

N°d'ordre NNT : 2016LYSEI011

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
préparée au sein de  
**I'INSA LYON**

**Ecole Doctorale ED162**  
**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE**

**Spécialité de doctorat :**  
**MECANIQUE – GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL**

Soutenue publiquement le 10/02/2016, par :

**Hana JERBI**

---

**Modélisation de l'usure et  
l'endommagement des contacts nus et  
revêtus sous chargement de fretting  
par une méthode semi-analytique**

---

Devant le jury composé de :

DENAPE Jean  
DUFRENOY Philippe  
FOUVRY Siegfried  
RUIZ-SABARIEGO J-Antonio  
NELIAS Daniel  
BAIETTO Marie-Christine

Professeur/ENI Tarbes  
Professeur/Université Lille  
Directeur de recherche/CNRS  
Docteur/Snecma  
Professeur/INSA de Lyon  
Directrice de recherche/CNRS

Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Directeur de thèse  
Co-directrice de thèse



**Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<p><b>CHIMIE DE LYON</b>  <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal 3<sup>e</sup> etage  <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>            Insa : R. GOURDON</p>	<p><b>M. Stéphane DANIELE</b>            Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon            IRCELYON-UMR 5256            Équipe CDFA            2 avenue Albert Einstein            69626 Villeurbanne cedex  <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>
<b>E.E.A.</b>	<p><b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b>  <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a></p> <p>Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN  <a href="mailto:Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr">Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Gérard SCORLETTI</b>            Ecole Centrale de Lyon            36 avenue Guy de Collongue            69134 ECULLY            Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17  <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a></p>
<b>E2M2</b>	<p><b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b>  <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Safia AIT CHALAL            Bat Darwin - UCB Lyon 1            04.72.43.28.91            Insa : H. CHARLES  <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Gudrun BORNETTE</b>            CNRS UMR 5023 LEHNA            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât Forel            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 06.07.53.89.13  <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>EDISS</b>	<p><b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b>  <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a></p> <p>Sec : Safia AIT CHALAL            Hôpital Louis Pradel - Bron            04 72 68 49 09            Insa : M. LAGARDE  <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b>            INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1            Bâtiment IMBL            11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon            696621 Villeurbanne            Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16  <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>INFOMATHS</b>	<p><b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b>  <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a></p> <p>Sec :Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal            3<sup>e</sup> etage  <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Sylvie CALABRETTO</b>            LIRIS – INSA de Lyon            Bat Blaise Pascal            7 avenue Jean Capelle            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87  <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a></p>
<b>Matériaux</b>	<p><b>MATERIAUX DE LYON</b>  <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b>            INSA de Lyon            MATEIS            Bâtiment Saint Exupéry            7 avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28  <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>
<b>MEGA</b>	<p><b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Philippe BOISSE</b>            INSA de Lyon            Laboratoire LAMCOS            Bâtiment Jacquard            25 bis avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37  <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a></p>
<b>ScSo</b>	<p><b>ScSo*</b>  <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a></p> <p>Sec : Viviane POLSINELLI            Brigitte DUBOIS            Insa : J.Y. TOUSSAINT  <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a></p>	<p><b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b>            Université Lyon 2            86 rue Pasteur            69365 LYON Cedex 07            Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48</p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Ce manuscrit est le fruit d'un travail de trois ans, effectué au sein des équipes Mécanique Multiéchelle pour les solides (MIMESIS) et Mécanique multiphysique pour les matériaux et les procédés (MULTIMAP) du Laboratoire de Mécanique des Contact et des structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur DENAPE Jean et Monsieur DUFRENOY Philippe pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et membres du jury. Je remercie sincèrement Monsieur FOUVRY Siegfried et Monsieur RUIZ-SABARIEGO Juan-Antonio pour avoir participé à ce jury.

Je remercie vivement M. NELIAS Daniel et Mme. BAIETTO Marie-Christine pour m'avoir accueillie dans leurs équipes de recherche et de m'avoir donnée la possibilité de réaliser ce travail et de m'avoir encadrée tout au long de cette thèse. Je les remercie également pour leurs conseils et leurs disponibilités ainsi que pour l'attention toute particulière qu'ils ont eu pour mon travail.  
Merci pour leur soutien durant ces trois années.

Je veux aussi remercier tous mes collègues du bureau. Particulièrement Didier, Eric, Espoir, Lv, Pipo, Corentin, Jeremy, Damien, Emmanuel et Fatima pour leur bonne humeur qui, fut pour moi un signe d'encouragement. Je remercie tous les autres collègues du laboratoire. Je pense également à l'ensemble du personnel du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS).

Je tiens à remercier ma famille à l'étranger, j'entends par là mes amie(e)s avec qui j'ai partagé des moments forts, que ce soit les coups durs ou les grands bonheurs. Je les aime tant, Amina, Hassen, Sahar, Fatamtoum, Fatma, Aymen, Salma.... Merci pour leur amitié, leur soutien inconditionnel.

Mes derniers mots vont vers ma famille, particulièrement, mes parents qui ont toujours été là pour moi, mes frères et mes sœurs et mon fiancé Bechir qui m'apportent leurs soutiens et encouragements. Merci pour leur soutien au cours de ces trois années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui.



# Résumé

Différentes pièces mécaniques font face à des sollicitations de type fretting. Il en résulte différentes dégradations possibles. Ce travail s'attardera sur deux types de dégradation par fretting, l'usure par enlèvement de matière et l'endommagement par dégradation des propriétés matériaux. Une loi d'usure énergétique sera utilisée pour quantifier l'usure en glissement total d'un contact revêtu. Un modèle d'endommagement basé sur le concept de la déformation équivalente sera utilisé pour étudier l'évolution de l'endommagement dans un contact revêtu. L'analyse d'un problème de contact requiert un outil de calcul à la fois robuste et rapide. Dès lors des simulations d'usure et d'endommagement cyclique peuvent être réalisées en un temps court. Pour atteindre cet objectif, un code de contact basé sur une méthode semi-analytique est utilisé. Le problème est simplifié en supposant un contact entre deux massifs élastiques semi-infinis. Des solutions analytiques élémentaires permettent de relier les sollicitations normales et tangentielles aux déplacements élastiques résultants des surfaces en contact. Ces déplacements élastiques sont alors exprimés par un double produit de convolution discret entre des coefficients d'influence et les sollicitations dans le contact. La prise en compte d'un revêtement nécessite l'intégration d'un modèle d'homogénéisation dans le code de contact. Une technique d'enrichissement via la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby, dans laquelle la contribution d'une ou plusieurs inclusions est superposée à la solution en élasticité, est utilisée. Le modèle de comportement revêtement/substrat peut être validé par comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle basé sur les techniques Multigrille. La loi d'usure est ensuite implémentée, et une simulation d'usure est alors entreprise. Des simulations d'usure sont effectuées pour un contact poinçon-plan en glissement total. Les résultats numériques d'usure peuvent être comparés à des essais antérieurs effectués par le LTDS (École Centrale). Pour l'endommagement, des calculs analytiques sont premièrement effectués permettant d'analyser le comportement endommageable sous chargement cyclique uniaxial. Le modèle de Mazars est ensuite adapté au problème de contact et implémenté ; des simulations sont alors menées pour étudier le comportement élasto-endommageable du contact sous chargement de fretting.

**MOTS CLÉS :** fretting, contact, revêtement, usure, glissement total, endommagement, méthode semi-analytique



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Synthèse bibliographique</b>	<b>3</b>
1.1 Contexte et motivations de l'étude	5
1.1.1 Avaries dans les secteurs industriels	5
1.1.2 Besoin en modélisation : motivations de l'étude	6
1.2 Fretting	7
1.2.1 Définition et bref historique	7
1.2.2 Essais de fretting	10
1.2.3 Les différentes configurations de contact étudiées en fretting	11
1.2.4 Régimes de glissement et dégradations associées	12
1.3 Analyse des dégradations induites par le fretting	18
1.3.1 L'usure	18
1.3.2 La fissuration	23
1.4 Modélisation en mécanique de contact	32
1.4.1 Problème du contact mécanique	33
1.4.2 Matériaux non-homogènes (hétérogènes)	34
1.4.3 Méthodes de modélisation	34
1.5 Application au fretting des contacts revêtus	38
1.6 Synthèse	39
<b>2 Comportement tribologique et usure du contact aube-disque : Validation avec l'expérimental</b>	<b>41</b>
2.1 Présentation	43
2.2 Solveur de contact	44
2.2.1 Algorithme de contact	45
2.2.2 Résolution du contact	47
2.2.3 Historique et développement du code	49
2.2.4 Bilan	50
2.3 Modèle d'homogénéisation	50

---

2.3.1	Méthode et hypothèses . . . . .	50
2.3.2	Algorithme de résolution . . . . .	53
2.3.3	Validation . . . . .	55
2.3.4	Modèle de comportement du système substrat/revêtement . . . . .	60
2.3.5	Bilan . . . . .	65
2.4	Modélisation de l'usure : application au modèle aube-disque . . . . .	65
2.4.1	Loi d'usure . . . . .	65
2.4.2	Méthodologie de la prédiction d'usure . . . . .	66
2.4.3	Présentation du problème dans le cadre de l'expérimentation . . . . .	67
2.4.4	Simulation numérique, résultats et validation . . . . .	69
2.5	Conclusion . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Analyse d'un modèle d'endommagement cyclique pour un problème uniaxial</b>	<b>85</b>
3.1	Comportement cyclique sous chargement uniaxial . . . . .	86
3.1.1	État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple . . . . .	86
3.1.2	Essais cycliques . . . . .	87
3.1.3	Tenue en fatigue . . . . .	92
3.1.4	Choix d'un modèle de comportement élasto-endommageable . . . . .	93
3.2	Réponse du modèle pour un chargement cyclique uniaxial . . . . .	94
3.2.1	Critère en terme de contrainte . . . . .	95
3.2.2	Critère en terme de déformation . . . . .	98
3.2.3	Analyse et discussion . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Modèle d'endommagement pour un problème de contact sous chargement de fretting</b>	<b>103</b>
4.1	Mécanique de l'endommagement . . . . .	104
4.1.1	Hypothèses de la mécanique de l'endommagement . . . . .	104
4.1.2	Élasticité couplée à l'endommagement . . . . .	105
4.2	Implémentation dans le code Semi-Analytique . . . . .	107
4.3	Tribologie des surfaces revêtues . . . . .	109
4.4	Simulations & Analyse . . . . .	109
4.4.1	Configuration de référence : cas homogène . . . . .	110
4.4.2	Configuration revêtue . . . . .	118
4.5	Synthèse . . . . .	130
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>131</b>
<b>A</b>		<b>133</b>
A.1	Coefficients d'influence . . . . .	133
A.1.1	Contribution d'une pression uniforme sur les contraintes élastiques . . . . .	133
A.1.2	Contribution d'un cisaillement uniforme sur les contraintes élastiques . . . . .	134
A.1.3	Contribution d'une pression uniforme sur les déplacements élastiques . . . . .	136
A.1.4	Contribution d'un cisaillement uniforme sur les déplacements élastiques . . . . .	137
A.2	Contraintes et déplacements élastiques dans un massif semi-infini . . . . .	138
A.3	Algorithme du gradient conjugué (CGM) . . . . .	139

A.4	Méthode DC-FFT . . . . .	141
A.4.1	Zero-padding [PRE 92] . . . . .	142
A.4.2	Wrap-around order . . . . .	142
	<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>



# Table des figures

1.1	Fretting Wear : (a) Bancs d'essai du fretting wear et Schéma de fonctionnement du montage [PET 13] (b) Fretting Wear sous environnement contrôlé [KOL 10] (c) Représentation schématique de l'essai de fretting wear et photo du montage cylindre-plan [KUB 06] . . . . .	8
1.2	Fretting Fatigue : (a) Bancs d'essai du fretting fatigue [Ltd09] (b) Principe de l'essai de fretting-fatigue haute température [PET 13] . . . . .	9
1.3	Fretting Corrosion : Tribocorrosimètre (frottement sous petits débattements (quelques micromètres à quelques centaines micromètres) entre deux surfaces en contact dans un milieu corrosif) [PEL ] . . . . .	9
1.4	Différents types d'essais de fretting . . . . .	10
1.5	Configurations de géométrie de contact . . . . .	11
1.6	Aires de contact nominale et réelle pour deux surfaces en contact [ODF 90] . . . . .	13
1.7	Application d'une force tangentielle à un contact sphère-plan chargé [YAN 07]. (a) $Q \ll \mu P$ (b) $Q < \mu P$ (c) $Q = \mu P$ . . . . .	13
1.8	Évolution du rapport $Q/P$ en fonction du débattement $\delta$ pour l'acier SUP9 [TAN 81] . . . . .	14
1.9	Différentes conditions de glissement (Trois types de cycle de fretting) : (a)Condition de glissement total (b)Condition de glissement partiel (c)Condition de collage . . . . .	14
1.10	Bûches de fretting pour les trois régimes de glissement [COL 86] . . . . .	16
1.11	Illustration des cartes de fretting : carte de sollicitation et carte de réponse du matériau [SUN 12] . . . . .	17
1.12	Cas d'usure en fretting de pièces : (a) Usure d'un boîtier de transmission de puissance d'avion [ELL 02] (b) Cannelures détruites et portées usées d'un arbre de rotor d'hélicoptère [BEA 03] . . . . .	18
1.13	Évolution du volume d'usure en fonction de l'énergie totale dissipée pour un contact $Ti - 6Al - 4V / Ti - 6Al - 4V$ : (□)25000 cycles, (■)50000 cycles, $P = 400N$ , $\delta = 50 - 100\mu m$ [FOU 04] . . . . .	22
1.14	Illustration de la cinétique d'usure à partir d'écoulement de matière d'un contact $Ti - 6Al - 4V / Ti - 6Al - 4V$ [FOU 04] . . . . .	22
1.15	Exemple de courbe S-N . . . . .	24
1.16	Courbe de Wöhler en fretting fatigue. [PET 94, MAO 97] . . . . .	25
1.17	Schématisation de l'évolution de la raideur d'un échantillon testé en fatigue en fonction du nombre de cycles . . . . .	27
1.18	Coupe d'un élément endommagé . . . . .	28
1.19	Le principe d'équivalence en déformations . . . . .	30
1.20	Allure d'une courbe contrainte-déformation en présence de l'endommagement . . . . .	31

1.21	Exemple de comportement endommageable . . . . .	31
2.1	Distribution de pression. Discrétisation avec $N_{p1} \times N_{p2}$ éléments rectangulaires. Pression supposée constante sur un élément . . . . .	44
2.2	Algorithme général du modèle de contact semi-analytique . . . . .	46
2.3	VER du problème d'inclusion . . . . .	51
2.4	La méthode de l'inclusion équivalente . . . . .	52
2.5	Un plan semi-infini revêtu . . . . .	54
2.6	Un arrangement d'hétérogénéités cubiques . . . . .	55
2.7	Modèle 3D du contact Sphère-Plan revêtu . . . . .	56
2.8	Composantes des contraintes en fonction de la direction $x$ adimensionnée, en surface $z = 0$ , et dans le plan $y = 0$ . (a) : Distribution de la composante $\sigma_{xx}$ . (b) : Distribution de la composante $\sigma_{zz}$ . (c) : Distribution de la composante $\sigma_{xz}$ . . . . .	57
2.9	Coupe suivant le plan $(x,z)$ à $y = 0$ . . . . .	58
2.10	Modèle massif revêtu basé sur les techniques Multigrilles [BOF 12] . . . . .	59
2.11	Comparaison résultats semi-analytique/multigrille en terme de pression . . . . .	60
2.12	Comparaison résultats semi-analytique/multigrille, dans le plan $y = 0$ . (a) : Dis- tribution de la composante $\sigma_{zz}$ . (b) : Distribution de la composante $\sigma_{xz}$ . (c) : Distribution de la composante $\sigma_{xx}$ . . . . .	61
2.13	Création des contraintes thermiques dans une couche mince . . . . .	62
2.14	Effet des différents types de chargement sur la distribution de la pression . . . . .	63
2.15	Effet de l'enrichissement ( $E_1/E_2 = 2, h = 0,25a$ ) sur la distribution des contraintes. Profils des contraintes normales et tangentielles en fonction de la profondeur adimensionnée ( $z/a$ ) au centre du contact ( $x = y = 0$ ) (a) : Contraintes normales (b) : Contraintes tangentielles . . . . .	64
2.16	Algorithme de prédiction de l'usure . . . . .	67
2.17	Profil du poinçon [mm] dans le plan $(x,z)$ . . . . .	68
2.18	Configuration du contact des essais de fretting . . . . .	68
2.19	Configuration initiale poinçon-plan . . . . .	69
2.20	Profil d'usure et répartition de la pression en fonction de $\mu$ après les 100 pre- miers cycles . . . . .	70
2.21	Profils de pression et profondeur d'usure pour différentes valeurs du coefficient de frottement. (a) : $\mu = 0,1$ (b) : $\mu = 0,3$ (c) : $\mu = 0,5$ . . . . .	71
2.22	Profil d'usure et répartition de la pression en fonction de $\mu$ à $N = 20000$ cycles . . . . .	72
2.23	Figure récapitulative de l'évolution des valeurs maximales de la pression et de la profondeur maximale de l'usure en fonction du coefficient de frottement à $N = 20000$ cycles . . . . .	72
2.24	Profil de la pression après 5000 cycles pour deux valeurs différentes de l'incrément d'accélération $t_{max}$ avec $\mu = 0,68$ et $W = 1600N$ . . . . .	73
2.25	Les approches de l'usure : unilatérale et bilatérale . . . . .	74
2.26	Profils d'usure et distribution de la pression de contact pour les approches uni- latérale et bilatérale à $N_{max} = 20000cycles$ avec $\mu = 0,68$ et $W = 1600N$ . . . . .	75
2.27	Profils d'usure et distribution de la pression de contact pour différentes valeurs de la force normale appliquée à $N_{max} = 20000cycles$ avec $\mu = 0,68$ . . . . .	76

2.28	Profondeur maximale d'usure en fonction de la pression à $N_{max} = 20000$ cycles avec $\mu = 0,68$ . . . . .	76
2.29	Configuration du contact considéré dans les simulations numériques . . . . .	77
2.30	Cinétiques d'usure . . . . .	78
2.31	Évolution de la distribution de la pression et du profil de l'usure en fonction de N (nombre de cycles) pour le contact non-revêtu. (a) : Usure unilatérale sur le plan. (b) : Usure unilatérale sur le poinçon. (c) : Usure bilatérale. . . . .	79
2.32	Évolution de la pression et de l'usure en fonction du nombre de cycles N pour le contact revêtu. Usure bilatérale . . . . .	80
2.33	Évolution de la pression et de l'usure en fonction du nombre de cycles N pour un contact revêtu dans le cas de l'usure bilatérale. . . . .	81
2.34	Évolution des contraintes en fonction du nombre de cycles N pour le contact revêtu dans le cas de l'usure bilatérale, en surface $z = 0$ dans le plan $y = 0$ . (a) : $\sigma_{xx}$ . (b) : $\sigma_{xy}$ . (c) : $\sigma_{zz}$ . . . . .	81
2.35	Contraintes de von Mises pour un matériau revêtu ( $E_r/E_{Ti6242} = 0,6$ ; épaisseur "h/a" = 0,075), , en fin de cycle, lors d'un contact sous sollicitation de fretting en glissement total. (a) : Configuration initiale. (b) : Configuration finale usée. . . . .	82
2.36	Profils de l'usure et de la pression pour le contact non-revêtu et le contact revêtu au début et à la fin de la simulation . . . . .	83
3.1	Essai uniaxial en déplacement ou force imposé(e) . . . . .	87
3.2	Essai uniaxial à amplitude constante de type "zéro à pic" . . . . .	88
3.3	Ruine plastique lors d'un chargement monotone . . . . .	88
3.4	Différents comportements observés. (a) : Comportement élastique (b) : Phénomène d'adaptation (c) : Phénomène d'accommodation (d) : Phénomène de rochet . . . . .	89
3.5	Durcissement cyclique [LEM 88]. . . . .	90
3.6	Adoucissement cyclique [LEM 88]. . . . .	90
3.7	Comportement cyclique à déformation imposée . . . . .	91
3.8	Comportement cyclique à contrainte imposée . . . . .	91
3.9	Phénomènes de stabilisation pour des conditions de chargement à contrainte imposée (a)Adaptation, (b)Accommodation. [LEM 88]. . . . .	92
3.10	Illustration du concept de l'endommagement élastique général pour différents stades d'endommagement. . . . .	94
4.1	Comportement élasto-endommageable : Evolution de D et loi de comportement . . . . .	107
4.2	Algorithme global d'endommagement . . . . .	108
4.3	Configuration du contact sphère/plan revêtu et cycle de chargement . . . . .	110
4.4	Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles pour la simulation de référence . . . . .	111
4.5	Distribution de la pression de contact en fonction du nombre de cycles pour la simulation de référence (un contact sphère/plan non revêtu) . . . . .	112
4.6	Évolution de la pression de contact le long de l'axe x et de l'endommagement au cours de la simulation (N=1, N=40, N=85 cycles). Contact sphère/plan non revêtu . . . . .	113

---

4.7	Influence de la charge normale appliquée sur l'évolution de l'endommagement d'un contact sphère/plan (cas homogène) . . . . .	115
4.8	Influence du coefficient de frottement sur l'évolution de l'endommagement d'un contact sphère/plan non revêtu . . . . .	116
4.9	Effet du coefficient de frottement sur la distribution des contraintes pour un contact sphère/plan non revêtu . . . . .	117
4.10	Évolution des conditions du contact sphère/plan revêtu ( $E_1/E_2 = 1,285$ , $h/a = 0,9$ ) le long de l'axe x avec $\mu = 0,3$ . . . . .	118
4.11	Dégradation des propriétés matériaux des cuboïdes et évolution des conditions du contact associées. Revêtement/Substrat : $E_1/E_2 = 1,285$ , $h/a = 0,9$ , $\mu = 0,3$ . . . . .	119
4.12	Évolution du paramètre d'endommagement D le long de l'axe z pour un contact sphère/plan revêtu : $E_1/E_2 = 1,285$ , $h/a = 0,9$ , $\mu = 0,3$ . . . . .	120
4.13	Isovaleurs du paramètre D et distribution du module de Young au niveau des cuboïdes à la fin de la simulation, dans le plan (a) : $x=0$ (b) : $y=0$ (c) : $z=0$ (d) : $z/a=0,3669$ . . . . .	121
4.14	Évolution du paramètre de l'endommagement D et de la rigidité $E/E_0$ en fonction du nombre de cycles pour deux valeurs différentes de $\varepsilon_R$ ( $\varepsilon_R = R1 = 2,85 \times \tilde{\varepsilon}_{max}$ et $\varepsilon_R = R2 = 2 \times \tilde{\varepsilon}_{max}$ ) dans le cas d'un contact revêtu. . . . .	122
4.15	Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycle dans le plan $x=y=0$ pour un coefficient de frottement (a) : $\mu = 0,5$ (b) : $\mu = 0,3$ (c) : $\mu = 0,2$ (d) : $\mu = 0,1$ . . . . .	124
4.16	Évolution de l'endommagement et de la pression en fonction du nombre de cycles dans le plan $x=y=0$ pour différents maillages (a) : $dx = 0,05$ (b) : $dx = 0,03$ (c) : $dx = 0,02$ . . . . .	125
4.17	Courbes Contraintes/Déformations pour différentes tailles de mailles . . . . .	126
4.18	Isovaleurs de l'endommagement et dégradation du module de Young au niveau des cuboïdes pour les différents maillages utilisés (a) : $dx/a = 0,05$ (b) : $dx = 0,03$ (c) : $dx = 0,02$ . . . . .	127
4.19	Effet des paramètres matériaux et de l'épaisseur du revêtement sur l'endommagement et la durée de vie du contact. (a) : Configuration revêtement dur/substrat $E_r = 2 \times E_s$ , (b) : Configuration revêtement souple/substrat $E_r = 0,5 \times E_s$ . . . . .	129
4.20	La durée de vie relative à l'endommagement pour les trois configurations : substrat nu, revêtement dur/substrat et revêtement souple/substrat . . . . .	130

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres géométriques et matériaux de l'étude . . . . .	56
2.2	Propriétés de l'enrichissement . . . . .	58
2.3	Paramètres initiaux du modèle (cas non-revêtu) . . . . .	70
2.4	Tableau récapitulatif des données . . . . .	77
4.1	Paramètres de simulation . . . . .	111
4.2	Configuration du contact revêtu . . . . .	118



# Introduction

De nombreux assemblages mécaniques sont soumis à des sollicitations de chargement vibratoire occasionnant des déplacements de très faibles amplitudes entre les pièces en contact : conditions dites de "*fretting*". Les microglissements générés entre les surfaces provoquent des dégradations susceptibles d'altérer fortement la fiabilité et la durabilité des structures dans lesquelles ces pièces sont impliquées. Les mécanismes d'endommagement par fretting sont bien connus suivant les conditions opératoires : fissuration et rupture, usure avec formation de débris, corrosion ou transformations structurales, usure adhésive pouvant conduire au grippage.

L'endommagement par fretting est un phénomène critique dans tous les éléments en contact utilisés dans l'industrie, et notamment dans l'industrie aéronautique.

Les enjeux pour les industries aéronautiques résident dans la capacité à simuler les endommagements des moteurs afin de pouvoir prédire les comportements et notamment la durée de vie des pièces. Pour tenter d'apporter des solutions innovantes à ces problèmes industriels majeurs, il s'agit de répondre à la problématique de fretting cyclique pour des couples de matériaux issus de l'industrie aéronautique. Ces problématiques sont très variées en termes de sollicitations et de géométries du contact.

Dans de nombreuses applications, les revêtements sont de plus en plus utilisés afin de prolonger la durée de vie en fretting des composants mécaniques en contact et de fournir une résistance des propriétés des surface tribologiques aux dégradations. Une grande partie de la recherche consiste à évaluer la performance des revêtements et à identifier les mécanismes de défaillance.

En conséquence, le développement d'outils numériques capables d'analyser les contacts élastiques en fretting ainsi que les champs de contraintes internes dans un corps revêtu est donc d'une grande importance pratique, car l'optimisation des revêtements permet d'augmenter la durée de vie.

Il est important de bien connaître les types de dégradation associés au chargement cyclique appliqué pour pouvoir prédire les durées de vie des pièces. La prédiction de ces dégradations nécessite la connaissance de la réponse mécanique du matériau résultant du chargement cyclique ainsi que son évolution au cours des cycles. Cette réponse conditionne la tenue des pièces et renseigne sur le type d'endommagement susceptible de se produire.

C'est dans le but d'améliorer les connaissances des endommagements induits par fretting en régime de glissement total que ces travaux de thèse présentés dans ce manuscrit sont développés.

Notre intérêt porte sur les effets du fretting et de l'histoire de chargement sur le comportement cyclique et la durée de vie en considérant deux types de dégradation induites par fretting : l'usure et la dégradation des propriétés matériaux. L'objectif général est de comprendre le couplage entre les sollicitations mécaniques et la durée de vie.

Les travaux menés durant cette thèse visent donc à mettre en place, dans un premier chapitre,

un état de l'art des connaissances concernant le fretting, l'usure, la mécanique de l'endommagement et la modélisation en mécanique de contact est présentée.

Ensuite, dans le second chapitre, une méthode semi-analytique a été utilisée pour la modélisation du phénomène de l'usure dans des conditions de glissement total. Cette modélisation est basée sur une combinaison de trois modèles : modèle de résolution de contact, modèle du comportement substrat/revêtement et modèle d'usure cyclique. Cette modélisation est menée pour tenter de comprendre les différents mécanismes responsables du comportement macroscopique sous conditions de chargement cyclique et améliorer le comportement mécanique et la durée de vie. L'étude de l'usure est basée sur une loi énergétique. Ces simulations pourront être ainsi exploitées en vue de validation par comparaison aux résultats expérimentaux effectués par l'équipe de Fouvry de l'ECL.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'étude du comportement endommageable sous chargement cyclique uniaxial. Basée sur le modèle de Mazars, une analyse de l'effet du type de chargement imposé (contrainte ou déformation) et du critère de la loi d'évolution de l'endommagement (en termes de contraintes ou en termes de déformations) sur la prédiction du comportement cyclique du matériau est présentée. Cette étude permet d'apporter une première réponse à la problématique de l'évolution de l'endommagement qui provoque la détérioration progressive des propriétés matériaux.

Le dernier chapitre s'inscrit dans le cadre de la mécanique continue de l'endommagement. Nous proposons une nouvelle formulation du modèle de Mazars pour traiter cette fois les problèmes de contact soumis à des chargements de fretting. La prévision de l'endommagement étudié est faite par l'application du critère d'endommagement dans lequel est intégré la réponse mécanique du matériau. Différentes configurations du contact revêtu sont simulées pour analyser l'effet de la rigidité du revêtement par rapport à son substrat et de son épaisseur sur le comportement élasto-endommageable. Les effets de quelques paramètres sur l'initiation et l'évolution de l'endommagement sont identifiés.

# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

*Ce premier chapitre présente le contexte industriel d'étude dans lequel s'insère notre travail de recherche. Nous nous intéressons à simuler les phénomènes d'endommagement causés par le fretting cyclique dans les contacts revêtus. Pour cela, un état de l'art sur le fretting, l'usure, l'endommagement et la modélisation en mécanique des contact est détaillé.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte et motivations de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1.1	Avaries dans les secteurs industriels	5
1.1.2	Besoin en modélisation : motivations de l'étude	6
<b>1.2</b>	<b>Fretting</b>	<b>7</b>
1.2.1	Définition et bref historique	7
1.2.2	Essais de fretting	10
1.2.3	Les différentes configurations de contact étudiées en fretting	11
1.2.4	Régimes de glissement et dégradations associées	12
<b>1.3</b>	<b>Analyse des dégradations induites par le fretting</b>	<b>18</b>
1.3.1	L'usure	18
1.3.2	La fissuration	23
<b>1.4</b>	<b>Modélisation en mécanique de contact</b>	<b>32</b>
1.4.1	Problème du contact mécanique	33
1.4.2	Matériaux non-homogènes (hétérogènes)	34
1.4.3	Méthodes de modélisation	34

<b>1.5</b>	<b>Application au fretting des contacts revêtus</b>	<b>38</b>
<b>1.6</b>	<b>Synthèse</b>	<b>39</b>

---

## 1.1 Contexte et motivations de l'étude

Les déplacements de très faibles amplitudes survenant entre des solides en contact sont fréquemment à l'origine d'avaries graves de constituants de structures industrielles. Elles sont désignées par le terme générique "*fretting*". Les corps en contact soumis à des sollicitations de fretting sont susceptibles de subir différentes formes de dégradation.

Dans le but de modéliser et analyser quelques mécanismes de dégradation par fretting pouvant survenir dans les contacts revêtus (enlèvement de matière, dégradation des propriétés matériaux), nous essayerons dans ce premier chapitre, de présenter un état de l'art des différents phénomènes nécessaires pour accomplir notre étude (fretting, usure, mécanique de l'endommagement, modélisation en mécanique du contact).

Au travers d'exemples industriels, nous commençons par présenter, dans ce qui suit, les divers domaines et secteurs industriels concernés par le fretting.

### 1.1.1 Avaries dans les secteurs industriels

L'endommagement par "fretting" est induit par le contact de deux solides soumis à une amplitude de débattement. Divers secteurs industriels sont concernés. Citons quelques exemples dans différents domaines :

- Dans les essieux des trains à grande vitesse, l'endommagement est causé par des petits débattements induits par les flexions rotatives au voisinage des attaches des roues bloquées sur les essieux.
- Le secteur du bâtiment et des travaux publics n'est pas à l'abri des avaries causées par le fretting : la rupture des câbles utilisés dans la construction des ponts suspendus ou à haubans est liée aux frottements et flexions répétés en service au voisinage de leur point d'ancrage.
- Dans le domaine biomédical le fretting est responsable des dégradations dans les prothèses de genoux en polyéthylène.
- Dans le domaine aéronautique, le fretting est responsable de la diminution de la durée de vie de pièces d'hélicoptères et d'avions. Des accidents dramatiques comme le crash en 2009 [ANO 09] d'un avion Jetstream peuvent ainsi survenir. La défaillance est reliée à une fissure de fatigue initiée par fretting, entraînant un déséquilibre de l'arbre principal du moteur. Le déséquilibre a généré d'importantes vibrations provoquant la rupture d'une canalisation d'huile, et ainsi l'arrêt du moteur.

Les conséquences du fretting peuvent prendre diverses formes entraînant dans certains cas un blocage des systèmes mécaniques. Il se traduit bien souvent par l'enlèvement de la matière et l'apparition de jeux qui peut entraîner des défaillances de fonctionnalité. Dans d'autres cas, il se traduit par un amorçage et une propagation des fissures qui peuvent induire une rupture brutale et catastrophique des pièces.

C'est pourquoi ces travaux de recherche sont concentrés sur la modélisation et l'analyse de ces mécanismes de dégradation en fretting.

### 1.1.2 Besoin en modélisation : motivations de l'étude

Les problématiques de durabilité et de fiabilité des structures sont extrêmement importantes dans l'industrie, notamment dans l'industrie aéronautique où les enjeux sont très importants. Ces enjeux résident dans la capacité à simuler les dégradations en fretting afin de pouvoir prédire les comportements et estimer la durée de vie des pièces. Face à la complexité d'un tel système industriel, la tribologie, science consacrée à l'étude des contacts, de la lubrification, du frottement et de l'usure, permet une approche scientifique essentielle à la compréhension et à la formalisation des phénomènes. Le terme tribologie vient du grec *tribein* qui signifie la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire entre deux systèmes matériels en contact, immobiles ou animés de mouvements relatifs. Pour les spécialistes de l'aviation, les éléments d'attache et les pièces en contact sont des éléments très sollicités et soumis à des conditions sévères d'utilisation en termes de pression et température. Leur dégradation et leur usure totale entraînent une immobilisation de l'appareil et engendrent ainsi des coûts élevés. Des solutions durables à ces problèmes d'endommagement doivent être trouvées.

L'étude du développement des endommagements par fretting dans les moteurs des industries aéronautiques est un des points abordés lors de cette thèse, dont la première partie fait partie du projet INNOLUB (INNOvation pour la LUBrification haute température) qui a débuté en Novembre 2009 et s'est clôturé en Novembre 2013. Celui-ci regroupe de nombreux partenaires, cinq grands groupes industriels (SKF AEROSPACE FRANCE, AIRBUS, SNECMA, TURBOMECA et LIEBHERR AEROSPACE), trois entreprises de type PME (APS, MECAPROTEC, et ORAPI), une association (CITRA : Centre d'Ingénierie en Traitements et Revêtements de surface Avancés) et six laboratoires et organismes de recherche (ICCF, LAMCOS, CIRIMAT, ENISE-DIPI, ARMINES et LTDS). Le projet propose des solutions innovantes pour pallier les problèmes de fretting, fatigue et d'usure par frottement à haute température pour les structures aéronautiques telles que le contact aube/disque dans les compresseurs et les turbines à haute température. Le LaMCoS, laboratoire de mécanique des contacts et des structures, est une unité mixte de recherche de l'INSA de Lyon et du CNRS, dont les principaux intérêts de recherche sont la tribologie, et la mécanique des structures ; elle a pour vocation de mener des recherches sur la maîtrise et le contrôle du comportement des systèmes et structures mécaniques en prenant en compte leurs interfaces. L'équipe impliquée dans ce projet est l'équipe MSE (Mécanique des Solides et des Endommagements) dont l'objectif est d'assurer la compréhension des relations entre comportement, endommagement et durée de vie des composants et des structures sous sollicitations extrêmes. LaMCoS a été impliqué dans trois tâches sur six : TACHE2 (Développement des outils de caractérisation et de modélisation), TACHE5 (Caractérisations tribologiques élémentaires de nouveaux revêtements) et TACHE6 (Essais sur démonstrateurs technologiques et Benchmark de Modélisation). La contribution de l'équipe MSE avait consisté à :

- la réalisation de développements théoriques et numériques nécessaires pour élargir le domaine d'application des modèles existants pour le problème des contacts revêtus à haute température,
- la validation de ces modèles par rapport à l'expérience,
- la comparaison et l'analyse des performances de ces méthodes par rapport à la méthode des éléments finis.

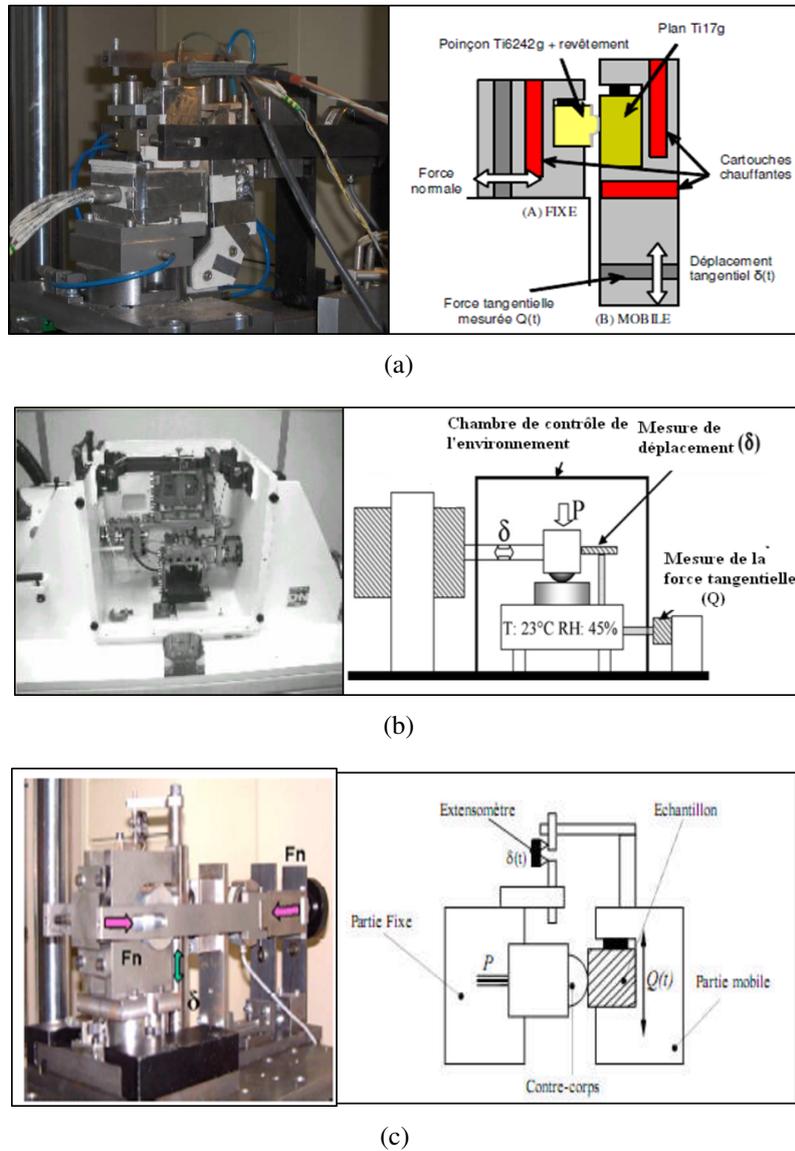
Dans le même contexte, l'étude des dégradations par fretting dans les contacts revêtus, la deuxième partie de cette thèse s'intéresse à la modélisation de l'évolution du module de Young causée par fretting cyclique en se basant sur la mécanique de l'endommagement.

La connaissance de la réponse de la structure sous chargement cyclique de fretting requiert une méthode simple et rapide de calcul des grandeurs mécaniques susceptibles de provoquer les endommagements. Il est nécessaire pour aboutir à des solutions pratiques d'énoncer un certain nombre d'hypothèses sur la nature du chargement et de son évolution en fonction de l'usure qui modifie les surfaces en contact et du frottement qui influe sur l'endommagement et la rigidité du matériau. Et ce pour des problèmes industriels majeurs, concernant l'industrie aéronautique. Ces problématiques sont très variées en termes de sollicitations et de géométries du contact. Pour commencer, un état de l'art sur le fretting concernant l'historique, les différents types d'essais, les différentes configurations de contact étudiées en fretting, les régimes de glissement et les dégradations associées est présenté.

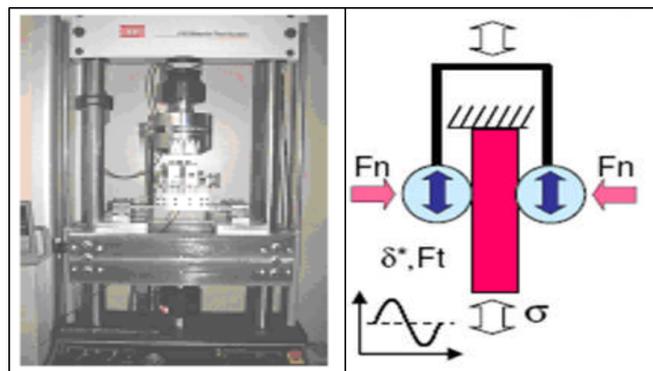
## 1.2 Fretting

### 1.2.1 Définition et bref historique

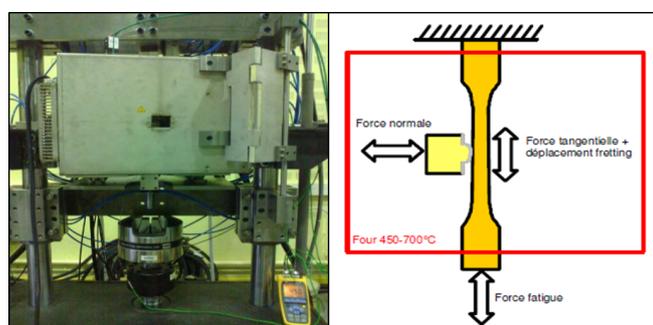
D'après la définition donnée par la société américaine de mécanique, le fretting est un mouvement alterné de faible amplitude qui peut se produire entre deux surfaces en contact. Le fretting est souvent présenté comme l'une des avaries de surfaces les plus critiques des applications industrielles. C'est un phénomène fréquemment observé dans l'aéronautique, en particulier dans les turboréacteurs où la rotation des pièces ainsi que les vibrations hautes fréquences engendrées par les effets aérodynamiques génèrent des micro-déplacements au niveau de certaines interfaces de contact. Cette sollicitation a été documentée pour la première fois au début du XX<sup>e</sup> siècle par Eden [EDE 11] qui a signalé la formation de débris d'oxyde entre les mors en acier et l'échantillon de fatigue. Tomlinson [TOM 27] a effectué les premières expériences sur le "fretting-fatigue" en induisant un mouvement de rotation à faible amplitude répétée entre deux surfaces en contact, et il a introduit le terme "Fretting corrosion" pour désigner l'oxydation due à ce contact répété. Warlow-Davies [WAR 41] envisage le premier, l'effet du fretting sur les propriétés de fatigue des métaux, comme l'indique la formation de défauts sur la surface frottée et la réduction marquée de la résistance à la fatigue. Progressivement, les travaux de McDowell [MCD 53] ont montré que l'oxydation est une conséquence et non la cause du phénomène et que la formation des débris est induite par le frottement des surfaces et non l'effet de l'oxydation. Parallèlement, Cattaneo [CAT 38], Mindlin [MIN 49] et Johnson [JOH 85] décrivent les sollicitations cycliques de cisaillement imposées en surface de contact. Enfin, le fretting accélère grandement le processus d'amorçage des fissures et l'étude de l'action conjointe du fretting et de la fatigue conduit à un facteur d'abattement de 2 à 5 sur la limite d'endurance suivant les conditions de contact [ATT 92]. Dès lors, les recherches s'accélérent et un large travail expérimental est effectué sur les dégradations en fretting [FEN 56, VIN 88, NOW 88, PAP 94, FOU 96b, LIN 97]. Un certain nombre de machines de fretting ont été développées afin de simuler les phénomènes de fretting-wear FIG.1.1, de fretting-fatigue FIG.1.2 ou de fretting-corrosion FIG.1.3, pour étudier respectivement l'usure, la fissuration et la corrosion. Les essais permettent de mettre en évidence l'influence d'un grand



**FIGURE 1.1:** Fretting Wear : (a) Bancs d'essai du fretting wear et Schéma de fonctionnement du montage [PET 13] (b) Fretting Wear sous environnement contrôlé [KOL 10] (c) Représentation schématique de l'essai de fretting wear et photo du montage cylindre-plan [KUB 06]

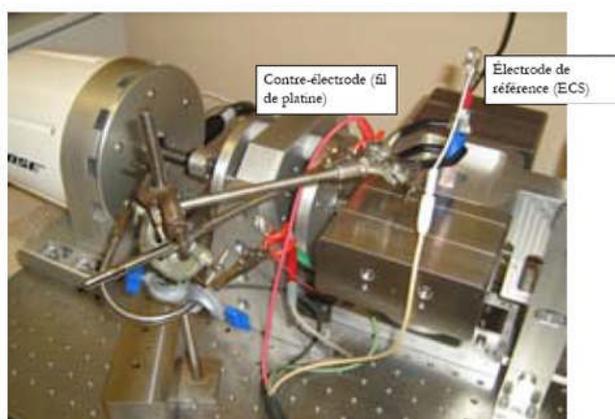


(a)



(b)

**FIGURE 1.2:** Fretting Fatigue : (a) Bancs d'essai du fretting fatigue [Ltd09] (b) Principe de l'essai de fretting-fatigue haute température [PET 13]



**FIGURE 1.3:** Fretting Corrosion : Tribocorrosimètre (frottement sous petits débattements (quelques micromètres à quelques centaines micromètres) entre deux surfaces en contact dans un milieu corrosif) [PEL ]

nombre de facteurs parmi lesquels :

- \* la pression de contact,
- \* le coefficient de frottement,
- \* l'amplitude du déplacement relatif des surfaces en contact,
- \* les différences de propriété élastique des solides en contact,
- \* l'état de surface dans le contact,
- \* les contraintes résiduelles,
- \* la fréquence de sollicitation et la forme du signal,
- \* les conditions environnementales et de température.

### 1.2.2 Essais de fretting

Pour étudier le problème de fretting, trois types d'essai sont développés et définis de la manière suivante, FIG.1.4 :

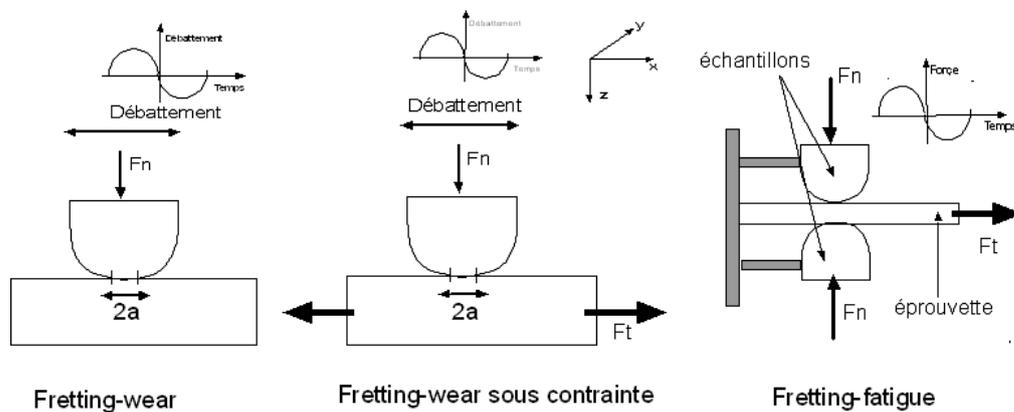


FIGURE 1.4: Différents types d'essais de fretting

- **Fretting Wear** décrit une sollicitation de petit débattement entre deux surfaces en contact. Le plan est fixe. Un effort normal est appliqué et l'échantillon est soumis à un déplacement imposé par un système hydraulique ou de pots vibrants. Grâce à ce dispositif, les paramètres de chargement peuvent être mesurés aisément : effort normal, déplacement imposé, effort tangentiel mesuré par des capteurs piézo-électriques insérés dans le montage, coefficient de frottement et énergie dissipée. Cependant différents travaux [ZHO 92, KUB 06] ont montré qu'il est possible d'étudier l'amorçage et la propagation de fissures jusqu'à une certaine profondeur. Cet essai est par ailleurs très bien adapté à l'analyse de l'usure [STO 73, KIM 01, PAU 05].
- **Fretting Wear sur éprouvette précontrainte** a été proposé par Reybet Degat [DEG 97]. Cet essai consiste à appliquer un chargement de fretting wear sur une éprouvette de fatigue précontrainte. En effet le massif plan est soumis à une contrainte extérieure constante,  $F_t$ . Dans ce type d'essais, l'influence de la contrainte statique diminue la résistance en fatigue du matériau. Certains systèmes industriels tels que les câbles de ponts,

les câbles d'ascenseurs, répondent bien à ce type de condition. Il a été démontré que l'introduction d'une contrainte statique de traction favorise l'amorçage et augmente la profondeur de fissuration [FOU 97a].

- **Fretting Fatigue** correspond à la combinaison d'un chargement de fretting et d'un chargement de fatigue [WAT 81]. L'éprouvette de fatigue est soumise à des sollicitations de fatigue et un patin est appliqué avec une force normale spécifique. Le déplacement relatif entre le patin et l'éprouvette de fatigue génère la sollicitation de fretting. Le fretting contrôle l'amorçage des fissures et contribue à la propagation initiale de celles-ci. La rupture d'un échantillon en fretting fatigue est essentiellement due à la contrainte cyclique de fatigue qui permet la propagation des fissures. Dans son article, Lamacq et al. [LAM 96] ont étudié la direction de la propagation de la fissure sous chargement de fretting fatigue. Dans d'autres études, Lamacq et al. [LAM 99] et Dubourg et al. [DUB 00] ont présenté des modèles de prédiction de sites et directions de propagation des fissures. Cet essai permet de quantifier l'influence du contact et des sollicitations de fretting sur la durée de vie en fatigue.

En conclusion, il est important de souligner que la dénomination de ces essais est relativement trompeuse vis-à-vis des endommagements étudiés. En effet, un essai de Fretting Wear peut induire la fissuration du contact. De la même façon, un essai de Fretting Fatigue peut induire l'usure du contact.

Des essais expérimentaux de Fretting Wear d'un contact aube-disque seront simulés à l'aide de notre modèle d'usure numérique. Mais la question qui se pose : *Quelle configuration de contact peut être utilisée dans notre modèle numérique afin de reproduire le plus fidèlement possible la répartition de pression et de contraintes du contact réel aube/disque soumis au fretting ?*

Pour répondre à cette question nous analyserons au paragraphe suivante les différentes configurations de contact étudiées en fretting.

### 1.2.3 Les différentes configurations de contact étudiées en fretting

Les contacts réels sont généralement compliqués et mal définis. Pour simplifier la modélisation des mécanismes de dégradation en fretting, les chercheurs ont choisi des géométries simplifiées et plus simples à mettre en oeuvre. Différentes géométries d'essai sont présentées sur la figure FIG. 1.5.

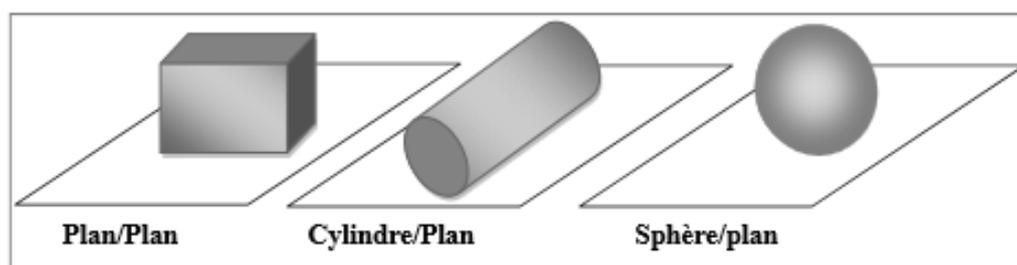


FIGURE 1.5: Configurations de géométrie de contact

- **La configuration Sphère/Plan** reproduit un contact ponctuel. Elle est formalisée par l'analyse de Hertz [HER 82] en indentation normale en appliquant les principes de l'élasticité linéaire [HAM 66, HAM 83, SAC 83b]. Les distributions des chargements élastiques dans le plan pour cette configuration ont été introduites par Hamilton et Goodman [HAM 83]. Cette configuration de contact est la plus simple à mettre en oeuvre et très souvent utilisée expérimentalement car elle ne nécessite pas de dispositif d'alignement. Le contact sphère/plan permet d'atteindre des pressions élevées avec des efforts faibles car c'est un contact de petite dimension. Dans le cas de l'étude de l'usure, ce contact provoque une éjection rapide des débris. Le contact Sphère/Plan implique une description tridimensionnelle très coûteuse en temps de calcul.
- **La configuration Cylindre/Plan** reproduit un contact linéique 2D. Le contact cylindre/plan est de plus grande dimension que le contact sphère/plan. Il nécessite un dispositif spécifique afin d'aligner l'axe du cylindre avec le plan. La modification du rayon du cylindre modifie les gradients de contrainte dans le plan et modifie ainsi le comportement en fissuration. Cette configuration est généralement utilisée pour analyser la fissuration puisque elle permet de considérer une approche bidimensionnelle plus facile à modéliser. [LAM 96, LAM 99, DUB 00, PRO 05].
- **La configuration Plan/Plan** met en contact deux surfaces planes. Ce contact est le plus difficile à mettre en place car il requiert un alignement à deux axes pour aligner les deux plans du poinçon et du plan. Cependant, l'analyse mécanique montre que la distribution de pression et surtout de cisaillement se caractérise par une discontinuité indéterminée en bordure de contact. L'analyse est alors très complexe et il est difficile d'évaluer correctement le chargement qui est imposé au matériau.  
La modification des congés de raccordement situés en bordure de contact permet de modifier la répartition de pression et de cisaillement dans l'interface. Ainsi, on peut reproduire le plus fidèlement possible la répartition de pression et de cisaillement du contact aube/disque qui sera étudié au chapitre suivant.

Nous allons voir, dans la partie suivante, que le fretting donne lieu à différents régimes de glissement qui imposent des dégradations particulières des matériaux en contact.

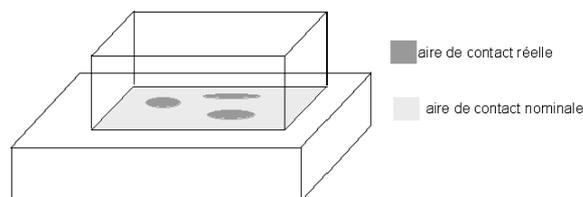
### 1.2.4 Régimes de glissement et dégradations associées

Parallèlement aux travaux de définition du fretting, une description mécanique précise des sollicitations a été établie [MIN 53, JOH 55, BOW 75]. Lorsque deux corps sont chargés normalement, un champ de pression s'établit. En imposant un déplacement relatif de faible amplitude entre les deux surfaces, une distribution de contraintes de cisaillement est engendrée par l'accommodation élastique des massifs. Et en fonction de l'amplitude du déplacement les différentes répartitions de zones glissantes et les différents types de dégradation sont déterminés.

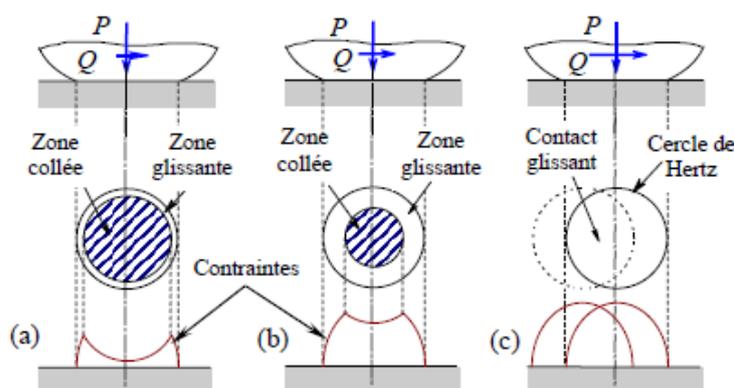
#### 1.2.4.1 Conditions de glissement

Le fretting met en jeu des déplacements relatifs entre les corps, petits par rapport aux dimensions du contact variant du micromètre à la centaine de micromètre. Cet ordre de grandeur dépend des caractéristiques mécaniques des matériaux en contact et des effets structuraux.

Une partie du déplacement imposé est accommodée par des déformations élastiques et/ou plastiques des zones en contact. La force de frottement, force tangentielle, n'est pas directement reliée à l'aire apparente de contact. Considérons deux corps en contact, supposés initialement lisses (FIG.1.6). Trois cas de figure peuvent se présenter, comme illustré sur la figure FIG.1.7.



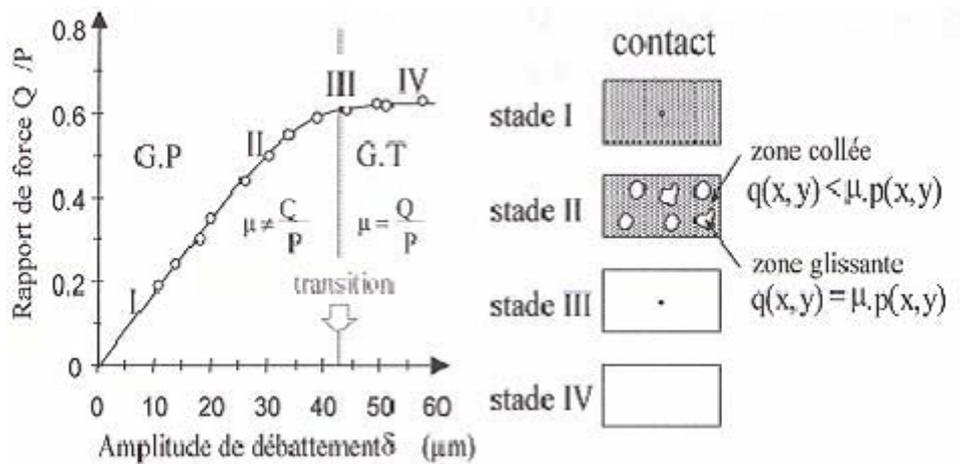
**FIGURE 1.6:** Aires de contact nominale et réelle pour deux surfaces en contact [ODF 90]



**FIGURE 1.7:** Application d'une force tangentielle à un contact sphère-plan chargé [YAN 07].  
(a)  $Q \ll \mu P$  (b)  $Q < \mu P$  (c)  $Q = \mu P$

Considérons un contact statique sollicité avec une force normale  $P$ . La taille de la zone de contact (disque de diamètre  $2a$ ) et la pression maximale ainsi que le champ des contraintes sont déterminés par la théorie de Hertz [HER 82]. En appliquant une faible force tangentielle  $Q$ , un glissement annulaire en périphérie du contact se produit [CAT 38, MIN 49], alors que l'aire de contact centrale reste collée FIG.1.7(a). L'augmentation de la force tangentielle privilégie l'élargissement de la zone de glissement et réduit la zone collée FIG.1.7(b). Dès que  $Q = \mu P$ , la zone centrale en adhérence disparaît et le glissement total entre les deux surfaces entraîne un déplacement relatif entre les deux massifs FIG.1.7(c).

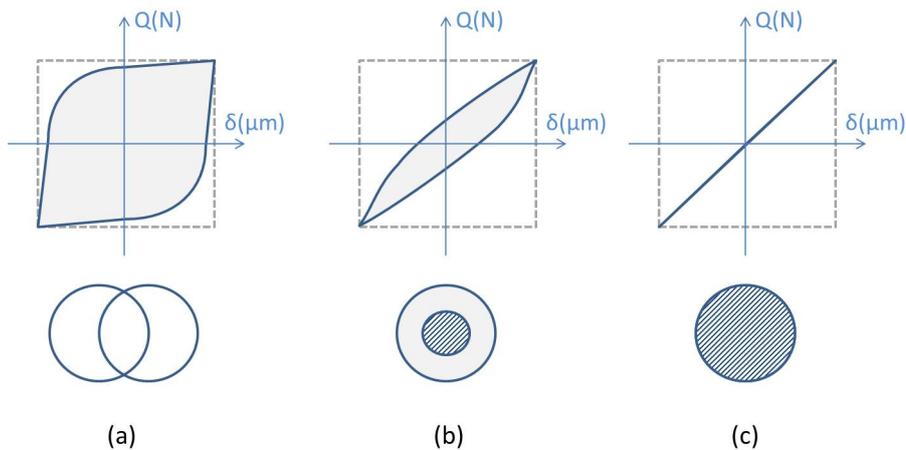
Tanaka *et al.* [TAN 81] donnent une description mécanique du cycle de chargement du cisaillement à l'interface à partir de corrélation établie entre le rapport de force  $Q/P$  et l'amplitude de débattement  $\delta$  pour un contact plan-plan FIG.1.8.



