

Thèse en cotutelle

**Contribution à l'Etude du Phénomène de l'Ecrasement  
de Lubrifiants Non Newtoniens en Présence de  
Milieux Poroélastiques**

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de Docteur

Formation doctorale : Mécanique  
École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Et

L'Université Hassan II Mohammedia – Casablanca

Pour obtenir  
Le grade de Docteur en Sciences et Techniques

Spécialité : Mécanique  
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

Par

**Mohamed NABHANI**  
Ingénieur EHTP de Casablanca

Soutenue le 15 décembre 2010 devant la Commission d'examen

**Jury**

---

D. BONNEAU	Professeur (Université de Poitiers)	Rapporteur
M. CHAGDALI	Professeur (Université Hassan II Mohammedia)	Rapporteur
J. TICHY	Professeur (RPI, New York, USA)	Rapporteur
B. NAJJI	Professeur (ENIM de Rabat)	Président
F. VILLE	Maître de Conférences HDR (INSA de Lyon)	Examineur
B. BOU-SAÏD	Maître de Conférences HDR (INSA de Lyon)	Directeur
M. EL KHLIFI	Professeur (Université Hassan II Mohammedia)	Directeur
M. KOUAM	Professeur (Université Hassan II Mohammedia)	Directeur

---

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon et à l'UFR de Mécanique des Fluides et des Structures de la Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia.



## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<p><b>CHIMIE DE LYON</b>  <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a></p> <p>M. Jean Marc LANCELIN</p> <p>Insa : R. GOURDON</p>	<p>M. Jean Marc LANCELIN            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât CPE            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 13 95 Fax :            lancelin@hikari.cpe.fr</p>
<b>E.E.A.</b>	<p><b>ELECTRONIQUE,            ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b>  <a href="http://www.insa-lyon.fr/eea">http://www.insa-lyon.fr/eea</a></p> <p>M. Alain NICOLAS            Insa : C. PLOSSU            ede2a@insa-lyon.fr            Secrétariat : M. LABOUNE            AM. 64.43 – Fax : 64.54</p>	<p>M. Alain NICOLAS            Ecole Centrale de Lyon            Bâtiment H9            36 avenue Guy de Collongue            69134 ECULLY            Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17            eea@ec-lyon.fr            Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN</p>
<b>E2M2</b>	<p><b>EVOLUTION, ECOSYSTEME,            MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b>  <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a></p> <p>M. Jean-Pierre FLANDROIS            Insa : H. CHARLES</p>	<p>M. Jean-Pierre FLANDROIS            CNRS UMR 5558            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât G. Mendel            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49            06 07 53 89 13            e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</p>
<b>EDISS</b>	<p><b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-            SANTE</b></p> <p>Sec : Safia Boudjema            M. Didier REVEL            Insa : M. LAGARDE</p>	<p>M. Didier REVEL            Hôpital Cardiologique de Lyon            Bâtiment Central            28 Avenue Doyen Lépine            69500 BRON            Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16            Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</p>
<b>INFOMATHS</b>	<p><b>INFORMATIQUE ET            MATHÉMATIQUES</b>  <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>            M. Alain MILLE</p>	<p>M. Alain MILLE            Université Claude Bernard Lyon 1            LIRIS - INFOMATHS            Bâtiment Nautibus            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10  <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a> - alain.mille@liris.cnrs.fr</p>
<b>Matériaux</b>	<p><b>MATERIAUX DE LYON</b></p> <p>M. Jean Marc PELLETIER</p> <p>Secrétariat : C. BERNAVON            83.85</p>	<p>M. Jean Marc PELLETIER            INSA de Lyon            MATEIS            Bâtiment Blaise Pascal            7 avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28            Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr</p>
<b>MEGA</b>	<p><b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE            CIVIL, ACOUSTIQUE</b></p> <p>M. Jean Louis GUYADER</p> <p>Secrétariat : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12</p>	<p>M. Jean Louis GUYADER            INSA de Lyon            Laboratoire de Vibrations et Acoustique            Bâtiment Antoine de Saint Exupéry            25 bis avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37            mega@lva.insa-lyon.fr</p>
<b>ScSo</b>	<p><b>ScSo*</b></p> <p>M. OBADIA Lionel</p> <p>Insa : J.Y. TOUSSAINT</p>	<p>M. OBADIA Lionel            Université Lyon 2            86 rue Pasteur            69365 LYON Cedex 07            Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48            Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Avant propos

---

Cette étude est le résultat de la préparation d'une thèse de Doctorat en co-tutelle internationale entre l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Hassan II Mohammeda – Casablanca.

Elle s'est déroulée sous la direction conjointe de Messieurs Mohamed KOUAM et Mohamed EL KHLIFI, Professeurs à l'Université Hassan II Mohammeda – Casablanca, et de Monsieur Benyebka BOU-SAÏD, Maître de Conférences HDR à l'INSA de Lyon. Je tiens à leur exprimer ma très vive gratitude pour m'avoir permis d'entreprendre et d'avoir dirigé cette étude durant ces trois années de thèse.

Je ne serais présenter ce travail sans exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui m'on permis de le mener à bien.

Je remercie vivement Monsieur Mohamed EL KHLIFI d'avoir suivi la réalisation de ce travail, pour ses suggestions, ses conseils et ses discussions fructueuses. Je suis heureux de lui témoigner ma plus profonde gratitude pour son aide et son soutien permanents.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à Monsieur Benyebka BOU-SAÏD pour ses conseils tout au long de ce travail et pour la qualité de son encadrement. Je tiens à témoigner ma grande estime pour ses qualités de chercheur dynamique et rigoureux.

Mes remerciements vont également à Monsieur Dominique BONNEAU, Professeur émérite à l'Université de Poitiers, d'avoir accepté d'être membre du jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Mohamed CHAGDALI, Professeur à l'Université Hassan II Mohammeda – Casablanca, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier Monsieur Brahim NAJJI, Professeur à l'Ecole Nationale de l'Industrie Minérale de Rabat, d'avoir accepté d'être examinateur de ce travail et président du jury.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur John TICHY, Professeur de Resensselaer Polytechnic Institute de Troy (Etats – Unis), d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Je voudrais remercier spécialement Monsieur Fabrice VILLE, Maître de Conférences HDR à l'INSA de Lyon, pour avoir accepté de juger mon travail et faire partie du jury.

Je remercie Monsieur le Professeur Alain COMBESURE de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures lors de mon séjour au LaMCoS.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures pour leur accueil durant mon déplacement à Lyon ainsi que pour leur ambiance chaleureuse qui règne à l'intérieur du laboratoire.

Je tiens à remercier la commission mixte interuniversitaire franco-marocaine d'avoir financé une partie du travail de cette thèse sous la convention d'action concertée CNRS (France) – CNRST (Maroc) numéro SPI 06/10.

Enfin, je remercie tous les personnels de la Direction de la Météorologie Nationale de Casablanca pour leur soutien tout au long de cette thèse. Je mentionnerai plus particulièrement mes collègues les prévisionnistes du Centre National de l'Exploitation Météorologique.

---

# Contribution à l'Étude du Phénomène de l'Ecrasement de Lubrifiants non Newtoniens en Présence de Milieux Poroélastiques

---

## Résumé

---

L'étude entreprise dans cette thèse vise à mettre en place un nouveau modèle de couplage film fluide – milieu poreux pouvant prendre en compte l'inertie du fluide dans le film lubrifiant et dans la matrice poreuse, le comportement non newtonien du fluide, les effets visqueux dans la matrice poreuse ainsi que sa poroélasticité. Elle concerne une modélisation et simulation numérique de la lubrification par effet d'écrasement entre deux géométries simples composées de deux disques dont l'un est à face poreuse.

Nous examinons d'abord les effets visqueux à l'aide du modèle de Darcy-Brinkman sur les caractéristiques du contact lubrifié. Ce modèle permet la prise en compte de la couche limite développée à l'interface film fluide – matrice poreuse.

Nous abordons ensuite les effets combinés d'inertie et visqueux du fluide considéré newtonien. L'écoulement est décrit alors à l'aide des équations de Navier-Stokes Réduites dans le film fluide et modélisé par le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer dans la matrice poreuse.

Enfin, cette étude s'intéresse d'une part aux effets non newtoniens du fluide lubrifiant et d'autre part à l'influence de la déformation de la matrice poreuse. Les films lubrifiants sont considérés comme des fluides non newtoniens à couple de contraintes. La déformée de l'interface poreuse est obtenue à l'aide du modèle de couche mince élastique.

Les équations aux dérivées partielles établies dans cette étude ont été discrétisées par la méthode des différences finies. Les équations algébriques obtenues ont été résolues à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel relaxée.

Les résultats numériques issus de nos simulations ont montré que ces effets ont une influence significative et non négligeable sur les performances de l'écrasement de films fluides.

**Mots-clés** : Interaction fluide structure, Poroélasticité, Lubrification, Ecrasement de film, Fluides non newtoniens, Couple de contraintes, Couche mince, Darcy-Brinkman-Forchheimer, Equations de Navier-Stokes Réduites

---

# Contribution to the Study of the Squeeze Film Phenomenon in the Presence of Non Newtonian Lubricants and Poroelastic Media

---

## Abstract

---

The aim of this thesis is to develop a new model of fluid film - porous medium interaction taking into account the fluid inertia in the lubricant as well as in the porous matrix. The non-Newtonian behaviour of the fluid, the viscous effects in porous matrix and its poroelasticity are also considered. The main concerns are the modelling and the simulation of the squeeze film lubrication between two discs when one has a porous facing.

We first investigate the viscous effects on the characteristics of the lubricated contact using the Darcy-Brinkman model. This model allows the consideration of the boundary layer developed at the fluid film - porous matrix interface.

Then we address the combined inertia and viscous shear effects of a Newtonian fluid. The fluid flow is then described using the Reduced Navier-Stokes equations in the fluid film and is modelled using the Darcy-Brinkman-Forchheimer generalized model in the porous matrix.

Finally, this study focuses on the combined effects of non-Newtonian fluid lubricant and porous matrix deformation. The lubricant is considered non-Newtonian thanks to the couple stress model. The deformed porous interface is obtained using the thin elastic layer approach.

The partial differential equations established in this study are discretized by the means of the finite differences. The obtained algebraic equations are solved using the Gauss-Seidel relaxation method.

The numerical results of our simulations showed that all these effects have a significant and non negligible influence on the porous squeeze film performances.

**Key-words:** Fluid structure interaction, Poroelasticity, Lubrication, Squeeze film, Non-Newtonian fluid, Couple stress, Thin layer, Darcy-Brinkman-Forchheimer model, Reduced Navier-Stokes Equations

# Sommaire

---

<b>Nomenclature.....</b>	<b>1</b>
<b>Liste des figures.....</b>	<b>4</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>8</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>9</b>
<b>1 Généralités et revue bibliographique.....</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction.....	12
1.2 Ecoulement dans un milieu poreux.....	13
1.2.1 Définitions.....	13
1.2.1.1 Milieu poreux.....	13
1.2.1.2 Volume Elémentaire Représentatif.....	14
1.2.1.3 Porosité.....	15
1.2.1.4 Perméabilité.....	15
1.2.2 Loi d'écoulement dans un milieu poreux.....	16
1.2.2.1 Loi de Darcy.....	16
1.2.2.2 Correction de Brinkman.....	17
1.2.2.3 Correction de Forchheimer.....	17
1.2.2.4 Modèle généralisé.....	18
1.3 Lubrification articulaire.....	18
1.3.1 Eléments des articulations biologiques.....	19
1.3.1.1 Cartilage.....	19
1.3.1.2 Fluide synovial.....	19
1.3.2 La lubrification des articulations biologiques par effet d'écrasement.....	20
1.3.3 Modèles rhéologiques de lubrifiants contenant des suspensions.....	21
1.3.3.1 Modèle de Maxwell généralisé.....	22
1.3.3.2 Modèle de l'Haltère.....	22
1.3.3.3 Modèle de FENE P.....	23
1.3.3.4 Modèle de fluide à couple de contraintes.....	23
1.3.3.5 Modèle de fluide de second ordre.....	24
1.3.3.6 Modèle de fluide micro polaire.....	24
1.3.3.7 Modèle de fluide à loi de puissance.....	24
1.4 Revue bibliographique .....	25
1.4.1 Ecrasement de lubrifiants newtoniens ou non newtoniens entre deux surfaces imperméables.....	25
1.4.1.1 Cas de deux surfaces rigides.....	25
1.4.1.2 Cas élastohydrodynamique.....	29
1.4.2 Ecrasement de films lubrifiants newtoniens ou non newtoniens en présence d'un milieu poreux.....	30
1.4.2.1 Cas d'un milieu poreux indéformable.....	30
1.4.2.2 Cas d'un milieu poroélastique.....	32

---

1.5 Conclusion.....	34
<b>2 Ecrasement de lubrifiants newtoniens en présence d'un milieu poreux sans prise en compte des effets inertiels.....</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction.....	35
2.2 Equations générales dans le film fluide.....	36
2.2.1 Equation de continuité.....	36
2.2.2 Equation de Reynolds modifiée.....	37
2.3 Equations générales dans le milieu poreux.....	39
2.3.1 Equation de continuité.....	39
2.3.2 Equations de Darcy-Brinkman.....	39
2.3.3 Equation de Laplace.....	40
2.4 Equation de l'équilibre sur la charge.....	40
2.5 Conditions aux limites.....	41
2.5.1 Conditions aux limites sur la pression.....	41
2.5.2 Conditions aux limites sur la vitesse.....	41
2.6 Equations et conditions aux limites sans dimensions.....	42
2.6.1 Equation de continuité dans le film.....	43
2.6.2 Equation de Navier simplifiée.....	43
2.6.3 Equation de Reynolds modifiée.....	43
2.6.4 Equations de Darcy-Brinkman.....	43
2.6.5 Equation Laplace.....	44
2.6.6 Equation de l'équilibre sur la charge.....	44
2.6.6.1 Vitesse d'écrasement.....	44
2.6.6.2 Temps d'écrasement.....	44
2.6.7 Conditions aux limites.....	45
2.6.7.1 Conditions aux limites sur la pression.....	45
2.6.7.2 Conditions aux limites sur la vitesse.....	45
2.7 Discrétisations par différences finies et technique de résolution.....	46
2.8 Algorithme de résolution.....	49
2.9 Résultats et discussions.....	49
2.10 Conclusion.....	57
<b>3 Ecrasement de lubrifiants newtoniens en présence d'un milieu poreux avec prise en compte des effets inertiels.....</b>	<b>58</b>
3.1 Introduction.....	58
3.2 Equations générales dans le film fluide.....	59
3.2.1 Equation de continuité.....	59

3.2.2	Equations de Navier-Stokes Réduites.....	60
3.3	Equations générales dans le milieu poreux.....	61
3.3.1	Equation de continuité.....	62
3.3.2	Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées.....	62
3.3.3	Equation de Poisson.....	63
3.4	Equation de l'épaisseur du film fluide.....	63
3.5	Conditions initiales.....	63
3.6	Conditions aux limites.....	64
3.6.1	Conditions aux limites sur la pression.....	64
3.6.2	Conditions aux limites sur la vitesse.....	64
3.7	Equations, conditions initiales et conditions aux limites sans dimensions.....	65
3.7.1	Equation de continuité dans le film.....	66
3.7.2	Equation de Navier-Stokes Réduite .....	66
3.7.3	Equation de fermeture des équations RNSP.....	66
3.7.4	Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées.....	67
3.7.5	Equation de Poisson.....	67
3.7.6	Equation de l'épaisseur du film fluide.....	67
3.7.7	Conditions initiales.....	67
3.7.8	Conditions aux limites.....	68
3.7.8.1	Conditions aux limites sur la pression.....	68
3.7.8.2	Condition aux limites sur la vitesse.....	68
3.8	Discretisations par différences finies et technique de résolution.....	69
3.8.1	Discretisations des équations RNSP.....	70
3.8.2	Discretisations des équations Darcy-Brinkman-Forchhemeir généralisées et de Poisson.....	72
3.9	Algorithme de résolution.....	74
3.10	Résultats et discussions.....	75
3.11	Conclusion.....	85
<b>4</b>	<b>Ecrasement de lubrifiants non newtoniens en présence d'un milieu poroelastique avec prise en compte des effets inertiels.....</b>	<b>86</b>
4.1	Introduction.....	86
4.2	Equations générales dans le film fluide pour fluides à couple de contraintes.....	87
4.2.1	Equation de continuité.....	88
4.2.2	Equations de Navier-Stokes Réduites.....	88
4.3	Equations générales dans le milieu poreux.....	90
4.3.1	Equation de continuité.....	90
4.3.2	Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées.....	90
4.3.3	Equation de Poisson.....	91

4.4	Equation de mouvement de la surface écrasante.....	91
4.4.1	Vitesse de déplacement de la surface écrasante.....	92
4.4.2	Position de la surface écrasante.....	92
4.5	Equation de l'épaisseur du film fluide.....	92
4.6	Equation de la déformée de l'interface poreuse : modèle de couche mince élastique..	93
4.7	Conditions initiales.....	93
4.8	Conditions aux limites.....	94
4.8.1	Conditions aux limites sur la pression.....	94
4.8.2	Conditions aux limites sur la vitesse.....	94
4.9	Equations, conditions initiales et conditions aux limites sans dimensions.....	96
4.9.1	Equation de continuité dans le film.....	98
4.9.2	Equation de Navier-Stokes Réduite pour fluides à couple de contraintes.....	98
4.9.3	Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées.....	99
4.9.4	Equation de Poisson.....	99
4.9.5	Equation de mouvement de la surface écrasante.....	100
4.9.5.1	Vitesse de déplacement de la surface écrasante.....	100
4.9.5.2	Position de la surface écrasante.....	100
4.9.5.3	Equation de l'épaisseur du film fluide.....	100
4.9.6	Conditions initiales.....	100
4.9.7	Conditions aux limites.....	101
4.9.7.1	Conditions aux limites sur la pression.....	101
4.9.7.2	Condition aux limites sur la vitesse.....	101
4.10	Discrétisations par différences finies et technique de résolution.....	102
4.10.1	Discrétisations des équations RNSP.....	103
4.10.2	Discrétisations des équations de Darcy-Brinkman-Forchhemeir généralisées et de Poisson.....	107
4.11	Algorithme de résolution.....	109
4.12	Résultats et discussions.....	112
4.12.1	Vitesse d'écrasement.....	112
4.12.2	Position de la surface écrasante.....	114
4.12.3	Pression dans le film fluide.....	116
4.12.4	Capacité de charge du film fluide.....	116
4.12.5	Epaisseur du film fluide.....	116
4.12.6	Déformée de l'interface poreuse.....	122
4.12.7	Vitesse radiale à la sortie du contact.....	124
4.12.8	Débit volumique à la sortie du contact.....	125
4.12.9	Coefficient de frottement à l'interface film – milieu poreux.....	128
4.13	Conclusion.....	130
	<b>Conclusion générale.....</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliographie.....</b>	<b>133</b>

<b>Annexes.....</b>	<b>145</b>
Annexe 1 : Equations RNSP pour fluides à couple de contraintes.....	145
Annexe 2 : Méthodes des différences finies et de Gauss-Seidel relaxée.....	151
<b>Publications.....</b>	<b>155</b>

# Nomenclature

---

$C_f$	: coefficient de Forchheimer, $C_f = \frac{1,75}{\sqrt{150}\phi^{3/2}}$
$\frac{dg}{dt}$	: vitesse du disque supérieur dans le cas où le disque poreux est déformable (m/s)
$\frac{dh}{dt}$	: vitesse du disque supérieur dans le cas où le disque poreux est indéformable (m/s)
$D_p$	: diamètre des pores (m)
$div$	: opérateur divergence
$e_{ijk}$	: tenseur de permutation d'ordre trois
$E$	: module d'Young de la couche mince élastique (N/m <sup>2</sup> )
$F_0$	: poids du disque supérieur (N)
$\vec{f}$	: densité massique des forces volumiques (N/m <sup>3</sup> )
$f_r$	: composante radiale de la densité massique des forces volumiques (N/m <sup>3</sup> )
$f_z$	: composante axiale de la densité massique des forces volumiques (N/m <sup>3</sup> )
$g$	: position du disque supérieur (m)
$h$	: épaisseur du film fluide (m)
$h_0$	: épaisseur initiale du film fluide (m)
$H$	: épaisseur du disque poreux (m)
$k$	: perméabilité (m <sup>2</sup> )
$K_{ij}$	: tenseur du taux de rotation (M <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
$\vec{L}$	: vecteur du couple de volume (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$\bar{l}$	: paramètre du couple de contraintes, $\bar{l} = \frac{l}{h_0}$
$l$	: longueur caractéristique de la taille des particules solides en suspension dans le fluide (m), $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$
$m$	: masse du disque supérieur (kg)
$M$	: nombre d'intervalles de maillage suivant la direction axiale
$M_{rk}$	: tenseur du couple de contraintes (N/m <sup>2</sup> )
$N$	: nombre d'intervalles de maillage suivant la direction radiale
$p$	: pression dans le film fluide (Pa)

## Nomenclature

---

$\bar{p}$	: pression sans dimension dans le film fluide
$p^*$	: pression dans le disque poreux (Pa)
$\bar{p}^*$	: pression sans dimension dans le disque poreux
$P_0$	: pression de référence (Pa), $P_0 = \frac{F_0}{\pi R^2}$
$r$	: coordonnée radiale (m)
$\bar{r}$	: coordonnée radiale sans dimension
$R$	: rayon des deux disques (m)
$Re$	: nombre de Reynolds dans le film fluide, $Re = \frac{\rho V h}{\mu}$
$Re_k$	: nombre de Reynolds dans le milieu poreux, $Re_k = \frac{\rho \sqrt{k} \left  \vec{u}^* \right }{\mu}$
$t$	: temps
$u_i$	: composantes du vecteur vitesse (m/s)
$u$	: composante radiale de la vitesse dans le film fluide (m/s)
$\bar{u}$	: composante radiale de la vitesse sans dimension dans le film fluide
$u^*$	: composante radiale de la vitesse dans le disque poreux (m/s)
$\bar{u}^*$	: composante radiale de la vitesse sans dimension dans le disque poreux
$u_0^*$	: composante radiale de la vitesse à l'interface poreuse (m/s)
$\bar{u}_0^*$	: composante radiale de la vitesse sans dimension à l'interface poreuse
$\vec{v}$	: vecteur vitesse dans le film fluide (m/s)
$\vec{v}^*$	: vecteur vitesse de filtration ou de Darcy dans le disque poreux (m/s)
$\left  \vec{v}^* \right $	: module du champ de vitesse dans le disque poreux (m/s)
$V$	: vitesse d'écrasement (m/s)
$V_0$	: vitesse de référence (m/s)
$w$	: composante axiale du vecteur vitesse dans le film fluide (m/s)
$\bar{w}$	: composante axiale de la vitesse sans dimension dans le film fluide
$w^*$	: composante axiale de la vitesse dans le film fluide (m/s)
$\bar{w}^*$	: composante axiale de la vitesse sans dimension dans le disque poreux
$w_0^*$	: composante axiale de la vitesse à l'interface poreuse (m/s)
$\bar{w}_0^*$	: composante axiale de la vitesse sans dimension à l'interface poreuse

$W$	: capacité de charge (N)
$\overline{W}$	: capacité de charge sans dimension
$x_i$	: variables d'espace (m)
$z$	: coordonnée axiale (m)
$\overline{z}$	: coordonnée axiale sans dimension
$\alpha$	: rapport des viscosités ratio, $\alpha = \frac{\mu^*}{\mu}$
$\varepsilon$	: rapport d'échelle, $\varepsilon = \frac{h_0}{R}$
$\mu$	: viscosité dynamique du fluide (Pa.s)
$\mu^*$	: viscosité effective du fluide dans le milieu poreux (Pa.s)
$\rho$	: masse volumique du fluide (kg/m <sup>3</sup> )
$\phi$	: porosité du disque poreux
$\nu$	: coefficient de Poisson de la couche mince élastique
$\eta$	: propriété constante du fluide à couple de contraintes (Pa.s.m <sup>2</sup> )
$\delta$	: déformée de l'interface poreuse (m)
$\delta_{ij}$	: symbole de Kronecker
$\overline{\sigma}$	: tenseur des contraintes (N/m <sup>2</sup> )

# Liste des figures

---

Figure 1.1 : Schéma d'un contact de genou [MOW97].....	12
Figure 1.2 : Image traitée d'un milieu poreux.....	13
Figure 1.3 : Représentation du volume élémentaire représentatif $V$ sur lequel est moyennée la propriété $P$ .....	14
Figure 1.4 : Relation entre la viscosité dynamique du fluide synovial (normal et pathologique) et le taux de cisaillement [WRI76].....	20
Figure 1.5 : Corrélation entre les différentes phases de la marche [SFA06] : (a) les conditions cinématique et dynamique globale, (b) les régimes de lubrification...	21
Figure 2.1 : Configuration géométrique de l'écrasement.....	36
Figure 2.2 Discrétisation du domaine de calcul.....	46
Figure 2.3 : Algorithme de résolution.....	50
Figure 2.4 : Pression $p$ dans le film fluide.....	51
Figure 2.5 : Pression $p^*$ dans le milieu poreux pour $\alpha = 4$ .....	52
Figure 2.6 : Profils de la vitesse radiale à $r = R$ pour $h = 1$ mm et $h = 0,2$ mm.....	54
Figure 2.7 : Profils de la vitesse axiale à $r = 0$ pour $h = 1$ mm et $h = 0,2$ mm.....	55
Figure 2.8 : Epaisseur du film.....	56
Figure 2.9 : Vitesse d'écrasement en fonction de l'épaisseur du film.....	56
Figure 3.1 : Configuration géométrique de l'écrasement.....	59
Figure 3.2 : Discrétisation du domaine de calcul.....	70
Figure 3.3 : Algorithme de résolution.....	76
Figure 3.4 : Pression $\bar{p}$ dans le film fluide pour différents instants $\bar{t} \equiv T$ entre deux disques imperméables.....	77
Figure 3.5 : Profil de la vitesse radiale $\bar{u}$ à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement $\bar{t} \equiv T$ entre deux disques imperméables.....	78
Figure 3.6 : Profil de la vitesse axiale $\bar{w}$ pour différents instants d'écrasement $\bar{t} \equiv T$ entre deux disques imperméables.....	78

Figure 3.7 : Distribution de la pression $\bar{p}$ dans le film fluide pour différents instants $\bar{t} \equiv T$ avec $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ et $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ .....	79
Figure 3.8 : Evolution de la capacité de charge $\bar{W}$ dans le film fluide avec $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ et $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ .....	80
Figure 3.9 : Distribution de la pression $\bar{p}$ dans le film fluide en présence du disque poreux à $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ .....	80
Figure 3.10 : Evolution de la capacité de charge $\bar{W}$ dans le film fluide en présence du disque poreux à $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ .....	81
Figure 3.11 : Evolution de la capacité de charge prévue par le modèle de Darcy-Forchheimer pour différentes valeurs du coefficient de Forchheimer.....	81
Figure 3.12 : Profil de la vitesse radiale $\bar{u}$ à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement $\bar{t} \equiv T$ en présence du disque poreux à $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ : comparaison entre le modèle généralisé et celui de Darcy.....	82
Figure 3.13 : Profil de la vitesse radiale à la sortie du film fluide prévue par le modèle de Darcy-Forchheimer pour $h = 0,1h_o$ .....	83
Figure 3.14 : Profil de la vitesse axiale $\bar{w}$ au niveau de l'axe de symétrie pour différents instants d'écrasement $\bar{t} \equiv T$ en présence du disque poreux à $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ : comparaison entre le modèle généralisé et celui de Darcy..	83
Figure 3.15 : Profil de la vitesse radiale $\bar{u}$ à la sortie du contact pour $\bar{t} = 0,90$ avec $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ et $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ .....	84
Figure 3.16 : Profil de la vitesse axiale $\bar{w}$ à la sortie du contact pour $\bar{t} = 0,90$ avec $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ , $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ et $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ ..	84
Figure 4.1 : Configuration géométrique.....	87
Figure 4.2 : Transformation conforme (a) : Domaine physique, (b) : Domaine de calcul numérique.....	97
Figure 4.3 : Discrétisation du domaine de calcul.....	103
Figure 4.4 : Algorithme de résolution.....	111
Figure 4.5 : Vitesse d'écrasement $\left  \frac{d\bar{g}}{d\bar{t}} \right $ pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	113

Figure 4.6 : Vitesse d'écrasement $\left  \frac{d\bar{g}}{dt} \right $ pour le cas $\bar{l} = 0,2$ .....	114
Figure 4.7 : Position du disque supérieur $\bar{g} = \frac{g}{h_0}$ pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ , $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	115
Figure 4.8 : Position du disque supérieur $\bar{g} = \frac{g}{h_0}$ pour le cas $\bar{l} = 0,2$ .....	115
Figure 4.9 : Pression $\bar{p}$ dans le film fluide pour différents instants d'écrasement $\tau$ à $\bar{l} = 0,2$ , $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	117
Figure 4.10 : Pression $\bar{p}$ dans le film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ à $\tau = 4$ .....	118
Figure 4.11 : Pression $\bar{p}$ dans le film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ à $\tau = 10$ .....	118
Figure 4.12 : Capacité de charge $\bar{W}$ du film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ , $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	119
Figure 4.13 : Capacité de charge $\bar{W}$ du film fluide à $\bar{l} = 0,2$ : comparaison avec le cas imperméable.....	120
Figure 4.14 : Epaisseur du film fluide $\bar{h}$ pour différents instants d'écrasement $\tau$ à $\bar{l} = 0,2$ , $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	121
Figure 4.15 : Epaisseur du film fluide $\bar{h}$ pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ à $\tau = 10$ .....	121
Figure 4.16 : Déformée $\bar{\delta}$ de la couche poreuse pour différents instants d'écrasement $\tau$ à $\bar{l} = 0,2$ .....	122
Figure 4.17 : Déformée $\bar{\delta}$ de l'interface poreuse pour différents paramètres de couple de contraintes $\bar{l}$ à $\tau = 10$ .....	123
Figure 4.18 : Déformée $\bar{\delta}$ de l'interface poreuse pour le cas $\bar{l} = 0,2$ et à $\tau = 10$ .....	123
Figure 4.19 : Profil de la vitesse radiale $\bar{u}$ à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement $\tau$ à $\bar{l} = 0,2$ , $C_o = 0$ : couche poreuse rigide, $C_o = 0,0247$ : couche poreuse déformable.....	124

Figure 4.20 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 10$  : comparaison avec le cas imperméable.....125

Figure 4.21 : Débit  $Q$  à la sortie du contact pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$ ,  $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable.....126

Figure 4.22 : Débit  $Q$  à la sortie du contact à  $\bar{l} = 0,2$  : comparaison avec le cas imperméable.....127

Figure 4.23 : Coefficient de frottement  $f$  pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$ ,  $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable.....129

Figure 4.24 : Coefficient de frottement  $f$  à  $\bar{l} = 0,2$  : Comparaison avec le cas imperméable.....129

# Liste des tableaux

---

Tableau 1.1 : Porosité de quelques matériaux poreux.....	15
Tableau 1.2 : Perméabilité de quelques matériaux poreux.....	16
Tableau 2.1 : Caractéristiques géométriques et physiques.....	50
Tableau 3.1 : Caractéristiques géométriques et physiques.....	75
Tableau 4.1 : Caractéristiques géométriques et physiques.....	112

# Introduction générale

---

Un mécanisme lubrifié est défini par un contact entre deux solides en mouvement l'un par rapport à l'autre séparé par un film fluide. Ces solides peuvent frotter l'un contre l'autre et on lubrifie généralement le contact pour ainsi éviter leur usure. Les surfaces des deux solides sont caractérisées par leurs propriétés géométriques et cinématiques. Si le mouvement relatif entre les deux surfaces est d'approche normale, sans glissement ni roulement, le seul moyen qui permet d'éviter le contact des deux solides est la résistance fournie par le fluide visqueux lorsqu'il est écrasé. Ce mécanisme de lubrification est appelé écrasement de film.

Cette étude est généralement concernée par l'écrasement de films fluides en présence d'un milieu poreux. Elle est néanmoins fortement inspirée de la situation la plus compliquée présente dans les contacts chargés des articulations humaines. Le fluide synovial de caractère non newtonien lubrifie deux couches élastiques poreuses du cartilage articulaire.

Le liquide synovial est un fluide naturellement visqueux additivé par les grosses molécules d'acide hyaluronique. La présence de ces grosses molécules rend caduque l'hypothèse de fluide newtonien pour décrire le comportement rhéologique du fluide synovial. Cette constatation rend l'équation de Reynolds classique inutilisable pour déterminer le champ de pression dans les films à rhéologie complexe et en particulier le fluide synovial.

Le cartilage est un matériau déformable et poreux. Sa nature poroélastique joue un rôle déterminant dans la lubrification des articulations biologiques. Elle permet d'amortir le mouvement et de faire distribuer la pression sur tout le contact articulaire.

Ainsi la détermination des performances d'un contact synovial lubrifié dépend entre autres, d'une caractérisation rigoureuse des cartilages en présence et d'une représentation aussi fidèle et complète que possible du fluide lubrifiant.

Une compréhension et maîtrise de ces contacts biomécaniques est essentielle pour la conception des prothèses afin d'établir des conditions opérationnelles optimales et de rallonger leur durée de vie. L'étude de l'influence de l'effet non newtonien du fluide synovial et de la poroélasticité du milieu poreux peut contribuer à l'amélioration des performances et la durée de vie de ces mécanismes biomécaniques.

Notre contribution par cette étude sera de mettre en place un nouveau modèle qui permet de prendre en compte les effets non newtoniens, l'inertie du fluide, les tensions visqueuses et la déformation du cartilage articulaire.

Ainsi dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode pour prédire les différentes caractéristiques (pression, débit, charge, force de frottement, ...) d'un contact synovial modélisé par deux disques circulaires et parallèles dont l'un présente une face poreuse. Le mémoire de cette thèse comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre de ce manuscrit propose dans un premier temps de rappeler des définitions de base relatives à la modélisation de l'écoulement des fluides dans les milieux poreux ainsi que les différents modèles d'écoulement. Une critique de ces lois d'écoulement sera proposée en précisant les limites d'utilisation de chaque modèle mathématique. Dans une deuxième étape, les notions principales de la lubrification articulaire seront rappelées en mettant l'accent sur le rôle du fluide synovial dans la lubrification des systèmes articulaires

lors de l'écrasement. La caractérisation de la nature poroélastique du cartilage, élément capital de l'articulation biologique, sera particulièrement exposée. La troisième partie de ce chapitre sera réservée à un rappel des différentes lois rhéologiques adoptées dans la littérature pour modéliser des fluides polymériques dits à rhéologie complexe de type fluide synovial. Enfin, une étude bibliographique sur l'écrasement de films en présence d'un milieu poreux sera présentée pour situer l'intérêt de notre contribution par rapport à ce qui se fait dans la thématique de la lubrification articulaire par effet d'écrasement. On verra comment la poroélasticité du cartilage articulaire est prise en compte dans les études des contacts biologiques. On passera également en revue les modèles rhéologiques utilisés jusqu'ici pour tenir compte de l'effet non newtonien du fluide synovial. L'objectif est de proposer un modèle rhéologique, utilisé en lubrification par des fluides polymériques, simple de mise en place et capable de prendre en compte la présence des additifs.

Dans le second chapitre, une première approche du problème de l'écrasement de films fluides newtoniens à charge constante en présence d'un milieu poreux sera abordée. Les forces d'inertie du fluide ne seront pas prises en compte. L'équation de Reynolds modifiée, tenant compte de l'échange de masse entre le film fluide et le disque poreux, est alors utilisée pour prédire les performances du contact lubrifié. L'écoulement au sein du milieu poreux sera décrit par le modèle de Darcy-Brinkman en mettant l'accent sur la viscosité effective du fluide, paramètre capital responsable du développement d'une couche limite près de l'interface film fluide – milieu poreux. Un algorithme de couplage fort film fluide – disque poreux est développé. La discrétisation de l'ensemble des équations du problème est faite à l'aide de la méthode des différences finies. Une résolution simultanée des équations algébriques est alors effectuée par la méthode itérative de sur relaxation de Gauss Seidel afin d'évaluer l'influence des effets visqueux sur les caractéristiques de l'écrasement telles que la pression et la charge que peut supporter le contact. Les résultats numériques obtenus seront interprétés et discutés.

Dans le troisième chapitre, une simulation numérique de l'écrasement à vitesse constante d'un film fluide newtonien lubrifiant deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux est présentée. Les forces d'inertie du fluide dans le film sont introduites sur la base des équations de Navier Stokes Réduites en vue de prendre en compte les phénomènes intervenant dans un contact articulaire lubrifié. Ces équations aux dérivées partielles, non linéaires et non stationnaires, sont de type parabolique. Une méthode numérique dite inverse a été ainsi mise en place pour leur résolution. Un modèle généralisé décrivant l'écoulement dans le disque poreux est utilisé. Ce modèle permet la prise en compte des effets combinés de viscosité et d'inertie. Les équations de ce problème d'interaction film fluide – disque poreux sont discrétisées par différences fines et les équations algébriques obtenues sont résolues par un algorithme de couplage séquentiel. L'objectif est de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser un modèle généralisé tenant compte à la fois des effets d'inertie du fluide et des effets visqueux dans le milieu poreux. Le programme de calcul en différences finies développé dans le cadre de cette étude sera testé sur un exemple en comparant les résultats numériques obtenus à ceux de la littérature.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on proposera d'étudier l'influence de la poroélasticité du cartilage et des effets non newtoniens sur les performances des contacts synoviaux. La géométrie de deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux est considérée. Le caractère non newtonien du fluide synovial lubrifiant le contact articulaire est décrit par le modèle de fluide à couple de contraintes. Les équations de Navier-Stokes Réduites pour fluides à couple de contraintes seront établies et résolues par une méthode inverse. Une démarche simple pour la prise en compte des déformations du cartilage articulaire à l'aide du modèle de couche mince élastique est proposée. L'écoulement au sein

du disque poreux est décrit par le modèle généralisé pour un fluide newtonien à viscosité identique à celle du film fluide. L'équation de mouvement du disque mobile est introduite pour déterminer la vitesse et ainsi la position de ce disque. Les détails théoriques des équations de la modélisation de l'écoulement au sein du cartilage ainsi que dans le film fluide seront exposés en insistant sur le couplage de ces deux phénomènes. La discrétisation de ces équations se fait à l'aide de la méthode des différences finies et les équations algébriques qui en découlent sont résolues par la méthode itérative de Gauss- Seidel relaxée. Un algorithme de résolution numérique en une démarche séquentielle sera décrit. Les résultats numériques des performances du contact seront présentés et discutés. Une attention toute particulière sera accordée à l'épaisseur du film fluide et au coefficient de frottement, deux paramètres déterminant la durée de vie des contacts articulaires.

Enfin, une conclusion générale sera présentée pour rappeler l'essentiel des résultats obtenus ainsi que l'intérêt et les limites de notre contribution. Des perspectives seront donc ensuite proposées.

# Chapitre 1

## Généralités et revue bibliographique

### 1.1 Introduction

La lubrification par écrasement de films fluides fait l'objet de nombreuses études vu les larges domaines de son application. L'ingénierie de la biomécanique articulaire en présente un bon exemple d'application. Le joint synovial est en fait un contact chargé dynamiquement dont le cartilage articulaire joue le rôle de palier lubrifié par le liquide synovial (voir Figure 1.1).

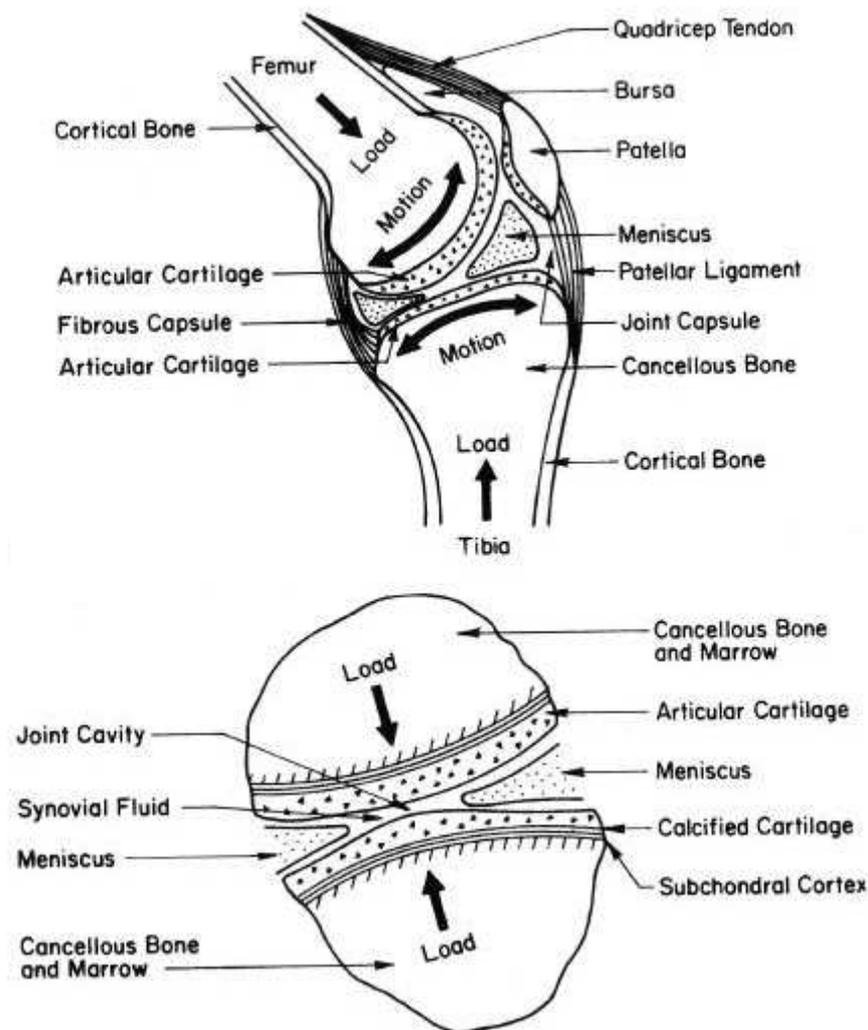


Figure 1.1 : Schéma d'un contact de genou [MOW97]

L'écrasement de film est capable de fournir une protection considérable à la surface du cartilage par la formation d'un film fluide. Les contacts chargés des joints synoviaux sont l'épaule, la hanche, le genou et la cheville.

Ces joints ont une faible friction et une usure négligeable. Pourtant, on a souvent recours à leur remplacement par des joints artificiels en présence d'une maladie et ne peuvent fonctionner normalement.

Une bonne compréhension et maîtrise du fonctionnement des joints synoviaux lors de l'écrasement contribuent largement à l'amélioration des performances des joints artificiels de remplacement en cas de maladies ou d'accidents.

Le fluide synovial exhibe un comportement rhéologique non newtonien. Il est constitué d'un fluide interstitiel « additivé » par les molécules de l'acide hyaluronique qui se présente comme de longues chaînes moléculaires. Sa viscosité dépend nécessairement de la taille de ces molécules. Plusieurs modèles rhéologiques sont proposés pour modéliser le fluide synovial comme une solution aqueuse contenant des suspensions solides rigides ([BUJ90], [RAD04]).

Le cartilage articulaire est un matériau solide déformable et poreux. Sa porosité et son élasticité contribuent à la réduction du frottement et de l'usure du joint synovial. La modélisation de sa nature poroélastique est le sujet de plusieurs investigations.

Les notions fondamentales relatives à l'écoulement d'un fluide au sein d'un milieu poreux sont rappelées dans ce chapitre. Différents modèles mathématiques d'écoulement sont présentés. Le mécanisme de lubrification par effet d'écrasement des articulations biologiques est exposé. La nature du fluide synovial et du cartilage articulaire est par ailleurs définie. Plusieurs modèles rhéologiques modélisant le comportement d'un fluide contenant des suspensions solides sont présentées. Une revue bibliographique sur les principaux travaux de recherche en relation avec l'écrasement de films en présence ou non d'un milieu poreux est reportée.

## 1.2 Ecoulement dans un milieu poreux

### 1.2.1 Définitions

#### 1.2.1.1 Milieu poreux

Un milieu poreux est un matériau massif à l'intérieur duquel se trouvent des cavités (pores) reliées entre elles par des canaux ou éventuellement isolées (voir Figure 1.2). On rencontre plusieurs matériaux poreux dans la nature et dans l'industrie. Il peut s'agir d'empilement de billes, de panneaux de fibre de verre, de béton, de roche, de gisement de pétrole, de sable, ..., etc. On s'intéresse ici aux milieux poreux saturés pour lesquels l'espace des pores est entièrement rempli d'un seul fluide supposé incompressible.



Figure 1.2 : Image traitée d'un milieu poreux

La distribution et la taille des pores dans les milieux poreux naturels sont irrégulières. La variation des paramètres régissant l'écoulement au sein d'un milieu poreux est par conséquent irrégulière. Toutefois, l'intérêt pratique dans les problèmes d'ingénierie est centré sur les valeurs moyennes de ces paramètres. Elles sont donc mesurées à l'échelle

macroscopique et varient de manière continue. La technique utilisée est la méthode de prise de moyenne volumique ([WHI67], [BEA72]) définie comme étant une moyenne spatiale appropriée sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), (voir Figure 1.3).

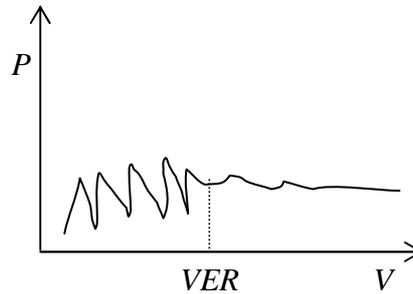


Figure 1.3 : Représentation du volume élémentaire représentatif  $V$  sur lequel est moyennée la propriété  $P$ .

### 1.2.1.2 Volume Élémentaire Représentatif

La modélisation macroscopique d'un milieu poreux par un milieu continu repose sur la notion de volume élémentaire représentatif ([WHI67], [BEA72]). En effet, les milieux poreux naturels sont des matériaux hétérogènes. La prise en compte de l'ensemble de ces hétérogénéités constitue une tâche insurmontable lors de la détermination des propriétés du matériau. Il s'avère donc indispensable d'idéaliser le milieu en le considérant comme continu et donc en moyennant ses propriétés à une certaine échelle en fonction de la microstructure. On parle alors d'homogénéisation du milieu poreux et les propriétés sont moyennées sur un VER. La matière occupant ce volume élémentaire est représentée par plusieurs particules élémentaires superposées, chacune d'entre elles correspondant à une phase.

Les écoulements en milieu poreux imposent deux échelles pour la description des phénomènes [BOR85] :

- L'échelle des pores ou l'échelle microscopique à l'intérieur de laquelle les grandeurs locales peuvent varier très largement. En général cette échelle est associée au diamètre moyen des pores.
- L'échelle du milieu poreux ou l'échelle macroscopique caractéristique de variations significatives de ces mêmes grandeurs définies en moyennes sur un certain volume de milieu poreux. Cette échelle macroscopique est associée à une dimension géométrique du milieu.

Le VER doit être choisi tel que les valeurs des quantités physiques utilisées sont indépendantes de la taille de ce volume lui-même. Son échelle de longueur doit être suffisamment petite pour prendre en compte la structure microscopique du matériau et suffisamment grande pour décrire le comportement global du matériau ([WHI67], [BEA72], [NIE06]).

Les grandeurs macroscopiques caractérisant le milieu poreux sont donc des moyennes de grandeurs microscopiques correspondantes sur une taille grande devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique. Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles qui sont la porosité et la perméabilité. Nous présentons une définition

macroscopique de ces deux paramètres dans le sens de leurs valeurs moyennes spatiales sur le volume élémentaire représentatif.

### 1.2.1.3 Porosité

Les milieux poreux contiennent un certain pourcentage de vides qui peuvent être occupés par des fluides. C'est ce qu'on appelle leur porosité. La porosité  $\phi$  constitue un indice du volume relatif des vides dans le milieu poreux et est définie comme le rapport du volume des vides  $V_p$  au volume total du milieu poreux  $V_t$ :

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (1.1)$$

La porosité est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Le tableau 1.1 ci-dessous présente quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux poreux [KAV95].

Matériau	Porosité
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grains de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0,57 – 0,66
Cuir	0,56 – 0,59
Catalyseur	0,45
Granulé de pierres	0,44 – 0,45
Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,50
Poudre de silice	0,37 – 0,49
Sphère bien empilée	0,36 – 0,43
Filtre de cigarettes	0,17 – 0,49
Briques	0,12 – 0,34
Poudre de cuivre	0,09 – 0,34
Pierre à chaux, Dolomite	0,04 – 0,10
Houille	0,02 – 0,07

Tableau 1.1 : Porosité de quelques matériaux poreux

### 1.2.1.4 Perméabilité

La perméabilité intrinsèque notée  $k$  se rapporte au milieu poreux indépendamment des caractéristiques du fluide. Elle correspond à l'interconnexion et aux caractéristiques géométriques des vides permettant à un fluide d'y circuler. La perméabilité dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide [CAL03]. Elle définit l'aptitude du milieu poreux à transmettre le fluide qu'il contient. Son inverse traduit l'effet de la résistance à l'écoulement du fluide due aux forces de frottement entre le fluide et la surface des particules solides. Elle est homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel [GUY01].

La relation de Kozeny – Carmen [CAR37] donne une estimation de la perméabilité pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$k = \frac{d_p^2 \phi^3}{180(1-\phi)^2} \quad (1.2)$$

où  $d_p$  désigne une dimension caractéristique de la taille des pores du matériau poreux. Le tableau 1.2 ci-dessous illustre la perméabilité de quelques matériaux poreux [SCH74].

Matériau	Perméabilité [m <sup>2</sup> ]
Briques	$4,8 \cdot 10^{-15} - 2,2 \cdot 10^{-13}$
Pierre à chaux, Dolomite	$2,0 \cdot 10^{-15} - 4,5 \cdot 10^{-14}$
Cuir	$9,5 \cdot 10^{-14} - 1,2 \cdot 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$4,9 \cdot 10^{-14} - 1,2 \cdot 10^{-13}$
Terre	$2,9 \cdot 10^{-13} - 1,4 \cdot 10^{-11}$
Fibres de verre	$2,4 \cdot 10^{-11} - 5,1 \cdot 10^{-11}$
Sable	$2,0 \cdot 10^{-11} - 1,8 \cdot 10^{-10}$
Cheveux artificiels	$8,3 \cdot 10^{-10} - 1,2 \cdot 10^{-9}$
Plaque de liège	$3,3 \cdot 10^{-10} - 1,5 \cdot 10^{-9}$
Fils à tisser	$3,8 \cdot 10^{-9} - 1 \cdot 10^{-8}$
Cigarette	$1,1 \cdot 10^{-9}$

Tableau 1.2 : Perméabilité de quelques matériaux poreux

## 1.2.2 Loi d'écoulement dans un milieu poreux

### 1.2.2.1 Loi de Darcy

La dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux est décrite par la loi de Darcy [DAR56] établie en 1856 sur des fondements expérimentaux. Cette loi, établie à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, a mis en évidence la proportionnalité du gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques sont basées sur la loi de Darcy même pour les écoulements multidirectionnels. En milieu homogène et isotrope et dans le cas de fluide incompressible la loi de Darcy s'écrit [NIE06] :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = -\frac{\mu}{k} \vec{u} \quad (1.3)$$

où  $\vec{u}$  est la vitesse de filtration ou vitesse de Darcy définie comme une moyenne volumique sur tout le VER,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $k$  est la perméabilité du milieu poreux et  $p$  est la pression.

La loi de Darcy relie linéairement la vitesse de filtration et le gradient de pression interstitielle. Cette loi linéaire découle de la linéarité des équations de Stokes. On peut admettre en écoulement stationnaire à faible vitesse que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse d'écoulement dans les pores (loi de Poiseuille appliquée à chaque pore). Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si on moyenne la vitesse et les gradients de pression sur un volume grand devant la taille des pores.

Bien que la loi de Darcy soit largement utilisée, elle s'est avérée insuffisante. Elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement notamment près des parois. En effet la condition de glissement aux parois est retenue par ce modèle quel que soit le fluide considéré. Cette équation ne tient pas compte non plus d'éventuels effets inertiels. Les effets d'inertie du fluide en mouvement ne sont plus négligeables lorsque la vitesse d'écoulement augmente, la loi de Darcy ne peut donc plus s'appliquer ([BEA72], [GAR96], [PEA02]). Des extensions de ce modèle ont été proposées par plusieurs chercheurs.

### 1.2.2.2 Correction de Brinkman

Dans le cadre du calcul de la force visqueuse exercée par un fluide sur des particules sphériques composant un milieu poreux, Brinkman [BRI47] a étendu en 1947 la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = -\frac{\mu}{k} \vec{u}^* + \mu_{eff} \Delta \vec{u}^* \quad (1.4)$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation (1.4) est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman.

Compte tenu de la présence du terme de diffusion visqueuse, l'équation de Darcy-Brinkman permet de décrire la couche limite au sein du milieu poreux. Bien que l'épaisseur de cette couche soit habituellement très petite, ses effets sur l'ensemble de l'écoulement peuvent être très significatifs [NEA74]. La correction de Brinkman est valide pour des valeurs élevées de la porosité ( $0,6 < \phi < 1$ , selon Lundgren [LUN72]).

Bien que l'utilisation de la correction de Brinkman permette d'imposer la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles à l'interface fluide – poreux, elle fait intervenir la viscosité effective  $\mu_{eff}$  du milieu poreux dont la détermination reste controversée ([LIU05], [LIU07]). La viscosité effective peut différer fortement de la viscosité  $\mu$  du fluide. Son évolution en fonction de la porosité reste essentiellement un sujet encore ouvert [VAL07]. La question de la détermination de la loi de viscosité la plus réaliste reste cependant ouverte et dépend probablement d'autres propriétés du milieu poreux [KAV95].

Plusieurs études proposent des expressions du rapport des viscosités  $\frac{\mu_{eff}}{\mu}$  en fonction de la porosité ([EIN56], [LUN72], [KOP83]). L'établissement de l'équation de Darcy-Brinkman par la méthode de prise de moyenne volumique conduit à  $\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \frac{1}{\phi}$  [WHI99].

### 1.2.2.3 Correction de Forchheimer

L'équation de Darcy suffit pour décrire l'écoulement de faible intensité. En revanche, l'effet inertiel non linéaire devient important avec l'augmentation de la vitesse du fluide. Dans ce cas, l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Ward [WAR64] propose dans ce cas de remplacer l'équation de Darcy par l'équation :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = -\frac{\mu}{k} \vec{u}^* - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left| \vec{u}^* \right| \vec{u}^* \quad (1.5)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $C_f$  est la constante adimensionnelle de Forchheimer [FOR01]. Pour un empilement de sphère, d'après Ergun [ERG52], on a :

$$C_f = \frac{150}{\sqrt{1,75}\phi^{3/2}} \quad (1.6)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (1.5) est le terme de Darcy et le second terme est connu sous le nom de terme de Forchheimer. Le rapport de ces deux termes représente à une constante près le nombre de Reynolds à l'échelle du pore basé sur la perméabilité du milieu poreux :

$$R_{ek} = \frac{\rho\sqrt{k}\left|\vec{u}^*\right|}{\mu} \quad (1.7)$$

Le modèle de Darcy est insuffisant pour les écoulements à nombres de Reynolds supérieurs à l'unité ( $R_{ek} \geq 1$ ) [GAR96].

#### 1.2.2.4 Modèle généralisé

Les écoulements visqueux et incompressibles à travers les milieux poreux peuvent être décrits mathématiquement en utilisant un modèle généralisé dans lequel tous les modèles décrits ci-dessus sont pris en compte. En outre, les termes convectifs et temporels sont inclus dans l'équation de quantité de mouvement afin de rendre le modèle plus général.

La forme générale de l'équation de quantité de mouvement pour un milieu poreux de porosité constante saturé par un fluide newtonien incompressible peut être obtenue en calculant la moyenne des équations de Navier-Stokes sur le VER à l'aide de la procédure de prise de moyenne volumique ([BEA72], [WHI67]). Cette équation de quantité de mouvement généralisée peut être écrite comme suit ([HSU90], [NIE06]) :

$$\frac{\rho}{\phi} \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \overline{\text{grad } \vec{u}^* \vec{u}^*} \right) = -\overline{\text{grad } p} - \frac{\mu}{k} \vec{u}^* + \frac{\mu}{\phi} \Delta \vec{u}^* - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left| \vec{u}^* \right| \vec{u}^* \quad (1.8)$$

Toutes les quantités présentes dans cette équation sont représentées par leurs valeurs moyennes dans le VER. Cette équation de quantité de mouvement généralisée a été obtenue théoriquement [HSU90] et a été largement utilisée avec succès dans la littérature ([HSU90], [GAR96], [NIT96], [NIT97], [NIT98], [NIT99]).

### 1.3 Lubrification articulaire

La lubrification est un moyen permettant de maîtriser en partie le frottement pour l'élimination du contact direct, de l'adhésion et de l'usure entre deux corps. Lubrifier consiste à introduire un troisième corps de faible épaisseur pour diminuer les frottements.

