

N° d'ordre NNT : 2016LYSEI078

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
préparée au sein de
(Institut National des Sciences Appliquées de Lyon)
et délivré en partenariat international avec
(Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunisie)

École Doctorale ED 162 MEGA
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité de doctorat :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Soutenue publiquement le 30/08/2016, par :
Wafa MANSOURI

**Problèmes inverses de localisation de sources
et d'identification de puits et de
paramètres**

Devant le jury composé de

MOURAD BELLAOUED	Professeur	Président
MAATOUG HASSINE	Professeur	Rapporteur
MEJDI AZAIEZ	Professeur	Rapporteur
YVES RENARD	Professeur	Examineur
HEND BEN AMEUR	Professeur	Directeur de thèse
THOURAYA BARANGER	Maître de Conférences, HDR	Directeur de thèse
NEJLA TLATLI	Maître de Conférences, HDR	Co-Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon

20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal
2007-2010**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE</u> Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	<u>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</u> http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	<u>ScSo*</u> M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

Ce travail porte sur le développement d'algorithmes et l'application de méthodes numériques pour la résolution des problèmes inverses d'estimation de paramètres, d'identification de conditions aux limites et d'identification de sources dans un milieu poreux. Ces outils seront d'une grande utilité pour l'aide à la gestion des ressources en eaux souterraines et à leur préservation quant aux dégradations.

L'objectif de cette thèse est de résoudre ces problèmes inverses en se basant sur différentes approches :

- Une résolution basée sur l'optimisation de forme topologique qui est la recherche de la géométrie d'un objet qui soit optimale vis à vis d'un critère donné, et ce sans aucun a priori sur sa topologie, c'est-à-dire sur le nombre de "trous" qu'il peut contenir. Sachant que ces trous représentent les puits recherchés. Pour ce faire, nous avons adopté la méthode du gradient topologique, qui consiste à étudier le comportement d'une fonction objectif lors de la création d'un petit trou à l'intérieur du domaine.
- Une résolution basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie en utilisant des données surabondantes sur une partie de la frontière du domaine afin de compléter les données sur toute la frontière du domaine et de déterminer les positions, les débits et le nombre de puits existants à l'intérieur du domaine.
- Une résolution par le couplage de la méthode de paramétrisation adaptative qui a l'avantage de minimiser le nombre des inconnus de paramètres permettant d'interpréter au mieux les données disponibles et la méthode du gradient topologique. Ce couplage nous permet à la fois d'identifier les zones géologiques, de déterminer les valeurs de la transmissivité hydraulique dans chaque zone et de localiser les positions des puits.

MOTS CLÉS: équation d'écoulement, puits, gradient topologique, fonctionnelle d'erreur type énergie, données surabondantes, paramétrisation adaptative.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	vii
1 Hydrogéologie et modélisation	5
1.1 Hydrogéologie	5
1.2 Quelques définitions	5
1.2.1 Fluide [BEA 72]	5
1.2.2 Milieu poreux [BEA 99]	6
1.3 Les variables et les paramètres décrivant l'écoulement dans un milieu poreux	9
1.3.1 La charge hydraulique [DEM 94]	9
1.3.2 La conductivité hydraulique [DEM 94]	10
1.3.3 La transmissivité hydraulique [BEA 79]	11
1.3.4 La capacité d'emmagasinement [BEA 79]	11
1.4 Modélisation d'un puits	12
1.5 Modélisation de l'écoulement en milieu poreux saturé	13
1.5.1 Loi de Darcy	13
1.5.2 Équation d'écoulement	15
1.5.3 Conditions aux limites	17
1.6 Étude de l'existence et l'unicité de différents modèles	19
1.7 Les problèmes discrétisés	19
2 Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique	21
2.1 Sensibilité topologique pour une perturbation du domaine	24
2.1.1 Condition de type Neumann sur le bord du puits	24
2.1.2 Condition de type Dirichlet sur le bord du puits	40
2.2 Gradient topologique basé sur une perturbation du terme source	48
2.2.1 Exemple d'une fonction objectif	50
2.2.2 Résultats numériques	51

3	Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits	57
3.1	Identification des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.	58
3.1.1	Formulation continue du problème d'identification.	58
3.1.2	Modélisation par éléments finis et discrétisation.	60
3.1.3	Identification multi-niveaux	61
3.1.4	Applications numériques	63
3.2	Identification des conditions aux limites et des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.	69
3.2.1	Formulation continue du problème d'identification	70
3.2.2	Modélisation par éléments finis et discrétisation	72
3.2.3	Identification multi-niveaux	73
3.2.4	Applications numériques	76
4	Identification de paramétrisation et de positions de puits	85
4.1	Problème inverse d'identification de la transmissivité hydraulique	86
4.1.1	Paramétrisation	86
4.1.2	Indicateur de raffinement	87
4.1.3	Algorithme	88
4.1.4	Résultats numériques	89
4.2	Estimation de paramètre et localisation de puits	96
4.2.1	Résultats numériques	98
4.2.2	Conclusion	109
	Conclusion	111
	Bibliographie	113

Table des figures

1.1	Représentation d'un milieu poreux [ALB 07].	6
1.2	Zone saturée , zone non saturée (la couleur bleue représente l'eau). Source : http://sigessn.brgm.fr/spip.php?article24	7
1.3	Porosité. Source : http://sigessn.brgm.fr/spip.php?article313	7
1.4	Nappe libre [ABA 07]	8
1.5	Nappe captive [ABA 07]	9
1.6	Ligne de courant et type de courant.	10
1.7	Exemples de puits. Source : http://www.wikiwater.fr/e28-les-divers-types-de-puits-et.html	12
1.8	Expérience de Darcy [TAL 04]	14
1.9	Exemple du domaine avec ses frontières et ses sources.	17
1.10	Exemple du domaine avec ses frontières et un puits.	18
2.1	Domaine perturbé par une insertion d'un trou O_ϵ	22
2.2	Domaine étudié contenant un seul puits.	27
2.3	Les points des observations.	28
2.4	(a), (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c), (d) les positions exactes et celles calculées.	29
2.5	(a) et (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c) et (d) présentent les positions exactes et estimées avec une interpolation des observations.	30
2.6	Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimées.	34
2.7	Cas des observations avec interpolation : (a) et (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c) et (d) présentent les positions exactes et estimées.	35
2.8	Le domaine Ω contient deux puits O_1 et O_2 qui ont les mêmes rayons.	36
2.9	La distribution du gradient topologique pour les différents valeurs de la distance d	36
2.10	Cas de quatre puits : (a) représente la distribution du gradient topologique, (b) présente les positions exactes et estimées.	37
2.11	La distribution du gradient topologique pour les différents niveaux de bruits.	38

2.12	La distribution du gradient topologique pour les différents endroits.	39
2.13	Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimés.	43
2.14	Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimés.	44
2.15	Cas de quatre puits : (a) représente la distribution du gradient topologique, (b) présente les positions exactes et celles estimées.	47
2.16	La distribution du gradient topologique pour les différents niveaux de bruits.	48
2.17	Domaine avec une source.	49
2.18	Domaine avec de sources.	52
2.19	Cas d'une seule source : identification de la position d'une seule source.	52
2.20	La distribution du gradient topologique dans le cas du quatre sources.	53
2.21	Distribution du gradient topologiques pour différentes distances séparant deux sources.	54
3.1	Les extremums locaux de X_μ^{1*} et la distribution de H_D dans le cas où $d = 8 km$	63
3.2	Les iso-valeurs de la charge hydraulique H_D pour $d = 2 km$	64
3.3	Les extremums de X_μ^{1*} , la charge hydraulique H_D , les positions exactes et identifiées des puits.	65
3.4	(a) représente la charge hydraulique H_D et les positions des puits identifiés dans le cas d'un bruit de 4%, (b) représente la charge hydraulique H_D , les positions des puits identifiés dans le cas d'un bruit de 8%.	66
3.5	Les positions des observations.	67
3.6	La charge hydraulique H_D et les positions identifiées des puits.	68
3.7	Exemple du domaine.	69
3.8	Description du domaine.	76
3.9	Les extremums de X_μ^{1*} , la charge hydraulique H_D , les positions exacte et identifiée du puits.	77
3.10	La charge hydraulique h et le flux ϕ sur Γ_u	77
3.11	Évolution au cours des itérations des fonctions E_a	77
3.12	X_μ^{1*} et la charge hydraulique H_D pour une distance $d = 8 km$	78
3.13	La charge hydraulique h et le flux ϕ sur Γ_u	79
3.14	évolution au cours des itérations des fonctions E_a	79
3.15	Les iso-valeurs de la charge hydraulique pour $d = 2 km$	79
3.16	Le domaine géométrie et observations à l'intérieur du domaine.	81
3.17	La charge hydraulique et les positions trouvées par l'algorithme 5 pour l'aquifère de Rocky Mountain.	81
3.18	Résultats de la complétion des données sur Γ_u pour le cas de l'aquifère de Rocky Mountain, étape 1 de l'identification.	82
3.19	Evolution de la fonction E_a dans l'étape 1 et 3 de l'algorithme. 5	82

3.20	Résultats de la complétion des données sur Γ_u pour le cas de l'aquifère de Rocky Mountain, étape 1 de l'identification avec données bruitées.	83
4.1	Exemple de domaine d'étude avec trois zones géologiques et un puits.	85
4.2	A gauche paramétrisation avec un paramètre par maille de calcul. A droite paramétrisation avec un paramètre par zone.	87
4.3	Les coupes élémentaires.	88
4.4	Paramétrisation exacte.	89
4.5	Exemple 1 : paramètres calculés au cours des itérations.	90
4.6	Variation de la fonction objectif au cours des itérations.	91
4.7	Modèle de "Rocky Mountain" avec ses zones géologiques.	92
4.8	La paramétrisation exacte et variation de la charge hydraulique.	92
4.9	Paramètres calculés au cours des itérations.	93
4.10	Exemple de "Rocky Mountain" : variation de la fonction objectif au cours des itérations.	94
4.11	Paramétrisation \mathcal{P}_1	96
4.12	Les deux zones géologiques et la position du puits.	97
4.13	La paramétrisation exacte variation et de la charge hydraulique avec la présence d'un seul puits.	98
4.14	Exemple 1 : Valeurs identifiées du paramètre (à gauche) et variation du gradient topologique (à droite) au cours des itérations.	100
4.15	Variation de la fonction objectif au cours des itérations.	101
4.16	Les positions des nœuds de mesure sur la grille de calcul.	101
4.17	Mesures complètes : les zones et les puits identifiés aux itération 1, 3 et 6.	102
4.18	Mesures complètes : les zones et les puits identifiés aux itération 9, 12 et 16.	103
4.19	Variation de la fonction objectif au cours des itérations.	104
4.20	Mesures en un nœud sur deux : les zones et les puits identifiés aux itération 9, 12 et 16.	105
4.21	Mesures en un nœud sur quatre : les zones et les puits identifiés aux itération 2, 6 et 8.	107
4.22	Mesures en un nœud sur quatre : les zones et les puits identifiés aux itération 12, 16 et 20.	108
4.23	Mesures en un nœud sur quatre : variation de la fonction objectif au cours des itérations.	109

Liste des tableaux

2.1	Les positions calculées en fonction des observations disponibles et les erreurs associées.	30
2.2	Les positions calculées avec des observations interpolées et les erreurs associées.	31
2.3	Cas des observations sans interpolation : les positions calculées et les erreurs relatives pour un puits situé en $z = (6 \text{ km}, 6 \text{ km})$	33
2.4	Cas des observations avec interpolation : les positions calculées et les erreurs trouvées pour un puits situé en $z = (6 \text{ km}, 6 \text{ km})$	35
2.5	Les valeurs du d et les erreurs relatives.	37
2.6	Cas de quatre puits : les positions exactes et celles calculées et les erreurs sur les positions calculées.	37
2.7	Les positions et les erreurs sur ces positions pour les différents pourcentages taux de bruits.	38
2.8	Positions exacte et identifiée et erreur associée dans le cas d'un puits proche de la frontière (Test1) ou du centre (Test2) d'un domaine.	39
2.9	les positions calculées en fonction des observations disponibles et les erreurs associées.	42
2.10	Les positions calculées avec des observations interpolées et les erreurs associées.	44
2.11	Les valeurs de la distance et les erreurs sur ces positions.	46
2.12	Cas de quatre puits : les positions exactes et celles calculées et les erreurs relatives.	47
2.13	Les positions, les erreurs relatives pour les différents niveau des bruits.	47
2.14	La positions exacte et calculée et l'erreur relatif	53
2.15	Les positions exactes et calculées et les erreurs relatifs.	53
2.16	Influence de la distance relative entre les puits, dans le cas de deux puits avec $Q_1 = 100 \text{ l s}^{-1}$ et $Q_2 = -100 \text{ l s}^{-1}$	54
3.1	Positions et débits identifiés et exacts pour différentes valeurs de d ainsi que les erreurs relatives.	64
3.2	Les débits et les positions exacts pour le cas de cinq puits.	65
3.3	Les positions et les débits calculés et les erreurs relatives pour le cas de cinq sources	65

3.4	Valeurs identifiées des débits, des positions ainsi que les erreurs relatives pour différents niveaux de bruits.	67
3.5	Les positions exactes et identifiées ainsi que les erreurs relatives pour $a = 1$	68
3.6	Les résultats obtenus en fonction des valeurs de d	80
3.7	Les débits et les positions exacts.	80
3.8	Les débits, les positions et les erreurs calculés pour l'aquifère de Rocky Mountain.	82
3.9	Les valeurs exactes et identifiées des débits et des positions des puits ainsi que les erreurs relatives	84
4.1	Exemple 1 : les valeurs de la transmissivité hydraulique pour chaque itération.	91
4.2	Exemple de "Rocky Mountain" : les valeurs de la transmissivité hydrauliques pour chaque itération.	95
4.3	Les valeurs de la transmissivité hydraulique pour chaque itération.	99
4.4	Les positions calculées au cours des itérations et les erreurs sur ces positions pour un puits situé en $z = (0.35 \text{ km}, 0.45 \text{ km})$	99
4.5	Mesures complètes : les positions des puits et les erreurs sur ces positions.	104
4.6	Mesures en un nœuds sur deux : les positions et les erreurs relatives associées.	106
4.7	Mesures en un nœud sur quatre : les positions et les erreurs relatives dans le cas de l'aquifère de de "Rocky Mountain".	109

Introduction générale

La gestion des ressources en eau est, depuis toujours, un problème d'une grande importance pour la survie de l'humanité. En effet, les ressources en eaux constituent une composante cruciale dans tous les secteurs de la vie : agricole, urbain, industriels etc. Cette importance est reflétée par la création d'organismes officiels de gestion de ressources en eau à tous les niveaux : international, national et régional et local. Ces organismes sont chargés d'assurer une distribution équitable pour tous les consommateurs, et de veiller à contrôler la préservation de la qualité de ces ressources et l'impact de leur exploitation sur l'environnement. Des outils numériques permettant la construction l'information sur le milieu hydrogéologique, à partir de mesures disponibles, seront d'une grande utilité pour l'aide à la gestion des ressources en eaux souterraines et à leur préservation des dégradations engendrées par une exploitation irrationnelle. Le plus souvent ces dégradations sont difficilement réversibles.

La modélisation de l'écoulement des eaux souterraines est un domaine essentiel de l'hydrogéologie. L'efficacité du modèle mathématique est fortement dépendante de la connaissance des différentes caractéristiques du milieu étudié. Les équations d'écoulement de fluides dans un milieu poreux font intervenir des paramètres hétérogènes tels que la perméabilité, la porosité, le coefficient d'emménagement,... qui sont difficiles à mesurer expérimentalement. D'autre part, l'extension géographique des zones géologiques qui composent le milieu étudié et les conditions aux limites sur ses frontières ne sont pas toujours bien maîtrisées par les hydrogéologues [BAD 91]. Toutes ces indéterminations font que nous sommes souvent en présence de problème inverse d'identification de paramètres, de complétion de données,... Un tel problème est souvent mal posé et nécessite une étude mathématique et numérique pour le développement de techniques de résolution efficaces.

Le problème inverse est une situation dans laquelle on cherche à déterminer les causes d'un phénomène à partir d'observations expérimentales de ses effets. Une autre définition donnée dans [KEL 76] indique que "deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause". En général, le modèle mathématique est considéré comme étant le problème direct et tout problème dont l'inconnue est une des données du problème direct est dit inverse. Pour le résoudre on doit disposer de mesures qui seraient surabondantes si considérées dans le problème direct.

Autrement dit, dans un problème inverse, nous cherchons à évaluer une certaine grandeur physique ξ inaccessible à l'expérience, à partir de mesures d'une grandeur d directement accessible à l'expérience. On note symboliquement $d = G(\xi)$ [KER 02], où G est un opérateur complexe faisant intervenir le modèle. Résoudre le problème inverse revient à inverser G .

Les problèmes inverses sont multiples et leurs applications se retrouvent dans tous les domaines tels que le contrôle non destructif des structures [ISA 97], la médecine [ADD 05], le nucléaire [BLU 13],...

Les problèmes inverses sont en général mal posés au sens d' Hadamard [HAD 53], c'est à dire que l'existence, l'unicité ou/et la continuité de la solution par rapport aux données ne sont pas vérifiées.

Dans ce travail notre problème direct est un modèle mathématique décrivant l'écoulement dans un milieu poreux, caractérisé par certains paramètres hydrogéologiques, tenant compte de conditions aux limites du domaine, de conditions initiales et de l'existence de termes sources. Nous nous proposons de développer des méthodes numériques et des algorithmes pour la résolution des problèmes inverses d'identification de sources et de puits, d'identification de conditions aux limites et d'estimation de paramètres, à partir de mesures sur le bord et/ou à l'intérieur du domaine.

Les puits constituent des ouvrages hydrauliques élémentaires [DEM 94]. Cependant ils sont d'une importance primordiale car ils permettent l'accès direct à l'eau à frais raisonnables. Leur forage est strictement contrôlé par les institutions concernées afin de ne pas sur-exploiter les nappes et à la longue les assécher. Cependant, les agriculteurs ont de plus en plus recours aux forages non autorisés.

Les puits de stockage, en général de fluides, qui pourraient être polluants, deviennent de plus en plus nombreux. Ceci fait que le développement de technique de localisation de puits à partir d'observations disponibles pourrait être un outil de contrôle efficace qui aiderait les gestionnaires de l'eau. Dans de plusieurs cas, les mesures disponibles sont en nombre très réduit ou ne peuvent être effectuées que sur une partie de la frontière du domaine. Nous étudions le problème d'identification de sources ou de puits en utilisant des mesures à l'intérieur du domaine ou sur la frontière. Nous traitons aussi le problème inverse de complétion de données sur la frontière.

Par ailleurs, dans la plus part des cas d'étude en hydrogéologie, la connaissance des propriétés hydrogéologiques de l'aquifère est un problème majeur lors de l'élaboration d'un modèle [HAR 13, SUN 94, ISA 06, DEM 00]. Les paramètres tels que la transmissivité hydraulique, le coefficient d'emménagement,....diffèrent d'une zone géologique à une autre. Dans ce travail nous étudions aussi un problème inverse complexe où nous avons à localiser les interfaces entre les zones géologiques, à estimer les valeurs des transmissivités hydrauliques et à localiser les puits dont on ne connaît pas le nombre.

Les applications des méthodes et des techniques, objets du présent travail, sont

multiples. Par exemple, identifier les paramètres qui caractérisent une zone géologique et/ou identifier les sources de polluants. Ce qui permettra d'étudier la propagation d'un polluant dans cette zone ainsi que sa capacité de stockage des eaux.

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Nous avons consacré le premier chapitre à la présentation des modèles en hydrogéologie et des équations qui décrivent l'écoulement de l'eau dans un milieu poreux saturé en utilisant la loi de Darcy [DEM 94, DEM 81] et le principe de conservation de la masse [DEM 94]. S'appuyant sur la différence d'échelle entre la taille des puits et celle de l'aquifère, on peut distinguer différentes modélisations pour un puits. Les sources sont considérées comme un cas particulier de puits. Géométriquement une source occupe un domaine de mesure nulle ; c'est le support d'une fonction de Dirac. Identifier une source consiste à identifier le support d'une fonction de Dirac (qui correspond à la position de la source) et la valeur non nulle qu'elle prend (qui correspond au débit). Un puits peut être aussi le modélisé par un trou géométrique [MOU 03, LIZ 08] de mesure non nulle. Ces modélisations nécessitent différentes méthodes pour résoudre le problème inverse correspondant.

La première partie du deuxième chapitre, est dédiée à la présentation de la méthode du gradient topologique [AMS 03, CHA 99, COL 84, BEN 09, ABD 09] pour identifier les positions des puits dont le nombre est supposé inconnu.

Cette méthode consiste à étudier le comportement d'une la fonction objectif, modélisant l'écart entre les mesures et la réponse du modèle considéré, sous l'effet d'une petite perturbation de la géométrie (ou de terme source dans le modèle). Dans la suite, nous développons un algorithme pour la localisation de puits et l'identification de leur nombre en se basant sur le calcul du gradient topologique. Nous étudions au second paragraphe de ce chapitre le problème inverse d'identification de positions de sources [FER 13, SAB 13].

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier le problème inverse d'identification de sources. Nous développons une approche qui consiste à adapter une méthode de résolution basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie [BAR 11a] en utilisant des données surabondantes sur une partie de la frontière du domaine afin de déterminer les positions, les débits et le nombre de puits. Enfin, nous étudions le problème de complétion de données [BAR 11b, BAR 09, HAR 11], de localisation de puits et d'identification de débits. Nous considérons que nous disposons de mesures sur une partie de la frontière et à l'intérieur du domaine. Nous utilisons la deuxième approche décrite dans le chapitre précédent en résolvant la même fonctionnelle.

Le dernier chapitre est dédié au développement d'une méthode pour résoudre le problème inverse de localisation d'interfaces entre les zones géologiques, de détermination des valeurs des transmissivités hydrauliques dans chaque zone et d'identification des

positions et du nombre des puits dans le milieu étudié.

La première partie de ce chapitre, est consacrée au problème de paramétrisation. Nous appliquons une méthode de paramétrisation adaptative [WEI 08, BEN 02a, HAY 08] pour construire la paramétrisation de la transmissivité hydraulique supposée constante dans chaque zone géologique. Ceci nous conduit à localiser les frontières entre les différentes zones géologiques [HAY 09, BEN 02a] et à estimer la valeur de la transmissivité dans chaque zone. Dans la suite nous développons un algorithme couplant la méthode de paramétrisation adaptative avec la méthode du gradient topologique, ce qui nous permet d'identifier à la fois la distributions des valeurs de la transmissivité, les frontières des zones ainsi que les positions et le nombre des puits.

Chapitre 1

Hydrogéologie et modélisation

1.1 Hydrogéologie

L'hydrogéologie est la science qui étudie les eaux souterraines tant du point de vue de leurs origines que de leur mouvement à travers les formations géologiques. Cette science s'intéresse aussi à l'étude de la qualité de ces eaux, ainsi qu'à leur gestion. Afin de protéger les réserves planétaires en eau potable et de planifier leur gestion, il est nécessaire de bien comprendre les processus hydrogéologiques. C'est dans ce but que les techniques de modélisation mathématique sont introduites en hydrogéologie. Ces techniques ont été souvent utilisées afin d'étudier les différents scénarios d'exploitation de ces eaux et de classer celui qui préserve la ressource et sa qualité [DAS 09, CHA 09, DEM 81]. Le modèle hydrogéologique est une représentation mathématique de l'aquifère, de ses conditions aux limites, de ses forages et des processus d'écoulement dont il est le siège [DEM 94, BOU 04].

Dans ce chapitre, nous allons présenter les variables, les paramètres et les équations décrivant les écoulements dans les milieux poreux.

1.2 Quelques définitions

Dans cette section, nous allons donner une idée sur le vocabulaire utilisé par les hydrogéologues pour désigner des quantités physiques intervenant dans les modèles.

1.2.1 Fluide [BEA 72]

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres.

Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz. Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. Un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement (viscosité

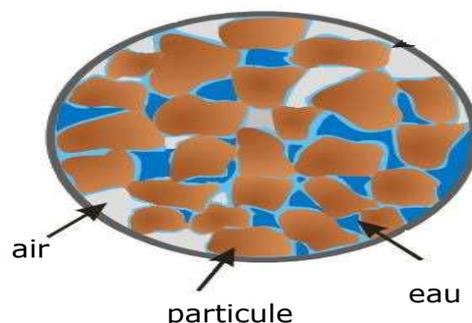


FIGURE 1.1: Représentation d'un milieu poreux [ALB 07].

nulle). L'eau est un fluide parfait et incompressible.

1.2.2 Milieu poreux [BEA 99]

Les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie tels que les couches sédimentaires, la plupart des roches et certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple). D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

1. Le matériau doit contenir de petits espaces vides (voir figure 1.1), appelés pores, délimités par une matrice solide.
2. Le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

1.2.2.1 Définition d'un aquifère et d'une nappe [BEA 79]

Le terrain dans lequel l'eau circule est dit le terrain aquifère ou simplement l'aquifère. Donc, un aquifère est une formation hydrogéologique perméable. Une zone saturée c'est à dire une partie poreuse dont tous les pores sont remplis d'eau. En fonction de son taux de remplissage un aquifère peut comporter une zone non saturée, qui renferme de l'air en plus de l'eau, comme indiqué sur la figure 1.2.

Suivant la structure et le type de perméabilité du milieu on distingue :

1. **L'aquifère** constitué de formations perméables.
2. **L'aquitard** est une couche semi-perméable comme les sables fins et argileux, pouvant stocker de l'eau ayant une vitesse de transit faible.
3. **L'aquiclude** constitué de roches à grande porosité contenant une grande quantité d'eau, mais la laissant passer très difficilement. On peut citer par exemple le cas de l'argile.

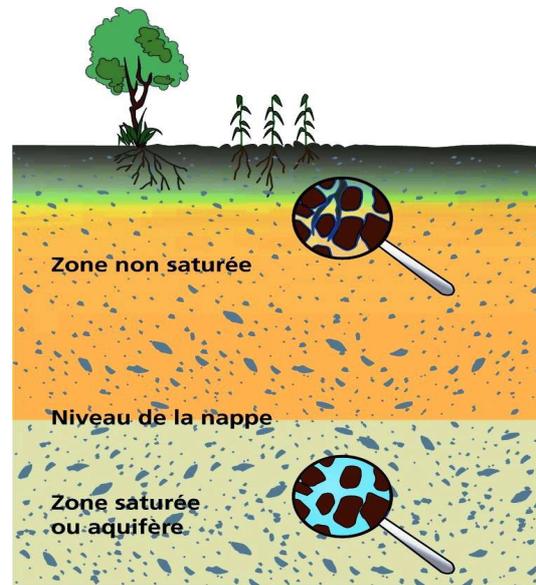


FIGURE 1.2: Zone saturée , zone non saturée (la couleur bleue représente l'eau). Source : <http://sigessn.brgm.fr/spip.php?article24>.

1.2.2.2 Définition de la porosité [DEM 81]

L'étude d'un aquifère passe aussi par l'identification de sa porosité . Les sols sont généralement constitués de particules solides formant un squelette autour duquel subsistent des espaces vides. Ces vides sont occupés soit par l'air, soit par de l'eau ou d'autres fluides. La porosité du milieu s'exprime quantitativement comme le rapport entre le vo-

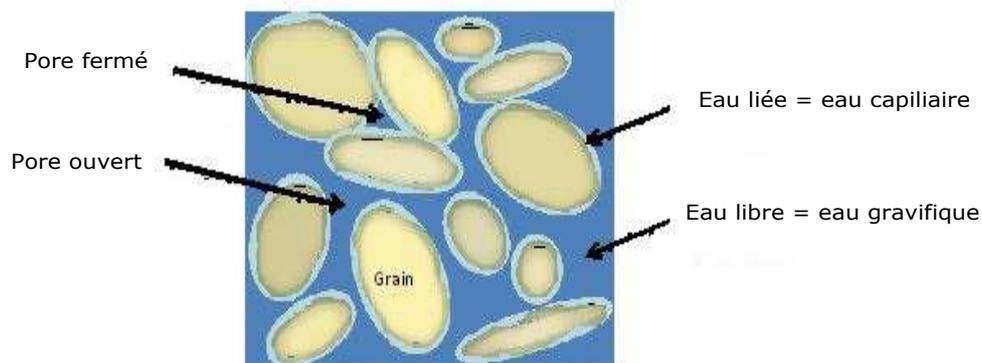


FIGURE 1.3: Porosité. Source : <http://sigessn.brgm.fr/spip.php?article313>.

lume des pores et le volume total du milieu.

$$\text{porosité totale } \phi = \frac{\text{volume du vide}}{\text{volume total de la roche}}. \quad (1.1)$$

La porosité varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Puisqu'il s'agit d'un rapport de quantités de même nature, la porosité n'a pas d'unité et elle est souvent exprimée en pourcentage.

1.2.2.3 Différents types de nappes [DEM 81]

La nappe phréatique (on l'appelle aussi nappe aquifère) est une réserve d'eau qui se trouve sous la surface de la terre au-dessus d'une poche de terre imperméable. S'appuyant sur les conditions hydrodynamiques qui régissent le mouvement de l'eau souterraine contenue et en se référant à la topographie des nappes souterraines nous distinguons les types suivants de nappes :

- **Une nappe libre** (voir figure 1.4) : est une nappe dont la limite supérieure dans la formation poreuse est une surface libre. Cette dernière est une surface isobare, la pression est constante et est égale à la pression atmosphérique. Cette nappe est généralement limitée en bas par un substratum imperméable.

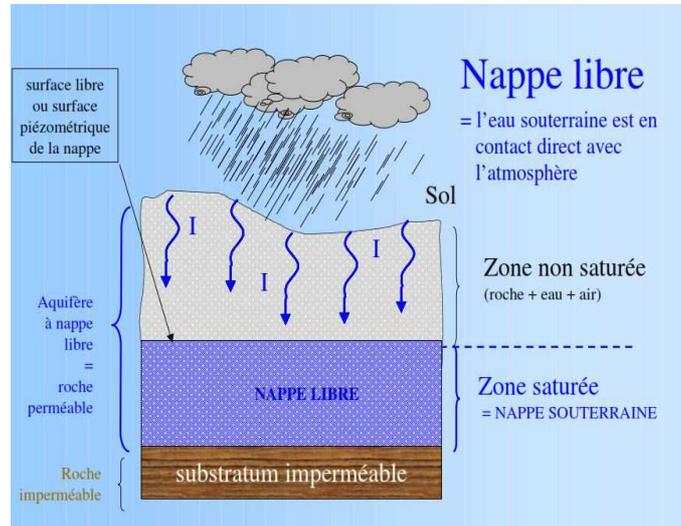


FIGURE 1.4: Nappe libre [ABA 07]

- **Une nappe captive** (voir figure 1.6) : est une nappe d'eau souterraine emprisonnée dans une formation géologique perméable, entre deux formations imperméables. L'eau contenue dans cette nappe est soumise à une pression supérieure à la pression atmosphérique. Généralement, une nappe captive plus en profondeur qu'une nappe libre.

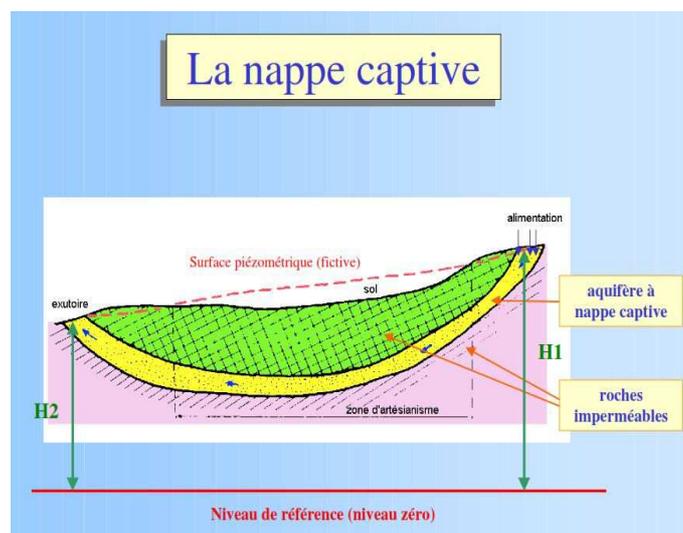


FIGURE 1.5: Nappe captive [ABA 07]

1.3 Les variables et les paramètres décrivant l'écoulement dans un milieu poreux

Un paramètre est une propriété intrinsèque des matériaux formant l'aquifère. Les variables d'état représentent l'état hydrologique dont l'évolution est décrite par le modèle mathématique. Les paramètres sont considérés comme constants dans le temps tandis que la variable d'état ne l'est pas.

1.3.1 La charge hydraulique [DEM 94]

Commençons par rappeler le théorème de Bernoulli [BEA 79] : "La somme des pressions et des énergies mécaniques par unité de volume est constante tout le long du tube de courant" soit :

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho gz + p = \text{constante} \quad (1.2)$$

Cela est équivalent à :

Pression Cinétique + Pression de pesanteur + énergie de pression = constante.

Avec

- ρ : la masse volumique [Kg/m^3]
- p : la pression statique [Pa]
- V : la vitesse d'écoulement [m/s].
- g : est la gravité terrestre [$9.81m/s$].
- z : le niveau de l'eau [m].

On appelle ligne de courant une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse $v(x,t)$. Un tube de courant est la surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant

sur une courbe fermée C dont aucun tronçon ne coïncide avec une ligne de courant (figure 1.6).

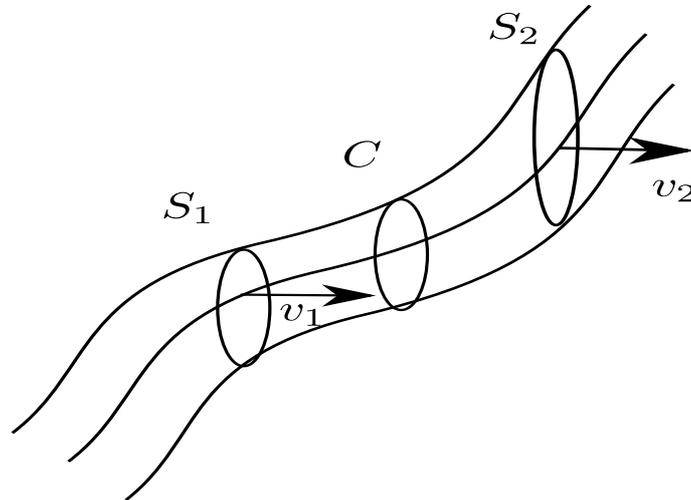


FIGURE 1.6: Ligne de courant et type de courant.

L'équation de Bernoulli peut être considérée comme étant le principe de conservation d'énergie adapté aux fluides en mouvement. Dans un milieu poreux la vitesse d'écoulement du fluide étant très faible, l'énergie cinétique est négligée et le théorème de Bernoulli donne :

$$\rho g z + p = C_1.$$

divisons l'équation précédente par ρg et on obtient :

$$z + \frac{p}{\rho g} = u.$$

avec u est appelé la charge hydraulique. Notons que alors que C_1 a la même unité qu'une pression, u a celle d'une hauteur.

1.3.2 La conductivité hydraulique [DEM 94]

La conductivité hydraulique appelée aussi coefficient de perméabilité, a été introduite par Darcy (voir plus loin) . Elle indique la facilité avec laquelle s'effectue le transfert de l'eau dans un milieu poreux. Mathématiquement, ce paramètre est un tenseur d'ordre 3, symétrique, définie et positive. Ses valeurs propres indiquent la valeur de la conductivité dans les trois directions principales définies par les trois vecteurs propres.

La conductivité hydraulique dépend à la fois des caractéristiques de l'aquifère et celles du fluide.

Le domaine de variation de ce coefficient est de $10^{-2} m/s$ pour les graviers, à $10^{-11} m/s$,

pour les argiles franches. Un matériau est considéré comme imperméable au delà de $10^{-9}m/s$. La conductivité hydraulique, noté K , est définie par :

$$K = \frac{k \cdot \rho \cdot g}{\mu} \quad [ms^{-1}] \quad (1.3)$$

Avec

- k : coefficient de perméabilité intrinsèque [m^2]
- ρ : densité du fluide [$Kg m^{-3}$]
- μ : viscosité dynamique du fluide [$Kg m^{-1}s^{-1}$]
- g : l'accélération de la pesanteur [m/s^2]

Dans le cas d'un milieu anisotrope, la perméabilité K est définie par un tenseur symétrique de la forme :

$$K = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{XY} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{XZ} & K_{YZ} & K_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

1.3.3 La transmissivité hydraulique [BEA 79]

La transmissivité hydraulique d'un aquifère est la mesure de la facilité avec laquelle l'eau peut être transmise horizontalement sur toute l'épaisseur e de l'aquifère. La transmissivité dépend des propriétés du liquide et du milieu poreux.

En représentation bidimensionnelle, la transmissivité correspond à l'intégration de K suivant l'épaisseur e de l'aquifère.

$$T = \int_e K dz \quad [m^2 s^{-1}] \quad (1.5)$$

Dans le cas où la perméabilité est la même sur toute l'épaisseur de l'aquifère la relation se simplifie :

$$T = K \cdot e \quad (1.6)$$

Un bon aquifère doit vérifier $T \geq 0.015m^2s^{-1}$ pour être exploitable du point de vue ressource en eau.

1.3.4 La capacité d'emmagasinement [BEA 79]

Le coefficient d'emmagasinement spécifique représente la capacité à libérer de l'eau sous l'effet d'un abaissement de la charge hydraulique. Le coefficient d'emmagasinement spécifique, S_s , donne le volume d'eau libéré par un volume unitaire de matériau pour une baisse unitaire de charge hydraulique, son unité est (m^{-1}). Pour une nappe captive, l'eau et le milieu poreux peuvent se comprimer sous l'effet de la charge hydraulique, augmentant ainsi la capacité de stockage, le coefficient d'emmagasinement est défini par :

$$S = S_s e \quad [-] \quad (1.7)$$

S est un scalaire sans dimension. Pour une nappe libre, on définit V le volume d'eau libérée ou emmagasinée par unité de surface d'un aquifère A par :

$$V = n_d \Delta h A$$

avec n_d est la porosité de drainage (la porosité du sol libérée de son eau suite au drainage et elle correspond à la différence entre la saturation et la capacité au champ) et Δh est la variation de la charge hydraulique. Ainsi,

$$S = n_d \quad (1.8)$$

1.4 Modélisation d'un puits

Un puits ou un forage est un ouvrage de captage vertical permettant l'exploitation de l'eau d'une nappe, contenue dans les interstices ou dans les fissures d'une roche du sous-sol qu'on nomme aquifère. L'eau peut être remontée au niveau du sol soit de façon très simple grâce à un récipient (seau par exemple) soit plus facilement grâce à une pompe, manuelle ou motorisée. Les puits et les forages sont très divers, que ce soit par leur profondeur, leur volume d'eau ou leur coût.

Il existe trois grandes catégories de puits (figure 1.7) : les puits creusés, les puits foncés et les puits forés.

