrification hydrodynamique présentée par Frêne [13].

L'écriture de l'équilibre quasi statique des forces s'écrit :

$$\begin{aligned}
& Q_{il}^j + Q_{ir}^j + Q_{ol}^j + Q_{or}^j \\
& + \mathbf{F}_{Xil}^j + \mathbf{F}_{Xir}^j + \mathbf{F}_{Xol}^j + \mathbf{F}_{Xor}^j \\
& + \mathbf{F}_{Yil}^j + \mathbf{F}_{Yir}^j + \mathbf{F}_{Yol}^j + \mathbf{F}_{Yor}^j \\
& + \mathbf{F}_c^j + \mathbf{F}_{tr}^j + \mathbf{F}_{al}^j \\
& = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Pour obtenir des équations exploitables numériquement, nous projetons la relation 3.38 sur les axes \mathbf{x}_G , \mathbf{y}_{b1}^j et \mathbf{z}_{b1}^j .

$$\begin{aligned}
& Q_{il}^j \sin \alpha_{il}^j - Q_{ir}^j \sin \alpha_{ir}^j + Q_{ol}^j \sin \alpha_{ol}^j - Q_{or}^j \sin \alpha_{or}^j \\
& + F_{Xil}^j \cos \alpha_{il}^j + F_{Xir}^j \cos \alpha_{ir}^j - F_{Xol}^j \cos \alpha_{ol}^j - F_{Xor}^j \cos \alpha_{or}^j \\
& + F_{xal}^j \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{il}^j \cos \alpha_{il}^j + Q_{ir}^j \cos \alpha_{ir}^j - Q_{ol}^j \cos \alpha_{ol}^j - Q_{or}^j \cos \alpha_{or}^j \\
& - F_{Xil}^j \sin \alpha_{il}^j + F_{Xir}^j \sin \alpha_{ir}^j - F_{Xol}^j \sin \alpha_{ol}^j + F_{Xor}^j \sin \alpha_{or}^j \\
& + F_c^j + F_{yal}^j \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$F_{Yil} + F_{Yir} + F_{Yol} + F_{Yor} + F_{tr}^j + F_{zal}^j = 0 \tag{3.41}$$

L'équilibre quasi statique des moments exercés sur la bille s'écrit en G_{b2}^j :

$$\begin{aligned}
& M_{Sil}^j + M_{Sir}^j + M_{Sol}^j + M_{Sor}^j \\
& + M_{Ril}^j + M_{Rir}^j + M_{Rol}^j + M_{Ror}^j \\
& + M_{Yil}^j + M_{Yir}^j + M_{Yol}^j + M_{Yor}^j \\
& + M_G^j + M_{al}^j = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

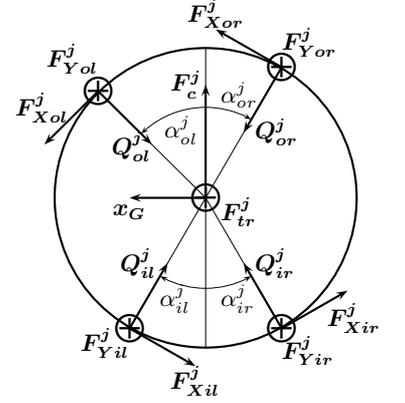


FIGURE 3.4 – Forces exercées par les bagues sur la bille, tracées dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j\}$.

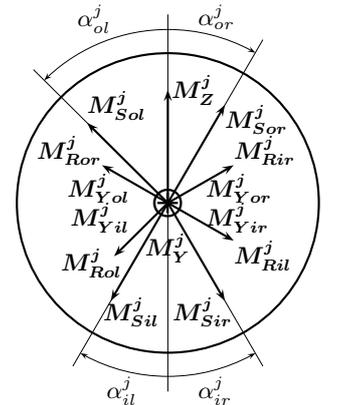


FIGURE 3.5 – Moments exercés par les bagues sur la bille, tracés dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j\}$.

Nous effectuons la projection sur les axes \mathbf{x}_G , \mathbf{y}_{b1}^j et \mathbf{z}_{b1}^j pour obtenir les équations :

$$\begin{aligned} & -M_{Sil}^j \sin \alpha_{il}^j + M_{Sir}^j \sin \alpha_{ir}^j - M_{Sol}^j \sin \alpha_{ol}^j + M_{Sor}^j \sin \alpha_{or}^j \\ & + M_{Ril}^j \cos \alpha_{il}^j + M_{Rir}^j \cos \alpha_{ir}^j - M_{Rol}^j \cos \alpha_{ol}^j - M_{Ror}^j \cos \alpha_{or}^j \\ & + M_{xal}^j \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & -M_{Sil}^j \cos \alpha_{il}^j - M_{Sir}^j \cos \alpha_{ir}^j + M_{Sol}^j \cos \alpha_{ol}^j + M_{Sor}^j \cos \alpha_{or}^j \\ & - M_{Ril}^j \sin \alpha_{il}^j + M_{Rir}^j \sin \alpha_{ir}^j - M_{Rol}^j \sin \alpha_{ol}^j + M_{Ror}^j \sin \alpha_{or}^j \\ & + M_Z^j + M_{yal}^j = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$-M_{Yil}^j - M_{Yir}^j - M_{Yol}^j - M_{Yor}^j + M_Y^j = 0 \quad (3.45)$$

Les six équations 3.39, 3.40, 3.41, 3.43, 3.44 et 3.45 forment le système d'équations caractérisant l'équilibre de la bille j .

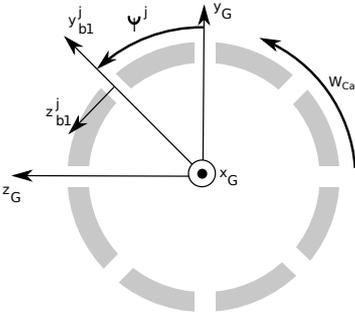


FIGURE 3.6 – Position des axes dans une alvéole de la cage.

3.2.2 Équilibre de la cage

Les efforts qui s'exercent sur la cage, proviennent de trois interactions différentes :

- dans chacune des alvéoles, une interaction hydrodynamique avec les billes : torseurs $-\mathcal{T}_{al}^j$;
- avec la bague extérieure, une interaction hydrodynamique de type palier infiniment court : torseur \mathcal{T}_{op}
- avec la bague intérieure, une interaction hydrodynamique de type palier infiniment court : torseur \mathcal{T}_{ip}

L'interaction avec les billes est décrite dans la section précédente.

Nous choisissons un modèle simplifié à deux degrés de mobilité pour la cage. La cage de notre modèle possède deux mobilités en translation dans le plan $(G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G)$ que nous notons δ_y^{Ca} et δ_z^{Ca} . La connaissance de ces deux déplacements permet de calculer l'intensité des efforts hydrodynamiques en jeu entre la cage et les bagues. Le détail du calcul de ces interactions est donné en annexe A.

Le torseur des efforts créés par la bague extérieure sur la cage est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_{op} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{op} \\ \mathbf{M}_{op} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{Ca}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & F_{yop} & F_{zop} \\ M_{xop} & M_{yop} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{Ca}} \quad (3.46)$$

Le torseur des efforts créés par la bague intérieure sur la cage est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_{ip} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{ip} \\ \mathbf{M}_{oi} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{Ca}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & F_{yip} & F_{zip} \\ M_{xip} & M_{yip} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_{Ca}} \quad (3.47)$$

Ainsi, nous pouvons écrire la projection de l'équilibre des forces exercées sur les axes \mathbf{y}_G et \mathbf{z}_G , et la projection de l'équilibre des moments sur l'axe \mathbf{z}_G :

$$F_{yip} + F_{yop} - \sum_{j=1}^N \left(F_{yal}^j \cos \psi^j + F_{zal}^j \sin \psi^j \right) = 0 \quad (3.48)$$

$$F_{z\ ip} + F_{z\ op} - \sum_{j=1}^N \left(F_{y\ al}^j \sin \psi^j + F_{z\ al}^j \cos \psi^j \right) = 0 \quad (3.49)$$

$$M_{x\ ip} + M_{x\ op} - \sum_{j=1}^N \left(M_{x\ al}^y + M_{x\ al}^j \right) = 0 \quad (3.50)$$

3.2.3 Équilibre de la bague intérieure

Il s'agit maintenant d'établir l'équilibre statique de la bague intérieure. Les efforts s'exerçant sur elle ont été en grande partie définis :

- efforts de contact créés par les billes sur la bague intérieure en chacun des points de contact : torseurs $-\mathcal{T}_{cix}^j$ (EQ. 3.30) ;
- effets hydrodynamique avec la cage : torseur $-\mathcal{T}_{ip}$;
- efforts exercés par l'arbre sur la bague intérieure, conditions aux limites sur la bague : torseur \mathcal{T}_i .

Le roulement étudié comporte cinq degrés de liberté, c'est à dire que cinq efforts peuvent être appliqués sur la bague intérieure : trois forces et deux moments. Le moment nul étant celui qui correspond à l'axe de rotation du roulement \mathbf{x}_G , il est donc commode de définir le torseur \mathcal{T}_i dans le repère global \mathcal{R}_G .

$$\mathcal{T}_i = \left\{ \begin{array}{ccc} F_x & F_y & F_z \\ 0 & -M_y & -M_z \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_G} \quad (3.51)$$

Afin d'effectuer les projections, il faut choisir un repère. Pour cela, deux semblent privilégiés : le repère local de la bague intérieure \mathcal{R}_i et le repère global du roulement \mathcal{R}_G . Comme le torseur \mathcal{T}_i est défini dans le repère global, nous choisissons d'exprimer tous les torseurs dans ce repère.

Le torseur des efforts de contact est défini (EQ. 3.30) dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{cix}^j, \mathbf{y}_{cix}^j, \mathbf{z}_{cix}^j\}$:

$$\mathcal{T}_{cix}^j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{cix}^j \\ \mathbf{M}_{cix}^j \end{array} \right\}_{\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_{cix}^j, \mathbf{y}_{cix}^j, \mathbf{z}_{cix}^j\}} \quad (3.52)$$

Dans un premier temps, nous exprimons le torseur \mathcal{T}_i dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G\}$:

$$\mathcal{T}_{cix}^j = \left\{ \begin{array}{c} \psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{F}_{cix}^j \\ \psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{M}_{cix}^j \end{array} \right\}_{\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G\}} \quad (3.53)$$

Puis nous déplaçons ce torseur au point G :

$$\mathcal{T}_{cix}^j = \left\{ \begin{array}{c} \psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{F}_{cix}^j \\ \psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{M}_{cix}^j + \mathbf{GG}_{b2}^j \times (\psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{F}_{cix}^j) \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_G} \quad (3.54)$$

Pour plus de clarté dans les projections qui vont suivre, nous détaillons l'expression de ce torseur :

$$\psi^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cix}^j \cdot \mathbf{F}_{cix}^j = \left[\begin{array}{c} -\cos \alpha_{il}^j F_{Xil}^j - \sin \alpha_{il}^j Q_{il}^j \\ \left(-\sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j + \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right) \cos \psi^j + \sin \psi^j F_{Yil}^j \\ \left(-\sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j + \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right) \sin \psi^j - \cos \psi^j F_{Yil}^j \end{array} \right] \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\psi}^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cil} \cdot \mathbf{M}_{cil}^j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{il}^j M_{Ril}^j + \sin \alpha_{il}^j M_{Sil}^j \\ \left(-\sin \alpha_{il}^j M_{Ril}^j - \cos \alpha_{il}^j M_{Sil}^j \right) \cos \psi^j - \sin \psi^j M_{Yil}^j \\ \left(-\sin \alpha_{il}^j M_{Ril}^j - \cos \alpha_{il}^j M_{Sil}^j \right) \sin \psi^j + \cos \psi^j M_{Yil}^j \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\psi}^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cir} \cdot \mathbf{F}_{cir}^j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \sin \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \\ \left(\sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \cos \psi^j + \sin \psi^j F_{Yir}^j \\ \left(\sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \sin \psi^j - \cos \psi^j F_{Yir}^j \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\boldsymbol{\psi}^j \cdot \boldsymbol{\alpha}_{cir} \cdot \mathbf{M}_{cir}^j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{ir}^j M_{Rir}^j - \sin \alpha_{ir}^j M_{Sir}^j \\ \left(\sin \alpha_{ir}^j M_{Rir}^j - \cos \alpha_{ir}^j M_{Sir}^j \right) \cos \psi^j - \sin \psi^j M_{Yir}^j \\ \left(\sin \alpha_{ir}^j M_{Rir}^j - \cos \alpha_{ir}^j M_{Sir}^j \right) \sin \psi^j + \cos \psi^j M_{Yir}^j \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{G}_{b2}^j &= \mathbf{G}\mathbf{C}_{ol}^j + \mathbf{C}_{ol}^j \mathbf{G}_{b2}^j \\ &= \boldsymbol{\psi}^j \cdot \begin{bmatrix} \frac{d_m}{2} - \left(f_o - \frac{1}{2} \right) D \cos \alpha_f \\ -\frac{g_o}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b1}^j} \\ &+ \boldsymbol{\psi}^j \cdot \begin{bmatrix} \left(\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right) \sin \alpha_{ol}^j \\ \left(\left(f_o - \frac{1}{2} \right) D + \delta_{ol}^j - h_{ol}^j \right) \cos \alpha_{ol}^j \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{b1}^j} \\ &= \begin{bmatrix} x_G^j \\ y_G^j \\ z_G^j \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} \end{aligned} \quad (3.59)$$

L'utilisation du point intermédiaire C_{ol}^j dans l'équation précédente est purement arbitraire. Si la bille j ne possède pas de contact avec la piste extérieure gauche, il suffit d'utiliser le point C_{or}^j pour le calcul du vecteur $\mathbf{G}\mathbf{G}_{b2}^j$.

L'équilibre quasi statique de la bague intérieure est donc réalisé en écrivant l'égalité des torseurs :

$$\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_{ip} - \sum_{j=1}^N \left(\mathcal{T}_{cil}^j + \mathcal{T}_{cir}^j \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathcal{R}_G} \quad (3.60)$$

Cet équilibre est le plus complexe du système, car il met en jeu toutes les inconnues entres elles. Les déplacements de la bague, δ_x , δ_y et δ_z n'interviennent pas directement dans cet équilibre. La projection de l'équilibre des forces sur les axes \mathbf{x}_G , \mathbf{y}_G et \mathbf{z}_G donne :

$$F_x - \sum_{j=1}^N \left(-\cos \alpha_{il}^j F_{Xil}^j - \sin \alpha_{il}^j Q_{il}^j - \cos \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \sin \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) = 0 \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
F_y - F_{y\,ip} - \sum_{j=1}^N \left(-\cos \psi^j \sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j + \sin \psi^j F_{Yil}^j + \cos \psi^j \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right. \\
\left. + \cos \psi^j \sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \sin \psi^j F_{Yir}^j + \cos \psi^j \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
F_z - F_{z\,ip} - \sum_{j=1}^N \left(-\sin \psi^j \sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j - \cos \psi^j F_{Yil}^j + \sin \psi^j \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right. \\
\left. + \sin \psi^j \sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j - \cos \psi^j F_{Yir}^j + \sin \psi^j \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

La projection de l'équilibre des moments sur les axes \mathbf{y}_G et \mathbf{z}_G s'écrit :

$$\begin{aligned}
-M_y - \sum_{j=1}^N \left[\left(-\sin \alpha_{il}^j M_{Ril}^j - \cos \alpha_{il}^j M_{Sil}^j \right) \cos \psi^j - \sin \psi^j M_{Yil}^j \right. \\
+ \left(\sin \alpha_{ir}^j M_{Rir}^j - \cos \alpha_{ir}^j M_{Sir}^j \right) \cos \psi^j - \sin \psi^j M_{Yir}^j \\
+ z_G^j \left(-\cos \alpha_{il}^j F_{Xil}^j - \sin \alpha_{il}^j Q_{il}^j - \cos \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \sin \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \\
- x_G^j \left(\left(-\sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j + \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right) \sin \psi^j - \cos \psi^j F_{Yil}^j \right. \\
\left. + \left(\sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \sin \psi^j - \cos \psi^j F_{Yir}^j \right] \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
-M_z - \sum_{j=1}^N \left[\left(-\sin \alpha_{il}^j M_{Ril}^j - \cos \alpha_{il}^j M_{Sil}^j \right) \sin \psi^j + \cos \psi^j M_{Yil}^j \right. \\
+ \left(\sin \alpha_{ir}^j M_{Rir}^j - \cos \alpha_{ir}^j M_{Sir}^j \right) \sin \psi^j + \cos \psi^j M_{Yir}^j \\
+ x_G^j \left(\left(-\sin \alpha_{il}^j F_{Xil}^j + \cos \alpha_{il}^j Q_{il}^j \right) \cos \psi^j + \sin \psi^j F_{Yil}^j \right. \\
\left. + \left(\sin \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \cos \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \cos \psi^j + \sin \psi^j F_{Yir}^j \right) \\
- y_G^j \left(-\cos \alpha_{il}^j F_{Xil}^j - \sin \alpha_{il}^j Q_{il}^j - \cos \alpha_{ir}^j F_{Xir}^j + \sin \alpha_{ir}^j Q_{ir}^j \right) \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

À ce stade, le système d'équations non linéaires décrivant l'équilibre quasi statique du roulement à N billes est composé de $8 + 12N$ équations :

- $6N$ équations géométriques : 3.21, 3.22, 3.24, 3.25, 3.28 et 3.29 ;
- $6N$ équations d'équilibre quasi statique des billes : 3.39, 3.40, 3.41, 3.43, 3.44 et 3.45 ;
- 5 équations d'équilibre quasi statique de la bague : 3.61, 3.62, 3.63, 3.64 et 3.65 ;
- 3 équations d'équilibre quasi statique de la cage : 3.48, 3.49, 3.50.

Les inconnues du système sont au nombre de $7 + 13N$:

- δ_x , δ_y , δ_z , θ_y et θ_z dans le cas où les données sont les forces et les moments appliqués sur la bague intérieure ou F_x , F_y , F_z , M_y et M_z
- dans le cas où les données sont les déplacements et rotations de la bague intérieure ;

- $\alpha_{ir}^j, \alpha_{il}^j, \alpha_{or}^j, \alpha_{ol}^j$, les $4N$ angles de contact ;
- $\delta_{ir}^j, \delta_{il}^j, \delta_{or}^j, \delta_{ol}^j$, les $4N$ déplacements de Hertz ;
- $h_{ir}^j, h_{il}^j, h_{or}^j, h_{ol}^j$, les $4N$ épaisseurs de lubrifiant ;
- $\delta_y^{Ca}, \delta_z^{Ca}$, les deux déplacements de la cage ;
- e_{al}^j , les N déplacements des billes dans les alvéoles de la cage.

Nous constatons que le nombre d'inconnues est excédentaire par rapport au nombre d'équations. Pour pouvoir utiliser la méthode de Newton-Raphson qui nécessite autant d'équations que d'inconnues, nous proposons de réduire le nombre d'inconnues en reliant les déplacements e_{al}^j entre eux par la relation :

$$e_{al}^j = e_{al}^0 \left(1 + \text{sign}(e_{al}^0) \frac{\omega_m^j - \omega_{Ca}}{\omega_{Ca}} \right) \quad (3.66)$$

où ω_{Ca} est la vitesse de rotation de la cage.

Cette relation traduit le fait que le déplacement d'une bille dans une alvéole est la somme d'un déplacement moyen e_{al}^0 et d'un terme proportionnel à l'écart relatif entre la vitesse de rotation de la cage et la vitesse de rotation orbitale d'une bille. Ainsi, une bille dont la vitesse orbitale ω_m^j est plus élevée que la vitesse de la cage ω_c possède un déplacement e_{al}^j supérieur au déplacement moyen de toutes les billes e_{al}^0 . C'est à dire qu'une telle bille contribue à accélérer la cage.

L'hypothèse mentionnée ci-dessus (EQ. 3.66) s'avère au final contraignante par le fait qu'elle impose un lien non démontré entre les déplacements des billes dans leurs alvéoles. Si ce modèle permet de vérifier l'effet suivant : la cage possède un rôle de frein sur les billes lorsque celle-ci est guidée par la bague extérieure, et un rôle moteur lorsqu'elle est guidée par la bague intérieure, en revanche les déplacements des billes et l'intensité des effets dus à la présence de la cage ne coïncident pas avec les résultats de simulation provenant d'autres modèles analytiques (celui de Nélias [34] en particulier). Ajoutons que l'équilibre quasi statique se trouve peu perturbé par l'introduction de ce modèle de cage, ce qui était attendu mais reste à ce stade insatisfaisant. Les résultats issus de ce modèle devront en conséquence être utilisés sciemment.

Pour conclure, il nous reste à résoudre les équations suivantes (voir en page 45) :

- 6 N équations géométriques ;
- 6 N équations d'équilibre quasi statique sur les billes ;
- 5 équations d'équilibre quasi statique sur la bague intérieure ;
- 3 équations d'équilibre quasi statique sur la cage.

Auxquelles sont associées les inconnues suivantes (voir en page 46) :

- les 5 déplacements de la bague intérieure, ou les 5 efforts appliqués sur celle-ci ;
- les 4 N angles de contact ;
- les 4 N déplacements de Hertz ;
- les 4 N épaisseurs de lubrifiant ;
- les deux déplacements de la cage ;
- le déplacement moyen des billes dans leurs alvéoles.

Prise en compte de la souplesse des bagues

4.1	Modélisation du contact	48
4.1.1	Théorie du contact	48
4.1.2	Application au contact bille/plan	50
4.1.3	Application au contact bille/bague	59
4.2	Calcul de la nouvelle géométrie des bagues	64
4.2.1	Voisinage du point de contact	64
4.2.2	Conformités et déplacements des centres de courbure . .	66
4.2.3	Résultats préliminaires	66
4.3	Cartographie de la nouvelle géométrie	69
4.3.1	Présentation du calcul	69
4.3.2	Cas du roulement R_{20}^{10}	70
4.3.3	Calcul du déplacement moyen	81
4.4	Couplage avec un code de calcul éléments finis	82
4.4.1	Intégration au modèle semi analytique	83
4.4.2	Déroulement du calcul éléments finis	84
4.5	Impact sur le comportement du roulement	85
4.5.1	Chargement axial	86
4.5.2	Chargement axial et radial	86
4.5.3	Chargement axial et radial avec moment	89

Dans le but de modéliser les bagues d'un roulement à billes par éléments finis, nous proposons d'abord plusieurs méthodes pour configurer le calcul à partir des efforts de contact. Nous nous attacherons dans un premier temps à faire quelques tests sur une géométrie simple (contact sphère/plan) pour se rendre compte des difficultés mises en jeu. Puis nous aborderons le cas d'une bague de roulement à billes. Ceci afin d'étudier l'influence de l'application des efforts de contact sur le maillage pour le calcul éléments finis sur la déformée de la bague d'une part, et d'analyser différentes techniques pour le calcul de la nouvelle conformité de la bague au niveau d'un point de contact d'autre part.

Puis nous proposerons une méthode pour calculer la nouvelle géométrie des bagues. Ce qui nous permettra d'étudier le comportement d'une bague et d'effectuer ainsi une cartographie de sa réponse aux sollicitations d'une bille. Enfin, nous expliciterons le couplage retenu et présenterons son intégration au sein d'un modèle semi analytique.

Finalement, nous réaliserons des calculs sur une géométrie simple de roulement à billes afin de faire des choix dans les différentes options de calcul, mais également de pouvoir comparer l'état d'équilibre d'un roulement à bagues souples avec celui d'un roulement à bagues rigides.

4.1 Modélisation du contact

4.1.1 Théorie du contact

Le contact étudié dans le cas d'un roulement à billes est celui d'une bille sur une bague. Généralement, billes et bagues sont en matériaux métalliques de type acier. Ce type de contact, considéré comme un contact élastique, a été étudié par Hertz [20] qui fournit un modèle analytique pour calculer les géométries de contact et les déplacements des solides. Cette théorie sera utilisée comme référence pour nos comparaisons avec des résultats numériques. Une théorie alternative est celle développée par Boussinesq [4], qui étudie l'effet d'une force concentrée sur un massif semi-infini.

Nous allons rappeler les résultats des deux théories que nous utiliserons dans la suite. Le raisonnement pour aboutir à ces résultats est très bien détaillé par Harris [19] et Johnson [24].

4.1.1.1 Contact hertzien

Le contact hertzien est défini par :

- deux solides élastiques en contact. Chacun des deux solides sont définis par deux rayons de courbure au niveau du point de contact, et par leurs caractéristiques élastiques, module d'Young E et coefficient de Poisson ν ;
- absence de mouvement relatif autre que le déplacement dû à la déformation des surfaces ;
- la surface de contact est supposée être un ellipsoïde de révolution.

La répartition de pression sur la surface de contact est donnée par une distribution semi-elliptique :

$$P(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (4.1)$$

où a et b sont les dimensions de l'ellipse de contact, F la force normale appliquée sur les solides et (x, y) la position d'un point appartenant à la surface de contact, $(0, 0)$ est le point de contact.

On appelle pression maximale, la quantité :

$$P_{max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (4.2)$$

Le déplacement normal pour un point (x, y, z) du massif est donné par la relation :

$$u_{Hertz}(x, y, z) = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{abP_{max}}{2} \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} - \frac{z^2}{w}\right) \frac{dw}{\sqrt{(a^2 + w)(b^2 + w)w}} \quad (4.3)$$

Lorsque le point (x, y, z) est situé sur la surface chargée alors $\lambda_1 = 0$. Dans le cas contraire, λ_1 est la solution réelle positive de l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1 \quad (4.4)$$

4.1.1.2 Force concentrée sur un plan

L'étude d'une force concentrée sur un massif semi infini est due à Boussinesq [4]. Une force en un point crée une singularité géométrique, la solution analytique fournie par Boussinesq n'est donc pas définie au niveau du point de contact.

Le déplacement vertical d'un point du massif soumis à une force concentrée, est donné par :

$$u_{Boussinesq}(x, y, z) = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2(1 - \nu)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (4.5)$$

4.1.1.3 Contact en éléments finis

Le premier objectif dans notre problématique générale est de déterminer la meilleure façon de répartir les efforts de contacts, issus d'une itération de calcul de notre modèle semi analytique, sur le maillage de la bague.

Nous ne cherchons pas à calculer le déplacement au niveau du point de contact, en effet celui-ci est déjà déterminé analytiquement par la théorie de Hertz. Les déplacements dans l'ellipse de contact nous importent peu. Car nous cherchons à obtenir la conformité de la bague telle que la bille la « voit », ce sont donc les déplacements dans le voisinage du point de contact qui sont importants. Nous cherchons également une solution économe en temps de calcul. Le calcul éléments finis ayant potentiellement lieu à chaque itération de notre modèle semi analytique, il est important qu'il soit le moins pénalisant possible. Il est donc exclu de modéliser le contact avec une simulation multi corps avec toutes les billes et un maillage fin. Nous envisageons une méthode ne nécessitant pas de re-maillage pour tenir compte du déplacement éventuel des billes.

La méthode proposée par Cavallaro [5] est de répartir les efforts de contact sur trois nœuds du maillage¹. Cette solution va être comparée à une pression uniforme répartie sur la surface de contact, à une pression distribuée (théorie de Hertz) sur la surface de contact, ainsi qu'à une force concentrée positionnée au centre de l'ellipse de contact. Nous étudions le cas simplifié où il n'y a pas de force tangentielle de contact.

Le chargement éléments finis s'effectuera donc de quatre manières différentes :

- simulation multicorps du contact ;
- saisie de la pression conformément à l'équation (4.1) ;
- saisie de la pression moyenne sur l'ensemble de la surface de contact ;
- application d'un effort concentré (force nodale) sur le point de contact ;
- application de 3 forces nodales sur les trois points les plus proches du point de contact.

Maillage de la zone de contact Nous constatons que, concernant la contrainte technique d'application du chargement, ces méthodes ne nécessitent pas toutes le même niveau de finesse du maillage. En effet, pour la modélisation multicorps du contact, il faut mailler finement la zone de contact (la bille et le plan) Les tests de performance d'Abaqus [1] traitent le cas du contact hertzien. Dans ces tests, la zone de contact comporte quatre éléments (hexaèdres) selon la direction d'un rayon. Pour la modélisation 3D,

1. Les trois nœuds les plus proches du point de contact.

la documentation recommande l'utilisation d'éléments quadratiques de type C3D20 (hexaèdres) ou C3D10 (tétraèdres).

Pour représenter la pression sous sa forme distribuée, il faut mailler suffisamment finement la zone de contact. Nous investiguerons dans la suite deux niveaux de raffinement du maillage. Pour utiliser la pression moyenne, il suffit de quelques éléments pour obtenir la forme de la surface de contact, et d'appliquer une pression moyenne. Si nous souhaitons utiliser une force concentrée, il suffit d'un point au niveau de la position du point de contact. Enfin, pour le cas de la répartition de l'effort sur trois points, aucune contrainte n'est nécessaire, il suffit d'utiliser les trois points les plus proches du point de contact.

Notre problématique est l'étude des déplacements (et non des contraintes) cela n'entraîne pas de contrainte sur l'utilisation de tétraèdres ou d'hexaèdres. Cependant, le maillage d'une zone elliptique sur une bague est plus aisée avec des éléments tétraédriques. De plus, l'objectif final est la modélisation de bagues de roulements à billes et cette géométrie est plus aisée à mailler avec ceux-ci. Nous utiliserons donc les éléments quadratiques C3D10 pour nos études.

Principe de Saint Venant L'objectif de ces comparaisons est de commencer à cerner ce qu'est le voisinage du point de contact, c'est à dire quelle est la zone qu'il est légitime de prendre en compte pour le calcul de la nouvelle conformité.

Rappelons toutefois un principe de mécanique des milieux continus : le principe de Saint-Venant. Ce principe annonce que le comportement d'un point de l'objet étudié, le plan ou la bague dans notre cas, est indépendant de la façon dont les chargements sont appliqués et dont les conditions aux limites sont réalisées, à condition que le point considéré soit suffisamment éloigné du point d'application des chargements. En pratique, un point éloigné de dix fois une longueur caractéristique vérifie le principe de Saint-Venant. Dans le cas de notre modélisation, la longueur caractéristique est soit le demi-grand axe soit le demi-petit axe de l'ellipse de contact, cela est dépendant de la direction d'éloignement. Si, dans le cas du plan, nous pouvons sans problème nous éloigner suffisamment du point de contact, il en est autrement dans le cas des bagues d'un roulement à billes, où les limites (bord de la bague, bille voisine) sont rapidement atteintes. De plus, comme nous cherchons à calculer la conformité des bagues au voisinage des points de contact, nous serons amenés à utiliser de l'information sur des nœuds qui ne vérifieront pas le principe de Saint-Venant. Il est donc important d'étudier ces différentes possibilités de chargements.

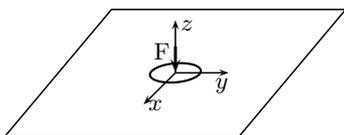


FIGURE 4.1 – Définition du repère pour le contact bille/plan.

4.1.2 Application au contact bille/plan

Afin de faciliter l'approche du problème, nous nous intéresserons à la modélisation du contact d'une bille sur un massif semi-infini. Ce cas va nous permettre de poser les bases du problème pour l'étude sur une bague de roulement.

La frontière du massif est définie par le plan $z = 0$, et la position du point de contact est l'origine du repère cartésien. Le massif semi-infini est situé dans la zone de l'espace $z \leq 0$.

Le contact modélisé est celui d'une bille de rayon $r = 10$ mm, la force normale appliquée est de $F = 342$ N. La théorie du contact de Hertz décrit

alors la surface de contact comme un cercle de rayon $r_c = 0,29$ mm. Le déplacement maximal de la surface du plan a lieu au centre du cercle et a pour valeur $4,08 \mu\text{m}$. La pression de contact maximale au centre du cercle, P_{max} , a pour valeur 2000 MPa, la pression de contact moyenne P_{moy} est de 1333 MPa. La répartition de pression dans la zone de contact est donnée par la relation :

$$P(x, y) = P_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_c^2}} \quad (4.6)$$

En pratique, en éléments finis, nous utilisons une section de plan de taille suffisante. Afin de ne pas subir l'influence des conditions aux limites, les frontières de la section de plan sont placées à une distance dix fois supérieure au rayon de la bille, c'est à dire 100 mm. Ce qui équivaut à 300 fois le rayon de la zone de contact : le principe de St-Venant est donc respecté. Le plan n'est pas modélisé dans son ensemble. En effet, en utilisant les symétries du chargement, il est possible de réduire la zone modélisée. Et ainsi, de diminuer le temps de calcul. Nous allons comparer plusieurs techniques de modélisation du contact. Dans ce but, nous choisissons d'utiliser le même maillage pour une comparaison plus aisée. Le maillage doit donc pouvoir permettre l'application de tous les cas de chargements détaillés par la suite. Finalement, nous modélisons une portion circulaire du plan d'angle 120. La hauteur de la portion de plan utilisée est de 100 mm et son rayon est également de 100 mm

Les données que nous allons visualiser sont les déplacements nodaux, à différentes profondeurs du plan. En abscisse des courbes, la distance du nœud au point de contact, est divisée par le rayon de la surface de contact, ainsi l'abscisse 1 représente la limite de la zone de contact.