**FIGURE 1.8:** Évolution du rapport  $Q/P$  en fonction du débattement  $\delta$  pour l'acier SUP9 [TAN 81]

Tant que l'amplitude est inférieure à la condition de glissement,  $Q = \mu P$ , la réponse est linéaire et le cisaillement est proportionnel aux déformations et les deux corps ne bougent pas l'un par rapport à l'autre (stade I). Si le déplacement augmente, le glissement se déclenche, dû à l'augmentation de la contrainte de cisaillement. La proportion des domaines glissants dans le contact progresse au fur et à mesure de l'augmentation du déplacement  $\delta$  (stade II). La réponse  $Q/P = f(\delta)$  est représentative d'un comportement composite entre des contacts glissants et des contacts collés. En augmentant encore l'amplitude du déplacement  $\delta$ , l'ensemble du contact passe en glissement. Le déplacement appliqué est associé à la condition de transition de glissement (stade III). Pour des déplacements plus importants, le rapport  $Q/P$  n'est plus dépendant de l'amplitude du débattement, le contact est en glissement total (stade IV) et  $Q = \mu P$ .

Ainsi on peut définir les trois conditions de glissement définissant la forme des cycles de fretting représentant l'évolution de l'effort tangentiel  $Q$  en fonction du déplacement  $\delta$  (hystérésis entre force de frottement et débattement) [VIN 94] :



**FIGURE 1.9:** Différentes conditions de glissement (Trois types de cycle de fretting) : (a)Condition de glissement total (b)Condition de glissement partiel (c)Condition de collage

- *Condition de glissement total* : correspond à un cycle de fretting très ouvert et généralement de forme quadratique car l'amplitude de la force tangentielle est indépendante de l'amplitude du déplacement imposé pendant la période de glissement. Le coefficient de frottement est ainsi défini comme le rapport entre l'amplitude de la force tangentielle et la force normale appliquée ( $\mu = Q/P$ ). Ce coefficient de frottement peut avoir des variations importantes. L'amplitude de glissement est supérieure à une valeur critique à partir de laquelle la trace de fretting est assimilée à une zone de glissement marquée par une zone de recouvrement. L'énergie dissipée dans le contact par frottement est représentée par l'aire du cycle et peut permettre de quantifier la durabilité des contacts selon certains auteurs [FOU 07, MAR 07].

Cette condition donne lieu à l'*usure* des surfaces en contact.

- *Condition de glissement partiel* : L'application d'une force tangentielle  $Q$  un peu moins importante va se traduire par un glissement local des surfaces au niveau des extrémités de la zone du contact (en périphérie du contact), tandis que le centre reste collé. On retiendra qu'en glissement partiel, la valeur absolue de la force tangentielle maximale imposée  $Q$  est toujours inférieure au produit de l'effort normal par le coefficient de frottement ( $Q < \mu P$ ). Le cycle de fretting, de forme elliptique, représente la condition de glissement partiel et se traduit dans le contact par la présence d'une zone centrale collée, et d'une zone de glissement en périphérie du contact. Cette condition provoque l'*amorçage des fissures*.
- *Condition de collage* : où le cycle est fermé FIG.1.9(c). Le déplacement est dans ce cas accommodé, uniquement de façon élastique, par les couches superficielles des matériaux et par le dispositif (rigidité du montage) : on parle alors de condition non dissipative.

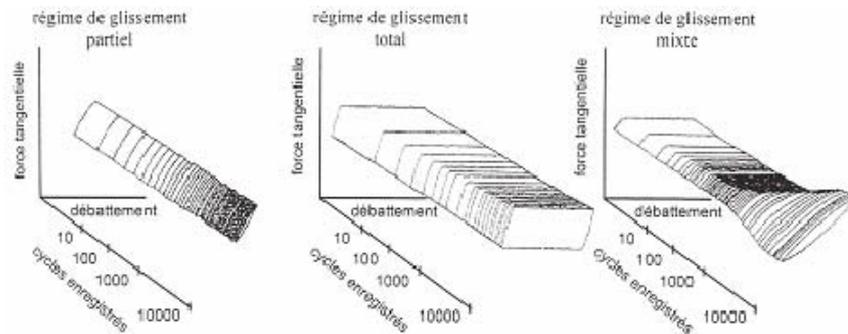
Les réponses en termes de dégradations et d'endommagement dépendent des conditions de glissement. Vingsbo et al. [VIN 88] ont été les premiers à dresser les cartes de sollicitation en fretting, en définissant la condition limite de glissement total. En fonction de l'effort normal appliqué au contact et du débattement relatif entre les deux surfaces, les domaines limites des trois conditions de glissement ainsi définies peuvent être déterminés.

#### 1.2.4.2 Régimes de glissement et cartes de fretting

La notion de condition de glissement et les premières cartes de fretting introduites par Vingsbo et al. ont été complétées par Colombié [COL 86] qui introduit la notion de "bûches de fretting" (tracé temporel du cycle de fretting FIG.1.10) pour appréhender l'évolution de la condition du glissement en fonction du temps. On définit ainsi les cycles de fretting  $Q(\delta)$  en fonction du nombre de cycles suivant une échelle logarithmique. Les évolutions de la condition de glissement sont définies par trois régimes :

- *Le régime de glissement total (RGT)* où la condition de glissement total est maintenue durant tout l'essai : les amplitudes de glissement sont très importantes pour des chargements normaux relativement faibles. La dégradation observée est l'usure avec formation de débris (enlèvement de matière) [BLA 91].
- *Le régime de glissement partiel (RGP)* où la condition de glissement partiel est toujours maintenue : les amplitudes de glissement sont faibles pour des chargements normaux importants. La dégradation observée pour ce régime est caractérisée par l'apparition des fissures [BLA 91, LAM 96, PRO 05].

- *Le régime de glissement mixte (RGM)* régime instable obtenu lorsque des cycles en glissement total sont combinés à des cycles en glissement partiel : alternance de glissement partiel et total. L'action de ces deux régimes provoque une compétition entre fissuration et usure dans les matériaux en contact [ZHO 95].



**FIGURE 1.10:** Bûches de fretting pour les trois régimes de glissement [COL 86]

En se basant sur le concept "carte" introduit par Vingsbo, Vincent [VIN 92] rationalise l'approche de cartes de régimes de glissement avec la carte de sollicitations locale. Cette carte permet de définir les positions des régimes de glissement dans un plan effort normal-débattement imposé. A la vue des dégradations causées par le fretting, Blanchard [BLA 91] introduit l'équivalent d'une carte de réponse matériau associée à la carte de sollicitation.

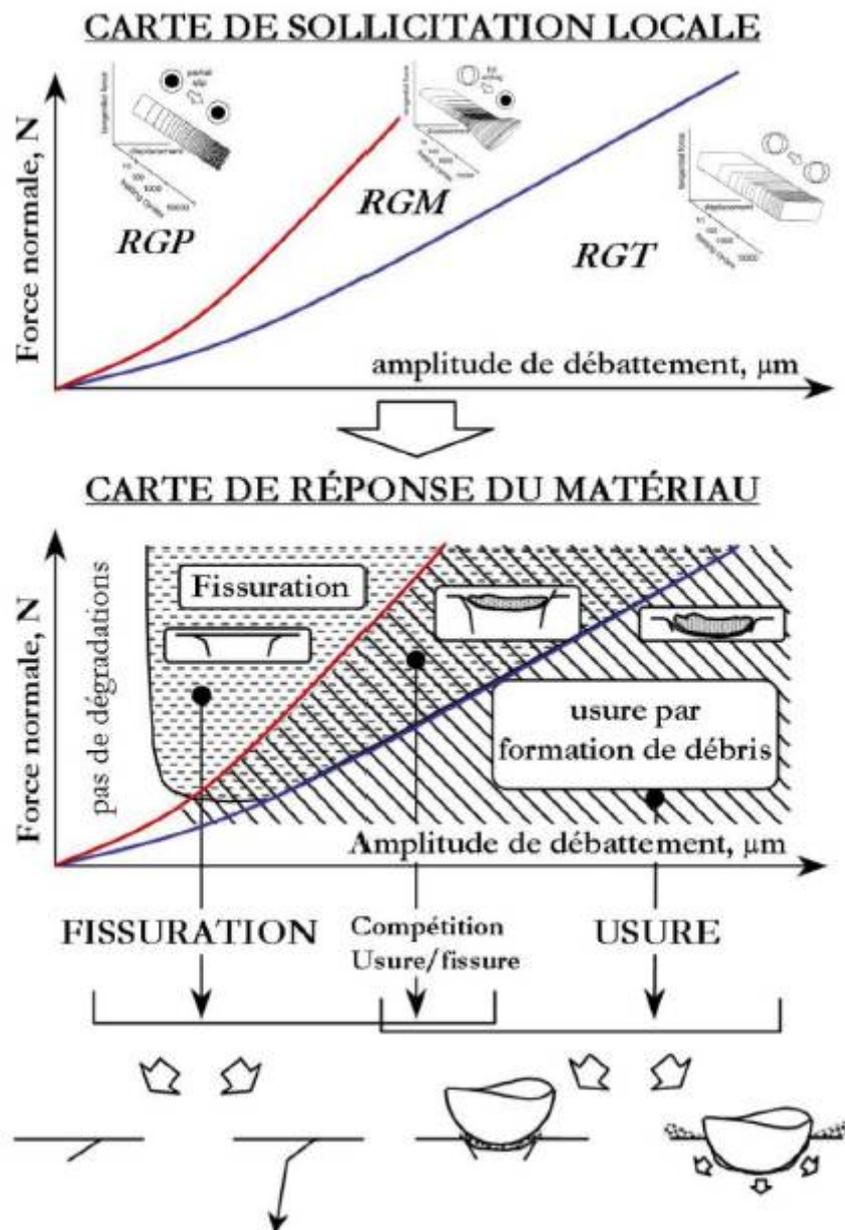
Les cartes de fretting FIG.1.11 sont des outils importants pour les chercheurs car elles permettent d'avoir une vision claire des problèmes rencontrés dans les applications industrielles [ELL 02, SHI 05, ZHO 06]. Elle permet en effet, de déterminer, pour une configuration de contact donnée, les conditions de chargement à éviter ; ou encore de suivre l'évolution du comportement global en fretting en fonction des paramètres sensibles : matériau, revêtement,... En résumé, les cartes de sollicitations locales sont obtenues à partir de l'analyse des bûches de frottement alors que les cartes de réponse des matériaux sont déduites de l'expertise des traces de fretting. L'observation des pièces mécaniques après essai de fretting, correspondant aux différents régimes d'une carte de sollicitation, permet d'établir les différents types de dégradation.

### 1.2.4.3 Dégradations induites par le fretting

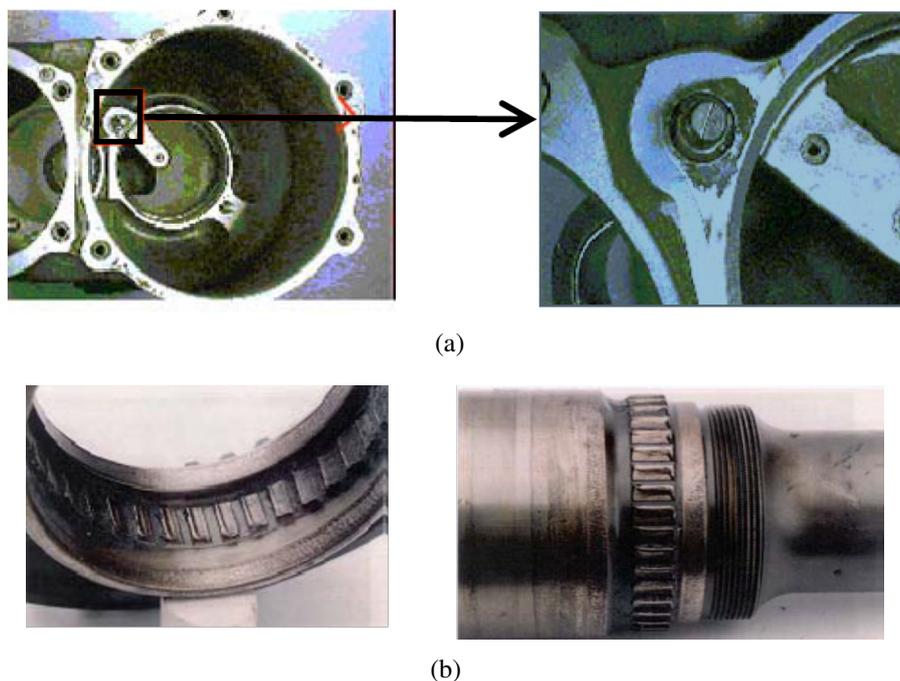
Le type de la dégradation dû au chargement de fretting dépend de la condition de glissement.

En général, en glissement partiel, les fissures sont engendrées plus facilement qu'en glissement total. La cause essentielle de l'amorçage des fissures est le fort gradient de contrainte introduit par la coexistence de la zone collée et la zone glissante qui conduit à une singularité du champ de déplacement dans la zone de contact.

En régime de glissement total, le phénomène rencontré relève de l'usure de la surface de contact par enlèvement de matière. Les particules usées peuvent rester dans la zone de contact et influencer l'état de contact ou se loger dans les fissures amorcées et modifier l'état des contraintes et des déformations. La formation de débris, conduit à une perte de côte entraînant un remplacement des pièces ou un blocage des liaisons FIG.1.12.



**FIGURE 1.11:** Illustration des cartes de fretting : carte de sollicitation et carte de réponse du matériau [SUN 12]



**FIGURE 1.12:** Cas d'usure en fretting de pièces : (a) Usure d'un boîtier de transmission de puissance d'avion [ELL 02] (b) Cannelures détruites et portées usées d'un arbre de rotor d'hélicoptère [BEA 03]

Dans le régime mixte, deux mécanismes sont en compétition : le matériau peut être endommagé par l'amorçage des fissures et aussi par l'usure.

Par rapport à notre objectif, nous nous positionnons dans le régime de glissement total. Notre étude sera dédiée aux problèmes de l'usure causées par le fretting. Nous ne nous intéressons pas au phénomène de fissuration mais nous mettrons l'accent sur le phénomène de détérioration progressive de la matière (dégradation des propriétés matériaux).

## 1.3 Analyse des dégradations induites par le fretting

### 1.3.1 L'usure

Cartier et Kapsa [KAP 01] résument les endommagements d'une surface suivant les phénomènes mécaniques, physiques ou chimiques associés. Ils distinguent :

- \* des déformations plastiques, dans le cas où les contraintes générées dans le contact glissant dépassent la limite d'élasticité d'un des matériaux. Ces déformations induisent des modifications de géométrie des surfaces frottantes.
- \* des transformations physicochimiques de surface concernant soit des transformations tribologiques superficielles (Tribologically Transformed Structures ou TTS) soit des réactions chimiques entre les corps frottants et cet environnement.
- \* des phénomènes d'adhésion entre les corps frottants, conduisant au transfert d'un des matériaux vers l'antagoniste.

Ces phénomènes peuvent se produire simultanément ou successivement dans un contact. La chronologie de ces événements correspond à la description d'un processus d'usure.

À partir des phénomènes élémentaires qui viennent d'être évoqués, de nombreux processus d'usure ont été établis et peuvent être classés de différentes façons. Nous présenterons une classification scientifique basée sur la nature des phénomènes à l'origine des dégradations.

### 1.3.1.1 Différents types d'usure : classification scientifique

Le classement des différents types d'usure n'est pas standard. Suivant les auteurs, Les classements sont sensiblement différents. Nous citons ici quelques types :

- **Usure par transfert ou adhésion** : Elle se caractérise par le transfert du matériau d'une des deux pièces sur l'autre. Si les matériaux sont de natures différentes, le transfert s'effectue préférentiellement du corps le plus tendre vers le corps le plus dur.
- **Usure par abrasion** : Les surfaces présentent des sillons de profondeur variable, parallèles au déplacement. L'usure est assez constante au cours du temps, le volume des débris croît linéairement avec la charge appliquée et la distance parcourue. La vitesse n'intervient que si l'échauffement modifie les caractéristiques du matériau. Éventuellement, des particules arrachées de la pièce la plus tendre peuvent être transférées mécaniquement sur la plus dure mais sans y adhérer très solidement.
- **Usure par réaction tribochimique** : L'usure par réaction tribochimique apparaît lorsque les surfaces en contact réagissent avec l'environnement. Elle se caractérise le plus souvent par une coloration des surfaces frottantes et l'apparition d'une poudre colorée. En absence de glissement le produit de la corrosion aurait formé un film sur les surfaces qui aurait eu tendance à arrêter la corrosion. Le glissement va permettre l'expulsion de ce film et la corrosion ne s'arrête plus, la surface va s'user.
- **Usure par fatigue** : L'usure par fatigue est lente et habituellement masquée par l'abrasion ou l'adhésion. La fatigue de contact se manifeste par l'apparition de fissures et d'écailles en surface. La fatigue de contact peut être mécanique ou thermique. La fatigue mécanique est due à des contraintes répétées au niveau du contact. La fatigue thermique est due à d'importantes variations de température cycliques dans le contact.
- **Usure en fretting** : Une telle situation correspond au contact de deux corps soumis à un déplacement relatif de faible amplitude. Des débris et/ou des dégradations de surfaces se génèrent par des processus mécaniques, adhésifs... Si ces débris ne peuvent pas être évacués rapidement à l'extérieur, ils peuvent créer des dysfonctionnement. Ce type d'usure se rencontre dans de nombreux systèmes mécaniques.

Dans le reste de notre travail nous étudions seulement le phénomène d'usure par fretting. Ce phénomène peut se produire aux interfaces de contact des pièces mécaniques telles que les pieds d'aubes. Les études expérimentales de ce type d'endommagement sont importantes pour comprendre les mécanismes qui interviennent. Le phénomène d'usure est difficile à modéliser compte tenu des différents aspects à prendre en compte lors du frottement tels que :

- \* la modification par un enlèvement de matière de l'interface et de la géométrie du contact,
- \* la formation d'une couche interfaciale : troisième corps actif à l'interface difficile à modéliser,
- \* le flux des débris à l'intérieur et hors de la trace de contact,

\* les mécanismes de transfert,

\* le couplage entre les aspects thermodynamiques, physico-chimiques et mécaniques.

La recherche des modèles et l'expérimentation de l'usure par fretting s'appuient sur le travail effectué sur l'usure des interfaces frottantes. Nous présenterons les différents concepts et méthodes liés à l'étude de l'usure ainsi que les outils de quantification de ce phénomène.

### 1.3.1.2 Méthode d'étude et de quantification de l'usure

Dans la littérature, un grand nombre de modèles décrivent le comportement à l'usure des matériaux. Afin de définir une cinétique d'usure, Meng et Ludema [MEN 95] dans un article de synthèse, passent en revue plus de 5466 articles parus dans la seule revue *Wear* dans lesquels plus de 300 équations différentes sont proposées. 182 d'entre elles concernent la quantification de l'usure dans différentes conditions. Les auteurs montrent que chaque équation établie est propre aux conditions expérimentales généralement non transposables aux situations industrielles. Les démarches proposées dans la majorité des modèles consistent en une analyse comparative entre différents matériaux en fonction des paramètres macroscopiques du contact. L'absence d'un modèle d'usure universel a donc conduit à deux approches :

-Approche qualitative de l'usure, développée par Godet [GOD 84] et qui repose principalement sur le concept du troisième corps. Godet considère que l'usure n'est pas une propriété intrinsèque du matériau mais qu'il est nécessaire de prendre en compte le troisième corps, constitué de débris et situé à l'interface. La dégradation n'est plus assimilée au volume de matière dégradé mais à la quantité de débris éjectée du contact. Cette approche est basée sur l'analyse des différentes étapes associées à l'évolution des couches interfaciales (troisième corps) formées dans un contact frottant : création, circulation et éjection des débris.

-Approche quantitative de l'usure, inspirée du modèle d'Archard [ARC 53] qui propose une analyse de la dégradation en termes de volume usé qu'il cherche à relier à la sollicitation imposée et aux caractéristiques physiques, chimiques et mécaniques des matériaux pour chaque cas étudié.

Nous allons maintenant expliciter ces deux types d'approche.

**Approche qualitative de l'usure** Dans les systèmes tribologiques il existe une interface entre les deux corps en contact, dite "troisième corps". Godet montre qu'il est plus réaliste d'associer la dégradation à la quantité de débris éjectés du contact plutôt qu'au volume d'usure complet. Dans le cas du contact sec, ce troisième corps est le produit de la réaction tribomécanochimique des débris issus des deux premiers corps en contact. Ce concept permet de réunir sous une seule et même approche les théories bien maîtrisées de la lubrification fluide et les problèmes de frottement et d'usure plus délicats à modéliser. Le troisième corps participe à la transmission du chargement entre les deux solides en contact et peut donc indirectement protéger la dégradation volumique des premiers corps. L'usure est déterminée par la quantité de débris éjectés qui est calculée à partir du flux de débris( $w$ ), soit pour un contact unidirectionnel :

$$w = L \int_0^b u(y) dy \quad (1.1)$$

avec  $L$  la largeur du contact ;  $u$  la distribution du gradient de vitesse des débris éjectés ; et  $y$  la coordonnée représentant l'épaisseur de la couche de débris.

Ce modèle, proche de la réalité physique des mécanismes, est cependant très compliqué à formaliser et ne facilite pas l'introduction de variables capables de comparer les matériaux. Cette analyse permet au mieux interpréter des mécanismes tribologiques comme l'action du troisième corps sur la diminution du coefficient de frottement ou l'aspect bénéfique de sa présence vis-à-vis de la cinétique d'usure. Le concept de troisième corps permet de mieux interpréter les contacts permettant de piéger les débris ou au contraire des contacts non piégeants où les débris rapidement éjectés ne jouent pas leur rôle protecteur.

**Approche quantitative de l'usure** Les cinétiques d'usure sont basées sur les relations de la mécanique des contacts.

En étudiant l'usure de matériaux mous frottés par un matériau dur, Archard [ARC 53] montre que le volume usé ( $V$ ) peut être décrit par une relation linéaire entre la distance de glissement ( $s$ ) et l'effort normal ( $P$ ) :

$$V = K_a \frac{Ps}{3p_s} \quad (1.2)$$

avec  $p_s$  la limite d'écoulement en terme de pression (approximativement équivalente à la dureté) du matériau le plus mou.  $K_a$  est une constante expérimentale représentative, suivant l'auteur, reliant la probabilité, lorsque deux aspérités se rencontrent, de créer une particule d'usure.

Dans le cas d'une sollicitation de fretting, différents coefficients d'usure ont été proposés à partir du modèle d'Archard. Nous pouvons citer les travaux de l'équipe de Celis [BLA 93], ou de Klaffke [KLA 94]. Cependant, le formalisme d'Archard n'intègre pas le coefficient de frottement ; or il est courant de constater que l'usure est d'autant plus importante que ce facteur est élevé [KAP 01]. Farris et Goryacheva [GOR 01] ont proposé une formulation locale de la loi d'Archard afin de quantifier l'usure sous fretting fatigue en glissement partiel. L'évolution de l'usure est corrélée à la modification de la géométrie du contact. La redistribution des champs de contrainte et de déformation, générée par la modification de la géométrie, sera traduite en volume d'usure via une intégration sur tout le contact de la loi locale d'Archard. La loi d'usure dérivée locale d'Archard prend la forme suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = K_w p^a v^b \quad (1.3)$$

avec en un point de la surface de contact,  $w$  la profondeur d'usure,  $p$  la pression de contact,  $v$  la valeur absolue de la vitesse de glissement relative,  $K_w$  le coefficient d'usure,  $a$  et  $b$  des coefficients réels. Mohrbacher [MOH 95] quant à lui, propose de relier le volume usé non pas suivant le travail du chargement normal mais, plus physiquement, suivant le travail du chargement tangentiel  $Q$ . Il définit un coefficient d'usure suivant la relation :

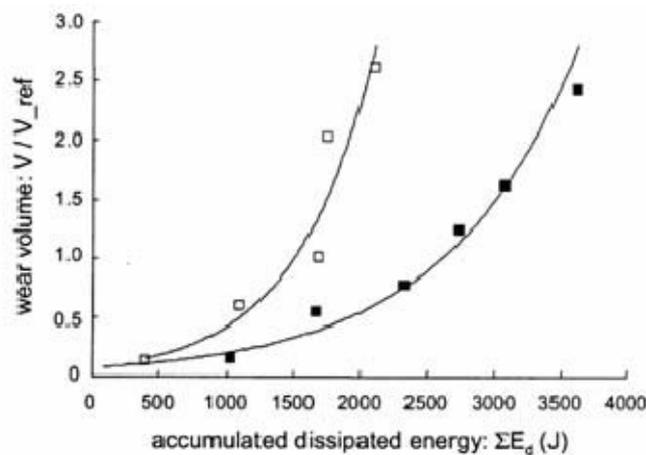
$$\alpha_u = \frac{V}{Qs} \quad (1.4)$$

Il démontre que cette relation est équivalente à :

$$\alpha_u = \frac{V}{\sum E_d} \quad (1.5)$$

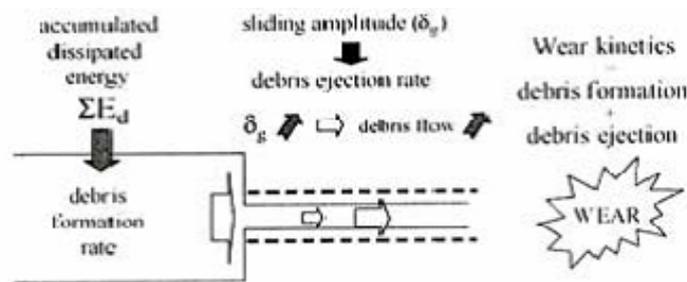
où  $\sum E_d$  est l'énergie totale dissipée. Le coefficient  $\alpha_u$  prend ainsi en compte le chargement normal, l'évolution du coefficient de frottement, l'amplitude de débattement et la durée de l'essai.

L'énergie dissipée est considérée comme l'activateur principal des processus de dégradation du système tribologique. L'approche quantitative basée sur l'énergie dissipée par frottement a été largement développée, notamment par une équipe du LTDS [FOU 96a, FOU 03] et ce dans le cas du fretting. Les processus d'usure sont pilotés par les températures de contact, les transformations de films tribochimiques, le transfert de matière entre surfaces, les ruptures par contraintes mécaniques ou thermiques. Une relation linéaire a été plusieurs fois constatée entre le volume usé et l'énergie dissipée [FOU 97b, FOU 03]. Cette approche permet de déterminer des coefficients énergétiques d'usure pour différents systèmes tribologiques. Cette démarche est également adoptée pour l'étude des couches dures avec la détermination de leur durée de vie. Le volume usé est comparé à la quantité cumulée d'énergie dissipée dans le contact. Fridrici [FRI 02] montre que le formalisme développé par Mohrbacher ne peut être généralisé en mettant en évidence la non linéarité entre le volume usé et l'énergie totale dissipée lors d'une étude de l'usure du Ti-6Al-4V en fretting FIG. 1.13.



**FIGURE 1.13:** Évolution du volume d'usure en fonction de l'énergie totale dissipée pour un contact  $Ti - 6Al - 4V / Ti - 6Al - 4V$  : ( $\square$ 25000 cycles,  $\blacksquare$ 50000 cycles,  $P = 400N$ ,  $\delta = 50 - 100\mu m$ ) [FOU 04]

Des études postérieures confirmeront ce résultat sur des matériaux adhérents [FOU 04, PAU 06]. Les auteurs s'accordent à dire que l'énergie dissipée est responsable de la création du troisième corps (couche interfaciale formée) et l'amplitude de débattement conditionne son flux d'éjection à l'interface de frottement FIG. 1.14.



**FIGURE 1.14:** Illustration de la cinétique d'usure à partir d'écoulement de matière d'un contact  $Ti - 6Al - 4V / Ti - 6Al - 4V$  [FOU 04]

Dans le cadre de notre travail, nous utiliserons une approche qualitative basée sur la loi d'Archard, pour laquelle les données issues des résultats expérimentaux sont les plus faciles à trouver dans la littérature. La méthode proposée dans le chapitre suivant permettrait d'utiliser une approche énergétique. L'usure du contact aube-disque sera modélisée à partir des formulations énergétiques proposées par Fouvry.

### 1.3.2 La fissuration

Un endommagement par fissuration est souvent attribué au caractère cyclique de la sollicitation fretting ou de fretting fatigue. Il convient donc de considérer une approche "fatigue" du problème.

Ce phénomène d'endommagement est dangereux. En effet cet endommagement engendre peu de modifications apparentes de la pièce ; et on aura une rupture brutale, en fin de vie de la pièce, bien que la fissuration ait été progressive, sans déformation visible. Plusieurs variables peuvent être utilisées pour décrire ce phénomène :

- des variables liées aux sollicitations telles que les contraintes et les déformations traduisant le chargement appliqué au composant mécanique,
- des caractéristiques mécaniques monotones (module d'élasticité, coefficient de Poisson, résistance maximale en traction monotone...) et cycliques (limite d'endurance du matériau, nombre de cycles à la rupture...). Ce sont des caractéristiques intrinsèques au matériau mais peuvent être modifiées en fonction de la nature des sollicitations,
- des paramètres de service qui traduisent les conditions de fonctionnement du composant mécanique (température, fréquence de la sollicitation, surcharge...),
- des paramètres d'influence : comme les coefficients d'écrouissage cyclique, les facteurs d'état de surface, de gradient de contraintes et de tri-axialité des contraintes.

Nous nous intéressons à la compréhension de la phase "post-amorçage" (détérioration de la matière jusqu'à amorçage) sous l'effet d'un chargement cyclique. Nous appliquerons cette démarche dans le cas de l'étude de l'endommagement d'un contact soumis au fretting en glissement total afin de prévoir les sites d'initiation et d'évolution de l'endommagement. Selon notre objectif, nous utiliserons une variable d'endommagement liée aux déformations traduisant la dégradation des propriétés matériaux au cours des cycles.

#### 1.3.2.1 L'endommagement : dégradation des propriétés matériaux

L'endommagement par fretting cyclique ou fatigue est la modification des propriétés des matériaux consécutifs à l'apparition de cycles de chargement. La répétition de ces cycles de chargement peut conduire à la fissuration puis à la rupture des pièces.

Historiquement, deux approches ont été développées pour étudier ce phénomène :

- la première, dite empirique, développée en premier par F.Wöhler dès 1860, se base sur l'expérimentation pour tracer la courbe de Wöhler (la courbe S-N). Cette courbe a permis de relier le phénomène de fatigue et la notion de durée de vie aux amplitudes des contraintes et cycles de sollicitation.
- la deuxième, dite théorique, est liée aux théories de la mécanique (mécanique de la rupture et mécanique de l'endommagement) pour reconstruire les courbes expérimentales

et prédire les phénomènes observés. Les propriétés matériaux et les bilans énergétiques servent à prédire la vitesse de propagation de l'endommagement.

**Approche empirique (courbe de Wöhler)** La courbe de Wöhler d'un matériau représente la relation expérimentale entre l'amplitude de contraintes appliquées  $S$  et le nombre de cycles  $N$  à rupture. Wöhler a mis en place une série de tests (faire subir à une série d'éprouvettes des cycles de sollicitations avec une charge moyenne et une amplitude données) pour déterminer le nombre de cycles de vie d'une structure. Cette connaissance s'est généralisée et a été développée jusqu'à aujourd'hui car elle permet une prédiction rapide et assez réaliste de la vie d'une structure soumise à des contraintes répétées. On obtient des courbes propres à chaque matériau et à chaque amplitude moyenne appliquée FIG.1.15.

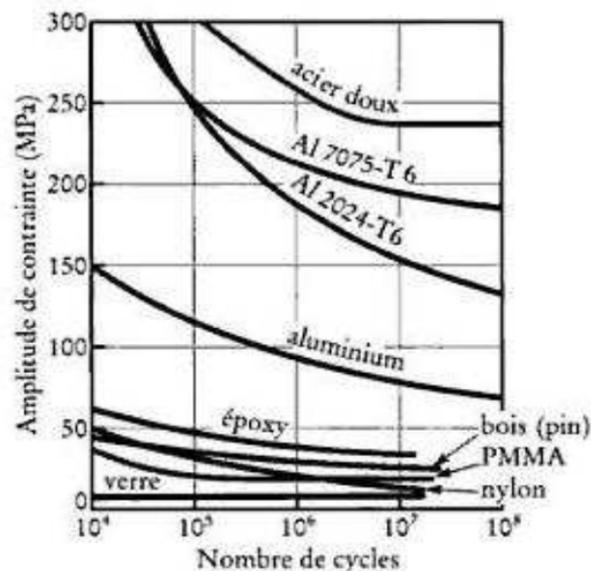
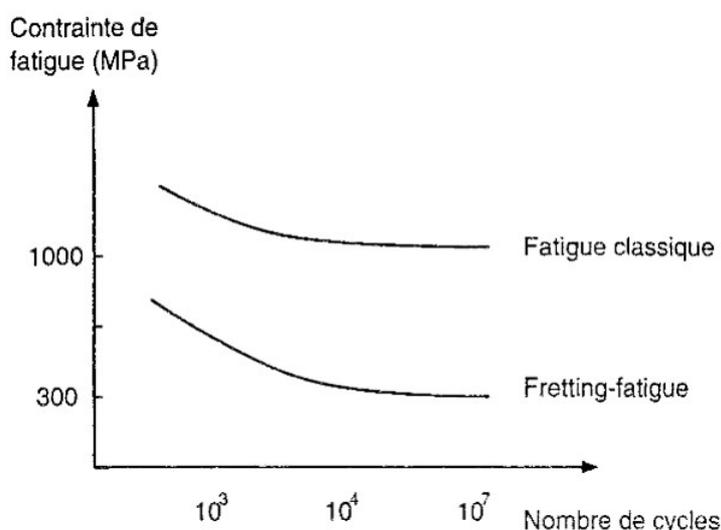


FIGURE 1.15: Exemple de courbe S-N

Les graphes de Wöhler pertinents permettent d'établir la limite d'endurance d'un matériau, à savoir la valeur de la contrainte maximale à laquelle la rupture de l'éprouvette ne se produira pas, même après un grand nombre de cycles.

Les courbes de Wöhler, très utilisées dans le domaine de la fatigue, ont été modifiées dans le cas du fretting-fatigue. Un exemple est donné FIG.1.16, où sont représentées les courbes de Wöhler d'un essai de fatigue classique et d'un essai en présence de fretting pour l'acier 30NCD16 [PET 94, MAO 97]. On remarque que la limite d'endurance dans le cas d'un essai de fretting fatigue est, dans ce cas, divisée par 3 par rapport à celle dans le cas d'un essai de fatigue. Ceci peut être expliqué par le développement des fissures aux bords du contact qui conduisent à la rupture de l'éprouvette. En conclusion, pour déterminer la durée de vie d'un matériau, il faut au préalable connaître la contrainte moyenne et l'amplitude de contraintes à appliquer à chaque cycle. Le raisonnement inverse peut être également possible. En effet, si le nombre de cycles est défini, une simple application de la loi pour une contrainte moyenne permet la déduction d'une amplitude maximale.



**FIGURE 1.16:** Courbe de Wöhler en fretting fatigue. [PET 94, MAO 97]

L'influence de fretting fatigue peut être exprimée par la diminution de la limite d'endurance.

Toutefois cette approche reste globale. Souvent les auteurs lui préfèrent une approche physique du problème consistant à séparer les différents stades d'amorçage et de croissance des fissures.

**Approche théorique (théories de la mécanique)** En général, le processus de fissuration peut être divisé en succession de phénomènes, Cheng et al. [CHE 94], Glodež et al. [GLO 97a, GLO 97b], Shang et al. [DEG 98], Podrug et al. [POD 08] :

\* Initiation de fissure (ou amorçage) : Initiation des premières micro-fissures et à leur croissance dans le volume du matériau. Cependant, l'analyse de l'amorçage de fissure est généralement fondée sur l'expertise du site d'amorçage et de la direction de la première propagation.

\* Propagation de fissure : Les micro-fissures amorcées dans le matériau commencent à croître de façon stable au fur et à mesure des cycles et en fonction de la contrainte imposée. Le caractère cyclique nécessite l'utilisation des courbes d'endurance. Ces courbes permettent de déterminer la limite d'endurance du matériau, définie comme la contrainte maximale que peut supporter le matériau sans se rompre au bout d'un grand nombre de cycles.

\* Rupture finale : la ou les fissures atteignent une taille critique et provoquent la rupture de la pièce.

Deux disciplines distinctes traitent ces différents phases :

- (a) **Mécanique de l'endommagement** : cette discipline traite la détérioration progressive de la matière jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Usuellement, on distingue 4 types d'endommagement : ductile, fragile, de fluage et de fatigue. La classification d'un processus d'endommagement donné dépend du type de sollicitation appliquée (monotone ou cyclique) et de la valeur relative de la déformation élastique par rapport à la déformation plastique du matériau.

La mécanique de l'endommagement, une discipline de la mécanique des milieux continus,

s'intéresse à fournir des lois d'évolution de l'endommagement qui puissent être intégrées dans une modélisation du comportement global du matériau. Les mesures de perte de module d'élasticité ont été employées pour quantifier l'évolution de l'endommagement.

- (b) **Mécanique de la rupture** : cette discipline concerne la phase de propagation où l'analyse suppose l'existence d'une fissure macroscopique. Cette fissure peut être induite lors de l'élaboration et/ou de la mise en forme des matériaux.

La mécanique de la rupture et l'étude du phénomène de fatigue se sont considérablement développées depuis leur origine. La mécanique de la rupture se présente pour un état de structure où des fissures indépendantes les unes des autres sont déjà existantes. Il consiste donc à déterminer les champs de contrainte en pointe de ces fissures ; et par la suite déterminer l'énergie correspondante emmagasinée dans le milieu continu. L'analyse de l'évolution de ces fissures consiste à comparer cette énergie emmagasinée à une énergie limite (critique) et quand cette valeur critique est atteinte, la propagation de fissure est considérée. Basée sur des critères énergétiques, cette approche permet l'étude de la propagation des fissures préexistantes dans le milieu. Le cadre théorique de la mécanique linéaire de la rupture a été ébauché au cours de la deuxième moitié du 20<sup>ème</sup> siècle. Dans les années 40, Westergaard [WES 39] et Muskhelishvili [MUS 49] ont développé des expressions analytiques des champs mécaniques au voisinage de l'extrémité d'une fissure en élasticité linéaire. Quelques années après Irwin [IRW 57, IRW 62] a introduit les notions de facteur d'intensité des contraintes et de ténacité. Le cadre de la mécanique de la rupture a été ensuite étendu aux comportements non-linéaires du matériau.

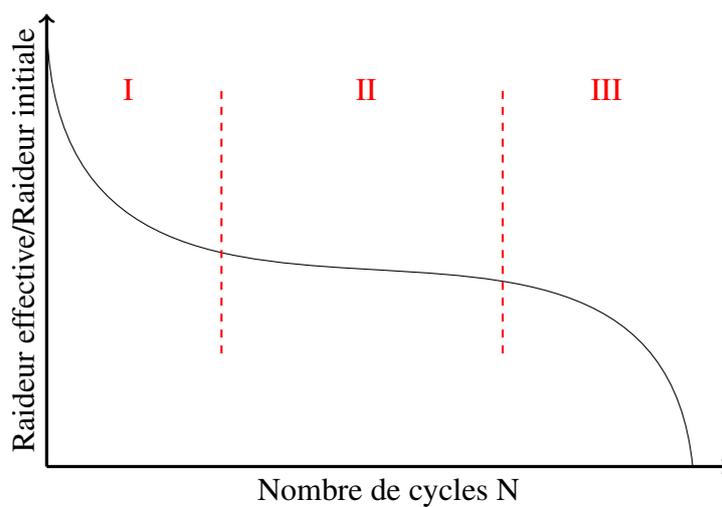
La mécanique linéaire de la rupture traite le problème dans le domaine élastique linéaire. La mécanique de la rupture modifie les conditions aux limites de la structure, en considérant l'existence des fissures. En revanche, la mécanique de l'endommagement décrit l'évolution des défauts de façon macroscopique, tout en restant dans le cadre de la mécanique de milieux continus.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons plutôt à la mécanique de l'endommagement pour étudier des contacts soumis à des sollicitations cycliques en fretting. L'approche présentée est appelée approche locale. Le qualificatif "locale" est ici employé afin de souligner que cette description s'effectue à l'échelle du point matériel, sans que soit pris en compte l'état du matériau dans un voisinage de ce point. L'endommagement est ponctuel et l'évolution de la variable  $D$  en un point dépend uniquement de l'état de ce point. L'endommagement en tout nouveau point matériel est initié par l'avancée du front de déformation dans le matériau sain. Toutefois, il faut préciser que, par rapport aux autres techniques, les calculs d'endommagement sont les plus difficiles à mettre en oeuvre, les plus coûteux en temps de calcul mais aussi les moins maîtrisés autant du point de vue de la robustesse que du point de vue de la qualité du résultat. Il convient donc de toujours avoir un regard critique sur les résultats obtenus.

Afin de mieux comprendre cette approche, nous rappelons à la section suivante quelques notions de base de la mécanique de l'endommagement. Nous citons ensuite quelques modèles d'endommagement.

### 1.3.2.2 Mécanique de l'endommagement

Nous nous intéressons ici à l'endommagement de fatigue défini par la modification des propriétés des matériaux sous chargement cyclique de fretting. Durant les essais de fretting, la raideur des échantillons suit une évolution caractéristique en trois phases, en fonction du nombre de cycles, comme le montre schématiquement la figure FIG.1.17 : La première phase (I) correspond à une diminution rapide de la raideur. Une évolution quasi linéaire caractérise la deuxième phase (II). La troisième phase (III) se caractérise par une chute brutale correspondant à la ruine.



**FIGURE 1.17:** Schématisation de l'évolution de la raideur d'un échantillon testé en fatigue en fonction du nombre de cycles

Différents modèles d'endommagement sont mis en oeuvre. Leur idée essentielle est de ne pas représenter les fissures et cavités d'un point de vue géométrique ou cinématique, et de modéliser uniquement leur "effet" sur les propriétés mécaniques à l'échelle de la pièce, en incluant cet effet dans le modèle de comportement du matériau, soit "une dégradation irréversible de la matière, caractérisée par une perte de la rigidité apparente du matériau". Cette idée intéresse tous les matériaux et tous les types de sollicitation. Elle permet de définir une grandeur représentative d'endommagement qui est censée représenter l'état de détérioration de la matière.

La notion d'endommagement a été introduite pour la première fois en 1958 par Kachanov [KAC 58a], qui a introduit une variable continue d'endommagement dans le cadre de la rupture, par fluage des métaux, sous sollicitation unidimensionnelle. Cette idée a été reprise par Rabotnov [RAB 69]. La théorie de l'endommagement permet, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, d'étudier la dégradation progressive des matériaux. Son domaine d'application couvre aussi bien le domaine des premières détériorations, que la prise en compte des effets de cumul non-linéaire du dommage, ainsi que la prévision de l'amorçage d'une macro-fissure. La mécanique de l'endommagement s'est d'abord développée en Europe, essentiellement pour des applications au fluage des matériaux métalliques. L'école anglaise, avec entre autre les travaux de Leckie et Hayhurst [LEC 74] a apporté une contribution remarquable au début des années 70. Sur le plan théorique, les concepts de base de la mécanique de l'endommagement ont été énoncés par Chaboche [CHA 77], et Lemaitre [LEM 96]. Ils ont été

dié aussi d'autres types d'endommagement (fatigue, rupture ductile) [CHA 74, LEM 78]. Au début des années 80, la mécanique de l'endommagement a été essentiellement reconnue aux Etats-Unis, avec les travaux de Krajcinovic [KRA 81, KRA 81], et de Ortiz [ORT 85]. Cette théorie est actuellement utilisée, non seulement pour des problèmes de fatigue (fretting cyclique), mais également pour des problèmes de fluage ou encore d'endommagement ductile. Différentes voies sont possibles pour la détermination de la variable mécanique d'endommagement [LEM 88, CHA 93] :

- des mesures à l'échelle microscopique (densité de micro-fissures ou de cavités) qui peuvent être intégrées sur l'élément de volume macroscopique à l'aide des techniques mathématiques d'homogénéisation,
- des mesures physiques globales (densité, résistivité...),
- des mesures mécaniques globales (modification des caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité)

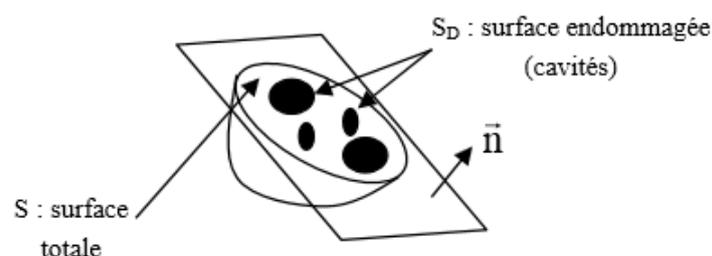
Ces dernières, les mesures mécaniques globales, sont plus faciles à interpréter en termes de variables d'endommagement grâce à la notion de contrainte effective introduite par Rabotnov et Katchanov en 1958. Le principe de leur approche est simple : l'endommagement d'un matériau peut être décrit par ses effets sur les propriétés mécaniques de ce matériau à l'aide de la notion de *contrainte effective*.

Quelle que soit l'origine micromécanique de cette dégradation (porosité, micro-fissuration, croissance de vides), la construction d'un modèle d'endommagement passe par le choix [MAR 00] :

- d'une variable d'endommagement, dont la nature dépend de la complexité du modèle envisagé ;
- de la façon d'introduire cette variable dans la relation contrainte-déformation ;
- de la loi d'évolution de cette variable.

Nous nous intéresserons essentiellement aux matériaux élastiques endommageables, pour lesquels le comportement est élastique à endommagement constant. Les propriétés mécaniques de ces matériaux, représentées par le tenseur d'élasticité, dépendent de la variable d'endommagement.

**Variable d'endommagement** Dire que le matériau est endommagé équivaut à dire que la microstructure du matériau n'est plus continue, il y existe des micro-fissures ou des micro-cavités. Considérons un élément de volume représentatif (VER) isolé à l'intérieur d'un matériau endommagé et de taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu FIG. 1.18.



**FIGURE 1.18:** Coupe d'un élément endommagé

Soit  $S$  l'aire d'une section de ce volume, repérée par sa normale  $\vec{n}$ . Dans cette section, les fissures et les cavités constituant l'endommagement engendrent des traces de formes diverses (vides, concentrations de contraintes...). Ainsi la section capable de transmettre des efforts, dite *section effective*  $S_{eff}$ , est inférieure à la section globale  $S$ . On peut décomposer la section  $S$  en une section effective  $S_{eff}$  (la matière) et une surface endommagée  $S_D$  (les cavités et les fissures). Pour décrire l'état de cette section, la mécanique de l'endommagement propose de définir une nouvelle variable interne appelée *variable d'endommagement* et notée  $D$ . Cette variable est définie, pour chaque direction  $\vec{n}$ , par le rapport entre la surface  $S_D$  et la surface  $S$  :

$$D_n = \frac{S - S_{eff}}{S} = \frac{S_D}{S} \quad (1.6)$$

D'un point de vue physique, cette variable  $D_n$  est donc l'aire relative des cavités et des fissures coupées par le plan normal à la direction  $\vec{n}$ . D'un point de vue mathématique, en faisant tendre  $S$  vers 0,  $D_n$  représente la densité surfacique des défauts dans le plan de normale  $\vec{n}$ , et on a :

- $D_n = 0$  correspond au matériau initialement non endommagé (vierge),
- $D_n = 1$  correspond au matériau totalement rompu dans le plan de normale  $\vec{n}$ .

Dans le cas général d'un endommagement anisotrope, constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées, la valeur de la variable tensorielle  $D_n$  dépend de l'orientation de la normale  $\vec{n}$ . Dans le cas où l'orientation des fissures et cavités est distribuée uniformément dans toutes les directions, l'endommagement est isotrope et la grandeur  $D_n$  ne dépend plus de la normale  $\vec{n}$ . L'état d'endommagement est caractérisée par le scalaire  $D$  :

$$D_n = D \quad \forall \vec{n}$$

En général, la variable d'endommagement est définie en tout point du solide, et représente l'état de dégradation d'un volume infinitésimal centré en ce point.

**Contrainte effective** L'idée est alors d'utiliser les variables d'endommagement pour modéliser l'état mécanique réel de volume sans décrire explicitement les défauts (cavités, fissures,...) qu'il contient. Supposons  $F$  la force appliquée sur la section  $S$  de l'élément de volume représentatif. A l'échelle de la structure, on considère que la section n'a subi aucune modification, et on définit ainsi la *contrainte apparente*  $\sigma$  par :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.7)$$

Cependant, à l'échelle microscopique, cette valeur ne tient pas compte de la présence des défauts. D'où la définition de la *contrainte effective*  $\sigma_{eff}$  donnée par :

$$\sigma_{eff} = \frac{F}{S_{eff}} \quad (1.8)$$

C'est la contrainte réellement appliquée sur la section non endommagée. Les deux contraintes sont liées par la variable d'endommagement :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.9)$$

**Équivalence en déformation et comportement endommageable** La notion de *contrainte effective* permet d'intégrer les effets de l'endommagement dans un modèle de comportement donné. En effet, elle offre un moyen simple de coupler l'endommagement à d'autres comportements tels que l'élasticité ou l'élasto-(visco)plasticité. En supposant que le comportement en déformation de la matière n'est affecté par l'endommagement que sous la forme de la contrainte effective, la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé s'écrit :

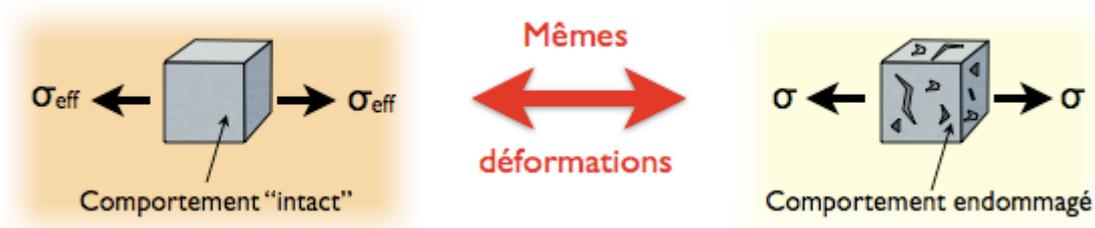
$$\varepsilon = \frac{\sigma_{eff}}{E} \quad (1.10)$$

Les deux relations ci-dessous permettent donc de définir le modèle de comportement apparent "*élastique endommagé*", du volume infinitésimal :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon \quad (1.11)$$

La quantité  $E(1 - D)$  correspond au *module de Young endommagé* de la section.

Le comportement endommagé du volume infinitésimal est alors défini comme : le comportement qui, sous l'effet de  $\sigma$  donne la même déformation que le comportement intact sous l'effet de  $\sigma_{eff}$ . C'est le *principe d'équivalence en déformation* proposé par Lemaitre [LEM 85] FIG. 1.19.



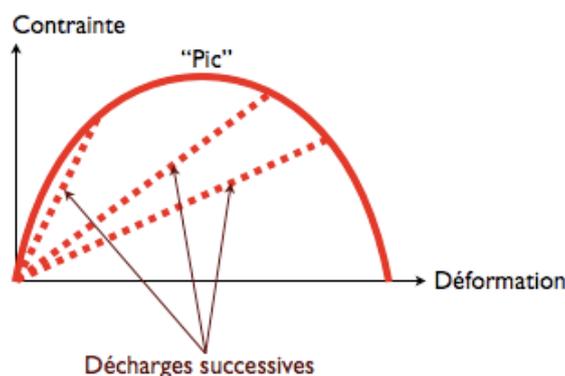
**FIGURE 1.19:** Le principe d'équivalence en déformations

Notons, qu'il est également possible d'utiliser l'hypothèse d'équivalence en contraintes associée à des déformations effectives [SIM 89a, SIM 89b], ou l'hypothèse d'équivalence en énergie élastique associée à des contraintes et déformations effectives [COR 82, COR 83, ZHU 92a, ZHU 92b]. Les méthodes liées à ces deux hypothèses ne seront pas détaillées. Nous utilisons pour ces travaux de thèse le principe d'équivalence en déformations, car c'est celle qui nous a paru la plus pertinente et transposable à notre problème.

**Lois d'évolution** Pour aborder la modélisation de la dégradation de l'élément de volume, il reste à présenter une loi d'évolution portant sur la variable d'endommagement. Les plus simples de ces lois évoquent celles que l'on utilise en plasticité et vérifient les critères suivants :

- \* l'endommagement commence à augmenter dès qu'une certaine quantité (généralement la déformation) dépasse un certain seuil,
- \* l'endommagement évolue de manière irréversible : il ne peut qu'augmenter jusqu'à la rupture, et le seuil peut alors augmenter avec l'endommagement.

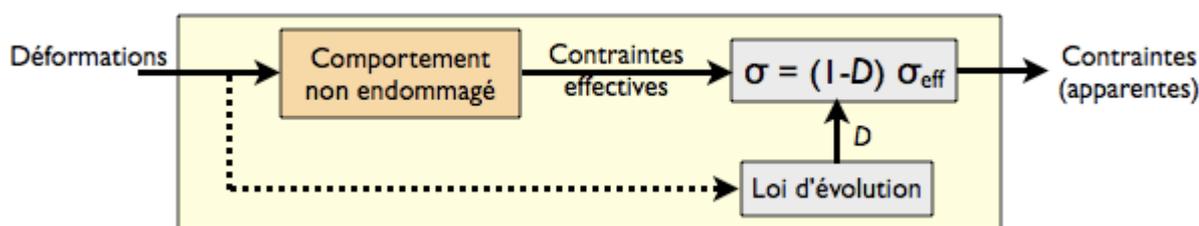
Dans le cadre de l'élasticité endommageable, la réponse obtenue est analogue au schéma FIG. 1.20.



**FIGURE 1.20:** Allure d'une courbe contrainte-déformation en présence de l'endommagement

L'effet de l'endommagement se traduit par des pertes de raideur, visibles lorsque l'on décharge l'élément de volume.

Nous pouvons récapituler la définition du comportement endommageable sur la figure FIG.1.21



**FIGURE 1.21:** Exemple de comportement endommageable

Différents modèles d'endommagement ont été développés et s'appuient tous sur la formulation de Lemaitre et Chaboche. Ils diffèrent l'un de l'autre par la loi d'évolution de la variable d'endommagement  $D$ .

**Choix du modèle d'endommagement** De nombreux modèles ont été développés pour de nombreux phénomènes : Kachanov [KAC 58b] a été le premier à introduire le concept de la mécanique d'endommagement pour le problème de fluage. Divers autres modèles ont également été développés pour le phénomène de fluage [RAB 63, LEC 74, HUL 74, KAC 81]. Lemaitre [LEM 77, LEM 85], Dragon [DRA 85a, DRA 85b] et Simo [SIM 89a, SIM 89b] ont étendu le concept d'endommagement pour la plasticité ductile. Ce concept a été appliqué par Lemaitre et Marigo [LEM 72, MAR 85] pour un problème de fatigue à faible nombre de cycles, et par Chaboche [CHA 74] pour la fatigue à nombre de cycles élevé. Le phénomène d'interaction fatigue-fluage a été développé par Lemaitre [LEM 75, LEM 79, LEM 84]. Quelques modèles pour l'élasticité couplée à l'endommagement ont également été mis au point par Cordebois, Kachanov, Ortiz et Ju [KAC 80, COR 82, ORT 85, KAC 87, JU 89]. L'utilité prédictive d'un modèle d'endommagement dépend fortement du choix particulier de la variable d'endommagement. Selon l'objectif de la modélisation et pendant l'établissement des hypothèses,

l'endommagement peut être décrit par une variable scalaire (endommagement isotrope), vecteur ou tenseur. En particulier, les variables d'endommagement scalaire étaient largement utilisées pour un modèle d'endommagement isotrope ou unidimensionnel par Lemaitre et Chaboche [LEM 78]. Nous mentionnons ici brièvement certains modèles avec des variables scalaires [LEM 84, BON 05, CEL 07, ZHU 08, HAD 09]. Les variables vectorielles ou tensorielles d'ordre deux ou quatre étaient souvent utilisées pour les modèles d'endommagement anisotrope [COR 82, KAC 80, CHA 82, MUR 81]. Les formulations isotropes sont largement employées dans la littérature du fait de leur simplicité.

En vue de son utilisation comme paramètre de croissance de l'endommagement, la déformation équivalente doit être représentative du mécanisme d'endommagement. Dans cette thèse, nous proposons d'appliquer un critère en déformation inspiré du critère non symétrique en déformation de J. Mazars [MAZ 84], initialement conçu pour décrire le comportement mécanique du béton. Le modèle de Mazars sera présenté dans le paragraphe suivant.

**Modèle d'endommagement de Mazars :** Mazars formule en 1984 un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton qui fait depuis référence et dont de nombreux auteurs se sont inspirés. Le point particulier de ce modèle est d'utiliser un critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente.

Ce modèle peut être résumé comme suit :

Le champ de contrainte dans l'éprouvette endommagée est réécrit en tenant compte de la variable d'endommagement  $D$  :

$$[\sigma] = E(1 - D)[\varepsilon] \quad (1.12)$$

L'intensité de la déformation locale est représentée par la déformation équivalente :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (1.13)$$

avec  $\varepsilon_i$  les déformations principales dans la direction  $i$  et  $\langle \cdot \rangle_+$  représente la partie positive d'un nombre réel.

L'augmentation de l'endommagement est caractérisée par la fonction seuil :

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) \quad (1.14)$$

avec  $K(D = 0) = \varepsilon_{D0}$  est le seuil d'endommagement initial.

Ayant introduit la physique de notre problème, nous regarderons, dans ce qui suit, les outils qui permettent de modéliser le contact, l'usure et l'endommagement entre deux solides soumis au fretting. L'objectif est donc d'utiliser par la suite l'ensemble des caractéristiques représentées pour les phénomènes fretting, usure et endommagement dans des simulations numériques des contacts revêtus sous chargement cyclique de fretting (fatigue).

## 1.4 Modélisation en mécanique de contact

La simulation numérique de systèmes industriels nécessite des modélisations de plus en plus pertinentes des phénomènes de contact. Les problèmes de contact engendrent des difficultés

tant sur le plan théorique que numérique. Ces problèmes interviennent de façon différente en fonction de la nature du problème à traiter. Les paramètres d'intérêt les plus évidents sont : les lois de comportement des matériaux (élastique, plastique,...), les géométries des corps en contact, et la nature des matériaux en contact (homogène, hétérogène, isotrope, anisotrope,...).

L'objectif est de proposer et développer, dans un code de calcul, une méthode simple et rapide de prise en compte du contact tridimensionnel entre deux corps déformables, susceptible de s'adapter à la plupart des situations rencontrées dans l'industrie et plus particulièrement au problème de fretting pour des contacts revêtus.

### 1.4.1 Problème du contact mécanique

Les problèmes de mécanique du contact sont des problèmes mettant en jeu de nombreux phénomènes physiques. L'étude et la résolution analytique du problème de contact mécanique datent de 1882 avec les travaux de Hertz. En utilisant une démarche analytique et en s'appuyant sur l'élasticité linéaire, ces travaux permettent d'évaluer les surfaces de contact ainsi que les pressions du contact.

Le chargement de contact n'est pas une donnée connue a priori, ce qui explique les difficultés, rencontrées pour le dimensionnement et la prédiction du comportement des corps en contact. Ces données sont essentielles pour quantifier les sollicitations de contact subies par les corps et ensuite définir les déformations et les contraintes internes. L'approche classique pour déterminer les contraintes et les déplacements dans un problème de contact élastique entre deux surfaces est due à Boussinesq [BOU 85] et Cerruti [CER 82]. Cette approche est basée sur la théorie des potentiels et la fonction d'Airy [AIR 38].

