

Etude du comportement dynamique d'un système multi-étages à engrènements en cascade et décalés à dentures droites et hélicoïdales - Optimisation des corrections de profil

Hassen Fakhfakh

► **To cite this version:**

Hassen Fakhfakh. Etude du comportement dynamique d'un système multi-étages à engrènements en cascade et décalés à dentures droites et hélicoïdales - Optimisation des corrections de profil. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Lyon, 2016. Français. <NNT : 2016LYSEI071>. <tel-02004471>

HAL Id: tel-02004471

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02004471>

Submitted on 1 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSA

N°d'ordre NNT : 2016LYSEI071

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Ecole Doctorale MEGA ED162
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité de doctorat : Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 18/07/2016, par :
Hassen FAKHFAKH
Ingénieur électromécanique de l'ENI de Sfax, Tunisie

Etude du comportement dynamique d'un système multi-étages à engrènements en cascade et décalés à dentures droites et hélicoïdales - Optimisation des corrections de profil

Devant le jury composé de :

PERRET-LIAUDET Joël Maitre de Conférences HDR EC de Lyon

Président

SEABRA Jorge Professeur des Universités Université de Porto

Rapporteur

HADDAR Mohamed Professeur des Universités ENI de Sfax

Rapporteur

BRUYERE Jérôme Maitre de Conférences INSA de Lyon

Examineur

BECQUERELLE Samuel Responsable R&T Hispano-Suiza

Examineur

VELEX Philippe Professeur des Universités INSA de Lyon

Directeur de thèse

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage secretariat@edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDPA 2 avenue Albert Einstein 69626 Villeurbanne cedex directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Darwin - UCB Lyon 1 04.72.43.28.91 Insa : H. CHARLES Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Hôpital Louis Pradel - Bron 04 72 68 49 09 Insa : M. LAGARDE Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Avant propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS, UMR CNRS 5259) de l'INSA de Lyon, dérivé par David DUREISSEIX. Je tiens à le remercier de m'avoir accueilli au sien de son laboratoire de recherche.

Cette thèse s'inscrit dans un projet financier par la société Hispano-Suiza du groupe Safran. Je tiens à remercier sincèrement Samuel BECQUERELLE, responsable R&T chez Hispano-Suiza, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser ce projet de recherche, pour son soutien et sa compréhension.

Je témoigne toute ma gratitude à M. Philippe VELEX, Professeur à l'INSA de Lyon, qui m'a accueilli au sein de l'équipe SMC du LaMCoS, m'a accordé sa confiance pour mener à bien ce travail de recherche et qui m'a guidé avec ses précieux conseils.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Jérôme BRUYERE, Maître de conférences à l'INSA de Lyon, pour son encadrement, son soutien et ses conseils tout au long de ce travail.

A mes collègues dans le laboratoire, je souhaite leurs exprimer ma profonde reconnaissance pour les agréables moments de détente durant ces trois ans au sein du laboratoire qu'en dehors.

Je tiens à remercier toutes les personnes, qui de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, je m'adresse particulièrement aux membres du LaMCoS et spécialement de l'équipe SMC, pour leur sympathie, leur soutien et leur amitié.

Et pour terminer, merci à mes parent, à ma femme, à mon frère, à ma soeur, à tous mes proches et à ceux qui sont venus me soutenir.

Résumé

Ce travail de thèse, réalisé dans le cadre d'une collaboration avec la société Hispano-Suiza (groupe SAFRAN) porte sur la modélisation et l'analyse des vibrations et surcharges dynamiques sur les engrènements d'un réducteur aéronautique multi-étage constitué de plusieurs cascades d'engrènements situés dans des plans décalés. Une modélisation originale est proposée qui repose sur le couplage entre la résolution des équations du mouvement et la prise en compte des conditions de contact instantanées sur l'ensemble de tous les engrènements. Le modèle gère les phases relatives entre engrènements ainsi que l'influence des modifications de corrections de forme des dentures. En s'appuyant sur de nombreux exemples d'application, il est montré que des corrections de profil linéaires et symétriques adaptées permettent d'abaisser très sensiblement le niveau de surcharges dynamiques sur une plage de vitesse de rotation importante. Il est également confirmé que les efforts dynamiques sur les engrènements sont fortement corrélés aux amplitudes des variations temporelles des erreurs de transmission locales pour un fonctionnement quasi-statique sous charge. Considérant différentes architectures de transmissions, des optimisations conduites grâce à un algorithme génétique montrent que les paramètres optimaux de corrections de profil sont à choisir au voisinage d'une 'courbe maîtresse modifiée', initialement définie pour un seul engrènement et dont les propriétés semblent pouvoir être extrapolées à des systèmes avec plusieurs engrènements simultanés. Les résultats de simulations prouvent que l'ensemble des corrections sélectionnées sur les courbes maîtresses modifiées améliorent sensiblement le comportement dynamique des systèmes d'engrenages multi-étages. En revanche, pour des systèmes soumis à des niveaux de charge différents, des corrections optimales courtes semblent plus adaptées en termes de dynamique de l'engrènement tandis que des corrections optimales longues semblent plus efficaces en ce qui concerne le niveau de contraintes en pied de dents.

Mots clés : Réducteur multi-étage, Dentures droites et hélicoïdales, Corrections de profil, Optimisation, Algorithme génétique, Erreur de transmission, Courbe maîtresse

Abstract

This research work, conducted in cooperation with Hispano-Suiza (SAFRAN group), is focused on the modelling and analysis of vibrations and dynamic loads in aeronautical multi-mesh gears comprising several spatial gear arrangements (idler gears, several pinions on one shaft). An original model is presented which relies on the simultaneous solution of the equations of motion and the instant contact conditions for all the tooth contacts and all the meshes. The phasing between the various meshes along with tooth shape modifications are integrated in the simulations. Based on a number of simulation results, it is shown that linear symmetric profile modifications can substantially reduce dynamic tooth loads over of broad range of speeds. It is also confirmed that dynamic mesh forces are strongly correlated with the time-variations amplitudes of local quasi-static transmission errors under load. Considering several gear arrangements, tooth profile optimisations have been performed using a genetic algorithm which indicate that optimum reliefs always lie in the vicinity of the so-called ‘modified Master Curve’ initially defined for a single pinion-gear pair. This finding suggests that the concept of Master Curve can probably be extended to more complex gear systems. The simulation results prove that all the optimal profile modifications on the Master Curve improve the dynamic tooth loading conditions in multi-mesh gears. However, for systems submitted to several load levels, short optimal reliefs seem preferable whereas long optimal reliefs are more effective in terms of root stresses.

Keywords: Multi-mesh gear, Spur and helical gears, Profile modifications, Profile optimisation, Genetic algorithm, transmission error, Master curve

Table des matières

Avant propos	5
Résumé.....	7
Table des matières.....	9
Principales notations.....	12
Introduction générale.....	15
Chapitre I. Synthèse bibliographique.....	20
I.1. Introduction.....	21
I.1.1. Raideur d'engrènement	21
I.1.2. Erreur de transmission.....	31
I.2. Sources d'excitation à l'engrènement.....	36
I.2.1. Sources d'excitation internes.....	36
I.2.2. Sources d'excitation externes.....	40
I.3. Optimisation des corrections de dentures	42
I.3.1. Corrections de dentures : définitions et types.....	42
I.3.2. Minimisation des fluctuations de la <i>TEs</i>	44
I.3.3. Quelques méthodes d'optimisation	46
I.4. Train d'engrènements multi-étages.....	50
I.4.1. Quelques modèles d'engrènement multi-étages de la littérature.....	50
I.4.2. Optimisation des trains multi-engrènements	53
I.5. Conclusion	55
Chapitre II. Modélisation et éléments de validation	57
II.1. Introduction.....	58
II.2. Etat de référence.....	58
II.2.1. Modélisation des écarts géométriques.....	59
II.2.2. Cinématique des corps rigides.....	61
II.2.3. Dynamique des corps rigides.....	63
II.2.4. Discrétisation temporelle.....	65
II.3. Définition des degrés de liberté (DDL)	78
II.4. Etat déformé.....	81
II.4.1. Définition du vecteur structure dans le repère global.....	81

II.4.2. Déflexion au point de contact.....	84
II.4.3. Raideur d'engrènement	85
II.5. Mise en équations	87
II.5.1. Elément d'engrenage	87
II.5.2. Elément d'arbre et paliers.....	91
II.5.1. Equation de mouvement du train d'engrènement multi-étages.....	92
II.5.2. Résolution.....	93
II.6. Eléments de validation	95
II.6.1. Comparaison du comportement dynamique d'un train double-étages à engrènements décalés	95
II.6.1. Comparaison du comportement dynamique d'un train double-étages à engrènements en cascade.....	100
II.7. Conclusion	103
Chapitre III. Corrections de profil optimales pour des réducteurs multi-étages en cascade et décalés... ..	104
III.1. Introduction.....	105
III.2. Cas d'un système à un seul étage.....	105
III.2.2. Courbe maitresse et courbe maitresse modifiée	106
III.3. Système à deux étages	109
III.3.1. Erreur de transmission quasi-statique locale et critère d'optimisation équivalent.....	109
III.3.2. Modèles d'engrènement et leurs caractéristiques géométriques et de fonctionnement	110
III.3.3. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique	113
III.3.4. Optimisation du coefficient dynamique	118
III.3.5. Calcul de la réponse dynamique en présence des corrections optimales	122
III.4. Modèles à 4 étages d'engrènement en cascades	125
III.4.1. Modèle d'engrènement et ses caractéristiques géométriques et de fonctionnement	125
III.4.2. Optimisation des corrections de profil	127
III.4.3. Efforts dynamiques en présence de corrections optimales.....	131
III.5. Application industrielle : Optimisation des corrections sur le modèle AGB Trent XWB composé de 6 étages d'engrènements	132

III.5.1. Présentation du modèle d'engrènement.....	132
I.1.1. Calcul de la réponse dynamique.....	139
III.5.2. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique	
.....	141
I.1.1. Efforts dynamiques en présence de corrections optimales.....	143
III.6. Conclusion	148
Chapitre IV. Autres analyses des performances des corrections de profil.....	149
IV.1. Introduction.....	150
IV.2. Modèles à 4 étages d'engrènement en cascade : influence de couples variables dans le temps	150
IV.3. Modèle AGB Trent XWB composé de 6 étages d'engrènement en cascade et décalées.....	155
IV.3.1. Influence du chargement	155
IV.3.2. Performance des corrections de profil optimales vis-à-vis du critère de contrainte en pied de dent.....	165
IV.4. Conclusion	167
Conclusion générale et perspectives.....	166
Références bibliographiques.....	169
Annexe A : Matrices éléments arbres.....	187

Principales notations

$R_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$: Repère global fixe
$r_m(\vec{X}_m, \vec{Y}_m, \vec{Z})$: Repère local lié au plan d'action de l'étage m
$R_m(O_r, \vec{S}_m, \vec{T}_m, \vec{Z})$: Repère local lié à l'étage m
z_r, z_{r+1}	: Nombres de dent des pignons r et $r+1$ constituant l'étage m
Rb_r, Rb_{r+1}	: Rayons de base des pignons r et $r+1$ constituant l'étage m
O_r, O_{r+1}	: Centres des pignons r et $r+1$ constituant l'étage m
Pba, Sba	: Pas de base apparent, épaisseur apparente de base de la dent
β_b	: Angle d'hélice de base
α_{ar}	: Angle de pression apparente du pignon r
ε_α	: Rapport de conduite de profil
$\Omega_r(t)$: Vitesse de rotation du pignon r
$Ct_i(t)$: Couple moteur ou résistant appliqué à la ligne d'arbre i
T_i	: Période d'engrènement relative à la cascade d'engrènement i
T_{sys}	: Période du système
p	: Pas du temps
$PPCM, PPPM$: Plus Petits Commun Multiple, Plus Petite Période Multiple
$\parallel \parallel$: Reste de la division
\widehat{AB}	: Longueur d'arc entre les points A et B
$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, M$: Points géométriques définis dans Figure II-5 et Figure II-7

λ_r	: Angle entre le repère global $R_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ avec le repère local $R_m(O_r, \vec{S}_m, \vec{T}_m, \vec{Z})$
γ_m	: Angle entre axes des étages m et $m+1$ (définis positivement dans le sens trigonométrique)
Φ_a, Φ_c	: Angles entre deux lignes d'action (voir Figure II-5 et Figure II-7)
Δl	: Déphasage mesuré dans le plan de base [m]
$T1_m, T2_m$: Limites du plan d'action de l'étage m
$T'1_m, T'2_m$: Limites de la fenêtre d'engrènement de l'étage m
$e_{Tot,m}(M_m^*)$: Ecart normal maximal au point M_m^* de l'étage m
$\dot{e}_{Tot,m}(M_m^*)$: La dérivée par rapport au temps de l'écart normal maximal au point M_m^* de l'étage m
$\delta e_m(M_m)$: Ecart relatif au point M_m de l'étage m
$\delta_m(M_m)$: Rapprochement au point M_m de l'étage m
$\Delta(M_m)$: Déflexion au point M_m à l'étage m
\mathbf{q}_m	: Vecteur des degrés de liberté de l'étage m
\mathbf{q}	: Vecteur des degrés de liberté global
$\tilde{\mathbf{V}}_m(M_m)$: Vecteur structure relatif à l'étage m
k_{mij}	: Raideur d'engrènement élémentaire au point de contact M_m
$k_m(t)$: Raideur d'engrènement de l'étage m à l'instant t
$[K_m(t)]$: Matrice raideur élémentaire de l'étage m
$\{F_{1m}(t, \delta e_m)\}$: Vecteur d'excitation élémentaire de l'étage m introduisant l'effet des écarts géométriques
$[K_e(t, \mathbf{q})]$: Matrice raideurs d'engrènement globale
$\mathbf{F}_{e1}(t, \mathbf{q}, \delta e_m)$: Vecteur d'excitation global introduisant l'effet des écarts géométriques
$[M_{em}]$: Matrice masse des éléments engrenages de l'étage m

$\{F_{2m}(t)\}$: Vecteur force inertielle élémentaire pour un étage m introduisant l'effet de la cinématique perturbé par des excentricités
$[M_e]$: Matrice masse globale des éléments engrenages
$\mathbf{F}_{e2}(t)$: Vecteur forces inertielles global introduit l'effet de la cinématique perturbé par des écarts géométriques
$[K_{ai}]$: Matrice de rigidité d'un élément d'arbre i
$[M_{ai}]$: Matrice de masse d'un élément d'arbre i
$\mathbf{F}_{ai}(t)$: Vecteur forces inertielles dépendant des variations temporelles de la vitesse de rotation dus aux écarts géométriques
$[K_{pj}]$: Matrice de rigidité du palier j
$[M]$, $[K(t, \mathbf{q})]$ et $[C]$: Matrice masse globale, matrice raideur globale et matrice d'amortissement visqueux globale
$\mathbf{F}_0(t)$, $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{q})$ et $\mathbf{F}_2(t)$: vecteur des forces extérieures, vecteur d'excitation introduisant l'effet des écarts géométriques et vecteur forces inertielles
δ_{m_0}	: Déflexion statique moyenne
E, Γ	: Profondeur et longueur de correction de profil
E^*	$= \frac{E}{\delta_{m_0}}$
χ	$= \frac{E^*}{\varepsilon_\alpha}$
$\text{RMS}(Y)$: Root Mean Square of (Y)
$NLTE$: Erreur cinématique (No Load Transmission Error)
TEs	: Erreur de transmission quasi-statique sous charge

Introduction générale

Les problèmes de surcharges dynamiques sur les contacts entre dentures ainsi que le contrôle des niveaux de bruit et vibration dans les transmissions par engrenages demeurent des préoccupations industrielles importantes. Dans ce cadre, de nombreux travaux ont été conduits au cours des 30 dernières années portant principalement sur la simulation numérique et la compréhension du comportement vibratoire d'engrenages simple étage. Des articles plus récents ont introduit le concept d'optimisation de corrections de forme de denture pour des systèmes mono ou multi-engrènement avec, pour objectif principal, la réduction des sources d'excitation associées aux engrènements, Vexel et al [1, 2, 3], Bruyère et al [4, 5] et Carbonelli et al [6, 7, 8].

Dans la continuité de ces approches, nous proposons dans cette thèse, une étude d'optimisation sur des trains d'engrenages multi-étages à dentures droites ou hélicoïdales. Un modèle numérique tridimensionnel a été développé afin de simuler des systèmes à N engrènements en cascade et/ou avec étages décalés intégrant également les arbres et paliers supportant les engrenages.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le 1^{er} chapitre propose une synthèse de la littérature sur les travaux de modélisations dynamiques et les études d'optimisation appliquées aux trains d'engrenages multi-étages. Les principales sources d'excitations internes et externes dans les systèmes d'engrenages sont décrites et le rôle de corrections de forme de denture sur les fluctuations d'erreurs de transmission est abordé. Les principaux algorithmes évolutionnaires utilisés dans le cadre d'optimisation sont également présentés.

Le deuxième chapitre est consacré à la description des éléments de théorie utilisés pour la modélisation de systèmes à N engrènements en cascade et/ou décalés. La cinématique et la dynamique de corps rigides sont tout d'abord caractérisées en fonction des écarts géométriques et des excitations extérieures. Une étape importante consiste ensuite à modéliser les contacts entre dentures par des liaisons élastiques variables dans le temps intégrant les déphasages relatifs entre les différents engrènements. Enfin, le comportement dynamique du système global régi par un système différentiel à coefficients variables non-linéaire est résolu par une méthode d'intégration pas à pas dans le temps couplée à un algorithme de contact unilatéral.

Le troisième chapitre présente une étude d'optimisation des corrections de denture dont le but principal est de minimiser les fluctuations d'erreurs de transmissions quasi-statiques sous

charge pour tous les engrènements. Les corrections optimales obtenues sont ensuite appliquées sur tous les étages de la transmission afin de tester leur influence sur la réponse dynamique à la denture. Dans ce mémoire, on s'attache particulièrement à l'analyse des performances de corrections de profil linéaires et symétriques caractérisées par leurs seules profondeurs et longueurs de correction. La recherche de corrections optimales s'appuie sur un algorithme méta-heuristique susceptible d'optimiser plusieurs variables en fonction d'un niveau de performance souhaité. Toutefois, le traitement du problème d'optimisation sur les systèmes multi-engrènements est plus complexe que sur un engrenage simple étage car le nombre de variables à optimiser est plus grand et les couplages entre engrènements imposent de définir des fonctions objectives globales ou équivalentes.

Enfin, le dernier chapitre illustre les performances des corrections de profil optimales minimisant les erreurs de transmissions quasi-statiques des étages d'engrènement vis-à-vis d'autres critères de performance et des conditions de fonctionnement non nominales. Dans l'aéronautique, le moteur et/ou certains équipements fonctionnent à différents niveaux de couple et puissance. Par ailleurs, des incidents en vol peuvent conduire à des surcharges brutales ou des annulations brusques de couple qui influent notablement sur le comportement dynamique des organes de transmission. Un certain nombre de ces conditions non nominales sont examinées et l'apport éventuel de corrections de dentures dans ce contexte est analysé.

Chapitre I. Synthèse bibliographique

I.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude bibliographique présentant les différents modèles dynamiques de trains d'engrètements trouvés dans la littérature ainsi que les travaux et résultats de recherche relatifs à l'optimisation des corrections de dentures sur des trains à engrètements multiples en cascades et/ou décalés. Au-delà de la modélisation des éléments constitutifs tels que les engrenages, arbres, paliers, etc., la prise en compte de défauts, d'écarts de forme et leur simulation constituent une phase importante des développements théoriques. Ainsi, dans une première partie, on s'attachera aux principaux éléments caractéristiques contrôlant la réponse vibratoire d'engrenages. Dans une seconde partie, les différentes sources d'excitation aussi bien internes qu'externes seront examinées. Une troisième partie sera consacrée à l'optimisation des corrections de forme minimisant le niveau vibratoire et sonore dans les systèmes d'engrèment ainsi que les principales méthodes de résolution métaheuristiques mises en œuvre dans ce type de problématique. Enfin, une dernière partie sera spécifiquement dédiée aux systèmes d'engrèment multi-étages et aux différentes études d'optimisation de forme des dentures qui s'y rapportent.

I.1.1. Raideur d'engrèment

La raideur d'engrèment caractérise la déformation élastique entre dentures sous chargement. Cette liaison élastique représente un point central dans la théorie du comportement dynamique des engrenages car elle contrôle largement les positions des vitesses critiques et conditionne également, pour partie, les niveaux d'excitation associés aux engrètements.

La majorité des études considère, par hypothèse, que les contacts entre dentures s'effectuent dans le plan d'action théorique tangent aux cylindres de base du pignon et de la roue et seuls quelques auteurs ont abordé le problème spécifique des contacts entre profils non conjugués hors du plan d'action, Kasuba et Evans [9], Honda [10], Velez et al [11]. Dans ces conditions, les normales à tous les contacts simultanés entre flancs de denture sont identiques et il est alors possible de définir une fonction scalaire unique représentative des déflexions élastiques des dentures. L'amplitude de la fonction raideur d'engrèment est clairement reliée à l'étendue des contacts qui peut varier substantiellement au cours du mouvement conduisant ainsi à une raideur dépendante de temps générant des excitations paramétriques et d'éventuelles

instabilités. Les premiers travaux relatifs à cette problématique particulière sont ceux de Strauch [12] et Harris [13] qui, pour des engrenages droits, considèrent des raideurs d'engrènement fonctions de la longueur de contact instantanée dépendantes du rapport de conduite.

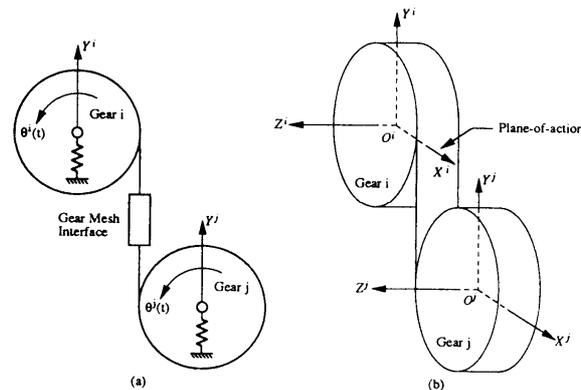


Figure I-1 : Liaison élastique par engrenage selon Blankenship [14]

1.1.1.1. Raideur d'un couple de dent

Afin de calculer la raideur globale d'engrènement, il est nécessaire d'estimer la raideur d'un couple de dents en prise à un instant donné. Dans un contexte de modélisation du comportement dynamique, la majorité des approches restent bidimensionnelles et reposent fréquemment sur une décomposition dite en tranches minces selon la largeur des dentures. Des modèles tridimensionnels, généralement basés sur des modèles éléments finis, sont également possibles mais demeurent limités à la définition de fonctions excitatrices (erreurs de transmissions) qui sont ensuite importées dans des modèles dynamiques [15]. Les contributions au calcul de la raideur globale sont usuellement décomposées en :

- Une contribution locale correspond aux rigidités de contact entre les dents supposée de type Hertzien.
- Des contributions globales liées i) à la flexion de la denture et ii) la liaison dent-corps d'engrenage.

a) Raideur d'engrènement donnée par la norme ISO 6336 [16]

La norme ISO 6336 [16] fournit une approximation de la raideur d'engrènement valable pour les engrenages monoblocs sans voile mince à dentures en développante de cercle. Les formules introduisent les caractéristiques géométriques des engrenages et conduisent à une raideur par unité de longueur de contact k_0 sous la forme :

$$k_0 \approx \cos \beta \frac{0.8}{q} \quad (\text{I.1})$$

Où β est l'angle d'hélice primitif

$$q = C_1 + C_4 x_1 + C_6 x_2 + C_8 x_1^2 + C_9 x_2^2 + \left(\frac{C_2}{z_1} + \frac{C_3}{z_2} + C_5 \frac{x_1}{z_1} + C_7 \frac{x_2}{z_2} \right) \cos^3 \beta \quad (\text{I.2})$$

- z_1, z_2 sont respectivement le nombre de dent du pignon et de la roue
- $C_{1,2,\dots}$ sont des constantes définies dans le tableau ci-dessous

Tableau I.1 : Coefficient pour le calcul de la raideur d'engrènement ISO 6336 [16]

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
0,04723	-0,00635	-0.00193	0.00529	0.00182	0.15551	0.25791	-0.11654	-0.24188

b) Raideur de contact d'un couple de dent

En se basant sur la théorie de Hertz bidimensionnelle, Weber & Banaschek [17] définissent la déflexion au niveau du point de contact entre deux cylindres par rapport au point de référence pris sur la ligne centrale de la denture sous la forme :

$$\delta_c^{WB} = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left(\ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{a_H} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right) \quad (I.3)$$

Où:

- F : Force normale appliquée sur la denture
- b : Largeur de la denture
- E : Module d'Young
- ν : Coefficient de Poisson
- k_1, k_2 : Distances entre le point de contact et la ligne centrale de la dent

respectivement pour le pignon et la roue.

- $a_H = \sqrt{8 \frac{F}{b} \rho_{eq} \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$: Demi-largeur du contact Hertzien (Figure I-2)
- $\rho_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$: Rayon de courbure équivalent au point de contact.
- ρ_1, ρ_2 : Rayons de courbure

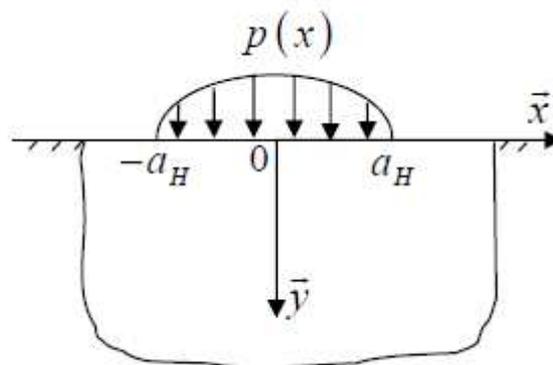


Figure I-2 : Demi-plan élastique soumis à la pression hertzienne- cas de la formule de Weber & Banaschek [17]

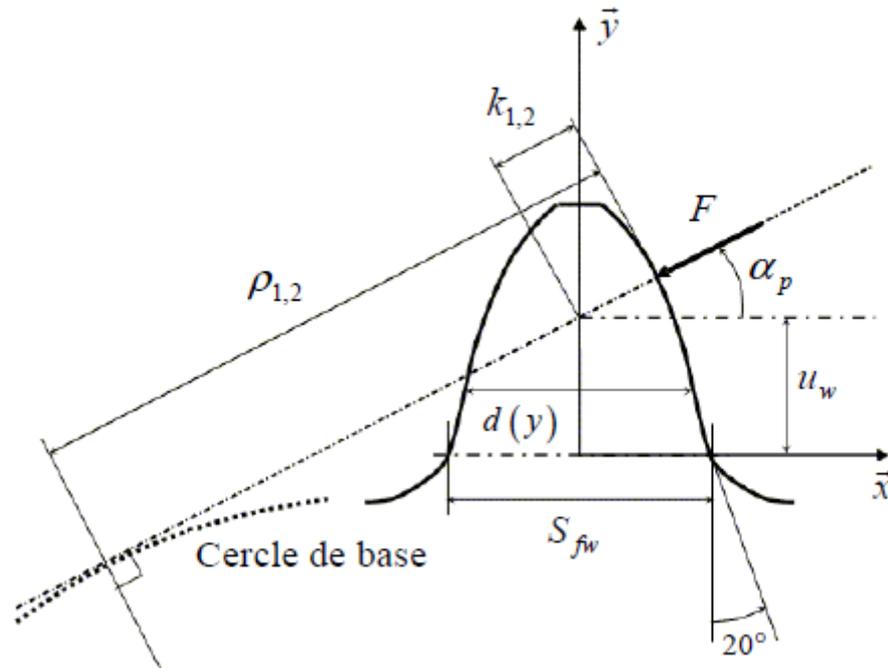


Figure I-3 : Paramètres géométriques pour les formules de Weber & Banaschek [17] et de Lundberg [18]

D'autres formules sont largement utilisées pour le calcul de la raideur de contact incluant, en particulier, celle de Lundberg [18] qui repose sur un modèle tridimensionnel de massif semi-infini soumis à une pression sur une zone de longueur b assimilée ici à la largeur de denture ou une fraction de la largeur de denture. La distribution de pression est semi-elliptique dans la direction correspondant au profil de dent et uniforme selon la largeur. Le déplacement au centre de la zone de pression (ou contact) s'exprime alors:

$$\delta_c^L = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left(\frac{1}{2} + \ln 2 + \ln \frac{b}{a_H} \right) \quad (\text{I.4})$$

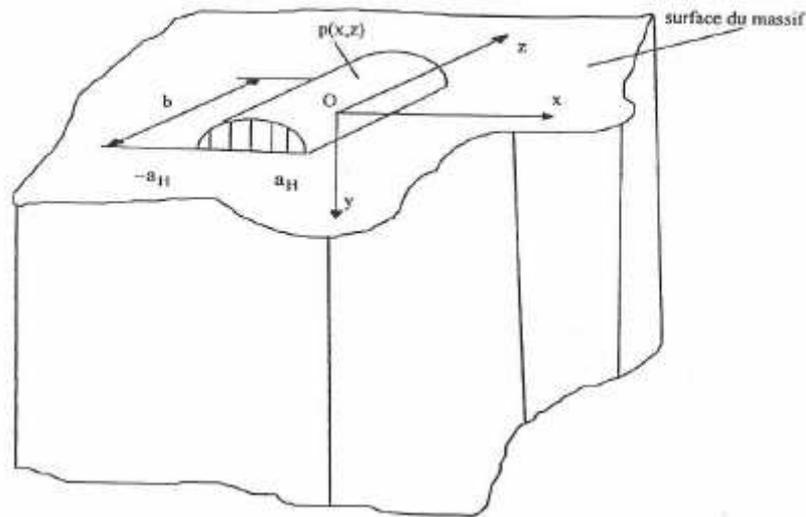


Figure I-4 : Répartition de la pression dans le demi-espace élastique modélisé par Lundberg [18]

c) Raideur de flexion et de fondation de la dent

En assimilant une dent à une poutre de section variable encastree sur le corps d'engrenage, la deflexion de flexion de la denture est deduite de l'egalite entre le travail des efforts exterieurs et l'energie de deformation [17], et conduit au resultat suivant:

$$\delta_b = \frac{F}{b} \frac{1}{E} \cos^2(\alpha_p) \left[10,92 \int_0^{u_w} \frac{(u_w - y)^2}{d(y)^3} dy + 3,1(1 + 0,294 \operatorname{tg}^2(\alpha_p)) \int_0^{u_w} \frac{1}{d(y)} dy \right] \quad (\text{I.5})$$

Où :

- α_p : Angle de pression
- Les autres parametres sont definis en se referant a la Figure I-3 et l'equation I.3.

L'encastrement de la dent n'est pas rigide et l'influence de l'elasticite du corps de roue doit etre ajoutee. La liaison entre denture et corps est alors assimilee a un plan elastique semi-infini soumis aux distributions de contraintes normales et tangentielles calculees a l'encastrement comme illustre sur la Figure I-5.

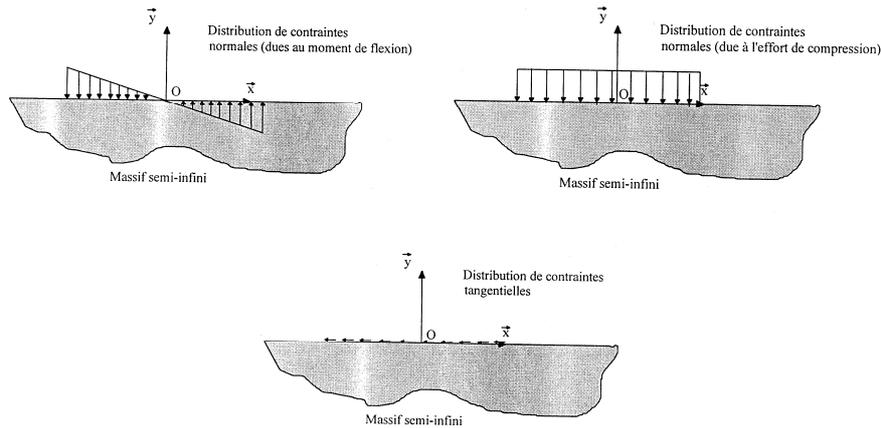


Figure I-5 : Modélisation de la fondation d'une dent

Les solutions de chacun des problèmes individuels présentés dans la Figure I-5 sont ensuite superposées et le déplacement supplémentaire induit au niveau de l'intersection entre la fibre neutre de la poutre et la ligne d'action de l'effort de contact s'exprime alors sous la forme [17] :

$$\delta_{fw} = \frac{F}{b} \frac{1}{E} \cos^2(\alpha_p) \left[L \left(\frac{u_w}{S_{fw}} \right)^2 + M \left(\frac{u_w}{S_{fw}} \right) + P(1 + Q \cdot \text{tg}^2(\alpha_p)) \right] \quad (\text{I.6})$$

Où :

- S_{fw} : Épaisseur de la dent dans la section critique selon Weber & Banaschek
- L, M, P et Q : Constantes qui diffèrent légèrement selon les auteurs. Pour Weber $\nu=0.3$, $L=5.2$, $M=1$, $P=1.4$, $Q=0.3$.

Une expression de δ_{fw} plus précise a été récemment proposée par Sainsot et al. [19], en remplaçant le demi-plan élastique par un anneau élastique plus proche de la géométrie réelle du corps de l'engrenage.

Afin d'intégrer l'influence de la largeur de denture ou des largeurs de contact variables dans le cas de dentures hélicoïdales, les engrenages peuvent être découpés en tranches minces (voire infinitésimales) auxquelles sont affectées des raideurs bidimensionnelles. Dans ces conditions, les effets élastiques convectifs (traduisant le fait qu'un effort appliqué à un point produit des déplacements en d'autres points) ne sont pris en compte. Les contacts sont alors

assimilés à des fondations élastiques de Winkler (séries de ressorts indépendants) dont les propriétés élastiques et les longueurs sont réactualisées afin de simuler les mouvements relatifs des flancs de denture. Le modèle le plus simple permettant d'intégrer les couplages élastiques entre points de contact et éventuellement d'introduire des résultats éléments finis dans les rigidités d'engrènement consiste à utiliser des fondations élastiques de Pasternak [20] , [21], Velex et Ajmi [15]. La fondation élastique de Pasternak [20] est constituée d'éléments de flexion et de cisaillement transversal (Figure I-6) qui couplent les déplacements aux différents ressorts (Figure I-7).

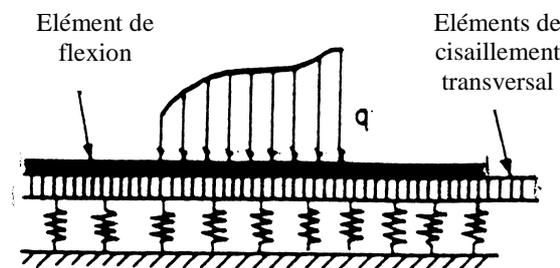


Figure I-6 : Fondation élastique de Pasternak [20]

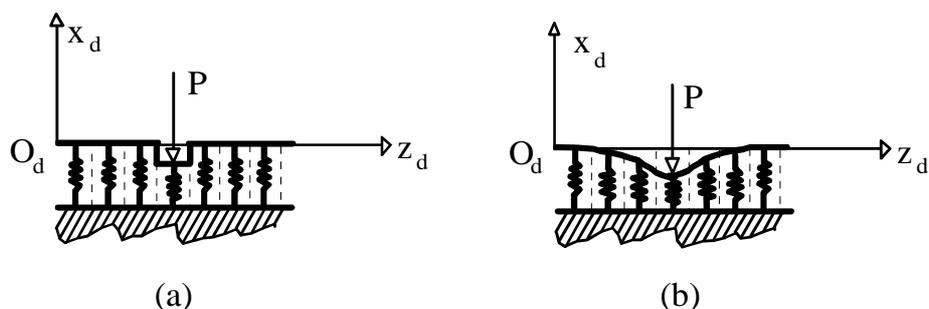


Figure I-7 : Déformée d'une fondation élastique par une charge concentrée normale : a) Modèle sans couplage b) Modèle avec couplage

En se basant sur les travaux de Seager [21], Schmidt et al. [22], les déplacements élastiques des dentures sont calculés par des fondations élastiques de Pasternak ramenées dans le plan d'action de l'engrènement. La dent et son embase sont ainsi découpées en tranches minces, chacune d'elles étant modélisée par un ressort lié à des éléments de dimensions variables travaillant en flexion et en cisaillement assurant le couplage entre les tranches (Figure I-8). Le

déplacement relatif des flancs de denture est simulé en réajustant les paramètres de raideurs au cours du temps.

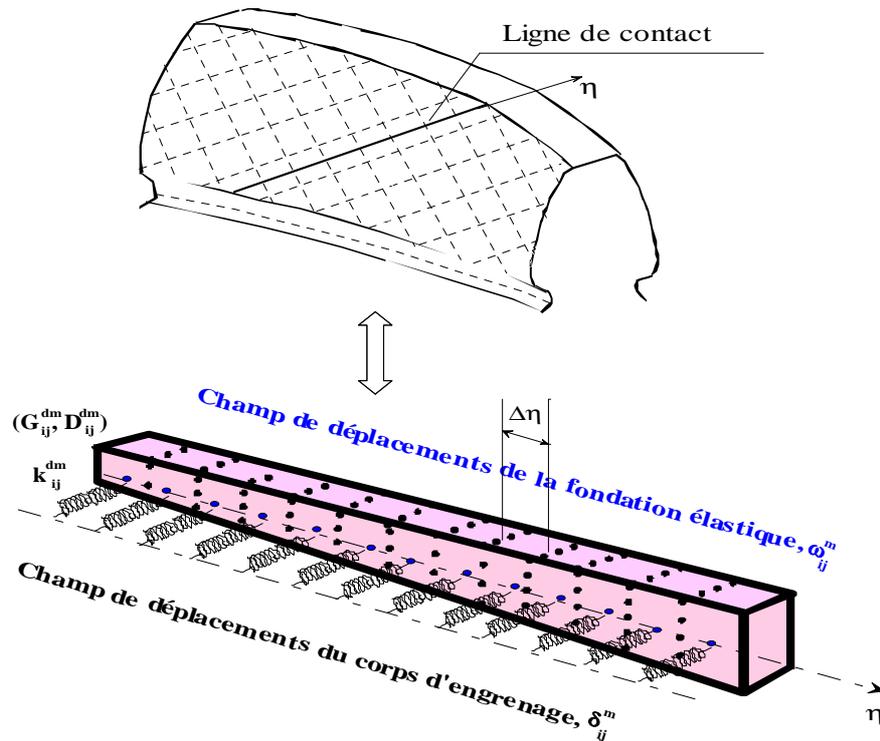


Figure I-8 : Modélisation d'une dent par une fondation élastique

Les valeurs des rigidités des éléments de raideurs, de cisaillement et de flexion, respectivement notées k_{ij}^{dm} , G_{ij}^{dm} et D_{ij}^{dm} , sont données par des formules semi-empiriques, ajustée grâce aux paramètres A, B et C, après comparaison par rapport aux calculs de déflexions à partir de code éléments finis tridimensionnels et les valeurs fournies par les fondations élastiques [23].

$$k_{ij}^m = C_f \cdot k_{0ij}^{dm}$$

$$G_{ij}^{dm} = C_f \cdot f_m(z) \cdot f_0(z_m) \cdot \left(\frac{m_n}{4}\right)^2 \cdot k_{0ij}^{dm}$$

$$D_{ij}^{dm} = C_f \cdot f_m(z) \cdot f_0(z_m) \cdot \left(\frac{m_n}{4}\right)^4 \cdot k_{0ij}^{dm}$$

Où :

- k_{0ij}^{dm} : raideur de Weber & Banaschek déduite des relations (I-3) et (I-5)
- $f_m(z) = 1$ si la denture est droite, $f_m(z) = A \cdot f_1(\alpha) + B \cdot f_2(z_m) \cdot f_3\left(\frac{b_m}{m_n}\right) \cdot e^{-C \cdot \bar{z}}$ si elle est hélicoïdale
- m_n le module de taillage
- b_m la largeur du mobile m
- z_m : nombre de dents du mobile m
- $\bar{z} = \frac{z}{m_n}$: coordonnée adimensionnée du point M_{ji} selon la largeur
- f_0, f_1, f_2 et f_3 : fonctions qui dépendent de la géométrie de la denture
- $C_f = 0.8$ pour des engrenages massifs (en s'inspirant des résultats de la norme ISO 6336)

1.1.1.2. Raideur globale d'engrènement

A partir des différentes formulations proposées ci-dessus pour le calcul de la raideur d'un couple de dent en prise ou bien d'une tranche mince d'un couple de dents en prise, la raideur globale instantanée d'engrènement s'obtient directement par additions de toutes les contributions à un instant donné. Cette raideur est ainsi liée à la longueur de contact théorique qui dépend des rapports de conduite et de recouvrement de l'engrenage. La raideur d'engrènement dépend donc des positions angulaires du pignon et de la roue et par conséquent du temps ; elle est périodique de la période d'engrènement. La représentation la plus simple considère que la raideur d'un couple de dent par unité de largeur de contact est constante quel que soit la position du point de contact sur les profils conjugués, conduisant ainsi à une raideur d'engrènement proportionnelle à la longueur de contact instantanée comme illustré sur la Figure I-9, Vexex et Saada [24, 25, 26], Vexex [27], Neriya et al. [28], Kiyono et al [29], Iwatsubo et al [30], Küçükay [31], Cai et Hayashi [32].

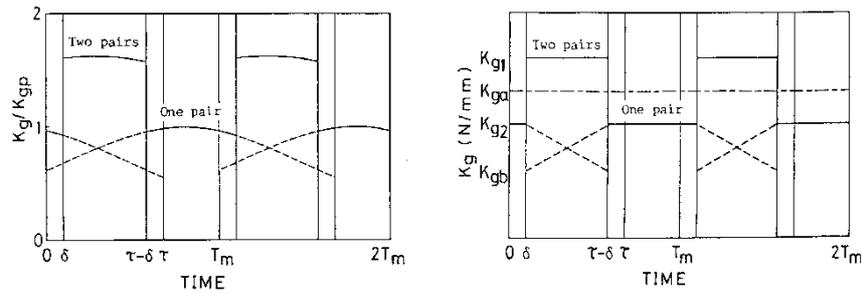


Figure I-9 : Raideur d'engrènement globale selon Iwatsubo et al. [30]

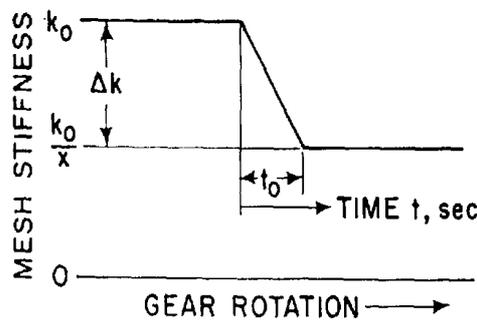


Figure I-10 : Décomposition de la raideur d'engrènement hélicoïdale selon Seireg et Houser [33]

I.1.2. Erreur de transmission

Théoriquement, pour un système pignon-roue avec des profils de denture en développantes de cercle parfaites et une raideur d'engrènement infinie, le rapport de vitesse (ou d'angles de rotation) entre le pignon et la roue est constant. En réalité, les engrenages se déforment et présentent des écarts géométriques, des défauts de forme et de montage de sorte que le transfert de rotation entre les organes menant et mené n'est pas parfait. Ce phénomène est caractérisé par la notion d'erreur de transmission (TE) définie par Harris [13], Gregory et al [34, 35], Munro [36] et peut s'exprimer sous forme de déplacement relatif dans le plan d'action théorique (Figure I-11) comme :

$$TE = Rb_1\Theta_1 + Rb_2\Theta_2 \quad (I.7)$$

Où :

- R_{b1} et R_{b2} sont les rayons de base du pignon et de la roue
- Θ_1 et Θ_2 sont les positions angulaires du pignon et de la roue

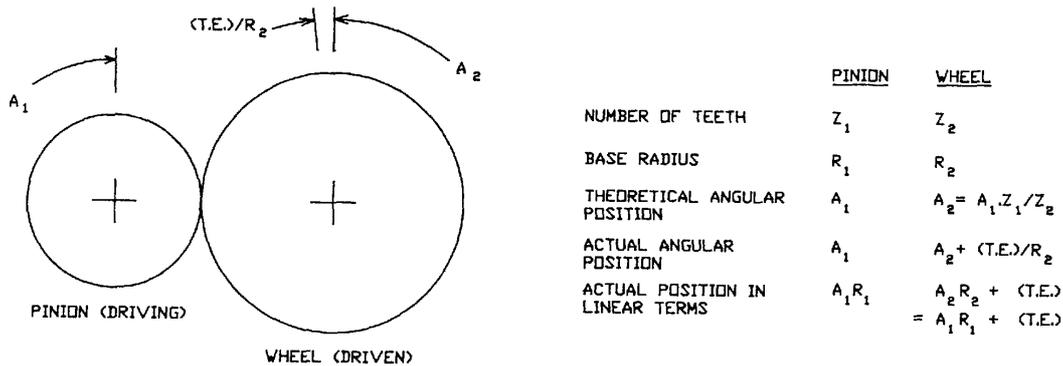


Figure I-11: Définition de l'erreur de transmission selon Munro [36]

Selon les conditions et les applications, on distingue :

- L'erreur de transmission quasi-statique sans charge appelée aussi erreur cinématique (*NLTE*)
- L'erreur de transmission quasi-statique sous charge (*TEs*)
- L'erreur de transmission dynamique (*TE*)

b) Erreur de transmission quasi-statique sans charge ou erreur cinématique

Cette erreur est relevée quand l'engrenage ne transmet pas de puissance et pour une vitesse de rotation très lente. Elle reflète donc tous les défauts de géométrie des dents résultant de la fabrication de l'engrenage (erreurs de pas, excentricité,...), des erreurs de montage des engrenages sur les lignes d'arbre et des écarts de forme introduits volontairement sur les dents. L'erreur cinématique est, ainsi, une erreur qui caractérise la géométrie de l'engrenage et sa métrologie (Figure I-12).

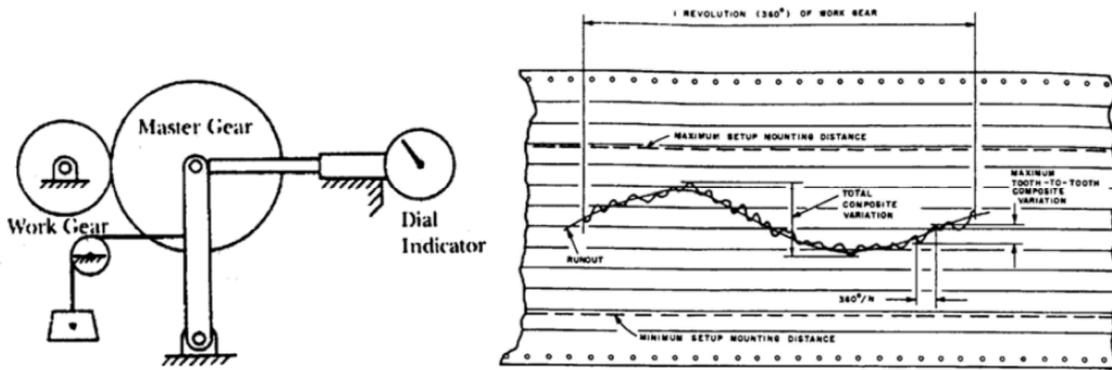


Figure I-12 : Erreur de transmission quasi statique sans charge d'après Drago [37]

c) Erreur de transmission quasi-statique sous charge

Par rapport à l'erreur cinématique, l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, notée TE_s , ajoute l'influence des déflexions du couple de dents lorsque l'engrenage transmet une charge à très faible vitesse de rotation et les déformations des éléments extérieurs (arbres, paliers, roulements,...). Gregory et al [34, 35] ont, les premiers, mesuré la TE_s sur un banc d'essai d'engrenages droits (Figure I-13 et Figure I-14). Les auteurs ont également postulé que l'erreur de transmission quasi-statique sous charge était représentative des excitations d'engrènement et que des corrections de forme de denture appropriées déterminées à partir des variations d'erreurs de transmission permettaient de réduire significativement le niveau vibratoire d'engrenages au voisinage d'une charge spécifique (Design Load). Ces résultats ont, par la suite, été confirmé par de nombreux travaux, Lin et al [38, 39], Munro [36], etc.

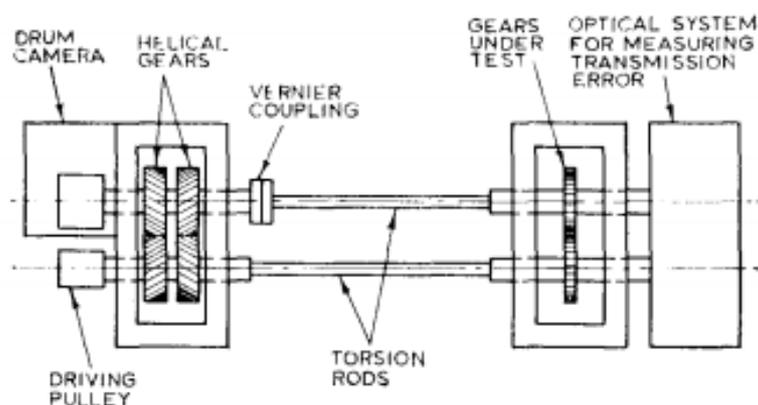


Figure I-13 : Modèle du train d'engrenages de Gregory et al [34]

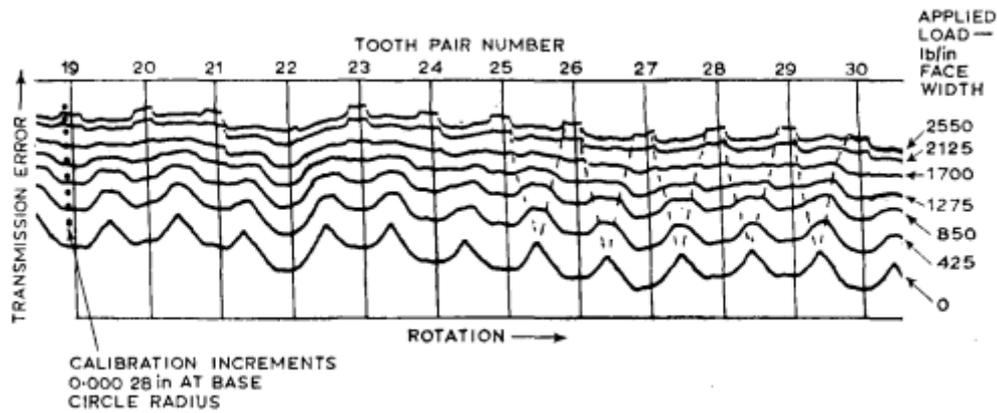


Figure I-14 : Erreurs de transmission quasi-statiques expérimentales pour différentes charges de Gregory et al [34]

d) Erreur de transmission dynamique

Par rapport à la *TEs*, l'erreur de transmission dynamique reflète le comportement vibratoire et acoustique d'engrenages en fonctionnement sous charge. Ce paramètre a été mesuré par [40] grâce à un système optique ingénieux qui a permis aux auteurs de mettre en évidence des comportements non-linéaires caractérisés par des pertes de contact instantanées entre dentures suivies de chocs en retour (Figure I-15). Ce type de comportement se rencontre principalement pour des dentures droites et a été confirmé expérimentalement par [41, 42, 43].

