

# THÈSE

## **Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails**

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE**

par

**Benoît TROLLÉ**

Thèse soutenue le 20 mars 2014 devant la Commission d'examen

### **Jury**

DUREISSEIX DAVID	Professeur INSA-Lyon	Président
DOQUET VÉRONIQUE	Directrice de recherche École Polytechnique	Rapporteuse
MAITOURNAM HABIBOU	Professeur ENSTA-ParisTech	Rapporteur
DWYER-JOYCE ROBERT	Professeur Université de Sheffield	Examinateur
RANNOU JOHANN	Ingénieur de recherche Onera	Examinateur
PRABEL BENOIT	Ingénieur de recherche CEA	Examinateur
MAI SI HAI	Encadrant industriel SNCF	Invité
BAIETTO MARIE-CHRISTINE	Directrice de recherche INSA-Lyon	Directrice de thèse
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon, IUF	Co-directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<p><u>CHIMIE DE LYON</u>  <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a></p> <p>Sec :Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal            3<sup>e</sup> etage            Insa : R. GOURDON</p>	<p><b>M. Jean Marc LANCELIN</b>            Université de Lyon – Collège Doctoral            Bât ESCPE            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 13 95  <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>
E.E.A.	<p><u>ELECTRONIQUE,            ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u>  <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN  <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Gérard SCORLETTI</b>            Ecole Centrale de Lyon            36 avenue Guy de Collongue            69134 ECULLY            Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17  <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a></p>
E2M2	<p><u>EVOLUTION, ECOSYSTEME,            MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u>  <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a></p> <p>Insa : H. CHARLES</p>	<p><b>Mme Gudrun BORNETTE</b>            CNRS UMR 5023 LEHNA            Université Claude Bernard Lyon 1            Bât Forel            43 bd du 11 novembre 1918            69622 VILLEURBANNE Cédex            Tél : 06.07.53.89.13  <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a></p>
EDISS	<p><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-            SANTE</u>  <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a></p> <p>Sec :            Insa : M. LAGARDE</p>	<p><b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b>            INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1            Bâtiment IMBL            11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon            696621 Villeurbanne            Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16  <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a></p>
INFOMATHS	<p><u>INFORMATIQUE ET            MATHEMATIQUES</u>  <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a></p> <p>Sec :Renée EL MELHEM            Bat Blaise Pascal            3<sup>e</sup> etage  <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a></p>	<p><b>Mme Sylvie CALABRETTO</b>            LIRIS – INSA de Lyon            Bat Blaise Pascal            7 avenue Jean Capelle            69622 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87  <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a></p>
Matériaux	<p><u>MATERIAUX DE LYON</u>  <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b>            INSA de Lyon            MATEIS            Bâtiment Saint Exupéry            7 avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28  <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a></p>
MEGA	<p><u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE            CIVIL, ACOUSTIQUE</u>  <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a></p> <p>Secrétariat : M. LABOUNE            PM : 71.70 –Fax : 87.12            Bat. Saint Exupéry  <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a></p>	<p><b>M. Philippe BOISSE</b>            INSA de Lyon            Laboratoire LAMCOS            Bâtiment Jacquard            25 bis avenue Jean Capelle            69621 VILLEURBANNE Cedex            Tél :04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37  <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a></p>
ScSo	<p><u>ScSo*</u>  <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a></p> <p>Sec : Viviane POLSINELLI            Brigitte DUBOIS            Insa : J.Y. TOUSSAINT</p>	<p><b>M. OBADIA Lionel</b>            Université Lyon 2            86 rue Pasteur            69365 LYON Cedex 07            Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48  <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a></p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Ce travail de doctorat étant achevé, il est maintenant temps pour moi de remercier les différentes personnes qui m'ont aidé à le réaliser.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Marie-Christine Baietto et Anthony Gravouil. Je vous suis grandement reconnaissant de la disponibilité dont vous avez fait preuve. Ce travail de doctorat avec votre encadrement m'a fourni une formation que j'ai appréciée.

J'adresse ensuite ma grande reconnaissance aux rapporteurs de ce travail, Véronique Doquet et Habibou Maitournam, leurs relectures attentives m'ont notamment permis de préciser certains points de ce mémoire. Je remercie également David Dureisseix pour la présidence du jury ainsi que les précieuses remarques qui ont suivi. J'exprime de même mes remerciements aux examinateurs, Robert Dwyer-Joyce et Johann Rannou, pour le débat sur la construction de LGV outre-manche ainsi que leurs remarques à propos de ce travail.

J'exprime également mes remerciements à Si Hai Mai pour l'encadrement industriel et le suivi tout au long de cette thèse. J'associe aussi à ces remerciements Benoit Prabel, sa disponibilité, ses remarques et son accueil au CEA de Saclay m'ont permis de gagner un temps précieux dans les développements effectués sous CAST3M.

Je souhaite également témoigner ma gratitude à Mac-Lan Nguyen-Tajan et Christine Funfschilling pour m'avoir fait confiance au démarrage de ce travail de doctorat. Je garde en mémoire les échanges que nous avons eus au moment où j'hésitais à démarrer cette thèse. Je vous suis grandement reconnaissant d'avoir pris le temps d'en discuter, aujourd'hui je ne le regrette pas !

Je souhaite de plus remercier les différentes générations de doctorants que j'ai côtoyées au laboratoire LaMCoS dans l'équipe MSE durant les 18 premiers mois de ce doctorat. Romains, Lucas, Emilien, Fabien, Clément, Jérémy, Robin et les autres, sachez que travailler à vos côtés et vous côtoyer fut un plaisir !

A ces remerciements en direction de mes amis lyonnais, je souhaite inclure ceux qui m'ont hébergé dans mes déplacements entre Paris et Lyon. Votre accueil et la perspective du temps à passer ensemble me fournissaient une motivation supplémentaire pour me déplacer.

Merci aussi aux membres du service Innovation & Recherche à la SNCF, agents, doctorants, prestataires et stagiaires. Travailler dans cette atmosphère conviviale et chaleureuse m'a permis de réaliser avec enthousiasme ces travaux.

Enfin je remercie ma famille et Anne-Lorraine qui m'ont soutenu tout au long de ce travail. Anne-Lorraine, ta présence active, notamment dans les derniers mois, m'a grandement aidé, je t'en suis très reconnaissant.



# Résumé

Sous l'effet des sollicitations mécaniques répétées induites par les passages des trains, on observe l'apparition de fissures de fatigue de contact dans les rails. Une fois amorcées, celles-ci peuvent se propager et mener à la rupture du rail. Dans un contexte d'intensification du trafic et d'augmentation globale des vitesses de circulation, il devient stratégique pour SNCF d'optimiser sa politique de maintenance. Afin de définir des pas de surveillance adaptés et une planification optimisée des opérations de maintenance, une meilleure connaissance des mécanismes d'endommagement par fatigue du rail s'avère nécessaire. Tendre vers cette stratégie de maintenance prédictive passe par la mise en place d'outils de simulation numérique adaptés. Dans ce contexte, une chaîne d'outils a été développée : détermination des sollicitations transmises au rail, des champs de contraintes et de déformations résiduelles, localisation des zones critiques vis-à-vis du risque de fissuration. L'étape suivante consiste à estimer le risque lié à la présence de fissures et à étudier leurs propagations. Elle constitue une partie des objectifs de ces travaux de thèse.

La résolution du problème tri-dimensionnel d'une structure fissurée, avec contact et frottement entre les lèvres, est effectuée grâce à un modèle tri-dimensionnel éléments finis étendus multi-échelles. Ce modèle fait appel à une formulation mixte stabilisée où chaque champ est écrit à l'aide d'enrichissement. La fissure est représentée grâce à une stratégie implicite-explicite. Le problème est résolu à l'aide du solveur non-linéaire LATIN. Une étude empirico-numérique a permis de proposer des formules a priori assurant à la méthode de résolution un taux de convergence proche de l'optimal.

La simulation de la propagation des fissures de fatigue est réalisée à l'aide de critères spécifiques, adaptés à un chargement multi-axial et non-proportionnel, et d'une loi de propagation dédiée en mode mixte. La confrontation des résultats de simulation avec des essais réalisés sur une configuration cylindre-plan a validé la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles. Tous ces développements ont été implémentés dans le code de calcul éléments finis CAST3M.

L'introduction d'un chargement mobile de contact a nécessité la mise en place d'un maillage multi-échelles paramétré. Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec des études similaires disponibles dans la littérature. Des contraintes résiduelles réalistes, provenant d'un logiciel externe, ont été introduites. Cette étape a requis la mise en place d'une procédure de transfert des champs entre les deux maillages (celui utilisé pour le calcul des contraintes résiduelles et celui utilisé pour la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture). L'étude de la flexion du rail a révélé l'influence de ce phénomène uniquement lors du passage du chargement sur la fissure.

Enfin, une étude numérique a montré la très forte influence de l'orientation du chargement tangentiel, des contraintes résiduelles et de la présence de plusieurs fissures sur la direction et les vitesses de propagation des fissures de fatigue.

**MOTS CLÉS:** Fatigue de roulement, propagation des fissures, éléments finis étendus, contact, frottement, contraintes résiduelles, rail, CAST3M.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Revue bibliographique et état de l'art</b>	<b>7</b>
1.1 Présentation du problème ferroviaire multi-échelles . . . . .	8
1.1.1 Contexte et enjeux industriels . . . . .	8
1.1.2 A l'échelle du système, le passage des trains sur les voies ferrées .	9
1.1.3 A l'échelle du rail, la répétition des sollicitations tribologiques et des champs de contraintes résiduelles . . . . .	12
1.1.4 A l'échelle locale, les fissures et non-linéarités associées . . . . .	19
1.2 Mécanique élastique linéaire de la rupture . . . . .	22
1.2.1 Approche asymptotique du problème de rupture . . . . .	22
1.2.2 Hypothèse de plasticité confinée . . . . .	24
1.2.3 Approche énergétique . . . . .	25
1.2.4 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	26
1.2.5 Critères pour la prédiction de la direction de propagation . . . . .	30
1.2.6 Lois de propagation . . . . .	34
1.3 État de l'art de la simulation de la propagation des fissures dans les rails .	40
1.3.1 Les approches utilisant la méthode des éléments-finis (MEF) . . .	41
1.3.2 La méthode des éléments frontières . . . . .	42
1.3.3 Méthode semi-analytique basée sur la théorie des dislocations . .	43
1.3.4 La méthode des éléments finis étendus . . . . .	44
1.3.5 Modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la XFEM	46
1.4 Conclusion . . . . .	49
<b>2 Modèle multi-échelles avec contact et frottement interfacial</b>	<b>53</b>
2.1 Présentation de CAST3M . . . . .	54
2.2 Formulation faible mixte du problème avec interface en présence de contact et frottement . . . . .	56
2.3 Discrétisation multi-échelles enrichie des champs . . . . .	60
2.4 Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN stabilisée . . . . .	63
2.4.1 Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN . . . . .	63

2.4.2	Stabilisation de la formulation . . . . .	67
2.4.3	Définition a priori de paramètres optimaux . . . . .	69
2.5	Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	74
2.6	Exemples de problèmes de rupture et validation . . . . .	76
2.6.1	Validation des pressions de contact à l'interface . . . . .	76
2.6.2	Problème bi-dimensionnel avec contact adhérent à l'interface . . . . .	77
2.6.3	Problème tri-dimensionnel avec contact unilatéral et singularité dans la solution de contact . . . . .	80
2.6.4	Problème tri-dimensionnel avec contact glissant à l'interface . . . . .	82
2.7	Simulation multi-échelles en temps et validation de la stratégie . . . . .	85
2.7.1	Simulation multi-échelles en temps de la propagation des fissures . . . . .	85
2.7.2	Validation de la stratégie multi-échelles en temps et en espace : cas de la propagation en fretting . . . . .	86
2.7.3	Eléments pour la simulation tri-dimensionnelle de la propagation des fissures de fatigue . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails</b>	<b>101</b>
3.1	Couplage avec les phénomènes agissant à l'échelle de la structure . . . . .	103
3.1.1	Introduction du chargement mobile de contact . . . . .	103
3.1.2	Introduction d'un état initial non-vierge . . . . .	113
3.1.3	Bilan de l'introduction des phénomènes agissant à l'échelle du rail dans la stratégie XFEM/LATIN à deux échelles . . . . .	122
3.2	Introduction des phénomènes agissant à l'échelle du système : prise en compte de la flexion . . . . .	123
3.2.1	Couplage avec un macro-modèle non fissuré pour la prise en compte de la flexion . . . . .	123
3.2.2	Modèle réduit avec appuis élastiques . . . . .	127
3.3	Bilan de l'approche multi-échelles . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails</b>	<b>131</b>
4.1	Définition des paramètres utilisés . . . . .	132
4.2	Influence de l'échelle locale . . . . .	133
4.2.1	Coefficient de frottement interfacial . . . . .	134
4.2.2	Orientation de la fissure . . . . .	136
4.2.3	Longueur initiale de la fissure . . . . .	141
4.3	Influence de l'échelle de la structure . . . . .	145
4.3.1	Contact roue-rail . . . . .	145
4.3.2	Introduction d'un état initial non-vierge . . . . .	148
4.4	Etude des réseaux de fissures . . . . .	152
4.4.1	Etude d'une configuration "squat" . . . . .	152
4.4.2	Etude d'un réseau de fissures parallèles . . . . .	155
4.4.3	Introduction des contraintes résiduelles dans le réseau de fissures . . . . .	159
4.5	Synthèse de l'étude numérique . . . . .	162

4.6 Estimation des vitesses de fissuration mesurées : étude préliminaire . . . .	163
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>167</b>
<b>Annexe A : Remarques sur les enrichissements des champs locaux et l'implé- mentation des matrices dans RELA ACCRO FAIBLE</b>	<b>173</b>
<b>Annexe B : Module utilisateur développé</b>	<b>177</b>
<b>Annexe C : Contenu du fichier accro2.eso</b>	<b>191</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>



# Introduction

La prédiction de la durée de vie en fatigue des structures représente un enjeu industriel important. Ce phénomène est induit par des sollicitations cycliques dont l'amplitude peut être inférieure à la limite d'élasticité du matériau. Des méthodes et outils numériques permettent d'optimiser le dimensionnement et ainsi d'augmenter la résistance des structures tout en diminuant leur masse. Les trois étapes du phénomène : amorçage, propagation des fissures et rupture de la pièce recouvrent des phénomènes complexes et difficiles à prédire. Dans beaucoup d'applications, l'initiation et la propagation de fissures de fatigue sur des pièces de sécurité sont inévitables.

Ainsi dans le monde ferroviaire, l'importance du parc de matériels roulants, son évolution en terme de fréquence et de tonnage, modifient le comportement en fatigue des rails. Les gestionnaires du réseau doivent faire face à des mécanismes d'endommagement qui évoluent avec le type de train en circulation, la géométrie de la voie et le comportement des couches de ballast et de terrassement. Les sollicitations subies par le rail évoluent dans le temps et rendent indispensable une surveillance régulière du réseau ferré. Cette maintenance fait appel à des ressources très importantes car la sécurité des biens et des personnes est en jeu.

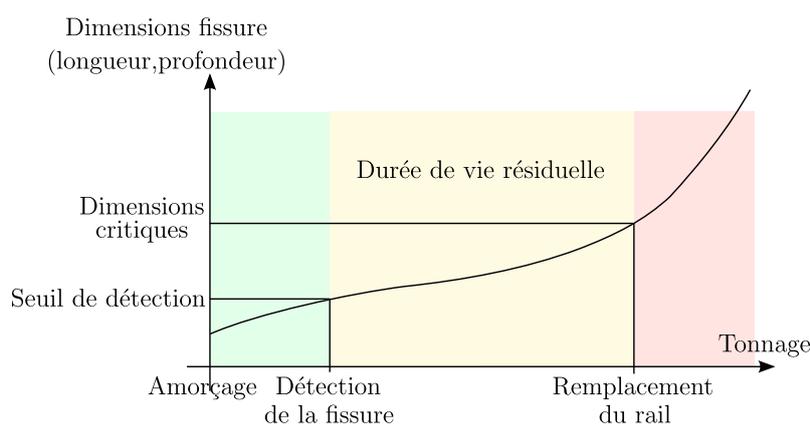
Une terrible illustration des manquements à cet impératif de sécurité fut l'accident du 17 octobre 2000 à Hatfield au Royaume-Uni. Ce déraillement, qui coûta la vie à quatre passagers et en blessa soixante-dix autres, fut attribué à la rupture par fatigue d'un rail. Les conséquences de cet accident, et du fort niveau de vieillissement mesuré à l'échelle du réseau, furent la "nationalisation" outre manche du gestionnaire du réseau et un programme de travail dédié à la fatigue des rails sollicités sous contact roulant (notamment [KAP 06a, KAP 06b, KAP 06c, KAP 06d]).

Afin de maîtriser ces risques, la politique de maintenance de la Direction de l'Infrastructure du Groupe SNCF s'appuie sur quatre leviers principaux :

- Une surveillance périodique et **systématique**, regroupant l'ensemble des opérations de surveillance réalisée sur le réseau (interventions menées qu'il y ait ou non détection de défauts). Leur fréquence est fonction du classement (groupe UIC) de chaque ligne.

- Une surveillance **adaptée**, si une anomalie est détectée. La fréquence de ces interventions est réduite afin de maîtriser l'évolution de la ou des anomalie(s) détectée(s). Dans le cas ultime (cas rarement rencontré), des mesures de restriction de vitesse de circulation sur ce tronçon peuvent être mises en place en attendant un traitement curatif.
- Des opérations de remplacement **préventif** sont planifiées plusieurs années avant qu'elles ne soient effectivement réalisées sur le réseau. La décision de ces actions repose sur le retour d'expérience et sur des modèles de durée de vie. Ces opérations, lourdes et coûteuses, requièrent la réservation de sillon (horaire et lieu des circulations), du matériel et des moyens financiers. Elles présentent cependant une grande efficacité technique et industrielle, elles offrent en effet des possibilités de massification et de mutualisation de moyens.
- Pour les cas où les dimensions d'un défaut détecté et surveillé dépassent un seuil technique avant la régénération préventive des rails, des remplacements **curatifs** sont mis en oeuvre (couponnage).

Les référentiels SNCF internes prévoient le déclenchement de procédures adaptées selon les mesures et observations effectuées sur le réseau. Cependant, les décideurs aimeraient pouvoir disposer d'outils permettant de fournir des estimations de l'évolution des défauts selon les conditions de circulation. Ces outils doivent permettre une planification plus précise des opérations de maintenance préventive et d'optimiser l'effort de maintenance. Un exemple de ces évolutions pourrait être la définition d'un tonnage cumulé, pour un type de défaut donné dans des conditions données, nécessaire pour atteindre les dimensions critiques (FIG.1). Afin de tendre vers cette stratégie de maintenance prédictive, SNCF souhaiterait se doter d'outils numériques lui permettant d'améliorer la compréhension des mécanismes de fissuration par fatigue des rails.



**FIGURE 1:** Définition d'une durée de vie résiduelle pour un défaut vis-à-vis d'une dimension critique.

La fissuration par fatigue des rails trouve son origine dans le passage répété des trains.

A l'interface entre le train et le rail, le contact roue-rail, dont la surface est de l'ordre d'une pièce d'un euro, transmet des pressions de contact de l'ordre du gigapascal. Ces sollicitations tribologiques dépendent notamment de la dynamique du train, des propriétés mécaniques des matériaux, de l'état de surface de la roue et du rail ainsi que des conditions de frottement et de lubrification. La répartition des zones d'adhérence et de glissement dans la zone de contact local modifie les sollicitations [KAL 90].

Ces sollicitations sont multi-axiales et non proportionnelles. Elles engendrent une propagation en mode mixte des fissures. Cette propagation est influencée par les phénomènes non-linéaires tels que le contact et le frottement entre les lèvres ou la plasticité confinée en pointe de fissure. Les séquences complexes d'ouverture, contact glissant ou adhérent influencent la mixité des sollicitations ressenties en pointe de fissure.

La répétition des sollicitations liée au passage des roues et des trains engendre un état de contraintes résiduelles en compression sous la bande de roulement. Ces contraintes résiduelles, associées à celles présentes à l'issue du procédé de fabrication, mènent à une succession de couches dans la profondeur du rail en traction et en compression [WEB 92]. Ces forts gradients influencent également les mécanismes de propagation.

La modélisation de ce problème complexe fait appel à différentes échelles, parfois couplées. A l'échelle du système train-voie, le rail fléchit sur plusieurs mètres. Si l'on considère un tronçon restreint de rail (de quelques dizaines de centimètres), de forts gradients de contraintes résiduelles sont présents. Entre les lèvres de la fissure, le contact et le frottement introduisent des non-linéarités agissant à des échelles de l'ordre du micromètre. La modélisation de ce problème requiert donc une approche multi-échelles. Pour cela, ce travail se positionne au sein de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Dans ce cadre, il est considéré que la zone plastique se développant en amont du front de fissure reste de dimensions restreintes comparées aux tailles caractéristiques de la fissure et de la structure. Le cadre théorique de mécanique élastique linéaire de la rupture se montre alors tout à fait adapté [BUI 78].

En outre, le contact entre la roue et le rail peut prendre des formes complexes et se déplacer sur la surface du rail. Les fissures initiées présentent des topologies évoluées. Tous ces aspects soulignent le besoin de tendre vers une simulation tri-dimensionnelle de la propagation des fissures de fatigue dans les rails.

Les développements et l'essor des méthodes numériques, couplés au cadre théorique de la mécanique de la rupture, rendent envisageable la faisabilité de ces calculs. La méthode des éléments finis est certainement la méthode la plus répandue pour la modélisation des problèmes de rupture. Sa robustesse, la possibilité de pouvoir représenter des géométries 3D complexes ainsi que d'y intégrer des lois de comportements non-linéaires en font un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes. Pour représenter une fissure à l'aide de cette méthode, un maillage conforme à la discontinuité s'avère nécessaire. Des développements d'éléments spécifiques permettent néanmoins d'intégrer la singularité introduite par le front de la fissure [BAR 74]. Cependant la connectivité du maillage étant immuable, la représentation de discontinuité mobile se montre rapidement un problème complexe. Dans le cas de la simulation de la propagation des fissures, cette méthode

impose alors des étapes de remaillage et la projection de champs. Ces manipulations deviennent rapidement coûteuses voire complexes pour des fissures tri-dimensionnelles de géométries évoluées. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a notamment été développée pour remédier à ces inconvénients [MOë 99]. Cette méthode se situe dans le prolongement de la méthode des éléments finis et introduit des enrichissements judicieux en se basant sur le principe de la partition de l'unité [MEL 96]. Les enrichissements permettent alors une représentation implicite de la fissure complètement indépendante du maillage de structure. Dans le cas d'une discontinuité mobile, l'ajout d'enrichissement aux nœuds adéquats du maillage de la structure permet de simuler l'évolution de la fissure. Cette méthode se libère des étapes de remaillage et de projection pour la simulation de la propagation des fissures. De plus, étant une extension de la méthode des éléments finis, celle-ci en conserve les avantages comme la possibilité d'intégrer des lois de comportement non linéaires. Elle pose toutefois le problème du positionnement géométrique de la discontinuité et de la singularité dans le maillage de la structure. La technique des fonctions de niveaux [GRA 02, MOë 02] permet de modéliser et de positionner précisément des fissures de géométries complexes. Elle est une représentation implicite de la topologie de la fissure. Si l'on souhaite intégrer des lois de comportement non linéaires à l'interface, décrire la fissure de manière explicite permet une mise en oeuvre plus aisée de ces lois. Cette représentation offre également la possibilité d'utiliser une discrétisation adaptée à l'échelle des non-linéarités du contact. C'est cette représentation implicite-explicite qui sera utilisée dans ce travail [PRA 11, FRI 12].

Le développement des modèles X-FEM avec contact et frottement à l'interface a posé quelques difficultés. Longtemps la discrétisation de l'interface a été dépendante de celle de la structure [DOL 01]. Dès lors, une description précise du problème de contact nécessite un raffinement du maillage de structure. Ce procédé est en opposition avec l'idée des X-FEM visant à rendre indépendante la description du problème de structure de la discontinuité introduite. Il entraîne des opérations de maillage délicates pour les problèmes tri-dimensionnels et implique un surcoût en terme de temps de calcul. Des travaux ont depuis entièrement découplé les deux discrétisations [PIE 10c].

En outre, plusieurs auteurs ont mis en évidence des problèmes de stabilité des solutions de contact. Des oscillations numériques, principalement visibles sur le dual, furent constatées. Afin de pallier cela, des procédés de stabilisation dépendant des formulations utilisées furent introduits. Ces procédés consistent à assurer le respect de la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (dite LBB) par l'ajout d'un terme de stabilisation [GRA 11] ou à définir de manière adéquate l'espace des multiplicateurs de Lagrange [Gén 07].

L'objectif principal de ce travail est de développer un outil robuste, dédié à la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails, permettant d'obtenir des résultats quantitatifs de l'accroissement des fissures en fonction des sollicitations subies. Cet outil doit permettre d'améliorer la compréhension des mécanismes de fissuration des rails. Pour cela, c'est la formulation proposée par [RIB 07], dont les discrétisations locale et globale ont ensuite été rendues indépendantes [PIE 10c] qui sera utilisée. Celle-ci

a en parallèle été stabilisée [GRA 11]. Cette stratégie devra cependant être entièrement intégrée, adaptée et optimisée au sein du code de calcul éléments finis CAST3M.

Ce mémoire est articulé de la façon suivante.

Le chapitre 1 présente dans un premier temps le problème ferroviaire multi-échelles à résoudre. Cette première partie vise à introduire les différentes échelles présentes dans les mécanismes de fissuration par fatigue des rails. Elle synthétise également quelques résultats disponibles quantifiant l'influence des différentes échelles sur les mécanismes de propagation. Pour cela, le problème de dynamique ferroviaire est tout d'abord brièvement exposé. La résolution du problème de contact entre la roue et le rail est ensuite traitée. L'analyse en fatigue des voies ferrées et les mécanismes de fissuration associés sont finalement abordés.

Dans un deuxième temps, les bases théoriques de la mécanique élastique linéaire de la rupture sont rappelées. Cette partie précise également les critères de prédiction de la direction de propagation ainsi que les lois de propagation en mode mixte applicables à la fatigue de roulement.

Dans un dernier temps, un bref état de l'art des méthodes disponibles pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails est réalisé. Cette partie développe les principaux résultats disponibles ainsi que leurs limites. Enfin, afin de justifier le choix de la formulation utilisée, un état de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de X-FEM est également établi.

Le chapitre 2 constitue la première partie du travail réalisé : le développement dans CAST3M du modèle X-FEM/LATIN à deux échelles pour la résolution du problème de rupture avec contact et frottement à l'interface.

La discrétisation X-FEM des champs d'interface, la formulation stabilisée sélectionnée et le solveur non linéaire LATIN sont explicités. L'utilisation de ce travail a ensuite permis de proposer des formules a priori assurant un taux de convergence de la méthode proche de l'optimal. Les développements réalisés pour la prise en compte du frottement dans le calcul des facteurs d'intensité des contraintes sont également précisés.

L'implémentation de la stratégie à deux échelles pour la résolution du problème de rupture dans CAST3M est ensuite validée par comparaison avec des solutions bi et tri-dimensionnelles provenant d'un autre logiciel.

Enfin, la stratégie numérique à deux échelles de temps pour la propagation des fissures est détaillée. Elle est ensuite comparée à des résultats d'essais réalisés sur un cas de fissuration sous chargement de fretting et validée.

Dans le chapitre 3, les différentes échelles du problème ferroviaire sont introduites dans le modèle X-FEM/LATIN pour la résolution du problème de rupture avec prise en compte du contact frottant interfacial.

L'introduction du chargement mobile de contact est tout d'abord effectué. Le chargement provient de la résolution du problème de contact entre la roue et le rail réalisé dans un logiciel dédié. La bonne simulation d'un cycle de chargement est ensuite étudiée et

évaluée par comparaison avec des résultats faisant appel à une modélisation différente du problème de rupture. Un exemple tri-dimensionnel de couplage avec le logiciel dédié au contact roue-rail pour la simulation d'un cycle de chargement est exposé.

Les contraintes résiduelles complexes présentes dans le rail sont le deuxième phénomène à introduire. Cette étape consiste à intégrer un état initial non vierge dans le problème de rupture.

La flexion du rail, liée à l'échelle du système train-voie, est finalement étudiée. Dans un premier temps, la flexion est simulée par couplage avec un macro-modèle dédié non fissuré. Dans un second temps, l'étude se limitera à l'ajout d'appuis élastiques dans le modèle dédié à la résolution du problème de rupture.

Le dernier chapitre présente quelques résultats de simulation de propagation bi-dimensionnelle obtenus avec l'outil développé. Ce chapitre s'attache à étudier et à quantifier l'influence des différents paramètres locaux et globaux sur les mécanismes de propagation.

Dans la dernière partie de ce chapitre, un travail préliminaire entrepris pour la comparaison des résultats numériques avec les accroissements mesurés sur le réseau est rapporté.

Enfin, les conclusions de ce travail sont exposées, ainsi que les perspectives et les développements futurs à envisager.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'un partenariat entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) à l'INSA de Lyon et SNCF Innovation & Recherche pour le consortium IDR2 (groupe de travail pour la mutualisation des actions de recherche sur le rail composé de SNCF, RATP, TaTa Steel et de partenaires universitaires dont le LaMCoS). Le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) de Saclay a également contribué à ce travail de thèse. Cette thèse a donc représenté un travail collaboratif pour la synthèse des compétences et savoir-faire des différents partenaires impliqués.

# Chapitre 1

## Revue bibliographique et état de l'art de la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation du problème ferroviaire multi-échelles</b>	<b>8</b>
1.1.1	Contexte et enjeux industriels	8
1.1.2	A l'échelle du système, le passage des trains sur les voies ferrées	9
1.1.3	A l'échelle du rail, la répétition des sollicitations tribologiques et des champs de contraintes résiduelles	12
1.1.4	A l'échelle locale, les fissures et non-linéarités associées	19
<b>1.2</b>	<b>Mécanique élastique linéaire de la rupture</b>	<b>22</b>
1.2.1	Approche asymptotique du problème de rupture	22
1.2.2	Hypothèse de plasticité confinée	24
1.2.3	Approche énergétique	25
1.2.4	Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	26
1.2.5	Critères pour la prédiction de la direction de propagation	30
1.2.6	Lois de propagation	34
<b>1.3</b>	<b>État de l'art de la simulation de la propagation des fissures dans les rails</b>	<b>40</b>
1.3.1	Les approches utilisant la méthode des éléments-finis (MEF)	41
1.3.2	La méthode des éléments frontières	42
1.3.3	Méthode semi-analytique basée sur la théorie des dislocations	43
1.3.4	La méthode des éléments finis étendus	44
1.3.5	Modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la XFEM	46
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

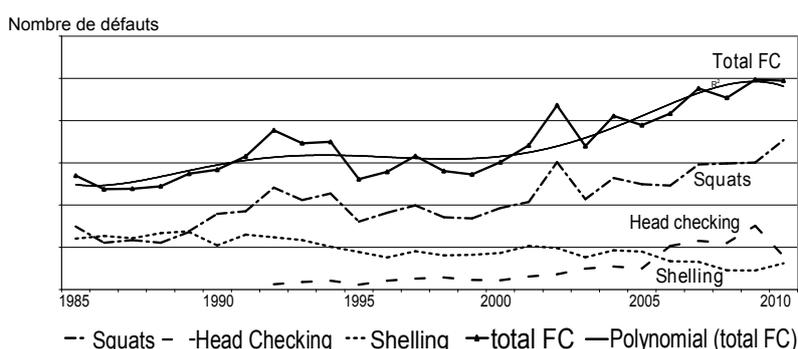
---

Dans ce premier chapitre, le contexte et les enjeux industriels dans lesquels s'inscrivent ces travaux sont tout d'abord rappelés. Les différents mécanismes agissant aux échelles caractéristiques dans le problème de la fissuration par fatigue des rails sont ensuite introduits. Dans cette partie, les méthodes permettant de résoudre les problèmes agissant à l'échelle du rail sont présentées. Les résultats disponibles sont également exposés. La partie suivante détaille les bases théoriques nécessaires à ce travail. Les outils indispensables de la mécanique de la rupture y sont définis. Les critères et lois de propagation applicables à la fatigue de roulement sont ensuite précisés. En fin de chapitre, un bref état de l'art des méthodes numériques permettant de simuler la propagation des fissures sous fatigue de roulement est effectué. En conclusion, cette synthèse met en évidence le besoin d'une simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails à l'aide d'une modélisation intégrant les phénomènes agissant aux différentes échelles.

