



N°d'ordre NNT : 2017LYSEI103

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
opérée au sein de  
**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

Ecole Doctorale N° 162  
**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité/ discipline de doctorat :**

**GENIE MECANIQUE**

Soutenue publiquement le 3 Novembre 2017, par :

**Ye LU**  
**Ingénieur INSA-Lyon**

---

**Construction d'abaques numériques dédiés aux études paramétriques du procédé de soudage par des méthodes de réduction de modèles espace-temps**

---

Devant le jury composé de :

NERON DAVID	Professeur ENS Cachan	Rapporteur
KERFRIDEN PIERRE	Professeur associé Cardiff University	Rapporteur
CHINESTA FRANCISCO	Professeur ENSAM	Examinateur
BARANGER THOURAYA	Maître de conférences (HDR) Université Lyon1	Examinatrice
HAMDOUNI AZIZ	Professeur Université de La Rochelle	Examinateur
BERINGHIER MARIANNE	Maître de conférences ENSMA	Examinatrice
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon	Directeur de thèse
BLAL NAWFAL	Maître de conférences INSA-Lyon	Co-directeur

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon - Univ Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex, France



**Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<p><b>CHIMIE DE LYON</b>  <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal 3<sup>e</sup> étage  <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>            Insa : R. GOURDON</p>	<p><b>M. Stéphane DANIELE</b>            Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon            IRCELYON-UMR 5256            Equipe CDFA            2 avenue Albert Einstein            69626 Villeurbanne cedex  <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>
<b>E.E.A.</b>	<p><b>ELECTRONIQUE,            ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b>  <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a></p> <p>Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN  <a href="mailto:Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr">Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Gérard SCORLETTI</b>            Ecole Centrale de Lyon            36 avenue Guy de Collongue            69134 ECULLY            Tél : 04.72.18.60.97 Fax : 04 78 43 37 17  <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a></p>
<b>E2M2</b>	<p><b>EVOLUTION, ECOSYSTEME,            MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b>  <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Sylvie ROBERJOT            Bât Atrium - UCB Lyon 1            04.72.44.83.62            Insa : H. CHARLES  <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>M. Fabrice CORDEY</b>            CNRS UMR 5276 Lab. de géologie de Lyon            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât Géode            2 rue Raphaël Dubois            69622 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 06.07.53.89.13  <a href="mailto:cordev@univ-lyon1.fr">cordev@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>EDISS</b>	<p><b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-            SANTE</b>  <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Sylvie ROBERJOT            Bât Atrium - UCB Lyon 1            04.72.44.83.62            Insa : M. LAGARDE  <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b>            INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1            Bâtiment IMBL            11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon            696621 Villeurbanne            Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16  <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>INFOMATHS</b>	<p><b>INFORMATIQUE ET            MATHEMATIQUES</b>  <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a></p> <p>Sec : Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal, 3<sup>e</sup>            étage            Tél : 04.72. 43. 80. 46            Fax : 04.72.43.16.87  <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>M. Luca ZAMBONI</b>            Bâtiment Braconnier            43 Boulevard du 11            novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04 26 23 45 52  <a href="mailto:zamboni@maths.univ-lyon1.fr">zamboni@maths.univ-lyon1.fr</a></p>
<b>Matériaux</b>	<p><b>MATERIAUX DE LYON</b>  <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Marion COMBE            Tél: 04-72-43-71-70 -Fax : 87.12            Bat. Direction  <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b>            INSA de Lyon            MATEIS            Bâtiment Saint Exupéry            7 avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28  <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>
<b>MEGA</b>	<p><b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE            CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Marion COMBE            Tél: 04-72-43-71-70 -Fax : 87.12            Bat. Direction  <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Philippe BOISSE</b>            INSA de Lyon            Laboratoire LAMCOS            Bâtiment Jacquard            25 bis avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37  <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a></p>
<b>ScSo</b>	<p><b>ScSo*</b>  <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a>            Sec : Viviane POLSINELLI            Brigitte DUBOIS            Insa : J.Y. TOUSSAINT            Tél : 04 78 69 72 76  <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a></p>	<p><b>M. Christian MONTES</b>            Université Lyon 2            86 rue Pasteur            69365 LYON Cedex 07  <a href="mailto:Christian.montes@univ-lyon2.fr">Christian.montes@univ-lyon2.fr</a></p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à M. Anthony Gravouil et M. Nawfal Blal pour m'avoir accompagné et fait confiance pour la réalisation de cette thèse durant ces trois ans. Je les remercie sincèrement pour leur patience et leur disponibilité pour les discussions scientifiques qui m'ont fait découvrir plein de choses intéressantes (en calcul numérique). C'est un grand bonheur pour moi d'avoir travaillé avec eux et de les connaître.

Je voudrais remercier les membres du jury : M. Francisco (Paco) Chinesta pour avoir présidé le jury ; M. Pierre Kerfriden et M. David Néron pour avoir rapporté le mémoire de thèse et donné les suggestions pour l'amélioration du travail ; Mme Baranger Thouraya, Mme Marianne Beringhier et M. Aziz Hamdouni pour avoir participé à ce jury et accordé de leur temps à la lecture de mon travail, et particulièrement Mme Marianne Beringhier pour avoir corrigé mon rapport attentivement. Encore une fois, je tiens à exprimer ma gratitude à tous les membres du jury pour avoir assisté à ma soutenance de thèse.

Cette thèse ayant été effectuée dans le cadre de la chaire AREVA-SAFRAN, je tiens donc à remercier les titulaires de la chaire : M. Alain Combescure et M. Daniel Nélias ainsi que les acteurs des deux groupes : AREVA et SAFRAN, qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions. Et particulièrement un grand merci à M. Alain Combescure, mon ancien encadrant de master, pour m'avoir guidé vers la porte de recherche scientifique. Je voudrais également remercier M. Vincent Robin (AREVA) et M. Rémi Lacroix (ESI group) pour m'avoir suivi sur la partie applicative du travail. Je les remercie pour les échanges lors des réunions et la transfert des données de calculs réalisés pour le TG4.

Je souhaite remercier toutes les personnes du laboratoire et en particulier celles des équipes MIMESIS et MULTIMAP. Merci pour cette ambiance de travail formidable et pleine d'humour. Un grand merci à Mme Isabelle Comby pour son soutien quotidien au bon fonctionnement du laboratoire. Je voudrais remercier plus particulièrement les doctorants anciens et nouveaux avec qui j'ai partagé plus ou moins mon quotidien : Fatima, Pipo, Yannick, Alex, Eric, Nico, Emma, Sale, Tristan, Thibaut, Arthur, Pierre, Mhd, Zi Kang, Alexi, Thomas, et bien sûr les collègues chinois : Lv, Wenfeng, Hu, Lan, Wenqi, Yancheng, Shuai, Chao, Wenjun, Shaocheng, Meng, Haoming, Renzi, Jin.

Enfin, je voudrais remercier ma famille, surtout mes parents, qui reste toujours dernière de moi pour me soutenir et rendre tout cela possible. Pour finir, j'envoie tous mes remerciements à Han pour sa compagne, son soutien et sa patience, surtout pendant la rédaction de thèse.



# Résumé

Le recours à des simulations numériques pour l'étude de l'influence des paramètres d'entrée (matériaux, chargements, conditions aux limites, géométrie, etc.) sur les différentes quantités d'intérêt en soudage (contraintes résiduelles, distorsion, etc.) s'avère trop long et coûteux vu l'aspect multiparamétrique de ces simulations. Pour explorer des espaces paramétriques de grandes dimensions, avec des calculs moins coûteux, il paraît opportun d'utiliser des approches de réduction de modèle. Dans ce travail, d'une façon a posteriori, une stratégie non-intrusive est développée pour construire les abaques dédiés aux études paramétriques du soudage. Dans une phase offline, une base de données ('snapshots') a été pré-calculée avec un choix optimal des paramètres d'entrée donnés par une approche multi-grille (dans l'espace des paramètres). Pour explorer d'autres valeurs de paramètres, une méthode d'interpolation basée sur la variété Grassmannienne est alors proposée pour adapter les bases réduites espace-temps issues de la méthode SVD. Cette méthode a été constatée plus performante que les méthodes d'interpolation standards, notamment en non linéaire. Afin d'explorer des espaces paramétriques de grandes dimensions, une méthode de type décomposition tensorielle (i.e. HOPGD) a été également étudiée. Pour l'aspect d'optimalité de l'abaque, nous proposons une technique d'accélération de convergence pour la HOPGD et une approche 'sparse grids' qui permet d'échantillonner efficacement l'espace des paramètres. Finalement, les abaques optimaux de dimension jusqu'à 10 à précision contrôlée ont été construits pour différents types de paramètres (matériaux, chargements, géométrie) du procédé de soudage.

**MOTS CLÉS:** Abaques numériques, soudage, multiparamétrique, interpolation Grassmann, HOPGD, sparse grids



# Abstract

The use of standard numerical simulations for studies of the influence of input parameters (materials, loading, boundary conditions, geometry, etc.) on the quantities of interest in welding (residual stresses, distortion, etc.) proves to be too long and costly due to the multiparametric aspect of welding. In order to explore high-dimensional parametric spaces, with cheaper calculations, it seems to be appropriate to use model reduction approaches. In this work, in an *a posteriori* way, a non-intrusive strategy is developed to construct *computational vademecum* dedicated to parametric studies of welding. In an *offline* phase, a snapshots database is pre-computed with an optimal choice of input parameters given by a “multi-grids” approach (in parameter space). To explore other parameter values, an interpolation method based on Grassmann manifolds is proposed to adapt both the space and time reduced bases derived from the SVD. This method seems more efficient than standard interpolation methods, especially in non-linear cases. In order to explore high-dimensional parametric spaces, a tensor decomposition method (i.e. HOPGD) has also been studied. For the optimality aspect of the *computational vademecum*, we propose a convergence acceleration technique for HOPGD and a “sparse grids” approach which allows efficient sampling of the parameter space. Finally, *computational vademecums* of dimension up to 10 with controlled accuracy have been constructed for different types of parameters (materials, loading, geometry) of welding processes.

**KEYWORDS:** Computational vademecum, welding, multiparametric, Grassmann interpolation, HOPGD, sparse grids



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Méthodes standards d'approximation en thermo-mécanique transitoire</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.1.1 Description du procédé de soudage . . . . .	8
1.1.2 Phénomènes physiques impliqués en soudage . . . . .	8
1.1.3 Modélisation numérique du soudage . . . . .	10
1.2 Problème de référence : description dans la base fixe . . . . .	11
1.2.1 Formulation forte . . . . .	11
1.2.2 Formulation faible . . . . .	15
1.2.3 Formulation semi-discrétisée en espace . . . . .	15
1.3 Description dans la base mobile . . . . .	17
1.3.1 Configuration de référence : volume de contrôle . . . . .	17
1.3.2 Formulation variationnelle dans la configuration de référence . . . . .	18
1.3.3 Formulation discrète dans la configuration de référence . . . . .	18
<b>2 Etat de l'art sur les méthodes de réduction des modèles en mécanique des solides</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.1.1 Analyse d'erreur . . . . .	22
2.1.2 Méthodes de réduction de modèles . . . . .	23
2.2 Réduction de modèles : <i>a posteriori</i> . . . . .	24
2.2.1 Construction de bases réduites . . . . .	25
2.2.2 Résolution par projection sur une base réduite . . . . .	28
2.2.3 Limitations de la méthode . . . . .	30
2.3 Réduction de modèles : <i>a priori</i> . . . . .	32
2.3.1 Motivations . . . . .	32
2.3.2 Décomposition Généralisée Propre . . . . .	32

2.3.3	Algorithmes . . . . .	34
2.4	Bilan et orientation du travail . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Abaques numériques basés sur la méthode POD</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	40
3.2	Constructions des bases réduites optimales . . . . .	40
3.2.1	Décomposition en Valeurs Singulières . . . . .	41
3.3	Interpolation de bases réduites pour études paramétriques . . . . .	41
3.3.1	Interpolation dans les variétés Grassmanniennes . . . . .	42
3.3.2	Interpolation des bases réduites espace-temps . . . . .	44
3.3.3	Stratégie d'interpolation locale . . . . .	45
3.4	Sélection automatique adaptative des snapshots . . . . .	46
3.4.1	Indicateur d'erreur . . . . .	46
3.4.2	Méthode multi-grilles dans l'espace de paramètres . . . . .	46
3.5	Application à la construction de l'abaque de soudage . . . . .	47
3.5.1	Modèle EF du soudage . . . . .	48
3.5.2	Réductibilité du problème . . . . .	48
3.5.3	Interpolation Grassmannienne vs interpolation standards . . . . .	52
3.5.4	Abaques numériques quasi-optimaux à précision contrôlée . . . . .	55
3.6	Conclusion . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Abaques numériques multi-paramétriques basés sur la HOPGD</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	64
4.2	Méthodes de décomposition tensorielle . . . . .	65
4.2.1	CANDECOMP/PARAFAC et HOSVD . . . . .	65
4.2.2	HOPGD . . . . .	66
4.2.3	Accélération de convergence . . . . .	68
4.3	Revue de la méthode 'sparse grids' . . . . .	72
4.4	Nouvelle stratégie de sélection de snapshots . . . . .	76
4.4.1	Indicateur d'erreur . . . . .	76
4.4.2	'Sparse grids' adaptative dans l'espace de paramètres . . . . .	77
4.4.3	Tests numériques . . . . .	79
4.5	Abaques numériques multi-paramétriques à précision contrôlée . . . . .	81
4.5.1	Abaque numérique 7D avec paramètres géométriques . . . . .	82
4.5.2	Abaque numérique 10D . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Application soudage : couplage avec un code de calcul industriel</b>	<b>93</b>
5.1	Stratégie de couplage . . . . .	94
5.2	NeT - Task Group 4, TG4 . . . . .	95
5.2.1	Présentation de la maquette . . . . .	95
5.2.2	Modèle SYSWELD . . . . .	98
5.2.3	Abaque numérique . . . . .	100

5.2.4	Identification de paramètre . . . . .	101
5.3	Soudage de type Joint en T . . . . .	105
5.3.1	Modèle ABAQUS . . . . .	106
5.3.2	Abaque numérique . . . . .	107
5.3.3	Comparaison avec PARAFAC . . . . .	108
5.3.4	Optimisation du procédé . . . . .	111
5.4	Conclusion . . . . .	113
	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>115</b>
	<b>Annexe</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>



# Table des figures

1	Abaque utilisé pour déterminer la longueur de flambement d'une poutre soumise à la compression [EUR 93] . . . . .	2
2	Stratégie de modèle réduit <i>offline-online</i> non-intrusive . . . . .	3
1.1	Représentation schématique des procédés MMA, MIG/MAG et TIG (images en ligne) . . . . .	9
1.2	Interactions entre les phénomènes physiques en soudage [HAM 08] . . . . .	9
1.3	Problème thermique . . . . .	12
1.4	Problème mécanique . . . . .	13
2.1	Erreur de solution de modèles réduits . . . . .	23
2.2	L'analyse en composantes principales des données 2D. $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ représentent la direction de variation maximale des données . . . . .	26
2.3	Image reconstruite avec les modes SVD . . . . .	29
2.4	Domaine d'intégration réduit pour le modèle hyper-réduit [ZHA 17] . . . . .	31
3.1	Interpolation Grassmannienne vs interpolation directe . . . . .	42
3.2	Raffinements successifs locaux dans un espace de paramètres 2D (Noire : snapshots, Rouge : points d'évaluation) . . . . .	48
3.3	Plaque soudée : géométrie et conditions aux limites . . . . .	49
3.4	Définition du problème avec les conditions aux limites . . . . .	49
3.5	Contribution de modes pour $\theta$ (haut) et $\tilde{\theta}$ (bas) . . . . .	51
3.6	Modes spatiaux $\sqrt{\sigma_i}\Phi^{(i)}$ de $\theta$ et $\tilde{\theta}$ . (a)-(f) : calcul transitoire dans la base fixe, (g)-(i) calcul transitoire dans la base mobile, (j) calcul stationnaire dans la base mobile . . . . .	52
3.7	Contribution de modes pour les variables mécaniques . . . . .	53
3.8	Comparaison des champs de déformation plastique cumulée (solution de référence(a), interpolation linéaire (b et d) et interpolation Grassmannienne (c et e) ) . . . . .	54
3.9	Snapshots et points d'évaluation dans l'espace de paramètre de $C_p$ . . . . .	55
3.10	Erreur d'interpolation pour les points d'évaluation dans l'espace de paramètre (interpolation linéaire vs interpolation Grassmannienne proposée) . . . . .	56
3.11	Raffinements localisés dans l'espace de paramètre 1D : la grille finale est $\{432, 490.5, 549, 666, 783, 900\}$ . . . . .	57

3.12	Démonstrateur de l'abaque espace-temps développé dans matlab . . . . .	58
3.13	Snapshots (points noirs) choisis dans l'espace de paramètres 2D . . . . .	58
3.14	Abaque numérique espace-temps 2D . . . . .	59
3.15	Vue de face du soudage 3D avec variation de puissance de chargement . .	60
3.16	Evolution des contraintes lors de la soudure pour $Q_1 = 8.5$ , $Q_2 = 11.5(\times 10^6$ $W.m^{-2})$ . . . . .	61
4.1	CP décomposition pour un tenseur d'ordre 3 . . . . .	65
4.2	HOSVD pour un tenseur d'ordre 3 . . . . .	66
4.3	Nombre d'itérations durant la construction de PGD approximations pour une matrice 3D . . . . .	71
4.4	Nombre d'itérations par mode pour HOPGD 3D - $\epsilon = 10^{-5}$ . . . . .	73
4.5	Résidu pour le mode-15 de la première composant $\mathbf{F}_{1000 \times 1}^{15}$ . . . . .	73
4.6	Exemples de grille complète (gauche) and de "sparse grid" régulière (droite) dans un espace de paramètres 2D . . . . .	74
4.7	Fonction de base hiérarchique linéaire jusqu'au niveau 4 . . . . .	75
4.8	Sous-espaces 2D $W_{\mathbf{k}}$ d'une grille complète $V_3$ (gauche), la sélection <i>a</i> <i>priori</i> des sous-espaces ( $ \mathbf{k} _1 \leq 4$ ) et la grille résultante (droite) . . . . .	76
4.9	Grille de niveau 1 avec raffinements successifs sur les axes (Noire : snap- shots, Rouge : points d'évaluation) . . . . .	79
4.10	Grille (gauche) issue de l'étape 1, raffinement de niveau 2 et 3 sur les axes de sous-domaines (droite) . . . . .	79
4.11	Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction séparée pour une erreur de 1% . . . . .	80
4.12	Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction 'pic- coin' pour une erreur de 3% . . . . .	81
4.13	Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction 'ondes planaires' pour une erreur de 4% . . . . .	82
4.14	Mapping de maillage 2D . . . . .	84
4.15	Sparse grid 3D de niveau 1 dans l'espace des paramètres (Grille 1) . . . .	85
4.16	Sparse grid 3D avec un raffinement de niveau 1. Grille 1 (gauche), Grille 2 (droite) . . . . .	86
4.17	Erreur des solutions thermo-mécaniques sur les points d'évaluation dans l'espace de paramètres (Grille 1 vs Grille 2) . . . . .	86
4.18	Sparse grid 3D avec un raffinement de niveau 2 dans l'élément 8 . . . . .	87
4.19	Erreur des solutions thermo-mécaniques sur les points d'évaluation dans l'espace de paramètres (Grille 1 de niveau 2) . . . . .	87
4.20	Démonstrateur de l'abaque numérique 7D pour le soudage . . . . .	88
4.21	Erreur des quantités d'intérêt du problème de soudage sur les points d'évaluation (Sparse grid 6D) . . . . .	90
4.22	Projection PCA des snapshots et des points d'évaluation (noire : snap- shots, blue : points d'évaluation avec $Err \leq 15\%$ , rouge : points d'évaluation avec $Err > 15\%$ ) . . . . .	91

4.23	Projection PCA de la grille finale (a) projection sur les 3 premières composantes (b) projection sur les 3 dernières composantes . . . . .	92
4.24	Démonstrateur de l'abaque numérique 10D de soudage . . . . .	92
5.1	Couplage HOPGD et code industriel . . . . .	94
5.2	Éprouvette de TG4 complète [SMI 15] . . . . .	96
5.3	Dispositif de mesure de température par thermo-couples [SMI 15] . . . . .	96
5.4	Mesures des contraintes résiduelles sur la ligne BD avec les méthodes de diffraction [SMI 15] . . . . .	97
5.5	Semi-modèle 3D de TG4 [XU 11] . . . . .	98
5.6	Source de chaleur mobile elliptique [DIN 17] . . . . .	99
5.7	Évolution de la limite d'élasticité en fonction de la température . . . . .	100
5.8	Comparaison de champ de température avec les calculs de référence pour $k = 1$ . . . . .	102
5.9	Comparaison de champ de contraintes résiduelles avec les calculs de référence pour $k = 0.9$ . . . . .	103
5.10	Surfaces de réponse des contraintes résiduelles de la ligne BD en fonction de $k$ . . . . .	104
5.11	Différents modes de distorsions [HAM 08] . . . . .	105
5.12	Modèle EF dans ABAQUS (29571 éléments, 7299 nœuds) . . . . .	106
5.13	Evolution des propriétés thermiques et mécaniques en fonction de la température pour AL-6XN [SON 03] . . . . .	107
5.14	Sparse grid de niveau 1 avec un raffinement dans l'espace de paramètres $D = D_{C_p} \times D_E \times D_{Q_w}$ . . . . .	108
5.15	Comparaison des solutions de l'abaque avec les calculs de référence pour le point (1.5,1.5,1800) . . . . .	109
5.16	Les fonctions de paramètres séparées par PARAFAC : $\mathbf{F}(E), \mathbf{F}(C_p), \mathbf{F}(Q_w)$ . . . . .	110
5.17	Solutions reproduites par 8 modes de PARAFAC pour un point de snapshot (2, 2, 2000) . . . . .	110
5.18	Solutions interpolées par 8 modes de PARAFAC pour les points "hors de l'axe", (a)(b) : point (1.5, 1.5, 1800), (c)(d) : point (2.5, 1.5, 1800) . . . . .	111
5.19	Domaines de paramètres optimaux donnés par l'abaque numérique . . . . .	112
5.20	Supports pour les fonctions de HOPGD. Gauche : discrétisation directionnel ( $D_{\mu_1}^h, D_{\mu_2}^h$ ). Droit : discrétisation de l'espace de paramètres ( $D^h$ ) . . . . .	119



# Liste des tableaux

2.1	Bilan sur les méthodes de réduction de modèles . . . . .	38
3.1	Propriétés du matériau et du chargement . . . . .	49
3.2	Paramètres de géométrie du modèle EF . . . . .	49
3.3	Illustration de l'erreur de raffinement . . . . .	56
3.4	Temps CPU pour une nouvelle solution . . . . .	57
3.5	Erreur de BRs de contraintes von Mises et déformation plastique dans l'espace de paramètres 2D . . . . .	59
3.6	Temps CPU et mémoire de stockage (l'abaque espace-temps 2D) . . . . .	59
4.1	Coût de calcul pour HOPGD 3D - Aitken $\delta^2$ . . . . .	71
4.2	Coût de calcul pour HOPGD 5D - Aitken $\delta^2$ . . . . .	72
4.3	Nombre d'itérations pour la HOPGD 3D - $M$ - $\delta$ croisés . . . . .	72
4.4	Intervalles de variation des paramètre . . . . .	85
4.5	Points d'évaluation de la grille de niveau 1 . . . . .	85
4.6	Points d'évaluation de la grille de niveau 2 . . . . .	87
4.7	Coût de calcul pour l'abaque 7D . . . . .	88
4.8	Intervalles de variation des 6 paramètres . . . . .	89
4.9	Raffinements dans l'espace des paramètres 6D . . . . .	89
5.1	Paramètres de soudage de 3 passes [MUR 12, XU 11] . . . . .	95
5.2	L'erreur maximale des solutions de l'abaque et la mémoire nécessaire au stockage de BRs . . . . .	101
5.3	Conditions aux limites mécaniques . . . . .	106
5.4	L'erreur maximale des solutions de l'abaque 7D et la mémoire nécessaire au stockage des BRs . . . . .	109
5.5	Comparaison de temps CPU avec une approche directe standard . . . . .	113



# Introduction

La durée de vie des matériaux et procédés de fabrication présentent un enjeu capital commun entre deux sociétés françaises : AREVA, acteur mondial de l'énergie nucléaire, et SAFRAN, spécialiste dans le secteur aérospatial. Une chaire de recherche et d'enseignement, intitulée *Extension de la durée de vie et des procédés de fabrication : simulation numérique pour la prévision des phénomènes en conditions réelles*, a été créée au sein du laboratoire LaMCoS (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures) et laboratoire MATEIS (Matériaux : Ingénierie et Sciences) de l'INSA de Lyon pour une durée de 5 ans, dont la problématique scientifique majeure consiste à prendre en compte l'effet des choix des procédés de fabrication sur la durée de vie des composants, pour répondre aux besoins des deux groupes.

Le soudage, connu comme un procédé d'assemblage des pièces, est présent dans plusieurs secteurs industriels (le transport, l'énergie, et l'aéronautique, etc). La qualité de soudage joue un rôle important dans la durée de vie des pièces d'assemblage, tant pour les moteurs aéronautiques que pour les installations nucléaires. La prédiction par simulation numérique des contraintes résiduelles et distorsions induites par ce procédé semble indispensable. Cette thèse est ainsi née dans le cadre de la chaire AREVA-SAFRAN et consacrée à étudier les méthodes numériques avancées pour la simulation de soudage.

Malgré la forte croissance de la puissance des ordinateurs au cours des dernières décennies, les simulations numériques des procédés de soudage restent prohibitives en termes du temps CPU et de la mémoire de stockage, en raison de leur aspect multi-paramétrique et multi-physique. Pour estimer les quantités d'intérêt de soudure (contraintes résiduelles, distorsions, etc.) en fonction des différents paramètres d'entrée (généralement, la géométrie, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites ou le chargement imposé), de nombreux calculs doivent être ré-exécutés. En outre, lorsque la simulation en temps réel est demandée (par exemple pour un contrôle virtuel du procédé de soudage), les approches classiques semblent inappropriées. La construction des abaques numériques de soudage par les méthodes de réduction de modèles à un coût moins cher paraît opportun pour éviter ce type de tâches coûteuses.

Les abaques furent, pendant des siècles, des moyens pour donner les réponses rapides à une variété de questions dans l'histoire humaine. Aujourd'hui, les abaques ont été largement développés pour faciliter les calculs et aider à la décision dans divers domaines, tels que l'architecture, la science humaine et l'ingénierie [BER 36], etc. Un des exemples connus dans la mécanique des structures est celui dédié au dimensionnement des poutres en flambage (voir la FIGURE 1). L'utilisation des abaques peut éviter une tâche répétitive

dans les problèmes similaires et donc réduire significativement le temps de conception, grâce à la réponse immédiate de solutions établies une fois pour toutes dans la phase dite *offline*.

Liaison extrémités	Longueur de flambement $L_{cr}$
	$L_{cr} = 1 \times L$
	$L_{cr} = 0,5 \times L$
	$L_{cr} = 0,7 \times L$
	$L_{cr} = 2 \times L$

FIGURE 1 – Abaque utilisé pour déterminer la longueur de flambement d’une poutre soumise à la compression [EUR 93]

Au cours de cette thèse, nous nous intéressons à construire numériquement ce type d’abaques [CHI 13, COU 13, VIT 14] pour le problème de soudage. L’idée consiste à calculer au niveau *offline* des solutions générales d’un problème paramétrique, afin de mettre à disposition une base de données de solutions. Les ingénieurs peuvent ensuite utiliser ces abaques *online* pour la conception, l’optimisation ou l’identification, etc. Une façon directe pour construire ces abaques est de calculer les solutions paramétriques avec les approches classiques en parcourant l’ensemble des valeurs définies dans l’espace de paramètres. Mais ce type d’approches est souvent prohibitif et infaisable face aux problèmes multi-paramétriques. Afin de rendre la construction d’abaques plus accessible, nous utilisons les approches de réduction de modèles.

Les méthodes de réduction de modèles sont développées dans l’objectif d’accélération de calcul ou exploitation de paramètres. Une des façons populaire pour construire les modèles réduits *a posteriori* est la méthode Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) [HOL 98, NIR 10]. Basée sur une stratégie de deux phases *online-offline*, la POD extrait une base réduite (BR) à partir d’une base de solutions calculées *offline* et puis construit les modèles réduits efficaces dans la phase *online* par projection sur la base réduite. Les solutions pré-calculées sont appelées snapshots. L’autre façon *a posteriori* à construire le modèle réduit est la méthode *reduced basis* [MAD 04, MAD 06, ROZ 08]. Dedans, une sélection automatique des snapshots par un algorithme glouton est proposée. Néanmoins, l’inconvénient principal de ce type d’approches est la nécessité de snapshots. Une autre grande famille des méthodes est la méthode *a priori* PGD (Décomposition Généralisée Propre) [CHI 10, CHI 11, CHI 14]. Basée sur une séparation des variables, la PGD peut calculer, sans snapshots pré-requis, toutes les solutions potentielles pour un jeu de paramètres sous forme de BR. Mais cette méthode est souvent très intrusive dont l’implémentation dépend fortement du code de calcul utilisé pour résoudre les équations physiques.

Pour éviter l’aspect intrusif de la méthode PGD, le choix a été porté sur les méthodes

*a posteriori*. Dans le cadre de la chaire, des travaux ont été réalisés en utilisant la méthode hyper-réduite pour accélérer la simulation de soudage, mais cette méthode reste intrusive. Cette thèse se situe dans la continuité de ces travaux [ZHA 15, ZHA 17], en cherchant à développer cette fois-ci des méthodes non-intrusives, basée sur une stratégie *offline-online* (voir FIGURE 2). Dans un premier temps, les problèmes de soudage peuvent être modélisés à l'aide d'un code de calcul professionnel de soudage (ABAQUS, SWS-WELD, Code\_Aster, etc.) et résolus avec les approches classiques d'éléments finis (EF) pour générer les snapshots dans la phase *offline*. Puis, avec une approche de réduction de modèles *a posteriori*, les abaques, constitués d'un ensemble de solutions paramétriques, sont construits par enrichissement des snapshots à une précision contrôlée. L'optimalité de l'abaque consiste ainsi à un coût minimal du mémoire nécessaire au stockage des snapshots et sa vitesse de réponse. Une fois que les abaques sont construits, leur utilisation *online* peut donner une prédiction de solutions en temps réel et aider à une décision rapide pour la conception, l'optimisation ou l'identification des paramètres du problème de soudage.

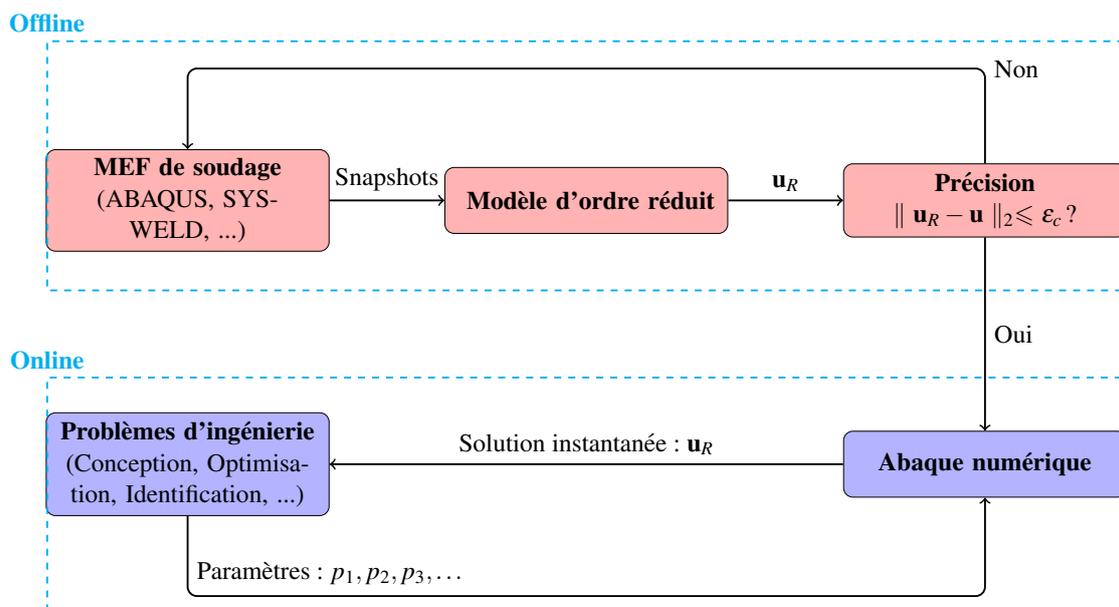


FIGURE 2 – Stratégie de modèle réduit *offline-online* non-intrusif

Les travaux présentés dans ce manuscrit se concentrent sur la construction d'abaque de soudage dans la phase *offline*. L'objectif général est de développer des abaques numériques optimaux par rapport à une précision contrôlée, en prenant en compte les paramètres de différentes natures (par exemple matériaux, géométrie, chargements, ou micro-structure, etc.). La stratégie proposée repose sur trois points clés :

- **Aspect non-intrusif** Contrairement à des méthodes de réduction de modèles standards (POD et PGD) qui sont plus ou moins intrusives, les méthodes proposées dans

cette thèse pour construire les abaques sont non-intrusives : elles ne nécessitent pas de modifier le code de calcul pour la résolution des équations du problème. Cet avantage permet de les coupler avec les logiciels professionnels de soudage et d'avoir une bonne approximation du problème physique qui peut servir dans l'environnement industriel. Sachant que le soudage est un problème multi-physique qui fait intervenir le couplage thermo-mécanique non-linéaire, les aspects métallurgiques, et le changement de phase solide-liquide, etc, l'application des modèles réduits classiques à ce type de procédé pour avoir un bon effet d'efficacité reste encore un challenge.

- **Optimalité** Afin de limiter la mémoire nécessaire au stockage des snapshots, la construction des abaques prend en considération leur optimalité qui consiste à minimiser d'une part le nombre de snapshots et d'autre part le coût total pour la construction des modes de BRs pour une erreur donnée. En pratique, le nombre de snapshots dépend de la stratégie d'échantillonnage de l'espace de paramètres, et les BRs sont souvent liées à l'approche utilisée pour résoudre le problème.

- **Contrôle de précision** L'évaluation de l'erreur d'abaques est basée sur un indicateur d'erreur *a posteriori*. La précision des abaques développés est ainsi contrôlable par une stratégie de sélection automatique des snapshots dans l'espace de paramètres. Un compromis entre la précision et le mémoire de stockage nécessaire doit être fait lors de la construction d'abaques.

Un des aspects fondamentaux de ce travail est de montrer le rôle clé joué par la séparation de variables espace-temps pour les problèmes non-linéaires, éventuellement non-réguliers. En effet, les fonctions du temps sont essentielles pour capturer la solution de façon optimale (taille de base réduite), précise et en temps réel. Deux types de méthodes sont ainsi proposées pour la construction de ces abaques. Le manuscrit est organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre, on effectue tout d'abord un état de l'art sur la modélisation du soudage. Et puis les approches d'approximation standards pour un problème non-linéaire thermo-mécanique transitoire sont présentées. Le problème de référence pour la construction d'abaques est ainsi introduit.

- Dans le deuxième chapitre, un état de l'art sur les approches de réduction de modèles est effectué. Les difficultés rencontrées dans les problèmes non-linéaires sont commentées par rapport à l'application au soudage. Enfin, le choix des méthodes utilisées pour la construction d'abaques est détaillé avec un bilan sur les deux grandes méthodes (POD et PGD).

- Dans le troisième chapitre, une stratégie non-intrusive pour la construction d'abaques est présentée. Basée sur une séparation de variables espace-temps par la POD, la méthode d'interpolation sur les variétés Grassmanniennes est introduite pour adapter les BRs espace-temps. Pour l'optimalité de l'abaque, la réductibilité du problème avec différentes

approches est étudiée. Une méthode “multi-grilles” pour la sélection automatique des snapshots est également présentée. Basés sur un exemple simplifié de soudage, les abaques numériques à précision contrôlée sont développés et peuvent donner les solutions 4D(espace-temps) en temps réel.

- Dans le quatrième chapitre, une méthode *a posteriori* de type PGD (higher-order PGD) est tout d’abord introduite. Une adaptation à la méthode “sparse grids” est ensuite présentée afin d’échantillonner et interpoler dans l’espace de paramètres de dimension élevée. L’efficacité de la stratégie est démontrée à travers des exemples numériques testés. Son application a permis de construire un abaque de dimension allant jusqu’à 10 (espace-temps et 6 paramètres de contrôle) en prenant en compte les paramètres de différentes natures (chargements, matériaux, géométrie).
- Dans le cinquième chapitre, l’application de la méthode proposée à un cas industriel de soudage est présentée. Couplés avec les logiciels existants, les abaques sont construits pour des exemples de soudage plus réalistes qui prennent en compte les différents effets de non-linéarité.

Enfin, des conclusions et perspectives à ces travaux sont proposées.



# Chapitre 1

## Méthodes standards d'approximation en thermo-mécanique transitoire

*Ce chapitre présente les procédés typiques de soudage et les différents phénomènes impliqués en soudage ainsi que les approches standards utilisées pour modéliser un problème de soudage.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
1.1.1	Description du procédé de soudage	8
1.1.2	Phénomènes physiques impliqués en soudage	8
1.1.3	Modélisation numérique du soudage	10
<b>1.2</b>	<b>Problème de référence : description dans la base fixe</b>	<b>11</b>
1.2.1	Formulation forte	11
1.2.2	Formulation faible	15
1.2.3	Formulation semi-discrétisée en espace	15
<b>1.3</b>	<b>Description dans la base mobile</b>	<b>17</b>
1.3.1	Configuration de référence : volume de contrôle	17
1.3.2	Formulation variationnelle dans la configuration de référence	18
1.3.3	Formulation discrète dans la configuration de référence	18

---

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Description du procédé de soudage

Le soudage est une opération qui fait assembler deux pièces métalliques par effet thermique avec ou sans fusion du métal. Le soudage par fusion est un assemblage de pièces avec ou sans métal d'apport avec une fusion partielle des pièces à assembler comme par exemple dans le cas du soudage à l'arc [BLA 16]. Il existe également des procédés d'assemblage à l'état solide, tels que le soudage par friction, le soudage par friction-malaxage, le soudage par diffusion ou le soudage par impulsion magnétique, dans lesquels le métal ne fond pas.

Le soudage à l'arc est celui le plus couramment utilisé dans l'industrie, qui consiste à créer et maintenir un arc électrique entre une électrode et le matériau de base pour faire fondre les métaux au point de soudure. Nous pouvons utiliser des électrodes directes ou alternées et des électrodes consommables ou non-consommables. Le flux de chaleur apporté par l'arc localise sur une partie des pièces et entraîne la fusion du métal et la formation d'un cordon de soudure. Chaque point du cordon subit un changement rapide de température (échauffement et refroidissement) qui provoque des effets importants sur la microstructure du matériau. La zone de soudage est parfois protégée par un gaz de type inerte ou semi-inerte, appelé le gaz de protection, et le matériau de remplissage peut être également utilisé pour combler la dépression du bain de fusion et de former un cordon bombé. Selon la nature de l'électrode, les procédés de soudage à l'arc diffèrent (voir la FIGURE 1.1) :

- **Soudage à électrode enrobée.** Le métal fondu est protégé par l'enrobage de l'électrode contre l'oxydation lors de soudure. (MMA : Manual Metal Arc)
- **Soudage avec fils pleins.** Sous la protection d'un mélange gazeux, l'électrode est composée d'un fil fusible servant de métal d'apport. Un soudage semi-automatique (MIG-MAG : Metal Inert Gas-Metal Active Gas)
- **Soudage avec une électrode réfractaire.** Similaire à MMA, mais l'électrode ne fond pas avec un gaz de protection pour le bain de fusion. (TIG Tungsten Inert Gas)
- **Soudage à l'arc submergé sous flux solide.** Un flux en poudre est versé en talus autour du fil de l'électrode pour éviter l'oxydation et un refroidissement brutal.

### 1.1.2 Phénomènes physiques impliqués en soudage

Dans un procédé de soudage, différents phénomènes thermiques, mécaniques et microstructuraux sont présents de façon couplée. La FIGURE 1.2 présente les interactions entre les différents phénomènes.

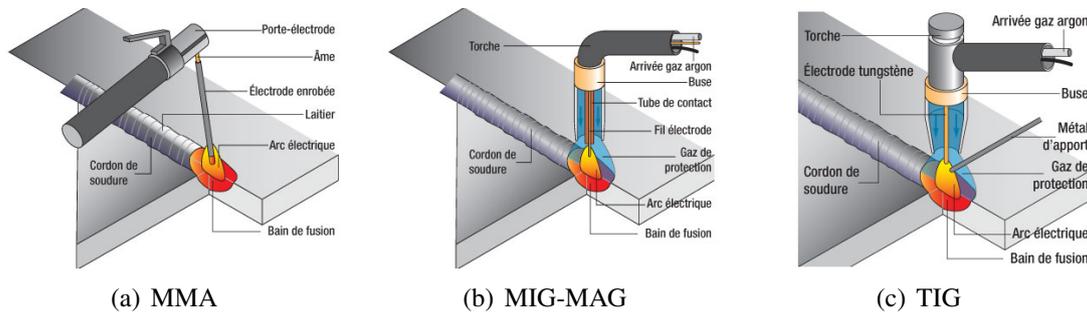


FIGURE 1.1 – Représentation schématique des procédés MMA, MIG/MAG et TIG (images en ligne)

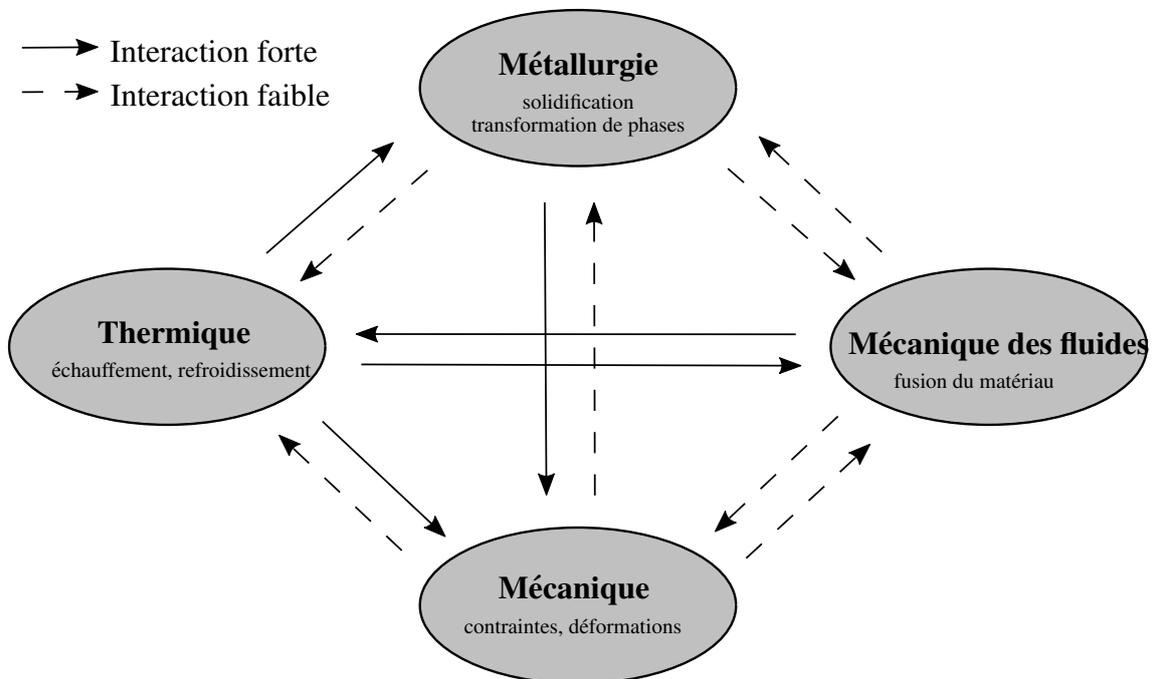


FIGURE 1.2 – Interactions entre les phénomènes physiques en soudage [HAM 08]

On peut voir que la fusion du matériau a surtout une forte interaction avec l'aspect thermique. Mais dans le cadre du travail, on s'intéresse plutôt aux phénomènes à l'état solide. On résume dans la suite les 3 couplages :

- **Couplages thermo-mécanique.** Les flux de chaleur à l'intérieur de la pièce soudée induisent de forts gradients de température qui conduisent à des dilatations thermiques différentielles provoquant des contraintes résiduelles et des distorsions. En revanche, la dissipation d'énergie due à la plasticité du matériau peut avoir des influences sur le champ de température. Mais compte tenu de la faible

vitesse de déformation, cet effet est négligeable dans les procédés de soudage [KAR 90].

- **Couplages thermo-métallurgiques.** L'histoire du chargement thermique a un effet important sur la microstructure du matériau, ce qui entraîne des transformations de phase et influence la nature et la répartition des différentes phases finales. La transformation de phase peut s'accompagner par la dissipation ou l'absorption de l'énergie qui modifie le champ de température à l'échelle macroscopique. En plus, les propriétés thermiques à l'échelle macroscopique sont également modifiées et dépendent de l'état de la microstructure.
- **Couplage mécanique/métallurgie.** L'état de la microstructure (la nature et les quantités des différentes phases formées) affecte fortement les propriétés mécaniques macroscopiques, et surtout les caractéristiques de plasticité (limite d'élasticité et module d'érouissage). En plus, les changements cristallographiques peuvent induire des changements de volume et ainsi des contraintes internes qui peuvent dépasser la limite d'élasticité et conduire à une plastification et par conséquent une déformation à l'échelle macroscopique, dite plasticité de transformation. Dans le sens contraire, l'état de contrainte peut également affecter cinématiquement les changements de phase.

Il est important de noter que les niveaux de déformation et de vitesse de déformation sont très faibles dans un procédé de soudage, ce qui correspond à l'hypothèse de petite déformation postulée souvent dans la modélisation du comportement mécanique en soudage [BLA 16].

### 1.1.3 Modélisation numérique du soudage

L'étude des procédés de soudage par simulations numériques nécessite de prendre en compte des phénomènes à différentes échelles :

- **Echelle macroscopique** Une étude à l'échelle macroscopique consiste à étudier l'histoire thermo-mécanique du procédé afin de déterminer les contraintes et distorsions résiduelles.
- **Echelle mésoscopique** Une étude à l'échelle mésoscopique consiste à étudier les interactions intervenant directement sous l'arc, par exemple le plasma, le bain de fusion.
- **Echelle microscopique** Une étude à l'échelle microscopique consiste à étudier la microstructure au niveau du cordon en prenant en compte la solidification et les transformations de phases.

Il n'existe pas pour l'instant de modèle unique permettant de prendre en compte tous les phénomènes simultanément. En plus, une simulation qui couple tous les phénomènes de différentes échelles reste trop coûteuse, malgré les développements récents des moyens de calcul. Les phénomènes à différentes échelles ont été étudiés séparément. Les études à l'échelle macroscopique pour prédire les contraintes et distorsions résiduelles ont été commencées il y a longtemps. On peut trouver une liste non-exhaustive dans [FRI 75, MUR 96, LIN 01a, LIN 01b, BER 04, DEP 04]. Les modèles récents peuvent prendre en compte la plasticité de transformation, mais la fiabilité de ces modèles est limitée par manque de connaissance sur la lois de comportement du matériau. D'un point de vue mésoscopique, on peut citer [MÉD 99, ZHA 03, CAO 04] pour les études de forme du bain de fusion. De nombreuses études existent sur l'étude de l'effet de la micro-structure, particulièrement on peut citer deux travaux de thèse [BLA 16, BAL 17] réalisés dans le cadre de la chaire AREVA-SAFRAN. Les codes de calcul EF qui peuvent prendre en compte les différents effets de couplage pour la simulation de soudage sont disponibles aujourd'hui : Code\_Aster [R& 00] l'outil libre développé par EDF, SYSWELD [sys09] l'outil spécifique à la simulation de soudage développé par ESI-Group, etc.

Pour rappeler, l'étude de la modélisation du soudage n'est pas au cœur de cette thèse. Les approches développées dans cette thèse peuvent s'appliquer à toutes les échelles des études, vu son aspect non-intrusif. A titre d'exemple, en se plaçant à l'échelle macroscopique, une modélisation simplifiée de soudage est utilisée pour développer des abaques numériques.

## 1.2 Problème de référence : description dans la base fixe

On présente par la suite une modélisation simplifiée de soudage. Il s'agit d'un modèle thermo-élasto-plastique avec une source de chaleur mobile dont les descriptions dans la base fixe et dans la base mobile sont présentées. Un modèle plus réaliste de soudage est décrit dans le Chapitre 5.

Cette section présente une description lagrangienne standard pour le problème thermo-élasto-plastique transitoire non-linéaire.

### 1.2.1 Formulation forte

#### 1.2.1.1 Analyse thermique

Considérons un domaine matériel  $\Omega$  (FIGURE 1.3) de densité  $\rho$ , capacité thermique spécifique  $C$ , avec un champ de température initial  $T_0$ . Le corps  $\Omega$  est soumis à une source de chaleur volumique  $r$ , une température prescrite  $\bar{T}$  sur le sous-espace  $\partial\Omega^T$  et un flux de surface  $\bar{q}$  sur le sous-espace complémentaire  $\partial\Omega^q$  ( $\partial\Omega = \partial\Omega^q \cup \partial\Omega^T$ ). En notant par  $\theta = T - T_0$  la différence de température entre les états actuel et initial, l'équation de chaleur à satisfaire, d'après la loi de conservation, s'écrit comme suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{X}, t) + r(\mathbf{X}, t) - \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

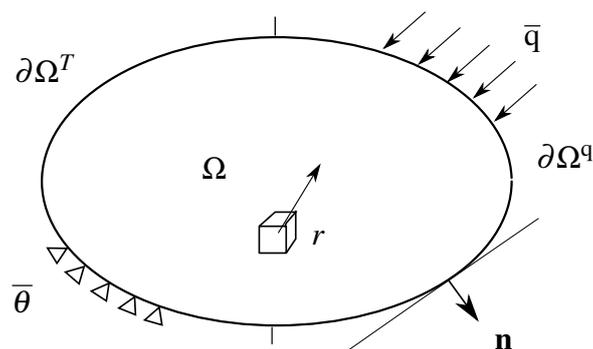


FIGURE 1.3 – Problème thermique

où  $e$  désigne l'énergie interne spécifique qui peut être calculé avec l'énergie libre  $\psi$  et l'entropie  $s$  du système :  $e = \psi + Ts$ .  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement les contraintes et les déformations du corps. “ $\text{div } \bullet$ ” est l'opérateur de divergence par rapport à la position initiale  $\mathbf{X}$ .  $d\bullet/dt$  désigne la dérivée matérielle.  $(\bullet : \bullet)$  est le produit doublement contracté.