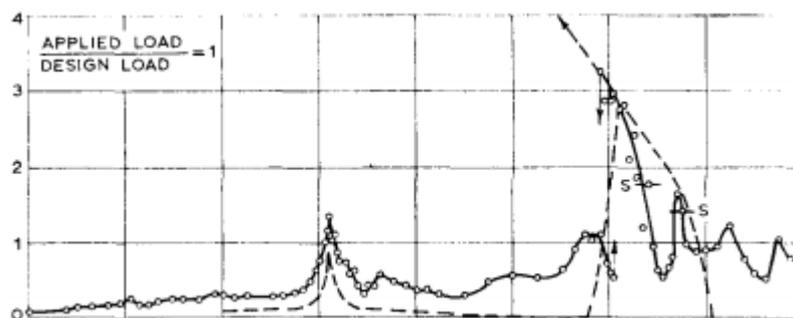


Figure I-15 : Courbes de réponse dynamiques expérimentales de Gregory et al [34]

La notion d'erreur de transmission est à la base de la majorité des modèles de comportement dynamique d'engrenages dans lesquels elle est introduite de manière plus ou moins contrôlée comme terme forcé dans les équations du mouvement. Une approche alternative originale différente a été proposée par Vexel et Saada [25, 24, 26] et Vexel et Maatar [44, 45], où les termes d'excitation sont directement déduits des conditions de contact

instantanées entre dentures. Dans ces conditions, l'erreur de transmission devient un résultat de la simulation dynamique et non plus une donnée a priori.

e) *Facteur dynamique ou Coefficient dynamique*

Ce paramètre est représentatif du comportement dynamique à la denture et s'exprime comme le rapport entre la charge dynamique maximale et la charge statique ou quasi-statique à l'engrènement. Il peut être soit local (sur une paire de dents), soit global (au niveau de l'engrènement). Ce facteur peut s'exprimer, selon les auteurs, en termes de chargement ou de contrainte en pied de dent. Des formules empiriques approchées peuvent être trouvées pour un fonctionnement en dehors des vitesses critiques de dentures (équation I.8) qui dépendent essentiellement de la vitesse linéaire de défilement des dents dans le plan d'action [46, 47].

$$DF = \frac{\text{static load}}{\text{dynamic load}} = \sqrt{\frac{78}{78 + \sqrt{V}}} \quad (\text{I.8})$$

Où V est la vitesse linéaire de défilement (ft/mn)

Houser et Seireg [48] ont amélioré ces formules en introduisant les contributions d'écarts de géométrie et les effets des variations temporelles de raideur d'engrènement, d'inertie et de masse pour des engrenages à dentures droites et hélicoïdales.

Le facteur dynamique est également obtenu par simulations numériques et/ou analytiques. Pour les engrenages droits en particulier, les courbes de réponse sont caractérisées par des sauts d'amplitude propres aux systèmes fortement non-linéaires causés par des pertes de contact momentanées (Figure I-16). Kubo [41], Kahraman, et al [42, 49], Velex et Maatar [44], Kahraman et Singh [49]..., ont montré que les écarts de forme et l'amplitude de la charge transmise influent sur le chargement à la denture.

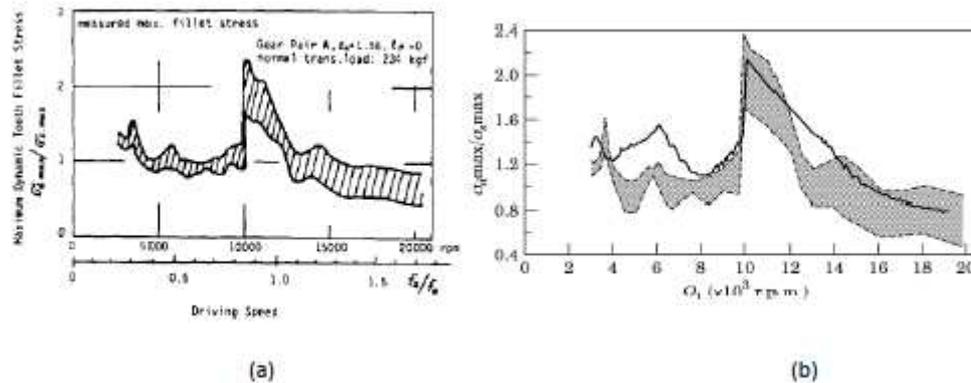


Figure I-16 : a) Courbe de réponse dynamique d'après Kubo [41] b) comparaison entre le résultat de Kubo et celui de Vexel et Maatar [44]

I.2. Sources d'excitation à l'engrènement

Pour un système d'engrenages, les sources d'excitations sont généralement classées en sources d'excitation internes et sources d'excitation externes. La première catégorie comprend les sollicitations associées aux conditions de contact instantanées entre les dentures incluant les excitations paramétriques associées aux fluctuations de raideur d'engrènement, les défauts géométriques des engrenages (erreurs de profil et d'hélice, erreurs de pas, faux rond, etc.) et les éventuelles modifications de forme (corrections de profil et d'hélice entre autres), [50, 51, 52, 53, 54]. Les excitations externes regroupent les défauts de balourds, d'excentricités, les fluctuations de charge et de vitesses. [7, 55, 56].

I.2.1. Sources d'excitation internes

I.2.1.1. Les écarts de forme et les erreurs de montage

Les écarts de formes et les erreurs de montages dans les engrenages proviennent essentiellement des processus de fabrication et de montage. Ils représentent une source d'excitation interne importante qui contrôle, pour une large part, le comportement vibratoire d'engrenages [57, 45, 24, 58].

Les écarts de forme sont généralement dus à des défauts de taillage et/ou de rectification. Ils se divisent en trois types : les erreurs de profil, les erreurs d'hélice et les erreurs de division. Les erreurs de profil et d'hélice sont définies comme l'écart non volontaire entre le profil réel et le profil idéal dans le plan d'action. Dans le cas de modifications de forme volontaires (généralement enlèvement de matière en sommet et/ou pied de dent et selon la largeur de la dent), on parlera de corrections de profil et longitudinales (Figure I-17). Ces modifications sont généralement appliquées pour a) compenser les déflexions pouvant conduire à des engagements prématurés entre profils non conjugués, b) améliorer la répartition de charge et c) réduire les excitations d'engrènement.

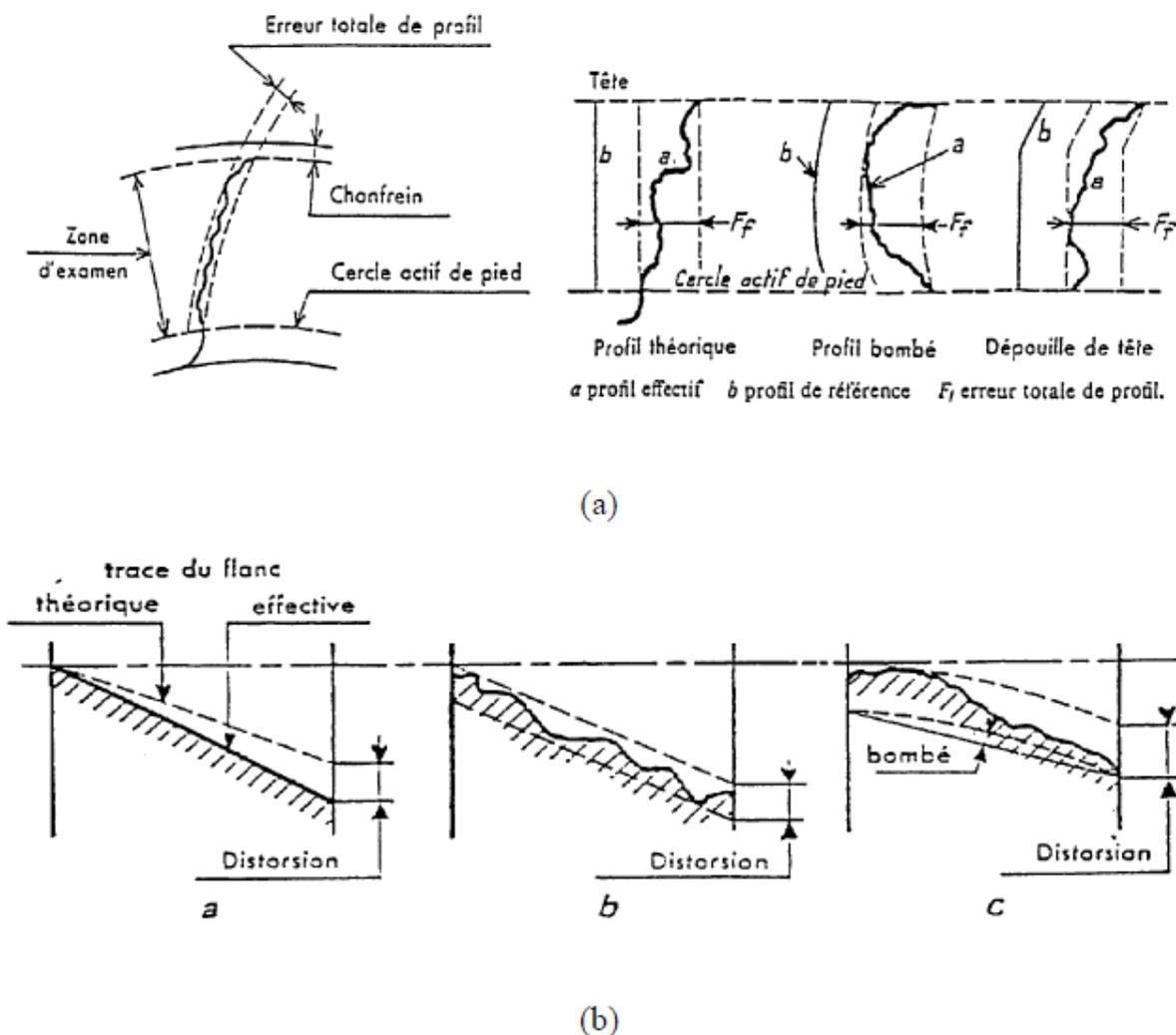


Figure I-17 : (a) Erreurs de profil et (b) erreurs d'hélice d'après Henriot [59]

Les erreurs de division ou erreurs individuelles de pas (Figure I-18) sont définies comme l'écart entre la valeur réelle du pas considéré et sa valeur théorique. Le cumul des erreurs de

pas sur un pignon avec un nombre de dents z est la somme algébrique des z erreurs individuelles de pas ou bien l'écart entre la longueur d'arc de cercle réel et théorique compris entre les z pas.

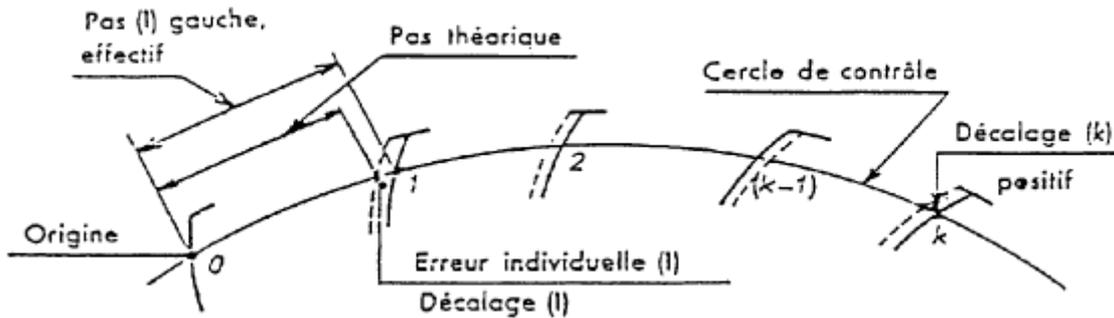


Figure I-18 : Erreur de division d'après Henriot [59]

Les erreurs de montage sont dues à l'assemblage imparfait des éléments d'engrenages, arbres et paliers et comprennent essentiellement:

- Les défauts d'alignement liés à une déviation ou inclinaison des axes de rotation des engrenages (Figure I-19). On définit un angle d'inclinaison θ_i et un angle de déviation θ_d qui correspondent à l'écart angulaire entre l'axe réel de l'arbre et l'axe théorique obtenu, respectivement, dans le plan contenant les axes de rotation des deux engrenages et dans le plan perpendiculaire à ce dernier et contenant l'un des axes de rotation.

Les défauts d'excentricité qui se produisent quand l'axe de rotation n'est pas confondu avec l'axe de révolution des mobiles.

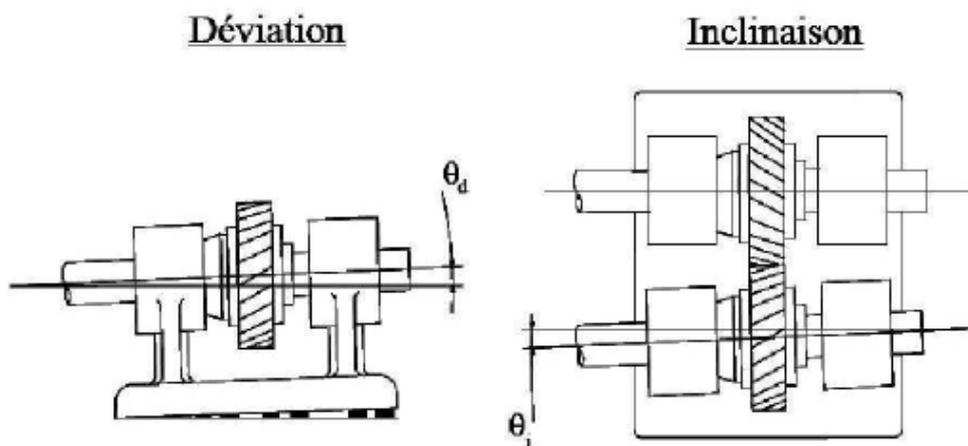


Figure I-19 : Définition des angles d'inclinaison et de déviation [60]

1.2.1.2. La raideur d'engrènement

La raideur d'engrènement caractérise la déformation entre dentures conjuguées sous chargement et elle est généralement dépendante du temps et périodique. De ce fait, elle est considérée comme une source d'excitation interne. En plus de vitesses critiques, les équations du mouvement (I-9) peuvent présenter des zones d'instabilités paramétriques dans lesquelles les amplitudes des mouvements transitoires croissent avec le temps.

$$M \cdot \ddot{X} + C(t) \cdot \dot{X} + K(t) \cdot X = F(t) \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas spécifique d'engrenages, ces vitesses critiques et instabilités sont au voisinage des fréquences d'engrènement telles que :

$$\omega_m = \frac{2 \cdot \omega_0}{n}, n = 1, 2, \dots \quad (\text{I.10})$$

Où ω_0 est la pulsation propre du système avec raideur moyenne et ω_m est la pulsation d'engrènement

Benton et Seireg [61] ont mis en évidence l'effet bénéfique de l'amortissement qui minimise les zones d'instabilité et ont analysé l'influence de la forme de la variation de raideur.

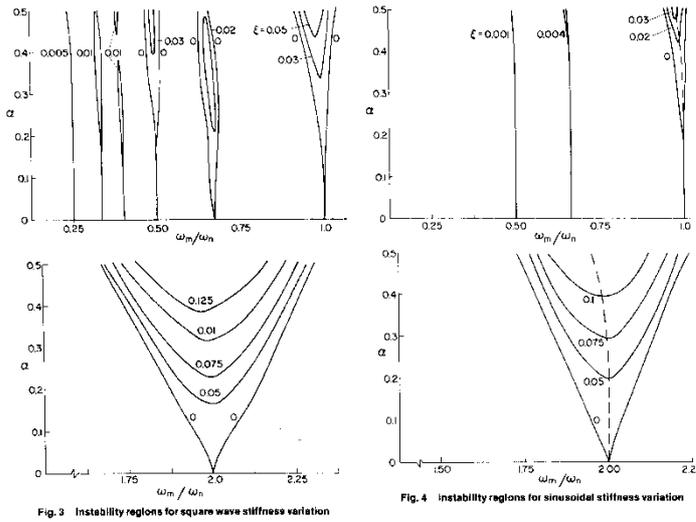


Fig. 3 Instability regions for square wave stiffness variation

Fig. 4 instability regions for sinusoidal stiffness variation

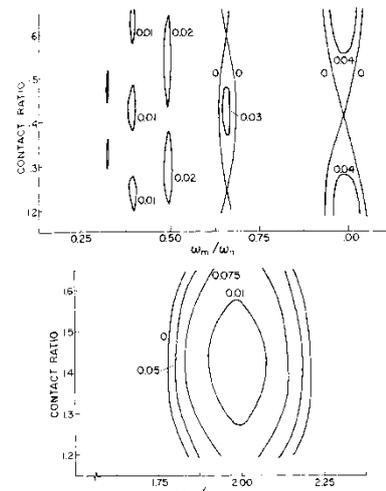


Fig. 5 Effect of contact ratio on instability regions for rectangular wave stiffness variations

Figure I-20 : Évolutions des zones d'instabilités paramétriques selon Benton et Seireg [61]

I.2.2. Sources d'excitation externes

Les moteurs à combustion et les générateurs électriques sont souvent utilisés dans les chaînes de transmission de puissance et leurs couples moteurs sont souvent variables. Ces fluctuations de couple peuvent perturber le comportement dynamique du réducteur en fonctionnement. Vernay et al [62, 63] ont ainsi traité de l'influence du transitoire de démarrage d'un réacteur d'avion sur le comportement dynamique en torsion. Dans le domaine spécifique de la dynamique des engrenages, peu d'auteurs ont analysé les conséquences d'augmentation et diminution de vitesses de rotation. Hugues et al [64] ont mesuré la différence de position angulaire entre l'entrée et la sortie sur une chaîne cinématique entraînée par un moteur électrique en phase de démarrage. Sika [65] a fait une étude paramétrique d'un réducteur soumis à des variations de vitesse de rotation (acyclisme) engendrées par des fluctuations de couple moteur. Dans le domaine aéronautique, les vitesses de rotation et/ou les couples moteurs/résistants évoluent au cours du fonctionnement créant des phases transitoires avec passages de vitesses critiques.

Les engrenages sont supportés par des arbres qui, à leur tour, sont liés au carter par l'intermédiaire de paliers. Ces éléments jouent un rôle prépondérant dans le transfert des vibrations mais ce n'est qu'à partir de la fin des années 80 que les chercheurs ont mis en

évidence le couplage entre le comportement vibratoire des lignes d'arbres et des paliers sur la dynamique des engrenages, [27, 58, 66] (Figure I-21).

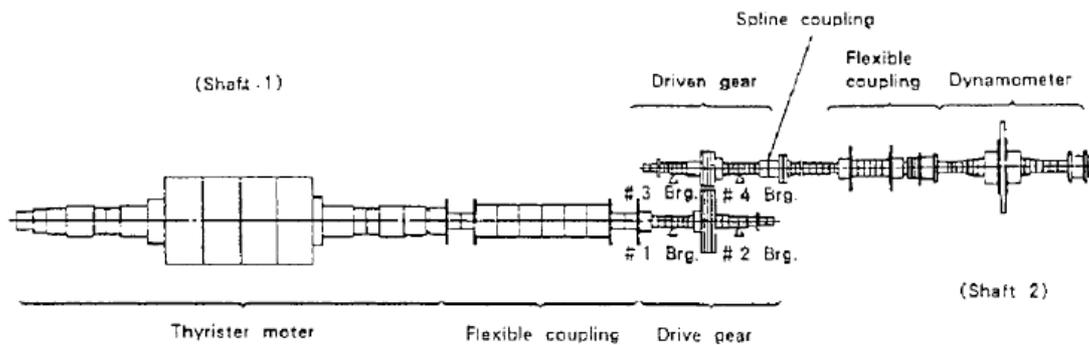


Figure I-21 : Modèle éléments finis d'un réducteur et lignes d'arbres de Furokawa [66]

Les caractéristiques dynamiques des paliers sont fréquemment introduites après linéarisation du comportement des paliers au voisinage du chargement statique à travers des coefficients dynamiques de raideurs (et parfois d'amortissement) [15, 27, 44] , [55]. Dans le cas de paliers hydrodynamiques, Baguet et Jacquenot [67] ont développé un modèle de palier de longueur finie basé sur les équations de la lubrification résolues par une méthode multigrille. Dans le cas d'engrenages à dentures larges, Fargère et Vexel [68] ont étendu ces approches en couplant les aspects thermiques et les conditions d'alimentation en lubrifiant des paliers (Figure I-22).

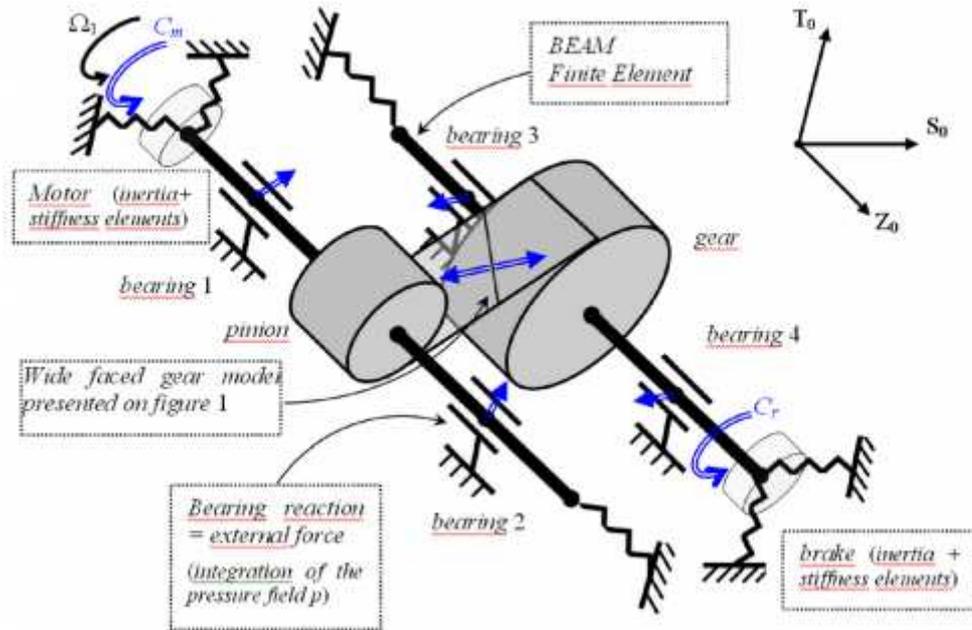


Figure I-22 : Modèle de réducteur avec quatre accouplements de Fargère et Velex [68]

I.3. Optimisation des corrections de dentures

I.3.1. Corrections de dentures : définitions et types

Un couple d'engrenages assure théoriquement une transmission de mouvement sans choc mais la présence de défauts de toutes origines ainsi que la déformabilité des composants peuvent induire des contacts entre profils non conjugués avec impacts et/ou interférences (Figure I-23a) évidemment néfastes en termes d'usure, de durée de vie et bruit (Figure I-23b), [7, 8, 55, 69]. Afin d'éviter ces problèmes majeurs, des modifications de forme volontaires des flancs de denture sont souvent adoptées comme solution technique afin de: a) retarder les prises de charge de sorte qu'elles s'effectuent effectivement sur le plan d'action théorique et, b) réduire les fluctuations d'erreur de transmission et, par là, les niveaux d'excitations associés à l'engrènement.

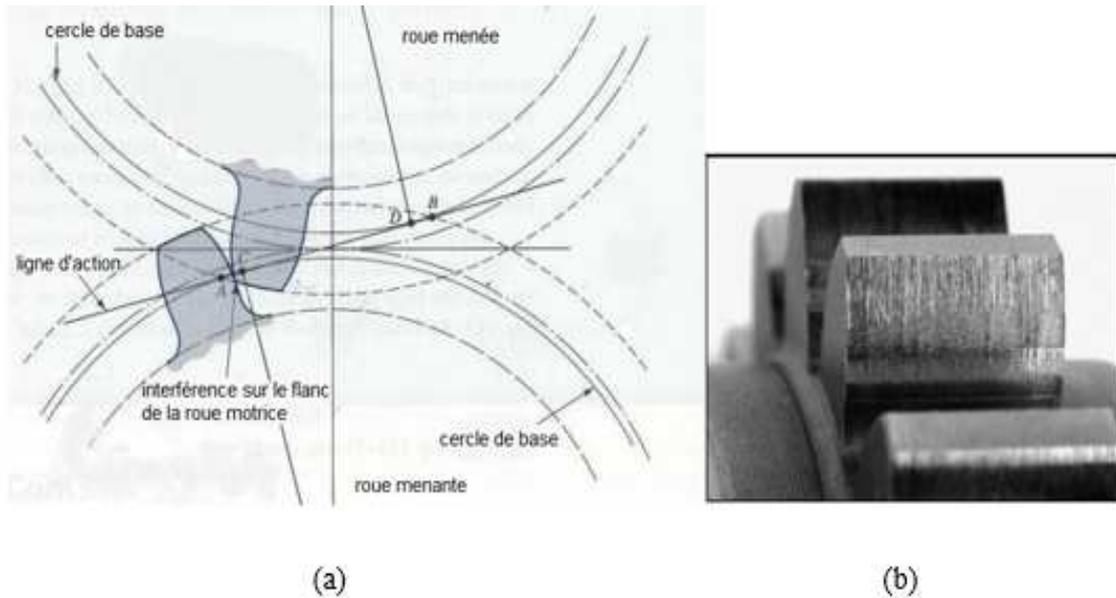


Figure I-23 : Illustration du (a) phénomène d'interférence [70] et (b) usures de dentures droites [71]

On distingue généralement deux types de corrections de forme de denture : a) selon le profil et b) selon la largeur ou l'hélice (Figure I-24).

- Les corrections de profil sont couramment utilisées et correspondent à un enlèvement de matière de quelques microns ou dizaines de microns au niveau de la tête ou au pied de la dent. Les corrections de profil peuvent être définies par une profondeur de correction en sommet de dent (E) et une longueur de correction (L_c) mesuré le long du profil ou selon la ligne d'action. La profondeur de correction est reliée à la déflexion maximale moyenne de la denture alors que la longueur de correction dépend de la longueur du pas de base mesurée dans le plan d'action.
- Les corrections d'hélice sont des corrections de forme introduites sur la surface de la denture de façon partielle ou intégrale. Elles peuvent être définies selon les coordonnées axiales ou directement selon les lignes de contact (corrections topologiques). Parmi les corrections longitudinales les plus utilisées, citons le bombé symétrique (caractérisé par son amplitude A_p) symétrique par rapport la demi-largeur de la dent et appliqué sur toute la surface de la denture.

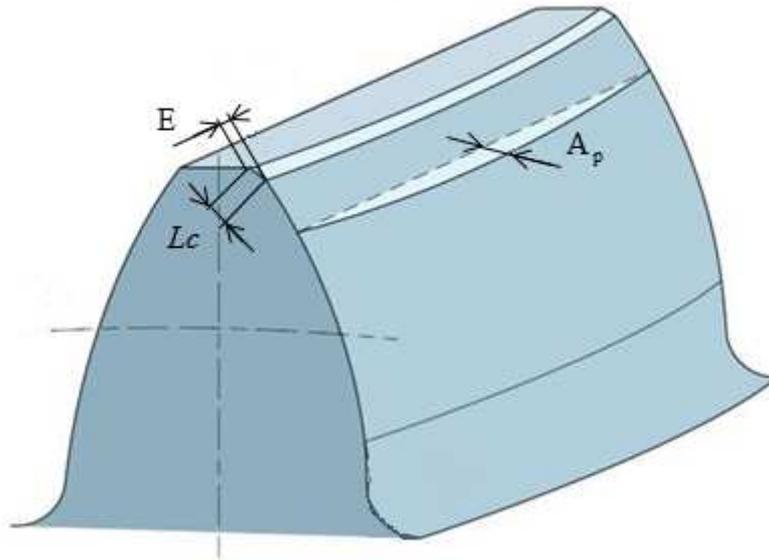


Figure I-24 : Types de corrections : Correction de profil et correction longitudinale (bombé A_p)

I.3.2. Minimisation des fluctuations de TEs

L'optimisation des corrections de denture est fréquemment conduite en cherchant à minimiser les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge. De nombreux travaux de recherches ont montré une influence décisive des corrections de forme de dentures sur ce paramètre. Récemment, Vex et al [1], Bruyère et al (Bruyère et al, 2015) ont développé une approximation analytique de la fonction TEs pour des engrenages droits ou hélicoïdaux de faibles largeurs et en ont déduit les paramètres de correction de profil linéaires symétriques (E , Lc) optimum vis-à-vis de l'erreur de transmission. Les comparaisons avec les résultats numériques utilisant plusieurs modèles de calcul de la raideur d'engrènement sont satisfaisantes (Figure I-25).

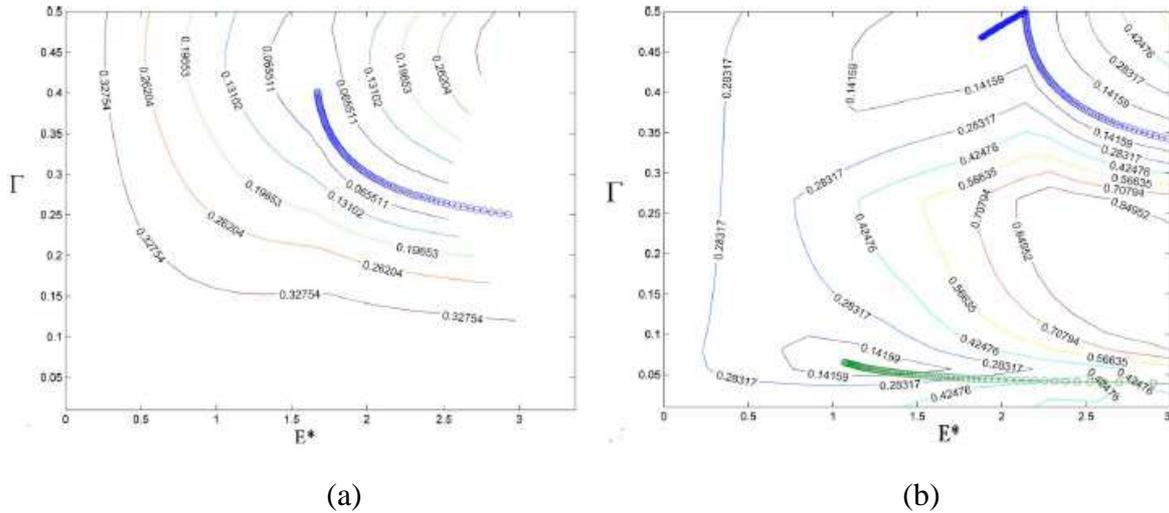


Figure I-25 : Solution analytique de l'ensemble des corrections de profil optimales minimisant la TEs pour a) $\varepsilon_\alpha = 1.67$ et b) $\varepsilon_\alpha = 2.14$ selon Vexel et al

[1]

Ghribi et al [72, 73] ont étendu l'optimisation au cas de corrections de profil non symétriques couplées à des corrections longitudinales paraboliques impliquant davantage de paramètres (Figure I-26).

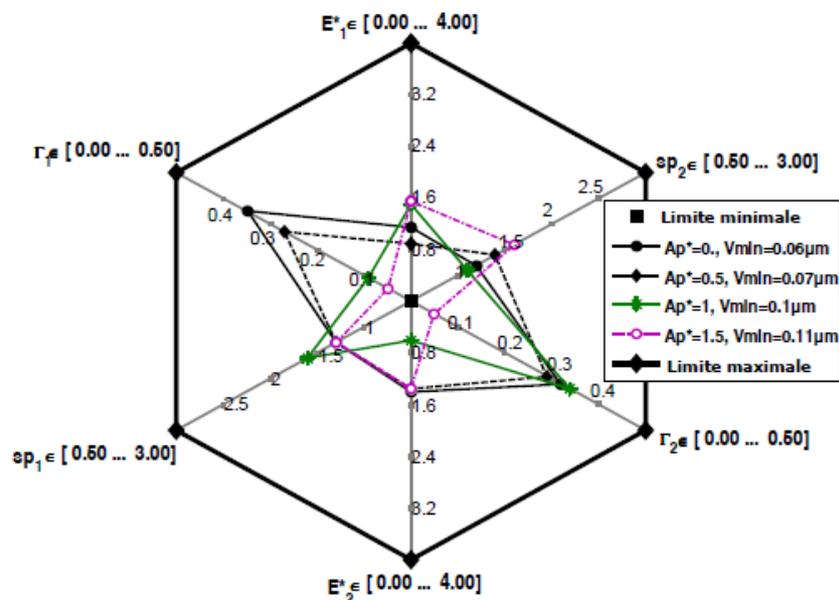


Figure I-26 : Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé selon Gribi et al [73]

Après optimisation des erreurs de transmission sur une cascade de trois engrenements à dentures hélicoïdales, Carbonelli et al [7] ont obtenu un gain de 1dB sur le niveau de bruit.

L'optimisation était basée sur la méthode des essais particulières qui est une méthode méta-heuristique particulièrement adaptée aux optimisations complexes à plusieurs paramètres. Les Figure I-26 et Figure I-27 représentent des diagrammes multi-variables de type « radar ». Chaque axe du diagramme représente un paramètre variant dans une plage déterminée et chaque diagramme illustre l'étendue des zones optimales pour les différentes combinaisons des paramètres de corrections de forme.

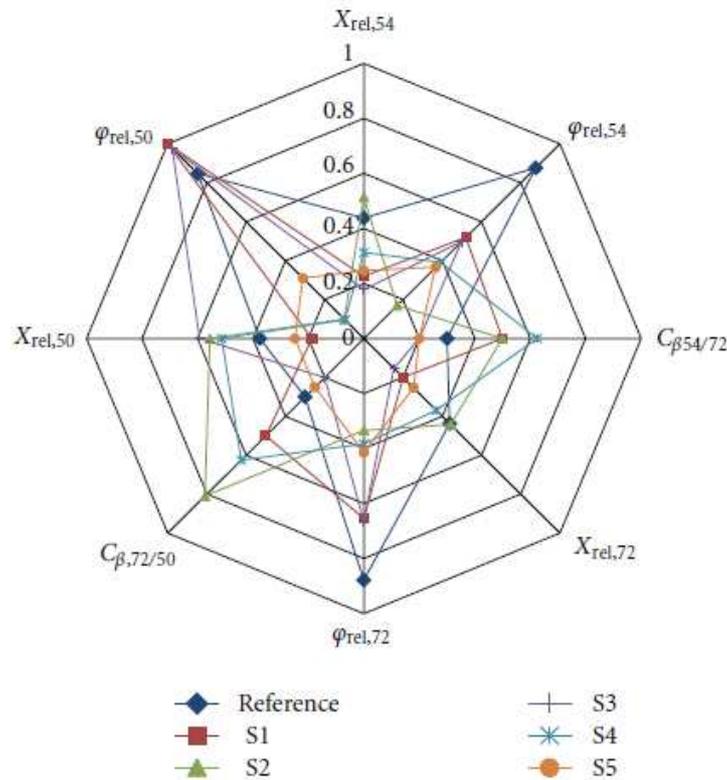


Figure I-27 : Solution des paramètres d'optimisation [7]

I.3.3. Quelques méthodes d'optimisation

I.3.3.1. Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques (AG) sont des algorithmes d'optimisation stochastiques fondés sur des mécanismes de sélection naturelle ou issus de la génétique. Leur but est d'obtenir une solution approchée d'un problème d'optimisation dans un temps raisonnable lorsqu'il n'existe pas de solution analytique. Cette technique de résolution initialement introduite par

Holland [74] puis popularisée par Goldberg [75] a été appliquée à l'optimisation de trains d'engrènement par [76, 77, 78, 79]. Leur principe de fonctionnement est le suivant : à partir de solutions potentielles initiales (individus) arbitrairement choisies, des opérateurs évolutionnaires permettent d'améliorer les performances relatives (fitness) des individus. Les facteurs d'optimisation (chromosomes) étant définis, les performances des individus sont évaluées. À partir d'une sélection d'individus les plus performants, on crée une nouvelle population de solutions potentielles en appliquant essentiellement des croisements et des mutations. Le cycle est répété (Figure I-28) jusqu'à convergence vers l'optimum.

La réussite des algorithmes génétiques est liée à des paramètres fixés à l'avance qui comprennent entre autres :

- La taille de la population N . Si N est très petit, l'algorithme génétique peut converger rapidement vers une mauvaise solution, et si N est trop grand, le temps de calcul de l'AG peut être très important. L'importance de la taille de la population est liée à la notion de *parallélisme implicite* introduite par Holland [74]. Cette propriété fondamentale implique qu'un AG traite efficacement un nombre de directions de recherche proportionnel au cube du nombre d'individus.
- La probabilité de croisement pc gère le taux de combinaison d'une paire d'individus. Son choix est heuristique (tout comme pour pm défini ci-dessous). Un taux d'application trop élevé entraîne un risque de changements trop importants sur la population. Par contre, un taux trop bas conduit à une solution stagnante. Les valeurs de pc conseillées sont généralement comprises entre 0.5 et 0.9.
- La probabilité de mutation pm . Le taux de mutation doit être faible sinon le processus devient une recherche aléatoire totale et risque de conduire à une solution sous-optimale.

Quatre points principaux caractérisent les algorithmes génétiques selon Lerman et Ngouenet [80] :

1. Les algorithmes génétiques utilisent un codage des paramètres, et non les paramètres eux-mêmes.
2. Les algorithmes génétiques travaillent sur une population de points, au lieu d'un point unique.

3. Les algorithmes génétiques n'utilisent que les valeurs de la fonction étudiée, pas sa dérivée, ou une autre connaissance auxiliaire.
4. Les algorithmes génétiques utilisent des règles de transition probabilistes, et non déterministes.

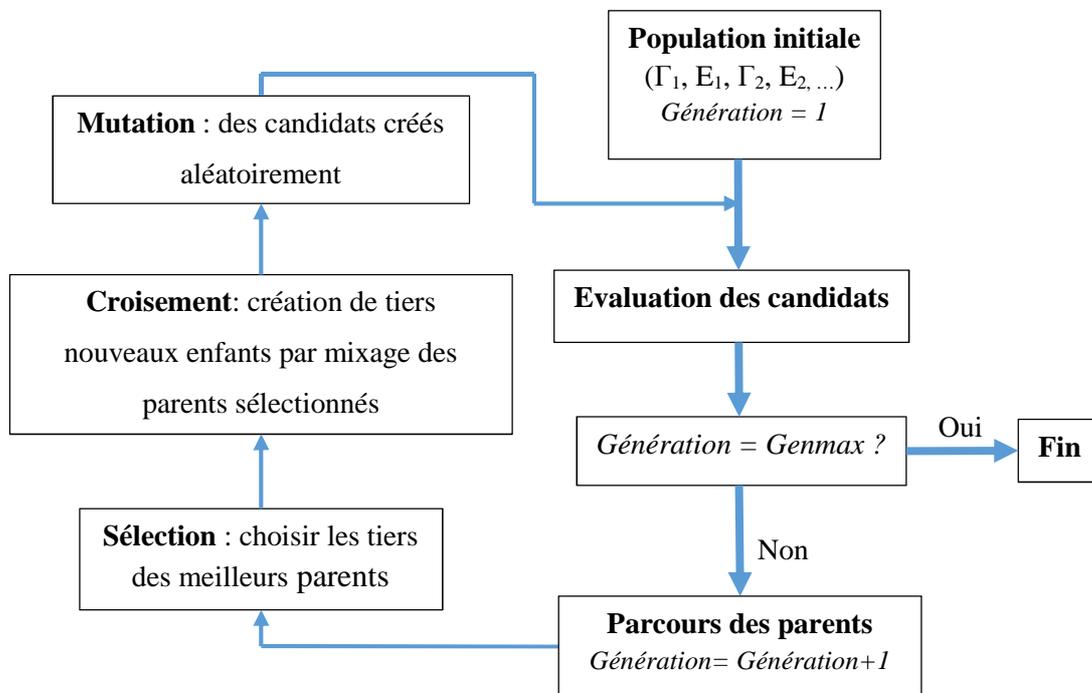


Figure I-28 : Diagramme de résolution de l'AG

I.3.3.2. Les essaims particuliers (Particle Swarm Optimization)

Les essaims de particules sont essentiellement utilisés pour les problèmes d'optimisation non-linéaires [81] [82, 83, 84, 85, 86] et ont été utilisés dans le cadre de transmissions par engrenages par Carbonelli et al., Savsani et al. [7, 87]. C'est une méthode d'optimisation stochastique, inspirée de comportements sociaux, initialement développée par Eberhart et Kennedy [83, 82]. Les essaims particuliers partagent quelques similitudes avec les méthodes évolutives comme les Algorithmes Génétiques. Le système est initié avec une population de solutions potentielles aléatoires et homogènes (particules) qui se déplacent dans tout l'espace de recherche. Cependant, contrairement aux AGs, les essaims particuliers ne subissent aucunes opérations évolutives telles que le croisement et la mutation. Chaque particule conserve les coordonnées de la meilleure solution visitée dans l'espace de recherche

et communique avec les autres particules constituant son entourage. Sur la base de ces informations, la particule change de position et de vitesse afin de chercher la solution optimale selon un critère (fitness) préalablement défini. Chaque particule est, de plus, caractérisée par sa tendance à, d'une part, retourner vers la meilleure solution visitée et d'autre part, suivre son voisinage. De ce fait, l'ensemble de particule converge vers la solution optimale globale. Les paramètres des essais particuliers sont définis pour chaque particule à chaque itération par une nouvelle position $p_i(t)$ et une nouvelle vitesse $v_i(t)$ calculée en fonction de sa meilleure position p_{ind} et la meilleure position globale p_{glob} de l'ensemble de particules Figure I-29.

$$\begin{cases} v_i(t) = \partial_0 v_i(t-1) + alea(0,1)\partial_1[p_{ind} - p_i(t-1)] + alea(0,1)\partial_2[p_{glob} - p_i(t-1)] \\ p_i(t) = p_i(t-1) + v_i(t-1) \end{cases} \quad (I.11)$$

Des indications quant aux valeurs des paramètres $\partial_0, \partial_1, \partial_2$ sont fournies par Clerc et Trelea [88, 89]

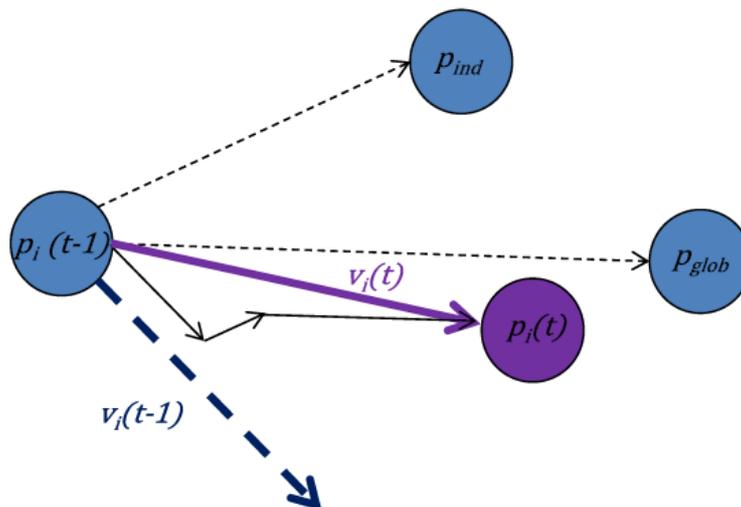


Figure I-29 : Schéma d'une itération pour une particule p_i [7]

I.4. Train d'engrètements multi-étages

I.4.1. Quelques modèles d'engrènement multi-étages de la littérature

Dans la littérature, la majorité des études concernant les trains d'engrètements multi-étages ont été réalisées sur des modèles à deux étages d'engrènement. Dans les années 80, les recherches de Benton et Seireg [61], Iida et al [90, 91, 92] et Umezawa et al [93] se sont concentrées essentiellement sur les systèmes multi-engrenages à dentures droites, montés sur trois axes parallèles comme illustré dans la Figure I-30a, à l'exception des travaux de Vex et Saada portant sur les dentures hélicoïdales. En incluant le phénomène de backlash, les fluctuations paramétriques de raideur d'engrènement ainsi que des excitations périodiques externes, Al-Shyyab et Kahraman [94, 95, 96] ont conduit des analyses dynamiques sur un modèle non linéaire à deux étages d'engrènement décalés à dentures droites en combinant une méthode HBM (multi-term Harmonic Balance Method) avec des Transformées de Fourier Discrètes.

Linke et Borner [97] sont parmi les premiers avoir abordé le problème du comportement dynamique de deux étages d'engrenages droits en cascades (Figure I-30b). Les auteurs ont, en particulier, étudié le cas où l'entrée de puissance se fait sur la roue intermédiaire. Kahraman [55] a analysé une configuration similaire en étendant le modèle en 3D et aux dentures hélicoïdales. Deux cas de chargements différents ont été considérés : a) la roue intermédiaire est motrice et b) le système est entraîné par l'une des roues extrêmes. L'étude conclut que a) les modes couplés axial-transversal et torsionnel sont sensibles à l'angle d'hélice et aux conditions de chargement et b) le nombre de dents de la roue intermédiaire et la position relative de la roue extrême influent sur les caractéristiques de la réponse dynamique (déplacements aux niveaux des paliers et efforts dynamiques à la denture).

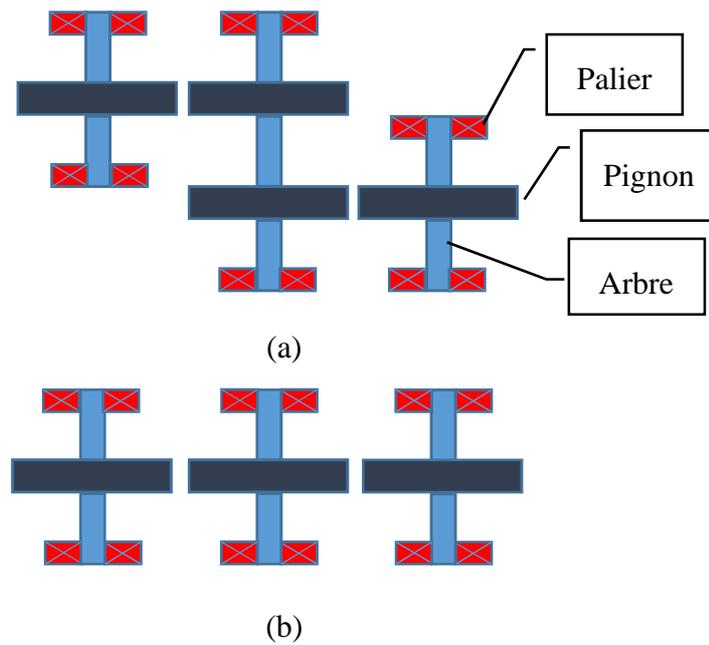


Figure I-30 : Modèles de deux étages d'engrènement

Raclot et al [54] ont utilisé une nouvelle méthode de résolution, de type spectrale, et l'ont appliqué sur deux modèles d'engrènement à deux étages décalés puis en cascades avec écarts géométriques et erreurs de montages. Plus récemment, les études se sont orientées vers l'optimisation multi-objective de trains d'engrènement multi-étages. Buiga et Tudose [98] ont cherché à minimiser la masse d'un réducteur de vitesse, composé de deux étages d'engrenages coaxiaux et hélicoïdaux (Figure I-31), en s'appuyant sur la méthode des algorithmes génétiques. Dans un contexte similaire, Marjanovic et al [99] ont élaboré un logiciel appelé GTO (Gear Train Optimisation) afin d'optimiser des trains d'engrenages cylindriques de point de vue des matériaux, des rapports de conduite et positions des axes des arbres.

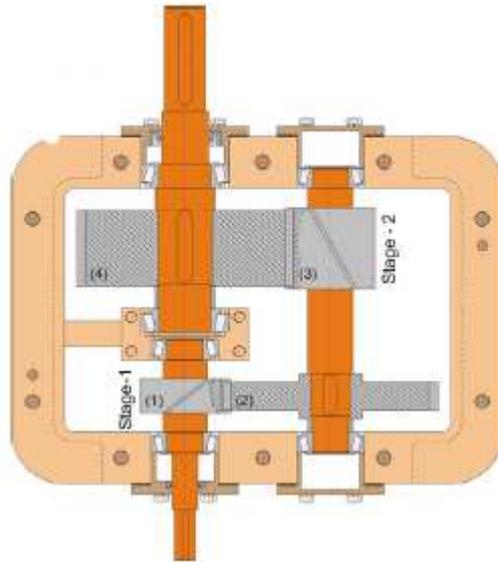


Figure I-31 : Réducteur à deux étages coaxiaux et hélicoïdaux de Buiga et Tudose [98]

Carbonelli et al [6, 7, 8] ont introduit des corrections de dentures optimisées par la méthode des essais particulières sur un modèle non linéaire simulant deux cascades de pignons à dentures hélicoïdales (

Figure I-32) afin de minimiser le bruit de sirènement. L'optimisation a été faite sur une large plage de couples de fonctionnement en présence d'écarts géométriques involontaires afin de trouver une solution robuste.

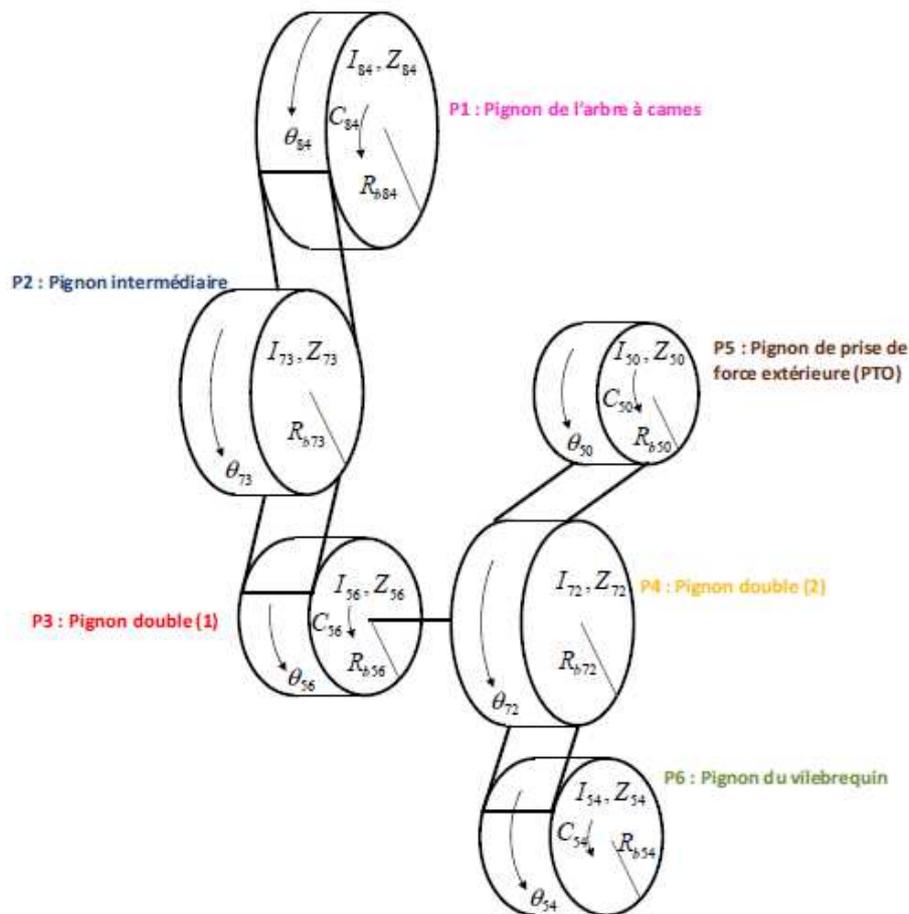


Figure I-32 : Modèles de cascades de pignons de Carbonelli [6]

I.4.2. Optimisation des trains multi-engrènements

Le concept d'optimisation des systèmes d'engrènement multi-étage a été introduit dans les années 80 mais avec des objectifs de conception et de dimensionnement macroscopiques. Prayoonrat et Walton [100] ont développé un algorithme grâce auquel le concepteur peut optimiser selon des critères d'encombrement (distance minimale des centres, volume des engrenages minimum) mais aussi des rapports de conduite maximaux. Les solutions optimales sont trouvées après itérations par des méthodes heuristiques. La Figure I-33 illustre un exemple de solution pour un système à 3 étages de réduction. Dans le même esprit, Savsani et al [101] ont cherché à minimiser le poids des systèmes de transmission de puissance par engrenages

pour des applications automobiles et aéronautiques en s'appuyant sur deux algorithmes métaheuristiques (Particle Swarm Optimization et Simulated Annealing).