La biomécanique articulaire constitue un bon exemple d'application de la théorie de la lubrification aux articulations biologiques. Une articulation biologique est un contact composé par deux os couverts par le cartilage articulaire [SOK78]. Ce contact articulaire est lubrifié naturellement par le fluide synovial pour diminuer le frottement et l'usure [FUR97].

### 1.3.1 Éléments des articulations biologiques

#### 1.3.1.1 Cartilage

Le cartilage articulaire est un tissu élastique poreux qui recouvre l'extrémité d'un os en continuité avec un autre os pour former une articulation. Il se compose principalement d'un gel dans lequel sont incluses des fibres et des cellules ([MOW97], [MOW92], [MAR90]). Son rôle essentiel, dû à ses caractéristiques biomécaniques particulières, est d'assurer un bon glissement entre les pièces osseuses articulaires. Il peut être assimilé à une sorte d'amortisseur des chocs avec un coefficient de frottement très faible et une résistance aux forces de compression élevée tout en répartissant les pressions et rendant les contraintes dans le contact les plus faibles possibles.

L'épaisseur du cartilage est variable selon l'articulation ; elle est plus importante aux articulations des membres inférieurs qui sont les plus chargées. Elle est maximale sur la rotule où elle atteint jusqu'à 7 mm. Dans une articulation donnée, l'épaisseur est maximale dans les zones supportant le maximum de charge.

La surface du cartilage joue un rôle important dans la physiologie de ce tissu puisque elle est le filtre sélectif à travers lequel passe les substances nutritives venant du liquide synovial.

Les plages de valeurs des trois principaux paramètres qui caractérisent le comportement mécanique global du cartilage articulaire sont ([MOW97], [MOW92], [LAI98], [BER90], [MOW84]) :

- module d'élasticité global : 0,5 – 1 MPa
- coefficient de Poisson : 0,2 – 0,4
- perméabilité d'origine physico-chimique,  $10^{-16} - 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$

L'arthrose est une maladie qui se rencontre fréquemment chez les personnes d'âge moyen et les personnes âgées. Elle se caractérise par une inflammation des cartilages articulaires rendant la mobilité des articulations affectées douloureuse. La maladie arthrosique augmente le coefficient de frottement et fait augmenter la perméabilité du cartilage aux petites molécules du liquide synovial. L'arthrose humaine est liée à l'hyperpression qui est le facteur principal de la dégénérescence du cartilage. Le cartilage arthrosique démontre une diminution de la résistance aux contraintes mécaniques.

#### 1.3.1.2 Fluide synovial

Le liquide synovial du contact articulaire est un liquide incolore, transparent et visqueux qui ressemble au blanc d'oeuf [CON01]. Il est appelé fluide synovial ou plus simplement synovie.

Le fluide synovial est composé principalement d'acide hyaluronique en suspensions dans le liquide interstitiel filtré du plasma sanguin. Il joue un rôle de lubrifiant dans l'articulation et celui de liquide nourricier du cartilage. Il a notamment pour fonction de réduire le frottement en lubrifiant l'articulation et d'absorber et d'amortir les chocs pendant le mouvement. Il se trouve normalement en faible quantité dans l'articulation.

D'un point de vue rhéologique, le liquide synovial est un liquide polymérique dont l'écoulement révèle des propriétés viscoélastiques ([KIN66], [BAL70], [OAT89], [FUN93], [KRA04], [SZW04], [ODA05], [MEZ08], [TIC08]). Ces propriétés englobent l'effet

élastique, l'effet de contraintes normales et le caractère rhéofluidifiant. La plupart des travaux rhéologiques consacrés à la lubrification synoviale des joints artificiels sont réalisés avec des modèles de fluides purement visqueux montrant un comportement rhéofluidifiant [CON01]. Sa viscosité diminue en fonction du taux de cisaillement de plusieurs ordres de grandeur (voir Figure 1.4). Les valeurs de cette viscosité varient de quelques dizaines de Pa.s à quelques centièmes de Pa.s [CON01].

Ce fluide forme une couche mince sur la surface du cartilage. Il s'infiltre également dans des microcavités et des irrégularités dans la surface articulaire du cartilage pour remplir n'importe quel espace vide.

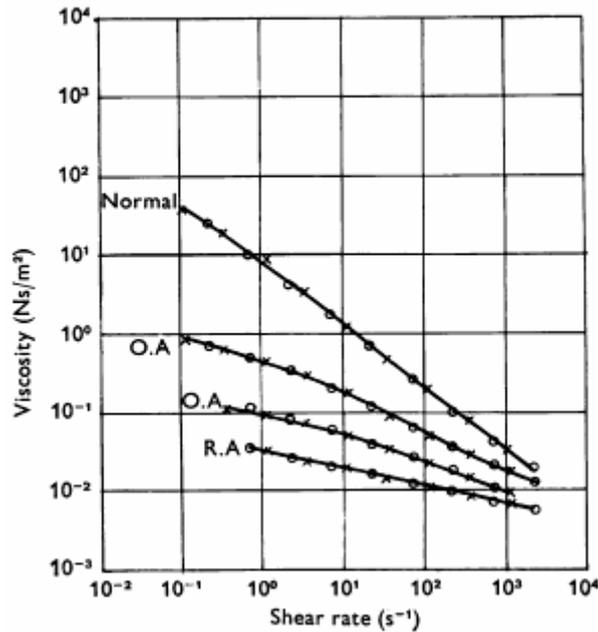


Figure 1.4 : Relation entre la viscosité dynamique du fluide synovial (normal et pathologique) et le taux de cisaillement [WRI76]

### 1.3.2 La lubrification des articulations biologiques par effet d'écrasement

L'écrasement (compression) de film lubrifiant est l'un des mécanismes de génération de pression positive au sein du film. Le terme film écrasé correspond au phénomène qui se produit lorsque deux surfaces lubrifiées s'approchent l'une de l'autre avec une vitesse normale. Sous l'effet d'écrasement, le film fluide devient autoportant et empêche la réalisation du contact direct entre les surfaces. Avec l'obtention du champ de pression on peut déterminer les performances du film écrasé, notamment sa portance.

Différents modes de lubrification sont rencontrés dans les articulations biologiques durant un cycle de marche [MOW93] (voir Figure 1.5), parmi lesquels figure l'écrasement. Le film écrasé peut supporter les fortes charges imposées sur le joint durant la marche, ce qui fait de l'écrasement le mécanisme de lubrification le plus attractif. Fein [FEI66] a estimé la durée de l'écrasement du fluide synovial dans des joints humains et a conclu que l'écrasement est le mécanisme principal dans la lubrification des articulations biologiques.

La première phase du cycle de marche correspond au moment où le contact articulaire est soumis à une forte charge avec des vitesses tangentielles très faibles. La théorie prévoit une portance hydrodynamique significative liée à un effet de type film écrasé ([DOW70], [PAS03]). Cet effet d'écrasement peut être amplifié par une augmentation de la viscosité du

fluide synovial. La porosité du cartilage, jouant le rôle de filtre, provoque la fuite de la phase aqueuse. Ce qui tend à augmenter progressivement la concentration du liquide synovial en grosses molécules d'acide hyaluronique jusqu'à ce qu'elles se structurent en gel [WAL68]. La viscosité élevée de ce gel permettrait de maintenir par effet d'écrasement une épaisseur de film élevée à la fin de cette première phase ([HLA95a], [HLA99]).

Lorsque les pressions générées dans le film fluide sont suffisamment élevées, la déformation du cartilage est significative et bénéfique vis-à-vis de l'épaisseur du film ([DOW86], [DOW90]). Cette déformation affecte les performances du contact lubrifié et ne peut donc être négligée.

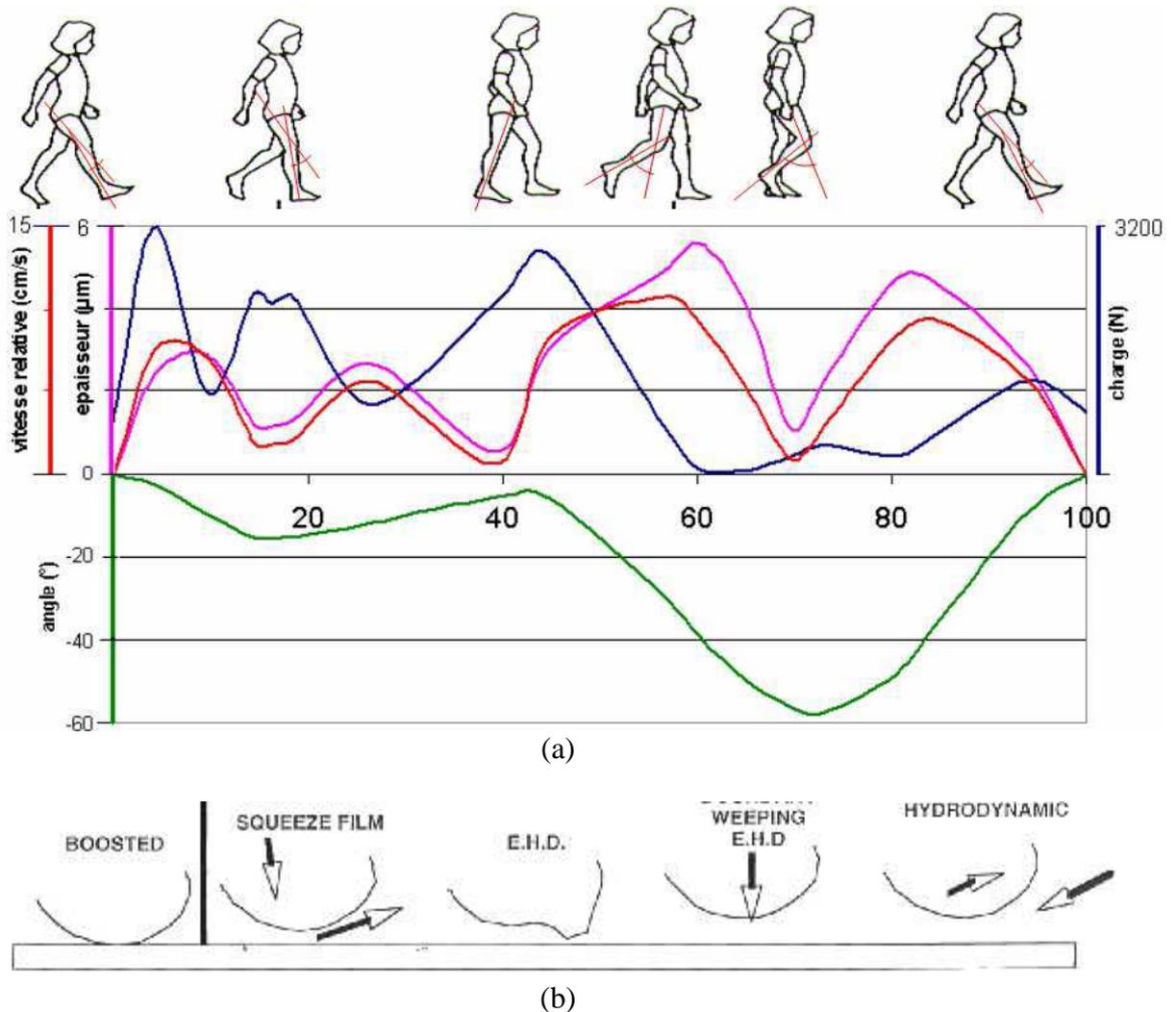


Figure 1.5 : Corrélation entre les différentes phases de la marche [SFA06] :  
 (a) les conditions cinématique et dynamique globale  
 (b) les régimes de lubrification

### 1.3.3 Modèles rhéologiques de lubrifiant contenant des suspensions

L'approche la plus utilisée pour caractériser le fluide synovial est de le considérer comme un fluide polaire. Physiquement, les fluides polaires se composent de particules rigides et aléatoirement orientées suspendues dans un milieu visqueux. Afin de mieux

décrire le comportement de ce genre de fluides non newtoniens, différentes théories ont été proposées.

### 1.3.3.1 Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de Maxwell généralisé, qui permet une modélisation macroscopique des fluides viscoélastiques (polymériques), a la forme générale suivante ([ARI73], [NAJ89]) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= A \frac{d\tau_{rz}}{dt} + \tau_{rz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= A \frac{d\tau_{\theta z}}{dt} + \tau_{\theta z} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{aligned} \quad (1.9)$$

où

$u, w$  : composantes radiale et axiale du champ de vitesse

$r, z, \theta$  : coordonnées radiale, axiale et circonférentielle

$A = 0$ , quand on ne tient pas compte de la partie élastique du lubrifiant

$A = 1/G$ , quand la partie élastique du lubrifiant est prise en compte.  $G$  est le module de cisaillement du fluide lubrifiant

L'application du module de cisaillement  $G$  signifie la variation simultanée de la configuration et du volume de la structure du fluide.

$\tau_e$  : contrainte de cisaillement équivalente [ARI73], [ARI74],  $\tau_e = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ji}}$

$F(\tau_e)$  : fonction linéaire ou non linéaire exprimant la forme du terme visqueux, viscoélastique linéaire ou non linéaire utilisé par le modèle rhéologique, pour le modèle newtonien par exemple on a :  $A = 0$  et  $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{1}{\mu}$ .

### 1.3.3.2 Modèle de l'Haltère

La théorie de l'altère consiste à modéliser les molécules de polymères (additifs) par des systèmes billes – ressort appelés haltères. Le comportement visqueux est modélisé par l'action du frottement sur les billes, tandis que le ressort permet d'introduire l'élasticité du fluide en représentant les interactions entre molécules et les enchevêtrements des polymères. Ce modèle de l'Haltère permet d'analyser la cinétique de la macromolécule. Afin de diminuer la complexité des calculs, la théorie des haltères s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- l'écoulement du solvant est considéré homogène
- la concentration en macromolécule est uniforme au sein du mélange
- la distribution des vitesses de bille suit une distribution Maxwellienne. Cette distribution a été développée à l'origine pour définir la distribution des vitesses de molécules dans un gaz parfait
- l'inertie des billes est négligée.

Le tenseur de contraintes totales peut être calculé en sommant les contributions respectives du solvant  $\tau_{(s)ij}$  et des polymères  $\tau_{(p)ij}$  :

$$\tau_{ij} = \tau_{(s)ij} + \tau_{(p)ij} = -\mu_s \dot{\gamma}_{ij} + \tau_{(p)ij} \quad (1.10)$$

avec

$\mu_s$  : viscosité du solvant

$\dot{\gamma}_{ij}$  : taux de contraintes de cisaillement

### 1.3.3.3 Modèle de FENE P

Le modèle de FENE P Dumbbell modifié présente l'avantage de permettre une mise en équation complète d'une loi rhéologique sans calculer la fonction de distribution des haltères dans le solvant. Le calcul de la fonction de distribution des haltères dans le solvant s'exprime par ([BRI80], [EHR93]) :

$$Z(\text{tr}(\tau_{(p)}))\tau_{(p)ij} + \lambda_H \frac{\delta \tau_{(p)ij}}{\delta \tau} - \lambda_H (\tau_{(p)ij} - nkTI) \frac{D \ln Z}{Dt} = -nkT \lambda_H \dot{\gamma}_{ij} \quad (1.11)$$

L'opérateur  $Z$  est défini par la formule suivante :  $Z(\text{tr}(\tau_{(p)})) = 1 + \frac{3}{b} \left[ 1 - \frac{\text{tr}(\tau_{(p)})}{3nkT} \right]$

avec  $b = HR_0^2 / kT$

où

$H$  : constante de raideur Hookéenne du connecteur

$R_0$  : constante désigne l'extension limite acceptable de l'altère

$\lambda_H$  : constante de temps

$n$  : nombre volumique des haltères dans le solvant

$k$  : constante de Boltzman

$T$  : température du fluide

$I$  : matrice unitaire

La solution de système d'équations (1.11) permet d'obtenir les contraintes de cisaillement des polymères  $\tau_p$  solubles dans le fluide.

### 1.3.3.4 Modèle de fluide à couple de contraintes

La théorie des milieux micro continus de Vijay Kumar Stokes permet de prendre en compte la taille des particules en mouvement et les couples de contraintes et de volume dus à la présence des additifs. La loi de comportement rhéologique de ce type de fluide s'écrit [STO66] :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2} e_{ijk} M_{rk,r} \quad (1.12)$$

Avec :  $M_{ij} = \frac{1}{3} M_{mn} \delta_{ij} + 4\eta K_{ij}$

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes non symétrique

$M_{rk}$  : tenseur de couple de contraintes

$e_{ijk}$  : tenseur de permutation d'ordre trois

$K_{ij}$  : tenseur du taux de rotation

$\mu$  : coefficient de viscosité dynamique du fluide  
 $\eta$  : constante physique due à la présence des couples de contraintes ou additifs dans le fluide

### 1.3.3.5 Modèle de fluide de second ordre

La relation entre le tenseur de Cauchy et le mouvement d'un fluide incompressible de second ordre est donnée par [COL60] :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \mu A_1 + \varphi_0 A_2 + \varphi_1 A_1^2 \quad (1.13)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  sont les deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen [COL60] donnés par :

$$A_1 = \overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}} + \left(\overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}}\right)^T \quad (1.14)$$

$$A_2 = \frac{dA_1}{dt} + A_1 \overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}} + \left(\overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}}\right)^T A_1 \quad (1.15)$$

où  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont deux modules de contrainte normale souvent désignés par les coefficients de viscoélasticité et de 'cross viscosity' respectivement. La relation constitutive (1.13) peut être considérée comme une approximation de second ordre d'un fluide simple. Il est plus approprié de l'appeler 'relation pour un fluide de grade-deux'.

### 1.3.3.6 Modèle de fluide micro polaire

L'écoulement d'un fluide micro polaire est caractérisé par le champ de vitesse  $\vec{v}$  et la micro rotation  $\vec{\omega}$ . Deux tenseurs sont donc introduits ; le tenseur de contraintes  $\overline{\overline{\sigma}}$  et le tenseur de couple de contraintes  $\overline{\overline{\xi}}$ . Pour un fluide micro polaire isotrope, les contraintes sont liées aux vitesses de translation et de rotation par la relation linéaire [ERI66] :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \mu_r(u_{i,j} - u_{j,i}) - 2\mu_r\omega_k \varepsilon_{kij} \quad (1.16)$$

$$\xi_{ij} = 2\gamma\omega_{j,i} + 2\lambda\omega_{i,j} + 2\vartheta\delta_{ij}\omega_{k,k} \quad (1.17)$$

où

$\mu_r$  : viscosité classique de micro rotation du fluide  
 $\gamma, \lambda, \text{ et } \vartheta$  : constantes du fluide micro polaire  
 $\delta_{ij}$  et  $\varepsilon_{kij}$  : symboles de Kroenecker et des permutations de Levi-Civita

Ce modèle de fluide micro polaire permet de prendre en compte la rotation angulaire des particules fluides.

### 1.3.3.7 Modèle de fluide à loi de puissance

L'addition de polymères dans le fluide, qui permet d'en augmenter fortement la viscosité apparente, modifie la relation linéaire entre les contraintes et le taux de déformation. En effet,

une chute de cette viscosité apparente est observée lorsque le fluide est soumis à des taux de déformation importants [BOU94]. Dans ce cas, le fluide est dit rhéofluidifiant. L'équation constitutive d'un fluide rhéofluidifiant peut s'écrire sous la forme d'une loi de puissance du type [USH00] :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2m\sqrt{2\overline{D:D}}^{\overline{D}}{}^{n-1} D_{i,j} \quad (1.18)$$

où  $n$  et  $m$  sont des constantes empiriques,  $n$  correspondant à l'indice de rhéofluidifiante.  $\overline{D}$  est le tenseur des taux de déformations dont les composantes sont :

$$D_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (1.19)$$

## 1.4 Revue bibliographique

Traditionnellement, le phénomène de l'écrasement de films fluides est modélisé par l'équation de Reynolds classique [FRE90] écrite pour un fluide newtonien en écoulement sans prendre en compte les effets d'inertie. Or, la compréhension de la dynamique non linéaire des phénomènes de l'écrasement de films est importante en raison de la demande croissante sur les systèmes mécaniques pour avoir des performances de fonctionnement satisfaisantes et des durées de vie plus longues. En effet, la non prise en compte des forces d'inertie du fluide et de son comportement non newtonien ne permet pas d'avoir une prédiction correcte des performances de l'écrasement de films.

Des études récentes ont confirmé que ces effets sont importants dans l'analyse de l'écrasement de films fluides. Dans la littérature concernant la prise en compte simultanée des effets d'inertie temporelle et convective, deux méthodes ont été développées : la perturbation sur le nombre de Reynolds et la moyenne des forces d'inertie du fluide au travers de l'épaisseur du film.

### 1.4.1 Ecrasement de lubrifiants newtoniens ou non newtoniens entre deux surfaces imperméables

#### 1.4.1.1 Cas de deux surfaces rigides

Les premiers travaux concernant la prise en compte des forces d'inertie du fluide remontent à 1962 avec Jakson [JAK62] pour l'écrasement d'un film fluide entre deux plaques circulaires parallèles. Une solution par perturbation est présentée en approximant les termes d'inertie à un profil de vitesse non visqueux.

En 1967, Kuzma [KUZ67] a apporté une amélioration à cette solution en calculant les termes d'inertie des équations de Navier simplifiées à partir du profil de vitesse donné par la théorie de la lubrification classique. Il a obtenu des résultats en bon accord avec ses mesures expérimentales.

En 1978, Ramanaiah et Sarkar [RAM78] ont présenté une étude théorique sur le mouvement d'écrasement d'un fluide non newtonien modélisé par le modèle de fluides à couple de contraintes entre deux plaques parallèles infiniment longues, entre deux plaques parallèles circulaires et dans un palier de butée. L'équation de Reynolds modifiée, tenant

compte de la présence d'additifs dans le lubrifiant, a été établie. Leurs résultats montrent que le temps d'écrasement du fluide à couple de contraintes est plus grand que celui du fluide newtonien, il augmente avec l'augmentation du paramètre de couple de contraintes. En outre, la capacité de charge d'un palier de butée lubrifié par un fluide à couple de contraintes est plus grande que celle du cas classique d'un lubrifiant newtonien ; elle augmente avec l'augmentation du paramètre de couple de contraintes.

En 1979, Ramanaiah [RAM79] a mené une étude théorique sur l'écrasement d'un fluide à couple de contraintes entre deux plaques parallèles identiques pour différentes configurations géométriques. Des formes circulaires, rectangulaires, carrées et triangulaires sont ainsi employées. L'auteur a confirmé que le temps d'écrasement du fluide à couple de contraintes augmente lorsque le paramètre du couple de contraintes augmente.

En 1981, Tichy [TIC81] a utilisé une technique de linéarisation des termes d'inertie convective du fluide à l'aide d'un profil de vitesse non visqueux. Il a étudié le problème de l'écrasement d'un film fluide entre deux plaques circulaires parallèles. Ses résultats ont mis en évidence l'effet des forces d'inertie du fluide sur la pression dans le film fluide. Il a conclu que les effets d'inertie du fluide aplatissent les profils de la vitesse radiale, comparativement au profil parabolique de la lubrification hydrodynamique sans inertie, par le développement d'une structure de type couche limite.

En 1982, Bujurke et Jayaraman [BUJ82] ont étudié les effets non newtoniens sur l'écrasement à vitesse constante des joints synoviaux. Le fluide synovial est modélisé comme un fluide à couple de contraintes de V. K. Stokes [STO66]. La géométrie du joint synovial est approchée par un contact entre un cylindre rigide infiniment long et un plan. Les auteurs ont montré que les lubrifiants fluides à couple de contraintes permettent d'avoir des capacités de charge et des temps d'écrasement significativement plus grands comparativement au cas newtonien à viscosité dynamique identique.

En 1991, Tichy et Bou-Saïd [TIC91] ont présenté une nouvelle forme de l'équation de Reynolds en tenant compte des forces d'inertie du fluide. Une méthode basée sur la moyenne des forces d'inertie du fluide au travers du film a été utilisée.

En 1994, Les simulations numériques de Bou-Saïd et Ehret [BOU94] ont mis en évidence la réduction de la capacité du film à supporter des charges dynamiques engendrée par l'effet rhéofluidifiant. Ils ont montré qu'une chute de la viscosité apparente est observée lorsque le fluide est soumis à des taux de déformations importants de l'ordre de  $10^{-8} - 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ .

En 1996, Lin [LIN96a] a étudié l'effet non newtonien du fluide synovial sur le comportement statique et dynamique de l'écrasement d'un contact sphérique modélisant un joint synovial. Le fluide synovial est modélisé par le modèle de fluide à couple de contraintes de V. K. Stokes [STO66]. L'équation de Reynolds modifiée régissant la distribution de la pression dans le film fluide est établie. Il a montré que les effets du couple de contraintes sur les caractéristiques statiques et dynamiques du film fluide écrasé sont physiquement significatifs et non négligeables. Le couple de contraintes entraîne une augmentation de la capacité de charge et une réduction de la vitesse et du déplacement de la surface écrasante comparativement au cas classique newtonien. En outre, le couple de contraintes augmente l'épaisseur minimale du contact et le temps d'écrasement.

Courant cette même année, Kamel et Hamdan [KAM96] analysent l'écrasement d'un film fluide micro polaire entre deux disques circulaires parallèles. Les forces d'inertie convective du fluide sont prises en compte. Les équations du problème sont résolues par une méthode

d'approximation successive. Les résultats montrent que le fluide micro polaire supporte une charge plus grande que celle du cas newtonien. En outre, la capacité de charge augmente quand le paramètre représentant l'effet polaire augmente. Les effets d'inertie convective du fluide font augmenter la capacité de charge.

En 1997, Lin [LIN97] présente une analyse théorique du comportement hydrodynamique d'un film fluide à couples de contraintes écrasé dans un palier partiel infiniment long. Il a établi l'équation de Reynolds modifiée en se basant sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes [STO66] pour prendre en considération la présence des additifs en suspension dans le lubrifiant. Son étude montre que l'existence des additifs dans le lubrifiant permet d'améliorer considérablement les performances statiques du palier comparativement au cas newtonien. Le couple de contraintes provoque une augmentation de la capacité de charge et du temps d'écrasement du film fluide.

Dans un autre travail, Lin [LIN98] a montré dans une étude numérique l'influence du couple de contraintes présent dans le film fluide sur les performances d'un palier fini en mouvement d'écrasement. L'équation de Reynolds modifiée est résolue numériquement à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué pour obtenir le champ de pression dans le film fluide. Les résultats numériques prouvent que la présence du couple de contraintes dans le lubrifiant entraîne une augmentation considérable du champ de pression, de la capacité de charge et du temps d'écrasement du film fluide comparativement au cas newtonien.

En 2000, Lin [LIN00] a présenté une étude analytique sur l'écrasement d'un fluide à couple de contraintes entre une sphère et un plan. L'équation de Reynolds modifiée a été établie en utilisant la théorie des milieux continus de V. K. Stokes. Ses résultats montrent que le couple de contraintes entraîne une augmentation significative des valeurs de la pression dans le film fluide, de la capacité de charge et du temps d'écrasement comparativement au cas classique de lubrifiant newtonien.

En 2001, Lin et *al.* [LIN01a] analysent analytiquement le mouvement d'écrasement périodique d'un palier partiel fini lubrifié par un fluide à couple de contraintes. Le champ de pression du film fluide est calculé numériquement en résolvant l'équation de Reynolds modifiée à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué. Le couple de contraintes diminue la valeur de l'excentricité du centre du palier partiel et augmente l'épaisseur minimale et le temps d'écrasement du film fluide.

En 2002, Usha et Vimala [USH02] ont analysé théoriquement le mouvement d'écrasement périodique d'un film fluide newtonien incompressible entre un disque circulaire et une surface curviligne de forme axisymétrique. Une méthode d'intégrale d'énergie a été employée pour calculer la contribution des termes d'inertie du fluide dans l'équation de quantité de mouvement. Leurs résultats ont montré que les effets d'inertie entraînent une augmentation significative du champ de pression dans le film fluide et de la capacité de chargement du contact.

En 2003, Lin et *al.* [LIN03] ont étudié numériquement l'écrasement d'un film fluide à couple de contraintes dans un palier bidimensionnel à plan incliné. Leurs résultats obtenus à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué ont montré que le couple de contraintes augmente la capacité de chargement et les coefficients d'amortissement et de raideur du palier.

En 2004, Lin et *al.* [LIN04a] étudient théoriquement les effets du couple de contraintes sur l'écrasement d'un film fluide entre un cylindre infiniment long et une surface plane. Ils

ont conclu que le couple de contraintes, développé grâce à la présence de particules en suspension dans le lubrifiant, augmente la capacité de charge du contact et le temps d'écrasement du film fluide.

Dans la même année, Radulescu [RAD04] a étudié l'écrasement de deux surfaces sphériques rigides modélisant un contact de hanche lubrifié par un fluide synovial. Le comportement non newtonien de ce fluide est modélisé par la loi de puissance. L'auteur a montré que le fluide à loi de puissance permet d'avoir des valeurs plus faibles du coefficient de frottement et de l'épaisseur du film fluide comparativement au cas newtonien. En outre, la courbe de distribution de la pression dans le film fluide à loi de puissance est plus aplatie et ne présente pas de pics marquants.

Russu [RUS04] a mené une étude analytique sur un joint de prothèse de type sphère-plan lubrifié par un fluide synovial dans une situation d'écrasement. Le caractère pseudo plastique de ce fluide est modélisé par la loi de puissance. L'auteur a montré que ce comportement non newtonien aplatit la courbe de la distribution de la pression dans le film fluide.

Les effets combinés d'inertie convective du fluide et du couple de contraintes sur le comportement de l'écrasement de deux plaques planes circulaires ont été présentés par Lin et *al.* [LIN04b]. Les effets d'inertie convective sont pris en compte à l'aide de la technique des forces d'inertie moyenne au travers l'épaisseur du film fluide. Leurs résultats ont montré que les effets combinés du couple de contraintes et d'inertie du fluide augmentent sensiblement la capacité de charge et le temps d'écrasement des deux plaques.

En 2006, Lin et *al.* [LIN06] étudient analytiquement les effets combinés des forces d'inertie convective du fluide et du couple de contraintes sur l'écrasement de deux plaques infiniment longues. Les forces d'inertie sont prises en compte en utilisant le principe des inerties moyennes à travers l'épaisseur du film fluide. Les effets combinés des forces d'inertie convective et du couple de contraintes entraînent une augmentation de la pression, de la capacité de charge et du temps d'écrasement du film fluide. En outre, ces effets deviennent plus marqués au fur et à mesure que l'épaisseur du film fluide diminue et que le paramètre du couple de contraintes et le nombre de Reynolds augmentent.

En 2007, Lin et Hung [LIN07] présentent une étude théorique sur les effets combinés du couple de contraintes et des forces d'inertie convective du fluide sur le mouvement d'écrasement entre un cylindre long et un plan. Ces effets combinés augmentent la pression dans le film fluide, la capacité de charge et le temps d'écrasement du film fluide. Ils ont conclu que ces effets sont plus significatifs pour les valeurs élevées du nombre de Reynolds et du paramètre du couple de contraintes et pour les faibles épaisseurs du film fluide.

Lu et Lin [LU07] étudient théoriquement les effets combinés du couple de contraintes et de la variation de la viscosité avec la pression dans un mouvement d'écrasement entre une sphère rigide et une surface plane. L'équation non linéaire de Reynolds modifiée est résolue par une technique de perturbation. Les résultats obtenus montrent que ces effets combinés améliorent la capacité de charge du contact et augmentent le temps d'écrasement comparativement au cas newtonien.

En 2008, sur la base de la théorie du micro continuum de V. K. Stokes, Lin *et al.* [LIN08] ont présenté une étude analytique des effets non newtoniens sur les caractéristiques de l'écrasement de films fluides à couple de contraintes pour des géométries de type sphère-sphère. L'équation de Reynolds modifiée a été obtenue pour tenir compte des effets non newtoniens du couple de contraintes résultant des additifs en suspensions dans le lubrifiant.

Comparativement au cas de lubrifiant newtonien, l'influence du couple de contraintes engendre une augmentation de la capacité de charge et augmente donc le temps d'écrasement du film fluide pour éviter le contact direct sphère-sphère. En outre, les effets du couple de contraintes sur les caractéristiques de l'écrasement sont plus marqués pour les faibles épaisseurs du film avec des valeurs élevées du paramètre du couple de contraintes et du rapport des rayons des deux sphères.

En 2009, Naduvinamani et Patil [NAD09] étudient analytiquement l'écrasement de film fluide à couple de contraintes entre deux plaques circulaires dont l'une présentant un saut dans la région centrale du contact. Leurs résultats confirment que le couple de contraintes augmente la pression, la capacité de chargement et le temps d'écrasement du film fluide.

#### 1.4.1.2 Cas élastohydrodynamique

En 1990, Mabuchi et Sasada [MAB90] ont présenté une étude numérique d'un joint de prothèse de hanche. Le mécanisme de lubrification proposé par ces auteurs est la lubrification élastohydrodynamique par effet d'écrasement de film fluide. Ils ont considéré un contact sphérique axisymétrique pour minimiser le temps de calculs numériques. Le mécanisme d'écrasement de film fournit une capacité de charge suffisante pour la lubrification du joint synovial.

En 1994, Larsson et Hoglund [LAR94] ont étudié théoriquement l'écrasement élastohydrodynamique de films fluides entre une sphère et une surface plane. La viscosité dynamique du fluide est supposée dépendante de la pression dans le film. Les distributions de la pression et de l'épaisseur du film lors de l'écrasement sont calculées. Les résultats de cette analyse montrent que l'augmentation de la vitesse initiale d'écrasement fait augmenter la valeur minimale de l'épaisseur du film. La capacité d'amortissement du film lubrifiant est très élevée pour une vitesse d'écrasement initiale faible et pour les petites masses de la sphère. L'épaisseur du film lubrifiant n'a aucune influence sur les résultats si elle est supérieure à une certaine valeur critique. L'épaisseur du film fluide devient importante lorsque le coefficient de dépendance pression-viscosité augmente.

En 2001, Jagati *et al.* [JAG01] ont analysé la lubrification élastohydrodynamique par effet d'écrasement de film d'un joint artificiel de genou. Une configuration simple de géométrie sphérique a été adoptée pour représenter la prothèse de genou. Les équations de Reynolds et de l'élasticité sont résolues simultanément par la méthode itérative de Newton – Raphson pour calculer l'épaisseur du film fluide et la distribution de la pression. La déformation élastique du joint est calculée par la méthode des éléments finis et par une simple équation basée sur le modèle de couche mince élastique. Les valeurs de la pression et de l'épaisseur du film fluide prévues par ces deux méthodes sont en bon accord.

En 2003, Pascovici et Cicone [PAS03] ont analysé l'effet de l'écrasement d'un contact sphérique entre une surface rigide et une autre élastique. Les auteurs ont présenté l'épaisseur du film fluide en fonction du jeu radial pour différents instants d'écrasement. Ils ont mis en évidence une valeur optimale du jeu radial qui correspond à la valeur maximale de l'épaisseur du film fluide à un instant d'écrasement donné. En outre, ce jeu radial optimal augmente lorsque le temps d'écrasement diminue.

En 2006, Chu *et al.* [CHU06a] présentent une étude numérique sur l'écrasement à charge constante d'un contact élastohydrodynamique de type sphère – plan lubrifié par un fluide à couple de contraintes. Les équations couplées de Reynolds modifiée, de l'élasticité et de l'équilibre sur la charge sont résolues simultanément. L'augmentation du paramètre du couple

de contraintes fait augmenter la pression maximale, la capacité de charge, le temps d'écrasement et l'épaisseur minimale du film fluide. L'effet du couple de contraintes est plus significatif pour les faibles épaisseurs du film fluide.

Dans la même année, Chu *et al.* [CHU06b] ont développé une méthode numérique pour étudier le mouvement d'écrasement élastohydrodynamique à charge constante des fluides à loi de puissance dans un contact sphérique lubrifié. Les équations couplées de Reynolds modifiée, de la déformation élastique, et de l'équilibre sur la charge sont résolues simultanément. Des simulations numériques sont réalisées pour étudier les effets de la rhéologie du fluide et des conditions de fonctionnement sur les distributions de la pression et de l'épaisseur du film fluide. Les résultats obtenus révèlent que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance fait augmenter l'épaisseur du film et diminuer la pression maximale. La déformation élastique est plus significative pour les faibles indices de la loi de puissance. La différence entre la solution de la lubrification hydrodynamique et la solution de la lubrification élastohydrodynamique devient importante lorsque la valeur de cet indice diminue.

En 2007, Jaffar [JAF07] a présenté une solution numérique pour le problème de lubrification élastohydrodynamique par écrasement d'un cylindre rigide sur une couche plane élastique. Le fluide lubrifiant est à viscosité constante. Les équations du problème sont résolues par une méthode itérative pour calculer la répartition de la pression et le profil de film correspondant. Cette étude a montré que le coefficient de Poisson a des effets minimes sur la pression et sur l'épaisseur du film fluide. En outre, l'épaisseur minimale du film fluide diminue lorsque l'épaisseur de la couche solide mince et/ou la vitesse de l'écrasement diminuent.

En 2008, Chu *et al.* [CHU08] étudient numériquement un écrasement élastohydrodynamique d'un contact circulaire entre une sphère élastique et une surface plane. Le lubrifiant est un fluide compressible à couple de contraintes dont la viscosité dynamique varie avec la pression. Les équations de Reynolds modifiée, de la déformation élastique et de mouvement de la sphère sont résolues simultanément. Les résultats de la simulation numérique montrent que la pression maximale et l'épaisseur du film fluide augmentent quand le paramètre du couple de contraintes augmente.

### **1.4.2 Ecrasement de films lubrifiants newtoniens ou non newtoniens en présence d'un milieu poreux**

#### **1.4.2.1 Cas d'un milieu poreux indéformable**

En 1973, Murti [MUR73] a présenté une étude analytique sur le phénomène de l'écrasement d'un film fluide newtonien entre un disque rigide et un autre disque à face poreuse. Les écoulements dans le disque poreux et dans le film fluide sont respectivement modélisés par la loi de Darcy et l'équation de Reynolds modifiée. L'auteur a montré que la présence du disque poreux réduit la pression dans le film fluide, la capacité de charge du contact et le temps d'écrasement du film fluide. Il a également conclu que l'augmentation de la perméabilité entraîne une distribution plus uniforme du champ de pression sur la totalité du film fluide. Ceci montre que la perméabilité permet à la fois de réduire l'usure et la faire distribuer d'une manière plus uniforme sur tout le contact lubrifié.

En 1975, Murti [MUR75] a étudié le comportement de l'écrasement d'un film fluide newtonien dans un palier sphérique poreux. L'auteur a montré que la capacité de charge du palier croît lorsque le paramètre de perméabilité décroît.

En 1977, Srinivasan [SRI77] analyse l'écrasement d'un film fluide newtonien entre deux plaques dont l'une est constituée par deux couches poreuses. Des configurations géométriques de plaques annulaires, circulaires, elliptiques et rectangulaires ont été considérées. L'auteur a montré que l'augmentation de la perméabilité réduit la pression dans le film fluide, la capacité de charge du contact lubrifié et le temps de l'écrasement du film.

En 1978, Zaheruddin et Isa [ZAH78] présentent une analyse théorique des caractéristiques de l'écrasement à charge constante d'un fluide micro polaire dans un palier sphérique poreux. Ils ont montré que la capacité de charge diminue lorsque le paramètre de perméabilité augmente. Le temps d'écrasement du film fluide est significativement plus faible comparativement au cas du palier non poreux.

En 1981, Zaheruddin [ZAH81] s'intéresse au mouvement d'écrasement périodique d'un fluide micro polaire dans un palier poreux unidimensionnel. L'écoulement au sein du milieu poreux est modélisé par la loi de Darcy modifiée en tenant compte de l'effet micro polaire du fluide. L'auteur a établi que le palier fonctionne à une plus grande valeur de l'excentricité relative lorsque qu'il est poreux. Cette excentricité relative augmente avec l'augmentation de la perméabilité pour tout instant d'écrasement donné.

En 1982, Sinha [SIN82] a présenté une étude théorique sur l'écrasement du fluide synovial dans un joint de hanche. Le comportement non newtonien du fluide synovial est modélisé à l'aide de la théorie des fluides micro polaires. La géométrie du joint de hanche est approchée par un contact sphérique. Il a montré que l'augmentation de la perméabilité est associée à une diminution de la capacité de charge et du temps de l'écrasement du film fluide. En outre, l'auteur a conclu que la présence des chaînes moléculaires de l'acide hyaluronique permet d'améliorer sensiblement la capacité de charge et le temps d'écrasement.

En 1987, Bujurke et *al.* [BUJ87] ont présenté une étude analytique d'un palier poreux lubrifié par un fluide de second ordre en application à un joint synovial de genou. Ce palier, modélisant le cartilage articulaire, est composé de deux plaques rectangulaires et parallèles dont l'une est poreuse. Les auteurs ont montré que la diminution de la perméabilité du cartilage fait décroître la capacité de chargement du joint synovial.

En 1989, Bujurke et *al.* [BUJ89] ont mené une étude analytique sur l'écrasement d'un film fluide de second ordre entre deux plaques rectangulaires parallèles dont chacune est composée de trois couches minces poreuses de porosités différentes. Cette étude représente une approximation de la réalité de la lubrification des joints synoviaux. Ces auteurs ont constaté que la capacité de charge dans le cas de deux plaques poreuses est plus faible que dans le cas d'une seule plaque poreuse. En considérant le cas où toutes les couches ont la même perméabilité, ils ont montré que celle-ci fait diminuer la capacité de charge. Ils ont également montré que le fluide de second ordre supporte une charge plus grande que celle du fluide newtonien.

En 1996, Lin [LIN96c] a étudié analytiquement le problème de l'écrasement d'un film newtonien entre deux disques circulaires dont l'un possède une face poreuse. Son objectif principal est la prédiction des effets des tensions visqueuses, prises en compte par le modèle de Darcy-Brinkman, sur le comportement du film fluide. Il a constaté que la présence de la face poreuse réduit la capacité de charge. Il a montré que la prise en compte des tensions visqueuses dans le modèle de Darcy-Brinkman réduit la capacité de charge et le temps d'écrasement du film fluide comparativement au modèle de Darcy.

En 1998, Megat A. *et al.* [MEG98] ont développé une étude numérique et expérimentale sur un film newtonien écrasé à charge constante entre deux disques circulaires dont l'un est poreux. L'écoulement est régi par l'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide et modélisé par la loi de Darcy au sein du disque poreux. La résolution numérique des équations décrivant l'écoulement est effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant une discrétisation de type Galerkin. Leurs mesures expérimentales ont une bonne concordance avec les valeurs calculées par le modèle numérique. Ils ont conclu que l'augmentation de la perméabilité fait diminuer la vitesse et le temps d'écrasement du film fluide.

En 2001, Naduvinamani *et al.* [NAD01] ont réalisé une étude analytique sur le comportement statique et dynamique de l'écrasement d'un fluide à couple de contraintes dans un palier court et poreux supportant une charge constante ou cyclique. L'objectif de cette étude est de prévoir l'effet du couple de contraintes sur le comportement du palier. Leurs résultats montrent que le couple de contraintes engendre une augmentation de la capacité de charge, de l'épaisseur minimale du palier et une diminution de la vitesse d'écrasement comparativement au cas d'un fluide newtonien.

En 2006, Jurczak [JUR06] a mis au point une étude analytique pour analyser l'écrasement du fluide synovial dans un palier biologique poreux. Il a ainsi considéré des contacts de type sphère – sphère et disque – disque en modélisant le fluide synovial par un modèle de fluide à couple de contraintes. L'auteur a pris en compte les forces d'inertie du fluide dans le film fluide à l'aide de la méthode des inerties moyennes au travers l'épaisseur du film fluide. Ses résultats montrent que les effets combinés des forces d'inertie du fluide et du couple de contraintes augmentent la pression dans le film fluide.

### 1.4.2.2 Cas d'un milieu poroélastique

En 1974, La proélasticité du cartilage a été prise en compte dans une analyse simple et approximative par Higginson et Norman [HIG74] à l'aide du modèle de couche mince élastique. Ils ont présenté une étude numérique et expérimentale sur l'écrasement d'un film fluide entre une sphère rigide et une couche mince d'un solide élastique et poreux. Leurs résultats numériques sont en bon accord avec les mesures expérimentales. Ils ont montré que l'augmentation de la perméabilité diminue le temps d'écrasement.

En 1985, Tandon *et al.* [TAN85] présentent une étude théorique sur le mécanisme de lubrification par écrasement d'un joint synovial composé de deux cartilages articulaires élastiques et poreux. La géométrie du joint synovial est approchée par deux plaques parallèles infiniment longues. Le comportement rhéologique du fluide synovial est modélisé par la théorie des fluides micro polaires. La théorie de mixture biphasique est utilisée pour tenir compte de l'effet poroélastique du cartilage. Leurs résultats montrent que l'augmentation de la perméabilité entraîne une diminution de la capacité de charge et du temps d'écrasement. Ils ont montré que l'augmentation de la concentration de l'acide hyaluronique filtré par le cartilage fait augmenter la capacité de charge et le temps d'écrasement du film fluide.

En 1990, Bujurke *et al.* [BUJ90] présentent une étude de l'écrasement d'un palier poroélastique lubrifié par un fluide à couple de contraintes. Leur analyse explique en général le comportement des paliers poroélastiques et décrit le mécanisme de lubrification des joints synoviaux en particulier. Ils ont montré que les paliers lubrifiés par un fluide à couple de contraintes ont une capacité de charge plus significative et un temps d'écrasement plus long comparativement aux lubrifiants newtoniens. L'élasticité du palier augmente la capacité de charge et le temps de l'écrasement du film fluide. La diminution de la perméabilité du palier poreux fait diminuer la capacité de charge et le temps d'écrasement.

En 1991, Bujurke *et al.* [BUJ91] ont mené une analyse théorique sur l'écrasement d'un film fluide à couple de contraintes entre un cylindre de longueur infinie et une surface plane poroélastique. La capacité de charge du fluide à couple de contraintes est plus grande que celle d'un fluide newtonien. L'élasticité de la plaque poreuse entraîne une augmentation de la capacité de charge et du temps d'écrasement du film fluide.

En 1992, une analyse asymptotique du problème de lubrification pour un modèle de cartilage articulaire et du fluide synovial dans une situation d'écrasement a été présentée par Hou *et al.* [HOU92]. Le cartilage articulaire est modélisé par la théorie de mixture biphase. Le fluide synovial est considéré newtonien et son écoulement est régi par l'équation de Reynolds modifiée dans le cas sans inertie. La géométrie du joint synovial est approchée par un contact de type sphère – plan. La déformation du cartilage fait réduire la vitesse latérale du fluide dans le film lubrifiant et augmente donc le temps d'écrasement. Le fluide lubrifiant s'infiltré du film vers le cartilage dans la région centrale du contact à haute pression mais il s'écoule en sens inverse dans la zone à basse pression au niveau de la périphérie du contact.

Jin *et al.* [JIN92] ont étudié l'effet de la porosité du cartilage dans un modèle de lubrification par effet d'écrasement de film d'un joint de hanche normal. Le joint est modélisé par un contact de type sphère – plan. Le fluide synovial est considéré newtonien iso visqueux et incompressible. Ils ont montré que, contrairement à Torzilli et Mow ([TOR76a], [TOR76b]), le cartilage articulaire fait décroître l'épaisseur du film fluide au lieu de la faire croître. Ceci est observé en particulier pour les très faibles épaisseurs du film lubrifiant. Ils ont conclu que l'effet de la porosité du cartilage sur l'analyse de la lubrification peut être négligé lorsque l'épaisseur du film fluide est suffisamment élevée. Dans ce cas, une analyse élastohydrodynamique par effet d'écrasement est suffisante pour l'étude des joints humains.

De 1993 à 2002, Hlavacek a présenté dans une série de papiers ([HLA93a], [HLA93b], [HLA95a], [HLA95b], [HLA00], [HLA02]) un modèle mathématique de la lubrification des joints humains dans des conditions d'écrasement de film. Il s'est intéressé à l'effet de la filtration du fluide synovial et son rôle dans la lubrification des joints synoviaux. Le fluide synovial est modélisé par un milieu biphase composé d'un fluide newtonien (l'acide hyaluronique) et d'un fluide parfait (l'eau et les autres molécules de faible poids). Le cartilage est représenté par une mixture biphase composée du fluide parfait interstitiel et d'une matrice solide élastique et déformable. L'action de l'écrasement du film fluide synovial génère une concentration de l'acide hyaluronique durant un cycle de marche typique dans un joint humain. Ceci est dû à la diffusion du fluide interstitiel (l'eau) et des substances moléculaires à poids légers à travers la surface du cartilage. Des géométries simples à symétrie axiale ont été utilisées pour modéliser le joint synovial. Les résultats ont montré que le fluide synovial est filtré par le cartilage articulaire jusqu'à la formation d'un gel lubrifiant. L'auteur a mis en évidence une concentration critique de l'acide hyaluronique qui forme un gel pour protéger les cartilages articulaires du contact direct.

En 2006, Bujurke et Kudenatti [BUJ06] ont présenté une étude théorique sur les effets combinés de la rugosité de la surface du cartilage et de la poroélasticité sur le comportement de l'écrasement d'un palier poroélastique modélisant un joint synovial. Le fluide synovial est considéré à loi de comportement newtonienne. L'équation de Reynolds modifiée, tenant compte à la fois de la rugosité et de la nature élastique du cartilage articulaire, est établie. Cette équation, discrétisée par la méthode des différences finies, est résolue à l'aide de la méthode des multi grilles. Ils ont montré que l'augmentation de la perméabilité diminue la capacité de charge du contact. La poroélasticité entraîne l'augmentation de la différence relative entre la capacité de charge dans le cas rugueux et celle du cas lisse.

En 2007, Bujurke *et al.* ([BUJ07a], [BUJ07b]) ont repris la même étude effectuée en 2006 [BUJ06] en tenant compte cette fois-ci du caractère non newtonien du fluide synovial à l'aide du modèle de fluide à couple de contraintes. Ils ont constaté que l'effet de la poroélasticité est plus marqué pour le cas du fluide à couple de contraintes comparativement au cas newtonien classique. En outre, ils ont confirmé que l'augmentation du paramètre de couple de contraintes ainsi que la diminution de la perméabilité du cartilage font augmenter la capacité de charge et le temps d'écrasement du film fluide.

### 1.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré principalement à un rappel de quelques importantes notions relatives à la lubrification articulaire des joints biologiques par effet d'écrasement ainsi qu'à une revue bibliographique sur les principaux travaux de recherche liés à cette thématique.

Les définitions nécessaires à la modélisation et à la compréhension des écoulements des fluides au sein des milieux poreux sont rappelées. Les notions de la lubrification articulaire des joints synoviaux par effet d'écrasement de films sont exposées. La nature du cartilage et du fluide synovial d'un point de vue biomécanique est définie. Quelques principaux modèles rhéologiques susceptibles de modéliser le comportement rhéologique du fluide synovial sont brièvement présentés.

Enfin, une revue bibliographique sur les principaux travaux de recherche concernant l'écrasement de films fluides newtoniens ou non newtoniens en présence ou non d'un milieu poreux est exposée. Le modèle de fluides à couple de contraintes, de mise en œuvre simple, a été largement utilisé afin de décrire le comportement rhéologique des lubrifiants non newtoniens. Cette analyse bibliographique a montré clairement un manque de travaux qui modélisent l'écrasement de films en présence d'un milieu poreux en tenant compte à la fois des effets combinés de couple de contraintes, de viscosité, de l'inertie du fluide et de la déformation élastique du cartilage.

# Chapitre 2

## Ecrasement de lubrifiants newtoniens en présence d'un milieu poreux sans prise en compte des effets inertiels

---

### 2.1 Introduction

L'étude du phénomène de l'écrasement de films fluides newtoniens en présence d'un milieu poreux sans prise en compte des effets d'inertie a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Il a fait ainsi l'objet de nombreux travaux de recherche vu le nombre accru de ses applications en industrie et en biomécanique articulaire par exemple.

La plupart de ces travaux ont été basés sur le modèle de Darcy [SCH74]. Ce modèle néglige l'effet des frontières solides et de l'interface fluide sur l'écoulement au sein du milieu poreux. Il ne permet pas alors de prévoir l'influence de la couche limite sur l'écoulement. En effet, la condition de glissement aux parois est retenue quelque soit le fluide utilisé. Bien que l'épaisseur de cette couche limite soit habituellement petite, ses effets sur l'ensemble de l'écoulement dans les applications de la lubrification poreuse peuvent être tout à fait significatifs.

Une solution alternative à l'utilisation de la condition de glissement consiste à utiliser la correction de Brinkman à la loi de Darcy [BRI47], connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Compte tenu de la présence du terme de diffusion visqueuse, le modèle de Darcy-Brinkman permet de décrire la couche limite au sein du milieu poreux. L'utilisation de la correction de Brinkman permet d'imposer la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles à l'interface fluide – poreux.

Ce chapitre est consacré à la simulation numérique, à l'aide du modèle de Darcy-Brinkman, des effets visqueux sur les caractéristiques de l'écrasement d'un film fluide newtonien entre deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux. Cette étude est basée sur le couplage simultané, à l'interface film fluide – disque poreux, entre les équations régissant l'écoulement dans le film fluide et celles décrivant l'écoulement au sein du milieu poreux.

Ces équations aux dérivées partielles sont discrétisées par la méthode des différences finies. La procédure numérique retenue pour la résolution du système d'équations algébriques obtenu est basée sur la méthode itérative de Gauss Seidel avec coefficient de sur relaxation.

Les résultats numériques obtenus montrent que les effets visqueux augmentent les vitesses radiale et axiale du film fluide et la vitesse d'écrasement, mais diminuent le temps d'écrasement. En outre, ces effets deviennent plus importants pour les plus petites valeurs du rapport de viscosité et pour les faibles épaisseurs du film fluide.

## 2.2 Equations générales dans le film fluide

Considérons une configuration géométrique (voir Figure 2.1), de symétrie axiale d'axe (Oz), composée par deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux. L'axe (Or) est positionné sur l'interface film fluide – disque poreux. Ces deux disques sont séparés par un film fluide newtonien et incompressible d'épaisseur  $h$ . Les propriétés physiques de ce fluide lubrifiant sont supposées constantes. L'écoulement dans le film fluide et au sein du disque poreux est considéré laminaire. Le disque poreux, d'épaisseur  $H$ , est stationnaire tandis que le disque imperméable est animé d'une vitesse d'écrasement instantanée  $-\left|\frac{dh}{dt}\right|$ . Cette situation peut modéliser par exemple un contact articulaire localisé au niveau du genou ou de la hanche.

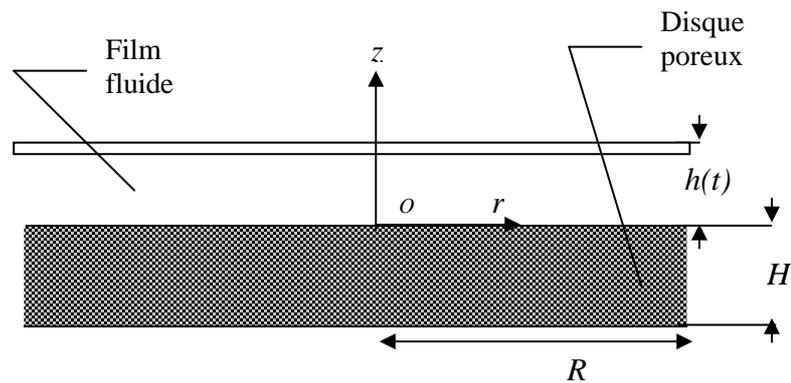


Figure 2.1 : Configuration géométrique de l'écrasement

Rappelons que les équations générales de la mécanique des milieux continus traduisent les lois de conservation suivantes :

- loi de conservation de la masse
- loi de conservation de la quantité de mouvement
- loi de conservation de l'énergie

Par ailleurs, il faudra rajouter à ces lois de conservation des lois de comportement spécifiques aux milieux et aux phénomènes étudiés.

On ne tient pas compte ici de l'équation de conservation d'énergie car le régime d'écoulement est considéré isotherme.

Ces équations seront présentées dans le cas général puis appliquées au cas particulier de la lubrification hydrodynamique, ce qui permettra de déduire l'équation de Reynolds modifiée.

### 2.2.1 Equation de continuité

Pour un fluide incompressible, la loi de conservation de la masse se traduit par l'équation :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse des particules fluides.

Cette équation s'écrit, en coordonnées cylindriques, dans le cas d'un écoulement axisymétrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

où

$r, z$  : coordonnées radiale et axiale  
 $u, w$  : composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le film fluide.

### 2.2.2 Equation de Reynolds modifiée

La loi de quantité de mouvement, appliquée à une particule fluide, se traduit par l'équation [PAP00] :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad} v \cdot v} \right) = \overline{\text{div} \sigma} + \rho \vec{f} \quad (2.3)$$

où

$\vec{f}$  : densité massique des forces volumiques  
 $\overline{\sigma}$  : tenseur des contraintes  
 $t$  : temps  
 $\rho$  : masse volumique du fluide considéré

La loi de comportement pour un fluide newtonien incompressible s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

où

$p$  : pression du fluide au sein du film  
 $x_i$  : variables d'espace  
 $u_i$  : composantes du vecteur vitesse  
 $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker  
 $\mu$  : coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Pour un écoulement axisymétrique, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit en reportant l'expression du tenseur des contraintes (2.4) dans l'équation (2.3) :

- Composante radiale :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_r \quad (2.5)$$

- Composante axiale :

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \quad (2.6)$$

où  $f_r$  et  $f_z$  sont les composantes radiale et axiale de la densité massiques des forces volumiques.