La plupart des solutions analytiques proposées supposent un contact sans frottement, des zones de contact connues a priori et des formes géométriques simples. En parallèle du besoin des ingénieurs de prévoir le comportement des matériaux sous sollicitations tribologiques, des développements ont été réalisés au cours du XX<sup>e</sup> siècle. Le développement de techniques numériques ont permis de traiter des problèmes de contact de plus en plus complexes.

Le contact demeure, encore aujourd'hui, le problème de mécanique des solides présentant les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. Celles-ci sont dues essentiellement à un changement brutal du comportement, qui est associé au phénomène de l'enlèvement de matière et/ou à l'amorçage de fissures. De plus, une parfaite connaissance de la position relative des solides dans la configuration déformée, a priori inconnue, est nécessaire pour l'évaluation des conditions de contact. L'évolution de ces besoins industriels conduit à un besoin de simulations tridimensionnelles traitant la prédiction du comportement de pièces sous sollicitations cycliques de fretting. Ces simulations se révèlent très souvent coûteuses en termes de temps de calcul et d'espace mémoire et nécessitent par conséquent l'utilisation de modèles rapides et efficaces.

L'une des difficultés de la modélisation des problèmes des contacts soumis au fretting est le choix d'une méthode rapide et efficace pour calculer la réponse du matériau dans le cas de chargements cycliques. De nombreuses lois et méthodes ont été proposées pour permettre la modélisation des différents phénomènes se produisant au niveau de l'interface dans un problème de contact en fretting. Néanmoins, la non-linéarité peut provoquer des instabilités lors de la résolution numérique. De nombreuses techniques numériques ont été avancées. Cependant,

chacune d'entre elles s'applique à un type de problème spécifique.

Une revue des méthodes et des techniques traitant le problème de contact sera détaillée dans la section suivante.

### 1.4.2 Matériaux non-homogènes (hétérogènes)

L'enjeu principal pour les industriels est d'optimiser la durée de vie des composants soumis au fretting et d'être capable de prévoir l'usure et l'amorçage de fissures. Afin de réduire ces endommagements et améliorer la tenue des pièces, des revêtements sont utilisés. Leurs propriétés mécaniques et matériaux ont un impact direct sur le contact et la durée de vie. Le choix de matériaux, de l'épaisseur, du nombre de couches sont donc primordiaux.

Les phénomènes qui ont lieu dans un contact tribologique sont influencés par la force appliquée sur les deux surfaces en contact. Les méthodes de calcul pour les champs de contraintes et déformations dans une surface revêtue ont été examinés par Holmberg et Matthews [HOL 94]. Une approche utile pour calculer les contraintes à l'interface revêtement/substrat a été utilisée par Ramalingam et Zheng [HOL 94] pour évaluer les problèmes qui peuvent être rencontrés lors de l'application des revêtements durs sur des substrats avec une conformité différente de celle du revêtement.

Les revêtements sont largement utilisés dans de nombreuses applications pour améliorer le comportement tribologique des différentes surfaces de contact [HOL 94, GUP 95, HOL 00]. Ceux-ci comprennent, par exemple, l'influence sur l'usure et le frottement [WAN 02, HOL 07, KIM 10], une prolongation de la durée de vie en fretting des composants mécaniques en contact [CHA 91] et une résistance des propriétés des surfaces tribologiques aux dégradations [KOM 88]. Une meilleure compréhension plus systématique des mécanismes impliqués dans un contact tribologique est nécessaire pour l'optimisation des propriétés des deux surfaces de contact afin d'atteindre la performance requise.

Les solutions numériques sont obtenues pour différentes distributions de contraintes sur la surface revêtue. Cependant peu de travaux concernent les revêtements d'épaisseur non-uniforme compte tenu de la complexité de ce problème.

Afin de bien situer notre apport par rapport aux méthodes déjà existantes, nous rappelons les principales méthodes analytiques et numériques existantes en rapport avec nos problématiques (modélisation et étude des problèmes de contact revêtu en fretting) et discuterons de leurs avantages et inconvénients quant aux temps de calcul ainsi que de la précision des résultats.

### 1.4.3 Méthodes de modélisation

Deux grandes familles de méthodes permettant la modélisation de contact sont présentes : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

#### 1.4.3.1 Solutions analytiques

Les problèmes de contact, impliquant des corps déformables, est l'un des problèmes de base de la théorie de l'élasticité.

**Contact hertzien** La première solution au problème de contact entre deux solides déformables à été développée par Hertz en 1882 [HER 82].

Les hypothèses suivantes sont retenues :

- Les matériaux sont homogènes, isotropes, obéissent à la loi de Hooke, et subissent de faibles déformations (domaine élastique linéaire),
- la zone de contact est elliptique,
- les surfaces de contact sont supposées régulières (absence de frottement et d'adhérence),
- des demi-espaces sont considérés,
- la zone de contact est considérée suffisamment petite pour ne pas tenir compte des autres conditions aux limites.

Hertz considère que les contraintes de contact comportent une concentration qui peut être définie comme indépendante des contraintes dans le reste des solides, de sorte que les contraintes sont concentrées dans la région de contact et ne sont pas modifiées par les conditions aux limites. En pratique, sous l'effet d'une force normale au plan tangent commun aux deux solides, une surface de contact se crée à travers laquelle les efforts sont transmis d'un solide à l'autre. Ces efforts surfaciques génèrent une répartition de contraintes dans la région du contact qui peut entraîner des déformations permanentes ou des endommagements. L'application de la théorie de Hertz à un contact permet de prévoir la forme et les dimensions de la surface de contact, la répartition d'effort sur cette surface, puis la répartition des contraintes en sous-couche au voisinage du contact. On peut ainsi déterminer dans chacun des éléments en contact la zone la plus sollicitée et choisir le matériau ou les techniques de revêtement et/ou renforcement adaptés.

**Contact non-hertzien** La théorie de Hertz est assez restrictive en raison de ses hypothèses. Les problèmes de contact non hertiens ont été également étudiés [JOH 85]. La résolution de ce type de contacts nécessite généralement l'utilisation de méthodes semi numériques. Cette catégorie regroupe les problèmes avec : frottement, géométrie complexe, non-linéarité des propriétés mécaniques (plasticité), ou présence de lubrifiant (la théorie élastohydrodynamique). Un examen complet de ces contacts est donné par Barber et Ciavarella [BAR 00], Nitta et Kato [NIT 00], Adams et Nosonovsky [ADA 00], et Bushan [BHU 00]. Lorsque les hypothèses de la théorie de Hertz ne sont pas vérifiées, les solutions doivent souvent être déterminées en s'appuyant sur les mathématiques. C'est le cas des "équations intégrales singulières" utilisées par Muskhelishvili [MUS 08] pour résoudre le problème du contact entre un pion et un espace semi-infini élastique, et par Mikhlin [MIK 57], Galin [GAL 61] et Aleksandrov [ALE 86]. La transformée de Fourier [SNE 95] a été également utilisée. Westergaard [WES 39] a utilisé les transformées intégrales dans le cas d'un contact rugueux (la rugosité est une fonction sinusoïdale). Greenwood et Williamson [GRE 66] ont proposé une théorie pour les contacts élastiques avec surfaces rugueuses, qui est maintenant la base de nombreuses théories de la tribologie (frottement, adhérence, thermique et la conductivité électrique, usure, etc...).

Sainsot et al. [SAI 02, SAI 11] ont développé des modèles numériques pour étudier les contact rugueux.

**Contact avec comportement non-élastique et matériau non-homogène** Les solutions analytiques existent également pour des comportements inélastiques, tels que la plasticité. Cependant, la plupart des études analytiques sont limitées et considèrent un comportement parfaitement

plastique. Johnson [JOH 85] a proposé plusieurs solutions pour le problème de contact et d'indentation des corps plastiques. Des solutions similaires pour les contacts élastiques parfaitement plastiques existent pour l'indentation avec des pointes sphériques, pyramides ou coniques. Les méthodes entièrement analytiques sont limitées lorsque l'on considère les comportements non élastiques.

Les solutions analytiques pour un revêtement uniforme existent, dans le cas où le revêtement et le substrat sont élastiques [MEI 68]. Les méthodes intégrales sont également utilisés [GLA 80]. Une procédure permettant d'obtenir une solution analytique complète pour un demi-espace élastique revêtu a été développé par [SCH 00a, SCH 00b]. Aizikovich et al. [AIZ 02] ont aussi travaillé sur des solutions analytiques pour un demi-espace non homogène. Da Silva Botelho et al. [BOT 06] a proposé un modèle analytique permettant de rendre compte du comportement du revêtement sous indentation sphérique et des conditions d'interface entre le revêtement et le substrat.

**Contact avec frottement** Des progrès dans la mécanique du contact étaient associés à l'élaboration de modèles de contact plus réalistes. La définition de la loi de Coulomb (de frottement) est utilisée dans la plupart des solutions analytiques existantes. Une première solution est celle du contact hertzien en glissement. Les champs de contraintes résultant de cette configuration pour un contact cylindrique sont donnés par McEwen [MCE 49] tandis que les contraintes pour un contact sphérique sont données par Hamilton [HAM 66]. Ces solutions sont prolongées aux contacts elliptiques par Sack et Hills [SAC 83a]. Cattaneo [CAT 38] et Mindlin [MIN 49] envisagent une sphère sous chargement normal et tangentiel. La force tangentielle est inférieure ou égale à la limite fixée par la loi de Coulomb dans des conditions de glissement total. La loi de Coulomb doit être respectée à chaque point de la zone de contact. Dans ce cas une zone annulaire de glissement sur les bords du contact sera créée. Mindlin et Deresiewicz [MIN 53] ont également étudié ce contact sphérique lorsque la force tangentielle est une fonction linéaire de la force normale. Le concept de Cattaneo-Mindlin a été étendu par Ciavarella [CIA 98a, CIA 98b] pour des géométries quelconques dans le cas bi-dimensionnel, mais les solutions analytiques sont encore limitées dans le cas tri-dimensionnel.

### 1.4.3.2 Méthodes numériques

L'objectif essentiel de la modélisation des problèmes de contact en fretting, qu'il s'agisse de méthodes analytiques ou numériques, est d'obtenir des résultats les plus exacts possibles et de diminuer le temps de calcul pour évaluer l'état mécanique après un certain nombre de cycles. Nous exposerons brièvement, dans ce qui suit, les principales méthodes pouvant être utilisées pour étudier le fretting ou plus largement les problèmes de contact revêtu en chargement cyclique.

**Méthodes des éléments finis EF** La méthode des éléments finis est une technique numérique pour déterminer des solutions des équations aux dérivées partielles ainsi que des équations intégrales. C'est la méthode de discrétisation la plus utilisée actuellement et elle constitue la méthode de référence en mécanique numérique. Les phénomènes physiques pouvant être pris en compte sont nombreux (dynamique, thermique, plasticité [PEI 05], frottement [RAO 99],

viscosité [CHA 96],...). La littérature sur la résolution du problème du contact par éléments finis est très riche. Anciaux [ANC 09] a présenté une méthode de couplage multi-échelle pour aborder le problème de contact. Les livres de Wriggers et Laursen [WRI 06, LAU 02] constituent des synthèses des aspects liés aux éléments finis en mécanique du contact.

Les méthodes des éléments finis ont été appliquées pour évaluer le champ de contraintes dans un système substrat/revêtement dur sous des charges tangentielles [DIA 94, WON 96]. Diao et Kato [DON 94] ont analysé les distributions de contrainte de vonMises dans les revêtements durs et en glissement élastique. Une répartition elliptique de la pression de contact a été supposée pour l'analyse de la contrainte de vonMises pour différentes épaisseurs de revêtement, des coefficients de frottement et des modules d'élasticité du revêtement et du substrat. La modélisation par EF d'un substrat revêtu a été étudiée par Holmberg [HOL 98] concernant l'effet des propriétés mécaniques de revêtement et de son épaisseur sur son mécanisme de défaillance potentielle. Mohd Tobi et al. [TOB 12] ont intégré l'effet de l'usure sur la modélisation d'un substrat revêtu en fretting en utilisant une simulation EF d'usure incrémentale.

La modélisation de l'usure par éléments finis est largement employée. D'ailleurs son utilisation est assez ancienne [OHM 80]. C.Paulin et C.Mary utilisent une loi d'usure énergétique [MAR 07, PAU 08] dans une simulation d'usure par éléments finis (2D). Ils utilisent une stratégie nommée "wear-box" qui consiste à déplacer les noeuds du maillage EF dans une zone restreinte proche du contact. Cette méthode permet l'utilisation d'un maillage moins fin que les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement. Par contre, elle ne permet pas de définir une dégradation progressive des éléments et peut engendrer des problèmes de vibration parasite à chaque accroissement de la fissure. L'inconvénient principal de ce type de résolution est le temps de calcul et le besoin important en mémoire. Ils le sont d'autant plus que les forts gradients de contrainte à proximité des zones de contact obligent à utiliser un maillage fin.

**Méthodes semi-analytiques SA** Lorsque les solutions analytiques ne peuvent être utilisées, il est possible de discrétiser le problème en une somme de problèmes élémentaires. Ensuite, la solution est la somme numérique des solutions analytiques pour chaque problème élémentaire. Ce type de méthode est dénommé "Semi analytique" (SA). Les premiers modèles semi-analytiques ont été développés pour des problèmes de contact sous chargement statique [BEN 67, PAU 81]. Mais les méthodes de résolution numérique peuvent être différentes d'un auteur [KAL 90](algorithme de Newton-Raphson) à un autre [JAE 05] (algorithme de Gauss-Seidel). Les techniques multigrilles [BRA 90, LUB 91] ont été utilisées comme des techniques accélératrices permettant l'amélioration de ces méthodes. Aujourd'hui, les techniques des transformées de Fourier rapides (FFT) [POL 00b, LIU 00] et la méthode du gradient conjugué (CGM) [POL 99] sont largement utilisées pour améliorer les calculs. L'utilisation de la FFT permet un gain de temps de calcul, mais elle requiert une extension de la taille du domaine de calcul dans toutes les directions. L'utilisation d'une méthode DC-FFT permet de diviser cette extension par 2 [LIU 00]. Avec l'introduction de la non-élasticité et/ou la non-homogénéité, l'utilisation d'une méthode 3D-FFT [ZHO 09] permet une résolution efficace des problèmes tridimensionnels. Les méthodes SA sont quant à elles parfaitement adaptées aux échelles du contact, des revêtements, de la rugosité et de la microstructure, mais nécessitent des développements de modèles. Les domaines sont assez grands pour considérer la rugosité des contacts [AI 99]; les revêtements élastiques d'épaisseur uniforme sont aussi étudiés [PLU 98]. Les phénomènes de frottement [GAL 07b], de la thermo-

élasticité [LIU 01, LIU 02], de la plasticité [JAC 01, ANT 04, ANT 05, NEL 06] et de l'analyse thermo-élasto-plastique [BOU 05, BOU 08] ont été étudiés et ont prouvé l'efficacité des méthodes SA.

La résolution du contact par une méthode semi-analytique permet de ne modéliser que la zone d'intérêt. Les conditions aux limites étant implicitement contenues dans les solutions analytiques utilisées. La sensibilité au maillage est assez faible. Les temps de calcul sont au moins réduits d'un facteur 10 par rapport à un calcul éléments finis à densité de maillage équivalente. Cependant, l'hypothèse d'un domaine semi-infini limite les types de géométries pouvant être modélisées. La méthode n'est également pas adaptée à des problèmes présentant de grandes déformations.

La mise en place de modèles SA reposant sur des techniques numériques performantes permettant la résolution de problèmes dans des temps raisonnables représente donc un véritable défi.

### 1.5 Application au fretting des contacts revêtus

L'étude de la protection contre les dégradations causées par le fretting (l'usure et l'endommagement) induite par l'utilisation des revêtements est un domaine de recherche important dans l'industrie aéronautique.

Nos travaux concernent l'étude d'un contact mécanique élastique inhomogène isotrope. L'objectif est de quantifier les champs de pression et de contraintes d'un matériau élastique isotrope hétérogène, en contact avec un second matériau élastique. La connaissance de la réponse du contact revêtu sous chargement cyclique de fretting requiert une méthode simple et rapide de calcul des grandeurs mécaniques susceptibles de provoquer les dégradations (usure ou endommagement).

Un modèle tridimensionnel d'un corps élastique revêtu, chargé normalement et tangentiellement contre un corps rigide (glissement partiel, conditions de roulement/glissement) a été présenté par Plumet [PLU 98]. Ce type de méthode peut être utilisée pour guider le choix des revêtements et est devenu très classique [O'S 88, LER 89, POL 00a, POL 01, LIU 02, LIU 05, LIU 07]. Bien que la plupart de ces théories tiennent compte d'un contact revêtu sur un substrat élastique, il existe un manque de modèles pour résoudre le problème de dégradation d'un contact élastique revêtu dans des conditions de fretting. Cette thèse se concentrera sur une théorie permettant ce type d'études.

La méthode des éléments finis EF a été largement utilisée par de nombreux chercheurs pour effectuer les études numériques des problèmes élastoplastiques avec des matériaux revêtus. En effet, avec la méthode des éléments finis, un grand nombre d'éléments est nécessaire pour mailler l'ensemble du corps revêtu, ce qui peut augmenter considérablement le calcul. Alors que avec les méthodes SA la prise en compte d'hétérogénéités dans le domaine d'étude est simplifiée en terme de mise en données puisque celles-ci sont définies comme un enrichissement qui vient s'ajouter au domaine initial. Avec la méthode SA, les dimensions du contact, l'épaisseur du revêtement ou même les propriétés matériaux peuvent être balayés entre de larges limites sans aucun problème de convergence et avec un temps de calcul raisonnable.

Cette méthode a vu des progrès considérables ces dernières années ; différents travaux ont été développés au LaMCoS. Gallego [GAL 07a] a proposé un modèle élastique de contact

sous condition de stick-slip. Ce modèle a été étendu au phénomène de fretting-wear [GAL 06] et au glissement partiel [GAL 07b]. Le modèle, dès lors capable de simuler les trois modes de fretting [GAL 10b], a été couplé à un modèle éléments finis de contact aube/disque pour en étudier l'endommagement par fretting-wear [GAL 10a]. Ce modèle a été appliqué aux cas de matériaux élastiques revêtus [WAN 10]. Fulleringer [FUL 11] a étudié durant sa thèse la présence d'un revêtement uniforme et comparé les pressions de contact à celles obtenues par O'Sullivan [O'S 88]. La présence d'hétérogénéités dans un contact sphère/sphère a été introduite et la modélisation appliquée au matériau élasto-plastique revêtu sous des conditions de fretting-wear. Enfin, Leroux [LER 13] a étendu la formulation et a proposé un modèle pour matériau composite avec des fibres discrétisées en plusieurs inclusions sphériques équivalentes, basé sur la méthode de l'inclusion équivalente proposée par Eshelby.

Pour résoudre les problèmes de contact introduisant des géométries complexes, des hétérogénéités matérielles ou des chargements tangentiels, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques de résolution. Si la méthode des éléments finis est la plus utilisée actuellement, les méthodes semi-analytiques présentent une alternative intéressante.

## 1.6 Synthèse

Nous avons pu représenter, au travers de la bibliographie, un état de l'art des connaissances concernant le fretting et les dégradations associées. Nous avons pu constater l'importance de la maîtrise de ces dégradations pour améliorer les performances des pièces mécaniques. Plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés pour étudier la résistance au fretting et au fretting-fatigue de différents matériaux ainsi que pour comprendre l'influence de divers paramètres. En revanche, peu d'études traitent de la modélisation et du calcul des grandeurs mécaniques résultant du chargement cyclique dû au contact revêtu avec débattements.

Nous avons défini une problématique industrielle. Notre étude sera dédiée aux dégradations induites en fretting dans des conditions de glissement total. L'objectif étant donc de prédire numériquement l'usure et la détérioration progressive des propriétés matériaux dues au fretting dans des contacts revêtus. Nous nous basons sur des approches locales et non globales.

Pour la modélisation de l'usure en glissement total, nous considérons les démarches d'Archard et d'énergie dissipée plus simple à formaliser et qui ont montré une grande stabilité pour prédire les cinétiques d'usure.

Pour l'étude de l'endommagement traduit par une dégradation progressive de la rigidité, nous nous basons sur la mécanique de l'endommagement couplée à l'élasticité. Le modèle de Mazars sera adapté pour le problème de contact à traiter.

Le fretting, l'usure et l'endommagement sont des phénomènes cycliques. Il convient alors de pouvoir effectuer des calculs rapides. Les méthodes semi-analytiques sont donc adaptées. La possibilité de discrétiser finement la zone de contact, un des avantages majeurs de la méthode semi-analytique, permet d'appliquer cette méthode à cette étude. Elles permettent de résoudre le contact tridimensionnel, avec des matériaux non-homogènes et des conditions de chargement cycliques, dans des temps très courts et avec un maillage fin.



## Chapitre 2

# Comportement tribologique et usure du contact aube-disque : Validation avec l'expérimental

*Dans ce second chapitre, nous nous intéressons à l'effet de l'usure cyclique induite par des sollicitations de fretting en glissement total sur le comportement d'un contact revêtu. Cette étude est basée sur trois modèles : un modèle de résolution du contact via la méthode semi-analytique, un modèle du comportement revêtement/substrat via la méthode de l'inclusion équivalente et un modèle pour simuler l'usure via une loi énergétique. Une application au cas du contact aube-disque est présentée. Des simulations d'usure sont effectuées sur un contact poinçon-plan en glissement total. Les résultats d'usure sont comparés aux résultats des essais de fretting effectués par l'équipe de Fouvry.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation</b>	<b>43</b>
<b>2.2</b>	<b>Solveur de contact</b>	<b>44</b>
2.2.1	Algorithme de contact	45
2.2.2	Résolution du contact	47
2.2.3	Historique et développement du code	49
2.2.4	Bilan	50

<b>2.3</b>	<b>Modèle d'homogénéisation</b>	<b>50</b>
2.3.1	Méthode et hypothèses	50
2.3.2	Algorithme de résolution	53
2.3.3	Validation	55
2.3.4	Modèle de comportement du système substrat/revêtement	60
2.3.5	Bilan	65
<b>2.4</b>	<b>Modélisation de l'usure : application au modèle aube-disque</b>	<b>65</b>
2.4.1	Loi d'usure	65
2.4.2	Méthodologie de la prédiction d'usure	66
2.4.3	Présentation du problème dans le cadre de l'expérimentation	67
2.4.4	Simulation numérique, résultats et validation	69
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

---

## 2.1 Présentation

Dans le secteur de l'aéronautique, l'usure par fretting est observée aux interfaces aube-disque sur les différents étages du compresseur et de turbine. Les endommagements au niveau de ces liaisons sont critiques et peuvent provoquer une défaillance prématurée de ces composants. Afin d'augmenter la durée de vie de ces composants, des revêtements de protection sont de plus en plus utilisés. Par conséquent, l'étude de la protection contre l'usure via l'utilisation de revêtements est un domaine de recherche important dans l'ingénierie aéronautique.

L'idée principale est de modéliser un test expérimental de "Fretting-Wear" déjà réalisé par l'équipe de S.Fouvry au LTDS, et d'observer l'évolution de l'usure au niveau du contact aube-disque représentant la partie la plus critique du moteur. L'objectif de ce chapitre est donc de comprendre et formaliser le phénomène de l'"usure", dans le cas du contact Ti6242g/Ti17g, sans ou avec un revêtement CoCrAlYSi. Afin d'atteindre notre objectif, trois modèles sont nécessaires :

- un premier modèle pour la résolution du contact via une méthode semi analytique : "*solveur de contact*",
- un deuxième pour la modélisation du revêtement via la méthode de l'*inclusion équivalente* au sens d'Eshelby : "*modèle d'homogénéisation*",
- un troisième pour la modélisation de l'usure cyclique via une loi énergétique : "*modèle d'usure*",

Le solveur de contact permet la résolution du problème de contact en utilisant la méthode semi-analytique de sommation numérique des solutions élémentaires.

La méthode de l'*inclusion équivalente* proposée au sens d'Eshelby est utilisée dans un module d'homogénéisation greffé dans le solveur global du contact pour décrire l'effet des hétérogénéités constituant la couche du revêtement (Section 2.3).

La littérature concernant la modélisation de l'usure est riche. Pour déterminer le taux d'usure, la loi énergétique d'Archard est systématiquement utilisée.

Le travail à faire est d'analyser l'usure du contact aube-disque, en particulier dans le cas revêtu, basé sur une méthode semi-analytique sous la forme d'un code de recherche développé au LaMCoS. Le modèle d'usure est donc couplé avec un modèle de contact normal/tangentiel pour les matériaux élastiques [GAL 10b]. La connaissance des amplitudes de glissement, de la pression et du cisaillement à chaque pas de temps et pour chaque point de la zone de contact, permet d'effectuer une simulation numérique basée sur une loi énergétique de l'usure.

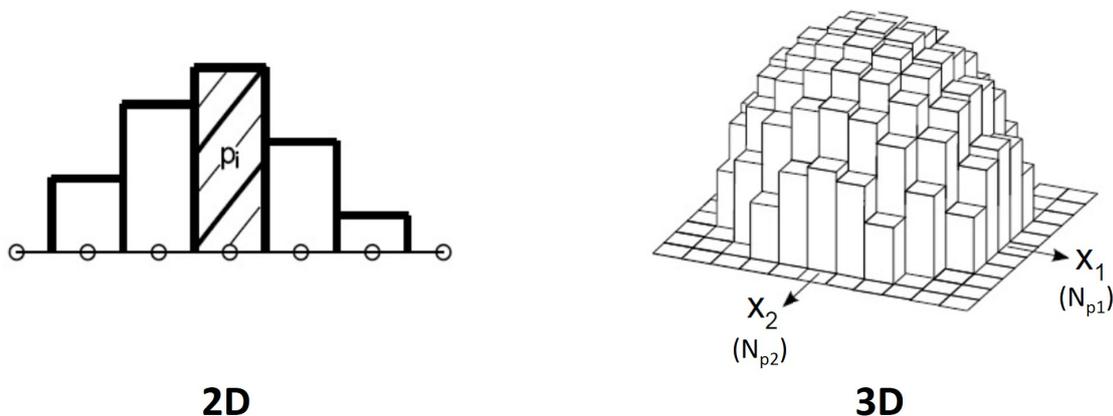
Le solveur de contact et l'algorithme utilisés sont présentés en première partie de ce chapitre. Dans une seconde partie nous présentons la méthode et l'algorithme d'homogénéisation permettant la modélisation d'un revêtement mono-couche ; nous présentons la théorie d'Eshelby et la façon dont elle a été utilisée dans le code afin de modéliser le revêtement (un enrichissement des éléments proches de la surface). Elle met en évidence l'efficacité du code lors du traitement des revêtements dans les contacts sous chargement de fretting. La validation du modèle de revêtement est obtenue par comparaison avec des résultats issus d'un modèle revêtement/substrat basé sur les techniques multigrilles. La dernière partie présente la méthodologie et les résultats de la simulation d'usure ; ceux utilisant la méthode semi-analytique sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus à partir d'un test de fretting effectué au LTDS.

## 2.2 Solveur de contact

Un outil numérique pour la résolution du problème de contact, développé au LaMCoS, est basé sur la méthode de sommation numérique des solutions élémentaires (appelée *méthode Semi Analytique SA*).

La résolution d'un problème de contact consiste à déterminer la zone effective de contact, la pression de contact, les distributions de cisaillement et de glissement et les zones de glissement/adhérence. Les travaux de Hertz [HER 82], qui permettent de donner la solution du contact élastique entre deux massifs de révolution et sans frottement, sont à l'origine de ces théories.

Pour des corps de géométrie plus complexe (rugueux par exemple) et des conditions de chargement également plus complexes, les solutions analytiques ne sont plus suffisantes. Les méthodes semi-analytiques, qui utilisent une discrétisation des surfaces en contact, sont alors une alternative. Le problème tridimensionnel peut être simplifié en supposant que le contact s'effectue entre un corps semi-infini élastique et un corps rigide. En effet, la surface de contact est petite par rapport aux dimensions du corps ce qui justifie l'hypothèse du corps semi-infini, et la définition d'un modèle équivalent élastique permet de considérer un seul corps déformable. Une valeur de la pression est attribuée à chaque point de la surface FIG.2.1.



**FIGURE 2.1:** Distribution de pression. Discretisation avec  $N_{p1} \times N_{p2}$  éléments rectangulaires. Pression supposée constante sur un élément

Les contributions des charges normale et tangentielle supposées uniformes sur un élément rectangulaire sont déterminées par des solutions analytiques ; et en sommant ces contributions élémentaires, la déformation élastique en chaque point à l'intérieur et à proximité de la zone de contact sera dérivée.

Afin de réaliser une résolution numérique du problème de contact, un maillage est nécessaire. Le problème discrétisé doit avoir un maillage de taille constante le long des trois directions de l'espace. La surface maillée est définie par une grille de taille  $N_p = N_{p1} \times N_{p2}$ . Chaque point de la grille représente une zone rectangulaire sur laquelle sont appliqués le champ de pression  $p$  et les champs de cisaillement  $q_1$  et  $q_2$ .

L'objectif est de déterminer l'état élastique (contraintes et déformations) du demi-espace sous l'action d'une contrainte normale  $p$  et des contraintes tangentielles  $q_1$  et  $q_2$  appliquées à la surface  $S$ . Les déplacements en surface et les contraintes en volume sont exprimées par des produits de convolutions discrets entre les coefficients d'influence et la pression ou le cisaillement à la surface de contact. L'écriture peut se faire sous forme matricielle ou indicielle avec des doubles sommations (pour les déplacements en surface) et triple sommation (pour les contraintes en volume). Le problème normal et le problème tangentiel sont donc résolus. La méthode du gradient conjugué (CGM) est utilisée pour résoudre le problème de contact. Si les effets tangentiels sont considérés, le problème de contact normal et tangentiel sont résolus alternativement. Pour accélérer le calcul, les transformées de Fourier rapides (FFT) sont utilisés pour effectuer le produit de convolution discrète entre la pression et la matrice de coefficient d'influence, à chaque itération de la CGM. Le problème de contact est décrit de façon incrémentale pour prendre en compte le trajet de chargement imposé ainsi que les déformations inélastiques en sous couche. Il est nécessaire de discrétiser le massif en volume afin de considérer le comportement volumique des massifs en contact.

### 2.2.1 Algorithme de contact

L'algorithme général du modèle de contact semi-analytique (élasto-plastique) est présenté FIG.2.2. La première étape de l'algorithme de contact ( FIG.2.2 Étape(1)) consiste à initialiser le système et définir les géométries des deux corps en contact ainsi que les propriétés matériaux associées. Nous pouvons avoir comme données d'entrée des déformations ou des contraintes initiales. Ces contraintes initiales peuvent traduire des déformations inélastiques initiales provenant d'une étape de chargement précédente, ou initialement présentes dans une inclusion hétérogène en sous-couche.

Le trajet de chargement est défini : imposer une charge concentrée ou un déplacement de corps rigide.

L'étape suivante consiste à résoudre le problème de contact (CGM *cf.* AnnexeA), piloté en effort ou en déplacement ( FIG.2.2 Étape(2)). A ce stade les distributions de pression, les déplacements et les cisaillements imposés en surfaces, sont déterminés.

En troisième étape ( FIG.2.2 Étape(3)), les contraintes élastiques dans le volume  $\sigma^e$  sont calculées à partir de solutions analytiques élémentaires obtenues en résolvant le problème de Neumann (DC-FFT *cf.* Annexe A).

Les contraintes résiduelles  $\sigma^{res}$  générées par les déformations non homogènes (provenant des hétérogénéités par exemple) sont calculées en utilisant la méthode 2D-FFT ou 3D-FFT ( FIG.2.2 Étape(4-1)). Les contraintes initiales  $\sigma^{ini}$  sont ajoutées aux contraintes élastiques et résiduelles afin d'obtenir la contrainte totale  $\sigma^{tot} = \sigma^e + \sigma^{res} + \sigma^{ini}$ .  $\sigma^{tot}$  est utilisée comme entrée pour l'algorithme "Return mapping" ( FIG.2.2 Étape(4)). Elle est utilisée pour calculer l'incrément de déformation inélastique en chaque point. A partir de là, les nouvelles contraintes résiduelles, si elles existent, sont calculées.

Le nouvel état de contraintes et déformations est connu, la convergence du problème est vérifiée ( FIG.2.2 Étape(5)). Dans le cas d'une convergence du problème, nous passons à l'étape de chargement suivante. Dans le cas contraire, la géométrie de la surface de contact est actualisée par la prise en compte des déplacements résiduels ( FIG.2.2 Étape(5-1)), le problème de contact est alors de nouveau résolu.

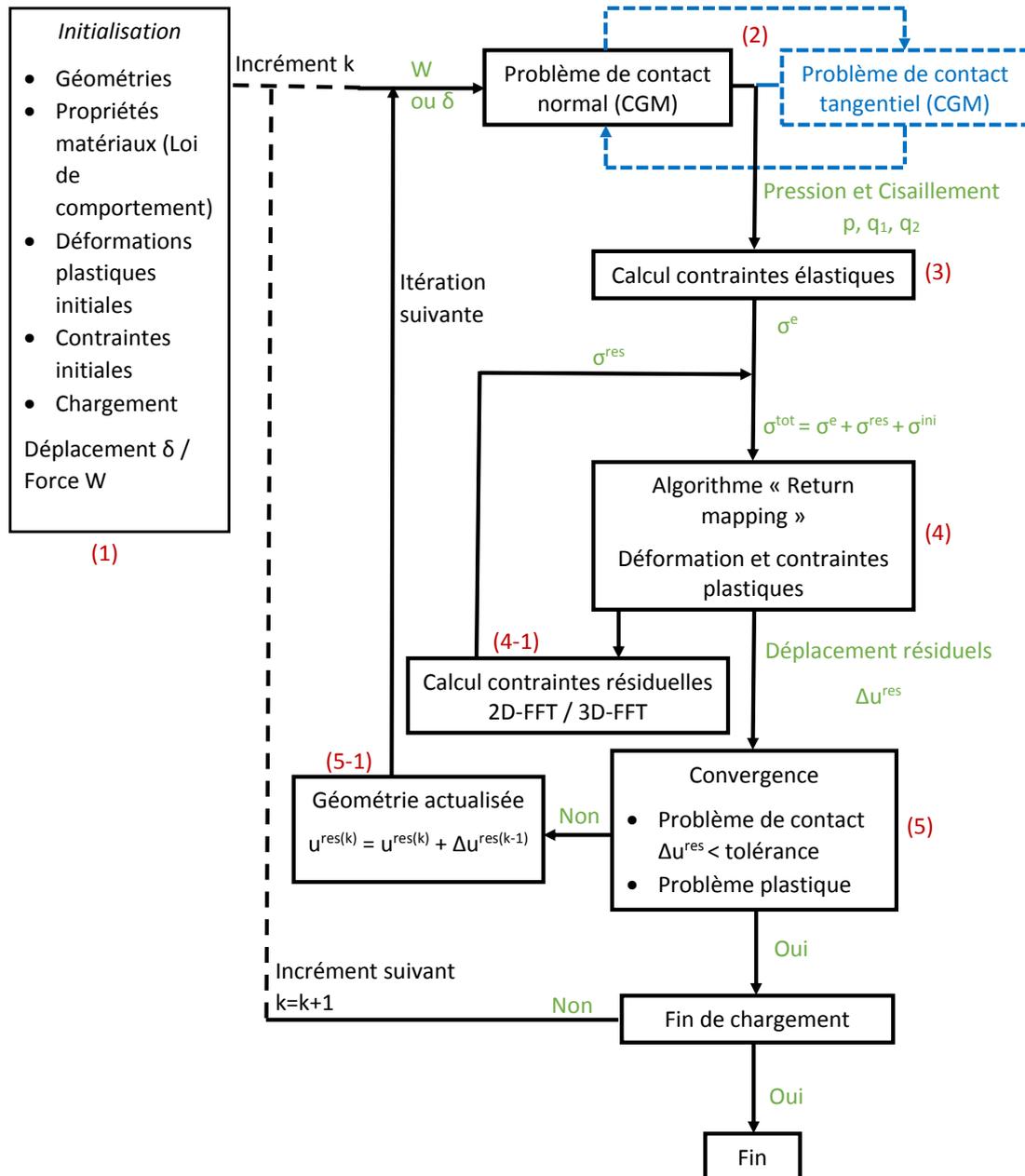


FIGURE 2.2: Algorithme général du modèle de contact semi-analytique

Trois quantités mécaniques, dans ce procédé, nécessitent une résolution numérique : les déplacements en surface, les contraintes et les déformations en volume.

*Les déformations plastiques* sont calculées pour chaque élément de discrétisation en utilisant l'algorithme de "return-mapping".

*Les déplacements élastiques en surface* sont des quantités qui peuvent être calculées directement à un instant donné à partir des pressions et/ou des cisaillement en surface.

*Les contraintes élastiques en volume* sont calculées à partir des pressions et/ou des cisaillement en surface.

Les "coefficients d'influence", rappelés dans l'annexe A, décrivent le lien entre la source et la quantité calculée. Ils sont déterminés analytiquement. Les coefficients d'influence sont appliqués en utilisant la méthode DC-FFT pour réduire le temps de calcul.

En vue d'effectuer des simulations d'usure en fretting, il faut tenir compte de l'évolution du contact en fonction du temps. Le problème de contact sera résolu à différents pas de temps pendant les cycles de fretting.

## 2.2.2 Résolution du contact

La procédure de résolution du contact est divisée en deux étapes : le contact normal et le contact tangentiel. Chaque corps est supposé comme un demi-espace élastique. Les deux corps sont soumis à des déplacements de corps rigides, entraînant une distribution de pression de contact et de la contrainte de cisaillement à l'interface entre les deux corps. Lorsque les matériaux des massifs en contact sont différents, les résolutions du problème normal et du problème tangentiel doivent être couplées du fait des interactions introduites par les contraintes de cisaillement et les pressions de contact. La sommation de ces contraintes donne les forces globales transmises par le contact. La zone de contact  $\Gamma_c$  n'est pas connue à l'avance. Le problème de contact normal est décrit sur une zone de contact potentiel  $\Gamma_p$ . Les surfaces sont initialement définies par leur séparation normale au plan tangent,  $h_1(x,y)$  et  $h_2(x,y)$ . Une géométrie équivalente est définie à partir de la distance relative entre les deux corps,  $h(x,y) = h_1(x,y) - h_2(x,y)$ . A l'intérieur de la zone de contact  $\Gamma_c$ , l'écart "g" entre les deux surfaces en contact est nul et la pression de contact "p" est positive alors qu'à l'extérieur de la zone de contact, la pression est nulle et l'écart est positif. La définition de l'écart "g" comprend la séparation de corps initial  $h(x,y)$ , les déflexions élastiques des surfaces (le déplacement total des deux corps au point  $(x,y)$  de la surface de contact comprenant l'effet de la pression, des cisaillements et des déformations inélastiques)  $u_z(x,y) = u_{z1}(x,y) + u_{z2}(x,y)$  et le déplacement de corps rigide  $\delta_z = \delta_{z1} + \delta_{z2}$ .

**Problème normal** : Pour un problème piloté en effort, l'effort normal  $W$  est connu. Le domaine d'étude  $\Gamma_p$  doit être plus grand que la zone réelle de contact  $\Gamma_c$ , à l'instant  $t$ . Le

système d'équations est défini à l'instant  $t$  par :

$$p(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_c \quad (2.1)$$

$$h(x, y) + u_z(x, y) - \delta_z = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_c \quad (2.2)$$

$$p(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \ni \Gamma_c \quad (2.3)$$

$$h(x, y) + u_z(x, y) - \delta_z > 0 \quad \forall (x, y) \ni \Gamma_c \quad (2.4)$$

$$\sum_{\Gamma_p} p(x, y) \cdot S = W \quad (2.5)$$

**Problème tangentiel :** Lorsque les déplacements tangentiels sont non nuls (une des composantes  $u_{z1}$  et  $u_{z2}$ ), le problème tangentiel doit être résolu. Cela consiste à trouver le domaine  $\Gamma_{st}$  qui définit la zone en adhérence (« stick ») et  $\Gamma_{sl}$  qui définit la zone annulaire de glissement (« slip »), vérifiant :  $\Gamma_c = \Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st}$ . Dans la zone d'adhérence, l'amplitude de glissement  $s = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$  est nulle.

L'amplitude de glissement est fonction des déplacements en surface (la résultante des déplacements élastiques générés par le champ de cisaillement et de pression, et des déplacements résiduels générés par des déformations inélastiques en volume)  $u_\tau^{tot}$  et le déplacement tangentiel de corps rigide  $\delta_\tau$  (une des composantes tangentiels du déplacement de corps rigide,  $\delta_1$  ou  $\delta_2$ ). Les tractions tangentiels de contact (cisaillement)  $q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$  vérifient la loi de frottement de Coulomb. Le système d'équations et d'inéquations à résoudre traduit ici les conditions de contact en stick-slip. Le chargement tangentiel  $Q_\tau$  est connu ainsi que le domaine de contact  $\Gamma_c$  à partir de la résolution du problème normal.

$$q_\tau(x, y) = -\mu \cdot p(x, y) \cdot \frac{\Delta s_\tau(x, y)}{\|\Delta s_\tau(x, y)\|} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{sl} \quad (2.6)$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x, y) - \Delta \delta_\tau = \Delta s_\tau(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{sl} \quad (2.7)$$

$$\|q_\tau(x, y)\| < \mu \cdot p(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{st} \quad (2.8)$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x, y) - \Delta \delta_\tau = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{st} \quad (2.9)$$

$$\sum_{\Gamma_p} q(x, y) S = Q_\tau \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st} = \Gamma_c \quad (2.11)$$

La variable  $q_\tau$  est fonction du champ de cisaillements  $q$ ,  $q_x$  ou  $q_y$ , et  $s_\tau$  fonction des composantes du glissement,  $s_x$  ou  $s_y$ . Le terme  $\Delta$  introduit la variation entre les temps  $t$  et  $t-1$ , par exemple  $\Delta s_\tau = s_\tau^t - s_\tau^{t-1}$ .

**Couplage du problème normal et tangentiel :** Une approche itérative est utilisée pour résoudre le problème de contact, le problème normal et tangentiel sont résolus l'un après l'autre.

1. Le problème normal est résolu en supposant qu'aucune contrainte de cisaillement n'est prise en compte. La zone de contact  $\Gamma_c$  et le champ de la pression  $p_{ij}$  sont déterminés.
2. Le problème tangentiel est résolu en considérant le champ de pression  $p_{ij}$  déterminé précédemment. Les cisaillements  $q_{ij}$ , les glissements  $s_{ij}$ , la zone de glissement  $\Gamma_{sl}$  et d'adhérence  $\Gamma_{st}$  sont obtenus.

3. Si les cisaillements ne sont pas nuls, le problème normal doit être résolu de nouveau en prenant en compte le champ de cisaillement  $q_{ij}$ .

Cette boucle doit être répétée jusqu'à ce que le problème de contact converge. Le problème est considéré "découplé" (couplage d'ordre 0) quand tous les problèmes sont complètement découplés. Les solutions dans chaque direction (x, y ou z) ne dépendent pas de la solution dans une autre direction. Par exemple, le mode I de fretting (sphère glisse dans la direction x) peut être simplifié en considérant que les cisaillements le long de la direction x ne dépendent que des déplacements/efforts tangentiels le long de la direction x.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{q1} \\ u_2 &= u_2^{q2} \\ u_3 &= u_3^p \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour notre étude, nous utilisons un couplage d'ordre 0.

### 2.2.3 Historique et développement du code

Le code SA a été dans un premier temps utilisé pour la résolution des problèmes élastiques. Les méthodes SA sont généralement destinées à des corps semi-infinis, bien que certains développeurs ont réussi à prendre en compte des géométries finies [CHA 12]. Ensuite, à partir des solutions analytiques des contraintes résiduelles d'un cuboïde de déformation constante au sein d'un massif semi-infini, Jacq et al. [JAC 02] ont étudié le problème de contact élasto-plastique. Le solveur SA a été développé et amélioré de plusieurs façons. L'aspect thermique a été introduit par Boucly et al. [BOU 05] et Chen et al. [CHE 08]. Divers autres grands problèmes ont été résolus sur la base du code SA tels que la modélisation de la plasticité et de l'accumulation des déformations plastiques [BOU 05] et la modélisation de l'usure [GAL 06, GAL 07b, GAL 10a, GAL 10b]. Fulleringer et Nélias. [FUL 10] présentent l'effet d'un cuboïde de déformation plastique uniforme dans un demi-espace sur le déplacement tangentiel d'un point de surface. Ils ont cherché les déplacements normaux et tangentiels des points de surface, et ont dérivé les fonctions de Green correspondantes sous forme analytique. Chaise a étudié la simulation de l'impact [CHA 11b] et les phénomènes de grenailage (shot peening) [CHA 12] et du roulement élasto-plastique [CHA 11a]. Ensuite, l'effet de la présence d'hétérogénéités au sein des corps en contact a également été introduit par Leroux, Chen et Zhou [LER 10, CHE 10]. Ce qui a permis l'étude de corps contenant des inclusions, des porosités, un revêtement ou composites [LER 11]. Dans ce cadre Leroux a travaillé sur le problème de stick-slip pour une sphère en contact avec une demi-espace plan contenant des fibres cylindriques unidirectionnelles. La prise en compte de l'anisotropie du matériau et/ou du revêtement a été mis en jeu par Bagault [BAG 12, BAG 13].

Des développements récents permettent la prise en compte de la visco-élasticité [KOU 14a], de l'effet de la présence d'inhomogénéités ellipsoïdales isotropes ou anisotropes de toute orientation sur le problème de contact [KOU 14b]. D'autres modèles SA proposent de modéliser l'impact élastique sur un demi-espace lorsque les effets inertiels sont de premier ordre [TAR 15b], et de prédire la rugosité de surface produite par des phénomènes de "shot pending" en simulant des impacts multiples avec une répartition déterministe [TAR 15a].

Cette thèse est basée sur les méthodes semi-analytiques développés par Jacq, Gallego, Boucly, Fulleringer et Leroux. Elles permettent la modélisation en fretting de matériaux inhomogènes. Nos apports consistent à proposer une méthode d'enrichissement pour modéliser un revêtement. En se basant sur cette méthode et sur notre modèle d'usure énergétique avec une approche locale, nous simulerons une usure non uniforme des surfaces en contact. Les algorithmes de contact et les méthodes numériques principales restent inchangées et ne sont pas détaillés dans ce document (voir [GAL 07a] et [FUL 11]). Cependant, les modèles et méthodes utilisés pour prédire l'usure et l'endommagement par fretting pour matériaux isotropes, avec ou sans revêtement, seront détaillés.

### 2.2.4 Bilan

Un code de contact a été développé dans le cadre des hypothèses classiques de la mécanique des contacts. Des algorithmes de résolution numérique comme la méthode de gradient conjugué (CGM) et les techniques de transformées de Fourier (DC-FFT) sont utilisées pour résoudre efficacement les formulations analytiques élémentaires définies pour un massif semi-infini. Seule la zone utile de contact est discrétisée, permettant ainsi un gain en temps de calcul considérable. Cette méthode permet actuellement de résoudre des contacts en fretting pour des matériaux hétérogènes (composites, contenant des inclusions, des revêtements d'épaisseur uniforme) élastiques. Si nous voulons appliquer cette méthode à l'étude du phénomène de l'usure cyclique pour des matériaux revêtus (revêtement d'épaisseur non uniforme), nous devons disposer de formulations pour la simulation de l'usure et d'un algorithme de résolution qui permet la modélisation du revêtement non uniforme (effet de l'usure). Les matériaux visés dans ce cadre d'étude sont uniquement élastiques endommageables.

La section suivante présente le modèle d'homogénéisation traitant le comportement revêtement/substrat.

## 2.3 Modèle d'homogénéisation

Les algorithmes de contact sont désormais robustes et l'utilisation des techniques semi-analytiques permet aujourd'hui de résoudre les problèmes de contact pour des temps de calcul très raisonnables. Néanmoins les matériaux étaient jusqu'alors supposés élastiques, isotropes et homogènes, ce qui correspond aux hypothèses habituelles de la théorie de Hertz. Pour une modélisation avec des matériaux hétérogènes, nous utilisons une technique d'enrichissement, dans laquelle nous superposons à la solution en élasticité linéaire la contribution d'une ou plusieurs hétérogénéités au sens d'Eshelby. La méthode dite de l'inclusion équivalente, permet de traduire l'effet de la plasticité (l'inclusion est homogène mais incompressible), ou la présence d'inclusions ou d'un gradient de propriétés élastiques.

### 2.3.1 Méthode et hypothèses

La méthode de l'inclusion équivalente est l'une des solutions les plus importantes de l'analyse micro-mécanique ; elle a été présentée par Eshelby en 1957 [ESH 57]. Eshelby considère deux problèmes. Le problème d'hétérogénéités avec des propriétés mécaniques différentes, et le

problème de transformation ou d'inclusions avec des propriétés mécaniques identiques à celles de la matrice mais présentant des contraintes supplémentaires, principalement dues au processus de refroidissement après les traitements thermiques.

- *Problème de transformation (d'inclusion) :*

Une inclusion a les mêmes propriétés matériaux que celles de la matrice. Le problème consiste ici à évaluer les relations du passage "micro/macro" dans un VER représenté par une matrice infinie élastique présentant une inclusion ellipsoïdale élastique. Nous notons ici  $C^I$  le tenseur matériau élastique de l'inclusion et  $C^M$  celui de la matrice FIG.2.3.

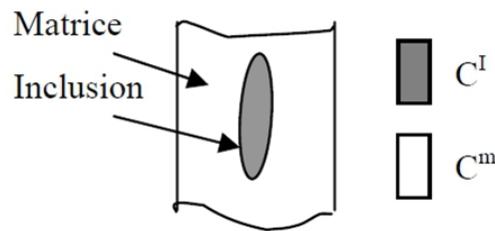


FIGURE 2.3: VER du problème d'inclusion

L'ensemble est supposé homogène en terme de rigidité ( $C^I=C^M$ ), et la matrice et l'inclusion sont supposées libres de tout chargement. Ce départ constitue la configuration de référence du problème de l'inclusion homogène aussi appelé problème d'Eshelby. Ce problème peut être expliqué comme suit : Soit une région "inclusion", de domaine  $\Omega$  d'un milieu infini, homogène, isotrope, et élastique. En l'absence d'un milieu environnant et en lui imposant une déformation uniforme libre et arbitraire, encore appelée "eigenstrain", l'inclusion peut subir des changements d'état (forme, taille,...). Cette transformation n'est pas liée à une contrainte lorsque l'inclusion se déforme indépendamment de la matrice. Par contre, on note que, si la déformation libre était totalement bloquée, alors on ferait apparaître une contrainte dans l'inclusion. Celle-ci serait générée par le retour élastique de l'inclusion dans sa forme initiale de référence. Mais, ceci n'est rigoureusement pas le cas de l'inclusion soumise à "l'eigenstrain" puisque la matrice autour de l'inclusion s'oppose à cette transformation avec sa propre rigidité. Il s'établit un état d'équilibre dans lequel l'inclusion et la matrice sont dans un état de contrainte/déformation homogène mais non nul. Cependant, puisque l'inclusion est un domaine borné et la matrice est infinie, il est important de noter que la déformation induite n'existe dans la matrice qu'au voisinage de l'inclusion. A l'infini, le milieu n'est pas perturbé.

- *Problème d'hétérogénéités :*

On se place ici dans le cas d'une inclusion inhomogène pouvant aussi être désignée comme une hétérogénéité. Une hétérogénéité a des propriétés matériaux différentes du milieu environnant, encore appelé matrice. Cette matrice est soumise à un chargement homogène générant un état de contrainte/déformation à l'infini tel que la loi de comportement est vérifiée loin de l'inclusion. Les hétérogénéités n'engendrent aucune déformation dans le matériau si aucun chargement n'est appliqué. A l'inverse, si la matrice est soumise à un champ de déformation uniforme à l'infini, les déformations induites non nulles seront alors différentes à l'intérieur et à l'extérieur de l'hétérogénéité.

- Méthode de l'"Inclusion équivalente" :

Chaque hétérogénéité (inclusion hétérogène) peut être simulée par une inclusion (homogène) contenant une eigenstrain initiale  $\varepsilon^p$  et une eigenstrain équivalente  $\varepsilon^*$ . Ainsi le problème de l'inclusion hétérogène (Problème A) est équivalent au problème de l'inclusion homogène (Problème B) représenté FIG.2.4.

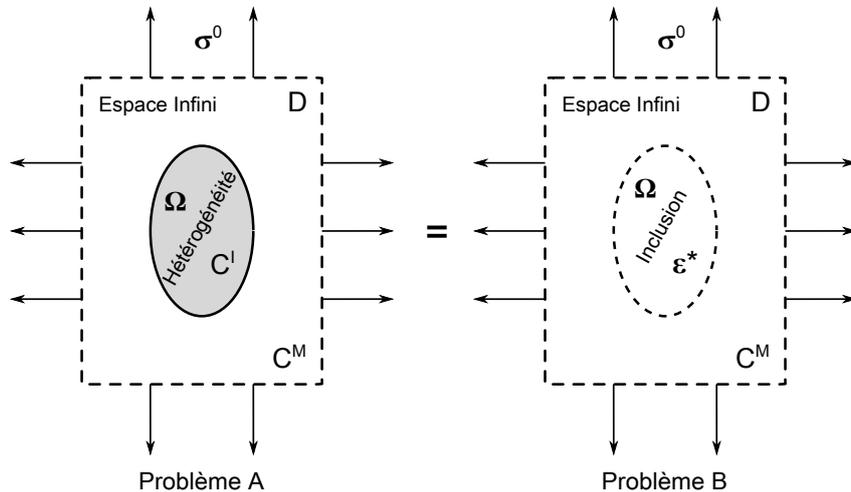


FIGURE 2.4: La méthode de l'inclusion équivalente

L'eigenstrain équivalente représente les différences de propriétés matériaux entre les hétérogénéités et la matrice, les interactions entre les hétérogénéités, et leurs réponses à un chargement extérieur ainsi qu'aux eigenstrains initiales  $\varepsilon^p$  qu'elles contiennent.

Pour un problème d'hétérogénéité, la déformation totale  $\varepsilon$  induite en un point à l'intérieur de l'inclusion est la somme de deux grandeurs : la déformation élastique  $\varepsilon^e$  et l'eigenstrain initiale  $\varepsilon^p$ . Donc, à partir de la loi de Hooke, l'équation suivante peut être établie en tout point à l'intérieur d'une hétérogénéité :

$$\sigma = C^I(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.13)$$

avec  $C^I$  le tenseur matériau élastique.

Pour le problème de l'inclusion équivalente, la déformation élastique  $\varepsilon^e$  dans l'inclusion équivalente se décompose :  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p$ . Ainsi, à partir de la loi de Hooke, le champ de contrainte à l'intérieur de l'inclusion peut s'exprimer comme :

$$\sigma = C^M(\varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p) \quad (2.14)$$

avec  $C^M$  le tenseur matériau élastique de la matrice.

En substituant l'équation (2.13) dans l'équation (2.14), nous obtenons l'équation d'équivalence suivante :

$$C^I(\varepsilon - \varepsilon^p) = C^M(\varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p) \quad (2.15)$$

ou

$$\sigma = C^M(C^I^{-1}\sigma - \varepsilon^*) \quad (2.16)$$

Ainsi, le champ de contrainte  $\sigma$  à l'intérieur de l'inclusion équivalente peut se décomposer en trois parties :

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^p + \sigma^* \quad (2.17)$$

Où  $\sigma^0$  est la contrainte appliquée causée par le chargement externe,  $\sigma^p$  la contrainte causée par l'eigenstrain initiale  $\varepsilon^p$ , et  $\sigma^*$  la contrainte causée par l'eigenstrain équivalente  $\varepsilon^*$ . En utilisant l'équation (2.17), l'équation (2.16) peut être réécrite telle que :

$$(C^I C^{M-1} - I^d)\sigma^* + C^I \varepsilon^* = (I^d - C^I C^{M-1})(\sigma^0 + \sigma^p) \quad (2.18)$$

Où  $I^d$  est la matrice identité.

L'équation (2.18) permet de résoudre le problème d'inclusion hétérogène avec comme seule inconnue l'eigenstrain équivalente  $\varepsilon^*$ . Cependant, ce système ne peut être résolu tant que les relations liant la contrainte équivalente  $\sigma^*$  à l'eigenstrain équivalente  $\varepsilon^*$  ainsi que la contrainte initiale  $\sigma^p$  à l'eigenstrain initiale  $\varepsilon^p$  ne sont pas établies. Pour cela, une méthode numérique doit être mise en place dans le but de déterminer de telles relations et de résoudre le système d'équivalence (2.18). Une relation entre  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^*$  et  $\varepsilon^p$  existe, présentant le tenseur d'Eshelby noté "S" :

$$\varepsilon = S.(\varepsilon^* + \varepsilon^p) \quad (2.19)$$

### 2.3.2 Algorithme de résolution

L'algorithme d'homogénéisation consiste en un module au sein du modèle de contact semi-analytique. Nous définissons comme variables d'entrée, les contraintes locales appliquées à l'infini  $\sigma_0$ , la géométrie de l'inclusion et les propriétés matériaux de la matrice et des hétérogénéités.

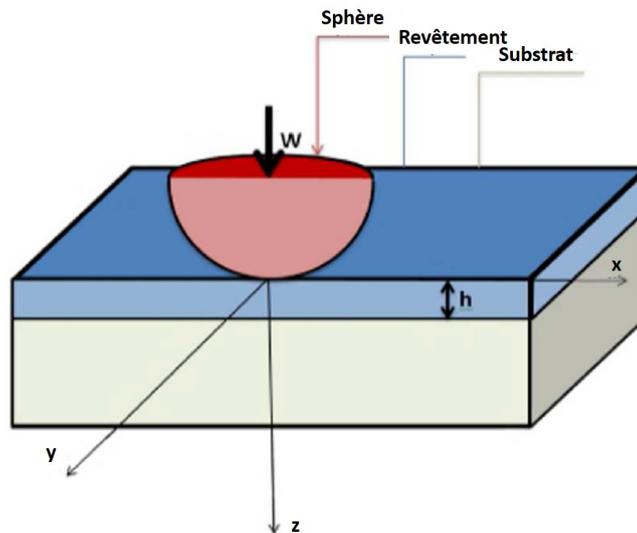
La méthode de l'inclusion équivalente est utilisée pour déterminer les eigenstrains de chaque hétérogénéité. Les contraintes calculées en sous-couche, à partir de la résolution du contact normal et tangentiel, sont utilisées localement à l'intérieur de chaque hétérogénéité pour déterminer l'eigenstrain équivalente. Les surcontraintes en sous-couche sont alors déterminées et ajoutées aux contraintes du contact. La présence d'hétérogénéités dans le voisinage de la surface de contact affecte de manière significative la distribution de la pression de contact et par la suite la distribution du cisaillement et du glissement à l'interface. La géométrie de la surface de contact doit être actualisée par l'ajout d'"eigendisplacements" et le problème sera résolu jusqu'à ce qu'il converge. Il sera donc nécessaire d'établir les relations entre les "eigendisplacements" et les "eigenstrains" de la même manière que pour la recherche de la relation entre les surcontraintes élastiques et les eigenstrains. Une fois la convergence de ces déplacements en surface établie, et étant donné que l'inclusion non-homogène a un impact sur les conditions de contact, la surface de contact doit être mise à jour.

L'algorithme global d'homogénéisation peut être défini par trois étapes :

1. Initialisation
2. Résolution du contact normal et tangentiel, avec calcul des contraintes élastiques en volume
3. Module d'homogénéisation. Il comporte lui même deux étapes : calcul des eigenstrains et des surcontraintes élastiques, suivi du calcul des déplacements élastiques en surface.

Pour plus de détails sur la méthode et l'algorithme le lecteur peut se référer à [LER 13].