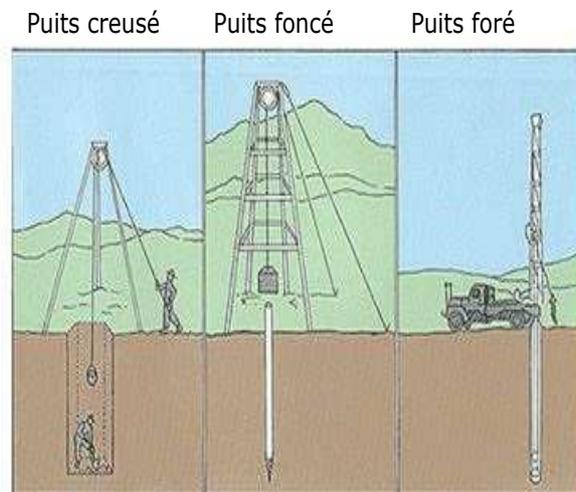


FIGURE 1.7: Exemples de puits. Source : <http://www.wikiwater.fr/e28-les-divers-types-de-puits-et.html>.

Le choix du type d'ouvrage à réaliser dépend essentiellement de la profondeur de la nappe aquifère, des données hydrogéologiques du terrain, de la rapidité recherchée ou non

et du coût de l'opération (il serait par exemple très difficile ou dangereux de faire creuser un puits à la main par des puisatiers à plus de 30 m de profondeur [ADA 03]). L'ouverture d'un puits creusé à la pioche est bien plus grande (ne serait-ce que pour permettre la descente de puisatiers) que celle d'un puits foncé réalisé en enfonçant des outils dans le sol ou d'un forage dont l'orifice est au contraire étroit compte tenu des outils utilisés et de la grande profondeur à atteindre.

Le choix entre les différents procédés de creusement des puits dépend de nombreux paramètres :

- Les caractéristiques géologiques des terrains à creuser : roches dures, roches tendres et friables, terre sableuse,...
- La profondeur à creuser (laquelle est fonction de la profondeur de la nappe phréatique).
- Les moyens techniques potentiellement disponibles sur place et leur coût.
- Le diamètre souhaité.

On s'appuie sur la différence d'échelle entre la taille du puits et celle de l'aquifère, on peut distinguer les différentes modélisations d'un puits pour l'équation d'écoulement :

- 1) Un puits peut être défini comme un Dirac au point x par $\lambda * \delta_x$, λ [$m^3 s^{-1}$] le débit du puits [HAR 11]. Ici, nous avons considéré qu'un puits est un trou de mesure nulle par rapport à l'aquifère.
- 3) On peut modéliser un puits par un trou géométrique O de rayon r et de centre (z_x, z_y) . Donc, nous avons besoin de conditions aux limites sur la frontière du puits ∂O dans la définition de l'équation d'écoulement. Deux cas peuvent se présenter [MOU 03, LIZ 08] :
 - On peut imposer une condition de type Dirichlet sur le bord du puits, telle que la charge hydraulique $u = 0$ sur $d\Omega$.
 - Ou bien imposer une condition de type Neumann sur la frontière ∂O telle que le flux hydraulique est défini par $T \nabla u \cdot n = 0$.

1.5 Modélisation de l'écoulement en milieu poreux saturé

L'écoulement de l'eau en milieu poreux saturé est décrit par un système d'équations composé par la combinaison de la loi de Darcy et de l'équation de conservation de la masse [DEM 81, YEA 86].

1.5.1 Loi de Darcy

En 1856 Henri Darcy a publié une expérience de transfert d'eau à travers un milieu poreux dans un livre intitulé « Les fontaines publiques de la ville de Dijon » [DEM 81]. Dans son expérience il a mesuré le flux d'eau à travers un filtre composé de sable. Darcy a relié le flux à la section du filtre et au gradient hydraulique.

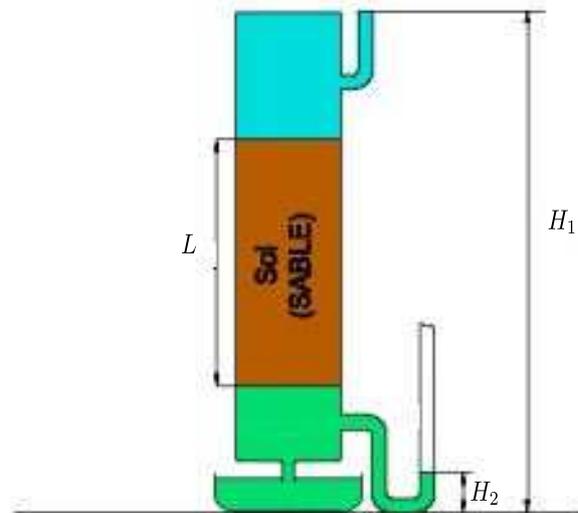


FIGURE 1.8: Expérience de Darcy [TAL 04]

L'expérience qui est à l'origine de la loi de Darcy est la suivante : considérons un cylindre de section A , rempli de sable, avec une circulation d'eau et deux manomètres (voir figure 1.8). L'eau est introduite dans le cylindre, sature les pores avant de s'écouler à l'autre extrémité. En prenant un niveau de référence $Z = 0$, on attribue Z_1 et Z_2 aux niveaux des ouvertures des manomètres et H_1 et H_2 [m] aux hauteurs du fluide. Le débit total traversant le cylindre est noté λ [m^3/s]. On définira alors β , comme le débit spécifique à travers le cylindre :

$$\beta = \frac{\lambda}{A}$$

Le débit spécifique a la dimension d'une vitesse [m/s]. On observe que β est directement proportionnel à $H_1 - H_2$ si la distance L entre les manomètres 1 et 2 est constante et inversement proportionnel à L , si $H_1 - H_2$ est constant. Si on définit ∇u comme $H_1 - H_2$, alors la loi de Darcy s'écrit :

$$\frac{\lambda}{A} = -K \frac{\nabla u}{L} \quad (1.9)$$

ou bien :

$$\beta = -K \frac{du}{dl} = -K \nabla u. \quad (1.10)$$

On note $\frac{du}{dl}$ est le gradient hydraulique (c'est le quotient de la différence de charge hydraulique entre deux points d'un milieu poreux saturé, sur une même ligne de courant, par la distance les séparant sur cette ligne de courant [DEM 81]).

1.5.2 Équation d'écoulement

Pour obtenir l'équation d'écoulement d'eau dans un milieu poreux, nous formulons d'abord le principe de conservation de la masse puis nous utilisons la loi de Darcy. Pour le principe de conservation de la masse nous avons la quantité à conserver étant la masse de fluide en fonction du temps dans un milieu poreux [CHA 09]. Comme la masse de fluide s'écrit pour tout élément de volume de contrôle Ω :

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho\Phi d\Omega \quad (1.11)$$

avec :

ρ représente la masse volumique de l'eau, Φ la porosité. L'équation globale de conservation de la masse sans termes sources est :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (1.12)$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on trouve :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\Phi d\Omega \quad (1.13)$$

Puis en utilisant les théorèmes généraux sur les dérivés [SUN 06], nous obtenons :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} d\Omega + \int_{\sigma} \rho\Phi(V.n)d\sigma \quad (1.14)$$

$d\Omega$ est la frontière du domaine Ω , $d\sigma$ est un élément de surface sur la frontière, V est le champ de vitesse du fluide et \mathbf{n} est la normale extérieure en tout point de la frontière du domaine considéré.

L'intégrale $\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} d\Omega$ représente la variation locale instantanée de masse dans le volume Ω .

L'intégrale $\int_{\sigma} \rho\Phi(V.n)d\sigma$ représente la variation de masse due au flux de masse net à travers la surface σ .

D'après (1.12) et (1.14), nous avons :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} d\Omega + \int_{\sigma} \rho\Phi(V.n)d\sigma = 0 \quad (1.15)$$

La formule de Green permet d'exprimer l'intégrale de surface sur la frontière σ en une intégrale de volume dans le domaine Ω ainsi nous obtenons :

$$\int_{\sigma} \rho\Phi(V.n)d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}(\rho\Phi V)d\Omega \quad (1.16)$$

(1.15) et (1.16) donnent :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\Phi V) \right) d\Omega = 0 \quad (1.17)$$

Cette intégrale de volume (1.17) est nulle quelque soit t fixé et aussi pour tout volume matériel Ω . Ainsi nous déduisons l'équation de conservation sous sa forme locale :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\Phi V) = 0 \quad (1.18)$$

Or la vitesse interstitielle V dans un milieu poreux est liée à la densité de flux q via la porosité : $q = \Phi V$

D'où l'équation obtenue :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = 0 \quad (1.19)$$

En insérant la loi de Darcy (1.10) dans l'équation (1.19) nous obtenons l'équation d'écoulement :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} - \text{div}(\rho K \nabla u) = 0 \quad (1.20)$$

Or

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \Phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.21)$$

ainsi nous obtenons [DEM 81] :

$$\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \Phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho S_s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.22)$$

avec S_s : coefficient d'emmagasinement spécifique. Nous déduisons l'équation d'écoulement sans termes sources :

$$S_s \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\rho K \nabla u) = 0 \quad (1.23)$$

En simplifiant par ρ , pour $\rho = cste$, puis en intégrant l'équation (1.23) sur l'épaisseur de la nappe on obtient :

$$S \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(T \nabla u) = 0, \quad (1.24)$$

Si nous ajoutons un terme source (pompage, injection) alors l'équation sera de la forme suivante :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \text{div}(K \text{grad } u) = Q, \quad (1.25)$$

Avec Q est le terme source (ms^{-1}).

Dans cette thèse on se limite au cas stationnaire :

$$- \text{div}(T(x,y) \nabla u) = Q \quad (1.26)$$

Dans le cas général l'équation aux dérivées partielles (1.25) modélisant l'écoulement est une équation parabolique. Dans le cas stationnaire que nous considérons, l'écoulement est modélisé par l'équation elliptique (1.26).

1.5.3 Conditions aux limites

Un aquifère a une extension limitée dans l'espace et sur ses frontières les échanges d'eau avec l'extérieur sont régies par des conditions aux limites. Ces conditions peuvent être :

- Condition de type Dirichlet ou charge imposée :

$$u = \bar{H} \quad (1.27)$$

La valeur de la charge hydraulique u est spécifiée sur une partie de la frontière, cette condition est rencontrée en cas de contact nappe-rivière, la charge imposée est égale à la cote de la surface libre.

- Condition de type Neumann ou de flux imposé :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} \quad (1.28)$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure à la frontière et $\bar{\Phi}$ le flux imposé.

Dans le cas particulier où $\bar{\Phi} = 0$, par application de la loi de Darcy, cette condition traduit le fait que la vitesse de l'écoulement normale à la frontière est nulle. Donc cette frontière est imperméable. Les équipotentiels sont alors perpendiculaires à cette frontière et les lignes de flux sont parallèles.

Finalement, nous considérons le problème d'écoulement darcien pour les différents cas du modélisation des puits.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 et Γ_1, Γ_2 et Γ_m une partition de la frontière $\partial\Omega$ telle que nous disposons sur Γ_2 des mesures du flux hydraulique $\bar{\Phi}$, sur Γ_1 la charge hydraulique \bar{H} et sur Γ_m des mesure du flux Φ .

- Dans le cas où le puits est modélisé comme un Dirac, le modèle stationnaire s'écrit :

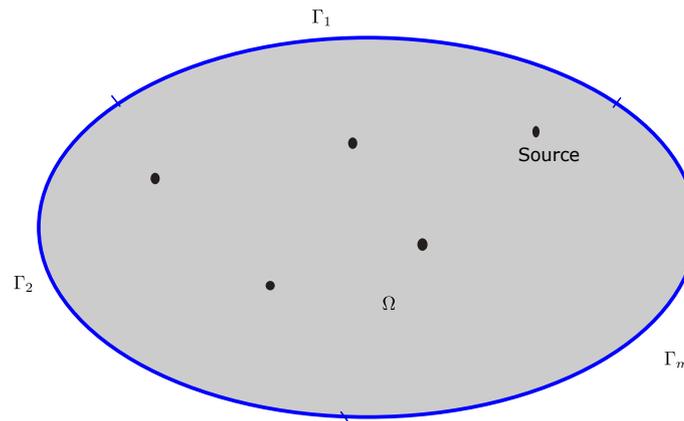


FIGURE 1.9: Exemple du domaine avec ses frontières et ses sources.

$$\begin{cases} -\text{div}(T(x)\nabla u) &= Q & \text{dans } \Omega \\ u &= \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u \cdot \mathbf{n} &= \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u \cdot \mathbf{n} &= \Phi & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (1.29)$$

où Γ_1 , Γ_2 et Γ_m sont des parties de la frontière $\partial\Omega$ vérifiant $\overline{\partial\Omega} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_m$ et $\Gamma_m \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

$$Q(x) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \delta(x - P_j) \quad (1.30)$$

M le nombre de puits, δ l'opérateur de Dirac, les $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et les $P_j = (P_{x_j}, P_{y_j})$, pour $j = 1 \dots M$ sont respectivement les débits et les positions de chargement de l'eau (figure 1.9).

– Un puits est un trou géométrique O (figure 1.10), nous considérons deux problème :

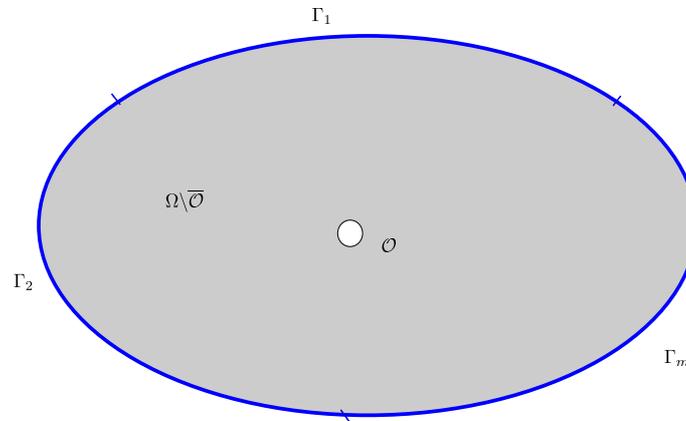


FIGURE 1.10: Exemple du domaine avec ses frontières et un puits.

i)

$$\begin{cases} -div(T\nabla u_0^1) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{O} \\ u_0^1 = \overline{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_0^1 \cdot \mathbf{n} = \overline{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_0^1 \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ T\nabla u_0^1 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial O = \Sigma \end{cases} \quad (1.31)$$

ii)

$$\begin{cases} -div(T\nabla u_0^2) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{O} \\ u_0^2 = \overline{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_0^2 \cdot \mathbf{n} = \overline{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_0^2 \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u_0^2 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (1.32)$$

En conclusion les modèles hydrologiques sont un ensemble d'équations mathématiques permettant une représentation simplifiée du milieu naturel.

1.6 Étude de l'existence et l'unicité de différents modelés

Nous nous basons sur les travaux présentés dans [FAR 07] on peut montrer que le problème (1.29) admet une unique solution dans \mathcal{V}_0 . Où

$$\mathcal{V}_0 = \{v : \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (1.33)$$

Alors la formulation faible du problème (1.29) est donnée par :

$$a_0(u, v) = l_0(v) \quad \forall v, u \in \mathcal{V}_0 \quad (1.34)$$

avec

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} T \nabla u \nabla v dx \quad (1.35)$$

et

$$l_0(v) = \int_{\Omega} Q(x)v dx + \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} v ds + \int_{\Gamma_m} \Phi \cdot n v ds \quad (1.36)$$

Pour l'étude de deux problèmes (1.32) et (1.32), nous définissons les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \{v \in H^1(\Omega \setminus \bar{O}), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \\ \mathcal{V}_2 &= \{v \in \mathcal{V}, v = 0 \text{ sur } \Sigma\} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (1.31) (respectivement du problème (1.32)) s'écrit : trouver $u \in \mathcal{V}_1$ (resp. \mathcal{V}_2) tel que

$$a(v, w) = l(w), \forall w \in \mathcal{V}_1 \text{ (resp. } \mathcal{V}_2). \quad (1.37)$$

où

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \int_{\Omega \setminus \bar{O}} T \nabla v \nabla w dx \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_1. \\ l(w) &= \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} w ds + \int_{\Gamma_m} \Phi w ds. \end{aligned}$$

Si on munit \mathcal{V}_1 (resp. \mathcal{V}_2) du produit scalaire induit par celui de $H^1(\Omega \setminus \bar{O})$. Il est clair que a est une forme bilinéaire continue coercive sur $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1$ (resp. $\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2$). Aussi, il est évident que l est une forme linéaire continue sur \mathcal{V}_1 (resp. \mathcal{V}_2).

Alors d'après le théorème de Lax-Milgram les deux problèmes variationnels (1.31) et (1.32) admettent deux uniques solutions. Donc les différents modèles sont bien définis au sens de Hadamard [HAD 53].

1.7 Les problèmes discrétisés

Dans toute la thèse, nous allons utiliser la méthode des éléments finis pour discrétiser les domaines des travaux. Toutes les simulations numériques seront menées sur les deux

logiciels : Matlab et Comsol Multiphysics. Comsol Multiphysics est une plate forme logicielle générale qui autorise la modélisation et la simulation des phénomènes physiques à l'aide de méthodes numériques avancées. COMSOL Multiphysics permet de coupler des physiques simples ou d'étudier des phénomènes multiphysiques. Pour étendre les simulations possibles. Supposons que la triangulation : \mathcal{T}_h de Ω soit caractérisée par n nœuds et n_e éléments.

On note l'espace de discrétisation par :

$$\mathcal{V}_h = \{u_h \in C^0(\overline{\Omega}), u_h \in P^1, \forall E_e \in \mathcal{T}_h, u_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (1.38)$$

De manière plus formelle, un maillage du domaine Ω est donné par :

$$\overline{\Omega} = \cup_{e=1}^{n_e} E_e, \quad E_e \neq E_f, \quad e \neq f. \quad (1.39)$$

Soit p_1 , p_2 et p_m les nombres de nœuds respectivement sur la frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_m . On note :

- u_h et $H_N \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs correspondant respectivement aux solutions des problèmes (1.29) et (1.31),
- $\overline{H}_{dis} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur correspondant aux données de Dirichlet sur Γ_1 ,
- $F_{\overline{\Phi}} \in \mathbb{R}^n$ contient les données de Neumann sur Γ_2 ,
- $L_1 \in \mathcal{M}_{p_1 \times n}(\mathbb{R})$ et $L_m \in \mathcal{M}_{p_m \times n}(\mathbb{R})$ des matrices contenant uniquement des 0 et des 1 et permettant de conserver les valeurs H_N respectivement sur Γ_1 et Γ_m ,
- K est la matrice de rigidité $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- Nous prenons pour T la discrétisation la plus fine possible : nous prendrons une valeur par élément du maillage. Nous noterons donc T_h le vecteur représentant la fonction approchée :

$$T_h = (T_{E_e}, E_e \in \mathcal{T}_h). \quad (1.40)$$

La discrétisation du problème (1.29) est donnée par :

$$\begin{cases} Ku_h &= F(Q) + F_{\Phi} + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1 u_h &= \overline{H}_{dis} \end{cases} \quad (1.41)$$

La discrétisation du problème (1.31) dans le domaine sain (domaine sans puits) est donnée par :

$$\begin{cases} KH_N &= F_{\Phi} + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1 H_N &= \overline{H}_{dis} \end{cases} \quad (1.42)$$

Chapitre 2

Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Ce chapitre est consacré à une analyse de sensibilité topologique pour identifier les positions de puits ou de sources à l'intérieur du domaine Ω pour les modèles (1.29), (1.31) et (1.32) décrits dans le première chapitre.

La méthode du gradient topologique est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation de formes géométriques. Dans son principe, on cherche à minimiser une fonction objectif définie en fonction de la géométrie.

L'optimisation de formes est un thème très porteur en mathématiques appliquées. L'un de ses attraits est que cette discipline marie les techniques les plus fines de l'analyse moderne aux applications industrielles les plus concrètes et aux secteurs de haute technologie (électromagnétisme, [GUI 02] imagerie [DRO 14], automobile [CAL 04], matériaux [SAH 12], acoustique [NEM 06] ...).

Elle consiste à rechercher la géométrie d'un objet qui soit optimale vis à vis de certains critères.

Généralement, les problèmes d'optimisation de formes rencontrés dans les sciences de l'ingénieur peuvent être modélisés sous la forme :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{D}} \mathbb{J}(\Omega, u_{\Omega}) \quad (2.1)$$

avec

- \mathbb{J} est la fonction objectif. Elle dépend du domaine Ω à travers la solution u_{Ω} d'un modèle mathématique posé dans Ω .
- \mathcal{D} est l'ensemble des domaines admissibles.

Les premiers travaux sur ce sujet sont dus à Maz'ya et al. [MAZ 12]. Ils ont obtenu des développements asymptotiques à un ordre quelconque de certaines fonctions objectifs pour divers problèmes de la physique. Schumacher [SCH 02] eut le premier l'idée d'utiliser ce genre de développements en optimisation de forme sous le nom de "bubble method".

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

L'analyse de la sensibilité topologique permet d'obtenir un développement asymptotique d'une fonction de forme par rapport à l'insertion d'un trou à l'intérieur du domaine.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le domaine de proféré :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{O_\varepsilon}$$

où $O_\varepsilon = x_0 + \varepsilon O$.

$O \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, est un domaine de référence et $x_0 \in \Omega$.

Lorsque $\varepsilon = 0$, on a $\Omega_0 = \Omega$ et on note $\Sigma_\varepsilon = \partial O_\varepsilon$ (voir figure 2.1).

Donc, nous cherchons à déterminer l'expression d'un développement asymptotique la

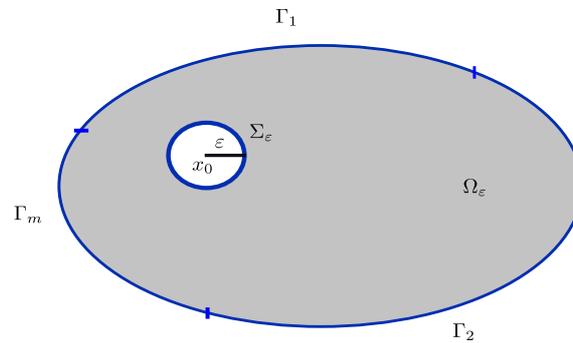


FIGURE 2.1: Domaine perturbé par une insertion d'un trou O_ε .

fonction objectif $\mathbb{J}(\Omega_\varepsilon, u_{\Omega_\varepsilon})$ lorsque ε tend 0. Pour simplifier les notations, on note la fonction $J(\Omega_\varepsilon)$, le développement s'écrit :

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + f(\varepsilon)\delta_J(x_0) + o(f(\varepsilon)).$$

La fonction δ_J est appelée sensibilité ou gradient topologique et va être utilisée comme direction de descente dans le processus d'optimisation. En effet, il suffit de placer un trou là où la fonction δ_J est la plus négative.

La fonction $f(\varepsilon)$ est une fonction positive tendant vers 0 lorsque ε tend vers 0. Elle dépend de la dimension de l'espace et des conditions au bord.

Elle peut prendre dans certains cas une des fonctions suivantes : ε^3 (en 3D avec condition de Neumann), ε^2 (en 2D avec condition de Neumann), ε (en 3D avec condition de Dirichlet) et $\frac{-1}{\log(\varepsilon)}$ (en 2D avec condition de Dirichlet), voir par exemple [GAR 01] pour plus de détails. Dans [SOK 99] J. Sokolowski et A. Zochowski ont déterminé le gradient topologique par rapport à la taille d'un trou inséré à l'intérieur du domaine pour une certaine catégorie de fonctions objectifs.

Masmoudi [MAS 05] a obtenu le développement asymptotique par rapport à une variation topologique pour une large classe de fonctions objectif dans le contexte de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet au bord d'un trou circulaire. Cette méthodologie a ensuite été adaptée pour des trous de formes quelconques avec condition de type Dirichlet ou de type Neumann : les formules correspondantes ont été déterminées pour

les équations de l'élasticité linéaire [GAR 01] et de Stokes [GUI 04].

La sensibilité topologique a également été utilisée pour l'imagerie par Bonnet [BON 06] ou encore dans l'étude de diffusion inverse électrodynamique et acoustique en temps par Bonnet dans [BON 04]. Carpio et Rapum [CAR 08] ont étudié la reconstruction d'objets à l'aide de la dérivée topologique dans le cas des équations de Helmholtz.

Ben Abda et al. [BEN 09] ont déterminé l'expression du gradient topologique pour déterminer les positions des boules de gaz pour l'équation de Navier-Stokes. Hassine et al. [HAS 04] ont étudié la méthode de sensibilité topologique pour le problème quasi-Stokes.

Plusieurs travaux ont utilisé la méthode du gradient topologique pour identifier les positions de sources. On peut citer les travaux de Chetboun [CHE 10] qui a utilisé le gradient topologique pour créer un terme source modélisant un générateur de vortex mécanique. Ferchichi et al. [FER 13] ont localisé les sources pour l'équation de Navier Stocks. Cette méthode est également exploitée pour localiser le foyer d'un tremblement de terre [LAR 08, KAW 08], pour identifier les sources l'émission acoustique [VOS 84, AND 01, SAB 13], pour déterminer de sources de contaminant [AKÇ 03, HAY 03], ...

On note u_0 la solution du problème posé dans le du domaine sain Ω :

$$\begin{cases} -div(T\nabla u_0) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_0 & = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} & = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} & = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (2.2)$$

On note :

- 1) u_ε^1 la solution du problème dans le domaine perturbé Ω_ε avec une condition de type Neumann sur le bord Σ_ε (voir la figure 2.1) :

$$\begin{cases} -div(T\nabla u_\varepsilon^1) & = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^1 & = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} & = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} & = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (2.3)$$

- 2) u_ε^2 la solution du problème dans le domaine perturbé Ω_ε avec une condition de type Dirichlet sur le bord Σ_ε :

$$\begin{cases} -div(T\nabla u_\varepsilon^2) & = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^2 & = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} & = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} & = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u_\varepsilon^2 & = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous définissons les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\varepsilon &= \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \\ \mathcal{V}_\varepsilon^0 &= \{v \in \mathcal{V}_\varepsilon, v = 0 \text{ sur } \Sigma_\varepsilon\} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (1.31) (respectivement du problème (1.32)) s'écrit : trouver $v \in \mathcal{V}_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{V}_\varepsilon^0$) tel que

$$a_\varepsilon(v, w) = l_\varepsilon(w), \quad \forall w \in \mathcal{V}_\varepsilon \quad (\text{resp. } \mathcal{V}_\varepsilon^0). \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(v, w) &= \int_{\Omega_\varepsilon} T \nabla v \nabla w dx \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_\varepsilon. \\ l_\varepsilon(w) &= \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} w ds + \int_{\Gamma_m} \Phi w ds. \quad \forall w \in \mathcal{V}_\varepsilon. \end{aligned}$$

2.1 Sensibilité topologique pour une perturbation du domaine

2.1.1 Condition de type Neumann sur le bord du puits

Nous allons traiter dans ce paragraphe l'analyse de sensibilité topologique pour une fonction objectif définie dans un premier cas à partir de mesures à l'intérieur. Dans un second cas, les observations sont prises sur la frontière Γ_m .

2.1.1.1 Gradient topologique dans le cas d'observations à l'intérieur du domaine

La méthode est fondée sur le fait que l'espace \mathcal{V}_ε qui contient la solution du problème de Neumann dans le domaine Ω_ε vérifie la propriété suivante : la restriction d'une fonction $v \in \mathcal{V}_0$ à Ω_ε appartient à \mathcal{V}_ε . Cela permet d'injecter \mathcal{V}_0 dans \mathcal{V}_ε .

Soit $(\mathcal{V}_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ une famille d'espace de Hilbert qui vérifie :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on définit la fonction moindre carré [KAN 94] :

$$J_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^1 - d^{obs}|^2 d\Omega. \quad (2.6)$$

Avec d^{obs} sont les observations prises à l'intérieur du domaine Ω .

Le but de cette section est de calculer la variation la fonction objectif J_ε^1 par rapport à la création d'un petit trou O_ε dans Ω avec une condition de Neumann sur le bord du trou Σ_ε .

L'analyse asymptotique de ce cas est basée sur le cadre abstrait développé par Ben Abda et al. [BEN 09].

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, soit j_1 une fonction de forme définie par :

$$j_1(\varepsilon) = J_\varepsilon^1(u_\varepsilon^1) \quad (2.7)$$

On suppose que J_ε^1 est différentiable par rapport à $u_\varepsilon^1 \in \mathcal{V}_\varepsilon$, sa différentielle en u_ε^1 sera notée par $DJ_\varepsilon^1(u_\varepsilon)$. Afin d'avoir un développement asymptotique de la fonction J_ε^1 par rapport à ε , on considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse (A1) [BEN 09] Il existe une forme linéaire continue L_ε sur \mathcal{V}'_ε , un nombre réel δ_J et une fonction positive $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que :

$$- J_\varepsilon^1(u_\varepsilon) - J_0^1(u_0) = L_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) + f(\varepsilon)\delta_J + o(f(\varepsilon)).$$

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0.$$

- Il existe $\delta_a \in \mathbb{R}$, indépendant de ε , tel que

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta_a + o(f(\varepsilon)). \quad (2.8)$$

où v_ε est la solution du problème adjoint

$$a_\varepsilon(w, v_\varepsilon) = -L_\varepsilon(w), \forall w \in \mathcal{V}'_\varepsilon. \quad (2.9)$$

- La différentielle de J_ε^1 vérifie

$$\|DJ_\varepsilon^1(u_\varepsilon) - DJ_0^1(u_0)\|_{L^2(\mathcal{V}'_\varepsilon)} = o(\varepsilon).$$

Cette hypothèse prouve le résultat suivant :

Théorème 1 [BEN 09] La fonction j_1 définie par (2.7) admet le développement asymptotique suivant :

$$j_1(\varepsilon) = j_1(0) + f(\varepsilon)(\delta_a + \delta_J) + o(f(\varepsilon))$$

D'après l'hypothèse (A1), on se ramène à l'étude asymptotique de la quantité :

$$a_\varepsilon(u_0 - u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} T \nabla(u_0 - u_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon dx \quad (2.10)$$

Il s'agit donc de trouver $\delta_a \in \mathbb{R}$ et une fonction scalaire positive $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} T \nabla(u_0 - u_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon dx = f(\varepsilon)\delta_a + o(f(\varepsilon)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0.$$

On a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} T(x) \nabla(u_0 - u_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon = \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} v_\varepsilon ds$$

On obtient alors la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u_0 - u_\varepsilon, v_\varepsilon) &= \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} v_0 ds + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} (v_\varepsilon - v_0) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans toute la suite nous allons supposer que le domaine Ω est une seule zone hydrogéologie, en conséquence la transmissivité est constante dans tout le domaine.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Les estimations des intégrales dans (2.11), nous nous basons sur les travaux de [BEN 09, KAL 12] s'écrivent :

$$I_1 = \varepsilon^2 |O| T \nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) + o(\varepsilon^2). \quad (2.12)$$

avec $|O| = \int_O dx$,

$$I_2 = -\varepsilon^2 |O| T \nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) - \varepsilon^2 T \nabla u_0(x_0) \int_{\partial O} \eta(y) y ds + o(\varepsilon^2).$$

avec $\eta \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ est solution de l'équation intégrale

$$\frac{\eta(y)}{2} + \int_{\Sigma} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n} \eta(x) ds(x) = -\nabla v_0 \cdot \mathbf{n}(x_0), y \in \partial O$$

La fonction E est solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^2 .

Le théorème suivant donne l'expression du gradient topologique pour la fonction j_1 .

Théorème 2 [AMS 03, BEN 09, AMS 05] Si J_ε^1 vérifie l'hypothèse (A1), alors j_1 admet le développement asymptotique suivant :

$$j_1(\varepsilon) - j_1(0) = -\varepsilon^2 [T \nabla u_0(x) \int_{\Sigma} \eta(y) y ds + |O| |u_0(x) - d^{obs}(x)|^2] + o(\varepsilon^2). \quad (2.13)$$

Corollaire 1 [HAS 12] Si O est la boule unité, on a :

$$\int_{\Sigma} \eta(x) y dy = 2\pi \nabla u_0(x_0)$$

Alors

$$j_1(\varepsilon) = j_1(0) + \varepsilon^2 [-2\pi T(\nabla u_0(x_0)) \nabla v_0(x_0) + |O| |u_0(x) - d^{obs}(x)|^2] + o(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

Avec

$$\delta_J(x) = -2\pi T(\nabla u_0(x)) \nabla v_0(x) + |O| |u_0(x) - d^{obs}(x)|^2 \quad \forall x \in \Omega$$

Ou v_0 est la solution du problème adjoint associé au problème (2.2) qui a donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T \nabla v_0) & = -DJ_0^1 & \text{dans } \Omega \\ v_0 & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T \nabla v_0 \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ T \nabla v_0 \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (2.15)$$

2.1.1.2 Résultats numériques

Nous décrivons dans ce qui suit, la procédure numérique de la méthode du gradient topologique pour l'identification des puits à l'intérieur du domaine Ω dans le cas où nous disposons d'observations à l'intérieur du domaine.

Tout d'abord, nous allons donner l'algorithme de localisation de puits basé sur le calcul du gradient topologique. Puis, nous donnons quelques résultats numériques pour valider notre algorithme.

L'étude numérique menée traite l'influence du maillage sur les résultats de l'algorithme ainsi que l'effet du nombre des observations en procédant avec ou sans technique d'interpolation.

Ci dessous nous donnons l'algorithme de la méthode du sensibilité topologique :

Algorithme 1 : Identification des positions des puits par la méthode du gradient topologique : cas des observations à l'intérieur.

Données : Observations à l'intérieur du domaine.

Résultat : Localiser les positions des puits.

- 1) Résoudre les problèmes direct (2.2) et adjoint (2.15).
- 2) Calculer le gradient topologique δ_j en tout nœud du maillage (1.39).
- 3) Déterminer les positions des trous : les valeurs les plus négatifs de δ_j .

Remarque 1 *L'avantage de la méthode du gradient topologique est d'identifier les positions des trous en une seule itération.*

L'algorithme permet d'identifier à la fois les positions et le nombre des puits.

Comme application de l'algorithme 1 nous utilisons un domaine rectangulaire de 20 km par 10 km, contenant un seul puits comme il est indiqué dans la figure 2.2.

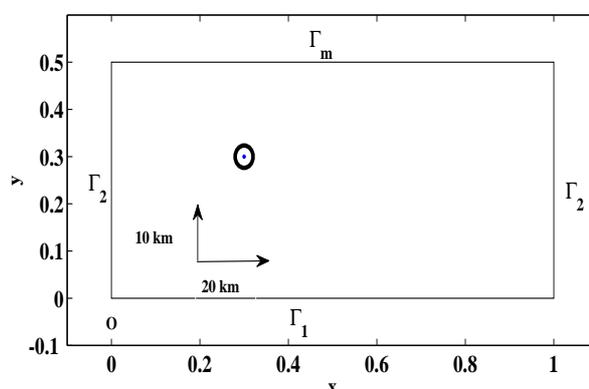


FIGURE 2.2: Domaine étudié contenant un seul puits.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Pour comparer les positions identifiées à celles exactes nous calculons l'erreur relative ε_P définie par :

$$\varepsilon_P = 100 \left| \frac{\|\vec{OP}_{ex}\|_2 - \|\vec{OP}_{id}\|_2}{\|\vec{OP}_{ex}\|_2} \right| \quad (2.16)$$

pour l'identification des positions, avec $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne, O est l'origine du coordonné du système de coordonnées et OP est la position. Avec "ex" on désigne la solution exacte et avec "id" on désigne la solution identifiée.

- **Diminution du nombre des observations à l'intérieur du domaine :** Dans ce cas, nous allons examiner la diminution du nombre de mesures (voir la figure 2.3)

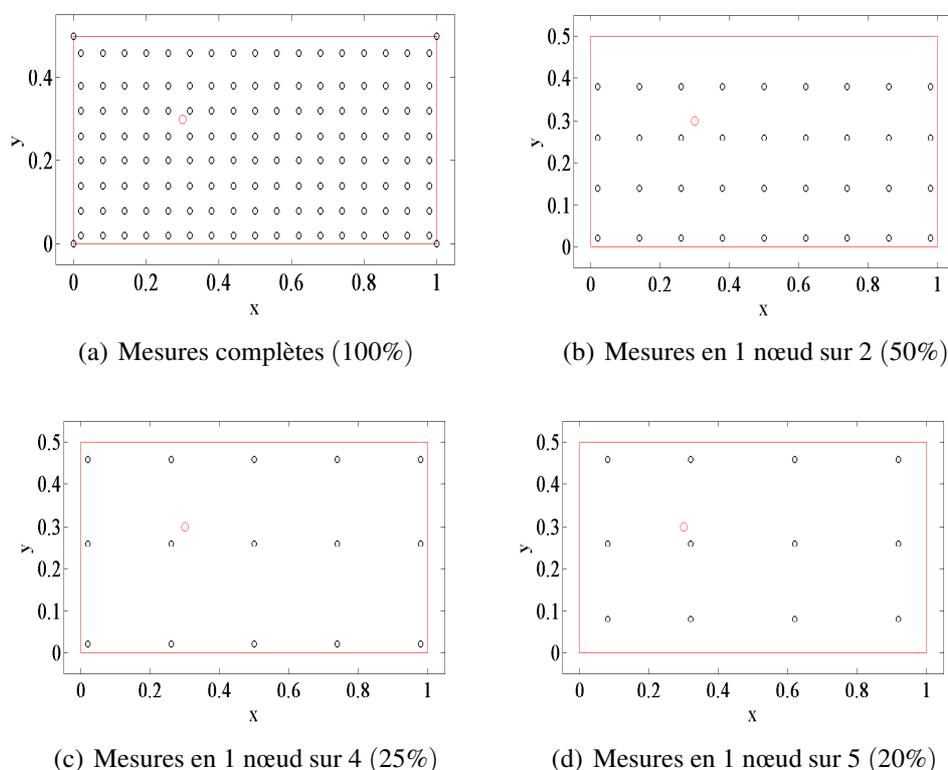


FIGURE 2.3: Les points des observations.

à l'intérieur du domaine pour l'identification de la position d'un seul puits situé au point de coordonnées $z = (6 \text{ km}, 6 \text{ km})$. Nous traitons les cas où nous disposons de mesures : complètes, en un nœud sur deux du maillage (1.39) et en un nœud sur quatre.

Nous reportons dans le tableau 2.1 la position trouvée pour chaque cas ainsi que les erreurs relatives. Pour le cas de mesures complètes nous retrouvons la position exacte. Lorsqu'on diminue les mesures, nous constatons que la valeur la plus négative du gradient topologique se trouve sur les nœuds proches du puits (voir la figure 2.4) et l'erreur est égale à 33%.

