N° d'ordre 2005-ISAL-00130 Année 2005

Thèse

Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques – effet d'un chargement normal et tangentiel –

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le grade de docteur

Formation doctorale :
Mécanique
École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) de Lyon

Par
Eduard ANTALUCA
(Ingénieur de l'Université Technique « GH. Asachi » Iasi, Roumanie)
Soutenue le 16 décembre 2005 devant la Commission d'examen

Jury MM.

Président	**M. BRUNET**	Professeur (INSA de Lyon)
Directeur de thèse	**S. CRETU**	Professeur (Université Tech. « Gh. Asachi », Iasi, Roumanie)
Rapporteur	**G. INGLEBERT**	Professeur (SUPMECA, Paris)
Examinateur	**C. JACQ**	Docteur (SNECMA)
Rapporteur	**G. MOGAN**	Professeur (Université « Transilvania », Brasov, Roumanie)
Directeur de thèse	**D. NELIAS**	Professeur (INSA de Lyon)

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) de L'INSA de Lyon

2005

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	CHIMIE DE LYON Responsable : M. Denis SINOU	M. Denis SINOU Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2ème étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	**ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS** Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Alain.bonnafous∂ish-lyon.cnrs.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 E2m2∂biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE http://www.insa-lyon.fr/ediis M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 ediis@insa-lyon.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** http://www.ibcp.fr/ediss M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 cozzone@ibcp.fr
	MATERIAUX DE LYON http://www.ec-lyon.fr/sites/edml M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 Jacques.Joseph@ec-lyon.fr
Math IF	**MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE** http://www.ens-lyon.fr/MathIS M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1er étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 wagner@desargues.univ-lyon1.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systêmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél :04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

Novembre 2003

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

***Directeur* : STORCK A.**

***Professeurs* :**

AMGHAR Y.	LIRIS
AUDISIO S.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOT D.	CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENTS IONISANTS
BABOUX J.C.	GEMPPM***
BALLAND B.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BAPTISTE P.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BARBIER D.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASKURT A.	LIRIS
BASTIDE J.P.	LAEPSI****
BAYADA G.	MECANIQUE DES CONTACTS
BENADDA B.	LAEPSI****
BETEMPS M.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BIENNIER F.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BLANCHARD J.M.	LAEPSI****
BOISSE P.	LAMCOS
BOISSON C.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
BOIVIN M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES SOLIDES
BOTTA H.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOULAYE G. (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BOYER J.C.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRAU J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment
BREMOND G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BRISSAUD M.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
BRUNET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRUNIE L.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUFFIERE J-Y.	GEMPPM***
BUREAU J.C.	CEGELY*
CAMPAGNE J-P.	PRISMA
CAVAILLE J.Y.	GEMPPM***
CHAMPAGNE J-Y.	LMFA
CHANTE J.P.	CEGELY*- Composants de puissance et applications
CHOCAT B.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
COMBESCURE A.	MECANIQUE DES CONTACTS
COURBON	GEMPPM
COUSIN M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
DAUMAS F. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique
DJERAN-MAIGRE I.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
DOUTHEAU A.	CHIMIE ORGANIQUE
DUBUY-MASSARD N.	ESCHIL
DUFOUR R.	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY J.C.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION
ESNOUF C.	GEMPPM***
EYRAUD L. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
FANTOZZI G.	GEMPPM***
FAVREL J.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
FAYARD J.M.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
FAYET M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES SOLIDES
FAZEKAS A.	GEMPPM
FERRARIS-BESSO G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L.	MECANIQUE DES CONTACTS
FLEURY E.	CITI
FLORY A.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATIONS
FOUGERES R.	GEMPPM***
FOUQUET F.	GEMPPM***
FRECON L. (Prof. émérite)	REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLES
GERARD J.F.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
GERMAIN P.	LAEPSI****
GIMENEZ G.	CREATIS**
GOBIN P.F. (Prof. émérite)	GEMPPM***
GONNARD P.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GONTRAND M.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GOUTTE R. (Prof. émérite)	CREATIS**
GOUJON L.	GEMPPM***
GOURDON R.	LAEPSI****.
GRANGE G. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GUENIN G.	GEMPPM***
GUICHARDANT M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLOT G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS

GUYADER J.L.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
GUYOMAR D.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
HEIBIG A.	MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON
JACQUET-RICHARDET G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
JAYET Y.	GEMPPM***
JOLION J.M.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION

Novembre 2003

JULLIEN J.F.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
JUTARD A. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
KASTNER R.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
KOULOUMDJIAN J. (Prof. émérite)	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LALLEMAND M. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LAREAL P (Prof. émérite)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
LAUGIER A. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
LAUGIER C.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LAURINI R.	INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTEMES D'INFORMATION
LEJEUNE P.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
LUBRECHT A.	MECANIQUE DES CONTACTS
MASSARD N.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
MAZILLE H. (Prof. émérite)	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P.	GEMPPM***
MERLIN J.	GEMPPM***
MIGNOTTE A. (Mle)	INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
MILLET J.P.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MIRAMOND M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
MOREL R. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES
MOSZKOWICZ P.	LAEPSI****
NARDON P. (Prof. émérite)	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
NAVARRO Alain (Prof. émérite)	LAEPSI****
NELIAS D.	LAMCOS
NIEL E.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
NORMAND B.	GEMPPM
NORTIER P.	DREP
ODET C.	CREATIS**
OTTERBEIN M. (Prof. émérite)	LAEPSI****
PARIZET E.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PASCAULT J.P.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
PAVIC G.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PECORARO S.	GEMPPM
PELLETIER J.M.	GEMPPM***
PERA J.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux
PERRIAT P.	GEMPPM***
PERRIN J.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PINARD P. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON J.M.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
PONCET A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
POUSIN J.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
PREVOT P.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PROST R.	CREATIS**
RAYNAUD M.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
RETIF J-M.	CEGELY*
REYNOUARD J.M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
RICHARD C.	LGEF
RIGAL J.F.	MECANIQUE DES SOLIDES
RIEUTORD E. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D.	GEMPPM***
ROUX J.J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON – Thermique de l'Habitat
RUBEL P.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
SACADURA J.F.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTEREAU H.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SCAVARDA S. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
SOUIFI A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
SOUROUILLE J.L.	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
THUDEROZ C.	ESCHIL – Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon
UBEDA S.	CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES
VELEX P.	MECANIQUE DES CONTACTS
VERMANDE P. (Prof émérite)	LAEPSI
VIGIER G.	GEMPPM***
VINCENT A.	GEMPPM***
VRAY D.	CREATIS**
VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE

***Directeurs de recherche C.N.R.S.* :**	
BERTHIER Y.	MECANIQUE DES CONTACTS
CONDEMINE G.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
COTTE-PATAT N. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
ESCUDIE D. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON
FRANCIOSI P.	GEMPPM***
MANDRAND M.A. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
POUSIN G.	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
ROCHE A.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SEGUELA A.	GEMPPM***
VERGNE P.	LaMcos
***Directeurs de recherche I.N.R.A.* :**	
FEBVAY G.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
GRENIER S.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
RAHBE Y.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
***Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.* :**	
KOBAYASHI T.	PLM
PRIGENT A.F. (Mme)	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
MAGNIN I. (Mme)	CREATIS**

* ***CEGELY***	*CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON*
***** CREATIS***	*CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL*
******GEMPPM***	*GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX*
*******LAEPSI***	*LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS*

AVANT-PROPOS

Cette étude a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCos) de l'INSA de Lyon en collaboration avec le Laboratoire des Organes de Machines et Mécatronique de l'Université Technique « Gh. Asachi » Iasi, Roumanie, dans le cadre d'une thèse en cotutelle.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Madame le Professeur Geneviève INGLEBERT (SUPMECA, Paris) et Monsieur le Professeur Gheorghe MOGAN (Université « Transilvania », Brasov, Roumanie) pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et membres du jury.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur Michel BRUNET (INSA Lyon) et Monsieur le Docteur Christophe JACQ (SNECMA) pour leur participation au jury.

Je tiens à remercier très particulièrement mes directeurs de thèse, Spiridon CRETU (Université « Gh. ASACHI », Iasi) et Daniel NELIAS (INSA Lyon) pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me chargeant de cette étude, pour leur générosité, disponibilité et volonté de partager des connaissances et de travailler ensemble.

Je remercie toute l'équipe LaMCos-MSE au sein de laquelle j'ai travaillé à l'INSA, pour leurs conseils et leur bonne humeur, et en particulier Vincent BOUCLY et Ludovic GALLEGO pour leur aide sur la rédaction de la thèse. Je pense également au Docteur Tarek MABROUKI pour nos nombreuses discussions amicales autour d'une tasse de café (au lait) et à ma compatriote Ana-Maria SFARGHIU (épouse TRUNFIO), doctorante au LaMCos, pour son aide toujours désintéressée.

Je tiens également à remercier toute l'équipe « OM » de mon université d'origine en particulier Monsieur le Professeur Dumitru OLARU, le premier qui m'a fait confiance m'envoyant avec une bourse «à l'étranger » et le Docteur Viorel PALEU avec qui j'ai passé de bons moments ici, à Lyon.

Je voudrais remercier le Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche et l'Agence Universitaire de la Francophonie qui via respectivement le projet

« Supersonique » et la bourse de formation à la recherche ont assuré le soutien financier de mes séjours en France.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famille : à mes parents, à mon frère et plus particulièrement à ma femme Alina et à mes enfants Robert et Ioana pour leur patience et compréhension dans les moments difficiles et aussi pour avoir accepté les longues périodes de séparation.

A ma famille,

Eduard ANTALUCA

Décembre 2005.

CONVENTIONS ET SYMBOLES

Symboles

δ_{ij} : symbole de Kronecker.
$\otimes$: produit de convolution.
I : tenseur identité.
E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson.
μ, λ : coefficients de Lame.
C_{ijkl} : matrice de compliance.
E_{eq} : module d'Young équivalent.
W : charge appliquée sur le contact.
δ : déplacement du corps solide.
R_{eq} : rayon équivalent du contact.
P_0 : pression de Hertz.
p : pression de contact.
a, c : demi axes de l'ellipse de contact.
h : distance finale entre les corps en contact.
h_i : distance initiale entre les corps en contact.
h_{min} : hauteur minimale du film d'huile.
Λ : paramètre de sévérisation du contact rugueux.
Γ_C : surface de contact.
Ω_p : volume plastique.
σ : tenseur des contraintes.
σ' : déviateur du tenseur des contraintes.
σ^n : tenseur des contraintes dues aux pressions de contact.
σ^t : tenseur des contraintes dues aux contraintes de cisaillement.
σ^r : tenseur des contraintes résiduelles.
σ_i : contrainte principale.
σ_S : limite d'élasticité.
ε : tenseur des déformations totales.
ε^e : tenseur des déformations élastiques.
ε^p : tenseur des déformations plastiques.
J_1, J_2, J_3 : premier, second et troisième invariant des tenseurs.
f : surface de charge.
$d\lambda$: multiplicateur plastique.
B, C et n : paramètres de la loi de Swift.
u : déplacement.
u^r : déplacement résiduel dû aux déformations plastiques.

u^{pr} : déplacement dû aux pressions de contact.
μ : coefficient de frottement.
R : rayon de la sphère..

Conventions

La convention de l'indice répété est utilisée :

$$a_i b_{ij} = a_1 b_{1j} + a_2 b_{2j} + a_3 b_{3j}$$

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j$$

La dérivée est symbolisée par un point :

$$\dot{a}(x) = \frac{\partial a}{\partial x} dx$$

INTRODUCTION GENERALE

Il est généralement admis que les pertes économiques par usure représentent de 6 à 10 % du Produit National Brut des pays industrialisés. L'importance relative des différents modes d'usure est la suivante (fig. *i1*) :

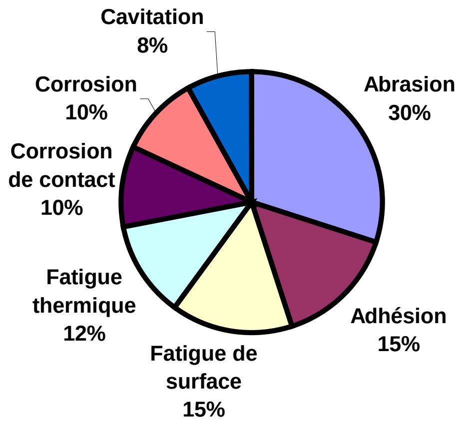


Figure i1 *Pertes relatives par usure*

L'expérience industrielle montre que les avaries des pièces en contact roulant (roulements, engrenages, roue de train …) dans des conditions normales de fonctionnement sont le plus souvent dues à la fatigue. Celle-ci est particulièrement insidieuse du fait de son caractère progressif masqué, l'accumulation de l'endommagement et les fissures de fatigue qui en résultent se propageant généralement en sous-couche pendant la majeure partie de la durée de vie du composant. Ceci est d'autant plus grave que la fissuration par fatigue conduit souvent à une rupture brutale qui peut provoquer un accident.

On entend par fatigue de roulement ou de contact la modification des propriétés des matériaux consécutive à l'application de cycles d'efforts (comme le passage répété d'un corps roulant), cycles dont la répétition se traduit par l'accumulation d'un endommagement pouvant conduire in-fine à la ruine des pièces. Ce phénomène est alors très lié au niveau de contraintes en sous couche dues à la distribution de pression sur la surface de contact.

Lorsque les surfaces de deux solides en contact ne présentent pas un degré de conformité suffisant, la charge transmise se répartit sur une aire de contact de faibles dimensions. De tels contacts sont souvent abusivement regroupés sous le terme de contacts hertziens. Les paramètres de contact (distribution de pression et aire réelle de contact) peuvent être déterminés analytiquement grâce aux remarquables travaux fait par Hertz à la fin du XIXème siècle pour l'analyse du contact sec et sans frottement entre deux corps élastiques de surfaces quadratiques.

Dans la pratique, la théorie de Hertz se trouve contredite pour de multiples raisons telles que la présence d'un film lubrifiant (liquide ou solide), la présence d'efforts de frottement ou de divers concentrateurs de contrainte comme : les rugosités, un défaut de surface (indent, rayure, etc.), des inclusions dans le matériau, etc.

L’étude de l’influence d’un ou plusieurs de ces facteurs sur la fatigue de contact passe par la connaissance des sollicitations locales en surface et en volume, de façon à les introduire dans un critère d’endommagement dont la pertinence doit être validée par l’expérimentation (fig. *i2*). Le calcul de ces sollicitations locales par un modèle de comportement purement élastique montre que les contraintes dépassent couramment la limite d’écoulement des matériaux. Depuis de nombreuses années, l’analyse d’un tel contact a été faite sous l’hypothèse de plasticité parfaite.

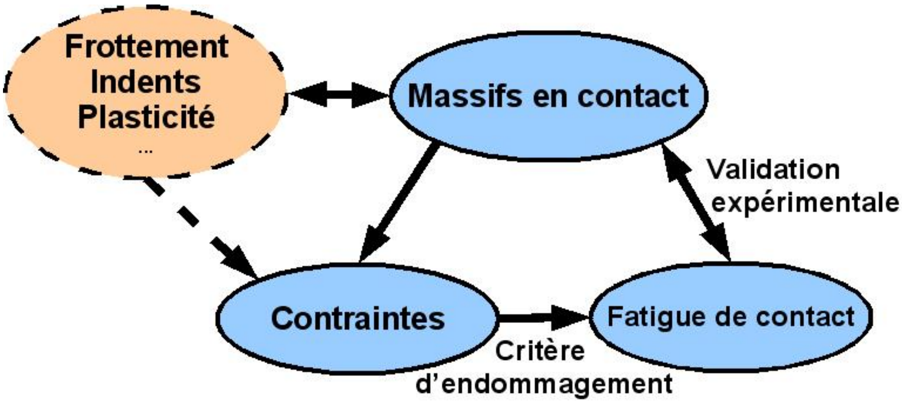


Figure i2 *Etude des mécanismes d’endommagement par fatigue de roulement*

Nous nous proposons d’introduire l’effet du chargement tangentiel dans le comportement élastoplastique à partir d’un modèle semi-analytique, développé initialement par Jacq et al. ***(JACQ 02)***, qui permet le calcul d’un chargement vertical ou roulant d’une surface lisse sur une surface rugueuse ou indentée. Cette analyse concerne essentiellement le cas de matériaux métalliques, et plus particulièrement des aciers.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres.

- Le premier chapitre présente les connaissances actuelles sur le contact entre deux massifs non-conformes : lisses et rugueux, élastique et élastoplastique, méthodes d’étude numériques et expérimentales. Nous exposons également les principales catégories d’avarie de fatigue ainsi que les paramètres influents répertoriés dans la littérature. Cette partie permet de mettre en évidence la nécessité du développement d’un modèle élastoplastique prenant en compte l’effet d’un chargement tangentiel.
- Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du problème de contact élastique. Tout d’abord, nous présentons quelques méthodes de résolution des équations de l'élasticité puis quelques méthodes numériques dédiées à l’accélération des calculs. Finalement nous proposons un algorithme de résolution du problème de contact élastique qui utilise à la fois la technique du gradient conjugué et les transformées de Fourier discrètes. L’algorithme est validé par l’utilisation d’un modèle éléments finis (EF) avec ABAQUS.

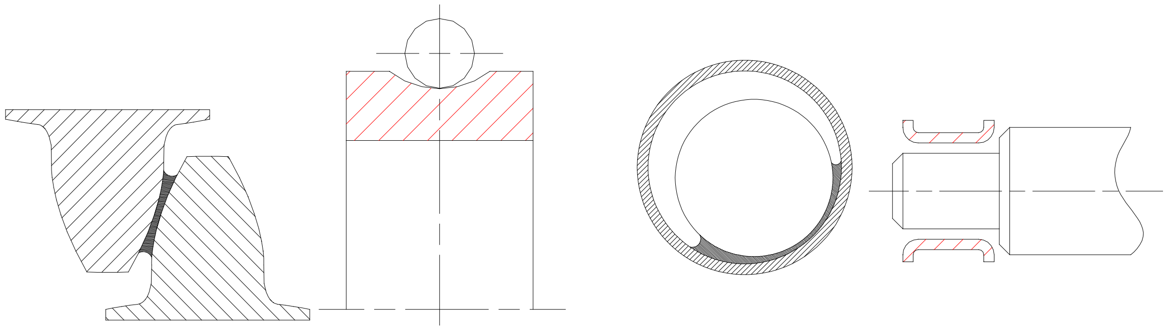
- Le troisième chapitre est dédié à l'aspect numérique de la modélisation du contact élastoplastique. Il introduit toutes les notions relatives à ce comportement qui sont utilisées par la suite : les aspects phénoménologiques, les différents critères et loi de comportement, ainsi que les méthodes numériques utilisées. Le module de contact développé dans le deuxième chapitre devient un module très efficace du point de vue du temps de calcul dans la résolution du problème de contact élastoplastique. Le chargement tangentiel est pris en compte en utilisant un modèle de frottement de Coulomb. Le modèle semi-analytique proposé est validé à nouveau par l'utilisation d'un modèle EF élastoplastique 3D avec frottement.
- Le quatrième chapitre présente un exemple académique pour analyser l'influence du frottement en surface sur la distribution de pression, l'état des contraintes sous charge et après décharge, et les déformations plastiques ceci pour un contact circulaire. Une méthode pour étudier l'effet de la température sur le comportement élastoplastique est enfin présentée. Pour cela la loi d'écrouissage est indexée sur la température par une méthode inverse, à partir de la simulation d'une indentation Rockwell et connaissant la dureté en fonction de la température.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 INTRODUCTION

La principale méthode pour transmettre une charge entre deux corps déformables est un contact direct entre eux. Même lorsqu'une charge sur la frontière des corps est appliquée en utilisant des fluides, des forces magnétiques ou gravitationnelles la force nécessaire pour maintenir l'équilibre apparaîtra aussi à l'interface du contact. Le point critique de ce contact direct est la concentration de contraintes qui en résulte et qui conduit très souvent à endommager les matériaux. Il n'est donc pas étonnant que dans le cadre de la discipline de la Mécanique des Solides, le chapitre de Mécanique des Contacts ait occupé une place centrale au cours des dernières années et continue à la tenir aujourd'hui.



a. b.

Figure I.1 *Contacts non-conformes (a - engrenage et roulement) et conformes (b - paliers)*

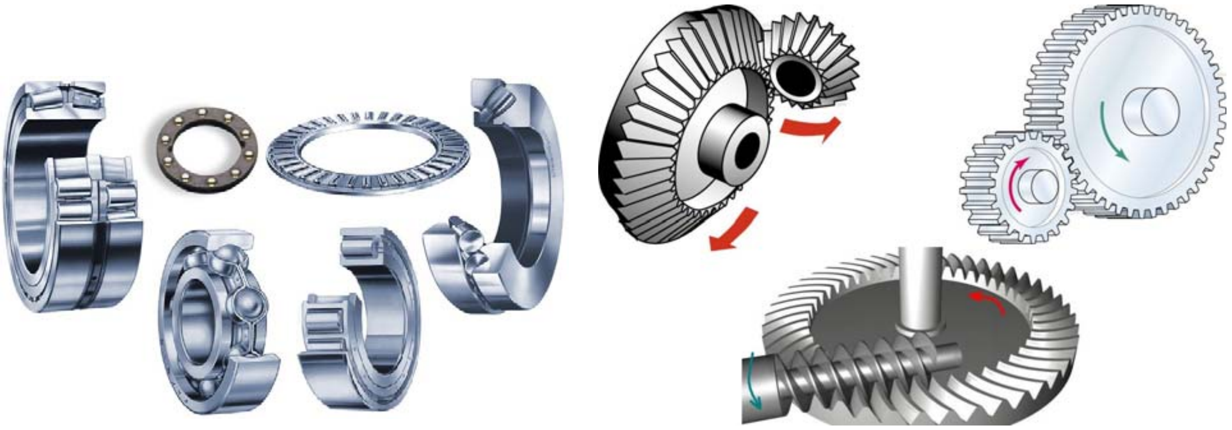
Suivant les rayons de courbure des corps en contact on peut définir des contacts conformes ou non-conformes (figure I.1). Dans le cas du contact non-conforme les dimensions de la zone de contact sont petites devant les rayons de courbure ainsi le comportement des corps en contact peut être assimilé à celui des massifs semi-infinis. La résolution du problème consiste à trouver l'aire réelle et la distribution des pressions de contact.

Tout a commencé avec le célèbre papier de Heinrich Hertz ***(HERT 82)*** qui a apporté la solution du contact élastique entre deux massifs ellipsoïdaux avec des surfaces lisses et sans frottement. Ceci constitue, encore aujourd'hui, la base de la conception industrielle des applications qui impliquent des contacts secs, non-conformes et élastiques tels qu'ils peuvent exister dans les engrenages et les roulements (figure I.2), entre autres.

Depuis 1882 le sujet a été considérablement développé. On peut distinguer deux directions d'étude majeures :

- du point de vue mathématique : des travaux ont été faits sur l'extension de l'analyse de Hertz à d'autres géométries, sur les lois de comportement, et sur le développement des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution.

- du point de vue ingénierie : des travaux ont été faits sur des cas spécifiques, dans le but de comprendre et de maîtriser les phénomènes qui se produisent dans les systèmes réels.



a. b.

Figure I.2 *Roulements (a) et engrenages (b)*

Gladwell ***(GLAD 80)*** fournit un résumé détaillé des diverses géométries de contact qui avaient été traités jusqu'à cette époque, ainsi qu'un inestimable aperçu de la littérature russe très riche sur le sujet.

Johnson ***(JOHN 85)*** donne une excellente vue d'ensemble de la gamme des problèmes de contact actuels en réalisant un compromis réussi entre rigueur mathématique et simplicité pour l'ingénieur.

Le comportement non-élastique du matériau et/ou la présence de frottement, de surfaces rugueuses, de lubrification induisent des non-linéarités supplémentaires.

I.2 LE CONTACT DE HERTZ

Les corps en contact sont des massifs élastiques semi-infinis, non-conformes et lisses autant à l'échelle micro qu'à l'échelle macro, chargés sur une petite partie de leur surface. Ceci a permis à Hertz de traiter les efforts fortement localisés dans le contact séparément de la distribution générale de l'effort dans les corps. Pour que cette simplification soit justifiée, les dimensions de la zone de contact doivent être faibles comparées à celles des corps en contact. Il a également supposé que les contraintes en profondeur, en dessous de la région de contact, sont inférieures à la limite d'élasticité et qu'il n'y a pas de frottement. Avec ces hypothèses, Hertz a trouvé analytiquement la distribution de pression qui satisfait les conditions limites sur la frontière des massifs à l'intérieur et à l'extérieur de l'aire de contact.

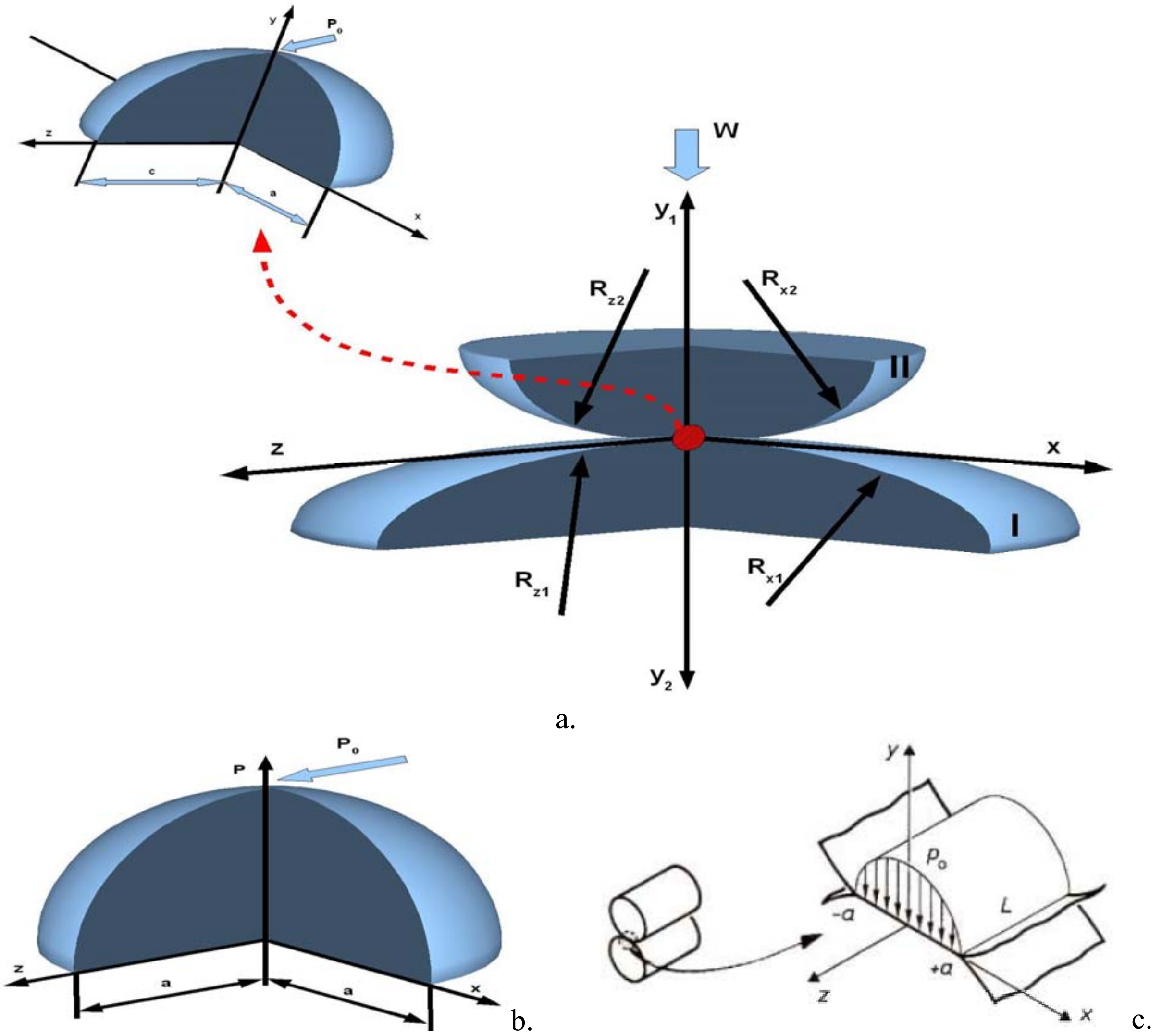
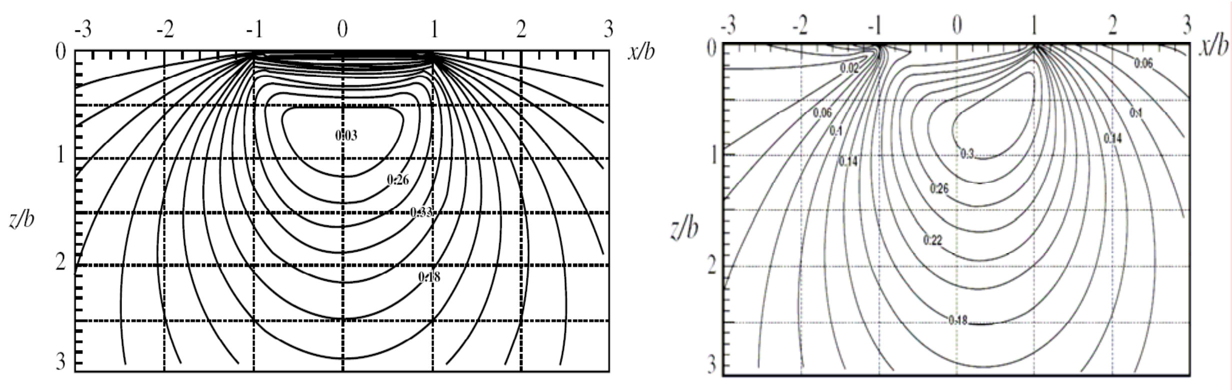


Figure I.3 *La distribution de pression pour un contact hertzien*
a) contact elliptique – b) contact circulaire – c) contact linéique

Dans le cas général de 2 ellipsoïdes en contact, la forme de la surface de contact n’est pas connue à l’avance, mais Hertz a prouvé que l’aire de contact est elliptique et que la distribution de pression est un semi-elliptique (figure I.3a). Un cas particulier de la théorie de Hertz correspond au cas du contact entre deux sphères, qui conduit à une aire de contact circulaire (figure I.3b). Un autre cas particulier de la théorie de Hertz est le contact entre 2 cylindres à axes parallèles pouvant être considérés infiniment longs. Un tel contact est bidimensionnel, la largeur de contact et la distribution de pression sont constantes selon l’axe. Ce type de contact est dit contact linéaire (figure I.3c). Les paramètres de contact pour les trois cas précédents sont rappelés dans le tableau I.1.

Tableau I.1	
a. Contact elliptique	
Rayon de courbure équivalent	$\mathrm{R_{eq}} = \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1}{\mathrm{R_{x_1}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{z_1}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{x_2}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{z_2}}}\right]^{-1}$
Demi-axe de l'ellipse de contact selon Ox	$a = a^* \cdot \left(\frac{\pi \cdot W \cdot R_{eq}}{E_{eq}}\right)^{1/3} = a^* \cdot \left(\frac{2 \cdot W \cdot R_{eq}}{E^{'}}\right)^{1/3}$
Demi-axe de l'ellipse de contact selon Oz	$c = c^* \cdot \left(\frac{\pi \cdot W \cdot R_{eq}}{E_{eq}}\right)^{1/3} = c^* \cdot \left(\frac{2 \cdot W \cdot R_{eq}}{E^{'}}\right)^{1/3}$
Rapprochement élastique des solides	$\delta = \delta^* \cdot \left[\left(\frac{W}{E_{eq}}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{R_{eq}}\right]^{1/3} = \delta^* \cdot \left[\frac{4 \cdot W^2}{E'^2 \cdot R_{eq}}\right]^{1/3}$
Pression hertzienne maximale	$p_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{W}{\pi \cdot a \cdot c} = \frac{3}{2 \cdot \pi \cdot a^* \cdot c^*}\cdot\left[\frac{W \cdot E'^2}{4 \cdot R_{eq}^2}\right]^{1/3}$
Distribution de pression	$p(x,z) = \frac{3}{2}\cdot\frac{W}{\pi \cdot a \cdot c}\cdot\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{1/2}$
b. Contact circulaire	
Rayon de courbure équivalent	$\mathrm{R_x} = \left[\frac{1}{\mathrm{R_{x_1}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{x_2}}}\right]^{-1}$
Rayon du cercle de contact	$a = \left(\frac{3 \cdot \pi \cdot R_x \cdot W}{4 \cdot E_{eq}}\right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot R_x \cdot W}{2 \cdot E^{'}}\right)^{1/3}$
Pression hertzienne maximale	$p_0 = \frac{3}{2 \cdot \pi^2}\cdot\left[\frac{16 \cdot \pi \cdot W \cdot E_{eq}}{9 \cdot R_x^2}\right]^{1/3} = \frac{3}{2 \cdot \pi}\cdot\left[\frac{4 \cdot W \cdot E'^2}{9 \cdot R_x^2}\right]^{1/3}$
Rapprochement élastique du solide	$\delta = \left[\frac{9 \cdot \pi^2 \cdot W^2}{16 \cdot E_{eq}^2 \cdot R_x}\right]^{1/3} = \left[\frac{9 \cdot W^2}{4 \cdot E'^2 \cdot R_x}\right]^{1/3}$
c. Contact linaire	
Rayon de courbure équivalent	$\mathrm{R_x} = \left[\frac{1}{\mathrm{R_{x_1}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{x_2}}}\right]^{-1}$
Demi-largeur du contact selon Ox	$a = \left(\frac{4 \cdot W \cdot R_x}{L \cdot E_{eq}}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \cdot W \cdot R_x}{\pi \cdot L \cdot E^{'}}\right)^{1/2}$
Pression hertzienne maximale	$p_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{W \cdot E_{eq}}{L \cdot R_x}\right]^{1/2} = \left[\frac{W \cdot E'}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_x}\right]^{1/2} = \frac{2 \cdot W}{\pi \cdot a \cdot L}$
Distribution de pression	$p(x) = p_0 \cdot \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{1/2}$

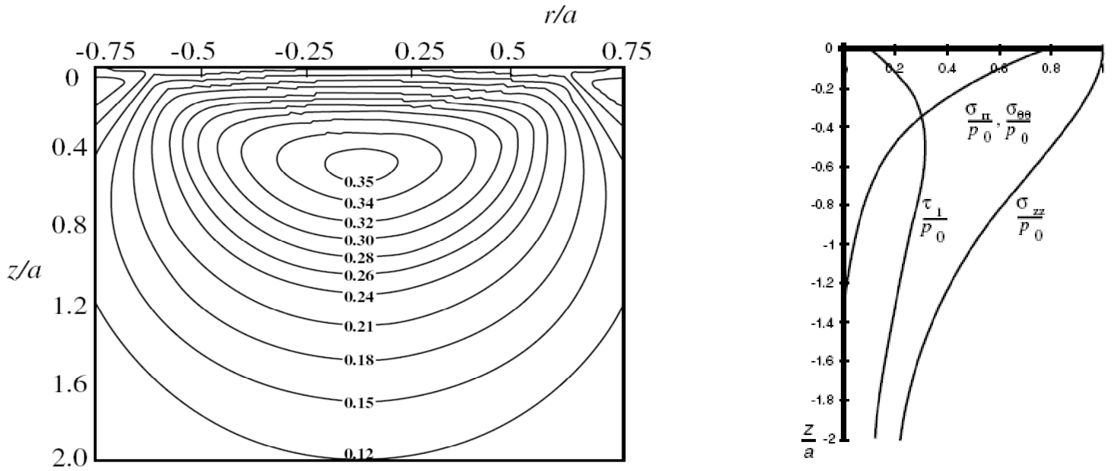


μ=0 μ=0.2

Figure I.4 *Effet du frottement en surface sur la distribution de la contrainte de Tresca adimensionnée par la pression maximale de Hertz, dans un massif élastique et pour un contact linéique* ***(SMIT 53)***

Les contraintes subies par les massifs en contact peuvent être exprimées analytiquement en fonction de la pression de Hertz et de la taille de l'aire de contact. Pour un contact linéique les composantes du tenseur des contraintes résultant de l'application d'un chargement normal et tangentiel ont été déterminées par Smith et Liu ***(SMIT 53)*** (figure I.4).

Pour un contact circulaire, le maximum de la contrainte de Tresca τ_{max} est $0,31 \cdot P_0$, P_0 étant la pression de Hertz. Elle est atteinte à une profondeur égale à $0,48 \cdot a$, a étant le rayon de l'aire de contact. Les contraintes peuvent être calculées selon diverses méthodes, comme celles décrites par Hills, Nowell, et Sackfield ***(HILL 93)***. La figure I.5 présente les isovaleurs de la contrainte de cisaillement maximum, τ_{max}/P_0, pour un contact circulaire (fig. I.5a) ainsi que la valeur des composantes de ce tenseur au centre du contact et selon la profondeur (fig. I.5b).



a) Isovaleurs de la contrainte de Tresca dans un plan passant par le centre du contact

b) Variation des composantes du tenseur des contraintes le long de l'axe de symétrie

Figure I.5 *Contraintes en sous couche adimensionnées par la pression maximale de Hertz pour un contact circulaire* ***(HILL 93)***

Lorsque la géométrie du contact mène à un contact elliptique, il est plus difficile de trouver les solutions explicites pour le champ de contrainte interne. Thomas et Hoersch ***(THOM 30)*** ont examiné le problème sur l'axe de symétrie. Plus tard Fessler et Ollerton ***(FESS 57)*** ont déterminé analytiquement σ_{zz} et de τ_{max}. Une solution plus générale est donnée par Sackfield et Hills ***(SACK 83a, 83b)***. La figure I.6 montre la profondeur où l'on trouve la contrainte de cisaillement maximale sur l'axe $x = y = 0$ en fonction de l'excentricité k (rapport entre les demi-grand et petit axes de l'ellipse de contact).

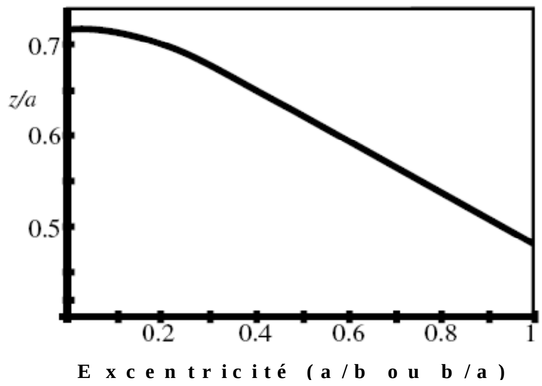


Figure I.6 *Effet de l'ellipticité du contact sur la position en profondeur de la contrainte de cisaillement maximum*

Les progrès au cours du dernier siècle ont permis d'étendre, analytiquement ou numériquement, la théorie de Hertz aux cas des contacts non-hertziens (surfaces réelles, massifs inélastiques, massifs revêtus, chargement tangentiel, etc.), voir par exemple l'état de l'art dressé par Johnson ***(JOHN 85)***.

I.3 LES CONTACTS NON-HERTZIENS

Beaucoup de problèmes de contact n'entrent pas dans la catégorie précédente (contact hertzien) c'est-à-dire un contact normal pur et sans frottement entre deux massifs élastiques semi-infinis dont les surfaces en contact sont assimilées à des paraboloïdes. La résolution de ce type de contact requiert généralement l'utilisation de méthodes numériques. Ce sont les problèmes avec frottement, une géométrie complexe, une non-linéarité des propriétés mécaniques (plasticité), ou lorsque un lubrifiant est présent (théorie élastohydrodynamique). Une revue complète de ces problèmes de contact est donnée par Barber et Ciavarella ***(BARB 00)***, Nitta et Kato ***(NITT 00)***, Adams et Nosonovsky ***(ADAM 00)*** et dans l'ouvrage de Bushan ***(BHUS 01)***.

I.3.1 LES METHODES NUMERIQUES POUR LA MECANIQUE DES CONTACTS

a) La méthode d'inversion de matrice

Pour des problèmes de contact où les surfaces se déforment sous un chargement comme si les corps étaient des demi-espaces élastique, une méthode de discrétisation de la surface de contact peut être utilisée. Le principe de base implique de diviser la surface par un certain nombre d'éléments discrets. On suppose alors une certaine forme de distribution de pression qui agit sur chaque élément (Bentall et Johnson, ***BENT 67***). La figure I.7 montre trois configurations équivalentes pour décrire cette distribution de pression sur chaque élément pour un problème bidimensionnel (contact linéaire) : un chargement ponctuel à chaque nœud, une distribution de pression rectangulaire uniforme sur chaque élément ou un chevauchement des distributions de pression avec une forme triangulaire entre 3 nœuds.

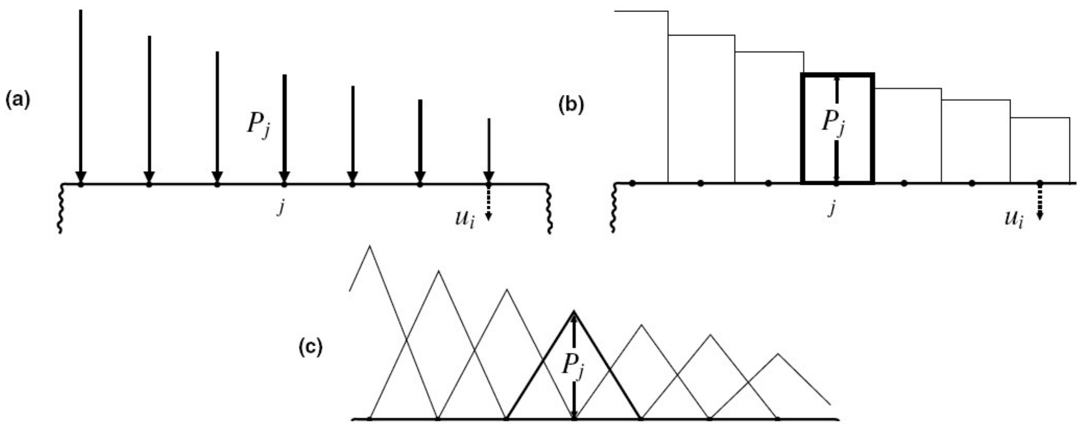


Figure I.7 *Discrétisation des surfaces de contact et distribution du chargement (a) chargement ponctuel à chaque nœud; (b) pression rectangulaire uniforme sur chaque élément; (c) chevauchement avec une distribution triangulaire de la pression,* ***(BENT 67)***

Le déplacement normal au nœud i dû au chargement au nœud j est alors exprimé par une relation d'élasticité appropriée et spécifique au chargement et à l'unité choisi, cf. Hills et al ***(HILL 93)***. Par exemple, pour des éléments de pression uniforme (figure I.7b) le déplacement normal à l'élément i dû à une pression appliquée au nœud j est donné par :

$$(u_z)_{i,j} = -\frac{(1-\nu^2)\cdot p_j}{\pi \cdot E_{eq}}\left\{(x+\Delta)\cdot \ln[(x+\Delta)/\Delta]^2 - (x-\Delta)\cdot \ln[(x-\Delta)/\Delta]^2\right\} + const., \quad \text{(I.1).}$$

Le déplacement (u_z) du point i dû à l'addition des chargements de tous les points j est alors exprimé par une équation matricielle sous la forme :

$$(u_z)_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \cdot p_j, \quad \text{(I.2).}$$

Généralement la zone de contact n'est pas connue et un procédé itératif est employé. Une hypothétique région de contact doit être choisie au début et un ensemble de déplacements *u* est déterminé à partir de l'interpénétration des deux corps. Un procédé numérique d'inversion de matrice donne alors les pressions correspondantes *p*. Si l'ensemble des pressions contient quelques valeurs négatives celles-ci sont enlevées de l'aire de contact présumée pour l'itération suivante. La solution est trouvée lorsque les pressions sont positives dans la zone de contact et nulles ailleurs. La charge initiale est alors trouvée par la sommation des pressions élémentaires :

$$W = A \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \ , \qquad \text{(I.3)},$$

où : *A* est une constante choisie selon la distribution de pression (par exemple pour une distribution uniforme sur l'élément *A* est simplement l'aire (cas 3D) ou la largeur (cas 2D) de l'élément).

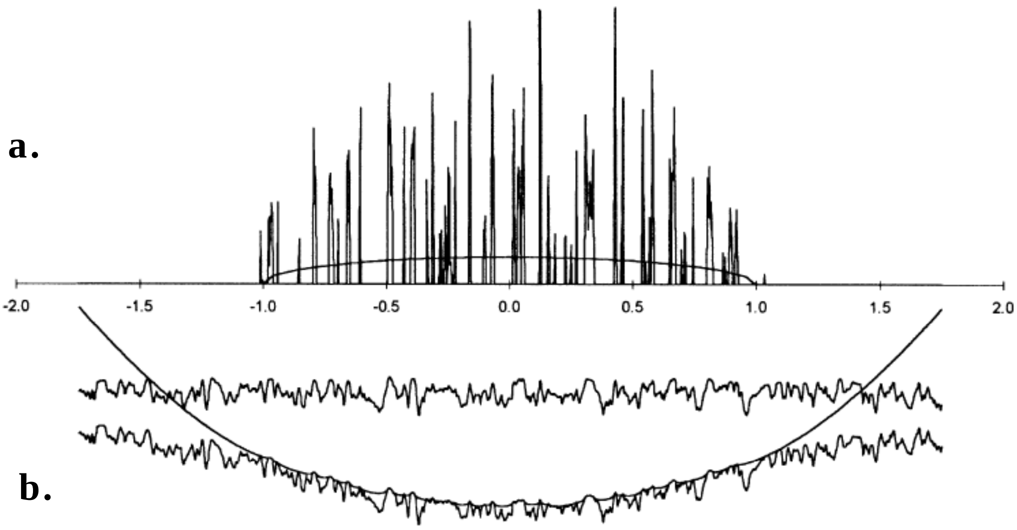


Figure I.8 *Solution numérique du contact entre une surface plane rugueuse et un cylindre lisse*

Cette méthode a été employée intensivement pour la résolution du contact entre surfaces rugueuses (***WEBS 86***; ***SNID 94***). On peut ainsi connaître l'aire réelle de contact pour des surfaces réelles. La figure I.8 montre les résultats d'un tel modèle pour un contact entre un cylindre lisse et un autre rugueux. La distribution de pression est comparée à la solution de Hertz (figure I.8a) et les surfaces originales sont également comparées aux surfaces déformées (figure I.8b).

Une fois que la distribution de pression sur la surface de contact est connue, il est possible de déterminer le champ des contraintes dans le massif. La contrainte en tout point du massif est obtenue par sommation des contributions de chaque élément de l'aire de contact où la pression est non nulle.

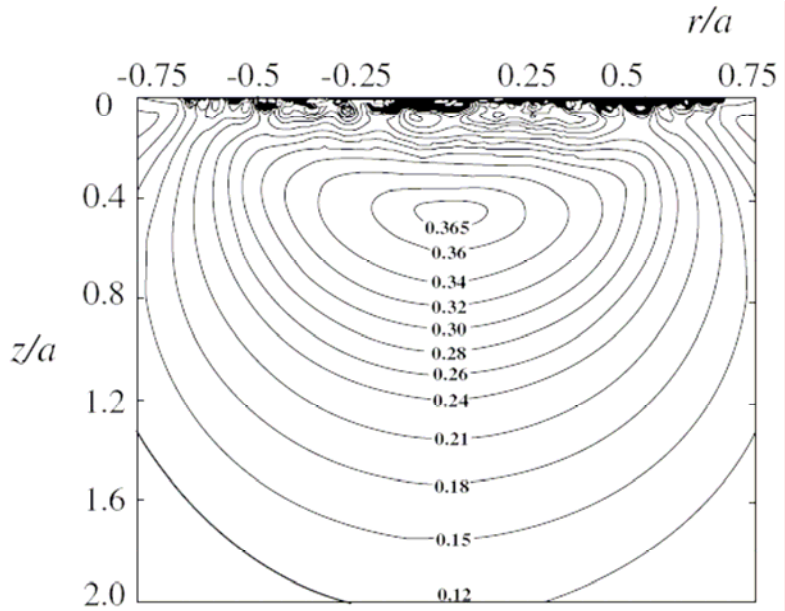


Figure I.9 *Isovaleurs de la contraintes de Tresca en sous-couche pour un contact entre une sphère rugueuse et un demi-espace lisse, résultats adimensionnés par le rayon du contact et la pression maximale de Hertz* ***(LEE 94)***

La figure I.9 montre les iso contours de la contrainte de Tresca dans un plan passant par le centre du contact entre une sphère rugueuse et un demi-espace lisse. Cette solution numérique a été obtenue par Lee et Ren ***(LEE 94)*** avec cette méthode d'inversion de matrice. On peut observer que les contraintes maximales, qui sont associées à la rugosité, sont limitées à la région proche de la surface. Les contraintes plus profondes sont semblables à celles d'un contact lisse.

b) La méthode variationnelle

Il est aussi possible d'employer l'approche décrite ci-dessus dans les cas où le frottement est présent à l'interface de contact. Dans ce cas, les pressions normales et tangentielles vont produire des déplacements en surface. Ceci complique la méthode de résolution puisque les régions de glissement et d'adhérence doivent être également identifiées. Le temps nécessaire pour la résolution du système si on utilise la méthode d'inversion de matrice est alors très long.

Une approche alternative, plus utile dans ce cas, est la méthode variationnelle (***KALK 90***). Le principe variationnel affirme que le champ de contrainte réel dans un solide, chargé sur sa frontière, est obtenu quand l'énergie potentielle complémentaire est minimale. L'énergie potentielle complémentaire V^* peut être exprimée en terme d'énergie de déformation liée aux forces et déplacements imposés sur la surface :

$$V^* = \frac{1}{2} \cdot \int_S p \cdot (u_{z1} - u_{z2}) \cdot dS + \int_S p \cdot (h_i - \delta) \cdot dS \,, \qquad \text{(II.4)},$$

où δ est le rapprochement solide des deux surfaces et h_i est leur séparation initiale. S est la surface où la pression p est différente de zéro, causant des déplacements normaux u_z. Ceci peut être écrit sous une forme discrétisée :

$$V^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot p_j \right) + A \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (h_i - \delta), \qquad \text{(II.5)},$$

où A est une constante qui dépend de l'élément de pression utilisé. La solution est trouvée en déterminant les valeurs de p_i qui réduisent au minimum V^*, avec $p_i > 0$. Ceci a été fait en utilisant une méthode du simplex par Kalker et van Randen ***(KALK 72)*** ou en employant une technique de programmation quadratique directe par Tian et Bushan ***(TIAN 96)***; cette dernière étant plus efficace. La figure I.10 montre la surface déformée déterminée avec cette méthode appliquée au contact tridimensionnel d'une surface rugueuse et élastique avec une sphère lisse et rigide.

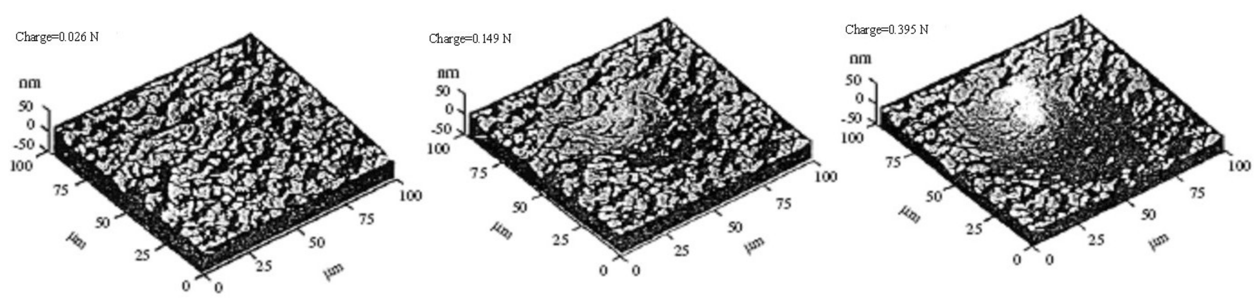


Figure I.10 *Solution numérique du contact entre une surface élastique rugueuse et une sphère rigide lisse,* ***(TIAN 96)***

c) <u>La méthode des éléments finis</u>

Lorsque les problèmes de contact intègrent un comportement non-linéaire du matériau tel que la plasticité ou si l'hypothèse des demi-espaces n'est plus valide (les dimensions du corps ne sont pas grandes comparées à la zone de contact), alors il peut être nécessaire d'utiliser la méthode des éléments finis. Un certain nombre de codes commerciaux conviennent aux problèmes de contact : ABAQUS, DYNA3D, MARC, NASTRAN, RADIOSS, ANSYS.

Les corps en contact sont divisés en éléments planaires bidimensionnels, axisymétriques où tridimensionnels (brique). Entre les nœuds extérieurs qui sont susceptibles d'entrer en contact pendant le chargement est défini un ensemble d'éléments de contact. Un coefficient de frottement peut être défini pour le contact. Les propriétés des matériaux, les états de frontière et les chargements nodaux sont également indiqués.

Les programmes modernes ont des interfaces graphiques pour aider à la génération des maillages. Une interface de prétraitement est généralement utilisée pour générer un fichier d'entrées. Les résultats sont également analysés par post-traitement. Les performances de ces interfaces utilisateur facilitent la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

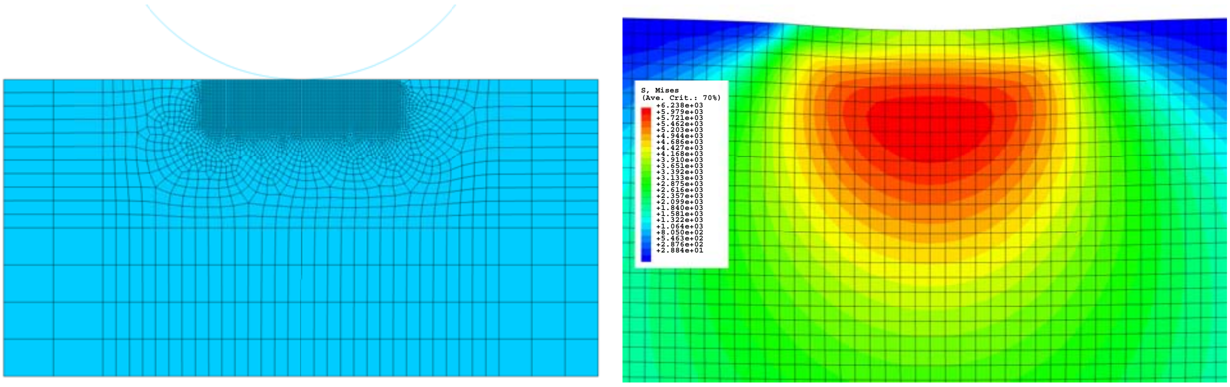


Figure I.11 *a) Un maillage typique pour un problème de contact linéique ; (b) isovaleurs des contraintes de von Mises obtenues par la méthode des éléments finis*

Typiquement, les problèmes de contact impliquent des charges distribuées sur de petites superficies de contact. Ceci a comme conséquence des gradients de contraintes importants dans les éléments au voisinage du contact. Le maillage dans cette région doit alors être assez raffiné. Ainsi, même le simple contact de Hertz a besoin d'être analysé avec un maillage suffisamment fin pour avoir des résultats précis (figure I.11). Les non-linéarités associées au contact, telle que la raideur de contact, le comportement adhésion-glissement ou la plasticité font que la solution est généralement liée au trajet de chargement. Ceci requiert alors que la charge (ou le déplacement) soit appliquée incrémentalement, une solution étant recherchée à chaque incrément. Ces calculs itératifs successifs conduisent rapidement à des temps de calcul prohibitifs lorsqu'un maillage fin est également nécessaire. C'est notamment le cas des analyses tridimensionnelles, lorsque l'on prend en compte la présence d'un défaut de surface ou en présence de frottement avec un mouvement relatif des 2 corps en contact.

I.3.2 LES METHODES EXPERIMENTALES POUR LA MECANIQUE DES CONTACTS

La connaissance de l'aire réelle de contact, de la distribution des pressions et des contraintes en sous-couche associées est importante dans de nombreuses applications. Il existe plusieurs techniques expérimentales pour déterminer ces grandeurs.

a) Mesure de l'aire de contact réelle

Là où les surfaces des corps sont rugueuses, le contact se fait seulement au voisinage du sommet des aspérités. L'aire réelle de contact peut être sensiblement inférieure à l'aire potentielle de contact donnée par la théorie de Hertz. Les techniques pour déterminer l'aire réelle de contact peuvent être classées par catégorie : électriques, optiques, acoustiques et films actifs.

Méthodes électriques

La mesure de la résistance électrique entre les surfaces de contact peut fournir des informations sur l'aire réelle de contact (***HOLM 67***; ***BOWD 39***). Ceci doit être réalisé par mesure du courant parce que la résistance du contact est petite (10^{-3} à 10^{-6} ohms) comparée à celle des fils. Si la région du contact entre deux corps se compose des n points de contact discrets de rayon a_i, alors la résistance totale du contact est :

$$R = \rho \div \sum_{i=1}^{n} a_i \, , \qquad \text{(II.6)},$$

où ρ est la résistivité du matériau utilisé (ohm/m). La résistance R dépend du rayon des points de contact. Il est donc impossible de déterminer la superficie réelle de contact directement, en utilisant cette méthode sans que certaines hypothèses soient faites sur la taille ou nombre des différents spots de contact. L'équation précédente s'utilise seulement si les points de contact sont assez distants. La présence des films extérieurs d'oxyde peut avoir un effet significatif sur la résistance de contact et pour ces raisons la méthode électrique de résistance est limitée aux mesures qualitatives.

Une méthode semblable est la mesure du flux de chaleur à travers l'interface (***NEWC 57***). Cette méthode a l'avantage d'être moins sensible aux écrans physico-chimiques présents sur les surfaces en contact. Cependant, le transfert de chaleur ne se limite pas aux échanges par conduction aux contacts directs entre solides, mais inclut également des échanges par convection voire rayonnement dans les zones où il n'y a pas contact.

Méthodes optiques

Si l'un des deux corps en contact est transparent, alors on peut observer directement la zone de contact. Il y a un certain nombre de méthodes pour lesquelles cette propriété a été utilisée, notamment par transmission directe de la lumière incidente, par réflexion, ou par observation des interférences optiques.

Un métal mou peut être serré contre une surface en verre et le nombre et la taille des régions de contact mesurés directement ***(DYSO 54)***. D'autre part, si les deux corps sont transparents, la transmission du faisceau lumineux peut être affectée par l'interface. Le faisceau traversera sans déviation les régions en contact mais il sera dispersé aux intervalles d'air. Ainsi les régions en contact apparaissent sous formes de tâches lumineuses sur un fond gris ***(KRAG 65)***.

Alternativement, la surface d'un échantillon peut être chargée contre un prisme et un faisceau de lumière parallèle est dirigé vers l'interface selon une incidence rasante ***(KRAG 60)***. Aux régions de non contact le faisceau est intérieurement reflété, alors qu'aux points de contact la réflexion est bloquée. Les points de contact sont alors observés par le biais la lumière réfléchie.