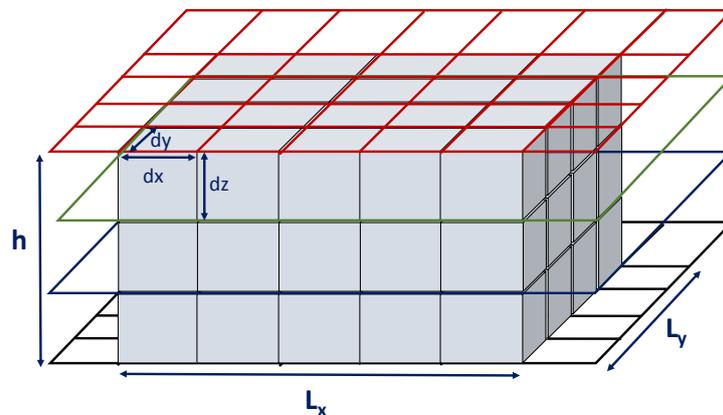
L'idée consiste ici à modéliser une couche mince par un empilement d'hétérogénéités. Une technique permettant la modélisation d'hétérogénéités cubiques tangentes à la surface de contact est nécessaire. Nous utilisons donc, la méthode d'Eshelby pour modéliser une couche mince (FIG.2.5) basée sur un arrangement d'hétérogénéités cubiques (des résultats similaires sont obtenus en considérant un arrangement d'hétérogénéités sphériques).



**FIGURE 2.5:** Un plan semi-infini revêtu

Une partie du domaine sera enrichie de sorte que nous aurons un demi-espace inhomogène (système substrat/revêtement avec des modules de Young différents).

Le revêtement d'épaisseur  $h$  est maintenant défini par de nombreuses hétérogénéités cubiques, de sorte que l'effet de gradient de contact ou les contraintes résiduelles peuvent être pris en compte. Les contraintes locales seront utilisées pour trouver les "eigendisplacements". Cette hypothèse devient vraie si les niveaux des contraintes en dessous de la surface sont correctement décrits par la discrétisation du maillage. Parce que la méthode 3D-FFT envisage une intégration numérique du champ de pression, une petite erreur pourrait être induite en raison d'une mauvaise discrétisation accomplie localement pour des éléments tangents à la surface. Pour cela, il est proposé qu'une couche d'épaisseur " $h$ " soit modélisée avec des hétérogénéités cubiques, ayant la même épaisseur, intégrées dans une matrice. Les dimensions des hétérogénéités doivent être choisies de manière à ce que une hétérogénéité soit contenue dans un élément de maillage. Le revêtement infiniment long et large suivant les dimensions  $x$  et  $y$ , va être représenté par une zone "enrichie" de dimensions finies  $L_x$  et  $L_y$  avec des cuboïdes FIG.2.6.



**FIGURE 2.6:** Un arrangement d'hétérogénéités cubiques

Cette figure montre le schéma de la couche d'épaisseur " $h$ " présentée par un groupe de  $(5 \times 4 \times 3)$  hétérogénéités cubiques.

La prochaine étape consiste à définir ces dimensions et valider notre modèle.

### 2.3.3 Validation

Pour valider notre modèle, deux étapes sont considérées. La première est une validation numérique qui consiste à définir les dimensions de la zone d'enrichissement. La deuxième étape est une comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle de massif revêtu basé sur les techniques Multigrille.

#### 2.3.3.1 Modèle numérique semi-analytique du système substrat/revêtement

Comme représenté sur la FIG.2.6, une zone d'enrichissement est caractérisée par trois dimensions ( $L_x$ ,  $L_y$  et  $h$ ). " $h$ " est l'épaisseur de la couche. Les deux autres dimensions,  $L_x$  et  $L_y$  doivent être déterminées afin d'obtenir un résultat identique à celui obtenu en considérant un revêtement infini suivant  $x$  et  $y$ , et ce pour le meilleur temps de calcul.

Un contact sphère-plan a été choisi comme un compromis entre la simplicité et la représentativité. Une sphère rigide, de rayon  $R$ , est considérée. Elle est pressée contre un plan élastique de propriétés  $(E_2, \nu_2)$  revêtu par une couche  $(E_1, \nu_1)$  -plus ou moins rigide que le substrat- et d'épaisseur " $h$ ", voir FIG.2.7.

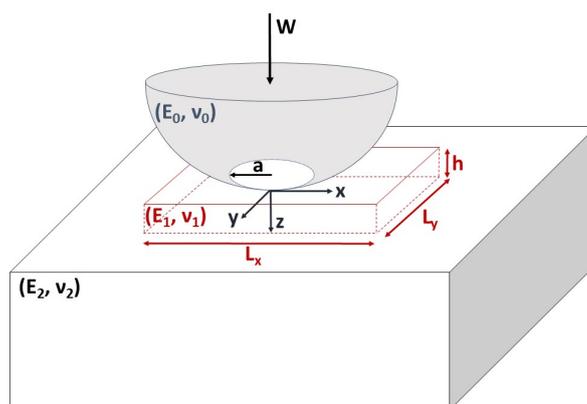


FIGURE 2.7: Modèle 3D du contact Sphère-Plan revêtu

"W" est la charge normale et "a" est le rayon de contact. La configuration du contact est présentée en détail dans le TAB.2.1.

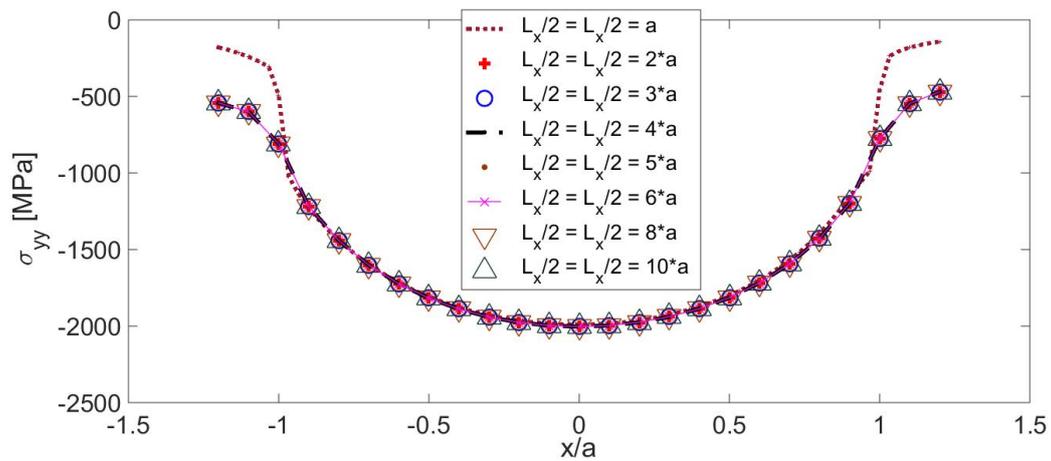
Propriétés des massifs	
Rayons	$R_0 = 0,21mm$ et $R_2 = 2.10^{13}$
Modules de Young	$E_0$ : Rigide et $E_2 = 210GPa$
Coefficients de Poisson	$\nu_0 = \nu_2 = 0,3$
Chargement de Hertz	
Effort normal	$W = 40mN$
Pression de Hertz	$P_0 = 2106,5MPa$
Rayon de Hertz	$a = 3\mu m$
Propriétés du revêtement	
Épaisseur	$h = 0,75\mu m$
Module de Young	$E_1 = 420GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu_1 = 0,3$

TABLE 2.1: Paramètres géométriques et matériaux de l'étude

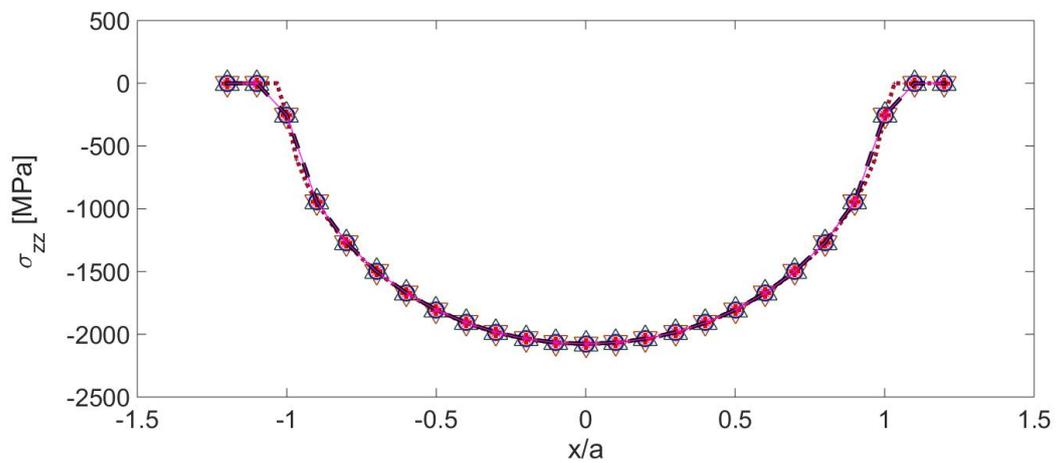
Des différentes simulations, avec un domaine de variation pour  $L_x$  et  $L_y$  entre  $2a$  (un temps de calcul d'environ 20 min) et  $20a$  (un temps de calcul d'environ 90 min), sont réalisées. Le maillage est considéré avec des dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  identiques ( $dx = dy = dz = 0,15\mu m$ ). Les dimensions optimales sont les valeurs inférieures pour lesquelles les courbes se superposent. Les résultats sont présentés en termes de contraintes normales et tangentielles dans la figure FIG.2.8, en surface  $z = 0$ , et dans le plan  $y = 0$ .

Pour les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xy}$ , une différence est observée que pour une zone de dimensions  $L_x/2 = L_y/2 = a$ . Les courbes se superposent pour les autres dimensions de la zone enrichie.

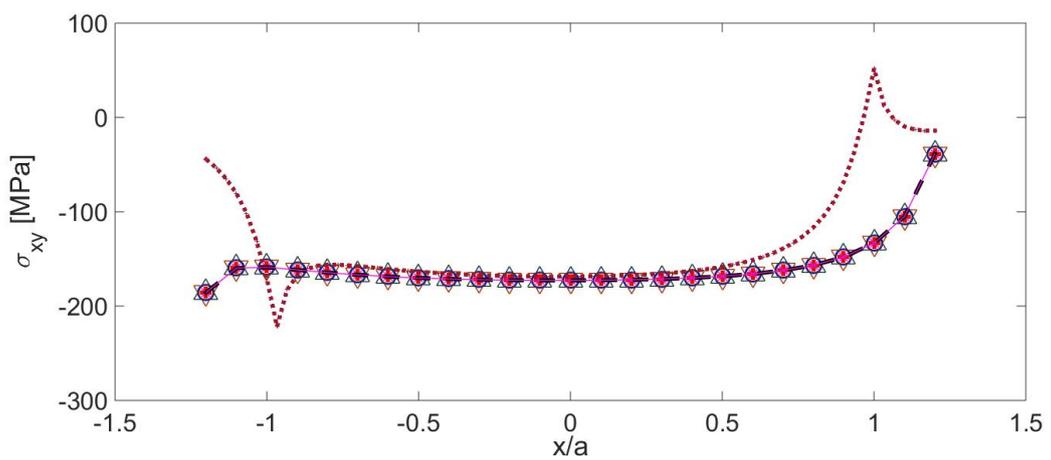
Il est observé que les champs de contraintes présentés sont similaires pour des zones d'enrichissement supérieures ou égales à la zone de dimensions  $(4a \times 4a \times h)$ . Ainsi, une zone d'enrichissement avec les dimensions  $(4a \times 4a \times h)$  et un temps de calcul d'environ une heure est choisie comme un compromis entre la précision et le coût de calcul.



(a)



(b)



(c)

**FIGURE 2.8:** Composantes des contraintes en fonction de la direction  $x$  adimensionnée, en surface  $z = 0$ , et dans le plan  $y = 0$ . (a) : Distribution de la composante  $\sigma_{xx}$ . (b) : Distribution de la composante  $\sigma_{zz}$ . (c) : Distribution de la composante  $\sigma_{xz}$ .

## 2. Comportement tribologique et usure du contact aube-disque : Validation avec l'expérimental

Ce domaine de simulation ( $4a \times 4a \times h$ ) est discrétisé en petits éléments cubiques comme détaillé sur la figure FIG.2.9 et le tableau TAB.2.2.

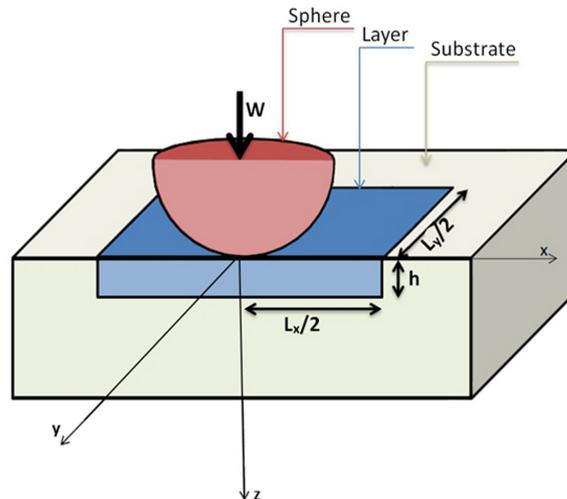


FIGURE 2.9: Coupe suivant le plan (x,z) à  $y = 0$

Propriétés de la couche d'enrichissement	
Dimensions	$L_x = L_y = 4a$
Épaisseur	$h = 0,75\mu\text{m} = 0,25a$
Maillage	
Pas de maillage	$dx = dy = dz = 0,150\mu\text{m}$
Nombre d'éléments	$80 \times 80 \times 5$

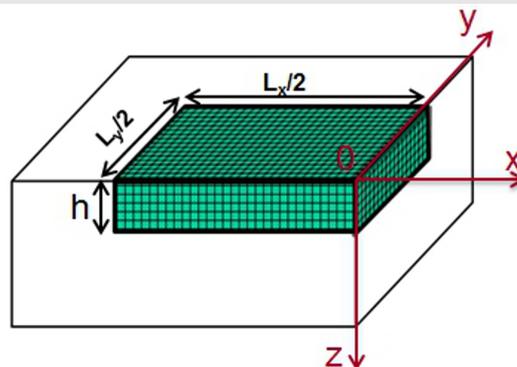
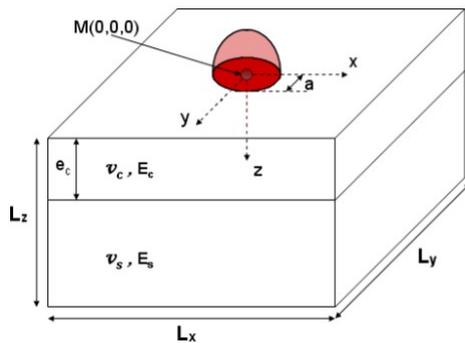


TABLE 2.2: Propriétés de l'enrichissement

### 2.3.3.2 Modèle massif revêtu basé sur les techniques Multigrilles

Les résultats précédents ont permis de définir la taille minimale de la zone d'enrichissement à respecter pour que les résultats soient indépendants.

L'étape suivante est une comparaison des résultats obtenus avec notre modèle et ceux issus d'un modèle de massif revêtu 3D basé sur les techniques MultiGrille 3D (MG) [BOF 12] (FIG.2.10).



Validation : massifs revêtus

Dimensions du solide :  $L_x * L_y * L_z$

Nombre de niveaux : 8

Pas de maillage sur le niveau grossier : 1

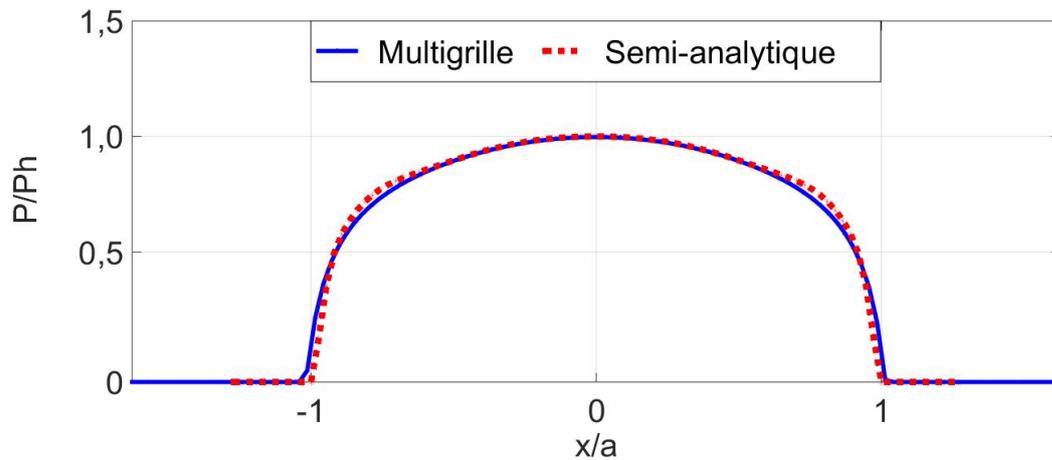
Stratégie de calcul globale

FIGURE 2.10: Modèle massif revêtu basé sur les techniques Multigrilles [BOF 12]

Les techniques multigrilles, développées par Brandt [BRA 84], sont un outil numérique permettant l'accélération de la convergence en résolvant les différentes fréquences d'erreur de la solution sur plusieurs niveaux de grille. Ils permettent de considérer et de résoudre des systèmes dits larges comportant un nombre très élevé de points, et par conséquent de degrés de liberté. Une technique, dite technique du raffinement local de maillage, est souvent utilisée avec les méthodes multigrilles dans le but de diminuer le nombre de degrés de liberté de façon importante sur les grilles fines. Elle consiste à effectuer des calculs selon une méthode choisie, sur un maillage doté d'une plus grande finesse uniquement sur des domaines identifiés. Le modèle MG est un modèle élastique 3D pour les matériaux hétérogènes basé sur les équations de Lamé pour les médias inhomogènes. Ces équations sont discrétisées en utilisant les différences finies de second ordre.

Le calcul correspond à une sphère pressée contre un système revêtement/substrat. Les conditions de chargement et géométriques sont identiques à celles utilisées avec le modèle SA. La charge normale est maintenue constante  $W = 40mN$ . Le revêtement est considéré avec des propriétés élastiques  $E_2 = 2E_1 = 420GPa$  et  $\nu = 0,3$  et une épaisseur  $h = 0,75\mu m$ . Le problème de contact MG est résolu numériquement avec une discrétisation  $dx = dy = dz = 0,078125\mu m$  sur le niveau le plus fin et le problème SA avec une discrétisation  $dx = dy = dz = 0,15\mu m$ .

La comparaison entre les résultats du code Semi-Analytique (SA) et du code MultiGrille (MG) en termes de pression est donnée sur la FIG.2.11. Le résultat SA corrèle bien le résultat MG.



**FIGURE 2.11:** Comparaison résultats semi-analytique/multigrille en terme de pression

Les contraintes ont aussi été validées par comparaison avec des solutions MG FIG.2.12 (b), (c) et (d). Plusieurs composantes sont testées : contraintes normales, de traction et de cisaillement (délimitation à l'interface). Il est possible de vérifier les contraintes en surface (sur le plan  $z=0$ ) le long des axes  $x=0$  et  $y=0$ . Les contraintes peuvent aussi être validées en profondeur, pour différents valeurs de  $z$ , dans le plan  $y = 0$ . Un léger décalage est visible à cause de la taille du maillage et de la profondeur à laquelle les contraintes sont calculées qui diffèrent entre les deux méthodes.

Notre modèle permettant de résoudre le problème de contact en tenant compte de la présence du revêtement est validé. L'étape suivante consiste à étudier le comportement d'un contact revêtu sous chargement thermique ou thermomécanique, avant d'attaquer la modélisation de l'usure.

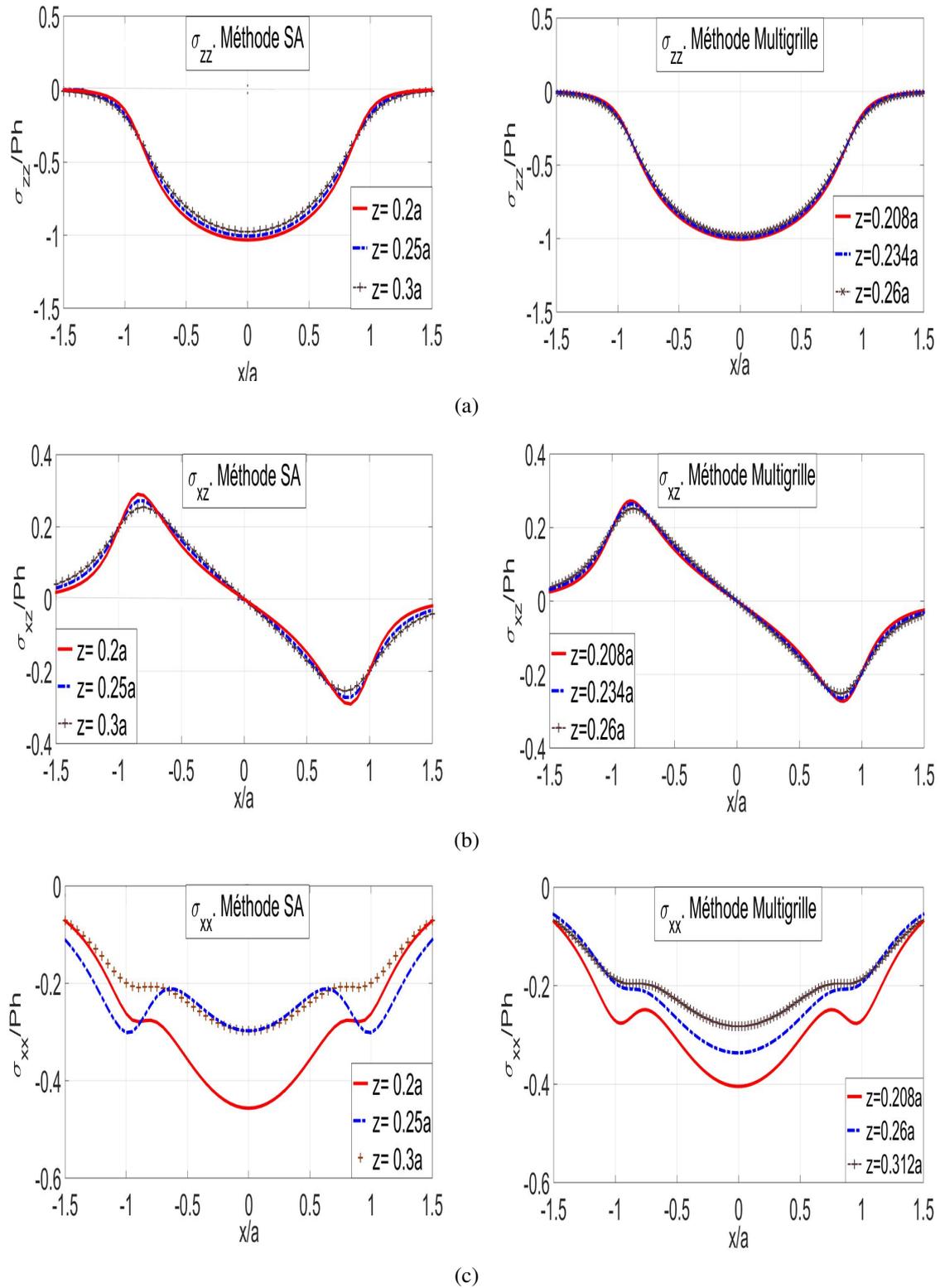
### 2.3.4 Modèle de comportement du système substrat/revêtement

L'application industrielle visée est l'analyse du comportement de pièces revêtues à haute température (450 °C). L'objectif de cette section est de prendre en compte un chargement thermique et/ou thermomécanique appliqué à un massif revêtu. La prise en compte du chargement thermique (température) est effectuée via des contraintes initiales (ou résiduelles) d'origine thermique dans les hétérogénéités.

#### 2.3.4.1 Contraintes initiales d'origine thermique dans un contact revêtu

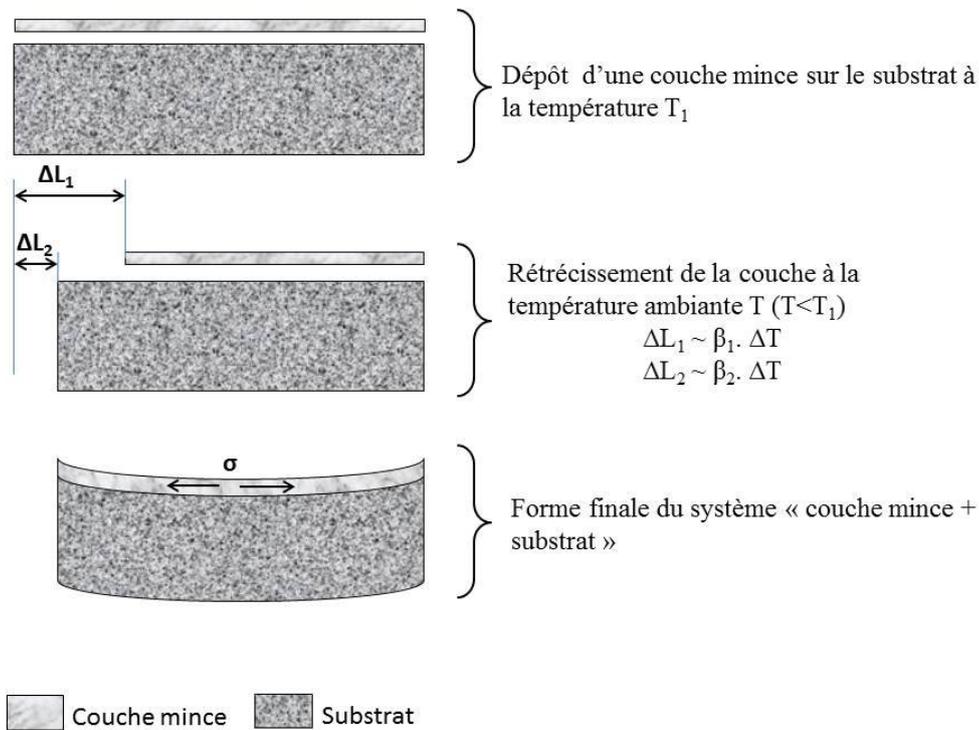
L'existence des contraintes et des déformations résiduelles dans les hétérogénéités définissant la couche de revêtement peut affecter le comportement du contact étudié. Nous pouvons identifier des *contraintes d'origine thermique* comme des contraintes internes, qui sont dues à la différence entre les coefficients de dilatation thermique des couches minces et du substrat.

**Contraintes d'origine thermique :** Les matériaux utilisés à haute température subissent toujours une variation thermique, ne serait-ce qu'au cours du refroidissement. En effet, lorsqu'un



**FIGURE 2.12:** Comparaison résultats semi-analytique/multigrille, dans le plan  $y = 0$ . (a) : Distribution de la composante  $\sigma_{zz}$ . (b) : Distribution de la composante  $\sigma_{xz}$ . (c) : Distribution de la composante  $\sigma_{xx}$ .

système revêtement/substrat est soumis à un chargement thermique, des contraintes se développent du fait de la différence des coefficients de dilatation thermique du substrat et du dépôt ; ces contraintes peuvent être néfastes à la bonne tenue des couches, FIG.2.13.



**FIGURE 2.13:** Création des contraintes thermiques dans une couche mince

Dans le cas du système présenté sur la FIG.2.13, en unidimensionnel la contrainte dans la couche mince vaut :

$$\sigma = \frac{E}{1 - \nu} \cdot \epsilon_{\Delta}^{th} \quad (2.20)$$

où  $\epsilon_{\Delta}^{th} = \Delta\beta \cdot \Delta T$  est la déformation thermique différentielle ;  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$  et  $\Delta T = T_1 - T$  ;  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson de la couche mince ;  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont respectivement les coefficients de dilatation thermique de la couche mince et du substrat ;  $T_1$  la température de dépôt et  $T$  la température ambiante.

#### 2.3.4.2 Modèles de comportement mécanique et thermomécanique

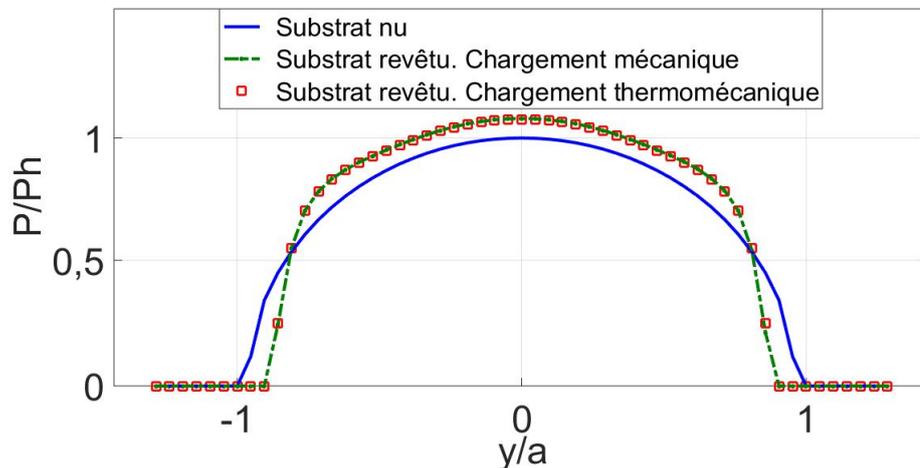
Basé sur le modèle présenté dans la section précédente, le problème du contact est résolu sous chargement mécanique et thermomécanique. Nous imposons un chargement normal constant  $W = 0,04N$ . La charge thermique est imposée en affectant à chaque hétérogénéité un eigenstrain de dilatation uniforme :

$$\epsilon_{ij}^{th} = (\beta_2 - \beta_1)_{ij} \cdot (T_2 - T_1)_{ij} \cdot \delta_{ij} ; (i,j=1,2,3)$$

où  $T_2$  est la température du revêtement et  $T_1$  est la température du substrat ;  $\beta_2$  et  $\beta_1$  sont respectivement les coefficients de dilatation thermique du revêtement et du substrat ;  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  sinon  $\delta_{ij} = 0$ .

Pour nos simulations nous considérons  $\varepsilon^{th} = 1,2 \cdot 10^{-3}$  avec  $(T_2 - T_1) = 480K$  et  $(\beta_2 - \beta_1) = 2,5 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

Le revêtement est deux fois plus rigide que le substrat ( $E_1 = 2 \times E_0 = 420GPa$ ) avec un coefficient de poisson  $\nu_1 = 0,3$ . Une épaisseur  $h = 0,25 \times a = 0,75\mu m$  est considérée sur le revêtement. Le champs de pression est alors déterminé. Une comparaison de la distribution de la pression pour les différents cas (substrat nu, substrat/revêtement sans ou avec chargement thermique) est effectuée pour analyser l'effet des deux types de chargement : mécanique (enrichissement) et thermomécanique (enrichissement+eigenstrain thermique). Les résultats sont présentés sur la FIG.2.14.

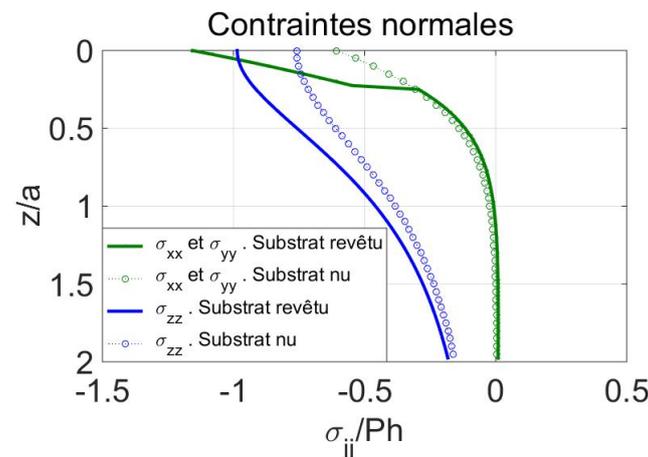


**FIGURE 2.14:** Effet des différents types de chargement sur la distribution de la pression

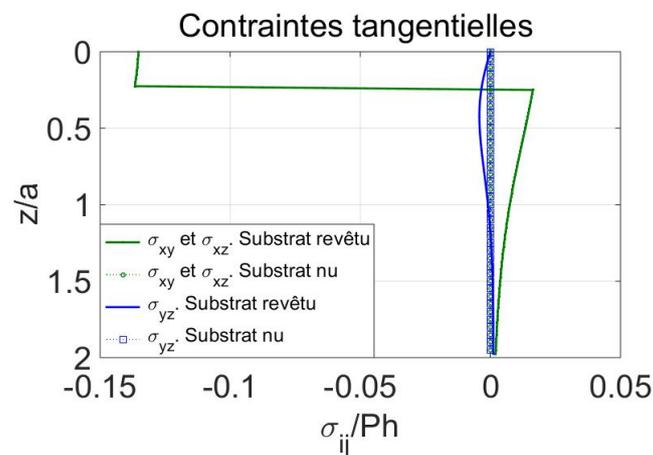
Les points à noter sont :

- Avec un revêtement plus rigide on observe une augmentation de 14% de la pression de contact maximale et une diminution de 13% du rayon de contact .
- Le chargement thermique ne modifie pas la distribution de la pression

La distribution des contraintes normales et tangentielles dans le cas d'un substrat nu et d'un substrat revêtu dont l'épaisseur du revêtement équivaut à 0.25 fois le demi-rayon de contact et dont le module de Young du revêtement est 2 fois plus élevé que celui du substrat est présentée en fonction de la profondeur adimensionnée ( $z/a$ ) sur la FIG.2.15.



(a)



(b)

**FIGURE 2.15:** Effet de l'enrichissement ( $E_1/E_2 = 2$ ,  $h = 0,25a$ ) sur la distribution des contraintes. Profils des contraintes normales et tangentielles en fonction de la profondeur adimensionnée ( $z/a$ ) au centre du contact ( $x = y = 0$ ) (a) : Contraintes normales (b) : Contraintes tangentielles

Des discontinuités apparaissent au niveau de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$  et des contraintes normales  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . Les autres composantes du tenseur contrainte sont continues à la traversée de toute surface, à savoir les composantes  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zz}$ . Le saut de propriétés matériaux à l'interface est à l'origine de la discontinuité dans les contraintes.

Nous avons pu constater que le chargement thermique n'a aucun effet sur la distribution de la pression d'un système substrat/revêtement. Par conséquent, et étant donné que la loi d'usure est une fonction de la pression, le chargement thermique n'aura pas d'effet sur l'usure sur cette gamme de variation de température. Donc, dans les simulations de l'usure nous ne prendrons pas en compte l'effet thermique.

### 2.3.5 Bilan

La méthode retenue ici est basée sur la théorie d'Eshelby également appelée la méthode de l'inclusion équivalente. L'algorithme global d'homogénéisation a été détaillé. Enfin, cette méthode est utilisée en tant que technique d'enrichissement afin de modéliser le revêtement. L'intégration du modèle dans le code SA a été validée par comparaison avec un modèle basé sur les techniques Multigrille.

Le procédé va maintenant être utilisé pour la modélisation de l'usure d'un contact revêtu soumis au fretting en glissement total.

## 2.4 Modélisation de l'usure : application au modèle aube-disque

L'usure implique des coûts d'entretien importants dans l'industrie aéronautique. Ainsi, il paraît nécessaire d'améliorer la fiabilité des composants à travers non seulement une analyse matérielle, mais aussi une analyse de la mécanique de contact. Pour obtenir des résultats de simulation réalistes, deux points clés sont nécessaires :

- un outil de calcul tridimensionnel, rapide et robuste,
- une loi d'usure précise.

### 2.4.1 Loi d'usure

Plusieurs démarches d'analyse de l'usure existent. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'approche énergétique utilisant la dérivée de la loi d'Archard, actuellement la plus utilisée dans le domaine industriel. Le frottement est un phénomène dissipatif, et une partie de l'énergie dissipée par frottement est consommée par différents processus qui conduisent à l'usure [KAP 01]. En 1953 Archard [ARC 53] a publié sa célèbre équation qui permet de quantifier l'usure d'un contact glissant :

$$V = \alpha_{Archard} \cdot s \cdot \frac{P}{K} \quad (2.21)$$

où  $\alpha_{Archard}$  est le coefficient d'usure. Le volume usé  $V$  est une fonction de l'amplitude de glissement  $s$ , du chargement normal appliqué  $P$  et de la dureté du matériau le plus mou  $K$ . Le coefficient de frottement ne figure pas dans cette équation. Fouvry et al. [FOU 96a, FRI 03, FOU 04, PAU 05, PAU 06] ont développé une loi de l'usure d'Archard modifiée :

$$V = \alpha \cdot \sum_N E_d \quad (2.22)$$

avec  $E_d$  l'énergie dissipée par frottement, et  $N$  le nombre de cycles d'usure.

L'énergie dissipée  $E_d$  est calculée pour chaque cycle ( $i$ ) en calculant l'aire de la boucle de fretting :

$$E_d(i) = \int_i \delta(t) \cdot Q(t) dt \quad (2.23)$$

Cette loi d'usure prend en compte le coefficient de frottement ainsi que la charge tangentielle. Elle a été établie pour des sollicitations de type fretting. Le volume d'usure est associé à

l'énergie dissipée par frottement et à un coefficient d'usure. Cette approche énergétique fournit des résultats plus satisfaisants, particulièrement dans le cas d'un coefficient de frottement non constant. Dans certains cas, l'usure peut être estimée comme une fonction linéaire du travail de cisaillement. La prédiction de l'usure par application de la loi d'Archard dans un code Éléments Finis (EF) a été accompli par Podra et Andersson [POD 99] et McColl *et al.* [MCC 04, DIN 04]. Les modèles d'usure, utilisant des méthodes semi-analytiques, ont été également développés par Chow *et al.* [CHO 78]. Toutefois, sans des techniques d'accélération, le calcul n'est pas assez rapide pour être utilisé pour des applications industrielles. Murty *et al.* [MUR 04] ont utilisé une méthode rapide quasi-analytique pour étudier l'usure du contact aube/disque.

Ce travail présente une méthode différente pour prédire et étudier l'usure des surfaces en fretting, en se basant sur le travail de Fouvry *et al.* [FOU 96a, FOU 97b, FOU 01, FOU 04, LIS 05]. La méthode de prédiction d'usure sera détaillée dans ce qui suit.

### 2.4.2 Méthodologie de la prédiction d'usure

La méthode considérant une loi d'usure de type énergétique, issue des travaux de Fouvry, est implémentée dans le modèle semi-analytique que nous avons développé. Nous nous plaçons dans des conditions de glissement total qui sont les conditions les plus critiques en terme d'usure et pour lesquelles l'usure est de plus l'endommagement principal. Le centre de pression et les amplitudes de glissement locales sont supposés constants pendant les cycles de fretting.

Les données d'entrée du problème sont :

Pour les corps en contact :

- Les géométries et les propriétés des matériaux des deux corps en contact
- L'écart initial entre les deux corps
- La pression maximale initiale  $p$  [MPa]

Pour la loi de l'usure :

- $N_{max}$  : le nombre maximal de cycles
- $t_{max}$  [mm] : la valeur maximale de la profondeur d'usure à enlever à chaque itération (l'incrément d'accélération)
- $WP[-]$  : le coefficient de répartition de l'usure
- $\alpha$  [mm<sup>3</sup>/J] : le coefficient d'usure

Les conditions de chargement et conditions aux limites.

Pour chaque cycle, l'énergie dissipée  $E_d$  est calculée en chaque point. Elle correspond au produit de la contrainte tangentielle ( $\mu.p$ ) avec le glissement ( $s$ ) ; dans des conditions de glissement total.

$$E_d(i) = \sum_{k=1}^N \mu \cdot p_k \cdot s_k \quad (2.24)$$

La profondeur de l'usure  $\Delta h$  pour un seul cycle est calculée en chaque point selon une loi d'usure appropriée :  $\Delta h = f(E_d) = \alpha \cdot S \cdot \sum_N \delta_g(N) E_d(N)$ .  $S$  est la surface,  $\delta_g$  est l'amplitude de glissement et  $N$  est le nombre de cycles.

La valeur est ensuite multipliée par l'incrément du cycle d'usure  $\Delta N$ , et la géométrie est mise à

jour avant le calcul de contact et de l'usure suivant (Boucle 2).

Dans le cas où cette usure est répartie entre les deux surfaces en contact, un coefficient de répartition  $WP$  est utilisé.  $WP$  est choisi dans ce cas égal à 0.5. Ce processus incrémental est stoppé soit lorsque :

- un nombre de cycles  $N_{max}$  est atteint,
- une valeur de profondeur d'usure est atteinte.

Enfin, la géométrie finale et la distribution de l'usure sont déterminées. La procédure est détaillée dans l'algorithme FIG.2.16.

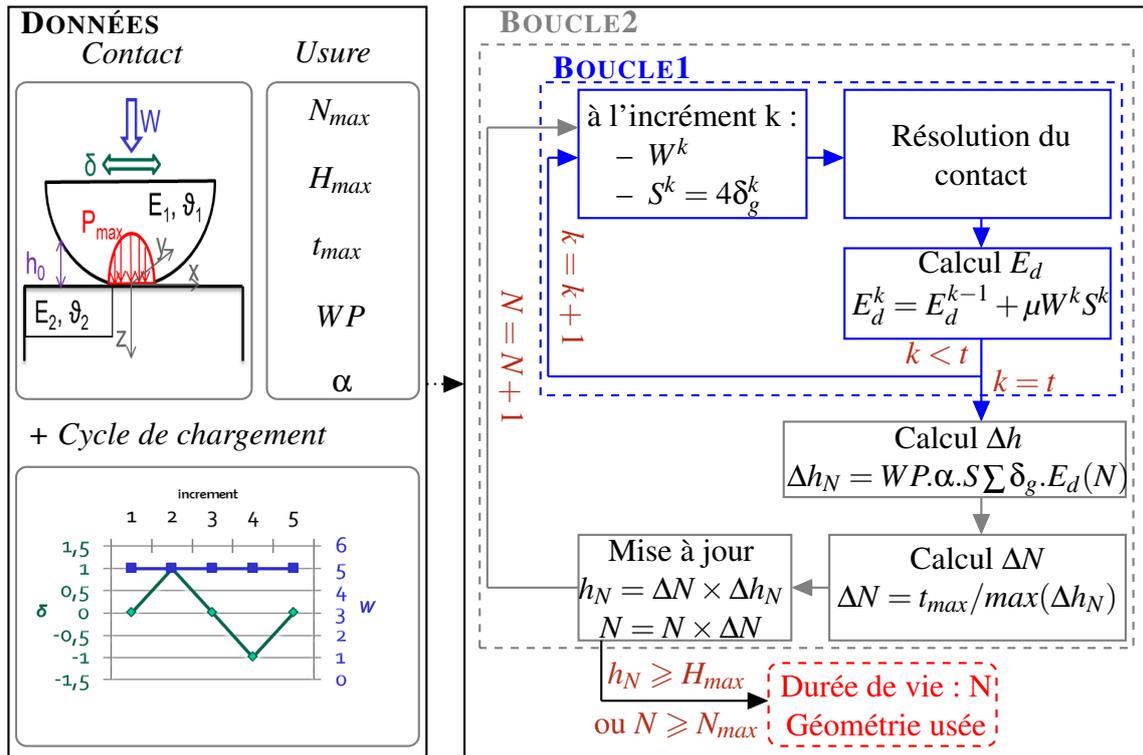


FIGURE 2.16: Algorithme de prédiction de l'usure

L'avantage de cette méthodologie repose sur une approche locale de l'usure. En effet, la simulation est réalisée à l'échelle des hétérogénéités et permet donc d'obtenir un profil quelconque de surface usée.

Notre but est de reproduire les conditions expérimentales pour un contact aube-disque sous sollicitations de fretting. La première étape consiste à reproduire les conditions expérimentales, puis à les simuler via cette méthodologie.

### 2.4.3 Présentation du problème dans le cadre de l'expérimentation

Les travaux expérimentaux [PET 13] ont été réalisés à l'ECL. Ils consistent en un test de fretting pour un contact poinçon-plan. Les dimensions des éprouvettes, les matériaux et les conditions de chargement ont été définis afin d'être les plus représentatifs du contact aube-disque ( FIG.2.17). Pour des raisons de confidentialité, toutes les dimensions ne peuvent pas être données.

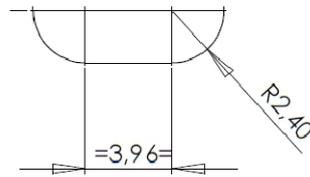


FIGURE 2.17: Profil du poinçon [mm] dans le plan (x,z)

Les matériaux utilisés sont représentatifs du contact aube-disque. Deux alliages de titane Ti6242g et Ti17g ont été sélectionnés. Le disque, en Ti17g, est représenté par l'éprouvette plane, soumise aux efforts combinés de fretting et de fatigue. L'aube, en Ti6242g, est représentée par le poinçon, sans ou avec un revêtement CoCrAlYSi. Ces deux configurations sont présentées FIG.2.18.

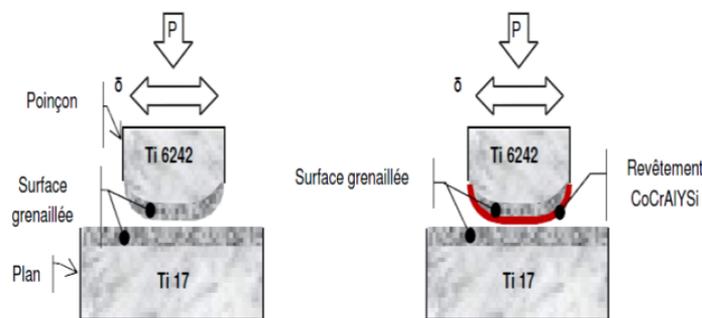


FIGURE 2.18: Configuration du contact des essais de fretting

Les essais ont été menés pour une amplitude de glissement  $\delta_g$  de 100 micromètres. Cette valeur de glissement est représentative de celle observée lors des cycles de glissement total se produisant dans le moteur. Le coefficient de frottement n'est pas constant durant l'expérience. Cette expérience a mis en évidence l'usure du contact revêtu et non-revêtu. Elle a permis de souligner l'importance de l'usure physique sur le plan, alors qu'il n'y a pas d'usure apparente. L'évolution du coefficient de frottement a été enregistré pour les deux cas, revêtu et non-revêtu. Il est à noter que le coefficient de frottement en condition de glissement total est modifié par la présence du revêtement. Le coefficient d'usure a été également déterminé et les valeurs déterminées pour les deux cas sont différentes. Soit  $\alpha_{ref} = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{mm}^3/\text{J}$  le coefficient d'usure asymptotique pour le contact non-revêtu. Deux lois d'usure avec des cinétiques d'usure différentes sont définies pour le contact non revêtu et le contact revêtu.

- Loi d'usure pour le contact non revêtu : une cinétique d'usure bi-linéaire a été considérée.
- Loi d'usure pour le contact revêtu : une cinétique d'usure linéaire a été considérée.

Du point de vue de l'usure physique du plan, il est constaté que le revêtement apporte une amélioration. En effet, la profondeur de l'usure dans le cas revêtu (45 micromètres après 20 000 cycles) a été réduite de plus de moitié par rapport au cas non-revêtu (100 micromètres après 20 000 cycles).

Dans la section suivante, la simulation de ces essais va être réalisée à l'aide du modèle que nous avons développé. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux va être réalisée pour valider notre modèle.

## 2.4.4 Simulation numérique, résultats et validation

Notre modèle SA permet de simuler numériquement une usure au niveau local en se plaçant à l'échelle des cellules du maillage. Chaque cellule comporte un cuboïde. Ainsi, en fonction de la valeur du critère énergétique, la surface du corps (poinçon, plan ou quelle que soit sa géométrie) évolue spatialement et temporellement.

Dans une première partie, l'influence des paramètres du modèle sur le profil d'usure est testée afin de vérifier l'indépendance du résultat en fonction de ces paramètres. Ensuite, dans une deuxième partie, les profils numériques et expérimentaux sont comparés.

### 2.4.4.1 Influence des paramètres

L'objectif de cette étude est de présenter un moyen simple et rapide pour simuler l'usure par fretting, profitant de la connaissance acquise au cours de la présentation des expériences. Afin d'optimiser le modèle, l'influence de paramètres tels que le facteur d'accélération ou le choix du contact unilatéral ou bilatéral, a été analysé de façon à déterminer la configuration la plus efficace et rapide pour obtenir des résultats pertinents.

La configuration initiale adoptée est détaillée dans FIG.2.19 et TAB.2.3.  $WP=0$  est considéré pour une usure répartie uniquement sur le plan.

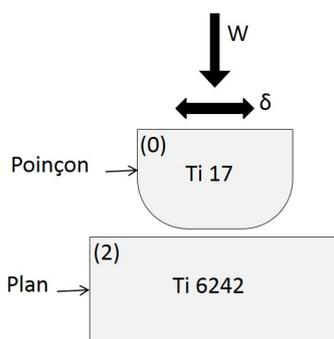


FIGURE 2.19: Configuration initiale poinçon-plan

Propriétés matériaux	
Poinçon	$(E_0, \nu_0) = (110GPa; 0,34)$
Plan	$(E_2, \nu_2) = (114GPa; 0,36)$
Zone de contact	
Rayon	$a = 2mm$
Pas de maillage	$dx = dy = dz = 0,2mm$
Nombre d'éléments	$21 \times 21$
Chargement	
Effort normal	$W = 1600N$
Amplitude de glissement	$\delta_g = 0,1mm$
Frottement	$\mu = 0,68$
Usure	
Coefficient d'usure	$\alpha = \alpha_{ref} = 2,93 \cdot 10^{-5} mm^3/J$
Coefficient de répartition	$WP = 0$

TABLE 2.3: Paramètres initiaux du modèle (cas non-revêtu)

### Influence du coefficient de frottement $\mu$

Le frottement fait partie des paramètres dont l'influence reste discutée. L'analyse de son influence sur le profil de l'usure sera suivie ici. Trois simulations ont été menées, pour trois valeurs de  $\mu$  : une élevée de 0.5, une moyenne de 0.3 et une faible de 0.1. Les résultats sont détaillés, en premier lieu après les 100 premiers cycles, FIG.2.20.

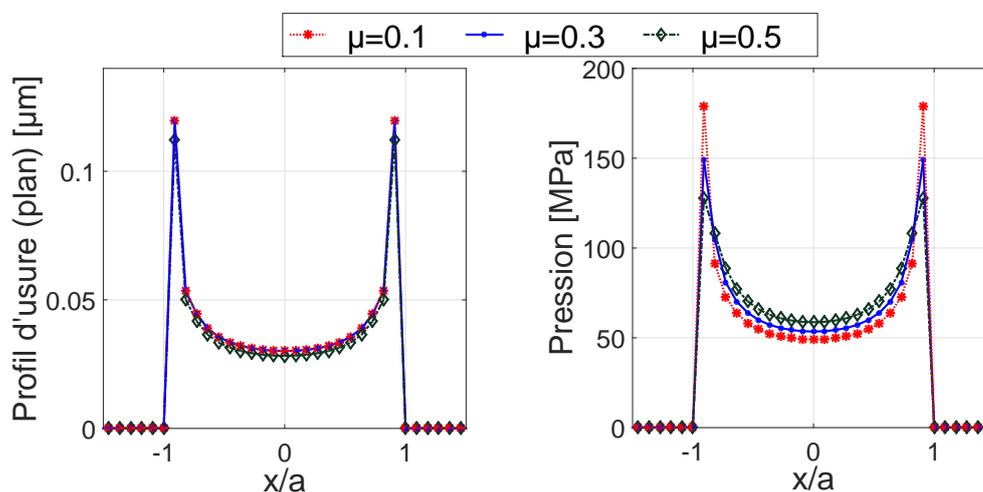
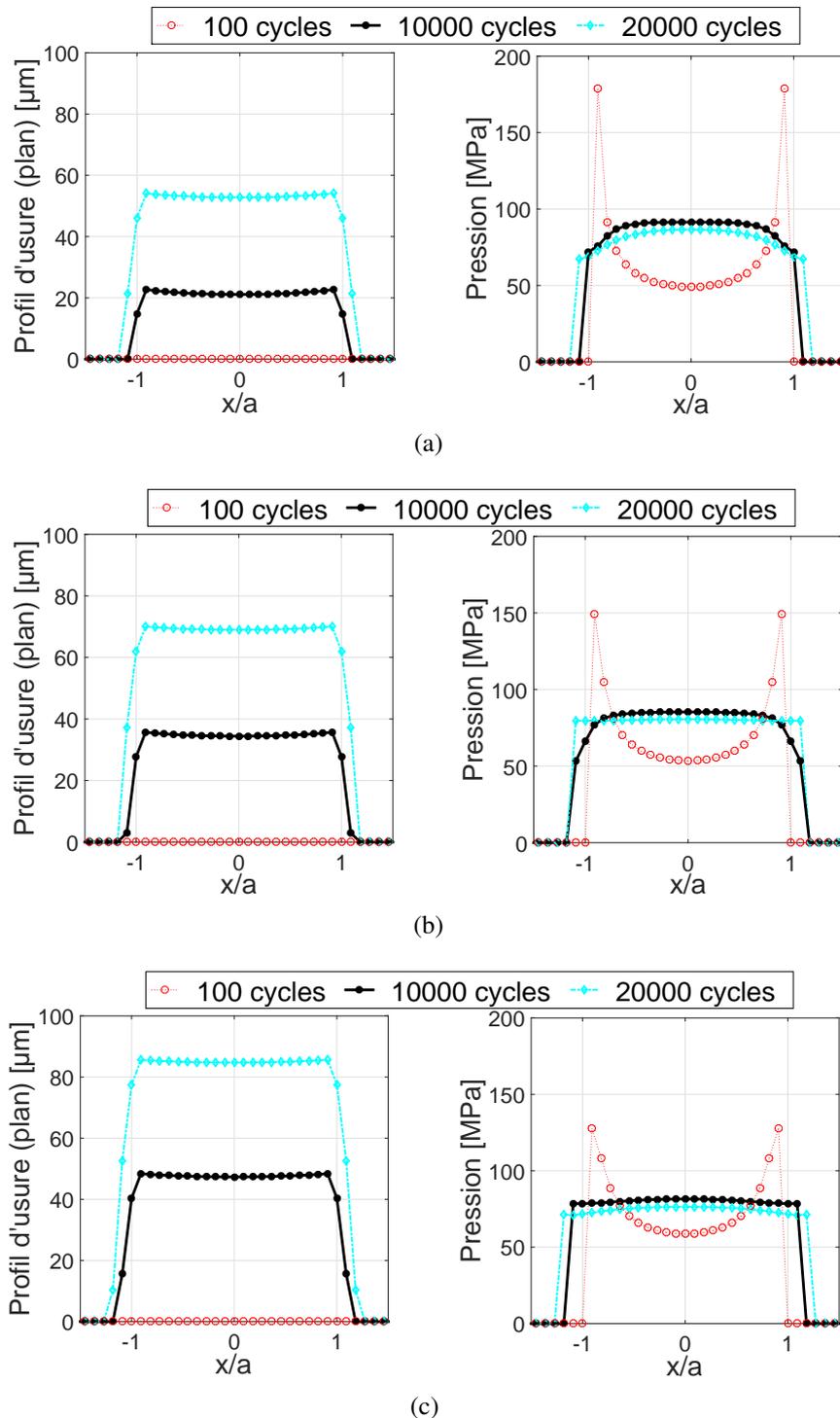


FIGURE 2.20: Profil d'usure et répartition de la pression en fonction de  $\mu$  après les 100 premiers cycles

Cette figure permet de voir les sites initiaux de l'enlèvement de la matière. Initialement l'usure maximale est localisée sur les bords.

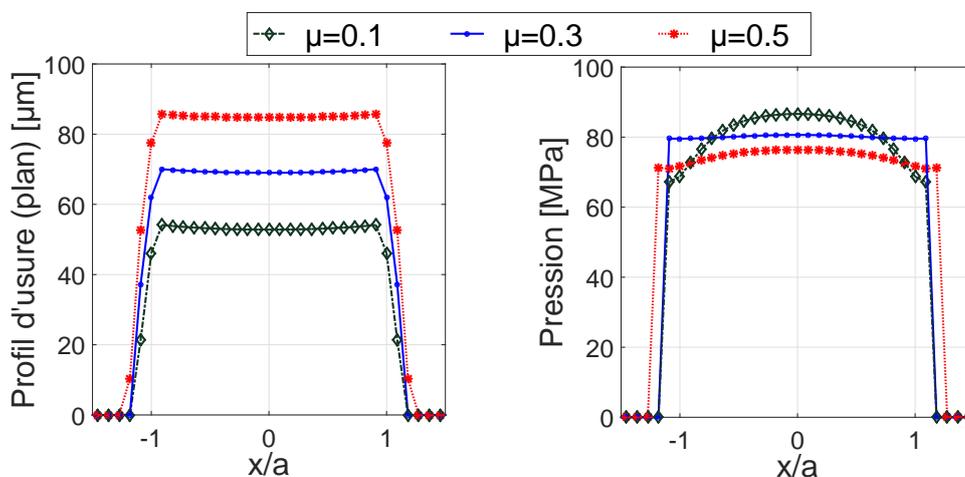
L'évolution de la pression durant la simulation en fonction du coefficient de frottement  $\mu$ , ainsi que l'évolution de la profondeur de l'usure sont présentées sur la figure FIG.2.21.



**FIGURE 2.21:** Profils de pression et profondeur d'usure pour différentes valeurs du coefficient de frottement. (a) :  $\mu = 0,1$  (b) :  $\mu = 0,3$  (c) :  $\mu = 0,5$

La figure FIG.2.22 est une synthèse des résultats pour le profil d'usure et la répartition de

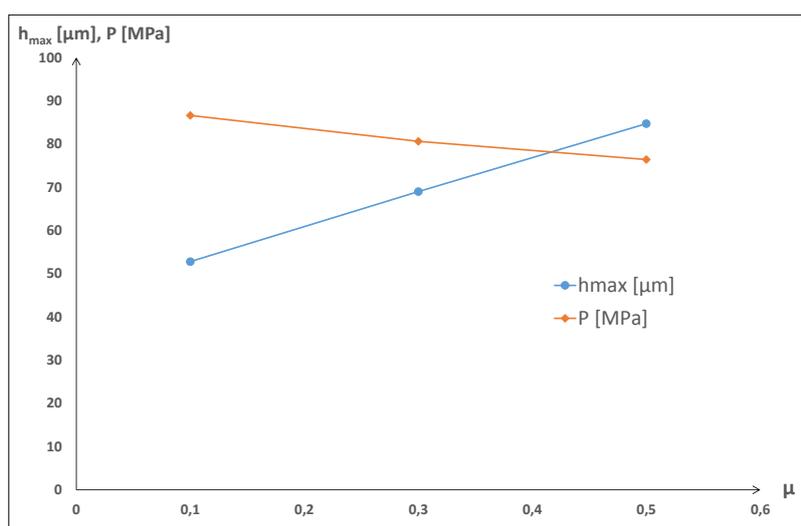
pression à  $N = 20000$  cycles.



**FIGURE 2.22:** Profil d'usure et répartition de la pression en fonction de  $\mu$  à  $N = 20000$  cycles

La comparaison des pressions a permis de quantifier l'influence de la valeur du coefficient de frottement. Nous pouvons conclure, à partir des figures précédentes et de la figure récapitulative FIG.2.23, qu'avec une augmentation du coefficient de frottement :

- l'aire de contact augmente,
- les valeurs maximales de la pression, pour un nombre de cycles donné, diminue de 7%,
- le taux de l'usure augmente : une augmentation de 30% de la profondeur d'usure est constatée quand  $\mu$  varie de 0,1 à 0,3 et une de 23% quand  $\mu$  varie de 0,3 à 0,5.