Supposons que la vitesse de déformation est petite, la puissance des efforts intérieurs  $\sigma : \dot{\varepsilon}$  est alors négligeable et la variation de l'énergie interne peut se simplifier à  $\rho \frac{de}{dt} \approx \rho C \frac{d\theta(\mathbf{X},t)}{dt}$ . De telle façon, dite couplage faible, les influences de l'effet mécanique sur la température sont tous négligées, l'équation d'équilibre thermique 1.1 devient ainsi :

$$\rho C \frac{d\theta(\mathbf{X},t)}{dt} + \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{X},t) = r(\mathbf{X},t) \quad (1.2)$$

La relation entre le flux de chaleur et le champ de température est définie par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q}(\mathbf{X},t) = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta(\mathbf{X},t) \quad (1.3)$$

où “ $\nabla \bullet$ ” est l'opérateur de gradient.  $\mathbf{k}$  est le tenseur de conductivité thermique.

Les conditions aux limites et initiales à satisfaire par le problème thermique s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{q}(\mathbf{X},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X},t) = \bar{q}(\mathbf{X},t) & \text{sur } \partial\Omega^q \\ \theta(\mathbf{X},t) = \bar{\theta}(\mathbf{X},t) & \text{sur } \partial\Omega^T \\ \theta(\mathbf{X},t=0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante de  $\Omega$  au point considéré.

Remarquons que la densité de flux de chaleur  $\bar{q}$  imposée sur  $\partial\Omega^q$  peut éventuellement varier en fonction de la température courante  $T$ . Ce type de conditions aux limites traduit les modes de transferts thermiques suivants :

— Échange par convection

$$\bar{q}(T) = h(T_{ext} - T) \quad (1.5)$$

où  $h$  est un coefficient d'échange thermique local, et  $T_{ext}$  est la température extérieure.

— Échange par rayonnement

$$\bar{q}(T) = \sigma_{ST} \varepsilon_G (T_\infty^4 - T^4) \quad (1.6)$$

où  $\sigma_{ST}$  est la constante de Stefan-Boltzman, et  $\varepsilon_G$  est l'émissivité de la surface supposée "grise".  $T_\infty$  désigne la température en Kelvin du milieu infini.

Comme ce qui a été mentionné, l'analyse thermique dans le cas du soudage est souvent basée sur l'hypothèse de couplage faible, car le niveau de la vitesse de déformation est suffisamment faible.

### 1.2.1.2 Analyse mécanique

La déformation résultante de l'expansion thermique est obtenue par :

$$\varepsilon_\theta = \alpha \theta \mathbf{I} \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur d'identité de second ordre,  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique.

Pour les problèmes mécaniques, on suppose que le déplacement et la transformation sont faibles. Par conséquent, l'équation d'équilibre est résolue sur la configuration matérielle initiale non déformée. Ensuite, le tenseur de déformation infinitésimale  $\varepsilon$  est lié au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par la relation linéarisée :

$$\varepsilon = \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (1.8)$$

où  $\nabla_s$  est l'opérateur de gradient symétrique.

La déformation totale  $\varepsilon$  est la somme des déformations élastiques, plastiques et thermiques indiquées par  $\varepsilon_e$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_\theta$  respectivement, et seulement les déformations élastiques contribuent à la contrainte de Cauchy  $\sigma$  :

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \mathbf{D} : \varepsilon_e(\mathbf{X}, t) = \mathbf{D} : (\varepsilon(\mathbf{X}, t) - \varepsilon_p(\mathbf{X}, t) - \varepsilon_\theta(\mathbf{X}, t)) \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{D}$  désigne le tenseur d'élasticité d'ordre 4.

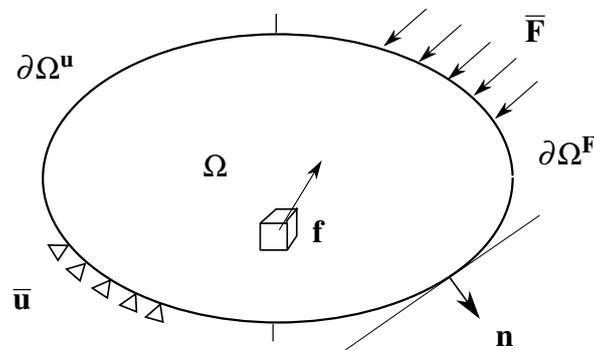


FIGURE 1.4 – Problème mécanique

Considérons le domaine  $\Omega$  (FIGURE 1.4) soumis à une force volumique  $\mathbf{f}$  avec les forces prescrites  $\bar{\mathbf{F}}$  et déplacements  $\bar{\mathbf{u}}$  aux bords  $\partial\Omega^{\mathbf{F}}$  et  $\partial\Omega^{\mathbf{u}}$  respectivement ( $\partial\Omega = \partial\Omega^{\mathbf{F}} \cup \partial\Omega^{\mathbf{u}}$ ), une analyse élasto-plastique consiste à trouver les champs admissibles  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\varepsilon_p$  satisfaisant les équations d'équilibre suivantes et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega^{\mathbf{F}} \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega^{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (1.10)$$

avec une loi complémentaire de comportement du matériau plastique. Par exemple, dans le cas d'un écrouissage isotrope avec le critère de von Mises. La fonction de charge qui définit le domaine élastique s'écrit alors :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = \sigma_{vm} - (\sigma_y + R(p)) \leq 0 \quad (1.11)$$

où la contrainte équivalente de von Mises  $\sigma_{vm} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}$ , où  $\boldsymbol{\sigma}_d$  est le tenseur déviateur de contrainte.  $\sigma_y$  désigne la limite d'élasticité initiale.  $R(p)$  représente l'évolution du domaine élastique en fonction de la déformation plastique cumulée  $p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p| dt$ . On peut définir les relations linéaires ou non-linéaires :

$$\begin{aligned} \text{Linéaire : } & R = Hp \\ \text{Puissance : } & R = Kp^n \\ \text{Exponentielle : } & R = R_\infty (1 - e^{-bp}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $n$  et  $b$  sont les constantes du matériau. La relation exponentielle conduit à une saturation d'écrouissage isotrope :  $R \rightarrow R_\infty$ .

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_p = \mathcal{H}(f) \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_d : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d \rangle}{Rg} \frac{\boldsymbol{\sigma}_d}{\sigma_{vm}} \quad (1.13)$$

où  $\mathcal{H}(\bullet)$  est la fonction Heaviside,  $\langle A \rangle$  désigne la partie positive de  $A$ , et  $g = \frac{dR}{dp}$ .

Dans le cas d'un écrouissage cinématique, le domaine élastique n'évolue pas, mais le centre du domaine se déplace et est déterminé par une variable interne d'écrouissage  $\mathbb{X}$  :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{X}) - \sigma_y \leq 0 \quad (1.14)$$

Un exemple des modèles cinématiques est la loi de Prager [LEM 09] :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_p = \frac{9\mathcal{H}(f)}{4C\sigma_y^2} \langle (\boldsymbol{\sigma}_d - \mathbb{X}_d) : \boldsymbol{\sigma}_d \rangle (\boldsymbol{\sigma}_d - \mathbb{X}_d) \\ \mathbb{X} = \frac{2}{3} C \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{cases} \quad (1.15)$$

Dans le cas du soudage multi-passes, le matériau subissant des cycles en traction et en compression, un modèle d'écrouissage mixte qui combine l'évolution et le déplacement de surface de charge doit être utilisé [ROB 09].

## 1.2.2 Formulation faible

Le problème local est décrit par les équations (1.2) et (1.10). La formulation faible consiste à décrire le problème global en écrivant les équations sous la forme d'intégrale sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ . Cette formule peut être obtenue par le principe des puissances virtuelles, ou bien en intégrant les équations d'équilibre sur  $\Omega$  après les avoir multipliées par une fonction test.

Soit l'espace des fonctions admissibles de température  $\Theta$  qui vérifie a priori les conditions aux limites :

$$\Theta = \{ \theta(\mathbf{X}, t) \mid \theta(\mathbf{X}, t) \in H^1(\Omega), \theta|_{\partial\Omega\theta} = \bar{\theta} \} \quad (1.16)$$

où  $H^1(\Omega)$  désigne le premier espace de Sobolev qui contient les fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$ , et dont les dérivées sont également de carré intégrable sur  $\Omega$ . Cet espace définit les propriétés de régularité des champs cherchés.

Le problème thermique (1.2) à résoudre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta \in \Theta \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \rho C \dot{\theta} \theta^* d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta^* d\Omega + \int_{\partial\Omega q} \bar{q} \theta^* ds = \int_{\Omega} r \theta^* d\Omega \quad \forall \theta^* \in \Theta_0 \end{array} \right. \quad (1.17)$$

où  $\theta^*$  est la fonction test et peut être considérée comme des variations admissibles de fonctions de  $\Theta$ . Cet espace concerné  $\Theta_0$  est donc défini comme suit :

$$\Theta_0 = \{ \theta^*(\mathbf{X}, t) \mid \theta^*(\mathbf{X}, t) \in H^1(\Omega), \theta^*|_{\partial\Omega\theta} = 0 \} \quad (1.18)$$

De la même manière, on peut définir l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial\Omega u} = \bar{\mathbf{u}} \} \quad (1.19)$$

et l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0  $\mathcal{U}_0$  :

$$\mathcal{U}_0 = \{ \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) \mid \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) \in H^1(\Omega), \mathbf{u}^*|_{\partial\Omega u} = 0 \} \quad (1.20)$$

Le problème mécanique quasi-statique (1.10) à résoudre s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}^* ds = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0 \end{array} \right. \quad (1.21)$$

## 1.2.3 Formulation semi-discrétisée en espace

Pour l'implémentation numérique, on utilise la méthode des éléments finis (EF) qui consiste à remplacer l'espace  $\Theta$  (resp.  $\mathcal{U}$ ) par un sous-espace de dimension finie (sous-espace des fonctions de forme  $\mathbf{N}_i$ ), noté  $\Theta_h$  :

$$\Theta_h = \left\{ \theta \in \Theta \mid \theta(\mathbf{X}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbf{N}_i(\mathbf{X}) \theta_i \right\} \quad (1.22)$$

et respectivement  $\mathcal{U}_h$  :

$$\mathcal{U}_h = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbf{N}_i(\mathbf{X}) \mathbf{U}_i \right\} \quad (1.23)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{U}$  sont respectivement les vecteurs nodaux de température et de déplacement d'un domaine  $\Omega$  discrétisé par un ensemble de nœuds  $\mathcal{N}$  et maillé par un ensemble d'éléments appropriés.

La formulation faible du problème thermo-mécanique se ramène à la résolution des deux systèmes d'équations :

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (1.24)$$

et

$$\mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (1.25)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  sont les matrices usuelles de conductivité et de capacité,  $\mathbf{Q}$  est le vecteur nodal de flux thermique,  $\mathbf{F}_{int}$  et  $\mathbf{F}_{ext}$  sont respectivement les vecteurs de forces nodales extérieures et intérieures.

Pour résoudre ces systèmes, on peut faire deux hypothèses :

— Couplage fort

Si la dissipation de chaleur due à l'effet mécanique est prise en compte dans le problème thermique, dit couplage fort, la résolution du problème consiste à résoudre, à chaque instant, les deux systèmes d'équations en considérant les interactions dans les deux sens entre la partie thermique (1.24) et la partie mécanique (1.25).

— Couplage faible

Si seulement l'influence de l'effet thermique au problème mécanique est considérée, dit couplage faible, la résolution du problème thermique est tout indépendante du problème mécanique. Dans ce cas, les deux systèmes peuvent se résoudre séquentiellement en utilisant différentes discrétisations temporelles.

Le vecteur d'état du problème thermo-mécanique peut être défini comme :

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{U}, \varepsilon_p, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}\}^T \quad (1.26)$$

Dans la section suivante, basée sur l'hypothèse de couplage faible, on présente une approche dans la base mobile pour le problème thermique qui est souvent utilisée dans la simulation du soudage.

## 1.3 Description dans la base mobile

### 1.3.1 Configuration de référence : volume de contrôle

Afin d'améliorer l'efficacité des calculs pour les procédés avec source de chaleur en mouvement comme le soudage, [BAL 99] et [RAJ 00] ont proposé de résoudre des problèmes thermiques dans la base mobile où le flux de chaleur est fixé dans l'espace et le matériau s'écoule à travers une configuration de référence. En effet, il est démontré que, pour des problèmes de soudage, le problème thermique transitoire à l'état quasi-stationnaire peut être simplifié à un problème stationnaire dans une telle configuration [RAJ 00].

Dans ce système, la référence peut être considérée comme fixée dans l'espace et le temps. La configuration du matériau se déplace par rapport à la configuration de référence. La configuration de référence est un volume de contrôle  $\tilde{\Omega}$  à définir dans lequel le matériau s'écoule. À l'instant donné  $t$ , la coordonnée  $\mathbf{x}$  (par rapport à la configuration matérielle) d'un point matériel qui occupait la position initiale  $\mathbf{X}$  au moment initial en  $\Omega$  peut être donnée par un mapping de mouvement  $f$  :

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t) \quad (1.27)$$

Par conséquent, la dérivée matérielle par rapport au temps dans le corps qui coule s'écrit :

$$\frac{d\theta(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta(\mathbf{x}, t) \quad (1.28)$$

où  $\frac{\partial\theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  représente la variation locale de température par rapport au temps,  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  est le vecteur de vitesse qui dépend du mapping  $f$ ,  $\mathbf{v} \cdot \nabla\theta(\mathbf{x}, t)$  est le terme d'advection.

En remplaçant cette expression dérivée dans l'équation précédente (1.2), l'équation de chaleur définie dans le volume de contrôle  $\tilde{\Omega}$  est exprimée comme suit :

$$\rho C \frac{\partial\theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho C \mathbf{v} \cdot \nabla\theta(\mathbf{x}, t) + \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = r(\mathbf{x}, t) \quad (1.29)$$

Pour les processus en régime permanent, la variation locale de la température par rapport au temps dans le volume de contrôle peut être négligée, ce qui est traduit par :

$$\rho C \mathbf{v} \cdot \nabla\theta(\mathbf{x}, t) + \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = r(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial\theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

L'approche de l'état stationnaire est souvent adaptée aux problèmes dans lesquels un régime stationnaire atteint tout au long du processus, comme le soudage (voir [BAL 99, RAJ 00, ZHA 17, ZHA 15, CAN 16]). En effet, pour une grande partie des procédés concernés, l'expérience montre l'existence d'un régime quasi-stationnaire sur la majorité du trajet de la source. Dans de nombreuses situations, les champs thermiques, métallurgiques et mécaniques présentent un état quasi-stationnaire sur une grande partie du trajet de soudage [ROB 09].

Remarquons que les solutions sont résolues dans le volume de contrôle  $\tilde{\Omega}$ , où les conditions aux limites ne sont pas définies et devraient être choisies de façon appropriée pour approximer les solutions d'origine dans la bases fixe. Récemment, une utilisation similaire de la base mobile est proposée pour l'analyse thermique dans le cadre de calcul de l'abaque numérique [CAN 16]. Dans cette méthode, les conditions aux limites du volume de contrôle ne sont pas nécessaires à imposer, car elles sont traitées comme des coordonnées supplémentaires et considérées dans le cas général. Mais ce n'est pas le cas de ce travail.

### 1.3.2 Formulation variationnelle dans la configuration de référence

On peut maintenant définir l'espace de solutions admissibles dans la configuration de référence :

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \theta(\mathbf{x}, t) \mid \theta(\mathbf{x}, t) \in H^1(\tilde{\Omega}), \theta|_{\partial\tilde{\Omega}\theta} = \bar{\theta} \right\} \quad (1.31)$$

avec

$$\tilde{\Theta}_0 = \left\{ \theta^*(\mathbf{x}, t) \mid \theta^*(\mathbf{x}, t) \in H^1(\tilde{\Omega}), \theta^*|_{\partial\tilde{\Omega}\theta} = 0 \right\} \quad (1.32)$$

Le problème thermique transitoire dans la base mobile peut se formuler comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta \in \tilde{\Theta} \text{ tel que} \\ \int_{\tilde{\Omega}} \rho C \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \right) \theta^* d\tilde{\Omega} + \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \theta \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta^* d\tilde{\Omega} + \int_{\partial\tilde{\Omega}q} \bar{\mathbf{q}} \theta^* ds = \int_{\tilde{\Omega}} r \theta^* d\tilde{\Omega} \quad \forall \theta^* \in \tilde{\Theta}_0 \end{array} \right. \quad (1.33)$$

De la même manière, la formulation globale du problème thermique avec l'état stationnaire dans la base mobile s'écrit comme suit :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \rho C \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \theta^* d\tilde{\Omega} + \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \theta \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta^* d\tilde{\Omega} + \int_{\partial\tilde{\Omega}q} \bar{\mathbf{q}} \theta^* ds = \int_{\tilde{\Omega}} r \theta^* d\tilde{\Omega} \quad \forall \theta^* \in \tilde{\Theta}_0 \quad (1.34)$$

### 1.3.3 Formulation discrète dans la configuration de référence

Dans la base mobile, la formulation semi-discrétisée correspondante à l'équation (1.33) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\theta}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\theta}}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \quad (1.35)$$

où les matrices  $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{Q}}$  sont définies dans le volume de contrôle  $\tilde{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \int_{\tilde{\Omega}} (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{N}^T \cdot \rho C \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}) d\tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{N}^T \cdot \rho C \cdot \mathbf{N} d\tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= \int_{\partial\tilde{\Omega}q} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{q}} ds + \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{N}^T \cdot r d\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{N}$  sont respectivement les matrices usuelles pour le gradient de température et l'interpolation de température des éléments.

Avec l'hypothèse de l'état stationnaire, le problème est simplifié à un système d'équation linéaire :

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \quad (1.37)$$

Plus de détails sur un problème thermo-mécanique transitoire défini dans la base mobile peuvent être trouvés dans [BAL 99, RAJ 00]. On remarque ici que l'analyse mécanique peut être réalisée dans la base fixe avec les formulations et les schémas de résolution classiques, bien que l'analyse thermique soit effectuée dans la base mobile. Dans ce cas, un changement des variables est particulièrement utilisé pour obtenir la représentation de température dans la base fixe :

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\theta}(f^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad (1.38)$$

Sinon, des techniques spéciales telles que "streamline integration" [BER 92, GU 93] sont nécessaires pour résoudre ce problème.



# Chapitre 2

## Etat de l'art sur les méthodes de réduction des modèles en mécanique des solides

*Dans ce chapitre, on établit un état de l'art des techniques de réduction des modèles. Deux grandes familles (a priori et a posteriori) de la méthode sont présentées.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>22</b>
2.1.1	Analyse d'erreur	22
2.1.2	Méthodes de réduction de modèles	23
<b>2.2</b>	<b>Réduction de modèles : a posteriori</b>	<b>24</b>
2.2.1	Construction de bases réduites	25
2.2.2	Résolution par projection sur une base réduite	28
2.2.3	Limitations de la méthode	30
<b>2.3</b>	<b>Réduction de modèles : a priori</b>	<b>32</b>
2.3.1	Motivations	32
2.3.2	Décomposition Généralisée Propre	32
2.3.3	Algorithmes	34
<b>2.4</b>	<b>Bilan et orientation du travail</b>	<b>36</b>

---

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Analyse d'erreur

Comme présenté dans le chapitre précédent, plusieurs étapes de modélisation sont nécessaires avant d'obtenir les modèles numériques solvables. Ces étapes introduisent 3 erreurs de types différents dans la solution finale du problème.

**Erreur de modélisation** La mise en équation d'un problème physique introduit une erreur de modélisation, due à des simplifications plus ou moins importantes vis-à-vis du problème réel. Ainsi, le modèle mathématique et les lois de comportement d'un problème doivent être bien choisies afin de diminuer cette erreur.

**Erreur de discrétisation** En général, les modèles mathématiques sont formulés en équations aux dérivées partielles (EDPs) et sont souvent insolubles de façon analytique. Les méthodes numériques (par exemple méthode EF et méthode différences finies, etc.) sont alors utilisées pour mettre en œuvre un modèle discrétisé solvable. En plus, le temps est discrétisé par les schémas appropriés selon le problème quasi-statique ou dynamique (par exemple  $\theta$ -méthode [STU 91, BAR 00], schémas de type Newmark [CHU 93], etc.). L'erreur de discrétisation dépend donc d'une longueur caractéristique de discrétisation [LAD 05, ERN 13]. Ce modèle discret est appelé dans ce travail le modèle de haute fidélité (HFM), si les erreurs de discrétisation et de modélisation sont suffisamment petites.

**Erreur de résolution** La discrétisation du modèle nous donne un système d'équations algébriques. Qu'il soit linéaire ou non-linéaire, la résolution du système introduit une erreur numérique qui vient des paramètres du schéma de résolution utilisé, précision de l'ordinateur, l'erreur arrondie, etc. Cette étape est souvent coûteuse et dépend de la taille du système numérique.

Considérant le HFM comme un problème de référence, les méthodes de réduction consistent à remplacer ce modèle complet par un modèle d'ordre réduit (MOR) qui contient beaucoup moins de degrés de liberté et peut ainsi être résolu avec un coût moindre. Dans le cadre de la réduction des modèles, on cherche à minimiser l'erreur de réduction. D'autre part, il est inutile de chercher à la minimiser en dessous de l'erreur de discrétisation, sous faute de ne plus être optimale [BOU 13a].

**Erreur de réduction** L'erreur de réduction dépend de la méthode de réduction et la qualité de base réduite utilisée. Dans cette thèse, on suppose que les erreurs de discrétisation et de modélisation sont relativement petites par rapport à l'erreur de réduction (voir FIGURE 2.1).

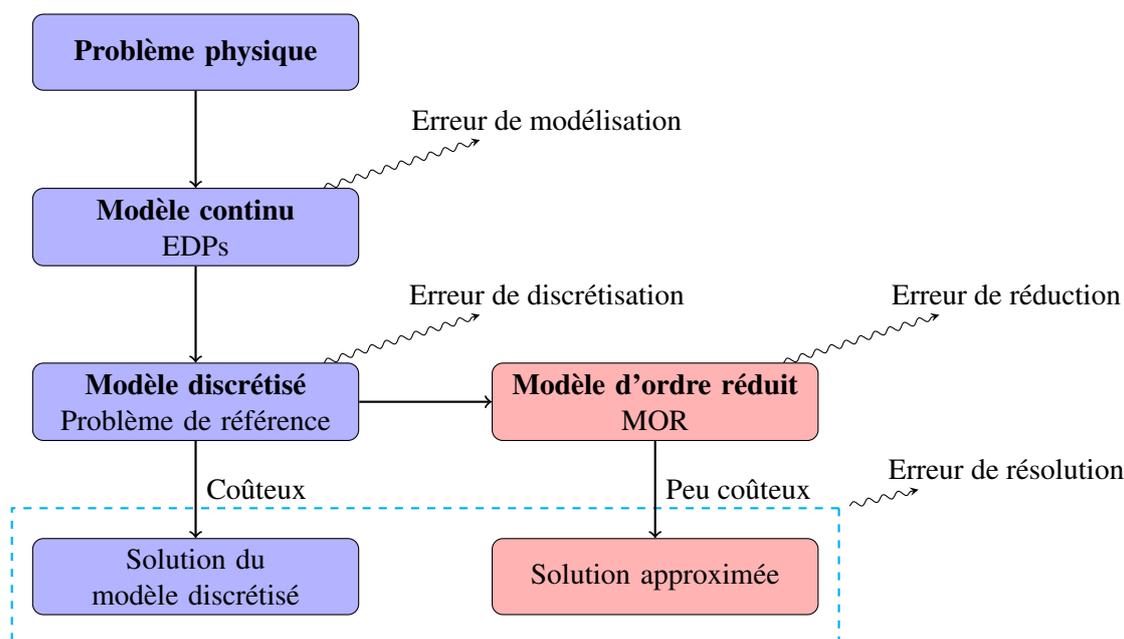


FIGURE 2.1 – Erreur de solution de modèles réduits

## 2.1.2 Méthodes de réduction de modèles

Les méthodes de réduction de modèles consistent à trouver une base réduite (BR)  $\{\Phi_i\}_{i=1}^k$ , avec un petit nombre de modes  $k$  par rapport au nombre de degrés de liberté du système discrétisé, qui s'étend sur le sous-espace de la fonction de solution d'origine  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \Phi_i(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

D'une manière générale, les méthodes de construction des BRs peuvent être classées en deux grandes familles : approches *a posteriori* et approches *a priori*. Soit les BRs sont construites *a posteriori* à partir des snapshots pré-calculés dans l'espace de paramètres, soit *a priori* lors du calcul du méta-modèle "on-the-fly".

Les approches *a posteriori* nécessitent des solutions (snapshots) précalculées avec des modèles complets standards. La précision des solutions *online* dépend alors fortement de la qualité des BRs calculées avec des snapshots. La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (ou synonyme en anglais Proper Orthogonal Decomposition, POD)[NIR 10], également connue sous le nom d'analyse en composantes principales (PCA) [HOT 33, LOR 56, LOË 60] et transformation de Karhunen–Loève (KLT) [KAR 47, LOË 55], est souvent utilisée pour construire les BRs. On peut montrer que la base POD est optimale par rapport à certaines mesures (au sens de minimisation). Cette phase préliminaire pour extraire les BRs est appelée phase *offline* et parfois cou-

teuse. De telles approches ont été appliquées pour de nombreux problèmes en sciences et en ingénierie [HOL 98, KUN 01, YVO 07, KER 11, HER 14, FRI 10]. Leur principal inconvénient réside dans leur inefficacité lorsqu'on traite des problèmes non-linéaires, car la matrice de rigidité tangente complète doit être reconstruite. Des techniques ont été proposées pour accélérer le calcul, telles que la méthode d'interpolation empirique (et sa contrepartie discrète DEIM)[BAR 04, CHA 10], les méthodes d'hyper-réduction [RYC 09, RYC 05, ZHA 15] et la méthode ANM (asymptotic numerical method) [NIR 08, NIR 10, NIR 12].

Les approches *a priori* qui ne requièrent pas de snapshots se basent sur une séparation des variables de solutions, c'est-à-dire la méthode Décomposition Généralisée Propre (PGD) [CHI 10, CHI 11, CHI 14]. Cette méthode est à l'origine introduite pour développer un solveur non-incrémental efficace, la méthode Large Time INcrements (LATIN)[LAD 10, LAD 12], avec une séparation de l'espace et du temps pour les problèmes fortement non-linéaires, et ensuite généralisée par [AMM 06a, AMM 07] pour résoudre des problèmes multi-paramétriques. Dans les approches PGD, les paramètres du problème (conditions aux limites, conditions initiales, paramètres géométriques, paramètres des matériaux et du procédé ...) sont considérés comme extra-coordonnées du problème. Les BRs sont calculées "on-the-fly" en résolvant le modèle résultant multidimensionnel [CHI 10, CHI 11, NAD 15, AGU 15]. De nombreux abaques numériques [CHI 13](connu aussi sous noms de virtual charts [VIT 14, COU 13] ou meta-modèles), essentiellement une série de solutions paramétriques calculées *offline*, ont été développées pour différents problèmes, tels que contrôle thermique des fours industriels [GHN 12], optimisation de forme [COU 13, CHI 13], chirurgie computationnelle [NIR 13, GON 15, QUE 16], etc. L'utilisation des abaques numériques peut donner les réponses en temps réel dans la phase *online*, car le modèle multidimensionnel a été résolu *offline* pour toutes les valeurs possibles des paramètres. Cela ouvre diverses possibilités et développements dans l'ingénierie qui se base sur la simulation. Cependant, de telles approches sont généralement intrusives.

Les MORs efficaces se basent souvent sur une approche mixte entre les approches *a priori* et *a posteriori*. Ils consistent en une étape de réduction basée sur le POD et un stade d'enrichissement afin d'améliorer la qualité de ces BRs. Parmi les approches mixtes, on peut citer [RYC 05, VER 06] qui propose une technique d'enrichissement basée sur les sous-espaces de Krylov. Cette approche a été appliquée avec succès pour accélérer les simulations thermo-mécaniques [CHI 08, ZHA 15].

Dans les sections suivantes, les principes des deux grandes méthodes *a posteriori* et *a priori* sont présentés en détails. On finit par un bilan et l'orientation du travail.

## 2.2 Réduction de modèles : *a posteriori*

Les approches *a posteriori* se basent sur une stratégie *offline-online*. Dans cette section, on distingue les deux stades : dans la phase *offline*, la BR est construite ; la phase *online* consiste à résoudre le modèle réduit.

## 2.2.1 Construction de bases réduites

La construction de BRs est un point clé des méthodes *a posteriori*. L'idée est de remplacer un ensemble de données par une base représentative de dimension réduite, afin d'éliminer les données redondantes et puis compresser les données. Une façon directe est d'utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour l'orthogonalisation de matrice de données. Cependant, cette méthode ne peut pas détecter la direction de variation dominante des données. Une autre possibilité est ainsi d'utiliser la méthode POD qui permet d'extraire une base optimale au sens de minimisation de l'erreur entre les données originales et approximées. Les deux méthodes sont présentées dans la suite.

### 2.2.1.1 Procédé de Gram-Schmidt

Le procédé (ou algorithme) de Gram-Schmidt [GRA 84] est utilisé pour l'orthonormalisation d'un ensemble de vecteurs. Une base orthonormée  $\{\Phi_i\}_{i=1}^m$  qui engendre le même sous-espace vectoriel peut être obtenue. Soit  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$  une base dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , le sous-espace vectoriel  $F_j$  engendré par  $\{\Phi_i\}_{i=1}^m$  et  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$  s'écrit :

$$F_j = \text{span}\{\Phi_1 \cdots \Phi_j\} = \text{span}\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_j\} \quad \forall j < m \quad (2.2)$$

Pour illustrer le procédé d'orthonormalisation, on définit d'abord un opérateur projection orthogonale comme suivant :

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v} \quad (2.3)$$

où  $(\bullet, \bullet)$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ . Le procédé de Gram-Schmidt consiste à soustraire, à chaque étape  $j$ , la projection orthogonale de  $\mathbf{u}_{j+1}$  sur le sous-espace  $F_j$  engendré précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1, & \Phi_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{u}_2), & \Phi_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{u}_3) - \text{proj}_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}_3), & \Phi_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} \\ & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_m &= \mathbf{u}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \text{proj}_{\mathbf{v}_j}(\mathbf{u}_m), & \Phi_m &= \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour avoir une base réduite  $\Phi_r$ , nous pouvons ensuite donner une valeur critique sur la norme  $\|\Phi_i\|$  de façon à tronquer la base. En général, la base obtenue par le procédé de Gram-Schmidt n'est pas identique à la base POD, car l'optimalité n'est pas garantie dans la construction. Néanmoins, ce procédé qui permet d'enrichir facilement la base de

manière incrémentale est surtout intéressant pour les problèmes d'évolution. Une application pour l'orthogonalisation des bases PGD dans le contexte du problème de contact peut se trouver dans [GIA 16].

### 2.2.1.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres

La POD est introduite par [HOL 98] et liée à divers domaines de modélisation mathématique. Étant donné un ensemble de données, la POD est capable de trouver la direction de variation maximale de ces données (voir par exemple la FIGURE 2.2).

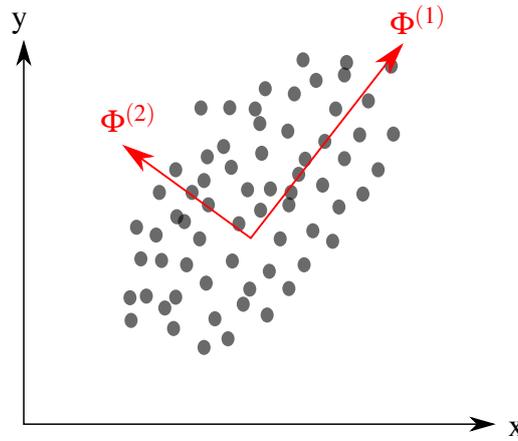


FIGURE 2.2 – L'analyse en composantes principales des données 2D.  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$  représentent la direction de variation maximale des données

Considérons une fonction  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  définie dans un domaine espace-temps  $D = \Omega \times \mathbb{R}^+$ , la POD cherche une base  $\Phi \in L^2(D)$  qui maximise sa projection sur  $\mathbf{u}$  en moyennant sur le temps :

$$\Phi = \arg \max_{\phi \in L^2(D)} \frac{\langle (\mathbf{u}, \phi)^2 \rangle}{(\phi, \phi)} \quad \text{avec} \quad (\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 1 \quad (2.5)$$

où  $\langle \bullet \rangle$  est un opérateur de moyenne temporelle. Il est montré que ce dernier problème peut se ramener à résoudre un problème aux valeurs propres avec une définition de l'opérateur  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{R}(\Phi) = \int_D [(\mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{X}')) \Phi(\mathbf{X}')] d\mathbf{X}' \quad (2.6)$$

Les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre correspondent à la solution du problème :

$$\mathbf{R}(\Phi) = \lambda \Phi \quad (2.7)$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur  $\mathbf{R}$  (positif, linéaire et autoadjoint), les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Les solutions du problème aux valeurs propres (2.7) sont infinies. Notées par  $\lambda^{(k)}$ , les valeurs propres peuvent être rangées dans un ordre décroissant :

$$\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} \geq \dots \geq \lambda^{(\infty)} \geq 0 \quad (2.8)$$

- Les vecteurs propres  $\Phi^{(k)}$  associés aux  $\lambda^{(k)}$  forment une base POD qui est ortho-normée. La fonction  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous forme de la combinaison linéaire des modes  $\Phi^{(k)}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)}(t) \Phi^{(k)}(\mathbf{X}) \quad \text{avec} \quad (\Phi^{(i)}, \Phi^{(j)}) = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Les coefficients temporeux  $\alpha^{(k)}(t)$  sont obtenus par projection du champ  $\mathbf{u}$  sur la base  $\Phi^{(k)}$  :  $\alpha^{(k)} = (\mathbf{u}, \Phi^{(k)})$ .

- La base POD est optimale dans  $L^2(D)$ . Soit  $\Phi$  une base qui contient  $K$  premiers modes POD, on a alors :

$$\langle \|\mathbf{u} - \sum_{k=1}^K \alpha^{(k)}(t) \Phi^{(k)}\|^2 \rangle \leq \langle \|\mathbf{u} - \sum_{k=1}^K (\mathbf{u}, \phi^{(k)}) \phi^{(k)}\|^2 \rangle \quad \forall \phi \in L^2(D) \quad (2.10)$$

Dans le cas discret, la POD est connue sous le nom de deux méthodes statistiques PCA et KLT qui sont très similaires en définition et dans la façon de construction. Supposons qu'on a une matrice de snapshots  $\mathbf{U}$  qui contient, dans les colonnes, les fonctions  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  évaluées pour certaines valeurs  $\mathbf{X}$  à différents instants  $t_{0 \leq k \leq m}$  et sur différents points de discrétisation spatiale :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}(t_0) \quad \mathbf{u}(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{u}(t_m)] = \begin{bmatrix} u_1(t_0) & u_1(t_1) & \dots & u_1(t_m) \\ u_2(t_0) & u_2(t_1) & \dots & u_2(t_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t_0) & u_n(t_1) & \dots & u_n(t_m) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La matrice de covariance est définie comme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T \quad (2.12)$$

Par définition, les modes de la base POD sont les vecteurs propres du problème :

$$\mathbf{R}\Phi = \lambda\Phi \quad (2.13)$$

Une autre méthode populaire qui peut donner la base POD est la décomposition en valeurs singulières (SVD). La SVD est une technique de factorisation de matrice qui peut être vue comme une généralisation de la décomposition en éléments propres d'une matrice carrée aux matrices rectangulaires.

Ayant une matrice de snapshots  $\mathbf{U}$  de dimension  $n \times m$ , la SVD donne une factorisation sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \Phi \Sigma \mathbf{V}^T \quad (2.14)$$

où

- $\Phi$  est une matrice orthonormée de dimension  $n \times n$  contenant les vecteurs propres de  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ , appelés vecteurs singuliers à gauche de  $\mathbf{U}$ .
- $\mathbf{V}$  est une matrice orthonormée de dimension  $m \times m$  contenant les vecteurs propres de  $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ , appelés vecteurs singuliers à droite de  $\mathbf{U}$ .
- $\Sigma$  est une matrice diagonale de dimension  $n \times m$  contenant les  $r = \min(n, m)$  valeurs singulières de  $\mathbf{U}$  rangées dans l'ordre décroissant.

Notées par  $\sigma^{(k)}$  les valeurs singulières, on peut montrer que les  $\sigma^{(k)}$  de SVD ont une relation avec les valeurs propres  $\lambda^{(k)}$  de PCA ou KLT :

$$\sqrt{\lambda^{(k)}} = \sigma^{(k)} \quad (2.15)$$

Remarquons que les valeurs singulières  $\sigma^{(k)}$  représentent l'importance relative de contribution des modes  $\Phi^{(k)}$  et  $\mathbf{V}^{(k)}$  dans  $\mathbf{U}$ . On peut donc tronquer la base  $\Phi$  en prenant en compte que les  $K$  premiers modes associés aux valeurs singulières relativement importantes. La matrice approximée s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{U}} \approx \sum_{k=1}^K \sigma^{(k)} \Phi^{(k)} \mathbf{V}^{(k)T} \quad (2.16)$$

D'après le théorème de Eckart-Young [ECK 36], l'erreur d'approximation d'ordre  $K$  peut se calculer directement avec les  $(r - K)$  valeurs singulières restantes :

$$\text{err}(\hat{\mathbf{U}}) = \frac{\|\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}\|_F}{\|\mathbf{U}\|_F} = \sqrt{\frac{\sum_{k=K+1}^r \sigma^{(k)2}}{\sum_{k=1}^r \sigma^{(k)2}}} \quad (2.17)$$

où  $\|\bullet\|_F$  est la norme de Frobenius.

La SVD est souvent utilisée dans la compression d'image. Au lieu de stocker une matrice de snapshots de dimension  $n \times m$ , seules  $K$  paires de vecteurs ( $\mathbf{U}^{(k)}$  et  $\mathbf{V}^{(k)}$ ) sont nécessaires pour une précision donnée. Le gain de mémoire en fonction de l'ordre d'approximation  $K$  peut se calculer :  $\frac{nm}{K(n+m)}$ . La FIGURE 2.3 illustre une reconstruction d'image avec les modes SVD.

### 2.2.2 Résolution par projection sur une base réduite

Comme ce qui a été décrit dans le chapitre 1, la méthode EF conduit à résoudre, à chaque instant, le problème dans un espace d'approximation ( $\Theta_h$  ou  $\mathcal{U}_h$ ). La réduction de modèles consiste à remplacer cet espace de résolution par un sous-espace de dimension réduite. Une façon de construire le modèle réduit est de projeter le modèle semi-discrétisé

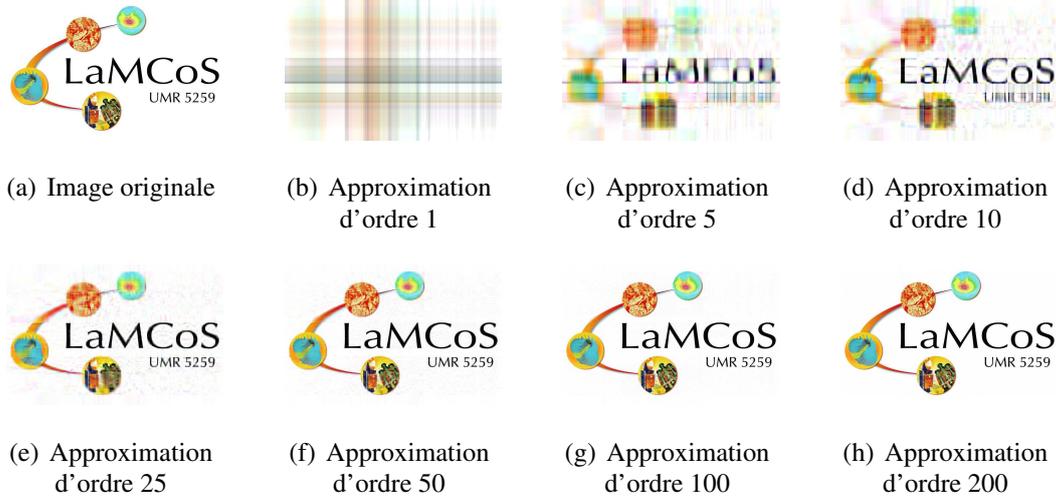


FIGURE 2.3 – Image reconstruite avec les modes SVD

sur une base réduite. Cette base peut se calculer, soit par l'algorithme Gram-Schmidt, soit par la POD. Ici, considérons par exemple une base optimale de POD  $\Phi = \{\Phi^{(k)}\}_{k=1,\dots,K}$  qui est extraite à partir d'un ensemble de snapshots  $\theta(t_k)$  issu de l'analyse EF, si cette base est assez riche, on peut considérer que l'espace engendré par cette base couvre toutes les solutions d'un ensemble de problèmes similaires. Noté par  $\Theta_h^R$ , l'ensemble des solutions peut se définir par :

$$\Theta_h^R = \left\{ \theta \in \Theta_h \mid \theta(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K \Phi^{(k)}(\mathbf{X}) \otimes \alpha^{(k)}(t) \right\} \quad (2.18)$$

La résolution du problème réduit  $\theta^r(\mathbf{X}, t)$  consiste à calculer, à chaque instant, les coefficients  $\alpha^{(k)}(t)$  de la combinaison linéaire :

$$\theta(\mathbf{X}, t) \approx \theta^r(\mathbf{X}, t) = \sum_{k=1}^K \Phi^{(k)}(\mathbf{X}) \otimes \alpha^{(k)}(t) = \Phi(\mathbf{X}) \otimes \alpha(t) \quad (2.19)$$

En remplaçant (2.19) dans le modèle semi-discrétisé (1.24), le modèle réduit du problème sur la base  $\Phi$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}^{\text{MOR}} \alpha(t) + \mathbf{C}^{\text{MOR}} \dot{\alpha}(t) = \mathbf{Q}^{\text{MOR}}(t) \quad (2.20)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{MOR}} &= \Phi^T \mathbf{K} \Phi \\ \mathbf{C}^{\text{MOR}} &= \Phi^T \mathbf{C} \Phi \\ \mathbf{Q}^{\text{MOR}} &= \Phi^T \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.21)$$

On peut constater que le système d'équations est d'ordre réduit en espace, la matrice de conductivité  $\mathbf{K}^{\text{MOR}}$  et de capacité  $\mathbf{C}^{\text{MOR}}$  étant  $K \times K$ , le vecteur de flux thermique

$\mathbf{Q}^{\text{MOR}}$  étant  $K \times 1$ . Pour un système ayant  $n$  degrés de liberté, une base réduite idéale doit être de dimension  $K \ll n$  pour une efficacité de résolution du modèle réduit.

La précision du modèle réduit dépend fortement de la qualité de sa base. Pour un ensemble des problèmes légèrement différents, dit similaires, pour les conditions aux limites, matériaux ou géométrie, la BR est supposée assez représentative de leurs caractéristiques. Une fois que la base est construite *offline*, aucun enrichissement dans la phase *online* n'est possible. Cet inconvénient restreint l'application de ce type d'approches dans divers domaines. Ce point est détaillé dans la partie suivante.

**Remarque 1:** *Les MORs par projection sur la BR peuvent être également obtenues avec la méthode POD-Galerkin en remplaçant la définition (2.19) dans la formulation faible du problème.*

### 2.2.3 Limitations de la méthode

Les approches classiques de réduction de modèles par projection sur une base réduite ont été appliquées avec grand succès aux problèmes linéaires pour accélérer les calculs. Cependant, quant à son application aux problèmes non-linéaires (impliquant par exemple la plasticité ou des grandes déformations), ce type d'approches perd son efficacité. Lorsqu'on résout les problèmes non-linéaires, on a besoin de réactualiser, à chaque itération, la matrice tangente  $\mathbf{K}$  ou équivalente  $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ , où  $\Phi$  reste constant. Le coût de calcul associé à l'évaluation de  $\mathbf{K}$  devient dominant par rapport au temps gagné par le système réduit en degrés de liberté. Bien sûr, les méthodes Newton-Raphson modifiées peuvent être utilisées pour éviter la ré-actualisation de  $\mathbf{K}$  à chaque pas, mais leur vitesse de convergence est jugée en générale trop lente dans le contexte de réduction de modèles.

Une approche liée à ce problème est la méthode d'hyper-réduction proposée par [RYC 05, RYC 09]. L'avantage de cette méthode consiste à introduire un domaine d'intégration réduit. Notant par  $\mathbf{P}$  un opérateur de sélection des nœuds, les degrés de liberté sélectionnés sont obtenus par :

$$\theta^{hr} = \mathbf{P}\theta \quad (2.22)$$

où les éléments de  $\mathbf{P}$  sont zéros et 1 sauf pour un nombre des points limité sélectionné par la POD. L'intégration et les coefficients de combinaison  $\alpha^{(k)}(t)$  de l'équation (2.19) ne sont calculés que pour une partie des degrés de liberté du système  $\theta^{hr}$ . Cette hyper-réduction permet ainsi d'éviter une évaluation complète de la matrice tangente  $\mathbf{K}$  et d'alléger le coût lié à la ré-actualisation. On remarque que la sélection des degrés de liberté et la construction du domaine d'intégration réduit sont "problème-dépendant" et doivent être choisis d'une manière adéquate. Cette approche a été appliquée aux problèmes thermo-élasto-plastiques transitoires pour l'accélération des calculs [ZHA 15, ZHA 17]. La FIGURE 2.4 illustre les degrés de liberté sélectionnés par les modes POD pour construire le modèle hyper-réduit dans une analyse thermique de type soudage.

Les autres approches telles que la méthode d'interpolation empirique (EIM) [BAR 04] (et ses variants *best point interpolation* [NGU 08], Discrète-EIM (DEIM) [CHA 10] ), les techniques basés sur la Gappy-POD [EVE 95] (Missing point estimation [AST 08], la

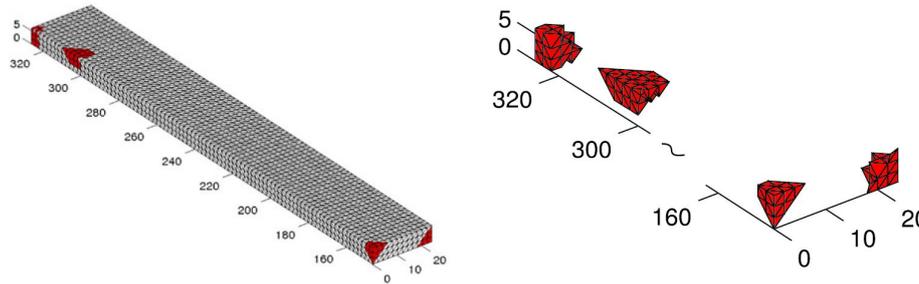


FIGURE 2.4 – Domaine d’intégration réduit pour le modèle hyper-réduit [ZHA 17]

méthode Gauss-Newton avec approximation de tenseurs (GNAT) [CAR 11, CAR 13]), la méthode ANM (Méthode asymptotique numérique) [NIR 08, NIR 10, NIR 12], etc, ont été également proposées pour réduire le coût de calcul induit par la non-linéarité de problèmes dans le contexte de réduction de modèles. En principe, ces approches sont toutes basées sur l’idée d’éviter l’évaluation des termes non-linéaires sur le domaine entier ou éliminer la ré-actualisation de la matrice tangente. Plus de descriptions des différentes méthodes dans la littérature pour les problèmes non-linéaires et leur application dans les méthodes de réduction de modèles peuvent se trouver dans [CAP 15].

Un autre problème de ce type d’approche est lié à l’enrichissement de BR. Lors qu’on traite un problème lié aux études paramétriques, par exemple si on veut identifier les paramètres et leurs intervalles de valeurs du modèle numérique, la construction de BR nécessite une étape répétitive de générer les snapshots avec résolution standard du modèle complet dans la phase *offline*. Dans le cas de petit nombre de paramètres, cette approche s’avère efficace. Toutefois, si le nombre de paramètres devient plus grand et les paramètres présentent une forte variation, la génération exhaustive des snapshots dans un espace de haute dimension pour avoir une BR rassurée est impossible, due à la *malédiction de la dimension*. De plus, la BR manque parfois de robustesse par rapport à la variation de paramètres, les méthodes d’interpolation [AMS 08] sont nécessaires. Pour ce problème, la méthode *reduced-basis* [MAD 04, MAD 06, ROZ 08, CUO 05, GRE 07] offre une procédure pour améliorer la sélection des snapshots. La démarche de la méthode *reduced-basis* est similaire aux méthodes POD, et consiste à une phase *offline* pour trouver la base réduite. La plus grande différence se situe dans la procédure de sélection des snapshots dans l’espace de paramètres. Par exemple, les méthodes *reduced-basis* peuvent utiliser un algorithme glouton pour un choix optimisé de snapshots [MAD 06]. Une possibilité pour enrichir *online* la BR est d’utiliser les sous-espaces de Krylov, comme la méthode a priori Hyper-Reduction (APHR) [RYC 12, RYC 10, AMM 06b] qui peut être considérée comme une approche mixte.