Enfin, nous étudions, pour les cinq cas de chargement, deux niveaux de finesse de maillage. La seule différence entre les deux maillages concerne le nombre d'éléments dans la zone de contact. Le premier, le maillage fin (FIG. 4.3), possède 30 éléments dans la zone de contact, il correspond aux recommandations de la documentation Abaqus (4 éléments selon un rayon de la zone de contact). Le second, le maillage grossier (FIG. 4.4), ne possède quant à lui que 16 éléments dans la zone de contact.

4.1.2.1 Modélisation multicorps

Notre premier cas d'étude est la modélisation du contact par l'interaction de deux maillages. Cette simulation ne sera pas retenue, car trop prohibitive en temps de calcul. Cependant, elle nous permet de valider certains points de la simulation : type, nombre, taille et répartitions des éléments finis choisis.

Le déplacement théorique au centre de la surface de contact (EQ. 4.3) est de $4,08 \mu\text{m}$. Sur la figure 4.5 est représenté le déplacement normal de la surface du plan le long d'un rayon partant du centre de la zone de contact. Nous rappelons dans ce cas que la solution est axisymétrique. La distance est mesurée par rapport au centre de la zone de contact et est adimensionnée par le rayon du disque de contact. Ainsi l'abscisse 1 correspond à la limite de la surface de contact. Sur cette figure, nous comparons les déplacements obtenus par calcul éléments finis sur le maillage fin, U_C , ceux obtenus sur le maillage grossier, U_{C-G} , et la solution analytique de Hertz, U_{Hertz} . Pour faciliter la comparaison avec la solution analytique, nous calculons l'écart relatif, ε_C , du déplacement U_C par rapport à U_{Hertz} (et de manière similaire avec ε_{C-G}).

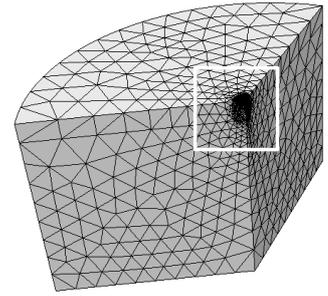


FIGURE 4.2 – Maillage de la section de plan.

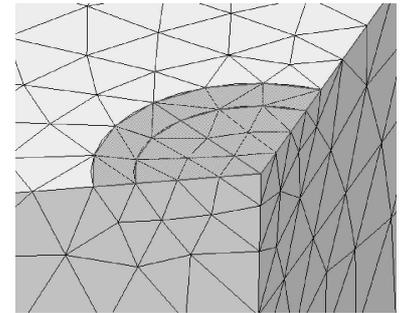


FIGURE 4.3 – Détail région de contact, maillage Ppd36.

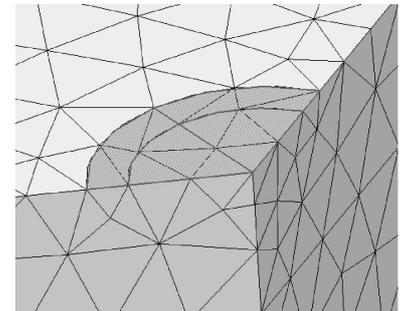


FIGURE 4.4 – Visualisation du maillage Ppd36.

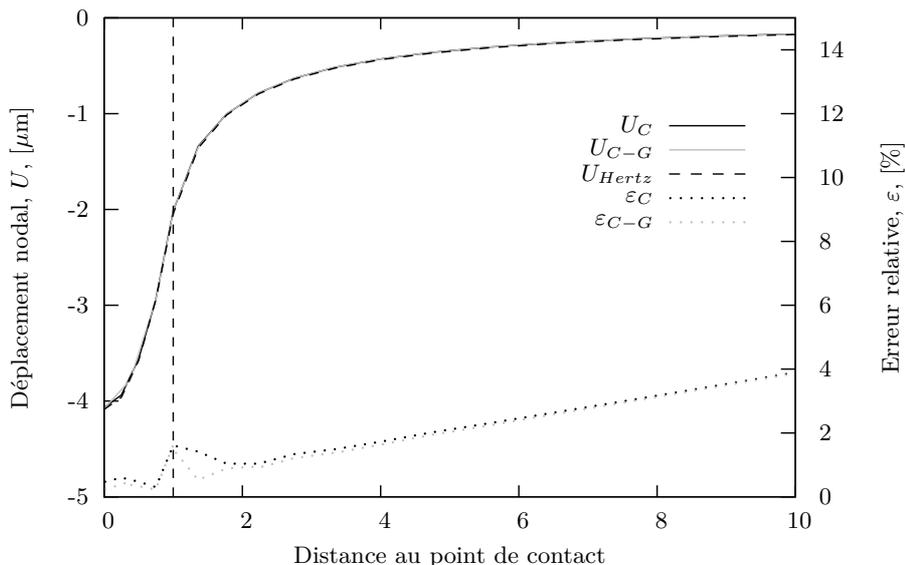


FIGURE 4.5 – Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

Nous constatons très peu de différences entre les résultats visualisés sur le maillage fin et ceux sur le maillage plus grossier. Dans notre cas, pour la simulation multicorps, il n'est pas nécessaire de mailler la zone de contact avec plus de 12 éléments (c'est à dire 36 sur la surface complète). En effet, par construction, les éléments finis réalisent de bonnes approximations des déplacements nodaux. Comme seuls les résultats en déplacements nous intéressent dans cette étude, une faible densité de maille est suffisante.

Nous constatons que sur tout le domaine étudié, de 0 à $10r_c$, l'erreur relative est inférieure à 4% par rapport à la formulation analytique de Hertz (FIG. 4.5). Les déplacements de la zone de contact sont très bien estimés (erreur inférieure à 2%). Ce comportement est à mettre au crédit de la bonne performance des éléments quadratiques utilisés.

Nous constatons (FIG. 4.6) qu'étudier le déplacement en profondeur nous apporte des erreurs supplémentaires sur les déplacements. À la profondeur $1r_c$, il faut s'éloigner de $3,5r_c$ du point de contact pour avoir une erreur sur les déplacements inférieurs à 5%. Comme nous le constaterons plus tard, dans le cas d'un contact bille/bague il sera impossible, vu la faible largeur des bagues par rapport aux dimensions des ellipses de contact, de s'en éloigner suffisamment pour vérifier ce critère.

4.1.2.2 Pression distribuée

Afin d'éviter une coûteuse simulation multicorps, le cas de chargement proposé dans un premier temps est une répartition de pression sur la surface de contact telle que le prévoit la théorie de Hertz.

Sur la figure 4.7, nous observons une bonne concordance du déplacement calculé avec celui déterminé par Hertz. Les déplacements sur le maillage fin, U_{PD} , et sur le maillage grossier, U_{PD-G} , possèdent une imprécision plus élevée à proximité de la frontière entre la zone chargée et la zone non chargée. Dans les deux cas, l'écart relatif devient rapidement inférieur à 5% dès que l'on s'écarte de cette frontière.

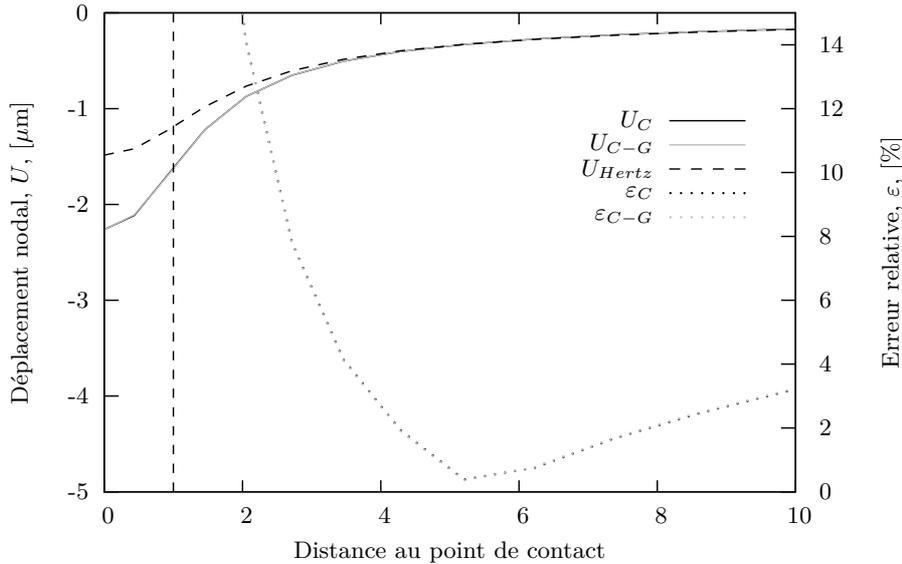


FIGURE 4.6 – Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

Concernant les déplacements à l’extérieur de la zone de contact, nous observons un écart inférieur à 5% dès que l’on s’éloigne de $1,2r_c$ du centre du contact. Mailler plus finement la zone de contact permet d’améliorer l’estimation des déplacements et de diminuer le saut au passage de la zone chargée et de la zone non chargée.

Nous constatons qu’étudier le déplacement en profondeur nous apporte, dans ce cas également, des erreurs supplémentaires sur les déplacements (FIG. 4.8). À la profondeur $1r_c$, il faut s’éloigner de $4r_c$ du point de contact pour avoir une erreur sur les déplacements inférieurs à 5% dans le cas du maillage fin, et de $5,5r_c$ dans le cas du maillage grossier.

4.1.2.3 Pression moyenne

Nous étudions maintenant le cas où l’on applique sur la zone de contact une pression uniforme, $P_{moy} = 1333$ MPa. Cette valeur correspond à la pression uniforme à appliquer sur la surface de contact pour que la résultante soit égale à 342 N, la force normale que nous étudions dans cette modélisation de contact sphère/plan.

L’objectif est de voir si ce changement a une influence sur le déplacement nodal. Nous nous intéresserons particulièrement aux nœuds à l’extérieur du disque de contact.

L’observation des déplacements nodaux (FIG. 4.9) montre que ce chargement ne permet pas de rendre compte des déplacements dans la zone de contact. En effet, l’erreur y est supérieure à 5%. Cependant, hors de la zone de contact, l’erreur est acceptable : inférieure à 5% entre $1,1r_c$ et $10r_c$. Un petit saut est visible sur les courbes d’erreur au passage de la zone de contact. Celui-ci est causé par la transition brusque entre la zone de contact et la zone non chargée. Alors que dans le cas d’une pression distribuée, cette discontinuité dans le chargement est beaucoup plus faible et donc ce saut n’apparaît pas dans le cas d’une pression distribuée (FIG. 4.7). À iso-maillage, l’utilisation de la pression moyenne est aussi performante, en dehors de la zone de

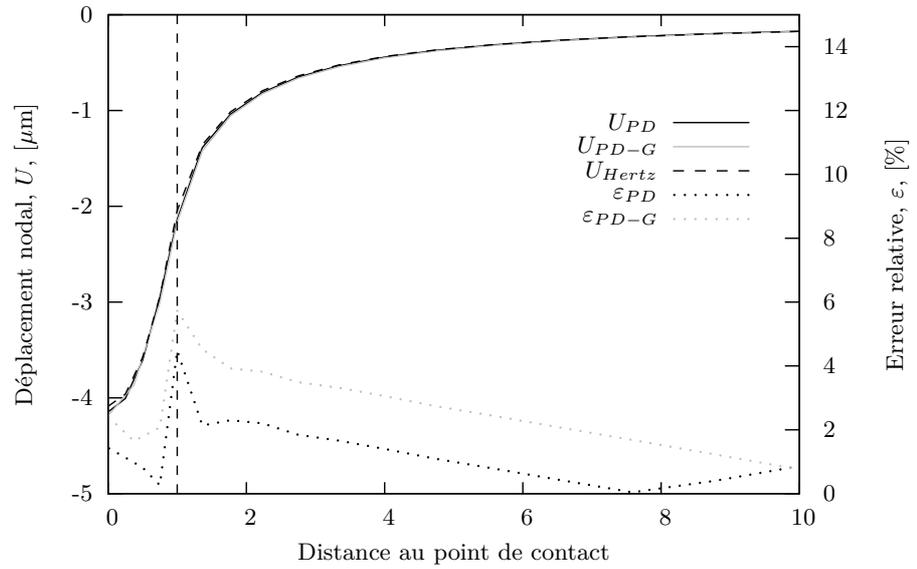


FIGURE 4.7 – Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

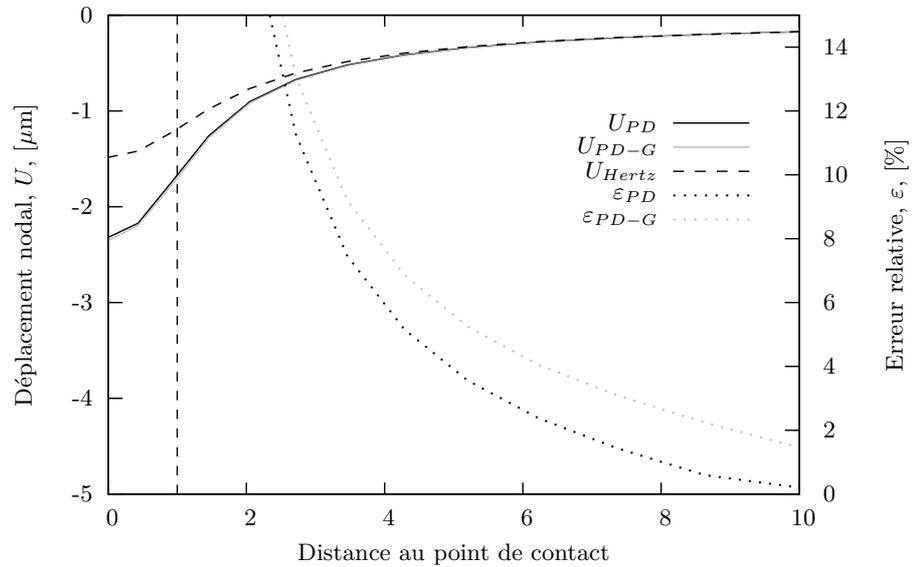


FIGURE 4.8 – Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

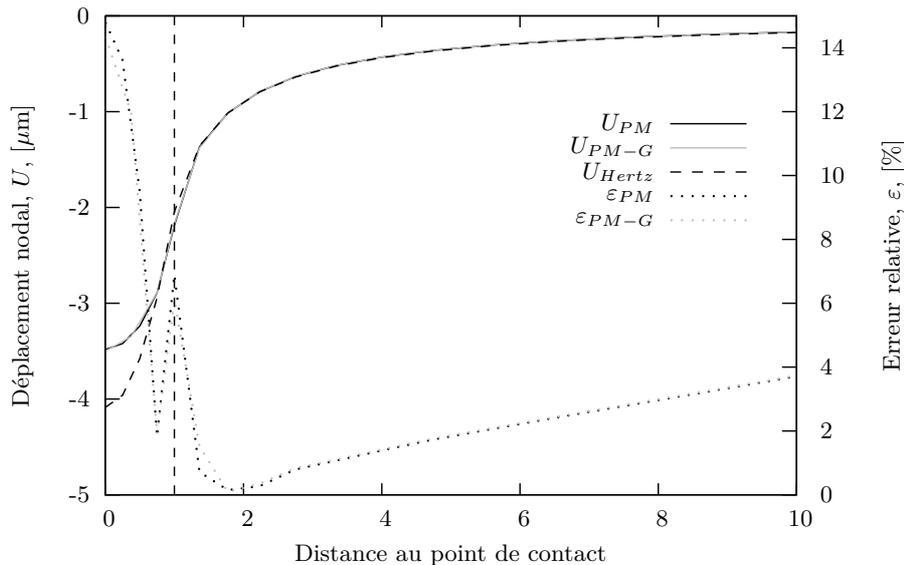


FIGURE 4.9 – Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

contact, que la pression distribuée.

Concernant les déplacements en profondeur (FIG. 4.10), les estimations de déplacements sont plus précises en appliquant une pression moyenne plutôt qu'une pression distribuée. En effet, il faut s'éloigner de $3r_c$ pour avoir une erreur relative inférieure à 5% alors qu'il fallait s'éloigner de $4,5r_c$ dans le cas de l'utilisation d'une pression distribuée.

Puisque ce sont les déplacements nodaux à l'extérieur de la surface chargée qui nous importent, il est alors inutile de chercher à appliquer un chargement de type pression distribuée sur la surface de contact. Il faut donc privilégier un chargement par pression moyenne. Celui-ci possède, en outre, l'avantage d'être plus simple à appliquer sur le maillage. Cependant, si nous nous intéressons au déplacement en profondeur, alors les recommandations sont inversées.

4.1.2.4 Force concentrée

Le cas de l'application d'une force concentrée est simple à mettre en œuvre, il nécessite cependant un maillage adapté : il faut qu'il y ait un nœud au niveau du point d'application.

L'interaction d'une force ponctuelle et d'un massif semi-infini, ne correspond pas à la théorie du contact de Hertz, il est donc normal de ne pas avoir les mêmes déplacements.

La modélisation éléments finis ne permet pas de rendre compte de la singularité du déplacement au niveau du point de contact, il est donc évident que le résultat de la simulation différera de la solution analytique de Boussinesq.

En réalité, la comparaison avec la théorie de Boussinesq a peu d'intérêt, car le contact bille/bague vérifie les hypothèses de contact hertzien et non celle de Boussinesq qui traite le cas d'une force ponctuelle. Les différences entre la modélisation et la théorie sont très marquées : de l'ordre de 50%. Ce

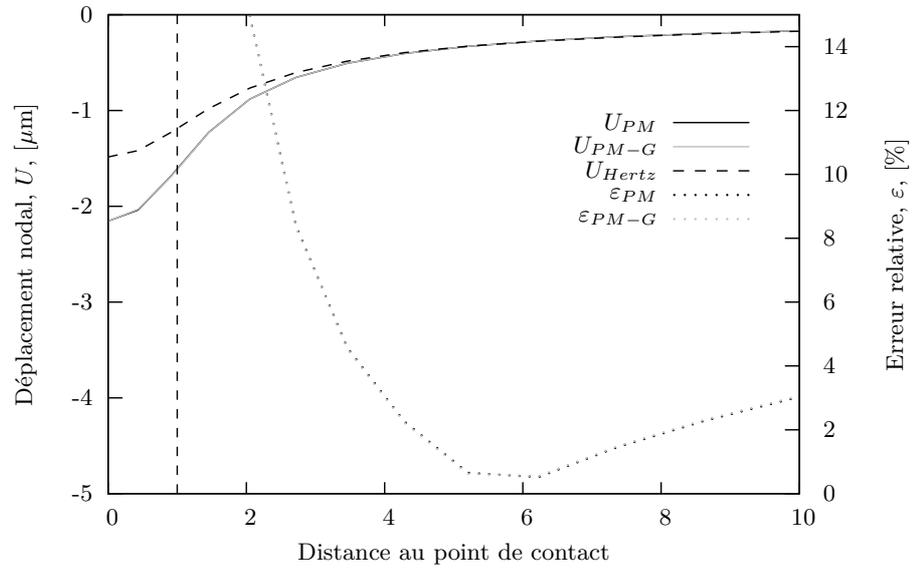


FIGURE 4.10 – Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

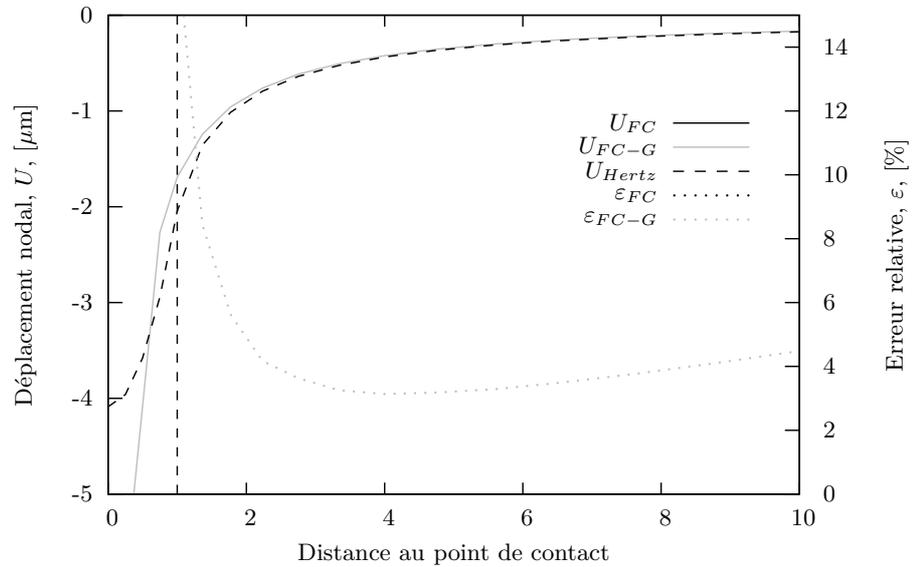


FIGURE 4.11 – Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

comportement coïncide avec les tests de performances réalisés par Abaqus [1].

La visualisation des déplacements nodaux (FIG. 4.11) indique qu'il est envisageable d'utiliser cette technique pour la modélisation bille/bague en utilisant des éléments quadratiques. Dans ce cas une erreur inférieure à 5% est observée au delà de $2r_c$. L'utilisation d'éléments linéaires (C3D8) modifie beaucoup les résultats, l'erreur relative est supérieure à 10% jusqu'à une distance de $4r_c$. Bien que cette méthode semble être idéale (bonne approximation, facilité d'application du chargement), nous verrons que le fait de concentrer l'effort en un point pose problème dans le cas du contact bille/bague.

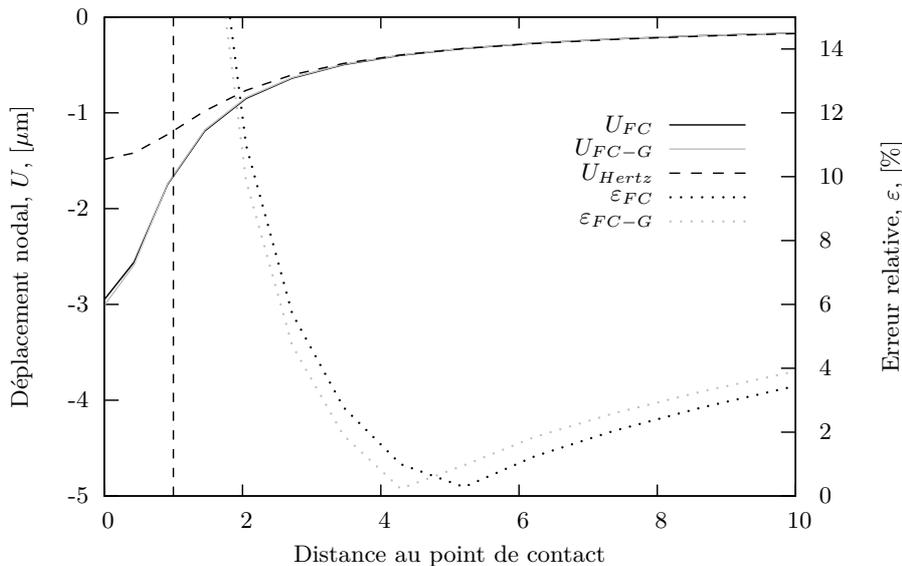


FIGURE 4.12 – Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

Le déplacement en profondeur (FIG. 4.12) montre le même comportement que les cas précédents : une augmentation de l'erreur sous la zone de contact. L'écart par rapport à la formulation analytique de Hertz est à 5% au delà de $3r_c$.

4.1.2.5 Trois forces concentrées

Le dernier cas de chargement, celui qui est proposé par Cavallaro [5], est l'utilisation de trois forces nodales.

Trois points d'application idéaux sont déterminés pour l'application de ces forces nodales. Ces trois points idéaux sont équirépartis et équidistants du centre de la zone de contact. La distance au point de contact est choisie empiriquement et égale à $3/4r_c$.

Si, sur un maillage donné, il n'y a pas de nœuds, nous appliquons sur les trois nœuds les plus proches (en surface) du point de contact des forces nodales. Ainsi, les trois forces nodales sont déterminées de manière à ce que leur résultante soit égale à la force de contact et qu'elles ne créent pas de moment autour du point de contact. Les points de chargement sont équirépartis autour du centre de la zone de contact et distant de la même

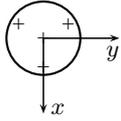


FIGURE 4.13 – Position des trois points de chargement.

longueur par rapport au point de contact. (FIG. 4.13). Les efforts nodaux à appliquer sont donc de normes identiques.

À proximité de la zone chargée, le cas étudié (FIG. 4.14) et le cas précédent où une seule force nodale est utilisée (FIG. 4.11) montrent des comportements similaires dans la zone de contact : les déplacements sont mal estimés. Il y a toujours peu de différence entre les résultats du maillage grossier et du maillage fin.

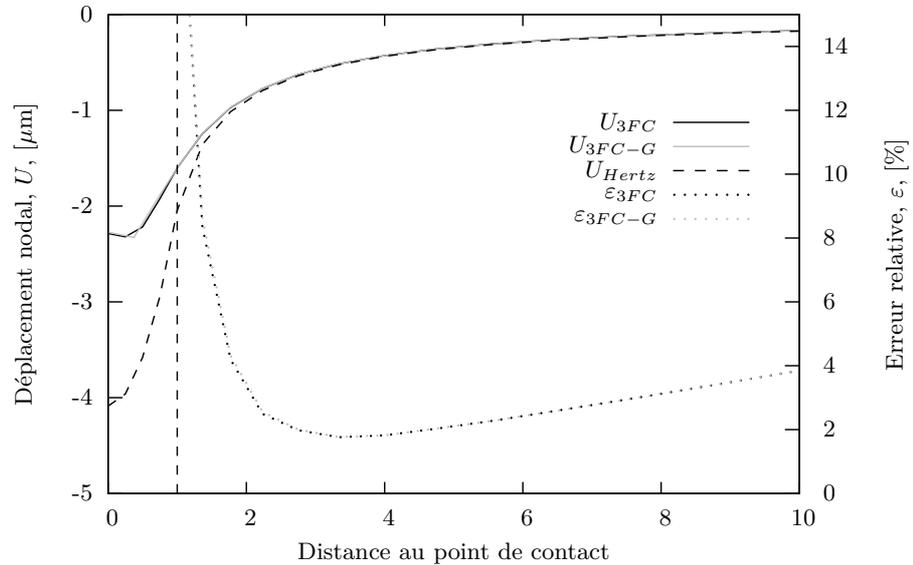


FIGURE 4.14 – Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

Les déplacements en profondeur (FIG. 4.15), montrent toujours le même comportement. Il n’y a pas de particularités sur ce cas de chargement.

La qualité de cette méthode dépend de la distance des forces nodales par rapport au centre de la zone de contact. En effet, plus les points sont rapprochés, plus ce cas de chargement s’apparente du cas d’une force nodale. Et plus ils sont éloignés, plus la singularité créée par les force nodales se rapproche de l’extérieur de la zone de contact. Empiriquement, une distance égale à $3/4r_c$ est un bon compromis.

Dans le tableau 4.1 se trouve l’ensemble des intervalles où l’erreur relative par rapport à la théorie de Hertz est inférieure à 5%. Ce qui permet d’amorcer une conclusion sur l’utilisation des différentes méthodes. Rappelons que l’utilisation d’éléments quadratiques influant sur la qualité des résultats, les éléments linéaires nécessitent de s’éloigner en moyenne de $3r_c$ pour avoir des erreurs inférieures à 8%.

Concernant les cas que nous venons d’étudier, il faut souligner que si l’on reste en surface et à l’extérieur de la zone de contact, toutes les méthodes ont des performances proches. Il est inutile de comparer au delà de $10r_c$, les bords de la bague et les billes voisines sont plus proches que cela. Le comportement en profondeur est plus mitigé avec des erreurs beaucoup plus élevées sous la zone de contact, il faut de plus s’éloigner, en moyenne, de $3r_c$ pour avoir des erreurs inférieures à 8%. Ainsi, les deux méthodes qui se dégagent à présent sont :

— la force concentrée, pour sa simplicité d’utilisation, et ses bonnes

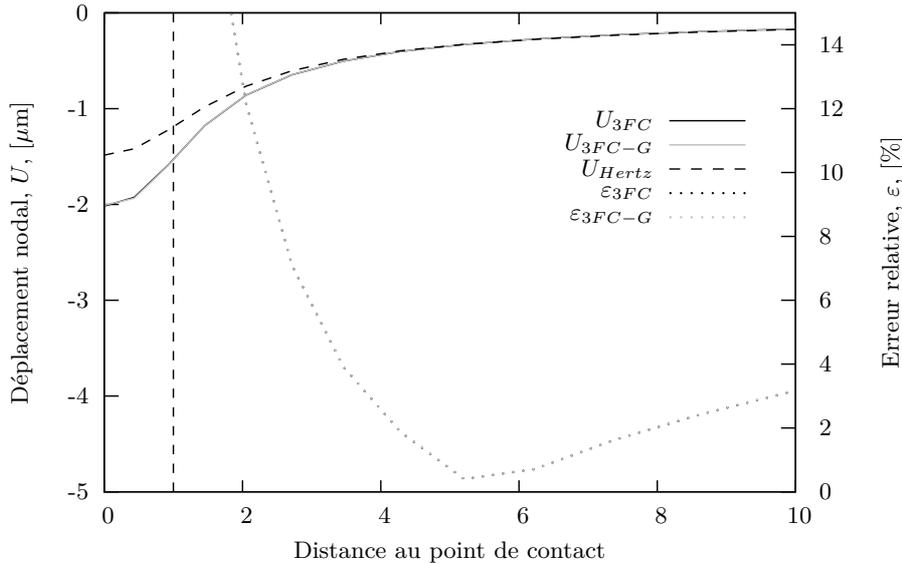


FIGURE 4.15 – Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.

performances ;

— et le cas trois forces concentrées pour sa souplesse vis à vis du maillage.

Position des points	Simulation multicorps	Pression distribuée	Pression moyenne	Force concentrée	3 forces concentrées
Surface	r_c	$1, 2r_c$	$1, 1r_c$	$2r_c$	$1, 5r_c$
r_c	$3, 5r_c$	$5, 5r_c$	$3r_c$	$2, 5r_c$	$3r_c$

TABLE 4.1 – Comparatif des distances à partir de laquelle l’erreur par rapport à la théorie de Hertz est inférieure à 5% dans le cas du maillage grossier.

4.1.3 Application au contact bille/bague

L’étude du contact bille/bague va porter sur la comparaison des différents chargements, et sur les différentes méthodes de sélection de nœuds pour le calcul de la conformité. Du fait de la perte de géométrie simple, la comparaison avec les déplacements analytiques ne sera pas effectuée, le cas de chargement par pression distribuée étant considéré comme notre cas de référence. Le manque de symétrie de révolution du chargement, nous imposant de choisir un plan pour l’étude des déplacements, nous utiliserons le plan de positionnement angulaire de la bille dans la bague.

Pour la simulation éléments finis, nous utilisons une géométrie de bague simple. Il n’y a pas, par exemple, d’orifices de lubrification. Les principales dimensions sont visibles sur la figure 4.19, la conformité initiale de la bague est $C_{ini} = 0,52$, le diamètre des billes est de $d_b = 8$ mm, et le diamètre intérieur de la bague est de 40 mm. En réalité, les dimensions utilisées ont peu d’importance car il s’agit d’un calcul linéaire.

Afin d’étudier les déplacements nodaux sous la surface de contact, trois surfaces de coupe (FIG. 4.19) sont positionnés aux profondeurs $1,9b$, $3,8b$ et $6,2b$, où b est le demi-petit axe de l’ellipse de contact.

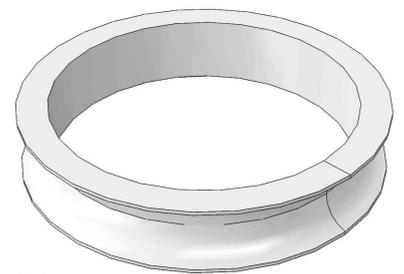


FIGURE 4.16 – Bague intérieure.