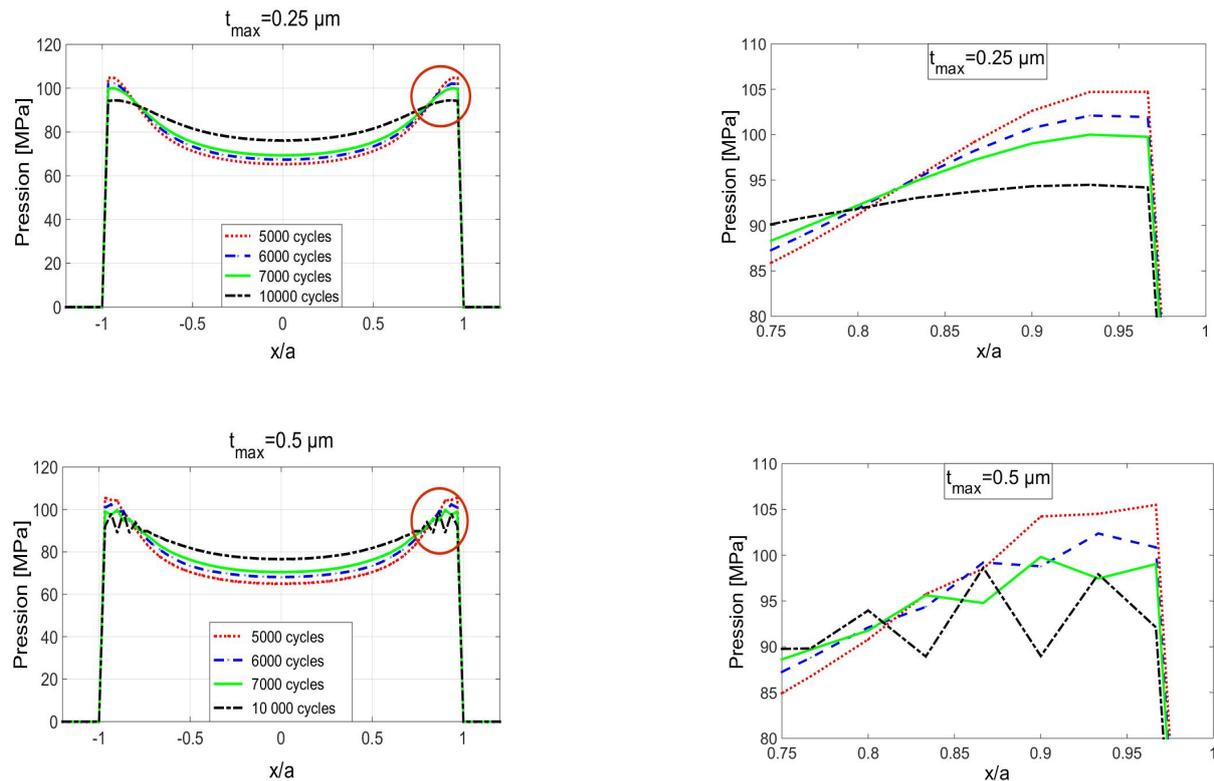
**FIGURE 2.23:** Figure récapitulative de l'évolution des valeurs maximales de la pression et de la profondeur maximale de l'usure en fonction du coefficient de frottement à  $N = 20000$  cycles

Le coefficient de frottement ( $\mu$ ) influe considérablement sur le taux d'usure d'un matériau. En règle générale, si le frottement augmente, le taux d'usure s'accroît et la pression diminue. Afin de réduire l'usure, le coefficient de frottement en régime de glissement total doit être aussi faible que possible.

### Influence de l'incrément d'accélération $t_{max}$

L'un des objectifs de ce travail est d'évaluer la capacité de diminuer le temps de calcul sans générer des instabilités et des erreurs. Certains chercheurs ont abordé ce problème. Différentes techniques ont été rapportés [MAR 07, GAL 06]. Dans la présente étude, l'influence du facteur d'accélération a été étudiée de manière à optimiser le temps de calcul. Pour un incrément d'accélération imposé  $t_{max}$ , nous imposons un nombre de cycles/itérations défini par  $\Delta N = t_{max}/\max(\Delta h_N)$  et qui signifie que  $N_{max}/\Delta N$  résolutions de contact seront nécessaires pour atteindre  $N_{max}$  cycles.

Des calculs avec des incréments d'accélération différents sont présentés dans le but d'identifier l'influence du paramètre  $t_{max}$  sur les résultats (FIG.2.24). L'usure unilatérale sur le plan est considérée.



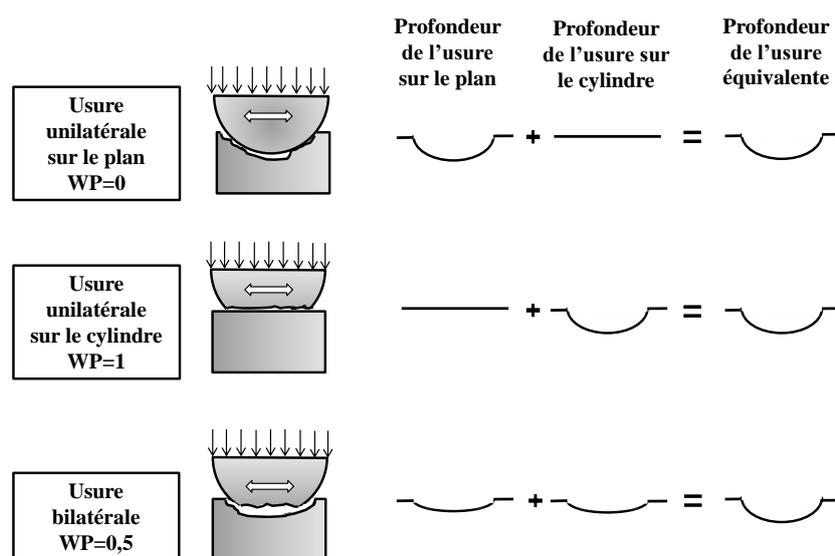
**FIGURE 2.24:** Profil de la pression après 5000 cycles pour deux valeurs différentes de l'incrément d'accélération  $t_{max}$  avec  $\mu = 0,68$  et  $W = 1600N$

La première conclusion est que le temps de calcul est une fonction linéaire du nombre de cycles. En multipliant  $t_{max}$  par deux le temps de calcul est divisée par deux. Néanmoins, une augmentation de l'incrément d'accélération génère des instabilités sur les bords de contact. Ce

phénomène est attribué à des facteurs d'accélération excessifs, induisant la transition brutale de la surface et générant ainsi des pics de pression importants aux bords de contact. La détermination d'une valeur seuil de la profondeur d'usure initiale en dessous de laquelle la répartition de la pression reste stable est nécessaire. Il apparaît que l'un des moyens pour éviter ces instabilités consiste dans le choix d'un incrément d'accélération faible, et donc une modification de surface d'une manière progressive, et création des profils lisses.

### Influence du coefficient de la répartition de l'usure $WP$

Le facteur de la répartition de l'usure peut couvrir le champ  $[0,1]$  en supposant les valeurs extrêmes en cas d'usure unilatérale et les valeurs intermédiaires en cas d'usure bilatérale. Ainsi, pour  $WP = 0$  seul le plan est usé. Pour  $WP$  compris entre 0 et 1, la résistance à l'usure du plan augmente tandis que celle du poinçon diminue ; assumant les mêmes valeurs (usure répartie également sur les deux corps) pour  $WP = 0,5$ . Enfin, pour  $WP = 1$  seul le poinçon est affecté par l'usure FIG.2.25.



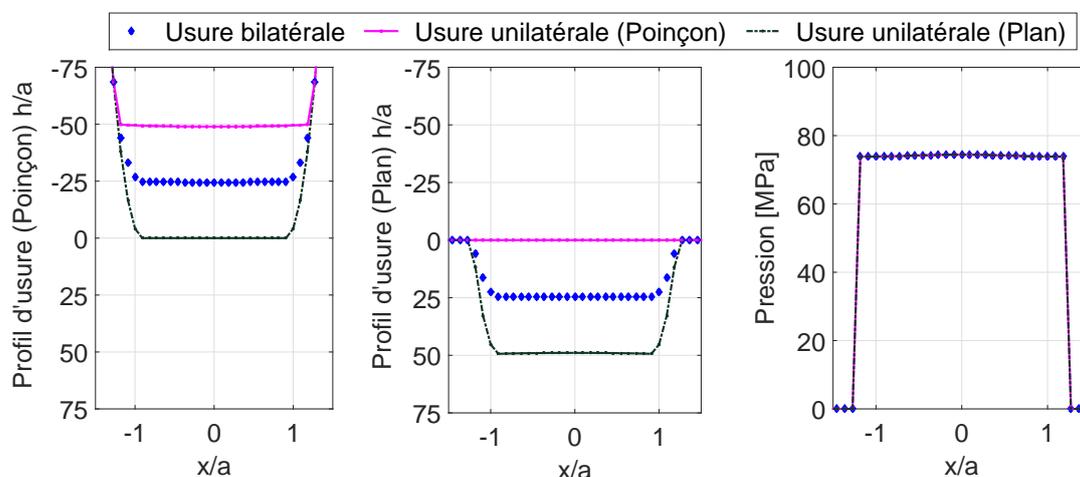
**FIGURE 2.25:** Les approches de l'usure : unilatérale et bilatérale

Pour l'approche "*usure unilatérale*", le profil d'usure équivalente correspond à la profondeur calculée en chaque point du corps étudié, alors que pour l'approche "*usure bilatérale*", il correspond à la somme des profondeurs d'usure calculées sur les deux corps (FIG.2.25).

Le modèle d'usure a été appliqué pour simuler trois conditions différentes : usure unilatérale du plan ou du poinçon, et l'usure bilatérale avec  $WP = 0,5$ .

Les résultats obtenus au moyen de trois méthodes d'usure (unilatéral sur plan " $WP = 0$ ", unilatéral sur le poinçon " $WP = 1$ " et bilatérale " $WP = 0,5$ ") ont été comparés pour un nombre donné de cycles  $N=20000$  cycles et pour le même facteur d'accélération  $t_{max}$ , en gardant les

mêmes paramètres détaillés dans le tableau TAB.2.3. Le profil d'usure pour chaque corps, ainsi que le profil de pression sont présentés figure FIG.2.26.



**FIGURE 2.26:** Profils d'usure et distribution de la pression de contact pour les approches unilatérale et bilatérale à  $N_{max} = 20000cycles$  avec  $\mu = 0,68$  et  $W = 1600N$

Les résultats montrent que, pour le cas d'une usure bilatérale  $WP = 0,5$ , les profondeurs d'usure du plan et du poinçon sont identiques. Nous constatons, en ce qui concerne la profondeur de l'usure totale (équivalente), que ces trois approches conduisent à des résultats identiques pour la pression de contact.

Nous rappelons que nous avons utilisé un coefficient  $\alpha_{ref}$  identiques pour les deux matériaux. Ce coefficient déterminé à partir des résultats d'essais est un paramètre "global" qualifiant l'usure du couple de matériaux en contact. Il est donc logique d'obtenir les mêmes résultats pour les 3 simulations. En outre, comme les profils d'usure totaux obtenus pour les trois conditions sont très semblables, nous concluons que pour la simulation d'un cas simple, l'usure unilatérale peut être une stratégie pour réduire les coûts de calcul.

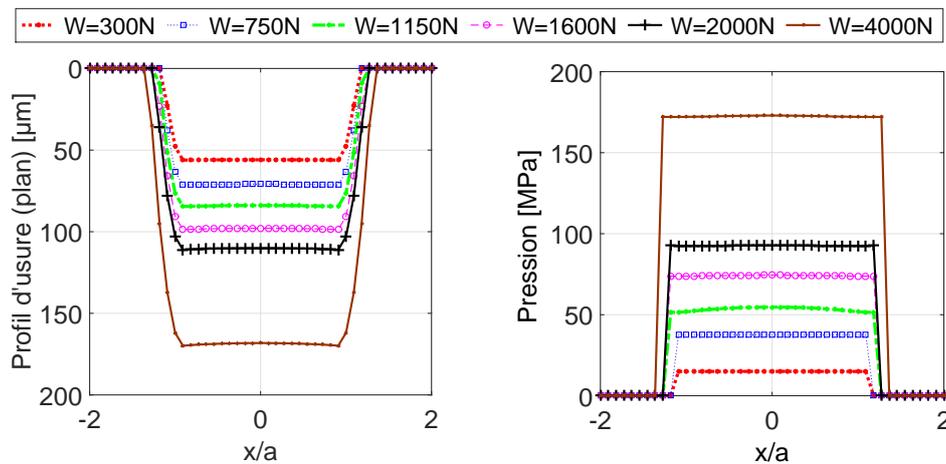
Ces résultats numériques montrent la pertinence de notre approche pour la modélisation de l'usure unilatérale et bilatérale des solides.

### Influence de la force normale appliquée $W$

La force normale est un paramètre qui détermine le taux d'usure, ainsi que les conditions de contact : le rayon de contact et la pression de contact. Dans le cas d'un contact poinçon-plan, l'aire de contact varie peu avec l'effort normal.

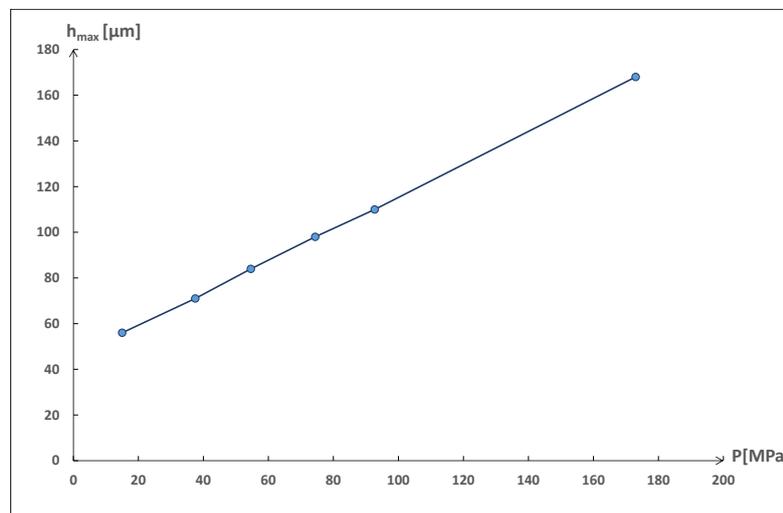
Dans les essais de fretting classiques, la force normale est généralement imposée constante alors que le déplacement est oscillant. Le contact aube-disque réel est en fait beaucoup plus complexe : l'amplitude de glissement et la force normale varient au cours du cycle. Nous étudions l'influence de la force normale, comprise entre 300 N et 4000 N, sur le mécanisme d'usure et ceci pour estimer les différentes situations.

La Figure FIG.2.27 montre les profils de l'usure et de la pression obtenus pour les différentes forces normales étudiées à  $N_{max} = 20000cycles$ .



**FIGURE 2.27:** Profils d'usure et distribution de la pression de contact pour différentes valeurs de la force normale appliquée à  $N_{max} = 20000$  cycles avec  $\mu = 0,68$

En comparant les résultats, nous constatons que l'augmentation de la résistance de contact à l'usure est moins importante pour la force normale la plus élevée. En effet, l'augmentation de la charge normale provoque une augmentation de la pression et donc de la traction ( $q = \mu p$ ) et ainsi la quantité de la matière enlevée est importante. Sur la figure FIG.2.27, la profondeur maximale d'usure est tracée en fonction de la pression de contact.



**FIGURE 2.28:** Profondeur maximale d'usure en fonction de la pression à  $N_{max} = 20000$  cycles avec  $\mu = 0,68$

Une force de contact plus élevée favorise une plus grande aire de contact avec une pression plus importante. Il est démontré que les paramètres de contact de chargement jouent un rôle important sur la prédiction de l'usure. La pression moyenne apparaît comme un facteur clé

modifiant la cinétique d'usure : plus la pression moyenne est élevée, plus le taux d'usure est important.

D'un point de vue de l'usure mécanique, il est préférable que la force de contact soit la plus faible possible, toutefois une faible force normale favorise le régime de fretting en glissement total, et donc la création de particules d'usure.

#### 2.4.4.2 Simulations et résultats

Dans le cadre d'une application industrielle, l'élément le plus important est la durée de vie du disque, qui ne peut être réparé et dont la défaillance est critique. Ainsi, l'objectif principal est de développer un dépôt sacrificiel qui s'use préférentiellement, tout en évitant l'usure des disques.

Avant d'étudier la réponse du dépôt, nous visons à caractériser l'usure pour un contact non revêtu pour quantifier le gain apporté par l'application d'un revêtement.

Pour simuler les essais de fretting décrits dans la section 2.4.3, plusieurs hypothèses sont posées : La force normale  $W$ , le coefficient d'usure et le coefficient de frottement sont supposés constants au cours des cycles. Le corps de géométrie "plane" en Ti6242 est revêtu. Les deux configurations, revêtu et non revêtu, utilisées dans les simulations numériques sont résumées dans la figure FIG.2.29.

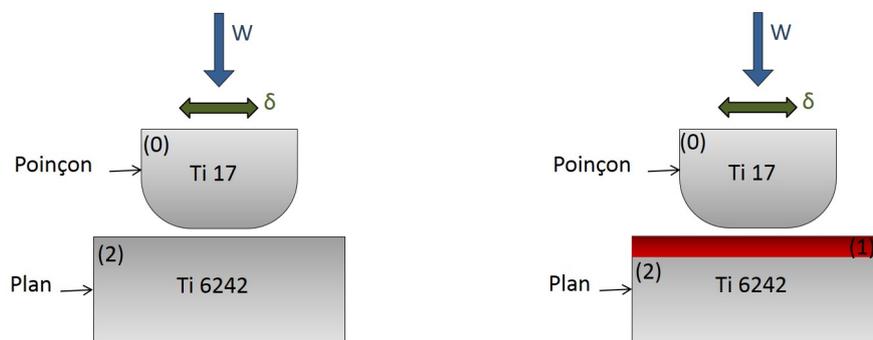


FIGURE 2.29: Configuration du contact considéré dans les simulations numériques

Le tableau TAB.2.4 est un tableau récapitulatif des données utilisées dans les deux cas simulés.

	$\mu$	$\alpha$ [ $mm^3/J$ ]	$dx=dy$ [ $mm$ ]	$dz$ [ $mm$ ]	$a$ [ $mm$ ]	$W$ [ $N$ ]	$\delta_g$ [ $mm$ ]	$P_{max\text{initiale}}$ [ $MPa$ ]
<b>Substrat nu</b>	0,68	$(\alpha_1, \alpha_2)$	0,2	0,2	2	1600	0,1	178,9
<b>Substrat revêtu</b>	0,32	$(\alpha_c)$	0,2	0,05	2	1600	0,1	189,8

TABLE 2.4: Tableau récapitulatif des données

### Contact non-revêtu

Une première simulation a été effectuée, sur la base des paramètres du cas de référence (TAB.2.3), pour analyser la réponse en usure du contact non-revêtu Ti6242/Ti17. Le coefficient d'usure est défini en fonction de la cinétique bilinéaire représentée sur la figure FIG.2.30. Cette figure présente les cinétiques d'usure pour un contact non-revêtu et pour un contact revêtu avec  $\alpha_1 = \alpha_{ref}$  et  $\alpha_2 = 7,16\alpha_{ref}$  et  $\alpha_c = 3\alpha_{ref}$ .

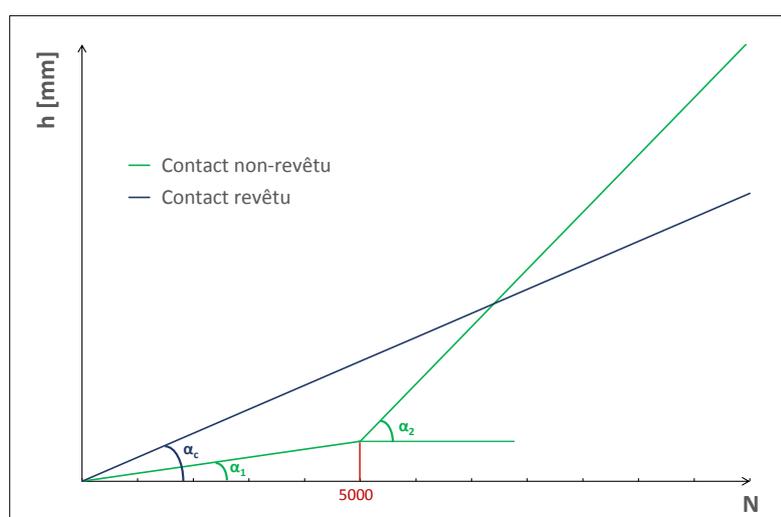


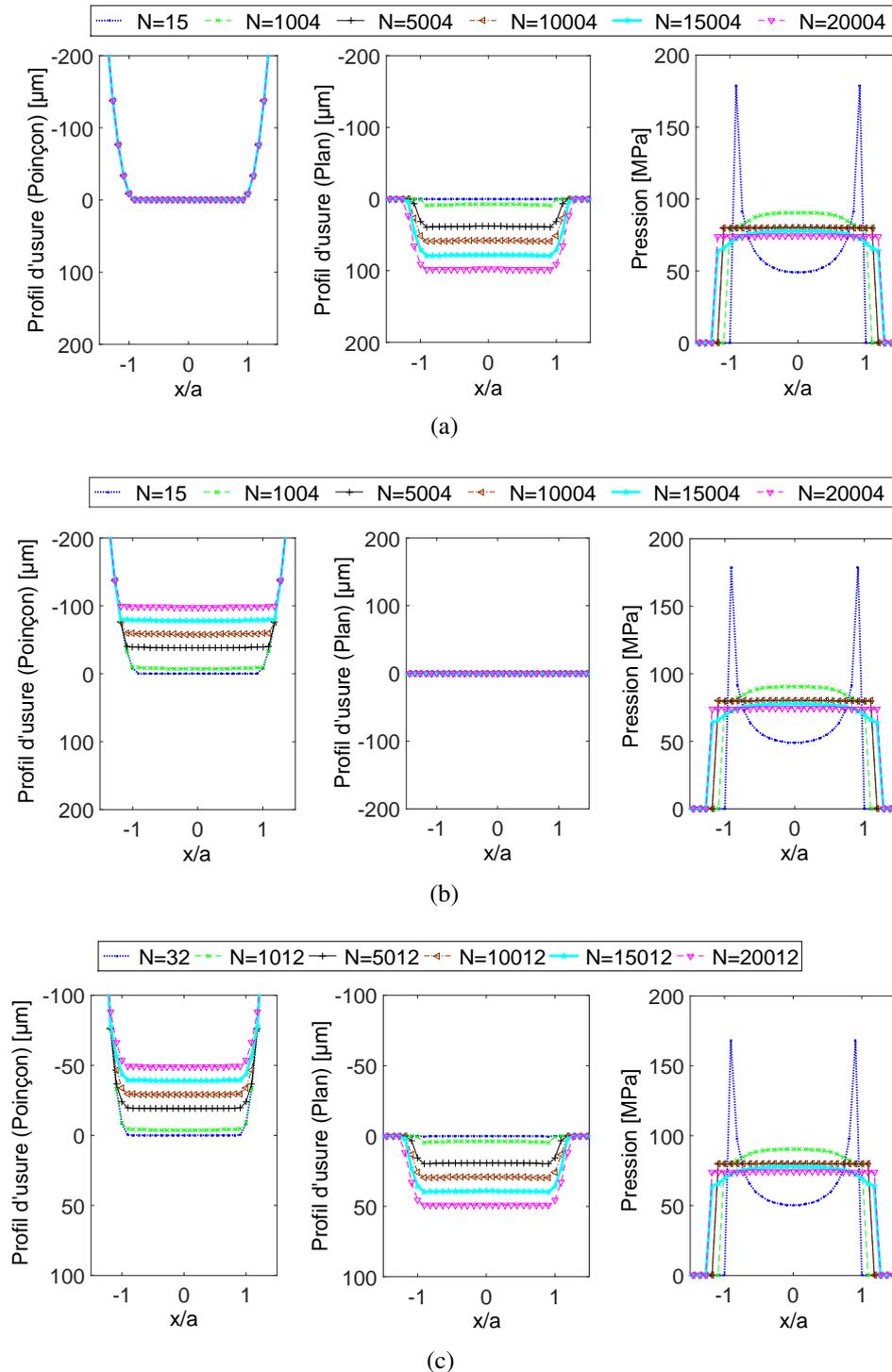
FIGURE 2.30: Cinétiques d'usure

Nous imposons une approche d'usure unilatérale sur le plan (WP=0), avec un incrément d'accélération  $t_{max} = 0,5\mu m$ . La simulation est réalisée pour un nombre de cycles imposé. Les données pertinentes telles que la répartition des contraintes de contact, la pression de contact, l'énergie accumulée, l'évolution de surface sont enregistrées à chaque cycle.

Par exemple, la figure FIG.2.31 montre quelques résultats obtenus après une modélisation de 20000 cycles d'usure unilatérale sur le plan FIG.2.31 (a), d'usure unilatérale sur le poinçon FIG.2.31 (b), et d'usure bilatérale FIG.2.31 (c).

Nous observons que la distribution de pression se caractérise par un profil similaire à la surface du poinçon durant les premiers cycles, pour  $N=15$  jusqu'à 1000, et elle évolue après naturellement suivant un profil plat, avec un incrément d'usure homogène à l'intérieur de la zone de contact. Cela peut être expliqué par le fait que la loi de l'usure utilisée dans notre cas est proportionnelle à la pression de contact. L'usure est maximale sur les bords du poinçon à cause des pics de pression produits par la discontinuité géométrique. Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux (les valeurs expérimentales pour la profondeur d'usure sont indiqués à la section 2.4.3).

Ces données caractérisent l'interface non-revêtue, ils permettront de quantifier le gain apporté par l'application du revêtement étudiée dans la paragraphe suivante.



**FIGURE 2.31:** Évolution de la distribution de la pression et du profil de l'usure en fonction de  $N$  (nombre de cycles) pour le contact non-revêtu. (a) : Usure unilatérale sur le plan. (b) : Usure unilatérale sur le poinçon. (c) : Usure bilatérale.

### Contact revêtu

Les propriétés de la couche CoCrAlSi sont déterminées par un essai de nano-indentation :  $E_1 = 72,5 \text{ GPa}$  avec un coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,3$ . Le revêtement est caractérisé par une épaisseur  $h = 150 \mu\text{m} = 3 \times dz$ . Le coefficient d'usure est défini d'après la cinétique d'usure linéaire représentée sur la figure FIG.2.30 avec  $\alpha = 3 \times \alpha_{ref}$ . Durant les simulations, nous considérons les conditions de chargement suivantes  $W = 1600 \text{ N}$  et  $\delta_g = 100 \mu\text{m}$ . Le coefficient de frottement  $\mu = 0,32$  est déterminé expérimentalement et est différent de celui considéré dans le cas non-revêtu.

L'usure est supposé unilatérale sur le plan ( $WP = 0$ ), avec un incrément d'accélération  $t_{max} = 0,5 \mu\text{m}$ . La simulation est effectuée pour 20 000 cycles. Les résultats obtenus pour le contact revêtu sont présentés sur la figure FIG.2.32 en termes de distribution de la pression et de profil d'usure.

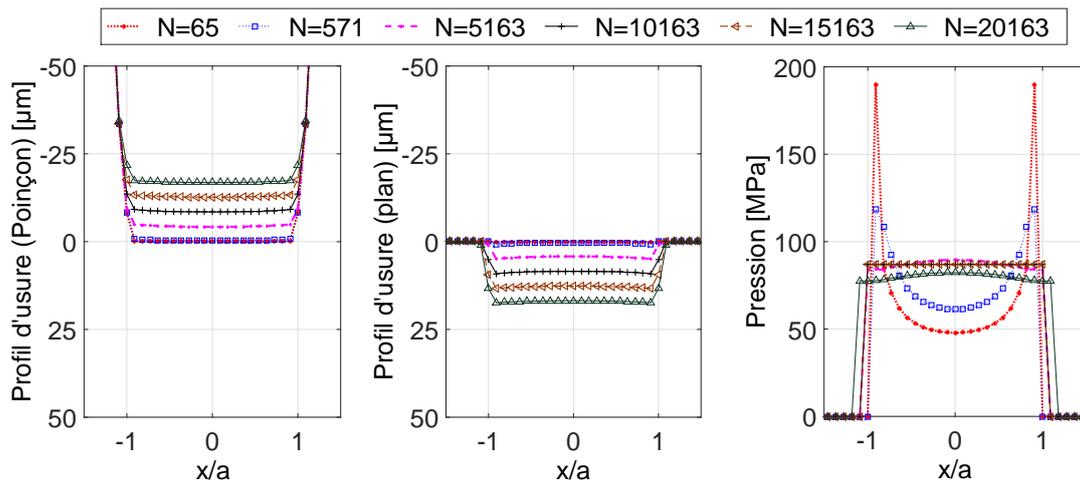
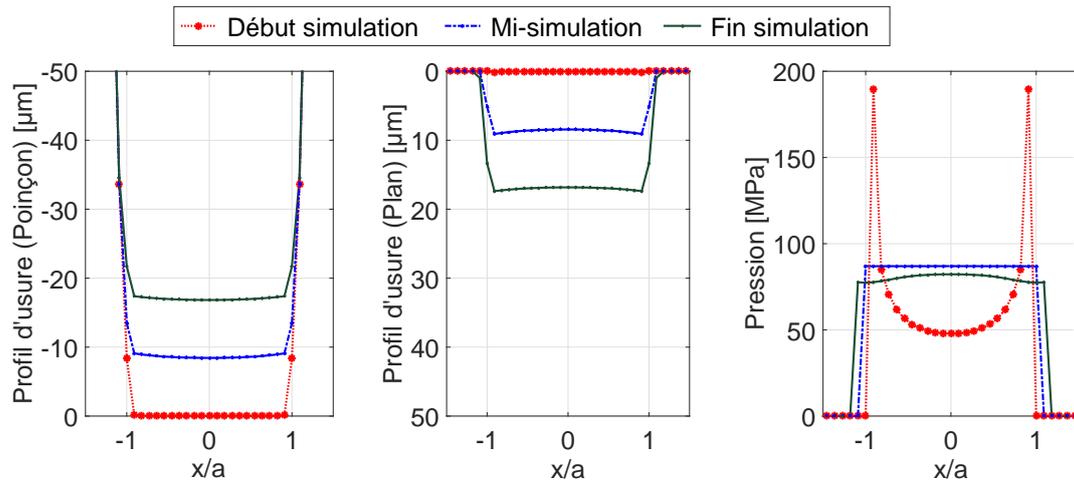
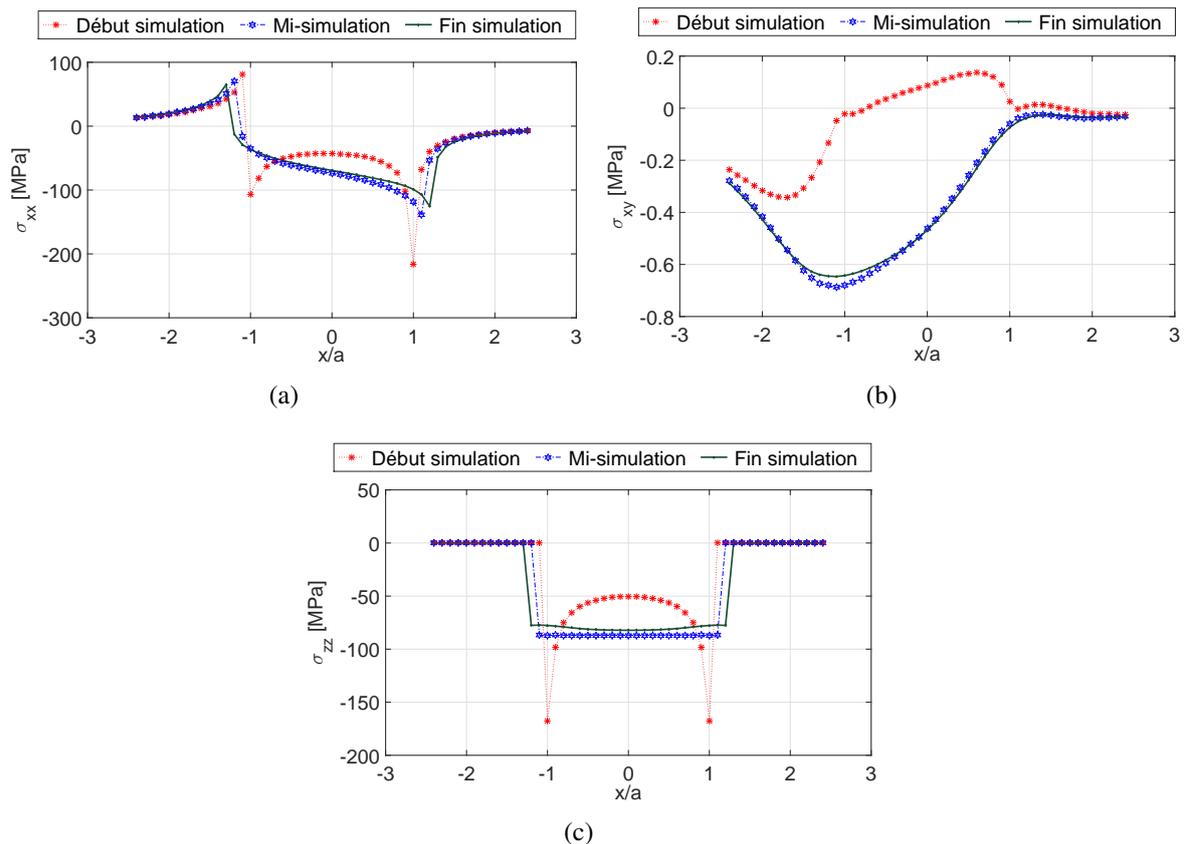


FIGURE 2.32: Évolution de la pression et de l'usure en fonction du nombre de cycles N pour le contact revêtu. Usure bilatérale

Les caractéristiques de l'évolution du profil de pression sont similaires à celles observées dans les résultats du contact non revêtu (un profil de la forme du poinçon évolue vers un profil plat). Pour le même nombre de cycles d'usure simulé, l'usure est plus significative pour le problème du contact non revêtu. Nous présentons sur les figures FIG.2.33 et FIG.2.34 la distribution de la pression et le profil de l'usure ainsi que quelques composantes du tenseur des contraintes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$ ) en surface  $z = 0$  dans le plan  $y = 0$ , et cela pour le début, le milieu et la fin de la simulation.



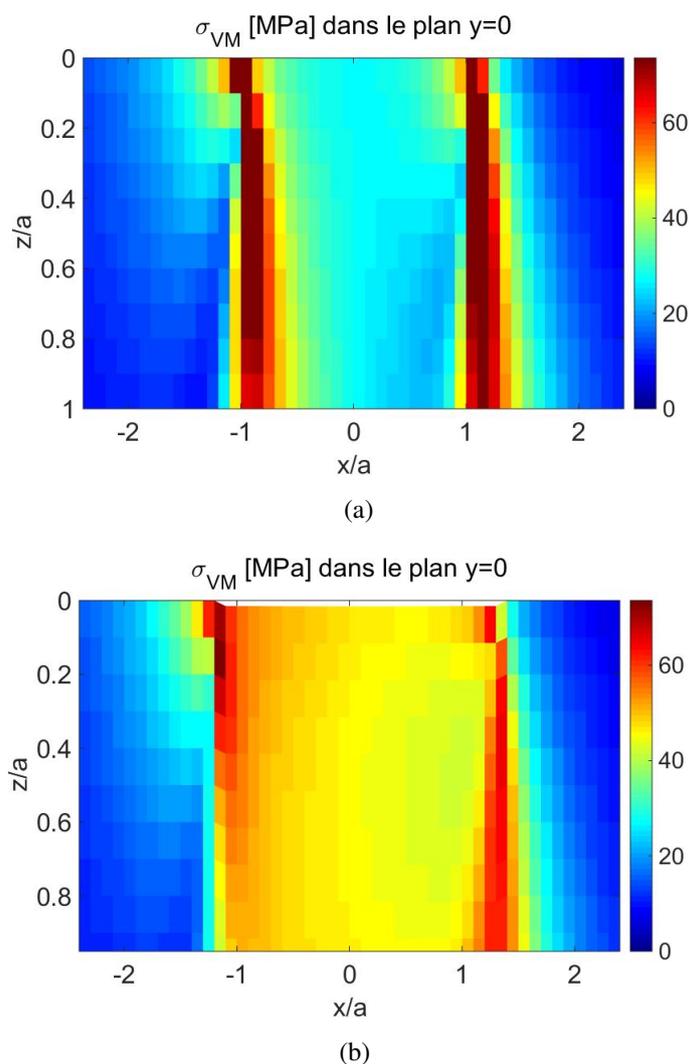
**FIGURE 2.33:** Évolution de la pression et de l'usure en fonction du nombre de cycles  $N$  pour un contact revêtu dans le cas de l'usure bilatérale.



**FIGURE 2.34:** Évolution des contraintes en fonction du nombre de cycles  $N$  pour le contact revêtu dans le cas de l'usure bilatérale, en surface  $z = 0$  dans le plan  $y = 0$ . (a) :  $\sigma_{xx}$ . (b) :  $\sigma_{xy}$ . (c) :  $\sigma_{zz}$ .

L'usure a un effet significatif sur le comportement du système étudié. Cet effet se traduit par l'évolution du profil de pression et la largeur du contact (élargissement du profil de pression). En outre, une influence est observée sur la répartition des différentes composantes des contraintes sur les valeurs de l'amplitude ainsi que sur la forme du profil.

La figure FIG.2.35 présente les contraintes de von Mises dans le plan  $(x,y=0,z)$  pour un chargement de fretting (un chargement normal le long de la direction  $z$  et un chargement tangentiel le long de l'axe  $x$ ). Les contraintes de von Mises sont représentées, en fin de cycle, pour deux états (l'état initial non usé et l'état final usé).



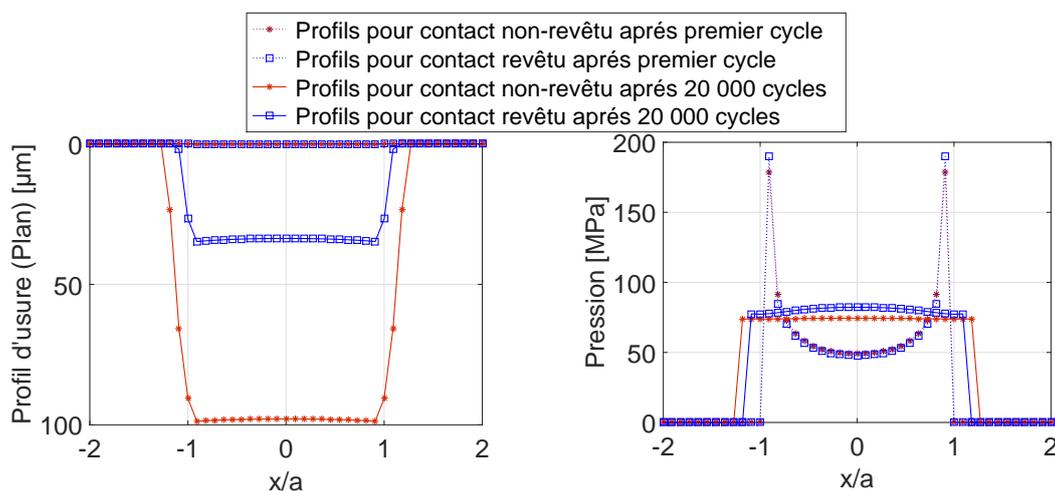
**FIGURE 2.35:** Contraintes de von Mises pour un matériau revêtu ( $E_r/E_{Ti6242} = 0,6$  ; épaisseur "h/a" = 0,075), en fin de cycle, lors d'un contact sous sollicitation de fretting en glissement total. (a) : Configuration initiale. (b) : Configuration finale usée.

Les résultats montrent une diminution de la valeur maximale de la contrainte  $\sigma_{VM}$ , placée au bord du contact, après usure du matériau. L'asymétrie est due à l'effet de la charge tangentielle

appliquée dans la direction  $x$ .

### 2.4.4.3 Validation et discussions

Une comparaison entre les résultats du contact revêtu et ceux du contact non-revêtu est présentée dans la figure FIG.2.36.



**FIGURE 2.36:** Profils de l'usure et de la pression pour le contact non-revêtu et le contact revêtu au début et à la fin de la simulation

Nous observons que la profondeur de l'usure dans le cas revêtu est réduite de plus de moitié par rapport au cas non revêtu. Ce résultat tend à confirmer le rôle de revêtement sacrificiel.

Les valeurs de la profondeur d'usure obtenue dans les deux cas simulés sont assez proches de celles déterminées expérimentalement, ce qui permet de valider notre modèle par comparaison avec l'expérience.

## 2.5 Conclusion

Une méthode semi-analytique de résolution du contact a été utilisée pour la simulation de l'usure par fretting. Le solveur de contact est basée sur la méthode CGM et utilise des techniques FFT optimisées pour réduire le temps de calcul nécessaire pour la résolution du problème de contact. Un modèle permettant de simuler le revêtement, basé sur la méthode de l'inclusion équivalente au sens d'Eshelby, a été d'abord présenté et validé par comparaison avec des solutions multigrilles. Le solveur de contact a été couplé à une loi d'usure proposé par Fouvry. L'analyse s'est effectuée à partir d'un critère énergétique prenant en compte le volume d'usure, la distance totale de glissement et l'énergie totale dissipée dans le contact. La géométrie est évolutive avec l'usure. Le modèle permet la prise en compte des changements de géométrie dus à l'usure. Plusieurs simulations académiques ont été réalisées. Les résultats obtenus à partir de cette analyse montrent que l'usure a un impact significatif sur la distribution de la pression de contact et sur la géométrie des surfaces en contact. Le modèle d'usure par la méthode SA a été validé par comparaison avec les résultats expérimentaux.

## 2. Comportement tribologique et usure du contact aube-disque : Validation avec l'expérimental

## Chapitre 3

# Analyse d'un modèle d'endommagement cyclique pour un problème uniaxial

*Dans ce chapitre, le comportement cyclique sous chargement uniaxial est premièrement analysé dans le cas général. Ensuite la réponse à l'application du modèle élasto-endommageable de Mazars est étudiée. Différents cas sont étudiés en fonction du type de chargement cyclique imposé (déplacement ou force) et le type de loi d'évolution du paramètre d'endommagement (en terme de contrainte ou en terme de déformation).*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Comportement cyclique sous chargement uniaxial</b>	<b>86</b>
3.1.1	État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple	86
3.1.2	Essais cycliques	87
3.1.3	Tenue en fatigue	92
3.1.4	Choix d'un modèle de comportement élasto-endommageable	93
<b>3.2</b>	<b>Réponse du modèle pour un chargement cyclique uniaxial</b>	<b>94</b>
3.2.1	Critère en terme de contrainte	95
3.2.2	Critère en terme de déformation	98
3.2.3	Analyse et discussion	100

---

### 3.1 Comportement cyclique sous chargement uniaxial

Les études de chargement cyclique uniaxial, même s'ils ne sont pas représentatifs des chargements et des réponses réels, sont encore de nos jours largement utilisées du fait de leur simplicité d'exécution et d'analyse.

Une étude sous chargement cyclique uniaxial de l'endommagement est une première étape pour comprendre le phénomène d'endommagement (dégradation progressive des propriétés matériaux). La deuxième étape, représentée au chapitre suivant, consiste en une étude de l'endommagement d'un problème de contact sous chargement de fretting.

#### 3.1.1 État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple

L'essai de traction simple (ou de compression simple) est l'essai couramment utilisé pour déterminer la loi de comportement d'un matériau.

Un chargement uniaxial correspond à un tenseur de contraintes comportant une seule composante non nulle.

Dans le cas où la direction 1 est la direction de chargement, il s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} F/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $F$  est l'effort appliqué et  $S$  la surface normale à la direction de l'effort.

La formulation générale de la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

En élasticité linéaire homogène isotrope, le tenseur des déformations correspondant s'écrit :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

avec  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ .

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si  $\sigma$  est positif et état de compression si  $\sigma$  est négatif.

### 3.1.2 Essais cycliques

Une pièce en service peut subir des efforts statiques ou des charges répétées, aléatoires ou cycliques de plus ou moins forte intensité. La très grande majorité des systèmes mécaniques et des structures sont chargés par des efforts (forces ou résultantes, moments, déplacements) variables dans le temps. Ceux-ci créent dans les pièces des contraintes et des déformations elles-mêmes variables dans le temps de façon cyclique (pas strictement monotone comme lors d'un essai classique de traction ou compression quasi statique). On parle alors de chargement de fatigue.

Les essais de traction-compression uni-axiaux sont à la fois les plus simples et les plus couramment utilisés pour mettre en évidence, à travers des analyses macroscopiques, les caractéristiques du comportement élastique d'un matériau. Le principe de base est de soumettre une éprouvette de longueur initiale  $l_0$  et de section initiale  $A_0$  à un effort cyclique. Nous pouvons ainsi choisir les paramètres à imposer et ceux que nous allons suivre au cours du chargement cyclique.

La sollicitation cyclique uniaxiale peut être obtenue soit en imposant un effort et en réalisant des cycles entre deux valeurs extrêmes (essai uniaxial piloté en contrainte), soit en contrôlant le déplacement en réalisant des cycles entre deux valeurs extrêmes de déformation (essai uniaxial piloté en déformation) FIG.3.1.

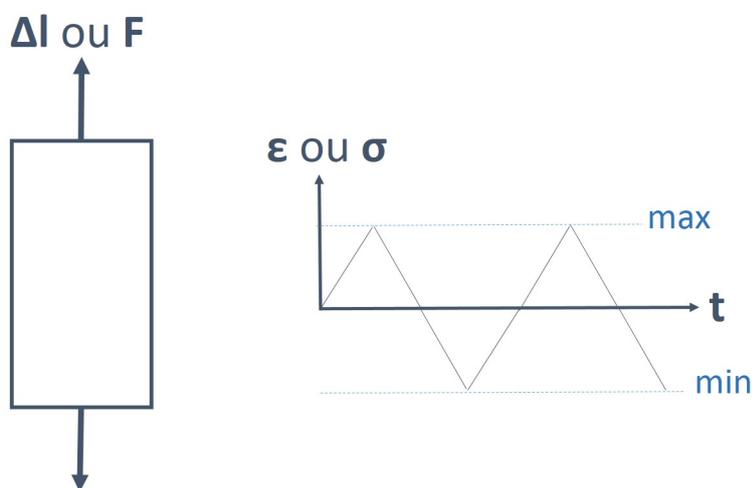
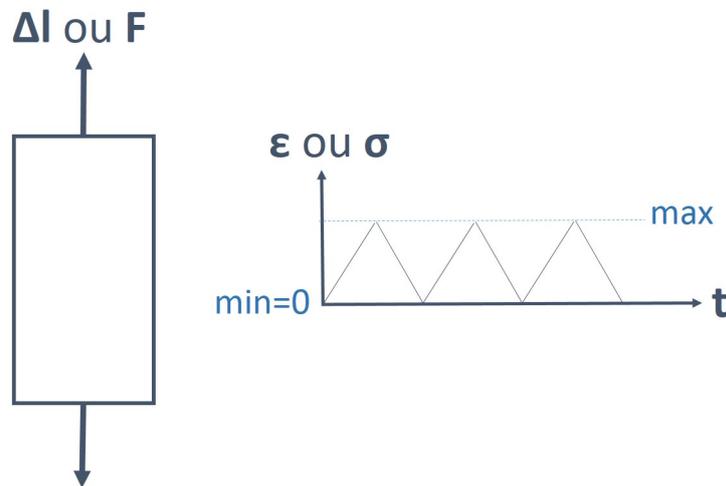


FIGURE 3.1: Essai uniaxial en déplacement ou force imposé(e)

Ce chargement est dit d'amplitude constante lorsque la valeur moyenne et l'amplitude sont constantes dans le temps. Sinon, le chargement est qualifié d'amplitude variable.

Dans le cadre de cette étude, nous nous limiterons aux chargements triangulaire dits d'amplitude constante de type "zéro à pic" FIG.3.2.



**FIGURE 3.2:** Essai uniaxial à amplitude constante de type "zéro à pic"

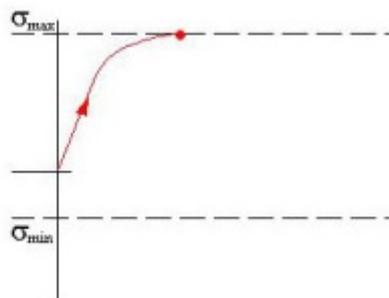
L'objectif de ces essais cycliques est de déterminer le comportement "cyclique" du matériau. Les essais peuvent être réalisés à déformation ou à contrainte imposée.

#### 3.1.2.1 Comportement sous sollicitations cycliques

##### Notions décrivant les différents comportements des matériaux

Avant de présenter le comportement du matériau sous chargement uniaxial cyclique à déformation ou contrainte imposée, il est nécessaire d'introduire quelques notions décrivant les différents comportements des matériaux.

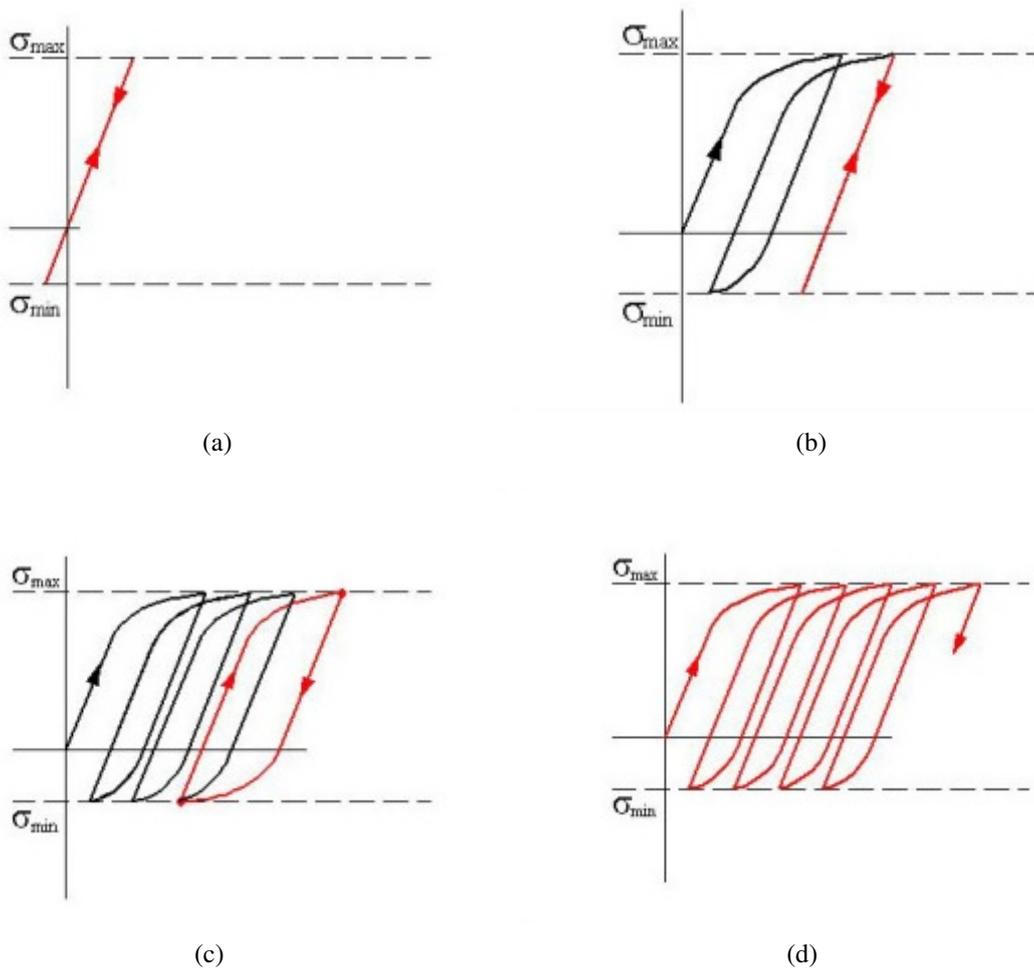
Le cas le plus connu est celui qui conduit à la ruine plastique lors d'un chargement monotone FIG.3.3.



**FIGURE 3.3:** Ruine plastique lors d'un chargement monotone

Considérons qu'un chargement périodique est appliqué à une structure et ne conduit pas immédiatement à la ruine plastique. Quatre cas sont observés FIG.3.4 :

- Comportement élastique. C'est typiquement ce que l'on observe lors d'un essai de fatigue à grande durée de vie sur éprouvettes lisses.
- Phénomène d'adaptation. Lors du premier cycle de chargement, la limite d'élasticité du matériau est dépassée et une déformation plastique est observée. Cependant, après un certain nombre de cycles de chargement, le comportement du matériau redevient élastique.
- Phénomène d'accommodation. Lors des cycles de chargement successifs, le comportement du matériau reste plastique tout en décrivant une courbe d'hystérésis qui se stabilise.
- Phénomène de rochet, ou de la déformation progressive. La déformation du matériau augmente à chaque cycle de chargement, ce qui conduit à une ruine de la structure.



**FIGURE 3.4:** Différents comportements observés. (a) : Comportement élastique (b) : Phénomène d'adaptation (c) : Phénomène d'accommodation (d) : Phénomène de rochet

Quand une éprouvette est soumise à une déformation (ou une contrainte) cyclique imposée, on constate que les contraintes (ou les déformations) maximales et minimales ne restent que rarement constantes pendant tout l'essai. Le comportement cyclique du matériau diffère selon le type de chargement imposé :

#### à déformation $\varepsilon$ imposée

Deux types de comportement :

- Durcissement : une augmentation de la contrainte maximale avec le nombre de cycles. (Exemple pour l'acier 316L sur la figure FIG.3.5)

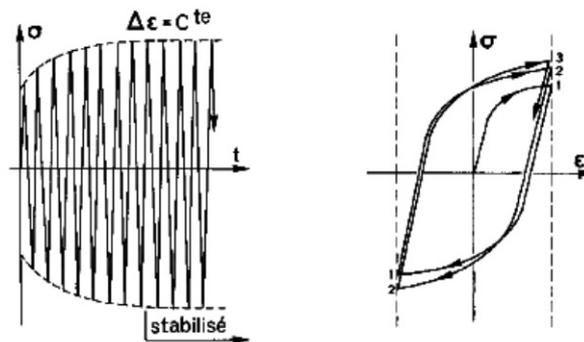


FIGURE 3.5: Durcissement cyclique [LEM 88].

- Adoucissement : une diminution de la contrainte maximale avec le nombre de cycles. (Exemple pour l'acier 316L sur la figure FIG.3.6)

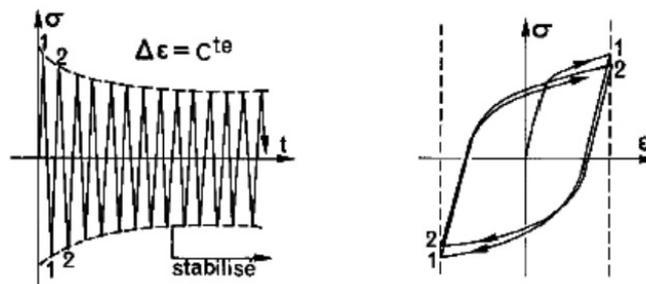


FIGURE 3.6: Adoucissement cyclique [LEM 88].

Lors d'un essai à déformation imposée, on parle de durcissement cyclique du matériau si l'amplitude de contrainte augmente avec le nombre de cycles, et d'adoucissement cyclique si cette amplitude de contrainte diminue avec le nombre de cycles FIG.3.7.

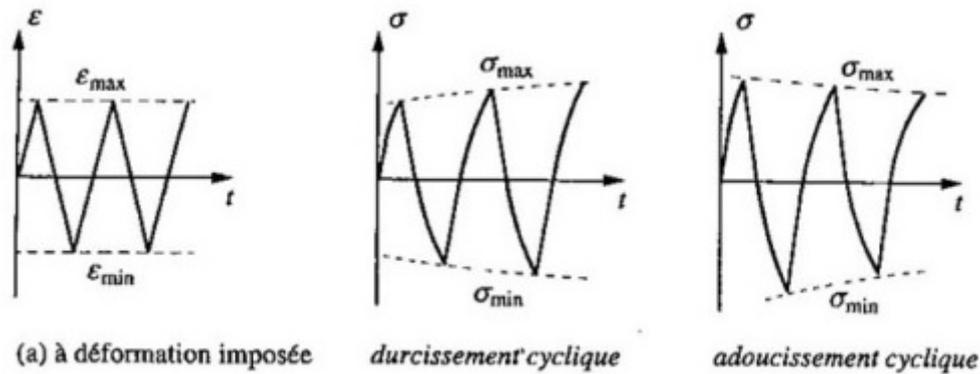


FIGURE 3.7: Comportement cyclique à déformation imposée

L'essai cyclique à déformation imposée comporte des paliers de maintien à déformation constante.

### à contrainte $\sigma$ imposée

Pour un essai à contrainte imposée le matériau subit :

- un durcissement cyclique lorsque l'amplitude de déformation diminue avec le nombre de cycles,
- un adoucissement cyclique lorsque cette amplitude augmente au cours des cycles.

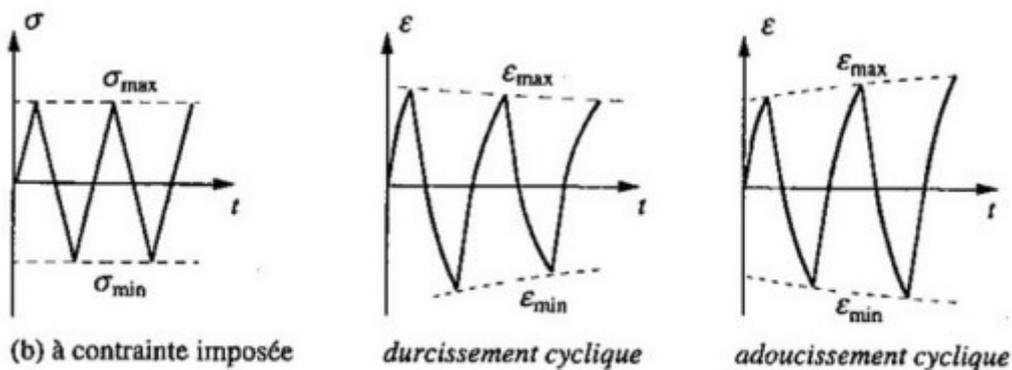


FIGURE 3.8: Comportement cyclique à contrainte imposée

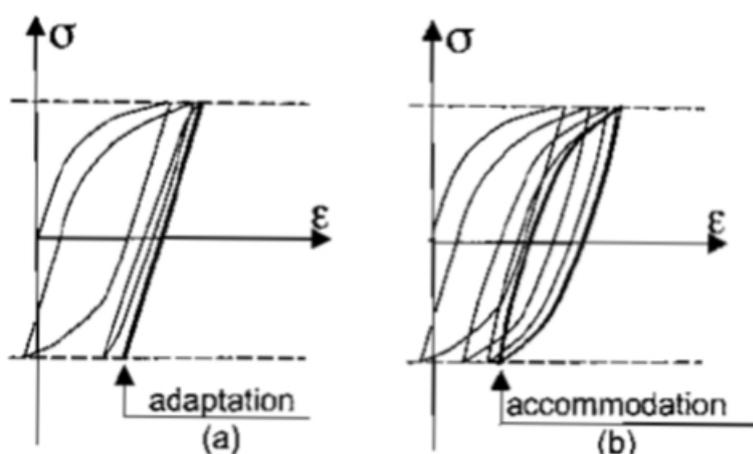
#### Courbe contrainte/déformation

Outre les courbes de durcissement ou d'adoucissement cyclique, la réponse du matériau peut être caractérisée par l'évolution des courbes contrainte-déformation au cours des cycles. Pour cela, l'effort ou la contrainte est enregistré(e) en fonction de la déformation. Des boucles qui évoluent et se stabilisent dans le cas où un régime stable existe sont enregistrés.

Selon le type de matériau et les conditions de chargement, on peut observer l'un des phénomènes de stabilisation suivants :

- Adaptation : le cycle stabilisé est totalement élastique à l'échelle macroscopique ;
- Accommodation : stabilisation plastique avec boucles d'hystérésis. Une déformation plastique subsiste au cours du cycle.

Ceci est schématisé dans la FIG.3.9.



**FIGURE 3.9:** Phénomènes de stabilisation pour des conditions de chargement à contrainte imposée (a)Adaptation, (b)Accommodation. [LEM 88].

#### 3.1.3 Tenue en fatigue

La fatigue d'un solide est, par définition, l'altération progressive de ses propriétés physiques et mécaniques pouvant conduire à un processus d'endommagement progressif et de rupture suite à l'application d'une sollicitation cyclique.