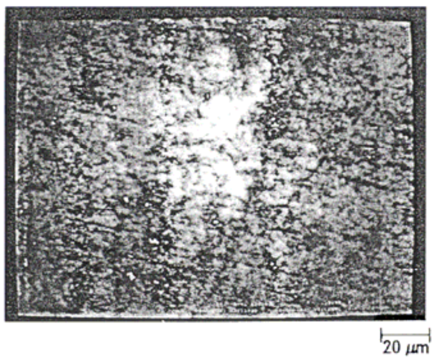


Figure I.12 *Interférogramme optique du contact entre un disque plat et une lentille en verre. L'aire réelle de contact correspond aux taches lumineuses,* ***(BHUS 90)***

Une troisième méthode se fonde sur l'interférence optique entre deux faisceaux lumineux, dont l'un est reflété de la surface supérieure et l'autre par la surface inférieure (***BAIL 55***). Les deux surfaces, qui doivent être transparentes, sont revêtues de films métalliques minces de sorte qu'elles soient partiellement réfléchissantes. Un faisceau de lumière est dirigé par l'échantillon transparent. L'interférence se produit entre la partie du faisceau qui se reflète sur la première surface et celle qui se reflète à la seconde. L'interférence se produit quand l'espace entre les deux spécimens est égal à un nombre entier de longueur d'onde. La figure I.12 montre un interférogramme optique du contact entre un disque plat et une lentille en verre (***BHUS 90***).

Réflexion ultrasonore

Les ondes ultrasonores incidentes à l'interface entre deux massifs sont transmises au niveau des zones de contact et sont réfléchies aux intervalles d'air. Ce phénomène peut être employé pour étudier l'aire réelle de contact à l'interface (***KEND 71***; ***DRIN 96***). Un capteur ultrasonore est monté sur l'un des corps et il est excité pour émettre une impulsion longitudinale de large bande passante (en général 5 à 20 mégahertz). L'impulsion réfléchie est reçue par le même capteur, amplifiée puis stockée sur ordinateur. L'amplitude de l'impulsion réfléchie peut être divisée par celle de l'impulsion incidente pour donner un coefficient de réflexion $|R|$ à condition que la longueur d'onde du signal soit grande comparée à la taille du contact. Ce coefficient dépend de la rigidité de l'interface, K :

$$|R| = \left\{1 + \left(2 \cdot K / \omega \cdot z\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{(II.7)},$$

où ω est la fréquence de l'onde et z est l'impédance acoustique du matériau (le produit entre la vitesse de l'onde et la densité du matériau). La rigidité de l'interface est définie comme la pression de contact nécessaire pour produire une approche unitaire des surfaces et dépend du nombre et de la taille de différentes zones de contact. La rigidité varie de zéro à l'infini si le rapport entre l'aire réelle et nominale de contact varie de zéro à 100%.

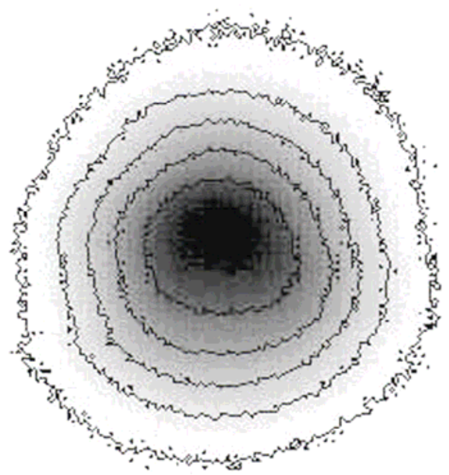


Figure I.13 *Analyse ultrasonore d'un contact entre une sphère en caoutchouc (diamètre 1,3 mm) et un massif en acier*

Cette méthode peut également être employée pour déterminer la taille d'un contact. Un capteur à ultrasons est balayé par un faisceau à travers l'interface. L'onde est transmise là où il y a contact, et est réfléchie aux régions de séparation. La résolution de cette technique est relativement grossière et elle n'est utilisée actuellement que dans les applications où la région de contact est relativement importante. La figure I.13 montre le résultat d'un balayage par ultrasons de l'interface entre une sphère rugueuse en caoutchouc et un massif lisse en acier. La résolution de la méthode est telle que les différentes régions du contact ne sont pas facilement identifiables; on observe plutôt les régions de conformité (pourcentage élevé de contact). Les niveaux d'ombrage indiquent le coefficient de réflexion (la proportion d'une onde incidente reflétée à l'interface). Les régions avec une pression plus élevée auront pour conséquence une plus grande conformité sur la rugosité et ainsi une réflexion réduite.

Les films minces (revêtements)

Un revêtement mince et mou, généralement en métal (par exemple : cuivre, argent ou or), est appliqué sur l'une des surfaces par un procédé chimique ou physique et les corps sont alors mis en contact puis chargés. La couche mince dans les zones de contact est déformée. On peut observer la taille de la région de contact par le changement d'aspect du film déposé. Alternativement, un revêtement mince de peinture fluorescente ou radioactive peut être appliquée sur l'une des surfaces. Elles sont alors chargées l'une contre l'autre. Le transfert de matière peut être déterminé quantitativement par fluorescence ou par l'utilisation d'un compteur de radioactivité.

b) L'analyse expérimentale des contraintes

Photoélasticité

Les corps en contact sont réalisés en matériaux photo-élastiques, tel que le polycarbonate ou la résine époxyde. Pour des applications bidimensionnelles un modèle plan est chargé dans un polariscope (une source lumineuse avec deux filtres de polarisation). Les franges isochromatiques donnent les iso-contours de la différence des contraintes principales $(\sigma_1 - \sigma_2)$. Pour les modèles tridimensionnels une technique de « congélation » des contraintes doit être utilisée. La méthode la plus commune est d'appliquer le chargement au modèle à une température élevée et de le laisser se refroidir sous charge. Les déformations restent « gelée » dans la structure, qui peut alors être coupée en tranches appropriées pour être analysées dans un polariscope. Cette méthode a été employée par Ollerton et Haines ***(OLLE 63)*** pour étudier le contact elliptique soumis à une charge normale et tangentielle. La formation d'image et la séparation du champ de contraintes dans les problèmes de contact ont été étudiées par Burguete et Patterson ***(BURG 97)***. La figure I.14 montre un modèle photo élastique de frange pour le contact entre un cylindre et une surface plane, comparé à la solution théorique. Les images ont été obtenues par une méthode de congélation des contraintes et ont été digitalisées pour une analyse automatisée. Alternativement et toujours pour une analyse 3D mais pour des pièces (et matériaux) réelles il est possible d'utiliser un vernis qui, déposé en couche uniforme à la surface de la pièces, permet par réflexion de connaître la contrainte de Tresca à la surface de cette pièce lorsqu'elle est sollicitée.

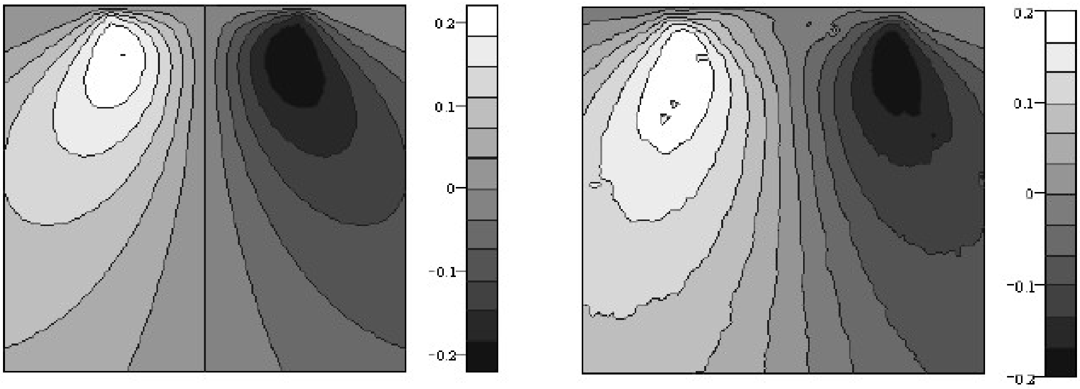


Figure I.14 *Comparaison entre les résultats théoriques (à gauche) et ceux de la maquette photo élastique d'un contact entre un cylindre et un plan,* ***(BURG 97)***

Une technique dérivée est la méthode de caustiques. L'application d'un chargement produit des déformations révélées par changement de l'indice de réfraction du matériau. Si un échantillon plan est éclairé par un faisceau incident de lumière parallèle, les rayons qui traversent les régions soumises à une contrainte sont déviés. La distribution de lumière sur une image plane derrière le spécimen n'est plus uniforme. La frontière entre les régions illuminées et foncées est connue comme étant l'image des caustiques (ou la courbe des caustiques). Le chargement appliqué peut alors être déduit par méthode inverse en recherchant le chargement qui donne une courbe des caustiques théorique la plus proche de celle observée expérimentalement ***(THEO 78)***.

Capteurs pour la pression de contact

Pour les contacts très grands, des capteurs de pression constitués de films minces et disponibles dans le commerce, peuvent être utilisés. Le capteur se compose d'une matrice d'éléments conducteurs dont la résistance varie avec la charge appliquée. Les éléments sont montés sur une feuille mince, flexible, qui est placée entre les corps en contact. Typiquement, les plus petits capteurs, de l'ordre d'un mm^2, sont sensibles aux pressions jusqu'à 150 MPa. Ils sont par exemple utilisés dans l'industrie automobile pour étudier les interactions humaines avec le véhicule.

Des films matriciels imprégnés peuvent également être employés en tant que dispositifs sensibles à la pression. Le film est placé entre les corps en contact, qui sont ensuite chargés. A un niveau de pression désiré le film libère une matrice. Après déchargement, le film est alors enlevé et examiné; l'intensité de la couleur est proportionnelle à la pression appliquée.

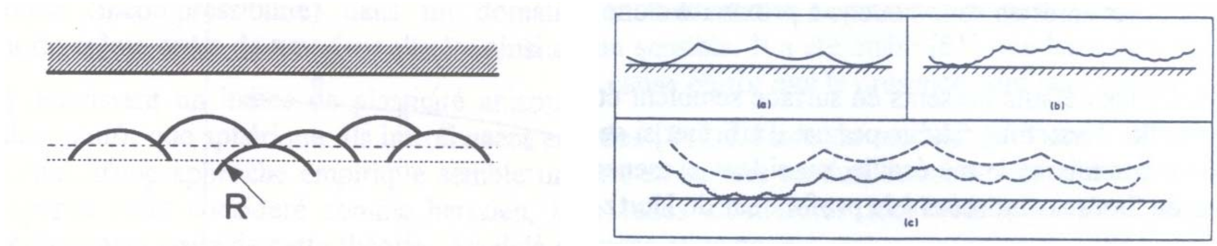
Micro transducteurs résistifs

Des petits éléments de manganèse ou de titane sont déposés sur une surface. Quand un micro-transducteur est placé à l'intérieur d'un contact, sa résistance augmente avec la pression. Ces capteurs sont déposés par pulvérisation haute fréquence après avoir préalablement placé un masque sur la surface (pour les surfaces en métal une mince couche isolante en silicium est d'abord déposée). Ils ont été employés pour mesurer les pressions dans les contacts lubrifiés roulants ou glissants ***(HAMI 71, KANN 65)***. Les capteurs sont toutefois généralement sensibles aux élévations de température, ce qui doit être pris en compte pour l'analyse des résultats.

I.3.3 LE CONTACT RUGUEUX

Les surfaces réelles sont rugueuses à l'échelle microscopique et le contact est généralement limité à un certain nombre de zones au voisinage du sommet des aspérités.

Pour étudier le comportement des surfaces rugueuses en contact, deux approches distinctes sont habituellement employées. La première s'appuie sur des modèles statistiques pour décrire le rapport entre la charge appliquée, la séparation plane moyenne et l'aire réelle du contact qui en résulte. A l'opposé la seconde est une approche déterministe où le problème du contact est résolu pour chaque configuration réelle.



a) Greenwood et Williamson ***(GREE 66)*** b) Archard, Hunt et Onions ***(ARCH 75)***

Figure I.15 *Modèles de contact rugueux*

L'approche statistique a été proposée initialement par Greenwood et Williamson ***(GREE 66)*** qui ont présenté un modèle de contact élastique avec des rugosités modélisées par des calottes sphériques, toutes de même rayon et distribuées de façon gaussienne autour d'un plan de référence (figure I.15a). Leur théorie a ensuite été étendue par d'autres chercheurs, Archard, Hunt et Onions ***(ARCH 75),*** Bush, Gibson et Keogh ***(BUSH 79),*** McCool ***(MCCO 86),*** Chang, Etsion, et Bogy ***(CHAN 87)*** pour des géométries plus complexes (figure I.15b).

Dans des travaux plus récents, Polycarpou et Etsion ***(POLY 99)*** utilisent le lissage d'une fonction exponentielle appliquée à la distribution des hauteurs des aspérités pour obtenir une solution analytique en accord avec les résultats numériques obtenus en utilisant la distribution gaussienne conventionnelle.

Cette méthode donne des bons résultats sur la dimension de l'aire de contact et la valeur du rapprochement solide. Les modèles statistiques ne peuvent toutefois pas prévoir la distribution des zones de contact, des pressions locales ou des contraintes, dont les singularités et l'aspect déterministe jouent un rôle important dans les phénomènes de fatigue ***(ROBB 01a, ROBB 01b)***.

La deuxième approche exploite des techniques numériques pour analyser les problèmes de contact entre deux surfaces rugueuses. Francis ***(FRAN 82)***, Webster et Sayles ***(WEBS 86)*** et Ren et Lee ***(REN 94)*** ont employé des profils mesurés pour simuler le contact linéique entre deux cylindres, et Ju et Zheng ***(JU 92)*** des topographies de surface pour une analyse tridimensionnelle. La plasticité a été introduite dans les modèles numériques par Poon et Sayles ***(POON 94)***, *Tian et Bhushan* **(TIAN 96)**, *Lee et Ren* **(LEE 96)** via une limitation de la pression de contact à 3 fois la limite d'élasticité, et l'influence du frottement étudiée par exemple par *Zhiqiang, Neville, Reuben* **(ZHIQ 01)**.

Enfin les articles synoptiques de Bhushan ***(BHUS 96)*** et Bhushan ***(BHUS 98)*** donnent des informations plus détaillées sur les mécanismes de contact entre surfaces rugueuses.

I.3.4 LE CONTACT LUBRIFIE

Les surfaces en contact en mouvement relatif sont séparées et protégées par un film de lubrifiant. La charge appliquée est transmise d'une surface à l'autre par ce film de lubrifiant qui, parce que les pressions de contact sont très élevées (de l'ordre du GPa), est à l'état vitreux. La rigidité de ce film de lubrifiant est alors bien plus grande que celle des surfaces qui se déforment élastiquement. Les principales différences par rapport au cas lisse sont la génération de pression dans le convergent et l'existence d'un pic de pression à la sortie du contact (figure I.16), effets qui s'estompent lorsque la charge augmente ou la vitesse diminue.

Le premier modèle élastohydrodynamique est dû à Ertel ***(ERTE 39)*** et Grubin ***(GRUB 49)*** qui résolurent analytiquement le problème linéique en découplant les effets élastiques et l'écoulement du fluide entre les surfaces (équation de Reynolds). La première solution numérique est due à Dowson et Higginson ***(DOWS 66)*** pour le cas du contact linéique cylindre/plan (solution EHD pour des surfaces lisses, un régime isotherme, une lubrification sur-abondante et un fluide imcompressible). Hamrock et Dowson ***(HAMR 76a, 76b)*** publient plus tard les solutions complètes du contact ellipsoïde/plan EHD lisse (figure I.16).

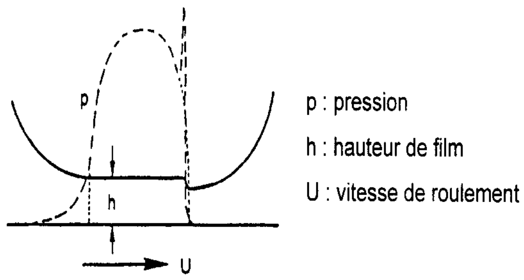


Figure I.16 *Profil de pression et paramètres du contact EHD ellipsoïde / plan*

Solutions pour le contact elliptique (II.8) :

$H_{min} = 3,63.U^{0,68}.G^{0,49}.W^{-0,073}.(1-e^{-0,68k})$

$H_c = 2,69.U^{0,67}.G^{0.53}.W^{0,067}.(1-0,61^{e-0,73k})$

k : rapport d'ellipticité: $k = 1,03.(R_x/R_y)^{0,64}$

U, G, W paramètres adimensionnés de vitesse, matériau et charge.

H_{min} est la hauteur adimensionnée minimale.

H_c est la hauteur adimensionnée au centre.

Dowson et Higginson ***(DOWS 66)*** montrent que lorsque le paramètre adimensionné de vitesse augmente, ou que la charge diminue, la contrainte de cisaillement maximale dans le massif sous le contact se rapproche de la surface (figure I.17). Cependant, la valeur de la sollicitation maximale est très peu affectée par la présence du lubrifiant, et pour des pressions de Hertz élevées ou des vitesses faibles, le pic de pression s'atténue et le champ de contraintes tend vers celui dû au contact sec.

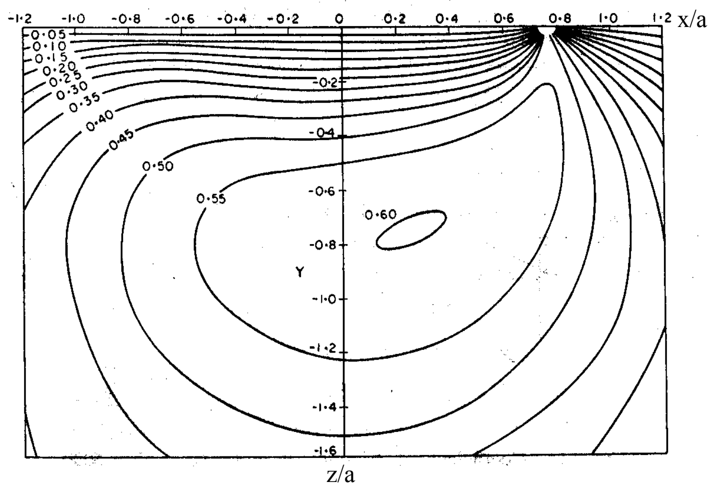


Figure I.17 *Contrainte équivalente de Von Mises adimensionnée par la pression de Hertz. Contact EHD cylindrique/plan. Selon* ***(DOWS 66)****.*

L'ordre de grandeur du film d'huile *(0,01 – 1 µm)* est souvent comparable aux dimensions des rugosités dans les applications courantes, dès lors la micro-géométrie joue un rôle sur les sollicitations subies ; des surpressions apparaissent provoquant des surcontraintes significatives au voisinage de la surface. En présence de défauts de surface plus importants (rayures, indents, etc.), le film d'huile peut être partiellement rompu, et des contacts métal-métal peuvent se produire.

D'après Dumont ***(DUMO 97)*** on peut distinguer quatre régimes de lubrification:

- élastohydrodynamique : la charge est transmise par le film de lubrifiant. Des aspérités peuvent exister en surface, mais leur hauteur est telle que les surpressions qu'elles engendrent sont négligeables. Le contact peut être supposé lisse.
- micro-élastohydrodynamique : la charge est transmise par le film de lubrifiant. Cependant, la micro-géométrie provoque des surcontraintes non négligeables, les rugosités étant d'amplitude comparable à l'épaisseur du film d'huile.
- lubrification mixte : le film de lubrifiant est incomplet. Il peut y avoir contact direct entre les aspérités.
- lubrification limite : l'épaisseur du film de lubrifiant est très faible. La charge est transmise principalement par les contacts directs entre les aspérités.

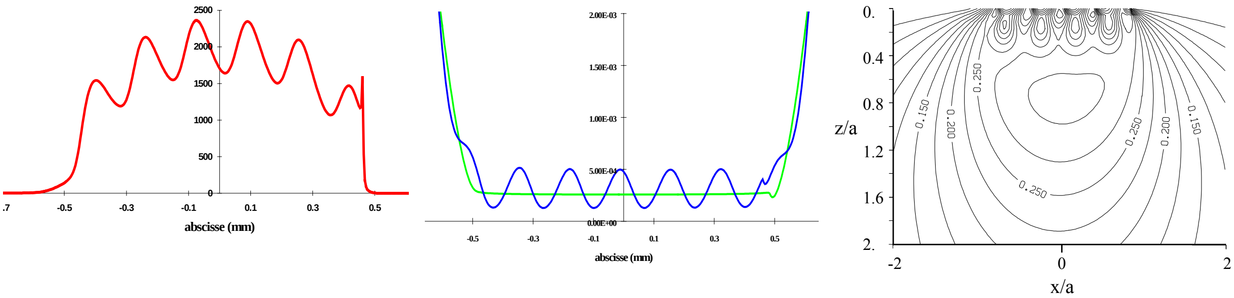


***Figure I.18** Distribution de pression, hauteur de film **(COUH 96)** et iso-contraintes de Tresca **(DUMO 97)** dans un contact EHD rugueux cylindre/plan*

Le paramètre de sévérisation Λ, rapport entre la hauteur minimale du film élastohydrodynamique en contact lisse et la moyenne quadratique des hauteurs des rugosités, est un bon indicateur du régime de lubrification. La transition entre le régime élastohydrodynamique et le régime micro-élastohydrodynamique se situe autour de $\Lambda = 1$.

$$\Lambda = \frac{h_{min}}{Rms}, \qquad (II.9).$$

Notons que la composante de rugosité considérée dans ce paramètre fonctionnel provient d'une mesure effectuée pour la surface libre, ce qui n'est pas vraiment représentatif de ce qui se passe dans le contact où les aspérités sont déformées élastiquement.

I.3.5 <u>LE CONTACT AVEC FROTTEMENT</u>

Le frottement est la résistance au glissement d'un corps solide sur l'autre. Le niveau du frottement est souvent exprimé en terme de coefficient de frottement, $\mu=F/W$, rapport entre l'effort tangentiel, F, et la charge normale, W.

Dans le cas de deux massifs en contact s'il y a du frottement à l'interface de contact, des conditions additionnelles sont parfois nécessaires selon le modèle utilisé. Le modèle de frottement le plus simple est celui du frottement de Coulomb, selon lequel, n'importe quel point de l'aire de contact ne peut être que dans deux états, adhésion (stick), lorsque la contrainte de cisaillement τ est inférieure à $\mu \times p$, et glissement (slip), lorsque la contrainte de cisaillement τ est égale à $\mu \times p$. Dans ce dernier cas il existe un mouvement relatif entre les 2 surfaces en contact et la contrainte de cisaillement s'exerce dans la direction opposée à la direction instantanée du glissement.

Considérons maintenant l'application d'une charge tangentielle à un contact hertzien dans les deux cas suivants :

- une paire de matériaux identiques,
- deux matériaux différents.

Dans le premier cas les efforts normaux ne causent pas de déplacements tangentiels relatifs et les efforts de cisaillement ne produisent pas de déplacements normaux relatifs. L'analyse est considérablement simplifiée car les effets normaux et tangentiels sont alors découplés. En l'absence d'une force tangentielle les points en contact ne subissent pas de déplacements tangentiels relatifs, qui ne sont liés qu'aux seuls efforts tangentiels.

Concernant le contact de deux cylindres, il a été montré par Cattaneo ***(CATT 38)*** et Mindlin ***(MIND 49)*** que, en considérant le phénomène de glissement / adhérence dans la résolution, il existe une région centrale d'adhérence entourée par deux zones de glissement (figure I.19). Si la force tangentielle augmente, la taille de la zone d'adhérence diminue jusqu'à glissement total. Pour un coefficient de frottement suffisamment élevé ($\mu>0.3$) le maximum de la contrainte de Tresca, qui remonte progressivement de la profondeur de Hertz à la surface avec l'augmentation du coefficient de frottement, se trouve à la surface des massifs, Johnson ***(JOHN 85)***. Les résultats ont été prolongés à d'autres scénarios de chargement par Mindlin et Deresiewicz ***(MIND 53)*** et ont été employés pour prévoir la taille de la zone de glissement dans les conditions de fatigue de fretting (***HILL 94***; ***SZOL 96***).

Carter ***(CART 26)*** a résolu le même type de problème que Cattanéo ***(CATT 38)*** mais en étudiant un cylindre roulant en régime permanent sur un plan déformable. La zone de glissement est alors située en début de la zone de contact (figure I.19). Kalker ***(KALK 67, 82, 90)*** a étudié les phases transitoires entre les solutions de Cattanéo et de Carter.

Les contraintes dans le cas avec glissement pour des matériaux différents ont été déterminées par Bufler ***(BUFL 59)*** et discutées par Johnson ***(JOHN 85)***. L'effet du frottement sec sans chargement tangentiel a été étudié dans le cas de deux sphères en contact par Goodman ***(GOOD 62)***. Ce dernier a montré que, pour une paire de matériaux élastiques différents, le couplage entre les effets normaux et tangentiels modifie peu la solution et par conséquent qu'il peut-être négligé en première approche.

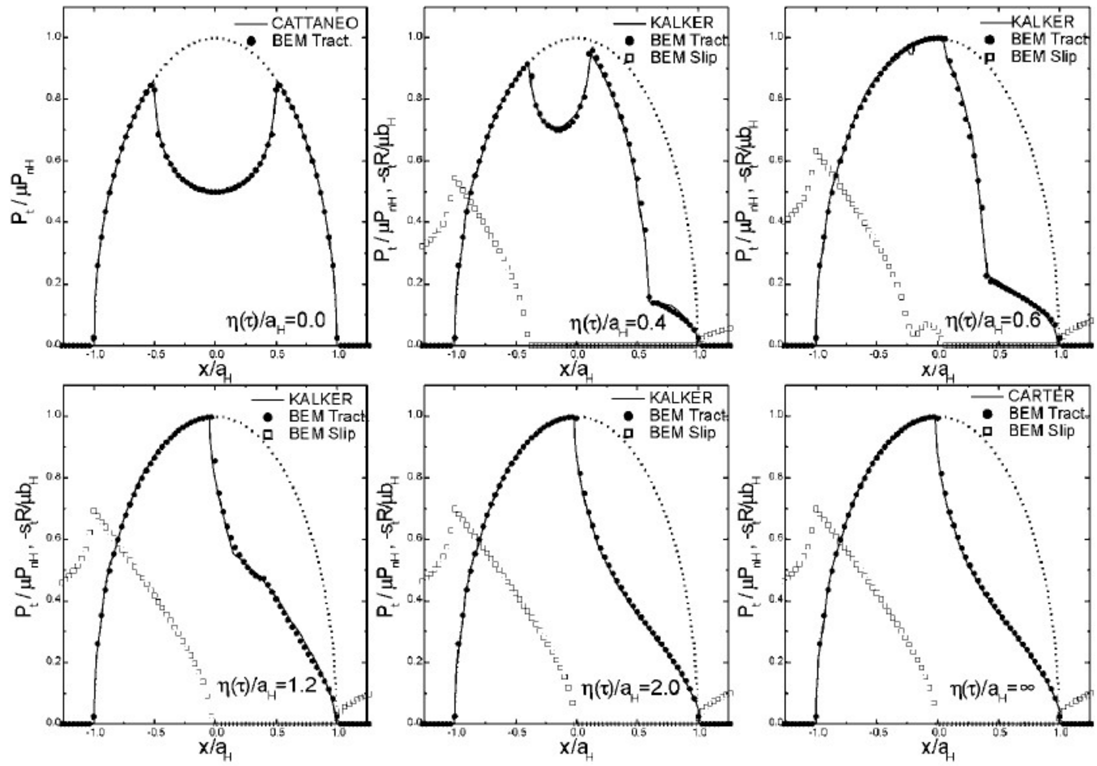


Figure I.19 *De Cattanéo à Carter, Q/μp = 0,75. Contact linéaire.* (Gonzalez et Ramon, ***GONZ 02***)

Les solutions complètes, qui incluent le couplage entre les effets normaux et tangentiels, ont été obtenues par Mossakovski ***(MOSS 63)*** et Spence ***(SPEN 68, 75)***. Ces résultats indiquent que la prise en compte du frottement modifie l'aire de contact, et que cette modification est comparable à celle produite par une augmentation de la charge normale de moins de 5%.

I.3.6 LE CONTACT ELASTOPLASTIQUE

Pour le cas des contacts non-conformes la pression de contact est très élevée, typiquement 50 à 100 fois plus que dans les contacts surface – surface (conformes). Une charge normale excessive, ou encore la présence de frottement ou de défauts de surface (rugosités, stries, rayures, indents, etc.), voir figure I.20, produit une augmentation locale ou globale de la pression de contact qui peut conduire dans des cas particuliers à un dépassement de la limite d'élasticité des matériaux provoquant des déformations plastiques irréversibles.

Ces déformations en sous-couche, qui induisent une déformation permanente de la surface, génèrent également des contraintes résiduelles élevées qu'il est important de prendre en compte pour déterminer les sollicitations réellement subies pendant le chargement. Enfin l'écrouissage associé à cette plasticité correspond à une modification locale des caractéristiques du matériau.

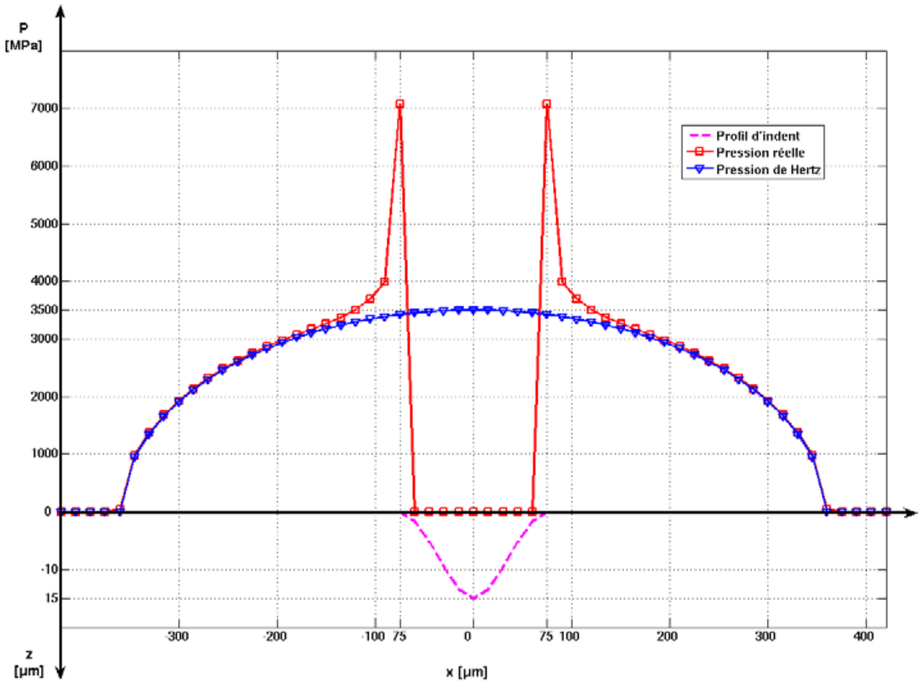


Figure I.20** Champ de pression dans un contact indenté (sol. élastique sphère/plan) **(ANTA 04)

Plusieurs études ont été menées sur le contact élasto-plastique lisse, rugueux ou indenté. Une méthode numérique employée pour étudier le contact élasto-plastique est la méthode des éléments finis utilisée par Hahn et al ***(HAHN 87)***, Gupta et al ***(GUPT 95)***, Xu et al ***(XU 97)***, ou encore par Kang et al ***(KANG 04)***. Si on considère un contact indenté tridimensionnel, ce genre d'approche induit des coûts de calculs prohibitifs en raison de la lourdeur du maillage nécessaire à une description correcte du problème, Dang Van et al ***(DANG 93)***. En même temps, peu de travail a été fait concernant l'analyse du champ de contraintes élasto-plastiques dans un contact roulant par éléments finis, comme le remarquent Jiang et al ***(JIAN 02)***.

Lorsque le volume plastique est petit et que les déformations plastiques peuvent être considérées comme limitées à quelques pourcents, les approches semi-analytiques semblent bien adaptées. Le principal avantage de l'approche semi-analytique par rapport aux méthodes éléments finis actuelles est que les temps de calcul rendent l'étude de problèmes de contact en régime transitoire possible, même lorsque le maillage requis doit être fin, comme lors du roulement d'une charge sur un défaut de surface. La plupart des auteurs restreignent le problème pour le simplifier. Ainsi, Hearle et Johnson ***(HEAR 87)*** ne considèrent que les déformations plastiques de cisaillement. Dang Van et Maitournan ***(DANG 93)*** considèrent eux un problème stationnaire, ce qui ne permet pas de traiter le cas d'un contact indenté pour une charge roulante. Virmoux et al ***(VIRM 94)*** ont utilisé une méthode rapide pour évaluer la réponse élasto-plastique des matériaux, mais ne considèrent ni la modification de la pression de contact due à la modification de la conformité des surfaces ni les effets liés au passage de la charge. Mayeur et al ***(MAYE 95a, 95b)*** ont proposé un modèle de contact normal semi-analytique basé sur les éléments frontières, sans simplification, mais le modèle est 2D et ne permet donc pas de traiter le cas du contact circulaire ou elliptique (limité au déformations planes).

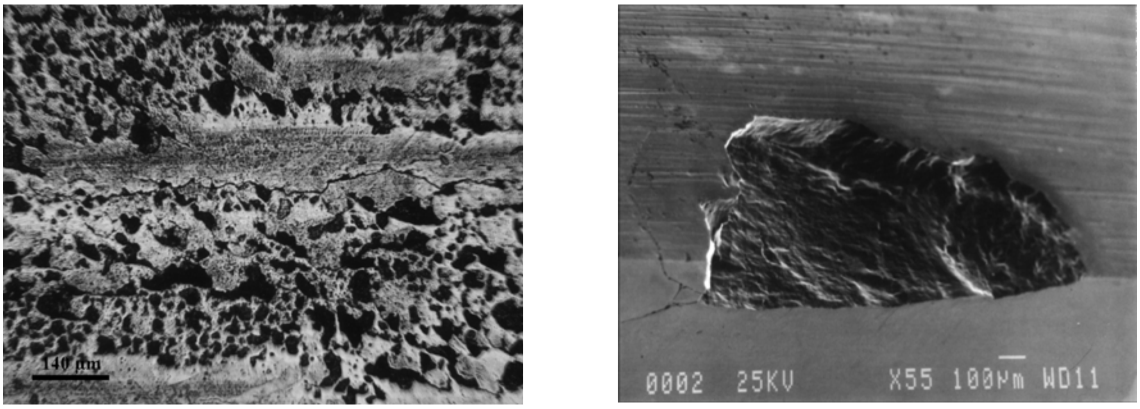
Jacq et al. ***(JACQ 02)*** ont développé un code de contact élasto-plastique 3D par une méthode semi-analytique, assez rapide pour permettre le calcul d'un chargement vertical ou roulant d'une surface lisse sur une surface rugueuse ou indentée. Toutefois seuls les effets normaux ont été considérés. Plus récemment ***Boucly et al. (BOUC 05)*** ont ajouté les effets thermiques pour aboutir à un modèle thermo-élasto-plastique.

Dans la majorité des études, l'indent n'est représenté que par la perturbation de la géométrie de la surface et le contact est résolu élastiquement. Cette analyse permet de déterminer le champ de pression qui s'établit au niveau du contact lorsque la géométrie est rodée, c'est à dire après quelques cycles, lorsque le passage de la charge sur l'indent ne provoque plus de déformations plastiques. Il est évidemment nécessaire de considérer une géométrie représentative de cet état. Cependant, les contraintes calculées à partir de ces pressions de contact ne permettent pas, à elles seules, de déterminer les sollicitations subies puisque, ni les contraintes résiduelles générées pendant l'indentation, ni celles introduites pendant le rodage ne sont prises en compte. Xu et Sadeghi ***(XU 97)*** ont pris en compte l'ensemble du processus, à savoir indentation et passage de la charge, en résolvant le problème du contact élasto-plastique 2D par éléments finis, permettant ainsi de mettre en évidence le rôle non négligeable des contraintes résiduelles sur les sollicitations subies dans un contact indenté.

I.4 <u>FATIGUE DE ROULEMENT</u>

Le passage répété des corps roulants sur les pistes de roulement peut provoquer l'endommagement par fatigue de roulement (ou de contact). Deux types d'avaries dues à la fatigue de contact sont aujourd'hui bien identifiés (figure I.21.) :

Le micro-écaillage, qui se manifeste par la formation de micro-fissures et micro-écailles à l'échelle des rugosités. C'est une avarie qui apparaît après une courte période d'incubation (plusieurs centaines de milliers de cycles), et ceci même pour une charge normale faible. Enfin, notons que si le micro-écaillage n'est pas une avarie catastrophique en soi, il peut toutefois conduire à la ruine du mécanisme si les micro-fissures se propagent jusqu'à la profondeur de Hertz.



micro-écailles écaille

Figure I.21 *Avaries dues à la fatigue de roulement* (***DUMO 97***)

L'écaillage, qui se manifeste par la formation d'une écaille à l'échelle du contact. Cette écaille peut résulter de la propagation d'une fissure de fatigue de la zone de Hertz jusqu'à la surface (écaillage amorcé en sous-couche) ou de la surface vers la sous-couche (écaillage amorcé en surface). C'est une avarie catastrophique qui apparaît généralement après un grand nombre de cycles (plusieurs millions de cycles) et pour des charges normales élevées. Un écaillage profond amorcé en sous-couche a généralement pour origine une inclusion dure présente à la profondeur de Hertz (ou toute autre micro-hétérogénéité). Tandis que l'écaillage profond amorcé en surface démarre généralement au voisinage d'une indentation ou de tout autre défaut géométrique (rayure de rectification ou trace de choc due au montage) ou altération de la surface (micro-grippage, micro-écaillage).

Concernant les avaries provoquées par la fatigue de roulement, deux questions se posent :

1. Jusqu'à quel niveau peut-on charger le contact sans risquer de provoquer d'avaries de fatigue (limite d'endurance) ?

2. Si cette limite est dépassée, quel est le potentiel du mécanisme ; combien d'heures peut-il fonctionner avec un risque de défaillance limité (durée de vie) ?

La formation des écailles ou des micro-écailles s'opère en deux étapes successives, l'initiation et la propagation. L'initiation correspond au temps nécessaire à la nucléation de micro-fissures, et la propagation au temps nécessaire à leur développement jusqu'à l'avarie.

Nous discuterons des avaries rencontrées en fatigue de roulement selon trois catégories, dépendant de leur origine et du site d'initiation. Nous distinguerons tout d'abord celles initiées en sous-couche de celles initiées en surface. Ces dernières seront sub-divisées en deux catégories, en séparant les avaries initiées près des rugosités de celles initiées près des indents.

I.4.1 FATIGUE DE ROULEMENT INITIE EN SOUS-COUCHE.

L'écaillage par propagation d'une fissure amorcée au voisinage d'une inclusion est la principale cause d'avaries initiées en sous-couche.

Les transformations microstructurales visibles dans la zone de Hertz, où la contrainte de cisaillement est maximale, sont les premiers symptômes de l'endommagement en fatigue de roulement initié en sous-couche. Elles se produisent en premier lieu au voisinage d'inclusions qui jouent le rôle d'amplificateurs de contraintes. Les papillons de phase blanche (figure I.22), orientés à 45° par rapport au roulement, et qui se forment dans les aciers martensitiques autour de ces inclusions, sont dus au mouvement des dislocations générées par le dépassement local de la micro-limite d'élasticité. La multiplication de ces dislocations au cours des cycles successifs de chargement entraîne la formation de micro-fissures dans les zones transformées lorsque la densité de dislocations atteint une valeur critique.

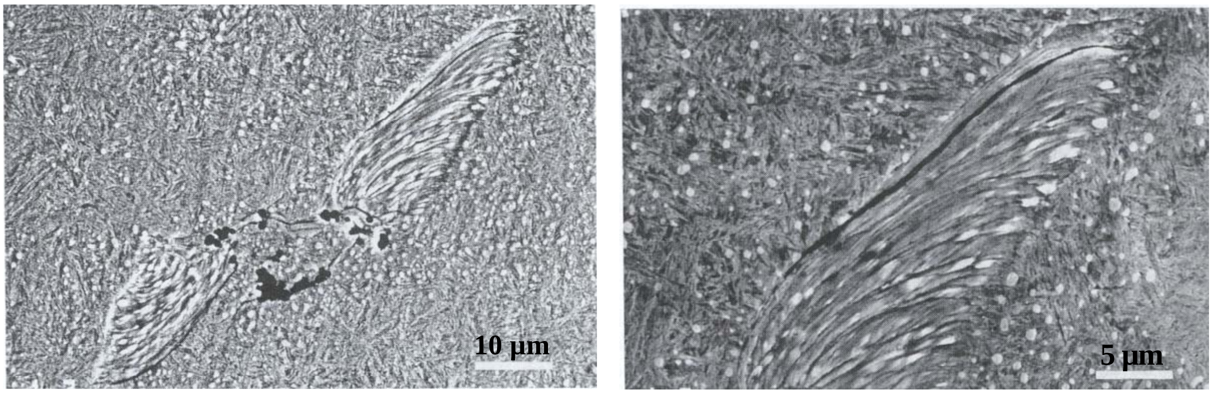


Figure I.22 *Papillon et fissure amorcée autour d'une inclusion (**TALL 99**)*

Si les contraintes de cisaillement sont suffisamment élevées, ces micro-fissures peuvent se propager jusqu'à la surface, et provoquer ainsi un écaillage. La détermination des sollicitations subies pendant le contact ne permet pas à elle seule ni de prédire, ni d'expliquer la formation des avaries de fatigue. Pour répondre à ces questions, des modèles de durée de vie ont été mis en place. Ils peuvent être scindés en deux familles, les modèles phénoménologiques et les modèles physiques.

Les modèles phénoménologiques actuels sont des évolutions des modèles de Weibull et de Lundberg et Palmgreen. Ils permettent de prédire la durée de vie des roulements, sans s'appuyer sur la description fine du mécanisme de formation des avaries. Ils sont basés sur une approche statistique des défaillances constatées expérimentalement et sur la notion d'un volume à risque engendré par le contact. Ainsi, le modèle Ioannides-Harris ***(HARR 01)*** exprime la probabilité de survie S en fonction du nombre de cycles N par :

$$\ln\left(\frac{1}{S}\right) = \overline{A} \cdot N^{e} \cdot \int_{V} H \cdot (\sigma - \sigma_u) \cdot \frac{(\sigma - \sigma_u)^{c}}{z'^{h}} dV , \qquad \text{(II.10)},$$

où :

- $\overline{\mathrm{A}}$*, h* et *e* sont des paramètres liés au matériau,
- σ_u est la limite d'endurance,
- σ est le critère de fatigue,
- V est le volume à risque ou $\sigma > \sigma_u$.

La détermination des paramètres $\overline{A}$*, h, n* et *e* (décrivant le comportement du matériau) ainsi que de la limite d'endurance est délicate, car ils ne sont pas directement basés sur la description des mécanismes d'endommagement, et doivent donc être réactualisés pour chaque matériau ou pour un changement de qualité du matériau en pratiquant de nombreux essais de fatigue. De plus, afin de réduire le nombre d'essais nécessaires à la détermination de ces paramètres, des conditions d'essais très sévères ont souvent été utilisées, ce qui a pu conduire à l'activation de mécanismes d'endommagement différents de ceux rencontrés en service.

Les modèles physiques s'appuient sur l'identification du mécanisme d'endommagement et sont constitués de l'enchaînement de la modélisation de l'amorçage d'une fissure avec la modélisation de sa propagation. Ils s'appuient sur les concepts de la micro-mécanique et de la théorie des dislocations. Plusieurs modèles existent, Cheng et al. (***CHEN 94***).

Le modèle développé au Groupe d'Etude de Métallurgie Physique et de Physique des Matériaux (GEMPPM), (***LAMA 98***) permet d'expliquer la formation des écailles amorcées sur inclusion dans les aciers à roulement de type 100Cr6 et M50.

Le mécanisme mis en jeu est basé sur l'incompatibilité de déformation entre l'inclusion et la matrice. Ces incompatibilités sont accommodées par l'émission de dislocations qui créent les papillons de fatigue observés expérimentalement. Ces dislocations, en s'accumulant, conduisent à l'amorçage d'une fissure, qui va ensuite se propager. L'application de ce modèle aux différentes inclusions présentes dans la zone sollicitée par le contact permet de définir une durée de vie du contact. La répétition de ce processus à une famille de contacts permet d'obtenir la distribution des durées de vie qui résulte de la dispersion inclusionnaire liée au processus d'élaboration du matériau. Grâce à ce modèle, on peut déterminer la limite d'endurance H1. C'est la pression de Hertz que l'on peut appliquer sur le contact sans qu'il y ait émission de dislocations irréversibles autour des inclusions, c'est à dire sans que la micro-limite d'élasticité ne soit dépassée, en tenant compte des hétérogénéités microstructurales. La micro-limite d'élasticité est la limite d'élasticité pour une déformation d'épreuve de 20.10^{-6} def et correspond aux premiers mouvements irréversibles des dislocations.

I.4.2 FATIGUE DE ROULEMENT INITIE AU VOISINAGE DES RUGOSITES

Lorsque les surfaces ne sont pas lisses, les surpressions générées au niveau du contact ainsi que l'augmentation du frottement se traduisent par des sollicitations élevées en surface ou à proximité de la surface de contact. La figure I.23 schématise l'allure du niveau de sollicitation sous la surface en fonction de la charge appliquée et de l'amplitude des rugosités. Lorsque les sollicitations dépassent la micro-limite d'élasticité (en tenant compte des hétérogénéités microstructurales), il peut y avoir initiation de micro-fissures dans ces zones (figure I.23).

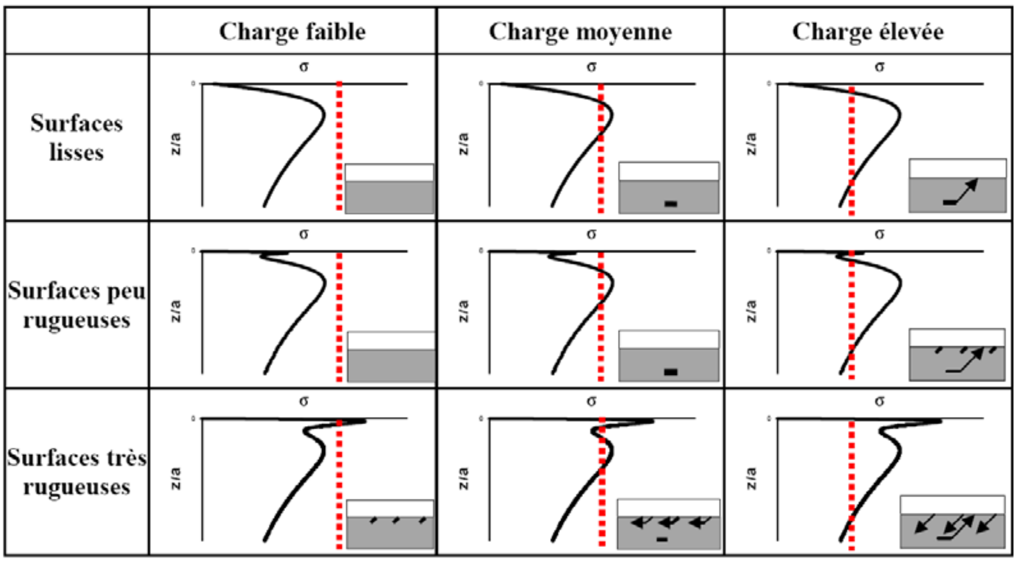


Figure I.23 *Compétition entre la fatigue de roulement initiée en sous-couche et celle initiée en surface en fonction du niveau des contraintes de cisaillement selon la profondeur* ***(NELI 99a)***

Les micro-fissures amorcées peuvent se propager et donner lieu à du micro-écaillage ou à de l'écaillage. Pour qu'il y ait écaillage profond, il est nécessaire qu'un "pont" de contrainte relie la zone sollicitée en surface et la zone de Hertz (***NELI 99b***). Cette situation correspond à des surfaces très rugueuses et des pressions de Hertz élevées (figure I.23)

Le trait pointillé correspond à une contrainte limite, fonction du matériau, en deçà de laquelle aucun endommagement n'apparaît.

L'endommagement initié en surface est susceptible de se produire dès que l'amplitude des rugosités est voisine de l'épaisseur du film d'huile séparant les surfaces en contact. Le paramètre Λ permet ainsi de quantifier la sévérité d'une application au regard de la fatigue de roulement initiée près des rugosités.

I.4.3 FATIGUE DE ROULEMENT INITIE AU VOISINAGE DES INDENTS

Les indents créent également des surpressions dans le contact, et donc des surcontraintes dans le massif. A ce titre, ils sont une source d'endommagement en fatigue de roulement.

La localisation des sites d'initiation dépend des conditions de fonctionnement (figure I.24). En roulement pur, il est fait état d'endommagements initiés en amont ou en aval de l'indent dans le sens du roulement, avec une proportion tout de même plus élevée pour l'initiation en aval. En présence de glissement, l'initiation se fait en aval dans le sens du frottement. L'étude du champ de pression EHD permet d'expliquer la localisation du site d'initiation par rapport au sens du frottement. En particulier, il a été montré par Dumont ***(DUMO 97)*** qu'en présence de glissement le champ de pression est dissymétrique, et que le pic de pression le plus important est situé en aval de l'indent dans le sens du frottement.

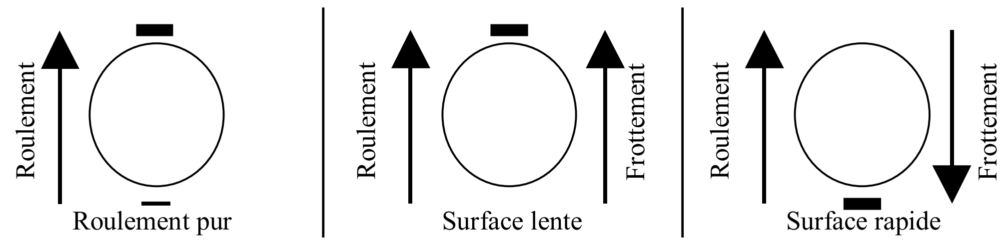


Figure I.24 *Localisation des sites d'initiation autour d'un indent.*

L'endommagement en fatigue de roulement au voisinage de l'indent se traduit par du micro-écaillage ou par un écaillage profond. Les écailles et les micro-écailles se propagent dans le sens opposé au roulement (sens du passage de la charge).

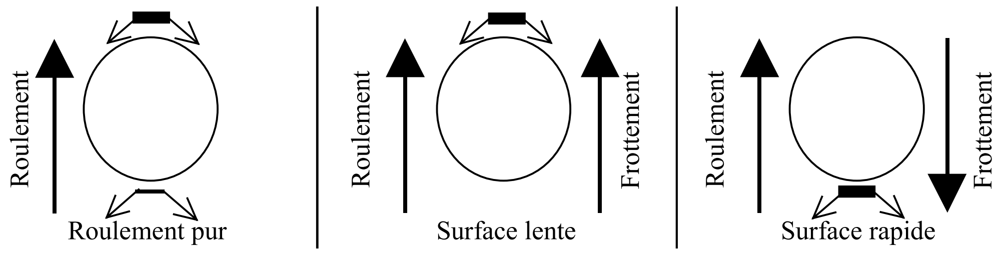


Figure I.25 *Propagation des micro-fissures autour d'un indent.*

Pour les surfaces rugueuses, la présence ou l'absence de surpressions permet de déterminer si la rugosité est dangereuse ou non au regard de la fatigue de roulement. Ce type d'analyse ne peut pas être appliqué directement au cas des indents. En effet, les surpressions créées par un indent peuvent être élevées et provoquer d'importants dépassements locaux de la micro-limite d'élasticité (caractérisés par l'évolution géométrique de l'indent et le matage du bord de l'indent) sans que celui-ci ne présente de signe d'endommagement. L'origine de l'endommagement initié au voisinage des indents n'est pas bien comprise. En conséquence, il n'existe pas de critère ou de modèle permettant, d'après les caractéristiques d'un indent, de déterminer une limite d'endurance ou une durée de vie.

La variation des surpressions et des surcontraintes en fonction des caractéristiques des indents a été étudiée par plusieurs auteurs. Dans la majorité des cas, seules les contraintes élastiques dues au champ de pression ont été prises en compte. Ces calculs ont été couplés avec des modèles de durée de vie phénoménologiques pour estimer la sévérité des indents. Ces études ne permettent pas d'estimer une limite d'endurance ou une durée de vie pour deux raisons :

- les sollicitations estimées ne tiennent pas compte de la présence des contraintes résiduelles générées pendant l'indentation et pendant les premiers passages de la charge.
- les propriétés mécaniques du matériau utilisées dans le modèle de durée de vie sont celles du matériau de base et ne prennent pas en compte l'évolution due à l'écrouissage pendant l'indentation et pendant les premiers passages de la charge.

I.4.4 CONCLUSIONS

Les mécanismes de l'écaillage amorcé sur inclusion sont bien connus. Afin de limiter ces écaillages, les aciers à roulement sont élaborés avec des procédés propres permettant de limiter la taille et le nombre d'inclusions (dégazage pour les aciers élaborés à l'air, refusion VAR, VIM-VAR dans le cas des applications aéronautiques). De plus, la connaissance de la taille et de la nature des inclusions permet, grâce au modèle de durée de vie développé par le GEMPPM, de déterminer la charge maximale que peut supporter le contact sans risquer une avarie initiée sur une inclusion.

La fatigue de roulement initiée en surface par la rugosité des surfaces de contact est elle aussi maîtrisée. En effet, la super finition des surfaces de contact, couplée avec une épaisseur de film d'huile suffisante permet de limiter très fortement les surcontraintes en peau des massifs, et donc l'initiation de l'endommagement dans ces zones.

Le problème majeur est lié à l'endommagement initié au voisinage des indents qui est un phénomène encore mal connu. En effet, ces derniers apparaissent principalement au cours du fonctionnement du mécanisme et peuvent provoquer une avarie rapide du mécanisme, que l'on ne sait pas encore maîtriser. En particulier un code de contact élasto-plastique capable de calculer le niveau des sollicitations subies par le matériau après la formation de l'indent et après le rodage qui s'effectue durant les premiers passages de la charge sur l'indent nouvellement créé a été mise en place par Jacq et al. ***(JACQ 02)***. Plus récente a partir de ce modèle Nélias et al. ***(NELI 05)***, ont proposé une nouvelle méthodologie pour évaluer la fatigue de contact des aciers de roulement en présence d'indents.

CHAPITRE II

RESOLUTION RAPIDE DU CONTACT NORMAL ELASTIQUE

II.1 LE PROBLEME DE CONTACT

La résolution d'un problème de contact consiste à trouver comment une région de contact se forme entre deux massifs en contact. A partir de la littérature on peut distinguer deux méthodes de résolution :

- la méthode directe ;
- la méthode inverse.

II.1.1 RESOLUTION DU PROBLEME PAR METHODE DIRECTE

Il s'agit de déterminer les déplacements de la surface d'un milieu soumis à une force donnée en un point de la surface. Ces déplacements, appelés coefficients d'influence, sont obtenus en résolvant les équations de Lamé (équations aux dérivées partielles). Les solutions adoptées pour résoudre ce problème dépendent de la géométrie du milieu élastique traité (massif semi-infini, une couche ou multicouche) et de la nature de la sollicitation (mécanique: normale, tangentielle et/ou thermique). On peut donc retrouver :

- la méthode des potentiels ;
- la méthode de transformation intégrale ;
- les méthodes numériques.

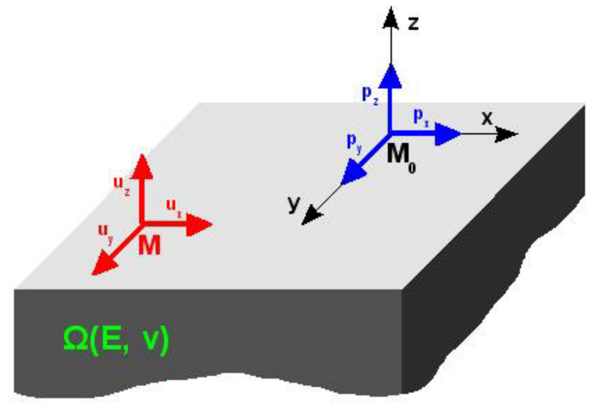


Figure II.1 *Notations relatives au problème 3D*

a) La méthode des potentiels

Pour les domaines élastiques considérés comme semi-infinis (les déplacements et les contraintes sont nuls loin de la surface de contact pour des configurations tridimensionnelles), Boussinesq ***(BOUS 85)*** résout les équations de Lamé sous chargement normal par la méthode des potentiels.

Dans le cas de l'application de forces concentrées P_x, P_y et P_z en un point M_0 (x_0, y_0, z_0) de la surface (figure II.1), l'expression des déplacements résultants (u_x, u_y, u_z) en un point M (x,y,z)

est obtenue. Cette solution, appelée « solution fondamentale », s'écrit, pour un point *M(x,y,0)* de la surface, sous la forme :

$$\begin{cases} 4\pi\mu u_x = \left[\dfrac{2(1-\nu)}{r} + \dfrac{2\nu(x-x_0)^2}{r^3}\right]P_x + \dfrac{2\nu(x-x_0)(y-y_0)}{r^3}P_y + (1-2\cdot\nu)\dfrac{(x-x_0)}{r^2}P_z \\ 4\pi\mu u_y = \dfrac{2\nu(x-x_0)(y-y_0)}{r^3}P_x + \left[\dfrac{2(1-\nu)}{r} + \dfrac{2\nu(x-x_0)^2}{r^3}\right]P_y + (1-2\nu)\dfrac{(y-y_0)}{r^2}P_z \\ 4\pi\mu u_z = (1-2\nu)\dfrac{(x-x_0)}{r^2}P_x + (1-2\nu)\dfrac{(y-y_0)}{r^2}P_y + \dfrac{2(1-\nu)}{r}P_z \end{cases},$$

avec :

- $r = \|MM_0\|$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, M(x, y, z)
- E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du matériau,
- λ, μ : Coefficients de Lamé du matériau.

Pour déterminer les déplacements associés à une charge distribuée, la solution fondamentale est alors intégrée dans le domaine d'application de la charge. Cette méthode, dite méthode des potentiels présente généralement des difficultés car elle conduit à des équations intégrales ou à la minimisation d'une fonctionnelle. Solomon ***(SOLO 68)*** a résolu ce problème en faisant référence à différents ouvrages traitant ces questions.

L'hypothèse de massif semi-infini est la principale limite pour l'application de cette méthode. Cependant cette hypothèse n'est pas restrictive si l'aire de contact est faible par rapport aux dimensions et aux rayons de courbures des solides.

b) La méthode de transformation intégrale

Lorsque l'hypothèse de massif semi-infini n'est plus applicable, la méthode de transformation intégrale qui permet de prendre en compte explicitement la dimension finie du milieu suivant *z* peut être utilisée. Elle permet d'obtenir les expressions des coefficients d'influence.