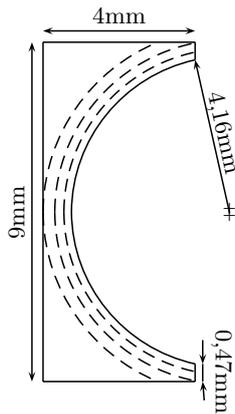


FIGURE 4.17 – Section de la bague avec les trois « plans » de coupe.

Pour simuler le phénomène d'ouverture de gorge, il faut placer la bille dans une position haute dans la gorge. Cependant, afin d'éviter de créer des déformations trop importantes, d'avoir une ellipse de contact trop proche du bord de la bague et de produire des interprétations de résultats difficiles, la bille sera placée dans une position intermédiaire : l'angle de contact est de 46° , l'angle de contact maximal est de 77° (point de contact hors de la bague).

La force normale de contact appliquée est $F = 500 \text{ N}$, pour une telle géométrie de contact, la théorie de Hertz prévoit un déplacement maximal de la surface de la bague de $\delta = 3,67 \mu\text{m}$. L'ellipse de contact possède un demi-grand axe $a = 1,05 \text{ mm}$ et un demi-petit axe $b = 0,12 \text{ mm}$.

4.1.3.1 Application des chargements

Pression distribuée L'application de la pression sur l'ellipse de contact nécessitant de mailler finement l'ellipse, l'utilisation d'éléments tétraédriques facilitera cette tâche. Et, comme nous l'avons déjà abordé (4.1.2.2 page 52), cette technique requiert une adaptation du maillage pour suivre le déplacement des billes calculé à chaque itération du schéma de Newton-Raphson.

Le maillage utilisé pour cette étude comprend une zone elliptique pour l'application du chargement (EQ. 4.1 et FIG. 4.18). Ce cas de chargement est noté Bpd.

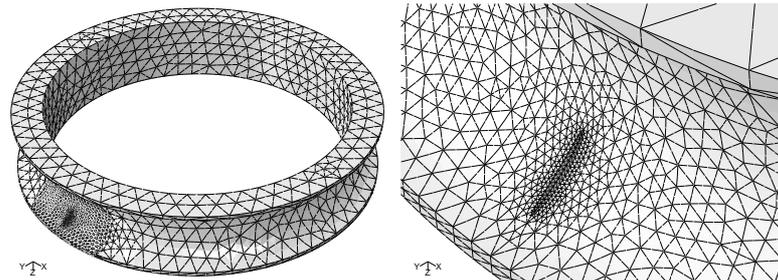


FIGURE 4.18 – Maillage de la bague intérieure, détail de la zone de contact. Utilisé pour les cas Bpd et Bpm.

Le déplacement normal maximal relevé sur la bague est de $4,1 \mu\text{m}$, ce qui est supérieur à celui estimé par la théorie de Hertz, l'écart relatif est de 10,5%. Cette différence s'explique par la présence d'un déplacement supplémentaire dû à la déformation structurelle de la bague. A noter que cette déformation n'était pas présente dans le cas du contact bille/plan.

Pression moyenne Pour l'étude du chargement type pression moyenne, nous utilisons le même maillage que pour la pression distribuée (FIG. 4.18). Les conditions aux limites sont identiques, seule la répartition de pression sur la surface de contact change. Ce cas de chargement est noté Bpm.

Force concentrée Comme dans le cas du plan, nous appliquons une unique force nodale au niveau du point de contact. Cette force est normale à la surface de contact et a pour norme $F_c = 500 \text{ N}$. Le maillage étant différent des deux cas précédents, il suffit de s'assurer de la présence d'un nœud au point de contact. Le maillage hors de la zone de contact est effectué pour avoir des tailles de mailles équivalentes aux deux cas précédents.

Trois forces concentrées Bien que le maillage Bpd pourrait être réutilisé pour ce cas, nous utilisons un maillage spécifique afin de positionner les points de chargement d'une manière similaire à ce qui a été fait pour l'étude du contact bille/plan (FIG. 4.1). De ce fait, les points ne sont pas répartis équitablement sur toute la surface de l'ellipse de contact. Les trois forces nodales sont déterminées de façon à ce que leur résultante soit égale à la force de contact à appliquer, et à ce qu'elles ne créent aucun moment autour du point de contact. Ce cas de chargement est noté B3f.

Trois forces réparties Les trois forces sont réparties sur trois rayons séparant l'ellipse en trois surfaces égales. L'une des forces, F_1 , est positionnée sur un plan angulaire de la bague vers l'intérieur de la bague. Les trois forces nodales sont réparties sur une ellipse réduite au $3/4$ de l'ellipse de contact. Les normes des trois forces F_1 , F_2 et F_3 sont égales, ce qui a pour avantage d'une part de respecter la distribution elliptique de la pression et, d'autre part, de ne pas créer de moment autour du point de contact. Ce cas de chargement est noté B3fr.

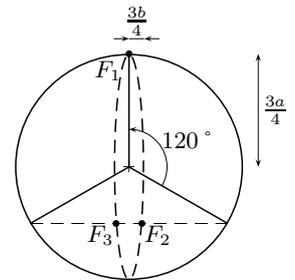


FIGURE 4.19 – Position des trois forces nodales dans le cas B3fr.

4.1.3.2 Déplacements nodaux

L'observation des déplacements nodaux (FIG. 4.20) montre une dissymétrie importante, il y a en effet un déplacement plus important sur le haut de la bague. La piste ne peut plus être considérée comme un tore à section circulaire, cependant, nous continuerons à faire cette approximation localement autour de chaque point de contact pour le calcul de conformité. Le fait de sélectionner des nœuds vers le haut ou vers le bas de la bague influera donc sur la conformité.

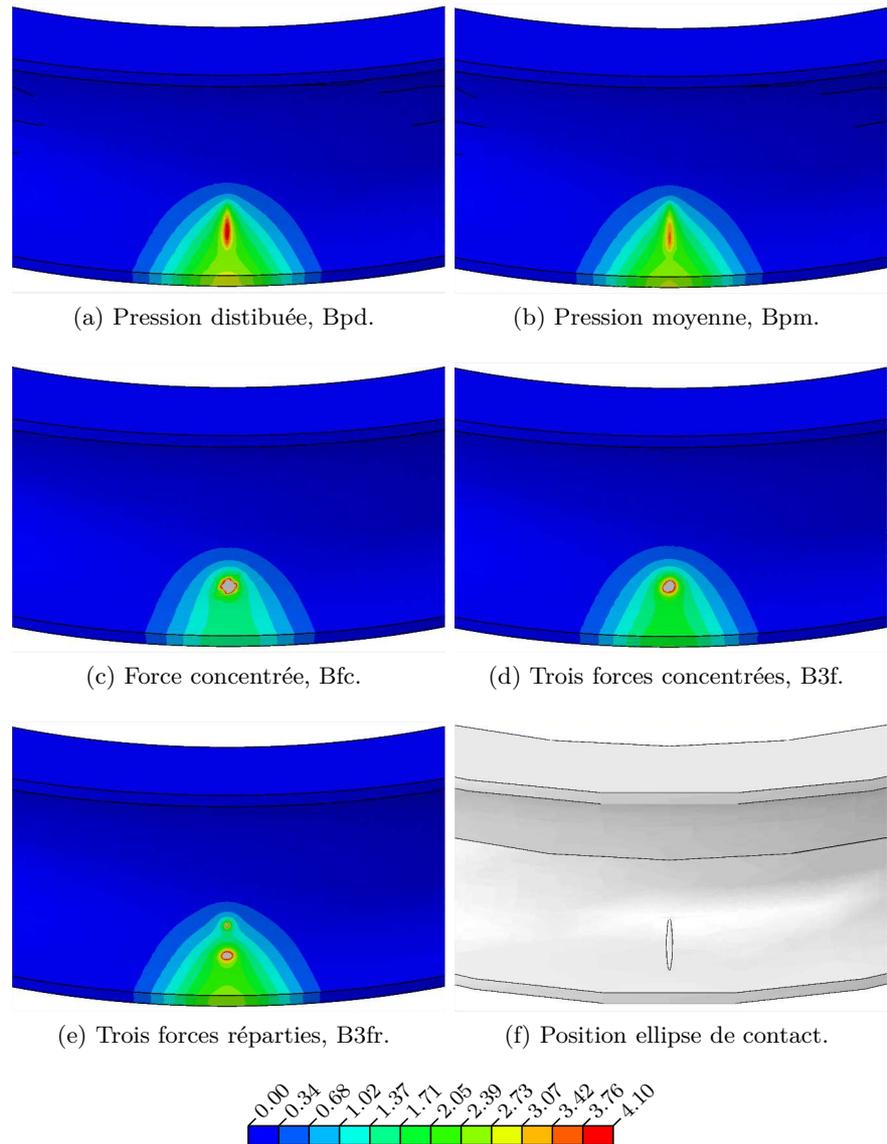


FIGURE 4.20 – Champs de déplacement nodal de la bague soumise aux différents chargements. Unité : μm .

La comparaison des enveloppes de déplacements, permet de faire un tri entre les cas de chargements. Le cas Bpd est le cas présentant les déplacements les plus importants sur le bord extérieur. Il est important de pouvoir approcher au mieux ces déplacements car ce sont ceux qui auront le plus d'influence sur le calcul de la conformité. Les cas Bfc et B3f ne possèdent pas la même allure de champ de déplacement que le cas Bpd. En effet, les

forces nodales étant proches du point de contact et donc éloignées du bord de la bague, ce positionnement ne favorise pas l'ouverture de gorge. Le principal inconvénient de la méthode B3f est que la sélection des trois nœuds les plus proches du point de contact tend à concentrer les déplacements au centre de l'ellipse de contact. Ceci est lié au maillage utilisé qui, ici, est relativement fin contrairement à celui de Cavallaro. Pour améliorer ce cas, il faudrait mieux répartir les forces nodales, et notamment vers l'extérieur de la bague. C'est l'objectif du cas B3fr qui, en éloignant les forces du point de contact et en les rapprochant des bords des bagues, permet de mieux représenter les déplacements de la bague. La méthode B3fr nécessite de positionner des nœuds du maillage aux endroits appropriés, et donc d'adapter le maillage aux déplacements de la bille. Cependant, pour éviter de remailler la bague et, tout en assurant une bonne répartition des forces nodales sur l'ellipse de contact, nous proposons de mailler finement la zone possible du point de contact et de sélectionner les points les plus proches des points « idéaux » de la méthode B3fr.

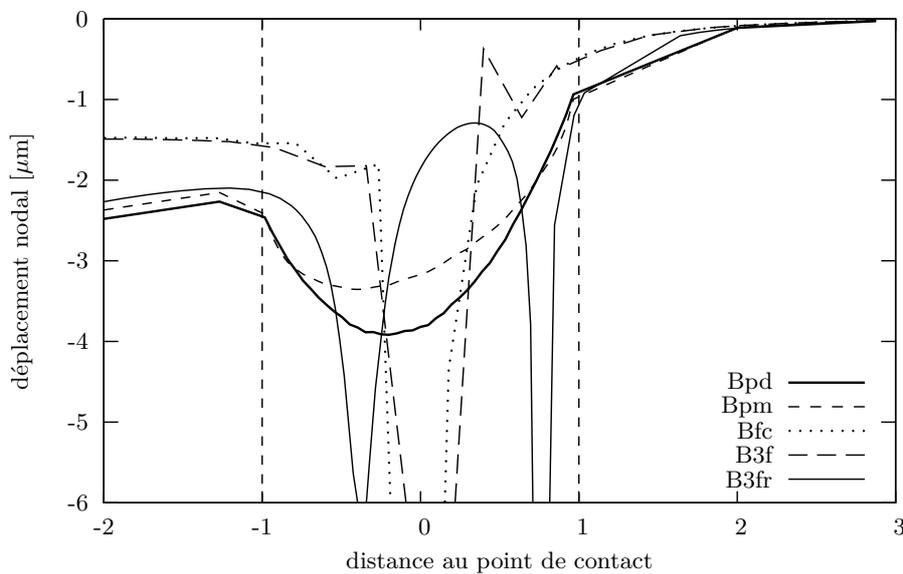


FIGURE 4.21 – Déplacement nodal selon l'axe z de la surface de la bague dans le repère local au point de contact pour différents cas de chargement, en fonction de la position sur l'axe x . La distance est adimensionnée par rapport au demi grand axe de l'ellipse de contact.

L'observation quantitative des déplacements nodaux (FIG. 4.21) à la surface de la piste confirme les observations effectuées sur les champs de déplacements. La proximité des cas Bpd et Bpm est conservée en dehors de la zone de contact, et les déplacements de Bpm sont sous-estimés dans l'ellipse de contact. L'erreur relative de Bpm par rapport à Bpd dans la région $[-2a; -a]$ est de 7%, ce qui est conforme à ce qui a été observé dans le cas du contact bille/plan. Les cas Bfc et B3f sont incapables de modéliser les déplacements, les erreurs relatives par rapport à Bpd étant de 40% dans la zone $[-2a; -a]$. En prenant en compte le déplacement structurel de la bague, cette valeur reste compatible avec celle qui était atteinte dans le cas du contact bille/plan P3fc (FIG. 4.6).

Nous constatons que le cas B3fr possède un écart relatif de 8,5% par rapport à Bpd dans l'intervalle $[-2a; a]$, ce qui est satisfaisant. Cependant,

l'écart relatif atteint 60% vers l'intérieur de la bague à $1,6a$. Si l'on souhaite utiliser cette méthode, il faut privilégier l'utilisation des points à l'extérieur de la bague.

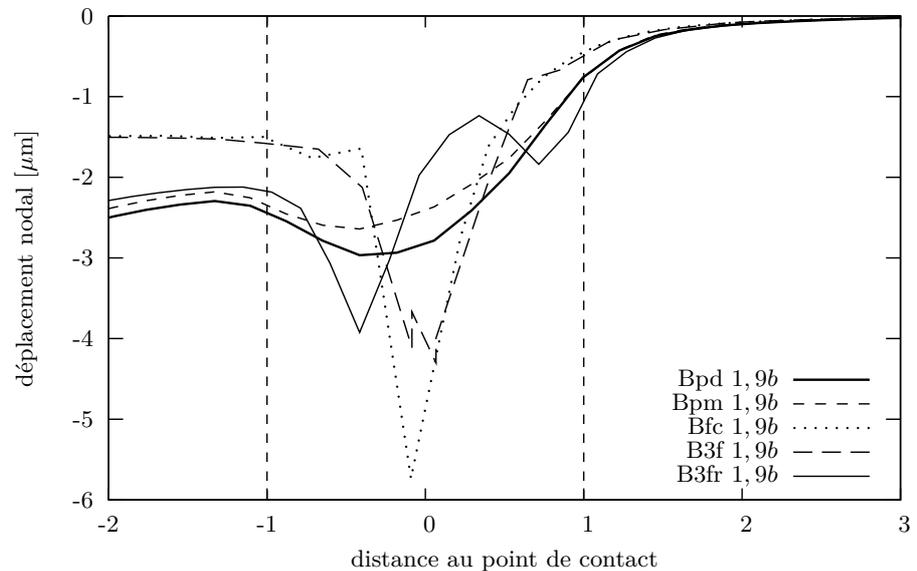


FIGURE 4.22 – Déplacement nodal selon l'axe z à une profondeur de $1,9b$ dans le repère local au point de contact.

Les déplacements en profondeur (FIG. 4.22 et 4.23) montrent une atténuation des différences entre les cas de chargements. À la profondeur $1,9b$ (FIG. 4.22), une amélioration significative des estimations des déplacements est observée dans la zone $[1,5a; 3a]$ où l'écart relatif entre les différentes méthodes est inférieur à 10% par rapport au cas Bpd. En étudiant les déplacements encore plus profondément sous le contact (FIG. 4.23), il n'y a plus d'amélioration de l'écart relatif. De plus, d'un point de vue pratique, plus on s'éloigne en profondeur, moins on a de points à disposition pour l'approximation torique (FIG. 4.19 en page 61).

Ainsi, pour conclure sur le choix de la méthode d'application des forces de contact sur le maillage, la méthode qui remplit le mieux notre cahier des charges est la méthode B3fr. En veillant cependant à sélectionner des points en dehors de la zone de contact (au delà de $1,5a$) et en profondeur, ($2b$ s'avère être suffisant).

4.2 Calcul de la nouvelle géométrie des bagues

4.2.1 Voisinage du point de contact

Les déplacements obtenus par éléments finis étant les déplacements totaux de la bague, il faut dans un premier temps obtenir le déplacement structurel de la bague. Nous avons fait l'hypothèse que le déplacement total est la somme du déplacement structurel et du déplacement de Hertz. Ainsi dans un premier temps, nous retranchons au déplacement total, le déplacement causé par le contact Hertzien obtenu de manière analytique par l'équation 4.3.

Nous pouvons maintenant définir le voisinage de la surface de la piste qui sera utilisé pour le calcul de la nouvelle géométrie. Rappelons que la

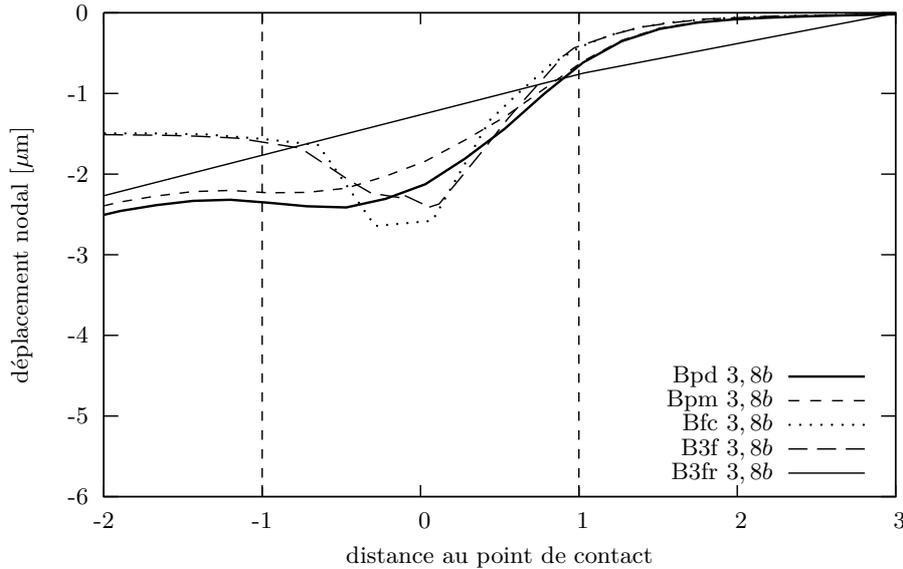


FIGURE 4.23 – Déplacement nodal selon l'axe z à une profondeur de $3,8b$ dans le repère local au point de contact.

surface à l'intérieur n'est pas utilisée. Les points proches de la surface de contact possédant des déplacements plus élevés (4.20 en page 62), la géométrie calculée à partir de ces points sera donc différente de celle initiale. Les points éloignés de la surface de contact possédant des déplacements faibles, la géométrie estimée à partir de ces points sera donc proche de celle initiale du roulement. Cependant, en s'éloignant de la zone de contact, nous nous rapprochons de la zone d'influence du contact de la bille voisine. Nous devons donc trouver un compromis entre tous ces paramètres.

Nous comparons trois méthodes pour sélectionner les points autour de la zone de sélection :

Disque : surface définie par un rayon interne et un rayon externe. L'ensemble des points entre ces deux limites sont sélectionnés. Cette technique permet de sélectionner des points au sommet de la bague, là où les déplacements sont les plus élevés. Mais également de sélectionner des points plus éloignés, latéralement à l'ellipse de contact. Cette technique possède donc une gamme large de déplacements et de lieux de sélection. Lors d'angle de contact très élevés ou très faibles, cette zone est susceptible d'être tronquée et de ne plus conserver sa géométrie circulaire.

Secteur angulaire : deux rectangles identiques encadrant l'ellipse de contact selon son grand axe. Cette technique permet de sélectionner des déplacements proches de l'ellipse de contact, mais ne permet pas de sélectionner les forts déplacements au sommet de la bague.

Secteur transversal : deux rectangles identiques mais encadrant l'ellipse de contact selon son petit axe. Elle permet de sélectionner les forts déplacements en haut des bagues et les faibles déplacements en bas des bagues. De manière similaire au cas de sélection par disque, cette zone sera tronquée dans le cas d'angle de contact élevés ou très faibles.

Dans la partie précédente, 4.1, nous avons établi des limites à partir

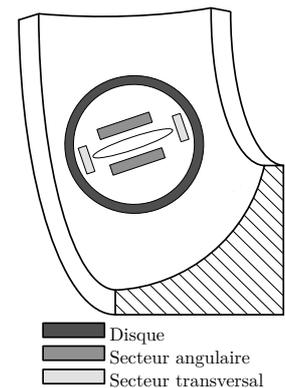


FIGURE 4.24 – Définition des zones de sélection.

desquelles les déplacements estimés par éléments finis correspondent à celles du contact d'une bille sur une bague. Nous devons donc prendre en compte ces limites pour le choix des dimensions de ces différentes géométries de zone de sélection.

4.2.2 Conformités et déplacements des centres de courbure

4.2.2.1 Déplacement structurel

Afin de trouver les déplacements dus à la déformation structurelle de la bague, il faut retrancher au déplacement total le déplacement analytique du contact du massif infini. En effet, nous considérons que le déplacement total se décompose en deux parties distinctes :

- le déplacement créé par le contact.
- le déplacement créé par la déformation structurelle de la bague.

C'est la déformée structurelle qu'il faut utiliser pour le calcul de conformité.

4.2.2.2 Approximation de la nouvelle géométrie

Nous rappelons que nous faisons l'hypothèse que localement, à chacun des points de contact, la piste est considérée comme un tore. Pour introduire la nouvelle géométrie dans les équations géométriques, nous devons calculer les déplacements des centres de courbure et la nouvelle conformité. Pour aboutir à ces grandeurs, nous proposons plusieurs méthodes :

Approximation torique : la position des points sélectionnés est approximée par un tore à l'aide de la méthode des moindres carrés. Les paramètres variables de cette technique sont la position du centre de courbure et la conformité.

Approximation torique simplifiée : cette technique est similaire à la précédente mais la conformité n'est plus variable et reste égale à celle initiale.

Déplacement moyen : au lieu d'effectuer une approximation torique simplifiée, nous proposons de considérer que les déplacements du centre de courbures sont représenté simplement par le déplacement moyen des points sélectionnés.

4.2.3 Résultats préliminaires

Nous revenons maintenant sur le cas de étudié dans la partie 4.1.3. Nous commençons par étudier la conformité calculée à partir des nœuds en surface de la bague, et nous étudions les trois méthodes de sélections présentées précédemment. Pour une géométrie de sélection donnée, en nous éloignant de l'ellipse de contact, nous nous attendons à retrouver la conformité initiale de la piste. Et dans une zone très proche de la zone de contact les surfaces sont aplanies ce qui correspond à une conformité plus élevée que celle initiale. Pour retrouver cette tendance, nous traçons l'évolution de la conformité calculée par une sélection en disque en fonction de la distance maximale de sélection (FIG. 4.25). Nous observons que la conformité décroît vers la conformité initiale.

Nous comparons dans la suite la conformité (TAB. 4.2) calculée à partir des résultats de Bpd et B3fr. Dans ces cas nous utilisons les trois méthodes de sélection en surface et en profondeur 1, 9b. Comme la bague modélisée est

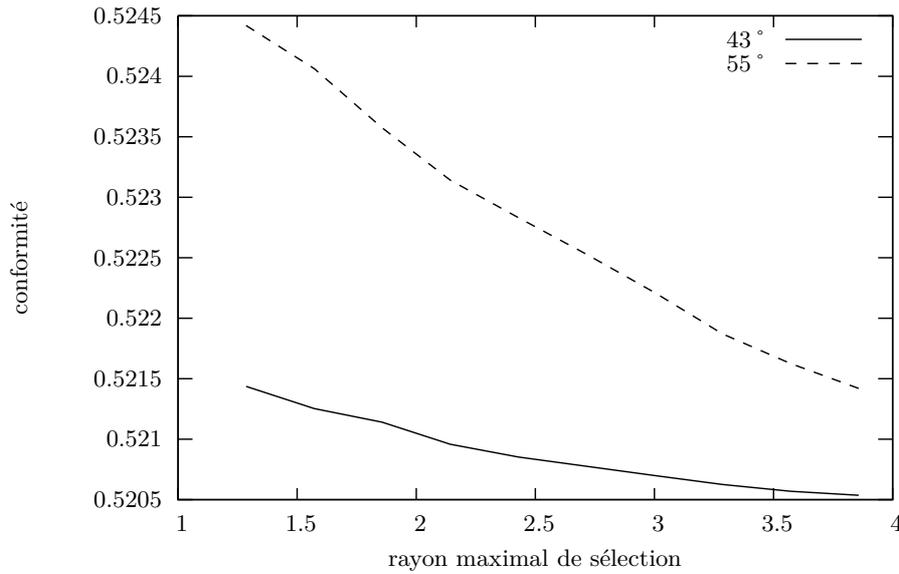


FIGURE 4.25 – Conformité calculée à partir d’une sélection par disque en fonction du rayon maximal de la zone de sélection pour deux angles de contacts. $r_{min} = a$ et r_{max} varie entre $1.2a$ et $3.8a$.

		disque	secteur angulaire	secteur transversal
Bpd	surf.	0,52125	0,52068	0,52150
	prof.	0,52151	0,51946 ⁽¹⁾	0,52099
B3fr	surf.	0,52121	0,52054	0,54304 ⁽²⁾
	prof.	0,52135	0,52005 ⁽¹⁾	0,53559 ⁽²⁾

TABLE 4.2 – Conformité calculée à partir de la déformée de la bague en surface ou à la profondeur $1,9b$. (1) Seul quatre points sont sélectionnés pour le calcul. (2) Résultats faussés.

encastrée sur la face intérieure, nous utilisons la méthode d’approximation torique simplifiée.

Les paramètres pour la sélection des points sont les suivants :

- disque : rayon minimal a , rayon maximal $1,5a$.
- secteur angulaire : éloignement minimal a , éloignement maximal $1,5a$, largeur b .
- secteur transversal : éloignement minimal b , éloignement maximal $2b$, largeur a .

Dans les résultats présentés dans les tableaux 4.2 et 4.3, certains sont à étudier avec réserve. Les résultats marqués (1) sont calculés à partir de quatre nœuds (pour rappel il faut au moins trois points pour l’approximation torique). Les résultats marqués (2) sont faussés à cause de la zone de sélection qui empiète sur une région où les déplacements sont surestimés. Cela permet de poser les limites de cette méthode.

Dans les cas Bpd et B3fr, les méthodes utilisées montrent une augmentation de la conformité ($C_{ini} = 0,52$), ce qui était attendu. Cavallaro [5] utilise une sélection par secteur angulaire et obtient une diminution de la conformité. Cependant, pour l’approximation torique, il utilise les déplacements en surface non corrigés par les déplacements dus aux contact. Malgré une

		disque	secteur angulaire	secteur transversal
Déplacement axial en μm				
Bpd	surf.	9,16	6,10	11,31
	prof.	10,67	-0,95 ⁽¹⁾	8,36
B3fr	surf.	8,72	4,79	138 ⁽²⁾
	prof.	9,56	2,13 ⁽¹⁾	92 ⁽²⁾
Déplacement radial en μm				
Bpd	surf.	-4,81	-1,07	-5,12
	prof.	-6,28	6,51 ⁽¹⁾	-2,02
B3fr	surf.	-4,82	-0,51	-127,6 ⁽²⁾
	prof.	-5,58	2,47 ⁽¹⁾	-83,42 ⁽²⁾

TABLE 4.3 – Déplacements du centre de courbure calculés à partir de la déformée de la bague en surface ou à la profondeur 1,9*b*. (1) Seul quatre points sont sélectionnés pour le calcul. (2) Résultats faussés.

position intermédiaire du point de contact et une bague relativement peu épaisse, les changements de conformité que nous observons sont très faibles : inférieure au pourcent. À titre d'exemple, le passage de 0,52 à 0,52125 de la conformité fait évoluer le déplacement maximal au centre de l'ellipse de $3,67\mu\text{m}$ à $3,73\mu\text{m}$: un changement de 1,4%. La conformité possédant une grande influence sur les paramètres du contact, ces légères variations sont donc à prendre en compte.

Sur le chargement de référence Bpd, nous observons une conformité similaire quelle que soit la méthode de sélection, mis à part le cas (1). Il est important de comparer les différences entre Bpd et B3fr. Les résultats de sélection par disque coïncidant entre ces deux chargements, en surface et en profondeur, cette méthode est donc la plus stable de ce point de vue. Ceci nous conforte dans le choix de B3fr pour l'application du chargement.

Les déplacements axiaux (selon l'axe de la bague) et radiaux (selon un rayon de la bague) montrent plus de dispersion dans les valeurs que les changements de conformité.

Le cas Bpd montre toutefois des déplacements du même ordre de grandeur pour les différents tests effectués. Là encore la sélection par disque est très stable : il y a peu d'écart entre Bpd et B3fr, en profondeur ou en surface.

Ces différents calculs étant réalisés avec l'approximation torique simplifiée, les conditions aux limites appliqués sur la bague (encastrement de la face intérieure) n'impliquent pas de rotation.

L'approximation torique complète possède en outre une convergence plus lente surtout dans le cas où les points sont très rapprochés (sélection par secteur angulaire).

La sélection par disque semble à l'heure actuelle la mieux adaptée pour le calcul de conformité. Cette méthode sélectionne des points proches de l'ellipse de contact dans le plan angulaire (bonne approximation de la conformité) et des points plus éloignés dans le sens transversal (bonne approximation du déplacement du centre de courbure).

Le cas introductif du contact bille/plan a été utilisé pour choisir les éléments finis à utiliser. Les éléments tétraédriques quadratiques (C3D10) représentent un bon compromis car ils montrent une souplesse d'utilisation, et

donnent de bons résultats. Ceci est particulièrement vrai lors de l'utilisation de forces nodales concentrées. Dans ce cas, l'utilisation d'éléments quadratiques permet d'éviter l'usage d'un maillage fin qui, par contre, est nécessaire avec des éléments linéaires (C3D8 ou C3D4). L'étude du contact bille/plan ne permet pas de dégager de conclusion certaine sur le choix d'application des efforts de contact, les méthodes comparées montrant des résultats satisfaisants à l'extérieur de la zone de contact, dans l'intervalle $[a; 5a]$. L'étude en profondeur montre une augmentation importante de l'erreur à proximité de la zone chargée, dans l'intervalle $[0; 2, 5a]$.

Il faut comparer ces chargements en les appliquant sur la bague pour constater leurs principaux défauts. En effet, les cas où l'on applique des forces concentrées proches du point de contact montrent une sous-estimation des déplacements sur l'extérieur de la bague. Cette observation nous a incité à mieux répartir les forces, en les éloignant du point de contact et en les rapprochant des extrémités de l'ellipse de contact. Ceci a pour effet une meilleure approximation des déplacements. Pour s'affranchir d'un re-maillage, et suivre le mouvement des points de contact, il suffit de mailler plus finement la zone probable de positionnement de ces points. Et au lieu de rechercher les points les plus proches du point de contact, nous recherchons les points les plus proches de ces points idéaux.

Le calcul de conformité montre une dispersion des résultats plus élevée. Cependant, la méthode de sélection par sphère semble avantageuse car elle donne des résultats similaires, que l'on ait sélectionné des points en surface ou en profondeur, sur le cas Bpd (référence) ou B3fr, avec la méthode d'approximation simplifiée ou avec la méthode d'approximation complète. Les résultats de cette méthode montrent en outre des résultats conformes avec ceux qui étaient attendus.

4.3 Cartographie de la nouvelle géométrie

Considérons le cas d'une bille en contact sur une bague, en n'appliquant sur la bille qu'un effort normal de contact. Pour des conditions aux limites fixées, l'état de déformation de la bague n'est alors paramétré que par la position de la bille sur la piste (c'est à dire l'angle de contact) et l'effort normal appliqué. Or, pour calculer la nouvelle conformité de la bague et le déplacement du centre de courbure, les seuls renseignements nécessaires sont les déplacements à la surface de la piste au voisinage du contact. Donc la conformité et le déplacement du centre de courbure ne dépendent que de l'angle de contact et de l'effort normal.