Cet endommagement progressif, peut se produire même si le matériau est sollicité à des niveaux de contrainte inférieurs voire bien inférieurs à sa contrainte à rupture quasi statique.

L'association des lois de comportement et d'endommagement est un outil performant pour modéliser et analyser les évolutions cycliques du comportement des matériaux et pour en estimer la durée de vie.

### 3.1.4 Choix d'un modèle de comportement élasto-endommageable

Pour étudier l'évolution des champs de contraintes et de déformations, dans les éprouvettes sollicitées en fatigue, nous avons besoin d'un modèle capable de reproduire le comportement cyclique.

L'utilisation d'un tel modèle permet de :

- connaître les champs de contraintes et déformations sous chargement cyclique (fatigue),
- analyser le comportement du matériau (savoir si le matériau s'adapte ou s'accommode) sous un chargement extérieur donné (contrainte imposée ou déformation imposée).

Dans ce travail nous proposons d'utiliser une stratégie d'identification en introduisant à chaque fois une base de données différente.

Un modèle de calcul est proposé en introduisant le modèle d'endommagement mécanique continu au moyen d'un paramètre d'endommagement  $D$  et d'une loi d'évolution de ce paramètre.

Nous présentons l'analyse analytique du modèle Mazars pour un chargement cyclique uniaxial basé sur le concept de la déformation équivalente  $\tilde{\epsilon}$ . Nous considérons deux formes différentes pour la loi d'évolution de l'endommagement, une loi en déformation et une loi en contrainte. Pour chaque cas on étudie la réponse en déplacement imposé ainsi que la réponse en force imposée.

A partir de l'analyse des résultats de cette étude uniaxiale, on décidera de la forme de la loi d'évolution du paramètre  $D$  que nous utilisons pour l'application du modèle d'endommagement de Mazars à un problème de contact.

Il est d'abord nécessaire de définir un domaine élastique dans lequel l'endommagement n'évolue pas. Comme mentionné précédemment, l'évolution de l'endommagement (scalaire) sera ici une fonction d'une déformation équivalente  $\tilde{\epsilon}$ . Le domaine élastique est défini par une fonction seuil telle que :

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - K(D) \quad (3.1)$$

où  $K$  est une variable interne égale à la valeur maximale entre une valeur seuil  $K_i$  et une valeur maximale (à la rupture) au cours du temps :

$$K = \max(K_i, \max_t(\tilde{\epsilon})) \quad (3.2)$$

Lorsque la limite du domaine d'élasticité est atteinte, la fonction seuil est égale à 0 et l'endommagement peut augmenter. L'endommagement évolue en fonction de la variable interne  $K$  ( $\tilde{\epsilon}$  ou  $\tilde{\sigma}$ ) :  $D = D(K)$  et on a en particulier  $D(K_i) = 0$ .

La loi d'évolution est donnée par :

$$D = \frac{K - K_i}{K_c - K_i} \quad (3.3)$$

où  $K_i$  correspond à la déformation ou à la contrainte seuil au delà de laquelle le matériau commence à endommager ; et  $K_c$  la déformation ou la contrainte critique. Si cette valeur critique est atteinte, le matériau est considéré totalement détruit.

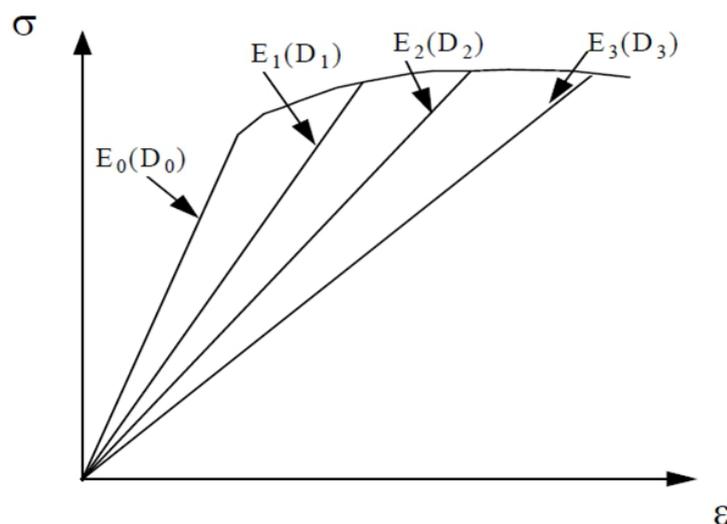
Le but ici est de mettre en évidence l'effet du type de chargement (en contrainte ou en déformation) et de la loi d'évolution d'endommagement (critère en terme de contrainte ou critère en terme de déformation) sur la prédiction du comportement cyclique du matériau.

L'endommagement est calculé cycle par cycle par les relations du modèle d'endommagement et de la loi d'évolution. La durée de vie est atteinte lorsque le paramètre  $D$  est égal à l'unité.

Le paragraphe suivant sera focalisé sur une analyse de la tenue en fatigue, à travers la relation entre le chargement et le nombre de cycles à rupture.

## 3.2 Réponse du modèle pour un chargement cyclique uniaxial

Une illustration du concept d'endommagement élastique à une dimension peut être généralisé sur la figure FIG.3.10.  $E_0$  est le module de Young initial. Le module élastique décroît  $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$ , à mesure que l'endommagement augmente  $D_0 = 0 < D_1 < D_2 < D_3$ .



**FIGURE 3.10:** Illustration du concept de l'endommagement élastique général pour différents stades d'endommagement.

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'analyse de la réponse du système sous chargement cyclique qui se traduit par une dégradation progressive des propriétés mécaniques du matériau.

**Principe d'endommagement progressif :** La valeur du paramètre d'endommagement est incrémentée chaque fois que le seuil d'endommagement est franchi. Le module élastique est alors multiplié par  $(1 - d_e)$ , où  $d_e$  est l'endommagement élémentaire consécutif à chaque franchissement du seuil. Il en résulte une diminution du module élastique avec l'endommagement subi par l'élément. Le module effectif peut s'exprimer en fonction du module initial et de l'endommagement subi par l'élément.

### 3.2.1 Critère en terme de contrainte

Pour décrire entièrement le comportement du matériau au cours de l'endommagement, une première loi d'évolution de  $D$  en fonction de la contrainte est considérée. Les réponses en déformation imposée et en contrainte imposée seront étudiées. La loi d'évolution en terme de contraintes est donnée par :

$$D = \frac{\tilde{\sigma} - \sigma_i}{\sigma_c - \sigma_i}$$

avec  $\tilde{\sigma} = E \times \tilde{\epsilon}$  la contrainte subie par l'élément,  $\sigma_i$  la contrainte seuil, et  $\sigma_c$  la contrainte critique.

### 3. Analyse d'un modèle d'endommagement cyclique pour un problème uniaxial

---

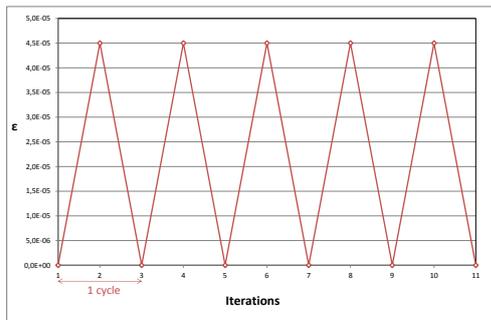
#### Réponse en déplacement imposé

- Essai uniaxial uniaxial ; Éprouvette de section  $S$  et de longueur  $L$ , avec des propriétés matériaux  $(E_0, \nu_0)$

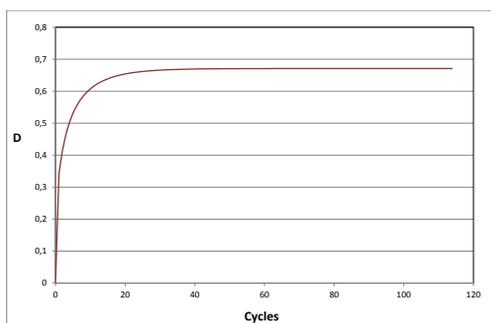
- Déplacement imposé :  $U$

- Chargement d'amplitude constante :  $U = cte$

Nous calculons les déformations à partir du déplacement appliqué.



Nous analysons ensuite la dégradation des propriétés élastiques ainsi que l'évolution de l'endommagement.



Nous déterminons, à partir de l'évolution de l'endommagement et des propriétés matériaux, l'évolution des contraintes au cours des cycles.

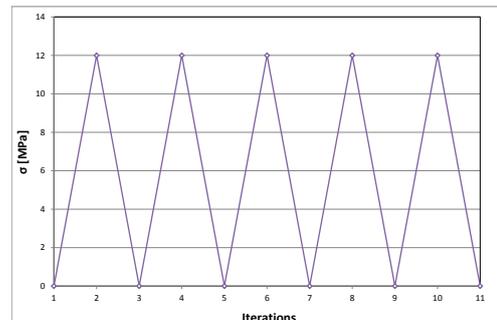
#### Réponse en force imposée

- Essai uniaxial uniaxial ; Éprouvette de section  $S$  et de longueur  $L$ , avec des propriétés matériaux  $(E_0, \nu_0)$

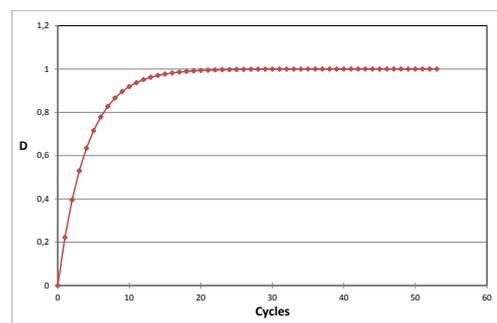
- Force imposée :  $F$

- Chargement d'amplitude constante :  $F = cte$

Les contraintes sont calculées à partir de la force appliquée.



La dégradation des propriétés matériaux et l'évolution de l'endommagement sont ensuite analysées.



L'analyse de l'évolution de l'endommagement et des propriétés matériaux permet de déterminer l'évolution des contraintes en fonction des déformations .

**Réponse en déplacement imposé**

On a : Déformations :  $\varepsilon_1 = \frac{U}{L}$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1$$

Déformation équivalente :  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$

Pour le 1<sup>er</sup> cycle :

Contrainte :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 = E^0 \times \tilde{\varepsilon}$$

Endommagement élémentaire :

$$d_e^1 = \frac{\tilde{\sigma} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y} = \frac{E^0 \times \tilde{\varepsilon} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y}$$

Module de Young :  $E^1 = E^0(1 - d_e^1)$

Evolution endommagement et contraintes :

$$\begin{cases} D^1 = 1 - \frac{E^1}{E^0} \\ \tilde{\sigma}^1 = \tilde{\varepsilon} \times E^1 \end{cases}$$

Pour le  $i^{me}$  cycle ( $i \geq 2$ ) :

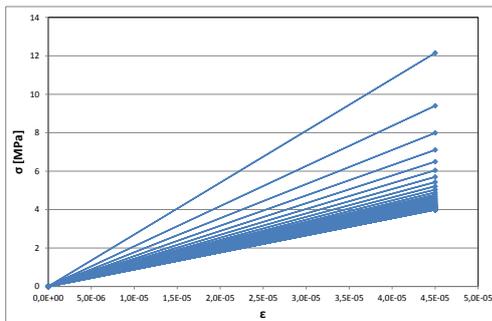
Endommagement élémentaire :

$$d_e^i = \frac{\tilde{\sigma}^{i-1} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y}$$

Module de Young :  $E^i = E^{i-1}(1 - d_e^i)$

Evolution endommagement et contraintes :

$$\begin{cases} D^i = 1 - \frac{E^i}{E^0} \\ \tilde{\sigma}^i = \tilde{\varepsilon} \times E^i \end{cases}$$


**Réponse en force imposée**

On a : Contrainte :  $\sigma = \frac{F}{S}$

Pour le 1<sup>er</sup> cycle :

Déformation :  $\varepsilon_1 = \sigma/E^0$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \times \varepsilon_1 = -\nu \times \sigma/E^0$$

Déformation équivalente :  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$

Endommagement élémentaire :

$$d_e^1 = \frac{\tilde{\sigma} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y} = \frac{E^0 \cdot \tilde{\varepsilon} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y}$$

Module de Young :  $E^1 = E^0(1 - d_e^1)$

Evolution endommagement et déformations :

$$\begin{cases} D^1 = 1 - \frac{E^1}{E^0} \\ \tilde{\varepsilon}^1 = \tilde{\sigma}/E^1 \end{cases}$$

Pour le  $i^{me}$  cycle ( $i \geq 2$ ) :

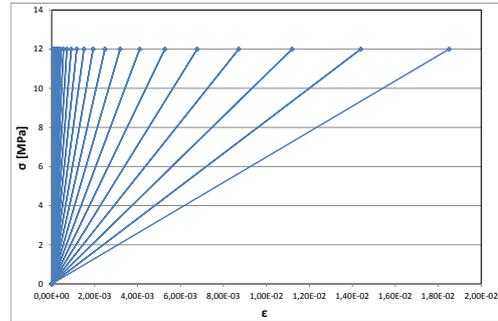
Endommagement élémentaire :

$$d_e^i = \frac{E^{i-1} \cdot \tilde{\varepsilon}^{i-1} - \sigma_y}{\sigma_R - \sigma_y}$$

Module de Young :  $E^i = E^{i-1}(1 - d_e^i)$

Evolution endommagement et déformations :

$$\begin{cases} D^i = 1 - \frac{E^i}{E^0} \\ \tilde{\varepsilon}^i = \tilde{\sigma}/E^i \end{cases}$$



#### Synthèse

Dans le cas d'essai de fatigue piloté en déplacement, la déformation reste constante durant tous les cycles. La courbe  $(\sigma, \varepsilon)$  met en évidence le phénomène d'adoucissement cyclique, caractérisé par une décroissance progressive de l'amplitude de contrainte nominale. Cette évolution est associée aux modifications des propriétés élastiques. Le comportement du matériau sous chargement cyclique uniaxial piloté en déformation est élastique linéaire avant une rupture brusque. Il est caractérisé par la valeur du module d'élasticité qui diminue durant les cycles.

La déformation augmente durant les cycles d'un essai de fatigue piloté en force, avec une stabilisation des contraintes. On est toujours dans le cas d'un adoucissement cyclique.

#### 3.2.2 Critère en terme de déformation

Dans cette partie, une loi d'évolution de  $D$  en fonction de la déformation est considérée. Les réponses en déformation imposée et en contrainte imposée seront étudiées. La loi d'évolution en terme de déformation est donnée par :

$$D = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_i}{\varepsilon_c - \varepsilon_i}$$

avec  $\varepsilon = \sigma/E$ ,  $\varepsilon_i$  la déformation seuil, et  $\varepsilon_c$  la déformation critique.

**Réponse en déplacement imposé**

On a :

Déformations :  $\varepsilon_1 = \frac{U}{L}$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1$

Déformation équivalente :  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$

Pour le 1<sup>er</sup> cycle :

Contrainte :  $\tilde{\sigma} = \sigma_1 = E^0 \times \tilde{\varepsilon}$

Endommagement élémentaire :

$$d_e^1 = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y} = \frac{\tilde{\sigma}/E^0 - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y}$$

Module de Young :  $E^1 = E^0(1 - d_e^1)$

Evolution endommagement et contraintes :

$$\begin{cases} D^1 = 1 - \frac{E^1}{E^0} \\ \tilde{\sigma}^1 = \tilde{\varepsilon} \times E^1 \end{cases}$$

Pour le  $i^{me}$  cycle ( $i \geq 2$ ) :

Endommagement élémentaire :

$$d_e^i = \frac{\tilde{\varepsilon}^{i-1} - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y} = \frac{\tilde{\sigma}^{i-1}/E^{i-1} - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y}$$

Module de Young :  $E^i = E^{i-1}(1 - d_e^i)$

Evolution endommagement et contraintes :

$$\begin{cases} D^i = 1 - \frac{E^i}{E^0} \\ \sigma^i = \varepsilon \cdot E^i \end{cases}$$

**Réponse en force imposée**

On a :

Contrainte :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Pour le 1<sup>er</sup> cycle :

Déformation :  $\tilde{\varepsilon} = \sigma/E^0$

Endommagement élémentaire :

$$d_e^1 = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y}$$

Module de Young :  $E^1 = E^0(1 - d_e^1)$

Evolution endommagement et déformations :

$$\begin{cases} D^1 = 1 - \frac{E^1}{E^0} \\ \tilde{\varepsilon}^1 = \sigma/E^1 \end{cases}$$

Pour le  $i^{me}$  cycle ( $i \geq 2$ ) :

Endommagement élémentaire :

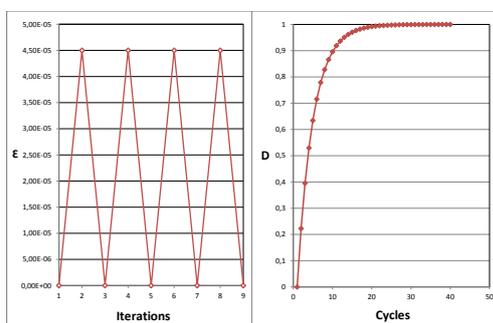
$$d_e^i = \frac{\tilde{\varepsilon}^{i-1} - \varepsilon_y}{\varepsilon_R - \varepsilon_y}$$

Module de Young :  $E^i = E^{i-1}(1 - d_e^i)$

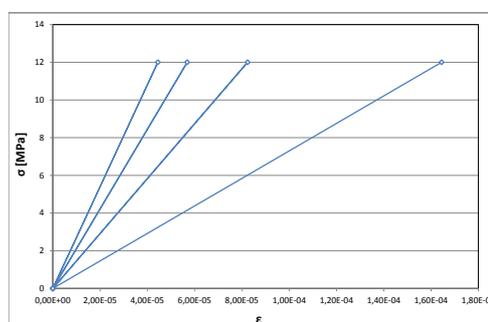
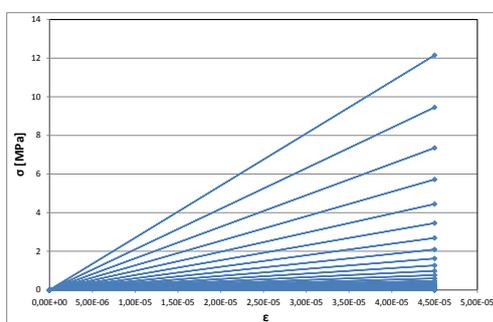
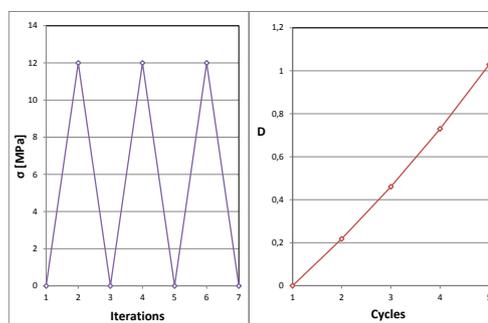
Evolution endommagement et déformations :

$$\begin{cases} D^i = 1 - \frac{E^i}{E^0} \\ \tilde{\varepsilon}^i = \sigma/E^i \end{cases}$$

#### Réponse en déplacement imposé



#### Réponse en force imposée



#### Synthèse

Les mêmes phénomènes, observés pour le cas d'un essai piloté en déplacement imposé avec une loi d'évolution en terme de contrainte, sont observés dans ce cas ; mais avec un nombre de cycles plus faible (durée de vie moins importante).

La réponse d'un essai piloté en force imposée avec une loi d'évolution en terme de déformation, est caractérisée par une durée de vie assez limitée (nombre de cycles très faible par rapport à celui obtenu pour un essai piloté en force imposée avec une loi d'évolution en terme de contrainte).

#### 3.2.3 Analyse et discussion

Les essais cycliques présentés dans les sections précédentes, permettent de confirmer le rôle de l'évolution de l'endommagement qui provoque une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau.

Nous avons constaté d'après les différents cas étudiés que le contrôle d'un essai cyclique en déformation totale conduit à une réponse du matériau en contrainte d'amplitude variable dans le temps. En revanche si l'essai est piloté en force, la réponse du matériau se traduit par des variations d'amplitudes de déformations au cours des cycles.

Les courbes d'endommagement données dans les figures des différentes études, sont cohérentes physiquement. En effet, l'endommagement commence par une première phase du-

rant laquelle le paramètre d'endommagement évolue progressivement jusqu'à atteindre une seconde phase qu'on peut appeler phase de stabilisation ; elle présente une augmentation moins importante- et même stable- en termes de taux d'endommagement.

On a constaté que, quel que soit le type de chargement appliqué et le type de loi d'évolution utilisé, le matériau étudié s'adoucit. En d'autres termes, il y a accroissement de l'amplitude de déformation à contrainte imposée constante ; et lors de tests à déformation imposée, l'amplitude de contrainte décroît au cours des cycles. Cependant, le type de chargement appliqué et le type de loi d'évolution utilisé ont une influence assez importante sur la durée de vie du matériau.

Le problème de contact à étudier sera sollicité en fretting. Un déplacement sera imposé. Et on utilisera le modèle d'endommagement de Mazars basé sur la déformation équivalente. On aura le choix entre une loi d'évolution du paramètre  $D$  en terme de déformation et une loi d'évolution en terme de contrainte. D'après les précédentes études, le choix est fixé sur une loi d'évolution en terme de déformation.



# Chapitre 4

## Modèle d'endommagement pour un problème de contact sous chargement de fretting

*Dans ce chapitre, un modèle d'endommagement dans le contexte de la théorie élasto-endommageable sera présenté pour simuler le comportement d'un contact soumis à des sollicitations de fretting. L'objectif ici est d'implémenter un modèle d'endommagement dans le code semi-analytique et d'identifier clairement, après vérification de la mise en oeuvre du nouveau module et de son efficacité, les effets de différents paramètres sur l'initialisation et l'évolution de l'endommagement.*

### Sommaire

---

<b>4.1 Mécanique de l'endommagement</b> . . . . .	<b>104</b>
4.1.1 Hypothèses de la mécanique de l'endommagement . . . . .	104
4.1.2 Élasticité couplée à l'endommagement . . . . .	105
<b>4.2 Implémentation dans le code Semi-Analytique</b> . . . . .	<b>107</b>
<b>4.3 Tribologie des surfaces revêtues</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>4.4 Simulations &amp; Analyse</b> . . . . .	<b>109</b>
4.4.1 Configuration de référence : cas homogène . . . . .	110
4.4.2 Configuration revêtue . . . . .	118
<b>4.5 Synthèse</b> . . . . .	<b>130</b>

---

## 4.1 Mécanique de l'endommagement

Une modélisation d'endommagement par fretting et des techniques numériques sont appliquées à un contact revêtu soumis à un chargement cyclique. Les résultats encourageants prouvent qu'ils seront des outils très utiles pour la prédiction de la durée de vie dans le domaine de la maintenance.

Dans cette section, nous commençons par un rappel des hypothèses de base de la mécanique de l'endommagement, suivi par la présentation d'un modèle à "déformation équivalente" traitant l'élasticité couplé à l'endommagement. Nous définissons le modèle de l'endommagement de Mazars adapté aux problèmes de contact. En effet, sur la base du modèle de Mazars initial [MAZ 81], présenté au chapitre précédent dans le cas unidimensionnel et pour une sollicitation strictement positive, une adaptation a été proposée pour les contacts (multiaxial et chargement complexe). Ce modèle permet d'estimer et analyser l'évolution de l'endommagement en tout point matériel et la durée de vie du contact étudié en terme de nombre de cycles.

### 4.1.1 Hypothèses de la mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement est une branche de la mécanique des milieux continus qui décrit la perte progressive de la rigidité due à l'évolution des dommages et des défauts. Ces changements dans la microstructure conduisent à une dégradation irréversible des propriétés matériaux, caractérisée par une perte de rigidité. Afin de bien comprendre ces concepts et d'obtenir la relation constitutive pertinente pour le modèle d'endommagement isotrope, quelques hypothèses doivent être considérées :

- *Concept de la contrainte effective.*

C'est l'un des concepts les plus importants en mécanique de l'endommagement. Introduit par Robotnov, il fournit un moyen valable pour décrire le comportement et construire des équations constitutives du matériau endommagé. Il peut être défini par : un volume endommagé soumis à la contrainte appliquée  $\sigma$  produit la même réponse que celui non endommagé soumis à la contrainte effective  $\sigma_{eff}$ . La loi de transformation prend la forme :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (4.1)$$

Par conséquent, il est approprié d'interpréter  $(1 - D)$  en tant que facteur de réduction associée à la quantité d'endommagement dans le matériau.

- *Équivalence en déformation.*

La déformation associée à un état endommagé sous la contrainte appliquée est équivalente à la déformation associée à son état intact sous la contrainte effective. Pour l'état endommagé, selon cette hypothèse, la relation contrainte-déformation peut être écrite comme :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.2)$$

Et pour l'état intact fictif elle peut être écrite comme :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{eff}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (4.3)$$

La définition ci-dessus de la contrainte effective basée sur le principe de l'équivalence en déformation, rapporte la chute linéaire du module d'élasticité avec l'endommagement. La mesure du module d'élasticité effectif accordée à l'évolution du paramètre d'endommagement avec la détérioration des propriétés matériaux donne :

$$E_{eff} = E(1-D) \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Élasticité couplée à l'endommagement

En considérant la mécanique des milieux continus, l'approche standard utilisée pour décrire le comportement des structures est basée généralement sur l'utilisation des modèles élasto-endommageables. L'endommagement modifie le comportement mécanique. Mazars a retenu que la modification du comportement élastique se traduit par une variation des caractéristiques mécaniques (module de Young). Dans son modèle isotrope, initialement utilisé pour l'étude du comportement du béton, Mazars a défini le paramètre d'endommagement isotrope  $D$ .  $D$  est une variable scalaire qui affecte la rigidité.

Ce modèle s'appuie sur un critère d'endommagement écrit en déformation. Un deuxième paramètre appelé "déformation équivalente", fonction des déformations principales positives (provenant des contraintes de traction), est défini par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1,3} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (4.5)$$

avec

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \left( \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2} \right) \quad (4.6)$$

et  $\varepsilon_i$  les déformations principales.

$D$  est déterminé en fonction de la déformation équivalente.

Dans le cas de l'étude de l'endommagement des contacts sous chargement de fretting, il semble important d'utiliser la totalité des déformations principales positives ( $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ ) et négatives ( $\langle \varepsilon_i \rangle_-$ ).

Sur ce principe, une adaptation de l'expression de déformation équivalente au sens de Mazars est possible et définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1,3} \varepsilon_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1,3} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2 + \sum_{i=1,3} \langle \varepsilon_i \rangle_-^2} \quad (4.7)$$

avec

$$\langle \varepsilon_i \rangle_- = \begin{cases} |\varepsilon_i| & \text{if } \varepsilon_i \leq 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_i > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

La déformation équivalente contrôle l'évolution de l'endommagement par l'intermédiaire d'une loi d'évolution. Ainsi, pour une valeur d'endommagement  $D$  donnée, la forme de la loi d'évolution (fonction de chargement) est :

$$f(\varepsilon, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) \quad (4.9)$$

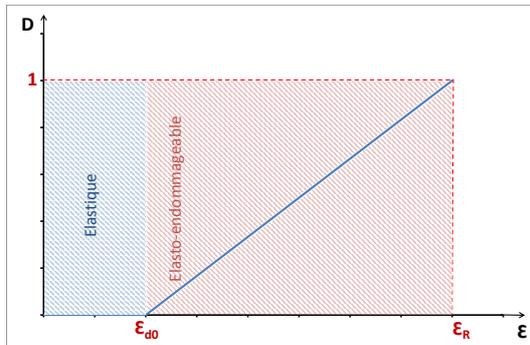
L'endommagement débute lorsque la déformation équivalente atteint une certaine valeur fonction de l'endommagement  $K(D)$ , donc si la condition  $f(\varepsilon, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0$  est respectée.  $K(D)$  est la plus grande valeur de  $\tilde{\varepsilon}$  atteinte au cours de l'histoire de chargement précédente, pour un point considéré dans le milieu et à un moment donné. L'endommagement  $D$  croît dès que la déformation équivalente atteint un seuil  $K(D)$  initialisé à  $\varepsilon_{d0}$ . L'évolution de  $D$  est déduit de la déformation équivalente  $\tilde{\varepsilon}$  définie dans l'équation (4.7). L'évolution de l'endommagement est supposée linéaire.

L'expression de la variable d'endommagement est donnée dans l'équation (4.10), où  $\varepsilon_{d0}$  est la déformation seuil et  $\varepsilon_R$  la déformation critique (de rupture).

$$\begin{cases} D = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_R - \varepsilon_{d0}} & \text{if } \tilde{\varepsilon} \geq \varepsilon_{d0} \\ D = 0 & \text{if } \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_{d0} \end{cases} \quad (4.10)$$

## Loi de comportement élasto-endommageable

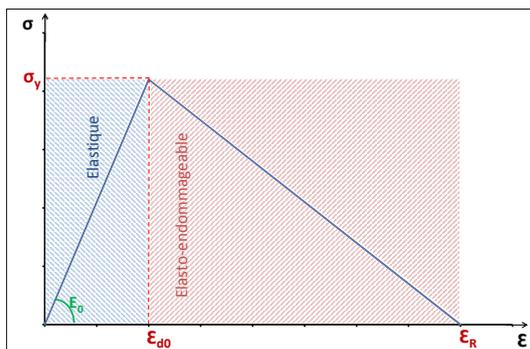
La loi de comportement est définie sur deux domaines et peut être présentée par les deux schémas FIG.4.1.2.



(1) Domaine élastique :

$$D = 0$$

$$[\sigma] = E_0 [\varepsilon]$$



(2) Domaine élasto-endommageable :

$$D = \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_R - \varepsilon_{d0}}$$

$$[\sigma] = E_0(1 - D) [\varepsilon]$$

**FIGURE 4.1:** Comportement élasto-endommageable :  
Evolution de  $D$  et loi de comportement

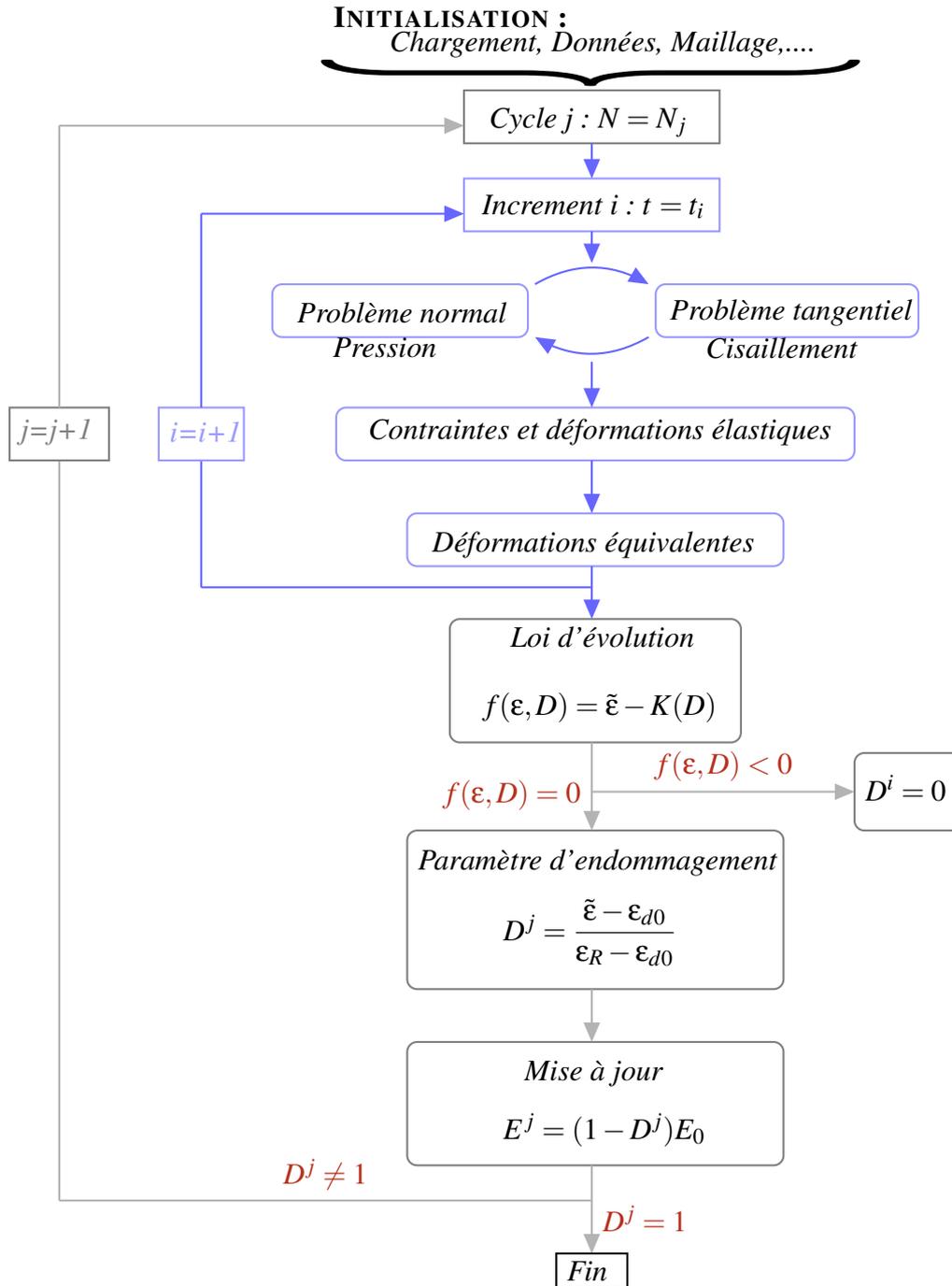
## 4.2 Implémentation dans le code Semi-Analytique

Le modèle Mazars est facile à mettre en oeuvre, robuste et donne une bonne description du comportement élasto-endommageable d'un contact sous chargement de fretting.

Les variables d'entrée sont la déformation seuil au delà de laquelle le matériau commence à s'endommager et la déformation critique à la rupture. Le nouveau module simulant l'endommagement est intégré aux différents modules greffés au corps principal et constituant du solveur de contact semi-analytique (détail Section 2.2).

Le code de contact semi-analytique permet de résoudre le problème de contact à différents incréments de temps au cours des cycles de fretting, il permet de tenir compte de l'évolution du contact avec le temps. L'objectif est d'utiliser ce code pour simuler l'accumulation de l'endommagement d'un contact soumis à un chargement cyclique.

La Figure FIG.4.2 montre l'algorithme global de l'endommagement comportant trois mo-



dules généraux : la phase d'initialisation, la résolution du contact normal et tangentiel (détermination des contraintes et des déformations élastiques) suivie du calcul des déformations équivalentes et la phase du calcul de l'endommagement basé sur ce modèle.

Le module d'endommagement comporte lui-même deux étapes de résolution :

1. Test du critère d'endommagement pour chaque point matériel.
2. Détermination du paramètre d'endommagement  $D$  pour chaque point et mise à jour du module de Young correspondant.
  - Arrêt du calcul dès qu'une ou plusieurs cellules soient totalement endommagées ( $D=1$  et module de Young nul).

Une première boucle itérative sur l'incrément de chargement permet de coupler l'étape de détermination des "déformations équivalentes" avec la résolution du contact et une deuxième boucle itérative sur le cycle de fretting permet de coupler le calcul d'endommagement cyclique avec la résolution de contact et d'actualiser la rigidité des inclusions.

Cet algorithme nous permet de relier numériquement la résolution du contact au modèle d'endommagement, et de pouvoir donc déterminer le comportement élasto-endommageable du contact revêtu étudié.

### 4.3 Tribologie des surfaces revêtues

Dans les applications tribologiques, l'utilisation des revêtements est une mesure efficace et relativement économique pour réduire les frottements et protéger la surface du substrat contre les dégradations induites par fretting. Cependant, le choix du revêtement approprié pour une application tribologique donnée est toujours difficile et compliqué parce que la réponse d'un système revêtu dépend de nombreux facteurs (les propriétés du revêtement, le substrat, l'interface et les conditions de fonctionnement).

Les paramètres tels que le module de Young et l'épaisseur du revêtement sont primordiaux. Ils doivent être définis en fonction du substrat à revêtir et des conditions de chargement [HOL 94, HOL 98, PLU 98, HOL 00, STE 01, BOF 12].

Les effets de l'épaisseur du revêtement et de sa rigidité par rapport au substrat sur la durée de vie et le comportement endommageable du contact seront examinés. Des études paramétriques seront aussi conduites pour analyser les effets de quelques paramètres (chargement, frottement,...) sur le comportement élasto-endommageable et la durée de vie.

### 4.4 Simulations & Analyse

Les premières simulations d'un problème d'endommagement sont réalisées pour tester la mise en oeuvre de notre modèle et vérifier son efficacité pour l'étude du comportement élasto-endommageable des contacts 3D.

Un contact 3D sphère/plan, choisi comme compromis entre la simplicité et la représentativité, est présenté FIG.4.3.

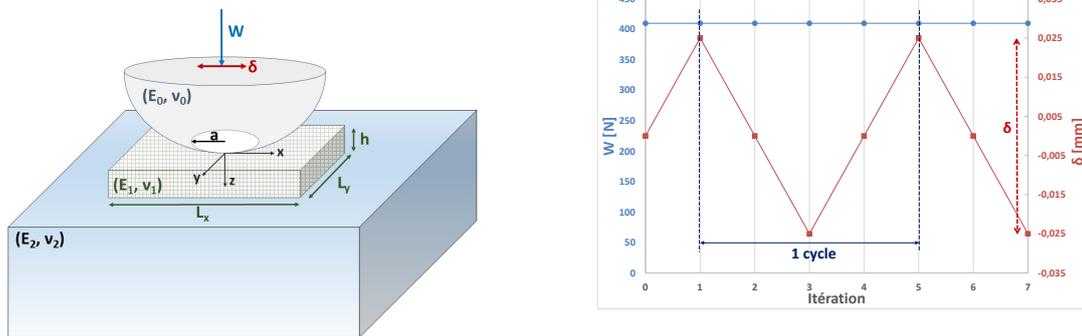


FIGURE 4.3: Configuration du contact sphère/plan revêtu et cycle de chargement

Une sphère de rayon 25 mm est chargée normalement contre un plan revêtu d'épaisseur  $h$ . Un déplacement tangentiel  $\delta$  est ensuite imposé à la sphère maintenue en contact avec le plan par la charge normale constante  $W$  (FIG.4.3). Un coefficient de frottement  $\mu$  est imposé. Le comportement élasto-endommageable nécessite deux données d'entrée  $\epsilon_{d0}$  la déformation seuil et  $\epsilon_R$  la déformation critique. Le revêtement, de dimensions  $(L_x, L_y, h)$ , est représenté à l'aide de  $(\frac{L_x}{dx} + 1) \times (\frac{L_y}{dy} + 1) \times (\frac{h}{dz} + 1)$  cuboïdes pour un pas de maillage  $dx = dy = dz$ .

Les dimensions de la zone d'enrichissement respectent la condition définie au deuxième chapitre :  $L_x/a = L_y/a = 3$ .

Trois configurations principales de revêtements peuvent être employées :  $E_1 < E_2$  (revêtement souple),  $E_1 = E_2$  (cas homogène), et  $E_1 > E_2$  (revêtement dur).

#### 4.4.1 Configuration de référence : cas homogène

Cette configuration est considérée comme la configuration de référence traitant le problème de contact nu où nous considérons un revêtement ayant les mêmes propriétés matériaux que le substrat  $E_1 = E_2$  (cas homogène).

Dans le cas du substrat sans revêtement, la théorie de Hertz prescrit un rayon de contact  $a$  et une pression de contact maximale  $P_0$ . Le revêtement, d'épaisseur  $h = 1,25 \times a$ , est représenté à l'aide de  $31 \times 31 \times 11$  cuboïdes pour un pas de maillage  $dx = dy = dz = 0,05mm$ .

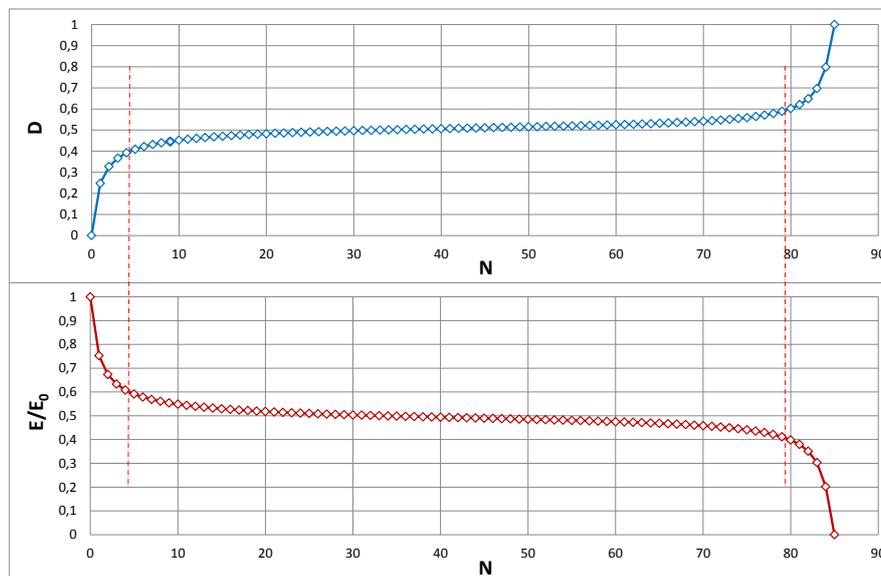
Les propriétés matériaux pour les corps en contact et pour le revêtement, les conditions de chargement ainsi que les données d'endommagement pour cette première configuration sont résumées dans TAB.4.1.

<b>Propriétés des corps en contact</b>	$(E_0[GPa]; \nu_0)$	(210;0,3)
	$(E_2[GPa]; \nu_2)$	(210;0,3)
<b>Propriétés du revêtement</b>	$(E_1[GPa]; \nu_1)$	(210;0,3)
	h	$1,25 \times a = 10 \times dz$
<b>Conditions de chargement</b>	W[N]	410
	$\delta[mm]$	0,05
	$\mu[mm]$	0,7
<b>Maillage</b>	$dx[mm]$	0,05
	$dy[mm]$	0,05
	$dz[mm]$	0,05
<b>Données de l'endommagement</b>	$\varepsilon_{d0}$	$0,15 \cdot 10^{-2}$
	$\varepsilon_R$	$4 \cdot 10^{-2}$

**TABLE 4.1:** Paramètres de simulation

#### 4.4.1.1 Analyse des résultats

Les résultats sont présentés sur la figure FIG.4.4.



**FIGURE 4.4:** Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles pour la simulation de référence

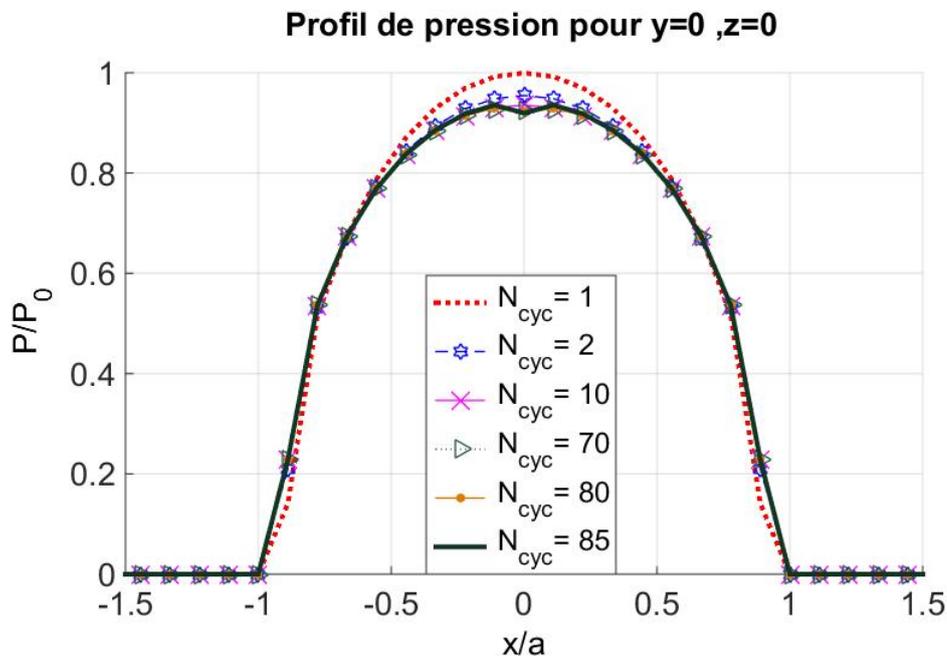
L'évolution de l'endommagement est donnée par l'évolution du paramètre D en fonction du nombre de cycles et par la perte de la rigidité traduite par la dégradation du module de Young normalisé par le module de Young initial en fonction du nombre de cycles. Les valeurs de D

et de  $E/E_0$  correspondent à l'évolution de l'endommagement du point le plus critique de la surface endommagée (le premier à être totalement endommagé).

Le chargement cyclique conduit à la dégradation progressive de la rigidité. Cela est dû à la croissance progressive du paramètre d'endommagement  $D$ .

L'évolution de l'endommagement passe par 3 phases. Une première phase est caractérisée par l'initiation de l'endommagement où nous observons une diminution rapide de  $E/E_0$  (de 1 à 0.6). Pour la deuxième phase, l'évolution est quasi linéaire avec une cinétique d'endommagement moins importante. Et enfin une dernière caractérisée par la ruine de la structure qui se traduit par une chute brutale de  $E/E_0$  (de 0.4 à 0).

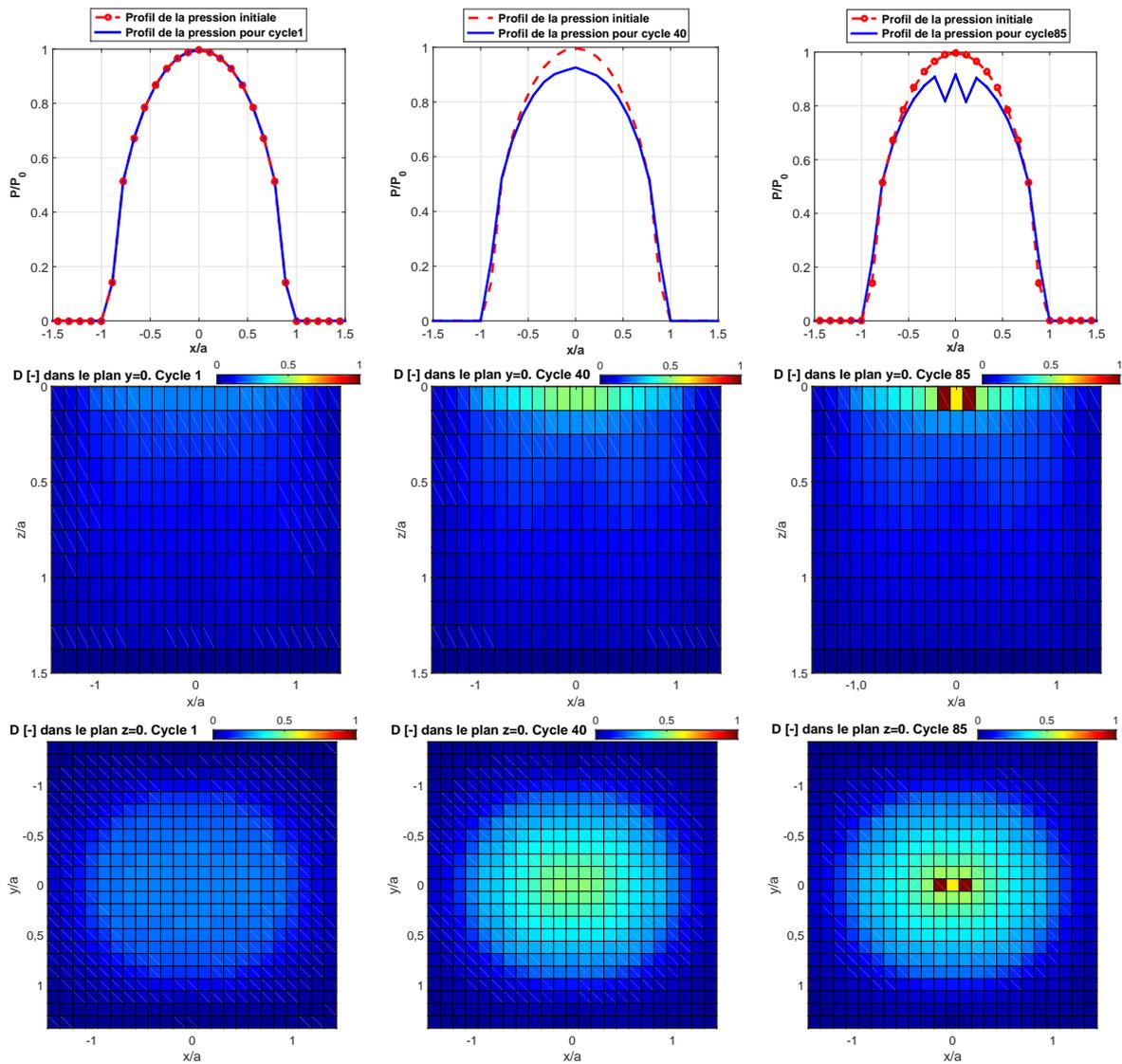
Ces trois phases sont également observées pour l'évolution de la pression de contact FIG.4.5.



**FIGURE 4.5:** Distribution de la pression de contact en fonction du nombre de cycles pour la simulation de référence (un contact sphère/plan non revêtu)

En effet, la pression de contact diminue significativement au cours des premiers cycles, et après elle reste quasiment constante pour un période plus longue pour s'effondrer en fin de la simulation. Les valeurs de la pression de contact obtenues et présentées sont normalisées par la pression de contact de Hertz  $P_0$ .

La FIG.4.6 montre l'évolution de la pression de contact obtenue au cours de la simulation (début ( $N=1$  cycle), milieu ( $N=40$  cycles) et fin de la simulation ( $N=85$  cycles)) le long de l'axe  $x$ . De façon général, la distribution de pression est correctement obtenue. Nous constatons une diminution de la valeur de la pression maximale. Cette diminution est due essentiellement à la dégradation du module de Young localisée au centre de la zone de contact. Nous observons également une légère augmentation de l'aire de contact permettant de conserver la charge normale. Sur la même figure, sont présentées la distribution du paramètre  $D$  au niveau des



**FIGURE 4.6:** Évolution de la pression de contact le long de l'axe  $x$  et de l'endommagement au cours de la simulation ( $N=1$ ,  $N=40$ ,  $N=85$  cycles). Contact sphère/plan non revêtu

cuboïdes, dans le plan  $y=0$  et dans le plan  $z=0$ , pour les 3 étapes de simulation. Nous pouvons bien observer les sites d'endommagement situés au milieu de la surface de contact. Dans ce cas nous n'avons pas d'endommagement en profondeur ce qui est cohérent car le coefficient de frottement ( $\mu = 0,7$ ) est supérieur à 0,3, ce qui implique que la contrainte maximale est initialement en surface.

L'implémentation du modèle dans le code semi-analytique a été accomplie. Nous avons vérifié l'efficacité du modèle en se basant sur un modèle de contact sphère/plan. Dans la partie suivante, nous présenterons une étude paramétrique pour étudier l'effet de quelques paramètres sur la durée de vie du contact sous chargement de fretting.

##### 4.4.1.2 Étude paramétrique

Afin d'analyser l'effet de quelques paramètres sur la durée de vie et l'évolution de l'endommagement, différentes simulations sont menées.

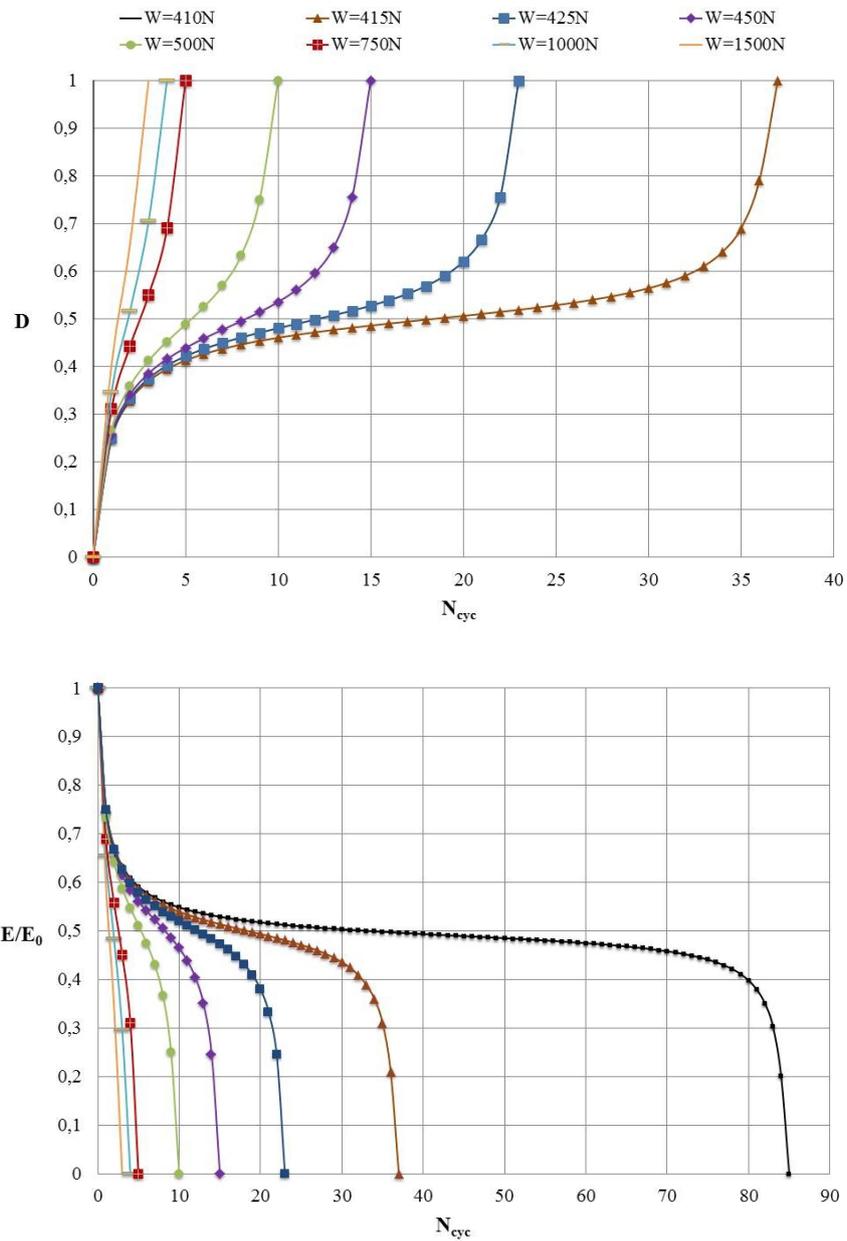
##### Effet de la charge normale appliquée

L'influence de la charge normale appliquée (ou pression de contact) sur la durée de vie du contact a été étudié par différents chercheurs. La majorité des études a montré que la durée de vie sous sollicitations de fretting diminue avec une augmentation de la pression (charge appliquée) [NIS 72, END 76, GAU 80, ADI 93]. D'autres chercheurs ont constaté que la durée de vie en fretting présentait un minimum à une certaine valeur de la pression [WAT 68, SWI 85, LEE 00], ou que la résistance au fretting présentait un minimum et un maximum avec une augmentation de la pression [NAK 94].

Pour étudier l'effet du chargement sur l'endommagement, nous avons effectué une série de simulations avec différentes forces normales :  $W$  varie de 410N à 1500N, ce qui correspond à une pression variant de 1191MPa à 1835MPa, tout en gardant les autres paramètres de la simulation de référence constants.

La FIG.4.7 montre clairement l'effet de l'augmentation de la charge sur l'accélération de l'endommagement. La durée de vie en appliquant une pression de 1835MPa (charge appliquée de 1500N) est 1/10 de la durée de vie atteinte avec une pression de 1196MPa (charge appliquée de 415N). Cependant la diminution de la pression à 1191MPa (charge appliquée de 410N) a augmenté la durée de vie de plus de deux fois par rapport à celle obtenue avec une pression de 1196MPa. Le fait de réduire d'avantage la pression ( $\leq 1180MPa$ ) a causé un endommagement stable (avec un effet asymptotique sur la rupture). Le phénomène observé peut être résumé comme suit : la durée de vie en fretting présente un maximum à une certaine charge appliquée et diminue fortement avec l'augmentation de la charge appliquée. Ensuite, elle diminue de nouveau d'une façon monotone et elle devient presque constante pour une pression de contact élevée.

Une pression assez élevée peut causer un dommage catastrophique après un très faible nombre de cycles, nous pouvons parler de fatigue oligocyclique.

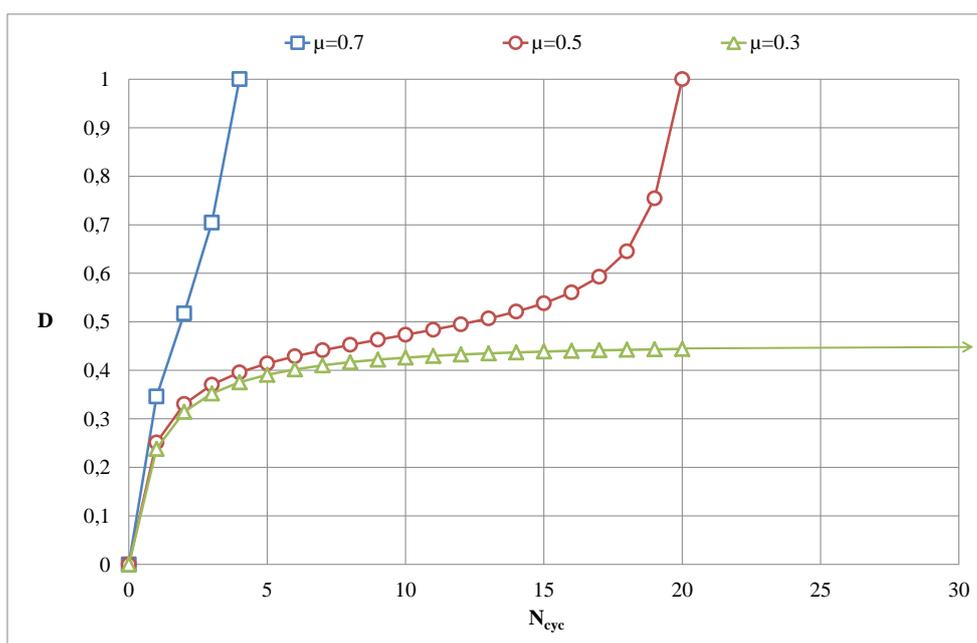


**FIGURE 4.7:** Influence de la charge normale appliquée sur l'évolution de l'endommagement d'un contact sphère/plan (cas homogène)

### Effet du coefficient de frottement

L'effet du coefficient de frottement sur la durée de vie est également étudié. La charge normale imposée est choisie égale à  $W = 1000N$ . Pour les autres paramètres de simulation nous gardons les valeurs indiquées au tableau TAB.4.1.