Il existe plusieurs transformations intégrales: transformées de Fourier finie ou infinie, de Laplace, de Hankel etc. Ces transformées, et en particulier celle de Fourier, sont largement utilisées dans la résolution des problèmes de contact pour des solides dont la géométrie et les conditions aux limites sont régulières.

Le principe consiste à transformer une équation aux dérivées partielles (ou un système d'équations) en une équation (ou un système d'équations) différentielle ne dépendant plus que d'une seule variable. Pour une configuration 3D telle que celle définie figure II.1, l'application d'un double transformée intégrale selon les directions x et y aux équations de Lamé permet d'obtenir une équation différentielle fonction uniquement de la variable z, perpendiculaire à la surface du milieu étudié. Une solution analytique est obtenue pour les transformées des déplacements et des contraintes. Les conditions aux limites, sont elles mêmes transformées. Elles ne portent désormais que sur la variable d'intégration et permettent de déterminer les constantes d'intégration. Le problème est résolu dans l'espace transformé. Le résultat est alors soumis à une transformation inverse pour obtenir la solution du problème dans l'espace réel.

Une des difficultés de cette méthode réside dans le calcul des intégrales effectué généralement numériquement. En réponse à ce problème, des méthodes spécifiques de calcul doivent être utilisées. Le calcul numérique peut être amélioré en faisant usage d'un algorithme de calcul numérique (FFT: Fast Fourier Transform). La rapidité de cet algorithme repose sur la périodicité des fonctions circulaires. Parmi les auteurs ayant utilisé cet algorithme, habituellement réservé au traitement des signaux temporels, pour la résolution des problèmes thermique et de contact respectivement nous pouvons citer Villechaise ***(VILL 85)***, Leroy ***(LERO 89)*** et Ju et Farris ***(JU 97)***.

c) Les méthodes numériques

Les méthodes numériques sont mieux appropriées pour des géométries quelconques et des conditions limites variées. Les deux méthodes les plus employées sont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

- La méthode des différences finies :

Chaque variable est discrétisée en un nombre donné de points. Les dérivées partielles de l'équation de Lamé sont approchées sous forme de différences des variables calculées entre des points consécutifs. L'équation de Lamé est alors transformée en un système linéaire comportant autant d'équations que de points de discrétisation. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre mais les pas de discrétisation doivent être choisis avec précaution pour assurer la convergence et la stabilité du problème. De plus, le maillage obligatoirement orthogonal n'épouse pas parfaitement les géométries complexes.

- La méthode des éléments finis

Cette méthode consiste à diviser le domaine étudié en *N* domaines élémentaires appelés "eléments finis" reliés entre eux par des points appelés "nœuds" situés sur leur contour, et enfin à résoudre un système linéaire de *N* équations à *N* inconnues. Si la géométrie du domaine d'étude n'est pas régulière, le maillage est conçu de façon à épouser les frontières, par modification de la forme et la dimension d'éléments si nécessaire avec le respect de quelques limites de distorsion des éléments. Les conditions aux limites peuvent être aussi définies par morceaux.

Malheureusement le calcul est lié à la discrétisation : une discrétisation raffinée, par exemple dans les zones en contact, est nécessaire pour avoir une bonne précision dans les résultats.

II.1.2 RESOLUTION DU PROBLEME PAR METHODE INVERSE

Il s'agit de traiter les conditions d'interactions surfaciques des milieux en contact. On écrit la mise en conformité entre deux corps et on cherche à déterminer les dimensions de la zone de contact, les zones d'adhérence et de glissement dans cette zone, et les contraintes de ce contact. Les solutions proposées dépendent de la prise en compte ou non de l'effort tangentiel. Nous distinguerons les méthodes de résolution analytiques (théorie de Hertz) et numériques. Nous venons au cours de ce chapitre de présenter une méthode de solution numérique rapide au problème du contact 3D normal.

La méthode des éléments finis est de plus en plus employée pour résoudre les problèmes de contact aussi bien dans les cas bi que tri-dimensionnels. Les formulations utilisées sont complexes et la mise en oeuvre de cette méthode est difficile. Son intérêt réside dans sa généralité. Elle permet d'étudier des solides de géométries quelconques et de lois de comportement rhéologique diverses. Les problèmes 3D sont cependant peu traités car ils aboutissent à des temps de calculs importants et présentent des problèmes de convergence sous chargement tangentiel.

Les méthodes de résolution du problème inverse sont nombreuses et dépendent des hypothèses établies sur les champs de contraintes dans le contact. Si le problème normal est simple à résoudre, le problème tangentiel est plus compliqué. Il nécessite la résolution d'égalités et d'inégalités (non linéaires pour un problème 3D) pour déterminer les zones de glissement et d'adhérence dans la zone de contact. Le contact tridimensionnel est généralement peu traité car la discrétisation de la zone de contact est nécessairement importante pour obtenir une bonne précision et aboutit à des temps de calcul importants.

Conry et Seireg ***(CONR 71)*** présentent une méthode appliquée au contact 2D en négligeant les efforts tangentiels.

Chiu et Hartnett ***(CHIU 83)*** proposent un algorithme pour résoudre le contact normal 3D avec un bouclage sur le déplacement de corps solide. Cette méthode est peu pratique car elle comprend 4 boucles de convergence encastrées.

Nogi et Kato ***(NOGI 97)*** ont présenté une méthode de résolution pour un milieu revêtu rugueux. Les coefficients d'influence sont exprimés dans l'espace de Fourier où la résolution du problème de contact est également réalisée. Cette méthode a l'avantage comparativement à une méthode classique, de diminuer les temps de calculs considérablement grâce à l'application d'un produit de convolution dans l'espace de Fourier au lieu d'une sommation des coefficients d'influence dans l'espace réel.

O'Sullivan et King ***(OSUL 88)*** ont traité le cas d'un poinçon rigide sphérique chargé normalement et tangentiellement contre un massif multicouche. Leur processus de résolution est comparable à celui de Villechaise ***(VILL 85)*** puisqu'ils recherchent la sollicitation parmi une famille de sollicitations. Le domaine d'application de leur méthode est restreint à des sollicitations tangentielles faibles, leur modèle reposant notamment sur l'hypothèse d'indépendance des efforts normaux et tangentiels.

Kalker ***(KALK 67)*** développe un algorithme de contact avec frottement en tridimensionnel autorisant l'emploi de surfaces lisses quelconques. L'hypothèse de massifs semi-infinis est adoptée. La formulation du problème global passe par un découplage en deux problèmes partiels: le problème du contact normal et le problème du contact tangentiel. Le contact normal est résolu indépendamment du contact tangentiel, par une méthode de minimisation de l'énergie. Pour le problème tangentiel, il procède avec une méthodologie identique :

- écriture de l'énergie de déformation,
- détermination des contraintes liées aux conditions aux limites particulières de l'interface,
- résolution par la méthode du Simplex.

Cet algorithme a été parfaitement validé lors de sa mise au point pour des surfaces lisses. Il implique cependant une indépendance entre le problème de contact normal et tangentiel. Plus tard, Kalker ***(KALK 82)*** publie une nouvelle méthode de résolution ne nécessitant pas le calcul de l'énergie potentielle et l'utilisation de l'algorithme du Simplex. Cette méthode est cinq fois plus performante en temps de calcul et considère le problème normal couplé au problème tangentiel.

Elle permet de déterminer:

- l 'aire de contact,
- la répartition des contraintes normales et tangentielles,
- les zones de glissement et d'adhérence dans l'aire de contact.

La méthode de Kalker est de plus en plus utilisée de nos jours car:

- sa formulation est simple,
- ses possibilités d'extension sont importantes,

comme en témoignent par exemple les applications au contact de corps rugueux Carneiro-Esteves ***(CARN 87)***, modélisation du comportement de fissures Dubourg ***(DUBO 89)***, modélisation du comportement élasto-plastique Mayeur ***(MAYE 95a)***.

Lorsqu'un maillage très fin est requis (typiquement avec plus de 10^5 points sur la surface de contact) l'utilisation de techniques d'accélération numérique est nécessaire pour réduire les temps de calcul et la quantité de mémoire pour stockage de manière significative. Les MLT (Multi-Level Techniques) ont été appliquées en premier aux problèmes de contact par Lubrecht et Ioannides ***(LUBR 91)***. Plus récemment, Liu et al. ***(LIU 00)*** ont utilisé les techniques de convolution discrète et transformée de Fourier rapides (DC-FFT) pour l'analyse du contact, de la température et du champ de contraintes. Polonsky et Keer ***(POLO 99, 00)*** ont mené une étude comparative entre les approches MLT et FFT, et ont développé une méthode basée sur le gradient conjugué pour le calcul de la distribution de pression de contact.

L'analyse des méthodes de résolution présentées dans la littérature nous indique que deux familles de méthodes ont été développées :

- par résolution directe d'un système matriciel;
- par résolution itérative de cette équation matricielle.

Dans cette seconde catégorie l'algorithme du gradient conjugué semble finalement le plus intéressant pour sa généralité et sa formulation simple. Dans le paragraphe qui suit nous présenterons la méthode de résolution utilisée qui conjugue la technique du gradient conjugué et les transformées de Fourier discrètes (DC-FFT).

II.2 ANALYSE SPECTRALE DES PROBLEMES DE CONTACT

II.2.1 LA TRANSFORMATION DE FOURIER CONTINUE

On définit la transformation de Fourier continue *H(f)* de la fonction *h(t)* par l'équation suivante :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \,, \qquad \text{(II.1)},$$

où *h(t)* représente une fonction du temps *(t)* et *H(f)* est une fonction fréquentielle *(f)*.

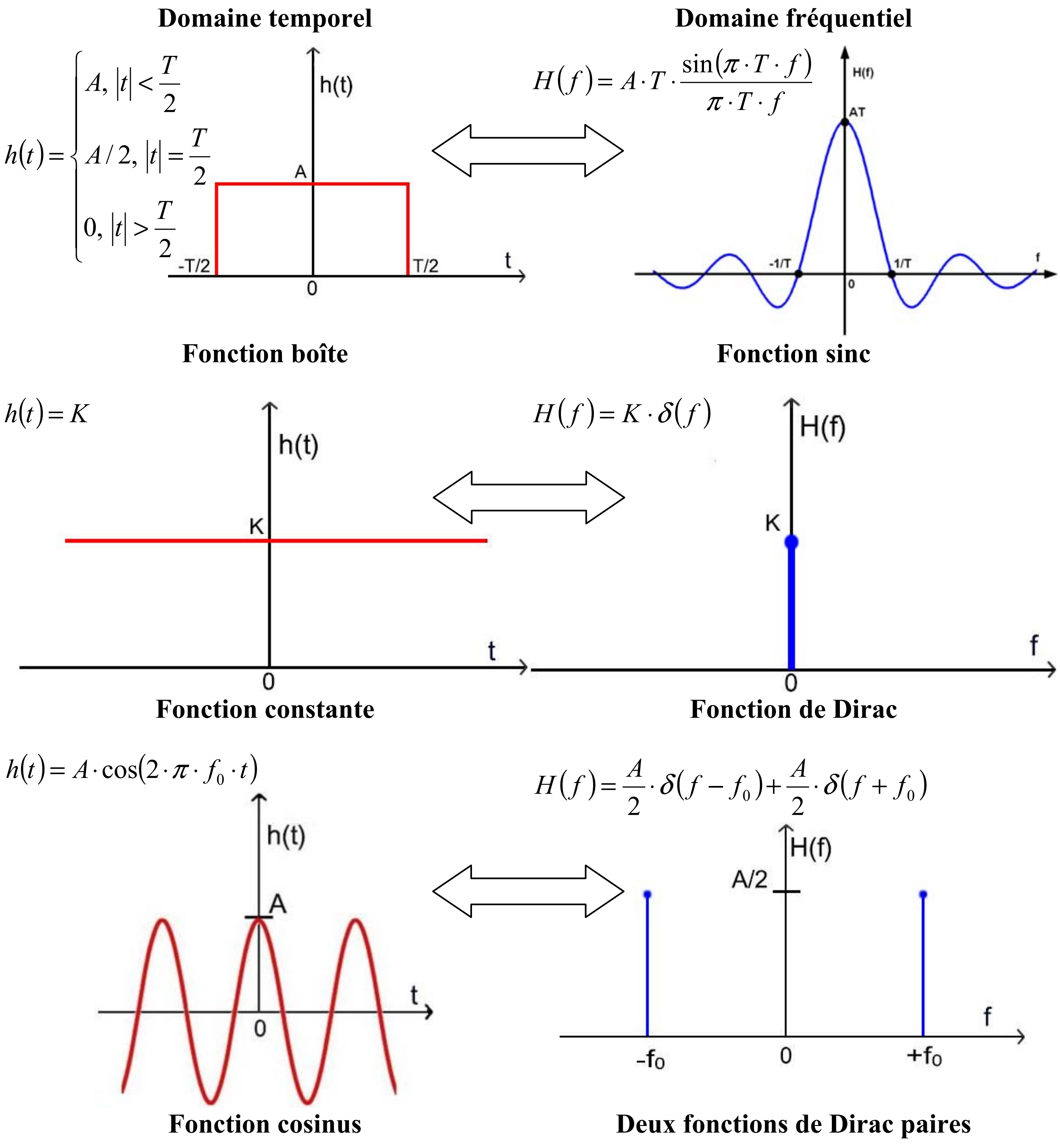


***Figure II.2** Quelques paires de transformée de Fourier*

On peut aussi obtenir une expression de *h(t)* d'après celle de *H(f)* en définissant la transformée de Fourier inverse comme suit :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{i \cdot 2\pi f t} df \ , \qquad \text{(II.2).}$$

Si *h(t)* est intégrable dans ce sens : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$, alors sa transformée de Fourier *H(f)* existe.

Une propriété importante des transformées de Fourier concerne la convolution. La convolution continue intégrale est définie par:

$$y(t) = \int x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = x(t) \otimes h(t) \, , \qquad \text{(II.3)}$$

La fonction *y(t)* est la convolution continue des fonctions *x(t)* et *h(t)*.

$$h(t) \otimes x(t) \Leftrightarrow H(f) \cdot X(f) \, , \qquad \text{(II.4),}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} \ , \qquad \text{(II.5),}$$

$$Y(f) = \int x(\tau) \left[\int h(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau \, , \qquad \text{(II.6).}$$

En faisant le changement de variable $\sigma = t - \tau$, le terme entre crochets devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \cdot e^{-j2\pi f(\sigma+\tau)} d\sigma = e^{-j2\pi f \sigma} d\sigma = e^{-j2\pi f \tau} H(f) d\tau \, , \qquad \text{(II.7),}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} H(f) d\tau = H(f) \cdot X(f) \, , \qquad \text{(II.8).}$$

Théorème de convolution :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions dans le domaine temporel est égal au produit des transformées de Fourier des deux fonctions.

II.2.2 La transformation de Fourier discrete (TFD)

Considérons une fonction *h(t)* et sa transformée de Fourier *H(f)* (fig. II.3a). Pour discrétiser *h(t)* il faut l'échantillonner. L'échantillonnage est effectué en multipliant *h(t)* par la fonction d'échantillonnage $\Delta_0(t)$ (fig. II.3b) avec l'intervalle *T*.

$$h(t)\cdot\Delta_0(t) = h(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(kt)\delta(t-kT)\,, \qquad \text{(II.9).}$$

Cette multiplication dans le domaine temporel se traduit par une convolution dans le domaine fréquentiel. Cette fonction diffère de la fonction originale par le phénomène « d'aliaising » : les motifs du spectre sont enchevêtrés. Pour éviter cet effet, la période *T* est choisie la plus petite possible.

La fonction échantillonnée est tronquée par multiplication avec une fonction fenêtre *x(t)* (fig. II.3d) avec l'intervalle T_0.

$$\begin{aligned} &x(t) = 1, pour -\frac{T}{2} < t < T_0 - \frac{T}{2}\,, \\ &x(t) = 0, ailleurs \end{aligned} \qquad \text{(II.10).}$$

Ainsi on a obtenu un spectre qui est le produit des trois fonctions (fig. II.3e). Il s'agit de la fonction *h(t)* échantillonnée sur *N* points. Le spectre obtenu est ondulé, cette ondulation diminue quand l'intervalle T_0 augmente.

Il est nécessaire de discrétiser également la transformée de Fourier.

$$\Delta_1(t) = T_0\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(t-rT_0)\,, \qquad \text{(II.11).}$$

La multiplication par la fonction d'échantillonnage fréquentiel se traduit par une convolution dans le domaine temporel. La transformée discrète d'une fonction discrète se traduit par une périodisation de cette fonction.

Ainsi nous avons obtenu une fonction périodique de période T_0 avec *N* échantillons, qui est une approximation de *h(t)* sur l'intervalle $[0, T_0]$.

La Transformée de Fourier Discrète (DFT en anglais) est définie par la relation suivante :

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\cdot e^{2\cdot\pi\cdot jnk/N}\,, \qquad \text{(II.12).}$$

On définit aussi la Transformée de Fourier Discrète inverse par la relation :

$$h(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H(n)e^{-2\pi jnk/N}\,, \qquad \text{(II.13).}$$

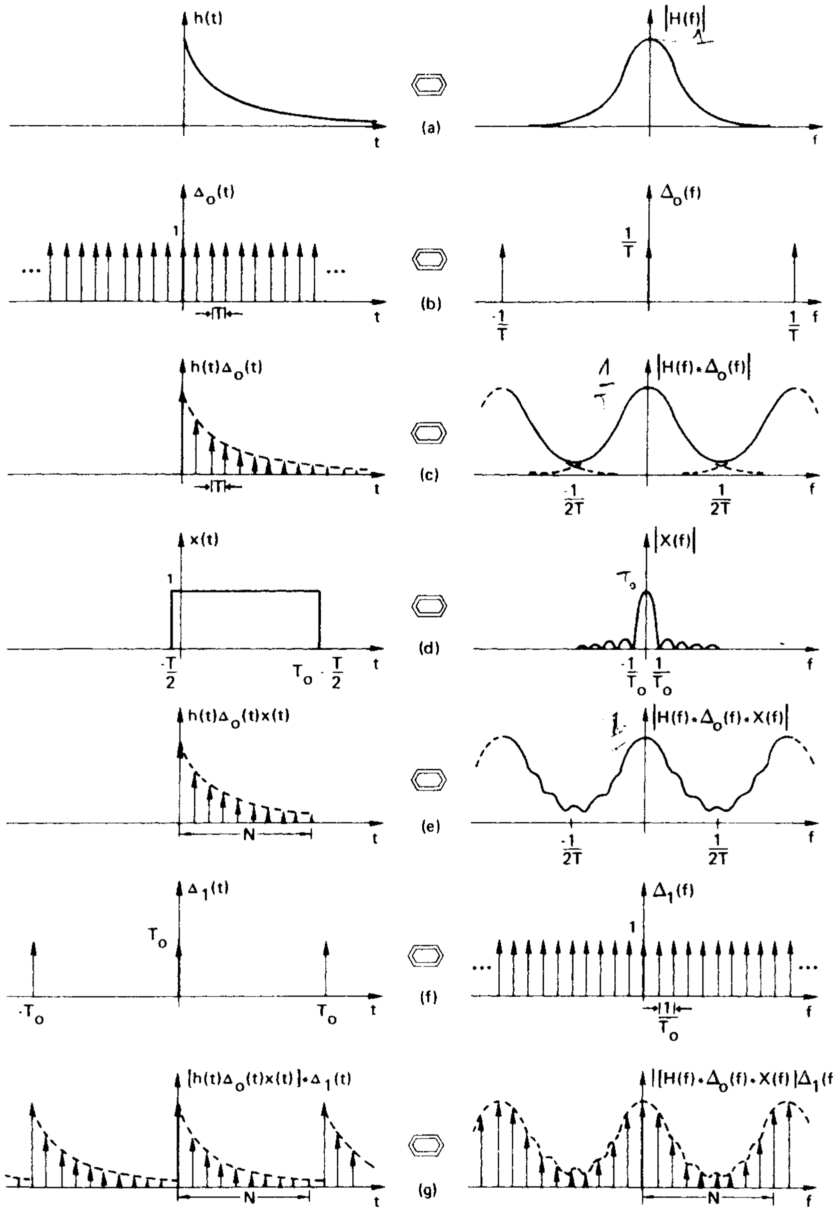


Figure II.3 *Dérivation graphique de la transformée de Fourier discrète*

II.2.3 Transformation de Fourier Rapide (FFT)

La transformée de Fourier rapide est simplement un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations pour calculer la transformée de Fourier discrète (DFT). Les opérations à effectuer pour obtenir les *N* valeurs de la DFT sont :

- N^2 multiplications complexes,
- $N \times (N-1)$ additions complexes.

Bien entendu, les multiplications complexes ont une durée d'exécution beaucoup plus longue que les additions.

L'algorithme de FFT le plus connu est celui de Cooley-Tukey, également appelé algorithme de réduction à base 2 dans le domaine temporel. Cet algorithme requiert un nombre d'échantillons qui soit une puissance de 2. Par exemple : N=128, 256, 4096, etc.

Posons :

$$W_N^{kn} = e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}, \qquad \text{(II.14).}$$

L'équation (II.12) peut alors être écrite :

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cdot W_N^{kn}, \qquad \text{(II.15).}$$

L'équation (II.14) a les deux caractéristiques suivantes :

- $W_N^{2kn} = e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}^{kn}$, (II.16),
- $W_N^{kn+N/2} = e^{-j2\pi\frac{nk+N/2}{N}} = -W_N^{kn}$, pour k < N/2, (II.17).

Un exemple pour 8 échantillons, qui ont les valeurs successives suivantes s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7. La DFT se présente ainsi :

$$\begin{aligned}
S_0 &= s_0 \cdot e^{-j0} + s_1 \cdot e^{-j0} + s_2 \cdot e^{-j0} + s_3 \cdot e^{-j0} + s_4 \cdot e^{-j0} + s_5 \cdot e^{-j0} + s_6 \cdot e^{-j0} + s_7 \cdot e^{-j0} \\
S_1 &= s_0 \cdot e^{-j0} + s_1 \cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{4}} + s_2 \cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{4}} + s_3 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} + s_4 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4}} + s_5 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{4}} + s_6 \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4}} + s_7 \cdot e^{-j\frac{7\pi}{4}} \\
&\dots \\
S_7 &= s_0 \cdot e^{-j0} + s_1 \cdot e^{-j\cdot\frac{7\pi}{4}} + s_2 \cdot e^{-j\cdot\frac{14\pi}{4}} + s_3 \cdot e^{-j\frac{21\pi}{4}} + s_4 \cdot e^{-j\frac{28\pi}{4}} + s_5 \cdot e^{-j\frac{35\pi}{4}} + s_6 \cdot e^{-j\frac{42\pi}{4}} + s_7 \cdot e^{-j\frac{49\pi}{4}}
\end{aligned} \qquad \text{(II.18).}$$

En séparant les échantillons pairs et impairs et en factorisant les nombres impairs, on peut mettre II.18 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
S_0 &= s_0 + s_4 \cdot W_2^0 + W_4^0 \cdot \left(s_2 + s_6 \cdot W_2^0\right) + W_8^0 \cdot \left[s_1 + s_5 \cdot W_2^0 + W_4^0 \cdot \left(s_3 + s_7 \cdot W_2^0\right)\right] \\
S_1 &= s_0 + s_4 \cdot W_2^0 + W_4^1 \cdot \left(s_2 - s_6 \cdot W_2^0\right) + W_8^1 \cdot \left[s_1 - s_5 \cdot W_2^0 + W_4^1 \cdot \left(s_3 - s_7 \cdot W_2^0\right)\right] \\
&\dots \\
S_7 &= s_0 - s_4 \cdot W_2^0 - W_4^1 \cdot \left(s_2 - s_6 \cdot W_2^0\right) + W_8^3 \cdot \left[s_1 - s_5 \cdot W_2^0 + W_4^1 \cdot \left(s_3 - s_7 \cdot W_2^0\right)\right]
\end{aligned}, \qquad \text{(II.19).}$$

L'algorithme de FFT décompose la DFT en $\log_2 N$ étapes, dont chacune se compose en N/2 calculs du papillon (butterfly computations). Chaque papillon prend deux nombres complexes *a* et *b* et calcule deux autres nombres, $a + W_N^n \cdot b$ et $a - W_N^n \cdot b$, où W_N^n est un nombre complexe figure II.4.

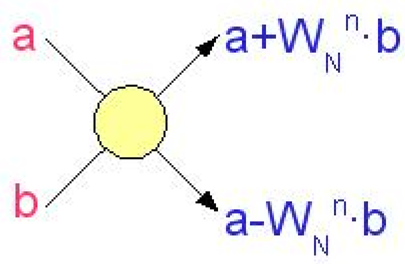


Figure II.4 *Calcul « Butterfly »*

L'opération "Butterfly" est particulièrement adaptée à l'algorithme FFT, comme on peut le voir dans la figure II.5. Cette figure correspond directement à la résolution de l'équation (II.19).

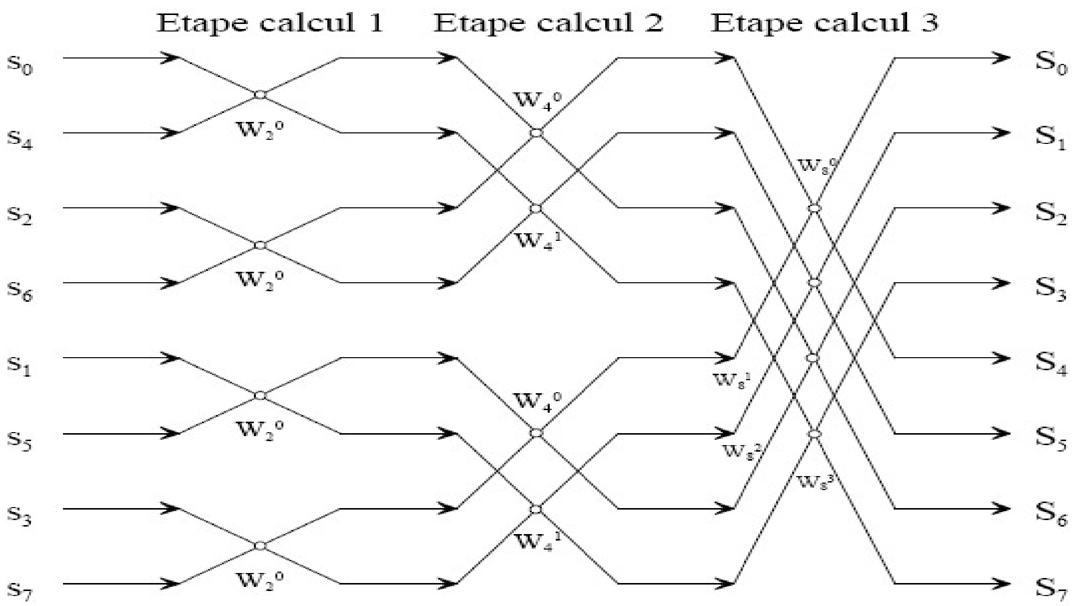


Figure II.5 *Résolution pour 8 échantillons*

Comme on peut le voir sur la figure II.15, les couples d'échantillons doivent être choisis au départ selon un ordre particulier : s_0-s_4, s_2-s_6, etc. Cette incrémentation particulière est appelée "reverse carry" (retenue inverse). Elle consiste à additionner N/2 à l'indice, mais à reporter la retenue à droite plutôt qu'à gauche.

Tableau II.1 Reverse carry - Exemple pour 8 échantillons (N/2 = 4)

Indice en base 2	Indice en base 10
000	0
000 + 100 = 100	4
100 + 100 = 010	2
010 + 100 = 110	6
110 + 100 = 001	1
001 + 100 = 101	5
101 + 100 = 011	3
011 + 100 = 111	7

L'algorithme précédent pour les 8 échantillons est facilement généralisable à n'importe quelle puissance de deux. Dans le cas d'une FFT selon l'algorithme de Cooley-Tukey, le nombre d'opérations est considérablement réduit :

$$\frac{N}{2}\cdot \log_2 N \text{ multiplications complexes.}$$

Le rapport du nombre de multiplications par rapport à la DFT s'exprime ainsi :

$$R = \frac{N^2}{\frac{N}{2}\cdot \log_2 N} = \frac{2\cdot N}{\log_2 N}.$$

Le tableau II.2 nous donne le gain (multiplications complexes seulement) R pour quelques valeurs de N :

Tableau II.2 Gain DFT/FFT

Nombre d'échantillons N	Rapport du nombre de multiplications DFT/FFT
8	5,3
128	36,6
512	113,7
1024	204,8
2048	372,2
4096	682,7

Pour un nombre d'échantillons important la différence de temps de calcul entre ces deux méthodes est évidente.

II.2.4 CONVOLUTION DISCRETE DE FONCTIONS PERIODIQUES ET CONVOLUTION CONTINUE

Considérons les fonctions continues *x(t)* et *h(t)* ainsi que leur convolution continue *y(t)* (fig. II.6).

Sur la figure II.6 est représentée la convolution continue $y(t)=x(t)\otimes h(t)$ que l'on veut trouver avec une convolution discrète. Pour évaluer la convolution discrète, nous échantillons *x(t)* et *h(t)* avec un intervalle *T*.

Supposons les deux fonctions échantillonnées et périodisées sur une période *N*. Le choix de *N* dépend de la similitude entre les convolutions discrètes et continues. La convolution discrète est une approximation grossière de celle continue, la périodicité fournissant un chevauchement du résultat périodique désiré.

Si nous choisissions une période insuffisamment grande, le résultat de la convolution d'une période chevauche le résultat de la période suivante (fig. II.6b). Dans le même temps il n'y a aucun avantage à choisir $N > P+Q-1$ (fig. II.6d).

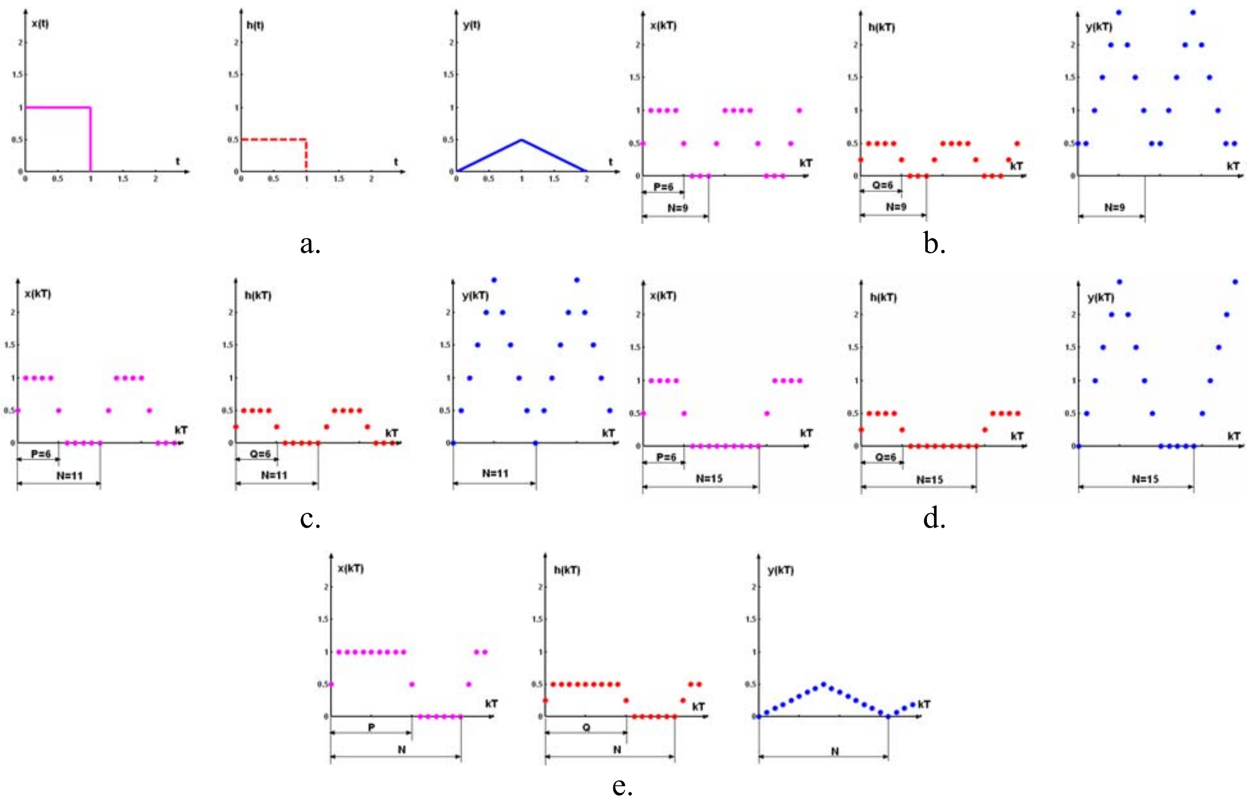


Figure II.6 *Relation entre convolution discrète et continue : formes d'onde de durée finie*

Il est nécessaire que la convolution discrète approche la convolution continue et que la période soit choisie de façon à ce qu'il n'y ait pas de chevauchement.

Il faut choisir la période qui satisfait la relation donnant le nombre de termes non nuls si on effectue une convolution entre une fonction de *P* termes et une fonction de *Q* termes.

$$N = P + Q - 1\,, \tag{II.20}$$

Le résultat de la convolution discrète à une dimension diffère de la convolution continue par le facteur *T*.

$$y(kT) = T\sum_{i=0}^{N-1} x(iT)\cdot h[(k-i)T]\,, \tag{II.21}$$

Si on se place dans les conditions telles que $N \geq P+Q-1$, la convolution discrète est simplement l'intégrale de convolution continue évaluée par intégration rectangulaire. La convolution discrète approche la convolution continue avec l'erreur introduite par l'intégration rectangulaire. Si l'intervalle d'échantillonnage *T* est suffisamment petit l'erreur introduite par la convolution discrète est négligeable (fig. II.6e).

II.2.5 LA METHODE DE CONVOLUTION DISCRETE (DC-FFT) POUR LES ANALYSES DE CONTACT

Dans le cas classique du contact élastique (fig. II.7) les déplacements d'un massif $u_z(x)$ s'expriment en fonction des pressions de contact $p(x)$ par le produit de convolution suivant :

$$u(x) = \int f(x - x')p(x')dx \,, \qquad \text{(II.22).}$$

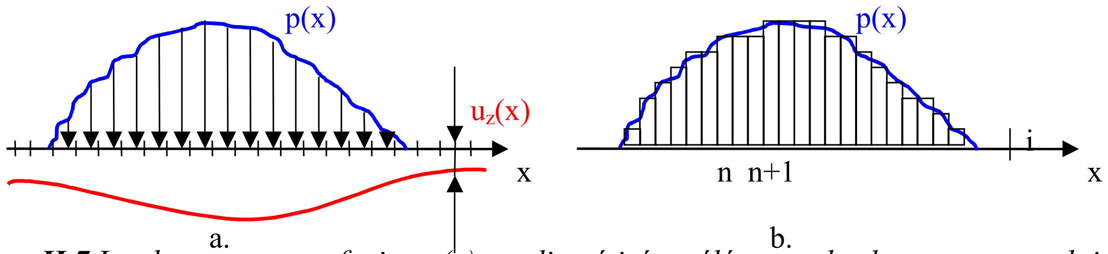


Figure II.7 *Le chargement surfacique (a) est discrétisé en éléments de charge rectangulaires et uniformes (b)*

La méthode est basée sur l'utilisation des coefficients d'influence et permet de traiter une distribution de pression quelconque. Chaque coefficient représente l'influence d'un élément discrétisé en un point quelconque du massif. Des expressions pour la fonction des coefficients d'influence *f* en fonction du type d'élément de discrétisation choisi sont présentées par Johnson ***(JOHN 85)***.

La résolution du contact est coûteuse en temps principalement à cause du calcul du produit de convolution (II.22). La méthode FFT est employée pour accélérer le calcul du produit de convolution (fig. II.8). La principale difficulté liée à l'utilisation de la transformée de Fourier discrète réside dans le fait que l'échantillonnage rend le problème périodique.

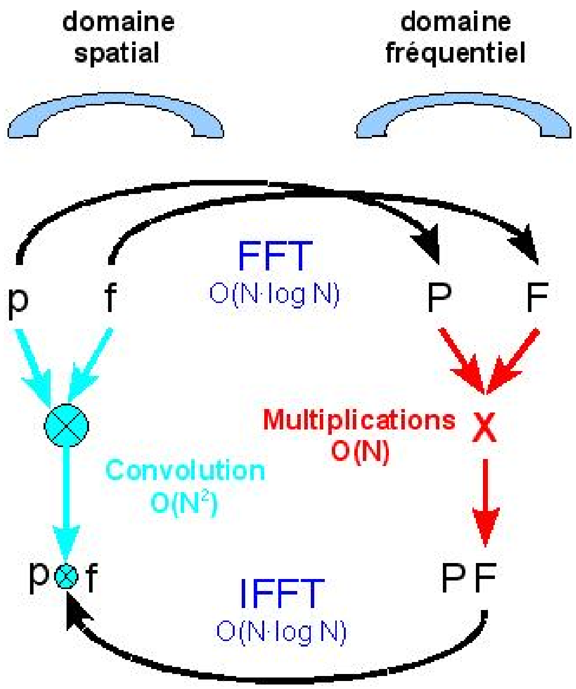


Figure II.8 *Convolution par multiplication directe ou FFT.*

La convolution linéaire pour des problèmes de contact doit être convertie en une convolution cyclique qui peut être efficacement et exactement réalisée par la méthode DC-FFT (***LIU 00***).

Agrandir simplement le domaine par la technique de « zero-padding » (fig. II.9a), utile pour les pressions, n'est pas suffisant dans le cas des coefficients d'influence. Pour éviter les erreurs sur la frontière l'utilisation de la technique de « wrap-around order » est nécessaire. Le recouvrement (wrap-around) peut être décrit comme une copie dans la partie augmentée des coefficients d'influence de la direction négative (fig. II.9b).

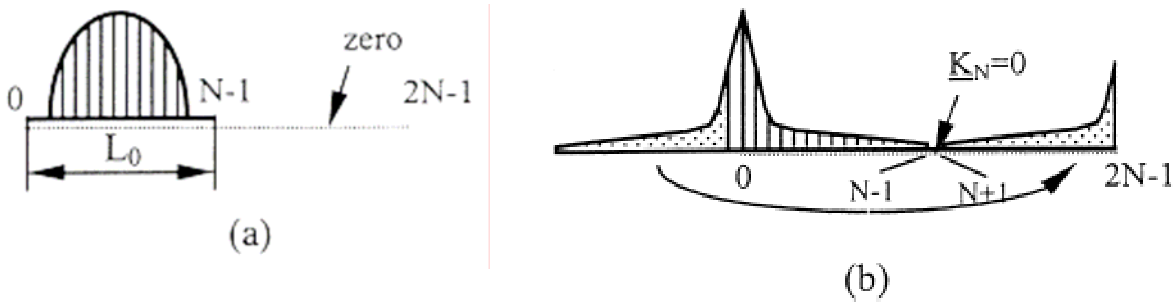


Figure II.9 *Zero-padding et wrap-around. (a) Distribution de pression; (b) coefficients d'influence pour la pression normale **(LIU 00)**.*

L'algorithme de résolution par la méthode DC-FFT requiert les étapes suivantes :

1. trouver les coefficients d'influence, $\{f_j\}_N$;

2. augmenter $\{f_j\}_N$ dans $\left\{\underset{-}{f_j}\right\}_{2N}$ dans un domaine virtuel avec « zero-padding » et « wrap-around order » (fig. II.9b) ;

3. appliquer la FFT aux $\left\{\underset{-}{f_j}\right\}_{2N}$ pour $\left\{\underset{-}{F_j}\right\}_{2N}$;

4. introduire la pression, $\{p_j\}_N$;

5. augmenter $\{p_j\}_N$ dans $\left\{ \underline{p}_j \right\}_{2N}$ dans un domaine virtuel avec « zero-padding » seulement (fig. II.9a) ;

6. appliquer la FFT aux $\left\{ \underline{p}_j \right\}_{2N}$ pour $\left\{ \underline{P}_j \right\}_{2N}$;

7. obtenir une série des fréquences provisoires $\left\{ \underline{\nu}_j \right\}_{2N}$ par la multiplication élément par élément des nombres complexes ;

8. appliquer la transformée inverse (IFFT) à la série provisoire des fréquences pour obtenir $\{\nu_j\}_{2N}$;

9. choisir les vrais déplacements u_z avec $j \in [0, N-1]$ entre $\{\nu_j\}_{2N}$.

II.3 RAPPEL MATHEMATIQUE SUR LA METHODE DU GRADIENT CONJUGUE

Le gradient conjugué (CG) est la méthode itérative la plus populaire pour résoudre de grands systèmes d'équations linéaires. Le CG est efficace pour des systèmes de la forme :

$$K \cdot x = b \qquad \text{(II.23),}$$

où x est un vecteur inconnu, b est un vecteur connu et K est une matrice symétrique, connue et définie positive. Ces systèmes existent dans beaucoup d'applications, tels que les méthodes des différences finies ou des éléments finis.

On remarquera que la résolution de l'équation (II.23) correspond à la minimisation de la forme quadratique :

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot K \cdot x - b^T \cdot x \qquad \text{(II.24).}$$

L'algorithme exige n itérations, à partir d'une solution initiale arbitraire (souvent $x_0=0$ est employé). Nous utiliserons les notations suivantes :

- i - nombre d'itérations;
- x_i - approximation de la solution;

- d_i - la direction de recherche;
- r_i - le résidu, qui est défini comme $K \cdot x_i - b$.

Algorithme

1. Initialisation

   Si x_0 est un vecteur initial on calcule le résidu r_0 en ce point, soit :

   $$r_0 \leftarrow K \cdot x_0 - b, \qquad \text{(II.25)},$$

   et on initialise un second vecteur :

   $$d_0 \leftarrow -r_0 \qquad \text{(II.26)}.$$

   Ainsi la direction initiale de recherche est colinéaire au gradient de la fonction quadratique, celle-ci étant réduite au minimum, évaluée au point de départ.

2. Pour $i = 0,...,n-1$ on calcule la solution et le résidu à l'itération i par la formule récurrente suivante :

   $$\alpha_i \leftarrow -\frac{r_i^T \cdot r_i}{d_i^T \cdot K \cdot d_i}$$

   $$x_{i+1} \leftarrow x_i + \alpha_i \cdot d_i \qquad \text{(II.27)}$$

   $$r_{i+1} \leftarrow r_i + \alpha_i \cdot K \cdot d_i.$$

   Si $\|r_i\| < \varepsilon$ la solution a été trouvée.

3. Sinon, on calcule une nouvelle direction de recherche et on recommence avec le pas 1 (fig. II.10) :

   $$\beta_{i+1} \leftarrow \frac{r_{i+1}^T \cdot r_{i+1}}{r_i^T \cdot r_i},$$

   $$d_{i+1} \leftarrow -r_{i+1} + \beta_{i+1} \cdot d_i, \qquad \text{(II.28)}$$

   $$i \leftarrow i + 1.$$

A chaque itération, la direction de recherche de la solution est déterminée à partir de la précédente et du nouveau résidu.

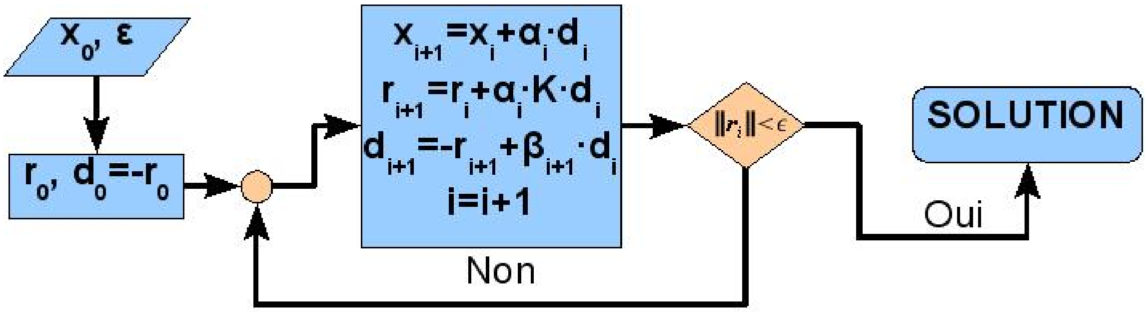


Figure II.10 *Algorithme pour la méthode du gradient conjugué*

La première idée fondamentale de l'algorithme du gradient conjugué consiste à choisir chaque direction de recherche de sorte qu'elle soit conjuguée à la direction de recherche précédente par rapport à la Hessienne du critère.

La seconde idée fondamentale de l'algorithme du gradient conjugué consiste à chercher d_{i+1} sous la forme d'une combinaison linéaire de d_i et de la direction de Cauchy au point courant (éq. II.28), pour trouver à l'étape $i+1$, une direction d_{i+1} conjuguée à d_i en choisissant le coefficient réel β_{i+1} de telle sorte que :

$$d_i^T \cdot K \cdot d_{i+1} = \beta_{i+1} \cdot d_i^T \cdot K \cdot d_i - d_i^T \cdot K \cdot \nabla Q(x_{i+1}) = 0 \qquad \text{(II.29)},$$

ce qui est toujours possible si d_i est non nul, puisque : $K > 0$ implique alors : $d_i^T \cdot K \cdot d_i > 0$.

La méthode du gradient conjugué est une méthode exacte, mais, en tant que méthode exacte, elle n'est pas très performante. En fait, elle est le plus souvent utilisée comme méthode itérative pour résoudre de manière approchée les grands systèmes linéaires creux. Sa force vient du fait que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une bonne approximation de x est petit devant la taille N du système. Ce n'est donc pas le côté "exact" de la méthode qui est important ici mais la vitesse de décroissance de r_i.

II.4 FORMULATION GENERALE DU PROBLEME DE CONTACT NORMAL

Considérons deux massifs élastiques, Ω_A et Ω_B ($\Omega=\Omega_A+\Omega_B$) en contact (fig. II.11) et qui respectent l'hypothèse des massifs semi-infinis :

- les pentes des surfaces sont faibles,
- l'aire de contact est petite devant les autres dimensions des corps.

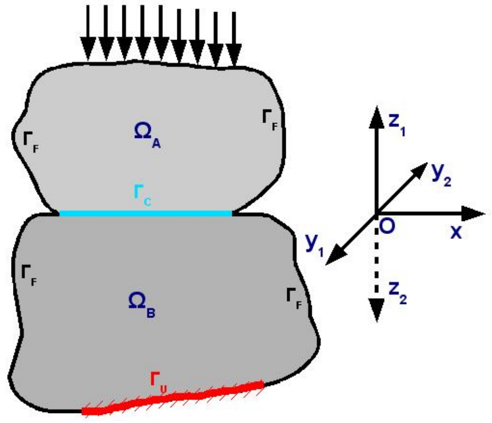


Figure II.11 *Représentation schématique de deux corps en contact*

Il faut notamment que les corps se déforment comme des massifs et non pas comme une poutre ou une plaque. Pour ces deux corps en contact on peut définir trois types de frontières :

- Γ_C - zone(s) en contact ;
- Γ_F - frontières à contraintes imposées ;
- Γ_U - frontières fixes (déplacement nul).

La frontière Γ_C représente l'aire réelle de contact, la frontière Γ_F comprend une zone à contraintes imposées pour la transmission de la charge appliquée et ainsi qu'une zone libre. Les relations suivantes peuvent être établies :

- $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$ et $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \Gamma_F \cap \Gamma_C = \Gamma_C \cap \Gamma_u = \varnothing$.

A chacun de ces corps on associe un repère orthogonal ($Oxyz_1$) pour le corps *A* et ($Oxyz_2$) pour le corps *B*. Les vecteurs *x* et *y* se trouvent dans le plan de contact et sont identiques pour les deux massifs. Les vecteurs z_1 et z_2 sont orthogonaux au plan de contact et dirigés vers l'intérieur du corps auquel ils correspondent.

Le problème classique de contact normal est un problème complexe de valeurs limites qui demande à trouver le champ de déplacements, solution de :

- $K_{ij} \cdot u_j - b_i = 0$, (II.30),

  dans le volume Ω et avec les conditions de frontière suivantes :

  - $\sigma_{ij} \cdot n_j = F_i$ sur Γ_F (II.31) ;
  - $u_i = \bar{u}_i$ sur Γ_U (II.32) ;

- $u_n + h_n \geq 0$ sur Γ_C (II.33) ;
- $\sigma_n \geq 0$ sur Γ_C (II.34) ;
- $\sigma_T = F_T$ sur Γ_C (II.35).

La relation (II.30) représente les équations d'équilibre en termes de champs de déplacement. Les relations (II.31) et (II.32) sont les conditions sur les frontières Γ_F et Γ_U ; F_i étant une distribution de pression et u_i un champ de déplacements connus sur Γ_F et Γ_U, respectivement.

La relation (II.33) est la condition de non-pénétration, puisqu'il est physiquement impossible que les deux corps s'interpénètrent à l'état déformé. Aux points où la somme de h_n, la distance initiale entre les deux corps, avec u_n, leurs déplacements relatifs, est positive une distance existe entre les surfaces et les point ne sont pas en contact. Si cette distance est nulle, cela implique que le point est en contact. La relation (II.34) signifie que la pression normale est toujours positive à l'intérieur de Γ_U et nulle ailleurs. La relation (II.35) signifie que dans la zone de contact la distribution tangentielle de traction est connue et indiquée par F_T.

L'hypothèse des massifs semi-infinis autorise l'utilisation des équations de Boussinesq-Cerruti lesquelles fournissent une relation intégrale entre les déplacements et les contraintes exercées à la surface du massif :

$$u_z(x,y) = \iint_{\Gamma} K(x-x', y-y') \cdot p(x', y') \cdot dx' \cdot dx', \tag{II.36}$$

avec K le noyau donné par la formule de Boussinesq :

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{II.37}$$

avec :

- Γ - surface d'étude,
- (x, y) – position du point de calcul sur l'aire de contact (z=0),
- (x', y') – position du point courant sur l'aire de contact,
- $u_z(x,y)$ – déplacement des massifs en (x,y),
- p(x', y') – pression (ou contrainte) à la surface du massif au point (x', y'),
- E_1, E_2 – modules d'Young.

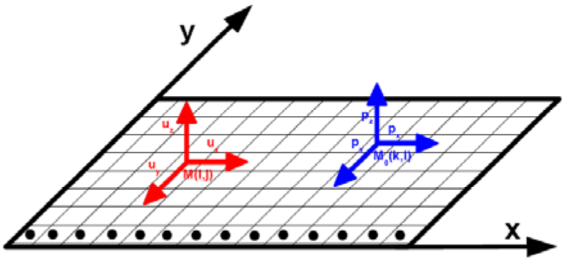


Figure II.12 *Discrétisation de l'aire potentielle de contact*

Pour la résolution numérique du contact normal seules les frontières Γ_C et une partie de Γ_F sont discrétisées, il s'agit de l'aire de contact potentielle. Toutefois, les conditions aux limites qui sont écrites pour la frontière Γ_C s'appliquent aux aires courantes de contact qui apparaissent dans les calculs et la formulation. Pour une étude tridimensionnelle le maillage est donc bidimensionnel et le domaine d'étude représenté par un plan. Celui-ci sépare les deux corps en contact (fig. II.12).

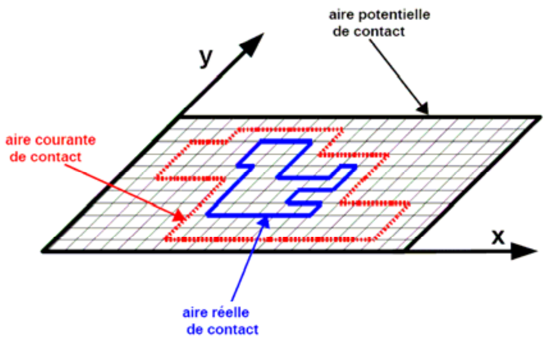
Le plan de contact est discrétisé en cellules rectangulaires dont le centre est représentatif. Nous considérerons que toutes les grandeurs utiles à la résolution du problème, pression, distance entre les deux corps, déplacements, sont constantes sur chaque cellule.

L'aire potentielle de contact représente l'aire totale qui est étudiée. C'est le domaine qui est maillé dés le début de l'algorithme. Nous pouvons distinguer trois types d'aires (fig. II.13a) :

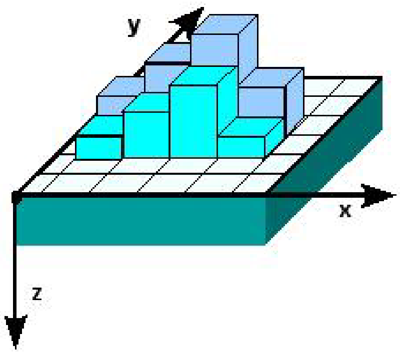
- l'aire potentielle de contact notée A_P,
- l'aire courante de contact notée A_C,
- l'aire réelle de contact notée A_R.

L'aire courante de contact représente une partie de l'aire potentielle. Dans les phases intermédiaires du processus de calcul, elle est considérée comme une aire de contact à part entière sur laquelle on écrit les conditions aux limites. L'aire réelle de contact est obtenue uniquement à la fin du processus de convergence.

Sur chaque élément de discrétisation de l'aire potentielle de contact, la pression est prise égale à une constante. La forme globale de la pression a l'allure d'une fonction par escalier dans un domaine bidimensionnel (fig. II.13b).



a.



b.

Figure II.13 *a) Types d'aire de discrétisation b)Distribution de pression en escalier*

La discrétisation en rectangle de l'aire potentielle de contact et l'approximation de la pression par une constante sur chaque élément rendent possible l'intégration analytique des relations de Boussinesq. Il résulte de ce calcul une dépendance linéaire entre les déplacements et les pressions.

Les formes intégrales (II.36) s'intègrent analytiquement pour aboutir à une expression de u_z linéaire en p :

$$u_z(i,j) = \sum_{i=1}^{2\cdot M_x} \sum_{j=1}^{2\cdot M_y} K(i-k, j-l) \cdot p(k,l), \qquad \text{(II.38)},$$

avec 2·M_x, 2·M_y le nombre d'éléments de discrétisation suivant les directions x et y, respectivement.

La valeur $u_z(i,j)$ représente la déformation différentielle entre les deux massifs A et B au centre de l'élément repéré par M(i,j). Cette déformation résulte de l'action de toutes les forces agissant à la surface du massif. Les coefficients $K(i-k, j-l)$, coefficients d'influence, représentent l'influence de la pression $p(k,l)$ repartie uniformément sur l'élément M_0(k,l) sur la déformation $u_z(i,j)$ de l'élément M(i, j) (fig. II.12).

Le déplacement d'un demi-espace soumis à une pression uniforme agissant sur un secteur rectangulaire $2\cdot a \times 2\cdot b$ a été trouvé par Love ***(LOVE 27)***:

$$\bar{u}_z(i,j) = p(k,l) \cdot K(i-k, j-l), \qquad \text{(II.39)},$$

avec :

$$K(i-k, j-l) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \int_{y_{l-b}}^{y_{l+b}} \int_{x_{k-a}}^{x_{k+a}} \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \cdot [A+B]$$

(II.40),

où
$$A = x_1 \cdot \ln\left[y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \,/\, y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}\right] + y_1 \cdot \ln\left[x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \,/\, x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2}\right];$$
$$B = x_2 \cdot \ln\left[y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \,/\, y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2}\right] + y_2 \cdot \ln\left[x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \,/\, x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}\right];$$
$$x_1 = x_k - x_i + a,\ x_1 = x_k - x_i - a;$$
$$y_1 = y_k - y_i + b,\ x_1 = y_k - y_i - b.$$

Après discrétisation on peut définir au point (i, j) :

- la séparation entre les deux massifs $g(i,j) = h(i,j) + u_z(i,j) - \delta$, (II.41)

- le déplacement $u_z(i,j) = \sum_{i=1}^{2\cdot M_x} \sum_{j=1}^{2\cdot M_y} K(i-k, j-l) \cdot p(k,l)$, (II.42).

Suivant Kalker ***(KALK 90)***, le problème de contact peut se formuler à l'aide des équations suivantes :

- $g(i,j) = 0,\ p(i,j) > 0,\ (i,j) \in A_R$, (II.43a),

- $g(i,j) > 0,\ p(i,j) = 0,\ (i,j) \notin A_R$, (II.43b).

Il faut toutefois ajouter au système (II.43) l'équation d'équilibre du système avec le chargement W :

- $W = 4 \cdot a \cdot b \sum_{k=1}^{2M_x} \sum_{l=1}^{2My} p(k,l)$, (II.44).

Si la grille sur laquelle le problème de contact est défini a la taille ($2 \cdot M_x$, $2 \cdot M_y$), alors la fonction d'influence K définie par l'équation II.40 est de taille $(2 \cdot M_x) \times (2 \cdot M_y)$. Le stockage pourrait être réduit d'un quart par symétrie, bien que ceci rende l'exécution plus difficile. La matrice de rigidité A, est de taille (N, N) où $N = M_x$ x M_y. La taille importante de cette matrice est ce qui a conduit à s'intéresser aux méthodes de résolution itératives comme la méthode du gradient conjugué proposée par Polonsky et Keer ***(POLO 99)***.

Les données nécessaires sont la géométrie des corps en contact et les caractéristiques mécaniques des deux corps. A chaque élément du domaine d'étude est associé une valeur numérique représentative de la distance locale initiale des deux massifs h(i, j). La résolution du problème normal se décompose en deux phases : phase d'initialisation, puis phase de test sur la pression et sur la pénétration. Cet algorithme s'articule autour de deux processus itératifs : l'un qui accroît l'aire de contact, l'autre qui tend à la diminuer. Le programme est terminé lorsque l'aire de contact courante reste constante et le système (II.41 - II.44) est vérifié. L'organigramme de la résolution du problème de contact normal est synthétisé dans la fig. II.14.