## 2.3 Réduction de modèles : *a priori*

### 2.3.1 Motivations

Comme mentionné précédemment, les approches *a posteriori* rencontrent les difficultés dans les problèmes de haute dimension, due à *la malédiction de la dimension*. Si on utilise une grille uniforme pour échantillonner l'espace de paramètres, le nombre de snapshots à générer est de  $\mathcal{O}(N^d)$  (dépendance exponentielle de la dimension du problème), où  $N$  est le degré de liberté dans chaque direction,  $d$  est la dimension du problème. Contrairement aux méthodes *a posteriori*, les approches *a priori* ne nécessitent aucune préconnaissance de snapshots. Les BRs sont calculées et enrichies purement dans la phase *online*. Grâce à une séparation de variables (2.23), la complexité *online* liée à l'intégration dans un domaine multidimensionnel est réduite à  $\mathcal{O}(N \times d)$  [AMM 06a, AMM 07] et les solutions paramétriques peuvent être calculées une fois pour toute pour le problème multidimensionnel. Ce type d'approches est donc naturellement bien adapté aux problèmes multidimensionnels. Dans ce cas, la quantité d'intérêt  $\mathbf{u}$  peut s'écrire comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d) = \sum_{m=1}^n F_1^m(\mathbf{x}_1) F_2^m(\mathbf{x}_2) \cdots F_d^m(\mathbf{x}_d) \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{u}$  est une fonction inconnue *a priori*,  $\mathbf{x}_i$  sont les coordonnées générales du système qui peuvent être l'espace, le temps, et les paramètres de contrôle du problème.

### 2.3.2 Décomposition Généralisée Propre

La méthode PGD a été initiée sous nom de *radial approximation*, dans les années 80s, dans le cadre d'un solveur non-incremental dédié aux problèmes fortement non-linéaires : la méthode LARge Time INcrements (LATIN) [LAD 85, LAD 89]. Basée sur une séparation espace-temps, la solution du problème est approximée sur l'ensemble du domaine espace-temps par un enrichissement successif des fonctions spatiale et temporelle. Différente des méthodes incrémentales classiques, la méthode LATIN n'est pas basée sur un schéma d'intégrateur pas-à-pas et la résolution du système est donc indépendante de la discrétisation temporelle. Ce caractère permet à LATIN une résolution efficace du problème non-linéaire. LATIN a été appliquée à de nombreux problèmes complexes dans le domaine de la mécanique : problèmes élasto-viscoplastiques [BOI 90, COG 93, REL 13], problèmes du contact [GIA 14, GIA 15], problèmes thermomécaniques [COG 99, RYC 02], problèmes multiparamétriques [BOU 99, HEY 13], problèmes multi-physiques [DUR 03, NÉR 08, NÉR 10, BER 10], etc.

L'approximation à variables séparées a été ensuite généralisée pour des problèmes multi-dimensionnels [AMM 06a, AMM 07], en considérant les paramètres comme des extra-coordonnées du problème, comme l'espace et le temps. Une représentation du type (2.23) est alors nommée PGD. Depuis une dizaine d'années, la PGD attire un intérêt croissant dans de nombreux domaines [CHI 11]. Le potentiel de ce type d'approches pour s'affranchir, ou au moins alléger, les difficultés liées à *la malédiction de*

la *dimension* pour les problèmes multi-dimensionnels a été prouvé [CHI 08]. Une série d'abaques numériques qui peut prendre en compte une dizaine de paramètres a pu être développée [GHN 12, COU 13, CHI 13, NIR 13, GON 15, QUE 16]. Pour d'autres applications de la méthode, on peut se référer à [CHI 10] pour une revue des techniques. Quelques extensions récentes de la méthode concernent les problèmes inverses [GON 12], les problèmes stochastiques [NOU 09, NOU 10b], les problèmes élasto-dynamiques transitoires [BOU 13b, BOU 14].

Dans le contexte d'un problème thermo-mécanique transitoire, peu de travaux sur la PGD existent. Récemment, une méthode d'éléments finis généralisée (GFEM) couplée avec un "PGD-abaque" est proposée [CAN 16] et appliquée avec succès à l'analyse thermique des procédés de soudage. Dans cette méthode, les fonctions d'enrichissement sont calculées *offline* et incluses dans une série de solutions paramétriques. Cette technique conduit à une résolution efficace du problème transitoire de type soudage. Cependant, la construction d'un abaque en tenant compte des variables internes qui dépendent de l'histoire de procédé pour le problème mécanique, comme la plasticité, reste encore un challenge.

La PGD peut être définie de différentes manières. Les différentes définitions conduisent à différentes propriétés de convergence de la méthode. Pour illustrer la méthode, on se place dans un cas stationnaire du problème discret (1.24) : la variation de température  $\dot{\theta} = 0$ . Notant par  $n_s$  et  $n_t$  les degrés de liberté dans l'espace et le temps, le problème espace-temps est de trouver  $\theta(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_t}$  tel que

$$\mathbf{K}\theta = \mathbf{Q} \quad (2.24)$$

où la solution et les opérateurs (matrice de conductivité  $\mathbf{K}$ , vecteurs de flux généralisé  $\mathbf{Q}$ ) du problème sont tous écrits sous forme séparée :

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{X}, t) &= \sum_{k=1}^K \Phi^{(k)}(\mathbf{X}) \otimes \alpha^{(k)}(t) \\ \mathbf{K} &= \sum_{k=1}^{K_a} \mathbf{K}_1^{(k)} \otimes \mathbf{K}_2^{(k)} \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^{K_b} \mathbf{Q}_1^{(k)} \otimes \mathbf{Q}_2^{(k)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\alpha^{(k)}$  et  $\Phi^{(k)}$  sont les vecteurs inconnus.  $\mathbf{K}_1^{(k)}, \mathbf{K}_2^{(k)}, \mathbf{Q}_1^{(k)}, \mathbf{Q}_2^{(k)}$  sont les facteurs issus de la décomposition des opérateurs donnés. Remarquons que la séparation des opérateurs peut se réaliser avec les méthodes de décompositions *a posteriori*, par exemple la SVD pour le cas de deux variables et son extension multidimensionnelle, HOSVD (Higher-order SVD), pour le cas multi-paramétrique.

**PGD-Galerkin** La définition classique de PGD peut être décrite par le critère d'orthogonalité de Galerkin. Pour une approximation d'ordre 1, la méthode PGD consiste à trouver

$\theta \in \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_t}$  tel que

$$\langle \theta^*, \mathbf{K}\theta - \mathbf{Q} \rangle = 0 \quad \forall \theta^* \in \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_t} \quad (2.26)$$

avec  $\theta^* = \Phi^* \otimes \alpha + \Phi \otimes \alpha^*$ . D'où, Le problème équivalent est de trouver les modes  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_t}$  et  $\Phi \in \mathbb{R}^{n_s}$  tels que

$$\langle \Phi^* \otimes \alpha + \Phi \otimes \alpha^*, \mathbf{K}\Phi \otimes \alpha - \mathbf{Q} \rangle = 0 \quad \forall \Phi^* \in \mathbb{R}^{n_s}, \alpha^* \in \mathbb{R}^{n_t} \quad (2.27)$$

On peut constater que le problème linéaire peut devenir fortement non-linéaire dans le cadre de PGD. Le système d'équations peut se résoudre à l'aide d'une stratégie alternée. La résolution du système et l'enrichissement de la base sont détaillés dans la partie suivante. L'extension aux problèmes multidimensionnels est direct en utilisant une représentation multi-variable pour la solution et les opérateurs (2.25).

La formulation de PGD-Galerkin manque parfois de convergence. Les définitions plus robustes et plus générales sont introduites par la minimisation sous certaines normes. On peut consulter [LAD 03, NOU 10a, REL 13, ALL 15] pour une description complète.

### 2.3.3 Algorithmes

La résolution du problème (2.27) est basée sur une stratégie de minimisation alternée qui consiste à calculer alternativement, à chaque étape, une fonction  $\alpha$  ou  $\Phi$  en considérant l'autre est constante. En général, on peut distinguer deux classes des algorithmes, construction directe et construction progressive.

**Construction directe** La construction directe construit à la fois tous les modes d'une base pour un ordre d'approximation donné en alternant la résolution pour  $\alpha$  ou  $\Phi$ . La stratégie alternée peut s'écrire comme suivante :

— Étape 1 : connaissant  $\alpha = [\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(K)}]$ , trouver  $\Phi = [\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(K)}] \in \mathbb{R}^{n_s \times K}$  tels que :

$$\langle \Phi^* \otimes \alpha, \mathbf{K}\Phi \otimes \alpha - \mathbf{Q} \rangle = 0 \quad \forall \Phi^* \in \mathbb{R}^{n_s \times K} \quad (2.28)$$

— Étape 2 : connaissant  $\Phi = [\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(K)}]$ , trouver  $\alpha = [\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(K)}] \in \mathbb{R}^{n_t \times K}$  tels que :

$$\langle \Phi \otimes \alpha^*, \mathbf{K}\Phi \otimes \alpha - \mathbf{Q} \rangle = 0 \quad \forall \alpha^* \in \mathbb{R}^{n_t \times K} \quad (2.29)$$

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à la convergence de la base. L'algorithme 1 résume la procédure de construction directe de PGD. La solution peut donner une approximation optimale à l'ordre fixé. La complexité de résolution dépend de la taille de la base. Si l'ordre d'approximation demandé est trop grand, cet algorithme devient inapplicable.

**Construction progressive** Contrairement à la construction directe, la construction progressive ne fixe pas l'ordre d'approximation, mais enrichit la base au fur à mesure pour

**Algorithm 1** Construction directe de PGD**Données**  $\mathbf{Q}, \mathbf{K}$ 

- 1: Initialiser  $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{Q}$ ,  $\theta = 0$ ,  $m = K$
- 2: Initialiser  $\alpha = [\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(K)}]$
- 3: **for**  $i = 1$  to  $i_{max}$  **do**
- 4:     Calculer  $[\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(K)}]$  avec  $\alpha$  connu ▷ (2.28)
- 5:     Calculer  $[\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(K)}]$  avec  $\Phi$  connu à l'étape précédente ▷ (2.29)
- 6:     Vérifier la convergence
- 7: **end for**
- 8:  $\theta = \sum_{k=1}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$
- 9:  $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{K}\theta$
- 10: Calculer  $\varepsilon = \frac{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}^{(0)}\|_2}{\|\mathbf{R}^{(0)}\|_2}$

**Sorties** Solution PGD :  $\theta = \sum_{k=1}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$

une précision donnée. Cet algorithme peut être considéré comme un procédé glouton. Pour le mode  $m$ , on suppose que l'on connaît déjà les  $(m-1)$  modes précédents, et puis on cherche le meilleur enrichissement d'ordre 1,  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_t}$  et  $\Phi \in \mathbb{R}^{n_s}$ , tel que :

$$\left\langle \Phi^* \otimes \alpha + \Phi \otimes \alpha^*, \mathbf{K} \left( \sum_{k=1}^{m-1} \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)} + \Phi \otimes \alpha \right) - \mathbf{Q} \right\rangle = 0 \quad \forall \Phi^* \in \mathbb{R}^{n_s}, \alpha^* \in \mathbb{R}^{n_t} \quad (2.30)$$

Notant  $\theta_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$  l'approximation d'ordre  $m$  de la solution et  $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{K}\theta_{m-1}$  le résidu associé, la stratégie de résolution pour le mode  $m$  consiste à alterner les 2 étapes suivantes et les répéter jusqu'à la convergence :

— Etape 1 : connaissant  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_t}$ , trouver  $\Phi \in \mathbb{R}^{n_s}$  tel que :

$$\langle \Phi^* \otimes \alpha, \mathbf{R} - \mathbf{K}\Phi \otimes \alpha \rangle = 0 \quad \forall \Phi^* \in \mathbb{R}^{n_s} \quad (2.31)$$

— Etape 2 : connaissant  $\Phi \in \mathbb{R}^{n_s}$ , trouver  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_t}$  tel que :

$$\langle \Phi \otimes \alpha^*, \mathbf{R} - \mathbf{K}\Phi \otimes \alpha \rangle = 0 \quad \forall \alpha^* \in \mathbb{R}^{n_t} \quad (2.32)$$

La procédure de construction progressive de la PGD est résumée dans l'Algorithme 2. Le résidu est mis à jour lors de chaque enrichissement de la base. Cette procédure s'arrête lorsque l'erreur d'approximation attend une valeur donnée  $\varepsilon_{max}$ . Dans cette méthode, la résolution des systèmes linéaires (2.31) et (2.32) n'est pas coûteuse et est indépendante de la dimension de la base. Cet algorithme présente ainsi un avantage évident par rapport à la construction directe.

**Construction progressive avec mises à jour** En général, les modes calculés avec le procédé glouton ne sont pas optimaux, vue que la résolution du problème est par rapport au mode courant. Les algorithmes permettant de mettre à jour les modes calculés

---

**Algorithm 2** Construction progressive de PGD

---

**Données**  $\mathbf{Q}, \mathbf{K}$

```

1: Initialiser  $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{Q}, \theta = 0, m = 1$ 
2: Initialiser l'erreur d'approximation :  $\varepsilon$ 
3: while  $\varepsilon > \varepsilon_{max}$  do
4:   Initialiser  $\alpha$ 
5:   for  $i = 1$  to  $i_{max}$  do
6:     Calculer  $\Phi$  avec  $\alpha$  connu ▷ (2.31)
7:     Calculer  $\alpha$  avec  $\Phi$  connu à l'étape 6 ▷ (2.32)
8:     Vérifier la convergence
9:   end for
10:   $\Phi^{(m)} = \Phi, \alpha^{(m)} = \alpha$ 
11:  Enrichir la base  $\theta = \theta + \Phi^{(m)} \otimes \alpha^{(m)}$ 
12:   $\mathbf{R}^{(m)} = \mathbf{Q} - \mathbf{K}\theta$ 
13:  Calculer  $\varepsilon = \frac{\|\mathbf{R}^{(m)} - \mathbf{R}^{(m-1)}\|_2}{\|\mathbf{R}^{(m-1)}\|_2}$ 
14:   $m = m + 1$ 
15: end while

```

**Sorties** Solution PGD :  $\theta = \sum_{k=1}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$

---

précédents ont été proposés pour améliorer l'optimalité de la PGD progressive. Les lecteurs peuvent se référer à [NOU 10a, FAL 12, BOU 13b], parmi lesquels on illustre ici une méthode intéressante, dans l'Algorithme 3 [BOU 13b], qui met à jour alternativement tous les modes avec un coût supplémentaire minimal.

Notons que la construction avec mises à jour est beaucoup plus coûteuse que celle classique, due à la ré-actualisation de résidu dans le boucle de mise à jour des modes. Dans tous les algorithmes, l'indicateur de convergence des modes peut être défini comme la différence de  $\Phi \otimes \alpha$  entre l'itération courante et l'itération précédente. Plus de détails sur les indicateurs de convergence utilisés dans la construction PGD et une comparaison de performance des différents algorithmes peuvent se trouver dans [NOU 10a].

## 2.4 Bilan et orientation du travail

Pour conclure, un bilan sur les avantages et les inconvénients des méthodes de réduction de modèles est illustré dans le Tableau 2.1. Les méthodes *a priori* PGD sont bien adaptées aux problèmes multidimensionnels, car la construction des bases ne nécessite aucune information *a priori* de la solution et l'exploitation de l'espace de paramètres peut bénéficier de l'avantage de la représentation à variables séparées des solutions. Les BRs peuvent être calculées une fois pour toute dans la phase *offline*. Couplée avec une méthode d'interpolation 1D, l'utilisation dans la phase *online* pour évaluer les solutions à une valeur spécifique de paramètres peut se faire à un coût négligeable. Ce type d'approches est ainsi capable de donner les solutions *online* en temps réel. L'inconvénient

**Algorithm 3** Construction progressive de PGD avec mises à jour [BOU 13b]**Données**  $\mathbf{Q}, \mathbf{K}$ 

```

1: Initialiser  $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{Q}$ ,  $\theta = 0$ ,  $m = 1$ 
2: Initialiser l'erreur d'approximation :  $err$ 
3: while  $\varepsilon > \varepsilon_{max}$  do
4:   Initialiser  $\alpha$ 
5:   Faire les étapes 4 à 10 de l'Algorithme 2
6:   for  $I = 1$  to  $I_{max}$  do
7:     for  $j = 1$  to  $m$  do
8:        $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{K} \sum_{k=1, k \neq j}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$ 
9:       Calculer  $\Phi^{(j)}$  ▷ (2.31)
10:      Calculer  $\alpha^{(j)}$  ▷ (2.32)
11:     end for
12:   end for
13:    $\mathbf{R}^{(m)} = \mathbf{Q} - \mathbf{K} \sum_{k=1}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$ 
14:   Calculer  $\varepsilon = \frac{\|\mathbf{R}^{(m)} - \mathbf{R}^{(m-1)}\|_2}{\|\mathbf{R}^{(m-1)}\|_2}$ 
15:    $m = m + 1$ 
16: end while
Sorties Solution PGD :  $\theta = \sum_{k=1}^m \Phi^{(k)} \otimes \alpha^{(k)}$ 

```

principal de ce type d'approches réside dans son aspect intrusif qui rend la méthode PGD peu applicable à un code de calcul commercial existant. D'autre part, l'application de ce type d'approche aux problèmes non-linéaires, tels que le procédé de soudage, reste encore un challenge.

Les méthodes *a posteriori* sont souvent moins intrusives. Une fois que la BR est obtenue dans la phase *offline*, le MOR en espace peut être construit par la projection du système sur l'espace réduit engendré. La résolution *online* consiste ensuite à trouver les coefficients de combinaison de la base (souvent la partie temporelle). Cependant, l'efficacité de la résolution de MOR est limitée en non-linéaire. Même si certaines techniques ont été proposées pour accélérer le calcul, il manque de conclusion définitive sur le choix de méthodes dans la littérature. En plus, lorsque la simulation en temps réel est désirée, par exemple pour le contrôle du système, ce type d'approches (que ce soit la méthode POD ou *reduced basis*) reste inapplicable, due à la nécessité de résolution dans la phase *online*. Par ailleurs, le nombre de snapshots, en pratique la mémoire nécessaire au stockage peut croître exponentiellement avec un échantillonnage uniforme lorsque le nombre de paramètres augmente. Par conséquent, le choix des snapshots dans l'espace de paramètres doit être fait d'une manière adéquate.

Afin d'éviter l'aspect intrusif des approches PGD, notre choix s'est porté ainsi sur les méthodes *a posteriori* pour construire nos abaques numériques de soudage. L'idée est d'avoir une méthode non-intrusive qui peut rendre applicable les codes de calcul professionnels pour modéliser le procédé de soudage afin d'avoir une meilleure approximation

	<i>A priori</i> PGD	<i>A posteriori</i> POD
Avantages +	Sans snapshots Intérêt en multi-paramétrique	Moins intrusive Approximation optimale
Inconvénients –	Très intrusive Difficulté en non-linéaire	Nécessité de snapshots Difficulté en non-linéaire

TABLE 2.1 – Bilan sur les méthodes de réduction de modèles

du problème. Comme mentionné précédemment, dans les approches *a posteriori* deux grands problèmes doivent être résolus : 1. comment exploiter en temps réel l'espace de paramètres ? 2. comment échantillonner efficacement l'espace de paramètres en vue de garder l'optimalité de l'abaque ?

A l'égard de la première question, la plupart des approches *a posteriori* effectuent une séparation de variables espace-temps (ou espace-paramètres) et gardent seulement la base spatiale. La partie restante (base temporelle ou base associée aux paramètres) est résolue dans la phase *online* selon les variations de paramètres. De façon différente, nous proposons de construire les bases réduites espace-temps (ou espace-paramètres) à partir de snapshots en phase *offline*, et ensuite d'utiliser les méthodes d'interpolation pour adapter toutes les BRs (par exemple spatio-temporelles) en vue d'éviter la résolution complexe dans la phase *online*. Une telle approche est ainsi non-intrusive et peut donner les solutions paramétriques en temps réel. Le seconde problème consiste à proposer les stratégies d'échantillonnage efficace pour limiter le nombre de snapshots. Il s'agit de l'optimalité de l'abaque au sens de minimisation de mémoire de stockage de BRs à erreur contrôlée.

Tout au long de la thèse, les méthodes utilisées pour la construction d'abaques numériques sont développées pour répondre aux deux questions. Deux types de méthodes sont proposées, la première est basée sur une séparation de variables espace-temps par la POD, l'autre est basée sur une séparation d'espace-temps-paramètres par la HOPGD.

# Chapitre 3

## Abaques numériques basés sur la méthode POD

*Dans ce chapitre, une nouvelle stratégie non-intrusive est proposée pour construire les abaques numériques de simulation de type soudage. Basée sur la séparation de variables espace-temps par la POD, cette méthode permet d'obtenir, a posteriori, des bases réduites optimales et de les interpoler directement sans résoudre le problème d'origine pour obtenir des nouvelles solutions paramétriques en temps réel à précision contrôlée.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>3.2</b>	<b>Constructions des bases réduites optimales</b>	<b>40</b>
3.2.1	Décomposition en Valeurs Singulières	41
<b>3.3</b>	<b>Interpolation de bases réduites pour études paramétriques</b>	<b>41</b>
3.3.1	Interpolation dans les variétés Grassmanniennes	42
3.3.2	Interpolation des bases réduites espace-temps	44
3.3.3	Stratégie d'interpolation locale	45
<b>3.4</b>	<b>Sélection automatique adaptative des snapshots</b>	<b>46</b>
3.4.1	Indicateur d'erreur	46
3.4.2	Méthode multi-grilles dans l'espace de paramètres	46
<b>3.5</b>	<b>Application à la construction de l'abaque de soudage</b>	<b>47</b>
3.5.1	Modèle EF du soudage	48
3.5.2	Réductibilité du problème	48
3.5.3	Interpolation Grassmannienne vs interpolation standards	52
3.5.4	Abaques numériques quasi-optimaux à précision contrôlée	55
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

---

## 3.1 Introduction

Comme mentionné dans le chapitre précédent, les méthodes POD qui reposent sur une projection de la base présente des difficultés quant aux problèmes non-linéaires. La nécessité de résolution dans la phase *online* limitent leurs applications aux problèmes pour lesquels la simulation en temps réel est indispensable, tels que la surveillance ou le contrôle virtuel du procédé (simulation-based process monitoring and control).

Dans le contexte de la réduction de modèles *a posteriori*, il n’y a pas de travaux, à notre connaissance, qui se basent sur l’utilisation de l’aspect temporel du modèle réduit. A partir des snapshots, la BR spatiale est extraite ou adaptée pour construire le modèle réduit, la partie temporelle est retrouvée par résolution *online* du système [ZHA 15, ZHA 17]. Nous proposons donc de traiter la BR temporelle comme celle spatiale de manière à contourner le coût de calcul lors de la phase *online*. Dans le cadre des études paramétriques, une méthode d’interpolation basée sur les variétés Grassmanniennes [ZHA 15, AMS 08] a été proposée pour adapter la POD-BR spatiale et le modèle réduit. Basée sur cette idée, cette méthode d’interpolation est étendue pour adapter l’ensemble des BRs spatio-temporelles sans résolution du système d’équations dans [LU 17b]. Cette approche a été comparée avec les méthodes d’interpolation standards pour un exemple de type soudage. Une amélioration de précision a été trouvée avec l’approche proposée. Cette méthode permet de donner les solutions en temps réel par rapport à des variations de paramètres sans résolution complexe dans la phase *online*.

Basée sur la méthode d’interpolation proposée, une stratégie non-intrusive a été ainsi développée pour la construction d’abaques. Le second ingrédient de cette stratégie concerne l’optimalité de l’abaque. D’une part, pour minimiser le nombre de modes des BRs, la réductibilité du problème a été étudiée, il est montré qu’une approche dans la base mobile permet d’avoir une bonne réductibilité des problèmes thermiques transitoires avec chargement mobile. D’autre part, afin de limiter le nombre de snapshots nécessaire, une méthode “multi-grilles” couplée avec un indicateur d’erreur a été proposée pour une sélection automatique adaptative des snapshots dans l’espace de paramètres. Les abaques à précision contrôlée sont construits pour un exemple thermo-mécanique avec source de chaleur mobile et peuvent donner les solutions 4D(espace-temps) en temps réel.

Dans ce chapitre, on présente d’abord la construction des BRs optimales espace-temps. Et puis l’adaptation de BRs espace-temps, avec la méthode d’interpolation Grassmannienne, par rapport à la variation des paramètres est détaillée. Pour échantillonner l’espace de paramètres, la méthode “multi-grilles” adaptative est proposée. Enfin, les exemples d’abaques développés à l’aide de la stratégie proposée sont illustrés.

## 3.2 Constructions des bases réduites optimales

Cette partie présente la génération des bases réduites (BRs) espace-temps par la méthode snapshots-POD. Pour rappeler, parmi les différentes techniques de la construction de BR, la POD permet d’obtenir une BR qui est optimale dans le sens que l’erreur

d'approximation est minimisée par rapport à une certaine mesure. Ainsi, l'espace engendré par la base POD donne souvent une excellente approximation à faible dimension.

### 3.2.1 Décomposition en Valeurs Singulières

Étant donnée un ensemble de snapshots à différents instants  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}(t_1), \dots, \mathbf{u}(t_m)\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , la POD cherche un projecteur orthogonal  $\Pi_{\Phi, \Phi} = \Phi \Phi^T$  qui minimise l'erreur de projection cumulée :

$$\operatorname{argmin}_{\substack{\Psi \\ \Psi^T \Psi = \mathbf{I}}} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{U}(t_i) - \Pi_{\Psi, \Psi} \mathbf{U}(t_i)\|_2^2 \quad (3.1)$$

La solution du problème est alors donnée par la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) des snapshots espace-temps :

$$\mathbf{U} = \Phi \Sigma \mathbf{V}^T \quad (3.2)$$

$\Phi = [\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}^{(1)}, \dots, \mathbf{V}^{(m)}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont orthogonales et respectivement les bases spatiales et temporelles, et  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$  contient les valeurs singulières positives  $\sigma_i$  (avec  $i \leq r = \min(n, m)$ ) en ordre décroissante. Ainsi la solution optimale de (3.1) est  $\Phi_K = \{\Phi^{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$  (avec  $k \leq r$ ). L'erreur de norme-2 minimale [ECK 36] par rapport aux snapshots approximés en utilisant la base POD est donnée par :

$$\|\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}\|_F = \|\mathbf{U} - \Pi_{\Phi_K, \Phi_K} \mathbf{U}\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2} \quad (3.3)$$

où  $\|\bullet\|_F$  désigne la norme Frobenius.

En général,  $k$  est choisi de telle sorte qu'une grande compression est obtenue et l'approximation correspondante  $\hat{\mathbf{U}}$  est suffisamment précise. On adopte alors la définition suivante :

**Définition 3.1**  $k$ -Compressibilité

Un champ espace-temps est dit  $k$ -compressible si le nombre de modes espace-temps nécessaires pour obtenir la solution à une tolérance donnée est  $k$ .

## 3.3 Interpolation de bases réduites pour études paramétriques

Les BRs manquent souvent de robustesse par rapport à la variation de paramètres et la mise à jour des snapshots. Cette section aborde l'actualisation de BR pour des études paramétriques. Une stratégie d'interpolation locale basée sur les variétés Grassmanniennes est présentée et sera appliquée dans notre cas à interpoler des BRs espace-temps.

### 3.3.1 Interpolation dans les variétés Grassmanniennes

Considérons une matrice de plein rang associée à une base POD orthonormée  $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{R}^{p \times k}$ , où  $k \leq p$ , elle appartient naturellement à la variété Stiefel compacte  $ST(k, p)$  [ABS 04, EDE 98], qui est définie comme l'ensemble de toutes les matrices orthonormées  $p \times k$ . En outre, les colonnes de  $\mathbf{Y}_0$  forment la base du sous-espace  $S_0$  de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Ce sous-espace  $S_0$  appartient à la variété Grassmannienne  $G(k, p)$  [ABS 04, EDE 98] qui est définie comme l'ensemble de tous les sous-espaces  $k$ -dimensionnels de  $\mathbb{R}^p$ . Généralement, chaque sous-espace  $k$ -dimensionnel  $S$  peut être considéré comme un point de  $G(k, p)$  pour laquelle il existe un espace tangent de même dimension [ABS 04, EDE 98]. Cet espace tangent, désigné par  $\mathcal{T}$ , est un espace "plat" dans lequel l'interpolation peut être effectuée comme souvent utilisée dans les espaces réguliers [AMS 08], et peut être représentée par une matrice  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times k}$ .

Etant donné un chemin géodésique  $y(t)$  défini uniquement par son point initial et le point final  $y_0, y_1 \in G(k, p)$  ou le point initial et la vitesse initiale  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \in \mathcal{T}$ , le mapping exponentiel est défini comme étant le point d'extrémité, qui projette l'espace tangent à la variété elle-même  $G(k, p)$  [ABS 04, BOO 03] :

$$\text{Exp}_{y_0}(\dot{y}_0) = y(1) = y_1 \quad (3.4)$$

Le mapping inverse, dit mapping logarithmique, permet la projection inverse d'un point de variété à l'espace tangent :

$$\text{Log}_{y_0}(y_1) = \dot{y}_0 \quad (3.5)$$

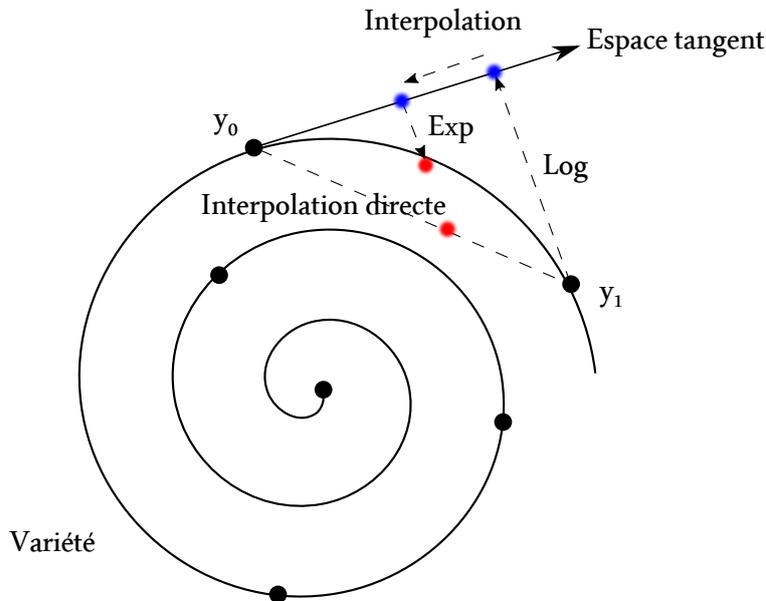


FIGURE 3.1 – Interpolation Grassmannienne vs interpolation directe

Différentes formules analytiques pour les mappings exponentiels et logarithmiques d'une matrice de variété peut se trouver dans [AMS 10]. Couplés avec une interpolation standard dans l'espace tangent, les mappings exponentiels et logarithmiques permettent de définir une interpolation de la variété (FIGURE 3.1).

Dans le cas de la variété Grassmannienne, un cadre de calcul pour cette interpolation a été proposé dans [AMS 08]. Considérons un ensemble de BRs  $\mathbf{Y}_i|_{i=0,n} \in \mathbb{R}^{p \times k}$  précalculé pour différents points de manipulation (snapshots)  $S_i|_{i=0,n}$  (correspondant à différentes valeurs de paramètres  $s_i|_{i=0,n}$ ), la géodésique de la variété Grassmannienne, à laquelle le sous-espace  $S_i$  engendré par les BRs appartient, peut être décrite par l'équation suivante [ABS 09, ABS 04] :

$$\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \dot{\mathbf{Y}}^T \dot{\mathbf{Y}} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I} \quad (3.6)$$

Dans la même variété, la procédure suivante permet d'interpoler la BR disponible à un nouveau point de manipulation  $S$  pour une valeur  $s$  différente des  $s_i$ .

Prenons  $S_0$  comme le point d'origine, l'espace tangent à ce point engendré par les colonnes de  $\Gamma_i$  est donné par le mapping logarithmique [BEG 06] :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{Y}_0 \mathbf{Y}_0^T) \mathbf{Y}_i (\mathbf{Y}_0^T \mathbf{Y}_i)^{-1} &= \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^T \quad (\text{Thin SVD}) \\ \Gamma_i &= \tilde{\mathbf{U}} \tan^{-1}(\tilde{\Sigma}) \tilde{\mathbf{V}}^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'interpolation standard dans ce plan est alors effectuée par des fonctions d'interpolation  $N_i$  (par exemple celles utilisées dans EF) dans l'espace de paramètres :

$$\begin{aligned} N_i &= \prod_{i \neq j} \frac{s - s_j}{s_i - s_j} \\ \Gamma_N &= \sum_{i=0}^n N_i \Gamma_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\Gamma_N$  peut être considérée comme le point de mapping de  $S$  dans l'espace tangent ayant  $S_0$  comme le point d'origine. Ici, un cas spécial d'interpolation d'EF 1D est présenté. L'application aux cas de 2 ou 3 paramètres est évidente. Plus généralement, un schéma d'interpolation multi-variées (par exemple, [DEB 92, SPÄ 95]) peut être utilisé pour les cas à plusieurs paramètres.

Le mapping exponentiel renvoie la BR actualisée, qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \Gamma_N &= \tilde{\mathbf{U}}_N \tilde{\Sigma}_N \tilde{\mathbf{V}}_N^T \quad (\text{Thin SVD}) \\ \mathbf{Y}(s) &= [\mathbf{Y}_0 \tilde{\mathbf{V}}_N \cos(\tilde{\Sigma}_N) + \tilde{\mathbf{U}}_N \sin(\tilde{\Sigma}_N)] \tilde{\mathbf{V}}_N^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\tilde{\mathbf{V}}_N^T$  apparaît pour garantir l'homogénéité de l'unité. Dans les méthodes POD-Garlerkin standards, l'homogénéité pour la base interpolée est abandonnée (e.g [AMS 08, ZHA 15]), car :

$$y(s) = \text{span}(\mathbf{Y}(s)) = \text{span}(\mathbf{Y}_0 \tilde{\mathbf{V}}_N \cos(\tilde{\Sigma}_N) + \tilde{\mathbf{U}}_N \sin(\tilde{\Sigma}_N)) \quad (3.10)$$

Dans ces méthodes, seules les BRs spatiales sont interpolées pour l'adaptation du sous-espace de solution, l'homogénéité peut donc être abandonnée. La perte d'homogénéité est compensée en résolvant l'équation d'équilibre avec des calculs d'EF lors du calcul de la partie restante (généralement la BR temporelle). Dans notre cas, le fait de garder l'homogénéité des bases interpolées est un point crucial et doit être respecté, car il n'existe aucune résolution d'équation d'équilibre pour calculer les BRs temporelles dans la méthode proposée (les BRs d'espace et du temps sont interpolées dans la variété Grassmannienne).

Une formule simplifiée est obtenue quand il n'y a que deux bases  $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1$  qui sont prises en compte pour l'interpolation. Les équations de (3.7) à (3.9) peuvent être réduites à une seule équation :

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{Y}_0 \tilde{\mathbf{V}} \cos(\frac{s-s_0}{s_1-s_0} \tan^{-1}(\tilde{\Sigma})) + \tilde{\mathbf{U}} \sin(\frac{s-s_0}{s_1-s_0} \tan^{-1}(\tilde{\Sigma}))] \tilde{\mathbf{V}}^T \quad (3.11)$$

Enfin, on remarque ici que le cadre de calcul ci-dessus est un cas particulier d'un paramètre variable. Les lecteurs peuvent se référer à [AMS 08, ABS 04] pour plus de détails sur le cas général.

#### 3.3.2 Interpolation des bases réduites espace-temps

Étant donné deux solutions d'espace-temps  $\mathbf{U}_0(\mathbf{X}, t)$  et  $\mathbf{U}_1(\mathbf{X}, t)$  pré-calculées respectivement pour deux valeurs de paramètre  $\mu_0$  et  $\mu_1$ , les bases POD sont alors obtenues par la SVD :

$$\mathbf{U}_i = \Phi_i \Sigma_i \mathbf{V}_i^T \quad \forall i = 0, 1 \quad (3.12)$$

où les bases spatio-temporelles sont respectivement  $\Phi_i|_{i=0,1}$  et  $\mathbf{V}_i|_{i=0,1}$ . Les nouvelles bases  $\{\Phi_\mu, \mathbf{V}_\mu\}$  correspondant à une nouvelle valeur de paramètre  $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$  peuvent être obtenues par interpolation en utilisant la méthode proposée précédemment (voir l'Algorithme 4). Comme indiqué précédemment, l'homogénéité de l'unité des bases  $\Phi_i|_{i=0,1}$  et  $\mathbf{V}_i|_{i=0,1}$  doit être conservée ici lors de l'interpolation des nouvelles bases  $\Phi_\mu$  et  $\mathbf{V}_\mu$ .

---

**Algorithm 4** Interpolation des bases réduites spatiales  $\Phi_i$  et temporelles  $\mathbf{V}_i$

---

**Données**  $\{\Phi_0, \Phi_1\}$  (ou  $\{\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1\}$ ),  $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$

1:  $(\mathbf{I} - \Phi_0 \Phi_0^T) \Phi_1 (\Phi_0^T \Phi_1)^{-1} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^T$  (Thin SVD)

2:  $\Phi_\mu = [\Phi_0 \tilde{\mathbf{V}} \cos(\frac{\mu-\mu_0}{\mu_1-\mu_0} \tan^{-1}(\tilde{\Sigma})) + \tilde{\mathbf{U}} \sin(\frac{\mu-\mu_0}{\mu_1-\mu_0} \tan^{-1}(\tilde{\Sigma}))] \tilde{\mathbf{V}}^T$

**Sorties**  $\Phi_\mu$  (or  $\mathbf{V}_\mu$ )

---

La matrice de valeurs singulières  $\Sigma_\mu$  peut être interpolée directement avec la méthode EF comme :

$$\Sigma_\mu = \sum_i N_i(\mu) \Sigma_i \quad (3.13)$$

où  $N_i(\mu)$  sont les fonctions de forme EF dans l'espace de paramètres.

Finalement, la nouvelle solution  $\mathbf{U}_\mu(\mathbf{X}, t)$  correspondant à la nouvelle valeur de paramètre  $\mu$  est donnée par la combinaison des matrices interpolées :

$$\mathbf{U}_\mu = \Phi_\mu \Sigma_\mu \mathbf{V}_\mu^T \quad (3.14)$$

Contrairement aux modèles classiques de POD-Galerkin, l'approche proposée ne requiert aucun calcul d'EF non-linéaire transitoire pour la nouvelle valeur de paramètre. Les bases spatiales et temporelles sont interpolées à l'aide de l'interpolation Grassmannienne. On peut souligner que cette procédure basée sur l'interpolation présente une efficacité élevée en termes du coût de calcul. Cela fournit un cadre pratique pour des études paramétriques avec des calculs à faible coût, comme ce qui sera montré ci-après, même pour des problèmes non-linéaires transitoires.

L'application de l'approche proposée à un cas paramétrique 2D/3D peut être effectuée simplement en employant la base EF correspondante dans les équations (3.8) et (3.13) pour l'interpolation.

En raison de la nature de l'interpolation Grassmannienne, la solution reconstruite avec cette approche présente une nettement meilleure précision par rapport à une interpolation spatio-temporelle avec des méthodes d'interpolation standards (e.g. méthodes de type Lagrange). Ce point sera illustré dans la suite.

### 3.3.3 Stratégie d'interpolation locale

L'interpolation de BR dépend fortement des snapshots générés dans l'espace des paramètres. Afin de pré-calculer les snapshots avec un petit nombre de points d'essai et une haute fidélité, une stratégie de contrôle local de l'erreur est développée. Considérons un problème thermo-mécanique non-linéaire transitoire, les solutions connues antérieures, correspondant à différentes valeurs de paramètre  $\mu_{i=1,n} \in [\mu_1, \mu_n]$ , sont pré-calculés avec la méthode EF complète. A partir de ces snapshots, les bases POD :  $\Phi_i, \Sigma_i, \mathbf{V}_i$  sont fournies par la SVD et tronquées selon un critère de  $k$ -compressibilité.

---

#### Algorithm 5 Interpolation locale

---

**Données** Un ensemble des points de manipulation dans l'espace des paramètres

$\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ , Bases POD de snapshots  $(\Phi_i, \Sigma_i, \mathbf{V}_i)_{i \in \{1,n\}}$ ,  $\mu \notin \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$

- 1: **while**  $\mu \in [\mu_i, \mu_{i+1}]$  **do**
- 2:     Choisir  $\mu_i$  comme le point de référence de l'espace tangent
- 3:     Interpolation de la BR spatiale  $\Phi_\mu$  avec  $\Phi_i$  et  $\Phi_{i+1}$  ▷ Algo. 4
- 4:     Interpolation de la BR temporelle  $\mathbf{V}_\mu$  avec  $\mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_{i+1}$  ▷ Algo. 4
- 5:     Interpolation des valeurs singulières  $\Sigma_\mu$  avec  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_{i+1}$  ▷ (3.13)
- 6: **end while**

**Sorties** Nouvelle solution  $\mathbf{U}_\mu = \Phi_\mu \Sigma_\mu \mathbf{V}_\mu^T$

---

Bien qu'une interpolation globale puisse éventuellement améliorer la précision de la solution reconstruite, les BRs de l'espace et du temps sont interpolées localement, compte

tenu de l'augmentation des coûts de calculs dans la phase *online* et de la stabilisation du schéma d'interpolation.

## 3.4 Sélection automatique adaptative des snapshots

Il est évident qu'une génération exhaustive de snapshots dans l'espace des paramètres peut assurer une solution fiable reconstruite par interpolation. Cependant, le prix des calculs résultant coûte trop cher. Cette section aborde la précision d'abaque. Une méthode "multi-grilles" est proposée pour contrôler l'erreur produite dans la construction d'abaques par interpolation Grassmannienne. Pour rappeler, dans le cadre du travail, on considère que les erreurs de modélisation et de discrétisation sont négligeables, l'erreur des solutions est ainsi mesurée par rapport aux modèles FE de haute fidélité (HFM).

### 3.4.1 Indicateur d'erreur

Considérons une quantité d'intérêt  $\mathbf{U}^{\text{MOR}}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  reconstruite avec l'approche proposée dans la section précédente, un indicateur d'erreur de BR par rapport à HFM est défini comme :

$$\text{Err}(\mathbf{U}) = \frac{\|\mathbf{U}^{\text{MOR}}(t_f) - \mathbf{U}^{\text{HFM}}(t_f)\|_2}{\|\mathbf{U}^{\text{HFM}}(t_f)\|_2} \quad (3.15)$$

où  $(\bullet)(t_f)$  désigne la solution à l'instant final et  $\mathbf{U}^{\text{HFM}}$  la solution calculée avec HFM.

Cette définition peut être appliquée de manière similaire à une autre variable d'état dans le vecteur d'état. Notons que l'erreur calculée ici est une somme des erreurs de troncature des modes SVD et d'interpolation de BRs. L'erreur de troncature des modes SVD dépend de l'ordre de troncature  $k$  choisi. L'erreur d'interpolation dépend de la précision de la méthode d'adaptation BRs et de l'emplacement des snapshots pré-calculés dans l'espace des paramètres. La méthode "multi-grilles" présentée ci-après donne un choix automatique des positions des snapshots (c'est-à-dire le choix des points d'échantillonnage) dans l'espace de paramètres afin de contrôler et d'optimiser l'erreur d'interpolation.

### 3.4.2 Méthode multi-grilles dans l'espace de paramètres

Une méthode de sélection "multi-grilles" efficace qui permet un échantillonnage adaptatif dans l'espace des paramètres est présentée ici.

Pour visualisation, seuls deux paramètres sont considérés :  $\mu \in D_\mu, \xi \in D_\xi$ . Nous commençons par la grille grossière de premier ordre, donnée par les quatre snapshots associés aux quatre coins de l'espace des paramètres  $D = D_\mu \times D_\xi$ . L'indicateur d'erreur  $\text{Err}$  est alors calculé au point d'évaluation situé au centre du domaine. La grille n'est raffinée que lorsque l'erreur pour ce point est supérieure à une valeur critique donnée, en ajoutant d'autres snapshots à la grille de second ordre. La qualité de la grille raffinée est

réévaluée par l'indicateur d'erreur à chaque centre de nouveaux sous-domaines. Le raffinement est effectué jusqu'à ce que l'erreur atteigne la précision prescrite. La procédure de raffinement est résumée dans l'Algorithme 6. La FIGURE 3.2 montre un exemple de raffinements successifs localisés dans un espace de paramètres bidimensionnel.

Remarquons que la méthode ci-dessus peut être étendue à plus de deux paramètres. Les raffinements "multi-grilles" devraient être spécifiques à chacune des variables d'état.

---

**Algorithm 6** Raffinement local adaptative d'un espace des paramètres 2D

---

**Données** Grille grossière de première ordre  $D$ , tolérance  $Err_c$

- 1:  $S \leftarrow$  List vide
- 2: Détecter les coins de la grille locale actuelle :  $corn(D)$
- 3: Calculer l'indicateur d'erreur :  $Err(\mathbf{U})$  ▷ Algo. 7
- 4: **if**  $Err(\mathbf{U}) > Err_c$  **then**
- 5:      $S' \leftarrow S \cup corn(D)$
- 6:     Subdiviser  $D$  en 4 sous-domaines :  $D_{i=1,4}$
- 7:     **for all**  $D_i \in \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$  **do**
- 8:          $D \leftarrow D_i$
- 9:         Passer à la ligne 2 et recommencer le processus récursif
- 10:     **end for**
- 11: **else**
- 12:      $S' \leftarrow S \cup corn(D)$
- 13: **end if**

**Sorties**  $S'$  : Liste des snapshots sélectionnés définissant le raffinement local

---



---

**Algorithm 7** Indicateur d'erreur locale

---

**Données** Domaine  $D = D_\mu \times D_\xi$ ,  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ ,  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$

- 1: Vecteurs de BR  $\{\Phi_i, \Sigma_i, \mathbf{V}_i\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$
- 2:  $\mu_c = (\mu_c, \xi_c)$  ▷ Centre du  $D$
- 3: Calculer  $\mathbf{U}^{\text{HFM}}(\mathbf{X}, t; \mu_c)$  par la méthode EF complète
- 4: Interpoler  $\Phi_{\mu_c}, \mathbf{V}_{\mu_c}$  ▷ Algo. 4
- 5: Interpoler  $\Sigma_{\mu_c}$  ▷ (3.13)
- 6: Calculer  $\mathbf{U}^{\text{MOR}}(\mathbf{X}, t; \mu_c) = \Phi_{\mu_c} \Sigma_{\mu_c} \mathbf{V}_{\mu_c}^T$
- 7: Calculer  $Err(\mathbf{U})$  ▷ (3.15)

**Sorties** Indicateur d'erreur  $Err(\mathbf{U})$

---

## 3.5 Application à la construction de l'abaque de soudage

Dans cette section, un modèle numérique de soudage est présenté. Pour cela, on considère un modèle thermo-mécanique 3D non-linéaire avec une source de chaleur mobile. L'approche dans la base mobile est appliquée pour analyser le problème thermique.

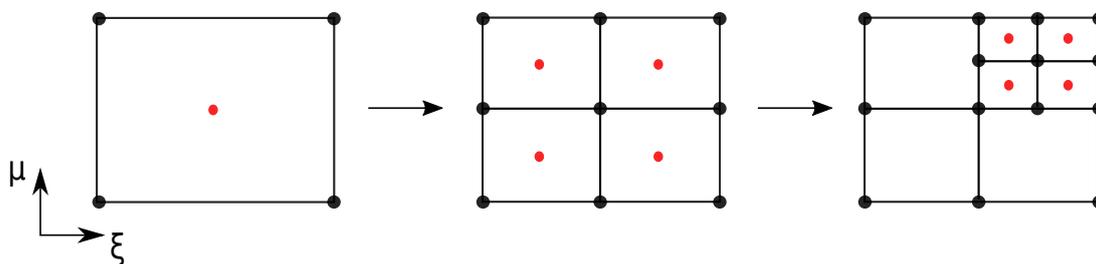


FIGURE 3.2 – Raffinements successifs locaux dans un espace de paramètres 2D (Noire : snapshots, Rouge : points d'évaluation)

La réductibilité du problème est étudiée par une analyse SVD. En outre, une comparaison entre la méthode d'interpolation proposée et les méthodes d'interpolation standards est également abordée. Enfin, basés sur le modèle de soudage simplifié, les abaquages numériques sont construits avec l'approche proposée.

#### 3.5.1 Modèle EF du soudage

La plaque soudée avec les conditions prescrites aux limites est illustrée dans la FIGURE 3.3. La source de chaleur se déplace le long de la ligne de symétrie. Les propriétés du matériau utilisé ainsi que les paramètres du chargement sont donnés dans le Tableau 3.1. Toutes les propriétés du matériau sont supposées indépendantes de la température.

Sachant que le problème (géométrie, matériaux, chargements, conditions aux limites) est symétrique du plan  $x$ - $z$ , seule la moitié du problème réel est modélisée (voir la FIGURE 3.4(a)). Les caractéristiques de maillage sont présentées dans le Tableau 3.2.

