

## THÈSE

---

### **Extension de l'approche X-FEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure dans des matériaux ductiles**

---

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le Grade de Docteur**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Romains PELÉE DE SAINT MAURICE**

**Ingénieur en mécanique**

Thèse soutenue le 07 Février 2014 devant la Commission d'examen

#### **Jury**

---

NICOLAS MOËS	Professeur, École Centrale Nantes	Président de jury
JEAN MICHEL BERGHEAU	Professeur, ENISE	Rapporteur
RAFAEL ESTEVEZ	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
ANTHONY GRAVOUIL	Professeur, INSA-Lyon	Examineur
ALAIN COMBESCURE	Professeur, INSA-Lyon	Directeur de thèse
VINCENT FAUCHER	Docteur, CEA Saclay	Encadrant
THOMAS ELGUEDJ	Maître de Conférences, INSA-Lyon	Invité
BENOIT PRABEL	Docteur, CEA Saclay	Invité

---

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quadriennal  
2007-2010**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a>  M. Jean Marc LANCELIN  Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://www.insa-lyon.fr/eea">http://www.insa-lyon.fr/eea</a> M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 - Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b>  Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a> - <a href="mailto:alain.mille@liris.cnrs.fr">alain.mille@liris.cnrs.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  M. Jean Marc PELLETIER  Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr">Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  M. Jean Louis GUYADER  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 -Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:mega@lva.insa-lyon.fr">mega@lva.insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  M. OBADIA Lionel  Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement mes encadrants, Alain Combescure, Vincent Faucher et Thomas Elguedj pour le temps qu'ils m'ont consacré pendant la thèse. Je leur suis très reconnaissant de m'avoir permis de travailler pendant trois ans et demi dans de bonnes conditions et dans un environnement agréable. Mes remerciements vont également aux membres du jury qui ont accepté de le présider, de relire ce mémoire et enfin de m'apporter des conseils afin de l'améliorer.

Je salue l'ensemble du service du laboratoire DYN et LISN du CEA Saclay et plus particulièrement Maître Benoit Prabel. Il m'a énormément inspiré et aiguillé pour mener à bien ce travail. Il a su m'apporter son expérience et son expertise pour éviter de perdre du temps dans des solutions hasardeuses. Je serai éternellement reconnaissant de l'aide qu'il m'a apportée pendant ma thèse et même en dehors. Tous les thésards n'auront pas la chance de connaître un Maître aussi attentif et compétent. J'ai eu beaucoup de plaisir à partager le bureau avec Marwa et tous les stagiaires du CEA.

J'ai passé deux ans au LaMCoS pour ce labeur et je tiens donc à saluer toutes les personnes y travaillant. Les encadrants ont permis de m'enrichir et ont su attiser ma curiosité pour aller voir plus loin que ce que je ne serai allé tout seul. Je remercie tous les collègues de bureaux, Maître Emilien Durif, qui m'a accepté en face de lui pendant un an ; Fabien Caleyron, pour m'avoir prévenu sur les futurs déceptions de la thèse ; Aline brunon, pour sa bonne humeur ; Jérémy Marty, pour les foots du vendredi soir ; Clément Roux pour les voyages et les fous rires ; Caroline Bagot pour les longues discussions ; David Haboussa, pour le code pourri que j'ai du reprendre ; Robin Bouclier, pour les découvertes en montagne et les coups à boire ; Benoit Trollé pour les discussions pendant le master, sur Lyon, à Giens et aussi sur Paris ; Cedric Courbon pour les histoires à la salle ; Lucas Bucchinas pour la coloc à Giens et pour le constat sur le fait d'écrire une thèse ; Loane Bigorgne pour sa joie de vivre ; Gauthier Beaurin pour m'encourager à faire du sport. J'ai une pensée également à Alexandre, Thibaut, Jérôme, Jikai, Jing, Muhibullah, Guillaume, Corentin, Yannick, Pipo, Nico, Alex, Damien, Espoir, Eric, Paul, Sami et les thésards du second bureau. J'envoie un salut à Pierro et Mimi pour les soirées à danser et picoler. Merci à Michel Coret qui m'a mis le pied dans la recherche en m'acceptant en tant que stagiaire en Master et j'en suis resté collé. Je salue Maître Jean Charles Passieux pour m'avoir bien conseillé pendant le Master et même après.

Je fais un coucou à ceux qui ont soutenu et développé le code de calcul EUROPLEXUS avant que j'arrive en thèse car grâce à eux, j'ai pu les insulter copieusement pour me défouler. Je sais que ceux qui viendront derrière moi le feront à leur tour et je les en encourage.

Je suis également heureux et fier d'apporter mon travail à mes amis de l'IUT et aux P2 mécatronique. J'ai eu grand plaisir à partager la maison à Bagneux avec mes colocataires et les copains de Paris. Ils ont été très conciliant pendant les derniers mois de la thèse, la rédaction du manuscrit prenant de plus en plus de temps, les tâches ménagères et les sorties s'en sont ressentis, c'est pourquoi je les en remercie encore. J'ai une pensée particulière pour Karim et Candice qui m'ont permis de m'évader pendant les moments difficiles et stressant et qui sont toujours derrière moi pour m'encourager à faire la fête autant qu'à travailler.

Ma famille m'a soutenu et m'a aidé à poursuivre mes études et je lui en suis reconnaissant. Les deux personnes qui me sont très chères, ma maman qui m'a forcé à me lever le matin depuis tout petit, même quand j'avais pas envie, et ma soeur avec qui j'ai été pendant deux ans en colocation et qui m'a poussé à me surpasser pour terminer cette thèse.

Je salue également tous ceux qui agrémentent ma vie de tous les jours.



# Résumé

Le développement actuel de l'industrie vise à prévoir l'intégrité des structures dans le temps ou dans le cas de sollicitation extrême. Les risques liés à la propagation des fissures dans le cas de chocs ou d'impacts sont encore difficiles à prévoir. Les codes de calcul dans ce domaine regroupent plusieurs méthodes de simulation au sein d'un même code de calcul. Afin de présenter les différentes méthodes numériques mises en oeuvre, ce mémoire a été découpé en trois parties distinctes. Dans la première partie, nous présentons la bibliographie, puis notre apport aux méthodes de simulation numérique en l'appliquant au cas de la propagation de fissure dynamique et enfin les résultats obtenus à partir des méthodes proposées. Nous comparons ces simulations à des résultats expérimentaux ou à des simulations 2D trouvés dans la littérature.

À travers la bibliographie, nous présenterons la théorie de la mécanique de la rupture pour arriver à un critère de propagation de fissure adapté à la dynamique transitoire. Ce critère a déjà été utilisé pour la fissuration dynamique en 2 dimensions. Nous décrivons la méthode des éléments finis étendus utilisée jusqu'ici principalement en quasi-statique. Nous donnerons les avantages mais aussi les limites de mise en oeuvre de cette méthode, notamment à travers le choix des enrichissements et de l'intégration des éléments coupés par la fissure. La méthode des level-sets est ensuite présentée : elle permet de décrire et faire évoluer la fissure indépendamment de la structure. On met en évidence le besoin de robustesse pour faire évoluer la fissure en dynamique explicite.

La seconde partie est consacrée au développement et à l'extension de la méthode en 3D. Après avoir rappelé le critère de propagation en 3D fragile et avec plasticité, on cherche à proposer des schémas d'intégration spatiale plus économiques. Une nouvelle stratégie de propagation des level-sets basé sur la géométrie est proposée pour la dynamique explicite 3D.

Enfin dans la troisième partie, nous appliquerons les méthodes à des cas de propagation de fissure bi-dimensionnelle puis tridimensionnelle. Nous simulerons dans un premier temps des cas 2D en mode I puis en mode mixte, afin de vérifier que l'on arrive à résultats proches des cas déjà simulés en 2D. Pour terminer par des simulations de propagation tridimensionnelle de fissure avec arrêt et redémarrage de la fissure.

Tous ces développements ont été implémentés dans le code de calcul de dynamique explicite EURO-PLEXUS, co-propriété du CEA et de la Commission Européenne.

**MOTS CLÉS:** XFEM, dynamique rapide, propagation de fissures 3D.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Étude bibliographique</b>	<b>3</b>
<b>1 Les concepts de la mécanique de la rupture</b>	<b>5</b>
1.1 Rappels sur la mécanique de la rupture . . . . .	6
1.1.1 Le problème de référence. . . . .	6
1.1.2 Les différents modes élémentaires de fissuration. . . . .	7
1.1.3 Présentation de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture . . . . .	7
1.1.4 Les champs asymptotiques en pointe de fissure . . . . .	9
1.1.5 Les FIC et leur extension aux matériaux élastoplastiques . . . . .	12
1.1.6 Approche de Dugdale et Barenblatt . . . . .	14
1.1.7 Les approches locales en pointe de fissure . . . . .	15
1.2 Propagation de Fissure avec transition traction-cisaillement . . . . .	16
1.2.1 Présentation du critère de propagation en 2D . . . . .	16
1.2.2 Extension de l'approche 2D vers un critère tridimensionnel de rupture . . . . .	19
<b>2 La méthode XFEM en dynamique non linéaire</b>	<b>25</b>
2.1 De l'approche continue à la méthode discrétisée . . . . .	26
2.2 Les éléments finis et la partition de l'unité . . . . .	27
2.2.1 Les éléments finis et la partition de l'unité . . . . .	27
2.2.2 X-FEM et représentation de la singularité en pointe de fissure . . . . .	27
2.2.3 Localisation de la pointe de la fissure sans représentation de la singularité. . . . .	29
2.3 Les schémas d'intégration temporelle de Newmark, cas du schéma explicite . . . . .	32
2.4 Le calcul de la matrice de masse en dynamique explicite . . . . .	34
2.4.1 Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale . . . . .	34
2.4.2 Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale par bloc . . . . .	35
2.4.3 Choix de la méthode de diagonalisation et influence sur le pas de temps . . . . .	36
2.5 L'intégration numérique des éléments XFEM . . . . .	36
2.5.1 Sous découpage non régulier . . . . .	36
2.5.2 Sous découpage régulier . . . . .	37
2.5.3 Méthodes non conventionnelles . . . . .	38

<b>3</b>	<b>La description de la fissure</b>	<b>43</b>
3.1	Représentation de la fissure . . . . .	44
3.2	Utilisation des fonctions de niveau pour la représentation de la fissure . . . . .	45
3.2.1	La méthode de discrétisation du front de fissure . . . . .	46
3.2.2	Les méthodes d'actualisation des level-sets par résolution d'équations aux dérivées partielles . . . . .	48
3.2.3	Les méthodes dites géométriques et mixtes . . . . .	54
3.2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Extension de l'approche XFEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure</b>	<b>59</b>
<b>4</b>	<b>Adaptation du critère de rupture à la propagation de fissure en 3D</b>	<b>61</b>
4.1	Mise en oeuvre du critère de fissuration en 3D . . . . .	62
4.1.1	Description des paramètres tridimensionnels du critère de rupture . . . . .	62
4.1.2	Domaine $\Omega$ en 3D . . . . .	62
4.1.3	Moyennes « temporelles » sur les avancées du front de fissure . . . . .	65
4.1.4	Moyennes « spatiales » sur les points du front de fissure . . . . .	66
4.1.5	Prise en compte de la plasticité . . . . .	67
4.2	Choix des paramètres du critère en 3D . . . . .	68
4.2.1	Description de Broberg [BRO 60] . . . . .	68
4.2.2	Les grandeurs analytiques observées . . . . .	69
4.2.3	Choix du domaine de calcul des contraintes en 3D . . . . .	71
4.2.4	Influence de la taille du domaine d'intégration en 3D . . . . .	76
4.2.5	« Moyenne en temps » de l'avancée de fissure . . . . .	76
4.2.6	Conclusion . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Optimisation de l'intégration numérique des éléments XFEM</b>	<b>81</b>
5.1	Optimisation de l'intégration par la règle classique de Gauss. . . . .	82
5.1.1	Recherche du sous découpage conforme optimal . . . . .	82
5.2	Une nouvelle méthode par modification des poids de Gauss . . . . .	87
5.2.1	Cadre général et démarche . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Couplage « fonctions de niveau-XFEM » pour la propagation de fissures en dynamique explicite</b>	<b>97</b>
6.1	Les limitations de la méthode de résolution des équations d'Hamilton-Jacobi en différences finies . . . . .	98
6.1.1	La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine . . . . .	98
6.1.2	Mise à jour des level-sets . . . . .	100
6.2	Méthodes géométriques appliquées à la dynamique explicite . . . . .	102
6.2.1	La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine . . . . .	102
6.2.2	Mise à jour des level-sets en 3D . . . . .	104
6.2.3	Résultat de l'algorithme de mise à jour géométrique des level-sets . . . . .	105
<b>III</b>	<b>Applications numériques et comparaisons expérimentales</b>	<b>111</b>
<b>7</b>	<b>Analyse 3D de cas principalement bidimensionnels</b>	<b>113</b>
7.1	Cas test en mode I pur . . . . .	114
7.2	L'expérience de Compact Compression Specimen [MAI 85, BUI 92] (CCS) . . . . .	118
7.3	L'expérience Kalthoff [KAL 00] et Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b] (ZRR) . . . . .	126
7.3.1	Simulation de l'expérience de Kalthoff [KAL 00] . . . . .	126

---

7.3.2	Simulation de l'expérience de Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b]	132
7.4	Conclusion	135
<b>8</b>	<b>Expériences de validation en mode mixte tridimensionnel</b>	<b>137</b>
8.1	Expérience de Grégoire [GRE 08] en mode mixte sur du PMMA	137
8.1.1	Mise au point des paramètres de la simulation au travers de la simulation en mode I.	138
8.1.2	Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP052.	144
8.1.3	Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP054.	151
8.2	Conclusion des simulations	155
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>



# Table des figures

1	Définition des domaines et des surfaces du solide. . . . .	xii
2	Représentation des surfaces de la fissure en 2D et 3D. . . . .	xiii
3	Illustration des différents repères utilisés. . . . .	xv
4	Courbe de traction des différents types de rupture pour différents matériaux. . . . .	1
1.1	Les différents modes de déplacement de la fissure. . . . .	7
1.2	Expérience d'Inglis. . . . .	8
1.3	Application soudaine d'une pression uniforme $\sigma^\infty$ . . . . .	10
1.4	Contour fermé $\Upsilon$ pour l'intégrale $J$ . . . . .	12
1.5	Champ d'extension virtuel $q$ utilisé dans le calcul de l'intégrale $I^{int}$ . . . . .	13
1.6	Représentation des contraintes en pointe de fissure. . . . .	14
1.7	Représentation de la force cohésive appliquée en pointe de fissure . . . . .	14
1.8	Évaluation du critère RKR. . . . .	15
1.9	Fonction poids $w(r)$ en fonction du rapport $r/R$ . . . . .	16
1.10	Angle de propagation de la fissure suivant la valeur de déformation équivalente $\tilde{\epsilon}^{eq}$ . . . . .	17
1.11	Maillage de l'éprouvette CT avec approximativement 40000 DDLs. . . . .	18
1.12	Résultats de la simulation de fissure de l'éprouvette CT tirée de Haboussa [HAB 12]. . . . .	19
1.13	Illustration des différents repères utilisés. . . . .	20
2.1	Exemple de loi cohésive appliquée à la fissure . . . . .	31
2.2	Élément triangle qui contient la pointe de fissure. . . . .	32
2.3	Fonctions de formes pour un élément 1D coupé par une fissure . . . . .	35
2.4	Fonctions de forme dans la base d'Hansbo pour un élément 1D coupé par une fissure . . . . .	35
2.5	Méthode de sous découpage par triangles par Moes <i>et al.</i> pour deux configurations de fissure . . . . .	37
2.6	Méthode de sous découpage par des quadrangles par Xi <i>et al.</i> pour deux configurations de fissure . . . . .	37
2.7	Sous-découpage régulier d'un élément quadrangle. . . . .	38
2.8	Paramétrisation de la découpe d'un élément quadrangle. . . . .	39
3.1	Représentation explicite de la fissure par un maillage par CAST3M. . . . .	44
3.2	Représentation d'un cercle en 2D centré en $(0.25, 0.25)$ sur le domaine $\{-1; 1\} \times \{-1; 1\}$ par la méthode des level-sets. . . . .	45
3.3	Projection du noeud $P_{nd}$ sur le front de fissure . . . . .	47
3.4	Méthode de discrétisation de Colombo [COL 11] . . . . .	47
3.5	Différentes étapes de propagation des vitesses du front 3.5(a), suivant la normale à la level-set tangente 3.5(b) et enfin suivant la normale à la level-set normale 3.5(c), pour obtenir les champs de vitesse dans tout le domaine level-set. Les étapes de mise à jour des level-sets jusqu'au résultat final 3.5(j) . . . . .	49
3.6	Localisation des différentes zones de la méthode $\phi\psi r\theta$ . . . . .	55
3.7	Exemple d'actualisation des level-sets pour la méthode $\phi\psi r\theta$ . . . . .	55
3.8	Localisation des différentes zones de la méthode mixte pour l'actualisation de $\phi_t$ . . . . .	57

3.9	Exemple d'actualisation des level-sets pour la méthode mixte. . . . .	57
4.1	Les différentes formes du domaine $\Omega$ en 2D et en 3D. . . . .	62
4.2	Calcul de la base locale en pointe de fissure au point M en 3D. . . . .	63
4.3	Illustration des zones prise en compte dans le critère de propagation. . . . .	64
4.4	Zone de calcul du critère de rupture pour se conformer à l'enrichissement. . . . .	64
4.5	Problème en 3D pour calculer le critère de rupture conformément à l'enrichissement. . . . .	65
4.6	Influence des moyennes temporelles sur le front de fissure. . . . .	65
4.7	Moyenne spatiale le long du front de fissure. . . . .	67
4.8	Prise en compte de la plasticité en pointe de fissure . . . . .	67
4.9	Cas test de Broberg. . . . .	68
4.10	Configuration de la fissure afin de s'affranchir des erreurs dues à l'enrichissement saut et à l'intégration. . . . .	70
4.11	Vue de dessus de l'éprouvette et représentation du domaine $\Omega$ en demi-sphère en peau et à coeur. . . . .	71
4.12	Évolution temporelle de $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$ normalisé pour $R = 1$ taille d'élément. . . . .	72
4.13	Évolution temporelle de $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$ normalisé pour $R = 2$ tailles d'élément. . . . .	72
4.14	Évolution temporelle de $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$ normalisé pour $R = 3$ tailles d'élément. . . . .	73
4.15	Évolution temporelle de $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$ normalisé pour $R = 4$ tailles d'élément. . . . .	73
4.16	Évolution temporelle de $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$ normalisé pour $R = 5$ tailles d'élément. . . . .	74
4.17	Évolution de la composante $\tilde{\Sigma}_{22}$ du pseudo-tenseur des contraintes en pointe de fissure à $t = 1.5t_c$ , $t = 2.0t_c$ et $t = 2.5t_c$ pour un domaine $\Omega$ en demi-sphère. . . . .	75
4.18	Évolution de la composante $\tilde{\Sigma}_{22}$ du pseudo-tenseur des contraintes en pointe de fissure à $t = 1.5t_c$ , $t = 2.0t_c$ et $t = 2.5t_c$ pour un domaine $\Omega$ en demi-cylindre. . . . .	75
4.19	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 0.2 taille d'élément. . . . .	76
4.20	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 0.4 taille d'élément. . . . .	77
4.21	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 0.6 taille d'élément. . . . .	77
4.22	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 0.8 taille d'élément. . . . .	78
4.23	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 1.0 taille d'élément. . . . .	78
4.24	$\tilde{\Sigma}_{22}$ normalisé pour des sauts de fissure de 1.5 tailles d'élément. . . . .	79
5.1	Élément 1D représenté dans le repère isoparamétrique, coupé par une fissure. . . . .	82
5.2	Erreur d'intégration la fonction $f(\xi) = H(\xi)$ discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D. . . . .	83
5.3	Erreur d'intégration la fonction $f(\xi) = \xi H(\xi)$ discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D. . . . .	84
5.4	Erreur d'intégration la fonction $f(\xi) = \xi^2 H(\xi)$ discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D. . . . .	84
5.5	Erreur d'intégration la fonction $f(\xi) = (1 + \xi + \xi^2)H(\xi)$ discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D. . . . .	85
5.6	Élément quadrangle dans le repère isoparamétrique. . . . .	86
5.7	Localisation des points de Gauss dans l'élément isoparamétrique pour tester l'apparition des modes de Hourglass. . . . .	86
5.8	Élément quadrangle dans le repère isoparamétrique. . . . .	88
5.9	Méthode de sous découpage par triangle pour un élément contenant une fissure. . . . .	90
5.10	Les différentes positions de fissure représentées dans l'élément isoparamétrique. . . . .	91
5.11	Localisations des points de Gauss dans l'élément isoparamétrique . . . . .	92
5.12	localisations des points de Gauss . . . . .	95
6.1	Résultats à convergence des deux équations de ré-initialisation et d'orthogonalisation de la level-set normale. . . . .	98
6.2	Propagation des vitesses des noeuds proches du front de fissure vers le domaine level-set. . . . .	99

6.3	Courbe de convergence de la propagation des vitesses dans le maillage différences finies. . . . .	100
6.4	Déplacements de la level-set $\phi_n$ entre l'orthogonalisation et la ré-initialisation de $\phi_n$ . . . . .	101
6.5	Projeté du noeud du maillage sur le segment formé par les deux points du front les plus proches. . . . .	102
6.6	Définition des zones de mise à jour des level-sets. . . . .	105
6.7	Résultats de la mise à jour des level-sets en hélice. Level-sets au départ 6.7(a), au 20 <sup>e</sup> pas de temps 6.7(b) et au 30 <sup>e</sup> pas de temps 6.7(c). . . . .	106
6.8	Résultats de la mise à jour des level-sets pour une fissure droite soumise à une variation intempesive de l'angle d'avancée. Level-sets au départ 6.8(a), au 20 <sup>e</sup> pas de temps 6.8(b) et au 30 <sup>e</sup> pas de temps 6.8(c). . . . .	107
6.9	Résultats de la mise à jour des level-sets pour la fissure en V. Level-sets au 20 <sup>e</sup> pas de temps 6.9(a) et au 30 <sup>e</sup> pas de temps 6.9(b) . . . . .	108
6.10	Utilisation d'un maillage pour représenter la fissure, résultat de la mise à jour de la fissure pour un front de fissure en V. . . . .	108
6.11	Résultats de la mise à jour des level-sets pour la fissure en arc de cercle soumise à un changement d'angle de 70° au 20 <sup>e</sup> pas de temps et au 30 <sup>e</sup> pas de temps. . . . .	109
7.1	Géométrie de l'éprouvette pour la simulation en mode I pur. . . . .	114
7.2	Évolution des contraintes de Von Mises et de la fissure pour $t = 0ms, t = 0.5ms, t = 1.0ms, t = 1.5ms, t = 2.0ms, t = 2.5ms$ et $t = 3.0ms$ . . . . .	116
7.3	Longueur de la fissure en fonction du temps pour la simulation en mode I pur. . . . .	116
7.4	Évolution temporelle des composantes du tenseur moyen en pointe de fissure pour la simulation en mode I pur. . . . .	117
7.5	Critère de rupture en fonction du temps pour la simulation en mode I pur. . . . .	117
7.6	Géométrie de l'éprouvette pour la simulation de l'expérience CCS. . . . .	118
7.7	Chargement $P_0(t)$ appliqué lors de la simulation de CCS. . . . .	119
7.8	Évolution de la longueur de fissure en fonction du temps en 3D et en 2D tirée de [MEN 07] pour la simulation de CCS. . . . .	120
7.9	Trajet de la fissure en 2D tiré de [MEN 07]. . . . .	121
7.10	Évolution des déplacements à $t = 0\mu s, t = 90\mu s, t = 100\mu s, t = 110\mu s, t = 120\mu s, t = 130\mu s$ et $t = 140\mu s$ . . . . .	123
7.11	Zoom sur l'évolution des contraintes de Von Mises pour la zone autour de la fissure à $t = 0\mu s, t = 90\mu s, t = 100\mu s, t = 110\mu s, t = 120\mu s, t = 130\mu s$ et $t = 140\mu s$ . . . . .	124
7.12	Calcul du critère de rupture de Menouillard et Haboussa. . . . .	125
7.13	Évolution temporelle des composantes du tenseur moyenné en pointe de fissure pour la simulation de CCS. . . . .	125
7.14	Critère d'avancée de la fissure en fonction du temps pour la simulation de CCS. . . . .	126
7.15	Géométrie et conditions aux limites de la simulation de Kalthoff. . . . .	127
7.16	Courbe de traction utilisée lors de la simulation pour le matériau 18Ni1900. . . . .	127
7.17	Évolution des contraintes de Von Mises pour $t = 0.0ms, t = 20\mu s, t = 40\mu s, t = 60\mu s$ et $t = 80\mu s$ pour la simulation de Kalthoff. . . . .	129
7.18	Évolution de la longueur de fissure en fonction du temps pour la simulation de Kalthoff en 3D et en 2D tirée de [ELG 09]. . . . .	130
7.19	Angle $\theta_c$ en fonction du temps en 3D pour la simulation de Kalthoff. . . . .	130
7.20	Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure en 3D pour la simulation de Kalthoff. . . . .	131
7.21	Évolution de l'intensité des contraintes moyennées en pointe de fissure en fonction du temps en 3D pour la simulation de Kalthoff. . . . .	131
7.22	Géométrie et conditions aux limites de la simulation de l'expérience ZRR. . . . .	132
7.23	Trajet de la fissure pour la simulation de l'expérience ZRR par Haboussa en 2D pour deux vitesses de $V_0$ . . . . .	133

7.24	Évolution des déplacements pour $t = 0\mu s, t = 20\mu s, t = 40\mu s, t = 60\mu s$ et $t = 70\mu s$ pour une vitesse $V_0 = 20m.s^{-1}$ pour la simulation 3D de ZRR. . . . .	134
8.1	Banc d'essai pour les expériences de David Grégoire. . . . .	138
8.2	Géométrie et conditions aux limites de l'essai Avril 2006- EP01. . . . .	138
8.3	Signal de la vitesse sur la barre entrante tirée de [GRE 08]. . . . .	139
8.4	Déplacement imposé sur la face d'entrée de l'éprouvette. . . . .	139
8.5	Épaisseur de la pré-entaille initiale d'après [GRE 08]. . . . .	141
8.6	Critère de propagation pour la simulation numérique tirée de [GRE 08]. . . . .	141
8.7	Évolution des contraintes de Von Mises et de la fissure pour $t = 0\mu s, t = 200\mu s, t = 250\mu s, t = 300\mu s, t = 350\mu s$ et $t = 400\mu s$ pour une zone autour de la fissure dans la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 de Grégoire. . . . .	142
8.8	Avancée de fissure en fonction du temps pour la simulation 3D de l'expérience Avril 2006-EP01. . . . .	143
8.9	Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D. . . . .	143
8.10	Valeur du critère de propagation en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D. . . . .	144
8.11	Valeur de l'angle $\theta$ en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D. . . . .	144
8.12	Géométrie de l'éprouvette Février 2008 - EP052 avec la fissure inclinée à $22^\circ$ par rapport à l'horizontale. . . . .	145
8.13	Évolution des déplacements et de la fissure à $t = 0\mu s, t = 200\mu s, t = 225\mu s, t = 250\mu s$ et $t = 275\mu s$ pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 de Grégoire. . . . .	146
8.14	Contraintes de Von Mises à $t = 0\mu s, t = 200\mu s, t = 225\mu s, t = 250\mu s, t = 275\mu s$ pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 de Grégoire. . . . .	147
8.15	Trajet de fissure post-mortem obtenue par Grégoire dans l'expérience Février 2008 - EP052. . . . .	148
8.16	Abscisse du front obtenue par Grégoire dans l'expérience Février 2008 - EP052. . . . .	149
8.17	Évolution temporelle de la longueur de fissure pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D. . . . .	149
8.18	Évolution du critère en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D. . . . .	150
8.19	Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D. . . . .	150
8.20	Valeur de l'angle $\theta_c$ en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D. . . . .	151
8.21	Contraintes de Von Mises à $t = 0\mu s, t = 200\mu s, t = 250\mu s, t = 300\mu s, t = 350\mu s$ pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054. . . . .	153
8.22	Trajet de fissure post-mortem de l'expérience de Grégoire Février 2008 - EP054. . . . .	154
8.23	Longueur de fissure en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054 en 3D. . . . .	154
8.24	Valeur du critère de propagation en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054 en 3D. . . . .	155

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques du matériau 16MND5 . . . . .	19
1.2	Limites des angles de propagation pour les 3 modes purs . . . . .	24
2.1	La stabilité des schémas de Newmark suivant les valeurs de $\beta$ et $\gamma$ . . . . .	33
2.2	Les principaux schémas numérique de Newmark suivant les valeurs de $\beta$ et $\gamma$ . . . . .	33
2.3	Configurations de l'intégration suivant le type d'élément . . . . .	36
3.1	Actualisation par la méthode $\phi\psi\theta$ , équations de définition des domaines et d'actualisation	54
3.2	Actualisation par la méthode mixte, équations de définition des domaines et d'actualisation de la level-set $\phi_t$ . . . . .	56
4.1	Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour les cas de Brogberg. . . . .	69
5.1	Caractéristiques du matériau pour tester l'apparition des modes de Hourglass. . . . .	86
5.2	Valeurs propres de la matrice élémentaire pour les différents emplacements de points de Gauss. . . . .	87
5.3	Sous découpage des éléments suivant le type d'élément . . . . .	87
5.4	Liste des fonctions à intégrer en 2 dimensions . . . . .	89
5.5	Résultats d'intégration pour la première fissure . . . . .	93
5.6	Résultats d'intégration pour la seconde fissure . . . . .	93
5.7	Résultats d'intégration pour la troisième fissure . . . . .	93
5.8	Résultats d'intégration pour la quatrième fissure . . . . .	94
5.9	Résultats d'intégration pour les différents sous-systèmes . . . . .	95
6.1	Définition des zones et des équations de mise à jour des level-sets. . . . .	104
6.2	Dimensions et tailles des maillages pour les cas test sur les level-sets. . . . .	105
7.1	Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation du mode I. . . . .	114
7.2	Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de CCS. . . . .	119
7.3	Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de l'expérience de Kalthoff. . . . .	128
7.4	Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de l'expérience ZRR. . . . .	132
8.1	Dimensions de l'éprouvette tirée de [GRE 08]. . . . .	138
8.2	Paramètres pour les conditions d'impédance tirés de [PRA 07]. . . . .	140
8.3	Paramètres choisis pour les conditions d'impédance en 3D. . . . .	140
8.4	Paramètre matériau du PMMA en dynamique tirés de [GRE 08]. . . . .	140
8.5	Paramètres du critère de rupture modifié et paramètres de la simulation de l'expérience en mode I. . . . .	141



# Liste des notations

## Notations générales

$a$	scalaire,
$\underline{a}$	vecteur,
$\underline{\underline{a}}$	tenseur d'ordre 2,
$\underline{\underline{\underline{a}}}$	tenseur d'ordre 4,
$\otimes$	produit tensoriel,
$\cdot$	produit tensoriel contracté,
$:$	produit tensoriel doublement contracté,
$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{\underline{I}}}$	tenseur identité d'ordre 2 et d'ordre 4
$\underline{0}, \underline{\underline{0}}$	vecteur nul, tenseur nul d'ordre 2,
$a_{ij}$	terme ligne $i$ colonne $j$ du tenseur $\underline{\underline{a}}$ .

Les composantes d'un tenseur  $\underline{\underline{a}}$  dans la base  $\mathcal{R} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  seront notées :

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

## Fonctions mathématiques

$\text{sign}(\cdot)$	fonction signe ( $-1$ si strictement positif, $0$ si nul et $+1$ si strictement négatif),
$\tan(\cdot)$	fonction tangente,
$\cos(\cdot)$	fonction cosinus,
$\sin(\cdot)$	fonction sinus,
$H(\cdot)$	fonction de Heaviside,
$\delta(\cdot)$	fonction de Dirac,
$\{\cdot\}^+, \{\cdot\}^-$	partie positive et partie négative,
$ \cdot $	valeur absolue,
$\min(\cdot, \cdot)$	fonction minimum de deux nombres,
$\min(\underline{a})$	terme minimum d'un vecteur,
$\max(\cdot, \cdot)$	fonction maximum de deux nombres,
$\max(\underline{a})$	terme maximum d'un vecteur,
$\det(\underline{\underline{a}})$	déterminant,
$\nabla a$	gradient,
$\text{div}(\underline{a}), \text{div}(\underline{\underline{a}})$	divergent,
$\ \underline{a}\ $	norme $L^2$ ,
$\dot{a}$	dérivée par rapport au temps,
$\ddot{a}$	dérivée seconde par rapport au temps,

## Effort appliqués à un solide

$f_v$	forces volumiques appliquées au solide,
$\underline{F}_d$	efforts de surfaces, décomposés en 2 sous catégories :
$f_r$	les efforts répartis de densité,
$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_n$	les efforts ponctuels.

## Définition des domaines et des surfaces d'un solide

On se place dans l'hypothèse des petites déformations, le domaine et les surfaces sont donc définis dans la configuration initiale de la structure. La figure 1 récapitule l'ensemble des domaines et des surfaces du solide.

$\Omega$	Volume du solide,
$S$	surface totale du solide,
$S_i$	frontière où l'on impose des conditions aux limites,
$S_f$	frontière soumise à des efforts de surfaces $\underline{F}_d$ ,
$S_u$	surface utile $S_u = S - S_i$ .

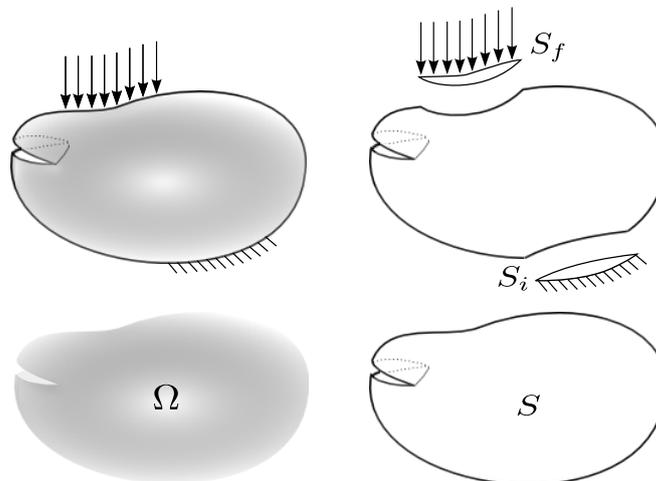


FIGURE 1: Définition des domaines et des surfaces du solide.

## Définition du domaine de la discontinuité

$\Gamma$	surface de la discontinuité,
$\Gamma^+$	partie supérieure de la discontinuité,
$\Gamma^-$	partie inférieure de la discontinuité,
$\Lambda$	front de fissure.

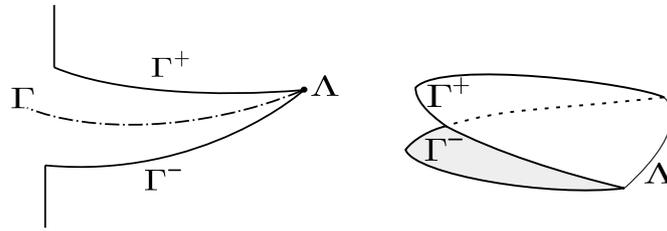


FIGURE 2: Représentation des surfaces de la fissure en 2D et 3D.

## Les variables du matériau

$E$	module de Young,
$\nu$	coefficient de Poisson,
$\lambda, \mu$	coefficients de Lamé $\left( \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ ,
$\rho$	masse volumique,
$c_r$	célérité des ondes de Rayleigh,
$c_s$	célérité des ondes de surface,
$c_d$	célérité des ondes de compression ou de dilatation,

## Les variables continues du solide

$t$	variable temps,
$\varepsilon^{eq}$	déformation équivalente de Mazars,
$\sigma^{VM}$	contrainte équivalente de Von Mises,
$\underline{x}$	vecteur position courante,
$\underline{X}$	vecteur position initiale,
$\underline{u}$	vecteur déplacement,
$\underline{n}$	vecteur normal à une surface,
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes,
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations,
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$	tenseur des déformations élastiques,
$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	tenseur des déformations plastiques,
$\underline{\underline{H}}_o$	tenseur de Hooke élastique,

## Les variables continues de la fissure

$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes équivalent en pointe de fissure,
$\underline{\underline{\Sigma}}$	pseudo-tenseur des contraintes équivalent en pointe de fissure,
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations équivalent en pointe de fissure,
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{eq}$	déformation équivalente de Mazars appliqué au tenseur des déformations équivalent en pointe de fissure,
$\underline{\underline{\sigma}}^{VM}$	contrainte équivalente de Von Mises appliqué au tenseur des contraintes équivalent en pointe de fissure,
$\underline{\underline{\sigma}}_M$	tenseur des contraintes du mode $M$ ( $M = I, II, III$ ),
$K_M$	Facteur d'Intensité des Contraintes du mode $M$ ( $M = I, II, III$ ),
$\underline{u}_M$	déplacements pour le mode $M$ ( $M = I, II, III$ ),
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	valeurs propres du tenseur des contraintes,
$G$	taux de restitution d'énergie élastique,
$G_{Ic}$	taux de restitution d'énergie critique,
$\mathcal{A}$	Aire de la fissure,
$J$	intégrale $J$ ,
$J^{int}$	intégrale d'interaction,
$P$	tenseur d'Eshelby,
$\dot{a}$	vitesse de la pointe de fissure,
$\Delta a$	avancée de la pointe de fissure,

## Les variables discontinues

$\llbracket \underline{u} \rrbracket$	saut de déplacement,
$\underline{u}^+$	déplacement de la partie supérieur du solide,
$\underline{u}^-$	déplacement de la partie inférieur du solide,

## Les variables de l'implémentation numériques

$\Delta t$	pas de temps,
$\Delta \tau$	pas de temps fictif,
$\underline{U}$	déplacements nodaux standards,
$\underline{U}^e$	déplacements nodaux enrichis, ils peuvent être décomposés en deux déplacements :
$\underline{a}$	déplacements nodaux d'un élément totalement coupé,
$\underline{b}$	déplacements nodaux d'un élément en pointe de fissure,
$\underline{N}$	vecteur des fonctions de forme,
$n_{nd}$	nombre de noeuds de l'élément,
$n_g$	nombre de points de Gauss d'un élément,
$\omega_k$	poins de Gauss numéro $k$ ,
$\mathcal{N}$	tous les noeuds de la structure ou de la sous-structure,
$\mathcal{N}_{cut}$	noeuds enrichis par les fonctions saut,
$\mathcal{N}_{tip}$	noeuds enrichis par les fonctions en pointe de fissure,
$\phi_t$	level-sets tangente décrivant le plan de la fissure,
$\phi_n$	level-set normale décrivant le front de la fissure,
$V_{\phi_t}$	vitesse de la level-set tangente,
$V_{\phi_n}$	vitesse de la level-set normale,
$\theta_c$	angle de propagation de la fissure dans le plan normal à $\underline{e}_3$ (cf. figure 3),
$\psi_c$	angle de propagation de la fissure dans le plan normal à $\underline{e}'_2$ (cf. figure 3),

## Les différents repères

Un certain nombre de repères ont été définis, ils sont représentés dans la figure 3 et récapitulés ci-dessous :

$\mathcal{G}=(e_x, e_y, e_z)$	repère global de définition du problème,
$\mathcal{L}=(e_1, e_2, e_3)$	repère local en pointe de fissure (identique au repère de définition des modes de fissuration),
$\mathcal{L}'=(e'_1, e'_2, e'_3)$	repère local en pointe de fissure (tourné de l'angle $\theta_c$ ),
$\mathcal{L}''=(e''_1, e''_2, e''_3)$	repère local en pointe de fissure (tourné de l'angle $\theta_c$ puis de l'angle $\psi_c$ ),
$\mathcal{E}=(e'_x, e'_y, e'_z)$	repère local de l'élément,
$\mathcal{I}=(\xi, \eta, \zeta)$	repère isoparamétrique de l'élément,

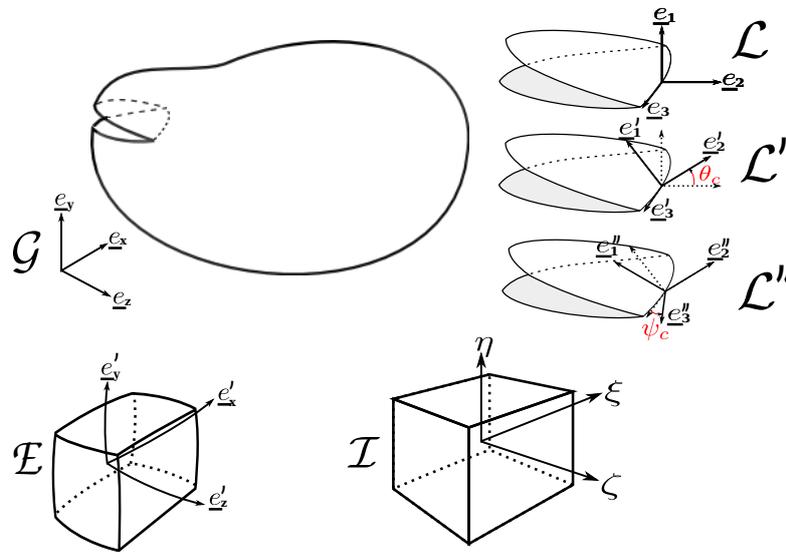


FIGURE 3: Illustration des différents repères utilisés.



# Introduction

La mécanique Newtonienne est une science relativement ancienne. Elle est apparue bien avant les nouveaux domaines du début du XX<sup>e</sup> siècle, tels que la mécanique quantique, l'astrophysique, la chimie et bien d'autres sciences. Une branche nouvelle, apparue après la seconde guerre mondiale suite aux travaux de Griffith, Rice, Hutchinson et Irwin concerne la mécanique de la rupture. Elle a pour objectif de prévoir le comportement des fissures dans les structures afin d'éviter leur ruine.

La mécanique de la rupture peut être envisagée sous deux angles selon le type de sollicitation apportée à la structure :

- la propagation quasi-statiques qui concerne la fatigue,
- la propagation dynamique qui peut être due soit à un chargement dynamique, soit à une rupture brutale du matériau.

Au sein de chacune des propagations, on fait également la distinction entre plusieurs modes de rupture suivant la nature du matériau :

- la rupture fragile, qui concerne les matériaux fragiles (rupture brutale avec un comportement globalement élastique),
- la déchirure ductile, concerne une propagation stable de la fissure dans les matériaux élastoplastiques,
- l'endommagement qui concerne principalement les matériaux anisotropes tels que les bétons et les composites,
- le fluage pour lesquels des déformations viscoplastiques interviennent.

La figure 4 illustre les différents types de rupture pour différents matériaux.

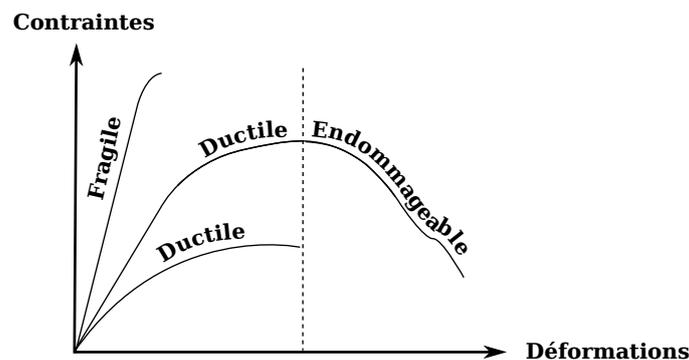


FIGURE 4: Courbe de traction des différents types de rupture pour différents matériaux.

Cette thèse traite essentiellement des effets dynamiques de la fissuration avec des ruptures peu ductiles. Elle s'appuie sur des concepts théoriques empruntés à la propagation quasi-statique. Bien que la prédiction et la simulation des trajets de propagation de fissure soit un domaine assez peu maîtrisé, quelques résultats ont déjà été obtenus en 2 dimensions. Ainsi la simulation de propagation de fissure a permis de prendre en compte des transitions et changements brutaux des directions de fissure dans les matériaux.

Les nouvelles techniques d'expérimentation ont permis de comprendre des phénomènes complexes au sein de la matière et de pouvoir essayer ensuite de les simuler.

Il existe plusieurs méthodes de simulation, mais la méthode des éléments finis a démontré sa robustesse et sa fiabilité pour un coût numérique raisonnable. Son application à la propagation des fissures est difficile à mettre en oeuvre. Elle pose des problèmes car il faut faire évoluer la discontinuité, ce qui nécessite des étapes de projections et de remaillage au cours du temps. Ces étapes sont encore plus délicates en 3 dimensions avec des fissures mobiles et dans le cas de matériaux élasto-plastiques. Les méthodes les plus courantes utilisées dans ce domaine sont les méthodes d'érosion d'éléments. Les éléments sont enlevés du calcul lorsque qu'un critère est atteint (déformations équivalentes trop grandes, variables d'endommagement dépassant un seuil critique...). Ces méthodes ne sont en général pas fiables et prédictives. Elles ont été améliorées (par exemple dans ABAQUS [DAS ]) en introduisant le concept d'érosion lorsque l'énergie élastique volumique disponible est supérieure à l'énergie de fracturation volumique  $G_V$ . Cette énergie  $G_V$  est déduite simplement du taux de restitution d'énergie  $G_C$ . On multiplie simplement  $G_C$  par la taille de maille pour obtenir  $G_V$ . Cet artifice améliore la robustesse du calcul mais ne gère encore pas bien les chemins de fissuration dans le cas d'un maillage structuré. Une extension de la méthode des éléments finis a été développée dans les années 1990, pour prendre en compte les discontinuités implicitement sans étapes de remaillage, cette méthode s'appelle la méthode des éléments finis étendus ou XFEM. C'est cette méthode qui sera utilisée tout au long de cette thèse. Elle sera appliquée à des problèmes de dynamique rapide et pour des trajets de fissures tridimensionnels inconnus à l'avance.

Ce travail a pour objectif la simulation numérique de la propagation dynamique des fissures en 3 dimensions. Cette thématique s'appuie sur des travaux déjà réalisés en 2 dimensions dans le cadre de la thèse de Haboussa [HAB 12] et de Menouillard [MEN 07]. De plus on souhaite pouvoir utiliser cette méthode dans les cas de matériaux non linéaires pouvant dépendre de l'histoire de chargement.

Les principaux développements associés à ce travail doctoral sont réalisés dans le code de simulation en dynamique rapide des fluides et des structures EUROPLEXUS [CEA ]. Cet outil est la co-propriété du CEA et du Joint Research Center de la Commission Européenne (<http://www-epx.cea.fr>). EUROPLEXUS est développé dans le cadre d'un consortium impliquant les propriétaires ainsi que des partenaires dits majeurs, disposant d'un accès complet au code source, à savoir EDF et l'ONERA. De nombreuses collaborations académiques sont menées autour du programme, avec une mise à disposition partielle du code source, comme avec le LaMCoS.

**Première partie**

**Étude bibliographique**



# Chapitre 1

## Les concepts de la mécanique de la rupture

*Ce chapitre décrit dans un premier temps les concepts généraux de la mécanique de la rupture, puis l'applique au cas particulier de la rupture en dynamique pour expliciter un critère de rupture en 3 dimensions.*

### Sommaire

---

<b>1.1 Rappels sur la mécanique de la rupture</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1.1 Le problème de référence. . . . .	6
1.1.2 Les différents modes élémentaires de fissuration. . . . .	7
1.1.3 Présentation de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture . . . . .	7
1.1.4 Les champs asymptotiques en pointe de fissure . . . . .	9
1.1.5 Les FIC et leur extension aux matériaux élastoplastiques . . . . .	12
1.1.6 Approche de Dugdale et Barenblatt . . . . .	14
1.1.7 Les approches locales en pointe de fissure . . . . .	15
<b>1.2 Propagation de Fissure avec transition traction-cisaillement</b> . . . . .	<b>16</b>
1.2.1 Présentation du critère de propagation en 2D . . . . .	16
1.2.2 Extension de l'approche 2D vers un critère tridimensionnel de rupture . . . . .	19

---

## 1.1 Rappels sur la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a commencé à se développer dans les années 1950, dans un contexte de développement économique important. Les industriels de l'époque essayant de prévoir si les défauts présents dans les structures présentaient des risques de propagation (le but n'étant alors pas de les simuler numériquement car les moyens informatiques de l'époque ne le permettaient pas).

### 1.1.1 Le problème de référence.

Nous considérons la déformation d'une structure élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit des petites déformations et de petits déplacements. Elle possède un volume  $\Omega$  dont la frontière, notée  $S$ , est divisée en deux parties complémentaires :  $S_i$  où un déplacement  $\underline{u}_d$  est imposé,  $S_f$  où des efforts  $\underline{F}_d$  sont imposés. La structure est également soumise à des forces volumiques  $\underline{f}_v$  sur tout le domaine. La fissure est représentée par ses deux lèvres  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ . Le front de la fissure est défini par la courbe  $\Lambda = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$ . Généralement on fait l'hypothèse que les surfaces  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont libres, ce qui est notre cas.

Les grandeurs à déterminer pour résoudre ce problème sont le champ de déplacement  $\underline{u}$ , le champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et le champ de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

Ces différentes notations sont illustrées dans les figures 1 et 2 de la nomenclature.

Les équations locales de la mécanique qui relient ces grandeurs sont :

- équation de comportement du matériau : elle relie les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  aux déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . On considère le matériau comme élastique linéaire, ce qui nous amène à la première équation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\epsilon}}. \quad (1.1)$$

$\underline{\underline{H}}$  est le tenseur de Hooke d'ordre 4, qui s'exprime pour les matériaux élastiques homogènes et isotropes, à partir des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\underline{\underline{H}} = \lambda \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{I}}, \quad (1.2)$$

- équation déformations-déplacements : elle relie les déformations ( $\underline{\underline{\epsilon}}$ ) aux déplacements ( $\underline{u}$ ). Dans le cas de petites perturbations (déplacements et déformations petits par rapport aux dimensions du solide), on a la relation linéaire :

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t), \quad (1.3)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}], \quad (1.4)$$

- équations d'équilibre : elle décrit l'équilibre du solide en dynamique,

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_v = \rho \underline{\ddot{x}}, \quad (1.5)$$

dans le cas statique :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_v = \underline{0}, \quad (1.6)$$

- conditions aux limites et efforts : il existe deux types de conditions aux limites appliquées au point  $M$  :

- sur la surface  $S_i \subset S$ , les déplacements sont imposés (conditions de Dirichlet) :

$$\underline{u} = \underline{u}_d \quad \forall M \in S_i, \quad (1.7)$$

- sur la surface complémentaire  $S_f \in S$ , sont imposés des efforts extérieurs  $\underline{F}_d$  (ou l'absence d'efforts extérieurs  $\underline{F}_d = \underline{0}$ ). Ces valeurs de  $\underline{F}_d$  imposent les valeurs de certaines composantes du tenseur des contraintes par la relation (condition de Neumann) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \quad \forall M \in S_f. \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Les différents modes élémentaires de fissuration.

Une fissure est la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties par une surface géométrique  $\Gamma$ . Elle est représentée mathématiquement par une discontinuité du champ de déplacement  $u$ , tel que décrit dans l'équation 1.9.

$$[[u]] = \underline{u}^+ + \underline{u}^- . \quad (1.9)$$

La normale à la surface  $\Gamma$  définit alors le type de rupture. Il existe 3 modes de rupture comme illustrés figure 1.1 :

- mode I ou "mode d'ouverture",
- mode II ou "mode de glissement plan",
- mode III ou "mode de glissement anti-plan",

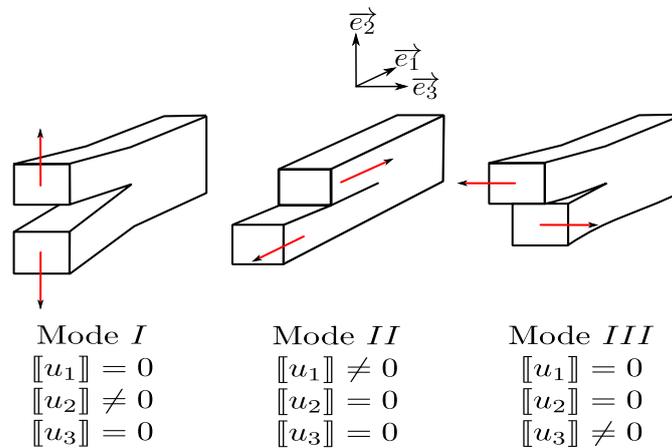


FIGURE 1.1: Les différents modes de déplacement de la fissure.

En général, les modes de rupture ne sont pas purs, ils sont mixtes, c'est à dire composés de plusieurs modes, dont un est prépondérant.

### 1.1.3 Présentation de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture

En 1913, Inglis [ING 13] arrive à partir d'expériences comme celle de la figure 1.2 à prévoir en 2 dimensions l'ouverture d'une plaque trouée avec une ellipse de grand axe  $h$  et de petit axe  $b$  soumise à un chargement  $\sigma_0$ . Il arrive alors à calculer la contrainte maximale applicable sur la plaque par l'équation 1.10.

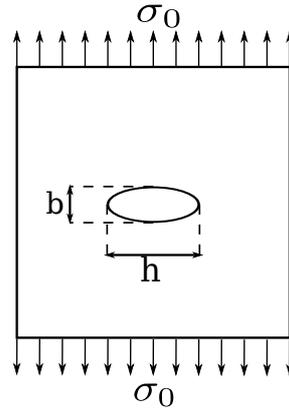


FIGURE 1.2: Expérience d'Inglis.

$$\sigma_{max} \simeq \sigma_0 \sqrt{\frac{2h}{b}}. \quad (1.10)$$

On peut remarquer que si l'on fait tendre la valeur de  $b$  vers 0, la valeur maximale des contraintes tend vers l'infini.

En 1920, Griffith [GRI 21] propose une étude énergétique de la propagation de fissure. En partant de l'hypothèse d'un matériau linéaire élastique, la propagation de fissure dans le matériau engendre une dissipation d'énergie  $dE_{fiss}$  qui doit dépendre de la surface fissurée  $\partial\mathcal{A}$ . La quantité d'énergie dissipée est donnée par l'équation 1.11 :

$$dE_{fiss} = 2\gamma\partial\mathcal{A}. \quad (1.11)$$

Il applique alors le premier principe de la thermodynamique, donné par l'équation 1.12.

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} + \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = P_{ext} + Q - 2\gamma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

où  $E_{int}$  est l'énergie interne,  $E_{cin}$  est l'énergie cinétique apportée au système,  $P_{ext}$  la puissance des efforts extérieurs et  $Q$  est la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur. La variation d'énergie interne et la puissance extérieure peuvent être explicitées par les équations 1.13 et 1.14.

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} = Q + \frac{\partial E_{elas}}{\partial t} = Q + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega, \quad (1.13)$$

$$P_{ext} = \int_{S_u} \underline{\underline{F}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} d\Omega. \quad (1.14)$$

En remplaçant chaque terme dans l'équation 1.12, on obtient :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} = \int_{S_u} \underline{\underline{F}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} d\Omega - \frac{\partial E_{elas}}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

En mettant en facteur la variation d'aire de la fissure, on arrive à l'équation 1.16 :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} = \left( \int_{S_u} \underline{\underline{F}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial \mathcal{A}} dS + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}_d \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial \mathcal{A}} d\Omega - \frac{\partial E_{elas}}{\partial \mathcal{A}} - 2\gamma \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Le critère d'avancée de la fissure est donné par le signe de la dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps. Ce processus étant irréversible, le terme  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$  est positif ou nul. On appelle alors taux de restitution

d'énergie  $G$ , le terme qui va contrôler l'avancée de fissure, il est donné dans l'équation 1.17 :

$$G = \int_{S_u} F_d \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}} dS + \int_{\Omega} f_d \frac{\partial u}{\partial \mathcal{A}} d\Omega - \frac{\partial E_{elas}}{\partial \mathcal{A}}. \quad (1.17)$$

Il y a alors 3 scénarios possibles :

- $G < 2\gamma$ , il n'y a pas de propagation,
- $G = 2\gamma$ , il y a propagation **stable** de la fissure,
- $G > 2\gamma$ , il a propagation **instable** de la fissure.

**Remarque 1** La démarche de Griffith a permis d'aboutir à un résultat très intéressant. Ces travaux ont ensuite été repris afin d'être adaptés à des matériaux et des géométries complexes et dans des conditions de température et de pression différentes.

## 1.1.4 Les champs asymptotiques en pointe de fissure

### 1.1.4.1 Cas statique

Une analyse asymptotique en pointe de fissure a été effectuée par Irwin [IRW 57] qui en a déduit les champs de contrainte en pointe de fissure.

Pour cela il a résolu en statique et pour un matériau linéaire élastique les équations 1.1 à 1.8 de la mécanique, il a ainsi obtenu les expressions des contraintes asymptotiques 1.18 à 1.20 pour chacun des modes :

$$\underline{\underline{\sigma}}_I(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f^I(\theta) + \underline{\underline{O}}(\sqrt{r}), \quad (1.18)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{II}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f^{II}(\theta) + \underline{\underline{O}}(\sqrt{r}), \quad (1.19)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{III}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f^{III}(\theta) + \underline{\underline{O}}(\sqrt{r}), \quad (1.20)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées cylindriques à partir du repère  $\mathcal{L}$  de la pointe de fissure. Les termes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont des grandeurs scalaires qui "quantifient" l'intensité de la singularité des contraintes en pointe de fissure. Ils dépendent uniquement de la géométrie et du chargement, leur expression est donnée dans les équations 1.21, 1.22 et 1.23.

$$K_I(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0), \quad (1.21)$$

$$K_{II}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{21}(\theta = 0), \quad (1.22)$$

$$K_{III}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0). \quad (1.23)$$

Les fonctions  $f^I(\theta)$ ,  $f^{II}(\theta)$  et  $f^{III}(\theta)$  sont données dans les équations 1.24 à 1.26.

$$\underline{\underline{f}}^I(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & 0 \\ \text{sym} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\underline{\underline{f}}^{II}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) & 0 \\ \text{sym} & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\underline{\underline{f}}^{III}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \text{sym} & 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ & & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

À partir des contraintes, les déplacements en pointe de fissure sont ensuite calculés pour les différents modes de rupture :

$$\underline{u}_I(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})(k - \cos(\theta)) \\ \sin(\frac{\theta}{2})(k - \cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

$$\underline{u}_{II}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2})(k + \cos(\theta) + 2) \\ -\cos(\frac{\theta}{2})(k + \cos(\theta) - 2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\underline{u}_{III}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

avec  $k$ , la constante de Kolosov,  $k = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes,} \\ 3-4\nu & \text{en déformations planes.} \end{cases}$

Dans le cas du mode mixte, les tenseurs des contraintes des trois modes s'additionnent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f^{III}(\theta) + \underline{\underline{O}}(\sqrt{r}). \quad (1.30)$$

#### 1.1.4.2 Cas dynamique

On peut parler de rupture dynamique dans deux cas :

- un chargement rapide comme lors d'un crash, d'un impact ou d'une structure qui subit une onde de traction ou de cisaillement,
- une vitesse de propagation de la fissure non négligeable par rapport aux vitesses des ondes dans le matériau.

Freund [FRE 73] a calculé dans le premier cas l'influence du chargement brutal sur les contraintes en généralisant les concepts de mécanique de la rupture à des phénomènes transitoires. Ces travaux ont montré que l'application brutale d'une contrainte  $\sigma^\infty$  sur les lèvres d'une fissure semi-infinie comme illustrée figure 1.3 entraîne des contraintes proportionnelles aux Facteurs d'Intensité des Contraintes et aux ondes se propageant dans le matériau (cf. équation 1.31).

$$\sigma_{22}(x_1, x_2, t) \simeq \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi x_1}} \text{ avec } K_I(t) = \frac{\sqrt{c_d t(1-2\nu)}}{\sqrt{\pi(1-\nu)}} 2\sigma^\infty, \quad (1.31)$$

où  $c_d$  est la célérité des ondes de dilatation définis à l'équation 1.43.

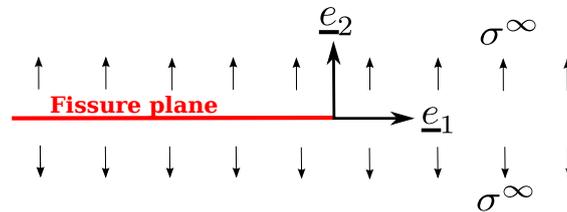


FIGURE 1.3: Application soudaine d'une pression uniforme  $\sigma^\infty$

Cependant une fois le temps caractéristique  $c_r/a$  passé, les hypothèses prises pour calculer cette équation sont invalidées. Pour obtenir les champs de contraintes et de déplacements, il faut alors utiliser le cas de Broberg [BRO 60] et Freund [FRE 89], les équations qu'ils ont obtenues sont développées dans le paragraphe ci-dessous.