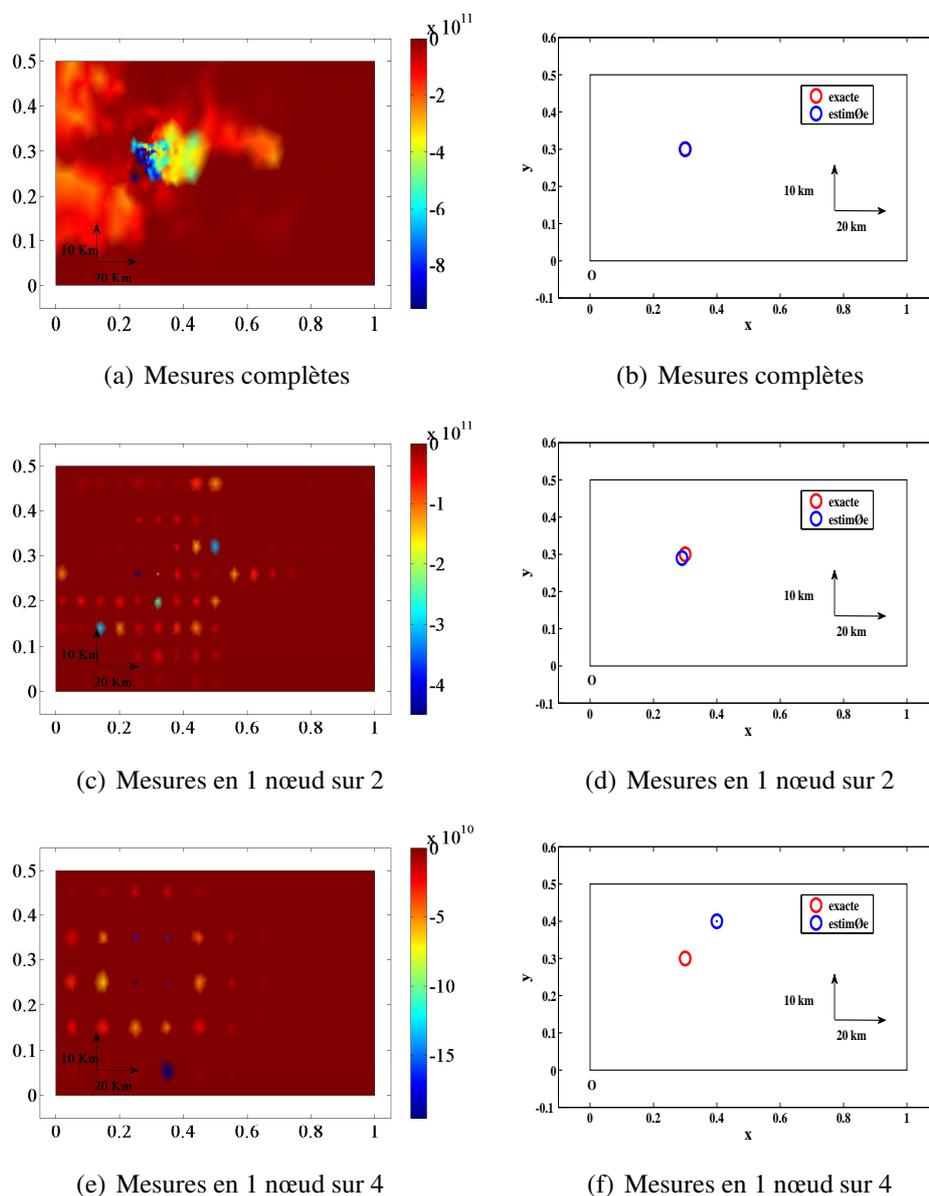


FIGURE 2.4: (a), (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c), (d) les positions exactes et celles calculées.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Nombre de mesures	100%	50%	25%
$P_{id}(km)$	(6.09, 6.03)	(5.8, 5.8)	(8, 8)
ϵ_P [%]	1	3.3	33

TABLE 2.1: Les positions calculées en fonction des observations disponibles et les erreurs associées.

- **Interpolation des observations :** Nous remarquons une dégradation des résultats avec la diminution du nombre de mesures. Nous allons alors faire appel à une technique d'interpolation (interpolation par des splines [DEB 78]) pour compléter les données dans un but d'améliorer les résultats.

En appliquant la procédure décrite précédemment dans l'algorithme 1, nous observons que la valeur la plus négative du gradient topologique est localisée dans un voisinage du puits.

Les positions des puits ainsi que le gradient topologique sont présentés dans les figures 2.5.

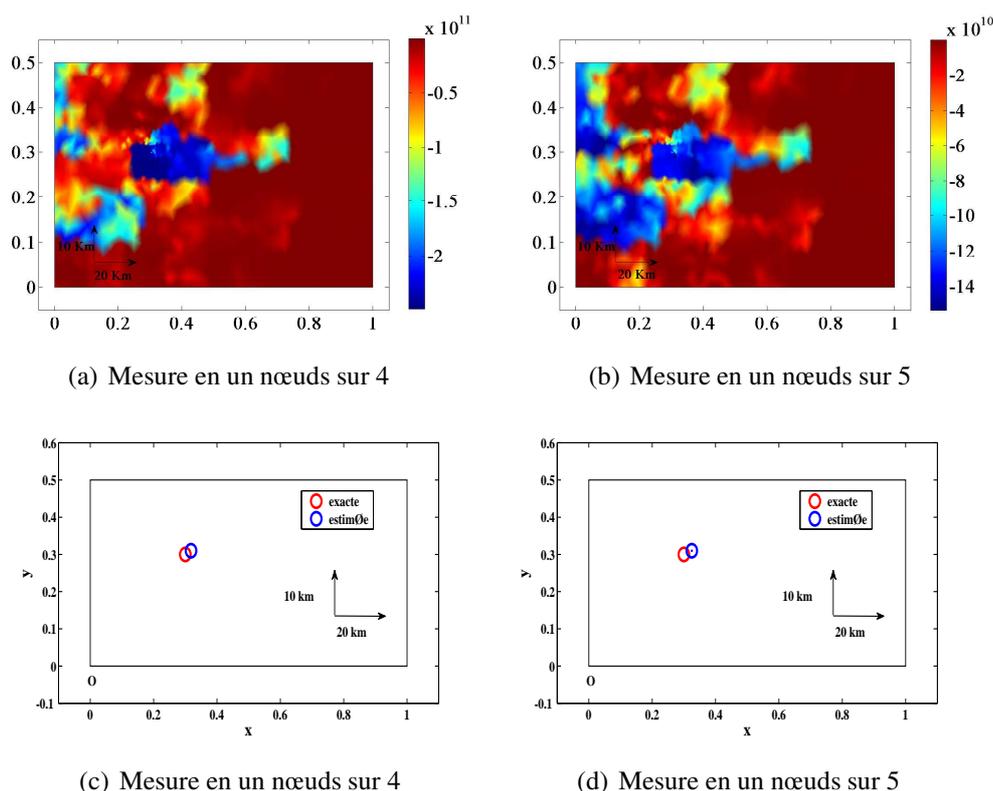


FIGURE 2.5: (a) et (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c) et (d) présentent les positions exactes et estimées avec une interpolation des observations.

Par ailleurs, le tableau 2.2 donne les positions exactes et celles identifiées ainsi que les erreurs relatives pour chaque test. Nous remarquons que les erreurs ont diminué

par rapport au test précédent où nous avons pris des observations sans utiliser la technique d'interpolation.

Ces résultats montrent bien l'efficacité de notre algorithme même si on a un nombre réduit de mesures à l'intérieur du domaine (tableau 2.1).

Nombres des mesures	25%	20%
P_{id} (km)	(6.36, 6.2)	(6.5, 6.2)
ε_P [%]	4.67	5.86

TABLE 2.2: Les positions calculées avec des observations interpolées et les erreurs associées.

2.1.1.3 Gradient topologique dans le cas de mesures surabondantes sur une partie de la frontière

Dans cette section, nous allons identifier les positions des puits par la méthode du gradient topologique en utilisant des mesures surabondantes sur une partie de la frontière Γ_m du domaine. Donc le problème (1.31) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^1) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^1 = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_\varepsilon^1 = H \text{ et } T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ T\nabla u_\varepsilon^1 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Pour identifier les positions des puits, nous pouvons considérer deux problèmes issus du problème (2.17). Chaque problème ne tient compte que d'une donnée sur la frontière Γ_m .

Donc, on a :

– $u_\varepsilon^{1,N}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^{1,N}) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{1,N} = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla u_\varepsilon^{1,N} \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ T\nabla u_\varepsilon^{1,N} \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \\ T\nabla u_\varepsilon^{1,N} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (2.18)$$

– $u_\varepsilon^{1,D}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^{1,D}) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{1,D} = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla u_\varepsilon^{1,D} \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2. \\ u_\varepsilon^{1,D} = H & \text{sur } \Gamma_m. \\ T\nabla u_\varepsilon^{1,D} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (2.19)$$

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Pour trouver la position du puits il faut que $u_\varepsilon^{1,D} = u_\varepsilon^{1,N}$.

En se basant sur cette remarque, on définit la fonction objectif suivante :

$$j_\varepsilon^1(u_\varepsilon^{1,N}, u_\varepsilon^{1,D}) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^{1,N} - u_\varepsilon^{1,D}|^2 dx, \quad (2.20)$$

Notre problème d'identification peut être formulé comme un problème d'optimisation topologique comme suit : étant donné la charge hydraulique H et le flux hydraulique Φ , trouver la position du puits O_ε à l'intérieur du domaine en minimisant la fonction de forme $j_s^1 = j_\varepsilon^1(u_\varepsilon^{1,N}, u_\varepsilon^{1,D})$:

$$(\mathcal{P}_{min}^1) \quad \min_{O_\varepsilon \subset \Omega} j_s^1(\Omega_\varepsilon) \quad (2.21)$$

Pour résoudre le problème (\mathcal{P}_{min}^1) , nous nous basons sur la méthode du gradient topologique. Le théorème suivant donne l'expression du développement asymptotique de la fonction j_s^1 .

Théorème 3 [KAL 12] *La fonction j_s^1 admet le développement asymptotique suivant :*

$$\begin{aligned} j_s^1(\varepsilon) - j_s^1(0) &= -2\pi T \varepsilon^2 [\nabla u_0^{1,D}(x) \nabla v_0^{1,D}(x) + \nabla u_0^{1,N}(x) \cdot \nabla v_0^{1,N}(x)] \\ &+ \frac{1}{2} |u_0^{1,N}(x) - u_0^{1,D}(x)|^2 + o(\varepsilon^2), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Avec

$$\delta_J(x) = -2\pi T [\nabla u_0^N(x) \cdot \nabla v_0^{1,N}(x) + \nabla u_0^D(x) \cdot \nabla v_0^{1,D}(x)] - \pi |u_0^N(x) - u_0^D(x)|^2.$$

$v_0^{1,N}$ et $v_0^{1,D}$ sont les solutions respectives des deux problèmes adjoints :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T \nabla v_0^{1,N}) &= -2(u_0^{1,D} - u_0^{1,N}) & \text{dans } \Omega, \\ v_0^{1,N} &= 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla v_0^{1,N} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ T \nabla v_0^{1,N} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.22)$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T \nabla v_0^{1,D}) &= -2(u_0^{1,N} - u_0^{1,D}) & \text{dans } \Omega, \\ v_0^{1,D} &= 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla v_0^{1,D} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ v_0^{1,D} &= 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.23)$$

2.1.1.4 Résultats numériques

Le but de cette section est de mettre en œuvre la méthode du gradient topologique pour identifier des puits à partir de mesures surabondantes sur la frontière Γ_m . Nous allons distinguer deux cas : dans le premier, nous considérons que nous avons des mesures sur toute la frontière et dans l'autre cas nous avons seulement quelques points d'observation

sur la frontière. Avant de présenter les résultats, nous donnons l'algorithme de localisation de puits basé sur le calcul de la sensibilité topologique.

Algorithme 2 : Identification des positions des puits par la méthode du gradient topologique utilisant des mesures sur la frontière.

Données : Des observations sur une partie de la frontière Γ_m

Résultat : Localiser les positions des puits

- Résoudre les deux problèmes direct (2.18) et (2.19) et les deux problèmes adjoint (2.22) et (2.23) dans le domaine sain,
- Calculer le gradient topologique δ_J en tous nœuds du maillage,
- Déterminer les positions des trous : les valeurs les plus négatifs de δ_J .

Nous commençons par étudier l'influence du nombre de mesures sur le processus d'identification. Puis, nous étudions l'efficacité de la méthode quand il s'agit d'identification plusieurs puits. Ensuite, nous passons à l'étude de l'influence de la distance séparant les puits sur les résultats de l'algorithme. Enfin, nous traitons l'influence du bruit sur les résultats de l'algorithme.

Le domaine considéré est celui présenté dans la figure 2.2.

a) Influence du nombre de mesures : Dans ce paragraphe nous étudions la sensibilité de la méthode par rapport au nombre des observations qui sont prises sur une partie de la frontière Γ_m . Nous considérons une première situation où les mesures ne sont pas interpolées puis dans une deuxième situation nous procédons à une interpolation des données.

- 1) Diminution du nombre des observations sur la frontière Γ_m : Dans ce cas, nous allons examiner l'influence de la diminution du nombre de mesures sur la frontière sur l'identification du puits situé à l'intérieur du domaine.

Nous pouvons constater d'après la figure 2.6 que la position du puits estimée dépend du nombre de mesures prises.

Les résultats résumés dans le tableau 2.3 montrent que la diminution du nombre des observations provoque une augmentation de l'erreur.

Nombre de mesures	100%	50%	25%	20%
$P_{id}(km)$	(6.03, 6)	(6.13, 6.19)	(6.26, 6.29)	(6.45, 6.5)
ϵ_P [%]	0.25	2.66	4.5	7.91

TABLE 2.3: Cas des observations sans interpolation : les positions calculées et les erreurs relatives pour un puits situé en $z = (6 km, 6 km)$.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

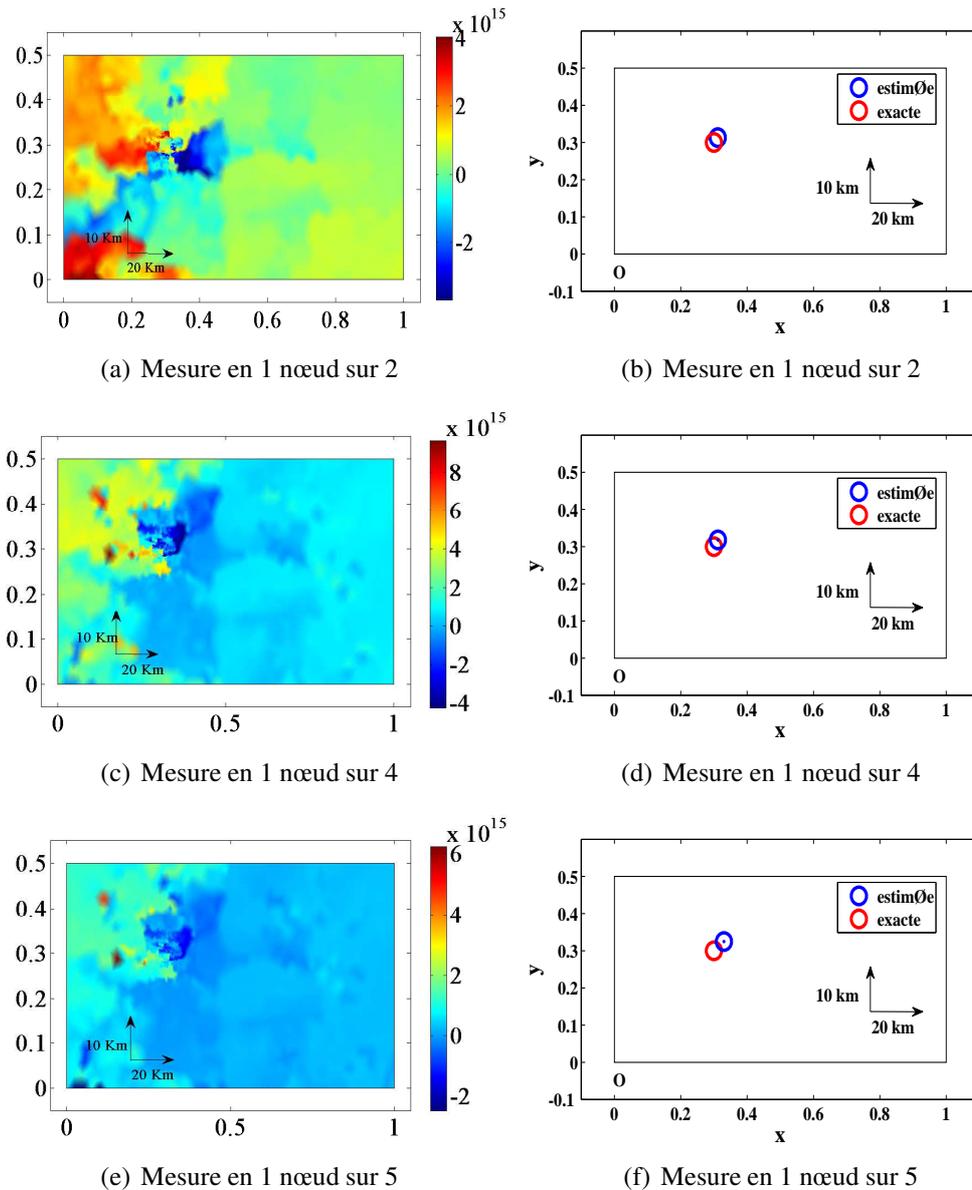


FIGURE 2.6: Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimées.

- 2) Interpolation des observations sur la frontière Γ_m : D'après le test précédent, nous remarquons que pour des mesures prises en un nœud sur 5, il est difficile de détecter la position du puits. On utilise donc la technique d'interpolation avec des splines ce qui impliquera une diminution importante de l'erreur, comme il est indiqué dans le tableau 2.4. Dans la figure 2.7, nous voyons bien que les valeurs les plus négatives sont proches du puits.

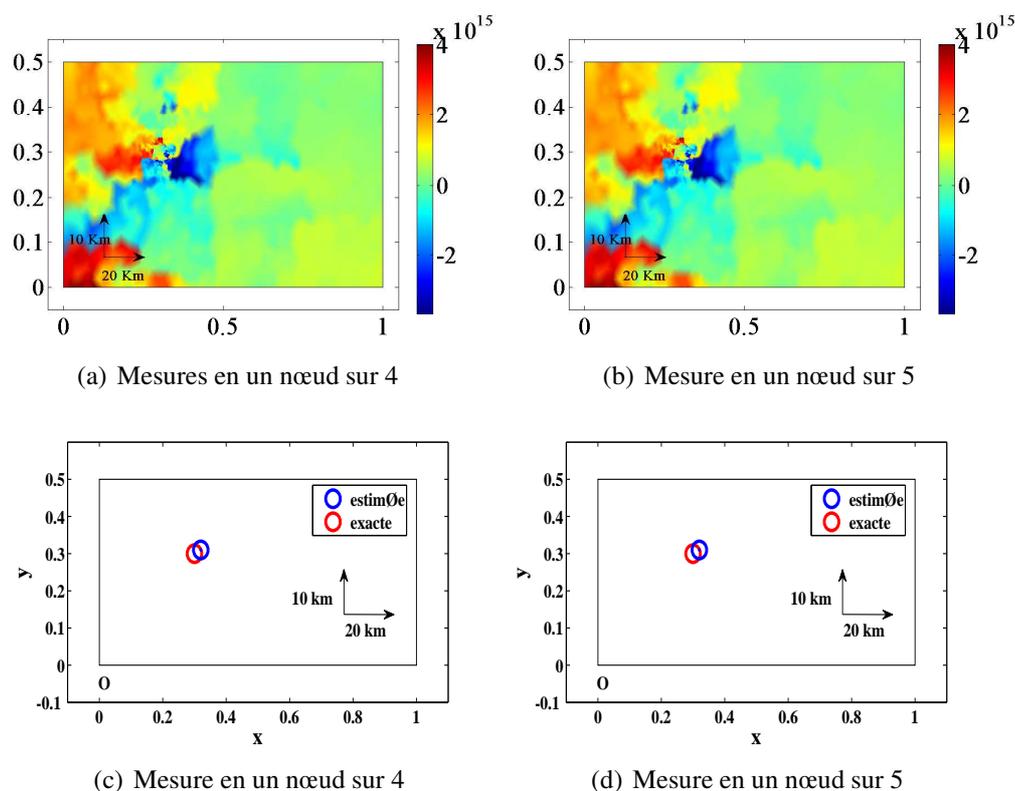


FIGURE 2.7: Cas des observations avec interpolation : (a) et (b) présentent la distribution du gradient topologique, (c) et (d) présentent les positions exactes et estimées.

Nombre de mesures	25%	20%
$P_{id} (km)$	(6.19, 6.2)	(6.21, 6.21)
$\varepsilon_P [\%]$	3.2	3.5

TABLE 2.4: Cas des observations avec interpolation : les positions calculées et les erreurs trouvées pour un puits situé en $z = (6 km, 6 km)$.

c) Influence de la distance entre les puits : Nous nous proposons dans ce test numérique d'étudier l'influence de la distance qui sépare deux puits sur l'identification des puits par la méthode du gradient topologique.

Nous considérons deux puits et nous faisons varier la distance qui les sèparent de 12 km à 1 km (voir la figure 2.8).

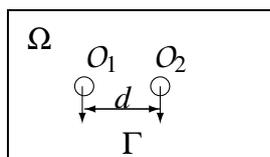


FIGURE 2.8: Le domaine Ω contient deux puits O_1 et O_2 qui ont les mêmes rayons.

La distribution du gradient topologique est représentée sur la figure 2.9 ainsi que les positions exactes et celles estimées.

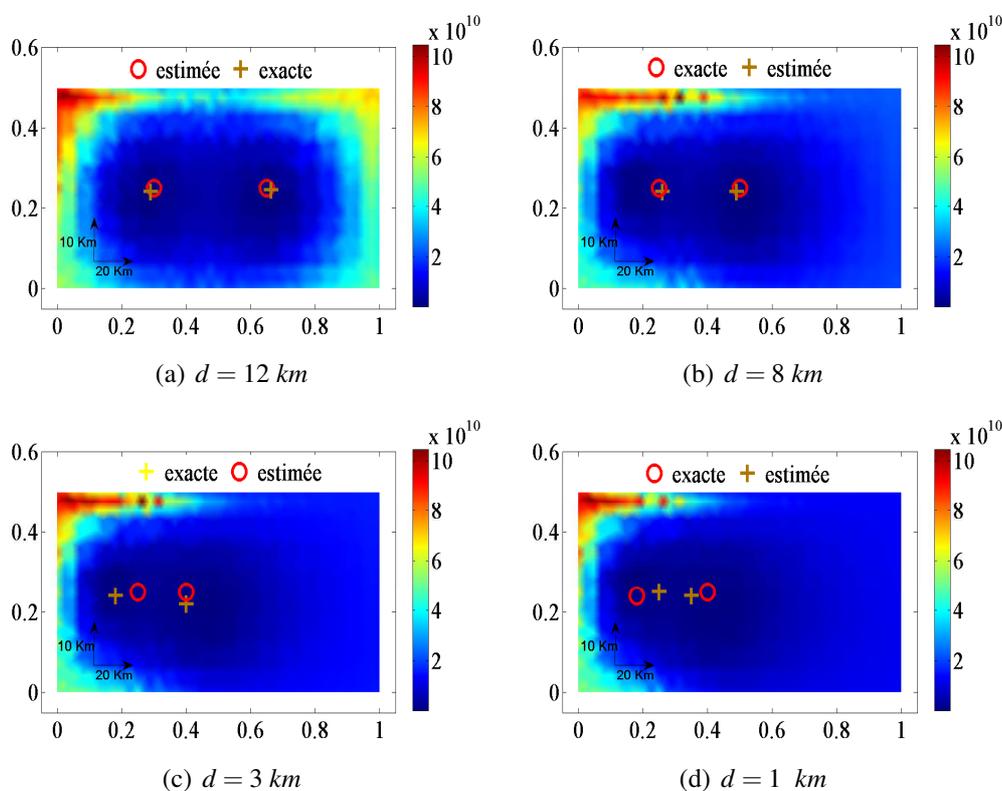


FIGURE 2.9: La distribution du gradient topologique pour les différents valeurs de la distance d .

Les résultats du tableau 2.5 montrent que l'erreur reste faible jusqu'à une distance $d = 8 \text{ km}$ et elle devient significative à une distance $d = 5 \text{ km}$. Pour une distance d inférieure ou égale à 1 km elle dépasse 12%. Ceci est essentiellement dû à l'intersection des cônes de rabattement. Ce terme désigne la forme que prend la baisse du niveau piézométriques qui est importante autour du puits et diminue en s'éloignant.

d) Cas avec de multiples puits : Dans la figure 2.10 nous représentons la variation du gradient topologique ainsi que les positions exactes et calculées des puits. D'après

d (km)	12	10	8	5	3	1
ε_P [%]	1.2	3.35	5.22	9.48	10.05	12.4

TABLE 2.5: Les valeurs de d et les erreurs relatives.

cette figure, nous remarquons quatre zones où les valeurs du gradient topologique sont les plus négatives. Donc, on peut déterminer le nombre des puits cherchés qui est égale à quatre puits.

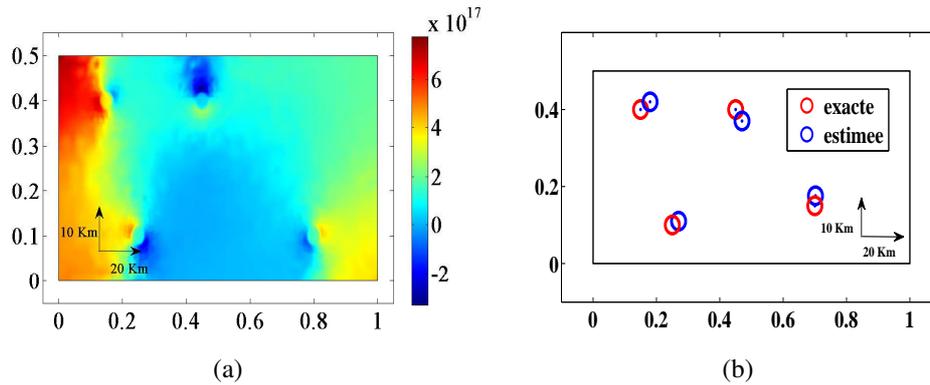


FIGURE 2.10: Cas de quatre puits : (a) représente la distribution du gradient topologique, (b) présente les positions exactes et estimées.

Nous résumons dans le tableau 2.6 les positions exactes et calculées des puits, ainsi que les erreurs relatives associées. Les erreurs sur les positions pour quatre puits sont inférieures à 5%.

P_{ex} (km)	(5, 2)	(9, 7)	(14, 3)	(3, 8)
P_{id} (km)	(5.4, 2.2)	(9.4, 7.4)	(14.04, 3.52)	(3.6, 8.2)
ε_P [%]	4.29	2	2.82	4.66

TABLE 2.6: Cas de quatre puits : les positions exactes et celles calculées et les erreurs sur les positions calculées.

En se référant à ce résultat nous pouvons illustrer le fait que l'algorithme 2 est capable d'identifier plusieurs puits en même temps sans connaître a priori leurs nombre.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

e) **Influence du bruit** : Nous allons bruitez les mesures avec différents niveaux de bruit blanc, dans le cas d'un puits situé au point de coordonnée $x_0 = 6 \text{ km}$ et $y_0 = 6 \text{ km}$.

Dans la figure 2.11 nous représentons la distribution du gradient topologique pour différents pourcentages de niveau de bruits. Nous notons que la zone la plus négative est plus étendue lorsque le niveau de bruit est élevé.

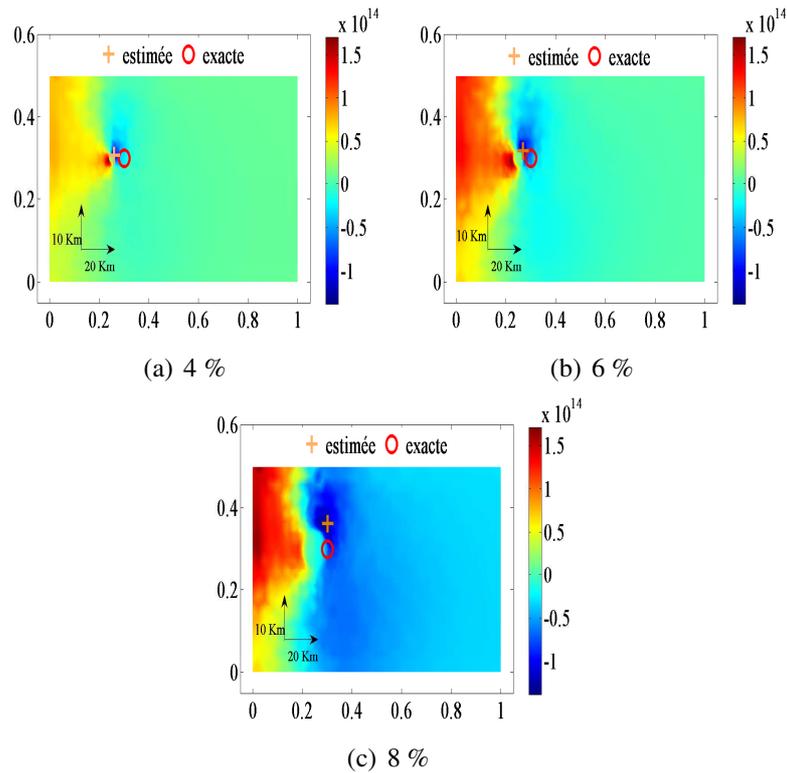


FIGURE 2.11: La distribution du gradient topologique pour les différents niveaux de bruits.

Nous remarquons l'erreur reste acceptable sauf lorsque le bruit est supérieur à 15%.

Bruits [%]	4	6	8
$P_{id} (km)$	(6.29, 6.19)	(6.49, 6.41)	(6.79, 7.12)
ε_P [%]	4	7.5	15.94

TABLE 2.7: Les positions et les erreurs sur ces positions pour les différents pourcentages taux de bruits.

f) **Identification de la position d'un puits dans un domaine circulaire :** Nous allons identifier la position d'un puits placé à différents endroits dans un domaine circulaire. L'analyse des résultats de la figure 2.12 montre que la méthode de sensibilité topologique ne dépend pas de la nature de la géométrie du domaine. En effet, l'identification des puits est aussi bonne dans un domaine de forme rectangulaire que circulaire.

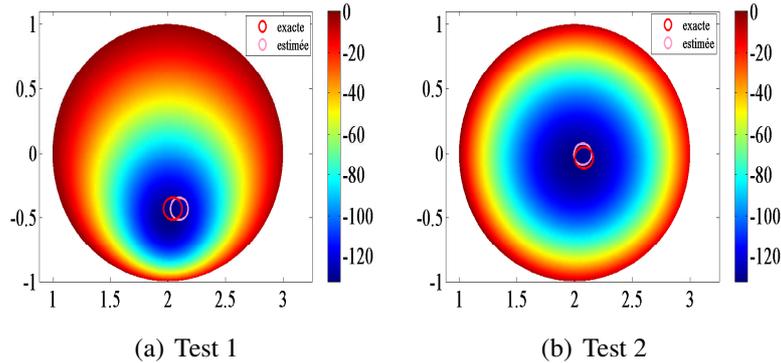


FIGURE 2.12: La distribution du gradient topologique pour les différents endroits.

Aussi, en se référant au tableau 2.8, nous constatons que l'erreur de la localisation reste faible et presque constante pour les deux emplacements du puits.

	Test 1	Test 2
P_{ex}	(1.5, -0.2)	(2.4, 2.2)
P_{id}	(1.6, -0.15)	(2.3, 2.25)
ε_P [%]	2.2	2.1

TABLE 2.8: Positions exacte et identifiée et erreur associée dans le cas d'un puits proche de la frontière (Test1) ou du centre (Test2) d'un domaine.

2.1.1.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons étudié la méthode du gradient topologique avec une condition de type Neumann nulle sur le bord des puits. Nous avons calculé la sensibilité topologique pour deux cas différents. Dans le premier cas, nous avons utilisé des observations à l'intérieur du domaine. Dans le deuxième cas, nous avons eu recours à des mesures sur une partie de la frontière. Les résultats numériques trouvés dans les deux cas, prouvent bien que cette méthode est efficace et permet d'identifier les positions et le nombre de puits en même temps et en une seule itération.

Dans la section suivante, nous allons utiliser la méthode du gradient topologique pour une condition de type Dirichlet sur le bord du puits.

2.1.2 Condition de type Dirichlet sur le bord du puits

Dans cette section, nous appliquons la méthode de sensibilité topologique pour l'identification de puits dans le cas d'une condition aux limites de type Dirichlet sur leurs frontières. Nous commençons par étudier la sensibilité de la reconstruction pour la fonction objectif définie à partir des observations à l'intérieur du domaine. Puis, nous considérons la fonction construite à partir de mesures surabondantes sur la frontière Γ_m .

2.1.2.1 Gradient topologique dans le cas d'observations à l'intérieur du domaine

Contrairement au cas d'une condition aux limites de type Neumann, on utilise l'injection suivante qui est fournie par le prolongement par 0 à l'intérieur du trou O_ε :

$$\mathcal{V}_\varepsilon^0 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la fonction moindre carré :

$$J_\varepsilon^2(\Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^2 - d^{obs}|^2 d\Omega, \quad (2.24)$$

avec u_ε^2 est la solution du problème (2.4).

Remarque 2 Pour simplifier l'écriture, le prolongement d'une fonction $u_\varepsilon^2 \in \mathcal{V}_\varepsilon^0$ est égale à zéro dans O_ε .

L'analyse asymptotique de ce cas est basée sur le cadre abstrait développé par Amstutz [AMS 03]. Afin d'avoir un développement asymptotique de la fonction J_ε^2 par rapport à ε , on considère les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse (HD1)

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, nous supposons qu'il existe une forme bilinéaire \tilde{a}_ε sur $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$ et une forme linéaire continue \tilde{l}_ε sur \mathcal{V}_0 telles que :

$$\tilde{a}_\varepsilon(w, v_0) = \tilde{l}_\varepsilon(v_0) \quad \forall v_0 \in \mathcal{V}_0. \quad (2.25)$$

Hypothèse (HD2)

On suppose qu'il existe des réels δ_a , δ_l et δ_j et une fonction f définie sur \mathbb{R}_+ tels que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) &= 0 \\ (\tilde{a}_\varepsilon - a_0)(u_\varepsilon^2, v_0) &= f(\varepsilon)\delta_a + o(f(\varepsilon)), \\ (\tilde{l}_\varepsilon - l_0)(v_0) &= f(\varepsilon)\delta_l + o(f(\varepsilon)), \end{aligned}$$

où v_0 est la solution du problème adjoint suivant :

$$a_0(w, v_0) = -DJ_0^2(u_0^2)(w), \quad \forall w \in \mathcal{V}_0. \quad (2.26)$$

$$J_\varepsilon^2(u_\varepsilon^2) - J_0^2(u_0) = DJ_0^2(u_0)(u_\varepsilon^2 - u_0^2) + f(\varepsilon)\delta_J + o(f(\varepsilon))$$

Théorème 4 [AMS 03] on définit $j_2(\varepsilon) = J_\varepsilon^2(u_\varepsilon^2)$, si les hypothèses (HD1) et (HD2) sont vérifiées, alors j_2 admet le développement asymptotique suivant :

$$j_2(\varepsilon) - j_2(0) = f(\delta_a - \delta_l + \delta_j) + o(f(\varepsilon))$$

Revenant à la formulation variationnelle du problème (1.32), on a : $\forall v_0 \in \mathcal{V}_0$:

$$\begin{aligned} a_0(u_\varepsilon^2, v_0) &= \int_{\Omega} T \nabla u_\varepsilon^2 \nabla v_0 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \nabla v_0 dx \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(T \nabla u_\varepsilon^2) v_0 dx + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 + \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} v_0 ds + \int_{\Gamma_m} \Phi v_0 ds \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(T \nabla u_\varepsilon^2) v_0 dx + \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} v_0 ds + \int_{\Gamma_m} \Phi v_0 ds + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(T \nabla u_\varepsilon^2) v_0 dx + \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} v_0 ds + \int_{\Gamma_m} \Phi v_0 ds + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 \\ &= l_0(v_0) + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 ds \end{aligned}$$

Donc, d'après ce développement nous pouvons choisir :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\varepsilon(u_\varepsilon^2, v_0) &= a_0(u_\varepsilon^2, v_0) \\ \tilde{l}_\varepsilon(v_0) &= l_0(v_0) + \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 ds \end{aligned}$$

Comme par construction $\tilde{a}_\varepsilon = a_0$, nous avons automatiquement $\delta_a = 0$. Le terme δ_j dépend de la fonction objectif considérée. Le calcul de $f(\varepsilon)$ et de δ_l s'effectuera à partir de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} I_3 &= (\tilde{l}_\varepsilon - l_0)(v_0) \\ &= \int_{\Sigma_\varepsilon} T \nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} v_0 ds. \end{aligned}$$

D'après [AMS 03], on a le développement suivant :

$$I_3 = \frac{-1}{\log(\varepsilon)} [2\pi T u_0(x_0) v_0(x_0)] + o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right).$$

Ce théorème donne l'expression du gradient topologique pour la fonction objectif J_ε^2 .

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Théorème 5 [AMS 03] Si la fonction objectif J_ε^2 vérifie les deux hypothèses (HD1) et (HD2), on a :

$$\delta_j(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Et par suite, le développement asymptotique de la fonction j_2 est donné par :

$$j_2(\varepsilon) - j_2(0) = \frac{-1}{\log(\varepsilon)} [2\pi T u_0(x_0) v_0(x_0)] + o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right). \quad (2.27)$$

De plus,

$$\delta_j(x) = 2\pi T(x) u_0(x) v_0(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Résultats numériques Nous commençons par étudier l'influence du nombre de mesures sur le processus d'identification. Nous nous proposons ensuite d'explorer la sensibilité de la méthode pour l'interpolation des observations. Nous considérons le même exemple présenté précédemment (voir la figure 2.2).

a) **Influence du nombre de mesures** : nous étudions la diminution du nombre de mesures à l'intérieur du domaine pour l'identification d'un puits situé au point de coordonné $z = (6 \text{ km}, 6 \text{ km})$. Pour cela nous traitons le cas de mesures disponibles en un nœud sur deux, en un nœud sur quatre et enfin en un nœud sur cinq.

Nous reportons dans le tableau 2.9 la position trouvée pour chaque cas ainsi que les erreurs trouvées. Pour le cas de mesures complètes nous retrouvons la position exacte. Lorsque le nombre de mesures diminue, nous constatons que la valeur la plus négative du gradient topologique se trouve sur les nœuds proches du puits (voir la figure 2.13) et l'erreur est égale à 10%.

Nombres de mesure	50%	25%	20%
$P_{id} (km)$	(6, 5.8)	(6, 6.5)	(6.5, 4)
$\varepsilon_P [\%]$	1.65	4.2	10.05

TABLE 2.9: les positions calculées en fonction des observations disponibles et les erreurs associées.