D'une part l'étude de cette évolution permet de mieux appréhender le comportement global de la bague, et de mettre en évidence les zones dans lesquelles il est judicieux de prendre en compte l'évolution de ces paramètres. D'autre part, cette étude permettra éventuellement de dégager une similitude, d'une géométrie de bague à l'autre, dans l'évolution de la conformité et du déplacement du centre de courbure.

4.3.1 Présentation du calcul

Les calculs que nous effectuons ici, sont totalement découplés de notre modèle semi analytique, il ne s'agit finalement que de l'étude du contact d'une bille et d'une bague.

4.3.1.1 Déroulement des calculs

Pour pouvoir effectuer une représentation de la conformité en fonction de l'angle de contact et de l'effort normal, le principe est simplement d'effectuer un certain nombre de calculs pour différentes valeurs d'angles et de force normale. À l'issue de chacun de ces calculs nous déterminons la conformité et le déplacement du centre de courbure.

Données d'entrée - Pour pouvoir effectuer une représentation, il faut se fixer la géométrie de la bague, la portion d'arbre modélisée, les conditions aux limites et les bornes pour le chargement.

Calcul éléments finis - Pour chacun des cas de chargement, une procédure détermine les dimensions de la zone de contact. Le maillage de la bague est alors construit pour s'adapter au mieux à la zone de contact. Le chargement utilisé correspond à une répartition de pression sur la zone de contact. Il n'y a pas de simulation multi-corps. Cette répartition de pression est déterminée par la théorie de Hertz. Le calcul effectué est un calcul linéaire élastique.

Calcul de la géométrie - À l'issue de chaque calcul éléments finis, et à partir des déplacements à la surface de la piste, la nouvelle conformité et le déplacement des centres de courbures sont calculés.

Nous vérifions de plus un contrôle de la troncature des ellipses de contact. Aucun calcul éléments finis n'est effectué si l'ellipse de contact est tronquée en haut ou en bas de la piste de roulement. Dans ce cas la théorie de Hertz n'est pas applicable, le calcul et les résultats sur la conformité n'auraient aucun sens. De plus cette situation correspond à des conditions de fonctionnement dégradées du roulement, qui font apparaître des problèmes plus importants qu'un changement de conformité. Ainsi, la procédure utilisée pour ces calculs est la suivante :

Algorithme 1

```

lire géométrie, chargements, options
pour chaque chargement faire
  pour chaque bague faire
    calculer géométrie ellipse de contact
    si pas de troncature d'ellipse alors
      créer maillage
      effectuer calcul EF
      lire déplacements
      calculer conformité
      calculer déplacement centre de courbure
    fin si
  fin pour
fin pour

```

4.3.2 Cas du roulement R_{20}^{10}

Il s'agit d'un cas d'étude simplifié se rapprochant de la géométrie réelle de roulements à billes. Nous traitons premièrement le cas d'une bague mince

(en largeur) afin de clairement distinguer les phénomènes mis en jeu.

4.3.2.1 Validation du maillage

Comme il a été expliqué précédemment, nous utilisons une répartition de pression sur la surface de contact. Pour traiter le cas du contact hertzien, la documentation Abaqus [1] nous fournit quelques pistes pour le type et la taille des éléments. Il est recommandé d'utiliser quatre éléments selon un rayon de la surface de contact, et d'utiliser des éléments quadratiques. Nous utilisons des éléments tétraédriques quadratiques : C3D10. En notant b le demi grand axe de l'ellipse, les éléments à la surface de la zone de contact ont une dimension de $b/4$. Dans la profondeur de la zone de contact nous utilisons également cette taille sur au moins deux couches d'éléments.

Nous allons ici justifier la taille des éléments utilisés pour tout le maillage. Pour cela nous allons effectuer un calcul avec le maillage tel que nous venons de le décrire, puis avec des tétraèdres deux fois plus petits (en volume). Nous comparerons ensuite les résultats sur le calcul de la conformité et du déplacement du centre de courbure. Si il n'y a aucune différence, cela justifiera la taille des éléments employés.

maillage	nb nœuds	nb éléments	nb éléments contact
normal	48 000	30 000	1 000
fin	105 000	68 000	1 700

TABLE 4.4 – Comparatif du maillage normal et maillage fin. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10} .

Le calcul effectué correspond à une charge normale de 500 N avec un angle de contact de 30° . Il s'agit maintenant de comparer, en terme de résultats les deux maillages :

maillage	conformité	déplacement	déplacement	déplacement
		C_c axial [mm]	C_c radial [mm]	centre contact [mm]
normal	0,5124668	$0,68341e^{-3}$	$0,61620e^{-3}$	$0,46389e^{-2}$
fin	0,5124647	$0,72102e^{-3}$	$0,65799e^{-3}$	$0,46552e^{-2}$
écart	$1,7e^{-4}\%$	5,2 %	6,3 %	0,35 %

TABLE 4.5 – Comparatif de résultats entre maillage fin et maillage normal. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10} .

Le déplacement nodal au centre de la zone de contact ne varie que 0,35 % entre les deux maillages. Cet écart a tendance à être atténué par le calcul de conformité. Cependant, nous observons que le calcul des déplacements du centre de courbure possède une grande sensibilité sur les déplacement nodaux : l'écart entre les deux maillages croît jusqu'à 6 %. Cependant, plutôt que d'utiliser le maillage fin (trop coûteux) il nous semble judicieux de diminuer la sensibilité du calcul de déplacement de centre de courbure. Nous utiliserons donc par la suite le maillage normal.

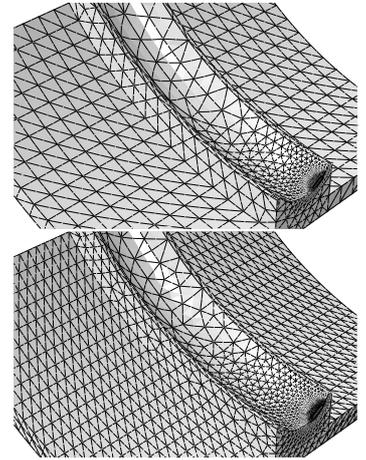


FIGURE 4.26 – Maillages normal et fin de R_{20}^{10} .

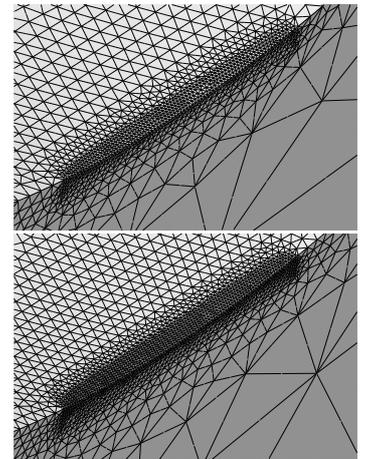


FIGURE 4.27 – Maillages normal et fin de R_{20}^{10} , détail de la zone de contact.

4.3.2.2 Validation portion angulaire

Nous allons justifier ici la taille de la portion angulaire choisie pour la modélisation.

Les conditions aux limites appliquées sont :

- encastrement aux extrémités de l'arbre
- pas de déplacement normal sur les surfaces latérales de l'arbre et du roulement

Pour valider la dimension angulaire, nous prendrons pour référence une bague complète, puis nous utiliserons le plus petit angle qui permette d'obtenir des résultats similaires.

maillage	conformité	déplacement	déplacement	déplacement
		C_c axial [mm]	C_c radial [mm]	centre contact [mm]
70°	0,5124605	$0,79115e^{-3}$	$0,56508e^{-4}$	$0,40443e^{-2}$
90°	0,5124675	$0,68925e^{-3}$	$0,42888e^{-3}$	$0,44834e^{-2}$
100°	0,5124668	$0,68341e^{-3}$	$0,61620e^{-3}$	$0,46389e^{-2}$
110°	0,5124664	$0,68099e^{-3}$	$0,71565e^{-3}$	$0,47192e^{-2}$
120°	0,5124645	$0,51246e^{-3}$	$0,69384e^{-3}$	$0,76948e^{-3}$
360°	0,5124629	$0,70973e^{-3}$	$0,66054e^{-3}$	$0,46101e^{-2}$

TABLE 4.6 – Comparatif des résultats entre différentes tailles de portion angulaire. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10} .

Ainsi, utiliser une portion angulaire de 100° s'avère être un bon compromis. Pour cette valeur, nous avons un écart relatif (par rapport à une bague complète) inférieur à 1% pour la conformité et pour le déplacement au centre du contact, de 3,7% pour le déplacement axial et 6,7% pour le déplacement radial.

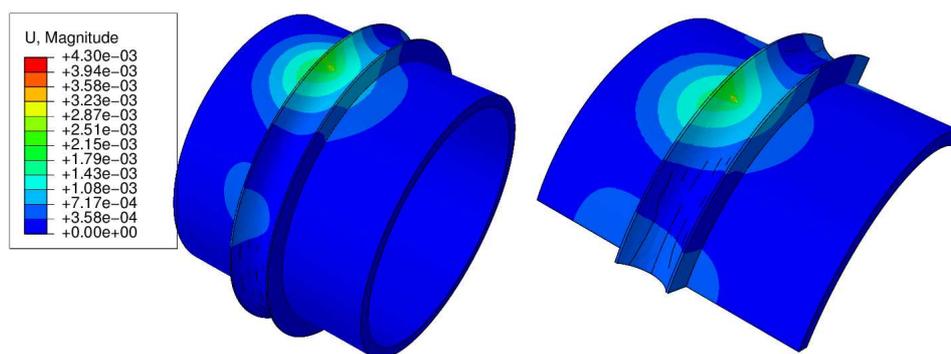


FIGURE 4.28 – Comparaison déplacements pour une bague complète et une portion angulaire de 100°.

L'angle de 100° possède une signification physique particulière. En effet, en observant le champ de déplacement à l'issue du calcul élément fini, pour la bague complète, nous constatons la présence de deux zones de déplacements non nuls. Ces deux zones sont situées à environ 50° de part et d'autre du point de contact. En doublant la force de contact, la position de ces deux zones n'évolue pas significativement. Nous considérons donc que la portion angulaire de 100° peut être utilisée pour l'ensemble des chargements admissibles (cf sect. 4.3.2.3) pour cette géométrie.

4.3.2.3 Enveloppe de chargement

L'ensemble des chargements utilisés pour le calcul de la cartographie de la conformité répond à plusieurs critères :

- absence de troncature de l'ellipse de contact au sommet de la bague. Cette situation est la plus dangereuse pour la durée de vie du roulement.
- absence de troncature dans le fond de la gorge. Dans un roulement à quatre points de contact, les pistes gauche et droite forment une arche. Il y a continuité de type C^0 mais pas C^1 . Donc si l'ellipse de contact est à la fois sur la piste gauche et la piste droite, les hypothèses du contact hertzien n'étant plus vérifiées, le calcul réalisé ici n'a plus de sens. Notons que les pistes intérieures gauche et droite de R_S ne sont pas continues (deux demi bagues).
- pression maximale au centre de l'ellipse de contact inférieure à $1,8 GPa$

Ces trois critères correspondent aux conditions de fonctionnement normales. Il est possible de déterminer la pression maximale en fonction des dimensions de la zone de contact et de la force normale :

$$P_{h \max} = \frac{3F_c}{2\pi ab} \quad (4.7)$$

Ces critères permettent de tracer l'enveloppe de chargement pour une géométrie de roulement donnée. Nous observons (fig. 4.29 et 4.30) que la zone de chargement admissible est délimitée par les trois zones correspondants aux critères que nous venons de définir.

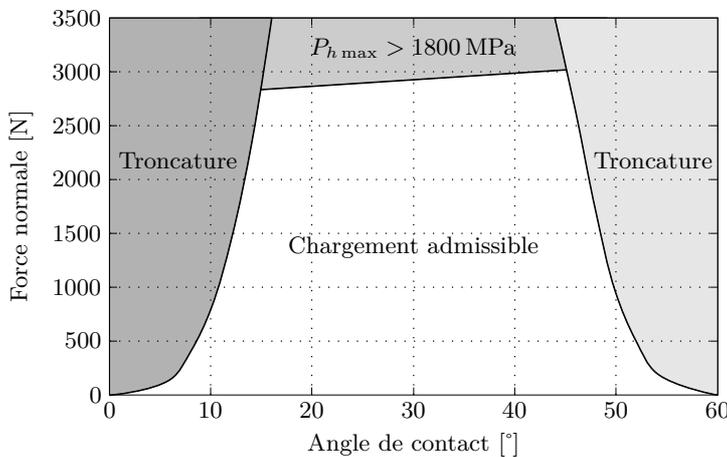
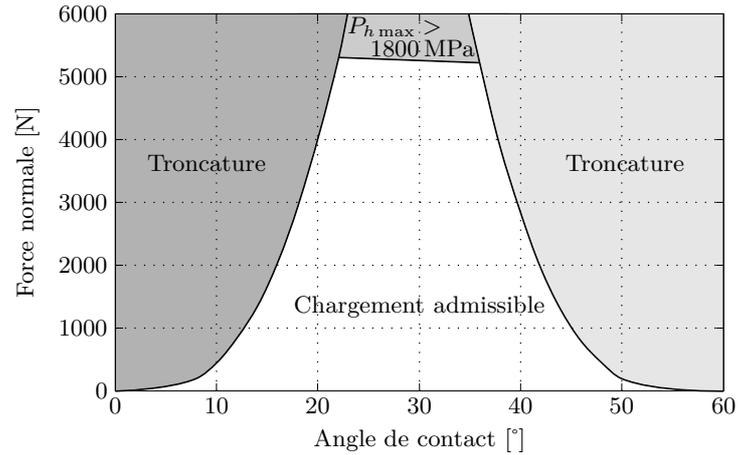


FIGURE 4.29 – Enveloppe de chargement bague intérieure R_{20}^{10} .

La cartographie de la conformité et du déplacement du centre de courbure sera effectuée sur le domaine des chargements admissibles. La limite sur la pression maximale peut être modifiée. Mais les limites correspondant aux troncatures ne peuvent pas l'être, car le calcul réalisé ainsi n'aurait plus de sens (contact non hertzien). Notons un point qu'il est difficile de visualiser sur les courbes : les pistes intérieures et extérieures ne sont pas symétriques par rapport au diamètre moyen, d_m , du roulement. L'angle de contact, α_c , maximal est de 60° pour la bague intérieure et de 57° pour la bague extérieure.

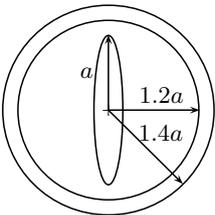
FIGURE 4.30 – Enveloppe de chargement bague extérieure R_{20}^{10} .

4.3.2.4 Résultat cartographique

Il s'agit maintenant d'effectuer quelques calculs pour obtenir la représentation de la conformité et du déplacement du centre de courbure en fonction de l'angle de contact et de la force normale. Comme chaque fois que nous effectuons ce type de calculs, il nous faut choisir une zone de sélection pour l'approximation torique. Nous commencerons par utiliser une zone de sélection par disque (fig. 4.31). Il est possible d'utiliser l'approximation torique sans tenir compte des déplacements de la piste pour déterminer la précision de l'opération. Pour cette bague, et pour cette zone de sélection la précision relative sur la conformité est inférieure à $1e^{-3}\%$ et la précision absolue sur la position du centre de courbure est de $0,13\mu\text{m}$ (cf TAB. 4.7).

Les points sélectionnés sont ceux dont la distance au centre du contact est comprise entre $1.2a$ et $1.4a$, avec a le demi grand axe de l'ellipse de contact. Nous étudierons plus loin une autre méthode de sélection.

	f_i [-]	δ_i^a [μm]	δ_i^r [μm]
écart absolu	$6,7e^{-5}$	0,05	0,13

TABLE 4.7 – Ecart absolu maximum de l'approximation torique, bague intérieure R_{20}^{10} , sélection par disqueFIGURE 4.31 – Sélection par disque R_{20}^{10} .

Conformité Nous effectuons donc le calcul avec la géométrie du R_{20}^{10} . L'angle de contact varie de 2° à 60° avec un pas de 2° . La force normale varie de 100 N à 3100 N avec un pas de 100 N.

Sur la figure 4.32, nous observons l'évolution de la conformité en fonction de l'effort normal pour un angle de contact donné, pour la bague intérieure. Dans un premier temps, nous observons une augmentation de la conformité quel que soit l'angle de contact : le rayon de la piste de roulement augmente. Cette augmentation est d'autant plus grande que l'angle de contact et la force normale sont élevés.

Sur la figure 4.32, est représentée la tolérance sur la conformité lors de l'usinage : $\pm 0,00125$. Nous constatons que pour la géométrie étudiée, tant que l'angle de contact reste inférieur à 36° nous restons dans cet intervalle de tolérance pour tous les chargements admissibles. La prise en compte du changement de conformité ne s'avère donc pas judicieuse pour de petits angles.

Concernant l'évolution de la conformité, nous observons un comportement linéaire. Par exemple, une approximation de la conformité pour un

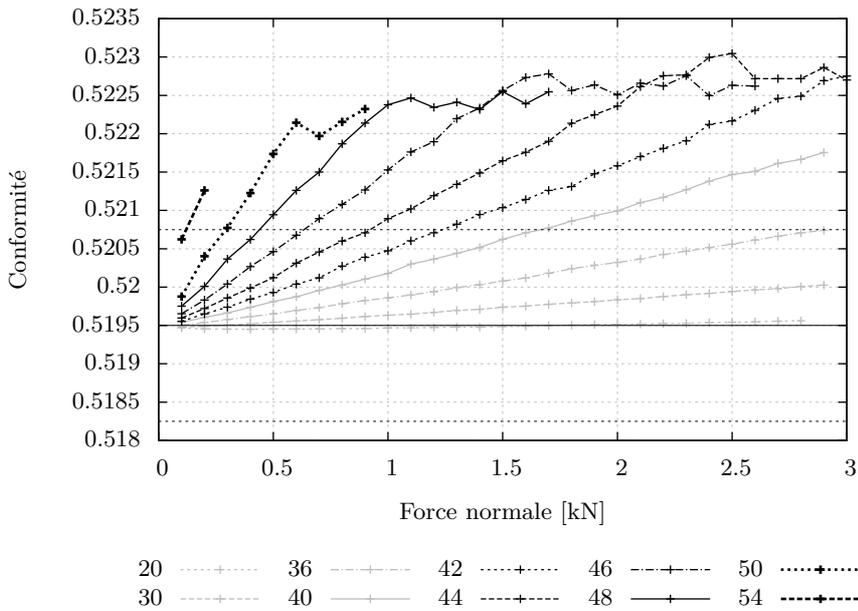


FIGURE 4.32 – Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact [°]. La conformité initiale figure en trait plein, l'intervalle de tolérance à l'usinage en pointillés.

angle de 40° donne :

$$\forall F_c \in [100; 2900], \quad f_i^{40^\circ} = l_1^{40^\circ} + l_2^{40^\circ} \cdot F_c$$

$$\text{avec, } l_1^{40^\circ} = 0,5194049$$

$$l_2^{40^\circ} = 8,089563e^{-7} \text{ N}^{-1}$$
(4.8)

Pour ce cas particulier, la somme des résidus est de $1,37e^{-8}$.

Cette approximation linéaire peut être effectuée pour tous les angles jusqu'à 44° . Au delà de cette limite, nous observons l'apparition d'un palier pour des chargements élevés. Plus l'angle de contact est grand, plus le palier débute pour des chargements faibles : 2400 N à 44° , 1000 N à 48° , ... Ce phénomène est en réalité dû à la méthode d'approximation torique. En effet, comme il l'a été expliqué précédemment, nous effectuons l'approximation torique à partir de certains points à la surface de la piste. Dans notre cas, nous sélectionnons des points dans un disque autour de l'ellipse de contact (fig. 4.31). Or, pour de petits angles et de petits chargements, le disque est complet. Cependant, lorsque le contact a lieu pour des angles élevés, nous nous retrouvons dans la situation où le disque de sélection est tronqué (fig. 4.33). Il manque donc des points pour l'approximation torique. Ces points ont une grande importance car ce sont ceux qui possèdent les plus forts déplacements. C'est pourquoi, la conformité est sous estimée lorsque cette situation apparaît. D'où la présence de paliers sur les courbes de la figure 4.32.

En observant, la conformité en fonction de l'angle de contact (fig. 4.34), nous constatons que même une très faible charge peut modifier la conformité. Ainsi, bien qu'à 100 N, la conformité reste dans l'intervalle de tolérance de l'usinage, à 200 N il y a déjà un changement notable pour un angle de 54° (fig. 4.32). La donnée qui semble la plus influente est donc l'angle de contact et non pas la force normale.

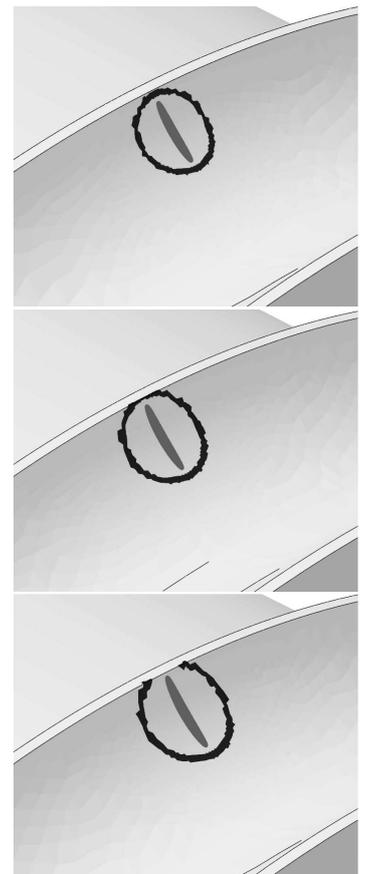


FIGURE 4.33 – Zone de sélection pour $\alpha_c = 46^\circ$, $F_c = 1000$ N, 1500 N, 2000 N.

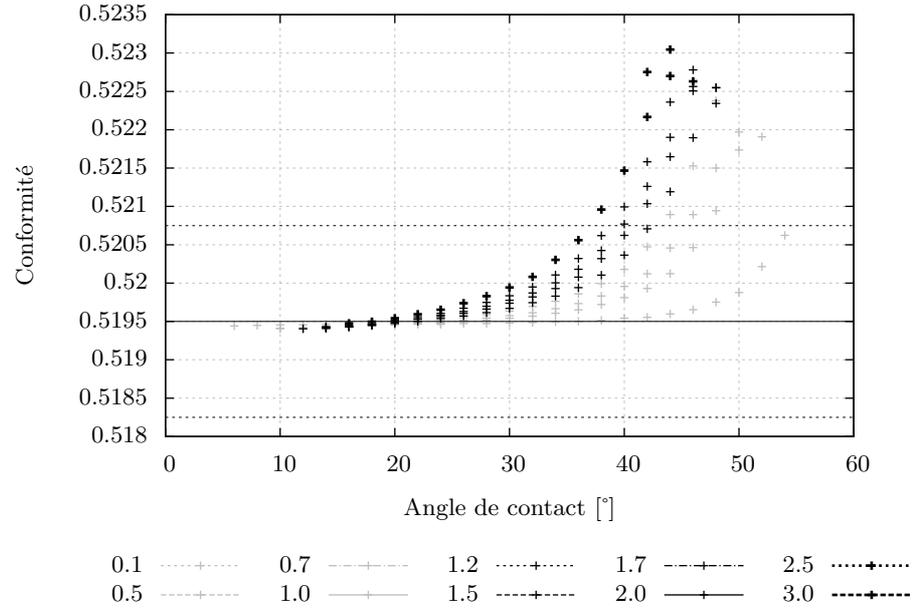


FIGURE 4.34 – Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de l’angle de contact pour différentes valeurs de force normale [kN].

L’étude de la conformité en fonction de l’angle de contact pour une force normale donnée (fig. 4.34), ne permet pas de faire apparaître un comportement linéaire. L’évolution correspond plutôt à une loi de type puissance. Par exemple, pour une force de 1000 N, l’approximation par une loi puissance donne :

$$\begin{aligned} \forall \alpha_c \in [2; 48], \quad f_i^{1\text{kN}} &= p_1^{1\text{kN}} + p_2^{1\text{kN}} \cdot \alpha_c^{p_3^{1\text{kN}}} \\ \text{avec, } p_1^{1\text{kN}} &= 0,51948 \\ p_2^{1\text{kN}} &= 6,11770e^{-16} \text{ deg}^{-p_3^{1\text{kN}}} \\ p_3^{1\text{kN}} &= 7,53420 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ainsi, pour une géométrie donnée, il est possible d’exprimer la conformité de la piste au niveau d’un point de contact en fonction de l’angle de contact et de l’effort normal. Dans l’intersection du domaine des chargements admissibles et du domaine où il n’y a pas troncature de la zone de sélection, nous proposons d’approcher la conformité par une relation de la forme suivante :

$$f_i^{R_{20}^{10}}(\alpha_c, F_c) = pa_1 + (pb_1 + pb_2 \cdot \exp(pb_3 \cdot \alpha_c)) \cdot F_c \quad (4.10)$$

Pour ce cas, les valeurs numériques sont (avec F_c en Newtons et α_c en degrés) :

$$\begin{aligned} pa_1 &= 0,51945e^{+00} \quad [-] \\ pb_1 &= 3,60497e^{-08} \quad [\text{N}^{-1}] \\ pb_2 &= 4,09772e^{-10} \quad [\text{N}^{-1}] \\ pb_3 &= 0,18600e^{+00} \quad [\text{deg}^{-1}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Déplacement du centre de courbure Le déplacement du centre de courbure est étudié suivant deux directions :

- le déplacement axial : selon l’axe \mathbf{x}_i ,
- le déplacement radial : selon l’axe \mathbf{y}_{b1}^j

Les déplacements axial et radial (fig. 4.35 et 4.36) montrent des évolutions similaires à l'évolution de la conformité. En effet, les évolutions à angle constant font apparaître un comportement linéaire. Et le comportement à effort normal constant fait apparaître un comportement en loi puissance. Nous observons également la présence des paliers dûs à la troncature des zones de sélection.

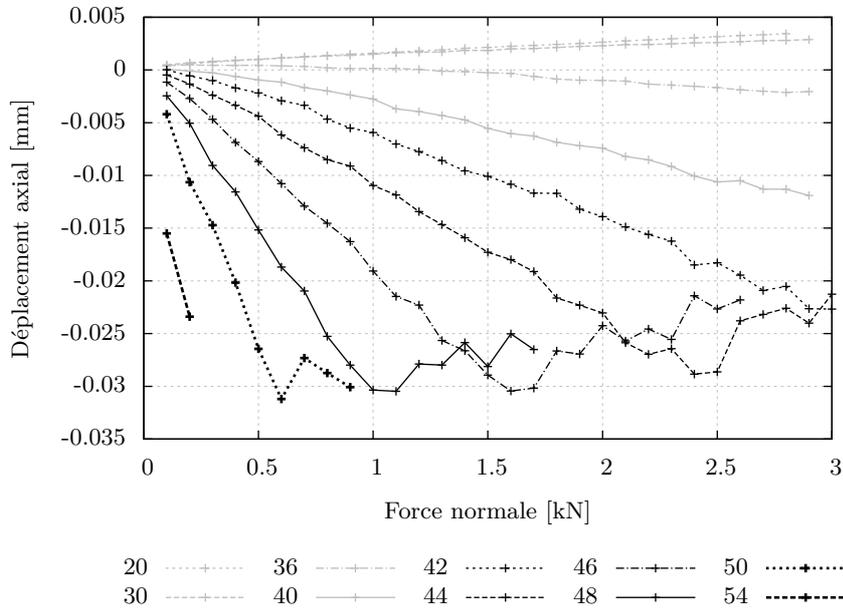


FIGURE 4.35 – Déplacement axial du centre de courbure, bague intérieure R_{20}^{10} , en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact [°].

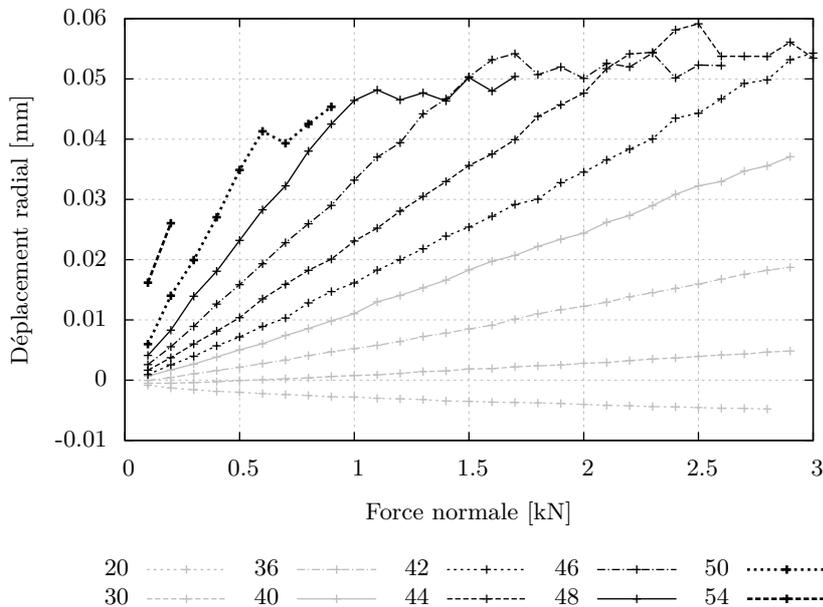


FIGURE 4.36 – Déplacement radial du centre de courbure, bague intérieure R_{20}^{10} , en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact [°].

Le sens du déplacement n'est pas le même pour les petits angles et pour les grands angles de contact. Il y a une inversion de sens qui a lieu à 34° pour le déplacement axial et à 25° pour le déplacement radial.

Nous pouvons premièrement comparer ces déplacements à la tolérance lors de la phase d'usinage : 0,025 mm. Le déplacement axial reste très proche de cette incertitude : $-0,026$ mm pour $F_c = 500$ [mm] et $\alpha_c = 50^\circ$. Cependant, en utilisant l'approximation linéaire, pour faire abstraction du problème de troncature de zone de sélection, le déplacement axial atteint $-0,047$ mm à $F_c = 900$ N et $\alpha_c = 50^\circ$.

Il est également intéressant de comparer ces déplacements aux déplacements du centre de la bille ou de la bague intérieure. Ceci n'est pas possible avec la modélisation effectuée ici, cela sera fait dans le chapitre consacré aux résultats de calculs effectués par notre modèle semi analytique.

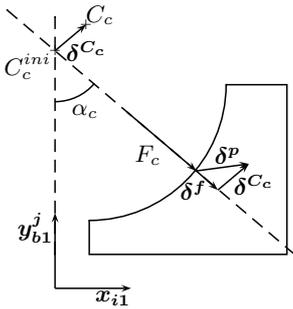


FIGURE 4.37 – Déplacement piste intérieure droite R_{20}^{10} .

Déplacement de la surface de la piste La grandeur que nous cherchons finalement à modéliser est le déplacement de la piste. La valeur de ce déplacement n'est pas nécessaire car les équations d'équilibre ne la prennent pas directement en compte. Ce déplacement est pris en compte par une modification de la conformité et un déplacement des centres de courbures. Donc à partir de ces quantités, il est possible de quantifier le déplacement de la piste tel qu'il est introduit dans le système d'équations. Ainsi le déplacement de la piste est la contribution d'une part du déplacement du centre de courbure (δ^a et δ^r) et de la modification de la conformité d'autre part ($(f_{new} - f_{init}) \cdot D$).

Étudions le cas de la piste intérieure droite, dans le repère $\{G_{i1}, x_{i1}, y_{b1}^j\}$ (FIG. 4.37). Le déplacement causé par le changement de conformité, noté δ^p , est dirigé dans la même direction que F_c et a pour composante $(f_{new} - f_{init}) \cdot D$. Ainsi, lorsque la conformité diminue δ^p et F_c sont de sens opposés. Or, $\delta^{C_c} = \delta^a x_{i1} + \delta^r y_{i1}$. Donc finalement, pour la piste intérieure droite nous avons :

$$\delta_{ir}^p = \begin{bmatrix} \delta_{ir}^a + (f_{ir} - f_i)D \sin(\alpha_c) \\ \delta_{ir}^r - (f_{ir} - f_i)D \cos(\alpha_c) \end{bmatrix} \{x_{i1}, y_{b1}^j\} \quad (4.12)$$

Dans le cas particulier d'une force normale de 1200 N et d'un angle de contact de 46° et 20° , nous avons les valeurs numériques suivantes :

	1200 N - 46°			1200 N - 20°		
	δ^f	δ^{C_c}	δ^p	δ^f	δ^{C_c}	δ^p
x_{i1}	35,6	- 22,3	13,3	- 0,18	1,81	1,63
y_{b1}^j	- 34,4	39,4	5,0	0,51	- 3,12	- 2,61
norme	49,5	45,3	14,2	0,54	3,61	3,08

TABLE 4.8 – Déplacement de la piste intérieure R_{20}^{10} . Unité : μm .