Leur démonstration prend l'hypothèse d'une structure soumise à de petites déformations et dont le matériau est élastique linéaire. Ils se placent également dans l'hypothèse de forces volumiques négligeables ( $f_v=0$ ) et d'une transformation thermodynamique isotherme. Ils donnent alors les expressions des contraintes de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{K_M^{dyn}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{=M}^{dyn}(\theta, \dot{a}) + \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + o(1) \text{ avec } M = I, II, III, \quad (1.32)$$

avec les fonctions  $f_{=M}^{dyn}$  :

$$f_{=I}^{dyn}(\theta, \dot{a}) = \frac{B}{D} \begin{bmatrix} (1 - 2\alpha_d^2 - \alpha_s^2)\nu_d - \frac{4\alpha_d\alpha_s}{B}\nu_s & 2\alpha_d[\zeta_d - \zeta_s] & 0 \\ \text{sym} & -B\nu_s + \frac{4\alpha_d\alpha_s}{B}\nu_s & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$f_{=II}^{dyn}(\theta, \dot{a}) = \frac{B}{D} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_s(1 - 2\alpha_d^2 - \alpha_s^2)\zeta_d}{B} - \nu_s & \frac{4\alpha_d\alpha_s\nu_d - B\nu_s}{B} & 0 \\ \text{sym} & 2\alpha_s\zeta_d - \zeta_s & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$f_{=III}^{dyn}(\theta, \dot{a}) = \frac{1}{\alpha_s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta_s \\ \text{sym} & \nu_s & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

avec

$$\alpha_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_i}\right)^2}, \quad (1.36)$$

$$\gamma_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}\cos(\theta)}{c_i}\right)^2}, \quad (1.37)$$

$$\theta_i = \arctan(\alpha_i \tan(\theta)) \text{ pour } i=d,s. \quad (1.38)$$

$$\zeta_i = \frac{\sin(\theta_i)}{\sqrt{\gamma_i}} \text{ pour } i=d,s, \quad (1.39)$$

$$\nu_i = \frac{\cos(\theta_i)}{\sqrt{\gamma_i}} \text{ pour } i=d,s, \quad (1.40)$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_d\alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2, \quad (1.41)$$

$$B = (1 + \alpha_s^2). \quad (1.42)$$

Les célérités  $c_d$  et  $c_s$  représentent respectivement la vitesse des ondes de dilatation ou de traction et celle des ondes de cisaillement en déformations planes. Elles sont données dans les équations 1.43 et 1.44 :

$$c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (1.43)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.44)$$

**Remarque 2** Dans le cas où la vitesse de la fissure  $\dot{a}$  est égale à 0, il vaut mieux utiliser les valeurs des contraintes en statique, car le dénominateur  $D$  tend vers 0.

## 1.1.5 Les FIC et leur extension aux matériaux élastoplastiques

### 1.1.5.1 Les intégrales indépendantes du contour

Toujours dans le domaine linéaire, Bui [BUI 78] a réécrit le taux de restitution d'énergie  $G$  sous la forme d'une intégrale de contour afin de lier cette grandeur aux FIC  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ .

La formule d'Irwin s'écrit alors :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu}K_{III}^2. \quad (1.45)$$

Rice [RIC 68a] donne alors une expression de l'intégrale  $J$  permettant d'évaluer le taux de restitution d'énergie dans le cas d'un matériau élastique. Cette intégrale donnée en équation 1.46 est exprimée dans le repère local en pointe de fissure :

$$J = \int_{\Upsilon} \underline{P}^1 \cdot \underline{n} d\Gamma. \quad (1.46)$$

L'intégrale  $J$  utilise un contour fermé  $\Upsilon$  qui entoure la pointe de fissure, comme illustré figure 1.4, et  $\underline{P}$  est le tenseur d'Eshelby défini par l'équation 1.47 :

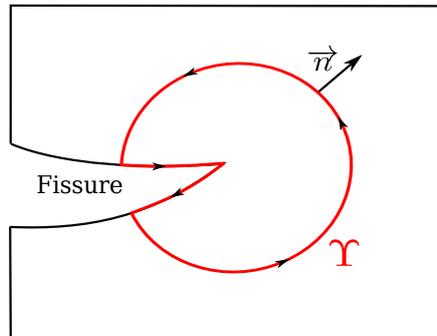


FIGURE 1.4: Contour fermé  $\Upsilon$  pour l'intégrale  $J$ .

$$\underline{P} = \frac{1}{2}(\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}) \underline{I} - \underline{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.47)$$

Rice a démontré, en prenant un contour centré sur la pointe de fissure et dont le rayon tend vers 0, que le taux de restitution d'énergie  $G$  est identique à l'intégrale  $J$  :  $J \equiv G$ .

Réthoré [RET 05], Bui [BUI 78], Attigui [ATT 97] et d'autres auteurs ont proposé une extension de cette relation en dynamique. Cependant, cette intégrale  $J$  ne permet pas de dissocier les différents modes de rupture et donc les valeurs des FIC.

Une autre méthode a été proposée, avec l'intégrale d'interaction  $I^{int}$  présentée au paragraphe suivant et l'approche locale présentée au chapitre 1.1.7. Il existe plusieurs formulations de l'intégrale d'interaction suivant les auteurs, les hypothèses et les conditions de calculs utilisés. Elles font toutes intervenir un champ de déplacement virtuel  $q$  défini de la façon suivante et illustré à la figure 1.5 :

$$\begin{cases} q = 0 & \text{en dehors de la surface } S_2, \\ \|q\| = 1 & \text{à l'intérieur de la surface } S_1, \\ \|q\| & \text{varie linéairement dans } S_2, \\ q & \text{est tangent à la fissure dans tout le domaine.} \end{cases} \quad (1.48)$$

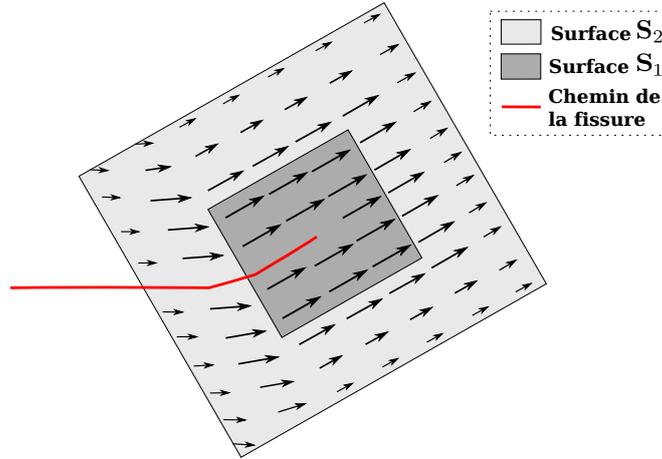


FIGURE 1.5: Champ d'extension virtuel  $q$  utilisé dans le calcul de l'intégrale  $I^{int}$ .

L'intégrale présentée ci-dessous est issue des travaux de Réthoré [RET 05]. Elle a été développée dans le cas d'une fissure à géométrie quelconque, et peut être étendue au 3D :

$$I^{int} = - \int_{S_2} [(\underline{\underline{\sigma}}^{aux} : \underline{\nabla}u - \rho \dot{u} \cdot \underline{\dot{u}}^{aux}) \text{div}(q) - \underline{\underline{\sigma}}^{aux} : \underline{\nabla}u \cdot \underline{\nabla}q + \underline{\underline{\sigma}}^{aux} : \underline{\nabla}u^{aux} \underline{\nabla}q)] dS \\ + \int_{S_2} [(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}^{aux}) \underline{\nabla}u(q) + \rho \dot{u} \cdot \underline{\nabla}u^{aux}(q)) + (\rho \dot{u}^{aux} \cdot \underline{\nabla}u(q) + \rho \dot{u} \cdot \underline{\nabla}u^{aux}(q))] dS. \quad (1.49)$$

On peut montrer que cette équation est indépendante du contour (cf [BUI 78] et [RIC 68a]).

Une autre relation permet de lier l'intégrale  $J$  et l'intégrale d'interaction dans le cas d'un front droit :

$$I^{int} = \lim_{S_1 \rightarrow 0} 2J, \quad (1.50)$$

$$I^{int} = \lim_{S_1 \rightarrow 0} 2G. \quad (1.51)$$

Les étapes suivantes présentent la méthode afin de calculer le  $K_I^{dyn}$  en mode I :

- calcul de l'intégrale d'interaction  $I^{int}$  en prenant comme champs auxiliaires  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{u}$  les champs analytiques 1.18 et 1.27 associés au mode I, on nommera cette intégrale  $I_I^{int}$ ,
- calcul du taux de restitution d'énergie de  $G$  en prenant les champs auxiliaires correspondants ( $K_I^{aux} = 1$ ,  $K_{II}^{aux} = 0$  et  $K_{III}^{aux} = 0$ ) dans la relation suivante :

$$G = \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I^{dyn} K_I^{aux} + K_{II}^{dyn} K_{II}^{aux}) + \frac{1}{\mu} K_{III}^{dyn} K_{III}^{aux}, \quad (1.52)$$

- on a alors directement le FIC associé au mode I :

$$K_I^{dyn} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} I_I^{int}. \quad (1.53)$$

Les approches énergétiques permettent de décrire complètement et précisément le problème lorsque la plasticité est confinée en pointe de fissure. Dans le cas de non linéarité matériau importante, ou d'effets dus à l'histoire de chargement, cette approche apparaît alors moins adaptée. Freund *et al.* [FRE 86] et plus récemment Nguyen *et al.* [NGU 05] ont essayé de découpler l'énergie de dissipation due au comportement du matériau et celle due uniquement à l'avancée de fissure. Cependant ces travaux surestiment les vitesses observées expérimentalement, c'est pourquoi nous n'utiliserons pas cette méthode.

Une autre approche énergétique a été apportée par Dugdale [DUG 60] et Barenblatt [BAR 62, BAR 59], elle permet de prendre en compte une zone élastoplastique en pointe de fissure et a l'avantage de pouvoir être mise en oeuvre simplement dans une simulation.

### 1.1.6 Approche de Dugdale et Barenblatt

Dans le cas linéaire élastique, les contraintes en pointe de fissure sont singulières et tendent donc vers l'infini. Dans le cas non linéaire, on suppose qu'en pointe de fissure, il existe une zone plastique (appelée "process zone") d'une certaine dimension physique qui dissipe l'énergie. Les figures 1.6(b) et 1.6(a) illustrent les différentes contraintes présentes en pointe de fissure en fonction de la zone plastique.

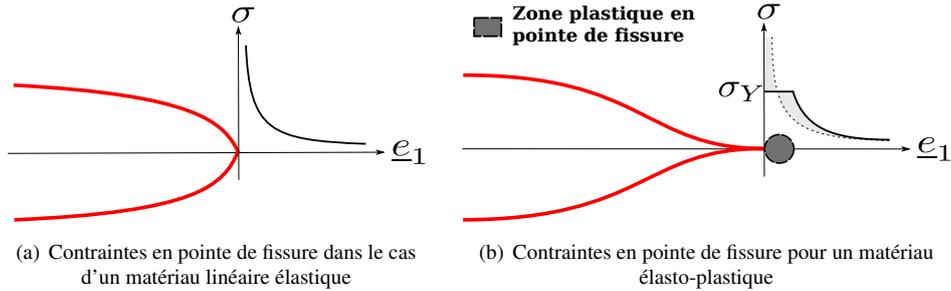


FIGURE 1.6: Représentation des contraintes en pointe de fissure.

Le rayon de la zone plastique en pointe de fissure, dans le cas des déformations planes en mode I, est approché par l'équation :

$$r_p \simeq \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2, \quad (1.54)$$

$K_I$  étant le FIC en mode I et  $\sigma_Y$  est la limite d'élasticité du matériau. Dans les conditions de contraintes planes, le rayon plastique est alors :

$$r_p \simeq \frac{1}{3\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (1.55)$$

Barenblatt propose une méthode pour calculer l'énergie qu'il faut donner au matériau afin que la fissure se propage. Il considère alors qu'une force cohésive est appliquée en pointe de fissure afin de retenir l'avancée de la fissure. La fissure ne propage que lorsque les deux faces respectives de la fissure sont complètement décollées. La figure 1.7 représente les forces cohésives  $\tau$  appliquées sur le petit segment  $\delta A$  en avant de la fissure. La direction de ces forces sont toujours perpendiculaires à la direction de propagation de la fissure. Cette démarche permet d'obtenir une solution exacte en élastoplasticité (avec le critère de Tresca). On obtient alors pour un effort appliqué,  $\delta A$  proportionnel à  $(K_I)^2$  :

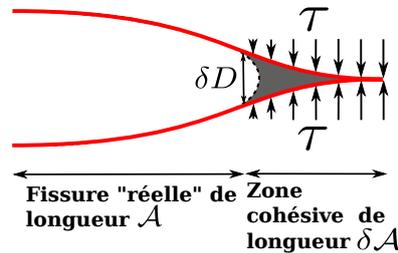


FIGURE 1.7: Représentation de la force cohésive appliquée en pointe de fissure

$$\delta A = \frac{\pi}{16} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (1.56)$$

L'ouverture de la fissure  $\delta D$  donne :

$$\delta D = \frac{8}{2\pi} \frac{K_I^2}{E\sigma_Y^2}. \quad (1.57)$$

L'introduction de zones cohésives en pointe dans un calcul éléments finis a notamment été présenté par Wells *et al.* [WEL 01], Remmers *et al.* [REM 03] et Mergheim *et al.* [MER 05]. Ils utilisent alors une vision dite "locale" des champs en pointe de fissure, sans hypothèse de comportement sur le matériau.

### 1.1.7 Les approches locales en pointe de fissure

L'idée d'utiliser des quantités locales comme critère de rupture a été introduite par Beremin *et al.* [BER 81], Ritchie, Knott et Rice [RIT 73]. Ritchie, Knott et Rice ont choisi de piloter l'avancée de fissure en observant les grandeurs mécaniques en un lieu de calcul en avant de la fissure, à une distance  $r_c$  de la pointe de fissure comme illustrée figure 1.8. Cette distance est dépendante du matériau et de la température. On calcule ponctuellement la contrainte principale à la distance  $r_c$ . La distance  $r_c$  est calculée par l'expression 1.58.

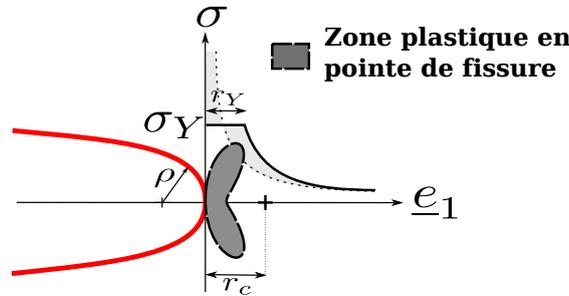


FIGURE 1.8: Évaluation du critère RKR.

$$r_c = \rho \left[ \exp \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_Y} - 1 \right) - 1 \right], \quad (1.58)$$

avec  $\rho$ , le rayon de la pointe de fissure,  $\sigma_f$  contrainte maximale pour une propagation instable de fissure,  $\sigma_Y$  est la limite élastique du matériau. Le critère RKR rend le calcul fortement dépendant de la longueur  $r_c$ . Par ailleurs, en dynamique, les contraintes locales oscillent très fortement avec le temps.

Wells *et al.* [WEL 01], Remmers *et al.* [REM 03] et Mergheim *et al.* [MER 05] proposent de moyenner les grandeurs en pointe de fissure en les pondérant d'une fonction poids qui dépend de la distance à la pointe de fissure. Cette méthode, reprise entre autres par Prabel [PRA 07], Menouillard [MEN 07] et Haboussa [HAB 11], consiste à utiliser une approche locale en pointe de fissure. Dans les simulations de ces derniers, les grandeurs "utiles" à la description et la prévision de la fissure sont moyennées en pointe de fissure et pondérées par une fonction poids gaussienne  $w$ . Par exemple pour calculer les contraintes moyennes  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  et déformations moyennes en pointe de fissure, on utilise les équations 4.5 et l'équation 4.6. La fonction poids utilisée est une fonction exponentielle décroissante qui est bornée à partir d'une valeur minimale. Elle est représentée en figure 1.9. Deux paramètres peuvent influencer cette fonction, le rayon  $R$  et la borne minimale de la fonction poids. La valeur de  $R$  doit représenter la zone active de la décohésion.

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } w(r) = e^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2}, \quad (1.59)$$

$$\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \frac{\int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } w(r) = e^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2}. \quad (1.60)$$

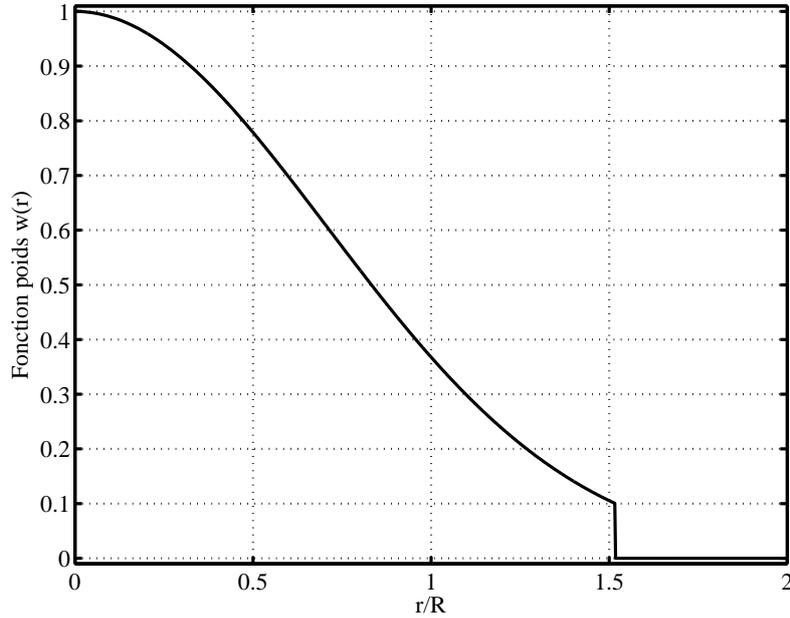


FIGURE 1.9: Fonction poids  $w(r)$  en fonction du rapport  $r/R$ .

L'intégrale est réalisée numériquement par intégration de Gauss.

L'intensité du tenseur moyen en pointe de fissure  $\underline{\tilde{\sigma}}$  permet de déterminer si la fissure propage ou non. En prenant comme critère d'avancée la valeur maximale de la plus grande valeur propre du tenseur  $\underline{\tilde{\sigma}}$ , la fissure avance si :

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \max\left(\{\underline{\tilde{\sigma}}\}_I, \{\underline{\tilde{\sigma}}\}_{II}, 0\right) \geq \sigma_{Ic}. \quad (1.61)$$

Cette approche intégrale (tout comme l'approche énergétique) s'applique qu'il y ait plasticité ou non en pointe de fissure. La prise en compte de la plasticité est même souhaitable pour mieux représenter la physique du comportement du matériau. Le principal inconvénient de cette méthode réside dans la dépendance de la contrainte critique identifiée  $\sigma_{Ic}$  au rayon  $R$  que l'on utilise pour moyenner les grandeurs mécaniques.

## 1.2 Propagation de Fissure avec transition traction-cisaillement

L'approche locale en pointe de fissure a été utilisée par Haboussa [HAB 12], principalement pour des cas en 2 dimensions. Une approche en 3 dimensions a été développée mais sans pouvoir faire les calculs. Nous donnerons ici ses résultats analytiques afin de les utiliser en 3D. Un résumé de ses travaux va être présenté dans les paragraphes 1.2.1 et 1.2.2

### 1.2.1 Présentation du critère de propagation en 2D

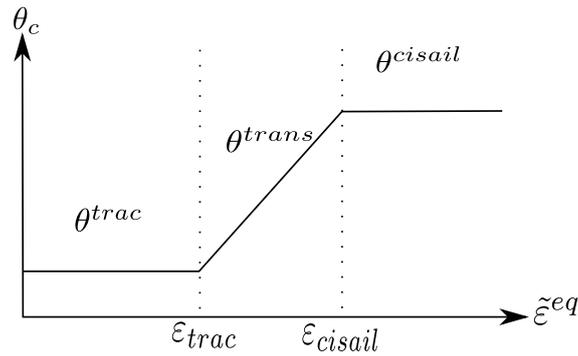
#### 1.2.1.1 Algorithme pour la propagation de fissure en 2 dimensions

Ce paragraphe présente la démarche et l'algorithme utilisés par Haboussa [HAB 12] afin de prédire les angles de propagation de la fissure dans des cas en 2 dimensions. Haboussa [HAB 12] a cherché tout d'abord à déterminer s'il y a propagation ou non. Pour cela, il a calculé la contrainte principale moyenne en pointe de fissure par la formule 1.61 et l'a comparé à la contrainte critique  $\sigma_{Ic}$ . Si elle est plus grande, alors

la fissure propage. Puis il a calculé la vitesse d'avancée par la formule de Kanninen 1.62.

$$\dot{a} = c_r \left(1 - \frac{\sigma_{Ic}}{\tilde{\sigma}^{eq}}\right). \quad (1.62)$$

Enfin il a spécifié l'angle de propagation. Pour ce faire, il a regardé l'intensité de la déformation plastique en pointe de fissure et a décidé entre propagation en mode de traction ou cisaillement. Il a utilisé une transition entre les modes de fissuration par traction et ceux par cisaillement. Les données matériaux à connaître sont  $\sigma_{Ic}$  la contrainte limite à rupture,  $c_r$  la vitesse des ondes de Rayleigh,  $\varepsilon_{cisail}$  le seuil de déformation en cisaillement et  $\varepsilon_{tract}$  le seuil de déformation en traction. Cette transition est illustrée figure 1.10.



**FIGURE 1.10:** Angle de propagation de la fissure suivant la valeur de déformation équivalente  $\tilde{\xi}^{eq}$ .

L'ensemble de cet algorithme est donné dans l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1:** Algorithme de transition traction-cisaillement

---

**Data :**  $\sigma_{Ic}$ ,  $c_r$ ,  $\epsilon_{cisail}$ ,  $\epsilon_{tract}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{\epsilon}}$ .

Calcul des critères (par exemple celui de Mazars) à partir des tenseurs moyens :

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \max(\underline{\underline{\sigma}}^I, \underline{\underline{\sigma}}^{II}, 0), \quad \tilde{\epsilon}^{eq} = \sqrt{\{\underline{\underline{\epsilon}}^I\}^+, \{\underline{\underline{\epsilon}}^{II}\}^+}. \quad (1.63)$$

**si** ( $\tilde{\sigma}^{eq} \geq \sigma_{Ic}$ ) **alors**

Déterminer la vitesse de propagation de la fissure par la formule de Kanninen [KAN 85], où  $c_r$  est la vitesse des ondes de Rayleigh :

$$\dot{a} = c_r \left(1 - \frac{\sigma_{Ic}}{\tilde{\sigma}^{eq}}\right). \quad (1.64)$$

Calculer la direction de propagation :

$$\theta^{trac} = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}} - \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \sqrt{8 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}}\right)^2} \right) \right], \quad (1.65)$$

$$\theta^{cisail} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \frac{\pi}{4} \arctan \left( \frac{4}{19} \sqrt{\pi} \left| \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}} \right| \right), \quad (1.66)$$

$$\theta^{trans} = \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}^{eq} - \epsilon_{tract}}{\epsilon_{cisail} - \epsilon_{tract}}\right) \theta_c^{trac} + \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}^{eq} - \epsilon_{cisail}}{\epsilon_{cisail} - \epsilon_{tract}}\right) \theta_c^{cisail}. \quad (1.67)$$

Déterminer la direction de propagation :

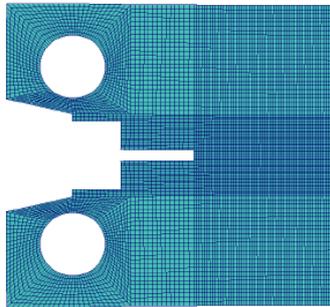
$$\theta_c = \begin{cases} \theta^{trac} & \text{si } \tilde{\epsilon}^{eq} \leq \epsilon_{tract}, \\ \theta^{cisail} & \text{si } \tilde{\epsilon}^{eq} \geq \epsilon_{cisail}, \\ \theta^{trans} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.68)$$

**fin**

---

### 1.2.1.2 Résultat de calcul pour la propagation de fissure en dynamique en 2 dimensions

Cet exemple est tiré de la thèse de Haboussa dont l'expérience a été conduite par Prabel. L'expérience a été réalisée sur des éprouvettes CT en acier de cuve, le 16MND5 dont le maillage est représenté figure 1.11 avec approximativement 40000 DDLs.



**FIGURE 1.11:** Maillage de l'éprouvette CT avec approximativement 40000 DDLs.

Les caractéristiques du matériau sont données table 1.1

Module de Young	$E$	$2.098GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$0.3$
Masse volumique	$\rho$	$7800Kg.m^{-3}$
Vitesse des ondes de Rayleigh	$c_r$	$2990m.s^{-1}$
Rayon de la zone locale	$R$	$1.5 \times 10^{-3}m$
Taille de maille en pointe	$\delta_e$	$500 \times 10^{-6}m$
Seuil en cisaillement	$\epsilon_{cisail}$	$4 \times 10^{-3}$
Seuil en traction	$\epsilon_{trac}$	$1.25 \times 10^{-3}$

TABLE 1.1: Caractéristiques du matériau 16MND5

La valeur de la contrainte critique (en  $MPa$ ) a été interpolée par l'équation 1.69, dépendante de la vitesse de déformation en pointe de fissure.

$$\sigma_{Ic} = \left[ 590.0 + 470.5 \tanh \left( \frac{\dot{\epsilon} - 1087}{1401} \right) \right]. \quad (1.69)$$

Les trajets de fissure simulés et expérimentaux sont donnés en figure 1.12(a). On remarque une très bonne corrélation entre l'expérience et la simulation. De plus, dans la figure 1.12(b), on remarque que la vitesse de l'avancée de la fissure simulée en fonction du temps suit bien la vitesse expérimentale.

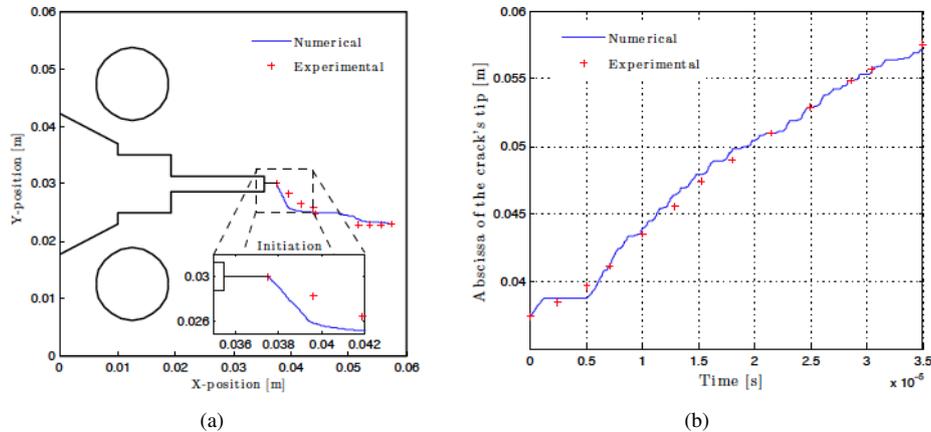


FIGURE 1.12: Résultats de la simulation de fissure de l'éprouvette CT tirée de Haboussa [HAB 12].

## 1.2.2 Extension de l'approche 2D vers un critère tridimensionnel de rupture

### 1.2.2.1 Critère de rupture en traction

Haboussa a étendu son approche pour rendre compte de la transition traction-cisaillement en 3 dimensions. Il a fait l'hypothèse que la rupture fragile "en ouverture" est régie en statique et en dynamique par le maximum de la contrainte de traction au voisinage du front de fissure.

Les différents repères et notations sont rappelés dans la figure 1.13.

La base  $\mathcal{G}=(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  définit le repère global du problème.  $\mathcal{L}=(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  est le repère local en pointe de fissure (identique au repère de définition des modes de fissuration).  $\mathcal{L}'=(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$  définit le repère local

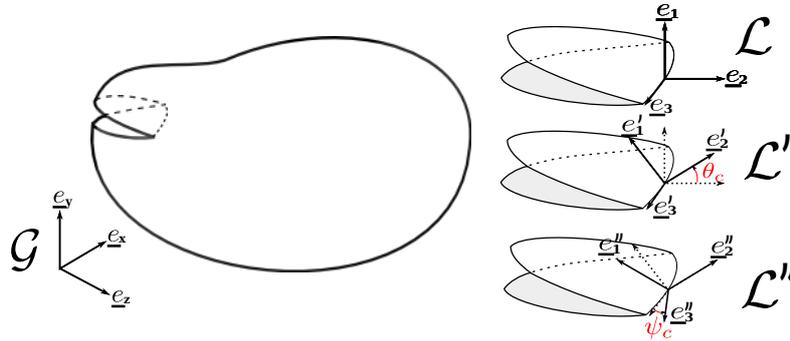


FIGURE 1.13: Illustration des différents repères utilisés.

en pointe de fissure tourné de l'angle  $\theta_c$ .  $\mathcal{L}''=(\underline{e}''_1, \underline{e}''_2, \underline{e}''_3)$  est le repère local en pointe de fissure tourné de l'angle  $\theta_c$  puis de l'angle  $\psi_c$ .

Les contraintes calculées au départ sont exprimées dans le repère  $\mathcal{L}$  (cf figure 1.13). Ses composantes sont alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Si l'on calcule les composantes du tenseur des contraintes en pointe de fissure dans le repère  $\mathcal{L}'$  (cf figure 1.13), on obtient les équations 1.71 à 1.76. Ces expressions correspondent aux contraintes en pointe de fissure tournées de  $\theta$ .

$$\sigma'_{11} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (1.71)$$

$$\sigma'_{22} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (1.72)$$

$$\sigma'_{12} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (1.73)$$

$$\sigma'_{23} = \frac{K_{III}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (1.74)$$

$$\sigma'_{13} = \frac{K_{III}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (1.75)$$

$$\sigma'_{33} = \begin{cases} \nu (\sigma'_{11} + \sigma'_{22}) & \text{en déformations planes,} \\ 0 & \text{en contraintes planes.} \end{cases} \quad (1.76)$$

Si l'on calcule les composantes du tenseur des contraintes en pointes de fissure dans le repère  $\mathcal{L}''$ , en contraintes planes, on obtient les équations 1.77 à 1.82. Ces contraintes sont exprimées dans le repère en

pointe de fissure tourné de  $\theta$  et de  $\psi$ .

$$\sigma''_{11} = \sigma'_{11}, \quad (1.77)$$

$$\sigma''_{22} = \sigma''_{33} \sin^2(\psi) + 2\sigma''_{23} \sin(\psi) \cos(\psi) + \sigma''_{22} \cos^2(\psi), \quad (1.78)$$

$$\sigma''_{33} = \sigma''_{33} \cos^2(\psi) - 2\sigma''_{23} \sin(\psi) \cos(\psi) + \sigma''_{22} \sin^2(\psi), \quad (1.79)$$

$$\sigma''_{12} = \sigma''_{13} \sin(\psi) + \sigma''_{12} \cos(\psi), \quad (1.80)$$

$$\sigma''_{23} = (\sigma''_{33} - \sigma''_{22}) \sin(\psi) \cos(\psi) + \sigma''_{23} (2 \cos^2(\psi) - 1), \quad (1.81)$$

$$\sigma''_{33} = \sigma''_{13} \cos(\psi) - \sigma''_{12} \sin(\psi). \quad (1.82)$$

Il a utilisé alors la notation des coordonnées barycentriques pour exprimer les FIC, cette notation est explicitée dans les équations 1.83 à 1.85

$$K_I^n = \frac{\|K_I\|}{\|K_I\| + \|K_{II}\| + \|K_{III}\|}, \quad (1.83)$$

$$K_{II}^n = \frac{\|K_{II}\|}{\|K_I\| + \|K_{II}\| + \|K_{III}\|}, \quad (1.84)$$

$$K_{III}^n = \frac{\|K_{III}\|}{\|K_I\| + \|K_{II}\| + \|K_{III}\|}. \quad (1.85)$$

Il a donc calculé le couple d'angles  $\theta$  et  $\Psi$  qui annulent les dérivées des contraintes  $\frac{\partial \sigma_{22}(\theta, \Psi)}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \sigma_{22}(\theta, \Psi)}{\partial \Psi}$ . Puis, il a donné les valeurs approchées de  $\theta_c^{traction}$  et  $\Psi_c^{traction}$  en fonction des FIC normalisés  $K_I^n, K_{II}^n, K_{III}^n$  :

$$\theta_c^{traction} = 2 \text{sign}(K_{II}) \arctan \left( \frac{1}{4} \left( \hat{K} - \sqrt{(\hat{K})^2 + 8} \right) \right), \quad (1.86)$$

$$\hat{K} = \frac{1 + K_I^n - (1 - K_{III}^n)^{p(v)}}{K_{II}^n}, \quad (1.87)$$

$$\Psi_c^{traction} = \frac{1}{2} \text{sign}(K_{III}) \arctan \left( \frac{2K_{II}'(\theta_c^{traction})}{K_I'(\theta_c^{traction}) - K_{III}'(\theta_c^{traction})} \right), \quad (1.88)$$

avec  $p(v) = \frac{1}{4}(\sqrt{\pi} - 5v)$ .

**Remarque 3** Attention à l'expression de l'angle  $\Psi_c^{traction}$ , qui est donnée en fonction des FIC  $K_I', K_{II}'$  et  $K_{III}'$ . Ils se différencient des FIC  $K_I, K_{II}, K_{III}$  car ils sont calculés dans le repère  $\mathcal{L}'$  et non pas  $\mathcal{L}$  (cf figure 1.13). On doit donc tourner le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  de l'angle  $\theta_c$  pour obtenir les composantes du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}'$ .

**Remarque 4** Les fonctions signes dans l'expression des angles sont appliquées directement aux valeurs des FIC dans le repère  $\mathcal{L}$  ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ) et non pas aux FIC normalisés ( $K_I^n, K_{II}^n$  et  $K_{III}^n$ ).

### 1.2.2.2 Critère de rupture en cisaillement

En cisaillement, Haboussa a pris l'hypothèse que la fissure est pilotée par le maximum de la contrainte équivalente au sens de Von Mises donnée par l'équation 1.89 :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}. \quad (1.89)$$

Il a obtenu alors les valeurs approchées  $\theta_c^{cisail}$  et  $\Psi_c^{cisail}$  qui annulent la dérivée de  $\sigma_{eq}^{VM}$  : Pour  $K_I \neq 0$  et  $K_{II} \neq 0$ ,

$$\theta_c^{cisail} = \text{sign}(K_{II}) \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{8}{145} \nu \right) \arctan \left( \frac{3}{5} \left( \frac{K_I^n (1 - \frac{K_{III}^n}{20})}{K_{II}^n} \right) \right), \quad (1.90)$$

$$\Psi_c^{cisail} = \frac{1}{2} \text{sign}(K_{III}) \arctan \left( \frac{K_I'(\theta_c^{cisail}) + K_{III}'(\theta_c^{cisail})}{2K_{II}'(\theta_c^{cisail})} \right). \quad (1.91)$$

Pour  $K_I = 0$  et  $K_{II} = 0$ ,

$$\theta_c^{cisail} = \text{sign}(K_{II}) 0.536, \quad (1.92)$$

$$\Psi_c^{cisail} = \frac{1}{2} \text{sign}(K_{III}) \arctan \left( \frac{K_I'(\theta_c^{cisail}) + K_{III}'(\theta_c^{cisail})}{2K_{II}'(\theta_c^{cisail})} \right). \quad (1.93)$$

**Remarque 5** La remarque est la même que dans le paragraphe précédent, l'expression de l'angle  $\Psi_c^{traction}$ , est donnée en fonction des FIC  $K_I', K_{II}'$  et  $K_{III}'$ . Ils se différencient des FIC  $K_I, K_{II}, K_{III}$  car ils sont calculés dans le repère  $\mathcal{L}'$  et non pas  $\mathcal{L}$  (cf figure 1.13). On doit donc tourner le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  de l'angle  $\theta_c$  pour obtenir les composantes du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}'$ .

**Remarque 6** Les fonctions signes dans l'expression des angles sont appliqués directement aux valeurs des FIC dans le repère  $\mathcal{L}$  ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ) et non pas aux FIC normalisés ( $K_I^n, K_{II}^n$  et  $K_{III}^n$ ).

**Remarque 7** L'approche de Haboussa [HAB 12] a été de substituer alors les composantes du tenseur  $\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}$  et  $\bar{\sigma}_{23}$  aux valeurs des  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  dans les équations 1.83 à 1.85, 1.86 à 1.88 et dans les équations 1.90 à 1.93.

### 1.2.2.3 Algorithme générale

L'algorithme 2 rappelle l'ensemble des étapes du critère de rupture en 3D.

---

**Algorithme 2:** Algorithme de transition traction-cisaillement en 3D
 

---

**Data :**  $\sigma_{Ic}$ ,  $c_r$ ,  $\epsilon_{cisail}$ ,  $\epsilon_{tract}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$  en chaque point du front.

Boucle sur les noeuds du front :

**for** ( $i_M = 1 : n_{fnt}$ ) **do**

Calcul des coordonnées barycentriques à partir du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  (cf équation 1.97),  
Calcul des critères par les équations 1.100 et 1.101 à partir des tenseurs moyens en pointe de fissure,

**si** ( $\tilde{\sigma}^{eq} \geq \sigma_{Ic}$ ) **alors**

Déterminer la vitesse de propagation de la fissure par la formule de Kanninen 1.62, où  $c_r$  est la vitesse des ondes de Rayleigh,

**si** ( $\tilde{\epsilon}^{eq} \leq \epsilon_{tract}$ ) **alors**

Calculer de la direction de propagation  $\theta_c$  par l'équation 1.103,

Rotation du tenseur des contraintes moyen  $\underline{\underline{\sigma}}$ , pour obtenir  $\underline{\underline{\sigma}}'$  par l'équation 1.102,

Calcul de la direction de propagation  $\psi_c$  par l'équation 1.105,

**fin**

**si** ( $\tilde{\epsilon}^{eq} \geq \epsilon_{cisail}$ ) **alors**

Calculer de la direction de propagation  $\theta_c$  par l'équation 1.106,

Rotation du tenseur des contraintes moyen  $\underline{\underline{\sigma}}$ , pour obtenir  $\underline{\underline{\sigma}}'$  par l'équation 1.102,

Calcul de la direction de propagation  $\psi_c$  par l'équation 1.107,

**fin**

**si** ( $\epsilon_{tract} \geq \tilde{\epsilon}^{eq} \leq \epsilon_{cisail}$ ) **alors**

Calcul de la loi des mélanges :

$$Mel = \frac{\tilde{\epsilon}^{eq} - \epsilon_{tract}}{\epsilon_{cisail} - \epsilon_{tract}} \quad (1.94)$$

Calculer de la direction de propagation  $\theta_c$  par l'équation 1.108,

Rotation du tenseur des contraintes moyen  $\underline{\underline{\sigma}}$ , pour obtenir  $\underline{\underline{\sigma}}'$  par l'équation 1.102,

Calcul de la direction de propagation  $\psi_c$  par l'équation 1.109,

**fin**

**sinon**

Pas d'avancée du front,  $\dot{a} = 0$ ,  $\theta_c = 0$  et  $\psi_c = 0$ ,

**fin**

Vitesses des avancées du front pour les deux level-sets

$$V_{\phi_n} = \dot{a}\Delta t \cos(\theta_c) \sin(\psi_c) \quad (1.95)$$

$$V_{\phi_t} = \dot{a}\Delta t \sin(\theta_c) \quad (1.96)$$

**end**

---

$$\sigma_{22}^n = \frac{\|\tilde{\sigma}_{22}\|}{\|\tilde{\sigma}_{22}\| + \|\tilde{\sigma}_{12}\| + \|\tilde{\sigma}_{23}\|}, \quad (1.97)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{\|\tilde{\sigma}_{12}\|}{\|\tilde{\sigma}_{22}\| + \|\tilde{\sigma}_{12}\| + \|\tilde{\sigma}_{23}\|}, \quad (1.98)$$

$$\sigma_{23}^n = \frac{\|\tilde{\sigma}_{23}\|}{\|\tilde{\sigma}_{22}\| + \|\tilde{\sigma}_{12}\| + \|\tilde{\sigma}_{23}\|}, \quad (1.99)$$

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \max(\underline{\tilde{\sigma}}_I, \underline{\tilde{\sigma}}_{II}, \underline{\tilde{\sigma}}_{III}, 0), \quad (1.100)$$

$$\tilde{\varepsilon}^{eq} = \sqrt{\{\underline{\tilde{\varepsilon}}_I\}^+ + \{\underline{\tilde{\varepsilon}}_{II}\}^+ + \{\underline{\tilde{\varepsilon}}_{III}\}^+}, \quad (1.101)$$

$$\underline{\tilde{\sigma}}' = \underline{\mathcal{R}}^T \underline{\tilde{\sigma}} \underline{\mathcal{R}} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_c) & -\sin(\theta_c) & 0 \\ \sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

$$\theta_c^{traction} = 2\text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \arctan\left(\frac{1}{4} \left(\hat{K} - \sqrt{(\hat{K})^2 + 8}\right)\right), \quad (1.103)$$

$$\text{avec } \hat{K} = \frac{1 + \tilde{\sigma}_{22}^n - (1 - \tilde{\sigma}_{23}^n)^{\nu(v)}}{\tilde{\sigma}_{12}^n}, \quad (1.104)$$

$$\psi_c^{traction} = \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\sigma}_{23}) \arctan\left(\frac{2\tilde{\sigma}'_{12}}{\tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{23}}\right), \quad (1.105)$$

$$\theta_c^{cisail} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{23}) \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{8}{145} \nu\right) \arctan\left(\frac{3}{5} \left(\frac{\tilde{\sigma}_{22}^n (1 - \frac{\tilde{\sigma}_{23}^n}{20})}{\tilde{\sigma}_{12}^n}\right)\right), \quad (1.106)$$

$$\Psi_c^{cisail} = \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\sigma}_{23}) \arctan\left(\frac{\tilde{\sigma}'_{22} + \tilde{\sigma}'_{23}}{2\tilde{\sigma}'_{12}}\right), \quad (1.107)$$

$$\theta_c^{melange} = (1 - Mel)\theta_c^{cisail} + (Mel)\theta_c^{tract} \quad (1.108)$$

$$\psi_c^{melange} = (1 - Mel)\psi_c^{cisail} + (Mel)\psi_c^{tract} \quad (1.109)$$

$$(1.110)$$

Les critères tridimensionnels décrits ci-dessus n'ont pas été implémentés, ils ont été vérifiés en calculant les angles limites pour les modes purs I, II et III. Les limites tendent alors vers les valeurs observées expérimentalement. Ces résultats sont regroupés dans le tableau 1.2 pour un matériau de coefficient de poisson de 0.3.

mode pur	Valeur de $\theta_c$	Valeur de $\psi_c$
<i>I</i>	$0^\circ$	$0^\circ$
<i>II</i>	$+/- 70.53^\circ$	$0^\circ$
<i>III</i>	$0^\circ$	$+/- 45^\circ$

TABLE 1.2: Limites des angles de propagation pour les 3 modes purs

## Chapitre 2

# La méthode XFEM en dynamique non linéaire

*Ce second chapitre décrit une méthode permettant de simuler une fissure dans une structure, cette méthode est appelée « méthode éléments finis étendus »(ou XFEM) est une extension de la méthode des éléments finis. La deuxième partie de ce chapitre décrit le schéma temporel explicite de Newmark, qui est utilisé dans EUROPLEXUS. Ce schéma de discrétisation a des avantages mais génère également des inconvénients lorsqu'il est appliqué le cadre des XFEM. Enfin la dernière partie présentera les méthodes d'intégration spatiale des éléments XFEM.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>De l'approche continue à la méthode discrétisée</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Les éléments finis et la partition de l'unité</b>	<b>27</b>
2.2.1	Les éléments finis et la partition de l'unité	27
2.2.2	X-FEM et représentation de la singularité en pointe de fissure	27
2.2.3	Localisation de la pointe de la fissure sans représentation de la singularité.	29
<b>2.3</b>	<b>Les schémas d'intégration temporelle de Newmark, cas du schéma explicite</b>	<b>32</b>
<b>2.4</b>	<b>Le calcul de la matrice de masse en dynamique explicite</b>	<b>34</b>
2.4.1	Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale	34
2.4.2	Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale par bloc	35
2.4.3	Choix de la méthode de diagonalisation et influence sur le pas de temps	36
<b>2.5</b>	<b>L'intégration numérique des éléments XFEM</b>	<b>36</b>
2.5.1	Sous découpage non régulier	36
2.5.2	Sous découpage régulier	37
2.5.3	Méthodes non conventionnelles	38

---

## 2.1 De l'approche continue à la méthode discrétisée

On reprend les équations données au chapitre 1.1, en prenant leur formulation faible, c'est à dire en les intégrant sur l'ensemble du volume  $\Omega$  et en multipliant par un champ cinématiquement admissible  $\underline{V}^*$  :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{\sigma})\underline{V}^* d\Omega + \int_{\Omega} f_v \underline{V}^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{x} \underline{V}^* d\Omega. \quad (2.1)$$

On applique le théorème de la divergence pour le terme des contraintes :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{\sigma})\underline{V}^* d\Omega = \int_{S_u} \underline{\sigma} \underline{V}^* \underline{n} dS - \int_{\Omega} \underline{\sigma} \text{div}(\underline{V}^*) d\Omega. \quad (2.2)$$

On obtient ensuite après simplification et utilisation des conditions aux efforts :

$$\int_{S_u} \underline{F}_d \underline{V}^* dS - \int_{\Omega} \underline{\sigma} \text{div}(\underline{V}^*) d\Omega + \int_{\Omega} f_v \underline{V}^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{x} \underline{V}^* d\Omega, \quad (2.3)$$

$\underline{\sigma}$  est symétrique, ce qui nous permet de remplacer  $\text{div}(\underline{V}^*)$  par sa partie symétrique  $\underline{D}^*$  et antisymétrique  $\underline{\Omega}^*$  :

$$\text{div}(\underline{V}^*) = \underline{D}^* + \underline{\Omega}^*, \quad \underline{D}^* = \frac{1}{2}(\text{div}(\underline{V}^*) + \text{div}(\underline{V}^*)^T), \quad \underline{\Omega}^* = \frac{1}{2}(\text{div}(\underline{V}^*) - \text{div}(\underline{V}^*)^T). \quad (2.4)$$

Au final, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{x} \underline{V}^* d\Omega = \int_{S_u} \underline{F}_d \underline{V}^* dS + \int_{\Omega} f_v \underline{V}^* d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{D}^* d\Omega, \quad (2.5)$$

$$\begin{matrix} P_{acc}^* & = & P_d^* & + & P_v^* & - & P_{int}^* \end{matrix}, \quad (2.6)$$

$$\begin{matrix} P_{acc}^* & = & & & P_{ext}^* & - & P_{int}^* \end{matrix}. \quad (2.7)$$

On retrouve alors l'énoncé des puissances virtuelles avec,

- $P_{acc}^*$  : puissance virtuelle des quantités d'accélération,
- $P_d^*$  : puissance virtuelle des efforts de surface,
- $P_v^*$  : puissance virtuelle des efforts volumiques,
- $P_{int}^*$  : puissance virtuelle des efforts intérieurs.

On part alors du champ de coordonnées qui est la somme du champ de référence et du champ de déplacement,

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}, \quad (2.8)$$

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{u}}, \quad (2.9)$$

$$\ddot{\underline{x}} = \ddot{\underline{u}}. \quad (2.10)$$

Dans la méthode des éléments finis on donne alors une cinématique admissible au champ virtuel  $\underline{V}^*$ , que l'on remplace par le champ de vitesse réel et que l'on réinjecte dans le principe des puissances virtuelles.

$$\underline{V}^* = \dot{\underline{u}}, \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \dot{u} d\Omega = \int_{S_u} \underline{F}_d \dot{\underline{u}} dS + \int_{\Omega} f_v \dot{\underline{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{u}}) d\Omega. \quad (2.12)$$

En utilisant la loi de comportement du matériau donnée dans l'équation 1.1, dans le cas d'un matériau élastique linéaire, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \dot{u} d\Omega = \int_{S_u} \underline{F}_d \dot{\underline{u}} dS + \int_{\Omega} f_v \dot{\underline{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}(\dot{\underline{u}})) : \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{u}}) d\Omega. \quad (2.13)$$

## 2.2 Les éléments finis et la partition de l'unité

### 2.2.1 Les éléments finis et la partition de l'unité

La méthode des éléments finis se base sur le principe de la partition d'unité. Soit un domaine  $\Omega$ , discrétisé en un ensemble de  $m$  éléments basés sur  $n$  noeuds associés à  $n$  fonctions de forme  $N_i$ . Dans les éléments finis classiques, on peut représenter une approximation  $\underline{u}$  d'un champ  $\bar{u}$  par la relation 2.14.

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i. \quad (2.14)$$

Le vecteur  $\underline{U}_i$  représente les déplacements nodaux, si la condition de partition d'unité 2.15 est respectée, alors on peut enrichir l'approximation de  $\underline{u}(\underline{x})$  avec une autre fonction  $\phi$ , comme dans l'équation 2.16.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (2.15)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} N_i(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \underline{U}_i^e. \quad (2.16)$$

$\mathcal{N}^e$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{N}$  où l'on place des Degrés De Liberté d'enrichissement  $\underline{U}_i^e$ .  $\phi$  correspond à la fonction d'enrichissement.

### 2.2.2 X-FEM et représentation de la singularité en pointe de fissure

Pour la simulation de la mécanique de la rupture, le rôle des enrichissements est :

- de représenter la discontinuité due à la fissure,
- de localiser le front de fissure,
- de "capter" la singularité en front de fissure.

**Représentation la discontinuité :** pour la fonction  $\phi(\underline{x})$ , on utilise la fonction de Heaviside  $H(\underline{x})$  définie par l'équation 2.17.

$$H(\underline{x}) = \text{sign}((\underline{x} - \underline{x}^{\text{fissure}}) \cdot \underline{n}), \quad (2.17)$$

soit :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si on est au dessus de la fissure,} \\ 0 & \text{si on est sur la fissure,} \\ -1 & \text{si on est en dessous de la fissure.} \end{cases} \quad (2.18)$$

**Localisation de la pointe et représentation de la singularité :** Les 4 fonctions 2.19 à 2.22 forment une bonne base d'enrichissement en élasticité 2D et 3D pour représenter la singularité en pointe de fissure. On remarque cependant que dans leur mise en oeuvre numérique, elles nécessitent les coordonnées polaires,  $r$  et  $\theta$ , dans le repère lié à la pointe de fissure. Ces fonctions en  $\sqrt{r}$  introduisent la singularité en pointe de fissure au niveau du champ de déplacement.

$$\gamma_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2), \quad (2.19)$$

$$\gamma_2(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2), \quad (2.20)$$

$$\gamma_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \quad (2.21)$$

$$\gamma_4(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta). \quad (2.22)$$

L'approximation du champ de déplacement est alors :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{\text{cut}}} N_i(\underline{x}) a_i + \sum_{j=1}^{n_{\text{fonctions}}} \gamma_j(\underline{x}) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}_{\text{tip}}} N_i(\underline{x}) b_{ij} \right) \quad (2.23)$$

avec  $\mathcal{N}_{cut}$  est un sous ensemble de  $\mathcal{N}_e$  où l'on place les noeuds des éléments totalement coupés par la fissure et  $\mathcal{N}_{tip}$  les noeuds des éléments contenant le front de la fissure.

Dans le cas de matériaux elastoplastiques, Elguedj [ELG 06] effectue une analyse de Fourier à partir des champs asymptotiques donnés par Hutchinson [HUT 68] Rice *et al.* [RIC 68b] pour extraire une base de fonctions représentatives des champs asymptotiques. Ces fonctions sont décrites dans les équations 2.24 à 2.29.

$$\gamma_1(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \sin(\theta/2), \quad (2.24)$$

$$\gamma_2(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \cos(\theta/2), \quad (2.25)$$

$$\gamma_3(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \quad (2.26)$$

$$\gamma_4(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \cos(\theta/2) \sin(\theta), \quad (2.27)$$

$$\gamma_5(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \sin(\theta/2) \sin(3\theta), \quad (2.28)$$

$$\gamma_6(r, \theta) = r^{\frac{1}{n+1}} \cos(\theta/2) \sin(3\theta), \quad (2.29)$$

avec le coefficient  $n$  le paramètre matériau de la loi de Ramberg-Osgood [OSG 43], obtenu à partir de la courbe de traction contraintes-déformations. La loi de Ramberg-Osgood est une loi élasto-plastique avec écrouissage décrite dans l'équation 2.30 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E} + K \left( \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E} \right)^n. \quad (2.30)$$

Dans le cas dynamique, la singularité évolue au cours du temps dans l'élément, c'est pour cette raison qu'il peut y avoir plusieurs approches d'évolution de la singularité dans le temps :

- on cumule les enrichissements pointe au cours du temps, ainsi on ne modifie pas les fonctions de formes au cours du temps. Pour une position  $\underline{x}$  on a :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x}) a_i(t) + \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \gamma_j(\underline{x}) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) b_{ij}(t) \right). \quad (2.31)$$

On obtient alors la dérivée des déplacements par rapport au temps :

$$\underline{\dot{u}}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{\dot{U}}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \dot{a}_i(t) + \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \gamma_j(\underline{x}) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) \dot{b}_{ij}(t) \right). \quad (2.32)$$

- ce sont les fonctions d'enrichissement qui évoluent au cours du temps, mais malheureusement ce cas n'est pas encore totalement résolu (cf Belytschko [BEL 99]) :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) a_i(t) + \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \gamma_j(\underline{x}, t) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) b_{ij}(t) \right) \quad (2.33)$$

On obtient alors la dérivée des déplacements par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}}(\underline{x}, t) &= \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{\dot{U}}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \dot{a}_i(t) + \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \dot{\gamma}_j(\underline{x}, t) \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) b_{ij}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \gamma_j(\underline{x}, t) \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) \dot{b}_{ij}(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le terme  $\dot{\gamma}_j(\underline{x}, t)$  est difficile à exprimer simplement, ce qui ne permet pas d'utiliser cette méthode.

**Représentation numérique des XFEM :** On a alors trois cas de figure de l'approximation du déplacement  $\underline{u}$  en fonction de la localisation par rapport à la fissure :

- lorsqu'on est loin de la fissure, la relation 2.35 approxime alors le champ de déplacement,

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i, \quad (2.35)$$

- lorsqu'on est sur la fissure mais pas en pointe, c'est la relation 2.36 qui approxime le champ de déplacement,

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} H(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \underline{a}_i, \quad (2.36)$$

- lorsqu'on est en pointe de fissure, c'est la relation 2.37 qui approxime le champ de déplacement,

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{j=1}^{n_{fonctions}} \gamma_j(\underline{x}) \left( \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} N_i(\underline{x}) \underline{b}_{ij} \right). \quad (2.37)$$

**Remarque 8** Le code de calcul du CEA, EUROPLEXUS, est un code de dynamique explicite qui ne comporte que des enrichissements « saut » qui utilise en fonction d'enrichissement la fonction de Heaviside. Cette particularité permet représenter la fissure, mais lorsque la pointe de fissure est dans un élément, cet élément est alors totalement coupé. Par cette définition, on ne peut pas représenter plus finement la discontinuité dans l'élément. On aura donc besoin d'un maillage plus fin en pointe de fissure.

## 2.2.3 Localisation de la pointe de la fissure sans représentation de la singularité.

### 2.2.3.1 Nouveaux enrichissements en pointe de fissure

D'autres méthodes d'enrichissement ont été utilisées dans la littérature pour représenter une fissure, Menouillard [MEN 10] a comparé les enrichissements en  $r^2$  aux enrichissements  $\sqrt{r}$ , il a ajouté également des forces cohésives en pointe de fissure afin de localiser et dissiper l'énergie en faisant propager la fissure dans un code explicite. On récapitule ici les calculs réalisés car ils pourront ensuite servir à développer un nouveau type d'enrichissement. L'utilisation de ces enrichissements rajoute un terme supplémentaire au second membre :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{U}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} H(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \underline{a}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} \gamma(\underline{x}, t) N_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t). \quad (2.38)$$

Les dérivées du champ de déplacement donnent :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}(\underline{x}, t) &= \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \dot{\underline{U}}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} H(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \dot{\underline{a}}_i(t) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} \dot{\gamma}(\underline{x}, t) N_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} \gamma(\underline{x}, t) \dot{N}_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}(\underline{x}, t) &= \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \ddot{\underline{U}}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} H(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \ddot{\underline{a}}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} \ddot{\gamma}(\underline{x}, t) N_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} 2\dot{\gamma}(\underline{x}, t) \dot{N}_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}_{tip}} \gamma(\underline{x}, t) \ddot{N}_i(\underline{x}) \underline{b}_i(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Les conditions aux limites sont modifiées par l'ajout des forces cohésives :

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur la surface } S_d, \quad (2.41)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur la surface } S_u \setminus \Gamma, \quad (2.42)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_{coh} \text{ sur la surface de la fissure } \Gamma. \quad (2.43)$$

On ré-injecte ces équations dans l'équation globale 2.12, les forces cohésives interviennent dans les efforts de surface :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \dot{u} d\Omega = \int_{S_u \setminus \Gamma} F_d \dot{u} dS + \int_{\Omega} f_{\rightarrow} \dot{u} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} F_{coh} \dot{u} dS. \quad (2.44)$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{F}}^{ext} - \underline{\underline{F}}^{int} + \underline{\underline{F}}^{coh} - \underline{\underline{D}}^1 \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{D}}^2 \dot{\underline{\underline{U}}}. \quad (2.45)$$

Chaque terme est défini :

$$\dot{\underline{\underline{U}}} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{U}}} \\ \dot{\underline{\underline{a}}} \\ \dot{\underline{\underline{b}}} \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{F}}^{int} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{F}}_U^{int} \\ \underline{\underline{F}}_a^{int} \\ \underline{\underline{F}}_b^{int} \end{Bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\underline{\underline{F}}^{ext} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{F}}_U^{ext} \\ \underline{\underline{F}}_a^{ext} \\ \underline{\underline{F}}_b^{ext} \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{F}}^{coh} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}}_a^{coh} \\ \underline{\underline{F}}_b^{coh} \end{Bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{b}} \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{U}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{b}} \end{Bmatrix}. \quad (2.48)$$

La matrice de masse se décompose comme dans l'équation 2.49 :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{M}}_{UU} & \underline{\underline{M}}_{Ua} & \underline{\underline{M}}_{Ub} \\ \underline{\underline{M}}_{aU} & \underline{\underline{M}}_{aa} & \underline{\underline{M}}_{ab} \\ \underline{\underline{M}}_{bU} & \underline{\underline{M}}_{ba} & \underline{\underline{M}}_{bb} \end{Bmatrix}, \quad (2.49)$$

avec

$$\underline{\underline{F}}_U^{int} = \int_{\Omega} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega, \quad (2.50)$$

$$\underline{\underline{F}}_a^{int} = \int_{\Omega} H(x) \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega, \quad (2.51)$$

$$\underline{\underline{F}}_b^{int} = \int_{\Omega} \gamma(x) \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega, \quad (2.52)$$

$$\underline{\underline{F}}_U^{ext} = \int_{\Omega} \underline{\underline{N}} f_d d\Omega + \int_{S_u \setminus \Gamma} \underline{\underline{N}} E_d dS, \quad (2.53)$$

$$\underline{\underline{F}}_a^{ext} = \int_{\Omega} H(x) \underline{\underline{N}} f_d d\Omega + \int_{S_u \setminus \Gamma} H(x) \underline{\underline{N}} E_d dS, \quad (2.54)$$

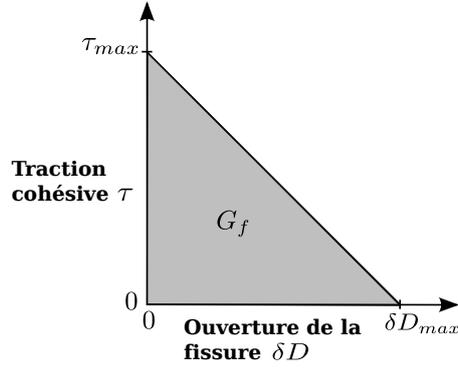
$$\underline{\underline{F}}_b^{ext} = \int_{\Omega} \gamma(x) \underline{\underline{N}} f_d d\Omega, \quad (2.55)$$

$$\underline{\underline{F}}_a^{coh} = \int_{\Gamma} \underline{\underline{N}} n \tau d\Gamma, \quad (2.56)$$

$$\underline{\underline{F}}_b^{coh} = \int_{\Gamma} \underline{\underline{N}} \gamma(x) n \tau d\Gamma. \quad (2.57)$$

$$(2.58)$$

$\tau$  indique le taux d'avancée de la fissure dans l'élément, ce terme est inspiré des travaux de Barenblatt et Dugdale décrit au chapitre 1.1.6. On fait alors intervenir une loi entre  $\tau$  la norme de l'effort appliqué sur les lèvres de la fissure perpendiculairement à sa propagation et l'ouverture de la fissure  $\delta D$ , comme illustrée dans la figure 2.1



**FIGURE 2.1:** Exemple de loi cohésive appliquée à la fissure

Avec :

$$G_f = \int_0^{\delta D_{max}} \tau dD = \frac{1}{2} \tau_{max} \delta D_{max}. \quad (2.59)$$

Les termes de la matrice de masse sont alors :

$$\underline{\underline{M}}_{UU} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} d\Omega, \quad (2.60)$$

$$\underline{\underline{M}}_{aa} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} H^2(x) d\Omega, \quad (2.61)$$

$$\underline{\underline{M}}_{Ua} = \underline{\underline{M}}_{aU} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} H(x) d\Omega, \quad (2.62)$$

$$\underline{\underline{M}}_{bb} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} \gamma^2(x) d\Omega, \quad (2.63)$$

$$\underline{\underline{M}}_{Ub} = \underline{\underline{M}}_{bU} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} \gamma(x) d\Omega, \quad (2.64)$$

$$\underline{\underline{M}}_{ab} = \underline{\underline{M}}_{ba} = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} \gamma(x) H(x) d\Omega. \quad (2.65)$$

Les deux termes supplémentaires apparaissant au second membre  $\underline{\underline{D}}^1$  et  $\underline{\underline{D}}^2$  sont définis :

$$\underline{\underline{D}}^1 = \int_{\Omega} [\underline{\underline{N}}, H(x)\underline{\underline{N}}, \gamma(x)\underline{\underline{N}}]^T [\underline{\underline{N}} \dot{\gamma}] d\Omega, \quad (2.66)$$

$$\underline{\underline{D}}^2 = \int_{\Omega} [\underline{\underline{N}}, H(x)\underline{\underline{N}}, \gamma(x)\underline{\underline{N}}]^T [2\underline{\underline{N}} \dot{\gamma}] d\Omega. \quad (2.67)$$

$$(2.68)$$

Les termes  $\dot{\gamma}$  et  $\ddot{\gamma}$  sont explicités à partir de la vitesse d'avancée du front de fissure  $\dot{a}$  et de  $\theta$ , qui correspond à l'enrichissement en pointe  $\gamma(\underline{x}, t) = \psi(\underline{x} - \underline{x}_f(t))$  où  $\psi(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$  ou  $\psi(r, \theta) = r^2 \sin(\theta/2)$  :

$$\dot{\gamma}(\underline{x}, t) = -\dot{a}(t) \nabla \psi, \quad (2.69)$$

$$\ddot{\gamma}(\underline{x}, t) = -\ddot{a}(t) \nabla \psi - \|\dot{a}(t)\|^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.70)$$

### 2.2.3.2 Sans enrichissement en pointe de fissure

Des travaux ont été réalisés afin de simplifier la mise en oeuvre des enrichissements pointe dans le cas dynamique :

- les travaux réalisés par Zi *et al.* [ZI 03] et Rabczuk [RAB 08] sont intéressants mais la prise en compte de la pointe de fissure dans l'élément nous semble un peu complexe. Ils utilisent alors des noeuds « fantômes » pour calculer les fonctions de forme. L'élément qui contient la pointe de fissure est alors sous découpé comme dans la figure 2.2. Les déplacements dans l'élément en pointe sont donnés par l'équation 2.71.