### 1.1 Présentation du problème ferroviaire multi-échelles : du passage des trains à la propagation des fissures

#### 1.1.1 Contexte et enjeux industriels

Depuis quelques années, SNCF constate une diminution des ruptures de rail par "fatigue interne". Cette dénomination désigne des fissures de fatigue initiées dans le champignon du rail dues à des défauts de fabrication. L'amélioration des procédés de fabrication a permis de diminuer le nombre de ces défauts. Avec l'intensification du trafic ferroviaire, l'augmentation des vitesses et du tonnage supporté par les rails, les défauts propageant sous fatigue de contact ont vu leur nombre augmenter (notés Total FC sur la FIG.1.1). La proportion de retrait de rail due à des défauts liés à la fatigue de contact est passée de 53% en 2003 à 73.6% en 2010 [CSC 12].

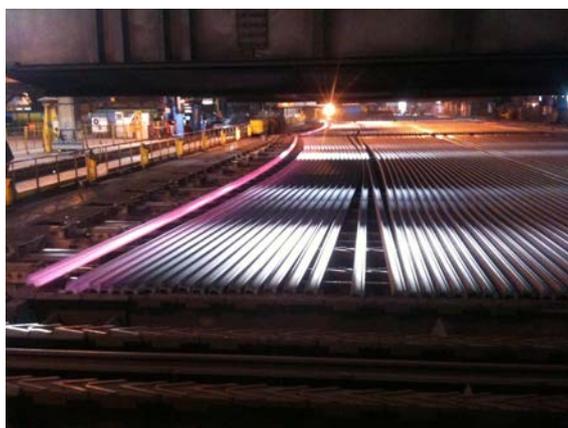


**FIGURE 1.1:** Nombre de retraits de rail dû à la fatigue de contact de 1985 à 2010 [CSC 12].

Ces ruptures par fatigue sont produites par des variations de contraintes répétitives dans le temps et généralement inférieures à la limite d'élasticité. Elles se caractérisent par la propagation relativement lente des fissures sous l'influence des sollicitations cycliques, en présence de plasticité confinée en pointe de fissure. Si le nombre de rupture reste faible ramené au plus de 49000 kilomètres de voies ferrées en France, chaque rupture entraîne des opérations de maintenance lourdes et non programmées pouvant mener à des vitesses de circulation réduites ou à des interruptions du trafic. Ces deux aspects, maintenance et circulation, génèrent des surcoûts non négligeable pour SNCF. C'est grâce à une politique de surveillance et de maintenance performante que le nombre de ces situations reste limité. La planification des chantiers importants de maintenance (les opérations préventives comme les renouvellements de voies ballastées) s'effectuent plusieurs années avant leur réalisation. Les mainteneurs aimeraient pouvoir disposer d'outils permettant d'obtenir des estimations de la vitesse de propagation des fissures en fonction du tonnage circulant sur les voies.

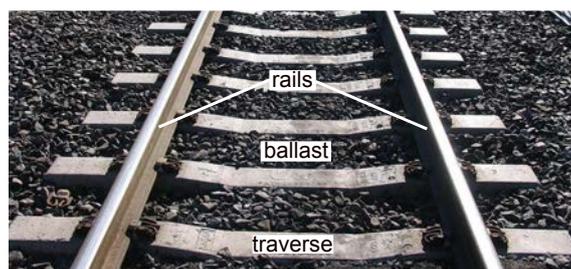
### 1.1.2 A l'échelle du système, le passage des trains sur les voies ferrées

La fissuration par fatigue des rails trouve son origine dans le passage répété des trains sur les rails. Les rails servent à la fois de guide et de support de roulement pour les véhicules. Ils sont fixés aux traverses. Ces traverses sont des pièces posées en travers de la voie, sous les rails, pour en maintenir l'écartement, l'inclinaison et transmettre au ballast les charges des véhicules circulant sur les rails (FIG.1.3 et FIG.1.4). Un rail est une poutre d'acier longue de plusieurs dizaines de mètres de long (FIG.1.2).

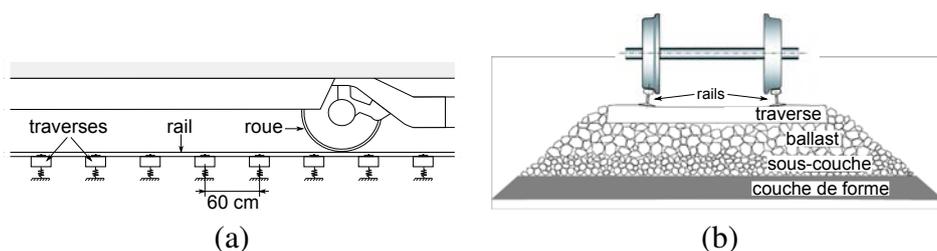


**FIGURE 1.2:** Rail long de 36m refroidissant après le procédé de laminage.

Traverses et rails constituent une partie essentielle des voies sur lesquelles circulent les trains. Ces voies, à la manière des routes, doivent s'accommoder à la topographie et à la nature du sol dans lesquelles elles se trouvent. Un train expérimente des situations de roulement dites en alignement (ligne droite), en courbe (virage) et en zone de transition entre ces deux situations. Il affronte également des déclivités (montée ou descente) entraînant



**FIGURE 1.3:** Photographie d'une voie ferrée vue de dessus.



**FIGURE 1.4:** Représentation schématique d'une voie ferrée de profil (a) et en coupe (b).

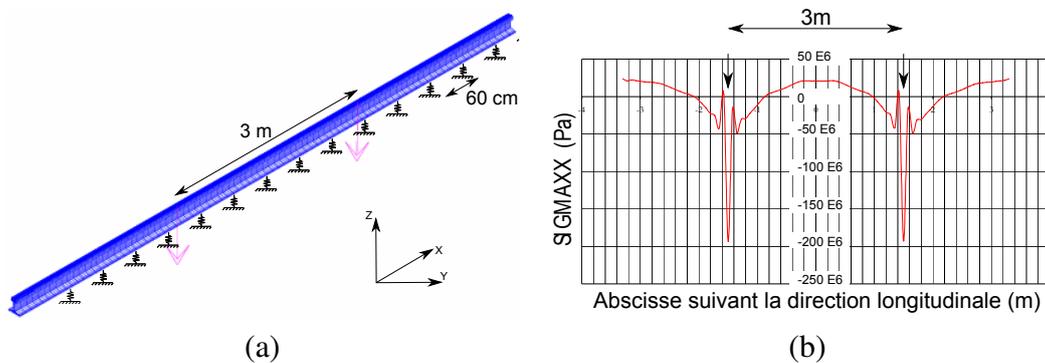
différentes situations de roulement (accélération ou freinage). A l'échelle du système, le passage des trains sur les rails peut être représenté mécaniquement par un ensemble de solides rigides ayant un comportement dynamique tri-dimensionnel déterminable à partir de la géométrie de la voie et des caractéristiques du train [GAR 84, WIC 03, AND 07]. Sous le chargement dynamique du train, les rails auront tendance à plastifier au niveau du contact roue-rail [JOH 89, KAP 94] et à fléchir de part et d'autre de la zone de chargement.

### 1.1.2.1 Travaux quantifiant l'influence de la flexion sur la rupture des rails

Dans les travaux présentés dans cette partie, le scénario envisagé est celui de la propagation des fissures de fatigue dans les rails suite à un chargement cyclique en flexion.

Une modélisation avec une fissure verticale dans un rail sollicité en flexion trois points a été considérée [MEC 06a]. Le facteur d'intensité des contraintes en mode I  $K_I$  est évalué, basé sur un modèle tri-dimensionnel éléments finis et une résolution statique. Le facteur d'intensité des contraintes est calculé à partir de la discontinuité du champ de déplacement le long du front. Dans le cas d'une fissure débouchante profonde de 5mm,  $K_I$  est estimé autour de  $12 \text{ MPa.m}^{1/2}$ . Hobbs [HOB 06] propose une analyse similaire en considérant, non pas un chargement en flexion trois points, mais un chargement correspondant à deux roues d'un même bogie. Pour une fissure semi-circulaire de 10 mm de rayon, inclinée de  $30^\circ$  avec la surface du rail (mode mixte), positionnée à équidistance des deux roues du bogie et une modélisation statique, des valeurs de facteurs d'intensité des contraintes en mode I comprises entre 1 et  $3 \text{ MPa.m}^{1/2}$ , selon les raideurs utilisées, sont obtenues.

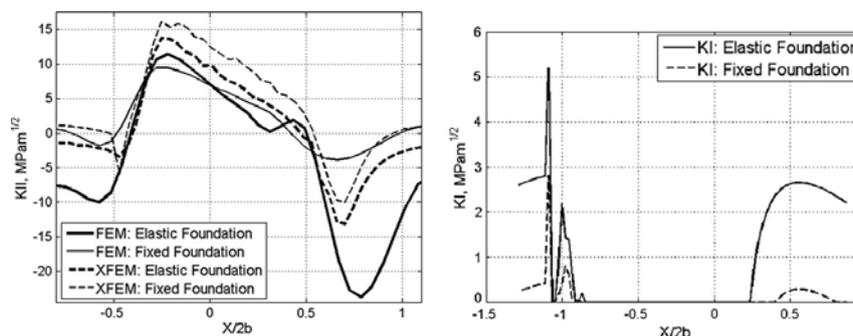
Les raideurs proviennent de travaux antérieurs évaluant les raideurs statiques autour de 40 MN/m [DUK 99]. Cette étude estime autour de 20 MPa les contraintes longitudinales maximales en tension introduites par la flexion [HOB 06], valeur retrouvée par d'autres travaux avec un chargement similaire [MEC 06b] (FIG.1.5). D'autres travaux envisagent une propagation en mode I avec comme mécanisme moteur de la propagation, la flexion du rail additionnée à une contrainte uniforme en tension provenant de la contraction thermique du rail [EKB 09]. Ils étudient l'influence de la raideur des composants de la voie (traverses et ballast, entre 5 et 100 MN/m) et des véhicules sur les valeurs de  $K_I$  obtenues. En considérant des sollicitations importantes introduites par des défauts sur la roue et la voie, le maximum des contraintes en tension correspondant à la flexion est alors de l'ordre de 100 MPa. De part l'effort supplémentaire en tension appliqué, cette étude met en évidence des valeurs bien plus élevées pour  $K_I$  (entre 10 et 50 MPa.m<sup>1/2</sup> pour une fissure de type head-check de 25 à 40 mm).



**FIGURE 1.5:** (a) Modèle statique pour l'évaluation des contraintes longitudinales introduites par la flexion. (b)  $\sigma_{xx}$  dans le rail calculé en statique pour un chargement en alignement [MEC 06b].

D'autres études visant à quantifier l'influence de cette échelle systémique sur l'échelle locale se contentent d'étudier l'influence de la flexion lors du passage de la roue sur la fissure [FAR 12a, FAR 12b]. Le scénario proposé dans ces travaux est celui de la propagation des fissures sous fatigue de contact. Une fissure est modélisée dans un domaine reposant sur des appuis élastiques dont les raideurs varient entre 3 et 108 MN/m. Un chargement mobile quasi-statique est appliqué à la surface supérieure du domaine. Il s'agit donc plus d'une modification des conditions aux limites qu'une prise en compte du pic introduit par la flexion du rail entre les deux roues du bogie. Il est cependant intéressant de noter que les appuis élastiques ont pour conséquence d'augmenter substantiellement les valeurs de  $K_I$  et de modifier la valeur moyenne de  $K_{II}$  (FIG.1.6).

En conclusion de cette partie sur l'influence de la flexion sur les mécanismes de fissuration par fatigue dans les rails, nous avons vu que les contraintes longitudinales statiques maximales dues au chargement de flexion sont de l'ordre de 20 MPa en amont et en aval



**FIGURE 1.6:**  $K_I$  et  $K_{II}$  obtenus avec et sans appuis élastiques de raideur 18 MN/m, pour une fissure longue de 4.2 mm et inclinée de  $20^\circ$  avec un chargement Hertzien [FAR 12a]. X est l'abscisse du centre du chargement Hertzien. b est la demi-longueur de contact de l'ellipse de Hertz.

du contact dans le champignon du rail. Les valeurs associées  $\Delta K_I$  sont très faibles. Cependant, la prise en compte d'appuis élastiques et non d'appuis fixes, modifie les valeurs et l'amplitude des facteurs d'intensité des contraintes lors du passage du chargement de contact. Ces conclusions, tirées de l'étude bibliographique, demanderont à être vérifiées.

A une échelle plus petite, de l'ordre de quelques dizaines de centimètres, d'autres phénomènes influencent l'état mécanique d'un tronçon de rail.

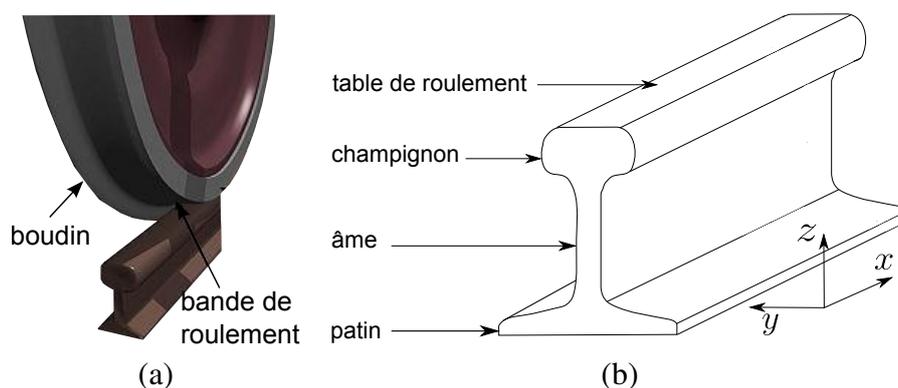
### 1.1.3 A l'échelle du rail, la répétition des sollicitations tribologiques et des champs de contraintes résiduelles

#### 1.1.3.1 Le contact roue-rail, une interface entre le train et la voie

A une échelle plus fine, à l'interface du système train-voie se trouve le contact entre la roue et le rail. En alignement ce contact a souvent lieu entre la bande de roulement de la roue et la table de roulement du rail (FIG.1.7 et FIG.1.8 (a)). En courbe, il se déplace sur le côté du rail et se localise entre le boudin de la roue et le congé du rail (FIG.1.7 et FIG.1.8 (b)). Cependant ces observations générales sont à nuancer. Le contact entre la roue et le rail peut prendre des formes complexes [SEB 03]. Il peut être mono-contact comme illustré sur la FIG.1.8 ou bi voire tri-contact comme sur la FIG.1.9.

De manière générale, deux façons de procéder existent au niveau de la définition du chargement mobile de contact dans les simulations de propagation :

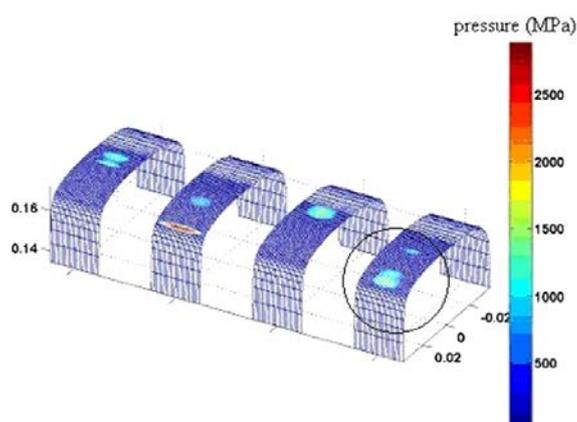
- les chargements qui prennent en compte la présence de la fissure lors de la résolution du problème de contact, déterminés à l'aide de la méthode des éléments finis [BOG 96, BOG 02] (FIG.1.10) ou de méthodes semi-analytiques [DUB 93] ;
- les chargements qui ignorent la présence de la fissure. Dans ce cas le chargement provient d'une méthode de résolution du contact roue-rail plus ou moins évoluée, calculé dans un outil dédié.



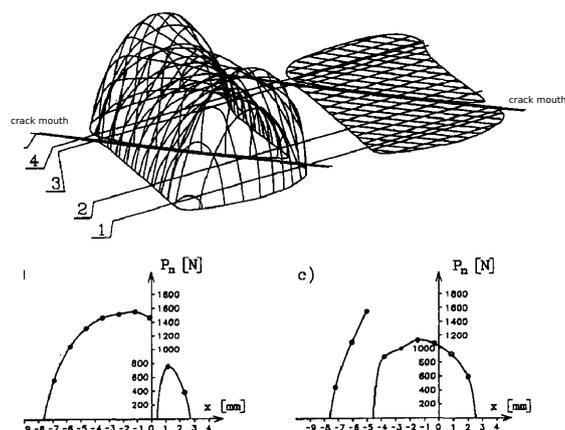
**FIGURE 1.7:** (a) Représentation schématique d'une roue ferroviaire. (b) Représentation schématique d'un rail.



**FIGURE 1.8:** (a) Contact roue-rail entre la bande de roulement de la roue et la table de roulement du rail en alignement. (b) Contact roue-rail entre le boudin de la roue et le congé du rail en courbe.



**FIGURE 1.9:** Cas de contact roue-rail calculé où plusieurs zones de contact entre la roue et le rail existent [Dan 09].



**FIGURE 1.10:** Distribution normale de la pression dans le contact et aire de contact entre la roue et le rail, vue isométrique et section par plan (2 et 3) [BOG 96].

La première théorie du contact roue-rail est basée sur des simplifications bi-dimensionnelles (contact cylindre-plan infini) [CAR 26]. Des travaux ont ensuite permis d'introduire des effets tri-dimensionnels avec des contacts circulaires et la prise en compte d'effort tangentiel [JOH 58]. Cette modélisation a par la suite été généralisée au contact elliptique [VER 64] puis rendue plus efficace en découplant la résolution du problème normal de celle du problème tangentiel [KAL 82]. Pour des pressions de contact élevées, des déformations plastiques peuvent avoir lieu [JOH 89, BOW 91, KAP 94]. Dans ces derniers cas, des travaux ont montré que la zone de contact entre la roue et le rail peut prendre des formes plus complexes que celles d'une ellipse [SEB 03, SEB 14].

Ces théories visent à améliorer la résolution du problème de contact entre la roue et le rail. Cependant, dans la très grande majorité des travaux concernant la propagation des fissures de fatigue dans les rails, les pressions de contact entre la roue et le rail sont issues d'une résolution herztienne du problème de contact. Hertz introduit la simplification selon laquelle les corps en contact se comportent comme des massifs semi infinis. Cette hypothèse est justifiée lorsque les dimensions de la zone de contact sont faibles par rapport aux dimensions de chaque corps (l'influence des conditions aux limites est négligeable) et aux rayons de courbures des surfaces en contact. Selon cette théorie, un contact elliptique se produit lorsque deux corps sont pressés l'un contre l'autre avec une force  $N$ . Pour cela les corps sont supposés homogènes, isotropes et élastiques linéaires. Cette théorie permet la détermination des dimensions de la zone de contact ainsi que la distribution des pressions en surface.

De plus, le chargement est encore toujours considéré en glissement complet. Le chargement tangentiel appliqué est alors défini comme la distribution normale des pressions de contact, au coefficient de frottement entre la roue et le rail près [KIM 02, DUB 02, MEL 05, FLE 09, SEO 10, FAR 12a, BRO 12]. Dans la modélisation de la propagation des fissures, l'échelle du contact roue-rail est laissée de côté. Développer un outil de si-

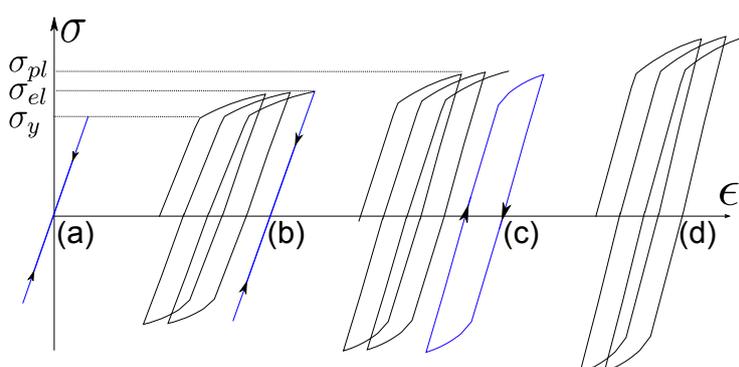
mulation de propagation permettant l'utilisation d'une modélisation fine du chargement de contact entre la roue et le rail s'avère nécessaire.

### 1.1.3.2 Contraintes résiduelles provenant de la fatigue de contact

Le phénomène de fatigue de roulement est responsable de la rupture prématurée des rails. Le chargement fortement localisé et les valeurs importantes des pressions mises en jeu donnent naissance à des contraintes très élevées en surface et dans une zone confinée sous le contact de l'ordre de grandeur du MPa au GPa . Ils provoquent l'amorçage et la propagation de fissures dans les rails [BOW 91, BOL 91]. Chaque cycle de chargement induit par le passage d'un train entraîne des déformations plastiques qui sont à l'origine de contraintes résiduelles [JOH 89, KAP 94].

Il est possible que ces contraintes résiduelles tendent vers un cycle limite stabilisé [BAT 97]. Différents états asymptotiques peuvent être obtenus :

- **adapté** (FIG.1.11 (b)) : la réponse limite est élastique, mais le matériau a pu se déformer plastiquement au cours des premiers cycles. Champs de déformations plastiques et de contraintes résiduelles tendent après un certain nombre de cycles de sollicitations répétées vers des champs fixes indépendants du temps ;
- **accommodé** (FIG.1.11 (c)) : la réponse en déformations plastiques devient périodique à partir d'un certain nombre de cycles. Les cycles stabilisés sont de types élastoplastiques ;
- **rochet** (FIG.1.11 (d)) : il y a accumulation progressive de déformations plastiques entraînant la ruine de la structure. Aucun cycle stabilisé n'est possible.



**FIGURE 1.11:** Réponse d'un matériau à un chargement cyclique. (a) Parfaitement élastique. (b) Adapté (cycle limite élastique). (c) Accommodé (cycle limite élasto-plastique). (d) Rochet (pas de cycle limite).

L'évaluation de ces champs stabilisés par des moyens numériques a abouti à de nombreux travaux. La difficulté de leur estimation réside dans le fait que les déformations plastiques et les forts gradients de contraintes se situent dans la zone juste sous le contact roue-rail. C'est la raison pour laquelle des maillages avec des éléments très fins sous la

zone de contact sont utilisés. Des approches utilisent des modèles éléments finis avec une modélisation Lagrangienne du problème [EKH 00, RIN 03]. La loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique non linéaire proposée par Jiang et al. [JIA 96a, JIA 96b] est souvent utilisée pour l'acier du rail. Dans ces approches, chaque passage de roue est simulé. Pour les cas traités, il apparaît qu'un très faible nombre de passages suffit à atteindre l'état stabilisé. Cependant la simulation d'un nombre important de passages serait impossible avec ces méthodes incrémentales en temps [EKB 05]. Afin de surmonter cette difficulté, une méthode originale, nommée la méthode stationnaire directe, précisément décrite dans [NGU 77, Dan 93, Dan 96, Dan 09] a été proposée. Elle est basée sur les principes suivants :

- la simulation est réalisée dans le référentiel de la roue au lieu de celui du rail. Une formulation eulérienne du problème est utilisée ;
- dans ce référentiel, le régime est considéré comme stationnaire.
- l'hypothèse d'un état asymptotique élastique ou plastique est faite afin que les champs mécaniques (contraintes et déformations plastiques) soient considérés comme périodiques.

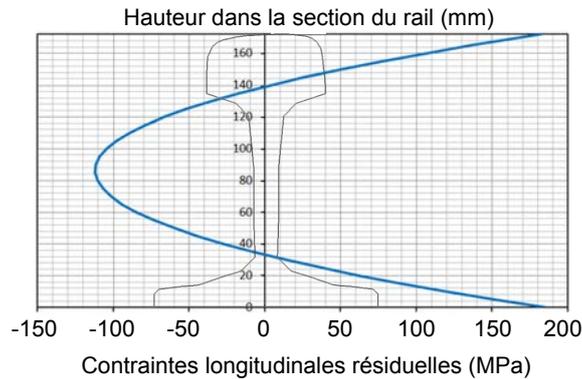
Ces hypothèses permettent l'utilisation d'un algorithme efficace en terme de temps de calcul. Au lieu de simuler plusieurs cycles jusqu'à atteindre l'état asymptotique, un unique pas de temps de calcul est requis pour directement évaluer les contraintes cycliques stabilisées et les déformations plastiques dans la structure. Pour la modélisation du rail, une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire est utilisée.

### 1.1.3.3 Contraintes résiduelles de fabrication

Des contraintes résiduelles d'origine différentes existent au sein du rail mais ne sont que très brièvement discutées dans ce manuscrit. On citera les mesures de champ de contraintes résiduelles effectuées par Webster et al. [WEB 92] et Kelleher et al. [KEL 03] à l'issue du processus de fabrication et après adaptation des rails par Luzin et al. [LUZ 04]. Ces travaux font apparaître des profils de contraintes résiduelles en "C" dans la hauteur du rail pour  $\sigma_{xx}$  (FIG.1.12).

Des travaux prenant en compte les contraintes résiduelles générées par la fatigue de contact et le processus de fabrication dans les analyses en fatigue sont disponibles [RIN 03]. Les contraintes résiduelles de fabrication sont du même ordre de grandeur que celles induites par la fatigue de contact [ROD 13] et doivent donc être prises en compte dans les analyses en fatigue.

Les études prenant en compte les contraintes résiduelles dans les problèmes de rupture en fatigue de roulement le font sous la forme de contraintes uniformes appliquées aux bords du domaine [BOG 96, DUB 02, MEL 05]. Cette modélisation ne permet pas d'étudier l'influence des forts gradients réellement présents dans les rails.



**FIGURE 1.12:** Profil idéalisé de contraintes résiduelles  $\sigma_{xx}$  en sortie du processus de fabrication [ROD 13].

#### 1.1.3.4 Analyse en fatigue des rails

En fatigue de roulement, une bande de matériau située sous le contact est soumise à un chargement multiaxial et non proportionnel. Pour des charges importantes et des efforts élevés, soit de traction soit de freinage, l'écoulement plastique est déterminé par les contraintes en sous-surface [RIN 01]. L'analyse en fatigue repose sur le calcul des champs asymptotiques dans le rail et sur des critères d'amorçages analytiques [Dan 93, RIN 01, EKB 05]. Ces approches peuvent se classer en différents groupes dont certains sont présentés ici :

- les modèles de plans critiques.

Les modèles de plans critiques sont adaptés à la fatigue multi-axiale et aux problèmes de fatigue de contact tels que les problèmes de fatigue de roulement. On trouve notamment le critère de Dang Van. Ce critère établit une condition d'amorçage à grand nombre de cycles. Il permet de prédire le site et la direction d'amorçage des fissures à partir du champ mésoscopique des contraintes sous le contact (partie alternée du cisaillement et pression hydrostatique) et des propriétés en fatigue du matériau. Il a été notamment appliqué à la fatigue de roulement [Dan 09, NGU 11] et aux problèmes de fretting [FOU 96, BAI 10, PIE 10c].

On trouve également le critère de Papadopoulos, proposé à la fin des années 1980, pour un chargement d'amplitude constante, sous chargement proportionnel et non proportionnel [PAP 97]. Il propose par la suite en 2001 une méthode de calcul de la durée de vie en étendant son critère à l'endurance limitée [PAP 01].

- les prédictions basées sur des modèles énergétiques.

Ces modèles ont été introduits par Morrow [MOR 65] et font appel à des grandeurs scalaires. Ils ne permettent donc pas de déterminer un plan d'initiation de la fissure ou de prédire une orientation initiale de propagation. D'autres critères, dérivés de cette approche, permettent de surmonter cette limitation en faisant appel à la densité d'énergie. La fissure est alors supposée s'initier et se propager dans la direction suivant laquelle la densité d'énergie est maximale [SMI 70]. Ce type d'approche est cependant principalement utilisé pour des chargements en mode I

dominant [RIN 01].

- Les modèles empiriques.

Kapoor a proposé une formule empirique déterminant un nombre de cycles nécessaire pour initier des fissures en fatigue de roulement dans des conditions pour lesquelles aucun état stabilisé n'est atteint [KAP 94]. La relation proposée est uniquement applicable aux situations de rochet et prédit une vie infinie en cas de cycle limite élasto-plastique.

A l'aide des sollicitations cycliques appliquées et des champs résiduels présents dans le rail, ces critères permettent de localiser des zones critiques vis-à-vis du risque de fissuration. Ils ne prévoient cependant que l'apparition d'une fissure de fatigue.

### 1.1.3.5 Bilan des phénomènes agissant à l'échelle du rail

A l'échelle du rail, différents facteurs influencent le comportement en fatigue des voies ferrées. Le premier est le chargement de contact mobile imposé. Ces sollicitations tribologiques induisent un chargement cyclique multi axial et non proportionnel. La répétition de ces phénomènes conduit à la fatigue du rail et à l'accumulation de déformations plastiques. L'incompatibilité des déformations plastiques introduit alors des contraintes résiduelles auxquelles s'ajoutent des contraintes résiduelles issues du processus de fabrication. Cependant aucune étude ne prend réellement en compte ces éléments dans les simulations de propagation de fissures en fatigue de roulement. Les chargements mobiles de contact sont introduits à l'aide d'une résolution hertzienne du problème et sont considérés en glissement complet. De plus, les contraintes résiduelles sont uniquement introduites de manière simplifiée via l'application d'effort uniforme en traction ou en compression aux limites du domaine.

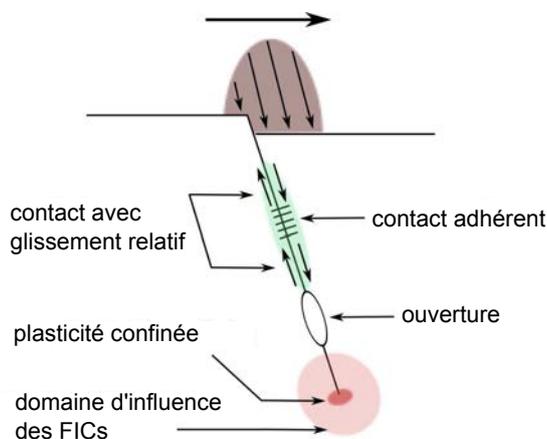
En outre, la prise en compte des champs résiduels et du chargement de contact permet, via l'utilisation d'un critère adapté, une analyse en fatigue des rails. Cette analyse vise à prédire un nombre de cycles nécessaire à l'amorçage d'une fissure ainsi que parfois l'orientation de cette dernière.

Une fissure constitue une discontinuité et une singularité à introduire dans le problème mécanique. Dans le cas de la fatigue de roulement, le chargement multi axial non proportionnel génère des phénomènes de contact et de frottement entre les lèvres de la fissure. Cette non linéarité constitue une difficulté supplémentaire à intégrer dans la modélisation.

### 1.1.4 A l'échelle locale, les fissures et non-linéarités associées

Le phénomène de fatigue induit par les sollicitations surfaciques est responsable de la propagation des fissures en mode mixte (I + II + III). Le chargement mobile induit un fort gradient de contraintes dans le rail sous le contact. Il existe une répétition complexe de sollicitations en compression et en traction sous et à proximité de la zone de chargement. Les fissures amorcées subissent des conditions de contact avec frottement le long de leurs lèvres pendant une partie du cycle de chargement. Une fois la fissure amorcée, le premier stade de la propagation des fissures (dimension de fissure faible par rapport aux dimensions du contact roue-rail) se fera sous l'influence principale du chargement de contact. A ce stade, lorsque la fissure ne mesure encore que quelques dixièmes de millimètres, l'usure ou le meulage des rails peut permettre de supprimer cette amorce [KAP 03, DON 05]. A mesure que la fissure croît, elle s'éloigne de la zone d'influence du contact et d'autres modes de propagation seront possibles. La propagation peut ralentir, s'arrêter ou se poursuivre jusqu'à la rupture de la pièce.

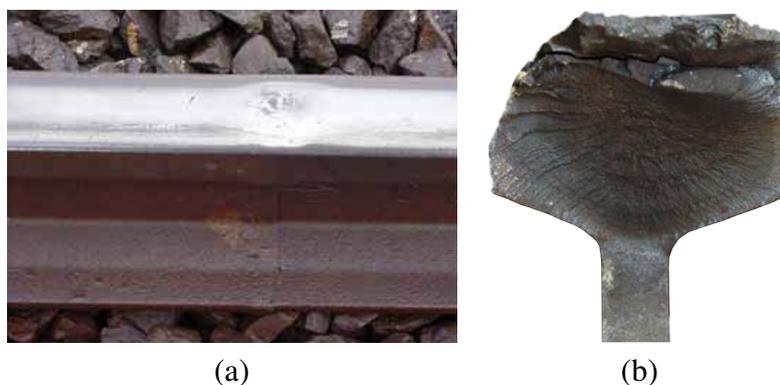
L'importance du contact frottant entre les lèvres de la fissure au cours de ces différents stades de propagation a été montrée pour des applications en fretting-fatigue [PIE 10b, PIE 10c, GIN 11, GIN 14] et en fatigue de roulement [DUB 02, RIB 06, FLE 09, SEO 10]. Différentes conditions de contact peuvent se produire à un même instant entre les lèvres de la fissure. Elles peuvent être ouvertes ou en contact et des glissements relatifs positifs, négatifs ou nuls existent (FIG.1.13).