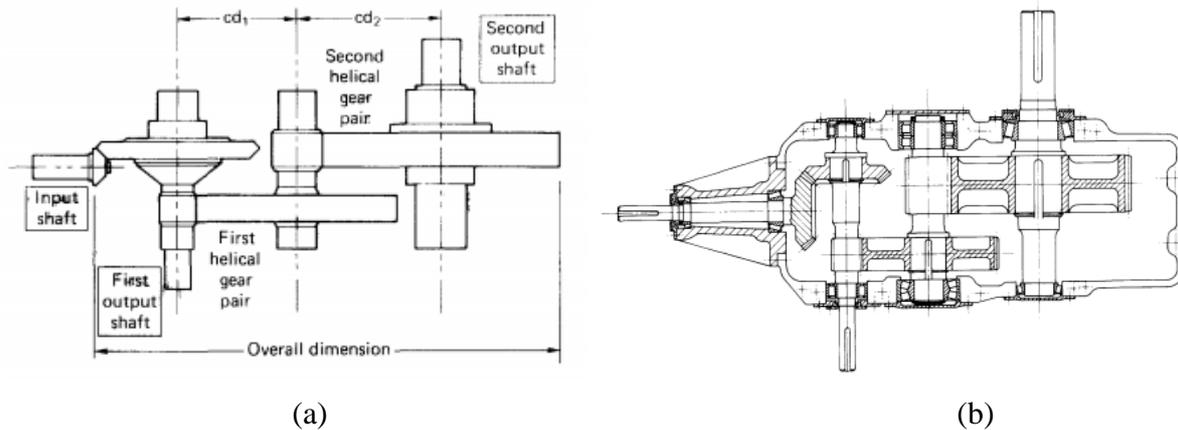


Figure I-33 : Réducteur à 3 étages d'engrènement a) avant optimisation et b) après optimisation du volume global [100]

Marjanivic et al [99] ont cherché à optimiser un train d'engrenage à dentures droites en terms de matériaux, de rapport de conduite optimal et de positions des axes des arbres (Figure I-34). Selon les auteurs, le volume du train d'engrènement a été réduit de 22.5% après optimisation.

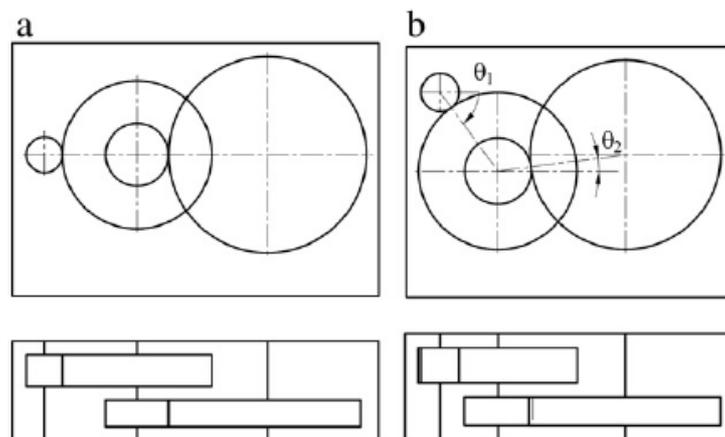


Figure I-34: Concept d'un train d'engrènement à denture droite, a) avant et b) après optimisation [99]

Finalement, Guyonneau et al [102] ont proposé une approche basée sur la méthode de Monte-Carlo permettant d'optimiser la géométrie des flancs de denture par minimisation des contraintes et déduire l'équation paramétrique du profil de denture optimal. Les simulations sont conduites pour les quatre positions d'engrènement notées A, B, C et D sur la Figure I-35. Le résultat d'optimisation en termes de contraintes équivalente de von Mises en fonction de la position angulaire du pignon θ sont portés sur la Figure I-35 pour un profil initial en développante de cercle (non optimisé) et un profil optimisé.

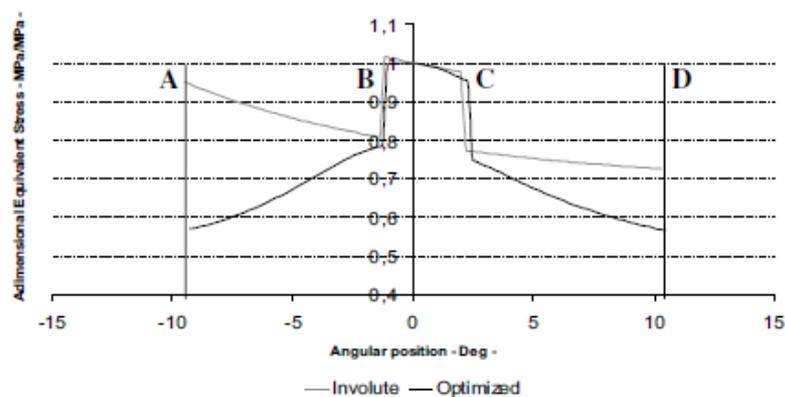


Figure I-35: Contrainte équivalente de contact pour un profil de denture initial et optimisé [102]

I.5. Conclusion

Au terme de cette synthèse bibliographique, il apparaît que la très large majorité des analyses dynamiques et vibratoires sur les engrenages portent sur des systèmes à un seul engrènement et que les travaux relatifs aux systèmes à plusieurs étages de réduction (ou multiplication) sont très largement minoritaires. Les sources d'excitation recensées comprennent les fluctuations de raideurs d'engrènement particulièrement pour des engrenages à dentures droites et les variations d'erreurs de transmission quasi-statiques sous charge. Si le concept d'erreur de transmission en tant que source d'excitation semble bien établi dans le cas d'un couple pignon-roue, il perd de sa clarté pour des systèmes à plusieurs engrènements. Les principales excitations externes recensées dans la littérature sont dues aux fluctuations temporelles des vitesses de rotation et/ou des couples moteurs mais peu de résultats relatifs aux trains multi-étages ont été trouvés. Ces systèmes présentent des caractéristiques particulières

comme la possibilité de plusieurs entrées et sorties de puissance (et par là, la question du partage de puissance entre les différents engrènements) mais aussi des combinaisons éventuellement complexes entre les erreurs cinématiques propres à chaque engrènement. La problématique de l'optimisation des corrections de forme dans les systèmes à plusieurs engrènements est également spécifique. De nombreux résultats sont disponibles pour des systèmes à un engrenage et il semble pertinent de s'interroger sur les possibilités de les extrapoler ou non à des trains multi-engrènements.

Chapitre II. Modélisation et éléments de validation

II.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principales étapes de modélisation d'un système d'engrènements multi-étages à dentures droites et hélicoïdales. L'étude dynamique et vibratoire de ce genre de système nécessite le passage d'un système physique à un modèle numérique assurant le couplage entre les différents éléments d'excitations extérieurs (moteur, équipements), le mécanisme de transmission de puissance (engrenages, arbres, accouplements) et la structure de support (paliers, carter). Ainsi, dans cette modélisation, on passe par plusieurs étapes importantes qui conditionnent le comportement dynamique du système d'engrènement. En premier lieu, on définit l'état de fonctionnement dans les conditions de corps rigides en présence de défauts de forme et d'écart géométriques qui perturbent le fonctionnement cinématique et dynamique. Ensuite, une étude détaillée de l'état déformé est présentée pour lequel on établit les fonctions raideurs d'engrènement variables dans le temps en intégrant les déphasages relatifs, les erreurs géométriques et défauts de forme. Les conditions de contact entre dentures sont ensuite abordées. Enfin, des éléments de validation basés sur des comparaisons des analyses issues de modèles de la littérature sont présentés.

II.2. Etat de référence

L'état de référence caractérise l'état cinématique et dynamique du système indéformable lorsque les dentures demeurent en contact au niveau de chaque étage d'engrènement au cours du temps. La présence de corrections de forme sur les surfaces actives des dentures ainsi que la présence d'écart de montage peuvent conduire à un état de référence différent de la configuration parfaitement homocinétique.

II.2.1. Modélisation des écarts géométriques

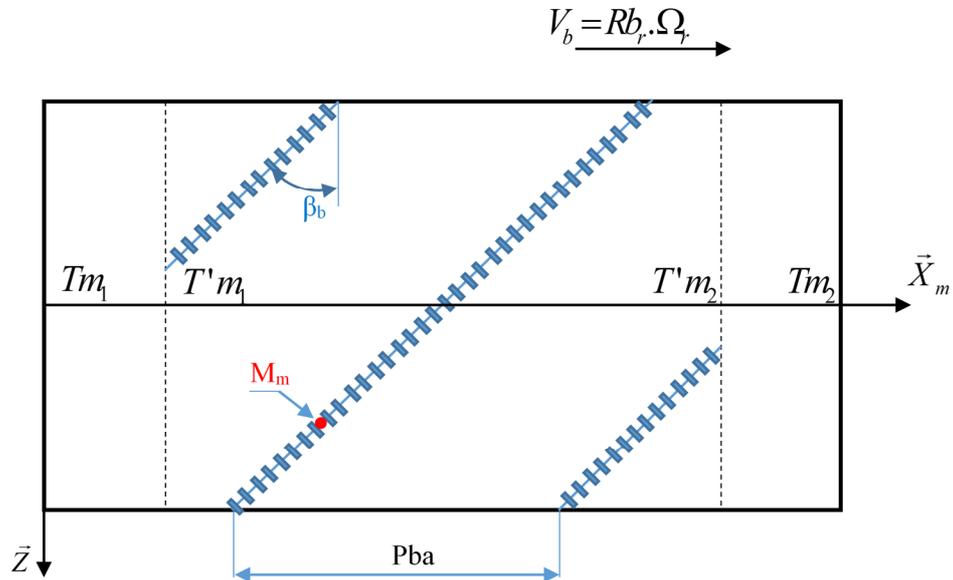


Figure II-1 : discrétisation des lignes de contact sur le plan d'action d'un étage d'engrènement m

La méthode de modélisation des écarts géométriques pour un simple étage [58, 27, 103] reste valable pour les trains multi-étages en la transposant à chaque engrènement. La simulation de l'engrènement repose sur une discrétisation des lignes de contact en segments élémentaires (cf. chapitre 1) telle que, sur chacun d'eux, les caractéristiques physiques (raideur, écart à la surface en développante, ...) demeurent constantes et s'appliquent au centre (point M_m) de la cellule (Figure II-1).

L'écart de forme associé à chaque cellule et à chaque pas de temps est défini par rapport à la surface théorique en développante de cercle. La valeur algébrique de cet écart en un point de contact M_m est prise suivant la normale extérieure de la surface théorique. Une valeur positive correspond à un excès de matière. L'écart de forme est supposé faible devant les dimensions caractéristiques des engrenages et les directions des normales extérieures aux flancs de dentures sont supposées inchangées. On note $e_{f,r}(M_m)$ et $e_{f,r+1}(M_m)$, les écarts normaux de forme selon les normales extérieures respectives des roues r et $r+1$.

Les défauts de montage, (défauts de position et d'orientation) sont définis pas un torseur de petits déplacements exprimé au centre de chaque roue (exprimés dans les repères locaux de chaque étage). Le déplacement résultant en chaque point de contact théorique est calculé et projeté sur la normale extérieure. La composante normale des écarts de montage de la roue « r » est noté $e_{d,r}(M_m)$.

Les défauts d'excentricité de chaque roue dentée engendrent des écarts normaux sur les dentures approximativement sinusoïdaux et indépendants de la position du point de contact. Ajmi [104] définit cet écart sur la roue « r » de la façon suivante :

$$e_{x,r}(M_m) = \cos \beta_b \kappa_r \sin(\Omega_r t + \alpha_{ar} + \lambda_r) \quad (\text{II.1})$$

Où κ_r est l'amplitude et λ_r correspond à la phase.

A tout instant et pour chaque point M_m des lignes de contact théoriques, la somme des différentes contributions des écarts normaux des roues r et $r+1$ sont notés :

$$\begin{cases} e_r(M_m) = e_{f,r}(M_m) + e_{d,r}(M_m) + e_{x,r}(M_m) \\ e_{r+1}(M_m) = e_{f,r+1}(M_m) + e_{d,r+1}(M_m) + e_{x,r+1}(M_m) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

La somme algébrique de tous les écarts normaux issus des écarts de forme, de montage et d'excentricité en un point de contact M_m forme l'écart normal total $e_{Tot,m}(M_m)$.

$$e_{Tot,m}(M_m) = e_r(M_m) + e_{r+1}(M_m) \quad (\text{II.3})$$

Le contact entre les surfaces des dentures non déformées a lieu au point M_m^* qui correspond à l'endroit où l'écart normal total est maximal.

Ainsi, en se référant à la Figure II-2, on définit l'écart relatif $\delta e_m(M_m)$ au point de contact M_m par la différence entre l'écart normal total $e_{Tot,m}(M_m)$ et l'écart normal maximal $e_{Tot,m}(M_m^*)$ tel que :

$$\delta e_m(M_m) = e_{Tot,m}(M_m) - e_{Tot,m}(M_m^*) \quad (\text{II.4})$$

On notera selon cette définition que $\delta e_m(M_m)$ est négatif ou nul. Il représente la distance normale entre les surfaces des dents au point considéré pour un fonctionnement sans déformations.

La géométrie étant fixée, l'écart normal maximal est une fonction qui dépend seulement de la position angulaire θ_r de la roue motrice r . Si la valeur de cet écart n'est pas constante, la cinématique et la dynamique du système indéformable sont perturbées.

II.2.2. Cinématique des corps rigides

Dans le cas d'un engrenage extérieur parfait (sans écarts), les vitesses de rotation d'entrée et de sortie sont déterminées par la relation II.5 traduisant le roulement sans glissement des plans d'action sur les cylindres de base :

$$\Omega_r(t) = -\frac{Rb_{r+1}}{Rb_r} \cdot \Omega_{r+1}(t) \quad (\text{II.5})$$

En présence d'écarts géométriques, la relation liant les vitesses des roues r et $r+1$, résulte de la relation de non pénétration normale au point de contact M_m^* de deux solides rigides [58] (Figure II-2) :

$$\vec{V}_r^{r+1}(M_m^*) \cdot \vec{n}_{r_m} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Tel que :

Considérant que M_m^* appartient à la roue r :

$$\vec{V}_r^{R_m}(M_m^*) \cdot \vec{n}_{r_m} = Rb_r \Omega_r \cos \beta_b + \dot{e}_r(M_m^*) \quad (\text{II.7})$$

Considérant que M_m^* appartient à la roue $r+1$:

$$\vec{V}_{r+1}^{R_m}(M_m^*) \cdot \vec{n}_{r+1 m} = Rb_{r+1} \Omega_{r+1} \cos \beta_b + \dot{e}_{r+1}(M_m^*)$$

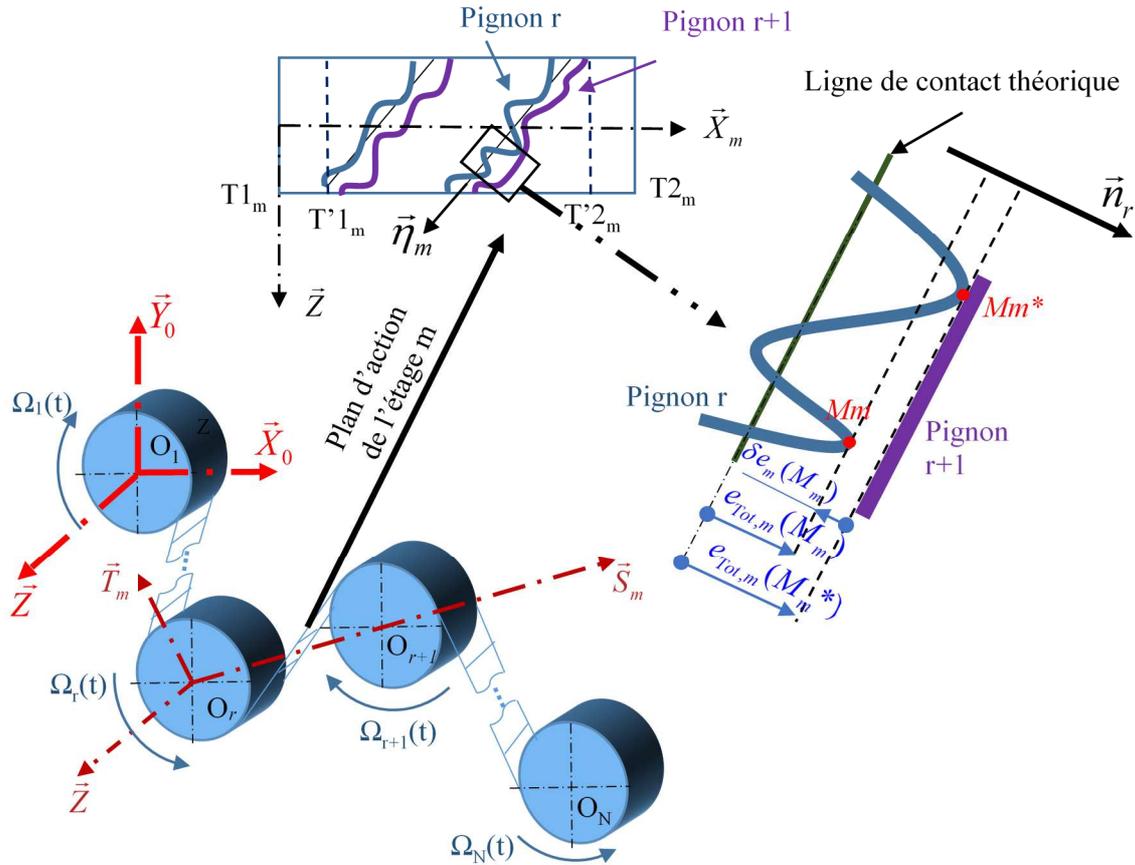


Figure II-2 : Configuration à un instant t du contact au point M_m^* entre deux roues rigides

Le développement de l'expression II.6, pour un élément d'engrenage cylindrique à denture extérieure, conduit à la relation liant Ω_r et Ω_{r+1} :

$$\Omega_{r+1}(t) = -\frac{Rb_r}{Rb_{r+1}} \cdot \Omega_r(t) - \varepsilon_r \cdot \frac{\dot{e}_{Tot,m}(M_m^*)}{Rb_{r+1} \cdot \cos \beta_{b,m}} \quad (\text{II.8})$$

Où :

- ε_r est le signe de Ω_r .
- $\dot{e}_{Tot,m}(M_m^*)$ est la dérivée par rapport au temps de l'écart normal maximal au

point M_m^* entre les pignons r et $r+1$: $\dot{e}_{Tot,m}(M_m^*) = \frac{de_{Tot,m}(M_m^*)}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt}$

Ainsi, l'expression de la vitesse de rotation de la roue $r+1$ est constituée de deux termes. Le premier est le produit de la vitesse de rotation du pignon d'entrée avec le rapport de réduction ou multiplication d'engrenage parfait. Le deuxième terme est lié à l'évolution de l'écart normal maximal. La perturbation induite par ce terme définit la dérivée de l'écart de transmission sans charge, notée NLTE (No Load Transmission Error) :

$$\frac{d}{dt}(NLTE_m) = Rb_{r+1}\Omega_{r+1}(t) + Rb_r\Omega_r(t) = -\varepsilon_r \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_{Tot,m}(M_m^*)}{\cos \beta_{b,m}} \quad (\text{II.9})$$

Dans le cas d'une cascade d'engrènements, la relation II.9 est valable pour chaque étage. Par conséquent, les écarts de transmission sans charge se répercutent sur toutes les vitesses de rotation des roues situées en aval. Autrement dit, la vitesse de chaque roue dépend des perturbations cinématiques de chaque étage d'engrènement qui la précède.

L'expression liant les vitesses d'entrée (Ω_1) et de sortie pour une cascade d'engrenages à $N-1$ engrènements est donnée par [105, 106]:

$$\Omega_N(t) = (-1)^{N-1} \left[\frac{Rb_1}{Rb_N} \Omega_1(t) + \varepsilon_1 \frac{\sum_{m=1}^{N-1} \dot{\varepsilon}_{Tot,m}(M_m^*)}{Rb_N \cos \beta_b} \right] \quad (\text{II.10})$$

Où :

- ε_1 : Signe de Ω_1 .
- Rb_N : Rayon de base de la roue N .
- $\Omega_N(t)$: Vitesse de rotation de la roue N .

II.2.3. Dynamique des corps rigides

La dynamique étudie le mouvement des corps sous l'influence des actions mécaniques qui leurs sont appliquées. Toute perturbation apportée par les écarts géométriques à la

cinématique des corps rigides et toute variation temporelle des charges extérieures entraîne des variations dans le temps de l'énergie cinétique et peut modifier l'état de chargement des équipements extérieurs appliqués au système. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on peut écrire :

$$\frac{d(T_{syst}^{R_0})}{dt} = P_{ext}^{R_0} + P_{int}^{R_0} \quad (\text{II.11})$$

Où :

- $R_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$: Repère galiléen fixe (Figure II-2).
- $T_{syst}^{R_0}$: Énergie cinétique du système.
- $P_{ext}^{R_0}$: Puissance des forces extérieures du système.
- $P_{int}^{R_0}$: Puissance des forces intérieures du système.

En supposant que les pertes internes du système sont négligeables ($P_{int}^{R_0} = 0$: régime lubrifié, frottement et amortissement négligés), l'équation II.11 pour un système de transmission par engrenages comportant M_{ar} arbres s'écrit :

$$\frac{d(T_{syst}^{R_0})}{dt} = P_{ext}^{R_0} = \sum_{i=1}^{M_{ar}} Ct_i(t) \cdot \Omega_i(t) \quad (\text{II.12})$$

Où Ct_i est la somme des couples extérieurs appliqués sur l'arbre i .

L'expression de la variation de l'énergie cinétique dans le temps pour tous les éléments constituant le modèle (arbres, roues, moteur, équipements) est:

$$\frac{d(T_{syst}^{R_0})}{dt} = \sum_{i=1}^{M_{ar}} J_i \Omega_i(t) \dot{\Omega}_i(t) \quad (\text{II.13})$$

Où J_i est le moment d'inertie de tous les éléments (équipement moteur ou résistant, arbres, pignon) constituant la ligne d'arbre i .

Il vient pour le couple de sortie $Ct_j(t)$ appliqué sur la ligne d'arbre j :

$$Ct_j(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{M_{ar}} -Ct_i(t) \cdot \frac{\Omega_i(t)}{\Omega_j(t)} + \sum_{i=1}^{M_{ar}} J_i \frac{\Omega_i(t)}{\Omega_j(t)} \dot{\Omega}_i(t) \quad (\text{II.14})$$

II.2.4. Discrétisation temporelle

Le pas de temps du schéma d'intégration de l'équation du mouvement est un paramètre sensible. Son choix influe sur les résultats numériques et le temps de calcul : s'il est trop grand, les résultats manquent de précision et s'il est trop petit, le temps de calcul devient très important et les erreurs numériques de troncature et d'arrondi ne sont plus forcément négligeables.

Dans cas de notre étude, la valeur du pas de temps (p) est unique pour l'ensemble du système. Il doit être une fraction entière de chaque période du système pour éviter, entre autre, des variations temporelles du rapport de conduite d'un ou plusieurs engrenages [107], ce qui induirait une modulation « numérique » de la fréquence d'engrènement. Par ailleurs, le nombre de pas de temps total ($N_{pt\ Tot}$) de la simulation doit être tel que la plus grande période du système soit parcourue au moins une fois. La préparation des simulations numériques nécessite donc i) la détermination de toutes les périodes potentielles des signaux du système complet, ii) la détermination du pas de temps et enfin iii) la détermination du nombre minimum de pas de temps total de la simulation.

II.2.4.1. Liminaire sur la période d'un système quelconque

On s'intéresse à la période globale (T_{sys}) d'un système quelconque où interviennent deux phénomènes physiques périodiques (périodes T_1 et T_2) qui peuvent interagir (par exemple, un réducteur à 2 étages qui ne sont pas en cascade). Le système est soumis aux excitations de fréquences $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{T_2}$, ce qui laissera une signature temporelle et fréquentielle sur les caractéristiques observées en sortie.

L'existence et l'expression de la période globale du système dépend des valeurs de T_1 et T_2 :

- Si T_1 et T_2 sont des entiers alors T_{sys} existe et sa valeur est le Plus Petit Multiple Commun des 2 périodes :

$$T_{sys} = PPCM(T_1, T_2) \quad (\text{II.15})$$

- Si T_1 et T_2 sont des rationnelles, alors la **Plus Petite Période Multiple** de T_1 et T_2 existe et elle est donnée par :

$$T_{sys} = PPPM(T_1, T_2) = PPPM\left(\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}\right) \quad (\text{II.16})$$

Où $\frac{u_1}{v_1}$ et $\frac{u_2}{v_2}$ sont les représentations irréductibles de T_1 et T_2 , avec

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2\} \in \mathbb{N}^4$$

On en déduit :

$$T_{sys} = \frac{1}{v_1 v_2} PPCM(u_1 v_2, u_2 v_1) \quad (\text{II.17})$$

- Si les 2 périodes T_1 et T_2 s'expriment comme le produit d'un même irrationnelle et d'un rationnel, alors la période du système existe et son expression est donnée par :

$$T_{sys} = PPPM(T_1, T_2) = \pi \cdot PPPM\left(\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}\right) \quad (\text{II.18})$$

$$T_{sys} = \frac{\pi}{v_1 v_2} PPCM(u_1 v_2, u_2 v_1)$$

Avec π un irrationnel et u_1, v_1, u_2, v_2 les nombres qui composent les parties rationnelles irréductibles de T_1 et T_2 .

Exemple :

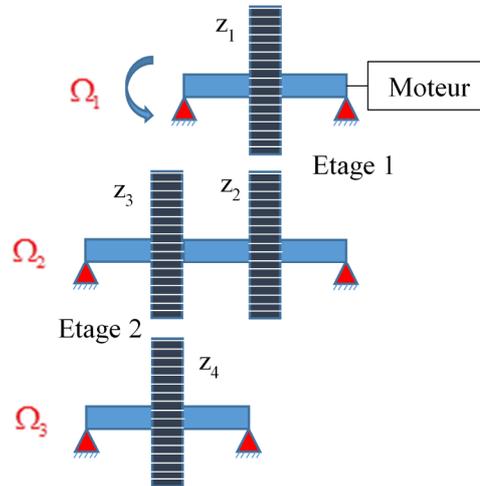


Figure II-3 : Système d'engrenements à deux étages décalés

Les périodes d'engrènement sont données par :

$$T_1 = \frac{2\pi}{z_1 \Omega_1} \text{ et } T_2 = \frac{2\pi z_2}{z_1 z_3 \Omega_1} \quad (\text{II.19})$$

La période du système à 2 étages est :

$$T_{\text{sys}} = \text{PPPM}(T_1, T_2) = \frac{2\pi}{z_1 \Omega_1} \text{PPPM}\left(1, \frac{z_2}{z_3}\right) \quad (\text{II.20})$$

Soit $\frac{z_2}{z_3} = \frac{w_2}{w_3}$ avec w_2 et w_3 premiers entre eux. Il vient

$$T_{sys} = \frac{T_1}{w_3} PPCM(w_2, w_3) \quad (\text{II.21})$$

- Dans les autres cas, il n'y a pas de période de fonctionnement du système complet.

II.2.4.2. Période d'un étage

La période de fonctionnement d'un étage d'engrènement dépend des excitations externes et internes au système. Parmi les phénomènes extérieurs, nous prendrons seulement en compte d'éventuelles variations du couple extérieur (période T_{ext}). L'évolution des surfaces en contact au cours du temps constitue la source principale des excitations internes. Si toutes les dents sont identiques du point de vue de la raideur et de la géométrie, la période d'engrènement est donnée par :

$$T_{eng} = \frac{2\pi}{z_1\Omega_1} = \frac{2\pi}{z_2\Omega_2} \quad (\text{II.22})$$

Dans le cas d'une évolution dent à dent de la géométrie (écarts normaux, ...) ou des paramètres de la raideur (présence de fissures, ...), la période d'engrènement augmente. Par exemple, une excentration sur le pignon engendre une périodicité des écarts de forme égale au temps d'une révolution de celui-ci : $T_{x,1} = \frac{2\pi}{\Omega_1}$. La période des excitations internes (T_{int}) est la plus petite période multiple des temps caractéristiques des évolutions des écarts normaux et de la raideur.

Si elle existe, la période de fonctionnement d'un étage est donnée par

$$T_{etage} = PPPM(T_{int}, T_{ext}) \quad (\text{II.23})$$

Etant donné que T_{int} est de la forme $T_{int} = a \frac{2\pi}{\Omega_1}$ avec a un rationnel, la condition

d'existence de la période du système est que la période des excitations extérieures puisse se mettre sous la forme suivante :

$$T_{ext} = k \frac{2\pi}{\Omega_1} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Q}^+$$

II.2.4.3. Période d'une transmission à plusieurs étages et plusieurs cascades

La période de fonctionnement d'un système de transmission complet, si elle existe, est la plus petite période multiple des périodes des étages qui le compose.

$$T_{sys} = PPPM(T_{etage_1}, T_{etage_2}, \dots, T_{etage_M}) \quad (\text{II.24})$$

Remarque : en générale, cette période est très grande.

II.2.4.4. Le pas de temps

Lors de la résolution numérique, le pas de temps est fixé et il est commun à l'ensemble des éléments du système. Pour éviter des modulations de fréquence, le pas de temps choisi doit diviser exactement les différentes périodes, ce qui se formule mathématiquement de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_1 = k_1 p \\ T_2 = k_2 p \\ T_3 = k_3 p \\ \dots \end{cases} \quad \text{avec } k_1, k_2, k_3 \dots \in \mathbb{N} \quad (\text{II.25})$$

En supposant l'existence de la période du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 \frac{p}{T_1} = k_1 p' = 1 \\ k_2 p' = \frac{T_2}{T_1} = \frac{w_2}{w_1} \\ k_3 p' = \frac{T_3}{T_1} = \frac{w_4}{w_3} \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{II.26})$$

Où $\frac{w_2}{w_1}$ est la forme irréductible de $\frac{T_2}{T_1}$. On peut réécrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{p'} \\ k_2 = \frac{w_2}{p' w_1} = k_1 \frac{w_2}{w_1} \\ k_3 = \frac{w_4}{p' w_3} = k_1 \frac{w_4}{w_3} \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

On en déduit de k_1 est un entier divisible par w_1 et w_3 ... En se limitant à 3 périodes, k_1 est de la forme : $k_1 = \alpha w_1 w_3$. Il vient ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{T_1}{\alpha w_1 w_3} \\ k_2 = \alpha w_2 w_3 \\ k_3 = \alpha w_1 w_4 \end{array} \right. \quad (\text{II.28})$$

II.2.4.5. Exemple de calcul de la période d'un système et du pas de temps

Dans cet exemple, on traite un système à 3 étages d'engrenements décalés (Figure II-4) à géométries parfaites et sans excitations extérieures.

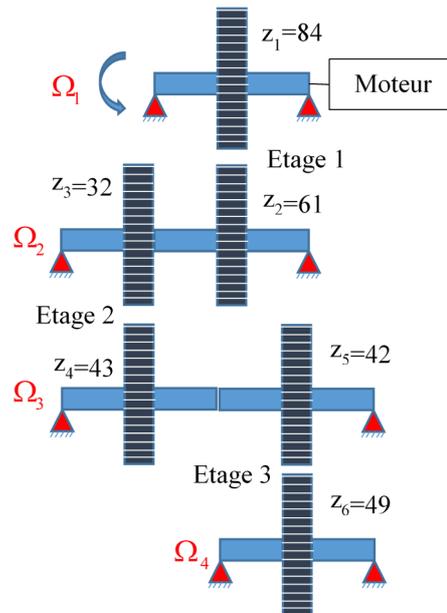


Figure II-4 : Système d'engrenements à trois étages décalés

On désigne par T_1 , T_2 , et T_3 respectivement, les périodes d'engrènement de l'étage 1, 2 et 3 telles que :

$$T_1 = \frac{2\pi}{z_1 \cdot \Omega_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_2 = \frac{2\pi}{z_3 \cdot \Omega_2} \\ |z_2 \cdot \Omega_2| = |z_1 \cdot \Omega_1| \end{array} \right\} T_2 = \frac{z_2}{z_3} \frac{2\pi}{z_1 \cdot \Omega_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_3 = \frac{2\pi}{z_5 \cdot \Omega_3} \\ |z_4 \cdot \Omega_3| = |z_3 \cdot \Omega_2| \\ |z_2 \cdot \Omega_2| = |z_1 \cdot \Omega_1| \end{array} \right\} T_3 = \frac{z_4 \cdot z_2}{z_5 \cdot z_3} \frac{2\pi}{z_1 \cdot \Omega_1}$$

La période du système à 3 engrenements est donnée par :

$$T_{sys} = PPPM(T_1, T_2, T_3) = PPPM\left(1, \frac{z_2}{z_3}, \frac{z_4 \cdot z_2}{z_5 \cdot z_3}\right) T_1$$

$$T_{sys} = PPCM(z_5 \cdot z_3, z_5 \cdot z_2, z_4 \cdot z_2) \frac{T_1}{z_5 \cdot z_3}$$

$$\text{Qui peut se réécrire : } T_{sys} = PPCM(z_5 \cdot z_3, z_5 \cdot z_2, z_4 \cdot z_2) \frac{T_2}{z_5 \cdot z_2}$$

$$\text{ou bien : } T_{sys} = PPCM(z_5 \cdot z_3, z_5 \cdot z_2, z_4 \cdot z_2) \frac{T_3}{z_4 \cdot z_2} .$$

Le pas de temps (p) commun aux trois périodes d'engrènement est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = k_1 p = \frac{2\pi}{z_1 \cdot \Omega_1} \\ T_2 = k_2 p = \frac{2\pi}{z_3 \cdot \Omega_2} = \frac{z_2}{z_3} T_1 \\ T_3 = k_3 p = \frac{2\pi}{z_5 \cdot \Omega_3} = \frac{z_4 \cdot z_2}{z_5 \cdot z_3} T_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 p' = k_1 \frac{p}{T_1} = 1 \\ k_2 p' = \frac{T_2}{T_1} = \frac{z_2}{z_3} \\ k_3 p' = \frac{T_3}{T_1} = \frac{z_4 \cdot z_2}{z_5 \cdot z_3} \end{array} \right.$$

Avec $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$

Pour le cas étudié, les applications numériques conduisent aux relations :

$$\begin{cases} k_2 = \frac{61}{32} k_1 \\ k_3 = \frac{43 \times 61}{32 \times 42} k_1 \end{cases}$$

On déduit que k_1 est un entier divisible par 42 et 32. Il est donc de la forme :

$$k_1 = 1344.\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}$$

Ainsi, le plus grand pas de temps qui divise exactement les périodes d'engrènement T_1 , T_2 et T_3 est $p = \frac{T_1}{1344}$ et la période du système est $T_{\text{sys}} = 2623.T_1$. Le nombre de pas de temps nécessaire pour parcourir une période du système est donc de 3 525 312 ! Il n'est pas réaliste de vouloir mener une simulation sur un nombre de pas de temps aussi élevé. Une étude sur ce système ne pourra être que tronquée.

II.2.4.6. Déphasage relatif

Le déphasage entre les différents engrènements est un paramètre clé car il gère les combinaisons des excitations paramétriques dans tout le système. Le problème de déphasage existe dès lors que le système est constitué d'au moins de deux étages d'engrènements successifs. Dans le cas d'un réducteur à 2 étages, trois configurations peuvent être rencontrées [107] :

- Deux engrènements successifs appartiennent à des cascades différentes : sur l'arbre commun, le positionnement angulaire des 2 roues dentées est arbitraire. Dans ce cas, le déphasage relatif est non déterminé et ne dépend pas des caractéristiques géométriques.
- Deux engrènements successifs sont en cascade et la roue motrice n'est pas le pignon intermédiaire.
- Deux engrènements successifs sont en cascade et la roue motrice est située au centre.

a) Cas où la roue motrice est l'une des deux roues extrêmes

Cette configuration est schématisée Figure II-5, dans le plan apparent. Le segment de conduite de l'engrènement entre les roues 1 et 2 est $[T'1_1, T'2_1]$ et celui entre les roues 2 et 3 est $[T'1_2, T'2_2]$. Dans chaque plan d'engrènement, les lignes de contact se déplacent de $T'1_i$ à $T'2_i$. Pour définir le déphasage, on considère la situation dans un plan apparent particulier : lorsqu'il y a un point de contact en $T'1_1$, le déphasage Δl est égal à la distance entre $T'1_2$ et le point de contact le plus proche sur $[T'1_2, T'2_2]$.

Ce déphasage peut être exprimé par les relations suivantes [105, 106, 107] :

$$\Delta l = \begin{cases} Sba - \kappa_l \cdot Pba & \text{si } \kappa_l \cdot Pba \leq Sba \\ Sba + (1 - \kappa_l) \cdot Pba & \text{si } \kappa_l \cdot Pba > Sba \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Où :

- Sba : Epaisseur apparente de base du pignon intermédiaire.
- Pba : Pas de base apparent.
- $\kappa_l = \left\| \frac{|T'1_1 T'1_2|}{Pba} \right\|$ avec $\| \|$ est le reste de la division naturelle.

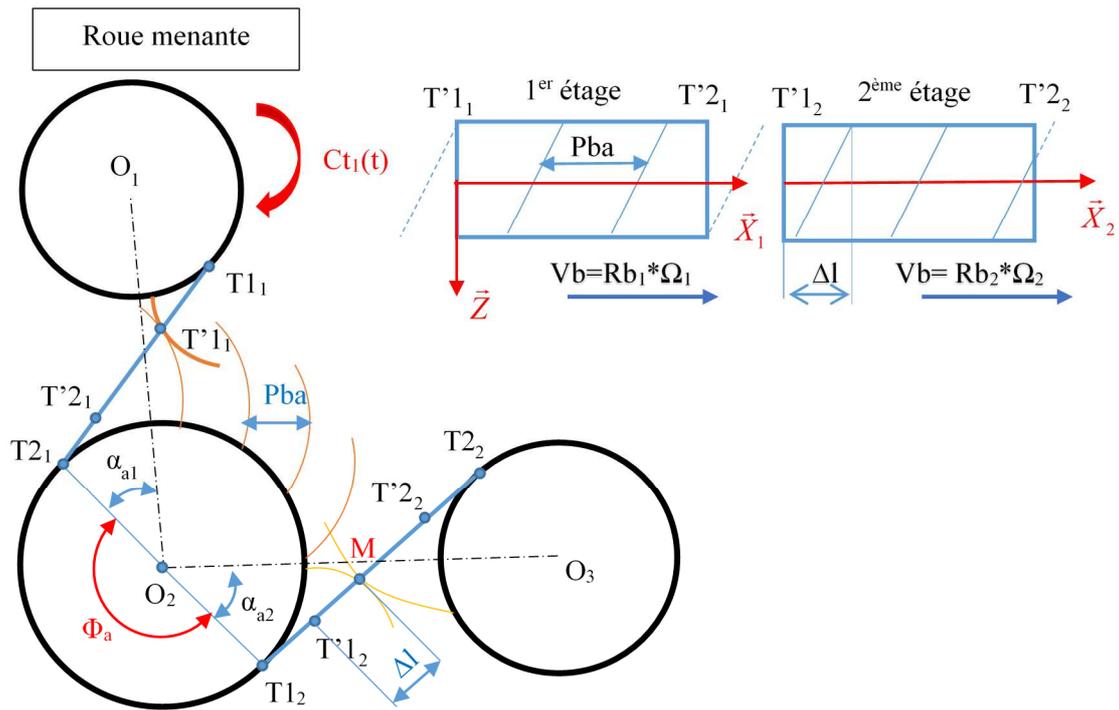


Figure II-5 : 1^{ère} configuration : 3 roues en cascades avec la roue motrice est l'une des roues extrêmes

$|T'1_1 T'1_2|$ est la distance entre les points $T'1_1$ et $T'1_2$ en suivant les lignes de pression et les cercles de bases, à la manière d'une courroie. Elle dépend de l'angle $\Phi_a = \widehat{(T1_2, O_2, T2_1)}$ imposé par la position angulaire des 3 pignons dans l'espace (Figure II-5) et s'écrit :

$$|T'1_1 T'1_2| = |T'1_1 T2_1| + \Phi_a \cdot Rb_2 + |T1_2 T'1_2| \quad (\text{II.30})$$

L'expression mathématique de l'angle Φ_a dépend essentiellement de la position relative des pignons et de la position des lignes d'action effectives (liée au signe du couple). Les deux configurations possibles sont présentées dans la Figure II-6.

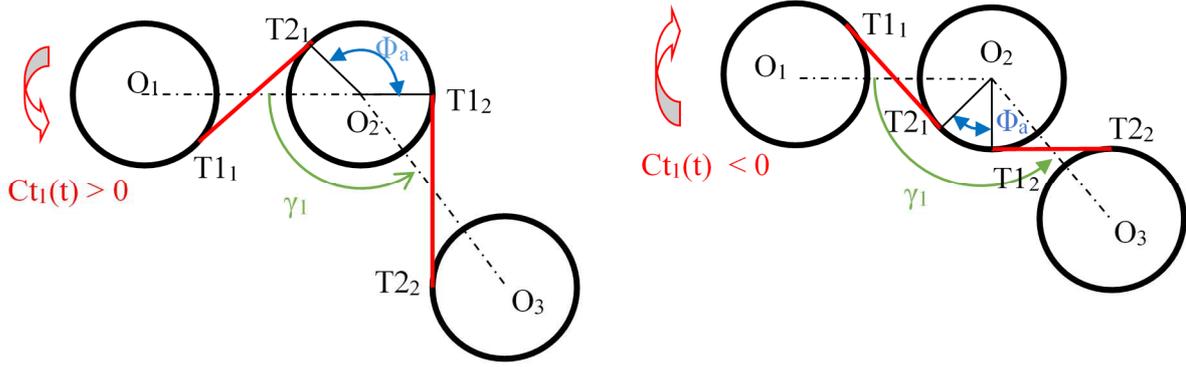


Figure II-6 : Configurations de l'angle Φ_a

Cet angle peut finalement être exprimé par:

$$\Phi_a = \left| \kappa_e \cdot 2\pi - \kappa_s \cdot \gamma_1 - \alpha_{a1} - \alpha_{a2} \right| \quad (\text{II.31})$$

Où :

- $\begin{cases} \kappa_e = 0 \text{ et } \kappa_s = -1 & \text{si } Ct_1(t) < 0 \\ \kappa_e = 1 \text{ et } \kappa_s = 1 & \text{si } Ct_1(t) > 0 \end{cases}$
- α_{a1}, α_{a2} : angles de pression apparents liés respectivement à l'étage 1 et 2.
- γ_1 : angle entre les axes $(O_1 O_2)$ et $(O_2 O_3)$ (dans le sens trigonométrique).

b) Cas avec la roue motrice au centre

Cette configuration correspond à la Figure II-7. Par convention, on calcule le déphasage de l'engrènement des roues 2 et 3 par rapport à celui des roues 1 et 2. Dans le plan apparent, on se place dans la configuration suivante :

- Engagement d'une paire de dent au point $T'1_1$.
- Le déphasage correspond à la distance entre $T'1_2$ et le plus proche point de contact.

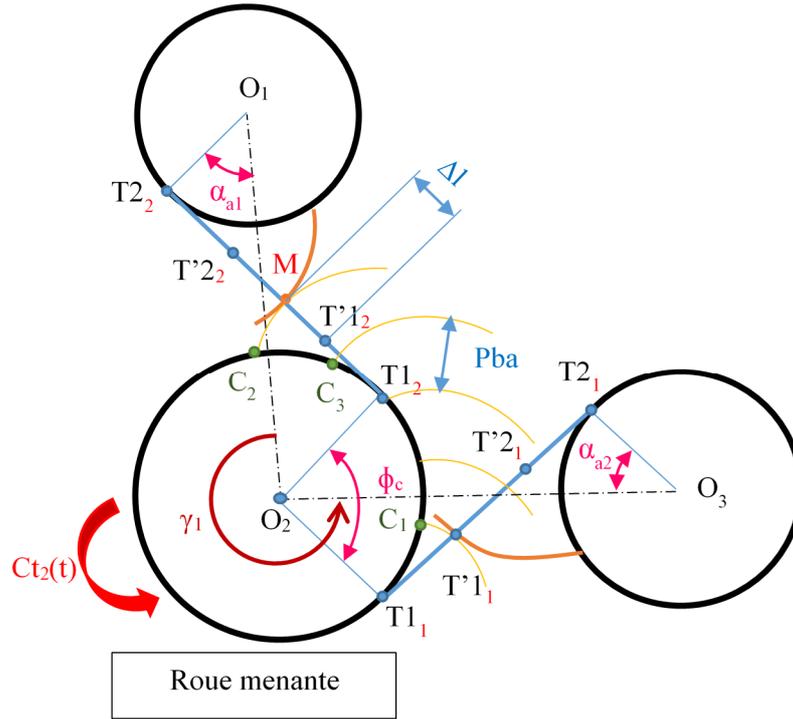


Figure II-7 : 2ème configuration : 3 roues en cascade avec la roue motrice est la roue intermédiaire

Ainsi, le déphasage entre les deux engrenements définis par la distance Δl dans le plan de base s'écrit :

$$\Delta l = \left\| \frac{|T'1_2 M|}{Pba} \right\| \quad (\text{II.32})$$

Avec $|T'1_2 M|$ la distance entre le point $T'1_2$ et le point M le plus proche. On appelle respectivement C_1 , C_2 et C_3 les pieds des développantes qui passe par $T'1_1$, $T'1_2$ et M :

$$\begin{aligned} |T'1_2 M| &= \widehat{C_3 C_2} = \widehat{T1_1 C_1} + \widehat{C_1 C_2} - \widehat{T1_1 T1_2} - \widehat{T1_2 C_3} \\ |T'1_2 M| &= |T1_1 T'1_1| + \kappa_c \cdot n Pba - \kappa_c \cdot \Phi_c \cdot Rb_2 - |T1_2 T'1_2| \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Où :

$$- \Phi_c = \begin{cases} 2\pi - \gamma_1 - \alpha_{r1} + \alpha_{r2} & \text{si } Ct_2(t) > 0 \\ 2\pi - \gamma_1 + \alpha_{r1} - \alpha_{r2} & \text{si } Ct_2(t) < 0 \end{cases}$$

$$- \kappa_c = \begin{cases} 1 & \text{si } Ct_2(t) > 0 \\ -1 & \text{si } Ct_2(t) < 0 \end{cases}$$

- $\widehat{C_3 C_2}$: La longueur d'arc de cercle entre C_3 et C_2 .

- γ_1 : Angle entre axes $(O_1 O_2)$ et $(O_2 O_3)$ (dans le sens trigonométrique).

- n : Un nombre entier

En résumé, l'état de référence est décrit à chaque instant par :

- La position, la vitesse et l'accélération de chaque ligne d'arbre, tous les éléments étant supposés indéformables ;
- Les déphasages existant entre chaque engrènement.

Cette configuration est le point de départ de l'analyse des déformations élastiques du système. L'étude simplifiée porte sur la détermination des déplacements (degrés de liberté) de quelques nœuds du système, les valeurs aux autres points sont obtenus à l'aide de fonction de forme (Méthode des Eléments Finis).

II.3. Définition des degrés de liberté (DDL)

Les N roues du modèle 3D sont assimilées à des cylindres rigides connectés entre eux par des distributions de raideurs élémentaires variable dans le temps. Ces roues sont portées par des éléments d'arbre qui, à leur tour, sont liés au carter par l'intermédiaire de paliers à roulements. Chaque arbre est discrétisé en un certain nombre de segments, eux-mêmes associés à un élément fini d'arbre. Les extrémités de ces segments sont des nœuds dont le déplacement, la vitesse et l'accélération sont recherchés. Chaque nœud 'i' possède 6 degrés de liberté ; 3 translations : u_i, v_i, w_i et 3 rotations : ϕ_i, ψ_i, θ_i . Ces déplacements correspondent à des

déformations élastiques et leurs amplitudes sont supposées être faibles. Les torseurs des petits déplacements sont utilisés pour leur manipulation. Dans le type de système étudié, ces degrés de liberté s'interprètent de la façon suivante :

- u_i est le déplacement axial lié à la traction-compression.
- v_i, w_i sont les déplacements radiaux (perpendiculaires aux lignes d'arbres) induits par la flexion ;
- ϕ_i, ψ_i sont les rotations autour des directions perpendiculaires à d'arbres, dues à la flexion.
- θ_i est la rotation autour de l'axe de l'arbre, due à la torsion.