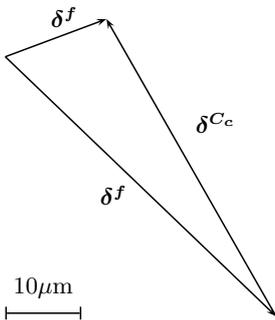


FIGURE 4.38 – Déplacement piste intérieure droite R_{20}^{10} .

Sur la figure 4.38 sont représentés les vecteurs δ^f , δ^{C_c} et δ_p pour un angle de contact de 46° et 1200 N. Pour ce cas de chargement, nous observons que le changement de conformité possède une influence du même ordre de grandeur que le déplacement du centre de courbure. Alors que dans le $\alpha_c = 20^\circ$, le déplacement de la piste est pris en compte principalement par le déplacement du centre de courbure, il y a un facteur 7 entre $\|\delta^f\|$ et $\|\delta^{C_c}\|$. Si la modification de la conformité n'était pas autorisée dans l'approximation torique, le déplacement de la piste serait entièrement pris en compte par un déplacement du centre de courbure.

Dans la suite, nous représentons l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur δ^f dans le plan (x_{i1}, y_{i1}) (cf FIG. 4.39).

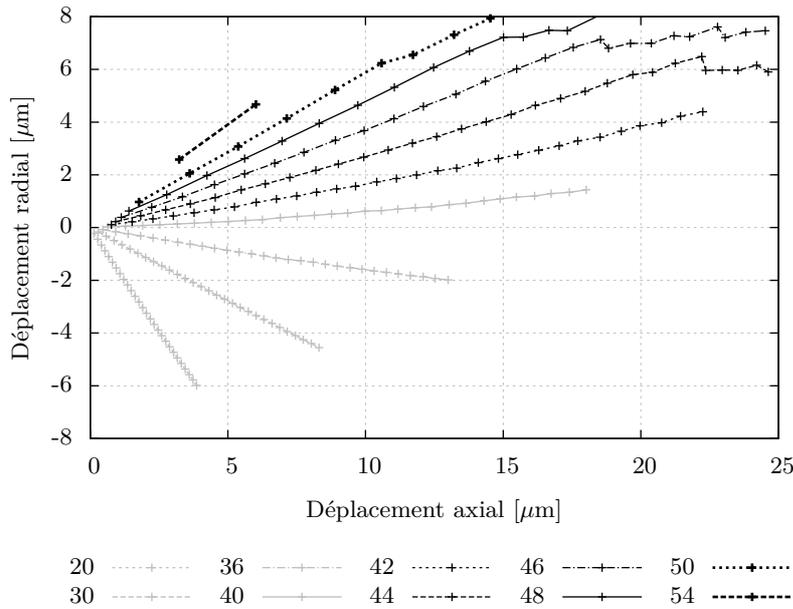


FIGURE 4.39 – Déplacement de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle de contact et de force normales. Sélection par disque.

Dans tous les cas de chargement, nous observons un déplacement axial positif de la piste. Ce qui veut dire que la piste se déplace dans le même sens que la force de contact. Le déplacement dans le sens radial fait apparaître un déplacement dans le sens opposé à la charge dans le cas d'un angle de contact supérieur à 38° . Pour les angles inférieurs à cette valeur, le déplacement se fait dans le même sens que la force. Cependant, notons l'évolution globale de ces déplacements : plus l'angle de contact augmente, plus le rapport entre le déplacement axial et le déplacement radial est élevé. Ce phénomène est aisément compréhensible en observant la figure 4.37.

4.3.2.5 Sélection par secteur angulaire

Nous étudions à présent le cas où l'on sélectionne les points pour l'approximation torique en utilisant un secteur angulaire plutôt qu'un disque. La géométrie de la zone de sélection est visible sur la figure 4.40. La hauteur du secteur correspond à la grande dimension de l'ellipse de contact. Les dimensions latérales correspondent à un écartement de $1,5b$ et $2,5b$. Le choix d'avoir une hauteur égale à la grande dimension de l'ellipse possède un avantage : il est impossible d'avoir une troncature de la zone de sélection. Nous rappelons qu'aucun calcul n'est effectué si l'ellipse de contact est tronquée.

La figure 4.41 ne fait plus apparaître de paliers, ce qui confirme le fait que ce phénomène est lié à la troncature de la zone de sélection et non au comportement réel des bagues.

En comparant la sélection par secteur angulaire (fig. 4.41) et par disque (fig. 4.32), nous constatons que la conformité calculée est plus faible dans le premier cas, et pour ces géométries de zone de sélection. Ceci peut s'expliquer par le fait que les points au déplacement élevé (vers le haut de la piste) ne sont pas sélectionnés. D'où la tendance à calculer une conformité plus faible (même principe que pour la troncature de la zone de sélection).

Cependant, bien que nous observions des résultats différents entre les deux méthodes de sélection, il s'agit bien du même phénomène que nous

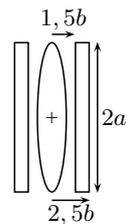


FIGURE 4.40 – Sélection par secteur R_{20}^{10} .

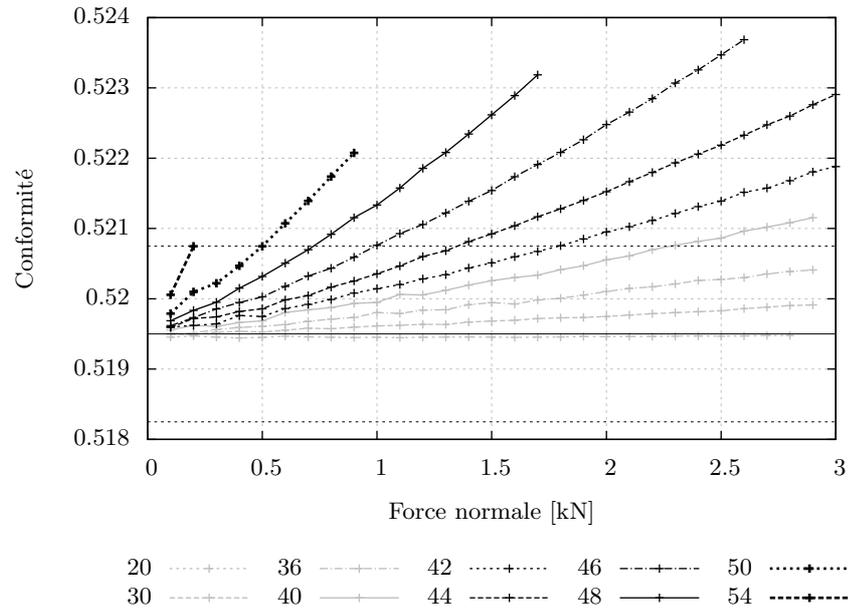


FIGURE 4.41 – Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$. Sélection par secteur angulaire.

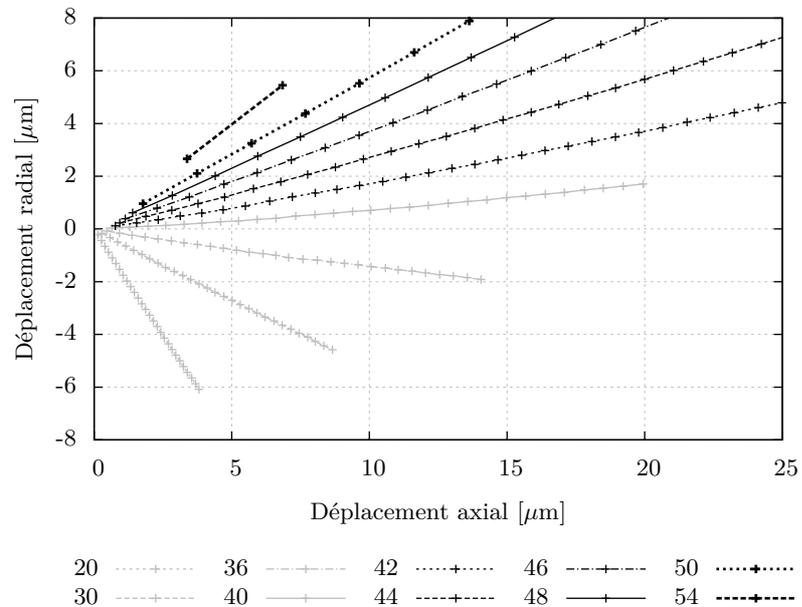


FIGURE 4.42 – Déplacement de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle $[\circ]$ de contact et de force normales. Sélection par secteur angulaire.

modélisons. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de comparer les déplacements de la piste obtenus par ces deux méthodes. En comparant, les figures 4.39 et 4.42, en faisant abstraction des points où il y a troncature de la zone de sélection sur la figure 4.39, nous observons bien des déplacements quasi identiques. Par exemple, pour $\alpha_c = 46^\circ$ et $Q_c = 1200\text{ N}$ nous avons un écart relatif de 10% sur le déplacement axial et de 8% sur le déplacement radial entre les deux méthodes.

Ainsi, les deux méthodes de sélection ne correspondent pas à la modélisation de deux phénomènes différents, mais à une interprétation différente de la déformation de la piste menant à un couple conformité/déplacement du centre de courbure différent. La sélection par disque est plus sensible aux changements de conformité.

4.3.3 Calcul du déplacement moyen

Plutôt que d'effectuer une approximation torique, nous calculons la nouvelle géométrie de la bague en déterminant le déplacement moyen des points sélectionnés dans le voisinage de la zone de contact.

Les résultats obtenus avec la méthode de sélection par disque sont visibles sur la figure 4.43. Ces courbes sont comparées à celles obtenues avec l'approximation torique de la figure 4.39.

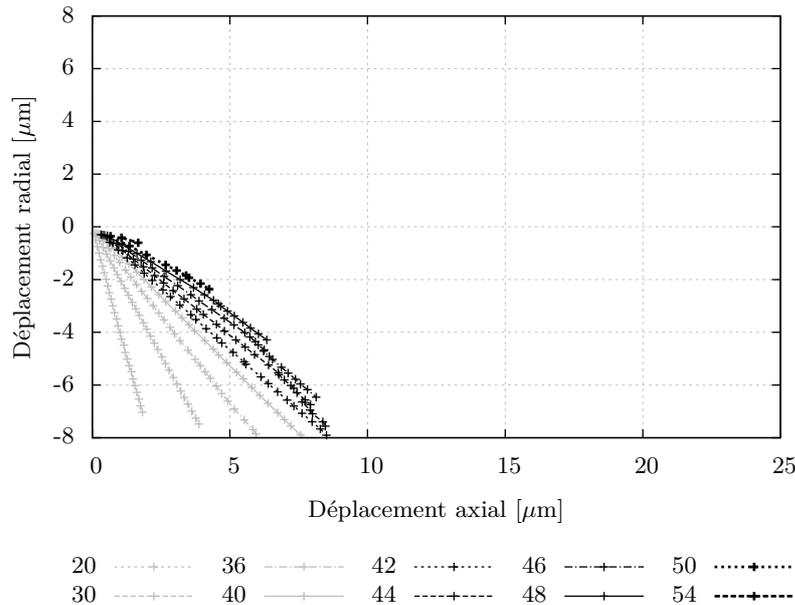


FIGURE 4.43 – Déplacements de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle de contact [$^\circ$] et de forces normales, avec le calcul par déplacement moyen.

Nous constatons des différences importantes entre les deux méthodes. Bien que la norme des déplacement δ^p reste du même ordre de grandeur pour les deux cas, nous remarquons qu'avec cette dernière méthode, le déplacement de la piste est proche de la direction et du sens de la force normale appliquée par la bille. Cette méthode ne permet pas de calculer un changement éventuel de conformité, mais permet une approximation plus proche du déplacement réel de la piste de la bague.

Les évolutions étudiées ici ont permis de montrer un comportement similaire d'évolution pour la conformité et les déplacements axial et radial du

centre de courbure. Ces trois grandeurs possèdent une évolution linéaire en fonction de la force normale et à angle de contact constant, et une évolution en loi puissance en fonction de l'angle de contact à force normale constante. Dans ce cas une approximation de l'évolution en fonction de α_c et F_c semble possible avec six paramètres (eq. 4.10).

Le changement de conformité possède une importance plus faible que le déplacement du centre de courbure dans le déplacement de la piste δ^p .

Pour les bagues plus larges du roulements R_{31}^{10} , nous constatons qu'il n'est pas judicieux de prendre en compte le changement de conformité des pistes (FIG. 4.44). En effet pour ce roulement, le changement maximal de conformité sur l'enveloppe de chargement correspond à un écart relatif de 0,05% par rapport à la conformité initiale. C'est à dire un changement de 0,005 mm sur le rayon de courbure de la piste (proche des tolérances d'usinage).

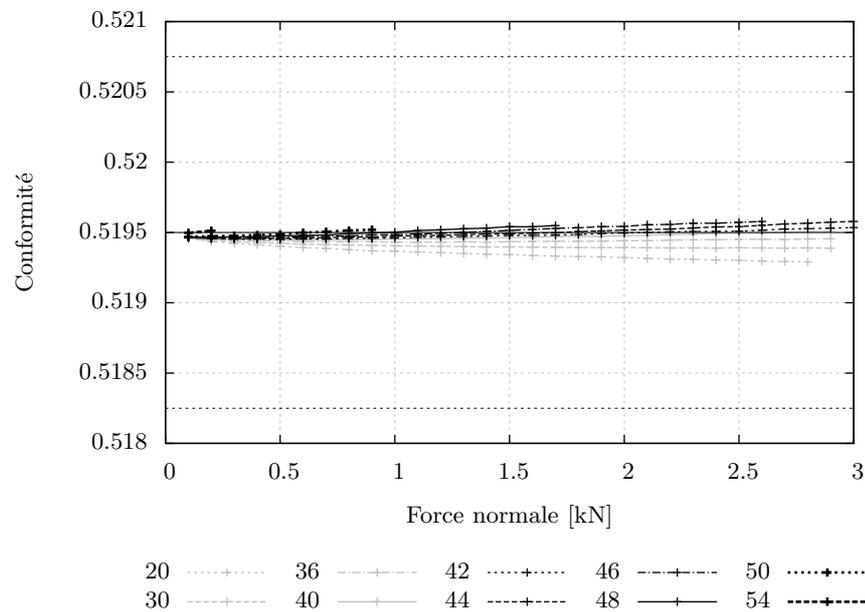


FIGURE 4.44 – Conformité de la bague intérieure R_{31}^{10} en fonction de l'angle de contact pour différentes valeurs d'angle de contact [deg].

4.4 Couplage avec un code de calcul éléments finis

Le système non linéaire d'équation à résoudre pour déterminer l'état d'équilibre quasi statique du roulement fait intervenir des paramètres liés à la géométrie de la piste, au niveau de chacun de points de contact. Dans son état de départ, une piste est considérée comme un tore sur lequel les billes roulent. Dans le cas de bagues larges, considérées comme rigides, et au niveau de chaque contact entre une bille et une bague, une déformation se crée. La quantification de ce déplacement est décrite par la théorie de Hertz.

Dans le cas de bagues fines, et lorsqu'elles ne sont plus considérées comme rigides, trois échelles de déformation peuvent être distinguées :

- au niveau du point de contact, une déformation est créée par le contact, comme dans le cas des bagues larges.
- dans la région du contact, la piste se déforme, la gorge s'ouvre, la conformité change.

- globalement sur toute la bague, la somme de ces effets créent une ovalisation, ou une torsion de la bague.

Donc, dans ce cas, la géométrie globale des pistes ne peut plus être considérée comme torique. La géométrie de la piste est différente d'un point de contact à l'autre. C'est à dire que pour chaque bille et pour chaque point de contact, il faut utiliser des paramètres particuliers dans les équations géométriques. En effet, dans la section 3.1.2, nous introduisons une conformité et une position des centres de courbure pour chacun des points de contact.

Comme une piste est décrite par la position de son centre de courbure et par sa conformité, nous considérons donc qu'il suffit de calculer ces nouveaux paramètres localement en chaque point de contact pour décrire la nouvelle géométrie.

Dans les trois échelles précédemment citées, la première correspond à un effet local, et les deux autres à un effet structurel (global). Nous considérons que le déplacement total d'un point de la piste d'une bague est la somme de ces deux effets, que nous pouvons découpler. Or, l'effet local (les déplacements Hertiens, utilisées dans les équations géométriques 3.21, 3.22, 3.24, 3.25, 3.28, 3.29) est calculé analytiquement dans notre code de modélisation.

Il reste donc à trouver un moyen de calculer la géométrie locale au niveau de chaque point de contact sur la piste. Nous envisageons pour cela une modélisation en éléments finis de la bague et du logement du roulement à billes.

4.4.1 Intégration au modèle semi analytique

Initialement, le modèle semi-analytique permet de déterminer l'état d'équilibre du roulement à billes dans le cas de bagues rigides. Le système d'équations non linéaire (voir en page 45) est résolu par la méthode de Newton-Raphson.

Au cours de chacune des itérations de ce schéma, la matrice Jacobienne du système d'équation est calculée. Lors de ce premier schéma, la cinématique ainsi que les forces de contact internes au roulement étant méconnues, il n'est donc pas possible de connaître la géométrie déformée de la bague. Ainsi, nous devons modifier la géométrie du roulement à billes au cours de la résolution par Newton-Raphson.

Entre deux itérations, la nouvelle géométrie du roulement est calculée à l'aide de la méthode des éléments finis, puis nous injectons ces nouvelles informations dans le modèle semi-analytique. Le calcul éléments finis qui détermine la nouvelle géométrie utilise les données de l'itération en cours du modèle semi analytique (angles, effort, géométrie de chaque contact). Après l'intégration de la nouvelle géométrie, la méthode de Newton-Raphson, a pour cible un nouvel état d'équilibre. Un seul calcul éléments finis n'est donc pas suffisant car la convergence ne serait pas atteinte sur la géométrie des pistes du roulement.

Le schéma de résolution final est donc celui décrit sur la figure 4.46. Il s'agit du schéma de Newton-Raphson classique auquel nous ajoutons une boucle pour calculer la nouvelle géométrie. Ce calcul n'ayant pas lieu à chaque itération, un test est effectué à la fin de chaque itération pour déterminer s'il est nécessaire. En effet, un calcul élément finis à chaque itération serait trop coûteux en temps avec un taux de convergence très défavorable.

Plusieurs critères sont analysés pour déterminer le besoin d'actualiser la géométrie des bagues. Nous vérifions :

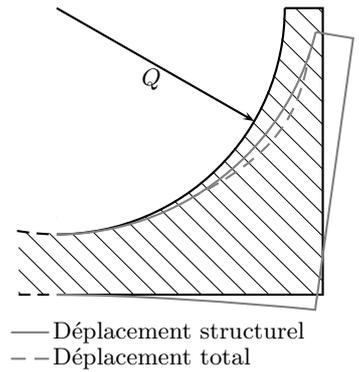


FIGURE 4.45 – Déplacement total et déplacement structurel de la bague.

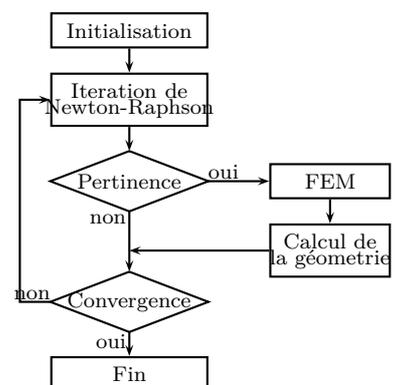


FIGURE 4.46 – Schéma de résolution pour bague souple.

- que le schéma Newton-Raphson a suffisamment convergé afin d'éviter de faire un calcul sur un état éloigné de la solution d'équilibre (c'est à dire que l'écart relatif sur la norme des inconnues est faible : inférieure à 2%).
- que la convergence sur la géométrie de la bague n'est pas déjà atteinte.
- qu'au moins deux itérations du schéma de Newton-Raphson se sont déroulées entre deux calculs éléments finis.
- et que les variations dans la géométrie des bagues ont encore de l'influence sur la cinématique interne du roulement. C'est-à-dire que, si après l'itération consécutive à un calcul éléments finis, l'erreur sur la norme des inconnues est faible (inférieure à 5%), alors nous n'effectuerons plus de nouveaux calculs éléments finis.

4.4.2 Déroulement du calcul éléments finis

L'objectif de l'étape « Calcul de la géométrie » de la figure 4.46 est donc de déterminer la géométrie des pistes (conformités et position des centres de courbure) à partir d'une configuration du roulement. En effet, à l'issue d'une itération du schéma de Newton-Raphson, une position de la bague intérieure, des billes, de la cage, et les interactions (forces et moments) entre tous ces éléments est disponible.

Cette étape se déroule selon la séquence suivante :

Application des efforts - Pour déterminer la nouvelle géométrie, nous essayons d'utiliser le plus de renseignements issus du modèle semi-analytique. Nous disposons en particulier de tous les efforts de contact, des angles de contact, et des dimensions des ellipses de contact. Ces informations nous permettent donc de définir le chargement utilisé dans le modèle éléments finis. De plus, comme le chargement est connu sur les bagues extérieures et intérieures, nous pouvons donc découpler leur calcul. Les conditions aux limites sur les bagues seront choisies de manière à représenter celles du roulement étudié. Il sera parfois nécessaire de modéliser une portion d'arbre ou de logement pour prendre en compte la souplesse du support d'une part, et pour pouvoir atteindre des conditions aux limites connues (encastrement le plus souvent), d'autre part. La manière dont les efforts de contact sont appliqués sur le maillage doit être étudiée avec soin afin de ne pas dégrader ni la précision ni le temps de calcul. Nous avons explicité et motivé notre choix dans la partie 4.1

Calcul éléments finis - Pour réaliser ce calcul, nous utilisons le logiciel Abaqus. Ce calcul est la partie la plus longue dans l'étape de détermination de la nouvelle géométrie. Afin de réduire ce temps, nous utilisons le même maillage pour tous les calculs, et le calcul réalisé est un calcul élastique linéaire. Cette dernière hypothèse correspond aux matériaux et aux chargements que nous utilisons. Il est possible de modifier ultérieurement cette option pour prendre en compte des phénomènes non linéaires ou de plasticité par exemple, qui pourraient être importants dans un cas particulier.

Calcul de la géométrie - Une fois le calcul éléments finis terminé, nous sélectionnons une zone autour de chacun des points de contact pour en extraire leurs déplacements. Ces déplacements sont alors utilisés pour calculer les conformités et déplacements des centres de courbure

en chaque point de contact. La manière dont nous effectuons cette sélection et calculons la géométrie est expliquée en partie 4.2.

Modification de la géométrie - Finalement nous introduisons cette nouvelle géométrie dans le modèle semi-analytique par l'intermédiaire des équations géométriques 3.21, 3.22, 3.24, 3.25, 3.28, 3.29. Et les itérations du schéma de Newton-Raphson se poursuivent avec ces nouveaux paramètres.

4.5 Impact sur le comportement du roulement

Le roulement à billes étudié dans cette partie (R_{24}^{14}) est un roulement à quatre points de contact monté entre deux arbres creux. Ses dimensions externes sont données sur la figure 4.47, celles internes sont disponibles en annexe B. Ce type d'assemblage est inspiré de montages utilisés dans les turboréacteurs, où les roulements sont placés entre des arbres et des logements fins. Les chargements sont appliqués sur la bague intérieure et nous appliquons des conditions aux limites symétriques sur les deux extrémités de l'arbre. Les deux faces aux extrémités des arbres sont encastrées (4.47).

Les cas de chargements envisagés ici sont choisis pour mettre en avant les effets introduits par la souplesse des bagues et de l'environnement du roulement. Les quantités importantes à étudier sont les angles de contact, les pressions de contact (ou les efforts normaux), les dimensions de l'ellipse de contact. Rappelons que la pression de contact est un paramètre clé pour le calcul de la durée de vie du roulement. Ces quantités nous permettent également de vérifier si la contrainte de contact reste sous la limite d'élasticité ; une pression de contact maximale de 4 200 MPa est couramment utilisée comme seuil pour le calcul de la capacité statique de base du roulement (associé à l'apparition d'une empreinte plastique permanente sur la surface de roulement).

Dans l'étude qui suit, la pression de Hertz reste sous 2 000 MPa, ce qui est parfois associé au niveau de chargement pour lequel des roulements à billes classiques se comportent élastiquement sur des surfaces idéalement lisses (matériaux en AISI52100 ou M50).

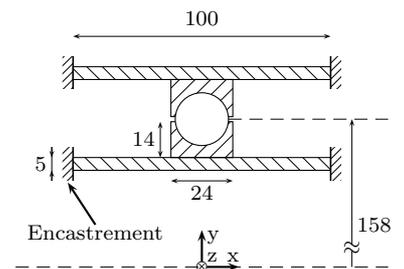


FIGURE 4.47 – Roulement à billes et conditions aux limites.

Case	F_x [kN]	F_y [kN]	M_z [N.m]	ω_i tr.min ⁻¹
1	20	0	0	1000
2	100	0	0	1000
3	20	12	0	1000
4	20	10	300	1000
5	20	2 et 5	100 à 900	1000

TABLE 4.9 – Chargements appliqués sur la bague intérieure.

L'angle de contact et le demi grand-axe sont utilisés pour déterminer si l'ellipse de contact est tronquée ou non. La troncature de l'ellipse est considérée comme une limite stricte pour la détermination de l'enveloppe des chargements admissibles. En effet, il en résulte une augmentation importante de la pression de contact, ce qui conduit à des déformations plastiques et à une diminution importante de la durée de vie.

4.5.1 Chargement axial

Un chargement axial est appliqué sur la bague intérieure qui tourne à $1\,000\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Dans cette situation, le roulement se trouve dans les mêmes conditions qu'un roulement à deux points de contact. Les contacts se situent sur les pistes opposées (intérieure-droite/extérieure-gauche) et les billes sont soumises aux mêmes chargements et angles de contact.

L'angle de contact et le demi grand-axe sont utilisés pour déterminer si l'ellipse de contact est tronquée ou non. Pour un roulement à billes rigide, le déplacement de la bague intérieure est causé par le jeu axial et les déformations au niveau des points de contact. Le roulement étudié possède un demi jeu axial de $217\ \mu\text{m}$. L'augmentation du déplacement axial causé par la déformation au contact est visible dans les résultats du tableau 4.10 : pour un chargement axial de $20\ \text{kN}$, un roulement à bague rigide se déplace axialement de $250\ \mu\text{m}$. En prenant en compte la déformation des bagues, de l'arbre et du logement, nous observons que le déplacement axial est de $395\ \mu\text{m}$, ce qui correspond à une augmentation de $91\ \mu\text{m}$ par rapport au cas de bagues rigides. Cet exemple académique montre que, même pour des chargements modérés (par rapport à la taille du roulement), la souplesse du système engendre une augmentation de 30% du déplacement axial.

Cas	δ_x [μm]	α_{ir} [deg]	α_{ol} [deg]	Q_{ir} N	Q_{ol} N
1-R	250	42,2	41,8	1486	1497
1-DM	265	43,4	43,0	1452	1462
2-R	304	45,3	45,2	7030	7040
2-DM	395	50,9	50,8	6408	6417

TABLE 4.10 – Déplacement de la bague intérieure, angles de contact et efforts normaux pour des bagues rigides (R) et de bagues déformables (DM) avec la sélection par disque. Cas de chargement 1 et 2.

Un autre résultat intéressant concerne les angles de contact : en prenant en compte la souplesse des bagues, ceux-ci ont tendance à augmenter. En conséquence, les efforts normaux au niveau des contacts bille/bague diminuent afin de conserver l'équilibre statique (TAB. 4.10).

Dans notre cas, pour une force axiale de $100\ \text{kN}$, l'angle de contact augmente de 5° . La longueur du demi grand-axe de l'ellipse de chargement restant pratiquement inchangée, le sommet de l'ellipse de contact s'élève également de 5° . Un problème de troncature peut donc apparaître.

4.5.2 Chargement axial et radial

Combiner les chargements nous permet d'étudier le comportement du roulement à billes dans une situation plus complexe. Ajouter une composante radiale au roulement permet d'étudier une configuration dans laquelle des billes peuvent avoir trois points de contact. Dans une telle configuration, les angles de contact et les charges internes ne sont plus distribuées uniformément entre les billes.

La figure 4.48 compare les effets des méthodes TF, TS et MD utilisées pour calculer la nouvelle géométrie. Il n'y a pas de changement majeur observés entre l'approximation torique AT, et l'approximation simplifiée AS. Nous rappelons que seule la prise en compte du changement de conformité diffère

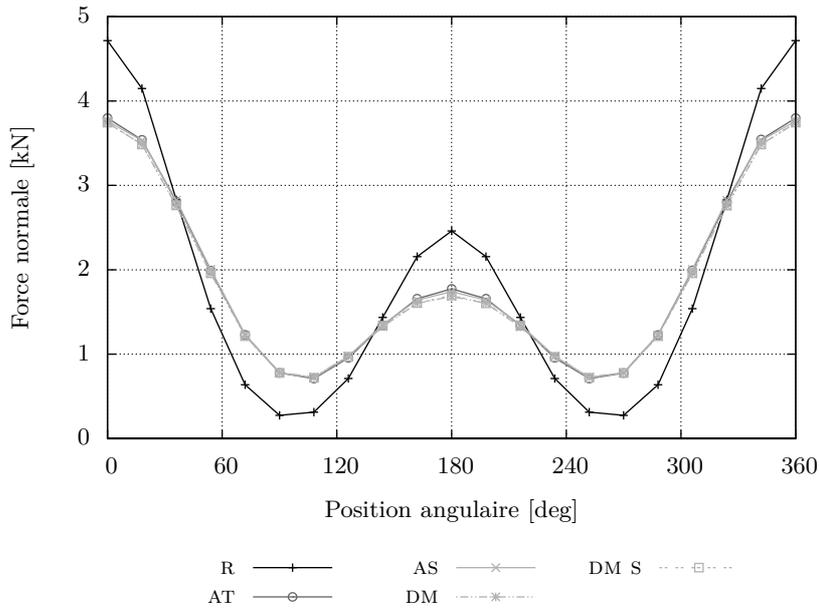


FIGURE 4.48 – Force normale sur la piste intérieure droite. Comparaison entre le cas de bagues rigides (R), de l’approximation torique avec sélection par disque (AT), de l’approximation torique simplifiée avec sélection par disque (AS), de calcul de déplacement moyen avec sélection par disque (DM) ou par secteur angulaire (DM S). Cas de chargement 3.

Cas	Bille à 0°			Bille à 180°		
	δ_{ax}^p [μm]	δ_{rad}^p [μm]	α_{ir} [deg]	δ_{ax}^p [μm]	δ_{rad}^p [μm]	α_{ir} [deg]
3-R	0,00	0,00	22,4	0,00	0,00	57,7
3-AT	-4,65	-16,7	20,0	-16,2	5,73	60,2
3-AS	-4,40	-15,9	19,9	-17,2	4,86	60,3
3-DM	-2,62	-17,3	20,3	-11,5	-7,22	62,6
3-DM S	-2,40	-17,4	20,3	-11,2	-7,08	62,2

TABLE 4.11 – Déplacements axial et radial des centres de courbure de la bague intérieure pour deux billes opposées, au position angulaire 0° et 180°. Cas de chargement 3.

entre les deux méthodes. L’écart relatif sur les efforts normaux de contact n’excédant pas 5%, cela indique que l’effet du changement de conformité est non significatif par rapport à l’effet du déplacement des centres courbures. Les déplacements axiaux et radiaux sont présentés (comme définis sur la figure 4.37) dans le tableau 4.11 pour des billes opposées dans le roulement, aux positions angulaires 0° et 180°. Il est important de noter que ces faibles déplacements influent grandement la distribution de chargement à l’intérieur du roulement.