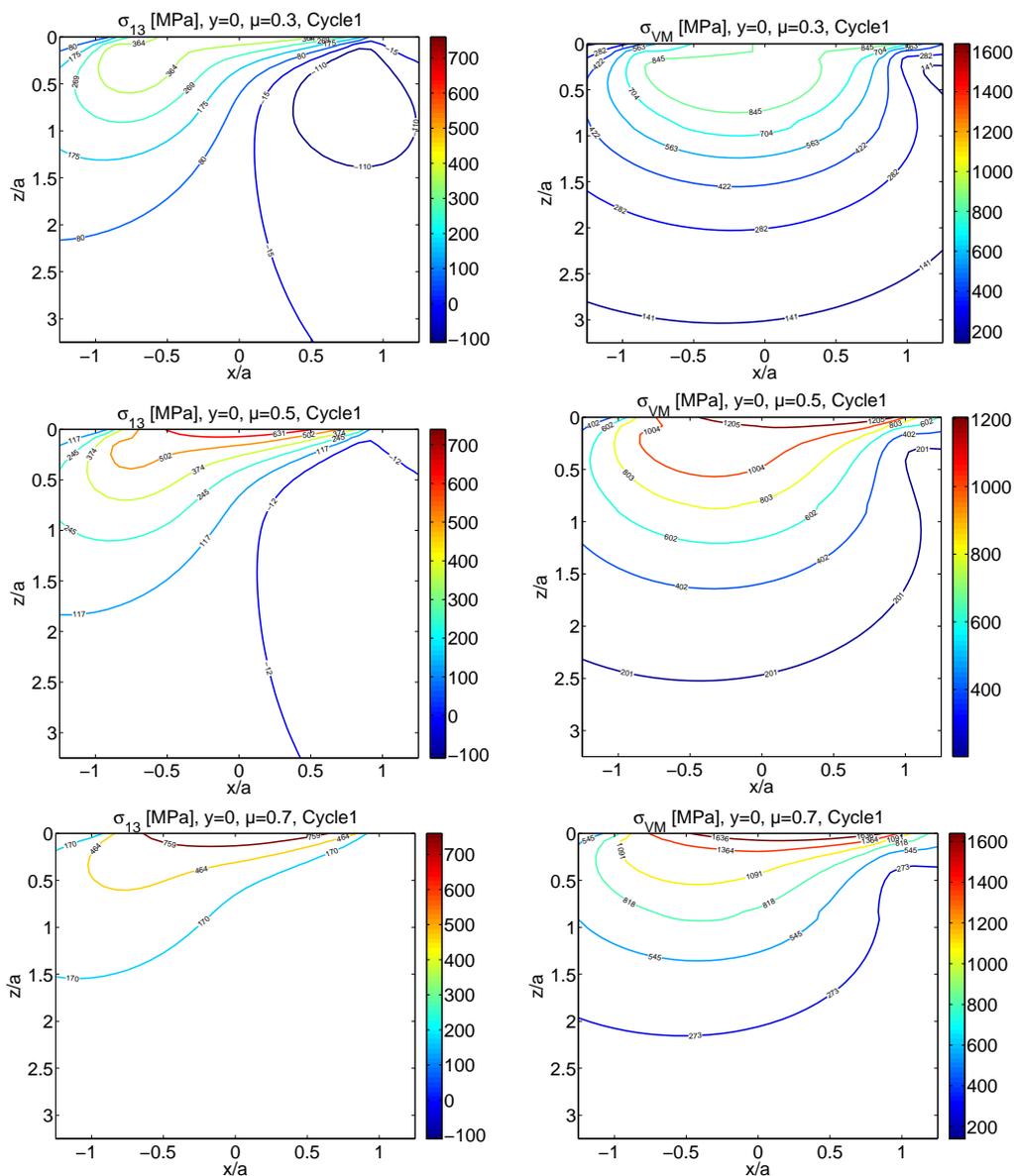
Les résultats de la figure FIG.4.8 démontrent que, en augmentant le coefficient de frottement la résistance au fretting diminue. Par conséquent, la diminution du coefficient de frottement est un procédé efficace pour améliorer la durée de vie.



**FIGURE 4.8:** Influence du coefficient de frottement sur l'évolution de l'endommagement d'un contact sphère/plan non revêtu

L'état des contraintes dans un solide peut être étudié à travers la contrainte de cisaillement ou la contrainte de von Mises. Ces deux types de contraintes sont utilisés dans différents critères (Tresca, von Mises, ...) et permettent de rendre compte du risque d'endommagement dans les solides. Le coefficient de frottement joue un rôle important dans l'endommagement par fretting. En effet une force de frottement importante conduit à des déformations de fretting ou des contraintes de cisaillement plus élevées, donc une intensification de la rupture par fretting pourraient en résulter. Alors que des coefficients de frottement moins importants peuvent améliorer la résistance au fretting.

A partir des figures FIG.4.9, représentant les isovaleurs de la contrainte de cisaillement et de la contraintes de von Mises au centre du contact pour différentes valeurs du coefficient de frottement, nous observons clairement l'effet du frottement sur la répartition du cisaillement dans le massif (ou revêtement).



**FIGURE 4.9:** Effet du coefficient de frottement sur la distribution des contraintes pour un contact sphère/plan non revêtu

L'influence du frottement sera encore détaillée et analysée pour le cas d'un contact revêtu (cas non homogène).

Les simulations étudiées jusqu'à présent ont montré des résultats intéressants, avec des effets exponentiels, ou asymptotiques à la rupture.

Ces premiers résultats sont présentés dans le cadre d'une configuration de référence correspondant à un contact sphère/plan dans le cas homogène (revêtement ayant les mêmes propriétés matériaux que le substrat). Dans la partie suivante, nous présenterons une étude dans le cas du contact revêtu (revêtement plus rigide ou plus souple que le substrat).

#### 4.4.2 Configuration revêtue

Nous étudions dans ce qui suit, l'effet d'un revêtement d'épaisseur  $h$  sur l'une des surfaces en contact sur le comportement endommageable et la durée de vie en fretting cyclique.

##### 4.4.2.1 Configuration revêtement/substrat : $E_1/E_2 = 1,285$

Dans le cadre d'un problème d'endommagement d'un contact revêtu (non-homogène), dont la configuration est résumée dans TAB.4.2, le revêtement est considéré, dans un premier lieu, avec un module de Young supérieur à celui du substrat ( $E_1/E_2 = 1,285$ ). Le frottement est imposé à  $\mu = 0,3$ . Les données de l'endommagement sont imposées ( $\tilde{\epsilon}_{max}=0,007$ ).

<i>Propriétés des corps en contact</i>	$(E_0[GPa]; \nu_0)$	(210 ; 0,3)
	$(E_2[GPa]; \nu_2)$	(210 ; 0,3)
<i>Propriétés du revêtement</i>	$(E_1[GPa]; \nu_1)$	(270 ; 0,27)
	$h$	$0,9 \times a = 10 \times dz$
<i>Conditions de chargement</i>	$W[N]$	1000
	$\delta[mm]$	0,05
	$\mu[mm]$	0,3
<i>Maillage</i>	$dx[mm]$	0,05
	$dy[mm]$	0,05
	$dz[mm]$	0,05
<i>Données de l'endommagement</i>	$\epsilon_{d0}$	$0,5\tilde{\epsilon}_{max}$
	$\epsilon_R$	$2\tilde{\epsilon}_{max}$

TABLE 4.2: Configuration du contact revêtu

L'évolution des conditions de contact, la pression et l'aire de contact, sont présentées sur la figure FIG.4.10.

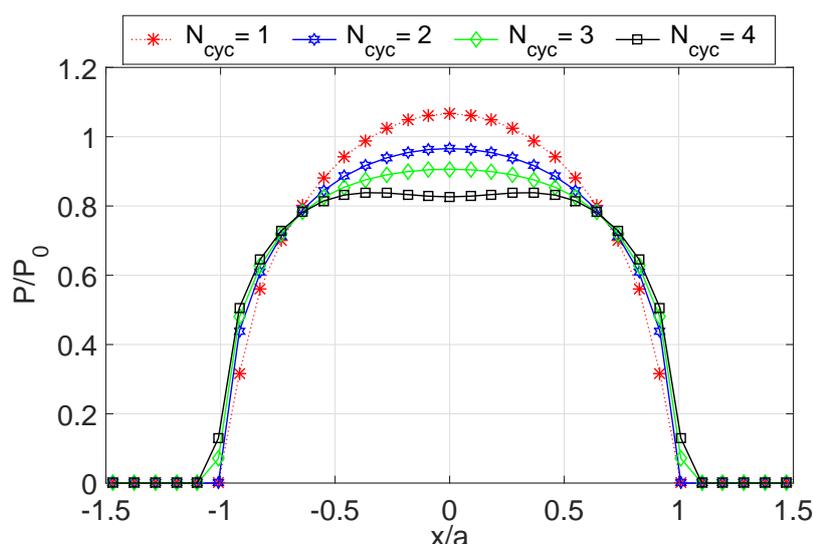
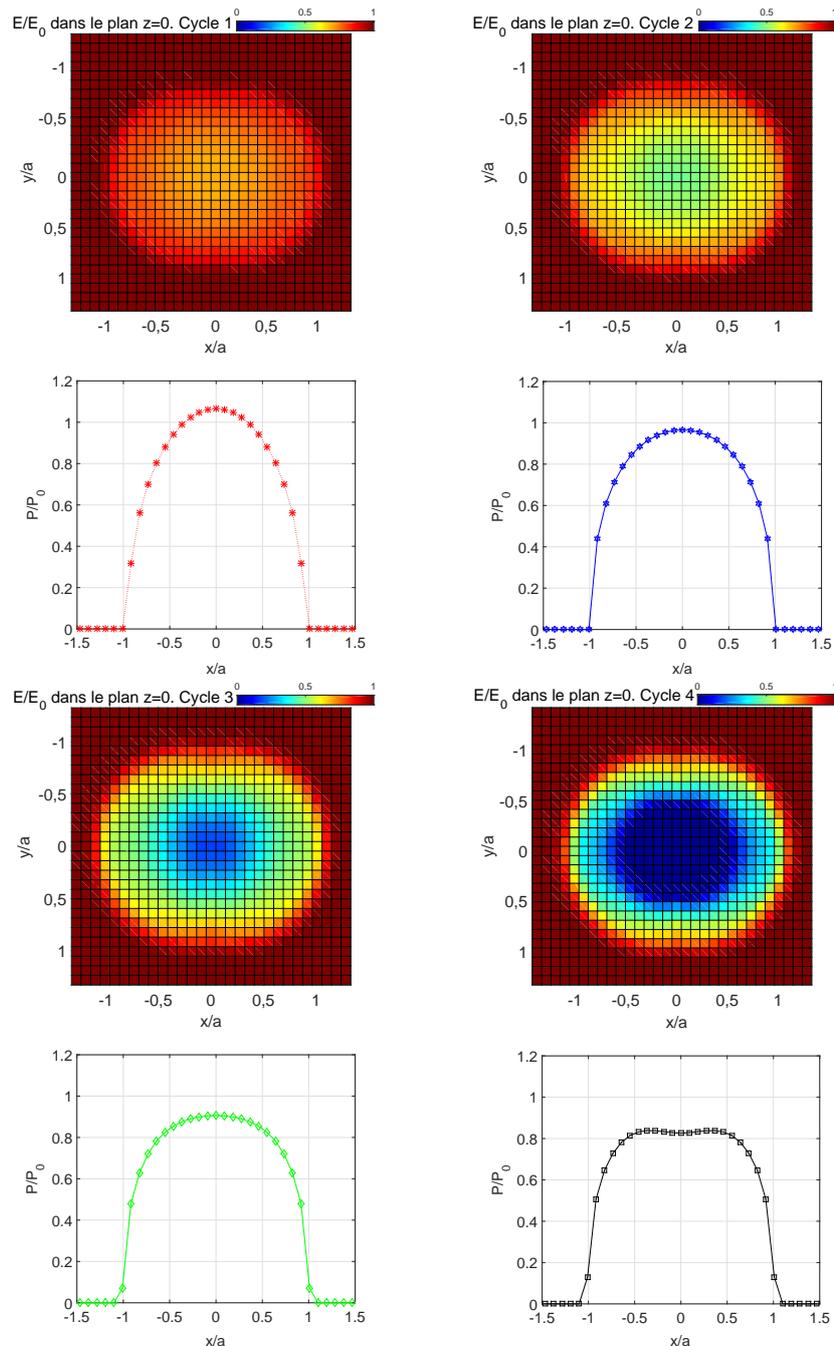


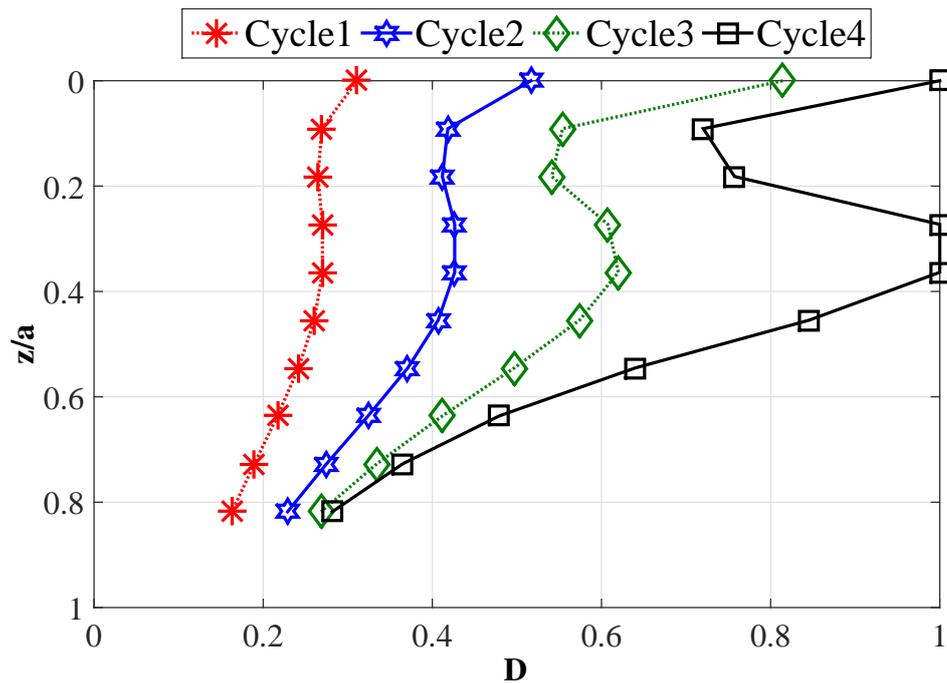
FIGURE 4.10: Évolution des conditions du contact sphère/plan revêtu ( $E_1/E_2 = 1,285$ ,  $h/a = 0,9$ ) le long de l'axe  $x$  avec  $\mu = 0,3$

La pression normalisée  $P/P_0$  est tracée le long de l'axe  $x$  ( $x$  est normalisé par la demi-largeur de contact  $a$ ). Nous pouvons observer, de même que pour le contact non revêtu, une diminution très rapide de la pression de contact maximale, associée à une légère augmentation de l'aire de contact avec l'augmentation progressive de l'endommagement même si la charge normale est constante. Cela est dû principalement à la dégradation du module de Young, localisée dans la région centrale du contact FIG.4.11.



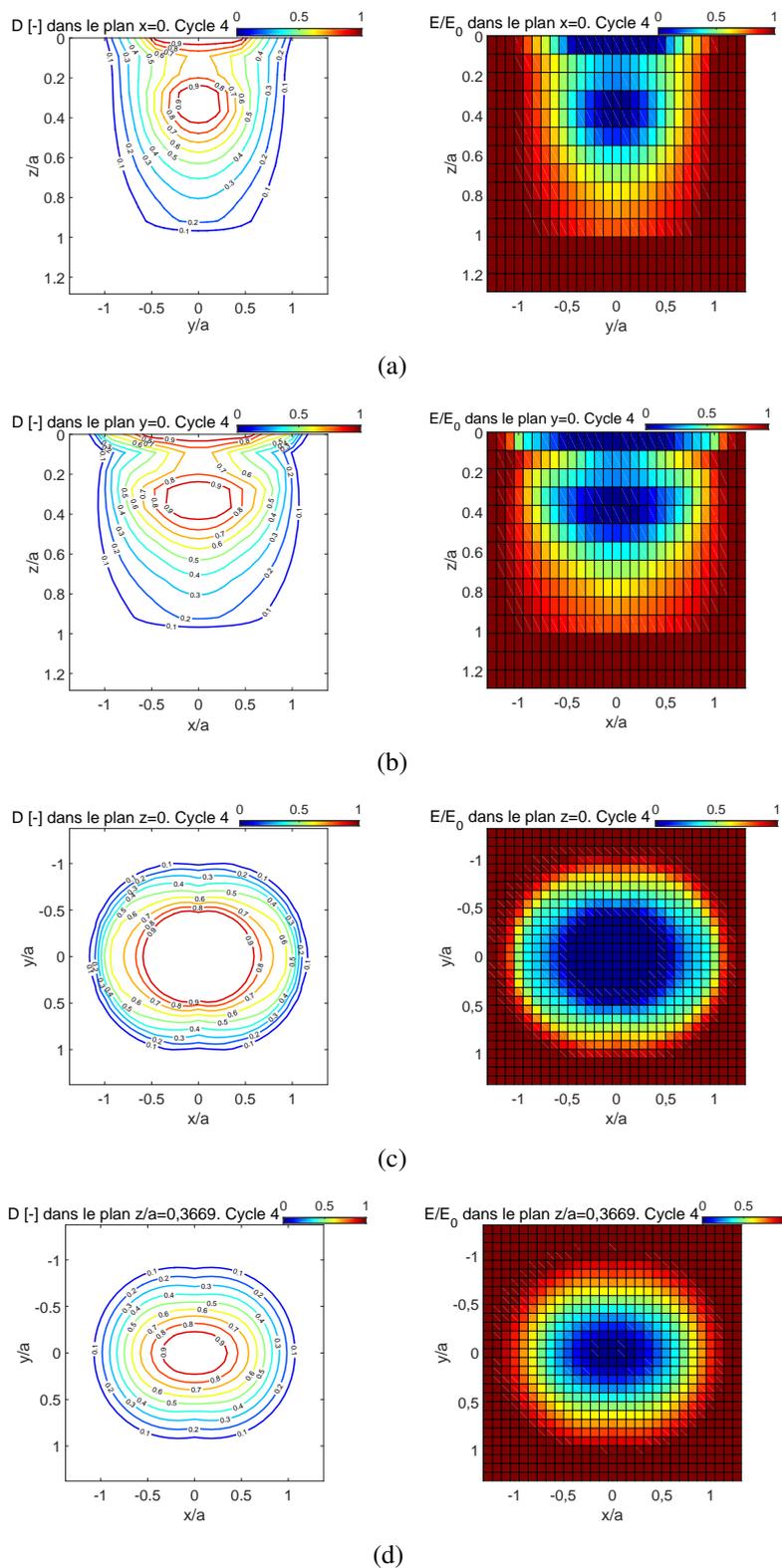
**FIGURE 4.11:** Dégradation des propriétés matériaux des cuboïdes et évolution des conditions du contact associées. Revêtement/Substrat :  $E_1/E_2 = 1,285$ ,  $h/a = 0,9$ ,  $\mu = 0,3$

Pour bien situer les zones endommagées (sur la surface, en profondeur...), nous avons tracé dans la figure FIG.4.12 l'évolution de la variable d'endommagement  $D$  le long de l'axe  $z$ .



**FIGURE 4.12:** Évolution du paramètre d'endommagement  $D$  le long de l'axe  $z$  pour un contact sphère/plan revêtu :  $E_1/E_2 = 1,285$ ,  $h/a = 0,9$ ,  $\mu = 0,3$

Les isovaleurs du paramètre  $D$  durant le dernier cycle sont représentés sur la figure FIG.4.13.  $D$  évolue dans la profondeur et selon la position par rapport au centre du contact, avec un maximum à la surface. Pour le dernier cycle, 2 maximums sont observés ; ils sont situés à la surface et à  $z/a = 0,3669$



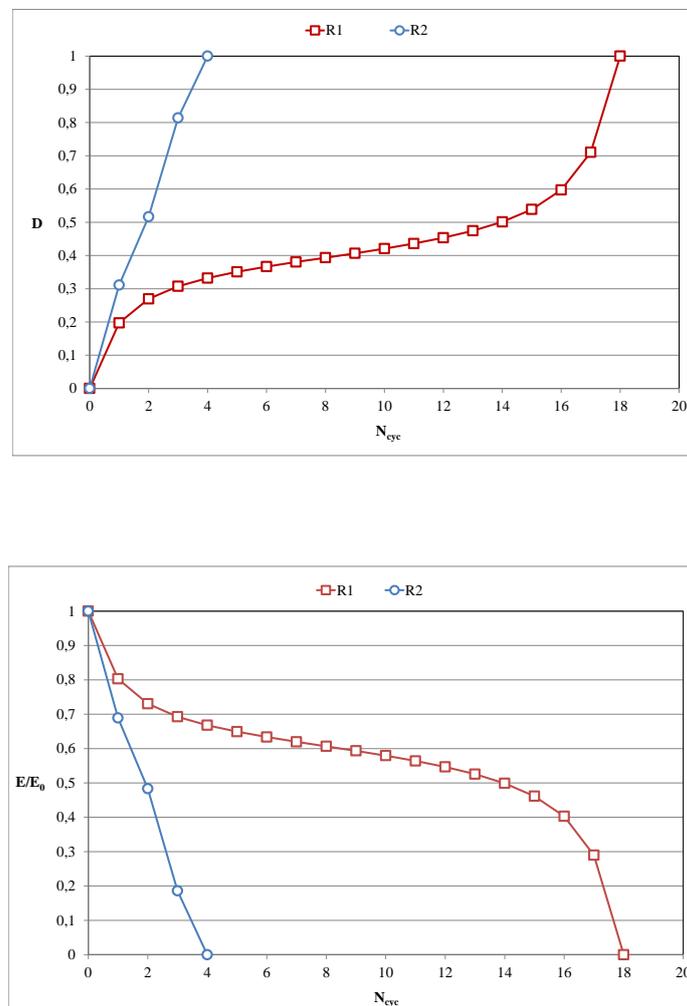
**FIGURE 4.13:** Isovaleurs du paramètre  $D$  et distribution du module de Young au niveau des cuboïdes à la fin de la simulation, dans le plan (a) :  $x=0$  (b) :  $y=0$  (c) :  $z=0$  (d) :  $z/a=0,3669$

### Influence de la déformation critique $\epsilon_R$

La déformation seuil et la déformation critique sont des propriétés spécifiques du matériau étudié. Pour le revêtement étudié ces paramètres ont été choisis arbitrairement.

L'influence de la valeur  $\epsilon_R$  sur la réponse du problème de contact est testée. Deux simulations avec deux différentes valeurs de  $\epsilon_R$  ( $\epsilon_R = R1 = 2,85 \times \tilde{\epsilon}_{max}$  et  $\epsilon_R = R2 = 2 \times \tilde{\epsilon}_{max}$ ) sont lancées et les résultats sont déterminés.

Pour les deux cas, l'endommagement total ( $D=1$ ) en fin de simulation est localisé au centre de la zone de contact. Pour les deux simulations, nous traçons au point critique (correspondant à la première inclusion endommagée) l'évolution de l'endommagement et l'évolution de la rigidité en fonction du nombre de cycles FIG.4.14.



**FIGURE 4.14:** Évolution du paramètre de l'endommagement  $D$  et de la rigidité  $E/E_0$  en fonction du nombre de cycles pour deux valeurs différentes de  $\epsilon_R$  ( $\epsilon_R = R1 = 2,85 \times \tilde{\epsilon}_{max}$  et  $\epsilon_R = R2 = 2 \times \tilde{\epsilon}_{max}$ ) dans le cas d'un contact revêtu.

Nous constatons que l'endommagement est catastrophique en choisissant un seuil de déformation critique moins importante.

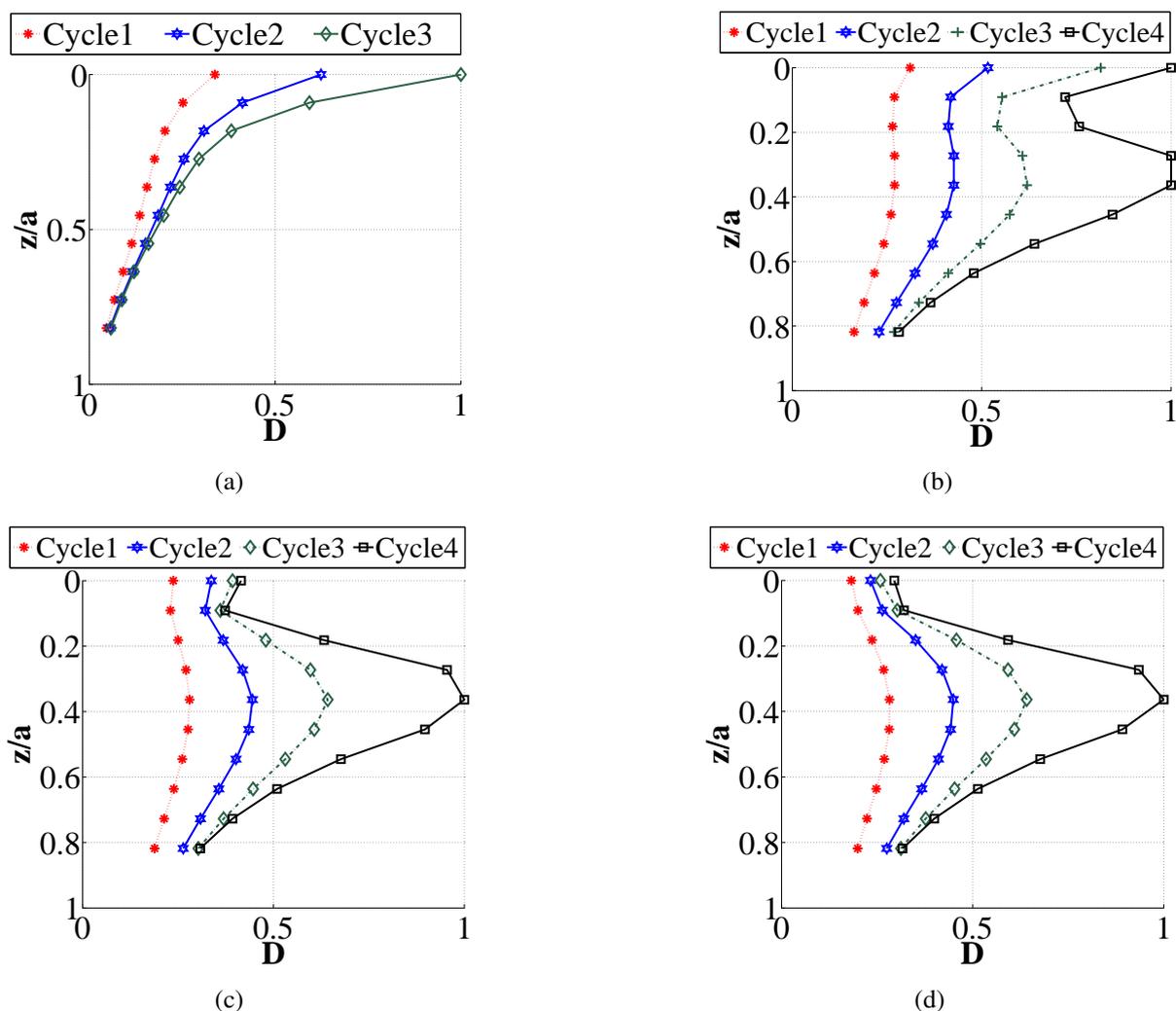
Il est donc nécessaire d'identifier ce paramètre avec une grande précision afin de décrire le mieux possible l'évolution de l'endommagement.

### **Influence du frottement**

Dans le but d'identifier l'influence du frottement sur la réponse du modèle de contact revêtu, nous avons recours à la configuration précédente TAB.4.2 avec  $\epsilon_R = R2$  et une gamme de coefficient de frottement allant de 0,1 à 0,5.

Les forces de frottement sont engendrées par des interactions surfaciques et impliquent des cisaillements dans, ou très proche, de la surface de contact. Le comportement endommageable de cette dernière est très étroitement lié à la valeur de frottement imposée. Les conséquences logiques du frottement sont de développer du cisaillement sur les surfaces du contact et de modifier la distribution des contraintes en sous-couches. En effet, pour un chargement de Hertz, sans frottement, la répartition est symétrique et la contrainte de cisaillement est maximale à une profondeur égale à "0,78a" pour un contact cylindre-plan et "0,48a" pour un contact sphère-plan (lorsque le coefficient de Poisson est de 0,3). En présence du frottement, cette répartition n'est plus symétrique et la zone de cisaillement maximale se rapproche de la surface de contact. Ceci permet donc de fixer des ordres de grandeur pour la localisation de l'endommagement. En effet, les risques d'endommagement sont localisés en profondeur pour les faibles valeurs de  $\mu$  ( $0 < \mu < 0,3$ ). Cette zone critique est située plutôt proche de la surface ou en surface pour des valeurs de  $\mu > 0,3$ .

En analysant l'évolution du paramètre d'endommagement présentée sur la figure FIG.4.15, nous pouvons observer que la localisation de l'endommagement dépend de la valeur du coefficient de frottement. En effet, pour un frottement faible  $\mu = 0,1$  les contraintes et les déformations maximales sont localisées à  $z/a = 0,38$  initialement et l'endommagement se développe à partir de là continuellement. Comme  $\mu$  augmente, le frottement est plus important et le maximum initial des contraintes et des déformations se déplace progressivement vers la surface ; D continue donc à augmenter à  $z/a = 0,38$  mais aussi près de la surface. Pour  $\mu$  supérieur à 0,3 D atteint son maximum en surface.



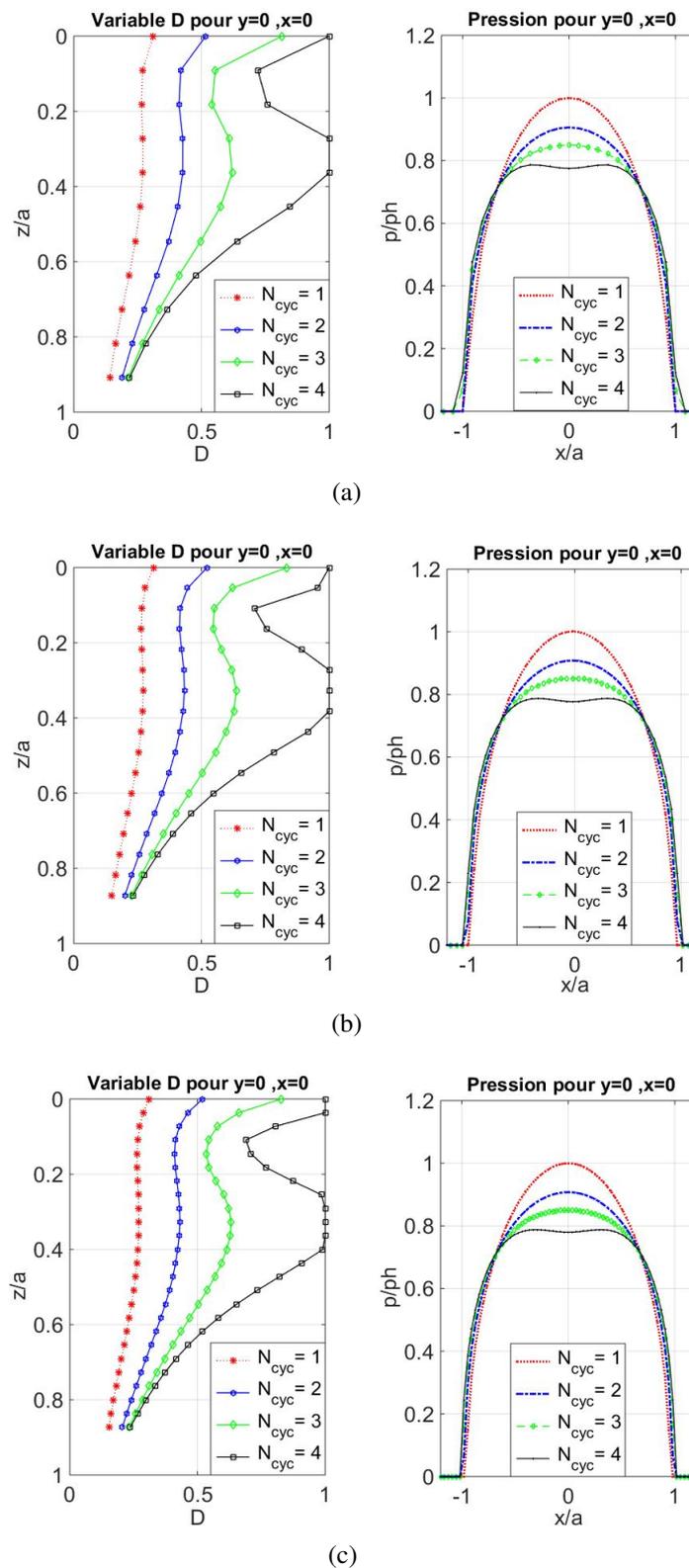
**FIGURE 4.15:** Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycle dans le plan  $x=y=0$  pour un coefficient de frottement (a) :  $\mu = 0,5$  (b) :  $\mu = 0,3$  (c) :  $\mu = 0,2$  (d) :  $\mu = 0,1$

### Influence du maillage

Nous allons maintenant étudier l'influence de la discrétisation géométrique sur la solution obtenue. Pour cela nous considérerons la même configuration de contact précédemment présenté TAB.4.2 avec trois maillages utilisés pour discrétiser le problème de contact avec  $dx=dy=dz=0,05$  ;  $0,03$  et  $0,02\text{mm}$  pour le plus fin.

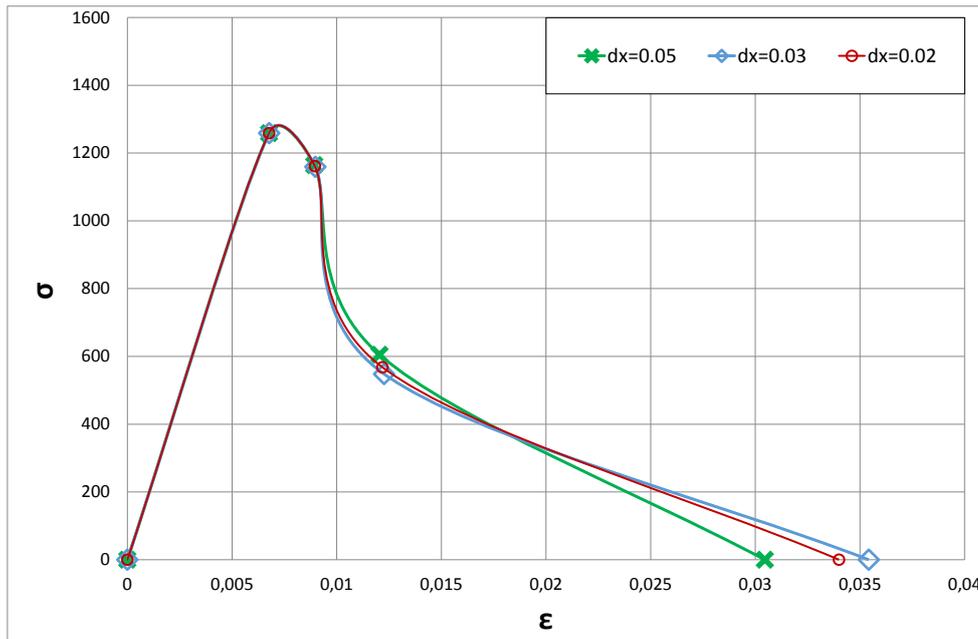
La FIG.4.16 montre l'influence du maillage sur la résistance à l'endommagement. On note clairement :

- Une indépendance de la durée de vie relative à l'endommagement (4 cycles pour les 3 cas) vis-à-vis de la finesse du maillage
- Une indépendance de la localisation de l'endommagement (en surface et en profondeur) vis-à-vis du maillage.
- Une dépendance de la taille de la zone totalement endommagée vis-à-vis du maillage.



**FIGURE 4.16:** Évolution de l'endommagement et de la pression en fonction du nombre de cycles dans le plan  $x=y=0$  pour différents maillages (a) :  $dx = 0,05$  (b) :  $dx = 0,03$  (c) :  $dx = 0,02$

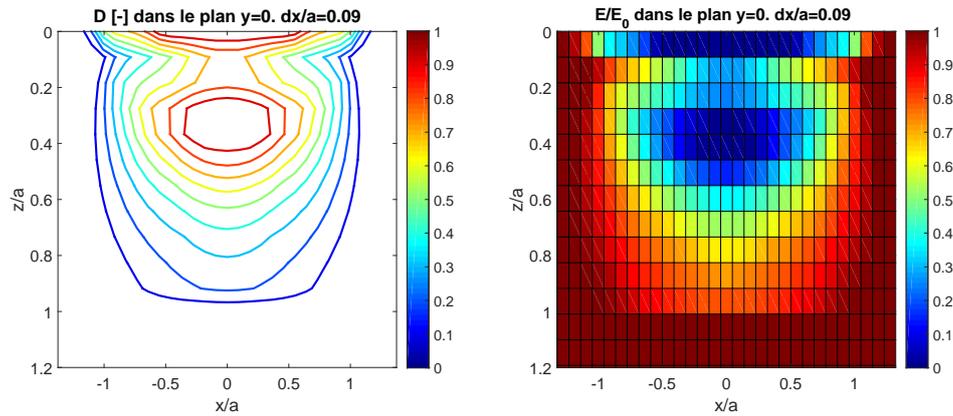
Nous avons tracé la réponse globale Contraintes/Déformations pour l'élément qui s'endommage en premier pour les différents maillages FIG.4.17.



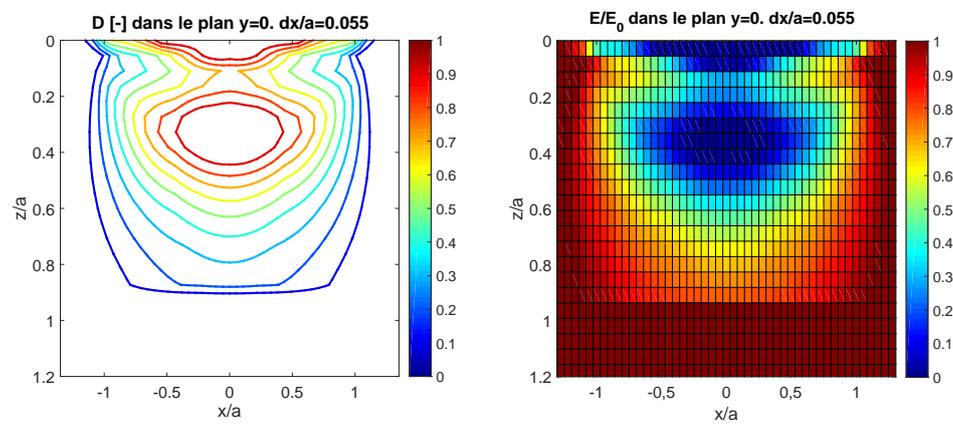
**FIGURE 4.17:** Courbes Contraintes/Déformations pour différentes tailles de mailles

Notons d'abord que la solution est parfaitement indépendante du maillage jusqu'à la rupture localisée. Le fait de mailler plus ou moins finement n'influence que la phase finale adoucissante des courbes Contraintes/Déformations. A partir d'un point ( $\sigma = 1161,75MPa, \epsilon = 0,009$ ), nous avons une dépendance vis-à-vis de la taille du maillage. Plus le maillage est fin, plus le matériau aura tendance à se rompre rapidement.

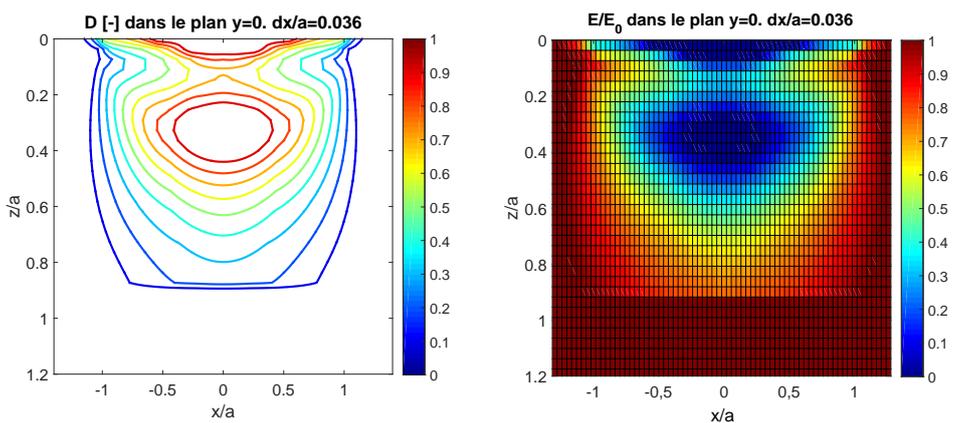
Les isovaleurs du paramètre D et la dégradation du module de Young au niveau des cuboïdes sont présentées pour les différents maillages FIG.4.18, où l'on note que la zone totalement endommagée est d'autant plus grande que le maillage est fin.



(a)



(b)



(c)

**FIGURE 4.18:** Isovaleurs de l'endommagement et dégradation du module de Young au niveau des cuboïdes pour les différents maillages utilisés (a) :  $dx/a = 0,05$  (b) :  $dx = 0,03$  (c) :  $dx = 0,02$

#### 4.4.2.2 Effet de la rigidité et de l'épaisseur du revêtement sur le comportement élasto-endommageable

Deux configurations de contact revêtu (revêtement dur/substrat  $E_r = 2 \times E_s$ , et revêtement souple/substrat  $E_r = 0,5 \times E_s$ ) seront simulées, pour différentes épaisseurs de la couche, pour comprendre les relations entre le comportement tribologique des revêtements, les propriétés et l'épaisseur du revêtement. Ces études seront proposées pour prédire la durée de vie du revêtement, ou évaluer et comparer les revêtements.

Pour ces simulations, une charge normale de 400N et un coefficient de frottement de 0,7 ont été choisis, tout en gardant les mêmes valeurs pour les autres paramètres (propriétés des corps en contact,  $\delta$ ) dans TAB.4.2. Les paramètres, qui contrôlent le comportement endommageable du revêtement, ont été identifiés pour chaque cas.

**Pour le revêtement dur  $E_1/E_2 = 2$  :**  $(\epsilon'_{d0}, \epsilon'_R) < (\epsilon_{d0}, \epsilon_R)$  et épaisseur de revêtement  $h/a$  allant de 1/2 à 5.

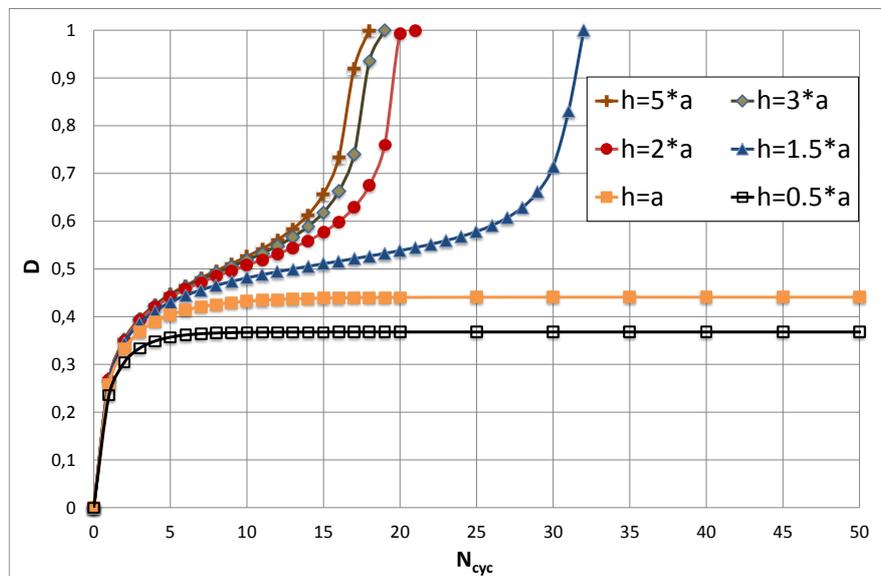
Il peut être conclu à partir des différentes courbes représentés sur la figure FIG.4.19(a) que les revêtements durs les plus épais produisent plus d'endommagement. Ainsi, un revêtement dur mince sur un substrat plus souple peut fournir une bonne protection contre l'endommagement par fretting cyclique.

**Pour le revêtement souple  $E_1/E_2 = 0,5$  :**  $(\epsilon^s_{d0}, \epsilon^s_R) > (\epsilon_{d0}, \epsilon_R)$  et épaisseur de revêtement  $h/a$  allant de 1/10 à 2.

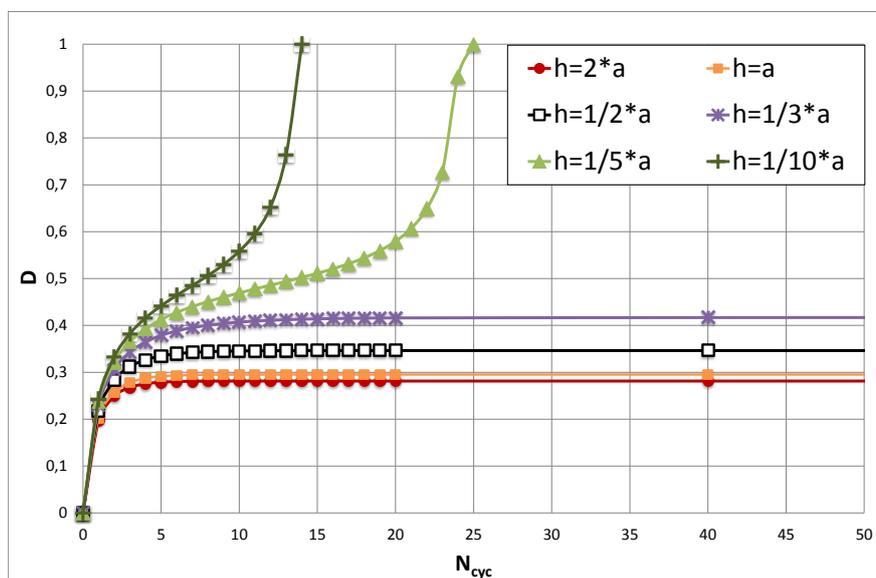
A partir des différentes courbes représentés sur la figure FIG.4.19(b) pour les différentes valeurs de  $h/a$ , il peut être conclu que plus le revêtement souple est mince plus l'endommagement est important. Les conclusions sont donc inverses de celles obtenues pour les revêtements durs.

Afin de comparer la durée de vie relative à l'endommagement avec et sans revêtement, trois configurations différentes : sans revêtement ( $E_1 = 210GPa$ ,  $\mu_1 = 0,3$ ), avec revêtement dur ( $E_1 = 420GPa$ ,  $\mu_1 = 0,3$ ) et avec revêtement souple ( $E_1 = 105GPa$ ,  $\mu_1 = 0,3$ ) ont été testées avec la même épaisseur de revêtement  $h/a = 2$  FIG.4.20.

Nous notons que la durée de vie est améliorée avec l'ajout d'un revêtement. En effet, pour les deux types de revêtement, l'endommagement est stable pour un nombre de cycles important (400 cycles). Mais nous constatons que la valeur de la variable d'endommagement obtenue avec un revêtement souple est moins importante que celle obtenue avec un revêtement dur. Nous pouvons conclure que l'application d'un revêtement plus souple que le substrat est à privilégier, toutes choses étant égales par ailleurs notamment le coefficient de frottement, le coefficient d'usure et l'épaisseur.

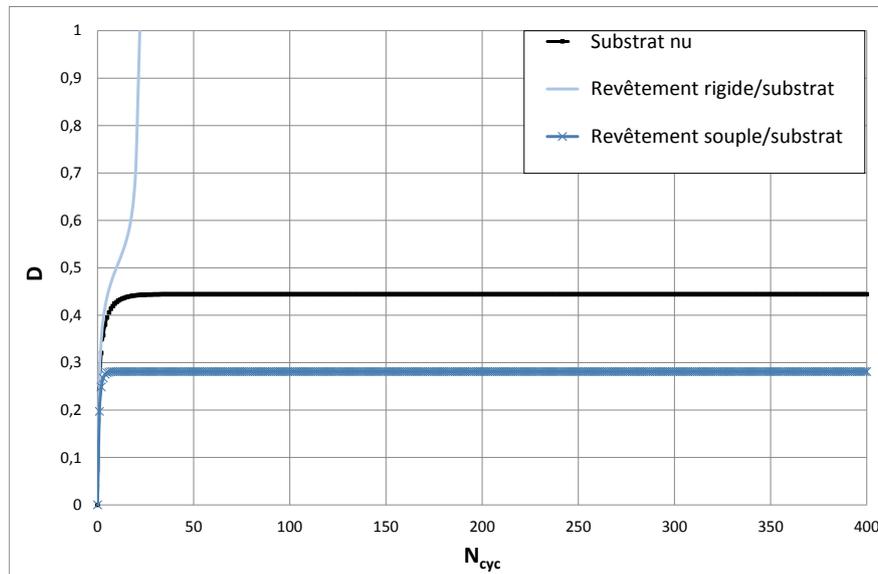


(a)



(b)

**FIGURE 4.19:** Effet des paramètres matériaux et de l'épaisseur du revêtement sur l'endommagement et la durée de vie du contact. (a) : Configuration revêtement dur/substrat  $E_r = 2 \times E_s$ , (b) : Configuration revêtement souple/substrat  $E_r = 0,5 \times E_s$



**FIGURE 4.20:** La durée de vie relative à l'endommagement pour les trois configurations : substrat nu, revêtement dur/substrat et revêtement souple/substrat

## 4.5 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle décrivant le comportement endommageable d'un contact revêtu. Nous nous sommes intéressés particulièrement à établir un modèle de comportement couplé à l'endommagement ductile dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Nous avons étudié l'influence des différents paramètres de notre modèle élastique couplé à l'endommagement sur un problème de contact revêtu. La prise en compte de la rigidité du revêtement permet de bien représenter le comportement des systèmes revêtement/substrat.

L'ensemble des exemples traités dans ce chapitre montre la pertinence de l'approche utilisée pour simuler numériquement le comportement élasto-endommageable. En effet, l'approche utilisée est une approche locale qui permet de quantifier l'endommagement à l'échelle du cuboïde. Nous pouvons affirmer que cette méthodologie basée sur le modèle de Mazars, contribue à l'amélioration des outils de modélisation de l'endommagement dans les problèmes de contact malgré le fait qu'il reste bien des choses à améliorer.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions

L'objectif principal de ce travail a été de contribuer à l'amélioration de la modélisation des phénomènes de dégradation induites par fretting dans les contacts revêtus, particulièrement l'usure par enlèvement de matière et l'endommagement traduit par la dégradation des propriétés matériaux.

Pour répondre à nos besoins, un modèle de résolution du contact développé au LaMCoS a été utilisé. Une modélisation dite "semi-analytique" a été effectuée. Cette modélisation est basée sur la théorie des massifs élastiques semi-infinis qui permet de relier les sollicitations normales et tangentielles du contact aux déplacements élastiques résultant des surfaces en contact par le biais de solutions analytiques élémentaires. Cette relation s'exprime sous forme de produits de convolution entre des coefficients d'influence et les sollicitations du contact (pression et/ou cisaillement).

Pour quantifier l'usure des contacts revêtus sous chargement de fretting, deux modèles ont été combinés au modèle de contact. Un premier modèle pour la modélisation du revêtement via la méthode de l'inclusion équivalente au sens d'Eshelby et un deuxième pour la modélisation de l'usure cyclique via une loi énergétique.

Le premier concept permet de traiter le comportement revêtement/substrat. Une technique d'enrichissement, dans laquelle nous superposons à la solution en élasticité linéaire la contribution d'une ou plusieurs hétérogénéités, a été utilisée. Une des difficultés propres à ce modèle est la définition des dimensions de la zone d'enrichissement. Le problème est résolu et la taille optimale de la zone d'enrichissement, permettant d'obtenir un résultat identique à celui obtenu en considérant un revêtement infini suivant  $x$  et  $y$  et ce tout en contenant les temps de calcul, est déterminée. Le modèle développé a été validé par comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle de massif revêtu basé sur les techniques Multigrille.

Le modèle du comportement substrat/revêtement étant validé, la loi d'usure énergétique est implémentée pour quantifier l'usure. La loi d'Archard, est formulée sous forme locale liant l'énergie dissipée localement à une profondeur d'usure. L'implémentation se fait par une simple mise à jour de la distance entre les deux corps qui définit la géométrie du contact. Diverses simulations ont été menées sur une géométrie poinçon-plan. Ces simulations reproduisent les conditions expérimentales pour un contact aube-disque sous sollicitations de fretting. Les travaux expérimentaux, des tests de fretting pour un contact poinçon-plan nu ou revêtu, ont été réalisés à l'ECL par l'équipe de Fouvry. L'étude de l'usure a été effectuée, en condition de glissement total, pour les cas substrat nu et substrat revêtu. Une comparaison des profondeurs d'usure obtenues par l'expérience et par la simulation a permis de valider le modèle d'usure.

Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement couplée à l'élasticité, le modèle de

Mazars a été choisi et utilisé pour quantifier la dégradation des propriétés matériau et étudier le comportement élasto-endommageable. Ce modèle est basé sur un critère d'endommagement en déformation introduisant la notion de déformation équivalente.

Nous avons analysé, en premier lieu, le comportement endommageable sous chargement cyclique uniaxial, et ce analytiquement pour différents cas en fonction du type de chargement imposé (force ou déplacement) et du paramètre d'endommagement (en termes de contraintes ou de déformation). Ces études ont permis de présenter le comportement adoucissant du matériau dû à l'endommagement progressif au cours du chargement cyclique. Nous avons constaté que le type de chargement imposé et les paramètres de la loi d'endommagement ont une influence sur la durée de vie du matériau.

En deuxième lieu, le modèle de Mazars a été adapté pour les problèmes des contacts revêtus. Le modèle d'endommagement, basé sur le concept de la déformation équivalente, a été implémenté dans le code semi-analytique. Après vérification de la mise en oeuvre de notre modèle, des simulations ont été menées pour vérifier son efficacité pour l'étude du comportement élasto-endommageable du contact sous chargement de fretting. Des études paramétriques ont permis d'analyser l'effet de quelques paramètres, tels que la charge normale appliquée, le coefficient de frottement, la rigidité et l'épaisseur du revêtement, sur la durée de vie et le comportement élasto-endommageable. L'ensemble des simulations réalisées prouvent la pertinence de notre modèle basé sur une approche locale. L'endommagement est quantifié à l'échelle du cuboïde.

### Perspectives

Les perspectives pouvant être apportées à ce travail sont nombreuses.

Elles concernent d'abord la modélisation de l'usure.

L'usure a été étudiée dans des conditions de glissement total. Cependant, des simulations en glissement partiel peuvent être intéressantes.

D'autres perspectives concernent spécifiquement l'amélioration du modèle d'endommagement.

Aucune validation pour l'analyse de l'endommagement n'a été délivrée dans ce manuscrit. Ce travail nécessiterait au préalable des efforts du point de vue expérimental.

Une autre point, est d'apporter plus de physique au modèle en étudiant le comportement élastoplastique endommageable. Ajouter l'aspect plasticité peut apporter des difficultés et une augmentation en temps de calcul.

Un autre point qui semble être intéressant de développer est la prise en compte de l'usure évoluant avec l'endommagement et la dégradation des propriétés matériaux. L'élimination locale des cuboïdes conduit à l'obtention d'une surface non régulière.

# Annexe A

## A.1 Coefficients d'influence

### A.1.1 Contribution d'une pression uniforme sur les contraintes élastiques

Nous disposons des outils nécessaires pour calculer les pressions de contact et les contraintes générées par ces pressions.

Pour déterminer les pressions de contact dans un cas général (élasto-plastique, visco-élastique, etc), il suffit de considérer un contact élastique avec une géométrie modifiée par les déplacements dus aux déformations inélastiques.

Les coefficients d'influence donnant les contraintes élastiques dans un corps semi infini générées par une pression uniforme sont rappelés ici.

La pression est appliquée sur une surface rectangulaire de taille  $\Delta x \times \Delta y$  centré en  $(x, y) = (0, 0)$ . Les coefficients sont donnés en fonction de la position du point de calcul  $(x, y, z)$ ;  $x$  et  $y$  étant des directions parallèles à la surface ( $i$  et  $j$  des indices qui font référence à  $x$  et  $y$ ) et  $z$  la profondeur.  $\nu$  est le coefficient de Poisson du corps.  $E$  est le module de Young. On note  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{p} = C_{ij}^p(x, y, z, E, \nu) = & S_{ij}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{ij}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ & - S_{ij}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) - S_{ij}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

avec

$$S_{xx}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - y + z}{x}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(x^2 + z^2)\rho} \quad (\text{A.1.2})$$

$$S_{yy}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x + z}{y}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(y^2 + z^2)\rho} \quad (\text{A.1.3})$$

$$S_{zz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho} \left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2}\right) \quad (\text{A.1.4})$$

$$S_{xy}^p(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln(\rho + z) \quad (\text{A.1.5})$$

$$S_{yz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{x}{(y^2 + z^2)\rho} \quad (\text{A.1.6})$$

$$S_{xz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + z^2)\rho} \quad (\text{A.1.7})$$

## A.1.2 Contribution d'un cisaillement uniforme sur les contraintes élastiques

Les coefficients d'influence donnant les contraintes élastiques dans un corps semi infini générées par un cisaillement uniforme sont rappelés ici.

Les cisaillement sont appliqués sur une surface rectangulaire de taille  $\Delta x \times \Delta y$  centré en  $(x, y) = (0, 0)$ .

*Contribution des cisaillements  $q_x$  :*

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{q_x} = C_{ij}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = & S_{ij}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{ij}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \\ & - S_{ij}^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) - S_{ij}^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) \quad (\text{A.1.8}) \end{aligned}$$

avec

$$S_{xx}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{-x^2 + zy}{(\rho + z)(\rho - y)} \right) + \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - y) \quad (\text{A.1.9})$$

$$S_{yy}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{y}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \left( \frac{y}{\rho + z} + \ln(\rho - y) \right) \quad (\text{A.1.10})$$

$$S_{zz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{\rho(x^2 + z^2)} \quad (\text{A.1.11})$$

$$S_{xy}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - x) \quad (\text{A.1.12})$$

$$S_{yz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad (\text{A.1.13})$$

$$S_{xz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho(x^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan \left( \frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx} \right) \quad (\text{A.1.14})$$

*Contribution des cisaillements  $q_y$  :*

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{q_y} = C_{ij}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) &= S_{ij}^{q_y} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \mathbf{v} \right) + S_{ij}^{q_y} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \mathbf{v} \right) \\ &\quad - S_{ij}^{q_y} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \mathbf{v} \right) - S_{ij}^{q_y} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

avec

$$S_{xx}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \left( \frac{x}{\rho + z} + \ln(\rho - x) \right) \quad (\text{A.1.16})$$

$$S_{yy}^{qy}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z}{2\pi\rho} \left( 1 + \frac{-y^2 + zx}{(\rho + z)(\rho - x)} \right) + \frac{\nu}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - x) \quad (\text{A.1.17})$$

$$S_{zz}^{qy}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi\rho} \frac{x}{(y^2 + z^2)} \quad (\text{A.1.18})$$

$$S_{xy}^{qy}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi\rho} \frac{y}{(\rho + z)} - \frac{\nu}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - y) \quad (\text{A.1.19})$$

$$S_{yz}^{qy}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z}{2\pi\rho} \frac{yx}{(y^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + x^2 - x\rho}{zy}\right) \quad (\text{A.1.20})$$

$$S_{xz}^{qy}(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi\rho} \quad (\text{A.1.21})$$

### A.1.3 Contribution d'une pression uniforme sur les déplacements élastiques

Identiquement aux contraintes, on peut définir les déplacements élastiques en surface. Soit  $\tilde{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La contribution des pressions  $p$  sur les déplacements élastiques est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_j}{p} = K_j^p(x, y, E, \nu) = & U_j^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_j^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ & - U_j^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) - U_j^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

avec

$$U_x^p(x, y, E, \nu) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \left( 2x \arctan\left(\frac{\tilde{\rho} - y}{x}\right) - y \ln \tilde{\rho} \right) \quad (\text{A.1.23})$$

$$U_y^p(x, y, E, \nu) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left( 2y \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}-x}{x}\right) - x \ln \tilde{\rho} \right) \quad (\text{A.1.24})$$

$$U_z^p(x, y, E, \nu) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} (y \ln(\tilde{\rho}-x) + x \ln(\tilde{\rho}-y)) \quad (\text{A.1.25})$$

#### A.1.4 Contribution d'un cisaillement uniforme sur les déplacements élastiques

La contribution des cisaillements  $q_x$  sur les déplacements élastiques est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_j}{q_x} = K_j^{q_x}(x, y, E, \nu) = & U_j^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_j^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ & - U_j^{q_x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) - U_j^{q_x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.26})$$

avec

$$U_x^{q_x}(x, y, E, \nu) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} x \ln(\tilde{\rho}-y) - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \ln(\tilde{\rho}-x) \quad (\text{A.1.27})$$

$$U_y^{q_x}(x, y, E, \nu) = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \tilde{\rho} \quad (\text{A.1.28})$$

$$U_z^{q_x}(x, y, E, \nu) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left( -2x \arctan\left(\frac{\tilde{\rho}-y}{x}\right) + y \ln \tilde{\rho} \right) \quad (\text{A.1.29})$$

La contribution des cisaillements  $q_y$  sur les déplacements élastiques est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{u_j}{q_y} = K_j^{q_y}(x, y, E, \nu) = & U_j^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) + U_j^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \\ & - U_j^{q_y}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) - U_j^{q_y}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, E, \nu\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.30})$$

avec

$$U_x^{q_y}(x, y, E, \nu) = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \tilde{\rho} \quad (\text{A.1.31})$$

$$U_y^{q_y}(x, y, E, \nu) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} y \ln(\tilde{\rho} - x) - \frac{(1+\nu)}{\pi E} \ln(\tilde{\rho} - y) \quad (\text{A.1.32})$$

$$U_z^{q_y}(x, y, E, \nu) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left( -2y \arctan\left(\frac{\tilde{\rho} - x}{y}\right) + x \ln \tilde{\rho} \right) \quad (\text{A.1.33})$$

## A.2 Contraintes et déplacements élastiques dans un massif semi-infini

La surface est définie par une grille de points de taille  $N_p = N_x \times N_y$ . Chaque point représente une zone rectangulaire sur laquelle sont appliqués des champs de pression  $p$  et cisaillements  $q_x$  et  $q_y$  constants. Les coordonnées des points sont définies par les coordonnées  $x_i$ ,  $y_j$ , et  $z_k$  ajouté pour la détermination des contraintes en sous-couche.