Dans la base mobile, le volume de contrôle est défini comme un domaine de 0,25 m de long (voir FIGURE 3.4(b)), dans lequel le matériau coule avec la même vitesse constante que le chargement dans la direction  $X$ . Le laser peut donc être considéré comme un chargement fixe dans le volume de contrôle et se trouve à 0,09 m de la surface d'entrée. Cette surface d'entrée est prescrite avec la température initiale  $\theta_0 = 0$ , tandis que la surface de sortie est prescrite avec un flux de chaleur nul. La relation entre la position initiale d'un point matériel et sa position actuelle peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{v}t \quad \text{avec } \mathbf{v} = V\mathbf{e}_x \quad (3.16)$$

#### 3.5.2 Réductibilité du problème

L'étude de la réductibilité du problème est effectuée pour les composantes du vecteur d'état  $\mathbb{X}$  défini dans le chapitre 1 (équation (1.26)) avec une analyse SVD. Pour comparaison, la solution thermique (c'est-à-dire  $\theta$  ou  $\tilde{\theta}$ ) est résolue dans les bases fixes et mobiles. Dans la suite, les définitions suivantes sont utilisées :

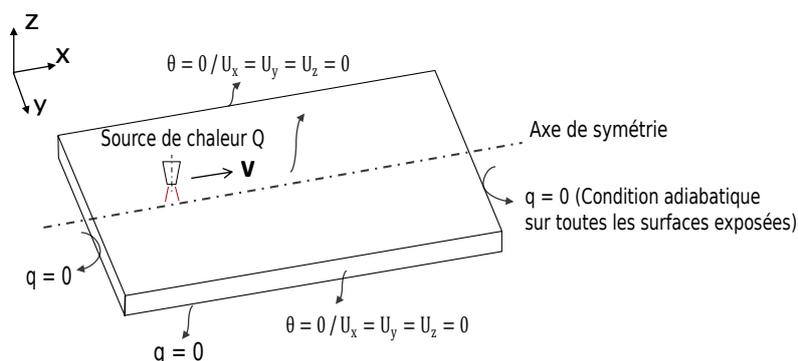


FIGURE 3.3 – Plaque soudée : géométrie et conditions aux limites

Notation	Nom	Valeur
$C_p$	Capacité thermique	$432 \text{ J.kg}^{-1} . \text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$46 \text{ W.m}^{-1} . \text{K}^{-1}$
$\alpha$	Dilatation thermique	$1.2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
$E$	Module d'Young	$210 \times 10^9 \text{ Pa}$
$\nu$	Coefficient de Poisson	0.3
$\sigma_y$	Limite élastique initiale	$300 \times 10^6 \text{ Pa}$
$H$	Paramètre d'écroutissage isotrope linéaire	$21 \times 10^9 \text{ Pa}$
$Q$	Source de chaleur	$8 \times 10^6 \text{ W.m}^{-2}$
$V$	Vitesse de source	$0.001 \text{ m.s}^{-1}$

TABLE 3.1 – Propriétés du matériau et du chargement

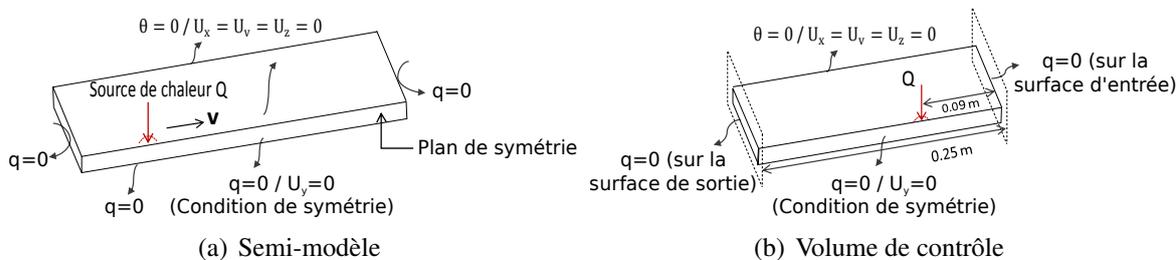


FIGURE 3.4 – Définition du problème avec les conditions aux limites

$L_x(\text{m})$	$L_y(\text{m})$	$L_z(\text{m})$	E.T.	E.N.	N.N.	G.N.
0.3	0.1	0.02	CUB8 (P1)	7200	9317	8

Remarque. “E.T.” : Type d’Eléments, “E.N.” Nombre d’Eléments , “N.N.” : Nombre des Nodes, “G.N.” : Nombre de point de Gauss par élément.

TABLE 3.2 – Paramètres de géométrie du modèle EF

**Définition 3.2** Erreur relative SVD

Selon le théorème d'Eckart-Young [ECK 36], une erreur relative entre la matrice de snapshots  $\mathbf{U}$  et la troncature de SVD  $\hat{\mathbf{U}}$  contenant  $k$  modes est donnée par :

$$\text{err}(\mathbf{U}) = \frac{\|\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}\|_F}{\|\mathbf{U}\|_F} = \frac{\|\mathbf{U} - \Pi_{\Phi_K, \Phi_K} \mathbf{U}\|_F}{\|\mathbf{U}\|_F} = \frac{\sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}} \quad (3.17)$$

**Définition 3.3** Estimateur d'erreur énergétique

Un estimateur d'énergie spatio-temporel global  $\mathcal{E}_k$  peut être défini pour un vecteur d'état  $\mathbb{X}$  (ou un champ de ce vecteur d'état) par une intégration sur l'intervalle du temps d'une norme spatiale de  $\mathbb{X}$ , par exemple :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_k(\hat{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \int_0^T \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \\ \mathcal{E}_k(\hat{\mathbf{U}}) = \frac{E_k}{E_{tot}} = 1 - \text{err}^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

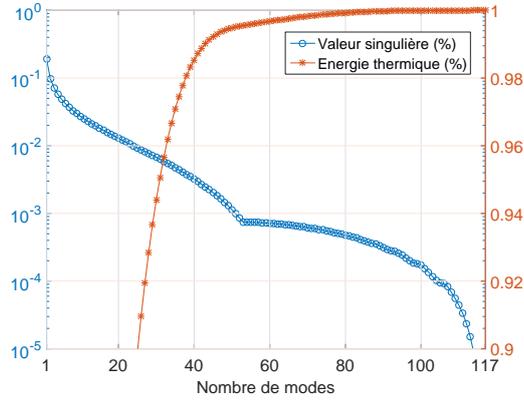
où  $\hat{\mathbf{U}}$  désigne une approximation de faible rang pour le champ de déplacement  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $E_k$  définit une énergie cumulée associée avec des modes  $k$  et  $\mathcal{E}$  désigne un indicateur d'énergie par rapport à l'énergie totale désignée par  $E_{tot}$ , qui est égal à 1 lorsque  $k = r = \min(n, m)$ .

**Définition 3.4** Condition de réductibilité

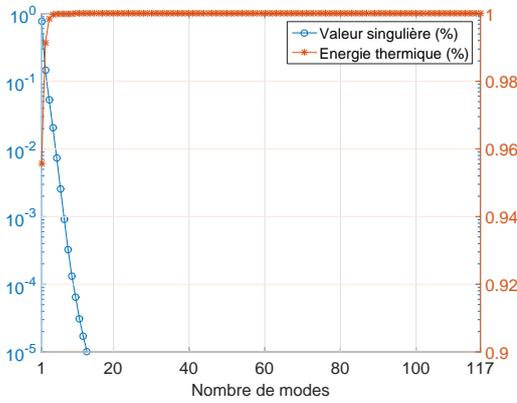
Dans cette analyse, on suppose qu'un champ est réductible si le nombre de modes nécessaires pour sa  $k$ -compressibilité est inférieur à 20% du nombre total de modes  $r$ , c'est-à-dire  $\frac{k}{r} < 20\%$ .

De même, un indicateur d'erreur d'énergie peut être défini pour le champ thermique. Comme indiqué dans la FIGURE 3.5, pour les solutions d'état transitoires, plus de 50 modes sont nécessaires pour satisfaire un ratio d'énergie de 99,99% correspondant à une erreur relative de 1% dans la base fixe, alors que seulement 3 modes sont nécessaires pour capturer la même énergie dans la base mobile, cette quantité peut être réduite de nouveau à 1 avec une hypothèse de l'état stationnaire dans la base mobile. Les modes spatiaux sont illustrés dans la FIGURE 3.6. La réductibilité de ce problème thermique est significativement améliorée dans le base mobile car le champ thermique est compressible alors qu'il n'est pas compressible dans la base fixe : on passe d'une "50-compressibilité" dans la base fixe à une "3-compressibilité" dans la base mobile. La FIGURE 3.7 illustre l'application de l'analyse SVD au problème mécanique résolu dans la base fixe. Une énergie de troncature de 99,99% nécessite moins de 30 modes pour chacune de ces variables d'état mécanique, ce qui rend la condition de réductibilité satisfaite.

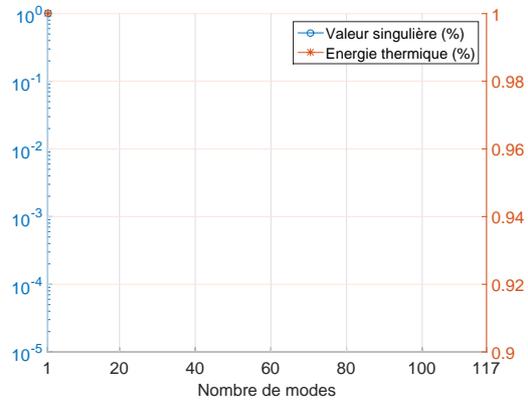
Le chargement mobile et les flux de chaleur qui s'écoulent induisent la non-réductibilité du problème thermique dans la base fixe. Alors que la résolution dans la base



(a) Solution transitoire dans la base fixe



(b) Solution transitoire dans la base mobile



(c) Solution stationnaire dans la base mobile

 FIGURE 3.5 – Contribution de modes pour  $\theta$  (haut) et  $\tilde{\theta}$  (bas)

mobile, qui permet de fixer la charge en espace dans la configuration de référence, conduit à un modèle hyper-réductible. De plus, un seul mode avec l'hypothèse de l'état stationnaire est suffisant dans notre cas. Contrairement au problème thermique, le problème mécanique est réductible dans la base fixe. En effet, le champ mécanique ne diffuse pas et se localise dans le trajectoire de la torche de laser, alors que ce n'est pas le cas pour le champ de température qui diffuse dans le temps.

Ainsi, afin de garantir l'optimalité des BRs dans la construction d'abaque numérique de ce modèle de soudage, le problème thermique est résolu de manière indépendante avec une hypothèse de l'état stationnaire dans la base mobile. Le problème mécanique est résolu dans la base fixe. Enfin, le vecteur d'état  $\mathbb{X}$  est choisi comme suivant :

$$\mathbb{X} = \{\tilde{\theta}, \mathbf{U}, \varepsilon_p, \boldsymbol{\sigma}, p\}^T \quad (3.19)$$

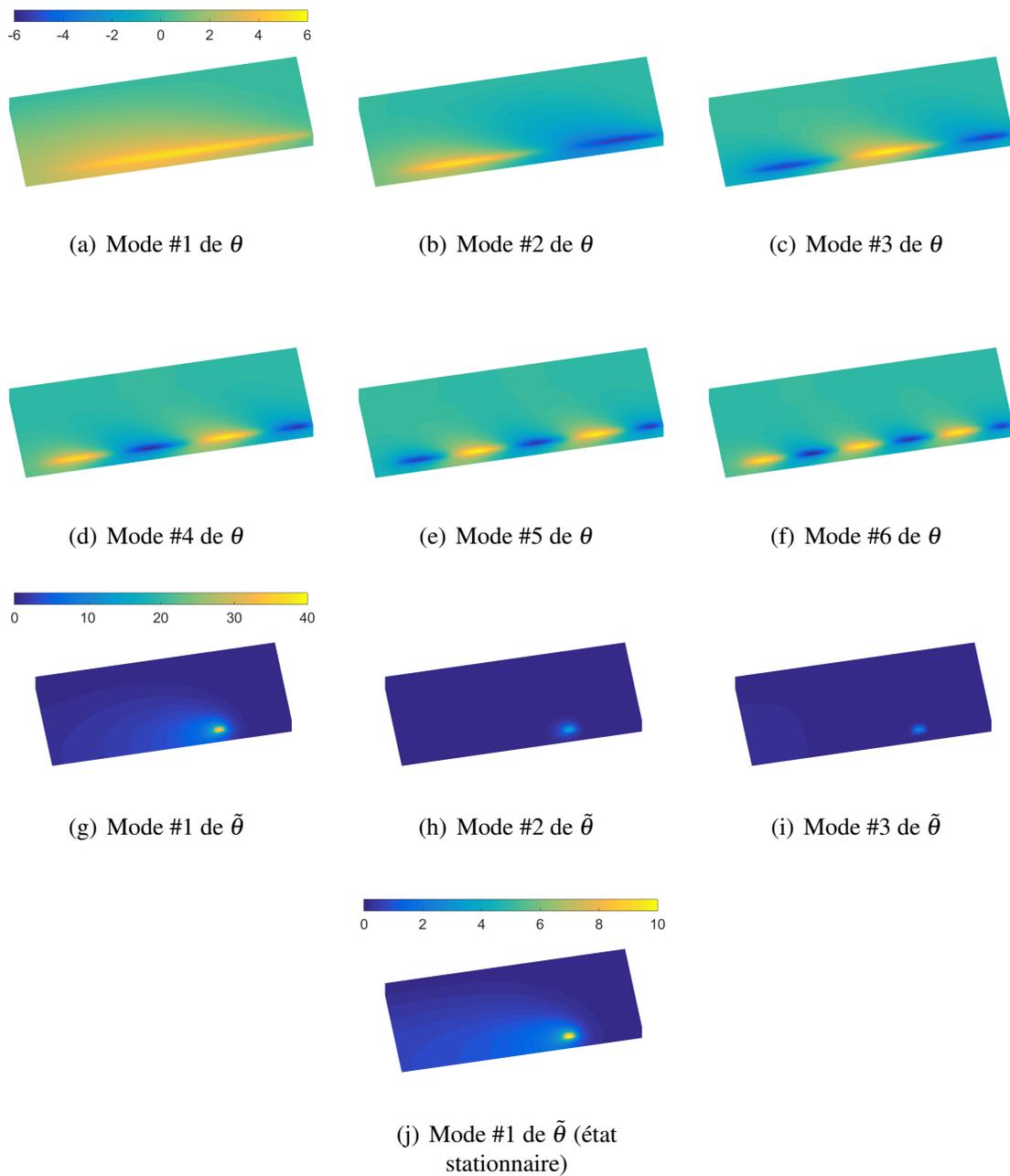


FIGURE 3.6 – Modes spatiaux  $\sqrt{\sigma_i}\Phi^{(i)}$  de  $\theta$  et  $\tilde{\theta}$ . (a)-(f) : calcul transitoire dans la base fixe, (g)-(i) calcul transitoire dans la base mobile, (j) calcul stationnaire dans la base mobile

### 3.5.3 Interpolation Grassmannienne vs interpolation standards

Afin de montrer l'efficacité de la méthode d'interpolation proposée, deux exemples de comparaison sont illustrés dans cette section. Dans le premier exemple, la comparai-

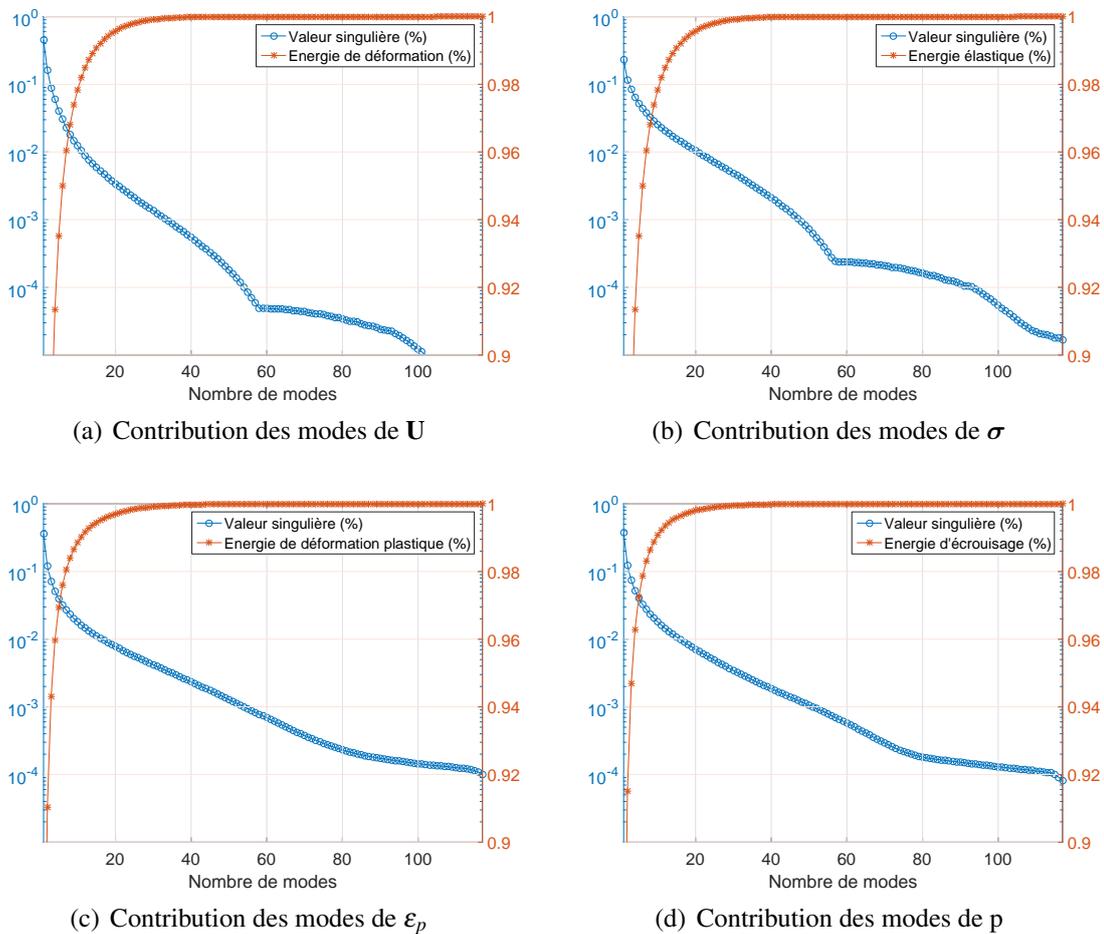


FIGURE 3.7 – Contribution de modes pour les variables mécaniques

son est effectuée entre une méthode d'interpolation traditionnelle et la méthode proposée pour évaluer leur efficacité d'interpoler les BRs séparées. Avec deux snapshots pris de manière appropriée dans un espace de paramètre 1D, les champs de déformations plastiques cumulées résultants (recombinés avec les BRs interpolées) sont illustrés dans la FIGURE 3.8. Comparée avec celle obtenue avec des calculs EF complets, l'approche proposée peut donner une bonne prédiction (avec une erreur de norme-2 standard inférieure à 1%). Cependant, l'interpolation Lagrange n'arrive pas à interpoler les BRs pour les nouvelles valeurs de paramètres, la solution résultante montre une erreur globale d'environ 17%. En effet, les BRs interpolées avec les méthodes d'interpolation traditionnelles ont perdu l'orthogonalité (qui doit être garantie pour les bases POD), alors que cette propriété peut être conservée lors de l'utilisation de l'interpolation proposée basée sur la variété Grassmannienne.

Le deuxième exemple consiste à comparer l'interpolation Grassmannienne avec une méthode traditionnelle qui interpole directement des solutions issues de calculs EF

### 3. Abaquages numériques basés sur la méthode POD

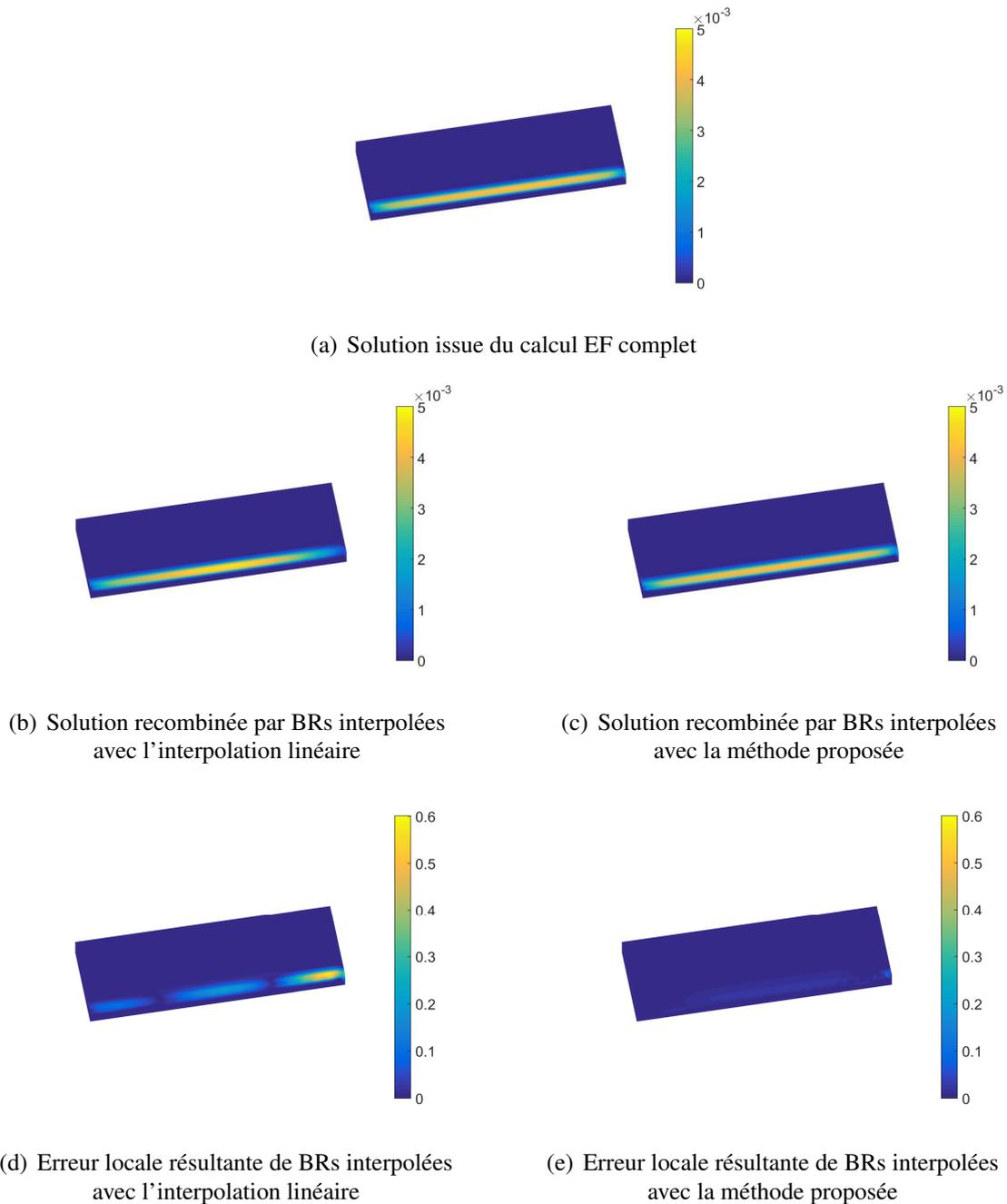


FIGURE 3.8 – Comparaison des champs de déformation plastique cumulée (solution de référence(a), interpolation linéaire (b et d) et interpolation Grassmannienne (c et e) )

(interpolation directe des snapshots). Étant donné deux snapshots calculés pour deux valeurs d'extrémité dans l'espace de paramètre de la capacité thermique  $\mu : C_p \in [432\ 900]$  ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ ) (voir la FIGURE 3.9), les variables d'état sont ensuite interpolées pour les 7 valeurs de paramètres intermédiaires, en utilisant deux méthodes différentes :

Interpolation linéaire locale et la méthode proposée. La FIGURE 3.10 représente l'erreur de norme-2 standard aux points d'évaluation pour les variables thermiques et mécaniques interpolées avec les deux méthodes. Il est montré que la méthode proposée améliore plus ou moins la qualité des solutions interpolées à la fois dans les cas thermiques et mécaniques par rapport à l'interpolation linéaire. Cela peut s'expliquer par le fait que la méthode proposée tient en compte de l'évolution des solutions à différents instants (l'aspect temporel), ce qui conduit probablement à une amélioration de la précision d'interpolation. En outre, l'approche proposée semble plus adaptée aux cas non-linéaires. Comme indiqué dans la FIGURE 3.10, pour le problème thermique, la méthode proposée améliore légèrement la précision, tandis qu'une amélioration remarquable peut être observée dans les champs mécaniques.

Cela confirme l'efficacité de la méthode proposée par rapport aux méthodes d'interpolation traditionnelles, lorsque seuls deux snapshots sont donnés. La comparaison pour les cas d'ordre supérieur avec plus de points de snapshots dans l'espace des paramètres n'est pas prise en compte ici, car seule la stratégie d'interpolation locale est considérée dans notre cas (voir l'Algorithme 5).

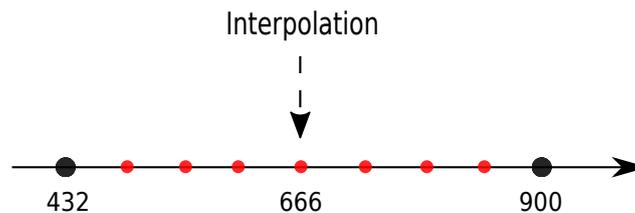


FIGURE 3.9 – Snapshots et points d'évaluation dans l'espace de paramètre de  $C_p$

### 3.5.4 Abaques numériques quasi-optimaux à précision contrôlée

#### 3.5.4.1 Abaque numérique $4D \otimes 1D$ thermique

Une application de la méthode proposée pour construire les abaques numériques est présentée ici. La notation  $4D \otimes 1D$  signifie que les solutions fournies par l'abaque sont  $4D$  (dans l'espace physique :  $\Omega \times [0 t_m]$ ) et l'espace des paramètres concernés est  $1D$ . Des études paramétriques sont effectuées par rapport à la capacité thermique  $C_p (\text{J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \in D = [432 900]$ . La quantité d'intérêt est choisie comme les contraintes résiduelles induit par le soudage, représenté ici par les contraintes de Von Mises. Afin de satisfaire un niveau de précision donnée de 1%, le raffinement "multi-grilles" local dans l'espace des paramètres est illustré dans FIGURE 3.11. Le Tableau 3.3 rapporte les erreurs correspondantes aux points d'évaluation pour chaque niveau de raffinement. Comme on peut le voir, les points d'échantillonnage fins qui devraient être pris en compte pour une précision de 1% sont  $\{432, 490.5, 549, 666, 783, 900\}$ .

La condition d'erreur prescrite est satisfaite après deux raffinements successifs. L'abaque numérique avec une erreur de 1% vis-à-vis de la variation de paramètre ( $C_p$ )

### 3. Abaquages numériques basés sur la méthode POD

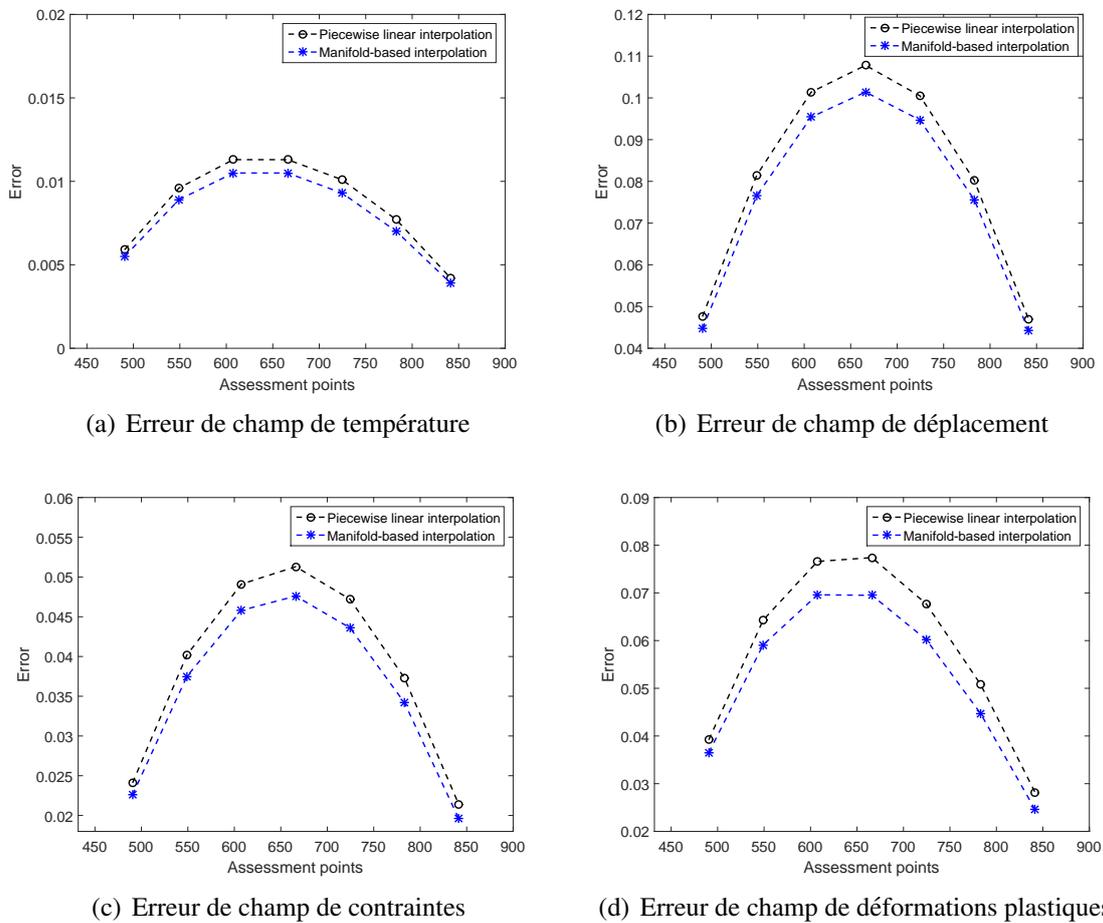


FIGURE 3.10 – Erreur d’interpolation pour les points d’évaluation dans l’espace de paramètre (interpolation linéaire vs interpolation Grassmannienne proposée)

Niveau de grille	Coins de la grille	Point d’évaluation	Err( $\sigma_{VM}$ )
1	432, 900	666	4.89%
2	432, 666	549	1.5%
2	666, 900	783	1.21%
3	432, 549	490.5	1.19%
3	549, 666	607.5	0.97%
3	666, 783	724.5	0.93%
3	783, 900	841.5	0.98%
4	432, 490.5	461.25	0.80%
4	490.5, 549	519.75	0.75%

TABLE 3.3 – Illustration de l’erreur de raffinement

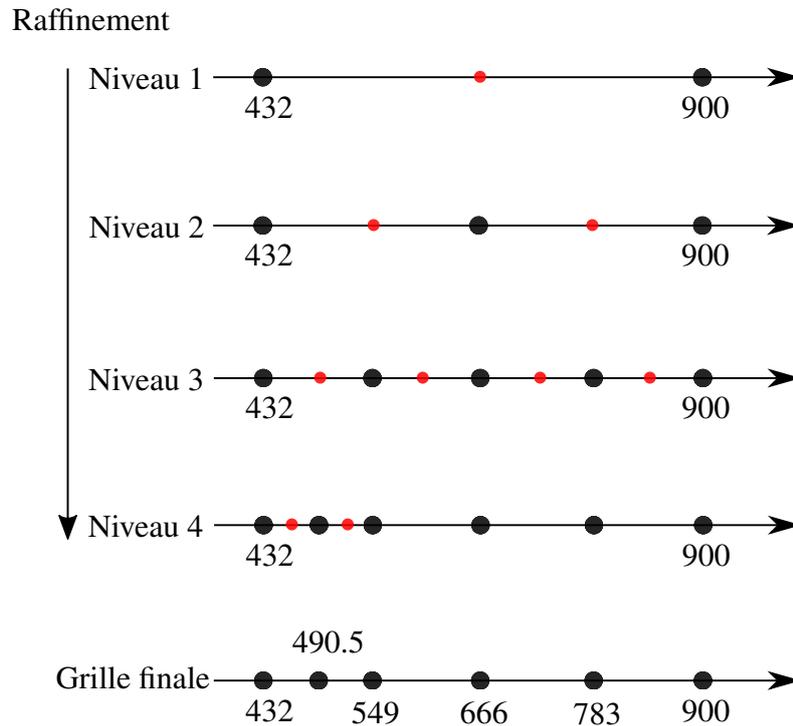


FIGURE 3.11 – Raffinements localisés dans l'espace de paramètre 1D : la grille finale est  $\{432, 490.5, 549, 666, 783, 900\}$

pour les contraintes résiduelles est ainsi développé. La solution espace-temps complète peut ensuite être obtenue pour toute valeur dans l'intervalle de paramètres. Une analyse similaire peut être effectuée pour les autres variables du vecteur d'état  $\mathbb{X}$ .

Un démonstrateur a été programmé pour la visualisation de l'abaque (voir la FIGURE 3.12). On rappelle qu'il n'y a pas de calcul EF dans la phase *online*. L'interpolation d'une nouvelle solution espace-temps avec l'approche proposée se fait en temps réel. Le temps CPU pour les champs thermo-mécaniques d'un nouveau paramètre est inférieur à 0.1s, alors qu'il faut environ 7 heures pour effectuer un calcul EF complet (voir le Tableau 3.4). Bien que la construction *offline* des snapshots puisse être coûteuse, l'utilisation de l'abaque réduit beaucoup plus de temps dans la phase *online* pour calculer des solutions paramétriques avec l'objectif d'optimisation ou d'identification. En outre, La mémoire nécessaire pour effectuer l'interpolation *online* est inférieure à 500 Mbytes dans cet exemple. Cela signifie que l'abaque construit peut être utilisé dans une tablette simple ou même un smart-phone.

Phase	Approche proposée (6 snapshots, Err < 1%)	Calcul EF
Offline	$\approx 42h$	-
Online	$< 0.2s$	$\approx 7h$

TABLE 3.4 – Temps CPU pour une nouvelle solution

### 3. Abaquages numériques basés sur la méthode POD

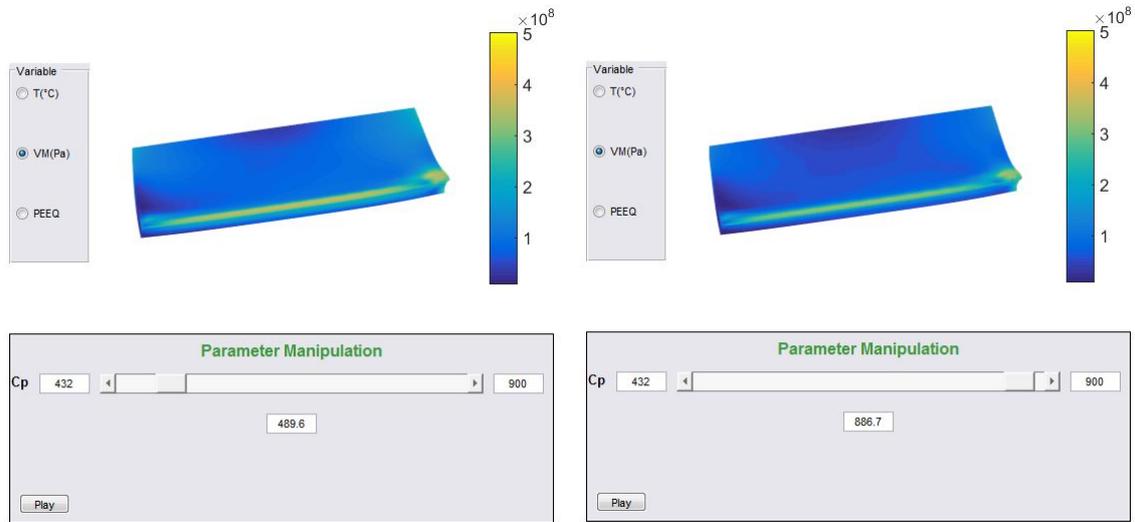


FIGURE 3.12 – Demonstrateur de l’abaque espace-temps développé dans matlab

#### 3.5.4.2 Abaque numérique $4D \otimes 2D$ thermo-mécanique

Soit  $D = D_C \times D_\sigma$  un espace de paramètre 2D avec  $C_p (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \in D_C = [432 \ 900]$  et  $\sigma_y (\text{MPa}) \in D_\sigma = [300 \ 500]$ . Cette fois-ci, les études paramétriques sont considérées dans le domaine 2D :  $D$ . Les snapshots sélectionnés par l’approche proposée sont illustrés dans la FIGURE 3.13 pour une erreur garantie inférieure à 7 % (voir le Tableau 3.5). Un abaque numérique  $4D \otimes 2D$  (FIGURE 3.14) est ainsi construit. Seuls deux raffinements sont nécessaires pour satisfaire la condition d’erreur. Une mémoire limitée est nécessaire pour stocker les snapshots BRs. Les solutions spatio-temporelles paramétriques peuvent être fournies par l’interpolation 2D en temps réel (voir le Tableau 3.6).

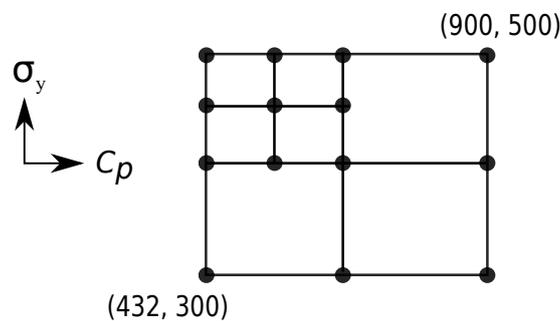


FIGURE 3.13 – Snapshots (points noirs) choisis dans l’espace de paramètres 2D

Points d'évaluation	Err( $\sigma_{VM}$ )	Err(p)
(549, 350)	4.51%	5.68%
(783, 350)	4.45%	5.09%
(783, 450)	5.62%	6.49%
(490.5, 425)	2.57%	1.92%
(607.5, 425)	2.52%	2.02%
(607.5, 475)	2.65%	2.24%
(490.5, 475)	2.67%	2.71%

TABLE 3.5 – Erreur de BRs de contraintes von Mises et déformation plastique dans l'espace de paramètres 2D

Phase	Temps CPU (14 snapshots, erreur < 7%)	Mémoire
Calcul EF complet	≈ 98h	10 Gbytes
Stockage de BRs	-	220 Mbytes
Online	< 0.5s	< 500 Mbytes

TABLE 3.6 – Temps CPU et mémoire de stockage (l'abaque espace-temps 2D)

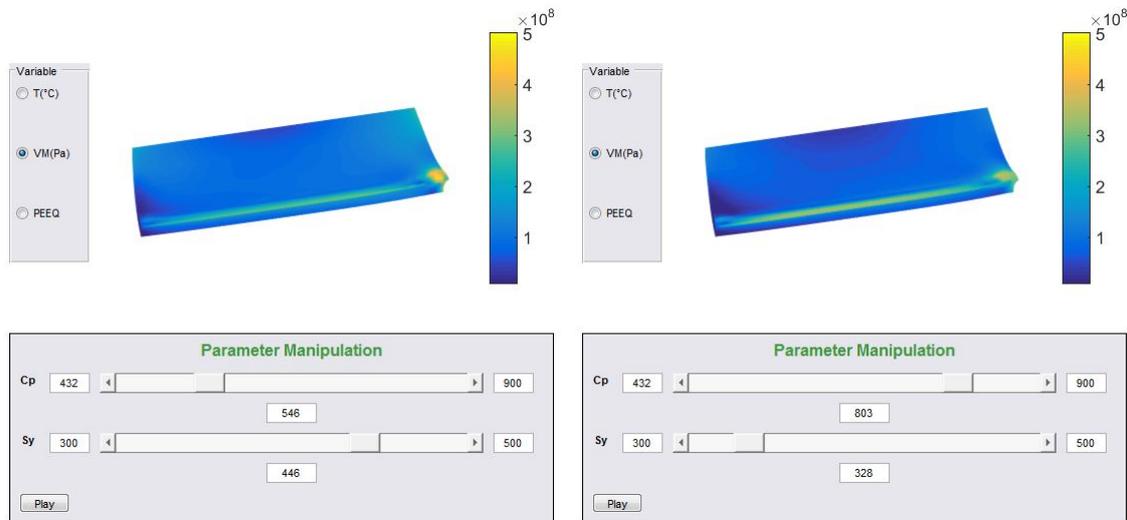


FIGURE 3.14 – Abaque numérique espace-temps 2D

### 3.5.4.3 Abaque numérique pour le contrôle en temps réel du procédé de soudage

Considérons un problème de soudage avec une charge mobile à vitesse constante sur la pièce de travail avec un changement possible de puissance d'entrée au mi-temps  $\frac{t_f}{2}$  (voir FIGURE 3.15). Afin de contrôler la qualité de la pièce soudée et de prendre des décisions en temps réel pour adapter  $Q_1$  et  $Q_2$ , des simulations en temps réel sont nécessaires.

En supposant que  $Q_i|_{i=1,2} \in [8 \ 12] \times 10^6 \text{ W.m}^{-2}$ , l'abaque numérique dédié à la si-

mulation en temps réel est ensuite construit en utilisant l'approche proposée dans l'espace des paramètres 2D pour une erreur inférieure à 5%. Des solutions en temps réel sont obtenues pour toutes les valeurs de puissance d'entrée dans l'espace des paramètres. Comme représenté dans la FIGURE 3.16, on peut modifier la puissance d'entrée en fonction de l'évolution des contraintes en temps réel, ici un exemple est illustré pour  $Q_1 = 8.5, Q_2 = 11.5 (\times 10^6 \text{ W.m}^{-2})$ . L'utilisation *online* de l'abaque peut ainsi aider les ingénieurs à prendre des décisions en temps réel pour la puissance d'entrée du soudage afin de contrôler la qualité des pièces de travail.

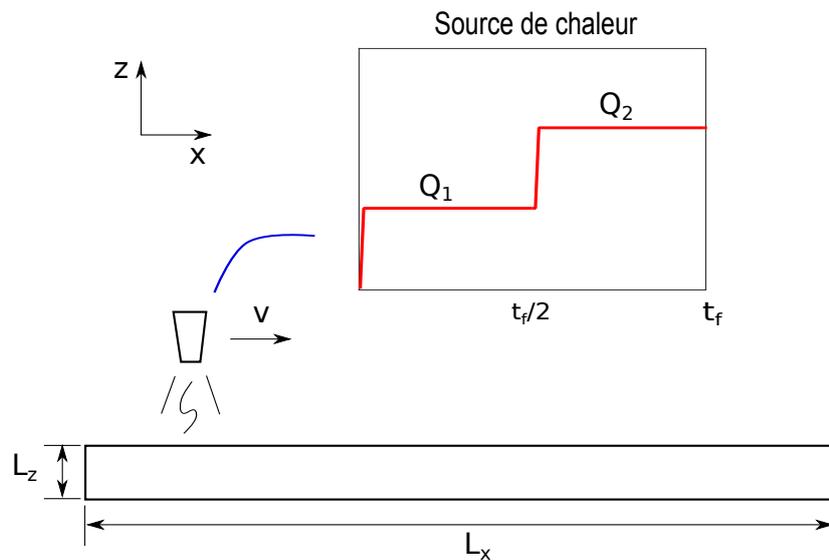


FIGURE 3.15 – Vue de face du soudage 3D avec variation de puissance de chargement

## 3.6 Conclusion

L'abaque numérique quasi-optimal en temps réel dédié aux études paramétriques du processus de soudage a été construit avec une stratégie non-intrusive.

La réductibilité du modèle thermo-élasto-plastique transitoire complet est étudiée par une analyse SVD. Il est démontré que la réductibilité du problème thermique transitoire est significativement améliorée lorsque les BRs sont pré-calculées dans la base mobile.

L'approche proposée est basée sur une interpolation des BRs espace-temps dans les variétés Grassmanniennes. Cela garantit un haut niveau d'efficacité et de précision pour les simulations en temps réel et réduit considérablement le coût élevé des calculs pour les études paramétriques. On a ainsi montré le rôle clé des fonctions du temps pour obtenir une phase *online* en temps réel.

Une méthode d'échantillonnage "multi-grilles" locale est présentée. Cela conduit à une sélection appropriée des snapshots dans l'espace des paramètres qui garantissent la

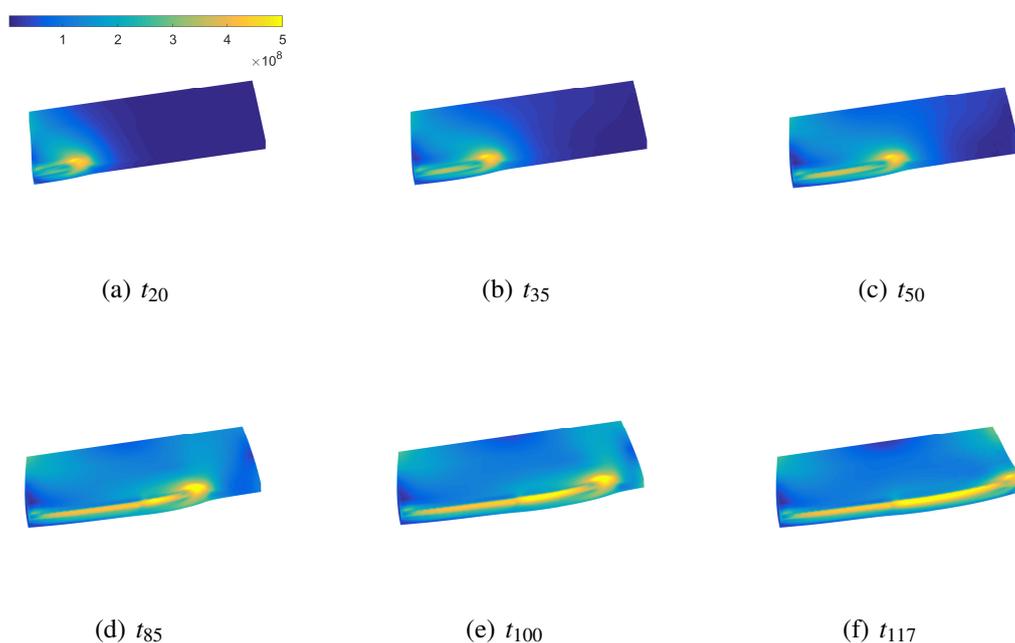


FIGURE 3.16 – Evolution des contraintes lors de la soudure pour  $Q_1 = 8.5$ ,  $Q_2 = 11.5(\times 10^6 \text{ W.m}^{-2})$

précision de l'abaque numérique. Ainsi, la génération exhaustive des snapshots dans l'espace des paramètres est évitée.

L'approche proposée est appliquée à un modèle de soudage thermo-mécanique transitoire non-linéaire 3D avec une source de chaleur mobile. L'abaque spatio-temporel est obtenu pour une quantité d'intérêt donnée (contraintes résiduelles). Des résultats pertinents ont été obtenus pour le stockage des BRs et les calculs *online* (en temps réel). En effet, le temps CPU *online* est inférieur à  $0.5s$  et une mémoire de stockage limitée est nécessaire avec une erreur acceptable garantie. Cet abaque numérique peut être exploité pour l'identification rapide des paramètres du problème. En outre, le contrôle du procédé en temps réel peut également être attendu en considérant les paramètres du chargement.

L'extension à l'analyse multi-paramétrique (haute dimension) est un challenge. Dans ce cas, la difficulté principale sera le développement d'une stratégie d'échantillonnage efficace de l'espace de paramètres pour les problèmes de grande dimension. Pour traiter les problèmes multi-paramétriques, une approche de type décomposition tensorielle est utilisée dans le chapitre suivant.

### 3. Abaques numériques basés sur la méthode POD

---

# Chapitre 4

## Abaques numériques multi-paramétriques basés sur la HOPGD

*Ce chapitre présente une approche de type décomposition tensorielle permettant de construire a posteriori les BRs de type PGD (séparation des variables) de manière non-intrusive. La difficulté associée à la grande dimension des espaces paramétriques est abordée avec une stratégie de type 'sparse grids' proposée pour échantillonner l'espace des paramètres multidimensionnel. Les problèmes multiparamétriques de dimension allant jusqu'à 10 ont pu ainsi être traités.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthodes de décomposition tensorielle</b>	<b>65</b>
4.2.1	CANDECOMP/PARAFAC et HOSVD	65
4.2.2	HOPGD	66
4.2.3	Accélération de convergence	68
<b>4.3</b>	<b>Revue de la méthode 'sparse grids'</b>	<b>72</b>
<b>4.4</b>	<b>Nouvelle stratégie de sélection de snapshots</b>	<b>76</b>
4.4.1	Indicateur d'erreur	76
4.4.2	'Sparse grids' adaptative dans l'espace de paramètres	77
4.4.3	Tests numériques	79
<b>4.5</b>	<b>Abaques numériques multi-paramétriques à précision contrôlée</b>	<b>81</b>
4.5.1	Abaque numérique 7D avec paramètres géométriques	82
4.5.2	Abaque numérique 10D	88
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

## 4.1 Introduction

L'approche proposée dans le chapitre précédent se limite au cas de 2 ou 3 paramètres. Afin de simplifier l'interpolation dans l'espace de dimension élevée, nous proposons d'utiliser les méthodes de type décomposition tensorielle. Sachant que les solutions paramétriques peuvent se ranger dans un tenseur d'ordre élevé (ou  $N$ -way arrays avec  $N \geq 3$ ), l'idée est d'approximer le tenseur d'ordre élevé par les tenseurs de faible rang en profitant de l'avantage de séparation de variables, similaire à la méthode PGD mais cette fois-ci d'une manière *a posteriori*.

De nombreuses méthodes de décomposition existent, ici on peut citer deux méthodes particulières qui peuvent être considérées comme les extensions d'ordre élevé de la méthode SVD : une appelée décomposition canonique (CANDECOMP) ou parallel factors (PARAFAC) [CAR 70, HAR 70], l'autre higher-order singular value decomposition (HOSVD) [TUC 66]. L'idée de décomposition tensorielle provient de [HIT 28, HIT 28] et a reçu un gain d'intérêt suite aux travaux de Tucker [TUC 63, TUC 64, TUC 66] et de Carroll et Chang [CAR 70] et de Harshman [HAR 70] en psychométrie. Depuis une trentaine d'année, l'application de ces méthodes a été étendue à divers domaines [KOL 09] : traitement de signal, analyse numérique, exploitation de données, etc. Cependant, comme montré dans de nombreux cas, les problèmes liés à l'optimalité, unicité, détermination de l'ordre approximé, subsistent toujours dans ces méthodes et les algorithmes de décomposition présentent parfois la non-convergence [DES 08, DUN 11].

Une alternative qui semble plus robuste est la méthode higher-order PGD (HOPGD) proposée par [MOD 15], qui peut être considérée comme une définition *a posteriori* de la PGD. De façon similaire à la PGD, la HOPGD est construite progressivement par un algorithme glouton (appelé point fixe alterné dans la suite). La convergence de cette stratégie a été démontrée dans de nombreux cas [LEB 09, AMM 10, CAN 11, CAN 13, FAL 11, FAL 12]. Mais l'optimalité des modes ne peut pas être garantie dans ce type de procédure.