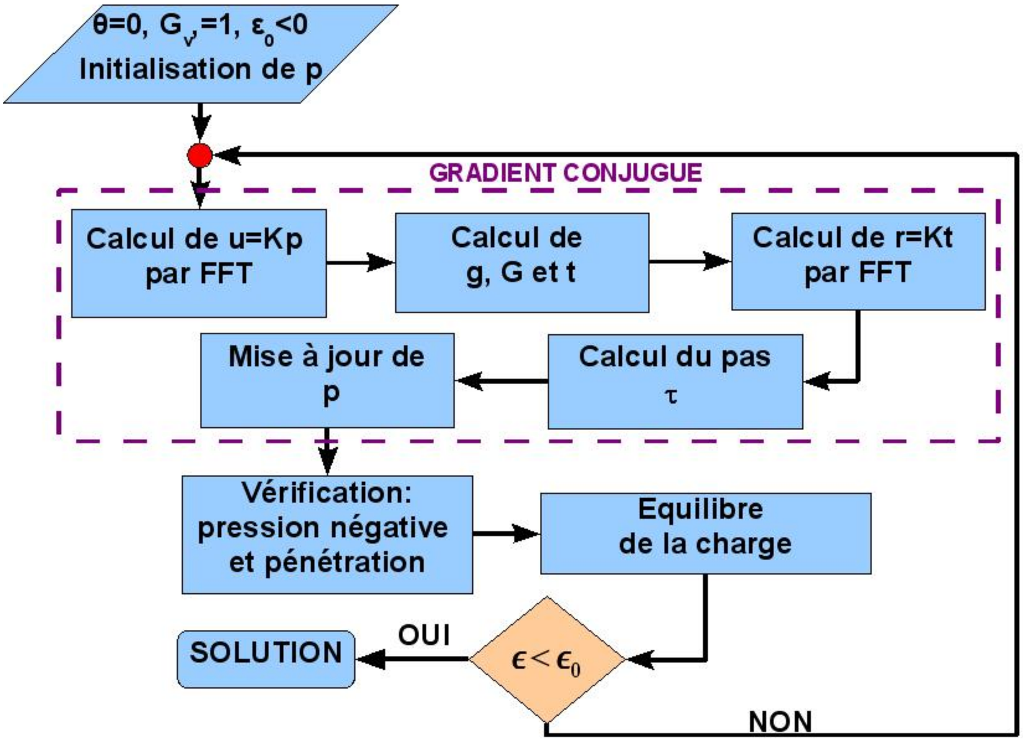


Figure II.14 *Organigramme général pour la résolution numérique du contact normal.*

A partir d'un maillage déjà défini par l'utilisateur en fonction des données dont il dispose, il est possible de calculer les termes de la matrice des coefficients d'influence. La seconde étape consiste à initialiser l'aire courante de contact par des valeurs initiales quelconques non-négatives pour les pressions p(i,j) mais qui doit satisfaire l'équation II.44. Ce type d'initialisation donne des résultats très satisfaisants en ce qui concerne la vitesse de convergence.

Les variables auxiliaires θ et G_v sont définies et initialisées en plaçant θ=0 et G_v =1. L'erreur ε_0 est fixée à la valeur désirée et le processus itératif peut commencer. Les opérations suivantes (1-12) sont effectuées pour chaque itération :

1. Les déplacements nodaux u_z produits par la distribution de pression p(i,j) sont calculés en utilisant l'algorithme de DC-FFT présenté dans le paragraphe II.2.5.
2. La distribution d'espaces g est calculée et sa valeur moyenne est ajustée comme suit :

$$g(i,j) = -u(i,j) - h(i,j),\ (i,j) \in A_p \quad \text{(II.45) ;}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{N_c} \cdot \sum_{(k,l)\in A_c} g(k,l) \quad \text{(II.46) ;}$$

$$g(i,j) \leftarrow g(i,j) - \bar{g},\ (i,j) \in A_p \ ; \quad \text{(II.47),}$$

où N_c est le nombre de nœuds en N_c.

3. La nouvelle valeur de la variable G est calculée, soit :

$$G = \sum_{(k,l)\in A_c} g^2(k,l)\,, \tag{II.48}$$

4. On calcule la nouvelle direction conjuguée t, soit:

$$\begin{aligned} &t(i,j) \leftarrow g(i,j) - \theta \cdot \left(\frac{G}{G_v}\right) \cdot t(i,j),\ (i,j)\in A_C \\ &t(i,j) = 0,\ (i,j)\notin A_C \end{aligned} \tag{II.49}$$

La nouvelle direction t est la direction dans laquelle la prochaine étape sera faite dans l'espace multidimensionnel des pressions élémentaires. Si θ=0, t coïncide avec la direction de descente la plus raide.

5. La valeur courante de G est alors stockée pour la prochaine itération :

$$G_v = G\,, \tag{II.50}$$

6. Afin de choisir une longueur de pas τ, dans la direction t(i,j), une distribution r(i,j) est calculée par le procédé de DC-FFT comme :

$$r(i,j) = \sum_{(k,l)\in A_p} K(i-k, j-l)\cdot t(k,l),\ (i,j)\in A_p\,, \tag{II.51}$$;

$$\bar{r} = \frac{1}{N_c}\cdot \sum_{(k,l)\in A_c} r(k,l)\,, \tag{II.52}$$;

$$r(i,j) \leftarrow r(i,j) - \bar{r},\ (i,j)\in A_p\,, \tag{II.53}$$;

$$\tau = \frac{\sum_{(i,j)\in A_c} g(i,j)\cdot t(i,j)}{\sum_{(i,j)\in A_c} r(i,j)\cdot t(i,j)}\,, \tag{II.54}$$

7. La distribution de pression p courante est stockée pour l'évaluation de l’erreur :

$$p^v(i,j) = p(i,j),\ (i,j)\in A_p\,, \tag{II.55}$$

8. La solution est mise à jour dans la zone de contact par le déplacement avec un pas de longueur τ dans la direction t(i,j):

$$p(i,j) \leftarrow p(i,j) - \tau\cdot t(i,j),\ (i,j)\in A_C\,, \tag{II.56}$$

9. Les inégalités (II.43.b) sont forcées en remplaçant toute pression $p(i,j)$ négative par zéro et l’aire courante est mise à jour en conséquence.

S'il y a des séparations $g(i,j)$ en dehors de la région de contact (A_c) qui sont négatives, ces points sont ajoutés à A_c et les pressions sont remplacées par :

$$p(i,j) \leftarrow p(i,j) - \tau \cdot g(i,j)\,, \qquad \text{(II.57).}$$

Si toutes les séparations $g(i,j)$ sont positives, on fixe θ=1 sinon il est mis à zéro.

10. La charge courante de contact est calculée :

$$W = 4 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{(i,j) \in A_P} p(i,j) \qquad \text{(II.58).}$$

L'équation d'équilibre du chargement (II.44) est forcée :

$$p(i,j) \leftarrow \left(\frac{W}{W_0} \right) \cdot p(i,j),\ (i,j) \in A_P \qquad \text{(II.59).}$$

11. L'erreur relative courante est estimée :

$$\varepsilon = 4 \cdot a \cdot b \cdot W_0 \cdot \sum_{(i,j) \in A_P} \left| p(i,j) - p^v(i,j) \right| \qquad \text{(II.60).}$$

12. si, le critère de convergence n'est pas atteint une autre itération est effectuée. Sinon, la solution $p(i,j),\ (i,j) \in A_P$ est trouvée, le système (II.41 – II.44) est vérifié et le programme est terminé.

Finalement cet algorithme permet d'accéder aux résultants suivants:

- aire réelle de contact ;
- distribution de la pression normale.

Sur chacun des éléments en contact, la valeur locale de la pression normale est connue. Sur les autres éléments la pression normale est, bien entendue, nulle. Le déplacement solide des corps δ, n'est pas déterminé dans l'algorithme présenté. L'équation d'équilibre de la charge est forcée et la pression de contact est mise à jour sans utiliser δ (cf. équations II.58-59). Dans la plupart des applications pratiques, la valeur de δ n'est pas nécessaire si la distribution de la pression de contact p peut être calculée.

II.5 <u>*CALCUL RAPIDE DU TENSEUR DES CONTRAINTES ELASTIQUES*</u>

Le champ de contraintes dû aux pressions de contact est calculé par la méthode des coefficients d'influence. Après que les pressions de contact p aient été déterminées pour tous les nœuds, les contraintes correspondantes à n'importe quelle profondeur donnée ($z > 0$) peuvent être calculées comme suit :

$$\sigma_{mn}(x_i, y_j, z) \sum_{(k,l)\in A_p} \left[F_z^{mn}(i-k, j-l) + \mu G_z^{mn}(i-k, j-l)\right] p(k,l), m, n = x, y, z, (i,j) \in A_P ,$$

(II.61).

où μ est le coefficient de frottement et F_z^{mn} , G_z^{mn} sont les coefficients d'influence pour le chargement normal et tangentiel. Ils lient directement les contraintes aux points se trouvant sous la surface de contact, aux pressions (normales) et contraintes tangentielles sur les éléments de la grille (fig. II.15).

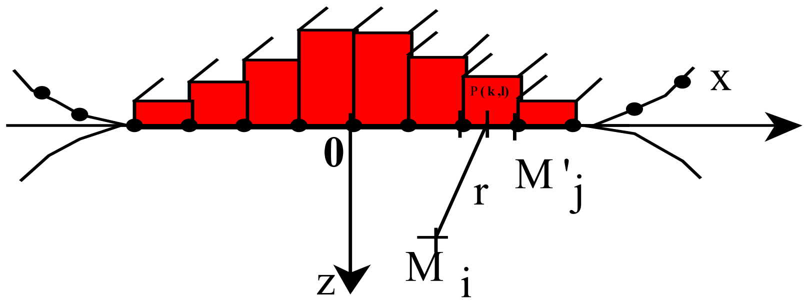


Figure II.15 *Calcul de contraintes en sous couche*

Basé sur le travail de Kalker ***(KALK 86)*** et Hills **(HILL 93)**, Dumont et al. ***(DUMO 97)*** proposent des expressions simplifiées pour les coefficients d'influence.

- Pour un élément rectangulaire (2a, 2b) de pression uniforme :

$$\begin{cases} F_{xx}(x,y,z) = 2\upsilon \tan^{-1}\left(\dfrac{z^2+y^2-y\rho}{zx}\right) + 2(1-2\upsilon)\tan^{-1}\left(\dfrac{\rho-y+z}{x}\right) + \dfrac{xyz}{\rho(x^2+z^2)} \\ F_{yy}(x,y,z) = 2\upsilon \tan^{-1}\left(\dfrac{z^2+y^2-y\rho}{xz}\right) + 2(1-2\upsilon)\tan^{-1}\left(\dfrac{\rho-x+z}{y}\right) + \dfrac{xyz}{\rho(y^2+z^2)} \\ F_{zz}(x,y,z) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y^2+z^2-y\rho}{xz}\right) - \dfrac{xyz}{\rho}\left(\dfrac{1}{x^2+z^2} + \dfrac{1}{y^2+z^2}\right) \\ F_{xy}(x,y,z) = \dfrac{-z}{\rho} - (1-2\upsilon)\ln(\rho+z) \\ F_{xz}(x,y,z) = \dfrac{z^2 y}{\rho(x^2+z^2)} \\ F_{yz}(x,y,z) = \dfrac{z^2 x}{\rho(y^2+z^2)} \end{cases} \quad , \quad \text{(II.62).}$$

Composantes du tenseur des contraintes produites par cet élément :

$$\sigma_{ij} = \frac{p}{2\pi}\left(F_{ij}(x+a,y+b,z) - F_{ij}(x+a,y-b,z) + F_{ij}(x-a,y-b,z) - F_{ij}(x-a,y+b,z)\right),$$

(II.63).

- Pour un élément rectangulaire (2a, 2b) de cisaillement uniforme dans le sens des x :

$$\begin{cases} G_{xx}(x,y,z) = \dfrac{-z}{\rho}\left(1 + \dfrac{yz-x^2}{((\rho+z)(\rho-y))}\right) + 2\upsilon\left(\dfrac{y}{(\rho+z)}\right) - 2\ln(\rho-y) \\ G_{yy}(x,y,z) = \dfrac{-yz}{(\rho(\rho+z))} - 2\upsilon\left(\dfrac{y}{\rho+z} + \ln(\rho-y)\right) \\ G_{zz}(x,y,z) = \dfrac{yz^2}{\rho(x^2+z^2)} \\ G_{xy}(x,y,z) = \dfrac{-xz}{(\rho(\rho+z))} - 2\upsilon\left(\dfrac{x}{(\rho+z)}\right) - \ln(\rho-x) \\ G_{xz}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\rho(x^2+z^2)} + \tan^{-1}\left(\dfrac{z^2+y^2-y\rho}{xz}\right) \\ G_{yz}(x,y,z) = \dfrac{-z}{\rho} \end{cases} \quad , \quad \text{(II.64).}$$

Composantes du tenseur des contraintes produites par cet élément :

$$\sigma_{ij} = \frac{t_x}{2\pi}\left(G_{ij}(x+a,y+b,z) - G_{ij}(x+a,y-b,z) + G_{ij}(x-a,y-b,z) - G_{ij}(x-a,y+b,z)\right),$$

(II.65)

- Pour un élément rectangulaire de cisaillement uniforme dans le sens des y, les expressions des composantes du tenseur des contraintes sont proches de celles calculées pour un cisaillement t_x. En fait, $t_x(x,y)$, x, y, u, v, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xz}, σ_{yz} doivent être respectivement remplacés par $t_y(x,y)$, y, x, v, u, σ_{yy}, σ_{xx}, σ_{yz}, σ_{xz}.

Avec :

$x = x_i - x_j$, $y = y_i - y_j$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Les sommes apparaissant à droite dans d'équation (II.61) sont des convolutions. Par conséquent, les contraintes sont calculées en utilisant l'algorithme de DC-FFT décrit dans la section II.2.5.

Une possibilité permettant de réduire le nombre de FFT à effectuer pour réaliser plusieurs produits de convolution est basée sur le fait que les FFT sont réalisées avec des nombres complexes. Les coefficients d'influence et les pressions sont réelles et ils sont introduits dans les algorithmes de FFT, comme des nombres complexes avec une partie imaginaire nulle.

Considérons le calcul des contraintes dues au champ de pression en surface. Pour deux contraintes du tenseur σ_{ij}^{pr} et σ_{i+1j}^{pr} , il est nécessaire d'effectuer la convolution des coefficients d'influence et de la pression deux fois, soit au total trois FFT et deux IFFT. Si l'on considère alors le coefficient d'influence et la pression complexe définis par :

$$\begin{aligned} \overline{K}_{ij}^{pr} &= K_{ij}^{pr} + i \cdot K_{i+1j}^{pr} \quad et \quad \overline{p} = p + i \cdot 0 \\ \overline{K}_{ij}^{pr} \otimes \overline{p} &= K_{ij}^{pr} \otimes p + i \cdot \left(K_{i+1j}^{pr} \otimes p \right) \end{aligned} \tag{II.66}$$

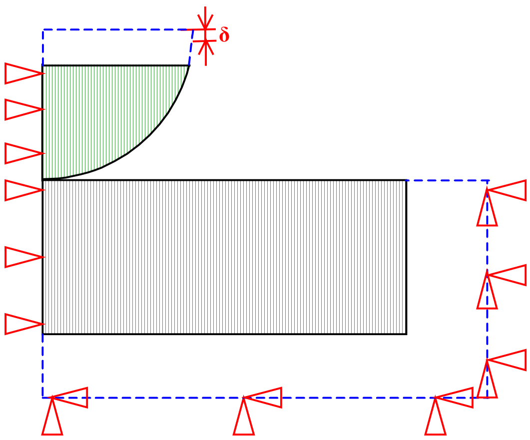
on obtient alors la composante σ_{ij}^{pr} du tenseur des contraintes sur la partie réelle et la composante σ_{i+1j}^{pr} sur la partie imaginaire. Au lieu de trois FFT et deux IFFT, ces calculs ne nécessitent plus que deux FFT et une IFFT.

II.6 VALIDATION DU MODELE DE RESOLUTION DU CONTACT NORMAL

Ce paragraphe présente les différentes modélisations effectuées afin de tester notre modèle de résolution pour le problème de contact et la détermination des contraintes internes. Pour tester notre approche, nous avons comparé nos résultats avec ceux fournis par le logiciel d'éléments finis ABAQUS et avec quelques résultats issus de la littérature portant sur des configurations simples.

II.6.1 VALIDATION PAR COMPARAISON AVEC LE LOGICIEL D'ELEMENTS FINIS ABAQUS

Nous considérons le contact circulaire entre un massif semi-infini et une bille (II.16). Le code de calcul développé ici se place dans les hypothèses de Hertz, à savoir que les massifs en contact sont semi-infinis et que les déformations restent petites. Si nous restons dans le domaine élastique, la solution de référence de ce problème est connue, puisque c'est la solution analytique proposée par Hertz en 1882. Le problème a été simplifié par l'utilisation d'éléments axisymétriques et d'un axe de symétrie. Le maillage du massif a été affiné au voisinage du contact, de manière à obtenir une précision suffisante.



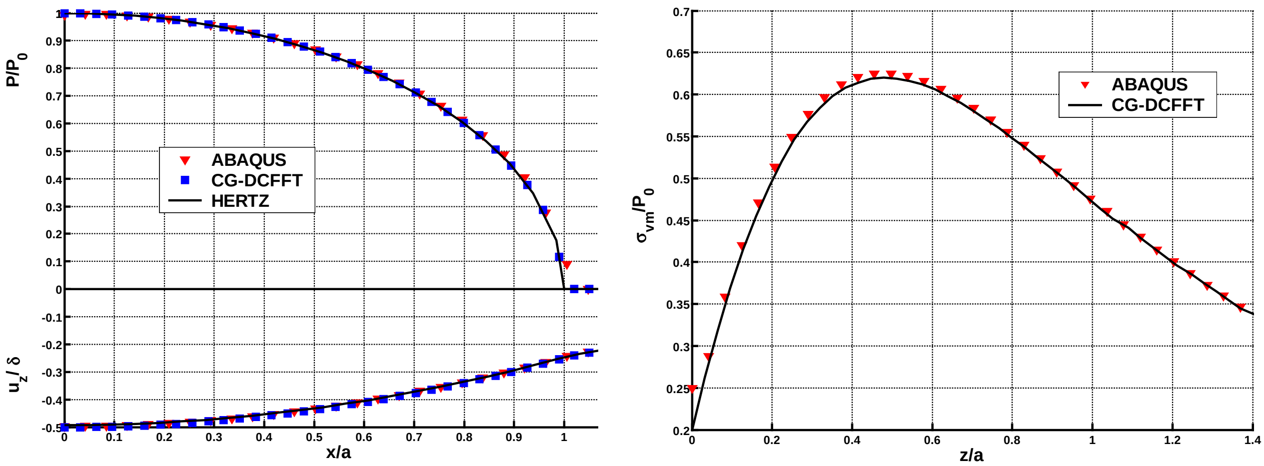
Conditions aux limites	Déplacements radiaux	Déplacements verticaux
Axe bille	Bloqués	Libres
Face supérieure bille	Libres	Imposés
Axe massif	Bloqués	Libres
Face inférieure massif	Bloqués ∞	Bloqués ∞
Face supérieure massif	Libres	Libres
Face extérieure massif	Bloqués ∞	Bloqués ∞

Figure II.16 *Modèle axisymétrique pour le contact circulaire élastique*

Les mailles sont donc constituées d'éléments axisymétriques à 4 nœuds. L'utilisation de la technique d'intégration réduite est conseillée pour limiter l'effet des instabilités numériques produites par les distorsions du maillage lors de la déformation. Le maillage du massif a été affiné au voisinage du contact, de manière à obtenir une précision suffisante. L'aire du contact et les zones déformées restent faibles au regard de la taille de la bille. Nous pouvons donc raisonnablement la considérer comme un massif semi-infini. Aussi, pour bloquer les déplacements à l'infini, nous avons utilisé des éléments infinis sur la face inférieure du massif et supérieure de la bille. Les éléments utilisés sont des éléments CAX4R, qui sont des éléments axisymétriques bilinéaires à 4 nœuds comprenant 2 ddl, et des éléments infinis axisymétriques bilinéaires à 4 nœuds qui sont des CINAX4.

Différents jeux de conditions aux limites ont été testés, et nous allons conserver celui qui reproduit le mieux les conditions de massif semi-infini (figure. II.16). Le chargement est appliqué par un déplacement que l'on impose sur l'ensemble des nœuds de la face supérieure de la bille, cette condition de chargement est la plus simple à mettre en place. La valeur du déplacement appliqué correspond, par réaction, à une valeur de la résultante des forces nodales sur cette face. Ceci permet de garder une répartition des pressions uniforme.

Pour une bille et un massif en acier M50 (E=210 GPa et ν=0,3) les résultats sont présentés dans le tableau II.3 et la figure II.17. Le rayon de la bille est 7,5 mm et le déplacement imposé est de 17 µm, ce qui correspond à une pression de Hertz de 3,5 GPa.



a. b.

***Figure II.17** a) Distribution de la pression et du déplacement en surface*
b) Contrainte équivalente de Von Mises selon l'axe de symétrie

Tableau II.3	Hertz	Abaqus/Hertz	CG-DCFFT/Hertz
P_0 (GPa)	3,5	0,991	0,999
a (mm)	0,357	1,047	0,988
σ_{VMmax} (GPa)	$0{,}6 \cdot P_0 = 2{,}13$	0,97	0,98
z_{VMmax} (µm)	$0{,}48 \cdot a = 0{,}171$	0,96	1

Nous pouvons constater une corrélation correcte pour la pression maximale de contact, le rayon du contact et la contrainte équivalente de Von Mises maximale.

Par ailleurs, les écarts entre le calcul analytique et la simulation par éléments finis sont faibles sauf au voisinage de l'axe de symétrie. Cela s'explique par la modélisation du problème de contact par un modèle EF 2D axisymétrique qui gère mal le contact au voisinage de cet axe. Au vu de ces résultats, nous pouvons dire que le modèle numérique est validé en élastique.

II.6.2 VALIDATION PAR COMPARAISON AVEC LA LITTERATURE

Un rouleau cylindrique avec un profil circulaire a été choisi pour comparer les résultats obtenus par cette méthode avec les résultats présentés dans la littérature obtenus par la méthode des éléments finis (FEM). La géométrie du contact et les résultats éléments finis sont ceux donnés par J. de Mul ***(MUL 86)***, figure II.18 et Tableau II.4.

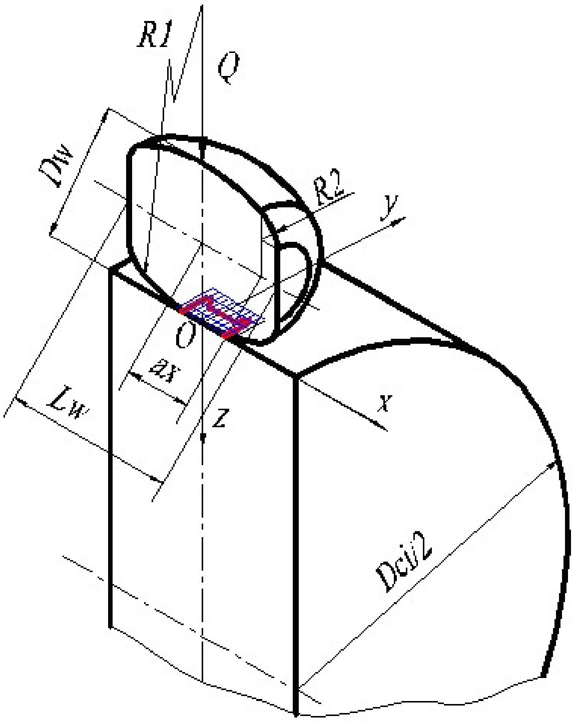


Figure II.18 *La géométrie des corps en contact.*

Tableau II.4

D_w [mm]	L_w [mm]	R_1 [mm]	R_2 [mm]	a_x [mm]	D_{ci} [mm]
15	16	1114	1,006	6,994	58,5

La distribution 3D de pression (figure II.19) et l'aire de contact réelle ont été obtenues en employant une discrétisation identique selon chaque direction mais avec $\Delta x \neq \Delta y$. Les variations de pression de contact le long de l'axe sont présentées dans la figure II.20.

La comparaison des résultats présentée figure II.20 montre que les deux méthodes ont donné le même profil de pression et les mêmes dimensions pour l'aire de contact. Toujours pour la même géométrie une étude numérique comparative entre plusieurs méthodes de résolution a été effectuée pour montrer la rapidité de résolution par la méthode développée (CG-DCFFT). Les critères de comparaison choisis sont la finesse de la grille et le temps de calcul. Les résultats sont récapitulés dans le tableau II.5, Crețu et Antaluca, ***(CREȚ 03)***.

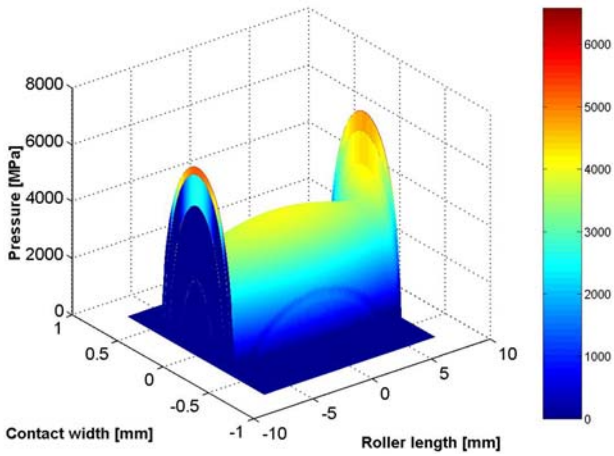
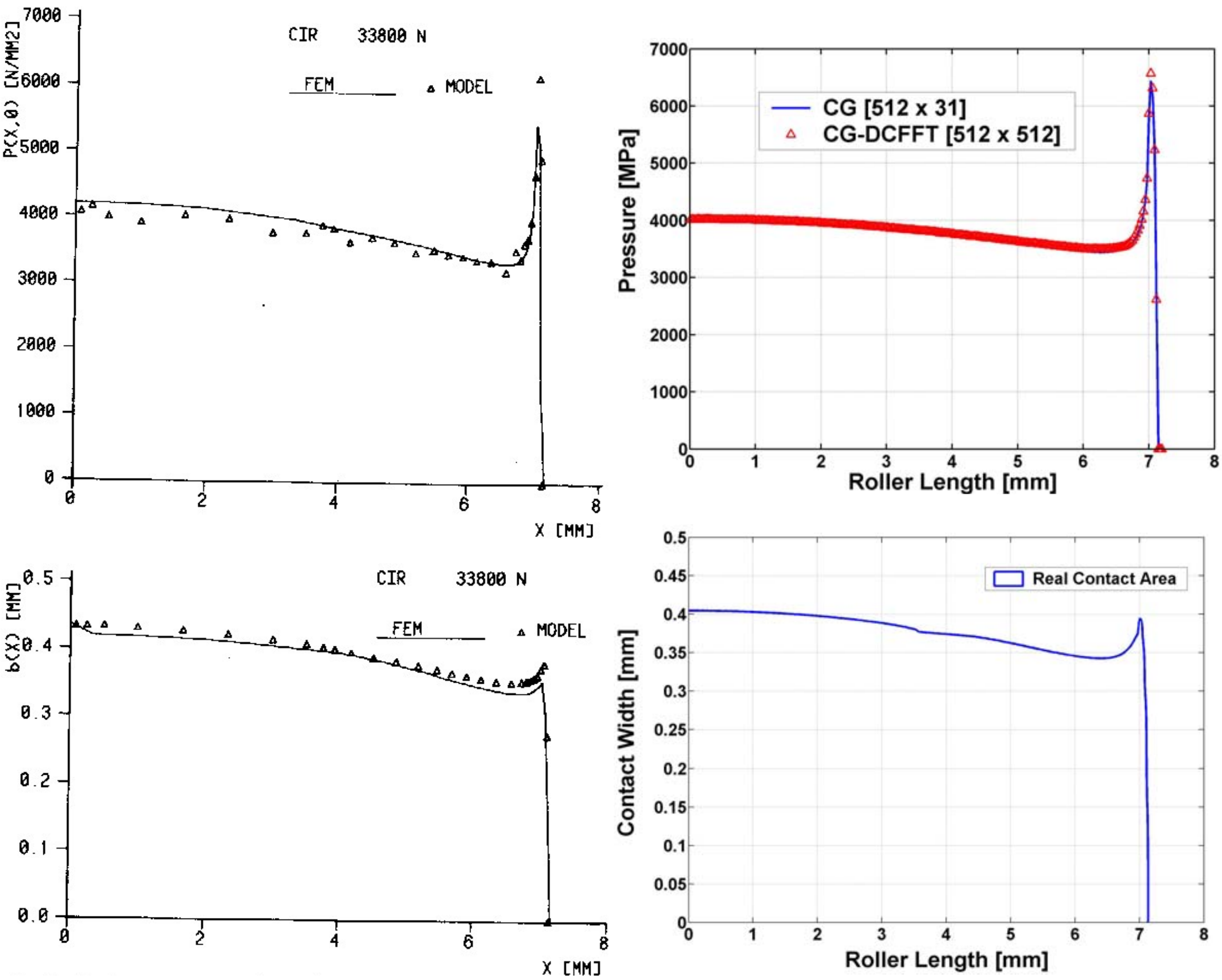


Figure II.19 *Distribution de pressions 3D* ***(CREȚ 03)***



a. Elément fini ***(MULL 86)*** *b. CG-DCFFT* ***(CREȚ 02)***

Figure II.20 *Pression de contact et aire réelle*

Tableau II.5

Méthode	N° de points sur la grille	Δx_{min} [µm]	Δy_{min} [µm]	Temps [sec]	Erreur
GEM*	63x31 (1953)	241	48	320	0
CG**	63x31 (1953)	241	48	7	10^{-3}
	127x31 (3937)	119	48	26	10^{-3}
	255x31 (7905)	59	48	136	10^{-3}
CG-DCFFT***	128x128 (16384)	118	11,7	8	10^{-3}
	256x256 (65536)	59	5,9	49	10^{-3}
	512x512 (262144)	29	2,9	285	10^{-3}

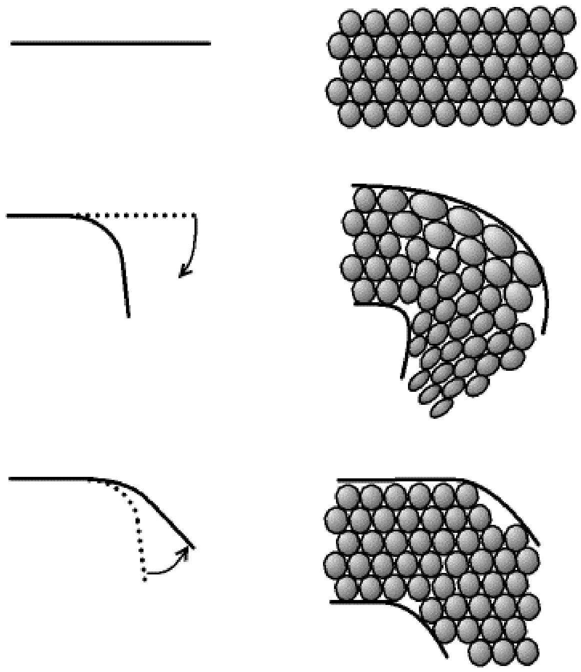
* - méthode d'élimination de Gauss
** - méthode du gradient conjugué
*** - méthode du gradient conjugué combinée avec la convolution discrète rapide

CHAPITRE III

CONTACT ELASTO-PLASTIQUE

III.1 LE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

Le comportement élasto-plastique est décrit par l'apparition de déformations irréversibles et indépendantes du temps, à partir d'un seuil en sollicitation. Pour les métaux et alliages les déformations plastiques se produisent par le glissement des plans atomiques les uns sur les autres. Ce glissement de plans atomiques se fait grâce au déplacement de défauts linéaires appelés « dislocations » (fig. III.1).



- les images de gauche montrent la forme extérieure de la pièce et les images de droite sont un gros plan sur les atomes ;
- les images du haut montrent la pièce initiale, les images du milieu la pièce au plus fort de la sollicitation et les images en bas à droite la pièce après arrêt de la sollicitation

Figure III.1 *Réarrangement des atomes lors de la déformation plastique par flexion*

Deux limitations importantes restreignent le domaine de validité :

- aux faibles températures d'emploi : $\theta < \frac{\theta_{fusion}}{4}$;
- aux sollicitations non endommageantes : $\varepsilon < \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{rupture}$.

Des formulations existent pour les grandes déformations, mais nous nous limiterons dans cette étude à celle des petites déformations. Une hypothèse importante est la partition entre les déformations élastiques et plastiques ($\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$), ainsi que le découplage des comportements. De plus, le module d'Young variant peu avec la déformation plastique, il sera considéré comme constant, cette hypothèse restant valable jusqu'à de grands taux de déformation.

Comme la déformation plastique est irréversible elle dépend de l'ensemble des états des sollicitations appliquées successivement (l'historique du chargement). Il est alors nécessaire d'adopter une description incrémentale des lois d'écoulement.

Dans un premier temps, nous allons présenter les critères classiques de plasticité, avant de nous intéresser au phénomène d'écoulement plastique pour trouver les relations générales liant les déformations plastiques aux contraintes. Enfin, nous particulariserons ces relations pour aboutir à différents modèles d'écrouissage. La théorie présentée ici est développée dans les références suivantes : Lemaître et Chaboche ***(LEMA 88)***, Mayeur ***(MAYE 95a, 95b)***, Jacq ***(JACQ 01)***.

III.1.1 CRITERES DE PLASTICITE

La limite d'élasticité est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent les premières déformations plastiques irréversibles. En deçà de cette limite, toutes les déformations générées pendant le chargement de l'éprouvette peuvent être recouvrées. La généralisation tridimensionnelle pour le cas d'un chargement complexe de cette définition du domaine élastique obtenu lors d'un essai uniaxial (traction ou compression) est appelée critère de plasticité. Elle permet de définir, dans l'espace des contraintes, la région pour laquelle le matériau aura un comportement élastique. Pour les métaux isotropes les deux critères isotropes les plus utilisés sont ceux de Von Mises et de Tresca.

L'expression de ces critères dépend à priori de toutes les composantes du tenseur des contraintes ainsi que de la limite élastique σ_s. En raison de l'isotropie et donc de l'invariance par rapport aux repères, seuls les trois invariants du tenseur des contraintes peuvent entrer en compte. De plus, en raison de l'incompressibilité plastique par rapport à la contrainte hydrostatique, seuls les invariants J_2 et J_3 du déviateur des contraintes, σ', peuvent intervenir. Nous obtenons ainsi l'expression générale des critères isotropes :

$$\mathrm{f}(\mathrm{J}_2, \mathrm{J}_3, \sigma_s) = 0 \text{ avec } J_2 = \left(\frac{3}{2}\cdot\sigma'_{ij}\cdot\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \;;\; J_3 = \left(\frac{9}{2}\cdot\sigma'_{ij}\cdot\sigma'_{jk}\cdot\sigma'_{ki}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{(III.1)}$$

a) Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises a été établi en considérant que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement, W_d, qui est une fonction du produit tensoriel contracté sur deux indices du déviateur du tenseur des contraintes.

$$W_d = \frac{1}{4\mu}\sigma' : \sigma' = \frac{1}{4\mu}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{1}{6\mu}J_2(\sigma')^2 \qquad \text{(III.2)}$$

Lorsque la limite d'élasticité σ_s est atteinte au cours d'un essai de traction pur, l'état de contrainte est simple, $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et l'énergie élastique de cisaillement se déduit :

$$\sigma^{'} = \sigma - \frac{1}{3} tr(\sigma) \cdot I \qquad W_d = \frac{1}{4\mu} \sigma^{'} : \sigma^{'} = \frac{1}{6\mu} \sigma_s^2 \tag{III.3}$$

En égalant l'énergie élastique de cisaillement d'un état de contrainte quelconque avec celle d'une traction uniaxiale correspondant à l'obtention de la limite élastique, on aboutit à l'expression du critère de Von Mises :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_s = J_2(\sigma^{'}) - \sigma_s = 0 \tag{III.4}$$

Ainsi, l'état de contrainte tel que $\sigma_{eq} = \sigma_s$ est équivalent au sens de Von Mises à l'état unidimensionnel défini par σ_s. Nous appellerons dorénavant contrainte de Von Mises la contrainte définie par $J_2(\sigma')$, qui est à comparer avec la limite d'élasticité en traction ou en compression.

L'expression développée de ce critère dans l'espace des contraintes est :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6 \cdot (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)\right]} - \sigma_s = 0 \tag{III.5}$$

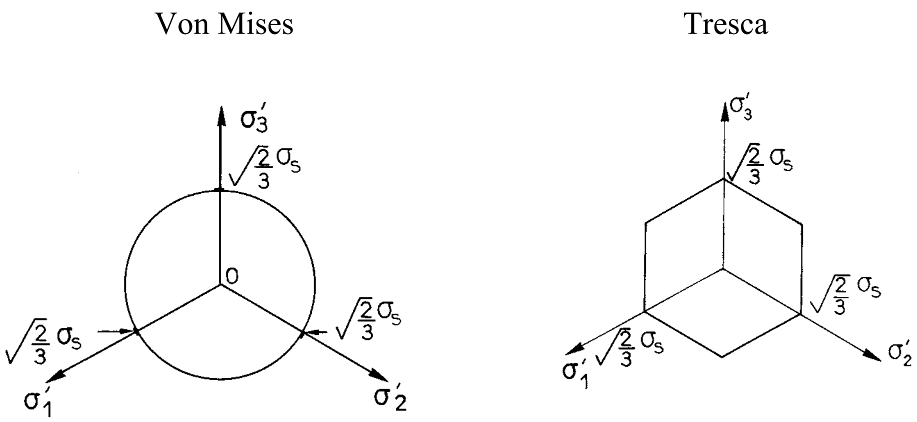


Figure III.2** Représentation des critères dans l'espace des contraintes déviatoriques **(LEMA 88).

b) Critère de Tresca

Le critère de Tresca relie le seuil de plasticité à la contrainte de Tresca, qui est la contrainte tangentielle maximale. En égalant la contrainte tangentielle maximale d'un état de contrainte quelconque avec celle d'une traction uniaxiale correspondant à l'obtention de la limite élastique, on aboutit à l'expression du critère de Tresca :

$$f = \frac{1}{2}\sup\left(\left|\sigma_i - \sigma_j\right|\right) - \frac{1}{2}\sigma_s = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

Les deux critères sont très proches et les deux permettent de bien décrire le comportement des métaux. En pratique leurs résultats sont relativement proches et l'écart n'excède pas 15%. Dans notre cas, nous utiliserons le critère de Von Mises. En effet, ce dernier possède l'avantage de ne pas présenter de discontinuité sur sa frontière (figure III.2a), ce qui est très commode d'un point de vue numérique.

III.1.2 LOIS D'ECOULEMENT

La plasticité est un phénomène irréversible, dépendant du trajet de chargement. Aussi, les lois d'écoulement plastique sont exprimées sous une forme incrémentale.

a) Variables utilisées.

Deux types de variables doivent être distingués :

- des variables observables, mesurables à tout moment : la déformation totale ε ;
- des variables internes : la déformation plastique ε_p, les variables d'état (V_k).

Les variables V_k sont de nature scalaire ou tensorielle et représentent l'état actuel de la matière c'est-à-dire ici l'état d'écrouissage de la matière. On utilise en général la déformation plastique cumulée p pour l'écrouissage isotrope et une variable tensorielle α pour l'écrouissage cinématique. Les variables associées à ces grandeurs sont $\overline{R}$ et X, respectivement dérivées de l'énergie libre spécifique par rapport à p et à α. Elles sont illustrées sur la figure III.4. La déformation plastique cumulée est définie par :

$$p = \int_0^t \left[\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p\right]^{1/2} dt \qquad \text{(III.7).}$$

b) Critère de charge – décharge

La surface de charge (figure III.3) est la surface décrite par le critère de plasticité à l'état écroui du matériau. Pour qu'il y ait écoulement plastique, il est nécessaire de réunir deux conditions :

- le point représentatif de l'état de contrainte σ est situé sur la surface de charge (la limite d'élasticité doit être atteinte) : $f\left(\sigma^{*}, V_{k}\right)=0$;
- le point représentatif de l'état de contrainte reste sur la surface de charge ($f>0$ est impossible), condition de consistance qui assure que le point ($\sigma+d\sigma$) soit lui aussi sur la surface de charge (l'état de contrainte ne revient pas à l'intérieur du domaine élastique) : $df\left(\sigma, V_{k}\right)=0$.

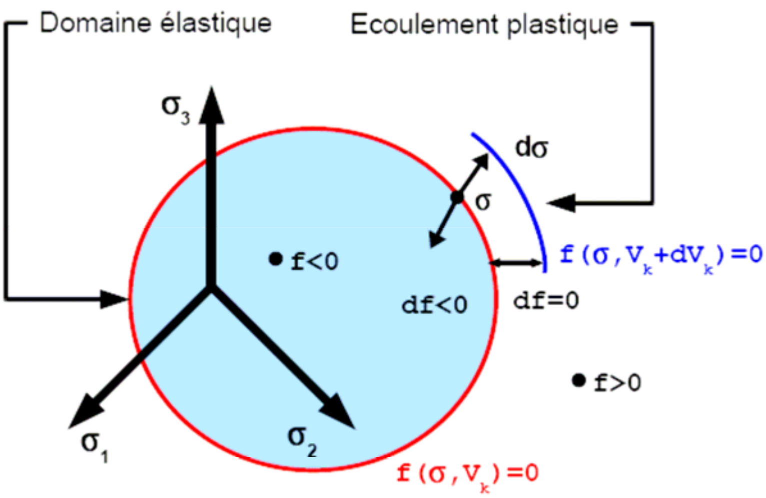


Figure III.3 *Représentation du domaine élastique et écoulement plastique dans l'espace des contraintes*

En résumé :

- comportement élastique : $f<0$;
- écoulement plastique : $f=0$ et $df=0$; (III.8)
- décharge élastique : $f=0$ et $df<0$.

c) Détermination des déformations plastiques

Il s'agit maintenant de déterminer l'évolution des déformations plastiques et des variables d'écrouissage en fonction de l'évolution des contraintes. Pour cela, nous faisons appel aux hypothèses de normalité associées aux phénomènes dissipatifs instantanés qui permettent d'écrire que la déformation plastique est normale à la surface de charge.

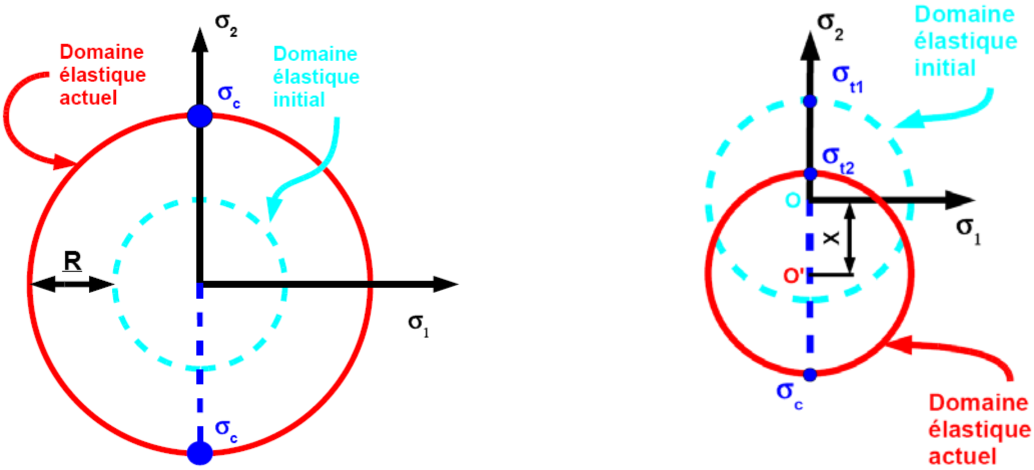
$$\begin{aligned} d\varepsilon^{p} &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ dp &= -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} \quad \text{avec } d\lambda \text{ multiplicateur plastique} \\ d\alpha &= -d\lambda \frac{\partial f}{\partial X} \end{aligned} \qquad \text{(III.9).}$$

La direction des déformations est déterminée à partir de la surface de charge. Dans le cadre plus général de la plasticité non associée, on introduit un potentiel de dissipation F différent de la surface de charge qui donne la direction des déformations. Ce cadre est utilisé dans des modèles plus complexes que ceux abordés ici, notamment dans le cas de l'écrouissage cinématique non linéaire.

Le multiplicateur plastique introduit ici va être déterminé en écrivant la condition de consistance. L'expression de ce multiplicateur va être liée au critère retenu ainsi qu'au schéma d'écrouissage choisi.

III.1.3 LOIS A ECROUISSAGE ISOTROPE

Un matériau peut être considéré à écrouissage isotrope si son domaine d'élasticité ne dépend que d'une variable scalaire, c'est à dire si les lieux des points représentant la limite d'élasticité dans l'espace des contraintes se déduisent les uns des autres par une homothétie de centre O (figure III.3a). Ainsi, si l'on comprime une éprouvette ayant initialement la même limite d'élasticité en traction et en compression jusqu'à une valeur σ_c puis que l'on fasse une traction, on retrouvera pour la limite en traction cette valeur σ_c.



a. b.

Figure III.4 *Schématisation de l'écrouissage : isotrope (a) et cinématique (b)* *a) Loi de Prandtl-Reuss*

C'est une loi à écrouissage isotrope (c'est à dire avec une seule variable d'écrouissage p) qui utilise le critère de Von Mises. La courbe d'écrouissage unidimensionnelle s'exprime par :

$\underline{R}+\sigma_y = k(p)$ ce qui donne la surface de charge $f = \sigma_{eq} - \underline{R} - \sigma_y$ (III.10).

On écrit tout d'abord les conditions de normalité :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}$$
$$dp = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = d\lambda \tag{III.11}$$

On écrit ensuite la condition de consistance :

$$df = d\sigma_{eq} - \dot{k}(p)dp = 0 \tag{III.12}$$

On en déduit alors l'expression du multiplicateur plastique :

$$d\lambda = \frac{d\sigma_{eq}}{\dot{k}(p)} \tag{III.13}$$

La loi d'écoulement s'écrit alors :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\sigma_{eq}}{k(p)} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \tag{III.14}$$

En arrangeant l'expression pour ne faire intervenir que les contraintes et en introduisant les conditions de charge, on aboutit à la loi de Prandtl-Reuss :

$$\begin{aligned}
&d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\
&d\varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma - \frac{\nu}{E} d(Tr(\sigma)) \cdot I \\
&si \;\; f=0 \;\; et \;\; df=0 \begin{cases} d\varepsilon^p = \frac{3}{2}\dot{g}(\sigma_{eq}) \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \sigma' \\ \dot{g}(\sigma_{eq}) = \left[\dot{k} \cdot \left(k^{-1}(\sigma_{eq})\right)\right]^{-1} \end{cases} \\
&d\varepsilon^p = 0 \;\; sinon
\end{aligned} \tag{III.15}$$

En utilisant toujours le moule de la plasticité associée combinée avec l'hypothèse de normalité généralisée, il est possible de formuler des lois d'écrouissage isotrope plus générales que la loi de Prandtl-Reuss, en utilisant des fonctions de charge correspondant au critère de Tresca ou aux critères anisotropes.

b) Cas de plasticité parfaite

C'est celui où il n'y a pas d'écrouissage, la variable R est nulle :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_Y = 0 \tag{III.16}$$

La condition de consistance $df = d\sigma_{eq} = 0$ ne permet plus d'obtenir l'expression du multiplicateur plastique $d\lambda$. On voit alors pourquoi les déformations plastiques sont indéterminées :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \cdot d\lambda \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \qquad \text{d'après l'équation (III.14).}$$

III.1.4 LOIS A ECROUISSAGE CINEMATIQUE

Dans le cadre de l'écrouissage cinématique, le domaine d'élasticité garde une taille constante, mais il se déplace dans l'espace des contraintes. Si l'on effectue un essai de traction sur une éprouvette vierge, on trouve une limite d'élasticité en traction initiale σ_{t1}. Si ce même essai est effectué après avoir comprimé l'éprouvette jusqu'à une valeur σ_c inférieure à la limite d'élasticité en compression, on trouve alors une limite d'élasticité en traction σ_{t2} inférieure à σ_{t1} (figure III.4b). C'est l'effet Bauschinger, souvent observé dans les métaux.

On distingue l'écrouissage cinématique linéaire de l'écrouissage cinématique non linéaire. Dans le premier cas, la position du centre du domaine élastique, défini dans l'espace des contraintes, est repérée par un tenseur variant proportionnellement au tenseur des déformations plastiques. L'écrouissage cinématique non linéaire est plus complexe et sort du cadre de la plasticité associée.

a) Ecrouissage cinématique de Prager

C'est une loi à écrouissage cinématique linéaire. La variable d'écrouissage est de nature tensorielle et indique la position du centre de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

Le critère utilisé est le critère de Von Mises : $f = J_2(\sigma - X) - \sigma_y$. En procédant de la même façon que précédemment, on aboutit à la formulation suivante :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma - \frac{\nu}{E} \cdot Tr(d\sigma) \cdot I$$

$si\ f = 0\ et\ df = 0:$ avec C module d'écrouissage (III.17)

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = \frac{9}{4} \cdot \frac{(\sigma' - X') : d\sigma}{C \cdot \sigma_s^2} \cdot (\sigma' - X') \\ dX = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon^p \end{cases}$$

$sinon:\ d\varepsilon^p = 0$

III.1.5 LOIS D'ECROUISSAGE EN CHARGEMENT CYCLIQUE

Sous chargement cyclique, les propriétés d'écrouissage de la plupart des matériaux varient avec le nombre de cycles. On peut alors observer plusieurs phénomènes. Au cours de chargements purement alternés, on peut observer un durcissement cyclique si l'amplitude de déformation diminue à charge imposée ou si l'amplitude de contrainte augmente à déformation imposée. A l'inverse, on peut également observer un adoucissement cyclique.

Sous chargement cyclique à contrainte imposée, on peut alors observer (figure III.5) :

- une adaptation : plastification durant les premiers cycles puis établissement d'un régime purement élastique ;
- une accommodation plastique : au bout de quelques cycles, la déformation plastique n'évolue plus que cycliquement;
- un phénomène de rochet : la déformation plastique continue à augmenter à chaque cycle.

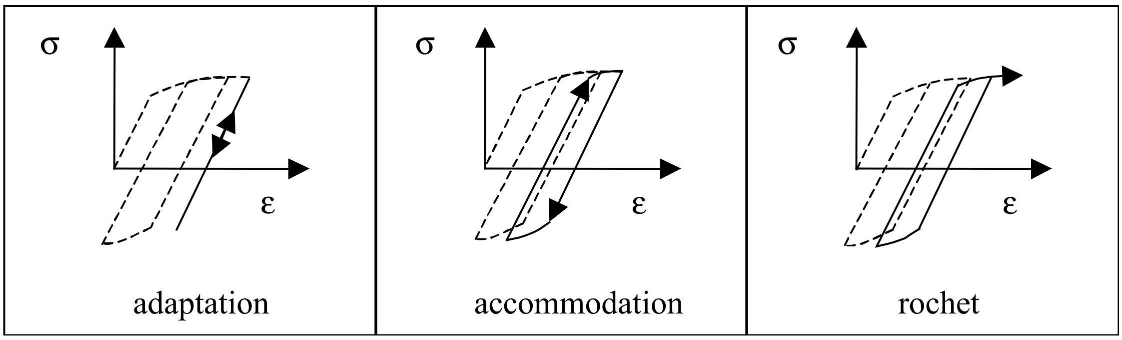


Figure III.5 *Comportements cycliques.*

III.1.6 CONCLUSION

Lorsque l'écoulement plastique se produit, la limite d'élasticité évolue. Ainsi, si au cours d'un essai de compression, l'éprouvette est chargée à un niveau supérieur à la limite d'élasticité initiale σ_S, déchargée puis rechargée à nouveau, la limite d'élasticité finale au cours de ce second chargement sera différente de la limite d'élasticité initiale. L'écrouissage se manifeste par l'augmentation de la limite d'élasticité pendant l'écoulement et par la nécessité d'augmenter la contrainte appliquée pour poursuivre l'écoulement. Il existe plusieurs manières de représenter l'écrouissage. Dans cette partie, nous avons présenté ces différents modèles ainsi que leur capacité à représenter les phénomènes observés physiquement.

Tableau III.1 : Les phénomènes observés et sur les différentes schématisations d'écrouissage

Ecrouissage	Adaptation	Effet Bauschinger	Accommodation plastique	Rochet
isotrope	√			
cinématique linéaire	√	√	√	
cinématique non linéaire	√	√	√	√

Nous avons parlé ici de l'écrouissage du matériau, à ne pas confondre avec l'écrouissage structurel. En effet, les déformations plastiques introduisent des changements géométriques permanents et, par leur hétérogénéité, des contraintes résiduelles qui peuvent provoquer une accommodation liée à l'évolution du chargement subi par la structure.

Au cours de cette étude, nous considérerons une schématisation isotrope de l'écrouissage. En effet, les matériaux utilisés dans les simulations ont la particularité de présenter un fort taux de durcissement en début d'écrouissage, qui diminue au fur et à mesure que l'écrouissage augmente. Ce phénomène ne peut pas être représenté par un écrouissage cinématique linéaire. En outre, la mise en œuvre d'un écrouissage cinématique non linéaire serait complexe, en raison de la difficulté d'identification des différents paramètres, notamment sur des aciers à gradient de propriétés. De plus, au travers de cet outil élasto-plastique, nous visons à déterminer l'état du contact après quelques cycles, c'est à dire l'état rodé peu différent de l'état initial, et l'écrouissage isotrope est suffisant pour atteindre cet objectif.

En terme de critère de plasticité, nous allons utiliser le critère de Von Mises. Ce critère, très proche de celui de Tresca, est bien adapté au comportement des aciers. Il présente en outre l'avantage d'être adapté au traitement numérique. Au cours de cette étude, la loi de Swift sera utilisé principalement avec :

$$k(p) = B \cdot (C + p)^n \text{, ce qui conduit à } g(\sigma_{eq}) = \frac{1}{n \cdot B} \cdot \left(\frac{B}{\sigma_{eq}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \qquad \text{(III.18)}$$

Cependant, afin de conserver l'aspect général du code de contact élasto-plastique, nous allons utiliser la forme générale des modèles de plasticité. Nous allons donc considérer que l'incrément de déformation plastique dépend de la contrainte, de l'incrément de contrainte et de l'état d'écrouissage :

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon^p(\sigma, d\sigma, \text{état d'écrouissage}), \qquad \text{(III.19).}$$

III.2 THEOREME DE RECIPROCITE DE BETTI

Considérons la loi de comportement élastique :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \qquad \text{(III.20),}$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations, et C_{ijkl} les composantes du tenseur d'élasticité.

La symétrie des tenseurs σ et ε implique pour le tenseur C les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \ ; \qquad \text{(III.21)}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} .$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, une troisième propriété de symétrie apparaît :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad \text{(III.22).}$$

On souhaite étudier un corps élastique, de volume *Ω* et de contour *Γ*. Dans tout ce qui suit, on considère deux états différents, notés ainsi :

- l'état (u, ε, σ) représente un état dans lequel il existe des déformations initiales que l'on note ε^0,
- l'état $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ représente un état élastique, pour le moment indéterminé.

Les deux états concernent le même domaine et sont donc régis par les mêmes propriétés élastiques :

u (avec déformations initiales)	u^*
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i})$ $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0)$	$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$ $\sigma_{ij}^* = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}^*$

Calculons le produit $\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij}$:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} = C_{ijkl} \cdot \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}\right) \cdot \varepsilon^*_{ij} \tag{III.23}$$

où $C_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot \left(\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}\right)$, avec δ le symbole de Kronecker, λ et μ sont les constantes de Lamé (pour le cas d'un matériau homogène).

Grâce à la symétrie des tenseurs :

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} = \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}\right) C_{klij} \cdot \varepsilon^*_{ij} = \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}\right) \sigma^*_{kl}$$

d'où : $\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} = \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^0_{ij}\right) \sigma^*_{ij}$.

L'intégration du membre de gauche dans l'équation (III.23) donne :

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} \cdot d\Omega = \int_\Omega \frac{\sigma_{ij}}{2} \cdot \left(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}\right) \cdot d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij} \cdot u^*_{i,j} \cdot d\Omega \tag{III.24}$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} \cdot d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_{ij} \cdot u^*_i\right)_{,j} \cdot d\Omega - \int_\Omega \sigma_{ij,j} \cdot u^*_i \cdot d\Omega \tag{III.25}$$

D'après les conditions d'équilibre, on a $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$, d'où :

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} \cdot d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_{ij} \cdot u^*_i\right)_{,j} \cdot d\Omega + \int_\Omega f_i \cdot u^*_i \cdot d\Omega \tag{III.26}$$

En utilisant le théorème de la divergence de Gauss, avec une normale n_j dirigée vers l'intérieur, on obtient :

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} \cdot d\Omega = -\int_\Gamma u^*_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_\Omega f_i \cdot u^*_i \cdot d\Omega \tag{III.27}$$

L'intégration du membre de droite dans l'équation (III.23) donne :

$$\int_\Omega \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}\right) \cdot \sigma^*_{kl} \cdot d\Omega = \underbrace{\int_\Omega \varepsilon_{kl} \cdot \sigma^*_{kl} \cdot d\Omega}_{1} - \underbrace{\int_\Omega \varepsilon^0_{kl} \cdot \sigma^*_{kl} \cdot d\Omega}_{2} \tag{III.28}$$

En utilisant une nouvelle fois le théorème de la divergence de Gauss, le premier terme devient :

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij} \cdot \sigma^*_{ij} \cdot d\Omega = -\int_\Gamma \sigma^*_{ij} \cdot u_i \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_\Omega f^*_i \cdot u_i \cdot d\Omega \tag{III.29}$$

En égalant les deux parties, on obtient alors le principe de réciprocité :

$$-\int_\Gamma u^*_i \cdot \sigma_{ij} \cdot d\Gamma + \int_\Omega f_i \cdot u^*_i \cdot d\Omega = -\int_\Gamma u_i \cdot \sigma^*_{ij} \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_\Omega f^*_i \cdot u_i \cdot d\Omega - \int_\Omega \varepsilon^0_{ij} \cdot \sigma^*_{ij} \cdot d\Omega \tag{III.30}$$

III.3 LE CONTACT ELASTO-PLASTIQUE

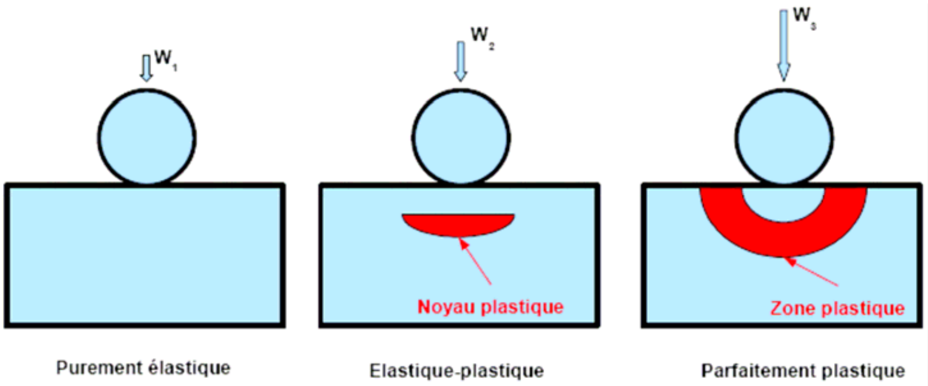


Figure III.6 *Etapes du développement de la zone plastique*

L'approche semi-analytique pour résoudre le contact élastique normal et tangentiel présentée dans le chapitre précédent, ne peut pas être employée pour des conditions non élastiques. Par exemple, quand les surfaces des corps en contact sont rugueuses ou indentées il se produit une concentration de contraintes au voisinage de la surface qui excèdent très rapidement la limite élastique du matériau. Ceci à trois conséquences : (i) une déformation plastique en sous-couche, (ii) une déformation permanente de la surface après décharge, conséquence du point précédent, et (iii) une modification de la distribution de pression elle-même conséquence du changement de conformité (point ii). Le contact élasto-plastique est toutefois plus compliqué à résoudre que le contact purement élastique, puisque l'amplitude et la distribution des déformations plastiques doivent être déterminées.