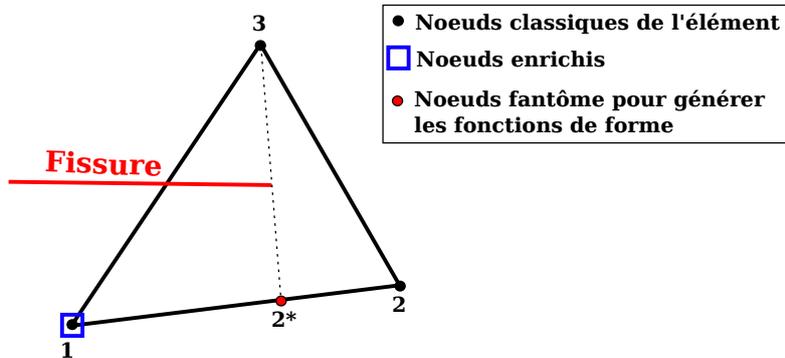


FIGURE 2.2: Élément triangle qui contient la pointe de fissure.

$$\underline{u}(x) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} \varphi_i(x) U_i^e, \quad (2.71)$$

$$\text{où } \varphi_i = \begin{cases} N_i(x) H(x) & \text{pour un élément totalement coupé,} \\ N_i(x^*) H(x) & \text{pour un élément partiellement coupé.} \end{cases} \quad (2.72)$$

Les fonctions  $N_i(x^*)$  sont les mêmes que les fonctions de forme de l'élément classique mais elles ne s'appuient pas sur le même emplacement des noeuds. Au lieu de s'appuyer sur l'élément triangle avec les noeuds 1, 2, 3, elles utilisent les noeuds 1, 2\*, 3. Malgré le fait que les contraintes ne sont pas hyperboliques devant la fissure, cette approche est intéressante car la pointe de la fissure est localisée dans l'élément,

- Mougard *et al.* [MOU 11a] utilisent les forces cohésives uniquement afin de localiser la pointe de la fissure dans l'élément. Cette approche est intéressante au niveau des déplacements mais ne permet pas d'avoir des contraintes différentes dans l'élément.

## 2.3 Les schémas d'intégration temporelle de Newmark, cas du schéma explicite

On s'intéresse dans ce chapitre au schéma d'intégration explicite qui est utilisé dans le code de calcul EUROPLEXUS. Pour cela, on se place dans un espace à une dimension et on considère un solide de masse  $m$  accroché à un ressort de raideur  $k$  et soumis à un effort extérieur  $f$ . La relation qui lie le déplacement  $x$  de ce solide à sa vitesse  $\dot{x}$  et son accélération  $\ddot{x}$  est donnée dans l'équation 2.73. On pourrait parfaitement dans cet exemple faire intervenir un terme supplémentaire d'amortissement  $\mu$ , car jusque là aucune hypothèse particulière n'a été émise.

$$m\ddot{x} + kx = f. \quad (2.73)$$

Le schéma de Newmark [NEW 59] ne formule aucune hypothèse sur les équations ou les fonctions décrivant les quantités cinématiques. L'hypothèse émise concerne l'ordre de dérivabilité, on suppose que ces quantités sont d'ordre suffisamment important pour que l'on effectue un développement limité de Taylor.

À un instant  $n$ , on peut alors connaître l'instant suivant  $(n + 1)$  en introduisant deux paramètres  $\beta$  pour  $x$  et  $\gamma$  pour  $\dot{x}$  :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_n + \Delta t^2 (\beta (\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n)), \quad (2.74)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_n + \Delta t^2 (\gamma (\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n)). \quad (2.75)$$

L'équation 2.73 continue s'écrit alors à un instant  $n$  du calcul :

$$m\ddot{x}_n + kx_n - f_n = 0. \quad (2.76)$$

Si on s'intéresse maintenant à un problème à plusieurs DDL, les équations d'équilibre discrétisées en temps et dans l'hypothèse d'un matériau élastique linéaire soumis à de petites perturbations donnent :

$$\underline{M}\ddot{\underline{U}}_n + \underline{K}\underline{U}_n = \underline{F}_n. \quad (2.77)$$

Les équations définissant le calcul du vecteur d'état sont alors :

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \Delta t \dot{\underline{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \ddot{\underline{U}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\underline{U}}_{n+1}, \quad (2.78)$$

$$\dot{\underline{U}}_{n+1} = \dot{\underline{U}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\underline{U}}_n + \Delta t \gamma \ddot{\underline{U}}_{n+1}. \quad (2.79)$$

Suivant les valeurs de  $\beta$  et de  $\gamma$ , différents schémas temporels apparaissent. Hugues [HUG 78] a définis les bornes de  $\beta$  et de  $\gamma$  qui garantissent la stabilité des différents schémas temporels. La stabilité des schémas est regrouée dans le tableau 2.1.

Condition sur $\beta$ et $\gamma$	Stabilité
$\gamma < 1/2$	instable
$\gamma \geq 1/2$ et $\beta \leq 2\gamma$	conditionnellement stable si $\Delta t \leq \frac{1}{\omega_p^{max} \sqrt{\gamma/2 - \beta}}$
$\gamma \geq 1/2$ et $\beta > 2\gamma$	inconditionnellement stable

**TABLE 2.1:** La stabilité des schémas de Newmark suivant les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$

$\omega_p^{max}$  est la plus grande fréquence propre de la structure discrétisée. Numériquement, on détermine  $\omega_p^{max}$  en calculant la plus grande fréquence propre du plus petit élément de la structure. Le tableau 2.2 regroupe les schémas de Newmark les plus utilisés et leur nom respectif.

Nom du schémas	$\gamma$	$\beta$	Propriété
Différence centrée	1/2	0	explicite et conditionnellement stable
Fox Goodwin	1/2	1/12	conditionnellement stable
Accélération linéaire	1/2	1/6	conditionnellement stable
Accélération moyenne	1/2	1/4	implicite et inconditionnellement stable

**TABLE 2.2:** Les principaux schémas numérique de Newmark suivant les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$

Le schéma de l'accélération moyenne est celui qui offre la précision maximale sans contrainte au niveau du pas de temps. Cependant sa mise en oeuvre impose d'inverser une matrice de rigidité afin de calculer les déplacements. Le schéma de la différence centrée est également intéressant car malgré sa condition sur le pas de temps, il offre une précision maximale en ayant juste la matrice de masse à inverser. Le chapitre suivant présente une méthode permettant de s'affranchir de l'inversion de la matrice tout en ayant un pas de temps le moins réduit possible dans le cas des XFEM.

## 2.4 Le calcul de la matrice de masse en dynamique explicite

La partie précédente a décrit le schéma temporel choisi afin de discrétiser le temps. Dans le cas d'un matériau élastique linéaire soumis à des petites perturbations, on obtient l'équation suivante :

$$\underline{M}\ddot{\underline{U}} = \underline{F}^{ext} - \underline{F}^{int} \text{ avec } \underline{F}^{int} = \underline{K}\underline{U}_n. \quad (2.80)$$

Dans le cas des XFEM, cette équation peut alors se décomposer en une partie standard, une partie enrichie de chaque terme et les couplages entre les deux :

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_{std} & \underline{M}_{coup} \\ \underline{M}_{coup} & \underline{M}_{enr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{U}}_{std} \\ \ddot{\underline{U}}_{enr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{std}^{ext} \\ \underline{F}_{enr}^{ext} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{F}_{std}^{int} \\ \underline{F}_{enr}^{int} \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

La résolution de cette équation demande d'inverser la matrice de masse. La matrice de masse impose le pas de temps au travers de la condition CFL :

$$\Delta t = \frac{V_{max}}{\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}. \quad (2.82)$$

**Remarque 9** On voit dans l'équation 2.80 l'utilité de diagonaliser la matrice de masse afin de pouvoir l'inverser plus simplement. Un second enjeu concerne le pas de temps de stabilité du schéma de Newmark, ce pas de temps dépend de la taille du plus petit élément de cette structure.

Gerlach [GER 99] a montré que les enrichissements sauts introduisent une dépendance du pas de temps à la localisation de la fissure dans l'élément. Si la fissure coupe un élément trop près d'un noeud, le pas de temps qui en découle tend vers zéro. Une première méthode utilisée par Remmers [REM 03] consiste à imposer à la fissure de ne pas passer trop près d'un noeud. Cette méthode est très approximative et n'empêche pas le pas de temps d'être divisé d'un facteur dix ou plus suivant l'endroit où la fissure passe dans l'élément. Menouillard [MEN 07, MEN 08] a alors proposé deux méthodes de diagonalisation de la matrice de masse afin de s'affranchir de ces contraintes.

### 2.4.1 Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale

Cette méthode se base sur la conservation de l'énergie cinétique entre la matrice de masse classique et la matrice de masse diagonale. L'énergie cinétique s'écrit de façon discrète :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\underline{U}}^T \underline{M} \dot{\underline{U}} d\Omega. \quad (2.83)$$

Menouillard définit alors deux termes :  $m_{std}^{diag}$  qui désigne le terme courant aux fonctions de forme standards et  $m_{enr}^{diag}$  qui désigne le terme correspondant aux fonctions de forme enrichies. La matrice de couplage n'intervient pas dans la diagonalisation.

$$m_{std}^{diag} = \frac{m}{n_{nd}}, \quad (2.84)$$

$$m_{enr}^{diag} = \frac{1}{n_{nd}} \rho \int_{\Omega} \varphi^2 d\Omega. \quad (2.85)$$

$$(2.86)$$

Où  $m = \rho \int_{\Omega} 1 d\Omega$ ,  $\rho$  représente la masse volumique de l'élément,  $n_{nd}$  son nombre de noeuds,  $\Omega$  son Volume et  $\varphi$  la fonction d'enrichissement utilisée.

Il montre alors l'exemple pour un élément poutre 1D illustré figure 2.3, la matrice de masse consistante s'écrit en fonction de la discontinuité  $\alpha$  :

$$\underline{M}_{XFEM}^{cons} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\alpha^3 & \frac{1}{3} - 2\alpha + 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\alpha^3 & \frac{1}{6} + \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} - 2\alpha + 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Avec la diagonalisation, cette matrice de masse s'écrit alors :

$$\underline{\underline{M}}_{XFEM}^{diag} = \frac{m}{2} \underline{\underline{I}}_4. \quad (2.88)$$

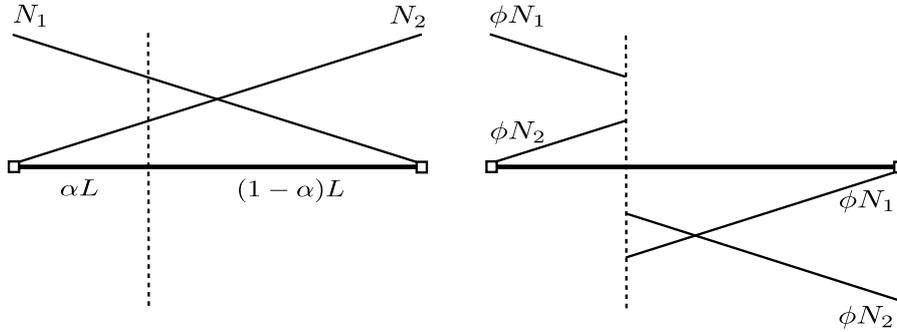


FIGURE 2.3: Fonctions de formes pour un élément 1D coupé par une fissure

## 2.4.2 Diagonalisation de la matrice de Masse : méthode de masse diagonale par bloc

Cette seconde méthode est basée sur la base d'Hansbo [HAN 04]. Elle utilise alors la même base de fonctions de forme mais décrite différemment. Pour illustrer cette méthode, on se replace dans le cas d'un élément poutre en 1D. On calcule alors les nouvelles fonctions de forme dans la nouvelle base, elles sont illustrées figure 2.4 :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \phi N_1 \\ N_2 \\ \phi N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1^* \\ N_1^{**} \\ N_2^* \\ N_2^{**} \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} N_1^* \\ N_1^{**} \\ N_2^* \\ N_2^{**} \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

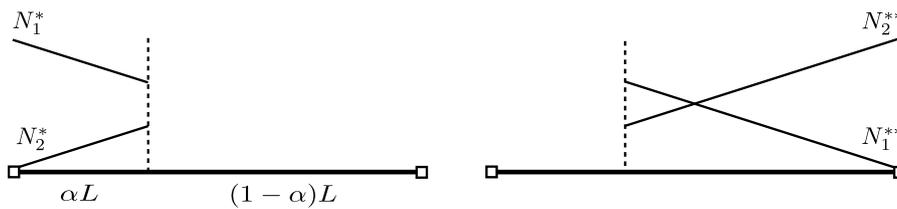


FIGURE 2.4: Fonctions de forme dans la base d'Hansbo pour un élément 1D coupé par une fissure

Les déplacements peuvent alors être représentés dans les deux bases, en passant de l'une à l'autre par la relation :

$$\begin{pmatrix} U_1^{std} \\ U_1^{enr} \\ U_2^{std} \\ U_2^{enr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_1^{**} \\ U_2^* \\ U_2^{**} \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}^T \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_1^{**} \\ U_2^* \\ U_2^{**} \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

La matrice de masse obtenue pour un élément poutre 1D donne alors en fonction de la discontinuité  $\alpha$  :

$$\underline{\underline{M}}_{XFEM}^{block} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

### 2.4.3 Choix de la méthode de diagonalisation et influence sur le pas de temps

Menouillard [MEN 08] a montré que les deux méthodes de diagonalisation permettaient de conserver l'énergie cinétique. Elles n'ont cependant pas la même influence en ce qui concerne le pas de temps critique.

**Remarque 10** *Le calcul du pas de temps critique consiste à trouver les valeurs minimales de  $\omega$  tels que  $\det(\underline{\underline{K}} - \omega \underline{\underline{M}}) = 0$ .*

Le tableau 2.3 regroupe l'ensemble des conditions imposées sur le pas de temps dans les différentes méthodes de diagonalisation et pour différents éléments.

Type d'élément	$\Delta t_{FEM}^{lump} / \Delta t_{FEM}$	$\Delta t_{XFEM} / \Delta t_{FEM}^{lump}$ ∀ fissure		
	$\underline{\underline{M}}_{FEM}^{lump}$	$\underline{\underline{M}}_{XFEM}^{cons}$	$\underline{\underline{M}}_{XFEM}^{diag}$	$\underline{\underline{M}}_{XFEM}^{block}$
poutre 1D	1.73	0	$1/\sqrt{2}$	1
triangle 2D	2	0	$1/\sqrt{2}$	1
quadrangle 2D	1.75	0	$1/\sqrt{2}$	0.75
tétraèdre XFEM 3D	2.12	0	$1/\sqrt{2}$	1
cube XFEM 3D	1.73	0	$1/\sqrt{2}$	0.75

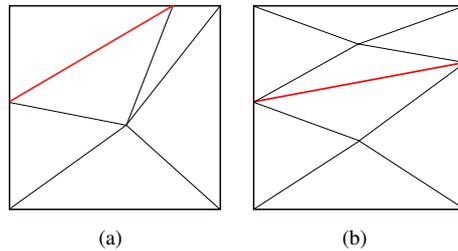
TABLE 2.3: Configurations de l'intégration suivant le type d'élément

On peut remarquer que la méthode d'Hansbo permet d'avoir un pas de temps supérieur à la méthode de diagonalisation de Menouillard. Cela se fait cependant au prix d'une matrice de masse qui n'est pas diagonale et doit donc être inversée. Cette inversion est cependant rendue plus simple car l'inversion se fait sur chaque bloc et non plus sur la matrice globale. Dans EUROPLEXUS, c'est la méthode de Menouillard qui a été implémentée.

## 2.5 L'intégration numérique des éléments XFEM

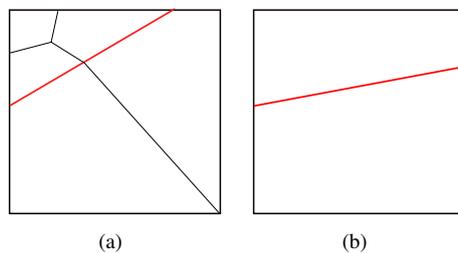
### 2.5.1 Sous découpage non régulier

La méthode des éléments finis étendus a donc permis par sa formulation d'éviter de modifier le maillage au cours du calcul lorsque la fissure avance. Cependant si l'on veut garder la même précision qu'avec la méthode des éléments finis « classiques », il faut pouvoir intégrer convenablement les éléments qui contiennent la fissure et le front. Moes *et al.* [MOE 99] ont utilisé une approche en sous-découpant les éléments en respectant la géométrie de la fissure. Cette méthode permet d'intégrer au plus juste les éléments qui sont totalement coupés par une fissure droite. Par exemple pour un quadrangle 2D, la figure 2.5 illustre le sous-découpage de l'élément par des triangles. Suivant l'ordre des fonctions à intégrer, on peut utiliser un ou plusieurs points de Gauss par triangle.



**FIGURE 2.5:** Méthode de sous découpage par triangles par Moes *et al.* pour deux configurations de fissure

Xiao *et al.* [XIA 06] ont utilisé une méthode similaire mais en utilisant des quadrangles au lieu des triangles pour sous découper son élément.



**FIGURE 2.6:** Méthode de sous découpage par des quadrangles par Xi *et al.* pour deux configurations de fissure

Cette méthode a l'avantage d'avoir à calculer un nombre moins élevé de points de Gauss que dans le sous-découpage régulier. Mais ces points de Gauss étant mobiles dans le temps, une étape de projection des grandeurs mécaniques (contraintes, déformations...) est nécessaire dans le cas des matériaux non linéaires lorsque la fissure se déplace dans l'élément. De plus, le gain en temps de calcul réalisé en ayant un nombre moins important de points de Gauss est réduit par l'étape de sous découpage suivant la géométrie de la fissure. Ces travaux ont été étendus au 3D, pour tous les éléments, mais un grand nombre de configurations existe suivant la position de la fissure.

### 2.5.2 Sous découpage régulier

La précédente approche utilisée dans EUROPLEXUS pour intégrer les éléments tranchés a été de sous découper l'élément initial en plusieurs sous-éléments contenant chacun plusieurs points de Gauss. Cette technique est encore utilisée dans la plupart des codes de calculs industriels. Par exemple pour un élément quadrangle 2D, on sous-découpe alors en  $4 \times 4$  sous éléments qui contiennent chacun 4 points de Gauss, comme illustré figure 2.7.

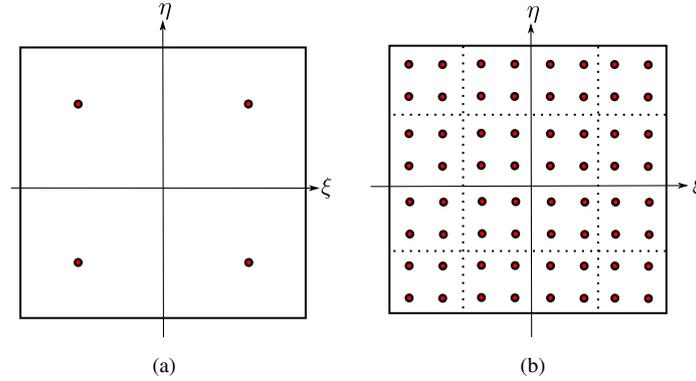


FIGURE 2.7: Sous-découpage régulier d'un élément quadrangle.

Cette méthode permet d'avoir une précision relativement correcte, mais néanmoins coûteuse car elle fait passer le nombre de points de Gauss de 4 à 64 pour un quadrangle 2D et de 8 à 512 pour l'intégration des cubes 3D.

### 2.5.3 Méthodes non conventionnelles

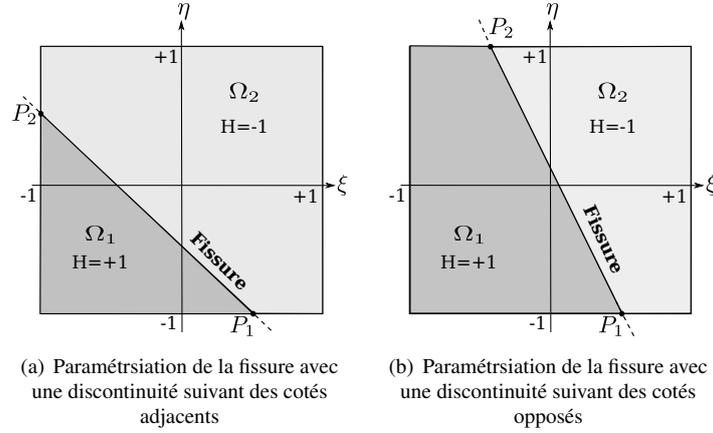
#### 2.5.3.1 Remplacement de la discontinuité par un polynôme équivalent

Cette méthode a été proposée par Ventura [VEN 06]. L'intégrale  $I$  d'une fonction discontinue composée d'une fonction  $f$  et de la fonction de Heaviside notée  $H$  sur le domaine  $\Omega$  est la somme de deux intégrales sur les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  définis de part et d'autre de la fissure. L'intégrale est donnée dans l'équation 2.92. En fonction de l'emplacement de la fissure, Ventura recherche un polynôme noté  $\mathcal{P}$  dont l'intégrale est équivalente à celle obtenue par la fonction de Heaviside. L'égalité est décrite en 2D dans les équations 2.92 et 2.93.

$$I = \int_{\Omega} H(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\Omega_1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.92)$$

$$I = \int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.93)$$

Application à un quadrangle : La paramétrisation de la fissure peut se faire de deux façons, suivant l'intersection de la fissure avec les cotés de l'élément. les figures 2.8(a) et 2.8(b) donnent ces deux façons.


**FIGURE 2.8:** Paramétrisation de la découpe d'un élément quadrangle.

Il cherche ensuite à intégrer les fonctions résumées dans les équations 2.94 à 2.99.

$$I_1 = \int_{\Omega_1} 1 d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} 1 d\xi d\eta, \quad (2.94)$$

$$I_2 = \int_{\Omega_1} \xi d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} \xi d\xi d\eta, \quad (2.95)$$

$$I_3 = \int_{\Omega_1} \eta d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} \eta d\xi d\eta, \quad (2.96)$$

$$I_4 = \int_{\Omega_1} \eta d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} \eta \xi d\xi d\eta, \quad (2.97)$$

$$I_5 = \int_{\Omega_1} \xi^2 d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} \xi^2 d\xi d\eta, \quad (2.98)$$

$$I_6 = \int_{\Omega_1} \eta^2 d\xi d\eta - \int_{\Omega_2} \eta^2 d\xi d\eta. \quad (2.99)$$

Ne pouvant calculer directement l'intégrale analytique des fonctions, il utilise alors le théorème de la divergence en considérant le champ de vecteurs défini dans les équations 2.100 à 2.105.

$$\underline{\Xi}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi \\ \frac{1}{2}\eta \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_a = 1, \quad (2.100)$$

$$\underline{\Xi}_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_b = \xi, \quad (2.101)$$

$$\underline{\Xi}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\eta^2 \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_c = \eta, \quad (2.102)$$

$$\underline{\Xi}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\xi^2\eta \\ \frac{1}{4}\eta^2\xi \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_d = \xi\eta, \quad (2.103)$$

$$\underline{\Xi}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\xi^3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_e = \xi^2, \quad (2.104)$$

$$\underline{\Xi}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\eta^3 \end{bmatrix}; \quad \nabla \underline{\Xi}_f = \eta^2. \quad (2.105)$$

Ventura propose alors le degré polynomial de  $\mathcal{P}$ . Il propose par exemple un polynôme de degré 2, de la forme  $\mathcal{P} = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta + e\xi^2 + f\eta^2$ . La fonction  $H$  étant positive sur le domaine  $\Omega_1$ , on obtient alors

les équations suivantes :

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_a \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_a \cdot \underline{n} ds, \quad (2.106)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_b \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_b \cdot \underline{n} ds, \quad (2.107)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) \eta d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_c \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_c \cdot \underline{n} ds, \quad (2.108)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) \eta \xi d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_d \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_d \cdot \underline{n} ds, \quad (2.109)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) \xi^2 d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_e \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_e \cdot \underline{n} ds, \quad (2.110)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(\xi, \eta) \eta^2 d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_1} \underline{\Xi}_f \cdot \underline{n} ds - \oint_{\partial\Omega_2} \underline{\Xi}_f \cdot \underline{n} ds, \quad (2.111)$$

$s$  est l'abscisse curviligne le long de la frontière du domaine,  $\partial\Omega_1$  est la frontière extérieure au domaine  $\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$  est la frontière extérieure au domaine  $\Omega_2$ . Le vecteur  $\underline{n}$  est la normale extérieure à cette frontière. Les vecteurs  $\underline{\Xi}$  ne sont pas uniques et sont définis à une valeur constante près. Ventura a vérifié que changer la valeur de cette constante n'altérerait pas le résultat final.

Il obtient alors deux jeux de coefficient du polynôme  $\mathcal{P}$  suivant l'intersection de la fissure avec les cotés de l'élément. Si la fissure coupe deux cotés adjacents, comme la figure 2.8(a), les coefficients sont :

$$a = \frac{1}{32} (-34 + 8\xi_1 + 5\xi_1^2 - 5\xi_1^3 + 5\eta_2^2(1 + \xi_1) - 5\eta_2^3(1 + \xi_1) + \eta_2(8 + 18\xi_1 + 5\xi_1^2 - 5\xi_1^3)), \quad (2.112)$$

$$b = \frac{1}{4} (1 + \eta_2) (-2 - \xi_1 + \xi_1^2), \quad (2.113)$$

$$c = \frac{1}{4} (-2 - \eta_2 + \eta_2^2) (1 + \xi_1), \quad (2.114)$$

$$d = \frac{3}{16} (1 + \eta_2) (5 + \eta_2(-3 + \xi_1) - 3\xi_1) (1 + \xi_1), \quad (2.115)$$

$$e = \frac{15}{32} (1 + \eta_2) (-1 - \xi_1)^2 (1 + \xi_1^2), \quad (2.116)$$

$$f = \frac{15}{32} (-1 + \eta_2)^2 (1 + \eta_2) (1 + \xi_1). \quad (2.117)$$

Dans le cas où la fissure coupe deux cotés opposés, comme la figure 2.8(b), les coefficients sont :

$$a = -\frac{1}{16} (-18\xi_1 + 5\xi_1^3 - 18\xi_2 + 5\xi_1^2\xi_2 + 5\eta_1\xi_2^2 + 5\xi_2^3), \quad (2.118)$$

$$b = \frac{1}{2} (-3 + \xi_1^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2), \quad (2.119)$$

$$c = \frac{1}{2} (\xi_2 - \xi_1), \quad (2.120)$$

$$d = -\frac{3}{4} (\xi_1^2 - \xi_2^2), \quad (2.121)$$

$$e = \frac{15}{16} (\xi_1^3 + \xi_1^2\xi_2 + \xi_1(-2 + \xi_2^2) + \xi_2(-2 + \xi_2^2)), \quad (2.122)$$

$$f = 0. \quad (2.123)$$

Une fois ces fonctions et paramètres définis, on peut alors intégrer les éléments coupés par la fissure en choisissant le nombre de points de Gauss pour intégrer des fonctions de degré polynomial  $\deg(\mathcal{P}) + 2$ , avec la règle classique de quadrature de Gauss.

Cette méthode a l'avantage d'être développée en 2D et en 3D, pour les triangles, les quadrangles et les tétraèdres, mais elle nécessite encore des développements dans le cas des éléments cubiques. De plus cette méthode est exclusivement appliquée aux enrichissements sauts et linéaires (pour une discontinuité matériau).

### 2.5.3.2 Les autres méthodes

D'autres méthodes de déplacement des points de Gauss ont été développées. En général, elles utilisent toutes le même algorithme appliqué à des éléments différents ou des fonctions différentes. Mousavi *et al.* [MOU 11b, MOU 12, MOU 10a] utilisent un ensemble de points mobiles et changent leur poids de Gauss dans un processus itératif. Au final ils éliminent les poids qui tendent vers 0. Ils l'appliquent principalement aux fonctions en  $\frac{1}{r^\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 1$ , mais également dans le cas de fonctions polynomiales continues et discontinues. Natarajan *et al.* [NAT 10] l'utilisent afin de calculer les fonctions singulières en pointe de fissure. Xiao *et al.* [XIA 06] donnent l'algorithme permettant de calculer itérativement l'emplacement des points de Gauss et leur poids afin d'intégrer les fonctions le plus précisément possible. L'algorithme est donné ci dessous :

---

#### Algorithme 3: Algorithme d'élimination de noeuds

---

**Data** : Emplacement initial des points de Gauss  $\underline{x}$ , leur poids  $\underline{w}$  et le nombre de points  $n^i$  de Gauss initial,  $m$  fonctions à calculer  $F$ .

**Result** : Emplacement final des points de Gauss, leur poids et le nombre de points de Gauss final  $n^f$ .

Initialisation :

$n^f = n^i$ ,

**for** ( $k = 1 : n^i$ ) **do**

    Ré-ordonner  $\underline{x}$  et  $\underline{w}$  par ordre croissant en fonctions des « index significatifs »  $s_j$  :

$$s_j = w_j \sum_{i=1}^m F_i^2(x_j), \quad j = 1, \dots, n^f, \quad (2.124)$$

$$\text{où } s_j = \sum_{i=1}^m F_i^2(x_j), \quad j = 1, \dots, n^f, \quad (2.125)$$

**for** ( $i = 1 : n^k$ ) **do**

        Supprimer le  $i^{\text{e}}$  point de Gauss ( $x_i, w_i$ ) avec l'algorithme des moindres carrés de Newton.

**if** (*Algorithme de Newton convergé*) **then**

            Sauvegarde les nouveaux points de Gauss  $\underline{X}=(x, w)$ .

$n^f = n^f - 1$ .

**end**

**end**

**end**

---

Pour éliminer les noeuds, l'algorithme 3 utilise la méthode des moindres carrés de Newton. Cet algorithme recherche une solution au problème suivant :

$$\underline{F}(\underline{X}) \equiv \begin{pmatrix} f_1(\underline{X}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{X}) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.126)$$

où  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application non linéaire.

L'algorithme des moindres carrés non linéaire est donné ci-dessous :

---

**Algorithme 4:** Algorithme des moindres carrés de Newton

---

**Data :** Matrice  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et le vecteur  $X = (x_1^1, \dots, x_1^d, w_1, \dots, x_n^1, \dots, x_n^d, \dots, w_n)$  de taille  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Result :** Le nouveau vecteur  $X = (x_1^1, \dots, x_1^d, w_1, \dots, x_n^1, \dots, x_n^d, \dots, w_n)$  de taille  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui annule  $\underline{F}$ .  
norme( $\underline{\delta X}$ ) = 1.

**while** (norme( $\underline{\delta X}$ ) >  $\epsilon$ ) **do**

Calcul de la Matrice Jacobienne  $\underline{J} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $F$  :

$$\underline{J}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n^*}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(X) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n^*}(X) \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

Calcul de  $\underline{J}^*$ , la matrice pseudo-inverse [PEN 55] de la matrice Jacobienne.

Calcul du nouvel incrément de emplacement :

$$\underline{\delta X} = \underline{J}^*(X)\underline{F}(X). \quad (2.128)$$

Calcul du nouveau vecteur  $\underline{X}$  :

$$\underline{X} = \underline{X} - \underline{\delta X}. \quad (2.129)$$

**end**

---

La difficulté de cette méthode consiste à trouver l'emplacement des points de Gauss et leur poids qui minimisent l'erreur commise sur l'intégration. La solution obtenue dépend de la précision donnée sur l'intégration de référence. On résout alors le système suivant :

$$\underline{I} = \underline{F}(X)\underline{w}, \quad (2.130)$$

où  $\underline{I}$  est l'intégrale de référence que l'on souhaite obtenir,  $\underline{F}$  est la matrice des fonctions aux points  $X$  et  $\underline{w}$  est le vecteur des poids de Gauss correspondant. L'intégrale de référence peut être obtenue de différentes façons suivant le type de fonction :

- Natarajan *et al.* [NAT 10] projettent des points d'intégration d'un cercle dans les sous éléments découpés pour intégrer des fonctions en  $1/\sqrt{r}$ ,
- Mousavi *et al.* [MOU 10b] décrit la méthode pour différents polygones.

Cette méthode semble très intéressante car elle permet d'intégrer toutes les fonctions avec un nombre de points de Gauss réduit, cependant sa mise en oeuvre est plus complexe que les autres méthodes présentées jusqu'ici. Elle est reprise et appliquée à un élément quadrangle dans le chapitre 5.2.

## Chapitre 3

# La description de la fissure

*Dans ce chapitre, je présenterai les méthodes permettant de représenter la fissure. Qu'elles soient implicites ou explicites, elles permettent de reconnaître les noeuds à enrichir et le type d'enrichissement à appliquer. Une fois la méthode choisie, il faut pouvoir dans un premier temps faire passer l'information des vitesses d'avancée du front à l'ensemble du maillage. Ensuite il faut faire évoluer cette fissure avec un minimum de communication avec la partie éléments finis.*

### Sommaire

---

<b>3.1 Représentation de la fissure</b>	<b>44</b>
<b>3.2 Utilisation des fonctions de niveau pour la représentation de la fissure</b>	<b>45</b>
3.2.1 La méthode de discrétisation du front de fissure	46
3.2.2 Les méthodes d'actualisation des level-sets par résolution d'équations aux dérivées partielles	48
3.2.3 Les méthodes dites géométriques et mixtes	54
3.2.4 Conclusion	58

---

### 3.1 Représentation de la fissure

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les méthodes qui permettent de prendre en compte la présence d'une fissure dans un maillage éléments finis afin de pouvoir simuler sa propagation. La fissure peut être représentée implicitement par un maillage, certains codes de calcul ont choisi cette méthode, comme CAST3M [CEA 13] par exemple. Elle nécessite cependant des outils de gestion de maillage. La figure 3.1 représente un exemple d'utilisation d'un maillage pour la représentation de la fissure. Nous n'avons pas choisi ce type de représentation de la fissure car EUROPLEXUS ne possède pas d'outil de génération de maillage.

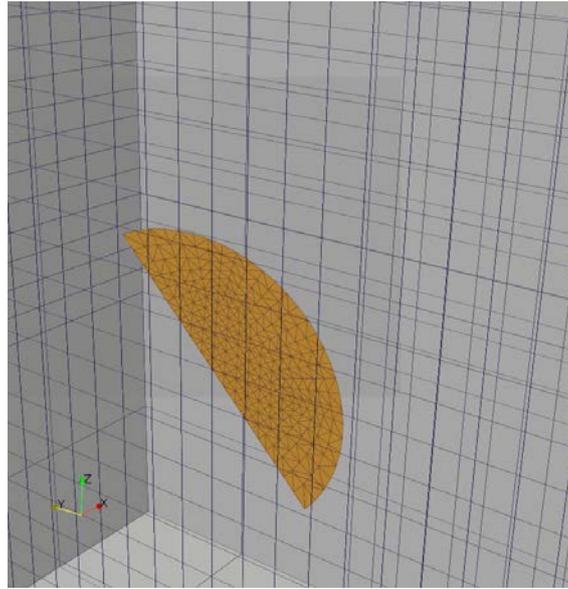


FIGURE 3.1: Représentation explicite de la fissure par un maillage par CAST3M.

La méthode appelée volumes finis principalement utilisée dans la mécanique des fluides, attribuée à chaque cellule un pourcentage correspondant à la fraction volumique de fluide à l'intérieur. Elle ne permet pas d'avoir une grande précision sur l'interface, qui est alors diffuse et dépend de la finesse de discrétisation.

Une autre méthode utilise alors la représentation d'une interface par les fonctions de niveau ou level-sets. La définition d'une level-set s'énonce de la façon suivante : soit une interface  $\Gamma$  dans un domaine  $\Omega$ , de normale  $\underline{n}$ , la level-set  $\phi$  définie à l'instant  $t$  au point  $\underline{x}$  est donnée par la relation 3.1. La level-set est à la distance signée à l'interface  $\Gamma$ , illustrée par l'équation 3.2. L'interface  $\Gamma$  n'est pas explicitement définie mais peut être retrouvée en recherchant la valeur de l'iso-zéro de la level-set (équation 3.3). La figure 3.2 illustre la représentation par une level-set d'un cercle en 2D centré en  $(0.25, 0.25)$ .

$$\phi(\underline{x}, t) = \text{sign}((\underline{x} - \underline{x}_\Gamma) \cdot \underline{n}) \cdot |\underline{x} - \underline{x}_\Gamma|, \quad (3.1)$$

$$\|\nabla\phi\| = 1, \quad (3.2)$$

$$\Gamma(t) = \{\underline{x}, \phi(\underline{x}, t) = 0\}. \quad (3.3)$$

La normale à cette interface  $\underline{n}$ , est définie par l'équation 3.4.

$$\underline{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \quad (3.4)$$

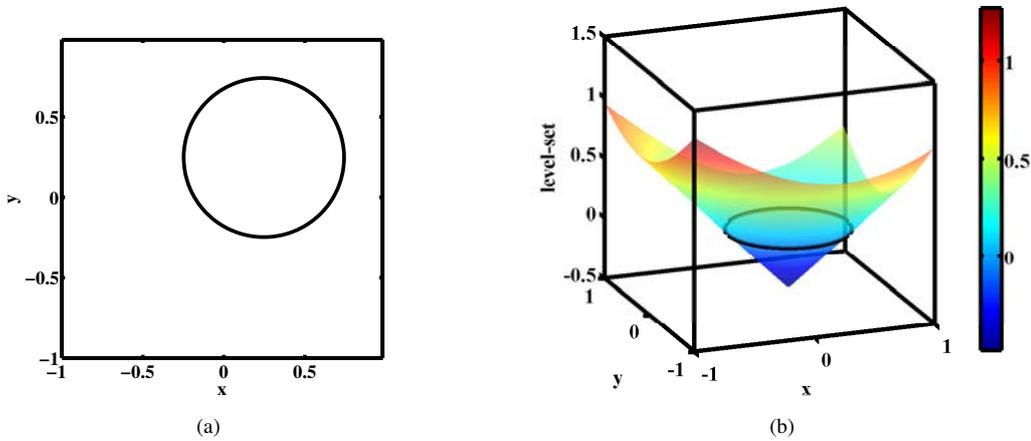


FIGURE 3.2: Réprésentation d'un cercle en 2D centré en  $(0.25, 0.25)$  sur le domaine  $\{-1; 1\} \times \{-1; 1\}$  par la méthode des level-sets.

### 3.2 Utilisation des fonctions de niveau pour la représentation de la fissure

L'utilisation des level-sets 3D couplées aux XFEM a été présentée entre autre dans les travaux de Gravouil *et al.* [GRA 02]. Il présente la méthode en trois dimensions en quasi-statique pour des fissures « smooth ».

Il représente les level-sets directement sur le maillage structure, et décrit la méthode d'actualisation de ces level-sets lors de la propagation de la fissure. La fissure initiale  $\Gamma$  dont l'équation est donnée par l'équation 3.5 est représentée par deux fonctions de niveau orthogonales  $(\phi_t, \phi_n)$  dont l'intersection définit le front de fissure  $\Gamma$ ,

$$\Gamma(\underline{X}) \equiv (\phi_t(\underline{X}) \leq 0) \cap (\phi_n(\underline{X}) = 0). \quad (3.5)$$

Ces deux fonctions de niveau  $\phi_t, \phi_n$  permettent de déterminer une base locale en front de fissure.  $\phi_t$  représente le plan tangent à la fissure et  $\phi_n$  délimite le front. Pour propager le front en deux et trois dimensions, il utilise des méthodes de calcul par différences finies, en résolvant les équation d'Hamilton-Jacobi. Osher [OSH 00] et Sethian [SET 96] se sont appliqués à améliorer les méthodes de résolution de ces équations d'Hamilton Jacobi dans les applications de description des interfaces en mécanique des fluides et en imagerie.

Prabel [PRA 07] et Rannou [RAN 08] ont proposé d'utiliser un maillage extérieur régulier pour les level-sets, ils projettent ensuite les informations de ces level-sets sur le maillage structure. Cette approche permet de simplifier la résolution des équations en utilisant directement les travaux de Sethian et Osher [SET 96] avec des algorithmes de différences finies.

Dans sa thèse, Prabel montre les différents schémas numériques de résolution de l'équation de propagation de la fissure. Ventura *et al.* [VEN 03] ont essayé de n'utiliser plus qu'une seule level-set pour décrire la fissure, ils utilisent alors un vecteur level-set pour décrire la fissure. Cette méthode n'a pas été appliquée en 3D.

### 3.2.1 La méthode de discrétisation du front de fissure

#### 3.2.1.1 La méthode itérative de Rannou

Une fois les level-sets définies, une première étape de discrétisation du front de la fissure est nécessaire. Rannou [RAN 08] expose dans sa thèse une méthode itérative permettant de discrétiser le front de fissure. Dans un premier temps, il recherche les noeuds proches du front, c'est à dire les noeuds des éléments qui ont un double changement de signe de la level-sets tangente et normale. Puis il va projeter ces noeuds sur le front par l'algorithme 5, comme le montre la figure 3.3. Cet algorithme converge très bien (en 7 itérations, on a une erreur inférieure à  $10^{-10}$ ).

---

**Algorithme 5:** Algorithme de projection des noeuds proches du front sur le front.

---

**Data :** Noeuds  $\underline{P}^{nd}$  proches du front de taille  $n_{nd}$ , valeur du critère d'arrêt des itérations  $\varepsilon$ , nombre d'itération maximale  $n_{max}$ .

**Result :** Projection de chaque noeud  $\underline{P}^{nd}$  sur le front pour obtenir  $\underline{P}^{frt}$ .

Boucle sur tous les noeuds autour du front :

**for** ( $i_{nd} = 1 : n_{nd}$ ) **do**

Initialisation :

$\underline{P}_{i_{nd}}^{nd} \rightarrow \underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}$ ,

$inc = 0$  ?

**while** ( $(crit > \varepsilon) \& (inc < n_{max})$ ) **do**

Calcul de la level-set ( $\phi_n(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\phi_t(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) et des normales ( $\underline{n}_{\phi_n}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\underline{n}_{\phi_t}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) au point  $\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}$ .

Mise à jour du point du front suivant la première level-set :

$$\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv} \rightarrow \underline{P}_{i_{nd}}^{suiv} + \underline{n}_{\phi_n}(\underline{P}_{i_{nd}}^{nd}) \cdot \phi_n(\underline{P}_{i_{nd}}^{nd}). \quad (3.6)$$

Calcul de la level-sets ( $\phi_n(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\phi_t(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) et des normales ( $\underline{n}_{\phi_n}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\underline{n}_{\phi_t}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) au point  $\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}$ .

Mise à jour du point du front suivant la seconde level-set :

$$\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv} \rightarrow \underline{P}_{i_{nd}}^{suiv} + \underline{n}_{\phi_t}(\underline{P}_{i_{nd}}^{nd}) \cdot \phi_t(\underline{P}_{i_{nd}}^{nd}). \quad (3.7)$$

Calcul de la level-set ( $\phi_n(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\phi_t(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) et des normales ( $\underline{n}_{\phi_n}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$  et  $\underline{n}_{\phi_t}(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv})$ ) au point  $\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}$ .

Calcul du critère d'arrêt :

$$crit = \sqrt{(\phi_n(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}))^2 + (\phi_t(\underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}))^2}. \quad (3.8)$$

$inc = inc + 1$ .

**end**

Enregistrement du résultat trouvé :

$\underline{P}_{i_{nd}}^{frt} \rightarrow \underline{P}_{i_{nd}}^{suiv}$ .

**end**

---

#### 3.2.1.2 La méthode géométrique de Colombo

Colombo [COL 11] a proposé une autre méthode de discrétisation en recherchant l'intersection du front avec les cotés des éléments, comme présenté à la figure 3.4. Pour cela, il recherche dans les éléments qui contiennent le front les faces qui sont coupées par la fissure, c'est à dire les faces qui ont un double

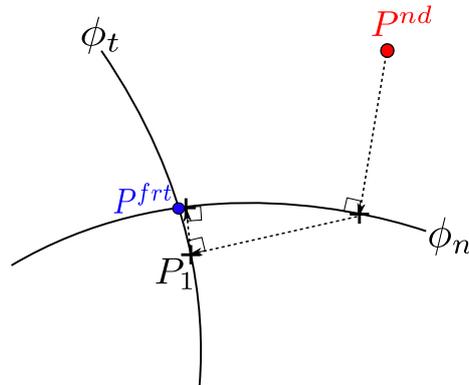


FIGURE 3.3: Projection du noeud  $P_{nd}$  sur le front de fissure

changement de signe sur les level-sets  $\phi_n$  et  $\phi_t$ . Le front est interpolé par un segment de droite qui joint les deux points. Les points du front sont placés indépendamment de la courbure du front de la fissure.

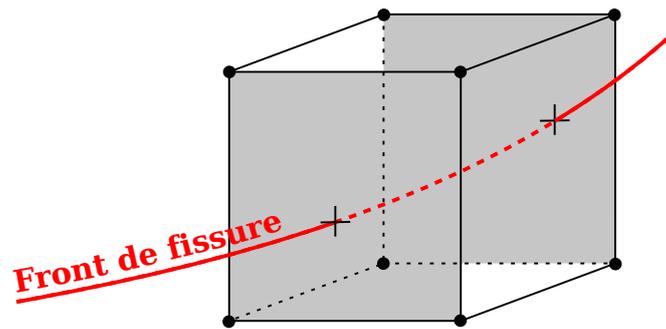


FIGURE 3.4: Méthode de discrétisation de Colombo [COL 11]

### 3.2.2 Les méthodes d'actualisation des level-sets par résolution d'équations aux dérivées partielles

#### 3.2.2.1 Définition des équations à résoudre

Les étapes pour faire avancer les level-sets sont données dans l'algorithme 6 et la figure 3.5.

---

**Algorithme 6:** Algorithme d'avancée du front de fissure

---

**Data :** Au départ, on considère les level-sets orthogonales et réinitialisées.

1. Calcul des vitesses  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_t}$  des noeuds autour du front (cf. figure 3.5(d)),

$$\begin{aligned} V_{\phi_t}^* &= \dot{a} \sin(\theta), \\ V_{\phi_n} &= \dot{a} \cos(\theta). \end{aligned}$$

2. Extension des vitesses  $1D \rightarrow 2D$  (en 3 dimensions) ou  $0D \rightarrow 1D$  (en 2 dimensions) (cf. figure 3.5(b)),

$$\frac{\partial V_{\phi_t}^*}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_t) \underline{n}_{\phi_t} \cdot \nabla V_{\phi_t}^* = 0 \quad \frac{\partial V_{\phi_n}}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_n) \underline{n}_{\phi_n} \cdot \nabla V_{\phi_n} = 0.$$

3. Extension des vitesses  $2D \rightarrow 3D$  (en 3 dimensions) ou  $1D \rightarrow 2D$  (en 2 dimensions) (cf. figure 3.5(c)),

$$\frac{\partial V_{\phi_t}^*}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_n) \underline{n}_{\phi_n} \cdot \nabla V_{\phi_t}^* = 0 \quad \frac{\partial V_{\phi_n}}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_t) \underline{n}_{\phi_t} \cdot \nabla V_{\phi_n} = 0.$$

4. Modification de la vitesse du plan de fissure,

$$\underline{V}_{\phi_t} = \frac{\phi_n H(\phi_n)}{\Delta t} \frac{V_{\phi_t}^*}{V_{\phi_n}} \nabla \phi_t.$$

5. Actualisation du plan (suivant Dufloy [DUF 06]) (cf. figure 3.5(e)) et du front de fissure (suivant Gravouil [GRA 02] et Peng [PEN 99]) (cf. figure 3.5(f)) pendant  $\Delta t$ ,

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} + \underline{V}_{\phi_t} \cdot \nabla \phi_t = 0 \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \|\nabla \phi_n\| V_{\phi_n} = 0.$$

6. Ré-initialisation du plan de fissure (cf. figure 3.5(g)),

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_t) (\|\nabla \phi_t\| - 1) = 0.$$

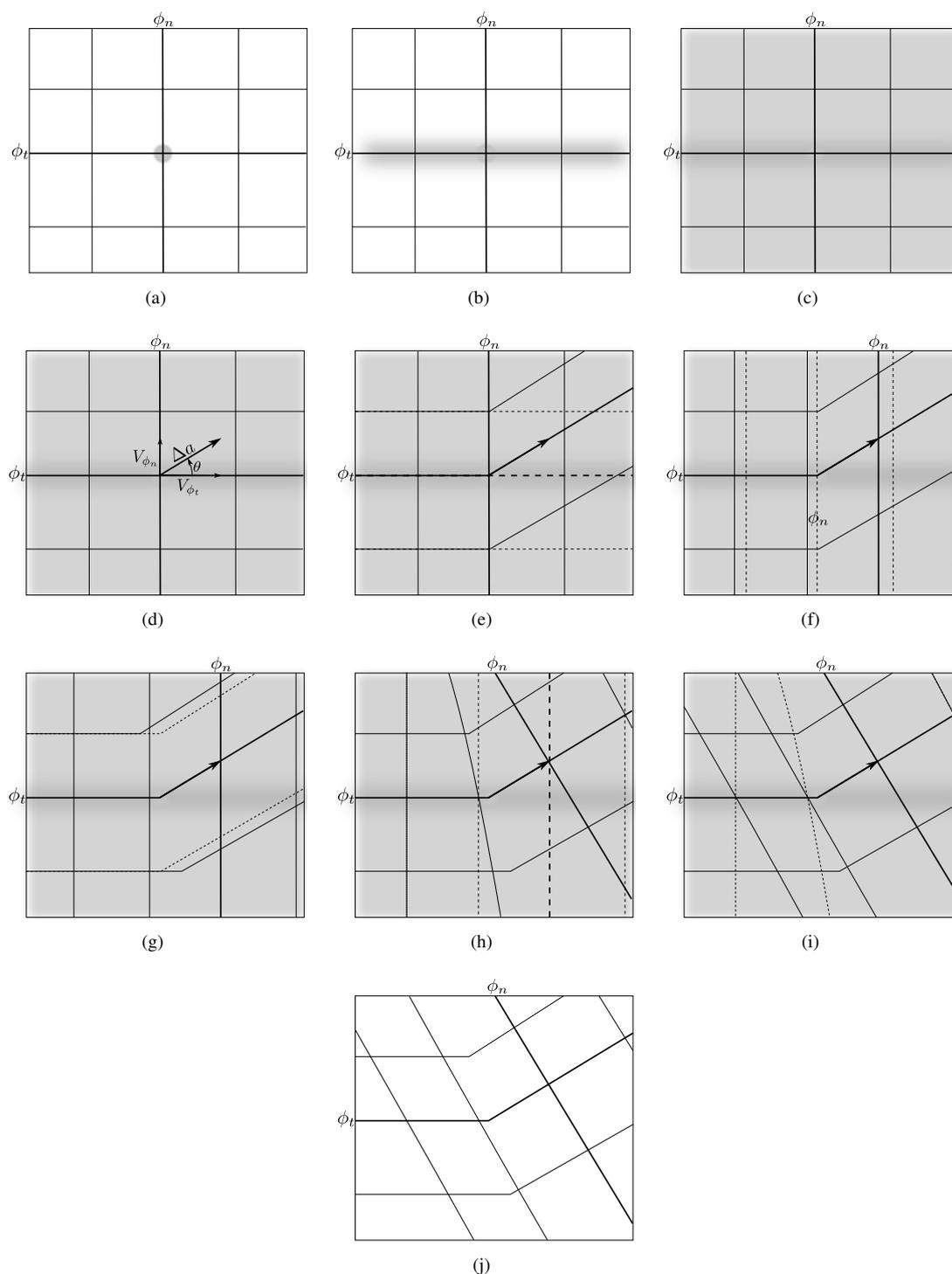
7. Orthogonalisation du front de fissure (cf. figure 3.5(h)),

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_t) \underline{n}_{\phi_t} \cdot \nabla \phi_n = 0.$$

8. Ré-initialisation du front de fissure (cf. figure 3.5(i)),

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi_n) (\|\nabla \phi_n\| - 1) = 0.$$


---



**FIGURE 3.5:** Différentes étapes de propagation des vitesses du front 3.5(a), suivant la normale à la level-set tangente 3.5(b) et enfin suivant la normale à la level-set normale 3.5(c), pour obtenir le champs de vitesse dans tout le domaine level-set. Les étapes de mise à jour des level-sets jusqu'au résultat final 3.5(j) .

La première méthode utilisée pour étendre la fissure est la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi par différences finies, présentée par Osher et Sethian [SET 96].

Une équation de type Hamilton–Jacobi car s'écrit sous la forme donnée par l'équation 3.9.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -H(\underline{X}, q, \nabla q, \nabla \phi \dots). \quad (3.9)$$

Le lien entre la propagation de la fissure et la mécanique de la rupture est fait par le choix des paramètres d'entrée du modèle :

- la vitesse de propagation de la fissure  $V$ ,
- l'angle de propagation de la fissure  $\theta$ .

La vitesse de propagation  $V$  est supposée connue sur le front de fissure : une première étape consiste donc à étendre le champ de vitesse suivant le front tout d'abord suivant la normale à ce front, puis sur tout le maillage. L'équation d'extension du champ de vitesse est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi) \underline{n}_\phi \cdot \nabla V = 0. \quad (3.10)$$

Pour avoir un nombre fini de valeur à calculer, on utilise un front discrétisé. Afin d'éviter les imprécisions sur les extensions des vitesses, c'est le maillage level-sets qui donnera la position des points de discrétisation. La figure 3.3 illustre la méthode de discrétisation du front. On peut ensuite donner à chaque noeud autour du front sa vitesse calculée sur le noeud projeté sur le front de fissure.

La résolution des équations est faite sur un maillage régulier et structuré, indépendant de celui de la structure. Le champ level-set est projeté sur le maillage de la structure. La dérivée spatiale est obtenue en utilisant un schéma en espace de type "upwind" décrit dans l'équation 3.11.

$$\phi_{,x} \simeq \{D_i^{+x}\}^- + \{D_i^{-x}\}^+, \quad (3.11)$$

avec  $D_i^{+x}(\phi) = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$ ,  $D_i^{-x}(\phi) = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}$ ,  $\{.\}^- = \min(., 0)$  et  $\{.\}^+ = \max(., 0)$ .

L'intégration temporelle peut être résolue en utilisant deux schémas différents suivant la précision voulue :

- Le schéma d'Euler explicite,
- Le schéma de Runge–Kutta d'ordre 2.

Le schéma d'Euler explicite est décrit par l'équation 3.12.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}. \quad (3.12)$$

Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 est décrit par l'équation 3.13.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{n+1} &= \phi^n - \Delta t \cdot H(\phi^n), \\ \phi^{n+1} &= \frac{\phi^n + \tilde{\phi}^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2} H(\tilde{\phi}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le schéma de Runge-Kutta [KUT 01] d'ordre 2 a été implémenté pour résoudre ces équations. Cette approche avait déjà été suivie dans les travaux de Prabel [PRA 07], Menouillard [MEN 07], Gravouil [GRA 02], Duflo [DUF 06] et de Peng [PEN 99].

#### 3.2.2.2 Extension d'un champ suivant une interface

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme d'un produit scalaire d'une normale à une interface et du gradient d'un champ comme dans l'équation 3.14.

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi) \underline{n}_\phi \cdot \nabla q = 0. \quad (3.14)$$

On remarque dans l'équation 3.14 l'apparition d'un temps fictif  $\tau$ . Ce temps doit satisfaire la condition de stabilité CFL pour un schéma explicite  $\Delta\tau < \frac{V_{max}}{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}$ . Dans notre cas, la valeur de  $\Delta\tau$  choisie sera  $\Delta\tau = \frac{1}{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}$ .

La fonction signe utilisée est donnée dans l'équation 3.15.

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0, \\ 0 & \text{si } \phi = 0, \\ -1 & \text{si } \phi < 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

On définit la normale à la level-set  $n_\phi$  par l'équation 3.16. On évaluera les gradients par la méthode des différences centrées de l'équation 3.17.

$$n_\phi = \begin{pmatrix} n_\phi^x \\ n_\phi^y \\ n_\phi^z \end{pmatrix} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}, \quad (3.16)$$

$$\text{avec } \nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi(i+1,j,k) - \phi(i-1,j,k)}{2\Delta x} \\ \frac{\phi(i,j+1,k) - \phi(i,j-1,k)}{2\Delta y} \\ \frac{\phi(i,j,k+1) - \phi(i,j,k-1)}{2\Delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D^{+x} + D^{-x}}{2} \\ \frac{D^{+y} + D^{-y}}{2} \\ \frac{D^{+z} + D^{-z}}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

La résolution de l'équation 3.14 par un schéma de Runge Kutta d'ordre 2 donne :

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{n+1} = & q^n - \Delta\tau \left( \{\text{sign}(q^n).n_\phi^x\}^+ D^{-x}(q^n) + \{\text{sign}(q^n).n_\phi^x\}^- D^{+x}(q^n) + \right. \\ & \left. \{\text{sign}(q^n).n_\phi^y\}^+ D^{-y}(q^n) + \{\text{sign}(q^n).n_\phi^y\}^- D^{+y}(q^n) + \right. \\ & \left. \{\text{sign}(q^n).n_\phi^z\}^+ D^{-z}(q^n) + \{\text{sign}(q^n).n_\phi^z\}^- D^{+z}(q^n) \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} q^{n+1} = & \frac{q^n + \tilde{q}^{n+1}}{2} - \Delta\tau \left( \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^x\}^+ D^{-x}(\tilde{q}^{n+1}) + \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^x\}^- D^{+x}(\tilde{q}^{n+1}) + \right. \\ & \left. \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^y\}^+ D^{-y}(\tilde{q}^{n+1}) + \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^y\}^- D^{+y}(\tilde{q}^{n+1}) + \right. \\ & \left. \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^z\}^+ D^{-z}(\tilde{q}^{n+1}) + \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1}).n_\phi^z\}^- D^{+z}(\tilde{q}^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les termes  $D^{-x}(q^n)$ ,  $D^{+x}(q^n)$ ,  $D^{-y}(q^n)$ ,  $D^{+y}(q^n)$ ,  $D^{-z}(q^n)$  et  $D^{+z}(q^n)$  et les notations  $\{\}^+$  et  $\{\}^-$  sont explicités pour l'équation 3.11.