Dans cette thèse, on utilise la méthode HOPGD pour développer des abaques numériques de façon *a posteriori*. Les méthodes d'accélération de convergence pour la construction de HOPGD sont proposées en vue de l'optimalité de l'abaque [LU 18, LU 17a]. De plus, afin de pouvoir limiter la croissance du nombre de snapshots dans l'espace de dimension élevée, nous proposons une nouvelle stratégie d'échantillonnage de type "sparse grids" [GRI, BUN 04]. A cet égard, la HOPGD a été adaptée pour les "sparse tensors" (tenseurs avec les éléments incomplets). Il a été montré que la discrétisation sur les "sparse grids" ne nécessite que  $\mathcal{O}(N(\log N)^{d-1})$  points, où  $d$  est la dimension de l'espace concerné et  $N$  désigne les degrés de liberté dans chaque dimension, à savoir qu'une réduction significative des points d'échantillonnage est obtenue par rapport à une grille uniforme complète contenant  $\mathcal{O}(N^d)$  points.

Dans ce chapitre, l'efficacité de la stratégie d'échantillonnage est testée avec les exemples illustrés. Les abaques multi-paramétriques de dimension allant jusqu'à 10 sont développés pour un cas de soudage. Une technique pour traiter les paramètres géométriques est également détaillée.

## 4.2 Méthodes de décomposition tensorielle

Dans cette section, on présente d'abord les deux méthodes connues de décomposition tensorielle : CANDECOMP/PARAFAC (CP) et HOSVD, en détaillant leurs difficultés qui font l'objet de grandes publications dans la littérature. Et puis la méthode HOPGD et les méthodes d'accélération de convergence implémentables sont présentées. Une comparaison des différentes méthodes d'accélération a été faite avec quelques exemples.

### 4.2.1 CANDECOMP/PARAFAC et HOSVD

**CANDECOMP/PARAFAC** : La décomposition CP consiste à factoriser un tenseur à une somme de produits tensoriels des tenseurs d'ordre 1. Pour un tenseur d'ordre  $d$  :  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d}$ , la décomposition canonique s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} \approx \hat{\mathbf{U}} = \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_1^m \otimes \mathbf{F}_2^m \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_d^m \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{F}_i^m$  sont les tenseurs d'ordre 1,  $n$  est l'ordre d'approximation qui est fixé dans la construction de décomposition et  $\otimes$  désigne l'opérateur de produit tensoriel. La FIGURE 4.1 illustre une décomposition CP d'un tenseur d'ordre 3.

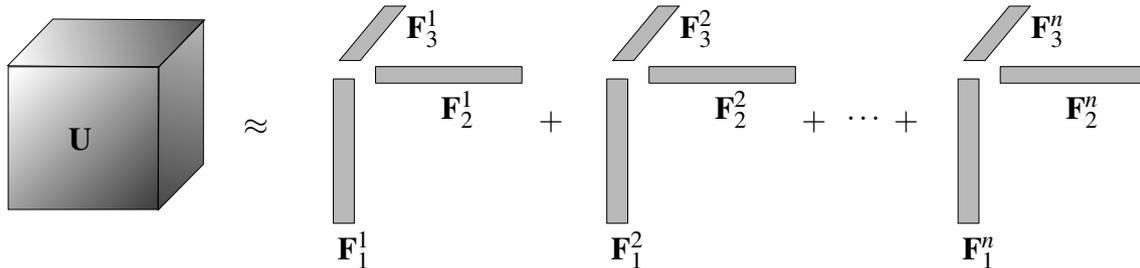


FIGURE 4.1 – CP décomposition pour un tenseur d'ordre 3

Pour calculer cette décomposition, différents algorithmes existent [ACA 11, STE 12, STE 13]. Celui le plus connu est la méthode *alternating least square* (ALS) qui est très similaire à l'algorithme décrit dans la section 2.3.3 pour la construction directe de PGD. Supposant l'ordre d'approximation  $n$  fixé, l'ALS consiste à calculer, en alternant l'indice  $i$ , les fonction  $\mathbf{F}_i$  en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$[\mathbf{F}_i^1, \dots, \mathbf{F}_i^n] = \arg \min_{[\mathbf{F}_i^{1*}, \dots, \mathbf{F}_i^{n*}] \in \mathbb{R}^{I_i \times n}} \|\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{F}_i^{1*}, \dots, \mathbf{F}_i^{n*})\| \quad i = 1, \dots, d \quad (4.2)$$

La solution est donnée par répétition de la procédure jusqu'à la convergence. Notons que cette procédure ne peut pas garantir une convergence à la minimisation globale et les solutions finales dépendent fortement de l'initialisation des solutions, car dans le cas général  $n \geq 3$ , le problème de minimisation n'a pas nécessairement de solution [DES 08].

Différentes techniques ont été proposées pour améliorer l'ALS [RAJ 08, NIO 08]. De plus, le choix du nombre des modes approprié  $n$  reste une question ouverte. La façon la plus simple est de calculer la décomposition avec différents nombres de modes  $n = 1, 2, 3, \dots$  jusqu'à ce que la meilleure approximation soit obtenue. Mais cette procédure est coûteuse et ne marche pas pour tous les problèmes [MIT 94, RAY 97], par exemple dans le cas où les données sont perturbées par le bruit.

**HOSVD** : La HOSVD est la forme d'ordre élevé de SVD qui cherche une décomposition de type Tucker :

$$U_{i_1 i_2 \dots i_d} \approx \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=1}^{n_2} \dots \sum_{m_d=1}^{n_d} \alpha_{m_1 m_2 \dots m_d} F_{1, i_1}^{m_1} F_{2, i_2}^{m_2} \dots F_{d, i_d}^{m_d} \quad (4.3)$$

où  $U_{i_1 i_2 \dots i_d}$  sont les éléments d'un tenseur d'ordre  $d$  :  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d}$ .  $\mathbf{F}_k = [F_{k, i}^{m_k}]_{I_k \times I_{n_k}}$ ,  $\forall k = 1, \dots, d$  sont les bases orthogonales.  $\mathbf{A} = [\alpha_{m_1 m_2 \dots m_d}]_{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d}$  est un tenseur de noyau dont les composants représentent l'interaction entre les différentes bases. Cette décomposition peut se calculer avec la méthode Higher-order Orthogonal Iteration (HOOI) par utilisations de SVD successives [DEL 00]. Mais malheureusement l'unicité de ce type de décomposition n'est pas garantie et un désavantage par rapport à la décomposition CP est qu'il ne produit pas les tenseurs d'ordre 1. La FIGURE 4.2 illustre une décomposition de Tucker d'un tenseur d'ordre 3.

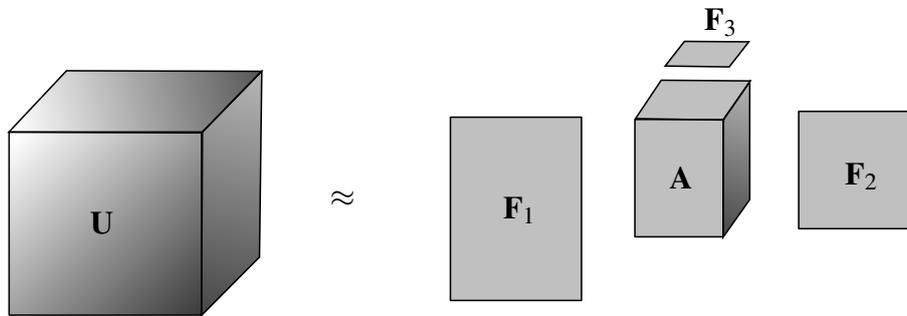


FIGURE 4.2 – HOSVD pour un tenseur d'ordre 3

Les autres méthodes de décomposition tensorielle, et les variantes de CP et HOSVD, ainsi qu'un résumé sur leurs applications peuvent se trouver dans [KOL 09]. En général, les méthodes typiques de décomposition tensorielle sont basées sur des tenseurs complets. L'adaptation aux "sparse tensors" reste nouveau. Dans ce cadre de travail, on peut citer [KOL 06, BAD 07] qui proposent une adaptation de l'algorithme ALS pour les "sparse tensors".

### 4.2.2 HOPGD

Similaire à la HOSVD ou la PARAFAC, la HOPGD est proposée pour obtenir des approximations à variables séparées de fonctions connues. Considérons une fonction de

dimension  $d$  :  $f(\mu_1, \dots, \mu_d) \in L^2(D)$  avec les coordonnées générales  $\mu_1, \dots, \mu_d$ , la HOPGD cherche une projection  $L^2$  de la fonction d'origine sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d) &\approx f^n(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d) = \sum_{m=1}^n F_1^m(\mu_1) F_2^m(\mu_2) \cdots F_d^m(\mu_d) \\ &= f^{n-1} + F_1^n(\mu_1) F_2^n(\mu_2) \cdots F_d^n(\mu_d) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $n$  est l'ordre d'approximation,  $F_i^m|_{i=1,d}$  sont les fonctions inconnues du  $m$ -ème mode.

La projection des moindres carrés peut être formulée comme un problème de minimisation qui s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f^n \in V_n \subset L^2(D) \text{ telle que} \\ J(f^n) = \min_{f^{n*} \in V_n} \left( \frac{1}{2} \|f^{n*} - f\|_{L^2(D)}^2 \right) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

ou la solution équivalente de :

$$(f^n, f^s)_D = (f, f^s)_D \quad \forall f^s \in V_n \quad (4.6)$$

où  $(\bullet, \bullet)_D$  désigne l'intégrale des produits scalaires dans le domaine  $D$ . Grâce à la séparation des variables, le terme gauche de l'équation (4.6) est simplement le produit des intégrales unidimensionnelles :

$$(f^n, f^s)_D = \sum_{m=1}^n \prod_{i=1}^d (F_i^m, F_i^s)_{D_i} \quad (4.7)$$

Par contre, le terme droit nécessite une intégrale standard dans le domaine multidimensionnel  $D$  qui peut être très coûteuse dans un cas de haute-dimension. Dans ce travail, cette intégration complète est évitée en utilisant une stratégie d'échantillonnage efficace et une projection de résidu dans l'espace de paramètres. Ce point sera clarifié dans la suite et Annexe.

Le problème de minimisation peut être résolu par un algorithme de point fixe alterné [MOD 15, LU 18], tout comme les méthodes *a priori* PGD [CHI 11]. A chaque itération  $n$ , le problème local suivant est résolu :

$$\left( \prod_{i=1}^d F_d, \delta f \right)_D = (f - f^{n-1}, \delta f)_D \quad (4.8)$$

avec les fonctions test :  $\delta f = \delta \prod_{i=1}^d F_i = \delta F_1 F_2 \dots F_d + F_1 \delta F_2 \dots F_d + \dots + F_1 F_2 \dots \delta F_d$ .

La stratégie de point fixe alterné est utilisée pour calculer alternativement chaque composante  $F_i$  en supposant que les autres  $F_j|_{j \neq i}$  sont fixées. L'ordre d'approximation  $n$  est déterminé par la précision donnée, ce qui signifie que l'algorithme ne s'arrêtera pas jusqu'à ce que l'indicateur d'erreur atteigne la précision donnée :  $\frac{\|f^n - f\|^2}{\|f\|^2} \leq \epsilon_f$ .

---

**Algorithm 8** Point fixe alterné

---

**Données** Fonction originale :  $f$ , Approximation avec  $n - 1$  modes :  $f^{n-1}$

```

1: while  $\varepsilon_i > \varepsilon_c$  do
2:    $k \leftarrow k + 1$ 
3:   for all  $i \in [1, d]$  do
4:     Supposer toutes les  $F_{j \neq i}^{(k)}$  sont fixées
5:     Calculer  $F_i^{(k)}$  par résoudre le problème linéaire (4.8)
6:   end for
7:   Vérifier l'indicateur de convergence  $\varepsilon_i = \frac{\|F_i^{(k)} - F_i^{(k-1)}\|^2}{\|F_i^{(k-1)}\|^2} \quad \forall i \in [1, d]$ 
8:    $F_i^n \leftarrow F_i^{(k)} |_{i=1, d}$ 
9: end while

```

**Sorties**  $F_i^n |_{i=1, d}$

---

La robustesse et l'efficacité ont été montrées dans les méthodes PGD standards avec ce type d'algorithme [CHI 11]. Pour une matrice multidimensionnelle modérée, la HOPGD peut être obtenue efficacement avec cet algorithme. Plusieurs exemples peuvent être trouvés dans [MOD 15]. Cependant, pour les matrices à haute dimension, cet algorithme, bien connu pour sa vitesse de convergence linéaire, doit être accéléré. Pour cela, une méthode de relaxation dynamique (Aitken delta-squared processes) [LU 18] est appliquée avec succès pour accélérer les séquences de convergence. Dans ce qui suit, une version généralisée de l'accélérateur pour ce type d'algorithme est également proposée.

En outre, nous pouvons prouver que dans le cas de deux paramètres, la HOPGD est équivalente à la bien connue SVD (méthode POD). Pour les cas de multi-paramètres, les fonctions données par HOPGD ne sont plus optimales. Par rapport à la HOSVD, HOPGD a l'avantage d'une généralisation directe pour les problèmes de dimension élevée [MOD 15].

## 4.2.3 Accélération de convergence

### 4.2.3.1 Méthode Aitken $\delta^2$

Considérons une série de  $F^{(k)}$  convergeant vers une limite inconnue  $F$ , l'algorithme point fixe utilisé dans la HOPGD peut être formulé comme suivant :

$$F^{(k+1)} = G(F^{(k)}) \quad (4.9)$$

La méthode de relaxation peut ensuite être appliquée afin d'accélérer la convergence du schéma de résolution. Avec un paramètre de relaxation bien choisi  $w$ , la prédiction de  $\tilde{F}^{(k+1)}$  à l'étape  $k$  est améliorée en utilisant les itérations précédentes sans perturber la stabilité du schéma numérique :

$$\begin{cases} \tilde{F}^{(k+1)} = G(F^{(k)}) \\ F^{(k+1)} = w\tilde{F}^{(k+1)} + (1-w)F^{(k)} \end{cases} \quad (4.10)$$

Une possibilité de calculer  $w$  est donnée par la méthode Delta-2 d'Aitken [IRO 69, KÜT 08], également appelée relaxation dynamique (le coefficient de relaxation  $w$  est réactualisé à chaque itération) :

$$w^k = -w^{k-1} \frac{\delta_k}{\delta_{k+1} - \delta_k} \quad (4.11)$$

où  $\delta_{k+1} = \tilde{F}^{(k+1)} - F^{(k)}$ . Dans le cas de vecteur, l'équation (4.11) devient

$$w^k = -w^{k-1} \frac{\delta_k^T (\delta_{k+1} - \delta_k)}{\|\delta_{k+1} - \delta_k\|^2} \quad (4.12)$$

Le paramètre de relaxation  $w^k$  est déterminé en tenant compte de deux étapes précédentes. Par conséquent, pour les deux premières étapes, il n'y a pas de meilleure estimation pour  $w^k$  sauf 1.

L'application de cet accélérateur à l'Algorithme 8 (point fixe alterné) pour HOPGD est simple. Le paramètre de relaxation devrait être spécifique à chaque fonction  $F_i$  et réactualisé à chaque étape. Dans le cas vectoriel, le paramètre de relaxation est calculé à l'aide de l'équation (4.12) et appliqué pour le vecteur concerné. Cette estimation de paramètre peut être coûteuse, mais l'accélération pour les cas de grande dimension est évidente, comme indiqué ci-après.

#### 4.2.3.2 Une méthode d'extrapolation

Reprenons la série convergente originale  $F^{(k)}$  (4.9), par construction, une série accélérée [RAM 15] peut être définie comme :

$$\tilde{F}^{(k+1)} = G(F^{(k)}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i^k Z_i^{k+1} \quad (4.13)$$

où  $Z_i^{k+1}$  est un vecteur de résidu à définir,  $\lambda_i^k |_{i=1,M}$  sont les paramètres qui minimisent la différence entre deux itérations :

$$\delta \tilde{F}^{(k)} = \tilde{F}^{(k+1)} - \tilde{F}^{(k)} = G(F^{(k)}) - G(F^{(k-1)}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i^k (Z_i^{k+1} - Z_i^k) \quad (4.14)$$

avec  $\tilde{F}^{(k)} = G(F^{(k-1)}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i^k Z_i^k$ . Le choix de  $Z_i^{k+1}$  n'est pas unique, plus d'exemples peuvent être trouvés dans [RAM 15]. La définition adoptée ici semble plus adaptée à l'algorithme point fixe alterné, qui s'écrit :

$$Z_i^{k+1} = G(F^{(k)}) - F^{(k-i+1)} \quad (4.15)$$

Dans ce cas, la minimisation (4.14) donne :

$$\lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \vdots \\ \lambda_M^k \end{pmatrix} = (\Delta Z^{kT} \Delta Z^k)^{-1} \Delta Z^{kT} \Delta G(F^{(k-1)}) \quad (4.16)$$

où

$$\begin{cases} \Delta G(F^{(k-1)}) = G(F^{(k)}) - G(F^{(k-1)}) \\ \Delta Z^k = (\Delta Z_1^k, \dots, \Delta Z_M^k) = (Z_1^{k+1} - Z_1^k, \dots, Z_M^{k+1} - Z_M^k) \end{cases} \quad (4.17)$$

Enfin, on obtient la série accélérée :

$$F^{(k+1)} = \tilde{F}^{(k+1)} = G(F^{(k)}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i^k Z_i^{k+1} \quad (4.18)$$

Il faut remarquer que lorsque  $M = 1$ , la méthode de relaxation dynamique (Aitken  $\delta^2$  processes) [DUV 16, LU 18] est retrouvée. Cette formule peut être ainsi considérée comme une extension généralisée. L'accélérateur peut être appliqué à un ou plusieurs composants de chaque mode séparément. Pour différentes méthodes avec différentes valeurs de  $M$ , on adopte la dénomination dans [RAM 15], c'est-à-dire la méthode  $M$ -delta croisés. Dans ce qui suit, l'efficacité des méthodes avec différents  $M$  pour accélérer la HOPGD est illustrée avec plusieurs exemples.

#### 4.2.3.3 Exemples numériques

— Test 1 : matrice 3D - accélérateur Aitken  $\delta^2$

Considérons une matrice tridimensionnelle  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, \mu) \in \mathbb{R}^{9317 \times 117 \times 6}$ , solutions EF d'un problème thermo-mécanique transitoire pour différentes valeurs du paramètre  $\mu$ , avec une discrétisation de  $9317 \times 117 \times 6$  respectivement dans l'espace  $\mathbf{X}$ , le temps  $t$  et un paramètre matériel  $\mu$ , l'approximation HOPGD est alors donnée par :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, \mu) \approx \mathbf{U}^n(\mathbf{X}, t, \mu) = \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}^m(\mu) \quad (4.19)$$

où  $\Phi$  et  $\mathbf{V}$  désignent les fonctions d'espace et du temps respectivement.

Comme montré dans la FIGURE 4.3, la HOPGD couplée avec la méthode de relaxation montre une bonne vitesse de convergence. Par rapport à la série de point fixe originale qui converge linéairement, comme cela est montré dans de nombreux cas [DUV 16]. Moins d'itérations sont nécessaires pour construire les fonctions PGD lors du couplage avec le processus de relaxation, et le coût de calcul est beaucoup moins cher (Tableau 4.1).

— Test 2 : matrice 5D - accélérateur Aitken  $\delta^2$

Un autre exemple de comparaison pour une matrice de dimension plus élevée  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, \mu, \xi, \eta)$  est illustré dans le Tableau 4.2. La discrétisation utilisée pour

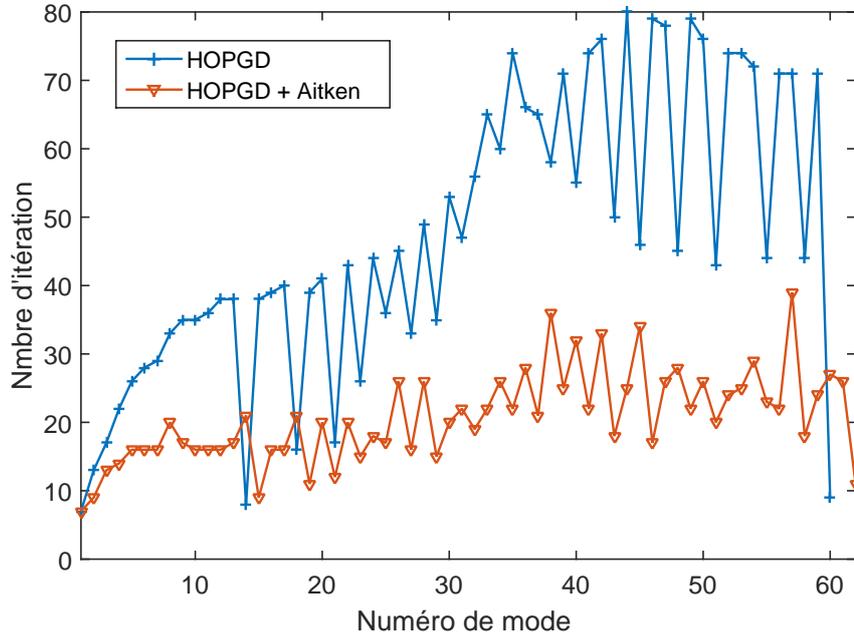


FIGURE 4.3 – Nombre d’itérations durant la construction de PGD approximations pour une matrice 3D

	Nombre de modes	Itérations	Temps CPU
HOPGD	60	2832	400 s
HOPGD + Relaxation	62	1284	240 s

TABLE 4.1 – Coût de calcul pour HOPGD 3D - Aitken  $\delta^2$

$\mathbf{X}, t, \mu, \xi$  et  $\eta$  est  $9317 \times 117 \times 2 \times 2 \times 2$ . L’approximation de HOPGD 5D s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t, \mu, \xi, \eta) &\approx \mathbf{U}^n(\mathbf{X}, t, \mu, \xi, \eta) \\ &= \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}_1^m(\mu) \otimes \mathbf{F}_2^m(\xi) \otimes \mathbf{F}_3^m(\eta) \end{aligned} \quad (4.20)$$

A travers les deux premiers exemples, un gain de vitesse de convergence (presque  $2\times$ ) a été trouvé avec la méthode de relaxation dynamique. Bien que les fonctions PGD construites soient légèrement modifiées par la relaxation, on obtient une bonne vitesse de convergence, même pour les matrices dimensionnelles élevées.

— Test 3 : matrice 3D - accélérateur  $M$ - $\delta$  croisés

Considérant une matrice tridimensionnelle générée de manière aléatoire

	Nombre de modes	Itérations	Temps CPU
HOPGD	91	4528	915 s
HOPGD + Relaxation	97	2641	563 s

TABLE 4.2 – Coût de calcul pour HOPGD 5D - Aitken  $\delta^2$

$\mathbf{U}_{1000 \times 20 \times 15}$ , la HOPGD donne la séparation des variables suivante :

$$\mathbf{U}_{1000 \times 20 \times 15} \approx \mathbf{U}^n = \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_{1000 \times 1}^m \otimes \mathbf{F}_{20 \times 1}^m \otimes \mathbf{F}_{15 \times 1}^m \quad (4.21)$$

	HOPGD	1-delta croisé (Aitken)	2-delta croisés	3-delta croisés
$\varepsilon = 10^{-5}$	1441	771	597	491

TABLE 4.3 – Nombre d’itérations pour la HOPGD 3D -  $M$ - $\delta$  croisés

Le nombre d’itérations pour la construction de la représentation à variables séparées d’une matrice 3D avec différentes méthodes  $M$ -delta est affiché dans le Tableau 4.3. Avec la méthode 1-delta croisé (c’est-à-dire la méthode Aitken  $\delta^2$ ), on retrouve un gain de vitesse de convergence de facteur 2 par rapport à l’algorithme original d’HOPGD. Lorsque  $M$  augmente, l’accélérateur semble de plus en plus efficace. En outre, comme indiqué dans la FIGURE 4.4, la méthode Aitken n’a pas réussi à accélérer l’algorithme pour certains modes. Avec une valeur plus élevée de  $M$ , l’accélérateur devient plus stable. La FIGURE 4.5 confirme à nouveau la stabilité de la convergence avec une valeur élevée de  $M$ . Dans ce cas,  $M = 3$  semble suffisant pour accélérer cette procédure. Il convient de noter que lorsque  $M$  augmente, la mémoire nécessaire pour stocker les itérations précédentes devient in-négligeable. Dans ce cas, un compromis entre l’espace mémoire et l’accélération devrait être fait.

L’efficacité des méthodes proposées pour accélérer la procédure itérative de HOPGD a été montrée. Malgré l’instabilité présentée dans certains cas, la méthode de relaxation peut globalement accélérer la HOPGD. Les exemples montrés ici encouragent d’utiliser la méthode  $M$ - $\delta$  croisés (version généralisée d’Aitken  $\delta^2$ ) qui semble plus stable avec le  $M$  bien choisi.

### 4.3 Revue de la méthode ‘sparse grids’

La sélection des snapshots consiste essentiellement à une discrétisation de l’espace des paramètres multidimensionnel. Une grille uniforme (complète) entraîne une complexité de  $\mathcal{O}(N^d)$  avec  $N$  et  $d$  désignant les degrés de liberté dans chaque direction de coordonnées et la dimension des problèmes, respectivement. Cette dépendance exponentielle sur la dimension du problème est la *malédiction de la dimension* [GRI]. Les ‘sparse

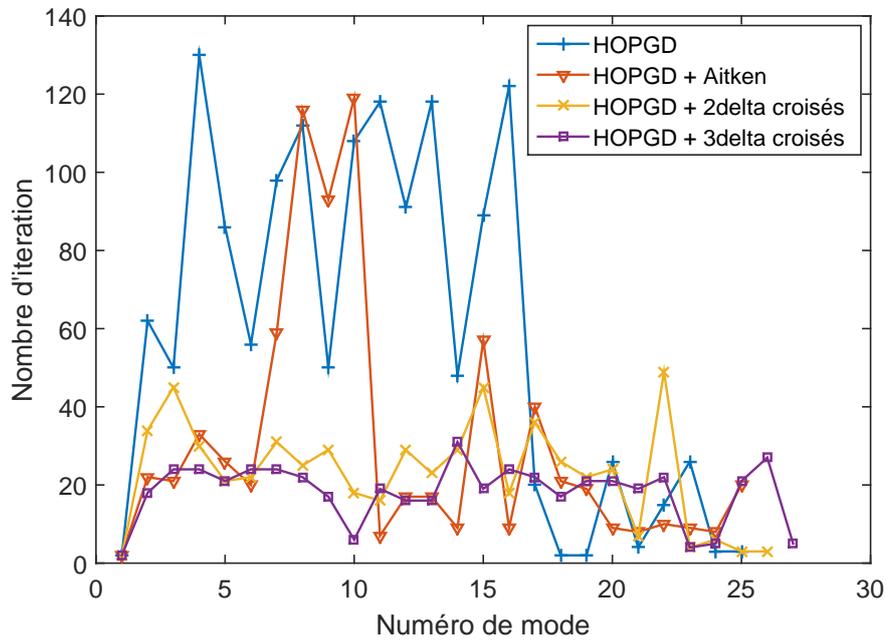


FIGURE 4.4 – Nombre d’itérations par mode pour HOPGD 3D -  $\varepsilon = 10^{-5}$

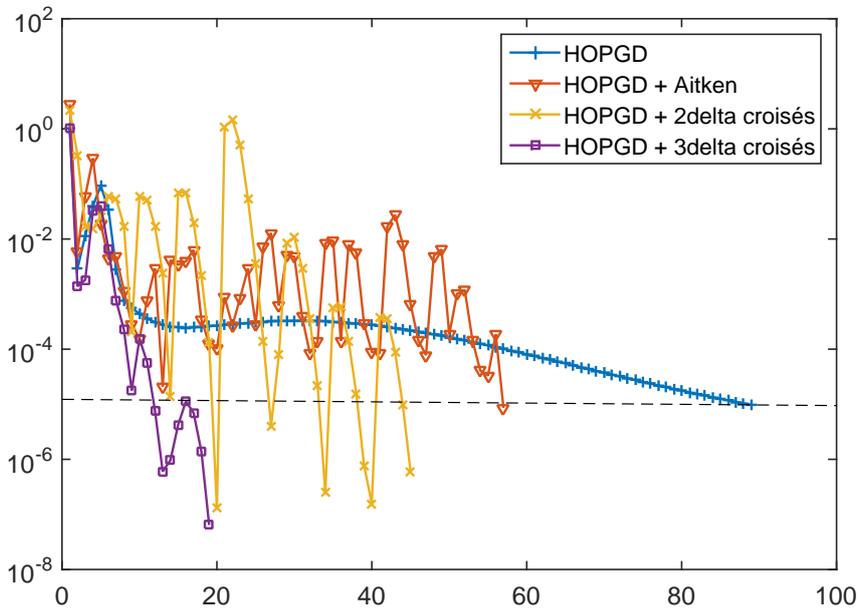


FIGURE 4.5 – Résidu pour le mode-15 de la première composant  $\mathbf{F}_{1000 \times 1}^{15}$

grids” semblent être un outil efficace pour contourner cette difficulté, du moins dans une certaine mesure. Il a été prouvé qu’avec des hypothèses de régularité sur les solutions,

la complexité des coûts peut considérablement être réduite tout en conservant la même précision de la grille uniforme (complète) [BUN 04]. Un exemple de discrétisation avec grille complète et “sparse grid” pour un espace de paramètres 2D est illustré dans la FIGURE 4.6.

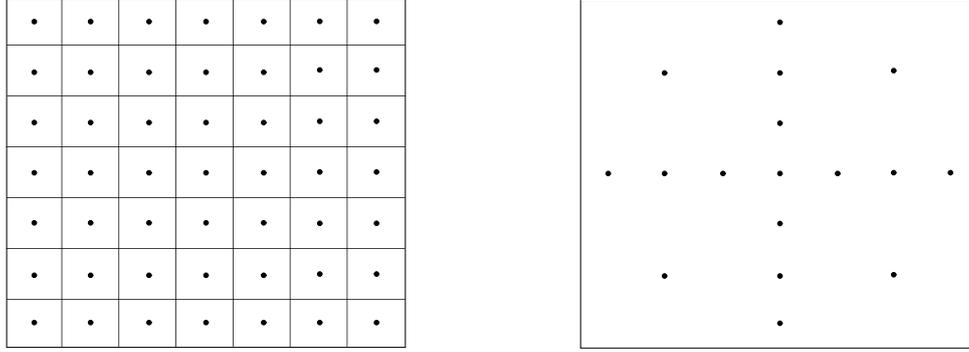


FIGURE 4.6 – Exemples de grille complète (gauche) and de “sparse grid” régulière (droite) dans un espace de paramètres 2D

Basé sur une décomposition hiérarchique des espaces d’approximation concernés  $V_{\mathbf{l}}$ , qui s’écrit :

$$V_{\mathbf{l}} = \bigoplus_{\mathbf{k} \leq \mathbf{l}} W_{\mathbf{k}} \quad (4.22)$$

où  $\bigoplus$  désigne la combinaison des grilles de niveau différent, le multi-indice  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$  indique le niveau dans un sens multivarié, l’interpolation de  $u(\mathbf{x}) \in V_{\mathbf{l}}$  peut être écrite comme :

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_{\mathbf{l}}} v_{\mathbf{l}, \mathbf{i}} \phi_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}(\mathbf{x}) \\ \phi_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \phi_{l_j, i_j}(x_j) \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{I}_{\mathbf{l}} = \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq 2^{\mathbf{l}} - \mathbf{1}, i_j \text{ impair pour tous } 1 \leq j \leq d\}$ , les  $v_{\mathbf{l}, \mathbf{i}} \in \mathbb{R}$  sont les coefficient de base hiérarchique  $\phi_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}$ . Dans le cas 1D, un exemple de base hiérarchique linéaire  $\phi_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}$  est illustré dan la FIGURE 4.7. Ici, on suppose que  $u(\mathbf{x})$  s’annule aux bords :  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

À partir de la représentation hiérarchique de  $V_n$  sur une grille complète uniforme, les “sparse grids” sont définies par un processus d’optimisation qui consiste à sélectionner ces sous-espaces  $W_{\mathbf{k}}$  qui contribuent le plus à la solution globale. Si la fonction  $u(\mathbf{x})$  satisfait certaines conditions de continuité, par exemple les dérivées mixtes bornées :

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{\sum_i \alpha_i} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in L^2(\Omega) \quad (4.24)$$

où  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_d]$  avec  $\max(\alpha_i) \leq 2$ , cela peut être fait *a priori* avec une analyse coût-bénéfice. Plus de détails sur le problème d’optimisation peuvent être trouvés dans

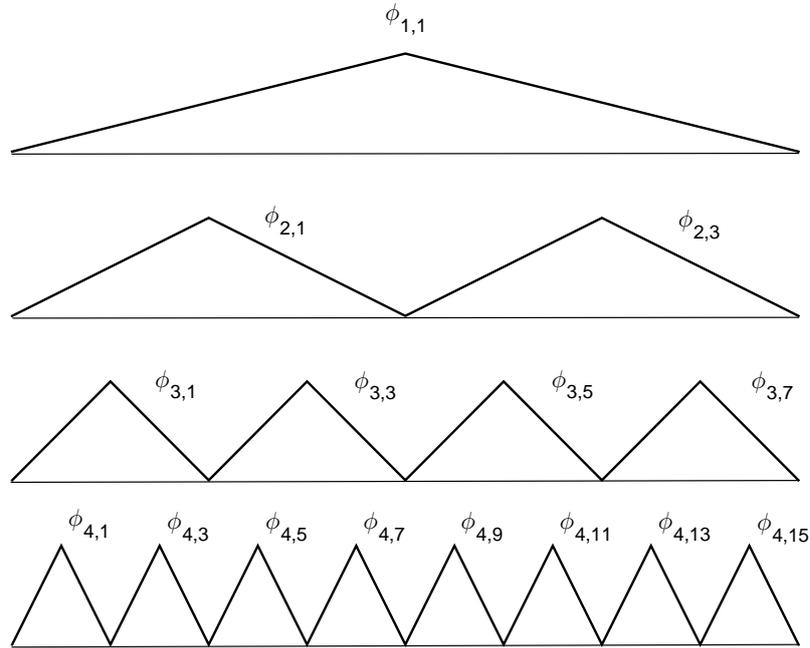


FIGURE 4.7 – Fonction de base hiérarchique linéaire jusqu’au niveau 4

[BUN 04]. Ici, une grille optimale par rapport à la norme- $L^2$  et à la norme maximale est donnée :

$$V_n^{(1)} = \bigoplus_{|\mathbf{k}|_1 \leq n+d-1} W_{\mathbf{k}} \quad (4.25)$$

Les grilles complètes correspondent alors aux secteurs cubiques des sous-espaces. La “sparse grid” est obtenue en utilisant un secteur triangulaire ou simplicial.

La FIGURE 4.8 montre la sélection des sous-espaces pour la construction de la “sparse grid” pour  $V_3^{(1)}$ . On peut montrer que le nombre de points de grille est de l’ordre  $\mathcal{O}(2^n n^{d-1})$ , qui est considérablement réduit par rapport aux grilles complètes ( $\mathcal{O}(2^{nd})$ ), alors que la précision d’interpolation n’est dégradée que légèrement [GER 10]. Par exemple, pour une fonction appartenant à l’espace Sobolev  $H_2^{\text{mix}}(\Omega)$  avec :

$$H_2^{\text{mix}}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \max(\alpha_i) \leq 2, u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (4.26)$$

La précision d’interpolation dans la “sparse grid” pour une norme- $L^p$  est donnée par :

$$\|u - \hat{u}_n\|_p = \mathcal{O}\left(2^{-2n} n^{d-1}\right) \quad (4.27)$$

Avec une grille complète correspondante, la précision d’interpolation est :

$$\|u - u_n\|_p = \mathcal{O}\left(2^{-2n}\right) \quad (4.28)$$

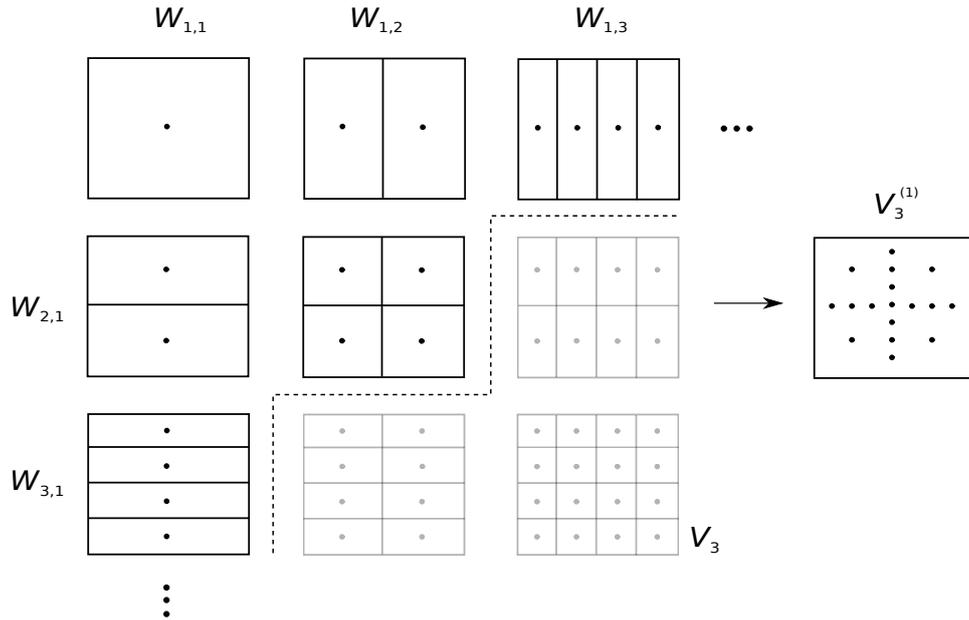


FIGURE 4.8 – Sous-espaces 2D  $W_{\mathbf{k}}$  d’une grille complète  $V_3$  (gauche), la sélection *a priori* des sous-espaces ( $|\mathbf{k}|_1 \leq 4$ ) et la grille résultante (droite)

où  $\hat{u}_n, u_n$  sont respectivement les fonctions interpolées par la “sparse grid” et la grille complète. On peut voir que les deux types d’approximation ont le même ordre de précision. De telle façon, la difficulté liée à la *malédiction de la dimension* est contournée, au moins dans certains cas.

## 4.4 Nouvelle stratégie de sélection de snapshots

Inspiré par les méthodes “sparse grids”, on propose dans cette section une nouvelle stratégie de sélection de snapshots pour les problèmes multi-paramétriques. Commencé par un indicateur d’erreur *a posteriori*, la stratégie adaptative est présentée dans le cadre de la HOPGD et puis testée avec quelques exemples.

### 4.4.1 Indicateur d’erreur

Comme ce qui a été présenté dans le chapitre 3, un indicateur *a posteriori* est défini ici pour évaluer la qualité d’approximation et effectuer ensuite les raffinements adaptatifs. Le choix le plus simple de l’indicateur d’erreur est la distance entre la solution interpolée et la solution exacte :

$$\text{Err}(\mathbf{U}) = \frac{\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{HFM}}\|_2}{\|\mathbf{U}^{\text{HFM}}\|_2} \quad (4.29)$$

où  $U$  peut être une quantité d'intérêt interpolée par HOPGD,  $U^{\text{HFM}}$  désigne la solution calculée avec le modèle de haut-fidélité (HFM) correspondant. Notons que ce choix d'indicateur permet d'appliquer directement la méthode "multi-grilles" utilisée dans le chapitre 3 pour traiter les problèmes multi-paramétriques avec HOPGD. Les abaques multi-paramétriques de dimension allant jusqu'à 5 ont été présentés dans [LU 18]. Cependant, cette stratégie adaptative reste toujours difficile pour les problèmes de haute dimension ( $d > 3$ ), car la grille utilisée dans la méthode présente toujours une dépendance exponentielle de la dimension (par exemple la grille de niveau 1 contient  $\mathcal{O}(2^d)$  points). Inspiré par les méthodes de "sparse grids", nous proposons une nouvelle stratégie adaptative efficace pour échantillonner l'espace de paramètres multi-paramétrique.

Nous remarquons que cet indicateur d'erreur nécessite de nombreux calculs EF complets qui peuvent être très coûteux dans le cas de grande dimension. Pour améliorer ce point, un autre indicateur d'erreur doit être développé, par exemple considérer une analyse du résidu de type PGD dans le domaine de paramètres. Pour la suite, on garde la définition (4.29) pour calculer l'erreur.

#### 4.4.2 'Sparse grids' adaptative dans l'espace de paramètres

Il est intéressant de noter que les points effectifs des grilles optimales se situent souvent sur les axes de symétrie des domaines. Basé sur ce constat, une stratégie de raffinement adaptatif *a posteriori* couplée avec un indicateur d'erreur est proposée pour échantillonner l'espace des paramètres. Il en résulte une "sparse grid" adaptative dans l'espace des paramètres. Pour éviter toute confusion avec les méthodes standard de "sparse grids", notons que la stratégie de raffinement n'est utilisée que pour l'échantillonnage de l'espace des paramètres, la méthode utilisée ci-après pour l'interpolation est toujours HOPGD plutôt que d'utiliser les fonctions hiérarchiques des "sparse grids". Il est important de noter que la forme standard de HOPGD est définie dans une grille complète. Ainsi, une adaptation de HOPGD à "sparse grid" a été fait dans notre travail (voir Annexe).

Considérons à nouveau un espace de paramètres 2D pour l'illustration, le premier niveau de grille est défini par les quatre points aux extrémités des deux axes symétriques et un point au centre (voir la FIGURE 4.9). La stratégie de raffinement proposée peut être résumée en deux étapes comme suivantes :

- Étape 1. Vérifier les erreurs des points d'évaluation qui sont défini comme les centres des sous-domaines, si la condition de précision n'est pas satisfaite, on raffine la grille en ajoutant des snapshots sur les axes jusqu'à la saturation (voir la FIGURE 4.9 et l'Algorithme 9). À la fin de cette étape, si la condition de précision n'est toujours pas satisfaite pour certains sous-domaines, on passe à l'étape 2.
- Étape 2. Raffiner le sous-domaine en ajoutant des snapshots sur ses deux axes symétriques jusqu'à la saturation. Si d'autres raffinements sont nécessaires pour ces nouveaux sous-domaines générés, répéter cette procédure sur ces domaines jusqu'à ce que les conditions d'erreur soient satisfaites.

Différente des méthodes de "sparse grids" standards qui sont basées sur une sélection

---

**Algorithm 9** Raffinement axial d'un espace de paramètres 2D

---

**Données** Grille initiale  $D$  (4 extrémités et 1 centre), Tolérance  $Err_c$

- 1:  $S \leftarrow$  liste vide
- 2:  $axes(D)$  : Détecter les axes symétriques de grille
- 3:  $S \leftarrow S \cup axes(D)$
- 4: Calculer l'indicateur d'erreur à chaque point d'évaluation  $Err_i$  ▷ Algo. 10
- 5: **if**  $\max(Err_i) > Err_c$  et  $\Delta Err_i > 0.1Err_c$  **then**
- 6:     Subdiviser les axes en ajoutant les points équidistants
- 7:     Revenir à la ligne 2 et recommencer le processus récursif
- 8: **else**
- 9:      $S' \leftarrow S$
- 10: **end if**
- 11: Retour  $S'$

**Sorties**  $S'$  : Liste des snapshots sélectionnés définissant la "sparse grid" dans l'espace de paramètres

---

---

**Algorithm 10** Évaluation de l'erreur de grille

---

**Données** Liste des snapshots, Coordonnées des points d'évaluation  $P_i (\mu_i, \xi_i)$

- 1: Séparation des variables par HOPGD :  $\mathbf{U}(\mu, \xi) \approx \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_1^m(\mu) \otimes \mathbf{F}_2^m(\xi)$
- 2: Interpolation 1D pour les points d'évaluation :  $\mathbf{F}_1^m(\mu_i), \mathbf{F}_2^m(\xi_i)$
- 3: Solution interpolée au point d'évaluation :  $\mathbf{U}(\mu_i, \xi_i) \approx \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_1^m(\mu_i) \otimes \mathbf{F}_2^m(\xi_i)$
- 4: Calculer l'indicateur d'erreur  $Err_i$  ▷ (4.29)
- 5: Retour  $Err_i$

**Sorties** Indicateur d'erreur  $Err_i$

---

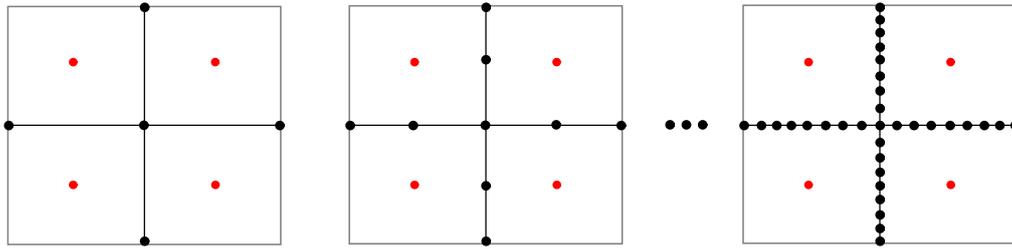


FIGURE 4.9 – Grille de niveau 1 avec raffinements successifs sur les axes (Noire : snapshots, Rouge : points d'évaluation)

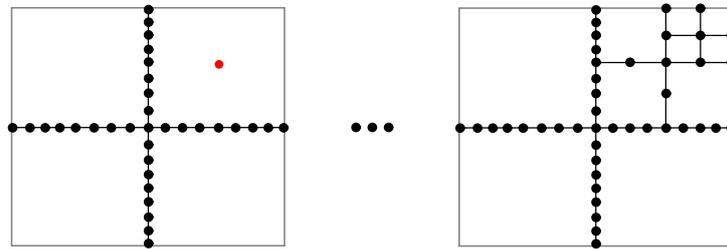


FIGURE 4.10 – Grille (gauche) issue de l'étape 1, raffinement de niveau 2 et 3 sur les axes de sous-domaines (droite)

optimale *a priori* des points de grille et une demande de la condition de continuité, la stratégie de raffinement proposée est guidée par un indicateur d'erreur *a posteriori* et n'a pas besoin d'hypothèse de continuité sur les fonctions approximées. Lorsque les problèmes concernés satisfont la condition de continuité, la méthode proposée avec un indicateur approprié devrait conduire à la même grille obtenue par les méthodes des "sparse grids".

### 4.4.3 Tests numériques

L'efficacité de la méthode de raffinement adaptatif proposée est illustrée à l'aide des exemples suivants. Avec des choix arbitraires pour les constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $k$ , on peut définir trois fonctions de type différent. Toutes les fonctions dépendent de deux paramètres  $x, y$ , l'espace des paramètres 2D est échantillonné avec la méthode adaptative proposée.

— Fonction séparée

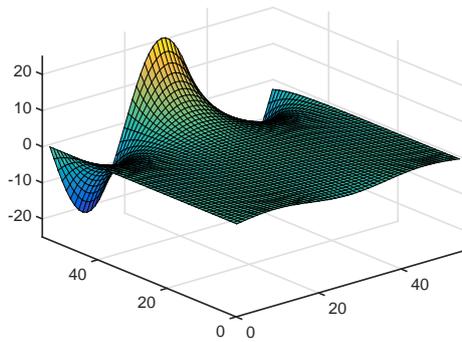
$$z = \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)} \quad (4.30)$$

— Pic-coin :

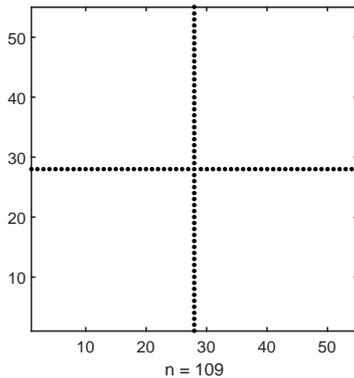
$$z = (c_1 + c_2 x + c_3 y)^{-3} \quad (4.31)$$

— Ondes planaires :

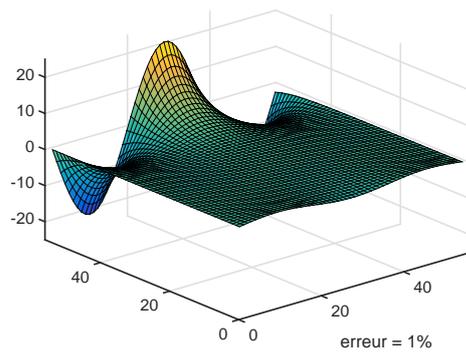
$$z = e^{\sin(kxy)} \quad (4.32)$$



(a) Surface originale de la fonction séparée



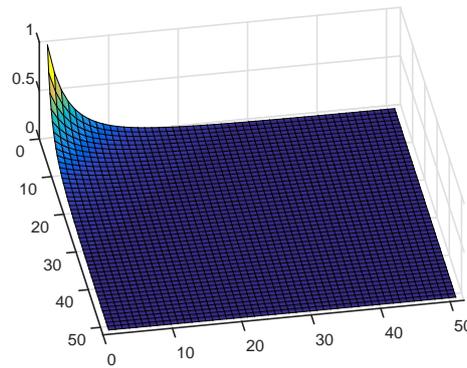
(b) Sparse grid de niveau 1 définie dans l'espace des paramètres 2D



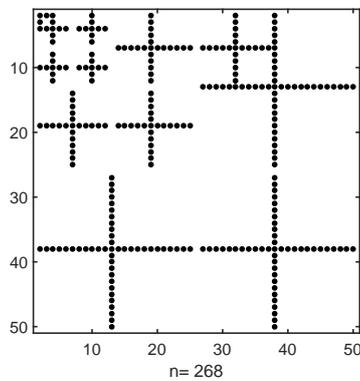
(c) Surface correspondante reproduite par HOPGD

FIGURE 4.11 – Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction séparée pour une erreur de 1%

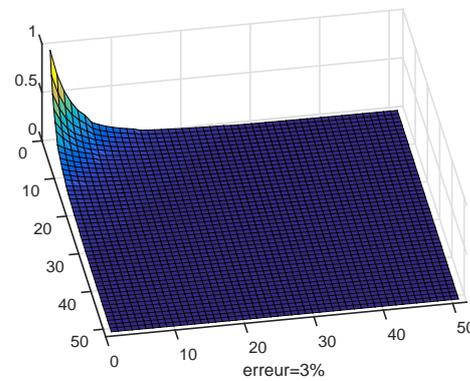
Comme montré dans la FIGURE 4.11, pour les fonctions qui sont déjà séparées, HOPGD est capable de reproduire précisément les fonctions avec une “sparse grid” du premier niveau. Une diminution significative des points de grille peut être observée par rapport à des grilles de  $N \times N$  uniformes ( $50 \times 50$  dans l'exemple illustré). Pour des fonctions avec des singularités, par exemple la fonction 'pic-coin', la stratégie d'échantillonnage proposée localise les raffinements sur le coin où apparaît la singularité (FIGURE 4.12). Une “sparse grid” avec des raffinements adaptatifs jusqu'au niveau 5 peut construire une surface avec une erreur de second-norme de 3%. En ce qui concerne la fonction 'ondes planaires', c'est-à-dire que la solution qui présente de fortes variations partout dans l'espace des paramètres, le nombre de raffinements de haut niveau aug-



(a) Surface originale de la fonction 'pic-coin'



(b) Sparse grid 2D avec raffinements adaptatifs de niveau 5



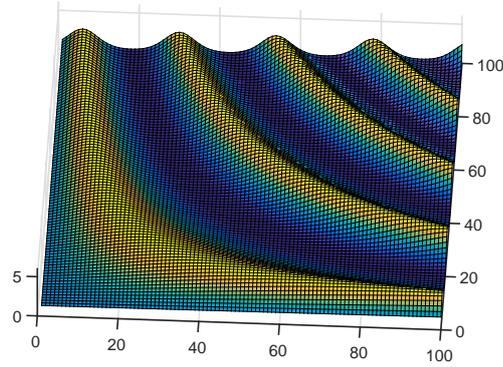
(c) Surface correspondante reproduite par HOPGD

FIGURE 4.12 – Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction 'pic-coin' pour une erreur de 3%

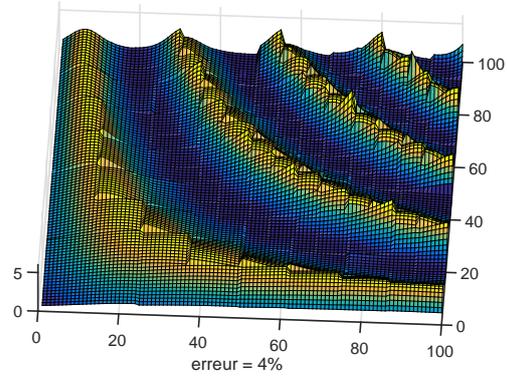
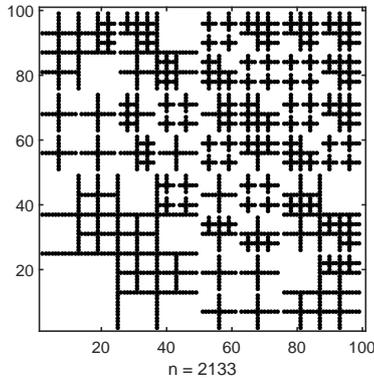
mente par rapport aux cas précédents, tandis que la "sparse grid" résultante (FIGURE 4.13) pour une erreur de 4% contient encore beaucoup moins de points que la grille uniforme ( $100 \times 100$ ).