Pour chaque engrènement impliquant les roues r et $r+1$, les ddl des centres des roues sont regroupés dans un vecteur des degrés de liberté réduit \mathbf{q}_m :

$$\mathbf{q}_m^T = \langle v_r \quad w_r \quad u_r \quad \phi_r \quad \psi_r \quad \theta_r \quad v_{r+1} \quad w_{r+1} \quad u_{r+1} \quad \phi_{r+1} \quad \psi_{r+1} \quad \theta_{r+1} \rangle \quad (\text{II.34})$$

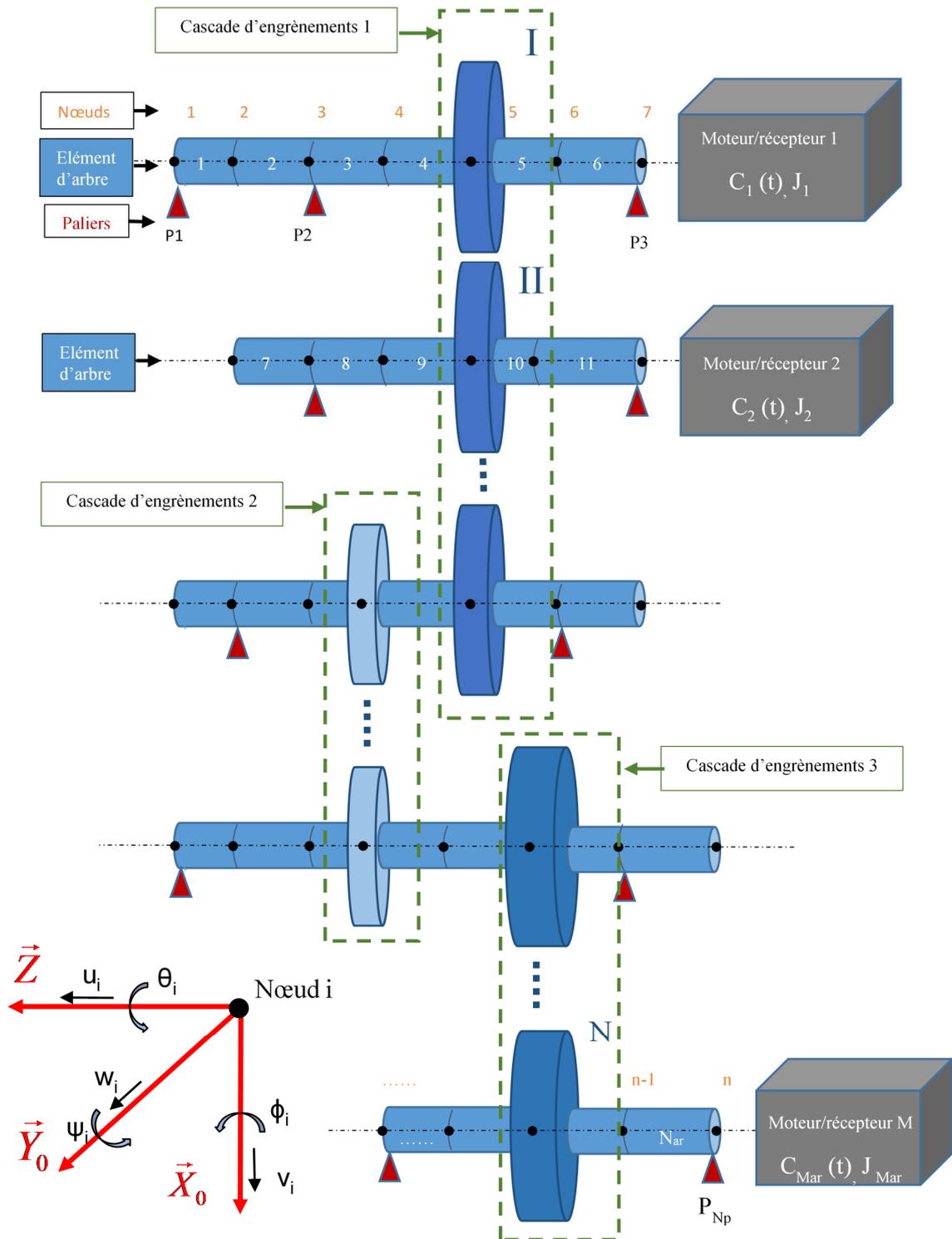


Figure II-8 : Modèle 3D à N roues en cascade et/ou décalés à dentures droites ou hélicoïdales

II.4. Etat déformé

II.4.1. Définition du vecteur structure dans le repère global

Comme cela a été présenté dans la bibliographie, le vecteur structure sert à projeter le vecteur des degrés de liberté pour obtenir le déplacement de déformation en chaque point de contact potentiel. Il est rempli de zéros, sauf aux rangs correspondant aux ddl des centres des roues impliquées dans le m -ième engrenement. La restriction du vecteur structure à ces composantes est notée $\tilde{\mathbf{V}}_m(M_m)$. Ce vecteur est fonction de la position du point M_m considéré et son expression générale est la suivante :

$$\tilde{\mathbf{V}}_m^T(M_m) = \langle \mathbf{n}_r, \mathbf{O}_r \mathbf{M}_m \wedge \mathbf{n}_r, -\mathbf{n}_r, -\mathbf{O}_{r+1} \mathbf{M}_m \wedge \mathbf{n}_r \rangle \quad (\text{II.35})$$

Dans un repère $r_m(\bar{X}_m, \bar{Y}_m, \bar{Z})$ lié au plan d'action de l'étage d'engrenement m (Figure II-9), les composantes du vecteur réduit s'expriment de la façon suivantes [27, 107] :

$$\tilde{\mathbf{V}}_m^T(M_m) = \begin{pmatrix} \cos \beta_b & 0 & \varepsilon_b \sin \beta_b & -\zeta_{M_r} \varepsilon_b R b_r \sin \beta_b & \eta_m - P_{1m} \varepsilon_b \sin \beta_b & \zeta_{M_r} R b_r \cos \beta_b \\ -\cos \beta_b & 0 & -\varepsilon_b \sin \beta_b & -\zeta_{M_r} \varepsilon_b R b_{r+1} \sin \beta_b & -\eta_m - P_{2m} \varepsilon_b \sin \beta_b & \zeta_{M_r} R b_{r+1} \cos \beta_b \end{pmatrix}_{(\bar{X}_m, \bar{Y}_m, \bar{Z})} \quad (\text{II.36})$$

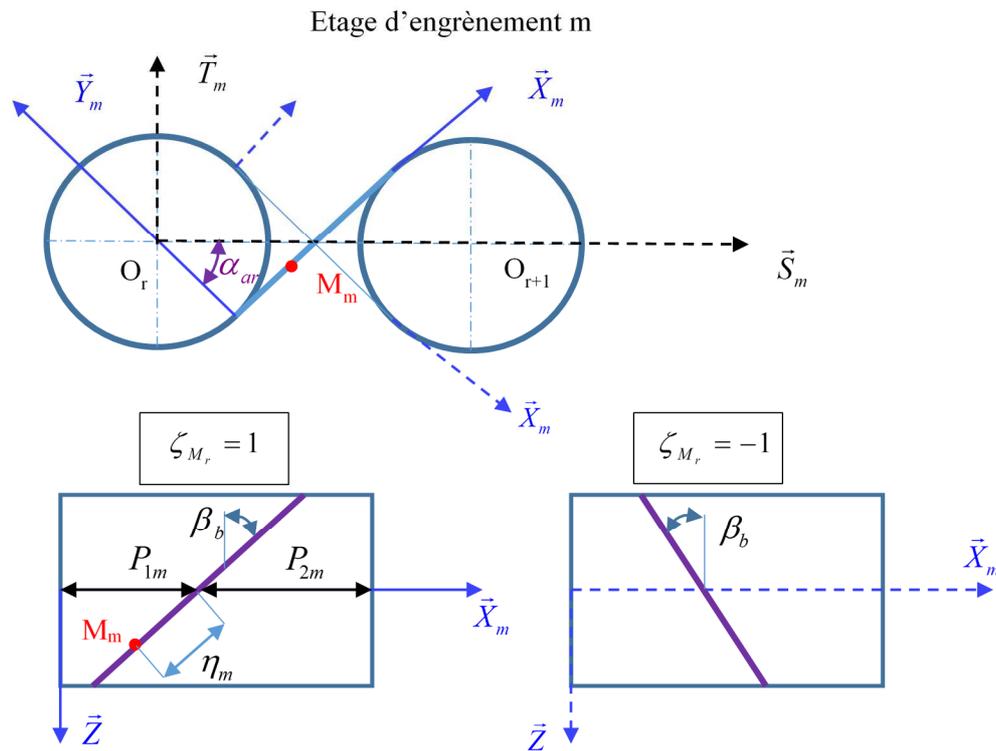


Figure II-9 : Sens de rotation et signe de l'angle d'hélice dans le plan d'action pour un étage m

Où :

- Rb_r et Rb_{r+1} les rayons de base des deux roues dentées
- β_b la valeur absolue de l'angle d'hélice
- η_m et P_{1m} (ou $P_{2m} = T'_{1m}T'_{2m} - P_{1m}$) : paramètres de la position du point M_m dans le plan d'action
- ε_b le signe de l'angle d'hélice :
 - $\varepsilon_b = 1$ pour une hélice à gauche sur le pignon
 - $\varepsilon_b = -1$ pour une hélice à droite sur le pignon
- ζ_{M_r} le signe du couple extérieur sur la roue r :

- $\zeta_{M_r} = 1$ si $Ct_r > 0$
- $\zeta_{M_r} = -1$ si $Ct_r < 0$

La mise en équation de l'ensemble du système nécessite l'expression des vecteurs dans un unique repère global $R_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ pour tout le modèle (Figure II-10). L'origine du repère global est prise au centre de la roue « 1 », la direction \vec{X}_0 est orientée par la première ligne des centres $\overline{O_1O_2}$. Dans ce repère, les composantes du vecteur structure réduit s'écrivent comme suit :

$$\tilde{\mathbf{V}}_m(M_m) = \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{M_r} \cos \beta_b \sin(\alpha_{ar} - \lambda_r) \\ \zeta_{M_r} \cos \beta_b \cos(\alpha_{ar} - \lambda_r) \\ \varepsilon_b \sin \beta_b \\ -\varepsilon_b Rb_r \sin \beta_b \sin(\alpha_{ar} - \lambda_r) - \zeta_{M_r} (\eta_m - P_{1m} \varepsilon_b \sin \beta_b) \cos(\alpha_{ar} - \lambda_r) \\ -\varepsilon_b Rb_r \sin \beta_b \cos(\alpha_{ar} - \lambda_r) + \zeta_{M_r} (\eta_m - P_{1m} \varepsilon_b \sin \beta_b) \sin(\alpha_{ar} - \lambda_r) \\ \zeta_{M_r} Rb_r \cos \beta_b \\ -\zeta_{M_r} \cos \beta_b \sin(\alpha_{ar+1} - \lambda_r) \\ -\zeta_{M_r} \cos \beta_b \cos(\alpha_{ar+1} - \lambda_r) \\ -\varepsilon_b \sin \beta_b \\ -\varepsilon_b Rb_{r+1} \sin \beta_b \sin(\alpha_{ar} - \lambda_r) + \zeta_{M_r} (\eta_m + P_{2m} \varepsilon_b \sin \beta_b) \cos(\alpha_{ar+1} - \lambda_r) \\ -\varepsilon_b Rb_{r+1} \sin \beta_b \cos(\alpha_{ar} - \lambda_r) - \zeta_{M_r} (\eta_m + P_{2m} \varepsilon_b \sin \beta_b) \sin(\alpha_{ar+1} - \lambda_r) \\ \zeta_{M_r} Rb_{r+1} \cos \beta_b \end{array} \right\}_{(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})} \quad (\text{II.37})$$

Où λ_r est l'angle que fait le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ avec le repère local $R_r(O_r, \vec{S}_m, \vec{T}_m, \vec{Z})$ et qu'on peut l'exprimer en fonction de γ_{r-1} et λ_{r-1} (voir Figure II-10).

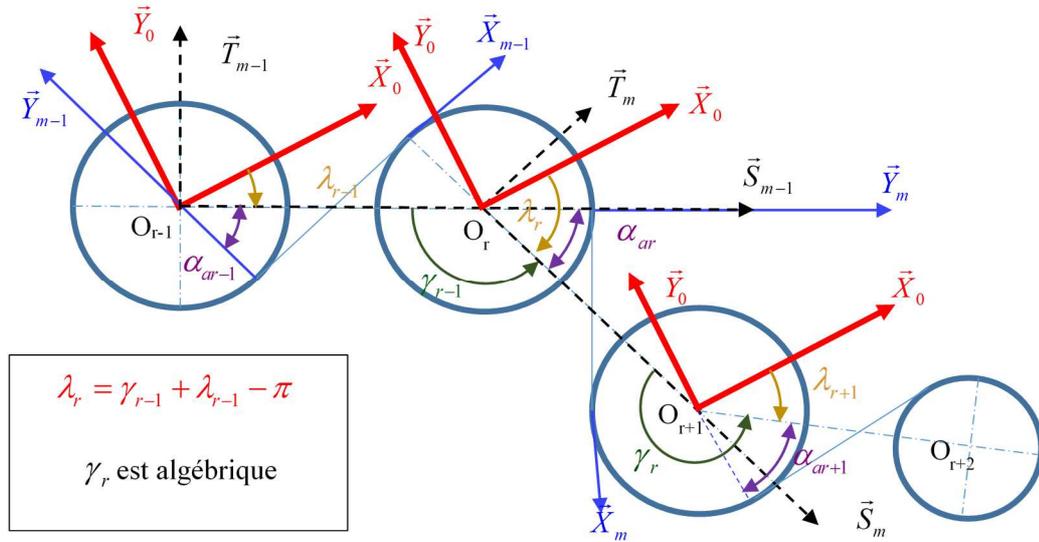


Figure II-10 : Schématisation des repères locaux et du repère global pour une cascade de roues non alignées

II.4.2. Déflexion au point de contact

En tout point de contact potentiel M_m , le rapprochement du couple de dents considéré peut s'exprimer sous une forme matricielle en fonction du vecteur structure réduit $\tilde{\mathbf{V}}_m(M_m)$ et du vecteur des degrés de liberté réduit \mathbf{q}_m de l'étage m :

$$\delta_m(M_m) = \tilde{\mathbf{V}}_m^T(M_m) \cdot \mathbf{q}_m \quad (\text{II.38})$$

En présence d'écarts géométriques, la déflexion au point de contact M_m est définie par la différence entre le rapprochement (définis positif) $\delta_m(M_m)$ et l'écart géométrique relatif $\delta e_m(M_m)$ mesuré dans les conditions du corps rigide. La déflexion ou l'écrasement en ce point de contact s'écrit :

$$\Delta(M_m) = \delta_m(M_m) + \delta e_m(M_m) \quad (\text{II.39})$$

Le contact est assuré lorsque le rapprochement est suffisamment important pour compenser l'écart relatif initial. Dans le cas contraire, des pertes de contact partielles ou complètes entre dentures sont introduites. On définit la condition de contact en tout point de contact M_m par :

$$\Delta(M_m) > 0 \rightarrow \text{contact au point } M_m$$

$$\Delta(M_m) \leq 0 \rightarrow \text{perte de contact au point } M_m$$

La condition de contact ci-dessus est vérifiée, simultanément, pour toutes les cellules se trouvant, à un instant t , dans les différents plans d'action des différents étages d'engrènements.

II.4.3. Raideur d'engrènement

Chaque ligne de contact est discrétisée en cellules élémentaires dont le centre est le point de M_{mij} (m : numéro d'étage d'engrènement; i : indice de la ligne et j : indice de la cellule). Chaque cellule est associée à une raideur élémentaire $k_{mij}(t)$. Ces raideurs sont supposées indépendantes (Figure II-11) et susceptibles d'évoluer avec le temps.

Au cours du mouvement, la raideur de chaque cellule dépend du signe de l'écrasement et du chargement au point de contact M_{mij} [27] (voir chapitre 1) :

- si $\Delta(M_{mij}) > 0$ alors k_{mij} est estimée par les formules de Weber et Banachek et en faisant l'hypothèse des tranches minces. k_{mij} est la raideur équivalente d'un système formé des raideurs de flexion et de fondation des deux dents et de la raideur de contact (dépendante de la charge).
- si $\Delta(M_{mij}) \leq 0$ alors $k_{mij} = 0$

La sommation des raideurs élémentaires k_{mij} , à un instant donné et pour chaque étage d'engrènement m , donne la raideur d'engrènement globale k_m de cet étage:

$$k_m(t) = \sum_i \sum_j k_{mij} \quad (\text{II.40})$$

Les variations de la longueur de contact, du nombre de dents en action et des raideurs locales engendrent une variation dans le temps de la rigidité globale [50, 51, 52, 53, 54, 108, 109, 110]. Cette variation représente une source d'excitation interne du système d'engrènement [44, 27, 103].

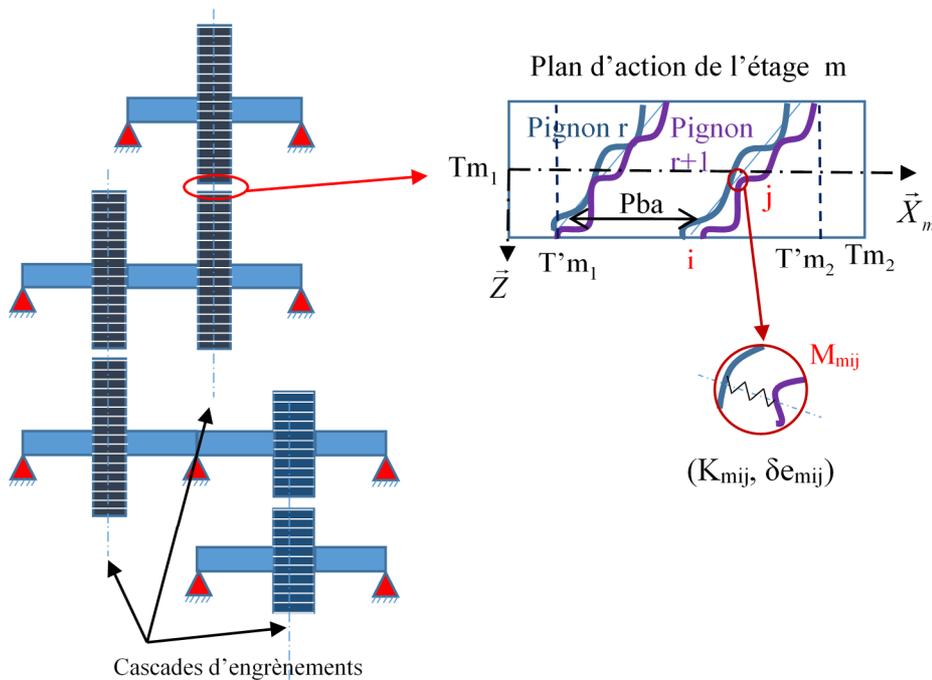


Figure II-11 : Modélisation de la fenêtre d'engrènement d'un étage m

II.5. Mise en équations

La mise en équation est réalisée en plusieurs étapes. Elle est, d'abord, réalisée pour chaque sous-système (engrenages, arbres, paliers, etc.), puis, les matrices masse et raideur et les vecteurs des inconnues et du second membre sont assemblés de façon cohérente.

II.5.1. Élément d'engrenage

II.5.1.1. Matrice raideur élémentaire et vecteur force extérieur

L'énergie de déformation pour un couple d'engrènement dépend, compte tenu de la discrétisation des lignes de contact, du nombre de cellules en contact [58, 104, 107] et de leur raideur élémentaire. Chaque cellule, selon la condition de contact décrite au paragraphe II.4.3, emmagasine une énergie de déformation positive (si $\Delta(M_{mij}) > 0$) ou nulle (si $\Delta(M_{mij}) \leq 0$).

L'énergie de déformation totale associée à un étage d'engrènement m à un instant t est de la forme :

$$U_e(t) = \frac{1}{2} \sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \Delta(M_{mij})^2 \quad (\text{II.41})$$

Où :

N_L, N_S sont respectivement les nombres de lignes et de segments de contact dans la fenêtre d'engrènement.

En se basant sur les équations II.38 et II.39, l'expression de l'énergie de déformation devient :

$$\begin{aligned}
 U_e(t) = & \frac{1}{2} \mathbf{q}_m^T \left[\sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \tilde{\mathbf{V}}_m(M_{mij}) \tilde{\mathbf{V}}_m^T(M_{mij}) \right] \mathbf{q}_m \\
 & + \left\{ \sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \delta e_m(M_{mij}) \tilde{\mathbf{V}}_m(M_{mij}) \right\}^T \mathbf{q}_m + \frac{1}{2} \sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \delta e_m(M_{mij})^2
 \end{aligned} \tag{II.42}$$

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{\partial U_e(t)}{\partial \mathbf{q}_m} = [\mathbf{K}_m(t)] \mathbf{q}_m + \{F_{1m}(t, \delta e_m)\} \tag{II.43}$$

Où :

- $[\mathbf{K}_m(t)] = \sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \tilde{\mathbf{V}}_m(M_{mij}) \tilde{\mathbf{V}}_m^T(M_{mij})$ est la matrice raideur d'engrènement élémentaire variable au cours du temps et calculée dans le repère global.
- $\{F_{1m}(t, \delta e_m)\} = \sum_i^{N_L} \sum_j^{N_S} k_{mij} \delta e_m(M_{mij}) \tilde{\mathbf{V}}_m(M_{mij})$ est le vecteur d'excitation élémentaire variable au cours du temps et calculé dans le repère global. Il introduit l'effet des écarts géométriques δe_m .

Pour un train d'engrenages à M engrènements (N roues) en cascade et/ou décalés, l'expression de la matrice raideur d'engrènement élémentaire et du vecteur d'excitation élémentaire à chaque instant est valable pour chaque étage m du train d'engrenages. Ainsi, la matrice raideurs d'engrènement globale $[\mathbf{K}_e(t, \mathbf{q})]$ et le vecteur d'excitation global $\mathbf{F}_{e1}(t, \mathbf{q}, \delta e_m)$ du train d'engrenages est l'assemblage, respectivement, de toutes les matrices raideurs d'engrènement élémentaires $[\mathbf{K}_m(t)]$ et de tous les vecteurs d'excitation élémentaires $\{F_{1m}(t, \delta e_m)\}$ des M étages dans le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_e(t, \mathbf{q})] &= \text{assemblage} \left([K_1(t)], [K_2(t)], \dots, [K_M(t)] \right) \\
 \mathbf{F}_{\text{el}}(t, \mathbf{q}, \delta e_m) &= \text{assemblage} \left(\{F_{11}(t, \delta e_1)\}, \{F_{12}(t, \delta e_2)\}, \dots, \{F_{1M}(t, \delta e_M)\} \right)
 \end{aligned} \tag{II.44}$$

II.5.1.2. Matrice masse et termes de forces inertielles

En négligeant les effets gyroscopiques, l'énergie cinétique d'un couple d'engrenages r et $r+1$ lié au repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ est de la forme [107, 104] :

$$\begin{aligned}
 T_E &= \sum_{k=r}^{r+1} \left(\frac{1}{2} m_k \left(\vec{V}_k^{R_0}(G_k) \right)^2 + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\Omega}}_k^{R_0})^T \underline{\underline{I}}_k \underline{\underline{\Omega}}_k^{R_0} \right) \\
 T_E &= \sum_{k=r}^{r+1} \left(\frac{1}{2} m_k \left(\dot{u}_k^2 + (\dot{v}_k + C s_k)^2 + (\dot{w}_k + C c_k)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(I_k (\dot{\phi}_k^2 + \dot{\psi}_k^2) + J_k (\dot{\theta}_k + \Omega_k)^2 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{II.45}$$

Où :

- G_k : Centre d'inertie de la roue k
- m_k : Masse de la roue k
- I_k, J_k : Moment d'inertie et d'inertie polaire de la roue k
- $\underline{\underline{I}}_k$: Tenseur d'inertie de la roue k au centre d'inertie G_k exprimé dans le repère $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$
- $\underline{\underline{\Omega}}_k^{R_0}$: Vecteur rotation de la roue k tel que $\underline{\underline{\Omega}}_k^{R_0} = \dot{\phi}_k \vec{X}_0 + \dot{\psi}_k \vec{Y}_0 + (\dot{\theta}_k + \Omega_k) \vec{Z}$
- $\vec{V}_k^{R_0}(G_k)$: Vecteur vitesse en G_k tel que :

$$\vec{V}_k^{R_0}(G_k) = (\dot{v}_k + C s_k) \vec{X}_0 + (\dot{w}_k + C c_k) \vec{Y}_0 + \dot{u}_k \vec{Z}$$

- C_{s_k}, C_{c_k} : Des termes qui dépendent des excentricités introduites sur la roue k tel que $C_{s_k} = -\kappa_k \Omega_k \sin(\int_0^t \Omega_k d\tau - \tau_k)$ et $C_{c_k} = +\kappa_k \Omega_k \cos(\int_0^t \Omega_k d\tau - \tau_k)$ (Figure II-12).

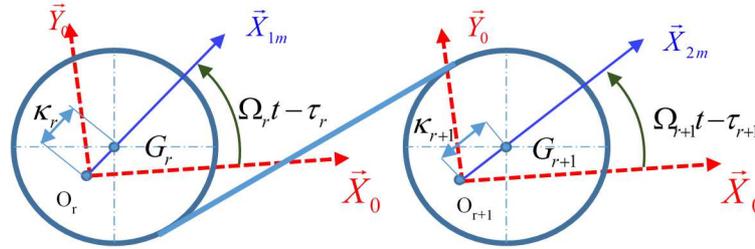


Figure II-12 : Configuration d'un étage m excentré

L'application des équations de Lagrange conduit à l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_E}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial q_m} = [M_{em}] \ddot{\mathbf{q}}_m + \{F_{2m}(t)\} \quad (\text{II.46})$$

Où :

$[M_{em}] = \text{diag}(m_r, m_r, m_r, I_r, I_r, J_r, m_{r+1}, m_{r+1}, m_{r+1}, I_{r+1}, I_{r+1}, J_{r+1})$ est la matrice masse des éléments engrenages de l'étage m.

$\{F_{2m}(t)\} = \langle m_r \dot{C}_{s_r}, m_r \dot{C}_{c_r}, 0, 0, 0, J_r \dot{\Omega}_r(t), m_{r+1} \dot{C}_{s_{r+1}}, m_{r+1} \dot{C}_{c_{r+1}}, 0, 0, 0, J_{r+1} \dot{\Omega}_{r+1}(t) \rangle$ est le vecteur force inertielle élémentaire variable dans le temps. Il introduit l'effet de la cinématique perturbée par des excentricités.

Pour un train d'engrenages à M engrènements (N roues) en cascade et/ou décalés, la matrice masse globale des éléments engrenages $[M_e]$ et le vecteur force inertielle global $\mathbf{F}_{e2}(t)$ du train d'engrenages sont exprimés dans le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ par:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}_e] &= \text{diag} (m_1, m_1, m_1, I_1, I_1, J_1, \dots, m_N, m_N, m_N, I_N, I_N, J_N) \\
 \mathbf{F}_{e2}(t) &= \langle m_1 \dot{C}_{s1}, m_1 \dot{C}_{c1}, 0, 0, 0, J_1 \dot{\Omega}_1(t), \dots, m_N \dot{C}_{sN}, m_N \dot{C}_{cN}, 0, 0, 0, J_N \dot{\Omega}_N(t) \rangle
 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

II.5.2. Élément d'arbre et paliers

Afin d'étudier les déformations des lignes d'arbres, ceux-ci sont modélisés par des éléments de poutre de type Timoshenko à deux nœuds. Chaque nœud comporte six degrés de liberté (3 translations et 3 rotations selon les directions \vec{X}_0, \vec{Y}_0 et \vec{Z} du repère global) compatibles avec ceux de l'élément engrenage.

Le modèle élément fini de cet élément d'arbre est présenté dans la figure suivante :

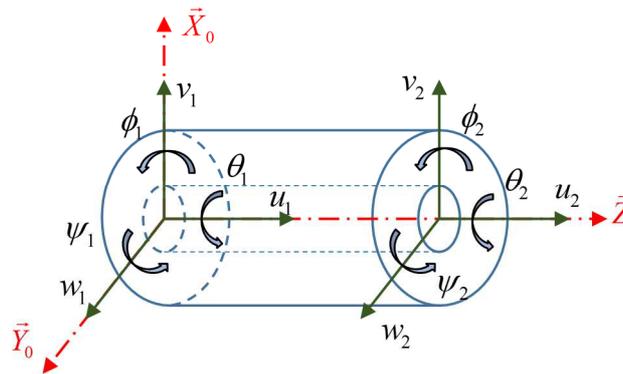


Figure II-13 : Modèle élément fini de poutre à deux nœuds

L'application des équations de Lagrange aux énergies cinétique et de déformation d'un élément d'arbre i conduit à l'expression de la matrice raideur $[K_{ai}]$ et la matrice masse $[M_{ai}]$ avec les termes du vecteur forces inertielles $\mathbf{F}_{ai}(t)$ dépendant des variations temporelles de la vitesse de rotation dues aux écarts géométriques introduits sur les éléments engrenages [58, 27, 104, 107, 73]. Les termes de $[K_{ai}]$, $[M_{ai}]$ et $\mathbf{F}_{ai}(t)$ sont détaillés dans l'annexe A.

En outre, les lignes d'arbres sont supportées par des paliers liés à leur tour au carter indéformable. Ces paliers sont modélisés par des raideurs additionnelles aux différents nœuds. L'équation de l'énergie de déformation d'un palier j mène à la matrice raideur diagonale $[K_{pj}]$

dont les termes non nuls sont ceux relatifs aux ddl du nœud j . Exprimés dans le repère $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$, ils sont notés:

$$diag(k_{v_j}, k_{w_j}, k_{u_j}, k_{\phi_j}, k_{\psi_j}, k_{\theta_j}) \quad (\text{II.48})$$

II.5.1. Equation de mouvement du train d'engrènement multi-étages

Un réducteur constitué de N roues en cascade et/ou décalés à dentures droites ou hélicoïdales possède N_{ar} éléments d'arbres, N_p paliers et n nœuds. L'assemblage, des matrices masses élémentaires et raideurs élémentaires de tous ces éléments, conduit finalement au modèle global suivant :

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K(t, \mathbf{q})]\mathbf{q} = \mathbf{F}_0(t) + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{q}) + \mathbf{F}_2(t) \quad (\text{II.49})$$

Où :

- $\mathbf{q} = \langle v_1 \ w_1 \ u_1 \ \phi_1 \ \psi_1 \ \theta_1 \ \dots \ v_n \ w_n \ u_n \ \phi_n \ \psi_n \ \theta_n \rangle$ est le vecteur des degrés de liberté global ($6n$ composantes)
- $[M]_{6n \times 6n} = assemblage([M_e], [M_{ai}])$ est la matrice masse globale avec $i = 1 \dots N_{ar}$
- $[K(t, \mathbf{q})]_{6n \times 6n} = assemblage([K_e], [K_{pj}], [K_{ai}])$ est la matrice de rigidité globale avec $i = 1 \dots N_{ar}$ et $j = 1 \dots N_p$
- $[C]_{6n \times 6n}$ est la matrice d'amortissement visqueux globale calculée dans la base modale à partir de la masse modale et la raideur modale construite avec la raideur moyenne d'engrènement [58, 73, 27, 107].

- $\mathbf{F}_2(t)_{6n \times 1} = \text{assemblage}(\mathbf{F}_{e_2}(t), \mathbf{F}_{a_i}(t))$ est un vecteur forces inertielles global introduit l'effet de la cinématique perturbé par des écarts avec $i = 1 \dots N_{ar}$.
- $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{q})_{6n \times 1} = \mathbf{F}_{e_1}(t, \mathbf{q}, \delta e_m)$ est un vecteur d'excitation dépendant du temps introduisant l'effet des écarts géométriques.
- $\mathbf{F}_0(t)_{6n \times 1}$ est un vecteur des forces extérieures

II.5.2. Résolution

La résolution de ce type d'équation est généralement obtenue par des méthodes d'intégrations numériques. Ces dernières sont nombreuses et les techniques très diverses. Cependant, la méthode de résolution doit, à chaque instant, calculer les inconnues du système et de vérifier la condition de contact entre dentures. Velex [27] utilise le schéma implicite de Newmark couplé à un algorithme de contact normal unilatéral : une méthode d'intégration pas à pas dans le temps permettant de prendre en compte la non-linéarité du système causée par les pertes de contact et les écarts géométriques. L'amorçage du processus est généralement une approximation, par exemple une solution statique moyenne.

Le principe de résolution est expliqué dans l'organigramme de la Figure II-14 :

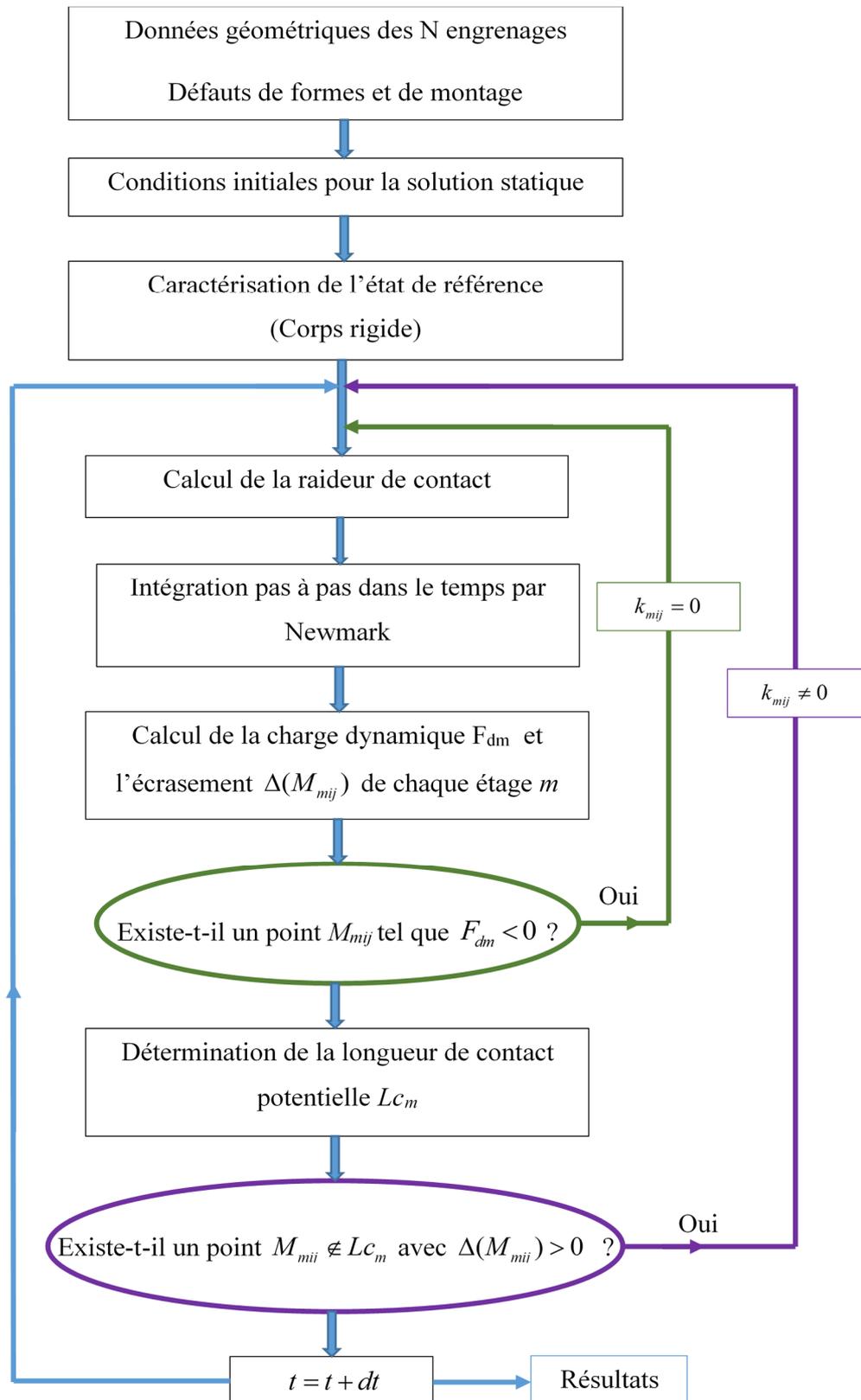


Figure II-14 : Schéma de résolution de Newmark couplé avec l'algorithme de contact

II.6. Eléments de validation

Dans cette section, on cherche à valider le logiciel élaboré pour la simulation d'un modèle Multi-Engrènement Dynamique (M.E.D) en comparant ses résultats avec ceux issues du modèle de train d'engrènement double-étages de Raclot [107]. La comparaison porte sur des résultats dynamiques étudiés dans les régimes linéaire et non-linéaire. Les résultats ont été obtenus par la méthode de résolution de Newmark alors que ceux de Raclot [107] ont été fournis par la Méthode Spectrale Itérative, ce qui peut engendrer des écarts de réponses surtout en régime non-linéaire.

II.6.1. Comparaison du comportement dynamique d'un train double-étages à engrènements décalés

La première étape de comparaison est basée sur des applications faites sur un réducteur double-étages décalés à dentures droites.

II.6.1.1. Caractéristiques géométriques et de fonctionnement

Les caractéristiques géométriques des éléments engrenages sont indiquées dans le Tableau II.1 :

Tableau II.1 : Caractéristiques géométriques des éléments engrenages

	<i>Pignon1</i>	<i>Pignon2</i>	<i>Pignon3</i>	<i>Pignon4</i>
<i>Nombre de dents</i>	27	63	25	69
<i>Largeur (mm)</i>	72	72	100	100
<i>Angle de pression (deg)</i>	20			
<i>Angle d'hélice (deg)</i>	0 (droite)			
<i>Module (mm)</i>	4		6	
<i>Coefficient de saillie</i>	1			
<i>Coefficient de creux</i>	1.4			
<i>Coefficient de déport</i>	0			
<i>Couple moteur (Nm)</i>	1500			

En se référant à la numérotation des éléments d'arbre dans la Figure II-15, les caractéristiques géométriques de ces derniers sont cités dans le Tableau II.2.

Tableau II.2 : Caractéristiques géométriques des éléments d'arbres de Raclot

<i>Elément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre extérieur (mm)</i>	<i>Elément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre extérieur (mm)</i>
1	116.75	80	6	211.81	90
2	116.75	80	7	96.77	133.35
3	98.43	80	8	183.35	133.35
4	92.43	90	9	183.35	133.35
5	196.07	90			

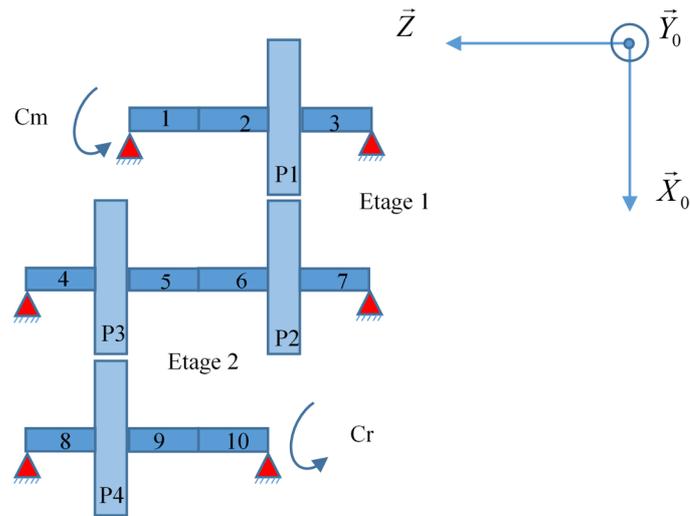


Figure II-15 : Modèle d'engrènement double-étages décalées

II.6.1.1. Influence des corrections de profil

La comparaison porte sur l'introduction des corrections courtes ($\Gamma_1=\Gamma_2=0.2$; $E_1=E_2=30$ μm) puis optimales ($\Gamma_1=\Gamma_2=0.4$; $E_1 = E_2 =30$ μm) sur les deux étages d'engrènements à la fois. Les résultats du facteur de forme de l'erreur de transmission en fonction de la fréquence d'engrènement de chaque étage d'engrènement sont présentés dans Figure II-16. Les tendances de la réponse dynamique avec des corrections « optimales » sont améliorées considérablement sur les deux étages d'engrènements, alors qu'on observe une légère augmentation de l'amplitude de la réponse dynamique à certaines vitesses critiques dans le cas des corrections « courtes ».

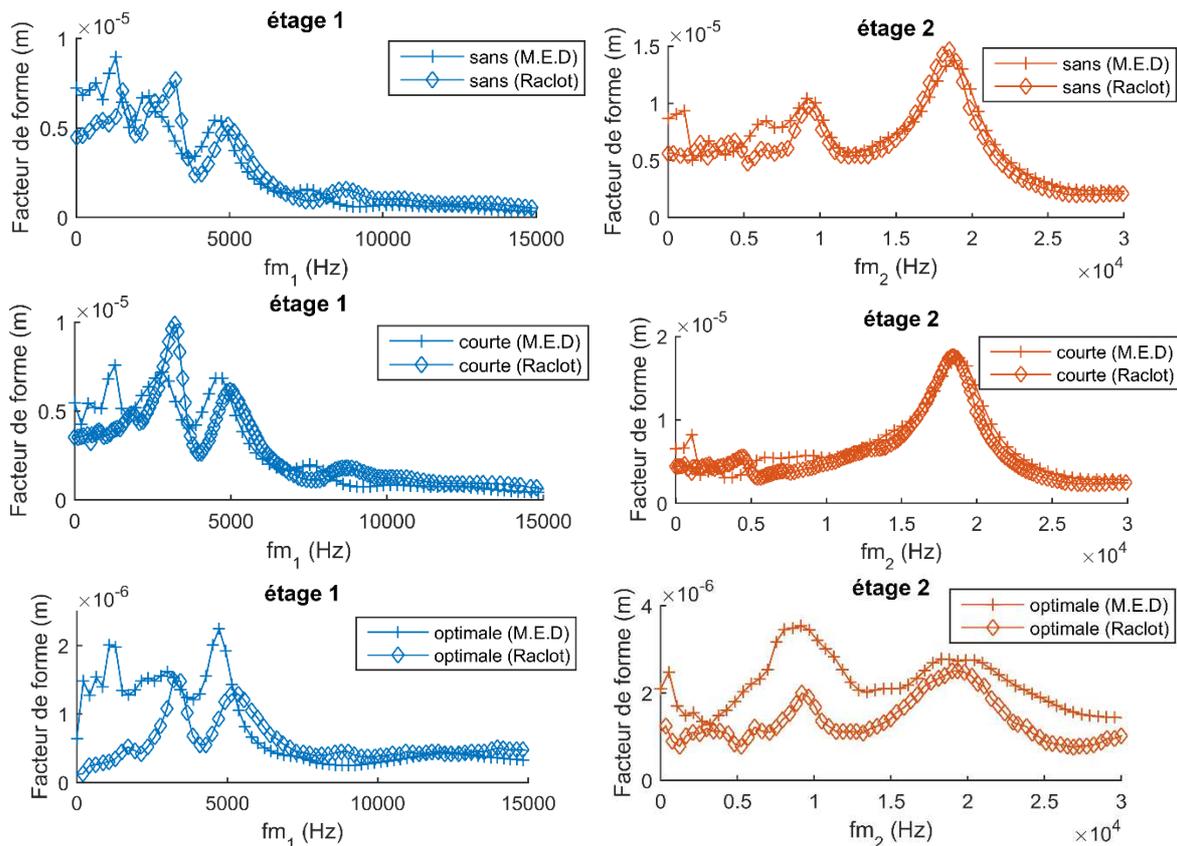


Figure II-16 : Comparaison des courbes des erreurs de transmissions du modèle MED avec ceux de Raclot [107] pour les deux étages d'engrènement décalés en présence des corrections de dentures

Les courbes de réponses obtenues par les deux modèles sont très proches pour les deux étages d'engrènements. Néanmoins, on remarque que les courbes de réponses obtenues par la Méthode Itérative Spectrale (Raclot [107]) sont légèrement inférieures à celles calculées par la méthode de Newmark (auquel l'algorithme de contact normal n'est pas couplé). Cette différence d'amplitude peut être liée à l'approximation du vecteur structure moyenné. Quelques écarts dans la position des vitesses critiques sont, aussi, remarquables sur les deux étages, s'expliquent, probablement, par la différence de la matrice raideur moyenne.

II.6.1.2. Influence de la position relative des engrenages

Sans faire varier le déphasage entre les deux engrènements décalés, Raclot [107] a seulement modifiés l'angle entre les axes λ qui passent par les centres des roues des deux étages

d'engrènement. Ce décalage angulaire influe notamment sur la position relative des deux plans d'action, ainsi que, sur la direction des efforts normaux à la denture.

Pour mettre en évidence l'influence de l'angle λ sur la réponse dynamique à la denture, on présente les variations du facteur de forme de l'erreur de transmission, sans application de corrections de forme, en fonction de la fréquence d'engrènement de chaque étage pour deux configurations géométriques correspondant à des valeurs de l'angle égales à 0° et 45° .

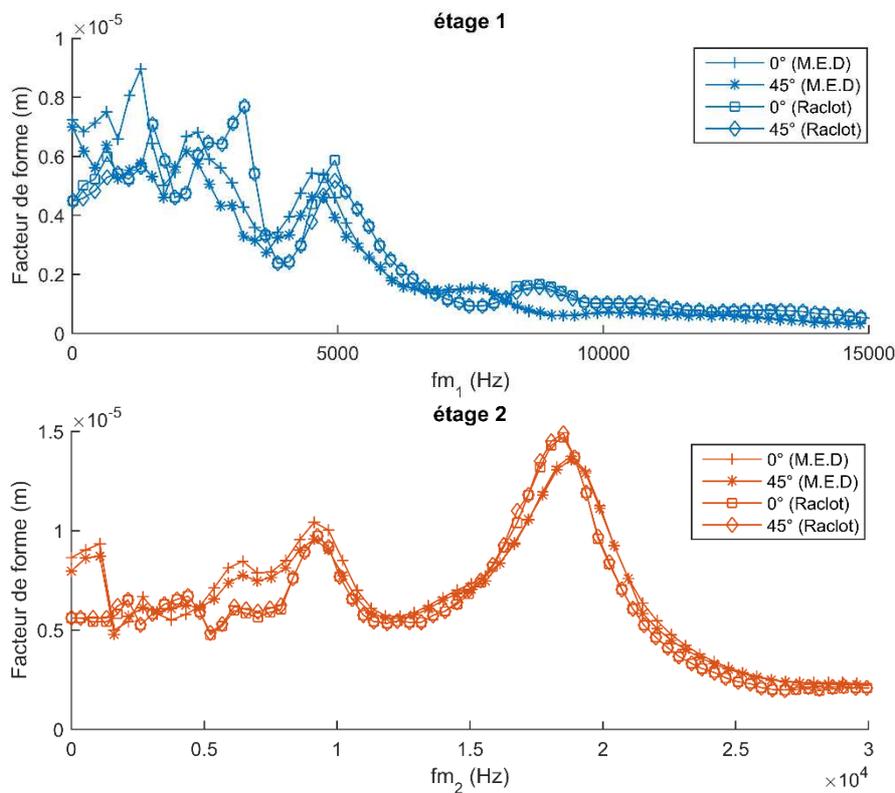


Figure II-17 : Influence de l'angle entre axes: comparaison des courbes des erreurs de transmissions du modèle M.E.D avec ceux de Raclot [107]

Les réponses dynamiques relatives aux deux configurations géométriques montrent un très bon accord pour les deux étages d'engrènement. Ces résultats confirment que la position relative des deux engrènements dans l'espace n'a pas d'impact sur la réponse vibratoire à la denture. Toutefois, les écarts d'amplitudes et de la position des vitesses critiques entre les deux

modèles sont toujours persistants. L'approximation du vecteur structure moyen et de la matrice raideur moyenne sont à l'origine de ces phénomènes.

II.6.1. Comparaison du comportement dynamique d'un train double-étages à engrènements en cascade

La deuxième étape de comparaison est basée sur des applications faites sur un réducteur double-étages en cascade à dentures droites

II.6.1.1. Caractéristiques géométriques et de fonctionnement

Les caractéristiques géométriques des éléments engrenages sont indiquées dans le Tableau II.3 :

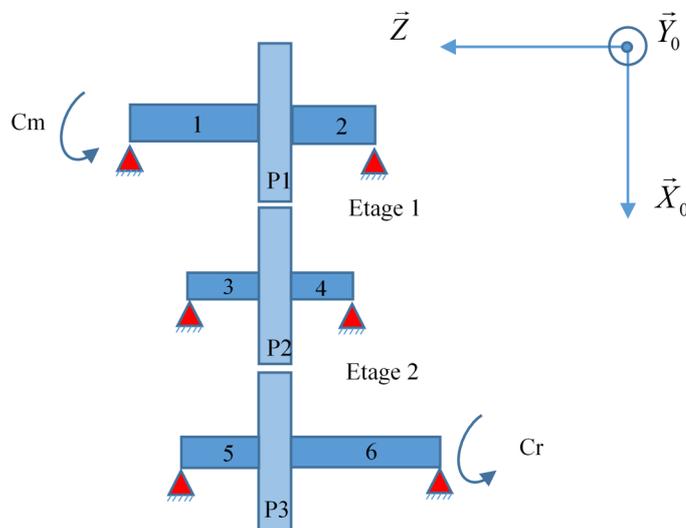
Tableau II.3 : Caractéristiques géométriques des éléments engrenages

	<i>Pignon1</i>	<i>Pignon2</i>	<i>Pignon3</i>
<i>Nombre de dents</i>	23	39	67
<i>Largeur (mm)</i>	60	60	60
<i>Angle de pression (deg)</i>	20		
<i>Angle d'hélice (deg)</i>	0 (droite)		
<i>Module (mm)</i>	6		
<i>Coefficient de saillie</i>	1		
<i>Coefficient de creux</i>	1.4		
<i>Coefficient de déport</i>	0		
<i>Couple moteur (Nm)</i>	3000		

En se référant à la numérotation des éléments d'arbre dans la Figure II-18, les caractéristiques géométriques de ces derniers sont cités dans le Tableau II.4.

Tableau II.4 : Caractéristiques géométriques des éléments d'arbres

<i>Elément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre extérieur (mm)</i>
1	350	80
2	100	80
3	150	100
4	100	100
5	150	120
6	300	120

**Figure II-18 : Modèle d'engrènement double-étages en cascade**

II.6.1.1. Influence des corrections de profil

Des corrections de profil de type optimales ($\Gamma_1=\Gamma_2=0.4$; $E_1=E_2=60 \mu\text{m}$) sont introduites simultanément sur les deux étages d'engrènements. Elles présentent des excitations à des fréquences multiples de l'unique fréquence d'engrènement f_{m1} . L'influence des corrections sur les courbes de réponse à la denture est abordée à partir des courbes de variations des erreurs de transmission des deux étages d'engrènement tracées sur la Figure II-19.

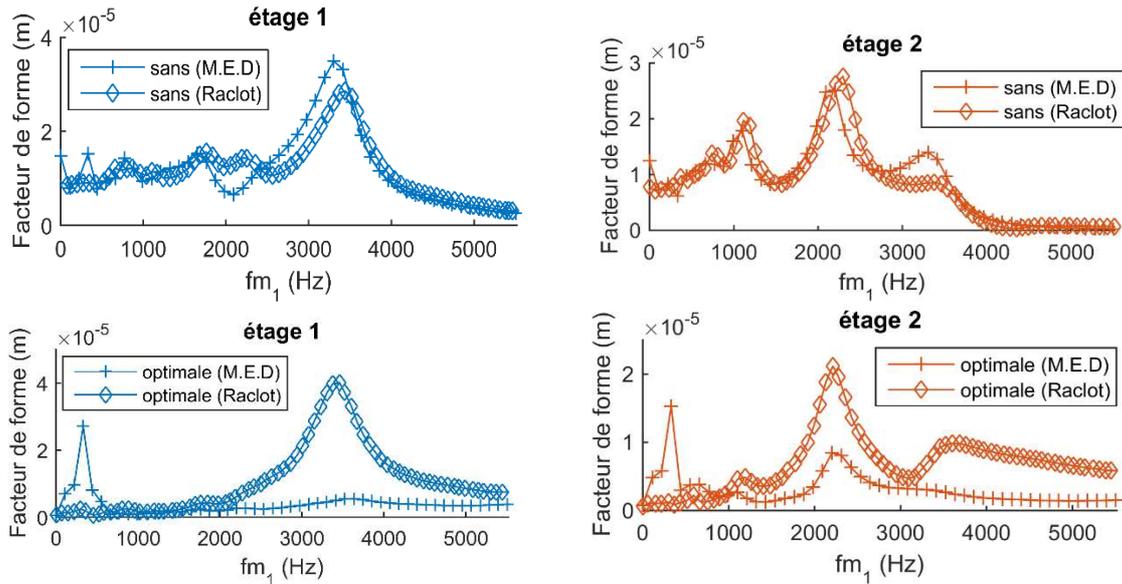


Figure II-19 : Comparaison des courbes des erreurs de transmissions du modèle MED avec ceux de Raclot [107] pour les deux étages d'engrènement en cascade en présence des corrections de dentures

Les résultats fournis par les deux modèles montrent un bon accord dans le cas sans correction, bien que les courbes issues de la méthode de résolution de Newmark présentent des pics à basse fréquences. Un léger écart d'amplitude persiste entre les courbes de réponse des deux modèles. Cet écart d'amplitude est liée à l'approximation du vecteur structure.