Les équations de Navier simplifiées sont obtenues en prenant en compte les hypothèses usuelles de la lubrification hydrodynamique suivantes ([CAM87], [FRE90]) dans les équations (2.5) et (2.6) :

- les forces de masse sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité
- l'épaisseur du film est très petite par rapport aux autres dimensions du contact
- les forces d'inertie du fluide sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité

Les équations de la quantité de mouvement (2.5) et (2.6) se réduisent alors à :

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) montre bien que la pression dans le film fluide est indépendante de la variable axiale  $z$ .

L'intégration deux fois de l'équation (2.7) par rapport à la variable  $z$ , en tenant compte de la condition de continuité de la vitesse radiale  $u = u^*$  au niveau de l'interface poreuse  $z = 0$  et de la condition de non glissement  $u = 0$  au niveau du disque en mouvement  $z = h(t)$ , permet d'obtenir le profil de la vitesse radiale :

$$u(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} (z^2 - zh) + \frac{u_0^*}{h} (h - z) \quad (2.9)$$

où  $u_0^*$  est la vitesse radiale du fluide au niveau de l'interface film fluide – disque poreux (interface poreuse).

L'intégration de l'équation de continuité (2.2) par rapport à  $z$ , après avoir remplacé la vitesse radiale  $u = u(r, z)$  par son expression (2.9) et tenant compte de la condition de continuité de la vitesse axiale  $w = w^*$  au niveau de l'interface poreuse  $z = 0$  et de la condition de non

glissement  $w = \frac{dh}{dt}$  au niveau du disque en mouvement  $z = h(t)$ , permet d'obtenir l'équation de Reynolds modifiée :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = \frac{12\mu}{h^3} \left( \frac{dh}{dt} + \frac{h}{2r} \frac{d(ru_0^*)}{dr} - w_0^* \right) \quad (2.10)$$

où  $w_0^*$  est la vitesse axiale du fluide au niveau de l'interface poreuse.

C'est une équation différentielle du second ordre de type elliptique dont l'inconnue principale est la pression.

### 2.3 Equations générales dans le milieu poreux

Le disque poreux est considéré non déformable, isotrope et à perméabilité constante. L'écoulement au sein de ce disque est modélisé par l'équation de Darcy-Brinkman [BRI47]. Cette équation est usuellement utilisée pour décrire les écoulements à faible nombre de Reynolds au sein des milieux poreux à valeur élevée de la porosité [NIE06].

#### 2.3.1 Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cylindriques dans le cas d'un écoulement axisymétrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

où  $u^*$  et  $w^*$  sont les composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le disque poreux.

#### 2.3.2 Equations de Darcy-Brinkman

L'écoulement du fluide au sein du disque poreux est décrit par les équations de Darcy-Brinkman qui s'écrivent pour un milieu poreux isotrope à porosité constante dans le cas d'un écoulement axisymétrique :

- Composante radiale :

$$u^* = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} + k \frac{\mu^*}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

- Composante axiale :

$$w^* = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial z} + k \frac{\mu^*}{\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

où

- $p^*$  : pression dans le disque poreux  
 $k$  : perméabilité du disque poreux  
 $u^*$  : composante radiale du vecteur vitesse  
 $w^*$  : composante axiale du vecteur vitesse  
 $\mu^*$  : coefficient de viscosité effective du fluide dans le disque poreux, différent bien entendu de  $\mu$ .

La viscosité effective dépend fortement de la porosité ainsi que de la structure géométrique du milieu poreux. Valdes et *al.* [VAL07] ont montré que cette viscosité est une fonction décroissante de la porosité. Les premiers termes de droite des équations (2.12) et (2.13) sont les termes de Darcy et les suivants sont appelés les termes de Brinkman.

### 2.3.3 Equation de Laplace

Les équations (2.12) et (2.13) ne permettent pas de calculer les composantes  $u^*$  et  $w^*$  du vecteur vitesse sans connaître le champ de pression  $p^*$  pour l'écoulement d'un fluide incompressible. Cependant, ce champ de pression est implicitement spécifié dans l'équation de continuité (2.11). L'application de l'opérateur divergence à l'équation vectorielle de quantité de mouvement (1.8) en tenant compte de l'équation (2.11) conduit à l'apparition explicite de l'inconnue  $p^*$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (2.14)$$

La résolution numérique du système d'équations aux dérivées partielles ((2.2), (2.7), (2.10), (2.12), (2.13), (2.14)) pour une épaisseur  $h$  du film fluide donnée nécessite la spécification de la vitesse d'écrasement  $-\left| \frac{dh}{dt} \right|$ . Pour ce faire, on ajoute l'équation de l'équilibre sur la charge.

## 2.4 Equation de l'équilibre sur la charge

Le contact lubrifié supporte une charge  $W$  selon l'axe ( $Oz$ ) appliquée par le disque en mouvement. L'équation de l'équilibre sur la charge postule que l'intégrale de la pression hydrodynamique générée dans le film fluide doit équilibrer cette force appliquée au contact :

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^R p r dr d\theta \quad (2.15)$$

La vitesse d'écrasement, inconnue du problème, n'apparaît pas explicitement dans cette équation (2.15). Deux méthodes sont possibles pour remédier à cette difficulté. Certains auteurs proposent de calculer cette vitesse par un processus itératif [MEG98] ; sa valeur numérique est modifiée de manière itérative pour satisfaire l'équation de l'équilibre sur la charge (2.15). Une autre méthode consiste à faire disparaître cette vitesse de l'équation de Reynolds (2.10) par sa mise sous forme sans dimension. Elle sera ensuite déduite à partir de l'équation sans dimension de l'équilibre de la charge.

## 2.5 Conditions aux limites

### 2.5.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a :

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \quad (2.16)$$

Aux limites du contact lubrifié et du milieu poreux,  $r = R$ , la pression est prise égale à la pression ambiante :

$$p = p^* = 0 \quad (2.17)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = 0$ , la pression est supposée être continue :

$$p = p^* \quad (2.18)$$

La condition d'imperméabilité sur la paroi inférieure,  $z = -H$ , s'écrit :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

### 2.5.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Les particules fluides adhèrent aux surfaces des parois solides imperméables :

- sur le disque supérieur,  $z = h(t)$  :

$$u = 0 \quad (2.20)$$

- sur la paroi inférieure,  $z = -H$  :

$$u^* = w^* = 0 \quad (2.21)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = 0$ , la condition de continuité du champ de vitesse et des contraintes tangentielles est appliquée :

$$u = u^*, \quad w = w^* \quad (2.22)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial z} \quad (2.23)$$

La condition (2.23) est obtenue en considérant  $w = w^*$  et  $\frac{\partial w}{\partial r}$  négligeable devant  $\frac{\partial u}{\partial z}$  suite aux hypothèses de la lubrification.

La continuité des contraintes normales s'écrit en  $z = 0$  :

$$-p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = -p^* + 2\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial z}$$

compte tenu de la relation (2.18) et des hypothèses de la lubrification, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (2.24)$$

Cette dernière condition montre qu'il n'y a pas de contribution visqueuse normale dans le tenseur des contraintes au sein du film fluide.

La condition d'écoulement établi à la sortie du disque poreux,  $r = R$ , exprimant la nullité de la dérivée normale du vecteur vitesse, est employée :

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (2.25)$$

Cette condition montre que le taux de variation de la vitesse selon la coordonnée radiale est nul au bord du disque poreux.

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a la condition de symétrie axiale :

$$u = u^* = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (2.27)$$

## 2.6 Equations et conditions aux limites sans dimensions

Afin d'éviter la dépendance temporelle et spatiale des points de grille du maillage due au mouvement de la paroi supérieure, nous proposons d'écrire les équations du problème sous forme sans dimensions en utilisant les nouvelles variables suivantes :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0} \quad (2.28)$$

- Dans le film fluide :  $0 \leq z \leq h(t)$

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{u} = \frac{h}{RV} u, \quad \bar{w} = \frac{w}{V}, \quad \bar{p} = \frac{ph^3}{\mu VR^2} \quad (2.29)$$

- Dans le disque poreux :  $-H \leq z \leq 0$

$$\bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{u}^* = \frac{h}{RV} u^*, \quad \bar{w}^* = \frac{w^*}{V}, \quad \bar{p}^* = \frac{p^* h^3}{\mu VR^2} \quad (2.30)$$

où

$h_0$  : épaisseur initiale du film fluide

$V$  : vitesse instantanée de la paroi supérieure,  $V = \left| \frac{dh}{dt} \right|$

Ce changement de variables est bien entendu une transformation bijective. Les dérivées premières avec dimensions s'expriment en fonction de celles sans dimensions comme suit :

- Dans le film fluide :  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{hh_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

- Dans le disque poreux :  $-1 \leq \bar{z} \leq 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

### 2.6.1 Equation de continuité dans le film

L'équation de continuité (2.2) s'écrit dans le nouveau système de coordonnées :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

### 2.6.2 Equation de Navier Simplifiée

L'équation de mouvement (2.7) devient :

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (2.34)$$

### 2.6.3 Equation de Reynolds modifiée

L'équation de Reynolds modifiée (2.10) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}}{dr} \right) = 12 \left( -1 + \frac{1}{2r} \frac{d(\bar{r}u_0^*)}{dr} - w_0^* \right) \quad (2.35)$$

Il est à remarquer que la vitesse d'écrasement  $\left| \frac{dh}{dt} \right|$ , inconnue du problème, n'apparaît plus dans cette équation de Reynolds modifiée.

### 2.6.4 Equations de Darcy-Brinkman

Les composantes de l'équation de la quantité de mouvement dans le disque poreux (2.12) et (2.13) s'écrivent :

- Composante radiale :

$$\bar{u}^* = -\frac{k}{(h_0 \bar{h})^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{k}{H^2} \frac{\mu^*}{\mu} \left( \left( \frac{H}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{u}^*)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial z^2} \right) \quad (2.36)$$

- Composante axiale :

$$\bar{w}^* = -\frac{kR^2}{H(h_0 \bar{h})^3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{k}{H^2} \frac{\mu^*}{\mu} \left( \left( \frac{H}{R} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial z^2} \right) \quad (2.37)$$

On remarque que les effets des forces visqueuses (termes de Brinkman) sont représentés par le rapport de viscosité  $\alpha = \frac{\mu^*}{\mu}$ .

### 2.6.5 Equation de Laplace

L'équation de Laplace (2.14) devient :

$$\left( \frac{H}{R} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial z^2} = 0 \quad (2.38)$$

### 2.6.6 Equation de l'équilibre sur la charge

L'équation de l'équilibre sur la charge (2.15) a l'expression suivante :

$$\bar{W} = \frac{W(h_0 \bar{h})^3}{\mu R^4 V} \quad (2.39)$$

où

$$\bar{W} = 2\pi \int_0^1 \bar{p} r dr \quad (2.40)$$

#### 2.6.6.1 Vitesse d'écrasement

La vitesse d'écrasement est alors déduite de l'équation (2.39) :

$$V = \frac{W(h_0 \bar{h})^3}{\mu R^4 \bar{W}} \quad (2.41)$$

#### 2.6.6.2 Temps d'écrasement

Le temps d'écrasement est ensuite calculé par l'intégrale :

$$t = -\frac{\mu R^4}{W h_0^2} \int_1^{\bar{h}} \frac{\bar{W}}{\bar{h}^3} d\bar{h} \quad (2.42)$$

### 2.6.7 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la pression ((2.16), (2.17), (2.18), (2.19)) et sur la vitesse ((2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27)) sont écrites sous formes sans dimensions ci-après.

#### 2.6.7.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (2.43)$$

Sur le bord du disque poreux et du film fluide,  $\bar{r} = 1$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* = 0 \quad (2.44)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* \quad (2.45)$$

Sur la paroi imperméable inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.46)$$

#### 2.6.7.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Sur le disque supérieur,  $\bar{z} = 1$  :

$$\bar{u} = 0 \quad (2.47)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^*, \quad \bar{w} = \bar{w}^* \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\mu^*}{\mu} \frac{\bar{h} h_0}{H} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.50)$$

Sur la paroi inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\bar{u}^* = \bar{w}^* = 0 \quad (2.51)$$

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^* = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (2.53)$$

Sur le bord du domaine du disque poreux,  $\bar{r} = 1$  :

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (2.54)$$

## 2.7 Discrétisations par différences finies et technique de résolution

Le problème d'interaction film fluide – disque poreux ainsi posé est discrétisé par la méthode des différences finies (voir Annexe 2).

La discrétisation par la méthode des différences finies consiste à la décomposition du domaine de calcul en éléments de lignes reliés entre eux et mis en continuité en un nombre finis de points. Ces points de continuité, appelés noeuds, sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du domaine de calcul (voir Figure 2.2). La vitesse et la pression aux noeuds sont les inconnues du problème.

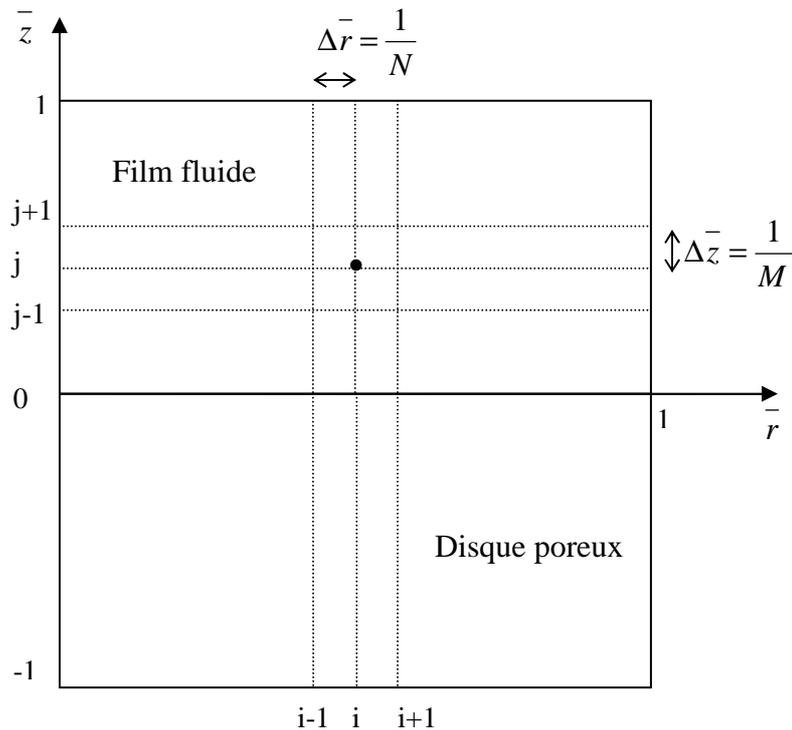


Figure 2.2 : Discrétisation du domaine de calcul

Dans un repère cartésien, chaque noeud est identifié par le couple d'indices  $(i, j)$ . Les noeuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire.

Les valeurs de chaque dérivée partielle sont calculées à l'aide de leurs développements de Taylor. Les équations aux dérivées partielles du problème servent de point de départ à la méthode aux différences finies. Elles sont approximées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux noeuds sont les inconnues. Le système d'équations algébriques obtenu est résolu numériquement au sein d'un processus itératif global.

La symétrie axiale permet de limiter la résolution numérique à la moitié du domaine d'étude. Le domaine film fluide ainsi que le domaine milieu poreux sont discrétisés en  $N+1$  points suivant la direction radiale et  $M+1$  points suivant la direction axiale (voir Figure 2.2).

Chaque point de discrétisation du domaine de calcul indicé par  $(i, j)$  est localisé par ses coordonnées  $(\bar{r}_i, \bar{z}_j)$  avec  $\bar{r}_i = i\Delta\bar{r}$ ,  $\bar{z}_j = j\Delta\bar{z}$  dans le film,  $\bar{z}_j = -j\Delta\bar{z}$  dans le milieu poreux, où  $\Delta\bar{r} = 1/N$  et  $\Delta\bar{z} = 1/M$ . La valeur numérique approchée de toute fonction notée  $f$  au point de discrétisation  $(\bar{r}_i, \bar{z}_j)$  est notée  $f_{i,j}$ .

Les dérivées du premier et second ordre apparaissant dans les équations de base ((2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38)) sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies d'ordre deux. Par contre, la dérivée partielle de la vitesse axiale présente dans l'équation (2.33) est discrétisée par un schéma décentré arrière de premier ordre. Toutes ces dérivées partielles sous formes discrétisées sont explicitées suivant les détails indiqués dans l'annexe 2.

Le système d'équations algébriques obtenu est le suivant :

- Dans le film fluide :  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{\bar{u}_{i,j-1} + \bar{u}_{i,j+1}}{2} - \frac{(\Delta\bar{z})^2}{4\Delta\bar{r}} (\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1}) \quad (2.55)$$

$$\bar{w}_{i,j} = \bar{w}_{i,j-1} - \Delta\bar{z} \left( \frac{\bar{u}_{i,j}}{\bar{r}_i} + \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{\Delta\bar{r}} \right) \quad (2.56)$$

$$A_0 \bar{p}_i = A_1 \bar{p}_{i+1} + A_2 \bar{p}_{i-1} + 12 - 6 \left( \frac{\bar{u}_{i,0}^*}{\bar{r}_i} + \frac{\bar{u}_{i+1,0}^* - \bar{u}_{i-1,0}^*}{2\Delta\bar{r}} \right) + 12 \bar{w}_{i,0}^* \quad (2.57)$$

- Dans le disque poreux :  $-1 \leq \bar{z} \leq 0$

$$B_0 \bar{u}_{i,j}^* = B_1 \bar{u}_{i-1,j}^* + B_2 \bar{u}_{i+1,j}^* + B_3 \bar{u}_{i,j-1}^* + B_4 \bar{u}_{i,j+1}^* + B_5 \quad (2.58)$$

$$B'_0 \bar{w}_{i,j}^* = B'_1 \bar{w}_{i-1,j}^* + B'_2 \bar{w}_{i+1,j}^* + B'_3 \bar{w}_{i,j-1}^* + B'_4 \bar{w}_{i,j+1}^* + B'_5 \quad (2.59)$$

$$C_0 \bar{p}_{i,j}^* = C_1 \bar{p}_{i-1,j}^* + C_2 \bar{p}_{i+1,j}^* + C_3 \bar{p}_{i,j-1}^* + C_4 \bar{p}_{i,j+1}^* \quad (2.60)$$

où

$$A_0 = \frac{2}{\Delta r^{-2}} \quad (2.61)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \quad (2.62)$$

$$B_0 = 1 + \frac{k\alpha}{H^2} \left( \frac{2H^2}{R^2 \Delta r^{-2}} + \frac{H^2}{R^2 r_i} + \frac{2}{\Delta z^{-2}} \right) \quad (2.63)$$

$$B_1 = \frac{k\alpha}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (2.64)$$

$$B_2 = \frac{k\alpha}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (2.65)$$

$$B_3 = B_4 = \frac{k\alpha}{H^2 (\Delta z)^2} \quad (2.66)$$

$$B_5 = -\frac{k}{(\bar{h}h_0)^2} \frac{\bar{p}_{i+1,j}^* - \bar{p}_{i-1,j}^*}{2\Delta r} \quad (2.67)$$

$$B'_0 = 1 + \frac{k\alpha}{H^2} \left( \frac{2H^2}{R^2 \Delta r^{-2}} + \frac{2}{\Delta z^{-2}} \right) \quad (2.68)$$

$$B'_1 = \frac{k\alpha}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (2.69)$$

$$B'_2 = \frac{k\alpha}{R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (2.70)$$

$$B'_3 = B'_4 = \frac{k\alpha}{H^2 \Delta z} \quad (2.71)$$

$$B'_5 = -\frac{kR^2}{H(\bar{h}h_0)^3} \frac{\bar{p}_{i,j+1}^* - \bar{p}_{i,j-1}^*}{2\Delta z} \quad (2.72)$$

$$C_0 = \frac{2}{\Delta r^{-2}} + \frac{2R^2}{(\Delta z H)^2} \quad (2.73)$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \quad (2.74)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \quad (2.75)$$

$$C_3 = C_4 = \frac{R^2}{(\Delta z H)^2} \quad (2.76)$$

Le système d'équations algébriques ((2.55), (2.56), (2.57), (2.58), (2.59), (2.60)) est résolu simultanément par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur relaxation (voir Annexe 2), variant entre 1,46 et 1,95 selon l'épaisseur du film fluide pour augmenter la vitesse de convergence.

## 2.8 Algorithme de résolution

Les équations sans dimensions décrivant l'écoulement dans le film fluide et dans le disque poreux sont couplées au niveau de l'interface poreuse où la continuité des contraintes et des vitesses est assurée. La résolution numérique de ces équations d'interaction film fluide – disque poreux est effectuée par un algorithme de couplage simultané. Cet algorithme s'appuie sur une formulation globale qui tient compte à la fois des problèmes film fluide et disque poreux. Le système d'équations algébriques qui en découle permet de déterminer de manière simultanée les inconnues du film fluide et du disque poreux. Les étapes de déroulement de cet algorithme sont décrites dans ce qui suit.

Au début, partant d'une épaisseur initiale  $h_0$  du film fluide, les variables hydrodynamiques sans dimensions dans le film fluide ( $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ) et dans le milieu poreux ( $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$ ,  $\bar{p}^*$ ) sont initialisées à zéro. La solution des équations sans dimension ((2.33), (2.34), (2.35), 2.36), (2.37), (2.38)) est atteinte lorsque le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\frac{\|\Phi^k - \Phi^{k-1}\|_2}{\|\Phi^{k-1}\|_2} \leq 10^{-9} \quad (2.78)$$

où  $\|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \Phi_{i,j}^2}$  est la norme euclidienne,  $k$  et  $k-1$  sont deux itérations successives et  $\Phi$  représente  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$  et  $\bar{p}^*$ .

Ensuite, la capacité de charge sans dimension du film fluide (2.40) est calculée par intégration numérique. La vitesse de l'écrasement du film fluide est alors déduite par la relation (2.41).

Cette procédure itérative est répétée, en diminuant l'épaisseur  $h$  du film fluide par un pas constant égal à 0,1 mm et en estimant les nouvelles valeurs des variables  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$  et  $\bar{p}^*$  jusqu'à atteindre une épaisseur minimale du film fluide au delà de laquelle des problèmes de convergence apparaissent.

Enfin, le temps d'écrasement est calculé par intégration numérique par rapport à  $h$  de l'équation (2.42). Cette procédure est illustrée sur la figure 2.3.

## 2.9 Résultats et discussions

L'algorithme de simulation numérique développé dans ce chapitre permet de prévoir les performances d'un contact lubrifié lors de l'écrasement en présence d'un disque poreux. Il s'agit d'étudier le comportement de ce contact en tenant compte des effets visqueux dans le disque poreux. Les paramètres géométriques et physiques utilisés dans cette étude sont ceux de Megat *et al.* [MEG98] (voir Tableau 2.1).

Masse volumique du fluide (kg/m <sup>3</sup> )	840
Viscosité dynamique du fluide (Pa.s) à 20°C	0,086
Perméabilité du disque poreux (m <sup>2</sup> )	4,73 10 <sup>-11</sup>
Porosité du disque poreux	0,4
Epaisseur du disque poreux (mm)	1,6
Rayon des deux disques (mm)	40
Epaisseur initiale du film fluide (mm)	1,2
Charge imposée (N)	87

Tableau 2.1 : Caractéristiques géométriques et physiques

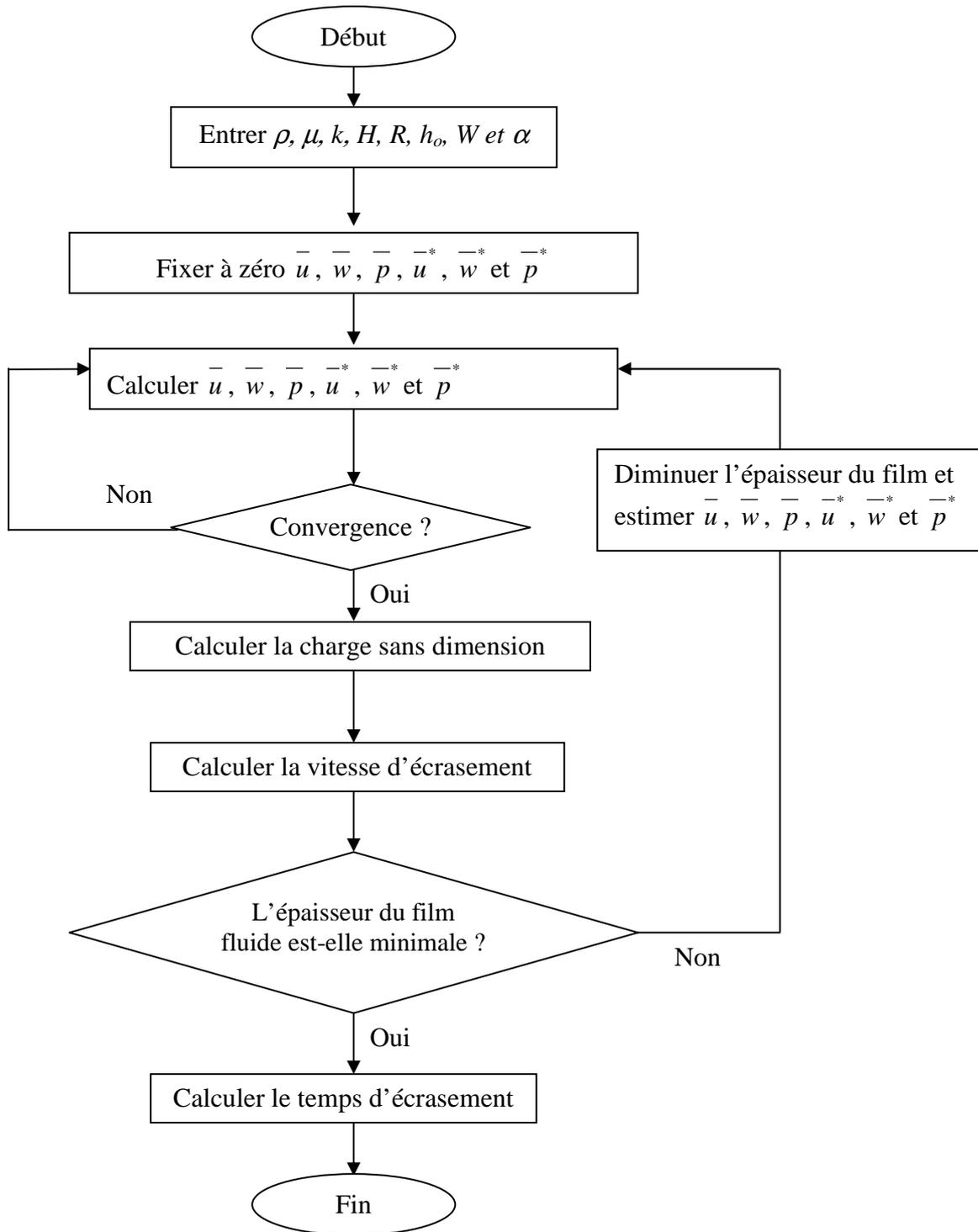


Figure 2.3 : Algorithme de résolution

L'influence du nombre de points de grille du maillage sur la solution numérique a été étudiée. Une augmentation du nombre de ces points, jusqu'à ce que l'erreur relative sur la pression maximale au sein du film fluide soit inférieure à 2%, a été réalisée. Ce critère de convergence est satisfait avec un maillage de 51×51 pour le film fluide ainsi que pour le milieu poreux. Les résultats numériques deviennent donc insensibles au maillage lorsqu'on continue à augmenter le nombre de points de grille de maillage. Ce maillage est alors adopté par la suite pour des compromis précision / temps de calcul.

La valeur du rapport de viscosité  $\alpha = \frac{\mu^*}{\mu}$  dépend de la variation de la porosité du disque poreux car il s'agit du même fluide utilisé. Les résultats numériques prédits par le présent modèle sont comparés avec ceux obtenus par le modèle de Darcy pour différents milieux poreux, ce qui permet de montrer l'influence des effets visqueux et de la variation de  $\alpha$  sur les performances de l'écrasement.

La figure 2.4 montre la distribution de la pression dans le film fluide en fonction de la coordonnée radiale. Il est observé que, dans le cas du modèle de Darcy-Brinkman, les effets visqueux sur la pression dans le film fluide ne sont pas significatifs pour les trois différents milieux poreux considérés quand  $\alpha = 1, 2$  et 4. Les formes des courbes sont les mêmes que celles obtenues en utilisant le modèle de Darcy, elles montrent une diminution radiale de la pression. Ce qui est en bon accord avec les résultats de Murti [MUR73], et également ceux obtenus par Meget et al. [MEG98] au voisinage de la partie centrale du contact lorsque le modèle de Darcy est utilisé.

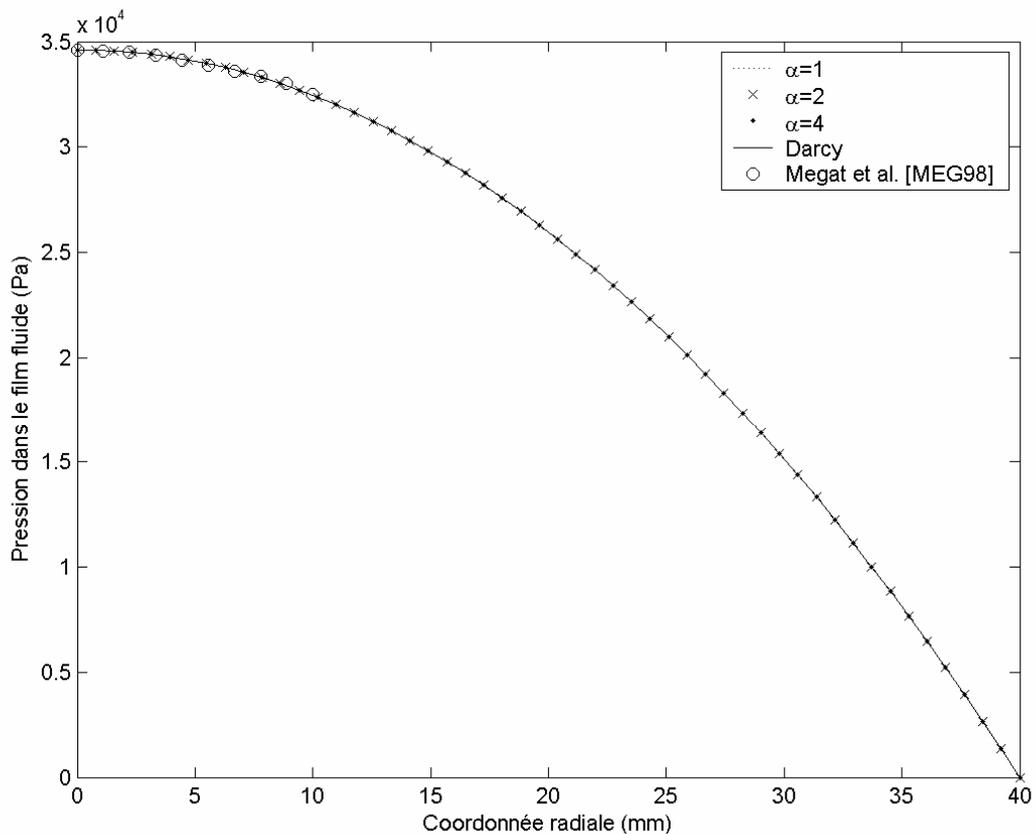


Figure 2.4 : Pression  $P$  dans le film fluide

La figure 2.5 illustre la distribution de la pression dans le milieu poreux pour  $\alpha = 4$  par exemple. La variation axiale de la pression est faible en comparaison avec sa variation par rapport à la coordonnée radiale. Le fluide s'écoule essentiellement dans la direction radiale. En outre, les effets visqueux ont des effets non significatifs sur la pression pour toutes les valeurs de  $\alpha$  considérées.

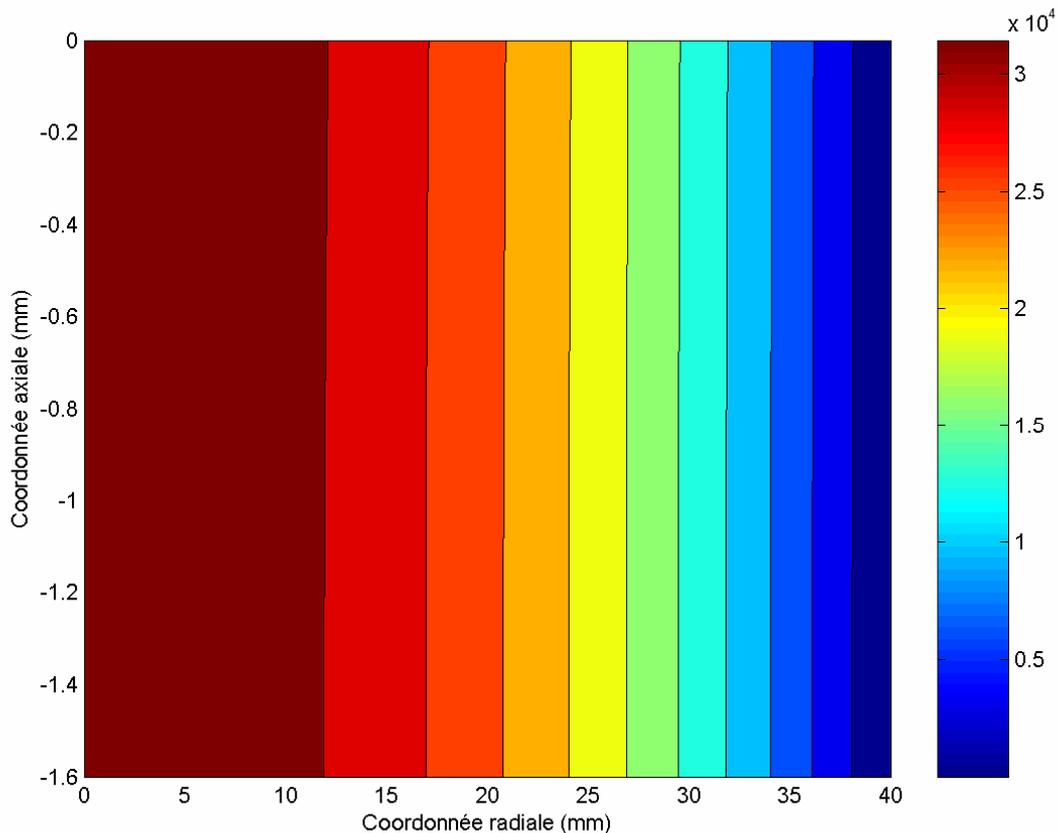


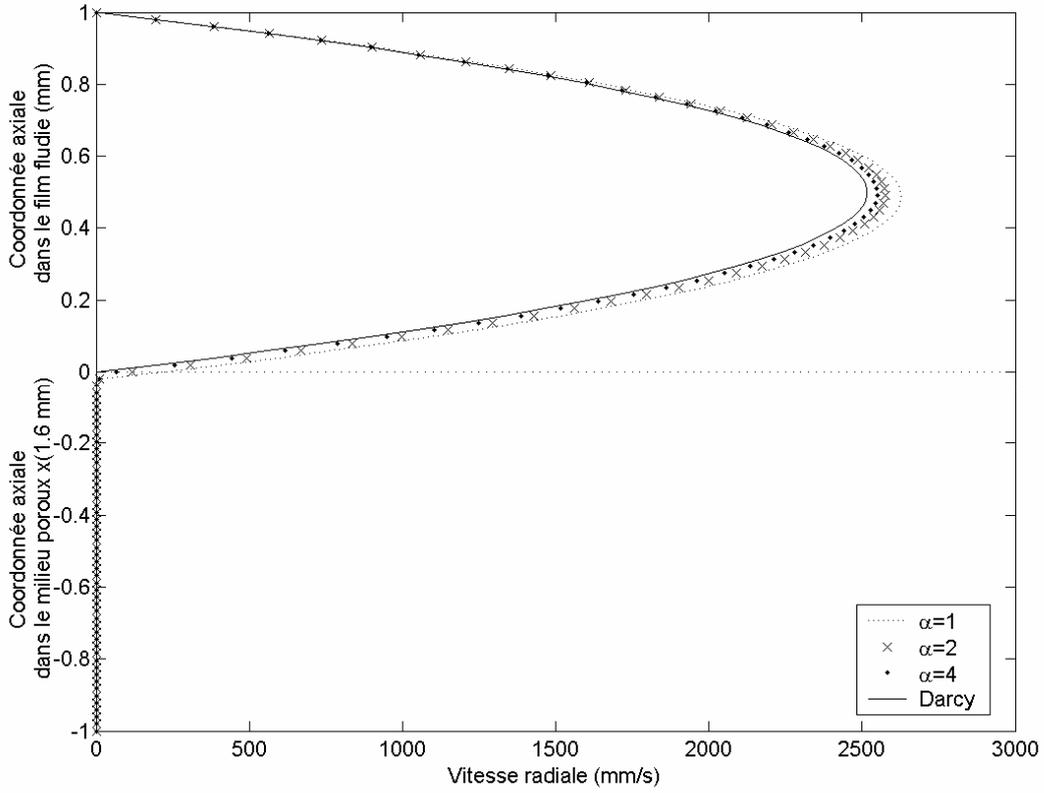
Figure 2.5 : Pression  $p^*$  dans le milieu poreux pour  $\alpha = 4$

Les effets des forces visqueuses sur les profils de vitesse du fluide sont représentés sur les figures 2.6 et 2.7 pour les épaisseurs du film fluide  $h = 1$  mm (cas a) et  $h = 0,2$  mm (cas b). La figure 2.6 montre que la vitesse radiale a un profil de forme presque parabolique dans le film fluide et qu'elle est presque constante dans le disque poreux, sauf au voisinage de l'interface poreuse où les effets de la couche limite sont clairement montrés. Les forces visqueuses n'ont pas un effet significatif sur la vitesse radiale du fluide dans le milieu poreux, à l'exception évidemment de la couche limite près de l'interface poreuse dans laquelle le fluide s'écoule plus facilement dans la direction radiale lorsque le modèle de Darcy-Brinkman est utilisé [NAB10a]. Les valeurs minimales de la vitesse radiale dans le film fluide sont par conséquent obtenues pour le modèle de Darcy car les forces visqueuses permettent à l'écoulement du fluide au niveau de l'interface poreuse d'être plus rapide. En outre, le fluide s'écoule plus rapidement dans le film et dans la couche limite au sein du milieu poreux. Ceci est observé lorsque le paramètre  $\alpha$  diminue, c'est-à-dire lorsque la résistance des forces de viscosité à l'écoulement du fluide est réduite. En plus, la position du maximum de la vitesse radiale se décale légèrement vers l'interface poreuse lorsque  $\alpha$  diminue. Ces effets sont plus marqués lorsque l'épaisseur du film séparant les deux disques est plus petite.

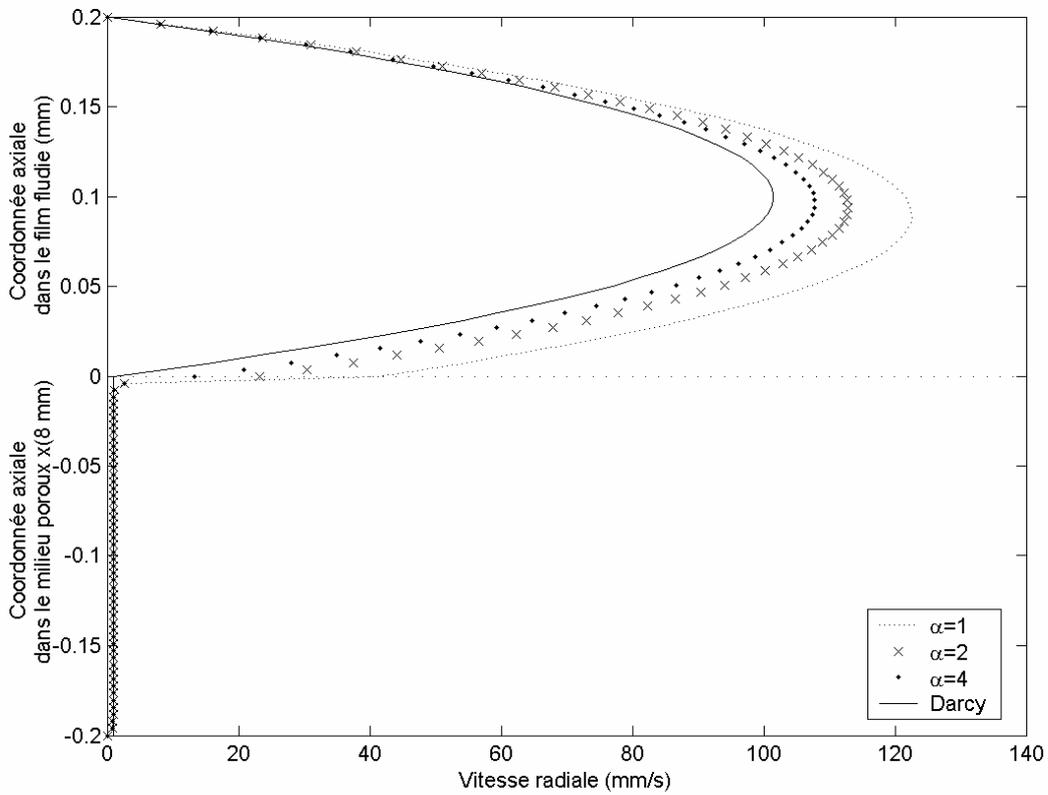
La vitesse axiale (voir Figure 2.7) diminue presque linéairement dans le film fluide et de façon plus significative dans le milieu poreux. Les forces visqueuses n'ont pas un effet significatif sur la vitesse axiale dans le milieu poreux car ils sont absents dans le film fluide, en particulier au niveau de l'interface poreuse. Le modèle de Darcy sous-estime les valeurs de cette vitesse dans le film fluide, essentiellement au niveau du disque supérieur. Comme les effets visqueux provoquent une quantité plus grande du débit radial à travers le bord du film en comparaison avec le modèle de Darcy, le disque supérieur se déplace plus rapidement. D'autre part, la vitesse axiale entre les deux disques augmente lorsque le paramètre  $\alpha$  diminue. Il est également intéressant de noter que l'effet de la variation du paramètre  $\alpha$  sur la vitesse axiale dans le film fluide devient plus marqué lorsque l'épaisseur du film fluide diminue.

La figure 2.8 représente l'évolution avec le temps de l'épaisseur du film fluide prédite par les modèles de Darcy et de Darcy-Brinkman pour trois différents milieux poreux. Le temps d'écrasement, nécessaire au disque supérieur pour atteindre une épaisseur  $h$  donnée du film fluide, augmente lorsque la viscosité effective augmente. La diminution du paramètre  $\alpha$  réduit la résistance à l'écoulement radial du fluide dans le milieu poreux, une plus faible valeur de  $h$  est par conséquent atteinte pour un même instant donné. En outre, ces effets deviennent de plus en plus significatifs lorsque le disque rigide s'approche du disque poreux. Les effets visqueux du modèle de Darcy-Brinkman diminuent le temps d'écrasement en comparaison avec le modèle de Darcy. Comme le modèle de Darcy-Brinkman provoque un débit plus élevé sur le bord du film par rapport au modèle de Darcy, une plus faible valeur de  $h$  est atteinte pour le même instant. Ce résultat obtenu par Nabhani et *al.* [NAB10b] est en bon accord avec ceux de Lin [LIN96b].

L'évolution de la vitesse d'écrasement  $\left| \frac{dh}{dt} \right|$  est présentée sur la figure 2.9. Les effets visqueux augmentent la vitesse d'écrasement comparativement au modèle de Darcy. Ces effets visqueux réduisent la résistance à l'écoulement radial au niveau de l'interface poreuse, le fluide peut donc être évacué plus facilement ce qui permet au disque supérieur de se déplacer plus rapidement. Contrairement aux résultats de Lin ([LIN96b], [LIN01b]), le présent modèle montre que les effets de la variation du rapport de viscosité  $\alpha$  sur les caractéristiques de l'écrasement du film fluide sont significatifs et donc non négligeables.

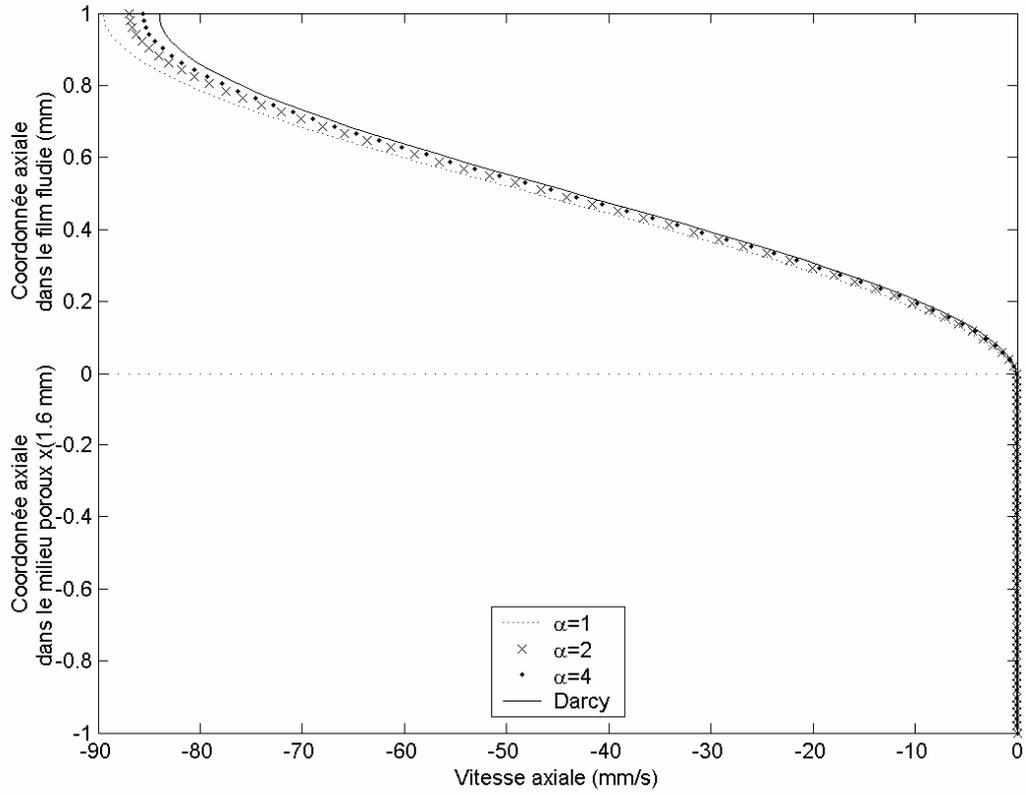


Cas a :  $h = 1 \text{ mm}$

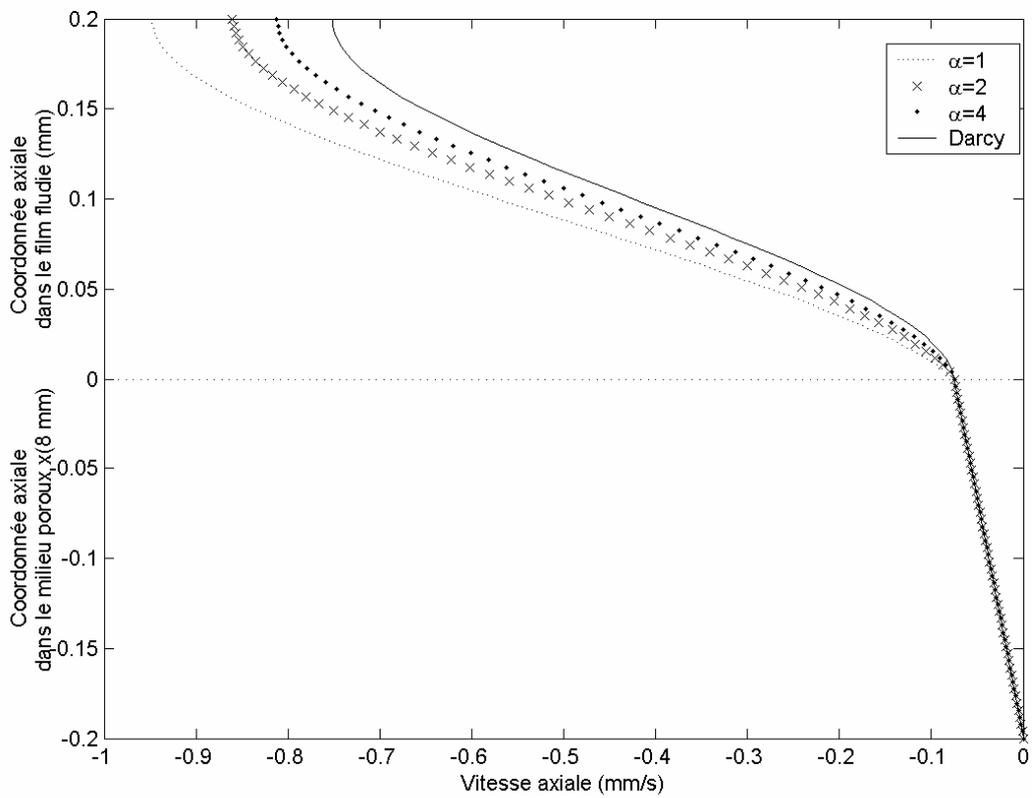


Cas b :  $h = 0,2 \text{ mm}$

Figure 2.6 : Profils de la vitesse radiale à  $r = R$  pour  $h = 1 \text{ mm}$  et  $h = 0,2 \text{ mm}$



Cas a :  $h = 1$  mm



Cas b :  $h = 0,2$  mm

Figure 2.7 : Profils de la vitesse axiale à  $r = 0$  pour  $h = 1$  mm et  $h = 0,2$  mm

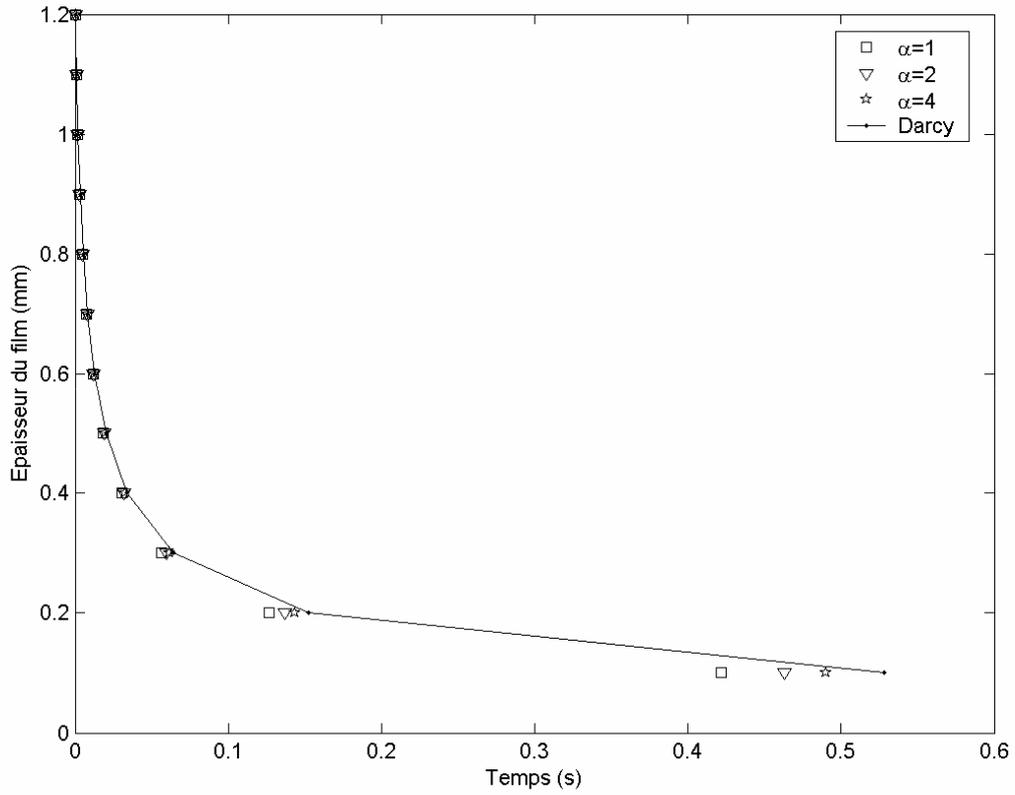


Figure 2.8 : Epaisseur du film

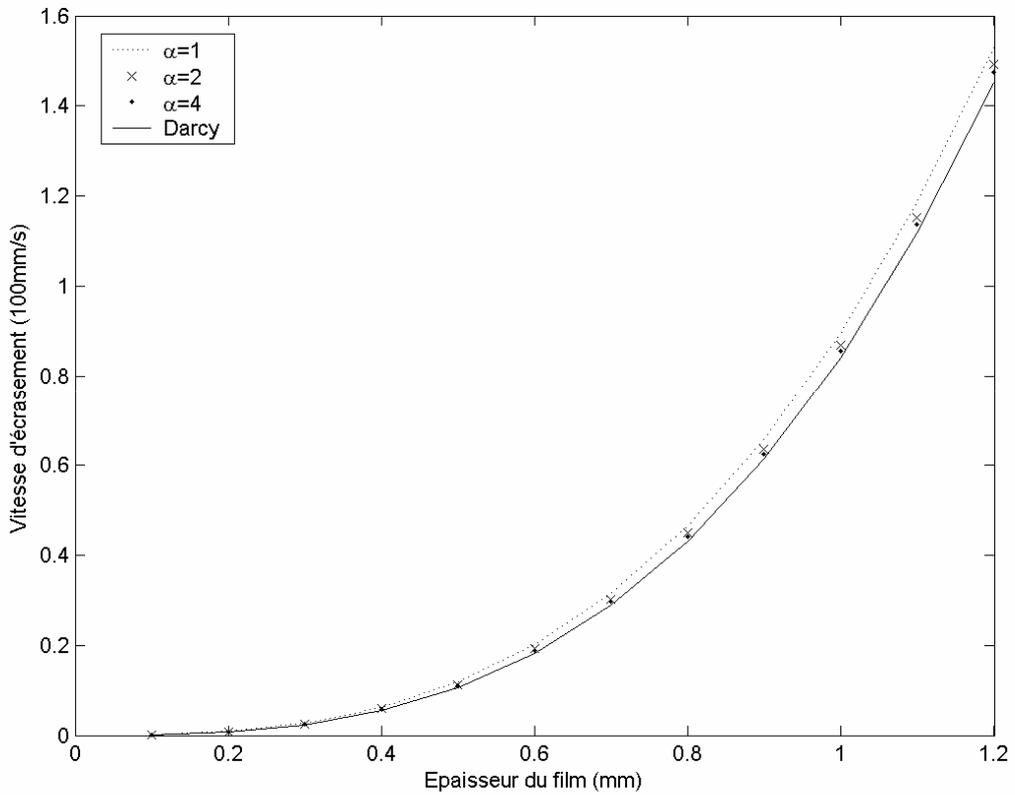


Figure 2.9 : Vitesse d'écrasement en fonction de l'épaisseur du film

## 2.10 Conclusion

Une simulation numérique des effets visqueux sur les caractéristiques de l'écrasement, en utilisant l'équation de Reynolds modifiée et les équations de Darcy-Brinkman, a été présentée. Il a été montré que le rapport de viscosité  $\alpha$ , représentant les effets visqueux, ainsi que sa variation ont un effet significatif et non négligeable sur les caractéristiques de l'écrasement essentiellement pour les faibles valeurs  $\alpha$ . Les résultats prédits par le modèle de Darcy-Brinkman s'approchent de la solution du modèle de Darcy lorsque le paramètre  $\alpha$  augmente. Ces effets visqueux diminuent le temps d'écrasement mais augmentent la vitesse d'écrasement, la vitesse radiale et la vitesse axiale du fluide comparativement aux résultats prédits à l'aide du modèle de Darcy. En outre, ces effets deviennent plus marqués lorsque l'épaisseur du film fluide diminue.

# Chapitre 3

## Ecrasement de lubrifiants newtoniens en présence d'un milieu poreux avec prise en compte des effets inertiels

---

### 3.1 Introduction

Les effets d'inertie ont fait l'objet de nombreuses études sur les écrasements de films fluides ([TIC81], [USH02], [LIN07]) ainsi que sur d'autres applications hydrodynamiques ([MEN07], [TIC86]). En fait, comprendre la dynamique non linéaire de l'écrasement de films fluides est important en raison de la demande croissante sur les systèmes mécaniques pour avoir une performance opérationnelle satisfaisante et une durée de vie plus longue.

Ces effets d'inertie deviennent pertinents lorsque le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement au sein du film fluide est important. Cette condition reflète le cas d'écrasement de fluides à faible viscosité et/ou le cas caractérisé par des vitesses d'écrasement élevées. C'est le cas par exemple des joints humains lors d'un saut d'une hauteur élevée ou lors d'un choc accidentel.