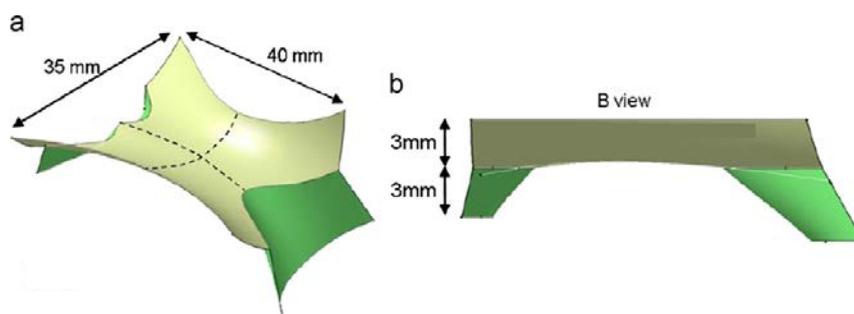
**FIGURE 1.13:** Représentation schématique des phénomènes agissant à l'échelle locale.

La diversité des conditions de circulation sur les milliers de kilomètres de voie qui composent le réseau ferré génèrent des topologies de fissures variées avec des comportements différents. Les fissures dites squats et head-check en sont deux exemples. Le défaut de type squat se manifeste sur le champignon des rails par un élargissement et un affaissement localisé de la table de roulement. Il est souvent accompagné d'une tache sombre (FIG.1.14 (a)) et de fissures en forme d'arc ou de V (FIG.1.15). Ces fissures se propagent à l'intérieur du champignon, dans un premier temps selon un angle faible par rapport à la surface de roulement. Ensuite, lorsqu'elles atteignent 3 à 5 mm de profondeur, elles

bifurquent transversalement vers le bas entraînant la rupture du rail (FIG.1.14 (b)). Ce défaut peut affecter certaines zones de façon dense voire très dense. De ce fait, le risque de ruptures multiples avec lacunes importantes s'en trouve augmenté [CSC 09].



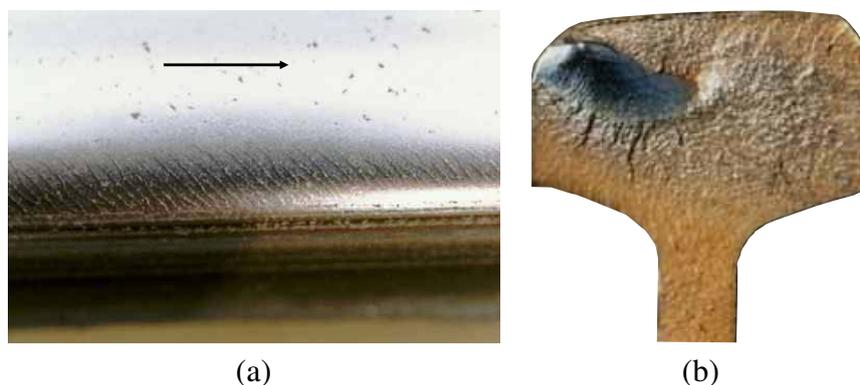
**FIGURE 1.14:** (a) Exemple de fissure de fatigue dite squat vue de dessus et en coupe dans la section du rail [CSC 09].



**FIGURE 1.15:** Forme tri-dimensionnelle d'un squat observé sur le réseau RATP [SIM 13], la représentation n'est pas à l'échelle et les angles de courbures ont été volontairement exagérés pour mettre en évidence la forme globale du défaut.

Un autre défaut se propageant en fatigue de contact est le head-check. Il apparaît essentiellement dans la zone du congé de roulement des rails de files de grand rayon en courbe. Il est d'abord visible et se distingue par des amorces de fissures fines parallèles. L'intervalle entre les fissures peut varier de 1 mm à plusieurs centimètres (en fonction de la nuance du rail) et selon un angle d'environ  $45^\circ$  orienté dans le sens des circulations (FIG.1.16 (a)). Au cours du temps, les fissures peuvent progresser vers le centre de la table de roulement et en profondeur, en provoquant des écaillages au niveau du congé de roulement. Ce défaut peut entraîner une rupture transversale isolée du rail (FIG.1.16 (b)), mais également des ruptures multiples [CSC 09].

Dans le but d'optimiser la planification des opérations de maintenance, SNCF aimerait disposer d'outils estimant le tonnage cumulé nécessaire à des défauts détectés pour atteindre des dimensions critiques. Simuler la propagation des fissures de fatigue dans



**FIGURE 1.16:** (a) Exemple de fissure de fatigue dite head-check vue de dessus et en coupe dans la section du rail [CSC 09].

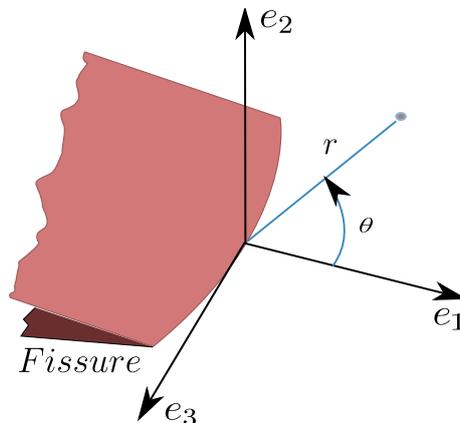
les rails vise à atteindre cet objectif. L'outil numérique devra permettre d'établir des méthodes de prédiction de durée de vie globale adaptées aux spécificités de la fissuration par fatigue dans les rails. Cet outil devra être robuste, optimisé, utilisable par des ingénieurs et doit intégrer les différentes échelles du problème. Afin de rendre compte des mécanismes agissant à l'échelle du système, du rail et de la fissure avec respectivement la flexion du rail, les contraintes résiduelles ainsi que la plasticité en pointe de fissure ou le contact avec frottement entre les lèvres, une modélisation multi-échelles sera nécessaire. Ce modèle doit permettre l'étude des mécanismes de fissuration en mode mixte sous chargement de fatigue multi axial et non proportionnel. Dans la section suivante, les outils de la mécanique de la rupture permettant cette analyse sont précisés.

## 1.2 Mécanique élastique linéaire de la rupture

Dans cette partie, nous définissons tout d'abord les différentes approches asymptotiques et énergétiques du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR). Les paramètres clés que sont les facteurs d'intensité des contraintes ainsi que certaines intégrales de contour permettant leur évaluation sont introduits. Les aspects non linéaires relatifs à la prise en compte du contact et du frottement entre les lèvres de la fissure sont également présentés. Ces outils théoriques s'appliquent à une plage étendue de matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, tels que les métaux. Ils permettent de définir les variables de la mécanique de la rupture à partir desquelles il est possible de modéliser le comportement des fissures. Nous présenterons alors les différents critères et lois de propagation en fatigue adaptés notamment aux problèmes de fissuration en fatigue de roulement.

### 1.2.1 Approche asymptotique du problème de rupture

On considère le repère local associé au front de fissure (FIG.1.17).  $(e_1, e_2, e_3)$  forme le système de coordonnées cartésiennes et  $(e_r, e_\theta, e_3)$  le système de coordonnées cylindriques.

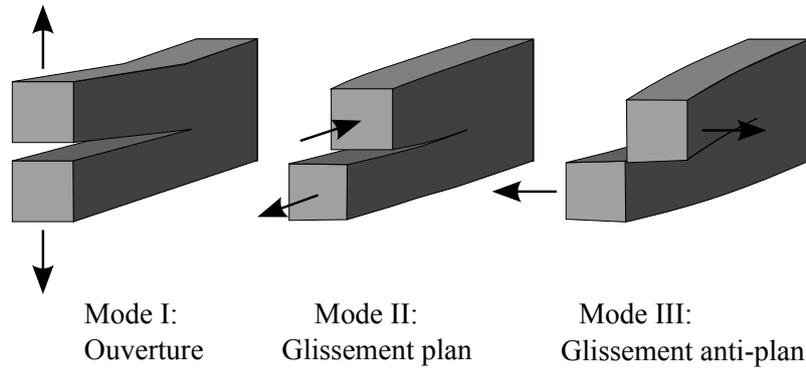


**FIGURE 1.17:** Repère local associé au front de fissure.

En considérant des milieux bi-dimensionnels et des matériaux élastiques (pas de prise en compte de la plasticité en pointe de fissure), Irwin [IRW 57] parvient à écrire le premier terme du développement limité des contraintes au voisinage du front de fissure :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + o\sqrt{r} \quad (1.1)$$

L'analyse asymptotique des contraintes en pointe de fissure de Irwin fait apparaître des termes appelés facteurs d'intensités des contraintes (FICs),  $(K_I, K_{II}, K_{III})$  qui quantifient la sollicitation selon chacun des modes de rupture.



**FIGURE 1.18:** Représentation des trois modes de rupture.

Les modes de rupture sont au nombre de trois et peuvent se définir de la manière suivante (FIG.1.18) :

- le mode I dit mode d’ouverture, pour lequel les lèvres de la fissure ne sont pas en contact, avec un saut de déplacement selon la direction ( $e_2$ ) différent de 0 ( $[u_2] \neq 0$ ).
- le mode II, cisaillement plan. Les lèvres de la fissure glissent l’une par rapport à l’autre dans le plan ( $e_1, e_3$ ) selon la direction ( $e_1$ ) ( $[u_1] \neq 0$ ).
- le mode III, cisaillement anti-plan. De même que pour le mode II, les lèvres glissent l’une par rapport à l’autre dans le plan ( $e_1, e_3$ ) mais selon la direction ( $e_3$ ) ( $[u_3] \neq 0$ ).

Les FICs (en  $Pa \cdot \sqrt{m}$ ) sont les grandeurs quantifiant les contraintes en pointe de fissure selon les trois modes de fissuration. Leur évaluation est une mesure locale du chargement en pointe de fissure. En mécanique élastique linéaire de la rupture, les contraintes sont donc infinies en pointe de fissure (équation (1.1)) rendant difficile leur utilisation pour établir des lois de propagation. C’est pourquoi la plupart des approches utilisent les FICs pour l’identification de lois de propagation.

Cependant il faut remarquer que ce terme de facteur d’intensité des contraintes est un terme générique regroupant des grandeurs traitant du même phénomène mais qui ont parfois des définitions différentes. Deux facteurs d’intensité des contraintes différents sont ainsi définis dans [BUI 78] :

- des facteurs d’intensité des contraintes statiques à partir des contraintes ;

$$K_{I\sigma} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \quad (1.2)$$

$$K_{II\sigma} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{21}(\theta = 0) \quad (1.3)$$

$$K_{III\sigma} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) \quad (1.4)$$

- des facteurs d'intensité des contraintes cinématiques à partir des discontinuités du champ de déplacement au voisinage du front de la fissure ;

$$K_{I_{cin}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2(\theta = \pi)] \quad (1.5)$$

$$K_{II_{cin}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1(\theta = \pi)] \quad (1.6)$$

$$K_{III_{cin}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3(\theta = \pi)] \quad (1.7)$$

Ces deux définitions peuvent aboutir à des valeurs différentes de FICs pour des sollicitations équivalentes. Par exemple, si l'on considère une fissure avec les lèvres fermées en contact adhérent ( $K_I = 0$ ) à l'étape  $i$ . On suppose qu'à l'étape  $i+1$  une condition d'adhérence en tout point est également observée. Entre ces deux étapes de chargement aucun glissement relatif entre les lèvres de la fissure n'a eu lieu. Nous aurons donc obligatoirement  $\Delta[u_1(\theta = \pi)] = 0$  mais potentiellement  $\Delta\sigma_{21}(\theta = 0) \neq 0$ . Ceci mènera à des facteurs d'intensité des contraintes statiques et cinématiques différents. Nous reviendrons plus tard sur ce point dans ce manuscrit.

### 1.2.2 Hypothèse de plasticité confinée

L'analyse précédente montre que les contraintes tendent vers l'infini au niveau du front de fissure. C'est à cause de cette singularité que les critères locaux pour prédire la rupture de la structure ne sont généralement pas appliqués dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR). Cette singularité n'existe pas en réalité. Ainsi, il existe toujours une zone plastique autour du front. La question est de savoir dans quelle mesure la redistribution des contraintes, liée à la prise en compte de la plasticité, modifie les champs élastiques. Dans le cadre de la MELR, on peut faire l'hypothèse de "plasticité confinée". On estime que si la taille de la zone plastique, assimilée à une longueur caractéristique  $r_p$  est suffisamment petite par rapport à la taille de la zone de dominance de la singularité élastique (zone de K-dominance), l'expression (1.1) reste valide. On estime généralement que l'hypothèse de plasticité confinée est respectée tant que le rayon de la zone plastique est inférieur à 3% à celui de la zone de K-dominance. Dans le cas contraire, on sort du cadre de la MELR pour entrer dans celui de la mécanique élasto-plastique de la rupture.

### Bilan de l'approche asymptotique

L'approche asymptotique a permis d'introduire les grandeurs utiles à l'évaluation de l'intensité du chargement en pointe de fissure. Cependant l'évaluation de ces grandeurs pose problème à cause de la singularité qui mène à des valeurs infinies des contraintes sur le front en élasticité linéaire. La solution peut être d'utiliser des grandeurs énergétiques faisant appel à des grandeurs calculées au voisinage du front et non plus de manière locale sur le front.

### 1.2.3 Approche énergétique

Les premiers travaux quantitatifs en mécanique de la rupture sont attribués à l'ingénieur aéronautique A. Griffith [GRI 20]. En 1920, il étudie la rupture des matériaux fragiles et propose de relier la variation d'énergie nécessaire à l'accroissement coplanaire d'une fissure  $dW_{fiss}$  à la variation d'aire ainsi créée  $dA$  et à une énergie superficielle caractéristique du matériau  $\gamma_s$ .

$$dW_{fiss} = 2\gamma_s dA \quad (1.8)$$

#### 1.2.3.1 Le taux de restitution d'énergie

Ce critère repose sur l'idée intuitive qu'il faut fournir une certaine quantité d'énergie pour rompre la matière, c'est à dire pour créer une nouvelle aire fissurée  $dA$ . L'incrément d'énergie nécessaire pour créer cette nouvelle aire fissurée est dépensé de manière irréversible. Cette énergie est définie comme étant le taux d'énergie critique  $G_c$ , avec la relation suivante :

$$dW_{fiss} = G_c dA \quad (1.9)$$

La question est donc de savoir si l'énergie disponible dans la pièce  $G$  est suffisante pour rompre le matériau, autrement dit si :

$$G \geq G_c \quad (1.10)$$

$G$  est appelé le taux de restitution de l'énergie et correspond au taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans la structure :

$$G = -\frac{\partial W_{tot}}{\partial A} \text{ où } A \text{ est l'aire fissurée.} \quad (1.11)$$

$dW_{tot}$  est la variation totale de l'énergie dans la structure soit  $dW_{tot} = dW_{def} + dW_{cin} + dW_{ext}$ , où :

- $dW_{def}$  est la variation d'énergie de déformation ;
- $dW_{cin}$  est la variation d'énergie cinétique ;
- $dW_{ext}$  est le travail des efforts extérieurs.

La croissance de la fissure dans la pièce consomme au fur et à mesure l'énergie disponible jusqu'à l'arrêt de la fissure ou rupture de la pièce.

La principale limitation de ces approches est qu'elles présupposent l'existence d'une fissure et ne permettent pas de prédire l'amorçage des fissures. DE plus, l'approche énergétique est adaptée aux situations où la seule manière de consommer de l'énergie est la création de nouvelles aires fissurées. Si tel n'est pas le cas (déformation plastique par exemple), le bilan énergétique doit être modifié. Il faut de plus faire attention à l'intervention d'autres phénomènes physiques comme la corrosion ou la température qui influence la valeur de  $G_c$  [POM 09].

Le taux de restitution de l'énergie peut constituer à lui seul un critère de propagation (équation (1.10)) mais ne permet pas d'énoncer une loi de propagation complète. La direction de propagation et les effets locaux dans les problèmes tri-dimensionnels ne peuvent pas être pris en compte dans une seule quantité scalaire.

### 1.2.3.2 Relation entre $G$ et les facteurs d'intensités des contraintes

Dans le cas où la variation d'énergie totale de la structure se limite à la variation d'énergie statique (élasticité linéaire isotrope en quasi-statique), Irwin [IRW 57] a établi une relation entre le taux de restitution de l'énergie  $G$  et les facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure non débouchante tri-dimensionnelle. Ces calculs sont disponibles dans [BUI 78] et aboutissent à la formule :

$$G = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (1.12)$$

avec

$$\begin{aligned} E^* &= E && \text{en contraintes planes} \\ E^* &= \frac{E}{1-\nu^2} && \text{en déformations planes} \end{aligned}$$

Dans le cas de la simulation de la propagation des fissures en deux dimensions, l'hypothèse des déformations planes est retenue.

## 1.2.4 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes en présence de frottement entre les lèvres de la fissure

### 1.2.4.1 L'intégrale de contour $J$

L'intégrale  $J$  est définie comme le taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans un domaine fermé autour de la pointe de fissure (FIG.1.19) lorsque cette dernière se propage [RIC 68].

$$J_{contour} = \int_C (W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j ds \text{ avec } W_I = \frac{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}{2} \quad (1.13)$$

Cette intégrale est indépendante du contour si [RIC 68, BUI 78] :

1. les faces de la fissure sont libres d'effort et les forces volumiques sont nulles ;
2. la fissure est rectiligne (en 2D) ou plane (en 3D) et dans le prolongement de l'axe  $e_2$  entre les points  $A$  et la pointe  $P$ .

En prenant le contour  $C$  comme étant un cercle centré sur la pointe de fissure et dont le rayon tend vers 0, on peut montrer que  $J$  est identique au taux de restitution de l'énergie  $G$  [BUI 78] et finalement en déformations planes :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (1.14)$$

Dans le cas de la fatigue de roulement, le chargement impose des séquences de contact et d'ouverture à la fissure. La présence de contact avec frottement est à l'origine d'une dissipation d'énergie entre les lèvres de la fissure. L'hypothèse 1. n'est plus valide et l'intégrale  $J$  n'est plus indépendante du contour. Un moyen de pallier cela est de considérer un contour fermé.

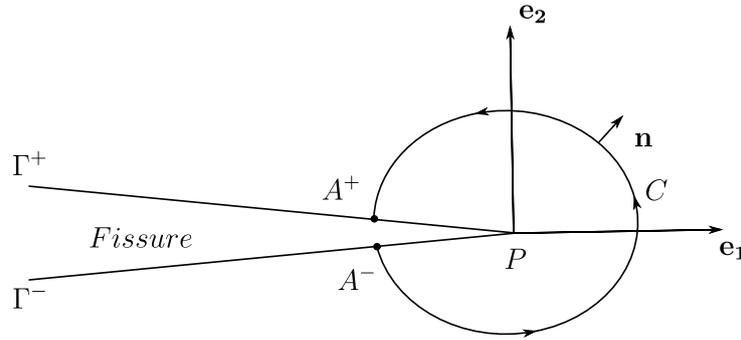


FIGURE 1.19: Paramétrage et contour utilisés pour le calcul de l'intégrale  $J$ .

#### 1.2.4.2 L'intégrale de contour fermé

A partir de la formule (1.13), si l'on considère le contour fermé  $C_1 \cup [A^+B^+] \cup C_2 \cup [A^-B^-]$  sur la FIG.1.20, on peut écrire [YAU 80, SHI 88] :

$$\begin{aligned} J_{C_1} + \int_{A^+B^+} \left( W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) (-n_j) ds \\ - J_{C_2} + \int_{B^-A^-} \left( W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Sur les faces de la fissure  $[A^+B^+] \cup [A^-B^-]$ , on a  $n_1 = 0$  donc  $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{i2}$  et  $W_I \delta_{1j} n_j = 0$ . On obtient alors :

$$J_{C_1} = J_{C_2} + \int_{AB} \sigma_{i2} \left( \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.16)$$

Si la fissure est fermée, les composantes des déplacements selon l'axe  $e_2$  sur  $[AB]$  sont égales sur les deux faces et finalement :

$$J_{C_1} = J_{C_2} + \int_{AB} \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.17)$$

où  $\sigma_{12}$  est le vecteur contrainte de cisaillement dû au frottement entre les lèvres de la fissure.

Si on passe à la limite pour  $C_2$  et que l'on applique le théorème de la divergence, on obtient avec les notations de la FIG.1.21 [MOë 02] :

$$\tilde{J} = J_C + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (1.18)$$

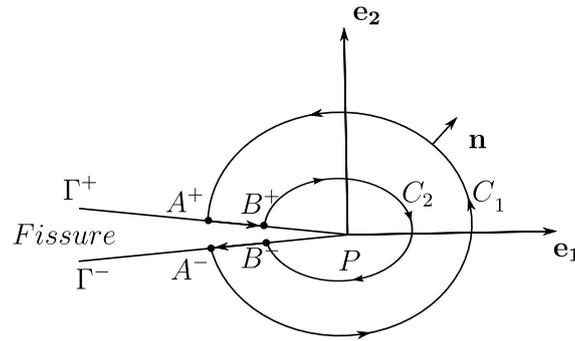


FIGURE 1.20: Paramétrage et contour utilisés pour le calcul de l'intégrale  $J_{C_1}$  [DOL 01].

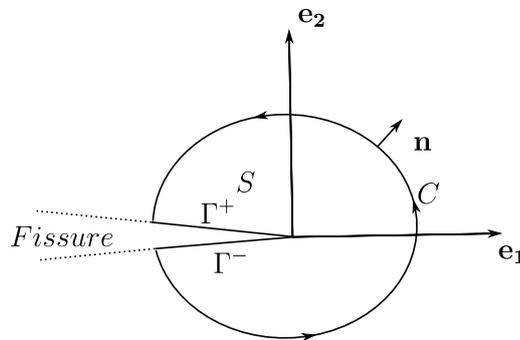


FIGURE 1.21: Paramétrage et contour utilisés pour le calcul de l'intégrale  $\tilde{J}$  [MOë 02].

Cette intégrale de contour est indépendante du contour considéré et fournit une mesure de l'intensité de la singularité en pointe de fissure. Elle peut être formulée en une intégrale de domaine, plus adaptée au calcul par éléments finis, en définissant une fonction scalaire  $\theta$  qui prend la valeur de l'unité dans un ensemble ouvert contenant la pointe de la fissure et s'annule au dehors du contour prescrit (C sur la FIG.1.21)

Et finalement :

$$\tilde{J} = \int_S (W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} dS + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (1.19)$$

$$\text{avec } W_I = \frac{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}{2}$$

A l'aide des équations (1.14) et (1.19), il est possible d'extraire séparément les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  [YAU 80].

#### 1.2.4.3 Découplage des modes de sollicitations : l'intégrale d'interaction en présence d'effort le long des lèvres de la fissure

Deux états d'équilibre indépendants d'un corps élastique homogène et isotrope sont considérés : un état réel (noté  $R$ ), qui satisfait les conditions aux limites, et un état auxiliaire fictif (noté  $aux$ ) pour lequel les lèvres de la fissure sont libres de tout effort.

La superposition de ces deux états d'équilibre conduit à un nouvel état d'équilibre pour lequel est écrite l'intégrale  $\tilde{J}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{R,aux} = & \int_S \left[ W_l^{R+aux} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^{aux}) \frac{\partial(u_i^R + u_i^{aux})}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} dS \\ & + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \left[ (\sigma_{12}^R + \sigma_{12}^{aux}) \frac{\partial(u_1^{-,R} + u_1^{-,aux})}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_1^{+,R} + u_1^{+,aux})}{\partial x_1} \right] \theta_2 dC \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\text{avec } W_l^{R+aux} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^{aux}) (\varepsilon_{ij}^R + \varepsilon_{ij}^{aux})$$

que l'on peut écrire en réorganisant les termes

$$\tilde{J}^{R,aux} = \tilde{J}^R + \tilde{J}^{aux} + \tilde{I}^{R,aux} \quad (1.21)$$

avec  $\tilde{I}^{R,aux}$  [MOë 02] :

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(R,aux)} = & \int_S \left[ \sigma_{ij}^R \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^R}{\partial x_1} - W^{(R,aux)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} dC \\ & - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \left[ \sigma_{12}^R \frac{\partial u_1^{aux}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{aux} \frac{\partial u_1^R}{\partial x_1} \right] \theta_2 dC \end{aligned} \quad (1.22)$$

De plus en appliquant le même raisonnement à partir de l'équation (1.14), nous obtenons :

$$\tilde{I}^{(R,aux)} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} (K_I^R K_I^{aux} + K_{II}^R K_{II}^{aux}) + \frac{1}{\mu} K_{III}^R K_{III}^{aux} \quad (1.23)$$

A partir des équations (1.22) et (1.23) et en choisissant l'état auxiliaire comme étant l'un des trois modes purs, la valeur des FICs de l'état réel peut être extraite à partir du calcul de  $\tilde{I}^{R,aux}$  :

$$K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0, K_{III}^{aux} = 0 \Rightarrow K_I^R = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \tilde{I}^{(R, \text{mode I})} \quad (1.24)$$

$$K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1, K_{III}^{aux} = 0 \Rightarrow K_{II}^R = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \tilde{I}^{(R, \text{mode II})} \quad (1.25)$$

$$K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 0, K_{III}^{aux} = 1 \Rightarrow K_{III}^R = \frac{E}{2(1+\nu)} \tilde{I}^{(R, \text{mode III})} \quad (1.26)$$

La démonstration mathématique de la propriété d'indépendance au domaine utilisé de l'intégrale  $\tilde{I}$  suppose que les champs réels et auxiliaires ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $u$ ) satisfont exactement les équations du problème. Ceci n'est pas le cas de la solution éléments finis obtenue. De plus dans le cas de fissures courbes, les champs auxiliaires pris comme les solutions asymptotiques des modes I, II ou III ne sont que des solutions approchées. Cette intégrale de domaine reste un outil robuste qui permet d'obtenir des résultats précis.

Ces approches énergétiques sont des alternatives à l'utilisation de grandeurs locales. Elles permettent de calculer les FICs en pointe de fissure à partir des champs dans une zone entourant la pointe de la fissure tout en prenant en compte la non linéarité introduite par le contact frottant entre les lèvres. C'est cette technique, fréquemment utilisée dans les travaux de simulation de la propagation de fissure en mode mixte, qui sera implémentée. Le calcul de ces intégrales est déjà disponible dans CAST3M. Il faudra cependant ajouter les termes introduits par le contact et le frottement dans leur calcul. Ce point est abordé dans la partie 2.5.

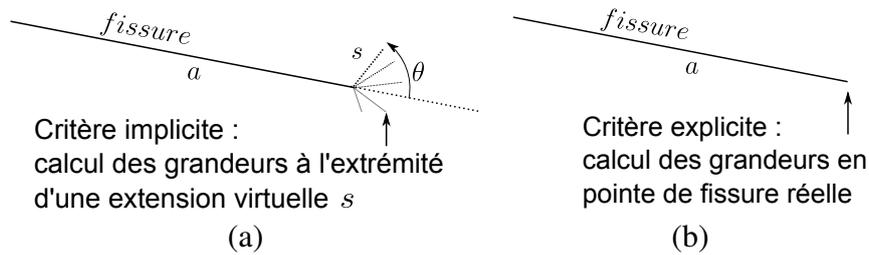
A partir des FICs, différents critères et lois ont été proposés afin de déterminer la direction de la propagation des fissures en mode mixte et d'évaluer leur taux d'accroissement en fonction de la nature des sollicitations (chargement uniaxial ou multi axial, proportionnel ou non). Ces outils sont présentés dans les sections qui suivent.

### 1.2.5 Critères pour la prédiction de la direction de propagation des fissures de fatigue

Cette partie se concentre sur la prédiction de la direction de propagation des fissures de fatigue sollicitées en mode mixte. Pour cela, des critères intrinsèques aux matériaux et aux sollicitations sont utilisés. Les critères présentés sont applicables à des fissures microstructurellement longues (plus de dix fois la taille du grain). Ces critères sont basés sur la mécanique élastique linéaire de la rupture. Ils visent à maximiser ou minimiser sur l'espace une variable ou son amplitude considérée comme caractéristique (contraintes, énergie de déformation ou autres). Ces critères permettent de prédire, dans le cas où la fissure propage, la direction  $\theta$  suivant laquelle elle le fera (FIG.1.24). On peut distinguer deux types de critères :

- les critères explicites, qui utilisent des quantités calculées en pointe de fissure au cycle  $N$  pour prévoir la position de la fissure au cycle  $N + \Delta N$ . Dit autrement, ces critères prévoient la position de la fissure à  $N + \Delta N$  cycles à partir de quantités calculées pour la configuration réelle à  $N$  cycles (FIG.1.22 (a)).
- Les critères implicites, qui utilisent des quantités calculées pour une extension virtuelle de fissure (cycle  $N + \Delta N$ ). Ces critères prévoient la position de la fissure à  $N + \Delta N$  à partir de quantités calculées pour une configuration possible à  $N + \Delta N$  (FIG.1.22 (b)).

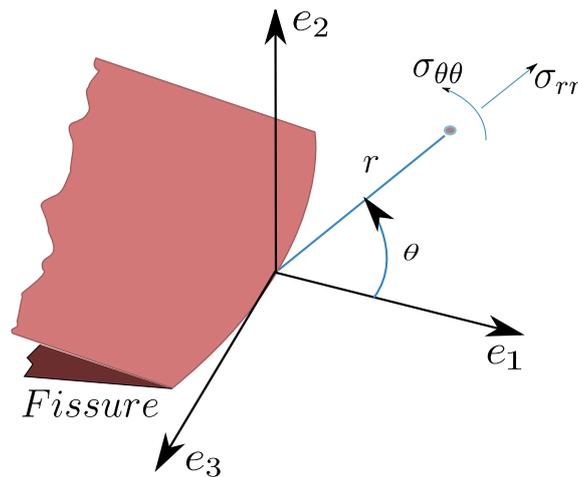
Les critères de prédiction de la direction de propagation diffèrent selon le chargement et le mode de sollicitation. Quelques critères applicables pour des chargements multi axiaux proportionnels sont tout d'abord présentés. Les critères adaptés aux cas de chargements multi axiaux non-proportionnels sont introduits par la suite.



**FIGURE 1.22:** Représentation schématique du lieu de calcul des grandeurs utilisées pour les critères implicites (a) et explicites (b).

### 1.2.5.1 Critères pour des chargements multi-axiaux proportionnels

Le critère le plus utilisé est celui de la **contrainte circonférentielle maximale** (MTS en anglais pour Maximum Tangential Stress). Ce critère a été proposé par Erdogan et Sih [ERD 63]. Ce critère est basé sur le calcul de la contrainte circonférentielle maximale  $\sigma_{\theta\theta_{max}}$  en pointe de fissure (FIG.1.23).



**FIGURE 1.23:** Base locale en pointe de fissure.

Il prévoit la propagation de la fissure dans la direction où  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale, ce qui revient à résoudre :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (1.27)$$

Pour des problèmes en deux dimensions, avec les expressions asymptotiques des contraintes en pointe de fissure [WES 39], ce critère prédit la propagation de la fissure dans la direction  $\theta$  donnée par la formule :

$$\theta = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (1.28)$$

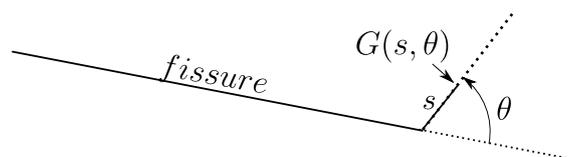
Ce critère explicite, basé sur la valeurs des FICs, est plutôt aisé à mettre en oeuvre. Son utilisation est très répandue. Ce critère met en évidence un angle limite de branchement de  $70.54^\circ$  lorsque la fissure se propage en mode II pur ( $K_I = 0$ ).

Un critère en cisaillement a été proposé par Otsuka et al. [OTS 75] en complément du critère d'Erdogan et Sih pour les problèmes de propagation de fissures en mode II pur. Ce critère est basé sur la **contrainte maximale de cisaillement (Maximum Shear Stress (MSS))** :

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (1.29)$$

Des essais bi-dimensionnels en mode mixte (I+II) sur des éprouvettes en aluminium ont validé ces critères.

En comparaison avec ces approches explicites, **le critère du taux de restitution de l'énergie maximale** prévoit la propagation de la fissure dans la direction  $\theta$  pour laquelle, à l'extrémité d'une extension virtuelle de longueur donnée  $s$  et orientée par  $\theta$  (FIG.1.24), le taux de restitution de l'énergie  $G(s, \theta)$  est maximal.