L'introduction des corrections optimales, sur les deux étages d'engrènements simultanément, a bien amélioré le comportement dynamique à la denture des deux étages sauf à certaines vitesses critiques. Ces derniers apparaissent, simultanément, sur les deux étages d'engrènement de chaque modèle, ce qui explique le phénomène de couplage entre eux. Mais, ils n'ont pas les mêmes valeurs selon les deux méthodes de résolution. En effet, la méthode de résolution de Newmark fait apparaître un grand saut d'amplitude à la fréquence 330 Hz, alors que, la Méthode Itérative Spectrale de Raclot [107] illustre une élévation forte de l'amplitude de la réponse vibratoire en s'approchant de sa propre fréquence critique principale. Pour les deux méthodes de résolution, ce comportement est expliqué par l'existence du phénomène d'interaction entre les deux étages d'engrènement. Les corrections appliquées simultanément sur les deux étages d'engrènement en cascade ne présentent pas une solution optimale qui améliore le comportement dynamique global du système. C'est ainsi, il faudrait trouver les bonnes corrections de profil assurant l'amélioration du comportement dynamique des trains multi-engrènements.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'engrènement multi-étages à dentures droites ou hélicoïdales a été développé. Il est valable pour N roues en cascade et/ou décalées supportées par des arbres et des paliers. Les éléments engrenages sont assimilés à des cylindres rigides (disks rigides pour le modèle torsionnel) connectés l'un à l'autre par éléments de raideur variables dans le temps. L'équation de mouvement du système global comporte des termes d'excitations internes traduisant la présence des écarts géométriques sur les engrenages qui perturbent la cinématique de la chaîne. Ces écarts géométriques peuvent, aussi, engendrer des pertes de contact partiel ou total et rendre le système dans ce cas non-linéaire. D'autres termes d'excitation externes dus aux variations dans le temps des couples moteurs et résistants peuvent, aussi, perturber la dynamique du système et causent des vibrations potentielles. La validation du modèle a été assurée en comparant les résultats issus de notre modèle numérique avec ceux de Raclot [107] qui ont montré un bon accord général.

**Chapitre III. Corrections de profil optimales
pour des réducteurs multi-étages en cascade et
décalés**

III.1. Introduction

Afin de réduire les vibrations et les effets sonores générés par l'engrènement, les concepteurs ont généralement recouru à des modifications volontaires des surfaces actives des dentures. Dans le cadre de ce travail, seules les modifications du profil des dentures sont prises en compte. La question qui se pose alors est la suivante : comment être sûr que ces modifications de profil sont les plus performantes vis-à-vis de l'amélioration du comportement vibratoire du système d'engrènement ?

Pour apporter des éléments de réponse, on propose dans ce chapitre une étude numérique d'optimisation du comportement dynamique de systèmes d'engrènements multi-étages. Les corrections de profil permettant de minimiser les coefficients dynamiques et/ou les fluctuations des écarts de transmission quasi-statiques sont recherchées et on montre qu'une bonne approximation de ces familles de solutions peut s'exprimer simplement.

III.2. Cas d'un système à un seul étage

Comme indiqué dans le chapitre I, les excitations d'un système à un seul engrènement sont liées aux fluctuations de l'erreur de transmission sous charge (TE) qui, elle-même, est fonction des écarts de rigidité de l'engrènement, des écarts de forme des dentures, des erreurs de montages, des pertes de contact à la denture... L'erreur de transmission sous charge est définie par la superposition de l'erreur de transmission quasi-statique sans charge ($NLTE$) et des effets de déformations torsionnelles des nœuds liés aux roues dentées, à une vitesse de rotation donnée:

$$TE = \mathbf{W}^T \mathbf{X} + NLTE \quad (\text{III.1})$$

\mathbf{X} est la solution du système II.49.

\mathbf{W} est un vecteur de projection, contenant principalement des zéros, sauf aux rangs correspondant aux degrés de rotation suivant l'axe \vec{z} de nœuds liés aux roues. Ces composantes sont, respectivement, Rb_1 et Rb_2 .

De plus, il est généralement admis que la variation temporelle des écarts de transmission quasi-statique (vitesse de rotation très faible), notées TEs , est assez bien corrélée avec le niveau de bruit et de vibrations généré par l'engrenage.

$$TEs = \mathbf{W}^T \mathbf{X}_s + NLTE \quad (\text{III.2})$$

Avec \mathbf{X}_s est la solution quasi-statique du système II.49.

Une des premières étapes de réduction des nuisances consiste à réduire l'amplitude ou le RMS de TEs .

Dans le cas de dentures étroites et pour de faibles écarts d'orientation des roues, l'évolution des écarts de transmission quasi-statique en fonction du temps peut être exprimée sous la forme suivante [1]:

$$TE_s^*(\tau) = \frac{1 - \int_{M \in L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) \cdot e^*(M) dM}{\cos \beta_b \int_{M \in L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) dM} \quad (\text{III.3})$$

En supposant une correction de profil linéaire et symétrique, il est possible de déterminer les paramètres de la correction de profil qui minimisent les fluctuations de TEs . Ces résultats ont d'abord été montrés dans le cas où la raideur linéique est supposée constante [4, 5, 73, 2, 1], puis dans un cas plus réaliste en utilisant les modèles de Weber et Banachek [3, 5].

III.2.2. Courbe maitresse et courbe maitresse modifiée

Les corrections de profil sont choisies linéaires en tête de dent et identiques sur le pignon et la roue (corrections symétriques) pour des dentures droites ou hélicoïdales. Deux paramètres suffisent à caractériser ce profil de correction (Figure III-1) :

- E : la profondeur maximale de correction ;

- Γ : la longueur de correction, exprimée sous la forme du rapport de la longueur du segment d'engrènement où la correction est effective, sur la longueur de conduite apparente.

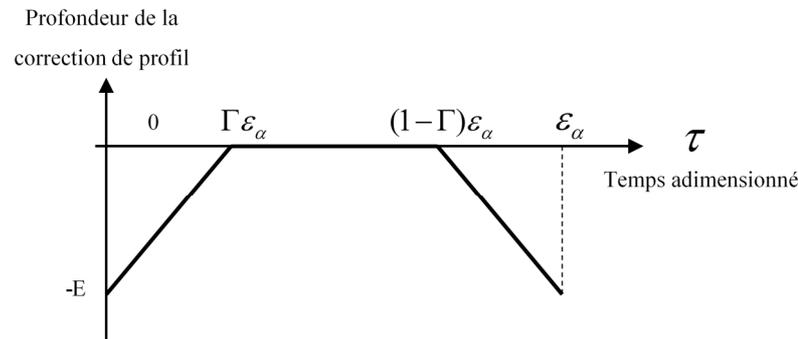


Figure III-1 : Définition des paramètres de correction de profil

Pour un modèle où la raideur linéique d'engrènement est supposée constante, un ensemble de correction rendent TEs constante. Les paramètres adimensionnels de cette famille sont définis par le système III.2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_L} \right)_{opt} = \gamma_{opt} = \frac{\chi}{2\chi - 1} \\ \chi \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_{opt} = \frac{\gamma}{2\gamma - 1} \\ \gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_L} \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Où } \chi = \frac{E^*}{\varepsilon_\alpha} = \frac{E}{\delta_{m0}\varepsilon_\alpha} \text{ et } \Gamma_L = 1 - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}.$$

Cette équation conduit à une courbe originale, adimensionnée, elle est appelé « courbe maîtresse ». Elle est représentée sur la Figure III-2 par la courbe en pointillés. Il est à noter que ces corrections sont optimales pour une charge donnée.

Dans un second temps, la formule (III.2) a été adaptée pour un modèle utilisant des raideurs d'engrènement linéiques variables en fonction de la position du contact. Pour chaque position, cette raideur équivalente résulte de 3 raideurs placées en séries : raideur de fondation et de flexion de la dent du pignon, raideur de contact, raideur de fondation et de flexion de la dent de la roue. Chacun de ces termes est estimé en utilisant les relations de Weber & Banaschek

[17]. L'inconvénient principal de cette méthode tient au nombre important de calcul à réaliser. A partir de cette approche, une approximation de la raideur d'engrènement linéique a été réalisée [5] et mis sous la forme :

$$k_{M_{00}}(\tau) = k_0 \left[-1.8 \left(\frac{\tau}{\varepsilon_\alpha} \right)^2 + 1.8 \frac{\tau}{\varepsilon_\alpha} + 0.7 \right] \quad (\text{III.5})$$

Où k_0 est la valeur de la raideur moyenne, τ est le temps adimensionné par la période d'engrènement et M_{00} est un point de contact qui se trouve sur la ligne d'engagement à $\tau = 0$.

Dans ce cas, une approximation des paramètres de corrections qui minimisent le RMS de *TEs* est donnée [5] sous la forme :

$$\begin{cases} \chi = \frac{E^*}{\varepsilon_\alpha} = \frac{\gamma}{2\gamma-1} \{1.3 - 1.8\Gamma_L [\Gamma_L \gamma(2-5\gamma) + 3\gamma - 1]\} \\ \gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_L} \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[\end{cases} \quad (\text{III.6})$$

La représentation graphique de cette équation est appelée par la suite « courbe maîtresse modifiée » (Figure III-2).

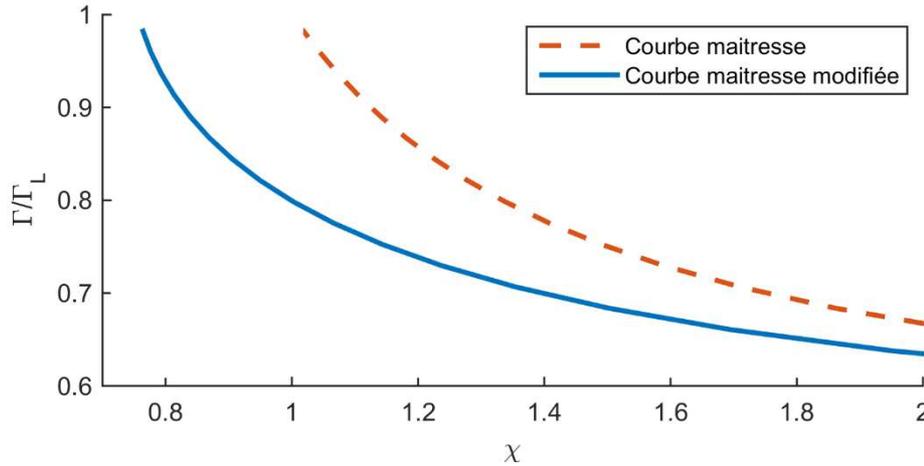


Figure III-2 : Courbe maître et courbe maître modifiée présentant l'ensemble des corrections de profil optimales en termes de longueur et de profondeur de correction adimensionnelles [5]

Les corrections de profil définies par la courbe maître modifiée minimisent le RMS de TEs mais, a priori, ne l'annulent pas. Pour ces corrections, les sources d'excitation sont affaiblies et on peut s'attendre à ce que les nuisances générées soient les plus faibles. Dans la suite de ce chapitre, pour tous les modèles utilisés, la raideur d'engrènement linéique sera toujours estimée par les relations de Weber & Banaschek [17].

III.3. Système à deux étages

III.3.1. Erreur de transmission quasi-statique locale et critère d'optimisation équivalent

Pour chaque étage d'engrènement (m), on définit une erreur de transmission quasi-statique locale (TEs_m) par la superposition de l'erreur de transmission quasi-statique sans charge locale ($NLTE_m$) et des effets de déformations torsionnelles à faible vitesse de rotation :

$$TEs_m = \mathbf{W}_m^T \mathbf{X}_s + NLTE_m \quad (\text{III.7})$$

L'étage d'engrènement m étant composé d'un pignon r et une roue $r+1$, le vecteur de projection \mathbf{W}_m contient des zéros sauf aux rangs correspondant aux degrés de rotation suivant \bar{Z} des roues r et $r+1$ où les composantes sont, respectivement, Rb_r et Rb_{r+1} .

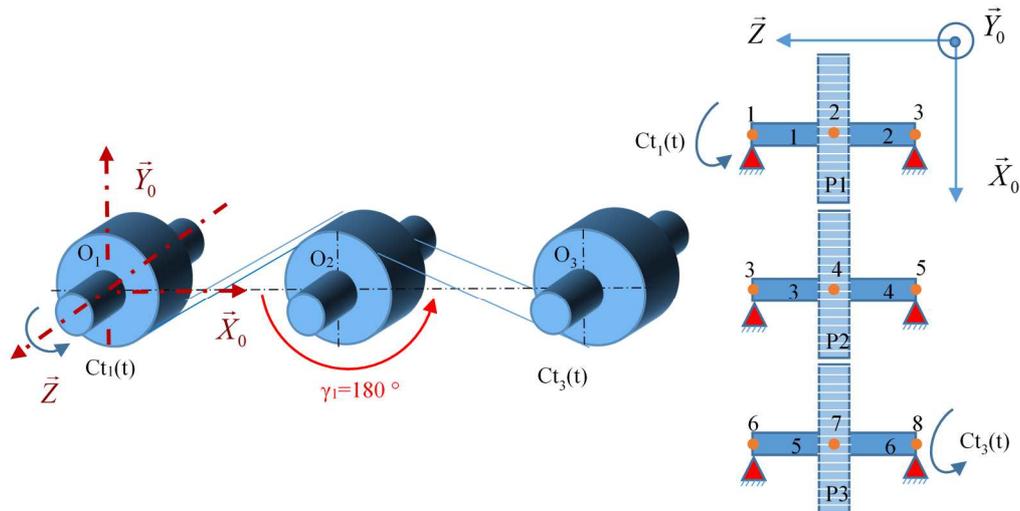
En vue d'une optimisation selon un seul critère, on construit à partir des erreurs de transmission quasi-statiques locales, un paramètre d'évaluation global qui tient compte d'éventuel couplage entre engrènements. Ce critère global est défini par la relation (III.8) :

$$P1 = \underset{1 \leq i \leq N_{\text{étage}}}{\text{moy}} (RMS(TE_{S_i})) \quad (\text{III.8})$$

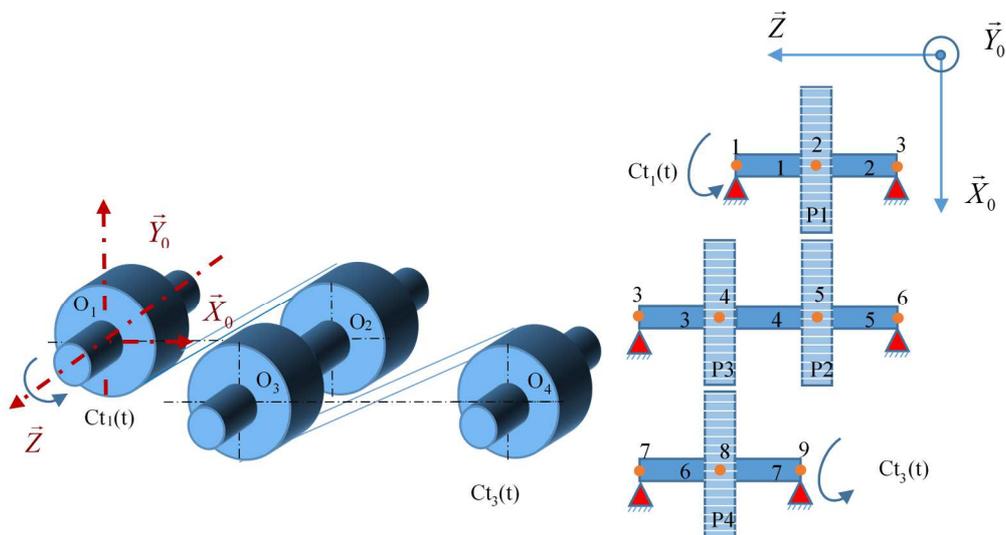
Dans cette étude, la recherche de la solution optimale qui minimise ce critère équivalent est réalisée par l'intermédiaire d'un Algorithme Génétique (AG) définie dans le chapitre I.

III.3.2. Modèles d'engrènement et leurs caractéristiques géométriques et de fonctionnement

Les deux modèles étudiés dans ce paragraphe sont des trains d'engrenages double étages de réduction à engrènements en cascade (modèle A) et décalés (modèle B). Le réducteur A comporte 9 nœuds à 6 ddl et 6 éléments d'arbres alors que le réducteur B comporte 10 nœuds à 6 ddl et 7 éléments d'arbres. L'environnement mécanique est simplifié puisque les éléments d'arbres ont des sections constantes sur l'intégralité de leur longueur et sont supportés par des paliers placés à leurs extrémités. Les trois lignes d'arbres des deux modèles sont contenues dans un même plan ($\gamma_1 = 180^\circ$). On note que ce paramètre influe sur la direction des efforts d'engrènement et des efforts aux paliers et gère la position relative entre engrènements dans le plan de base de chaque engrenage.



a) Modèle A



b) Modèle B

Figure III-3 : Modèles à deux étages d'engrenements a) en cascade et b) décalés

Les caractéristiques géométriques des éléments engrenages des deux modèles sont récapitulées dans le Tableau III.1. L'entraxe de fonctionnement sans jeu est utilisé chaque fois.

Tableau III.1 : Caractéristiques géométriques des éléments engrenages

	<i>Modèle A</i>			<i>Modèle B</i>			
	<i>Pignon1</i>	<i>Pignon2</i>	<i>Pignon3</i>	<i>Pignon1</i>	<i>Pignon2</i>	<i>Pignon3</i>	<i>Pignon4</i>
<i>Nombre de dents</i>	50	61	48	50	61	48	41
<i>Largeur (mm)</i>	14	15	19	14	15	19	20
<i>Angle de pression (deg)</i>	20			20			
<i>Angle d'hélice (deg)</i>	0 (droite)			0 (droite)			
<i>Module (mm)</i>	2.54			2.54			
<i>Coefficient de saillie</i>	1			1			
<i>Coefficient de creux</i>	1.4			1.4			
<i>Coefficient de déport</i>	0			0			
<i>Couple moteur (Nm)</i>	300			300			
<i>Rapport de conduite</i> ε_a	1.77 pour l'étage 1 1.76 pour l'étage 2			1.77 pour l'étage 1 1.73 pour l'étage 2			
<i>Déflexion statique moyenne</i>	27 μm pour l'étage 1 25 μm pour l'étage 2			27 μm pour l'étage 1 26 μm pour l'étage 2			

En se référant à la numérotation des éléments d'arbre dans la Figure III-3, les caractéristiques géométriques de ces derniers pour les deux modèles A et B sont fournis dans le Tableau III.2 suivant :

Tableau III.2 : Caractéristiques géométriques des éléments d'arbres des modèles A et B

<i>Élément d'arbre</i>	<i>Modèle A</i>		<i>Modèle B</i>	
	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>
1	50	30	50	30
2	50	30	50	30
3	40	20	40	20
4	40	20	45	20
5	70	40	40	20
6	70	40	70	40
7	X	X	70	40

Les 6 paliers des deux modèles d'engrènement sont identiques, leurs raideurs radiales et axiales sont, respectivement, prises égales à 10^9N/m et 10^5N/m . Les inerties du moteur et du récepteur sont, respectivement, égales à $30000\text{ kg}\cdot\text{mm}^2$ et $10000\text{ kg}\cdot\text{mm}^2$. Pour les deux modèles, les roues dentées sont centrées entre les paliers et la résolution dynamique des équations de mouvement a été faite en utilisant un facteur d'amortissement identique pour tous les modes, égale à 10%. Le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ est pris confondu avec le repère local de l'étage 1.

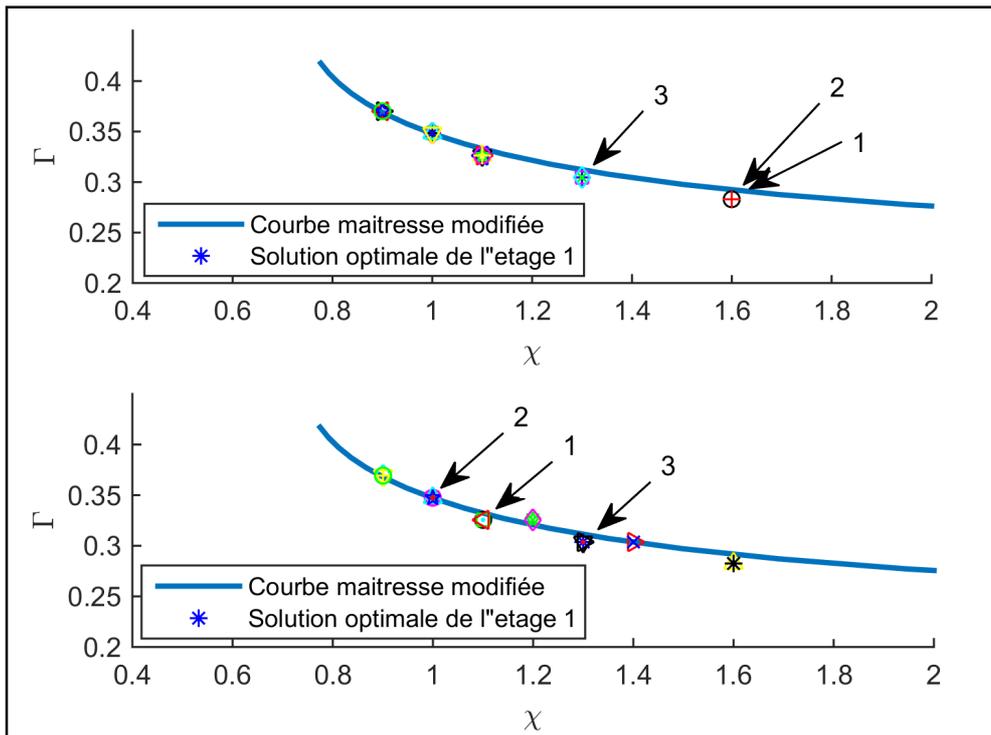
III.3.3. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique

Dans cette partie, on cherche le lieu où le critère P1 (moyenne des RMS des erreurs de transmission quasi-statiques locales) est minimum pour chacun des modèles A et B en adoptant des corrections de profil linéaires et symétriques.

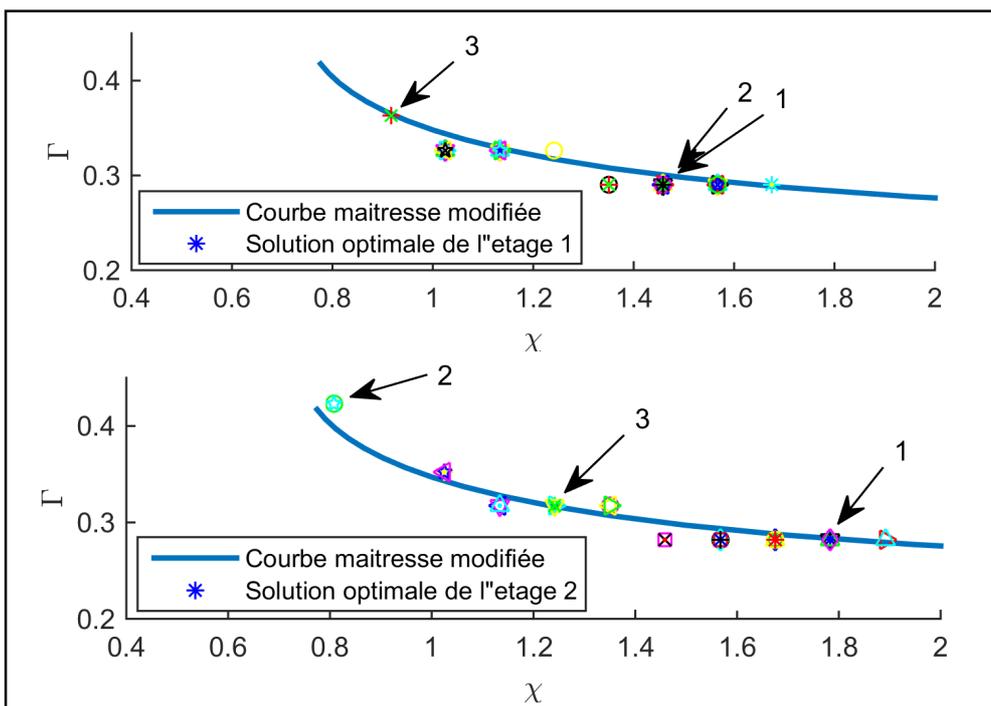
Cette recherche étant réalisée pour une seule vitesse de rotation, le temps d'exécution de la simulation pour une géométrie donnée est faible. Cela permet de réaliser la recherche des solutions $(\Gamma_1, E_1, \Gamma_2, E_2)$ optimales par un balayage sur tout l'espace de recherche. Dans ce cas, on est sûr d'évaluer tous les types combinaisons de corrections (longues, courtes et moyennes)

possibles, appliquées, simultanément, sur les deux étages d'engrènement. Le balayage a été lancé pour 12^4 combinaisons ($\Gamma_1, E_1, \Gamma_2, E_2$). Cette densité est jugée suffisante et ne nécessite pas une recherche plus fine des solutions.

Les combinaisons pour lesquelles le critère P1 est inférieur ou égale à $0.8 \mu\text{m}$ pour le modèle A et à $0.53 \mu\text{m}$ pour le modèle B sont retenues comme étant les meilleures. Ces résultats sont illustrés sur la Figure III-4 où chaque solution est représentée par un symbole et une couleur propre. Les flèches et les chiffres permettent de suivre les 3 meilleures combinaisons.



a) Modèle A : Deux étages d'engrènement en cascade



b) Modèle B : Deux étages d'engrènement décalés

Figure III-4 : Superposition des solutions optimales P1 trouvées par le balayage numérique et la solution analytique présentée par la courbe maître modifiée pour les deux étages du a) modèle A et b) modèle B

L'examen des résultats obtenus montre que les solutions optimales issues du balayage sont localisées dans le voisinage immédiat des courbes maitresses modifiées de chaque étage d'engrènement. Ces résultats attestent de la robustesse de la courbe maitresse modifiée pour le choix de corrections de profil qui atténuent les variations des écarts de transmission quasi-statiques, que les engrènements soient en cascade (modèle A) ou décalés (modèle B).

De plus, cette étude montre que pour les modèles A et B, toutes les combinaisons des types de corrections (courte, moyenne et longue) sont possibles et assurent la minimisation des fluctuations des TEs des deux étages d'engrènement. Les Figure III-5 et Figure III-6 représentent les variations temporelles des TEs en présence des différentes combinaisons de corrections de profil sur les deux étages d'engrènement des modèles A et B. Les évolutions des écarts de transmission quasi-statique sous charge sont représentées dans le cas sans correction et pour 3 corrections optimales. On note que les corrections courtes sur les deux étages d'engrènement conduisent à des fluctuations des TEs légèrement plus faibles, en second viennent les corrections moyennes et enfin les corrections longues.

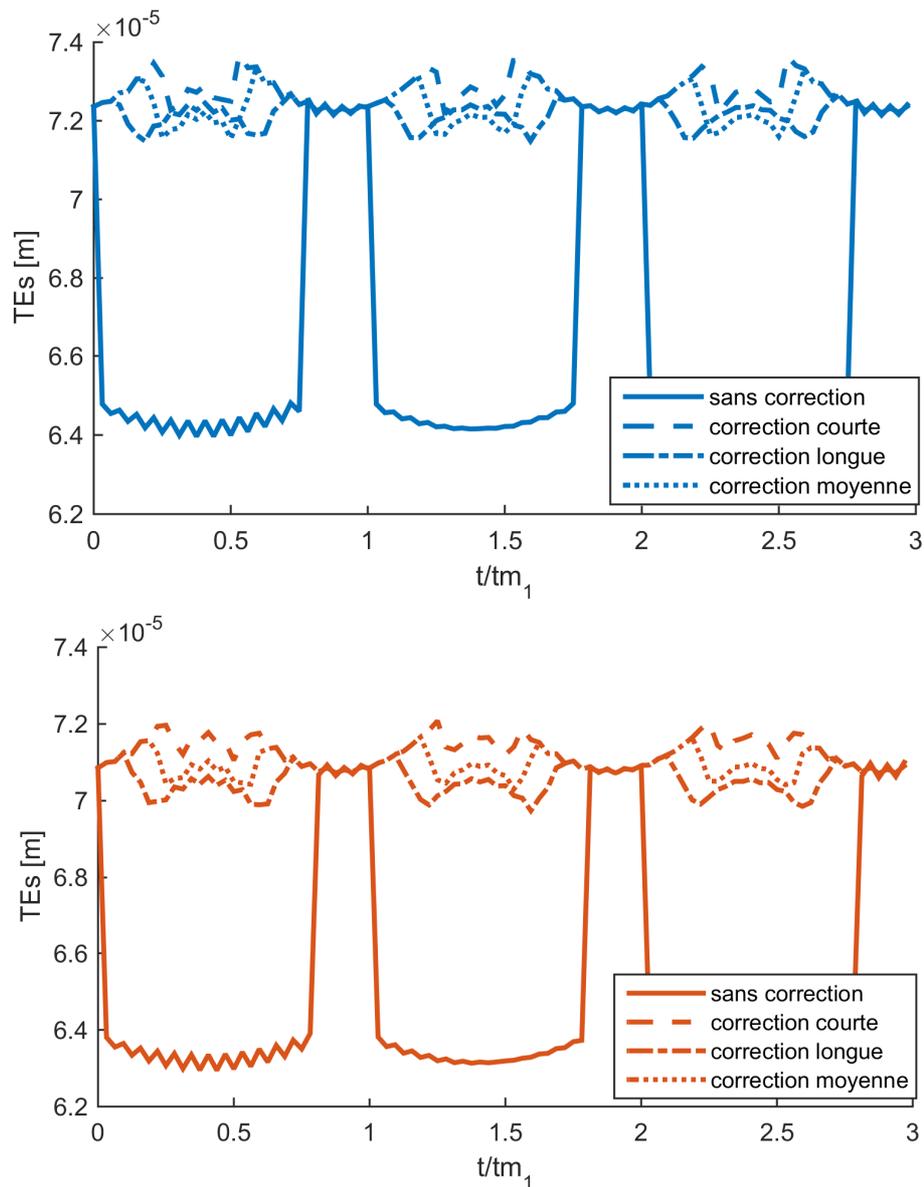


Figure III-5: Évolution des TEs au cours du temps en fonction des corrections de profil appliquées simultanément sur les deux étages d'engrènement du Modèle A

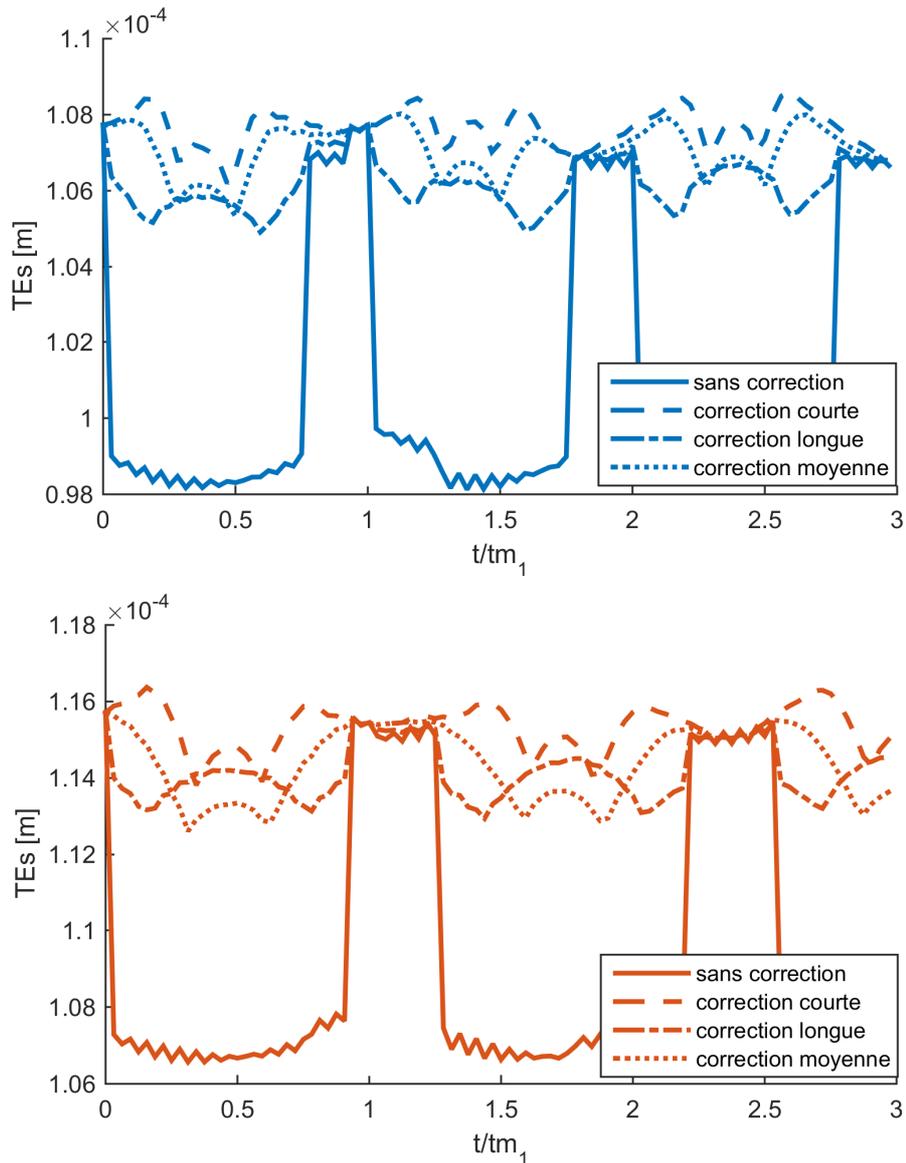


Figure III-6 : Évolution des TEs au cours du temps en fonction des corrections de profil appliquées simultanément sur les deux étages d'engrènement du Modèle B

III.3.4. Optimisation du coefficient dynamique

Pour des vitesses de rotation élevées, les effets dynamiques à la denture peuvent devenir du même ordre de grandeur que les efforts de contact. Lors de l'étape de conception, il est nécessaire de chercher à minimiser les valeurs maximales des efforts dynamiques sur toute la plage des vitesses de fonctionnement. Pour un système multi-engrènement, on retient pour chaque étage le coefficient dynamique R_{ij} :

$$R_{ij} = \max_{\tau} \left((F_{dyn}(\tau))_{ij} \right) / (F_{statique})_i \quad (\text{III.9})$$

Où le premier indice (i) est relatif au numéro de l'étage et de second (j) à la vitesse de rotation du pignon considérée. Le critère d'optimisation global est la moyenne des coefficients dynamiques des différents étages d'engrènement, sur la plage de vitesses critiques potentielles du système sans correction. Le critère à minimiser est défini par :

$$P2 = \underset{\substack{1 \leq i \leq N_{\text{étages}} \\ \Omega_{\min} \leq j \leq \Omega_{\max}}}{\text{moy}} (R_{ij}) \quad (\text{III.10})$$

La convergence vers la solution optimale est assurée via un algorithme génétique (AG) en adoptant des corrections de profil linéaires et symétriques sur chaque étage d'engrènement. Dans le but d'élargir l'ensemble des solutions proposées par l'AG, l'optimisation est lancée sur trois sous-espaces de recherche correspondant à des domaines de profondeurs de correction différents (Figure III-7). Lors d'une recherche, le type de domaine (correction peu profonde, profondeur moyenne et profondeur importante) est le même pour chaque étage.

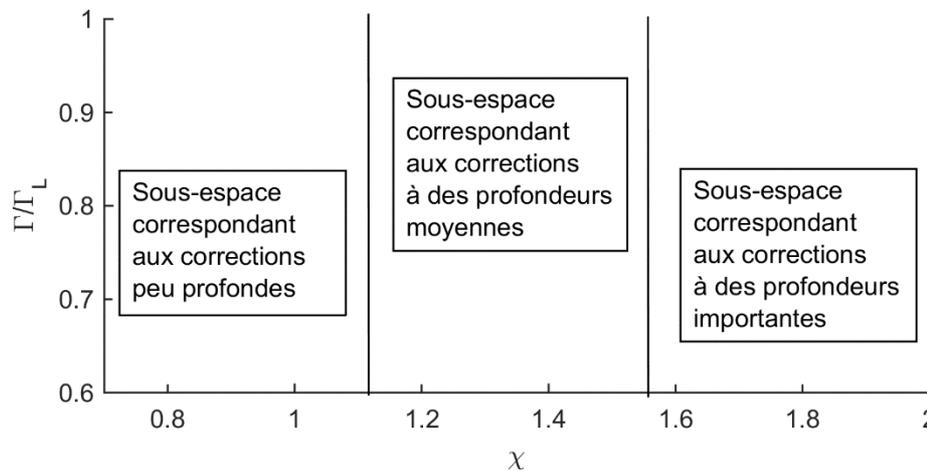


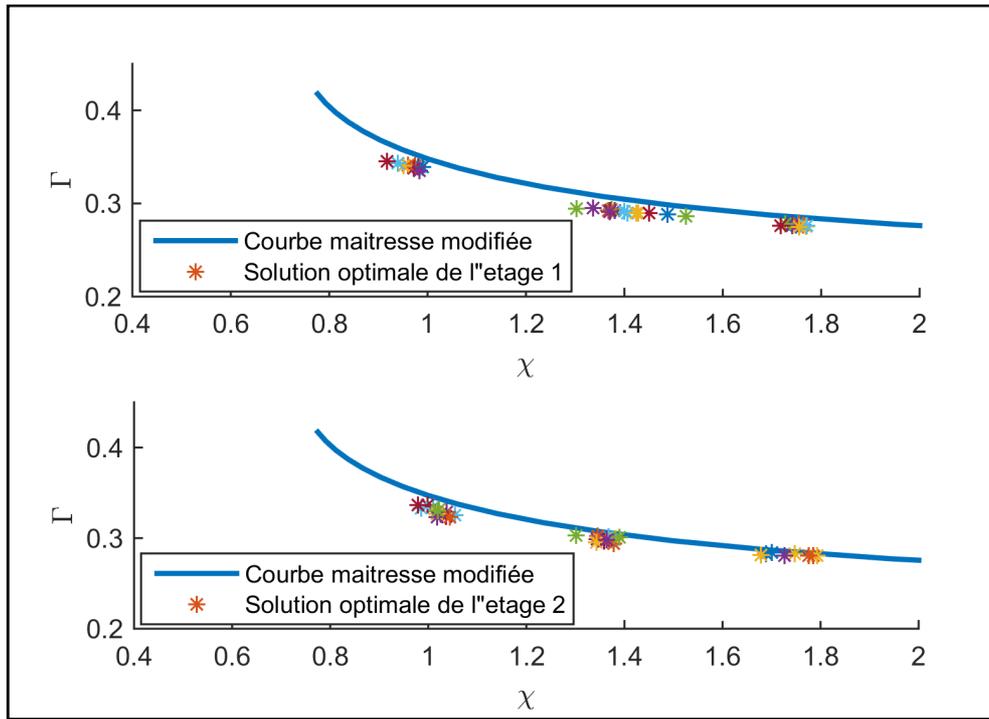
Figure III-7 : Discretisation de l'espace de recherche en sous-espaces

En ce qui concerne les simulations relatives aux modèles A et B, une population initiale est choisie aléatoirement dans tous les sous-espaces de recherche. Pour chaque individu $(\Gamma_1, E_1, \Gamma_2, E_2)$, le critère de fitness P2 est estimé sur la plage de vitesses de 1500 à 7500 tr/min pour le modèle A et sur l'intervalle 2000 à 10 000 tr/min pour le modèle B. Ces plages englobent

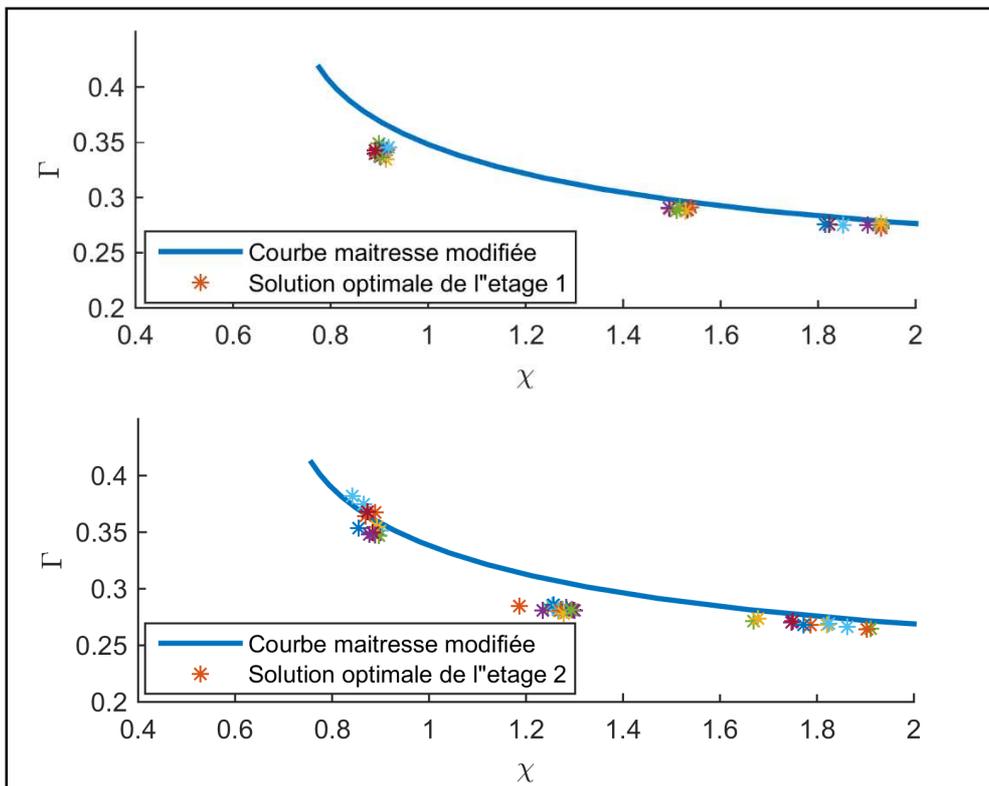
les vitesses critiques potentielles des chaque modèle sans corrections. Les paramètres de l'AG lors de la procédure d'optimisation sont fixés pour tous les sous-espaces de recherche de la façon suivante:

- Taille de la population : 48
- Nombres de générations : 5
- Individus générés par croisement : 25% de la population
- Individus générés par mutation : 25% de la population

A l'issue de son exécution, le tiers des meilleurs individus sont conservés et les couples (χ_i, Γ_i) sont représentés sur la Figure III-8 par des astérisques (*). Les corrections optimales sont remarquablement proches des courbes maitresses modifiées de chaque étage d'engrènement. Il est important de noter que, au premier ordre et pour des engrènements en cascade ou décalés, le critère quasi-statique P1 et le critère dynamique P2 conduisent au même domaine des corrections optimales et ce domaine est assez bien représenté par la courbe maîtresse modifiée. Sous certaines conditions (régularité de la charge, ...), cela permettra au concepteur de choisir directement des corrections de profil qui minimisent quasiment le RMS des *TEs* et les coefficients dynamiques.



a) Modèle A : Deux étages d'engrènement en cascade



b) Modèle B : Deux étages d'engrènement décalés

Figure III-8 : Superposition des solutions numériques optimales trouvées par l'AG pour le critère P2 et les courbes maîtresses modifiées pour les deux étages du a) modèle A et b) modèle B

Dans le domaine des corrections peu profondes, les modifications optimales correspondent à des corrections longues et, dans le domaine des corrections profondes, ce sont les corrections courtes qui sont optimales.

III.3.5. Calcul de la réponse dynamique en présence des corrections optimales

La qualité des corrections optimales trouvées est illustrée en représentant l'effort dynamique avec et sans corrections. Différentes combinaisons de corrections de profil optimales, citées dans le Tableau III.3, ont été appliquées sur les deux étages d'engrèvements.

Tableau III.3 : Meilleures corrections optimales issue de l'AG

	<i>Modèle A</i>			<i>Modèle B</i>		
	<i>Etage1</i>	<i>Etage2</i>	<i>Critère P2</i>	<i>Etage 1</i>	<i>Etage 2</i>	<i>Critère P2</i>
Correction courte	$\Gamma_1 = 0.27$ $E_1 = 40 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.28$ $E_2 = 38 \mu\text{m}$	1.16	$\Gamma_1 = 0.27$ $E_1 = 44 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.26$ $E_2 = 38 \mu\text{m}$	1.13
Correction moyenne	$\Gamma_1 = 0.29$ $E_1 = 32 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.30$ $E_2 = 29 \mu\text{m}$	1.16	$\Gamma_1 = 0.29$ $E_1 = 35 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.28$ $E_2 = 27 \mu\text{m}$	1.14
Correction longue	$\Gamma_1 = 0.34$ $E_1 = 23 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.33$ $E_2 = 21 \mu\text{m}$	1.16	$\Gamma_1 = 0.34$ $E_1 = 21 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.35$ $E_2 = 19 \mu\text{m}$	1.19

Les courbes de réponse représentées Figure III-9 et Figure III-10 montrent une réduction des amplifications du maximum de coefficient dynamique sur toute la plage de vitesses de rotation de la roue motrice pour les différents types de corrections optimales. Ces évolutions confirment que le comportement dynamique des deux étages d'engrènement en présence des corrections courtes est légèrement meilleur qu'en présence des corrections moyennes et longues.