Différentes solutions analytiques approchées ont été proposées pour résoudre le problème de lubrification hydrodynamique en présence des forces d'inertie. Les plus couramment utilisées sont basées sur la méthode des forces d'inertie moyenne selon l'épaisseur du film et sur la méthode itérative ou de perturbations sur le nombre de Reynolds [FRE90]. La non linéarité engendrée par la présence des termes d'inertie met en défaut les hypothèses auxquelles est restreinte l'équation de Reynolds classique. Ce qui complique la résolution des équations de Navier-Stokes et nécessite donc l'emploi d'outils numériques de calcul non linéaire.

Ce troisième chapitre propose un algorithme de simulation numérique par différences finies des effets d'inertie sur les caractéristiques de l'écrasement d'un film fluide newtonien. La configuration géométrique considérée est constituée de deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux.

A cet effet, une méthode inverse pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans le film fluide est développée. Elle consiste à se donner un gradient radial de pression au sein du film fluide et ensuite à l'actualiser itérativement par la technique du point fixe jusqu'à ce qu'il vérifie la condition à la limite sur la vitesse axiale au niveau du disque en mouvement.

Par ailleurs, l'écoulement dans le disque poreux est modélisé par un modèle plus général que celui utilisé dans le chapitre précédent. Ce modèle généralisé, basé sur la technique de prise de moyenne volumique des équations de Navier Stokes écrites à l'échelle des pores, permet de simuler les effets combinés de viscosité et d'inertie. Les équations, fortement non linéaires et non stationnaires, sont discrétisées par la méthode numérique des différences finies à l'aide d'un schéma d'Euler implicite, et résolues par la méthode itérative de Gauss – Seidel relaxée.

L'interaction film fluide – disque poreux s'effectue au niveau de l'interface poreuse. En effet, un algorithme a été développé pour le pilotage instantané des deux sous problèmes film fluide – disque poreux. Cet algorithme est basé sur une résolution séquentielle des deux sous problèmes au sein d'un processus itératif global utilisant la méthode du point fixe. Les effets d'inertie sur les performances statiques et dynamiques du contact lubrifié lors de l'écrasement sont discutés à partir des résultats numériques issus du modèle développé.

### 3.2 Equations générales dans le film fluide

Considérons le problème d'écrasement d'un film fluide newtonien entre deux disques dont l'un est à face poreuse. La géométrie du contact, composée par ces deux disques de même rayon  $R$ , présente une symétrie axiale d'axe  $(Oz)$ . Le disque poreux, d'épaisseur  $H$ , est fixe en bas dans le repère  $(r, z)$  tandis que le disque rigide est animé d'une vitesse d'écrasement constante  $-\left|\frac{dh}{dt}\right|$ . Dans le cadre de la biomécanique articulaire par exemple, cette configuration géométrique peut modéliser un contact localisé au niveau du genou ou de la hanche.

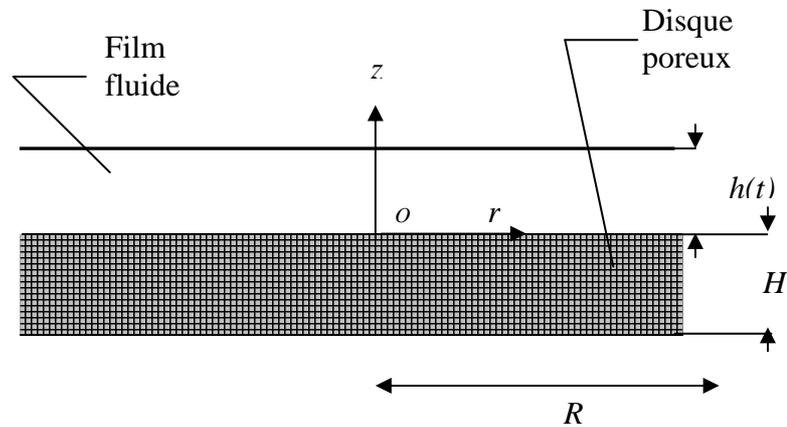


Figure 3.1 : Configuration géométrique de l'écrasement

La prise en compte des termes d'inertie supprime évidemment la linéarité de l'équation de Reynolds classique utilisée au chapitre précédent. L'utilisation de cette équation n'est alors plus appropriée. Il est donc nécessaire de reformuler l'équation de film mince à partir des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité pour tenir compte des effets d'inertie.

#### 3.2.1 Equation de continuité

Pour un fluide incompressible l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (3.1)$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse des particules fluides.

En coordonnées cylindriques, cette équation s'écrit dans le cas d'un écoulement axisymétrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

où

$r, z$  : coordonnées radiale et axiale  
 $u, w$  : composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le film fluide.

### 3.2.2 Equations de Navier Stokes Réduites

Pour écrire les équations de quantité de mouvement d'un film mince visqueux, on part usuellement des équations de Navier Stokes. L'application de la loi de Newton à un élément fluide infinitésimal en mouvement aboutit à l'équation [PAP00] :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad} v \cdot v}} \right) = \overline{\overline{\text{div} \sigma}} + \rho \vec{f} \quad (3.3)$$

où

$\vec{f}$  : densité massique des forces volumiques  
 $\overline{\overline{\sigma}}$  : tenseur des contraintes  
 $t$  : temps  
 $\rho$  : masse volumique du fluide considéré

On ne tient pas compte de l'équation de conservation d'énergie car le régime d'écoulement est considéré isotherme.

Pour un fluide incompressible et newtonien, l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les contraintes et le taux de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

où

$p$  : pression du fluide au sein du film  
 $x_i$  : variables d'espace  
 $u_i$  : composantes du vecteur vitesse  
 $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker  
 $\mu$  : coefficient de viscosité dynamique du fluide

Dans une configuration géométrique axisymétrique, l'équation de quantité de mouvement (3.3) s'écrit en remplaçant le tenseur des contraintes (3.4) par son expression :

- Composante radiale :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_r \quad (3.5)$$

- Composante axiale :

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \quad (3.6)$$

où  $f_r$  et  $f_z$  sont les composantes radiale et axiale de la densité massiques des forces volumiques.

Les équations de la mécanique des films minces visqueux sont obtenues en prenant en compte les hypothèses usuelles de la lubrification hydrodynamique ([CAM87], [FRE90]) suivantes dans les équations (3.5) et (3.6) :

- les forces de masse sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité
- l'épaisseur du film est très petite par rapport aux autres dimensions du contact

Les équations de quantité de mouvement se réduisent alors à :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

Les équations (3.2), (3.7) et (3.8) sont dites équations de Navier-Stokes Réduites (RNSP) à trois inconnues  $u$ ,  $w$  et  $p$ . L'équation (3.8) montre que la pression dans le film fluide est indépendante de la variable axiale  $z$ . La prise en compte de cette dernière dans l'équation (3.7) réduit à deux le nombre d'équations à résoudre. Une troisième équation s'avère donc nécessaire pour fermer le problème.

### 3.3 Equations générales dans le milieu poreux

L'écoulement au sein du disque poreux est traditionnellement modélisé par la loi de Darcy [SCH74] ou par son extension à Darcy-Brinkman [BRI47] dans les situations d'écrasement. Dans le cas d'un écoulement à faible vitesse, l'équation de Darcy ou son extension à Darcy – Brinkman suffit pour décrire l'écoulement au sein du disque poreux. En revanche, avec l'augmentation de la vitesse, l'effet inertiel devient important et ces équations deviennent insuffisantes pour décrire l'écoulement.

La prise en compte des termes d'inertie nécessite l'utilisation d'un modèle d'écoulement plus approprié. Ceci dépend de la valeur numérique du nombre de Reynolds, défini sur la base de la taille des pores de la matrice poreuse. Les effets d'inertie doivent être pris en compte lorsque cette valeur du nombre de Reynolds est non négligeable devant l'unité [PEA02].

Une forme plus générale de l'équation de quantité de mouvement d'un écoulement de fluide incompressible, saturant les pores d'un milieu poreux, peut être obtenue par la

technique de prise de moyenne volumique des équations de Navier-Stokes sur un volume élémentaire représentatif [WHI99].

### 3.3.1 Equation de continuité

En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité s'écrit dans le cas d'un écoulement axisymétrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

où  $u^*$  et  $w^*$  sont les composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le disque poreux.

### 3.3.2 Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées

L'écoulement du fluide au sein du disque poreux est décrit par les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées. Ces équations, basées sur la méthode de prise des moyennes volumiques des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien à l'échelle des pores, s'écrivent à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) dans le cas d'un milieu poreux à porosité constante et un écoulement axisymétrique :

- Composante radiale :

$$\rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{u^*}{\phi} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{w^*}{\phi} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r} - \frac{\mu}{k} u^* + \frac{\mu}{\phi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left| \vec{v}^* \right| u^* \quad (3.10)$$

- Composante axiale :

$$\rho \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} + \frac{u^*}{\phi} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{w^*}{\phi} \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z} - \frac{\mu}{k} w^* + \frac{\mu}{\phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left| \vec{v}^* \right| w^* \quad (3.11)$$

où

$p^*$  : pression dans le disque poreux

$k$  : perméabilité du disque poreux

$\phi$  : porosité du disque poreux

$C_f$  : coefficient de Forchheimer,  $C_f = \frac{1,75}{\sqrt{150\phi^{3/2}}}$

$\vec{v}^*$  : vecteur vitesse de filtration ou de Darcy dans le disque poreux

$\left| \vec{v}^* \right|$  : module du champ de vitesse dans le disque poreux

### 3.3.3 Equation de Poisson

Les équations (3.10) et (3.11) ne permettent pas de déterminer les composantes  $u^*$  et  $w^*$  du vecteur vitesse sans connaître le champ de pression  $p^*$  pour l'écoulement d'un fluide incompressible. L'application de l'opérateur divergence à l'équation vectorielle de quantité de mouvement (1.8) en tenant compte de l'équation (3.9) conduit à l'apparition explicite de l'inconnu  $p^*$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left( \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla} \right) \left| \vec{u}^* \right| - \frac{\rho}{\phi^2} \left( \left( \frac{\partial u^*}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u^*}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) \quad (3.12)$$

Les équations (3.2), (3.7), (3.8) (3.10), (3.11) et (3.12) couplées au niveau de l'interface poreuse permettent donc de calculer la pression et la vitesse dans le film fluide et dans le milieu poreux lorsque la géométrie (épaisseur du film), les conditions initiales et les conditions aux limites sur la pression et sur la vitesse sont connues.

### 3.4 Equation de l'épaisseur du film fluide

La vitesse de descente  $V = \left| \frac{dh}{dt} \right|$  du disque supérieur est considérée constante, sa position  $h$  à l'instant  $t$  est ainsi déduite par intégration temporelle entre 0 et  $t$  :

$$h(t) = \frac{dh}{dt} t + h_0 \quad (3.13)$$

où  $h_0$  est l'épaisseur initiale du film fluide.

### 3.5 Conditions initiales

Dans le film fluide newtonien, nous choisissons comme conditions initiales pour la vitesse et pour la pression la solution de l'équation de Reynolds (2.10), de l'équation de Navier simplifiée (2.7) et de l'équation de continuité (2.2). Pour un film fluide situé entre deux disques rigides ayant la même épaisseur initiale  $h_0$ , on a :

$$u(r, z, t = 0) = \frac{3V}{h_0^3} r z (h_0 - z) \quad (3.14)$$

$$w(r, z, t = 0) = \frac{V}{h_0^3} z^2 (2z - 3h_0) \quad (3.15)$$

$$p(r, z, t = 0) = \frac{3\mu V}{h_0^3} (R^2 - r^2) \quad (3.16)$$

Dans le milieu poreux, nous supposons que le champ de vitesse et la pression sont nuls à l'instant initial :

$$u^*(r, z, t = 0) = w^*(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.17)$$

$$p^*(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.18)$$

### 3.6 Conditions aux limites

#### 3.6.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a :

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \quad (3.19)$$

Aux limites du contact lubrifié et du milieu poreux,  $r = R$ , la pression est prise égale à la pression ambiante :

$$p = p^* = 0 \quad (3.20)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = 0$ , la pression est supposée être continue :

$$p = p^* \quad (3.21)$$

La condition d'imperméabilité sur la paroi inférieure,  $z = -H$ , s'écrit :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

#### 3.6.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Les particules fluides adhèrent aux surfaces des parois solides imperméables :

- sur le disque supérieur,  $z = h(t)$  :

$$u = 0, \quad w = \frac{dh}{dt} \quad (3.23)$$

- sur la paroi inférieure,  $z = -H$  :

$$u^* = w^* = 0 \quad (3.24)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = 0$ , la condition de continuité du champ de vitesse, des contraintes tangentielle et normale est appliquée :

$$u = u^*, \quad w = w^* \quad (3.25)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu}{\phi} \frac{\partial u^*}{\partial z} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

La dernière condition montre qu'il n'y a pas de contribution visqueuse normale dans le tenseur des contraintes dans le film fluide suite aux hypothèses de la lubrification.

La condition d'écoulement établi à la sortie du disque poreux,  $r = R$ , exprimant la nullité du taux de variation du vecteur vitesse selon la coordonnée radiale, est employée :

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (3.28)$$

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a :

$$u = u^* = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (3.30)$$

Comme on a deux conditions aux limites sur la vitesse axiale  $w$  (3.23) et (3.25) mais seulement une seule dérivée première par rapport à  $z$ , la condition à la limite (3.25) constituera alors une troisième équation pour fermer le problème des équations RNSP ((3.2), (3.7)).

### 3.7 Equations, conditions initiales et conditions aux limites sans dimensions

Afin d'éviter la dépendance temporelle et spatiale des points de grille du maillage, due au mouvement de la paroi supérieure, nous proposons d'écrire les six équations sous forme sans dimensions en utilisant les variables sans dimensions suivantes :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{t} = \frac{V}{h_0} t \quad (3.31)$$

- Dans le film fluide :  $0 \leq z \leq h(t)$

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{u} = \frac{h}{RV} u, \quad \bar{w} = \frac{w}{V}, \quad \bar{p} = \frac{ph^3}{\mu VR^2} \quad (3.32)$$

- Dans le disque poreux :  $-H \leq z \leq 0$

$$\bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{u}^* = \frac{h}{RV} u^*, \quad \bar{w}^* = \frac{w^*}{V}, \quad \bar{p}^* = \frac{p^* h^3}{\mu VR^2} \quad (3.33)$$

où

$h_0$  : épaisseur initiale du film fluide

Ce changement de variables est bien entendu une transformation bijective. Les dérivées premières avec dimensions s'expriment en fonction de celles sans dimensions comme suit :

- Dans le film fluide :  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{h}h_0} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{z}V}{\bar{h}h_0} & \frac{V}{h_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

- Dans le disque poreux :  $-1 \leq \bar{z} \leq 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{h_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

### 3.7.1 Equation de continuité dans le film

L'équation de continuité (3.2) s'écrit dans le nouveau système de coordonnées :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

### 3.7.2 Equation de Navier-Stokes Réduite

L'équation de quantité de mouvement (3.7) devient :

$$R_e \left( \bar{h} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \left( 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + (\bar{z} + \bar{w}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{d\bar{p}}{dr} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \quad (3.37)$$

où  $R_e = \frac{\rho V h}{\mu}$  est le nombre de Reynolds.

### 3.7.3 Equation de fermeture des équations RNSP

L'équation (3.23) s'écrit :

$$\bar{w} = -1 \quad (3.38)$$

### 3.7.4 Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées

Les composantes de l'équation de mouvement dans le disque poreux (3.10) et (3.11) s'écrivent :

- Composante radiale :

$$\begin{aligned} \bar{u}^* = & -\frac{\rho k V}{\phi \mu \bar{h} h_0} \left( \bar{h} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + \left( 1 + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r} \right) \bar{u}^* + \frac{\bar{h} h_0}{H} \frac{\bar{w}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z} \right) \\ & + \frac{k}{\phi H^2} \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial z^2} + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r} - \frac{\bar{u}^*}{r^2} \right) - \frac{k}{(\bar{h} h_0)^2} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r} \\ & - \frac{\rho C_f \sqrt{k} V}{\mu} \frac{R}{h_0} \bar{u}^* \sqrt{u^{*-2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2} \bar{w}^{*-2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

- Composante axiale :

$$\begin{aligned} \bar{w}^* = & -\frac{\rho k V}{\phi \mu \bar{h} h_0} \left( \bar{h} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial t} + \frac{\bar{u}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} + \frac{\bar{h} h_0}{H} \frac{\bar{w}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} \right) \\ & + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} \right) + \frac{k}{\phi H^2} \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial z^2} - \frac{k R^2}{H (\bar{h} h_0)^3} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z} \\ & - \frac{\rho C_f \sqrt{k} V}{\mu} \frac{R}{h_0} \bar{w}^* \sqrt{u^{*-2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2} \bar{w}^{*-2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.7.5 Equation de Poisson

L'équation de Poisson (3.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r} + \left( \frac{R}{H} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial z^2} = & -\frac{R_e}{\phi^2} \left( \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\bar{u}^*}{r} \right)^2 + \left( \frac{\bar{h} h_0}{H} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\bar{h} h_0}{H} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} \right) \\ & - \frac{R_e C_f \bar{h} h_0}{\sqrt{k}} \left( \bar{u}^* \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{u^{*-2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2} \bar{w}^{*-2} + \frac{\bar{h} h_0}{H} \bar{w}^* \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{u^{*-2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2} \bar{w}^{*-2} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.7.6 Equation de l'épaisseur du film fluide

L'épaisseur (3.13) du film fluide a l'expression suivante :

$$\bar{h}(t) = -\bar{t} + 1 \quad (3.42)$$

### 3.7.7 Conditions initiales

En tenant compte du changement de variables utilisé, les conditions initiales ((3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18)) s'écrivent :

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 3\bar{r}\bar{z}(1 - \bar{z}) \quad (3.43)$$

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 3(2\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2) \quad (3.44)$$

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{t} = 0) = 3(1 - \bar{r}^2) \quad (3.45)$$

$$\bar{u}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 0, \bar{w}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 0 \quad (3.46)$$

$$\bar{p}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 0 \quad (3.47)$$

$$\bar{h}(0) = 1 \quad (3.48)$$

### 3.7.8 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la pression ((3.19), (3.20), (3.21), (3.22)) et sur la vitesse ((3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30)) sont écrites sous formes sans dimensions ci-après.

#### 3.7.8.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (3.49)$$

Sur le bord du disque poreux et du film fluide,  $\bar{r} = 1$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* = 0 \quad (3.50)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* \quad (3.51)$$

Sur la paroi imperméable inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.52)$$

#### 3.7.8.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Sur le disque supérieur,  $\bar{z} = 1$  :

$$\bar{u} = 0 \quad (3.53)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^*, \quad \bar{w} = \bar{w}^* \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \left( \frac{\bar{h}h_0}{\phi H} \right) \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.56)$$

Sur la paroi inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\bar{u}^* = \bar{w}^* = 0 \quad (3.57)$$

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^* = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (3.59)$$

Sur le bord du disque poreux,  $\bar{r} = 1$  :

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (3.60)$$

### 3.8 Discrétisations par différences finies et technique de résolution

Le problème d'interaction film fluide – disque poreux ainsi posé est discrétisé par la méthode des différences finies. Cette méthode s'avère la plus simple et la plus facile à utiliser pour les problèmes à géométries simples.

La symétrie axiale permet de limiter la résolution numérique à la moitié du domaine d'étude. Le domaine film fluide ainsi que le domaine milieu poreux sont discrétisés en  $N+1$  points suivant la direction radiale et  $M+1$  points suivant la direction axiale (voir Figure 3.2). Les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques écrites en chacun des points des grilles du maillage, indicés par un couple  $(i, j)$ . Le système d'équations algébriques obtenu est résolu numériquement au sein d'un processus itératif global.

Le maillage est défini comme suit :

- Le pas suivant la direction radiale :  $\Delta \bar{r} = \frac{1}{N}$
- Le pas suivant la direction axiale :  $\Delta \bar{z} = \frac{1}{M}$

Chaque point de discrétisation du domaine de calcul est localisé par ses coordonnées  $(\bar{r}_i, \bar{z}_j)$  avec  $\bar{r}_i = i\Delta \bar{r}$ ,  $\bar{z}_j = j\Delta \bar{z}$  dans le film,  $\bar{z}_j = -j\Delta \bar{z}$  dans le milieu poreux.

La valeur numérique approchée de toute fonction  $f$  au point de discrétisation  $(\bar{r}_i, \bar{z}_j)$  à l'instant  $\bar{t}^n = n\Delta \bar{t}$  est notée  $f_{i,j}^n$ , avec  $n$  est le nombre d'itérations en temps.

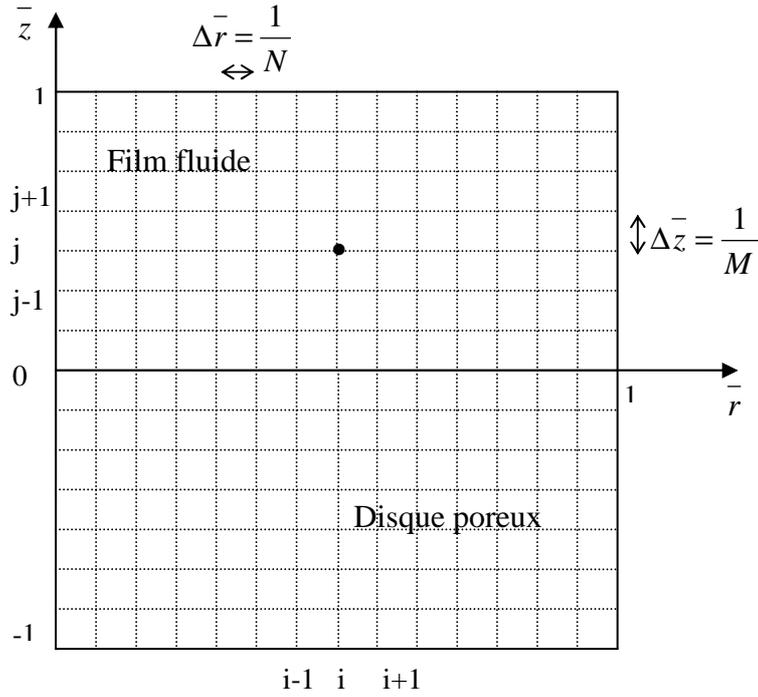


Figure 3.2 : Discretisation du domaine de calcul

### 3.8.1 Discretisation des équations RNSP

Les équations RNSP ((3.36), (3.37)) sont des équations aux dérivées partielles paraboliques nécessitant une discrétisation spécifique et une résolution en mode inverse [PEY83].

- Calcul de  $\bar{u}$

Les dérivées présentes dans l'équation de quantité de mouvement suivant la composante radiale (3.37) sont discrétisées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (3.61)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \bar{u}_{i-1,j}^n \frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i-1,j}^n}{\Delta r} + o(\Delta r) \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\bar{u}_{i,j+1}^n - \bar{u}_{i,j-1}^n}{2\Delta z} + o(\Delta z^2) \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{\bar{u}_{i,j+1}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} + o(\Delta z^2) \quad (3.64)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant la composante radiale (3.37) devient :

$$R_e \left( \frac{\bar{h}}{\Delta t} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1} - \bar{u}_{i,j}^{n-2}}{\Delta r} + \left( 1 + \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta r} \right) \bar{u}_{i-1,j}^{n-1} + \left( \bar{z}_j + \bar{w}_{i-1,j}^{n-1} \right) \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{n-1} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{n-1}}{2\Delta z} \right) = -\frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{n-1} - 2\bar{u}_{i,j}^{n-1} + \bar{u}_{i,j-1}^{n-1}}{(\Delta z)^2} \quad (3.65)$$

Le système d'équations algébriques à résoudre s'écrit :

$$C\bar{u}_{i,j-1}^{n-1} + A_{i,j}\bar{u}_{i,j}^{n-1} + C\bar{u}_{i,j+1}^{n-1} = b_{i,j} \quad (3.66)$$

où  $1 \leq i \leq N$  et  $1 \leq j \leq M-1$

avec

$$C = \frac{1}{(\Delta z)^2}, \quad A_{i,j} = R_e \left( \frac{\bar{h}}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta r} \right) + \frac{2}{(\Delta z)^2}$$

$$b_{i,j} = -R_e \left( -\frac{\bar{h}}{\Delta t} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1}}{\Delta r} + \bar{u}_{i-1,j}^{n-1} - \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{n-1}{}^2}{\Delta r} + \left( \bar{z}_j + \bar{w}_{i-1,j}^{n-1} \right) \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{n-1} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{n-1}}{2\Delta z} \right) - \frac{d\bar{p}}{dr}(i)$$

Le système d'équations algébriques (3.66) est tri diagonal. Sa résolution numérique à l'aide de l'algorithme de Thomas [THO98] fournit le profil de vitesse radiale  $\bar{u}$  en chaque  $i$  pour un gradient radial de pression donné.

- Calcul de  $\bar{w}$

La vitesse axiale  $\bar{w}$  pour la section  $\bar{r}_i$  est calculée à l'aide de l'équation de continuité (3.36). Les termes aux dérivées partielles présents dans cette équation sont discrétisés comme suit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta r} + o(\Delta r) \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\bar{w}_{i,j}^{n-1} - \bar{w}_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta z} + o(\Delta z) \quad (3.68)$$

La vitesse axiale est obtenue en injectant ces deux dernières équations dans l'équation (3.36) :

$$\bar{w}_{i,j}^{n-1} = \bar{w}_{i,j-1}^{n-1} - \Delta z \left( \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1}}{r_i} + \frac{\bar{u}_{i,j}^{n-1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta r} \right) \quad (3.69)$$

Partant de l'interface poreuse ( $j = 0$ ), où la vitesse axiale  $\bar{w}_{i,0}^{n-1}$  est donnée, l'équation ci-dessus permet de calculer la vitesse axiale  $\bar{w}_{i,j}^{n-1}$  dans toute la section  $\bar{r}_i$  pour  $1 \leq j \leq M$ . La valeur de cette vitesse à la paroi supérieure ( $j = M$ ) doit vérifier l'équation de fermeture des équations RNSP (3.38). Dans le cas contraire, le gradient radial de pression est réactualisé

dans une boucle du point fixe et donc on recommence à nouveau le calcul pour résoudre le système tri diagonal (3.66). L'algorithme de résolution des équations RNSP de l'écoulement dans le film fluide se déroule comme suit :

A partir de l'axe de symétrie ( $i = 0$ ), on calcule pour chaque indice  $i$  toutes les inconnues  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{p}$  à partir de leurs valeurs pour les indices précédents et on incrémente ensuite sur  $i$ . Les calculs se poursuivent jusqu'au bord du film fluide ( $i = N$ ). Plus précisément, on a pour un indice  $i$  donné :

1. La valeur de  $\frac{d\bar{p}}{dr}$  est initialisée à partir de sa valeur pour  $i-1$ .
  2. L'équation de la conservation de quantité de mouvement permet de calculer  $\bar{u}(i, j)$  en fonction des valeurs précédemment calculées  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\frac{d\bar{p}}{dr}$ , en résolvant directement le système d'équations tri diagonal (3.66) par l'algorithme de Thomas [THO98].
  3. L'équation de continuité (3.69) ainsi que la condition à la limite sur  $\bar{w}$  à l'interface film fluide – disque poreux permettent de calculer  $\bar{w}(i, j)$ . L'équation de fermeture des équations RNSP (3.38) n'est alors pas forcément vérifiée.
  4. Il faut en conséquence trouver la valeur de  $\frac{d\bar{p}}{dr}$  qui permet d'obtenir  $\bar{w} = -l$  sur la paroi supérieure. Une nouvelle estimation de cette valeur est alors calculée (itération du point fixe), puis les étapes 2 et 3 sont à nouveau répétées jusqu'à ce que l'équation de fermeture des équations RNSP soit vérifiée.
- Calcul du champ de pression  $\bar{p}$

Après avoir calculé le gradient radial de pression dans tout le film fluide, la distribution de la pression est calculée en utilisant un schéma aux différences finies décentrées avant :

$$\bar{p}_i = -\frac{2}{3} \Delta r \frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{4\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i+2}}{3} \quad (3.70)$$

avec  $\bar{p}_N = 0$  au bord du film fluide.

### 3.8.2 Discrétisation des équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées et de Poisson

Les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((3.39), (3.40)) et de Poisson (3.41) sont des équations aux dérivées partielles de second ordre de type elliptique. Un schéma centré d'ordre deux est utilisé pour toutes les dérivées spatiales sauf pour les termes convectifs où un schéma Upwind est appliqué, ce qui revient à décentrer les dérivées premières (voir Annexe 2). Un schéma d'Euler implicite d'ordre un est utilisé pour discrétiser les dérivées temporelles, c'est un schéma inconditionnellement stable.

Le système d'équations algébriques à résoudre est obtenu en injectant toutes les dérivées partielles sous formes discrétisées dans les équations du problème ((3.39), (3.40) (3.41)) :

$$B_0 \bar{u}_{i,j}^{*n} = B_1 \bar{u}_{i-1,j}^{*n} + B_2 \bar{u}_{i+1,j}^{*n} + B_3 \bar{u}_{i,j-1}^{*n} + B_4 \bar{u}_{i,j+1}^{*n} + B_5 \quad (3.71)$$

$$B'_0 \bar{w}_{i,j}^{*n} = B'_1 \bar{w}_{i-1,j}^{*n} + B'_2 \bar{w}_{i+1,j}^{*n} + B'_3 \bar{w}_{i,j-1}^{*n} + B'_4 \bar{w}_{i,j+1}^{*n} + B'_5 \quad (3.72)$$

$$C_0 \bar{p}_{i,j}^{*n} = C_1 \bar{p}_{i-1,j}^{*n} + C_2 \bar{p}_{i+1,j}^{*n} + C_3 \bar{p}_{i,j-1}^{*n} + C_4 \bar{p}_{i,j+1}^{*n} + C_5 \quad (3.73)$$

avec

$$B_0 = 1 + \frac{R_e k}{\phi (\bar{h} h_0)^2} \left( \frac{\bar{h}}{\Delta t} + 1 + \frac{\bar{u}_{i,j}^{*n}}{\phi \Delta r} \right) + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) + \frac{k}{\phi H^2} \frac{2}{\Delta z^2} + \frac{\rho C_f \sqrt{k} R V_0}{\mu h_0} \left| \frac{\bar{v}^*}{v} \right| \quad (3.74)$$

$$B_1 = \frac{R_e k}{\phi^2 (\bar{h} h_0)^2 \Delta r} \bar{u}_{i,j}^{*n} + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2 r_i \Delta r} \right) \quad (3.75)$$

$$B_2 = \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2 r_i \Delta r} \right) \quad (3.76)$$

$$B_3 = \frac{k}{\phi H^2} \left( \frac{1}{(\Delta z)^2} - \frac{R_e H k}{2 \phi \Delta z \bar{h} h_0} \bar{w}_{i,j}^{*n} \right) \quad (3.77)$$

$$B_4 = \frac{k}{\phi H^2} \left( \frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{R_e H k}{2 \phi \Delta z \bar{h} h_0} \bar{w}_{i,j}^{*n} \right) \quad (3.78)$$

$$B_5 = -\frac{k}{(\bar{h} h_0)^2} \frac{\bar{p}_{i+1,j}^{*n} - \bar{p}_{i-1,j}^{*n}}{2 \Delta r} + \frac{k R_e}{\phi \bar{h} h_0 \Delta t} \quad (3.79)$$

$$B'_0 = 1 + \frac{k}{\phi H^2} \left( R_e \left( \frac{H^2}{\bar{h} h_0 \Delta t} + \frac{\bar{h} h_0 H}{\phi} \frac{\bar{w}_{i,j}^{*n}}{\Delta z} \right) + \frac{2 H^2}{R^2 \Delta r^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) \quad (3.80)$$

$$+ \frac{\rho C_f \sqrt{k} R V_0}{\mu h_0} \sqrt{\bar{u}_{i,j}^{*n 2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2 \bar{w}_{i,j}^{*n 2}}$$

$$B'_1 = \frac{k R_e}{\phi^2} \frac{\bar{u}_{i,j}^{*n}}{2 (\bar{h} h_0) \Delta r} + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2 r_i \Delta r} \right) \quad (3.81)$$

$$B'_2 = \frac{k R_e}{\phi^2} \frac{\bar{u}_{i,j}^{*n}}{2 (\bar{h} h_0) \Delta r} + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2 r_i \Delta r} \right) \quad (3.82)$$

$$B'_3 = \frac{k}{\phi H^2 \Delta z^2} \quad (3.83)$$

$$B'_4 = \frac{k}{\phi H^2 \Delta z^2} + \frac{k R_e}{\phi \bar{h} h_0 H \Delta z} \bar{w}_{i,j}^{*n} \quad (3.84)$$

$$B'_5 = \frac{k R^2}{H (\bar{h} h_0)^3} \frac{\bar{p}_{i,j+1}^{*n} - \bar{p}_{i,j-1}^{*n}}{2 \Delta z} + \frac{k R_e}{\phi \bar{h} h_0 \Delta t} \bar{w}_{i,j}^{*n-1} \quad (3.85)$$

$$C_0 = \frac{2}{\Delta r^{-2}} + \frac{2R^2}{(\Delta z H)^2} \quad (3.86)$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r\Delta r} \quad (3.87)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r\Delta r} \quad (3.88)$$

$$C_3 = C_4 = \frac{R^2}{(\Delta z H)^2} \quad (3.89)$$

$$C_5 = \frac{R_e C_f R}{\sqrt{k}} \left( \frac{\begin{matrix} \overline{v}^{\ast n} \\ u_{i,j} \end{matrix} \begin{matrix} \overline{v}^{\ast n} \\ u_{i+1,j} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{v}^{\ast n} \\ u_{i-1,j} \end{matrix}}{2\Delta r} - \frac{h_0 \overline{w}^{\ast n} \begin{matrix} \overline{v}^{\ast n} \\ w_{i,j+1} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{v}^{\ast n} \\ w_{i,j-1} \end{matrix}}{2\Delta z} \right) \\ + \frac{R_e}{\phi^2} \left( \left( \frac{\overline{u}^{\ast n} \begin{matrix} \overline{u}^{\ast n} \\ u_{i+1,j} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{u}^{\ast n} \\ u_{i-1,j} \end{matrix}}{2\Delta r} \right)^2 + \left( \frac{\overline{u}^{\ast n}}{\Delta r} \right)^2 + \left( \frac{\overline{h} h_0 \overline{w}^{\ast n} \begin{matrix} \overline{w}^{\ast n} \\ w_{i,j+1} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{w}^{\ast n} \\ w_{i,j-1} \end{matrix}}{2\Delta z} \right)^2 \right) \\ - \frac{R_e}{\phi^2} \frac{2\overline{h} h_0}{H} \left( \frac{\overline{u}^{\ast n} \begin{matrix} \overline{u}^{\ast n} \\ u_{i,j+1} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{u}^{\ast n} \\ u_{i,j-1} \end{matrix}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{\overline{w}^{\ast n} \begin{matrix} \overline{w}^{\ast n} \\ w_{i+1,j} \end{matrix} - \begin{matrix} \overline{w}^{\ast n} \\ w_{i-1,j} \end{matrix}}{2\Delta r} \right) \quad (3.90)$$

$$\text{avec } \left| \overline{v}^{\ast n} \right| = \sqrt{\overline{u}^{\ast n 2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2 \overline{w}^{\ast n 2}} .$$

Le système d'équations algébriques ((3.71), (3.72), (3.73)) est non linéaire. La résolution numérique se fait par une méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sous relaxation. Cette technique itérative commence par fixer un champ de vitesse et de pression comme un estimé initial dans le milieu poreux, un bon choix consiste à prendre celui de l'itération globale précédente. Le processus itératif est arrêté lorsque le critère de convergence suivant est vérifié :

$$\frac{\|\Phi^k - \Phi^{k-1}\|_2}{\|\Phi^{k-1}\|_2} \leq 10^{-7} \quad (3.91)$$

où  $\|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \Phi_{i,j}^2}$  est la norme euclidienne,  $k$  et  $k-1$  sont deux itérations successives et

$\Phi$  représente  $\overline{u}^{\ast}$ ,  $\overline{w}^{\ast}$  et  $\overline{p}^{\ast}$ .

### 3.9 Algorithme de résolution

L'interaction film fluide – disque poreux s'effectue au niveau de l'interface poreuse où la continuité des contraintes et des vitesses est assurée. A cet effet, un algorithme est développé pour le pilotage instantané des deux sous modèles couplés film fluide – disque poreux. Chaque sous problème est donc résolu séparément au sein d'un processus itératif global. Ce

type de couplage est dit faible par opposition au couplage fort qui consiste à résoudre simultanément le problème global d'interaction.

Cette procédure de couplage faible a l'avantage d'optimiser le temps de calcul et la mémoire de stockage. L'algorithme développé permet facilement de modifier séparément les codes de calcul relatifs au film fluide et au disque poreux.

Au début du calcul, les conditions initiales sur la vitesse ((3.43), (3.44), (3.46)) et sur la pression ((3.45), (3.47)) sont fixées. A chaque instant donné, l'épaisseur du film fluide est calculée par la relation (3.42).

Le processus itératif global commence par fixer un champ de pression et de vitesse au sein du film fluide, un meilleur estimé est de considérer celui de l'instant précédent. Ce champ de pression et de vitesse permet la résolution numérique des équations discrétisées de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((3.71), (3.72)) et de Poisson (3.73) par la méthode de Gauss-Seidel avec des coefficients de sur relaxation compris entre 1,4 et 1,85. Un nouveau champ de pression et de vitesse au sein du film fluide est ensuite calculé en résolvant les équations RNSP sous forme discrète ((3.66), (3.69)) par la méthode inverse.

La convergence du processus itératif global est contrôlée en pression au sein du film fluide. Elle est considérée atteinte lorsque la norme euclidienne relative de la différence entre les pressions obtenues pour deux itérations successives est inférieure à  $10^{-3}$ . La capacité de charge du film fluide est enfin calculée par intégration numérique du champ de pression sur toute la surface du contact lubrifié.

Cette procédure de calcul est répétée pour chaque itération du temps d'écrasement jusqu'à atteindre l'épaisseur minimale possible, au-delà de laquelle des problèmes numériques liés à la convergence apparaissent (voir algorithme de résolution, Figure 3.3).

### 3.10 Résultats et discussions

Le modèle numérique développé dans le cadre de ce troisième chapitre permet de prévoir les caractéristiques statiques et dynamiques de l'écrasement d'un film fluide newtonien en présence d'un disque poreux. En effet, il s'agit d'étudier le comportement d'un contact lubrifié en tenant compte des effets inertiels dans le film fluide et dans le disque poreux en utilisant les données ci-après.

Densité du fluide ( $\text{kg/m}^3$ )	840
Viscosité dynamique (Pa.s) à 20°C	0,086
Perméabilités du disque poreux ( $\text{m}^2$ )	1.71 $10^{-12}$ 6.87 $10^{-12}$ 2.25 $10^{-11}$ 4.73 $10^{-11}$
Porosité du disque poreux	0,4
Epaisseur du disque poreux (mm)	1,6
Rayon des deux disques (mm)	40
Epaisseur initiale du film fluide (mm)	1,2
Vitesse d'écrasement (m/s)	10

Tableau 3.1 : Caractéristiques géométriques et physiques

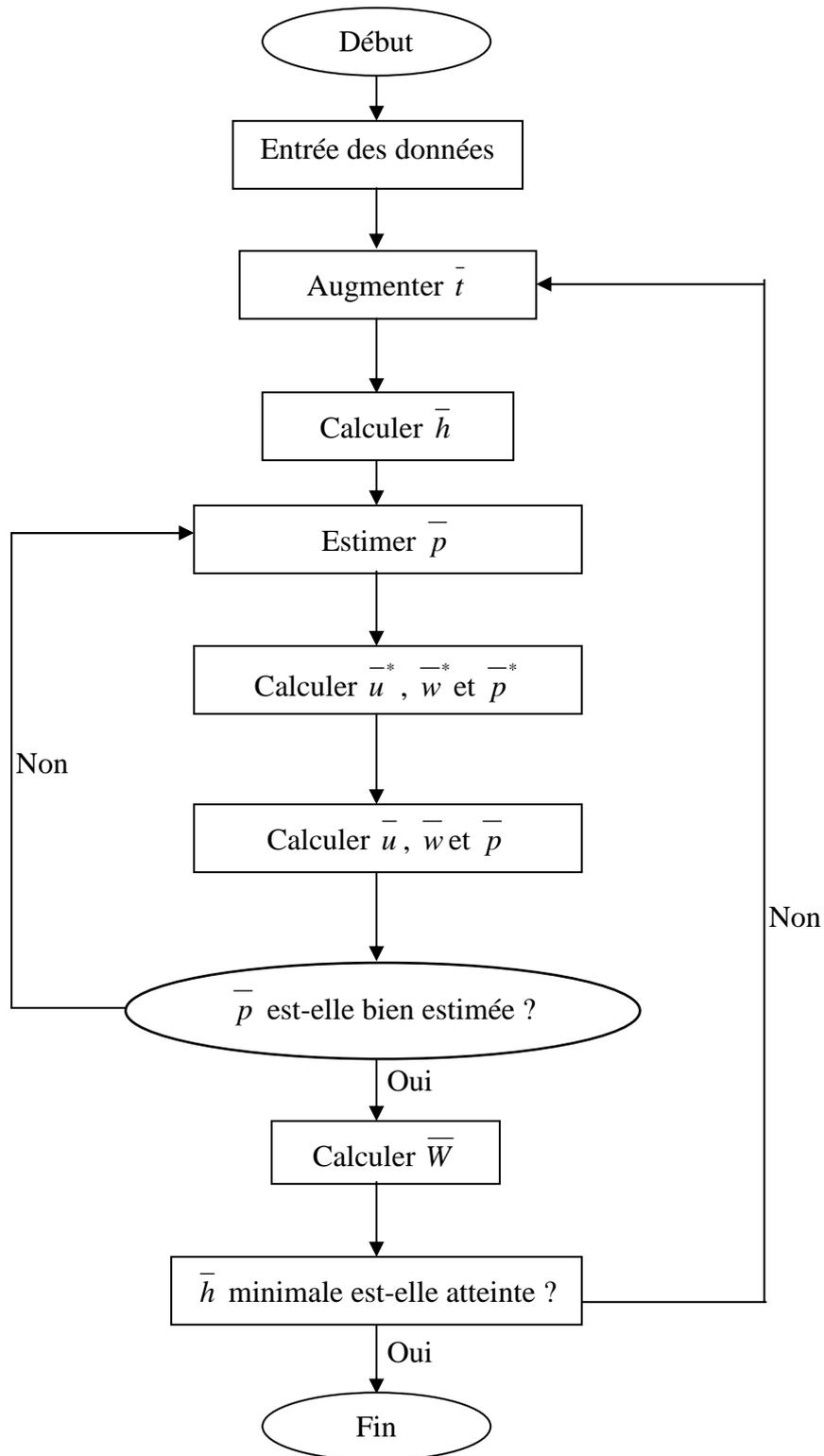


Figure 3.3 : Algorithme de résolution

L'influence de l'affinage du maillage sur la solution numérique a été étudiée. Des tests sont effectués afin de s'assurer de l'indépendance des résultats numériques du nombre de points des grilles de maillage. Une augmentation du nombre de ces points, jusqu'à ce que l'erreur relative sur la pression maximale au sein du film fluide soit inférieure à 2%, a été réalisée. Ce critère de convergence est satisfait avec un maillage de  $51 \times 51$  pour le film fluide ainsi que pour le milieu poreux.

Le code de calcul élaboré est testé dans un premier temps pour étudier le comportement de l'écrasement d'un film fluide newtonien entre deux disques circulaires imperméables. La figure 3.4 montre la distribution de la pression sans dimension au sein du film lubrifiant pour différentes valeurs du temps d'écrasement sans dimension  $\bar{t}$ . Trois valeurs du temps d'écrasement sont utilisées pour montrer les effets d'inertie du fluide sur les caractéristiques statiques et dynamiques du contact lubrifié. On observe que pour une valeur donnée de  $\bar{t}$ , la pression diminue rapidement le long de la moitié environ du rayon du disque. Cette tendance devient de moins en moins importante lorsque les deux disques se rapprochent l'un de l'autre. La non prise en compte des forces d'inertie dans le film fluide provoque une sous-estimation des valeurs de la pression le long de l'étendue du contact lubrifié. Ces résultats sont qualitativement en bon accord avec ceux de Usha et Vimala [USH02] où la surface supérieure est courbée, et avec ceux de Lin et Hung [LIN07] où l'écrasement du film fluide s'effectue entre un long cylindre et une plaque infinie.

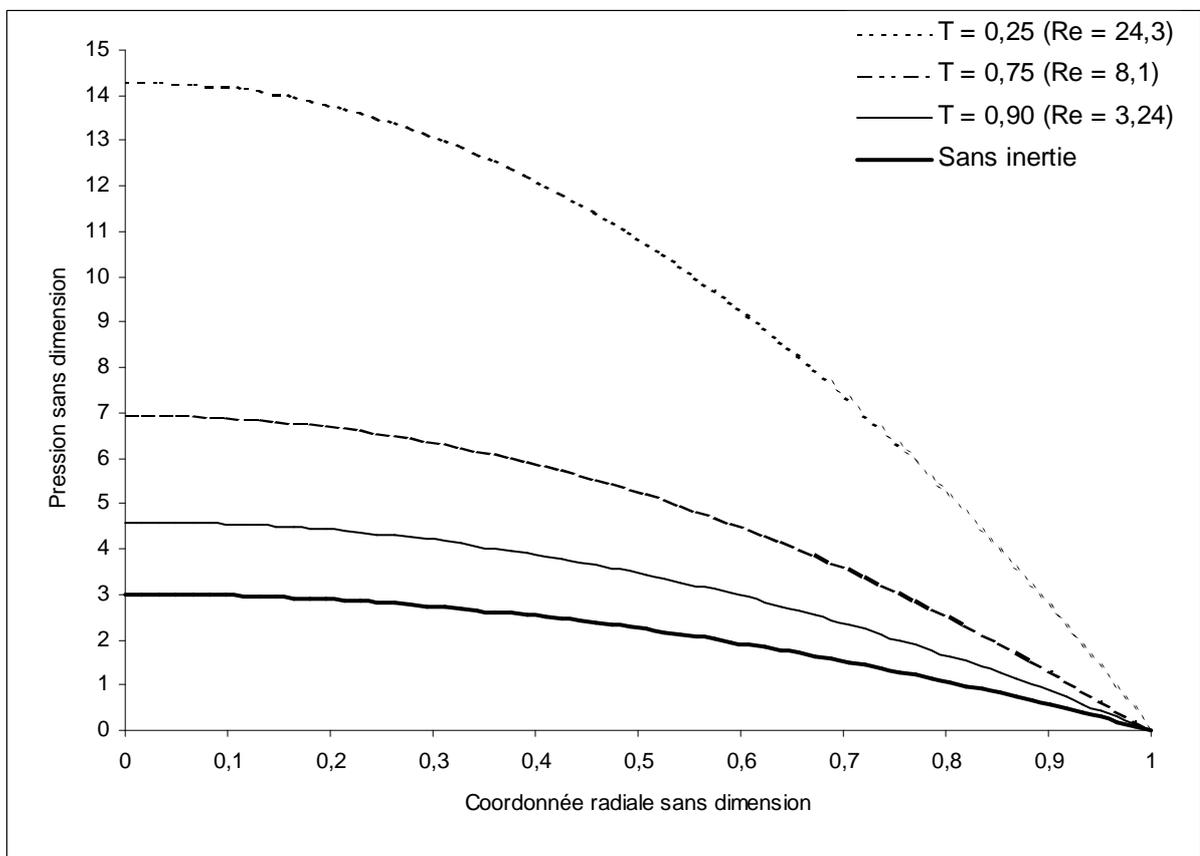


Figure 3.4 : Pression  $\bar{p}$  dans le film fluide pour différents instants  $\bar{t} \equiv T$  entre deux disques imperméables

La figure 3.5 présente les profils de la vitesse radiale sans dimension du film fluide à la sortie du contact. Les effets d'inertie ont rendu les profils de vitesse aplatis, comparativement avec le profil parabolique obtenu à partir de la théorie de lubrification hydrodynamique sans inertie, par le développement d'une structure de type couche limite. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Tichy [TIC81] pour la même configuration géométrique de l'écrasement, utilisant une approximation basée sur une linéarisation des termes d'inertie convective.

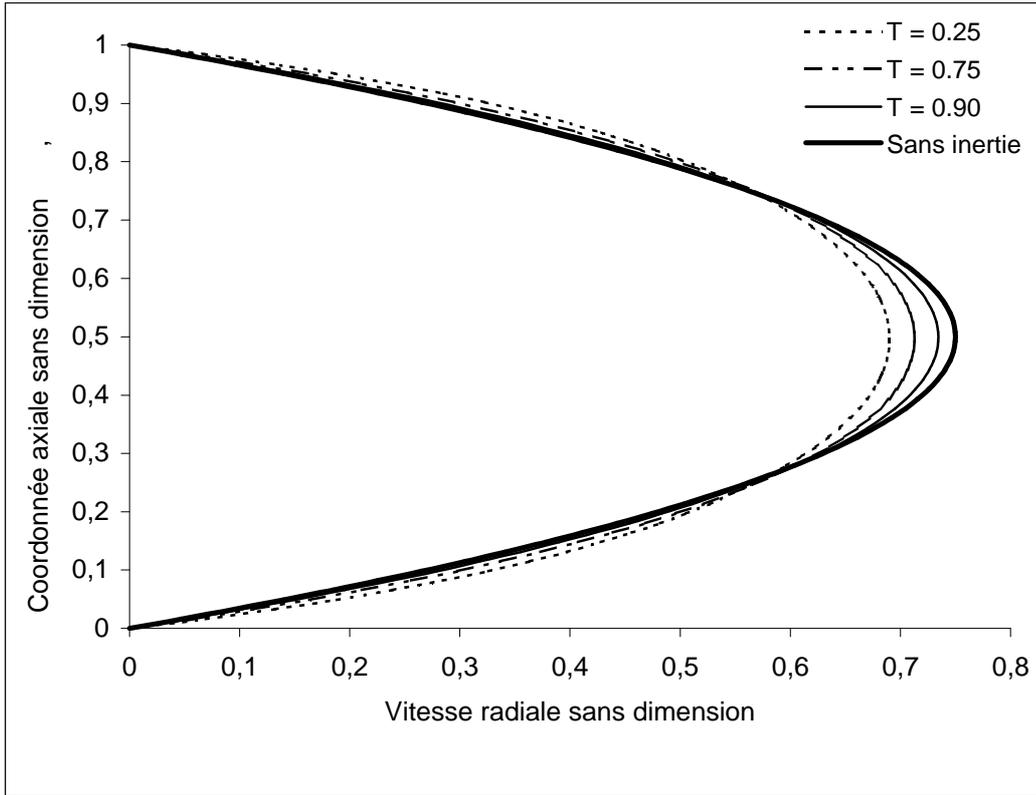


Figure 3.5 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement  $\bar{t} \equiv T$  entre deux disques imperméables

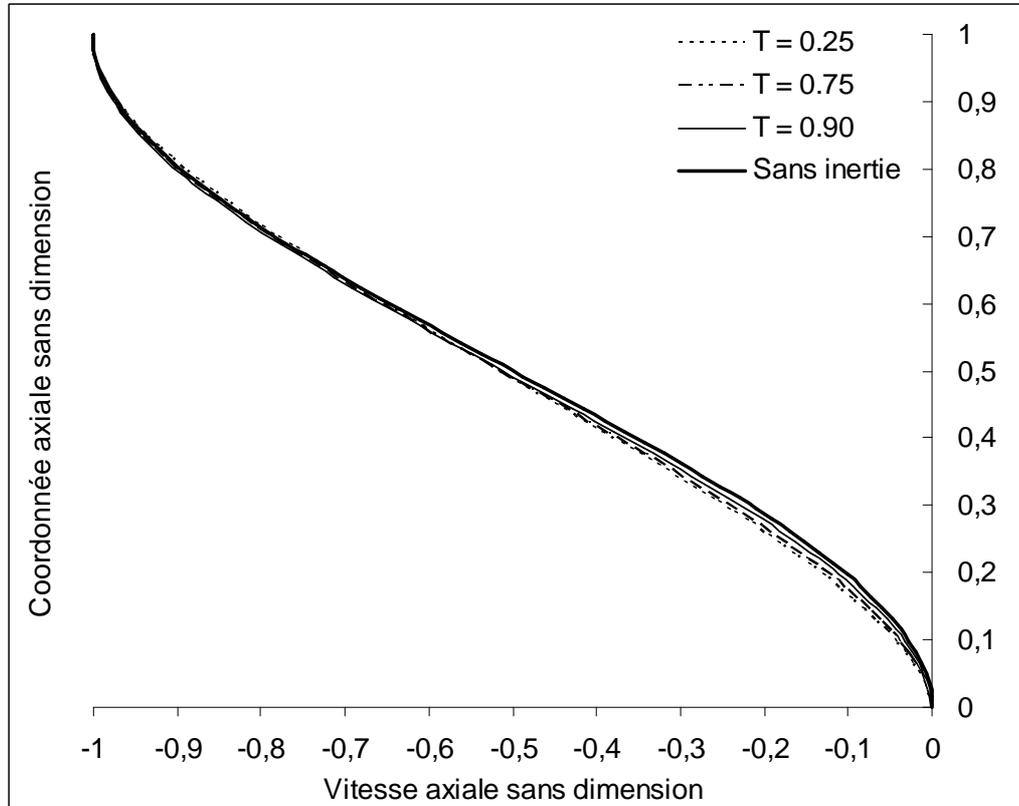


Figure 3.6 : Profil de la vitesse axiale  $\bar{w}$  pour différents instants d'écrasement  $\bar{t} \equiv T$  entre deux disques imperméables

La figure 3.6 montre une différence légère entre les profils de la vitesse axiale lorsque les effets d'inertie sont considérés. Comme ces profils doivent normalement rester antisymétrique, nous soupçonnons des incertitudes d'ordre numérique. On peut donc conclure que les effets d'inertie n'affectent pas le profil de la vitesse axiale.

La distribution de la pression au sein du film fluide est représentée sur la figure 3.7 pour quatre valeurs de perméabilité du disque poreux. Cette figure montre que les valeurs de la pression au sein du film fluide diminuent lorsque la perméabilité augmente, cette diminution augmente avec le temps d'écrasement. Comparativement au cas des deux disques circulaires imperméables parallèles (voir Figure 3.4), la présence du disque poreux réduit les valeurs de la pression dans le film fluide pour l'ensemble des cas considérés. Ce résultat obtenu par Nabhani *et al.* [NAB10c] est en bon accord avec ceux issus de l'étude réalisée par Jurczak [JUR06] sur un palier biologique d'un contact synovial modélisé par deux disques dont l'un est à face poreuse, en particulier dans le cas d'un lubrifiant newtonien.

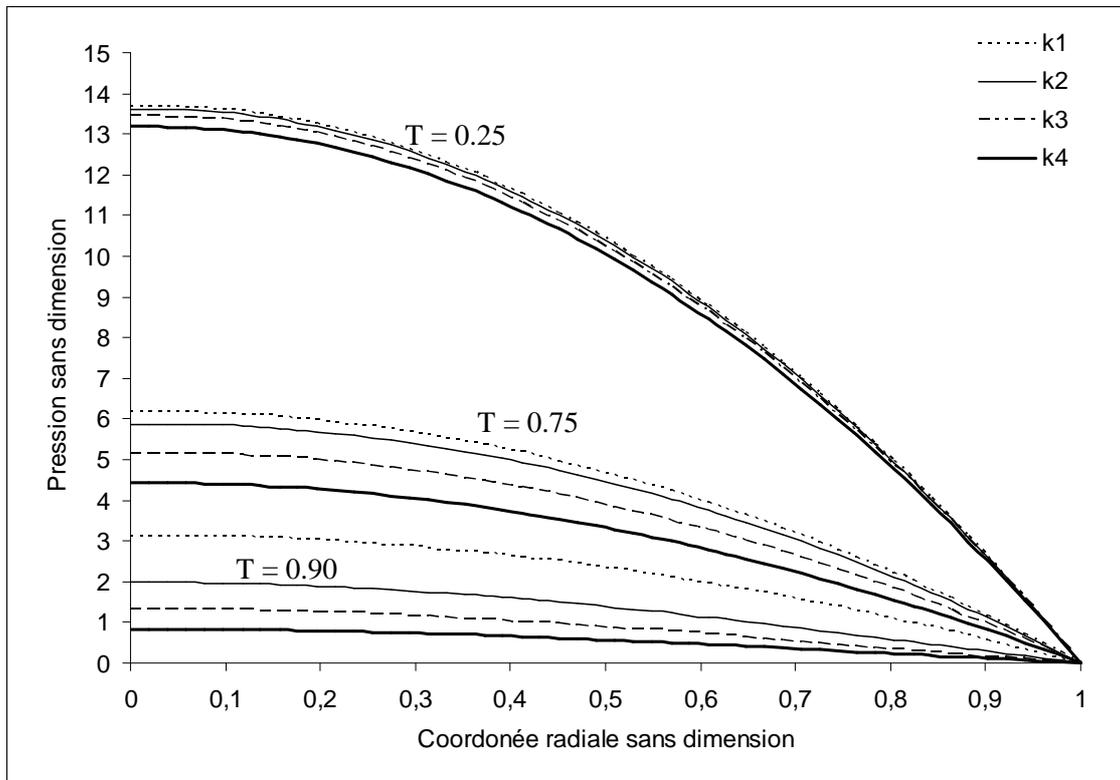


Figure 3.7 : Distribution de la pression  $\bar{p}$  dans le film fluide pour différents instants  $\bar{t} \equiv T$  avec  $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  et  $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

Afin de bien illustrer l'effet de la perméabilité du disque poreux sur la capacité de charge du contact lubrifié, on a reporté sur la figure 3.8 l'évolution de cette capacité avec le temps d'écrasement pour quatre valeurs de perméabilité. On remarque que l'augmentation de la perméabilité du disque poreux réduit la capacité de charge lors de l'action d'écrasement. Ceci est en bon accord avec les conclusions déduites par Lin [LIN96b]. En outre, cet effet devient plus prononcé avec le temps d'écrasement. Il est également intéressant de noter que les valeurs de la pression dans le film fluide et celles de la capacité de charge obtenues en utilisant seulement la loi de Darcy sont plus élevées comparativement avec nos prédictions (voir par exemple les figures 3.9 et 3.10). Soulignons que la capacité de charge calculée par le modèle de Darcy est par contre plus petite que celle obtenue à l'aide d'un modèle basé seulement sur la correction de Forchheimer (voir Figure 3.11). C'est la même tendance constatée lorsque l'équation de Reynolds modifiée est utilisée dans le film fluide à faibles vitesses d'écrasement [NAB09].