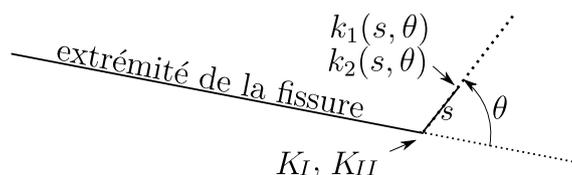


**FIGURE 1.24:** Paramétrage de l'extension virtuelle de la fissure.

En 1979, Amestoy et al. proposent des développements limités des facteurs d'intensité des contraintes  $k_1(s, \theta), k_2(s, \theta)$  à l'extrémité d'une extension orientée de la fissure [AME 79] (figure 1.25). Ils s'expriment en fonction des facteurs d'intensité des contraintes en pointe de fissure  $K_I$  et  $K_{II}$  :

$$\begin{pmatrix} k_1(s, \theta) \\ k_2(s, \theta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(\theta) & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Les expressions des termes  $K_{ij}(\theta)$  sont disponibles dans [TRU 81].



**FIGURE 1.25:** Calcul de  $k_1(s, \theta)$  et  $k_2(s, \theta)$  à l'extrémité d'une extension orientée de la fissure.

On note  $k_1^*(\theta)$  et  $k_2^*(\theta)$  les valeurs de ces facteurs pour une longueur de segment infinitésimale :

$$k_1^*(\theta) = \lim_{s \rightarrow 0} k_1(s, \theta)$$

$$k_2^*(\theta) = \lim_{s \rightarrow 0} k_2(s, \theta)$$

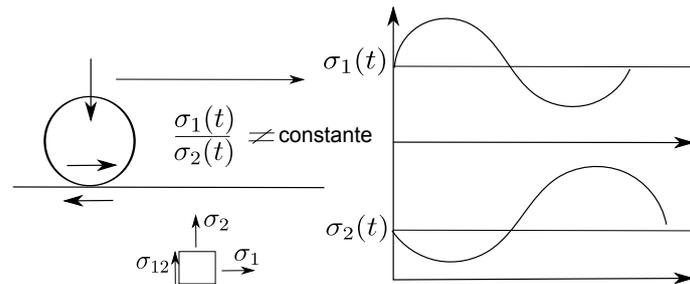
A partir de ces développements Amestoy définit deux critères de prédiction de la direction de propagation :

1. la fissure croît dans la direction  $\theta$  pour laquelle  $k_1^*(\theta)$  est maximal ;
2. la fissure croît dans la direction  $\theta$  pour laquelle  $k_2^*(\theta)$  est nul.

Ce critère implicite est donc un critère en espace. Il n'est donc pas adapté au cas où le rapport des contraintes principales varie au cours du cycle. Une extension de ces travaux afin que ces critères deviennent utilisables pour des chargements multi-axiaux non-proportionnels est présentée dans la partie suivante.

### 1.2.5.2 Critères pour des chargements multi-axiaux non proportionnels

Dans le cas de la fatigue de roulement, le chargement est multi-axial et non-proportionnel. Le rapport des contraintes principales est variable au cours du temps (FIG.1.26). Les extremums des quantités utilisées pour établir les critères ne sont plus atteints à un même instant au cours du cycle. Les critères précédents ne sont donc pas adaptés. La prise en compte de l'amplitude des variables au cours du cycle permet de prendre en compte le caractère non proportionnel du chargement.



**FIGURE 1.26:** Illustration graphique d'un chargement non proportionnel.

A partir des travaux d'Amestoy présentés précédemment, Hourlier et al. [HOU 82a, HOU 82b] proposèrent d'étendre l'étude des valeurs des FICs à l'extrémité de l'extension infinitésimale à leurs variations au cours du cycle. De ces travaux découlent notamment les trois critères suivants, en espace et en temps, à utiliser selon le problème traité :

1.  $\max_{\theta, t} k_1^*(\theta, t)$  : la fissure se propage dans la direction  $\theta$  pour laquelle  $k_1^*$  atteint son maximum en espace et en temps ;

2.  $\max_{\theta} \Delta k_1^*(\theta)$  : la fissure se propage dans la direction  $\theta$  pour laquelle l'amplitude temporelle ( $\Delta$ ) de  $k_1^*$  est maximale ;
3.  $\max_{\theta} \Delta k_{eq}^*(\theta)$  : ce critère constitue une généralisation de l'approche initialement proposée par Hourlier et al. La fissure se propage dans la direction  $\theta$  pour laquelle l'amplitude temporelle du facteur d'intensité des contraintes équivalents  $\Delta k_{eq}^*(\theta) = f(\Delta k_1^*(\theta), \Delta k_2^*(\theta))$  est maximale [DOQ 04].

Le critère 1. est un critère basé sur un maximum local en espace et en temps. Il prend en compte des grandeurs calculées en un unique instant du cycle. Il est en ce sens peu adapté au chargement non-proportionnel. A l'inverse, les critères 2. et 3. ont donné des résultats très satisfaisants en roulement [DUB 02] et en fretting [DUB 00]. La comparaison des trajets de fissuration simulés et issus d'expérience montre un très bon accord [BAI 13, GIN 14]. Ces deux derniers critères seront donc principalement utilisés pour ces travaux appliqués à la fatigue de roulement.

Les outils pour déterminer la direction de la propagation des fissures de fatigue sous chargement multi axial et non proportionnel ont été introduits. Afin d'estimer le taux d'accroissement des fissures, une loi de propagation dédiée à la fatigue de roulement est à présent nécessaire.

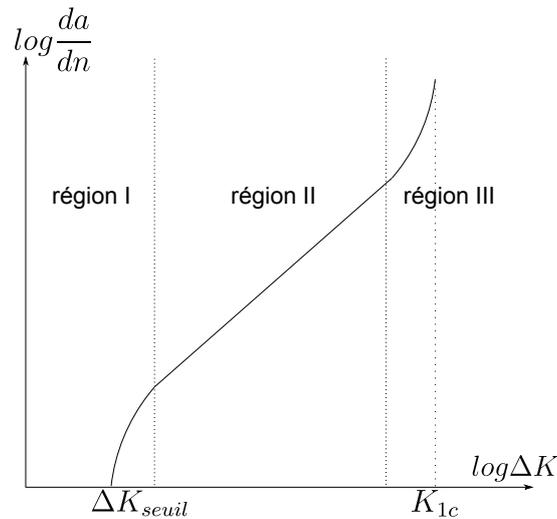
### 1.2.6 Lois de propagation

Les lois de propagation constituent un aspect essentiel de la fissuration par fatigue. De la même manière que pour les critères, qui prédisent la direction de propagation à la fin d'un cycle de fatigue, ces lois sont issues d'essais de fissuration en fatigue après observation de la croissance des fissures pour des nombres de cycles donnés. Elles ne traitent pas la fissuration comme un mécanisme continu avec l'application du chargement mais comme une somme de propagations discrètes se déroulant après un cycle de chargement. Elles relient le taux d'accroissement de la fissure à des grandeurs de la mécanique de la rupture. Le cas des fissures sollicitées en mode I est tout d'abord traité puis celles sollicitées en mode mixte.

#### 1.2.6.1 Loi de propagation des fissures en mode I

Pour estimer le taux d'accroissement des fissures de fatigue, le modèle le plus couramment utilisé est celui de Paris et Erdogan [PAR 63]. Une fissure sollicitée en mode I pur, dont la direction est compatible avec le chargement appliqué, se propage lorsque l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes pour un cycle de chargement  $\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$  dépasse une valeur seuil  $\Delta K_{seuil}$  dépendante du matériau et de l'environnement. La fissure croît dans le prolongement de sa direction initiale ( $\theta = 0$ ) avec une vitesse liée à la valeur de  $\Delta K_I$ . Une étude expérimentale a été utilisée pour établir cette loi empirique. A partir de cette courbe, on distingue les trois régimes suivants (FIG.1.27) :

- Dans la région I, où la valeur de  $\Delta K$  est supérieure à  $\Delta K_{seuil}$ , on observe la coalescence des micro-fissures et la formation d'une ou plusieurs macrofissures.



**FIGURE 1.27:** Les trois régimes de propagation d'une fissure en mode I.

Les vitesses de fissuration dans ce régime sont très faibles.

- Dans la région II on trouve le régime de propagation dit stable. Dans ce régime, sur le diagramme log-log, la vitesse de fissuration est linéaire. Elle s'exprime alors de la manière suivante :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (1.31)$$

où  $C$  et  $m$  sont des constantes intrinsèques au matériau, déterminées expérimentalement.

- Dans la région III le régime de propagation est dit instable. La vitesse de propagation est ici supérieure à celle prévue dans le régime de Paris (région II).  $\Delta K$  tend vers la ténacité du matériau  $K_{Ic}$  pour laquelle est expérimentalement observée la rupture de la pièce.

On trouve dans la littérature beaucoup d'autres lois de propagation en mode I modifiées qui sont des extensions de la loi de Paris. Elles consistent par exemple en l'ajout de facteurs correctifs pour prendre en compte les effets du rapport de charge [FOR 67] et ainsi étendre le domaine de validité de la loi au régime des régions I et III sur la FIG. 1.27.

Certains travaux ajoutent une valeur seuil  $\Delta K_{seuil}$  minimum à atteindre pour l'ouverture de la fissure [HAR 70]. D'autres travaux observent une proportionnalité entre  $da/dn$  et  $\Delta K^2$  et imposent une valeur de  $m = 2$  dans la loi de Paris [MIL 81, LIU 84]. La propagation dépend également des phénomènes de plasticité confinée, de rugosité entre les faces de la fissure ou de transformation de phase induite par le champ mécanique [ELB 71, SUR 98]. Elle est également influencée par l'histoire du chargement appliqué. Une augmentation ponctuelle de la contrainte maximale appliquée provoque en effet une diminution de la vitesse de propagation à cause de la plasticité induite par la surcharge. Cette plasticité rend ensuite l'ouverture des lèvres de la fissure moins aisée.

En mesurant l'évolution charge/déplacement au cours du cyclage d'un échantillon fissuré, Elber [ELB 70] a constaté que la fissure ne commençait pas à s'ouvrir dès le début de la recharge mais à partir d'une valeur de contrainte  $\sigma = \sigma_{ouv} > \sigma_{min}$  appelée contrainte d'ouverture. Ainsi, même avec des rapports de charge positifs, la fissure est fermée pendant une partie du cycle. La force "motrice" vue par la fissure n'est pas  $\Delta K$  mais une valeur plus faible appelée facteur d'intensité des contraintes effectif et défini par :

$$K_{effectif} = K - K_{ouv} \quad (1.32)$$

où  $K_{ouv}$  est le facteur d'intensité des contraintes lié à  $\sigma_{ouv}$ . Déterminé expérimentalement ou numériquement, il dépend du rapport de charge, mais également du matériau, de la géométrie et de l'histoire du chargement car il rend compte des non-linéarités.

Ce type de loi serait applicable dans le cas où le chargement impliquerait un mode I prépondérant dans la propagation de la fissure. Cela pourrait être le cas pour une fissure perpendiculaire à la surface du rail avec comme mécanisme moteur de la propagation la flexion du rail. La fissure subirait alors des séquences d'ouverture et de fermeture. Des lois pour des fissures de fatigue dans les rails propageants en mode I ont été identifiés [MEC 06a, EKB 09]. Cette modélisation résulte d'une vision simplifiée du phénomène de fissuration. En effet, le passage de la roue induit un chargement multi-axial non-proportionnel avec une propagation en mode mixte, alternant des périodes en mode I puis en mode II. Il nous faut donc disposer d'une loi de propagation en mode mixte et dédiée à l'application visée.

### 1.2.6.2 Loi de propagation en mode mixte

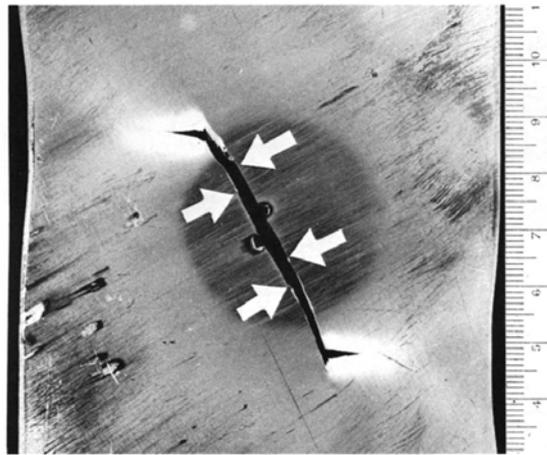
Lorsque la fissure est sollicitée selon plusieurs modes de fissuration, la détermination de l'allongement par cycle est plus complexe. Souvent, une loi de type Paris est utilisée.  $\Delta K_I$  est alors remplacé par un  $\Delta K_{eq}$  qui est une combinaison des FICs caractérisant les différents modes de rupture :

$$\Delta K_{eq} = (C_I \Delta K_I^n + C_{II} \Delta K_{II}^n + C_{III} \Delta K_{III}^n)^{\frac{1}{n}} \quad (1.33)$$

où  $C_I, C_{II}, C_{III}, n$ , sont des constantes intrinsèques au matériau et au type de chargement. Elles sont déterminées expérimentalement. L'observation et le suivi in-situ de l'évolution

des fissures de fatigue dans les matériaux métalliques par des techniques non-destructives telle que la micro-tomographie X restent complexes à mettre en place. Ces lois sont déterminées à partir d'essais de fissuration en mode mixte réalisés à partir de dispositifs expérimentaux plus ou moins évolués [MAI 01].

Le plus simple d'entre eux est celui réalisé avec des éprouvettes contenant une pré-fissure inclinée en traction uniaxiale (FIG.1.28). Ce type d'essai a été mené par Tanaka en 1974 sur des éprouvettes en aluminium [TAN 74]. Les coefficients  $m$  et  $C$  sont déterminés en fonction du matériau et des sollicitations appliqués.



**FIGURE 1.28:** Exemple de propagation obtenue sur des éprouvettes contenant une pré-fissure inclinée sollicitée en traction uniaxiale [TAN 74].

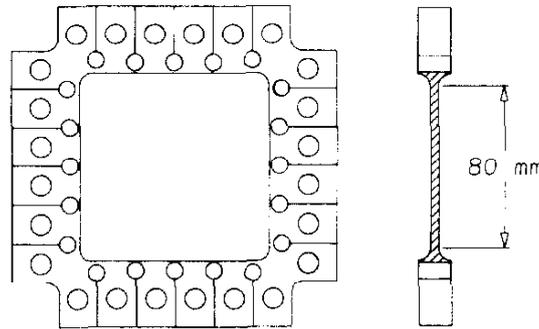
$$\frac{da}{dN} = C\Delta K_{eq}^m \quad (1.34)$$

avec

$$\Delta K_{eq} = (\Delta K_I^4 + 8 * \Delta K_{II}^4)^{\frac{1}{4}} \quad (1.35)$$

Dans ces travaux le chargement est proportionnel. Brown et Bold ont pallié cela en réalisant des essais en fatigue avec une machine de traction bi-axiale sur des éprouvettes d'acier provenant du réseau ferroviaire anglais [BOL 91, WON 96] (FIG.1.29). Afin de reproduire les cycles de fatigue à partir d'une machine en traction bi-axiale, des sollicitations non proportionnelles en mode I et II issues des travaux de Bower [BOW 88] ont été appliquées, représentatives des sollicitations vues par une fissure dans un rail. La valeur  $\Delta K_{seuil}$  est une valeur intrinsèque au matériau souvent prise égale à  $4 \text{ MPa.m}^{0.5}$  dans les applications liées au rail [BOG 02, THO 93, FLE 08]. Cette loi a été utilisée dans de nombreux travaux [BOG 02, FLE 08, FLE 09] pour estimer les taux d'accroissement pour différentes formes de fissure de fatigue dans les rails. La loi suivante a été obtenue :

$$\frac{da}{dN} = 0.000507(\Delta K_{eq}^{3.74} - \Delta K_{seuil}^{3.74}) \quad (1.36)$$



**FIGURE 1.29:** Epreuve utilisée pour des essais avec une machine de traction bi-axiale [BOL 91].

avec

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{\Delta K_I^2 + \left[ \left( \frac{614}{507} \right) \Delta K_{II}^{3.21} \right]^{\frac{2}{3.74}}} \quad (1.37)$$

Si cette loi s'efforce de prendre en compte l'aspect non proportionnel du chargement, le dispositif ne permet pas d'obtenir les gradients de contraintes imposés par le chargement de contact. Contrairement aux travaux précédents, des essais réalisés à l'aide d'une machine à galets permettent d'obtenir des propagations sous sollicitations tribologiques. Il faut cependant pouvoir contrôler le glissement entre les deux galets afin de pouvoir amorcer et propager des fissures de fatigue. On trouve dans la littérature une loi obtenue à l'aide de ce type de dispositifs avec des essais sur des aciers de rail de nuance 900A [SHE 99].

$$\frac{da}{dN} = 2.10^{-9} (\Delta K_{eq})^{3.33} \quad (1.38)$$

avec

$$\Delta K_{eq}^2 = \Delta K_I^2 + 0.772 * \Delta K_{II}^2 \quad (1.39)$$

Avec  $\Delta K_{eq}$  exprimé en  $MPa.m^{0.5}$ , cette loi donne des taux d'accroissement en mm/cycle. Cette loi a été utilisée dans différents travaux [DUB 02, RIB 07]. C'est cette loi, qui intègre le caractère multi-axial et non proportionnel du chargement et les gradients de contraintes induits par les sollicitations tribologiques, qui sera utilisée.

Les lois de propagation dépendent de la sollicitation et du matériau du problème. Obtenir une loi de propagation en mode mixte dédiée à la fatigue de roulement reste une tâche fastidieuse. Cela nécessite de gros efforts expérimentaux pour suivre l'évolution des fissures à différents nombres de cycles. Elles requièrent également de prendre en compte le chargement de contact et dans le même temps de pouvoir contrôler la propagation des fissures afin d'être en mesure d'en assurer le suivi. Cela signifie recourir à des essais destructifs à différents nombres de cycles. Pour chaque essai, des étapes de coupe, de

polissage, d'observation et de reconstruction des profils sont nécessaires pour suivre la propagation des fissures de fatigue.

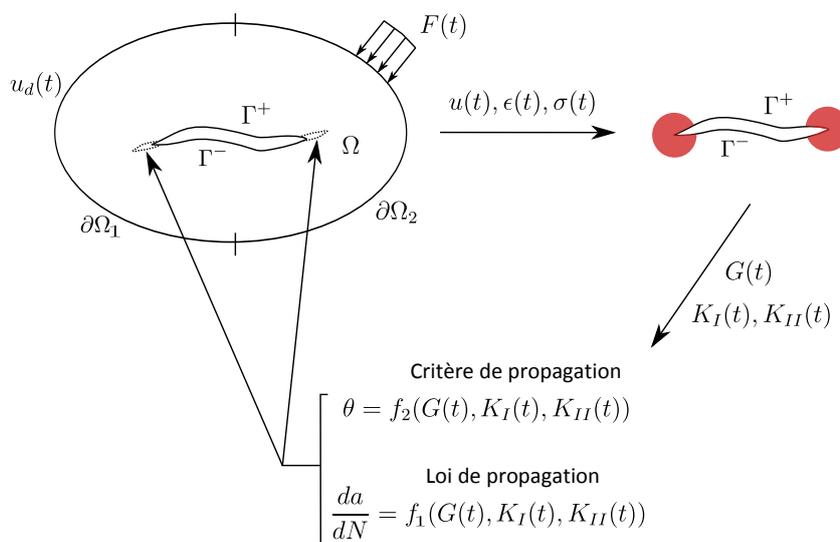
Des critères et lois de propagation en fatigue, sous sollicitations multi axiales et non proportionnelles, adaptés à la fatigue de roulement, ont été proposés. Ils permettent de calculer une direction et une vitesse de propagation à partir des variables de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR). Dans la partie suivante, les méthodes numériques disponibles pour étudier les mécanismes de fissuration dans les rails sont présentées. En fin de partie, une attention particulière est portée sur la méthode des éléments finis étendus et la prise en compte du contact et frottement entre les lèvres de la fissure.

### 1.3 État de l'art de la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

Nous avons vu précédemment que pour déterminer la direction et la vitesse des fissures de fatigue, l'historique des grandeurs de la MELR, calculées au cours du cycle, est utilisée. C'est seulement après l'application du cycle de chargement que la direction et la vitesse de propagation sont estimées. C'est cette approche qui est donc utilisée pour la simulation numérique de la propagation des fissures de fatigue. Ceci est différent de ce qui se passe dans la réalité où la fissuration se produit de manière continue avec l'application du chargement et non pas de manière incrémentale après celui-ci. Avec cette approche, la simulation numérique de la propagation des fissures de fatigue se fait en trois temps (FIG.1.30).

- 1. La première étape est la résolution du problème de structure en présence d'une fissure. En fatigue, l'application du chargement cyclique à la structure fissurée est réalisée selon un régime quasi-statique. Le cycle est divisé en pas de temps correspondant chacun à une description différente du chargement de fatigue. Pour chaque pas de temps, le problème aux dérivées partielles est résolu. La solution approximée du champ de déplacement et de contraintes dans la structure constitue la solution du problème de structure.
- 2. Dans un second temps, une étape de post traitement des champs solutions du problème de structure est réalisée. Elle permet d'évaluer les grandeurs de la mécanique élastique linéaire de la rupture ( $G$ , FICs) au front de fissure pour les différents pas de temps.
- 3. La dernière étape consiste à faire propager la fissure présente dans le problème de structure. Pour cela, à partir des grandeurs post-traitées à l'étape 2, l'utilisation d'un critère adapté et d'une loi de propagation dédiée à l'application visée, permet de calculer un angle de propagation et le nombre de cycles correspondant à l'avancée de la fissure. On procède alors de nouveau à l'étape 1 avec la nouvelle fissure créée. Ce processus est répété jusqu'à l'arrêt de la fissure ou la rupture de la pièce.

En ce qui concerne la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails, la majorité des travaux se préoccupe uniquement des étapes 1 et 2. Ils étudient l'influence de variations des conditions initiales du problème de structure en présence d'une fissure de l'étape 1 et d'en observer les conséquences sur les grandeurs post-traitées de l'étape 2. Différentes méthodes permettent de mener ce type d'étude. Elles sont brièvement présentées dans les sections qui suivent.

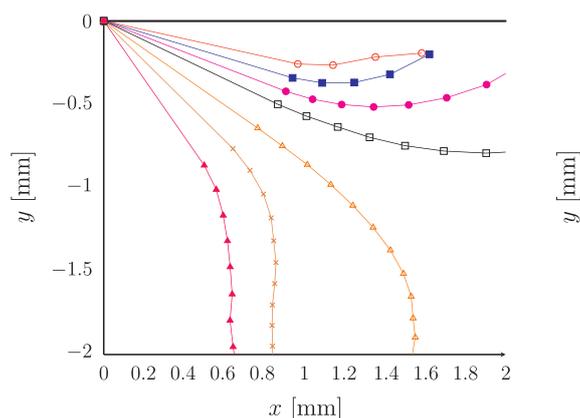


**FIGURE 1.30:** Stratégie pour la simulation numérique de la propagation des fissures.

### 1.3.1 Les approches utilisant la méthode des éléments-finis (MEF)

Sa robustesse, son aptitude à représenter des géométries complexes en 3D et la possibilité de prendre en compte des lois de comportement complexes font de la méthode des éléments finis (MEF) un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes aux dérivées partielles. Cependant, la modélisation de problème de rupture par la MEF présente deux difficultés majeures. D'une part, le maillage des éléments finis doit être conforme à la géométrie de la fissure. L'utilisation d'éléments finis standards ne permet pas de capturer précisément la singularité du champ de contrainte en pointe de fissure. On utilise généralement un maillage très fin d'éléments singuliers [POM 09] (taille des éléments en pointe de fissure de l'ordre d'un centième de la taille de la fissure), ce qui accroît les temps de calcul. D'autre part, le maillage de la structure doit être reconstruit lorsque la fissure évolue. Malgré les améliorations apportées aux mailleurs automatiques, le coût de cette opération peut rapidement devenir rédhibitoire en 3D pour des géométries de fissures complexes [CAR 00, MAL 10]. Pour ce qui est de la fissuration des rails, cette méthode est notamment utilisée pour mener des analyses de sensibilité sur les valeurs des FICs selon les configurations étudiées. Ces analyses bi-dimensionnelles quantifient l'influence sur les FICs de la présence de fluide entre les lèvres de la fissure [BOG 96, BOG 02, BOG 05a], de la longueur de la fissure initiale [KIM 02, BOG 05c], de la zone de contact entre la roue et le rail [SEO 10, BOG 05c] ou encore de conditions aux limites en traction ou en compression uniforme sur les frontières du domaine [BOG 05c]. Des travaux en trois dimensions menant le même type d'analyse sont disponibles [BOG 05b, BOG 08]. D'autres prennent en compte la raideur de la voie et introduisent des appuis élastiques dans les modèles de rails [FAR 12a, FAR 12b]. Tous ces travaux se concentrent principalement sur l'étude d'une configuration donnée sans réa-

liser de simulation de propagation. On trouve cependant dans [BRO 12] des résultats de propagation combinant cette méthode avec une approche basée sur le taux de restitution de l'énergie (FIG.1.31). Seul le contact unilatéral entre les lèvres est pris en compte (pas de frottement) et les phénomènes tels que la flexion ou les contraintes résiduelles sont ignorés. Une alternative à la MEF qui permet de réduire le nombre d'inconnues du problème est la méthode des éléments de frontières.

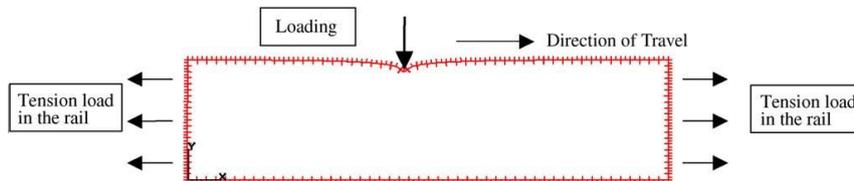


**FIGURE 1.31:** Trajets de propagation simulés pour différentes inclinaisons initiales d'une fissure de 1mm débouchante soumise à un chargement hertzien en glissement complet [BRO 12].

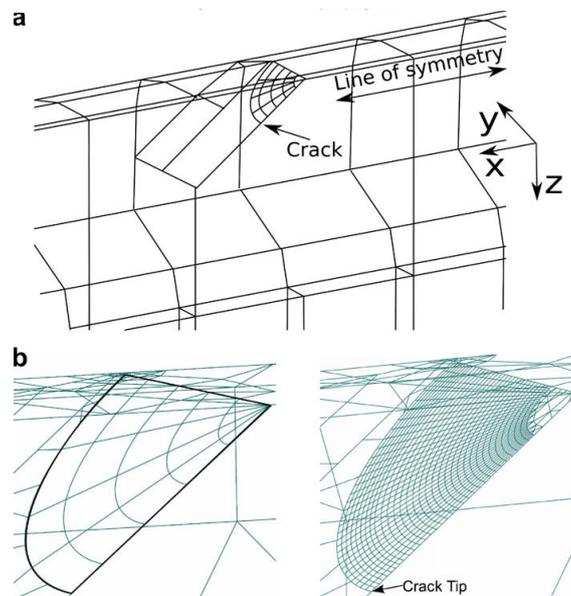
### 1.3.2 La méthode des éléments frontières

Cette méthode présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine (FIG.1.32). Le principal avantage est donc de diminuer la taille des problèmes à traiter en terme d'inconnues. Les éléments de frontières définissent la mécanique du problème en terme d'intégrale de surface du domaine plutôt que dans son volume [POT 92]. Tout comme dans la mécanique linéaire de la rupture, un comportement élastique est souvent utilisé. Les FICs sont calculés à partir des déplacements et des glissements relatifs le long des lèvres de la fissure. L'utilisation de cet outil rend minime le travail de remaillage entre chaque étape de propagation. Cependant l'utilisation de comportement non-linéaire est difficile à mettre oeuvre dans ces intégrales de surface. Cette technique nécessite toujours une discrétisation fine en pointe de fissure et des remaillages à chaque pas de propagation (FIG.1.33). De plus la simulation du contact frottant introduit une difficulté supplémentaire avec des maillages non compatibles le long des lèvres de la fissure. Cette technique est notamment utilisée pour étudier, pour une configuration donnée, l'influence de la présence de fluide entre les lèvres de la fissure [FLE 08], du coefficient de frottement roue-rail et entre les lèvres de la fissure sur les FICs [DAT 05, FLE 09]. Une fois de plus, peu de résultats de propagation utilisant cette méthode sont disponibles. On trouve un exemple de propagation bi-dimensionnelle pour une configuration simplifiée (fissure verticale dans le rail) [MEL 05]. Cependant le

critère utilisé pour prédire la direction de propagation fait appel à des maxima locaux en espace et en temps sur le cycle. Une seconde limite de ce travail est "l'introduction" de contraintes résiduelles via des conditions aux limites en traction uniforme aux frontières du domaine (figure 1.32).



**FIGURE 1.32:** Exemple de modèle 2D utilisant les éléments de frontières et introduisant des contraintes résiduelles simplifiées [MEL 05].



**FIGURE 1.33:** Exemple de modèle 3D utilisant les éléments de frontières [FLE 09]. (a) représentation simplifiée. (b) Raffinement du maillage de la fissure.

Pour étudier les mécanismes de fissuration, la possibilité de coupler des méthodes numériques et analytiques peut être un bon moyen de réduire les temps de calcul.

### 1.3.3 Méthode semi-analytique basée sur la théorie des dislocations

Les modèles semi-analytiques permettent une résolution très précise des problèmes de rupture avec contact et frottement et mettent en jeu des coûts numériques et des temps de calcul très faibles [COM 77, DUB 92a, DUB 92b, HIL 96]. Ils ont notamment été validés pour des chargements de fatigue de contact (fretting, roulement) [BAI 02, LAM 97, DUB 02]. Cependant, ils ne sont valides que pour des géométries

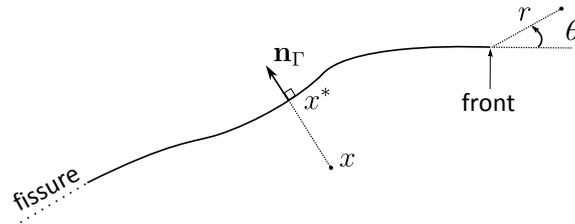
simples et des matériaux homogènes supposés élastiques isotropes. Ils sont également difficilement applicables aux problèmes tri-dimensionnels. Le contact frottant entre les lèvres de la fissure est traité par les méthodes mises au point initialement par J.J Kalker [KAL 90]. La modélisation de la fissure à l'aide d'une distribution continue de dislocations est couplée avec une résolution numérique du problème de contact unilatéral avec frottement entre les faces de la fissure [LAM 97, DUB 02]. Ces études utilisent des critères adaptés à la fatigue sous chargement multi-axial et non proportionnel. Cependant, une fois de plus, la prédiction des directions de propagation se limite à un unique cycle et les contraintes résiduelles sont introduites via des conditions aux limites uniformes aux frontières du domaine.

Les résultats des travaux sur la propagation des fissures dans les rails cités précédemment concernent uniquement l'étude des FICs pour différentes configurations initiales (fissure et chargement). Les résultats de propagation à proprement parler sont encore très rares. Nous verrons dans la partie suivante que la méthode des éléments finis étendus permet de simuler des propagations de fissure à un faible coût numérique.

### 1.3.4 La méthode des éléments finis étendus

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est une extension de la MEF. Cette méthode a été introduite en 1999 [MOë 99] suite aux besoins industriels de simuler la propagation des fissures en trois dimensions afin de prédire la tenue des pièces en service. Cette méthode connaît un essor important dans de nombreux secteurs de recherche industrielle. Elle possède les principaux avantages de la MEF et il n'est pas nécessaire de prendre en compte les fissures lors du maillage de la structure. Elle permet d'introduire la présence d'un défaut (une fissure par exemple) sans le mailler explicitement. Seul le maillage de la structure est nécessaire. La méthode est donc très adaptée aux problèmes avec discontinuités mobiles car elle évite les problèmes de remaillage et de projection lors de la propagation de la fissure. Cette méthode conserve intacte la possibilité de modéliser des structures complexes tri-dimensionnelles et d'intégrer des lois de comportement non-linéaires [ELG 07b]. Afin d'intégrer la présence de la fissure, les fonctions de formes continues des éléments finis sont enrichies. Deux types d'enrichissement sont utilisés (FIG.1.35) :

- un enrichissement discontinu, par la fonction saut  $H$ , pour simuler les déplacements discontinus de part et d'autre de la fissure. Pour un point donné  $\mathbf{x}$ ,  $H(\mathbf{x}) = \text{sign}((\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}_\Gamma)$  prend une valeur  $+1$  ou  $-1$  en fonction de la position de ce point d'un côté ou de l'autre de l'interface.  $\mathbf{x}^*$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{x}$  sur la fissure et  $\mathbf{n}_\Gamma$  est le vecteur normal unitaire orienté de la fissure (FIG.1.34).
- un enrichissement asymptotique, par des fonctions d'enrichissement singulier  $F$  en pointe de fissure, afin de décrire la singularité présente. Elle permet de localiser géométriquement le front de fissure indépendamment du maillage éléments finis et



**FIGURE 1.34:** Paramétrage de la fissure pour le calcul des fonctions d'enrichissement X-FEM en 2D.

de représenter le comportement asymptotique au voisinage de ce front.