Le changement maximal de conformité (méthode AT) est observé pour le contact entre la bague intérieure et la bille à la position 180°. La conformité à cet endroit est de 0.5214 ce qui représente un écart de 0,4% par rapport à sa valeur initiale, c’est à dire une différence de 39 μm sur le rayon de la piste de roulement. Cette différence induit un changement léger sur les déplacements axial et radial des centres de courbure (TAB. 4.11) En effet, la méthode AT mène à $\delta_x = 245 \mu\text{m}$ et $\delta_y = 174 \mu\text{m}$, alors que la méthode AS mène à $\delta_x = 244 \mu\text{m}$ et $\delta_y = 173 \mu\text{m}$. C’est à dire que nous observons un

Cas	3-R	3-AT	3-AS	3-DM	3-DM S
δ_x [μm]	228	245	244	246	245
δ_y [μm]	136	174	173	174	174

TABLE 4.12 – Déplacements axial (δ_x) et radial (δ_y) de la bague intérieure. Cas de chargement 3.

écart relatif de 0,4% sur δ_x et de 1% sur δ_y . La valeur moyenne de la pression maximale de Hertz sur tous les contacts du roulement est de 1306 MPa en prenant en compte le changement de conformité, et de 1301 MPa sans cette prise en compte. Pour ce cas particulier, le changement de conformité est négligeable par rapport aux effets du déplacement du centre de courbure.

Citons ici les travaux de Zaretsky *et al.* [40] qui examinent en 2007 une nouvelle méthode pour étudier l'influence de la conformité sur la durée de vie des roulements à billes. Ils montrent alors qu'on assiste à une diminution importante de la durée de vie du roulement lorsque la conformité des pistes (en particulier de la piste extérieure) augmente.

En 2013, Gloeckner [15] étudie expérimentalement le rôle de la conformité dans la puissance dissipée et dans la température d'un roulement de turbine.

Au final dans notre étude, bien que nous n'observions pas de changements significatifs dans l'équilibre interne du roulement, l'estimation du changement de conformité réalisée par la méthode AT semble donc importante pour la détermination de la durée de vie du roulement.

La forme de la zone de sélection possède également un impact faible sur les résultats. La taille des zones de sélection utilisée est donnée relativement aux demi-axe de l'ellipse de contact. Nous utilisons $r_1 = 1,2a$ et $r_2 = 1,4a$ comme rayon interne et externe de la zone de sélection (FIG. 4.31 en page 74). Dans le cas d'une zone angulaire, nous retenons les grandeurs précédemment choisies pour obtenir des résultats similaires, c'est à dire : $a_1 = 3,5b$, $a_2 = 5b$ et $h = 2a$. Les différences entre ces deux méthodes sont faibles (TAB. 4.11)

Notons que la méthode de sélection par secteur angulaire est recommandée quand le contact est haut sur la piste, car dans ce cas, la zone de sélection par disque est incomplète. En revanche, la méthode de sélection par disque est plus appropriée pour des angles de contact intermédiaires ou des faibles charges, car la zone est alors plus étendue que la précédente.

Le calcul du déplacement moyen diffère de l'approximation simplifiée uniquement par la manière dont les déplacements des centres de courbures sont calculés. Nous observons des écarts entre les deux méthodes au niveau du déplacement axial des centres de courbure (TAB. 4.11) : la norme du déplacement calculée avec l'approximation torique (AT) est près de deux fois supérieure à celle obtenue avec le déplacement moyen (DM) pour la bille à 0° . Remarquons également que le signe de δ_{rad}^p est différent pour ces deux méthodes dans le cas de la bille à 180° .

Le déplacement radial des centres de courbures, $\delta_{rad}^{C_c}$, est représenté sur la figure 4.49. Deux comportements différents sont observés selon la méthode utilisée pour calculer la géométrie : approximation torique (AT ou SA) ou déplacement moyen (DM). Les deux méthodes convergent vers le même déplacement du point de contact sur la zone la plus chargée de la bague intérieure (billes proches de 0°). Cependant, sur le côté opposé, c'est à dire sur la zone moins chargée, l'approximation torique mène à une expansion de

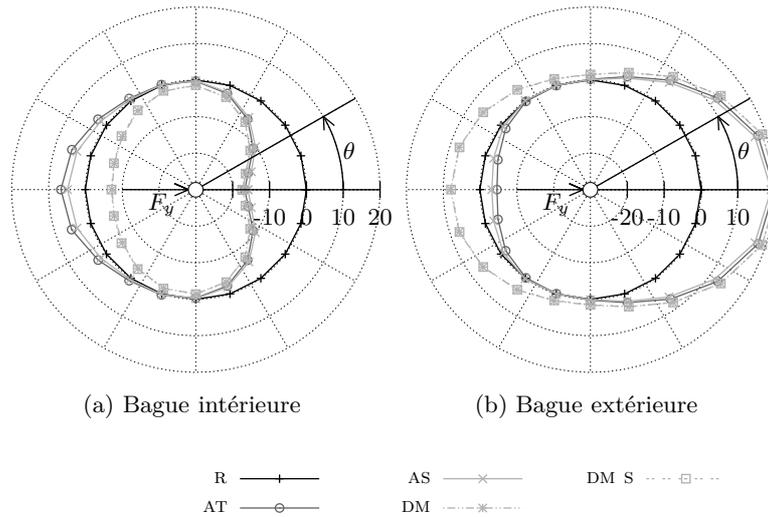


FIGURE 4.49 – Déplacement radial des centres de courbure de la piste intérieure droite et extérieure gauche. Comparaison entre le cas de bagues rigides (R), de l'approximation torique avec sélection par disque (AT), de l'approximation torique simplifiée avec sélection par disque (AS), de calcul de déplacement moyen avec sélection par disque (DM) ou par secteur angulaire (DM S). Cas de chargement 3.

la bague, alors que le calcul du déplacement moyen indique une contraction. Ces tendances sont visibles également sur la bague extérieure. Le calcul par déplacement moyen est considéré comme le plus représentatif de la réalité car nous n'avons pas recours à l'hypothèse d'une piste localement torique. Cependant, la contradiction entre les deux méthodes n'a qu'une influence marginale sur le comportement global du roulement (angles de contact, efforts normaux et déplacements de la bague intérieure).

La comparaison de la norme du déplacement de Hertz est δ^p permet de comprendre l'impact de la déformation de la bague par rapport à la déformation au contact. La force normale entre la bague intérieure et la bille à $\theta = 0^\circ$ est de 3739 N (avec la méthode DM) et conduit à un déplacement de Hertz de $20,2 \mu\text{m}$. Pour le même contact, la norme de δ^p est de $17,6 \mu\text{m}$. Le fait que ces deux déplacements possèdent le même ordre de grandeur permet d'expliquer pourquoi les différences entre le calcul en bagues souples et le calcul en bagues déformables sont si importantes.

4.5.3 Chargement axial et radial avec moment

Les angles de contact, les chemins de roulement et les pressions maximales de contact sont représentées sur la figure 4.50 pour le cas de chargement 4 (TAB. 4.9) dans lequel un moment est appliqué. Ce moment crée une large région dans laquelle les billes possèdent trois points de contact. Sur les figures 4.50a et 4.50c les angles de contact sont représentés par des lignes pleines et les sommets des ellipses de contact sont représentés en pointillés. Les changements sur les dimensions des ellipses de contact sont moins prononcés que sur la pression de contact.

La différence maximale entre le cas de bagues rigides et le cas de bagues souples (DM) est de 5° sur l'angle de contact entre la bille à 180° et la piste intérieure droite. La dimension de l'ellipse à cet endroit ne change pas, la

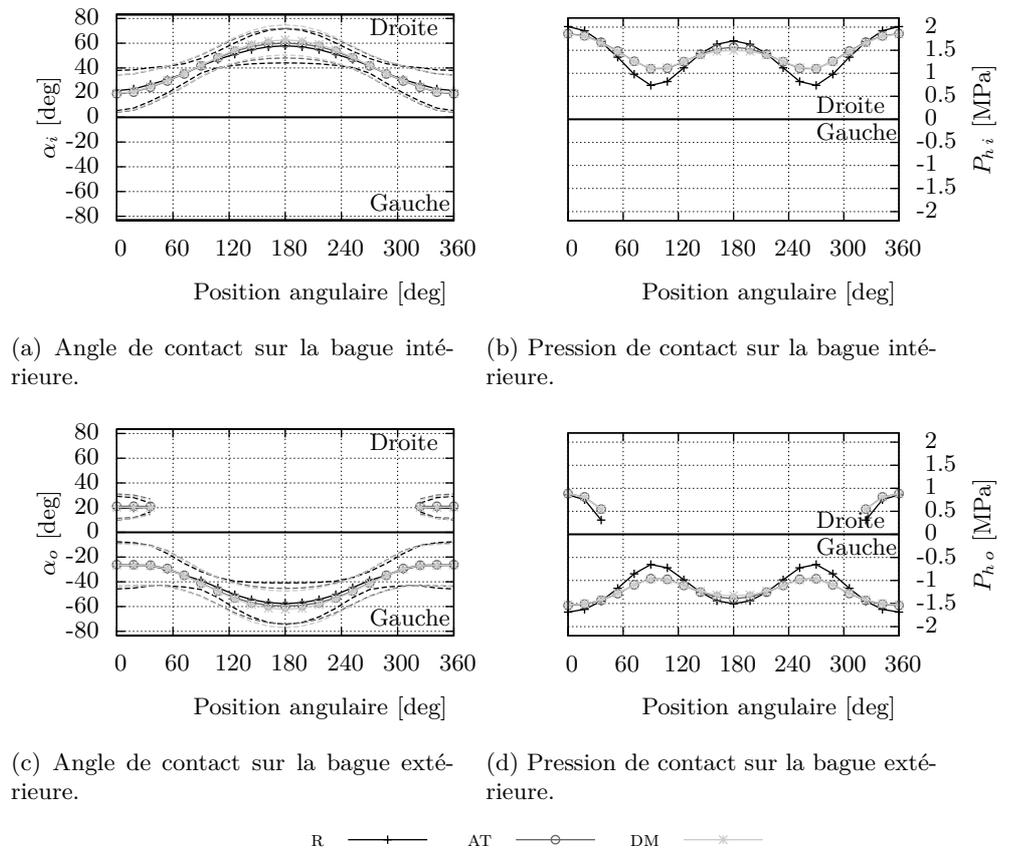


FIGURE 4.50 – Angles de contact, position des ellipses de contact (pointillés) et pressions de contact sur les pistes des bagues. Cas de chargement 4.

position de son sommet augmente donc de 5° . La plus grande variation sur les dimensions de l'ellipse est de 36% au niveau de la bille positionnée à 108° . Dans cette région, le chemin de roulement est plus large et les pressions de contact sont les plus élevées en prenant en compte la souplesse des bagues, car les pressions tendent à s'uniformiser (les hautes pressions diminuent et les basses pressions augmentent). L'aire totale du chemin de roulement (la surface entre les courbes en pointillés sur la figure 4.50a) augmente de 6% en comparant DM par rapport à R. La pression moyenne de contact augmente en passant de 1190 MPa à 1260 MPa; dans le même temps, la pression maximale décroît de 8% et l'effort normal maximal décroît de 22% (de 4425 N à 3428 N).

En dernier point, nous étudions l'évolution du risque de troncature de l'ellipse de contact. Sur la figure 4.51, nous représentons la position du sommet de l'ellipse de contact en fonction du moment appliqué M_z , pour deux cas de charge radiale ($F_y = 2\text{ kN}$ ou $F_y = 5\text{ kN}$) et pour la même force axiale ($F_x = 20\text{ kN}$).

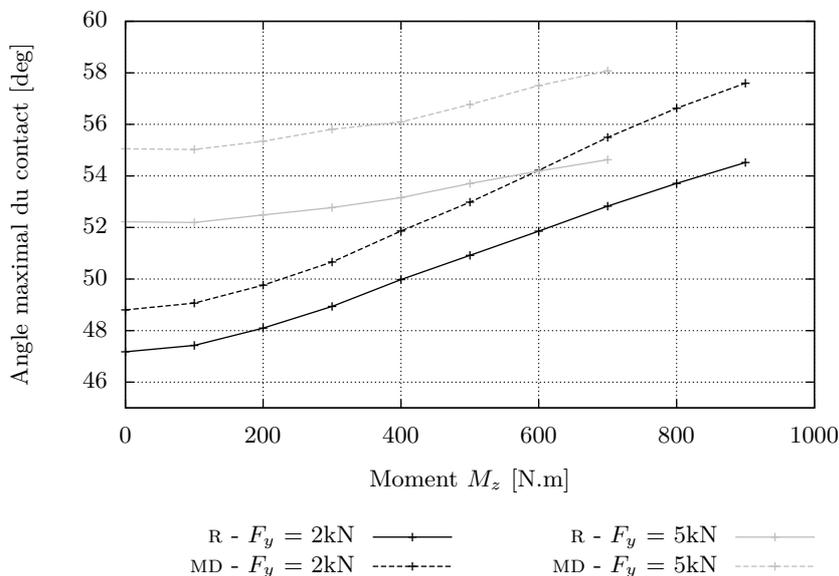


FIGURE 4.51 – Position maximale de l'ellipse de contact en fonction du moment M_z pour deux forces radiales F_y et une force axiale $F_x = 20\text{ kN}$. Cas de chargement 5.

Pour une force axiale de 2 kN, et un moment de 610 N.m la position du sommet de l'ellipse de contact est de 52° pour des bagues rigides. Il ne faut appliquer qu'un moment de 410 N.m sur des bagues déformables pour obtenir la même position de l'ellipse de contact, c'est à dire un moment 1,5 fois plus faible. Ceci montre l'importance de la prise en compte des déformations des bagues, du logement et de l'arbre dans la détermination du moment maximal supporté par la bague pour éviter des troncatures d'ellipse de contact. En considérant un angle maximal de 54° , une force axiale de 20 kN et une force radiale de 5 kN, nous constatons qu'il est possible d'appliquer un moment de 560 N.m sur des bagues rigides, alors qu'aucun moment n'est toléré sur des bagues déformables.

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs options pour le couplage mis en place.

La première concerne la méthode de sélection du voisinage du point de contact : nous avons constaté que la méthode de sélection par sphère et la méthode de sélection par secteur angulaire produit des résultats similaires, et que pour le cas de forts angles de contact, la sélection par secteur angulaire est à privilégier.

La deuxième option concerne la question de la prise en compte du changement de conformité : dans nos cas d'études, les changements de conformité sont faibles et leur présence n'a que peu d'impact sur l'équilibre interne du roulement. Nous concluons de ce fait que la prise en compte du changement de conformité n'est pas pertinent.

La troisième option concerne la méthode pour calculer la nouvelle géométrie de la bague : nous retenons la méthode par calcul du déplacement moyen, qui en comparaison de l'approximation torique, montre une plus grande robustesse, et qui est plus proche du comportement réel de la bague.

Au final les résultats des calculs réalisés dans ce chapitre ont montré :

- une tendance à l'augmentation des angles de contact qui entraîne une apparition de troncature d'ellipse de contact pour de faibles charge-ments et donc une diminution de la capacité de charge du roulement ;
- que des bagues souples tendent à uniformiser les efforts internes et les répartitions de pression, ce qui est bénéfique pour la durée de vie du roulement.

Validation expérimentale

5.1	Présentation des essais	93
5.1.1	Dispositif expérimental	93
5.1.2	Adaptation du modèle numérique	95
5.2	Résultats	96
5.2.1	Déplacement de corps rigide	96
5.2.2	Loi de comportement	104

5.1 Présentation des essais

Afin d'évaluer la qualité du modèle proposé pour étudier le comportement de roulements à bagues déformables, nous comparons les résultats obtenus par le modèle avec ceux obtenus par des essais expérimentaux en laboratoire. À notre connaissance aucun résultat d'expérience n'a été publié sur des essais expérimentaux concernant des roulements à billes à quatre points de contact.

Pour pouvoir comparer le modèle numérique avec des mesures, il faut tout d'abord déterminer des critères et des grandeurs de comparaison. Numériquement, beaucoup de paramètres et de grandeurs sont aisément accessibles, mais expérimentalement, il est difficile d'accéder directement aux grandeurs internes du roulement à billes.

Nous cherchons donc, en priorité, des grandeurs externes pour les comparaisons. Les premières grandeurs auxquelles nous pensons sont les grandeurs permettant d'obtenir la loi de comportement du roulement à billes, c'est à dire, les déplacements et rotations des bagues en fonction du chargement appliqué sur la bague intérieure.

Par ailleurs, nous avons constaté numériquement (sur des bagues fines) qu'une déformation en forme de tulipe apparaît. Cette déformation étant située sur la partie externe du roulement à billes, il est donc possible d'y accéder afin de la mesurer physiquement.

Dans le but d'avoir des essais simples à réaliser et à modéliser, nous allons nous placer dans un cas favorable pour les essais expérimentaux. Aucune vitesse de rotation ne sera appliquée sur les bagues du roulement à billes, et nous utiliserons des chargements statiques. De plus, nous commencerons par l'étude d'un chargement axial pur du roulement à billes, ce qui aura comme avantage de créer un déplacement axial pur de la bague mobile. La comparaison et la validation en seront de ce fait facilitées.

5.1.1 Dispositif expérimental

Pour les essais expérimentaux, nous utiliserons un roulement à quatre points de contact commercial. Afin de se rapprocher de la géométrie de roule-



FIGURE 5.1 – Roulement QJ218-N2MA

Roulement	Référence	F _{in}
Diamètre intérieur	90	96
Diamètre extérieur	160	154
Largeur bagues	30	25

TABLE 5.1 – Dimensions externes des roulements utilisés pour les essais en mm.



FIGURE 5.2 – Support du roulement.

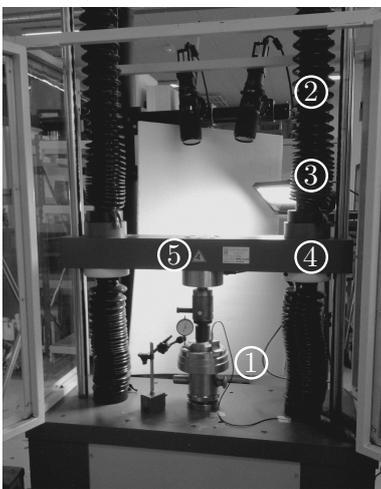


FIGURE 5.3 – Installation expérimentale. 1 : Roulement à billes, 2 : Appareils photos pour la stéréocorrélation, 3 : Éclairage, 4 : traverse mobile, 5 : traverse fixe.

ment utilisée dans les moteurs pour l'aviation, et par les moteurs SNECMA en particulier, notre choix s'est arrêté sur la référence QJ218-N2MA disponible chez le manufacturier SKF. Il est composé de 15 billes en acier, maintenues en position par une bague en bronze. Les bagues extérieures et intérieures sont toutes les deux en acier, celle intérieure est composée de deux parties.

L'objectif étant d'étudier l'impact de bagues fines, nous choisissons de comparer deux roulements : un roulement neuf, qui nous servira de roulement de référence, et un roulement sur lequel nous usinerons les bagues pour les affiner (TAB. 5.1). Nous aurons donc ainsi deux roulements possédant les mêmes caractéristiques internes, mais ayant une géométrie externe différente (diamètre intérieur, diamètre extérieur, largeur).

Pour la modélisation du roulement, nous avons besoin de connaître la géométrie interne du roulement à billes : diamètre des billes, conformités, angle de contact libre, angles de contact radial. Le fabricant des roulements utilisés fournit l'angle de contact libre : α_f . Les billes sont calibrées en pouce et huitième de pouce, il est ainsi aisé de connaître leur dimension en mesurant leur diamètre avec un pied à coulisse ou un palmeur, et d'utiliser la valeur en pouces la plus proche.

La mesure de la conformité des pistes est plus problématique car il s'agit de mesurer un rayon de courbure dans une cavité creuse. Pour cela, nous avons recours à un palpeur tridimensionnel, qui permet la métrologie d'objet et de surface 3D. Les résultats des mesures effectuées sont disponibles dans l'annexe C pour le roulement d'origine, et dans l'annexe D pour le roulement dont les bagues ont été affinées.

Obtenir les mesures d'angles de contact radial est également complexe. Pour pallier cette difficulté, nous mesurons les jeux axiaux et radiaux du roulement, puis à l'aide des relations 2.32 et 2.31 en page 27, les angles de contact radial sont calculés en fonction des jeux mesurés. Sur les deux roulements utilisés, les diamètres des billes sont identiques : $7/8''$, c'est à dire $D = 22,225$ mm. Les jeux axiaux et radiaux sont également identiques entre les deux roulements. Le jeu axial est de $70 \mu\text{m}$, le jeu radial est de $50 \mu\text{m}$.

Cependant, des différences apparaissent dans les mesures de conformités des pistes. Premièrement, pour un roulement donné, la conformité des pistes intérieures et extérieures sont différentes, et de petites différences existent entre les pistes droite et gauche. Deuxièmement, pour une piste donnée, la mesure ne fournit pas la même valeur sur les deux roulements. Finalement, sur les pistes intérieures nous obtenons une conformité proche de 0,51, et proche de 0,53 sur les pistes extérieures.

Afin d'appliquer l'effort axial, nous choisissons d'utiliser une machine de traction/compression d'une capacité de 100 kN.

Pour maintenir en place le roulement dans cette machine, un support est conçu spécifiquement. Il est réalisé pour accentuer les effets de souplesse, il n'est donc pas considéré comme infiniment rigide et sa souplesse devra être prise en compte dans la modélisation. Une portion d'arbre creux, d'épaisseur 5 mm est utilisée pour maintenir la bague intérieure. Cet arbre ne vient pas en appui sur toute la largeur de la bague intérieure. Les deux parties de la bague intérieure sont maintenues en place par un assemblage vissé. Ce montage est représenté sur la figure 5.2. La partie inférieure, qui met en position la bague extérieure est fixe et liée au bâti. Et la partie supérieure qui maintient la bague intérieure est fixée sur la traverse mobile de la machine de traction/compression. Lors de l'application du chargement,

la traverse se déplace vers le bas et applique ainsi un effort de compression sur le roulement. Les billes sont alors en contact sur la partie supérieure des pistes intérieures et sur la partie inférieure des pistes extérieures.

La mesure de l'effort axial sera donnée par le capteur de force interne à la machine de traction/compression. Celui-ci est positionné sur la traverse de la machine.

Nous avons envisagé dans un premier temps d'utiliser des capteurs de déplacement, LVDT, par exemple, pour mesurer le déplacement de corps rigide ; nous sommes alors limités par le fait suivant : pour un simple déplacement axial, un seul des capteurs suffit. Or, pour pouvoir détecter d'éventuels déplacements ou rotation de la bague, il nous faudrait plusieurs de ces capteurs, répartis tout autour du roulement. En outre, ces capteurs prennent en compte les déflexions locales causées par la présence des billes, rendant imprécise la mesure de déplacement du corps rigide. Pour ces raisons, l'utilisation de capteurs de déplacement n'est pas retenue ici.

La mesure de déplacement sera effectuée par stéréo-corrélation. Il s'agit d'une méthode optique de mesure de déplacement similaire aux techniques de corrélation d'images qui requiert le dépôt d'un mouchetis sur la surface des bagues. En corrélation classique, un seul système d'acquisition d'images est utilisé, en comparant une image de référence avec une image dans un état déformé, il est possible de calculer les déplacements sur une surface plane. La stéréo-corrélation utilise deux appareils photos qui observent la même région sous deux angles différents. La corrélation s'effectue entre les images prises par les deux appareils photos pour un même état de chargement. Nous obtenons alors la position dans l'espace de chacun des points du mouchetis. Les déplacements sont obtenus par différence entre un état donné et un état de référence. Cette technique permet d'observer les déplacements hors plan. Ainsi, nous déposerons sur les surfaces visibles des bagues extérieures et intérieures un mouchetis, puis en utilisant cette technique, nous obtiendrons les déplacements en tout point de cette surface. Pour obtenir le déplacement de corps rigide des bagues, il suffira alors de moyenniser ces déplacements locaux en surface de bague. L'installation de ce système d'acquisition est visible sur la figure 5.3.

5.1.2 Adaptation du modèle numérique

La modélisation numérique est réalisée afin d'être aussi proche du système réel que possible. Nous tenons donc compte de la géométrie mesurée de chaque roulement et nous modélisons une partie du montage expérimental. En effet, les supports des roulements ont été dimensionnés de manière à être souple et donc à accroître les différences avec un montage rigide. La rigidité des mors étant considérée comme infinie, ces éléments ne sont pas modélisés.

Le maillage de la bague intérieure et de son support est représenté sur la figure 5.4. Le support est en contact avec le mors supérieur de la machine de compression par l'intermédiaire de la surface grisée sur la figure 5.4. Nous modélisons cette liaison par une condition aux limites de type encastrement.

Le maillage de la bague extérieure et de son support est représentée sur la figure 5.5. De manière similaire à la bague intérieure, nous utilisons une condition aux limites de type encastrement pour simuler la liaison avec le mors inférieur de la machine de traction.

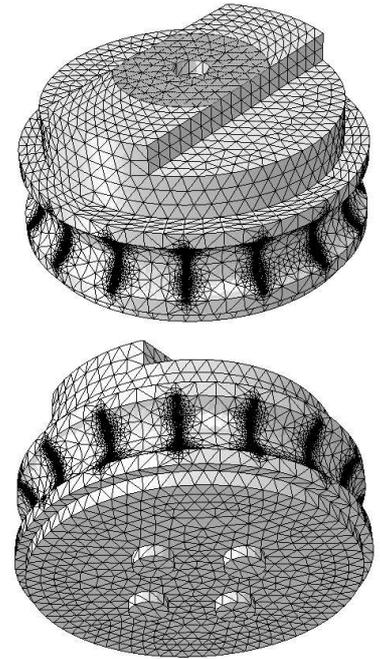


FIGURE 5.4 – Maillage de la bague intérieure.

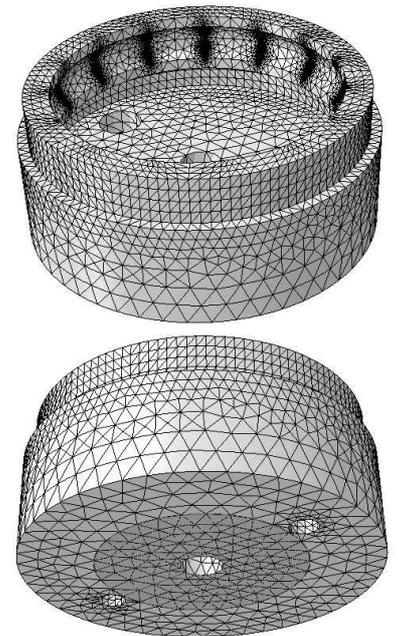


FIGURE 5.5 – Maillage de la bague extérieure.

5.2 Résultats

L'effort axial maximal appliqué sur les roulements est de 100 kN. Celui-ci est appliqué progressivement. Par ailleurs, deux images (une par caméra) sont acquises régulièrement pour permettre la mesure du déplacement tout au long du chargement.

Au total, environ 200 points de mesures sont réalisés pendant la charge, et 100 points durant la décharge. La partie inférieure du dispositif est légèrement souple, ce qui cause le déplacement de la bague extérieure vers le bas. Pour avoir le déplacement relatif de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure, un mouchetis est également appliqué sur cette bague. Il nous reste à choisir un état de référence pour les calculs des déplacements : l'état du roulement à billes complètement déchargé n'est pas le choix le plus judicieux, et nous éliminons cette possibilité. En effet, durant le début de la charge, les différents jeux de la machine (jeu entre le support et le bâti ou la traverse de la machine, jeu au niveau de la liaison de la traverse avec son ensemble de guidage - liaison vis/écrou) et les jeux du montage (jeu interne du roulement, jeu entre les bagues et leur support) sont tous rattrapés. Ce dernier jeu n'est rattrapé qu'une fois qu'un chargement supérieur au poids de la traverse est appliqué. La traverse possède une masse d'environ 115 kg, c'est donc naturellement que nous choisissons pour état de référence, un poids légèrement supérieur. La force appliquée de $F_{ax} = 1500 N$ est notre état de référence. Tous les déplacements seront calculés par rapport à cette valeur.

5.2.1 Déplacement de corps rigide

Nous cherchons dans un premier temps à obtenir le déplacement de corps rigide de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. Le montage utilisé et la présence de jeux ne garantit pas que, lors de l'application de la force axiale pure, le déplacement de la bague soit une translation pure dans la même direction de l'effort appliqué. Il faut donc être capable de vérifier le mode de déplacement de cette bague.

À partir de l'état de référence, nous pouvons calculer les déplacements en surface selon la direction de l'axe du roulement \mathbf{x}_G , qui est également l'axe d'application de la force axiale. Nous notons ces déplacements δ_i^{ref} , δ_o^{ref} , δ_i^{fin} , δ_o^{fin} . Où i et o signifient respectivement bague intérieure et bague extérieure, et ref et fin signifient roulement de référence et roulement fin.

Ces déplacements sont représentés sur les figures 5.6a et 5.6b. De haut en bas, nous pouvons voir l'arbre supportant la bague intérieure, puis la bague intérieure elle-même, puis la cage, ensuite la bague extérieure, et finalement le support de la bague extérieure. Entre la cage et la bague intérieure, il est possible de distinguer les billes. Pour plus de clarté, celles-ci sont indiquées par une flèche sur les figures 5.6a et 5.6b.

Pour le cas du roulement de référence et pour la cas du roulement fin, l'angle de vue n'est pas le même. Le repère angulaire est défini de la même manière pour les deux figures afin de faciliter la comparaison des deux cas. Dans les deux cas, la première bille est positionnée à proximité de la position 0° . Sur ces figures les déplacements sont représentés par une échelle de couleur et superposés sur l'image utilisée pour la stéréo-corrélation (prise par l'appareil photo de gauche). L'échelle de couleur est identique sur les deux figures, et son amplitude est choisie de manière à pouvoir étudier les

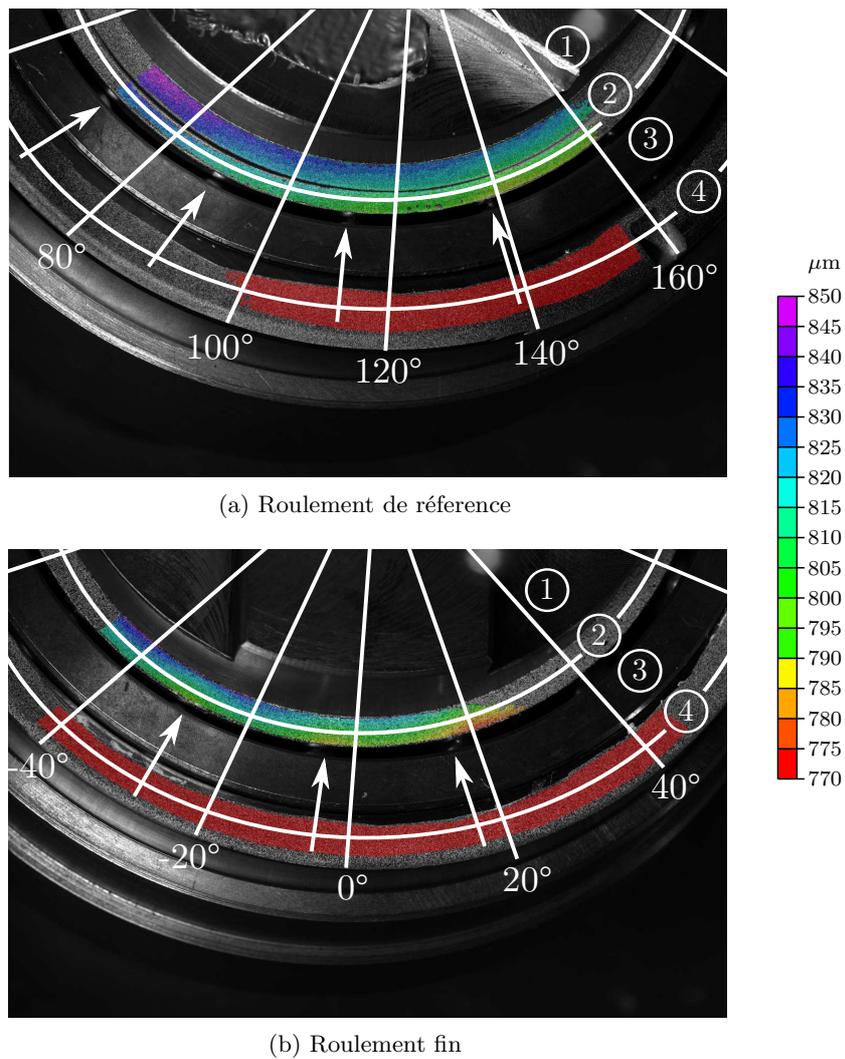


FIGURE 5.6 – Déplacement en surface des bagues par rapport au chargement de référence. 1 : Support de bague intérieure, 2 : Bague intérieure, 3 : Cage, 4 : Bague extérieure. Les flèches indiquent la position de billes.

déplacements sur la bague intérieure. Les données sur la bague extérieure des deux roulements sont donc hors échelle.