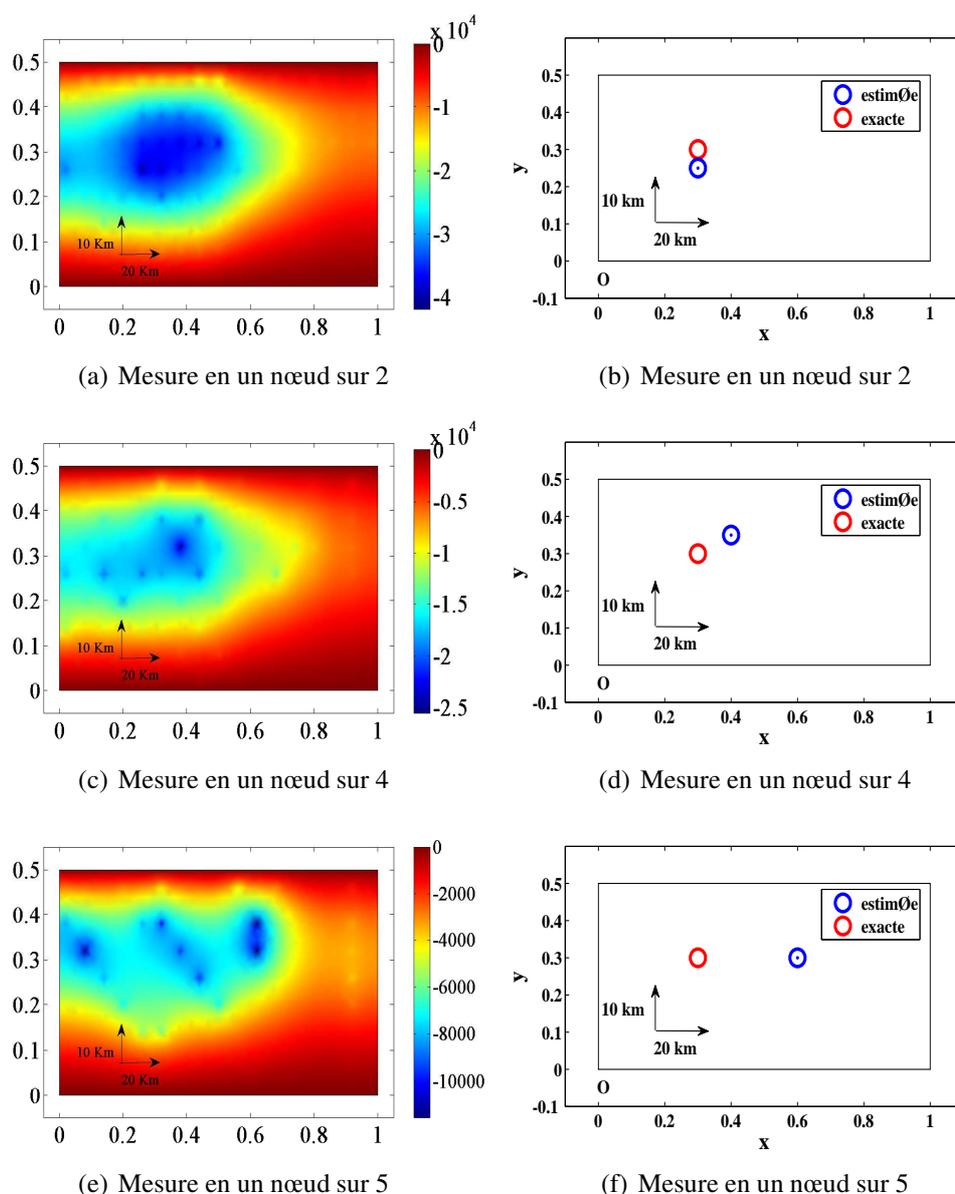


FIGURE 2.13: Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimés.

b) Interpolation des observations : Dans le cas de mesures non totale, nous les interpolons par la technique d'interpolation avec des splines. Ce qui permet d'observer une amélioration de l'identification et une diminution importante de l'erreur, comme il est indiqué dans le tableau 2.10.

Dans la figure 2.14, nous voyons bien que les valeurs les plus négatives sont proches du puits.

Par ailleurs, le tableau 2.10 donne les positions exactes et celles identifiées ainsi que les erreurs relatives pour chaque test. Nous remarquons que les erreurs ont diminué

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

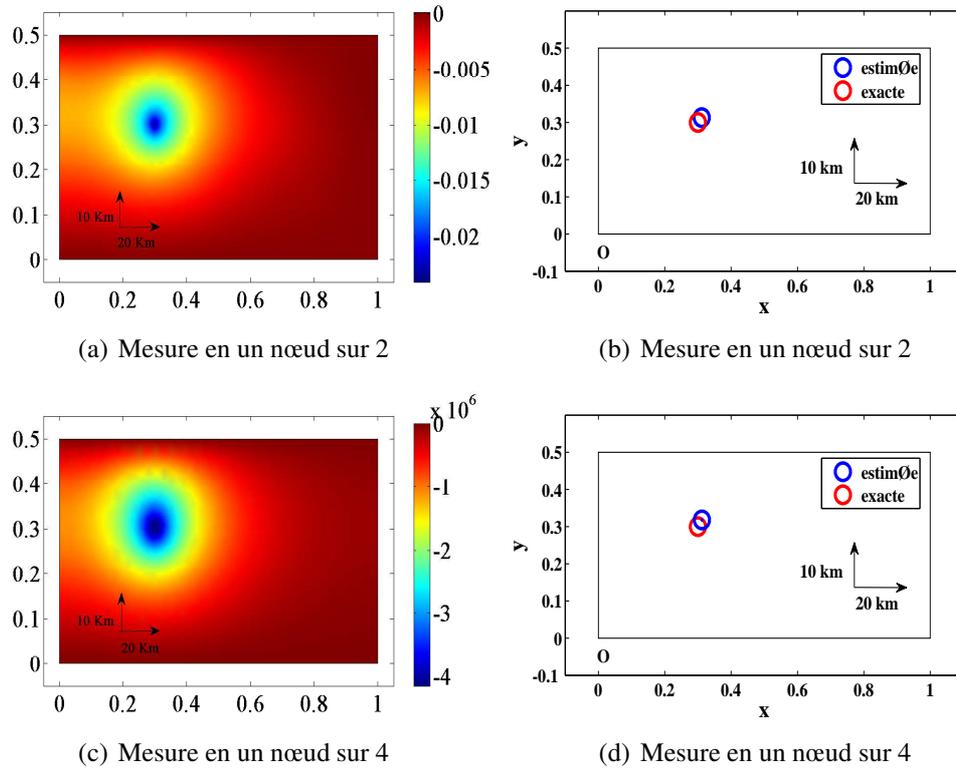


FIGURE 2.14: Cas des observations sans interpolation : (a), (b) et (c) présentent la distribution du gradient topologique, (d), (e) et (f) présentent les positions exactes et estimés.

par rapport au test précédent où nous avons pris des observations non interpolées. Ces résultats montrent bien l'efficacité de l'algorithme même si nous disposons d'un nombre réduit de mesures à l'intérieur du domaine.

Nombres de mesures	50%	25%
$P_{id} (km)$	(6.16, 6.2)	(6.2, 6.2)
$\varepsilon_P [\%]$	3	3.33

TABLE 2.10: Les positions calculées avec des observations interpolées et les erreurs associées.

2.1.2.2 Gradient topologique dans le cas d'observations sur une partie de la frontière

Dans cette section, nous allons identifier les positions des puits par la méthode du gradient topologique en utilisant des mesures surabondantes sur une partie de la frontière

Γ_m du domaine. Donc le problème (2.4) est d'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^2) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon^2 = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_\varepsilon^2 = H \text{ et } T\nabla u_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u_\varepsilon^2 = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour identifier les positions des puits, nous pouvons considérer deux problèmes issus du problème (2.28). Chaque problème ne tient compte que d'une donnée surabondante sur la frontière Γ_m .

Donc, on a :

– $u_\varepsilon^{2,N}$ est solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^{2,N}) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{2,N} = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla u_\varepsilon^{2,N} \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ T\nabla u_\varepsilon^{2,N} \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \\ u_\varepsilon^{2,N} = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (2.29)$$

– $u_\varepsilon^{2,D}$ est solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla u_\varepsilon^{2,D}) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{2,D} = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla u_\varepsilon^{2,D} \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2. \\ u_\varepsilon^{2,D} = H & \text{sur } \Gamma_m. \\ u_\varepsilon^{2,D} = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (2.30)$$

La position du puits calculée sera une solution du problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_{min}^2) \quad \min_{O_\varepsilon \subset \Omega} j_s^2(\Omega_\varepsilon) \quad (2.31)$$

avec :

$$j_s^2(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon^2(u_\varepsilon^{2,N}, u_\varepsilon^{2,D}).$$

Et

$$\mathcal{J}_\varepsilon^2(u_\varepsilon^{2,N}, u_\varepsilon^{2,D}) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^{2,N} - u_\varepsilon^{2,D}|^2 dx, \quad (2.32)$$

Pour résoudre le problème (\mathcal{P}_{min}^2) , nous nous basons sur la méthode du gradient topologique. Le théorème suivant donne l'expression du développement asymptotique de la fonction j_s^2 .

Théorème 6 [KAL 12] *La fonction j_s^2 admet le développement asymptotique suivant :*

$$j_s^2(\Omega_\varepsilon) - j_s^2(\Omega) = \frac{-1}{\log(\varepsilon)} \delta_J(x_0) + o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right)$$

avec

$$\delta_J(x) = 2\pi T[u_0^N(x).v_0^{2,N}(x) + u_0^D(x).v_0^{2,D}(x)], \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.33)$$

$v_0^{2,N}$ et $v_0^{2,D}$ sont les solutions respectives des deux problèmes adjoints :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla v_0^{2,N}) & = -2(u_0^{2,D} - u_0^{2,N}) & \text{dans } \Omega, \\ v_0^{2,N} & = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla v_0^{2,N} \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ T\nabla v_0^{2,N} \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.34)$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla v_0^{2,D}) & = -2(u_0^{2,N} - u_0^{2,D}) & \text{dans } \Omega, \\ v_0^{2,D} & = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla v_0^{2,D} \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ v_0^{2,D} & = 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.35)$$

Résultats numériques : Comme application numérique de la méthode de sensibilité topologique, nous utilisons l'algorithme 2. Nous commençons par étudier l'influence de la distance séparant deux puits sur les résultats de l'algorithme. puis, nous étudions l'influence du bruit sur la méthode d'identification.

Nous considérons le même exemple étudié précédemment (voir la figure 2.2).

a) Influence de la distance entre les puits : Dans le tableau 2.11 ci dessous, nous donnons les erreurs sur les positions en fonction de la distance entre les puits. Nous remarquons que l'erreur est faible sauf pour une distance d inférieur ou égale à 1 km où elle dépasse 14%. Ceci est essentiellement dû à l'intersection des cônes d'interférence du rabattement du niveau piezométrique des puits.

d [km]	12	10	8	5	3	1
ϵ_P [%]	2.1	3.22	4.84	9.16	10.59	14.2

TABLE 2.11: Les valeurs de la distance et les erreurs sur ces positions.

b) Cas de puits multiples :

Dans cet exemple numérique, nous identifions les positions de quatre puits à l'intérieur du domaine. Sur la figure 2.15, nous observons que le gradient topologique permet d'identifier les positions et le nombre de puits à partir de mesure surabondantes sur Γ_m .

Le tableau 2.12 montre que l'erreur de localisation est inférieure à 5%. En plus, il n'est pas nécessaire d'avoir une information a priori sur le nombre du puits.

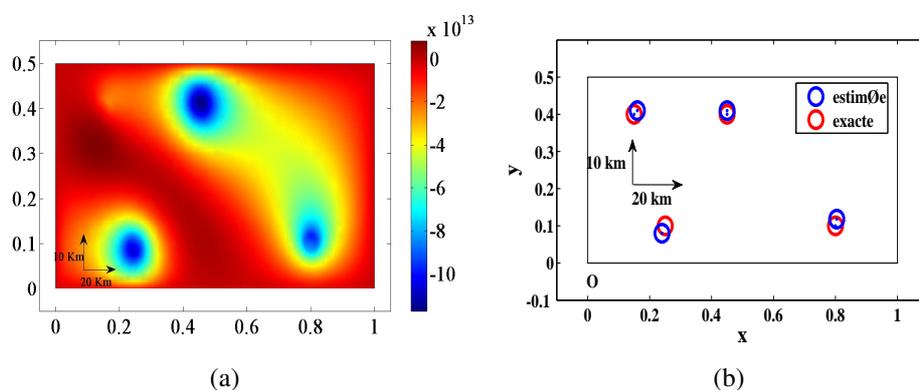


FIGURE 2.15: Cas de quatre puits : (a) représente la distribution du gradient topologique, (b) présente les positions exactes et celles estimées.

$P_{ex} (km)$	(5, 2)	(9, 8)	(16, 2)	(3, 8)
$P_{id} (km)$	(4.8, 1.6)	(9, 8.2)	(16.08, 2.36)	(3.2, 8.2)
$\varepsilon_P [\%]$	4.23	3.23	3.68	3.95

TABLE 2.12: Cas de quatre puits : les positions exactes et celles calculées et les erreurs relatives.

d) L'influence du bruit : Nous allons bruitez les mesures avec différents niveaux de bruit blanc à moyenne nulle dans le cas d'un puits situé au point de coordonnées $x_0 = 8 km$ et $y_0 = 4 km$.

Nous présentons dans la figure 2.16 la distribution du gradient topologique pour les différents pourcentages des bruits.

Nous remarquons que la zone la plus négative devient plus large lorsque la pourcentage du bruit augmente.

Nous remarquons que l'erreur reste acceptable sauf pour un bruit égal à 10%, dans ce cas dépasse 15% (voir tableau 2.13).

Bruits (%)	4	6	10
$P_{id} (km)$	(8.2, 4.4)	(8.5, 4.64)	(9.1, 4.98)
$\varepsilon_P [\%]$	2	8.2	15.87

TABLE 2.13: Les positions, les erreurs relatives pour les différents niveau des bruits.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

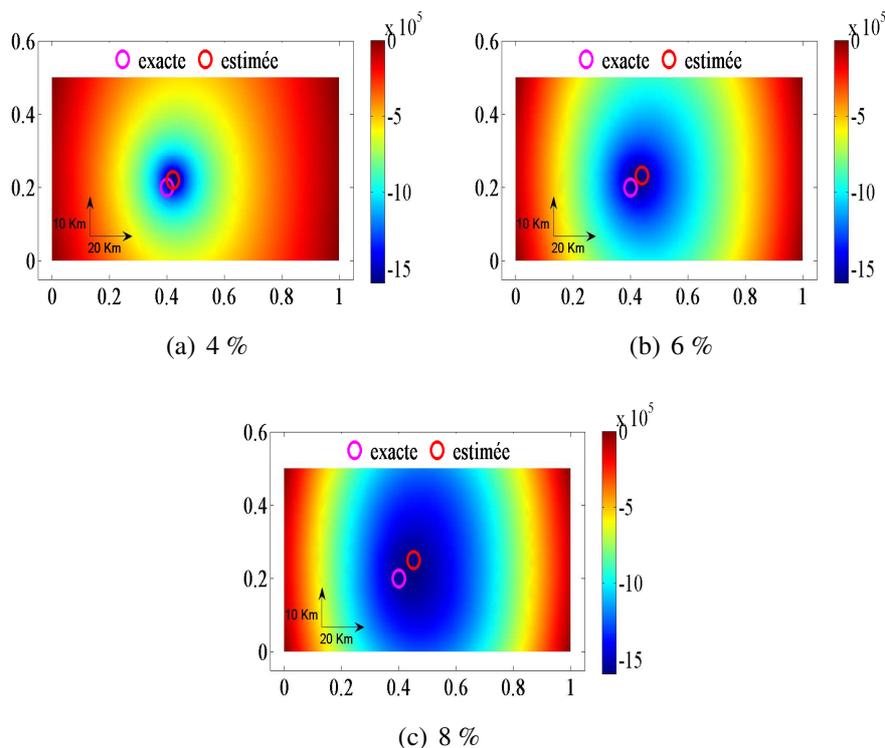


FIGURE 2.16: La distribution du gradient topologique pour les différents niveaux de bruits.

2.2 Gradient topologique basé sur une perturbation du terme source

Dans cette section, nous allons présenter la méthode du gradient topologique pour identifier les positions de points sources à l'intérieur du domaine en utilisant le modèle décrit par l'équation (1.29).

L'identification de sources est d'une grande importance dans divers domaines de l'ingénieur. Cependant, La difficulté de la localisation des sources est souvent liée à la faiblesse des informations disponibles. Donc, du point de vue mathématique, la détermination de la position des sources passe par la résolution d'un problème inverse.

On définit la fonction de forme :

$$j_3(Q) = J(X) \quad (2.36)$$

Avec J est une fonction objectif et X est le vecteur correspond à les positions inconnues.

Nous supposons qu'on a une seule source et nous définissons la perturbation du terme source δQ par :

$$\delta Q = \lambda \chi_{B(x,\epsilon)}. \quad (2.37)$$

Avec $\chi_{B(x,\varepsilon)}$ la fonction caractéristique de la boule $B(x,\varepsilon)$ et λ est le valeur de la source dans $B(x,\varepsilon)$ (voir la figure 2.17). On cherchera ainsi à obtenir une expression de la forme :

$$j_3(Q + \delta Q) = j_3(Q) + \mu(\varepsilon)\delta J(x) + o(\mu(\varepsilon)). \quad (2.38)$$

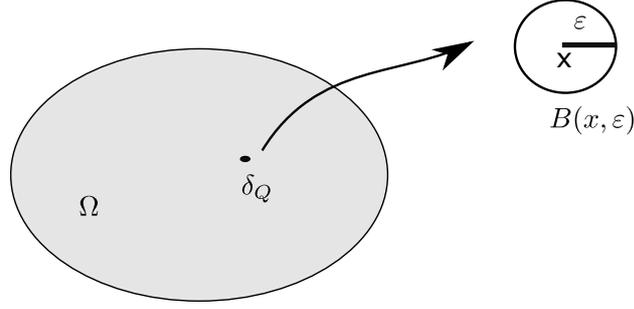


FIGURE 2.17: Domaine avec une source.

Où $\mu(\varepsilon)$ est une fonction positive et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(\varepsilon) = 0. \quad (2.39)$$

On définit le Lagrangien par :

$$\mathbb{L}(w, p, s) = j_3(w) + a(w, p) - l(v). \quad (2.40)$$

Pour tout $u, p \in \mathcal{V}_0$, $s \in \mathbb{R}$.

p est la solution du problème adjoint associé au problème (1.29) qui est vérifiée :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T(x)\nabla p) & = -DJ(x) & \text{dans } \Omega \\ p & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla p \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla p \cdot \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (2.41)$$

Donc, si on dérive \mathbb{L} par rapport à Q , on a :

$$\begin{aligned} Dj_3(Q) \cdot \delta Q &= D\mathbb{L}(u, p, Q) \cdot \delta Q \\ &= \int_{B(x,\varepsilon)} \lambda p(x) dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comme $p \in \mathcal{V}_0$ alors p est localement intégrable. Nous pouvons utiliser le théorème de la valeur moyenne et le développement de Taylor pour exprimer l'intégrale dans l'équation (2.42) (pour ε petite) par :

$$Dj_3 \cdot \delta Q = |B(x,\varepsilon)|\lambda p(x) + o(|B(x,\varepsilon)|) \quad (2.43)$$

Pour ε petit on a :

$$\begin{aligned} j_3(Q + \delta Q) &= j_3(Q) + D j_3 \cdot \delta Q + o(|B(x, \varepsilon)|) \\ &= j_3(Q) + |B(x, \varepsilon)| \lambda p(x) + o(|B(x, \varepsilon)|) \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'après l'équation (2.44) on obtient le développement souhaité dans l'équation (2.38) avec :

$$\delta_J(x) = \lambda p(x) \quad (2.45)$$

Où $\mu(\varepsilon) = |B(x, \varepsilon)|$.

À partir de la formule (2.45), la fonction objectif J est optimal si nous choisissons :

$$\lambda = -\frac{p(x)}{|p(x)|}$$

comme une direction de descendre. Donc par ce choix le gradient topologique sera égale :

$$\delta_J(x) = -|p(x)|, \forall x \in \Omega. \quad (2.46)$$

Comme $\delta_J(x)$ est négatif, cela signifie que, pour une valeur de δQ suffisamment petite, la fonction objectif J sera diminuée si l'on ajoute une source au point x .

Remarque 3 D'après l'équation (2.46), le gradient topologique dépend de la solution du problème adjoint (2.41).

Donc si on a plusieurs sources l'expression du gradient topologique reste la même.

2.2.1 Exemple d'une fonction objectif

On dispose sur la frontière Γ_m du modèle (1.29) des données surabondantes. On définit la fonction objectif J par :

$$J(t_N, t_D) = \|t_N - t_D\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.47)$$

Les deux champs t_N et t_D sont issues en décompose le problème (1.29) on deux problèmes :

– t_N solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T \nabla t_N) &= \underline{Q} & \text{dans } \Omega, \\ t_N &= \underline{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla t_N \cdot \mathbf{n} &= \underline{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ T \nabla t_N \cdot \mathbf{n} &= \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.48)$$

– t_D solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T \nabla t_D) &= \underline{Q} & \text{dans } \Omega, \\ t_D &= \underline{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla t_D \cdot \mathbf{n} &= \underline{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ t_D &= H & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.49)$$

En utilisant le champ de vecteur $U = (t_D, t_N)$ et d'après la formule (2.46), on obtient l'expression du gradient topologique pour la fonction J :

$$\delta_J(x) = -|v_1| - |v_2|. \quad (2.50)$$

Avec v_1 et v_2 sont les solutions de deux problèmes adjoints suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla v_1) &= -2(t_D - t_N) & \text{dans } \Omega, \\ v_1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla v_1 \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ v_1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_m, \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla v_2) &= -2(t_N - t_D) & \text{dans } \Omega, \\ v_2 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla v_2 \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ T\nabla v_2 \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.52)$$

2.2.2 Résultats numériques

Nous avons étudié le développement asymptotique pour une petite perturbation du support de source. Nous trouvons que l'expression du gradient topologique ne dépend que de la solution des problèmes adjoints associés.

Nous allons donner l'algorithme pour identifier les points sources. Ensuite, nous appliquons cet algorithme à différents exemples numériques.

2.2.2.1 Algorithme

Algorithme 3 : Identification de sources par la méthode du gradient topologique.

Données : Des observations sur la frontière surabondante Γ_m .

Résultat : Déterminer les positions de sources à l'intérieur du domaine.

1. Calculer les deux champs t_D et t_N dans un domaine sain c-à-d un domaine ne contient pas des point source.
2. Calculer les deux champs adjoint v_1 et v_2 associé à respectivement t_D et t_N dans le domaine sain.
3. Déterminer le minimum négative $\delta_J(x)$ donné par l'équation (2.50).

Pour cette partie, les tests numériques sont effectués sur le domaine rectangulaire traité dans les exemples de la section précédente (voir la figure 2.18), avec une transmissivité constante $T = 0.001 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Les données surabondantes sont extraites à partir de la solution exacte $u(x, y)$ du problème direct (1.29) avec des sources ponctuelles connues de coordonnées (x_k, y_k) et de débits λ_k . Le domaine a un maillage régulier d'éléments triangulaires, caractérisé par 735 nœuds et 1366 éléments.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

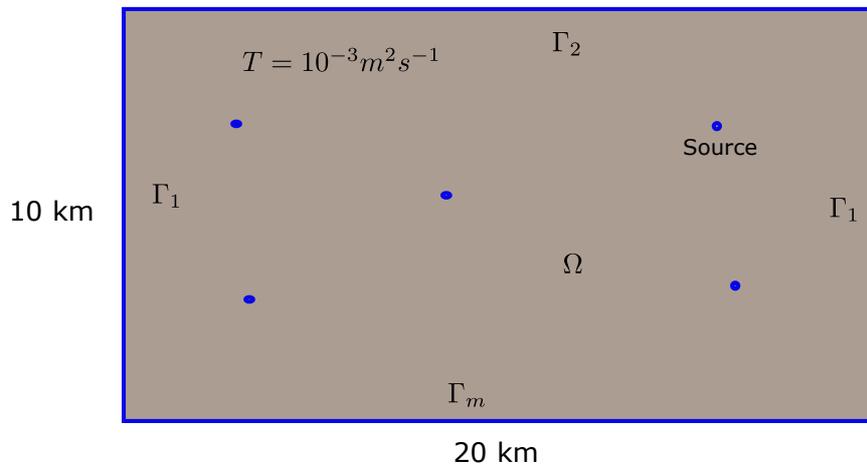


FIGURE 2.18: Domaine avec de sources.

L'étude numérique menée concerne différents cas : identifier une seule source, puis nous passerons à l'identification de multiple sources (4 sources) et enfin nous étudierons l'influence de la distance qui sépare deux sources, sur le processus de reconstruction.

2.2.2.2 Identification la position d'une seule source

Nous commençons par identifier la position d'une seule source en utilisant des mesures surabondantes sur une partie de la frontière du domaine. D'après la figure 2.19, nous remarquons que le gradient topologique atteint son minimum aux alentours du centre de la source.

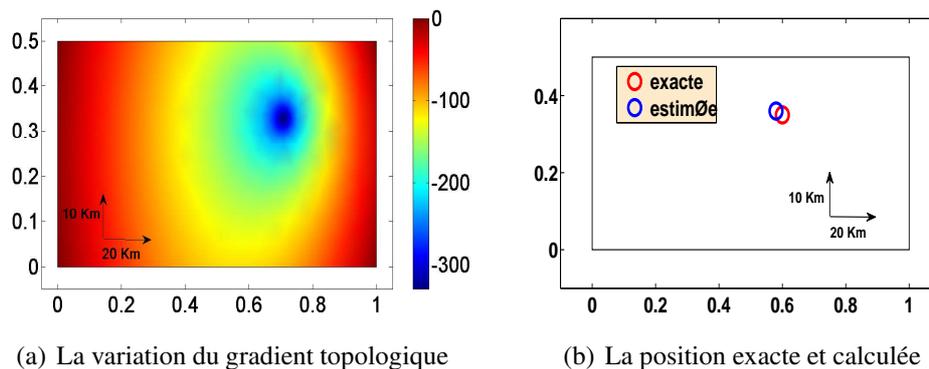


FIGURE 2.19: Cas d'une seule source : identification de la position d'une seule source.

Dans le tableau 2.14 L'erreur de l'identification est faible et reste inférieur à 3%.

$P_{ex} (km)$	$(1.2, 0.7)$
$P_{id} (km)$	$(1.6, 0.72)$
$\epsilon_P [\%]$	2.6

TABLE 2.14: La positions exacte et calculée et l’erreur relatif

2.2.2.3 Étude d’un cas avec quatre sources

Dans ce test numérique, nous allons étudier le cas d’un domaine avec quatre sources et nous identifions leur position.

Les positions inconnues ainsi que le gradient topologique sont présentés sur la figure 2.20. Cette figure montre que la méthode permet de localiser plusieurs sources en même temps sans connaître leur nombre. En effet, la superpositions des solutions exactes et calculées représentée sur la figure 2.20(b), permet de constater l’existence de quatre région où les valeurs du gradient topologique sont les plus négatives, ce qui correspond au nombre de sources inconnues.

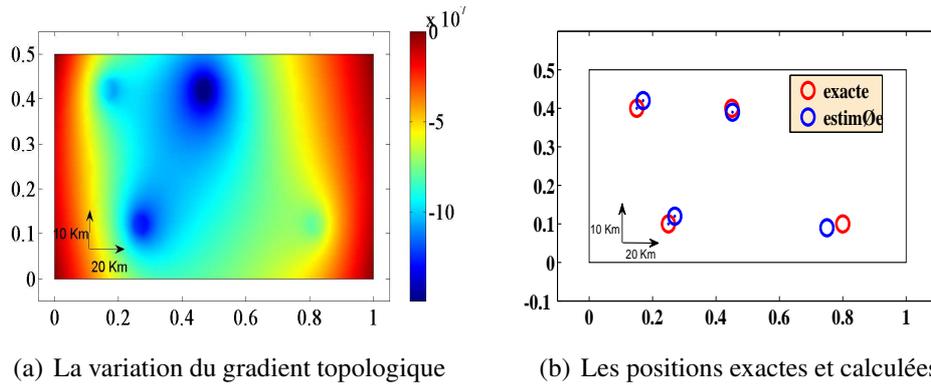


FIGURE 2.20: La distribution du gradient topologique dans le cas du quatre sources.

Nous pouvons remarquer d’après le tableau 2.15 que les erreurs pour l’identification sont acceptables.

$P_{ex} (km)$	$(16, 2)$	$(9, 8)$	$(3, 8)$	$(5, 2)$
$P_{id} (km)$	$(15.4, 1.8)$	$(9.4, 7.8)$	$(3.2, 8.2)$	$(5.3, 2.4)$
$\epsilon_P [\%]$	3.8	1.43	2.14	8

TABLE 2.15: Les positions exactes et calculées et les erreurs relatifs.

2.2.2.4 Influence de la distance entre les sources

Nous considérons deux sources et nous modifions la distance qui les sépare de 12 km à 1 km. Les résultats dans le tableau 2.16 prouvent que les erreurs trouvées pour chaque distance entre les sources sont faibles sauf pour une distance égale à 1 km où l'erreur dépasse 17%. Comme, nous l'avons expliqué au paragraphe 2.1.1.3, ceci est essentiellement dû à l'interférence des cônes de rabattement du niveau piezométrique des puits.

d km	12	8	4	2	1
Erreur(%)	2.9	4.1	8.2	10.4	17

TABLE 2.16: Influence de la distance relative entre les puits, dans le cas de deux puits avec $Q_1 = 100l s^{-1}$ et $Q_2 = -100l s^{-1}$.

Ces figures nous donnent la variation du gradient topologique pour chaque valeur de la distance d . Plus les deux sources sont proches plus leur distinction par la méthode du gradient topologique sera difficile.

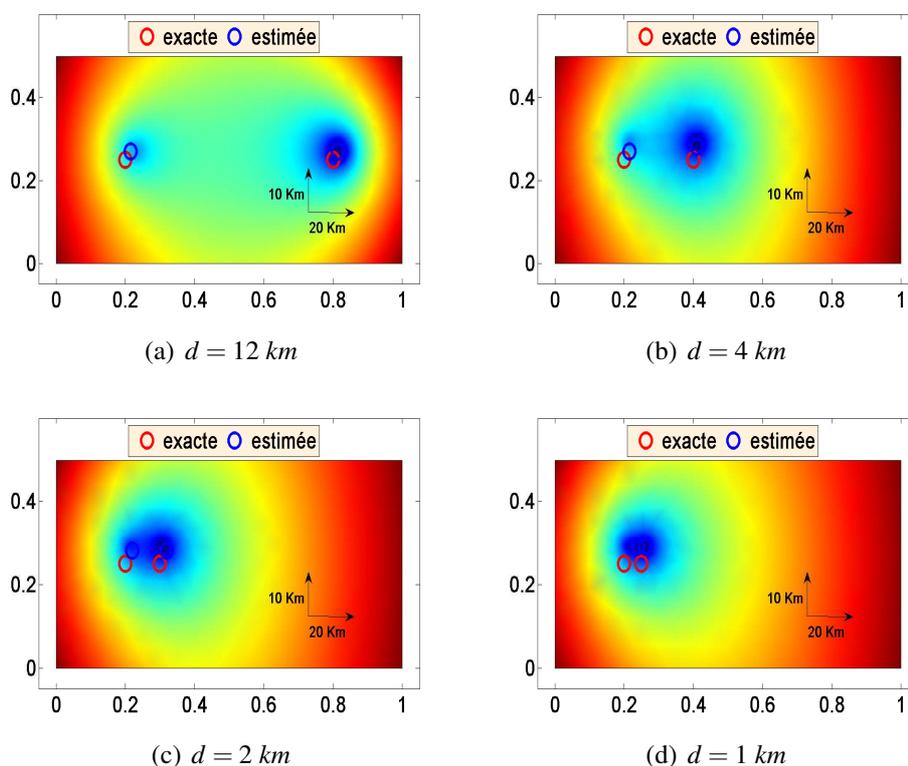


FIGURE 2.21: Distribution du gradient topologiques pour différentes distances séparant deux sources.

A la fin de ce chapitre, nous pouvons conclure que la méthode du gradient topologique basée sur une perturbation du terme source, est efficace pour identifier les positions et le nombre de puits ou de sources à partir de mesures à l'intérieur et sur la frontière du domaine.

Le problème d'identification des positions de sources est étudié sans informations préalables sur leur débit. Donc, on peut traiter en plus le problème inverse d'identification de sources (leurs positions, débits et nombre) qui est l'objectif du chapitre suivant.

2. Identification de positions de puits par quelques formules du gradient topologique

Chapitre 3

Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

Dans la réalité et sur le terrain, nous sommes plutôt confronté à la méconnaissance de plusieurs caractéristiques hydrogéologiques en même temps, par exemple le nombre de puits, leurs positions et débits. Ce qui rend le problème d'identification beaucoup plus complexe. Dans ce chapitre on propose une méthode d'identification multi-niveaux basée sur la résolution d'un problème de minimisation.

Dans cette approche, nous allons identifier les positions et le nombre de sources. Puis connaissant les positions de tous les puits précédemment identifiés, on va chercher les débits associés à ces puits. Cette dernière identification est réalisée par la minimisation de fonctions objectifs exploitant des données surabondantes sur les frontières avec ou sans observations additionnelles à l'intérieur du domaine.

Cette méthode a été largement analysée et appliquée dans différents domaines : thermique [BEN 05, AZA 06, BEN 07, BAR 11b], élasticité linéaire tridimensionnelle [BAR 08], en milieux fissurés [AND 13, AND 12, KAD 11], élasticité non linéaire [AND 15], plasticité [BAR 15, AND 16], électrocardiographie [HAR 10], l'hydrologie [ESC 07].

Deux cas sont considérés dans ce chapitre. Dans le premier on suppose qu'on dispose de données/mesures surabondantes sur une partie de la frontière et sur le reste de la frontière des conditions aux limites de type Neumann ou Dirichlet sont imposées et connues ; dans le second cas on considère qu'une partie de la frontière est inaccessible et donc les conditions aux limites sont manquantes. Dans les deux cas on suppose aussi qu'on peut disposer de mesures/observations supplémentaires à l'intérieur du domaine.

Remarque 4 *L'identification du nombre de puits et leurs positions peut faire à l'aide des techniques du gradient topologique, avec perturbation du terme source, présentées dans le chapitre précédent. Puis connaissant les positions de tous les puits précédemment identifiés, on va chercher les débits associés à ces puits.*

3.1 Identification des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.

Soit le domaine Ω avec sa frontière $\partial\Omega = \Gamma_m \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. On suppose le terme source $Q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{P}_j)$ inconnu, des conditions aux limites surabondantes sur Γ_m sont connues, une condition aux limites de type Dirichlet sur Γ_1 connue, une condition de Neumann sur Γ_2 connue et quelques observations à l'intérieur du domaine connues et qu'on notera d^{obs} . Le problème direct ainsi posé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(T \cdot \nabla u) = Q(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T \nabla u \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u = H \quad T \nabla u \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad Q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{P}_j) \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Le nombre de puits M , leurs positions \mathbf{P}_j et débits λ_j pour $j = 1..M$ sont les seuls inconnues du problème et on va chercher à les identifier à partir des données dont on dispose.

3.1.1 Formulation continue du problème d'identification.

L'idée principale pour résoudre ce problème inverse (3.1) est d'exploiter les mesures surabondantes en définissant deux problèmes mixtes bien posés. Chaque problème ne tient compte que d'une seule des conditions surabondantes sur la frontière Γ_m :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(T \nabla u_D) = g(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ u_D = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla u_D \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2. \\ u_D = H & \text{sur } \Gamma_m. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(T \nabla u_N) = g(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ u_N = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T \nabla u_N \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ T \nabla u_N \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

avec $g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \mu_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}_j) \in \mathbb{R}$.

Dans une seconde étape on construit une fonction permettant de quantifier l'écart entre les champs solutions des problèmes (3.2) et (3.3). On construit la fonctionnelle dite erreur en énergie suivante :

$$\mathcal{E}_a(g(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} T(\nabla u_D - \nabla u_N)^2 \quad (3.4)$$

Cette fonctionnelle peut être augmentée d'un terme tenant compte des observations faites à l'intérieur du domaine, dans ce cas elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_a(g(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} T(\nabla u_D - \nabla u_N)^2 + a \left[\int_{\Omega} (P_{obs} u_D - d^{obs})^2 + \int_{\Omega} (P_{obs} u_N - d^{obs})^2 \right] \quad (3.5)$$

Avec

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si on a des mesures à l'intérieur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

d^{obs} sont les observations à l'intérieur du domaine et P_{obs} est un opérateur de projection lié aux positions des observations. \mathcal{E}_a est positive et s'annule lorsque les champs solutions de (3.2) et (3.3) coïncident. $Q(\mathbf{x})$ est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} Q(\mathbf{x}) = \arg \min_{g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}} \mathcal{E}_a(g(\mathbf{x})) \equiv \mathcal{E}_a(u_D(g(\mathbf{x})), u_N(g(\mathbf{x}))). \\ u_D \text{ solution de (3.2),} \\ u_N \text{ solution de (3.3).} \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour résoudre le problème de minimisation (3.7), nous utilisons la méthode de l'adjoint pour calculer le gradient de la fonctionnelle \mathcal{E}_a . Nous introduisons le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a(u_D, u_N, w_D^1, w_N^1, g(\mathbf{n})) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} T(\nabla u_D - \nabla u_N)^2 \\ &+ \int_{\Omega} T \nabla u_D \cdot \nabla w_D^1 + \int_{\Omega} g w_D^1 - \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} w_D^1 \\ &+ \int_{\Omega} T \nabla u_N \cdot \nabla w_N^1 + \int_{\Omega} g w_N^1 - \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} w_N^1 - \int_{\Gamma_m} \Phi w_N^1 \\ &+ a \left[\int_{\Omega} (u_D - d^{obs})^2 + \int_{\Omega} (u_N - d^{obs})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $(u_D, u_N, w_D^1, w_N^1, g(\mathbf{n})) \in V_1(\Omega) \times V_2(\Omega) \times V_1^0(\Omega) \times V_2^0(\Omega) \times \mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = \bar{H}, v|_{\Gamma_m} = H\}, \\ V_2 &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = \bar{H}\}, \\ V_1^0 &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_m} = 0\}, \\ V_2^0 &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\}. \end{aligned}$$

Les champs w_D^1 et w_N^1 sont les solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\begin{cases} -\text{div}(T \cdot \nabla w_D^1) &= a(u_D - d^{obs}) & \text{dans } \Omega, \\ w_D^1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T \nabla w_D^1 \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ w_D^1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} -\text{div}(T \cdot \nabla w_N^1) &= a(u_N - d^{obs}) & \text{dans } \Omega, \\ w_N^1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T \nabla w_N^1 \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ T \nabla w_N^1 \cdot \mathbf{n} &= T \nabla u_D \cdot \mathbf{n} - \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (3.10)$$

La dérivée de $\mathcal{E}_a(g(\mathbf{x}))$ par rapport à $g(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}_a(g(\mathbf{x}))}{dg} \cdot z = \int_{\Omega} (w_N^1 + w_D^1) \cdot z \quad (3.11)$$

Remarque 5 Nous remarquons que quand nous ne déposons pas de mesures à l'intérieur du domaine ($a = 0$) le champ adjoint w_D^1 est nul.

3.1.2 Modélisation par éléments finis et discrétisation.

Nous considérons un maillage du domaine Ω caractérisé par n nœuds. On désigne par p_1 , p_2 et p_m le nombre de nœuds sur les frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_m , et par q le nombre d'observations à l'intérieur du domaine. Les formes discrétisées des problèmes (3.2) et (3.3) sont données par :

$$\begin{cases} KH_D + L_1 \Lambda_D^t + L_m \Lambda_m^t & = F(X_\mu) + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1 H_D & = \overline{H}_{dis} \\ L_m H_D & = H_{dis} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} KH_N + L_1 \Lambda_N^t & = F(X_\mu) + F_{\overline{\Phi}} + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1 H_N & = \overline{H}_{dis} \end{cases} \quad (3.13)$$

avec :

- K est la matrice de raideur.
- H_D et $H_N \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs solutions de (3.12) et (3.13),
- $H^{obs} \in \mathbb{R}^q$ le vecteur contenant les q les observations à l'intérieur du domaine,
- P_{obs} est une matrice de projection des observations sur le maillage de dimension $q \times n$.
- L_1 est une matrice de projection de la condition de Dirichlet sur Γ_1 , elle est de dimension $p_1 \times n$.
- L_m est une matrice de projection de la condition de Dirichlet sur Γ_m , elle est de dimension $p_m \times n$.
- Λ_D , Λ_N et Λ_m sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de Dirichlet sur Γ_1 , Γ_2 et Γ_m
- $F_{\overline{\Phi}}$ est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée de la condition de Neumann sur Γ_2 ,
- $F_{\overline{\Phi}}$ est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée de la condition de Neumann sur Γ_m ,
- $F(X_\mu)$ est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée des termes sources,
- X_μ est le vecteur de dimension $n - p_1 - p_2 - p_m$ correspondant aux variables inconnues, ici ce sont les valeurs des termes sources discrétisés aux nœuds du domaine excepté ceux situés sur les frontières.