Les contributions sont déterminées par sommation des contributions de chaque élément. Ces contributions ont été précédemment calculées. Cela donne pour **les champs de contrainte** en un point  $M(x_i, y_j, z_k)$  du massif 1 :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_i, y_j, z_k) = & \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} C_{ij}^p(x_l - x_i, y_m - y_j, z_k, E_1, \nu_1) p(x_k, y_l) \\ & + \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} C_{ij}^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, z_k, E_1, \nu_1) q_x(x_k, y_l) \\ & + \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} C_{ij}^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j) q_y(x_k, y_l) \end{aligned} \quad (\text{A.2.34})$$

**Les déplacements élastiques** sont aussi déterminés par sommation des contributions de chaque élément.

Les déplacements normaux s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u_z(x_i, y_j) &= \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_z^p(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) + K_z^p(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) p(x_k, y_l) \\
 &+ \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_z^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) - K_z^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) q_x(x_k, y_l) \\
 &+ \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_z^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) - K_z^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) q_y(x_k, y_l)
 \end{aligned} \tag{A.2.35}$$

et les déplacements tangentiels (A=x ou y) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u_A(x_i, y_j) &= \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_A^p(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) - K_A^p(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) p(x_k, y_l) \\
 &+ \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_A^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) + K_A^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) q_x(x_k, y_l) \\
 &+ \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} \left( K_A^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_1, \mathbf{v}_1) + K_A^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j, E_2, \mathbf{v}_2) \right) q_y(x_k, y_l)
 \end{aligned} \tag{A.2.36}$$

Ces relations peuvent aussi être écrites sous forme matricielle :

$$u_z^p = A_z^p \cdot p \tag{A.2.37}$$

$$u_z^{q_x} = A_z^{q_x} \cdot q_x \tag{A.2.38}$$

$$u_z^{q_y} = A_z^{q_y} \cdot q_y \tag{A.2.39}$$

$$u_x^p = A_x^p \cdot p \tag{A.2.40}$$

$$u_x^{q_x} = A_x^{q_x} \cdot q_x \tag{A.2.41}$$

$$u_x^{q_y} = A_x^{q_y} \cdot q_y \tag{A.2.42}$$

$$u_y^p = A_y^p \cdot p \tag{A.2.43}$$

$$u_y^{q_x} = A_y^{q_x} \cdot q_x \tag{A.2.44}$$

$$u_y^{q_y} = A_y^{q_y} \cdot q_y \tag{A.2.45}$$

### A.3 Algorithme du gradient conjugué (CGM)

L'algorithme du gradient conjugué est utilisé dans ce travail pour résoudre les problèmes de contact mais aussi le problème d'hétérogénéité. C'est une méthode itérative pour résoudre les problèmes linéaires

$$Ax = b \tag{A.3.46}$$

Où  $A$  est une matrice carrée symétrique et définie positive. Ce problème est équivalent à la minimisation de la forme quadratique

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \quad (\text{A.3.47})$$

Le gradient conjugué peut être considéré comme un algorithme pour résoudre les systèmes linéaires, ou une technique de minimisation des formes quadratiques convexes. Le gradient de  $\phi$  est le résidu du système linéaire,

$$\nabla\phi(x) = Ax - b \equiv r(x) \quad (\text{A.3.48})$$

La solution est obtenue à partir des vecteurs direction de descente  $p_k$ ,

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (\text{A.3.49})$$

Le gradient conjugué s'avère performant en temps de calcul, notamment pour résoudre de grands systèmes linéaires. L'autre avantage du gradient conjugué est le gain en mémoire par rapport à certaines méthodes.

La méthode est itérative. A chaque itération, la direction conjuguée  $p_k$  est obtenue uniquement à partir de l'itération  $p_{k-1}$ . Le stockage des itérations précédentes n'est pas nécessaire.

Le schéma est détaillé par Polonsky et Keer dans [POL 99] et est basée sur trois formules principales, ci-après exposé pour le problème normal :

$$p_{k+1} = p_k - \frac{r_k^T \cdot r_k}{d_k^T \cdot K \cdot d_k} \cdot d_k \quad (\text{A.3.50})$$

$$r_{k+1} = r_k - \frac{r_k^T \cdot r_k}{d_k^T \cdot K \cdot d_k} \cdot K \cdot d_k \quad (\text{A.3.51})$$

$$d_{k+1} = -r_k + \frac{r_{k+1}^T \cdot r_{k+1}}{r_k^T \cdot r_k} \cdot d_k \quad (\text{A.3.52})$$

$$K = A_z^p + \mu \cdot A_z^q$$

où  $k$  est l'itération à l'intérieur de la boucle de l'algorithme,  $r_k$  le résidu et  $d_k$  la direction sont des vecteurs de  $N$  éléments,  $p_0$  est un vecteur initial arbitraire (une pression uniforme par exemple).  $K$  est appelé "kernel", défini pour chaque point de contact.

Un champ de pression uniforme est souvent considéré pour la première approximation de  $p_0$ , avec  $d_0 = r_0 = h^* - h - \delta_z - K \cdot p_0$ . Trois variables,  $\delta$ ,  $G$  et  $G_{old}$ , sont aussi utilisées et initialisées  $\delta = 0$  et  $G_{old} = 1$ .

Finalement, l'algorithme est le suivant :

- Considérant le champ de pression  $p_k$  (et le champ de cisaillement  $q$ ), les déplacements normaux  $U_z^p$  et  $U_z^q$  sont trouvés en utilisant un algorithme DC-FFT.
- L'écart  $r_k$  entre les deux géométries  $r_k = g_k = U_z^p + U_z^q + h^*$  est trouvée pour chaque point de la zone de contact (voir Eq. A.3.51). C'est le résidu du système  $r_k$  et il tend vers zéro tant que le problème converge.  $G$  devient la somme de tous les écarts au carré :  $G = \sum(g^2)$ .
- La direction  $d_{k+1}$  est alors déterminée en utilisant Eq. A.3.52.  $G$  est alors stockée dans  $G_{old}$ .
- Le résidu  $r_{k+1}^p = A_z^p \cdot d$  est déterminé en utilisant un algorithme DC-FFT. L'incrément le long de cette direction est définie par :  $\alpha = \frac{\sum g \cdot d}{\sum r \cdot d}$ .
- Le champ de pression est alors égal à  $p_{k+1} = p_k + \alpha \cdot d$
- La zone de contact peut évoluer selon les équations A.3.51 et A.3.52. Si la pression  $p_{k+1}$  est localement inférieure à zéro, la pression est alors fixée égale à zéro et le point n'est plus dans la zone de contact. Si l'écart  $r_k = g_k$  est inférieur à zéro, alors le point est dans la zone de contact et la pression  $p_{k+1} = \alpha \cdot d$
- Le processus se poursuit jusqu'à convergence de la pression.

Les opérations de multiplication entre le tenseur des coefficients d'influence  $A_z^p$  prennent beaucoup de temps, et nécessitent  $N^2$  opérations considérant une surface de  $N$  éléments. Pour réduire le temps de calcul, la transformée de Fourier rapide est utilisée dans chaque itération du CGM, de sorte que les équations précédentes ne nécessitent que  $n \cdot \log(N)$  opérations.

## A.4 Méthode DC-FFT

Comme il est montré dans la méthode du gradient conjugué CGM, les déplacements, mais aussi les contraintes, sont calculés à partir des coefficients d'influence qui correspondent aux fonctions de Green dans leur forme discrétisée.

Classiquement, c'est une double sommation pour les contraintes et les déplacements élastiques induits par un chargement de contact. Le nombre d'opérations dépend de la taille du domaine considéré ; si la zone de calcul est  $(N_x, N_y)$ , alors le nombre d'opérations pour une double sommation est  $N_x \times N_y$ , souvent simplifié à  $N^2$  lorsque les tailles sont similaires dans les deux directions. La convolution discrète et le transformé de Fourier rapide, noté DC-FFT ou FFT, ont été proposées afin d'accélérer ce calcul.

L'écriture peut se faire sous forme matricielle ou indicielle avec des doubles sommations (pour les déplacements en surface) et triple sommation (pour les contraintes en volume). La taille de la matrice peut être très importante. Si la taille de la zone de calcul est  $N$ , le nombre d'opérations nécessaires à une seule des doubles sommations est  $O(N^2)$ . Les temps de calculs peuvent donc devenir considérables.

Cet algorithme permet d'effectuer la transformée de Fourier (FT) en  $O(N \log N)$  au lieu de  $O(N^2)$  opérations. De la même façon, la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) permet d'effectuer la transformée de Fourier inverse (IFT) en  $O(N \log N)$  au lieu de  $O(N^2)$  opérations. Il est donc intéressant d'utiliser le théorème de convolution pour effectuer une convolution dans le domaine fréquentiel qui coûte  $O(N)$  opérations au lieu de  $O(N^2)$  dans le domaine initial (temporel ou spatial). Au final il aura fallu  $O(N + 3N \log N)$  opérations au lieu de  $O(N^2)$  ce

qui devient très avantageux pour un  $N$  important.

Lors de l'introduction de cette méthode dans les calculs de contact, une erreur a été constatée dans le résultat si la taille de la zone de calcul n'est pas au moins égale à cinq fois la taille de la zone de contact [JU 96] voir huit [POL 00b]. Plus récemment, Liu et al. [LIU 00] décrit précisément l'origine des erreurs constatées précédemment. Pour les problèmes de contact, les fonctions à convoluer ne sont pas périodiques. Ce dernier met alors au point une méthodologie appropriée basé sur l'emploi des DC-FFT (Discrete Convolution and Fast Fourier Transform) et ne nécessitant qu'une extension par deux de la zone de calcul. Cette méthode fait appel aux techniques de « zero-padding » et de « wrap-around order ».

#### A.4.1 Zero-padding [PRE 92]

Cette technique consiste à étendre la taille des deux échantillons (sources et coefficients d'influence définis de 0 à  $N - 1$ ) de  $N$  à  $2N + 1$  à l'aide de zéros.

#### A.4.2 Wrap-around order

Le zero-padding n'est pas étendu aux coefficients d'influence. Les coefficients d'influence sont calculés de 0 à  $N - 1$ , le coefficient d'indice  $N$  est mis égal à zéro, les coefficients de  $N + 1$  à  $2N - 1$  sont obtenus à partir des coefficients 1 à  $N - 1$  mais rangés dans le sens inverse, un signe négatif est éventuellement ajouté à ces derniers suivant la parité de la fonction des coefficients d'influence.

La réponse fréquentielle étant obtenue, une transformée de Fourier inverse est effectuée pour obtenir le résultat dans le domaine spatial avec une minimisation de l'erreur. Plus de détails peuvent être trouvés dans les travaux de Liu [LIU 00] et Gallego [GAL 07a].

# Bibliographie

- [ADA 00] ADAMS G., NOSONOVSKY M.  
Contact modeling-forces. *Tribology International*, vol. 33, n° 5, 2000, p. 431-442, Elsevier.
- [ADI 93] ADIBNAZARI S., HOEPPNER D. W.  
A fretting fatigue normal pressure threshold concept. *Wear*, vol. 160, n° 1, 1993, p. 33-35, Elsevier.
- [AI 99] AI X., SAWAMIPHAKDI K.  
Solving elastic contact between rough surfaces as an unconstrained strain energy minimization by using CGM and FFT techniques. *Journal of tribology*, vol. 121, n° 4, 1999, p. 639-647, American Society of Mechanical Engineers.
- [AIR 38] AIRY G. B.  
On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 6, 1838, page 379.
- [AIZ 02] AIZIKOVICH S., ALEXANDROV V., KALKER J., KRENEV L., TRUBCHIK I.  
Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *International journal of solids and structures*, vol. 39, n° 10, 2002, p. 2745-2772, Elsevier.
- [ALE 86] ALEKSANDROV V., ROMALIS B.  
Contact Problems in Mechanical Engineering. *Mashinostroenie, Moscow*, , 1986.
- [ANC 09] ANCIAUX G., MOLINARI J.-F.  
Contact mechanics at the nanoscale, a 3D multiscale approach. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 79, n° 9, 2009, p. 1041-1067, Wiley Online Library.
- [ANO 09] ANON.  
Jetstream Aircraft 4100 ZS-NRM : Loss of control after engine failure and misidentified engine shutdown after take-off from Durban Airport , South Africa on 24 September 2009. , 2009.
- [ANT 04] ANTALUCA E., NÉLIAS D., CRETU S.  
A Three-Dimensional Friction Model for Elastic-Plastic Contact With Tangential Loading : Application to Dented Surfaces. *ASME/STLE 2004 International Joint Tribology Conference* American Society of Mechanical Engineers, 2004, p. 1-8.
- [ANT 05] ANTALUCA E.  
Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques : effet d'un chargement normal et tangentiel. Thèse de doctorat, Villeurbanne, INSA, 2005.

- [ARC 53] ARCHARD J. F.  
Contact and Rubbing of Flat Surfaces. *Journal of Applied Physics*, vol. 24, n° 8, 1953, p. 981-988.
- [ATT 92] ATTIA M. H., WATERHOUSE R. B.  
*Standardization of fretting fatigue test methods and equipment*. N° 1159 ASTM International, 1992.
- [BAG 12] BAGAUT C., NÉLIAS D., BAIETTO M.-C.  
Contact analyses for anisotropic half space : effect of the anisotropy on the pressure distribution and contact area. *Journal of tribology*, vol. 134, n° 3, 2012, page 031401, American Society of Mechanical Engineers.
- [BAG 13] BAGAUT C., NELIAS D., BAIETTO M.-C., OVAERT T. C.  
Contact analyses for anisotropic half-space coated with an anisotropic layer : Effect of the anisotropy on the pressure distribution and contact area. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, n° 5, 2013, p. 743–754, Elsevier.
- [BAR 00] BARBER J., CIAVARELLA M.  
Contact mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, n° 1, 2000, p. 29–43, Elsevier.
- [BEA 03] BEAA, BUREAU D'ENQUÊTE SUR LES ACCIDENTS D'AVION  
Rapport final concernant l'accident de l'hélicoptère SA 330 Puma HB-XVI. rapport, 2003, Département fédéral de l'environnement, des transports, de l'énergie et de la communication.
- [BEN 67] BENTALL R., JOHNSON K.  
Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers. *International journal of mechanical sciences*, vol. 9, n° 6, 1967, p. 389–404, Elsevier.
- [BHU 00] BHUSHAN B.  
*Modern Tribology Handbook, Two Volume Set*. Crc Press, 2000.
- [BLA 91] BLANCHARD P.  
Usure induite en petits débattements Transformation tribologique superficielle d'alliages de titane. Thèse de doctorat, 1991.
- [BLA 93] BLANPAIN B., CELIS J., ROOS J., EBBERINK J., SMEETS J.  
A comparative study of the fretting wear of hard carbon coatings. *Thin Solid Films*, vol. 223, n° 1, 1993, p. 65-71.
- [BOF 12] BOFFY H., BAIETTO M.-C., SAINOT P., LUBRECHT A. A.  
An efficient 3d model of heterogeneous materials for elastic contact applications using multigrid methods. *Journal of tribology*, vol. 134, n° 2, 2012, page 021401, American Society of Mechanical Engineers.
- [BON 05] BONORA N., GENTILE D., PIRONDI A., NEWAZ G.  
Ductile damage evolution under triaxial state of stress : theory and experiments. *International Journal of Plasticity*, vol. 21, n° 5, 2005, p. 981–1007, Elsevier.
- [BOT 06] BOTELHO T. D. S., PROGRI R., ROBBE-VALLOIRE M., INGLEBERT G., SAINOT P.  
Caractérisation d'un revêtement de faible dureté en élastoplasticité par indentation sphérique. *Journées Francophones de Tribologie*, 2006.

- [BOU 85] BOUSSINESQ J.  
*Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques : principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur : mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique, mathématique et d'analyse*, vol. 4. Gauthier-Villars, 1885.
- [BOU 05] BOUCLY V., NELIAS D., LIU S., WANG Q. J., KEER L. M.  
Contact analyses for bodies with frictional heating and plastic behavior. *Journal of tribology*, vol. 127, n° 2, 2005, p. 355–364, American Society of Mechanical Engineers.
- [BOU 08] BOUCLY V.  
Semi-analytical modeling of the transient thermal-elastic-plastic contact and its application to asperity collision, wear and running-in of surfaces. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.
- [BOW 75] BOWDEN F. P., TABOR D.  
*The friction and lubrication of solids*. OXFORD University Press, 1975.
- [BRA 84] BRANDT A., GESELLSCHAFT FUER MATHEMATIK UND DATENVERARBEITUNG MBH BONN (GMD) S. A. G.  
Multigrid techniques 1984 guide with applications to fluid dynamics. , 1984.
- [BRA 90] BRANDT A., LUBRECHT A.  
Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 90, n° 2, 1990, p. 348–370, Elsevier.
- [CAT 38] CATTANEO C.  
Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, vol. 27, 1938, p. 343-348, 434-436 et 474-478.
- [CEL 07] CELENTANO D. J., CHABOCHE J.-L.  
Experimental and numerical characterization of damage evolution in steels. *International Journal of Plasticity*, vol. 23, n° 10, 2007, p. 1739–1762, Elsevier.
- [CER 82] CERRUTI V.  
*Ricerche intorno all'equilibrio de'corpi elastici isotropi : memoria del Valentino Cerruti*. Salviucci, 1882.
- [CHA 74] CHABOCHE J.  
Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. *Revue française de mécanique*, vol. 50, n° 51, 1974, p. 71–82.
- [CHA 77] CHABOCHE J.  
Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement. *Symp. Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique*, Cracovie, , 1977.
- [CHA 82] CHABOCHE J.  
Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, p. 737–760 Springer, 1982.

- [CHA 91] CHANG T., CHENG H., CHIOU W., SPROUL W.  
A comparison of fatigue failure morphology between TiN coated and uncoated lubricated rollers. *Tribology transactions*, vol. 34, n° 3, 1991, p. 408–416, Taylor & Francis.
- [CHA 93] CHABOCHE J.  
Formalisme général des lois de comportement (applications aux métaux et polymères). *Tiré à part- Office national d'études et de recherches aérospatiales*, , 1993, Office national d'études et de recherches aérospatiales.
- [CHA 96] CHABOCHE J., CAILLETAUD G.  
Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 133, n° 1, 1996, p. 125–155, Elsevier.
- [CHA 11a] CHAISE T., NÉLIAS D.  
Contact pressure and residual strain in 3D elasto-plastic rolling contact for a circular or elliptical point contact. *Journal of Tribology*, vol. 133, n° 4, 2011, page 041402, American Society of Mechanical Engineers.
- [CHA 11b] CHAISE T., NELIAS D., SADEGHI F.  
On the effect of isotropic hardening on the coefficient of restitution for single or repeated impacts using a semi-analytical method. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 5, 2011, p. 714–722, Taylor & Francis.
- [CHA 12] CHAISE T., LI J., NELIAS D., KUBLER R., TAHERI S., DOUCHET G., ROBIN V., GILLES P.  
Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by ultrasonic shot peening (USP). *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, n° 10, 2012, p. 2080–2090, Elsevier.
- [CHE 94] CHENG W., CHENG H., MURA T., KEER L.  
Micromechanics modeling of crack initiation under contact fatigue. *Journal of tribology*, vol. 116, n° 1, 1994, p. 2–8, American Society of Mechanical Engineers.
- [CHE 08] CHEN W. W., WANG Q. J.  
Thermomechanical analysis of elastoplastic bodies in a sliding spherical contact and the effects of sliding speed, heat partition, and thermal softening. *Journal of Tribology*, vol. 130, n° 4, 2008, page 041402, American Society of Mechanical Engineers.
- [CHE 10] CHEN W. W., ZHOU K., KEER L. M., WANG Q. J.  
Modeling elasto-plastic indentation on layered materials using the equivalent inclusion method. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, n° 20, 2010, p. 2841–2854, Elsevier.
- [CHO 78] CHOW F., ENGEL P., HEATH D., LAWPHONGPANICH S.  
Contact stress and wear study for type characters. *IBM Journal of Research and Development*, vol. 22, n° 6, 1978, p. 658–667, IBM Corp.
- [CIA 98a] CIAVARELLA M.  
The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory. *International Journal of solids and structures*, vol. 35, n° 18, 1998, p. 2349–2362, Elsevier.
- [CIA 98b] CIAVARELLA M.  
The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II-Examples. *International journal of solids and Structures*, vol. 35, n° 18, 1998, p. 2363–2378, Elsevier.

- [COL 86] COLOMBIÉ C.  
Usure induite sous petits débattements. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1986.
- [COR 82] CORDEBOIS J., SIDOROFF F.  
Damage induced elastic anisotropy. *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, p. 761–774 Springer, 1982.
- [COR 83] CORDEBOIS J.-P.  
Critères d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations : application à l'emboutissage. Thèse de doctorat, 1983.
- [DEG 97] DEGAT P. R., ZHOU Z. R., L. VINCENT  
Fretting cracking behaviour on pre-stressed aluminum alloy specimens. *Tribology International*, vol. 30, 1997, p. 215-223.
- [DEG 98] DE-GUANG S., WEI-XING Y., DE-JUN W.  
A new approach to the determination of fatigue crack initiation size. *International Journal of Fatigue*, vol. 20, n° 9, 1998, p. 683 - 687.
- [DIA 94] DIAO D., KATO K., HAYASHI K.  
The maximum tensile stress on a hard coating under sliding friction. *Tribology International*, vol. 27, n° 4, 1994, p. 267–272, Elsevier.
- [DIN 04] DING J., LEEN S., MCCOLL I.  
The effect of slip regime on fretting wear-induced stress evolution. *International journal of fatigue*, vol. 26, n° 5, 2004, p. 521–531, Elsevier.
- [DON 94] DONGFENG D., KOJI K.  
Interface yield map of a hard coating under sliding contact. *Thin Solid Films*, vol. 245, n° 1, 1994, p. 115–121, Elsevier.
- [DRA 85a] DRAGON A.  
Plasticity and ductile fracture damage : study of void growth in metals. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 21, n° 4, 1985, p. 875–885, Elsevier.
- [DRA 85b] DRAGON A., CHIHAB A.  
On finite damage : ductile fracture-damage evolution. *Mechanics of materials*, vol. 4, n° 1, 1985, p. 95–106, Elsevier.
- [DUB 00] DUBOURG M.-C., LAMACQ V.  
Stage II crack propagation direction determination under fretting fatigue loading : a new approach in accordance with experimental observations. *ASTM Special Technical Publication*, vol. 1367, 2000, p. 436–450, AMERICAN TECHNICAL PUBLISHERS LTD.
- [EDE 11] EDEN E. M., ROSE W. N., CUNNINGHAM F. I.  
The endurance of metals. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, vol. 4, 1911, p. 839-974.
- [ELL 02] ELLEUCH K.  
Comportement en fretting d'alliages d'aluminium-Effet de l'anodisation. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [END 76] ENDO K., GOTO H.  
Initiation and propagation of fretting fatigue cracks. *Wear*, vol. 38, n° 2, 1976, p. 311–324, Elsevier.

- [ESH 57] ESHELBY J. D.  
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 241 The Royal Society, 1957, p. 376–396.
- [FEN 56] FENG I.-M., RIGHTMIRE B.  
An experimental study of fretting. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 170, n° 1, 1956, p. 1055–1064, SAGE Publications.
- [FOU 96a] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L.  
Quantification of fretting damage. *Wear*, vol. 200, n° 1-2, 1996, p. 186 - 205.
- [FOU 96b] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L., DANG VAN K.  
Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions. *Wear*, vol. 195, 1996, p. 21-34.
- [FOU 97a] FOUVRY S.  
Etude quantitative des dégradations en fretting. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [FOU 97b] FOUVRY S., KAPSA P., ZAHOUANI H., VINCENT L.  
Wear analysis in fretting of hard coatings through a dissipated energy concept. *Wear*, vol. 203-204, n° 0, 1997, p. 393 - 403. 11th International Conference on Wear of Materials.
- [FOU 01] FOUVRY S., KAPSA P.  
An energy description of hard coating wear mechanisms. *Surface and Coatings technology*, vol. 138, n° 2, 2001, p. 141–148, Elsevier.
- [FOU 03] FOUVRY S., LISKIEWICZ T., KAPSA P., HANNEL S., SAUGER E.  
An energy description of wear mechanisms and its applications to oscillating sliding contacts. *Wear*, vol. 255, n° 1-6, 2003, p. 287 - 298. 14th International Conference on Wear of Materials.
- [FOU 04] FOUVRY S., DUÓ P., PERRUCHAUT P.  
A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage : friction, wear and crack nucleation. *Wear*, vol. 257, n° 9-10, 2004, p. 916 - 929.
- [FOU 07] FOUVRY S., PAULIN C., LISKIEWICZ T.  
Application of an energy wear approach to quantify fretting contact durability : Introduction of a wear energy capacity concept. *Tribology International*, vol. 40, n° 10-12, 2007, p. 1428 - 1440. *Tribology at the Interface : Proceedings of the 33rd Leeds-Lyon Symposium on Tribology (Leeds, 2006)*.
- [FRI 02] FRIDRICI V.  
Fretting d'un alliage de titane revêtu et lubrifié : application au contact aube/disque. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2002.
- [FRI 03] FRIDRICI V., FOUVRY S., KAPSA P., PERRUCHAUT P.  
Impact of contact size and geometry on the lifetime of a solid lubricant. *Wear*, vol. 255, n° 7, 2003, p. 875–882, Elsevier.
- [FUL 10] FULLERINGER B., NELIAS D.  
On the tangential displacement of a surface point due to a cuboid of uniform plastic strain in

- a half-space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 77, n° 2, 2010, page 021014, American Society of Mechanical Engineers.
- [FUL 11] FULLERINGER B.  
Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : application to inclusions and wear of coated surfaces. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [GAL 61] GALIN L. A., MOSS H., SNEDDON I. N.  
Contact problems in the theory of elasticity. rapport, 1961, DTIC Document.
- [GAL 06] GALLEGRO L., NELIAS D., JACQ C.  
A comprehensive method to predict wear and to define the optimum geometry of fretting surfaces. *Journal of tribology*, vol. 128, n° 3, 2006, p. 476–485, American Society of Mechanical Engineers.
- [GAL 07a] GALLEGRO L.  
Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [GAL 07b] GALLEGRO L., NELIAS D.  
Modeling of fretting wear under gross slip and partial slip conditions. *Journal of tribology*, vol. 129, n° 3, 2007, p. 528–535, American Society of Mechanical Engineers.
- [GAL 10a] GALLEGRO L., FULLERINGER B., DEYBER S., NELIAS D.  
Multiscale computation of fretting wear at the blade/disk interface. *Tribology International*, vol. 43, n° 4, 2010, p. 708–718, Elsevier.
- [GAL 10b] GALLEGRO L., NELIAS D., DEYBER S.  
A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III. *Wear*, vol. 268, n° 1, 2010, p. 208–222, Elsevier.
- [GAU 80] GAUL D., DUQUETTE D.  
The effect of fretting and environment on fatigue crack initiation and early propagation in a quenched and tempered 4130 steel. *Metallurgical Transactions A*, vol. 11, n° 9, 1980, p. 1555–1561, Springer.
- [GLA 80] GLADWELL G. M.  
*Contact problems in the classical theory of elasticity*. Springer Science & Business Media, 1980.
- [GLO 97a] GLODEŽ S., FLASKER J., REN Z.  
A new model for the numerical determination of pitting resistance of gear teeth flanks. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 20, n° 1, 1997, p. 71–83, Blackwell Publishing Ltd.
- [GLO 97b] GLODEŽ S., WINTER H., STUWE H.  
A fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting. *Wear*, vol. 208, 1997, p. 177 - 183.
- [GOD 84] GODET M.  
The third-body approach : A mechanical view of wear. *Wear*, vol. 100, n° 1-3, 1984, p. 437 - 452.
- [GOR 01] GORYACHEVA I., RAJEEV P., FARRIS T.  
Wear in partial slip contact. *Journal of tribology*, vol. 123, n° 4, 2001, p. 848–856, American Society of Mechanical Engineers.

- [GRE 66] GREENWOOD J., WILLIAMSON J.  
Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 295, n° 1442, 1966, p. 300–319, The Royal Society.
- [GUP 95] GUPTA B., BHUSHAN B.  
Mechanical and tribological properties of hard carbon coatings for magnetic recording heads. *Wear*, vol. 190, n° 1, 1995, p. 110–122, Elsevier.
- [HAD 09] HADDAG B., ABED-MERAÏM F., BALAN T.  
Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic–plastic model coupled with damage. *International Journal of Plasticity*, vol. 25, n° 10, 2009, p. 1970–1996, Elsevier.
- [HAM 66] HAMILTON G., GOODMAN L.  
The stress field created by a circular sliding contact. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, n° 2, 1966, p. 371–376, American Society of Mechanical Engineers.
- [HAM 83] HAMILTON G.  
Explicit equations for the stresses beneath a sliding spherical contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 197, n° 1, 1983, p. 53–59, SAGE Publications.
- [HER 82] HERTZ H.  
Über die Berührung fester elastischer Körper. , 1882.
- [HOL 94] HOLMBERG K., MATHEWS A.  
Coatings tribology : a concept, critical aspects and future directions. *Thin Solid Films*, vol. 253, n° 1, 1994, p. 173–178, Elsevier.
- [HOL 98] HOLMBERG K., MATTHEWS A., RONKAINEN H.  
Coatings tribology—contact mechanisms and surface design. *Tribology International*, vol. 31, n° 1, 1998, p. 107–120, Elsevier.
- [HOL 00] HOLMBERG K., RONKAINEN H., MATTHEWS A.  
Tribology of thin coatings. *Ceramics International*, vol. 26, n° 7, 2000, p. 787–795, Elsevier.
- [HOL 07] HOLMBERG K., RONKAINEN H., LAUKKANEN A., WALLIN K.  
Friction and wear of coated surfaces—scales, modelling and simulation of tribomechanisms. *Surface and Coatings Technology*, vol. 202, n° 4, 2007, p. 1034–1049, Elsevier.
- [HUL 74] HULT J.  
Creep in continua and structures. *Topics in applied continuum mechanics*, p. 137–155 Springer, 1974.
- [IRW 57] IRWIN G.  
Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Appl. Mech.*, , 1957.
- [IRW 62] IRWIN G. R.  
Crack-extension force for a part-through crack in a plate. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, n° 4, 1962, p. 651–654, American Society of Mechanical Engineers.

- [JAC 01] JACQ C.  
Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitruré en présence d'indentations. Thèse de doctorat, Villeurbanne, INSA, 2001.
- [JAC 02] JACQ C., NELIAS D., LORMAND G., GIRODIN D.  
Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, vol. 124, n° 4, 2002, p. 653–667, American Society of Mechanical Engineers.
- [JAE 05] JAEGER J.  
*New solutions in contact mechanics*. WIT Press, 2005.
- [JOH 55] JOHNSON K. L.  
Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 230, n° 1183, 1955, p. 531–548, The Royal Society.
- [JOH 85] JOHNSON K. L.  
*Contact mechanics*. Cambridge university press, 1985.
- [JU 89] JU J.-W., MONTEIRO P. J., RASHED A. I.  
Continuum damage of cement paste and mortar as affected by porosity and sand concentration. *Journal of engineering mechanics*, vol. 115, n° 1, 1989, p. 105–130, American Society of Civil Engineers.
- [JU 96] JU Y. F. T.  
Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *Journal of tribology*, vol. 118, n° 2, 1996, p. 320–328, American Society of Mechanical Engineers.
- [KAC 58a] KACHANOV M.-L.  
On creep rupture time. *Izv Acad Nauk SSSR, Otd Techn. Nauk*, vol. 8, 1958, p. 26-31.
- [KAC 58b] KACHANOV M.-L.  
Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, vol. 8, 1958, p. 26-31.
- [KAC 80] KACHANOV M.-L.  
Continuum model of medium with cracks. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 106, n° 5, 1980, p. 1039–1051, ASCE.
- [KAC 81] KACHANOV M.-L.  
Crack growth under conditions of creep and damage. *Creep in structures*, p. 520–524 Springer, 1981.
- [KAC 87] KACHANOV M.-L.  
Elastic solids with many cracks : a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, n° 1, 1987, p. 23–43, Elsevier.
- [KAL 90] KALKER J. J.  
*Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 1990.
- [KAP 01] KAPSA P., CARTIER M.  
Usure des contacts mécaniques. Manifestations de l'usure. *Techniques de l'ingénieur. Génie mécanique*, , n° BM5067, 2001, p. BM5067–1, Techniques de l'ingénieur.

- [KIM 01] KIM D.-G., LEE Y.-Z.  
Experimental investigation on sliding and fretting wear of steam generator tube materials. *Wear*, vol. 250, n° 1, 2001, p. 673–680, Elsevier.
- [KIM 10] KIM K.  
Analysis of friction coefficient evolutions on coated systems under sliding conditions. *Wear*, vol. 269, n° 9, 2010, p. 655–663, Elsevier.
- [KLA 94] KLAFFKE D.  
Tribological behaviour of Me :CH coatings on steel against steel in the case of oscillating sliding motion at room temperature. *Diamond Films Technol.*, vol. 3, 1994, p. 149-165.
- [KOL 10] KOLODZIEJCZYK T., TOSCANO R., FOUVRY S., MORALES-ESPEJEL G.  
Artificial intelligence as efficient technique for ball bearing fretting wear damage prediction. *Wear*, vol. 268, 2010, p. 309-315.
- [KOM 88] KOMVOPOULOS K.  
Finite element analysis of a layered elastic solid in normal contact with a rigid surface. *Journal of tribology*, vol. 110, n° 3, 1988, p. 477–485, American Society of Mechanical Engineers.
- [KOU 14a] KOUMI K. E., NELIAS D., CHAISE T., DUVAL A.  
Modeling of the contact between a rigid indenter and a heterogeneous viscoelastic material. *Mechanics of Materials*, vol. 77, 2014, p. 28–42, Elsevier.
- [KOU 14b] KOUMI K. E., ZHAO L., LEROUX J., CHAISE T., NELIAS D.  
Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n° 6, 2014, p. 1390–1402, Elsevier.
- [KRA 81] KRAJCI NOVIC D., FONSEKA G.  
The continuous damage theory of brittle materials, part 1 : general theory. *Journal of applied Mechanics*, vol. 48, n° 4, 1981, p. 809–815, American Society of Mechanical Engineers.
- [KUB 06] KUBIAK K.  
Quantification de la fissuration d'un contact soumis à des sollicitations complexes en fretting wear et fretting fatigue. Thèse de doctorat, ECOLE CENTRALE DE LYON, 2006.
- [LAM 96] LAMACQ V., DUBOURG M., VINCENT L.  
Crack path prediction under fretting fatigue – a theoretical and experimental approach. *Journal of tribology*, vol. 118, n° 4, 1996, p. 711–720, American Society of Mechanical Engineers.
- [LAM 99] LAMACQ V., DUBOURG M.  
Modelling of initial fatigue crack growth and crack branching under fretting conditions. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 22, 1999, p. 535–542, Wiley Online Library.
- [LAU 02] LAURSEN T. A.  
*Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [LEC 74] LECKIE F., HAYHURST D.  
Creep rupture of structures. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 340, n° 1622, 1974, p. 323–347, The Royal Society.

- 
- [LEE 00] LEE S.-K., NAKAZAWA K., SUMITA M., MARUYAMA N.  
Effects of Contact Load and Contact Curvature Radius of Cylinder Pad of Fretting Fatigue in High Strength Steel. *ASTM SPECIAL TECHNICAL PUBLICATION*, vol. 1367, 2000, p. 199–212, AMERICAN TECHNICAL PUBLISHERS LTD.
- [LEM 72] LEMAITRE J.  
Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading. *Mechanical behavior of materials*, , 1972, p. 540–549.
- [LEM 75] LEMAITRE J., CHABOCHE J.  
A non-linear model of creep-fatigue damage cumulation and interaction(for hot metallic structures). *Mechanics of visco-elastic media and bodies*, , 1975, page 1975.
- [LEM 77] LEMAITRE J., DUFAILY J.  
Modélisation et identification de l'endommagement plastique des métaux. *Proc. 3e congrès français de mécanique, Grenoble (France)*, , 1977.
- [LEM 78] LEMAITRE J., CHABOCHE J.  
Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J Méc Appl*, vol. 2, n° 3, 1978.
- [LEM 79] LEMAITRE J., PLUMTREE A.  
Application of damage concepts to predict creep-fatigue failures. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 101, n° 3, 1979, p. 284–292, American Society of Mechanical Engineers.
- [LEM 84] LEMAITRE J.  
How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 80, n° 2, 1984, p. 233–245, Elsevier.
- [LEM 85] LEMAITRE J.  
A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 107, n° 1, 1985, p. 83–89, American Society of Mechanical Engineers.
- [LEM 88] LEMAITRE J., CHABOCHE J.  
*Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1988.
- [LEM 96] LEMAITRE J., LIPPMANN H.  
*A course on damage mechanics*, vol. 2. Springer Berlin, 1996.
- [LER 89] LEROY J., FLOQUET A., VILLECHAISE B.  
Thermomechanical behavior of multilayered media : theory. *Journal of Tribology*, vol. 111, n° 3, 1989, p. 538–544, American Society of Mechanical Engineers.
- [LER 10] LEROUX J., FULLERINGER B., NELIAS D.  
Contact analysis in presence of spherical inhomogeneities within a half-space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, n° 22, 2010, p. 3034–3049, Elsevier.
- [LER 11] LEROUX J., NELIAS D.  
Stick-slip analysis of a circular point contact between a rigid sphere and a flat unidirectional composite with cylindrical fibers. *International journal of solids and structures*, vol. 48, n° 25-26, 2011, p. 3510–3520, Elsevier.
-

- [LER 13] LEROUX J.  
Modélisation numérique du contact pour matériaux composites. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [LIN 97] LINDLEY T. C.  
Fretting fatigue in engineering alloys. *International Journal of Fatigue*, vol. 19(1), 1997, p. 39-49.
- [LIS 05] LISKIEWICZ T., FOUVRY S.  
Development of a friction energy capacity approach to predict the surface coating endurance under complex oscillating sliding conditions. *Tribology international*, vol. 38, n° 1, 2005, p. 69–79, Elsevier.
- [LIU 00] LIU S., WANG Q., LIU G.  
A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, vol. 243, n° 1, 2000, p. 101–111, Elsevier.
- [LIU 01] LIU G., WANG Q., LIU S.  
A three-dimensional thermal-mechanical asperity contact model for two nominally flat surfaces in contact. *Journal of tribology*, vol. 123, n° 3, 2001, p. 595–602, American Society of Mechanical Engineers.
- [LIU 02] LIU S., WANG Q.  
Studying contact stress fields caused by surface tractions with a discrete convolution and fast fourier transform algorithm. *Journal of tribology*, vol. 124, n° 1, 2002, p. 36–45, American Society of Mechanical Engineers.
- [LIU 05] LIU S., PEYRONNEL A., WANG Q., KEER L.  
An extension of the Hertz theory for three-dimensional coated bodies. *Tribology Letters*, vol. 18, n° 3, 2005, p. 303–314, Springer.
- [LIU 07] LIU Y., CHEN W. W., ZHU D., LIU S., WANG Q. J.  
An elastohydrodynamic lubrication model for coated surfaces in point contacts. *Journal of tribology*, vol. 129, n° 3, 2007, p. 509–516, American Society of Mechanical Engineers.
- [Ltd09] Etude de la propagation de fissuration sous chargement de Fretting sur éprouvette pré-contrainte. rapport, 2009, Ecole Centrale Lyon-LTDS.
- [LUB 91] LUBRECHT A., IOANNIDES E.  
A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques. *Journal of tribology*, vol. 113, n° 1, 1991, p. 128–133, American Society of Mechanical Engineers.
- [MAO 97] MAUCHE N.  
Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de débattement. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [MAR 85] MARIGO J.  
Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 21, n° 4, 1985, p. 861–874, Elsevier.
- [MAR 00] MARIGO J.-J.  
L'endommagement et la Rupture : hier, aujourd'hui et demain. Thèse de doctorat, Cours IPSI : Comportements non linéaires des matériaux, 2000.

- [MAR 07] MARY C., FOUVRY S.  
Numerical prediction of fretting contact durability using energy wear approach : Optimisation of finite-element model. *Wear*, vol. 263, n° 1-6, 2007, p. 444 - 450. 16th International Conference on Wear of Materials.
- [MAZ 81] MAZARS J., BOERMAN D., PIATTI G.  
Mechanical damage and fracture of concrete structures. *ICF5, Cannes (France)*, 1981.
- [MAZ 84] MAZARS J.  
Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat, 1984.
- [MCC 04] MCCOLL I., DING J., LEEN S.  
Finite element simulation and experimental validation of fretting wear. *Wear*, vol. 256, n° 11, 2004, p. 1114–1127, Elsevier.
- [MCD 53] MCDOWEL O. J.  
Fretting corrosion tendencies of several combinations of material. *Symposium on fretting corrosion, ASTM STP*, vol. 144, 1953, p. 24-39.
- [MCE 49] MCEWEN E.  
Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix. *Philosophical Magazine*, vol. 40, n° 454, 1949, page 22.
- [MEI 68] MEIJERS P.  
The contact problem of a rigid cylinder on an elastic layer. *Applied Scientific Research*, vol. 18, n° 1, 1968, p. 353–383, Springer.
- [MEN 95] MENG H., LUDEMA K.  
Wear models and predictive equations : their form and content. *Wear*, vol. 181-183, Part 2, 1995, p. 443 - 457. 10th International Conference on Wear of Materials.
- [MIK 57] MIKHLIN S. G.  
Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology. , 1957, Pergamon.
- [MIN 49] MINDLIN R. D.  
Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, 1949, p. 259-268.
- [MIN 53] MINDLIN R. D., DERESIEWICZ H.  
Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *ASME, Serie E, Journal of Applied Mechanics*, vol. 20, 1953, p. 327-344.
- [MOH 95] MOHRBACHER H., BLANPAIN B., CELIS J., ROOS J., STALS L., STAPPEN M. V.  
Oxidational wear of TiN coatings on tool steel and nitrided tool steel in unlubricated fretting. *Wear*, vol. 188, n° 1-2, 1995, p. 130 - 137.
- [MUR 81] MURAKAMI S., OHNO N.  
A continuum theory of creep and creep damage. *Creep in structures*, p. 422–444 Springer, 1981.
- [MUR 04] MURTHY H., HARISH G., FARRIS T.  
Efficient modeling of fretting of blade/disk contacts including load history effects. *ASME J. Tribol.*, vol. 126, 2004, p. 56 - 64.

- [MUS 49] MUSKHELISHVILI N. I.  
*Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 1949.
- [MUS 08] MUSKHELISHVILI N. I., RADOK J. R. M.  
*Singular integral equations : boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Courier Corporation, 2008.
- [NAK 94] NAKAZAWA K., SUMITA M., MARUYAMA N.  
Effect of relative slip amplitude on fretting fatigue of high strength steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 17, n° 7, 1994, p. 751–759, Wiley Online Library.
- [NEL 06] NELIAS D., BOUCLY V., BRUNET M.  
Elastic-plastic contact between rough surfaces : proposal for a wear or running-in model. *Journal of tribology*, vol. 128, n° 2, 2006, p. 236–244, American Society of Mechanical Engineers.
- [NIS 72] NISHIOKA K., KENJI H.  
Fundamental Investigations of Fretting Fatigue : Part 6, Effects of Contact Pressure and Hardness of Materials. *Bulletin of JSME*, vol. 15, n° 80, 1972, p. 135–144, The Japan Society of Mechanical Engineers.
- [NIT 00] NITTA I., KATO K.  
Theory of contact and friction. *J JPN SOC T*, vol. 45(12), 2000, p. 864-869.
- [NOW 88] NOWELL D.  
An analysis of fretting fatigue. Thèse de doctorat, University of Oxford, 1988.
- [ODF 90] ODFALK M., VINGSBO O.  
Influence of normal force and frequency in fretting. *Tribology Transactions*, vol. 33, 1990, p. 604-610.
- [OHM 80] OHMAE N., TSUKIZOE T.  
Analysis of a wear process using the finite element method. *Wear*, vol. 61, n° 2, 1980, p. 333–339, Elsevier.
- [ORT 85] ORTIZ M.  
A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials*, vol. 4, n° 1, 1985, p. 67 - 93.
- [O'S 88] O'SULLIVAN T., KING R.  
Sliding contact stress field due to a spherical indenter on a layered elastic half-space. *Journal of tribology*, vol. 110, n° 2, 1988, p. 235–240, American Society of Mechanical Engineers.
- [PAP 94] PAPANIKOS P., MEGUID S.  
Theoretical and experimental studies of fretting-initiated fatigue failure of aeroengine compressor discs. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 17, n° 5, 1994, p. 539–550, Wiley Online Library.
- [PAU 81] PAUL B., HASHEMI J.  
Contact pressures on closely conforming elastic bodies. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, n° 3, 1981, p. 543–548, American Society of Mechanical Engineers.
- [PAU 05] PAULIN C., FOUVRY S., DEYBER S.  
Wear kinetics of Ti–6Al–4V under constant and variable fretting sliding conditions. *Wear*, vol. 259, n° 1, 2005, p. 292–299, Elsevier.

- [PAU 06] PAULIN C.  
Etude de l'Endommagement du Contact Multicouche Aube/Disque Sous Chargement de Fretting : Impact des Sollicitations Variables et de la Dimension du Contact. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [PAU 08] PAULIN C., FOUVRY S., MEUNIER C.  
Finite element modelling of fretting wear surface evolution : application to a Ti-6Al-4V contact. *Wear*, vol. 264, n° 1, 2008, p. 26–36, Elsevier.
- [PEI 05] PEI L., HYUN S., MOLINARI J., ROBBINS M. O.  
Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, n° 11, 2005, p. 2385–2409, Elsevier.
- [PEL ] PELLIER J., GERINGER J., FOREST B.  
Tribocorrosimètre pour l'étude du fretting-corrosion.
- [PET 94] PETIOT C.  
Développement d'une méthodologie prévisionnelle du comportement en fretting-fatigue couplant les approches expérimentales et théoriques. Thèse de doctorat, 1994.
- [PET 13] PETEGHEM B. V.  
Fretting et fretting-fatigue à haute température d'alliages de Titane revêtus. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2013.
- [PLU 98] PLUMET S., DUBOURG M.-C.  
A 3-D model for a multilayered body loaded normally and tangentially against a rigid body : Application to specific coatings. *Journal of tribology*, vol. 120, n° 4, 1998, p. 668–676, American Society of Mechanical Engineers.
- [POD 99] PODRA P., ANDERSSON S.  
Simulating sliding wear with finite element method. *Tribology International*, vol. 32, n° 2, 1999, p. 71–81, Elsevier.
- [POD 08] PODRUG S., JELASKA D., GLODEŽ S.  
Influence of different load models on gear crack path shapes and fatigue lives. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 31, n° 5, 2008, p. 327–339, Wiley Online Library.
- [POL 99] POLONSKY I., KEER L.  
A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, vol. 231, n° 2, 1999, p. 206–219, Elsevier.
- [POL 00a] POLONSKY I., KEER L.  
A fast and accurate method for numerical analysis of elastic layered contacts. *Journal of tribology*, vol. 122, n° 1, 2000, p. 30–35, American Society of Mechanical Engineers.
- [POL 00b] POLONSKY I., KEER L.  
Fast methods for solving rough contact problems : a comparative study. *Journal of tribology*, vol. 122, n° 1, 2000, p. 36–41, American Society of Mechanical Engineers.
- [POL 01] POLONSKY I., KEER L.  
Stress analysis of layered elastic solids with cracks using the fast Fourier transform and conjugate gradient techniques. *Journal of applied mechanics*, vol. 68, n° 5, 2001, p. 708–714, American Society of Mechanical Engineers.

- [PRE 92] PRESS W.H. T. S. V. W. . F. B.  
Numerical recipes in Fortran 77 : the art of scientific computing, vol. 1. *Fortran Numer. Recipes*, vol. 994, 1992.
- [PRO 05] PROUDHON H., FOUVRY S., BUFFIÈRE J.-Y.  
A fretting crack initiation prediction taking into account the surface roughness and the crack nucleation process volume. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 569-579.
- [RAB 63] RABOTNOV Y. N.  
On the equation of state of creep. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, vol. 178 SAGE Publications, 1963, p. 2–117.
- [RAB 69] RABOTNOV I. N.  
*Creep problems in structural members. By Yu. N. Rabotnov. Translated from the Russian by Transcripta Service Ltd., London. English translation edited by F.A. Leckie.* North-Holland Pub. Co Amsterdam, London, 1969.
- [RAO 99] RAOUS M., CANGÉMI L., COCU M.  
A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 177, n° 3, 1999, p. 383–399, Elsevier.
- [SAC 83a] SACKFIELD A., HILLS D.  
Some useful results in the classical Hertz contact problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 18, n° 2, 1983, p. 101–105, SAGE Publications.
- [SAC 83b] SACKFIELD A., HILLS D.  
Some useful results in the tangentially loaded Hertzian contact problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 18, n° 2, 1983, p. 107–110, SAGE Publications.
- [SAI 02] SAINOT P., JACQ C., NELIAS D.  
A numerical model for elastoplastic rough contact. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 3, n° 4, 2002, p. 497–506, TECH SCIENCE PRESS.
- [SAI 11] SAINOT P., LUBRECHT A.  
Efficient solution of the dry contact of rough surfaces : a comparison of fast Fourier transform and multigrid methods. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 225, n° 6, 2011, p. 441–448, SAGE Publications.
- [SCH 00a] SCHWARZER N.  
Arbitrary load distribution on a layered half space. *Journal of tribology*, vol. 122, n° 4, 2000, p. 672–681, American Society of Mechanical Engineers.
- [SCH 00b] SCHWARZER N.  
Coating design due to analytical modelling of mechanical contact problems on multilayer systems. *Surface and Coatings Technology*, vol. 133, 2000, p. 397–402, Elsevier.
- [SHI 05] SHINDE S., HOEPPNER D. W.  
Quantitative analysis of fretting wear crack nucleation in 7075-T6 aluminum alloy using fretting maps. *Wear*, vol. 259, 2005, p. 271 - 276. 15th International Conference on Wear of Materials.
- [SIM 89a] SIMO J., JU J.  
Strain- and stress-based continuum damage models I. Formulation. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, n° 3, 1989, p. 378 -.

- [SIM 89b] SIMO J., JU J.  
Strain- and stress-based continuum damage models II. Computational aspects. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, n° 3, 1989, p. 378 -.
- [SNE 95] SNEDDON I. N.  
*Fourier transforms*. Courier Corporation, 1995.
- [STE 01] STEVANOVIĆ M., YOVANOVICH M. M., CULHAM J. R.  
Modeling contact between rigid sphere and elastic layer bonded to rigid substrate. *Components and Packaging Technologies, IEEE Transactions on*, vol. 24, n° 2, 2001, p. 207–212, IEEE.
- [STO 73] STOWERS I. F., RABINOWICZ E.  
The mechanism of fretting wear. *Journal of Tribology*, vol. 95, n° 1, 1973, p. 65–70, American Society of Mechanical Engineers.
- [SUN 12] SUN L.  
Etude numérique de l’amorçage et de la propagation de fissures de fretting. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.
- [SWI 85] SWITEK W.  
Fretting fatigue strength of mechanical joints. *Theoretical and applied fracture mechanics*, vol. 4, n° 1, 1985, p. 59–63, Elsevier.
- [TAN 81] TANAKA K., NAKAI Y., YAMASHITA M.  
Fatigue growth threshold of small cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 17, n° 5, 1981, p. 519-533, Kluwer Academic Publishers.
- [TAR 15a] TARO M., CHAISE T., NÉLIAS D.  
A methodology to predict the roughness of shot peened surfaces. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 217, 2015, p. 65–76, Elsevier.
- [TAR 15b] TARO M., CHAISE T., NELIAS D.  
Modeling of ultra-high-speed impact at the surface of an elastic half-space. *Wave Motion*, vol. 58, 2015, p. 77 - 100.
- [TOB 12] TOBI M., LATIF A.  
Modelling of the fretting wear of a coated substrate. Thèse de doctorat, University of Nottingham, 2012.
- [TOM 27] TOMLINSON G. A.  
The Rusting of Steel Surfaces in Contact. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 115, n° 771, 1927, p. 472–483, The Royal Society.
- [VIN 88] VINGSBO O., SODERBERG S.  
On fretting maps. *Wear*, vol. 126, n° 2, 1988, p. 131 - 147.
- [VIN 92] VINCENT L., BERTHIER Y., DUBOURG M., GODET M.  
Mechanics and materials in fretting. *Wear*, vol. 153, n° 1, 1992, p. 135 - 148.
- [VIN 94] VINCENT L.  
Material and fretting. *Mechanical Engineering Publication*, , 1994, p. 323-337.

- [WAN 02] WANG D. F., KATO K.  
Effect of coating thickness on friction for carbon nitride films in repeated sliding against a spherical diamond with nano-scale asperities. *Wear*, vol. 252, n° 3, 2002, p. 210–219, Elsevier.
- [WAN 10] WANG Z.-J., WANG W.-Z., WANG H., ZHU D., HU Y.-Z.  
Partial slip contact analysis on three-dimensional elastic layered half space. *Journal of Tribology*, vol. 132, n° 2, 2010, page 021403, American Society of Mechanical Engineers.
- [WAR 41] WARLOW-DAVIES E.  
Fretting corrosion and fatigue strength : brief results of preliminary experiments. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 146, n° 1, 1941, p. 32–38, SAGE Publications.
- [WAT 68] WATERHOUSE R.  
The effect of clamping stress distribution on the fretting fatigue of alpha brass and Al-Mg-Zn alloy. *ASLE TRANSACTIONS*, vol. 11, n° 1, 1968, p. 1–5, Taylor & Francis.
- [WAT 81] WATERHOUSE R. B.  
*Fretting Fatigue*. Applied Science Published, UK, 1981.
- [WES 39] WESTERGAARD H.  
Bearing Pressures and Cracks. *Journal of applied mechanics*, , 1939.
- [WON 96] WONG S., KAPOOR A.  
Effect of hard and stiff overlay coatings on the strength of surfaces in repeated sliding. *Tribology international*, vol. 29, n° 8, 1996, p. 695–702, Elsevier.
- [WRI 06] WRIGGERS P., LAURSEN T. A.  
*Computational contact mechanics*, vol. 30167. Springer, 2006.
- [YAN 07] YANTIO NJANKEU SABEYA G. R.  
Comportement tribologique d'un alliage de titane traité et/ou revêtu en fretting à débattement libre. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [ZHO 92] ZHOU Z. R.  
Fissuration induite en petits débattement : application au cas d'alliages d'aluminium aéronautiques. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [ZHO 95] ZHOU Z., VINCENT L.  
Mixed fretting regime. *Wear*, vol. 181-183, Part 2, n° 0, 1995, p. 531 - 536. 10th International Conference on Wear of Materials.
- [ZHO 06] ZHOU Z., NAKAZAWA K., ZHU M., MARUYAMA N., KAPSA P., VINCENT L.  
Progress in fretting maps. *Tribology International*, vol. 39, n° 10, 2006, p. 1068 - 1073. The Fourth International Symposium on Fretting Fatigue The Fourth International Symposium on Fretting Fatigue.
- [ZHO 09] ZHOU K., CHEN W. W., KEER L. M., WANG Q. J.  
A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, n° 9, 2009, p. 885–892, Elsevier.
- [ZHU 92a] ZHU Y., CESCOTTO S., HABRAKEN A.-M.  
A fully coupled elastoplastic damage modeling and fracture criteria in metalforming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 32, 1992, p. 197 - 204.

[ZHU 92b] ZHU Y., CESCOTTO S., HABRAKEN A.

A fully coupled elastoplastic damage theory based on the energy equivalence. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications* Pineridge Press, 1992, p. 1455–1466.

[ZHU 08] ZHU Q.-Z., SHAO J.-F., KONDO D.

A discrete thermodynamic approach for modeling anisotropic coupled plasticity-damage behavior in geomaterials. *Comptes rendus mécanique*, vol. 336, n° 4, 2008, p. 376–383, Elsevier.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : JERBI

DATE de SOUTENANCE : 10 Février 2016

Prénoms : HANA

TITRE : Modélisation de l'usure et l'endommagement des contacts nus et revêtus sous chargement de fretting par une méthode semi-analytique

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSEI011

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

RESUME :

Différentes pièces mécaniques font face à des sollicitations de type fretting. Il en résulte différentes dégradations possibles. Ce travail s'attardera sur deux types de dégradation par fretting, l'usure par enlèvement de matière et l'endommagement par dégradation des propriétés matériaux. Une loi d'usure énergétique sera utilisée pour quantifier l'usure en glissement total d'un contact revêtu. Un modèle d'endommagement basé sur le concept de la déformation équivalente sera utilisé pour étudier l'évolution de l'endommagement dans un contact revêtu. L'analyse d'un problème de contact requiert un outil de calcul à la fois robuste et rapide. Dès lors des simulations d'usure et d'endommagement cyclique peuvent être réalisées en un temps court. Pour atteindre cet objectif, un code de contact basé sur une méthode semi-analytique est utilisé. Le problème est simplifié en supposant un contact entre deux massifs élastiques semi-infinis. Des solutions analytiques élémentaires permettent de relier les sollicitations normales et tangentielles aux déplacements élastiques résultants des surfaces en contact. Ces déplacements élastiques sont alors exprimés par un double produit de convolution discret entre des coefficients d'influence et les sollicitations dans le contact. La prise en compte d'un revêtement nécessite l'intégration d'un modèle d'homogénéisation dans le code de contact. Une technique d'enrichissement via la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby, dans laquelle la contribution d'une ou plusieurs inclusions est superposée à la solution en élasticité, est utilisée. Le modèle de comportement revêtement/substrat peut être validé par comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle basé sur les techniques Multigrille. La loi d'usure est ensuite implémentée, et une simulation d'usure est alors entreprise. Des simulations d'usure sont effectuées pour un contact poinçon-plan en glissement total. Les résultats numériques d'usure peuvent être comparés à des essais antérieurs effectués par le LTDS (École Centrale). Pour l'endommagement, des calculs analytiques sont premièrement effectués permettant d'analyser le comportement endommageable sous chargement cyclique uniaxial. Le modèle de Mazars est ensuite adapté au problème de contact et implémenté; des simulations sont alors menées pour étudier le comportement élasto-endommageable du contact sous chargement de fretting.

MOTS-CLÉS : fretting, contact, revêtement, usure, glissement total, endommagement, méthode semi-analytique,...

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Daniel NELIAS

Président de jury : Siegfried FOUVRY

Composition du jury : Siegfried FOUVRY  
Philippe DUFRENOY  
Daniel NELIAS

Jean DENAPE  
Juan-Antonio RUIZ-SABARIEGO  
Marie-Christine BAIETTO