Les mêmes déplacements sont tracés sur les figures 5.7 et 5.8. Sur ces courbes, nous représentons les déplacements, δ_i^{ref} , δ_o^{ref} , δ_i^{fin} et δ_o^{fin} le long d'un chemin circulaire visible sur les figures 5.6a et 5.6b. Ces résultats de mesures montrent premièrement que les deux bagues (intérieure et extérieure) possèdent un mouvement de translation dans le sens de la force axiale par rapport à l'état de référence.

Le déplacement de la bague extérieure est dû à la souplesse du support du montage. Celui de la bague intérieure est la somme de plusieurs phénomènes :

- le déplacement de la bague extérieure,
- le déplacement des billes (augmentation de l'angle de contact),
- l'enfoncement des billes dans les bagues (contact de Hertz),
- la souplesse des bagues (déformation en tulipe).

Sur les deux cas (référence et fin), le déplacement n'est pas constant le long du chemin circulaire. Sur la bague extérieure, le contact avec les billes a lieu sur la partie non visible de la bague, en conséquence la partie visible de la bague extérieure reste plane. À partir des déplacements obtenus (δ_o^{ref} et δ_o^{fin}) il est donc possible de calculer le déplacement de corps rigide de la bague extérieure par rapport à l'état de référence.

Il faut donc d'abord être capable de positionner le repère lié à la bague extérieure, le repère \mathcal{R}_G (FIG. 2.1 en page 21) dans le repère du bâti de la machine d'essai, noté \mathcal{R}_{bati} . Dans ce repère, l'axe \mathbf{x}_{bati} est l'axe de déplacement de la traverse, c'est à dire l'axe d'application de la force appliquée sur la bague intérieure du roulement à billes. Nous faisons l'hypothèse que la bague extérieure possède un mouvement de translation suivant \mathbf{x}_{bati} et deux rotations, $\theta_{o,y}$ et $\theta_{o,z}$. Ainsi, nous pouvons utiliser des formules de changement de repères similaires à l'équation 2.5 en page 22 qui concernent la bague intérieure.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} \delta_{o,x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{bati}} + \begin{bmatrix} -\cos \theta_{o,y} \cos \theta_{o,z} & \cos \theta_{o,y} \sin \theta_{o,z} & -\sin \theta_{o,y} \\ \sin \theta_{o,z} & \cos \theta_{o,z} & 0 \\ -\sin \theta_{o,y} \cos \theta_{o,z} & \sin \theta_{o,y} \sin \theta_{o,z} & \cos \theta_{o,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} \quad (5.1)$$

Les points de mesure sur la bague extérieure, le long du chemin circulaire ont pour coordonnées dans \mathcal{R}_G :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_o/2 \\ R_o \cdot \cos \theta \\ R_o \cdot \sin \theta \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} \quad (5.2)$$

Nous pouvons alors approcher les déplacements le long du chemin circulaire par une forme analytique du type :

$$\delta_{o,rot}^{ref} = \delta_{o,x}^{ref} - R_o \cos \theta_{o,y}^{ref} \sin \theta_{o,z}^{ref} \cos \theta + R_o \sin \theta_{o,y}^{ref} \sin \theta \quad (5.3)$$

pour le roulement de référence, et :

$$\delta_{o,rot}^{fin} = \delta_{o,x}^{fin} - R_o \cos \theta_{o,y}^{fin} \sin \theta_{o,z}^{fin} \cos \theta + R_o \sin \theta_{o,y}^{fin} \sin \theta \quad (5.4)$$

pour le roulement fin. Où R_o est le rayon du chemin circulaire sur la bague extérieure et θ est la variable angulaire. Les paramètres à déterminer sont : δ_o^{ref} et δ_o^{fin} les déplacements axiaux des bagues extérieures, $\theta_{o,y}^{ref}$, $\theta_{o,z}^{ref}$ et $\theta_{o,y}^{fin}$,

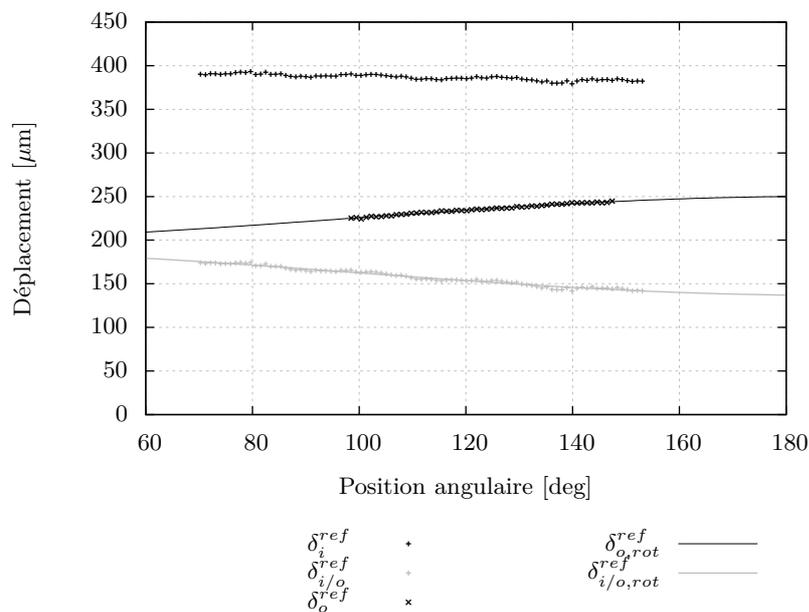


FIGURE 5.7 – Déplacement en surface des bagues en fonction de la position angulaire. Cas du roulement de référence.

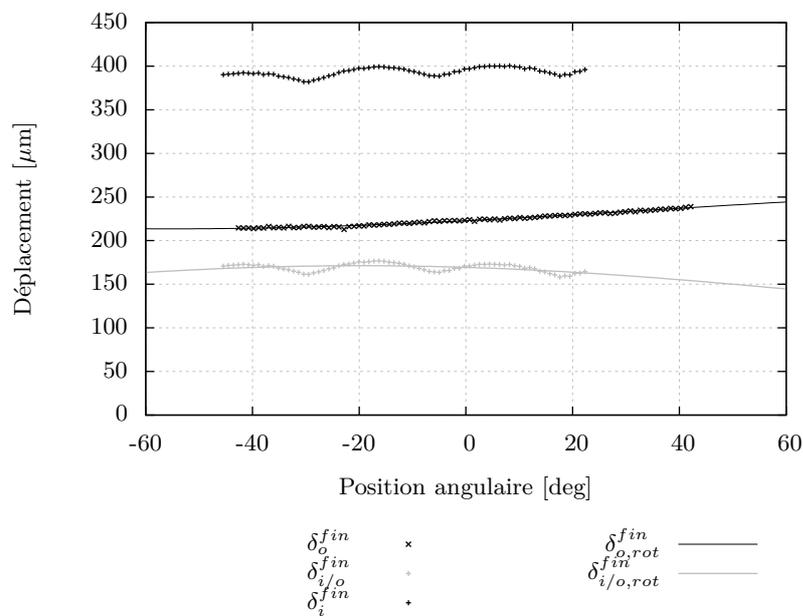


FIGURE 5.8 – Déplacement en surface des bagues en fonction de la position angulaire. Cas du roulement fin.

$\theta_{o,z}^{ref}$ les rotations de la bague extérieure. Les résultats de l'approximation par la méthode des moindres carrés sont donnés dans le tableau 5.2.

Finalement la bague extérieure n'est pas en translation pure et tourne d'un angle de $0,019^\circ$ dans le cas du roulement de référence et d'un angle de $0,014^\circ$ dans le cas du roulement fin. Ceci pour l'état le plus chargé, c'est à dire lorsque la force axiale est proche de 100kN. Le fait que la bague extérieure tourne et translate n'est pas gênant car nous sommes capables de le détecter et de le mesurer. Les quantités $\delta_{o,rot}^{ref}$ et $\delta_{o,rot}^{fin}$ sont représentés par des courbes en trait plein sur les figures 5.7 et 5.8. Connaissant ces quantités, nous pouvons alors calculer le déplacement de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure, $\delta_{i/o}^{ref}$ et $\delta_{i/o}^{fin}$.

Roulement	Référence	Fin
$\delta_{o,x}$	225 μm	235 μm
$\theta_{o,y}$	$-0,003^\circ$	$0,014^\circ$
$\theta_{o,z}$	$0,019^\circ$	$0,010^\circ$

TABLE 5.2 – Déplacement de corps rigide de la bague extérieure par rapport à l'état de référence.

$$\delta_{i/o}^{ref} = \delta_i^{ref} - \left(\delta_{o,x}^{ref} - R_i \cos \theta_{o,y}^{ref} \sin \theta_{o,z}^{ref} \cos \theta + R_i \sin \theta_{o,y}^{ref} \sin \theta \right) \quad (5.5)$$

$$\delta_{i/o}^{fin} = \delta_i^{fin} - \left(\delta_{o,x}^{fin} - R_i \cos \theta_{o,y}^{fin} \sin \theta_{o,z}^{fin} \cos \theta + R_i \sin \theta_{o,y}^{fin} \sin \theta \right) \quad (5.6)$$

où R_i est le rayon du chemin circulaire utilisé sur la bague intérieure.

Le résultat est représenté par les points gris sur les figures 5.7 et 5.8. Il est maintenant possible de calculer le mouvement de solide rigide de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure en utilisant une approximation similaire aux cas des bagues extérieures (EQ. 5.3 et 5.4). En effet, les déplacements $\delta_{i/o}^{ref}$ et $\delta_{i/o}^{fin}$ sont les déplacements de la bague intérieure dans le repère \mathcal{R}_G . Ainsi, nous cherchons à présent les grandeurs δ_x , θ_y , et θ_z tels qu'ils sont définis sur la figure 2.2 en page 22. C'est à dire, nous approchons $\delta_{i/o}^{ref}$ par une fonction de la forme :

$$\delta_{i/o,rot}^{ref} = \delta_x^{ref} - R_i \cos \theta_y^{ref} \sin \theta_z^{ref} \cos \theta + R_i \sin \theta_y^{ref} \sin \theta \quad (5.7)$$

et approchons $\delta_{i/o}^{fin}$ par une fonction de la forme :

$$\delta_{i/o,rot}^{fin} = \delta_x^{fin} - R_i \cos \theta_y^{fin} \sin \theta_z^{fin} \cos \theta + R_i \sin \theta_y^{fin} \sin \theta \quad (5.8)$$

Nous constatons (cf TAB. 5.3) que la bague intérieure des roulements à billes possède les mêmes tendances en terme de rotation : une faible rotation suivant \mathbf{y}_G et une rotation proche de $-0,03^\circ$ selon \mathbf{z}_G . Cette rotation ne sera pas à négliger lors de la modélisation. En effet, les roulements à quatre points de contact étant peu tolérants au défaut de mésalignement, un faible angle entraîne des moments importants sur la bague intérieure et change la cinématique interne du roulement.

Maintenant que nous connaissons le mouvement de corps rigide de la bague intérieure, il est possible d'isoler le déplacement en surface de bagues. Nous faisons l'hypothèse que le déplacement mesuré par stéréo-corrélation est la somme d'un déplacement global d'une part, dû au mouvement de corps rigide de la bague, et d'un déplacement local causé par la déformation des bagues au niveau des contacts avec les billes d'autre part. Ainsi pour obtenir les déplacements en surface, nous effectuons la soustraction :

Roulement	Référence	Fin
δ_x	163 μm	139 μm
θ_y	$0,005^\circ$	$-0,012^\circ$
θ_z	$-0,027^\circ$	$-0,032^\circ$

TABLE 5.3 – Déplacement de corps rigide de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.

$$\delta_{surf}^{ref} = \delta_{i/o}^{ref} - \delta_{i/o,rot}^{ref} \quad (5.9)$$

pour le cas du roulement de référence. Et, de même, pour le cas du roulement fin :

$$\delta_{surf}^{fin} = \delta_{i/o}^{fin} - \delta_{i/o,rot}^{fin} \quad (5.10)$$

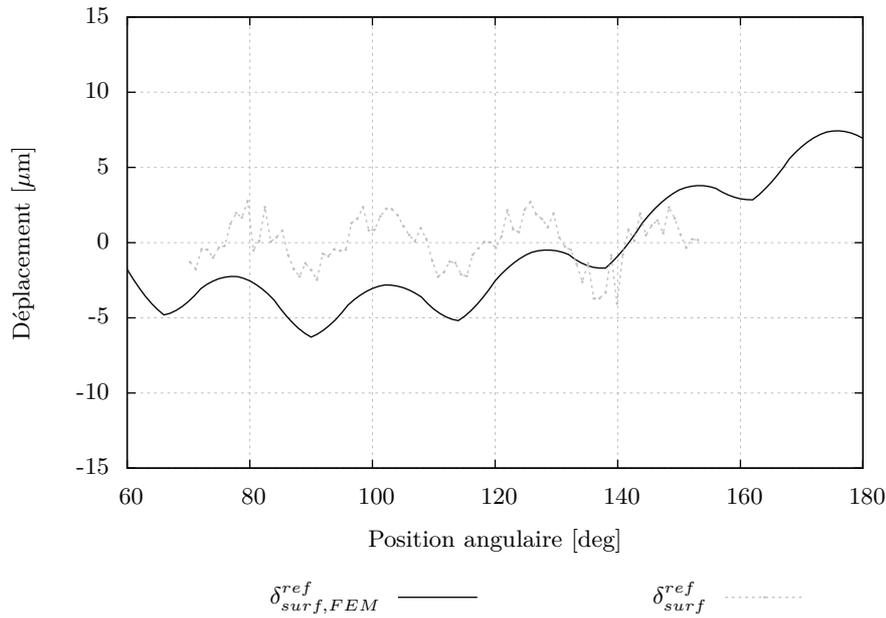


FIGURE 5.9 – Déplacement en surface des bagues par rapport à la surface moyenne de la bague pour le cas du roulement de référence.

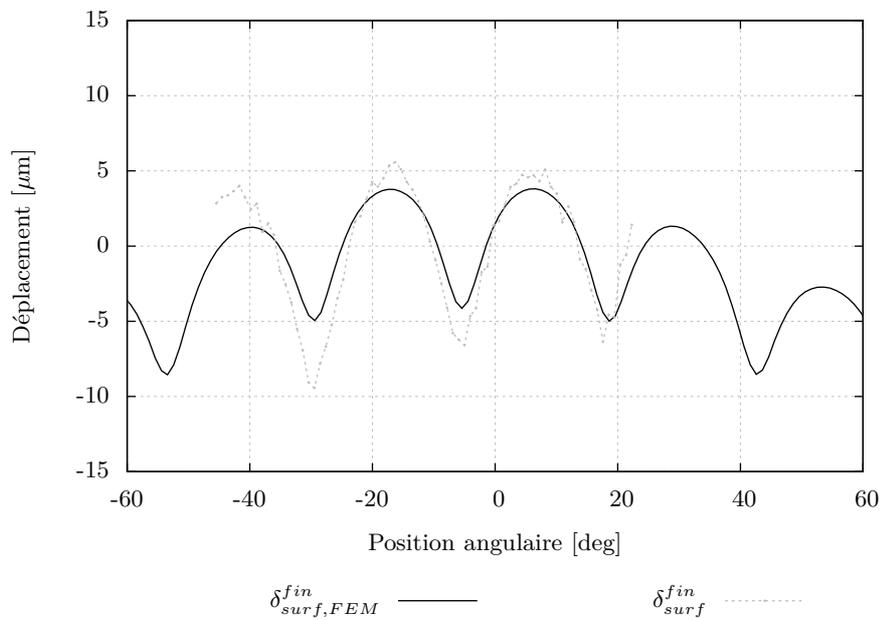


FIGURE 5.10 – Déplacement en surface des bagues par rapport à la surface moyenne de la bague pour le cas du roulement fin.

Ces résultats expérimentaux sont tracés sur les figures 5.9 et 5.10 par des lignes grises.

Sur ces mêmes figures nous représentons également les résultats obtenus numériquement par les courbes noires. Le système expérimental n'étant pas axi-symétrique, les déplacements observés et calculés ne le sont donc pas.

Nous observons deux effets sur les figures 5.9 et 5.10 :

- un effet à longues ondulations dû à la géométrie non axi-symétrique.
- un effet à courtes ondulations causé par la présence des billes.

Les longues ondulations nous incitent à nuancer les propos de calcul des mouvements des corps rigides des bagues intérieures : l'approximation (EQ. 5.7 et 5.8) n'a pas pu se faire sur la surface entière car les deux caméras utilisées ne peuvent avoir toute cette surface dans leurs angles de vue. Avec ces deux caméras, il est de plus impossible d'effectuer une corrélation sur l'ensemble de l'image à cause de la profondeur de champ trop faible. Nous rappelons par ailleurs que l'approximation sur les bagues extérieures ne pose pas de problème car la surface visible reste plane.

Ainsi les résultats des approximations permettant le calcul de mouvement de corps rigides des bagues intérieures serait plus juste si les déplacements étaient disponibles tout autour de la bague.

Sur la figure 5.10, nous observons un bon accord entre les courbes expérimentales et numériques. Les amplitudes de chacune des ondulations causées par la présence des billes sont très proches : $9\ \mu\text{m}$ numériquement et $12\ \mu\text{m}$ expérimentalement.

Sur la figure 5.9, nous faisons des observations similaires au niveau des amplitudes : $3,5\ \mu\text{m}$ numériquement et environ $5\ \mu\text{m}$ expérimentalement. Cependant, le décalage entre les courbes numérique et expérimentale, dans le cas du roulement de référence, montre qu'il y a un écart sur les angles de rotation estimés. En effet, la courbe expérimentale est proche de l'horizontal et ne suit pas l'effet de grande ondulation visible sur la courbe numérique. Une correction pourrait être appliquée, mais comme les déplacements ne sont pas accessibles sur l'ensemble de la surface, cette correction manquerait d'objectivité.

Les résultats des figures 5.9 et 5.10 confirment que le modèle éléments finis et la manière dont les chargements (forces de contact) sont appliqués est satisfaisante et correspond au système réel. La différence dans l'amplitude des courtes ondulations entre le cas de référence : $5\ \mu\text{m}$, et le cas fin : $12\ \mu\text{m}$, confirme quant à elle que les bagues du roulement fin sont plus souples que celles du roulement de référence.

Nous représentons sur les figures 5.11a et 5.11b les résultats des déplacements nodaux par rapport à l'état de chargement de référence pour les deux roulements étudiés. Nous utilisons la même amplitude de l'échelle de couleur que celle des figures 5.9 et 5.10 pour faciliter la comparaison.

Les résultats de la simulation numérique ne permettant pas de visualiser les déplacements relativement à la bague extérieure, il est normal d'observer des différences avec les résultats expérimentaux des figures 5.9 et 5.10.

Les résultats numériques permettent d'observer le phénomène de courtes ondulations au niveau de chaque bille, c'est à dire une déformée en forme de tulipe aux bagues du roulement (FIG. 5.12).

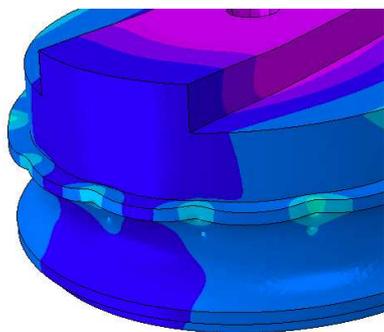


FIGURE 5.12 – Déformations en tulipe de la bague intérieure (facteur d'échelle 100). Cas du roulement fin.

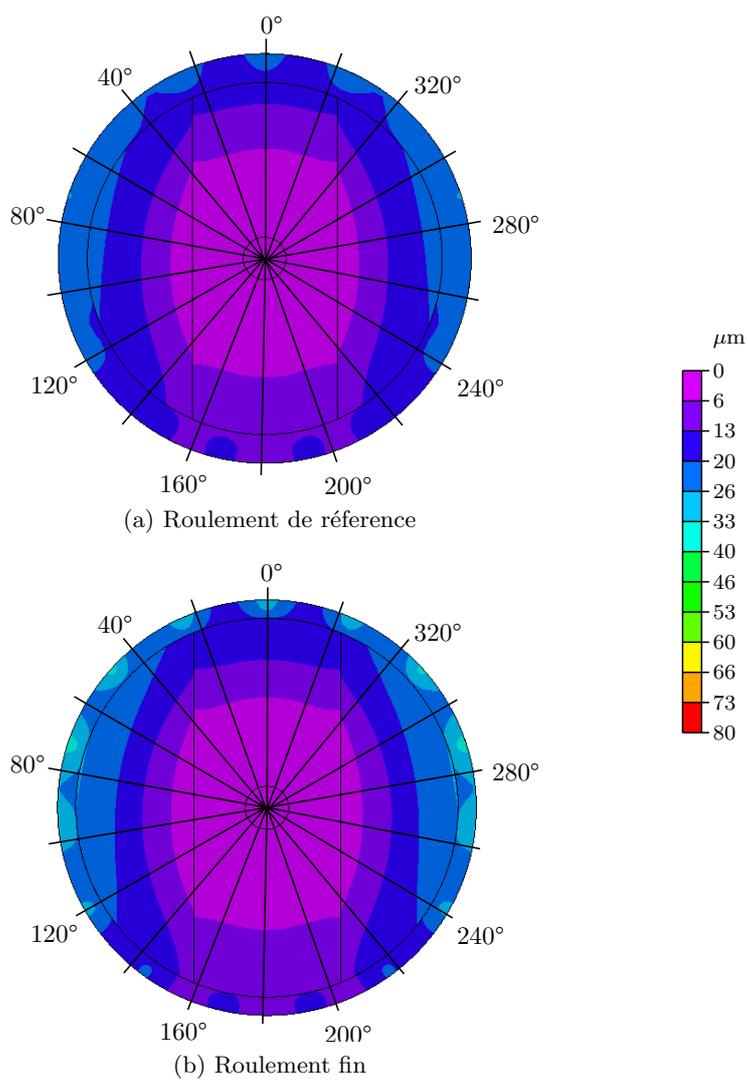


FIGURE 5.11 – Déplacement en surface des bagues par rapport à l'état de référence.

5.2.2 Loi de comportement

Les figures 5.9 et 5.10 permettent de connaître la position angulaire où le déplacement axial de la bague intérieure peut-être mesuré. La courbe expérimentale croise la surface moyenne de la bague à 140° dans le cas du roulement de référence et à 0° dans le cas du roulement fin. Ainsi, en relevant le déplacement à 140° sur la courbe expérimentale de la figure 5.7 nous obtenons un déplacement axial de $140\mu\text{m}$. En opérant de la même manière avec la courbe en figure 5.8, avec la position angulaire 0° , nous obtenons un déplacement axial de $170\mu\text{m}$.

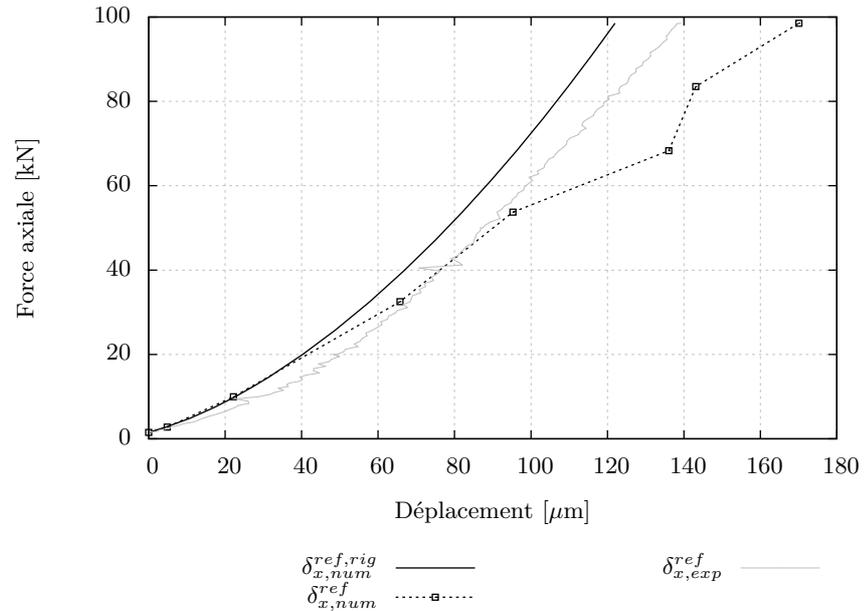


FIGURE 5.13 – Loi de comportement dans le cas du roulement de référence.

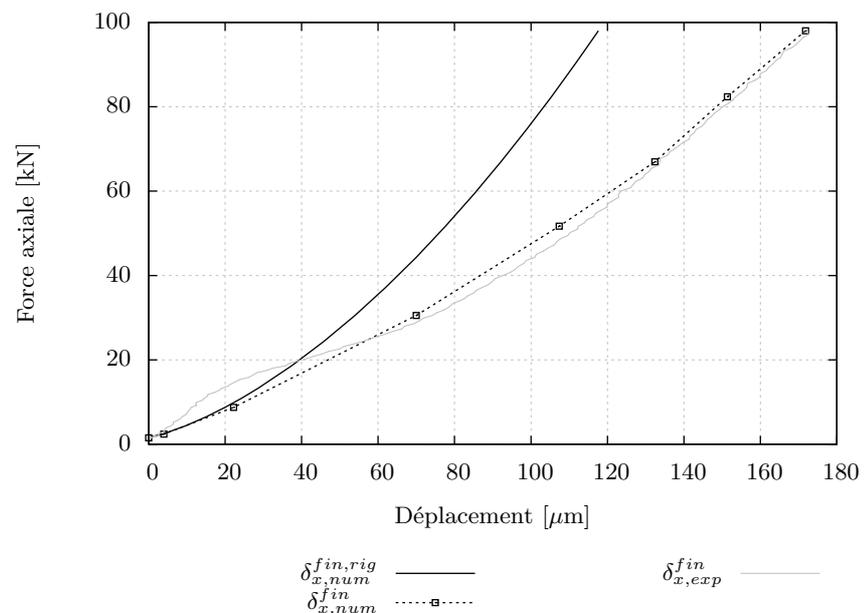


FIGURE 5.14 – Loi de comportement dans le cas du roulement fin.

Dans le cas du roulement de référence (FIG. 5.13), nous remarquons que bien qu'il soit à bagues larges et une fois placé dans un logement souple, il ne peut pas être considéré comme rigide. Ce qui est démontré par l'écart

important entre les résultats numériques en bagues rigide, $\delta_{x,num}^{ref,rig}$ et les résultats expérimentaux $\delta_{x,exp}^{ref}$. Les résultats du modèle avec prise en compte de la souplesse de bagues, $\delta_{x,num}^{ref}$, convergent vers les résultats expérimentaux, $\delta_{x,exp}^{ref}$, pour des chargements inférieurs à 60 kN. L'écart au delà de cette limite peut-être causé par un maillage non adapté, ou une zone de sélection non représentative du voisinage des zones de contact. Cet écart montre les limites de notre modèle dans le cas de fort chargement lorsque les angles de contacts sont importants et que la troncature des ellipses de contact est proche voire effective.

Dans le cas du roulement fin (FIG. 5.14), nous observons que le comportement obtenu expérimentalement pour des chargements inférieurs à 20kN n'est pas correctement modélisé numériquement. Cependant, pour des charges plus élevées, l'écart relatif est plus faible : 6% pour une force axiale de 30 kN et inférieure à 1% pour une force axiale de 100 kN. Nous notons une très bonne corrélation entre les résultats d'expérience et le modèle numérique.

Pour conclure, la seule différence dans la modélisation des deux roulements se situe au niveau des maillages utilisés, ce qui souligne leur impact sur les résultats, particulièrement dans le cas de chargements élevés.

Conclusion

Dans le cas d'un roulement à billes à bagues minces, intégré à un environnement souple ou soumis à de forts chargements, les déformations structurelles de pistes engendrent des modifications dans l'équilibre interne qu'il est nécessaire d'étudier pour le dimensionnement. Dans ce but, nous avons étudié plusieurs techniques pour prendre en compte la souplesse des bagues dans l'équilibre d'un roulement à billes à quatre points de contact. Nous proposons un couplage entre un code semi-analytique, pour calculer l'équilibre interne et la cinématique locale, et un code de calcul éléments finis, pour déterminer les déformations structurelles des bagues. Le modèle prend en compte l'ovalisation et la torsion des pistes du roulement et également l'ouverture des gorges lorsque celle-ci n'est pas à négliger.

Le couplage se décompose en plusieurs étapes :

Application des efforts de contact - Nous montrons qu'il n'est pas nécessaire de modéliser par éléments finis le problème de contact entre la bille et la piste, car l'utilisation de forces nodales judicieusement placées permet de répondre à ce problème dans notre cas. Le modèle proposé permet alors un découplage du calcul des effets locaux (déformations de Hertz) des effets structuraux (ovalisation, torsion).

Calcul éléments finis - Les calculs réalisés sont des calculs linéaires, aucun contact n'est déterminé par éléments finis. Ce qui permet un temps de calcul global faible : environ 20 minutes sur un ordinateur de bureau pour calcul semi analytique et quatre itérations de calcul éléments finis ;

Sélection du voisinage des ellipses de contact - Nous proposons trois techniques se référant respectivement à une géométrie différente : disque, secteur angulaire, secteur transversal.

Ces techniques montrant peu d'écart entre elles sur l'impact au niveau des résultats, nous privilégions la méthode de sélection par secteur angulaire qui est plus robuste lorsque les ellipses de contact sont placées en position haute.

En revanche, nous recommandons la sélection par disque lorsque les ellipses de contact sont placées plus bas ou lorsqu'elles sont plus petites.

Calcul de la nouvelle géométrie des bagues - La prise en compte du changement de géométrie est réalisée par la modification de la position des centres de courbure et de la conformité. Cependant, dans les cas étudiés, le changement de conformité possède un rôle mineur par rapport au déplacement des centres de courbure. Les faibles variations de conformité ont généralement peu d'impact sur l'équilibre interne, il n'est donc pas nécessaire de les prendre en compte dans sa détermination.

Des variantes sont proposées pour le calcul de la nouvelle géométrie. Retenons qu'une approximation torique permet de prendre en compte le changement de conformité, mais introduit des comportements non réalistes sur la déformée globale des bagues. À l'inverse, le calcul du déplacement moyen de la zone de sélection ne permet pas de prendre en compte le phénomène d'ouverture de gorge, mais est très représentatif du comportement global des bagues. Comme dans les cas étudiés la conformité varie peu, nous préconisons cette dernière méthode de calcul du déplacement moyen.

Intégration de la géométrie - La nouvelle géométrie du roulement est insérée dans les équations d'équilibre du roulement. Cette méthode perturbant le schéma de résolution, il est nécessaire de ne pas mettre à jour la géométrie à chaque itération de ce schéma.

Concernant les résultats de ce modèle, nous constatons que la souplesse des bagues produit deux effets importants sur le fonctionnement interne du roulement.

Premièrement, les pressions de contact sont mieux distribuées et moins élevées, ce qui accroît l'enveloppe des chargements possibles.

Deuxièmement, les angles de contact ayant tendance à être plus élevés, les billes se retrouvent plus rapidement au niveau de l'épaule de la piste (troncature de l'ellipse de contact) : cet effet réduit la capacité de charge du roulement. Ce dernier point est plus limitant que le premier car un contact au niveau des épaulements des bagues endommage fortement et rapidement les billes et les pistes.

La confrontation de notre modèle avec des résultats expérimentaux montre une bonne adéquation entre la théorie et l'expérience. Nous avons comparé le comportement d'un roulement à bagues larges et d'un roulement à bagues fines. Les résultats montrent d'une part qu'il n'est pas possible de négliger la souplesse des bagues larges lorsque celles-ci sont montées dans un support souple, et que d'autre part, notre modèle est capable de représenter fidèlement le déplacement axial des bagues, mais également des ondulations en surface des bagues. Il est également intéressant de noter que, même dans des cas où le logement du roulement est relativement massif et les bagues épaisses c'est à dire un cas bagues rigides a priori, l'introduction des déformations structurelles modifie significativement l'équilibre et la cinématique interne du roulement.

Il reste cependant des efforts à faire pour une meilleure prise en compte des cas extrêmes tels que les troncatures d'ellipse de contact. L'utilisation d'un couplage est également possible, mais cette fois ci en calculant par éléments finis le ou les contacts problématiques.