La forme discrétisée de la fonctionnelle s'écrit :

$$E(X_\mu) = \frac{1}{2} (H_D - H_N)^\top K (H_D - H_N) + a \left[(P_{obs} H_D - H^{obs})^2 + (P_{obs} H_N - H^{obs})^2 \right] \quad (3.14)$$

Le gradient de la fonctionnelle est donné par :

$$\nabla_{X_\mu} E(X_\mu) = W_D + W_N \quad (3.15)$$

Avec W_D et W_N sont les solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\begin{cases} KW_D + L_1^t \Upsilon_D + L_m^t \Upsilon_m &= K(H_D - H_N) + aP_{obs}^\top (P_{obs}H_D - H^{obs}) \\ L_1 W_D &= 0 \\ L_m W_D &= 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} KW_N + L_1^t \Upsilon_N &= K(H_N - H_D) + aP_{obs}^\top (P_{obs}H_N - H^{obs}) \\ L_1 W_N &= 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

où Υ_D , Υ_N et Υ_m sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de Dirichlet sur Γ_1 , Γ_2 et Γ_m . Ces problèmes adjoints et le gradient de la fonctionnelle ont été déterminés à partir des formes discrétisées de la fonctionnelle et des problèmes directs.

3.1.3 Identification multi-niveaux

La procédure d'identification se déroule en deux étapes :

Étape 1 : On considère ici que chaque nœud du maillage (excepté ceux sur les frontières) est porteur d'un terme source avec un débit inconnu à identifier. Le vecteur X_μ de dimension $n - p_1 - p_2 - p_m$ contient les débits en ces nœuds. Donc en minimisant la fonction $E(X_\mu)$ par rapport à X_μ et sous les contraintes définies par (3.12) et (3.13) on obtient une distribution de débits $X_\mu^{1*} \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m}$. Ensuite, nous extrayons les extremums locaux de X_μ^{1*} . L'emplacement de ces extremums locaux sont les centres des puits que nous recherchons, par conséquent, le nombre puits M est égale à celui des extremums. Finalement, les positions des puits recherchés sont les coordonnées des nœuds où les extremums du vecteur X_μ^{1*} se trouvent et qu'on notera ici $\mathbf{P} = \langle \mathbf{P}_j \rangle$. Cette première étape se résume ainsi :

i. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} X_\mu^{1*} = \underset{X_\mu^1}{\operatorname{argmin}} E(X_\mu^1) \equiv E(H_D(X_\mu^1), H_N(X_\mu^1)) \quad X_\mu^{1*} \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m} \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ H_D \text{ est solution de (3.12),} \\ H_N \text{ est solution de (3.13).} \end{cases} \quad (3.18)$$

ii. Rechercher les extremums de X_μ^{1*} et extraire leurs positions. Le résultat de cette première étape est le nombre de puits M et les coordonnées de leur position \mathbf{P}_j pour $j = 1..M$.

Étape 2 : Dans cette étape, connaissant le nombre M et les positions des puits, on cherche maintenant à identifier leur débit réel en minimisant la même fonctionnelle $E(X_\mu^2)$, avec X_μ^2 de dimension M . Dans cette étape, seuls les valeurs des débits aux positions précédemment identifiées sont pris comme variables. Cette seconde étape

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

se résume ainsi : résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\mu}^{2*} = \underset{X_{\mu}^2}{\operatorname{argmin}} E(X_{\mu}^2) \equiv E(H_D(X_{\mu}^2), H_N(X_{\mu}^2)) \quad X_{\mu}^{2*} \in \mathbb{R}^M \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ H_D \text{ est solution de (3.12),} \\ H_N \text{ est solution de (3.13).} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

A la fin de ces deux étapes nous avons identifié le nombre de puits, leur position ainsi que leur débit : $(M, P_j, \lambda_j, j = 1..M)$. L'algorithme d'identification est détaillé dans 4.

Algorithme 4 : Identification multi-niveaux du nombre, positions et débits des puits.	
	Données : Données surabondantes sur Γ_m et observations additionnelles à l'intérieur du domaine. La transmissivité hydraulique T
	Résultat : Nombre, coordonnées des positions et débits des puits
1	début
	Étape 1 : Minimiser $E(X_{\mu}^1)$, X_{μ}^{1*} est la solution obtenue)
	Entrées : $X_{\mu}^1 = X_0^1 \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m}$.
2	répéter
3	Calculer H_D et H_N qui sont définie par (3.12) et (3.13)
4	Calculer W_D et W_N en résolvant (3.16) et (3.17)
5	Calculer $E(X_{\mu}^1)$ avec (3.14)
6	Calculer $\nabla_{X_{\mu}^1} E(X_{\mu}^1)$ avec (3.15)
7	jusqu'à Convergence
	Sorties : X_{μ}^{1*}
	Étape 2 : Extraire les extremum locaux et leur position du vecteur X_{μ}^{1*} .
	Entrées : X_{μ}^{1*}
	Sorties : Nombre de puits M et $P_j = (P_{x_j}, P_{y_j})$ pour $j = 1..M$.
	Étape 3 : Minimiser $E(X_{\mu}^2)$, $X_{\mu}^{2*} = \langle \lambda_1.. \lambda_M \rangle$ est la solution obtenue
	Entrées : $X_{\mu}^2 = X_0^2 \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m}$
8	répéter
9	Calculer H_D et H_N qui sont définis par (3.12) et (3.13)
10	Calculer W_D et W_N en résolvant (3.16) et (3.17)
11	Calculer $E(X_{\mu}^2)$ avec (3.14)
12	Calculer $\nabla_{X_{\mu}^2} E(X_{\mu}^2)$ avec (3.15)
13	jusqu'à Convergence
	Sorties : $P_j : (P_{x_j}, P_{y_j}, \lambda_j)$, pour $j = 1..M$
14	fin

3.1.4 Applications numériques

L'étude numérique menée concerne différents cas. Dans le premier cas nous ne disposons pas de mesures à l'intérieur du domaine : $a = 0$ dans l'expression de E . Nous étudierons : l'influence de la distance qui sépare deux puits, la présence de multiple puits, la robustesse de l'identification par rapport à des mesures bruitées. Dans le deuxième cas, nous considérons des mesures additionnelles à l'intérieur du domaine $a = 1$ dans l'expression de E , pour améliorer certain résultats. Nous utilisons le domaine décrit dans la figure 2.18 de la section précédente.

3.1.4.1 Influence de la distance qui sépare deux puits.

Dans ce cas test, nous testons la sensibilité à l'emplacement relatif de deux puits. Nous considérons deux sources avec les débits suivants : $Q_1 = 100 \text{ Ls}^{-1}$ et $Q_2 = 50 \text{ Ls}^{-1}$. Ces deux sources sont séparées par une distance variable d . Nous calculons les erreurs relatives sur les valeurs des débits et les emplacements identifiés pour différentes valeurs de d .

La figure 3.1 montre le vecteur X_μ^{1*} (obtenu à l'étape 1 de l'algorithme 4) ainsi que la distribution de la charge hydraulique H_D obtenue à la fin de l'algorithme 4 pour une distance $d = 8 \text{ km}$. On voit qu'on peut distinguer facilement les deux extremums locaux. Dans ce cas on a $M = 2$. On peut observer à partir du tableau 3.1 que si les sources sont

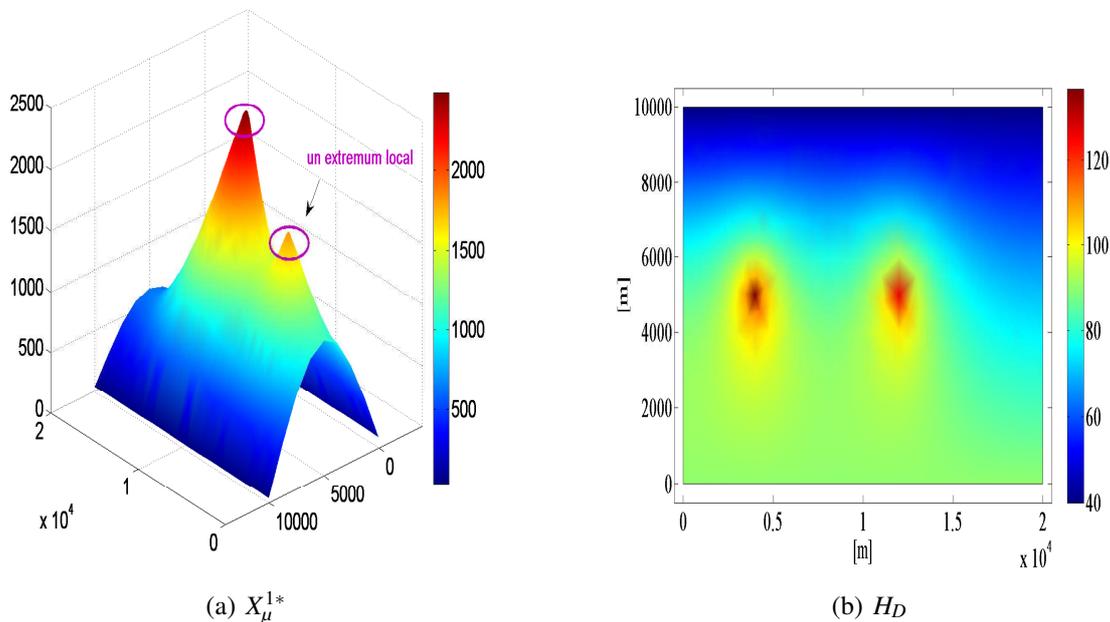


FIGURE 3.1: Les extremums locaux de X_μ^{1*} et la distribution de H_D dans le cas où $d = 8 \text{ km}$.

relativement distantes (loin l'une de l'autre), les débits et les positions sont bien identifiés,

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

d km	16	8	4	2
P_{ex}^1 (m)	(2000, 5000)	(4000, 5000)	(4000, 5000)	(6000, 5000)
P_{id}^1 km	(1923, 5071)	(4080, 5196)	(4210, 5208)	(6680, 5296)
P_{ex}^2 (m)	(18000, 5000)	(12000, 5000)	(8000, 5000)	(8000, 5000)
P_{id}^2 (m)	(18008, 5052)	(12021, 5087)	(8310, 5263)	(7068, 5390)
ε_P [%]	1.94	3.31	4.84	10.49
Q_{id}^1 ($10^{-3}m^3/s$)	99.92	99.56	95.36	87.12
ε_P [%]	0.08	0.44	4.64	12.88
Q_{id}^2 ($10^{-3}m^3/s$)	50.02	50.15	53.2	57.08
ε_P [%]	0.04	0.3	6.4	14.16

TABLE 3.1: Positions et débits identifiés et exacts pour différentes valeurs de d ainsi que les erreurs relatives.

mais lorsque la distance entre les sources diminue (moins de 2 km) la procédure d'identification est moins précise dans ce cas l'erreur est de l'ordre de 10%. Ce qui peut être expliqué par le fait que lorsque les deux sources sont très proches leurs cônes d'interférences s'intersectent, ce qu'on voit aisément sur la figure 3.15.

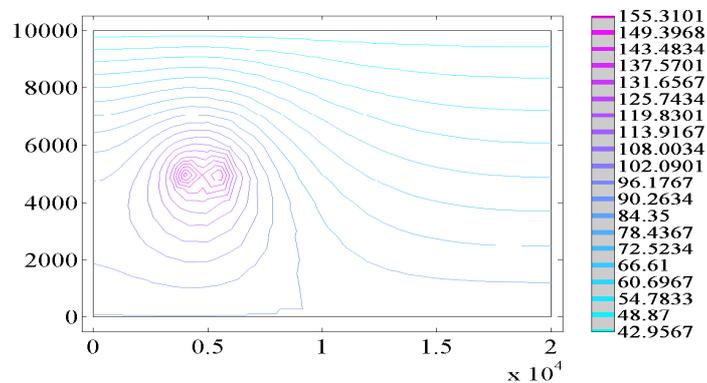


FIGURE 3.2: Les iso-valeurs de la charge hydraulique H_D pour $d = 2\text{ km}$.

3.1.4.2 Cas des multiples puits.

Nous considérons le cas de cinq puits de pompage et d'injection. Les positions et les débits exacts et qui nous serviront de références sont reportés dans le tableau 3.2. Dans

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_{ex} (km)	(2,3)	(5,7)	(10,5)	(15,6)	(18,4)
Q_{ex} ($10^{-3}m^3/s$)	-50	-70	150	-30	80

TABLE 3.2: Les débits et les positions exacts pour le cas de cinq puits.

les figures 3.3, nous traçons simultanément les positions exactes et celles identifiées, ainsi que le vecteur X_{μ}^{1*} . Ce vecteur contient cinq extremums qui est le nombre de source recherchées. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Les valeurs des positions, des débits et

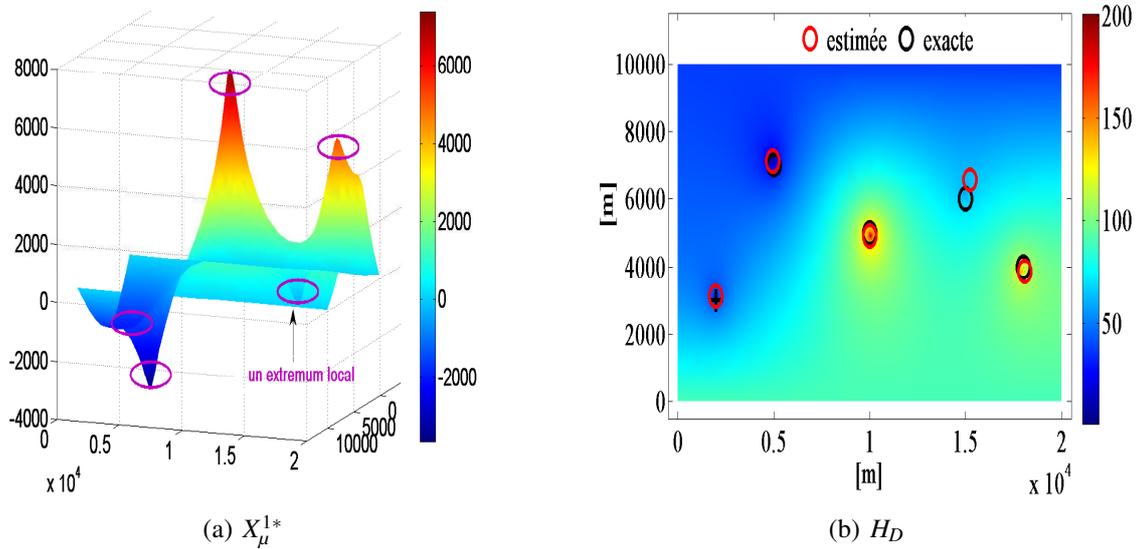


FIGURE 3.3: Les extremums de X_{μ}^{1*} , la charge hydraulique H_D , les positions exactes et identifiées des puits.

les erreurs relatives sont donnés dans le tableau 3.3. Nous notons que les erreurs relatives pour les positions ainsi que pour les débits sont inférieurs à 4%.

Well	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_{id} (km)	(19.82, 3.13)	(4.95, 7.128)	(10, 4.92)	(15.22, 6.57)	(18.08, 3.873)
ϵ_P (%)	3.64	1.6	0.76	3.81	0.83
Q_{id} ($10^{-3}m^3/s$)	-52	-68.7	147.9	-28.8	78.9
ϵ_Q (%)	4	1.85	1.4	4	1.37

TABLE 3.3: Les positions et les débits calculés et les erreurs relatives pour le cas de cinq sources

3.1.4.3 Influence du bruit de mesures.

Dans la réalité les mesures sont toujours entachées d'erreurs de mesures. Nous étudions l'influence du bruit sur la processus d'identification des positions et des débits des puits. Pour tenir compte de la sensibilité de l'algorithme à des mesures bruitées, un bruit blanc uniforme, avec moyenne nulle, est appliqué aux données de Dirichlet sur Γ_m dans le cas du dernier exemple avec 5 puits. La figure 3.4 montre le cas où le niveau du bruit est de 4% puis de 8%. Les résultats d'identification sont donnés dans le tableau 3.4 pour

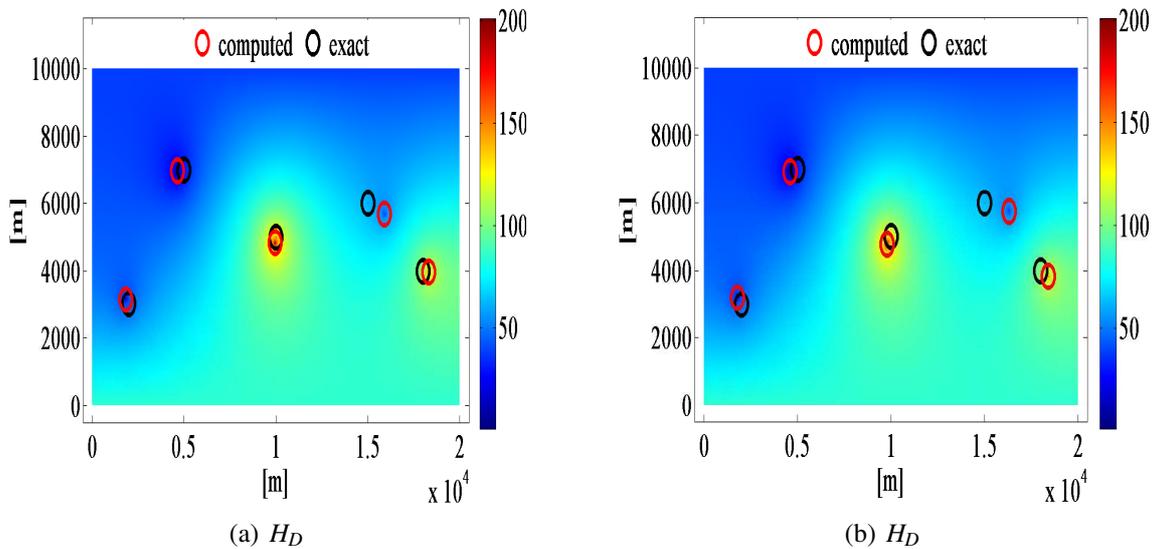


FIGURE 3.4: (a) représente la charge hydraulique H_D et les positions des puits identifiés dans le cas d'un bruit de 4%, (b) représente la charge hydraulique H_D , les positions des puits identifiés dans le cas d'un bruit de 8%.

des niveaux de bruit de 2, 4, 6 et 8%, on remarque que l'erreur relative reste inférieure à 9%.

Noise level (%)	2	4	6	8
P_{id}^1 (m)	(1845,3142)	(1831,3710)	(1803,3183)	(1789,3198)
ε_P (%)	5.6	6.66	7.45	8.02
Q_{id}^1 ($10^{-3}m^3/s$)	-52.8	-53.3	-53.9	-54.3
ε_Q (%)	5.6	6.6	7.8	8.6
P_{id}^2 (m)	(4699,7017)	(4631,6983)	(4613,6971)	(4596,6936)
ε_P (%)	2.33	4.29	4.51	4.75
Q_{id}^2 ($10^{-3}m^3/s$)	-67.8	-66.1	-65.6	64.2
ε_Q (%)	3.14	5.57	6.28	8.2
P_{id}^3 (m)	(10080,4857)	(9950,4830)	(9859,4803)	(9801,4790)
ε_P (%)	1.49	1.58	2.16	2.58
Q_{id}^3 ($10^{-3}m^3/s$)	146.5	144.6	143.5	141.5
ε_Q (%)	2.33	3.6	4.33	5.66
P_{id}^4 (m)	(15340,5840)	(15896,5685)	(16235,5780)	(16310,5735)
ε_P (%)	2.3	5.87	7.76	8.27
Q_{id}^4 ($10^{-3}m^3/s$)	-28	-27.4	-33.2	-34.2
ε_Q (%)	6.66	8.66	10.66	14
P_{id}^5 (m)	(18180,4040)	(18320,3964)	(18398,3908)	(18420,3832)
ε_P (%)	1.02	1.74	2.21	2.45
Q_{id}^5 ($10^{-3}m^3/s$)	78	77.3	3.87	75.9
ε_Q (%)	2.5	3.37	3.87	5.12

TABLE 3.4: Valeurs identifiées des débits, des positions ainsi que les erreurs relatives pour différents niveaux de bruits.

3.1.4.4 Influence de l'ajout des observations à l'intérieur du domaine ($a = 1$)

Dans cette partie nous étudions l'influence de l'ajout d'observations prises à l'intérieur du domaine sur le processus d'identification. Nous reprenons le cas où nous avons étudié l'influence de la distance qui sépare deux puits, Sur la figure 3.5 on montre les positions des observations à l'intérieur du domaine ainsi que la positions des deux puits. Les

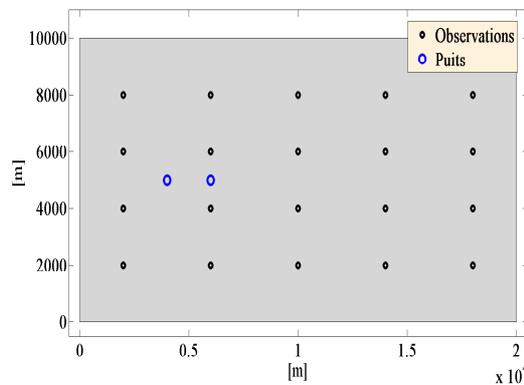


FIGURE 3.5: Les positions des observations.

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

résultats de d'identification sont bons sauf pour le cas où les deux puits sont séparés par une distance $d = 2\text{ km}$. Donc, pour ce dernier cas, nous allons ajouter des observations à l'intérieur du domaine comme c'est indiqué sur la figure 3.5. Sur la figure 3.6 nous traçons la cartographie de la charge hydraulique H_D ainsi que les positions exactes et identifiées des puits, pour les cas sans et avec observations supplémentaires. L'analyse des résul-

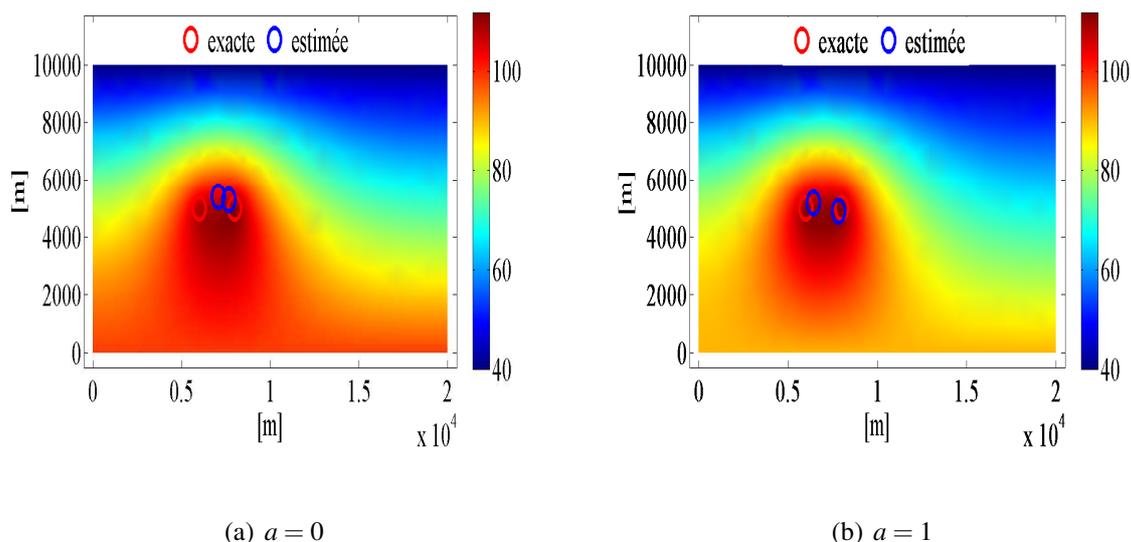


FIGURE 3.6: La charge hydraulique H_D et les positions identifiées des puits.

tats des deux tableaux 3.5 et 3.1 montre que l'erreur relative pour une distance $d = 2\text{ km}$ décroît. Donc l'ajout des observations à l'intérieur du domaine améliore les résultats de l'algorithme 4. Nous pouvons conclure que l'ajout de mesures supplémentaires prises à

$P_{ex}^1 (m)$	(6000, 5000)
$P_{id}^1 (m)$	(6420, 5190)
$\varepsilon_P (\%)$	5.7
$P_{ex}^2 (m)$	(8000, 5000)
$P_{id}^2 (m)$	(7825, 4891)
$\varepsilon_P (\%)$	2.13
$Q_{id}^1 (10^{-3} m^3/s)$	95.16
$\varepsilon_Q (\%)$	4.84
$Q_{id}^2 (10^{-3} m^3/s)$	51.1
$\varepsilon_Q (\%)$	2.2

TABLE 3.5: Les positions exactes et identifiées ainsi que les erreurs relatives pour $a = 1$

l'intérieur du domaine améliore de manière substantielle la précision de l'identification.

3.2 Identification des conditions aux limites et des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.

Dans cette section nous considérons le cas où des données sur une partie de la frontière sont manquantes. Soit le domaine Ω avec sa frontière $\partial\Omega = \Gamma_m \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_u$, voir figure 3.7. On suppose le terme source $Q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{P}_j)$ inconnu, des conditions aux limites surabondantes sur Γ_m connues, une condition aux limites de type Dirichlet sur Γ_1 connue, une condition de type Neumann sur Γ_2 connue et quelques observations à l'intérieur du domaine connues et qu'on notera d^{obs} . La frontière Γ_u est considérée inaccessible. En conséquence, les conditions aux limites (h, ϕ) sont aussi inconnues. Le problème direct ainsi posé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(T \cdot \nabla u) = Q(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \\ u = \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1, \\ T\nabla u \cdot \mathbf{n} = \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2, \\ u = H \text{ et } T\nabla u \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_m, \\ u = h \text{ et } T\nabla u \cdot \mathbf{n} = \phi & \text{sur } \Gamma_u. \end{array} \right. \quad Q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{P}_j) \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

Le nombre de puits M , leur position \mathbf{P}_j et débit λ_j pour $j = 1..M$, ainsi que (h, ϕ) sont les seules inconnues du problème et nous allons chercher à les identifier à partir des données disponibles. Beaucoup de travaux ont traité les problèmes de complétion de données sur

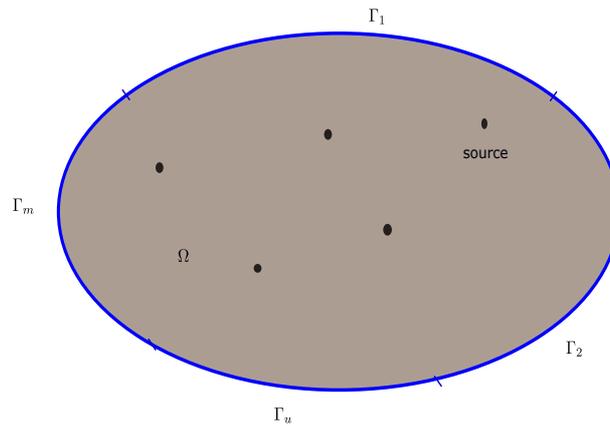


FIGURE 3.7: Exemple du domaine.

une partie de la frontière d'un domaine à partir de mesures sur une autre partie de la frontière du domaine. Dans cette section nous nous basons sur la méthode détaillée dans [BAR 11b]. Cette méthode a été appliquée avec succès sur diverses applications telle que l'élasticité et l'élastoplasticité [BAR 08, AND 08, BAR 10, AND 15, BAR 15, AND 16],

la thermique [RIS 11], l'électro-cardiographie [HAR 10], l'hydrologie [ESC 07, ESC 08], l'intrusion martine [HAR 13] etc.

Dans cette section nous nous intéressons à la reconstitution de données aux limites manquantes et de termes sources. Ce n'est autre que la résolution d'un problème de Cauchy avec des termes sources inconnus. Le caractère mal posé de ces problèmes rend leur résolution très délicate, voir les travaux [BEN 05, AZA 06, BEN 07].

3.2.1 Formulation continue du problème d'identification

Il s'agit de compléter les données (h, ϕ) sur une partie de la frontière du domaine noté Γ_u et de déterminer les caractéristiques des puits λ_j et (P_{x_j}, P_{y_j}) en utilisant des données surabondantes (H, Φ) sur une autre partie de la frontière Γ_m .

L'idée principale pour résoudre le problème inverse (3.20) est d'exploiter les mesures surabondantes en définissant deux problèmes mixtes bien posés. Chaque problème ne tient compte que d'une seule des conditions surabondantes sur la frontière Γ_m :

$$\begin{cases} -\text{div}(T\nabla u_D) &= g(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ u_D &= \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_D \cdot \mathbf{n} &= \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_D &= H & \text{sur } \Gamma_m, \\ T\nabla u_D \cdot \mathbf{n} &= \eta & \text{sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} -\text{div}(T\nabla u_N) &= g(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \\ u_N &= \bar{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_N \cdot \mathbf{n} &= \bar{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_N &= \tau & \text{sur } \Gamma_u, \\ T\nabla u_N \cdot \mathbf{n} &= \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (3.22)$$

où $(u_D, u_N) \in V_1 \times V_2$.

Les champs solutions des problèmes (3.21) et (3.22) sont en général distincts pour des valeurs quelconques de η , τ et $g(\mathbf{x})$. Mais lorsqu'elles coïncident, le problème (3.20) est résolu. Donc, il faut s'assurer que $h = h_D = h_N$ dans Ω et donc vérifier que le charge imposée ainsi que le flux imposé coïncident sur Γ_u . Il s'agit donc de mettre en place un procédé qui minimise l'écart entre les deux solutions u_D et u_N pour résoudre le problème de complétion de données et d'identification des paramètres (3.20). On construit une fonctionnelle d'erreur type énergie du problème étudié :

$$\mathcal{E}_a(u_D, u_N) = \int_{\Omega} T(\nabla u_D - \nabla u_N)^2 \equiv \mathcal{E}_a(\eta, \tau, g(\mathbf{x})) \quad (3.23)$$

Cette fonctionnelle peut être augmentée d'un terme tenant compte des observations faites à l'intérieur du domaine, dans ce cas elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_a(\eta, \tau, g(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} T(\nabla u_D - \nabla u_N)^2 \quad (3.24)$$

$$+ a \left[\int_{\Omega} (P_{obs} u_D - d^{obs})^2 + \int_{\Omega} (P_{obs} u_N - d^{obs})^2 \right] \quad (3.25)$$

Avec

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si on a des mesures à l'intérieur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.26)$$

d^{obs} sont les observations à l'intérieur du domaine et P_{obs} est un opérateur de projection lié aux positions des observations. \mathcal{E}_a est positive et s'annule lorsque les champs solutions de (3.21) et (3.22) coïncident. Les conditions aux limites et le terme source h , φ et $Q(\mathbf{x})$ sont solutions du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} (h, \varphi, Q(\mathbf{x})) = \arg \min_{\tau, \eta, g(\mathbf{x})} \mathcal{E}_a(\tau, \eta, g(\mathbf{x})) \equiv \mathcal{E}_a(u_D(\tau, g(\mathbf{x})), u_N(\eta, g(\mathbf{x}))). \\ u_D \text{ solution de (3.21),} \\ u_N \text{ solution de (3.22).} \end{cases} \quad (3.27)$$

La fonctionnelle \mathcal{E}_a est positive, convexe et quadratique, son minimum est zéro. Pour résoudre le problème de minimisation (3.27), nous utilisons la méthode de l'adjoint pour calculer le gradient de la fonctionnelle \mathcal{E}_a . Nous procédons de la même façon que dans la section précédente. Les dérivées de la fonction sont :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(\eta, \tau, g)}{\partial \eta} \cdot p = - \int_{\Gamma_u} 2w_1 p \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(\eta, \tau, g)}{\partial \tau} \cdot q = - \int_{\Gamma_u} 2(\eta - T\nabla h_N \cdot \mathbf{n} - T\nabla w_2 \cdot \mathbf{n}) q \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(\eta, \tau, g)}{\partial g} \cdot z = \int_{\Omega} (w_1 + w_2) \cdot z \quad (3.30)$$

pour tout $(p, q, z) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u) \times \mathbb{R}$.

Les champs $(w_1, w_2) \in V_1^0 \times V_2^0$ sont solutions de deux problèmes adjoints suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla w_1) = -2aP_{obs}^\top(P_{obs}h_D - d^{obs}) & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla w_1 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ w_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_m, \\ T\nabla w_1 \cdot \mathbf{n} = T\nabla h_N \cdot \mathbf{n} - \eta & \text{sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T\nabla w_2) = -2aP_{obs}^\top(P_{obs}h_N - d^{obs}) & \text{dans } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla w_2 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ w_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_u, \\ T\nabla w_2 \cdot \mathbf{n} = T\nabla h_D \cdot \mathbf{n} - \Phi & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (3.32)$$

Remarque 6 Contrairement au cas précédent, nous remarquons ici que quand on ne dépose pas de mesures à l'intérieur du domaine ($a = 0$), le champ adjoint w_D^1 n'est pas nul.

3.2.2 Modélisation par éléments finis et discrétisation

Nous considérons un maillage du domaine Ω caractérisé par n nœuds. On désigne par p_1, p_2, p_m et p_u le nombre de nœuds sur les frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_m$ et Γ_u , et par q le nombre d'observations à l'intérieur du domaine.

Les formes discrétisées des problèmes (3.21) et (3.22) sont données par :

$$\begin{cases} KH_D + L_1\Lambda_D^t + L_m\Lambda_m^t & = F(X_\mu) + F(X_\eta) + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1H_D & = \overline{H}_{dis} \\ L_mH_D & = H_{dis} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} KH_N + L_1\Lambda_N^t + L_u\Lambda_u^t & = F(X_\mu) + F_{\Phi} + F_{\overline{\Phi}} \\ L_1H_N & = \overline{H}_{dis} \\ L_uH_N & = X_\tau \end{cases} \quad (3.34)$$

avec :

- K est la matrice de raideur.
- H_D et $H_N \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs solutions de (3.33) et (3.34),
- $H^{obs} \in \mathbb{R}^q$ le vecteur contenant les q observations à l'intérieur du domaine,
- P_{obs} est une matrice de projection des observations sur le maillage de dimension $q \times n$.
- L_1 est une matrice de projection de la condition de Dirichlet sur Γ_1 , elle est de dimension $p_1 \times n$.
- L_m est une matrice de projection de la condition de Dirichlet sur Γ_m , elle est de dimension $p_m \times n$.
- Λ_D, Λ_N et Λ_m sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de Dirichlet sur Γ_1, Γ_2 et Γ_m
- $F_{\overline{\Phi}}$ est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée de la condition de Neumann sur Γ_2 ,
- F_{Φ} est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée de la condition de Neumann sur Γ_m ,
- $F(X_\mu)$ est un vecteur de dimension n contenant la forme discrétisée des termes sources,
- X_μ est le vecteur de dimension $n - p_1 - p_2 - p_m - p_u$ correspondant aux variables inconnues, ici ce sont les valeurs des termes sources discrétisés aux nœuds du domaine excepté ceux situés sur les frontières,
- X_η est le vecteur de dimension p_u correspondant aux variables inconnues de la condition de Neumann discrétisée sur Γ_u ,
- X_τ est le vecteur de dimension p_u correspondant aux variables inconnues de la condition de Dirichlet sur Γ_u ,
- Λ_u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à la condition de Dirichlet sur Γ_u ,
- L_u est une matrice de projection de la condition de Dirichlet sur Γ_u , elle est de dimension $p_u \times n$.

La forme discrétisée de la fonctionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} E_a(X_\eta, X_\tau, X_\mu) &\equiv E_a(H_D(X_\eta, X_\mu), H_N(X_\tau, X_\mu)) \\ &= \frac{1}{2}(H_D - H_N)^\top K(H_D - H_N) + a \left[(P_{obs}H_D - H^{obs})^2 + (P_{obs}H_N - H^{obs})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le gradient de la fonctionnelle est donné par :

$$\nabla E_a = \begin{cases} \nabla_{X_\eta} E(X_\mu) = L_u W_D \\ \nabla_{X_\tau} E(X_\mu) = L_u K(H_D - H_N - W_N) \\ \nabla_{X_\mu} E(X_\mu) = W_D + W_N \end{cases} \quad (3.36)$$

Avec W_D et W_N sont les solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\begin{cases} KW_D + L_1^t \Upsilon_D + L_m^t \Upsilon_m &= K(H_D - H_N) + aP_{obs}^\top (P_{obs}H_D - H^{obs}) \\ L_1 W_D &= 0 \\ L_m W_D &= 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} KW_N + L_1^t \Upsilon_N + L_u^t \Upsilon_u &= K(H_N - H_D) + aP_{obs}^\top (P_{obs}H_N - H^{obs}) \\ L_1 W_N &= 0 \\ L_u W_N &= 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

où Υ_D , Υ_N , Υ_m et Υ_u sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de Dirichlet sur Γ_1 , Γ_m et Γ_u des problèmes adjoints (3.17) et (3.38). Ces problèmes adjoints et le gradient de la fonctionnelle ont été déterminés à partir des formes discrétisées de la fonctionnelle et des problèmes directs.

3.2.3 Identification multi-niveaux

La procédure d'identification se déroule en trois étapes :

Étape 1 : On considère ici que chaque nœud du maillage (excepté ceux sur les frontières) est porteur d'un terme sources avec des valeurs inconnues à identifier. Le vecteur X_μ de dimension $n - p_1 - p_2 - p_m - p_u$ contient les débits en ces nœuds. X_η et X_τ chacun de dimension p_u sont les vecteurs correspondants aux variables discrétisées des conditions aux limites manquantes. Donc en minimisant la fonction $E_a(X_\eta, X_\tau, X_\mu)$ définie par (3.35), par rapport à X_η , X_τ et X_μ et sous les contraintes définies par (3.33) et (3.34) on obtient une distribution de débits $X_\mu^{1*} \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m-p_u}$ ainsi que les conditions aux limites discrétisées X_η^* et X_τ^* . Cette première étape se résume ainsi : résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_\eta^*, X_\tau^*, X_\mu^{1*}) = \arg \min_{X_\eta^*, X_\tau^*, X_\mu^{1*}} E_a(X_\eta, X_\tau, X_\mu^1) \\ \text{avec } (X_\eta, X_\tau, X_\mu^{1*}) \in \mathbb{R}_\eta^p \times \mathbb{R}_\tau^p \times \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m-p_u} \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ H_D \text{ est solution de (3.33),} \\ H_N \text{ est solution de (3.34).} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

Étape 2 : Ensuite, nous extrayons les extremums locaux de X_μ^{1*} . L'emplacement de ces extremums locaux sont les centres des puits que nous recherchons, par conséquent, le nombre puits M est égale à celui des extremums. Finalement, les positions des puits recherchés sont les coordonnées des nœuds où les extremums du vecteur X_μ^{1*} se trouvent et qu'on notera ici $\mathbf{P} = \langle \mathbf{P}_j \rangle$. Cette étape se résume ainsi : rechercher les extremums de X_μ^{1*} et extraire leurs positions. Le résultat est le nombre de puits M et les coordonnées de leur position \mathbf{P}_j pour $j = 1..M$.