Les quatre fonctions suivantes forment la base d'enrichissement retenue en élasticité linéaire en 2D et en 3D [MOë 99, SUK 00, MOë 02] :

$$\begin{cases} F_1(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ F_2(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ F_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta) \\ F_4(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta) \end{cases} \quad (1.40)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires dans le repère centré sur le front de la fissure (FIG.1.23). La fonction  $F_1$  permet d'assurer la discontinuité en arrière du front ( $\theta = \pm\pi$ ).

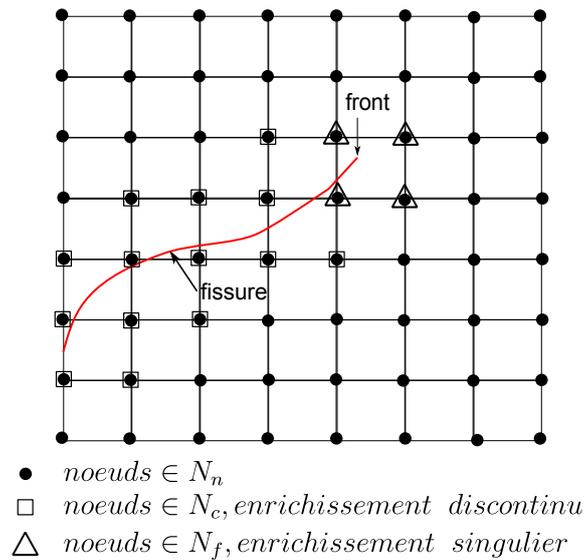
Dans le cas d'une fissure débouchante (à un front) l'approximation du champ de déplacement discrétisé s'écrit :

$$u^h(x) = \sum_{i \in N_n} u_i \Phi_i(x) + \sum_{j \in N_c} b_j \Phi_j(x) H(x) + \sum_{k \in N_f} [\Phi_k(x) (\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(r, \theta))] \quad (1.41)$$

où  $u_i$  sont les degrés de liberté standards éléments finis, définis sur tous les éléments du maillage,  $\Phi_i$  sont les fonctions de forme des éléments finis.  $b_j$  et  $c_k^l$  sont les degrés de libertés supplémentaires respectivement liés à la fonction saut  $H$  et aux fonctions d'enrichissements singuliers  $F_l(r, \theta)$ .

Afin de limiter le nombre de degrés de liberté des problèmes, les enrichissements sont uniquement ajoutés aux noeuds des éléments contenant la discontinuité ou la singularité. Aux noeuds des éléments complètement coupés par la fissure sont ajoutés les enrichissements sauts. Des enrichissements singuliers sont appliqués aux noeuds de l'élément contenant le front (FIG.1.35).

C'est grâce à ces enrichissements que la solution du problème, à précision donnée, est obtenue avec des maillages environ 10 fois plus grossiers que ceux utilisés avec la MEF [PIE 10a, GRA 11]. C'est cette méthode développée depuis le début des années 2000 que nous utiliserons pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Cette méthode a atteint un niveau de maturité qui lui vaut d'être maintenant implémentée dans certains codes élément finis commerciaux (Abaqus [SHI 10], SAMCEF, ANSYS)



**FIGURE 1.35:** Représentation graphique 2D des enrichissements topologiques introduits. Les carrés et les triangles représentent respectivement les enrichissements discontinus et singuliers.

et de recherche (Code\_Aster, CAST3M). Elle présente l'avantage de pouvoir s'adapter aisément aux codes éléments finis existant.

Si cette méthode permet de réaliser des simulations de propagation, prendre en compte le contact et le frottement entre les lèvres requiert des formulations spécifiques du problème du structure. La non linéarité introduite par le contact frottant entre les lèvres de la fissure a une incidence importante sur le comportement de la fissure et sur les FICs en front de fissure (cf 1.2.4). Ce phénomène local peut affecter le comportement global de la fissure et de la structure. La modélisation de cette non linéarité revêt donc un caractère essentiel pour ces travaux.

### 1.3.5 Modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la X-FEM [PIE 10a]

Ce point a été spécifiquement traité lors de travaux précédents pour des problèmes bi-dimensionnels [DOL 01, RIB 06, GIN 08, BÉC 09] et tri-dimensionnels [GÉN 06, Gén 07, PIE 10c, LIU 10]. Cette non linéarité agit à une échelle très inférieure à celle de la structure. Il est donc nécessaire de développer des méthodes multi-échelles adaptées. Dans le cadre de la X-FEM, des modèles multi-échelles basés sur des techniques multigrilles [RAN 09] ou de décomposition de domaine [GUI 08] ont été proposés afin de remédier à cela. Différents travaux ont mis en évidence des problèmes d'oscillations numériques (instabilité) venant perturber la solution de contact. Ces instabilités sont souvent visibles sur le champ dual au niveau de l'interface. Une solution pourrait être d'appliquer un filtre spatial en utilisant des maillages plus grossiers. Cela ne saurait être satisfaisant

car dès lors, l'information locale gouvernant le comportement de la fissure s'en trouverait dégradée. Ces oscillations sont liées au non respect de la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (dite LBB ou *inf - sup*) [LIU 10, GRA 11]. En plus de dépendre de la discrétisation utilisée, la formulation elle-même du problème peut faire apparaître ces instabilités. Pour les problèmes de rupture avec contact frottant entre les lèvres de la fissure, on distingue 3 types de formulation [PIE 10a].

### Les formulations primales

Dans ces formulations le problème de contact est formulé en déplacement (voir FIG.1.36 a) ). Une méthode d'enrichissement spécifique (comme la X-FEM) permet de modéliser la discontinuité géométrique liée à la présence de la fissure et d'intégrer la loi de comportement d'interface (contact avec frottement). Le champ des efforts d'interface  $\mathbf{t}$  est considéré comme une composante des efforts externes. Au cours de la résolution itérative du problème global, celui-ci est re-calculé à partir de la solution en déplacement  $\mathbf{u}$ . Le modèle proposé par Liu et al. [LIU 08] est stable. Il ne présente pas de problèmes d'oscillations. Par ailleurs, il est montré que la convergence de la méthode de résolution non linéaire utilisée est très élevée en comparaison avec les modèles proposés dans la littérature [DOL 01, GÉN 07, PIE 10c]. Dans ce modèle, la discrétisation du problème de contact avec frottement d'interface est fortement dépendante du maillage de la structure. Une solution de contact fine requiert un raffinement local du maillage en volume de la structure.

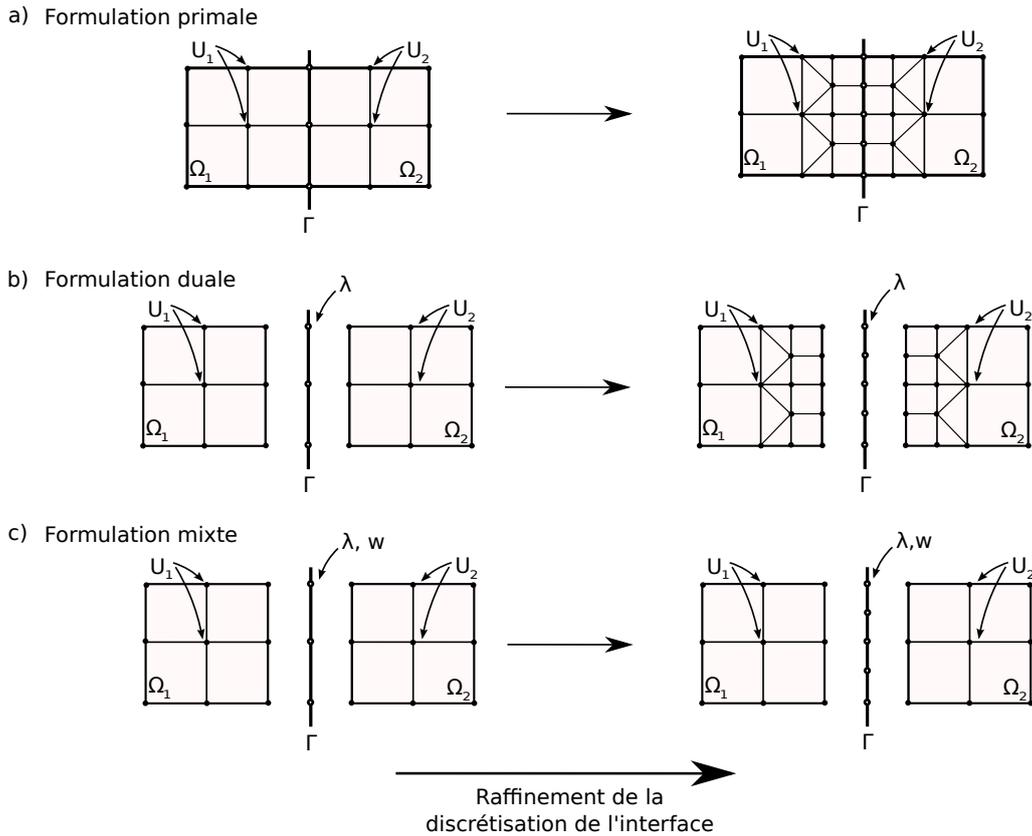
### Les formulations duales

Les formulations duales (cf. FIG.1.36 b)) sont généralement basées sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le problème de contact est formulé entre le champ discrétisé des déplacements  $\mathbf{u}$  et le champ discrétisé des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  équivalent aux efforts de contact. La majorité de ces modèles est concernée par les problèmes d'instabilité numérique : oscillations, pics de contraintes et convergence faible. L'expérience montre que le choix des espaces de multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes normal et tangentiel à l'interface influence fortement la stabilité de la solution. Moës et al. ont proposé une méthode de réduction de cet espace [MOë 06, GÉN 07] dans le but de stabiliser la solution de contact. Pour ce modèle, la discrétisation du problème d'interface est également fortement dépendante du maillage de la structure. Une description multi-échelles du problème requiert un raffinement local du maillage de la structure. Ces problèmes d'instabilité se traduisent par une forte diminution du taux de convergence des solveurs non linéaires utilisés pour le problème de contact avec frottement.

### Les formulations mixtes

Les formulations mixtes considèrent l'interface comme une structure autonome avec ses propres variables primales et duales  $(\mathbf{w}, \lambda)$  ainsi que sa propre discrétisation [LAD 85] (cf. FIG.1.36 c)). Le problème de contact local est formulé entre les champs locaux  $\mathbf{w}$  et  $\lambda$  [DOL 01]. Il est couplé avec le problème global  $(\mathbf{u}, \sigma)$  au sens faible. On constate que les modèles basés sur des formulations faibles mixtes proposés par Ribeaucourt et al. [RIB 07] et par Elguedj et al. [ELG 07a] possèdent de bonnes propriétés de stabilité,

notamment pour les problèmes de contact unilatéral sans glissement. La formulation du problème de contact étant séparé de celui de la structure, les deux problèmes peuvent être résolus de façon couplée sur des discrétisations complètement indépendantes. Pour des problèmes avec glissement, des problèmes d'instabilité ont également été rencontrés avec ces formulations. L'introduction d'un terme de stabilisation dans la formulation a permis de pallier cela [GRA 11]. Dès lors, les solveurs non-linéaires utilisés convergent plus rapidement vers une solution stable.

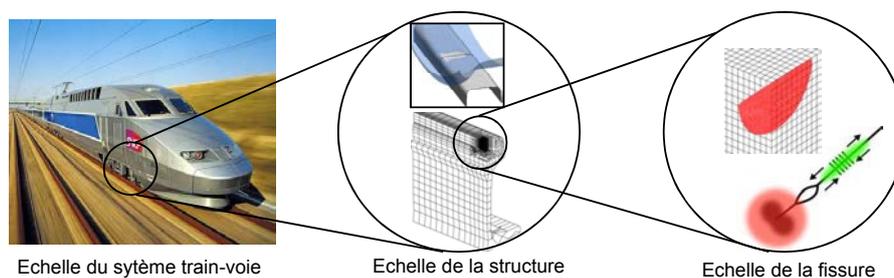


**FIGURE 1.36:** Représentation schématique des différentes méthodes de décomposition de domaine illustré par [PIE 10a].

## 1.4 Conclusion

Dans l'objectif d'obtenir des ordres de grandeur de l'accroissement des fissures de fatigue en fonction du tonnage supporté, SNCF souhaite développer un outil numérique capable de simuler la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Cette problématique industrielle comporte d'un point de vue scientifique plusieurs échelles en espace et en temps.

Nous avons vu qu'entre le passage des trains et la propagation des fissures, différentes échelles distinctes entrent en jeu. La première d'entre elles est celle du système train-voie. A cette échelle, des effets dynamiques et de flexion des rails se produisent. A une échelle inférieure, le contact entre la roue et le rail introduit des gradients importants sous et autour de la zone en contact. La répétition de ces contacts amène le rail dans un état mécanique stabilisé. Cet état implique des contraintes résiduelles dans le rail. Enfin, à l'échelle de la fissure, de forts gradients de contraintes sont introduits par la singularité en front de fissure. Les non-linéarités introduites par le contact et le frottement constituent une échelle supplémentaire à prendre en compte (FIG.1.37). Cette échelle est également celle de la fissure dans ce mémoire.

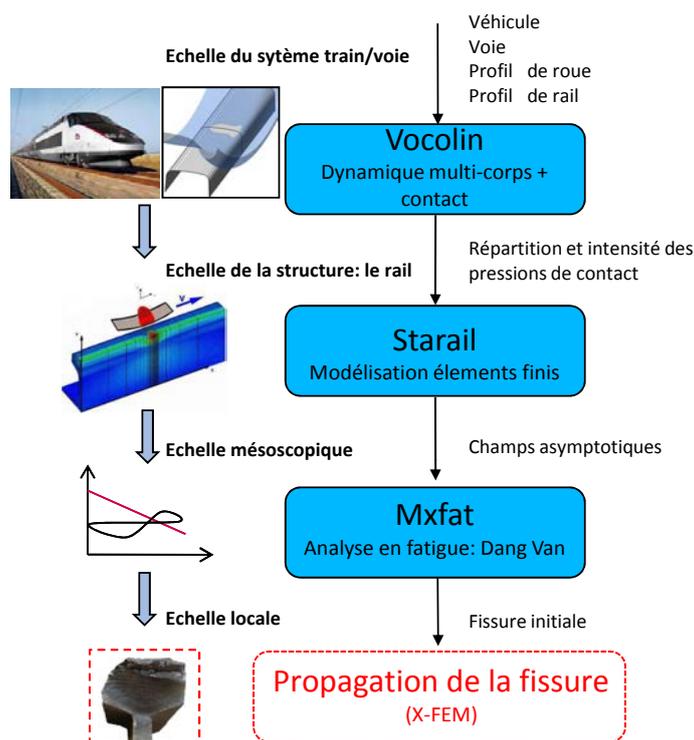


**FIGURE 1.37:** Trois échelles caractéristiques présentes dans le problème de fissuration par fatigue des rails.

Pour chacune des échelles présentées, SNCF (au sein du consortium IDR2) a développé en partenariat avec des instituts de recherche et des laboratoires universitaires (IF-STTAR, LMS, LaMCoS) et ses partenaires du domaine ferroviaire (RATP et Tata Steel) des outils numériques adaptés (présentés brièvement dans [NGU 11]). Cette chaîne de calcul synthétise les différentes échelles du problème de la fatigue de contact des rails. A l'échelle du système train-voie, elle débute par une simulation de dynamique multi-corps. Les efforts calculés entre la roue et le rail sont utilisés pour la résolution du contact roue-rail (échelle de la structure, le rail). L'outil numérique pour la résolution du contact-roue rail permet d'obtenir la répartition et l'intensité des pressions et tractions entre la roue et le rail selon les trois directions de l'espace. Ce vecteur contrainte est une donnée d'entrée pour l'analyse en fatigue. Les champs asymptotiques dans le rail sont calculés grâce à un algorithme stationnaire, basé sur une formulation eulérienne et d'une simulation éléments finis, dans des temps de calculs raisonnables. La loi de comportement du matériau

choisie est une loi élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire. L'analyse en fatigue, à l'aide d'une approche macro-méso basée sur l'utilisation du critère de Dang Van, constitue l'étape suivante.

Cette chaîne demande à être complétée par la simulation de la propagation des fissures de fatigue (FIG.1.38). Cette chaîne numérique a été réalisée à l'aide de CAST3M [CAS 13], code de calcul pour l'analyse de structures développé par le CEA. Dans le cadre de ces travaux, la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans le rail devra être réalisée avec ce logiciel.



**FIGURE 1.38:** Stratégie multi-échelles disponible, de l'échelle macroscopique du système train-voie à l'échelle mésoscopique dans le rail pour l'analyse en fatigue. Cette chaîne doit être complétée par un module de simulation de la propagation des fissures de fatigue en prenant en compte le contact et le frottement entre les lèvres.

Le problème de la propagation met également en jeu deux échelles de temps différentes.

- L'échelle des pas de temps au cours d'un cycle où pour chacun des pas de temps le problème de rupture est résolu.
- L'échelle de la propagation où est faite l'hypothèse de linéarité durant le saut de cycle. C'est à cette échelle que les critères et lois de propagation sont établis et utilisés.

Ce problème multi-échelles a déjà été traité dans de nombreux travaux. L'état de l'art a permis d'identifier plusieurs limites aux études existantes sur le sujet. Les principales

restrictions sont l'absence de réelles simulations de propagation et des phénomènes agissant aux échelles les plus élevées. Ainsi les phénomènes de flexion sont ignorés et les contraintes résiduelles simplifiées à l'extrême. Si ces travaux permettent d'étudier l'influence d'un champ de contraintes uniformes dans le rail, ils ne permettent pas de rendre compte des effets imposés par les gradients de ces champs. De plus, la prise en compte de chargement avancé, et non plus de chargement hertzien, est requise afin de tendre vers une modélisation tri-dimensionnelle réaliste du problème. En outre, le contact et le frottement à l'interface demeurent des phénomènes complexes à prendre en compte. Pour la résolution du problème de rupture avec prise en compte du contact et du frottement entre les lèvres, nous avons vu que la méthode des éléments finis étendus a déjà prouvé sa robustesse dans ce domaine. De plus, l'intérêt des formulations mixtes pour le traitement des problèmes de contact a été rappelé. Elles constituent une formulation du problème à deux échelles permettant des maillages indépendants pour le problème de structure et d'interface. Les problèmes de stabilité auxquels elles étaient associées ayant été résolus, cette modélisation est séduisante pour les problèmes de contact à l'interface. C'est donc une formulation stabilisée de ce type qui sera utilisée et implémentée dans CAST3M pour ces travaux. Elle devra être cependant adaptée et la résolution du problème optimisée afin de diminuer les temps de calcul et de permettre son usage dans un cadre industriel. Enfin, de par les aspects tri-dimensionnels présents dans le problème (forme complexe du contact roue-rail, fissure sur le congé du rail, profil non symétrique du rail, forme complexe des fissures de fatigue), la modélisation nécessite de tendre vers une simulation tri-dimensionnelle de la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Le développement d'un outil de simulation intégrant les différentes échelles du problème ferroviaire et permettant de simuler de réelles propagations de fissure pour obtenir des résultats quantitatifs bi et tri-dimensionnel s'avère nécessaire.

Les principaux objectifs de ces travaux sont donc :

1. Implémenter la formulation stabilisée développée lors de travaux antérieurs à ce manuscrit dans le code de calcul CAST3M afin de résoudre le problème d'une structure en présence d'une fissure.
2. Résoudre le problème du contact avec frottement entre les lèvres de la fissure et le prendre en compte dans le calcul des facteurs d'intensité des contraintes.
3. Implémenter un solveur non-linéaire efficace permettant de contrôler la stabilité des champs locaux en assurant un taux de convergence proche de l'optimal.
4. Simuler la propagation des fissures à l'aide de critères et de lois de propagation adaptés à la fatigue de roulement.
5. Intégrer un état initial non vierge dans la résolution du problème de rupture et de propagation afin de pouvoir prendre en compte les contraintes résiduelles présentes dans le rail.

6. Coupler la résolution du problème de rupture à deux échelles avec les phénomènes agissant à une échelle supérieure (flexion du rail).
7. Ajouter un chargement représentatif du contact roue-rail provenant d'un logiciel de calcul disponible chez SNCF.
8. Quantifier l'influence de ces différents phénomènes sur les mécanismes de propagation des fissures de fatigue dans les rails.

Ces travaux représentent donc un travail de couplage entre les phénomènes agissant aux différentes échelles du problème ferroviaire pour améliorer la compréhension des mécanismes de propagation des fissures de fatigue dans les rails. Le chapitre suivant détaille l'implémentation du modèle avec prise en compte du contact avec frottement interfacial au sein du logiciel CAST3M. Il présente également l'approche multi-échelles en temps utilisée pour simuler la propagation des fissures de fatigue (points 1. à 4.). Les points 5, 6 et 7 seront détaillés dans le chapitre 3. L'utilisation des développements proposés dans les chapitres 2 et 3 permettra enfin de présenter des résultats de propagation. Le chapitre 4 étudie et quantifie l'influence des paramètres du modèle sur les mécanismes de propagation des fissures de fatigue dans les rails.

## Chapitre 2

# Modèle multi-échelles dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les lèvres de la fissure

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation de CAST3M . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation faible mixte du problème avec interface en présence de contact et frottement . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>2.3</b>	<b>Discrétisation multi-échelles enrichie des champs . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>2.4</b>	<b>Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN stabilisée . . . . .</b>	<b>63</b>
2.4.1	Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN . . . . .	63
2.4.2	Stabilisation de la formulation . . . . .	67
2.4.3	Définition a priori de paramètres optimaux . . . . .	69
<b>2.5</b>	<b>Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>2.6</b>	<b>Exemples de problèmes de rupture et validation . . . . .</b>	<b>76</b>
2.6.1	Validation des pressions de contact à l'interface . . . . .	76
2.6.2	Problème bi-dimensionnel avec contact adhérent à l'interface . . . . .	77
2.6.3	Problème tri-dimensionnel avec contact unilatéral et singularité dans la solution de contact . . . . .	80
2.6.4	Problème tri-dimensionnel avec contact glissant à l'interface . . . . .	82
<b>2.7</b>	<b>Simulation multi-échelles en temps et validation de la stratégie . . . . .</b>	<b>85</b>
2.7.1	Simulation multi-échelles en temps de la propagation des fissures . . . . .	85
2.7.2	Validation de la stratégie multi-échelles en temps et en espace : cas de la propagation en fretting . . . . .	86
2.7.3	Eléments pour la simulation tri-dimensionnelle de la propagation des fissures de fatigue . . . . .	92

---

Dans ce second chapitre, le travail de développement numérique réalisé est détaillé. Le modèle multi-échelles dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les lèvres de la fissure implémenté dans CAST3M est présenté.

Des formules a priori, assurant à la méthode de résolution un taux de convergence proche de l'optimal, sont ensuite proposées. Ces formules assurent au solveur non linéaire utilisé un taux de convergence proche de l'optimal.

Des résultats bi et tri-dimensionnels, de problèmes de référence, sont présentés et validés par comparaison avec le code développé au LaMCoS (ELFE-3D).

Dans la dernière section de ce chapitre, la simulation de la propagation des fissures, avec ses deux échelles de temps, est abordée. La validation de la stratégie multi-échelles en espace (problème de rupture) et en temps (propagation des fissures de fatigue) est réalisée par comparaison entre des trajets de fissuration obtenus expérimentalement et numériquement.

Le chapitre précédent a souligné les difficultés inhérentes à la modélisation des problèmes de contact et de frottement à l'aide de X-FEM. Une formulation mixte stabilisée à trois champs provenant de travaux antérieurs [ELG 07b, RIB 07, PIE 10a] a été retenue. Cette formulation découle d'une vision spatiale à deux échelles du problème de rupture. Elle est introduite dans la première section de ce chapitre. La fissure est vue comme une structure à part entière avec ses propres variables primales et duales, sa propre discrétisation et sa propre loi de comportement (contact frottant dans ces travaux). Cette modélisation permet une description précise et efficace du problème de rupture, avec contact frottant à l'interface, séparée de celle du problème global de structure [PIE 10c].

Le logiciel dans lequel ont été réalisés les développements numériques de ce travail de thèse est tout d'abord présenté.

### 2.1 Présentation de CAST3M [CAS 13]

CAST3M est un code de calcul pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis développé par le CEA. Cast3M, contrairement à de nombreux codes de calcul, ne fonctionne pas en "boîte noire" ; il donne à l'utilisateur la connaissance du problème effectivement posé et des méthodes employées pour le résoudre. Cast3M comprend un ensemble de processus élémentaires (bibliothèque d'opérateurs) que l'utilisateur peut enchaîner pour définir et résoudre ses problèmes. Cast3M possède un langage de commande constitué d'une série d'opérateurs permettant à l'utilisateur de manipuler les données et les résultats sous forme d'objets en leur donnant des noms : c'est le langage Gibiane.

La structure adoptée dans Cast3M offre, avant toute chose, la possibilité d'élaborer des procédures qui sont, en quelque sorte, des opérateurs de niveau supérieur, appelant à leur tour des opérateurs élémentaires. Ces procédures sont créées pour répondre à des besoins divers. En premier lieu, il est possible d'utiliser les mêmes données pour plusieurs

opérateurs, ce qui permet de les regrouper facilement et de les retrouver à l'aide d'une seule instruction. En second lieu, dans le cas de problèmes assez complexes ou répétitifs, il peut être gênant pour l'utilisateur d'avoir à définir chaque fois explicitement des opérations très standardisées. Enfin, pour des utilisations par des personnes peu familiarisées avec la méthode des éléments finis, il est bon de pouvoir revenir à un fonctionnement en boîte noire du programme. Ceci revient à masquer tout le détail des opérations élémentaires par une seule procédure. Cette possibilité a été largement utilisée dans ces travaux afin de rendre le module utilisateur accessible au plus grand nombre.

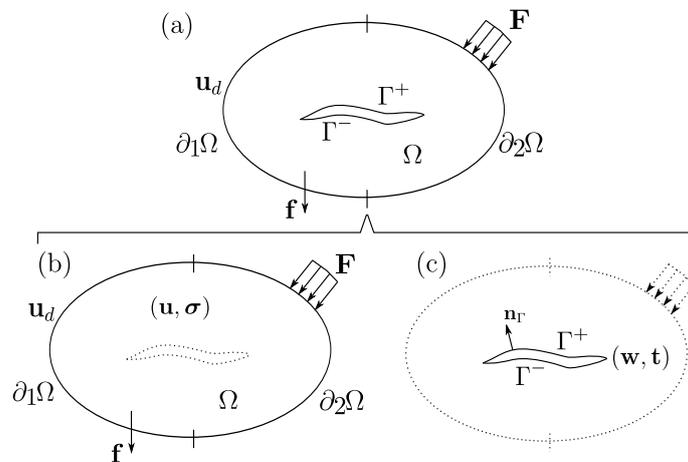
La structure particulière de Cast3M permet non seulement d'élaborer des procédures propres à résoudre de nouveaux types de problèmes, mais, également, de définir des opérateurs différents de ceux existants. Les nouveaux opérateurs peuvent, en réalité, être développés, mis au point et vérifiés indépendamment des autres. Pour cela, il suffit de connaître la structure des données contenues dans les objets traités par le nouvel opérateur et dans les objets communs à tout le programme. Cette possibilité s'avère particulièrement utile lorsque l'analyse exige des adaptations spécifiques comme ce fut le cas pour la réalisation de ces travaux. La création de nouveaux opérateurs suppose, de la part du développeur, une connaissance approfondie du langage de programmation qui porte le nom d'ESOPE et qui constitue une sorte de langage FORTRAN de niveau supérieur. Sans entrer dans les détails, il suffit de préciser qu'une entité informatique telle qu'un sous-programme est écrite en ESOPE, traduite en norme FORTRAN, puis compilée de manière classique. Pour lever toute ambiguïté, il convient de bien distinguer, le langage du développeur : ESOPE, du langage de l'utilisateur : GIBIANE. Toutefois, il est clair qu'un utilisateur écrivant des procédures, donc des super-opérateurs, devient, de fait, un développeur en GIBIANE.

Ces travaux de thèse ont donné lieu au développement et à l'extension d'opérateurs déjà existants (ESOPE). L'opérateur RELA ACCRO 'FAIB' a été créé (accro2.eso) et les opérateurs GRAD et INTG étendus au modèle utilisé pour la fissure (ZCO2 et ZCO3 dans grad1.eso et intgca.eso). Tous ces développements ont été réalisés en deux et trois dimensions. L'extension des opérateurs GRAD (grad1.eso) et INTG (ingca.eso) a permis d'ajouter les termes introduits par le contact et le frottement dans les intégrales de domaine dédiées au calcul de l'intégrale  $J$  et des FICs. Les procédures G\_THETA.proc et G\_CALCUL.proc ont été modifiées en conséquence. Ces développements ESOPE ont permis la création en gibiane du système linéaire discrétisé issu de la stratégie XFEM à trois champs et l'ajout des conditions introduites par le solveur non-linéaire stabilisé LATIN. La méthode LATIN a été implémentée dans une procédure spécifique en GIBIANE. Tous ces développements sont explicités dans les parties qui suivent. Les développements présentés dans ce travail (ESOPE et GIBIANE) sont intégrés à la version 2014 de CAST3M.

## 2.2 Formulation faible mixte du problème de structure avec interface en présence de contact et frottement

Cette première partie est basée sur des travaux antérieurs à ce doctorat. Ils ont mis en place une formulation à trois champs issue d'une stratégie à deux échelles pour la résolution du problème de rupture en présence de contact et frottement [RIB 07, PIE 10a]. Cette section explicite la formulation faible à trois champs utilisée et son implémentation dans CAST3M.

La formulation du problème d'une structure fissurée ( $\Omega \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  sur la FIG.2.1 (a)) est réalisée en séparant le problème global en deux sous problèmes (FIG.2.1). Dans cette approche, l'interface  $\Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ ) est considérée comme une structure avec ses propres variables primales et duales ainsi que sa propre discrétisation indépendante de celle de la structure. Les inconnues du problème de structure (FIG.2.1 (b)) sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}(t)$  et le tenseur des contraintes volumiques  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ . La solution de ce problème satisfait les équations d'équilibre dans le domaine  $\Omega$  et obéit à la loi de comportement en volume du matériau quelque soit l'intervalle de temps considéré. Cette solution doit aussi satisfaire les conditions Neumann et Dirichlet sur  $\partial_2\Omega$  et  $\partial_1\Omega$  respectivement.



**FIGURE 2.1:** Séparation du problème d'une structure fissurée (a) en deux sous problèmes. Un problème global de structure sans fissure (b) et un problème local entre les lèvres de la fissure (c).

Equilibre en volume :

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}(t) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

Conditions de Neumann :

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} = \mathbf{F}(t) \text{ sur } \partial_2\Omega \quad (2.2)$$

Conditions de Dirichlet :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_d(t) \text{ sur } \partial_1\Omega \quad (2.3)$$

Loi de comportement en volume :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(t), t + \text{variables internes}) \text{ dans } \Omega \quad (2.4)$$

Les autres inconnues du problème de la structure fissurée ( $\Omega \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ ) sont celles relatives à la solution locale sur l'interface (FIG.2.1 (c)) . De la même manière que pour la solution en volume dans la structure, le champ de déplacement  $\mathbf{w}(t)$  et les efforts surfaciques de contact  $\mathbf{t}(t)$  sont les inconnues définissant le problème à l'interface. Les conditions de couplage entre la structure et l'interface s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) \text{ sur } \Gamma \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} = \mathbf{t}(t) \text{ sur } \Gamma^+ \text{ et } \Gamma^- \quad (2.6)$$

L'ensemble de ces équations constituent la formulation forte du problème global de structure (FIG.2.1 (a)).