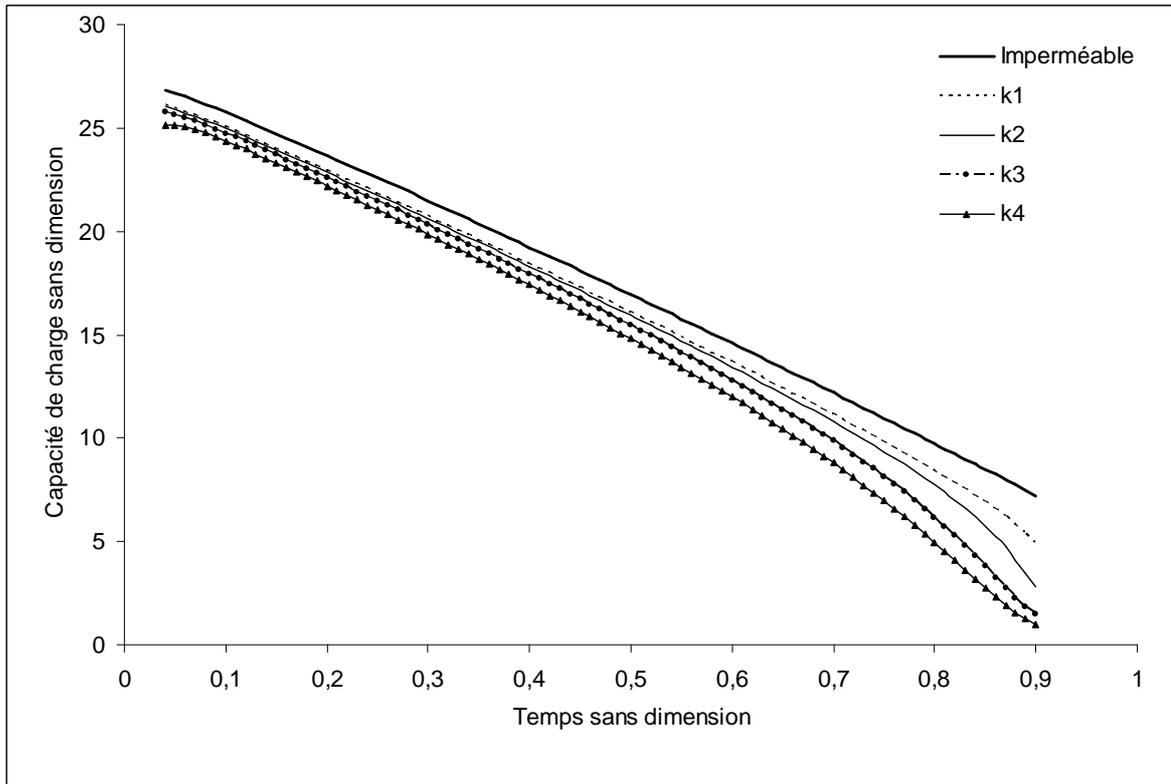


Figure 3.8 : Evolution de la capacité de charge  $\bar{W}$  dans le film fluide avec  $k_1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k_2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k_3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  et  $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

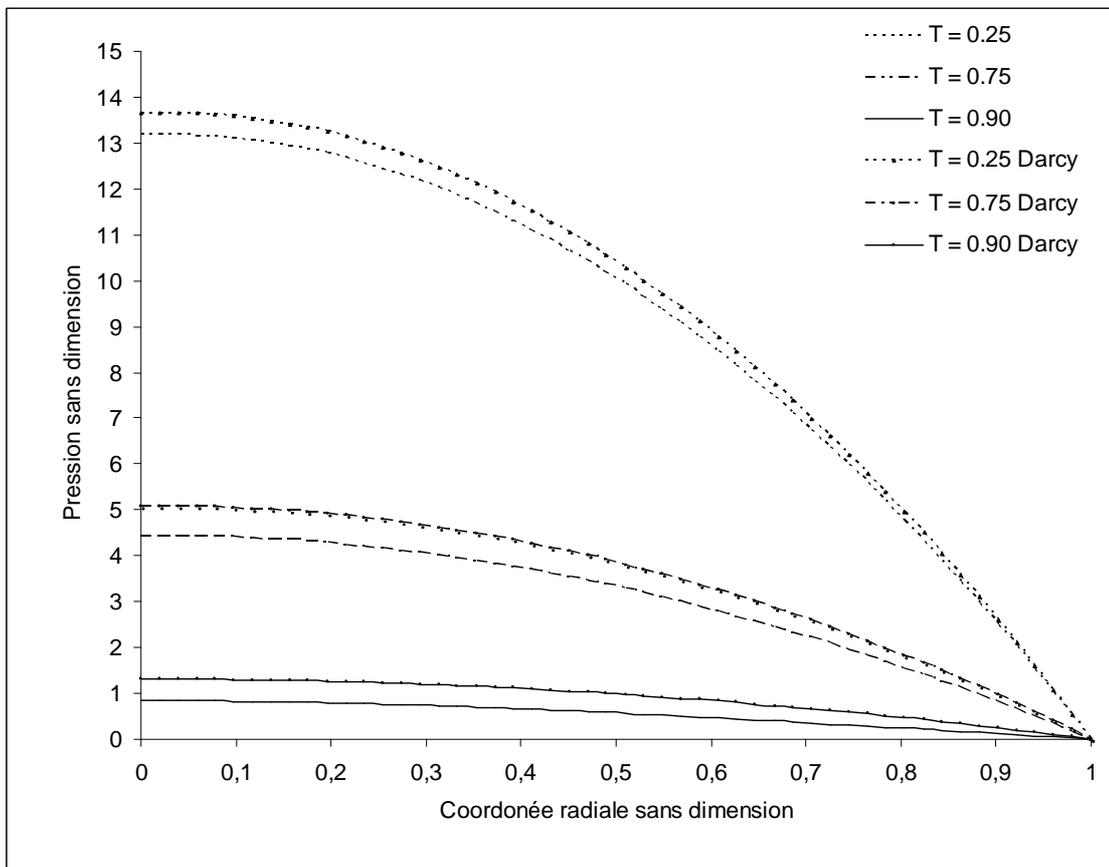


Figure 3.9 : Distribution de la pression  $\bar{p}$  dans le film fluide en présence du disque poreux à  $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

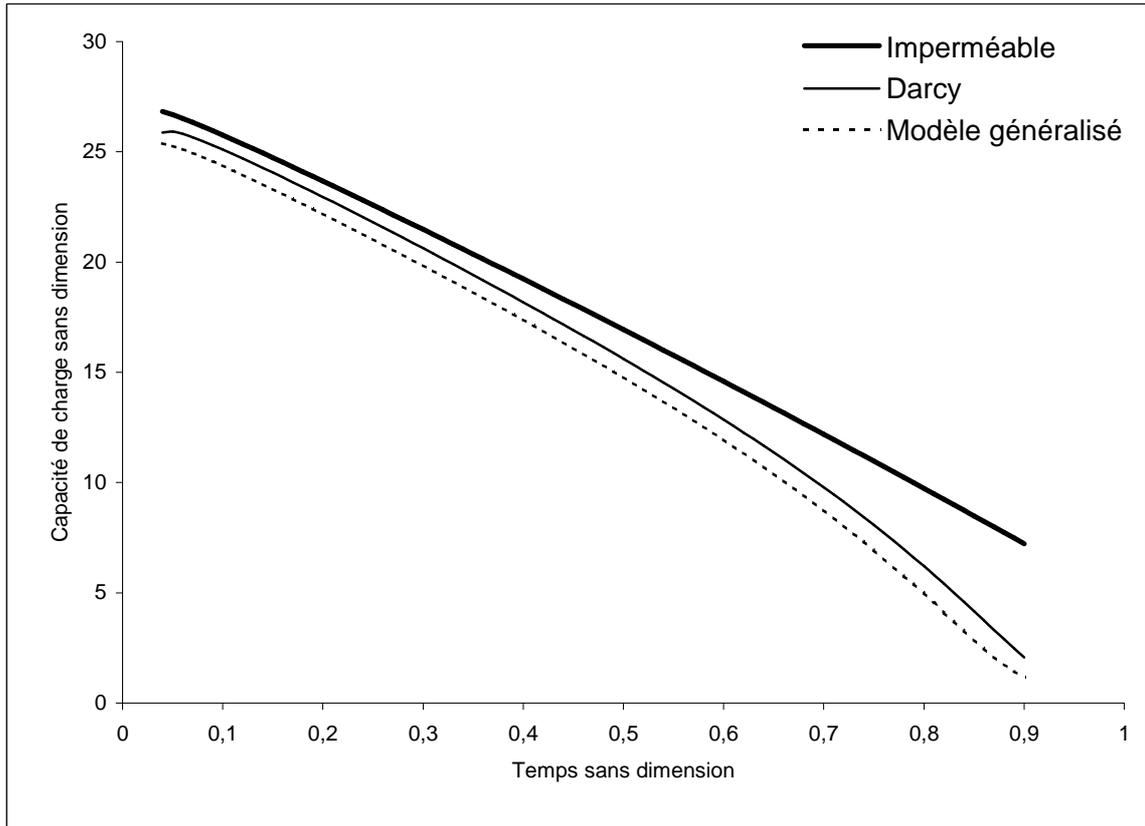


Figure 3.10 : Evolution de la capacité de charge  $\bar{W}$  dans le film fluide en présence du disque poreux à  $k_4 = 4.73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

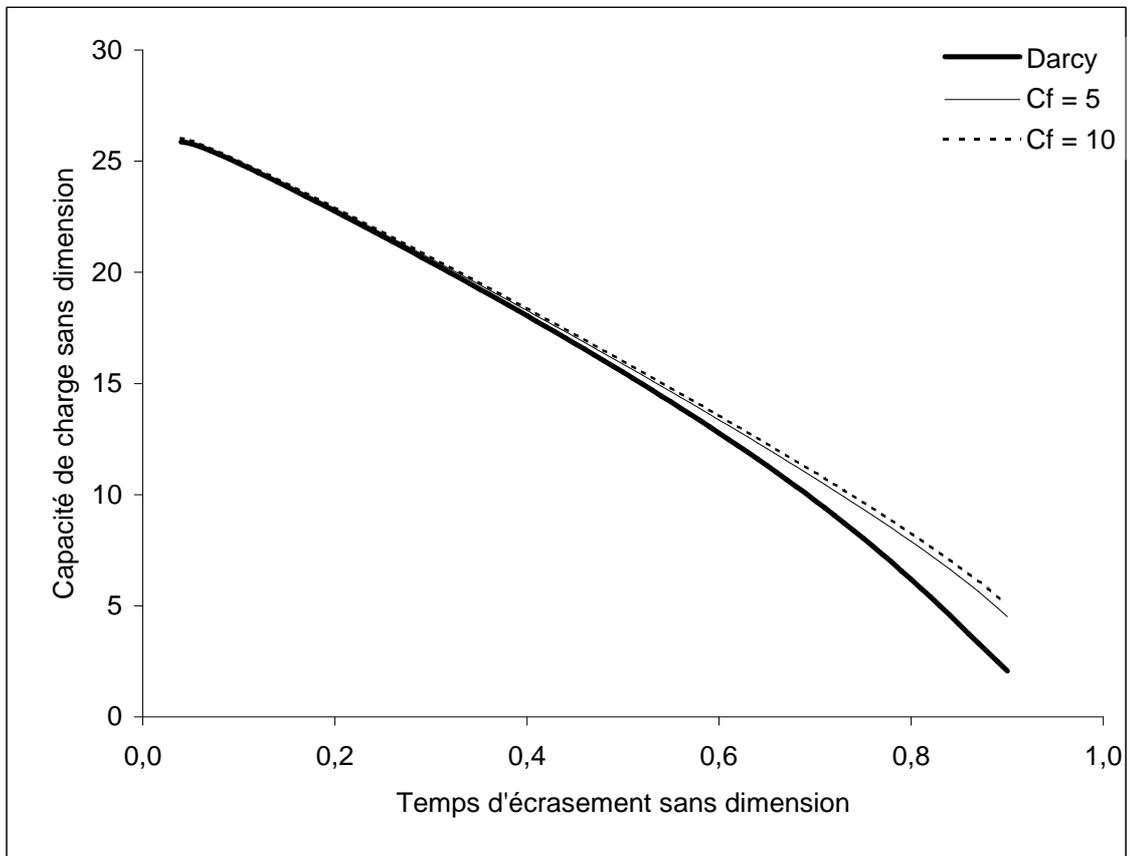


Figure 3.11 : Evolution de la capacité de charge prévue par le modèle de Darcy-Forchheimer pour différentes valeurs du coefficient de Forchheimer

Les effets de la présence du disque poreux sur les profils de vitesse, par exemple à une perméabilité égale à  $4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ , sont présentés sur les figures 3.12 et 3.14. Sur la figure 3.12, on remarque que la vitesse radiale du film fluide diminue de façon significative lorsque le temps d'écrasement augmente. Contrairement au cas des deux disques parallèles imperméables, cette vitesse augmente légèrement mais seulement dans la région au voisinage de l'interface poreuse. En outre, la valeur maximale de la vitesse radiale est décalée vers l'interface film fluide – disque poreux au fur à mesure que le temps d'écrasement augmente. Elle est plus petite dans le cas du modèle généralisé, ce qui indique l'importance croissante du terme de Brinkman qui agit sur une zone pariétale dont l'épaisseur devient plus grande. Par contre, le modèle de Darcy-Forchheimer prédit des valeurs plus élevées (voir Figure 3.13). La vitesse axiale dans le film fluide au niveau de l'axe de symétrie augmente avec l'augmentation des valeurs du temps d'écrasement (voir Figure 3.14), la différence avec le modèle de Darcy est considérée très légère et négligeable.

On peut observer sur la figure 3.12 que lorsque le temps d'écrasement augmente, les effets visqueux deviennent prédominants dans le disque poreux comparativement avec les effets d'inertie (voir les équations 3.39 et 3.40), la vitesse radiale diminue entre les deux surfaces. Ainsi, la vitesse axiale augmente vu la conservation de la masse (voir Figure 3.14).

Quand la valeur de la perméabilité augmente, la vitesse radiale maximale diminue (voir Figure 3.15) et la vitesse axiale dans le film fluide au niveau de l'axe de symétrie augmente (voir Figure 3.16). En particulier, la plus grande quantité du débit massique est passée à travers l'interface film fluide – disque poreux lors des derniers instants de l'écrasement.

Contrairement aux résultats obtenus par Murti [MUR73] et reproduits par Meget et *al.* [MEG98], le présent modèle montre que les caractéristiques de l'écrasement sont influencées durant toutes les étapes du processus de l'écrasement lorsque les effets d'inertie dans le film fluide sont pris en compte.

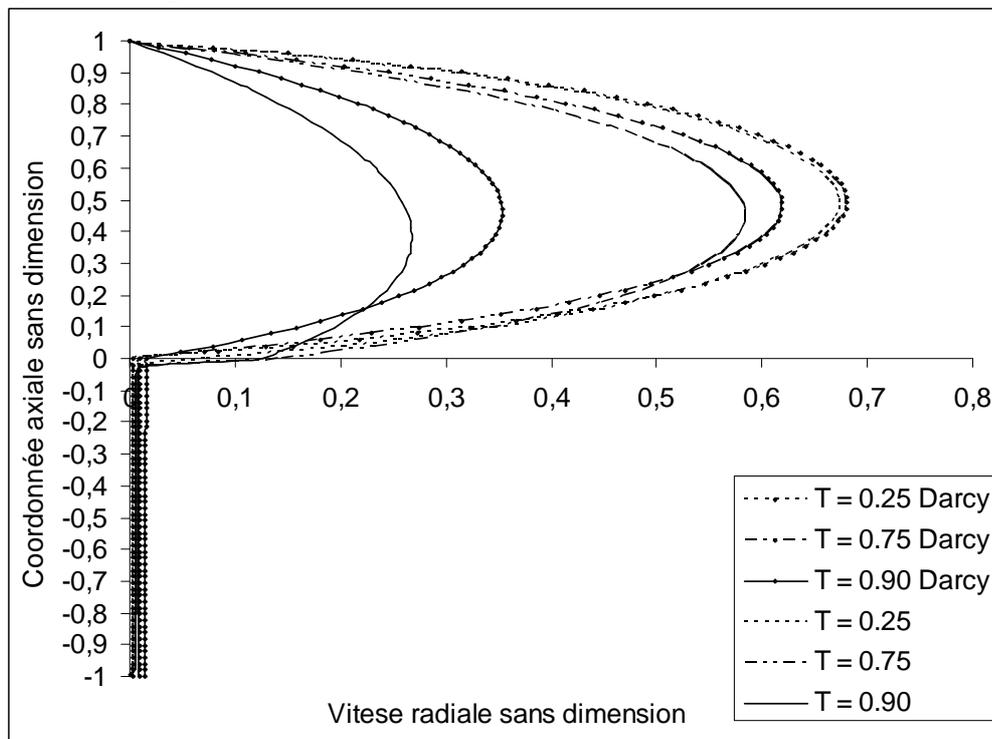


Figure 3.12 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement  $\bar{t} \equiv T$  en présence du disque poreux à  $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  : comparaison entre le modèle généralisé et celui de Darcy

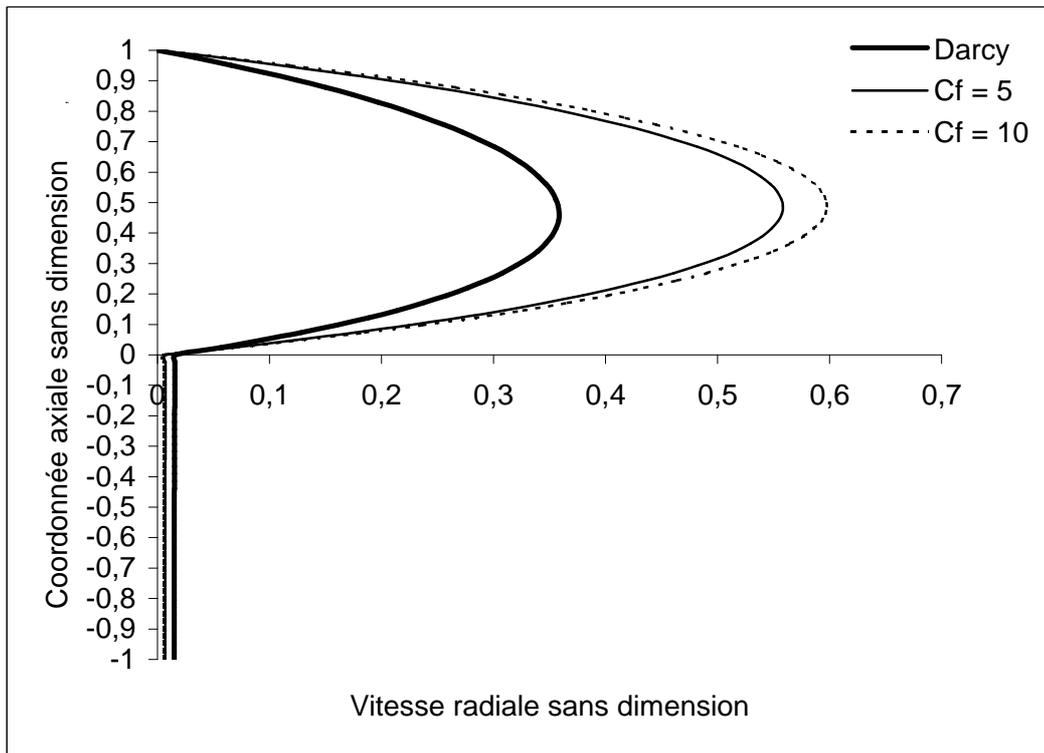


Figure 3.13 : Profil de la vitesse radiale à la sortie du film fluide prévue par le modèle de Darcy-Forchheimer pour  $h = 0,1h_o$

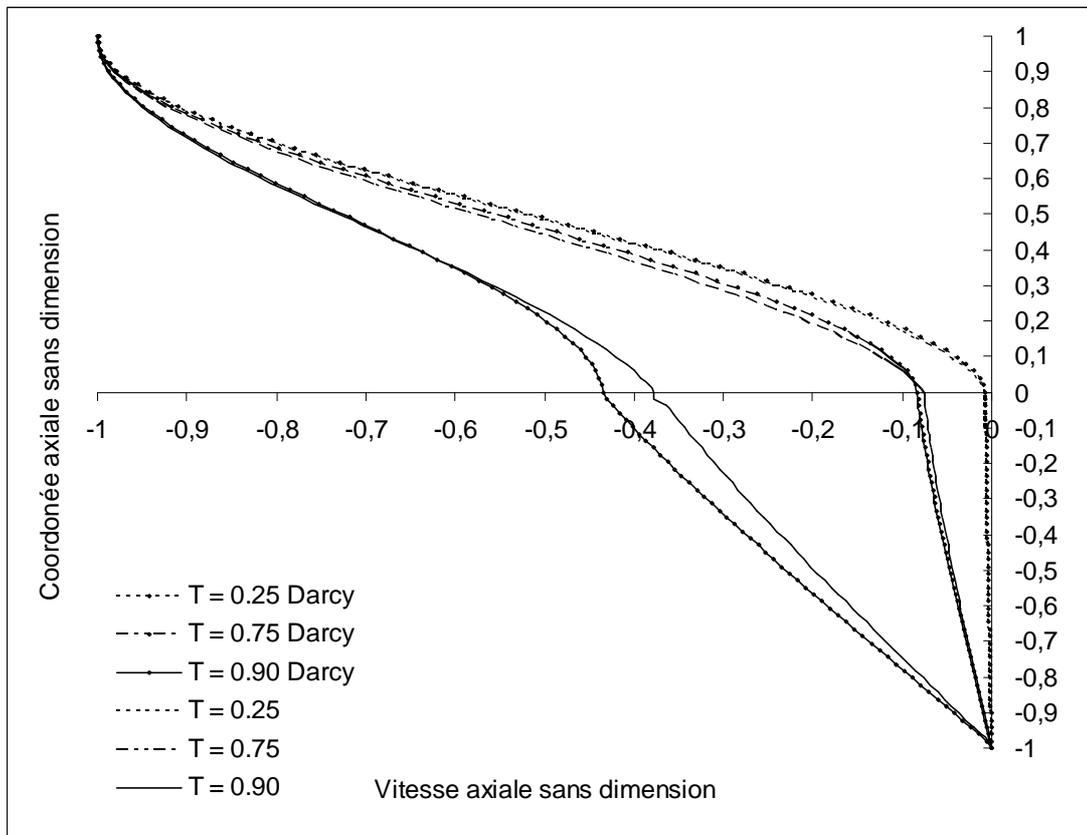


Figure 3.14 : Profil de la vitesse axiale  $\bar{w}$  au niveau de l'axe de symétrie pour différents instants d'écrasement  $\bar{t} \equiv T$  en présence du disque poreux à  $k_4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  : comparaison entre le modèle généralisé et celui de Darcy

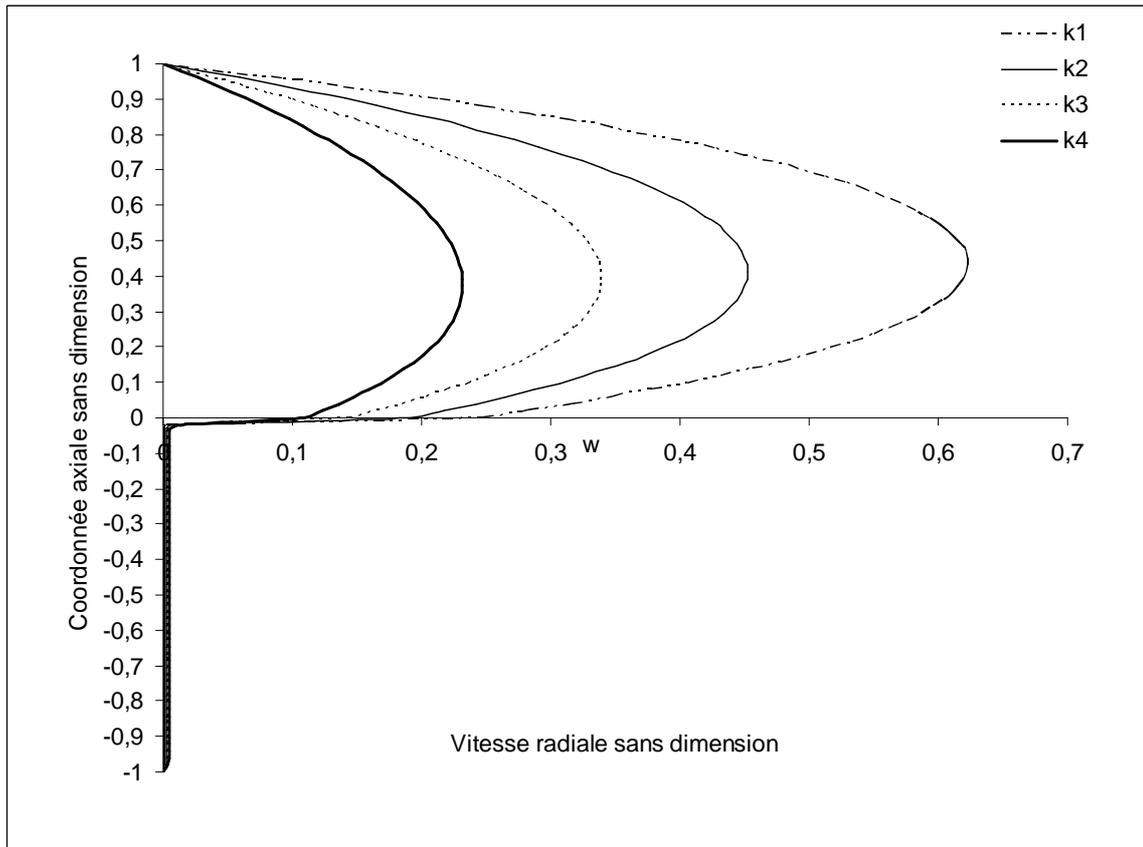


Figure 3.15 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour  $\bar{t} = 0,90$  avec  $k1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  et  $k4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

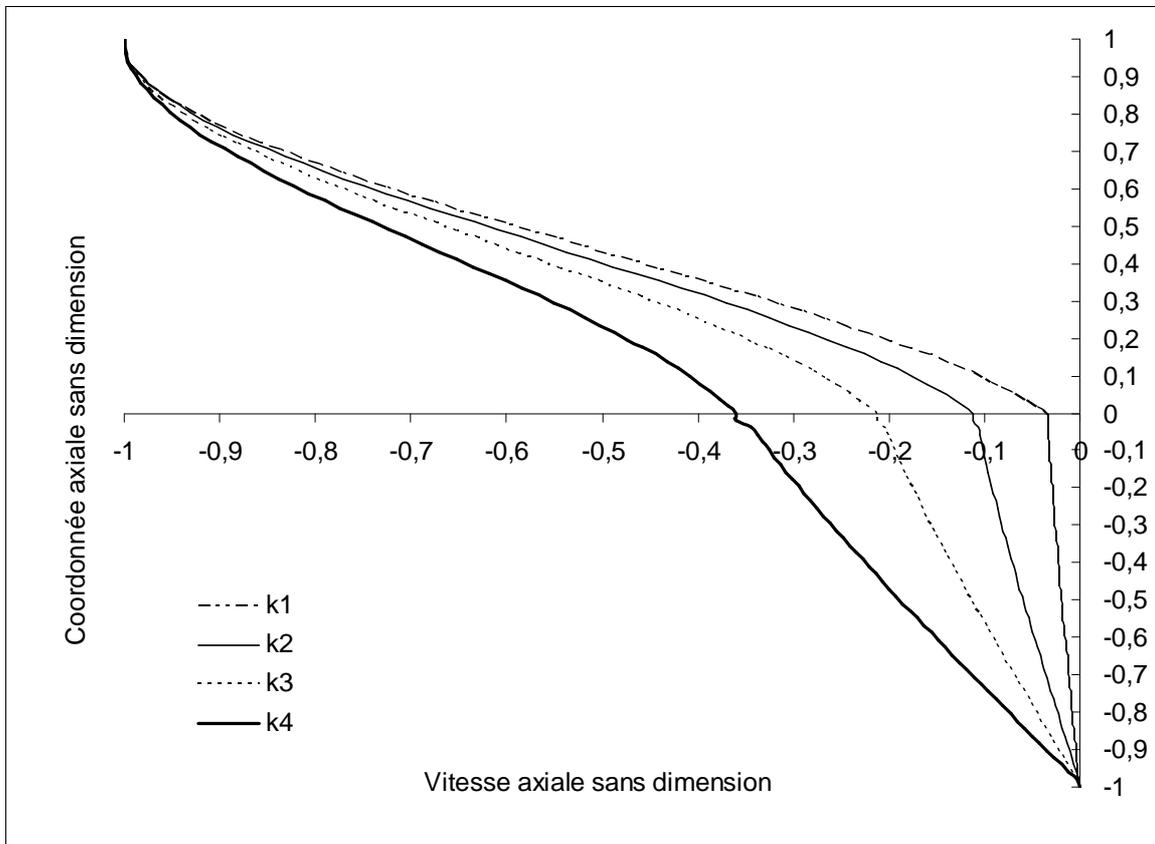


Figure 3.16 : Profil de la vitesse axiale  $\bar{w}$  à la sortie du contact pour  $\bar{t} = 0,90$  avec  $k1 = 1,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k2 = 6,87 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $k3 = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  et  $k4 = 4,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

### 3.11 Conclusion

Une étude numérique a été menée afin d'étudier le comportement hydrodynamique de l'écrasement d'un film fluide, à vitesse constante, contenu entre deux disques circulaires dont l'un est poreux. Sur la base des équations de Navier-Stokes Réduites et un modèle généralisé de l'écoulement dans le disque poreux, les caractéristiques du contact lubrifié ont été simulées. Le problème d'interaction film fluide – disque poreux, dont les équations sont discrétisées par différences fines, est résolu numériquement par un processus itératif global regroupant deux procédures itératives appliquées chacune séparément au film fluide et au disque poreux.

Les résultats numériques obtenus dans cette étude montrent que la présence du disque poreux réduit les valeurs qui caractérisent le contact lubrifié. Cette baisse observée est plus marquée lorsque le temps d'écrasement augmente. En outre, les modèles de Darcy et de Darcy-Forchheimer estiment des valeurs plus élevées de ces caractéristiques. Ainsi, nous avons pu mettre en évidence l'intérêt d'élaborer un modèle généralisé pour le milieu poreux capable de prédire l'écoulement du fluide en prenant en compte à la fois les effets d'inertie et de viscosité.

# Chapitre 4

## Ecrasement de lubrifiants non newtoniens en présence d'un milieu poroélastique avec prise en compte des effets inertiels

---

### 4.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, le problème de lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement a été formulé pour décrire l'action d'un disque rigide en mouvement normal au plan du contact sur un film lubrifiant en présence d'un milieu poreux, modélisant par exemple un contact articulaire biologique tel qu'une articulation de genou. Dans ce problème, nous avons considéré jusqu'à présent un film fluide lubrifiant newtonien et un milieu poreux indéformable.

La modélisation des écoulements de lubrification dépend du modèle rhéologique utilisé. L'hypothèse d'un lubrifiant newtonien peut être mise en défaut dans le cas de plusieurs lubrifiants modernes auxquels sont ajoutés des chaînes de polymères afin d'améliorer leurs propriétés sous différentes conditions d'opérations ([BAI79], [BIR84]), et plus particulièrement dans le cas du fluide synovial qui est naturellement « additivé » par des chaînes moléculaires de grosses tailles (essentiellement l'acide hyaluronique) ([FUJ05], [MOM05], [SUG05]). La plupart des travaux rhéologiques consacrés au fluide synovial le considèrent comme un milieu continu et révèlent un comportement rhéofluidifiant, c'est-à-dire que sa viscosité diminue en fonction du taux de cisaillement ([MAZ02], [CON01]). Le comportement non linéaire qui en résulte influence sensiblement les caractéristiques du fluide, d'où la nécessité de théories tenant compte des effets non newtoniens.

Outre l'effet non newtonien engendré par la présence d'additifs dans les lubrifiants fluides, la prise en compte de la déformation élastique de la matrice poreuse, générée par une pression dans le film fluide suffisamment élevée, semble nécessaire. C'est typiquement le cas par exemple du cartilage qui se déforme sous chargement du contact articulaire ([ARM79], [CHA09]).

Des travaux, consacrés à ce genre de problème, ont été menés. Ils sont basés sur l'écriture de l'équation de Reynolds modifiée dans le cas des fluides non newtoniens et sur la théorie des mélanges pour modéliser le cartilage comme un milieu continu biphasique, sans tenir compte des effets inertiels et des effets visqueux ([HOU92], [HLA00], [BUJ07a]).

Dans ce chapitre, nous reprenons les équations de Navier-Stokes Réduites (RNSP) décrites précédemment mais avec un terme en plus qui tient compte de l'effet non newtonien à travers le modèle de fluides à couples de contraintes. Nous proposons également une démarche pour étudier l'effet des déformations élastiques de l'interface poreuse sur les performances du contact. Cette démarche est basée sur le modèle de couche mince élastique. L'utilisation de ce modèle n'est qu'une première approximation simple mais justifiée qui permet la prise en considération de la déformation au niveau de l'interface poreuse.

Le modèle d'écoulement dans le milieu poreux, basé sur les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((3.10), (3.11)), est identique à celui présenté au chapitre

précèdent. Comme la vitesse et donc la position du disque en mouvement sont deux inconnues du problème, il est nécessaire alors d'ajouter une équation au système à résoudre.

La solution numérique de ce problème de couplage film fluide – milieu poreux n'est pas facile à atteindre puisqu'elle implique la résolution d'un problème fortement non linéaire. Ainsi, une approche numérique est développée afin d'éviter les difficultés de convergence rencontrées pendant le processus de résolution. Ces difficultés sont en partie liées aux couplages entre des équations non linéaires. L'approche est basée sur un couplage faible, qui consiste à résoudre les différentes équations du problème séparément et à établir une procédure itérative entre les solutions respectives. Ceci impose donc un nouvel algorithme de résolution numérique. Quelques résultats issus de cette simulation numérique, montrant l'effet non newtonien du fluide et l'influence de la déformation élastique de l'interface poreuse sur les performances du contact lubrifié, seront présentés et discutés.

## 4.2 Equations générales dans le film fluide pour fluides à couple de contraintes

Considérons deux disques circulaires et parallèles de même rayon  $R$ , dont l'un est à face poroélastique séparés par un film fluide, ayant comme origine le point  $O$  positionné au milieu de la surface inférieure imperméable (voir Figure 4.1). Ces deux disques sont considérés immergés dans un bain de lubrifiant.

Le disque poroélastique est fixe dans le repère  $(Or, Oz)$  tandis que le disque rigide, en supportant une charge constante  $W$ , est animé d'un mouvement d'écrasement selon l'axe  $(Oz)$  de vitesse instantané  $V(t) = -\left|\frac{dg}{dt}\right|$ . L'épaisseur du film d'huile est supposée très petite, comparée aux autres dimensions du contact lubrifié.

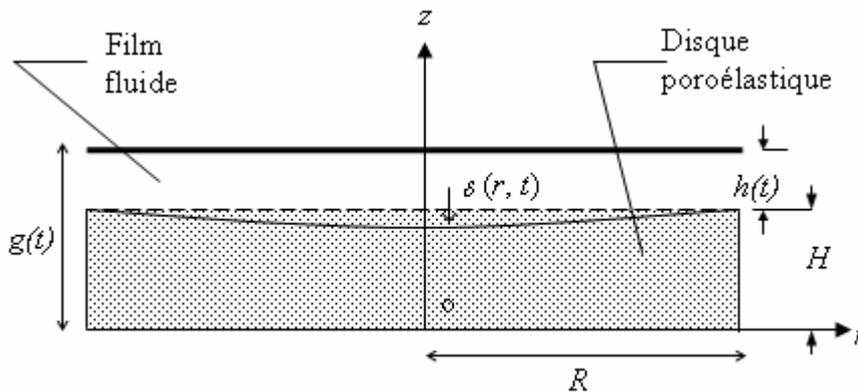


Figure 4.1 : Configuration géométrique

Notons ici :

- $g$  : position du disque supérieur dans le repère  $(O, r, z)$
- $H$  : épaisseur du disque poreux
- $h$  : épaisseur du film fluide
- $\delta$  : déformée de l'interface poreuse
- $R$  : rayon des deux disques

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique décrivant l'écoulement dans le film fluide permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques du

contact, de déterminer les caractéristiques du contact lubrifié. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus (lois de conservations de la masse et de la quantité de mouvement) appliquées à des fluides newtoniens et non newtoniens.

#### 4.2.1 Equation de continuité

La conservation de la masse est décrite par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

où

$\vec{v}$  : vecteur vitesse des particules fluides

$t$  : temps

$\rho$  : masse volumique du fluide considéré

$\text{div}$  : opérateur divergence

Pour un fluide incompressible, la masse volumique reste constante, l'équation de continuité devient :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (4.2)$$

En coordonnées cylindriques, cette équation de continuité s'écrit dans le cas d'un écoulement axisymétrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

où

$r, z$  : coordonnées radiale et axiale

$u, w$  : composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le film fluide

#### 4.2.2 Equations de Navier-Stokes Réduites (RNSP)

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, les équations de Navier-Stokes s'écrivent dans le cas d'un écoulement laminaire pour un milieu fluide continu [PAP00] :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \vec{v} \right) = \overline{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (4.4)$$

où

$\vec{f}$  : densité massique des forces volumiques

$\vec{\sigma}$  : tenseur des contraintes

On ne tient pas compte de l'équation de conservation d'énergie car le régime d'écoulement est considéré isotherme.

En particulier, pour un fluide à couple de contraintes (voir Annexe 1), l'équation de quantité de mouvement s'exprime par [STO66] :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} \Lambda \vec{L} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} + \rho \vec{f} \quad (4.5)$$

où

$p$  : pression

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide

$\eta$  : propriété constante du fluide à couple de contraintes

$\vec{L}$  : vecteur du couple de volume.

Les couples de volume peuvent résulter de l'action d'un champ magnétique externe sur les particules fluides magnétisées ou de l'action d'un champ électrique sur la matière polarisée. Les couples de contraintes résultent des interactions entre les particules fluides adjacentes en plus des forces colinéaires d'interactions. Ces couples de contraintes sont issus d'un tenseur linéairement proportionnel au tenseur du taux de rotation [STO66].

En l'absence de ce couple de volume, l'équation (4.5) s'écrit en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique :

- Composante radiale :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} - 3 \frac{u}{r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_r \quad (4.6)$$

- Composante axiale :

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r} \right) + \rho f_z \quad (4.7)$$

où  $f_r$  et  $f_z$  sont les composantes radiale et axiale de la densité massiques des forces volumiques.

En utilisant les hypothèses usuelles de la lubrification hydrodynamique ([CAM87], [FRE90]) :

- les forces de masse sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité
- l'épaisseur du film est très petite par rapport aux autres dimensions du contact

les équations de quantité de mouvement précédentes se réduisent à :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

La dernière équation montre que la pression dans le film fluide est indépendante de la variable axiale  $z$  ;  $p = p(r, t)$ .

Les équations ((4.3), (4.8), (4.9)) sont dénommées équations de Navier-Stokes Réduites. Ce sont aussi les équations de la couche limite de Prandtl pour un fluide à couple de contraintes mais avec des conditions aux limites différentes. Ceci justifie l'appellation d'équations de Navier-Stokes Réduites / Prandtl ou RNSP. Le système, initialement elliptique, est dorénavant un système parabolique. Cette transformation induit une résolution plus aisée des nouvelles équations obtenues.

### 4.3 Equations générales dans le milieu poreux

Le milieu poreux est considéré homogène, isotrope, saturé par un fluide newtonien de même viscosité dynamique que celle du film fluide et se déforme d'une manière élastique sous pression hydrodynamique. Les particules en suspension dans le film fluide sont supposées assez grosses et ne peuvent pénétrer au sein du milieu poreux, c'est la cas typique du cartilage articulaire qui joue le rôle de filtration du fluide synovial des grosses molécules d'acide Hyaluronique ([HLA93b], [HLA95a], [HLA95b]).

#### 4.3.1 Equation de continuité

En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité s'écrit dans le cas d'un écoulement axisymétrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

où  $u^*$  et  $w^*$  sont les composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le disque poreux.

#### 4.3.2 Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées

L'écoulement du fluide au sein du disque poreux est décrit par les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées que nous avons introduites au chapitre précédent :

- Composante radiale :

$$\frac{\rho}{\phi} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{u^*}{\phi} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{w^*}{\phi} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r} - \frac{\mu}{k} u^* + \frac{\mu}{\phi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^*)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} |v^*| u^* \quad (4.11)$$

- Composante axiale :

$$\frac{\rho}{\phi} \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} + \frac{u^*}{\phi} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{w^*}{\phi} \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z} - \frac{\mu}{k} w^* + \frac{\mu}{\phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) - \frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left| \vec{v}^* \right| w^* \quad (4.12)$$

où

$p^*$  : pression dans le disque poreux

$k$  : perméabilité du disque poreux

$\phi$  : porosité du disque poreux

$C_f$  : coefficient sans dimension de Forchheimer,  $C_f = \frac{1,75}{\sqrt{150\phi^{3/2}}}$

$\vec{v}^*$  : champ de vitesse dans le disque poreux

$\left| \vec{v}^* \right|$  : module du champ de vitesse dans le disque poreux

### 4.3.3 Equation de Poisson

L'équation de continuité est transformée en une équation pour le champ de pression, obtenue en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement (1.8) et en tenant en compte de l'incompressibilité du fluide (4.10), comme dans le second chapitre :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = -\frac{\rho C_f}{\sqrt{k}} \left( \vec{v}^* \cdot \vec{\nabla} \right) \left| \vec{v}^* \right| - \frac{\rho}{\phi^2} \left( \left( \frac{\partial u^*}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u^*}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) \quad (4.13)$$

La solution numérique du système d'équations aux dérivées partielles ((4.3), (4.8), (4.9), (4.11), (4.12), (4.13)) nécessite la spécification de la cinématique (vitesse d'écrasement) et de la géométrie (épaisseur du film fluide) du contact, et dépend généralement des conditions initiales et des conditions aux limites du système.

### 4.4 Equation de mouvement de la surface écrasante

Les forces extérieures agissant sur le disque supérieur sont la force résultante des actions de la pression hydrodynamique du film fluide, les forces d'inertie de ce disque en mouvement et son propre poids. Dans le système d'axes de la figure 4.1, l'équation de mouvement selon la composante axiale s'écrit :

$$m \frac{d^2 g}{dt^2}(t) = W(t) - F_0 \quad (4.14)$$

où  $m$  est la masse du disque supérieur,  $F_0$  son poids et  $W(t)$  est la charge que peut supporter le contact lubrifié. Cette portance dynamique du film fluide exercée sur la plaque écrasante est fonction du temps. Elle est donnée par l'intégrale du champ de pression du film fluide sur toute la surface du contact :

$$W(t) = 2\pi \int_0^R pr dr \quad (4.15)$$

#### 4.4.1 Vitesse de déplacement de la surface écrasante

La vitesse d'écrasement  $\frac{dg}{dt}(t + \Delta t)$  du disque supérieur à l'instant  $t + \Delta t$  est calculée à l'aide d'un schéma explicite d'ordre un de l'accélération :

$$m \frac{\frac{dg}{dt}(t + \Delta t) - \frac{dg}{dt}(t)}{\Delta t} = W(t) - F_0 \quad (4.16)$$

d'où

$$\frac{dg}{dt}(t + \Delta t) = \frac{dg}{dt}(t) + \Delta t \frac{W(t) - F_0}{m} + o(\Delta t) \quad (4.17)$$

La charge  $W(t)$  et la vitesse  $\frac{dg}{dt}(t)$  à l'instant  $t$  sont supposées connues.

#### 4.4.2 Position de la surface écrasante

Cette position est obtenue à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre deux :

$$g(t + \Delta t) = g(t) + \Delta t \frac{dg}{dt}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{W(t) - F_0}{m} + o(\Delta t^2) \quad (4.18)$$

### 4.5 Equation de l'épaisseur du film fluide

D'après la figure 4.1, l'épaisseur du film pour un disque poreux indéformable est définie par :

$$h(t) = g(t) - H \quad (4.19)$$

Dans le cas d'un milieu poroélastique, cette épaisseur du film tient compte de la déformation élastique de l'interface poreuse sous l'effet de la pression hydrodynamique. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$h(r, t) = g(t) - H + \delta(r, t) \quad (4.20)$$

où  $\delta(r, t)$  est la déformée de l'interface poreuse.

## 4.6 Equation de la déformée de l'interface poreuse : modèle de couche mince élastique

Les déformations élastiques sont normalement à calculer dans toute la matrice poreuse. Ceci nécessite un calcul de structure en éléments finis, généralement coûteux en temps de calcul. Une alternative possible est l'utilisation du modèle de couche mince élastique basé sur l'hypothèse d'une épaisseur de couche poreuse  $H$  très petite devant le rayon du contact  $R$ . Cette simplification, introduite par Winkler [WIN67], fut justifiée par Higginson [HIG65], Medley [MED81] et Dowson et Jin [DOW89]. La déformée de l'interface poreuse est donnée dans le cas de ce modèle par l'expression :

$$\delta(r, t) = \frac{H(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} p(r, t) \quad (4.21)$$

où  $\nu$  et  $E$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module d'Young de la couche mince élastique.

Ce modèle est largement utilisé dans la littérature relative à lubrification des paliers flexibles ([LAH02], [BOU08], [DOW92], [FRE03], [ELS01a], [ELS01b], [ELS03], [LIN96c]).

Les équations RNSP ((4.3), (4.8), (4.9)), de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((4.11), (4.12)) et de Poisson (4.13) sont des équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont les composantes du vecteur vitesse et la pression. Pour la résolution de ces équations, il est nécessaire de définir des conditions initiales et aux limites sur la pression et la vitesse approchant au mieux la réalité physique.

## 4.7 Conditions initiales

Dans le film fluide, nous choisissons comme conditions initiales pour la vitesse et pour la pression la solution de l'équation de Reynolds et celle de l'équation de continuité. Pour un film fluide newtonien situé entre deux disques rigides ayant la même épaisseur initiale  $h_0$ , on a :

$$u(r, z, t = 0) = \frac{3V(0)}{h_0^3} r(z-H)(z-g) \quad (4.22)$$

$$w(r, z, t = 0) = -\frac{V(0)}{h_0^3} (z-H)^2 (2(z-H) - 3h_0) \quad (4.23)$$

$$p(r, z, t = 0) = \frac{3\mu V(0)}{h_0^3} (r^2 - R^2) \quad (4.24)$$

Dans le milieu poreux, nous supposons qu'à l'instant initial l'écoulement n'a pas encore eu lieu et évidemment le champ de vitesse est nul au départ :

$$u^*(r, z, t = 0) = w^*(r, z, t = 0) = 0 \quad (4.25)$$

Par ailleurs, on fait l'hypothèse que la pression qui règne au sein du milieu poreux, pour chaque section radiale, est identique à celle dans le film fluide :

$$p^*(r, z, t = 0) = p(r, t = 0) \quad (4.26)$$

Le début de l'écrasement se fait à une accélération nulle, on a donc :

$$W(0) = F_0 \quad (4.27)$$

avec

$$W(0) = \int_0^{2\pi} \int_0^R p(r, z, t=0) dr r d\theta \quad (4.28)$$

En injectant l'expression de la pression (4.24) dans cette dernière équation, nous déduisons la valeur de la vitesse d'écrasement à  $t = 0$  :

$$V(0) = -\frac{2 F_0 h_0^3}{3 \mu \pi R^4} \quad (4.29)$$

La matrice poreuse est supposée non encore déformée, lors de l'application de la charge à l'instant initial [HOU92]. La position initiale du disque supérieur est ainsi donnée par :

$$g(0) = H + h_0 \quad (4.30)$$

## 4.8 Conditions aux limites

### 4.8.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \quad (4.31)$$

Aux limites du contact lubrifié et du milieu poreux,  $r = R$ , la pression est prise égale à la pression ambiante :

$$p = p^* = 0 \quad (4.32)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = g - h$ , la pression est supposée être continue :

$$p = p^* \quad (4.33)$$

La condition d'imperméabilité sur la paroi du disque inférieur,  $z = 0$ , s'écrit :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad (4.34)$$

### 4.8.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Les particules fluides vérifient les conditions suivantes aux niveaux des surfaces des parois solides imperméables :

- sur le disque supérieur,  $z = g(t)$  :

$$u = 0, \quad w = \frac{dg}{dt} \quad (4.35)$$

- sur la paroi inférieure,  $z = 0$  :

$$u^* = w^* = 0 \quad (4.36)$$

Sur l'interface poreuse,  $z = g - h$ , la condition de continuité du champ de vitesse et des contraintes tangentielle et normale est appliquée :

$$u = u^*, \quad w = w^* \quad (4.37)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial z} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (4.39)$$

La dernière condition montre qu'il n'y a pas de contribution visqueuse normale dans le tenseur des contraintes dans le film fluide suite aux hypothèses de la lubrification.

La condition d'écoulement établi à la sortie,  $r = R$ , exprimant la nullité de la dérivée normale de la vitesse, est employée :

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (4.40)$$

Sur l'axe de symétrie,  $r = 0$ , on a :

$$u = u^* = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0 \quad (4.42)$$

La présence du couple de contraintes (4.8) impose deux conditions aux limites supplémentaires :

- à l'interface film - disque poreux :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=g-h} = 0 \quad (4.43)$$

- à la paroi supérieure :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=g} = 0 \quad (4.44)$$

Ces deux conditions expriment l'absence de toutes les composantes de la vorticité.

### 4.9 Equations, conditions initiales et conditions aux limites sans dimensions

Soit  $R$  la longueur caractéristique suivant  $(O, r)$ ,  $h_0$  celle suivant  $(O, z)$ ,  $P_0$  la pression de référence choisie égale à  $\frac{F_0}{\pi R^2}$ ,  $V_0$  la vitesse de référence selon  $(O, z)$  dont il faut déterminer l'expression par la suite et  $\frac{h_0}{V_0}$  le temps de référence. Les variables sans dimensions s'écrivent :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{u} = \frac{h_0}{RV_0} u, \quad \bar{w} = \frac{w}{V_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{P_0}, \quad \bar{u}^* = \frac{h_0}{RV_0} u^*, \quad \bar{w}^* = \frac{w^*}{V_0}, \quad \bar{p}^* = \frac{p^*}{P_0}, \quad \bar{t} = \frac{V_0}{h_0} t, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}$$

où

$h_0$  : épaisseur initiale du film fluide

$F_0$  : charge constante appliquée au disque supérieur en mouvement

L'interface poreuse déformée pose un problème d'implémentation des conditions aux limites lorsque la méthode des différences finies, qui nécessite des géométries simples, est utilisée. Dans notre cas, la position de cette interface est une inconnue du problème que nous souhaitons déterminer en fonction de la pression qui règne au sein du film fluide à l'aide du modèle de couche mince élastique.

Le changement de variables sur la coordonnée axiale  $z$  permet de transformer l'interface déformable en une interface plane. En effet, on a :

- Dans le film fluide :  $g - h \leq z \leq g$

$$\bar{z} = 1 + \frac{z - g}{h} \tag{4.45}$$

- Dans le disque poreux :  $0 \leq z \leq g - h$

$$\bar{z} = -1 + \frac{z}{g - h} \tag{4.46}$$

Ainsi, cette transformation permet de positionner l'interface poreuse à  $\bar{z} = 0$ , la paroi supérieure à  $\bar{z} = 1$  et enfin la paroi inférieure à  $\bar{z} = -1$ . Le domaine physique occupé par le film fluide et le milieu poreux est transformé en un domaine rectangulaire (voir Figure 4.2). Ce changement de variables est bien entendu une transformation bijective.

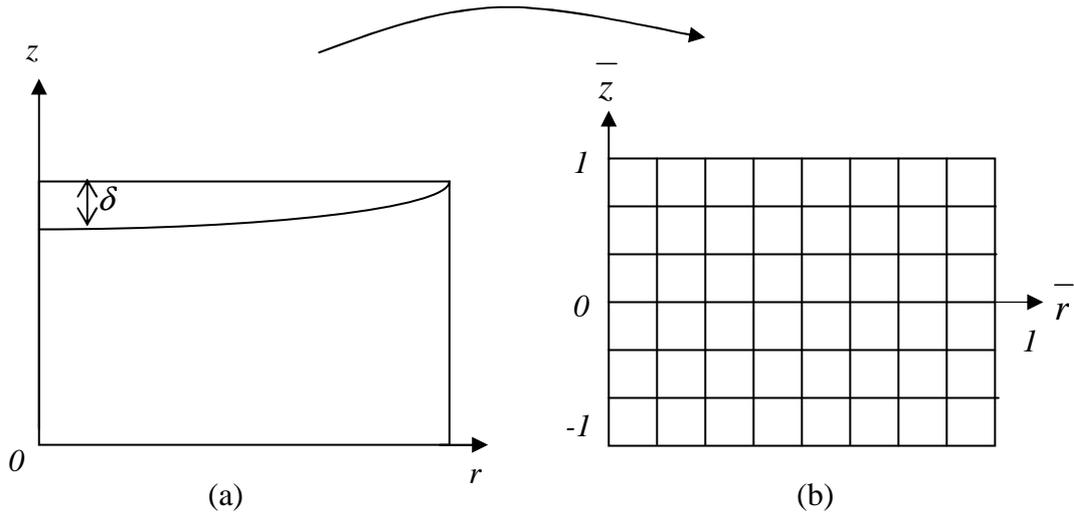


Figure 4.2 : Transformation conforme  
(a) : Domaine physique, (b) : Domaine de calcul numérique

Les dérivés partiels premières par rapport à  $r$ ,  $z$  et  $t$  s'expriment en fonction des nouvelles variables  $\bar{r}$ ,  $\bar{z}$  et  $\bar{t}$  comme suit :

- Dans le film fluide :  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \frac{(1-\bar{z})}{R\bar{h}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_0 \bar{h}} & 0 \\ 0 & \frac{V_0}{h_0 \bar{h}} \left( \bar{V} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} (1-\bar{z}) \right) & \frac{V_0}{h_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

avec  $\bar{V} = \frac{V}{V_0}$ .

- Dans le disque poreux :  $-1 \leq \bar{z} \leq 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \frac{(\bar{z}+1)}{R(\bar{g}-\bar{h})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_0 (\bar{g}-\bar{h})} & 0 \\ 0 & \frac{V_0}{h_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \frac{(\bar{z}+1)}{(\bar{g}-\bar{h})} & \frac{V_0}{h_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Les équations et leurs conditions initiales et aux limites associées, à résoudre dans ce nouveau système de coordonnées, sont données ci-dessous.

### 4.9.1 Equation de continuité dans le film

L'équation de continuité s'écrit dans le système de coordonnées  $(\bar{r}, \bar{z})$  :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \left( \frac{1 - \bar{z}}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.49)$$

### 4.9.2 Equation de Navier-Stokes Réduite RNSP pour fluides à couple de contraintes

L'équation de quantité de mouvement (4.8) selon la direction radiale  $r$  devient en tenant compte de l'équation (4.9) :

$$R_e \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{h}} \left( \bar{V} + \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \bar{u} \right) (1 - \bar{z}) + \bar{w} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = - \left( \frac{h_0^3 P_0}{\mu R^2 V_0} \right) \frac{d \bar{p}}{d \bar{r}} + \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}^4} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{z}^4} \quad (4.50)$$

où

$\bar{l}$  : paramètre de couple de contraintes,  $\bar{l} = \frac{l}{h_0}$  avec  $l$  est la longueur caractéristique de la taille des particules solides supposées présentes dans le film et caractérisant le caractère non newtonien,  $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$

$R_e$  : nombre de Reynolds,  $R_e = \rho \frac{V_0 h_0}{\mu}$ .