On constate que l'augmentation de la déformation plastique avec le chargement peut être divisé en trois étapes (figure III.6) :

- purement élastique;
- élastique-plastique;
- parfaitement plastique.

Soit un chargement appliqué progressivement au contact entre un pénétrateur sphérique rigide et un massif semi-infini élasto-plastique. Dans l'étape purement élastique les contraintes dans le massif semi-infini augmentent jusqu'à atteindre la limite d'élasticité. Dans l'étape élastique-plastique la limite élastique est dépassée et une zone plastique apparaît à la profondeur de Hertz puis se développe autour de ce point, jusqu'à atteindre la surface. Tant que la zone plastique est contenue en sous-couche l'amplitude de la déformation plastique est limitée à quelques pourcents. Lorsque la déformation plastique atteint la surface libre ceci se produit en périphérie du contact. On remarque alors la présence d'un volume élastique, de la forme d'un disque, emprisonné dans le contact.

Pour une charge très élevée on observe numériquement une uniformisation de la pression de contact à 3 fois la limite d'élasticité pour un contact purement normal, associée à des déformations plastiques de plusieurs dizaines de pourcents. C'est par exemple le cas de l'indentation d'un matériau élasto-plastique par une pointe rigide ou élastique (indentation Rockwell, Vickers, Berkovitch, Knoop, etc.) Le matériau indenté a alors un comportement parfaitement plastique. Certains auteurs ont proposé des modèles de contact élastique - parfaitement plastique, consistant dans une analyse purement élastique à limiter la pression de contact à une valeur seuil, voir par exemple Liu et al. ***(LIU 00)***. Une telle approche peut donner des résultats satisfaisants en terme de distribution de pression et de déplacements en surface, mais n'est pas adéquate pour décrire l'état de contraintes en sous-couches quand il y a écoulement plastique puisque ni l'écrouissage ni les déformations plastiques ne sont obtenus explicitement.

Dans les applications en fatigue de contacts les charges sont généralement plus modérées et les déformations plastiques du même ordre de grandeur que les déformations élastiques. Il est alors possible de superposer les effets plastiques aux effets élastiques. Récemment, Jacq et al. ***(JACQ 02)*** ont ainsi développé un code de contact semi-analytique élasto-plastique, assez rapide pour permettre le calcul d'un chargement-déchargement vertical ou roulant d'une surface lisse sur une surface rugueuse ou indentée, le dernier pour simuler le roulement de la charge au-dessus d'un indent ou autre défaut de surface.

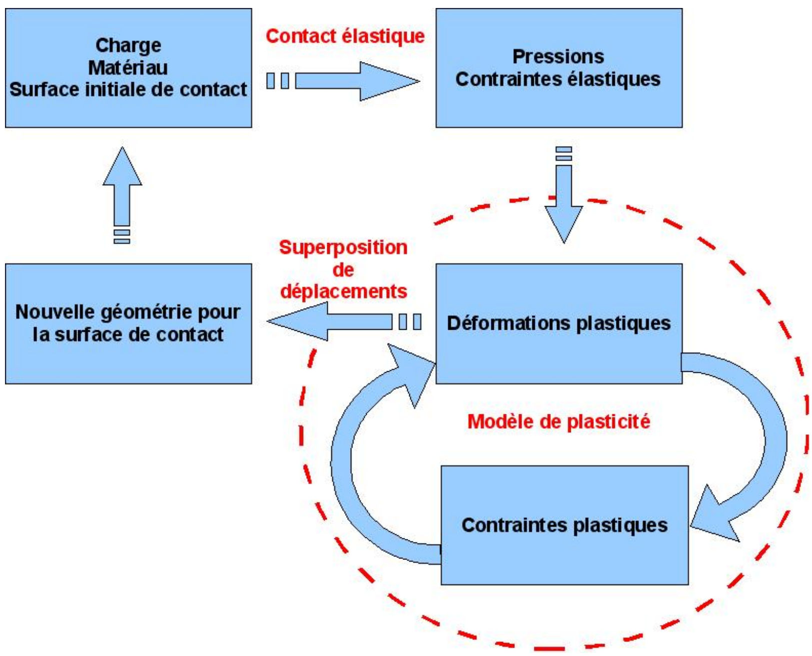


Figure III.7 *Principe de résolution du contact élasto-plastique*

Cet outil permet de prendre en compte l'évolution de la pression de contact et du champ de contrainte quand l'écoulement plastique se produit. Pour réduire de manière significative le temps de calcul, le module de contact élastique, à l'origine basé sur une technique MLMG (Lubrecht et Ioannides, ***LUBR 91***), a été remplacé par un module CG-DCFFT basé sur la formulation développée dans le chapitre précédent. L'effet du chargement tangentiel sur la surface, non considéré dans le code original, a été introduit dans la formulation élastique-plastique et mis en application dans le code. Le frottement est inclus dans le modèle comme un effort de cisaillement proportionnel à la distribution normale de pression par l'utilisation d'un coefficient de frottement. Le principe de résolution est présenté dans la figure III.7.

Les déformations plus importantes du type indentation Rockwell peuvent être calculées en utilisant un logiciel d'éléments finis et introduites comme état initial, tant que le roulement sur la surface ne produit pas de grandes déformations additionnelles. L'indentation Rockwell peut produire une déformation plastique équivalente allant jusqu'à 40 % pour un acier rapide, Nélias et al. ***(NELI 05)***. Il a été observé par Jacq ***(JACQ 01)*** que le passage répété d'une charge correspondant à une pression de Hertz de 3,5 GPa sur un indent Rockwell ne produit pas de déformations plastiques supérieures à 2%, ce qui permet l'utilisation du code développé. Une déformation plastique équivalente de 2% correspond aussi au maximum obtenu pour une charge de 8 GPa entre une sphère et un massif semi-infini en acier 100Cr6, Nélias, Boucly et Brunet ***(NELI 06)***.

III.3.1 FORMULATION DU PROBLEME

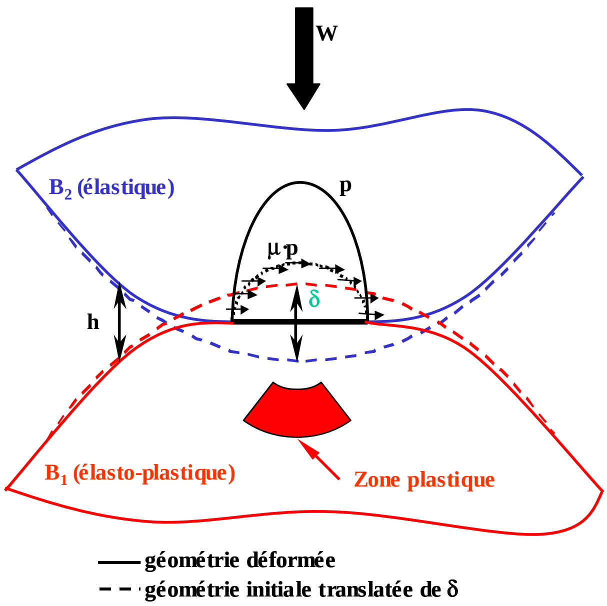


Figure III.8 *Massifs en contact*

Les dimensions du contact sont petites comparées aux rayons de courbure des corps en contact, qui peuvent être considérés comme des espaces semi-infinis. On impose l'hypothèse des petites déformations, ce qui permet de limiter l'analyse plastique au volume où il y a écoulement plastique, en superposant les déformations résiduelles à la partie élastique. Pour le contact élasto-plastique, le déplacement normal de la surface de contact est non seulement induit par la pression normale et les contraintes tangentielles dues au frottement, mais il dépend également de la déformation plastique en sous-couche. Puisque la plasticité est un phénomène irréversible, la relation entre la déformation plastique et la pression de contact doit être incrémentale. Ainsi une formulation incrémentale du problème de contact élasto-plastique est employée. On considère maintenant que l'un des corps en contact a un comportement élasto-plastique, le deuxième ayant un comportement purement élastique.

- Conditions initiales

$$W\,,\ h_i(x,y),\ p(x,y),\ \varepsilon^p \text{, état d'écrouissage,} \tag{III.31}$$

- Conservation de la charge :

$$W+\delta W=\iint_{\Gamma_C}[p(x,y)+\partial p(x,y)]\cdot d\Gamma_C\ , \tag{III.32}$$

- Géométrie des massifs en contact :

$$h(x,y)+dh(x,y)=h_i(x,y)+\delta+\left[u_z^{pr}(x,y)+\delta u_z^{pr}(x,y)\right]^{(B_1+B_2)}+u_z^r(x,y)+\delta u_z^r(x,y), \tag{III.33}$$

$u_z^{pr}(x,y)$: déplacements normaux dus au chargement ;

$u_z^r(x,y)$: déplacements normaux dus aux déformations plastiques ε^p ;

$\delta u_z^r(x,y)$: déplacements normaux dus à l'incrément de déformation plastique $\delta\varepsilon^p$.

- Modèle de plasticité

$$\delta\varepsilon^p=f(p+\delta p,p,\text{état d'écrouissage}) \tag{III.34}$$

- Calcul des contraintes

$$\begin{aligned}\sigma&=\sigma^{pr}(p)+\sigma^r(\varepsilon^p)+\sigma^i(x,y,z)\\ \delta\sigma&=\delta\sigma^{pr}(\delta p)+\delta\sigma^r(\delta\varepsilon^p)\end{aligned}\ , \tag{III35}$$

- Conditions de contact

$$h(x,y)+\delta h(x,y)\geq 0 \quad et \quad p(x,y)+\delta p(x,y)\geq 0$$

$$Si\,h(x,y)+\delta h(x,y)=0 \quad alors \quad p(x,y)+\delta p(x,y)>0\rightarrow contact \tag{III.36}$$

$$Si\,h(x,y)+\delta h(x,y)>0 \quad alors \quad p(x,y)+\delta p(x,y)=0\rightarrow non\,contact$$

III.3.2 APPLICATION DU THEOREME DE RECIPROCITE DE BETTI AU CONTACT ELASTO-PLASTIQUE AVEC FROTTEMENT

Appliquons maintenant le principe de réciprocité au cas du contact élasto-plastique avec un coefficient de frottement μ, pour lequel les forces volumiques sont nulles ou négligeables $(f_i = 0)$. L'état $(u, \varepsilon, \sigma, \mu)$ avec les déformations initiales ε^0 correspond à un massif semi-infini (hypothèse de Hertz), chargé sur une partie Γ_C de la surface Γ par la pression de contact $p(x, y)$ et les contraintes tangentielles $t(x, y)$:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \cdot n_j = -p(x, y) \, sur \, \Gamma_C \\ 0 \, ailleurs \\ t(x, y) = \mu \cdot p(x, y) \end{cases} , \qquad (III.37).$$

Le principe de réciprocité devient alors :

$$\int_{\Gamma_C} \left(u_{zn}^* + \mu \cdot u_{zn}^*\right) p \cdot d\Gamma = -\int_{\Gamma} u_i \cdot \sigma_{ij}^* \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^* \cdot u_i \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^0 \cdot \sigma_{ij}^* \cdot d\Omega , \qquad (III.38).$$

Si les déformations initiales sont des déformations plastiques, notées ε^p, avec $tr(\varepsilon^p) = 0$ à cause de l'incompressibilité de la zone plastique, on peut écrire :

$$\int_{\Gamma_C} \left(u_{zn}^* + \mu \cdot u_{zt}^*\right) p \cdot d\Gamma = -\int_{\Gamma} u_i \cdot \sigma_{ij}^* \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^* \cdot u_i \cdot d\Omega - 2 \cdot \mu \cdot \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ij}^* \cdot d\Omega , \qquad (III.39).$$

a) <u>Calcul des déplacements en surface</u>

Dans l'équation (III.39) considérons que l'état $\left(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*, f_i^*\right)$ correspond à l'application d'une force unitaire normale au point *A* de l'aire de contact. La pression vaut donc $p^*(M) = \delta(M - A)$ en un point *M* de la surface (δ étant la fonction de Dirac).

En utilisant la relation $\sigma_{ij} \cdot n_j = -p_i$ (condition limite), et en considérant que $f_i{*} = 0$ (pas de forces volumiques) et $t_i = \mu \cdot p_i$, on a :

$$-\int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij}^* \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^* \cdot u_i \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} u_i \cdot p_i{*} \cdot d\Gamma = u_z(A) , \qquad (III.40)$$

où l'indice z indique un déplacement normal.

L'équation (III.30) devient :

$$u_z(A) = \int_{\Gamma_c} u^*_{zzn}(M,A)\cdot p_z(M)\cdot d\Gamma + \mu\cdot\int_{\Gamma_c} u^*_{zzt}(M,A)\cdot p_z(M)\cdot d\Gamma + 2\mu\cdot\int_{\Omega_p} \varepsilon^p_{ij}(M)\cdot\varepsilon^*_{ij}(M,A)\cdot d\Omega$$

(III.41),

où Γ_c est la surface chargée, et Ω_p le volume plastique (les intégrales s'annulent partout ailleurs). Dans les termes avec une étoile (*), le premier point (*M*) indique le point de calcul (point d'intégration), le second point (*A*) indique le point d'application de la force unitaire normale, l'indice (z) indique la direction de la force unitaire, et les indices (i) et (j) indiquent les composantes.

D'où :

$$u_z(A) = u^e(A) + u^t(A) + u^r(A)\,, \qquad \text{(III.42).}$$

Le déplacement normal de chaque corps peut alors être exprimé comme une fonction de la pression de contact et des contraintes tangentielles en surface ainsi que des déformations plastiques en sous-couche.

b) <u>Calcul des contraintes en sous-couche</u>

Le principe de réciprocité est également appliqué au calcul du champ de contraintes. Dans l'expression du théorème de réciprocité (éq. III.30), considérons que l'état $\left(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*, f_i^*\right)$ correspond à l'application d'une force unitaire au point B dans le volume. On notera cet état $\left(u^{**}, \varepsilon^{**}, \sigma^{**}, f_k^{**}\right)$ afin d'éviter toute confusion avec l'état précédant défini pour le calcul des déplacements en surface. La force volumique vaut donc $f_k{}^{**}(M) = \delta\left(M - B\right)$ en un point *M* de la surface, *δ( )* étant la fonction de Dirac.

En utilisant les conditions précédentes, avec $p_i{}^{**} = 0$ comme il n'y a pas de pression en surface, on obtient :

$$-\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{**}\cdot u_i\cdot n_j\cdot d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{**}\cdot u_i\cdot d\Omega = \int_{\Omega} f_k^{**}\cdot u_k\cdot d\Omega = u_k(B)\,, \qquad \text{(III.43).}$$

L'équation (III.30)devient alors :

$$u_k(B) = \int_{\Gamma_c} u^{**}_{ki}(M,A)\cdot p_i(M)\cdot d\Gamma + 2\mu\cdot\int_{\Omega_p} \varepsilon^p_{ij}(M)\cdot\varepsilon^{**}_{kij}(M,A)\cdot d\Omega\,, \qquad \text{(III.44).}$$

D'où :

$$u_k(B) = u_k^e(B) + u_k^r(B)\ .$$

On utilise la loi de Hooke pour trouver l'expression des contraintes :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^r\right) = C_{ijkl} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) - \varepsilon_{kl}^r\right), \qquad \text{(III.45).}$$

On peut noter que le déplacement élastique se décompose en deux parties : le déplacement dû à la pression, et celui dû au cisaillement. Finalement les composantes du tenseur des contraintes sont obtenues en sommant la contribution des contraintes élastiques et résiduelles (plastiques) :

$$\sigma_{ij}(B) = \sigma_{ij}^n(B) + \sigma_{ij}^t(B) + \sigma_{ij}^r(B)\,, \qquad \text{(III.46).}$$

Cette formulation a été très récemment étendue au cas thermo-élasto-plastique par Boucly et al. ***(BOUC 05)*** lorsque la surface est soumise en plus à un flux de chaleur.

III.3.3 <u>DEPLACEMENTS RESIDUELS EN SURFACE</u>

Le calcul du déplacement résiduel en surface nécessaire à la détermination de $h_i(x, y)$ dans l'équation (III.33) nécessite la discrétisation de la zone plastique Ω_p en N_v cuboïdes Ω_{cn} Le déplacement selon l'axe normal u_z généré par ces N_v cuboïdes élémentaires peut s'écrire :

$$u_z^r(A) = 2\mu \sum_{n=1}^{N_V} \int_{\Omega_{cn}} \varepsilon_{ij}^p(M) \cdot \varepsilon_{3ij}^*(M, A) \cdot d\Omega\,, \qquad \text{(III.46).}$$

Si l'on considère que les déformations plastiques sont constantes dans les cuboïdes, on a :

$$u_z^r(A) = 2\mu \sum_{n=1}^{N_V} \varepsilon_{ij}^p(n) \cdot \int_{\Omega_{cn}} \varepsilon_{zij}^* \cdot d\Omega = \sum_{n=1}^{N_V} \varepsilon_{ij}^p(n) \cdot D_{ij}^r(n)\,, \qquad \text{(III.47),}$$

avec : $D_{ij}^r = \mu \iiint_{\Omega_{cn}} (u_{3i,j}^* + u_{3j,i}^*) \cdot dx\,dy\,dz\,,$ (III.48).

Le calcul des fonctions D_{ij}^r est donné en Annexe A.

III.3.4 <u>DEPLACEMENTS ELASTIQUES EN SURFACE</u>

La même discrétisation que précédemment est utilisée. Les termes correspondants au déplacement élastique en surface suivant la direction normale deviennent ainsi :

$$
\begin{aligned}
u_z^n(A) &= \sum_{n=1}^{Ns} \int_{\Gamma_{cn}} u_{zi}^{n*}(M,A) \cdot p_i(M) \cdot d\Gamma = \sum_{n=1}^{Ns} \int_{\Gamma_{cn}} u_{zz}^{n*}(M,A) \cdot p_z(M) \cdot d\Gamma \\
u_z^t(A) &= \sum_{n=1}^{Ns} \int_{\Gamma_{cn}} u_{zi}^{t*}(M,A) \cdot p_i(M) \cdot d\Gamma = \sum_{n=1}^{Ns} \int_{\Gamma_{cn}} u_{zz}^{t*}(M,A) \cdot p_z(M) \cdot d\Gamma
\end{aligned}
\quad , \qquad \text{(III.49).}
$$

Les déplacements tangentiels dus aux forces de frottement sont négligés. Finalement, comme la pression est considérée constante au sein d'un élément de surface, les équations (III.49) deviennent :

$$
\begin{aligned}
u_z^n(A) &= \sum_{n=1}^{Ns} p_z(n) \int_{\Gamma_{cn}} u_{zz}^{n*}(M,A) \cdot d\Gamma = \sum_{n=1}^{Ns} p_z(n) \cdot D^n(n) \\
u_z^t(A) &= \sum_{n=1}^{Ns} p_z(n) \int_{\Gamma_{cn}} u_{zz}^{t*}(M,A) \cdot d\Gamma = \sum_{n=1}^{Ns} p_z(n) \cdot D^t(n)
\end{aligned}
\quad , \qquad \text{(III.50).}
$$

où D^n et D^t sont des coefficients d'influence. L'expression de ces coefficients d'influence a été développé entre autres par Vergne ***(VERG 85)***.

Notons qu'en régime élastique si les deux massifs en contact ont les mêmes modules d'Young et coefficients de Poisson alors la composante normale du déplacement due aux contraintes de cisaillement à l'interface est nulle ***(JOHN 85).***

III.3.5 <u>TENSEUR DES CONTRAINTES – EFFET DE LA PLASTICITE, EFFET DU CHARGEMENT (EFFET ELASTIQUE)</u>

Les contraintes résiduelles en sous-couches sont calculées en suivant la méthode proposée par Chiu, qui considère une zone cuboïdale avec des déformations initiales uniformes (eigenstrains) et entourée par un espace infini élastique Chiu ***(CHIU 77)*** ou un demi-espace Chiu ***(CHIU 78)***. Le calcul du champ de contraintes élastiques dû aux pressions de contact est plus classique et il a été présenté dans le paragraphe II.5.

III.3.6 <u>ALGORITHME</u>

L'algorithme développé pour résoudre le problème de contact incrémental élasto-plastique avec frottement est présenté en fig. III.9. Cet algorithme est similaire à celui présenté par Jacq et al. ***(JACQ 02)***. L'état initial peut inclure des déformations résiduelles. On résout en premier lieu le contact élastique avec frottement en utilisant la méthode CG-DCFFT, avec une séparation initiale des corps quelconque. Le modèle de plasticité est alors utilisé pour calculer l'incrément de déformation plastique en considérant aussi les déformations dues au frottement, et permettant le calcul de l'incrément de déplacement résiduel. Cet incrément de déplacement résiduel, qui est une fonction des déformations plastiques, est alors calculé et est comparé à celui trouvé lors du pas précédent. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que l'incrément de déplacement résiduel ait convergé. Les déformations plastiques, la charge, la pression, les déplacements résiduels en surface et les paramètres d'écrouissage sont alors augmentés de leur incrément afin de définir les nouvelles conditions initiales pour le pas de chargement suivant.

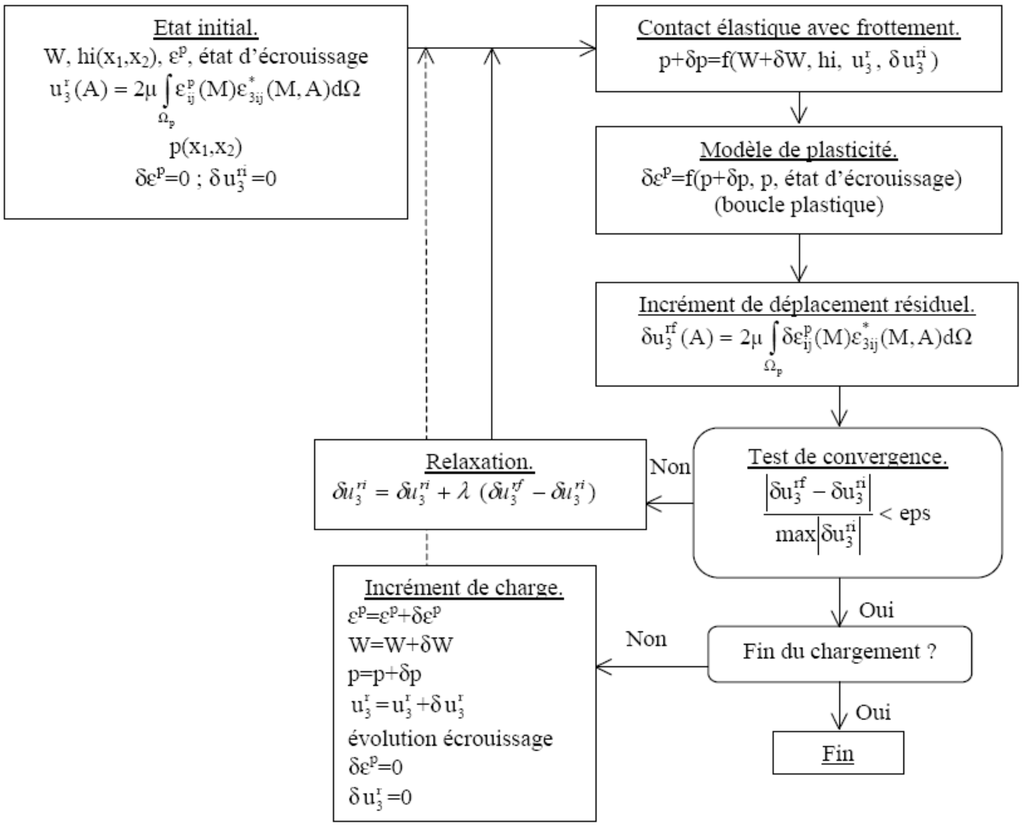


Fig. III.9 *Algorithme de résolution du problème de contact élasto-plastique*

Comme souligné figure III.9 il est nécessaire de résoudre en premier lieu le problème de contact élastique, dans lequel la géométrie initiale peut être modifiée pour prendre en compte les déformations permanentes de la surface dues aux déformations résiduelles en sous-couche. On a également besoin de connaître les déplacements normaux en surface dus au frottement. De manière plus conventionnelle, on a également besoin de connaître les déplacements élastiques en surface. Finalement le champ de contraintes est calculé en considérant la contribution des déformations résiduelles, de la distribution de pression et des contraintes tangentielles à l'interface.

Le calcul des déformations plastiques est basé sur le travail de Fotiu et Nemat-Nasser ***(FOTI 96)*** qui ont développé un algorithme d'intégration universel des équations constitutives de l'élasto-plasticité, comprenant l'écrouissage isotrope et cinématique, ainsi que l'adoucissement thermique. Les différents développements sont présentés par Nélias, Boucly et Brunet ***(NELI 06)*** et aboutissent à la formulation itérative d'un algorithme de plasticité en cinq étapes (Annexe B). Cette méthode est inconditionnellement stable et précise. Nous nous limiterons au cas de la méthode de return mapping avec un schéma constitué d'un prédicteur élastique et d'un correcteur plastique.

III.4 VALIDATION PAR COMPARAISON AVEC LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

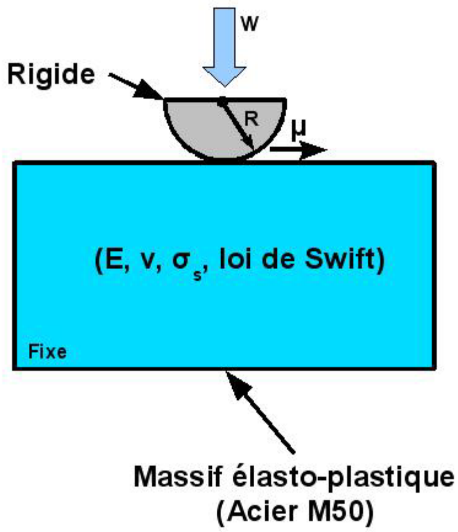


Figure III.10 *Modèle EF simplifié*

Les résultats calculés avec notre approche, ont été comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Un modèle très simple d'un contact entre une sphère rigide et un massif élasto-plastique en acier (M50) a été analysé sous chargement normal et tangentiel (fig. III.10). Le comportement plastique du massif a été modélisé avec la loi d'écrouissage de Swift. Les données sont énumérées dans le tableau III.2.

Tableau III.2 Données initiales

Rayon de la bille	Charge	Constantes de matériau du corps en acier			
R [mm]	W [N]	E [GPa]	ν	σ_s [GPa]	Loi de Swift
10	800	210	0,3	1,2	B=1280 C=4 n=0,095

D'après la théorie de Hertz la charge de 800 N correspond à une pression de Hertz de 4,35 GPa et un rayon du cercle de contact de 296 µm. Le modèle éléments finis 3D a été réalisé avec ABAQUS. Des études récentes (***STEP 00***) ont montré qu'un massif de dimension finie ≈20a suffit pour obtenir une bonne approximation de champ de contraintes dans un massif semi-infini. Par conséquent les dimensions de notre modèle sont ≈40a au long de contact et ≈20a sur la profondeur. Les éléments utilisés sont des éléments 3D (brique) linéaires à 8 nœuds C3D8. Parce que la zone de contact est petite par rapport aux dimensions du massif élasto-plastique, le maillage a été raffiné dans la zone de contact pour aboutir à un minimum de 20 éléments en contact sur chaque axe (fig. III.11). Les dimensions pour le plus petit élément sont de 27 µm sur chaque axe. Le nombre total d'éléments est 113 035 dont 54 000 éléments dans la région maillée finement.

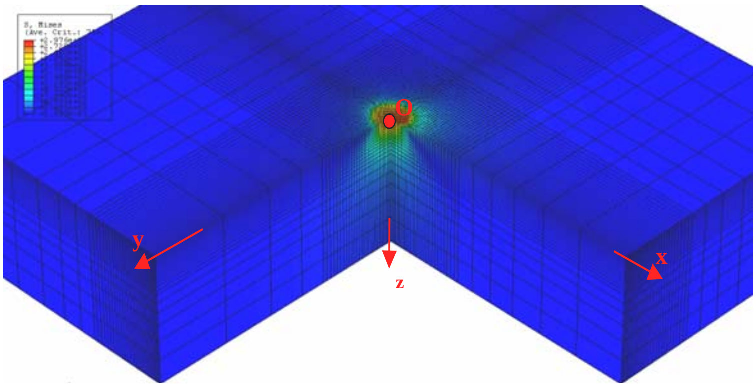


Figure III.11 *Maillage du massif élasto-plastique*

Les résultats sont montrés pour le cas élastique dans la figure III.12 et pour le cas élasto-plastique dans les figures III.13, 14 et 15. Les variations de pression de contact le long de l'axe de contact Ox et de la contrainte de von Mises sous charge selon la profondeur Oz sont tracées pour les cas élastique et élasto-plastique. Pour le cas élasto-plastique la variation de la déformation plastique sur la profondeur Oz est aussi montrée. Les figures correspondent respectivement à un coefficient de frottement de 0, 0,2 et 0,4.

Les résultats obtenus par les deux méthodes de calculs sont assez proches. Toutefois il apparaît une différence pour la distribution de pression et la contrainte équivalente de Von Mises, écart qui s'amplifie avec le coefficient de frottement (ici supposé uniforme). Cette différence est déjà présente pour les simulations élastiques, et a plutôt tendance à s'atténuer pour les simulations élasto-plastiques. Elle est attribuée à l'effet du couplage entre les effets normaux et tangentiels qui n'est pas prise en compte dans la résolution du problème de contact, indépendamment de la plasticité.

Ces résultats permettent de valider globalement notre modèle élasto-plastique. Toutefois, en présence d'un coefficient de frottement élevé et pour 2 massifs aux propriétés élastiques ou plastiques notablement différentes il conviendrait de modifier l'algorithme de contact pour résoudre les problèmes normaux et tangentiels de manière couplée afin d'améliorer encore la qualité de la solution.

Pression de contact sur OX

Contrainte de von Mises sur OZ

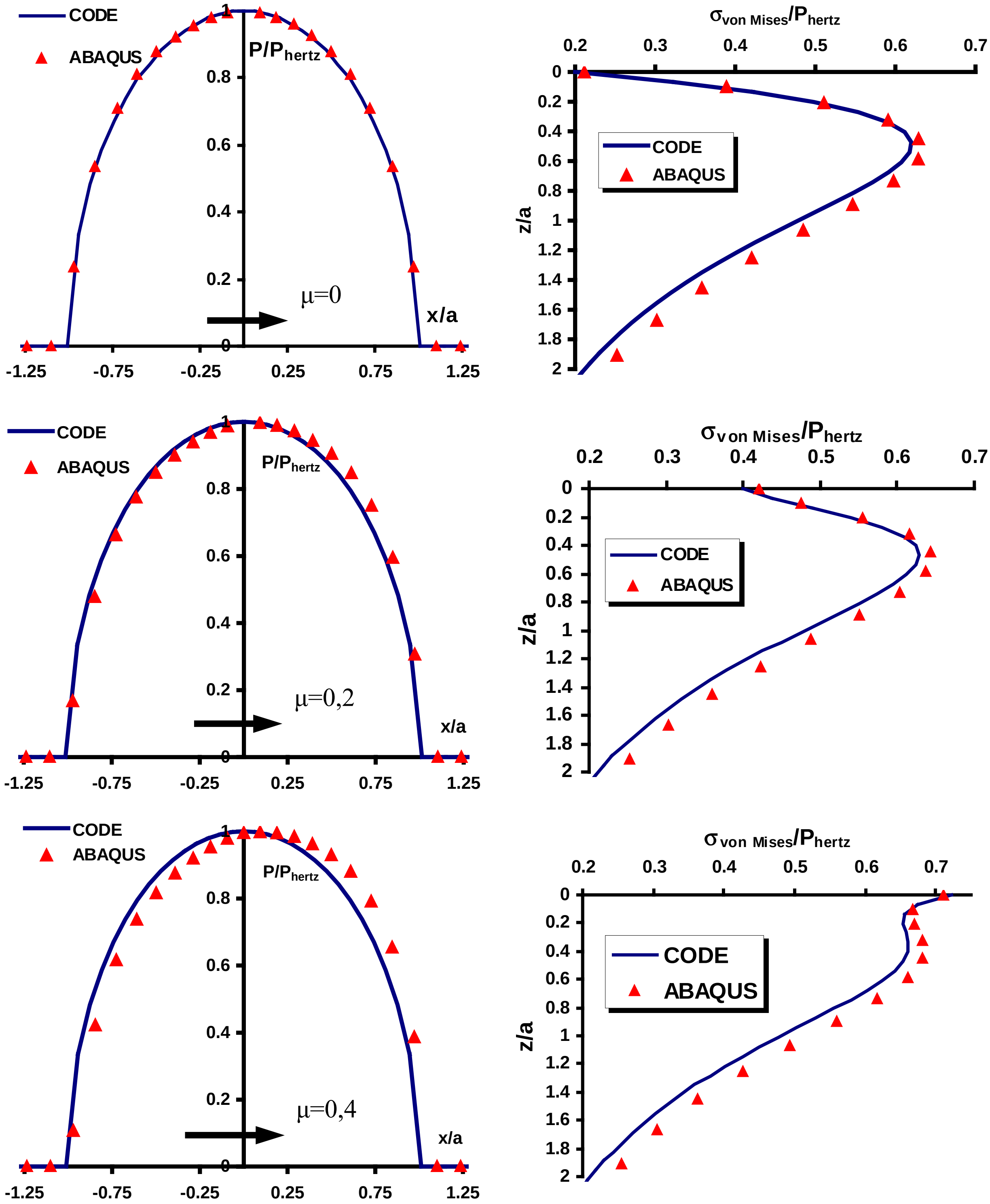
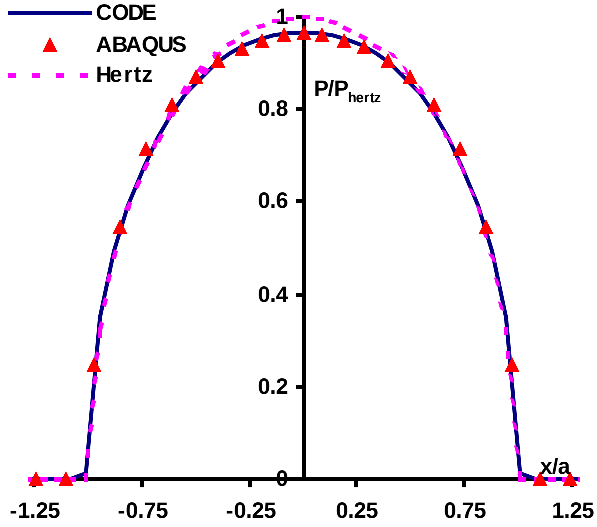
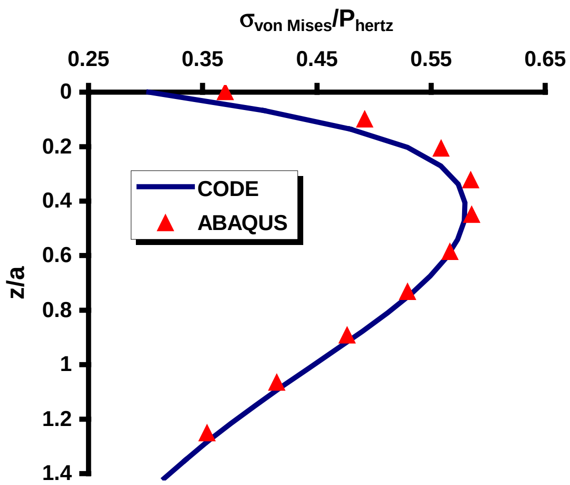


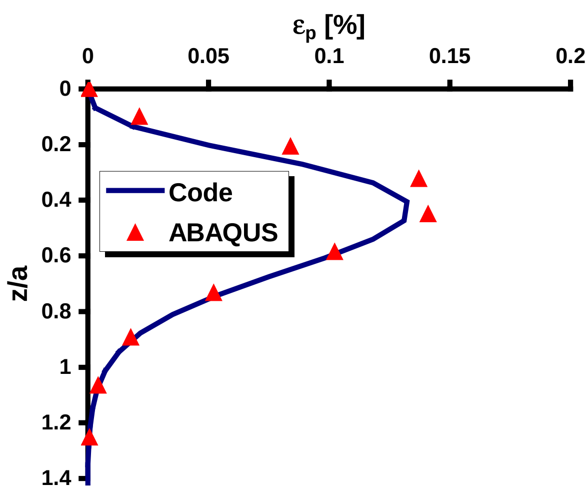
***Figure III.12** Contact élastique : Code vs Abaqus*



Pression



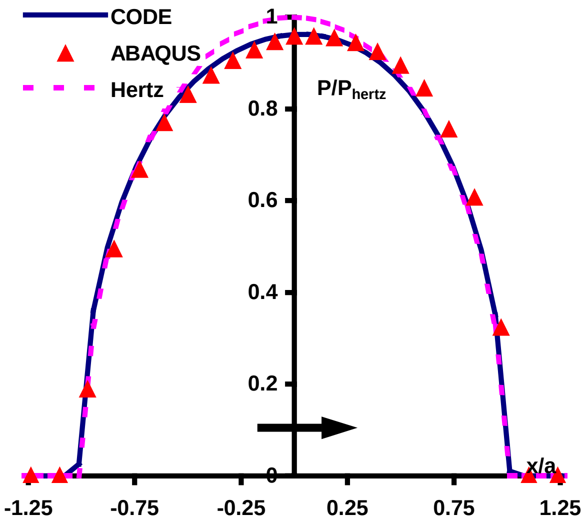
Contrainte de von Mises sous charge



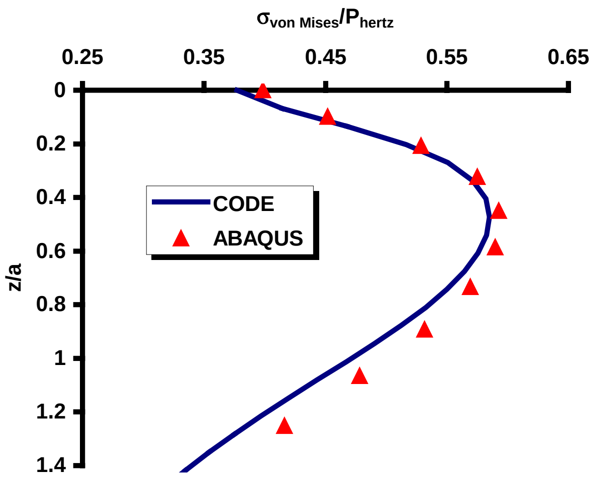
Déformation plastique

Figure III.13 *Contact élasto-plastique*

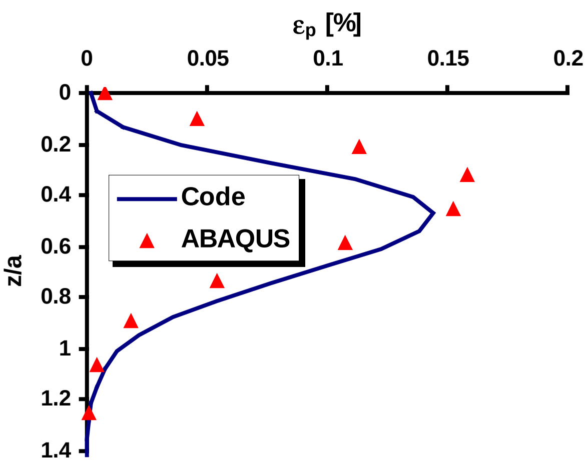
Code vs Abaqus: μ =0



Pression



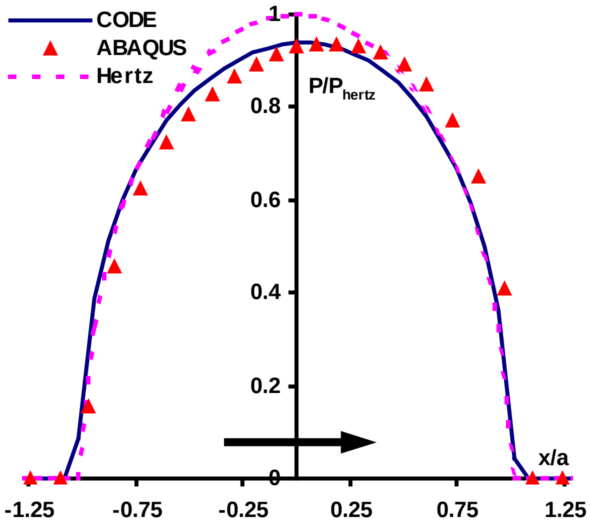
Contrainte de von Mises sous charge



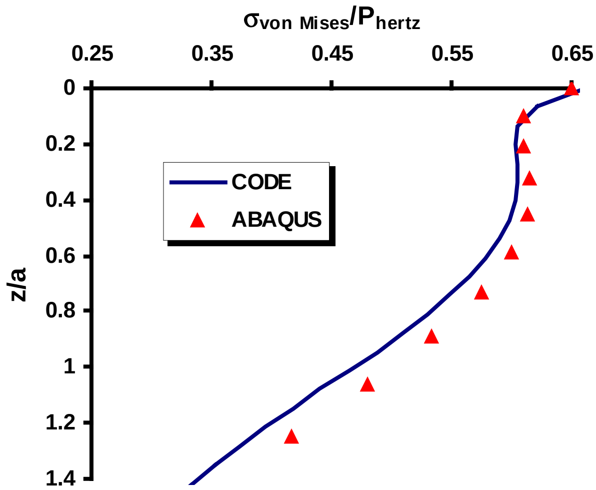
Déformation plastique

Figure III.14 *Contact élasto-plastique*

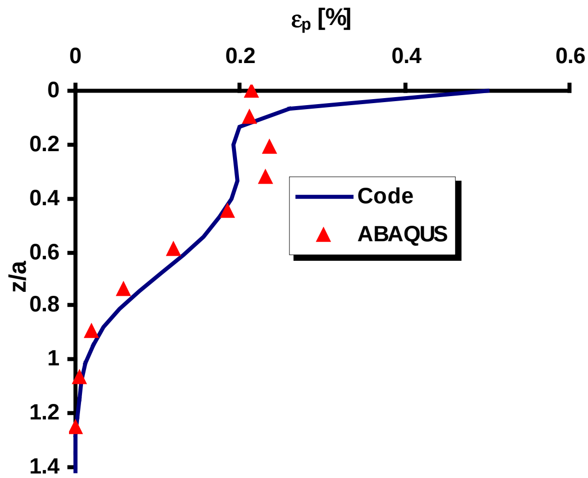
Code vs Abaqus: μ =0,2



Pression



Contrainte de von Mises sous charge



Déformation plastique

Figure III.15 *Contact élasto-plastique*
Code vs Abaqus: μ =0,4

CHAPITRE IV
SIMULATIONS NUMERIQUES ET DISCUSSION

IV.1 INFLUENCE DU CHARGEMENT TANGENTIEL

Pour étudier l'influence du chargement tangentiel dans un contact élasto-plastique, le problème de contact circulaire avec frottement est étudié. Dans le cas simplement élastique, la solution analytique est connue. Des simulations ont été réalisées en utilisant les modèles élastique et élasto-plastique avec un coefficient de frottement variant de 0 à 0,5. On constate alors l'effet du frottement sur la distribution des pressions de contact et sur l'état des contraintes en sous-couche en fin de chargement et après déchargement.

Le problème choisi correspond au contact d'une sphère de rayon 10 mm sur un demi-espace (figure IV.1). La sphère a un comportement élastique et le massif un comportement élasto-plastique. Les propriétés élastiques sont E = 210 GPa pour le module de Young et $\nu = 0,3$ pour le coefficient de Poisson.

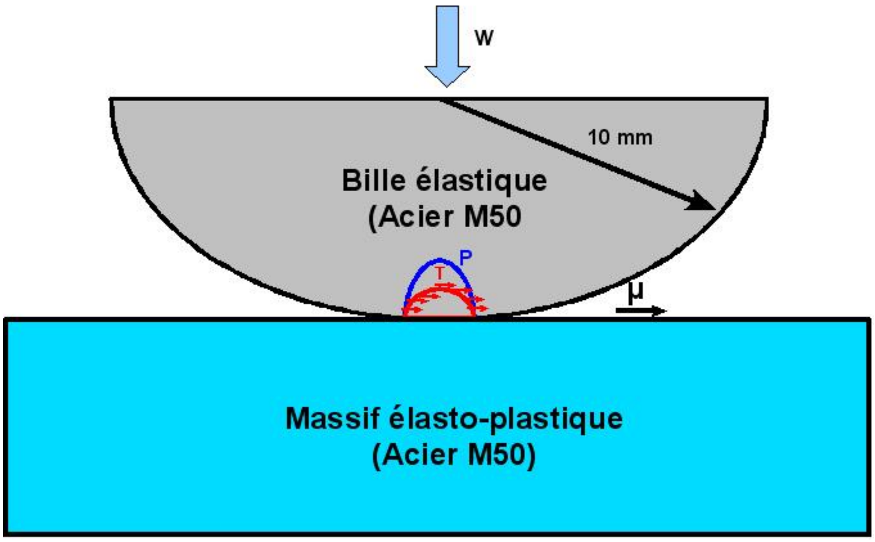


Figure IV.1 *Modèle du contact élasto-plastique*

Un modèle de plasticité avec écrouissage isotrope et le critère de von Mises ont été utilisés. La loi d'écrouissage est décrite par la loi de Swift, Eq. (IV.1), dont les paramètres sont B = 1280 MPa, C = 4 et n = 0,095, les déformations plastiques ε^p étant exprimées en micro déformations. Ces paramètres correspondent à l'acier à outils M50.

$$\sigma_{VM} = B \cdot (C + \varepsilon^p)^n \qquad \text{(IV.1)}$$

Dans les simulations suivantes la charge normale est augmentée graduellement jusqu'à une charge maximale de 5000 N correspondant à une pression de Hertz de 5,05 GPa.

Le modèle macroscopique de frottement de Coulomb (solide sur solide) est utilisé. Dans le modèle de frottement de Coulomb, lorsqu'un solide appuie sur un autre avec une force F normale à la surface de contact, il existe une réaction R qui s'oppose au glissement (force exercée par la surface sur le solide), qui est indépendante de l'aire de contact et qui ne dépend que de F et d'un coefficient de frottement solide μ caractéristique des deux matériaux en contact.

$$R = -\mu \cdot F \tag{IV.2}$$

Dans notre modèle, toute la zone de contact est supposée en glissement. Ainsi en étendant l'équation (IV.2) à la distribution de pression normale P, la distribution de contraintes tangentielles s'écrit :

$$\begin{cases} T(i,j) = -\mu \cdot P(i,j) \quad \text{si } (i,j) \in A_c \\ 0, \ \text{sinon} \end{cases} \tag{IV.3}$$

La figure IV.2 montre les résultats d'une analyse élasto-plastique pour une pression de Hertz équivalente allant jusqu'à 5,05 GPa. Les points 1 à 5 correspondent à une charge normale équi-répartie de 1000 à 5000 N. Ici et par la suite le chargement tangentiel est proportionnel au chargement normal pendant la charge et la décharge. Il s'agit également uniquement du cas d'un chargement vertical (type indentation), mais avec un frottement uniforme et selon une direction (x) et non pas radial.

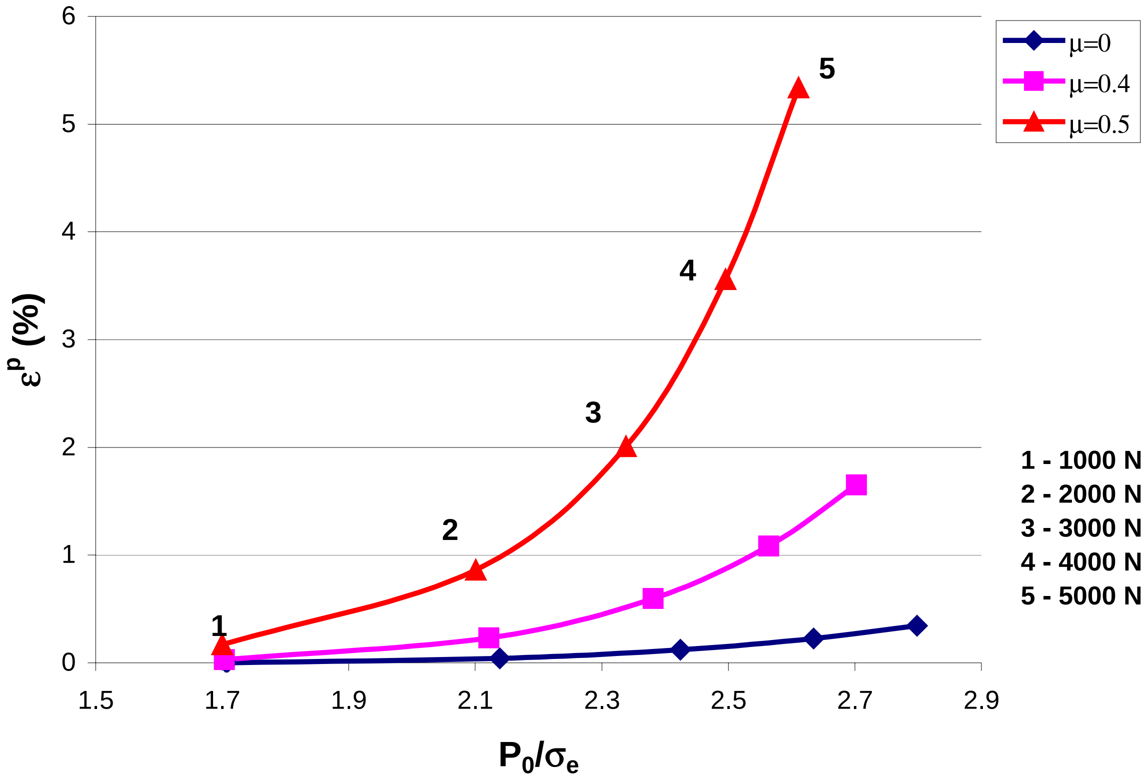
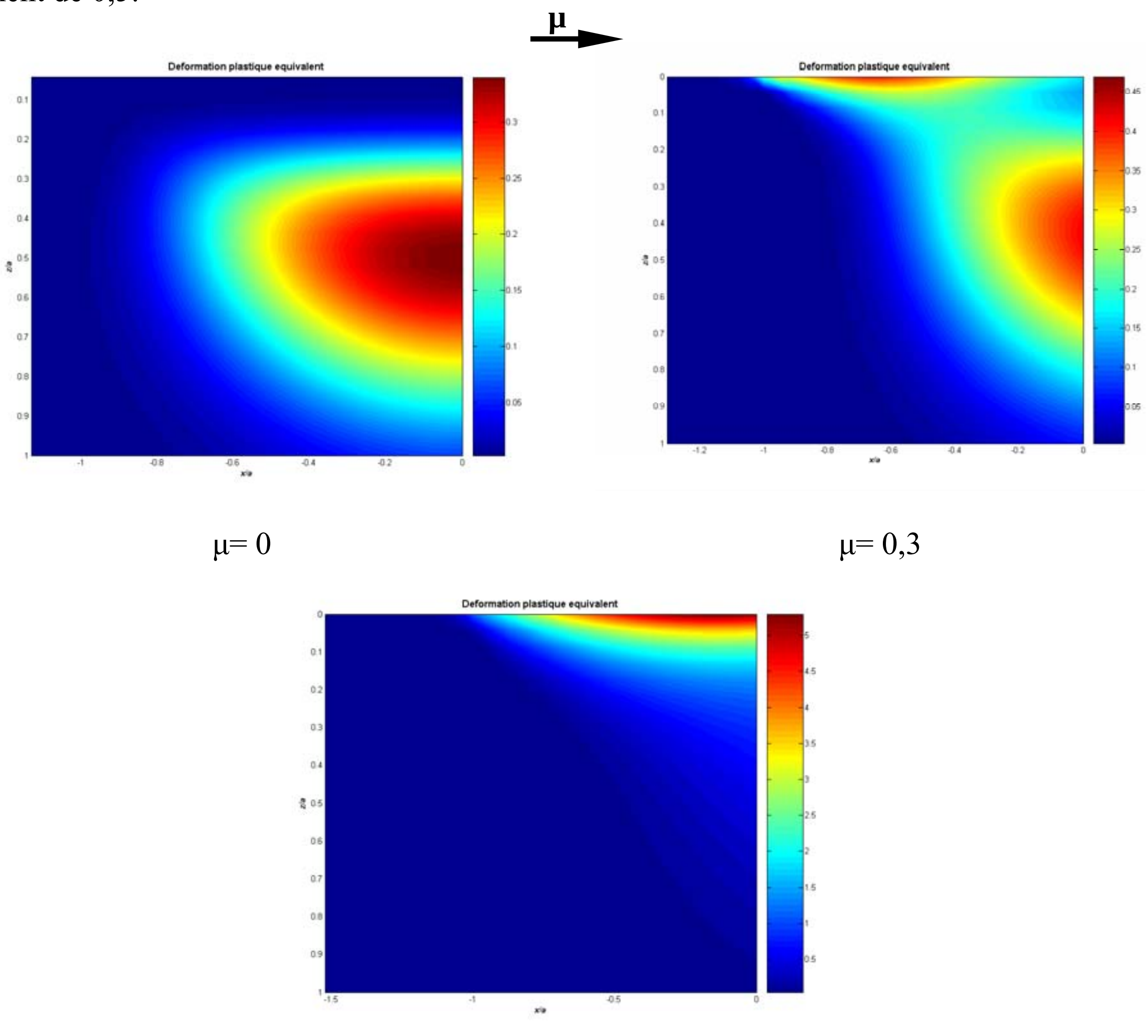


Figure IV.2 *Déformation plastique équivalente maximale fonction de la pression normale de contact adimensionnée par la micro-limite d'élasticité, pour différents coefficients de frottement*

La déformation plastique équivalente maximum, ε^p, est tracée en fonction de la pression maximale de contact adimensionnée par la micro-limite d'élasticité. La limite d'élasticité considérée est la valeur de la micro-limite d'élasticité, 1732 MPa, donnée par l'équation (IV.1) pour une déformation d'essai de 20 x 10^{-6} utilisée pour définir la limite d'endurance des aciers à haute limite d'élasticité, Lamagnère et al. ***(LAMA 98).***

La déformation plastique équivalente, ε^p, est 0,34 % à $P/\sigma_e = 2{,}8$ pour une pression de Hertz P_0 = 5,05 GPa dans le cas sans frottement. Elle atteint ≈2% pour le même chargement normal avec un coefficient de frottement de 0,4 et dépasse légèrement 5% pour un coefficient de frottement de 0,5.



μ= 0 μ= 0,3

μ= 0,5

Figure IV.3 *Déformation plastique équivalente*

La figure IV.3 montre l'évolution de la déformation plastique dans le plan moyen de contact pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Notons que le frottement s'exerce sur la surface supérieure de la gauche vers la droite, c'est-à-dire selon les x positifs, ici ainsi que dans toutes les figures qui suivront. Le chargement tangentiel implique une sollicitation asymétrique sur la surface de contact. La zone plastique croissante progresse également asymétriquement vers la surface du massif. Pour un chargement tangentiel suffisamment grand (μ>0,3) la zone plastique atteint par la suite la surface du massif. Le disque élastique central surplombe la zone plastique et l'augmentation ultérieure de la charge tangentielle substituera ce disque élastique par une zone plastique.

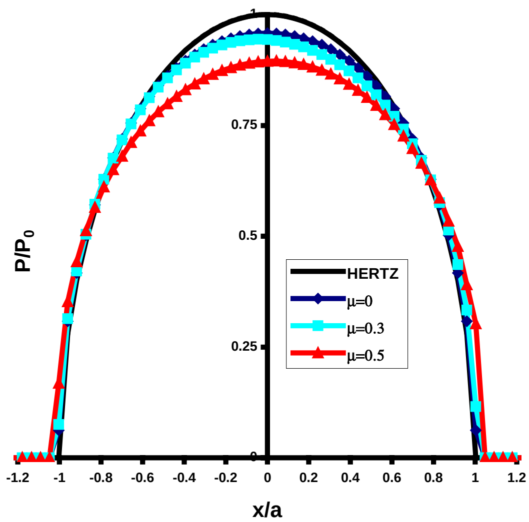


Figure IV.4 *Pression normale de contact (W=5000 N)*

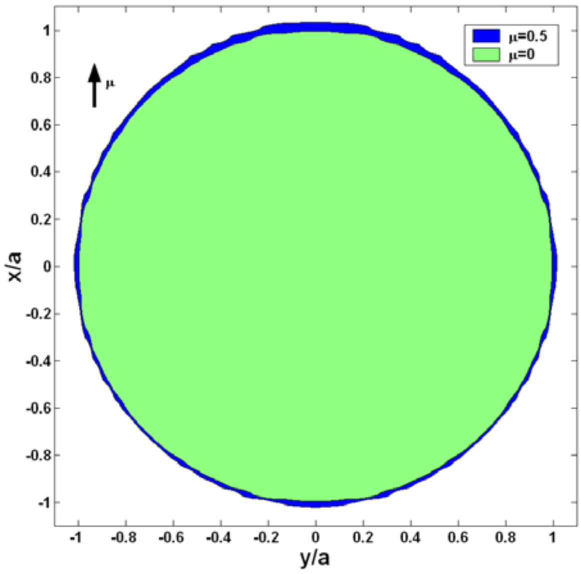
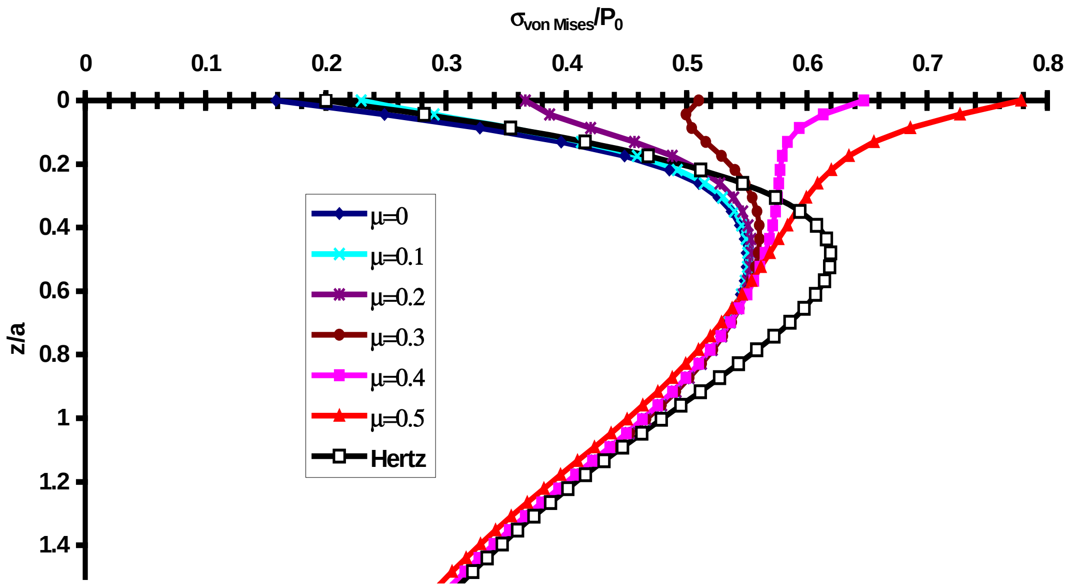


Figure IV.5 *Aire réelle de contact*

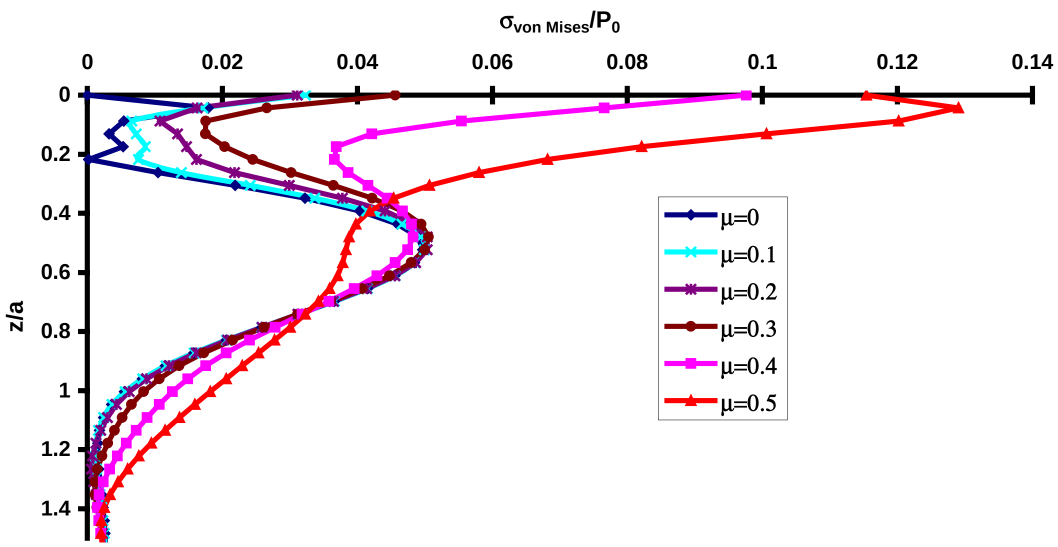
L'évolution de la pression de contact avec le coefficient de frottement est montrée dans la figure IV.4 pour une charge normale de 5000 N. La pression normale de contact diminue avec l'augmentation du coefficient de frottement. L'aire réelle de contact augmente. Cette extension est asymétrique et s'amplifie selon la direction liée au frottement (figure IV.5).