La méthode proposée est également bien adaptée à un environnement de type bureau d'études : le temps de calcul est faible, et les éléments finis permettent de répondre à des attentes en terme de souplesse d'utilisation et d'ajout d'éléments extérieurs au roulements.

Forces hydrodynamiques

A.1	Interaction entre la cage et les bagues	109
A.2	Interaction entre la cage et les billes	110
A.2.1	Effet tonneau/plan	110
A.2.2	Effet de palier hydrodynamique.	111

La cage est un élément pouvant posséder de multiples formes. Dans les roulements de petite taille, celle-ci est souvent réalisée par emboutissage. Cette technique n'est pas utilisée pour les roulements dans les turbomachines car la cage serait alors source de vibration importantes. Le type de cage classiquement utilisé dans les roulements aéronautiques est une cage usinée en alliage de bronze ou de laiton possédant un jeu faible avec l'une des bagues et un jeu élevé avec l'autre. Dans cette cage sont creusées des alvéoles pour y positionner les billes. Les alvéoles sont soit des cavités sphériques soit des cavités cylindriques. Un jeu est présent entre les billes et l'alvéole : le jeu alvéolaire J_a .

A.1 Interaction entre la cage et les bagues

Une bague et la cage sont donc en interaction par l'intermédiaire de surfaces cylindriques. Dans notre modèle de cage, celle-ci possède deux degrés de mobilité en translation dans le repère \mathcal{R}_G . Ainsi la cage reste co-axiale avec la bague extérieure. Cependant dans le but d'utiliser un modèle simple nous supposons qu'elle reste également co-axiale avec la bague intérieure. La cage étant en contact avec les épaulements des bagues, nous devons étudier quatre interactions sur la cage : avec les bagues intérieures et extérieures, sur leur partie droite et gauche. Le rapport entre la largeur des zones en interaction et le diamètre de la cage étant inférieur à 0,125, le cas est donc celui d'un palier lisse hydrodynamique infiniment court [13].

Dans le cas du roulement QJ218, la cage est centrée sur la bague extérieure et le jeu diamétral est de 0,6 mm. En considérant une vitesse de cage ω_{Ca} de $5000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, nous obtenons un nombre de Reynolds d'environ 2000 avec l'huile Mobil Jet II couramment utilisée dans les turboréacteurs. Ce nombre correspond à un régime turbulent de l'écoulement du film d'huile dans les paliers.

Frêne décrit une procédure simple permettant de déterminer les conditions de fonctionnement d'un palier lisse dans le cas d'un écoulement laminaire : W , la charge appliquée sur le palier, ϕ , l'angle de calage, C_{lam} le couple de frottement.

$$W = \mu L V \left(\frac{LR}{DC} \right)^2 \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)} \quad (\text{A.1})$$

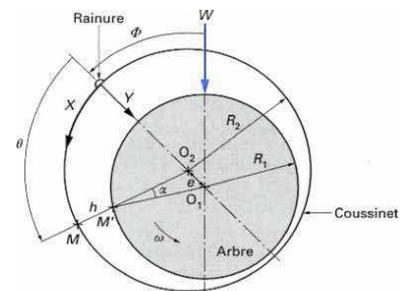


FIGURE A.1 – Palier hydrostatique, Frêne [12], 2004.

Où L est la largeur du palier, R est le rayon du palier, $V = \omega R$ est la vitesse linéaire de l'arbre du palier, μ la viscosité dynamique de l'huile, C est le jeu radial et $\varepsilon = e/C$ est l'excentricité relative.

$$\phi = \arctan \left(\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$C_{lam} = \frac{\mu V R^2 L}{C} \frac{\pi (2 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\text{A.3})$$

Frêne [12] propose une correction dépendant du nombre de Reynolds pour le couple de frottement dans le cas d'un écoulement non laminaire. Cette correction est également décrite par Frêne [12] :

$$C_{turb} = \left(1 + 0,0012 Re^{0,94} \right) C_{lam} \quad (\text{A.4})$$

Ce modèle est utilisé pour déterminer les efforts exercés par les bagues sur la cage en fonction des déplacements de la cage δ_y^{Ca} et δ_z^{Ca}

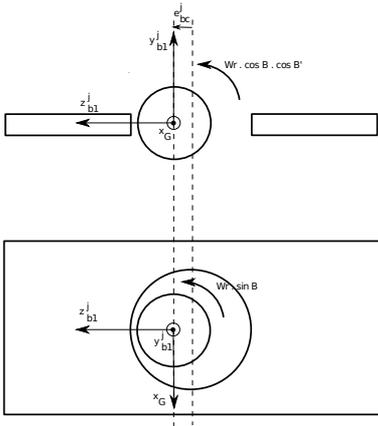


FIGURE A.2 – Déplacement d'une bille dans son alvéole. Effet de palier hydrodynamique et effet tonneau/plan.

A.2 Interaction entre la cage et les billes

L'interaction entre une bille et une alvéole de la cage est considérée comme la somme de deux effets (FIG. A.2) :

- dans le plan (G_{b1}, x_G, z_{b1}^j) un effet de palier hydrodynamique,
- dans le plan $(G_{b1}, y_{b1}^j, z_{b1}^j)$ un effet tonneau/plan.

A.2.1 Effet tonneau/plan

L'effet tonneau/plan étant présent à l'avant et à l'arrière de la bille, il faut donc calculer deux interactions de ce type. Pour un diamètre de bille de 22, 225 mm, et une vitesse de rotation de 20 000 tr · min⁻¹, nous obtenons un nombre de Reynolds d'environ 500, ce qui correspond à un régime laminaire.

L'effet du contact tonneau/plan, dans le cas de films de fluide minces en régime laminaire est décrit par Kapitza [29] et Nélias [34]. L'effort normal W et la force de frottement F sont données par les relations suivantes :

$$W = \frac{6\mu \frac{D}{2} \pi \sqrt{2Re_q U}}{3 + \frac{2}{R}} \sqrt{h_o} \quad (\text{A.5})$$

$$F = 2\mu U \sqrt{\frac{D}{2} Re_q} \int_{-3}^3 f(\eta) d\eta \quad (\text{A.6})$$

avec h_o la hauteur du film d'huile. Celle-ci est déterminée en fonction du déplacement de la bille dans l'alvéole. Et :

$$Re_q = \left(\frac{2}{D} - \frac{2}{D + J_a} \right)^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$R = \frac{2R_z}{D} \quad (\text{A.8})$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{L^2} + \eta^2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{L^2} + \eta^2}} \quad (\text{A.9})$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{Dh_o}} \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Effet de palier hydrodynamique

L'effet de palier hydrodynamique est déterminé de manière similaire au cas du contact cage/bague. Dans le cas de la bille, l'écoulement restant laminaire, nous utiliserons les relations non corrigées pour tenir compte des turbulences.

ANNEXE B

Dimensions des roulements simplifiés

Grandeur	Symbole	Unité	R ₂₀ ¹⁰	R ₃₁ ¹⁰	R ₂₄ ¹⁴
Géométrie des billes					
Nombre de billes	N	-	20	20	20
Diamètre bille	D	mm	20,638	20,638	20,638
Géométrie interne					
Conformité	f_i	-	0,5195	0,5195	0,5195
piste	f_o	-	0,5124	0,5124	0,5124
Troncature	g_i	mm	0,200	0,200	0,200
	g_o	mm	0,210	0,210	0,210
Angle de contact libre	α_f	deg	27,67	27,67	40
Angle de contact radial	α_i^0	deg	14,37	14,37	14,37
Angle de contact radial	α_o^0	deg	24,32	24,32	24,32
Diamètre moyen	d_m	mm	158	158	158
Jeu axial	E_p	μm	200	200	436
Jeu diamétral	J_d	μm	80	80	237
Géométrie extérieure					
Largeur roulement	B	mm	20	31	24
Diamètre externe	D_o	mm	189	189	189
Diamètre interne	d_i	mm	128	128	128
Hauteur épaulement	H	mm	10	10	14
Géométrie du logement et de l'arbre					
Epaisseur	e_l	mm	5,25	5,25	5
Longueur	L_i	mm	100	100	100
Propriétés matériaux					
Module d'Young	E_i, E_o, E_b	GPa	200	200	200
Coefficient de Poisson	ν_i, ν_o, ν_b	-	0,3	0,3	0,3
Masse volumique	ρ_i, ρ_o, ρ_b	kg · m ⁻³	7850	7850	7850

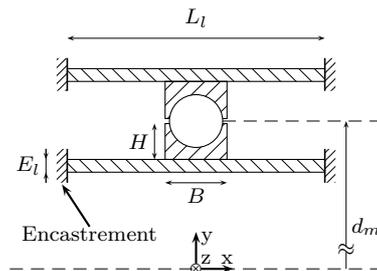


FIGURE B.1 – Géométrie des roulements simples.

Dimensions du roulement de référence

Grandeur	Symbole	Unité	Mesures	Modélisation
Géométrie des billes				
Nombre de billes	N	-	15	15
Diamètre bille	D	mm		22,225
Géométrie interne				
Diamètre piste	Dp_{ir}	mm	22,9657	22,9657
	Dp_{il}	mm	22,9389	22,9657
	Dp_{or}	mm	22,6068	22,6530
	Dp_{ol}	mm	22,6530	22,6530
Conformité piste	f_{ir}	-	0,5167	0,5167
	f_{il}	-	0,5161	0,5167
	f_{or}	-	0,5311	0,5321
	f_{ol}	-	0,5321	0,5321
Troncature	g_i	mm		0,3574
	g_o	mm	0,7707	0,8068
Angle de contact libre	α_f	deg		35
Angle de contact radial	α_i^0	deg		28,7215
Angle de contact radial	α_o^0	deg		34,4651
Diamètre moyen	d_m	mm		125
Jeu axial	E_p	mm	0,07	0,07
Jeu diamétral	J_d	mm	0,05	0,05
Géométrie extérieure				
Largeur roulement	B	mm	30	30
Diamètre externe	D_o	mm	160	160
Epaulement externe	D_{eo}	mm	136	136
Diamètre interne	d_i	mm	90	90
Epaulement interne	D_{ei}	mm	114	114
Géométrie de la cage				
Diamètre extérieur	D_o	mm	135,40	135,40
Diamètre intérieur	d_i	mm	118,42	118,42
Jeu alvéolaire	J_{alv}	mm	0,175	0,175
Propriétés matériaux				
Module d'Young	E_i, E_o, E_b	MPa		200 000
Coefficient de Poisson	ν_i, ν_o, ν_b	-		0,3
Masse volumique	ρ_i, ρ_o, ρ_b	kg.m ⁻³		7850

ANNEXE D

Dimensions du roulement fin

Grandeur	Symbole	Unité	Mesures	Modélisation
Géométrie des billes				
Nombre de billes	N	-	15	15
Diamètre bille	D	mm		22,225
Géométrie interne				
Diamètre piste	Dp_{ir}	mm	22,8383	22,8383
	Dp_{il}	mm	22,9531	22,8383
	Dp_{or}	mm	23,6364	23,5640
	Dp_{ol}	mm	23,5640	23,5640
Conformité piste	f_{ir}	-	0,5138	0,5138
	f_{il}	-	0,5164	0,5138
	f_{or}	-	0,5318	0,5301
	f_{ol}	-	0,5301	0,5301
Troncature	g_i	mm		0,2897
	g_o	mm	0,8086	0,7495
Angle de contact libre	α_f	deg		35
Angle de contact radial	α_i^0	deg		28,1794
Angle de contact radial	α_o^0	deg		34,0728
Diamètre moyen	d_m	mm		125
Jeu axial	E_p	mm	0,07	0,07
Jeu diamétral	J_d	mm	0,05	0,05
Géométrie extérieure				
Largeur roulement	B	mm	25	25
Diamètre externe	D_o	mm	154	154
Epaulement externe	D_{eo}	mm	136	136
Diamètre interne	d_i	mm	96	96
Epaulement interne	D_{ei}	mm	114	114
Géométrie de la cage				
Diamètre extérieur	D_o	mm	135,40	135,40
Diamètre intérieur	d_i	mm	118,42	118,42
Jeu alvéolaire	J_{alv}	mm	0,175	0,175
Propriétés matériaux				
Module d'Young	E_i, E_o, E_b	MPa		200 000
Coefficient de Poisson	ν_i, ν_o, ν_b	-		0,3
Masse volumique	ρ_i, ρ_o, ρ_b	kg.m ⁻³		7850

Table des figures

1.1	Éléments d'un roulement à billes.	13
1.2	Roulement à quatre points de contact.	14
1.3	Roulement de pivotement. Aguirrebeitia, 2012, [2].	15
1.4	Étude photo élastique d'un roulement à rouleaux. Eimer, 1964, [10].	15
1.5	Modèle éléments finis utilisé par Yao [38], 2012.	17
1.6	Modèle éléments finis utilisé par Daidié [8], 2008.	17
1.7	Modèle éléments finis utilisé par Olave, [35], 2010.	18
1.8	Roulement avec bague extérieure en cage d'écureuil. George <i>et al.</i> , 2007, [14].	19
2.1	Définition du repère \mathcal{R}_G	21
2.2	Définition du repère \mathcal{R}_{i1}	22
2.3	Définition du repère \mathcal{R}_i	22
2.4	Définition des repères \mathcal{R}_{b1}^j et \mathcal{R}_{b2}^j	23
2.5	Définition des repères \mathcal{R}_{b3}^j et $\mathcal{R}_{b2\beta'}^j$	23
2.6	Définition des repères \mathcal{R}_{cax}^j	24
2.7	Définition du repère \mathcal{R}_{Ca}	25
2.8	Définition du repère \mathcal{R}_{al}^j	26
2.9	Définition de la troncature g_o	26
2.10	Définition de la hauteur de troncature η_o	27
2.11	Contact radial avec la piste extérieure.	27
2.12	Définition de P_d avec un nombre de billes pair.	28
2.13	Définition de P_d avec un nombre de billes impair.	29
2.14	Définition de α_f bille en contact radial.	29
3.1	Déplacements des centres de courbures	32
3.2	Déplacements des centres de courbures, dans le cas de bagues déformables	36
3.3	Déplacement d'une bille dans son alvéole. Effet de palier hydrodynamique et effet tonneau/plan.	40
3.4	Forces exercées par les bagues sur la bille, tracées dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j\}$	41
3.5	Moments exercés par les bagues sur la bille, tracés dans le repère $\{G_{b2}^j, \mathbf{x}_G, \mathbf{y}_{b1}^j\}$	41
3.6	Position des axes dans une alvéole de la cage.	42
4.1	Définition du repère pour le contact bille/plan.	50
4.2	Maillage de la section de plan.	51
4.3	Détail région de contact, maillage Ppd36.	51
4.4	Visualisation du maillage Ppd36.	51

4.5	Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	52
4.6	Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	53
4.7	Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	54
4.8	Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	54
4.9	Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	55
4.10	Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	56
4.11	Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	56
4.12	Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	57
4.13	Position des trois points de chargement.	58
4.14	Déplacement nodal à la surface du plan et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	58
4.15	Déplacement nodal sous la surface de contact et erreur relative par rapport à la théorie de Hertz en fonction de la distance au point de contact adimensionnée par le rayon de la surface de contact. La droite verticale figure la limite du disque de contact.	59
4.16	Bague intérieure.	59
4.17	Section de la bague avec les trois « plans » de coupe.	60
4.18	Maillage de la bague intérieure, détail de la zone de contact. Utilisé pour les cas Bpd et Bpm.	60
4.19	Position des trois forces nodales dans le cas B3fr.	61

4.20	Champs de déplacement nodal de la bague soumise au différents chargements. Unité : μm	62
4.21	Déplacement nodal selon l'axe z de la surface de la bague dans le repère local au point de contact pour différents cas de chargement, en fonction de la position sur l'axe x. La distance est adimensionnée par rapport au demi grand axe de l'ellipse de contact.	63
4.22	Déplacement nodal selon l'axe z à une profondeur de $1,9b$ dans le repère local au point de contact.	64
4.23	Déplacement nodal selon l'axe z à une profondeur de $3,8b$ dans le repère local au point de contact.	65
4.24	Définition des zones de sélection.	65
4.25	Conformité calculée à partir d'une sélection par disque en fonction du rayon maximal de la zone de sélection pour deux angles de contacts. $r_{min} = a$ et r_{max} varie entre $1.2a$ et $3.8a$	67
4.26	Maillages normal et fin de R_{20}^{10}	71
4.27	Maillages normal et fin de R_{20}^{10} , détail de la zone de contact.	71
4.28	Comparaison déplacements pour une bague complète et une portion angulaire de 100°	72
4.29	Enveloppe de chargement bague intérieure R_{20}^{10}	73
4.30	Enveloppe de chargement bague extérieure R_{20}^{10}	74
4.31	Sélection par disque R_{20}^{10}	74
4.32	Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$. La conformité initiale figure en trait plein, l'intervalle de tolérance à l'usinage en pointillés.	75
4.33	Zone de sélection pour $\alpha_c = 46^\circ$, $F_c = 1000\text{ N}$, 1500 N , 2000 N	75
4.34	Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de l'angle de contact pour différentes valeurs de force normale [kN].	76
4.35	Déplacement axial du centre de courbure, bague intérieure R_{20}^{10} , en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$	77
4.36	Déplacement radial du centre de courbure, bague intérieure R_{20}^{10} , en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$	77
4.37	Déplacement piste intérieure droite R_{20}^{10}	78
4.38	Déplacement piste intérieure droite R_{20}^{10}	78
4.39	Déplacement de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle $[\circ]$ de contact et de force normales. Sélection par disque.	79
4.40	Sélection par secteur R_{20}^{10}	79
4.41	Conformité bague intérieure R_{20}^{10} en fonction de la force normale pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$. Sélection par secteur angulaire.	80
4.42	Déplacement de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle $[\circ]$ de contact et de force normales. Sélection par secteur angulaire.	80
4.43	Déplacements de la piste de la bague intérieure R_{20}^{10} pour différentes valeurs d'angle de contact $[\circ]$ et de forces normales, avec le calcul par déplacement moyen.	81
4.44	Conformité de la bague intérieure R_{31}^{10} en fonction de l'angle de contact pour différentes valeurs d'angle de contact [deg].	82

4.45	Déplacement total et déplacement structurel de la bague.	83
4.46	Schéma de résolution pour bague souple.	83
4.47	Roulement à billes et conditions aux limites.	85
4.48	Force normale sur la piste intérieure droite. Comparaison entre le cas de bagues rigides (R), de l'approximation torique avec sélection par disque (AT), de l'approximation torique simplifiée avec sélection par disque (AS), de calcul de déplacement moyen avec sélection par disque (DM) ou par secteur angulaire (DM S). Cas de chargement 3.	87
4.49	Déplacement radial des centres de courbure de la piste intérieure droite et extérieur gauche. Comparaison entre le cas de bagues rigides (R), de l'approximation torique avec sélection par disque (AT), de l'approximation torique simplifiée avec sélection par disque (AS), de calcul de déplacement moyen avec sélection par disque (DM) ou par secteur angulaire (DM S). Cas de chargement 3.	89
4.50	Angles de contact, position des ellipses de contact (pointillés) et pressions de contact sur les pistes des bagues. Cas de chargement 4.	90
4.51	Position maximale de l'ellipse de contact en fonction du moment M_z pour deux forces radiales F_y et une force axiale $F_x = 20$ kN. Cas de chargement 5.	91
5.1	Roulement QJ218-N2MA	93
5.2	Support du roulement.	94
5.3	Installation expérimentale. 1 : Roulement à billes, 2 : Appareils photos pour la stéréo-corrélation, 3 : Éclairage, 4 : traverse mobile, 5 : Capteur de force.	94
5.4	Maillage de la bague intérieure.	95
5.5	Maillage de la bague extérieure.	95
5.6	Déplacement en surface des bagues par rapport au chargement de référence. 1 : Support de bague intérieure, 2 : Bague intérieure, 3 : Cage, 4 : Bague extérieure. Les flèches indiquent la position de billes.	97
5.7	Déplacement en surface des bagues en fonction de la position angulaire. Cas du roulement de référence.	99
5.8	Déplacement en surface des bagues en fonction de la position angulaire. Cas du roulement fin.	99
5.9	Déplacement en surface des bagues par rapport à la surface moyenne de la bague pour le cas du roulement de référence.	101
5.10	Déplacement en surface des bagues par rapport à la surface moyenne de la bague pour le cas du roulement fin.	101
5.12	Déformations en tulipe de la bague intérieure (facteur d'échelle 100). Cas du roulement fin.	102
5.11	Déplacement en surface des bagues par rapport à l'état de référence.	103
5.13	Loi de comportement dans le cas du roulement de référence.	104
5.14	Loi de comportement dans le cas du roulement fin.	104
A.1	Palier hydrostatique, Frêne [12], 2004.	109
A.2	Déplacement d'une bille dans son alvéole. Effet de palier hydrodynamique et effet tonneau/plan.	110

B.1 Géométrie des roulements simples.	113
---	-----

Liste des tableaux

4.1	Comparatif des distances à partir de laquelle l'erreur par rapport à la théorie de Hertz est inférieure à 5% dans le cas du maillage grossier.	59
4.2	Conformité calculée à partir de la déformée de la bague en surface ou à la profondeur 1,9b. (1) Seul quatre points sont sélectionnés pour le calcul. (2) Résultats faussés.	67
4.3	Déplacements du centre de courbure calculés à partir de la déformée de la bague en surface ou à la profondeur 1,9b. (1) Seul quatre points sont sélectionnés pour le calcul. (2) Résultats faussés.	68
4.4	Comparatif du maillage normal et maillage fin. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10}	71
4.5	Comparatif de résultats entre maillage fin et maillage normal. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10}	71
4.6	Comparatif des résultats entre différentes tailles de portion angulaire. Bague extérieure et arbre R_{20}^{10}	72
4.7	Ecart absolu maximum de l'approximation torique, bague intérieure R_{20}^{10} , sélection par disque	74
4.8	Déplacement de la piste intérieure R_{20}^{10} . Unité : μm	78
4.9	Chargements appliqués sur la bague intérieure.	85
4.10	Déplacement de la bague intérieure, angles de contact et efforts normaux pour des bagues rigides (R) et de bagues déformables (DM) avec la sélection par disque. Cas de chargement 1 et 2.	86
4.11	Déplacements axial et radial des centres de courbure de la bague intérieure pour deux billes opposées, au position angulaire 0° et 180° . Cas de chargement 3.	87
4.12	Déplacements axial (δ_x) et radial (δ_y) de la bague intérieure. Cas de chargement 3.	88
5.1	Dimensions externes des roulements utilisés pour les essais en mm.	94
5.2	Déplacement de corps rigide de la bague extérieure par rapport à l'état de référence.	100
5.3	Déplacement de corps rigide de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.	100

Bibliographie

- [1] Abaqus 6.9-EF. *Abaqus benchmarks manual*, 2009.
- [2] J. Aguirrebeitia, M. Abasolo, R. Avilés, and I. F. de Bustos. General static load-carrying capacity for the design and selection of four contact point slewing bearings : Finite element calculations and theoretical model validation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 55 :23–30, 2012.
- [3] J. Aguirrebeitia, R. Avilés, I. F. de Bustos, and M. Abasolo. Calculation of general static load-carrying capacity for the design of four-contact-point slewing bearings. *Journal of Mechanical Design*, 132(6) :064501, 2010.
- [4] J. Boussinesq. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, 1885.
- [5] G. Cavallaro. *Modélisation multi-échelle et analyse des roulements à billes à bagues déformables*. PhD thesis, École mécanique, énergétique, génie civil, acoustique, 2004.
- [6] G. Cavallaro, D. Nélias, and F. Bon. Analysis of high speed inter-shaft cylindrical roller bearing with flexible rings. *Tribology transactions*, 48 :154–164, 2005.
- [7] G. Chen and Wen J. Load performance of large-scale rolling bearing with supporting structure in wind turbines. *Journal of tribology*, 134 :041105, 2012.
- [8] A. Daidie, Z. Chaib, and A. Ghosn. 3d simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing. *Journal of Mechanical Design*, 130(8) :082601, 2008.
- [9] PH Darji and DP Vakharia. Determination of optimum hollowness for hollow cylindrical rolling element bearing. In *ASME 2008 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 627–629. American Society of Mechanical Engineers, 2008.
- [10] H. Eimer. Aus dem gebiet der wälzlagertechnik, semesterentwurf. *Technische Hochschule, München*, June 1964.
- [11] E. G. Filetti and J. H. Rumbarger. A general method for predicting the influence of the structural support upon rolling element bearing performance. *ASME, Journal of Lubrication Technology*, 92 :121–128, 1970.
- [12] J. Frene. Butées et paliers hydrodynamiques. 5(320) :1, 2004.
- [13] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, and M. Godet. *Lubrification hydrodynamique, paliers et butées*. Eyrolles, 1990.
- [14] B. George and N. S. Prasad. Finite element analysis of squirrel cage ball bearingsfor gas turbine engines. *Defence Science Journal*, 57(2) :165–171, 2007.

- [15] Peter Gloeckner. The influence of the raceway curvature ratio on power loss and temperature of a high-speed jet engine ball bearing. *Tribology Transactions*, 56(1) :27–32, 2013.
- [16] P. K. Gupta. Dynamics of rolling-element bearings—part iii : Ball bearing analysis. *Journal of Lubrication Technology*, 101(3) :312–318, 1979.
- [17] P. K. Gupta. *Advanced dynamics of rolling elements*, volume 39. Springer, 1984.
- [18] B.J. Hamrock and W.J. Anderson. Analysis of an arched outer-race ball bearing considering centrifugal forces. *J. of Lubrication Technology*, 95 :265–276, 1973.
- [19] T. A. Harris. *Rolling bearing analysis*. Wiley New York, 2001.
- [20] H. Hertz. On the contact of elastic bodies. *J. Reine Angew. Math*, 92 :156–171, 1881.
- [21] L. Houpert. A uniform analytical approach for ball and roller bearings calculations. *Journal of tribology*, 119(4) :851–858, 1997.
- [22] J. Ignacio Amasorrain, X. Sagartzazu, and J. Damian. Load distribution in a four contact-point slewing bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 38(6) :479–496, 2003.
- [23] J. Jedrzejewski and W. Kwasny. Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 59(1) :377–382, 2010.
- [24] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge Univ Pr, 1987.
- [25] A. Jones and T. Harris. Analysis of a rolling element idler gear bearing having a deformable outer race structure. *ASME Trans. J. Basic Eng.*, pages 273–278, June 1963.
- [26] A. B. Jones. Ball motion and sliding friction in ball bearings. *Journal of Basic Engineering*, 81(3) :1–12, 1959.
- [27] L. Kania. Modelling of rollers in calculation of slewing bearing with the use of finite elements. *Mechanism and machine theory*, 41(11) :1359–1376, 2006.
- [28] L. Kania, M. Krynyke, and E. Mazanek. A catalogue capacity of slewing bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 58 :29–45, 2012.
- [29] P.L. Kapitza. Lubrication of rollers and spheres. *Zhur. Tech . Fiz*, 25 :747–762, 1955.
- [30] E. Laniado-Jacome, J. Meneses-Alonso, and V. Diaz-Lopez. A study of sliding between rollers and races in a roller bearing with a numerical model for mechanical event simulations. *Tribology International*, 43(11) :2175–2182, 2010.
- [31] A. Leblanc and D. Nelias. Ball motion and sliding friction in a four-contact-point ball bearing. *ASME, Journal of Tribology*, 129 :801, 2007.
- [32] Alexandre Leblanc and Daniel Nelias. Analysis of ball bearings with 2, 3 or 4 contact points. *Tribology Transactions*, 51(3) :372–380, 2008.
- [33] Y. Marchesse, C. Changenet, F. Ville, and P. Vexex. Numerical investigations on drag coefficient of balls in rolling element bearings. *STLE Annual Meeting, Detroit*, May 2013.

- [34] D. Nélias. *Étude du glissement dans les roulements à billes à grande vitesse de turbomachine*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 1989.
- [35] M. Olave, J. Damian, A. Serna, and X. Sagartzazu. Design of four contact-point slewing bearing with a new load distribution procedure to account for structural stiffness. *Journal of Mechanical Design*, 132(2) :021006, 2010.
- [36] S. Timoshenko. *Strength of Materials, Part I, 3rd ed.* Van Nostrand, New York, 1955.
- [37] Jeroen Anton Wensing. *On the dynamics of ball bearings*. University of Twente, 1998.
- [38] T. Yao, Y. Chi, and Y. Huang. Research on flexibility of bearing rings for multibody contact dynamics of rolling bearings. *Procedia Engineering*, 31 :586–594, 2012.
- [39] W.C. Young and Budynas R. G. *Roark's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill, 2002.
- [40] E. V. Zaretsky, J. V. Poplawski, and L. E. Root. Reexamination of ball-race conformity effects on ball bearing life. *Tribology Transactions*, 50(3) :336–349, 2007.
- [41] S. Zupan and I. Prebil. Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 36(10) :1087–1103, 2001.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : LACROIX

DATE de SOUTENANCE : 11 juillet 2014

Prénom : Samy

TITRE : Analyse et validation expérimentale d'un modèle de roulement à billes à quatre points de contact à bagues déformables par découplage des effets locaux et structuraux

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2014-ISAL-0073

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19

/ et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Les roulements à billes sont l'un des composants les plus importants et les plus critiques dans les turbomachines ou dans les éoliennes. Ils nécessitent un dimensionnement soigné pour allier fiabilité et pertinence économique, aboutissant à des roulements compacts, de fortes capacités en charges statique et dynamique. Ainsi, les butées à billes rencontrées dans les pieds de pales d'éoliennes doivent supporter des chargements très élevés, avec des bagues très fines par rapport aux dimensions du palier. Le roulement à quatre points de contact à haute vitesse est un autre exemple de bagues minces, où la cinématique interne est fortement liée à la géométrie des pistes qui elle, dépend de la rigidité des bagues et des logements. Pour cette application, les pistes intérieures et extérieures sont archées et bien souvent constituées de deux demi-bagues. La souplesse de ces dernières ainsi que celle du logement modifie la géométrie interne et l'interaction entre les composants. Cela implique une modification de la distribution de pression et simultanément des vitesses internes. Par conséquent, la souplesse du roulement et de son environnement est un paramètre important à prendre en compte pour mieux estimer le domaine des chargements admissibles pour le roulement.

Il est proposé dans cette thèse un modèle permettant de dimensionner des roulements à billes à quatre points de contact, principalement dans le domaine d'application des turbines aéronautiques. Ce modèle est capable de rendre compte des déformations globales des bagues et de leur logement et environnement proche. Un ensemble de travaux existants et différentes possibilités envisagées pour la mise en place d'un modèle de roulement à bagues déformables est présenté pour définir une stratégie de couplage efficace entre un modèle analytique et un modèle éléments finis.

La prise en compte de la souplesse des bagues s'appuie sur la résolution préalable d'un problème semi analytique de modélisation avec bagues rigides. Ensuite un couplage entre les résultats de ce modèle et un modèle éléments finis est réalisée pour prendre en compte la souplesse des bagues. Des choix sont nécessaires pour ce couplage, notamment sur la modélisation des contacts billes/bagues par l'utilisation de forces nodales pour simuler fidèlement ces contacts. Plusieurs méthodes sont ainsi évaluées pour calculer au mieux la nouvelle géométrie de la bague, en observant son comportement lorsqu'elle est soumise au contact d'une bille. Finalement, cette souplesse est intégrée au modèle semi analytique pour comparer le comportement d'un roulement à bagues rigides à celui d'un roulement à bagues souples. Des premiers résultats numériques sur une géométrie académique montrent des variations des grandeurs internes du roulement (angles de contact, ellipse de contact) ainsi qu'une meilleure répartition du chargement. Des essais ont été réalisés pour valider expérimentalement le modèle développé dans cette thèse. Les comparaisons par mesures du déplacement axial des bagues et des ondulations en surface des bagues montrent que la souplesse du support n'est pas négligeable, même dans le cas de bagues larges. Également, ces essais ont démontré la pertinence du couplage entre un modèle analytique et un modèle éléments finis pour rendre compte des déformations de bagues de roulements à billes à quatre points de contact.

MOTS CLÉS : Roulement à billes, éléments finis, couplage

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides

UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon

20, avenue Albert Einstein

69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Daniel NÉLIAS

Président du jury : Jérôme ANTONI

Composition du jury : Alain DAIDIÉ

Fabrice THOUVEREZ

José AGUIRREBEITIA

Daniel NÉLIAS

Mihai ARGHIR

Jérôme ANTONI

Bruno DRUEZ

Alexandre LEBLANC