La vitesse de référence  $V_0$ , qui permet de conserver le terme du gradient radial de pression dans le cas où  $\frac{h_0}{R}$  est utilisé comme paramètre d'échelle pour un développement en séries de puissances (voir Annexe 2), est choisie de telle manière que [JAN91] :

$$\frac{h_0^3 P_0}{\mu R^2 V_0} = 1 \quad (4.51)$$

En substituant  $P_0$  par son expression, on a :

$$V_0 = \frac{F_0 h_0^3}{\mu \pi R^4} \quad (4.52)$$

L'équation (4.50) s'écrit alors :

$$R_e \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{h}} \left( \bar{V} + \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \bar{u} \right) (1 - \bar{z}) + \bar{w} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{d \bar{p}}{d \bar{r}} + \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}^4} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{z}^4} \quad (4.53)$$

### 4.9.3 Equations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées

Les composantes de l'équation de quantité de mouvement dans le disque poreux ((4.11) et (4.12)) s'écrivent dans le nouveau système de coordonnées :

- Composante radiale :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^* = & -\frac{\rho k V_0}{\phi \mu h_0} \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{g-h} \left( \frac{\bar{w}^*}{\phi} + \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \right) (1+\bar{z}) \right) \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \frac{\bar{u}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \right) \\
 & - \frac{k}{h_0^2} \left( \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{k}{\phi h_0^2 (g-h)^2} \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\rho C_f \sqrt{k} V_0}{\mu} \frac{R}{h_0} \sqrt{\bar{u}^{*2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2 \bar{w}^{*2}} \bar{u}^* \\
 & + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\bar{u}^*}{r} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}^*}{r^2} + \left( \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{z}^2} \right) \\
 & + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{2}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{z} \partial \bar{r}} + \frac{1+\bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{(g-h)} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \right)
 \end{aligned} \quad (4.54)$$

- Composante axiale :

$$\begin{aligned}
 \bar{w}^* = & -\frac{\rho k V_0}{\phi \mu h_0} \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}^*}{\phi} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} + \frac{1+\bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{u}^*}{\phi} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \right) \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} + \left( \frac{1}{g-h} \frac{\bar{w}^*}{\phi} \right) \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{R^2 k}{h_0^3 (g-h)} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} \\
 & + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} + \frac{1+\bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{(g-h)} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} \right) \\
 & + \frac{k}{\phi R^2} \left( + 2 \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \bar{z} \partial \bar{r}} + \left( \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} (1+\bar{z}) \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \bar{z}^2} \right) \\
 & + \frac{k}{\phi h_0^2 (g-h)^2} \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\rho C_f \sqrt{k} V_0}{\mu} \frac{R}{h_0} \sqrt{\bar{u}^{*2} + \left( \frac{h_0}{R} \right)^2 \bar{w}^{*2}} \bar{w}^*
 \end{aligned} \quad (4.55)$$

### 4.9.4 Equation de Poisson

L'équation de Poisson (4.13) pour le champ de pression s'écrit dans le nouveau système de coordonnées  $(\bar{r}, \bar{z})$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{r}} + C \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} + 2B \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} + \left( B^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 (g-h)^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}^*}{\partial \bar{z}^2} \right) = \\
 & - \frac{R_e C_f R}{\sqrt{k}} \left( \bar{u}^* \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \sqrt{\bar{u}^{*2} + \varepsilon^2 \bar{w}^{*2}} + B \bar{u}^* \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sqrt{\bar{u}^{*2} + \varepsilon^2 \bar{w}^{*2}} + \frac{\bar{w}^*}{g-h} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sqrt{\bar{u}^{*2} + \varepsilon^2 \bar{w}^{*2}} \right) \\
 & - \frac{R_e}{\phi^2} \left( \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{r}} + B \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left( \frac{\bar{u}^*}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{(g-h)^2} \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) + \frac{2}{(g-h)} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{r}} + B \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{z}} \right)
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

où

$$B = \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} (1 + \bar{z}), \quad C = \frac{1 + \bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial r^2} + \frac{2}{(g-h)} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right), \quad \varepsilon = \frac{h_0}{R}$$

#### 4.9.5 Equation de mouvement de la surface écrasante

##### 4.9.5.1 Vitesse de déplacement de la surface écrasante

La vitesse de déplacement de la surface en mouvement est calculée à partir de l'équation (4.17) :

$$\frac{d\bar{g}}{dt}(\bar{t} + \Delta\bar{t}) = \frac{d\bar{g}}{dt}(\bar{t}) + \Delta\bar{t} \frac{d^2\bar{g}}{dt^2}(\bar{t}) + o(\Delta\bar{t}) \quad (4.57)$$

où  $\bar{g} = \frac{g}{h_0}$ . L'accélération sans dimension du disque est obtenue à partir de l'équation (4.14) :

$$\frac{d^2\bar{g}}{dt^2}(\bar{t}) = \frac{h_0 F_0}{V_0^2 m} \left( \frac{\bar{W}(\bar{t})}{\pi} - 1 \right) \quad (4.58)$$

avec la charge sans dimension :

$$\bar{W} = 2\pi \int_0^1 p r dr \quad (4.59)$$

##### 4.9.5.2 Position de la surface écrasante

La position du disque supérieur est obtenue par :

$$\bar{g}(\bar{t} + \Delta\bar{t}) = \bar{g}(\bar{t}) + \Delta\bar{t} \frac{d\bar{g}}{dt}(\bar{t}) + \frac{\Delta\bar{t}^2}{2} \frac{d^2\bar{g}}{dt^2}(\bar{t}) + o(\Delta\bar{t}^2) \quad (4.60)$$

##### 4.9.5.3 Equation de l'épaisseur du film fluide

L'équation sans dimension du film fluide en tenant compte de la déformation du disque poreux est :

$$\bar{h} = \bar{g} - \frac{H}{h_0} + C_o \bar{p} \quad (4.61)$$

où

$$C_o = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \frac{H}{h_0} P_0 \quad (4.62)$$

est le coefficient de compliance.

#### 4.9.6 Conditions initiales

En tenant compte du changement de variables ((4.47), (4.48)), les conditions initiales ((4.22), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.29) (4.30)) s'écrivent :

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 2\bar{r}\bar{z}(1 - \bar{z}) \quad (4.63)$$

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = \frac{2}{3}(2\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2) \quad (4.64)$$

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{t} = 0) = 2(1 - \bar{r}^2) \quad (4.65)$$

$$\bar{u}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 0, \quad \bar{w}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 0 \quad (4.66)$$

$$\bar{p}^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} = 0) = 2(1 - \bar{r}^2) \quad (4.67)$$

$$\bar{V}(0) = -\frac{2}{3} \quad (4.68)$$

$$\bar{g}(0) = 1 + \frac{H}{h_0} \quad (4.69)$$

### 4.9.7 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la pression ((4.31), (4.32), (4.33), (4.34)) et la vitesse ((4.35), (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.41), (4.42), (4.43), (4.44)) sont écrites sous formes sans dimensions ci-après.

#### 4.9.7.1 Conditions aux limites sur la pression

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (4.70)$$

Sur le bord du disque poreux et du film fluide,  $\bar{r} = 1$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* = 0 \quad (4.71)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^* \quad (4.72)$$

Sur la paroi imperméable inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.73)$$

#### 4.9.7.2 Conditions aux limites sur la vitesse

Sur le disque supérieur,  $\bar{z} = 1$  :

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = -\left| \frac{d\bar{g}}{dt} \right| \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.75)$$

Sur l'interface poreuse,  $\bar{z} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^*, \quad \bar{w} = \bar{w}^* \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\bar{l}}{\bar{h}} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial z^3} = \left( \frac{\bar{h}}{\phi(\bar{g} - \bar{h})} \right) \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0 \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.79)$$

Sur la paroi inférieure,  $\bar{z} = -1$  :

$$\bar{u}^* = \bar{w}^* = 0 \quad (4.80)$$

Sur l'axe de symétrie,  $\bar{r} = 0$  :

$$\bar{u} = \bar{u}^* = 0 \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} = 0 \quad (4.82)$$

Sur le bord du domaine de calcul,  $\bar{r} = 1$  :

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial r} = \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial r} = 0 \quad (4.83)$$

#### 4.10 Discrétisations par différences finies et technique de résolution

Les équations RNSP dans le film ((4.49), (4.53)), celles de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((4.54), (4.55)) et de Poisson (4.56) dans le milieu poreux sont couplées à l'interface poreuse par la continuité de la pression, de la vitesse et des contraintes normales et tangentielles. La solution de ce problème d'interaction film fluide – milieu poreux nécessite la résolution numérique de toutes ces équations compte tenu des conditions initiales ((4.63), (4.64), (4.65), (4.66), (4.67), (4.68), (4.69)) et aux limites ((4.70), (4.71), (4.72), (4.73), (4.74), (4.75), (4.76), (4.77), (4.78), (4.79), (4.80), (4.81), (4.82), (4.83)). La discrétisation des équations se fait par la méthode des différences finies (voir Annexe 2), et le système d'équations algébriques obtenu est résolu numériquement au sein d'un processus itératif global. Le domaine film fluide ainsi que le domaine milieu poreux sont discrétisés en  $N+1$  points suivant la direction radiale et  $M+1$  points suivant la direction axiale (voir Figure 4.3). Les systèmes d'équations aux dérivées partielles sont remplacés par des systèmes d'équations écrites en chacun des points des grilles du maillage. Chaque point de la grille est indicé par un couple  $(i, j)$ . Le maillage est défini comme suit :

- Le pas suivant la direction radiale :  $\Delta \bar{r} = \frac{1}{N}$
- Le pas suivant la direction axiale :  $\Delta \bar{z} = \frac{1}{M}$

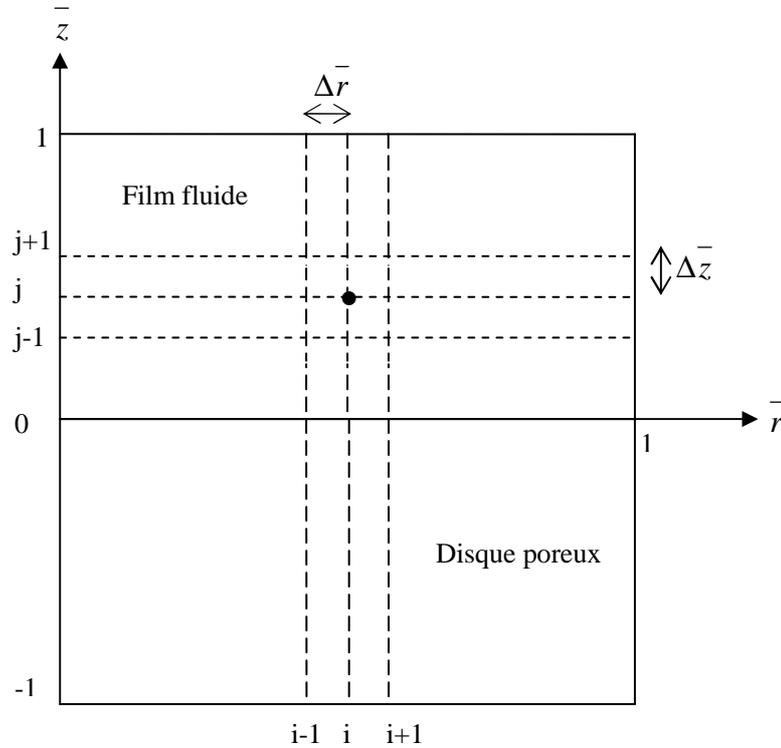


Figure 4.3 : Discrétisation du domaine de calcul

$\bar{r}_i = i\Delta\bar{r}$ ,  $\bar{z}_j = j\Delta\bar{z}$  dans le film,  $\bar{z}_j = -j\Delta\bar{z}$  dans le milieu poreux.

La valeur numérique approchée de toute fonction  $f$  au point de discrétisation  $(\bar{r}_i, \bar{z}_j)$  à l'instant  $\bar{t}^n = n\Delta\bar{t}$  est notée  $f_{i,j}^n$ , avec  $n$  est le nombre d'itérations en temps.

#### 4.10.1 Discrétisation des équations RNSP

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode de discrétisation et la technique de résolution des équations RNSP ; ce sont des équations aux dérivées partielles paraboliques nécessitant une discrétisation spécifique. Ces équations peuvent se résoudre pour chaque  $\bar{r}_i$  depuis l'axe de symétrie ; il s'agit en fait d'une résolution en mode inverse. On se donne des conditions aux limites bien définies, et puis on cherche itérativement le bon gradient radial de pression qui permet de satisfaire la condition à la limite sur la vitesse axiale (4.74). Ce gradient radial de pression nous permet d'avoir une vitesse  $\bar{u}$ . Par intégration de l'équation de conservation de la masse (4.49), on obtient la vitesse axiale  $\bar{w}$  dont la valeur à la paroi supérieure doit être égale à celle du disque en mouvement. Par contre, si la valeur du gradient radial de pression n'est pas la bonne alors cette condition n'est pas vérifiée. Faire une boucle s'avère nécessaire pour trouver le bon gradient radial de pression.

- Equation de quantité de mouvement : calcul de  $\bar{u}$

La discrétisation par différences finies du terme contenant  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  est donnée par :

$$D \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = D_{i-1,j}^n \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^n - \bar{u}_{i-1,j-1}^n}{2\Delta z} + o(\Delta z^{-2}) \quad (4.84)$$

où

$$D_{i-1,j}^n = \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \bar{V} + \left( \frac{\bar{h}_i - \bar{h}_i^{n-1}}{\Delta t} + \bar{u}_{i-1,j} \frac{\bar{h}_i - \bar{h}_i^{n-1}}{\Delta r} \right) (1 - \bar{z}_j) + \bar{w}_{i-1,j}^n \right) \quad (4.85)$$

Le terme correspondant à la dérivée d'ordre quatre  $\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4}$  s'exprime en différences finies centrées d'ordre deux par :

$$\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = \frac{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}(i, j+1) - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}(i, j) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}(i, j-1)}{(\Delta z)^2} + o(\Delta z^{-4}) \quad (4.86)$$

pour  $j = 1, M-1$ .

En particulier, il devient en tenant compte des deux conditions aux limites traduisant la nullité des couples de contraintes ((4.75), (4.79)) :

Pour  $j = 1$

$$\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = \frac{\bar{u}_{i,j+2}^n - 4\bar{u}_{i,j+1}^n + 5\bar{u}_{i,j}^n - 2\bar{u}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^4} + o(\Delta z^{-4}) \quad (4.87)$$

Pour  $j = M-1$

$$\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = \frac{\bar{u}_{i,j-2}^n - 4\bar{u}_{i,j-1}^n + 5\bar{u}_{i,j}^n - 2\bar{u}_{i,j+1}^n}{(\Delta z)^4} + o(\Delta z^{-4}) \quad (4.88)$$

Si non, on a :

Pour  $2 \leq j \leq M-2$

$$\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = \frac{\bar{u}_{i,j+2}^n - 4\bar{u}_{i,j+1}^n + 6\bar{u}_{i,j}^n - 4\bar{u}_{i,j-1}^n + \bar{u}_{i,j-2}^n}{(\Delta z)^4} + o(\Delta z^{-4}) \quad (4.89)$$

Nous obtenons en injectant ces dérivées dans l'équation de quantité de mouvement suivant la composante radiale (4.53) :

Pour  $j = 1$

$$R_e \left( \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}-1}}{\Delta \bar{t}} + \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}}}{\Delta \bar{r}} + D_{i,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{\bar{n}} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{\bar{n}}}{2\Delta \bar{z}} \right) = -\frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} - 2\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + \bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}}}{\bar{h}_i^2 (\Delta \bar{z})^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}_i^4} \frac{\bar{u}_{i,j+2}^{\bar{n}} - 4\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} + 5\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} - 2\bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}}}{(\Delta \bar{z})^4} \quad (4.90)$$

Pour  $2 \leq j \leq M-2$

$$R_e \left( \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}-1}}{\Delta \bar{t}} + \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}}}{\Delta \bar{r}} + D_{i,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{\bar{n}} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{\bar{n}}}{2\Delta \bar{z}} \right) = -\frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} - 2\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + \bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}}}{\bar{h}_i^2 (\Delta \bar{z})^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}_i^4} \frac{\bar{u}_{i,j+2}^{\bar{n}} - 4\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} + 6\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} - 4\bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}} + \bar{u}_{i,j-2}^{\bar{n}}}{(\Delta \bar{z})^4} \quad (4.91)$$

Pour  $j = M-1$

$$R_e \left( \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}-1}}{\Delta \bar{t}} + \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}}}{\Delta \bar{r}} + D_{i,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{\bar{n}} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{\bar{n}}}{2\Delta \bar{z}} \right) = -\frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} - 2\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + \bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}}}{\bar{h}_i^2 (\Delta \bar{z})^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}_i^4} \frac{\bar{u}_{i,j-2}^{\bar{n}} - 4\bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}} + 5\bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} - 2\bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}}}{(\Delta \bar{z})^4} \quad (4.92)$$

Après quelques opérations algébriques, le système d'équation à résoudre s'écrit :

Pour  $j = 1$

$$C'_i \bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}} + A'_{i,j} \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + C_i \bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} + L_i \bar{u}_{i,j+2}^{\bar{n}} = b_{i,j} \quad (4.93)$$

Pour  $2 \leq j \leq M-2$

$$L_i \bar{u}_{i,j-2}^{\bar{n}} + C_i \bar{u}_{i,j-1}^{\bar{n}} + A_{i,j} \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + C_i \bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} + L_i \bar{u}_{i,j+2}^{\bar{n}} = b_{i,j} \quad (4.94)$$

Pour  $j = M-1$

$$L_i \bar{u}_{i,j-2}^{\bar{n}} + C_i \bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} + A'_{i,j} \bar{u}_{i,j}^{\bar{n}} + C'_i \bar{u}_{i,j+1}^{\bar{n}} = b_{i,j} \quad (4.95)$$

où

$$L_i = \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}_i^4} \frac{1}{(\Delta \bar{z})^4}, \quad C_i = -\frac{1}{(\Delta \bar{z})^2} - 4L_i, \quad A_{i,j} = R_e \left( \frac{1}{\Delta \bar{t}} + \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}}}{\Delta \bar{r}} \right) + \frac{2}{(\bar{h}_i \Delta \bar{z})^2} + 6L_i$$

$$C'_i = C_i + 2L_i, \quad A'_{i,j} = A_{i,j} - L_i, \quad b_{i,j} = -R_e \left( \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}-1}}{\Delta \bar{t}} + \frac{\bar{u}_{i-1,j}^{\bar{n}^2}}{\Delta \bar{r}} + D_{i,j}^{\bar{n}} \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}^{\bar{n}} - \bar{u}_{i-1,j-1}^{\bar{n}}}{2\Delta \bar{z}} \right) - \frac{d\bar{p}}{dr}(i) \quad (4.96)$$

Le système d'équations algébriques est constitué de cinq diagonales, la résolution numérique est effectuée par une méthode itérative basée sur la méthode de Gauss-Seidel sur relaxée. Le champ de vitesse radiale  $\bar{u}$  correspondant à la section  $\bar{r}_i$  est ainsi obtenu pour un gradient radial de pression donné.

- Equation de continuité : calcul de  $\bar{w}$

La vitesse axiale  $\bar{w}$  pour la section  $\bar{r}_i$  est calculée à l'aide de l'équation de continuité (4.49) écrite sous forme discrétisée :

$$\bar{w}_{i,j}^n = \bar{w}_{i,j-1}^n - \Delta z \left( \bar{h}_i \left( \frac{\bar{u}_{i,j}^n}{r_i} + \frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i-1,j}^n}{\Delta r} \right) + \frac{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}}{\Delta r} \left( 1 - \bar{z}_j \right) \frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) \quad (4.97)$$

En partant de l'interface poreuse ( $j = 0$ ), où la vitesse axiale est donnée, l'équation ci-dessus nous permet de calculer la vitesse axiale de toute la section  $\bar{r}_i$  pour  $1 \leq j \leq M$ . La valeur de cette vitesse à la paroi supérieure doit être égale à la vitesse de celle-ci. Dans le cas contraire, il faut actualiser le gradient radial de pression dans une boucle du point fixe pour chercher le bon gradient. L'algorithme de résolution des équations RNSP se déroule comme suit :

A partir de l'axe de symétrie ( $i = 0$ ), on calcule pour chaque indice  $i$  toutes les inconnues  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{p}$  à partir de leurs valeurs pour les indices précédents et on incrémente ensuite sur  $i$ . Les calculs se poursuivent jusqu'au bord du film fluide ( $i = N$ ). Pour un indice  $i$  donné, on procède ainsi :

1. La valeur de  $\frac{d\bar{p}}{dr}$  est initialisée à partir de sa valeur pour  $i-1$ .
  2. L'équation de la conservation de quantité de mouvement (4.53) permet de calculer  $\bar{u}(i, j)$  en fonction des valeurs précédemment calculées de  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\frac{d\bar{p}}{dr}$ , en résolvant itérativement le système d'équations algébriques à 5 diagonales ((4.93), (4.94), (4.95)).
  3. L'équation de continuité (4.97) ainsi que la condition à la limite sur  $\bar{w}$  à l'interface film fluide – disque poreux permettent de calculer  $\bar{w}(i, j)$ . La condition à la limite sur la paroi supérieure (4.74) n'est alors pas forcément vérifiée.
  4. Il faut en conséquence trouver la valeur de  $\frac{d\bar{p}}{dr}$  qui permet d'obtenir  $\bar{w} = - \left| \frac{d\bar{g}}{dt} \right|$  sur la paroi supérieure. Une nouvelle estimation de cette valeur est alors calculée (itération du point fixe), puis les étapes 2 et 3 sont répétées jusqu'à ce que la condition à la limite (4.74) soit vérifiée.
- Calcul du champ de pression  $\bar{p}$

Après avoir calculé les deux composantes du vecteur vitesse et le gradient radial de pression dans toute l'épaisseur du film fluide, la distribution de la pression est calculée en utilisant un schéma aux différences finies décentrées avant :

$$\bar{p}_i = -\frac{2}{3}\Delta r \frac{d\bar{p}}{dr}(i) + \frac{4\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i+2}}{3} \quad (4.98)$$

avec  $\bar{p}_N = 0$  au bord du domaine de calcul.

#### 4.10.2 Discrétisations des équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées et de Poisson

Les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((4.54), (4.55)) et de Poisson (4.56) sont des équations aux dérivées partielles de second ordre de type elliptique. Un schéma centré d'ordre deux est utilisé pour toutes les dérivées spatiales sauf pour les termes convectifs où un schéma Upwind est employé, ce qui revient à décentrer les dérivées premières. Un schéma d'Euler implicite d'ordre un est utilisé pour les dérivées temporelles, schéma inconditionnellement stable.

Le système d'équations à résoudre est obtenu, après quelques opérations algébriques, en injectant les expressions des dérivées partielles discrétisées dans les équations du problème ((4.54), (4.55), (4.56)) :

$$\begin{aligned} B_0 \bar{u}_{i,j}^{*n} = & B_1 \bar{u}_{i,j}^{*n-1} + B_2 \bar{u}_{i-1,j}^{*n} + B_3 \bar{u}_{i+1,j}^{*n} + B_4 \bar{u}_{i,j-1}^{*n} + B_5 \bar{u}_{i,j+1}^{*n} \\ & + B_6 \left( \bar{u}_{i+1,j-1}^{*n} - \bar{u}_{i-1,j+1}^{*n} - \bar{u}_{i+1,j-1}^{*n} + \bar{u}_{i-1,j-1}^{*n} \right) \\ & - \frac{k}{h_0^2} \left( \frac{\bar{p}_{i+1,j}^{*n} - \bar{p}_{i-1,j}^{*n}}{2\Delta r} - B \frac{\bar{p}_{i,j+1}^{*n} - \bar{p}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} B'_0 \bar{w}_{i,j}^{*n} = & B'_1 \bar{w}_{i,j}^{*n-1} + B'_2 \bar{w}_{i-1,j}^{*n} + B'_3 \bar{w}_{i+1,j}^{*n} + B'_4 \bar{w}_{i,j-1}^{*n} + B'_5 \bar{w}_{i,j+1}^{*n} \\ & + B'_6 \left( \bar{w}_{i+1,j-1}^{*n} - \bar{w}_{i-1,j+1}^{*n} - \bar{w}_{i+1,j-1}^{*n} + \bar{w}_{i-1,j-1}^{*n} \right) \\ & - \frac{kR^2}{h_0^4 (g - \bar{h})} \frac{\bar{p}_{i,j+1}^{*n} - \bar{p}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} C_0 \bar{p}_{i,j}^{*n} = & C_1 \bar{p}_{i-1,j}^{*n} + C_2 \bar{p}_{i+1,j}^{*n} + C_3 \bar{p}_{i,j-1}^{*n} + C_4 \bar{p}_{i,j+1}^{*n} \\ & + C_5 \left( \bar{p}_{i+1,j-1}^{*n} - \bar{p}_{i-1,j+1}^{*n} - \bar{p}_{i+1,j-1}^{*n} + \bar{p}_{i-1,j-1}^{*n} \right) + C_6 \end{aligned} \quad (4.101)$$

avec

$$\begin{aligned} B_0 = & 1 + \frac{R_e k}{\phi h_0^2} \left( \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_{i,j}^{*n}}{\phi \Delta r} \right) + \frac{B}{\phi} \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{*n} - \bar{u}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right) + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i^2} + \frac{2B^2}{\Delta z^2} \right) \\ & + \frac{2k}{\phi h_0^2 (g - \bar{h})^2 \Delta z^2} + \frac{\rho C_f \sqrt{k} R V_0}{\mu h_0} \sqrt{\bar{u}_{i,j}^{*n 2} + \varepsilon^2 \bar{w}_{i,j}^{*n 2}} \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$B_1 = \frac{R_e k}{\phi h_0^2 \Delta t} \quad (4.103)$$

$$B_2 = \frac{R_e k}{\phi^2 h_0^2 \Delta r} u_{i,j}^{-*n} + \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (4.104)$$

$$B_3 = \frac{k}{\phi R^2} \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \quad (4.105)$$

$$B_4 = \frac{k}{\phi h_0^2} \left( -\frac{AR_e}{2\Delta z} + \varepsilon^2 \left( \frac{B^2}{\Delta z^{-2}} - \frac{C}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{(\bar{g} - \bar{h})^2 \Delta z^{-2}} \right) \quad (4.106)$$

$$B_5 = \frac{k}{\phi h_0^2} \left( \frac{AR_e}{2\Delta z} + \varepsilon^2 \left( \frac{B^2}{\Delta z^{-2}} - \frac{C}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{(\bar{g} - \bar{h})^2 \Delta z^{-2}} \right) \quad (4.107)$$

$$B_6 = -\frac{k}{\phi R^2} \frac{B}{2\Delta r \Delta z} \quad (4.108)$$

$$B'_0 = 1 + \frac{k}{\phi h_0^2} \left( R_e \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\phi(\bar{g} - \bar{h})} \frac{w_{i,j}^{-*n}}{\Delta z} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{2}{\Delta r^{-2}} + \frac{2B^2}{\Delta z^{-2}} \right) + \frac{2}{(\bar{g} - \bar{h})^2 \Delta z^{-2}} \right) \\ + \frac{\rho C_f \sqrt{k} R V_0}{\mu h_0} \sqrt{u_{i,j}^{-*n 2} + \varepsilon^2 w_{i,j}^{-*n 2}} \quad (4.109)$$

$$B'_1 = B_1 \quad (4.110)$$

$$B'_2 = B_2 \quad (4.111)$$

$$B'_3 = \frac{k}{\phi h_0^2} \left( -\frac{R_e}{\phi} \frac{u_{i,j}^{-*n}}{2\Delta r} + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \right) \right) \quad (4.112)$$

$$B'_4 = \frac{k}{\phi h_0^2} \left( \frac{A'R_e}{2\Delta z} + \varepsilon^2 \left( \frac{B^2}{\Delta z^{-2}} + \frac{C}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{(\bar{g} - \bar{h})^2 \Delta z^{-2}} \right) \quad (4.113)$$

$$B'_5 = \frac{k}{\phi h_0^2} \left( -R_e \left( \frac{A}{2\Delta z} + \frac{w_{i,j}^{-*n}}{\phi(\bar{g} - \bar{h}) \Delta z} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{B^2}{\Delta z^{-2}} - \frac{C}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{(\bar{g} - \bar{h})^2 \Delta z^{-2}} \right) \quad (4.114)$$

$$B'_6 = B_6 \quad (4.115)$$

$$C_0 = \frac{2}{\Delta r^{-2}} \frac{2}{\Delta z^{-2}} \left( B^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 (\bar{g} - \bar{h})^2} \right) \quad (4.116)$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} - \frac{1}{2r \Delta r} \quad (4.117)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta r^{-2}} + \frac{1}{2r \Delta r} \quad (4.118)$$

$$C_3 = -\frac{C}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^{-2}} \left( B^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 (\bar{g} - \bar{h})^2} \right) \quad (4.119)$$

$$C_4 = \frac{C}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \left( B^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 (\bar{g} - \bar{h})^2} \right) \quad (4.120)$$

$$C_5 = \frac{B}{2\Delta r \Delta z} \quad (4.121)$$

$$C_6 = \frac{R_e C_f R}{\sqrt{k}} \left( \frac{\bar{v}_{i+1,j}^{*n} - \bar{v}_{i-1,j}^{*n}}{2\Delta r} - \left( B \bar{u}_{i,j}^{*n} + \frac{\bar{w}_{i,j}^{*n}}{g-h} \right) \frac{\bar{v}_{i,j+1}^{*n} - \bar{v}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right) + \frac{R_e}{\phi^2} \left( \left( \frac{\bar{u}_{i+1,j}^{*n} - \bar{u}_{i-1,j}^{*n}}{2\Delta r} - B \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{*n} - \bar{u}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right)^2 + \left( \frac{\bar{u}_{i,j}^{*n}}{\Delta r} \right)^2 + \left( \frac{1}{g-h} \frac{\bar{w}_{i,j+1}^{*n} - \bar{w}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right)^2 \right) - \frac{2R_e}{(\bar{g} - \bar{h})\phi^2} \frac{\bar{u}_{i,j+1}^{*n} - \bar{u}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \left( \frac{\bar{w}_{i+1,j}^{*n} - \bar{w}_{i-1,j}^{*n}}{2\Delta r} - B \frac{\bar{w}_{i,j+1}^{*n} - \bar{w}_{i,j-1}^{*n}}{2\Delta z} \right)$$

où

$$A = \frac{1}{g-h} \left( \frac{\bar{w}}{\phi} + \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{V} \right) (1 + \bar{z}) \right), \quad A' = \frac{1 + \bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \frac{\bar{u}}{\phi} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{V} \right), \quad B = \frac{1}{g-h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} (1 + \bar{z})$$

$$C = \frac{1 + \bar{z}}{g-h} \left( \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial r^2} + \frac{2}{(\bar{g} - \bar{h})} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right), \quad \left| \bar{v} \right| = \sqrt{\bar{u}_{i,j}^{*n 2} + \varepsilon^2 \bar{w}_{i,j}^{*n 2}}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{R}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}$$

Le système d'équations algébriques ((4.99), (4.100) (4.101)) est fortement non linéaire, il est résolu par une méthode itérative de Gauss-Seidel avec un coefficient de sur-relaxation compte tenu des conditions initiales ((4.66), (4.67)) et aux limites imposées ((4.70), (4.71), (4.74), (4.75), (4.76), (4.78), (4.80), (4.81), (4.82), (4.83)). Le processus itératif commence par fixer arbitrairement un champ de vitesse et de pression dans le milieu poreux comme estimé initial, un meilleur choix est de prendre celui de l'itération globale précédente. Ce processus itératif est arrêté lorsque le critère suivant est vérifié :

$$\frac{\|\Phi^k - \Phi^{k-1}\|_2}{\|\Phi^{k-1}\|_2} \leq 10^{-6} \quad (4.123)$$

où  $\|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Phi_{i,j}^2}$  est la norme euclidienne,  $k$  est l'indice d'itération et  $\Phi$  représente  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$  et  $\bar{p}^*$ .

### 4.11 Algorithme de résolution

Rappelons qu'il existe deux grandes catégories de méthodes numériques pour résoudre un problème de couplage entre un fluide et un solide déformable :

- Les méthodes directes ou dites de couplage fort : elles s'appuient sur une formulation globale qui tient compte à la fois des problèmes fluide et solide. La discrétisation des équations est ensuite réalisée. Le système d'équations non

linéaires qui en découlent est résolu à l'aide de la méthode de Newton Raphson, qui permet de déterminer de manière simultanée les inconnues au sein du fluide et du solide.

- Les méthodes par partitionnement ou dites de couplage faible : elles consistent en une résolution alternative des problèmes fluide et solide.

Les méthodes directes sont en général difficiles à implémenter. Les méthodes par partitionnement sont par contre plus faciles à implémenter ; elles permettent de pouvoir réutiliser des codes existants et de modifier séparément les codes fluide ou solide afin de s'adapter à de nouveaux problèmes. Chaque sous problème est plus facile à résoudre que le problème global. Dans ce cas, le code relatif à chaque sous problème est utilisé successivement au sein d'une boucle jusqu'à ce qu'il y ait convergence vers une solution. On emploie alors le terme d'algorithme de point fixe. En ce qui nous concerne, nous utilisons ce type d'algorithme. Nous décrivons ci-après les étapes de déroulement de l'algorithme développé dans le cadre de cette étude (voir Figure 4.4).

Nous fixons au début les conditions initiales sur la vitesse ((4.63), (4.64), (4.66)) et sur la pression ((4.65), (4.67)). A chaque instant, nous calculons la vitesse de déplacement et la position du disque supérieur à partir de son équation de mouvement écrite à l'instant précédent par un schéma explicite en temps (4.58). Le processus itératif global commence par fixer un champ de pression au sein du film fluide, un meilleur estimé est de considérer celui de l'instant précédent. Ce champ de pression nous permet de calculer l'épaisseur du film fluide (4.61). La géométrie du disque poreux est donc connue, ce qui nous permet de résoudre les équations de Dracy-Brinkman-Forchheimer généralisées ((4.54), (4.55)) et de Poisson (4.56) par la méthode de Gauss-Seidel avec un coefficient de sur-relaxation égal à 1,95. Un nouveau champ de pression au sein du film fluide est ensuite calculé en résolvant les équations RNSP ((4.49), (4.53)) par la méthode inverse. Le test sur la convergence du processus itératif global est effectué sur la pression au sein du film fluide. Il est considéré atteint lorsque la norme relative de la différence entre les pressions obtenues pour deux itérations successives est inférieure à  $10^{-3}$ . Quelques itérations de 5 à 7 étaient suffisantes pour obtenir la convergence sur la solution. La charge (4.59) et le coefficient de frottement  $f$  (4.149) du contact lubrifié sont après calculés. Cette démarche de calcul est répétée pour chaque itération du temps d'écrasement jusqu'à atteindre une épaisseur minimale possible, au-delà de laquelle des problèmes numériques liés à la convergence apparaissent. Le choix d'un pas de temps petit  $\Delta t = 0,2$  a permis de réduire les erreurs de troncatures.

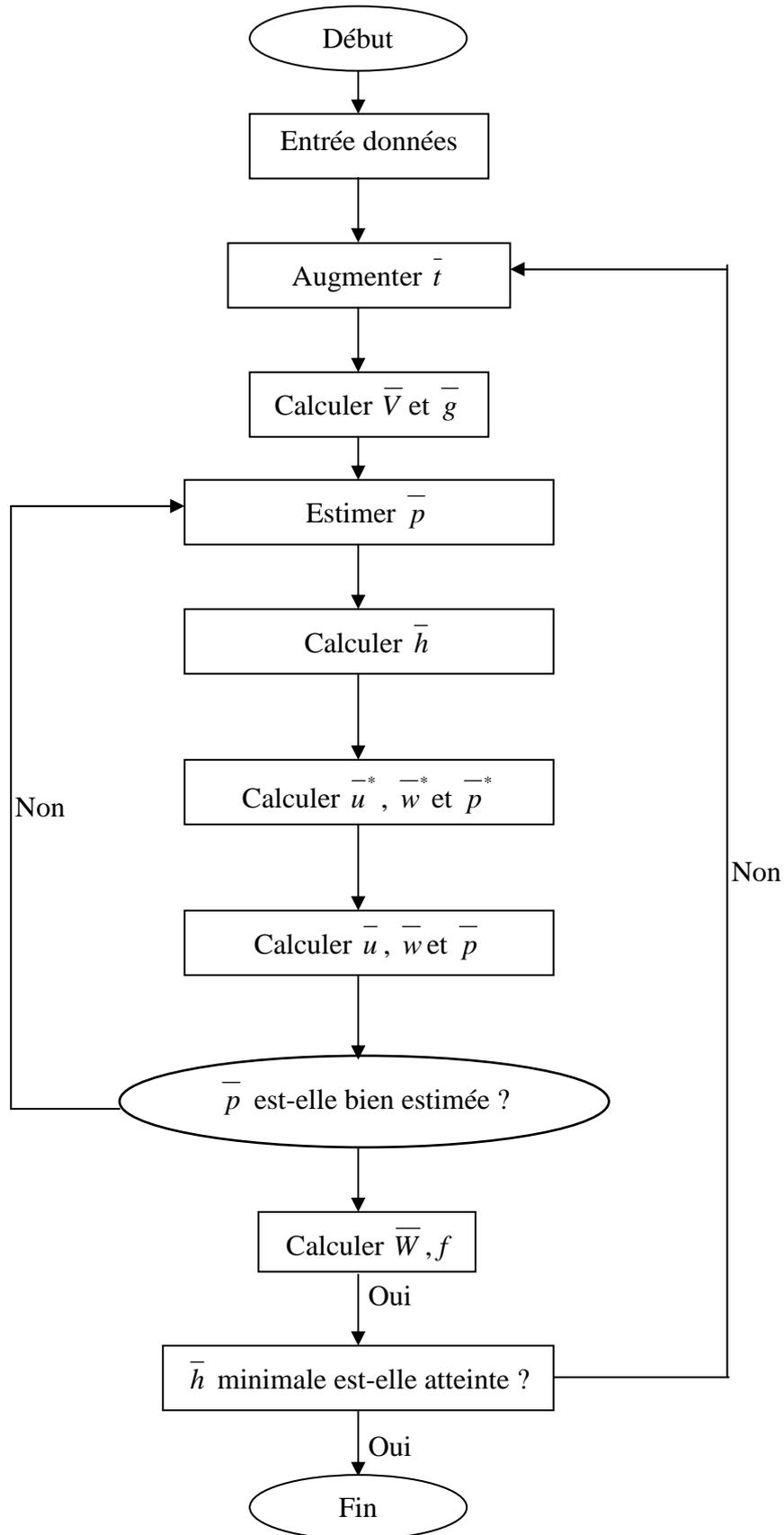


Figure 4.4 : Algorithme de résolution

## 4.12 Résultats et discussions

Le modèle numérique développé dans ce travail est utilisé pour étudier le comportement non-newtonien du lubrifiant, les effets des déformations élastiques de la couche poreuse et la perméabilité du milieu poreux sur les performances de l'écrasement du film fluide. Pour ce faire, nous faisons varier le paramètre de couple de contraintes qui est une propriété caractéristique du comportement non-newtonien du lubrifiant et le coefficient de complianc qui contrôle les déformations de la couche poreuse élastique. Nous nous intéressons en particulier à l'épaisseur du film lubrifiant et son coefficient de frottement, qui représentent deux performances conditionnant la durée de vie du mécanisme lubrifié. Les données ci-après sont utilisées dans cette étude.

Masse volumique du fluide (kg/m <sup>3</sup> )	900
Viscosité dynamique (Pa.s) à 20°C	0,1
Perméabilités du disque poreux (m <sup>2</sup> )	1,0 10 <sup>-15</sup>
Porosité du disque poreux	0,4
Epaisseur du disque poreux (mm)	1,6
Rayon des deux disques (mm)	40
Epaisseur initiale du film (mm)	1,2
Masse du disque supérieur (kg)	30
Module de Young (Mpa)	1,5
Coefficient de Poisson	0,4
Paramètre du couple de contrainte (Pa.s.m <sup>2</sup> )	5,76 10 <sup>-9</sup> 2,3 10 <sup>-8</sup>

Tableau 4.1 : Caractéristiques géométriques et physiques

Les résultats numériques sont bien entendu influencés par le maillage ; des tests sont effectués afin de s'assurer de son indépendance. Le nombre de points constituant les grilles du maillage est choisi de telle manière que l'erreur relative sur la pression maximale au sein du film fluide soit inférieure à 2%. Ce critère est satisfait avec un maillage de 41×21 pour le film fluide et le milieu poreux.

Sur les figures ci-après,  $l$  désigne  $\bar{l}$ .

### 4.12.1 Vitesse d'écrasement

La figure 4.5 montre l'influence du comportement non newtonien du lubrifiant et les effets de la déformation élastique de l'interface poreuse sur la vitesse d'écrasement sans dimension pour un paramètre de perméabilité  $\psi = \frac{kH}{h_0^3} = 9,2610^{-9}$ . Cette vitesse décroît très rapidement

aux premiers instants de l'écrasement, elle décroît ensuite très lentement. Le disque supérieur descend évidemment plus rapidement pour un lubrifiant newtonien. Plus le paramètre du couple de contraintes augmente et moins le disque supérieur descend vite. A part les premiers instants de l'écrasement, le disque descend moins rapidement lorsque le milieu poreux est déformable.

L'effet de la perméabilité du disque poreux est présenté sur la figure 4.6. La vitesse d'écrasement a des valeurs plus élevées comparativement au cas imperméable, cet écart augmente avec le temps d'écrasement.

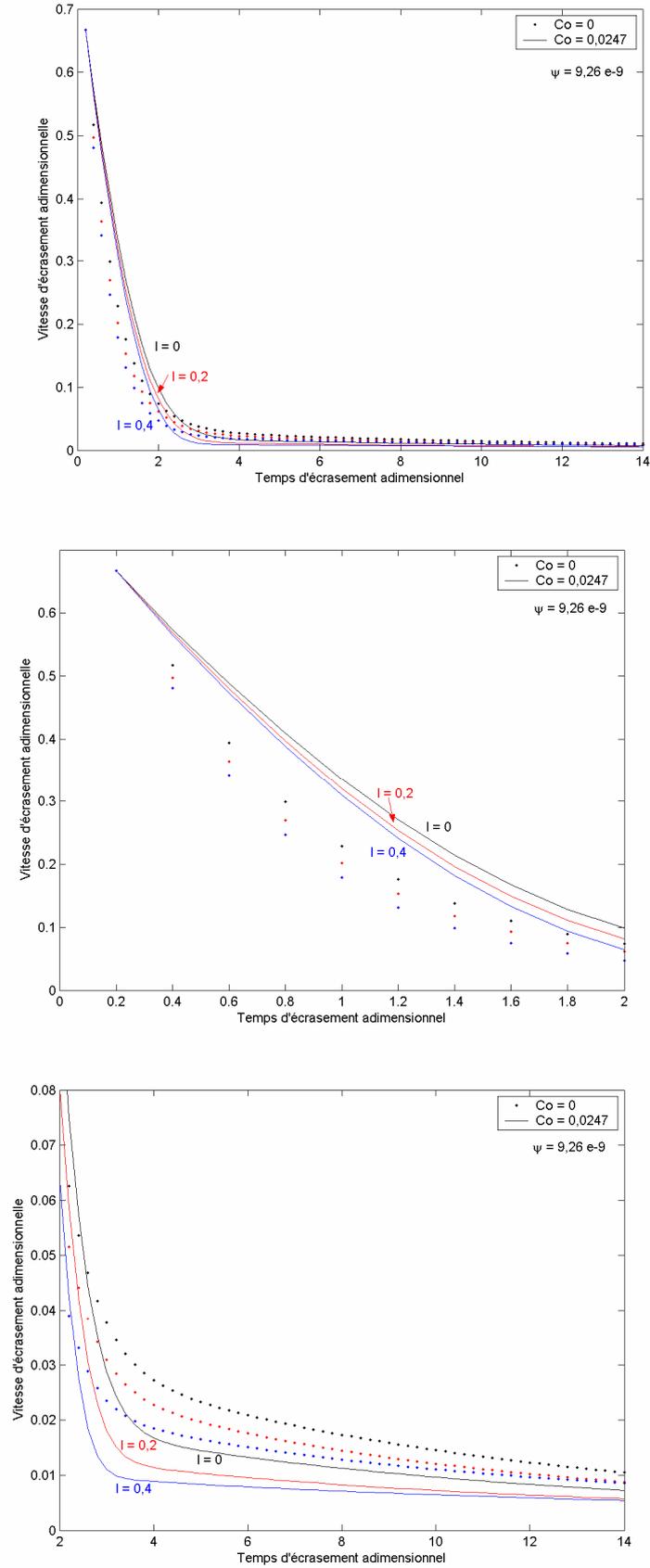


Figure 4.5 : Vitesse d'écrasement  $\left| \frac{d\bar{g}}{dt} \right|$  pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

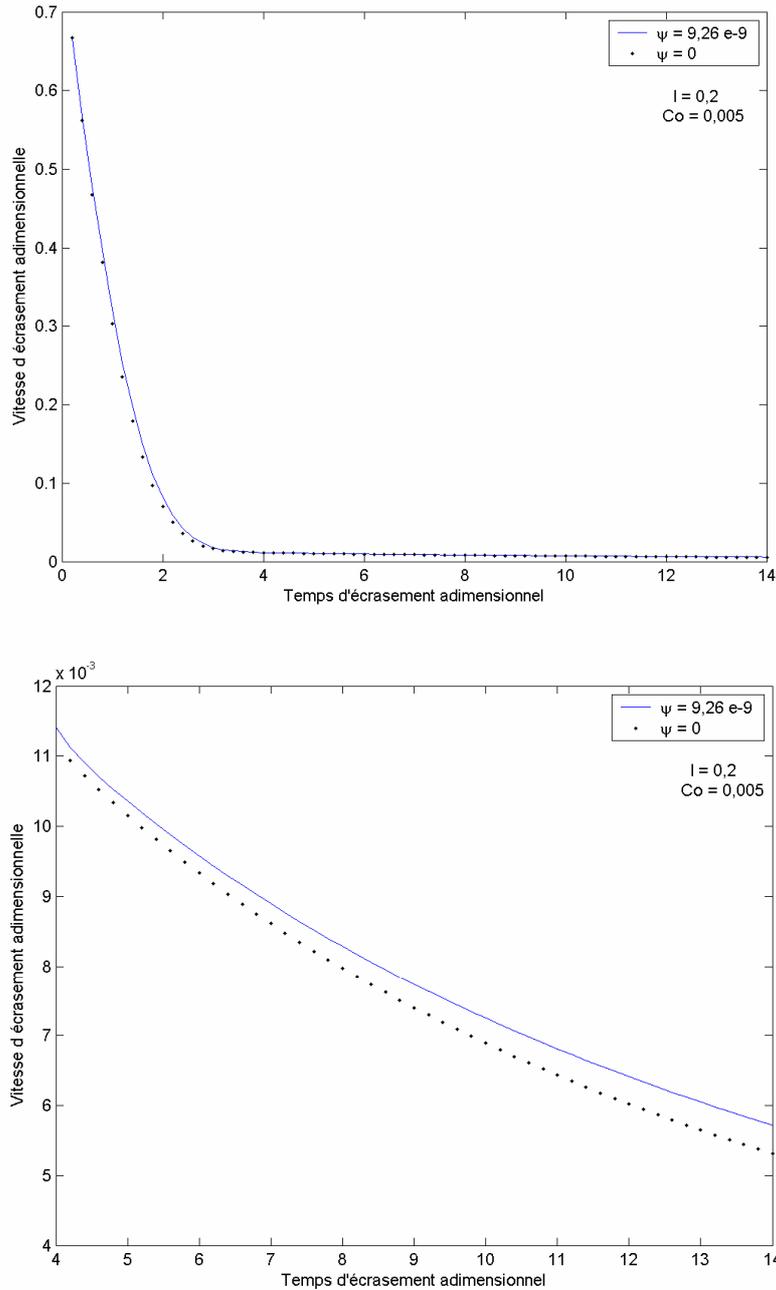


Figure 4.6 : Vitesse d'écrasement  $\left| \frac{d\bar{g}}{dt} \right|$  pour le cas  $\bar{l} = 0,2$

#### 4.12.2 Position de la surface écrasante

La figure 4.7 illustre l'évolution de la position sans dimension du disque supérieur par rapport au temps d'écrasement. Au début de l'écrasement, la diminution de la position du disque supérieur est très rapide mais elle devient ensuite moins importante. A un instant donné, le disque atteint une position plus faible et par conséquent parcourt une distance plus grande dans le cas du lubrifiant newtonien. Plus le paramètre du couple de contraintes augmente, plus le disque occupe une position plus grande. Ceci montre la forte résistance du lubrifiant non newtonien au mouvement du disque. Il faut par ailleurs noter que les effets de la déformation du disque poreux laissent le disque atteindre une position plus petite par rapport au cas rigide ; le disque trouve moins de résistance au mouvement lorsque le disque poreux est déformable.

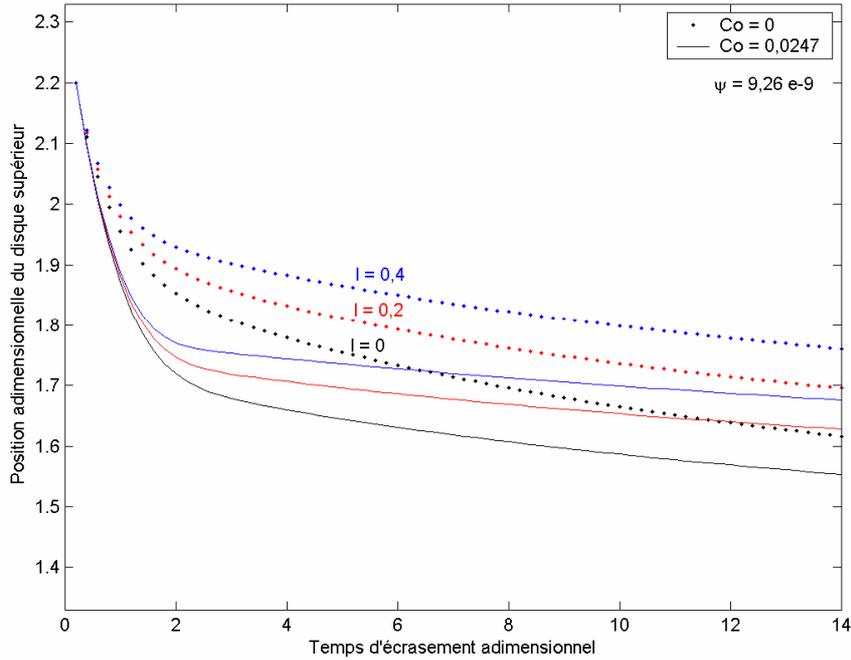


Figure 4.7 : Position du disque supérieur  $\bar{g} = \frac{g}{h_0}$  pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

Sur la figure 4.8, nous comparons la courbe de la position du disque avec le cas imperméable. A un instant donné, on observe que la perméabilité laisse le disque occuper une position plus faible.

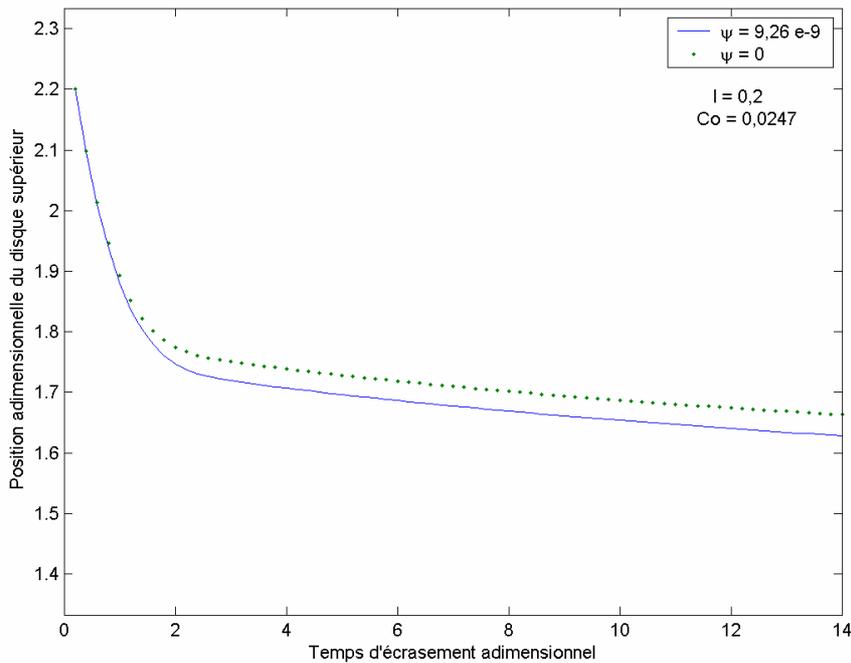


Figure 4.8 : Position du disque supérieur  $\bar{g} = \frac{g}{h_0}$  pour le cas  $\bar{l} = 0,2$

### 4.12.3 Pression dans le film fluide

La distribution radiale de la pression sans dimension dans le film fluide pour trois instants d'écrasement est présentée sur la figure 4.9. Elle est maximale sur l'axe de symétrie et diminue pour atteindre la valeur nulle à l'extrémité du contact. Les pressions hydrodynamiques les plus importantes restent donc concentrées au centre du contact. Elles sont observées au début de l'écrasement, la pression diminue ensuite légèrement avec le temps dans tout le film fluide. Il est également intéressant de connaître l'évolution de la pression avec la déformation de l'interface poreuse. En effet, la pression dans le film fluide est plus faible pour un disque poreux déformable comparativement au cas rigide, cet effet est plus important lors des premiers instants de l'écrasement.

Les effets non newtoniens et la comparaison avec le cas imperméable sur la distribution de la pression sans dimension dans le film fluide sont illustrés sur la figure 4.10. On constate que la pression est plus élevée dans tout le film fluide au début de l'écrasement si le lubrifiant utilisé est newtonien ; il doit générer plus de pression hydrodynamique pour amortir le mouvement du disque. Il est à noter par ailleurs que la présence du disque poreux fait augmenter la pression dans tout le film fluide bien entendu au début de l'écrasement. Cette évolution est contraire à celle constatée lorsque les effets d'inertie du disque supérieur en mouvement ne sont pas pris en considération, Figure 3.7. Cette pression diminue avec l'augmentation du paramètre de couple de contraintes. Cependant, ce dernier effet devient moins sensible lorsque le temps d'écrasement augmente (voir Figure 4.11).

### 4.12.4 Capacité de charge du film fluide

Nous présentons sur la figure 4.12 l'évolution de la capacité de charge pour trois lubrifiants ; elle diminue avec le temps d'écrasement. Au début de l'écrasement, la capacité de charge décroît très rapidement et devient ensuite presque constante. Le film newtonien engage plus d'effort pour équilibrer à la fois le poids et la force inertielle du disque à chaque instant de l'écrasement. Avec l'augmentation du couple de contraintes, la réaction du film non-newtonien diminue. Par ailleurs, on note que la déformation du milieu poreux fait augmenter la charge du film fluide au début de l'écrasement, et que cet effet est cependant inversé par la suite. Sur la figure 4.13, après les premiers instants du processus de l'écrasement, nous remarquons que la perméabilité a pour effet de diminuer légèrement la capacité de charge.

### 4.12.5 Epaisseur du film fluide

La distribution radiale de l'épaisseur du film fluide est illustrée sur la figure 4.14. A un instant donné, le film fluide a une épaisseur plus petite lorsque le disque poreux est déformable vu la faible position atteinte par le disque supérieur (voir Figure 4.7).

Les effets du couple de contraintes sur l'épaisseur du film et la comparaison avec le cas imperméable sont représentés sur la figure 4.15. A un instant donné, le lubrifiant newtonien possède l'épaisseur la plus faible. L'augmentation du paramètre de couple de contraintes fait augmenter significativement l'épaisseur du lubrifiant non newtonien à chaque instant de l'écrasement. Ce dernier résultat est très favorable pour la durée de vie du contact. Il est à noter enfin que la présence du disque poreux diminue l'épaisseur du film fluide quel que soit le lubrifiant considéré.