Étape 3 : Dans cette étape, identique à celle présentée dans la section précédente, connaissant le nombre M et les positions des puits ainsi que les conditions aux limites manquantes sur Γ_u , on cherche maintenant à identifier les débits réels en minimisant la fonctionnelle $E_a(X_\mu^2)$ définie par (3.14), avec X_μ^2 de dimension M . Dans cette étape, seules les valeurs des débits aux positions précédemment identifiées sont prises comme variables. Cette seconde étape se résume ainsi : résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_\mu^{2*} = \underset{X_\mu^2}{\operatorname{argmin}} E_a(X_\mu^2) \equiv E_a(H_D(X_\mu^2), H_N(X_\mu^2)) \quad X_\mu^{2*} \in \mathbb{R}^M \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ H_D \text{ est solution de (3.12),} \\ H_N \text{ est solution de (3.13).} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

A la fin des ces trois étapes on a identifié les conditions aux limites discrétisées (X_η^*, X_τ^*) , le nombre de puits, leur position ainsi que leur débit : $(M, \mathbf{P}_j, \lambda_j, j = 1..M)$. L'algorithme est détaillé dans 5.

Algorithme 5 : Identification multi-niveaux du nombre, positions et débits des puits dans le cas de conditions aux limites manquantes

Données : Données surabondantes sur Γ_m et observations additionnelles à l'intérieur du domaine. La transmissivité hydraulique T

Résultat : Conditions aux limites manquantes, nombre, coordonnées des positions et débits des puits

1 **début**

Étape 1 : Minimiser $E_a(X_\eta, X_\tau, X_\mu^1)$, X_μ^{1*} est la solution obtenue)

Entrées : $(X_\eta = X_\eta^0, X_\tau = X_\tau^0, X_\mu^1 = X_0^1) \in \mathbb{R}_u^p \times \mathbb{R}_u^p \times \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m-p_u}$.

2 **répéter**

3 Calculer H_D et H_N qui sont définies par (3.33) et (3.34)

4 Calculer W_D et W_N en résolvant (3.37) et (3.38)

5 Calculer $E(X_\mu^1)$ avec (3.35)

6 Calculer $\nabla_{X_\mu^1} E(X_\mu^1)$ avec (3.36)

7 **jusqu'à Convergence**

Sorties : X_μ^{1*}

Étape 2 : Extraire du vecteur X_μ^{1*} les extremums locaux et leur position.

Entrées : X_μ^{1*}

Sorties : Nombre de puits M et $P_j = (P_{x_j}, P_{y_j})$ pour $j = 1..M$.

Étape 3 : Minimiser $E_a(X_\mu^2)$, $X_\mu^{2*} = \langle \lambda_1.. \lambda_M \rangle$ est la solution obtenue

Entrées : $X_\mu^2 = X_0^2 \in \mathbb{R}^{n-p_1-p_2-p_m}$

8 **répéter**

9 Calculer H_D et H_N qui sont définies par (3.12) et (3.34)

10 Calculer W_D et W_N en résolvant (3.16) et (3.17)

11 Calculer $E(X_\mu^2)$ avec (3.14)

12 Calculer $\nabla_{X_\mu^2} E(X_\mu^2)$ avec (3.15)

13 **jusqu'à Convergence**

Sorties : $P_j : (P_{x_j}, P_{y_j}, \lambda_j)$, pour $j = 1..M$

14 **fin**

3.2.4 Applications numériques

L'étude numérique menée concerne différents cas. Dans les deux premiers cas nous ne disposons pas de mesures à l'intérieur du domaine : $a = 0$ dans l'expression de E_a . Nous étudierons d'abord le cas d'un puits. Ensuite, nous analyserons l'influence de la distance qui sépare deux puits. Enfin, nous étudions l'aquifère de Rocky Mountain présenté dans [VOS 84].

3.2.4.1 Cas d'un seul puits

Nous considérons le cas présenté dans la figure 3.8. Nous commençons par compléter

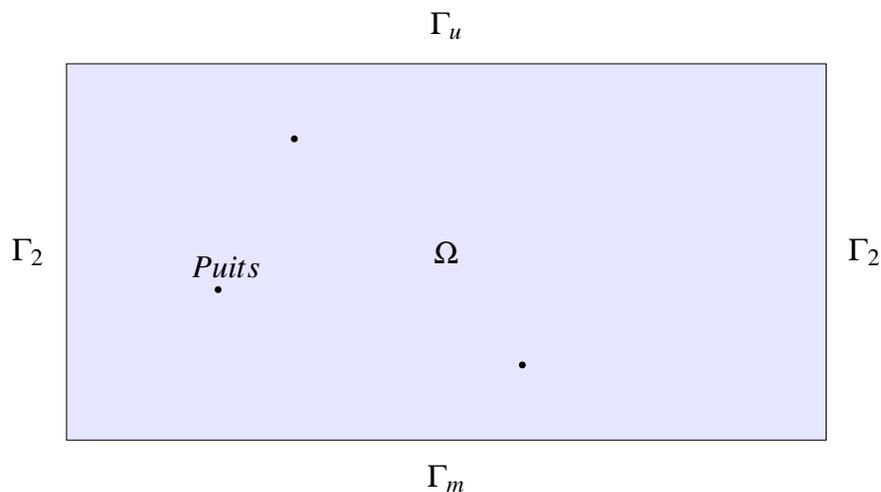


FIGURE 3.8: Description du domaine.

la donnée sur Γ_u et identifier la position ainsi que le débit d'un puits. Sur la figure 3.9, nous représentons le vecteur X_u^{1*} identifié à l'étape 1 de l'algorithme 5 et la cartographie de la charge hydraulique H_D obtenue à la fin de l'étape 1 de l'algorithme 5. Sur la figure 3.10 nous représentons les conditions aux limites identifiées à l'étape 1. On remarque une très bonne adéquation avec les valeurs exactes. Sur la figure 3.11 nous avons représenté l'évolution des fonctions objectif au cours des processus de minimisation de l'étape 1 et 3.

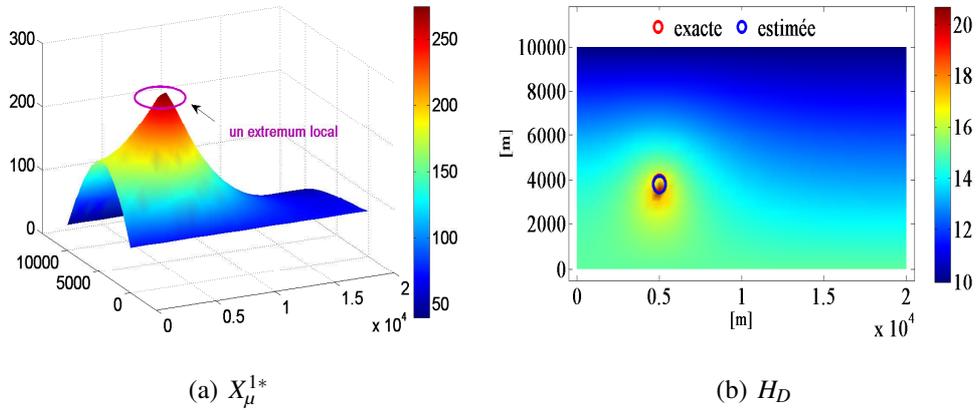


FIGURE 3.9: Les extremums de X_μ^{1*} , la charge hydraulique H_D , les positions exacte et identifiée du puits.

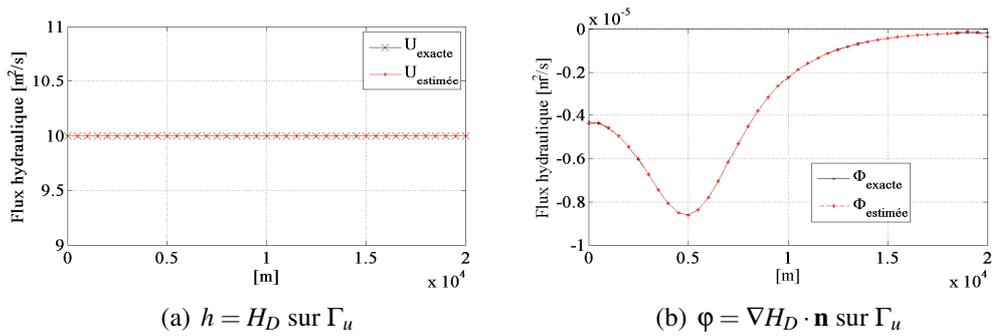


FIGURE 3.10: La charge hydraulique h et le flux φ sur Γ_u

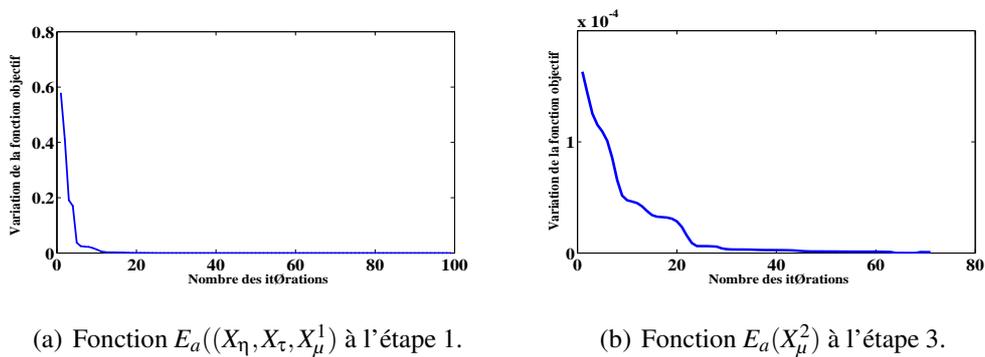


FIGURE 3.11: Évolution au cours des itérations des fonctions E_a .

3.2.4.2 Influence de la distance qui sépare deux puits

Dans cet exemple, nous étudions la sensibilité de l'identification par rapport à la distance qui sépare deux puits. Les deux puits ont des débits de $Q_1 = 100 Ls^{-1}$ et $Q_2 = 50 Ls^{-1}$ et sont séparés par une distance variable d . Nous identifions les conditions aux limites et nous calculons les erreurs relatives sur les débits et les emplacements pour différentes valeurs de d .

Sur la figure 3.12 nous traçons, pour $d = 8 km$, le vecteur X_μ^{1*} obtenu à l'étape 1 de l'algorithme 5), où on voit bien les deux extremums locaux liés aux positions des puits. Sur la seconde figure nous avons représenté la distribution de la charge hydraulique H_D à la fin de cette étape. Sur la figure 3.13 nous représentons les conditions aux limites identifiées à l'étape 1. On remarque une très bonne adéquation avec les valeurs exactes. Sur la figure 3.14 nous représentons l'évolution des fonctions objectif au cours des processus de minimisation de l'étape 1 et 3. Dans le tableau 3.6 nous avons reporter les résultats obtenus dans les cas où la distance d varie de $8 km$ à $2 km$. On remarque que si les puits sont relativement distants (loin l'un de l'autre), les débits et les positions sont bien identifiés, mais lorsque la distance entre les puits diminue (moins de $2 km$) l'identification est beaucoup moins précise (l'erreur est de l'ordre de 14%). La figure 3.15 montre les iso-valeurs dans le cas où les deux puits sont distant de $2 km$.

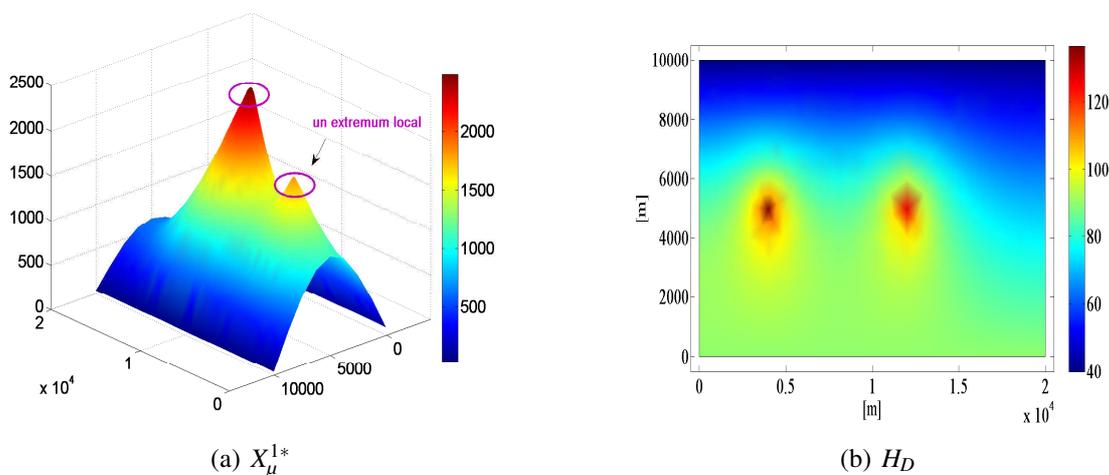
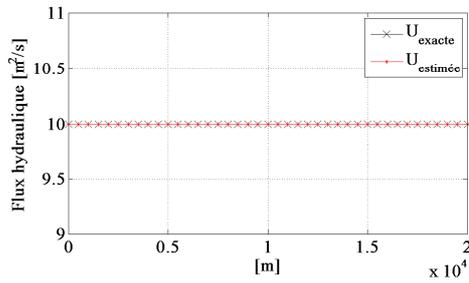
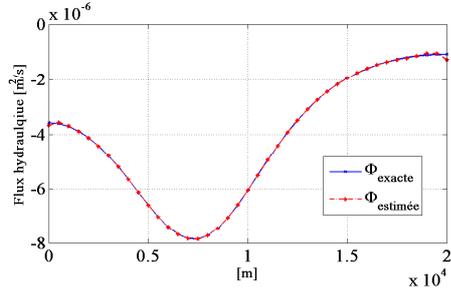


FIGURE 3.12: X_μ^{1*} et la charge hydraulique H_D pour une distance $d = 8 km$.

Identification des conditions aux limites et des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.

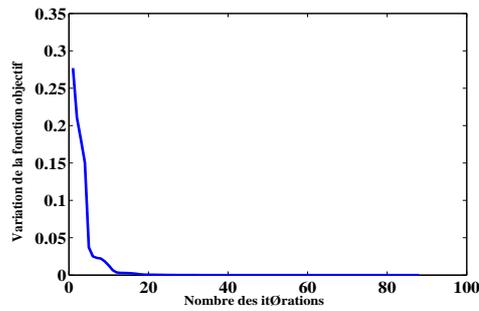


(a) Compléter de la charge hydraulique sur Γ_u

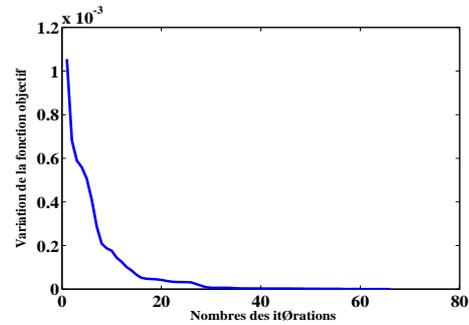


(b) Compléter du flux hydraulique sur Γ_u

FIGURE 3.13: La charge hydraulique h et le flux ϕ sur Γ_u



(a) Fonction $E_a((X_\eta, X_\tau, X_\mu^1))$ à l'étape 1.



(b) Fonction $E_a(X_\mu^2)$ à l'étape 3.

FIGURE 3.14: évolution au cours des itérations des fonctions E_a .

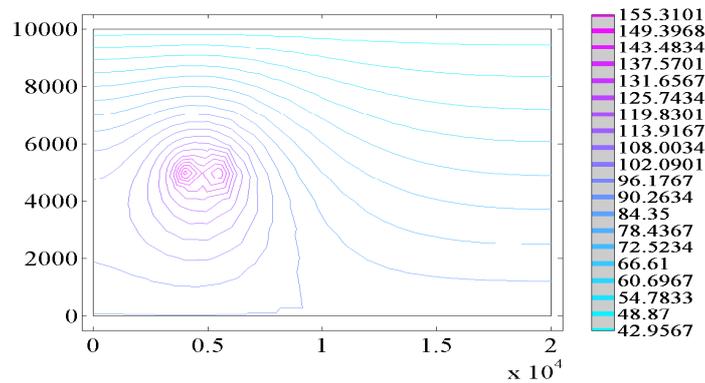


FIGURE 3.15: Les iso-valeurs de la charge hydraulique pour $d = 2 \text{ km}$.

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

d km	16	8	4	2
P_{ex}^1 (m)	(2000, 5000)	(4000, 5000)	(4000, 5000)	(6000, 5000)
P_{id}^1 (Km)	(1923, 5071)	(4080, 5196)	(4210, 5208)	(6680, 5296)
P_{ex}^2 (m)	(18000, 5000)	(12000, 5000)	(8000, 5000)	(8000, 5000)
P_{id}^2 (m)	(18008, 5052)	(12021, 5087)	(8310, 5263)	(7068, 5390)
ε_P [%]	1.94	3.31	4.84	10.49
Q_{id}^1 ($10^{-3} m^3/s$)	99.92	99.56	95.36	87.12
ε_P [%]	0.08	0.44	4.64	12.88
Q_{id}^2 ($10^{-3} m^3/s$)	50.02	50.15	53.2	57.08
ε_P [%]	0.04	0.3	6.4	14.16

TABLE 3.6: Les résultats obtenus en fonction des valeurs de d .

3.2.4.3 Exemple de Rocky Mountain

Nous considérons l'exemple de l'aquifère de Rocky Mountain au Colorado (Etats-Unis), représenté sur la figure 3.16. Ce modèle est inspiré d'un cas test du code de calcul SUTRA développé par Voss [VOS 84] et initialement étudié par Konikow [KON 77].

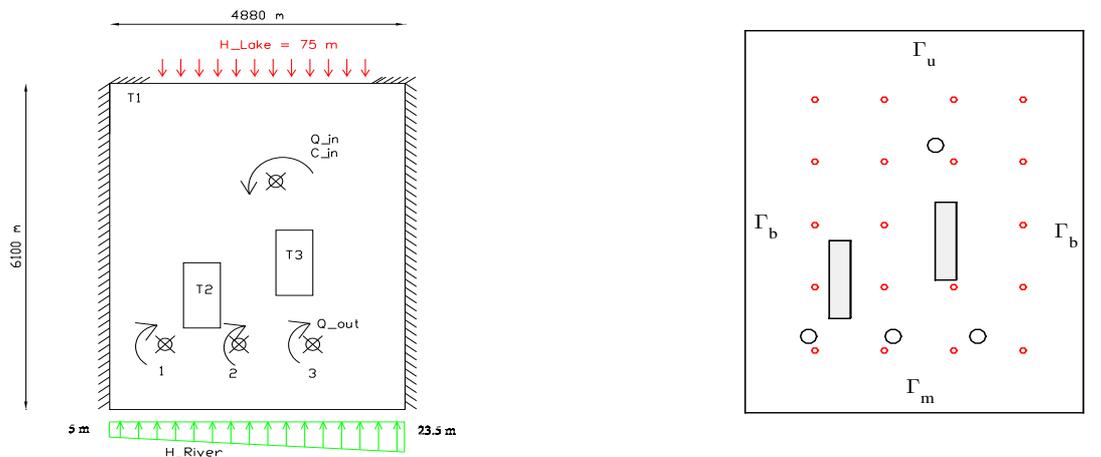
Le milieu poreux est supposé homogène, isotrope et l'aquifère est saturé en eau. L'aquifère est représenté par un rectangle homogène de $6100m$ par $4880m$, d'épaisseur $e = 12m$, avec la valeur de la transmissivité $T = 2.5 \cdot 10^{-8} m^2/s$. Il est délimité au nord par un lac agissant comme une charge piézométrique constante de $H_N^1 = 75m$, au sud par une rivière à piézométrie linéaire variant de $5m$ à l'ouest jusqu'à $23.5m$ à l'est. Les bords latéraux sont supposés imperméables. A l'intérieur du domaine, il y a trois puits de pompage de débit volumétrique $Q_{out}^{2,3,4} = -0.5 \cdot 10^{-3} m^3/s$ et une mare représentant une source d'injection et de débit volumétrique $Q_{in}^4 = 1.8 \cdot 10^{-3} m^3/s$. Nous reportons sur le tableau 3.7 les valeurs exactes des coordonnées des positions et des débits pour tous les puits ainsi que la mare considérée comme un puits d'injection. La frontière horizontale inférieure

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_{exact} (m)	(915, 1220)	(2135, 1220)	(3355, 1220)	2747, 4270)
Q_{exact} ($10^{-3} m^3/s$)	-0.5	-0.5	-0.5	1.8

TABLE 3.7: Les débits et les positions exacts.

est celle où on dispose de données surabondantes Γ_m , la frontière horizontale supérieure est inaccessible Γ_u . On considère qu'on dispose de quelques observations à l'intérieur du domaine comme indiqué sur la figure 3.16. L'identification des conditions aux limites sur Γ_u et des paramètres des puits est effectuée avec l'algorithme décrit dans 5. Sur la figure 3.18 nous représentons les résultats de la complétion des données sur Γ_u obtenus à la fin de l'étape 1 de l'identification et comparés aux valeurs exactes. Dans le tableaux 3.9 sont reportées les paramètres exacts et identifiés des puits. A partir de ces résultats, nous pouvons conclure que la complétion de données et l'identification des paramètres

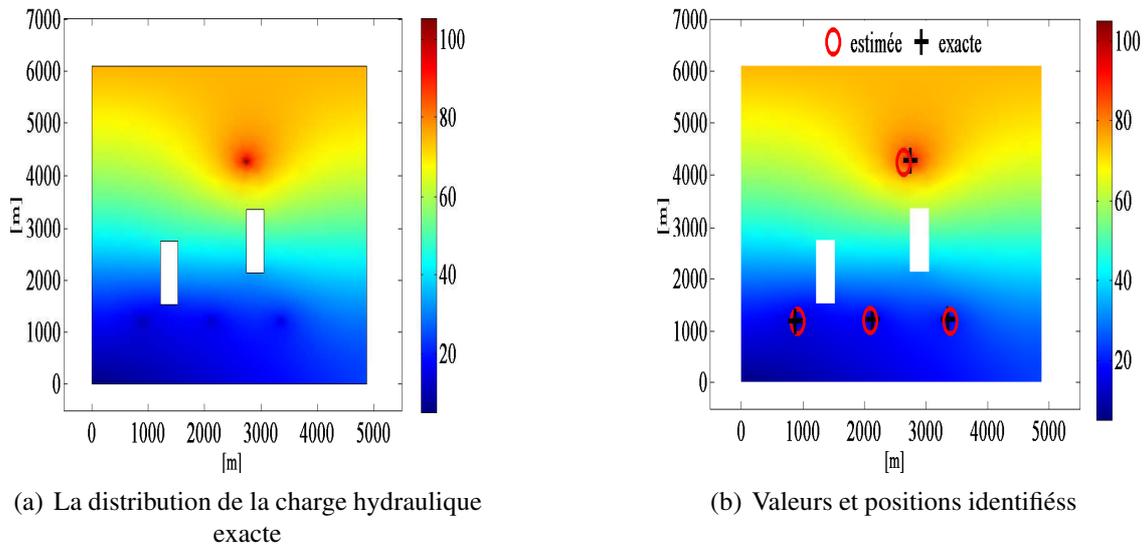
Identification des conditions aux limites et des paramètres des puits à partir de donnée surabondantes sur une partie la frontière.



(a) Aquifère de Rocky Mountain [KON 77]

(b) Les observations à l'intérieur du domaine (cercles rouges)

FIGURE 3.16: Le domaine géométrie et observations à l'intérieur du domaine.



(a) La distribution de la charge hydraulique exacte

(b) Valeurs et positions identifiées

FIGURE 3.17: La charge hydraulique et les positions trouvées par l'algorithme 5 pour l'aquifère de Rocky Mountain.

des puits sont très satisfaisants car les erreurs relatives restent inférieures à 2%. La figure (3.19) nous montre la variation de la fonction J_a au cours des itérations pour les différents étapes de l'algorithme 5.

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

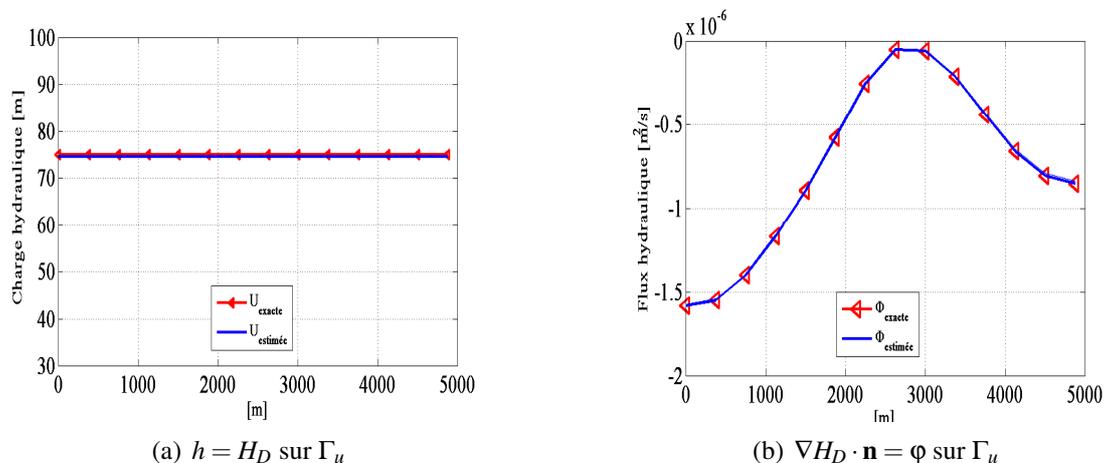


FIGURE 3.18: Résultats de la complétion des données sur Γ_u pour le cas de l'aquifère de Rocky Mountain, étape 1 de l'identification.

Puits	P_1	P_2	P_3	P_4
P_{id} (m)	(885, 1195)	(2096, 1197)	(3398, 1190)	2637, 4241)
ε_P (%)	3.05	2.91	1.21	2.86
Q_{id} ($10^{-3} m^3/s$)	-0.494	-0.492	-0.492	1.82
ε_Q (%)	1.2	1.8	1.6	0.01

TABLE 3.8: Les débits, les positions et les erreurs calculés pour l'aquifère de Rocky Mountain.

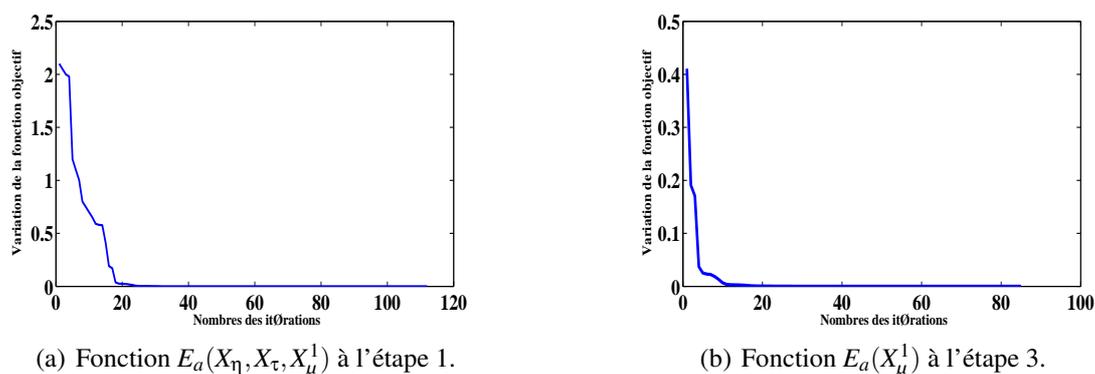


FIGURE 3.19: Evolution de la fonction E_a dans l'étape 1 et 3 de l'algorithme. 5

Identification avec des données bruitées. Nous considérons que les données sur Γ_m pourraient être bruitées par un bruit blanc. Sur la figure 3.20, nous montrons les données identifiées sur Γ_u pour plusieurs niveaux de bruit allant de 2% à 8%. On observe que la reconstruction des conditions aux limites reste robuste pour des niveaux du bruit raisonnables (inférieur à 10%). Dans le tableau 3.9, nous avons reporté les résultats d'iden-

tification des paramètres des puits et on peut faire les mêmes constatations.

En conclusion, la procédure d'identification présentée dans ce chapitre pour retrouver les paramètres de puits et les conditions aux limites sur la frontière Γ_u dans un aquifère en utilisant des données surabondantes sur une partie de la frontière et des observations à l'intérieur du domaine donne de bons résultats.

La méthode semble pertinente dans toutes les situations que nous avons considéré : la multiplicité des puits, les données bruitées, les positions relatives des puits et pour le cas de l'aquifère de Rocky Mountain. Cependant, il est important de noter que le problème inverse présenté est très sensible à la quantité des données. En effet, dans certains cas, nous devons ajouter des observations dans le domaine pour bien identifier les puits.

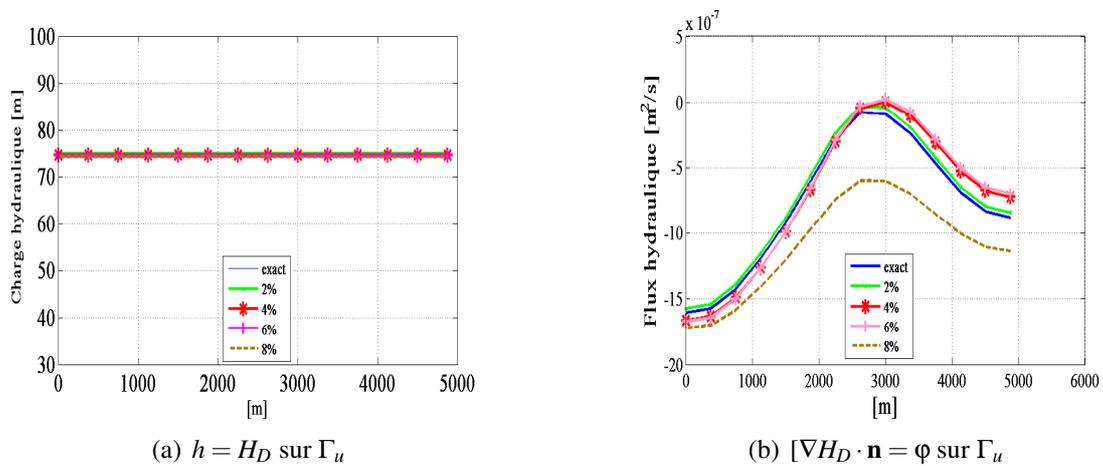


FIGURE 3.20: Résultats de la complétion des données sur Γ_u pour le cas de l'aquifère de Rocky Mountain, étape 1 de l'identification avec données bruitées.

3. Identification multi-niveaux du nombre de sources, leurs positions et leurs débits

<i>Bruits (%)</i>	2	4	6	8
$P_{id}^1 (m)$	(880, 1188)	(872, 1173)	(927, 1141)	(935, 1130)
$\varepsilon_P (%)$	3.05	4.15	3.60	3.82
$Q_{id}^1 (10^{-3}m^3/s)$	-0.0487	-0.0480	-0.0472	0.0450
$\varepsilon_Q (%)$	2.5	4	5.6	10
$P_{id}^2 (m)$	(2189, 1270)	(2185, 1291)	(2078, 1118)	(2070, 1102)
$\varepsilon_P (%)$	2.91	3.21	4.04	4.63
$Q_{id}^2 (10^{-3}m^3/s)$	-0.0486	-0.0481	-0.0474	0.0452
$\varepsilon_Q (%)$	2.8	3.8	5.2	9.6
$P_{id}^3 (m)$	(3415, 1180)	(3270, 1161)	(3258, 1115)	(3242, 1109)
$\varepsilon_P (%)$	1.21	2.80	3.54	4.02
$Q_{id}^3 (10^{-3}m^3/s)$	-0.0488	-0.0485	-0.048	0.0466
$\varepsilon_Q (%)$	2.4	3	4	6.8
$P_{id}^4 (m)$	(2812, 4401)	(2818, 4429)	(2823, 4469)	(2831, 4469)
$\varepsilon_P (%)$	2.86	3.90	4.02	4.20
$Q_{id}^4 (10^{-3}m^3/s)$	0.177	0.174	0.171	0.168
$\varepsilon_Q (%)$	1.6	3.3	5	6.6

TABLE 3.9: Les valeurs exactes et identifiées des débits et des positions des puits ainsi que les erreurs relatives

Chapitre 4

Identification de paramétrisation et de positions de puits

Dans ce chapitre, nous considérons un milieu poreux hétérogène dans le sens qu'il contient plusieurs zones géologiques. Nous supposons que la transmissivité hydraulique est un paramètre qui reste constant dans chaque zone géologique.

Nous nous proposons de localiser les interfaces entre les zones géologiques, de déterminer les valeurs des transmissivités hydrauliques dans chaque zone et d'identifier les positions des puits (voir la figure 4.1). Ce qui fait que par la résolution d'un tel problème inverse nous fournissons des informations riches et importantes sur l'aquifère.

Nous considérons le modèle défini par (1.31) où on impose une condition de type Neumann sur le bord du puits.

La première partie de ce chapitre, sera consacrée à déterminer à la fois la partition géologique (zonation) et la valeur de la transmissivité dans chaque zone. La résolution de ce problème inverse est basée sur la méthode de paramétrisation adaptative [BEN 02a]. Dans la deuxième partie, nous allons développer une approche pour identifier à la fois les zones géologiques, les transmissivités hydrauliques et les positions des puits. Pour cela, nous combinons la méthode de paramétrisation adaptative avec la méthode du gradient to-

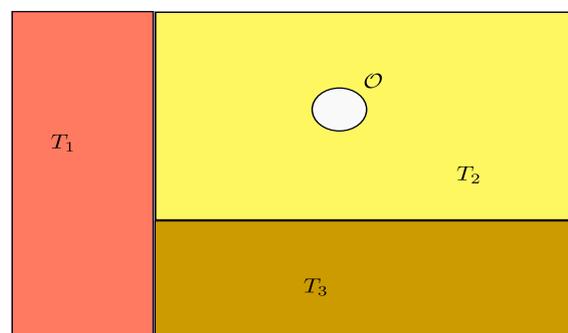


FIGURE 4.1: Exemple de domaine d'étude avec trois zones géologiques et un puits.

pologique qui a été utilisée dans les chapitres précédents. Un algorithme numérique sera développé et appliqué à plusieurs cas.

4.1 Problème inverse d'identification de la transmissivité hydraulique

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation de la transmissivité hydraulique dans un écoulement souterrain gouverné par l'équation (1.29). Ce paramètre dépend de la variable d'espace. Il est constant par morceaux et présente des discontinuités à l'interface entre les différentes zones géologiques.

Dans le problème inverse que nous considérons les interfaces entre les zones aussi bien que la valeur du paramètre hydraulique T dans les zones sont des inconnues que nous cherchons à déterminer. L'estimation des transmissivités hydrauliques s'effectue en utilisant des observations d_j^{obs} dans certains points x_j à l'intérieur du domaine. Ce problème inverse est posé comme un problème de minimisation d'une fonction moindre carrée \mathfrak{J} [BON 97, SUN 06] définie par :

$$\mathfrak{J}(T) = \sum_j |u_h(x_j) - d_j^{obs}|^2. \quad (4.1)$$

où $u_h(x_j)$ est la solution de (1.29) calculée au point x_j avec un paramètre courant T .

Pour calculer le gradient de \mathfrak{J} nous utilisons la méthode de l'état adjoint.

Ce gradient est défini par :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial T_{E_h}} = \int_{E_h} \nabla u_h(x) \nabla p_h(x) dx = \sum_{i=1}^{Ne} u_i \sum_{j=1}^{Ne} p_j \int_{E_h} \nabla \Phi_i \nabla \Phi_j dx, \forall E_h \in \mathcal{T}_h. \quad (4.2)$$

Avec $\Phi_j, j = 1 : n$ les fonctions de base qui engendrent l'espace \mathcal{V}_h (voir (1.38)) et Ne le nombre de nœuds pour chaque élément E_h (voir (1.40)).

Vu le coût des observations dans un milieu poreux, le nombre de celles ci ne peut être que très réduit : il serait insuffisant d'estimer les valeurs d'un paramètre comme une inconnue par maille de calcul. Il est essentiel alors de réduire le nombre d'inconnues. Pour cela nous utilisons une méthode de paramétrisation qui réduit le nombre de paramètres à estimer et tient compte du nombre d'observations disponibles.

4.1.1 Paramétrisation

Le choix d'une bonne paramétrisation est un problème important en hydrogéologie. Différentes méthodes de paramétrisation sont proposées dans la littérature. Nous citons la paramétrisation multiéchelle utilisée par Chavent et Liu [CHA 91] et la paramétrisation adaptative développée par Ben Ameer et al. [BEN 02a].

La méthode de paramétrisation adaptative a l'avantage de minimiser le nombre des inconnus de paramètres permettant d'interpréter au mieux les données disponibles.

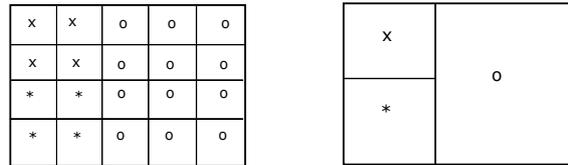


FIGURE 4.2: A gauche paramétrisation avec un paramètre par maille de calcul. A droite paramétrisation avec un paramètre par zone.

L'idée est de prendre une discrétisation du paramètre indépendante de maillage du calcul, de sorte que le paramètre reste constant dans un grand nombre de mailles appartenant à une même zone (voir 4.2).

Nous supposons dans ce travail que les interfaces entre les zones sont portées par les arrêtes du maillage de calcul. Nous procéderons à un raffinement itératif de la paramétrisation. Les courbes définissant les coupes induisant les raffinements sont portées par les arrêtes du maillage et appartiennent à un ensemble prédéfini. Nous développons une méthode de paramétrisation qui minimise le nombre de paramètres à estimer et tient compte du nombre d'observations disponibles.

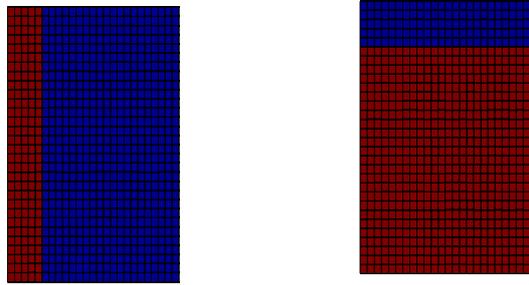
4.1.2 Indicateur de raffinement

La méthode de paramétrisation adaptative consiste à construire une partition du domaine, appelée paramétrisation, dont les parties sont de formes diverses et correspondent à des zones où le paramètre à estimer est constant. Les degrés de liberté du paramètre à identifier sont en nombre égal au nombre de parties de cette partition. Les degrés de liberté sont ajoutés impérativement par raffinement d'une seule zone à chaque itération. Le choix du "bon" raffinement est fait à travers des indicateurs de raffinement. Ces indicateurs s'obtiennent par des calculs simples utilisant le gradient de la fonction objectif.