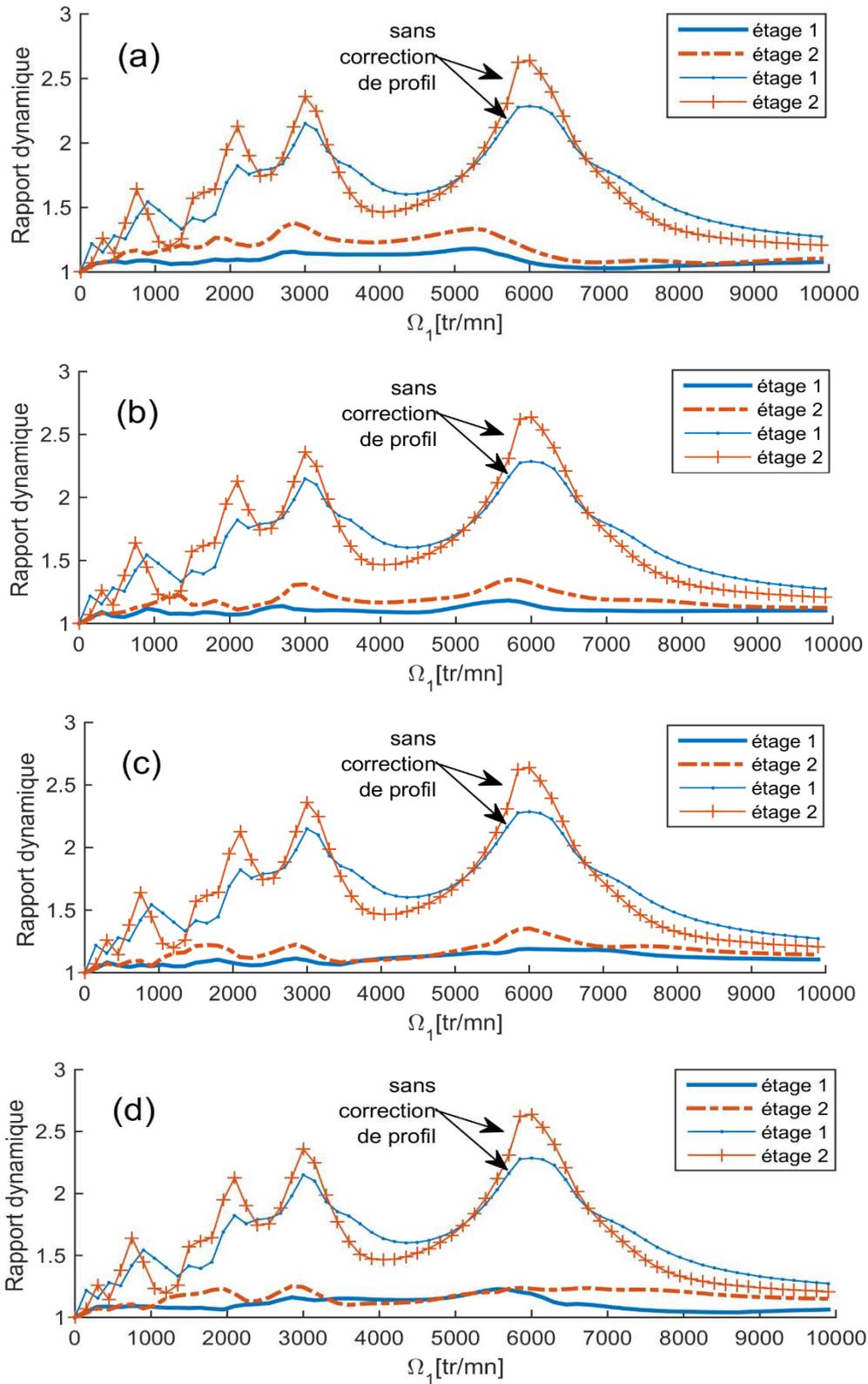


Figure III-9 : Évolutions des coefficients dynamiques du modèle A en présence de corrections de profil optimales a) courtes, b) moyennes, c) longues et d) courte et longue respectivement sur les étages 1 et 2

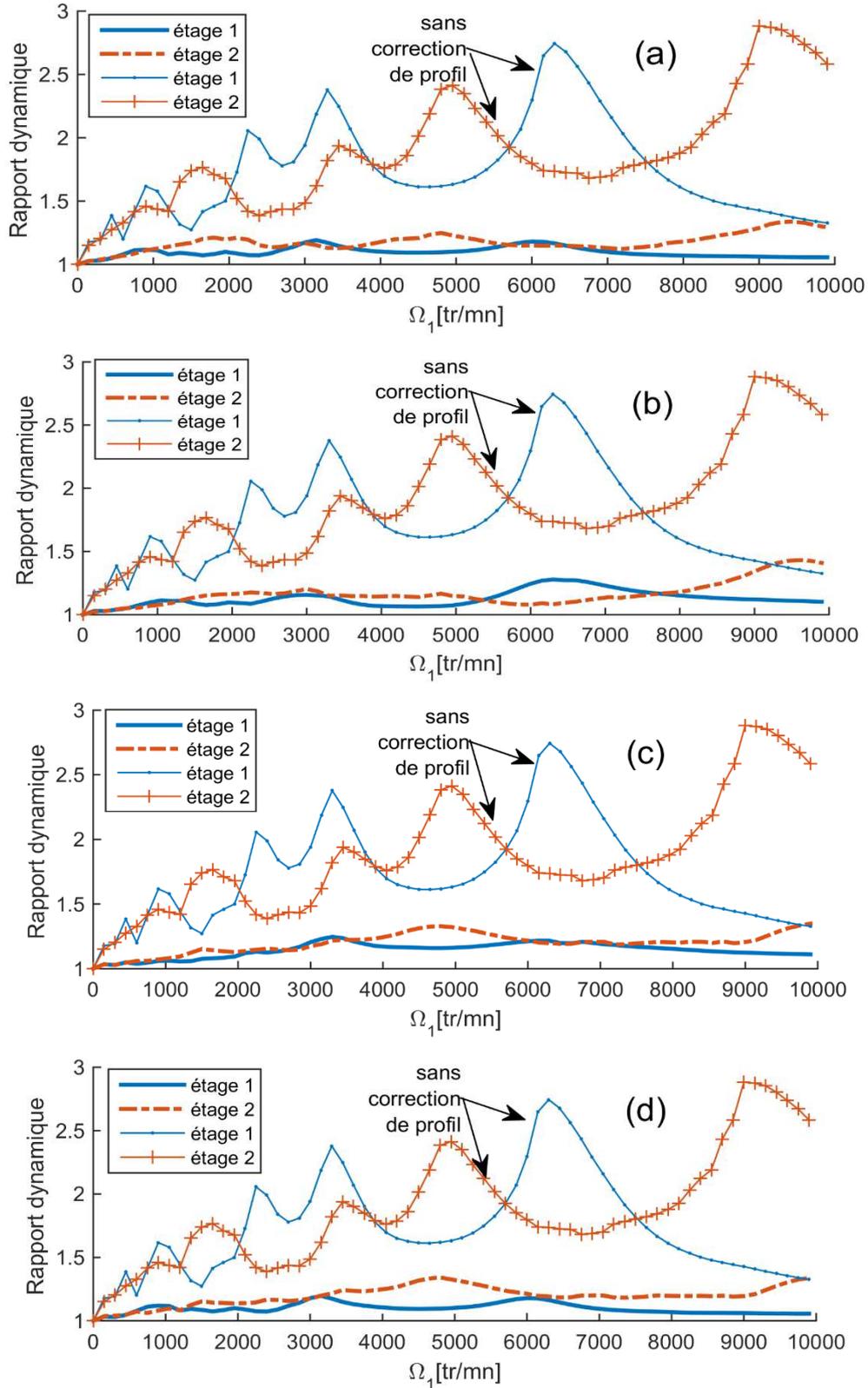


Figure III-10 : Évolutions des coefficients dynamiques du modèle B en présence de corrections de profil optimales a) courtes, b) moyennes, c) longues et d) courte et longue respectivement sur les étages 1 et 2

III.4. Modèles à 4 étages d'engrènement en cascades

III.4.1. Modèle d'engrènement et ses caractéristiques géométriques et de fonctionnement

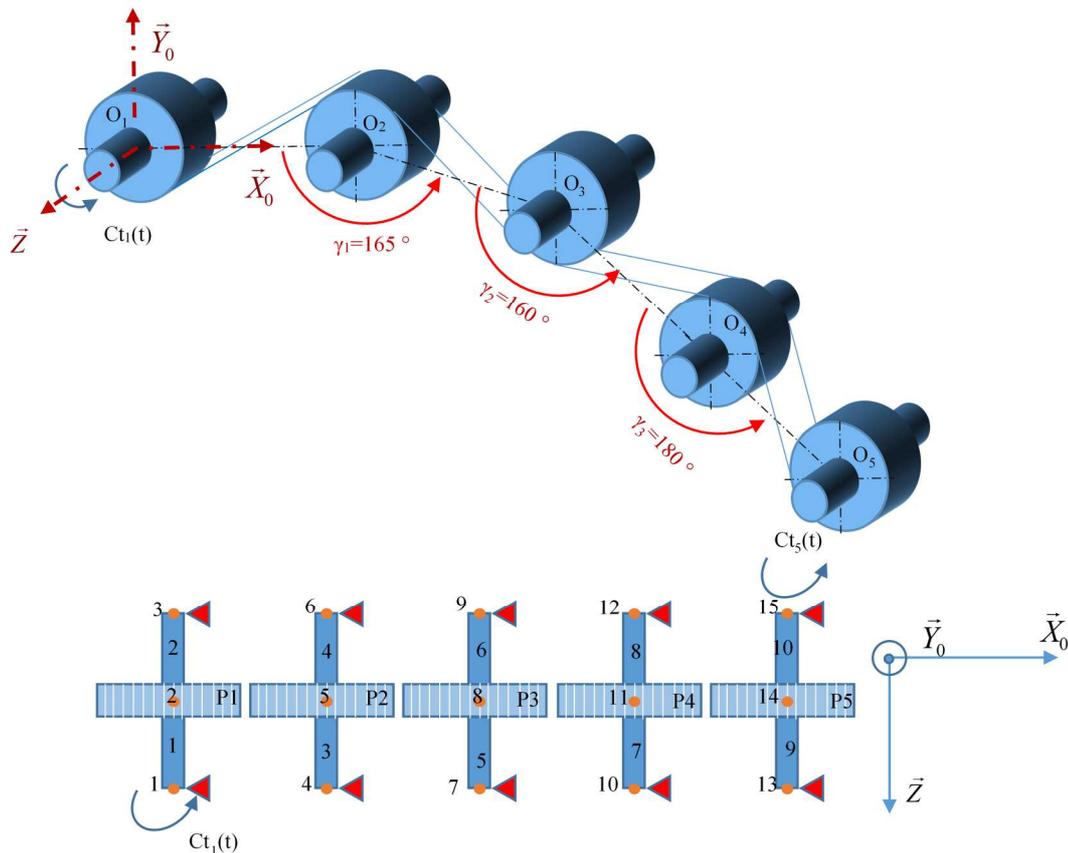


Figure III-11 : Modèle 3D à quatre étages d'engrènements en cascade

La Figure III-11 illustre un modèle d'engrènement constitué de 5 roues en cascade non alignées, à dentures droites. Chaque roue est liée par deux éléments d'arbres à sections constante sur toute leur longueur (un élément de poutre Timochenko de chaque côté). Les effets de traction-compression, flexion et de torsion sont pris en compte. Les arbres sont guidés à leurs extrémités par deux paliers à roulement, modélisés par des raideurs radiale et axiale pures. Un couple d'entrée et un couple résistant sont appliqués respectivement sur l'arbre 1 au nœud 3 et sur l'arbre 5 au nœud 15. Le modèle comporte 15 nœuds soit, au total, 90 degrés de liberté. La position relative des engrenages dans l'espace est donnée par les différents angles γ_1 , γ_2 et γ_3 définis entre les lignes joignant les centres des roues. La période d'engrènement est identique

pour tous les étages et le déphasage relatif entre engrènements est déterminé en utilisant les méthodes décrites dans le paragraphe II.2.4.6. Ces déphasages sont mis en évidence si l'on trace sur un même graphique les évolutions temporelles des raideurs d'engrènement (Figure III-12).

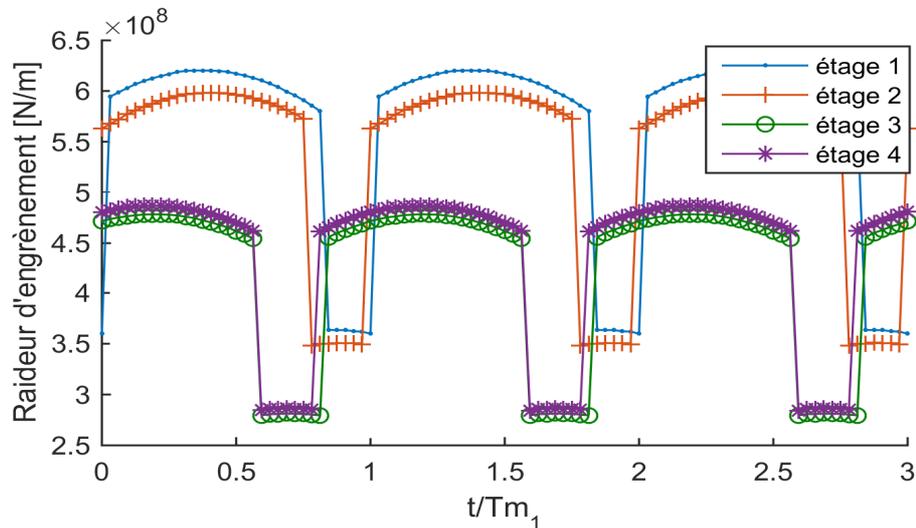


Figure III-12 : Raideurs des quatre étages d'engrènement

Les caractéristiques géométriques nominales des engrenages et des éléments arbres constituant le modèle sont résumées dans les Tableau III.4 et Tableau III.5. Un entraxe de fonctionnement sans jeu est utilisé pour tous les engrènements.

Tableau III.4 : Caractéristiques géométriques des éléments engrenages

	<i>Pignon 1</i>	<i>Pignon 2</i>	<i>Pignon 3</i>	<i>Pignon 4</i>	<i>Pignon 5</i>
<i>Nombre de dents</i>	84	71	48	49	63
<i>Largeur de denture (mm)</i>	19	21	19	16	18
<i>Module (mm)</i>	2.54				
<i>Angle de pression (°)</i>	20				
<i>Angle d'hélice (°)</i>	0 (denture droite)				
<i>Coefficient de saillie</i>	1.0				
<i>Coefficient de déport</i>	0.0				
<i>Coefficient de creux</i>	1.4				
<i>Couple moteur</i>	$C_{t1} = 500 \text{ Nm}$				
<i>Rapport de conduite ε_a</i>	1.82	1.77	1.74	1.77	
<i>Déflexion statique (μm)</i>	8.8	9.3	11.9	11.5	

Tableau III.5 : Caractéristiques géométriques des éléments arbres

<i>Elément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>	<i>Elément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>
1	75	70	6	60	45
2	75	70	7	60	50
3	65	60	8	60	50
4	65	60	9	65	55
5	60	45	10	65	55

III.4.2. Optimisation des corrections de profil

Dans le cas d'un fonctionnement sans correction (Figure III-13), les courbes de réponse montrent que les amplitudes des efforts dynamiques des étages 1 et 2 peuvent dépasser deux fois la valeur de l'effort statique correspondant. Ceci engendre des pertes de contact entre dentures et, par conséquent, des vibrations importantes dans tout le système.

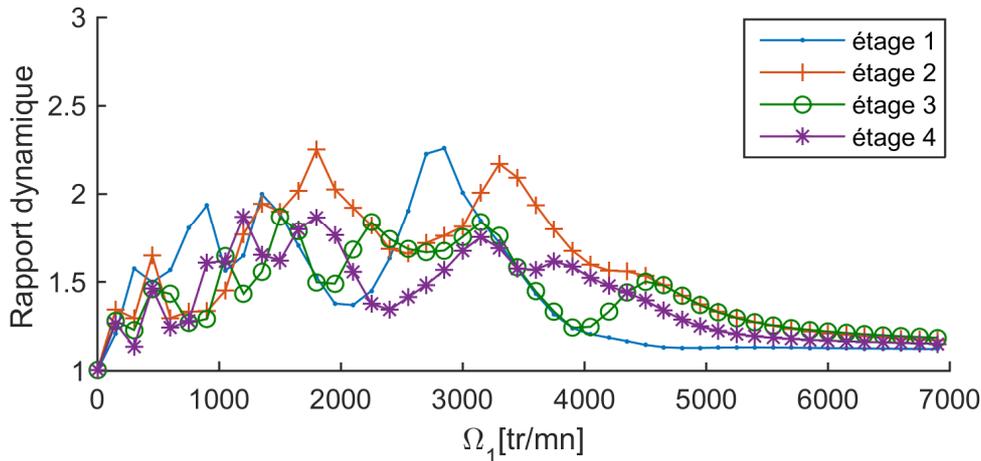


Figure III-13 : Courbes de réponse des coefficients dynamiques des quatre engrènements sans corrections de profil

Ce type de fonctionnement est à éviter et cela nécessite la détermination de corrections de profil adéquat. La recherche directe des meilleures corrections vis-à-vis du critère P2 en utilisant un Algorithme Génétique conduit à des temps de calcul prohibitifs. Considérant que le critère P1 est beaucoup plus rapide à estimer, une autre stratégie consiste à utiliser les résultats obtenus pour 2 étages :

1. On suppose que les corrections qui minimisent le critère P2, minimisent également le critère P1.
2. On recherche les corrections qui minimisent le RMS des erreurs de transmission quasi-statiques locales des 4 étages (équation III.8)
3. On vérifie que le niveau du critère P2 pour les corrections obtenues à l'étape précédente est largement inférieur à 2.

L'optimisation de la seconde étape consiste à appliquer, pour chaque étage d'engrènement, des corrections linéaires et symétriques en tête de la denture, caractérisées par des profondeurs de correction E_i et des longueurs de correction Γ_i .

La recherche est basée sur un AG. La population initiale est choisie aléatoirement dans chaque domaine de recherche. Comme précédemment, les trois sous-espaces de recherche sont définis par des profondeurs de corrections différentes (Figure III-7).

Les paramètres introduits dans l'AG lors de la procédure d'optimisation sont fixés pour tous les sous-espaces de recherche:

- Composition d'un individu: ($\Gamma_1, E_1, \Gamma_2, E_2, \Gamma_3, E_3, \Gamma_4, E_4$)
- Taille de la population : 144
- Nombres de générations : 6
- Individus générés par croisement : 25% de la population
- Individus générés par mutation : 25% de la population

Au final, le tiers des individus qui présentent la meilleure adaptation sont retenus. Les couple (χ_i, Γ_i) sont présentées, pour chaque étage d'engrènement, sur la Figure III-14 par des astérisques (*).

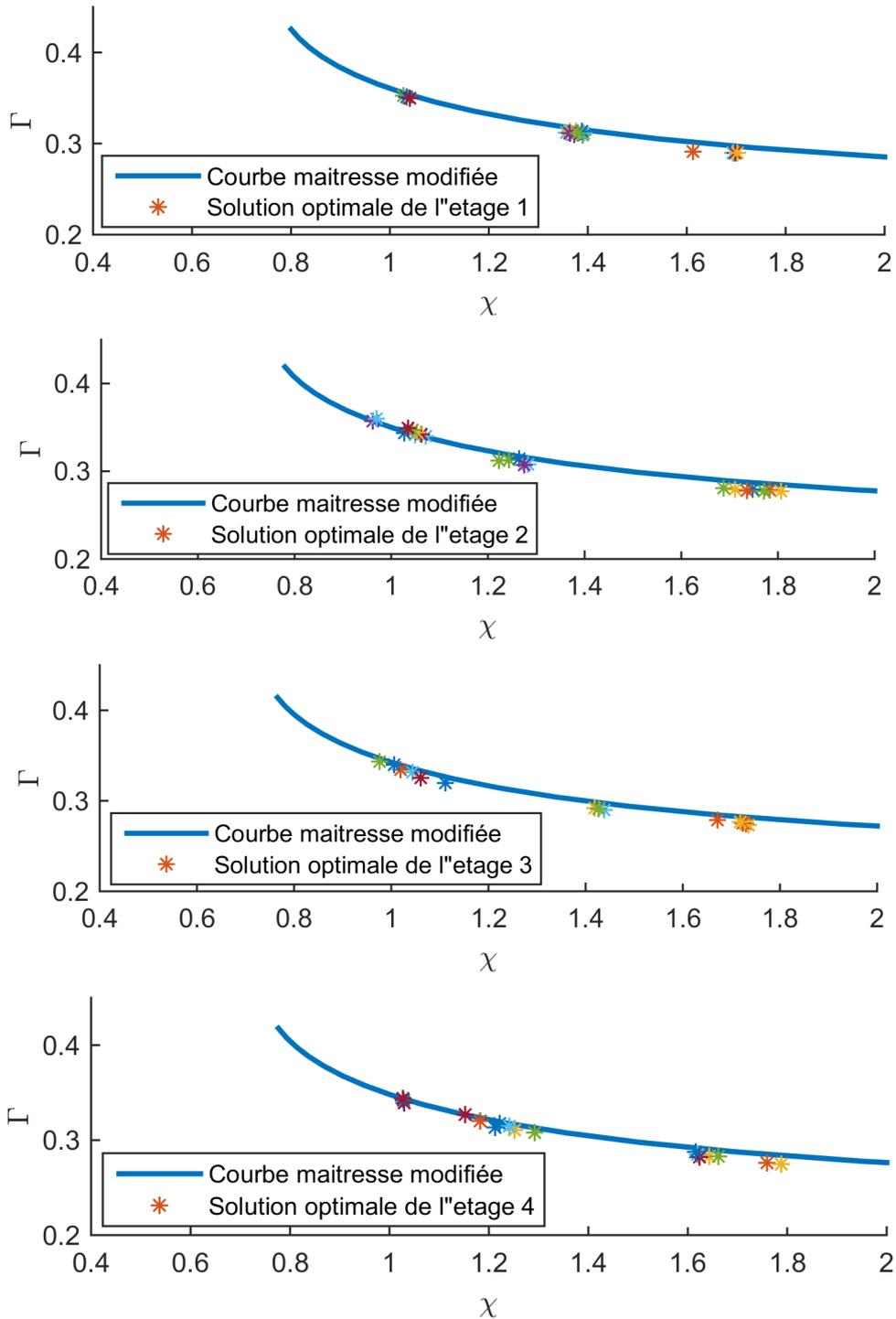


Figure III-14 : Comparaison entre les solutions optimales obtenues par l'AG pour le critère P1 et les courbes maitresses modifiées

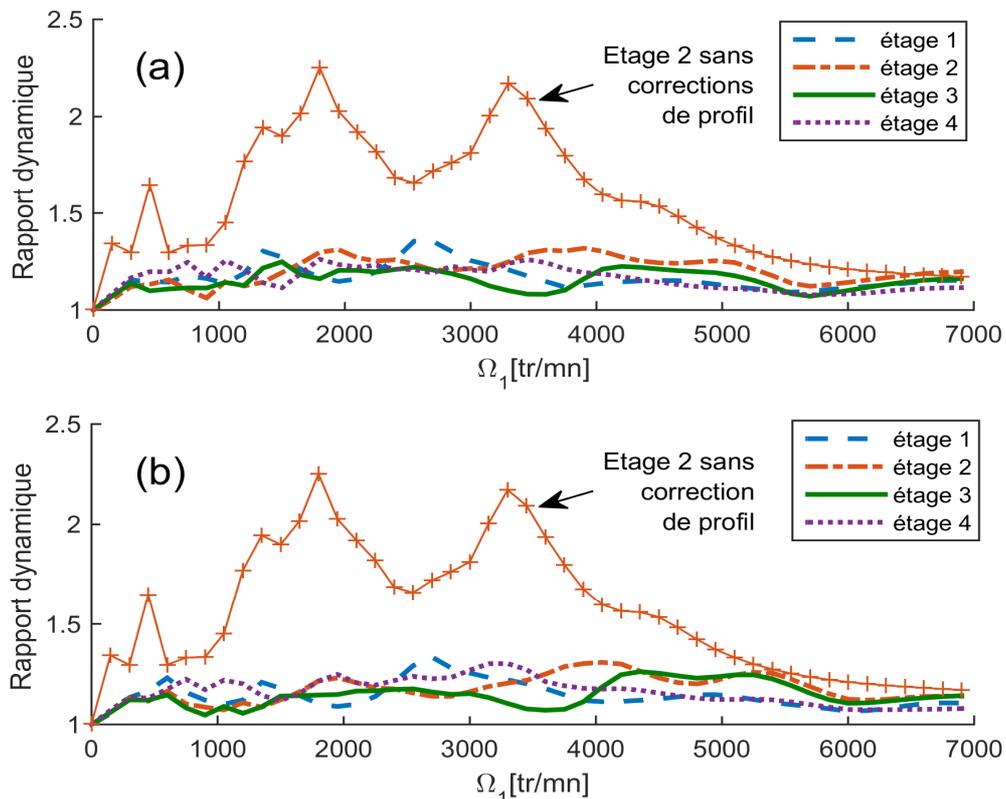
On remarque une agglomération d'individus tout le long de la courbe maitresse modifiée de chaque étage d'engrènement. Pour chaque domaine, les caractéristiques et la performance du meilleur individu sont données dans le Tableau III.6.

Tableau III.6 : Meilleures corrections optimales issue de l'AG

	<i>Etage 1</i>	<i>Etage 2</i>	<i>Etage 3</i>	<i>Etage 4</i>	<i>Critère P1</i>
Correction longue	$\Gamma_1 = 0.35$ $E_1 = 16 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.34$ $E_2 = 17 \mu\text{m}$	$\Gamma_3 = 0.33$ $E_3 = 21 \mu\text{m}$	$\Gamma_4 = 0.34$ $E_4 = 21 \mu\text{m}$	0.21 μm
Correction moyenne	$\Gamma_1 = 0.31$ $E_1 = 22 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.31$ $E_2 = 20 \mu\text{m}$	$\Gamma_3 = 0.29$ $E_3 = 29 \mu\text{m}$	$\Gamma_4 = 0.31$ $E_4 = 24 \mu\text{m}$	0.22 μm
Correction courte	$\Gamma_1 = 0.29$ $E_1 = 26 \mu\text{m}$	$\Gamma_2 = 0.28$ $E_2 = 28 \mu\text{m}$	$\Gamma_3 = 0.27$ $E_3 = 34 \mu\text{m}$	$\Gamma_4 = 0.28$ $E_4 = 33 \mu\text{m}$	0.29 μm

III.4.3. Efforts dynamiques en présence de corrections optimales

Les corrections de profil optimales cités dans le Tableau III.6 sont appliquées sur les quatre étages d'engrènement afin d'illustrer leurs qualités. Les courbes de réponses de la Figure III-15 présentent des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation de la roue motrice (roue 1), calculées avec et sans corrections.



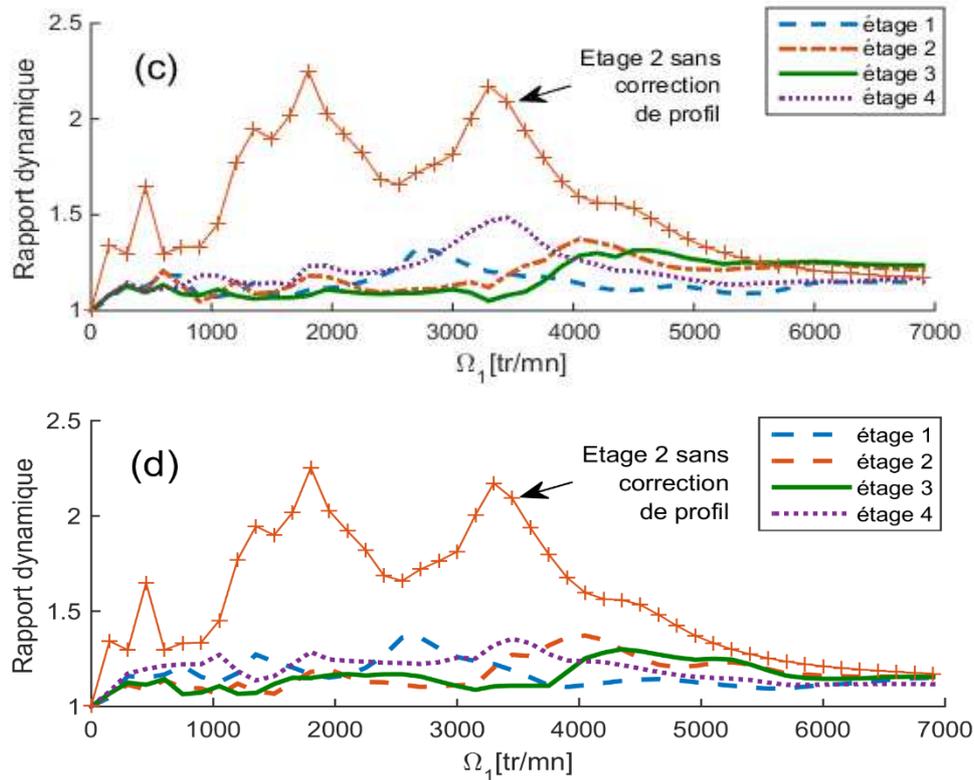


Figure III-15 : Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales a) courtes, b) moyennes, c) longues et d) courte, longue, moyenne et courte respectivement sur les étages 1, 2, 3 et 4

Les résultats montrent une amélioration significative et satisfaisante du comportement dynamique sur toute la plage de vitesses pour les différents types de corrections de profil appliquée sur les quatre étages d'engrènement. On peut déduire également que l'application des corrections de types différents, simultanément, sur les quatre étages d'engrènement ne détériore pas le critère d'optimisation comme le montre la Figure III-15d.

III.5. Application industrielle : Optimisation des corrections sur le modèle AGB Trent XWB composé de 6 étages d'engrènements

III.5.1. Présentation du modèle d'engrènement

L'AGB Trent XWB est une boîte de transmission « Accessory Gearbox » composée d'une chaîne d'engrènements multi-étages servant à transmettre de la puissance mécanique aux

différents équipements (générateurs électriques, pompes hydrauliques, pompes à carburant...) qui assurent le fonctionnement du moteur et de l'avion (Figure III-16). L'arrivée de la puissance motrice nécessaire à l'AGB est assurée par un système de transfert composé d'un arbre radial (ADS) qui prélève l'énergie mécanique sur le moteur et la transmet vers la boîte de renvoi d'angle (TGB) composée d'engrenages spiro-coniques, puis, vers l'AGB (Figure III-17).

La Figure III-18 présente le modèle tri-dimensionnellement de l'AGB. Il est composé de six étages d'engrènement à dentures droites, distribuées en trois cascades d'engrènements décalées. La position relative des roues dans l'espace est schématisée dans Figure III-19. Les caractéristiques des pignons utilisées dans cette étude diffèrent des caractéristiques réelles pour des raisons de confidentialité. Les arbres qui supportent des roues dentées, sont modélisés par des éléments de types poutres de Timochenko. Chaque arbre est positionné par des paliers à roulements à rouleaux simples liés au carter. Le système est entraîné par un moteur à couple variable dans le temps, lié à l'arbre 3 générant une puissance d'entrée qui sera transmise aux différents équipements via la chaîne d'engrènements. Le système, au cours de son fonctionnement, subit des variations de puissance liées à l'état de marche des équipements (variations de couples, annulation brusque de certains couples). On suppose dans cette étude que le couple moteur est constant et que tous les équipements sont en état de marche et stable. Les nœuds qui réalisent la jonction entre les arbres et les équipements ou le moteur procèdent un seul degré de liberté en rotation.

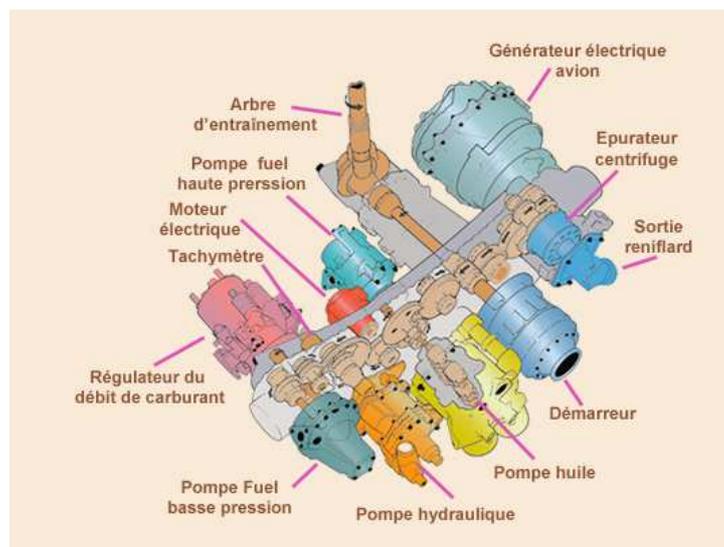


Figure III-16 : Boîte de transmission AGB et ses accessoires

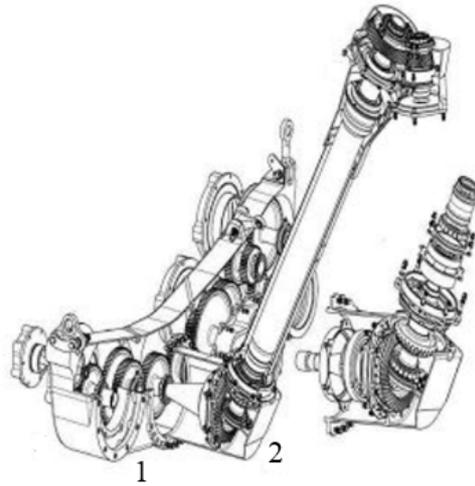


Figure III-17 : Ecorché de 1) AGB et 2) TGB

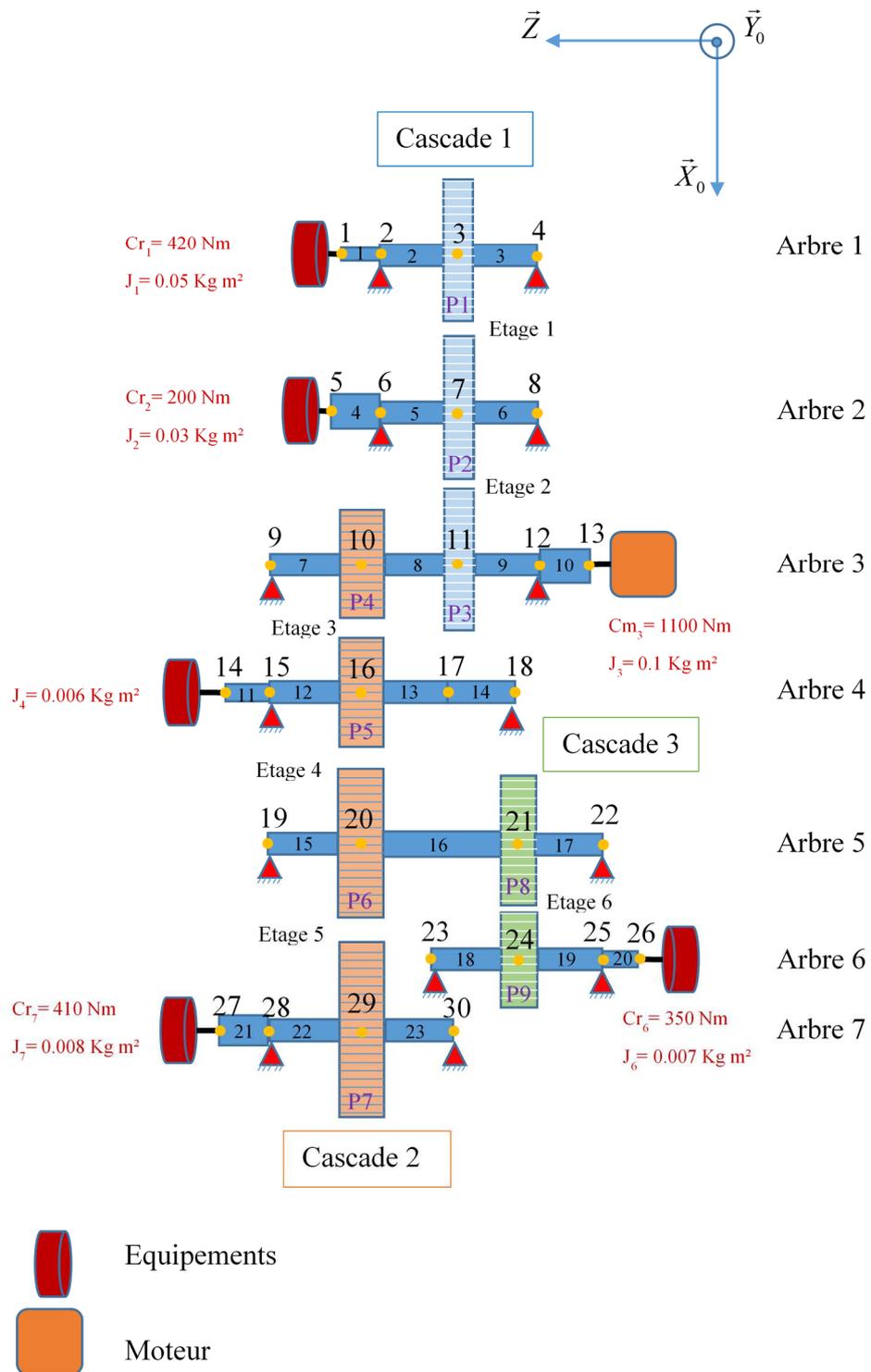


Figure III-18 : Modèle d'engrènement 3D de l'AGB

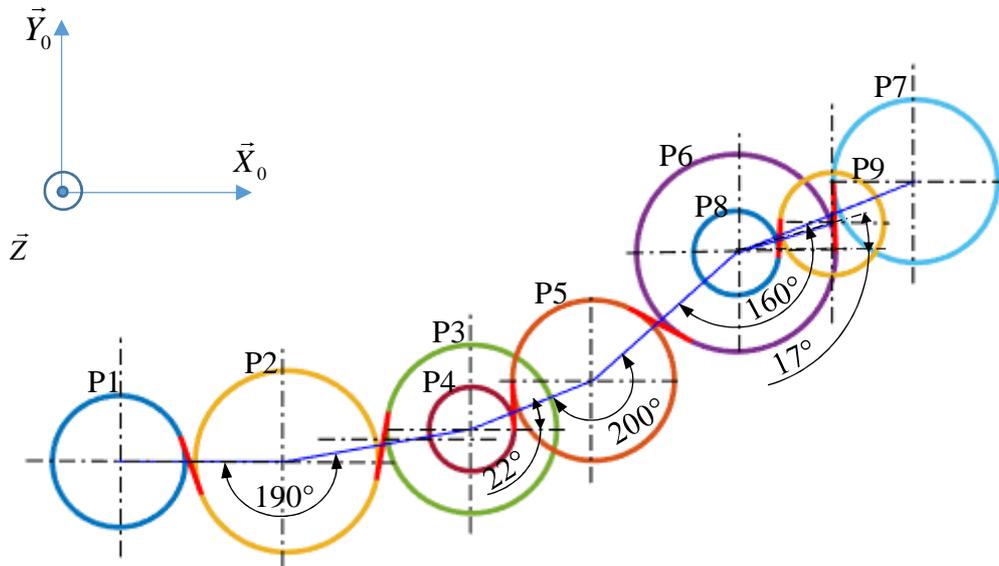


Figure III-19 : Positions relatives des roues dans l'espace

Les caractéristiques géométriques nominales des éléments engrenages et des éléments arbres constituant le modèle sont résumées dans les tableaux Tableau III.7, Tableau III.8,

Tableau III.9 et Tableau III.10. On adopte un entraxe de fonctionnement sans jeu pour tous les engrenements.

Tableau III.7 : Caractéristiques géométriques des engrenages de la cascade 1

	<i>Cascade 1</i>		
	<i>Pignon 1</i>	<i>Pignon 2</i>	<i>Pignon 3</i>
<i>Nombre de dents</i>	50	69	64
<i>Largeur de denture (mm)</i>	35	37	39
<i>Module (mm)</i>	2.54		
<i>Angle de pression (°)</i>	20		
<i>Angle d'hélice (°)</i>	0 (denture droite)		
<i>Coefficient de saillie</i>	1.0		
<i>Coefficient de déport</i>	0.0		
<i>Coefficient de creux</i>	1.4		
<i>Rapport de conduite ε_α</i>	1.78		1.80
<i>Déflexion statique (μm)</i>	7.4		9.6

Tableau III.8 : Caractéristiques géométriques des engrenages de la cascade 2

	<i>Cascade 2</i>			
	<i>Pignon 4</i>	<i>Pignon 5</i>	<i>Pignon 6</i>	<i>Pignon 7</i>
<i>Nombre de dents</i>	32	61	75	62
<i>Largeur de denture (mm)</i>	16	17	19	15
<i>Module (mm)</i>	2.54			
<i>Angle de pression (°)</i>	20			
<i>Angle d'hélice (°)</i>	0 (denture droite)			
<i>Coefficient de saillie</i>	1.0			
<i>Coefficient de déport</i>	0.0			
<i>Coefficient de creux</i>	1.4			
<i>Rapport de conduite ε_α</i>	1.72	1.80	1.80	
<i>Déflexion statique (μm)</i>	13.1	11.4	7.9	

Tableau III.9 : Caractéristiques géométriques des engrenages de la cascade 3

	<i>Cascade 3</i>	
	<i>Pignon 8</i>	<i>Pignon 9</i>
<i>Nombre de dents</i>	32	39
<i>Largeur de denture (mm)</i>	25	23
<i>Module (mm)</i>	2.54	
<i>Angle de pression (°)</i>	20	
<i>Angle d'hélice (°)</i>	0 (denture droite)	
<i>Coefficient de saillie</i>	1.0	
<i>Coefficient de déport</i>	0.0	
<i>Coefficient de creux</i>	1.4	
<i>Rapport de conduite ϵ_a</i>	1.68	
<i>Déflexion statique (μm)</i>	12.8	

Tableau III.10 : Caractéristiques géométriques des éléments arbres

<i>Élément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>	<i>Diamètre int. (mm)</i>	<i>Élément d'arbre</i>	<i>Longueur (mm)</i>	<i>Diamètre ext. (mm)</i>	<i>Diamètre int. (mm)</i>
1	30	65	54	13	20	60	46
2	52	63	52	14	10	60	46
3	52	63	52	15	28	65	55
4	24	56	48	16	30	65	55
5	36	60	50	17	30	55	44
6	36	60	50	18	25	60	48
7	30	60	51	19	25	60	48
8	28	60	51	20	20	65	54
9	30	70	58	21	25	55	45
10	25	65	55	22	30	60	48
11	41	55	46	23	30	60	48
12	30	60	46				

Les inerties polaires des équipements et du moteur sont prises en compte dans la modélisation. Leurs valeurs, ainsi que les valeurs des couples, sont indiquées sur la Figure III-18. Les raideurs radiales des paliers à roulement sont prises égales à 2.10^9 N/m alors que

leurs raideurs de basculement sont nulles. Le facteur d'amortissement modal est identique pour tous les modes, égale à 10%. Le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ est pris confondu avec le repère local de l'étage 1.

I.1.1. Calcul de la réponse dynamique

En raison de sa configuration, le système global possède trois périodes d'engrènement différentes, notées T_1 , T_2 et T_3 . En se référant aux paragraphes II.2.4.1 et II.2.4.2 du chapitre II, la périodicité du système (T_{sys}) et le pas de temps (p) commun aux trois périodes d'engrènement sont tel que :

- Le plus grand pas de temps ($\alpha=1$) qui divise exactement les périodes T_1 , T_2 et T_3 est donné par : $p = \frac{T_1}{16} = \frac{T_2}{32} = \frac{T_3}{75}$
- La période du système est définie par :

$$T_{sys} = PPCM(z_8 \cdot z_4, z_8 \cdot z_3, z_6 \cdot z_3) \frac{T_1}{z_4 z_8} = 150 \cdot T_1$$

Le nombre de pas de temps nécessaire pour couvrir une période du système est égale à :

$$N_{tot} = \frac{T_{sys}}{p} = 150 * 16 = 2400$$

Les fonctions temporelles des raideurs d'engrènement des différents étages, calculées à l'aide des formules de Weber & Banaschek [17], sont illustrées sur la même Figure III-20 pour mettre en évidence le déphasage entre les différents étages d'engrènement induit par les angles entre axes et les géométries des pignons.

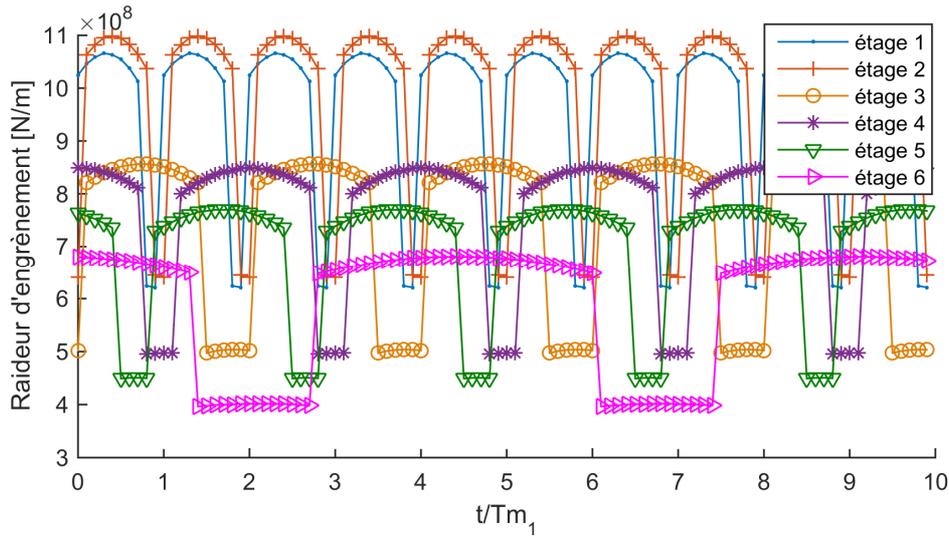


Figure III-20 : Raideurs d'engrènement des 6 étages

Sous l'effet des inter-excitations entre engrènements, les courbes des réponses dynamiques en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur (arbre 3) présentent des pics à des vitesses critiques induites par les différentes fréquences d'engrènements. Le spectre des efforts temporels à certaines vitesses critiques confirme les interactions entre les engrènements. La Figure III-21 illustre les spectres des efforts dynamiques des 6 étages d'engrènements à 5250 tr/min. La notation ' f_{m_i} ' désigne la fréquence d'engrènement de la cascade i .

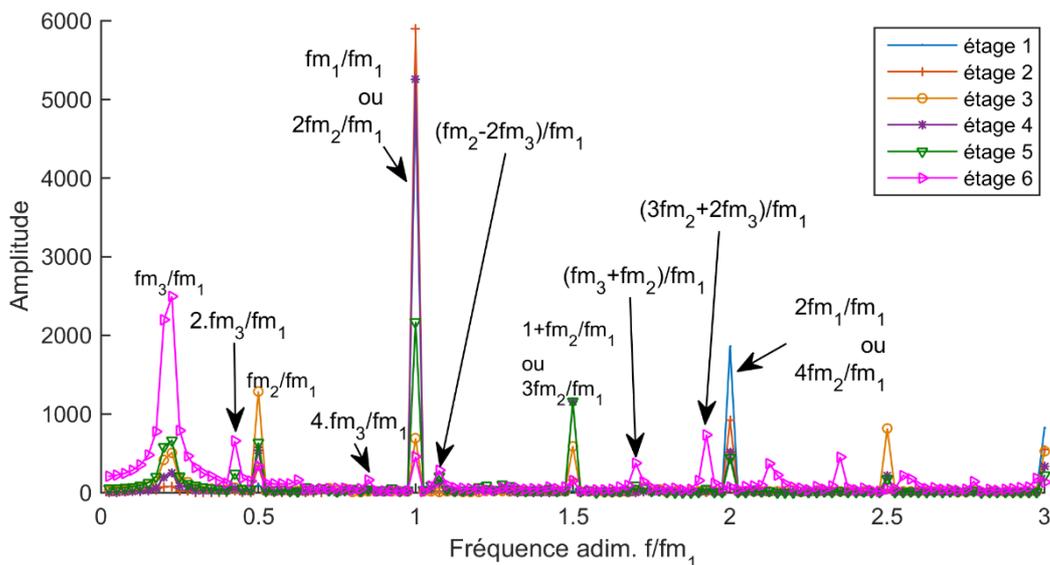


Figure III-21 : Spectres des efforts dynamiques d'engrènement des 6 étages pour $\Omega_3 = 5250$ tr/min

L'analyse des résultats montre que le contenu spectrale est composé d'harmoniques de la fréquence d'engrènement de la cascade considérée et de bandes latérales qui sont liées aux fréquences d'engrènement des deux autres cascades d'engrènement. Les spectres obtenus sont les résultats de différentes combinaisons de fréquences d'engrènement des 3 cascades d'engrenages tel que :

$$f = m.fm_i \pm n.fm_j \quad \text{avec } i, j = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{III.11})$$

III.5.2. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique

On cherche à optimiser le comportement dynamique des engrènements par minimisation des fluctuations des erreurs de transmission quasi-statique, simultanément, sur les 6 étages d'engrènement (critère P1). On adopte des corrections de profil linéaires et symétriques sur chaque étage d'engrènement comme facteurs d'optimisation. Les solutions optimales sont recherchées par un AG. La population initiale est choisie de façon aléatoire, avec une répartition uniforme, dans les 3 sous-espaces de recherche précédemment définis (Figure III-7).

Les paramètres de fonctionnement de l'AG sont les suivants :

- Un individu est défini par le n-uplet: $(\Gamma_1, E_1, \Gamma_2, E_2, \Gamma_3, E_3, \Gamma_4, E_4, \Gamma_5, E_5, \Gamma_6, E_6)$
- Taille de la population : 144
- Nombres de générations : 6
- Individus générés par croisement : 25% de la population
- Individus générés par mutation : 25% de la population

Les meilleures 33% de la population finale obtenue sont présentées, pour chaque étage d'engrènement, sur la Figure III-22 par des astérisques (*).

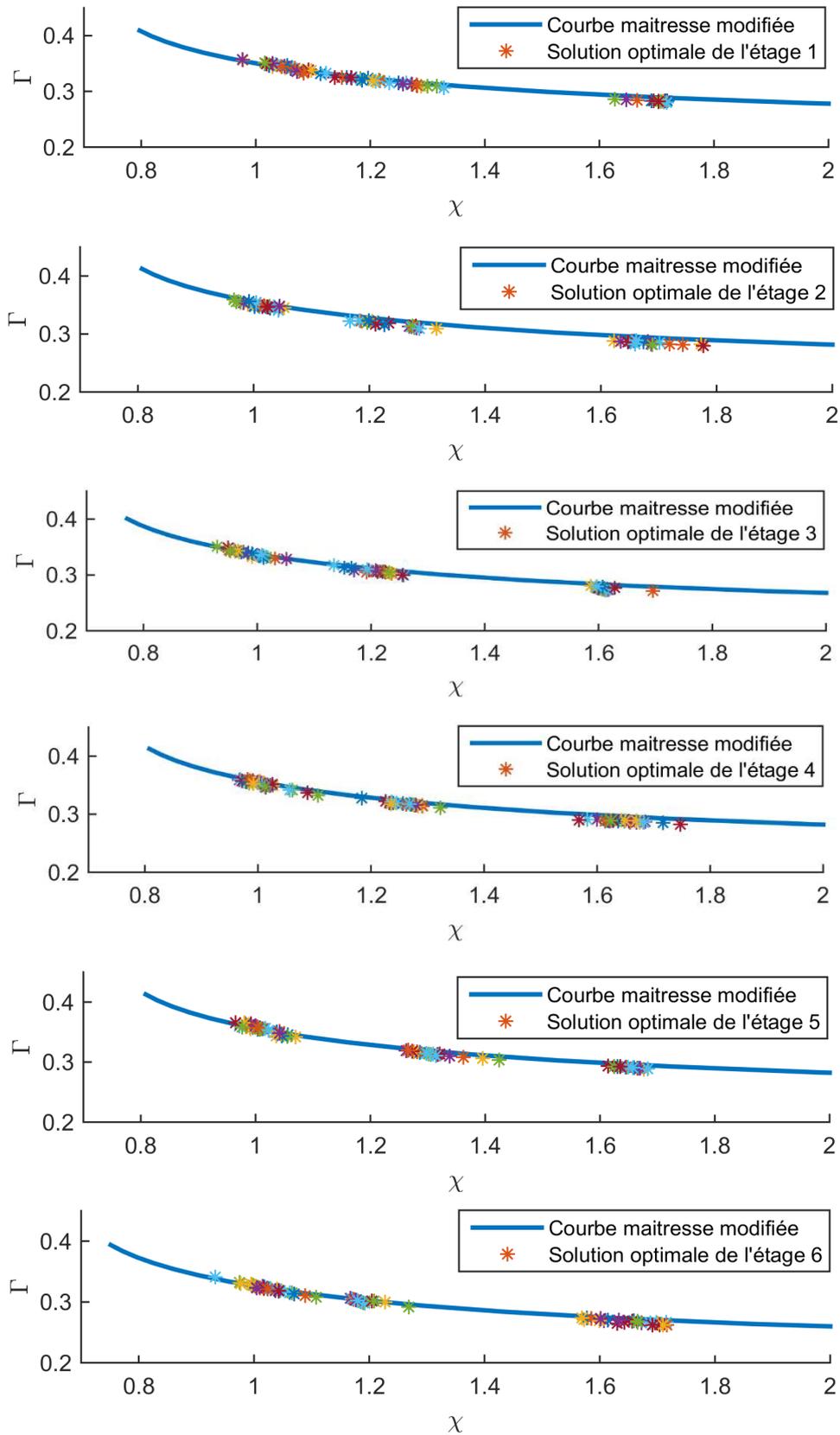


Figure III-22 : Comparaison entre les solutions optimales obtenues par l'AG pour le critère P1 et les courbes maitresses modifiées

Les résultats montrent que les solutions optimales issues de l'AG sont à nouveau très proches des courbes maîtresses modifiées des 6 étages d'engrèvements. Les corrections les plus performantes sont listées dans le Tableau III.11.

Tableau III.11 : Meilleures corrections optimales issue de l'AG

	<i>Etage 1</i>	<i>Etage 2</i>	<i>Etage 3</i>	<i>Etage 4</i>
Correction longue	$\Gamma_1 = 0.37$ E1 = 12 μm	$\Gamma_2 = 0.37$ E2 = 16 μm	$\Gamma_3 = 0.36$ E3 = 20 μm	$\Gamma_4 = 0.36$ E4 = 19 μm
Correction moyenne	$\Gamma_1 = 0.30$ E1 = 18 μm	$\Gamma_2 = 0.31$ E2 = 23 μm	$\Gamma_3 = 0.30$ E3 = 30 μm	$\Gamma_4 = 0.31$ E4 = 27 μm
Correction courte	$\Gamma_1 = 0.27$ E1 = 24 μm	$\Gamma_2 = 0.28$ E2 = 31 μm	$\Gamma_3 = 0.26$ E3 = 40 μm	$\Gamma_4 = 0.28$ E4 = 37 μm
	<i>Etage 5</i>	<i>Etage 6</i>	Critère P1	
Correction longue	$\Gamma_5 = 0.38$ E5 = 13 μm	$\Gamma_6 = 0.34$ E6 = 20 μm	0.23 μm	
Correction moyenne	$\Gamma_5 = 0.31$ E5 = 19 μm	$\Gamma_6 = 0.29$ E6 = 27 μm	0.21 μm	
Correction courte	$\Gamma_5 = 0.28$ E5 = 26 μm	$\Gamma_6 = 0.26$ E6 = 39 μm	0.30 μm	

Les niveaux de performance des solutions optimales de ce système à 6 étages sont très proches de ceux obtenus sur les systèmes à 4 étages (Tableau III.6).