La figure IV.6a montre la variation de la contrainte de von Mises sous charge adimensionnée par la pression de Hertz, en profondeur et suivant l'axe de symétrie. La solution analytique pour le cas élastique (Hertz) est aussi présentée pour comparaison. On peut voir que pour un coefficient de frottement inférieur à 0,3, le niveau de contraintes reste maximal sous la surface de contact et le maximum atteint la surface pour 0,4. La figure IV.6b présente ces mêmes contraintes mais après décharge. Il s'agit alors des contraintes résiduelles. On notera la décroissance de la valeur de la contrainte résiduelle de von Mises à la profondeur de Hertz avec l'augmentation du coefficient de frottement, qui accompagne l'augmentation significative de cette contrainte équivalente en surface. Cette dernière atteint 500 MPa pour μ=0,4.

La position et la valeur de la contrainte maximale de von Mises adimensionnée par le rayon et la pression de Hertz, respectivement, sont présentées dans le tableau IV.1 et sur la figure IV.7, pour une variation du coefficient de frottement de 0 à 0,5. Ces résultats amènent les commentaires suivants. Premièrement la contrainte maximale de von Mises augmente avec le chargement tangentiel. Deuxièmement, en profondeur, le maximum initialement trouvé à z/a=0,43 (μ=0) commence à remonter vers la surface pour un chargement tangentiel de 20% et atteint la surface pour un chargement tangentiel de 32%. Troisièmement, le maximum se décale suivant la direction du frottement (suivant x) jusqu'à ce que la contrainte maximale atteigne la surface (vers μ=0,32). La position où cette contrainte est maximale bascule alors de l'autre côté à l'abscisse sans dimension x/a=-0,654, puis se rapproche du centre lorsque le coefficient de frottement continue à augmenter.



(a)



(b)

Figure IV.6 *Contrainte de von Mises suivant l'axe de symétrie sous charge (a) et résiduelle (b)*

Tableau IV.1	Hertz	μ=0	μ=0,1	μ=0,2	μ=0,3	μ=0,32	μ=0,4	μ=0,5
$\sigma_{vm\ max}/P_0$	0,62	0,549	0,551	0,557	0,567	0,579	0,658	0,779
x/a	0	0	0,13	0,218	0,349	-0,654	-0,349	-0,0872
y/a	0	0	0	0	0	0	0	0
z/a	0,48	0,43	0,48	0,48	0,436	0	0	0

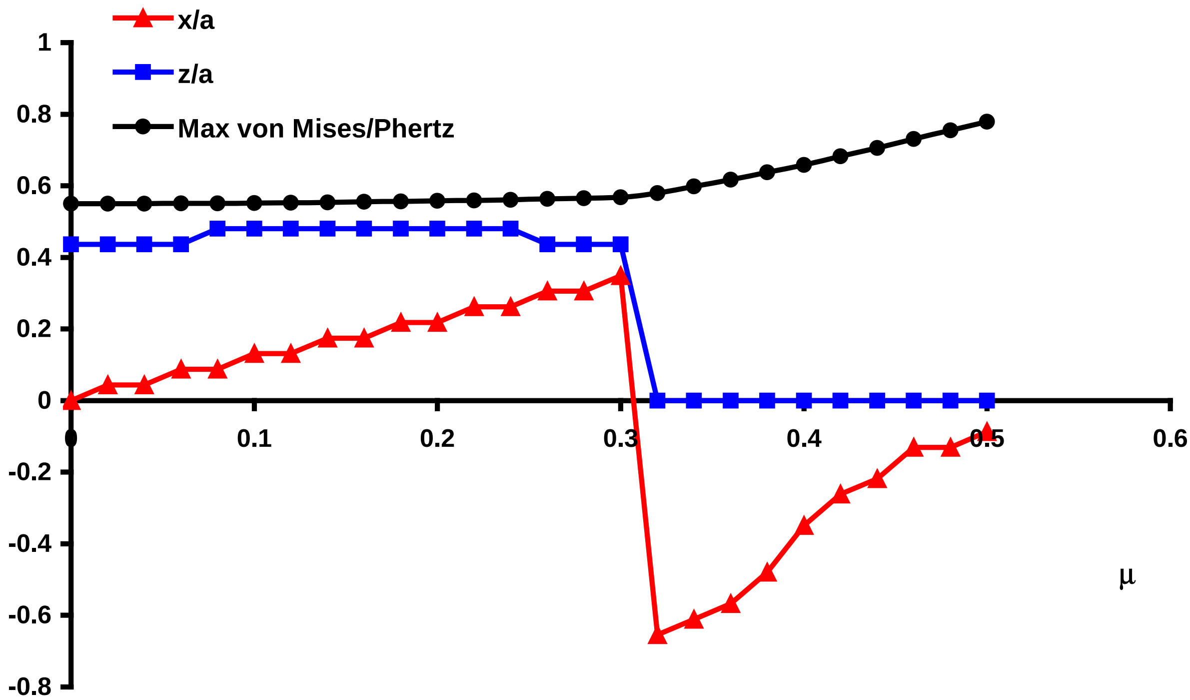
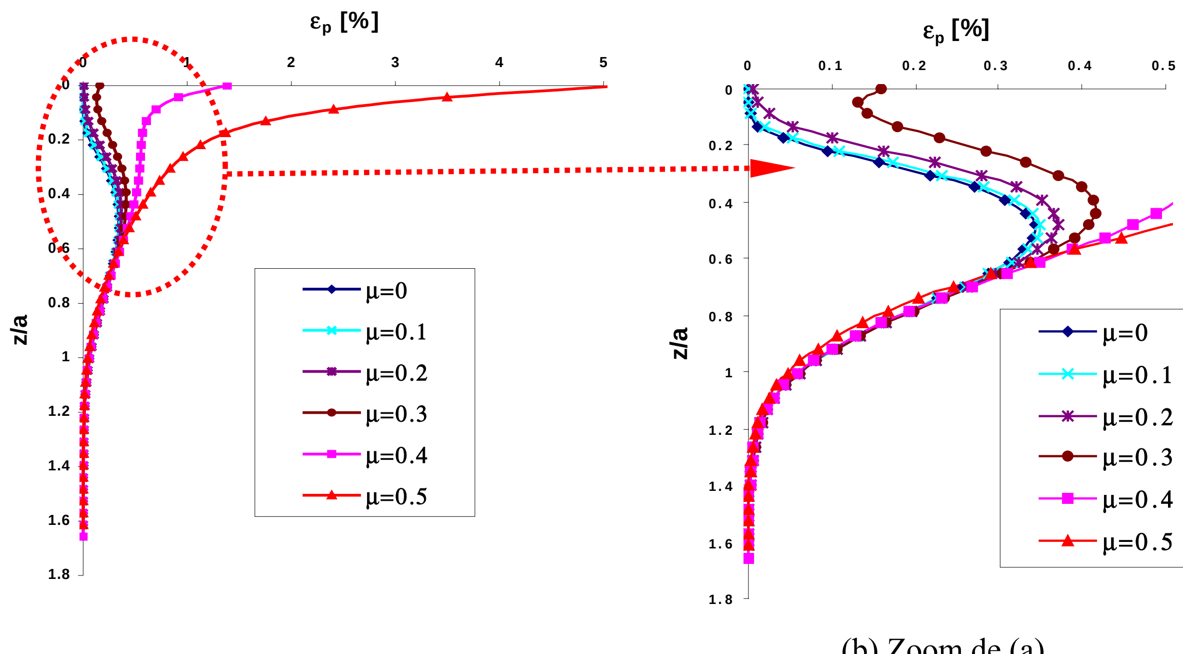


Figure IV.7 *Variation de la valeur et de la position de la contrainte $\sigma_{von\ Mises}$ maximale (sous charge)*

Tableau IV.2	μ=0	μ=0,1	μ=0,2	μ=0,3	μ=0,32	μ=0,4	μ=0,5
ε^p [%]	0,34	0,35	0,39	0,47	0,556	1,65	5,33
x/a	0	0,13	0,218	0,349	-0,654	-0,436	-0,13
y/a	0	0	0	0	0	0	0
z/a	0.43	0,48	0,48	0,436	0	0	0

Les positions et les valeurs de la déformation plastique équivalente maximale pour plusieurs coefficients de frottement sont résumées dans le tableau IV.2. Le comportement de la déformation plastique équivalente maximale est similaire à celui de la contrainte maximale de von Mises sous charge. Ainsi, elle croit et se déplace vers la surface avec l'augmentation du coefficient de frottement.

La variation de la déformation plastique équivalente en profondeur suivant l'axe de symétrie est présentée dans la figure IV.8. On remarque en surface une forte augmentation de cette déformation inélastique équivalente lorsque le coefficient de frottement excède 0,3. La pression hydrostatique – définie par P_{HYDR} = - trace[σ]/3 – après décharge est présentée dans les figures IV.9 et IV.10. La figure IV.9 montre différents profils obtenus sous chargement normal pur pour plusieurs niveaux de chargement. On notera 2 zones en compression ($P_{HYDR} > 0$), en surface et à la profondeur de Hertz, entre lesquelles s'intercale une zone en traction qui aurait pour effet de favoriser la propagation d'une éventuelle fissure de fatigue entre ces 2 régions. La figure IV.10 illustre l'effet du frottement qui décale les profils de pression hydrostatique vers la droite, ce qui traduit une augmentation des contraintes de compression en surface, une diminution de celles-ci à la profondeur de Hertz (bien visible pour le cas μ=0,5), et une suppression de la zone en tension lorsque μ excède 0,3.



(a) (b) Zoom de (a)

Figure IV.8 *Déformation plastique équivalente le long de l'axe de symétrie*

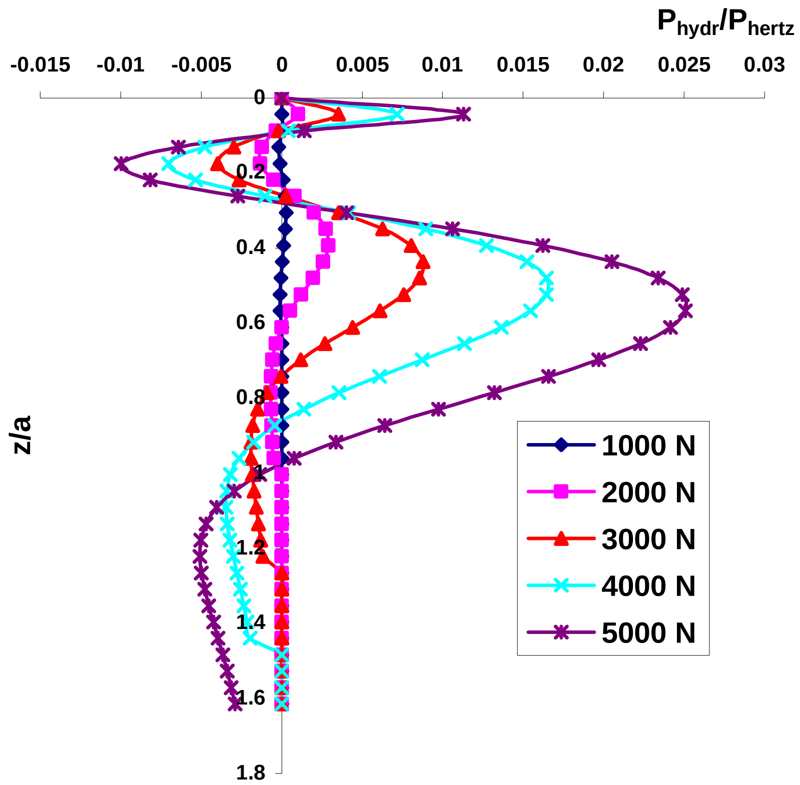


Figure IV.9 *Pression hydrostatique après décharge le long de l'axe de symétrie pour différentes charges normales pures (μ=0)*

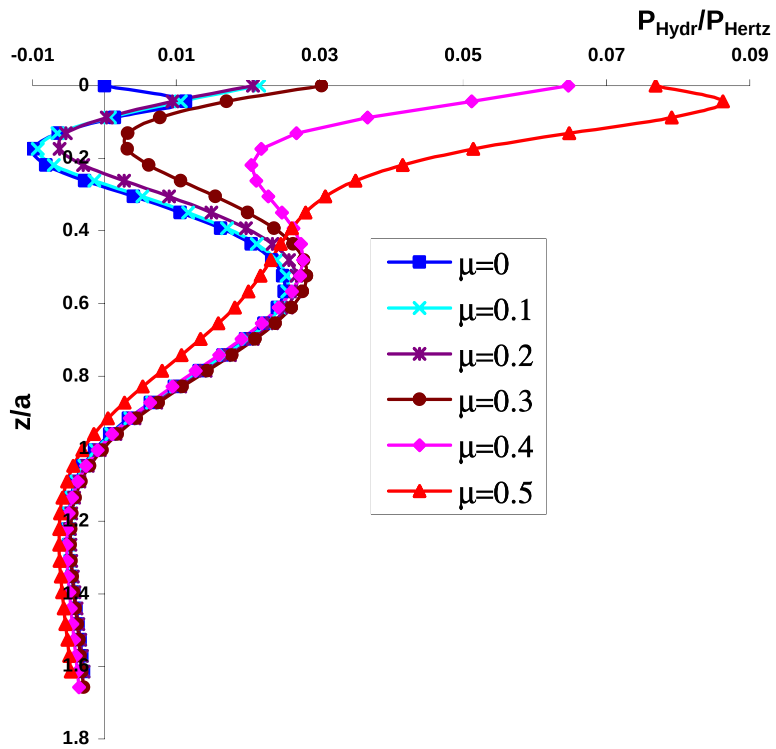


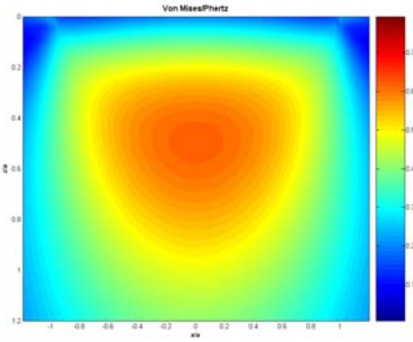
Figure IV.10 *Pression hydrostatique après décharge le long de l'axe de symétrie pour différents coefficients de frottement (charge normale 5000 N)*

Une coupe du champ de contraintes de von Mises, adimensionnées par la pression de Hertz, dans le plan y = 0 en fin de chargement est présentée dans la figure IV.11. Les surfaces sont tracées pour le cas élastique (figure IV.11a) et élasto-plastique pour un coefficient de frottement variant de 0 à 0,5 (figure IV.11b-g). Un résultat classique est que la plasticité tend à atténuer le niveau de contraintes, sans vraiment changer la profondeur à laquelle la contrainte maximale est trouvée, comme on peut le voir en comparant les figures IV.11a et IV.11b. Il est intéressant d'observer la compétition entre les contraintes dues aux efforts normaux et celles produite par frottement, voir figures IV.11c-g. Pour un coefficient de frottement non nul mais inférieur à 0,3, la zone où les contraintes sont maximales se rapproche de la surface tout en se déplaçant légèrement dans la direction liée au chargement tangentiel. La contrainte trouvée à la profondeur de Hertz augmente aussi.

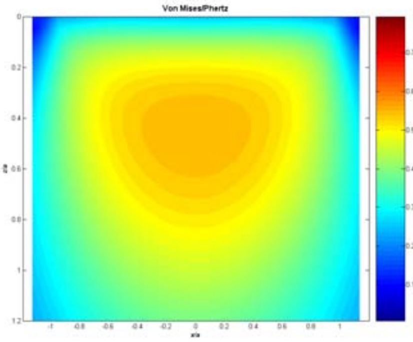
Pour un chargement tangentiel plus important (>0,3), l'effet des contraintes de cisaillement devient prépondérant et les contraintes totales sont plus faibles à la profondeur de Hertz qu'à la surface de contact.

Figure IV.11 *Contraintes de von Mises sous charge adimensionnées par la pression de Hertz pour le cas élastique (a) et élasto-plastique (b-g) avec μ=0 - 0,5*

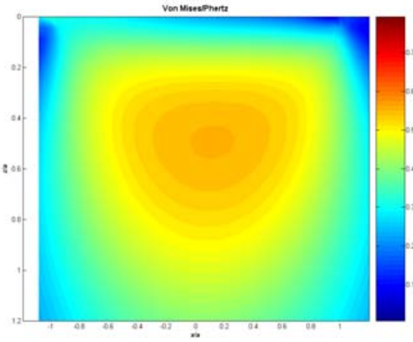
(plan y = 0)



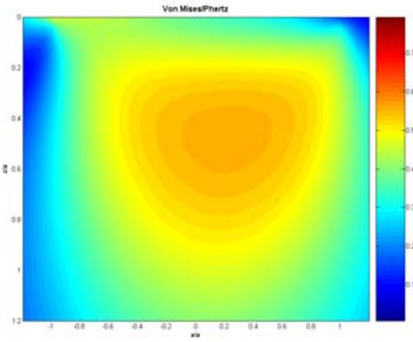
a. Hertz



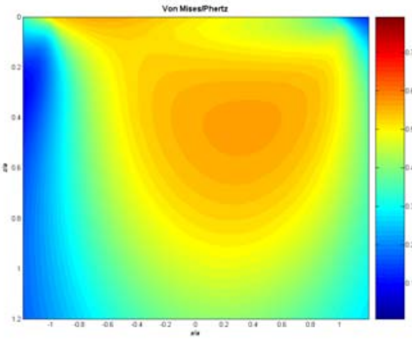
b. μ=0



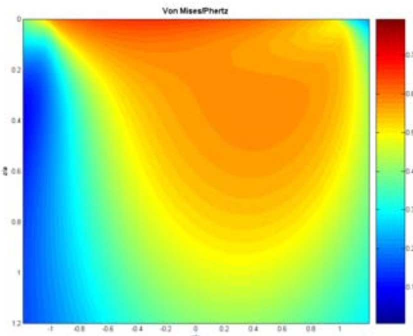
c. μ=0,1



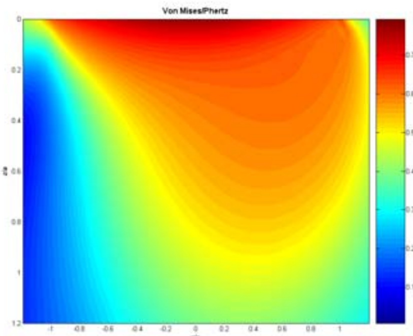
d. μ=0,2



e. μ=0,3



f. μ=0,4



g. μ=0,5

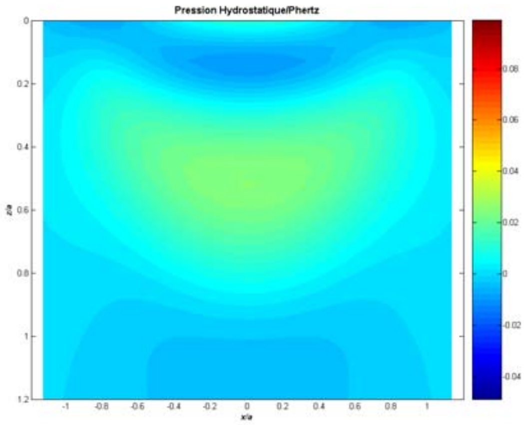
Un point primordial dans une analyse de fatigue de contact en roulement est l'évaluation des contraintes résiduelles après décharge. Les contraintes résiduelles de compression vont fermer les micro-fissures si elles existent, et ralentiront leur propagation. Au contraire, si les contraintes résiduelles sont en traction, elles vont favoriser le développement et la propagation des micro-fissures. De plus les déformations résiduelles sont à l'origine de la déformation permanente de la surface. La connaissance de cette empreinte permanente sur la surface de contact présente un intérêt car elle modifie la conformité du contact ce qui contribue à diminuer la pression de contact et à agrandir l'aire de contact, réduisant ainsi l'amplitude des contraintes en sous-couche. La contrainte résiduelle et la pression hydrostatique sont présentées dans les figures IV.12 et IV.13, pour les mêmes simulations. On peut voir l'effet très important du frottement sur l'amplitude des contraintes résiduelles après décharge. Les contraintes tangentielles sont ici à l'origine de contraintes résiduelles de l'ordre de 30% de la pression de Hertz pour le cas μ=0,5. Ce maximum est trouvé en surface.

Enfin il convient de remarquer que la zone écrouie est en traction partout, la pression hydrostatique étant positive. Ceci jouera un rôle primordial dans toute simulation de fatigue de contact à la fois pour l'amorçage et la propagation des fissures de fatigue.

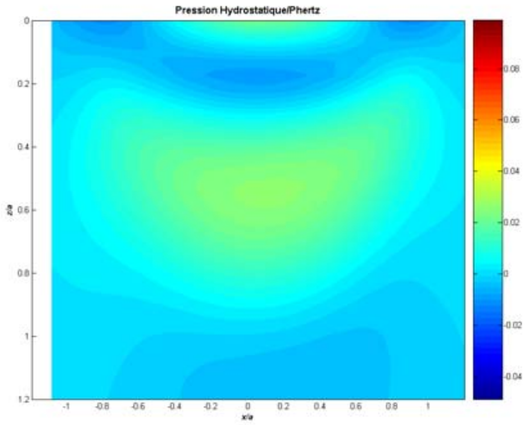
Dans l'annexe C le lecteur trouvera en complément :

- les composantes du tenseur des contraintes,
- la contrainte équivalente de von Mises sous charge et après décharge,
- la déformation plastique équivalente,
- et la pression hydrostatique,

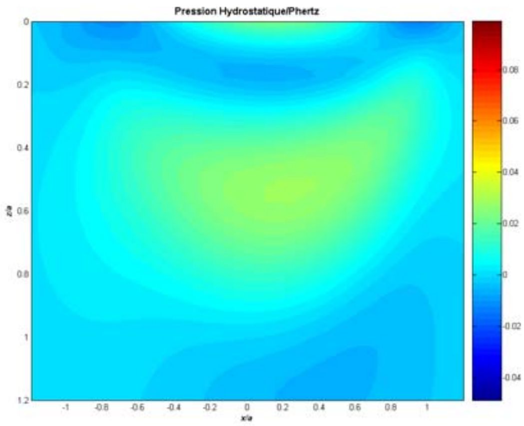
pour différents coefficients de frottement.



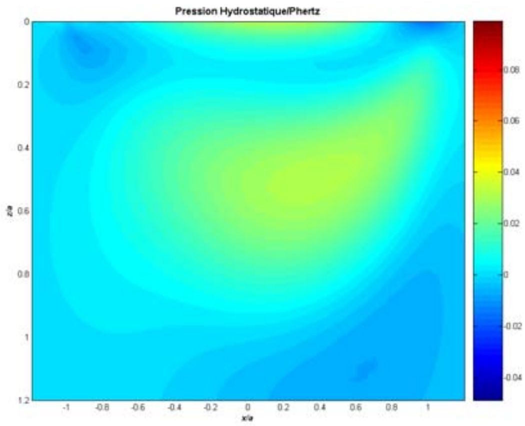
a. μ=0



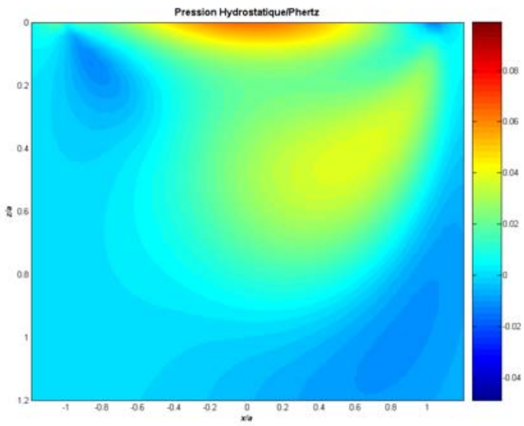
b. μ=0,1



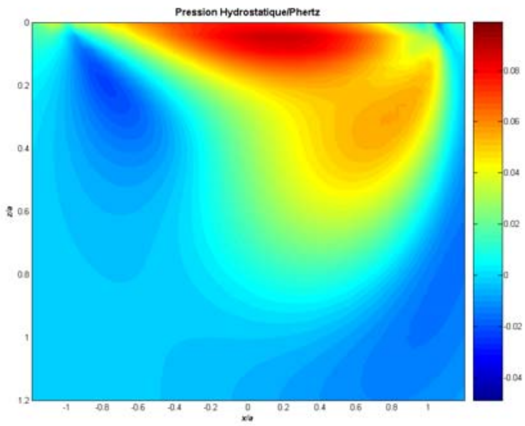
c. μ=0,2



d. μ=0,3

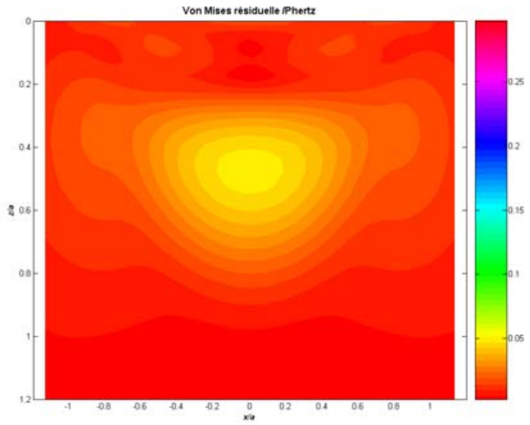


e. μ=0,4

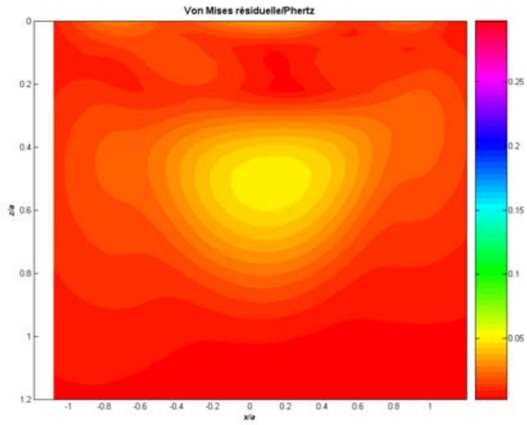


f. μ=0,5

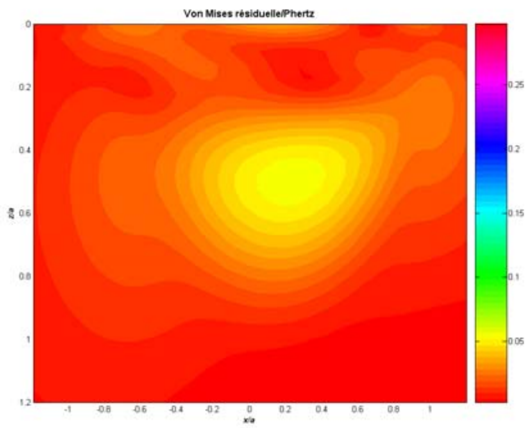
Figure IV.12 *Pression hydrostatique après décharge adimensionnée par la pression de Hertz pour le cas élasto-plastique avec μ=0 - 0,5 (plan y = 0)*



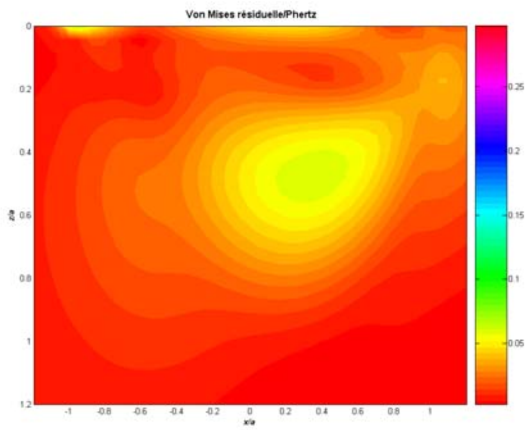
a. μ=0



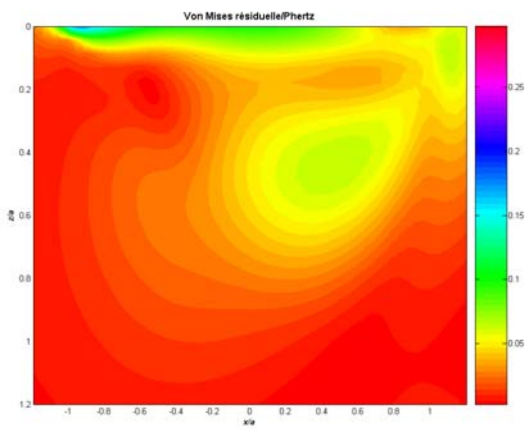
b. μ=0,1



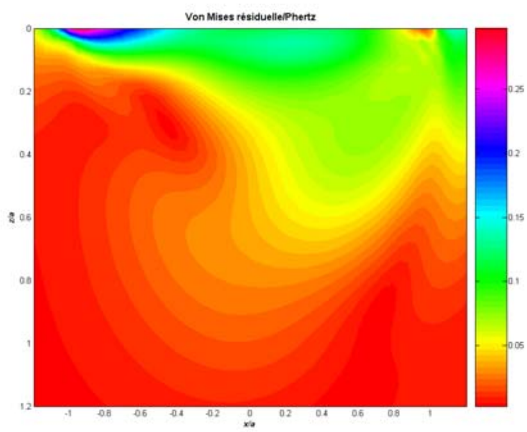
c. μ=0,2



d. μ=0,3



e. μ=0,4



f. μ=0,5

Figure IV.13 *Contraintes résiduelles de von Mises adimensionnées par la pression de Hertz pour le cas élasto-plastique avec μ=0 - 0,5 (plan y = 0)*

IV.2 <u>DETERMINATION D'UNE LOI D'ECROUISSAGE FONCTION DE LA TEMPERATURE PAR INDENTATION</u>

IV.2.1 <u>MESURES DE DURETE PAR INDENTATION</u>

Les essais d'indentation ont été employés pendant les cent dernières années pour mesurer la dureté des solides. Ils sont basés sur le principe suivant : un pénétrateur "indéformable" (rigide ou élastique) laisse une empreinte dans le matériau à tester. Les dimensions de l'empreinte permettent de définir une dureté.

La dureté d'une surface est une caractéristique fonctionnelle. Ce n'est pas une propriété intrinsèque au matériau ou au traitement de surface, mais plutôt une moyenne de plusieurs propriétés physiques ou comportements : module d'élasticité, loi d'écrouissage, contraintes résiduelles dues au traitement de surface ou au procédé d'usinage, loi de frottement à l'interface entre l'outil de mesure et la surface considérée, état de surface, etc. Elle est généralement obtenue par indentation au moyen d'une pointe dure ou d'une bille selon plusieurs normes : Rockwell, Vickers, Knoop, Berkovich, etc. Cette dureté est ainsi liée au moyen de mesure utilisé, en particulier à la forme de la pointe (conique, sphérique, pyramidale), sa nature (diamant, céramique, acier), sa taille et la charge d'indentation (micro ou nano-indentation).

Cette propriété est très importante pour évaluer à priori les performances de cette surface en termes de durée de vie, résistance à l'usure, usinabilité, etc., et de ce fait systématiquement contrôlée.

La figure suivante présente les différents types de pénétrateurs (ou indenteurs) utilisés dans les essais de dureté conventionnels.

Tableau 2 – Pénétrateurs Brinell, Rockwell, Vickers et Knoop

Pénétrateur	Brinell	Rockwell		Vickers	Knoop
Nature	Acier trempé ou carbure de tungstène	Diamant	Acier trempé	Diamant	Diamant
Forme	Sphère	Cône	Sphère	Pyramide à base carrée	Pyramide à base losange
Dimensions	 D = 10 mm ; 5 mm; 2,5 mm ; 1 mm	 θ = 120°	 D = 1/16″ (1,587 mm) D = 1/8″ (3,175 mm)	 θ = 136°	 α = 130° θ = 172° 30′

Figure IV.14 *Pénétrateurs Brinell, Rockwell, Vickers et Knoop* ***(FRAN 05)***

Dureté Brinell

Le pénétrateur est une bille polie en acier trempé ou en carbure de tungstène. Son diamètre D vaut normalement 10 mm, mais aussi 5, 2,5 ou 1 mm. Elle est appliquée avec une charge F selon le rapport : $F / D^2 = 294$. Après suppression de la charge, elle laisse dans le métal une empreinte circulaire. Le diamètre d est mesuré. Il est d'autant plus grand que la bille a pénétré profondément dans le métal, donc que celui-ci est moins dur.

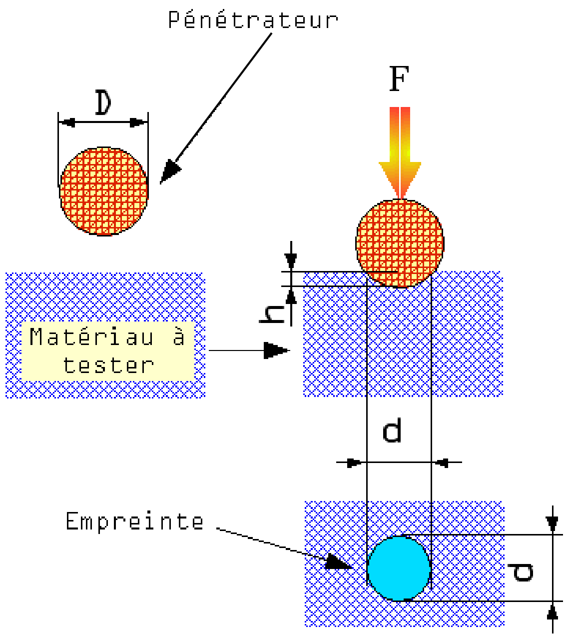


Figure IV.15 *Schématisation de l'essai Brinell*

a dureté s'exprime par le rapport de la charge à la surface S de la calotte sphérique imprimée dans le métal :

$$HB = \frac{F}{S} = \frac{2 \cdot 0{,}102 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}, \text{ (IV.4)},$$

avec la charge F en [N], D et d en [mm].

L'essai Brinell est valide pour tous les types d'acier. Le tableau suivant montre les charges à appliquer pour l'essai Brinell selon le diamètre des billes.

Tableau IV.4 Charges à appliquer en fonction du diamètre de la bille pour l'essai Brinell

Cas des aciers ($F / D^2 = 294$)

F [N]	D [mm]
29 400 (3 000 kgf)	10
7 350	5
4 704	4
2 646	3
1 837,5	2,5
1 176	2
294	1

Dureté Vickers

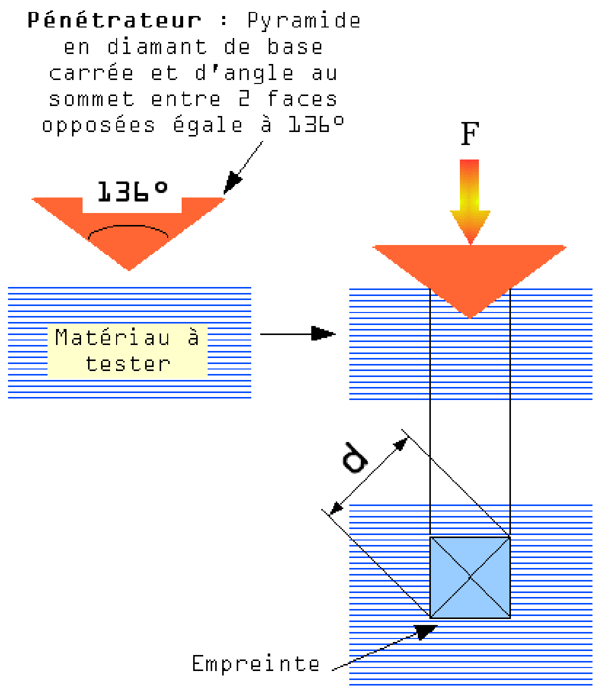


***Figure IV.16** Schématisation de l'essai Vickers*

Le principe est le même que celui de l'essai Brinell mais le pénétrateur est, dans ce cas, une pyramide de diamant à base carrée ; l'angle entre deux faces opposées est de 136°, de façon à avoir une correspondance avec l'échelle de dureté Brinell.

Le diamant laisse une empreinte carrée et l'on mesure la longueur de la diagonale de l'empreinte à 0,002 mm près. La dureté Vickers est le quotient de la charge d'essai F (49, 98 196, 294, 490, 784, 980 N) par l'aire de l'empreinte de diagonale d, c'est-à-dire :

$$HV = \frac{2 \times 0{,}102 \times F \times \sin(136^\circ / 2)}{d^2}, \qquad \text{(IV.5).}$$
$$HV = 1{,}8544 \times 0{,}102 \times F / d^2$$

Les tables donnent directement HV en fonction de F et d. La charge utilisée le plus couramment est 294 N. Cependant, la gamme des charges utilisables (49 à 980 N) permet d'appliquer cette méthode dans toute l'échelle des duretés et avec toutes les dimensions d'échantillons, en choisissant la charge donnant une empreinte telle que la diagonale d soit plus grande que 0,4 mm, mais inférieure aux deux tiers de l'épaisseur. Dans ces conditions, le symbole HV est suivi de la charge utilisée (en kgf) et du temps de maintien (en s) : HV 30/20.

La figure IV.17 permet de relier les différentes duretés entre elles.

Tableau 5 – Équivalence entre les échelles de dureté Brinell, Rockwell, Vickers et la résistance à la traction pour les aciers (1)

Brinell HB $F = 30\,D^2$	Rockwell HRB	Rockwell HRC	Vickers HV $F = 294$ N (30 kgf)	Résistance R_m (N/mm²)	Résistance R_m (kgf/mm²)
80	36,4	....	80	270	28
85	42,4	....	85	290	30
90	47,7	....	90	310	32
95	52,0	....	95	320	33
100	56,4	....	100	340	35
105	60,0	....	105	360	37
110	63,4	....	110	380	39
115	66,4	....	115	390	40
120	69,4	....	120	410	42
125	72,0	....	125	420	43
130	74,4	....	130	440	45
135	76,4	....	135	460	47
140	78,4	....	140	470	48
145	80,4	....	145	490	50
150	82,2	....	150	500	51
155	83,8	....	155	520	53
160	85,4	....	160	540	55
165	86,8	....	165	550	56
170	88,2	....	170	570	58
175	89,6	....	175	590	60
180	90,8	....	180	610	62
185	91,8	....	185	620	63
190	93,0	....	190	640	65
195	94,0	....	195	660	67
200	95,0	....	200	670	68
205	95,8	....	205	690	70
210	96,6	....	210	710	72
215	97,6	....	215	720	73
220	98,2	....	220	740	75
225	99,0	....	225	760	77
230	....	19,2	230	770	78
235	....	20,2	235	780	80
240	....	21,2	240	800	82
245	....	22,1	245	820	84
250	....	23,0	250	830	85
255	....	23,8	255	850	87
260	....	24,6	260	870	89
265	....	25,4	265	880	90
270	....	26,2	270	900	92
275	....	26,2	275	920	94

Tableau 5 – Équivalence entre les échelles de dureté Brinell, Rockwell, Vickers et la résistance à la traction pour les aciers (1) (suite)

Brinell HB $F = 30\,D^2$	Rockwell HRB	Rockwell HRC	Vickers HV $F = 294$ N (30 kgf)	Résistance R_m (N/mm²)	Résistance R_m (kgf/mm²)
280	....	27,6	280	940	96
285	....	28,3	285	950	97
290	....	29,0	290	970	99
295	....	29,6	295	990	101
300	....	30,3	300	1 010	103
310	....	31,5	310	1 040	106
320	....	32,7	320	1 080	110
330	....	33,8	330	1 110	113
340	....	34,9	340	1 150	117
350	....	36,0	350	1 180	120
359	....	37,0	360	1 210	123
368	....	38,0	370	1 240	126
376	....	38,9	380	1 270	129
385	....	39,8	390	1 290	132
392	....	40,7	400	1 320	135
400	....	41,5	410	1 350	138
408	....	42,4	420	1 380	141
415	....	43,2	430	1 410	144
423	....	44,0	440	1 430	146
430	....	44,8	450	1 460	149
		45,5	460		
		46,3	470		
		47,0	480		
		47,7	490		
		48,3	500		
		49,0	510		
		49,7	520		
		50,3	530		
		50,9	540		
		51,5	550		
		52,1	560		
		52,8	570		
		53,3	580		
		53,8	590		
		54,4	600		
		54,9	610		

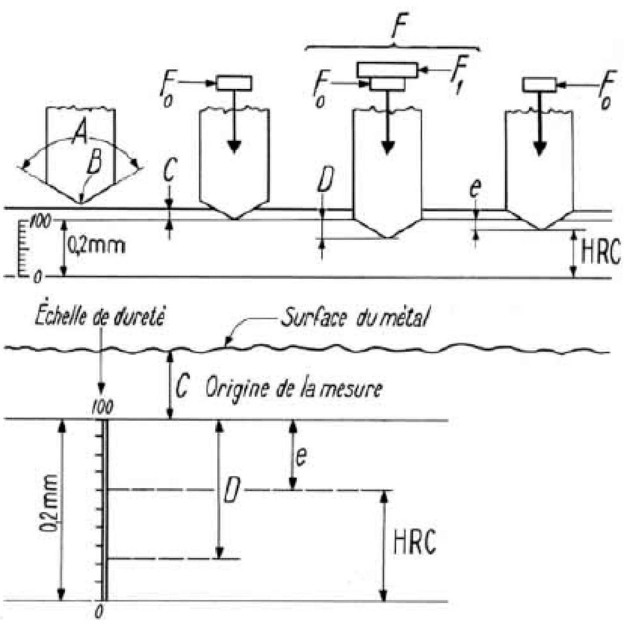
***Figure IV.17** Equivalence entre les duretés Rockwell, Brinell et Vickers* **(FRAN 05)**

Dureté Rockwell

L'essai consiste à mesurer l'enfoncement rémanent d'un pénétrateur, appuyé sous faible charge sur la surface à tester, après application d'une surcharge dans des conditions bien précisées. La dureté correspond la profondeur de la déformation rémanente après l'application d'une charge, elle est exprimée en unités correspondant chacune à 0,002 mm. La figure ci dessous illustre le principe de ce test :

Le pénétrateur employé est :

- un cône de diamant (essai C) de section circulaire, d'angle au sommet 120°, à pointe arrondie sphérique (rayon de 0,2 mm),



A angle au sommet du diamant : 120°
B rayon de la calotte sphérique du diamant : 0,2 mm
C profondeur de pénétration sous la charge initiale de 98 N
D accroissement de la profondeur de pénétration sous l'effet de la surcharge
e accroissement rémanent de la profondeur de pénétration sous la charge initiale après enlèvement de la surcharge
F_0 charge initiale : 98 N
F_1 surcharge : 1 372 N
F charge totale : $F_0 + F_1 = 1\,470$ N
HRC dureté Rockwell : 100 – *e*

***Figure IV.18** Principe de l'essai Rockwell C*

- une bille d'acier trempé, polie, de diamètre 1,587 mm (essais B ou F) ou 3,175 mm (essai E).

La précharge F_0 est, dans tous les cas, de 98 N. Les surcharges F_1 sont de 490, 882, 1372 N, d'où les charges d'essais F de 588, 980, 1470 N pour les essais F, B et E, C respectivement.

Rockwell C (HRC) : cône diamant et charge de 1470 N pour les métaux durs ayant une résistance supérieure à 1000 N/mm². On voit que :

$$HRC = 100 - 5.10^2 \times e, \quad \text{(IV.6)},$$

avec e en mm.

Rockwell B (HRB) : bille d'acier de 1,59 mm de diamètre environ et charge de 980 N, pour les aciers dont la résistance est comprise entre 340 et 1000 N/mm². Dans ce cas, on a :

$$HRB = 130 - 5.10^2 \times e, \quad \text{(IV.7)},$$

avec e en mm.

IV.2.2 DURETE A CHAUD

La nécessité de connaître les propriétés des métaux aux températures d'emploi est à l'origine du développement des essais de dureté à chaud. Des recherches récentes ont prouvé que la tenue en fatigue d'éléments en contact augmente avec la dureté du matériau. En général, plus la dureté est élevée, plus la durée de vie de la pièce sera grande.

La dureté à chaud est donc un paramètre important pour classer les aciers pour les applications appropriées. Cette classification apparaît nettement sur les courbes de la figure IV.19 où sont rassemblées les duretés à différentes températures des trois principaux groupes d'aciers à outils : les aciers à coupe rapide, les aciers d'outillage à chaud et les aciers d'outillage à froid.

On peut voir que :

- les aciers à coupe rapide présentent une dureté à 20°C très élevée et une bonne dureté à chaud en raison d'une teneur massique en carbone élevée (0,8 % < C < 1,5 %) associée à des additions importantes d'éléments carburigènes ;
- les aciers d'outillage à chaud présentent des duretés à 20°C moyennes, mais des duretés à chaud très acceptables en raison d'une teneur massique en carbone plus basse (0,2 % < C < 0,6 %) associée à des additions d'éléments d'alliages relativement importantes ;

- les aciers d'outillage à froid présentent des duretés à 20°C presque équivalentes à celles des aciers rapides mais des duretés à chaud assez faibles par suite de leur basse teneur en éléments carburigènes.

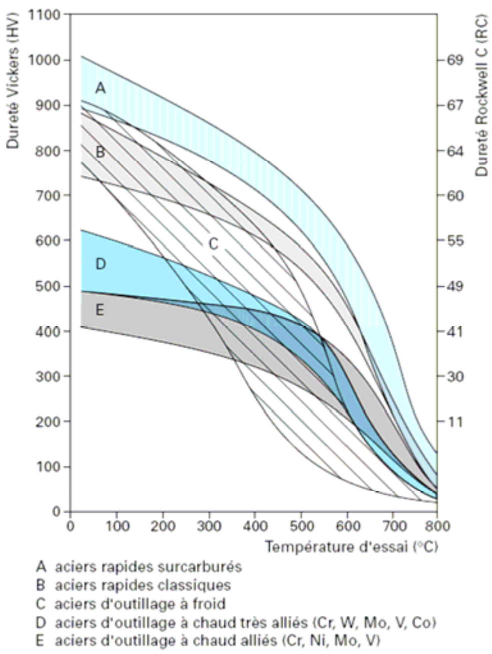


Figure IV.19 *Dureté, en fonction de la température d'essai, des principales catégories d'aciers à outils (***LEVE 03***)*

Chevalier et al. ***(CHEV 72)*** à partir des mesures à chaud de la dureté pour des aciers à roulements trouve que le changement de dureté avec l'augmentation de la température est indépendant de la composition de l'acier ou de la dureté du matériau à température ambiante. Il propose donc une loi empirique de variation de la dureté Rockwell C avec la température :

$$(H_{RC})_T = (H_{RC})_{RT} - \alpha \Delta T^{\beta}, \quad \text{(IV.8)},$$

avec α et β des constantes qui dépendent du matériau et ΔT la différence entre la température d'essai T et la température ambiante.

IV.2.3 Variation de la loi d'ecrouissage avec la temperature

On souhaite quantifier l'effet des différentes températures sur la loi de comportement élasto-plastique. Dans ce but un algorithme inverse a été mis en place (figure IV.20). D'abord on va diminuer la loi d'écrouissage avec un coefficient et on va trouver à la fin quelle température correspond à cette diminution. L'écrouissage modifié est introduit dans une simulation Abaqus d'un essai d'indentation Rockwell C, conforme à la norme évoquée plus haute, sur un acier M50, acier à outil donc pouvant subir ce test. La dureté Rockwell C est calculée avec la formulation suivante :

$$H_{RC} = 100 - 500 \cdot (d_f - d_i), \qquad \text{(IV.9)},$$

avec :

H_{RC} - la dureté Rockwell C ;

d_i – le déplacement vertical initial sous la charge initial de 98 N (en mm)

d_f – le déplacement résiduel après décharge pour une charge initiale de 98 N (en mm)

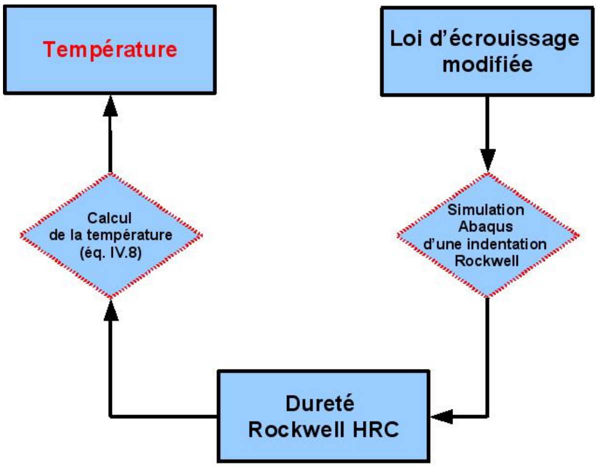


Figure IV.20 *Algorithme pour trouver l'influence de la température sur la loi d'écrouissage*

Si la nouvelle dureté est connue on peut calculer la température correspondant à cette modification de la loi d'écrouissage avec l'aide de l'équation IV.8, dans laquelle les paramètres spécifiques pour l'acier M50 sont données par Zaretsky ***(ZARE 92)*** : α=133 10^{-5} et β=1,4.

Le processus d'indentation Rockwell C contrôlée a été simulé par éléments finis, avec le logiciel ABAQUS. Le pénétrateur possédant une symétrie de révolution, le problème est axisymétrique. Les pénétrateurs sont des cônes dont l'angle au sommet vaut 120°. Ils sont tronqués par une calotte sphérique dont le rayon R_p est égal à 200 µm. La partie utile des pénétrateurs est en diamant, dont les caractéristiques élastiques sont E = 1140 GPa et ν = 0,07. La charge appliquée pendant l'indentation, W est égale à 1470 N

Les caractéristiques élasto-plastiques de l'acier M50 sont connues jusqu'à des taux de déformation de 2 %. Cependant, les déformations engendrées pendant l'indentation sont bien plus élevées, et peuvent atteindre jusqu'à 40 %. Aussi est-il nécessaire d'extrapoler les lois de comportement. Pour valider ces extrapolations, il faut s'assurer que la simulation conduit bien à des résultats proches des observations expérimentales.

La démarche est similaire à celle proposée par Jacq ***(JACQ 01)***, qui a pu corréler l'empreinte résiduelle obtenue après décharge à des profils mesurés, validant ainsi la méthodologie et la loi d'écrouissage en grandes déformations. Le maillage utilisé est présenté sur la figure IV.21. La taille des éléments au niveau du contact est de 2 µm, ce qui est faible au regard de la taille des empreintes résiduelles, dont le diamètre est de ≈100 µm. Le massif a été maillé avec 5050 nœuds. Le nombre de nœuds de l'indenteur est 1000.

L'indenteur a un comportement purement élastique. La charge est appliquée par une pression homogène sur le plan supérieur de l'indenteur. Le déplacement radial des nœuds de ce plan est bloqué. Le massif a un comportement élasto-plastique à écrouissage isotrope. Les conditions aux limites y sont imposées à l'aide d'éléments infinis, permettant d'annuler les déplacements à l'infini.

Le problème doit être résolu en grandes déformations. Aussi, la courbe d'écrouissage doit être exprimée comme la variation de la contrainte vraie (contrainte de Cauchy) en fonction de la déformation logarithmique. Alors que la loi de Swift est continûment croissante, la loi de Voce

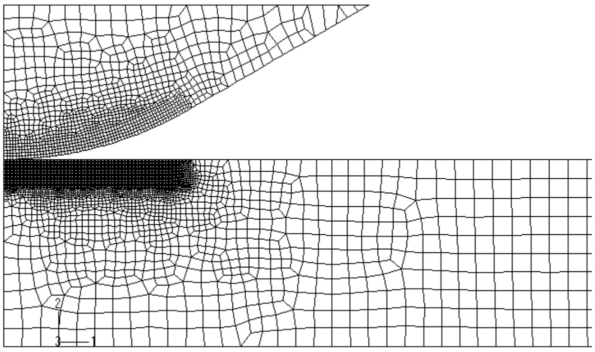


Figure IV.21 *Maillage utilisé pour simuler l'indentation.*

présente une asymptote horizontale. Cette loi, utilisée par Cercueil ***(CERC 99)***, a donné de bons résultats dans la simulation de l'indentation sur le 100Cr6. Elle a également été utilisée avec succès par Jacq ***(JACQ 01)*** pour les aciers M50 et 32CrMoV13 nitruré. C'est pourquoi nous l'utilisons dans cette étude. C'est une loi à quatre paramètres (équation IV.10) qui ont été choisis pour que la loi de Voce soit proche de la loi de Swift jusqu'à 2 % de déformation plastique (fig. IV.23).

$$\sigma_{eq} = 1444 + 1996.\{1 - \exp[-(390.p)^{0,352}]\} \ (\sigma_{eq} \text{ en MPa}), \qquad \text{(IV.10).}$$

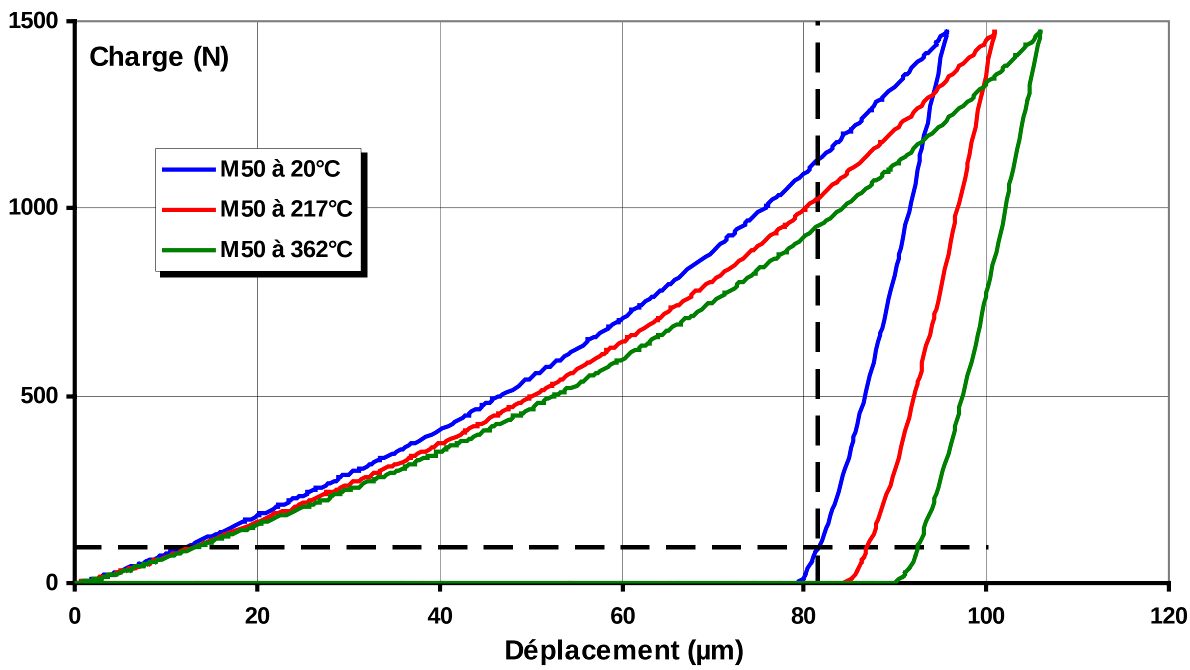


Figure IV.22 *Simulation indentation Rockwell C sur un acier M50*

La variation de la charge avec le déplacement du sommet de l'indenteur est présentée sur la figure IV.22. A partir de celle-ci la dureté H_{RC} est calculée et la température en est déduite. Il faut tenir compte que la dureté correspond à une charge de mesure de 98 N (charge initiale, également palier de mesure à la décharge). Les résultats sont synthétisés dans le tableau IV.5.