On peut citer les travaux de Ben Ameer et al [BEN 02a, BEN 02b], Chavent et Bissel [CHA 98], Hayek et al [HAY 09] comme des références pour plus de détails sur les indicateurs de raffinement.

L'idée de cette technique est de passer de l'itération i à l'itération $i + 1$ en ajoutant un degré de liberté qui est sélectionné suivant les indicateurs de raffinement de façon que l'optimisation à l'itération $i + 1$ produise une diminution importante de la fonction moindre carrés. La paramétrisation guidée par les indicateurs de raffinement réduit le nombre de paramètres et n'introduit que des zones qui correspondent à des discontinuités du paramètre.

Dans le cadre de ce travail, nous choisissons une famille de coupes \mathcal{F} formée par les coupes verticales (a) et coupes horizontales (b) portées par les arêtes de maillage du calcul comme dans la figure 4.3 :



(a) Coupe verticale

(b) Coupe horizontale

FIGURE 4.3: Les coupes élémentaires.

4.1.3 Algorithme

Nous rappelons un algorithme de paramétrisation adaptative initialement proposé dans [BEN 02a] :

Algorithme 6 : Paramétrisation adaptative.

Données : Connaître des observations à l'intérieur du domaine.

Résultat : Déterminer les zones géologiques et les valeurs de la transmissivité dans chaque zone.

1 Initialisation : Paramétrisation \mathcal{P} .

1. Minimiser la fonction \mathfrak{J} avec la paramétrisation courante \mathcal{P} .
2. Pour chaque zone Z_i de \mathcal{P} , calculer les indicateurs de raffinement pour chaque coupe dans \mathcal{F} .
3. Calculer I_{max} le plus grand, en valeur absolue, parmi tous les indicateurs calculés. Minimiser \mathfrak{J} en considérant toutes les coupes correspondants aux indicateurs qui ont des valeurs absolues plus grandes que $80\% |I_{max}|$.
4. Choisir l'interface qui correspond à la valeur minimale de la fonction objectif.
5. Mettre à jour la paramétrisation \mathcal{P} .

Les critères d'arrêt de l'algorithme sont :

- Après un nombre donné d'itérations, la fonction objectif ne diminue que très faible.
- La valeur de la fonction objectif est proche de zéro.
- Les valeurs des indicateurs de raffinement sont très petites.

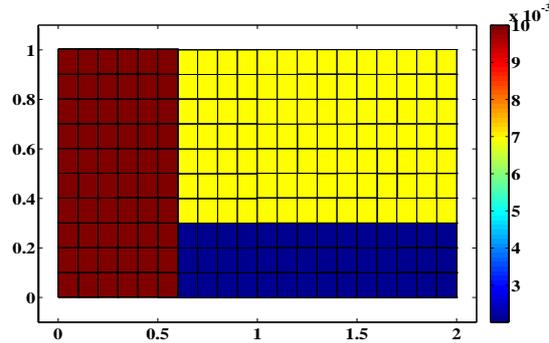


FIGURE 4.4: Paramétrisation exacte.

Nous définissons l'erreur relative sur les valeurs estimées de la transmissivité ε_T par :

$$\varepsilon_T = \frac{(\sum_i ((T_{ex}^i - T_{id}^i)^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_i (T_{ex}^i)^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.3)$$

4.1.4 Résultats numériques

Dans cette partie nous allons identifier simultanément la transmissivité hydraulique et les zones géologiques dans un milieu poreux où l'écoulement souterrain est gouverné par l'équation (1.29). Nous avons appliqué l'algorithme 6 à deux exemples, le premier est synthétique, le deuxième correspond à une version simplifiée d'un cas réel.

4.1.4.1 Exemple 1

L'exemple numérique que nous présentons ci-dessous porte sur une situation simple qui nous permet de tester la technique de raffinement adaptatif que nous avons présenté au paragraphe précédent.

Nous présentons dans la figure 4.4 la paramétrisation exacte que nous cherchons à identifier.

Nous initialisons l'optimisation en supposant la transmissivité constante dans tout le domaine et nous commençons par minimiser la fonction objectif avec cette paramétrisation.

Les paramétrisations données par l'algorithme 6 au cours des itérations sont représentées sur la figure 4.5. La variation de la fonction objectif est reportée sur la figure 4.6 et les différentes valeurs que prend la transmissivité hydraulique sont données au tableau 4.1. L'algorithme est arrêté avec la condition que la valeur de la fonction objectif est proche de zéro.

4. Identification de paramétrisation et de positions de puits

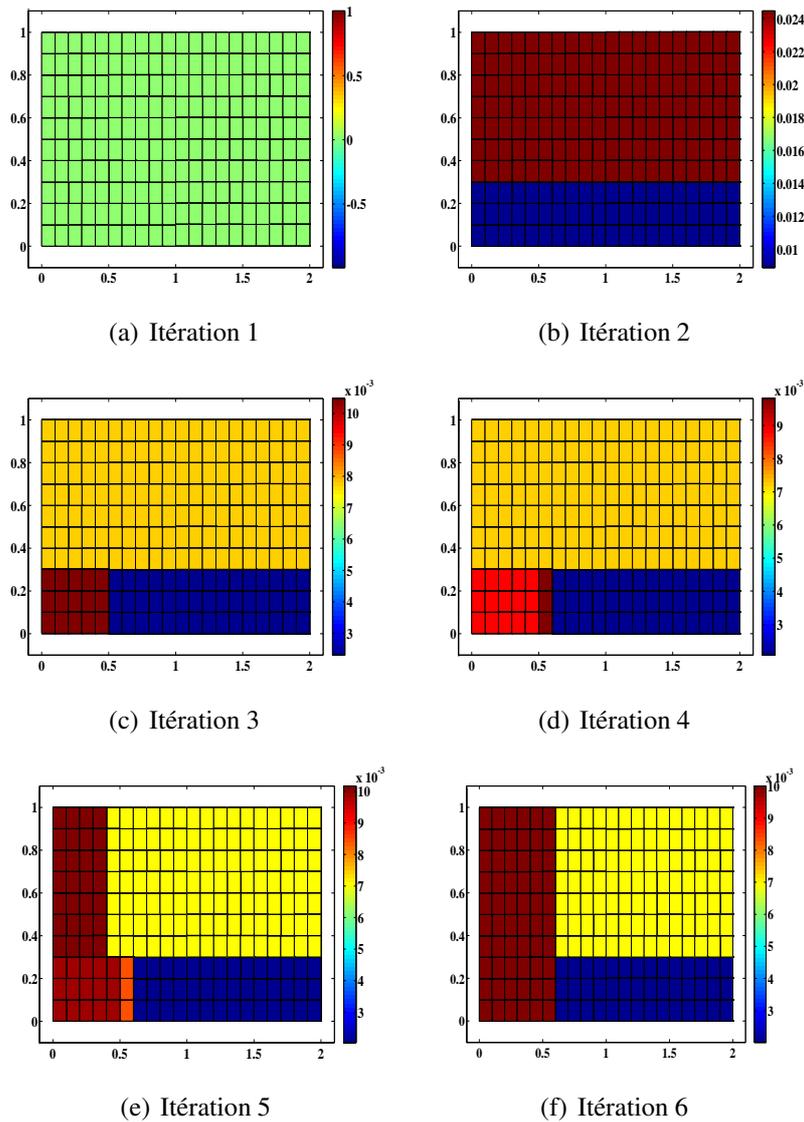


FIGURE 4.5: Exemple 1 : paramètres calculés au cours des itérations.

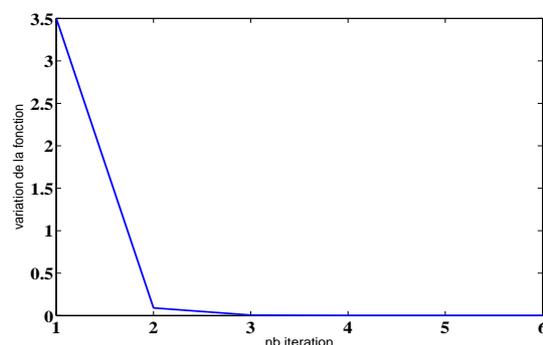


FIGURE 4.6: Variation de la fonction objectif au cours des itérations.

Itération	$T \text{ m}^2/\text{s}$					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1	$4.6 \cdot 10^{-3}$					
2	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$				
3	$7.9 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$			
4	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$		
5	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	
6	$6.95 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$
T_{ex}	$7 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$
ε_T	0.0640					

TABLE 4.1: Exemple 1 : les valeurs de la transmissivité hydraulique pour chaque itération.

Nous remarquons que nous avons pu retrouver la paramétrisation exacte à trois zones à la sixième itération de l'algorithme 6.

4.1.4.2 Exemple 2 : aquifère de "Rocky Mountain"

Nous considérons l'exemple de l'aquifère de "Rocky Mountain" qui nous avons présenté dans le chapitre précédent. La position de la transmissivité hydraulique est donnée à la figure 4.7 avec une transmissivité $T = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ dans le domaine extérieur et deux inclusions de transmissivité $T = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

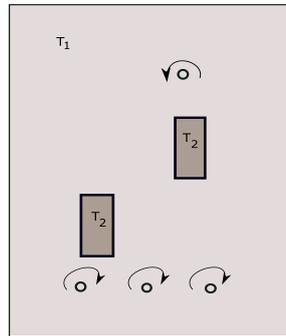


FIGURE 4.7: Modèle de "Rocky Mountain" avec ses zones géologiques.

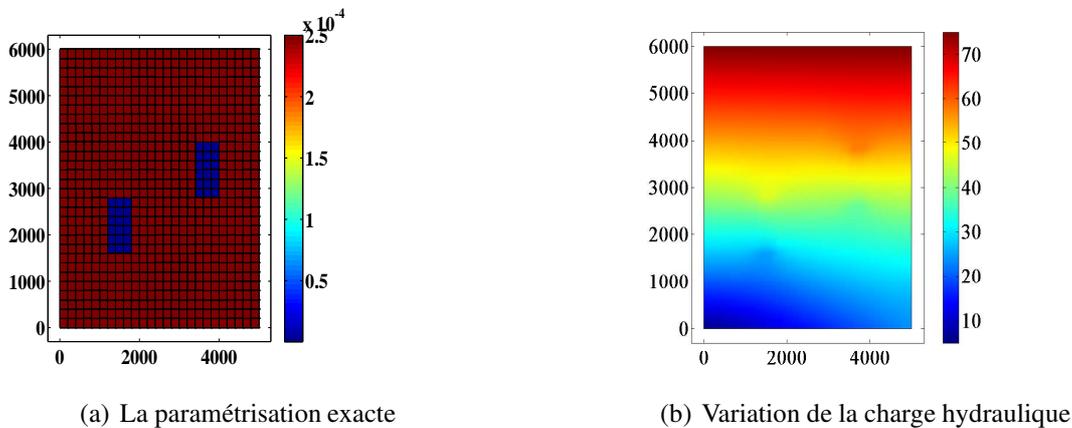


FIGURE 4.8: La paramétrisation exacte et variation de la charge hydraulique.

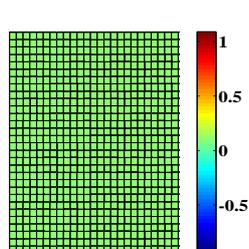
Les observations considérées sont des mesures de la charge hydraulique, prises dans une maille sur deux du maillage de calcul. On trace dans la figure 4.8 la distribution de la charge hydraulique et la paramétrisation exacte de la transmissivité.

La figure 4.9 représente l'évolution de la paramétrisation au cours de quelques itérations de l'algorithme. Nous avons choisi de représenter les itérations où nous remarquons des changements remarquables dans la paramétrisation retenue à la fin de l'itération.

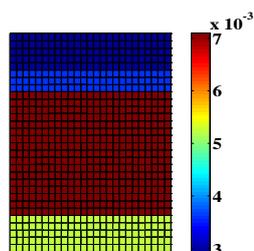
Nous remarquons qu'après la quatrième itération, nous avons trouvé une zone qui contient les deux inclusions recherchées. A la huitième itération, nous voyons l'apparition d'une zone correspondant à l'endroit où se trouve le puits d'injection. En effet autour de ce puits la charge hydraulique varie de façon importante.

Dans la figure 4.9(e) (itération 12) nous remarquons l'apparition d'une partie de la deuxième inclusion recherchée. À la quinzième itération, on identifie 15 zones avec leurs valeurs de la transmissivité hydraulique. Parmi ces zones les deux inclusions cherchées. Après l'optimisation des valeurs de la transmissivité nous retrouvons la bonne paramétrisation.

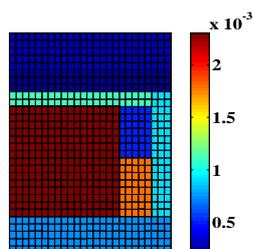
Dans la figure 4.10 nous traçons la variation de la fonction objectif qui décroît au cours des itérations.



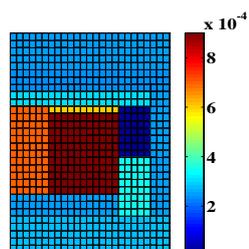
(a) Itération 1



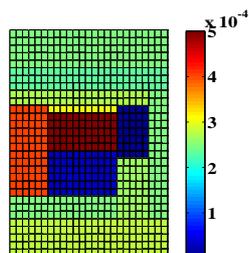
(b) Itération 4



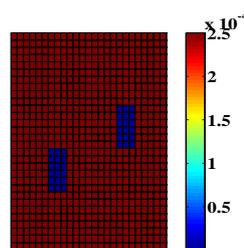
(c) Itération 8



(d) Itération 11



(e) Itération 12



(f) Itération 15

FIGURE 4.9: Paramètres calculés au cours des itérations.

4. Identification de paramétrisation et de positions de puits

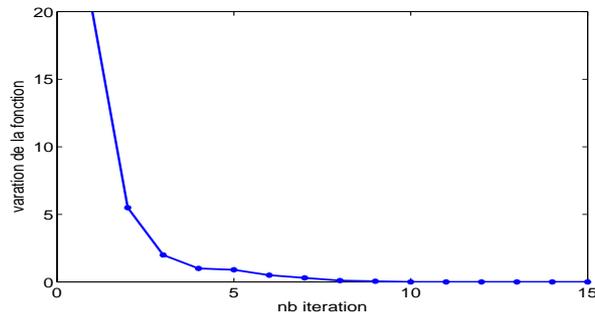


FIGURE 4.10: Exemple de "Rocky Mountain" : variation de la fonction objectif au cours des itérations.

Ainsi, l'analyse des résultats indiqués dans le tableau (4.2), montre que les valeurs de la transmissivité T convergent vers les valeurs exactes.

Nous avons validé la méthode de paramétrisation adaptative sur une situation déduite d'un cas réel. Dans la section suivante, on va coupler la technique de paramétrisation adaptative et la méthode du gradient topologique, pour identifier simultanément les positions des puits ainsi que les zones géologiques et les transmissivités hydrauliques dans chaque zone.

Iter \ $T \text{ m}^2/\text{s}$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
1	$9 \cdot 10^{-3}$														
2	$5 \cdot 10^{-3}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$													
3	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$												
4	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$											
5	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$0.95 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$										
6	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$									
7	$0.28 \cdot 10^{-3}$	$0.16 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$								
8	$0.27 \cdot 10^{-3}$	$0.2 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$0.75 \cdot 10^{-3}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$							
9	$0.28 \cdot 10^{-3}$	$0.22 \cdot 10^{-3}$	$0.18 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$0.95 \cdot 10^{-3}$	$0.55 \cdot 10^{-3}$						
10	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	$0.2 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-4}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$0.65 \cdot 10^{-3}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$					
11	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^1$	$0.28 \cdot 10^{-3}$	$0.31 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$				
12	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.28 \cdot 10^1$	$0.27 \cdot 10^1$	$0.3 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-3}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$			
13	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.28 \cdot 10^{-3}$	$0.27 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$0.3 \cdot 10^{-3}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	$0.36 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-5}$		
14	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.28 \cdot 10^{-3}$	$0.27 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$0.29 \cdot 10^{-3}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.22 \cdot 10^{-3}$	$0.31 \cdot 10^{-3}$	$0.1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	
15	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.245 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.248 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.22 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.26 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$
T_{ex}	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.252 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.252 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$2.55 \cdot 10^{-7}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$
ϵ_T	0.0710														

TABLE 4.2: Exemple de "Rocky Mountain" : les valeurs de la transmissivité hydrauliques pour chaque itération.

4.2 Estimation de paramètre et localisation de puits

L'objectif de cette section, est de résoudre le problème inverse d'identification des positions des puits et d'estimer la transmissivité hydraulique en se basant sur le modèle gouverné par l'équation (2.3) où le puits est modélisé par un trou sur le bord duquel nous imposons une condition de type Neumann.

Nous supposons dans cette section que le nombre de puits est connu, nous identifions seulement leurs positions. La méthode présentée ici est basée sur le couplage de la méthode de sensibilité topologique avec la méthode de paramétrisation adaptative pour développer un algorithme qui nous permet de résoudre le problème inverse considéré.

Nous considérons la fonction objectif J_ε^1 définie par l'équation (2.20). Pour simplifier la présentation de la technique de fonctionnement du couplage de la méthode des indicateurs de raffinement et de la méthode du gradient topologique, considérons le cas où nous identifions deux zones géologiques et localisons la position d'un seul puits.



FIGURE 4.11: Paramétrisation \mathcal{P}_1 .

Nous initialisons la procédure d'identification avec un domaine sain dont la partition est à une seule zone Z_1 (voir la figure 4.11), la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine. Nous avons alors une seule valeur de la transmissivité hydraulique T_1 à estimer. Ceci est fait par la minimisation de la fonction objectif par rapport à la variable T_1 .

Notons T_1^* et $J^{1,*}$ les valeurs optimales respectivement de T et de la fonction objectif. Puis à la première itération, nous calculons le gradient topologique par son expression donnée en utilisant l'algorithme 1 (section 2.1) par :

$$\delta_J(x) = -2\pi T_1^* \nabla u_0(x) \nabla v_0(x) \quad (4.4)$$

Avec u_0 et v_0 les solutions respectives du problème direct (2.2) et du problème adjoint (2.15) dans le domaine sain.

La position identifiée du puits est notée \mathbf{P}_1^* . Nous insérons un puits O , de rayon ε , à cette position. À la deuxième étape, le raffinement consiste à construire une paramétrisation formée de deux zones $Z_{2,1}$ et $Z_{2,2}$ (figure 4.12) en utilisant l'algorithme de paramétrisation adaptative 6. L'ajout de l'interface \mathcal{D}^* au domaine divise Z_1 en deux sous zones ayant des valeurs différentes de paramètres. Le choix de cette interface est guidé par les indicateurs de raffinement. Les valeurs du paramètre seront T_2^1 et T_2^2 respectivement dans les deux

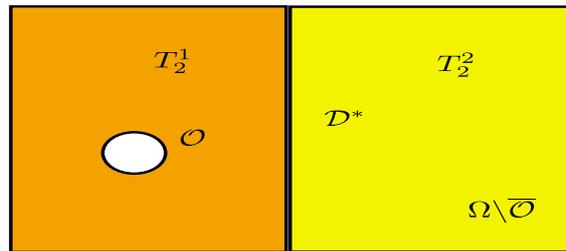


FIGURE 4.12: Les deux zones géologiques et la position du puits.

zones $Z_{2,1}$ et $Z_{2,2}$. Nous optimisons la fonction objectif considérant la paramétrisation à deux zones.

Notons $T_2^* = (T_2^{1,*}, T_2^{2,*})$ et $J_\varepsilon^{2,*}$ les valeurs optimales respectives des paramètres et de la fonction objectif. À la deuxième itération, on ignore la première position du puits. On calcule le gradient topologique et on retient une nouvelle position. On passe ensuite à la deuxième étape qui consiste à raffiner la zonation.

Algorithme 7 : Paramétrisation et localisation de puits.

Données : Connaître des observations à l'intérieur du domaine et le nombre de puits.

Résultat : Déterminer les zones géologiques, les valeurs de la transmissivité pour chaque zone et déterminer les positions des puits.

1 Initialisation :

- Choix d'une paramétrisation initiale.
- Optimisation de la fonction objectif avec la paramétrisation initiale.

Itération :

1. Déterminer les positions des puits en utilisant le gradient topologique dans chaque zone en utilisant les valeurs de la transmissivité calculées.
2. Utilisant l'algorithme de la paramétrisation :
 - a) Choisir une paramétrisation par le calcul des indicateurs de raffinement pour déterminer les zones géologiques .
 - b) Calculer les valeurs de la transmissivité hydraulique.
3. Mettre à jour le domaine en considérant la nouvelle paramétrisation et les nouvelles positions de puits.

Les critères d'arrêt de l'algorithme sont :

- Après un nombre donné d'itérations, la fonction objectif ne diminue plus ou diminue très faiblement.
- La valeur de la fonction objectif est proche de zéro.
- Les valeurs des indicateurs de raffinement sont très petites.

4.2.1 Résultats numériques

Comme Application de l'algorithme 7, nous allons étudier deux exemples :

- Exemple 1 : Cas synthétiques : identification d'une paramétrisation à trois zones et localisation d'un seul puits.
- Exemple 2 : Étudier l'exemple de l'aquifère de "Rocky Mountain" : identifier la paramétrisation et les positions des puits.

4.2.1.1 Exemple 1

Nous appliquons l'algorithme 7 sur un exemple simple où nous allons identifier trois zones et déterminer la position d'un seul puits. La paramétrisation exacte et la variation de la charge hydraulique sont présentés dans la figure 4.13.

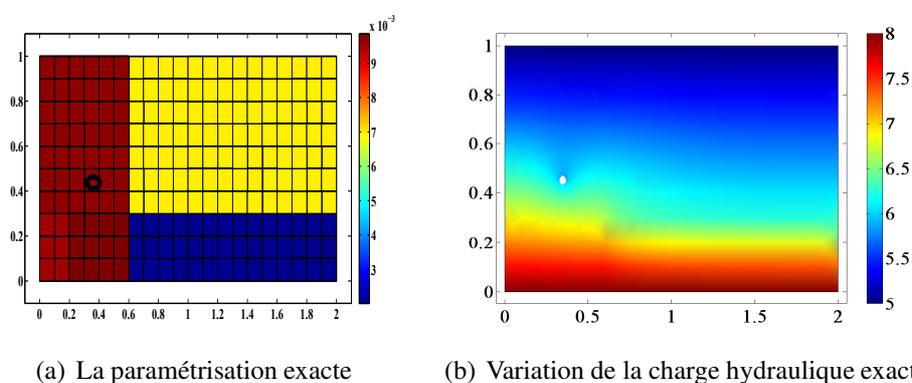


FIGURE 4.13: La paramétrisation exacte variation et de la charge hydraulique avec la présence d'un seul puits.

On initialise la procédure d'identification avec un domaine sain dont la partition est à une seule zone géologique et la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine. Nous avons alors une seule valeur de la transmissivité hydraulique à estimer. Ceci est fait par la minimisation de la fonction objectif par rapport à cette variable.

Puis à la première itération, nous calculons le gradient topologique (étape 1 de l'algorithme 7) et nous déduisons une première position du puits.

Dans la deuxième étape, on part d'une seule zone où on insère un puits identifié dans l'étape précédente. On applique l'algorithme 6 pour choisir l'interface qui divise le domaine en deux zones et on minimise la fonction objectif. Cette interface est guidé par les indicateur de raffinement. Dans cette étape, nous remarquons l'apparition d'une inclusion où la valeur du gradient topologique est négative. À la fin de cette étape nous obtenons une nouvelle paramétrisation qui contient deux zones avec la présence d'un puits (voir la figure 4.14 itération 1).

À la deuxième itération, on part d'un domaine avec deux zones en ignorant la position du puits identifié dans l'itération 1. On utilise le gradient topologique pour localiser les nouvelles positions. Ensuite, on applique l'étape deux de l'algorithme 7. À la fin de

$T \text{ m}^2/\text{s}$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Itération					
1	0.077	0.0034			
2	0.0072	0.0021	0.008		
3	0.0071	0.0021	0.0087	0.0063	
4	0.007	0.002	0.099	0.0099	0.0097
T_{ex}	0.007	0.002	0.01	0.01	0.01
ϵ_T	0.0191				

TABLE 4.3: Les valeurs de la transmissivité hydraulique pour chaque itération.

cette itération nous obtenons un domaine avec trois zones et une seule position du puits identifiée (voir la figure 4.14 itération 2).

On continue l'algorithme jusqu'à ce que la fonction objectif tend vers zéro (figure 4.15). Nous voyons que la valeur négative du gradient topologique s'approche de la position exacte. À l'itération 4, nous identifions les trois zones géologiques et la position du puits ainsi que les valeurs de la transmissivités hydrauliques pour chaque zone (tableaux 4.3 et 4.4).

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de l'algorithme 7. En effet les résultats du tableau 4.3 nous montrent que les valeurs de la transmissivité hydraulique converge vers les valeurs exactes. Le tableau 4.4 montre que l'erreur sur l'identification du puits décroît au cours des itérations jusqu'à atteindre 1%.

$P_{id} (km)$	(1.1, 0.28)	(1.1, 0.28)	(0.59, 0.28)	(0.47, 0.26)	(0.36, 0.45)
$\epsilon_p [\%]$	99.102	99.102	14.55	5.78	1.08

TABLE 4.4: Les positions calculées au cours des itérations et les erreurs sur ces positions pour un puits situé en $z = (0.35 \text{ km}, 0.45 \text{ km})$.

4. Identification de paramétrisation et de positions de puits

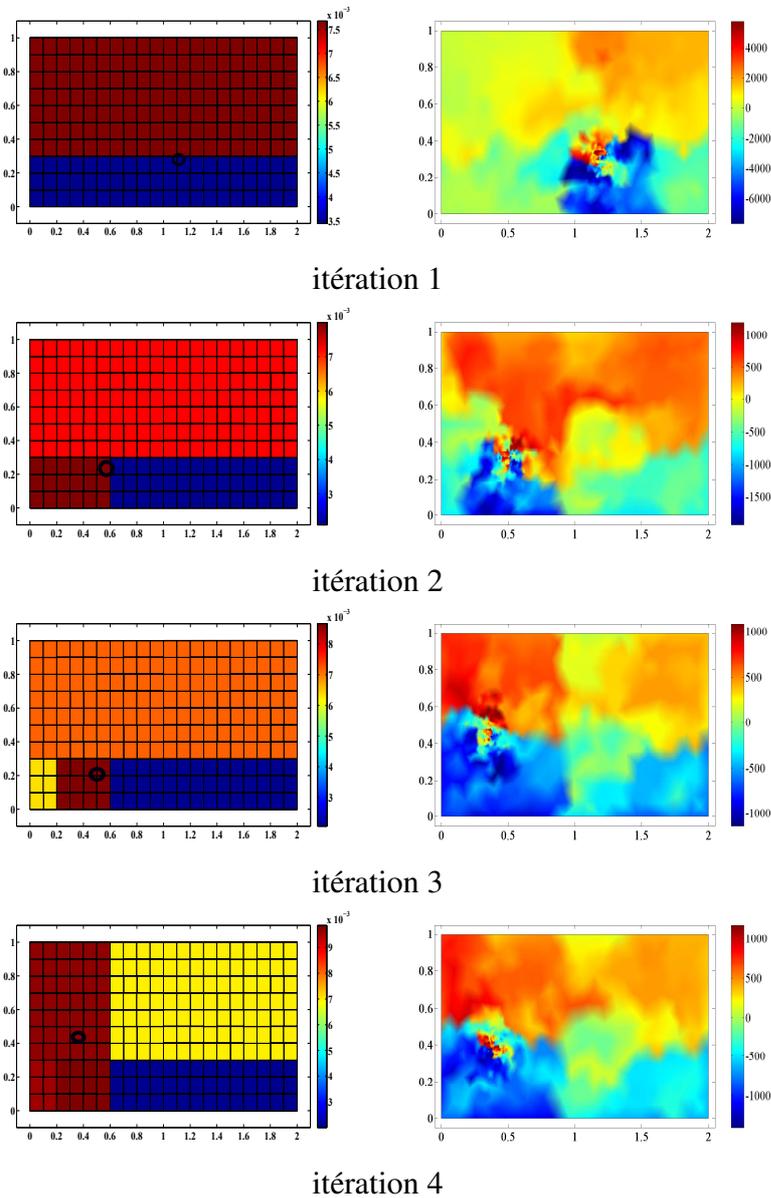


FIGURE 4.14: Exemple 1 : Valeurs identifiées du paramètre (à gauche) et variation du gradient topologique (à droite) au cours des itérations.

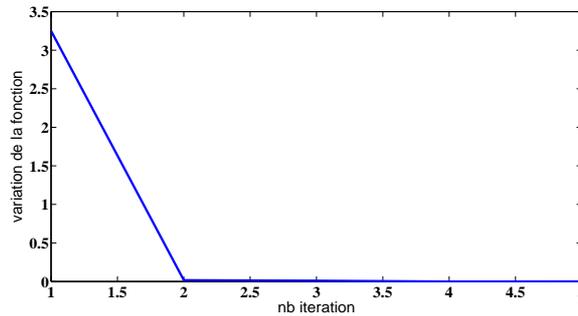


FIGURE 4.15: Variation de la fonction objectif au cours des itérations.

4.2.1.2 Exemples l'aquifère de "Rocky Mountain"

Le deuxième cas que nous allons présenter est celui de l'aquifère de "Rocky Mountain" présenté dans la section précédente. Il s'agit d'identifier les deux inclusions et les valeurs de la transmissivité et les positions des puits.

Dans cet exemple nous allons aussi étudier l'influence du nombre des observations sur le processus d'identification (voir la figure 4.16).

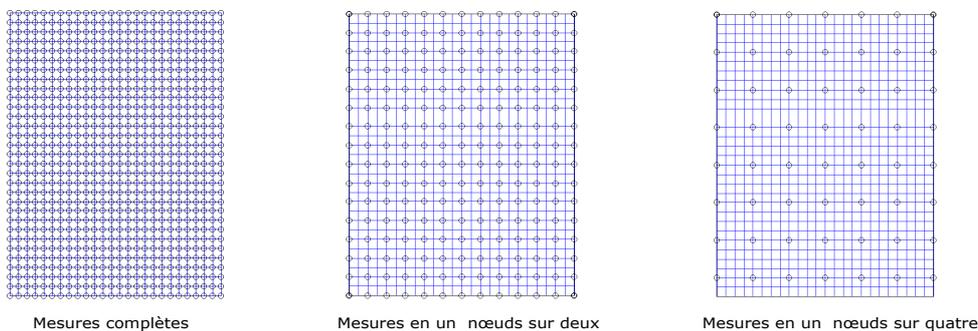


FIGURE 4.16: Les positions des nœuds de mesure sur la grille de calcul.

- 1) **Mesures complètes** : On commence avec un domaine sain dont la partition est à une seule zone géologique et la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine. On minimise la fonction objectif par rapport à cette variable.

Au cours de la première itération nous identifions deux puits et deux zones géologiques (voir la figure 4.17 itération 1). On commence la deuxième itération avec deux zones géologiques en ignorant les puits identifiés.

À la troisième itération, on débute avec trois zones et les puits identifiés dans l'itération 2. À la fin de cette itération, on identifie quatre zones et les positions des puits qui sont liés aux valeurs les plus négatives du gradient topologique (voir la figure 4.17 itération 3).

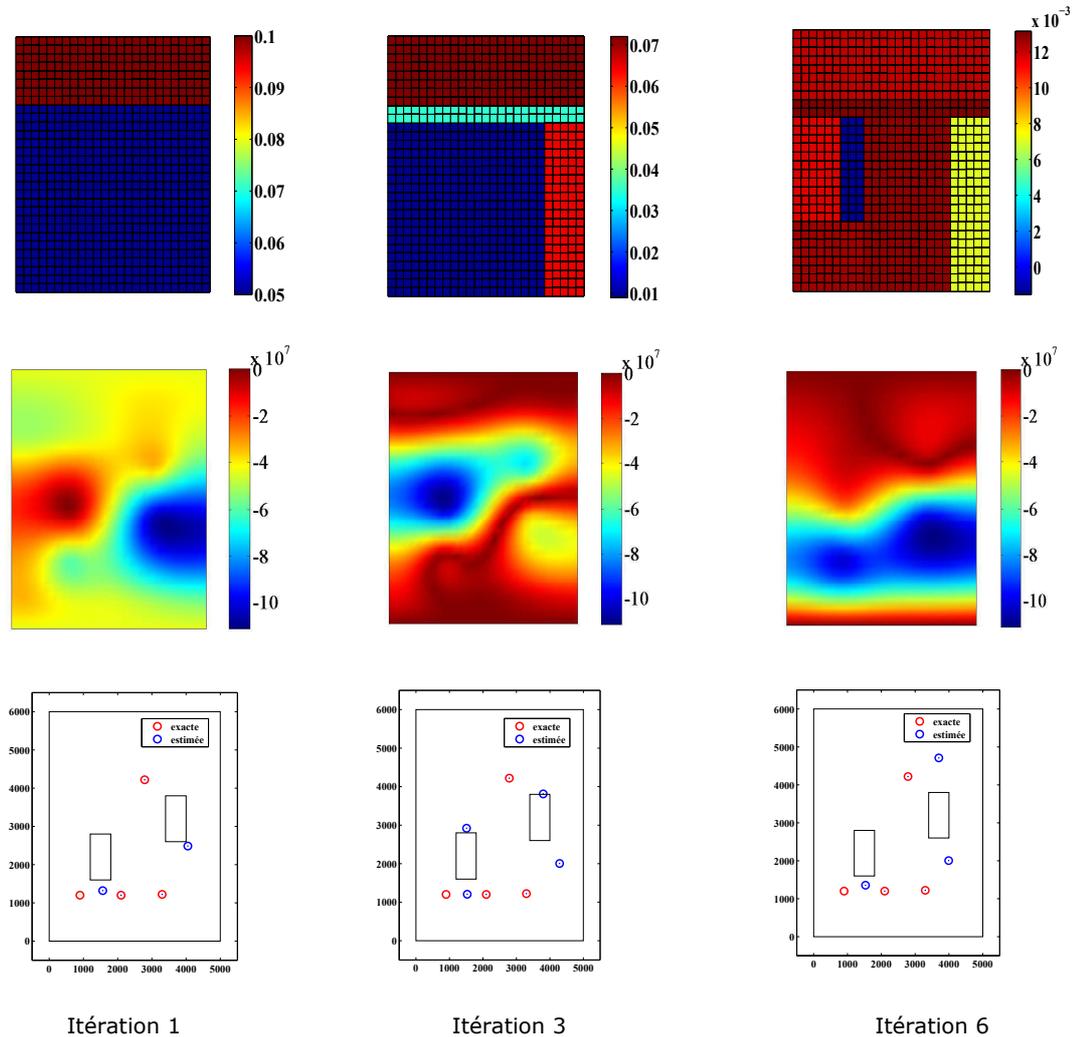


FIGURE 4.17: Mesure complètes : les zones et les puits identifiés aux itération 1, 3 et 6.

On continue le processus du couplage. Nous remarquons que les coupes introduites à l'itération 9 sont localisées autour des deux bords de la première inclusion recherchée. Les zones identifiées (10 zones) au cours de cette itération, sont retenues pour étudier l'itération 10 (figure 4.19) en ignorant les positions des puits identifiés dans cette itération.

Dans le cas de mesures complètes, on termine le processus de l'identification à l'itération 16 (figure 4.18) où on a identifié la paramétrisation exacte de la transmissivité hydraulique et la fonction objectif tend vers zéro (figure 4.19). La distribution du gradient topologique montre qu'on a quatre inclusions où ses valeurs sont les plus négatives (figure 4.18).

Au cours des itérations, les positions des puits sont liées aux valeurs les plus nég-

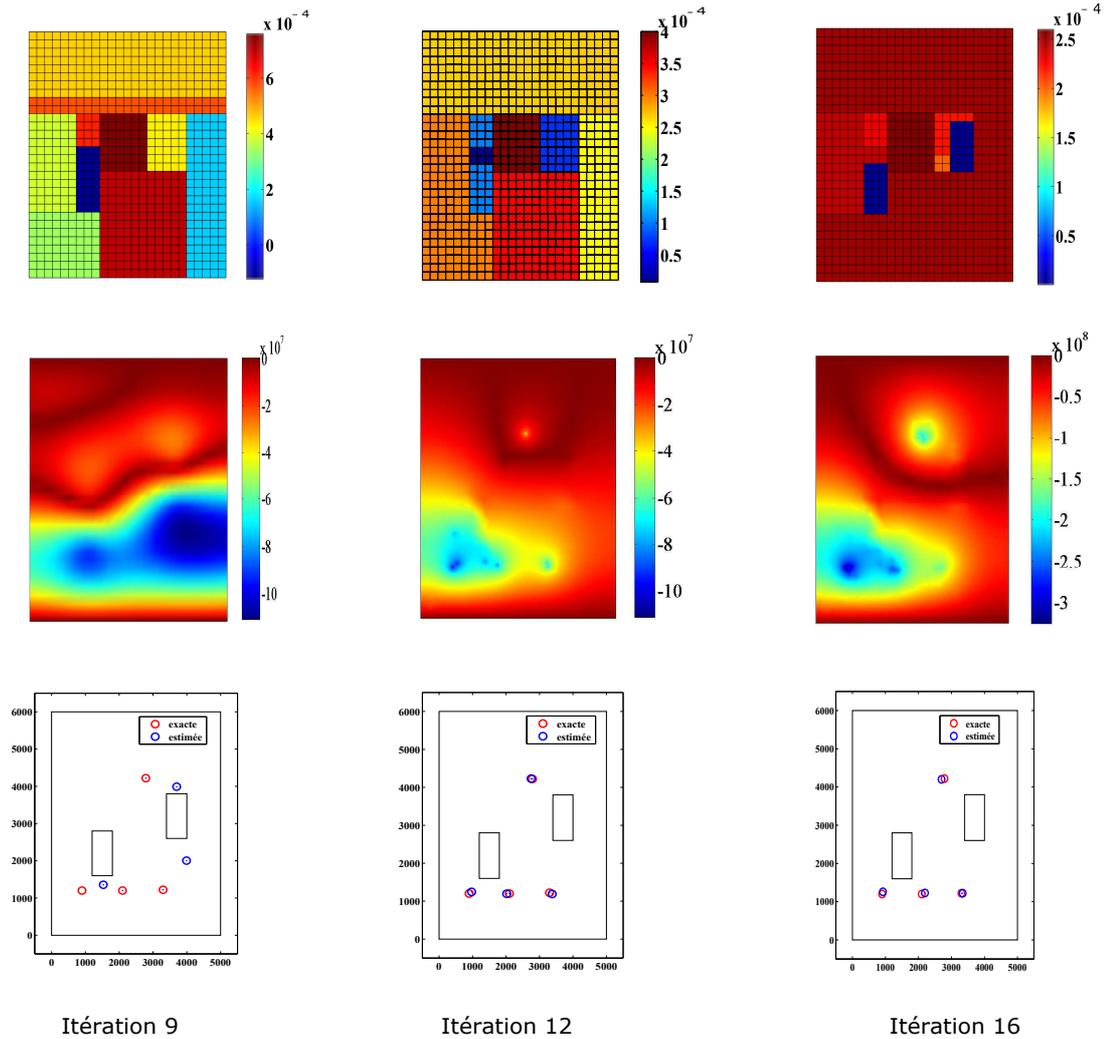


FIGURE 4.18: Mesures complètes : les zones et les puits identifiés aux itération 9, 12 et 16.