### 3.2.2.3 Actualisation de Duflot [DUF 06]

À l'origine Gravouil [GRA 02] utilise une valeur scalaire du champ de vitesse pour actualiser ses level-sets. Duflot [DUF 06] a proposé une expression différente de l'actualisation de la level-set normale qui est mieux adaptée dans le cas des grands angles de propagation de fissure. Ces équations s'écrivent sous la forme des vitesses  $\underline{V}$  et du gradient du champ  $q$  (équation 3.20).

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla q \underline{V} = 0. \quad (3.20)$$

$\underline{V}$  est calculé à partir de la grandeur scalaire  $V_{\phi_t}^*$  :

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} V_x^n \\ V_y^n \\ V_z^n \end{pmatrix} = \frac{\phi_n H(\phi_n)}{\Delta t} \frac{V_{\phi_t}^*}{V_{\phi_n}} \nabla\phi_t. \quad (3.21)$$

Le pas de temps  $\Delta t$  est choisi le même que le pas de temps XFEM. La résolution de l'équation 3.20 par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 donne :

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{n+1} = & q^n - \Delta\tau (\{V_x\}^+ D^{-x}(q^n) + \{V_x\}^- D^{+x}(q^n) + \\ & \{V_y\}^+ D^{-y}(q^n) + \{V_y\}^- D^{+y}(q^n) + \\ & \{V_z\}^+ D^{-z}(q^n) + \{V_z\}^- D^{+z}(q^n)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} q^{n+1} = & \frac{\tilde{q}^{n+1} + q^n}{2} - \Delta\tau (\{V_x\}^+ D^{-x}(\tilde{q}^{n+1}) + \{V_x\}^- D^{+x}(\tilde{q}^{n+1}) + \\ & \{V_y\}^+ D^{-y}(\tilde{q}^{n+1}) + \{V_y\}^- D^{+y}(\tilde{q}^{n+1}) + \\ & \{V_z\}^+ D^{-z}(\tilde{q}^{n+1}) + \{V_z\}^- D^{+z}(\tilde{q}^{n+1})). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les termes  $D^{-x}(q^n)$ ,  $D^{+x}(q^n)$ ,  $D^{-y}(q^n)$ ,  $D^{+y}(q^n)$ ,  $D^{-z}(q^n)$  et  $D^{+z}(q^n)$  et les notations  $\{\cdot\}^+$  et  $\{\cdot\}^-$  sont explicités pour l'équation 3.11.

### 3.2.2.4 Actualisation d'un champ par la méthode de Gravouil [GRA 02] et Peng [PEN 99]

Ces équations s'écrivent sous la forme du produit d'un champ de vitesse  $\underline{V}$  et de la norme du gradient d'un champ  $q$ , comme dans l'équation 3.24.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + V \|\nabla q\| = 0. \quad (3.24)$$

La résolution de cette équation en suivant un schéma de Runge Kutta d'ordre 2 donne :

$$\tilde{q}^{n+1} = q^n - \Delta t \left( \{V\}^+ \sqrt{\kappa^+} + \{V\}^- \sqrt{\kappa^-} \right), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \kappa^+ = & (\{D^{-x}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+x}(q^n)\}^-)^2 + \\ & (\{D^{-y}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+y}(q^n)\}^-)^2 + \\ & (\{D^{-z}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+z}(q^n)\}^-)^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \kappa^- = & (\{D^{+x}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{-x}(q^n)\}^-)^2 + \\ & (\{D^{+y}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{-y}(q^n)\}^-)^2 + \\ & (\{D^{+z}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{-z}(q^n)\}^-)^2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$q^{n+1} = \frac{\tilde{q}^{n+1} + q^n}{2} - \Delta t \left( \{V\}^+ \sqrt{\kappa^+} + \{V\}^- \sqrt{\kappa^-} \right), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \kappa^+ = & (\{D^{-x}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+x}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \\ & (\{D^{-y}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+y}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \\ & (\{D^{-z}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+z}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \kappa^- = & (\{D_{(i,j,k)}^{+x}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{-x}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \\ & (\{D^{+y}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{-y}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \\ & (\{D^{+z}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{-z}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.2.2.5 Ré-initialisation de la distance signée des level-sets

Ces équations s'écrivent sous la forme présentée en équation 3.31.

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \text{sign}(q_0) \cdot (\|\nabla q\| - 1) = 0, \\ q(x, 0) = q_0(x) = \phi(x, t). \end{cases} \quad (3.31)$$

Du fait de l'utilisation de la fonction signe, l'isozéro de la level-set peut bouger et ne plus décrire l'emplacement exacte de la fissure. Pour cette raison, Prabel [PRA 07] utilise une fonction signe approximée

par l'équation 3.32. Cette fonction fait intervenir un paramètre  $\alpha$  supplémentaire, dans nos calculs, on utilisera une valeur de  $\alpha$  correspondant au maximum du nombre de maille suivant une direction du maillage différences finies.  $\alpha = \max(n_x, n_y, n_z)$

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > \alpha\Delta x, \\ \frac{\phi}{\alpha\Delta x} & \text{si } \alpha\Delta x > \phi > -\alpha\Delta x, \\ -1 & \text{si } \phi < -\alpha\Delta x. \end{cases} \quad (3.32)$$

La résolution de cette équation en suivant un schéma de Runge Kutta d'ordre 2 donne :

$$\tilde{q}^{n+1} = q^n - \Delta\tau \left[ \{\text{sign}(q^n)\}^+ (\sqrt{\kappa^+} - 1) + \{\text{sign}(q^n)\}^- (\sqrt{\kappa^-} - 1) \right], \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \kappa^+ &= \left( (\{D^{-x}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+x}(q^n)\}^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-y}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+y}(q^n)\}^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-z}(q^n)\}^+)^2 + (\{D^{+z}(q^n)\}^-)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \kappa^- &= \left( (\{D^{-x}(q^n)\}^-)^2 + (\{D^{+x}(q^n)\}^+)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-y}(q^n)\}^-)^2 + (\{D^{+y}(q^n)\}^+)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-z}(q^n)\}^-)^2 + (\{D^{+z}(q^n)\}^+)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$q^{n+1} = \frac{\tilde{q}^{n+1} + q^n}{2} - \Delta\tau \left[ \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1})\}^+ (\sqrt{\kappa^+} - 1) + \{\text{sign}(\tilde{q}^{n+1})\}^- (\sqrt{\kappa^-} - 1) \right], \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \kappa^+ &= \left( (\{D^{-x}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+x}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-y}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+y}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-z}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + (\{D^{+z}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \kappa^- &= \left( (\{D^{-x}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + (\{D^{+x}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-y}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + (\{D^{+y}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\{D^{-z}(\tilde{q}^{n+1})\}^-)^2 + (\{D^{+z}(\tilde{q}^{n+1})\}^+)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.2.2.6 Orthogonalisation des level-sets

Une fois la level-set actualisée, celle-ci n'est plus à la distance signée de l'interface et les deux level-sets ne sont plus orthogonales entre elles. Pour cette raison, une étape d'orthogonalisation est indispensable. La level-set tangente est prise comme référence, et on orthogonalise alors la level-set normale à la fissure. L'équation d'orthogonalisation est :

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \text{sign}(q)(\nabla q \cdot \underline{n}) = 0. \quad (3.39)$$

Cette équation est similaire à l'équation d'extension d'un champ suivant une interface. On utilisera donc la même solution que dans le paragraphe 3.2.2.2

Toutes ces étapes sont coûteuses en temps de calcul même si elles sont facilement parallélisables. De plus, les deux level-sets ne peuvent être à la fois des distances signées et orthogonales entre elles dès que la fissure « tourne » ou n'est plus une forme géométrique simple (cercle, carré). Les schémas de discrétisation décrit ci-dessus convergent donc vers un compromis local.

La résolution de cette équation en suivant un schéma de Runge Kutta d'ordre 2 donne :

**Remarque 11** Peng [PEN 99] et Osher [OSH 00] préconisent d'utiliser une autre méthode pour résoudre ces équations, la Fast Marching Method. Cette méthode est cependant très coûteuse en temps de calcul. De plus elle ne résout pas le problème des deux équations non compatibles de la ré-initialisation et d'orthogonalisation. C'est pourquoi nous n'avons pas essayé cette méthode.

### 3.2.3 Les méthodes dites géométriques et mixtes

Les équations et graphiques traités dans ce paragraphe sont tirés de la publication de Duflot [DUF 06]. Il a proposé plusieurs méthodes de propagation des level-sets en 2 dimensions. Il utilise une approche géométrique en découpant le domaine complet à actualiser en plusieurs sous-domaines puis en définissant une équation d'actualisation pour chaque sous-domaine. Il a comparé les résultats de ces méthodes en calculant les valeurs des FIC issus de ces méthodes d'actualisation des level-sets. Dans EUROPLEXUS, on ne calcule pas les FIC car on utilise un critère local en pointe de fissure (cf. chapitre 1.1.7). Néanmoins la facilité de mise en oeuvre de ces méthodes et la robustesse de celles-ci sont très intéressantes.

#### 3.2.3.1 La méthode $\phi\psi r\theta$

Une des méthodes d'actualisation donnée par Duflot est appelée  $\phi\psi r\theta$  (pour reprendre la notation utilisée jusqu'ici,  $\phi = \phi_t$  et  $\psi = \phi_n$ ). Il divise alors le domaine à mettre à jour en 5 zones définies dans le tableau 3.1 et illustrées figure 3.6.

Zones	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5
Définitions	$m\phi_t^0 > 0$ $\phi_n^0 < \frac{\phi_t^0}{m_b}$	$m\phi_t^0 < 0$ $\phi_n^0 < 0$	$m\phi_t^0 < 0$ $-m\phi_t^0 > \phi_n^0 > 0$	$m\phi_t^0 < 0$ $\phi_n^0 > -m\phi_n^0$	$m\phi_t^0 > 0$ $\phi_n^0 > \frac{\phi_t^0}{m_b}$
$\phi_t$	$\phi_t^0$		Equation 3.43	Equation 3.44	
$\phi_n$	Equation 3.45		Equation 3.46	Equation 3.47	

**TABLE 3.1:** Actualisation par la méthode  $\phi\psi r\theta$ , équations de définition des domaines et d'actualisation

$$m = \frac{V_{\phi_t}}{V_{\phi_n}}, \quad (3.40)$$

$$\|\underline{V}\| = \sqrt{(V_{\phi_t})^2 + (V_{\phi_n})^2}, \quad (3.41)$$

$$m_b = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\arctan(m)}{2}\right)}, \quad (3.42)$$

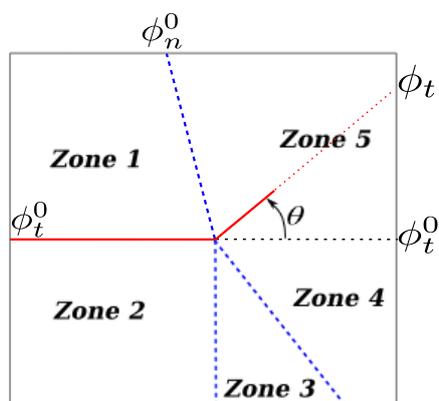
$$\phi_t = \text{sign}(\phi_t^0) \sqrt{(\phi_t^0)^2 + (\phi_n^0)^2}, \quad (3.43)$$

$$\phi_t = \frac{\phi_t^0 - m\phi_n^0}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad (3.44)$$

$$\phi_n = \phi_n^0 - \|\underline{V}\|, \quad (3.45)$$

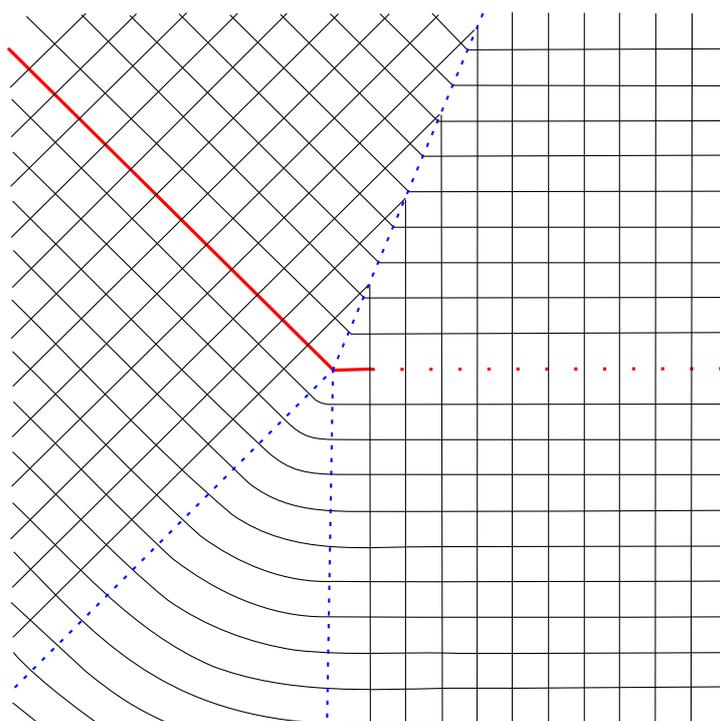
$$\phi_n = -\|\underline{V}\|, \quad (3.46)$$

$$\phi_n = \frac{m\phi_t^0 + \phi_n^0}{\sqrt{1 + m^2}} - \|\underline{V}\|. \quad (3.47)$$



**FIGURE 3.6:** Localisation des différentes zones de la méthode  $\phi\psi r\theta$ .

Un exemple est donné en 2D pour une fissure qui a tourné d'un angle  $\theta = 45^\circ$  dans la figure 3.7



**FIGURE 3.7:** Exemple d'actualisation des level-sets pour la méthode  $\phi\psi r\theta$ .

Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre. Cependant elle a l'inconvénient d'obtenir des level-sets dont le gradient est discontinu notamment à l'interface entre la zone 1 et la zone 5. Dans notre cas, cette discontinuité du gradient n'est pas problématique car le critère de rupture utilisé ne fait pas intervenir l'angle  $\theta$  et  $r$ . La distance au front peut être obtenue directement en prenant la distance entre le point de Gauss et le point de discrétisation du front de fissure.

### 3.2.3.2 La méthode mixte

Une autre approche proposée par Duflot a également un intérêt pour nos cas de propagation, il s'agit de la méthode appelée « Smooth level set method ». Elle utilise la méthode géométrique afin d'actualiser les level-sets, puis les étapes d'orthogonalisation et de ré-initialisation sont réalisées par la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi. Cette méthode découpe le domaine initial en 6 zones différentes pour mettre à jour  $\phi_t$ . Les équations de définition des zones et d'actualisation sont données dans le tableau 3.2. Les 6 zones sont illustrées dans la figure 3.8. Puis  $\phi_n$  est tournée et translatée avec l'équation 3.53 pour enfin être ré-orthogonalisée et ré-initialisée par les équations 3.31 et 3.39.

Zones	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6
Définitions	$m\phi_t^0 > 0$ $\phi_n^0 < -m\phi_t^0$	$m\phi_t^0 < 0$ $\phi_n^0 < 0$	$m\phi_t^0 < 0$ $-m\phi_t^0 > \phi_n^0 > 0$	$m\phi_t^0 < 0$ $\phi_n^0 > -m\phi_n^0$	$m\phi_t^0 > 0$ $\phi_n^0 > 0$	$m\phi_t^0 > 0$ $-m\phi_t^0 < \phi_n^0 < 0$
$\phi_t$	$\phi_t^0$		Equation 3.50	Equation 3.51		Equation 3.52
$\phi_n$	Equation 3.53					

**TABLE 3.2:** Actualisation par la méthode mixte, équations de définition des domaines et d'actualisation de la level-set  $\phi_t$

$$m = \frac{V_{\phi_t}}{V_{\phi_n}}, \quad (3.48)$$

$$\|V\| = \sqrt{(V_{\phi_t})^2 + (V_{\phi_n})^2}, \quad (3.49)$$

$$\phi_t = \text{sign}(\phi_t^0) \sqrt{(\phi_t^0)^2 + (\phi_n^0)^2}, \quad (3.50)$$

$$\phi_t = \frac{\phi_t^0 - m\phi_n^0}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad (3.51)$$

$$\phi_t = (2\cos^2(\alpha) - 1) \frac{-b + \text{sign}(\alpha)\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (3.52)$$

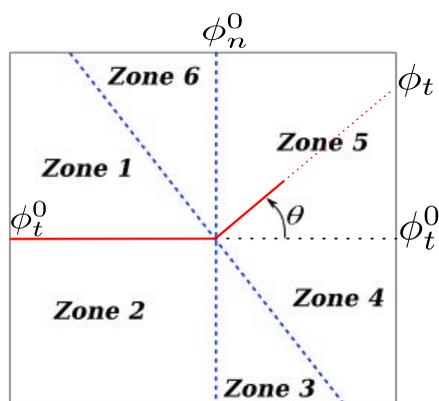
$$\phi_n = \phi_t^0 V_{\phi_t} + \phi_n^0 V_{\phi_n} - \|V\|, \quad (3.53)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\arctan(m)}{2}, \quad (3.54)$$

$$a = 4\cos^2(\alpha) - 1, \quad (3.55)$$

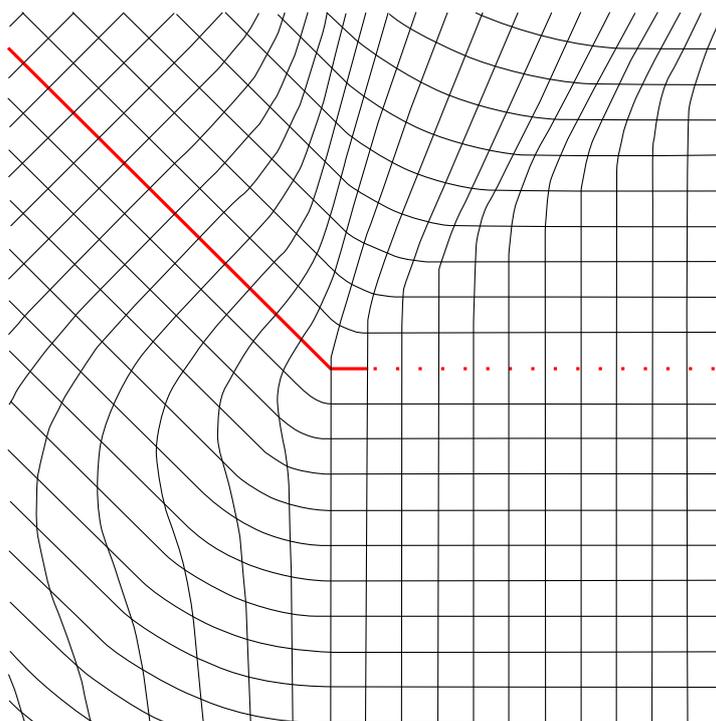
$$b = 2\cos(\alpha)(\sin(\alpha)\phi_n^0 - \cos(\alpha)\phi_t^0), \quad (3.56)$$

$$c = (\phi_n^0)^2 + (\phi_t^0)^2. \quad (3.57)$$



**FIGURE 3.8:** Localisation des différentes zones de la méthode mixte pour l'actualisation de  $\phi_t$

Un exemple est donné en 2D pour une fissure qui a tournée d'un angle  $\theta = 45^\circ$  dans la figure 3.9



**FIGURE 3.9:** Exemple d'actualisation des level-sets pour la méthode mixte.

Cette méthode a un intérêt car elle permet d'avoir des gradients continus sur le domaine. L'étape d'actualisation n'est plus itérative. Elle conserve néanmoins les désavantages de la méthode par résolution des équations d'Hamilton Jacobi. Les équations de ré-initialisation et d'orthogonalisation ne peuvent être respectées en même temps.

### 3.2.4 Conclusion

Dans un premier temps, nous utiliserons la méthode d'actualisation des level-sets par résolution des équations d'Hamilton-Jacobi décrites dans la paragraphe 3.2.2. Si cette méthode n'est pas concluante, on se penchera alors à trouver une méthode géométrique qui convienne à nos contraintes.

## **Deuxième partie**

# **Extension de l'approche XFEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure**



## Chapitre 4

# Adaptation du critère de rupture à la propagation de fissure en 3D

*Le critère de rupture décrit dans la section 1.2 a été utilisé uniquement en 2D. Ce chapitre vise à l'adapter et à vérifier sa pertinence pour son utilisation en 3D avec nos enrichissements.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Mise en oeuvre du critère de fissuration en 3D</b>	<b>62</b>
4.1.1	Description des paramètres tridimensionnels du critère de rupture	62
4.1.2	Domaine $\Omega$ en 3D	62
4.1.3	Moyennes « temporelles » sur les avancées du front de fissure	65
4.1.4	Moyennes « spatiales » sur les points du front de fissure	66
4.1.5	Prise en compte de la plasticité	67
<b>4.2</b>	<b>Choix des paramètres du critère en 3D</b>	<b>68</b>
4.2.1	Description de Brogberg [BRO 60]	68
4.2.2	Les grandeurs analytiques observées	69
4.2.3	Choix du domaine de calcul des contraintes en 3D	71
4.2.4	Influence de la taille du domaine d'intégration en 3D	76
4.2.5	« Moyenne en temps » de l'avancée de fissure	76
4.2.6	Conclusion	79

---

## 4.1 Mise en oeuvre du critère de fissuration en 3D

### 4.1.1 Description des paramètres tridimensionnels du critère de rupture

L'approche locale en pointe de fissure a été présentée dans la section 1.2 de ce mémoire. On rappelle ici le concept qui consiste à moyenner les grandeurs qui pilotent la rupture en pointe de fissure en les pondérant par une fonction poids  $w$ . Par exemple pour calculer les contraintes moyennées  $\underline{\tilde{\sigma}}$  en pointe de fissure, on utilise l'équation 4.1. La fonction poids utilisée est une fonction exponentielle décroissante qui est bornée à partir d'une valeur minimale. Elle est représentée en figure 1.9.

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\int_{\Omega} \underline{\sigma} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } w(r) = e^{-\left(\frac{r}{k}\right)^2}. \quad (4.1)$$

Ce critère a été mis en oeuvre uniquement en 2D. Son adaptation à la 3D nécessite de faire certains choix qui ne sont pas forcément triviaux. Le premier choix à faire concerne la forme du domaine  $\Omega$  afin de calculer le tenseur des contraintes moyennées en pointe de fissure.

### 4.1.2 Domaine $\Omega$ en 3D

En 2D, le domaine  $\Omega$  est représenté par un demi disque, en 3D, les formes simples à mettre en oeuvre (une demi-sphère, un demi-cylindre ou un demi-cube...) sont à privilégier. La figure 4.1 illustre les différentes formes pouvant être utilisées en 3D pour le domaine  $\Omega$ .

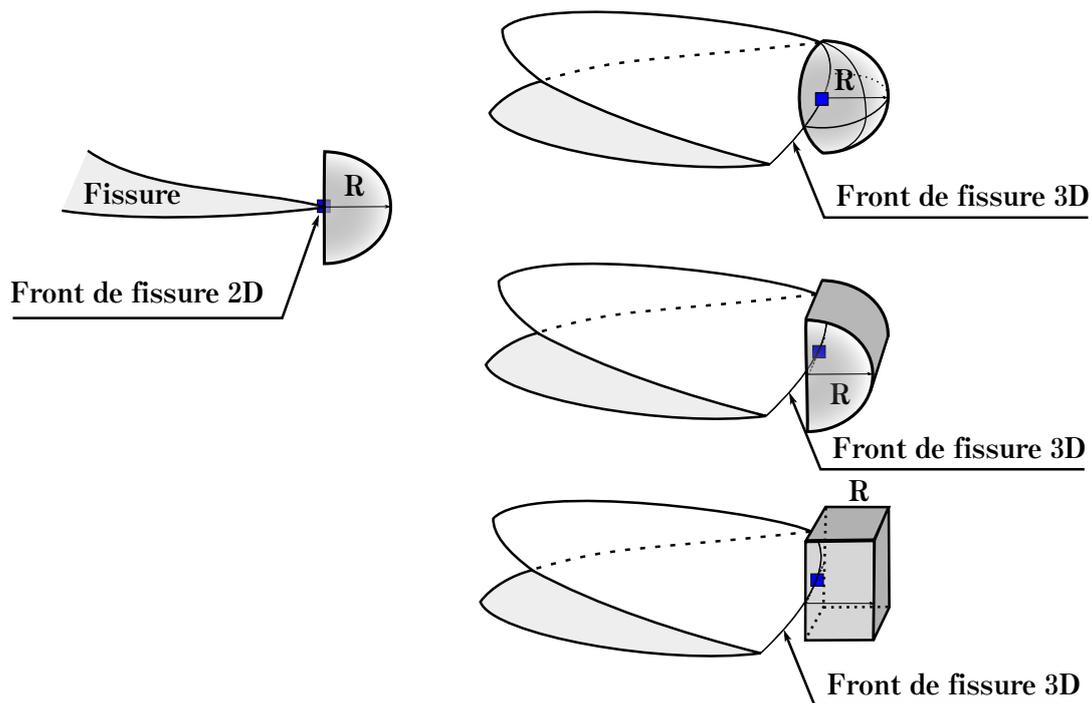
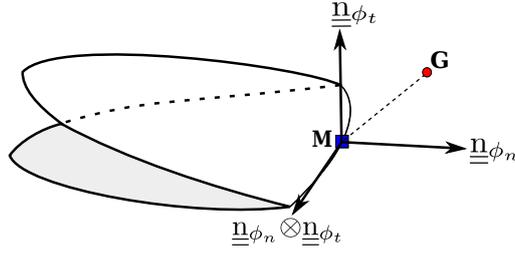


FIGURE 4.1: Les différentes formes du domaine  $\Omega$  en 2D et en 3D.

Le demi-cube est plus complexe à mettre en oeuvre car il faut projeter le vecteur entre le point M du front et le point de Gauss G sur les vecteurs formés par la base en pointe de fissure. La figure 4.2 montre le calcul de la base locale en pointe de fissure.



**FIGURE 4.2:** Calcul de la base locale en pointe de fissure au point M en 3D.

Le point G est localisé dans le cube centré au point M s'il respecte l'équation 4.2,  $R$  étant la demi-longueur du côté du cube.

$$\max(\|GM \cdot n_{\phi_n}\|, \|GM \cdot n_{\phi_t}\|, \|GM \cdot (n_{\phi_n} \otimes n_{\phi_t})\|) \leq R \quad (4.2)$$

Le point G est localisé dans le cylindre centré au point M s'il respecte l'équation 4.3,  $R$  étant le rayon et la demi-hauteur du cylindre.

$$\max(\sqrt{(GM \cdot n_{\phi_n})^2 + (GM \cdot n_{\phi_t})^2}, \|GM \cdot (n_{\phi_n} \otimes n_{\phi_t})\|) \leq R \quad (4.3)$$

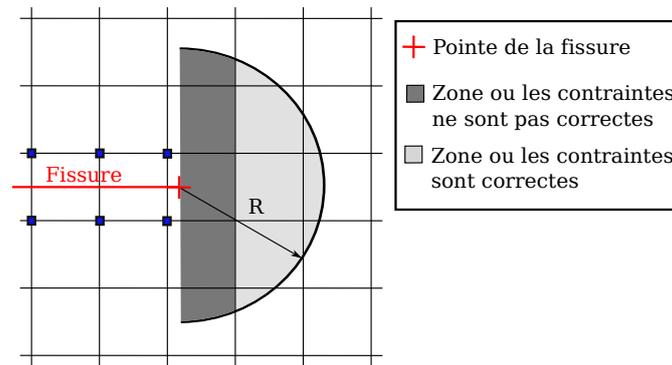
Le point G est localisé dans la sphère centrée au point M s'il respecte l'équation 4.4,  $R$  étant le rayon de la sphère.

$$\|GM\| \leq R \quad (4.4)$$

Les points en avant du front de fissure ont en plus la level-set  $\phi_n$  négative.

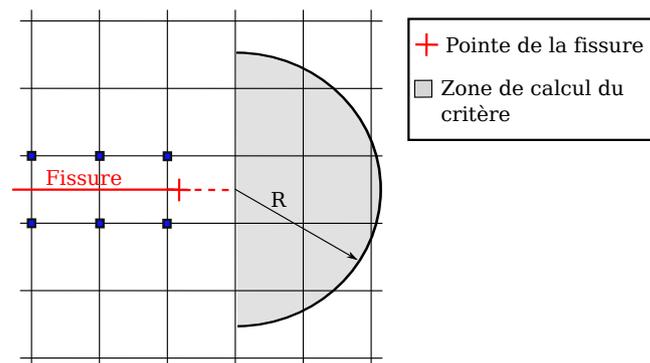
L'utilisation d'un demi-cube en pointe de fissure ne semble pas optimal car cette forme utilise des contraintes plus éloignées du front de fissure, situées dans les coins du cube. Le demi-cylindre peut permettre de garder une correspondance avec le critère 2D, dans le cas de front droit. Si le front de fissure se courbe, le demi-cylindre doit alors être calculé en suivant l'abscisse curviligne donnée par le front de fissure. L'équation de la demi-sphère est la plus simple à mettre en oeuvre. Une fois la forme choisie, la taille du domaine  $\Omega$  doit également être fixée en amont du calcul, par le paramètre  $R$ .

Le critère de rupture est basé sur une moyenne des contraintes placées dans le domaine  $\Omega$  en pointe de fissure. Plus les contraintes sont proches de la pointe de fissure, plus le poids  $w(r)$  de ces contraintes est important. Si la pointe de fissure est loin de la face opposée de l'élément, toutes les contraintes placées entre cette face et le plan orthogonal à la fissure sont prises en compte dans le critère alors qu'elles ne sont pas correctes puisque l'enrichissement fait que l'élément est totalement coupé. La figure 4.3 montre les zones où les contraintes sont prises en compte pour calculer le critère de rupture.



**FIGURE 4.3:** Illustration des zones prise en compte dans le critère de propagation.

Si l'on souhaite être parfaitement cohérent avec la discrétisation élément-finis et le choix de l'enrichissement réalisé, le critère de rupture devrait être calculé seulement à partir du bord opposé à la fissure dans l'élément qui contient le front de fissure. La figure 4.4 montre le lieu de calcul du critère de rupture pour être plus cohérent avec l'enrichissement saut.



**FIGURE 4.4:** Zone de calcul du critère de rupture pour se conformer à l'enrichissement.

En 2D cette méthode peut facilement être mis en place, en 3D, le cas des fronts courbes n'est pas encore résolu, comme dans la figure 4.5.

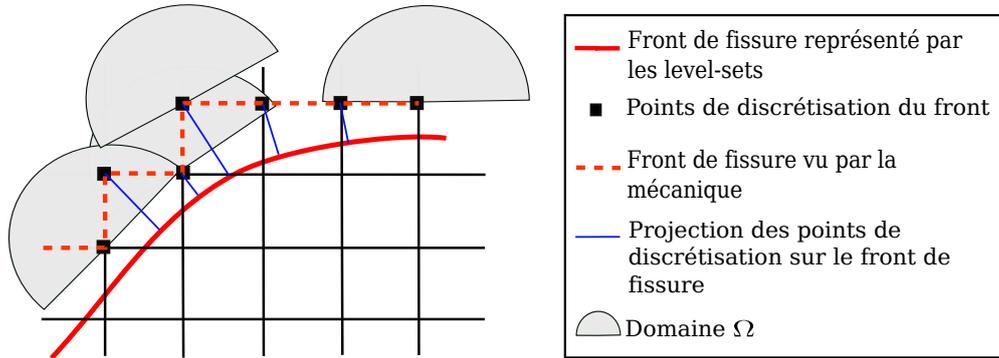


FIGURE 4.5: Problème en 3D pour calculer le critère de rupture conformément à l'enrichissement.

Pour cette raison, nous n'avons pas choisi ce mode de discrétisation de la fissure.

L'utilisation des enrichissements saut entraîne également des oscillations lors de la propagation de la fissure. À chaque fois qu'un élément est coupé, le passage d'un noeud non enrichi à enrichi propage une onde dans la structure. Pour cette raison, des moyennes « temporelles » sur les avancées du front de fissure ont été introduites.

#### 4.1.3 Moyennes « temporelles » sur les avancées du front de fissure

Le maillage XFEM représente un filtre en espace, le schéma temporel de Newmark impose une discrétisation temporelle dépendante du maillage XFEM. Les longueurs des avancées de la fissure ne sont pas compatibles avec la discrétisation spatiale du maillage. L'ordre de grandeur de l'avancée de la fissure dans l'élément en pointe est de l'ordre du  $10^e$  de la taille de l'élément. Le pas de temps ne pouvant être augmenté, il faut donc attendre que la longueur d'avancée du front soit de l'ordre de grandeur de la taille du maillage (0.2 à 1 taille d'élément). Même avec l'utilisation des fonctions d'enrichissement en pointe, Il faudrait « accumuler » de l'ordre de 10 enrichissements pointes dans l'élément, ce qui est difficilement réalisable d'un point de vu numérique.

Des moyennes « temporelles » sont donc réalisées sur les avancées des fissures, comme illustré dans la figure 4.6. Le rôle de ces moyennes est double :

- mettre en conformité les avancées de fissure avec la discrétisation spatiale,
- atténuer les ondes artificielles due à l'enrichissement sur le critère de rupture.

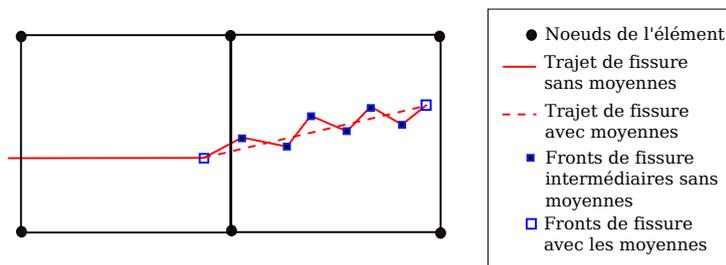


FIGURE 4.6: Influence des moyennes temporelles sur le front de fissure.

Si on veut faire avancer le front à chaque pas de temps, la recherche d'un nouvel enrichissement devrait donc être privilégiée pour améliorer les XFEM en dynamique.

Les moyennes peuvent être réalisées sur plusieurs quantités et à différents moments en amont ou en aval du critère de rupture :

- sur les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\tilde{\sigma}}$  (moyenne avant le critère),
- sur les avancées de fissure  $\Delta a$  et les directions de propagation de la fissure  $\theta_c$  et  $\psi_c$  (moyenne sur le résultat du critère),
- sur les vitesses  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_t}$  du front de la fissure (après le critère de rupture).

Nous avons choisi de moyenner les vitesses  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_t}$  du front de la fissure pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre. L'algorithme 7 regroupe les étapes du calcul des moyennes temporelles sur le front de fissure. Un paramètre  $T_{moy}$  représentant la fraction entre la longueur minimale d'avancée de fissure et la taille d'élément en pointe pour que la fissure propage.

---

**Algorithme 7:** Algorithme des moyennes temporelles des avancées du front .

---

**Data :** Moyenne des vitesses  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_t}$  au point  $i$  du front de la fissure,  $h$  est la taille du plus petit élément en pointe et  $T_{moy}$  est la fraction rationnelle de la longueur minimale d'avancée de fissure par rapport à la taille d'élément pour que la fissure avance.

Initialisation,

$Av=0$ ,

Boucle sur tous les noeuds du front :

**for** ( $i = 1 : n_{front}$ ) **do**

Calcul des tenseurs moyens au point  $i$  du front :

$$\underline{\tilde{\sigma}}_i = \frac{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } w(r) = e^{-(\frac{r}{h})^2}, \quad (4.5)$$

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}_i = \frac{\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } w(r) = e^{-(\frac{r}{h})^2}. \quad (4.6)$$

Calcul du critère de rupture au point  $i$  avec  $\underline{\tilde{\sigma}}_i$  et  $\underline{\tilde{\varepsilon}}_i$  par l'algorithme 2, récupération de  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_t}$  au point  $i$ .

$\Delta a_i$  est la longueur d'avancée de la fissure au pas de temps au point  $i$ , calculé par

$$\Delta a_i = \sqrt{V_{\phi_n}^2 + V_{\phi_t}^2}.$$

Avancée Maximale du front,  $Av = \max(Av, \Delta a_i)$ .

Moyenne des vitesses :

$$V_{\phi_n} = V_{\phi_n} + \Delta a_i \cos(\theta_c) \sin(\psi_c), \quad (4.7)$$

$$V_{\phi_t} = V_{\phi_t} + \Delta a_i \sin(\theta_c). \quad (4.8)$$

**end**

**si** ( $Av \leq T_{moy}h$ ) **alors**

Pas de propagation de fissure.

**sinon**

La fissure propage avec les vitesses  $V_{\phi_t}$  et  $V_{\phi_n}$  du front.

Ré-initialisation des vitesses du front  $V_{\phi_t} = 0$  et  $V_{\phi_n} = 0$ .

Initialisation de l'avancée maximale du front  $Av = 0$ .

**fin**

---

#### 4.1.4 Moyennes « spatiales » sur les points du front de fissure

L'avancée de fissure obtenu en un point  $i$  ne peut être totalement indépendante de l'avancée des points voisins. Des moyennes sur les points du front sont réalisées afin d'avoir des avancées de fissure plus cohérentes entre elles. Pour un point  $i$  du front, on recherche les  $n_i$  points compris dans un rayon  $R_{moy}$  du point

*i*. Puis on moyenne les vitesses au point *i* par L'équation 4.9.

$$V_{\phi}^i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} V_{\phi}^k + V_{\phi}^i}{n_i + 1} \quad (4.9)$$

La figure 4.7 donne un exemple de moyenne des vitesses pour les points du front compris dans un rayon  $R_{moy}$ .

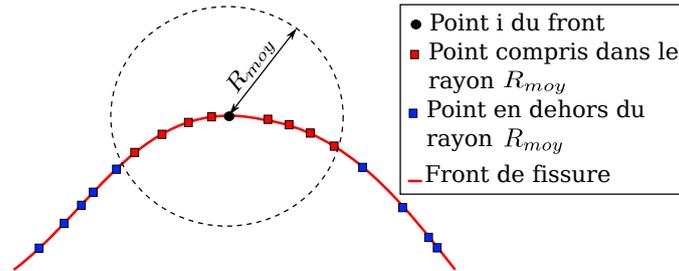


FIGURE 4.7: Moyenne spatiale le long du front de fissure.

#### 4.1.5 Prise en compte de la plasticité

Lorsque la fissure tranche un élément, le support d'intégration de l'élément change. Dans le cas de matériaux non linéaires, les variables sont dépendantes du temps et les projections de champs peuvent introduire des erreurs difficiles à maîtriser. Les concentrations de contraintes sont généralement localisées à la pointe de la fissure. C'est pourquoi une zone située dans un rayon  $R_{pla}$ , centrée sur la pointe de fissure est sur-intégrée de la même façon que les éléments tranchés, afin d'anticiper l'arrivée de la fissure. Cette méthode a été proposée par Elguedj [ELG 06] et Prabel [PRA 07] pour les matériaux non linéaires. Elle peut être considérée comme un raffinement local permettant de décrire plus précisément les champs en pointe de fissure, comme dans la figure 4.8.

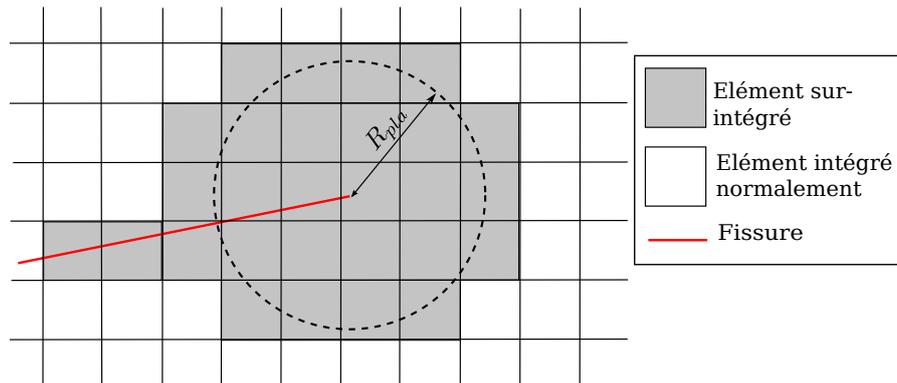


FIGURE 4.8: Prise en compte de la plasticité en pointe de fissure .

## 4.2 Choix des paramètres du critère en 3D

### 4.2.1 Description de Broberg [BRO 60]

Le cas de Broberg [BRO 60] a été simulé afin de comparer les grandeurs obtenues par le critère avec une solution analytique. Les FIC et les contraintes sont connus analytiquement en fonction de la vitesse des ondes dans le matériau. Une plaque fendue en son milieu par une fissure semi-infinie est soumise à une sollicitation de traction  $\sigma_0$  sur la face supérieure comme illustré en figure 4.9. Dans un milieu infini, pour une fissure fixe, l'expression des FIC en fonction du temps  $t$  est :

$$K_I^{dyn}(0,t) = \frac{2\sigma_0}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{c_d t (1-2\nu)}{\pi}}, \quad (4.10)$$

avec  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $c_d$  est la vitesse des ondes de traction dont l'expression est donnée équation 1.43 et  $\sigma_0$  la sollicitation appliquée sur la face supérieure. Si la fissure se déplace à la vitesse  $\dot{a}$ , on a :

$$K_I^{dyn}(\dot{a},t) = f(\dot{a}) K_I^{dyn}(0,t), \quad (4.11)$$

où  $f$  est approchée par l'équation :

$$f(\dot{a}) = \frac{1 - \frac{\dot{a}}{c_r}}{1 - \frac{\dot{a}}{2c_r}}. \quad (4.12)$$

Si on réintroduit cette dernière équation dans l'expression des FIC initiale, on a :

$$K_I^{dyn}(\dot{a},t) = \frac{2\sigma_0}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{c_d t (1-2\nu)}{\pi}} \frac{1 - \frac{\dot{a}}{c_r}}{1 - \frac{\dot{a}}{2c_r}}. \quad (4.13)$$

La fissure n'est pas sollicitée jusqu'à ce que l'onde y arrive, puis l'évolution dans le temps des FIC dépend de la vitesse d'avancée de la fissure. On pourra comparer les résultats obtenus jusqu'à ce que l'onde soit réfléchi par le bord inférieur de la pièce et revienne sur la fissure, c'est à dire  $t \leq 3t_c = 3 \frac{h}{c_d}$ .

On choisit de garder la fissure immobile jusqu'à  $t = 1.5t_c$ , puis de la faire propager avec une vitesse donnée  $\dot{a} = 1500 m.s^{-1}$ . L'expression des FIC est alors donnée dans l'équation 4.14

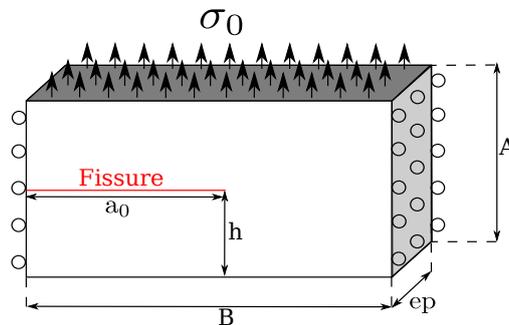


FIGURE 4.9: Cas test de Broberg.

$$K_I^{dyn} = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < t_c, \\ \frac{2\sigma_0}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{c_d t (1-2\nu)}{\pi}} & \text{pour } t_c < t < 1.5t_c, \\ \frac{2\sigma_0}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{c_d t (1-2\nu)}{\pi}} \frac{1-\frac{\dot{a}}{c_r}}{1-\frac{\dot{a}}{2c_r}} & \text{pour } 1.5t_c < t < 3.0t_c. \end{cases} \quad (4.14)$$

Les dimensions de l'éprouvette et les paramètres du matériau sont donnés dans le tableau 4.2.1.

Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur	A	4.0m
Longueur	B	10.0m
Longueur de fissure initiale	$a_0$	5.0m
Hauteur de fissure	h	2.0m
Épaisseur	ep	1.0m
Taille de XFEM		0.2m
Maillage différences finies		$82 \times 34 \times 18$
Tailles de maille différences finies		$0.125m \times 0.125m \times 0.125m$
Module d'Young	E	210.0GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3
Masse volumique	$\rho$	$8000Kg.m^{-3}$
Traction	$\sigma_0$	500.0MPa

TABLE 4.1: Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour les cas de Broberg.

## 4.2.2 Les grandeurs analytiques observées

Les contraintes analytiques sont calculées à partir des contraintes statiques données dans le chapitre 1, qui sont exprimées dans le cas général en 3D :

$$\underline{\underline{\sigma}}_I(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f^I(\theta), \quad (4.15)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{II}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f^{II}(\theta), \quad (4.16)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{III}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f^{III}(\theta). \quad (4.17)$$

Les fonctions  $\underline{\underline{f}}^I$ ,  $\underline{\underline{f}}^{II}$  et  $\underline{\underline{f}}^{III}$  sont données dans le paragraphe 1.1.4.1.

La singularité des contraintes en pointe de fissure n'est pas représentée par l'enrichissement saut. Pour supprimer la singularité, les contraintes numériques sont multipliées par  $\sqrt{r}$ , comme dans l'équation 4.18. Les fonctions  $\underline{\underline{f}}^I$ ,  $\underline{\underline{f}}^{II}$  et  $\underline{\underline{f}}^{III}$  sont intégrées numériquement par l'équation 4.19. Un pseudo-tenseur des contraintes analytique est calculé avec les FIC analytiques, par l'équation 4.20. La fonction poids  $w(r)$

#### 4. Adaptation du critère de rupture à la propagation de fissure en 3D

reste identique pour les deux équations,  $w(r) = e^{-(\frac{r}{\bar{r}})^2}$ .

$$\underline{\underline{\xi}}^{num} = \frac{\int_{\Omega} \sqrt{r} \underline{\underline{\sigma}} w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega}, \quad (4.18)$$

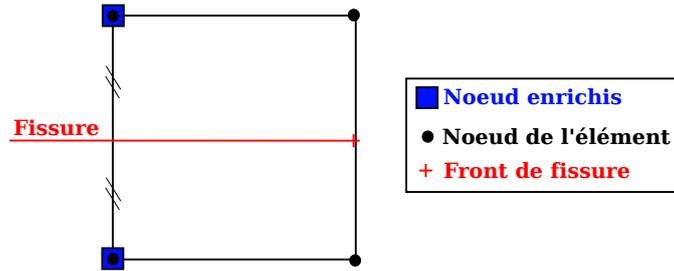
$$\tilde{f}_{anal}^M = \frac{\int_{\Omega} f^M w(r) d\Omega}{\int_{\Omega} w(r) d\Omega} \quad \text{avec } M = I, II, III, \quad (4.19)$$

$$\underline{\underline{\xi}}^{anal} = \sum_{M=I}^{III} \frac{K_{anal}^M}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}_{anal}^M \quad \text{avec } M = I, II, III. \quad (4.20)$$

Les composantes du pseudo-tenseur  $\underline{\underline{\xi}}^{anal}$  sont comparées aux composantes de  $\underline{\underline{\xi}}^{num}$ . Elles ont les mêmes unités ( $MPa\sqrt{m}$ ) et correspondent aux mêmes grandeurs. Les pseudo-contraintes sont normalisées par  $\sigma_0\sqrt{2}$ .

Afin de pouvoir comparer réellement et uniquement les contraintes en pointe de fissure, sans prendre en compte les autres erreurs, la fissure a été placée au milieu d'un élément et la pointe juste avant la frontière de cet élément, comme illustré figure 4.10. Cette configuration permet de s'affranchir des erreurs dues aux choix des XFEM :

- l'erreur due à l'enrichissement "saut" uniquement,
- l'erreur d'intégration des éléments contenant la fissure.



**FIGURE 4.10:** Configuration de la fissure afin de s'affranchir des erreurs dues à l'enrichissement saut et à l'intégration.

En 2D, le critère est calculé qu'à un seul point étant donné que le front de fissure est représenté par un point. En 3D, on peut observer les grandeurs tout le long du front. C'est la raison pour laquelle on représente dans la suite l'évaluation des grandeurs au coeur de l'éprouvette et en peau. La figure 4.11 montre les emplacements au bord et au centre de l'éprouvette ainsi que leurs influences sur le domaine  $\Omega$  en demi-sphère. Les tenseurs  $\tilde{f}_{anal}^M$  et  $\underline{\underline{\xi}}^{anal}$  sont indépendants du fait qu'ils soient calculés en peau ou à coeur (cf. équation 4.19 et 4.20). La composante  $\underline{\underline{\xi}}_{22}^{anal}$  du tenseur analytique sera donnée uniquement à coeur.

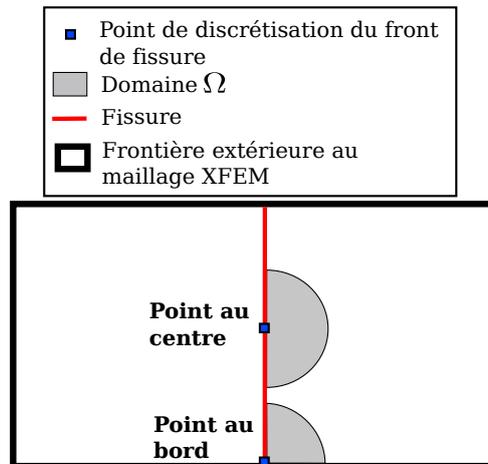


FIGURE 4.11: Vue de dessus de l'éprouvette et représentation du domaine  $\Omega$  en demi-sphère en peau et à coeur.

**Remarque 12**  $\underline{\underline{\Sigma}}^{num}$  ne correspond pas aux contraintes calculées pour le critère de rupture. Ce tenseur permet juste de comparer le modèle numérique choisi avec des grandeurs analytiques.

### 4.2.3 Choix du domaine de calcul des contraintes en 3D

Les figures 4.12 à 4.16 montrent la valeur de la composante 22 du pseudo-tenseur des contraintes,  $\frac{\underline{\underline{\Sigma}}_{22}^{dyn}(t)}{\sigma_0\sqrt{H}}$  pour différentes tailles et différentes formes du domaine  $\Omega$ . Le paramètre qui contrôle la taille du domaine  $R$  varie de 1 à 5 fois la taille de maille en pointe de fissure.

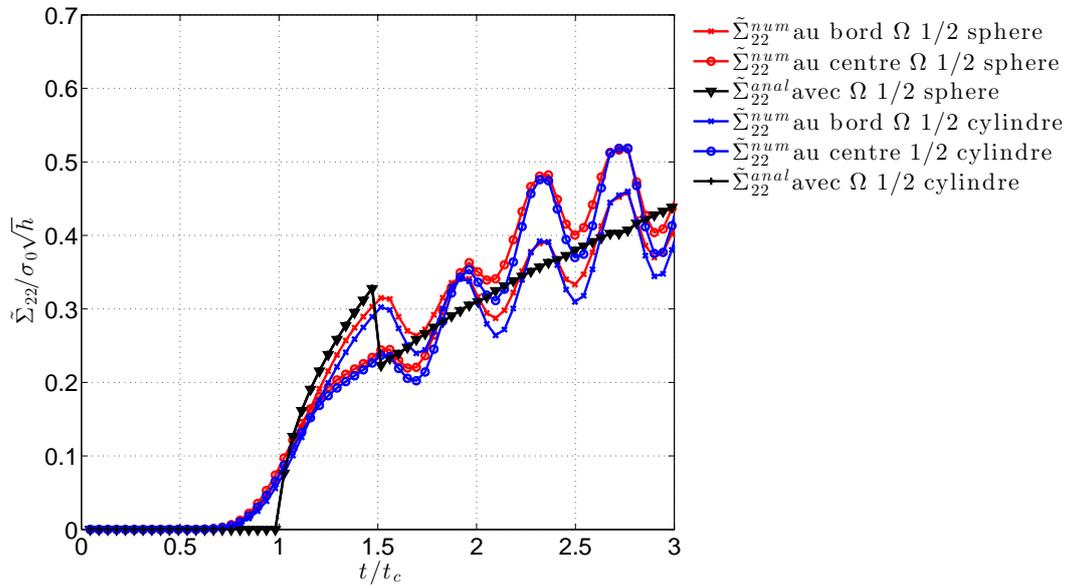


FIGURE 4.12: Évolution temporelle de  $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$  normalisé pour  $R = 1$  taille d'élément.

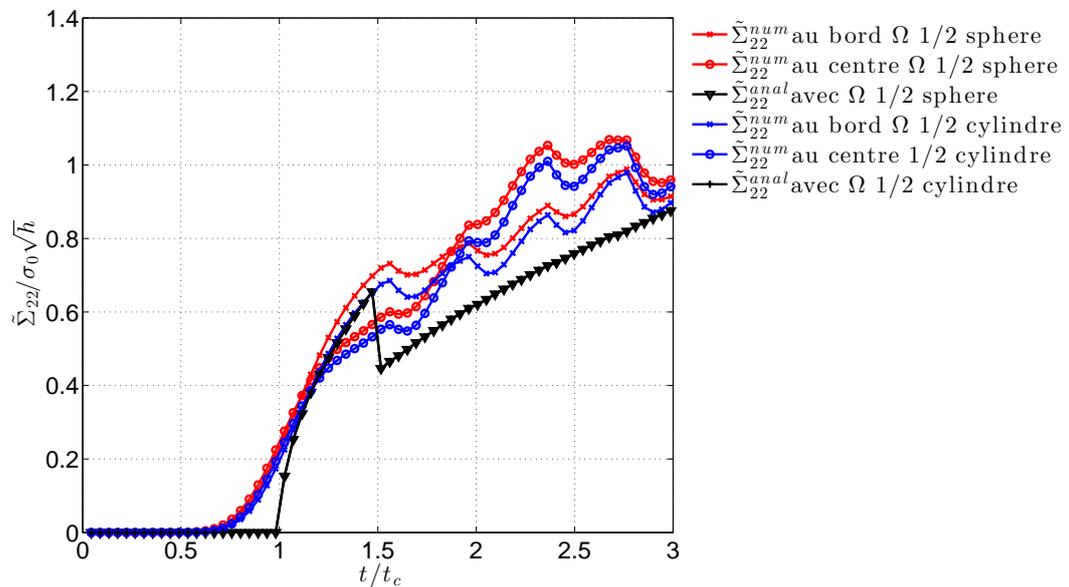


FIGURE 4.13: Évolution temporelle de  $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$  normalisé pour  $R = 2$  tailles d'élément.

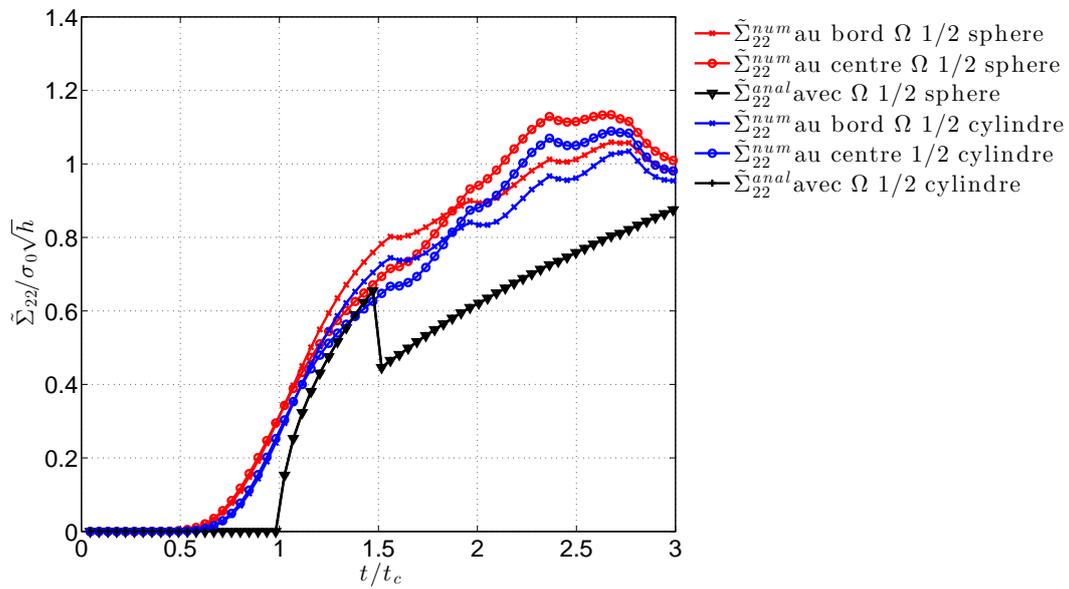


FIGURE 4.14: Évolution temporelle de  $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$  normalisé pour  $R = 3$  tailles d'élément.

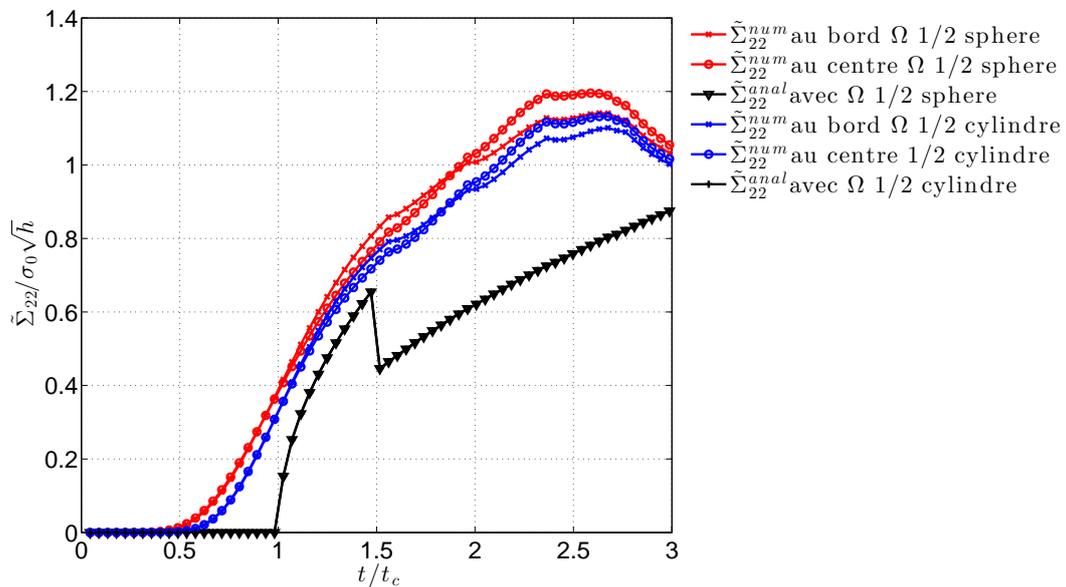


FIGURE 4.15: Évolution temporelle de  $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$  normalisé pour  $R = 4$  tailles d'élément.

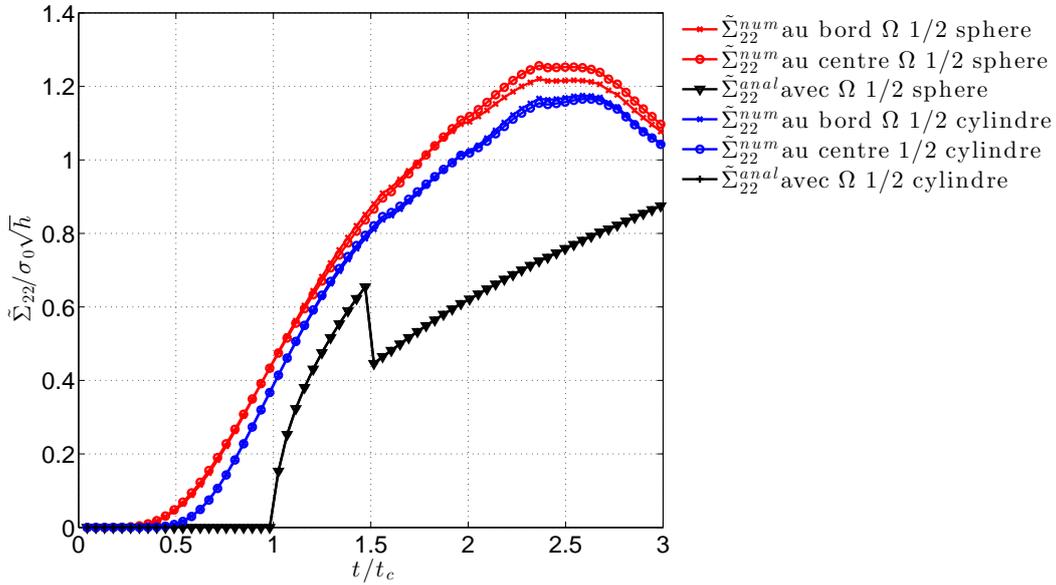


FIGURE 4.16: Évolution temporelle de  $\tilde{\Sigma}_{22}^{dyn}$  normalisé pour  $R = 5$  tailles d'élément.