Tableau IV.5

T [°C]	20	217,3	362,5
d_i [µm]	12,17	13,24	13,64
d_f [µm]	81,61	87,03	92,49
H_{RC}	65,28	63,10	60,57

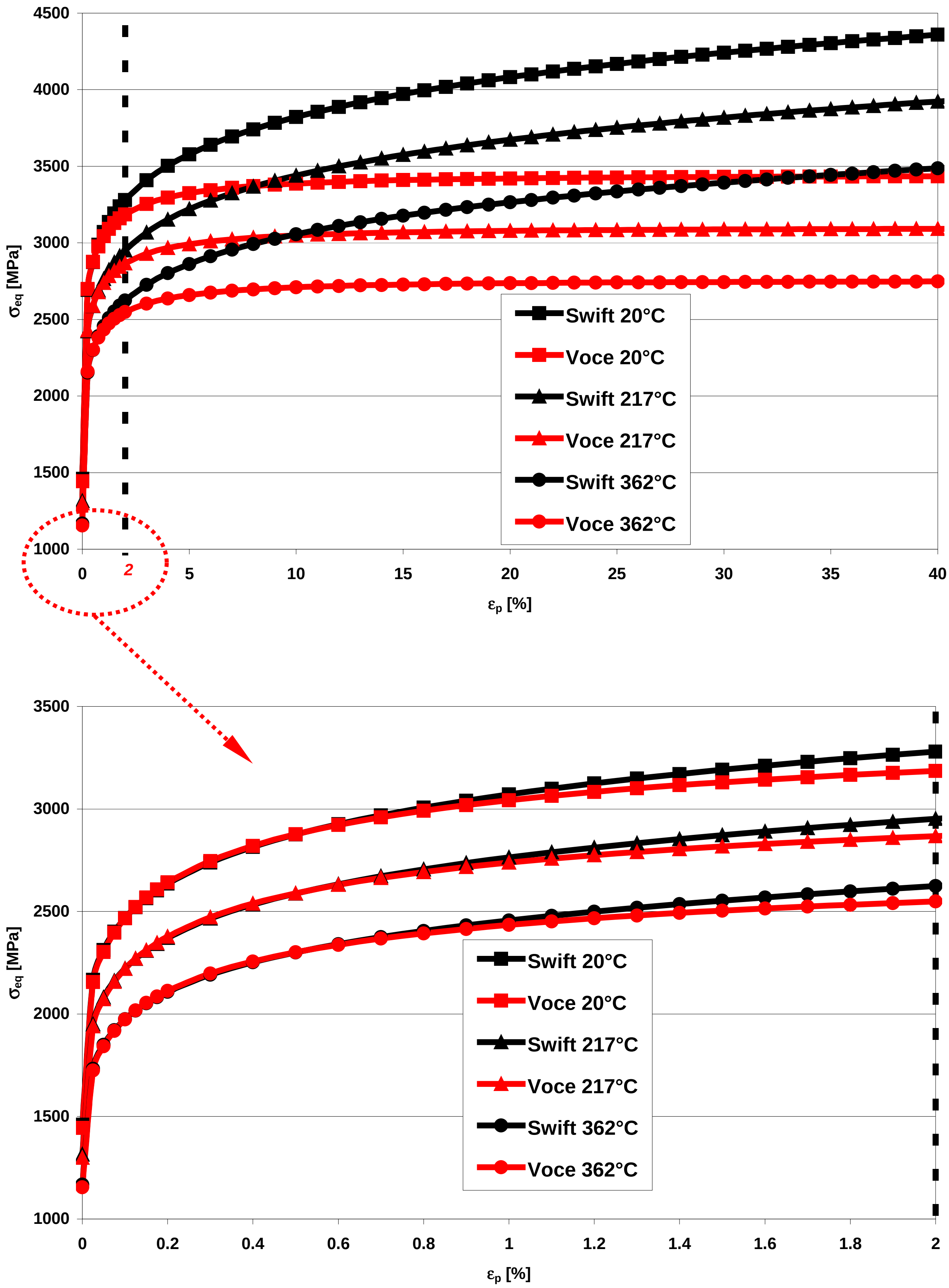


Fig.IV.23 *Lois d'écrouissage du M50.*

IV.3 INFLUENCE DE LA TEMPERATURE

L'influence de la température dans un contact élasto-plastique a été étudiée en utilisant un problème de contact circulaire sans frottement. Les massifs en contact sont deux sphères de rayon 15 mm, l'un a un comportement élastique et l'autre élasto-plastique. Le matériau est le M50. Un modèle plastique avec écrouissage isotrope et le critère de von Mises sont utilisés. La charge est appliquée progressivement jusqu'à une valeur maximale de 11 179 N correspondant à une pression de Hertz de 8 GPa. Les simulations sont faites pour trois cas d'études à température ambiante (20°C), 217°C et 362°C. Les trois cas correspondent à une diminution de 0%, 10% et 20% pour la loi d'écrouissage de Swift.

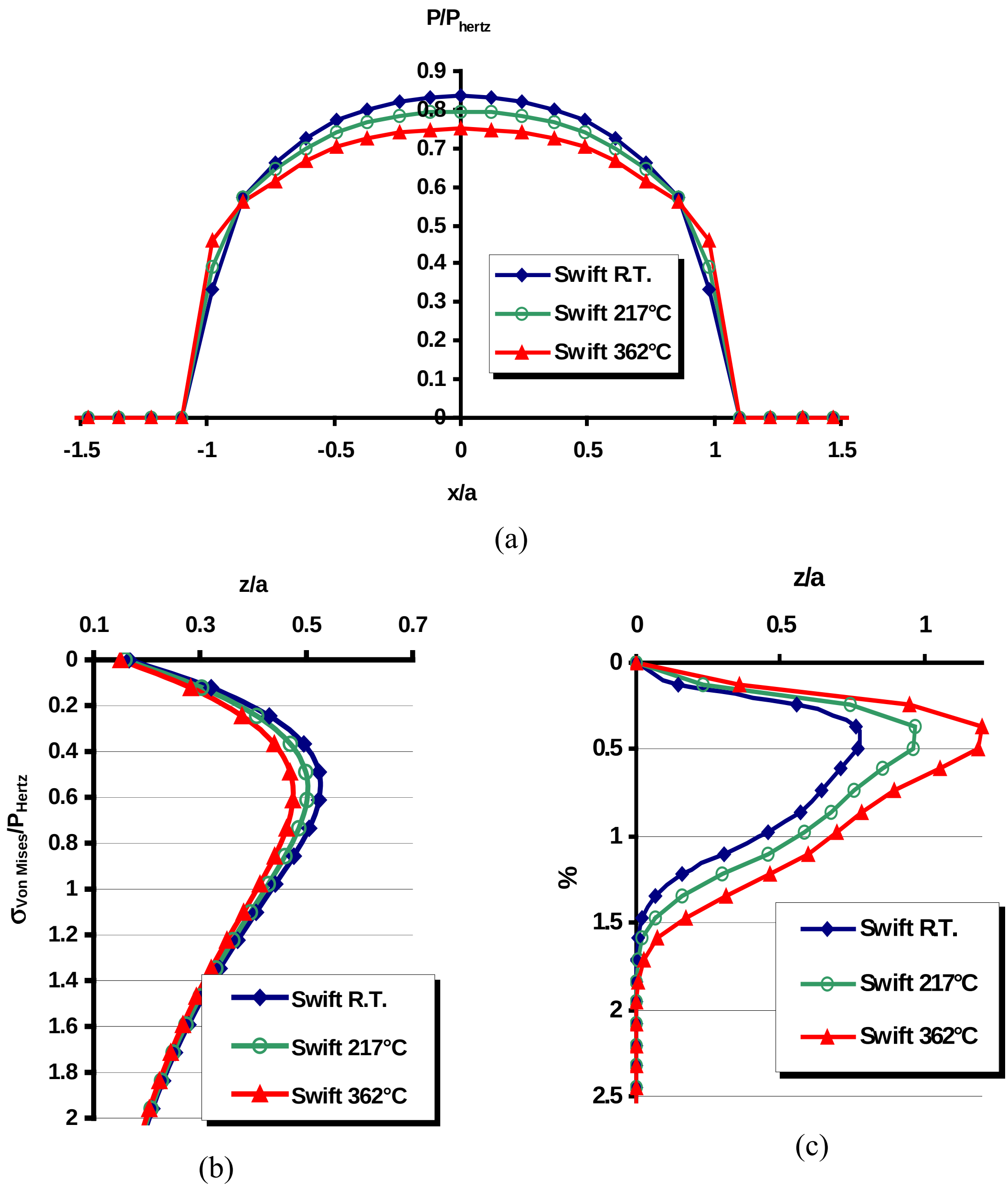
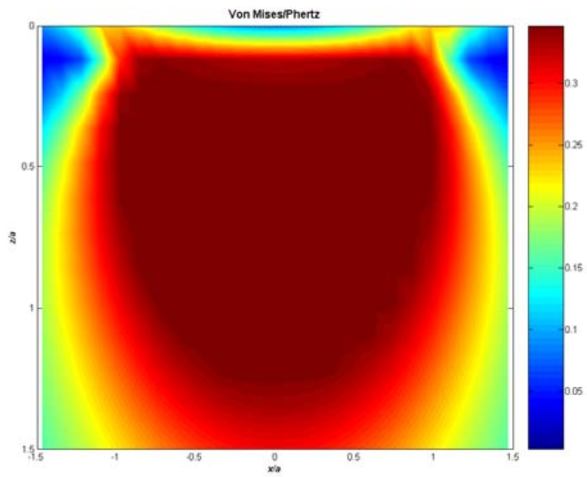
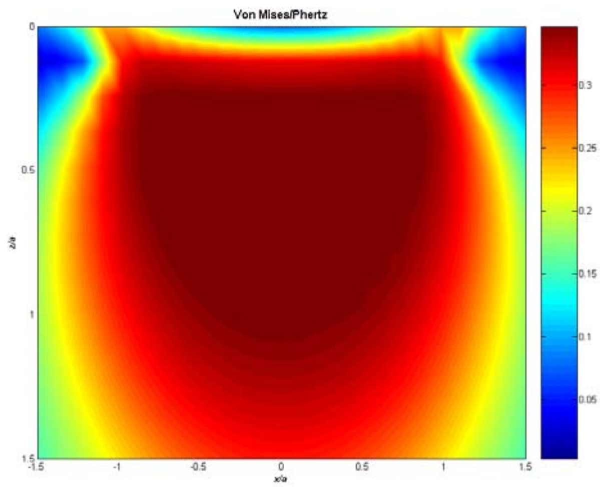


***Figure IV.24** Effet de la température sur la pression (a), contrainte de von Mises sous charge (b) et déformation plastique équivalente (c) suivant l'axe de symétrie*

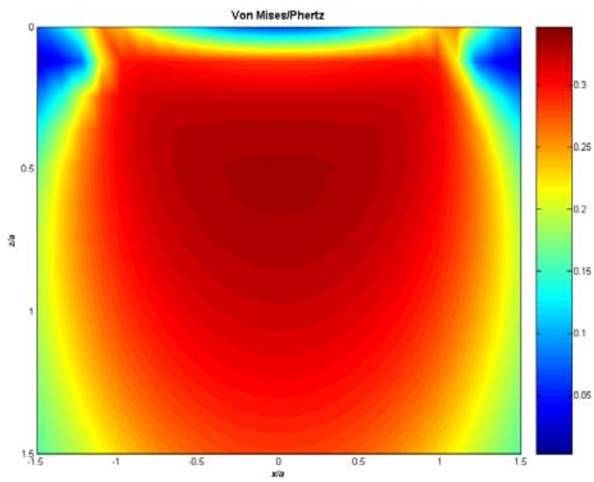
Sur la figure IV.24, la pression maximum de contact décroît avec la température tant en étant plus uniformément répartie. La même tendance est observée pour le niveau des contraintes de von Mises sous charge. En revanche toutes les variables liées au comportement plastique (déformation plastique, contrainte de von Mises après décharge, pression hydrostatique après décharge) du matériau augmentent avec la température. Ce résultat s'explique par le fait que l'augmentation de la température diminue le niveau d'écrouissage. Finalement les figures IV.25 à IV.28 illustrent l'état de sollicitation à la fin du dernier pas de chargement et après décharge dans le plan de symétrie du contact (OY).



20°C

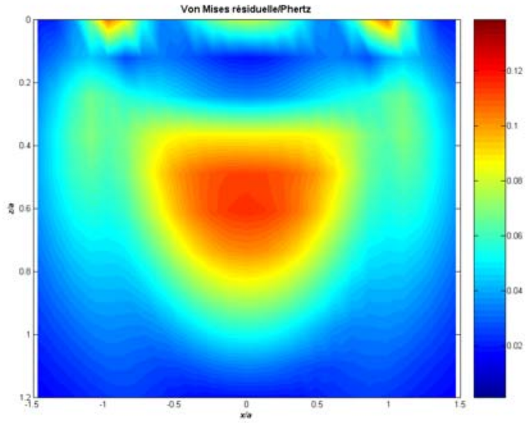


217°C

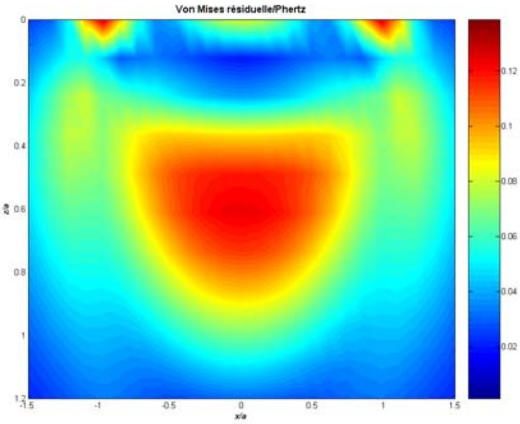


362°C

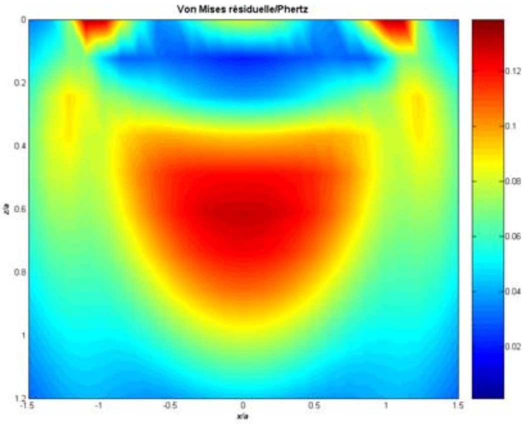
Figure IV.25 *Contraintes de von Mises sous charge adimensionnées par la pression de Hertz*



20°C

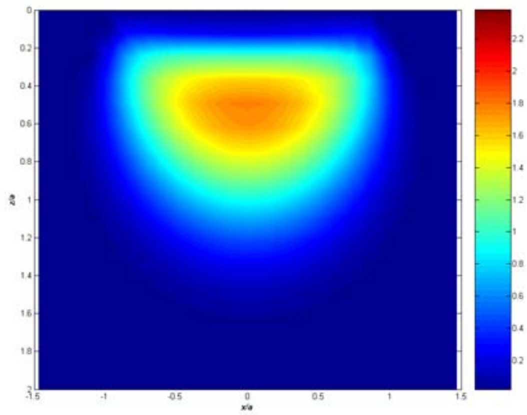


217°C

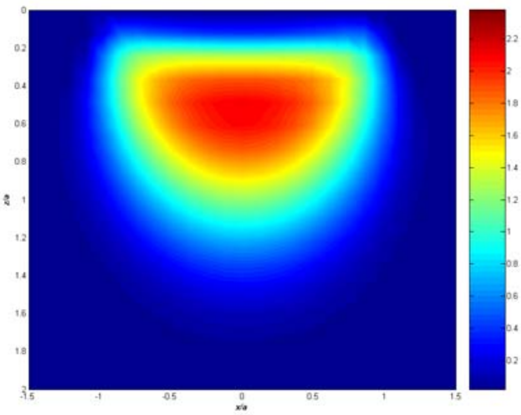


362°C

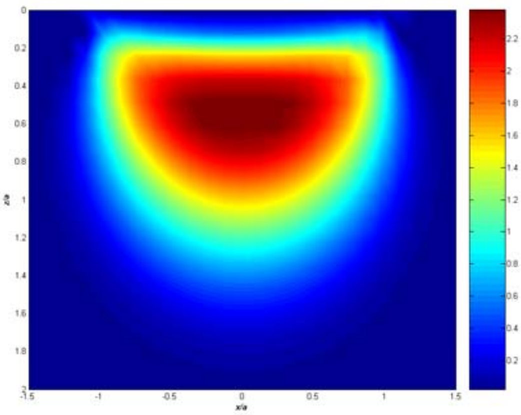
Figure IV.26 *Contrainte résiduelle de von Mises adimensionnée par la pression de Hertz*



20°C

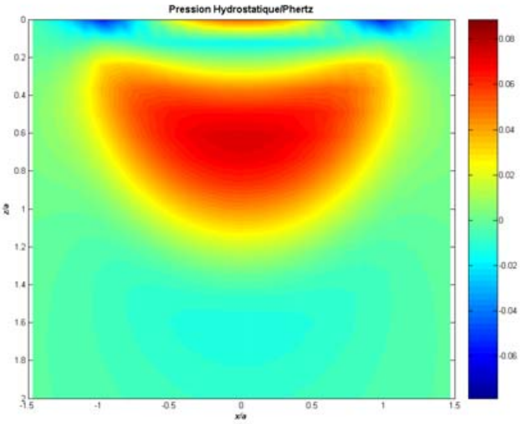


217°C

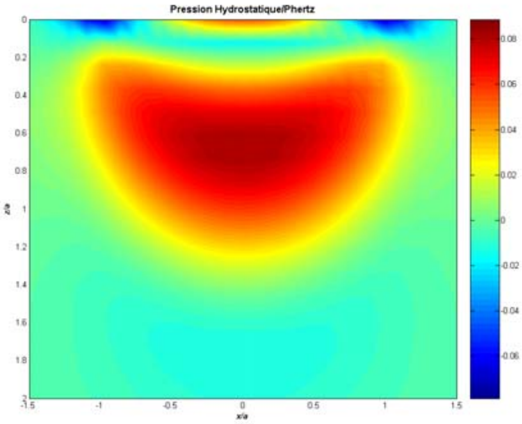


362°C

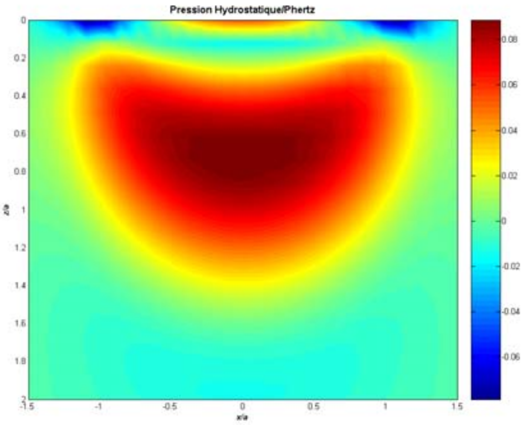
Figure IV.27 *Déformation plastique équivalente [%]*



20°C



217°C



362°C

Figure IV.28 *Pression hydrostatique après décharge adimensionnée par la pression de Hertz*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION

Au cours de cette thèse nous avons contribué au développement d'une méthode alternative à la méthode des éléments finis pour le calcul d'un contact roulant élasto-plastique avec frottement. Le modèle semi-analytique tri-dimensionnel proposé est construit à partir d'un modèle existant dont le module de résolution du problème de contact a été changé, et auquel ont été ajoutés les aspects tangentiels et améliorées les procédures numériques. Il est applicable au problème de contact roulant et/ou glissant, tant que la zone de contact reste petite devant les dimensions du contact, et que l'hypothèse des petites déformations est respectée.

L'approche élasto-plastique nécessite la prise en compte de l'évolution de la surface, et donc de la pression de contact avec l'apparition des déformations plastiques, mais aussi de l'apparition des contraintes résiduelles d'écrouissage liées au chargement cyclique. La formulation est écrite de manière incrémentale, pour respecter le caractère irréversible des déformations plastiques qui dépendent du trajet de chargement. Les méthodes utilisées pour résoudre le problème sont de type coefficients d'influence, dont l'expression peut être déterminée analytiquement (hypothèse des massifs semi-infinis).

Le premier point de notre étude a consisté à développer un outil permettant de simuler un contact élastique tri-dimensionnel pour n'importe quel type de géométrie en présence de rugosité ou de défauts de surface comme les indents. La présence de cette micro-géométrie requiert la discrétisation très fine de la surface en contact (10^5-10^6 points en contact). L'utilisation des techniques d'accélération telles que les méthodes de convolution discrète avec la transformée de Fourier (DC-FFT) et la méthode du gradient conjugué (GC) permet d'obtenir une solution en un temps raisonnable (quelques minutes à quelques heures, suivant le maillage, la vitesse du processeur et la mémoire de l'ordinateur). De plus, le champ de contraintes en profondeur a été obtenu numériquement en considérant une distribution normale et tangentielle du chargement surfacique en utilisant la méthode des coefficients d'influence et la technique DC-FFT.

Le deuxième point a été de coupler le nouveau module de contact avec le code de résolution élasto-plastique existant, en remplaçant un précédent module utilisant les techniques multi-grilles et en y ajoutant les effet tangentiels. Dès lors il est possible de résoudre le problème du contact élasto-plastique tri-dimensionnel transitoire et de prendre en compte l'effet de frottement en surface. Le frottement a été introduit en utilisant le modèle de Coulomb. L'influence du chargement tangentiel sur le modèle plastique est prise en compte avec l'aide du théorème de réciprocité de Betti. Le calcul des déformations plastiques est basé sur un algorithme d'intégration universel des équations constitutives de l'élasto-plasticité, comprenant l'écrouissage isotrope ou cinématique, ainsi que l'adoucissement thermique, par la méthode de "return mapping" avec un schéma constitué d'un prédicteur élastique et d'un correcteur plastique.

Le code de calcul, basé sur une description de type éléments frontières, a été validé numériquement par comparaison avec un modèle éléments finis ABAQUS.

L'avantage principal de cette méthode sur les méthodes Eléments Finis conventionnelles est la diminution significative des temps de calcul, rendant possible l'étude de contacts tri-dimensionnels en régime transitoire même si des rugosités et/ou indents sont présents.

L'intérêt de ce code de calcul par rapport aux outils existants réside principalement dans (i) la limitation du maillage volumique aux seules zones déformées plastiquement permettant ainsi une grande économie de mémoire, et (ii) dans l'utilisation des méthodes accélératrices GC et FFT pour le calcul des contraintes et des déformations plastiques, ce qui permet de limiter les temps de calcul et donc d'affiner suffisamment le maillage pour résoudre le problème du contact indenté élasto-plastique transitoire à précision identique.

L'état des contraintes après un chargement vertical puis après décharge a été étudié dans le cas d'un problème avec et sans frottement. La contribution de la plasticité a été identifiée. Dans le cas du contact normal simple, la contrainte de von Mises est maximale en sous-couche à une profondeur intitulée profondeur de Hertz. Avec la présence d'un chargement tangentiel en surface, l'emplacement de ce maximum évolue de la profondeur de Hertz vers la surface. La contrainte de von Mises est maximum en surface pour un coefficient de frottement supérieur à 0,32.

Pour un coefficient de frottement de 0,5 on observe une localisation des déformations plastiques et contraintes résiduelles associées à l'extrême peau des massifs en contact. Ce phénomène s'explique par le fait que la capacité du massif, déjà chargé normalement, d'accepter un chargement tangentiel est dépassée. Pour le cas étudié la déformation plastique équivalente passe de 0,34% à 5,3% pour un coefficient de frottement variant de 0 à 0,5. Cette zone fortement écrouie étant en traction on peut soupçonner des conséquences importantes sur la durabilité de la surface.

L'effet de la température sur la loi d'écrouissage a été étudié en utilisant un algorithme inverse avec l'aide d'une simulation d'indentation Rockwell C par la méthode des éléments finis, avec ABAQUS. La température qui correspond à une réduction linéaire de la loi d'écrouissage est déduite de la relation empirique entre la dureté et la température.

Le comportement élasto-plastique de l'acier M50 pour une loi d'écrouissage abaissée de 10 et 20%, qui correspondrait à une température de 217 et 362°C, respectivement, a été analysé. Il apparaît que l'augmentation de température a pour effet de diminuer le niveau des contraintes sous charge tout en accroissant les contraintes résiduelles et les déformations plastiques observées après décharge. Ces valeurs ont été quantifiées.

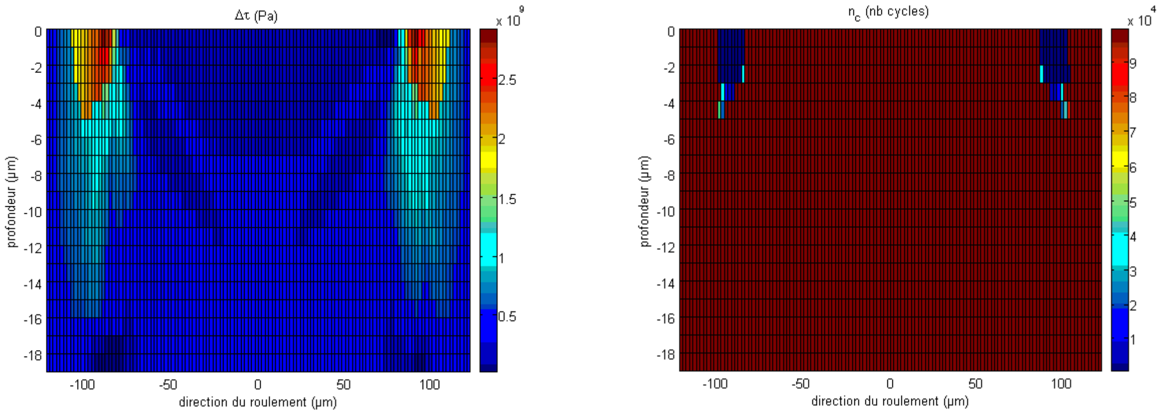
PERSPECTIVES

Ce travail de thèse s'inscrit plus généralement dans une thématique de recherche sur les contacts thermo-élasto-plastiques des matériaux à gradient de propriétés, qui a pour finalité une meilleure connaissance du comportement en fatigue des matériaux afin de prédire la durée de vie en fatigue mais aussi l'usure et le rodage des surfaces en contact. Dans la mesure où plusieurs travaux sont conduits en parallèle, avec une base d'outils numériques de simulation communs, certaines des perspectives énoncées ci-dessous sont en passe d'être réalisées par l'un des chercheurs de l'équipe. D'autres devront faire l'objet d'efforts spécifiques.

Le premier développement envisagé est le couplage des effets normaux et tangentiels dans le module de contact, effet important lorsque les propriétés élastiques et / ou plastiques sont différentes pour les deux massifs. Ce travail a été engagé par L. Gallego dans son travail de thèse. Il poursuit également le développement du code pour prendre en compte un comportement de type adhérence-glissement particulièrement adapté aux problèmes de fretting.

L'efficacité de cette méthode en termes de rapidité et de robustesse permet d'envisager son utilisation pour la prédiction de l'usure ou du rodage de deux surfaces en contact, simulation pour laquelle la géométrie des surfaces doit-être mise à jour régulièrement. Ces travaux ont démarré sur deux idées : l'une en considérant une usure locale proportionnelle à l'énergie dissipée pendant un cycle de chargement (thèse L. Gallego), l'autre en s'appuyant sur une déformation plastique seuil pour les zones écrouies en surface (thèse V. Boucly).

La troisième perspective concerne la modélisation de la durée de vie pour une surface indentée sous chargement roulant normal et tangentiel. C'est le travail de thèse de Y. Robin puis d'une nouvelle thèse qui devrait démarrer. Des premiers résultats ont été obtenus en associant un modèle d'endommagement élasto-plastique – basé sur la théorie des dislocations – pour l'estimation du nombre de cycles à l'amorçage, des mesures de propriétés élasto-plastiques cycliques et de fatigue, et le résultat de simulations avec notre modèle semi-analytique pour le passage d'une charge roulante sur un indent artificiel produit par une pointe Rockwell C modifiée. La figure ci-dessous présente une première estimation de la distribution de durée de vie pour un acier à roulement et dans un plan de symétrie lorsqu'une sphère élastique roule sans glisser sur un massif élasto-plastique.



a) b)

Figure c1 *Exemple de calcul de durée de vie pour une surface indentée et un massif élasto-plastique. a) variation de la contrainte de cisaillement maximal au cours d'un cycle de chargement, b) conséquence en terme de durée de vie (source : Thèse Y. Robin, 2006).*

Dans le même esprit il serait envisageable d'introduire un ou plusieurs paramètres aléatoires dans ce calcul de durée de vie déterministe afin d'obtenir une distribution statistique de durée de vie.

Lorsque la température n'est plus uniforme dans les massifs en contact, ce qui est le cas lorsque deux massifs dissipent de l'énergie par frottement, les propriétés élastiques et la loi d'écrouissage sont modifiées en tout point. C'est un sujet particulièrement intéressant mais qui demande certains développements théoriques ainsi qu'une refonte complète de la procédure numérique.

Un autre développement porterait sur l'implantation d'un modèle d'écrouissage cinématique linéaire puis non-linéaire dans le code de contact élasto-plastique. La principale difficulté sera l'identification des paramètres de la loi d'écrouissage, en particulier lorsque ceux-ci seront fonction de la température.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ADAM 00] Adams, G.G., Nosonovsky, M., *Contact modeling – forces*, Tribology International, 2000, Vol. 33, pp. 431-442.

[ANTA 04] Antaluca E., Nélias D. & Cretu S., *A Three-Dimensional Model for Elastic-Plastic Contact With Tangential Loading – Application to a Dented Surface*, 2004 STLE/ASME Tribology Conference, October 2004, Long Beach, California, paper TRIB2004-64331, 8p.

[ANTA 05a] Antaluca E., Nélias D. & Cretu S., *Stress and Strain States During Severe Rolling Contact Conditions,. 60th STLE Annual Meeting*, May 15-19, 2005, Las Vegas, Nevada.

[ANTA 05b] Antaluca E., Nélias D. & Cretu S., *Analysis of an Elastic-Plastic Contact Under Rolling Contact Conditions,. International Tribology Conference (ITC 2005)*, May 29 – June 2, 2005, Kobe, Japon.

[ARCH 75] Archard, J.F., Hunt, R.T., Onions, R.A., *Stylus profilometry and the analysis of the contact of rough surfaces,* In: Pater, A., D., Kalker, J., J., *The Mechanics of the Contact Between Deformable Bodies*, Delft: Delft University Press, 1975, pp. 282–303.

[BAIL 55] Bailey, A.I., Courtney-Pratt, J.S., *The area of real contact and the shear strength of monomolecular layers of a boundary lubricant,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1955, Vol. 227, issue 1171, pp. 500-515

[BARB 00] Barber, J.R., Ciavarella, M., *Contact mechanics*, Int. J. Solids Struct., 2000, Vol. 37, pp. 29-43.

[BENT 67] Bentall, R.H., Johnson, K.L., *Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic materials,* Int.J. Mech. Sci., 1967, Vol. 9, pp. 389-397.

[BHUS 01] Bhushan, B., *Modern tribology handbook I & II*, New York: CRC Press LLC, 2001, 1760 p.

[BHUS 90] Bhushan, B., Dugger, M.T., *Real contact area measurements on magnetic rigid discs,* Wear, 1990, Vol. 37, pp. 41-50.

[BHUS 96] Bhushan, B., *Contact mechanics of rough surfaces in tribology: single asperity contact,* Appl. Mech Rev., 1996, Vol. 49, pp. 275–98.

[BHUS 98] Bhushan, B., *Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact,* Tribol. Let., Vol. 4, 1998, pp. 1–35.

[BOUC 04] Boucly, V., *Modélisation semi-analytique du contact thermo-élasto-plastique*, DEA mécanique, Lyon : INSA de Lyon, 2004, 47 p.

[BOUC 05] Boucly V., Nélias D., Liu S., Wang Q.J., Keer L.M., *Contact analyses for bodies with frictional heating and plastic behavior*, ASME J. Tribol., 2005, Vol. 127, n°2, pp.355-364.

[BOUS 85] Boussinesq, J., *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Paris : Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1885, 721 p

[BOWD 39] Bowden, F.P., Tabor, D., *The area of contact between stationary and moving surfaces,* Proc.R. Soc. A, 1939, Vol. 169, pp. 391-402.

[BUFL 59] Bufler, H., *Zur theorie der rollenden reibung,* Ing Arch; 1959, Vol. 27, pp. 137-152.

[BURG 97] Burguete, R.L, Patterson, E.A., *A photoelastic study of contact between a cylinder and a halfspace,* Exp. Mech., 1997, Vol. 37, pp. 314-323.

[BUSH 79] Bush, A.W., Gibson, R.D., Keogh, G.P., *Strongly anisotropic rough surfaces,* ASME J. Lubr. Technol., 1979, Vol. 101, pp. 15–20.

[CARN 87] Carneiro-Esteves, A., *Résolution du contact élastique entre deux corps rugueux,* Thèse de Doctorat, Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université Lyon I, 1987, 157 p.

[CART 26] Carter, F.W., *On the action of a locomotive driving wheel,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1926, Vol. 112, pp. 151-157.

[CATT 38] Cattaneo, C., *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi,* Rendiconti dell' Accademia nazionale dei Lincei; 1938, Vol. 27, n°6, pp. 342–348, 433–436, 474–478.

[CERC 99] Cercueil, H., *Etude d'une nouvelle nuance d'acier à roulement pour conditions d'usage sévères et modélisation de son endommagement en présence d'une indentation,* Thèse de doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1999, 182 p.

[CHAN 87] Chang, W.R., Etsion, I., Bogy, D.B., *An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces*, ASME J. Tribol., 1987, Vol. 109, pp. 257–263.

[CHEN 94] Cheng, W., Cheng, H.S., Mura, T., Keer, L.M., *Micromechanics modeling of crack initiation under contact fatigue,* ASME J. Tribol., 1994, vol. 116, n°1, pp. 2-8.

[CHEV 72] Chevalier, J.L., Dietrich, M.W., Zaretsky, E.V., *Short-term hot hardness characteristics of rolling element steels*, NASA TN D-6632, 1972.

[CHIU 77] Chiu, Y.P., *On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space,* ASME J. Appl. Mech., 1977,Vol. 44, pp. 587-590.

[CHIU 78] Chiu, Y. P., *On the stress field and surface deformation in a half-space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform,* ASME J. Appl. Mech., 1978, Vol. 45, pp. 302-306.

[CHIU 83] Chiu, Y.P., Hartnett, M.J., *A numerical solution for layered solid contact problems with application to bearings,* ASME J. Lubr. Technol. 1983, Vol. 105, n°4, pp. 585-590.

[CONR 71] Conry, T.F., Seireg, A., *A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact,* ASME J. Appl. Mech., 1971, Vol. 38, n°2, pp. 387-392.

[COUH 96] Couhier, F., *Modélisation du contact élastohydrodynamique cylindre/plan : influence des rugosités de surface sur les mécanismes de lubrification,* Thèse de doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1996, 150 p.

[CREȚ 02] Crețu, S., Antaluca E., *A comparative study on numerical methods used to obtain pressure distribution in non-hertzian concentrated contacts,* Prasic'02, November 7-8 2002, Brasov, Romania, pp.421-426.

[CREȚ 03] Crețu, S., Antaluca, E., Crețu, O., *The study of non-hertzian concentrated contacts by a GC-DCFFT technique,* Analele Universitatii Dunarea de Jos – Galati, 2003, vol. I, fascicle VIII (Tribology), pp.39-47.

[DANG 93] Dang Van, K., Maitournam, M.H, *Steady-state flow in classical elastoplasticity : applications to repeated rolling and sliding contact,* ASME J. Mech. Phys. Solids, 1993, vol. 41, n°11, pp. 1691-1710.

[DOWS 66] Dowson, D., Higginson, G. R., *Elasto-hydrodynamic lubrication,* Oxford: Pergamon Press, 1966, 266 p.

[DRIN 96] Drinkwater, B.W., Dwyer-Joyce, R.S., Cawley, P., *A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid-solid interface,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1996, Vol. 452, No. 1955, pp. 2613-2628.

[DUBO 89] Dubourg, M.C.,. *Le contact unilatéral avec frottement le long de fissures de fatigue dans les liaisons mécaniques,* Thèse de Doctorat, Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université Lyon I, 1989, 253 p.

[DUMO 97] Dumont, M.L., *Etude des endommagements de surface induits par fatigue de roulement dans les contacts élastohydrodynamiques pour des aciers M50 et 100Cr6,* Thèse de doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1997, 197 p.

[DYSO 54] Dyson, J. and Hirst, W., *The true area of contact between solids,* Proceedings of the Royal Society of London, Series B, 1954, Vol. 67B, pp. 309-312.

[ERTE 39] Ertel, A. M., *Hydrodynamic lubrication based on new principles,* Akad. Nauk SSSR Prikadnaya Mathematica i Mekhanika, 1939, Vol. 3, n°2, pp. 41–52.

[FESS 57] Fessler, H., Ollerton, E., *Contact stresses in toroids under radial loads,* Brit. J. Appl. Phys., 1957, Vol. 8, pp. 387-393.

[FLAM 93] Flamand, L., *Fatigue des surfaces,* Techniques de l'ingénieur, 1993, Vol. B 5055, 19 p.

[FOTI 96] Fotiu, P.A., Nemat-Nasser, S., *A universal integration algorithm for rate-dependant elastoplasticity,* Comput. Struct., Vol. 59, n°6, 1996, pp. 1173-1184.

[FRAN 05] François D., *Essais mécaniques des métaux-Essais de dureté,* Techniques de l'ingénieur, 2005, Vol. M 4 160, 11 p.

[FRAN 82] Francis, H.A., *A finite surface element model for plane-strain elastic contact,* Wear, 1982, Vol. 76, pp. 221–245.

[GLAD 80] Gladwell, G.M.L., *Contact problems in the classical theory of elasticity,* Alphen aan den Rijn : Sijthoff and Noordhoff, 1980, 716 p..

[GONZ 02] Gonzalez, J.A., Ramon, A., *Solving 2D transient rolling contact problems using the BEM and mathematical programming techniques,* International Journal for Numerical Methods in Engineering; 2002, Vol. 53, n°4, pp. 843–874

[GOOD 62] Goodman, LE., *Contact stress analysis of normally loaded rough spheres,* ASME J Appl Mech; 1962, Vol. 29, pp. 515–522.

[GREE 66] Greenwood, J.A., Williamson, J.B.P., *Contact of nominally flat surfaces,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1966,Vol. 295, pp. 300–319.

[GRUB 49] Grubin, A.N., *Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces,* Moscow: Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering, Book no. 30, D.S.I.R. translations, 1949.

[GUPT 95] Gupta, V., Hahn, G.T., Bastias, P.C., Rubin, C.A., *Contribution of surface irregularities to rolling contact plasticity in bearing steels,* ASME J. Tribol., 1995, vol. 117, n°4, pp. 660-666.

[HAHN 87] Hahn, G.T., Bhargava, V., Rubin, C.A., Chan, Q., Kim, K., *Analysis of the rolling contact residual stresses and cyclic plastic deformation of SAE 52100 steel ball bearings*, ASME J. Tribol., 1987, vol. 109, pp. 618-626.

[HAMI 71] Hamilton, G.M., Moore, S.L., *Deformation and pressure in an elasto-hydrodynamic contact,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1971, Vol. 332, pp. 313-330.

[HAMR 76a] Hamrock, B.J., Dowson, D., *Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part I- Theoretical foundation,* ASME J. Lubr.Tech., 1976, Vol. 98, n°2, pp 223-229.

[HAMR 76b] Hamrock, B.J., Dowson, D., *Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part II- Ellipticity parameter results,* ASME J. Lubr.Tech., 1976, Vol. 98 , n°3, pp. 375-383.

[HARR 01] Harris, T.A., *Rolling bearing analysis,* New York : Wiley-Interscience, 2001, 1086 p.

[HEAR 87] Hearle, A.D., Johnson, K.L., *Cumulative plastic flow in rolling and sliding line contact,* ASME Journal of Applied Mechanics, 1987, Vol. 54, pp. 1-7.

[HERT 82] Hertz, H., *On the contact of elastic solids,* J. Reine Angew. Math., 1882, Vol. 92, pp. 156-171.

[HILL 93] Hills, D. A., Nowell, D., Sackfield, A., *Mechanics of elastic contacts,* Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993, 496 p.

[HILL 94] Hills, D.A., Nowell, D., *Mechanics of Fretting Fatigue,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,. 1994, 236 p.

[HOLM 67] Holm, R., *Electric Contacts*, New York: Springer-Verlag, 1967, 482 p.

[JACQ 01] Jacq, C., *Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitruré en présence d'indentations,* Thèse de doctorat, Lyon : INSA Lyon, 2001, 251p.

[JACQ 02] Jacq, C., Nélias, D., Lormand, G., Girodin, D., *Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code,* ASME J. Tribol., 2002, Vol. 124, pp. 653-667.

[JIAN 02] Jiang, Y., Xu, B., Sehitoglu, H., *Three-dimensional elastic-plastic stress analysis of rolling contact,* ASME J. Tribol., 2002, Vol. 124, pp. 699-708.

[JOHN 85] Johnson, K.L, *Contact mechanics,* Cambridge : Cambridge University Press, 1985, 452 p.

[JU 92] Ju, Y., Zheng, L., *A full numerical solution for the elastic contact of three-dimensional real rough surfaces,* Wear, 1992, Vol. 157, pp. 151–161.

[JU 97] Ju, Y., Farris, T.N., *FFT thermoelastic solution for moving heat sources,* ASME Transaction, ASME J. Tribol., 1997, Vol. 119, pp. 156-162.

[KALK 67] Kalker, J.J., *On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction,* Thèse: Doctor In De Technische Wetenshappen Aan De technische Hogeschoolte Te Delft, Nederlands: Drukkerij Bedrijf NV- Leiden, 1967, 155 p.

[KALK 72] Kalker, J.J. and van Randen, Y., *A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems,* J. Engng. Math., 1972, Vol. 88, pp. 193-206.

[KALK 82] Kalker, J.J.,. *The contact between wheel and rail,* Report of the Department of mathematics and informatics, Rapport n° 82-27, Delft: Delft University of Technology, 1982, 36p.

[KALK 86] Kalker, J.J., *Numerical calculation of the elastic field in a half-space,* Commun. Appl. Numer. Methods, Vol. 2, 1986, pp. 401–410.

[KALK 90] Kalker, J.J., *Three dimensional elastic bodies in rolling contact,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990, 314 p.

[KANG 04] Kang, Y. S., Sadeghi, F., Hoeprich, M. R., *A finite element model for spherical debris denting in heavily loaded contacts,* ASME J. Tribol, 2004, vol. 126, n°4, pp. 71-80.

[KANN 65] Kannel, J.W., Walowit, J.A., Bell, J.C., Allen, C.M., *The determination of stresses in rolling contact elements,* Trans. ASME J. Lubr. Tech., 1965, Vol. 89, pp. 453-465.

[KEND 71] Kendall, K., Tabor, D., *An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1971, Vol. 323, pp. 321-340.

[KRAG 60] Kragelsky, I.V., Demkin, N.B., *Determination of the true area of contact of elastic solids,* Trans. ASME, Friction and Wear in Machinery, 1960, Vol. 14, pp. 30-53.

[KRAG 65] Kragelsky, I.V., *Friction and Wear,* London: Butterworths, 1965, 464 p.

[LAMA 98] Lamagnère, P., Fougères, R., Lormand, G., Vincent, A., Girodin, D., Dudragne, G., Vergne, F., *A physically based model for endurance limit of bearing steels,* ASME Journal of Tribology, 1998, Vol 120, n°3, pp. 1-6.

[LEE 94] Lee, S.C., Ren, N., *The sub-surface stress field created by three-dimensional rough bodies in contact with traction,* Tribol. Trans., 1994, Vol. 37, pp. 615-621.

[LEE 96] Lee, S.C., Ren, N., *Behavior of elastic-plastic rough surface contact areas affected by surface topography, load and material hardness,* STLE Tribol. Trans., 1996, Vol. 39, No. 1, pp. 67–74.

[LEMA 88] Lemaître, J., Chaboche, J.L., *Mécanique des matériaux solides,* Paris: Dunod, 1988, 544 p.

[LERO 89] Leroy, J.M., *Modélisation thermoélastique des revêtements de surface utilisés dans les contacts non lubrifiés,* Thèse de doctorat, Lyon: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université Lyon I, 1989, 210 p.

[LEVE 03] Lévêque, R., *Aciers à outils - Mise en œuvre,* Techniques de l'ingénieur, 2003, Vol. M 4 590, 19 p.

[LIU 00] Liu, S., Wang, Q., Liu, G., *A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses,* Wear, 2000, Vol. 243, pp. 101-111.

[LOVE 27] Love, A. E. H, *A treatise on the mathematical theory of elasticity,* London: Cambridge University Press, 1927, 643p.

[LUBR 91] Lubrecht, A.A., Ioannides, E., *A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques,* ASME J. Tribol., 1991, Vol. 113, n°1, pp. 128-133.

[MAYE 95a] Mayeur, C., *Modélisation du contact rugueux élastoplastique,* Thèse de doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1995, 178 p.

[MAYE 95b] Mayeur, C., Sainsot, P., Flamand, L., *A numerical elastoplastic model for rough contact,* ASME J. Tribol., 1995,Vol. 117, n°3, pp. 422-429.

[MCCO 86] McCool, J. I., *Comparison of models for the contact of rough surfaces,* Wear, 1986, Vol. 107, pp. 37–60.

[MIND 49] Mindlin, R.D., *Compliance of elastic bodies in contact,* ASME J. Appl. Mech., 1949, Vol. 16, pp. 259–268.

[MIND 53] Mindlin, R.D., Deresiewicz, H., *Elastic spheres in contact under varying oblique forces,* ASME J. Appl. Mech.,1953, Vol. 20, pp. 327-344.

[MOSS 63] Mossakovski, V.I., *Compression of elastic bodies under conditions of adhesion,* Prikladnaia Mathematika I Mekhanika; 1963, Vol 27, pp. 418-427.

[MUL 86] Mul J. M., Kalker J. J., Fredriksson B., *The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions,* ASME J. Tribol., 1986, Vol. 108, pp 140-148.

[NELI 05] Nélias, D., Jacq, C., Lormand, G., Dudragne, G., Vincent A., *New methodology to evaluate the rolling contact fatigue performance of bearing steels with surface dents: application to 32CrMoV13 nitrided and M50 steels,* ASME J. Tribol., 2005, Vol. 127, pp. 611–622.

[NELI 06] Nélias, D., Boucly, V., Brunet, M.,. *Elastic-plastic contact between rough surfaces: proposal for a wear or running-in model,* ASME J. Tribol., 2006, Vol. 128, 9 p..

[NELI 99a] Nélias, D., *Contribution à l'étude des roulements. Modélisation globales des roulements et avaries superficielles dans les contacts EHD pour des surfaces réelles ou indentées,* Habilitation à diriger des recherches, Lyon : INSA de Lyon, 1999, 160 p.

[NELI 99b] Nélias, D., Dumont, M.L., Champiot, F., Vincent, A., Girodin, D., Fougères, R., Flamand, L., *Role of inclusions, surface roughness and operating conditions on rolling contact fatigue,* ASME J. Tribol., 1999, Vol. 121, n°2, pp. 240-251.

[NEWC 57] Newcomb, T.P., *Communication,* Proc. Conf. Lubrication and Wear, Inst. Mech. Eng., London, 1957, pp. 837-838.

[NITT 00] Nitta, I., Kato, K., *Theory of contact and friction,* Japanese J. Tribol., 2000, Vol. 45, pp. 507-512

[NOGI 97] Nogi, T, Kato, T., *Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact - Part I: Analysis using a real surface model,* ASME J. Tribol., 1997, Vol. 119, pp. 493-500

[OLLE 63] Ollerton, E., Haines, D.J., *Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces,* Proc. Instn. Mech. Engrs., 1963, Vol. 177, pp. 95-101.

[OSUL 88] O'sullivan, T.C., King, R.B., *Sliding contact stress field due to a spherical indenter on a layered elastic half-space,* ASME J. Tribol., 1988, Vol. 110, n°2, pp. 235-240.

[POLO 00] Polonsky, I.A., Keer, L.M., *Fast methods for solving rough contact problems: a comparative study,* ASME J. Tribol., 2000, Vol. 122, pp. 36-41.

[POLO 99] Polonsky, I.A., Keer, L.M., *A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques,* Wear, 1999, Vol. 231, pp. 206-219.

[POLY 99] Polycarpou, A.A., Etsion, I., *Analytical approximations in modelling contact rough surfaces,* ASME J. Tribol., 1999, Vol. 121, pp. 234–239.

[POON 94] Poon, C.Y., Sayles, R.S., *Numerical contact model of a smooth ball on an anisotropic rough surface,* ASME J. Tribol., 1994, Vol. 116, pp. 194–201.

[REN 94] Ren, N., Lee, S.C., *The effect of surface roughness and topography on the contact behavior of elastic bodies,* ASME J. Tribol., 1994, Vol. 116, pp. 804–811.

[ROBB 01a] Robbe-Valloire, F., *Statistical analysis of asperities on a rough surface,* Wear, Vol. 249, Issues 5-6, 2001, pp. 40.1

[ROBB 01b] Robbe-Valloire, F., Paffoni, B., Progri, R., *Load transmission by elastic, elasto-plastic or fully plastic deformation of rough interface asperities*, Mechanics of Materials, Volume 33, Issue 11, 2001, pp 617-633.

[SACK 83a] Sackfield, A., Hills, D. A., *Some useful results in the classical Hertz contact problem,* J. Strain Anal., 1983, Vol.18, pp. 101-108.

[SACK 83b] Sackfield, A., Hills, D.A., *A note on the Hertz contact problem: correlation of standard formulae,* J. Strain Anal., 1983, Vol. 18, pp. 195-201.

[SMIT 53] Smith, J.O., Liu, C.K., *Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid,* ASME J. Appl. Mechs., 1953, Vol. 20, pp. 157-166.

[SNID 94] Snidle, R.W., Evans. H.P., *A simple method of elastic contact simulation,* Proc. Insn. Mech. Engrs. Part J, 1994, Vol. 208, pp. 291-293.

[SOLO 68] Solomon, L., *Elasticité Linéaire,* Paris : Masson, 1968, 736 p.

[SPEN 68] Spence, D.A., *Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading,* Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1968, Vol. 305, pp. 55–80.

[SPEN 75] Spence, D.A., *The Hertz contact problem with finite friction,* J. Elasticity, 1975, Vol. 5, pp. 297-319.

[STEP 00] Stephens L.S., Yan L., Meletis E.I., *Finite element analysis of the initial yielding behaviour of a hard coating/substrate system with functionally graded interface under indentation and friction,* ASME J. Tribol. 2000, Vol. 122, pp. 381-387.

[SZOL 96] Szolwinski, M.P., Farris, T.N., *Mechanics of fretting fatigue crack formation,* Wear, 1996, Vol. 198, pp. 93–107.

[TALL 99] Tallian, T.E., *Failure atlas for hertz contact machine elements, 2nd ed,* New York : ASME Press, 1999, 486 p.

[THEO 78] Theocaris, P.S., Stassinakis, C.A., *The elastic contact of two disks by the method of caustics,* Exp. Mech., 1978, Vol. 18, pp. 409-415.

[THOM 30] Thomas, H.R., Hoersch, V.A., *Stresses due to the pressure of one elastic solid on another,* Univ. of Illinois Engng. Exptal. Station Bulletin 1930, No 212,

[TIAN 96] Tian, X., Bhushan, B., *A numerical three-dimensional model for the contact of rough surfaces by variational principle*, ASME J. Tribol., 1996, Vol. 118, pp. 33–42.

[VERG 85] Vergne, F., *Calcul des déplacements et des contraintes dans un demi-espace élastique chargé en surface par des actions distribuées normales ou tangentielles quelconques,* DEA Mécanique, Lyon : INSA de Lyon, 1985, 61 p.

[VILL 85] Villechaise, B., *Mécanique des contacts : élasticité et rupture,* Thèse de doctorat, Lyon: Institut National des Sciences Appliquées et Université Lyon I, 1985, 125 p.

[VIRM 94] Virmoux, Ph., Inglebert, G., Gras, R., *Characterisation of elastic-plastic behaviour for contact purposes on surface hardened materials,* Tribology series, 1994, Vol. 27, pp. 287-301.

[WEBS 86] Webster, M.N., Sayles, R.S., *A numerical model for the elastic frictionless contact of real rough surfaces,* ASME J. Tribol., 1986, Vol. 108, pp. 314–320.

[XU 97] Xu, G., Sadeghi, F., Hoeprich, M., *Residual stresses due to debris effects in EHL Contacts,* Tribology series, 1997, Vol. 40, n° 4, pp. 613-621.

[ZARE 92] Zaretsky, E., V., *STLE Life factors for rolling bearings,* Park Ridge: Society of Tribologists and Engineers, 1992, 314p.

[ZHIQ 01] Zhiqiang, L., Neville, A., Reuben R. L., *A numerical calculation of the contact area and pressure of real surfaces in sliding wear,* ASME J. Tribol., 2001, Vol. 123, pp. 27–35.

ANNEXE A

CALCUL DES FONCTIONS D_{ij}^{r}

Le calcul des fonctions D_{ij}^{r} nécessite la détermination de u_{3i} * dans l'équation (34), qui sont les déplacements générés par une force unitaire normale appliquée sur la surface du solide à l'origine. Ces déplacements ont été calculés de manière analytique par Johnson [11] :

$$\begin{pmatrix} u_{31}^{*} \\ u_{32}^{*} \\ u_{33}^{*} \end{pmatrix} = (4\pi\mu)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{x_1.x_3}{r^3} - \dfrac{(1-2\nu).x_1}{r(x_3+r)} \\ \dfrac{x_2.x_3}{r^3} - \dfrac{(1-2\nu).x_2}{r(x_3+r)} \\ \dfrac{x_3^2}{r^3} + \dfrac{2(1-\nu)}{r} \end{bmatrix} \quad avec \;\; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad \text{(C1)}$$

Après intégration sur une zone cubique de centre C (c_1, c_2, c_3), de dimensions $2\Delta x_1.2\Delta x_2.2\Delta x_3$, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{ij}^{r} = {} & F_{ij}(c1_u, c2_u, c3_u) - F_{ij}(c1_u, c2_u, c3_l) - F_{ij}(c1_u, c2_l, c3_u) + F_{ij}(c1_u, c2_l, c3_l) \\ & - F_{ij}(c1_l, c2_u, c3_u) + F_{ij}(c1_l, c2_u, c3_l) + F_{ij}(c1_l, c2_l, c3_u) - F_{ij}(c1_l, c2_l, c3_l) \end{aligned} \qquad \text{(C2)}$$

où
$$\begin{matrix} c1_u = c_1 + \Delta x_1 & c2_u = c_2 + \Delta x_2 & c3_u = c_3 + \Delta x_3 \\ c1_l = c_1 - \Delta x_1 & c2_l = c_2 - \Delta x_2 & c3_l = c_3 - \Delta x_3 \end{matrix}$$

et

$$F_{11}(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\left[-\nu x \ln(y+R) - (1-2\nu) z \tan^{-1}\left(\frac{y+z+R}{x}\right) \right]$$

$$F_{22}(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\left[-\nu y \ln(x+R) - (1-2\nu) z \tan^{-1}\left(\frac{x+z+R}{y}\right) \right]$$

$$F_{12}(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\left[-2\nu r - (1-2\nu) z \ln(z+R) \right]$$

$$F_{13}(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\left[2x \tan^{-1}\left(\frac{y+z+R}{x}\right) + y \ln(z+R) \right]$$

$$F_{23}(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\left[2y \tan^{-1}\left(\frac{x+z+R}{y}\right) + x \ln(z+R) \right]$$

$$F_{33}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\left[2(1-\nu)\left(2z \tan^{-1}\left(\frac{x+y+R}{z}\right) + x \ln(y+R) + y \ln(x+R) \right) - \frac{z}{2}\theta \right]$$

$$avec \;\; \theta = -2.\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{zR}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2} \qquad \text{(C3)}$$

ANNEXE B
EQUATIONS CONSTITUTIVES DE LA PLASTICITE

EQUATIONS CONSTITUTIVES DE LA PLASTICITE

Supposons un taux de déformation plastique exprimé par :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}\mu \tag{B1}$$

où μ est un tenseur normalisé,

$$\mu = \frac{3}{2}\frac{\sigma'}{\sigma_e} \quad , \quad \mu : \mu = \frac{3}{2} \tag{B2}$$

et où un prime indique la partie déviatorique du tenseur correspondant.

Dans notre cas, $\dot{\gamma}$ est égal au taux de déformation plastique effective,

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} \tag{B3}$$

et γ est la déformation plastique cumulée,

$$\gamma = \int_0^t \dot{\gamma}\, dt \,. \tag{B4}$$

La contrainte effective est définie par :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma' : \sigma'} \tag{B5}$$

et nous utiliserons également le taux de déformation effective défini par :

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}' : \dot{\varepsilon}'} \,. \tag{B6}$$

Grâce à l'équation (B6), le déviateur du taux de déformation totale peut s'écrire :

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{e}\eta \quad , \quad \eta : \eta = \frac{3}{2} \,. \tag{B7}$$

Selon notre modèle de plasticité, nous considérons une forme générale de la loi d'écoulement :

$$f = \sigma_e - g(\gamma) = 0 \tag{B8}$$

où f est la surface de charge, et $g(\gamma)$ la limite élastique statique.

Les conditions de charge/décharge sont données par les relations de Kuhn-Tucker :

$$f \le 0 \quad , \quad \dot{\gamma} \ge 0 \quad , \quad f\,\dot{\gamma} = 0 \quad , \tag{B9}$$

et doivent être vérifiées à chaque instant.

Enfin, en régime élastique, nous considérons par simplicité que le comportement du matériau est isotrope,

$$\sigma' = 2G\left(\varepsilon' - \varepsilon^{p}\right) \tag{B10}$$

G étant le module de cisaillement élastique. G correspond à la constante de Lamé μ, mais est notée ainsi pour éviter toute confusion avec le tenseur normalisé μ cité au-dessus, Eq. (B2).

En introduisant l'équation (B10) dans l'expression du taux de contrainte effective on trouve :

$$\dot{\sigma}_e = \dot{\sigma}' : \mu = 2G\,\dot{\varepsilon}' : \mu - 3G\,\dot{\gamma} \tag{B11}$$

Si on considère que μ et η sont colinéaires, alors on obtient :

$$\Delta\sigma_e = 3G\,\dot{e}\,\Delta t - 3G\,\Delta\gamma \tag{B12}$$

<u>*ALGORITHME DE PLASTICITE*</u>

(1) Calculer un premier état « d'essai », supposant que $\Delta\varepsilon'$ est une déformation purement élastique. Les indices a et b correspondent à l'état initial et final respectivement. Le prédicteur élastique $\sigma'^{(1)}$ est donc déterminé, et on pose :

$$\sigma_e^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'^{(1)} : \sigma'^{(1)}} \quad , \quad \mu^{(1)} = \frac{3\,\sigma'^{(1)}}{2\,\sigma_e^{(1)}} \quad ,$$
$$\gamma^{(1)} = \gamma_a \quad , \quad \dot{\gamma}^{(1)} = \dot{\gamma}_a \quad , \quad g^{(1)} = g_a \tag{B13}$$

(2) Calculer :

$$f^{(n)} = \sigma_e^{(n)} - g^{(n)} \neq 0 \tag{B14}$$

(3) Linéariser $f^{(n)}$ le long de la direction du correcteur plastique :

$$f_L^{(n)} = f^{(n)} + f_{,\sigma_e}^{(n)}\,\Delta\sigma_e^{(n)} + f_{,\gamma}^{(n)}\,\Delta\gamma^{(n)} = 0\,,$$
$$f_{,\sigma_e}^{(n)} = 1\,, \quad f_{,\gamma}^{(n)} = -g_{,\gamma}^{(n)} \tag{B15}$$

et utiliser l'incrément de correcteur plastique :

$$\Delta\sigma_e^{(n)} = -3G \ \ \Delta\gamma^{(n)} \qquad \text{(B16)}$$

pour obtenir :

$$\Delta\gamma^{(n)} = \frac{f^{(n)}}{3G + g_{,\gamma}^{(n)}} \qquad \text{(B17)}$$

(4) Calculer les nouvelles contraintes et les nouvelles déformations :

$$\begin{aligned} \sigma_e^{(n+1)} &= \sigma_e^{(n)} - 3G\,\Delta\gamma^{(n)} \ , \\ \gamma^{(n+1)} &= \gamma^{(n)} + \Delta\gamma^{(n)} \end{aligned} \qquad \text{(B18)}$$

(5) Calculer :

$$g^{(n+1)} = g\left(\gamma^{(n+1)}\right) \qquad \text{(B19)}$$

et vérifier si :

$$\left| f^{(n+1)} \right| = \left| \sigma_e^{(n+1)} - g^{(n+1)} \right| < tol \ ,$$

où *tol* est la tolérance imposée.