## 4.5 Abaques numériques multi-paramétriques à précision contrôlée

Pour application, la méthode de raffinement proposée couplée à la HOPGD est utilisée pour construire les abaques numériques quasi-optimaux dans le sens de minimiser le nombre de snapshots nécessaires par rapport à une précision contrôlée. Particulièrement, un paramètre de type géométrie est traité dans le premier exemple 7D.



(a) Surface originale de la fonction 'ondes planaires'



(b) Sparse grid 2D avec raffinements adaptatifs de niveau 5 (c) Surface correspondante reproduite par HOPGD pour une erreur de 4%

FIGURE 4.13 – Échantillonnage adaptatif et surface correspondante de la fonction 'ondes planaires' pour une erreur de 4%

## 4.5.1 Abaque numérique 7D avec paramètres géométriques

### 4.5.1.1 Technique pour traiter la variation géométrique

En raison de la nature de l'aspect espace-temps, les solutions de problèmes de soudage avec  $d$  paramètres variés sont définies dans un espace de dimension  $4 + d$  :  $\Omega \times [0, T] \times [\mu_1^{min}, \mu_1^{max}] \times \dots \times [\mu_d^{min}, \mu_d^{max}]$ , la représentation à variables séparées par HOPGD s'écrit alors :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, \mu_1, \dots, \mu_d) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}_1^m(\mu_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_d^m(\mu_d) \quad (4.33)$$

où  $\Phi(\mathbf{X})$  et  $\mathbf{V}(t)$  sont respectivement les bases spatiales et temporelles. Les fonctions de paramètres  $\mathbf{F}_i$  sont ainsi les bases paramétriques.

Pour des raisons numériques, la HOPGD exige que tous les snapshots aient la même discrétisation (degrés de liberté) dans l'espace et le temps. Cependant, lorsqu'il s'agit

de problèmes incluant des variations géométriques, l'exigence de discrétisation n'est pas forcément satisfaite. Par conséquent, une technique de type morphing est nécessaire pour résoudre ce problème.

Considérons un problème avec les variations géométriques qui peuvent être caractérisées par un vecteur de paramètre  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_d]$ , un ensemble de snapshots est alors calculé avec différentes discrétisations pour différentes configurations :  $\Omega(\boldsymbol{\mu}^i)$ . Maintenant, considérons une configuration de référence  $\Omega_\xi$ , les configurations physiques peuvent alors être considérées comme des images de  $\Omega_\xi$  pour un mapping donné  $\mathcal{M}_\mu : \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{X}$ , avec  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\xi$  :

$$\Omega(\boldsymbol{\mu}) := \mathcal{M}_\mu(\Omega_\xi) \quad (4.34)$$

La solution dans la configuration de référence peut donc être obtenue en effectuant le mapping inverse :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{U}(\mathcal{M}_\mu^{-1}(\mathbf{X})) \quad (4.35)$$

La FIGURE 4.14 illustre un exemple de mapping 2D. Notons que la configuration de référence reste inchangée avec les variations de paramètres, les solutions issues de différentes configurations sont alors représentées dans le même maillage. L'interpolation pour nouvelle valeur de paramètre  $\boldsymbol{\mu}$  peut ainsi être faite dans la configuration de référence avec la HOPGD :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}, t, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{U}(\mathcal{M}_\mu^{-1}(\mathbf{X}), t, \boldsymbol{\mu}) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}_1^m(\mu_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_d^m(\mu_d) \quad (4.36)$$

Finalement, pour la visualisation *online*, la représentation des solutions dans les configurations physiques peut être obtenue à partir de celle de la configuration de référence par un changement des coordonnées :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathcal{M}_\mu(\boldsymbol{\xi})) \quad (4.37)$$

#### 4.5.1.2 Abaque numérique 7D

Cette section présente un exemple 7D à une erreur tolérée à 10%. Compte tenu de 3 paramètres (capacité calorifique spécifique  $C_p$ , limite élastique initiale  $\sigma_y$ , épaisseur de la plaque soudée  $e$ ) variant dans un espace de paramètres 3D fermé (voir le tableau 4.4), on utilise la HOPGD pour l'exploitation de l'espace concerné. Avec la stratégie d'échantillonnage proposée, les snapshots initiaux sont sélectionnés sur les axes de symétrie de l'espace, comme indiqué dans la FIGURE 4.15. En raison des variations géométriques, les maillages EF utilisés pour calculer les snapshots peuvent être différents de l'un à l'autre. Comme mentionné précédemment, pour des raisons numériques, les solutions sont toutes projetées dans une configuration de référence commune (4.35). La

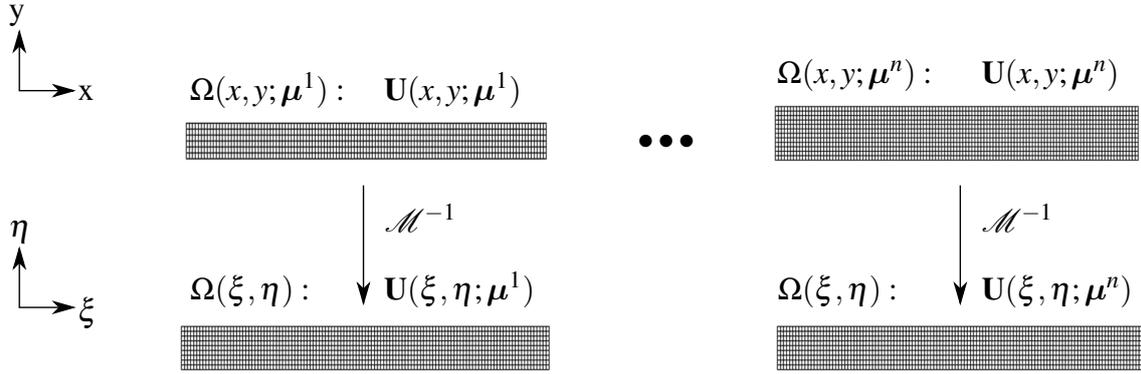


FIGURE 4.14 – Mapping de maillage 2D

représentation à variables séparées des solutions dans la configuration de référence par HOPGD peut être ainsi fournie :

$$\mathbf{U}(\xi, t, C_p, \sigma_y, e) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\xi) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}_1^m(C_p) \otimes \mathbf{F}_2^m(\sigma_y) \otimes \mathbf{F}_3^m(e) \quad (4.38)$$

Afin d'évaluer la qualité des grilles, l'indicateur d'erreur suivant est ensuite calculé pour chaque point d'évaluation qui est défini comme le centre des sous-domaines, comme indiqué dans le Tableau 4.5.

$$\text{Err}(\mathbf{U}) = \frac{\|\mathbf{U}(\mathbf{X}, t_f) - \mathbf{U}^{\text{HFM}}(\mathbf{X}, t_f)\|_2}{\|\mathbf{U}^{\text{HFM}}(\mathbf{X}, t_f)\|_2} \quad (4.39)$$

où  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t_f)$  désigne les quantités de soudage à l'instant final, par exemple les contraintes résiduelles, ou distorsions, etc. Pour calculer l'erreur, les solutions interpolées  $\mathbf{U}(\xi, t_f)$  doivent être re-projetées dans la configuration physique en utilisant (4.37).

Pour diminuer l'erreur d'interpolation, le premier raffinement est effectué en ajoutant des snapshots sur les axes du domaine (FIGURE 4.16). Dans ce qui suit, la plus grossière s'appelle Grille 1, et Grille 2 désigne celle avec un raffinement de niveau 1. Comme montrées dans la FIGURE 4.17, les erreurs des solutions thermo-mécaniques sont globalement diminuées avec le raffinement axial. Plus précisément, il est montré que l'espace de la solution thermique (champ de température) peut être très précisément ( $\text{Err} < 1\%$ ) approximé par les BRs avec la grille 1. Pour les solutions mécaniques, des raffinements supplémentaires sont nécessaires pour une erreur inférieure à 10%. En outre, il convient de noter que le raffinement du niveau 1 a été saturé, c'est-à-dire que les raffinements de plus sur ces axes du domaine n'améliorent pas significativement la qualité de l'interpolation, en particulier pour le sous-domaine 8. Ainsi, un raffinement adaptatif du niveau 2 devrait être effectué pour cet 'élément 8' (voir la FIGURE 4.18).

En raison du changement de niveau de raffinement, la subdivision génère des nouveaux sous-domaines dans l'élément 8. Les erreurs des solutions mécaniques pour les

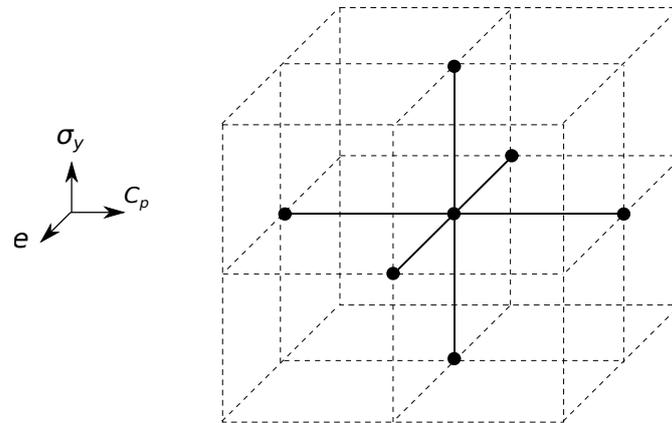


FIGURE 4.15 – Sparse grid 3D de niveau 1 dans l'espace des paramètres (Grille 1)

Notation	Nom	Valeur minimale	Valeur maximale
$C_p$	Capacité thermique	$432 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\sigma_y$	Limite d'élasticité	$300 \times 10^6 \text{ Pa}$	$500 \times 10^6 \text{ Pa}$
$e$	Épaisseur de plaque	0.02 m	0.04 m

TABLE 4.4 – Intervalles de variation des paramètres

Numéro	$C_p$	$\sigma_y$	$e$
1	549	350	0.025
2	549	350	0.035
3	783	350	0.025
4	783	350	0.035
5	549	450	0.025
6	549	450	0.035
7	783	450	0.025
8	783	450	0.035

TABLE 4.5 – Points d'évaluation de la grille de niveau 1

points d'évaluation ré-attribués (voir le Tableau 4.6) dans l'élément 8 sont calculées avec des nouvelles BRs. Comme illustré dans la FIGURE 4.19, ce sous-espace de solutions est bien approximé avec une erreur inférieure à 3%.

Pour résumer, l'espace de solution thermo-mécanique est bien approximé ( $\text{Err} < 10\%$ ) avec 20 snapshots dans l'espace des paramètres 3D. Ces solutions paramétriques forment un abaque 7D (espace-temps + 3 paramètres). Le temps de calcul *offline* et la mémoire de stockage nécessaire sont donnés dans le Tableau 4.7. Par rapport au calcul EF complet qui prend 3h pour un calcul, l'utilisation *online* de l'abaque (FIGURE 4.20) pour trouver des solutions des paramètres donnés est en temps réel. Des solutions paramétriques peuvent être fournies pour toute valeur de paramètres instantanément. Encore une fois, cela peut

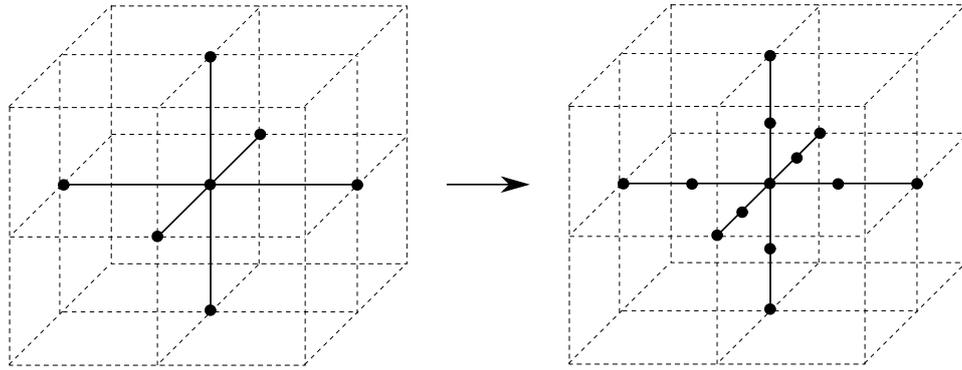
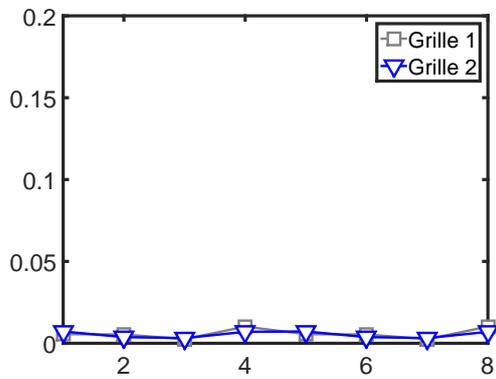
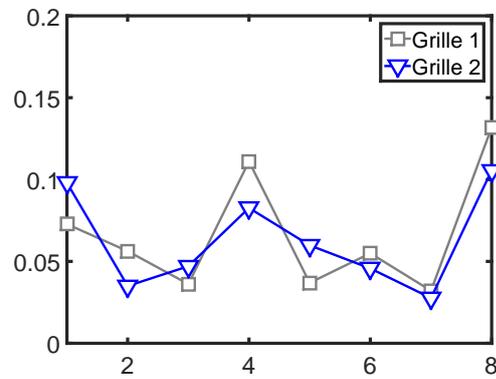


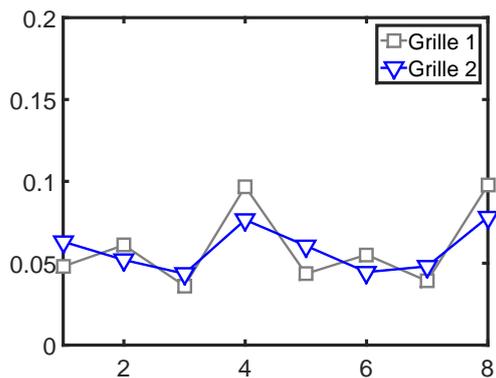
FIGURE 4.16 – Sparse grid 3D avec un raffinement de niveau 1. Grille 1 (gauche), Grille 2 (droite)



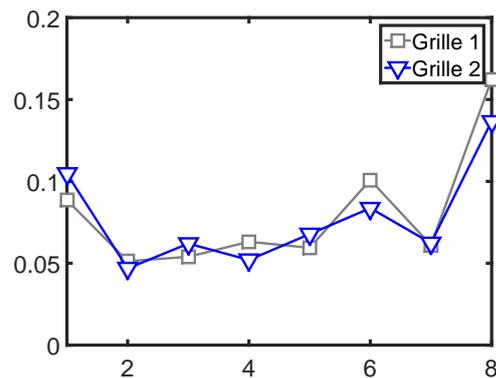
(a) Erreur de champ de température



(b) Erreur de champ de déplacement



(c) Erreur de champ de contrainte résiduelle



(d) Erreur de champ de déformation plastique cumulée

FIGURE 4.17 – Erreur des solutions thermo-mécaniques sur les points d'évaluation dans l'espace de paramètres (Grille 1 vs Grille 2)

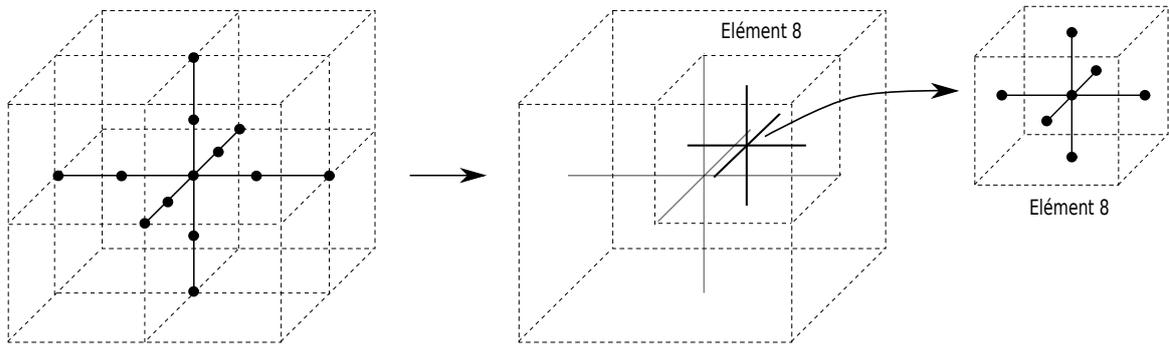


FIGURE 4.18 – Sparse grid 3D avec un raffinement de niveau 2 dans l'élément 8

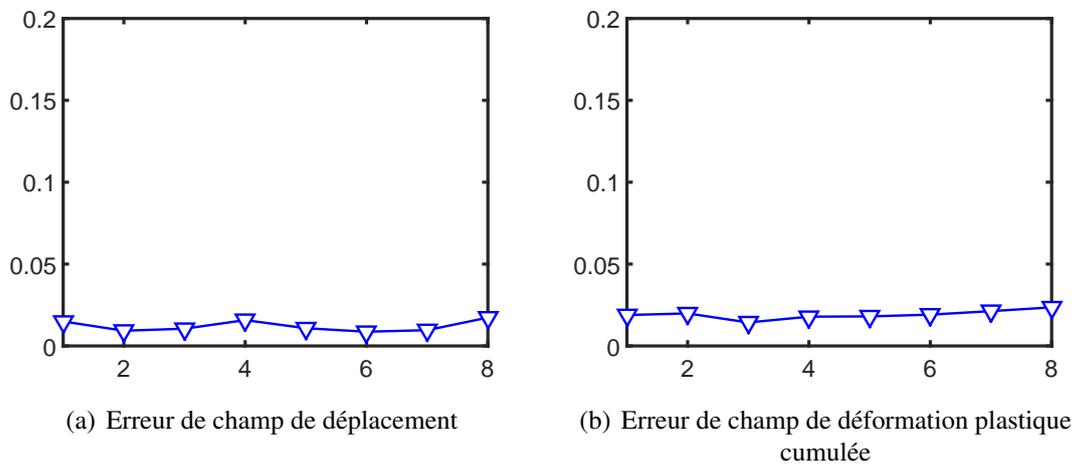


FIGURE 4.19 – Erreur des solutions thermo-mécaniques sur les points d'évaluation dans l'espace de paramètres (Grille 1 de niveau 2)

Numéro	$C_p$	$\sigma_y$	Err
1	724.5	425	0.0325
2	724.5	425	0.0375
3	841.5	425	0.0325
4	841.5	425	0.0375
5	724.5	475	0.0325
6	724.5	475	0.0375
7	841.5	475	0.0325
8	841.5	475	0.0375

TABLE 4.6 – Points d'évaluation de la grille de niveau 2

être avantageux pour des problèmes d'optimisation ou d'identification dans lesquels les calculs répétitifs sont une tâche coûteuse.

#### 4. Abaques numériques multi-paramétriques basés sur la HOPGD

	Offline			Online
	20 snapshots	HOPGD	Total	
Temps CPU	60 h	48 h	108 h	< 1 s
Mémoire	600 Mbyts	68 Mbyts	68 Mbyts	-
Calcul EF	-	-	-	3 h

TABLE 4.7 – Coût de calcul pour l’abaque 7D

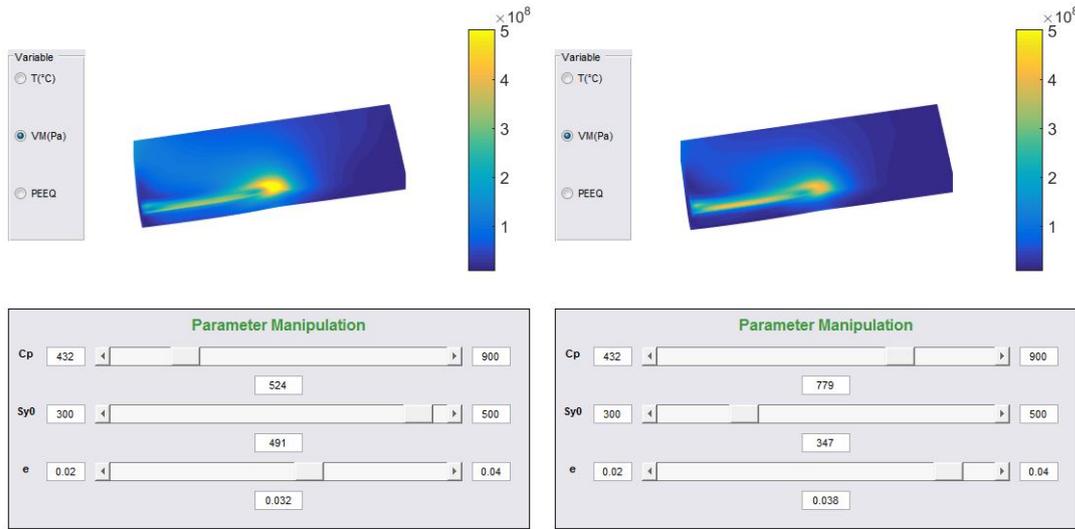


FIGURE 4.20 – Démonstrateur de l’abaque numérique 7D pour le soudage

#### 4.5.2 Abaque numérique 10D

Cette section présente un exemple d’abaque 10D. Les paramètres concernés comprennent 5 paramètres matériels à la fois sur les aspects thermiques et mécaniques : capacité spécifique  $C_p$ , expansion thermique  $\alpha$ , module d’Young  $E$ , limite d’élasticité initiale  $\sigma_y$ , paramètre d’écrouissage isotrope linéaire  $H$  et un paramètre lié à la source de chaleur : puissance de flux de chaleur  $Q$ . Les intervalles de variation de paramètres et la grille initiale dans l’espace de paramètres 6D sont illustrés respectivement dans le Tableau 4.8 et la FIGURE 4.22(c). Afin de simplifier la procédure de HOPGD, dans cet exemple, seules les quantités à l’instant final  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t_f)$  sont prises en compte pour la construction d’abaque numérique :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t_f, C_p, \alpha, E, \sigma_y, H, Q) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}, t_f) \otimes \mathbf{F}_1^m(C_p) \otimes \mathbf{F}_2^m(\alpha) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_6^m(Q) \quad (4.40)$$

De la même manière que précédemment, la qualité de la grille est évaluée en calculant l’erreur associée aux points d’évaluation attribués à chaque sous-domaine. Dans le premier niveau de la “sparse grid” 6D, il y a 64 points d’évaluation. En utilisant l’équation

Notation	Nom	Valeur minimale	Valeur maximale
$C_p$	Capacité thermique	$432 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\alpha$	Expansion thermique	$1.08 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	$1.62 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
E	Module d'Young	$168 \times 10^9 \text{ Pa}$	$252 \times 10^9 \text{ Pa}$
$\sigma_y$	Limite d'élasticité initiale	$300 \times 10^6 \text{ Pa}$	$500 \times 10^6 \text{ Pa}$
H	Pente d'écroutissage isotrope	$16 \times 10^9 \text{ Pa}$	$26 \times 10^9 \text{ Pa}$
Q	Puissance de flux de chaleur	$6.4 \times 10^6 \text{ W.m}^{-2}$	$9.6 \times 10^6 \text{ W.m}^{-2}$

TABLE 4.8 – Intervalles de variation des 6 paramètres

(4.39), les erreurs de différentes quantités sont calculées. Comme indiqué dans la FIGURE 4.21, le champ de température est bien approché par les BRs, alors que les solutions mécaniques doivent être améliorées. À partir de la grille initiale, on raffine l'espace 6D avec la stratégie de raffinement adaptatif proposée pour une erreur fixée à 15%. Ici, on illustre l'erreur du champ de déplacement pendant la procédure de raffinement, à titre d'exemple.

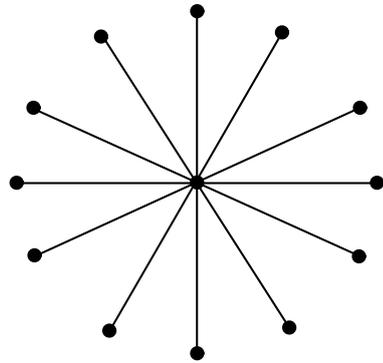
La FIGURE 4.22 montre le raffinement du premier niveau dans l'espace des paramètres 6D. Pour la raison de visualisation, la projection PCA (Analyse en composantes principales) [HOT 33] est utilisée ici pour visualiser la distribution des snapshots et les points d'évaluation concernés dans l'espace 6D. Comme on peut le voir, le raffinement du premier niveau sur la "sparse grid" initiale permet une diminution de l'erreur. Cependant, des améliorations de niveau supérieur sont nécessaires pour les éléments 41 et 43.

Le Tableau 4.9 illustre la procédure de raffinement à différents niveaux pour différents éléments. Des détails sur le nombre des snapshots nécessaires dans chaque élément raffiné à chaque niveau ainsi que le nombre total des snapshots accumulés sont indiqués. En augmentant le nombre des snapshots, l'erreur des solutions paramétriques diminue rapidement. La "sparse grid" finale pour une erreur fixée à 15% contient ainsi 113 points. La distribution de ces snapshots est illustrée dans la FIGURE 4.23 via une projection PCA. L'abaque numérique (FIGURE 4.24) avec une erreur maximale de 15% est alors construit et peut être utilisé par les ingénieurs pour interroger différentes valeurs de paramètres pour l'ingénierie basée sur la simulation, comme indiqué précédemment.

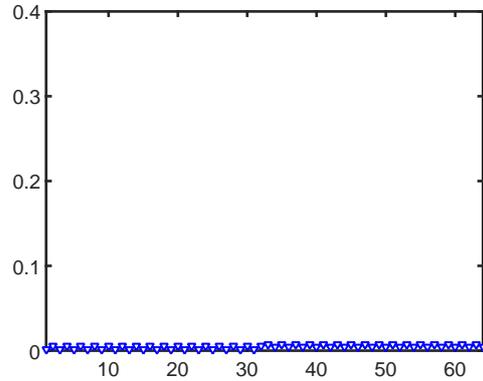
Niveau	Élément	$N_{snap.}$	$N_{snap.}$ accumulé	$Err_{max}$
1	0	13	13	0.32
		49	49	0.26
2	41	25	74	0.16
	43	13	86	0.15
3	41-22	13	99	0.12
	41-24	13	111	0.11

Remarque.  $N_{snap.}$  désigne le nombre de snapshots.

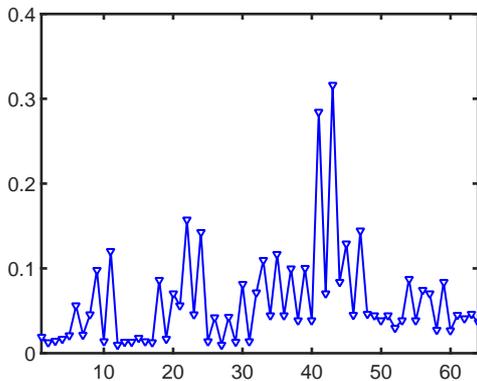
TABLE 4.9 – Raffinements dans l'espace des paramètres 6D



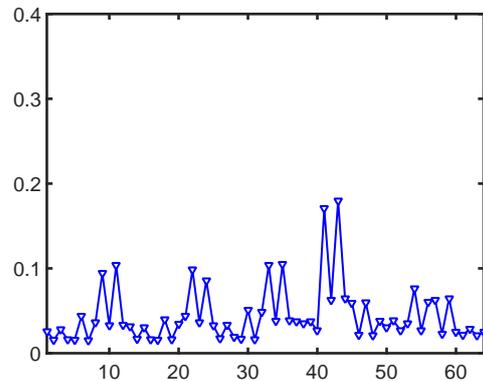
(a) Sparse grid initiale dans l'espace des paramètres 6D



(b) Erreur de champ de température



(c) Erreur de champ de déplacement



(d) Erreur de champ de contraintes résiduelles

FIGURE 4.21 – Erreur des quantités d'intérêt du problème de soudage sur les points d'évaluation (Sparse grid 6D)

## 4.6 Conclusion

Une nouvelle stratégie pour échantillonner l'espace multidimensionnel a été présentée. Basée sur la stratégie d'échantillonnage proposée ("sparse grid" adaptative), la HOPGD est utilisée pour calculer les BRs, de manière non-intrusive, qui peuvent approximer efficacement l'espace de solution multidimensionnel avec une précision contrôlée. Afin d'optimiser la procédure de séparation des variables, des méthodes d'accélération de convergence sont appliquées avec succès dans HOPGD.

Basée sur le modèle de soudage simplifié, la stratégie proposée est appliquée pour construire *a posteriori* les abaques numériques espace-temps de dimension allant jusqu'à 10, dans lesquels les paramètres géométriques et matériels ont été traités. La mémoire de stockage limitée et les réponses en temps réel sont obtenues. Ce type d'abaque peut

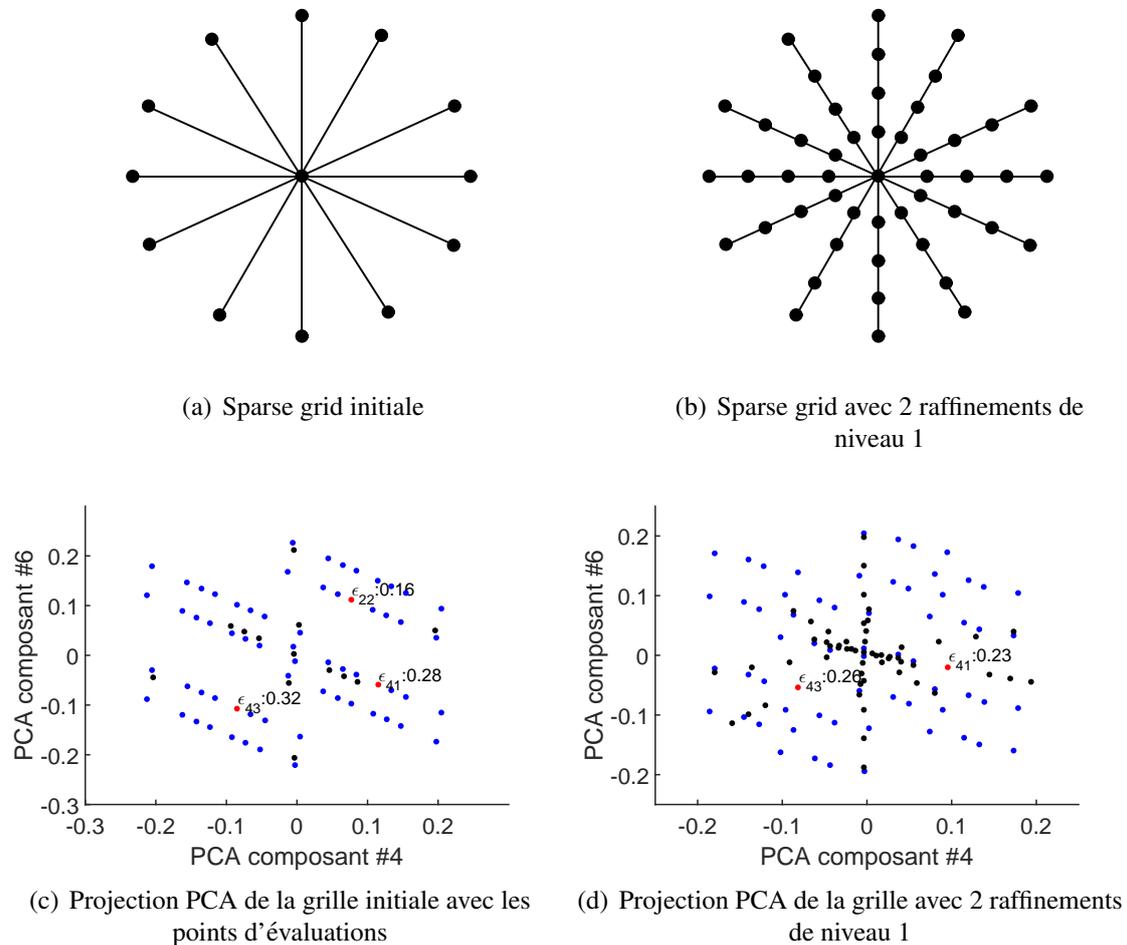


FIGURE 4.22 – Projection PCA des snapshots et des points d'évaluation (noire : snapshots, bleu : points d'évaluation avec  $\text{Err} \leq 15\%$ , rouge : points d'évaluation avec  $\text{Err} > 15\%$ )

être un outil efficace pour les ingénieurs pour traiter l'optimisation, l'identification de paramètres ou d'autres problèmes (tels que la propagation des incertitudes) nécessitant des calculs répétitifs de modèles similaires.

Couplée avec un code de calcul de soudage professionnel pour générer les snapshots, l'application aux cas industriels est présentée dans le chapitre suivant. Dans ces modèles, une description du chargement et un comportement du matériau plus réalistes seront pris en considération. La principale limitation de la méthode proposée est l'indicateur d'erreur coûteux qui nécessite des calculs HFM. Le développement d'un indicateur d'erreur peu coûteux est donc nécessaire dans le futur pour l'amélioration. Par contre, l'aspect non intrusif de la méthode proposée rend versatile l'utilisation de la méthode présentée. On peut s'attendre à une application à d'autres processus multi-paramétriques dans l'industriel, telle que la fabrication additive.

#### 4. Abaquages numériques multi-paramétriques basés sur la HOPGD

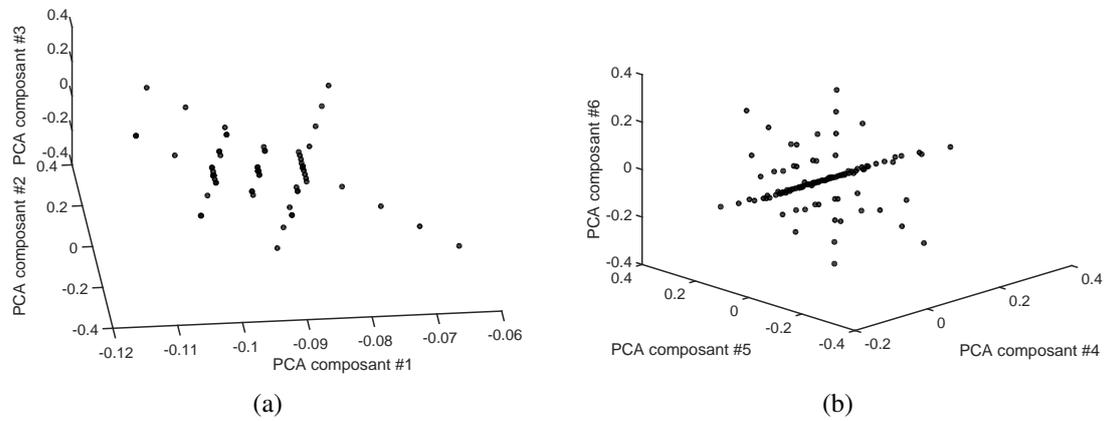


FIGURE 4.23 – Projection PCA de la grille finale (a) projection sur les 3 premières composantes (b) projection sur les 3 dernières composantes

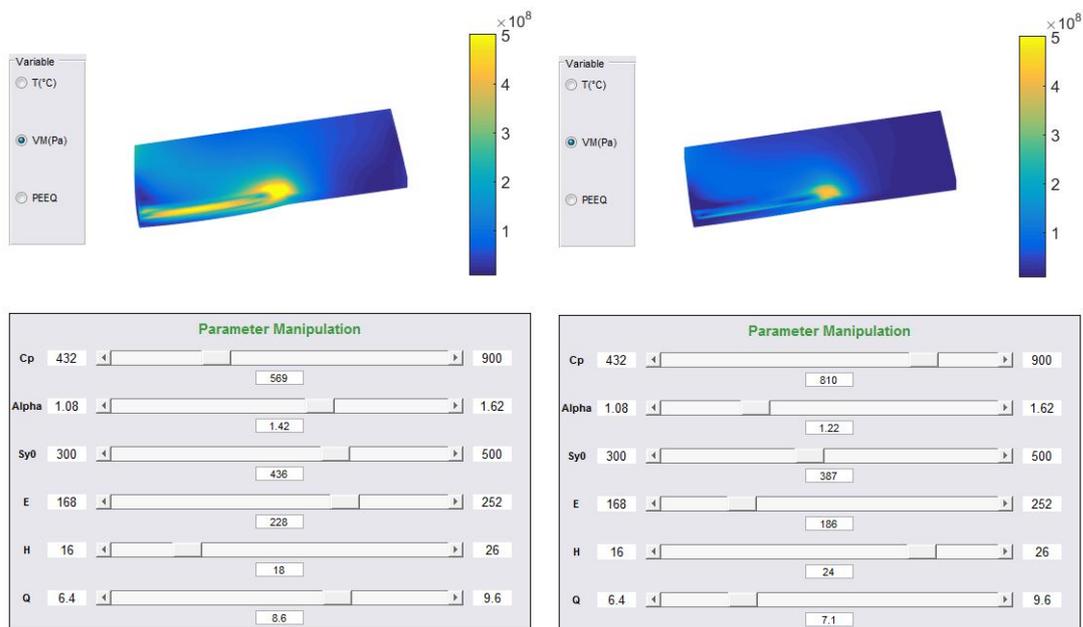


FIGURE 4.24 – Démonstrateur de l'abaque numérique 10D de soudage

# Chapitre 5

## Application soudage : couplage avec un code de calcul industriel

*Dans ce chapitre, on présente deux cas-test de soudage. La stratégie proposée permet des modélisations prenant en compte différents effets de non-linéarité à l'aide des codes de calcul industriels. Les abaques numériques sont enfin construits avec des applications à l'identification des paramètres du problème.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Stratégie de couplage</b>	<b>94</b>
<b>5.2</b>	<b>NeT - Task Group 4, TG4</b>	<b>95</b>
5.2.1	Présentation de la maquette	95
5.2.2	Modèle SYSWELD	98
5.2.3	Abaque numérique	100
5.2.4	Identification de paramètre	101
<b>5.3</b>	<b>Soudage de type Joint en T</b>	<b>105</b>
5.3.1	Modèle ABAQUS	106
5.3.2	Abaque numérique	107
5.3.3	Comparaison avec PARAFAC	108
5.3.4	Optimisation du procédé	111
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

## 5.1 Stratégie de couplage

On rappelle brièvement dans cette section la stratégie de couplage de la méthode proposée et les codes de calculs professionnels pour la construction d'abaques numériques de soudage (voir la FIGURE 5.1).

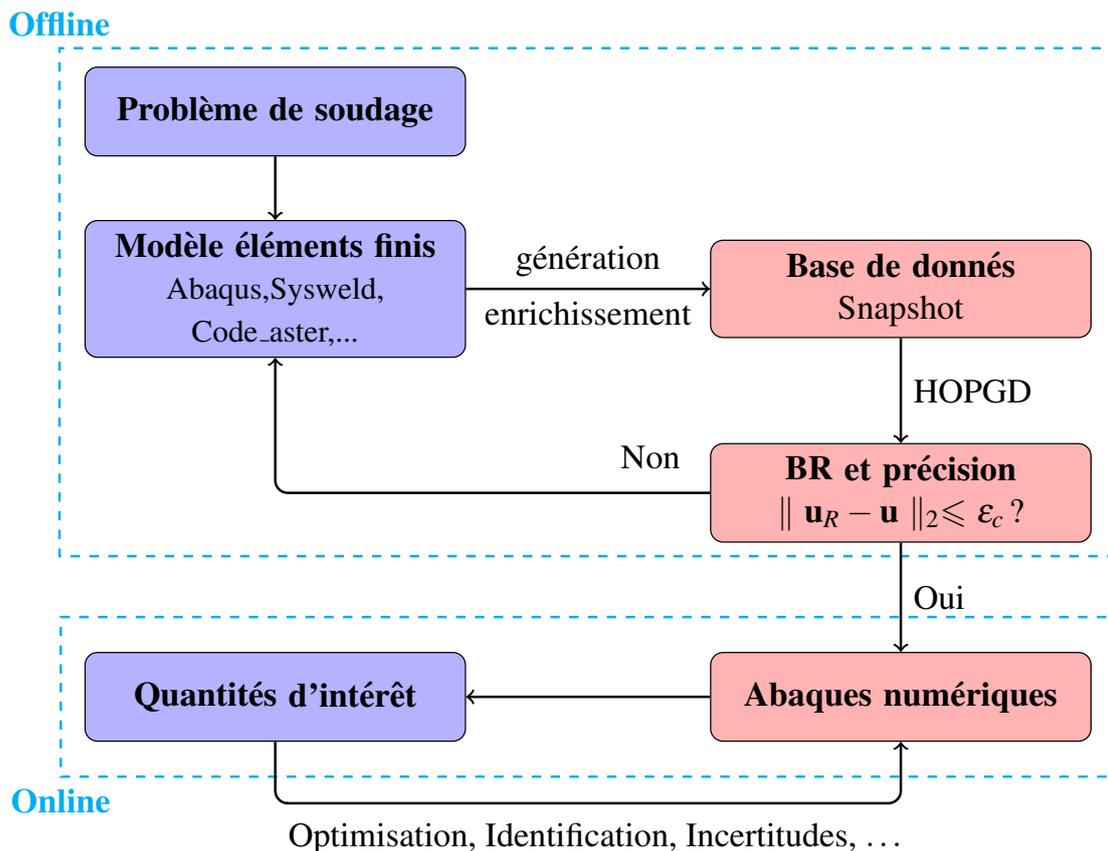


FIGURE 5.1 – Couplage HOPGD et code industriel

- **Phase offline** La phase *offline* consiste à générer une base de données de snapshots et les BRs fiables pour les quantités d'intérêt. Le problème de soudage est d'abord modélisé et résolu dans un code existant (ABAQUS, SYSWELD ou Code\_ASTER, etc) avec les approches EF classiques pour certaines valeurs de paramètres choisies dans l'espace concerné. On peut par exemple utiliser la méthode "sparse grids" adaptative pour échantillonnage. Les BRs sont ensuite calculées avec la HOPGD et évaluées par un indicateur d'erreur. En fonction de l'erreur des BRs, la base de données est enrichie jusqu'à une précision désirée.
- **Phase online** Dans la phase *online*, les abaques numériques formés par les BRs

peuvent donner les réponses en temps réel à toutes les valeurs définies dans l'espace de paramètres. L'utilisation de ces abaques peut réduire considérablement le temps d'optimisation, d'identification, ou de conception dans un problème de soudage par rapport aux approches classiques.

## 5.2 NeT - Task Group 4, TG4

European Network on Neutron Techniques Standardization for Structural Integrity (NeT) est établi en 2002 pour mission de développer des techniques et des normes expérimentales et numériques pour la caractérisation fiable des contraintes résiduelles en soudage [OHM]. Le réseau NeT implique plus de 35 organisations industrielles et académiques dont la majorité est en Europe, y compris AREVA, EDF, CEA, Rolls-Royce, etc. Les problèmes étudiés par le NeT sont attribués à une série des projets, appelés Task Groups (TGs), qui entreprend des études des méthodes de mesure et de modélisation numérique, ainsi que l'interprétation des résultats.

TG4 est un projet lancé en 2008, dédié à mesurer et prédire les contraintes résiduelles associées à une soudure austénitique à trois passes dans une plaque en acier inoxydable AISI 316LN. Dans cette section, on s'intéresse à un exemple de TG4 et la construction d'abaque pour identification des paramètres.

### 5.2.1 Présentation de la maquette

L'éprouvette à souder est une plaque de dimension 194 mm × 150 mm × 18 mm, avec une fente de 80 mm de long et 6 mm de profondeur au centre. Le matériau de base est l'acier AISI 316LN. Après un traitement thermique, la fente est remplie par l'apport de matériau (ER316L) avec 3 passes de soudure TIG (voir la FIGURE 5.2). Les paramètres de soudage sont illustrés dans le Tableau 5.1. Notons que le matériau de base et celui de remplissage restent austénitique tout au long de la soudure, aucune transformation de phase de l'état solide est pour autant nécessaire à prendre en compte dans la modélisation du problème.

	Courant	Tension d'arc	Vitesse	Flux de chaleur	Distance	$T_m$
Passé 1	220 A	10 V	1.27 mm/s	1732 J/mm	74 mm	22°C
Passé 2	195 A	10 V	1.27 mm/s	1635 J/mm	76 mm	58°C
Passé 3	185 A	10 V	1.27 mm/s	1457 J/mm	82 mm	60°C

Remarque.  $T_m$  désigne la température intermédiaire entre deux passes.

TABLE 5.1 – Paramètres de soudage de 3 passes [MUR 12, XU 11]

Pour les mesures, l'évolution de température est relevée par des thermo-couples enterrés dans l'éprouvette et positionnés dans les lignes spécifiques (FIGURE 5.3). Différentes méthodes ont été appliquées dans TG4 pour mesurer les contraintes résiduelles et prouvées capable d'avoir une mesure fiable. A titre d'exemple, on considère

## 5. Application soudage : couplage avec un code de calcul industriel

---

une ligne, notée par BD, qui a un grand intérêt pour la mesure, vue qu'elle traverse toutes les zones de réponse significative de la structure (FIGURE 5.4(a)). La FIGURE 5.4 montre les mesures des contraintes résiduelles sur la ligne BD avec les méthodes de diffraction. Particulièrement, les contraintes suivant l'axe  $z$  (direction de soudure) sont appelées contraintes longitudinales, les contraintes suivant l'axe  $x$  appelées contraintes transversales.