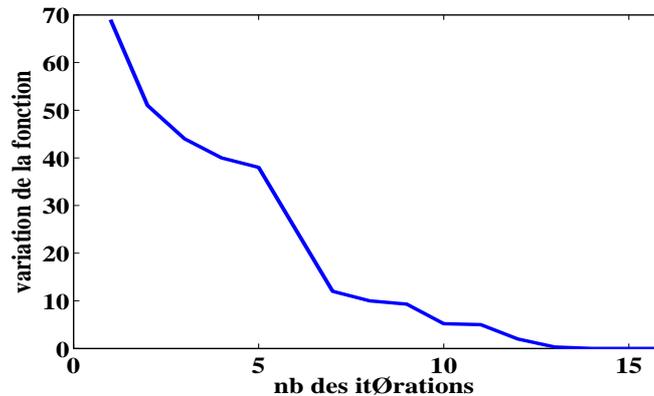


FIGURE 4.19: Variation de la fonction objectif au cours des itérations.

tives du gradient topologique. On trace dans la figure 4.18 et plus précisément au niveau de l'itération 16 les positions exactes et calculés qui sont très proches. Dans la figure 4.19, nous traçons la variation de la fonction objectif qui diminue au cours des itérations.

Puits	P_1	P_2	P_3	P_4
P_{ex} (m)	(900, 1200)	(2100, 1200)	(3300, 1200)	(2700, 4200)
P_{id} (m)	(923, 1259)	(2198, 1229)	(3343, 1221)	(2789, 4220)
ε_P (%)	4.07	4.11	1.35	1.3

TABLE 4.5: Mesures complètes : les positions des puits et les erreurs sur ces positions.

Les analyses des résultats du tableau 4.5 montrent que nous avons identifié les positions des puits. Les erreurs sur les positions sont inférieures à 5 %.

Donc, on peut conclure que l'algorithme 7 a convergé. Il nous donne de bons résultats, nous arrivons à localiser les inclusions et à déterminer les positions des puits.

- 2) **Mesure en un nœud sur deux :** Nous avons vu dans le deuxième chapitre que pour identifier les positions des puits en utilisant des observations à l'intérieur, sans utiliser la technique d'interpolation, l'erreur est grande, d'où le recours à la technique d'interpolation des mesures. Dans ce test nous considérons que nous disposons d'une mesure en un nœud sur deux du maillage de calcul et nous interpolons ces données.

D'après la figure 4.20, nous remarquons que nous trouvons les mêmes résultats numériques que lorsqu'on a des mesures complètes. Dans le tableau 4.6, nous donnons les positions des puits estimées. Les erreurs relatives sur ces positions sont faibles et sont inférieures à 5%.

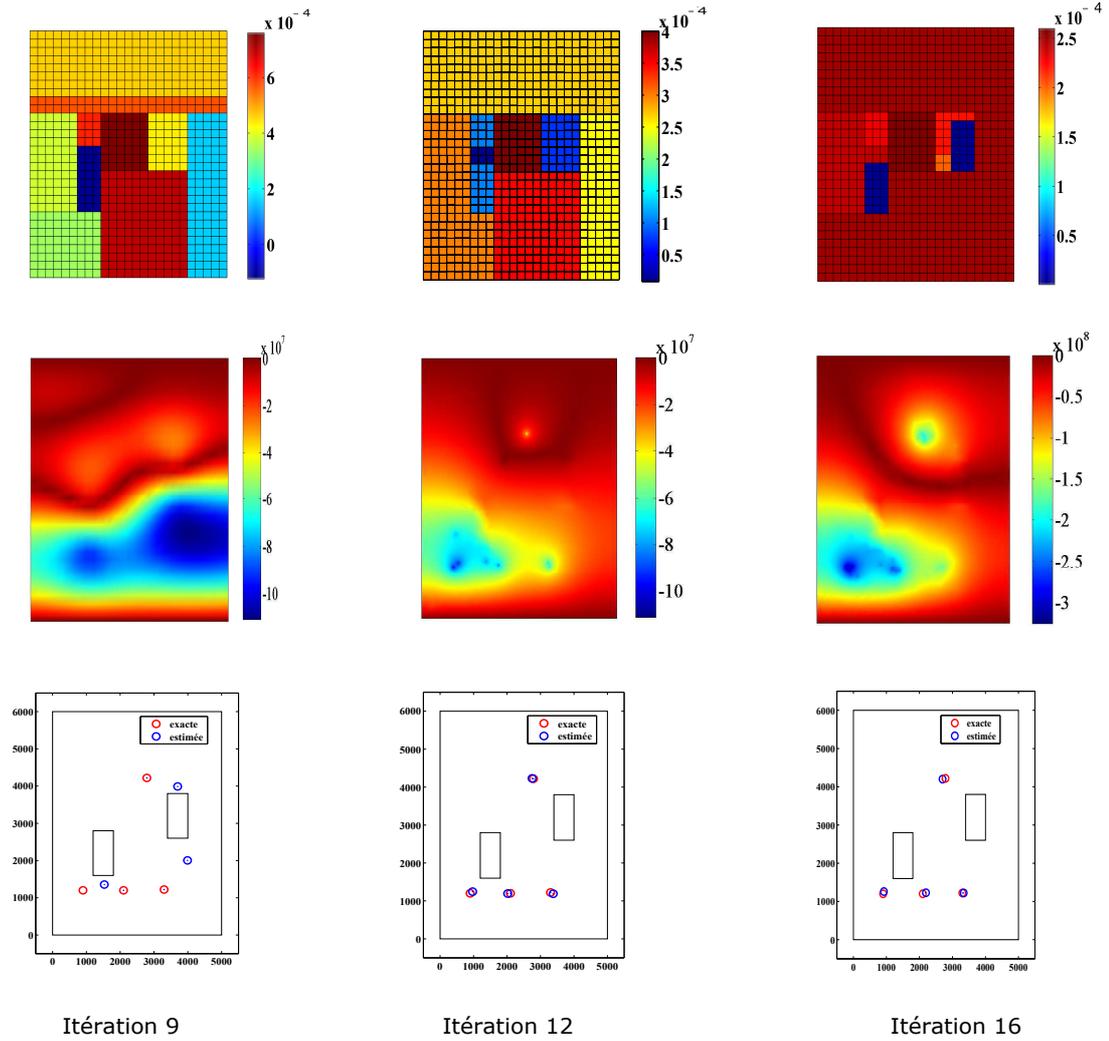


FIGURE 4.20: Mesures en un nœud sur deux : les zones et les puits identifiés aux itération 9, 12 et 16.

4. Identification de paramétrisation et de positions de puits

Puits	P_1	P_2	P_3	P_4
P_{ex} (m)	(900, 1200)	(2100, 1200)	(3300, 1200)	(2700, 4200)
P_{id} (m)	(923, 1259)	(2198, 1229)	(3343, 1221)	(2789, 4220)
ε_P (%)	4.07	4.11	1.35	1.3

TABLE 4.6: Mesures en un nœuds sur deux : les positions et les erreurs relatives associées.

Nous finissons par l'étude de la diminution du nombre des observations en prenant une mesure en un nœud sur quatre du maillage de calcul.

- 3) **Mesures en un nœud sur quatre :** Dans ce test numérique nous utilisons aussi la technique d'interpolation des observations pour compléter les données dans les nœuds où nous ne disposons pas de mesures. On suit les étapes de l'algorithme 7. Nous commençons par un domaine sain avec une partition d'une seule zone géologique et la transmissivité est constante dans tout le domaine. Puis, on minimise la fonction objectif par rapport à cette constante. À la première itération, nous identifions les positions des puits en utilisant le gradient topologique. Après la localisation des positions des puits, nous utilisons la technique des indicateurs de raffinement pour choisir l'interface qui divise le domaine en deux zones (voir la figure 4.21 itération 1).

À l'itération 12 de l'algorithme 7, nous commençons à localiser les zones contenant les deux inclusions (figure 4.22).

Les résultats de l'algorithme sont présentés dans les deux figures 4.21 et 4.22 où nous présentons les paramétrisations et les positions des puits obtenues pour quelques itérations de l'algorithme 7.

Dans la figure 4.22, on remarque qu'on n'arrive pas à identifier exactement les frontières des deux inclusions. Pour les positions de puits, les analyses des résultats dans le tableau 4.7 donnent que les erreurs sur l'identification sont acceptables et restent inférieures à 8 %.

On peut conclure que malgré la réduction du nombre de mesures à l'intérieur du domaine, nous arrivons à localiser deux zones qui entourent les deux inclusions et nous arrivons à localiser les quatre puits.

Dans la figure 4.23 nous présentons la variation de la fonction objectif. Au cours des dernières itérations, cette fonction varie faiblement, c'est le critère d'arrêt pour l'algorithme 7.

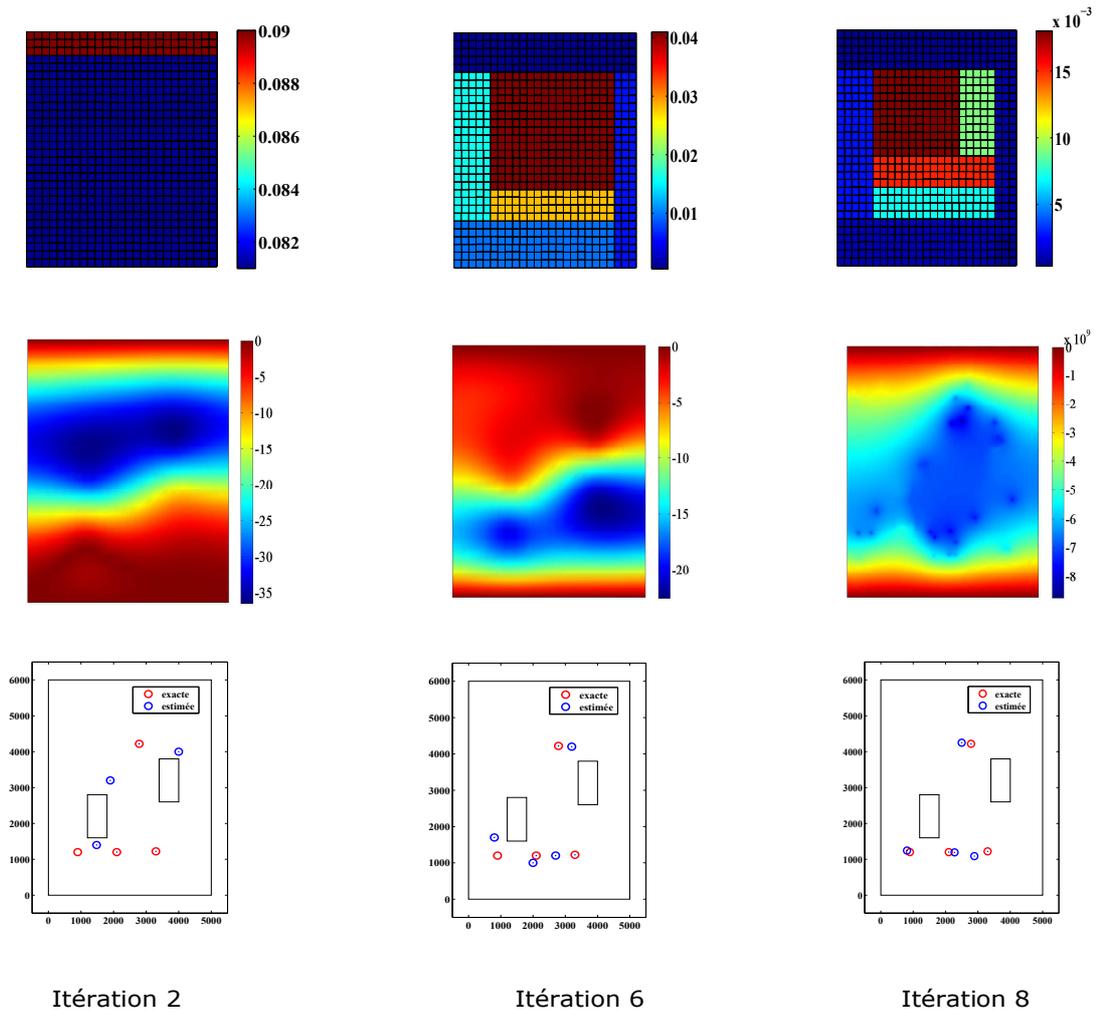


FIGURE 4.21: Mesures en un nœud sur quatre : les zones et les puits identifiés aux itérations 2, 6 et 8.

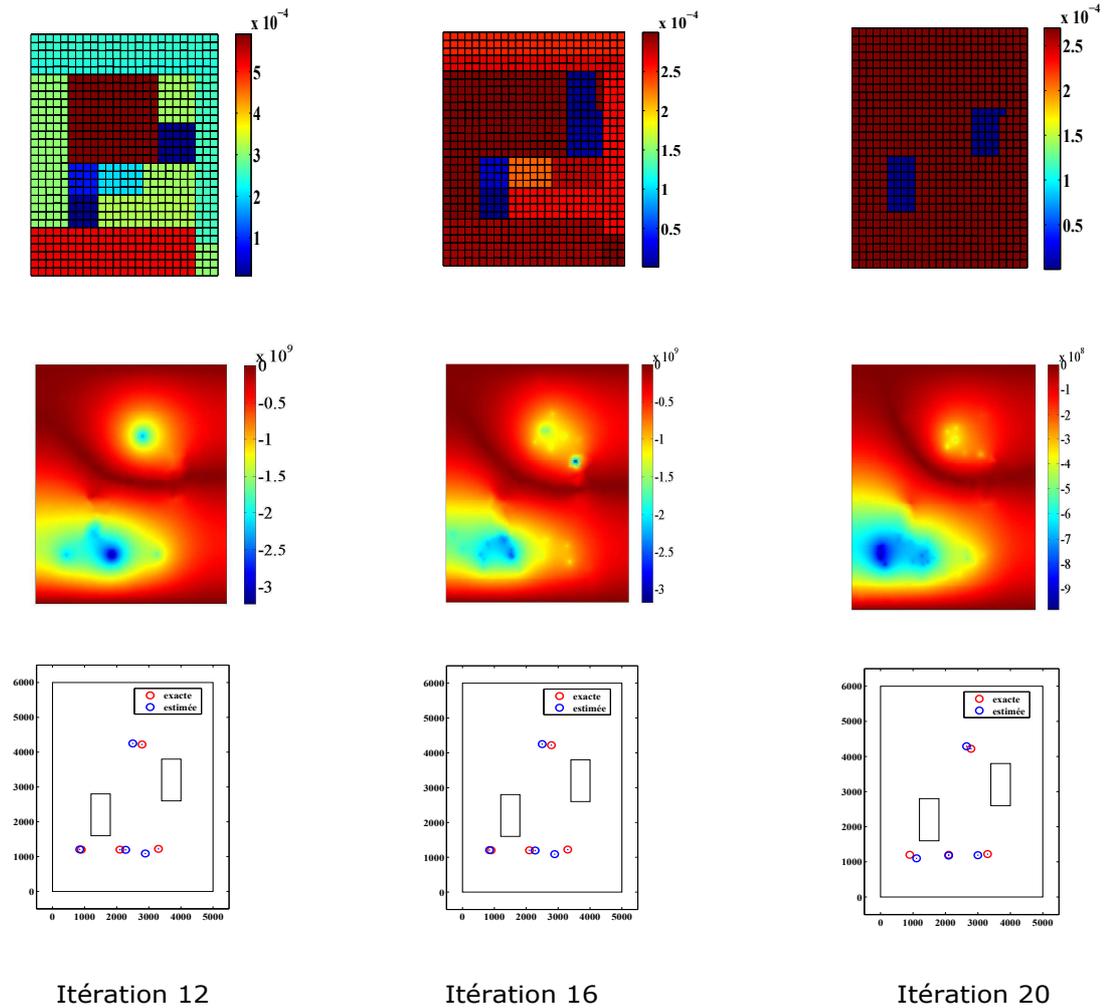


FIGURE 4.22: Mesures en un nœud sur quatre : les zones et les puits identifiés aux itération 12, 16 et 20.

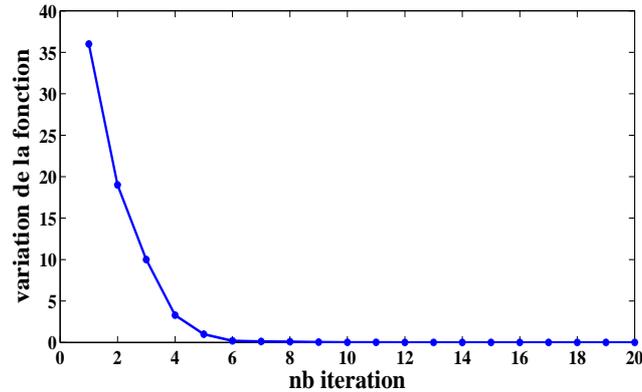


FIGURE 4.23: Mesures en un nœud sur quatre : variation de la fonction objectif au cours des itérations.

Puits	P_1	P_2	P_3	P_4
$P_{exact} (m)$	(900, 1200)	(2100, 1200)	(3300, 1200)	(2700, 4200)
$P_{id} (m)$	(800, 1180)	(2100, 1199)	(3000, 1190)	(2650, 4290)
$\varepsilon_P (\%)$	4.95	0.02	8.08	0.99

TABLE 4.7: Mesures en un nœud sur quatre : les positions et les erreurs relatives dans le cas de l'aquifère de de "Rocky Mountain".

4.2.2 Conclusion

On peut conclure que le couplage de la méthode du gradient topologique avec la technique de la paramétrisation adaptative nous permet à la fois d'identifier les zones géologiques, de déterminer les valeurs de la transmissivité hydraulique dans chaque zone et de localiser les positions des puits.

Nous avons combiné les deux algorithmes de la méthode du gradient topologique et de la paramétrisation adaptative pour résoudre ce problème inverse complexe en nous appuyant sur l'algorithme de paramétrisation adaptative guidé par les indicateurs de raffinements et sur l'algorithme du gradient topologique. Cet algorithme de résolution a été appliqué sur la nappe de "Rocky Mountain". Les tests numériques effectués, montrent l'efficacité de la méthode même lorsqu'on a réduit le nombre d'observations à l'intérieur du domaine.

Conclusion

Les travaux menés au cours de cette thèse ont pour but de proposer des méthodes de résolution du problème inverse d'identification du nombre, des positions et des débits de puits d'injection ou de pompage ainsi que des transmissivités hydrauliques des zones géologiques constituant le domaine et ce dans le cas de l'équation d'écoulement en régime stationnaire.

Dans la première partie, nous avons utilisé la méthode du gradient topologique pour identifier les positions des puits. Cette méthode, qui dépend de la représentation géométrique du puits dans le domaine, consiste à calculer le développement asymptotique d'une fonction objectif lorsque la géométrie du domaine est perturbée. L'expression du gradient topologique ne dépend que de la variable d'état et de celle de l'état adjoint associé, définies dans le domaine sain.

Le calcul de la sensibilité topologique nous a permis de mettre en œuvre un algorithme simple et rapide qui localise les positions des puits dans les régions des minimaux locaux négatifs de cette sensibilité.

Les résultats trouvés prouvent qu'on peut localiser plusieurs puits en une seule itération en utilisant des données surabondantes sur une partie de la frontière parfois complétées par des mesures à l'intérieur du domaine.

Il est souvent difficile d'accéder aux conditions aux limites sur toute la frontière du domaine. Comme c'est le cas, par exemple, pour les nappes côtières s'étendant sous le fond marin et où la limite de l'aquifère côté mer est inaccessible. Nous aurons alors des données manquantes sur une partie du bord du domaine. Donc, nous sommes en présence d'un problème inverse d'identification de conditions aux limites en plus de celui des sources. Ce problème est traité dans le troisième chapitre en ayant recours à la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur qui représente l'écart énergétique entre deux champs distincts solutions de problèmes mixtes bien posés.

Par ailleurs, dans la plupart des cas d'étude en l'hydrogéologie, la connaissance quantitative des propriétés de l'aquifère telle que la transmissivité hydraulique, est le problème majeur lors de l'élaboration d'un modèle. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de la paramétrisation pour identifier les zones hydrauliques et leurs valeurs. La méthode de paramétrisation permet de réduire le nombre des paramètres à estimer en décomposant le domaine en différentes zones caractérisées chacune par des paramètres constants. La recherche de la géométrie des zones se fait en utilisant l'algorithme des indicateurs de raffinement. Le calcul des indicateurs de raffinement nécessite la connaissance du gradient de la fonction objective par élément de calcul (par maille).

À la fin de cette thèse, nous avons étudié le problème inverse d'identification des positions des puits et de la transmissivité hydraulique où le puits est modélisé par un trou sur le bord duquel nous imposons une condition de type Neumann. Pour cela, nous avons combiné les deux algorithmes de la méthode du gradient topologique et de la paramétrisation adaptative pour résoudre ce problème inverse complexe.

Les tests numériques effectués aussi bien sur des cas simples que des cas proches de la réalité comme celui de la nappe de "Rocky Mountain", montrent l'efficacité des méthodes utilisées.

Bibliographie

- [ABA 07] ABABOU R.
Eléments d'hydrologie souterraine. rapport, 2007, Cours Inpt/Enseeiht-Imft, Toulouse.
- [ABD 09] ABDELWAHED M., HASSINE M.
Topological optimization method for a geometric control problem in Stokes flow. *Applied numerical mathematics*, vol. 59, n° 8, 2009, p. 1823–1838, Elsevier.
- [ADA 03] ADAM P., BAPTISTE P. et al.
Hydrogeologie & Forage d'eau. *Agua Segura y Ambiente Sano, Impulsadores del Progreso*, p. 1–16 AIDIS, 2003.
- [ADD 05] ADDE G., CLERC M., KERIVEN R.
Imaging methods for MEG/EEG inverse problem. *International Journal of Bioelectromagnetism*, vol. 7, n° 2, 2005, p. 111–114.
- [AKÇ 03] AKÇELIK V., BIROS G., GHATTAS O., LONG K. R., WAANDERS B.
A variational finite element method for source inversion for convective–diffusive transport. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, n° 8, 2003, p. 683–705, Elsevier.
- [ALB 07] AL BITAR A.
Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D/3D, avec couplages surface/souterrain et densitaires. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [AMS 03] AMSTUTZ S.
Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2003.
- [AMS 05] AMSTUTZ S., HORCHANI I., MASMOUDI M.
Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, vol. 34(1), 81-101, 2005.
- [AND 01] ANDREIKIV O., SERHIENKO O.
Acoustic-emission criteria for rapid analysis of internal defects in composite materials. *Materials Science*, vol. 37, n° 1, 2001, p. 106–117, Springer.
- [AND 08] ANDRIEUX S., BARANGER T. N.
An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 902-920, Elsevier.

- [AND 12] ANDRIEUX S., BARANGER T. N.
Emerging crack front identification from tangential surface displacements. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 340, n° 8, 2012, p. 565 - 574.
- [AND 13] ANDRIEUX S., BARANGER T. N.
Three-dimensional recovery of stress intensity factors and energy release rates from surface full-field displacements. *International Journal of Solids and Structures*, vol. -, n° 0, 2013, p. -.
- [AND 15] ANDRIEUX S., BARANGER T. N.
Solution of nonlinear Cauchy problem for hyperelastic solids. *Inverse Problems*, vol. 31, n° 11, 2015, page 115003.
- [AND 16] ANDRIEUX S., BARANGER T. N.
On the determination of missing boundary data for solids with nonlinear material behaviors, using displacement fields measured on a part of their boundaries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, , 2016, p. -.
- [AZA 06] AZAIZ M., BEN BELGACEM F., EL FEKIH H.
On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation. *Inverse Problems*, vol. 22, n° 4, 2006, p. 1307-1336, Institute of Physics Publishing.
- [BAD 91] BADEVA V., MOROZOV V.
Problèmes incorrectement posés. Masson, 1991.
- [BAR 08] BARANGER T. N., ANDRIEUX S.
An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 35, n° 2, 2008, p. 141-152.
- [BAR 09] BARANGER T. N., ANDRIEUX S.
Data completion for linear symmetric operators as a Cauchy problem : an efficient method via energy like error minimization. *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 31, 2009, p. 247-261.
- [BAR 10] BARANGER T. N., ANDRIEUX S.
Recovery of 3D Stress Intensity Factors from Surface Full-field Measurements. *Annual Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, Indianapolis, Indiana, USA, 2010.
- [BAR 11a] BARANGER T. N., ANDRIEUX S.
Constitutive law gap functionals to solve Cauchy problem for a linear elliptic PDE. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, 2011, p. 1970-1989.
- [BAR 11b] BARANGER T., ANDRIEUX S.
Constitutive law gap functionals for solving the Cauchy problem for linear elliptic PDE. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, n° 5, 2011, p. 1970-1989, Elsevier.
- [BAR 15] BARANGER T. N., ANDRIEUX S., DANG T. B. T.
The incremental Cauchy Problem in elastoplasticity : General solution method and semi-analytic formulae for the pressurised hollow sphere. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 343, n° 5-6, 2015, p. 331 - 343.

- [BEA 72] BEAR J.
Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover, 1972.
- [BEA 79] BEAR J.
Hydraulics of groundwater. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [BEA 99] BEAR J., SOREK S.
Seawater intrusion in costal aquifers - concepts methods and practices. Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [BEN 02a] BEN AMEUR H., CHAVENT G., JAFFRÉ J.
Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization : application to the estimation of hydraulic transmissivities. *Inverse problems*, vol. 18, n° 3, 2002, page 775, IOP Publishing.
- [BEN 02b] BEN AMEUR H., KALTENBACHER B.
Regularization of parameter estimation by adaptive discretization using refinement and coarsening indicators. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 10, n° 6, 2002, p. 561–583.
- [BEN 05] BEN BELGACEM F., EL FEKIH H.
On cauchy's problem : a variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*, vol. 21, n° 6, 2005, p. 1915-1936, Institute of Physics Publishing.
- [BEN 07] BEN BELGACEM F.
Why is the Cauchy problem severely ill-posed ? *Inverse Problems*, vol. 23, n° 2, 2007, p. 823-836, Institute of Physics Publishing.
- [BEN 09] BEN ABDA A., HASSINE M., JAOUA M., MASMOUDI M.
Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 48, n° 5, 2009, p. 2871–2900, SIAM.
- [BLU 13] BLUM J., BOULBE C., FAUGERAS B.
An inverse problem : the identification of the plasma current density profile in a Tokamak. *Applied Analysis for the Material Sciences with a special hommage to Michael Vogelius on the occasion of his 60th Birthday*, Marseille, France, mai 2013.
- [BON 97] BONNANS J. F.
Optimisation Numérique : aspects théoriques et pratiques. Springer, 1997.
- [BON 04] BONNET M., GUZINA B.
Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 13, 2004, p. 2344–2373, Wiley Online Library.
- [BON 06] BONNET M.
Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 37, 2006, p. 5239–5254, Elsevier.
- [BOU 04] BOUGOUL S., SOUDANI A., JAFFRIN A.
Etude d'un Ecoulement dans un Milieu Poreux Saturé Utilisé en Substrat de Culture.

- Revue des énergies renouvelables*, vol. 7, n° 1, 2004, p. 31–44, Centre de développement des énergies renouvelables.
- [CAL 04] CALVEL S.
Conception d'organes automobiles par optimisation topologique. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2004.
- [CAR 08] CARPIO A., RAPÚN M. L.
Topological derivatives for shape reconstruction. *Inverse problems and imaging*, p. 85–133 Springer, 2008.
- [CHA 91] CHAVENT G.
On the theory and practice of non-linear least-squares. *Advances in Water Resources*, vol. 14, n° 2, 1991, p. 55–63, Elsevier.
- [CHA 98] CHAVENT G., BISSELL R.
Indicator for the refinement of parametrization. *Inverse Problems in Engineering Mechanics (Proceedings of the International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 1998 (ISIP'98), Nagano, Japan)* Citeseer, 1998, p. 309–314.
- [CHA 99] CHAABANE S., JAOUA M.
Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements. *Inverse problems*, vol. 15, n° 6, 1999, page 1425, IOP Publishing.
- [CHA 09] CHABANI A., BEKKOUCHE A., ABDELAZIZ Y.
Utilisation de modèles numériques pour simuler les processus d'écoulement et de transport dans les eaux souterraines. *Colloque International Sols Non Saturés et Environnement*, Tlemcen, Algérie, 2009.
- [CHE 10] CHETBOUN J.
Conception de formes aérodynamiques en présence d'écoulements décollés : contrôle et optimisation. Theses, Ecole Polytechnique X, novembre 2010.
- [COL 84] COLTON D.
The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. *SIAM review*, vol. 26, n° 3, 1984, p. 323–350, SIAM.
- [DAS 09] DASSARGUES A.
Modèles mathématiques en hydrogéologie et paramétrisation. *Annales de la Société géologique de Belgique*, vol. 113, 2009.
- [DEB 78] DE BOOR C.
A practical guide to splines, vol. 27. Springer-Verlag New York, 1978.
- [DEM 81] DE MARSILY G.
Hydrogéologie quantitative. Masson, 1981.
- [DEM 94] DE MARSILY G.
Quelques réflexions sur l'utilisation des modèles en hydrologie.[Tribune libre]. *Revue des sciences de l'eau/Journal of Water Science*, vol. 7, n° 3, 1994, p. 219–234, Université du Québec-INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE).

-
- [DEM 00] DE MARSILY G., DELHOMME J., COUDRAIN-RIBSTEIN A., LAVENUE A.
Four Decades of inverse Problems in Hydrogeology. *Geological Society of America*,
vol. 348, n° Special Paper, 2000.
- [DRO 14] DROGOUL A.
Méthode du gradient topologique pour la détection de contours et de structures fines
en imagerie. Thèse de doctorat, Nice, 2014.
- [ESC 07] ESCRIVA X., BARANGER T. N., HARIGA N. T.
Leak identification in porous media by solving the Cauchy problem. *Comptes Rendus
Mécanique*, vol. 335, n° 7, 2007, p. 401-406.
- [ESC 08] ESCRIVA X., BARANGER T. N.
Leaks identification on a Darcy model by solving Cauchy problem. *Journal of Physics :
Conference Series*, vol. 135, n° 1, 2008, page 012039.
- [FAR 07] FARAH M.
Problèmes inverses de sources et lien avec l'Electro-Encéphalo-Graphie. Thèse de
doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2007.
- [FER 13] FERCHICHI J., HASSINE M., KHENOUS H.
Detection of point-forces location using topological algorithm in Stokes flows. *Applied
Mathematics and Computation*, vol. 219, n° 12, 2013, p. 7056–7074, Elsevier.
- [GAR 01] GARREAU S., GUILLAUME P., MASMOUDI M.
The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. *SIAM journal on
control and optimization*, vol. 39, n° 6, 2001, p. 1756–1778, SIAM.
- [GUI 02] GUILLAUME D.
Application du gradient topologique aux problèmes de sensibilité en électromagné-
tisme. Thèse de doctorat, Toulouse III, 2002.
- [GUI 04] GUILLAUME P., IDRIS K. S.
Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations. *SIAM Journal
on Control and Optimization*, vol. 43, n° 1, 2004, p. 1–31, SIAM.
- [HAD 53] HADAMARD J.
Lectures on Cauchy's problem in Linear Partial Differential Equation. New York :
Dover, 1953.
- [HAR 10] HARIGA N. T., BARANGER T. N., ERHEL J.
Misfit functional for recovering data in 2D ElectroCardioGraphy problems. *Enginee-
ring Analysis with Boundary Elements*, vol. 34, n° 5, 2010, p. 492-500.
- [HAR 11] HARIGA N. T., BOUHLILA R., BEN ABDA A.
Recovering Data in Groundwater : Boundary Conditions, Wells' Positions and wells'
Fluxes. *Computational Geosciences*, vol. 15 (4), 2011, p. 637-645.
- [HAR 13] HARIGA N. T., BARANGER T., BOUHLILA R.
Land-sea interface identification and Submarine Groundwater Exchange (SGE) esti-
mation. *Computers and Fluids*, vol. 88, 2013, p. 569-578.
-

- [HAS 04] HASSINE M., MASMOUDI M.
The topological asymptotic expansion for the quasi-Stokes problem. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 10, n° 4, 2004, p. 478–504.
- [HAS 12] HASSINE M., JAOUA M., SABIT S.
Plasma boundary reconstruction using topological asymptotic expansion. *PICOF 2012 Inverse Problems, Control and Shape Optimization*, , 2012.
- [HAY 03] HAYES A., MARTINOLI A., GOODMAN R.
Swarm robotic odor localization : Off-line optimization and validation with real robots. *Robotica*, vol. 21, n° 04, 2003, p. 427–441, Cambridge Univ Press.
- [HAY 08] HAYEK M., LEHMANN F., ACHERER P.
Adaptive multi-scale parametrization for one-dimensional flow in unsturated porous media. *Advances in Water Resources*, vol. 31, 2008, p. 28-43.
- [HAY 09] HAYEK M., ACKERER P., SONNENDRÜCKER É.
A new refinement indicator for adaptive parameterization : Application to the estimation of the diffusion coefficient in an elliptic problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 224, n° 1, 2009, p. 307–319, Elsevier.
- [ISA 97] ISAKOV V.
Inverse problems for partial differential equations. Springer, 1997.
- [ISA 06] ISAKOV V.
Inverse problems for partial differential equations, vol. 127. Springer Science & Business Media, 2006.
- [KAD 11] KADRI M. L., BEN ABDALLAH J., BARANGER T. N.
Identification of internal cracks in a three-dimensional solid body via Steklov Poincaré approaches. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 339, n° 10, 2011, p. 674 - 681.
- [KAL 12] KALLEL I.
Analyse de sensibilité topologique pour l’opérateur de Laplace anisotrope. Master’s thesis, Institut de recherche mathématique, 2012.
- [KAN 94] KANELAKOPOULOS I.
A discrete-time adaptive nonlinear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, n° 11, 1994, p. 2362–2365, Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- [KAW 08] KAWAKATSU H., MONTAGNER J.
Time-reversal seismic-source imaging and moment-tensor inversion. *Geophysical Journal International*, vol. 175, n° 2, 2008, p. 686–688, Oxford University Press.
- [KEL 76] KELLER J. B.
Inverse problems. *The American Mathematical Monthly*, vol. 83, n° 107–118, 1976.
- [KER 02] KERN M.
Problèmes inverses : aspects numériques. Lecture, septembre 2002.
- [KON 77] KONIKOW L.
Modeling chloride movement in the alluvial aquifer at the Rocky Mountain Arsenal, Colorado. US Government Printing Office, 1977.

-
- [LAR 08] LARMAT C., TROMP J., LIU Q., MONTAGNER J. P.
Time reversal location of glacial earthquakes. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 113, n° B9, 2008, Wiley Online Library.
- [LIZ 08] LIZAIK L.
Modélisation numérique de modèle les thermomécaniques polyphasiques, puits-milieux poreux. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2008.
- [MAS 05] MASMOUDI M., POMMIER J., SAMET B.
The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications. *Inverse Problems*, vol. 21, n° 2, 2005, page 547, IOP Publishing.
- [MAZ 12] MAZ'YA V., NAZAROV S., PLAMENEVSKIJ B.
Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, vol. 1. Birkhäuser, 2012.
- [MOU 03] MOUMAS V.
Application des méthodes intégrales pour l'évaluation de la performance des puits horizontaux dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [NEM 06] NEMITZ N., BONNET M.
Identification d'obstacles en acoustique dans des domaines tridimensionnels bornés. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, 2006, p. 307-318.
- [RIS 11] RISCHETTE R., BARANGER T. N., DEBIT N.
Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve Cauchy problem with noisy data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, 2011, p. 3257-3269, Elsevier.
- [SAB 13] SABELLI A., AQUINO W.
A source sensitivity approach for source localization in steady-state linear systems. *Inverse Problems*, vol. 29, n° 9, 2013, page 095005, IOP Publishing.
- [SAH 12] SAHUGUET P.
Imagerie ultrasonore de fantômes biologiques par optimisation topologique. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2012.
- [SCH 02] SCHUMACHER A.
Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lophpositionierungskriterien,. Ed. H. Kawarada and J. Pèriaux, *International Series Gakuto*, , 2002.
- [SOK 99] SOKOLOWSKI J., ZOCHOWSKI A.
On the topological derivative in shape optimization. *SIAM journal on control and optimization*, vol. 37, n° 4, 1999, p. 1251-1272, SIAM.
- [SUN 94] SUN N.
Inverse Problems in Groundwater Modelling. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [SUN 06] SUN N. Z.
Inverse problems in groundwater modeling. *SAIM Journal on Applied Mathematics*, vol. 38(2), 2006, p. 342-347.
-

[TAL 04] TALATIZI I. A.

Etude des infiltrations à travers une digue de barrage en terre. Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri-Algérie, 2004.

[VOS 84] VOSS C.

A finite-element simulation model for saturated unsaturated, fluid density dependent ground-water flow with energy transport or chemically-reactive single species solute transport, vol. 84. US Geological Survey Reston, VA, 1984.

[WEI 08] WEIS P., CLÉMENT F., BEN AMEUR H.

The multidimensional refinement indicators algorithm for optimal parameterization. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, vol. 16(2), 2008, p. 107-126.

[YEA 86] YEAH W. W.-G.

Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology : the inverse problem. *Water Resources Research*, vol. 22, n° 2, 1986, p. 95-108.

FOLIO ADMINISTRATIF
THÈSE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : MANSOURI

DATE de SOUTENANCE : 30/08/2016

Prénoms : Wafa

TITRE : Problèmes inverses de localisation de sources et d'identification de puits et paramètres

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016-ISAL-078

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Ce travail porte sur le développement d'algorithmes et l'application de méthodes numériques pour la résolution des problèmes inverses d'estimation de paramètres, d'identification de conditions aux limites et d'identification de sources dans un milieu poreux. Ces outils seront d'une grande utilité pour l'aide à la gestion des ressources en eaux souterraines et à leur préservation quant aux dégradations.

L'objectif de cette thèse est de résoudre ces problèmes inverses en se basant sur différentes approches :

- Une résolution basée sur l'optimisation de forme topologique qui est la recherche de la géométrie d'un objet qui soit optimale vis à vis d'un critère donné, et ce sans aucun a priori sur sa topologie, c'est-à-dire sur le nombre de "trous" qu'il peut contenir. Sachant que ces trous représentent les puits recherchés. Pour ce faire, nous avons adopté la méthode du gradient topologique, qui consiste à étudier le comportement d'une fonction objectif lors de la création d'un petit trou à l'intérieur du domaine.
- Une résolution basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie en utilisant des données surabondantes sur une partie de la frontière du domaine afin de compléter les données sur toute la frontière du domaine et de déterminer les positions, les débits et le nombre de puits existants à l'intérieur du domaine.
- Une résolution par le couplage de la méthode de paramétrisation adaptative qui a l'avantage de minimiser le nombre des inconnus de paramètres permettant d'interpréter au mieux les données disponibles et la méthode du gradient topologique. Ce couplage nous permet à la fois d'identifier les zones géologiques, de déterminer les valeurs de la transmissivité hydraulique dans chaque zone et de localiser les positions des puits.

MOTS CLÉS: équation d'écoulement, puits, gradient topologique, fonctionnelle d'erreur type énergie, données surabondantes, paramétrisation adaptative.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon

18-20 rue des Sciences

69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Thouraya BARANGER

Président du jury :

Composition du jury :