Il y a peu de différences entre les  $\tilde{\Sigma}_{22}$  calculés avec un demi-cylindre en pointe de fissure ou une demi-sphère. Les contraintes calculées avec une demi-sphère sont légèrement supérieures à celles calculées avec un demi-cylindre. Les figures 4.17 et 4.18 retracent l'évolution de la composante  $\tilde{\Sigma}_{22}$  du tenseur des contraintes moyen le long du front de fissure pour un domaine  $\Omega$  en demi-sphère et en demi-cylindre. Un rayon  $R = 2$  tailles d'élément a été utilisé pour tracer ces courbes, la composante est donnée à différents temps de simulation.

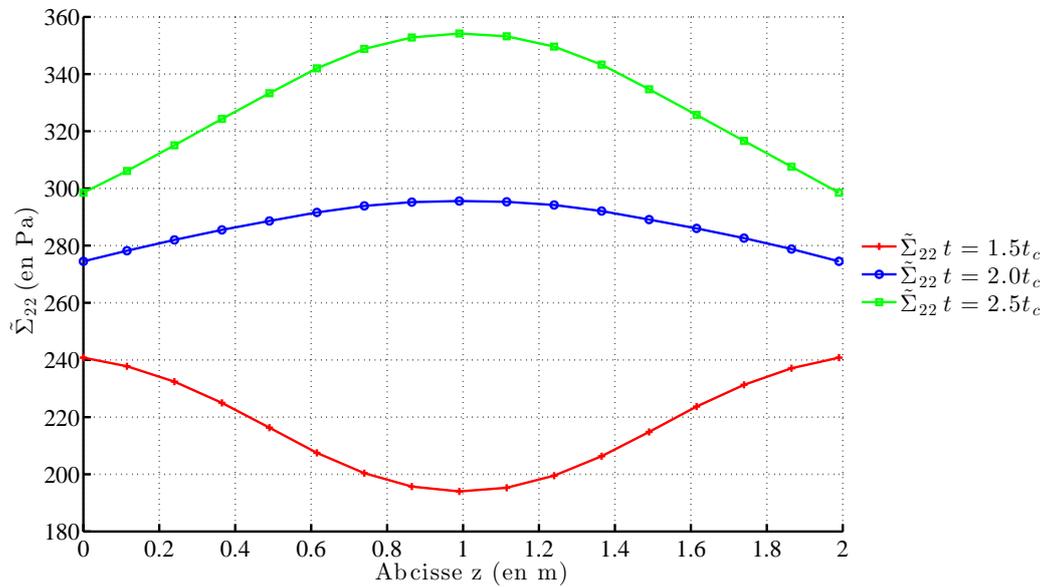


FIGURE 4.17: Évolution de la composante  $\tilde{\Sigma}_{22}$  du pseudo-tenseur des contraintes en pointe de fissure à  $t = 1.5t_c$ ,  $t = 2.0t_c$  et  $t = 2.5t_c$  pour un domaine  $\Omega$  en demi-sphère.

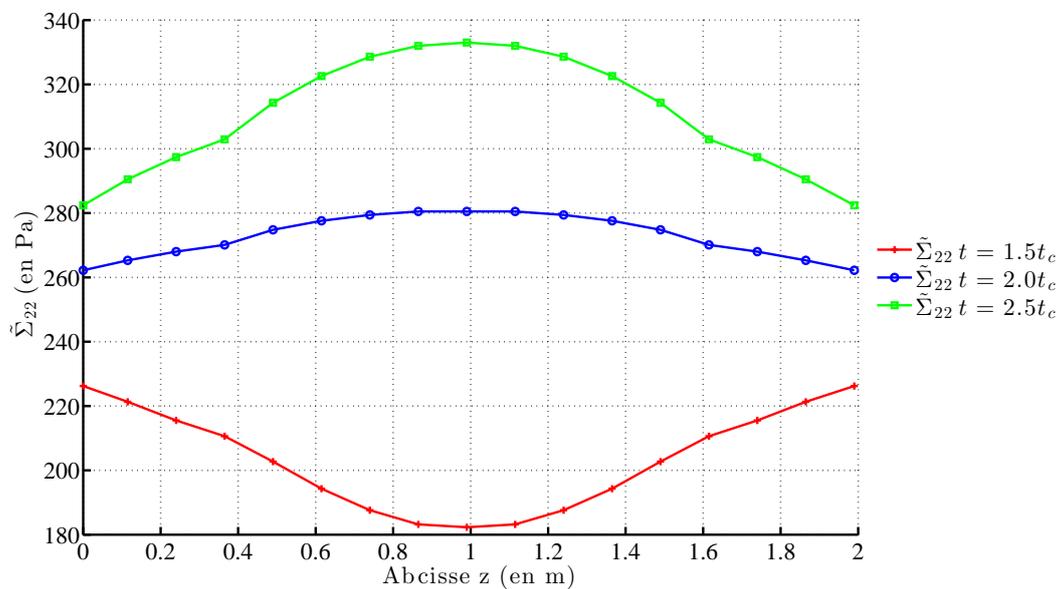


FIGURE 4.18: Évolution de la composante  $\tilde{\Sigma}_{22}$  du pseudo-tenseur des contraintes en pointe de fissure à  $t = 1.5t_c$ ,  $t = 2.0t_c$  et  $t = 2.5t_c$  pour un domaine  $\Omega$  en demi-cylindre.

Ces figures confirment les courbes 4.12 à 4.14, la composante  $\tilde{\Sigma}_{22}$  est d'abord plus grande au bord qu'au centre avant la propagation de fissure. Elles s'inversent dans les premiers instants de la propagation pour devenir plus grande au centre qu'au bord une fois que la fissure a bien propagé ce qui accentue un front bombé sur le centre. Les contraintes calculées à partir d'un domaine en demi-cylindre deviennent irrégulières sur le bord (cf. courbe 4.18). Le domaine  $\Omega$  en demi-sphère sera utilisé en pointe de fissure pour calculer le critère en contrainte.

#### 4.2.4 Influence de la taille du domaine d'intégration en 3D

Les figures 4.12 à 4.16 montrent les contraintes numériques  $\tilde{\Sigma}_{22}^{num}$  en comparaison avec les contraintes analytiques  $\tilde{\Sigma}_{22}^{anal}$ . Les contraintes ont été calculées avec un domaine  $\Omega$  en demi-sphère et pour différentes tailles de  $R$ . On peut remarquer des oscillations du critère lors de la propagation pour des tailles de  $R$  inférieures à 2 tailles d'éléments en pointe. Ces oscillations ont une longueur d'onde proche de la taille d'un élément, ce qui correspond à l'enrichissement saut utilisé. Lorsque la fissure coupe entièrement un élément, une onde se propage dans la structure, qui est captée par le critère de rupture. Le critère est donc influencé pour des rayons  $R$  inférieurs à 3 fois la taille de maille en pointe. Pour des rayons supérieurs à 3 tailles d'éléments en pointe, le critère moyenne trop les contraintes et les avancées de fissure ne sont plus captées par le critère. On prendra donc par la suite un rayon toujours compris entre 2 et 3 tailles de maille en pointe.

#### 4.2.5 « Moyenne en temps » de l'avancée de fissure

L'enrichissement choisi ne permet pas la localisation de la pointe de fissure dans un élément (on a seulement des enrichissements sauts). On attend donc pour propager que l'avancée maximale du front soit de l'ordre de grandeur de la taille des éléments. On « moyenne » ainsi en temps l'avancée de la fissure qui n'avance plus que par « sauts ». Les graphiques 4.19 à 4.24 montrent l'effet des tailles de saut sur la composante  $\tilde{\Sigma}_{22}$  du pseudo-tenseur des contraintes en pointe de fissure. Le paramètre  $T_{moy}$  est explicité dans le paragraphe 4.1.3.

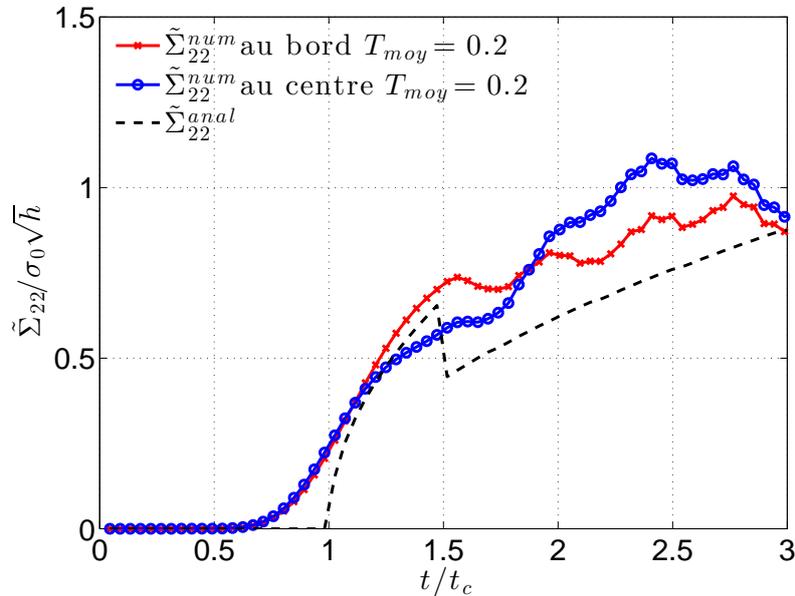
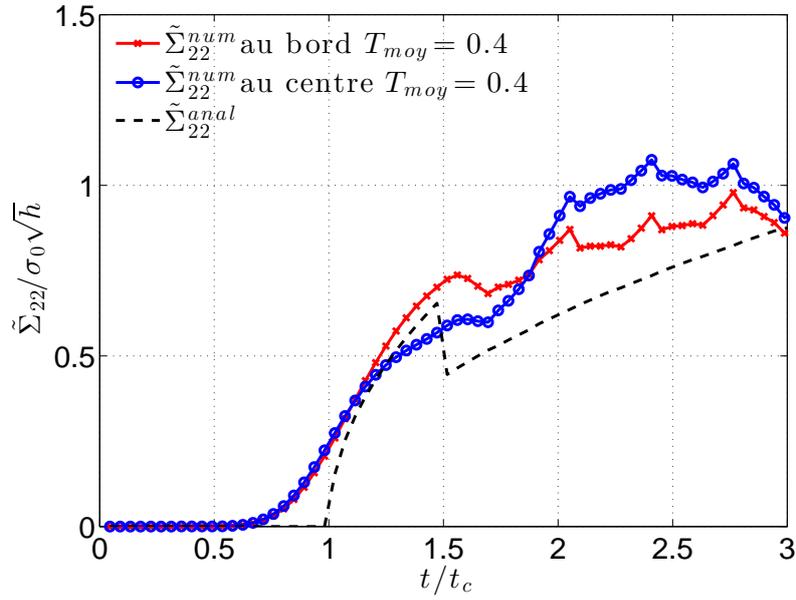
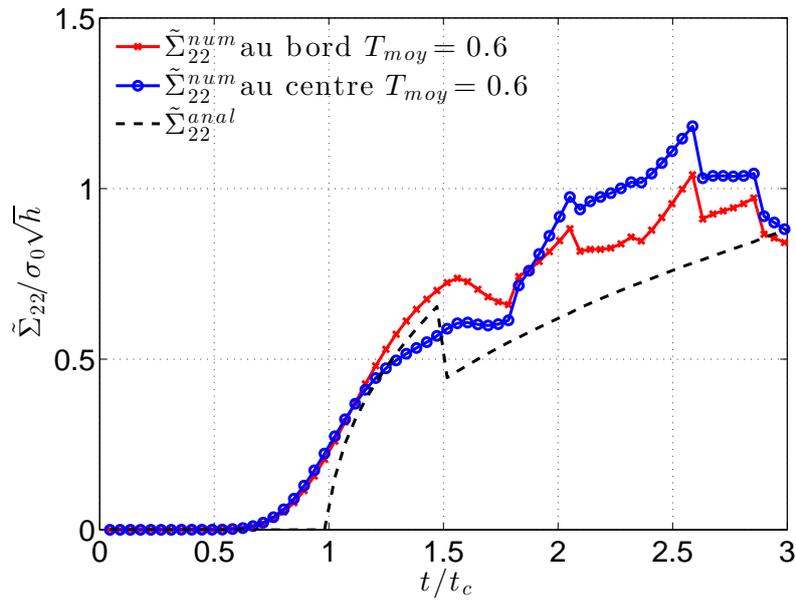


FIGURE 4.19:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 0.2 taille d'élément.


 FIGURE 4.20:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 0.4 taille d'élément.

 FIGURE 4.21:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 0.6 taille d'élément.

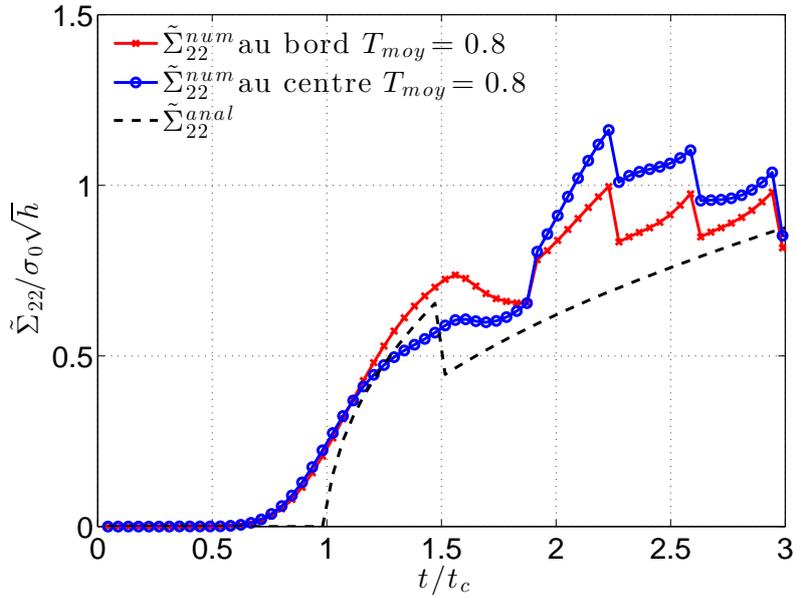


FIGURE 4.22:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 0.8 taille d'élément.

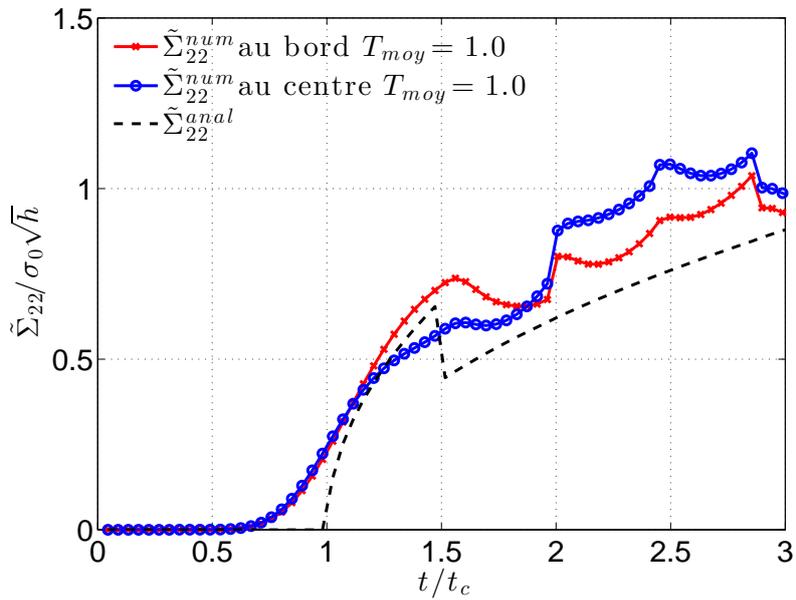


FIGURE 4.23:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 1.0 taille d'élément.

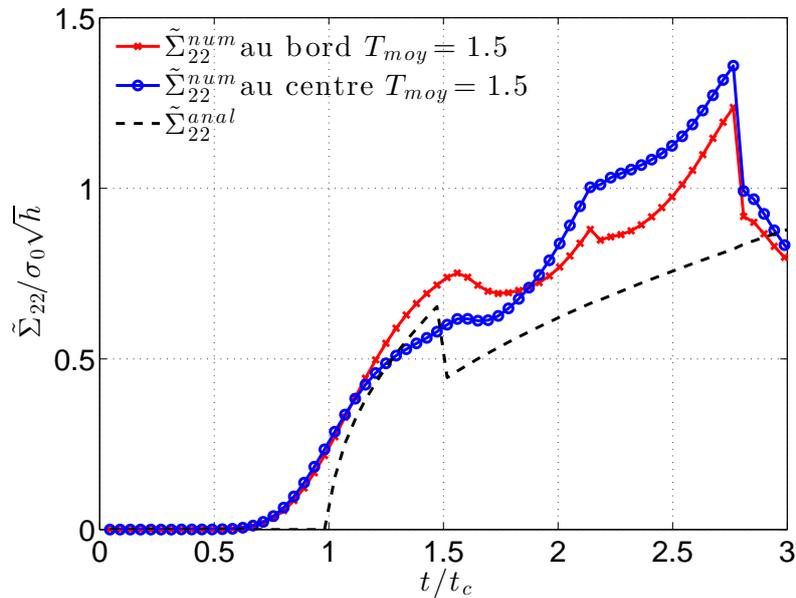


FIGURE 4.24:  $\tilde{\Sigma}_{22}$  normalisé pour des sauts de fissure de 1.5 tailles d'élément.

Le saut le plus adaptée pour le critère de rupture semble être un saut de 1.0 fois la taille de maille. Les sauts de 0.8 ou 1.5 fois la taille d'élément ont tendance à amplifier les oscillations des enrichissements, alors que ceux inférieurs à 0.2 n'ont quasiment pas d'influence sur le critère.

#### 4.2.6 Conclusion

L'approche locale a pour avantage de prendre en compte l'état de plasticité en pointe de fissure, les composantes du tenseur pilotent la direction et l'avancée de fissure. Cependant les grandeurs sont dépendantes du paramètre  $R$  de la fonction poids  $w$ . Dans ce chapitre, nous avons justifié la forme du domaine  $\Omega$  utilisé et sa taille. Le critère de rupture sera calculé avec un domaine  $\Omega$  en forme de demi-sphère de paramètre  $R$  compris entre 2 et 3 tailles d'éléments en pointes. Les moyennes « temporelles » ont également présenté et leur influence sur le critère de rupture a été observé dans le cas de Broberg. La longueur d'avancée optimum du front pour ce cas semble être proche d'une taille d'élément en pointe de fissure.



## Chapitre 5

# Optimisation de l'intégration numérique des éléments XFEM

*L'objectif de ce chapitre est de rechercher à diminuer le plus possible le nombre de points de Gauss pour augmenter pour augmenter l'efficacité du calcul XFEM. Une nouvelle méthode d'intégration sera également développée dans le cas des éléments XFEM avec un matériau linéaire élastique*

### Sommaire

---

<b>5.1 Optimisation de l'intégration par la règle classique de Gauss.</b> . . . . .	<b>82</b>
5.1.1 Recherche du sous découpage conforme optimal . . . . .	82
<b>5.2 Une nouvelle méthode par modification des poids de Gauss</b> . . . . .	<b>87</b>
5.2.1 Cadre général et démarche . . . . .	87

---

## 5.1 Optimisation de l'intégration par la règle classique de Gauss.

La règle d'intégration jusqu'ici utilisée dans EUROPLEXUS consiste à sous-découper non conformément à la fissure les éléments qui la contiennent, comme décrit paragraphe 2.5.2. Nous avons cherché à optimiser l'emplacement des points de Gauss dans les éléments et de quantifier l'erreur réalisée par cette méthode.

### 5.1.1 Recherche du sous découpage conforme optimal

Dans un premier temps, la recherche de l'emplacement des points de Gauss se fera sur un élément 1D représenté dans le repère isoparamétrique. Soit un élément unidimensionnel de longueur 2 coupé par une fissure à un emplacement  $\xi_f$  compris entre  $[-1; 1]$ , comme dans la figure 5.1.

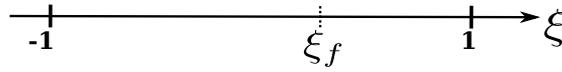


FIGURE 5.1: Élément 1D représenté dans le repère isoparamétrique, coupé par une fissure.

Soit une fonction  $f$  définie sur un domaine  $\mathcal{D} = [-1; 1]$ , intégrable sur  $\mathcal{D}$  dont une des intégrales est la fonction  $F$ . La fonction  $H$  est la fonction de Heaviside définie par l'équation 5.2. Soit l'intégrale  $I$  définie suivant l'équation 5.2.

$$H(\xi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \xi > \xi_f, \\ 0 & \text{si } \xi = \xi_f, \\ -1 & \text{si } \xi < \xi_f. \end{cases} \quad (5.1)$$

$$I = \int_{-1}^1 H(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (5.2)$$

L'intégrale  $I$  calculée de façon analytique donne l'intégrale  $I^{ex}$  :

$$I^{ex} = - \int_{-1}^{\xi_f} f(\xi) d\xi + \int_{\xi_f}^1 f(\xi) d\xi, \quad (5.3)$$

$$= - \int_{-1}^{\xi_f} f(\xi) d\xi + \int_{\xi_f}^1 f(\xi) d\xi, \quad (5.4)$$

$$= -[F(\xi)]_{-1}^{\xi_f} + [F(\xi)]_{\xi_f}^1, \quad (5.5)$$

$$= -F(\xi_f) + F(-1) + F(1) - F(\xi_f), \quad (5.6)$$

$$= F(-1) + F(1) - 2F(\xi_f). \quad (5.7)$$

Le calcul de l'intégrale  $I$  par la règle de quadrature de Gauss, à  $n_g$  points de Gauss qui ignore l'emplacement de la fissure, approxime l'intégrale  $I^G$  par :

$$I^G = \sum_{i=1}^{n_g} H(\xi_i) f(\xi_i) \omega_i. \quad (5.8)$$

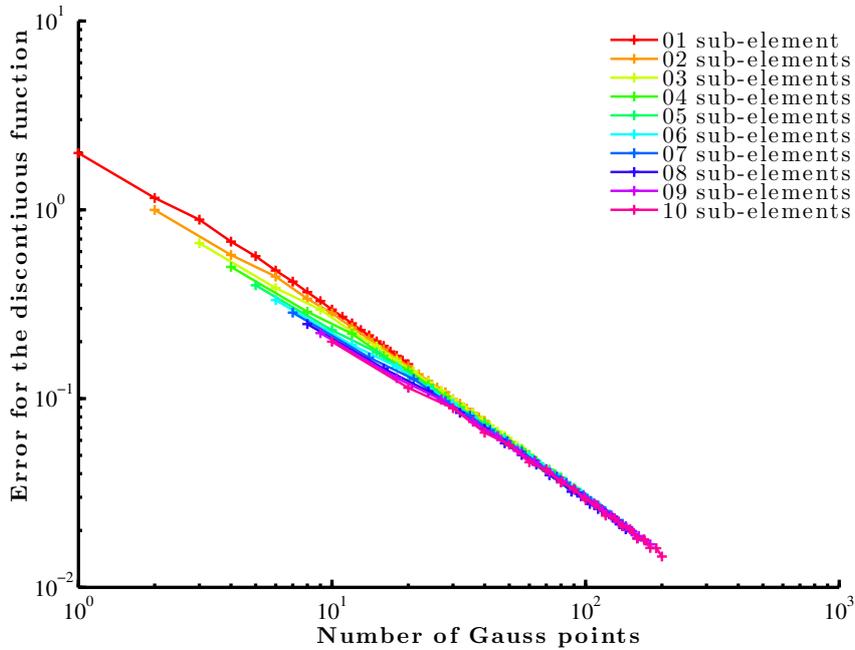
L'erreur commise sur l'intégration est donnée par la différence entre l'intégrale exacte et l'intégrale approchée :

$$Err = I^{ex} - I^G. \quad (5.9)$$

L'erreur d'intégration diffère suivant le degré du polynôme  $f$ . Nous avons cherché à estimer en 1D l'erreur commise sur l'intégration de l'élément en fonction de la règle de Gauss utilisée. L'élément peut

être sous-découpé en plusieurs sous-éléments (1 à 10 ici) comportant chacun 1 à 20 point de Gauss (ce qui revient à augmenter le degré polynomial de la règle de quadrature de Gauss dans chaque sous élément).

Les graphiques 5.2 à 5.4 représentent les maxima d'erreur obtenus pour tous les sous-découpages des éléments. Le graphique 5.2 représente l'erreur pour l'intégration de la fonction  $f(\xi) = H(\xi)$ , le graphique 5.3, pour la fonction  $f(\xi) = \xi H(\xi)$  et le graphique 5.4, pour la fonction  $f(\xi) = \xi^2 H(\xi)$ .



**FIGURE 5.2:** Erreur d'intégration la fonction  $f(\xi) = H(\xi)$  discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D.

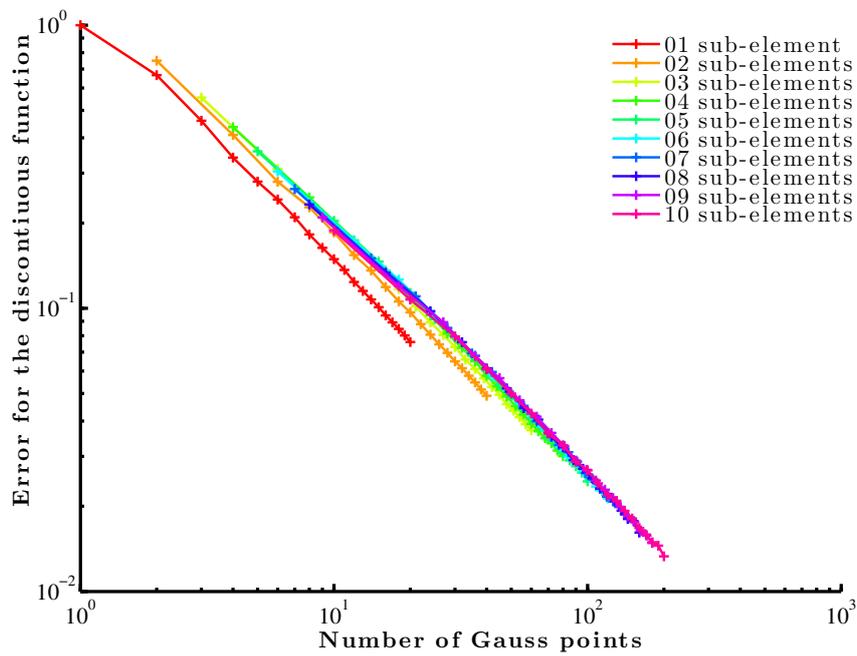


FIGURE 5.3: Erreur d'intégration la fonction  $f(\xi) = \xi H(\xi)$  discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D.

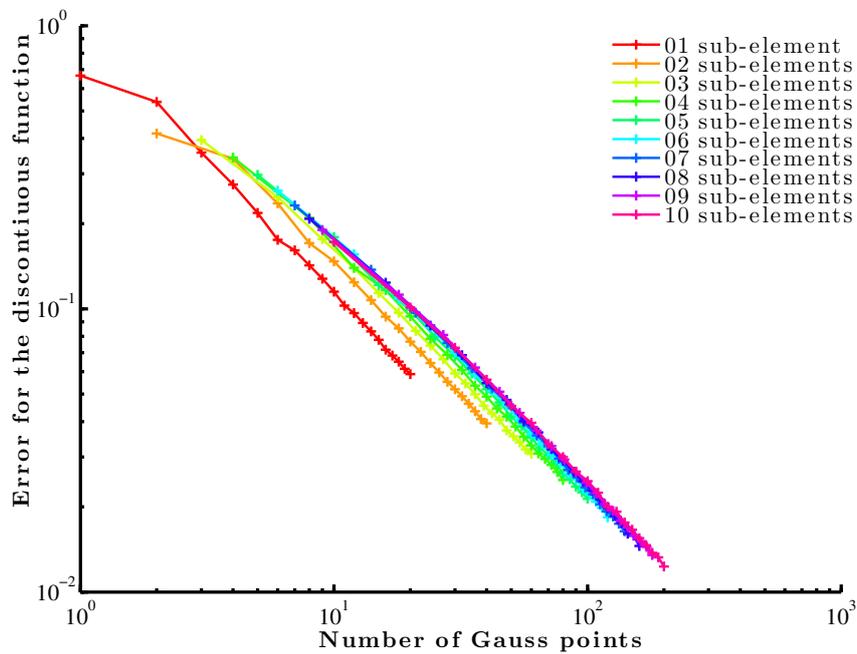
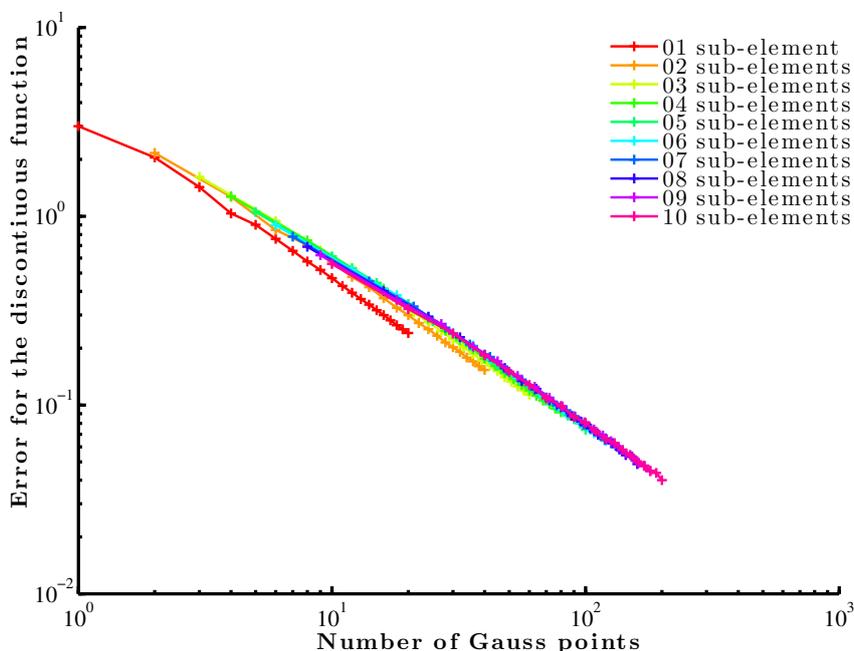


FIGURE 5.4: Erreur d'intégration la fonction  $f(\xi) = \xi^2 H(\xi)$  discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D.

Les dérivées des fonctions de forme sont les sommes des fonctions données jusqu'ici. La figure 5.5 donne les maxima d'erreur réalisés pour la fonction  $f(\xi) = (1 + \xi + \xi^2)H(\xi)$  en fonction du nombre de points de Gauss.



**FIGURE 5.5:** Erreur d'intégration la fonction  $f(\xi) = (1 + \xi + \xi^2)H(\xi)$  discontinue en fonction du nombre de points de Gauss pour plusieurs sous-découpages en 1D.

Les résultats de l'intégration dépendent de l'emplacement de la fissure  $\xi_f$ . L'emplacement de la fissure  $\xi_f$  a été balayé de  $-1$  à  $1$  par pas de  $0.0001$ . On remarque que la fonction constante multipliée par la fonction saut est mieux intégrée en sous découpant l'élément plutôt qu'en augmentant le degré polynomial de la quadrature de Gauss. Ce n'est cependant pas le cas pour les fonctions de degré supérieur à 1. Au final, pour l'intégration de la fonction  $f(\xi) = (1 + \xi + \xi^2)H(\xi)$ , l'erreur réalisée est relativement peut influencée par l'emplacement des points de Gauss dans l'élément.

L'ancienne règle d'intégration utilisait  $4 \times 2^1 = 8$  points de Gauss par dimension. Pour 5 à 10 points de Gauss par élément, on commet une erreur de l'ordre de 5 à 10% sur l'intégration des fonctions. La règle classique de Gauss n'est donc pas adaptée pour les fonctions discontinues.

Utiliser qu'un seul point de Gauss par sous élément peut également amener à perdre en précision d'intégration des fonctions continues. Des modes à énergie nulle, appelées aussi mode de Hourglass, peuvent alors ne plus être pris en compte dans l'intégration. Dans le cas d'un quadrangle 2D classique, non enrichi, représenté figure 5.6. Plusieurs emplacements de points de Gauss seront essayés, 4 points de Gauss « classiques » dans l'élément, 1 point de Gauss au centre de l'élément et 4 points de Gauss disposés en sous-découpant l'élément en 4 avec 1 point de Gauss au centre de chaque sous élément. Les emplacements sont représentés dans la figure 5.7.

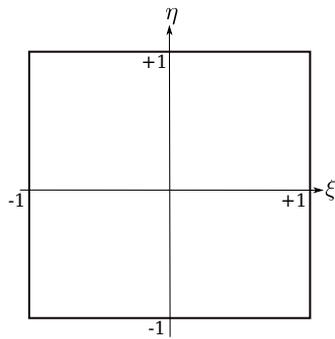


FIGURE 5.6: Élément quadrangle dans le repère isoparamétrique.

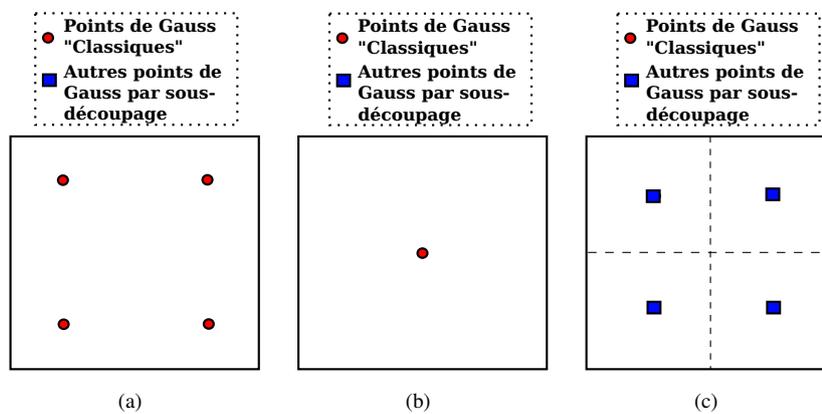


FIGURE 5.7: Localisation des points de Gauss dans l'élément isoparamétrique pour tester l'apparition des modes de Hourglass.

L'élément est placé dans le repère isoparamétrique avec un matériau élastique linéaire dont les caractéristiques sont donnés dans le tableau 5.1 :

Paramètre	Notation	Valeur
Module d'Young	$E$	$1.0GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$0.3$

TABLE 5.1: Caractéristiques du matériau pour tester l'apparition des modes de Hourglass.

Le tableau 5.2 regroupe les valeurs propres de la matrice de raideur élémentaire pour les différents emplacements des points de Gauss.

Numéro	4 points de Gauss 5.7(a)	1 points de Gauss 5.7(b)	4 points de Gauss 5.7(c)
1	$-0.9615 \times 10^{-07}$	$-0.4839 \times 10^{-07}$	$-0.6324 \times 10^{-07}$
2	$-0.2394 \times 10^{-07}$	$-0.0182 \times 10^{-07}$	$-0.6324 \times 10^{-07}$
3	$0.5873 \times 10^{-07}$	$0.0373 \times 10^{-07}$	$0.6911 \times 10^{-07}$
4	$0.5769 \times 10^{+09}$	$0.0551 \times 10^{-07}$	$2.1635 \times 10^{+09}$
5	$0.5769 \times 10^{+09}$	$0.3451 \times 10^{-07}$	$2.1635 \times 10^{+09}$
6	$0.7692 \times 10^{+09}$	$0.9615 \times 10^{+08}$	$3.8462 \times 10^{+09}$
7	$0.7692 \times 10^{+09}$	$0.9615 \times 10^{+08}$	$3.8462 \times 10^{+09}$
8	$1.9231 \times 10^{+09}$	$2.4038 \times 10^{+08}$	$9.6154 \times 10^{+09}$

**TABLE 5.2:** Valeurs propres de la matrice élémentaire pour les différents emplacements de points de Gauss.

On peut remarquer que le fait de sous découper l'élément avec un seul point de Gauss par sous-élément empêche l'apparition des modes de Hourglass. Les modes de Hourglass sont grisés dans le tableau 5.2. Les polynômes de degré supérieur à 2 ne sont cependant plus intégrés correctement.

Nous avons donc gardé l'intégration en sous découpage de l'élément avec des sous éléments à 2 points de Gauss par dimensions. Le tableau 5.3 récapitule le sous découpage choisi.

Nom de l'élément d'origine	Nombre de sous-éléments	Nombre de points de Gauss par sous-élément	Nombre de points de Gauss total
Quadrangle 2D	$4 \times 4$	$2^2 = 4$	64
Cube 3D	$4 \times 4 \times 4$	$2^3 = 8$	512

**TABLE 5.3:** Sous découpage des éléments suivant le type d'élément

Cette méthode d'intégration sera conservée dans EUROPLEXUS car elle permet d'avoir une intégration des éléments coupés simple à mettre en oeuvre. Elle a cependant l'inconvénient de nécessiter un très grand nombre de points d'intégration.

## 5.2 Une nouvelle méthode par modification des poids de Gauss

Nous avons ensuite développé une autre méthode d'intégration des éléments coupés en s'inspirant des travaux de Mousavi *et al.* [MOU 11b, MOU 12, MOU 10a], de Natarajan *et al.* [NAT 10] et de Xiao *et al.* [XIA 06]. La méthode proposée par Natarajan *et al.* [NAT 10] permet d'intégrer les fonctions discontinues et les fonctions singulières tout en conservant la position des points de Gauss fixes. Le respect de cette contrainte est important pour les matériaux non linéaires car les variables dépendantes de l'histoire sont calculées aux points de Gauss. Leur transport vers un autre jeu de points génère des erreurs dans les calculs dont les effets sont difficiles à maîtriser.

### 5.2.1 Cadre général et démarche

On cherche à calculer l'intégrale d'une fonction discontinue en s'inspirant de la quadrature de Gauss, en ayant le minimum d'erreur d'intégration et en évitant de déplacer les points de Gauss. L'équation 5.10 rappelle le principe d'une règle de quadrature.

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\underline{\xi}) d\Omega \approx \sum_{k=1}^{n_g} w_k f(\underline{\xi}_k). \quad (5.10)$$

En calculant ensuite les fonctions  $f$  aux coordonnées des points de Gauss choisies  $\underline{\xi}_k$ , on cherche les poids de Gauss  $w_k$  permettant d'intégrer le plus exactement possible les fonctions. On obtient alors le

système à résoudre :

$$\underline{I} = \underline{f}(\underline{\xi})\underline{w}. \quad (5.11)$$

On l'appliquera dans un premier temps à un élément quadrangle à 4 noeuds, illustré par la figure 5.8. L'équation d'approximation des déplacements est donnée dans l'équation 5.12, elle sera utilisée uniquement avec les enrichissements sauts.

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x})U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} N_i(\underline{x})H(\underline{x})U_i^e. \quad (5.12)$$

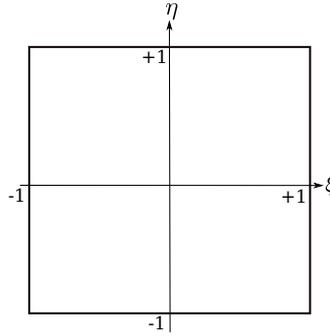


FIGURE 5.8: Élément quadrangle dans le repère isoparamétrique.

Les déformations sont calculées à partir des déplacements nodaux et des dérivées des fonctions de forme. Dans l'hypothèse des petites déformations, le tenseur des déformations est calculé à partir de  $\underline{B}$ , la matrice des dérivées des fonctions de forme, comme dans l'équation 5.13.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{u}^T + \underline{\nabla} \underline{u}] = \underline{B} \underline{U}. \quad (5.13)$$

La méthode sera appliquée dans un premier temps à un matériau linéaire élastique. Le tenseur des déformations est alors égal au tenseur élastique (cf. équation 5.14). Les contraintes sont calculées à partir de la loi de Hooke et du tenseur des déformations. L'équation 5.15 donne le calcul des contraintes, où  $\underline{D}$  est le tenseur de Hooke du 4<sup>e</sup> ordre.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (5.14)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{D} \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{D} \underline{B} \underline{U}. \quad (5.15)$$

Les équations définissant la matrice de raideur de l'élément en statique ou les forces internes en dynamique explicite sont données dans les équations 5.16 et 5.17

$$\underline{K}_e = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega, \quad (5.16)$$

$$\underline{F}_e^{int} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega. \quad (5.17)$$

La matrice  $\underline{B}$  et les déplacements  $\underline{U}$  peuvent être décomposés en une partie continue et une partie discontinue :

$$\underline{B} = [\underline{B}^c \quad \underline{B}^d], \quad (5.18)$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}^c \\ \underline{U}^d \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

La matrice de raideur et les forces internes peuvent donc être décomposés en 4 parties :

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} (\underline{\underline{B}}^c)^T D \underline{\underline{B}}^c & (\underline{\underline{B}}^d)^T D \underline{\underline{B}}^c \\ (\underline{\underline{B}}^c)^T D \underline{\underline{B}}^d & (\underline{\underline{B}}^d)^T D \underline{\underline{B}}^d \end{pmatrix} d\Omega, \quad (5.20)$$

$$\underline{\underline{F}}_e^{int} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} (\underline{\underline{B}}^c)^T D \underline{\underline{B}}^c \underline{\underline{U}}^c & (\underline{\underline{B}}^d)^T D \underline{\underline{B}}^c \underline{\underline{U}}^c \\ (\underline{\underline{B}}^c)^T D \underline{\underline{B}}^d \underline{\underline{U}}^d & (\underline{\underline{B}}^d)^T D \underline{\underline{B}}^d \underline{\underline{U}}^d \end{pmatrix} d\Omega. \quad (5.21)$$

La matrice  $\underline{\underline{B}}^c$  est composée des dérivées des fonctions de forme. Les fonctions à intégrer sont donc des combinaisons linéaires des dérivées des fonctions de formes entre elles ; les fonctions de formes :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (5.22)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (5.23)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (5.24)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (5.25)$$

et leurs dérivées :

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta), \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta), \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta), \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta), \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi), \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi), \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi), \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi). \quad (5.33)$$

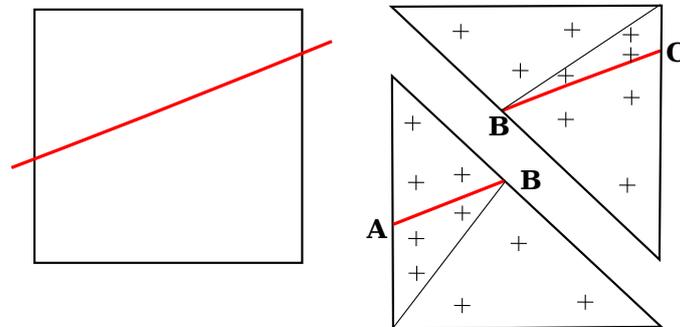
$$(5.34)$$

La base de fonctions à intégrer en 2 dimensions est donnée dans le tableau 5.4.

Fonctions continues	Fonctions discontinues
1	$H(\xi, \eta)$
$\xi$	$H(\xi, \eta)\xi$
$\eta$	$H(\xi, \eta)\eta$
$\xi^2$	$H(\xi, \eta)\xi^2$
$\eta^2$	$H(\xi, \eta)\eta^2$
$\xi\eta$	$H(\xi, \eta)\xi\eta$

**TABLE 5.4:** Liste des fonctions à intégrer en 2 dimensions

Le calcul de l'intégrale de référence peut se faire soit en sous-découpant l'élément conformément à la fissure, soit de manière analytique. Nous avons choisi le sous-découpage conforme en découpant le quadrangle en 2 triangles, puis en sous-découpant conformément à la fissure les deux triangles, comme illustré figure 5.9.



**FIGURE 5.9:** Méthode de sous découpage par triangle pour un élément contenant une fissure.

Une formule analytique prenant en compte la position de la fissure pourrait aussi être utilisée. Cette méthode serait d'ailleurs à privilégier si cette méthode était convaincante car elle minimise le coût de calcul en évitant de sous-découper l'élément.

Dans un premier temps, nous avons essayé de trouver un jeu de poids de Gauss qui intègre les fonctions continues et discontinues en même temps :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} f_1(\underline{x}) d\underline{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_m(\underline{x}) d\underline{x} \\ \int_{\Omega} H(\underline{x})f_1(\underline{x}) d\underline{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} H(\underline{x})f_m(\underline{x}) d\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_1) & \cdots & f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(\underline{x}_1) & \cdots & f_m(\underline{x}_n) \\ H(\underline{x}_1)f_1(\underline{x}_1) & \cdots & H(\underline{x}_n)f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H(\underline{x}_1)f_m(\underline{x}_1) & \cdots & H(\underline{x}_n)f_m(\underline{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Nous avons testé plusieurs configurations de fissure représentées sur la figure 5.10 et plusieurs emplacements de points Gauss illustrées figure 5.11.

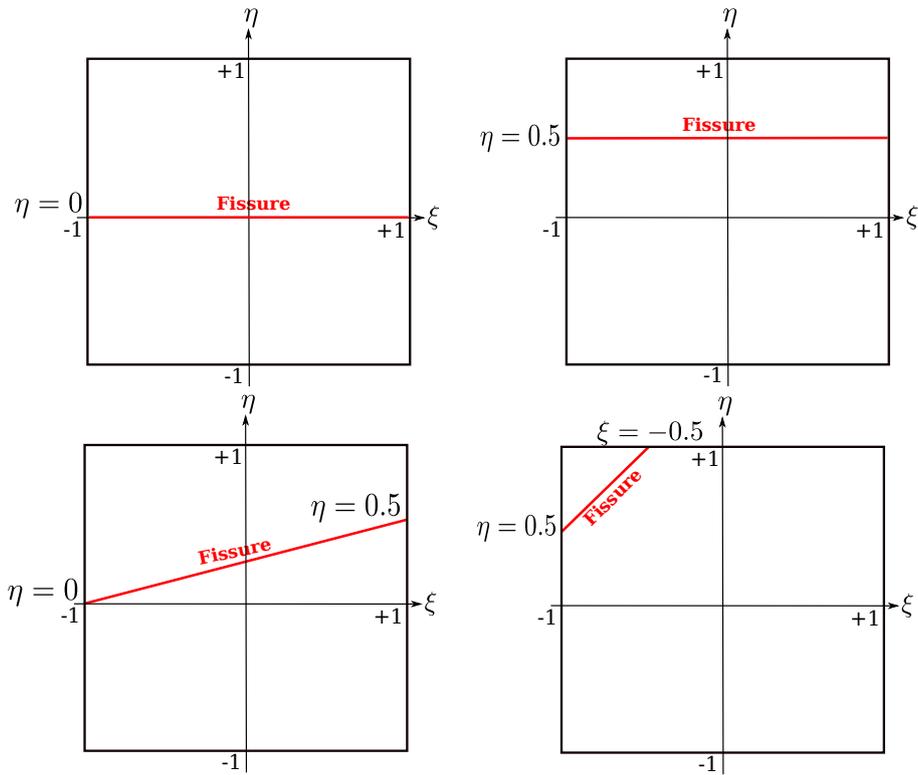


FIGURE 5.10: Les différentes positions de fissure représentées dans l'élément isoparamétrique.

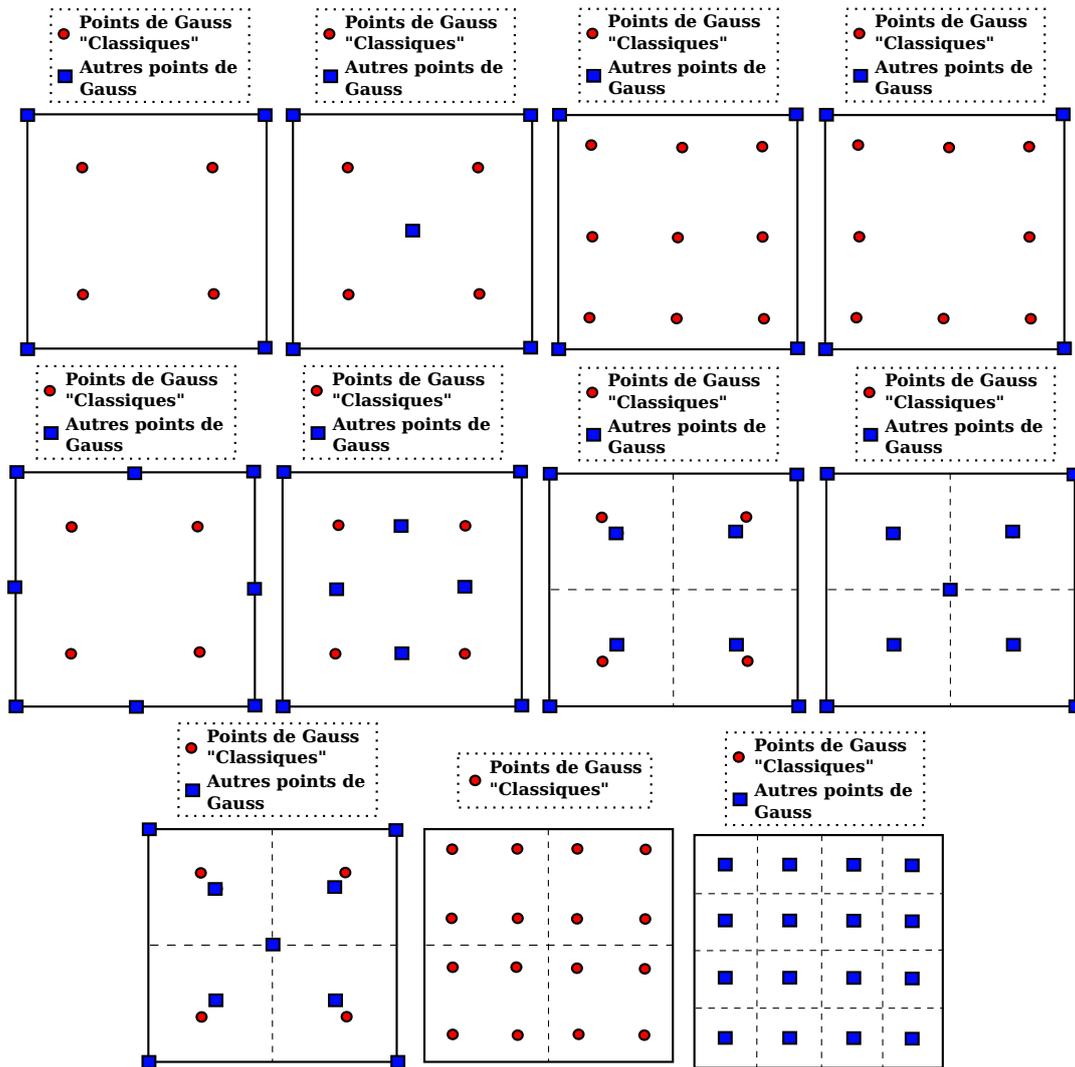


FIGURE 5.11: Localisations des points de Gauss dans l'élément isoparamétrique

Les tableaux 5.5 à 5.8 résument les résultats obtenus pour les différentes fissures et les différents emplacements de points de Gauss en utilisant deux critères sur le résidu. Le premier critère est la norme  $L^2$  du rapport entre le résidu et l'intégrale exacte. Le second critère est la norme infini  $L^\infty$  du rapport entre le résidu et l'intégrale. Les critères sont décrits dans les équations 5.36 et 5.37. La dernière ligne des tableaux indique le résultat de la méthode classique d'intégration non conforme en 2D (en sous découpant l'élément en  $4 \times 4$  sous éléments à 4 points de Gauss) présentée dans le chapitre 2.5.2.

$$crit^1 = \left\| \frac{\underline{I} - f \underline{w}}{\underline{I}} \right\|_2, \quad (5.36)$$

$$crit^2 = \max \left( \left| \frac{\underline{I} - f(x) \underline{w}}{\underline{I}} \right| \right) \forall I_i \neq 0. \quad (5.37)$$

Configuration	$\text{cond}(f)$	$\text{crit}^1$	$\text{crit}^2$
1	14.7	$5.50 \times 10^{-2}$	$1.16 \times 10^{-1}$
2	19.0	$1.86 \times 10^{-16}$	$3.33 \times 10^{-16}$
3	$1.76 \times 10^{16}$	$3.23 \times 10^{-16}$	$3.33 \times 10^{-16}$
4	$4.09 \times 10^{16}$	-	-
5	$2.33 \times 10^{16}$	-	-
6	$8.61 \times 10^{16}$	-	-
7	Inf	-	-
8	$5.85 \times 10^{16}$	$3.19 \times 10^{-2}$	$3.33 \times 10^{-16}$
9	$8.38 \times 10^{32}$	$2.46 \times 10^{-16}$	$3.39 \times 10^{-16}$
10	$5.86 \times 10^{16}$	$1.32 \times 10^{-2}$	$3.03 \times 10^{-2}$
11	$5.52 \times 10^{16}$	$1.20 \times 10^{-2}$	$3.03 \times 10^{-2}$
Intégration non conforme (64 points)	-	$3.39 \times 10^{-16}$	$4.44 \times 10^{-16}$

**TABLE 5.5:** Résultats d'intégration pour la première fissure

Configuration	$\text{cond}(f)$	$\text{crit}^1$	$\text{crit}^2$
1	14.7	$2.27 \times 10^{-1}$	$7.30 \times 10^{-1}$
2	16.2	$7.25 \times 10^{-2}$	1.37
3	$1.98 \times 10^{17}$	$3.40 \times 10^{-3}$	$3.41 \times 10^{-2}$
4	$7.55 \times 10^{16}$	-	-
5	$8.21 \times 10^{16}$	-	-
6	$4.46 \times 10^{16}$	-	-
7	$9.08 \times 10^{17}$	-	-
8	$1.54 \times 10^{17}$	$1.06 \times 10^{-1}$	1.37
9	$5.88 \times 10^{17}$	$5.36 \times 10^{-2}$	$6.17 \times 10^{-1}$
10	$1.30 \times 10^{17}$	$9.90 \times 10^{-2}$	$5.36 \times 10^{-1}$
11	$3.59 \times 10^{16}$	$5.2 \times 10^{-3}$	$1.04 \times 10^{-1}$
Intégration non conforme (64 points)	-	$2.59 \times 10^{-16}$	$2.67 \times 10^{-16}$

**TABLE 5.6:** Résultats d'intégration pour la seconde fissure

Configuration	$\text{cond}(f)$	$\text{crit}^1$	$\text{crit}^2$
1	14.7	$1.27 \times 10^{-1}$	$7.83 \times 10^{-1}$
2	16.2	$4.20 \times 10^{-2}$	3.47
3	$1.98 \times 10^{17}$	$2.39 \times 10^{-2}$	$9.15 \times 10^{-1}$
4	$7.55 \times 10^{16}$	-	-
5	$1.03 \times 10^2$	$4.57 \times 10^{-16}$	$8.33 \times 10^{-15}$
6	$4.46 \times 10^{16}$	-	-
7	$9.08 \times 10^{17}$	-	-
8	$1.54 \times 10^{17}$	$5.82 \times 10^{-2}$	3.47
9	$5.88 \times 10^{17}$	$2.97 \times 10^{-2}$	1.72
10	$3.82 \times 10^{16}$	$5.00 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-1}$
11	$1.58 \times 10^{16}$	$2.10 \times 10^{-2}$	$1.22 \times 10^{-1}$
Intégration non conforme (64 points)	-	$9.10 \times 10^{-3}$	$1.34 \times 10^{-1}$

**TABLE 5.7:** Résultats d'intégration pour la troisième fissure

Configuration	$\text{cond}(\underline{\underline{f}})$	$\text{crit}^1$	$\text{crit}^2$
1	$4.28 \times 10^{16}$	$7.8 \times 10^{-3}$	$7.83 \times 10^{-2}$
2	$4.59 \times 10^{16}$	$7.8 \times 10^{-3}$	$7.83 \times 10^{-2}$
3	$7.90 \times 10^{16}$	$5.01 \times 10^{-4}$	$1.04 \times 10^{-2}$
4	$9.11 \times 10^{16}$	-	-
5	$6.12 \times 10^{16}$	-	-
6	$2.59 \times 10^{17}$	-	-
7	$1.68 \times 10^{33}$	-	-
8	$6.13 \times 10^{32}$	$7.80 \times 10^{-3}$	$7.83 \times 10^{-2}$
9	$3.52 \times 10^{17}$	$5.76 \times 10^{-2}$	$7.83 \times 10^{-2}$
10	$7.02 \times 10^{16}$	$1.30 \times 10^{-3}$	$2.14 \times 10^{-2}$
11	$1.63 \times 10^{17}$	$5.76 \times 10^{-2}$	$5.0 \times 10^{-1}$
Intégration non conforme (64 points)	-	$3.54 \times 10^{-2}$	$4.37 \times 10^{-1}$

**TABLE 5.8:** Résultats d'intégration pour la quatrième fissure

Utiliser un seul jeu de points de Gauss pour toutes les fonctions n'aboutit pas car la matrice  $\underline{\underline{f}}$  est mal conditionnée et même en utilisant un algorithme des moindres carrés non linéaire, la solution trouvée n'annule pas le résidu. L'erreur obtenue par un seul jeu de points de Gauss est trop importante pour que nous utilisions cette méthode d'intégration.

Dans un second temps, nous avons donc cherché deux jeux de poids de Gauss différents. Un premier jeu intégrera les fonctions continues et un second jeu intégrera les fonctions discontinues :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} f_1(\underline{x}) d\underline{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_m(\underline{x}) d\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_1) & \cdots & f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(\underline{x}_1) & \cdots & f_m(\underline{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{cont} \\ \vdots \\ w_n^{cont} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

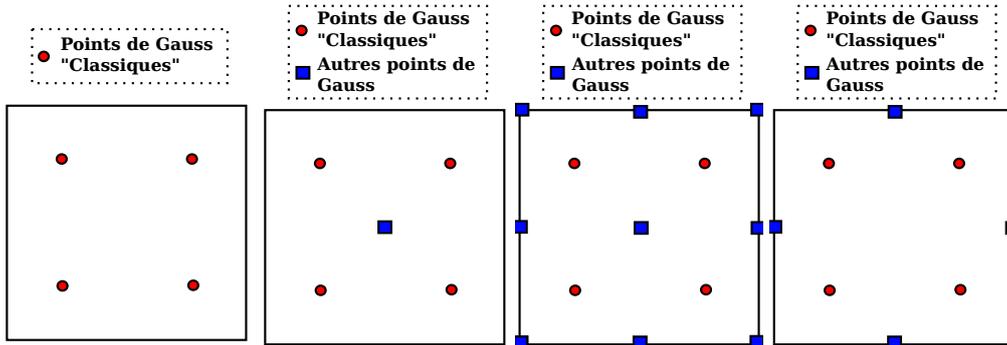
$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} H(\underline{x})f_1(\underline{x}) d\underline{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} H(\underline{x})f_m(\underline{x}) d\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(\underline{x}_1)f_1(\underline{x}_1) & \cdots & H(\underline{x}_n)f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H(\underline{x}_1)f_m(\underline{x}_1) & \cdots & H(\underline{x}_n)f_m(\underline{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{disc} \\ \vdots \\ w_n^{disc} \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Les deux systèmes à résoudre sont donnés dans les équations 5.40 et 5.41.

$$\underline{w}^{cont} = \{\underline{F}^{cont}(\underline{x})\}^{-1} \underline{I}^{cont}, \quad (5.40)$$

$$\underline{w}^{disc} = \{\underline{F}^{disc}(\underline{x})\}^{-1} \underline{I}^{disc}. \quad (5.41)$$

Nous avons essayé avec les mêmes fissures, mais en recherchant avec moins de points de Gauss car les systèmes à résoudre sont plus petits :


**FIGURE 5.12:** localisations des points de Gauss

Le tableau 5.9 regroupe les résultats obtenus pour les différentes positions de fissure et pour les différents emplacements des points de Gauss.

Configuration de la fissure	nombre de points d'intégration	$crit_{cont}^2$	$crit_{disc}^2$
1	4	$6.66 \times 10^{-16}$	0.0
	5	$3.33 \times 10^{-16}$	0.0
	13	$1.50 \times 10^{-15}$	$2.220 \times 10^{-16}$
	8	$2.22 \times 10^{-16}$	$3.31 \times 10^{-16}$
	64	$3.33 \times 10^{-16}$	$4.44 \times 10^{-16}$
2	4	$2.22 \times 10^{-16}$	2.73
	5	$2.22 \times 10^{-16}$	1.5
	13	$1.17 \times 10^{-15}$	$4.00 \times 10^{-15}$
	8	$3.33 \times 10^{-16}$	$2.67 \times 10^{-15}$
	64	$2.22 \times 10^{-16}$	$2.67 \times 10^{-15}$
3	4	$5.00 \times 10^{-16}$	6.36
	5	$4.44 \times 10^{-16}$	3.50
	13	$1.00 \times 10^{-15}$	$2.67 \times 10^{-15}$
	8	$1.11 \times 10^{-16}$	$2.67 \times 10^{-15}$
	64	$4.44 \times 10^{-16}$	0.134
4	4	$5.00 \times 10^{-16}$	$6.63 \times 10^{-2}$
	5	$3.33 \times 10^{-16}$	$4.91 \times 10^{-15}$
	13	$1.00 \times 10^{-15}$	$3.20 \times 10^{-15}$
	8	$5.00 \times 10^{-16}$	$2.58 \times 10^{-15}$
	64	$2.22 \times 10^{-16}$	0.437

**TABLE 5.9:** Résultats d'intégration pour les différents sous-systèmes

Cette méthode d'intégration donne de très bons résultats pour les fissures testées, on pourrait penser à l'étendre en 3D. Mais dans le cas de matériaux inélastiques, la matrice de raideur tangente et les forces internes ne sont plus décomposables en partie continue et discontinue. Un tenseur inélastique intervient dans les déformations, comme donné dans l'équation 5.42. L'expression du tenseur inélastique est donné

dans l'équation 5.43

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{in}, \quad (5.42)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(\sigma, p, \dot{p}) < 0, \\ \dot{p} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} & \text{si } \Phi(\sigma, p, \dot{p}) = 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

Ces déformations inélastiques sont exprimées à partir d'une variable d'érouissage  $\Phi(\sigma, p, \dot{p})$ , donnée dans l'équations 5.44.

$$\Phi(\sigma, p, \dot{p}) = \sigma^{eq} - \sigma_Y(p, \dot{p}). \quad (5.44)$$

Avec  $\sigma^{eq}$  les contraintes équivalentes de Von Mises et  $\sigma_Y$  la limite élastique du matériau qui dépend du taux de déformation inélastique  $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{in} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{in}}$ .