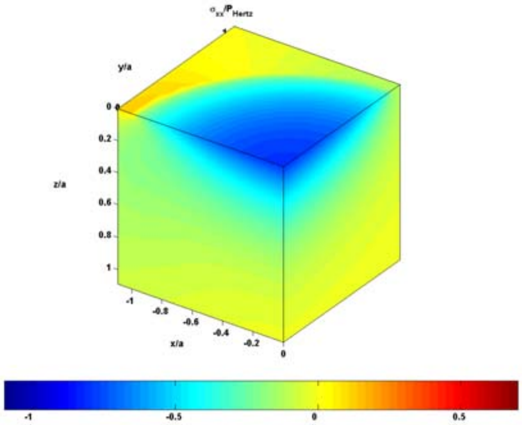
Si *non* : retourner à (3), et répéter les étapes (3) - (5)

si *oui* :

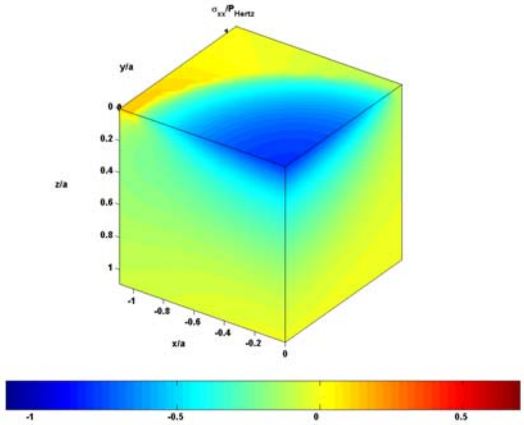
$$(\sigma_e)_b = \sigma_e^{(n+1)} \ , \quad \gamma_b = \gamma^{(n+1)} \ , et \quad \Delta\varepsilon^p = \Delta\gamma\,\mu_b$$

ANNEXE C
REPARTITION DES CONTRAINTES ET DEFORMATION PLASTIQUE EN FONCTION DU COEFICIENT DE FROTTEMENT

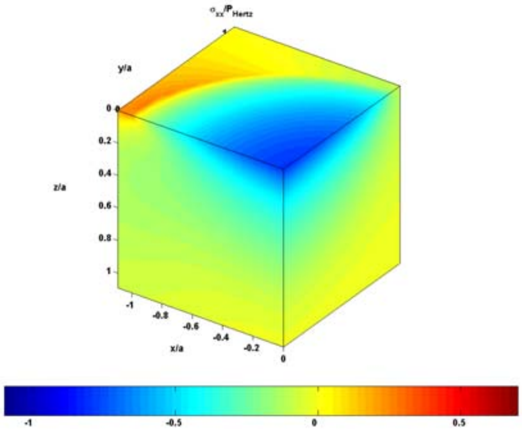
σ_{xx} $/P_{hertz}$



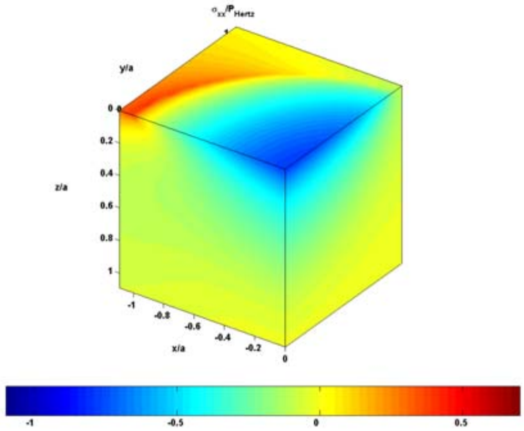
Hertz



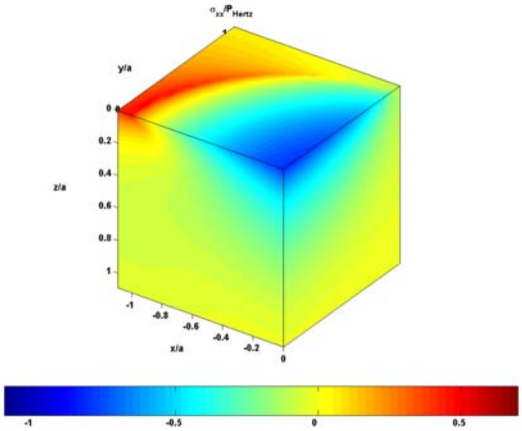
μ=0



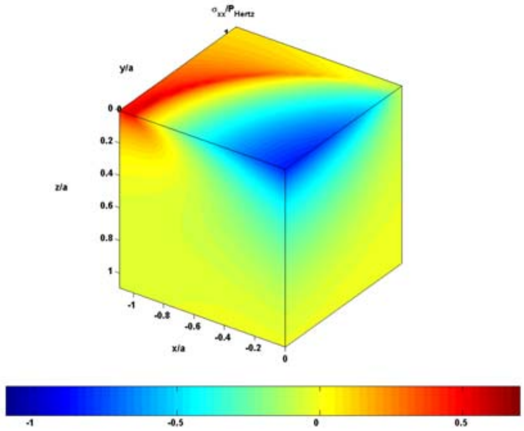
μ=0.1



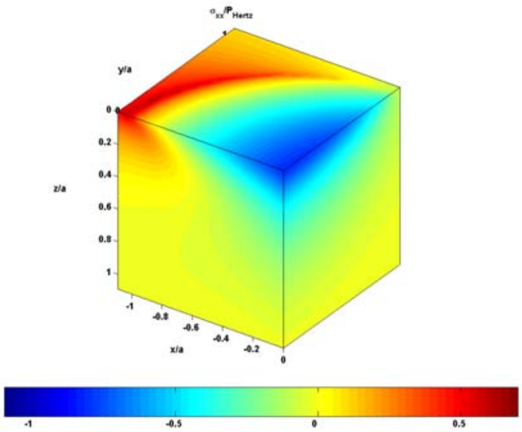
μ=0.2



μ=0.3

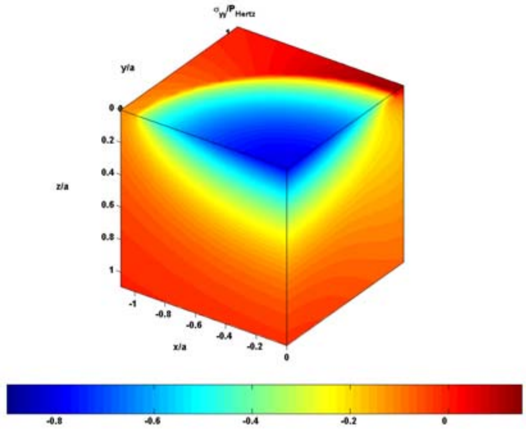


μ=0.4

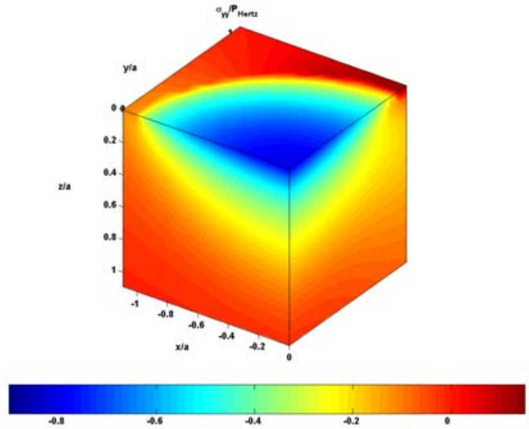


μ=0.5

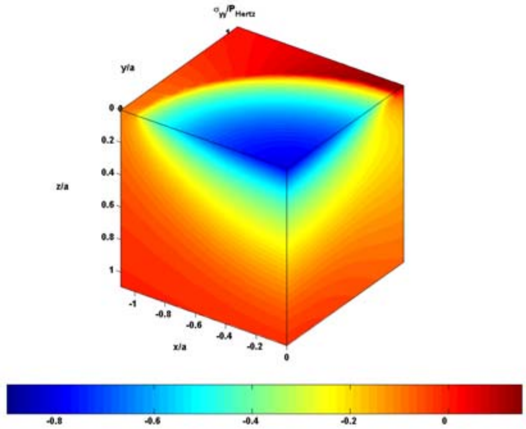
$\boldsymbol{\sigma_{yy}}/P_{hertz}$



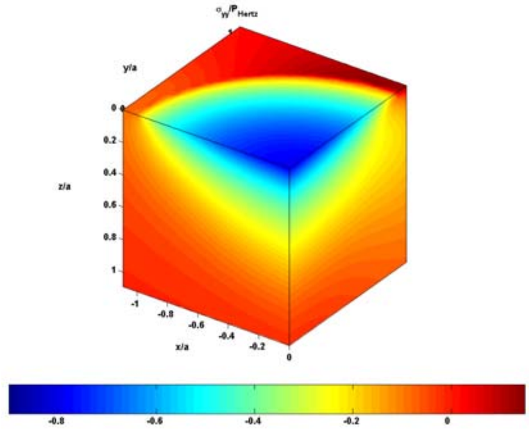
Hertz



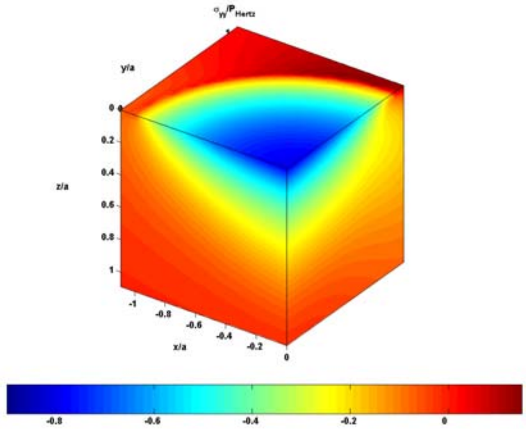
μ=0



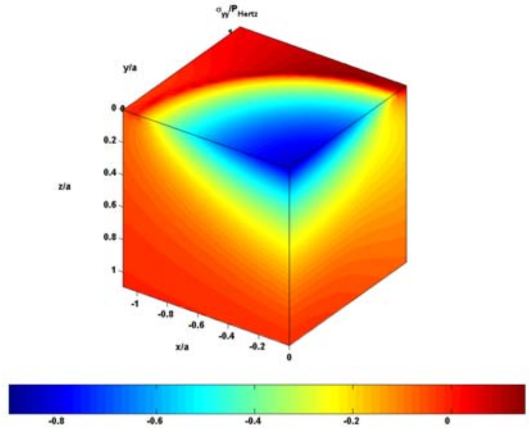
μ=0.1



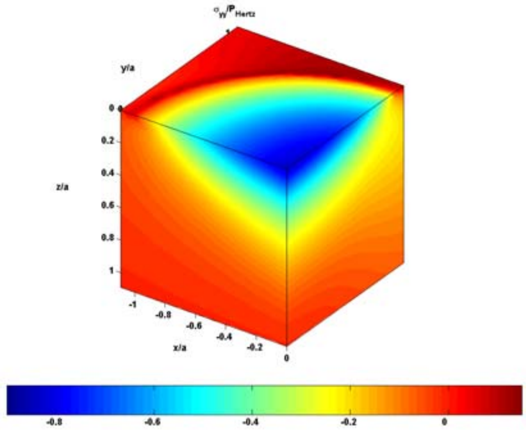
μ=0.2



μ=0.3

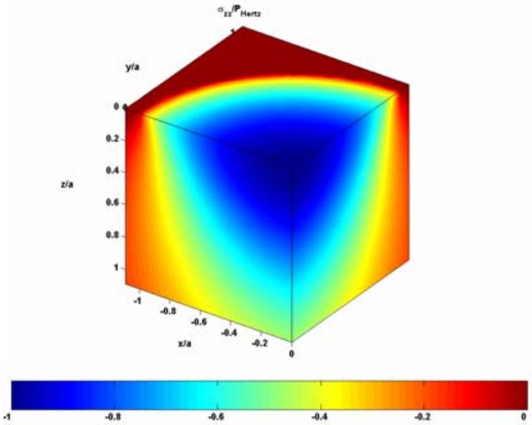


μ=0.4

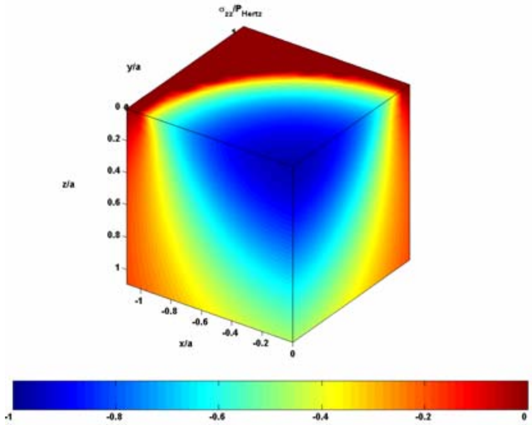


μ=0.5

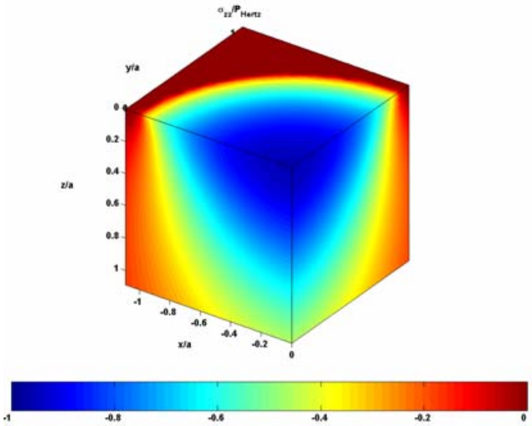
$\boldsymbol{\sigma_{zz}}/P_{hertz}$



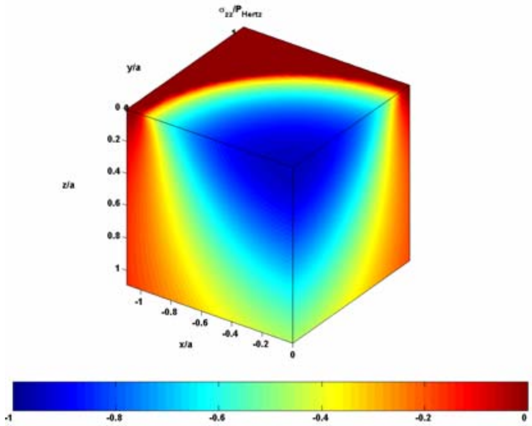
Hertz



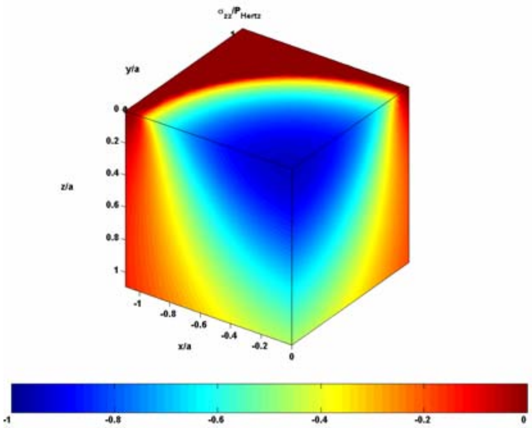
μ=0



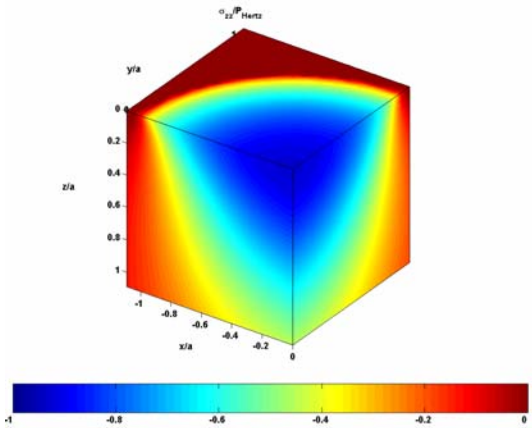
μ=0.1



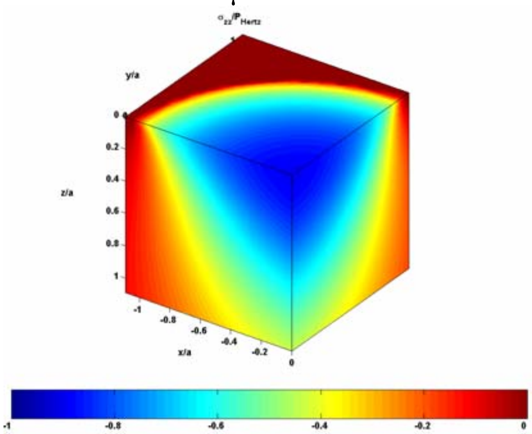
μ=0.2



μ=0.3

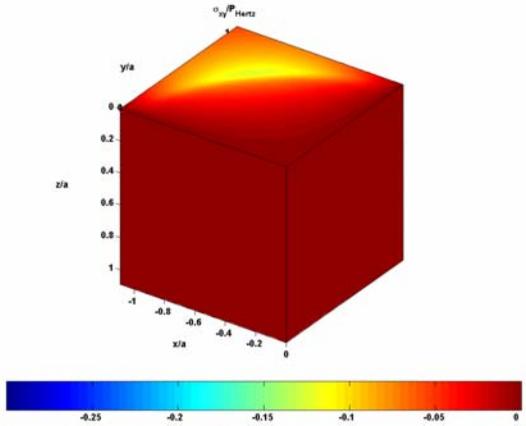


μ=0.4

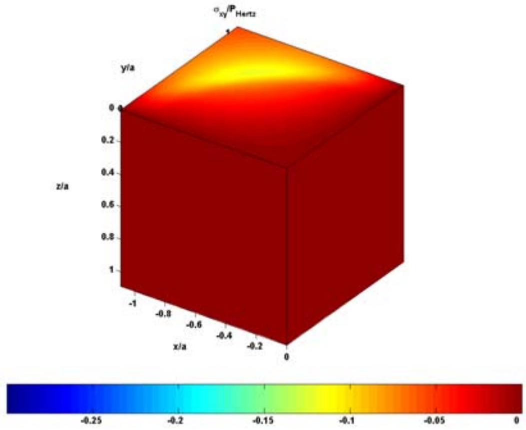


μ=0.5

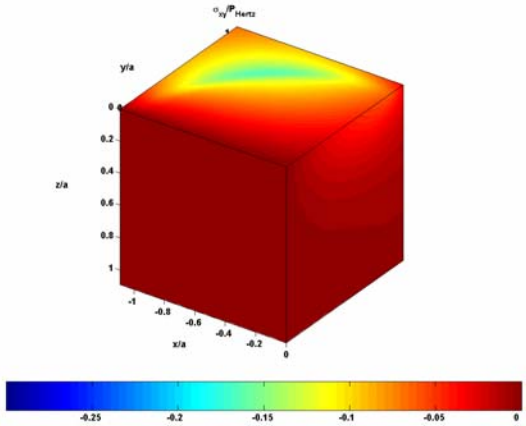
σ_{xy}/P_{hertz}



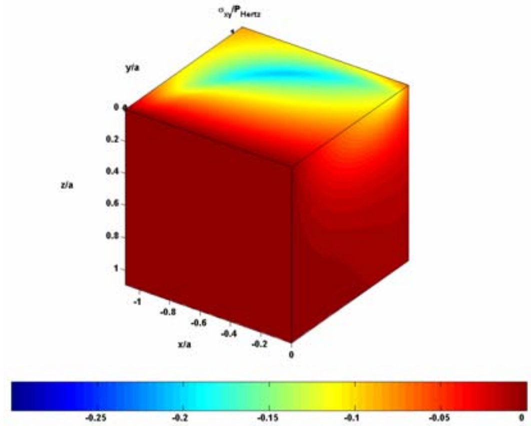
Hertz



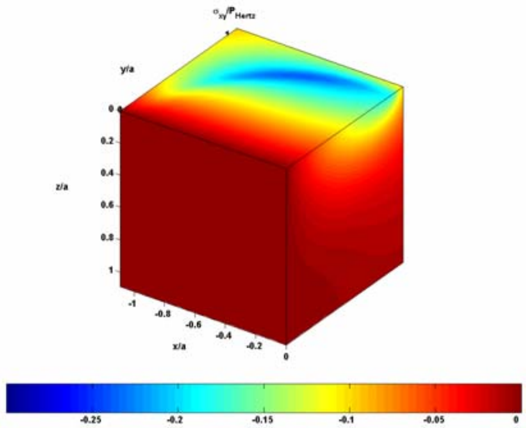
μ =0



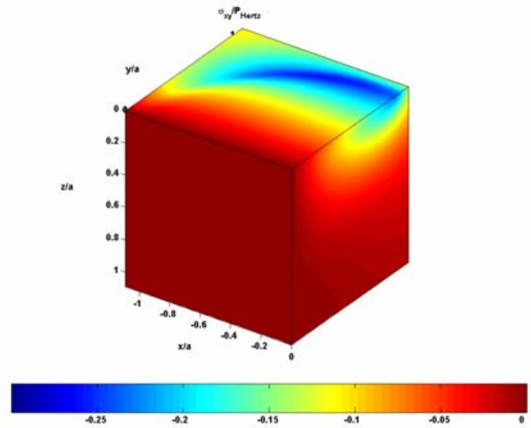
μ=0.1



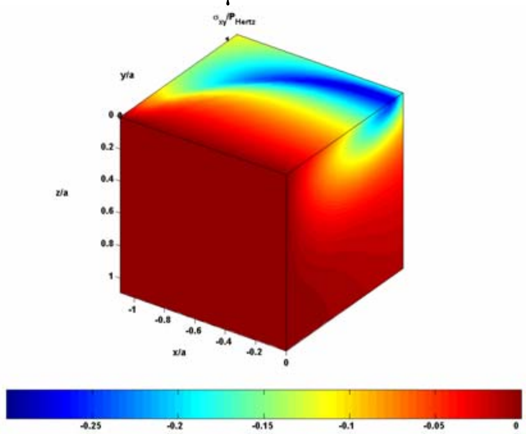
μ=0.2



μ=0.3

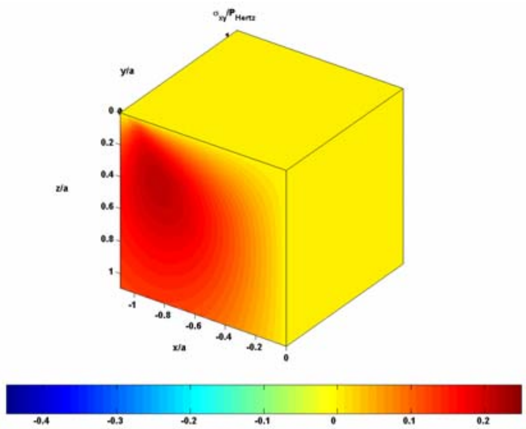


μ=0.4

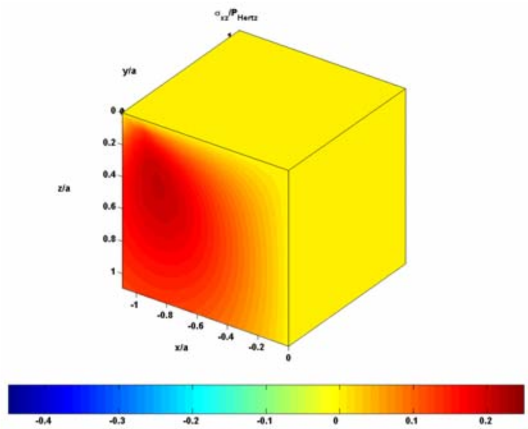


μ=0.5

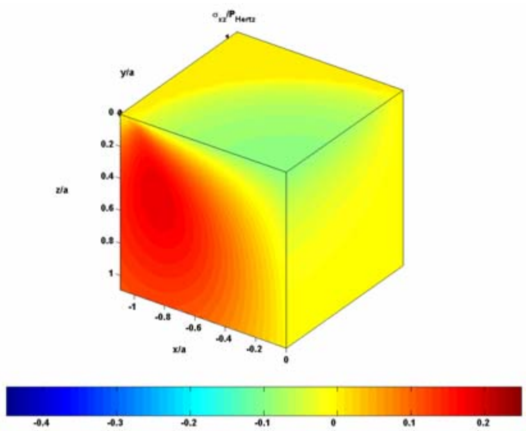
σ_{xz}/P_{hertz}



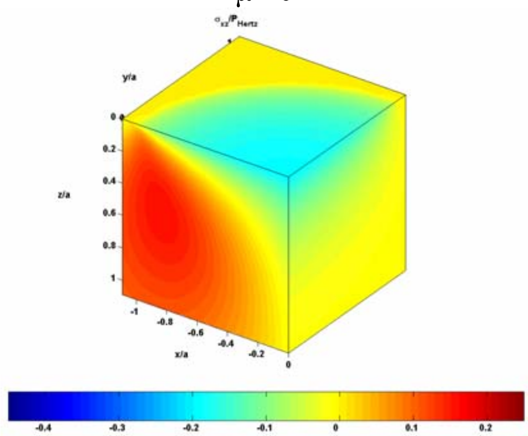
Hertz



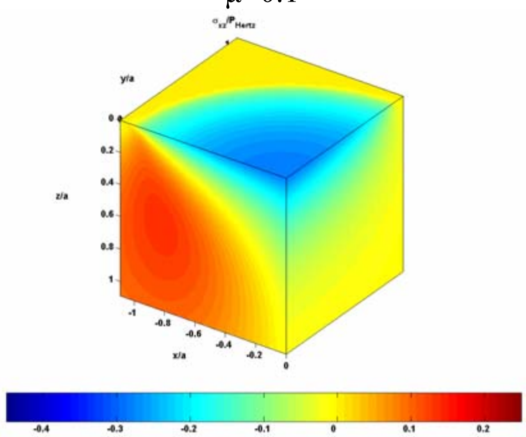
μ =0



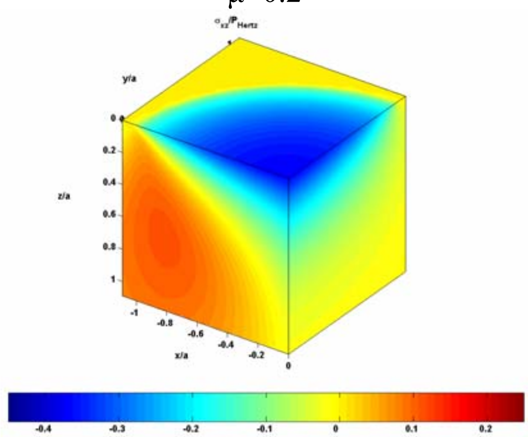
μ=0.1



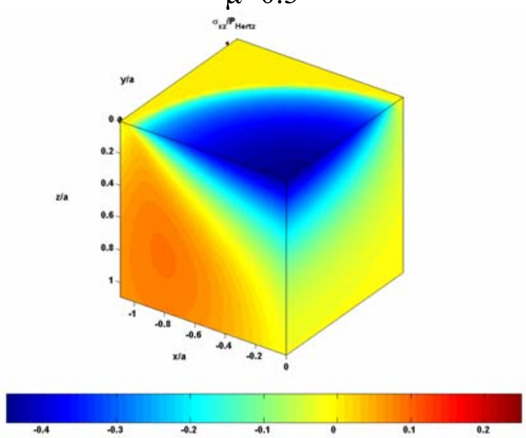
μ=0.2



μ=0.3

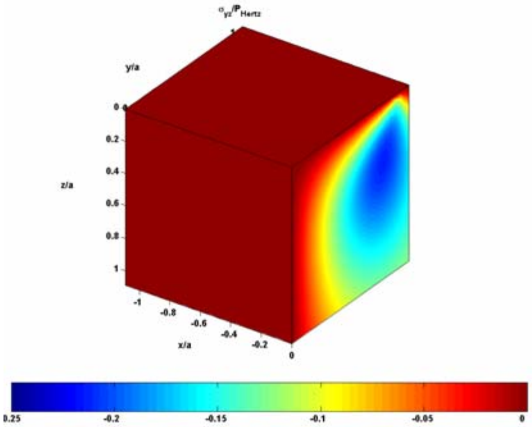


μ=0.4

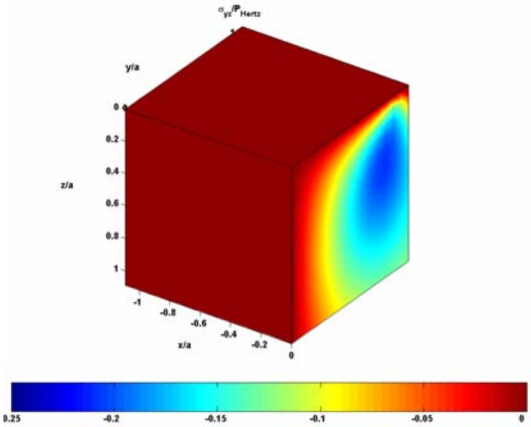


μ=0.5

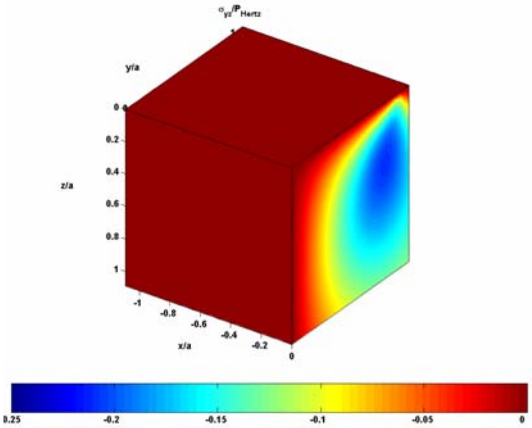
σ_{yz} $/P_{hertz}$



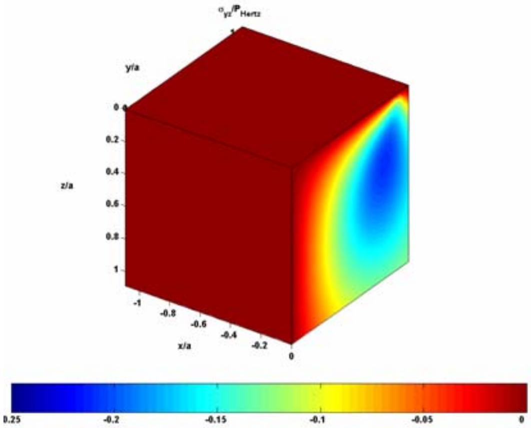
Hertz



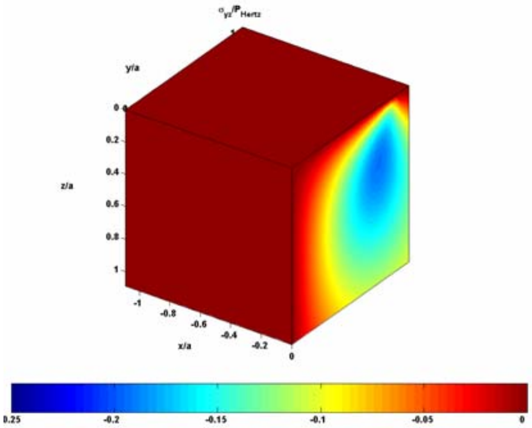
μ =0



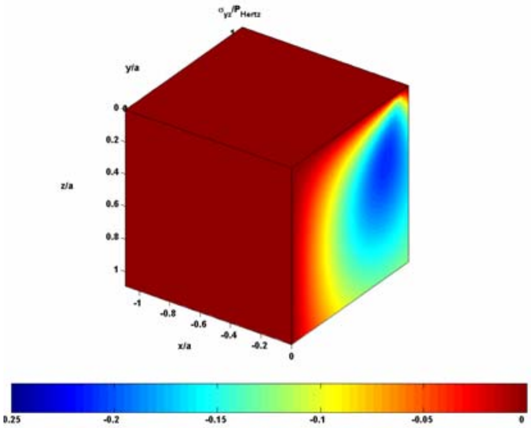
μ=0.1



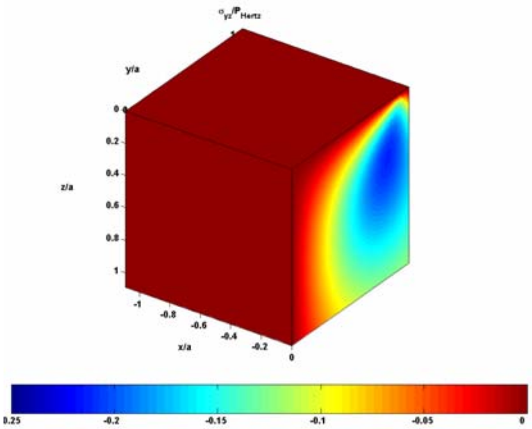
μ=0.2



μ=0.3

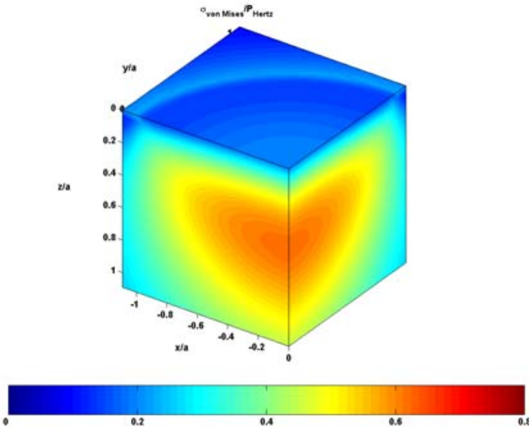


μ=0.4

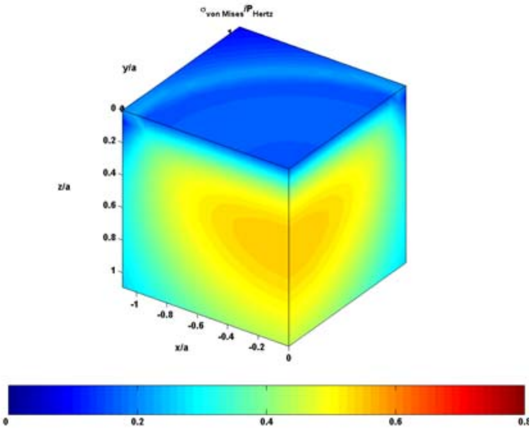


μ=0.5

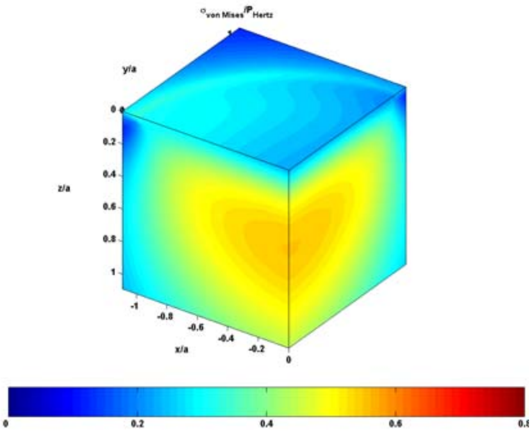
$\sigma_{von\ Mises}/P_{hertz}$



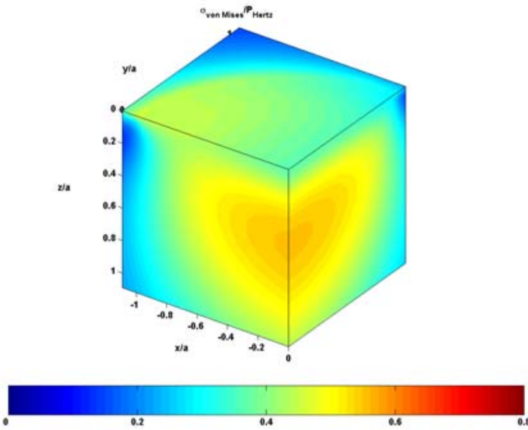
Hertz



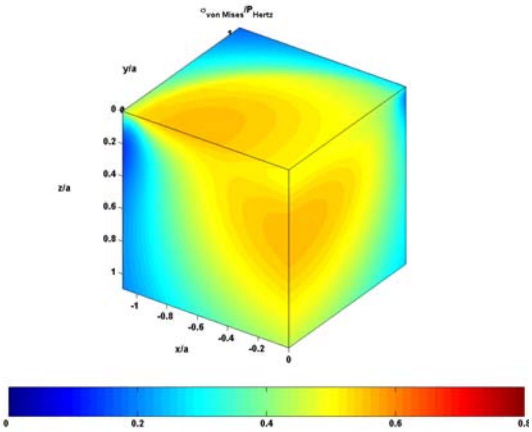
μ=0



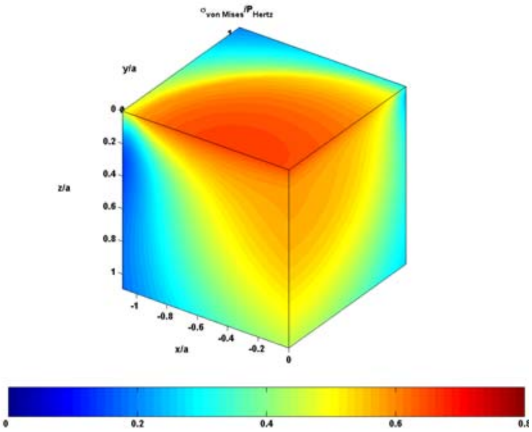
μ=0.1



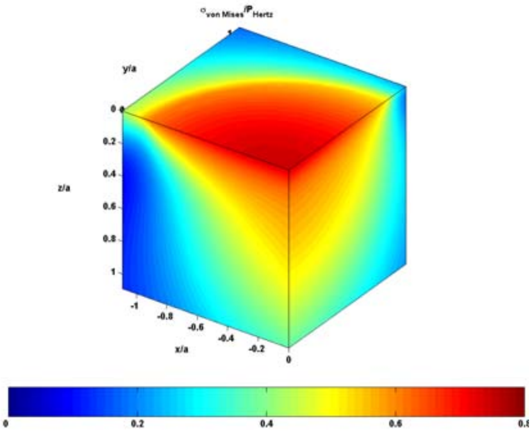
μ=0.2



μ=0.3

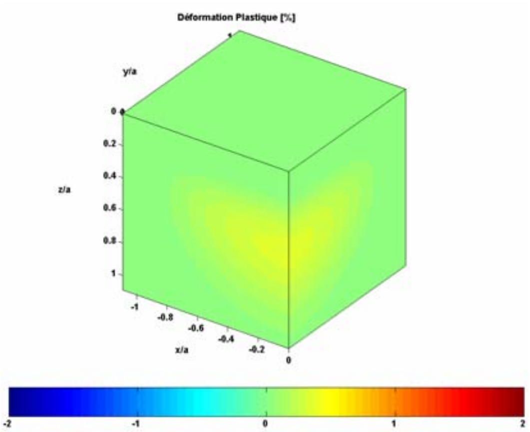


μ=0.4

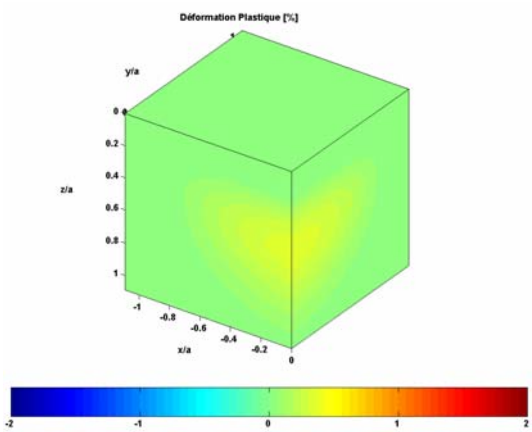


μ=0.5

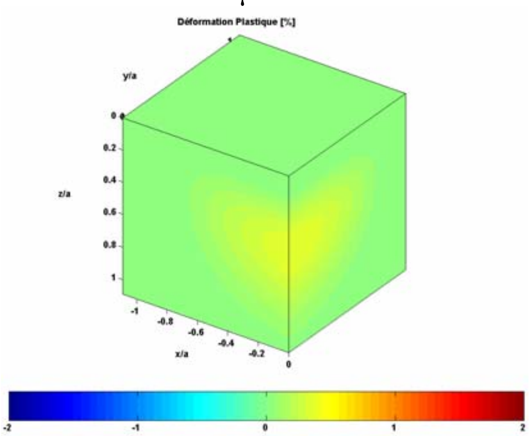
Déformation plastique [%]



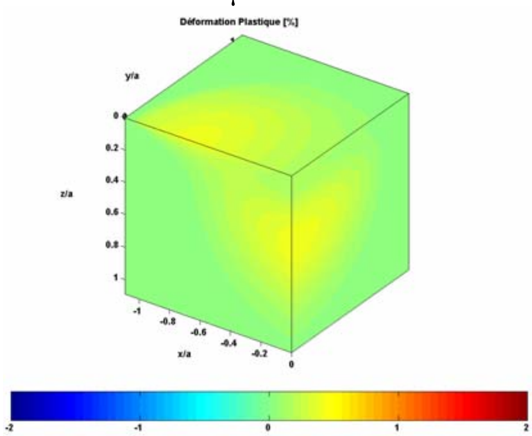
μ=0



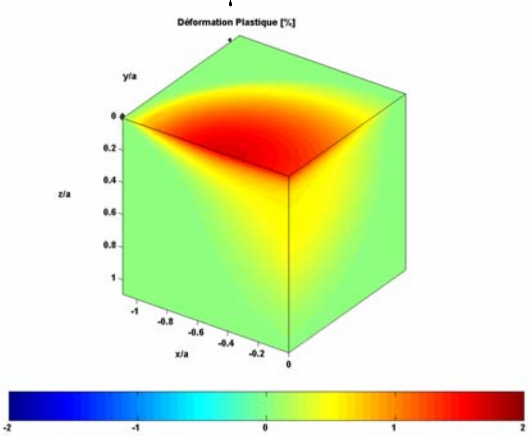
μ=0.1



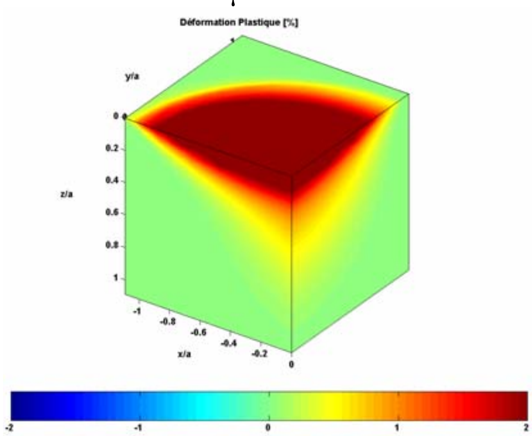
μ=0.2



μ=0.3

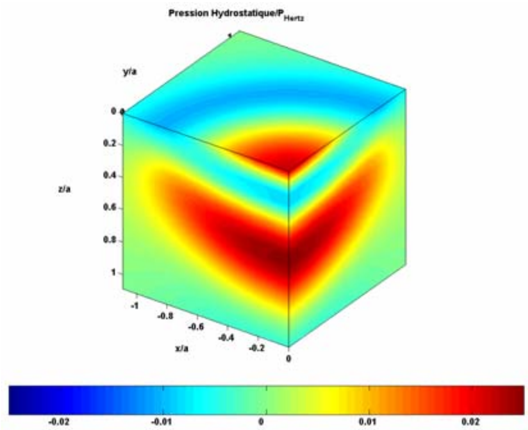


μ=0.4

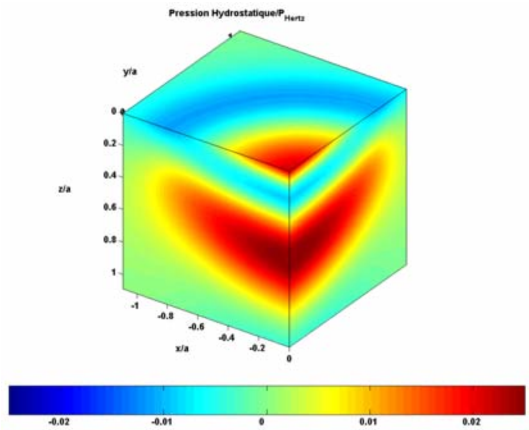


μ=0.5

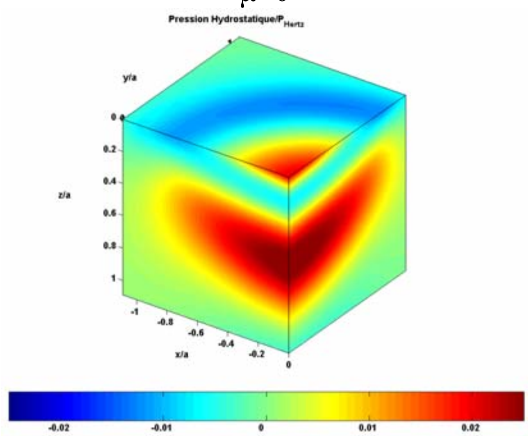
Pression Hydrostatique/P_{hertz} après décharge



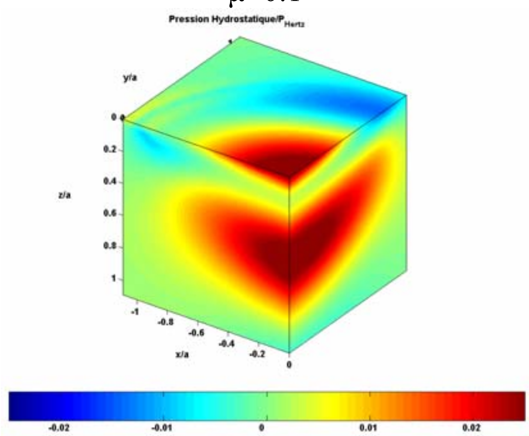
μ=0



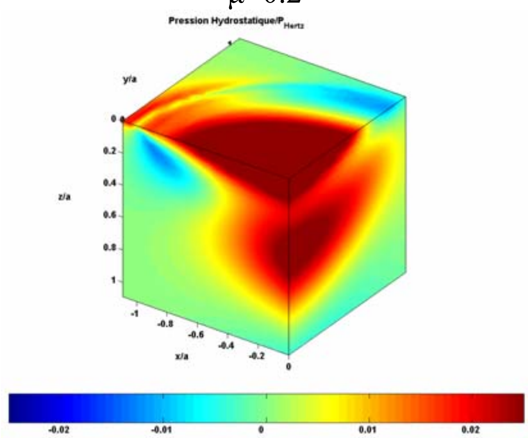
μ=0.1



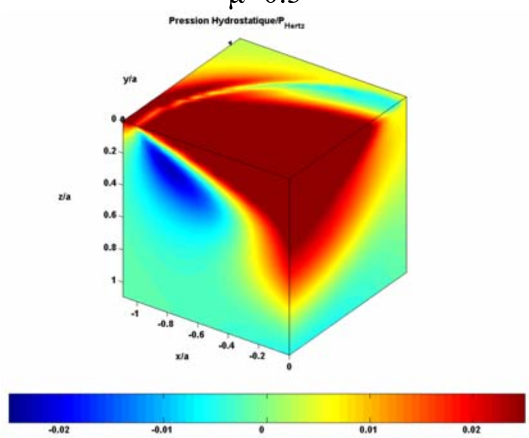
μ=0.2



μ=0.3

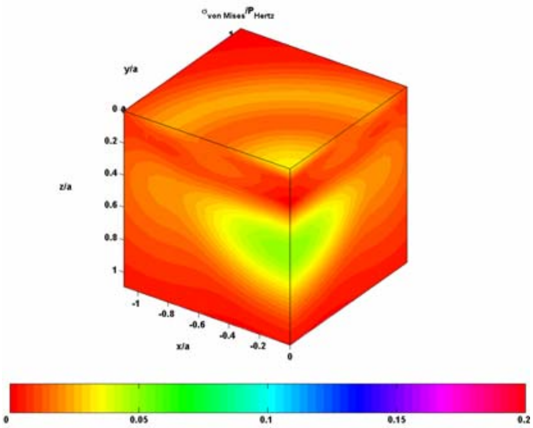


μ=0.4

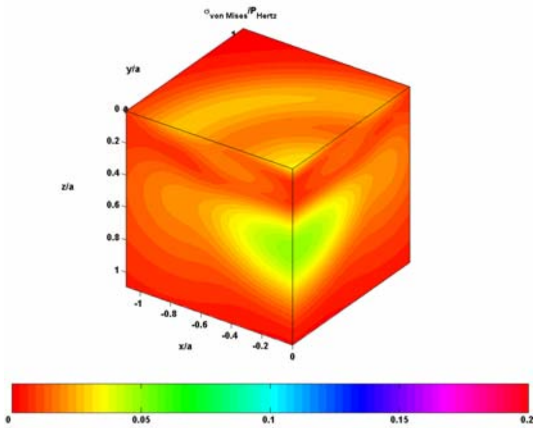


μ=0.5

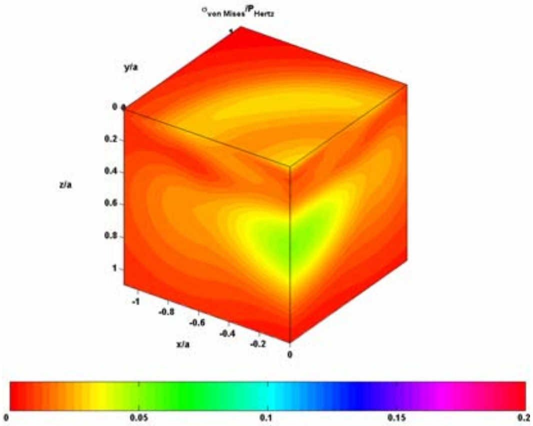
$\sigma_{von\ Mises}/P_{hertz}$ après décharge



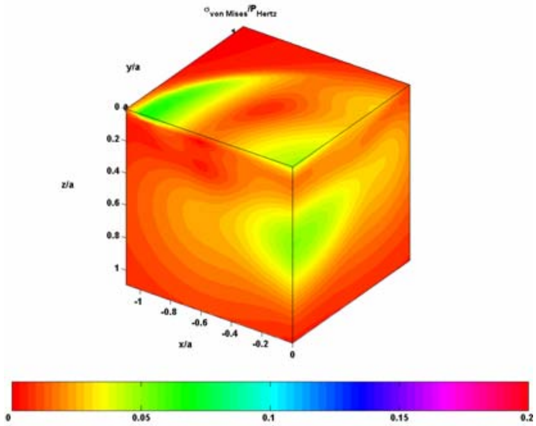
μ=0



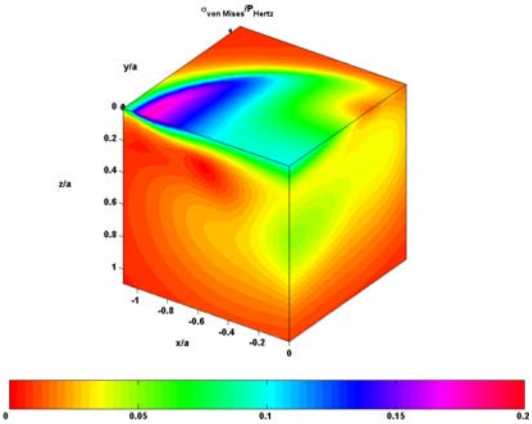
μ=0.1



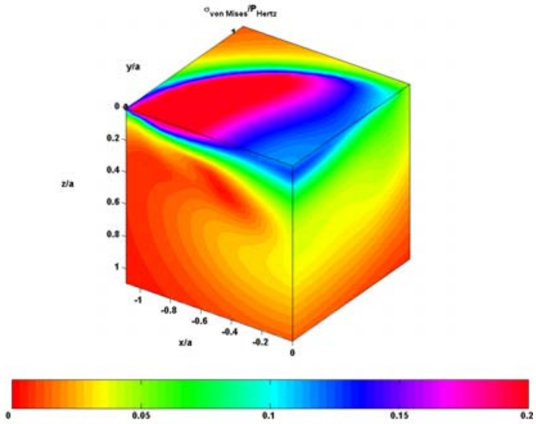
μ=0.2



μ=0.3



μ=0.4



μ=0.5

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : ANTALUCA DATE de SOUTENANCE : 16 décembre 2005
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)
Prénoms : EDUARD

TITRE : Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques – effet d'un chargement normal et tangentiel

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 05 ISAL 00130

Ecole doctorale : MEGA de Lyon

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME :

L'objectif du travail présenté était de développer une méthode alternative à la méthode des éléments finis pour le calcul d'un contact roulant élasto-plastique avec frottement. Le modèle semi-analytique tri-dimensionnel proposé est construit à partir d'un modèle existant. On a d'abord remplacé le module initial de résolution du problème de contact par un module basé sur les méthodes du gradient conjugué (GC) et des transformées de Fourier discrètes (DC-FFT). On a ensuite introduit les effets tangentiels dans le module élasto-plastique pour étudier le cas d'un chargement normal et tangentiel combiné. Dans le même temps nous avons amélioré les procédures numériques en particulier par l'utilisation d'un algorithme de "return mapping" avec un prédicteur élastique et un correcteur plastique pour le module élasto-plastique.
La méthode est limitée au cas des petites déformations ce qui permet toutefois de traiter les problèmes de contact pour les matériaux à haute limite d'élasticité (une pression de Hertz de 8 GPa produit une déformation plastique équivalente de 2% pour l'acier 100Cr6 et un contact sphère/sphère).
Le modèle semi-analytique 3D a été validé par comparaison avec des simulations éléments finis. L'avantage principal de cette méthode sur les méthodes Eléments Finis conventionnelles est la diminution significative des temps de calcul, rendant possible l'étude de contacts tri-dimensionnels en régime transitoire même si des rugosités et/ou indents sont présents. Les moyens permettant ce gain de temps sont (i) la limitation du maillage volumique aux seules zones déformées plastiquement permettant ainsi une grande économie de mémoire, et (ii) l'utilisation des méthodes accélératrices GC et DC-FFT pour le calcul des contraintes et des déformations plastiques.
L'état des contraintes après un chargement vertical puis après décharge a été étudié dans le cas d'un problème avec et sans frottement. La contribution de la plasticité a été identifiée.

MOTS-CLES : CONTACT, ELASTICITE, PLASTICITE, THERMIQUE

Laboratoire (s) de recherches : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS), UMR 5514 CNRS-INSA Lyon

Directeurs de thèse : Daniel Nélias, Spiridon Cretu

Président de jury : Michel Brunet

Composition du jury : Michel Brunet, Spiridon Cretu, Geneviève Inglebert, Christophe Jacq, Gheorghe Mogan, Daniel Nélias

Contribution à l’étude des contacts élasto-plastiques – effet d’un chargement normal et tangentiel

L’objectif du travail présenté était de développer une méthode alternative à la méthode des éléments finis pour le calcul d’un contact roulant élasto-plastique avec frottement. Le modèle semi-analytique tri-dimensionnel proposé est construit à partir d’un modèle existant. On a d’abord remplacé le module initial de résolution du problème de contact par un module basé sur les méthodes du gradient conjugué (GC) et des transformées de Fourier discrètes (DC-FFT). On a ensuite introduit les effets tangentiels dans le module élasto-plastique pour étudier le cas d’un chargement normal et tangentiel combiné. Dans le même temps nous avons amélioré les procédures numériques en particulier par l’utilisation d’un algorithme de "return mapping" avec un prédicteur élastique et un correcteur plastique pour le module élasto-plastique.La méthode est limitée au cas des petites déformations ce qui permet toutefois de traiter les problèmes de contact pour les matériaux à haute limite d’élasticité (une pression de Hertz de 8 GPa produit une déformation plastique équivalente de 2% pour l’acier 100Cr6 et un contact sphère/sphère).Le modèle semi-analytique 3D a été validé par comparaison avec des simulations éléments finis. L’avantage principal de cette méthode sur les méthodes Eléments Finis conventionnelles est la diminution significative des temps de calcul, rendant possible l’étude de contacts tri-dimensionnels en régime transitoire même si des rugosités et/ou indents sont présents. Les moyens permettant ce gain de temps sont (i) la limitation du maillage volumique aux seules zones déformées plastiquement permettant ainsi une grande économie de mémoire, et (ii) l’utilisation des méthodes accélératrices GC et DC-FFT pour le calcul des contraintes et des déformations plastiques. L’état des contraintes après un chargement vertical puis après décharge a été étudié dans le cas d’un problème avec et sans frottement. La contribution de la plasticité a été identifiée.

Contribution to the analysis of elastic-plastic contacts - effect of a normal and tangential loading

The objective of this work was to develop an alternative method to the finite element method (FEM) for the calculation of elastic-plastic rolling contact with friction. The three-dimensional semi-analytical model suggested is built starting from an existing model. First, the initial module of normal contact resolution was replaced by a module based on a combined method of the conjugate gradient (CG) and the discrete Fourier transform (DC.-FFT). Second, the tangential effects are introduced into the elastic-plastic module to study the case of a normal and tangential loading. In same time the numerical procedures were improved in particular by the use of an algorithm of "return mapping" with an elastic predictor and a plastic corrector for the plasticity loop. The method is limited to the case of small strains. However that is not really very restrictive for contact problem for materials with high yield stress: an equivalent plastic deformation of 2% for 100Cr6 steel and a sphere on sphere contact corresponds to a Hertz pressure of 8 GPa. The 3D semi-analytical model was validated by comparison with FEM simulations. The principal advantage of this method versus conventional FEM analysis is the significant reduction of computing costs, making affordable the study of three-dimensional contacts in transient state including when a fine mesh is required for considering surface defects (roughness, dents, furrows, etc.). The different ways used to decrease the computing time are (i) the limitation of the meshed volume for the plasticity loop to the plastic zones, and (ii) the use of accelerating methods such as CG and DC-FFT for solving the contact problem and computing both stresses and plastic strains. The stress state after vertical loading/unloading was studied for combined normal and tangential loading and compared to the frictionless solution. The contribution of plasticity was identified.