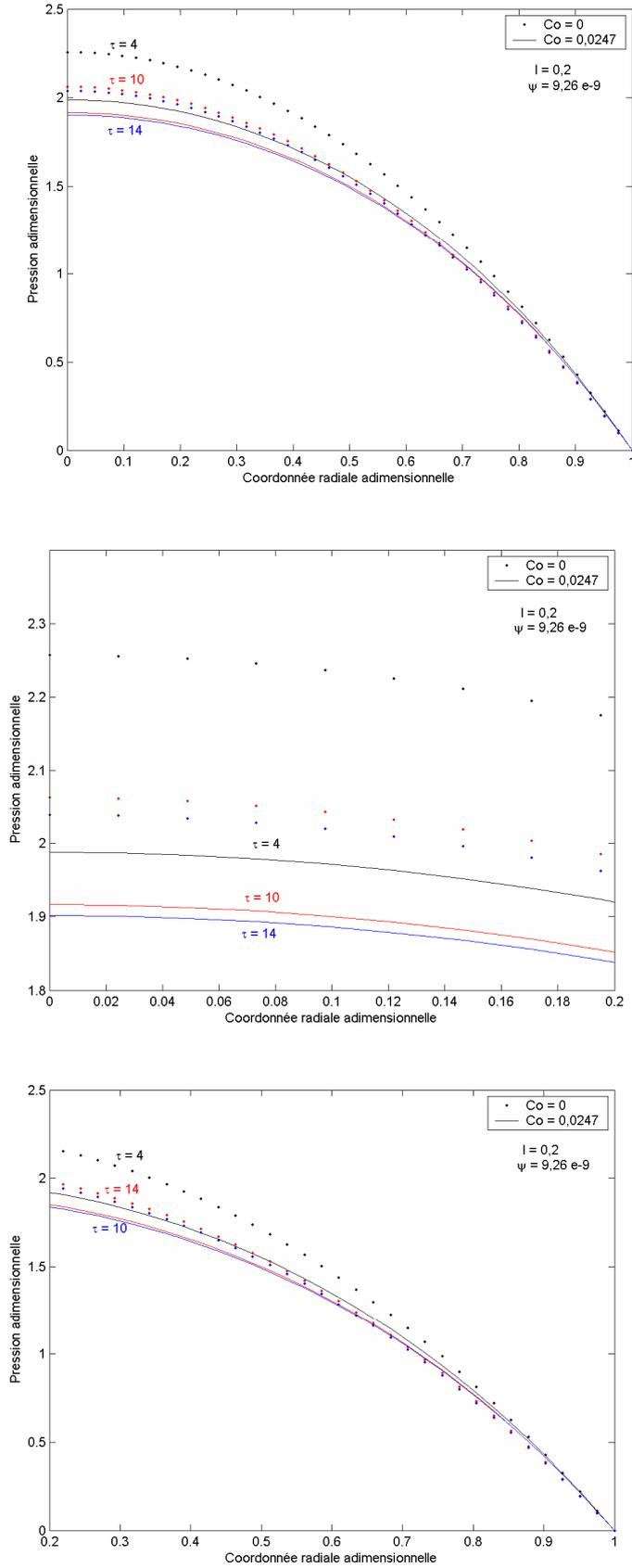


Figure 4.9 : Pression  $\bar{p}$  dans le film fluide pour différents instants d'écrasement  $\tau$  à  $\bar{l} = 0,2$ .  
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

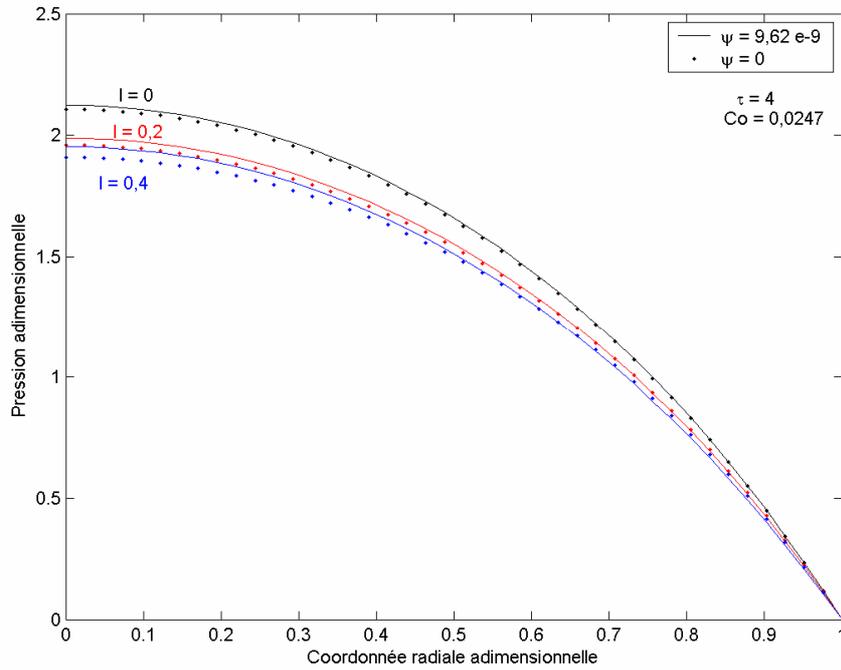


Figure 4.10 : Pression  $\bar{p}$  dans le film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 4$

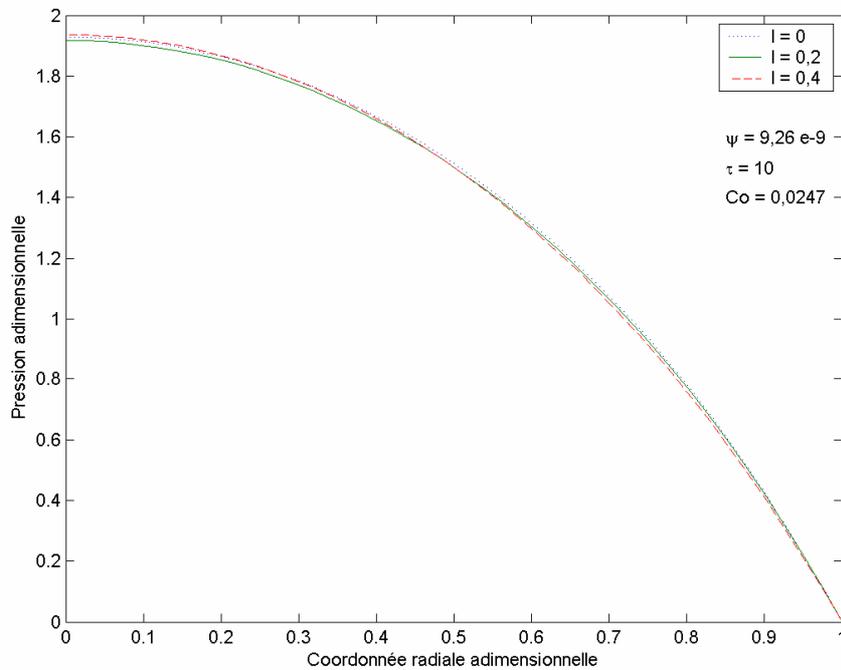


Figure 4.11 : Pression  $\bar{p}$  dans le film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 10$

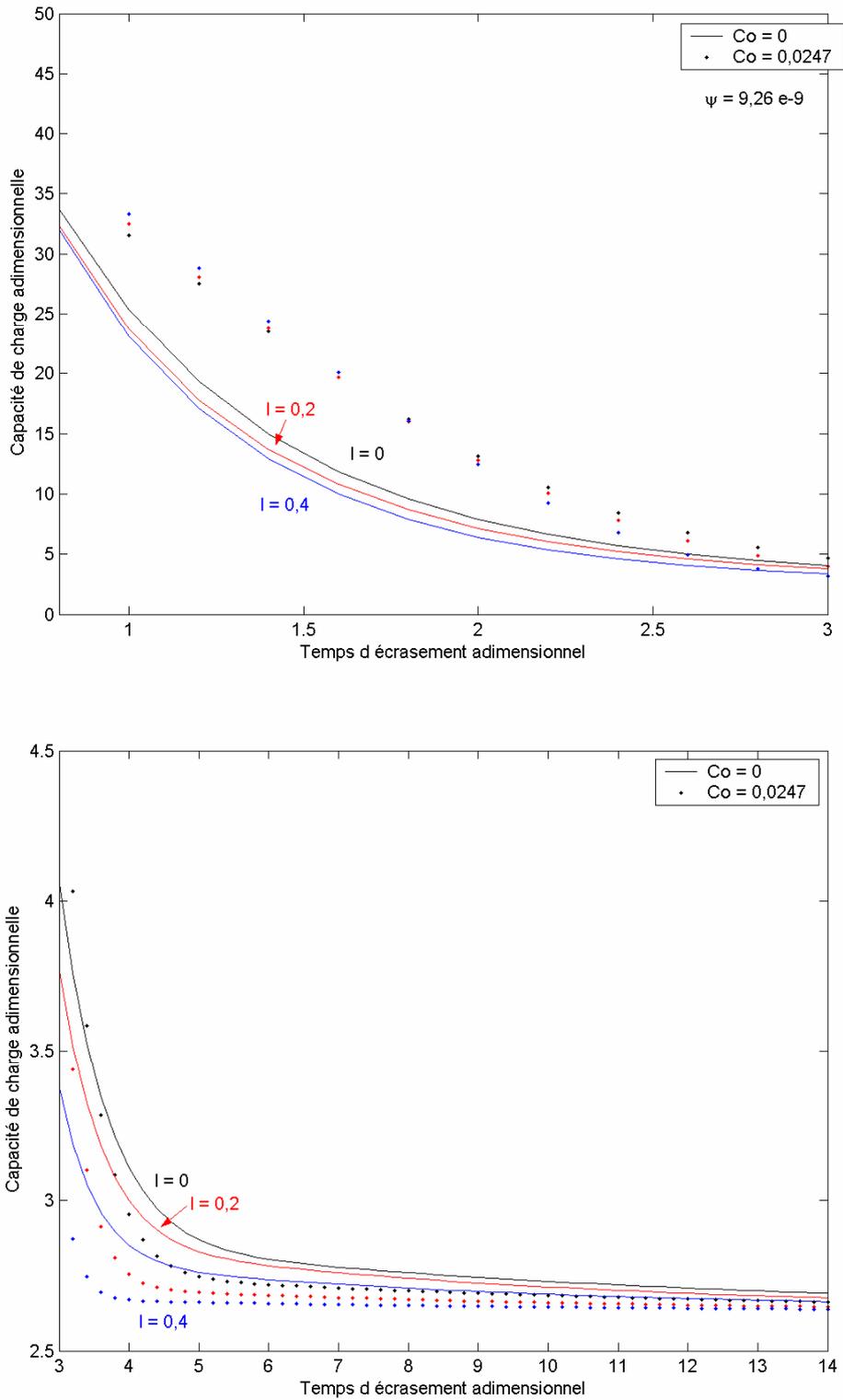


Figure 4.12 : Capacité de charge  $\bar{W}$  du film fluide pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

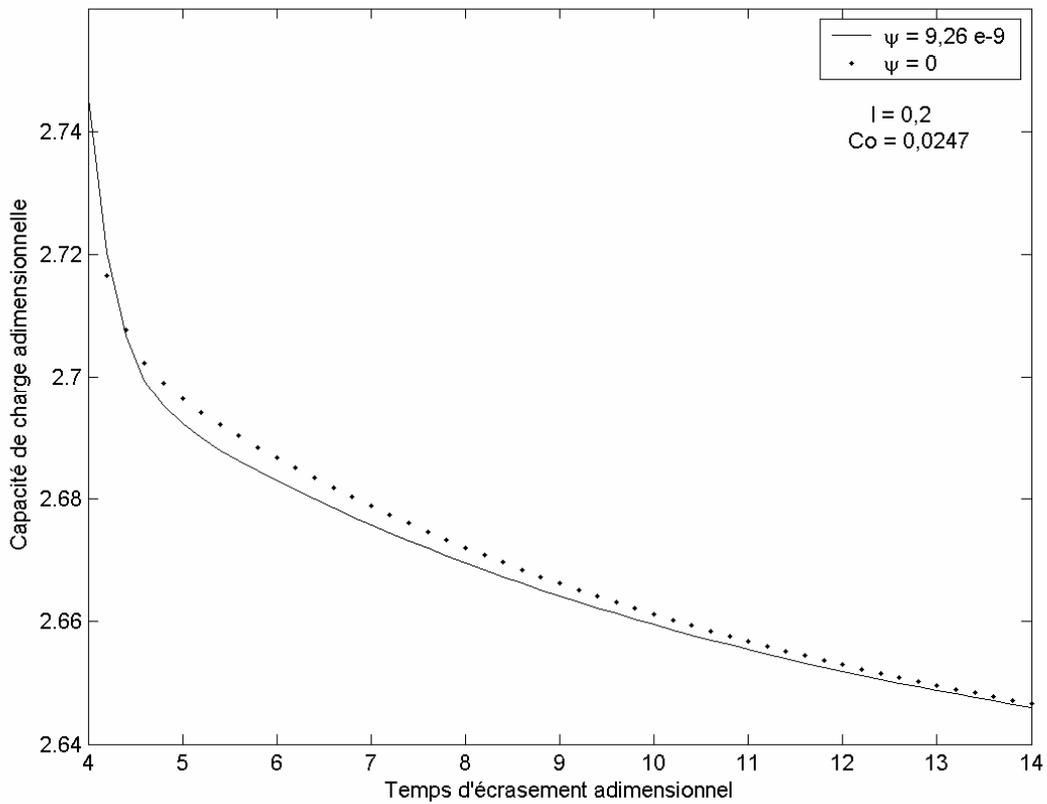
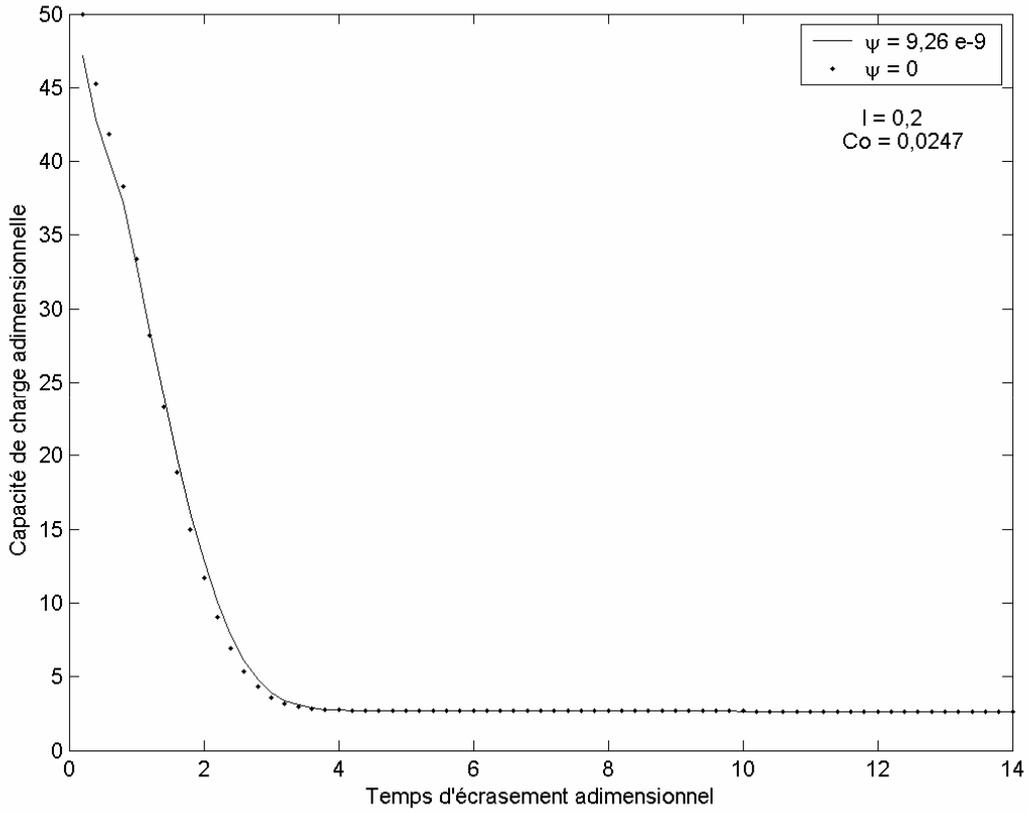


Figure 4.13 : Capacité de charge  $\bar{W}$  du film fluide à  $\bar{l} = 0,2$  : comparaison avec le cas imperméable

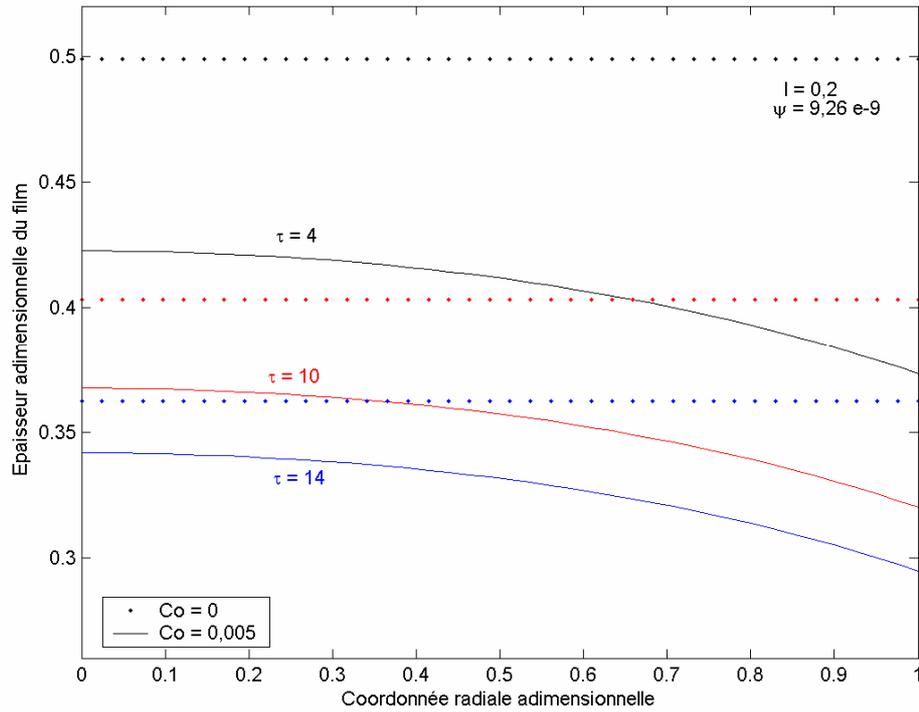


Figure 4.14 : Epaisseur du film fluide  $\bar{h}$  pour différents instants d'écrasement  $\tau$  à  $\bar{l} = 0,2$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

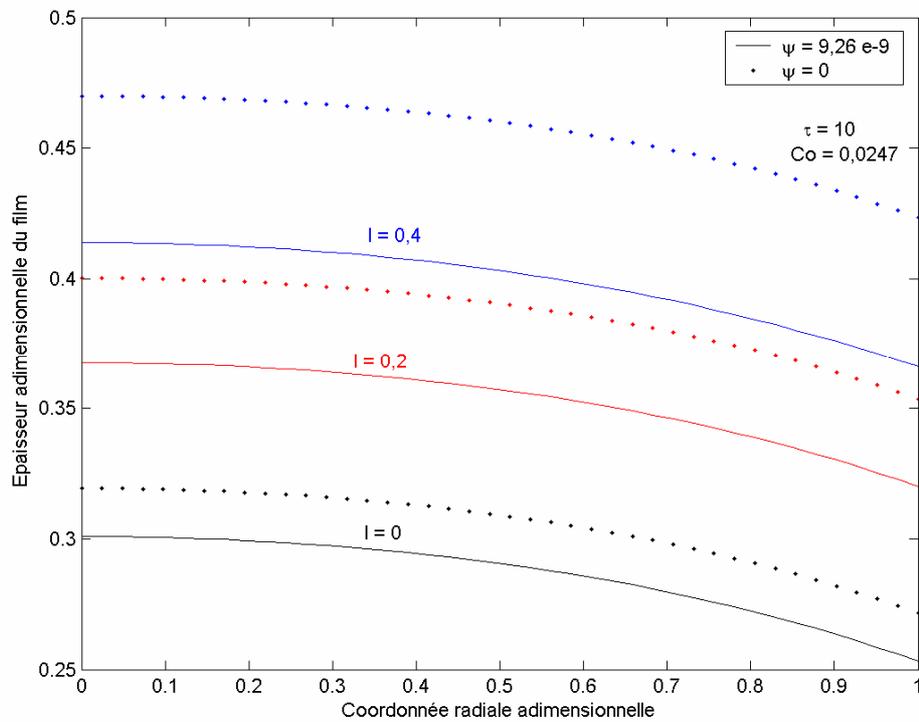


Figure 4.15 : Epaisseur du film fluide  $\bar{h}$  pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 10$

#### 4.12.6 Déformée de l'interface poreuse

La figure 4.16 montre que la déformée de l'interface poreuse est plus importante au début de l'écrasement, ceci est expliqué par les fortes pressions générées pendant cette phase. Cette déformée est maximale sur l'axe de symétrie du disque, elle décroît pour s'annuler à l'extrémité du contact. C'est une conséquence directe de la distribution de la pression dans le film fluide et donc de l'application du modèle de couche mince élastique.

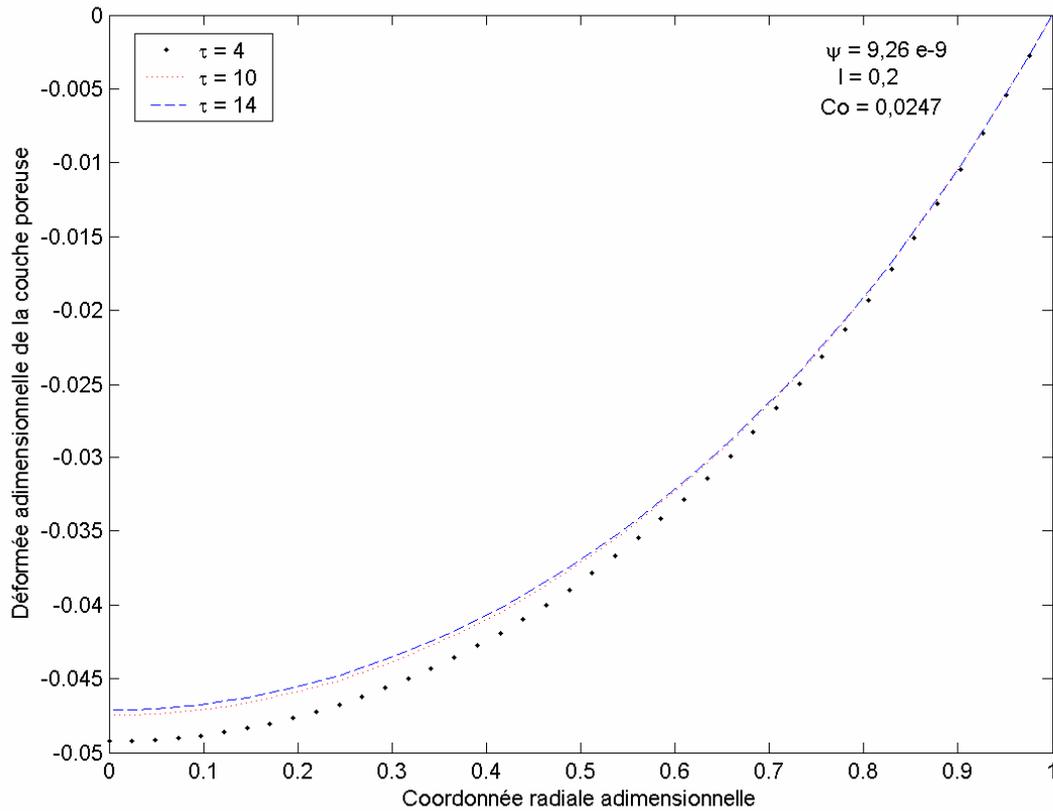


Figure 4.16 : Déformée  $\bar{\delta}$  de la couche poreuse pour différents instants d'écrasement  $\tau$  à  $\bar{l} = 0,2$

Les effets combinés du couple de contraintes et des déformations élastiques de la couche poreuse sur la déformée du milieu poreux sont présentés sur la figure 4.17. L'augmentation du paramètre du couple de contraintes n'est accompagnée d'aucune modification remarquable de la déformée de l'interface poreuse. Cette déformée augmente légèrement autour de la région centrale du film lorsque le disque est poreux (voir Figure 4.18).

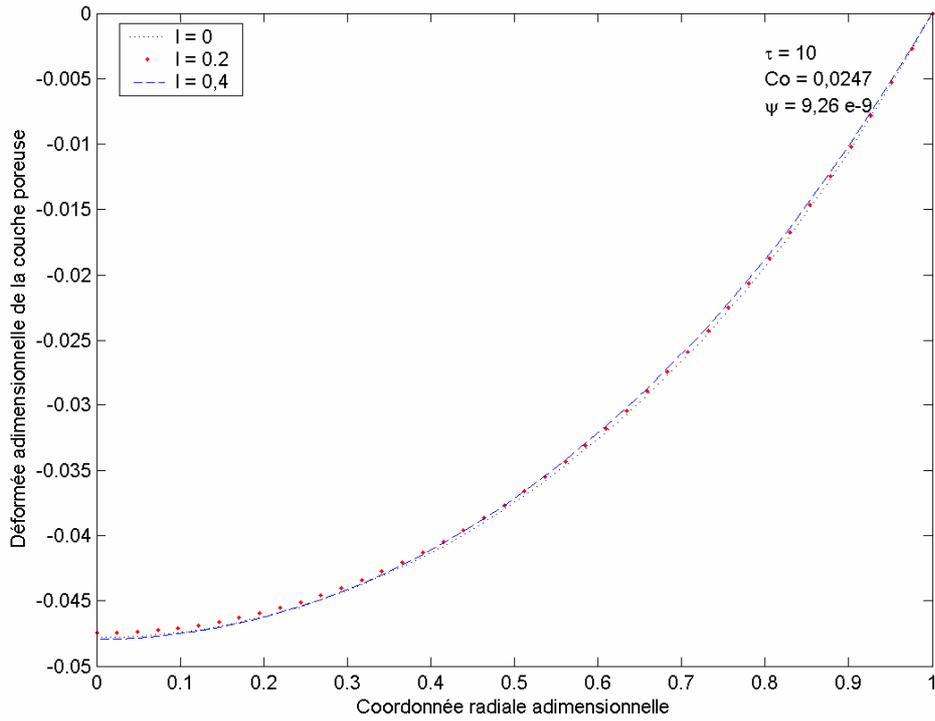


Figure 4.17 : Déformée  $\bar{\delta}$  de l'interface poreuse pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 10$

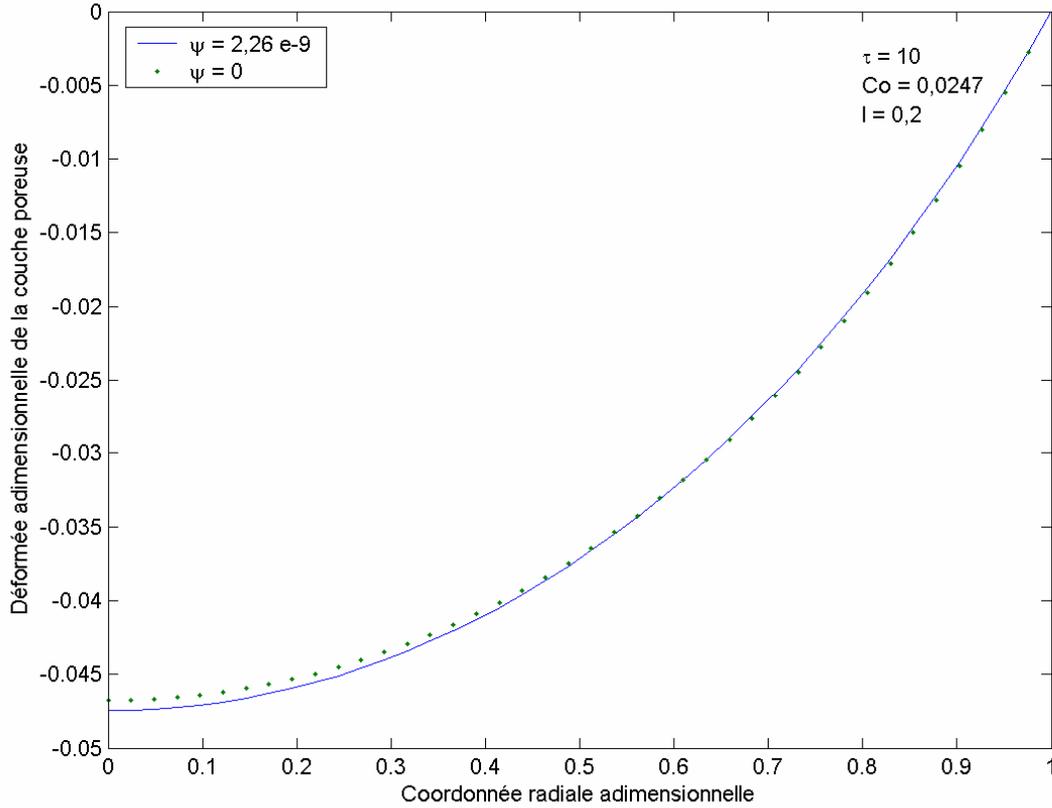


Figure 4.18 : Déformée  $\bar{\delta}$  de l'interface poreuse pour le cas  $\bar{l} = 0,2$  et à  $\tau = 10$

### 4.12.7 Vitesse radiale à la sortie du contact

Les figures 4.19 et 4.20 présentent les profils de la vitesse radiale à la sortie du contact qui ressemblent presque à des profils paraboliques dans le film fluide. Cette vitesse diminue avec le temps de l'écrasement (voir Figure 4.19). Nous constatons également que la déformation de l'interface poreuse, faisant augmenter l'espace offert au fluide, diminue le champ de vitesse.

La figure 4.20 montre que l'augmentation du paramètre du couple de contraintes génère une diminution de la vitesse radiale dans le film fluide, sauf dans une zone d'épaisseur très faible à proximité de l'interface poreuse où cet effet est inversé. Cet inversement peut être expliqué par le fait que la force de cisaillement, augmentée du terme de couple de contraintes, donne au film fluide plus de capacité à entraîner avec lui le fluide présent dans le milieu poreux. La présence du disque poreux conduit à une diminution de la vitesse radiale dans le film fluide.

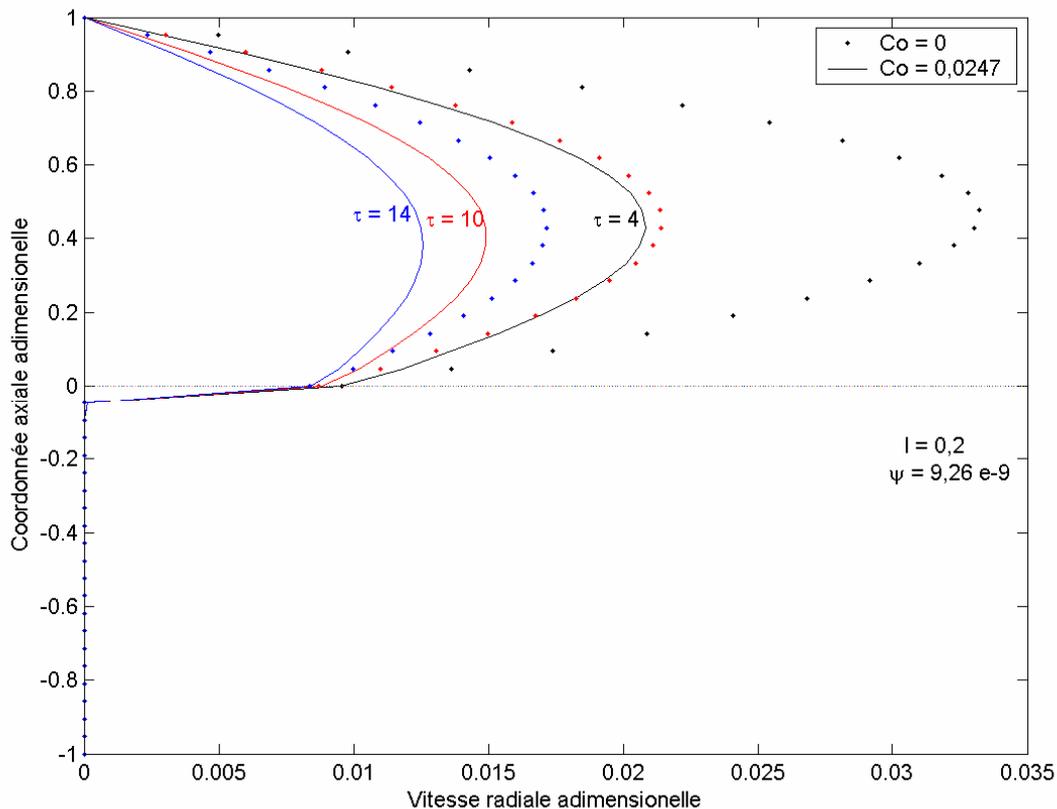


Figure 4.19 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour différents instants d'écrasement  $\tau$  à  $\bar{l} = 0,2$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

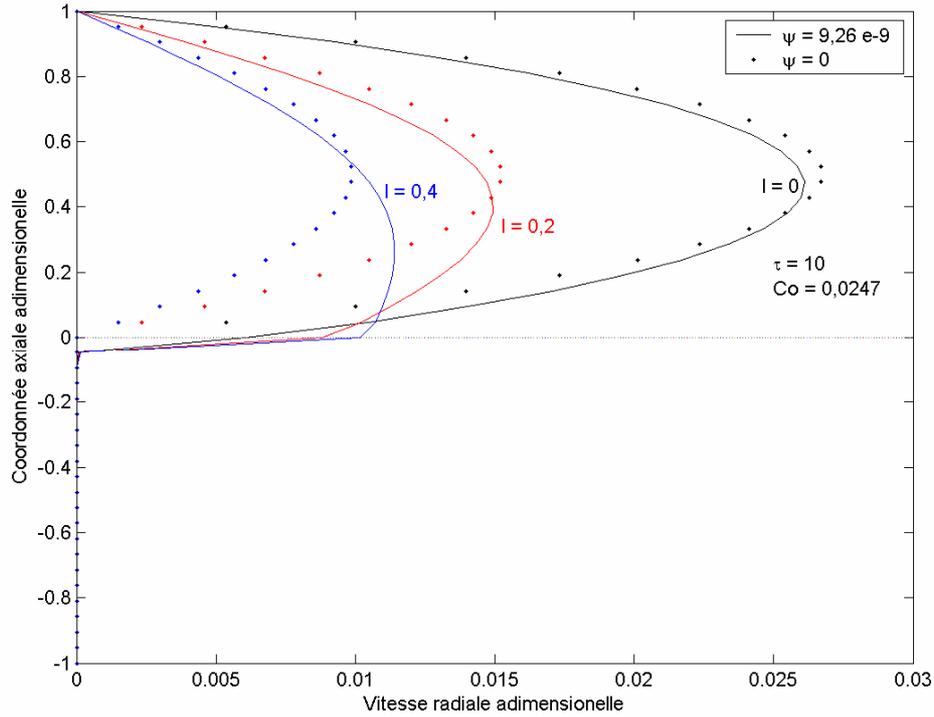


Figure 4.20 : Profil de la vitesse radiale  $\bar{u}$  à la sortie du contact pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$  à  $\tau = 10$  : comparaison avec le cas imperméable

#### 4.12.8 Débit volumique à la sortie du contact

Le débit volumique à travers une section radiale est donné par :

$$Q(r, t) = \int_0^g \int_{g-h}^{2\pi} u(r, z, t) dz r d\theta = 2\pi r \int_{g-h}^g u(r, z, t) dz \quad (4.124)$$

En forme adimensionnelle :

$$\bar{Q}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{Q}{Q_0} = 2\bar{r} \int_0^1 \bar{h}(\bar{r}, \bar{t}) \bar{u}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) d\bar{z} \quad (4.125)$$

où  $Q_0 = \pi R^2 V_0$  est le débit écrasé de référence.

En particulier à la sortie du contact  $\bar{r} = 1$ , on a :

$$\bar{Q}(\bar{r}, \bar{t}) = 2\bar{h}(\bar{r}, \bar{t}) \int_0^1 \bar{u}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) d\bar{z} \quad (4.126)$$

Les figures 4.21 et 4.22 illustrent l'évolution avec le temps d'écrasement du débit à la sortie du contact lubrifié. Le débit décroît très rapidement lors des premiers instants de l'écrasement, et commence ensuite à diminuer très lentement. Excepté les premiers instants de l'écrasement, le débit le plus faible évacué à la sortie correspond au lubrifiant non newtonien (voir Figure 4.21). Plus le paramètre de couple de contraintes augmente, plus le débit sortant est faible. Nous observons en outre que la déformation du disque poreux induit une diminution du débit évacué à travers la sortie du contact. Enfin, il est important de noter que la présence du disque poreux augmente ce débit du fluide à la sortie (voir Figure 4.22).

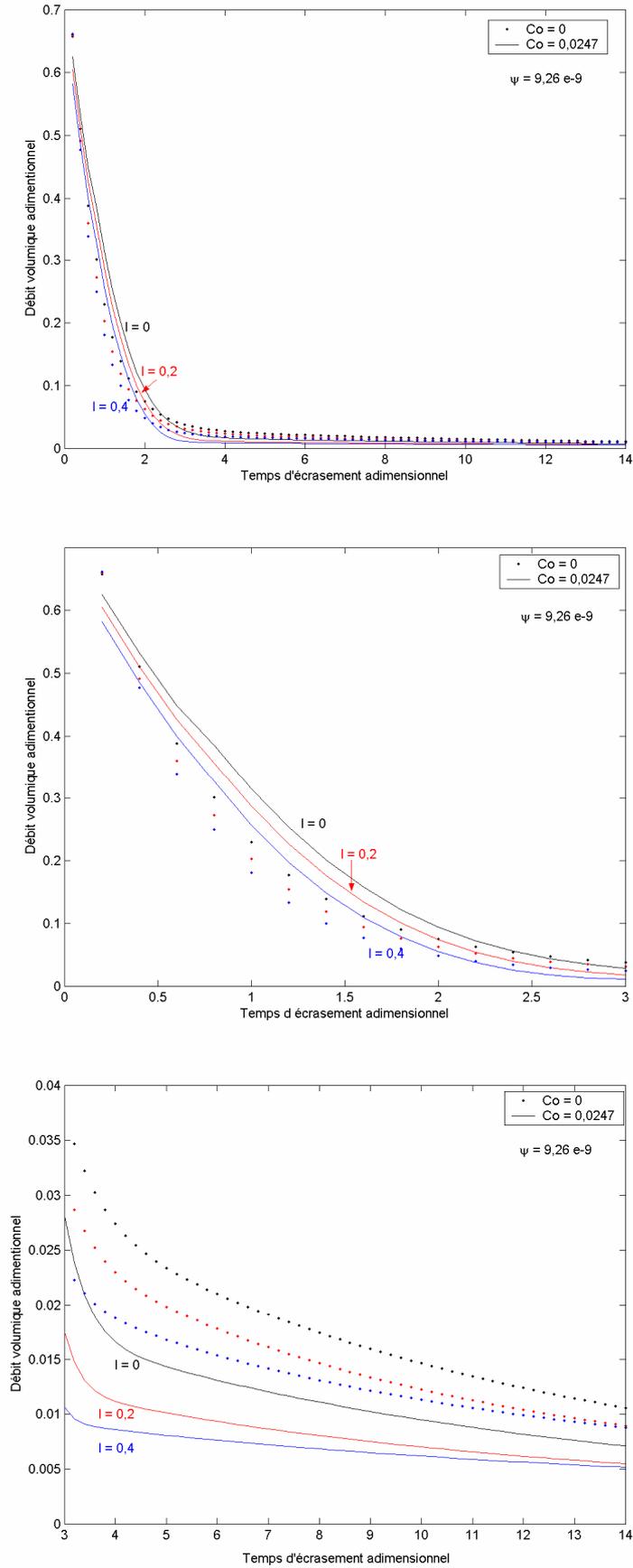


Figure 4.21 : Débit  $Q$  à la sortie du contact pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

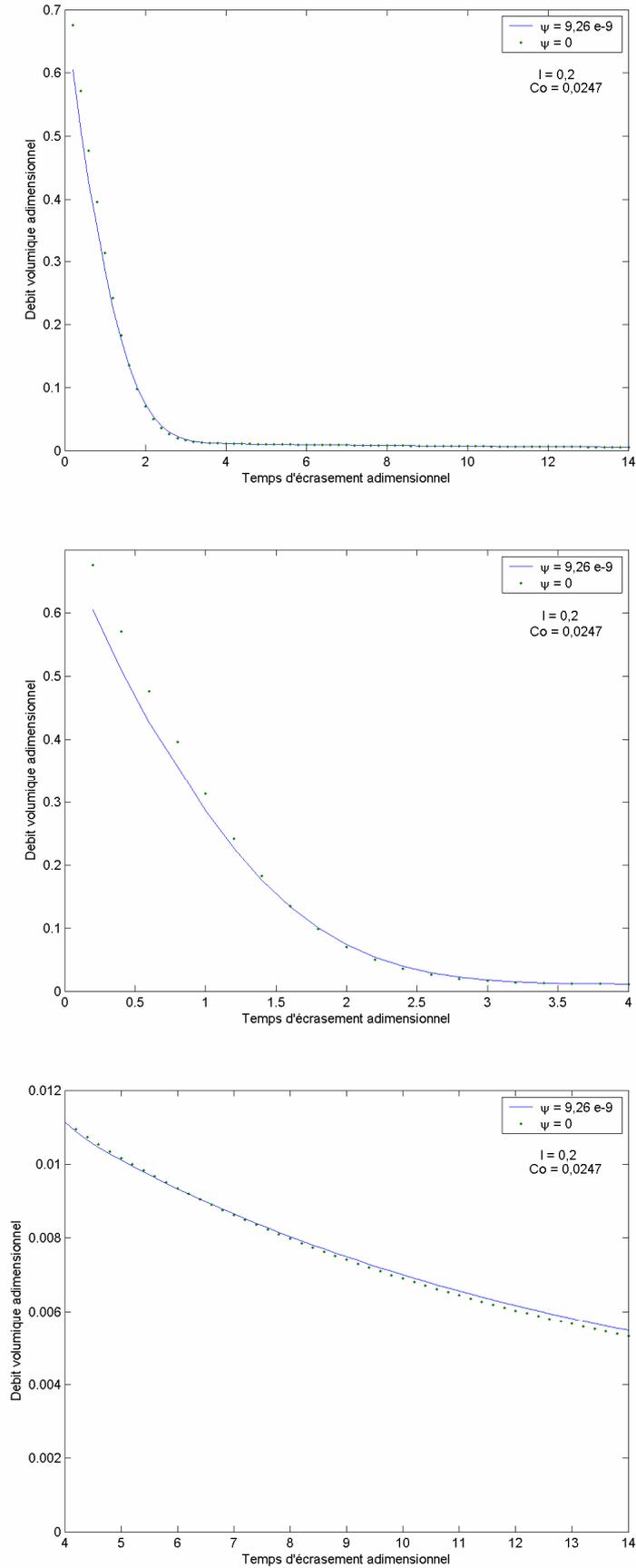


Figure 4.22 : Débit  $Q$  à la sortie du contact à  $\bar{l} = 0,2$  : comparaison avec le cas imperméable

### 4.12.9 Coefficient de frottement à l'interface film – milieu poreux

Le coefficient de frottement à l'interface film – milieu poreux est donné par :

$$f = \frac{\tau}{W} \quad (4.127)$$

où

$$\tau = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau_{rz} \Big|_{z=g-h} r d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=g-h} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=g-h} \right) r d\theta dr \quad (4.128)$$

En forme adimensionnelle :

$$f = \frac{h_0}{R} \frac{\bar{\tau}}{\bar{W}} \quad (4.129)$$

où

$$\bar{\tau} = 2\pi \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{h}^2} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z}^3} \Big|_{\bar{z}=0} \right) \frac{\bar{r}}{\bar{h}} d\bar{r} \quad (4.130)$$

et

$$\bar{W} = 2\pi \int_0^1 \bar{p} \bar{r} d\bar{r} \quad (4.131)$$

Les figures 4.23 et 4.24 illustrent l'évolution du coefficient de frottement du film lubrifiant à l'interface film – milieu poreux. Il augmente rapidement au début de l'écrasement, et commence ensuite à diminuer de façon très lente. Cette tendance a été prouvée expérimentalement par Wright et Dawson en 1976 [WRI76].

Le lubrifiant newtonien a un coefficient de frottement inférieur à celui des fluides à couple de contraintes (voir Figure 4.23). Plus le paramètre de couple de contraintes augmente et plus ce coefficient de frottement augmente, ce qui limite la durée de vie du contact. Par contre, la déformation du disque poreux diminue ce coefficient de frottement. Comparativement au cas imperméable, la présence du disque poreux déformable diminue le coefficient de frottement (voir Figure 4.24). Ces derniers résultats restent bien souhaités pour favoriser la durée de vie du mécanisme et le bon fonctionnement du contact.

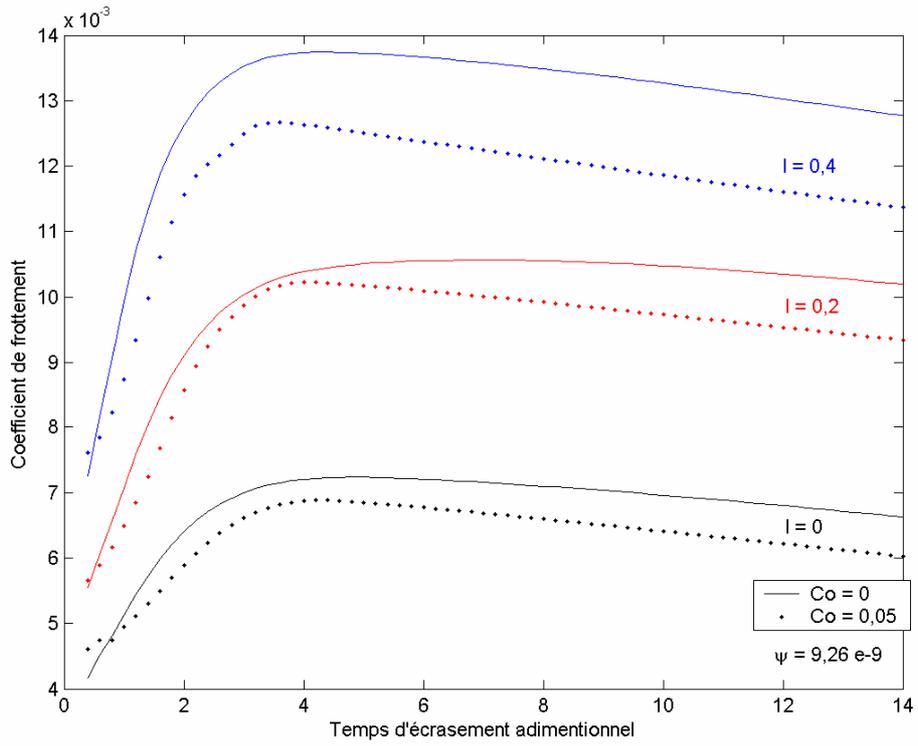


Figure 4.23 : Coefficient de frottement  $f$  pour différents paramètres de couple de contraintes  $\bar{l}$   
 $C_o = 0$  : couche poreuse rigide,  $C_o = 0,0247$  : couche poreuse déformable

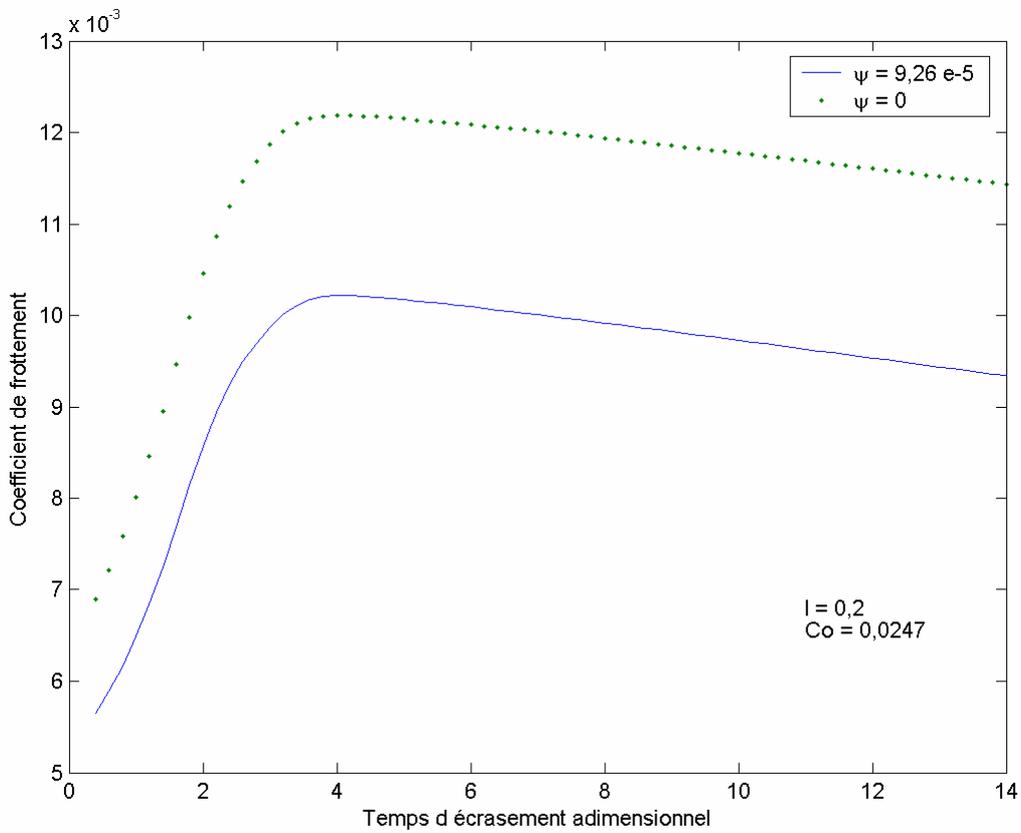


Figure 4.24 : Coefficient de frottement  $f$  à  $\bar{l} = 0,2$  :  
 Comparaison avec le cas imperméable

### 4.13 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'influence des effets non newtoniens et des déformations élastiques de l'interface poreuse sur les performances hydrodynamiques d'un contact PoroElastoHydrodynamique lubrifié par un fluide à couple de contraintes. Les équations de Navier-Stokes Réduites ont été écrites dans le film fluide avec un terme en plus qui tient compte de la présence du couple de contraintes. L'écoulement dans le disque poreux est décrit par les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer généralisées et de Poisson pour un fluide newtonien de viscosité dynamique égale à celle du lubrifiant du film fluide. Les déformations de l'interface poreuse sont calculées à l'aide du modèle de couche mince élastique. Toutes les équations du problème sont discrétisées par la méthode des différences finies. Chaque sous problème, film fluide et disque poreux, a été résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel sous relaxée. Le problème du couplage film fluide – disque poreux est résolu par la méthode itérative du point fixe.

La vitesse radiale et le débit volumique à la sortie du contact lubrifié, le champ de pression, la capacité de charge et les déformations élastiques de l'interface poreuse sont nettement influencés par les effets non newtoniens pour tout instant d'écrasement. En particulier, l'épaisseur du film fluide et le coefficient de frottement à l'interface poreuse constituent deux performances essentielles qui conditionnent la durée de vie du contact lubrifié. Ils subissent une augmentation avec l'accroissement de la valeur du couple de contraintes. Par contre, la perméabilité et les déformations élastiques au niveau de l'interface poreuse les réduisent.

# Conclusion générale

---

L'objectif principal de cette thèse était d'analyser le comportement de l'écrasement de films fluides à rhéologie complexe en présence d'un milieu poreux visant une application en biomécanique articulaire. Il s'agissait de mettre en place un nouveau modèle permettant la prise en compte à la fois du comportement non newtonien du lubrifiant, de la déformation du milieu poreux ainsi que de la complexité de l'écoulement au sein de ce dernier. Des géométries simples composées par deux disques circulaires et parallèles dont l'un est à face poreuse, pouvant modéliser un contact localisé au niveau du genou par exemple, ont été utilisées.

Pour ce faire, dans le premier chapitre, les définitions de base et les notions fondamentales relatives à l'écoulement d'un fluide au sein d'un milieu poreux sont rappelées. Différents modèles mathématiques d'écoulement ont été présentés. Le mécanisme de lubrification articulaire par effet d'écrasement des joints biologiques a été expliqué. La nature et le rôle du fluide synovial et du cartilage articulaire ont été par la suite présentés. Plusieurs modèles rhéologiques modélisant le comportement d'un fluide contenant des suspensions solides ont été rappelés. Une étude bibliographique mettant l'accent sur les principaux travaux de recherche sur l'écrasement de films en présence ou non d'un milieu poreux a été passée en revue.

Dans le deuxième chapitre, une simulation numérique des effets visqueux sur les caractéristiques de l'écrasement d'un film fluide newtonien entre deux disques circulaires et parallèles dont l'un est poreux a été effectuée. Cette étude est basée sur le couplage simultané entre l'équation de Reynolds modifiée régissant la distribution du champ de pression dans le film fluide et l'équation de Darcy-Brinkman tenant compte des forces visqueuses dans le milieu poreux. Ces équations aux dérivées partielles ont été discrétisées par la méthode des différences finies. La résolution du système d'équations algébriques obtenu a été basée sur la méthode itérative de Gauss Seidel avec coefficient de sur relaxation. Les résultats numériques obtenus ont montré que le rapport des viscosités effective et dynamique du fluide ainsi que sa variation ont un effet significatif et non négligeable sur les caractéristiques de l'écrasement, essentiellement pour les faibles valeurs de ce rapport. Les résultats prédits par le modèle de Darcy-Brinkman s'approchent de ceux issus du modèle de Darcy lorsque ce rapport des viscosités augmente. Ces effets visqueux diminuent le temps d'écrasement mais augmentent la vitesse d'écrasement, la vitesse radiale et la vitesse axiale du fluide comparativement au modèle de Darcy. En outre, ces effets deviennent plus marqués lorsque l'épaisseur du film fluide diminue.

Dans le troisième chapitre, une simulation numérique des effets d'inertie du fluide sur les caractéristiques de l'écrasement à vitesse constante d'un film fluide newtonien et pour la même configuration géométrique a été proposée. L'écoulement dans le disque poreux a été modélisé par un modèle généralisé qui permet la prise en compte des effets combinés de viscosité et d'inertie du fluide. Les équations de Navier-Stokes Réduites permettant la prise en compte de l'inertie du fluide dans le film ont été ainsi établies. Les équations aux dérivées partielles de ce modèle ont été discrétisées par la méthode numérique des différences finies à l'aide d'un schéma d'Euler implicite et résolues par la méthode itérative de Gauss – Seidel relaxée. Un algorithme de résolution numérique basé sur une résolution séquentielle des deux sous problèmes au sein d'un processus itératif global utilisant la méthode du point fixe a été développé. Les effets d'inertie sur les performances statiques et dynamiques du contact lubrifié lors de l'écrasement ont été analysés et discutés. Les résultats numériques ont mis en évidence l'importance de l'utilisation d'un modèle généralisé. Ces résultats ont montré que la présence

du disque poreux diminue les valeurs des performances du contact lubrifié. En outre, cette diminution devient plus marquée avec l'augmentation du temps d'écrasement. Nous avons enfin conclu que le modèle de Darcy, contrairement à un modèle basé sur la correction de Darcy-Forchheimer, prédit des valeurs plus élevées de ces performances comparativement au modèle généralisé.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire de thèse, les effets non newtoniens et la déformation du milieu poreux sur l'écrasement de film fluide dans une configuration géométrique identique ont été considérés. Les équations de Navier-Stokes Réduites pour fluides non newtoniens à couples de contraintes ont été établies. Une démarche basée sur le modèle de couche mince élastique pour calculer la déformée de l'interface poreuse a été proposée. Le modèle généralisé décrivant l'écoulement dans le milieu poreux a été utilisé. L'équation de mouvement du disque mobile a été ajoutée pour calculer la vitesse et donc la position de ce disque. Un nouvel algorithme de résolution numérique en différences finies basé sur un couplage qui consiste à résoudre les différentes équations du problème séparément et à établir une procédure itérative entre les solutions respectives a été développé. Les résultats issus de cette simulation numérique ont montré que les performances du contact lubrifié sont nettement influencées par les effets non newtoniens pour tout instant d'écrasement. En particulier, l'épaisseur du film fluide et le coefficient de frottement à l'interface poreuse constituent deux performances essentielles qui conditionnent la durée de vie du contact lubrifié. Ces deux caractéristiques subissent une augmentation lorsque la valeur du paramètre de couple de contraintes augmente. Par contre, la perméabilité et les déformations élastiques au niveau de l'interface poreuse les réduisent.

Enfin, notre thèse confirme l'intérêt majeur des recherches sur l'écrasement de films fluides à rhéologie complexe vu le nombre accru de ses applications dont figure en particulier la thématique de la biomécanique articulaire. Différentes perspectives à l'issue de cette thèse apparaissent envisageables.

Le modèle mis en place pour calculer les déformations élastiques du milieu poreux est basé sur l'hypothèse de couche mince. L'utilisation de ce modèle n'est donc qu'une première approximation simple qui permet de prendre en compte la déformation au niveau de l'interface poreuse. En plus, les calculs de l'écoulement et des déformations du milieu poreux sont effectués indépendamment l'un de l'autre. Une prise en compte de la nature poroélastique du cartilage à l'aide de la méthode d'homogénéisation serait donc souhaitable pour se rapprocher au mieux d'un modèle plus réaliste.

La surface du cartilage présente en réalité des rugosités de surfaces. L'effet de ces rugosités n'est plus négligeable lorsque l'épaisseur du film fluide sépare les surfaces du cartilage devient faible. La prise en compte de ces rugosités de surfaces est envisageable. L'utilisation de deux cartilages articulaires poroélastiques ayant des surfaces rugueuses approchant mieux la réalité plus complexe serait un sujet d'investigation.

Un banc d'essai expérimental qui permettrait de valider le modèle numérique développé lors de cette thèse est à concevoir.