Les contraintes ne sont plus directement données par la loi de Hooke appliquée aux déformations ( $\underline{\underline{\sigma}} \neq D \underline{\underline{\varepsilon}}$ ).

Bien que plutôt satisfaisante, cette méthode ne sera pas implémentée dans EUROPLEXUS car son application à l'élasto-plasticité n'est pas immédiate. Nous préférons conserver la méthode par sous découpage non-conforme décrit au paragraphe précédent (cf. paragraphe 5.1). Le sous-découpage non conforme bien que moins efficace et plus couteux en temps de calcul est applicable à tous les matériaux.

## Chapitre 6

# Couplage « fonctions de niveau-XFEM » pour la propagation de fissures en dynamique explicite

*Ce chapitre décrit les limitations de la méthode d'actualisation des level-sets par résolution des équations d'Hamilton-Jacobi pour la représentation des fissures. Nous avons donc développé une nouvelle méthode géométrique d'actualisation des level-sets en 3D afin de faire propager la fissure. Elle est ensuite utilisée dans plusieurs cas tests afin de tester sa robustesse.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Les limitations de la méthode de résolution des équations d'Hamilton-Jacobi en différences finies . . . . .</b>	<b>98</b>
6.1.1	La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine . . . . .	98
6.1.2	Mise à jour des level-sets . . . . .	100
<b>6.2</b>	<b>Méthodes géométriques appliquées à la dynamique explicite . . . . .</b>	<b>102</b>
6.2.1	La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine . . . . .	102
6.2.2	Mise à jour des level-sets en 3D . . . . .	104
6.2.3	Résultat de l'algorithme de mise à jour géométrique des level-sets . . . . .	105

---

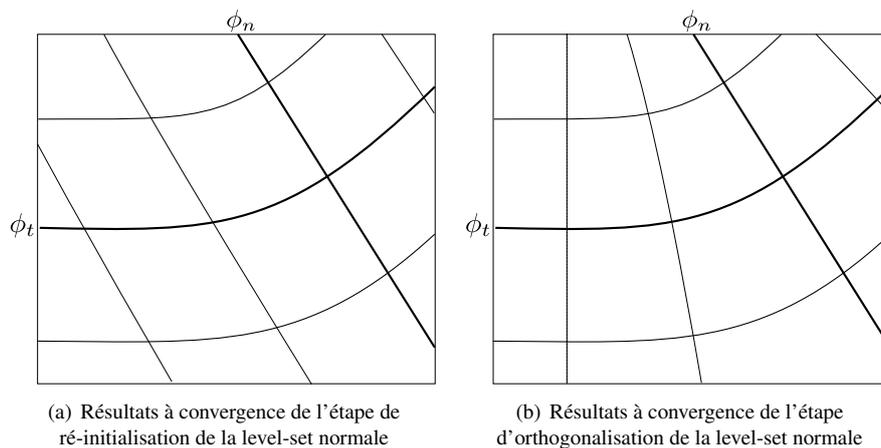
La méthode de représentation de la fissure que nous avons choisi est la méthode des level-sets. Pour cela, deux maillages différents sont utilisés :

- un maillage XFEM où seront calculées les grandeurs mécaniques,
- un maillage régulier différences finies où seront représentées et mises à jour les level-sets.

Afin que tous le maillage XFEM puissent être tranchés par la fissure, il suffit que le maillage level-set englobe le maillage XFEM. Les level-sets sont après projetées sur le maillage XFEM pour déterminer la position de la fissure au cours du temps.

## 6.1 Les limitations de la méthode de résolution des équations d'Hamilton-Jacobi en différences finies

Le chapitre 3 a décrit l'ensemble des équations à résoudre pour actualiser les level-sets dans le cas de la propagation d'une fissure. Deux d'entre elles ne sont cependant pas consistantes, l'équation de ré-initialisation et l'équation d'orthogonalisation de la level-set normale. Les résultats obtenus à convergence de chacune des deux équations sont représentés figures 6.1(a) et 6.1(b) pour un cas particulier. On observe une différence significative entre les deux.



**FIGURE 6.1:** Résultats à convergence des deux équations de ré-initialisation et d'orthogonalisation de la level-set normale.

**Remarque 13** Nous avons choisi un schéma itératif pour résoudre les équations d'Hamilton Jacobi. Le critère de convergence choisi est donné par l'équation 6.1.

$$crit = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\max(\phi^0)} \quad (6.1)$$

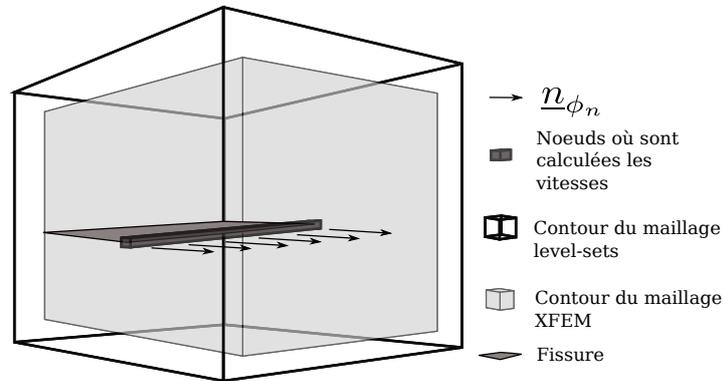
avec  $\phi^{n+1}$  la quantité présentée dans l'équation à l'itération  $n + 1$ ,  $\phi^n$  la quantité à l'itération  $n$  et  $\phi^0$  la quantité avant la résolution de l'équation.

### 6.1.1 La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine

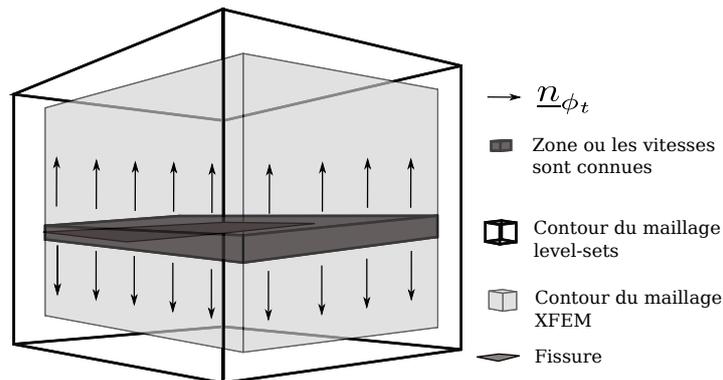
Pour déterminer l'extension du champ des vitesses depuis le front jusqu'à tout le domaine, on suppose que les level-sets sont orthogonales entre elles. On étend la vitesse d'abord orthogonalement à la level-set

normale puis orthogonalement à la level-set tangente. Si les deux level-sets ne sont pas bien orthogonales, certaines zones du domaine seront opaques à l'extension des vitesses.

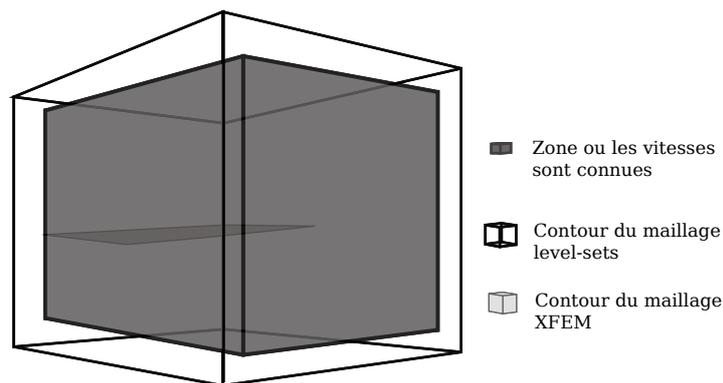
La figure 6.2 illustre le schéma d'extension du champ de vitesses d'abord suivant la normale  $n_{\phi_n}$  puis ensuite suivant la normale  $n_{\phi_t}$ .



(a) Propagation des vitesses suivant la normale à  $\phi_n$ .



(b) Propagation des vitesses suivant la normale à  $\phi_t$ .



(c) Résultat de la propagation des vitesses

**FIGURE 6.2:** Propagation des vitesses des noeuds proches du front de fissure vers le domaine level-set.

Cette méthode a montré une bonne robustesse à condition que l'étape d'orthogonalisation soit bien maîtrisée au pas de temps précédent. Les courbes de convergence pour l'extension du champ des vitesses d'un domaine  $30 \times 30 \times 15$  sont données dans la figure 6.3 pour le cas test de la fissure en hélice (cf. 6.1.2). Observons cependant qu'il faut environ 100 itérations pour atteindre une bonne convergence du champ de vitesse pour que le critère d'erreur soit vérifié à tous les noeuds.

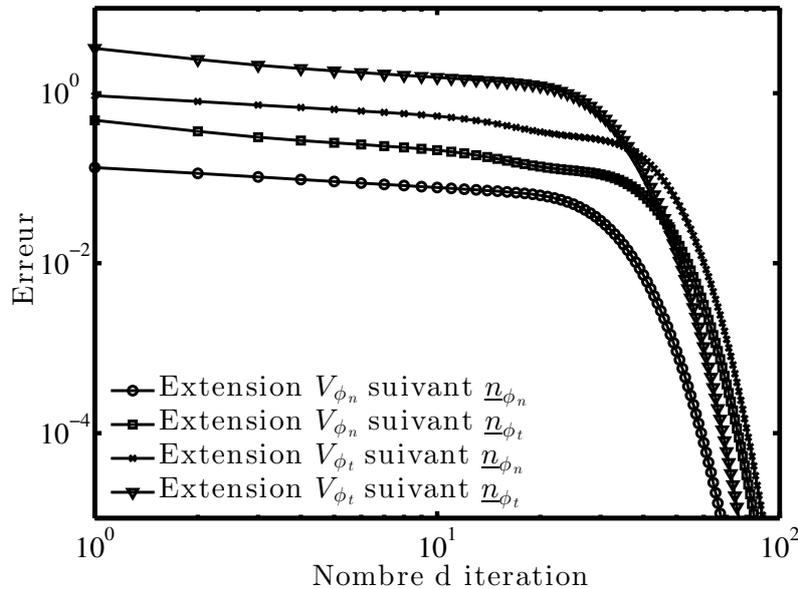
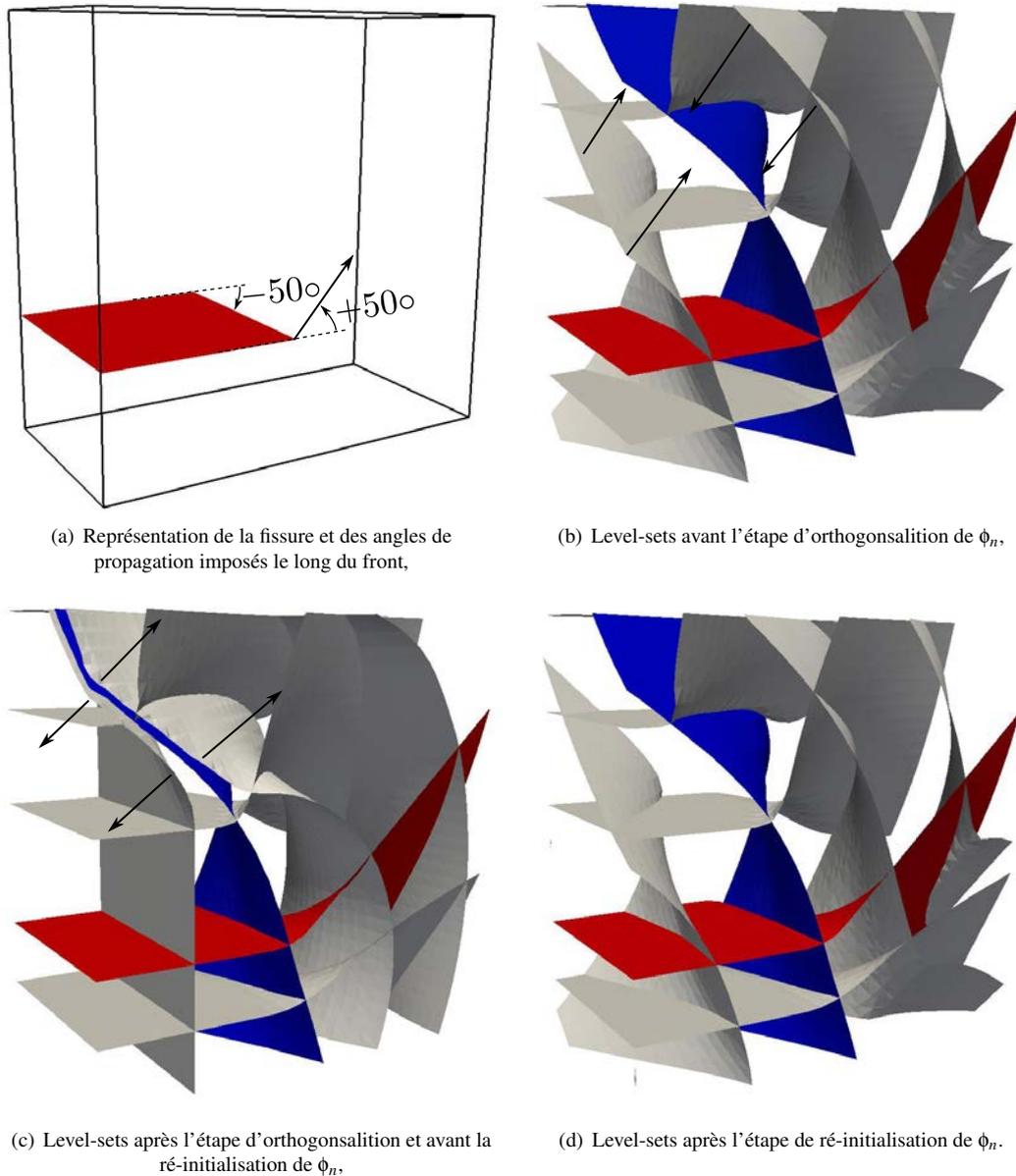


FIGURE 6.3: Courbe de convergence de la propagation des vitesses dans le maillage différences finies.

### 6.1.2 Mise à jour des level-sets

Afin d'illustrer les difficultés rencontrées pour mettre à jour les level-sets avec la méthode usuelle de résolution des équations d'Hamilton-Jacobi, on va se placer dans un cas particulier. On fait avancer une fissure droite traversant une pièce d'une maille différence finie : sur une face, on tourne la fissure de  $+50^\circ$  et sur la face opposée, on la tourne de  $-50^\circ$ , comme montré figure 6.4(a).

Les figures 6.4 montrent les iso-valeurs des level-sets au début de l'étape d'orthogonalisation, à la fin de l'orthogonalisation et à la fin de la ré-initialisation. L'iso-zéro de la level-set normale  $\phi_n$  est en rouge et l'iso-zéro de la level-set tangente  $\phi_t$  est en bleu. On réalise d'abord l'étape d'orthogonalisation jusqu'à satisfaire le critère d'erreur ( $10^{-2}$ ), puis on réalise l'étape de ré-initialisation. On peut remarquer que la level-set  $\phi_n$  se déplace beaucoup lors de l'orthogonalisation (le déplacement est illustré par les flèches dans la figure 6.4(b)) et une fois orthogonalisée, l'étape de ré-initialisation re-déplace la level-set dans l'autre sens (illustré par les flèches dans la figure 6.4(c)). Des déplacements aussi importants des level-sets lors de l'orthogonalisation ne sont pas utiles car ils seront inversés lors de l'étape suivante de ré-initialisation. Cela vient du fait que pour une fissure non plane les level-sets ne peuvent avoir la propriété d'orthogonalité ( $\nabla\phi_n \cdot \nabla\phi_t = 0$ ) et de distance signée ( $\|\nabla\phi_n\| = 1$ ) en même temps. Une des deux étapes doit être privilégiée cependant la convergence de la solution de l'une des équations éloigne la seconde de sa solution.



**FIGURE 6.4:** Déplacements de la level-set  $\phi_n$  entre l'orthogonalisation et la ré-initialisation de  $\phi_n$ .

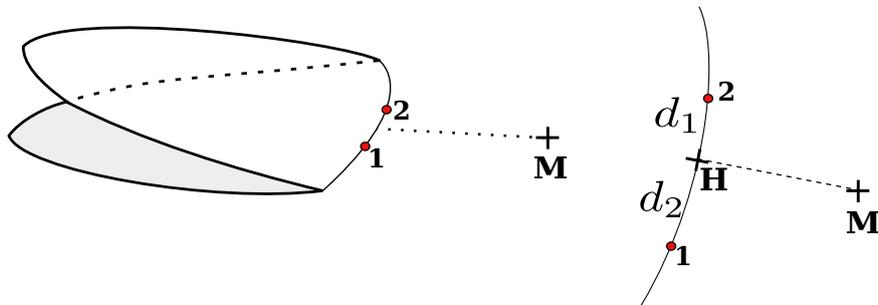
Ce test illustre le défaut de la méthode de mise à jour des level-sets par la résolution des équations d'Hamilton Jacobi. Pour cette raison, nous avons mis en place une autre méthode de mise à jour des level-sets.

## 6.2 Méthodes géométriques appliquées à la dynamique explicite

### 6.2.1 La propagation de la vitesse du front à l'ensemble du domaine

La méthode résolution des équations d'Hamilton-Jacobi proposée ci-dessus est complexe à mettre en oeuvre et coûteuse en temps de calcul. Nous avons donc cherché un autre moyen d'étendre les vitesses du front vers tout le domaine. Pour cela, nous avons choisi une méthode géométrique. En un point donné du maillage différences finies, les 2 points les plus proches du front sont recherchés. Le noeud du maillage est projeté sur le segment formé par les deux points les plus proches. Si le projeté est situé entre les deux points, les vitesses d'avancée sont pondérées par la distance entre ce point du front et le noeud du maillage, comme donné dans l'équation 6.2 et la figure 6.5.

$$\dot{a}_M = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \dot{a}_2 + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \dot{a}_1. \quad (6.2)$$



**FIGURE 6.5:** Projeté du noeud du maillage sur le segment formé par les deux points du front les plus proches.

Si le projeté n'est pas entre les deux points, on prend directement les vitesses du point le plus proche. Cette méthode est rustique mais simple à mettre en oeuvre et peu coûteuse. Ce qui convient bien pour un code de dynamique explicite. Remarquons que seul nous importe la position du front de fissure. Les autres valeurs des level-sets ne servent qu'à signer les distances.

L'ensemble des étapes de cet algorithme est donné dans l'algorithme 8.

---

**Algorithme 8:** Algorithme de propagation des vitesses du front vers le maillage différences finies.

---

**Data :** Les noeuds du front  $P$  et leurs vitesses  $V_{\phi_n}$  et  $V_{\phi_r}$ .

**Result :** Vitesses propagées en tous points du maillage.

Boucle sur tous les noeuds du maillage :

**for** ( $i_n = 1 : n_{nd}$ ) **do**

Recherche des 2 points du front les plus proches  $\underline{x}_1$  et  $\underline{x}_2$  du point  $\underline{x}_{P_i}$ .

Simplification d'écriture :

$$\underline{A} = \underline{x}_1,$$

$$\underline{B} = \underline{x}_2,$$

$$\underline{C} = \underline{x}_{P_i}.$$

Calcul du projeté du noeud sur le segment formé par les deux points :

$$\underline{H} = (\underline{AC} - (\underline{AC} \cdot \frac{\underline{AB}}{\|\underline{AB}\|}) \cdot \frac{\underline{AB}}{\|\underline{AB}\|}) + \underline{C}. \quad (6.3)$$

**if** ( $(\underline{AH} \cdot \underline{BH}) > 0.0$ ) **then**

Si le projeté est entre les deux points,

$$V_{\phi_n}^M = \frac{\|\underline{AH}\|}{\|\underline{AH}\| + \|\underline{BH}\|} V_{\phi_n}^2 + \frac{\|\underline{BH}\|}{\|\underline{AH}\| + \|\underline{BH}\|} V_{\phi_n}^1, \quad (6.4)$$

$$V_{\phi_r}^M = \frac{\|\underline{AH}\|}{\|\underline{AH}\| + \|\underline{BH}\|} V_{\phi_r}^2 + \frac{\|\underline{BH}\|}{\|\underline{AH}\| + \|\underline{BH}\|} V_{\phi_r}^1. \quad (6.5)$$

**else**

**if** ( $\|\underline{AH}\| \geq \|\underline{BH}\|$ ) **then**

Si le projeté est plus proche du point 1,

$$V_{\phi_n}^M = V_{\phi_n}^1, \quad (6.6)$$

$$V_{\phi_r}^M = V_{\phi_r}^1. \quad (6.7)$$

**else**

Si le projeté est plus proche du point 2,

$$V_{\phi_n}^M = V_{\phi_n}^2, \quad (6.8)$$

$$V_{\phi_r}^M = V_{\phi_r}^2. \quad (6.9)$$

**end**

**end**

**end**

---

Cet algorithme a montré de bons résultats dans la propagation des vitesses. Il est très robuste et peu coûteux en temps de calcul car un seul passage est nécessaire sur chacun des noeuds du maillage.

### 6.2.2 Mise à jour des level-sets en 3D

La méthode de mise à jour des level-sets choisie respecte au mieux les contraintes suivantes :

- un algorithme robuste du fait de l'intégration temporelle par le schéma explicite,
- peu couteux en temps de calcul,
- possibilité d'avoir des fissures à géométries complexes (cylindrique, forme en V...),
- le critère de rupture peut imposer des changements brutaux d'angle de propagation de fissure, il faut pouvoir modifier la direction de fissure sans perdre d'information sur la localisation de la fissure.

Le critère de rupture décrit au chapitre 1.2.2 ne nécessite pas de connaître les coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  utilisées dans le calcul de l'intégrale d'interaction. Les level-sets servent donc :

- à reconnaître les éléments coupés par la fissure,
- à reconnaître les éléments de la pointe de fissure,
- à discrétiser le front de fissure.

Pour répondre à toutes ces contraintes, nous avons choisi une méthode géométrique proche de la méthode  $\phi_{\psi r \theta}$  présentée dans le chapitre 3.2.3.1. En s'inspirant du code donné par Menouillard [MEN 07], nous avons étendu cette méthode au 3D. On va se placer dans le plan normal au front de fissure, à l'intersection de l'iso-zéro de la level-set normale et de l'iso-zéro de la level-set tangente. Appelons  $\theta$  l'angle de propagation de la fissure et  $\dot{a}$  la vitesse d'avancée du front de fissure. Le domaine des level-sets est divisé en 4 zones différentes définies dans la figure 6.6. Une stratégie de mise à jour différente est choisie pour chaque zone. Le tableau 6.2.2 regroupe les équations de définition des zones et de mise à jour des level-sets. La level-set  $\phi_t$  ne change pas dans la zone 1, elle tourne de l'angle  $\theta$  dans la zone 3 et 2. Enfin dans la zone 4, elle forme un arc de cercle afin d'assurer la continuité de la level-set. Quant à la level-set tangente  $\phi_n$ , elle avance de  $\dot{a}\Delta t$  en tournant de l'angle  $\theta$  dans les quatre zones.

Zones	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Définitions	$-\tan(\theta)\phi_t^0 \geq \phi_n^0$ $\phi_n^0 \leq 0$	$-\tan(\theta)\phi_t^0 < \phi_n^0$ $\phi_n^0 \leq 0$	$-\tan(\theta)\phi_t^0 \leq \phi_n^0$ $\phi_n^0 > 0$	$-\tan(\theta)\phi_t^0 > \phi_n^0$ $\phi_n^0 > 0$
$\phi_t$	$\phi_t^0$	Equation 6.12	Equation 6.13	Equation 6.14
$\phi_n$	Equation 6.15			

**TABLE 6.1:** Définition des zones et des équations de mise à jour des level-sets.

$$\theta = \arctan\left(\frac{V_{\phi_t}}{V_{\phi_n}}\right), \quad (6.10)$$

$$\dot{a} = \sqrt{V_{\phi_t}^2 + V_{\phi_n}^2}, \quad (6.11)$$

$$\phi_t = \min(\|(\phi_t^0)\|, \|(\phi_t^0 \cos(\theta) - \phi_n^0 \sin(\theta))\|) \cdot \text{sign}(\phi_t^0), \quad (6.12)$$

$$\phi_t = \phi_t^0 \cos(\theta) - \phi_n^0 \sin(\theta), \quad (6.13)$$

$$\phi_t = \sqrt{(\phi_t^0)^2 + (\phi_n^0)^2} \text{sign}(\phi_t^0), \quad (6.14)$$

$$\phi_n = (\phi_n^0 \cos(\theta) + \phi_t^0 \sin(\theta)) - \dot{a}\Delta t. \quad (6.15)$$

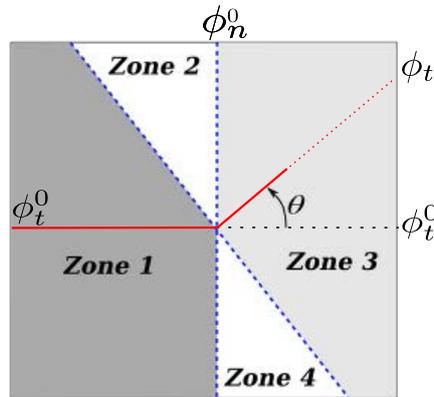


FIGURE 6.6: Définition des zones de mise à jour des level-sets.

### 6.2.3 Résultat de l'algorithme de mise à jour géométrique des level-sets

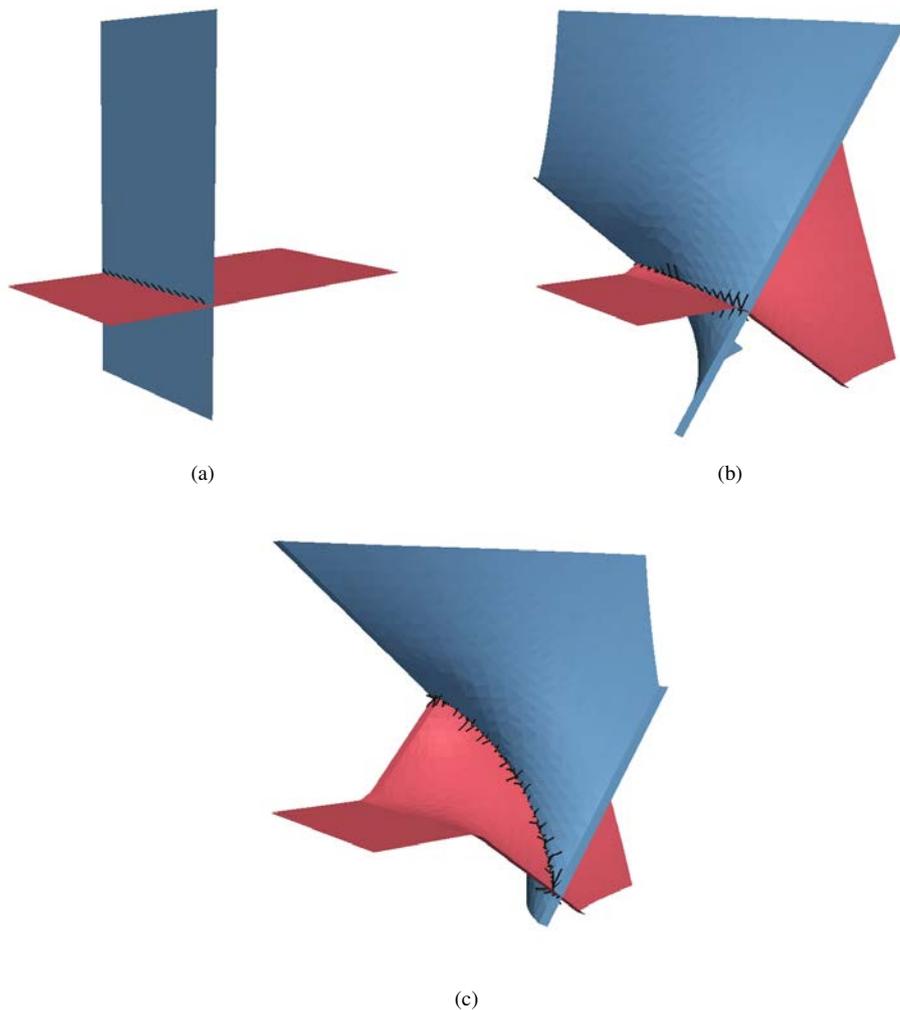
La méthode géométrique décrite précédemment a été appliquée dans un certain nombre de cas test. La pièce n'est soumise à aucune sollicitation, seule la vitesse d'avancée de la fissure a été changée. Les dimensions de la pièce, la taille du maillage XFEM et le maillage différences finies sont donnés dans le tableau 6.2.3. Le maillage différences finies englobe le maillage XFEM. L'avancée de référence des fissures est la même pour tous les cas test, égale à une taille de maille différence finie  $\Delta a_{ref} = 0.0035m$ .

Taille de la pièce	$0.1m \times 0.1m \times 0.05m$
Taille de maille XFEM	$5mm$
Maillage différences finies	$30 \times 30 \times 16$
Tailles de maille différences finies	$0.0035m \times 0.0035m \times 0.0034m$

TABLE 6.2: Dimensions et tailles des maillages pour les cas test sur les level-sets.

#### 6.2.3.1 Level-set en hélice

On reprend ici le test décrit dans le paragraphe 6.1.2, et illustré figure 6.4(a). La vitesse d'avancée de la fissure est nulle jusqu'au 20<sup>e</sup> pas de temps (ce choix a été fait de façon totalement arbitraire). Puis on fait évoluer l'angle linéairement de  $-50^\circ$  à  $+50^\circ$  dans l'épaisseur. Les figures 6.7 montrent les deux level-sets  $\phi_n = 0$  (en bleu) et  $\phi_t = 0$  (en rouge) avec les points de discrétisation du front pour le 1<sup>er</sup>, le 20<sup>e</sup> et le 30<sup>e</sup> pas de temps.

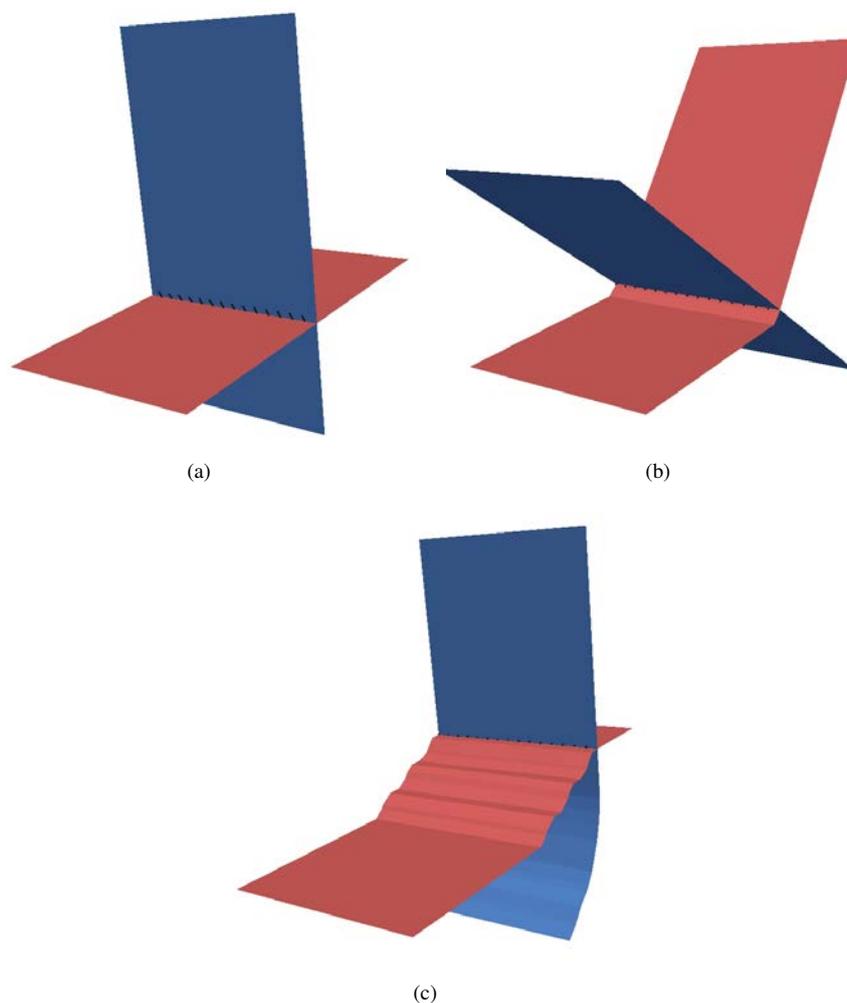


**FIGURE 6.7:** Résultats de la mise à jour des level-sets en hélice. Level-sets au départ 6.7(a), au 20<sup>e</sup> pas de temps 6.7(b) et au 30<sup>e</sup> pas de temps 6.7(c).

On remarque que la level-set n'est pas bien régulière sur les bords car l'angle de la fissure n'évolue pas linéairement sur les bords. Certains points du maillage level-set n'ont pas de vitesses. Le maillage level-set étant plus grand que le maillage XFEM, on prend directement la vitesse du point le plus proche. Cela n'a pas d'importance pour les valeurs des level-sets dans le maillage de la structure car ces points sont en dehors du maillage XFEM.

### 6.2.3.2 Variation brutale de l'angle d'avancée de la fissure

On va imposer à la fissure faire des changements d'angle de propagation tous les deux pas de temps. La fissure reste immobile jusqu'au 20<sup>e</sup> pas de temps, puis la fissure bifurque d'un angle de +50° tous les  $m$  pas de temps ( $m = 20 + 4n \forall n \in \mathbb{N}$ ) et de -50° tous les  $k$  pas de temps ( $k = 22 + 4n \forall n \in \mathbb{N}$ ). Les avancées de fissure sont constantes de  $\Delta a_{ref}$  à partir du 20<sup>e</sup> pas de temps. Les figures 6.8 montrent les deux level-sets  $\phi_n = 0$  (en bleu) et  $\phi_n = 0$  (en rouge) pour le 1<sup>er</sup>, le 20<sup>e</sup> et le 30<sup>e</sup> pas de temps.

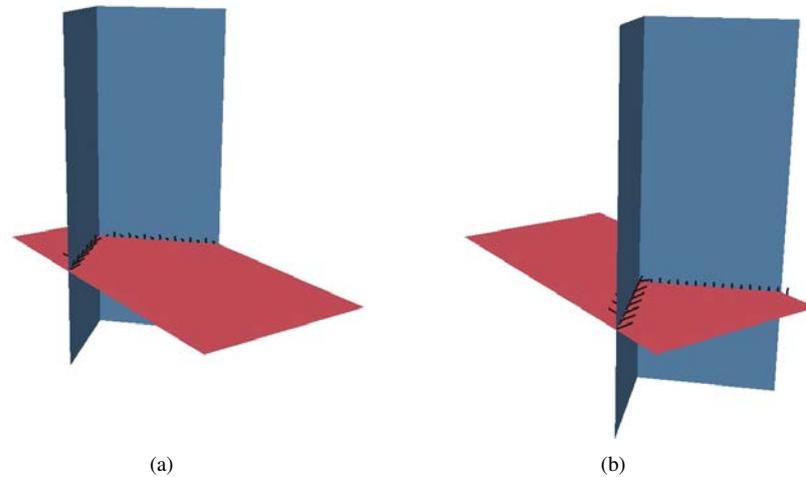


**FIGURE 6.8:** Résultats de la mise à jour des level-sets pour une fissure droite soumise à une variation intempesive de l'angle d'avancée. Level-sets au départ 6.8(a), au 20<sup>e</sup> pas de temps 6.8(b) et au 30<sup>e</sup> pas de temps 6.8(c).

Ce cas test permet de vérifier la robustesse de la méthode de mise à jour des level-sets.

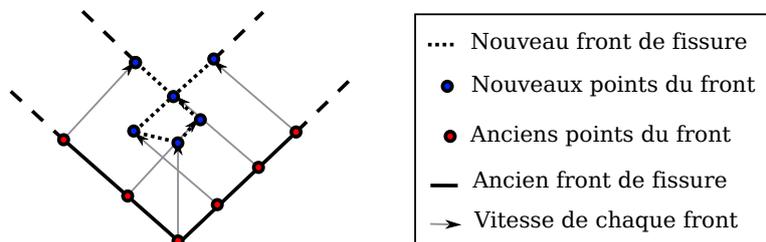
### 6.2.3.3 Front de fissure en V

Le front de fissure forme un V qui va avancer à déplacement constant  $\Delta a_{ref}$  à partir du 20<sup>e</sup> pas de temps. Les figures 6.9 montrent les level-sets  $\phi_n = 0$  (en bleu) et  $\phi_n = 0$  (en rouge) avec les points de discrétisation du front pour le 20<sup>e</sup> et le 30<sup>e</sup> pas de temps.



**FIGURE 6.9:** Résultats de la mise à jour des level-sets pour la fissure en V. Level-sets au 20<sup>e</sup> pas de temps 6.9(a) et au 30<sup>e</sup> pas de temps 6.9(b)

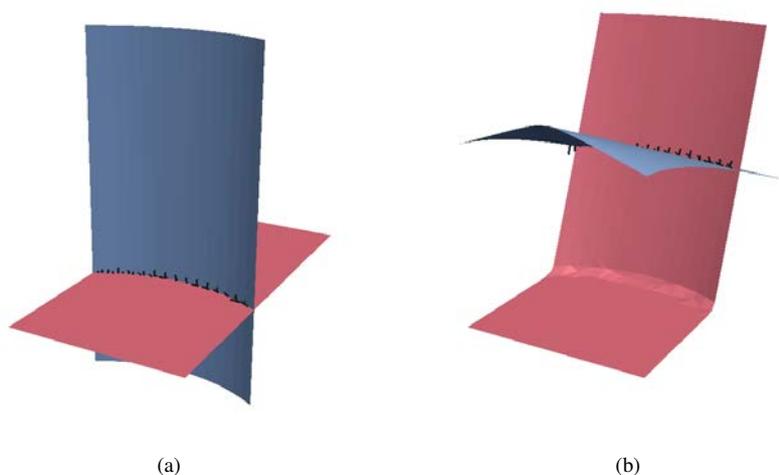
On remarque ici que la méthode des level-sets permet de s'affranchir des difficultés que l'on pourrait avoir si on utilisait un maillage pour représenter la fissure. Ce cas test serait alors difficilement réalisable car les points du front s'entrecroiseraient comme illustré figure 6.10.



**FIGURE 6.10:** Utilisation d'un maillage pour représenter la fissure, résultat de la mise à jour de la fissure pour un front de fissure en V.

#### 6.2.3.4 Bifurcation à 70° d'un front en arc de cercle

Le front de fissure forme un arc de cercle qui va bifurquer d'un angle de 70° à vitesse constante à partir du 20<sup>e</sup> pas de temps. Ensuite la fissure avance à vitesse constante  $\Delta a_{ref}$  à chaque pas de temps. Les figures 6.11 montrent les level-sets  $\phi_n = 0$  (en bleu) et  $\phi_n = 0$  (en rouge) avec les points de discrétisation du front pour le 1<sup>er</sup> et le 30<sup>e</sup> pas de temps.



**FIGURE 6.11:** Résultats de la mise à jour des level-sets pour la fissure en arc de cercle soumise à un changement d'angle de  $70^\circ$  au  $20^e$  pas de temps et au  $30^e$  pas de temps.

La nouvelle méthode choisie pour la 3D est robuste, simple à mettre en oeuvre et peu couteuse en temps de calcul. Elle est bien adaptée à la dynamique transitoire tridimensionnelle.



## **Troisième partie**

# **Applications numériques et comparaisons expérimentales**



## Chapitre 7

# Analyse 3D de cas principalement bidimensionnels

*Afin de vérifier l'efficacité et la justesse des concepts théoriques décrits dans ce mémoire, nous nous sommes dans un premier temps attachés à simuler en 3D les cas déjà réalisés en 2D.*

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Cas test en mode I pur</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>7.2</b>	<b>L'expérience de Compact Compression Specimen [MAI 85, BUI 92] (CCS)</b> . . . . .	<b>118</b>
<b>7.3</b>	<b>L'expérience Kalthoff [KAL 00] et Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b] (ZRR)</b> . . . . .	<b>126</b>
7.3.1	Simulation de l'expérience de Kalthoff [KAL 00] . . . . .	126
7.3.2	Simulation de l'expérience de Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b] . . . . .	132
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>135</b>

---

## 7.1 Cas test en mode I pur

La première simulation réalisée est une plaque tranchée au milieu jusqu'à sa moitié. Le chargement est un effort de traction symétrique sur les deux faces supérieure et inférieure de l'éprouvette. La figure 7.1 illustre la géométrie et le chargement appliqué. Le tableau 7.1 regroupe les informations relatives à la géométrie, aux maillages et au matériau. Cette simulation n'a pas été expérimentée, elle sert donc simplement de vérification du critère de rupture en mode I.

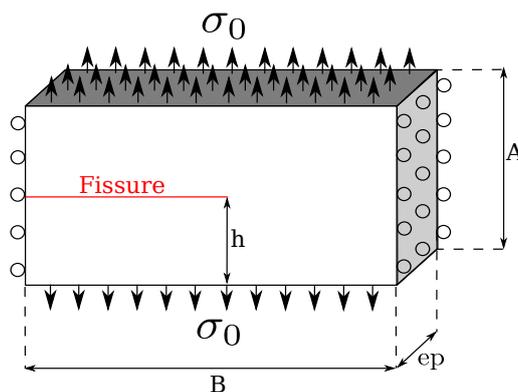


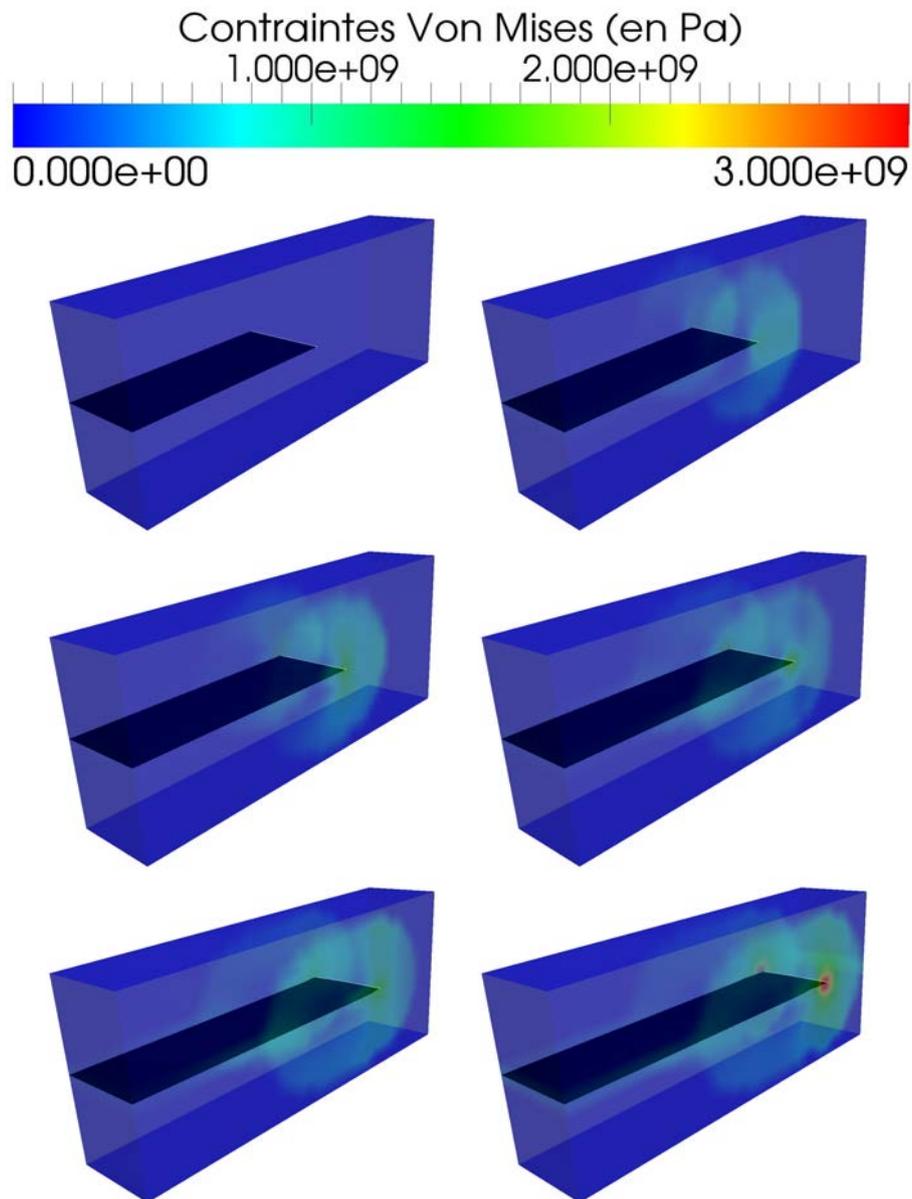
FIGURE 7.1: Géométrie de l'éprouvette pour la simulation en mode I pur.

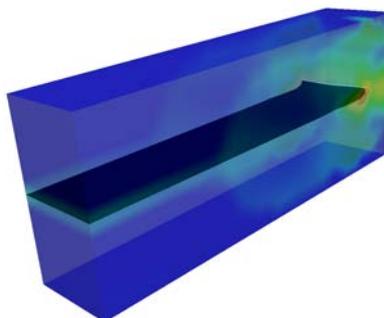
Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur	$A$	$4.0m$
Longueur	$B$	$10m$
Hauteur de la fissure	$h$	$2.0m$
Longueur de fissure	$a_0$	$5.0m$
Hauteur du chargement	$h_P$	$16.5mm$
Épaisseur	$ep$	$1.0m$
Chargement de l'éprouvette	$\sigma_0$	$500MPa$
Taille de maille XFEM		$0.2m$
Maillage différences finies		$102 \times 52 \times 22$
Tailles de maille différences finies		$0.1m \times 0.1m \times 0.1m$
Module d'Young	$E$	$210GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$0.3$
Masse volumique	$\rho$	$1800Kg.m^{-3}$
Célérité des ondes de Rayleigh	$c_r$	$1500m.s^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_{Ic}$	$35Mpa$
Longueur locale	$R$	$0.6m$
Paramètre des moyennes en temps	$T_{moy}$	$0.2$
Paramètre des moyennes en espace	$R_{moy}$	$0.2m$

TABLE 7.1: Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation du mode I.

Pour calculer l'avancée de la fissure, on moyenne les contraintes dans une sphère  $\Omega$  de rayon  $R = 0.6m$ . De plus on n'avance le front en un point  $M$  que lorsque l'avancée de fissure est plus grande que  $T_{moy} \times$  la taille d'un élément en pointe (ici  $T_{moy} = 0.2$ ). La vitesse d'avancée  $V$  au point  $M$  est prise comme la moyenne des vitesses de tous les points du front situés à la distance  $R_{moy}$  de  $M$  (ici  $R_{moy} = 0.2m$ ) soit 1 élément.

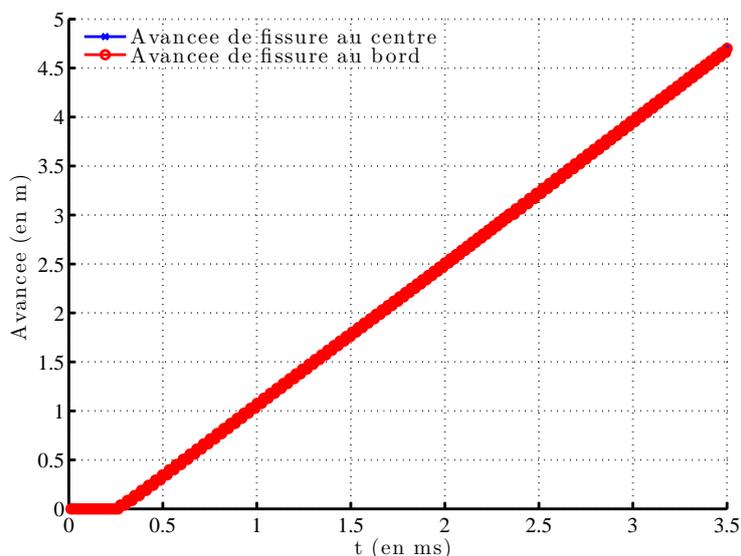
La figure 7.2 montre les contraintes équivalentes de Von Mises et l'avancée de fissure au cours du temps. La forme du front est tout à fait convenable, même si on retrouve quelques instabilités à la fin du calcul.





**FIGURE 7.2:** Évolution des contraintes de Von Mises et de la fissure pour  $t = 0ms$ ,  $t = 0.5ms$ ,  $t = 1.0ms$ ,  $t = 1.5ms$ ,  $t = 2.0ms$ ,  $t = 2.5ms$  et  $t = 3.0ms$ .

L'évolution de l'avancée du front de fissure est donnée figure 7.3. On constate que la vitesse de propagation est constante à partir de l'initiation de la propagation à  $t \simeq 200\mu s$ .



**FIGURE 7.3:** Longueur de la fissure en fonction du temps pour la simulation en mode I pur.

Les composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure sont données dans la figure 7.4. La valeur du critère de rupture en fonction du temps est donnée figure 7.5. Les deux graphiques montrent que les valeurs sont très chahutées bien que l'on ait une sollicitation en mode I uniquement. Ce sont les moyennes effectuées sur les avancées du front et sur les points de discrétisation du front qui permettent de supprimer ces oscillations. La vitesse de propagation est calculée en moyennant les valeurs locales dans le temps le long du front, ce qui atténue sensiblement l'effet des oscillations sur la propagation du front.

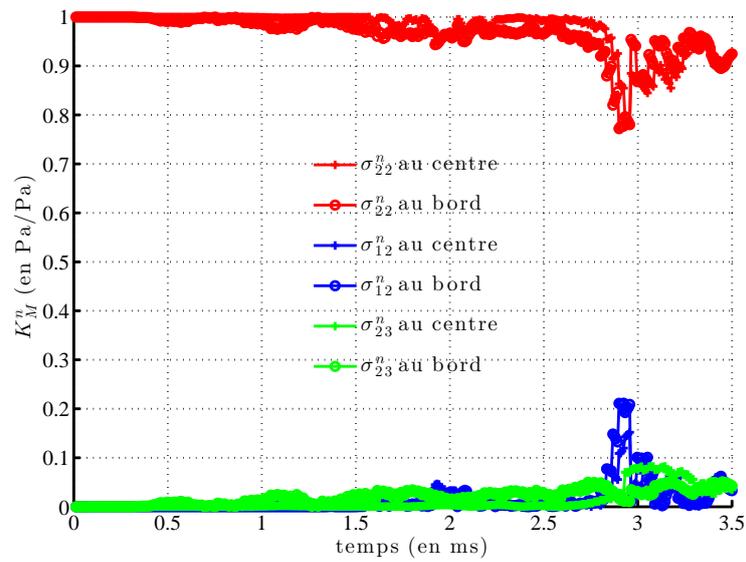


FIGURE 7.4: Évolution temporelle des composantes du tenseur moyen en pointe de fissure pour la simulation en mode I pur.

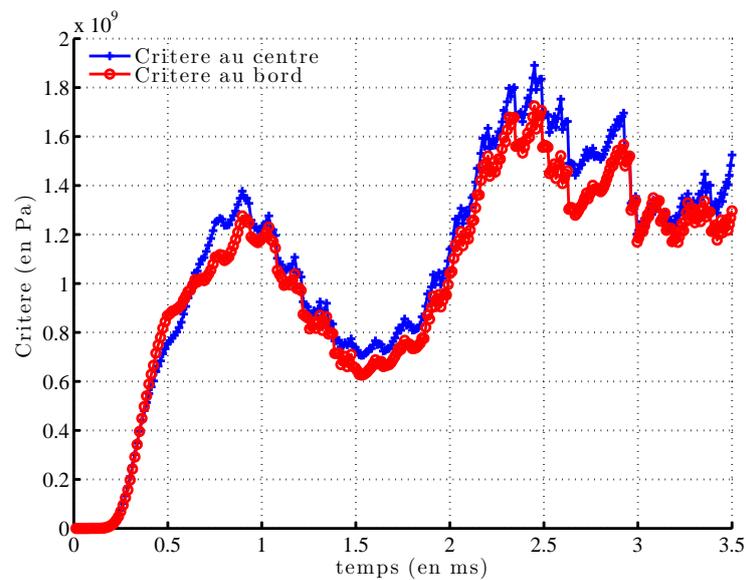


FIGURE 7.5: Critère de rupture en fonction du temps pour la simulation en mode I pur.

Cette simulation montre que l'implémentation des XFEM en 3D et le critère 3D fonctionnent correctement pour la propagation de fissure en mode I.

## 7.2 L'expérience de Compact Compression Specimen [MAI 85, BUI 92] (CCS)

Dans cette section, une propagation dynamique de fissure en mode mixte est présentée, en combinant du mode I et du mode II. Cette expérience fait l'objet de publications de Bui [BUI 92] et de Maigre *et al.* [MAI 85], elle a également été simulée entre autres par Elguedj [ELG 09] et Menouillard [MEN 07] en 2D. La géométrie de l'éprouvette est donnée dans la figure 7.6. L'éprouvette est symétrique mais le chargement  $P_0(t)$ , appliqué uniquement d'un côté, fait que la déformée et la propagation de la fissure ne le sont pas. Les caractéristiques du matériau sont celles du polyméthacrylate de méthyle (PMMA) avec un comportement élastique linéaire. Les paramètres du matériau, des maillages et de la simulation sont donnés dans le tableau 7.2. Le chargement appliqué  $P_0(t)$  est une pression donnée en figure 7.7. La moyenne des contraintes se fait dans une demi-sphère de rayon  $R$ . On moyenne les vitesses le long du front dans une boule de rayon  $R_{moy} = 3mm$ . Le front n'est avancé que lorsque la fissure avance de plus  $T_{moy} \times$  la taille d'élément en pointe, ici nous avons utilisé  $T_{moy} = 0.5$ .

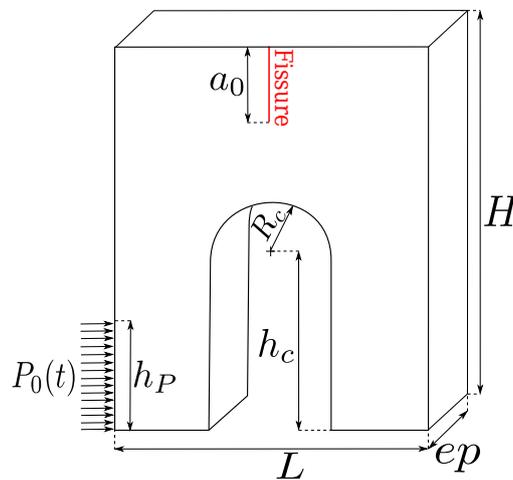
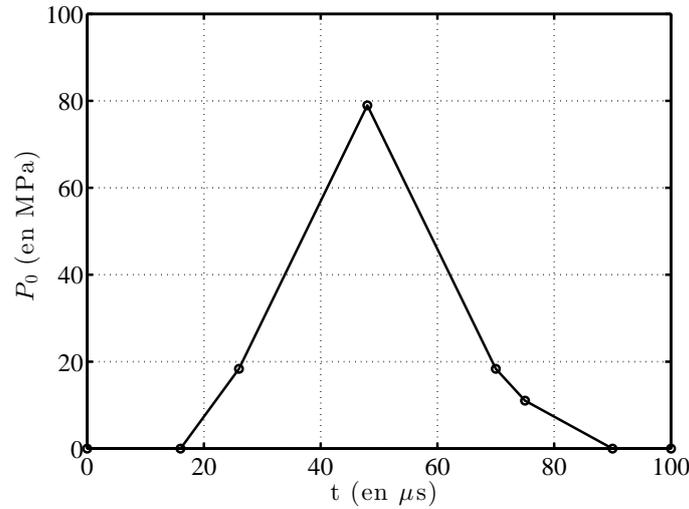


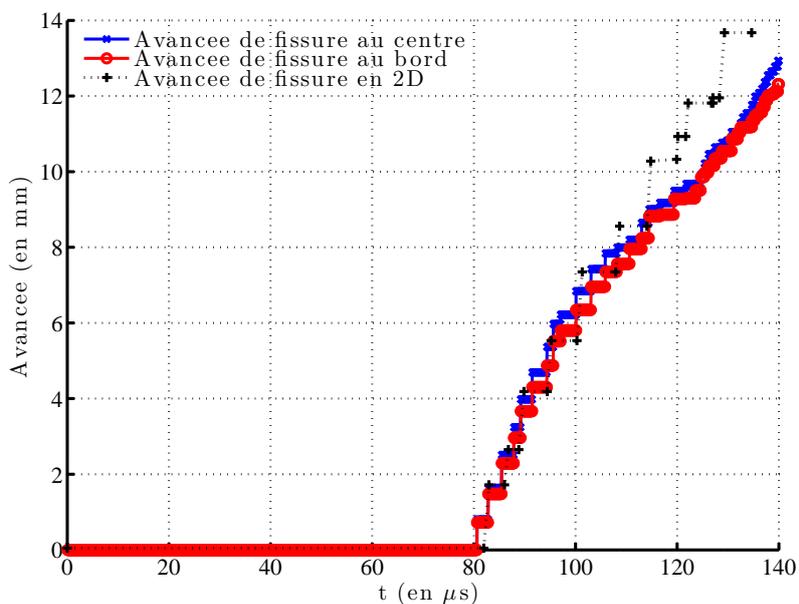
FIGURE 7.6: Géométrie de l'éprouvette pour la simulation de l'expérience CCS.

FIGURE 7.7: Chargement  $P_0(t)$  appliqué lors de la simulation de CCS.

Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur	$H$	70mm
Largueur	$L$	60mm
Hauteur du cercle	$h_c$	25mm
Rayon du cercle	$R_c$	10mm
Longueur de fissure	$a_0$	13mm
Hauteur du chargement	$h_p$	16.5mm
Épaisseur	$ep$	16.5mm
Taille de maille XFEM		1.4mm
Maillage différences finies		100 × 100 × 18
Tailles de maille différences finies		120mm × 120mm × 120mm
Module d'Young	$E$	5.76GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.42
Masse volumique	$\rho$	1180Kg.m <sup>-3</sup>
Célérité des ondes de Rayleigh du PMMA	$c_r$	1280m.s <sup>-1</sup>
Célérité des ondes de Rayleigh pour le calcul	$c_r^{calcul}$	5000m.s <sup>-1</sup>
Contrainte critique	$\sigma_{Ic}$	16.0MPa
Longueur locale	$R$	4.0mm
Paramètre des moyennes en temps	$T_{moy}$	0.6
Paramètre des moyennes en espace	$R_{moy}$	4.0mm

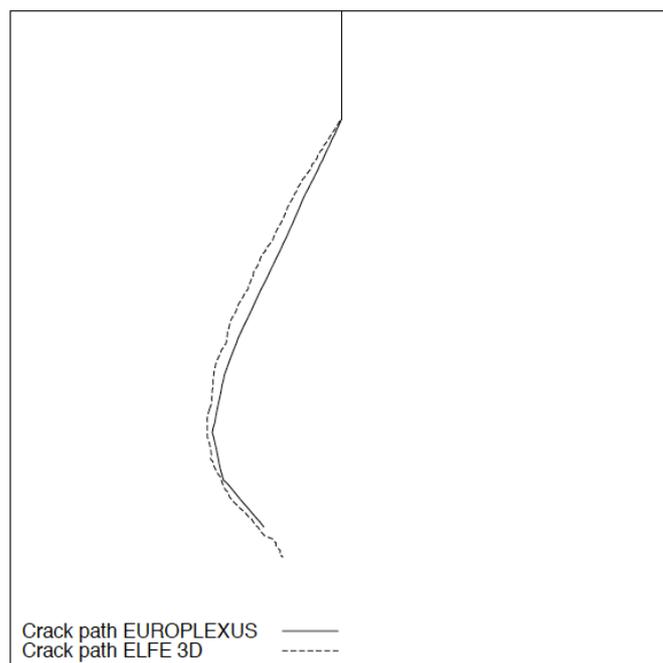
TABLE 7.2: Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de CCS.