I.1.1. Efforts dynamiques en présence de corrections optimales

Les corrections de profil optimales vis-à-vis des variations des écarts de transmission (Tableau III.11) sont à présent testées en dynamique. Leurs qualités sont observées au travers des coefficients dynamiques obtenus pour les 6 étages d'engrènement, sur une large plage de vitesse de fonctionnement, comme le montre les figures Figure III-23 à Figure III-26.

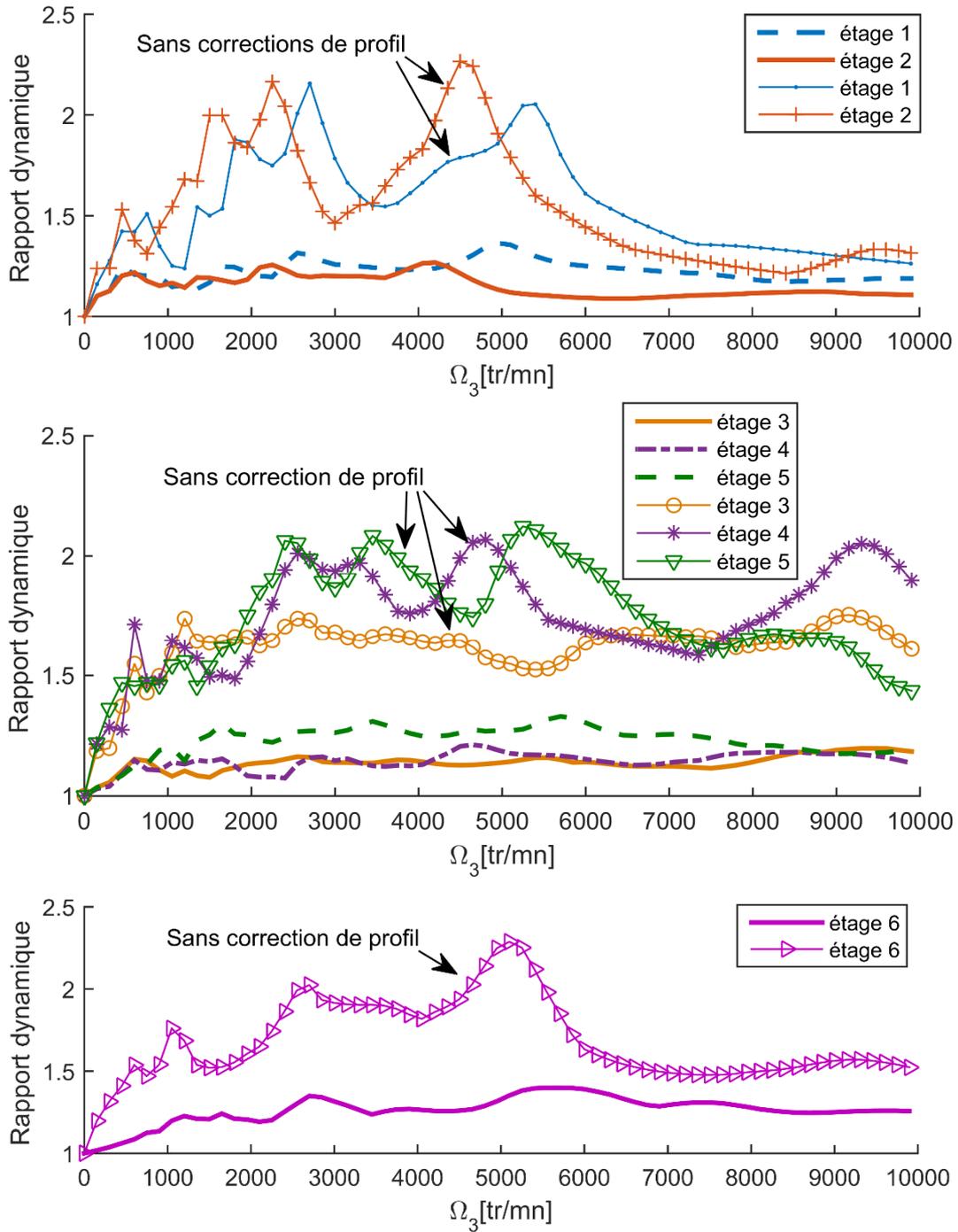


Figure III-23: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales courtes

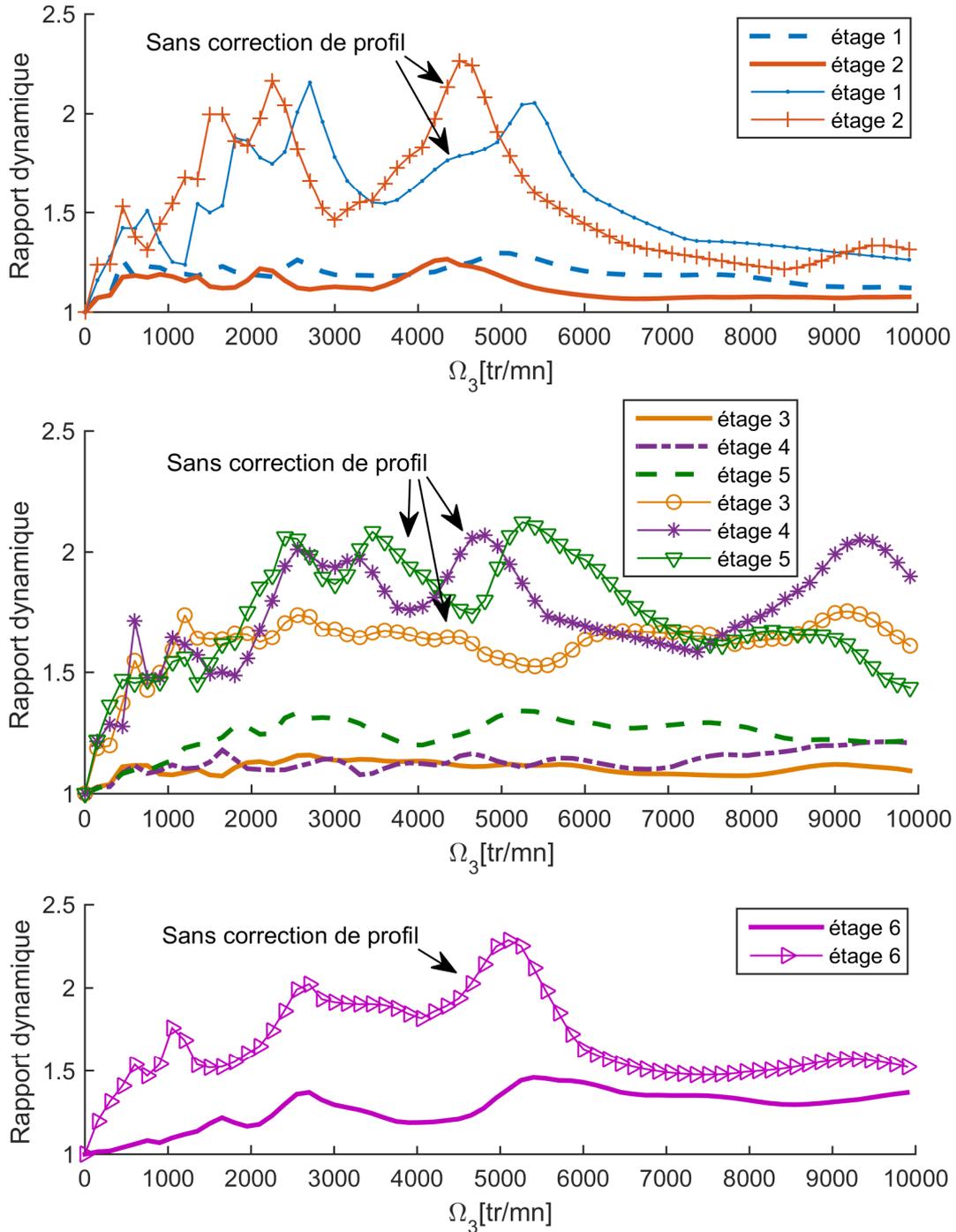


Figure III-24: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales moyennes

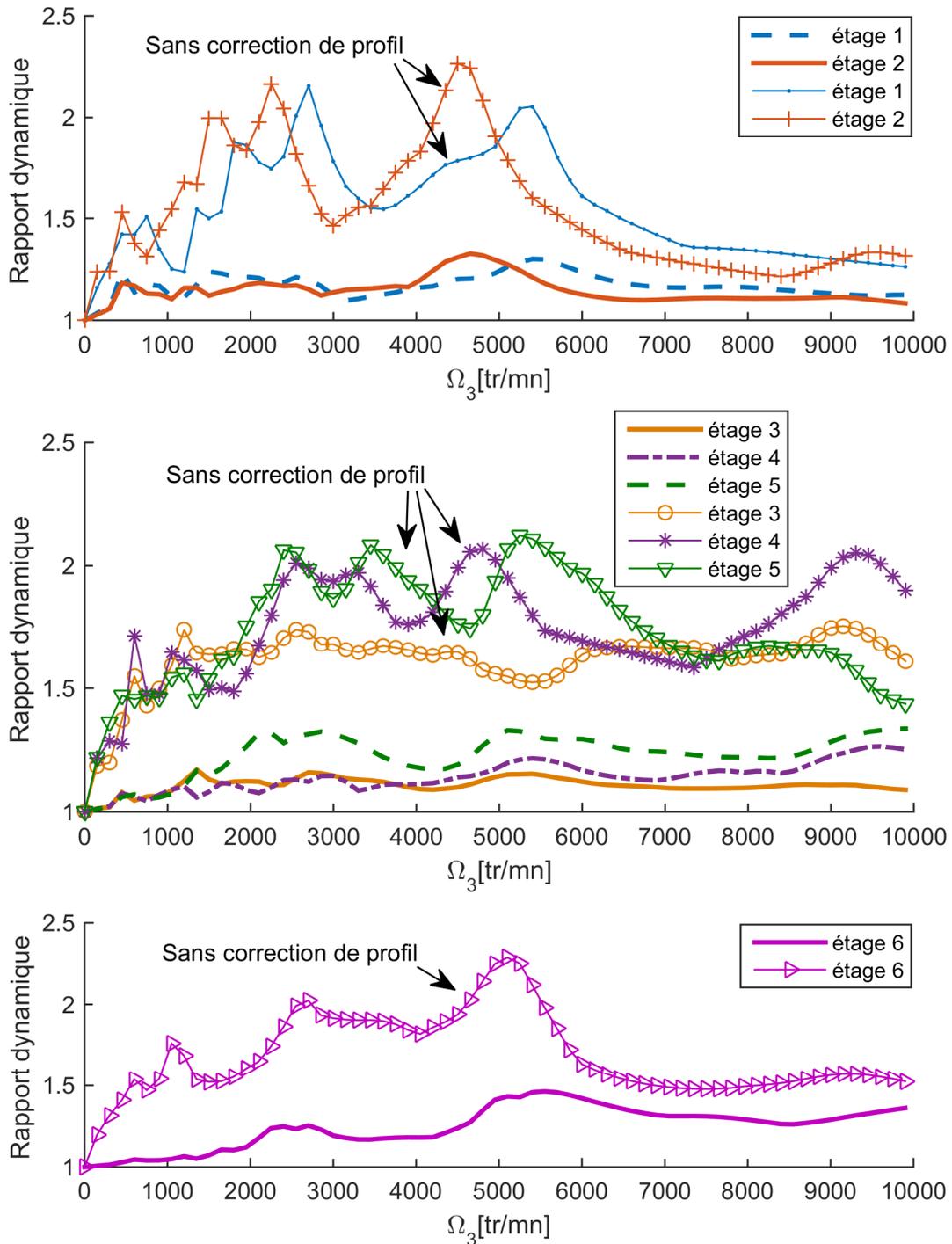


Figure III-25: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales longues

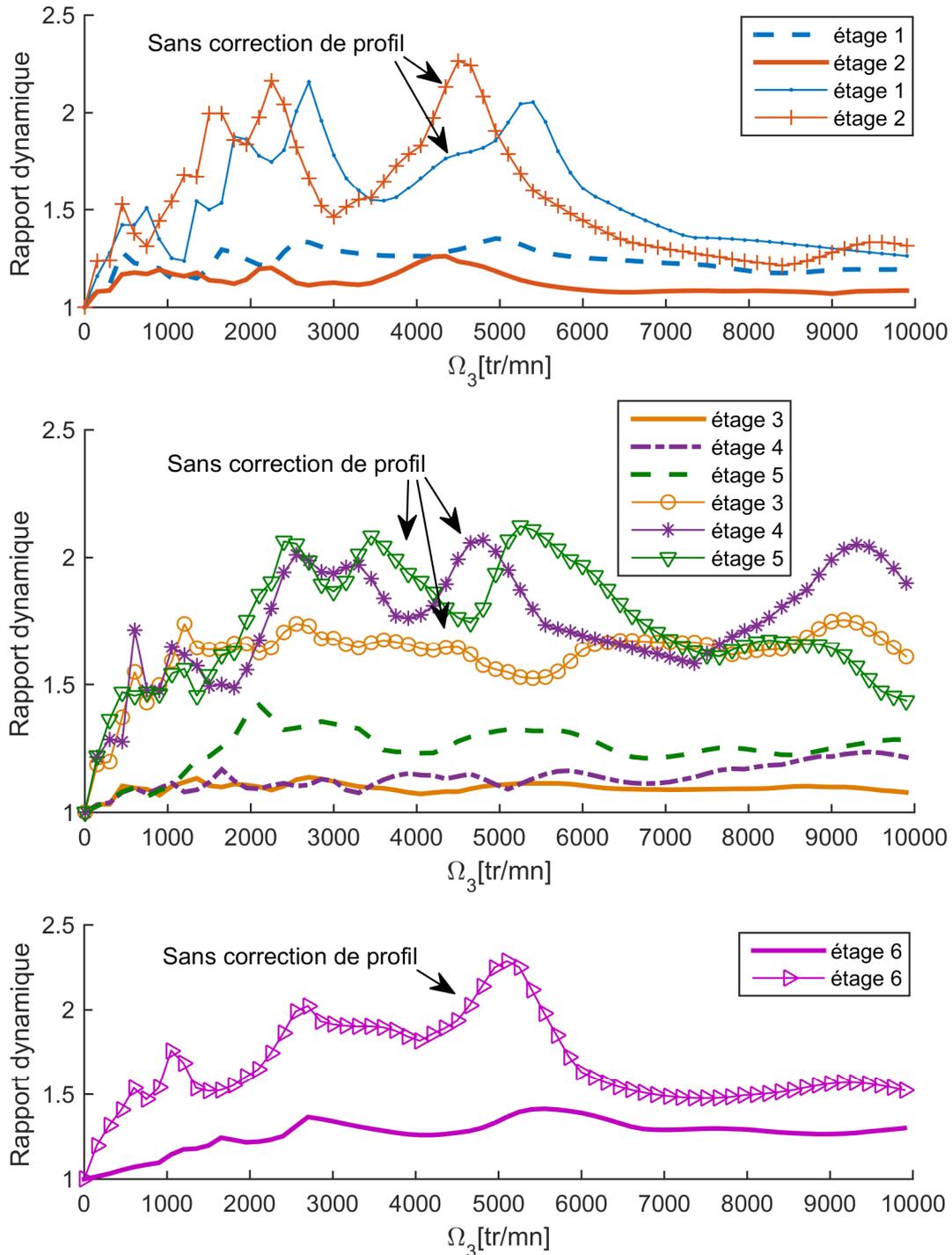


Figure III-26 : Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales courte, moyenne, longue, moyenne, longue et courte respectivement sur les étages 1, 2, 3, 4, 5 et 6

Cette étude complexe (6 étages d'engrènement répartis en 3 cascades) atteste de la capacité des corrections de profil linéaires à atténuer les variations des écarts de transmissions quasi-statique sous charge et à limiter les valeurs prises par les coefficients dynamiques de

chaque étage. En choisissant des paramètres de correction correspondants à la courbe maîtresse modifiée, le premier critère est systématiquement optimisé et les valeurs du second sont assez faibles. Par ailleurs, la présence d'inter-excitations entre engrènements ne semble pas avoir une influence prépondérante sur la dynamique du système étudié.

III.6. Conclusion

Pour les quatre configurations étudiées, quelle que soit le nombre et la disposition des différents étages d'engrènement (cascades / décalage axial), les interactions existant entre eux demeurent plutôt faibles. Ceci leur confère une certaine indépendance au niveau de leur comportement dynamique. Ainsi, l'optimisation des corrections de profil de chaque étage pris indépendamment conduit à un comportement de l'ensemble très satisfaisant (les temps de calcul nécessaire à la simulation dynamique d'un système multi-engrènement ne permettent pas de déterminer « la » solution optimale). Les corrections de profil symétriques et linéaires dont les paramètres sont définis par la courbe maîtresse modifiée minimisent systématiquement les variations des écarts de transmission quasi-statique sous charge et limitent de manière efficace l'évolution du coefficient dynamique de chaque étage. De plus, il semble que le choix du point de référence sur la courbe maîtresse modifiée pour chaque étage a peu d'influence sur le comportement dynamique de l'ensemble.

Cependant, ces résultats sont obtenus dans le cas où les couples moteurs et récepteurs sont rigoureusement constants. Une étude complémentaire est nécessaire pour analyser le comportement du système lorsque les couples extérieurs évoluent dans le temps

**Chapitre IV. Autres analyses des performances
des corrections de profil**

IV.1. Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à la recherche des corrections de profil linéaires et symétriques de chaque étage, qui optimisent, d'une part, les variations des écarts de transmission sous charge à faible vitesse et, d'autre part, les coefficients dynamiques. Il a été montré que les solutions correspondent aux corrections définies par les courbes maîtresses modifiées de chaque étage. Leur détermination est immédiate puisque ces courbes sont connues analytiquement, dans le cas d'un fonctionnement « nominal ». De fait, il existe un ensemble de familles de solutions ayant des niveaux de performance proches selon ces deux premiers critères.

Dans les applications réelles, la puissance totale qui traverse la boîte de transmission est distribuée aux différents accessoires tels que pompes, générateurs, moteurs... Suivant les phases de vol et de fonctionnement du système au quel chaque élément participe, les appels de puissance évoluent dans le temps. La vitesse de rotation des turbopropulseurs étant assez stable, les variations de puissance se traduisent essentiellement par des variations de couples. Ceci implique que, quelle que soit la correction de profil retenue, elle ne pourra être adaptée à l'ensemble des cas de fonctionnement. Pour affiner le choix des corrections, ce chapitre est consacré à l'étude de l'impact du changement de couple moteur, des couples résistants des équipements, ... et à la prise en compte d'un autre critère de dimensionnement : la contrainte maximale de flexion en pied de dent.

IV.2. Modèles à 4 étages d'engrènement en cascade : influence de couples variables dans le temps

On propose dans cette section d'étudier l'influence du couple moteur variable dans le temps sur le comportement dynamique d'un système à quatre étages d'engrènement. Les caractéristiques géométriques et de fonctionnement du modèle sont détaillés dans le Tableau III.4 et le Tableau III.5 du chapitre III.

Le couple d'entraînement du système est modélisé par une fonction dépendante du temps prise sous la forme $Ct_1(t) = [500 + 50\sin(7\Omega_1 t)] N.m$. Les variations du couple en fonction du temps sont illustrées Figure IV-1 :

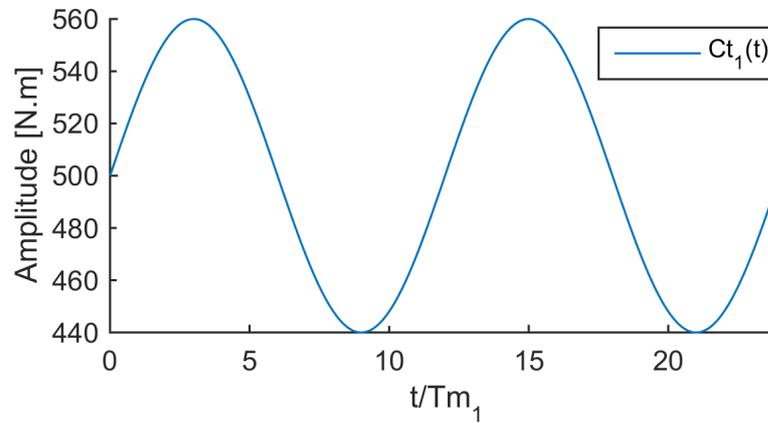


Figure IV-1 : Variations temporelles du couple moteur

La vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est supposée constante et le couple résistant de sortie est calculé en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Dans ce cas, le système d'engrènement possède deux périodes caractéristiques différentes que sont la période d'engrènement (T_m) et la période du couple variable (T_c).

$$T_m = \frac{2\pi}{z_1\Omega_1} \quad \text{et} \quad T_c = \frac{2\pi}{k\Omega_1} \quad (\text{IV.1})$$

Le choix des paramètres est tel que $T_c = 12T_m$. La périodicité du système est, par conséquent, la période du couple variable et le pas de temps doit être une fraction de la période d'engrènement.

La Figure IV-2a présente les évolutions des coefficients dynamiques de chaque étage sur une plage de vitesse de fonctionnement, dans le cas où le couple d'entrée est constant et sans correction de profil. La Figure IV-2b représente les mêmes grandeurs, mais cette fois ci, avec le couple d'entraînement Ct_1 fluctuant autour de la valeur moyenne précédemment utilisée.

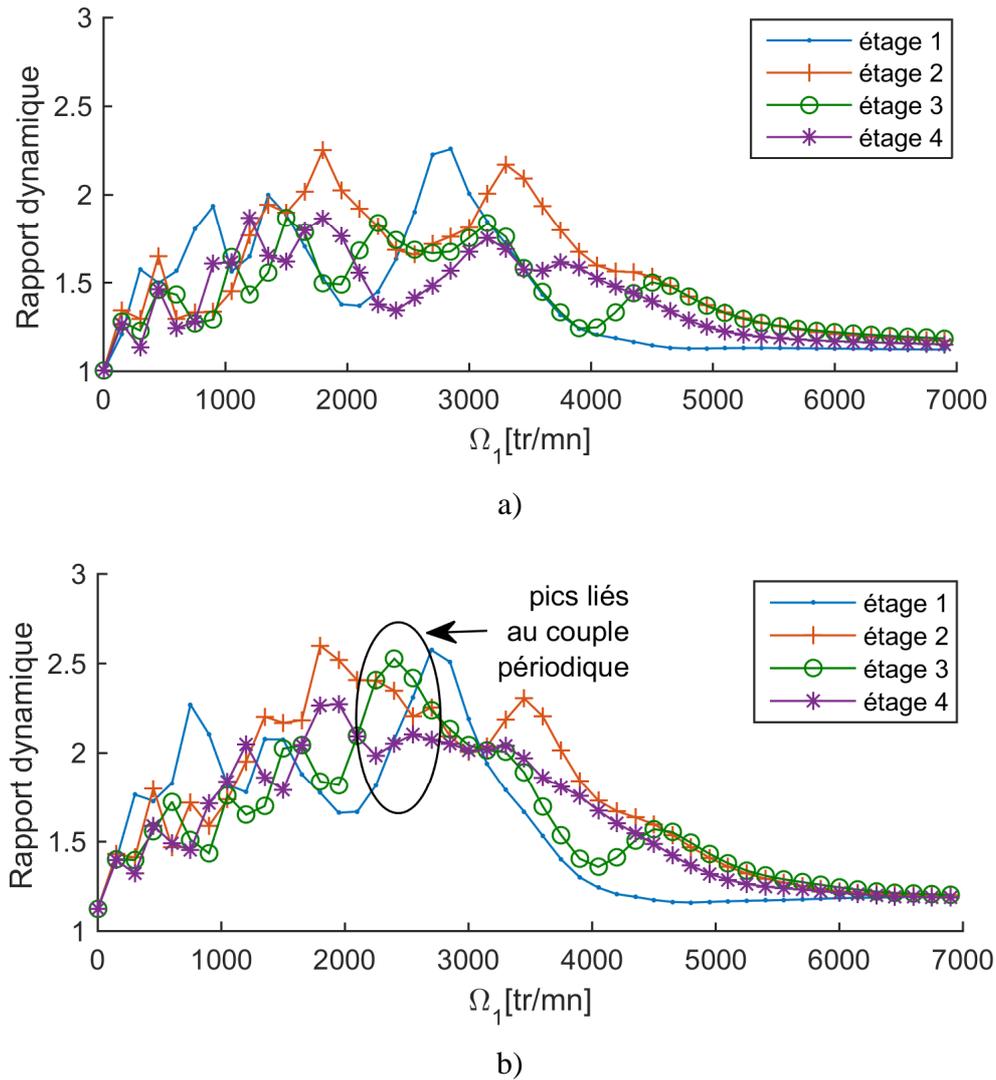


Figure IV-2 : Évolutions des coefficients dynamiques des 4 étages d'engrènement sans correction de profil en présence de a) couple moteur constant (500 N) et b) couple moteur variable dans le temps

La comparaison des courbes de réponses du coefficient dynamique montre que l'introduction d'un couple moteur variable engendre une augmentation des efforts maximum à la denture et l'apparition de pics au voisinage de la vitesse 2400 tr/min. Cet effet se fait ressentir sur tous les étages d'engrènement. L'apparition de ces nouveaux pics traduit un phénomène d'interaction entre les étages d'engrènement. Les spectres des efforts dynamiques des 4 étages pour une vitesse d'entrée $\Omega_1 = 2400$ tr/min (Figure IV-3) exhibent un contenu fréquentiel composé des harmoniques de la fréquence d'engrènement f_m et des bandes latérales liées à la fréquence du couple variable. Le contenu fréquentiel est composé uniquement de fréquences

résultant des différentes combinaisons entre la fréquence d'engrènement et la fréquence de variation du couple tel que :

$$f = n \cdot f_m \pm m \cdot f_c \quad (\text{IV.2})$$

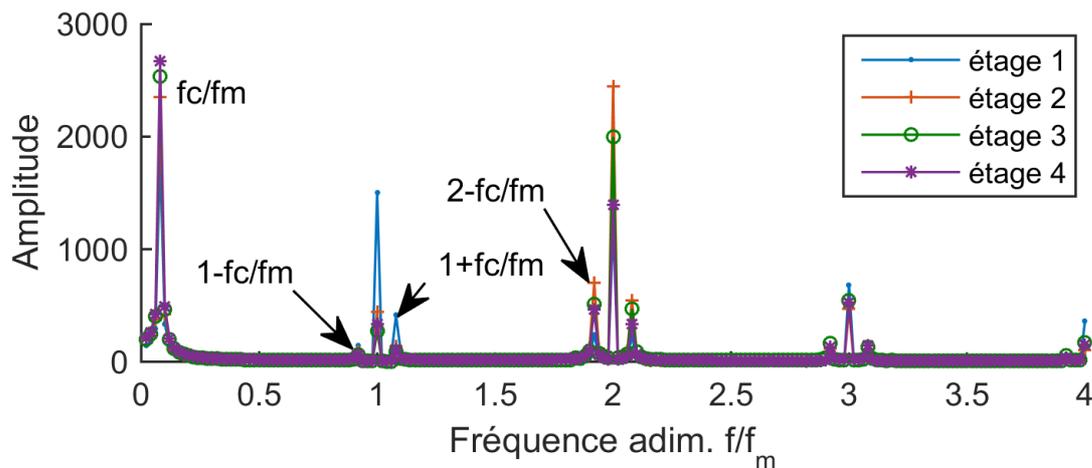


Figure IV-3 : Spectres des efforts dynamiques des 4 étages d'engrènement à 2400 tr/min

Vu que la valeur moyenne du couple variable est égale au couple nominal appliqué au modèle d'engrènement dans l'étude précédente (couple constant égale à 500 N.m), les déflexions quasi-statiques moyennes au niveau des dentures, prise sur un multiple de la période de chargement, sont inchangées. Cependant, les déflexions quasi-statiques moyennes sur chaque période d'engrènement évoluent au cours du temps. De ce fait, les solutions optimales obtenues au chapitre précédant sont mal adaptées ici. Néanmoins, il est intéressant de tester ces corrections optimales en présence d'un couple moteur variable. La Figure IV-4 présente les évolutions des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation de la roue motrice (roue 1), calculées avec et sans corrections, en présence du couple moteur variable $C_{t1}(t)$.

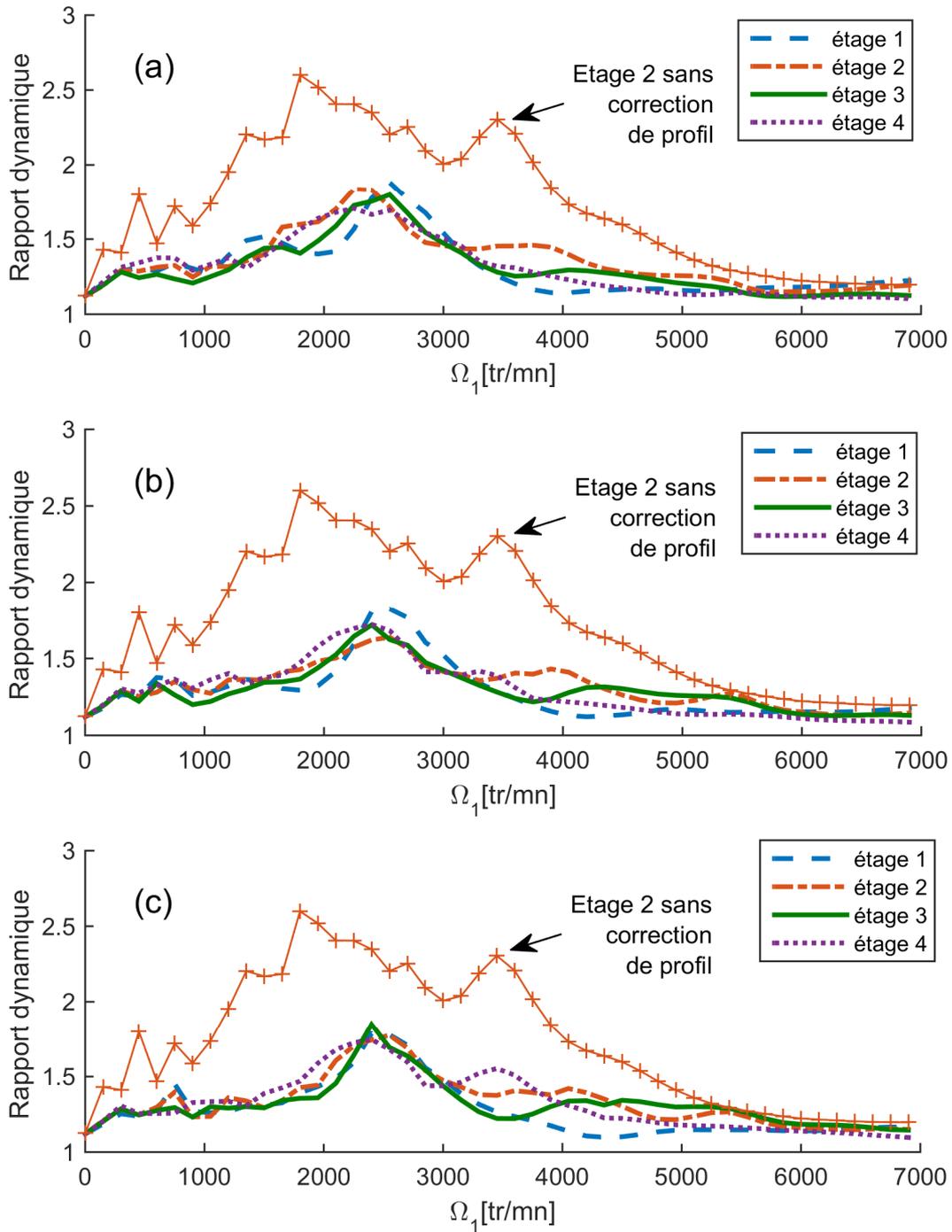


Figure IV-4 : Évolutions des coefficients dynamiques en présence du couple moteur variable Ct_1 et des corrections de profil optimales a) courtes, b) moyennes et c) longues

Pour les trois types de corrections de profil optimales appliquées, l'analyse des résultats montre une amélioration du comportement dynamique des 4 étages d'engrènement sur toute la

plage de vitesse de rotation de l'arbre moteur. Cependant, au voisinage de la vitesse critique de 2400 tr/min le comportement se dégrade légèrement. Ceci montre que les modifications de profil proposées, définies à partir des déflexions statiques moyennes sur la période du système, sont globalement efficaces pour la réduction des excitations d'engrènement sauf au voisinage de la vitesse critique générée par la combinaison des excitations extérieures.

IV.3. Modèle AGB Trent XWB composé de 6 étages d'engrènement en cascade et décalées

Les caractéristiques géométriques et de fonctionnement du modèle sont détaillés dans les Tableaux Tableau III.7 à Tableau III.10 du chapitre III.

IV.3.1. Influence du chargement

IV.3.1.1. Variation de couples moteurs et résistants

Dans cette section, on cherche à déterminer l'influence de la variation du couple moteur et des couples résistants sur les réponses dynamiques des 6 étages d'engrènement en présence des corrections de profil optimales, définies pour la configuration nominale. Pour cela, les couples extérieurs demeurent constants dans le temps mais leurs valeurs s'écartent du nominales. Tous les couples subissent une variation de $\pm 50\%$ par rapport à leurs couples nominaux. Le couple exercée sur l'arbre 4 est calculé par le théorème de l'énergie cinétique. Le Tableau IV.1 résume les 5 configurations de couples étudiées.

Tableau IV.1 : Valeurs du couple moteur et des couples résistants à chaque cas de variation de couple

	Couple moteur [N.m] (Arbre 3)	Couple résistant 1 [N.m] (Arbre 1)	Couple résistant 2 [N.m] (Arbre 2)	Couple résistant 6 [N.m] (Arbre 6)	Couple résistant 7 [N.m] (Arbre 7)
+50%	1650	630	300	525	615
+25%	1375	525	250	437.5	512.5
Couples nominaux	1100	420	200	350	410
-25%	825	315	150	262.5	307.5
-50%	550	210	100	175	205

Pour mettre en évidence l'influence des variations de couples, les coefficients dynamiques des 6 étages d'engrènement sont calculés en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur, en présence des corrections de profil optimales de type courtes et longues (Tableau III.11). Les évolutions des coefficients dynamiques des 6 étages d'engrènement sont présentées sur la Figure IV-5 et la Figure IV-6.

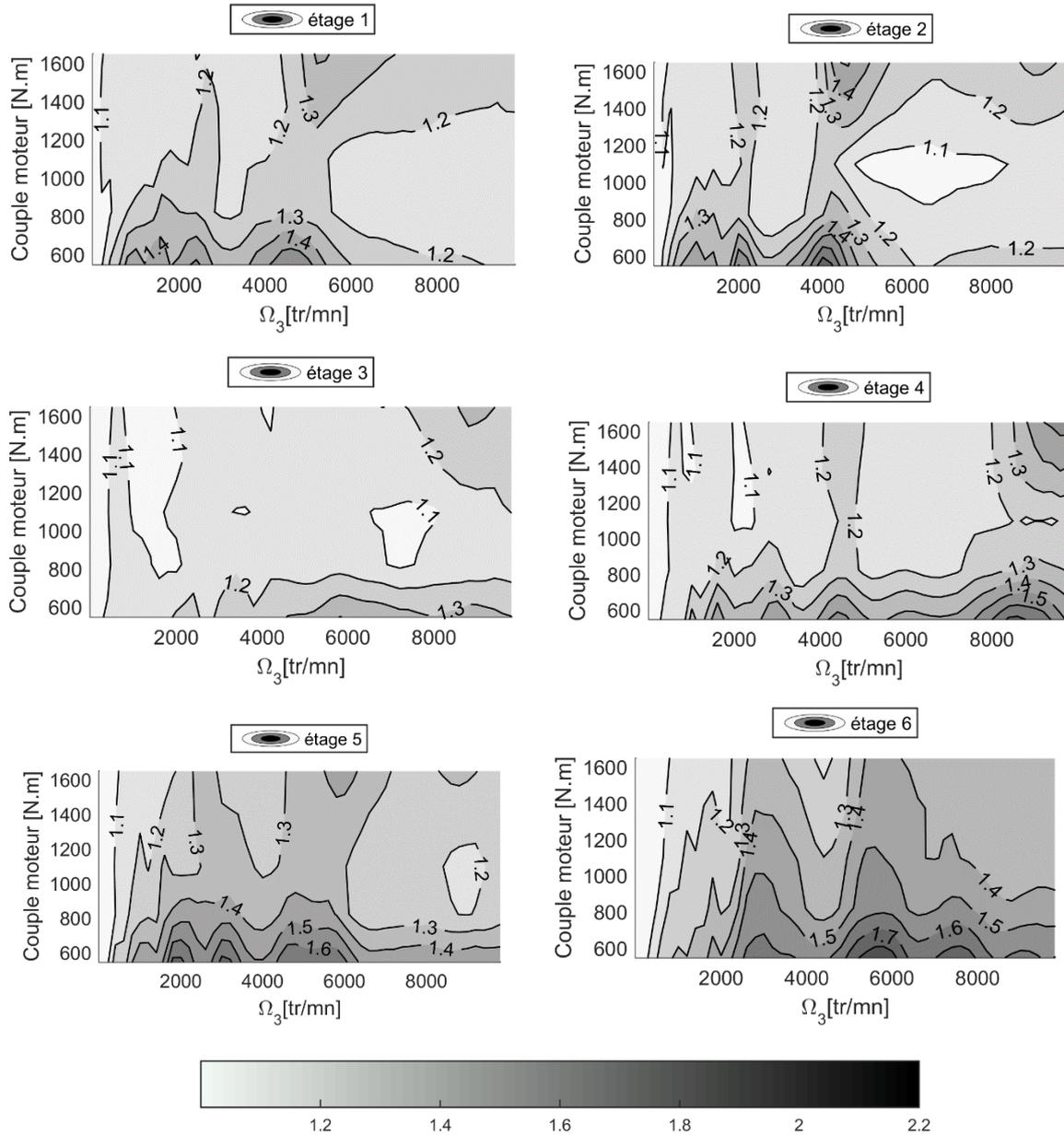


Figure IV-5: Influence de la variation de la charge sur le coefficient dynamique maximal en présence des corrections de profil courtes sur les 6 étages d'engrènement

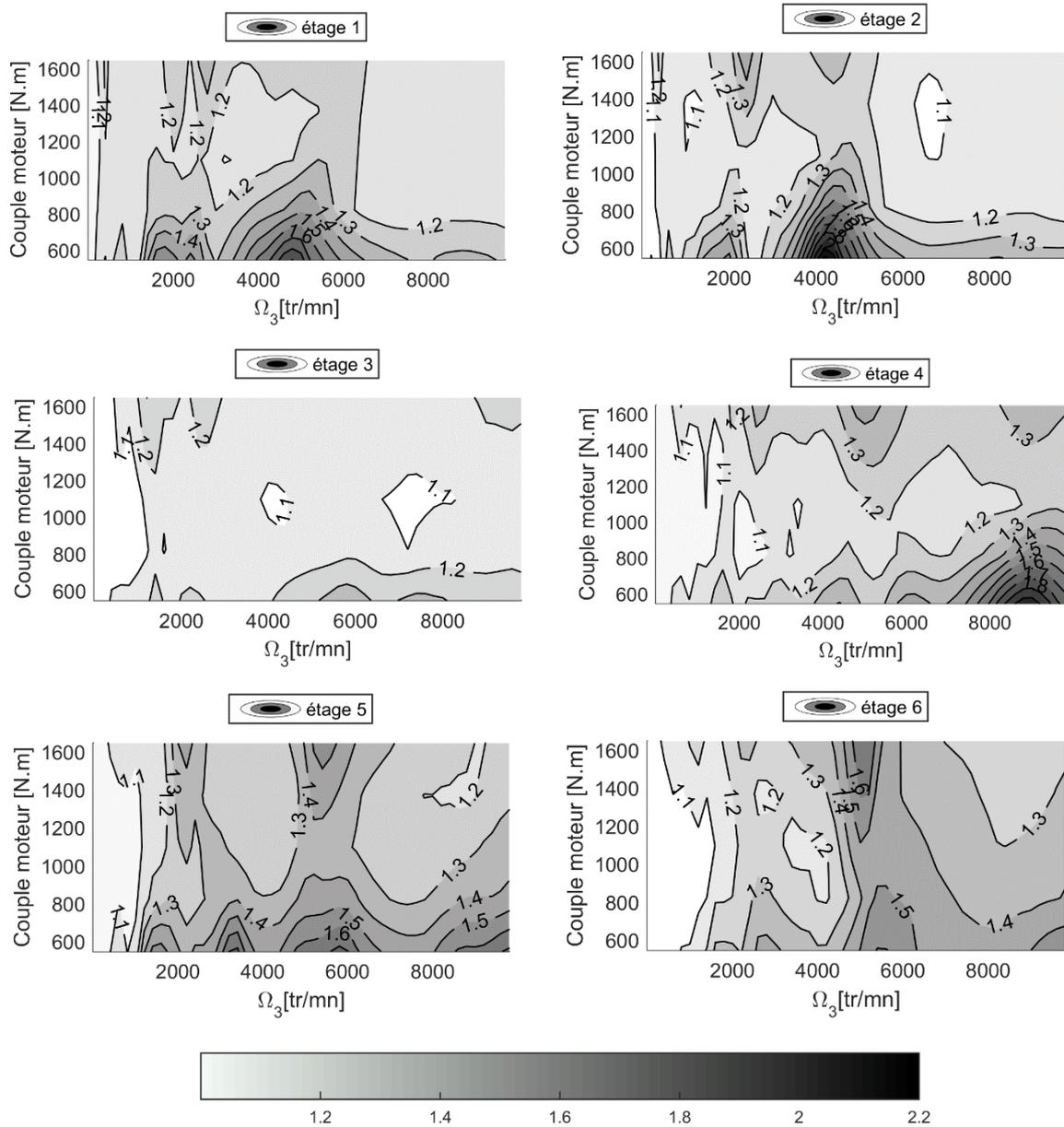


Figure IV-6 : Influence de la variation de la charge sur le coefficient dynamique maximal en présence des corrections de profil longues sur les 6 étages d'engrènement

La Figure IV-5 et la Figure IV-6 illustrent les évolutions des coefficients dynamiques de chacun des 6 étages pour une évolution de la vitesse d'entraînement de l'axe moteur 3 et pour les différents niveaux de chargement définis par le Tableau IV.1. Les corrections de profil adimensionnées sont identiques sur tous les étages. Elles sont prises sur la courbe maîtresse modifiée.

Pour les corrections ‘courtes’, une diminution de la charge s’accompagne systématiquement d’une augmentation du coefficient dynamique et cette tendance est plus forte à proximité de certaines vitesses critiques. Pour chaque étage, le coefficient dynamique atteint son niveau le plus élevé pour le couple le plus faible. Sa valeur maximale est 1.86 et elle est atteinte sur le 6^{ème} étage. Bien que relativement élevée, cette valeur n’est critique ni pour le niveau de contrainte mécanique (couple à 50% du couple nominal), ni pour l’engrènement car elle n’engendre pas de décollement du contact. Le comportement du coefficient dynamique du même système muni de corrections ‘longues’ montre les mêmes tendances mais les niveaux atteints sont sensiblement plus élevés : le coefficient dynamique dépasse 2 pour les étages 2 et 4 (perte de contact), il est supérieur à 1.8 sur l’étage 1. Aux forts couples, la surcharge dynamique reste modérée, sauf à la vitesse critique du dernier engrènement. Pour les 2 configurations, l’étage 3 présente les plus faibles variations.

De façon globale, le comportement dynamique sur toute la plage de vitesse se dégrade dès que des conditions de chargement s’écartent de celles utilisées pour définir les corrections optimales. Cette évolution est plutôt moins marquée pour les corrections dites ‘courtes’ et ne risque pas d’engendrer de perte de contact sur toute la plage de variation.

IV.3.1.2. Annulation brusque d’un couple résistant

Pendant le décollage et l’atterrissage de l’avion ou lors d’une avarie, certains équipements peuvent être déconnectés brutalement de la chaîne de transmission de puissance, ce qui impacte le comportement vibratoire de l’ensemble de la chaîne de transmission.

Dans cette section, nous étudions le comportement dynamique du système à 6 étages d’engrènement suite à l’annulation brusque du couple résistant de l’équipement lié à l’arbre 6. Pour illustrer le phénomène, les signaux temporels des efforts d’engrènement des 6 étages sont présentés dans la Figure IV-7 pour une vitesse d’entrée faible $\Omega_3 = 1$ tr/min .

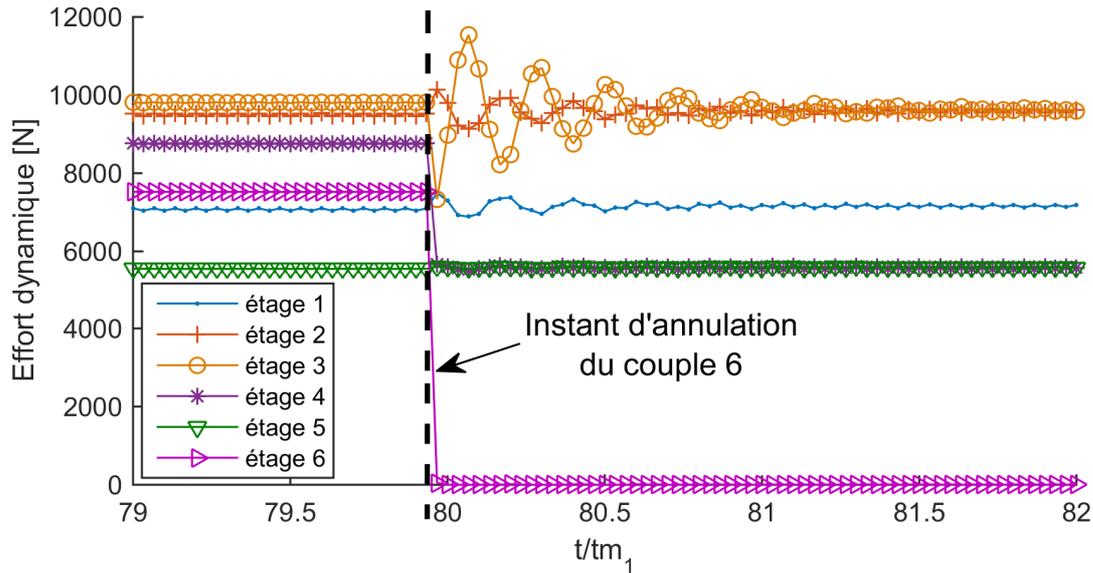


Figure IV-7 : Effort temporel quasi-statique ($\Omega_3 = 1$ tr/min) au moment d'annulation du couple 6

Durant la phase transitoire, les efforts transmis au niveau de chaque engrenement oscillent plus ou moins fortement, suivant leur proximité avec l'origine de la perturbation et la vitesse de rotation. Ils peuvent atteindre des valeurs nettement plus élevées que celles du régime précédemment établi, ce qui peut éventuellement constituer un risque pour l'intégrité du système. Les effets dynamiques et l'amortissement conduisent peu à peu le système vers un nouvel état d'équilibre.

Les évolutions du maximum des efforts dynamiques durant la phase transitoire et en régime stabilisé sont tracées sur les graphes de la Figure IV-8.

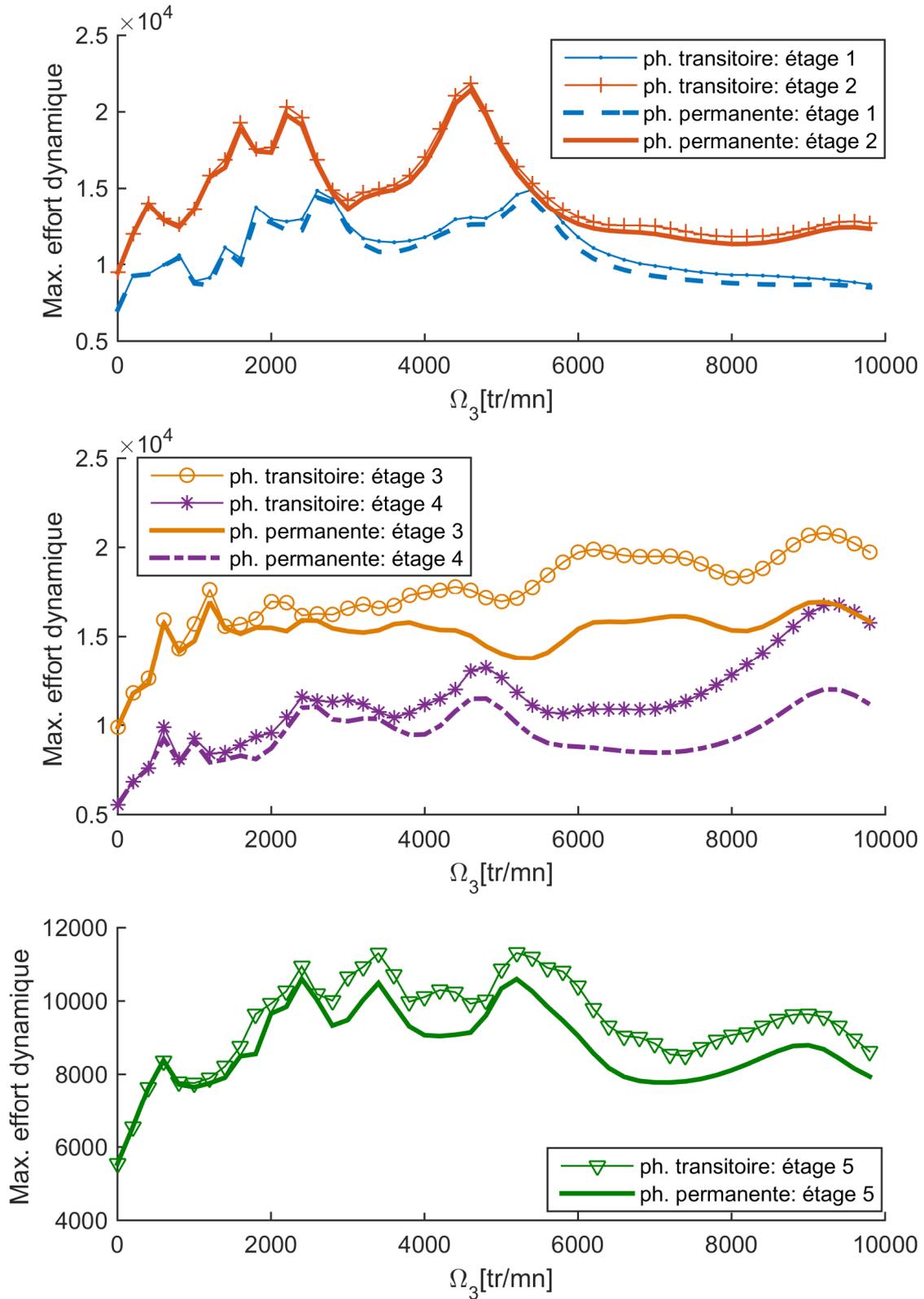


Figure IV-8 : Superposition des courbes de l'effort dynamique maximal de chaque étage d'engrènement durant les phases transitoire et permanente.

La comparaison entre les courbes de la réponse dynamique à la denture durant les deux phases, montre que l'annulation du couple 6 n'a pas modifié de façon fondamentale la forme des courbes. Les vitesses critiques sont les mêmes. Seules les amplitudes, surtout à grande vitesse de rotation, ont augmenté durant la phase transitoire.