Afin de construire une formulation faible du problème, le principe des travaux virtuels est utilisé. On définit alors les travaux virtuels associés au problème global en volume et au problème local à l'interface. Une condition de couplage entre ces deux problèmes est ajoutée. Les travaux virtuels s'écrivent de la manière suivante :

$$W_{global}^* = W_{interne}^* + W_{externe}^* \quad (2.7)$$

où

$$W_{interne}^* = - \int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)] \cdot \mathbf{u}^* dV + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}^* dV \quad (2.8)$$

et

$$W_{externe}^* = \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{u}^* dS \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^*$  sont respectivement les champs de déplacement réel et virtuel dans la structure définis par :

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma) / \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_0 = \mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma) / \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \quad (2.11)$$

$$W_{local}^* = \int_{\Gamma} \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{w}^* dS \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{w}^*$  et  $\mathbf{p}$  sont respectivement les champs de déplacement virtuel et le champ des efforts surfaciques de contact sur l'interface tel que :

$$\mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \quad \mathcal{W}^* = \mathbf{w} \in H^1(\Gamma) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{p} \in \Lambda, \quad \Lambda = \mathbf{p} \in L^2(\Gamma) \quad (2.14)$$

Une condition de couplage supplémentaire entre le problème local et le problème global est introduite via le champ des pressions de contact  $\mathbf{t}$  (voir éq. (2.6) ). Le travail virtuel associé s'écrit :

$$W_{couplage}^* = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^*(\mathbf{u} - \mathbf{w}) dS + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^*) dS \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{t}^*$  est le champ des pressions de contact virtuel à l'interface tel que :

$$\mathbf{t}^* \in \Lambda^*, \Lambda^* = \mathbf{t} \in L^2(\Gamma) \quad (2.16)$$

On peut alors construire une formulation faible associée à l'ensemble du problème à partir de :

$$W_{global}^* + W_{local}^* + W_{couplage}^* = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \mathbf{t}^* \in \Lambda^*, \forall t \in [0; T] \quad (2.17)$$

qui est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}^* dV + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{u}^* dS \\ & + \int_{\Gamma} (\mathbf{t}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{w}^* dS \\ & + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)) \cdot \mathbf{t}^* dS \\ & \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \mathbf{t}^* \in \Lambda^*, \forall t \in [0; T] \end{aligned} \quad (2.18)$$

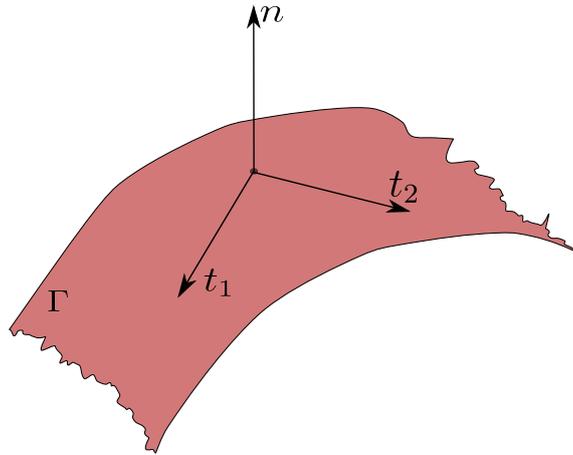
**Remarque :** Le second terme intégral montre donc clairement que  $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{t}(t)$ . Dans la LATIN, ce terme correspondra à la direction de recherche (équation (2.31)).

Cette formulation faible à trois champs (2.18) est valable quelles que soient les lois de comportement en volume et à l'interface du problème. Dans ce travail, on se place dans le cadre des matériaux homogènes et isotropes. La loi de comportement en volume considérée est celle d'un matériau élastique linéaire et l'hypothèse de plasticité confinée en pointe de fissure est retenue. Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction du tenseur de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad (2.19)$$

De même les inconnues  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{t}$  satisfont aux équations d'équilibre à l'interface ( $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ ) dépendant de la loi de comportement imposée (contact unilatéral, contact frottant, ressort ...). Une loi de comportement en contact frottant entre les lèvres est considérée. La solution  $(\mathbf{w}, \mathbf{t})$  obéit aux équations définissant le contact unilatéral pour le problème normal et à la loi de Coulomb pour le problème tangentiel. Les champs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{t}$  sur les faces  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont exprimés dans le repère local associé à l'interface :

$$\mathbf{w} = w_n \mathbf{n}_{\Gamma} + w_{t1} \mathbf{t}_{\Gamma}^1 + w_{t2} \mathbf{t}_{\Gamma}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = t_n \mathbf{n}_{\Gamma} + t_{t1} \mathbf{t}_{\Gamma}^1 + t_{t2} \mathbf{t}_{\Gamma}^2 \quad (2.20)$$



**FIGURE 2.2:** Repère local utilisé pour l'application de la loi de comportement locale sur l'interface  $\Gamma$ .

**Remarque :** Pour des problèmes tri-dimensionnels, les directions  $\mathbf{t}_\Gamma^1$  et  $\mathbf{t}_\Gamma^2$  sont arbitrairement choisies. La seule condition imposée est que  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2)$  forme un repère orthonormé direct sur chaque noeud de la discrétisation de l'interface (FIG.2.2).

On définit alors les déplacements relatifs, sauts normaux et tangentiels (ouverture et glissement), entre les deux faces et en un point  $\mathbf{x}$  de l'interface :

$$[w_n(\mathbf{x}, t)] = w_n^+(\mathbf{x}, t) - w_n^-(\mathbf{x}, t) \quad (2.21)$$

$$[w_{t_1}(\mathbf{x}, t)] = w_{t_1}^+(\mathbf{x}, t) - w_{t_1}^-(\mathbf{x}, t) \quad (2.22)$$

$$[w_{t_2}(\mathbf{x}, t)] = w_{t_2}^+(\mathbf{x}, t) - w_{t_2}^-(\mathbf{x}, t) \quad (2.23)$$

En utilisant ces notations, les équations fortes du problème local d'interface s'écrivent :

- ouverture  $[w_N(\mathbf{x}, t)] > 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}^+(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^-(\mathbf{x}, t) = 0$
- contact  $[w_N(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}^+(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{t}^-(\mathbf{x}, t)$
- adhérence  $|t_i(\mathbf{x}, t)| < \mu_{fissure} |t_N(\mathbf{x}, t)| \quad \rightarrow \quad \Delta[w_{t_i}(\mathbf{x}, t)] = 0$
- glissement  $|t_i(\mathbf{x}, t)| = \mu_{fissure} |t_N(\mathbf{x}, t)| \quad \rightarrow \quad \exists \gamma > 0 / \Delta[w_{t_i}(\mathbf{x}, t)] = -\gamma t_T^+(\mathbf{x}, t)$

où  $\Delta[w_{t_i}(\mathbf{x}, t)]$  est l'incrément de glissement pour le pas de temps  $\Delta t$  considéré et  $\mu_{fissure}$  est le coefficient de frottement entre les lèvres de la fissure.

La simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails nécessite la prise en compte du contact frottant entre les lèvres de la fissure. Une formulation spécifique est utilisée dans le cadre de la X-FEM. Elle introduit un raccord faible entre la fissure et la structure. C'est grâce à ces opérateurs de type Mortar que les discrétisations de la structure et de la fissure peuvent être rendues indépendantes. Cette formulation issue de travaux antérieurs constitue le point de départ des développements réalisés dans mon travail sous CAST3M.

Dans la section suivante, la discrétisation des champs globaux et locaux telle qu'implémentée est précisée. La discrétisation des champs d'interface proposée fait appel à l'utilisation originale d'enrichissement saut.

### 2.3 Discrétisation multi-échelles enrichie des champs

Dans le cadre de la X-FEM introduite dans le premier chapitre du manuscrit (1.3.4), le problème de structure est discrétisé grâce à un maillage d'éléments finis. La modification du champ de déplacement introduit par la fissure est simplement modélisée par l'introduction judicieuse d'enrichissement sur ce maillage. Si on se limite à cette méthode, avec une formulation à un seul champ (le déplacement global dans la structure), la fissure n'est donc pas explicitement maillée. En revanche, l'utilisation de la formulation faible à trois champs permet d'introduire une discrétisation propre à la fissure indépendante du maillage de structure. Ceci permet d'avoir des niveaux de discrétisation adaptés aux phénomènes que la modélisation avec contact doit retranscrire. Au niveau de la structure, la fissure introduit une discontinuité et une singularité. A l'échelle de la fissure, il faut capter les phénomènes de contact et de frottement entre les lèvres. La méthode implémentée dans CAST3M reprend la méthode des éléments d'interface pour la gestion du contact frottant entre les lèvres introduite par [DOL 01]. La nouvelle stratégie proposée par [PIE 10c] a rendu la taille des éléments de l'interface indépendante de celle des éléments du maillage de structure. C'est cette approche qui a été reprise et adaptée.

Les inconnues locales ne sont plus définies aux points de Gauss des éléments d'interface mais sur les noeuds de la discrétisation locale. Le choix a été fait de décrire les champs locaux à l'aide d'enrichissement saut porté par les noeuds de la discrétisation locale. Les lèvres  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  ne sont donc plus définies explicitement. Les champs sont alors discrétisés sous la forme suivante pour une fissure débouchante avec un unique front :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i \in N_n} \mathbf{u}_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) + H \sum_{j \in N_c} \mathbf{a}_{u_j}(t) \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^4 B_l \sum_{k \in N_f} \mathbf{b}_{lk}(t) \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m \in N_m} \mathbf{w}_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}) + H \mathbf{a}_{w_m}(t) \Psi_m(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

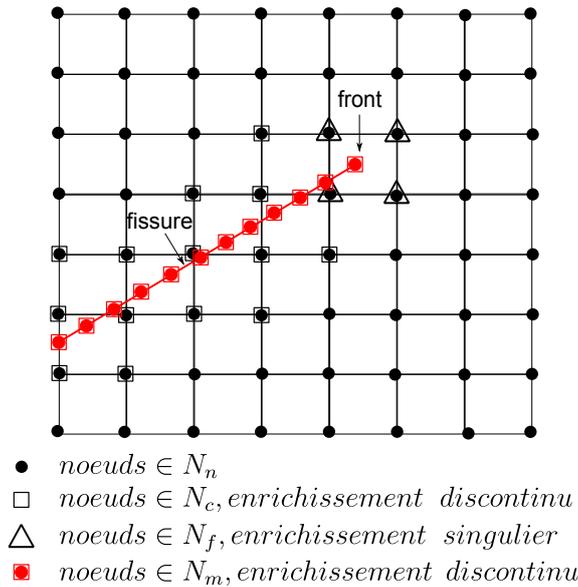
$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m \in N_m} \mathbf{t}_m(t) \Psi'_m(\mathbf{x}) + H \mathbf{a}_{t_m}(p) \Psi'_m(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

Dans ces équations,  $H$  est la fonction Heavyside généralisée prenant pour valeur respectivement  $+1$  et  $-1$  de part et d'autre de l'interface (voir FIG.1.34).

Les sauts en déplacement et en pression sur l'interface sont donc :

$$[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- = 2\mathbf{a}_{w_m} \quad (2.28)$$

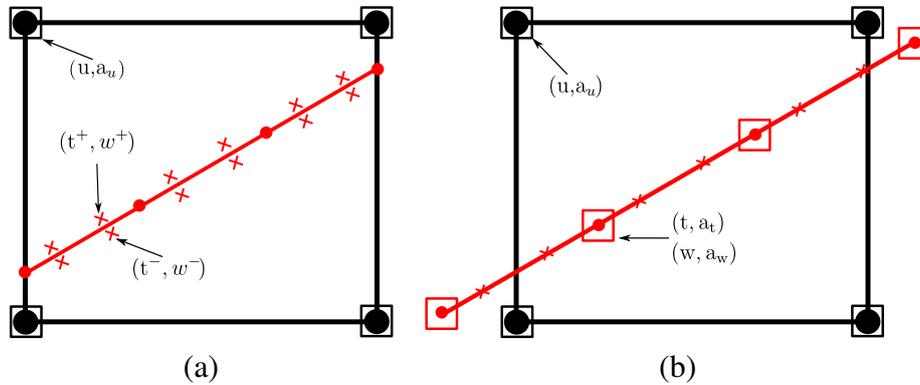
$$[\mathbf{t}] = \mathbf{t}^+ - \mathbf{t}^- = 2\mathbf{a}_{t_m} \quad (2.29)$$



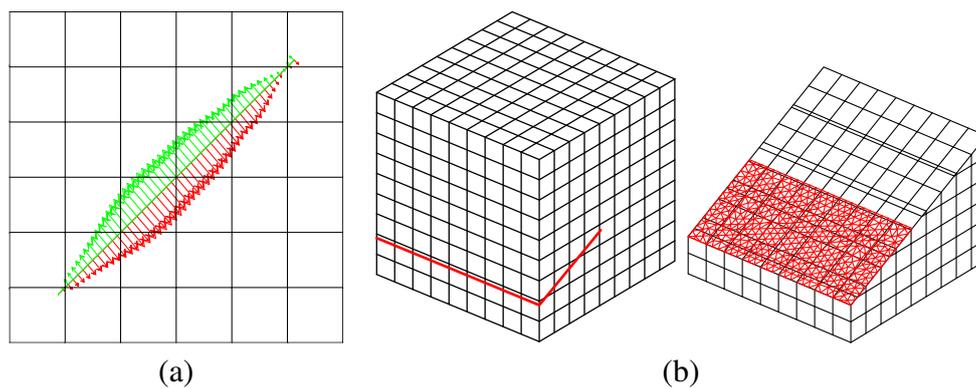
**FIGURE 2.3:** Représentation graphique 2D des enrichissements introduits. Les carrés et les triangles représentent respectivement les enrichissements discontinus et singuliers.

Pour les détails liés à cette discrétisation et à leur implication dans le calcul des matrices de couplage, se référer à l'annexe A.

Enfin, la possibilité de définir des discrétisations non seulement indépendantes (FIG.2.4 (a)) mais aussi non conformes a été implémentée (FIG.2.4 (b) et FIG.2.5). La discrétisation de l'interface est donc complètement indépendante de celle de la structure. Cette vision à deux échelles est particulièrement bien adaptée à la programmation dans CAST3M qui fait appel à une définition implicite-explicite de la fissure [PRA 11, FRI 12, PRA 14] (voir partie 2.7.3.1). Ainsi, la fissure est maillée explicitement par l'utilisateur. Grâce à l'approche utilisée, celui-ci n'a pas besoin de se préoccuper de la conformité du maillage de la fissure avec celui de la structure. Le maillage du problème local peut être raffiné indépendamment de celui de la structure. Ceci permet d'utiliser une discrétisation fine à l'interface adaptée à l'échelle des non-linéarités de contact tout en conservant un maillage volumique plus grossier.



**FIGURE 2.4:** (a) Exemple de discrétisation indépendante conforme proposée par Pierres et al. [PIE 10a]. Les inconnues sont définies aux points de Gauss des éléments d'interface. (b) Extension de cette approche avec la possibilité d'utiliser des discrétisations non conformes. Les inconnues sont portées aux noeuds de la discrétisation de l'interface. Les carrés représentent les enrichissements discontinus. La non conformité des deux discrétisations est réalisée en autorisant une erreur pour l'intégration des champs sur les éléments d'interface à cheval sur plusieurs éléments de structure.



**FIGURE 2.5:** Exemple de discrétisation de l'interface complètement indépendante du maillage de structure (a) bi-dimensionnel et (b) tri-dimensionnel.

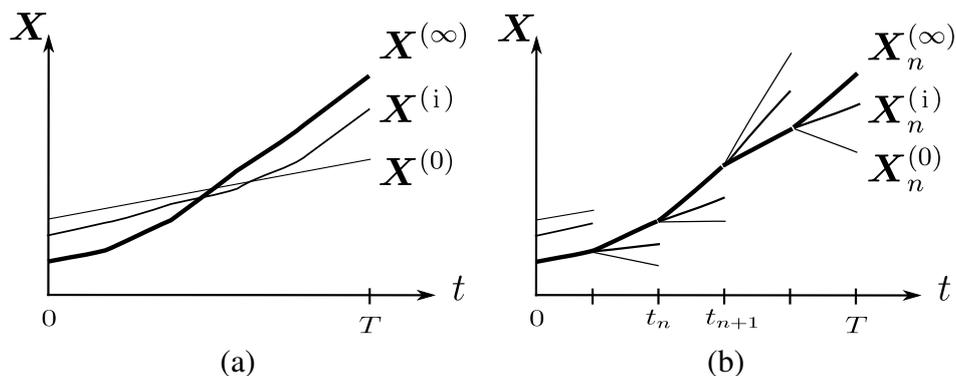
## 2.4 Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN stabilisée

La formulation utilisée pour l'écriture du problème d'une structure fissurée avec prise en compte du contact et frottement à l'interface, ainsi que les discrétisations des champs, ont été précisées dans les sections précédentes. Il nous faut maintenant nous donner une méthode incrémentale afin de résoudre ce problème non-linéaire. Cette méthode devra nous permettre de calculer à partir du vecteur d'état  $\mathbf{X}_n = (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{t}_n)$ , solution du problème à l'instant  $t_n$ , le nouveau vecteur d'état  $\mathbf{X}_{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$ .

### 2.4.1 Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN

Il a été choisi d'utiliser la méthode LATIN pour la résolution quasi-statique du problème de rupture. La méthode LATIN (pour LArge Time INcrement) est un solveur non linéaire qui permet de résoudre les problèmes à la fois en espace et en temps [LAD 99]. Cette méthode permet à partir d'une première approximation (souvent une résolution élastique linéaire) sur tout l'espace-temps d'approcher la solution non-linéaire du problème sur tout l'espace-temps (FIG.2.6 (a)). Cette méthode a déjà été appliquée à de nombreux problèmes de statique, quasi-statique et dynamique [RIB 07, PAS 08, GUI 08].

Pour les problèmes de structure avec prise en compte du contact frottant aux interfaces, une version dite incrémentale de la LATIN a été proposée par Champaney et al. [CHA 99]. A l'inverse de la méthode initialement proposée, l'intervalle de temps  $[0; T]$  est discrétisé en pas de temps  $t_n$ . La solution non-linéaire est alors recherchée pour chaque pas de temps l'un après l'autre par un processus itératif (FIG.2.6 (b)).



**FIGURE 2.6:** (a) Représentation graphique du processus itératif de la méthode LATIN.  $\mathbf{X}^{(0)}$  est le vecteur d'état initial,  $\mathbf{X}^{(i)}$  est le vecteur d'état à l'itération  $i$  et  $\mathbf{X}^{(\infty)}$  est le vecteur d'état solution du problème. (b) Représentation graphique du processus itératif de la méthode LATIN dite incrémentale.  $\mathbf{X}_n^{(i)}$  est le vecteur d'état à l'itération  $i$  pour un pas de temps  $n$  donné.

L'idée de la méthode LATIN repose sur la division des équations du problème en deux sous-ensembles :

- un sous-ensemble ( $L$ ) d'équations locales, éventuellement non linéaires. Ici, cet ensemble correspond aux équations de la loi de comportement à l'interface (2.24) ;
- un sous-ensemble ( $G$ ) d'équations linéaires, généralement globales. Dans notre approche, cet ensemble est composé de l'équation établissant la formulation faible mixte (2.18), de la loi de comportement en volume (2.19) et des conditions aux limites (2.2) et (2.3).

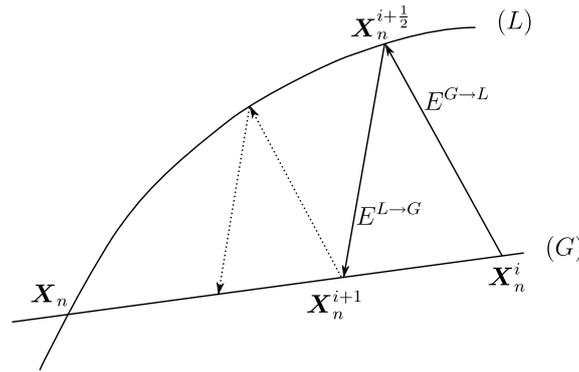
A partir d'une solution initiale  $\mathbf{X}_n^{(0)}$  issue d'un calcul élastique, une approximation de la solution non linéaire  $\mathbf{X}_n^{(\infty)}$  à un instant est obtenue par un processus itératif en deux étapes illustrées sur la FIG.2.7. La méthode introduit des conditions supplémentaires reliant les solutions obtenues dans les sous-espaces ( $L$ ) et ( $G$ ). Ces conditions, appelées les directions de recherche locale  $E^{G \rightarrow L}$  et globale  $E^{L \rightarrow G}$ , relient la différence des champs locaux  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{t}$  entre deux approximations globales et locales :

$$\left( \mathbf{X}_n^{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{X}_n^i \right) \in E^{G \rightarrow L} \implies \mathbf{t}^{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{t}^i = \mathbf{k}_L(\mathbf{w}^{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{w}^i) \quad (2.30)$$

$$\left( \mathbf{X}_n^{i+1} - \mathbf{X}_n^{i+\frac{1}{2}} \right) \in E^{L \rightarrow G} \implies \mathbf{t}^{i+1} - \mathbf{t}^{i+\frac{1}{2}} = -\mathbf{k}_G(\mathbf{w}^{i+1} - \mathbf{w}^{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.31)$$

où  $\mathbf{k}_L$  et  $\mathbf{k}_G$  sont des opérateurs strictement positifs exprimés en  $Pa.m^{-1}$  définis par :

$$\mathbf{k}_L = \begin{bmatrix} k_{L,N} & 0 \\ 0 & k_{L,T} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} k_{G,N} & 0 \\ 0 & k_{G,T} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$



**FIGURE 2.7:** Représentation schématique du processus itératif de la méthode LATIN au pas de temps  $t_n$ .

Chaque itération de la méthode LATIN se fait en deux temps :

1. L'étape locale.

La solution du problème local  $\mathbf{X}_n^{i+\frac{1}{2}}$  est recherchée. A partir des grandeurs  $\mathbf{w}_n^i$  et  $\mathbf{t}_n^i$ , l'utilisation des équations de comportement (2.24) et de la condition supplémentaire introduit par la LATIN (2.30), la solution  $\mathbf{w}_n^{i+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{t}_n^{i+\frac{1}{2}}$  est recherchée dans (L).

2. L'étape globale.

A partir de la solution de l'étape locale, la solution  $\mathbf{X}_n^{i+1}$  est recherchée dans (G). Pour cela l'équation (2.31) est introduite dans la formulation faible à trois champs (2.18), formulation qui devient alors :

$$\begin{aligned}
 0 = & - \int_{\Omega} Tr [\mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{i+1})\varepsilon(\mathbf{u}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_n^{i+1} \cdot \mathbf{u}^* dS \\
 & + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma} \left( \mathbf{t}_n^{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{k}_G \mathbf{w}_n^{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{w}^* dS - \int_{\Gamma} \left( \mathbf{t}_n^{i+1} + \mathbf{k}_G \mathbf{w}_n^{i+1} \right) \cdot \mathbf{w}^* dS \\
 & + \int_{\Gamma} \left( \mathbf{u}_n^{i+1} - \mathbf{w}_n^{i+1} \right) \cdot \mathbf{t}^* dS
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \mathbf{t}^* \in \Lambda^*, \forall t_n \in [0; T]$$

Cette équation nous permet d'obtenir les champs solutions  $\mathbf{u}_n^{i+1}$ ,  $\mathbf{w}_n^{i+1}$  et  $\mathbf{t}_n^{i+1}$  vérifiant l'équilibre global à partir des champs  $\mathbf{w}_n^{i+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{t}_n^{i+\frac{1}{2}}$ .

Une itération de la méthode LATIN correspond à ces deux étapes. Leurs répétitions permettent d'assurer  $\mathbf{X}_n^{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{X}_n^{i+1} = \mathbf{X}_n^{\infty}$  (à précision donnée avec un critère d'arrêt adéquat). La convergence de la méthode LATIN (sous certaines conditions) a été démontrée [LAD 99]. Si la loi de comportement est monotone et si les interfaces représentent des conditions aux limites, des liaisons parfaites ou des surfaces de contact sans frottement, il est montré que le processus converge lorsque les directions de recherche locale et globale sont conjuguées et positives, soit :

$$\mathbf{k}_L = \mathbf{k}_G = \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Le critère d'arrêt utilisé pour le processus itératif est celui développé par Ribeaucourt et al. [RIB 06, RIB 07]. Dans ce travail, le choix a été fait de fixer la valeur du dénominateur à celle prise pour la première itération. Cet indicateur permet de distinguer les grandeurs locales normale et tangentielle car les deux problèmes peuvent avoir des ordres de grandeur différents. Son caractère local en fait un indicateur sévère.

Il est défini de la manière suivante :

$$\eta = \max(\eta_N; \eta_T) \quad (2.35)$$

avec

$$\eta_N = \frac{\|\mathbf{X}_N^{(i+1)} - \mathbf{X}_N^{(i+\frac{1}{2})}\|_\infty^2}{\|\mathbf{X}_N^{(1)}\|_\infty^2 + \|\mathbf{X}_N^{(1+\frac{1}{2})}\|_\infty^2}, \quad \eta_T = \frac{\|\mathbf{X}_T^{(i+1)} - \mathbf{X}_T^{(i+\frac{1}{2})}\|_\infty^2}{\|\mathbf{X}_T^{(1)}\|_\infty^2 + \|\mathbf{X}_T^{(1+\frac{1}{2})}\|_\infty^2} \quad (2.36)$$

où la norme  $\|\mathbf{X}\|_\infty^2$  est définie par :

$$\|\mathbf{X}\|_\infty^2 = \max\left(\frac{1}{k}\mathbf{T}^2 + k\mathbf{W}^2\right) \quad (2.37)$$

A partir de la discrétisation introduite (2.25), (2.26) et (2.27), l'étape globale de la méthode LATIN (2.33) s'écrit sous la forme du système linéaire discrétisé suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{ut} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{wt} \\ -\mathbf{K}_{ut}^T & \mathbf{K}_{wt}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{T}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{wt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur globale du problème de structure enrichi.  $\mathbf{K}_{ut}$  et  $\mathbf{K}_{wt}$  sont des opérateurs raccordant au sens faible les déplacements de la structure et de l'interface et définis dans mon travail comme suit :

$$\mathbf{K}_{ut} = \begin{bmatrix} \int_\Gamma \Phi_i \Psi'_m dS & 0 & 0 \\ 0 & \int_\Gamma H^2 \Phi_j \Psi'_m dS & \int_\Gamma B_1 H \Phi_k \Psi'_m dS \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K}_{wt} = \begin{bmatrix} \int_\Gamma \Psi_i \Psi'_j dS & 0 \\ 0 & \int_\Gamma H^2 \Psi_i \Psi'_j dS \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Dans ces matrices, les inconnues du saut des champs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{t}$  sont liées avec la composante discontinue du champ de déplacement de la structure. La valeur de  $H^2$  sur l'interface est 1.

$\mathbf{K}_{ww}$  est la matrice de raideur du problème d'interface enrichie introduite par la méthode LATIN. Avec la discrétisation choisie pour les champs d'interface :

$$\mathbf{K}_{ww} = \begin{bmatrix} \int_\Gamma \mathbf{k} \Psi_i \Psi_j dS & 0 \\ 0 & \int_\Gamma \mathbf{k} H^2 \Psi_i \Psi_j dS \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

L'assemblage des matrices  $\mathbf{K}_{ut}$ ,  $\mathbf{K}_{wt}$  et  $\mathbf{K}_{ww}$  a été programmé en esope (*accro2.eso*, voir l'annexe C) dans l'opérateur gibiane RELA ACCRO 'FAIB'. Le solveur non-linéaire

LATIN a été implémenté dans une procédure spécifique faisant appel à d'autres procédures afin d'assurer un fonctionnement en "boîte noire" pour l'utilisateur.

Un des inconvénients des formulations mixtes est qu'elles peuvent parfois être instables. Plusieurs travaux les utilisant ont constaté des oscillations numériques sur l'interface, visibles principalement sur le dual (i.e les efforts d'interface) [MOë 06, Gén 07, Béc 09, LIU 10, GRA 11, AMD 12]. Un moyen de pallier cela pourrait être d'utiliser un filtre spatial plus grossier pour la discrétisation de l'interface. Cette solution n'est cependant pas compatible avec une modélisation précise du contact frottant à l'interface. Des travaux se sont donc concentrés sur la stabilisation de ces formulations.

## 2.4.2 Stabilisation de la formulation

Gravouil et al. [GRA 11] ont introduit un terme de stabilisation dans la formulation précédente. Ce terme est ajouté afin que le système respecte la condition de stabilité de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi dite LBB, c'est-à-dire que les inconnues du système linéaire discrétisé restent bornées quel que soit le second membre. Il est montré dans [GRA 11] que c'est en lieu et place du 0 sur la dernière ligne du système matriciel précédent (2.38) que le terme de stabilité doit être ajouté. Le terme de stabilisation  $\mathbf{K}_{tt}$ , suivant la discrétisation des champs définis dans ce travail pour l'implémentation dans CAST3M, s'écrit :

$$\mathbf{K}_{tt} = \left[ \begin{array}{c|c} \int_{\Gamma} -\xi \Psi'_i \Psi'_j dS & 0 \\ \hline 0 & \int_{\Gamma} -\xi H^2 \Psi'_i \Psi'_j dS \end{array} \right] \quad (2.42)$$

avec  $\xi > 0$ . Ce terme permet à la méthode de converger plus rapidement vers une solution stable [GRA 11, PIE 10a]. Il est également créé par la commande 'RELA' 'ACCR' 'FAIB'. Le système devient alors :

$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{tt} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{wt} \\ -\mathbf{K}_{ut}^T & \mathbf{K}_{wt}^T & \mathbf{K}_{tt} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{T}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{wt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Pour une précision donnée, le terme ajouté s'annule ( $\mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{T}_{i+1} - \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}}$  tend vers 0) et ne modifie donc pas la solution non-linéaire obtenue. Il modifie cependant le taux de convergence de la méthode.

Il est intéressant d'effectuer la démarche inverse, c'est-à-dire de remonter le terme de stabilisation du système matriciel discrétisé vers la formulation faible à trois champs après introduction des équations de la LATIN afin de comprendre la signification de ce terme de stabilisation.

L'équation (2.33) devient alors :

$$\begin{aligned}
 0 = & - \int_{\Omega} Tr [\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{i+1}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_n^{i+1} \cdot \mathbf{u}^* dS \\
 & + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_c} \left( \mathbf{t}_n^{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{k}_G \mathbf{w}_n^{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{w}^* dS - \int_{\Gamma_c} (\mathbf{t}_n^{i+1} + \mathbf{k}_G \mathbf{w}_n^{i+1}) \cdot \mathbf{w}^* dS \\
 & + \int_{\Gamma_c} \left( \boldsymbol{\xi}_G \mathbf{t}_n^{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\xi}_G \mathbf{t}_n^{i+1} \right) \cdot \mathbf{t}^* dS + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}_n^{i+1} - \mathbf{w}_n^{i+1}) \cdot \mathbf{t}^* dS
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \mathbf{t}^* \in \Lambda^*, \forall t_n \in [0; T]$$

avec de même que pour l'opérateur  $\mathbf{k}_G$  :

$$\boldsymbol{\xi}_G = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{G,N} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\xi}_{G,T} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

où de la même manière que pour  $\mathbf{k}_G$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{G,N}$  est choisi égale à  $\boldsymbol{\xi}_{G,T}$ .

D'après le troisième terme intégral associée à  $\mathbf{t}^*$ , il est clair que  $\boldsymbol{\xi}_G$  est homogène à  $\mathbf{k}_G^{-1}$ . On verra par la suite que cela conduit effectivement à une valeur optimale de stabilisation.

Cette méthode requiert généralement plus d'itérations que les méthodes utilisant des algorithmes de type Newton-Raphson [LIU 08, LIU 10] pour atteindre une précision donnée. En revanche, une itération avec la méthode LATIN a un coût numérique très faible car :

- Aucune opération de mise à jour d'opérateur n'est réalisée.  
La matrice globale est assemblée et factorisée uniquement pour la première résolution du système linéaire. Les itérations suivantes présentent donc un coût numérique très inférieur.
- Aucune itération n'est effectuée lors de l'étape locale. Il s'agit uniquement d'une mise à jour des champs locaux provenant de l'étape globale afin qu'ils respectent le comportement local.
- La matrice globale du système linéaire est symétrique, définie, positive.

Ces propriétés font de la LATIN une méthode numérique efficace dont le taux de convergence est gouverné par les valeurs imposées pour les paramètres  $k$  et  $\boldsymbol{\xi}$ . Autrement dit, le taux de convergence n'est pas discriminant entre la LATIN et les solveurs Newton-Raphson. Seule la complexité (le nombre d'opérations élémentaires) permet de comparer les performances.

### 2.4.3 Définition a priori de paramètres assurant un taux de convergence proche de l'optimal

Pour une utilisation de la méthode dans un cadre industriel, fournir des estimations a priori des paramètres assurant au solveur non-linéaire un taux de convergence proche de l'optimal est un enjeu important. De plus, en vue de réaliser des simulations tri-dimensionnelles de propagation, assurer un taux de convergence proche de l'optimal à la méthode constitue un bon levier pour réduire les temps de calcul.