La figure 7.8 donne l'évolution de la longueur de fissure en fonction du temps pour la simulation 3D et la simulation 2D obtenue par Menouillard. On peut remarquer que les résultats sont proches. À la fin du calcul, la courbe 3D s'éloigne un peu de la courbe 2D. Cette différence vient des contraintes chahutées sur la fin du calcul (cf. graphique 7.14).



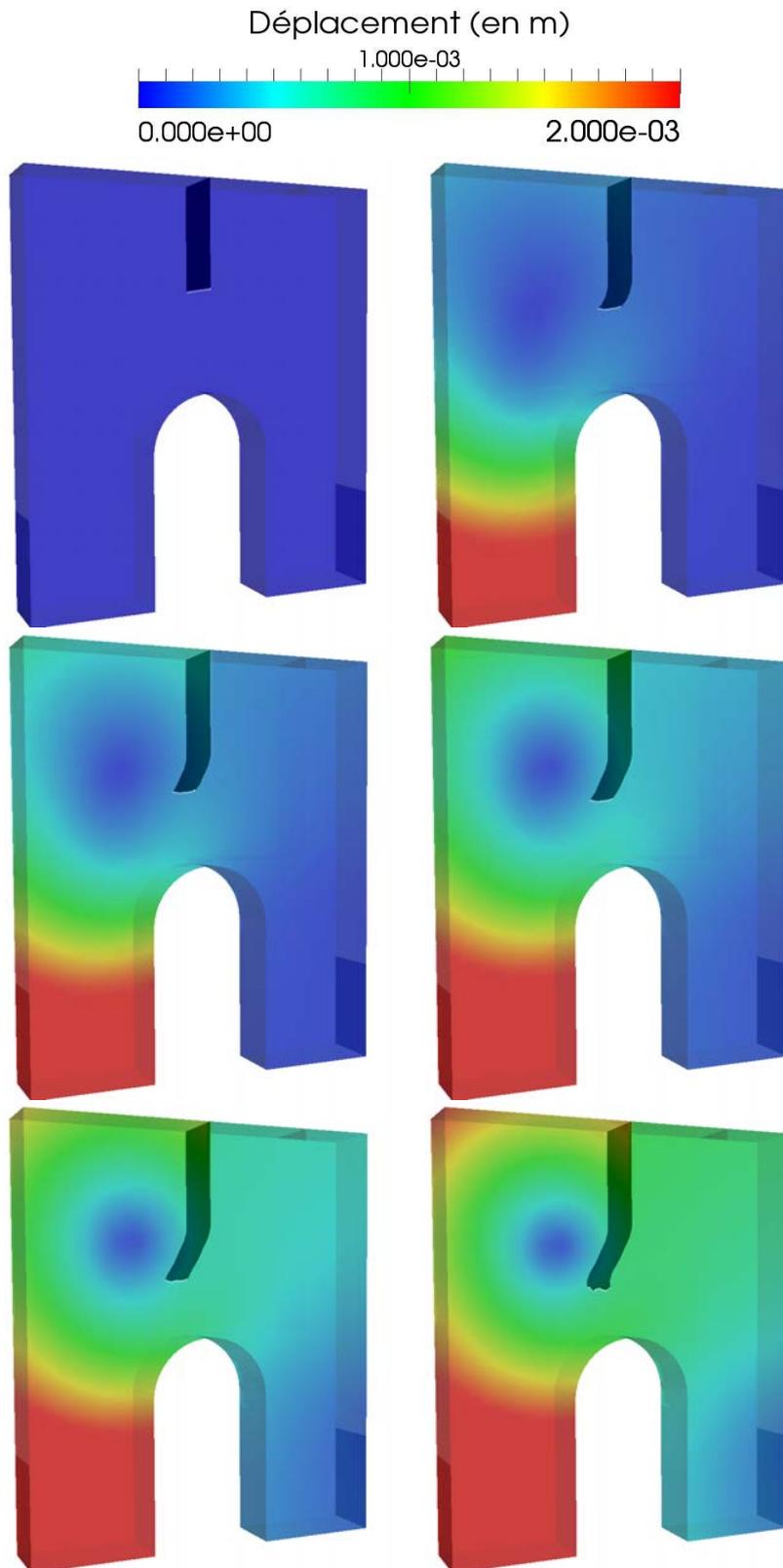
**FIGURE 7.8:** Évolution de la longueur de fissure en fonction du temps en 3D et en 2D tirée de [MEN 07] pour la simulation de CCS.

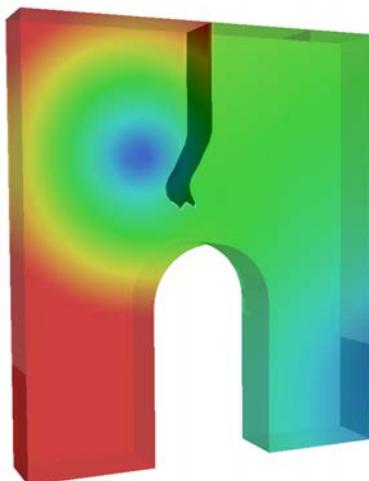
La figure 7.9 montrent les trajets de fissure obtenus en 2D dans ELFE3D et dans EUROPLEXUS. Pour la simulation 2D, Menouillard a utilisé un critère avec l'intégrale d'interaction pour ELFE3D et un critère en prenant la direction normale au tenseur des contraintes moyennées en pointe de fissure pour EUROPLEXUS. La figure 7.11 montre les contraintes de Von Mises et le trajet de la fissure obtenus en 3D. On peut remarquer que les deux trajets sont très similaires au début de la propagation, mais quelques différences sur la fin.



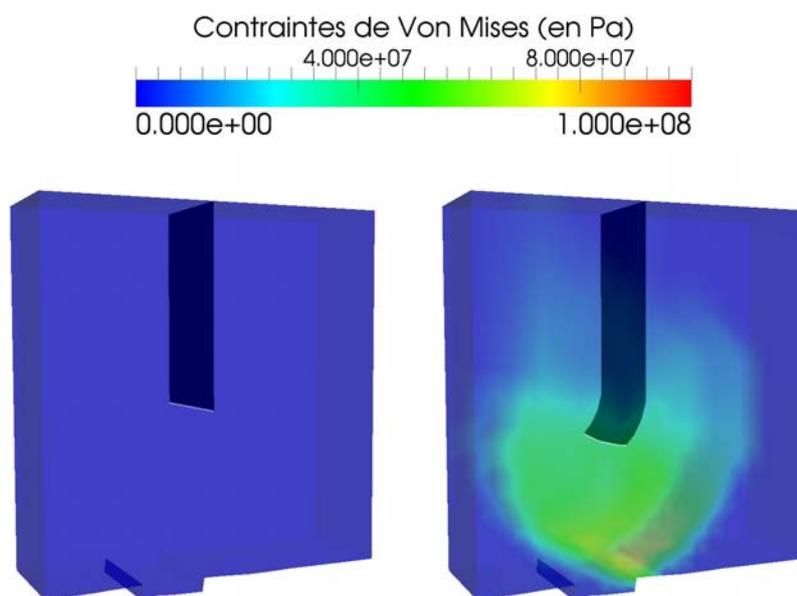
**FIGURE 7.9:** Trajet de la fissure en 2D tiré de [MEN 07].

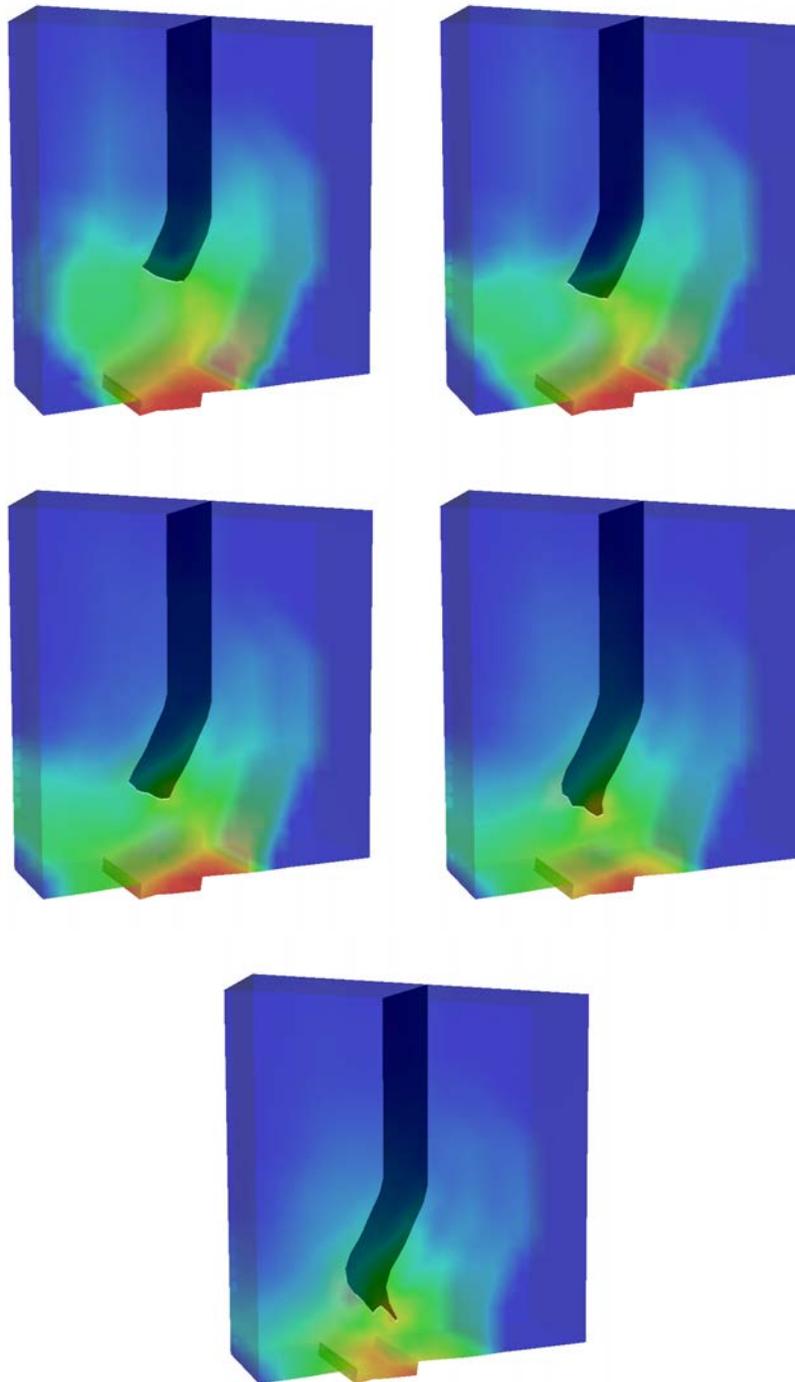
À l'initiation de la propagation, l'angle formée entre le plan de symétrie de la pièce et la fissure est très proche de l'angle obtenue en 2D ( $30^\circ$ ). Vers  $120\mu s$ , la fissure bifurque pour retourner dans le plan de symétrie de la pièce. Cet effet est observé également en 2D. On a une bonne corrélation des trajets de fissure entre la 2D et la 3D.





**FIGURE 7.10:** Évolution des déplacements à  $t = 0\mu s$ ,  $t = 90\mu s$ ,  $t = 100\mu s$ ,  $t = 110\mu s$ ,  $t = 120\mu s$ ,  $t = 130\mu s$  et  $t = 140\mu s$ .





**FIGURE 7.11:** Zoom sur l'évolution des contraintes de Von Mises pour la zone autour de la fissure à  $t = 0\mu s$ ,  $t = 90\mu s$ ,  $t = 100\mu s$ ,  $t = 110\mu s$ ,  $t = 120\mu s$ ,  $t = 130\mu s$  et  $t = 140\mu s$ .

La valeur du critère  $\sigma_{Ic}$  utilisée par Menouillard en 2D ( $10.0MPa$ ), est proche de la valeur utilisée dans la simulation 3D ( $16.0MPa$ ) même si elle ne sont pas rigoureusement les mêmes. Menouillard utilise une

loi de comportement matériau élastique parfaite, alors que nous avons utilisé une loi linéaire élastique. Le critère utilisé par Menouillard et Haboussa moyenne les contraintes en arrière de la pointe de fissure, comme illustré figure 7.12. Le critère 3D utilise seulement les contraintes en avant du front, c'est pour cette raison que  $\Omega$  est représenté par une demi-sphère et pas une sphère complète. Si on voulait garder rigoureusement la même valeur que le critère 2D, il faudrait également utiliser un domaine  $\Omega$  en demi-cylindre qui suit l'abscisse curviligne le long du front de fissure. Ce domaine n'a pas été choisi car il est trop complexe à mettre en place numériquement. La différence de forme du domaine d'intégration et la loi de comportement matériau sont les raisons principales qui expliquent que la contrainte critique 3D est supérieure de 60% à la contrainte critique 2D pour des tailles de maille similaire.

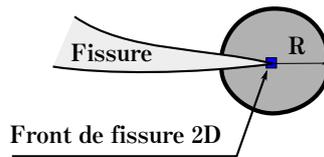


FIGURE 7.12: Calcul du critère de rupture de Menouillard et Haboussa.

Les composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure et la valeur du critère au court des temps sont données dans les figures 7.13 et 7.14. On peut remarquer que ces grandeurs sont très chahutées, allant jusqu'à voir la composante  $\sigma_{23}^n$  augmenter fortement en fin de calcul, alors que l'on a aucune sollicitation en mode III. Remarquons que ces oscillations arrivent avec l'initiation de la fissure. L'augmentation de la composante  $\sigma_{23}^n$  fait augmenter l'angle  $\theta_c$  du calcul au point de retourner la fissure.

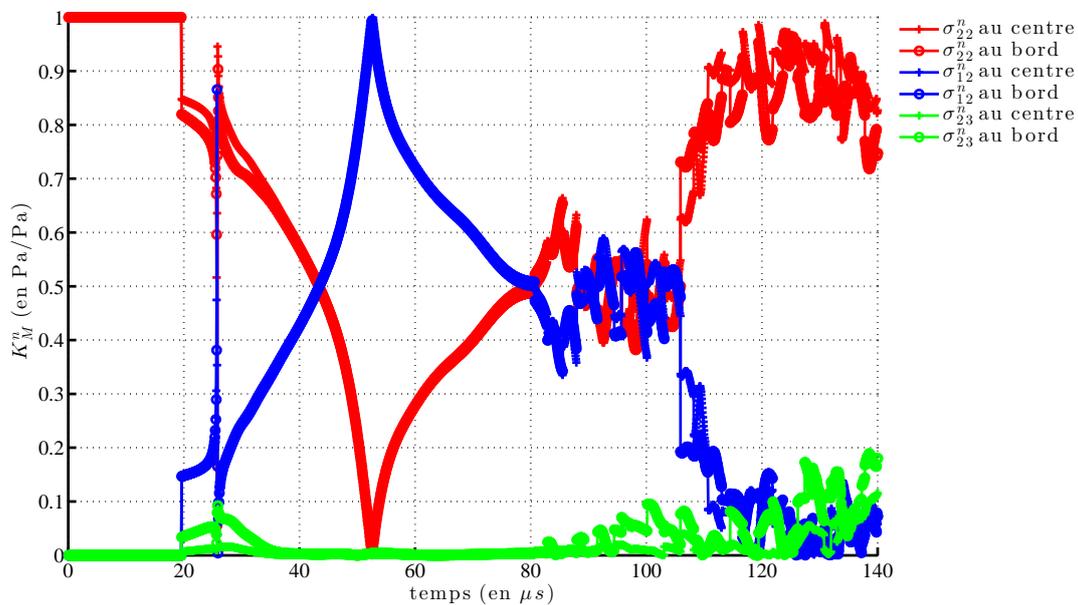


FIGURE 7.13: Évolution temporelle des composantes du tenseur moyenné en pointe de fissure pour la simulation de CCS.

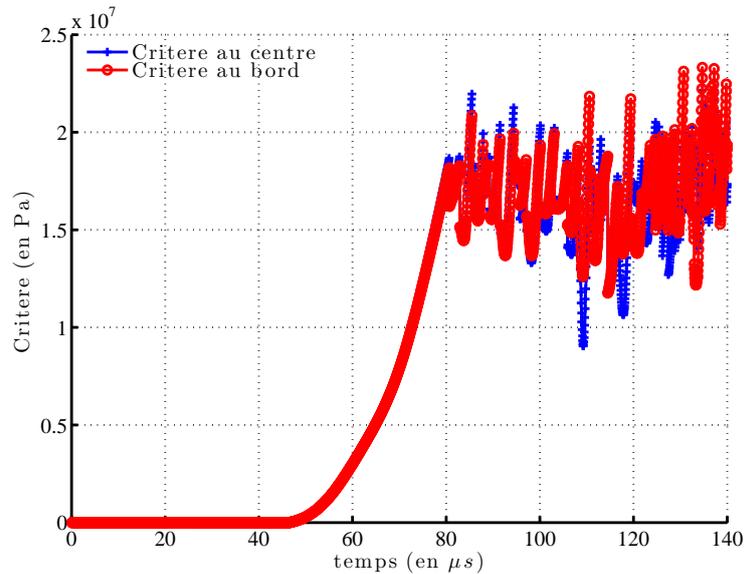


FIGURE 7.14: Critère d'avancée de la fissure en fonction du temps pour la simulation de CCS.

Les résultats obtenus pour cette simulation sont proches des valeurs obtenues en 2D. On peut cependant noter la différence sur la valeur du critère de rupture qui doit être modifié en 3D. Le volume d'intégration est différent en 3D et en 2D ce qui explique cette différence.

### 7.3 L'expérience Kalthoff [KAL 00] et Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b] (ZRR)

#### 7.3.1 Simulation de l'expérience de Kalthoff [KAL 00]

On s'intéresse à présent à un cas de propagation de fissure en mode mixte. L'éprouvette est une plaque rectangulaire impactée par un projectile d'une vitesse  $V_0$  comme donné dans la figure 7.15. Le projectile n'est pas simulé, on considère qu'il transmet directement sa vitesse aux noeuds sur le bord de l'éprouvette. Haboussa [HAB 12] utilise cette simulation afin de vérifier l'efficacité de son critère avec la transition traction-cisaillement. Suivant la vitesse d'impact de l'éprouvette, la fissure se propage suivant un mode de traction ( $V_0 \leq 26m.s^{-1}$ ) ou un mode de cisaillement ( $V_0 > 26m.s^{-1}$ ). Le matériau utilisé est un acier maraging 18Ni1900 dont la loi de comportement est modélisée par un matériau élasto-plastique isotrope de Von Mises. La courbe de traction est donnée dans la figure 7.16 et les paramètres matériaux dans le tableau 7.3. Le matériau n'étant pas linéaire, le programme anticipe l'arrivée de la zone plastique en augmentant le nombre de point de Gauss dans une sphère de rayon  $R_{pla}$  autour de la pointe de fissure.

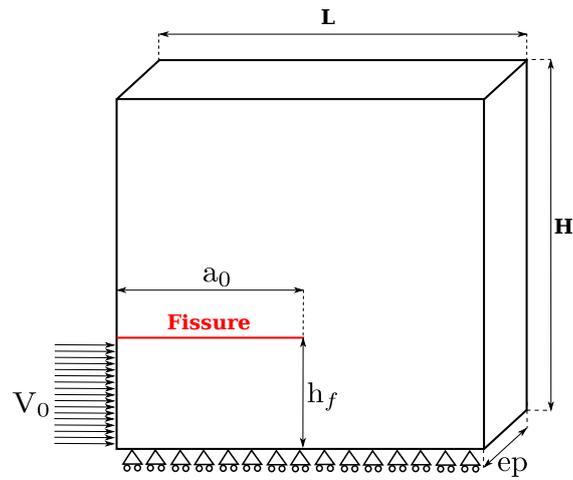


FIGURE 7.15: Géométrie et conditions aux limites de la simulation de Kalthoff.

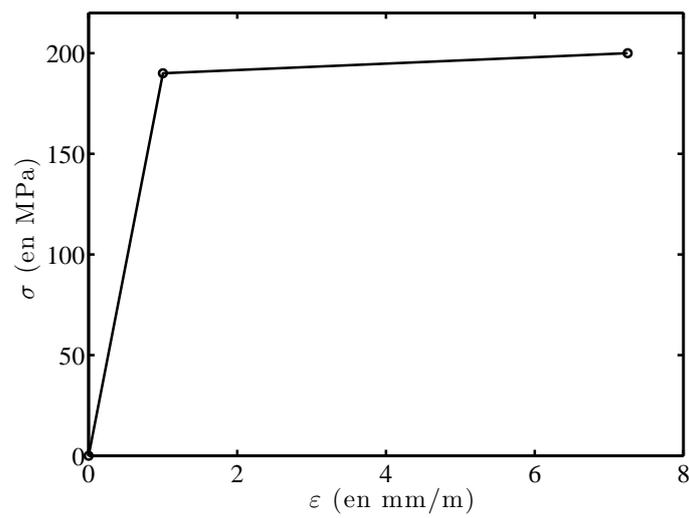
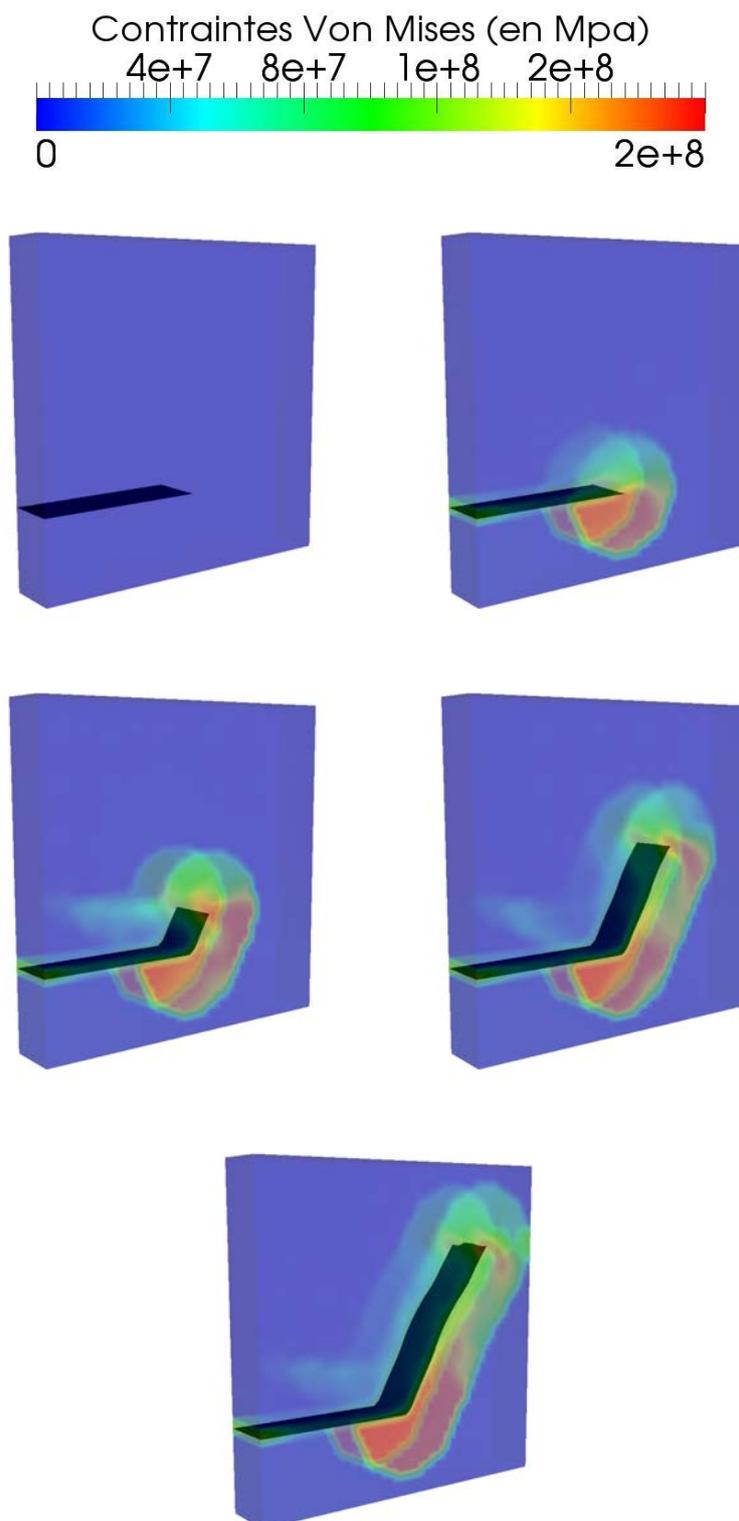


FIGURE 7.16: Courbe de traction utilisée lors de la simulation pour le matériau 18Ni1900.

7. Analyse 3D de cas principalement bidimensionnels

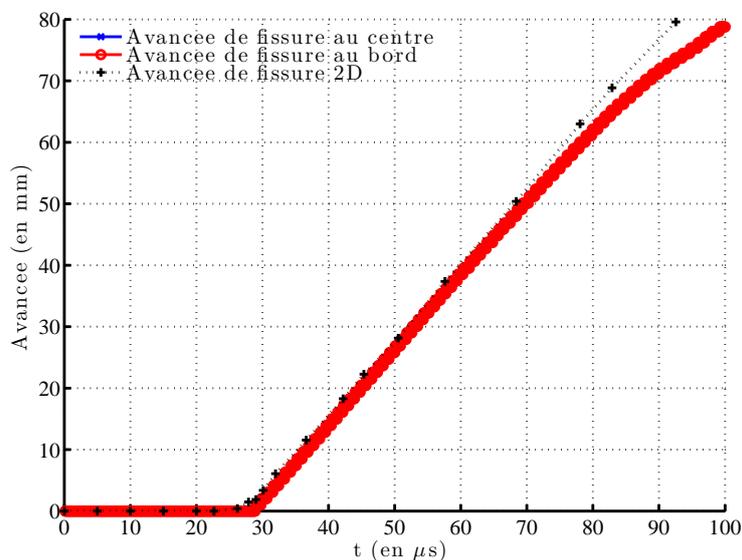
Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur	$H$	100mm
Longueur	$L$	100mm
Hauteur de la fissure	$h$	25mm
Longueur de fissure	$a_0$	50mm
Hauteur du chargement	$h_P$	25mm
Épaisseur	$ep$	16.0m
Taille de maille XFEM		2mm
Maillage différences finies		$102 \times 102 \times 27$
Tailles de maille différences finies		$1.0mm \times 1.0mm \times 1.0mm$
Module d'Young	$E$	190GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3
Masse volumique	$\rho$	$8000Kg.m^{-3}$
Célérité des ondes de Rayleigh du 18Ni1900	$c_r$	$2800m.s^{-1}$
Célérité des ondes de Rayleigh du calcul	$c_r$	$1600m.s^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_{Ic}$	35MPa
Contrainte limite élastique	$\sigma_Y$	190MPa
Module tangent	$E_t$	1.6Gpa
Longueur locale	$R$	7mm
Rayon plastique	$R_{pla}$	20mm
Paramètre des moyennes en temps	$T_{moy}$	0.5
Paramètre des moyennes en espace	$R_{moy}$	10.0mm

**TABLE 7.3:** Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de l'expérience de Kalthoff.



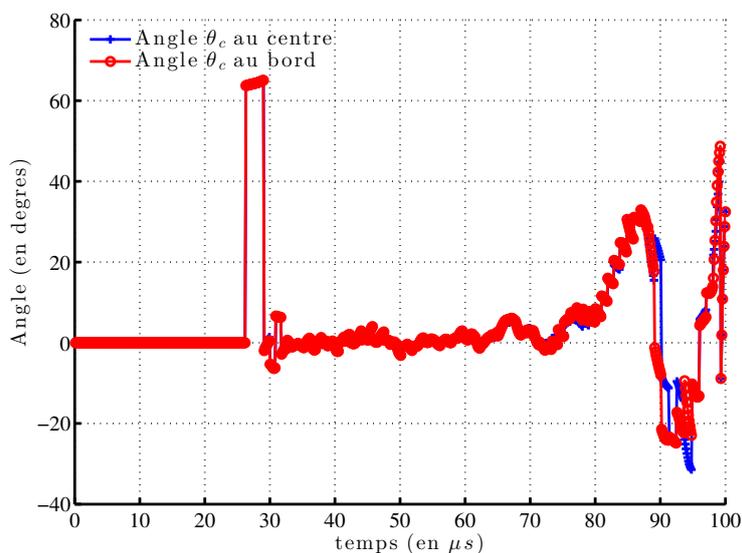
**FIGURE 7.17:** Évolution des contraintes de Von Mises pour  $t = 0.0ms$ ,  $t = 20\mu s$ ,  $t = 40\mu s$ ,  $t = 60\mu s$  et  $t = 80\mu s$  pour la simulation de Kalthoff.

La figure 7.18 donne la longueur de la fissure en fonction du temps pour la simulation 3D et pour la simulation de Kalthoff en 2D obtenue par Elguedj [ELG 09]. On peut remarquer que les résultats entre les deux sont très proches.



**FIGURE 7.18:** Évolution de la longueur de fissure en fonction du temps pour la simulation de Kalthoff en 3D et en 2D tirée de [ELG 09].

L'angle  $\theta_c$  en fonction du temps est tracé dans la figure 7.19. Au début de la propagation, la fissure part à  $70^\circ$  puis suit une trajectoire en ligne droite jusqu'à  $80\mu s$ . L'angle devient ensuite un peu plus chaotique.



**FIGURE 7.19:** Angle  $\theta_c$  en fonction du temps en 3D pour la simulation de Kalthoff.

Les composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure sont données dans la figure 7.20. La valeur du critère de rupture en fonction du temps est donnée figure 7.21.

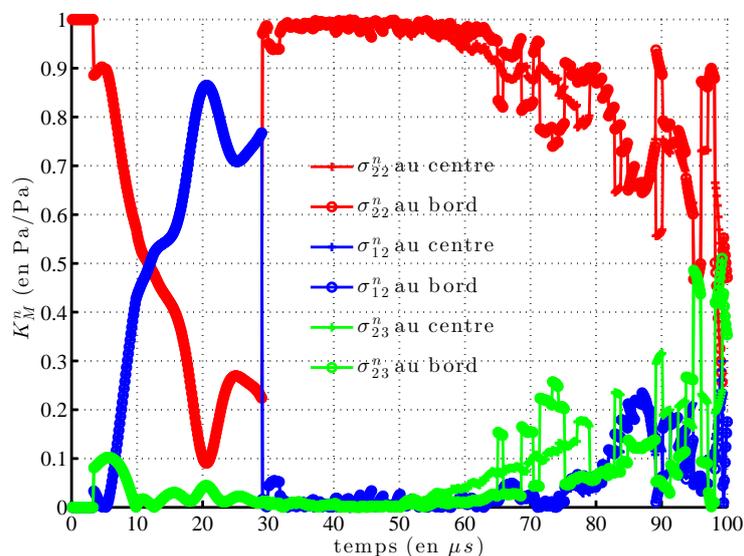


FIGURE 7.20: Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure en 3D pour la simulation de Kalthoff.

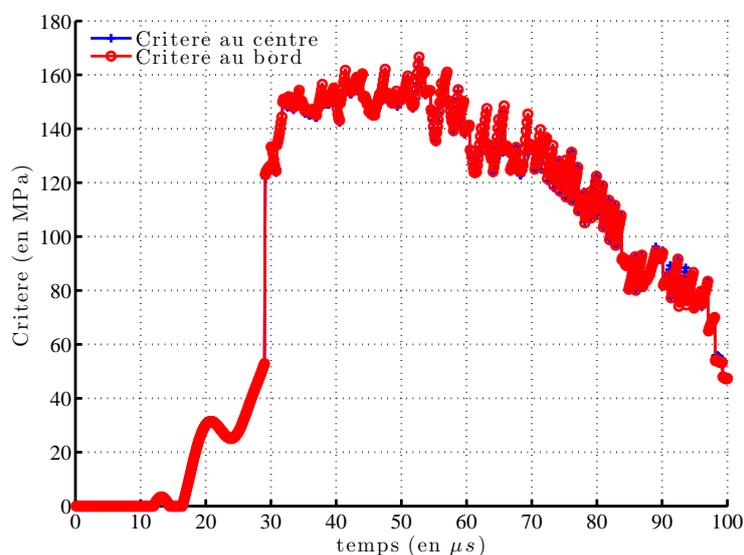


FIGURE 7.21: Évolution de l'intensité des contraintes moyennées en pointe de fissure en fonction du temps en 3D pour la simulation de Kalthoff.

L'intensité des contraintes a beaucoup augmenté à partir de l'initiation de la fissure. Remarquons sur le graphique 7.20 que la composante  $\sigma_{23}^n$  devient supérieure à la composante  $\sigma_{12}^n$  à partir de  $60\mu s$  alors que la pièce n'est pas sollicitée en mode III. De plus, l'angle de la fissure est proche de zéro, avec un front de

fissure quasiment droit. Un travail sur le critère de propagation doit encore être réalisé afin de trouver des raisons à ces variations de contraintes qui influence ensuite l'angle  $\theta_c$  de propagation.

### 7.3.2 Simulation de l'expérience de Zhou Rhosakis Ravichandran [ZHO 96a, ZHO 96b]

Cette expérience est une variante de l'expérience de Kalthoff, avec une seule fissure et une géométrie non symétrique. La géométrie et les conditions aux limites sont données figure 7.22.

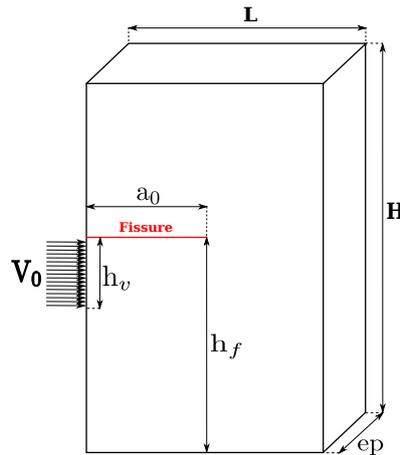


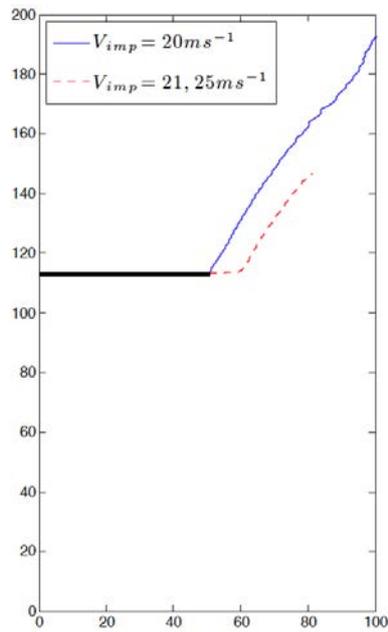
FIGURE 7.22: Géométrie et conditions aux limites de la simulation de l'expérience ZRR.

Les paramètres matériaux sont les mêmes que les paramètres utilisés pour la simulation de l'expérience de Kalthoff. Seuls les paramètres du critère de rupture diffèrent légèrement car la taille de maille n'est pas la même entre les deux simulations. Les paramètres du critère sont donnés dans le tableau 7.4.

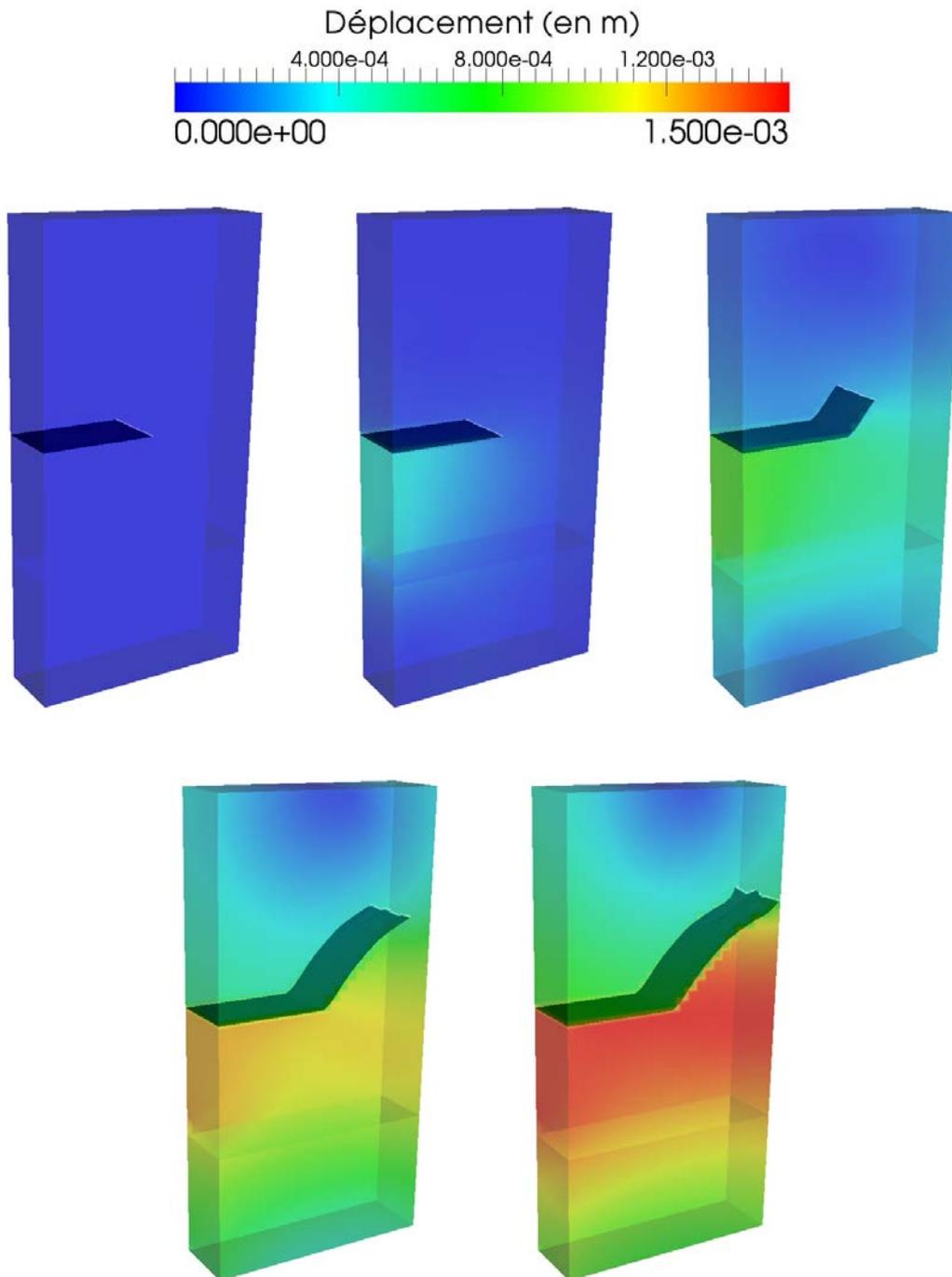
Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur	$H$	203.2mm
Longueur	$L$	101.6mm
Hauteur de la fissure	$h_f$	113.15mm
Hauteur de l'impacteur	$h_v$	50.8mm
Longueur de fissure	$a_0$	50.8mm
Épaisseur	$ep$	30mm
Taille de maille XFEM		4mm
Maillage différences finies		$75 \times 150 \times 23$
Tailles de maille différences finies		$3mm \times 3mm \times 3mm$
Contrainte critique	$\sigma_{Ic}$	35MPa
Longueur locale	$R$	12mm
Rayon plastique	$R_{pla}$	36mm
Paramètre des moyennes en temps	$T_{moy}$	0.25
Paramètre des moyennes en espace	$R_{moy}$	4mm

TABLE 7.4: Dimensions, tailles des maillages et paramètres matériau pour la simulation de l'expérience ZRR.

Les figures 7.24 montrent l'évolution de la fissure au cours du temps en 3D. On peut comparer les trajets de fissure à ceux obtenues en 2D par Haboussa données figure 7.23.



**FIGURE 7.23:** Trajet de la fissure pour la simulation de l'expérience ZRR par Haboussa en 2D pour deux vitesses de  $V_0$ .



**FIGURE 7.24:** Évolution des déplacements pour  $t = 0\mu s$ ,  $t = 20\mu s$ ,  $t = 40\mu s$ ,  $t = 60\mu s$  et  $t = 70\mu s$  pour une vitesse  $V_0 = 20m.s^{-1}$  pour la simulation 3D de ZRR.

On peut remarquer que les trajets de fissure entre la 2D et la 3D sont proches. Le critère de rupture en fragile corrèle bien avec les résultats des simulations antérieures. Remarquons quand même une tendance du front à développer des instabilités en vaguelettes à la fin de la simulation.

## 7.4 Conclusion

Ces simulations montrent que le critère appliqué jusqu'ici pour des problèmes plans sur des matériaux fragiles fonctionnent correctement et permettent d'obtenir des résultats proches des résultats 2D. On peut cependant remarquer que les valeurs des contraintes critiques  $\sigma_{Ic}$  pour le démarrage de la propagation de fissure n'est pas identique entre la 2D et la 3D. Le choix de cette valeur est le point faible de cette approche. Il doit être calé et la valeur critique dépend de la taille de maille. La valeur est différente en 2D et en 3D pour une même taille de maille. En effet, en 2D, on intègre sur un disque complet alors qu'en 3D, on intègre sur une demi-sphère en avant de la fissure. Les écarts de valeurs obtenus sont cependant raisonnables. Une autre remarque peut être faite concernant les valeurs des ondes de Rayleigh  $c_r$ . Cette valeur permet de calculer les vitesses d'avancée du front de fissure avec la formule de Kanninen (cf. équation 1.62). Les valeurs imposées afin d'obtenir des avancées de fissure qui corrèlent bien avec les résultats expérimentaux sont éloignées des valeurs réelles des matériaux.

Un travail de recherche supplémentaire pourrait être effectué afin de rendre ce critère indépendant du paramètre  $R$ , indépendant du fait que l'on soit en 2D ou en 3D et plus cohérent afin de conserver une célérité des ondes de Rayleigh proches des données matériau. Le critère a montré sa limite dans la prédiction de la simulation en fin de calcul, en présentant des instabilités sur les trajets de fissure. En 2D, Menouillard a utilisé un autre critère de rupture. Il prend la direction du vecteur normale au vecteur principale maximum du tenseur des contraintes en pointe de fissure comme direction de la fissure. Ce critère n'a pour le moment pas été testé en 3D.



## Chapitre 8

# Expériences de validation en mode mixte tridimensionnel

*Ce chapitre est dédié à la présentation de résultats de simulation de fissures 3D. Les cas de fissure 3D ne sont pas nombreux dans la littérature et lorsqu'ils existent, ils sont relativement peu documentés. Cela vient du fait que la fissure et les champs ne peuvent pas être facilement visualisés ou mesurés à l'intérieur de la matière, sauf pour les matériaux translucides. Les essais de Grégoire [GRE 08] donnent des trajets de fissure sollicités en mode mixte I et III en dynamique.*

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Expérience de Grégoire [GRE 08] en mode mixte sur du PMMA . . . . .</b>	<b>137</b>
8.1.1	Mise au point des paramètres de la simulation au travers de la simulation en mode I. . .	138
8.1.2	Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP052. . . .	144
8.1.3	Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP054. . . .	151
<b>8.2</b>	<b>Conclusion des simulations . . . . .</b>	<b>155</b>

---

### 8.1 Expérience de Grégoire [GRE 08] en mode mixte sur du PMMA

Cette expérience a été réalisée par Grégoire [GRE 08], elle est notée Mars2007 - EP052 dans la thèse. Les conditions expérimentales sont montrées dans la figure 8.1, l'éprouvette est placée sur un banc d'Hopkinson. La plaque est trouée sur la première moitié de l'éprouvette afin de convertir l'onde de compression appliquée par la barre entrante en une onde de traction orthogonale. Une pré-entaille est usinée. Elle est inclinée par rapport à l'horizontale de plusieurs angles allant de 20° à 43°. On s'attache ici à prévoir la propagation de la fissure à 22° et 34°.

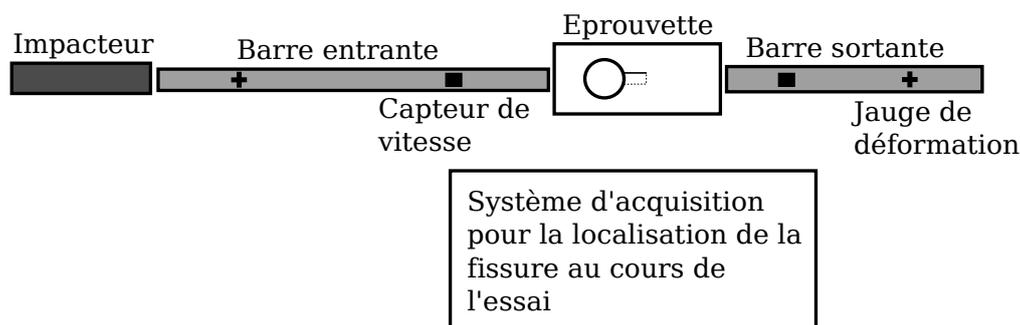


FIGURE 8.1: Banc d'essai pour les expériences de David Grégoire.

### 8.1.1 Mise au point des paramètres de la simulation au travers de la simulation en mode I.

L'expérience Mars 2007- EP052 est peu documentée, afin de pouvoir caler les paramètres de la simulation, on a d'abord réalisé la simulation de l'expérience en mode I pur (fissure plane horizontale) noté Avril 2006- EP01, proche de l'expérience Février 2008-EP052.

La figure 8.2 et le tableau 8.1 donnent la géométrie, les conditions aux limites et les dimensions de l'éprouvette choisies dans la simulation.

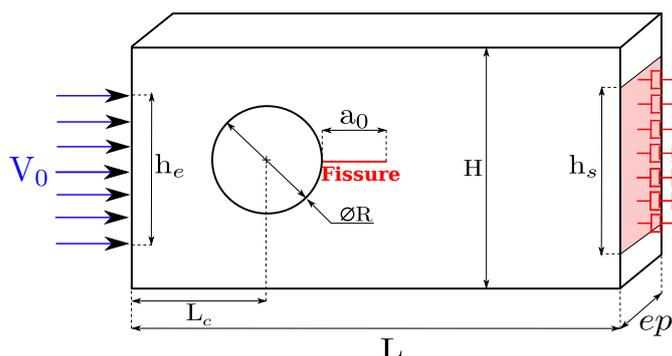


FIGURE 8.2: Géométrie et conditions aux limites de l'essai Avril 2006- EP01.

Paramètre	Notation	Valeur
Hauteur de l'éprouvette	$H$	70mm
Hauteur barre entrante	$h_e$	40mm
Rayon du trou	$R$	30mm
Hauteur barre sortante	$h_s$	40mm
Emplacement du trou	$L_c$	45mm
Longueur de l'éprouvette	$L$	140mm
Longueur de fissure	$a_0$	15mm
Épaisseur de l'éprouvette	$ep$	15mm

TABLE 8.1: Dimensions de l'éprouvette tirée de [GRE 08].

Dans un premier temps, nous avons utilisé la vitesse de la barre entrante de l'expérience Octobre 2004 Essai 01. L'histoire de la vitesse au cours du temps est donnée dans la figure 8.3. On a déduit l'histoire des déplacements à imposer sur la face entrante de l'éprouvette en intégrant le signal des vitesses. Les déplacements sont donnés figure 8.4.

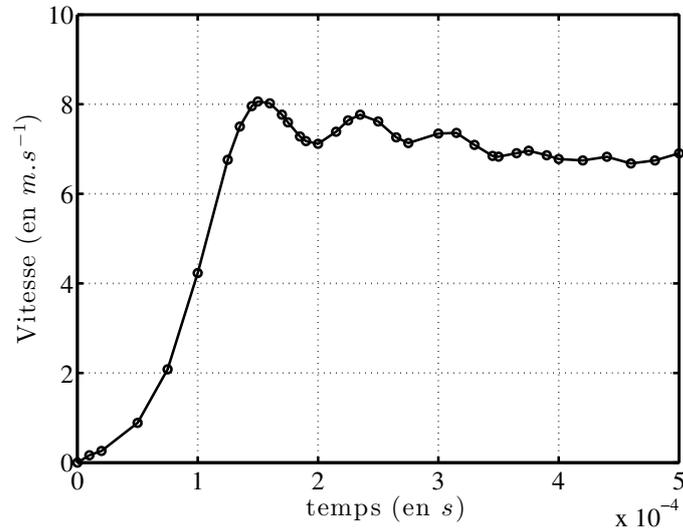


FIGURE 8.3: Signal de la vitesse sur la barre entrante tirée de [GRE 08].

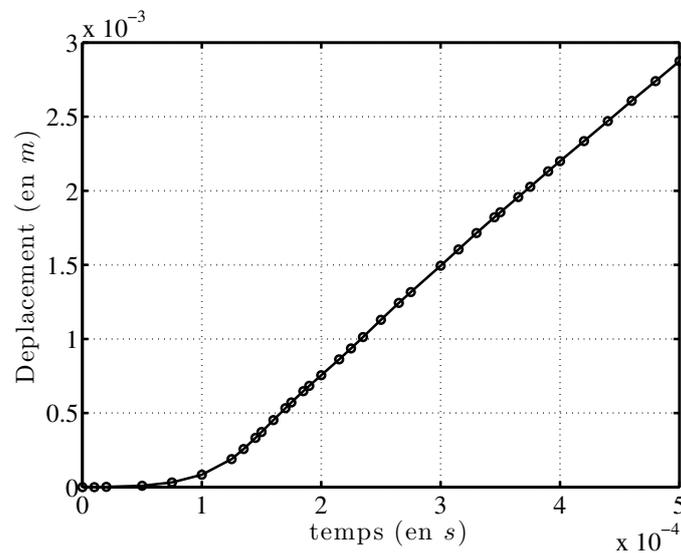


FIGURE 8.4: Déplacement imposé sur la face d'entrée de l'éprouvette.

Une condition d'impédance est utilisée à droite de l'éprouvette afin de représenter l'onde transmise à la barre sortante. Prabel [PRA 07] rappelle l'imposition d'une condition d'impédance, donnée dans l'équation

8.1. Les conditions d'impédance imposées dans EUROPLEXUS sont données dans l'équation 8.2.

$$F_x = -\sqrt{\rho E} \dot{u}_x, \quad (8.1)$$

$$F_x = -\rho c \dot{u}_x, \quad (8.2)$$

avec  $\rho$  la masse volumique de la barre sortante,  $E$  le module de Young de la barre sortante et  $c$  la vitesse du son dans la barre. L'équation aux dimensions donnent les même unités pour les deux couples  $\sqrt{\rho E}$  et  $\rho c$ .

Les grandeurs données par Prabel pour les conditions d'impédance sont regroupées dans le tableau 8.2.

Paramètre	Notation	Valeur
Module d'Young	$E$	$3.0GPa$
Masse volumique	$\rho$	$1180Kg.m^{-3}$

**TABLE 8.2:** Paramètres pour les conditions d'impédance tirés de [PRA 07].

Les valeurs choisies pour la simulation sont données tableau 8.3.

Paramètre	Notation	Valeur
Vitesse du son	$c$	$1650m.s^{-1}$
Masse volumique	$\rho$	$1160Kg.m^{-3}$

**TABLE 8.3:** Paramètres choisis pour les conditions d'impédance en 3D.

L'éprouvette a été découpée dans du PMMA, ce matériau est simulé avec un comportement linéaire élastique dont les caractéristiques dynamiques sont données dans le tableau 8.4.

Paramètre	Notation	Valeur
Module de Young	$E$	$2.4GPa$
Masse Volumique	$\rho$	$1180Kg.m^{-3}$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$0.42$
Vitesse de Rayleigh	$c_r$	$800m.s^{-1}$
Impédance 1D	$\sqrt{\rho E}$	$1.9 \times 10^6 Kg.m^{-2}.s^{-1}$

**TABLE 8.4:** Paramètre matériau du PMMA en dynamique tirés de [GRE 08].

Lors des expériences de Grégoire [GRE 08], la fissure commence à propager, s'arrête puis repart. Cet arrêt et redémarrage est difficile à retrouver avec une seule valeur de  $K_{Ic}$ . Ceci se comprend bien si on observe que le rayon en front d'entaille est de  $0.5mm$  après un trait de scie (cf. figure 8.5) et que la fissure est plus fine après propagation. Deux valeurs de  $K_{Ic}$  sont alors introduites dans le calcul,  $K_{Ia}$  pour l'initiation de la fissure et  $K_{Ia}$  pour le redémarrage. Le mode dominant  $K_{Ic}$  lors de la propagation est représenté sur la figure 8.6.

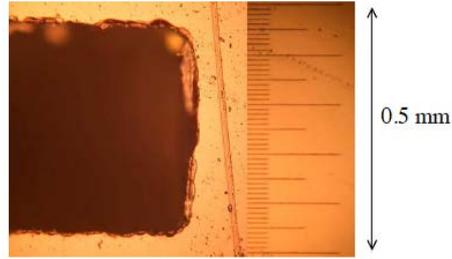


FIGURE 8.5: Épaisseur de la pré-entaille initiale d'après [GRE 08].

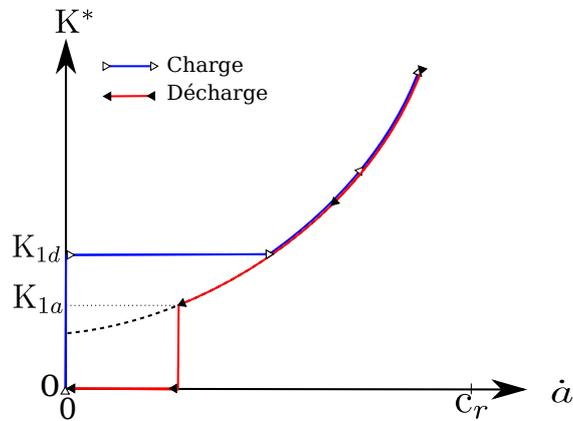


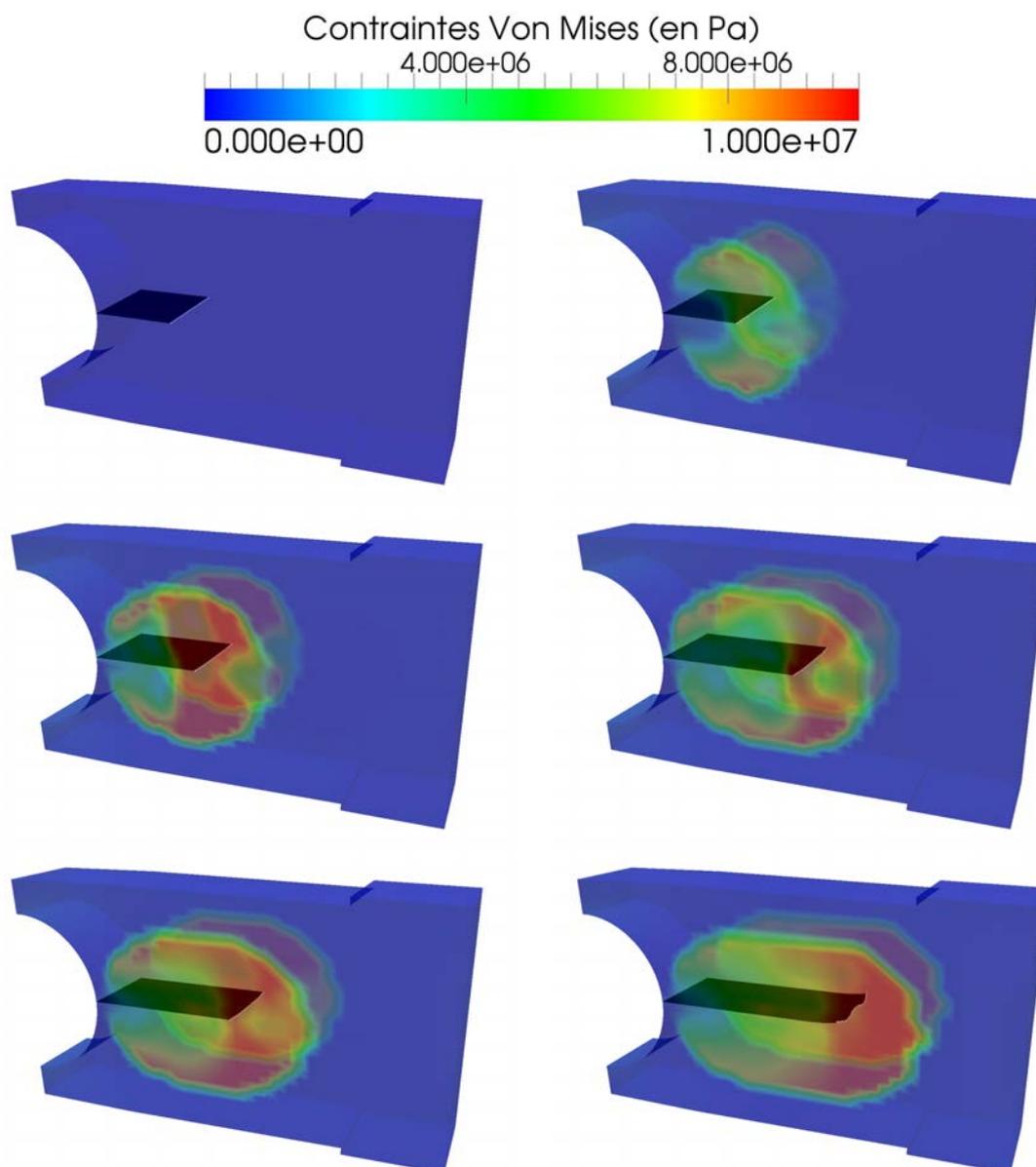
FIGURE 8.6: Critère de propagation pour la simulation numérique tirée de [GRE 08].

On appliquera la même démarche sur le propagation  $\sigma_{Ic}$ , avec l'introduction d'un  $\sigma_{Ic}^a$  après l'initiation afin d'obtenir des résultats les plus proches possibles de l'expérience. Les valeurs de  $\sigma_{Ic}^d$  et  $\sigma_{Ic}^a$  et les paramètres de la simulation sont donnés dans le tableau 8.5

Paramètre	Notation	Valeur
Taille de maille XFEM		1.4mm
Maillage différences finies		100 × 50 × 18
Tailles de maille différences finies		1mm × 1mm × 1mm
Critère de rupture pour le démarrage de la fissure	$\sigma_{Ic}^d$	7.0MPa
Critère de rupture pour l'arrêt et le redémarrage	$\sigma_{Ic}^a$	2.8MPa
Célérité des ondes de Rayleigh	$c_r$	400m.s <sup>-1</sup>
Longueur locale	$R$	5mm
Paramètre des moyennes en temps	$T_{moy}$	0.5
Paramètre des moyennes en espace	$R_{moy}$	6mm

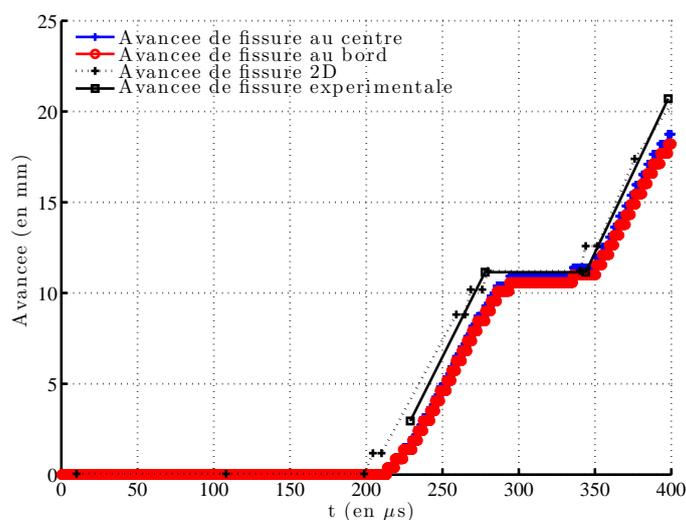
TABLE 8.5: Paramètres du critère de rupture modifié et paramètres de la simulation de l'expérience en mode I.

Les contraintes de Von Mises centrées sur la zone autour de la fissure sont données dans les figures 8.7. La fissure avance bien en ligne droite dans le plan de symétrie de l'éprouvette.