Par ailleurs, l'application des corrections de profil optimales (Figure IV-9 à Figure IV-12) conduit à une amélioration nette du comportement dynamique durant la phase permanente et également durant la phase transitoire. Cette amélioration est plus marquée pour les corrections courtes que pour les corrections longues. L'étage 4, qui a subi un déchargement suite à l'annulation du couple résistant 5, présente une amplitude du coefficient dynamique un peu élevée à très grandes vitesses dans le cas des corrections de profil optimales longues.

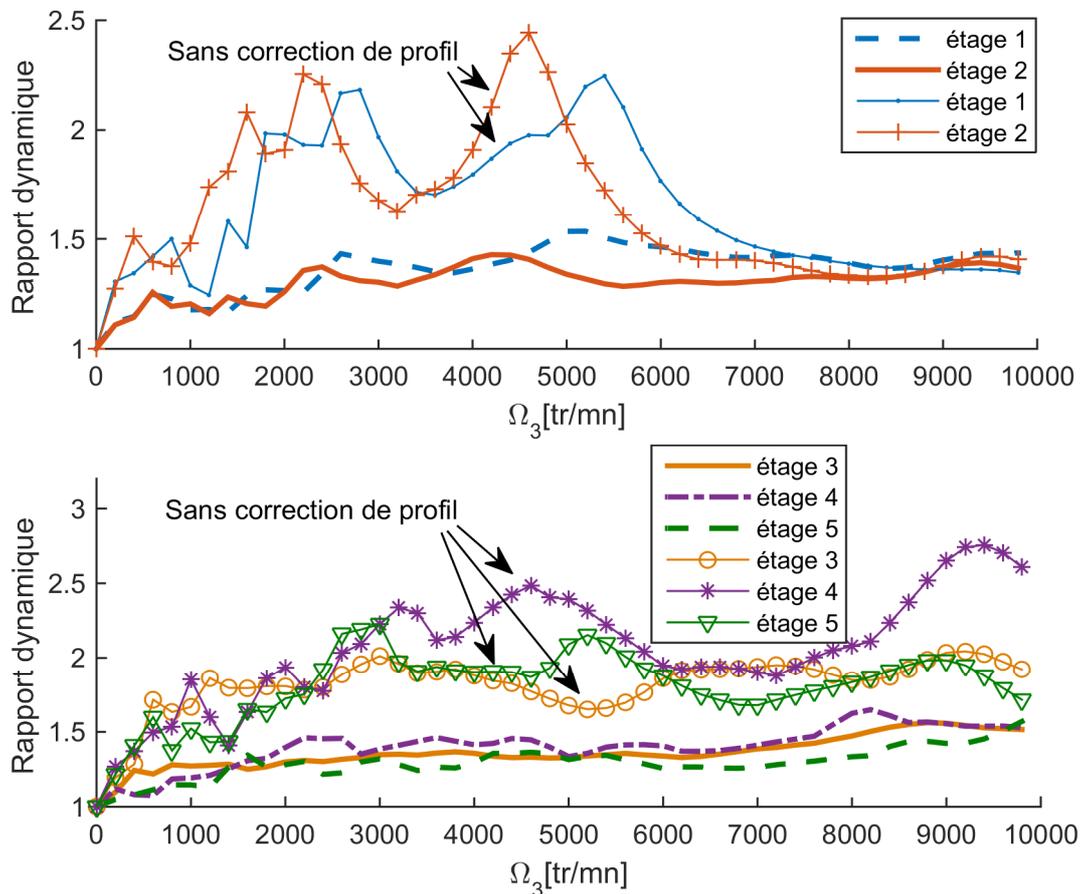


Figure IV-9: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales courtes durant la phase transitoire

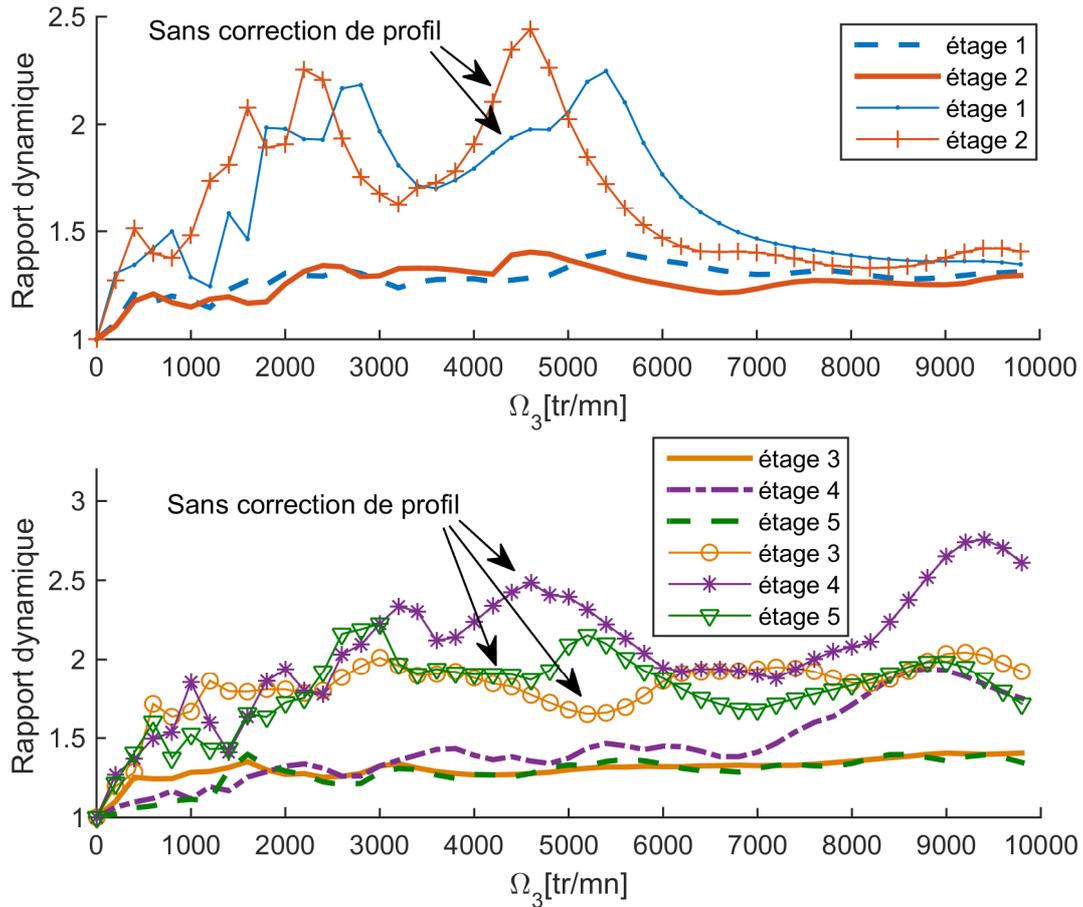


Figure IV-10: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales longues durant la phase transitoire

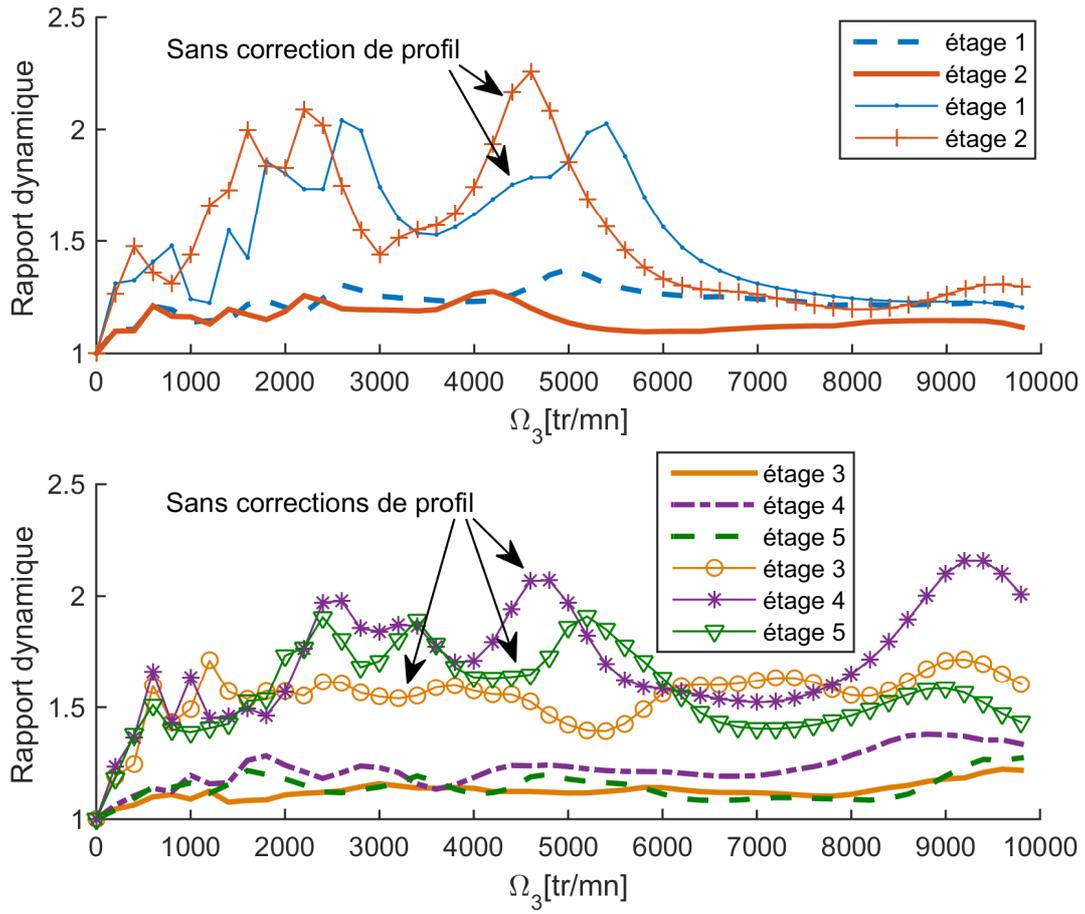


Figure IV-11: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales courtes durant la phase permanente

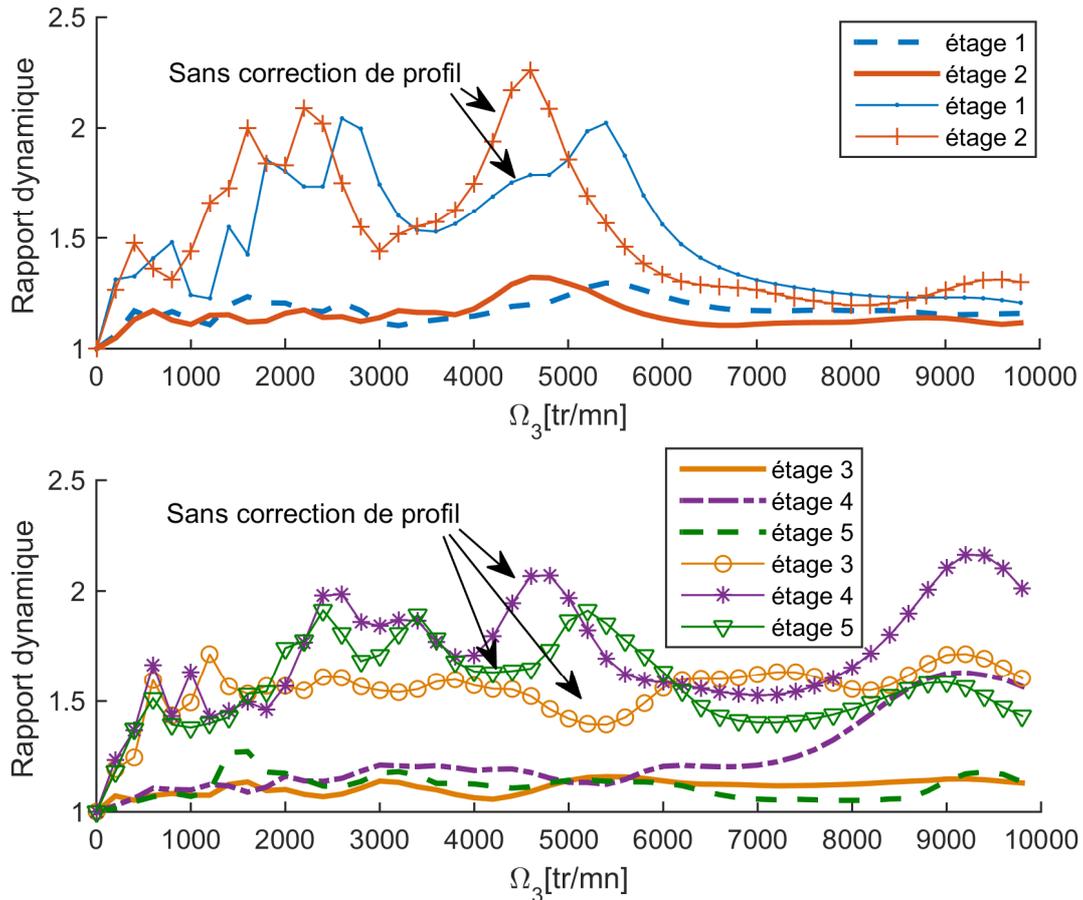


Figure IV-12: Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profil optimales longues durant la phase permanente

IV.3.2. Performance des corrections de profil optimales vis-à-vis du critère de contrainte en pied de dent

Dans cette partie, nous nous bornons à étudier les performances des corrections de profil optimales vis-à-vis d'un critère fondamental pour le dimensionnement des dentures : la contrainte maximale de traction en pied de dent. En se référant à la méthode B de la norme ISO-6336 [16], la contrainte en pied de dent σ_F est calculée en considérant la dent comme une poutre encastree du côté corps d'engrenage et libre de l'autre côté et soumise à un effort normal au point de plus haut contact unique.

Pour une série de corrections de profils réparties sur la courbe maîtresse, les contraintes en pied de dent maximales sont estimées pour les 6 étages d'engrènement en quasi-statique. On

vérifie numériquement que l'évolution de ce critère est monotone en fonction de la longueur de correction : la contrainte maximale en pied de dent augmente légèrement lorsque la longueur de correction diminue. Les résultats présentés sur la Figure IV-13 montrent les évolutions des contraintes en pied, pour différentes corrections prises le long des courbes maitresses modifiées des 6 étages d'engrènement.

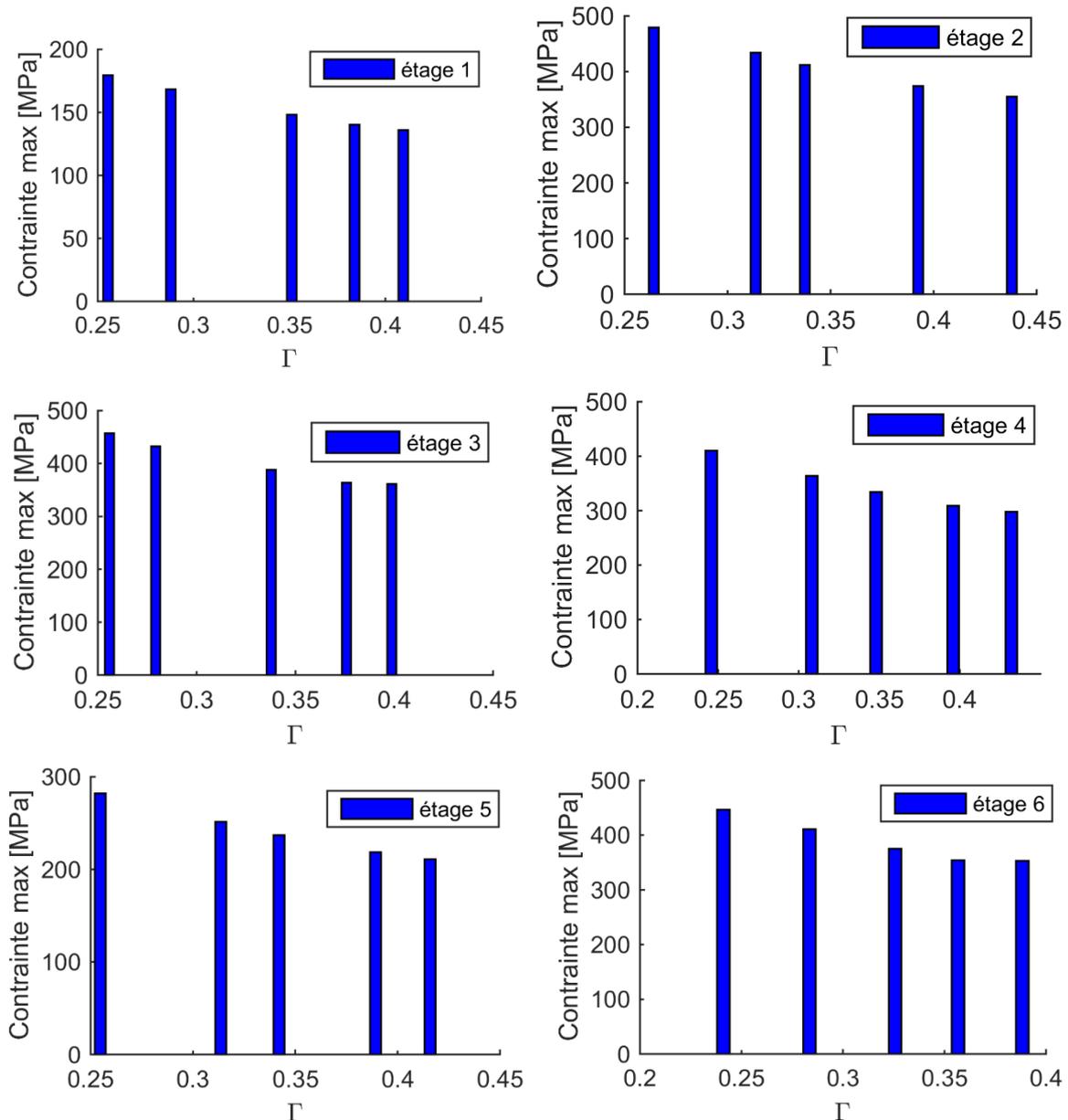


Figure IV-13 : Diagrammes de performance des contraintes en pied de dent maximales pour les 6 étages d'engrènement

La prise en compte de ce critère permet d'introduire une réelle discrimination entre les corrections de la courbe maitresse modifiée (contrairement au critère $\left[moy(RMS(TE_{S_i})) \right]_{1 \leq i \leq 6}$) : les

corrections longues induisent un niveau de contrainte en pied de dent plus faible. Ce résultat est cohérent avec ceux de Bruyère et Vexé [4] sur un système à simple étage d'engrènement. Il peut s'expliquer en analysant la position du point de plus haut contact unique. Les corrections courtes de la courbe maîtresse modifiée sont profondes ($E > 2 \delta_{m0}$), elles engendrent un retard à l'engagement et une réduction de la longueur de contact effective. Sur le profil de la dent, le point de plus haut contact unique se trouve décalé vers le sommet de la dent, augmentant ainsi le bras de levier du moment de flexion en pied de dent.

IV.4. Conclusion

Pour les différents cas de variations du chargement étudiés, les étages d'engrènement d'un système multi-étages présentent un comportement dynamique différent à celui trouvé dans les conditions de chargement nominal en présence des corrections de profil symétriques et linéaires optimales. Les étages qui subissent les variations de chargement à la denture montrent une plus grande sensibilité pour les corrections de profil optimales longues que les corrections de profil courtes. Ces variations sont traduites par une augmentation du coefficient dynamique surtout à des vitesses critiques principales. Dans ce cas, la notion de corrections optimales émise dans les conditions de chargement nominal ne semble plus être valable pour le nouvel chargement. Ce dernier agit sur la déflexion statique moyenne qui donne naissance à des nouvelles corrections de profil optimales présentées par la courbe maîtresse modifiée.

En global, les corrections de profil optimales courtes, vis-à-vis la variation du chargement, induisent un comportement dynamique à la denture meilleur que les corrections longues. Cependant, ces dernières engendrent des contraintes en pied de dent plus faible que les corrections courtes. Dans ce cas est-il possible de trouver une solution robuste assurant l'optimisation des deux critères de performance

Conclusion générale et perspectives

Dans un contexte de réduction des surcharges dynamiques et des nuisances sonores dans des trains d'engrenages à plusieurs étages, un modèle original a été construit permettant de simuler le comportement de systèmes complexes avec de multiples engrènements. Ce modèle permet d'introduire la micro-géométrie des dentures et, plus particulièrement, les corrections de formes de dentures ainsi que des conditions de fonctionnement en mode dégradé (surcharges momentanée, coupure de puissance sur un organe récepteur, couples variables). Les équations de mouvement sont résolues en couplant un schéma d'intégration numérique pas à pas dans le temps et un algorithme de contact unilatéral afin de gérer les conditions de contact instantanées sur les dentures. Dans ces conditions et contrairement à la très large majorité des modèles dynamiques de la littérature, les erreurs de transmission sont des résultats de simulation et pas des données a priori utilisées comme termes forcés dans les équations du mouvement.

La problématique spécifique de l'optimisation des corrections de profil afin de minimiser les efforts dynamiques sur les dentures a été abordée en couplant le modèle dynamique d'engrenages à engrènements multiples et un algorithme génétique. Un des résultats marquants de cette étude est que, pour un système à N engrènements, les corrections dites optimales se positionnent au voisinage des résultats analytiques de Bruyère et al [5] et Vex et al [2] obtenue pour un engrenage simple étage. Un critère simple et adapté aux systèmes à plusieurs engrènements a été introduit ; ses résultats semblent tout à fait satisfaisants et conduisent à des réductions significatives des amplitudes d'efforts dynamiques sur les contacts entre dentures. D'une manière générale, les différentes approches conduisent à des corrections de profil optimales se situant toutes à proximité des courbes maitresses modifiées telles que définies par Bruyère et al [5]. Les applications présentées dans ce mémoire portent sur des systèmes relativement complexes à 4 et 6 étages de réductions et illustrent le potentiel du modèle développé ainsi que son intérêt dans un contexte industriel. Une troisième et dernière partie a été dévolue au test de performance des corrections 'optimales' pour différentes configurations de variations de couple moteur et couples résistants (variation dans le temps du couple moteur, différents niveaux de couples, arrêt brutal). Dans ces conditions non stationnaires ou à différents niveaux de charge, il apparaît que des corrections de profil courtes semblent être les plus performantes.

Les résultats obtenus dans cette thèse sont de nature théorique et numérique, il semble nécessaire de les comparer directement avec des résultats expérimentaux. Du strict point de vue des simulations numériques, la prise en compte plus précise des roulements et des carters

semblent des extensions naturelles de ces travaux de recherche. Des développements reposant sur des modèles hybrides combinant des éléments à paramètres concentrés, des éléments finis éventuellement sous-structurés semblent être une voie à explorer. Enfin, la prise en compte fine de désalignements suite à des erreurs de montage, des jeux mais aussi des déflexions pourrait également être des pistes de développement fructueuse

Références bibliographiques

- [1] P. Velex, J. Bruyère and D. R. Houser, "Some Analytical Results on Transmission Errors in Narrow-Faced Spur and Helical Gears: Influence of Profile Modifications," *journal of Mechanical Design*, vol. 133, 2011.
- [2] P. Velex, J. Bruyère and X. Gu, "An Alternative Approach to the Definition of Profile Modifications in High-Contact-Ratio Spur Gears," *journal of Mechanical Design*, vol. 137, 2015.
- [3] P. Velex, M. Chapron, H. Fakhfakh, J. Bruyère and S. Bequerelle, "On transmission errors and profile modifications minimising dynamic tooth loads in multi-mesh gears," *Sound and Vibration*, 2015 (soumis).
- [4] J. Bruyère and P. Velex, "A simplified multi-objective analysis of profile modifications in spur and helical gears," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 80, pp. 70-83, 2014.
- [5] J. Bruyère, X. Gu and P. Velex, "On the analytical definition of profile modifications minimising transmission error variations in narrow-faced spur helical gears," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 2015, no. 92, p. 257–272, 2015.
- [6] A. Carbonelli, "Caractérisation vibro-acoustique d'une cascade de distribution poids lourd," thèse de doctorat à l'Ecole Centrale de Lyon, 2012.

- [7] A. Carbonelli, J. Perret-Liaudet, E. Rigaud and A. Le Bot, "Particle swarm optimization as an efficient computational method in order to minimize vibrations of multi-mesh gears transmission," *Advances in Acoustics and Vibration*, vol. 2011, 2011.
- [8] A. Carbonelli, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, E. Pelloli and D. Barday, "Robust optimization of a truck timing gear cascade: numerical and experimental results," in *21th French Congress of Mechanics*, Bordeaux, France, 2013.
- [9] R. Kasuba and J. W. Evans, "An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 103, pp. 398-409, 1981.
- [10] S. Honda, "Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces,," in *Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*, Hiroshima, 1991.
- [11] P. Velex, O. Duvergey and P. Sainsot, "Un modèle du comportement dynamique d'engrenages droits avec prise en compte des contacts hors du plan d'action," *Mécanique et Industries, AFM, EDP Sciences*, vol. 5, pp. 701-708, 2004.
- [12] H. Strauch, "ZahnradSchwringungen," *Zeitschrift des Veirenes Deutscher Ing*, vol. 95, pp. 159-163, 1953.
- [13] S. L. Harris, "Dynamic loads on the teeth of spur gears," *proc. Inst. MEch. Engrs*, vol. 172, 1958.

- [14] G. W. Blankenship and R. Singh, "A comparative study of selected gear mesh interface dynamic models," in *Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, Phoenix, 1992.
- [15] P. Velex and M. Ajmi, "Un modèle pour la simulation du comportement dynamique d'engrenages à dentures larges," in *Proceedings of the 4th World congress on gearing and Power Transmission*, Paris, 1999.
- [16] International Organisation for Standardization, "ISO 6336," in *Calculation of load capacity of spur and helical gears*, Genève, Switzerland, 1996, pp. part 1-5.
- [17] C. Weber and K. Bnaschek, "Formänderung und Profilrücknahme bei Gerad- und Schrägverzahnten Antriebstechnik," Germany, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1953, p. Heft 11.
- [18] G. Lundberg, "Elastische Berührung zweier Halbräume," *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, vol. 10, pp. 201-211, 1939.
- [19] P. Sainsot, P. Velex and O. Duverger, "Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula," *J. Mech. Des*, vol. 126, no. 4, pp. 748-752, 2004.
- [20] A. D. Kerr, "Elastic and viscoelastic foundation models," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, no. 3, pp. 491-498, 1964.
- [21] D. L. Seager, "Some elastic effects in helical gear teeth," thèse de doctorat, Cambridge, 1967.

- [22] G. Schmidt, L. Pinnekamp and A. Wunder, "Optimum tooth profile correction of helical gears," in *Proceedings of the International Power Transmission and Gearing Conference*, San Francisco, 1980.
- [23] M. Ajmi and P. Velex, "A model for simulating the dynamic behavior of solid wide-faced spur and helical gear," *Mechanisms and machine theory*, vol. 40, no. 2, pp. 173-190, 2005.
- [24] P. Velex and A. Saada, "A model for the dynamic behavior of multi-stage geared systems," in *Proc of 8th World Congress Theory of Machines and Mechanisms*, Prague, 1991.
- [25] P. Velex and A. Saada, "Application d'une méthode de Ritz à l'analyse du comportement dynamique de trains d'engrenages simple ou multi-étages," in *Proceedings of the 3Prd World Congress on Gearing and Power Transmissions*, Paris, 1992.
- [26] P. Velex and A. Saada, "Modal analysis for the prediction of dynamic tooth loads in geared trains," in *Proceedings JSME International Conference Motion and Power Transmissions*, Hiroshima, 1991.
- [27] P. Velex, "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles," Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon., Lyon, 1988.
- [28] S. V. Neriya, R. B. Bhat and T. S. Sankar, "On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of deterministic and filtered white noise inputs," *Transactions of ASME Journal of*

Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, vol. 101, pp. 501- 506, 1988.

- [29] S. Kiyono, T. Aida and Y. Fujii, "Vibration of helical gears - Part I: Theoretical analysis," *Bulletin of JSME*, vol. 21, no. 155, pp. 915-922, 1978.
- [30] T. Iwatsubo, S. Arii and R. Kawai, "The coupled lateral torsional vibration of a geared rotor system," *Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, pp. 59-66, 1984.
- [31] F. Küçükay, "Dynamic Behaviour of High Speed Gears," *Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, pp. 81-90, 1984.
- [32] Y. H. T. Cai, "The linear approximated equation of vibration for a pair of spur gears: theory and experiment," in *Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, Phoenix, 1992.
- [33] A. Seireg and D. R. Houser, "Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears," *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 504-515, 1970.
- [34] R. W. Gregory, S. L. Harris and R. G. Munro, "Dynamic behaviour of spur gears," *Proc Instn Mech Engrs*, vol. 178, no. 3, pp. 207-226, 1963.
- [35] R. W. Gregory, S. L. Harris and R. G. Munro, "Torsional motion of a pair of spur gears," *Proc of Inst of Mech Engrs* , vol. 178, no. 3, pp. 166-173, 1963.

- [36] R. G. Munro, "Effet of geometrical errors on the transmission of motion between gears," *Pro. Inst. Mech. Engrs*, vol. 184, pp. 79-83, 1969.
- [37] R. J. Drago, *Fundamentals of gear design*, Boston: Butterworth, 1988, p. 560.
- [38] H. H. Lin, D. P. Townsend and F. B. oswald, "dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications," in *Proc of the 5th ASME int Power Transmission and Gearing Conf*, Chicago, 1989.
- [39] H. H. Lin, D. P. Townsend and F. B. oswald, "Profile modification to minimize spur gear dynamic loading," in *Proc of the 5th ASME int Power Transmission and Gearing Conf*, Chicago, 1989.
- [40] R. W. Gregory, S. L. Harris and R. G. Munro, "Dynamic behaviour of spur gears," *Proc Instn Mech Engrs*, vol. 178, no. 3, pp. 207-226, 1963.
- [41] A. Kubo, "Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error," *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 100, pp. 77-84, 1978.
- [42] A. Kahraman and R. Singh, "Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, no. 1, pp. 135-156, 1991.
- [43] S. Baud and P. Velex, "Static and Dynamic Tooth Loading in Spur and Helical Geared Systems-Experiments and Model Validation," *J. Mech. Des*, vol. 124, no. 2, pp. 334-346, 2002.

- [44] P. Velex and M. Maatar, "A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pp. 629-660, 1996.
- [45] M. Maatar and P. Velex, "Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications," *J. Mech. Des.*, vol. 119, no. 4, pp. 474-480, 1997.
- [46] E. Buckingham, *Dynamic loads on gear teeth*, New-York : Special Research Committee on the Strength of Gear Teeth, 1931, p. 221.
- [47] W. A. Tuplin, "Dynamic loads on gear teeth," in *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing*, London, 1958.
- [48] D. R. Houser and A. Seireg, "An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears," *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 495-503, 1970.
- [49] A. Kahraman and R. Singh, "Non linear dynamics of spur gear," *journal of sound and vibration*, vol. 142, no. 1, pp. 49-75, 1990.
- [50] G. Liu, "Nonlinear dynamics of multi-stage gear systems," Ohio State University, USA, 2007.
- [51] J. Lin and R. G. Parker, "Mesh Stiffness Variation Instabilities in Two-Stage Gear Systems.," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, pp. 68-76, 2002.

- [52] H. Yu, P. Eberhard, Y. Zhao and H. Wang, "Sharing behavior of load transmission on gear pair systems actuated by parallel arrangements of multiple pinions," *Mechanism and machine theory*, vol. 65, pp. 58-70, 2013.
- [53] S. Theodossiades and S. Natsiavas, "Non-Linear Dynamics of Gear-Pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, pp. 287-310., 2000.
- [54] J. P. Raclot and P. Velex, "Simulation of the Dynamic Behavior of Single and Multi-Stage Geared Systems with Shape Deviations and Mounting Errors by Using a Spectral Method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 220, pp. 861-903, 1999.
- [55] A. Kahraman, "Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Helical Gear Train," *Journal of Mechanical Design*, vol. 116, no. 3, pp. 706-712, 1994.
- [56] F. K. Choy, Y. K. Tu, M. Savage and D. P. Townsend, "Vibration signature and modal analysis of multistage gear transmission," *The Franklin Institute*, vol. 321, pp. 281-298, 1991.
- [57] H. K. Kohler, A. Pratt and A. M. Thompson, "Dynamics and noise of parallel axis gearing," *Proc. Inst. Mech. Engrs*, vol. 184, pp. 111-121, 1969.
- [58] M. Maatar, "Contribution a l'analyse du comportement dynamique de reducteurs a engrenages simple etage : influence des ecarts de forme et des défauts de montage," Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1995.

- [59] G. Henriot, "Traité théorique et pratique des engrenages," in *Tome I : Théorie et technologie*, Paris , Dunod Technique, 1979, p. 622p.
- [60] K. Umezawa, T. Suzuki, H. Houjoh and K. Bagiasna, "Influence of misalignment on vibration of helical gear," *bulletin of JSME*, vol. 12, no. 53, pp. 85-91, 1986.
- [61] M. Benton and A. Seireg, "Factors Influencing Instability and Resonances in Geared Systems," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 103, pp. 372-378, 1981.
- [62] P. Vernay, "Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de réacteur d'avion," Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1999.
- [63] P. Vernay and G. Ferraris, "Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de réacteur d'avion," *Mécanique & Industries*, vol. 7, no. 2, pp. 147-153, 2006.
- [64] J. G. Hugues, "Contribution a l'etude dynamique, lors du demarrage, de chaines cinematiques a engrenages, entrainees par moteur electrique," Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1993.
- [65] G. Sika, "Contribution a l'etude dynamique, lors du demarrage, de chaines cinematiques a engrenages, entrainees par moteur electrique," Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 2008.

- [66] T. Furokawa , " Vibration analysis of gear and shaft system by modal method," in *Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*, Hiroshima, 1991.
- [67] J. G. S. Baguet S and G. Jacquenot, "Nonlinear couplings in a gear-shaft-bearing system," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, pp. 1777-1796, 2010.
- [68] R. Fargère and P. Velex, "Influence of clearances and thermal effects on the dynamic behaviour of gear-hydrodynamic journal bearing systems," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 135, no. 6, 2013.
- [69] H. N. Ozguven, and D. R. Houser, "Dynamic Analysis of High-Speed Gears by Using Loaded Static Transmission Error," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 125, no. 1, pp. 71-83, 1988.
- [70] J. Shigley, C. Mischke and R. Budynas, *Mechanical engineering design*, New York, London, McGraw-Hill, 2003.
- [71] B. R. Höhn, and k. Michaelis, "Influence of oil temperature on gear failures," *Tribology International*, vol. 37, p. 103–109, 2004.
- [72] D. Ghribi, J. Bruyère, P. Velex, M. Octrue and M. Haddar, "A Contribution to the Design of Robust Profile Modifications in Spur and Helical Gears by Combining Analytical Results and Numerical Simulations," *journal of Mechanical Design*, vol. 134, 2012.

- [73] D. Ghribi, "Optimisation des corrections de forme dans les engrenages droits et hélicidaux: approches déterministes et probabilistes," Thèse de doctorat, Lyon, France, 2013.
- [74] J. H. Holland, "Adaptation In Natural And Artificial Systems," *University of Michigan Press*, 1975.
- [75] D. E. Goldberg, "Genetic algorithms in search, optimisation and machine learning," *Addison-Wesley Professional*, no. ISBN 978-0201157673, 1989.
- [76] B. Samanta, "Gear fault detection using artificial neural networks and support vector machines with genetic algorithms," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 18, no. 3, p. 625–644, 2004.
- [77] B. Samanta, K. R. Al-Balushi and S. A. Al-Araimi, "Artificial neural networks and support vector machines with genetic algorithm for bearing fault detection," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 16, no. 7-8, p. 657–665, 2003.
- [78] ,. T. Yokota, T. Taguchi and M. Gen, "A solution method for optimal weight design problem of the gear using genetic algorithms," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 35, no. 3-4, p. 523–526, 1998.
- [79] D. Yang, Y. Liu, S. Li, X. Li and L. Ma, "Gear fault diagnosis based on support vector machine optimized by artificial bee colony algorithm," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 90, pp. 219-229, 2015.

- [80] I. Lerman and F. Ngouenet, "Algorithmes génétiques séquentiels et parallèles pour une représentation," Projet REPCO 2570, INRIA, Rennes, 1995.
- [81] M. Clerc and P. Siarry, "Une nouvelle métaheuristique pour l'optimisation difficile : la méthode des essaims particulaires," *J3eA*, vol. 3, no. 007, 2004.
- [82] R. C. Eberhart and Y. Shi, "Particle swarm optimization: developments, applications and resources," *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*, vol. 1, pp. 81 - 86, 2001.
- [83] J. Kennedy, "Particle Swarm Optimization," *Encyclopedia of Machine Learning*, pp. 760-766, 2010.
- [84] Z. Fang, J. Xu and P. Wang, "Applying Multi-Objective Particle Swarm Optimization to Maintenance Scheduling for CNC Machine Tools," *Applied Mechanics and Materials*, pp. 144-148, 2014.
- [85] U. Nagalingam, B. Mahadevan, K. Vijayarajan and A. P. Loganathan, "Design optimization for cogging torque mitigation in brushless DC motor using multi-objective particle swarm optimization algorithm," *Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, pp. 1302 - 1318, 2015.
- [86] P. S. da Silva, S. L. Moni Riberio Filho and L. Cardoso Brandao, "Particle swarm optimization for achieving the minimum profile error in honing process," *Precision Engineering*, vol. 38, p. 759-768, 2014.

- [87] V. Savsani, R. V. Rao and D. P. Vakharia, "Optimal weight design of a gear train using particle swarm optimization and simulated annealing algorithms," vol. 45, no. 3, p. 531–541, *Mechanism and Machine Theory*.
- [88] M. Clerc, "The swarm and the queen : towards a deterministic and adaptive," in *Proceedings of the 1999 Congress on*, 1999.
- [89] I. C. Trelea, "The particle swarm optimization algorithm : convergence analysis and parameter selection," *Information processing letters*, vol. 85, no. 6, p. 317–325, 2003.
- [90] H. Iida and A. Tamura, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of a Shaft in a Geared System," in *Proceedings of the Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Institution of Mechanical Engineers*, 1984.
- [91] H. Iida, A. Tamura and M. Oonishi, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of a Shaft in a Geared System, 3rd Report, Dynamic Characteristics of a Counter Shaft in a Gear Train System," *Bulletin of JSME*, vol. 28, pp. 2694-2698. , 1985.
- [92] H. Iida, A. amura and H. Yamamoto, "Dynamic Characteristics of a Gear Train System with Softly Supported Shafts," *Bulletin of JSME*, vol. 29, pp. 1811-1816, 1986.
- [93] K. Umezawa, T. Ajima and H. Houjoh, "Vibration of Three Axes gear system," *Bulletin of JSME*, vol. 29, pp. 950-957, 1986.

- [94] A. Al-Shhyab and A. Kahraman, "A Non-linear Torsional Dynamic Model of Multi-Mesh Gear Trains Having Flexible Shafts," *Journal of Mechanical and Industrial Engineering.*, vol. 1, pp. 31-41, 2007.
- [95] A. Al-shyyab and A. Kahraman , "Non-linear dynamic analysis of a multi-meshgear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions," *Journal of Sound and Vibration* , vol. 284 , p. 151–172, 2005.
- [96] A. Al-shyyab and A. Kahraman, "Non-linear dynamic analysis of a multi-meshgear train using multi-term harmonic balance method: sub-harmonic motions," *Journal of Sound and Vibration* , vol. 279 , p. 417–451, 2005.
- [97] H. Linke and J. Borner, "Dynamic Loads of Gear Trains with Idler gears," in *Proceedings of JSME International Conference on Motion and Power* , 1991.
- [98] O. Buiga and L. Tudose, "Optimal mass minimization design of a two-stage coaxial helical speed reducer with Genetic Algorithms," *Advances in Engineering Software* , vol. 68, p. 25–32, 2013.
- [99] N. Marjanovic, B. Isailovic, V. Marjanovic, Z. Milojevic, M. Blagojevic and M. Bojic, "A practical approach to the optimization of gear trains with spur gears," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 53, pp. 1-16, 2012.
- [100] S. Prayoonrat and D. Walton, "Practical approach to optimum gear train design," *Computer-Aided Design*, vol. 20, no. 2, p. 83–92, 1988.
- [101] V. Savsani, R. V. Rao and D. P. Vakharia, "Optimal weight design of a gear train using particle swarm optimization and simulated annealing

- algorithms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, no. 2010, p. 531–541, 2009.
- [102] D. Guyonneau, E. Mermoz, J. Mailhé, J. M. Sprauel and J. M. Linares, "Stress optimization and study of the sensitivity to geometric variations of a spur gear tooth profile," *Journal of Mechanics and industry*, vol. 14, pp. 31-41, 2013.
- [103] P. Sainsot, "Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteur," thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1989.
- [104] M. Ajmi, "Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à denture larges," thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, 2000.
- [105] H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Velex and S. Becquerelle, "A torsional model of multi-stage gears - Influence of external excitations and tooth shape modifications," *Journal Mechanics and Industry*, 2015.
- [106] H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Velex and S. Becquerelle, "A torsional dynamic model of multi-stage geared systems submitted to internal and external excitations," in *International Gear Conference*, Lyon, France, 2014.
- [107] J. P. Raclot, "Analyse de la réponse dynamique de trains d'engrenages à simple et double étage de réduction avec écarts de forme par une méthode spectrale itérative," INSA de Lyon, Lyon, 1997.
- [108] C. J. Bahk and R. G. Parker, "Nonlinear Dynamics of Planetary Gears with Equally Spaced Planets," *Journal of Sound and Vibration*, 2007.

- [109] J. Lin and R. Parker, "Parametric Instability of Planetary Gears under Mesh Stiffness Variation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 29, pp. 411-429, 2002.
- [110] H. Vinayak, R. Singh and C. Padmanabhan, "Linear Dynamic Analysis of Multi-Mesh Transmissions Containing External, Rigid Gears.," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 185, pp. 1-32, 1995.
- [111] M. Bonori, G. Barbieri and F. Pellicano, "Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 313, p. 603–616, 2008.
- [112] T. Ertlenel and R. G. Parker, "A static and dynamic model for three-dimensional multi-mesh gear systems," *In Proceedings of the ASME International Design*, vol. 5, pp. 945–956,, 2005.
- [113] M. Beghini, F. Presicce, C. Santus and D. di Ingegneria., "A method to define profile modification of spur gear and minimize the transmission error," *In Proceedings AGMA Fall Meeting*, 2004.
- [114] T. Tsuta, M. Oda, H. Yoshihara, M. Sugimoto and S. Ebina, "excitation force analysis of helical gear pair with tolerances in their tooth shape and pitch, mounted on flexible shaft," in *Proc of the 3rd JSME Int Conf on Motion and Power transmissions*, Hiroshima, 1991.
- [115] O. S. Sner and H. N. Ozguven, "Dynamic analysis of geared shaft systems by using continuous system model," *Journal of sound and vibration* , vol. 166, no. 3, pp. 539-556, 1993.

- [116] A. Kahraman, H. N. Ozguven, D. R. Houser and J. Zakrajsek, "Dynamic analysis of geared rotors by finite elements," in *Proc of the 5th ASME Int Power transmission and gearing Conf*, Chicago, 1989.
- [117] C. Weber, "The deformation of leaded gears and the effect on their load-carrying capacity," London, departement of scientific and indistruel research, 1950, p. part 5.
- [118] R. Dufour, "Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles," Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1985.
- [119] H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Vexex and S. Becquerelle, "Simulation of the Dynamic Behavior of a Multi-stage Geared Systems with Tooth Shape Deviations and External Excitation," in *International Conference on Multiphysics Modelling and Simulation for Systems Design*, Sousse, Tunisia, 2014.
- [120] R. W. Cornell, "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth," *ASME, journal of Mechanical Design*, vol. 103, pp. 447- 459, 1981.
- [121] A. palmgren, *Ball and roller bearing engineering* (3rd edition), Philadelphia, USA: S.H. Burbank & co, 1959.
- [122] M. G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques," in *Annales de l'Ecole Normale, 2ème série, Tome XII*, 1883, pp. 47-89.

- [123] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, "Non linear oscillations," New York, John Wiley, 1979, pp. 258-365.
- [124] J. Bruyère, X. Gu and P. Velex, "on the analytical definition of profile modifications minimising transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears," *Mechanism and Machine Theory* , vol. 92, p. 257–272, 2015.
- [125] V. V. Bolotin, "The dynamic stability of elastic systems," in *Holden-Day*, San Francisco, 1964, pp. 145-277.

Annexe A : Matrices éléments arbres

Soit un élément d'arbre i de section S et de longueur l .

Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité $[K_{ai}]$ de l'élément arbre i exprimé dans le repère global

$\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ s'écrit :

$$[K_{ai}] = \begin{bmatrix} 12b+36c & 0 & 0 & 0 & 6b+3c & 0 & -12b-36c & 0 & 0 & 0 & 6b+3c & 0 \\ & 12b+36c & 0 & -6b-3c & 0 & 0 & 0 & -12b-36c & 0 & -6b-3c & 0 & 0 \\ & & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 \\ & & & (4+a)l^2b+4l^2c & 0 & 0 & 0 & 6b+3c & 0 & (2-a)l^2b-l^2c & 0 & 0 \\ & & & & (4+a)l^2b+4l^2c & 0 & -6b-3c & 0 & 0 & 0 & (2-a)l^2b-l^2c & 0 \\ & & & & & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f \\ & & & & & & 12b+36c & 0 & 0 & 0 & -6b-3c & 0 \\ & & & & & & & 0 & 12b+36c & 0 & 6b+3c & 0 \\ & & & & & & & & & d & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & (4+a)l^2b+4l^2c & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & (4+a)l^2b+4l^2c \\ & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & f \end{bmatrix}$$

Où :

$$- a = \frac{12.E.I_x}{G.l^2.S.k}, b = \frac{E.I_x}{(1+a).l^3}, c = \frac{F}{30.l} \text{ et } f = \frac{G.J}{l}$$

$$- I_x = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{4}, J = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$$

- l : Longueur de l'élément arbre

- E : Module d'élasticité de l'élément arbre
- G : Module de cisaillement de l'élément arbre
- F : Charge axiale appliqué à l'élément arbre
- a : traduit les effets du cisaillement sur la déformée de flexion. Il a été pris nul dans l'expression de l'énergie de déformation ci-dessus.
- $S.k = S \cdot \frac{6.(1+\nu).(1+m^2)^2}{(7+6\nu).(1+m^2)^2 + (20+12\nu).m^2}$ Surface équivalente de cisaillement avec $m = \frac{R_i}{R_e}$
- R_i, R_e : Rayon intérieur et rayon extérieur de l'élément arbre.
- $\mathbf{q}_i = \langle v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2 \rangle$

Matrice de masse :

La matrice de masse $[M_{ai}]$ de l'élément arbre i exprimé dans le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ s'écrit :

$$[M_{ai}] = \begin{bmatrix} 156a+36b & 0 & 0 & 0 & l(22a+3b) & 0 & 156a-36b & 0 & 0 & 0 & l(3b-13a) & 0 \\ & 156a+36b & 0 & -l(22a+3b) & 0 & 0 & 0 & 156a-36b & 0 & l(13a-3b) & 0 & 0 \\ & & 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4l^2(a+b) & 0 & 0 & 0 & l(3b-13a) & 0 & -l^2(3a+b) & 0 & 0 \\ & & & & 4l^2(a+b) & 0 & l(13a-3b) & 0 & 0 & 0 & -l^2(3a+b) & 0 \\ & & & & & 2d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ & & & & & & 156a+36b & 0 & 0 & 0 & -l(22a+3b) & 0 \\ & & & & & & & 156a+36b & 0 & l(22a+3b) & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 2c & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 4l^2(a+b) & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4l^2(a+b) & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2d \end{bmatrix}$$

Où :

$$- a = \frac{\rho \cdot S \cdot l}{420}, b = \frac{I}{30 \cdot l}, c = \frac{\rho S l}{6}, d = \frac{I_0 S}{6}$$

$$- I = \frac{\rho \pi (R_e^4 - R_i^4)}{4}, I_0 = \frac{\rho \pi (R_e^4 - R_i^4)}{2}$$

- ρ : Masse volumique de l'élément arbre

$$- \mathbf{q}_i = \langle v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2 \rangle$$

Vecteur forces inertielles :

Le vecteur forces inertielles $\mathbf{F}_{ai}(t)$ de l'élément arbre i exprimé dans le repère global $\vec{R}_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z})$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_{ai}(t) = \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, \frac{I_0 \cdot l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{I_0 \cdot l}{2} \right\rangle$$

$$\text{Où } \mathbf{q}_i = \langle v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2 \rangle$$



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : FAKHFAKH

DATE de SOUTENANCE : 18/07/2016

Prénoms : Hassen

TITRE : Etude du comportement dynamique d'un système multi-étages à engrenements en cascade et décalés à dentures droites et hélicoïdales – optimisation des corrections de profil

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSEI071

Ecole doctorale : MEGA ED162

Spécialité : Génie mécanique

RESUME :

Ce travail de thèse, réalisé dans le cadre d'une collaboration avec la société Hispano-Suiza (groupe SAFRAN) porte sur la modélisation et l'analyse des vibrations et surcharges dynamiques sur les engrenements d'un réducteur aéronautique multi-étage constitué de plusieurs cascades d'engrenements situés dans des plans décalés. Une modélisation originale est proposée qui repose sur le couplage entre la résolution des équations du mouvement et la prise en compte des conditions de contact instantanées sur l'ensemble de tous les engrenements. Le modèle gère les phases relatives entre engrenements ainsi que l'influence des modifications de corrections de forme des dentures. En s'appuyant sur de nombreux exemples d'application, il est montré que des corrections de profil linéaires et symétriques adaptées permettent d'abaisser très sensiblement le niveau de surcharges dynamiques sur une plage de vitesse de rotation importante. Il est également confirmé que les efforts dynamiques sur les engrenements sont fortement corrélés aux amplitudes des variations temporelles des erreurs de transmission locales pour un fonctionnement quasi-statique sous charge. Considérant différentes architectures de transmissions, des optimisations conduites grâce à un algorithme génétique montrent que les paramètres optimaux de corrections de profil sont à choisir au voisinage d'une 'courbe maîtresse modifiée', initialement définie pour un seul engrenement et dont les propriétés semblent pouvoir être extrapolées à des systèmes avec plusieurs engrenements simultanés. Les résultats de simulations prouvent que l'ensemble des corrections sélectionnées sur les courbes maîtresses modifiées améliorent sensiblement le comportement dynamique des systèmes d'engrenages multi-étages. En revanche, pour des systèmes soumis à des niveaux de charge différents, des corrections optimales courtes semblent plus adaptées en termes de dynamique de l'engrenement tandis que des corrections optimales longues semblent plus efficaces en ce qui concerne le niveau de contraintes en pied de dents.

MOTS-CLÉS : Engrenement multi-étages, Vibrations, Dynamique, Corrections de profil, Erreur de transmission, Optimisation

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des structures (LaMCoS)

Directeur de thèse: Philippe VELEX

Président de jury : Joël PERRET-LIAUDET

Composition du jury : Jorge SEABRA, Mohamed HADDAR, Jérôme BRUYERE,
Philippe Velex et Samuel BECQUERELLE