D'autre part, une définition automatique de ces paramètres optimaux permet à des utilisateurs non avertis d'effectuer des simulations à l'aide de cette méthode de résolution. C'est dans ce but que j'ai proposé de définir de manière a priori les paramètres contrôlant le taux de convergence, la direction de recherche  $k$  et le paramètre de stabilisation  $\xi$ , avec les formules suivantes :

$$k = \frac{E}{l} \quad (2.46)$$

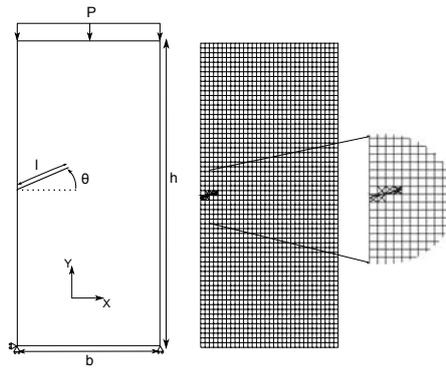
$$\xi = \frac{l}{E} \quad (2.47)$$

où  $E$  et  $l$  sont respectivement le module de Young et la longueur de l'interface en 2D. En 3D,  $l$  peut se définir par  $l = A^{\frac{1}{2}}$  où  $A$  est l'aire de l'interface.

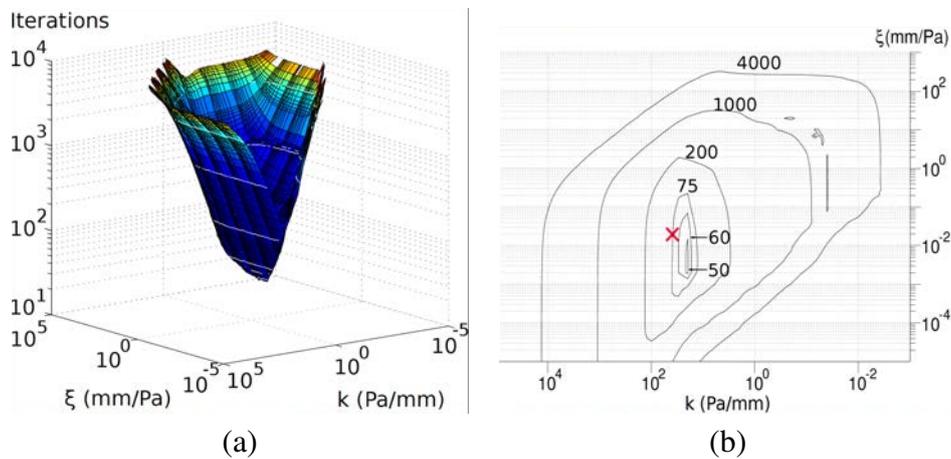
A partir du cas test de la FIG.2.8, avec un coefficient de frottement entre les lèvres de la fissure  $\mu_{fissure} = 0.1$ , une étude empirico-numérique sur une très large bande de valeurs pour  $k$  et  $\xi$  a permis d'observer l'existence d'un unique couple  $(k, \xi)$  assurant un taux de convergence optimal.  $k$  varie entre  $10^{-3}$  et  $10^5$  Pa/mm et  $\xi$  entre  $10^{-5}$  et  $10^3$  mm/Pa.  $E$  est fixé égal à 1 Pa. Pour chaque valeur du couple  $(k, \xi)$ , le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme non-linéaire pour atteindre une précision  $\eta < 10^{-4}$  est reporté dans le plan  $(k, \xi)$ . On obtient ainsi les surfaces de réponse du problème considéré (FIG.2.9 (a)).

#### 2.4.3.1 Unicité du couple $(k, \xi)$ assurant un taux de convergence optimal

Le caractère convexe des surfaces de réponse observées montre un unique minimum global (FIG.2.9). Ce comportement est obtenu pour tous les cas tests considérés [TRO 12]. Il existe donc un unique couple  $(k, \xi)$  assurant un taux de convergence optimal. Définir des formules a priori permettant une bonne estimation de ce couple diminue donc les temps de calcul et permet l'utilisation de la méthode par un grand nombre d'utilisateurs. La croix rouge sur la FIG.2.9 (b) correspond au couple  $(k, \xi)$  prédit par l'utilisation des formules proposées. On observe un bon accord entre les valeurs prédites par les formules et les optima obtenus numériquement.



**FIGURE 2.8:** Cas test utilisé ( $30 \times 60$  éléments,  $\theta = 15^\circ$ ,  $l = 0,023$  mm,  $b = 0,2$  mm,  $h = 0,4$  mm,  $E = 1$  Pa,  $P = 0,0005$  Pa,  $\mu_{fissure} = 0,1$ ).



**FIGURE 2.9:** (a) Surface de réponse et (b) isovaleurs pour un cas avec des conditions de contact glissant à l'interface ( $\mu_{fissure} = 0.1$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $l = 0.023$  mm,  $b = 0.2$  mm,  $h = 0.4$  mm,  $E = 1$  Pa,  $P = 0.0005$  Pa).

### 2.4.3.2 Influence du matériau et de la longueur de l'interface sur le couple $(k, \xi)_{optimal}$

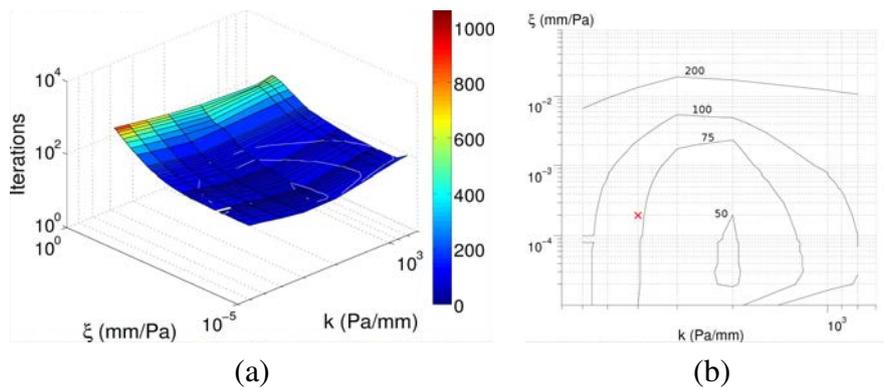
Une étude de sensibilité a permis d'identifier les paramètres influençant le taux de convergence de la méthode.

Ainsi, on montre la très faible influence du chargement extérieur, de la topologie de l'interface ainsi que du coefficient de frottement interfacial sur le couple  $(k, \xi)$  assurant un taux de convergence optimal. Dans ces cas d'étude, la valeur de  $(k, \xi)_{optimal}$  n'est modifiée au maximum que d'un facteur 3 [TRO 12].

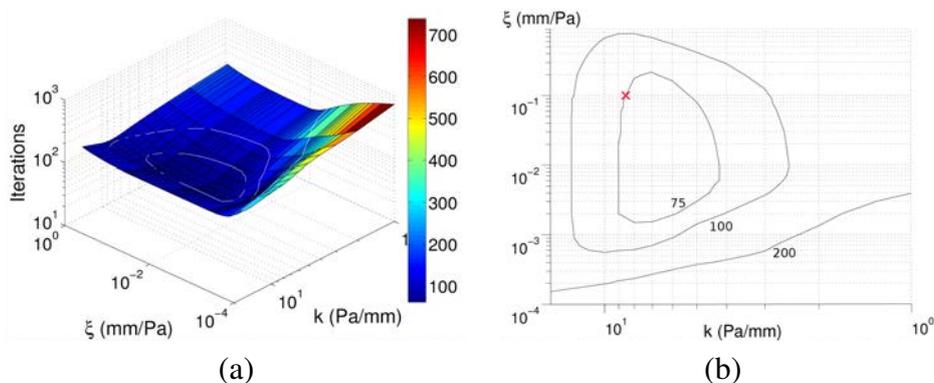
En revanche, la modification du module de Young ou de la longueur de la fissure entraîne une très forte variation de la valeur de  $(k, \xi)_{optimal}$ . En utilisant le même cas test que sur la FIG.2.8, avec un module de Young augmenté d'un facteur 100, on constate alors que la direction de recherche optimale subit une augmentation du même facteur

100. Le couple optimal passe alors de (20,0.003) dans le cas de référence à (2000,0.0005) (FIG.2.10). Le même comportement est obtenu pour une augmentation de la longueur de l'interface. Lorsque la longueur de l'interface augmente d'un facteur 5, on constate une diminution de l'ordre du même facteur 5 de la valeur de la direction de recherche optimale passant de (20,0.003) dans le cas de référence à (6,0.01) (FIG.2.11). Sur les FIG.2.10 (b) et 2.11 (b) la croix rouge correspond au couple  $(k,\xi)$  prédit par les formules.

Il est important de préciser que ces conclusions sont valables tant que les échelles de la fissure et de la structure restent séparées.



**FIGURE 2.10:** Surface de réponse (a) avec  $E = 100$  Pa et isovalues (b) ( $E = 100$  Pa,  $\theta = 15^\circ$ ,  $l = 0.023$  mm,  $P = 0.0005$  Pa,  $b = 0.2$  mm,  $h = 0.4$  mm,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).

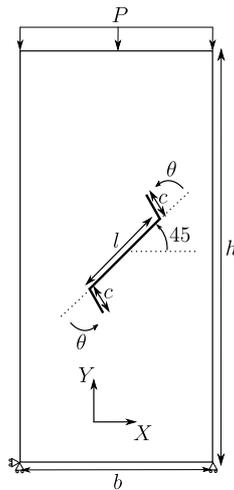


**FIGURE 2.11:** Surface de réponse (a) avec  $L = 5L_{référence}$  et isovalues (b) ( $l = 0.115$  mm,  $E = 100$  Pa,  $\theta = 15^\circ$ ,  $P = 0.0005$  Pa,  $b = 0.2$  mm,  $h = 0.4$  mm,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).

### 2.4.3.3 Validation sur une fissure centrale inclinée avec branchements

Afin de tester les formules proposées sur un cas avec une forme d'interface plus évoluée que celui de référence (FIG.2.8), une fissure centrée dans le massif, inclinée et comportant un branchement à chaque extrémité est considérée (FIG. 2.12). Afin de permettre

la comparaison avec les résultats précédents, la même discrétisation de la structure, un chargement extérieur et des conditions aux limites identiques sont utilisés. Le taux de convergence optimal est obtenu avec le couple (9,0.4) et  $\eta$  est inférieur à  $10^{-4}$  après 90 itérations. Dans ce cas, la longueur totale de la fissure est de 0.12 mm ce qui donne selon les formules proposées le couple (8.3,0.12). En utilisant ces valeurs, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision requise est de 149 (voir la table 2.1). Les surfaces de réponse conservent leurs formes convexes et les formules fournissent une bonne estimation des paramètres optimaux (FIG.2.13).



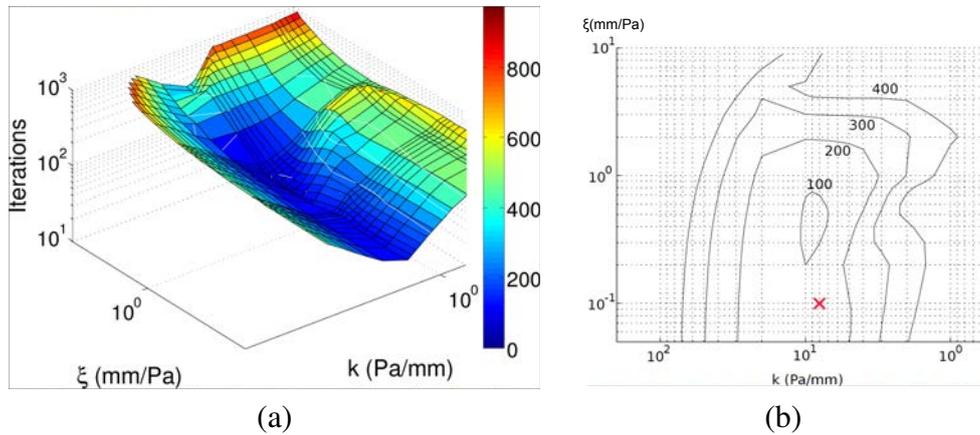
**FIGURE 2.12:** Domaine avec une fissure centrale inclinée avec branchements à ses extrémités ( $l = 0.1$  mm,  $c = 0.01$  mm,  $E = 1$  Pa,  $\theta = 75^\circ$ ,  $P = 0.0005$  Pa,  $b = 0.2$  mm,  $h = 0.4$  mm,  $\mu_{fissure} = 0.3$ ).

Nombre d'itérations pour $(9,0.4)_{optimal}$	90
Nombre d'itérations pour $(8.3,0.12)_{formules}$	149

**TABLE 2.1:** Paramètres optimaux pour une fissure centrale inclinée avec branchements à ses extrémités.

#### 2.4.3.4 Remarques et discussions

Dans tous les cas étudiés, les formules fournissent une très bonne estimation des paramètres, assurant à la méthode LATIN un taux de convergence proche de l'optimal [TRO 12]. On remarque également que la valeur de la direction de recherche  $k$  a une forte influence sur le taux de convergence. En choisissant  $k$  proche de sa valeur optimale,  $\xi$  peut être estimé grossièrement. En effet, on observe sur les FIG.2.9, 2.10, 2.11 et 2.13 que les surfaces de réponse présentent un fond plat dans la direction de  $k_{optimal}$  autorisant



**FIGURE 2.13:** Surface de réponse (a) et isovaleurs (b) pour une fissure centrale inclinée avec branchements ( $l = 0.1$  mm,  $c = 0.01$  mm,  $E = 1$  Pa,  $\theta = 75^\circ$ ,  $P = 0.0005$  Pa,  $b = 0.2$  mm,  $h = 0.4$  mm,  $\mu_{fissure} = 0.3$ ).

une large plage de valeurs pour la sélection de  $\xi$ . La valeur de  $k$  doit être en premier lieu placée proche de l'optimal.

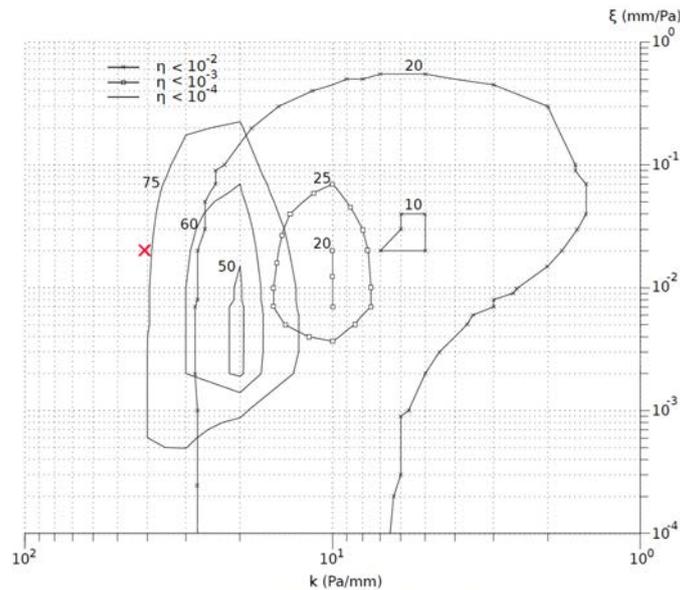
Toutes ces conclusions sont tirées d'une étude à précision donnée ( $\eta < 10^{-4}$ ). Les surfaces de réponse obtenues et le couple  $(k, \xi)_{optimal}$  se déplacent en fonction de la précision pour laquelle l'étude est réalisée. Si l'on considère une fois de plus le cas test de la FIG.2.8, pour différents niveaux de précision requis, on remarque que les surfaces de réponse et les couples de paramètres optimaux  $(k, \xi)_{optimal}$  se déplacent dans le plan  $(k, \xi)$  (FIG.2.14). Il semble tout de même qu'une meilleure précision tend à rapprocher les valeurs de  $(k, \xi)_{optimal}$  déterminées selon les expériences numériques de celles obtenues à l'aide des formules (TAB.2.2).

Enfin, il est important de préciser que ce travail a été effectué en profondeur uniquement en deux dimensions, avec des discrétisations de l'interface conforme à celle de la structure et avec un unique élément d'interface par élément de structure.

précision	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$k(Pa/mm)$	6	10	20
$\xi(mm/Pa)$	0.02	0.01	0.007
Iterations avec $(k, \xi)_{optimal}$	10	20	46
Iterations avec $(43, 0.023)_{formules}$	25	50	83
Iterations avec $(k, \xi)_{défavorable}$	360	2420	8722

**TABLE 2.2:** Paramètres optimaux pour différents niveaux de précision.

Au sein de l'outil numérique développé, les formules proposées sont utilisées par défaut, libérant l'utilisateur d'imposer une valeur pour ces paramètres. De plus, ces valeurs sont mises à jour à mesure que la fissure évolue. Ceci est particulièrement important pour



**FIGURE 2.14:** Isovaleurs obtenues pour différents niveaux de précision ( $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ ).

mener des simulations de propagation où la fissure croit de plusieurs fois sa taille initiale tout en assurant un nombre d'itération proche de l'optimal pour la résolution du problème de rupture avec contact et frottement à l'interface.

Si la maîtrise de la méthode numérique telle qu'implémentée dans ces travaux est assurée, nous avons vu dans la partie 1.2, que pour estimer la direction et la vitesse de propagation des fissures de fatigue microstructurellement longues, de nombreuses approches sont basées sur le calcul du taux de restitution de l'énergie et des FICs. Le calcul précis de ces grandeurs représente donc un enjeu fondamental pour la simulation de la propagation des fissures.

## 2.5 Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

Les FICs sont calculés le long de la discrétisation du front à l'aide des intégrales d'interaction présentées dans la section 1.2.4 (équations (1.19) et (1.22)). Comme nous l'avons vu, le frottement entre les lèvres de la fissure modifie le processus de dissipation d'énergie. Les termes supplémentaires, permettant la prise en compte du contact frottant, ont donc été ajoutés dans les intégrales de domaine utilisées pour le calcul des FICs dans CAST3M. Ainsi, par exemple, le terme à ajouter dans  $\bar{J}$  pour le calcul du taux de restit-

tion d'énergie est :

$$\int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \sigma_{12} \nabla[\mathbf{w}] d\Gamma \quad (2.48)$$

Ces termes nécessitent d'une part le calcul du gradient des sauts de déplacement  $\nabla[\mathbf{w}]$  aux points de Gauss de l'interface et d'autre part l'intégration de ces champs. La nouvelle discrétisation introduite et l'utilisation d'enrichissement saut sur l'interface ont rendu indispensable l'extension des opérateurs d'intégration (INTG) et du calcul du gradient (GRAD) aux champs locaux (ajout dans `grad1.eso` et `intgca.eso`). Cette étape a permis d'ajouter les termes dûs au frottement dans les intégrales de domaine dédiées au calcul de  $\tilde{J}$  et des FICS. Les procédures `G_THETA.proc` et `G_CALCUL.proc` ont été modifiées en conséquence.

## Conclusion intermédiaire

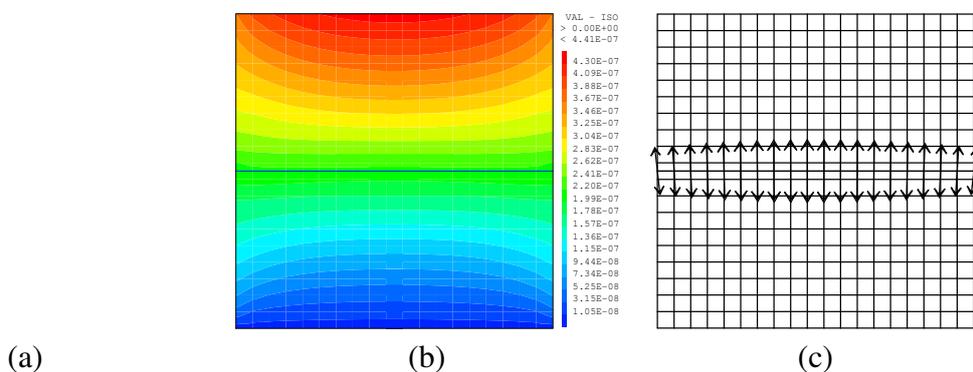
La formulation faible mixte stabilisée antérieure à ces travaux a été adaptée et implémentée dans CAST3M. Les discrétisations de l'interface et de la structure sont complètement indépendantes et permettent de modéliser de manière optimisée les phénomènes ayant lieu aux différentes échelles (la fissure dans la structure et le contact frottant entre les lèvres de la fissure). Des enrichissements ont été introduits dans la discrétisation des champs locaux. Ce travail a donné lieu au développement d'un nouvel opérateur CAST3M : RELA ACCRO 'FAIB'. Une version dite 'FORTE' de ce couplage entre l'interface et la structure a également été programmée. Un solveur non-linéaire a été introduit dans une procédure spécifique. L'étude du comportement de l'algorithme de résolution a permis de proposer des formules a priori pour la sélection des paramètres gouvernant le taux de convergence de la méthode. Une sélection automatique de ces paramètres permettra une réduction des temps de calcul. Elle autorisera également un utilisateur non averti à utiliser la méthode. De plus, les termes introduits par le contact et le frottement dans le calcul des intégrales de domaine utilisées pour le calcul des FICs ont été ajoutées. Le schéma numérique de résolution du problème non-linéaire tel que mise en oeuvre dans CAST3M est maîtrisé. Il nous faut maintenant valider les résultats obtenus.

## 2.6 Exemples de problèmes de rupture et validation

Cette partie s'attache à valider les développements réalisés sur différents cas tests de référence. Ces exemples visent à illustrer la stabilité des solutions locales obtenues et à s'assurer que la méthode telle qu'implémentée fournit des résultats corrects.

### 2.6.1 Validation des pressions de contact à l'interface

On considère un domaine 2D carré  $\Omega$  de dimensions (0.1 m x 0.1 m) soumis à une contrainte de compression verticale  $P = 1$  MPa (FIG.2.15). Une interface  $\Gamma$ , perpendiculaire à la direction du chargement, divise  $\Omega$  en deux parties égales. On impose une condition de déplacement nul sur la surface inférieure ( $u_x = u_y = 0$ ) et une condition de déplacement horizontal nul sur la surface supérieure ( $u_x = 0$ ). Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young  $E = 206$  GPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Le coefficient de frottement à l'interface est  $\mu_{fissure} = 0.2$ . Le maillage est constitué de 361 éléments finis linéaires quadrangulaires et la discrétisation de l'interface est choisie conforme à celle de la structure afin de permettre la comparaison avec le logiciel utilisé comme référence. Le problème est résolu en déformation plane avec une précision de  $10^{-4}$  et les formules proposées précédemment pour la sélection de la direction de recherche et du paramètre de stabilisation sont utilisées :  $k = E/l = 2.06 \cdot 10^{12}$  Pa/m et  $\xi = 1/k = 4.85437 \cdot 10^{-13}$  m/Pa. La précision demandée est atteinte en 102 itérations (pour 92 dans [PIE 10a] pour le même cas test mais avec  $(k, \xi)_{optimal}$ ). Le soin a été pris de vérifier que l'intégrale des pressions de contact sur l'interface est égale à la résultante du champ de force appliquée sur la surface supérieure (FIG.2.15 (c)). On note également l'absence d'instabilité sur les pressions d'interface. La différence en terme de champ de déplacement maximal sur un noeud de même position entre la solution obtenue sous CAST3M et la solution dans [PIE 10a] est de :  $|u_{référence} - u_{cast3m}| / |u_{référence}| = 3\%$  (FIG.2.15 (a) et (b)).



**FIGURE 2.15:** (a) Isovaleurs du champ de déplacement global de référence. (b) Isovaleurs du champ de déplacement global et (c) champ des pressions de contact à l'interface calculé avec CAST3M.

On résoud maintenant le problème tri-dimensionnel dérivant du cas test 2D précédent. La surface du cas test précédent est extrudée sur une profondeur de  $z = 0.1$  m. Le cube est maillé avec des éléments hexaédriques réguliers linéaires avec 19 éléments par côté (FIG.2.16). Les conditions aux limites appliquées deviennent,  $u_x = u_y = u_z = 0$  sur la face inférieure, sur la face supérieure une pression de 1 kPa est appliquée et les déplacements de cette surface dans le plan  $(x,y)$  sont bloqués ( $u_x = u_y = 0$ ). Le problème est résolu avec une précision de  $10^{-3}$  afin de diminuer les temps de calcul. Les formules proposées précédemment pour la direction de recherche et le paramètre de stabilisation sont utilisées :  $k = E/(A^{0.5}) = 2.06 \cdot 10^{12}$  Pa/m et  $\xi = 1/k = 4.85437 \cdot 10^{-13}$  Pa/m. Le champ de déplacement global et les pressions de contact à l'interface obtenus sont présentés sur la FIG.2.16 (a) et (b). Une fois de plus, on vérifie que l'intégrale des pressions sur l'interface est égale à la résultante appliquée. On note également que la stabilité du champ de pression de contact est remarquable.

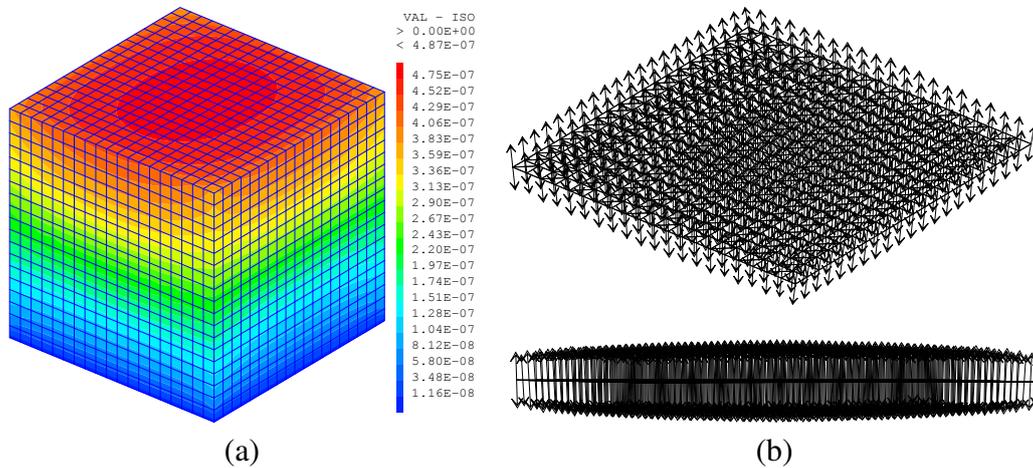
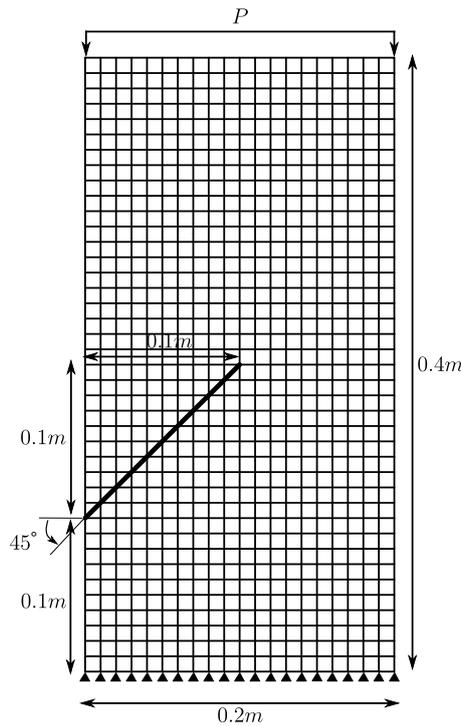


FIGURE 2.16: (a) Isovaleurs du champ de déplacement global. (b) Champ des pressions de contact à l'interface.

## 2.6.2 Problème bi-dimensionnel avec contact adhérent à l'interface

L'objectif de ce troisième cas test est de valider les résultats obtenus sur un cas bi-dimensionnel avec des conditions d'adhérence à l'interface. Un domaine  $\Omega$  rectangulaire de dimension (0.2 m x 0.8 m) contenant une fissure droite inclinée est considéré (FIG.2.17). Le coefficient de frottement entre les lèvres  $\mu_{fissure}$  est fixé à 1. Une pression uniforme de 1 MPa est appliquée sur la surface supérieure et la surface inférieure est encastree. Le maillage de  $\Omega$  est constitué d'éléments quadrangulaires linéaires de 0.01 m de côté (élément carré). L'interface est inclinée d'un angle  $\theta = 45^\circ$  avec un unique front. Une discrétisation conforme avec les éléments de structure est utilisée.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux du logiciel ELFE-3D utilisé comme référence montre des solutions très proches. ELFE-3D est un logiciel de recherche déve-

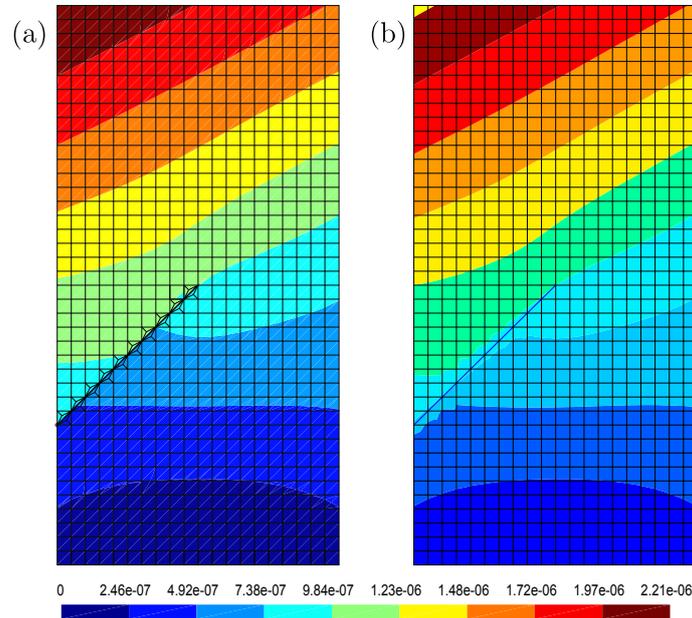


**FIGURE 2.17:** Maillage bi-dimensionnel utilisé (20 x 40 éléments quadrangulaires linéaires de 0.01 m de côté, élément carré). La discrétisation de l'interface est conforme à celle de la structure.

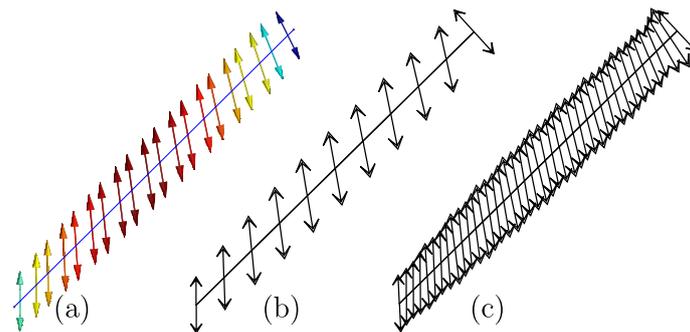
loppé au laboratoire LAMCOS permettant de résoudre les problèmes de mécanique de la rupture avec contact et frottement à l'interface. Les résultats issus de ce logiciel ont déjà été validés par comparaison avec ANSYS [PIE 10a]. La différence relative entre les déplacements maximaux (FIG.2.18) et les  $K_{II}$  calculés en prenant en compte les termes de frottement dans les deux solutions sont acceptables ( $< 2\%$ , voir TAB.2.3). Les FICs sont estimés en utilisant la même technique de calcul et un domaine d'intégration équivalent. La comparaison de la distribution des pressions interfaciales montre un très bon accord avec la solution de référence (FIG.2.19). On observe également qu'avec une discrétisation plus fine de l'interface, la solution en volume reste identique et le champ des pressions est toujours stable.

	$max_{\Omega} u_{global} (\mu m)$	$K_{II} Pa.\sqrt{m}$
ELFE-3D	2.21	$-16.788 \cdot 10^4$
CAST3M	2.25	$-16.832 \cdot 10^4$
Différence relative (%)	1.8	0.2

**TABLE 2.3:** Tableaux comparatifs des résultats obtenus avec ELFE-3D et CAST3M.



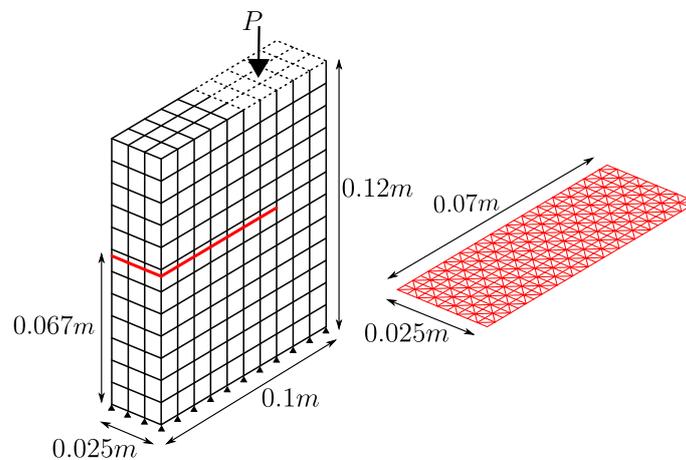
**FIGURE 2.18:** Isovaleurs du champ de déplacement global calculées avec (a) ELFE-3D et (b) CAST3M.