# Bibliographie

---

- [ARI73] T.T. Ariman and N.D. Sylvester. Microcontinuum fluid mechanics, A review, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 11, No 8, p. 905-930, 1973.
- [ARI74] T.T Ariman and N.D., Sylvester. Application of micro continuum fluid mechanics, *International Journal of Engineering Scienc.*, Vol. 4, No 12, p. 273-293, 1974.
- [ARM79] C.G. Armstrong, A.S. Bahrani and D.L. Gardner. In vitro measurement of articular cartilage deformations in the intact human hip joint under load, *The Journal of Bone and Joint Surgery*, Vol. 61, No 5, p. 744-755, 1979.
- [BAI79] S. Bair and W.O. Winer. A rheological model for elastohydrodynamic contacts based on primary laboratory data, *Trans. of the ASME, Journal of Lub. Techn.*, Vol. 101, p. 258-265, 1979.
- [BAL70] E.A. Balazs. and D.A. Gibbs. The rheological properties and biological functions of hyaluronic acid, *Chemistry and Molecular Biology of the Intercellular Matrix*, E.A. Balazs ed., New York, Vol. 3, p. 1241–1253, 1970.
- [BEA72] J. Bear. Dynamics of Fluids in Porous Materials. *American Elsevier*, 1972.
- [BER90] N. Berme, A.E. Engin and K.M. Correia da silva. Biomechanics of normal and pathological human articulating joints, *NATO ASI Series*, Dordrecht / Boston / Lancaser : Martinus Nijhoff Publishers, No. 93, p. 375, 1990.
- [BIR84] R.B. Bird, R.C. Armstrong and O. Hassager. Dynamics of polymeric liquids, *Fluid Mechanics*, Vol. 1, Wily, New York, 1987.
- [BOR85] S.A. Bories. Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans le sous – sol, *La Houille Blanche*, Vol. 3, p. 312-219, 1985.
- [BOU94] B. Bou-Said and P. Ehret. Inertia and shear-thinning effect on bearing behavior with impulsive loads, *Journal of Tribology*, Vol. 116, No 3, p. 535-540, 1994.
- [BOU08] H. Boucherit, M. Lahmar and B. Bou-Saïd. Misalignment Effects on Steady-State and Dynamic Behavior of Compliant Journal Bearings Lubricated With Couple Stress Fluids, *Lubrication Science*, Wiley Inter-Science, Vol. 20, No 3, p. 241-268, 2008.
- [BRI47] H. C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Appl. Sci. Res.*, Vol. 1, No. 1, p. 27-34, 1947.
- [BRI80] R.B. Brid, P.J. Dotson and N.L. Johnson. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain mode, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 2-3, p. 213-235, 1980.
- [BUJ82] N.M. Bujurke and G. Jayaraman. The influence of couple stresses in squeeze films, *International journal of mechanical science*, Vol. 24, No 6, p. 369-376, 1982.

- [BUJ87] N.M. Bujurke, M. Jagadeeswar and P.S. Hiremath. Analysis of normal stress effects in a squeeze film porous bearings, *Wear*, Vol. 116, No. 2, p. 237-248, 1987.
- [BUJ89] N.M. Bujurke, M. Jagadeeswar and P.S. Hiremath. Analysis of squeeze film lubrication between two rectangular porous plates with a second-order fluid, *Wear*, Vol. 132, No. 2, p. 303-320, 1989.
- [BUJ90] N.M. Bujurke, S.G. Bhavi and N.B. Naduvinamani. The effect of couple stresses in squeeze film poro-elastic bearings with special reference to synovial joints, *Journal of Mathematical Medceine and Biology*, Vol. 7, No 4, p. 231-243, 1990.
- [BUJ91] N.M. Bujurke and H.P. Patil. An analysis of squeeze film action in porous layered bearings, *Wear*, Vol. 145, No. 2, p. 385-397, 1991.
- [BUJ06] N.M. Bujurke and R.B. Kudenatti. Surface roughness effects on squeeze film poroelastic bearings, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 174, No. 2, p. 1181-1195, 2006.
- [BUJ07a] N.M. Bujurke, C.S. Salimath, R.B. Kudenatti and S.C. Shiralashetti. Wavelet-multigrid analysis of squeeze film characteristics of poroelastic bearings, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 203, No. 1, p. 237-248, 2007.
- [BUJ07b] N.M. Bujurke, R.B. Kudenatti and V.B. Awati. Effects of surface roughness on squeeze film poroelastic bearings with special reference to synovial joints, *Mathematical Biosciences*, Vol. 209, No. 1, p. 76-89, 2007.
- [CAL03] R. Calvet. Le Sol, Propriétés et fonctions - Tome 2, Phénomènes physiques et chimiques, Applications agronomiques et environnementales, *Editions France Agricole*, 2003.
- [CAM87] A. Cameron. Basic Lubrication Theory, *Wiley Eastern Ltd*, New York, 1987.
- [CAR37] PC. Carman. Fluid flow through granular beds, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 15, No. 1, p. 150-166, 1937.
- [CHA09] DC. Chan, P.C. Neu and M.L. Hull. Articular cartilage deformation determined in an intact tibiofemoral joint by displacement-encoded imaging, *Magnetic Resonance in Medicine*, Vol. 61, No 4, p. 989-993, 2009.
- [CHU06a] H.M. Chu, W.L. Li and S.Y. Hu. Effects of couple stresses on pure squeeze EHL motion of circular contacts, *Journal of Mechanics*, Vol. 22, No 1, p. 77-84, 2006.
- [CHU06b] H.M Chu, W.L. Li and M.D. Chen. Elastohydrodynamic lubrication of circular contacts at pure squeeze motion with non-Newtonian lubricants, *Tribology international*, Vol. 39, No 9, p. 897-905, 2006.

- [CHU08] H.M. Chu., W.L. Li, Y.P. Chang and H.C. Huang. Effects of couple stress on elastohydrodynamic lubrication at impact loading, *Journal of Tribology.*, Vol. 130, No 1, p. 11010 (8 pages), 2008.
- [COL60] B.D. Coleman and W. Noll. An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 6, p. 355-270, 1960.
- [CON01] B.P. Conrad. The effects of glucosamine and chondroitine on the viscosity of synovial fluid in patients with osteoarthritis, *Thesis of Master of Engineering*, University of Florida, 2001.
- [DAR56] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon, *Victor Dalmont*, Paris, 1856.
- [DOW70] D. Dowson, A. Unsworth and V. Wright. Analysis of boosted lubrication in human joints, *J. Mec. Eng. Sci.*, Vol. 12, p. 364-369, 1970.
- [DOW86] D. Dowson and Z.M. Jin. Micro-elastohydrodynamic lubrication of synovial joints, *Engineering in Medicine*, Vol. 15 , p. 63-65, 1986.
- [DOW89] D. Dowson and Z.M. Jin. On tribology, *Proc. 16th Leeds Symp.*, (Amsterdam): Elsevier, p. 263-271, 1989.
- [DOW90] D. Dowson and J.Q. Yao. A full solution to the problem of film thickness prediction in natural synovial joints, In *Mechanics of Coatings, Proceedings of 16th Leeds/Lyon Symposium on Tribology*, Lyon 1989, Amsterdam: Elsevier, p. 91-102, 1990.
- [DOW92] D. Dowson and Z.M. Jin. Micro-elastohydrodynamic lubrication of low elastic modulus solids on rigid substrates, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 25, No 1A, p. A116-A123, 1992.
- [EHR93] P. Ehret, Contribution à l'étude du comportement de mécanismes lubrifiés sous chargements transitoires, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 1993.
- [EIN56] A. Einstein. Investigations on the theory of the Brownian movement, *Dover Publications*, New York, 1956.
- [ELS01a] A.A. Elsharkawy and L.H. Guedouar. Hydrodynamic lubrication of porous journal bearings using a modified Brinkman-extended Darcy model, *Tribology International*, Vol. 34, No 11, p. 767-777, 2001.
- [ELS01b] A.A. Elsharkawy and L.H. Guedouar. An inverse solution for finite journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology International*, Vol. 34, No 2, p. 107-118, 2001.
- [ELS03] A.A. Elsharkawy. Effects of misalignment on the performance of flexible porous journal bearings, *Tribology Transactions*, Vol. 46, No 1, p. 119-127, 2003.

- [ERG52] S. Ergun. Fluid flow through packed columns, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 48, No 2, p. 89-94, 1952.
- [ERI66] A.C. Eringen. Theory for micropolar fluids, *J. Math. Mech.*, Vol. 16, No. 1, p. 1-16, 1966.
- [FEI66] R.S. Fein. Are synovial joints squeeze film lubricated? *Proc. of Mech. Eng.*, Vol. 181, No 3J, p. 125-128, 1966.
- [FOR01] P. Forchheimer. Wasserbewegung durch bodem. *Z. Ver. Deutsch. Ing.*, Vol. 45, p. 1782-1788, 1901.
- [FRE90] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe et M. Godet. Lubrification hydrodynamique : paliers et butées, *Collection de la Direction des Etudes et Recherche d'Electricité de France*, No 72, Editions Eyrolles, 1990.
- [FRE03] B.J. Fregly, Y. Beia and M.E. Sylvestera. Experimental evaluation of an elastic foundation model to predict contact pressures in knee replacements, *Journal of Biomechanics*, Vol. 36, No 11, p. 1659-1668, 2003.
- [FUJ05] K. Fujimura, N. Segami, Y. Yoshitake, N. Tsuruoka, K. Kaneyama, J. Sato and S. Kobayashi. Electrophoretic separation of the synovial fluid proteins in patients with temporomandibular joint disorders, *Oral Surgery, Oral Medicine, Oral Pathology, Oral Radiology, and Endodontology*, Vol. 101, No 4, p. 463-468, 2005.
- [FUN93] Y.C. Fung. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, 2nd ed., *Springer*, New York, p. 234-238, 1993.
- [FUR97] M.J. Furey and B.M. Burkhardt. Biotribology: Friction, wear and lubrication of natural synovial joints, *Lubrication Science*, Vol. 9, No 3, p. 256-791, 1997.
- [GAR96] D.K. Gartling, C.E. Hickox, and R.C. Givler. Simulation of coupled viscous and porous flow problems, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 7, No 1, p. 23-48, 1996.
- [GUY01] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit. Hydrodynamique physique, *EDP Sciences / CNRS Editions*, Paris, 2001.
- [HIG65] G.R. Higginson. The theoretical effects of elastic deformation on the bearing liner on journal bearing performance, *Proc. of the Symposium on the elastohydrodynamic lubrication*, Instn. Mech. Engrs., Vol. 180, Part 3B, p. 31-38, 1965.
- [HIG74] G.R. Higginson and R. Norman. The lubrication of porous elastic solids with reference to the functioning if humain joints, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 16, No 4, p. 250-257, 1974.
- [HLA93a] M. Hlaváček. The role of synovial fluid filtration by cartilage in lubrication of synovial joints–I. Mixture model of synovial fluid, *Journal of Biomechanics*, Vol. 26, No. 10, p. 1145-1150, 1993.

- [HLA93b] M. Hlaváček. The role of synovial fluid filtration by cartilage in lubrication of synovial joints–II. Squeeze-film lubrication: Homogeneous filtration, *Journal of Biomechanics*, Vol. 26, No. 10, p. 1151-1160, 1993.
- [HLA95a] M. Hlavacek. The role of synovial fluid filtration by cartilage in lubrication of synovial joints–III. Squeeze-film lubrication: axial symmetry under low loading conditions, *Journal of Biomechanics*, Vol. 28, No 10, p. 1193-1195, 1995.
- [HLA95b] M. Hlavacek. The role of synovial fluid filtration by cartilage in lubrication of synovial joints–IV. Squeeze-film lubrication: the central film thickness for normal and inflammatory synovial fluids for axial symmetry under high loading conditions, *Journal of Biomechanics*, Vol. 28, No 10, p. 1199-1205, 1995.
- [HLA99] M. Hlavacek. Lubrication of the human ankle joint in walking with the synovial fluid filtrated by the cartilage with the surface zone worn out: steady pure sliding motion, *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, No 10, p.1059-1069, 1999.
- [HLA00] M. Hlavacek. Squeeze-film lubrication of the human ankle joint with synovial fluid filtrated by articular cartilage with the superficial zone worn out, *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, No 11, p. 1415-1422, 2000.
- [HLA02] M. Hlavacek. The influence of the acetabular labrum seal intact articular superficial zone and synovial fluid thixotropy on squeeze-film lubrication of spherical synovial joint, *Journal of Biomechanics*, Vol. 35, No 10, p. 1325-1335, 2002.
- [HOU92] J.S. Hou, V.C. Mow, W.M. Lai and M.H. Holmes. An analysis of the squeeze-film lubrication mechanics for articular cartilage, *J. Biomechanics*, Vol. 25, No 3, p. 247-259, 1992.
- [HSU90] C.T. Hsu and P. Cheng. Thermal dispersion in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, p. 1587-1597, 1990.
- [JAF07] M.J. Jaffar. Squeeze films between a rigid cylinder and an elastic layer bonded to a rigid foundation, *Tribology International*, Vol. 40, No 3, p. 567-572, 2007.
- [JAK62] J.D. Jackson. A study of squeeze flow, *Applied Scientific Research*, Vol. 11, No 1, p. 148-152, 1962.
- [JAG01] M. Jagatia, D. Jalali-Vahid and Z.M. Jin. Elastohydrodynamic lubrication analysis of ultra-high molecular weight polyethylene hip joint replacements under squeeze-film motion, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, Professional Engineering Publishing, Vol. 215, No 2, 2001.
- [JAN91] J.D. Janssen. Theoretical analysys of squeeze films. *Technische Universiteit Eindhoven*, p. 40, 1991.
- [JIN92] Z.M. Jin, D. Dowson and J. Fisher. The effect of porosity of articular cartilage on the lubrication of a normal human hip joint, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, Vol. 206, No H3, p. 117–124, 1992.

- [JUR06] P. Jurczak. Pressure distribution in a squeeze film biobearing lubrication by a synovial fluid, *In. J. of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 11, No 4, p. 857-864, 2006.
- [KAM96] M.T. Kamel and M.H. Hamdan. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 80, No 1, p. 33-41, 1996.
- [KAV95] M. Kaviany. Principles of heat transfer in porous media, *Springer*, 1995.
- [KIN66] R.G. King. A rheological measurement of three synovial fluids, *Rheol. Acta*, Vol. 5, No 1, p. 41-44, 1966.
- [KOP83] J. Koplik, H. Levine and A. Zee. Viscosity renormalization in the Brinkman equation, *Phys. Fluids*, Vol. 26, No 10, p. 2864-2870, 1983.
- [KRA04] W.E. Krause, K.M.N. Oates and R.H. Colby. Hyaluronan's role in a synovial fluid: a rheological investigation, *Transactions: Seventh World Biomaterials Congress*, p. 147, 2004.
- [KUZ67] D.C. Kuzma. Fluid inertia effects in squeeze film, *Applied Scientific Research*, Vol. 18, No 1, p. 15-20, 1967.
- [LAH02] M. Lahmar, A. Belbah et D. Nicolas. Effets des déformations élastiques des revêtements de surface sur le comportement dynamique et la stabilité des paliers hydrodynamiques, *Revue Matériaux et Techniques*, Vol. 90, No 11-12, p. 17-30, 2002.
- [LAI98] W.M Lai., W.Y Gu. And V.C. Mow. On the conditional equivalence of chemical loading and mechanical loading on articular cartilage, *Journal of Biomechanics*, Vol. 31, No 12, p. 1181-1185, 1998.
- [LAR94] R. Larsson and E. Höglund. Elastohydrodynamic lubrication at pure squeeze motion, *Wear*, Vol. 179, No 1-2, p. 39-43, 1994.
- [LIN96a] J.R. Lin. Couple-stress effects on the squeeze film characteristics of hemispherical bearings with reference to synovial joints, *International Journal of Mechanics and Engineering*, Vol. 1, No 2, p. 317-332, 1996.
- [LIN96b] J.R. Lin. Viscous shear effects on the squeeze film behaviour in porous circular discs, *Int. J. Mech. Sc.*, Vol. 38, No. 4, p. 373-384, 1996.
- [LIN96c] J.R. Lin, C.C. Hwang and R.F. Yang. Hydrodynamic lubrication of long, flexible, porous journal bearings using the Brinkman model, *Wear*, Vol. 198, No 1-2, p. 156-164. 1996.
- [LIN97] J.R. Lin. Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology International*, Vol. 30, No. 1, p. 53-58, 1997.
- [LIN98] J.R. Lin. Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple-stress fluid model, *Tribology International*, Vol. 31, No 4, p. 201-207, 1998.

- [LIN00] J.R. Lin. Squeeze film characteristics between a sphere and a flat plate: couple stress fluid model, *Computers and Structures*, Vol. 75, No 1, p. 73-80, 2000.
- [LIN01a] J.R. Lin, C.B. Yang and R.F. Lu. Effects of couple stresses in the cyclic squeeze films of finite partial journal bearings, *Tribology international*, Vol. 34, No 2, p. 119-125, 2001.
- [LIN01b] J.R. Lin. Optimal design of one-dimensional porous slider bearing using the Brinkman model, *Tribology International*, Vol. 34, No 1, p. 57-64, 2001.
- [LIN03] J.R. Lin, R.F. Lu, and T. B. Chang. Derivation of dynamic couple-stress Reynold's equation of sliding-squeezing surfaces and numerical solution of plane inclined slider bearings, *Tribology International*, Vol. 36, No 9, p. 679-685, 2003.
- [LIN04a] J.R. Lin, W.H. Liao and C.R. Hung. The effects of couple stresses in the squeeze film characteristics between a cylinder and a plane surface, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 12, No 2, p. 119-123, 2004.
- [LIN04b] J.R. Lin, R.F. Lu, W.H. Liao and C.C. Kuo. Effects of couple stresses and convective inertia forces in parallel circular squeeze-film plates, *Industrial Lubrication and Tribology*, Vol. 56, No 6, p. 318-323, 2004.
- [LIU05] S. Liu and J.H. Masliyah. Dispersion in porous media, *Handbook of Porous Media (ed. K. Vafai)*, 2nd ed., CRC Press, Taylor and Francis, Boca Raton, p. 81-140, 2005.
- [LIU07] H. Liu, P.R. Patil and U. Narusawa. On Darcy-Brinkman equation: viscous flow between two parallel plates packed with regular square arrays of cylinders, *Entropy*, Vol. 9, p. 118-131, 2007.
- [LIN06] J.R. Lin, C.R. Hung and R.F. Lu. Averaging inertia principle for non-Newtonian squeeze films in wide parallel plates: couple stress fluids, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 14, No. 4, p. 218-224, 2006.
- [LIN07] J.R. Lin and C.R. Huang. Combined effects of non-Newtonian couple stresses and fluid inertia on the squeeze film characteristics between a long cylinder and an infinite plate, *Fluid Dynamics research*, Vol. 39, p. 616-631, 2007.
- [LIN08] J.R. Lin, L.M. Chu, W.L. Liaw and L.J. Mou. Effects of non-Newtonian couple stresses on the squeeze film characteristics between two different spheres, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, Professional Engineering Publishing, Vol. 222, No 5, p. 693-701, 2008.
- [LU07] R.F. Lu and J.R. Lin. A theoretical study of combined effects of non-Newtonian rheology and viscosity-pressure dependence in the sphere-plate squeeze-film system, *Tribology International*, Vol. 40, No 1, p. 125-131, 2007.
- [LUN72] T.S. Lundgren. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 51, p. 273-299, 1972.

- [MAB90] K. Mabuchi and T. Sasada. Numerical analysis of elasto-hydrodynamic squeeze film lubrication of total hip prostheses, *Wear*, Vol. 140, No 1, p. 1-16, 1990.
- [MAR90] A. Maroudas and A. Kuettner. Methods in cartilage research, *Academic Press Inc.*, San Diego, p. 370, 1990.
- [MAZ02] D. Mazzucco, G. McKinley, R.D. Scott and M. Spector. Rheology of joint fluid in total knee arthroplasty patients. *Journal of Orthopaedic Research*, Vol. 20, No 2, p. 1157-1163, 2002.
- [MEZ08] A. Meziane, B. Bou-Saïd and J. Tichy. Modelling human hip joint lubrication subject to walking cycle, *Lubrication Science*, Vol. 20, No 3, p. 205-222, 2008.
- [MED81] J.B. Medley. The lubrication of normal human ankle joints. *PhD Thesis*, Department of Mechanical Engineering, University of Leeds, 1981.
- [MEG98] M.M.H. Megat Ahmed, D.T. Gethin, T.C. Claypole and B.J. Roylance. Numerical and experimental investigation into porous squeeze films, *Tribology International*, Vol. 31, No 4, p. 189-199, 1998.
- [MEN07] F.M. Meng, Y.Y. Zhang, Y.Z. Hu and H. Wang. Thermo-elasto-hydrodynamic lubrication analysis of piston skirt considering oil film inertia effect, *Tribology International*, Vol. 40, No 7, p. 1089-1099, 2007.
- [MOM05] T.S. Momberger, J.R. Levick, and R.M. Mason. Hyaluronan secretion by synoviocytes is mechanosensitive, *Matrix Biology*, Vol. 24, No 8, p. 510-519, 2005.
- [MOW84] V.C. Mow, M.H. Holmes and M.W. Lai. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage : a review, *Journal of Biomechanics*, Vol. 17, No 5, p. 377-394, 1984.
- [MOW92] V.C. Mow and A. Ratcliffe. Cartilage and diarthrodial joints as paradigms for hierarchical materials and structures, *Biomaterials*, Vol. 13, No 2, p. 67-97, 1992.
- [MOW93] V.C. Mow, G.A. Ateshian and R. L. Spilker. Biomechanics of diarthrodial joints: A review of twenty years of progress, *J. Bioeng.*, Vol. 115, No. 4B, p. 460-467, 1993.
- [MOW97] V.C. Mow and A. Ratcliffe. Structure and function of articular cartilage and meniscus, *Basic Orthopaedic Biomechanics, 2nd edition*, Lippincott-Raven Publishers, Philadelphia, p. 113-177, 1997.
- [MUR73] P.R.K. Murti. Squeeze films in porous circular disks, *Wear*, Vol. 23, No 3, p. 283-289, 1973.
- [MUR75] P.R.K. Murti. Squeeze film behaviour in a spherical porous bearing, *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 97, No 4, p. 638-641, 1975.

- [NAB09] M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd. Etude de l'écrasement d'un film sur un milieu poreux modélisé par l'équation de Darcy-Forchheimer, *9ème Congrès International de Mécanique*, Marrakech, p. 10-12, 21-24 Avril 2009.
- [NAB10a] M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd. Numerical simulation of viscous shear effects on porous squeeze film, *2ème Congrès International de la Société Marocaine des Mathématiques Appliquées*, Faculté des Sciences, Rabat, p. 207-212, 28-30 Juin 2010.
- [NAB10b] M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd. A numerical simulation of viscous shear effects on porous squeeze-film using the Darcy-Brinkman model, *Mécanique et Industrie*, Vol. 11, No 5, p. 327-337, 2010.
- [NAB10c] M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd. A general model for porous medium flow in squeezing film situations, *Lubrication Science*, Vol. 22, No 2, p. 37-52, 2010.
- [NAD01] N.B. Naduvinamani, P.S. Hiremath and G. Gurubasavaraj. Squeeze film lubrication of short porous journal bearing with couple stress fluids, *Tribology International*, Vol. 34, No 11, p. 739-747, 2001.
- [NAD09] N.B. Naduvinamani and S.B. Patil. Numerical solution of finite modified Reynolds equation for couple stress squeeze film lubrication of porous journal bearings, *Computers and Structures*, Vol. 87, No 21, p. 1287-1295, 2009.
- [NAJ89] B. Najji, B. Bou-Saïd and D. Berthe. New formulation with non-Newtonian fluids, Transactions of the ASME, *Journal of Tribology*, Vol. 111, No 1, p. 29-34, 1989.
- [NEA74] G. Neale and W. Nader. Practical significance of Brinkman extension of Darcy's law : coupled parallel flows within a channel and a boundary porous medium, *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 52, No 4, p. 472-478, 1974.
- [NIE06] A.D. Nield and A. Bejan. Convection in porous media, Third edition, *Springer*, New York, 2006.
- [NIT96] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu and T. Sundararajan. Double-diffusive natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium - a generalised non-Darcy approach, *Num. Heat Transfer*, Part A, Vol. 30, No 4, p. 413-426, 1996.
- [NIT97] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu and T. Sundararajan. Natural convective heat transfer in an enclosure filled with fluid saturated variable porosity medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 40, No 16, p. 3955-3967, 1997.
- [NIT98] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu and T. Sundararajan. Effects of porosity on natural convective heat transfer in a fluid saturated porous medium, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 19, No 1, p. 56-58, 1998.
- [NIT99] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu and T. Sundararajan. Numerical investigation of buoyancy driven flow in a fluid saturated non-darcian porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, No 7, p. 1205-1215, 1999.

- [ODA05] Y. Oda and J. Sugishita. The spinnability effect under lubrication (Part 1), Lubrication System of Natural Joint, *Journal of Japanese Society of Tribologists*, Vol. 50, No 4, p. 319–326, 2005.
- [OAT89] K.M.N. Oates, W.E. Krause, and R.H. Colby. Using rheology to probe the mechanism of joint lubrication: polyelectrolyte/protein interactions in synovial fluid, *Mater. Res. Soc. Symp. Proc.*, Vol. 711, p. 53-58, 2002.
- [PAP00] T.C. Papanastasiou, GC. Georgiou and A.N. Alexandrou. Viscous fluid flow, *CRC Press LLC*, New York, 2000.
- [PAS03] M.D. Pascovici and T. Cicone. Squeeze-film of unconformal, compliant and layered contacts, *Tribology International*, Vol. 36, No 11, p. 791-799, 2003.
- [PEA02] J.R.A. Pearson and P.M.J. Tardy. Models for flow of non Newtonian and complex fluids through porous media, *Journal of Non Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 102, No 2, p. 447-473, 2002.
- [PEY83] R. Peyret and T.D. Taylor. Computational methods for fluid flow, *Spinger-Verlag*, New York, 1983.
- [RAD04] A.V. Radulescu. Particularities of the pseudo-plastic lubrication with application to the synovial joint, *VAREHD 12*, Suceava, 8-9 October 2004.
- [RAM78] G. Ramanaiah and P. Sarkar. Squeeze films and thrust bearings lubricated by fluids with couple stress, *Wear*, Vol. 48, No. 2, p. 309-316, 1978.
- [RAM79] G. Ramanaiah. Squeeze films between finite plates lubricated by fluids with couple stress, *Wear*, Vol. 54, No. 2, p. 315-320, 1979.
- [RUS04] C. Russu. Theoretical analysis of squeeze flow inside non-conform sphere-plane contact, *VAREHD 12*, Suceava, 8-9 October 2004.
- [SCH74] A.E. Scheidegger. The Physics of flow through porous media, Third edition, *University of Toronto Press*, Toronto, 1974.
- [SIN82] P. Sinha, C. Singh and K.R. Prasad. Lubrication of human joints—a microcontinuum approach, *Wear*, Vol. 80, No 2, p. 159-181, 1982.
- [SFA06] A.N.T. SFARGHIU. Modèle bio-tribologique des articulations. Rôle mécanique et physicochimique des assemblages moléculaires du fluide synovial. *Thèse de Doctorat*, INSA de Lyon, p. 43, 2006.
- [SOK78] L. Sokoloff. The joints and synovial fluid, *Academic Press*, Vol. I, New York, 1978.
- [SRI77] U. Srinivasan. Load capacity and time-height relations for squeeze films between double-layered porous plates, *Wear*, Vol. 43, No 2, p. 211-225, 1977.
- [STO66] V.K. Stokes. Couple stresses in fluids, *The Physics of Fluids*, Vol. 9, No 9, p. 1709-1715, 1966.

- [SUG05] H. Sugiuchi, Y. Ando, M. Manabe, E. Nakamura, H. Mizuta, S. Nagata and H. Okabe. Measurement of total and differential white blood cell counts in synovial fluid by means of an automated hematology analyzer, *Journal of Laboratory and Clinical Medicine*, Vol. 146, No 1, p. 36-542, 2005.
- [SZW04] E. Szwajczak. Rheological properties of aqueous solutions of biopolymeric hyaluronan, *Proc. SPIE*, Vol. 5565, p. 397-402, 2004.
- [TAN85] P. N. Tandon, J. K. Misra, R. S. Gupta and Satyanand. Role of ultrafiltration of synovial fluid in lubrication of human joints, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 27, No 1, p. 29-37, 1985.
- [THO98] J.W. Thomas. Numerical partial differential equations: finite difference methods, *Springer-Verlag*, New York, p. 162, 1998.
- [TIC81] J.A. Tichy. An approximate analysis of fluid inertia effects in axisymmetric laminar squeeze film flow at arbitrary Reynolds number, *Applied Scientific Research*, Vol. 37, No 3-4, p. 301-312, 1981.
- [TIC91] J.A. Tichy and B. Bou-Saïd. Hydrodynamic lubrication and bearing behaviour with impulsive loads, *STLE Tribology Transactions*, Vol. 34, No 4, p. 505-512, 1991.
- [TIC86] J. A. Tichy. The effect of fluid inertia in hydrodynamic lubrication studied by a linearization method: Two useful applications, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 24, No 10, p. 1607-1613, 1986.
- [TIC08] J. A. Tichy and B. Bou-Saïd. The Phan-Thien and Tanner model applied to thin film spherical coordinates: applications for lubrication of hip joint replacement, *J. Biomech. Eng.*, Vol. 130, No 2, 021012 (6 pages), 2008
- [TOR76a] P.A. Torzilli and V.C. Mow. On the fundamental fluid transport mechanisms through normal and pathological articular cartilage during function-I the formulation, *Journal of Biomechanics*, Vol. 9, No 8, p. 541-552, 1976.
- [TOR76b] P.A. Torzilli and V.C. Mow. On the fundamental fluid transport mechanisms through normal and pathological articular cartilage during function-I, The analysis, solution and conclusions, *Journal of Biomechanics*, Vol. 9, No 9, p. 587-606, 1976.
- [USH00] R. Usha and P. Vimala. Fluid inertia effects in a Non-Newtonian squeeze film between two plane annuli, *Journal of Tribology*, Vol. 122, No 4, p. 872-875, 2000.
- [USH02] R. Usha and P. Vimala. Curved squeeze film with inertial effects–energy integral approach, *Fluid Dynamics research*, Vol. 30, p. 139-153, 2002.
- [VAL07] F.J. Valdes-Parada, J.A. Ochoa-Tapia and J. Alvarz-Ramirz. On the effective viscosity for the Darcy-Brinkman equation, *Physica A*, Vol. 385, No 1, p. 69-79, 2007.

- [WAL68] P.S. Walker, D. Dowson, M.D. Longfield and V. Wright. Boosted lubrication in synovial joints by fluid entrapment and enrichment, *Annals of the Rheumatic Diseases*, Vol. 27, No 6, p. 512-20, 1968.
- [WAR64] J.C. Ward. Turbulent flow in porous media, *J. Hyd. Div. ASCE*, Vol. 90, No 1, p. 1-12, 1964.
- [WHI67] S. Whitaker. Diffusion and dispersion in porous media, *AIChE Journal*, Vol. 13, No 3, p. 420-427, 1967.
- [WHI99] S. Whitaker. The method of volume averaging (Theory and applications of transport in porous media), *Springer-Verlag*, New York, LLC, 1999.
- [WIN67] E. Winkler. Die lehre von der elasticitaet und festigkeit, Theil 1-2, *H. Dominicus*, Prag, 1867.
- [WRI76] V. Wright and D. Dowson. Lubrication and cartilage, *J. Anat.*, Vol. 121, No 1, p. 107-118, 1976.
- [ZAH78] K. H. Zaheeruddin and M. Isa. Characteristics of a micropolar lubricant in a squeeze film porous spherical bearing, *Wear*, Vol. 51, No 1, p. 1-10, 1978.
- [ZAH81] K.H. Zaheeruddin. The dynamic behaviour of squeeze films in one-dimensional porous journal bearing lubricated by a micropolar fluid, *Wear*, Vol. 71, No 2, p. 139-152, 1981.

# Annexes

---

## Annexe 1 : Equations de Navier Stokes Réduites (RNSP) pour fluides à couple de contraintes

Considérons deux disques circulaires et parallèles de même rayon  $R$  séparés par un film fluide d'épaisseur  $h$ . Dans un système de coordonnées cylindriques, ayant comme origine le point  $O$  positionné au milieu du disque inférieur, l'axe  $(Or)$  des coordonnées radiales est situé sur la plan de ce dernier disque tandis que l'axe  $(Oz)$  des coordonnées axiales est la verticale ascendante qui coïncide avec l'axe de symétrie du système composé par ces deux disques (Figure 1). Ces deux disques sont considérés immergés dans un bain de lubrifiant.

Le disque inférieur est fixe dans le repère  $(Or, Oz)$  tandis que le disque supérieur est animé d'un mouvement d'écrasement selon l'axe  $(Oz)$  de vitesse  $-\left|\frac{dh}{dt}\right|$ . L'épaisseur du film d'huile est supposée très petite comparativement aux autres dimensions du contact lubrifié.

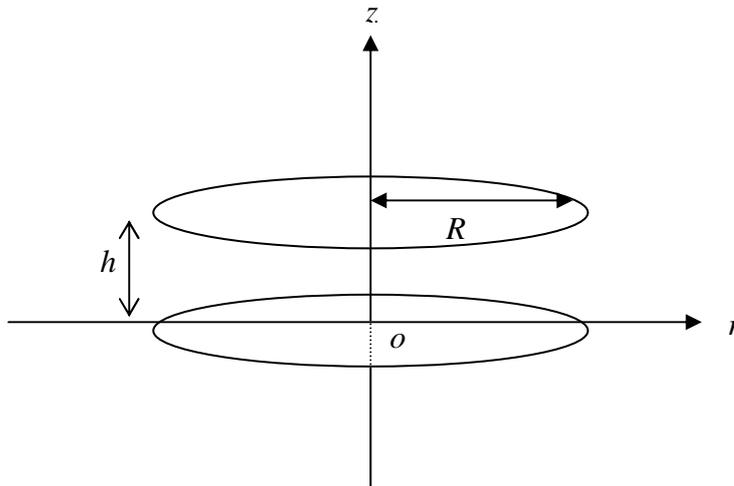


Figure A1.1 : Configuration géométrique de deux disques circulaires parallèles

Dans cette annexe les équations de la mécanique des milieux continus pour fluides à couple de contraintes sont présentées. L'analyse de l'écoulement du fluide se fait à l'échelle macroscopique, la structure moléculaire et les mouvements individuels des molécules sont donc ignorés. Le comportement du fluide est décrit par les équations de la mécanique des milieux continus pour fluides à couple de contraintes à travers les grandeurs macroscopiques : la vitesse, la pression, la masse volumique et leurs dérivées temporelles et spatiales. Cet écoulement est considéré isotherme et donc l'équation de l'énergie ne sera pas prise en compte.

Toutes les équations sont écrites à l'aide des variables sans dimensions. L'ordre de grandeur de chaque terme peut donc être connu. Des formes simplifiées spécifiques à l'étude de problèmes particuliers à la lubrification seront déduites.

## 1. Equations de Navier Stokes Réduites

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique décrivant l'écoulement dans le film pour fluides à couple de contraintes permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques du contact, de déterminer les caractéristiques du contact lubrifié. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus appliquées à des fluides non newtoniens à couple de contraintes :

- Loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A1.1})$$

- Loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \vec{v} \right) = \overline{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (\text{A1.2})$$

- Loi de comportement rhéologique pour fluide à couple de contraintes [STO66] :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} e_{ijk} M_{rk,r} \quad (\text{A1.3})$$

avec :

$$M_{ij} = \frac{1}{3} M_{mm} \delta_{ij} + 4\eta K_{ij}$$

Notons :

$\vec{v}$  : vecteur vitesse des particules fluides

$t$  : temps

$\rho$  : masse volumique du fluide considéré

$\vec{f}$  : densité massique des forces volumiques

$\vec{\sigma}$  : tenseur des contraintes

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes non symétrique

$M_{rk}$  : composantes du tenseur de couple de contraintes

$e_{ijk}$  : composantes du tenseur de permutation d'ordre trois

$K_{ij}$  : tenseur du taux de rotation

$x_j$  : variable d'espace

$\mu$  : coefficient de viscosité dynamique

$\eta$  : constante physique due à la présence du couple de contraintes dans le fluide

$p$  : pression

En reportant l'équation de comportement rhéologique (A1.3) dans l'équation de la dynamique (A1.2) et en négligeant les forces massiques extérieures, les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} \Delta \vec{L} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} \quad (\text{A1.4})$$

où  $\vec{L}$  est le vecteur du couple de volume.

Les couples de volume peuvent résulter de l'action d'un champ magnétique externe sur les particules fluides magnétisées ou de l'action d'un champ électrique sur la matière polarisée. Les couples de contraintes résultent des interactions entre les particules fluides adjacentes en plus des forces colinéaires d'interactions. Ces couples de contraintes sont issus d'un tenseur linéairement proportionnel au tenseur du taux de rotation [STO66].

En l'absence du couple de volume, cette équation de mouvement s'écrit en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique comme suit :

- Composante radiale

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 3 \frac{u}{r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A1.5})$$

- Composante axiale

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (\text{A1.6})$$

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film est très faible devant les autres dimensions. Les variables sans dimensions ainsi utilisées sont :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \bar{u} = \frac{h_0}{R} \frac{u}{V_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{V_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{t} = \frac{V_0}{h_0} t, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0} \quad (\text{A1.7})$$

où

$h_0$  : épaisseur initiale du film fluide

$p_0 = \frac{F_0}{\pi R^2}$ ,  $F_0$  est la charge constante appliquée au disque en mouvement.

L'expression de la vitesse de référence  $V_0$  est déterminée par la suite.

Les deux équations (A1.5) et (A1.6) s'écrivent en fonction des variables sans dimensions :

- Composante radiale

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\varepsilon^2 \frac{P_0 h_0}{\mu V_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \bar{l}^2 \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} \\ &+ \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - 2 \bar{l}^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \right) \\ &- \varepsilon^4 \bar{l}^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} - 3 \frac{\bar{u}}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

- Composante axiale

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Re} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= -\varepsilon^2 \frac{P_0 h_0}{\mu V_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - \bar{l}^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial z^4} \right) \\ &\varepsilon^4 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{r} \bar{w}}{\partial r} \right) - 2 \bar{l}^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial r^2 \partial z^2} \right) \\ &- \varepsilon^6 \bar{l}^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

où

$\bar{l}$  : paramètre de couple de contraintes,  $\bar{l} = \frac{l}{h_0}$ , avec  $l$  : longueur caractéristique de la taille des particules considérées solides, supposées présentes dans le film, caractérisant le caractère non newtonien,  $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$

$\varepsilon$  : paramètre d'échelle,  $\varepsilon = \frac{h_0}{R}$

$R_e$  : nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur initiale du film fluide,  $R_e = \frac{\rho V_0 h_0}{\mu}$ .

La vitesse de référence  $V_0$ , qui permet de conserver le terme du gradient radial de pression dans l'équation (A1.8) est choisie de telle manière que [JAN91] :

$$\varepsilon^2 \frac{P_0 h_0}{\mu V_0} = 1 \quad (\text{A1.10})$$

En substituant  $P_0$  par son expression, on a :

$$V_0 = \frac{F_0 h_0^3}{\mu \pi R^4} \quad (\text{A1.11})$$

En négligeant tous les termes multipliés par  $\varepsilon^2$  et en tenant compte de (A1.10), les équations (A1.8) et (A1.9) deviennent :

$$R_e \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + D \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \left( \frac{h_0^3 P_0}{\mu R^2 V_0} \right) \frac{d \bar{p}}{d r} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\bar{l}^2}{h^4} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} \quad (\text{A1.12})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1.13})$$

Le retour aux variables sans dimensions permet d'avoir les deux équations suivantes :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad (\text{A1.14})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1.15})$$

La dernière équation montre que la pression dans le film fluide est indépendante de la variable axiale  $z$  ;  $p = p(r, t)$ .

En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité s'écrit dans le cas d'un écoulement incompressible et axisymétrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1.16})$$

où

$r, z$  : coordonnées radiale et axiale

$u, w$  : composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans le film fluide

Les équations (A1.14), (A1.15) et (A1.16) sont dénommées équations de Navier-Stokes Réduites. Elles représentent également les équations de la couche limite de Prandtl pour un fluide à couple de contraintes mais avec des conditions aux limites différentes, ce qui justifie l'appellation d'équations de Navier-Stokes Réduites / Prandtl ou RNSP. Cette simplification des équations de Navier Stokes permet de faciliter la résolution du problème au niveau du fluide. Le système, initialement elliptique, est dorénavant un système parabolique.

## 2. Action du fluide sur les parois du contact

L'action de contact  $\vec{t}$ , appelée vecteur contrainte, en un point  $M$  de la surface (paroi) de contact, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal  $\vec{n}$  :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 t_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}^{(M)} n_j^{(M)} \vec{x}_i \quad (\text{A1.17})$$

$n_j$  représente les composantes du vecteur normal en  $M$  orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide à couple de contraintes et sous les hypothèses de la mécanique des films minces visqueux, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit pour un écoulement axisymétrique :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{A1.18})$$

où

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \quad (\text{A1.19})$$

La résultante  $\vec{R}$  en un point  $M$  quelconque des actions de contact du fluide sur la surface (S) du contact est :

$$\vec{R} = \iint_{(S)} \vec{t}(M, \vec{n}) dS \quad (\text{A1.20})$$

Si la surface (S) est un plan admettant comme vecteur unitaire normal  $\vec{z}$ , l'intégration du champ de pression sur cette surface permet de calculer la charge  $W$  que le contact peut supporter :

$$W = \iint_{(S)} p dS \quad (\text{A1.21})$$

En particulier, si (S) correspond à celle d'un disque circulaire de rayon  $R$  comme dans notre cas, on a :

$$W = 2\pi \int_0^R p r dr \quad (\text{A1.22})$$

L'intégration des contraintes de cisaillement permet de déterminer la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi (frottement) :

$$\tau = \iint_{(S)} \tau_{rz} dS \quad (\text{A1.23})$$

En particulier, si cette surface est un disque circulaire de rayon  $R$  comme dans notre cas :

$$\tau = 2\pi \int_0^R \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) \Big|_{z=0} r dr \quad (\text{A1.24})$$

Le coefficient de frottement  $f$ , défini comme le rapport entre la force de viscosité et la charge, s'écrit donc :

$$f = \frac{\int_0^R \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) \Big|_{z=0} r dr}{\int_0^R p r dr} \quad (\text{A1.25})$$

## Annexe 2 : Méthodes des différences finies et de Gauss-Seidel relaxée

### 1. Discrétisation par la méthode des différences finies

Le schéma numérique aux différences finies consiste à partager le domaine d'étude en une multitude de petits domaines (voir Figure A2.1) et puis calculer par approximation les valeurs des dérivées de la fonction inconnue notée  $f$  à l'aide de ses développements de Taylor.

Chaque point du maillage de coordonnées  $(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y)$  est noté  $(i, j)$ , où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  représentent les pas d'espace suivant l'axe  $x$  et l'axe  $y$  respectivement.

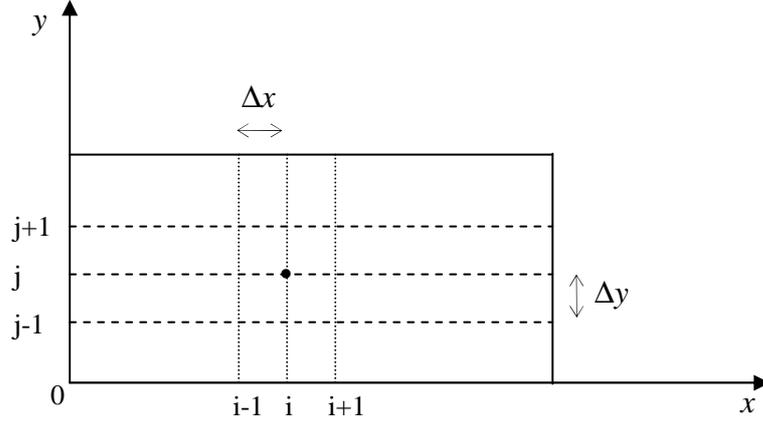


Figure A2.1 : Discrétisation du domaine de calcul

Le développement de Taylor de la fonction  $f$  à l'ordre deux s'écrit :

$$f(x + \Delta x, y) = f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.1})$$

$$f(x - \Delta x, y) = f(x, y) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.2})$$

En retranchant terme à terme l'expression (A2.2) de l'expression (A2.1), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.3})$$

En ajoutant terme à terme l'expression (A2.2) à l'expression (A2.1) on a :

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.4})$$

Les dérivées discrétisées au point  $(i, j)$  s'écrivent donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.5})$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(i, j) = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{A2.6})$$

Les écritures (A2.5) et (A2.6) sont appelées schémas centrés.

Un schéma décentré avant de la dérivée première de  $f$  peut être obtenu directement de l'expression (A2.1) par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{A2.7})$$

De même, un schéma décentré arrière de la dérivée première de  $f$  peut être obtenu à partir de l'expression (A2.2) par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{A2.7})$$

Le choix d'un schéma ou d'un autre dépend de la nature du problème, des conditions initiales et des conditions aux limites du domaine d'étude.

On calcule de la même façon les dérivées partielles par rapport à la coordonnée  $y$ . On a ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + o(\Delta y^2) \quad (\text{A2.8})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(i, j) = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2) \quad (\text{A2.9})$$

Un schéma décentré avant de la dérivée première de  $f$  est :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} + o(\Delta y) \quad (\text{A2.10})$$

Un schéma décentré arrière de la dérivée première de  $f$  est :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + o(\Delta y) \quad (\text{A2.11})$$

Le schéma Upwind consiste à décentrer la dérivée première de  $f$  comme suit :

$$f \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = f_{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad \text{si } f_{i,j} < 0 \quad (\text{A2.12})$$

$$f \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) = f_{i,j} \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad \text{si } f_{i,j} > 0 \quad (\text{A2.13})$$

$$f \frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = f_{i,j} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} + o(\Delta y) \quad \text{si } f_{i,j} < 0 \quad (\text{A2.14})$$

$$f \frac{\partial f}{\partial y}(i, j) = f_{i,j} \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + o(\Delta y) \quad \text{si } f_{i,j} > 0 \quad (\text{A2.15})$$

La dérivée seconde croisée de  $f$  est donnée par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(i, j) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + o(\Delta x \Delta y) \quad (\text{A2.16})$$

Le schéma d'Euler implicite de la dérivée première de  $f$  par rapport au temps est donné par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^n - f_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (\text{A2.17})$$

où l'indice  $n$  est le nombre d'itérations en temps.

## 2. Résolution numérique par la méthode de Gauss-Seidel relaxée

On s'intéresse à la résolution du système d'équations algébriques suivant :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{i,j} &= E_1 \bar{u}_{i,j-1} + E_2 \bar{u}_{i,j+1} + E_3 \bar{p}_{i+1} + E_3 \bar{p}_{i-1} & (\text{A2.18}) \\ \bar{w}_{i,j} &= \bar{w}_{i,j-1} + F_1 \bar{u}_{i,j} + F_2 \bar{u}_{i-1,j} & (\text{A2.19}) \\ \bar{p}_i &= A_1 \bar{p}_{i+1} + A_2 \bar{p}_{i-1} + A_3 \bar{u}_{i,0}^* + A_4 \bar{u}_{i+1,0}^* + A_5 \bar{u}_{i-1,0}^* + A_6 \bar{w}_{i,0}^* + A_7 & (\text{A2.20}) \\ \bar{u}_{i,j}^* &= B_1 \bar{u}_{i-1,j}^* + B_2 \bar{u}_{i+1,j}^* + B_3 \bar{u}_{i,j-1}^* + B_4 \bar{u}_{i,j+1}^* + B_5 & (\text{A2.21}) \\ \bar{w}_{i,j}^* &= B'_1 \bar{w}_{i-1,j}^* + B'_2 \bar{w}_{i+1,j}^* + B'_3 \bar{w}_{i,j-1}^* + B'_4 \bar{w}_{i,j+1}^* + B'_5 & (\text{A2.22}) \\ \bar{p}_{i,j}^* &= C_1 \bar{p}_{i-1,j}^* + C_2 \bar{p}_{i+1,j}^* + C_3 \bar{p}_{i,j-1}^* + C_4 \bar{p}_{i,j+1}^* & (\text{A2.23}) \end{aligned} \right\} \text{S}$$

où

$\bar{u}_{i,j}$ ,  $\bar{w}_{i,j}$  et  $\bar{p}_{i,j}$  sont la vitesse radiale, la vitesse axiale et la pression dans le film,

$\bar{u}_{i,j}^*$ ,  $\bar{w}_{i,j}^*$  et  $\bar{p}_{i,j}^*$  sont la vitesse radiale, la vitesse axiale et la pression dans le milieu poreux

$A_i$ ,  $B_i$ ,  $B'_i$ ,  $C_i$ ,  $E_i$  et  $F_i$  sont des coefficients réelles

$1 \leq i < n$  et  $1 \leq j < m$ , avec  $n$  et  $m$  sont deux nombres entiers qui représentent le nombre d'intervalles de maillage selon la composante radiale et la composante axiale respectivement.

Le problème est bien entendu de trouver un ensemble de valeurs réelles de ces variables vérifiant simultanément les équations du système (S).

La résolution du système (S) est généralement complexe et rarement possible lorsque l'une des méthodes directes d'élimination, résolvant le système en un nombre fini d'étapes,

est utilisée. On peut seulement espérer pouvoir élaborer une méthode itérative de résolution. La méthode de relaxation de Gauus-Seidel peut alors être appliquée.

La méthode de Gauss-Seidel relaxée, comme toute méthode de substitutions successives, est un algorithme efficace pour trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Elle consiste à se donner un estimé initial de la solution pour  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$  et de construire une suite d'itérations successives telles que :

$$\bar{u}_{i,j}^{-k} = (1 - \alpha)\bar{u}_{i,j}^{-k-1} + \alpha \left( E_1 \bar{u}_{i,j-1}^{-k} + E_2 \bar{u}_{i,j+1}^{-k} + E_3 \bar{p}_{i+1}^{-k} + E_5 \bar{p}_{i+1}^{-k} \right) \quad (\text{A2.24})$$

$$\bar{w}_{i,j}^{-k} = (1 - \alpha)\bar{w}_{i,j}^{-k-1} + \alpha \left( \bar{w}_{i,j-1}^{-k} + F_1 \bar{u}_{i,j}^{-k} + F_2 \bar{u}_{i-1,j}^{-k} \right) \quad (\text{A2.25})$$

$$\bar{p}_i^{-k} = (1 - \alpha)\bar{p}_i^{-k-1} + \alpha \left( A_1 \bar{p}_{i+1}^{-k-1} + A_2 \bar{p}_{i-1}^{-k} + A_3 \bar{u}_{i,0}^{-*k} + A_4 \bar{u}_{i+1,0}^{-*k-1} + A_5 \bar{u}_{i-1,0}^{-*k} + A_6 \bar{w}_{i,0}^{-*k} + A_7 \right) \quad (\text{A2.26})$$

$$\bar{u}_{i,j}^{-*k} = (1 - \alpha)\bar{u}_{i,j}^{-*k-1} + \alpha \left( B_1 \bar{u}_{i-1,j}^{-*k} + B_2 \bar{u}_{i+1,j}^{-*k-1} + B_3 \bar{u}_{i,j-1}^{-*k} + B_4 \bar{u}_{i,j+1}^{-*k-1} + B_5 \right) \quad (\text{A2.27})$$

$$\bar{w}_{i,j}^{-*k} = (1 - \alpha)\bar{w}_{i,j}^{-*k-1} + \alpha \left( B'_1 \bar{w}_{i-1,j}^{-*k} + B'_2 \bar{w}_{i+1,j}^{-*k-1} + B'_3 \bar{w}_{i,j-1}^{-*k} + B'_4 \bar{w}_{i,j+1}^{-*k-1} + B'_5 \right) \quad (\text{A2.28})$$

$$\bar{p}_{i,j}^{-*k} = (1 - \alpha)\bar{p}_{i,j}^{-*k-1} + \alpha \left( C_1 \bar{p}_{i-1,j}^{-*k} + C_2 \bar{p}_{i+1,j}^{-*k-1} + C_3 \bar{p}_{i,j-1}^{-*k} + C_4 \bar{p}_{i,j+1}^{-*k-1} + C_5 \right) \quad (\text{A2.29})$$

où  $k$  est le nombre d'itérations et  $\alpha$  est un facteur de relaxation choisi pour assurer et accélérer la convergence des itérations.

Le processus itératif est arrêté lorsque le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\frac{\|\Phi^k - \Phi^{k-1}\|_2}{\|\Phi^{k-1}\|_2} \leq eps \quad (\text{A2.30})$$

où  $\|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \Phi_{i,j}^2}$  est la norme euclidienne,  $\Phi$  représente  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{w}^*$  et  $\bar{p}^*$ ,  $eps$  est une précision exigée donnée.

# Publications

---

## **Journaux avec comité de lecture**

M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd.

A numerical simulation of viscous shear effects on porous squeeze-film using the Darcy-Brinkman model, *Mécanique et Industrie*, Vol. 11, No 5, p. 327-337, 2010.

M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd.

A general model for porous medium flow in squeezing film situations, *Lubrication Science*, Vol. 22, No 2, p. 37-52, 2010.

## **Congrès internationaux**

M. Nabhani, M. El Khlifi et B. Bou-Saïd.

Etude de l'écrasement d'un film sur un milieu poreux modélisé par l'équation de Darcy-Forchheimer, 9ème Congrès de Mécanique, Marrakech, p. 10-12, 21-24 Avril 2009.

M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd.

Numerical simulation of viscous shear effects on porous squeeze film, 2ème Congrès de la Société Marocaine des Mathématiques Appliquées, Faculté des Sciences, Rabat, p. 207-212, 28-30 Juin 2010.

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON ET DEVANT L'UNIVERSITE HASSAN II MOHAMMEDIA – CASABLANCA

<b>Nom :</b> NABHANI	<b>Date de soutenance :</b> le 15 décembre 2010
<b>Prénoms :</b> Mohamed	
<b>Titre :</b> Contribution à l'Etude du Phénomène de l'Ecrasement de Lubrifiants Non Newtoniens en Présence de Milieux Poroélastiques	
<b>Nature :</b> Doctorat	<b>Numéro d'ordre :</b> 2010ISAL0124
<b>Ecole doctorale :</b> Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique (MEGA)	
<b>Spécialité :</b> Mécanique	
<b>Code B.I.U. – Lyon :</b> T 50/210/19 / et bis	<b>Classe :</b>
<b>Résumé :</b> <p>L'étude entreprise dans cette thèse vise à mettre en place un nouveau modèle de couplage film fluide – milieu poreux pouvant prendre en compte l'inertie du fluide dans le film lubrifiant et dans la matrice poreuse, le comportement non newtonien du fluide, les effets visqueux dans la matrice poreuse ainsi que sa poroélasticité. Elle concerne une modélisation et simulation numérique de la lubrification par effet d'écrasement entre deux géométries simples composées de deux disques dont l'un est à face poreuse.</p> <p>Nous examinons d'abord les effets visqueux à l'aide du modèle de Darcy-Brinkman sur les caractéristiques du contact lubrifié. Ce modèle permet la prise en compte de la couche limite développée à l'interface film fluide – matrice poreuse. Nous abordons ensuite les effets combinés d'inertie et visqueux du fluide considéré newtonien. L'écoulement est décrit alors à l'aide des équations de Navier-Stokes Réduites dans le film fluide et modélisé par le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer dans la matrice poreuse. Enfin, cette étude s'intéresse d'une part aux effets non newtoniens du fluide lubrifiant et d'autre part à l'influence de la déformation de la matrice poreuse. Les films lubrifiants sont considérés comme des fluides non newtoniens à couple de contraintes. La déformée de l'interface poreuse est obtenue à l'aide du modèle de couche mince élastique. Les équations aux dérivées partielles établies dans cette étude ont été discrétisées par la méthode des différences finies. Les équations algébriques obtenues ont été résolues à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel relaxée.</p> <p>Les résultats numériques issus de nos simulations ont montré que ces effets ont une influence significative et non négligeable sur les performances de l'écrasement de films fluides.</p>	
<b>Mots clés :</b> Interaction fluide structure, Poroélasticité, Lubrification, Ecrasement de film, Fluides non newtoniens, Couple de contraintes, Couche mince, Darcy-Brinkman-Forchheimer, Equations de Navier-Stokes Réduites	
<b>Laboratoires de recherches :</b> Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures et UFR de Mécanique des Fluides et des Structures de la Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia	
<b>Directeurs de thèse :</b> Benyebka BOU-SAÏD et Mohamed EL KHLIFI	
<b>Président du jury :</b>  <b>Composition du jury :</b> Professeur Dominique BONNEAU (Rapporteur) Professeur Mohammed CHAGDALI (Rapporteur) Professeur John TICHY (Rapporteur) Professeur Brahim NAJJI (Président) Professeur FabriceVILLE (Examineur) Professeur Benyebka BOU-SAÏD (Directeur de thèse) Professeur Mohamed EL KHLIFI (Directeur de thèse) Professeur Mohamed KOUAM (Examineur)	