FIGURE 5.2 – Éprouvette de TG4 complète [SMI 15]

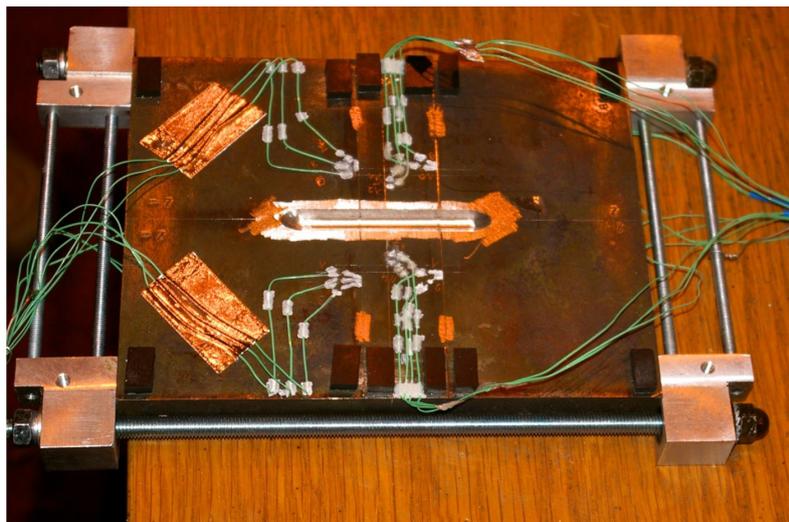
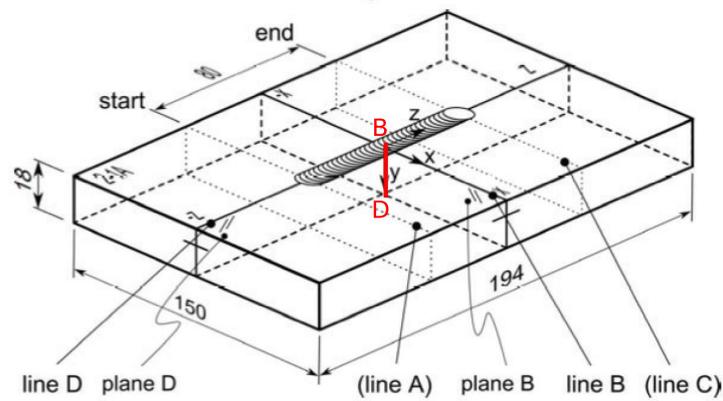


FIGURE 5.3 – Dispositif de mesure de température par thermo-couples [SMI 15]



(a) Ligne BD

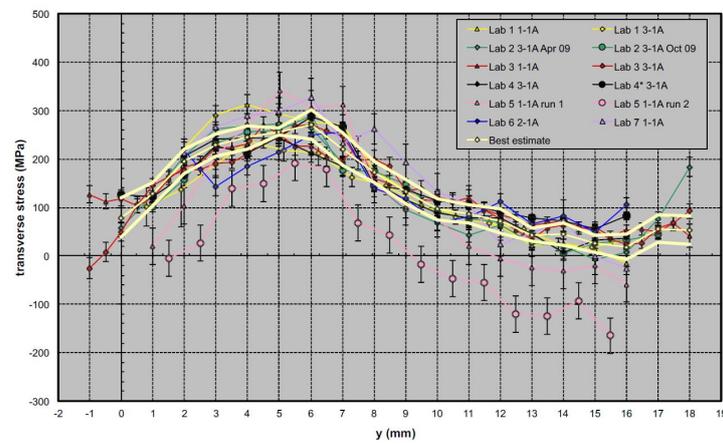
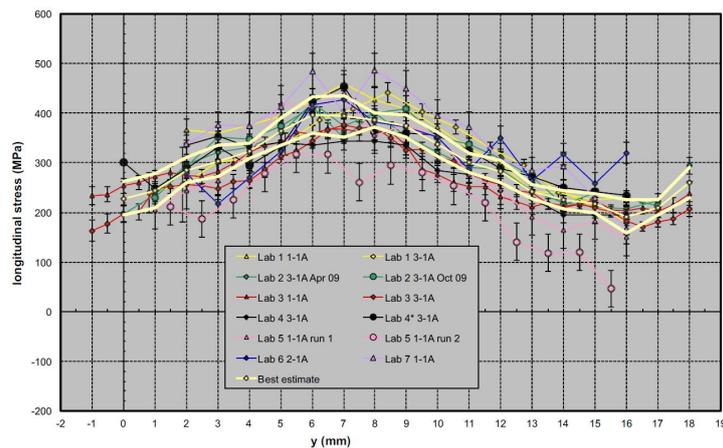
(b) Contraintes résiduelles transversales  $\sigma_{xx}$ (c) Contraintes résiduelles longitudinales  $\sigma_{zz}$ 

FIGURE 5.4 – Mesures des contraintes résiduelles sur la ligne BD avec les méthodes de diffraction [SMI 15]

## 5.2.2 Modèle SYSWELD

L'objectif de modélisation est de développer les modèles numériques qui peuvent prédire les contraintes résiduelles comparables avec les mesures expérimentales. AREVA a réalisé une modélisation de TG4 dans un code commercial SYSWELD [sys09] qui est développé par la société ESI-Group.

Comme montré dans la FIGURE 5.5, un semi-modèle 3D est construit selon le plan de symétrie le long de la ligne de soudure. Le modèle est maillé avec 22364 éléments hexaédriques. Les problèmes thermique et mécanique sont couplés au sens fort et donc résolus simultanément à chaque pas de temps. Vu que le matériau de base (AISI 361LN) et celui de remplissage (ER316L) ne diffèrent que dans les ingrédients Cr, les mêmes propriétés thermiques et mécaniques sont utilisées pour la plaque et les cordons [MUR 12]. Notons que les paramètres peuvent tous dépendre de la température dans la simulation.

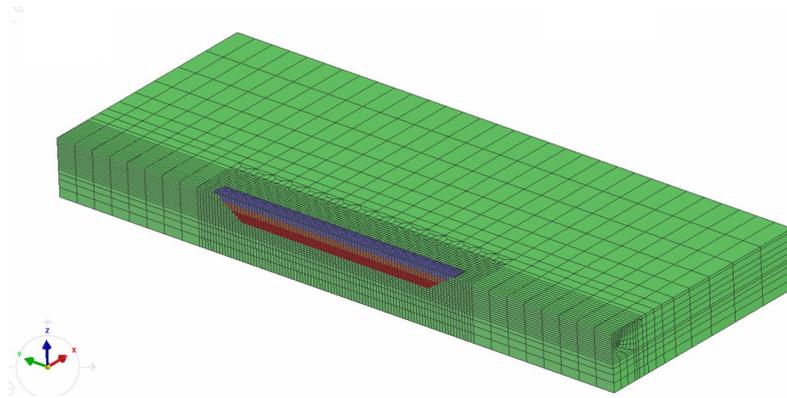


FIGURE 5.5 – Semi-modèle 3D de TG4 [XU 11]

Le chargement thermique est imposé par une routine Fortran qui génère un modèle double-ellipsoïdal (voir la FIGURE 5.6) proposé par [GOL 84] pour une distribution volumique de flux de chaleur. Ce modèle utilise deux distributions ellipsoïdales combinées pour décrire respectivement le devant et le derrière de l'électrode. Noté respectivement par  $f_1$  et  $f_2$  les fractions de l'apport de chaleur "devant" et "derrière", la distribution de densité de flux est décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} q(x_s, y_s, z_s) = \frac{6\sqrt{3}Qf_i}{abc_i\pi\sqrt{\pi}} e^{-\left(\left(\frac{x_s}{c_i}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_s}{b}\right)^2\right)} & i = 1, 2 \\ f_1 + f_2 = 2 \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $x_s, y_s, z_s$  sont les coordonnées du point considéré dans le repère mobile accroché à la source de chaleur.  $a, b$  et  $c_i$  sont les rayons de la distribution dans les directions latérale, verticale et axiale et indépendants dans les deux parties de flux. Si  $x_s \geq 0, i = 1$ , si  $x_s \leq 0, i = 2$ .

La distribution de la densité de puissance source à utiliser pour représenter la source de chaleur est alors définie par les paramètres de source d'ellipsoïde ( $a, b, c_1, c_2, f_1, f_2$ ) et

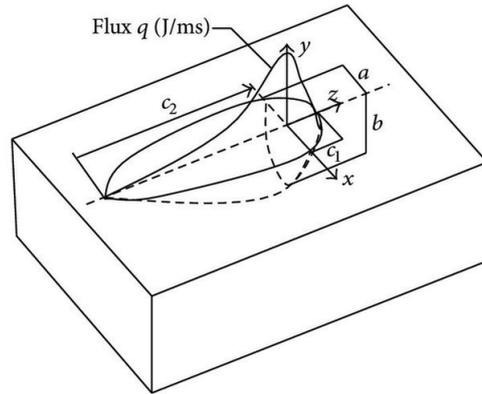


FIGURE 5.6 – Source de chaleur mobile elliptique [DIN 17]

le flux total imposé par la source  $Q$ . Ces paramètres doivent être déterminés par la zone de fusion observée et les réponses de thermocouples. Remarquons que le flux total est calculé avec le courant  $I$ , la tension  $U$ , et l'efficacité  $\eta$  de chaque passe :  $Q = \eta UI = \eta Q_w$ , parmi lesquels  $I$  et  $U$  peuvent être mesurés directement, mais l'efficacité doit être identifiée par une procédure d'optimisation à partir des réponses de thermocouples. Dans SYSWELD, les paramètres peuvent être ajustés par un outil appelé "Heat source fitting" pour avoir une bonne précision de simulation.

Les conditions convectives et de rayonnement sont imposées sur toutes les surfaces exposées. Les conditions aux limites affectent peu le champ de température lors de l'échauffement, mais principalement le séquence de refroidissement [SMI 09].

L'analyse mécanique de telle procédure subit des chargements cycliques (mécanique ou thermique) nécessite une loi d'écrouissage mixte pour le modèle du matériau. Dans l'exemple présent, un modèle d'écrouissage mixte qui combine un écrouissage cinématique non-linéaire et isotrope est utilisé :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{X}, p_{iso}) = J_2(\boldsymbol{\sigma} - (1 - p_{iso}) \mathbb{X}) - \sigma_y - p_{iso}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) - \sigma_y) \quad (5.2)$$

où le tenseur d'écrouissage cinématique  $\mathbb{X}$ , appelé aussi "back-stress tensor", est décomposé en deux parties :

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{X}}_1 = \frac{2}{3}c_1\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \gamma_1\mathbb{X}_1\dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbb{X}}_2 = \frac{2}{3}c_2\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \gamma_2\mathbb{X}_2\dot{\mathbf{p}} \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $(\sigma_y, c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2, p_{iso})$  sont les paramètres du modèle qui peuvent dépendre de la température. Particulièrement,  $p_{iso}$  est un coefficient de pondération entre l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope. Si  $p_{iso} = 1$ , on retrouve l'écrouissage purement isotrope, si  $p_{iso} = 0$ , ceci devient l'écrouissage cinématique.

La contrainte d'écrouissage isotrope est décrite comme la somme d'une contribution fortement non-linéaire et quasi-linéaire :

$$\sigma(p) = \sigma_y + c_1 p + \frac{c_2}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 p}) \quad (5.5)$$

En général,  $\gamma_1$  est supposé égale à 0. Les paramètres  $(\sigma_y, c_1, c_2, \gamma_2)$  peuvent être déterminés par l'essai de traction uni-axial et isotherme. Toutefois, l'effet de chargement cyclique dans un soudage de type multi-passe peut affecter les paramètres du matériau et est parfois difficile à déterminer par l'expérimentation, par exemple pour le coefficient de pondération  $p_{iso}$ . L'identification de ces paramètres nécessite donc un grand nombre de calculs similaires pour trouver les bonnes valeurs qui donnent une réponse coïncidente avec les mesures.

Cette procédure peut alors bénéficier des grands avantages d'abaques numériques pour réduire le temps lié à l'identification. La construction d'abaque numérique pour le TG4 avec la stratégie proposée est présentée dans la section suivante.

### 5.2.3 Abaque numérique

Dans le cadre de la thèse, le maillage et la résolution pour les snapshots sont effectués par la société ESI-Group dans le code SYSWELD. Les snapshots de TG4 sont transférés au LaMCoS pour la construction de BRs et de l'abaque numérique.

Comme une première tentative, un paramètre du matériau, la limite d'élasticité initiale  $\sigma_y$ , a été choisi pour la construction. Dans l'exemple présenté, la  $\sigma_y$  est considérée dépendante de la température. On considère que la variation de la limite peut être décrite par un paramètre d'amplitude  $k \in [0.8, 1.2]$ . La FIGURE 5.2.3 illustre l'évolution de la limite d'élasticité en fonction de la température ainsi que les variations par rapport au paramètre  $k$ .

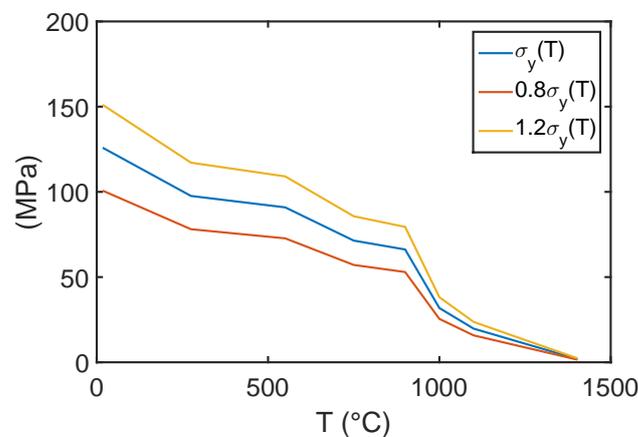


FIGURE 5.7 – Évolution de la limite d'élasticité en fonction de la température

On cherche alors les solutions paramétriques dans l'espace de paramètres sous la forme de BRs séparées avec la HOPGD :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, k) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}^m(k) \quad (5.6)$$

On utilise ici la méthode “multi-grilles” pour échantillonnage dans l'espace de paramètres. Le TABLEAU 5.2 indique l'erreur de l'abaque numérique construit pour les différents champs thermiques et mécaniques. Les erreurs sont calculées aux points d'évaluation avec l'indicateur de l'erreur (4.39). Pour le champ de température, l'influence de variations de la limite d'élasticité peut être bien reproduite avec seulement deux snapshots. Comme illustrés dans la FIGURE 5.8, les champs de température au cours du temps sont bien retrouvés avec les BRs de HOPGD avec une erreur négligeable. Pour une erreur inférieure à 10%, les champs de contraintes résiduelles transversales et longitudinales nécessitent un raffinement dans l'espace de paramètres (3 snapshots). La FIGURE 5.9 illustre les erreurs locales pour les contraintes résiduelles interpolées pour  $k = 0.9$ . On voit que les erreurs sont localisées dans les zones présentant de fortes gradients, mais elles restent inférieures à 10% et les champs de contraintes présentent globalement un bon accord avec les calculs de référence. En outre, selon le Tableau 5.2, le fait de stocker les BRs séparées a permis une réduction significative en mémoire, sachant que l'espace mémoire total au stockage des snapshots originaux et des BRs sont respectivement de 66 Mbytes et de 43 Mbytes.

	$\theta$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$
$E_{max}$	2%	8%	6%
Snapshots	2	3	3
Niveau de grille	0	1	1
Stockage de snapshots (Mbytes)	16	25	25
Stockage de BRs (Mbytes)	7	19	17

TABLE 5.2 – L'erreur maximale des solutions de l'abaque et la mémoire nécessaire au stockage de BRs

## 5.2.4 Identification de paramètre

Afin d'identifier les valeurs de paramètre  $k\sigma_y$  qui peuvent donner les prédictions coïncidentes avec les mesures des contraintes résiduelles, les surfaces de réponse ont été extraites de l'abaque numérique construit précédemment. Plus particulièrement, comme ce qui a été mentionné, on s'intéresse à la comparaison des contraintes transversales et longitudinales le long de la ligne BD. La FIGURE 5.10 illustre les surfaces de réponse en fonction de  $k$  et les mesures de référence.

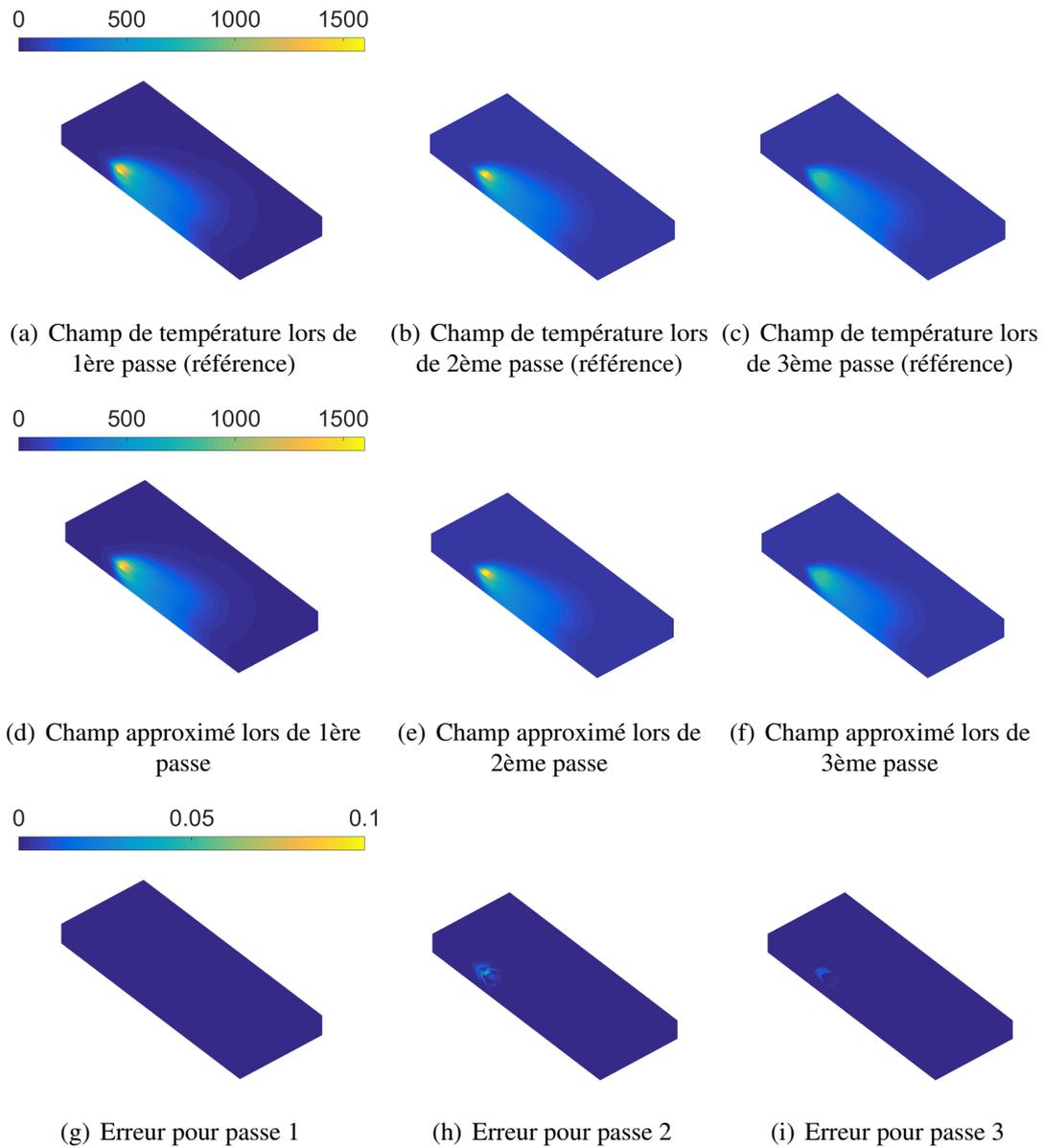


FIGURE 5.8 – Comparaison de champ de température avec les calculs de référence pour  $k = 1$

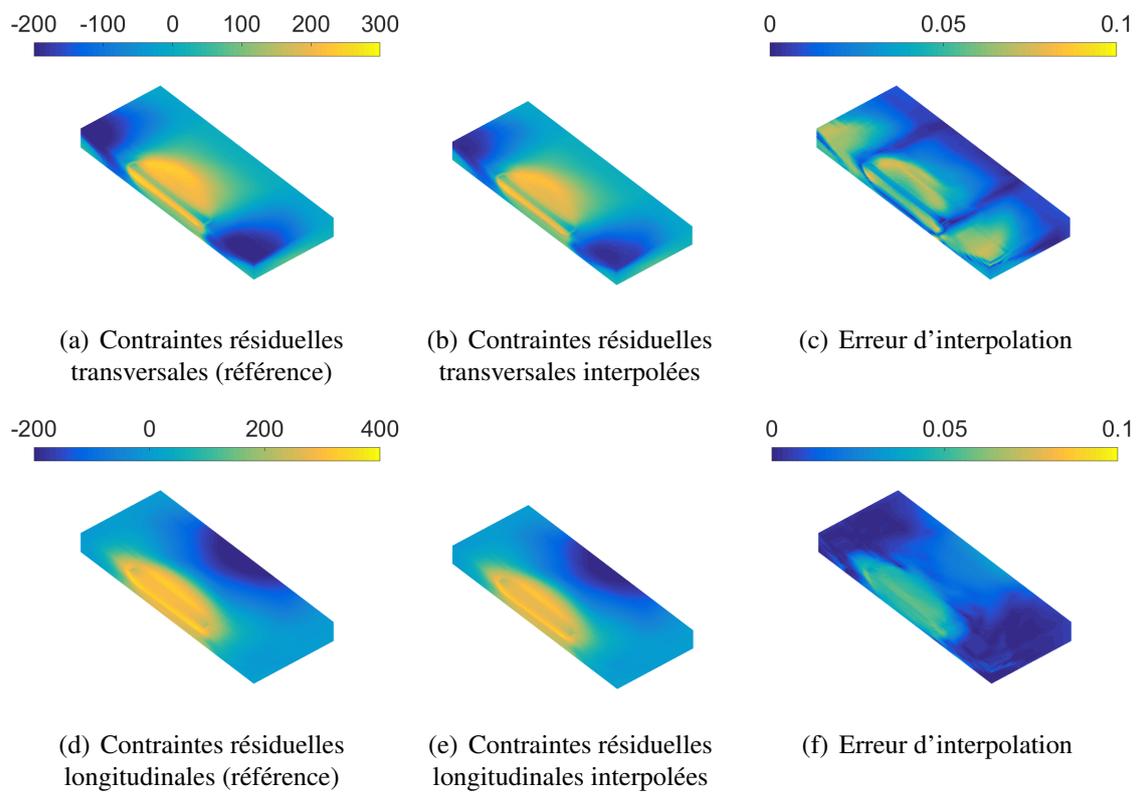
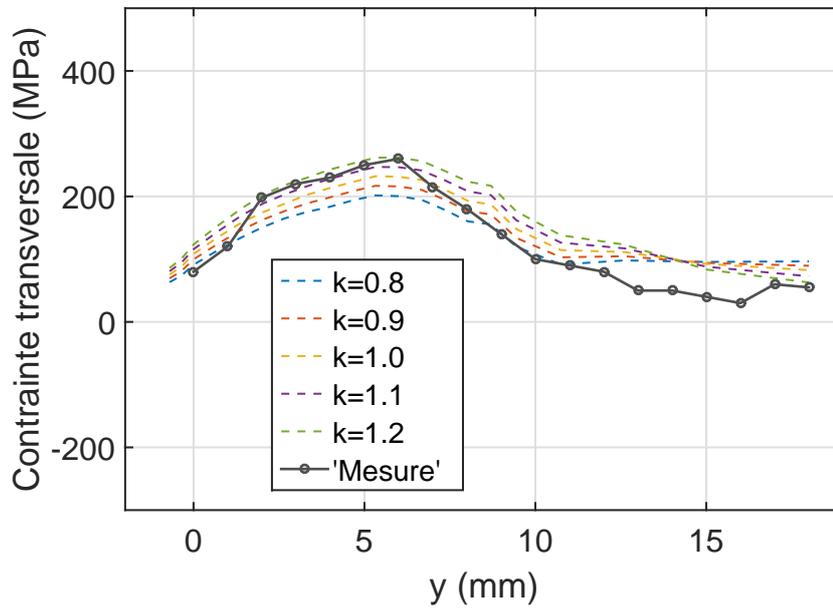
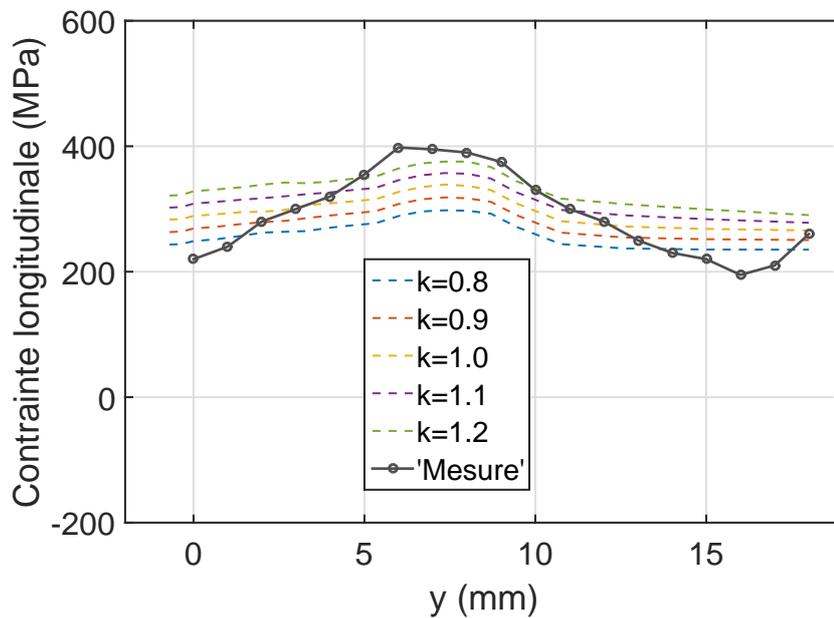


FIGURE 5.9 – Comparaison de champ de contraintes résiduelles avec les calculs de référence pour  $k = 0.9$



(a) Surface de réponse pour contraintes transversales  $\sigma_{xx}$



(b) Surface de réponse pour contraintes longitudinales  $\sigma_{zz}$

FIGURE 5.10 – Surfaces de réponse des contraintes résiduelles de la ligne BD en fonction de  $k$

L'identification de paramètre consiste alors à résoudre le problème de minimisation

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } k \in [0.8, 1.2] \text{ tel que} \\ k = \arg \min_{k^* \in [0.8, 1.2]} (\| \sigma_{xx} - \hat{\sigma}_{xx}(k^*) \|_2^2 + \| \sigma_{yy} - \hat{\sigma}_{yy}(k^*) \|_2^2) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont les mesures des contraintes résiduelles le long de la ligne BD,  $\hat{\sigma}$  sont les estimations données par la surface de réponse.

En général, ce type de problème de minimisation peut se résoudre par un algorithme du gradient par exemple [BAR 08]. Mais ici on peut utiliser une stratégie directe et résoudre rapidement ce problème, car toutes les solutions paramétriques ont été construites dans la phase *offline*. Remarquons que les approches classiques peuvent prendre beaucoup plus longtemps pour ce problème, car les calculs EF répétitifs pour estimer les contraintes résiduelles en soudage sont souvent prohibitifs.

### 5.3 Soudage de type Joint en T

Cette section est consacrée à étudier un soudage de type “Joint en T” avec le code de calcul commercial ABAQUS [HIB 01, GUO 17].

Différent de l'exemple précédent (soudure bout-à-bout), le joint en T est un autre type de soudure qui fait assembler deux pièces l'une sur l'autre à un angle de 90°. Ce type de soudure se présente souvent dans les structures aéronautiques qui jouent un rôle de raidisseur. L'effet de soudage peut provoquer les distorsions dans ce type de structure, comme illustré dans la FIGURE 5.11.

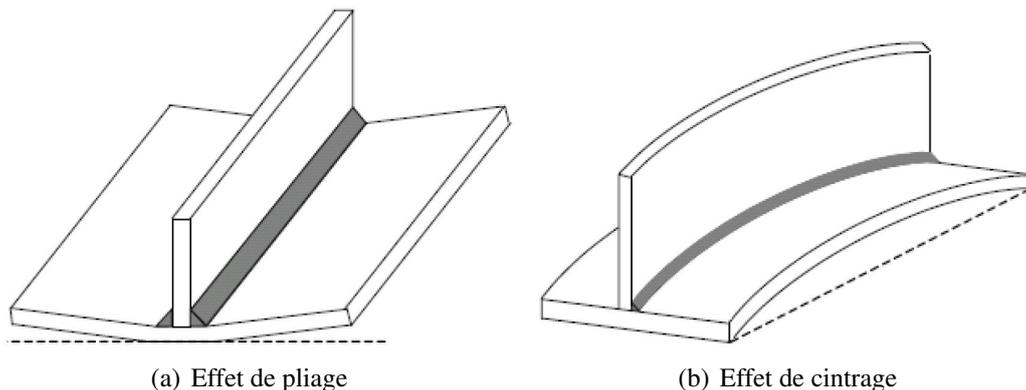


FIGURE 5.11 – Différents modes de distorsions [HAM 08]

On s'intéresse cette fois-ci à étudier l'influence des paramètres des matériaux et du procédé sur les distorsions dans ce type de soudage. L'objectif est de déterminer un jeu de paramètres permettant de minimiser les distorsions induites par la soudure.

### 5.3.1 Modèle ABAQUS

On considère ici l'assemblage de deux plaques d'épaisseur 3.2 mm en alliage inoxydable de base Nickel (AL-6XN). Le profil de structure à souder est montré dans la FIGURE 5.12. Le modèle est discrétisé avec les éléments de type C3D4T (tétraèdre avec un point d'intégration) [HIB 01]. La résolution du problème thermo-mécanique est basée sur une analyse en couplage fort. Les propriétés du matériau sont considérées dépendantes de la température, dont l'évolution est illustrée dans la FIGURE 5.13.

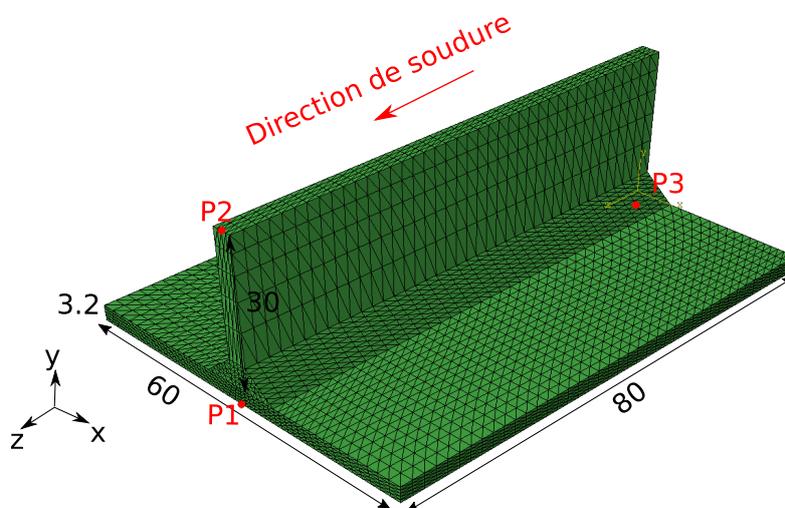


FIGURE 5.12 – Modèle EF dans ABAQUS (29571 éléments, 7299 nœuds)

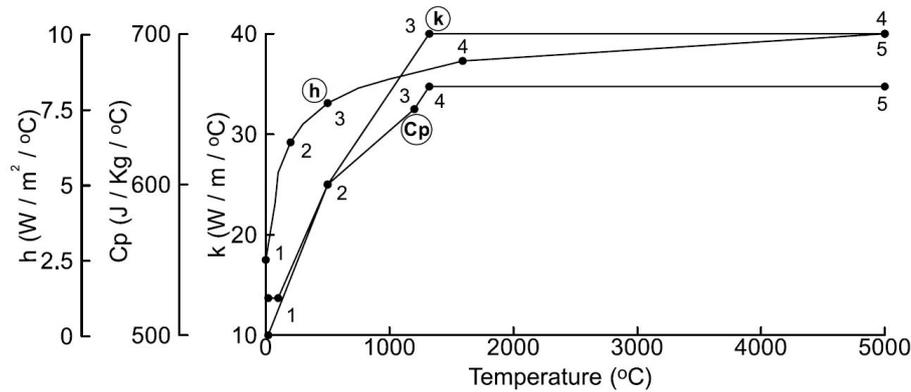
La modélisation du chargement thermique est similaire à l'exemple du TG4, le modèle double-ellipsoïdal (5.1) est utilisé. Dans cet exemple,  $f_1 = 0.6$  et  $f_2 = 1.4$ . Remarquons que le choix des facteurs affecte principalement le champ de température mais peu le champ de contrainte résiduelle.

Les conditions convectives sont imposées sur toutes les surfaces exposées, avec  $h$  le coefficient d'échange de convection qui est température-dépendant (voir la FIGURE 5.13(a)). Les déplacements des trois points indiqués dans la FIGURE 5.12 sont limités dans certaines directions, comme précisé dans le Tableau 5.3.

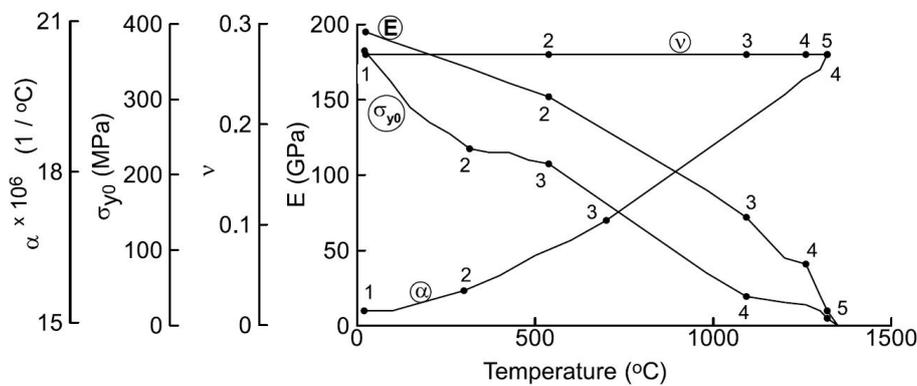
Point	Direction de déplacement limitée
P1	X, Y, Z
P2	X
P3	X, Y

TABLE 5.3 – Conditions aux limites mécaniques

Dans cet exemple, seulement une passe de soudure est prise en compte, on utilise alors un modèle de plasticité avec écrouissage isotrope :



(a) Propriétés thermiques



(b) Propriétés mécaniques

FIGURE 5.13 – Evolution des propriétés thermiques et mécaniques en fonction de la température pour AL-6XN [SON 03]

$$f(\sigma, p) = J_2(\sigma) - \sigma_{y,0} - R(p) \quad (5.8)$$

où une évolution exponentielle du domaine élastique est considérée :

$$R = R_\infty \left(1 - e^{-bp}\right) \quad (5.9)$$

Rappelons encore une fois, les paramètres du matériau et de conditions aux limites dépendent tous de la température dans le modèle. Ce problème thermo-mécanique est ainsi fortement non-linéaire. On s'intéresse alors dans la suite à l'influence des paramètres sur la distorsion de soudure.

### 5.3.2 Abaque numérique

On considère ici 3 paramètres variants de différentes natures : la capacité thermique  $C_p \in D_{C_p} = [C_p, 3C_p]$ , le module d'Young  $E \in D_E = [E, 3E]$  et le flux de chaleur total

$Q_w \in D_{Q_w} = [1500, 2680.4] \text{ W/mm}^3$ . Le domaine de variation peut être alors représenté par un espace 3D :  $D = D_{C_p} \times D_E \times D_{Q_w}$ . Pour simplification de notation, le domaine paramétrique équivalent est  $D = [1, 3] \times [1, 3] \times [1500, 2680.4]$ . On cherche donc les BRs des solutions thermo-mécaniques par une HOPGD 5D :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t, C_p, E, Q_w) \approx \sum_{m=1}^n \Phi^m(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{V}^m(t) \otimes \mathbf{F}_1^m(C_p) \otimes \mathbf{F}_2^m(E) \otimes \mathbf{F}_3^m(Q_w) \quad (5.10)$$

Avec la méthode d'échantillonnage "sparse grids", certains points dans l'espace de paramètres ont été choisis et les snapshots ont été calculés avec ABAQUS. Dans cet exemple, on s'intéresse à la distorsion de structure, en pratique les déplacements dans la direction  $z$  :  $U_z$ . La FIGURE 5.14 montre la grille finale avec un raffinement de niveau 1 pour une erreur maximale inférieure à 10%. Comme indiqué dans le Tableau 5.4, l'erreur maximale de déplacements interpolés par les BRs est de 8%, et la réduction de mémoire de stockage est remarquable, grâce à la séparation de variables. On donne également, dans le Tableau 5.4, les erreurs des champs de température et de contraintes résiduelles associés à la grille initiale. Le champ de température peut être bien approximé avec 7 snapshots, alors qu'une bonne approximation de contraintes résiduelles nécessite plus de raffinements dans l'espace de paramètres. La FIGURE 5.15 illustre une comparaison avec des solutions thermo-mécaniques de calcul EF complet.

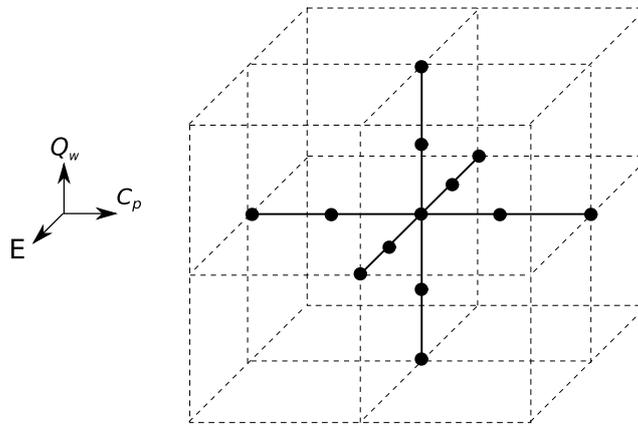


FIGURE 5.14 – Sparse grid de niveau 1 avec un raffinement dans l'espace de paramètres  $D = D_{C_p} \times D_E \times D_{Q_w}$

### 5.3.3 Comparaison avec PARAFAC

Pour comparaison, la méthode PARAFAC est utilisée cette fois-ci pour construire la séparation de variables. Basé sur la même grille que précédemment (FIGURE 5.14), 8 modes de PARAFAC ont été construits avec les 13 snapshots situés dans les axes du domaine pour les champs de température et de contraintes résiduelles. Cette décomposition

	$\theta$	$\sigma_{VM}$	$U_z$
Erreur maximale	5%	27%	8%
Snapshots	13	13	13
Niveau de grille (raffinement)	0 (1)	0 (1)	0 (1)
Stockage de snapshots (Mbyts)	-	-	37
Stockage de BRs (Mbyts)	-	-	4.8

TABLE 5.4 – L’erreur maximale des solutions de l’abaque 7D et la mémoire nécessaire au stockage des BRs

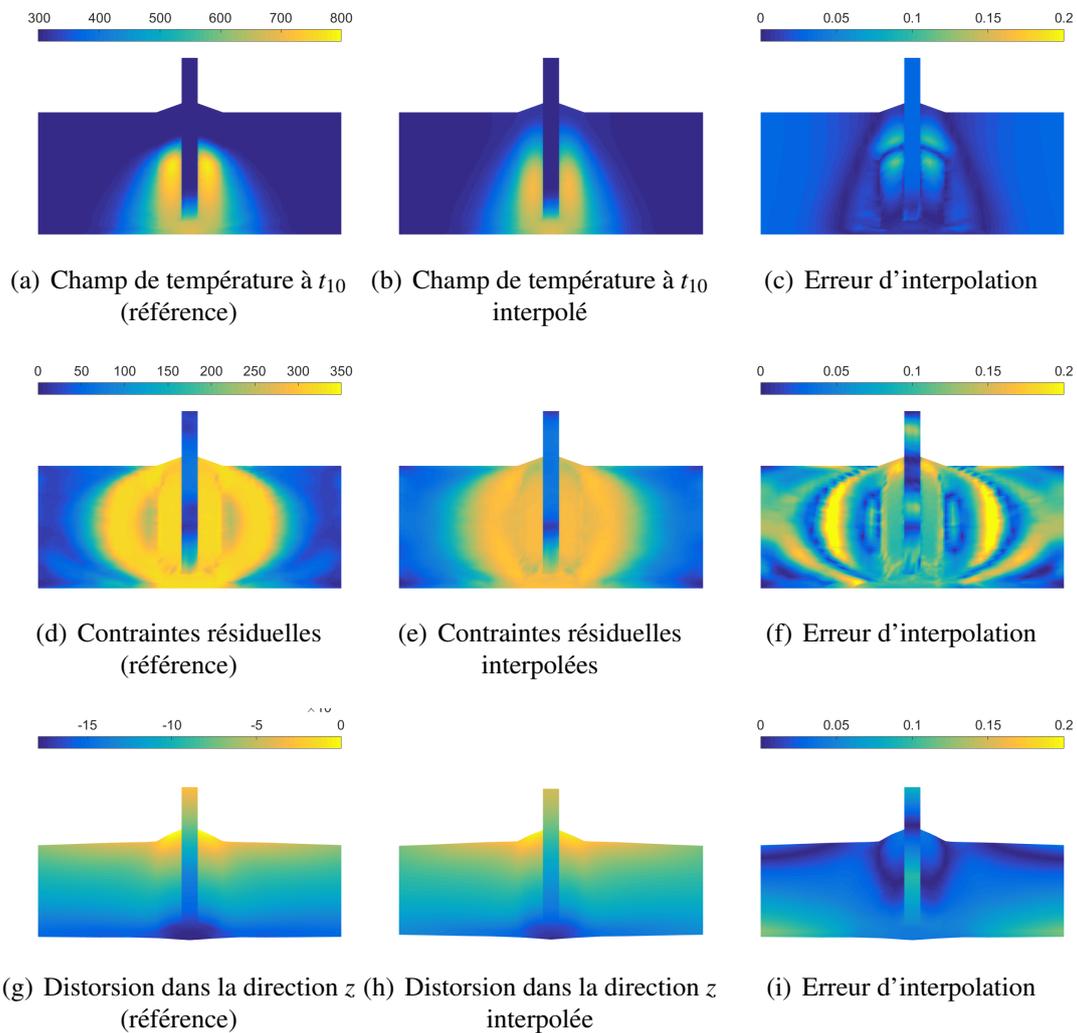


FIGURE 5.15 – Comparaison des solutions de l’abaque avec les calculs de référence pour le point (1.5,1.5,1800)

est effectuée en utilisant la “N-way tool toolbox” [AND 00] disponible dans Matlab. Les fonctions associées aux paramètres sont tracées dans la FIGURE 5.16. Comme illustré

dans la FIGURE 5.17, les 8 modes peuvent bien représenter les snapshots donnés avec une erreur de troncature fixée à 1%.

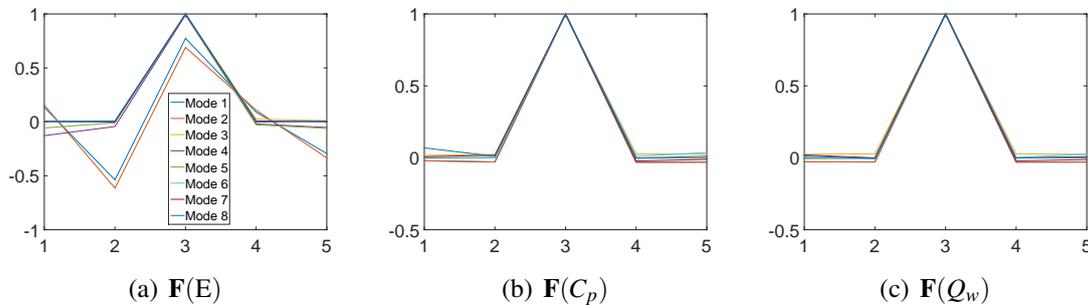
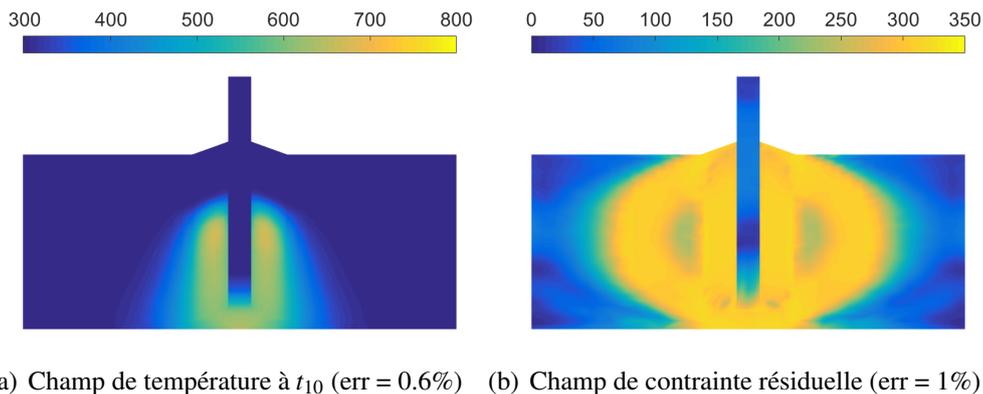


FIGURE 5.16 – Les fonctions de paramètres séparées par PARAFAC :  $\mathbf{F}(E)$ ,  $\mathbf{F}(C_p)$ ,  $\mathbf{F}(Q_w)$



(a) Champ de température à  $t_{10}$  (err = 0.6%) (b) Champ de contrainte résiduelle (err = 1%)

FIGURE 5.17 – Solutions reproduites par 8 modes de PARAFAC pour un point de snapshot (2, 2, 2000)

On utilise alors les 8 modes pour interpoler les points “hors de l’axe”. La FIGURE 5.18 illustre les solutions interpolées pour deux points d’évaluation (1.5, 1.5, 1800) et (2.5, 1.5, 1800). On peut voir que l’erreur reste toujours hors tolérance, tant pour le champ thermique que pour le champ mécanique. En effet, les champs interpolés n’ont pas le bon ordre de grandeur, bien que les gradients du champ approché apparaissent dans certains cas. Ce problème peut être expliqué par le fait que les fonctions construites avec la “sparse grid” perdent leur homogénéité d’unité dans les points de support. Bien évidemment, on peut constater dans la FIGURE 5.16 que les valeurs des fonctions au point 3 n’ont pas le même ordre de grandeur que les autres valeurs, ce qui fausse la variation intrinsèque des modes. Par conséquent, les solutions interpolées pour les points “hors de l’axe” ont perdu l’homogénéité. Pour éviter ce problème associé aux données (snapshots) de type “sparse grids”, l’homogénéité dans les points de support doit être prise en compte dans la construction des modes.

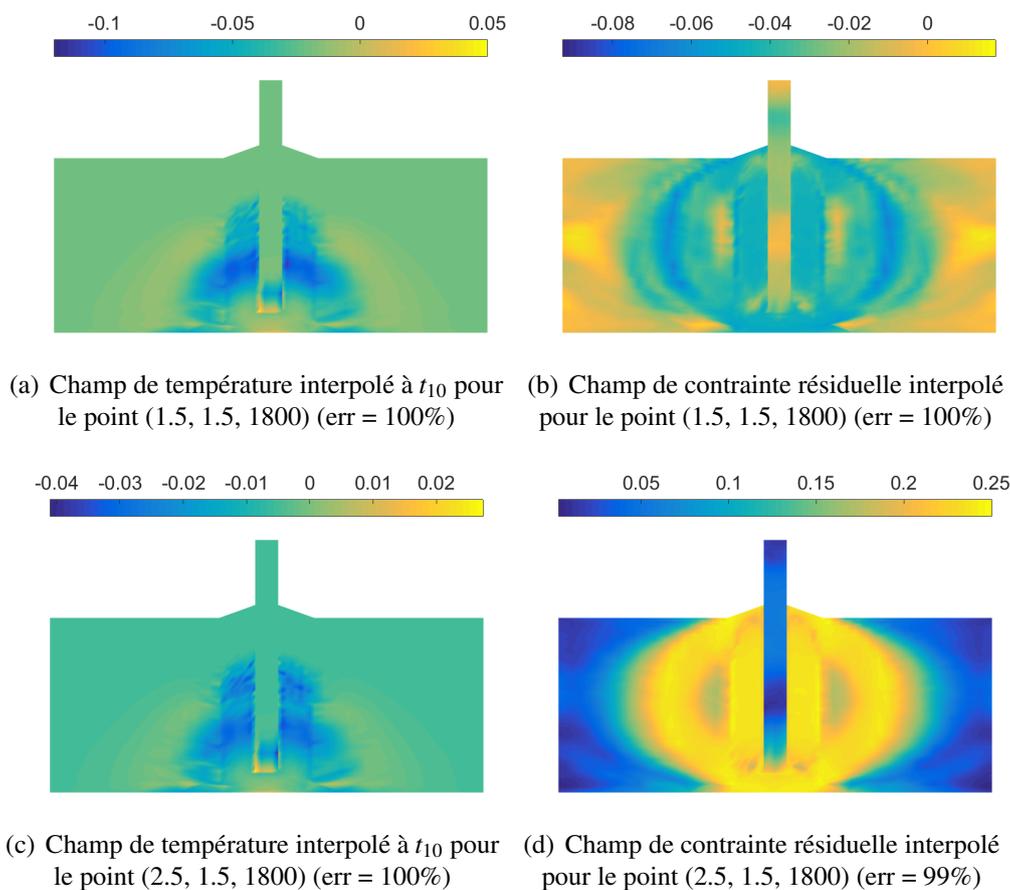


FIGURE 5.18 – Solutions interpolées par 8 modes de PARAFAC pour les points “hors de l’axe”, (a)(b) : point (1.5, 1.5, 1800), (c)(d) : point (2.5, 1.5, 1800)

**Remarque 1:** *Le même problème peut également apparaître dans la méthode HOPGD, il a été réglé avec la projection de résidu dans l’implémentation de HOPGD avec “sparse grids”.*

### 5.3.4 Optimisation du procédé

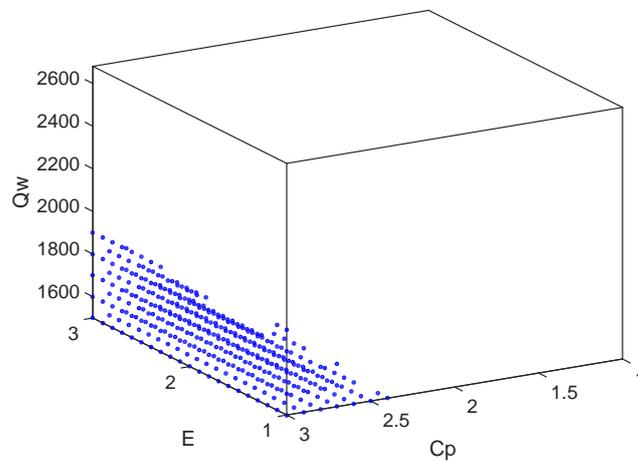
Dans cette section, on illustre l’application de l’abaque numérique à l’optimisation du procédé de soudage. En pratique, pour limiter les distorsions ou les contraintes résiduelles dans une structure soudée, les paramètres de matériaux et de chargements doivent être bien choisis. Le problème à résoudre peut s’écrire comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_1, \dots, p_d \in D_{p_1} \times \dots \times D_{p_d} \text{ tel que} \\ \max(\| \mathbf{U}(p_1, \dots, p_d) \|) \leq U_c \\ \text{et/ou } \max(\sigma_{VM}(p_1, \dots, p_d)) \leq \sigma_c \end{cases} \quad (5.11)$$

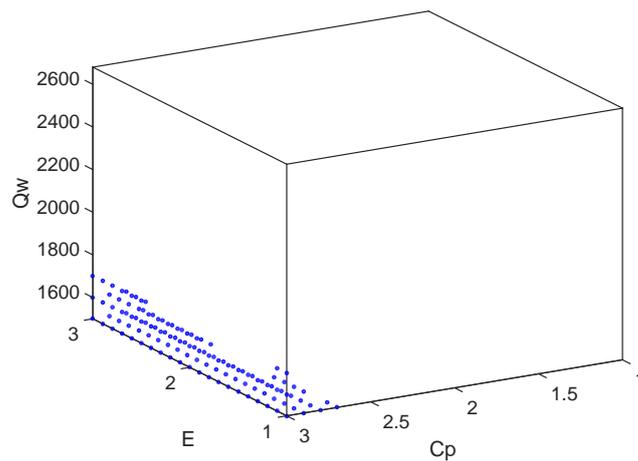
## 5. Application soudage : couplage avec un code de calcul industriel

où  $p_1, \dots, p_d$  sont les paramètres à choisir dans le domaine de variations  $D_{p_1} \times \dots \times D_{p_d}$ .  $U_c$  (resp.  $\sigma_c$ ) est une valeur de tolérance de distorsion (resp. contrainte résiduelle) donnée.