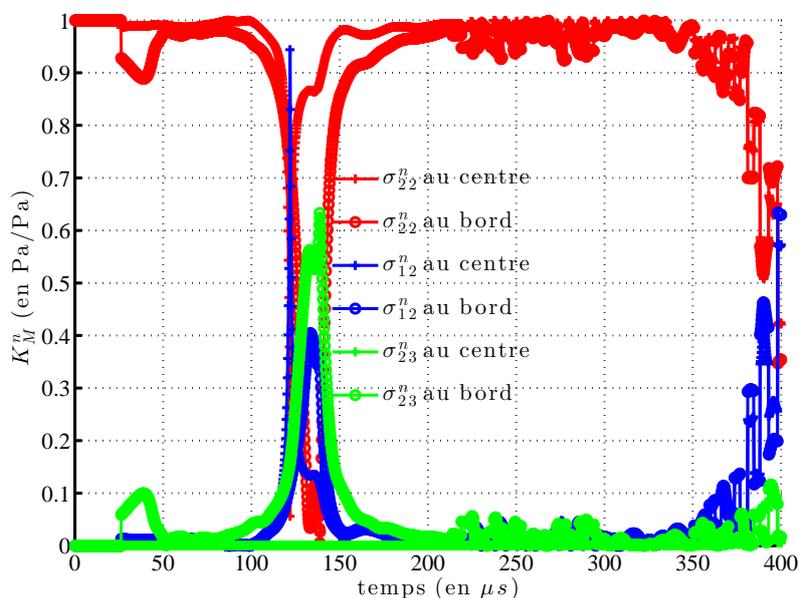
**FIGURE 8.7:** Évolution des contraintes de Von Mises et de la fissure pour  $t = 0\mu s$ ,  $t = 200\mu s$ ,  $t = 250\mu s$ ,  $t = 300\mu s$ ,  $t = 350\mu s$  et  $t = 400\mu s$  pour une zone autour de la fissure dans la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 de Grégoire.

La figure 8.8 donne l'avancée de la fissure en fonction du temps pour la simulation 3D, pour la simulation 2D de Grégoire et pour l'expérience. Il y a un léger décalage en temps mais on a une bonne corrélation entre l'expérience et la simulation. La vitesse de la barre entrante de l'expérience Octobre 2004-EP01 ( $12.4m.s^{-1}$ ) est légèrement inférieure à celle d'Avril 2006-EP01 ( $9.5m.s^{-1}$ ). Cette différence de vitesse peut expliquer le léger décalage entre les deux courbes. La fissure avance bien en ligne droite. Vers  $380\mu s$ , les contraintes en pointe commencent à être très chahutées, ce qui entraîne des perturbations dans le calcul de l'angle d'avancée de la fissure.



**FIGURE 8.8:** Avancée de fissure en fonction du temps pour la simulation 3D de l'expérience Avril 2006-EP01.

Les figures 8.9 à 8.11 montrent les composantes normalisées du tenseur moyen en pointe de fissure, Le critère de rupture et l'angle  $\theta_c$  en fonction du temps. Entre  $100\mu s$  et  $150\mu s$ , il y apparition d'un passage un peu cahotique au niveau du tenseur moyen en pointe de fissure. Même si pendant ce moment la fissure ne se propage pas, les composantes  $\sigma_{12}^n$  et  $\sigma_{23}^n$  évoluent beaucoup vers  $120\mu s$ .



**FIGURE 8.9:** Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D.

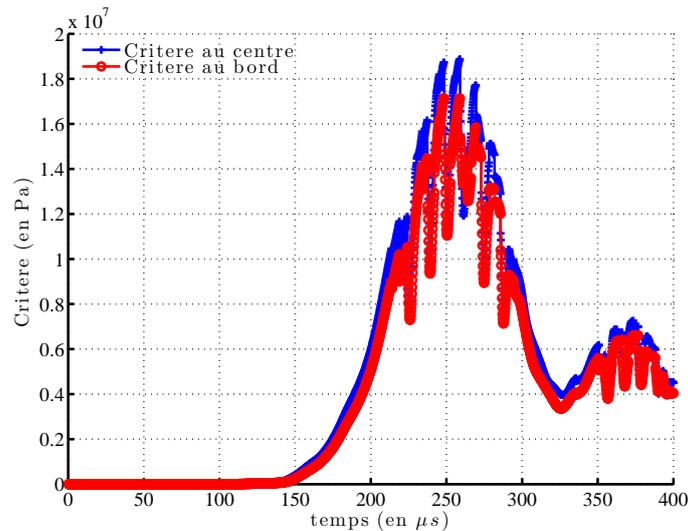


FIGURE 8.10: Valeur du critère de propagation en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D.

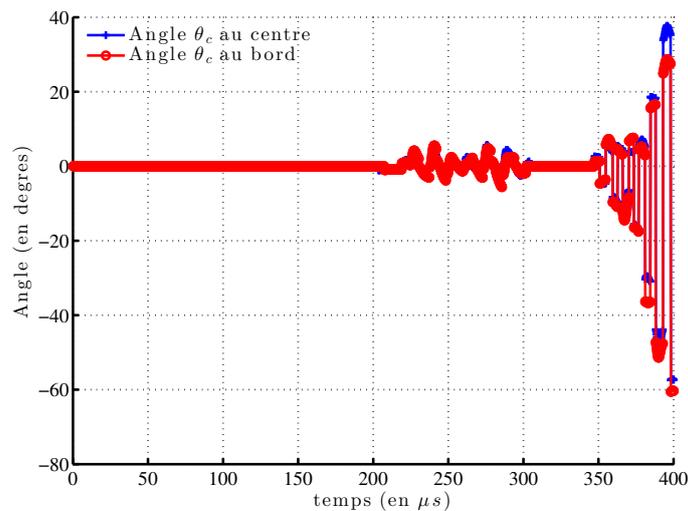
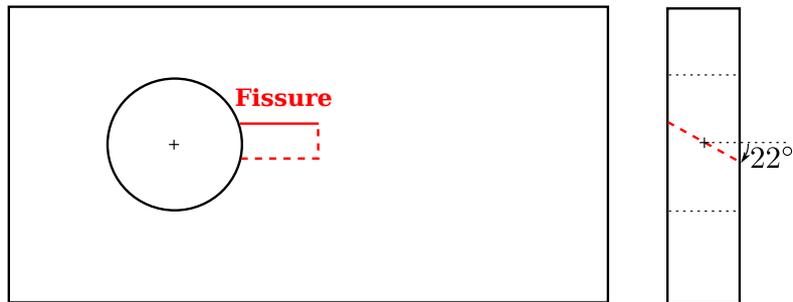


FIGURE 8.11: Valeur de l'angle  $\theta$  en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01 en 3D.

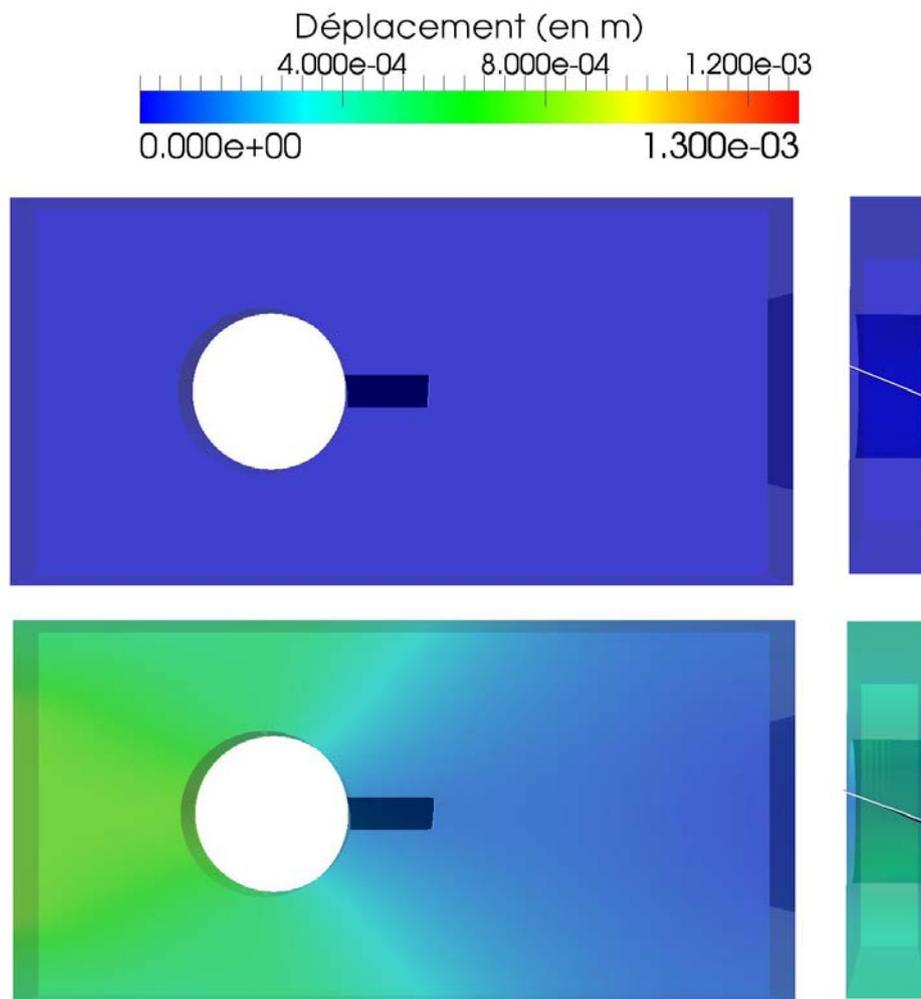
### 8.1.2 Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP052.

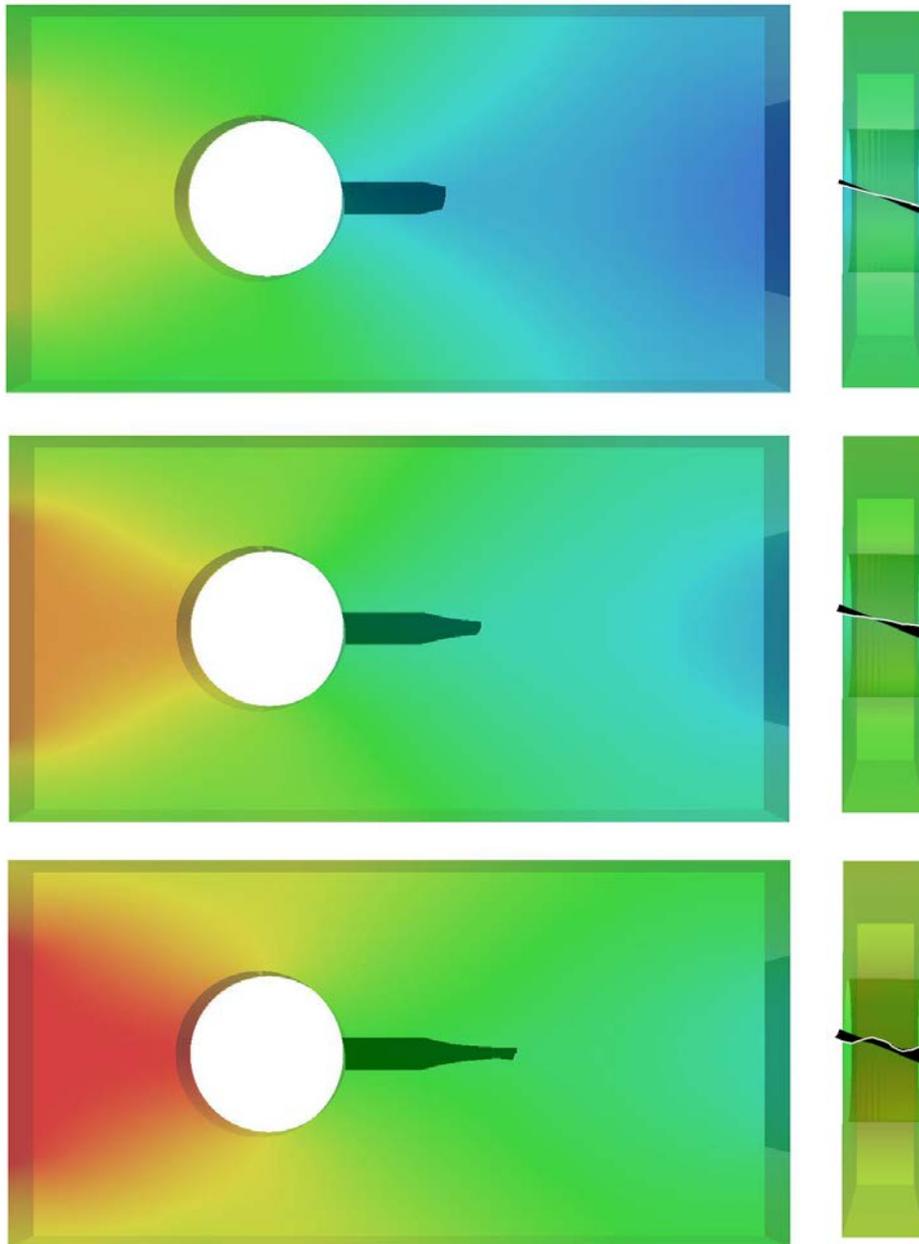
On reprend ici les mêmes paramètres matériau et les mêmes sollicitations que dans l'expérience en mode I. Seule la géométrie de la fissure change, elle est inclinée à  $22^\circ$  par rapport à l'horizontale, comme illustrée figure 8.12. Cette expérience est notée Février 2008 - EP052 dans la thèse de Grégoire.



**FIGURE 8.12:** Géométrie de l'éprouvette Février 2008 - EP052 avec la fissure inclinée à  $22^\circ$  par rapport à l'horizontale.

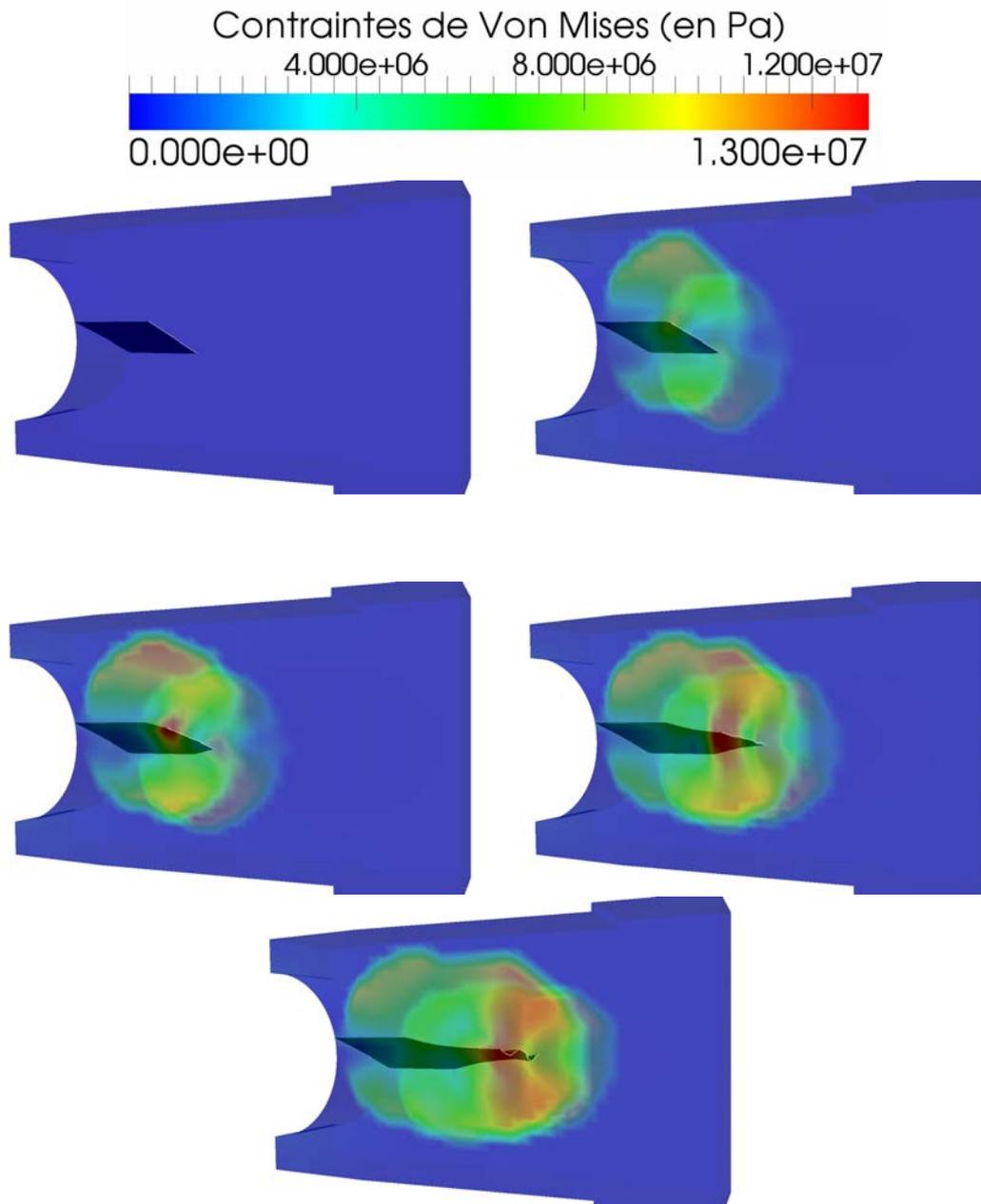
Les déplacements obtenus par la simulation en 3D sont donnés figures 8.13 :





**FIGURE 8.13:** Évolution des déplacements et de la fissure à  $t = 0 \mu s$ ,  $t = 200 \mu s$ ,  $t = 225 \mu s$ ,  $t = 250 \mu s$  et  $t = 275 \mu s$  pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 de Grégoire.

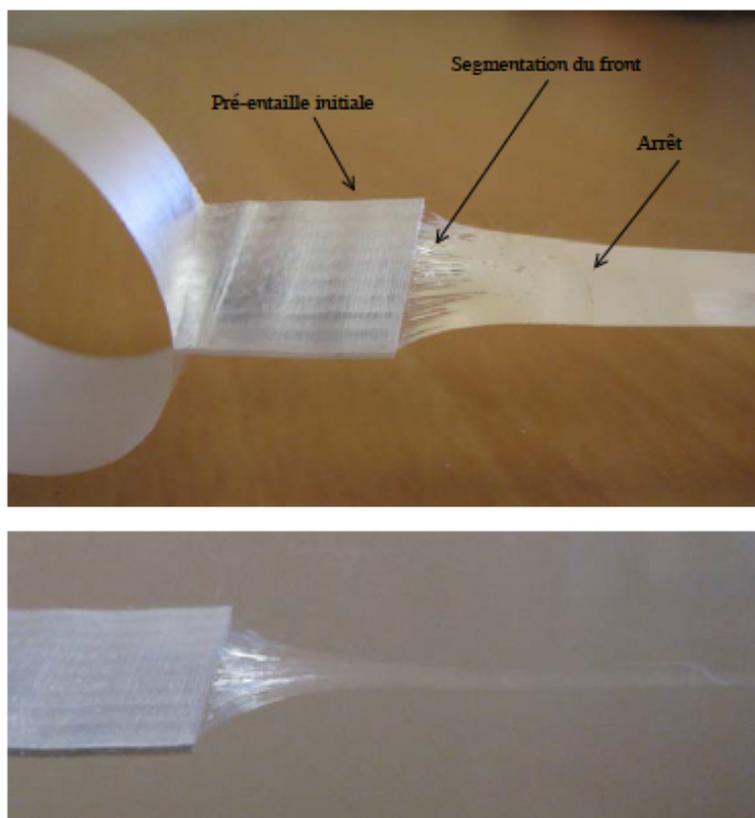
Les contraintes de Von Mises centrée sur la zone autour de la fissure sont données figures 8.14 :



**FIGURE 8.14:** Contraintes de Von Mises à  $t = 0\mu s$ ,  $t = 200\mu s$ ,  $t = 225\mu s$ ,  $t = 250\mu s$ ,  $t = 275\mu s$  pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 de Grégoire.

La fissure se redresse bien et vient se propager dans le plan milieu de la pièce. Les contraintes réalisent une forme d'aile de papillon prédite par la mécanique linéaire élastique de la rupture. Cette forme a été observée expérimentalement par Broberg, Freund et Bui par photoélasticimétrie. Elle est typique des concentrations de contraintes en pointe de fissure avec une hypothèse de déformations planes. La forme de la fissure finale obtenue lors de l'expérience est donnée figure 8.15. On peut constater une bonne corrélation entre l'expérience et la simulation. La fissure a tendance à redevenir plane et horizontale et à rejoindre le plan médian de l'éprouvette. Dans l'expérience, la fissure rejoint plus tôt le plan médian de l'éprouvette,

cette différence est la conséquence des moyennes réalisées sur les points du front de fissure dans la simulation. Les moyennes diminuent les fortes différences d'angle entre les points du front. La rotation de la fissure est freinée par le maillage trop grossier choisi pour simuler l'expérience. La transition entre les deux plans a bien la forme d'une hélice typique de la réponse en rupture fragile combinant les modes I et III.



**FIGURE 8.15:** Trajet de fissure post-mortem obtenue par Grégoire dans l'expérience Février 2008 - EP052.

L'évolution de l'abscisse du front obtenue dans l'expérience de Grégoire est donnée dans la figure 8.16. On ne connaît pas l'instant où l'acquisition de ce signal a démarré et l'avancée de fissure est mesurée avec un capteur optique normalement utilisé pour des trajets de fissure 2D. On ne sait pas si ce capteur enregistre l'abscisse du front à peau ou à coeur. L'évolution de l'avancée de fissure en fonction du temps obtenue par la simulation 3D est donnée dans la figure 8.17. On peut remarquer une bonne prédiction des résultats expérimentaux par la simulation 3D, avec une tendance à légèrement surévaluer l'avancée de fissure. Pour la simulation, la vitesse de la barre entrante est celle de l'expérience Octobre 2004 Essai 01 ( $12.4m.s^{-1}$ ) donnée dans la figure 8.3, alors que dans l'expérience Février 2008 - EP052, cette vitesse est légèrement supérieure ( $14m.s^{-1}$ ). Le signal de la vitesse de la barre entrante n'étant pas disponible pour la simulation Février 2008 - EP052, nous avons préféré conserver la même vitesse que l'expérience Octobre 2004 Essai 01. Cette différence de vitesse explique la différence d'avancée de fissure entre la simulation et l'expérience.

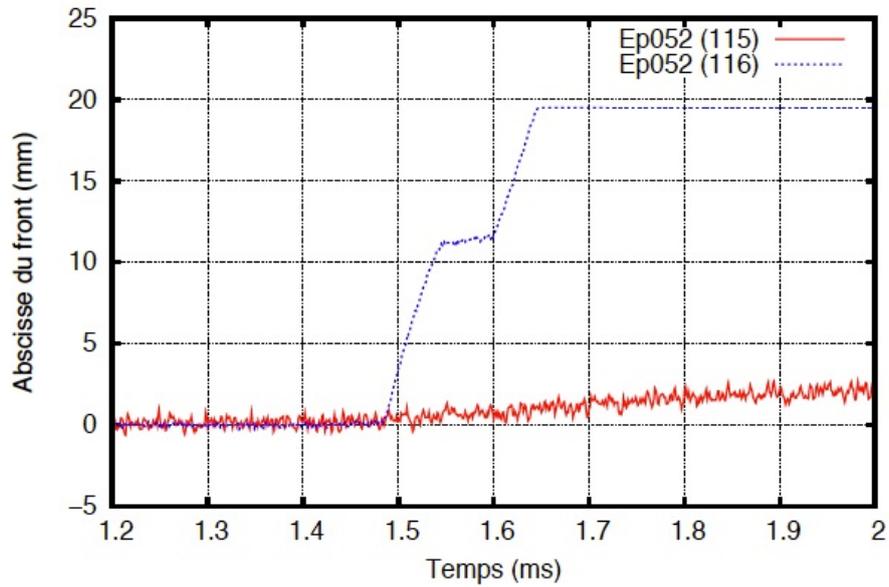


FIGURE 8.16: Abscisse du front obtenue par Grégoire dans l'expérience Février 2008 - EP052.

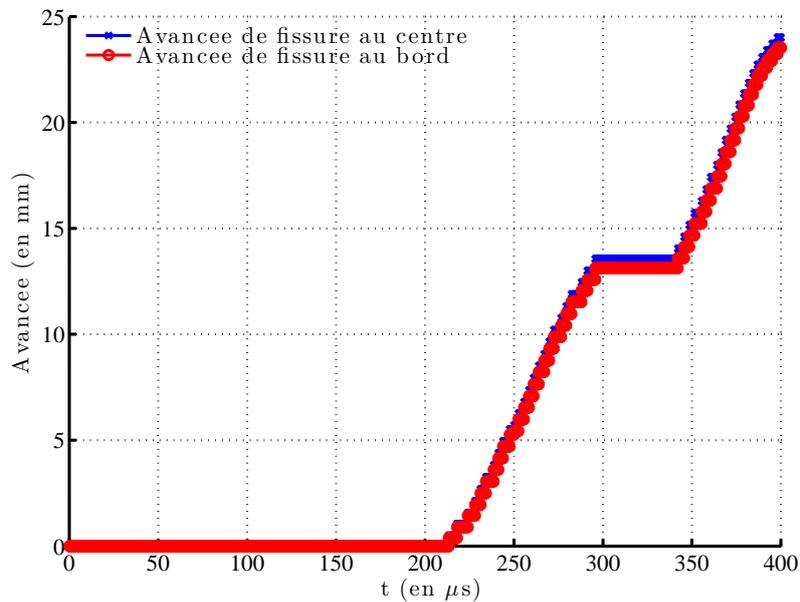


FIGURE 8.17: Évolution temporelle de la longueur de fissure pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D.

Les figures 8.18, 8.19 et 8.20 montrent l'évolution du critère, les composantes du tenseur moyen et l'évolution de l'angle  $\theta_c$  en fonction du temps.

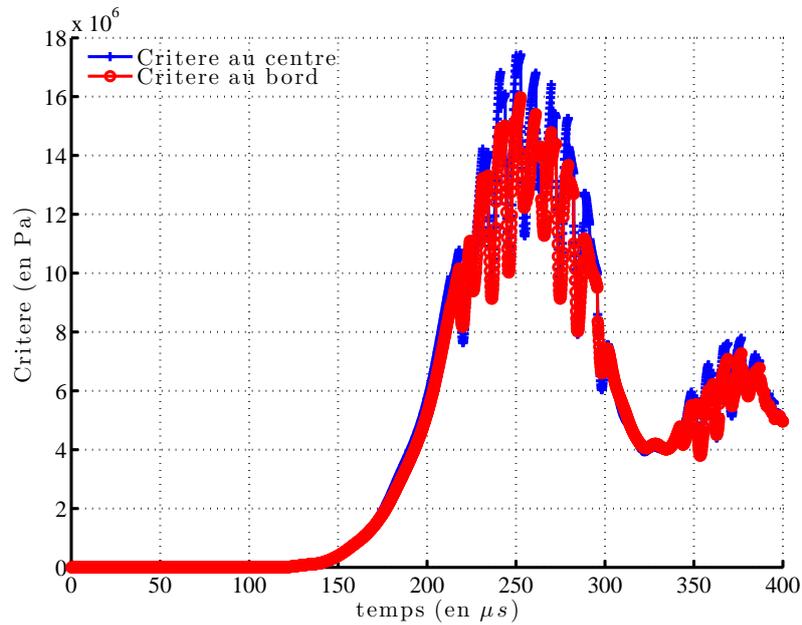


FIGURE 8.18: Évolution du critère en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D.

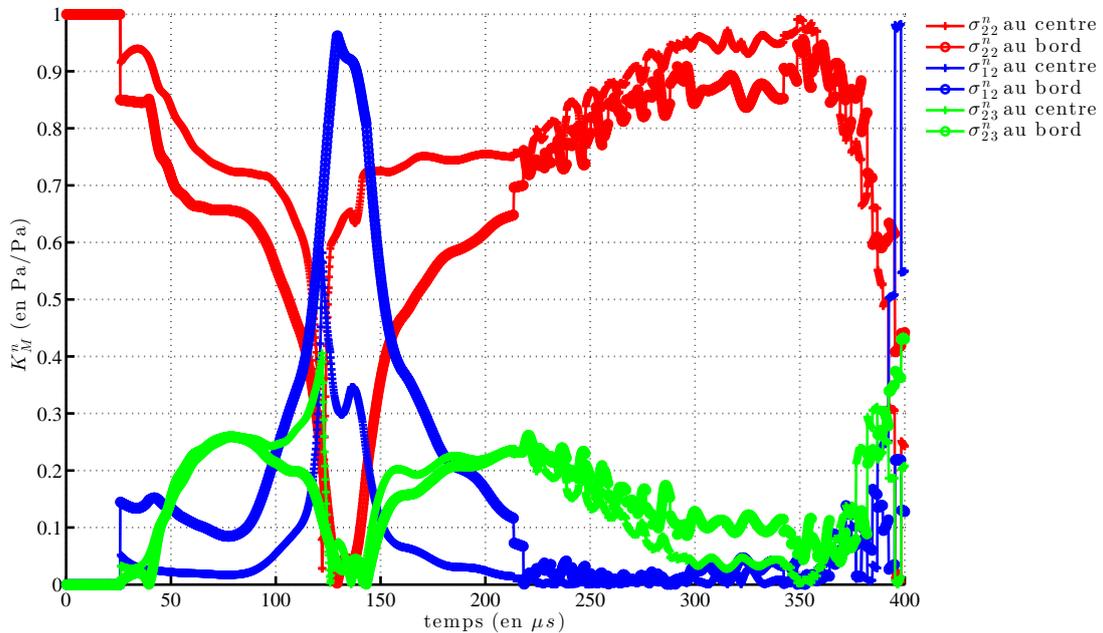
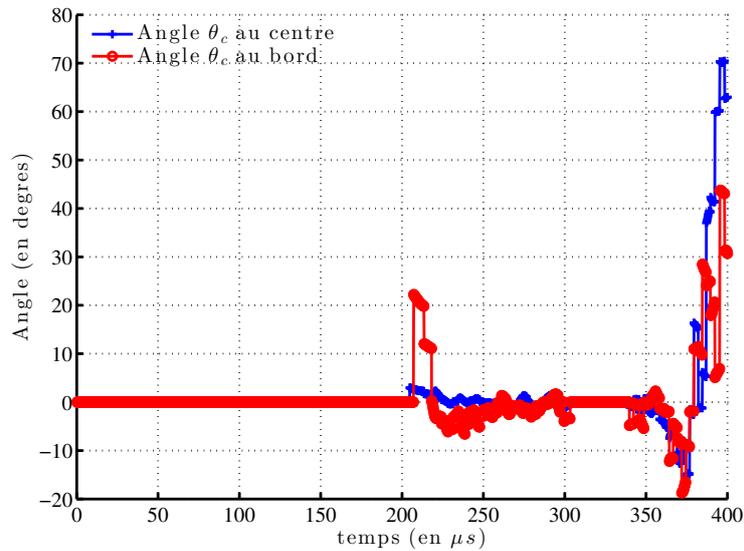


FIGURE 8.19: Évolution temporelle des composantes normalisées du tenseur moyen pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D.



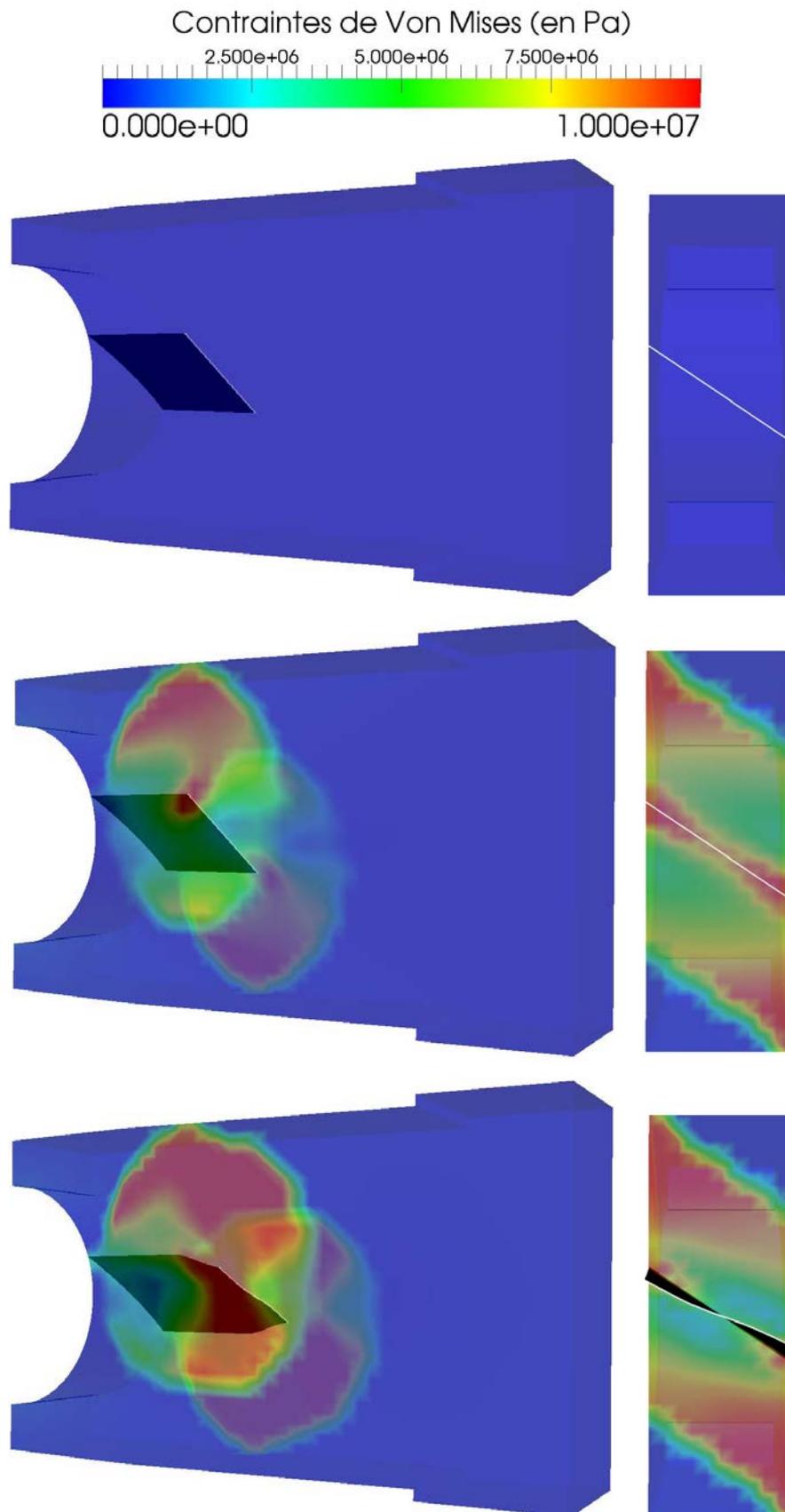
**FIGURE 8.20:** Valeur de l'angle  $\theta_c$  en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP052 en 3D.

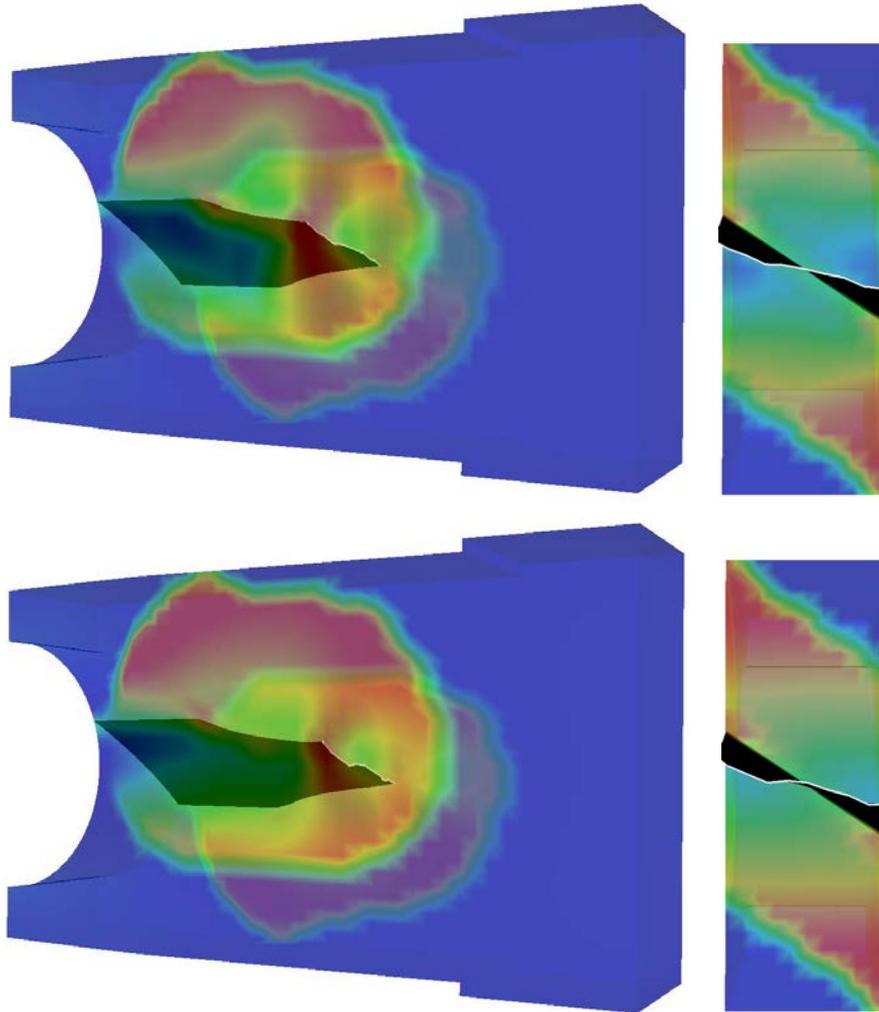
À l'initiation de la fissure, l'angle de propagation sur le bord est immédiatement à  $22^\circ$ , alors qu'il reste proche de  $0^\circ$  au centre, ce qui permet à la fissure de tourner pour aller vers le plan de symétrie de la pièce. Comme pour la simulation de l'expérience Avril 2006-EP01, il y a un passage un peu chaotique des composantes des contraintes aux alentours de  $120\mu s$  qui s'estompe vers  $180\mu s$ . La géométrie complexe de l'éprouvette ne permet pas de calculer exactement le temps que met l'onde pour aller jusqu'à la pointe de fissure, mais on peut cependant l'estimer. La vitesse des ondes de compression  $c_d$  est de  $2280m.s^{-1}$ , il faut donc environ  $33\mu s$  pour arriver à la pointe de fissure, qui est à  $75mm$  de la face d'entrée de l'éprouvette. La vitesse des ondes de cisaillement  $c_s$  est de  $846m.s^{-1}$ , il faut donc  $88\mu s$  pour arriver à la pointe de fissure. Ces phénomènes correspondent donc probablement à l'arrivée des ondes de cisaillement sur la pointe de fissure.

### 8.1.3 Simulation de l'expérience de Grégoire en 3D mode mixte Février 2008 - EP054.

Cette expérience est identique à l'expérience Février 2008 - EP052, mais la fissure est inclinée d'un angle de  $34^\circ$  par rapport à l'horizontale. Les résultats expérimentaux sont sensiblement les mêmes. Nous avons donc conservé les mêmes paramètres que la simulation précédente.

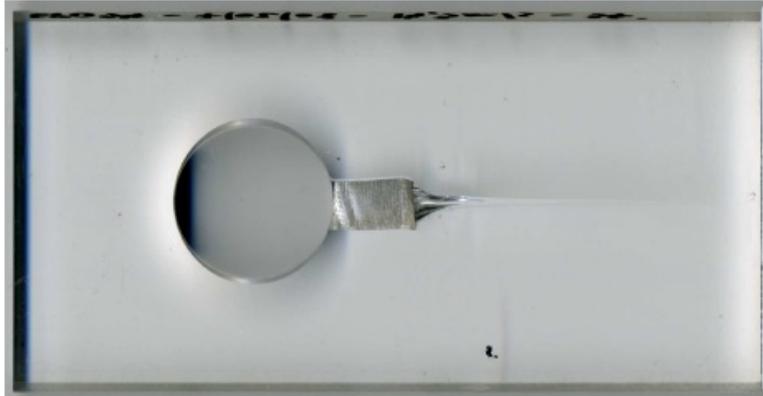
L'évolution des contraintes de Von Mises dans la zone centrée autour de la fissure est donnée dans les figures 8.21 :





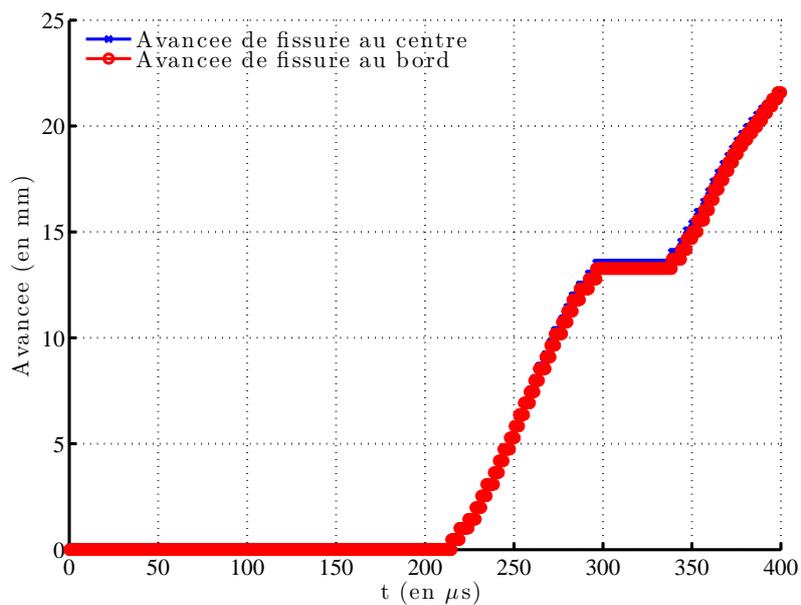
**FIGURE 8.21:** Contraintes de Von Mises à  $t = 0\mu s$ ,  $t = 200\mu s$ ,  $t = 250\mu s$ ,  $t = 300\mu s$ ,  $t = 350\mu s$  pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054.

La fissure part immédiatement dans le plan milieu de la pièce car dès l'initiation, l'angle de propagation au bord passe à  $40^\circ$ , puis descend à  $20^\circ$  pour rester aux alentours de  $0$  à  $-5^\circ$  par la suite. L'angle de propagation au centre de l'éprouvette reste constant aux alentours de  $0^\circ$ . Le trajet de fissure obtenu lors de l'expérience est donné dans la figure 8.22. Les trajets de fissure entre la simulation et l'expérience sont proches. On peut remarquer quelques instabilités à la fin du calcul, les bords n'arrivent pas à rejoindre le plan milieu de l'éprouvette.



**FIGURE 8.22:** Trajet de fissure post-mortem de l'expérience de Grégoire Février 2008 - EP054.

L'évolution de la longueur de fissure et l'évolution du critère en fonction du temps sont données dans les figures 8.24 et 8.23. Elle sont semblables aux courbes de l'expérience Février 2008 - EP052, avec un arrêt de la fissure vers  $300\mu s$  après avoir parcouru  $15mm$ .



**FIGURE 8.23:** Longueur de fissure en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054 en 3D.

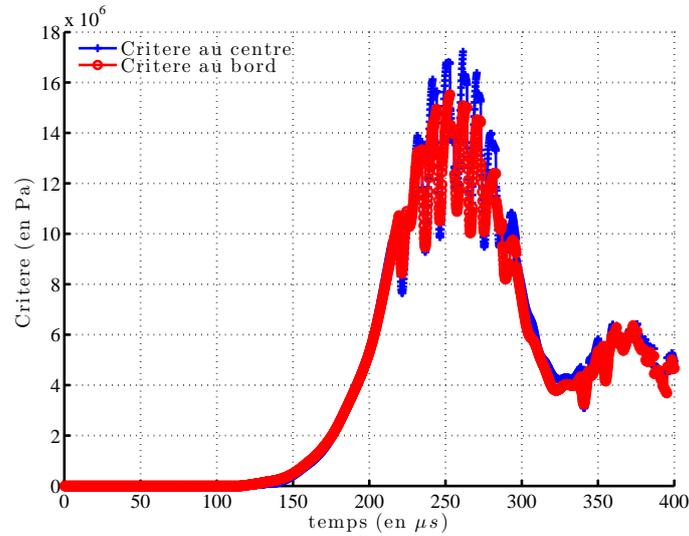


FIGURE 8.24: Valeur du critère de propagation en fonction du temps pour la simulation de l'expérience Février 2008 - EP054 en 3D.

## 8.2 Conclusion des simulations

Des simulations 3D en mode mixte ont été réalisées pour une propagation de fissure en dynamique. On a réussi à obtenir des résultats similaires aux résultats expérimentaux lorsqu'ils étaient disponibles. Le critère de rupture fonctionne correctement lorsque les contraintes ne sont pas trop bruitées. Un travail est encore nécessaire pour la recherche d'un critère de rupture 3D robuste. Lorsque l'on commence à solliciter une pièce, les variations de contraintes sont franches car elles passent de 0 à une valeur moyenne. Après le premier front d'onde, les ondes se propagent beaucoup et librement dans la pièce mais elles correspondent à des variations autour de la valeur moyenne. Une pondération des variations par rapport à la valeur moyenne doit être pris en compte afin de lisser les grandeurs qui pilotent la fissure. L'utilisation d'un critère suivant la direction normale au vecteur principal des contraintes en pointe de fissure peut également être une piste à regarder.



# Conclusion et perspectives

A travers cette thèse, nous avons mis en oeuvre le critère de rupture 3D donné par Haboussa. Le critère de rupture a donné des résultats corrects en mode I et en mode mixte. Nous sommes parvenu à simuler en 3D les cas 2D afin de vérifier que l'ensemble de notre algorithme fonctionnait bien. Un cas 3D avec sollicitation en mode mixte a été simulé. Le critère de rupture permet de prendre en compte la plasticité du matériau dans le trajet de fissure, et donc de prendre en compte les phénomènes physiques du matériau pour prédire la propagation des fissures.

Nous avons implémenté les XFEM en 3D en dynamique et nous avons vérifié l'intégration des éléments par sous-découpage non conforme afin de quantifier l'erreur sur l'intégration des fonctions. Nous avons montré que l'erreur maximale peut atteindre 10%, ce qui est important. Une nouvelle méthode d'intégration en 2D a été développée pour intégrer des éléments au comportement matériau élastique linéaire. Cette méthode peut être étendue au 3D mais pas encore aux matériaux non linéaires.

Une nouvelle méthode d'actualisation des level-sets en 3D a été développée. Cette méthode géométrique est robuste et donne de bon résultats en 2D et en 3D. Elle permet de prendre en compte des géométries complexes de fissure avec un temps de calcul très faible par rapport aux temps de calcul de la mécanique.

Pour la simulation de la propagation dynamique, les directions de propagation présentent des instabilités vers la fin de la propagation. On n'a pas encore pu en déterminer la cause. Ces instabilités sont peut être la conséquence du choix de s'être limité aux seuls enrichissements sauts uniquement ou encore à un lissage insuffisant des contraintes transitoires. De plus, le critère de propagation est dépendant du paramètre  $R$ , ce qui le rend difficilement comparable. Le calcul de moyennes temporelles sur le critère est indispensable pour avoir des trajets de fissure corrects. Ces moyennes permettent également de lisser les oscillations résultant du choix grossier de se limiter aux enrichissements sauts. Une autre méthode d'intégration doit être privilégiée afin de mieux intégrer les éléments coupés par une fissure. Cette méthode n'existe pas pour l'instant dans le cas des matériaux non linéaires. La quantification de l'erreur effectuée lors de la projection des champs peut être une piste intéressante. Une autre approche (présentée par Ventura [VEN 06]) qui propose de remplacer la discontinuité par un polynôme équivalent peut également être une piste de recherche. La recherche d'un nouvel enrichissement est également à mettre en perspective, car l'utilisation des fonctions sauts ne permet pas de prendre en compte le front de fissure dans l'élément. Ce phénomène influe sur le calcul du critère de rupture et ajoute artificiellement des ondes qui peuvent influencer le critère. L'utilisation des fonctions singulières n'est pas bien adaptée pour la dynamique explicite, l'avancée de fissure étant trop faible par rapport à la discrétisation XFEM, un empilement important des enrichissements singuliers est nécessaire. La méthode géométrique de mise à jours des level-sets peut être étendue facilement à la multi-fissuration, une fois que les autres soucis seront résolus.

Tous ces développements ont été implémentés et testés dans le code de calcul EUROPLEXUS propriété du CEA et de la Commission Européenne. Il convient de remarquer que contrairement à ce qui serait souhaitable en raison du choix d'enrichissements saut uniquement, les simulations décrites dans ce mémoire ont été réalisées avec des tailles de maille relativement grossières. Le passage à des maillages plus fins en 3D requiert un traitement parallèle de la résolution qui n'a pu être mis en oeuvre dans le temps de la thèse, la priorité ayant logiquement été donnée à la robustesse des méthodes, aussi bien au niveau des critères de rupture que des techniques de représentation de la fissure. La mise en oeuvre des méthodes proposées sur des modèles volumineux en 3D et la résolution des problèmes spécifiques que cela pose est ainsi un domaine d'extension majeur des présents travaux.



# Bibliographie

- [ATT 97] ATTIGUI M., PETIT C.  
Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics : New path independent integrals. *International Journal of Fracture*, vol. 84, n° 1, 1997, p. 19-36, Kluwer Academic Publishers.
- [BAR 59] BARENBLATT G.  
The formation of equilibrium cracks during brittle fracture : general ideas and hypothesis, axially symmetric cracks. *Journal Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 23, n° 3, 1959, p. 622-636.
- [BAR 62] BARENBLATT G.  
The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, n° 2, 1962, p. 55-129.
- [BEL 99] BELYTCSCHKO T., BLACK T.  
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 45, 1999, p. 601-620.
- [BER 81] BEREMIN F.  
Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel. *Metallurgical Transactions A*, vol. 12, n° 5, 1981, p. 723-731, Springer-Verlag.
- [BRO 60] BROBERG K.  
The propagation of a brittle crack. *Arkiv fur Fysik*, vol. 165, 1960, p. 16-18.
- [BUI 78] BUI H.  
*Mécanique de la rupture fragile*. Paris : Masson, 1978.
- [BUI 92] BUI H., MAIGRE H., RITTEL D.  
A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor. *International journal of Solids and Structures*, vol. 29, n° 23, 1992, p. 2881-2895.
- [CEA ] CEA  
. « <http://www-epx.cea.fr/> ».
- [CEA 13] CEA  
. « <http://www-cast3m.cea.fr/> », 2013.
- [COL 11] COLOMBO D., MASSIN P.  
Fast and robust level set update for 3D non-planar X-FEM crack propagation modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n° 25–28, 2011, p. 2160 - 2180.
- [DAS ] DASSAULT S.  
. « <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/> ».
- [DUF 06] DUFLOT M.  
A study of the representation of cracks with level sets. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 70, 2006, p. 1261-1302.
- [DUG 60] DUGDALE D.  
Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, n° 2, 1960, p. 100 - 104.

- [ELG 06] ELGUEDJ T.  
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [ELG 09] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., MAIGRE H.  
An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, n° 30–32, 2009, p. 2297 - 2317.
- [FRE 73] FREUND L.  
Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading - Stress wave loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 21, n° 2, 1973, p. 47 - 61.
- [FRE 86] FREUND L., HUTCHINSON J., LAM P.  
Analysis of high-strain-rate elastic-plastic crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 23, n° 1, 1986, p. 119 - 129.
- [FRE 89] FREUND L.  
*Dynamic fracture mechanics*. Cambridge UK : Cambridge University Press, 1989.
- [GER 99] GERLACH C. A.  
Computational methods for the dynamic response of cracked specimens. Thèse de doctorat, Northwestern University, 1999.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOES N., BELYTCSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by extended finite element and level sets-Part 2 : Level Set update. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 53, 2002, p. 2569-2586.
- [GRE 08] GREGOIRE D.  
Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact. Thèse de doctorat, LaMCoS-INSA de Lyon, 2008.
- [GRI 21] GRIFFITH A.  
The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 221, 1921, p. 163-198.
- [HAB 11] HABOUSSA D., GRÉGOIRE D., ELGUEDJ T., MAIGRE H., COMBESURE A.  
X-FEM analysis of the effects of holes or other cracks on dynamic crack propagations. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 86, 2011, p. 618-636.
- [HAB 12] HABOUSSA D.  
Modélisation de la transition traction-cisaillement des métaux sous choc par la X-FEM. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, november 2012.
- [HAN 04] HANSBO A., HANSBO P.  
A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer methods in applied mechanics engineering*, vol. 193, 2004, p. 3523-3540.
- [HUG 78] HUGHES T., LIU W.  
Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, page 371.
- [HUT 68] HUTCHINSON J.  
Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 13-31.
- [ING 13] INGLIS C.  
Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp cornes. *imechanica.org*, vol. 44, 1913.
- [IRW 57] IRWIN G.  
Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal Applied Mechanics*, vol. 24, 1957, p. 361-364.

- [KAL 00] KALTHOFF J.  
Modes of dynamic shear failure in solids. *International Journal of Fracture*, vol. 101, n° 1, 2000, p. 1–31, Springer.
- [KAN 85] KANNINEN M., POPELAR C.  
*Advanced Fracture Mechanics*. Oxford Engineering Science Series Oxford University Press, USA, 1985.
- [KUT 01] KUTTA M.  
Beitrag zur naherungweiseb Integration totaler Differentialgleichungen. vol. 46, 1901, p. 435-453.
- [MAI 85] MAIGRE H., RITTEL D.  
Dynamic fracture detection using the force displacement reciprocity : application to the compact compression specimen. *International Journal of Fracture*, vol. 73, n° 1, 1985, p. 67-79.
- [MEN 07] MENUILLARD T.  
Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [MEN 08] MENUILLARD T., RÉTHORÉ J., MOËS N., COMBESURE A., BUNG H.  
Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics : Application to crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, n° 3, 2008, p. 447–474, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MEN 10] MENUILLARD T., SONG J., DUAN Q., BELYTSCHKO T.  
Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation. *International Journal of Fracture*, vol. 162, n° 1-2, 2010, p. 33-49, Springer Netherlands.
- [MER 05] MERGHEIM J., KUHL E., STEINMANN P.  
A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, n° 2, 2005, p. 276–289, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTCSCHKO T.  
A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [MOU 10a] MOUSAVI S. E., SUKUMAR N.  
Generalized Gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 49–52, 2010, p. 3237 - 3249.
- [MOU 10b] MOUSAVI S. E., XIAO H., SUKUMAR N.  
Generalized Gaussian quadrature rules on arbitrary polygons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82, n° 1, 2010, p. 99–113, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOU 11a] MOUGAARD J., POULSEN P., NIELSEN L.  
A partly and fully cracked triangular XFEM element for modeling cohesive fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, n° 13, 2011, p. 1667–1686, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOU 11b] MOUSAVI S., SUKUMAR N.  
Numerical integration of polynomials and discontinuous functions on irregular convex polygons and polyhedrons. *Computational Mechanics*, vol. 47, n° 5, 2011, p. 535-554, Springer-Verlag.
- [MOU 12] MOUSAVI S., PASK J., SUKUMAR N.  
Efficient adaptative integration of functions with sharp gradients and cups in n-dimensional parallelepipeds. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 91, 2012, p. 343-357.
- [NAT 10] NATARAJAN S., MAHAPATRA D. R., BORDAS S. P. A.  
Integrating strong and weak discontinuities without integration subcells and example applications in an XFEM/GFEM framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, n° 3, 2010, p. 269–294, John Wiley & Sons, Ltd.

- [NEW 59] NEWMARK N.  
A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, n° 7, 1959, p. 67–94, American Society of Civil Engineers.
- [NGU 05] NGUYEN T., GOVINDJEE S., KLEIN P., GAO H.  
A material force method for inelastic fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, n° 1, 2005, p. 91 - 121.
- [OSG 43] OSGOOD W., RAMBERG W.  
Description of stress-strain curves by three parameters. *Technical Notes National Advance Commication in Aeronautic*, vol. 1943, 1943, page 13.
- [OSH 00] OSHER S., FEDKIW R.  
*Level Set Methods and Dynamic Implicit Surface*. Springer, 2000.
- [PEN 55] PENROSE R.  
A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, 1955, p. 406–413.
- [PEN 99] PENG D., MERRIMAN B., OSHER S., ZAO H., KANG M.  
A PDE-based Fast Local level set method. *Journal of Computational Physics*, vol. 155, 1999, p. 410-438.
- [PRA 07] PRABEL B.  
Modélisation avec la méthode X-FEM de la prpagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [RAB 08] RABCZUK T., ZI G., GERSTENBERGER A., WALL W. A.  
A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, n° 5, 2008, p. 577–599, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RAN 08] RANNOU J.  
Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.
- [REM 03] REMMERS J., BORST R. D., NEEDLEMAN A.  
A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, vol. 31, n° 1-2, 2003, p. 69-77, Springer-Verlag.
- [RET 05] RETHORE J.  
Méthode élément finis étendu en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005.
- [RIC 68a] RICE J.  
Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture : An Advanced Treatise*, vol. 2, 1968, p. 191-311.
- [RIC 68b] RICE J., ROSENBEG G.  
Plane strain deformation near a crack tip in power-law hardenig material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 1-12.
- [RIT 73] RITCHIE R., KNOTT J., RICE J.  
On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 21, n° 6, 1973, p. 395 - 410.
- [SET 96] SETHIAN J.  
*Level Set Methods and fast Marching Methods Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge University press, 1996.
- [VEN 03] VENTURA G., BUDYN E., BELYTSCHKO T.  
Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 58, 2003, p. 1571-1592.

- [VEN 06] VENTURA G.  
On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, n° 5, 2006, p. 761–795, John Wiley & Sons, Ltd.
- [WEL 01] WELLS G. N., SLUYS L. J.  
A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 12, 2001, p. 2667–2682, John Wiley & Sons, Ltd.
- [XIA 06] XIAO Q. Z., KARIHALOO B. L.  
Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, n° 9, 2006, p. 1378–1410, John Wiley & Sons, Ltd.
- [ZHO 96a] ZHOU H., RAVICHANDRAN G., ROSAKIS A.  
Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates I. Experimental investigations of temperature signatures and propagation speed. *Journal of the mechanics and physics of Solids*, vol. 44, 1996, p. 981-1006.
- [ZHO 96b] ZHOU H., RAVICHANDRAN G., ROSAKIS A.  
Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates II. Numerical Simulation. *Journal of the mechanics and physics of Solids*, vol. 44, 1996, p. 1007-1032.
- [ZI 03] ZI G., BELYTSCHKO T.  
New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, n° 15, 2003, p. 2221–2240, John Wiley & Sons, Ltd.



NOM : PELÉE DE SAINT MAURICE

DATE de SOUTENANCE : 07 février 2014

Prénoms : Romains

TITRE : Extension de l'approche X-FEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure dans des matériaux ductiles.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2010-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :

Le développement actuel de l'industrie vise à prévoir l'intégrité des structures dans le temps ou dans le cas de sollicitation extrême. Les risques liés à la propagation des fissures dans le cas de chocs ou d'impacts sont encore difficiles à prévoir. Les codes de calcul dans ce domaine regroupent plusieurs méthodes de simulation au sein d'un même code de calcul. Afin de présenter les différentes méthodes numériques mises en oeuvre, ce mémoire a été découpé en trois parties distinctes. Dans la première partie, nous présentons la bibliographie, puis notre apport aux méthodes de simulation numérique en l'appliquant au cas de la propagation de fissure dynamique et enfin les résultats obtenus à partir des méthodes proposées. Nous comparons ces simulations à des résultats expérimentaux ou à des simulations 2D trouvés dans la littérature.

À travers la bibliographie, nous présenterons la théorie de la mécanique de la rupture pour arriver à un critère de propagation de fissure adapté à la dynamique transitoire. Ce critère a déjà été utilisé pour la fissuration dynamique en 2 dimensions. Nous décrirons la méthode des éléments finis étendus utilisée jusqu'ici principalement en quasi-statique. Nous donnerons les avantages mais aussi les limites de mise en oeuvre de cette méthode, notamment à travers le choix des enrichissements et de l'intégration des éléments coupés par la fissure. La méthode des level-sets est ensuite présentée : elle permet de décrire et faire évoluer la fissure indépendamment de la structure. On met en évidence le besoin de robustesse pour faire évoluer la fissure en dynamique explicite.

La seconde partie est consacrée au développement et à l'extension de la méthode en 3D. Après avoir rappelé le critère de propagation en 3D fragile et avec plasticité, on cherche à proposer des schémas d'intégration spatiale plus économiques. Une nouvelle stratégie de propagation des level-sets basé sur la géométrie est proposée pour la dynamique explicite 3D.

Enfin dans la troisième partie, nous appliquerons les méthodes à des cas de propagation de fissure bi-dimensionnelle puis tridimensionnelle. Nous simulerons dans un premier temps des cas 2D en mode I puis en mode mixte, afin de vérifier que l'on arrive à résultats proches des cas déjà simulés en 2D. Pour terminer par des simulations de propagation tridimensionnelle de fissure avec arrêt et redémarrage de la fissure.

Tous ces développements ont été implémentés dans le code de calcul de dynamique explicite EUROPLEXUS, co-propriété du CEA et de la Commission Européenne.

MOTS-CLÉS : XFEM, dynamique rapide, propagation de fissures 3D.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur Alain Combescure

Président du jury : Nicolas MOËS

Composition du jury : Nicolas MOËS  
Jean Michel BERGHEAU  
Rafael ESTEVEZ  
Anthony GRAVOUIL  
Vincent FAUCHER  
Alain COMBESCURE  
Thomas ELGUEDJ  
Benoit PRABEL