Dans cet exemple, on cherche à minimiser le déplacement suivant la direction  $z$ . En se donnant les différentes valeurs de tolérance  $U_c$ , l'abaque numérique a permis d'identifier rapidement les domaines de paramètres optimaux. La FIGURE 5.19 illustre les solutions données par l'abaque numérique construit précédemment pour deux valeurs de tolérance de distorsion. Comme montré dans le Tableau 5.5, le temps d'optimisation est significativement réduit grâce à la disponibilité des solutions dans l'abaque. L'abaque numérique ne nécessite que 88s pour l'optimisation *online*, alors que une approche directe avec de nombreux calculs de tentatives dans l'espace de paramètres demande 1764h (73 jours) pour ce type de problème.



(a) Valeurs de paramètres optimisées pour  $U_c = 1.2 \times 10^{-4}$



(b) Valeurs de paramètres optimisées pour  $U_c = 1.1 \times 10^{-4}$

FIGURE 5.19 – Domaines de paramètres optimaux donnés par l'abaque numérique

---

Temps CPU	Abaque numérique	Approche standard
Offline	31 h	-
Online	88 s	1764 h

TABLE 5.5 – Comparaison de temps CPU avec une approche directe standard

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les avantages de l’aspect non-intrusif de la stratégie proposée pour construire les abaques numériques de soudage ont été illustrés. Le couplage avec les codes de calcul disponibles a permis des applications aux problèmes de soudage étudiés dans l’environnement industriel. Deux logiciels commerciaux, SYSWELD et ABAQUS, ont été employés pour la construction de l’abaque numérique, afin d’étudier les case-tests pris en considération.

A travers deux exemples présentés, l’efficacité des abaques numériques pour les problèmes dans lesquels les tâches répétitives sont prohibitives, tels que l’identification et l’optimisation de paramètres de problème, a été montrée. Grâce à la réponse en temps réel de la phase *online* pour toutes les solutions potentielles, ce type de problèmes peut être résolu rapidement par les stratégies directes. Ceci ouvre également des possibilités de concevoir des nouvelles stratégies pour les problèmes d’optimisation.

L’efficacité de la méthode HOPGD a été également démontrée. Les solutions interpolées dans l’espace de paramètres présentent une bonne précision, comparé avec les calculs dans un code EF. La séparation des variables a permis d’économiser la mémoire de stockage. Pour comparaison, la méthode PARAFAC a été testée dans un exemple 7D avec les “sparse grids”. Il est montré qu’une version standard de cette méthode ne marche que pour les matrices complètes, car les résultats interpolés dans une grille creuse pour les points “hors de l’axe” présentent toujours une erreur importante. C’est-à-dire une adaptation de ce type de méthode aux “sparse tensors” est nécessaire pour effectuer l’interpolation dans une grille creuse.



# Bilan et perspectives

## Bilan

Dans ce manuscrit, une nouvelle stratégie *a posteriori* non-intrusive a été développée pour la construction des abaques numériques de soudage sur la base d’approches MOR. Basé sur les concepts de l’optimalité de l’abaque, et du contrôle de précision, deux types de méthodes ont été proposées.

La première méthode consiste en une extension de la méthode “Interpolation Grassmannienne” proposée à l’origine pour adapter les modèles réduits (POD-base spatiale) de type *a posteriori*. Cette méthode d’interpolation a été étendue dans ce travail à l’adaptation de l’ensemble des bases réduites spatio-temporelles. Ce type d’approche est non-intrusif et a permis de trouver les solutions paramétriques espace-temps en temps réel : aucun calcul complexe n’est nécessaire dans la phase *online*. Dans certains cas non-linéaires, ce type d’approche présente une meilleure précision par rapport aux méthodes d’interpolation standards. L’optimalité de cette méthode est garantie par une étude de réductibilité du problème de soudage. Une approche dans la base mobile qui permet une meilleur réductibilité est également utilisée pour l’analyse thermique. Pour éviter une génération exhaustive des snapshots dans l’espace de paramètres, une méthode d’échantillonnage “multi-grilles” a été proposée pour la sélection optimale des snapshots. Couplée avec un indicateur d’erreur *a posteriori*, cette méthode permet une sélection automatique adaptative des snapshots dans l’espace de paramètres pour une précision de base réduite désirée et tolérée pour l’utilisation. L’application de cette méthode a permis de construire les abaques numériques à précision contrôlée pour un cas thermo-mécanique transitoire non-linéaire. Les avantages de cette méthode résident dans l’optimalité des bases réduites POD, et sa capacité à être utilisée pour les problèmes non-linéaires. Cependant, la méthode se limite en 2 ou 3 paramètres.

L’extension de la stratégie proposée aux cas multi-paramétriques a été faite avec la méthode HOPGD. Cette méthode peut être vue comme une extension de la méthode POD aux cas d’ordre élevé. D’une manière *a posteriori*, la HOPGD est capable de construire une représentation à variables séparées des solutions données. Elle permet donc de garder à la fois d’une part l’avantage de séparation de variables pour les problèmes multi-paramétriques, comme la méthode PGD, et d’autre part l’aspect non-intrusif de la méthode. Pour l’optimisation de la méthode, des techniques d’accélération de convergence (la méthode Aitken  $\delta^2$  et une méthode d’extrapolation) ont été implémentées dans

la HOPGD. Un gain significatif de la vitesse de convergence a été obtenu. Afin de limiter la croissance exponentielle du nombre de snapshots due à l'augmentation de la dimension du problème étudié, une nouvelle stratégie d'échantillonnage efficace a été proposée. Inspiré par la méthode "sparse grids", nous proposons un raffinement "multi-axial" dans l'espace de paramètres. Contrôlés par un indicateur d'erreur *a posteriori*, ces raffinements conduisent à une "sparse grid" adaptative dans l'espace de paramètres. L'efficacité et la convergence de la méthode ont été prouvées dans divers exemples présentés. Il est montré que les "sparse grids" permettent une réduction considérable du nombre de snapshots par rapport aux grilles complètes. Ainsi, des abaques numériques multi-paramétriques de dimension élevée (10D) ont pu être construits. Les paramètres de différentes natures (matériaux, chargements, géométrie) ont été considérés pour développer les abaques dédiés au soudage.

Le potentiel de la stratégie proposée pour l'application aux cas industriels de soudage a été prouvé. L'aspect non-intrusif de la méthode permet de la rendre applicable au cas d'un code de calcul professionnel disponible pour la construction des abaques de soudage. Deux logiciels commerciaux, ABAQUS et SYSWELD, ont été employés dans les exemples étudiés qui prennent en compte les différents effets de non-linéarité, tels que la forte non-linéarité de la plasticité du matériau, la dépendance de température des paramètres, etc. Dans une première tentative, les paramètres de matériaux et du chargement sont considérés dans la construction des abaques. Les avantages de l'utilisation des abaques numériques de soudage ont été illustrés dans les problèmes de l'identification de paramètres du modèle et de l'optimisation du procédé.

## Perspectives

Des perspectives pour l'amélioration et les applications industrielles de la stratégie proposée peuvent être envisagées :

— Optimalité des bases réduites HOPGD

Sachant que les bases réduites construites par la HOPGD ne sont pas optimales, des améliorations potentielles peuvent être apportées :

1. L'intégration d'une procédure d'orthogonalisation dans la construction de HOPGD. [GIA 16] a proposé d'intégrer une procédure d'orthogonalisation itérative dans la méthode *a priori* PGD, afin de construire des bases réduites quasi-optimales espace-temps. Cette procédure est basée sur l'algorithme de Gram-Schmidt [GRA 84]. En alternant l'orthogonalisation de bases spatiale et temporelle dans chaque enrichissement de PGD, cette méthode permet d'avoir une approximation de rang réduit des solutions considérées. L'extension de cette méthode aux cas multi-paramétriques est envisageable pour l'intégrer dans la construction HOPGD.
2. Amélioration de l'algorithme glouton. L'approximation construite par l'algorithme glouton n'est pas optimale. En effet, on a constaté que l'erreur de

l'approximation HOPGD peut converger très lentement dans certains cas. Comme ce qui a été présenté dans le chapitre 2, des méthodes ont été proposées pour améliorer la précision de l'approximation dans le cadre de PGD. [BOU 13b, FAL 12, NOU 10a] ont proposé une étape itérative de mise à jour des modes courants dans la construction gloutonne. En outre, des algorithmes gloutons avec une étape de projection sur une base réduite peuvent être également envisagés [AMM 07, GIR 12]. La performance des différentes stratégies dans la HOPGD doit être étudiée.

— Indicateur d'erreur

L'indicateur d'erreur utilisé dans la stratégie d'échantillonnage est défini comme la différence entre la solution interpolée et la solution EF "exacte". L'évaluation d'erreur nécessite donc des calculs HFM pouvant être prohibitifs dans le cas de dimension élevée. Une piste pour éviter ce type de problème est d'envisager un indicateur de résidu défini dans le problème multi-dimensionnel, comme le critère d'arrêt utilisé pour la convergence de la méthode *a priori* PGD [AMM 06a, CHA 17, LAD 18].

— Variations géométriques

Pour traiter les paramètres géométriques dans le cadre de ce travail, une technique simplifiée de type "morphing" a été utilisée en faisant intervenir une configuration de référence sur laquelle les solutions sont projetées. Cette technique est conçue pour un cas simple de variation géométrique avec maillage régulier (seulement l'épaisseur de la plaque est prise en compte). Dans un cas plus général, un morphing de maillage, telle que la minimisation de l'énergie de Dirichlet [GAL 11, ALA 17, ALA 16], doit être envisagé.

— Couplage de l'interpolation Grassmannienne et la HOPGD

Le potentiel de la méthode "Interpolation Grassmannienne" pour les problèmes non-linéaires a été montré dans le chapitre 3. En effet, une meilleure qualité d'interpolation a été constatée avec cette méthode dans les exemples présentés, comparé avec une méthode d'interpolation linéaire locale. Sa limitation pour un cas multi-paramétrique ( $d > 3$ ) réside dans la méthode d'interpolation utilisée (fonction d'interpolation d'EF) dans le plan tangent de la variété Grassmannienne. Afin de pouvoir profiter de l'avantage de séparation de variables dans cette méthode, on peut utiliser la HOPGD pour l'interpolation dans le plan tangent de la variété. La stratégie d'échantillonnage développée avec la méthode HOPGD devient ensuite applicable dans ce type d'approche. Dans ce cas, la méthode Grassmann-HOPGD doit être comparée avec la méthode HOPGD directe.

— Applications soudage

1. Identification de paramètres pour TG4. Dans le chapitre 5, un paramètre du matériau a été considéré dans la construction de l'abaque numérique, afin d'iden-

tifier sa valeur dans le modèle numérique avec les mesures expérimentales. Cependant, une meilleure solution doit prendre en compte les effets de couplage de différents paramètres. Dans ce cas, un abaque multi-paramétrique considérant les paramètres des propriétés thermique et mécanique dans la loi de comportement utilisée, ou encore les paramètres du chargement (liés la modélisation de l'apport de chaleur) doit être construit.

2. Contrôle virtuel du procédé. Une application qui nécessite strictement une simulation en temps réel est le contrôle virtuel du procédé. Dans ce cas, la construction de l'abaque numérique doit prendre en compte particulièrement les paramètres liés au chargement, tels que le flux de chaleur d'entrée, la vitesse de source, ou trajectoire de soudure, etc.

## Implémentation de HOPGD avec sparse grids

La discrétisation de  $f$  dans l'espace de paramètres est représentée par une matrice de dimension  $d$  :  $\mathbf{f}_h$ . Considérons une matrice creuse 2D  $\mathbf{f}_h \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$  qu'avec les valeurs non-nulles (snapshots) sur ses deux axes symétriques :  $D^h|_{\mu_1}$  et  $D^h|_{\mu_2}$ , où  $k_1$  et  $k_2$  désignent respectivement les discrétisations dans les deux directions  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . L'approximation d'ordre  $n$  par HOPGD s'écrit alors sous la forme discrétisée :

$$\mathbf{f}_h^n(\mu_1, \mu_2) = \mathbf{f}_h^{n-1} + \mathbf{F}_1(\mu_1) \otimes \mathbf{F}_2(\mu_2) \quad (5.12)$$

Bien que la matrice de snapshots  $\mathbf{f}_h$  soit creuse, son approximation  $\mathbf{f}_h^n$  peut être une matrice pleine grâce à l'opérateur " $\otimes$ " (voir par exemple FIGURE 5.20).

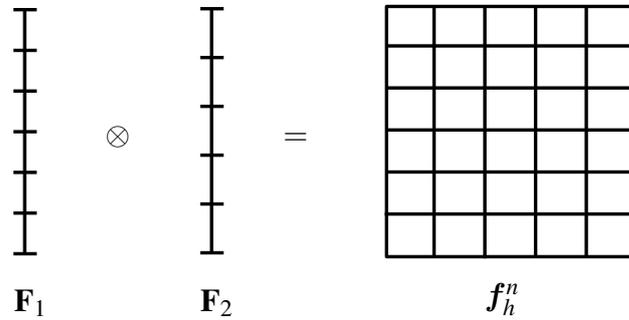


FIGURE 5.20 – Supports pour les fonctions de HOPGD. Gauche : discrétisation directionnel ( $D^h|_{\mu_1}, D^h|_{\mu_2}$ ). Droit : discrétisation de l'espace de paramètres ( $D^h$ )

Supposons que  $\mathbf{f}_h^{n-1}$  est déjà calculée précédemment, les fonctions d'enrichissement  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  peuvent se calculer avec les valeurs non-nulles de  $\mathbf{f}_h$  en définissant une projection de résidu comme suit :

$$\mathbf{R}|_{\mu_d}(k, l) = \begin{cases} 0 & (k, l) \notin D^h|_{\mu_d} \\ \mathbf{R}(k, l) & (k, l) \in D^h|_{\mu_d} \end{cases} \quad d = 1, 2 \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{R} = \mathbf{f}_h - \mathbf{f}_h^{n-1}$  est la matrice de résidu avant la projection. La minimisation locale (4.8) à résoudre devient :

$$(\delta \mathbf{f}_h, \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2) = (\delta \mathbf{f}_h, \mathbf{R}|_{\mu_d}) \quad (5.14)$$

où  $\delta \mathbf{f}_h = \delta \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \otimes \delta \mathbf{F}_2$ . La projection de résidu permet de prendre en compte seulement les valeurs non-nulles de la matrice creuse lors du calcul des fonctions séparées  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ . L'intégrale dans l'ensemble du domaine multidimensionnel  $D$  est également évitée. Le point fixe alterné est ensuite utilisé pour résoudre le problème.

Étape 1. Supposons que  $\mathbf{F}_2$  est connue, alors  $\delta \mathbf{f}_h = \delta \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2$ . L'équation (5.14) devient :

$$(\delta \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2) = (\delta \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2, \mathbf{R}|_{\mu_1}) \quad (5.15)$$

ou

$$(\delta \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^T, \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^T) = (\delta \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^T, \mathbf{R}|_{\mu_1}) \quad (5.16)$$

La solution donne :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{R}|_{\mu_1} \mathbf{F}_2 (\mathbf{F}_2^T \mathbf{F}_2)^{-1} \quad (5.17)$$

Étape 2. De manière analogique, considérons  $\mathbf{F}_1$  est connue avec l'équation (5.17), alors  $\delta \mathbf{f}_h = \mathbf{F}_1 \otimes \delta \mathbf{F}_2$ . La solution du problème (5.14) donne :

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{R}|_{\mu_2}^T \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_1)^{-1} \quad (5.18)$$

Les fonctions d'enrichissement finales pour  $n$ -ième mode sont obtenues lorsque les deux étapes sont répétées jusqu'à la convergence.

# Bibliographie

- [ABS 04] ABSIL P.-A., MAHONY R., SEPULCHRE R.  
Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation. *Acta Applicandae Mathematica*, vol. 80, n° 2, 2004, p. 199–220, Springer.
- [ABS 09] ABSIL P.-A., MAHONY R., SEPULCHRE R.  
*Optimization algorithms on matrix manifolds*. Princeton University Press, 2009.
- [ACA 11] ACAR E., DUNLAVY D. M., KOLDA T. G.  
A scalable optimization approach for fitting canonical tensor decompositions. *Journal of Chemometrics*, vol. 25, n° 2, 2011, p. 67–86, Wiley Online Library.
- [AGU 15] AGUADO J. V., HUERTA A., CHINESTA F., CUETO E.  
Real-time monitoring of thermal processes by reduced-order modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n° 5, 2015, p. 991–1017, Wiley Online Library.
- [ALA 16] AL AKHRAS H., ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., ROCHETTE M.  
Isogeometric analysis-suitable trivariate NURBS models from standard B-Rep models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 307, 2016, p. 256–274, Elsevier.
- [ALA 17] AL AKHRAS H., ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., ROCHETTE M.  
Towards an automatic isogeometric analysis suitable trivariate models generation—Application to geometric parametric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 316, 2017, p. 623–645, Elsevier.
- [ALL 15] ALLIER P.-E., CHAMOIN L., LADEVÈZE P.  
Proper generalized decomposition computational methods on a benchmark problem : introducing a new strategy based on constitutive relation error minimization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 2, n° 1, 2015, page 17, Springer.
- [AMM 06a] AMMAR A., MOKDAD B., CHINESTA F., KEUNINGS R.  
A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 139, n° 3, 2006, p. 153–176, Elsevier.
- [AMM 06b] AMMAR A., RYCKELYNCK D., CHINESTA F., KEUNINGS R.  
On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells.

- Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 134, n° 1, 2006, p. 136–147, Elsevier.
- [AMM 07] AMMAR A., MOKDAD B., CHINESTA F., KEUNINGS R.  
A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids : Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 144, n° 2, 2007, p. 98–121, Elsevier.
- [AMM 10] AMMAR A., CHINESTA F., FALCO A.  
On the convergence of a greedy rank-one update algorithm for a class of linear systems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, n° 4, 2010, p. 473–486, Springer.
- [AMS 08] AMSALLEM D., FARHAT C.  
Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA journal*, vol. 46, n° 7, 2008, p. 1803–1813.
- [AMS 10] AMSALLEM D.  
Interpolation on manifolds of CFD-based fluid and finite element-based structural reduced-order models for on-line aeroelastic predictions. Thèse de doctorat, Stanford University, 2010.
- [AND 00] ANDERSSON C. A., BRO R.  
The N-way toolbox for MATLAB. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, vol. 52, n° 1, 2000, p. 1–4, Elsevier.
- [AST 08] ASTRID P., WEILAND S., WILLCOX K., BACKX T.  
Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, n° 10, 2008, p. 2237–2251, IEEE.
- [BAD 07] BADER B. W., KOLDA T. G.  
Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 30, n° 1, 2007, p. 205–231, SIAM.
- [BAL 99] BALAGANGADHAR D., DORAI G., TORTORELLI D., OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN U.  
A displacement-based reference frame formulation for steady-state thermo-elasto-plastic material processes. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, n° 16, 1999, p. 2397 - 2416.
- [BAL 17] BALAN A.  
Modélisation isotherme et anisotherme de la limite d'élasticité précipitation-dépendante de l'Inconel 718. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2017.
- [BAR 00] BARCLAY G. J., GRIFFITHS D. F., HIGHAM D. J.  
Theta method dynamics. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, vol. 3, 2000, p. 27–43, Cambridge University Press.
- [BAR 04] BARRAULT M., MADAY Y., NGUYEN N. C., PATERA A. T.  
An 'empirical interpolation' method : application to efficient reduced-basis discretiza-

- tion of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 339, n° 9, 2004, p. 667–672, Elsevier.
- [BAR 08] BARANGER T. N., ANDRIEUX S.  
An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 35, n° 2, 2008, p. 141–152, Springer.
- [BEG 06] BEGELFOR E., WERMAN M.  
Affine invariance revisited. *null IEEE*, 2006, p. 2087–2094.
- [BER 36] BERNOULLI C.  
*Vademecum des mechanikers, oder, Praktisches handbuch für mechaniker, maschinen- und mühlenbauer, und techniker überhaupt*, vol. 1. JG Cotta, 1836.
- [BER 92] BERGHEAU J., PONT D., LEBLOND J.  
Three-dimensional simulation of a laser surface treatment through steady state computation in the heat source's comoving frame. *Mechanical Effects of Welding*, p. 85–92 Springer, 1992.
- [BER 04] BERGHEAU J.-M.  
Modélisation numérique des procédés de soudage. *Techniques de l'ingénieur. Génie mécanique*, , n° BM7758, 2004, Techniques de l'ingénieur.
- [BER 10] BERINGHIER M., GUEGUEN M., GRANDIDIER J.  
Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations—Application to thermoviscoelasticity. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, n° 4, 2010, p. 393–401, Springer.
- [BLA 16] BLAIZOT J.  
Etude de l'influence des procédés de fabrication sur les propriétés mécaniques des alliages de nickel. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2016.
- [BOI 90] BOISSE P., BUSSY P., LADEVÈZE P.  
A new approach in non-linear mechanics : The large time increment method. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 29, n° 3, 1990, p. 647–663, Wiley Online Library.
- [BOO 03] BOOTHBY W. M.  
*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, vol. 120. Gulf Professional Publishing, 2003.
- [BOU 99] BOUCARD P.-A., LADEVÈZE P.  
A multiple solution method for non-linear structural mechanics. *Mechanical Engineering*, vol. 50, n° 5, 1999, p. 317–328.
- [BOU 13a] BOUCINHA L.  
Réduction de modèle a priori par séparation de variables espace-temps : Application en dynamique transitoire. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [BOU 13b] BOUCINHA L., GRAVOUIL A., AMMAR A.  
Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 255, 2013, p. 67–88, Elsevier.

- [BOU 14] BOUCINHA L., AMMAR A., GRAVOUIL A., NOUY A.  
Ideal minimal residual-based proper generalized decomposition for non-symmetric multi-field models—Application to transient elastodynamics in space-time domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 273, 2014, p. 56–76, Elsevier.
- [BUN 04] BUNGARTZ H.-J., GRIEBEL M.  
Sparse grids. *Acta numerica*, vol. 13, 2004, p. 147–269, Cambridge Univ Press.
- [CAN 11] CANCES E., EHRLACHER V., LELIEVRE T.  
Convergence of a greedy algorithm for high-dimensional convex nonlinear problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 21, n° 12, 2011, p. 2433–2467, World Scientific.
- [CAN 13] CANCES E., EHRLACHER V., LELIEVRE T.  
Greedy algorithms for high-dimensional non-symmetric linear problems. *ESAIM : Proceedings*, vol. 41 EDP Sciences, 2013, p. 95–131.
- [CAN 16] CANALES D., LEYGUE A., CHINESTA F., GONZÁLEZ D., CUETO E., FEULVARCH E., BERGHEAU J.-M., HUERTA A.  
Vademecum-based GFEM (V-GFEM) : optimal enrichment for transient problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2016, Wiley Online Library.
- [CAO 04] CAO Z., YANG Z., CHEN X.  
Three-dimensional simulation of transient GMA weld pool with free surface. *WELDING JOURNAL-NEW YORK-*, vol. 83, 2004, p. 169–S.
- [CAP 15] CAPALDO M.  
A new approximation framework for PGD-based nonlinear solvers. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2015.
- [CAR 70] CARROLL J. D., CHANG J.-J.  
Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of “Eckart-Young” decomposition. *Psychometrika*, vol. 35, n° 3, 1970, p. 283–319, Springer.
- [CAR 11] CARLBERG K., BOU-MOSLEH C., FARHAT C.  
Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov–Galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, n° 2, 2011, p. 155–181, Wiley Online Library.
- [CAR 13] CARLBERG K., FARHAT C., CORTIAL J., AMSALLEM D.  
The GNAT method for nonlinear model reduction : effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 242, 2013, p. 623–647, Elsevier.
- [CHA 10] CHATURANTABUT S., SORENSSEN D. C.  
Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 32, n° 5, 2010, p. 2737–2764, SIAM.

- [CHA 17] CHAMOIN L., PLED F., ALLIER P.-E., LADEVÈZE P.  
A posteriori error estimation and adaptive strategy for PGD model reduction applied to parametrized linear parabolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, , 2017.
- [CHI 08] CHINESTA F., AMMAR A., LEMARCHAND F., BEAUCHENE P., BOUST F.  
Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 197, n° 5, 2008, p. 400–413, Elsevier.
- [CHI 10] CHINESTA F., AMMAR A., CUETO E.  
Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, vol. 17, n° 4, 2010, p. 327–350, Springer.
- [CHI 11] CHINESTA F., LADEVÈZE P., CUETO E.  
A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 18, n° 4, 2011, p. 395–404, Springer.
- [CHI 13] CHINESTA F., LEYGUE A., BORDEU F., AGUADO J., CUETO E., GONZÁLEZ D., ALFARO I., AMMAR A., HUERTA A.  
PGD-based computational vademecum for efficient design, optimization and control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 20, n° 1, 2013, p. 31–59, Springer.
- [CHI 14] CHINESTA F., CUETO E.  
*PGD-based modeling of materials, structures and processes*. Springer, 2014.
- [CHU 93] CHUNG J., HULBERT G.  
A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of applied mechanics*, vol. 60, n° 2, 1993, p. 371–375, American Society of Mechanical Engineers.
- [COG 93] COGNARD J.-Y., LADEVÈZE P.  
A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, vol. 9, n° 2, 1993, p. 141–157, Elsevier.
- [COG 99] COGNARD J., LADEVÈZE P., TALBOT P.  
A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, vol. 30, n° 9, 1999, p. 583–593, Elsevier.
- [COU 13] COURARD A., NÉRON D., LADEVÈZE P., ANDOLFATTO P., BERGEROT A.  
Virtual charts for shape optimization of structures. *2nd ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2013)*, 2013.
- [CUO 05] CUONG N. N.  
Reduced-basis approximations and a posteriori error bounds for nonaffine and nonlinear partial differential equations : Application to inverse analysis. Thèse de doctorat, Ph. D. thesis, HCMC University of Technology-SINGAPORE-MIT ALLIANCE, 2005.

- [DEB 92] DE BOOR C., RON A.  
Computational aspects of polynomial interpolation in several variables. *Mathematics of Computation*, vol. 58, n° 198, 1992, p. 705–727.
- [DEL 00] DE LATHAUWER L., DE MOOR B., VANDEWALLE J.  
On the best rank-1 and rank-( $r_1, r_2, \dots, r_n$ ) approximation of higher-order tensors. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 21, n° 4, 2000, p. 1324–1342, SIAM.
- [DEP 04] DEPRADEUX L.  
Simulation numérique du soudage-acier 316L : validation sur cas tests de complexité croissante. Thèse de doctorat, Villeurbanne, INSA, 2004.
- [DES 08] DE SILVA V., LIM L.-H.  
Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 30, n° 3, 2008, p. 1084–1127, SIAM.
- [DIN 17] DING Y., LIU Z., YAN J.-B., ZONG L.  
Experimental and Numerical Studies on Residual Stress in Wide Butt Welds. *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2017, 2017, Hindawi Publishing Corporation.
- [DUN 11] DUNLAVY D. M., KOLDA T. G., KEGELMEYER W. P.  
Multilinear algebra for analyzing data with multiple linkages. *Graph Algorithms in the Language of Linear Algebra*, , 2011, p. 85–114, Fundamentals of Algorithms. Philadelphia : SIAM.
- [DUR 03] DUREISSEIX D., LADEVÈZE P., NÉRON D., SCHREFLER B.  
A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 1, n° 4, 2003, Begel House Inc.
- [DUV 16] DUVAL M.  
Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2016.
- [ECK 36] ECKART C., YOUNG G.  
The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, vol. 1, n° 3, 1936, p. 211–218, Springer.
- [EDE 98] EDELMAN A., ARIAS T. A., SMITH S. T.  
The geometry of algorithms with orthogonality constraints. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 20, n° 2, 1998, p. 303–353, SIAM.
- [ERN 13] ERN A., GUERMOND J.-L.  
*Theory and practice of finite elements*, vol. 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [EUR 93] EUROCODE C. E. D. N.  
3 : Design of steel structures. *DRAFT prEN*, , 1993.

- [EVE 95] EVERSON R., SIROVICH L.  
Karhunen–Loeve procedure for gappy data. *JOSA A*, vol. 12, n° 8, 1995, p. 1657–1664, Optical Society of America.
- [FAL 11] FALCO A., NOUY A.  
A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart–Young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 376, n° 2, 2011, p. 469–480, Elsevier.
- [FAL 12] FALCÓ A., NOUY A.  
Proper generalized decomposition for nonlinear convex problems in tensor Banach spaces. *Numerische Mathematik*, vol. 121, n° 3, 2012, p. 503–530, Springer.
- [FRI 75] FRIEDMAN E.  
Thermomechanical analysis of the welding process using the finite element method. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 97, n° 3, 1975, p. 206–213, American Society of Mechanical Engineers.
- [FRI 10] FRITZEN F., BÖHLKE T.  
Three-dimensional finite element implementation of the nonuniform transformation field analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n° 7, 2010, p. 803–829, Wiley Online Library.
- [GAL 11] GALLAND F., GRAVOUIL A., MALVESIN E., ROCHETTE M.  
A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n° 5, 2011, p. 699–716, Elsevier.
- [GER 10] GERSTNER T., GRIEBEL M.  
Sparse grids. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, , 2010, Wiley Online Library.
- [GHN 12] GHNATIOS C., MASSON F., HUERTA A., LEYGUE A., CUETO E., CHINESTA F.  
Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 213, 2012, p. 29–41, Elsevier.
- [GIA 14] GIACOMA A., DUREISSEIX D., GRAVOUIL A., ROCHETTE M.  
A multiscale large time increment/FAS algorithm with time-space model reduction for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 97, n° 3, 2014, p. 207–230, Wiley Online Library.
- [GIA 15] GIACOMA A., DUREISSEIX D., GRAVOUIL A., ROCHETTE M.  
Toward an optimal a priori reduced basis strategy for frictional contact problems with LATIN solver. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, 2015, p. 1357–1381, Elsevier.
- [GIA 16] GIACOMA A., DUREISSEIX D., GRAVOUIL A.  
An efficient quasi-optimal space-time PGD application to frictional contact mechanics. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 3, n° 1, 2016, page 12, Springer International Publishing.

- [GIR 12] GIRALDI L.  
Contributions aux méthodes de calcul basées sur l'approximation de tenseurs et applications en mécanique numérique. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes (ECN)(ECN)(ECN)(ECN), 2012.
- [GOL 84] GOLDAK J., CHAKRAVARTI A., BIBBY M.  
A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical and Materials Transactions B*, vol. 15, n° 2, 1984, p. 299–305, Springer.
- [GON 12] GONZÁLEZ D., MASSON F., POULHAON F., LEYGUE A., CUETO E., CHINESTA F.  
Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 82, n° 9, 2012, p. 1677–1695, Elsevier.
- [GON 15] GONZÁLEZ D., ALFARO I., QUESADA C., CUETO E., CHINESTA F.  
Computational vademecums for the real-time simulation of haptic collision between nonlinear solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, 2015, p. 210–223, Elsevier.
- [GRA 84] GRAM J.  
Undersøgelse angaaende Maengden af Primitaal under en given Graense (avec un résumé en français)». *Kjobenhavn. Skrift.(6) II*, , 1884, p. 185–308.
- [GRE 07] GREPL M. A., MADAY Y., NGUYEN N. C., PATERA A. T.  
Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 41, n° 3, 2007, p. 575–605, EDP Sciences.
- [GRI ] GRIEBEL M.  
*Sparse grids and related approximation schemes for higher dimensional problems*. Citeseer.
- [GU 93] GU M., GOLDAK J., KNIGHT A., BIBBY M.  
Modelling the evolution of microstructure in the heat-affected zone of steady state welds. *Canadian metallurgical quarterly*, vol. 32, n° 4, 1993, p. 351–361, Taylor & Francis.
- [GUO 17] GUO H., BLAL N., GRAVOUIL A.  
Rapport de projet de fin d'études : simulation numérique du soudage en temps réel. *Département Génie Mécanique*, , 2017, INSA LYON.
- [HAM 08] HAMIDE M.  
Modélisation numérique du soudage à l'arc des aciers. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.
- [HAR 70] HARSHMAN R. A.  
Foundations of the parafac procedure : models and conditions for an " explanatory" multimodal factor analysis. , 1970, University of California at Los Angeles Los Angeles, CA.

- [HER 14] HERNÁNDEZ J., OLIVER J., HUESPE A. E., CAICEDO M., CANTE J.  
High-performance model reduction techniques in computational multiscale homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 276, 2014, p. 149–189, Elsevier.
- [HEY 13] HEYBERGER C., BOUCARD P.-A., NÉRON D.  
A rational strategy for the resolution of parametrized problems in the PGD framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 259, 2013, p. 40–49, Elsevier.
- [HIB 01] HIBBITT, KARLSSON, SORENSEN  
*ABAQUS/standard User's Manual*, vol. 1. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2001.
- [HIT 28] HITCHCOCK F. L.  
Multiple Invariants and Generalized Rank of a P-Way Matrix or Tensor. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 7, n° 1-4, 1928, p. 39–79, Wiley Online Library.
- [HOL 98] HOLMES P., LUMLEY J. L., BERKOOZ G.  
*Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge university press, 1998.
- [HOT 33] HOTELLING H.  
Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of educational psychology*, vol. 24, n° 6, 1933, page 417, Warwick & York.
- [IRO 69] IRONS B. M., TUCK R. C.  
A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1, n° 3, 1969, p. 275–277, Wiley Online Library.
- [KAR 47] KARHUNEN K.  
*Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, vol. 37. Universitat Helsinki, 1947.
- [KAR 90] KARLSSON L., LINDGREN L.-E.  
Combined heat and stress-strain calculations. *International Conference on Modeling of Casting and Welding Processes : 16/09/1990-21/09/1990* Minerals, Metals & Materials Society, 1990, p. 187–202.
- [KER 11] KERFRIDEN P., GOSSELET P., ADHIKARI S., BORDAS S. P.-A.  
Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented Newton–Krylov algorithms : an adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n° 5, 2011, p. 850–866, Elsevier.
- [KOL 06] KOLDA T., BADER B.  
The TOPHITS model for higher-order web link analysis. *Workshop on link analysis, counterterrorism and security*, vol. 7, 2006, p. 26–29.
- [KOL 09] KOLDA T. G., BADER B. W.  
Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, vol. 51, n° 3, 2009, p. 455–500, SIAM.

- [KUN 01] KUNISCH K., VOLKWEIN S.  
Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numerische mathematik*, vol. 90, n° 1, 2001, p. 117–148, Springer.
- [KÜT 08] KÜTTLER U., WALL W. A.  
Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, vol. 43, n° 1, 2008, p. 61–72, Springer.
- [LAD 85] LADEVÈZE P.  
Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, vol. 300, n° 2, 1985, p. 41–44, Gauthier-Villars.
- [LAD 89] LADEVÈZE P., GERMAIN P.  
La méthode à grand incrément de temps pour l’analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre*, vol. 309, n° 11, 1989, p. 1095–1099, Gauthier-Villars.
- [LAD 03] LADEVÈZE P., NOUY A.  
On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n° 28, 2003, p. 3061–3087, Elsevier.
- [LAD 05] LADEVÈZE P., PELLE J.-P.  
*Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, vol. 171. Springer, 2005.
- [LAD 10] LADEVÈZE P., PASSIEUX J.-C., NÉRON D.  
The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 21, 2010, p. 1287–1296, Elsevier.
- [LAD 12] LADEVÈZE P.  
*Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [LAD 18] LADEVÈZE P., PAILLET C., NÉRON D.  
Extended-PGD Model Reduction for Nonlinear Solid Mechanics Problems Involving Many Parameters. *Advances in Computational Plasticity*, p. 201–220 Springer, 2018.
- [LEB 09] LE BRIS C., LELIEVRE T., MADAY Y.  
Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensional partial differential equations. *Constructive Approximation*, vol. 30, n° 3, 2009, p. 621–651, Springer.
- [LEM 09] LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., BENALLAL A., DESMORAT R.  
*Mécanique des matériaux solides-3eme édition*. Dunod, 2009.
- [LIN 01a] LINDGREN L.-E.  
Finite element modeling and simulation of welding part 1 : increased complexity. *Journal of thermal stresses*, vol. 24, n° 2, 2001, p. 141–192, Taylor & Francis.

- [LIN 01b] LINDGREN L.-E.  
Finite element modeling and simulation of welding. Part 2 : improved material modeling. *Journal of thermal stresses*, vol. 24, n° 3, 2001, p. 195–231, Taylor & Francis.
- [LOÈ 55] LOÈVE M.  
*Probability Theory; Foundations, Random Sequences*. New York : D. Van Nostrand Company, 1955.
- [LOÈ 60] LOÈVE M.  
. « Probability Theory, The University Series in Higher Mathematics », 1960.
- [LOR 56] LORENZ E. N.  
Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. , 1956, Massachusetts Institute of Technology, Department of Meteorology.
- [LU 17a] LU Y., BLAL N., GRAVOUIL A.  
Adaptative sparse grid based HOPGD : towards a non-intrusive strategy for constructing space-time computational vademecum of welding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2017, under review.
- [LU 17b] LU Y., BLAL N., GRAVOUIL A.  
Real time space-time POD based *computational vademecums* for parametric studies : application to thermo-mechanical problems. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, , 2017, accepted.
- [LU 18] LU Y., BLAL N., GRAVOUIL A.  
Multi-parametric space-time computational vademecum for parametric studies : application to real time welding simulations. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 139, 2018, p. 62–72, Elsevier.
- [MAD 04] MADAY Y., RONQUIST E. M.  
The reduced basis element method : application to a thermal fin problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, n° 1, 2004, p. 240–258, SIAM.
- [MAD 06] MADAY Y.  
Reduced basis method for the rapid and reliable solution of partial differential equations. , 2006.
- [MÉD 99] MÉDALE M., JAEGER M.  
Modélisation par éléments finis d'écoulements à surface libre avec changement de phase solide-liquide. *International journal of thermal sciences*, vol. 38, n° 3, 1999, p. 267–276, Elsevier.
- [MIT 94] MITCHELL B. C., BURDICK D. S.  
Slowly converging parafac sequences : Swamps and two-factor degeneracies. *Journal of Chemometrics*, vol. 8, n° 2, 1994, p. 155–168, Wiley Online Library.
- [MOD 15] MODESTO D., ZLOTNIK S., HUERTA A.  
Proper generalized decomposition for parameterized Helmholtz problems in heterogeneous and unbounded domains : Application to harbor agitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 295, 2015, p. 127–149, Elsevier.

- [MUR 96] MURTHY Y., RAO G. V., IYER P. K.  
Numerical simulation of welding and quenching processes using transient thermal and thermo-elasto-plastic formulations. *Computers & Structures*, vol. 60, n° 1, 1996, p. 131–154, Elsevier.
- [MUR 12] MURÁNSKY O., SMITH M., BENDEICH P., HOLDEN T., LUZIN V., MARTINS R., EDWARDS L.  
Comprehensive numerical analysis of a three-pass bead-in-slot weld and its critical validation using neutron and synchrotron diffraction residual stress measurements. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n° 9, 2012, p. 1045–1062, Elsevier.
- [NAD 15] NADAL E., CHINESTA F., DÍEZ P., FUENMAYOR F., DENIA F.  
Real time parameter identification and solution reconstruction from experimental data using the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 296, 2015, p. 113–128, Elsevier.
- [NÉR 08] NÉRON D., DUREISSEIX D.  
A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 73, n° 6, 2008, p. 783–804, Wiley Online Library.
- [NÉR 10] NÉRON D., LADEVÈZE P.  
Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, n° 4, 2010, p. 351–372, Springer.
- [NGU 08] NGUYEN N., PERAIRE J.  
An efficient reduced-order modeling approach for non-linear parametrized partial differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, n° 1, 2008, p. 27–55, Wiley Online Library.
- [NIO 08] NION D., DE LATHAUWER L.  
An enhanced line search scheme for complex-valued tensor decompositions. Application in DS-CDMA. *Signal Processing*, vol. 88, n° 3, 2008, p. 749–755, Elsevier.
- [NIR 08] NIROOMANDI S., ALFARO I., CUETO E., CHINESTA F.  
Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. *Computer methods and programs in biomedicine*, vol. 91, n° 3, 2008, p. 223–231, Elsevier.
- [NIR 10] NIROOMANDI S., ALFARO I., CUETO E., CHINESTA F.  
Model Order Reduction for Hyperelastic Materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, n° 9, 2010, p. 1180–1206.
- [NIR 12] NIROOMANDI S., ALFARO I., CUETO E., CHINESTA F.  
Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 105, n° 1, 2012, p. 1–12, Elsevier.
- [NIR 13] NIROOMANDI S., GONZÁLEZ D., ALFARO I., BORDEU F., LEYGUE A., CUETO E., CHINESTA F.

- Real-time simulation of biological soft tissues : a PGD approach. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, vol. 29, n° 5, 2013, p. 586–600, Wiley Online Library.
- [NOU 09] NOUY A.  
Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 16, n° 3, 2009, p. 251–285, Springer.
- [NOU 10a] NOUY A.  
A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 23, 2010, p. 1603–1626, Elsevier.
- [NOU 10b] NOUY A.  
Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, n° 4, 2010, p. 403–434, Springer.
- [OHM ] OHMS C., MARTINS R., UCA O., YOUTSOS A., BOUCHARD P., SMITH M., KEAVEY M., BATE S., GILLES P., WIMPORY R. et al.  
The European network on neutron techniques standardization for structural integrity (NeT).
- [QUE 16] QUESADA C., GONZÁLEZ D., ALFARO I., CUETO E., CHINESTA F.  
Computational vademecums for real-time simulation of surgical cutting in haptic environments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2016, Wiley Online Library.
- [R& 00] R&D E.  
Manuel d'utilisation : Introduction au Code Aster. *Electricité de France*, , 2000.
- [RAJ 00] RAJADHYAKSHA S. M., MICHALERIS P.  
Optimization of thermal processes using an Eulerian formulation and application in laser surface hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 11, 2000, p. 1807–1823, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RAJ 08] RAJHI M., COMON P., HARSHMAN R. A.  
Enhanced line search : A novel method to accelerate PARAFAC. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, vol. 30, n° 3, 2008, p. 1128–1147, SIAM.
- [RAM 15] RAMIÈRE I., HELFER T.  
Iterative residual-based vector methods to accelerate fixed point iterations. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 70, n° 9, 2015, p. 2210–2226, Elsevier.
- [RAY 97] RAYENS W. S., MITCHELL B. C.  
Two-factor degeneracies and a stabilization of PARAFAC. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 38, n° 2, 1997, p. 173–181, Elsevier.
- [REL 13] RELUN N., NÉRON D., BOUCARD P.  
A model reduction technique based on the PGD for elastic-viscoplastic computational analysis. *Computational Mechanics*, vol. 51, n° 1, 2013, p. 83–92, Springer.

- [ROB 09] ROBIN V.  
De la modélisation numérique des procédés et du soudage en particulier au comportement mécanique des assemblages. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2009.
- [ROZ 08] ROZZA G., HUYNH D. B. P., PATERA A. T.  
Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 15, n° 3, 2008, p. 229–275, Springer.
- [RYC 02] RYCKELYNCK D.  
Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 330, n° 7, 2002, p. 499–505, Elsevier.
- [RYC 05] RYCKELYNCK D.  
A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of computational physics*, vol. 202, n° 1, 2005, p. 346–366, Elsevier.
- [RYC 09] RYCKELYNCK D.  
Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, n° 1, 2009, p. 75–89, Wiley Online Library.
- [RYC 10] RYCKELYNCK D., BENZIANE D. M.  
Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 17, 2010, p. 1134–1142, Elsevier.
- [RYC 12] RYCKELYNCK D., VINCENT F., CANTOURNET S.  
Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 225, 2012, p. 28–43, Elsevier.
- [SMI 09] SMITH M., SMITH A.  
NeT bead-on-plate round robin : comparison of transient thermal predictions and measurements. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 86, n° 1, 2009, p. 96–109, Elsevier.
- [SMI 15] SMITH M. C., SMITH A., OHMS C., WIMPORY R.  
A review of the NeT TG4 international weld residual stress benchmark. *ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Boston, Ma, PVP2015-45801*, 2015.
- [SON 03] SONG J., PETERS J., NOOR A., MICHALERIS P.  
Sensitivity analysis of the thermomechanical response of welded joints. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, n° 16, 2003, p. 4167–4180, Elsevier.
- [SPÄ 95] SPÄTH H.  
*Two dimensional spline interpolation algorithms*. AK Peters, Ltd., 1995.
- [STE 12] STERCK H. D.  
A nonlinear GMRES optimization algorithm for canonical tensor decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 34, n° 3, 2012, p. A1351–A1379, SIAM.

- [STE 13] STERCK H. D., MILLER K.  
An adaptive algebraic multigrid algorithm for low-rank canonical tensor decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 35, n° 1, 2013, p. B1–B24, SIAM.
- [STU 91] STUART A. M., PELOW A.  
The dynamics of the theta method. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, vol. 12, n° 6, 1991, p. 1351–1372, SIAM.
- [sys09] SYSWELD user's guide. , 2009.
- [TUC 63] TUCKER L. R.  
Implications of factor analysis of three-way matrices for measurement of change. *Problems in measuring change*, vol. 122137, 1963, University of Wisconsin Press Madison.
- [TUC 64] TUCKER L. R.  
The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. *Contributions to mathematical psychology*, vol. 110119, 1964, New York : Holt, Rinehart and Winston.
- [TUC 66] TUCKER L. R.  
Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, vol. 31, n° 3, 1966, p. 279–311, Springer.
- [VER 06] VERDON N., ALLERY C., RYCKELYNCK D., HAMDOUNI A.  
An adaptive ROM approach for solving transfer equations. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, n° 5, 2006, p. 589–605, Taylor & Francis.
- [VIT 14] VITSE M., NÉRON D., BOUCARD P.-A.  
Virtual charts of solutions for parametrized nonlinear equations. *Computational Mechanics*, vol. 54, n° 6, 2014, p. 1529–1539, Springer.
- [XU 11] XU J., GILLES P.  
Numerical simulation of a single bead on plate and three pass slot welds in austenitic stainless steel. *Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, 2011.
- [YVO 07] YVONNET J., HE Q.-C.  
The reduced model multiscale method (R3M) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, vol. 223, n° 1, 2007, p. 341–368, Elsevier.
- [ZHA 03] ZHANG W., ROY G., ELMER J., DEBROY T.  
Modeling of heat transfer and fluid flow during gas tungsten arc spot welding of low carbon steel. *Journal of Applied Physics*, vol. 93, n° 5, 2003, p. 3022–3033, AIP.
- [ZHA 15] ZHANG Y., COMBESCURE A., GRAVOUIL A.  
Efficient hyper reduced-order model (HROM) for parametric studies of the 3D thermo-elasto-plastic calculation. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 102, 2015, p. 37–51, Elsevier.

[ZHA 17] ZHANG Y., COMBESURE A., GRAVOUIL A.

Efficient hyper-reduced-order model (HROM) for thermal analysis in the moving frame. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2017, Wiley Online Library.

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : Lu

DATE de SOUTENANCE : 03/11/2017

Prénoms : Ye

**TITRE : Construction d'abaques numériques dédiés aux études paramétriques du procédé de soudage par des méthodes de réduction de modèles espace-temps**

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2017-LYSEI-103

École doctorale : MEGA

Spécialité : Génie Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Le recours à des simulations numériques pour l'étude de l'influence des paramètres d'entrée (matériaux, chargements, conditions aux limites, géométrie, etc.) sur les différentes quantités d'intérêt en soudage (contraintes résiduelles, distorsion, etc.) s'avère trop long et coûteux vu l'aspect multiparamétrique de ces simulations. Pour explorer des espaces paramétriques de grandes dimensions, avec des calculs moins coûteux, il paraît opportun d'utiliser des approches de réduction de modèle. Dans ce travail, d'une façon a posteriori, une stratégie non-intrusive est développée pour construire les abaques dédiés aux études paramétriques du soudage. Dans une phase offline, une base de données ('snapshots') a été pré-calculée avec un choix optimal des paramètres d'entrée donnés par une approche multi-grille (dans l'espace des paramètres). Pour explorer d'autres valeurs de paramètres, une méthode d'interpolation basée sur la variété Grassmannienne est alors proposée pour adapter les bases réduites espace-temps issues de la méthode SVD. Cette méthode a été constatée plus performante que les méthodes d'interpolation standards, notamment en non linéaire. Afin d'explorer des espaces paramétriques de grandes dimensions, une méthode de type décomposition tensorielle (i.e. HOPGD) a été également étudiée. Pour l'aspect d'optimalité de l'abaque, nous proposons une technique d'accélération de convergence pour la HOPGD et une approche 'sparse grids' qui permet d'échantillonner efficacement l'espace des paramètres. Finalement, les abaques optimaux de dimension jusqu'à 10 à précision contrôlée ont été construits pour différents types de paramètres (matériaux, chargements, géométrie) du procédé de soudage.

MOTS-CLÉS : Abaques numériques, soudage, multiparamétrique, interpolation Grassmann, HOPGD, sparse grids

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur Anthony Gravouil

Co-directeur de thèse : Monsieur Nawfal Blal

Président du jury : CHINESTA Francisco

Composition du jury :	NERON DAVID	Professeur ENS Cachan	Rapporteur
	KERFRIDEN PIERRE	Professeur associé Cardiff University	Rapporteur
	CHINESTA FRANCISCO	Professeur ENSAM	Examineur
	BARANGER THOURAYA	Maître de conférences (HDR) Univ. Lyon1	Examineur
	HAMDOUNI AZIZ	Professeur Université de La Rochelle	Examineur
	BERINGHIER MARIANNE	Maître de conférences ENSMA	Examineur
	GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon	Directeur de thèse
	BLAL NAWFAL	Maître de conférences INSA-Lyon	Co-directeur