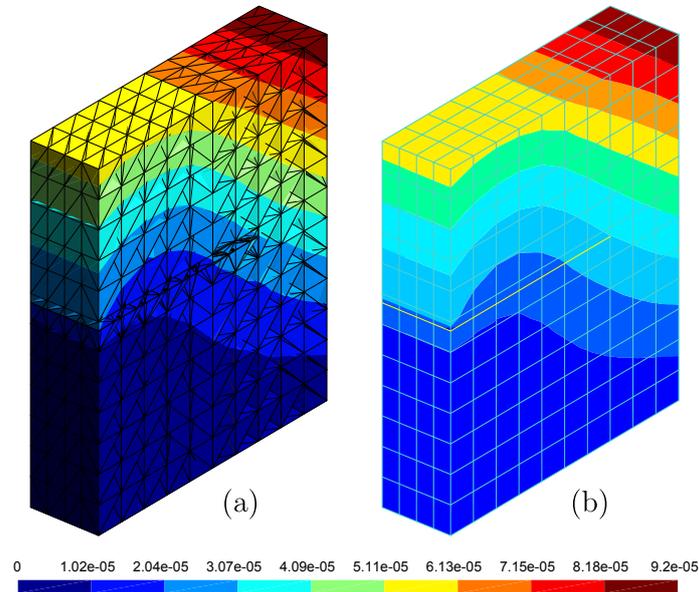
**FIGURE 2.19:** Distribution des efforts surfaciques de contact entre les lèvres de la fissure calculée avec (a) ELFE-3D et (b) CAST3M. La solution (c) correspond à une discrétisation plus fine de l'interface avec CAST3M. Dans CAST3M, le support des pressions à l'interface sont les noeuds de la discrétisation alors qu'il s'agit des points de Gauss dans ELFE-3D.

### 2.6.3 Problème tri-dimensionnel avec contact unilatéral et singularité dans la solution de contact

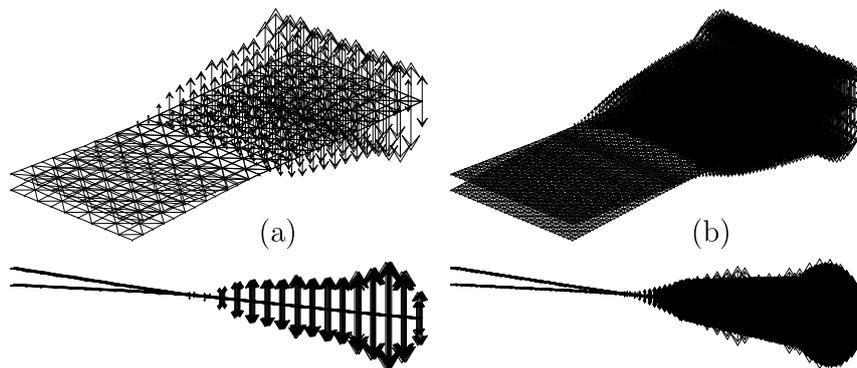
Un domaine  $\Omega$  parallélépipédique de dimensions (0.1 m x 0.025 m x 0.12 m) comporte une fissure débouchante  $\Gamma$  à front droit (FIG.2.20). Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young  $E = 206$  GPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La face inférieure est encastree ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ). Une contrainte de compression  $P = 100$  MPa est appliquée uniformément sur la demi-surface du dessus afin d'ouvrir partiellement la fissure. Elle produit une discontinuité dans la solution de contact entre les faces de la fissure. La loi de comportement d'interface est une loi de contact unilatéral sans frottement. Les maillages sont constitués d'éléments hexaédriques linéaires dans CAST3M et tétraédriques linéaires dans ELFE-3D. Le problème est résolu avec une précision  $\eta < 2.10^{-3}$ . La précision est atteinte en 54 itérations avec les valeurs de paramètres définies selon les formules proposées  $k = E/(A^{0.5}) = 4.92 \cdot 10^{12}$  Pa/m et  $\xi = 1/k = 2.03 \cdot 10^{-13}$  m/Pa. La comparaison des isovaleurs de la solution globale montre un très bon accord entre les résultats des deux calculs FIG.2.21. La différence relative du déplacement maximal dans les deux cas est de 1.1%. Une fois de plus, la stabilité du champ des efforts surfaciques de contact à l'interface est remarquable, et cela, même avec des discrétisations d'interface très fines (FIG.2.22).



**FIGURE 2.20:** Maillage de structure utilisé (10 x 4 x 12 héxaèdres réguliers). La discrétisation de l'interface est non conforme et est constituée de 486 éléments triangulaires linéaires.



**FIGURE 2.21:** Isovaleurs du champ de déplacement global calculées avec (a) ELFE-3D et (b) CAST3M.

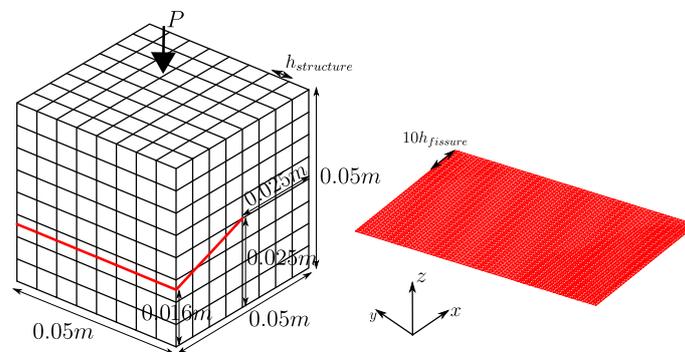


**FIGURE 2.22:** Solution locale, distribution des efforts surfaciques de contact entre les lèvres de la fissure sur la déformée des lèvres calculée avec CAST3M. La solution (a) est obtenue avec 486 éléments d'interface et (b) avec 4374 éléments d'interface.

### 2.6.4 Problème tri-dimensionnel avec contact glissant à l'interface

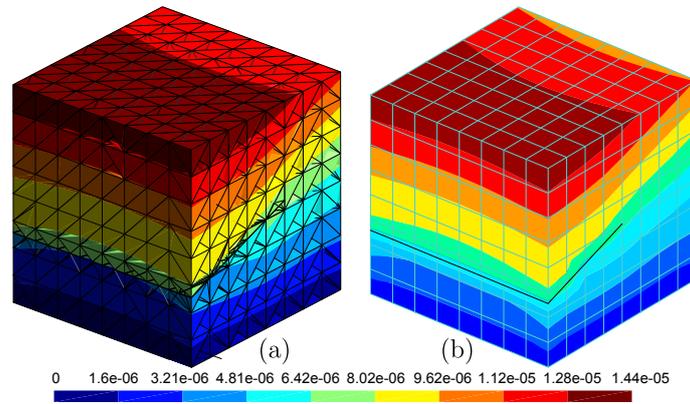
Un cube  $\Omega$  de dimensions (50 mm x 50 mm x 50 mm) représenté sur la FIG.2.23 est traversé par une fissure  $\Gamma$  plane, débouchante, à front droit et inclinée de  $20^\circ$  par rapport à l'axe vertical. Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young  $E = 200$  GPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Une contrainte de compression  $P = 50$  MPa est appliquée uniformément sur la face supérieure de l'éprouvette. Une condition de déplacement nul sur la face inférieure est imposée ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ). A l'interface, on considère la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.2. Les maillages sont constitués d'hexaèdres réguliers linéaires pour les calculs dans CAST3M et de tétraèdres linéaires dans le logiciel de référence. La discrétisation de l'interface est choisie fine par rapport au maillage en volume ( $h_{structure}/h_{fissure} \approx 10$  sur la FIG.2.23). Elle est non conforme dans le cas de CAST3M et comprend 6400 éléments d'interface. Le problème est résolu avec une précision  $\eta < 2 \cdot 10^{-3}$ . La précision est atteinte en 25 itérations avec les valeurs de paramètres définies selon les formules proposées  $k = E/(A^{0.5}) = 2.82586 \cdot 10^{12}$  Pa/m et  $\xi = 1/k = 3.53874 \cdot 10^{-13}$  m/Pa.

On observe sur la FIG.2.24 qu'une fois de plus les solutions globales sont très proches. La différence relative du déplacement maximal dans les deux cas est de 1.3%. La solution locale (FIG.2.25) met en évidence l'existence d'une composante tangentielle à l'interface ( $\mu_{fissure} \neq 0$ ), les pressions n'étant plus perpendiculaires à l'interface.

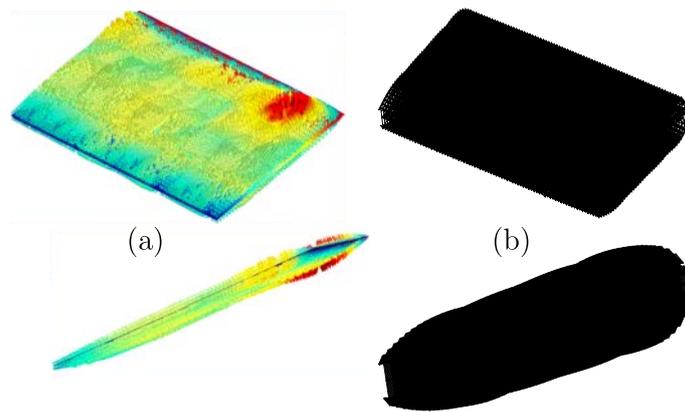


**FIGURE 2.23:** Maillage de structure utilisé (8 x 8 x 8 hexaèdres), la discrétisation de l'interface est non conforme et est constituée de 6400 éléments triangulaires linéaires.

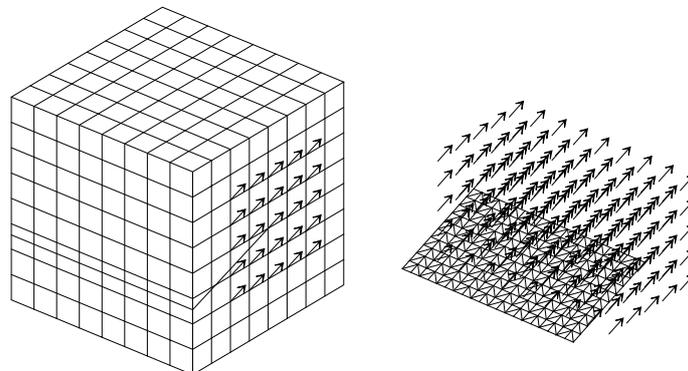
De plus, la comparaison des valeurs de  $K_{II}$ , obtenues en utilisant 2 couches d'éléments de structure autour du front (FIG.2.26), montre un très bon accord entre les deux codes de calcul (FIG.2.27). De part la discrétisation non conforme mais plus régulière de l'interface, il apparaît que les FICs calculés dans CAST3M sont moins bruités que ceux issus de ELFE-3D. La solution du problème doit être symétrique de part et d'autre du centre du front, ce qui est le cas avec CAST3M (FIG.2.27).



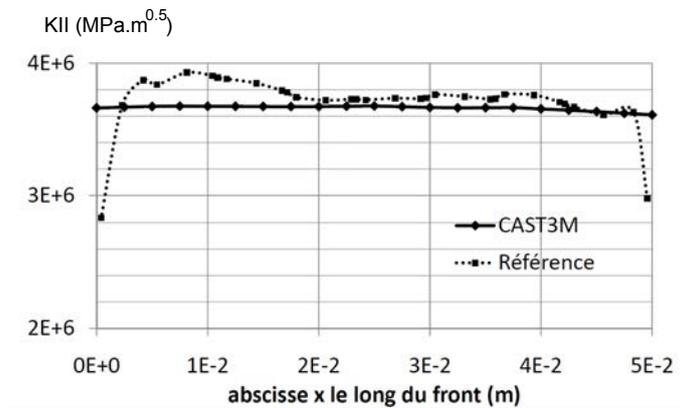
**FIGURE 2.24:** Isovaleurs du champ de déplacement global calculées avec (a) ELFE-3D et (b) CAST3M.



**FIGURE 2.25:** Champ des pressions interfaciales calculé avec (a) ELFE-3D et (b) CAST3M.



**FIGURE 2.26:** Champ d'extension virtuel pour le calcul des FICs.



**FIGURE 2.27:** Comparaison des valeurs de  $K_{II}$  calculées le long du front, obtenues avec CAST3M et le logiciel de référence.

Le modèle multi-échelles tel qu'implémenté dans CAST3M a été validé par comparaison des champs de déplacements globaux, locaux et des FICs avec le logiciel de référence. Les résultats ont montré un très bon accord entre les valeurs obtenues dans CAST3M et celles utilisées comme référence. L'implémentation de la stratégie à deux échelles pour la résolution du problème de rupture est validée. Dans la section suivante, nous nous intéressons à la simulation de la propagation des fissures de fatigue et à la stratégie à deux échelles de temps utilisée.

## 2.7 Simulation multi-échelles en temps de la propagation des fissures de fatigue et validation de la stratégie générale

Nous avons vu dans les sections précédentes la manière dont est utilisée la LATIN incrémentale afin de trouver la solution du problème de rupture avec contact et frottement entre les lèvres pour un pas de temps donné (2.4). Nous avons également présenté comment sont calculés les FICs à partir de la solution du problème de structure (sections 1.2.4.3 et 2.5). Il nous faut maintenant préciser comment est utilisée cette stratégie à deux échelles spatiales, pour un pas de temps donné, dans la simulation de la propagation des fissures de fatigue.

### 2.7.1 Simulation multi-échelles en temps de la propagation des fissures de fatigue

Les trois paragraphes suivants présentent de manière générale, non spécifique à cette étude, la simulation de la propagation des fissure de fatigue à l'aide de deux échelles de temps.

Le cycle de chargement  $T_c$  est divisé en pas de temps  $t_n$ . A chaque pas de temps, le chargement appliqué est modifié et le problème est résolu selon une modélisation quasi-statique. Pour chacun des pas de temps, le problème de mécanique élastique linéaire de la rupture est résolu (solution  $\mathbf{X}_n^\infty$ ) et les FICs sont post-traités. Le calcul de la solution  $\mathbf{X}_{n+1}$  est ensuite initialisé à partir de la solution  $\mathbf{X}_n^\infty$  (boucle sur les positions du chargement sur la FIG.2.29). Après le dernier pas de temps du cycle, l'histoire des FICs sur le cycle entier est disponible. Cette échelle, celle des pas de temps au cours du cycle, correspond à la première échelle de temps du problème (FIG.2.28).

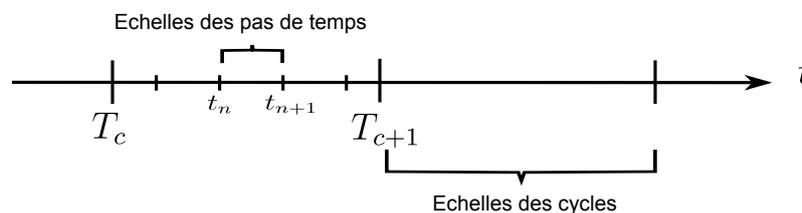


FIGURE 2.28: Illustration des deux échelles temporelles présentes dans la simulation de la propagation des fissures de fatigue.

Dans un second temps, à partir de l'histoire des FICs sur le cycle entier, la direction de propagation et le taux d'accroissement sont calculés à partir de critères et de lois adaptés aux problèmes et à la sollicitation. A partir du taux d'accroissement et en imposant soit

un saut de cycle  $\Delta N$  soit une longueur de l'extension  $\Delta a$ , l'extension orientée est ajoutée à l'ancienne géométrie de la fissure. Ces calculs correspondent à la seconde échelle de temps utilisée, celle des cycles au cours de la propagation (FIG.2.28). Avec la nouvelle discrétisation de la fissure ainsi construite, un nouveau calcul démarre par le premier pas de temps du cycle suivant  $T_{c+1}$ . Lors de cette étape, tous les champs sont réinitialisés (boucle sur les cycles sur la FIG.2.29).

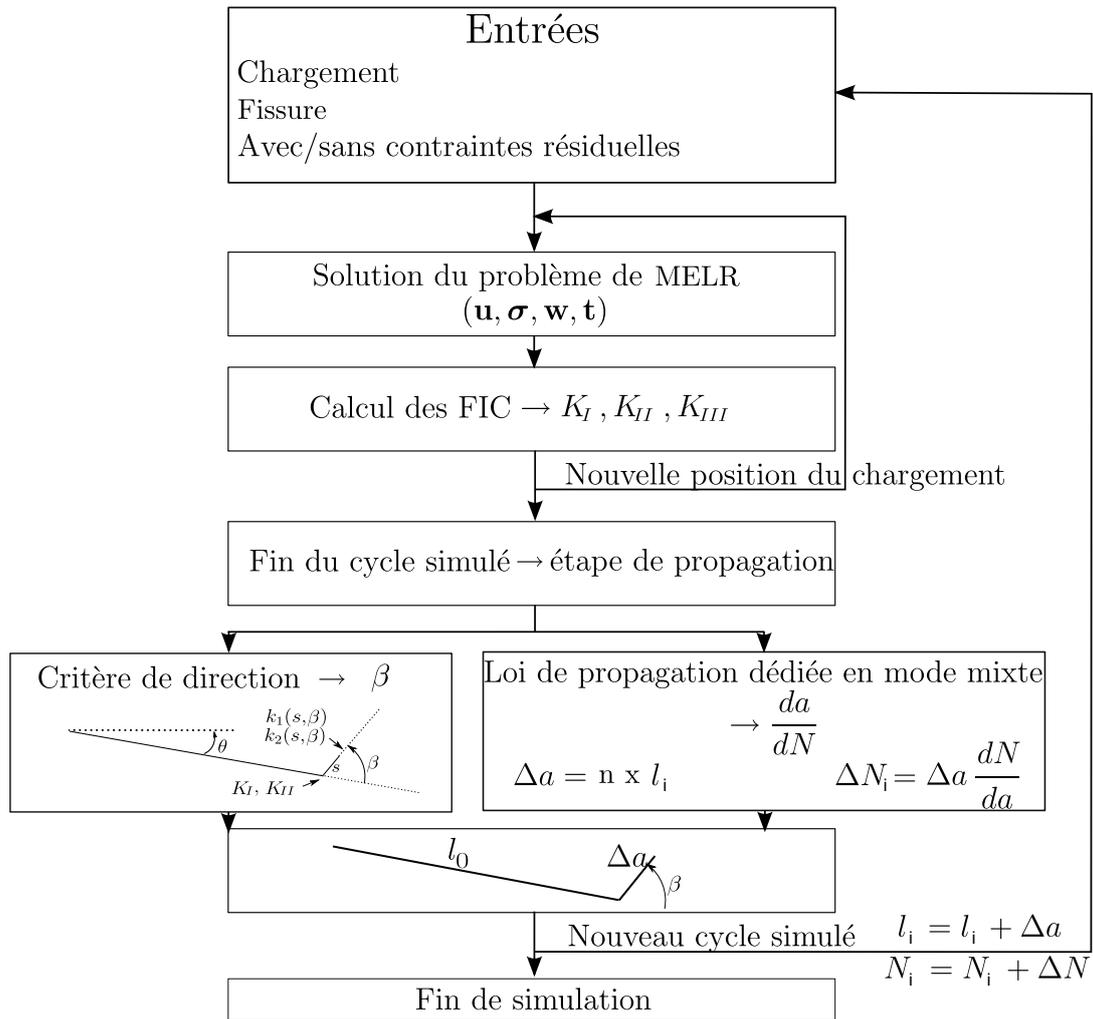
Avec cette approche, la propagation de la fissure est réalisée de manière incrémentale avec une propagation à la fin du cycle, après le passage du chargement. Cette description, différente du phénomène réel continu, n'est cependant pas un problème. En effet, cette approche incrémentale de la propagation découle de la façon dont sont obtenues les lois de propagation. Une mesure de la fissure est réalisée après un nombre de cycles donné. Ces lois contiennent donc les sauts de cycles correspondant à ceux utilisés dans la stratégie numérique. Il convient cependant de contenir ce saut à des valeurs raisonnables afin de respecter l'hypothèse de linéarité au cours du saut de cycle. Une valeur communément prise pour cela est un accroissement de l'ordre de quelques pourcents de la longueur totale de la fissure.

### 2.7.2 Validation de la stratégie multi-échelles en temps et en espace : cas de la propagation en fretting

La stratégie générale de simulation de la propagation des fissures de fatigue a été confrontée à des résultats issus d'essais effectués sur un cas de fretting en configuration cylindre-plan. Les essais en eux-mêmes n'ont pas été réalisés au cours de ces travaux de thèse, seules les simulations l'ont été. La procédure expérimentale utilisée pour l'obtention des trajets de propagation à différents nombres de cycles est cependant rappelée. Les détails sur la procédure expérimentale ayant permis de mesurer les trajets de fissuration et d'identifier la loi de propagation dédiée à cette application sont disponibles dans [PIE 10a, BAI 13].

#### 2.7.2.1 Essai de propagation sous sollicitation de fretting

Le dispositif d'essai utilisé est schématisé sur la FIG.2.30 (a). Il comporte une machine de traction servo-hydraulique MTS à deux vérins. Une contrainte statique de traction est appliquée à l'éprouvette à l'aide du premier vérin. La section de l'éprouvette dans la zone d'intérêt est 8 mm x 10 mm (cf. FIG.2.30 (b)). Un poinçon cylindrique de rayon  $R = 80$  mm et de largeur  $l = 8$  mm est mis en contact avec le plan rectifié de l'éprouvette par une force  $P = 8\,000$  N. Un roulement est mis en opposition du poinçon afin de limiter les sollicitations de flexion sur l'éprouvette. Le matériau étudié qui constitue l'éprouvette plane est un acier 35NCD16 traité thermiquement pour atteindre une limite à rupture  $\sigma_R = 1270$  MPa. Le matériau du poinçon est un acier 100C6 durci par traitement thermique pour atteindre une limite élastique  $\sigma_{e0,2} = 1500$  MPa. L'ensemble poinçon-roulement est

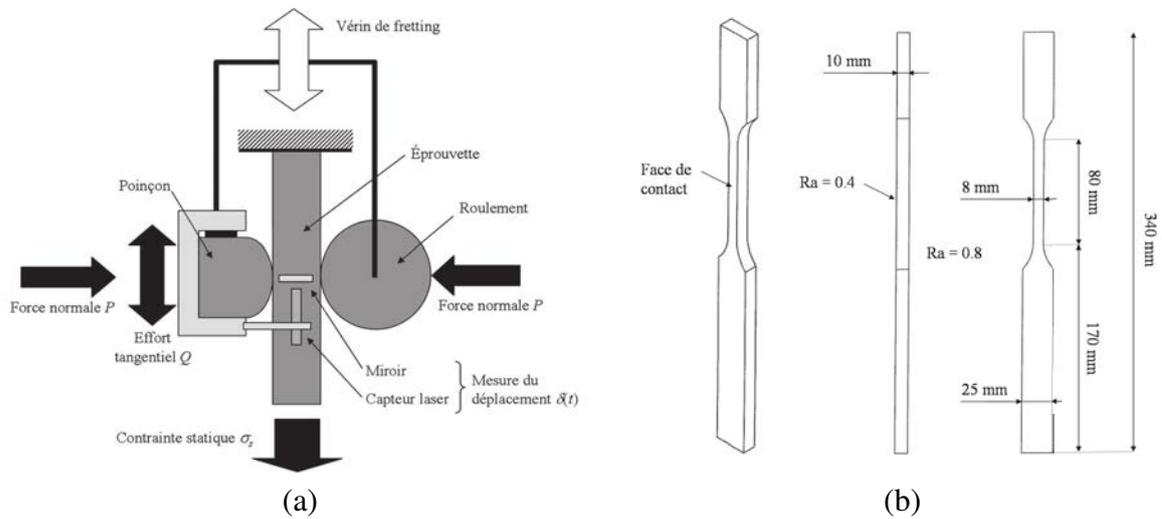


**FIGURE 2.29:** Algorithme simplifié utilisé pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue.  $l_i$  et  $N_i$  sont respectivement la longueur et le nombre de cycle pour chacune des positions du chargement pour le cycle simulé  $i$ .

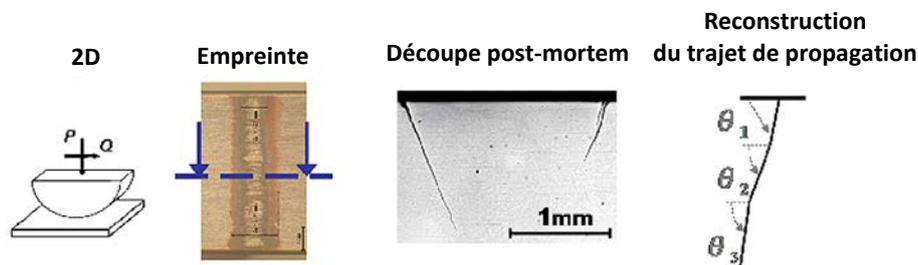
mis en mouvement cyclique par le second vérin à une fréquence  $F = 13$  Hz. L'amplitude du déplacement relatif entre l'éprouvette et le poinçon est mesurée à l'aide d'un capteur laser. L'effort tangentiel  $Q$  est déterminé au cours de l'essai par une mesure différentielle entre deux cellules de force liées à chaque extrémité de l'éprouvette. Les paramètres de charge sont choisis afin de se placer en régime de glissement partiel. La valeur de  $\delta$  est asservie telle que  $Q = 4000$ N pendant toute la durée de l'essai.

L'observation in-situ de la propagation de ces fissures dans les matériaux métalliques par une technique non destructive tri-dimensionnelle telle que la micro-tomographie demeure complexe. En effet, cette technique requiert notamment de réaliser les essais à l'intérieur du dispositif d'observation et d'effectuer des rotations complètes de l'échantillon [BUF 05]. De plus, elle n'est pas applicable à tous les matériaux. En effet, la présence

de précipités ou d'inclusions dans la matière permet, par une technique de corrélation d'images, de capturer les champs de déplacement des configurations initiale et déformée et de reconstituer la géométrie précise des fissures en 3D [RAN 10]. En l'absence de tels marqueurs, il est difficile d'observer les fissures et de reconstituer précisément le scénario de la propagation. Il est donc choisi ici d'analyser les essais conduits à différents nombres de cycles afin de reconstruire l'évolution des fissures au cours du temps. Après chaque essai, l'éprouvette post-mortem est découpée suivant un plan perpendiculaire à la trace de fretting (FIG.2.31). L'observation de plusieurs coupes d'un même échantillon donne des résultats similaires et permet de valider cette analyse. Une technique de numérisation d'image permet d'identifier précisément la géométrie de la fissure, i.e. longueur et angle de propagation.



**FIGURE 2.30:** (a) Représentation schématique du dispositif utilisé pour l'essai de fretting. (b) Géométrie et dimensions des éprouvettes en acier 35NCD16 [PIE 10a].



**FIGURE 2.31:** Empreinte de fretting obtenue après un essai cylindre-plan. La zone d'adhérence se distingue de la zone de micro-glissement caractéristique du régime de glissement partiel. Découpe de l'éprouvette post-mortem et reconstruction des trajets de fissuration.

### 2.7.2.2 Simulation numérique des essais

Un chargement de fretting issu de la résolution d'un contact cylindre-plan est appliqué sur un massif 2D précontraint en tension. Les conditions de chargement sont  $P = 657$  MPa,  $a_H = 0.968$  mm, la ratio entre la zone d'adhérence et de glissement est  $c/a_H = 0.67$ , le coefficient de frottement dans la zone de glissement  $\mu_{PS} = 0.9$  et une contrainte uniforme en tension est appliquée aux limites du domaine  $\sigma_s = 70$  MPa. La fissure observée après  $N = 100\,000$  cycles est utilisée comme fissure initiale pour la simulation de la propagation ( $a_1 = 56$   $\mu\text{m}$ ,  $\theta = 67.77^\circ$ ) (voir FIG.2.32). La dimension faible de la fissure par rapport à la taille des grains (avec un rapport compris entre 5 et 10) constitue un cas limite de simulation avec le modèle considéré dans ces travaux. Les coefficients de frottement entre les lèvres des deux fissures sont choisis identiques et égaux à 0.3.

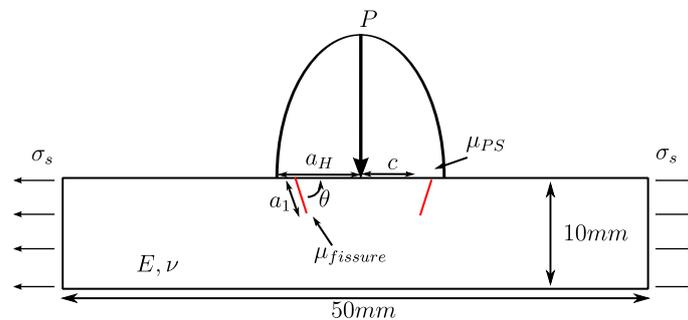


FIGURE 2.32: Représentation schématique de la configuration initiale de la simulation de fretting ( $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$ ).

Un maillage d'éléments triangulaires linéaires à trois noeuds est utilisé avec un raffinement local sous la zone de contact afin de capturer les gradients induits par les sollicitations de contact (FIG.2.33). Le maillage est également raffiné dans la zone de propagation afin de capturer la zone de K-dominance avec précision au cours de la propagation. La direction de propagation est déterminée selon les critères de Hourlier ainsi que son extension (section 1.2.5.2), utilisables pour des chargements de fatigue multi-axiaux et non proportionnels.

La FIG.2.34 présente les trajets simulés obtenus avec l'utilisation du critère de Hourlier en  $\max_{\theta,t} \Delta k_1^*(\theta, t)$ . Si l'on compare ce trajet à celui obtenu expérimentalement, on observe une excellente prédiction de la direction de propagation avec ce critère (FIG.2.35). Ces calculs impliquent la prise en compte de plusieurs fronts. Il faut donc veiller à ce que les pas de propagation des différents fronts se fassent à iso-saut de cycles pour les différents fronts.

Ces simulations ont été menées avec les trois critères de Hourlier dont son extension. Les trajets simulés dans ces trois cas sont comparés avec les résultats expérimentaux sur la FIG.2.36. On observe alors une très bonne corrélation des critères  $\max_{\theta} \Delta k_1^*(\theta)$  et  $\max_{\theta} \Delta k_{eq}^*(\theta)$  avec les trajets obtenus expérimentalement. Ces critères restituent correctement le comportement des fissures pour cette application où le chargement est non proportionnel. Ils sont basés sur des calculs utilisant les amplitudes des facteurs d'intensité

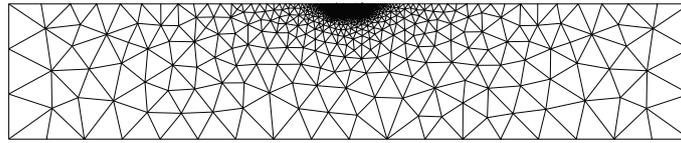


FIGURE 2.33: Maillage 2D avec raffinement local,  $h_{min} = 5\mu m$  et  $h_{max}/h_{min} = 550$ .

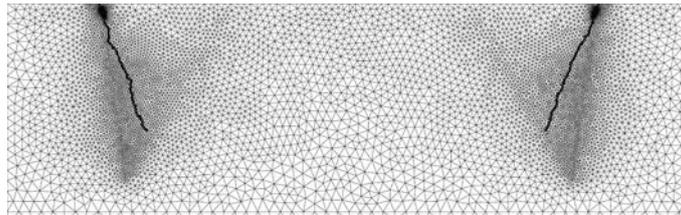


FIGURE 2.34: Trajets simulés avec le critère utilisant  $\max_{\theta,t} \Delta k_1^*(\theta,t)$  sur le maillage multi-échelles paramétré 2D.

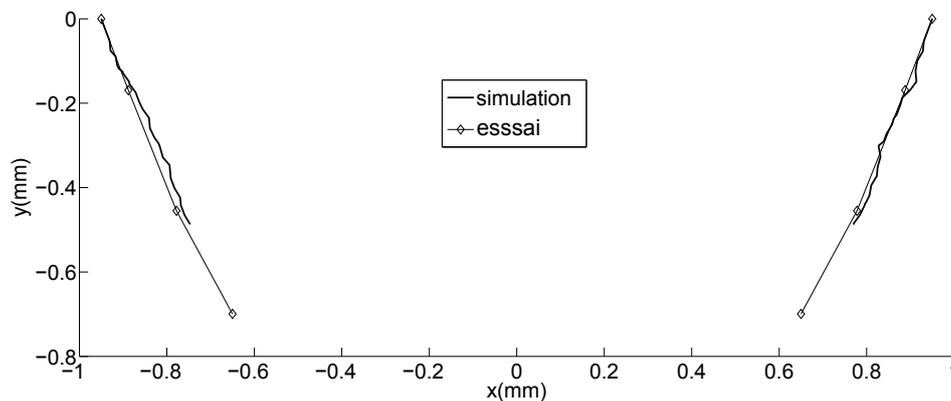
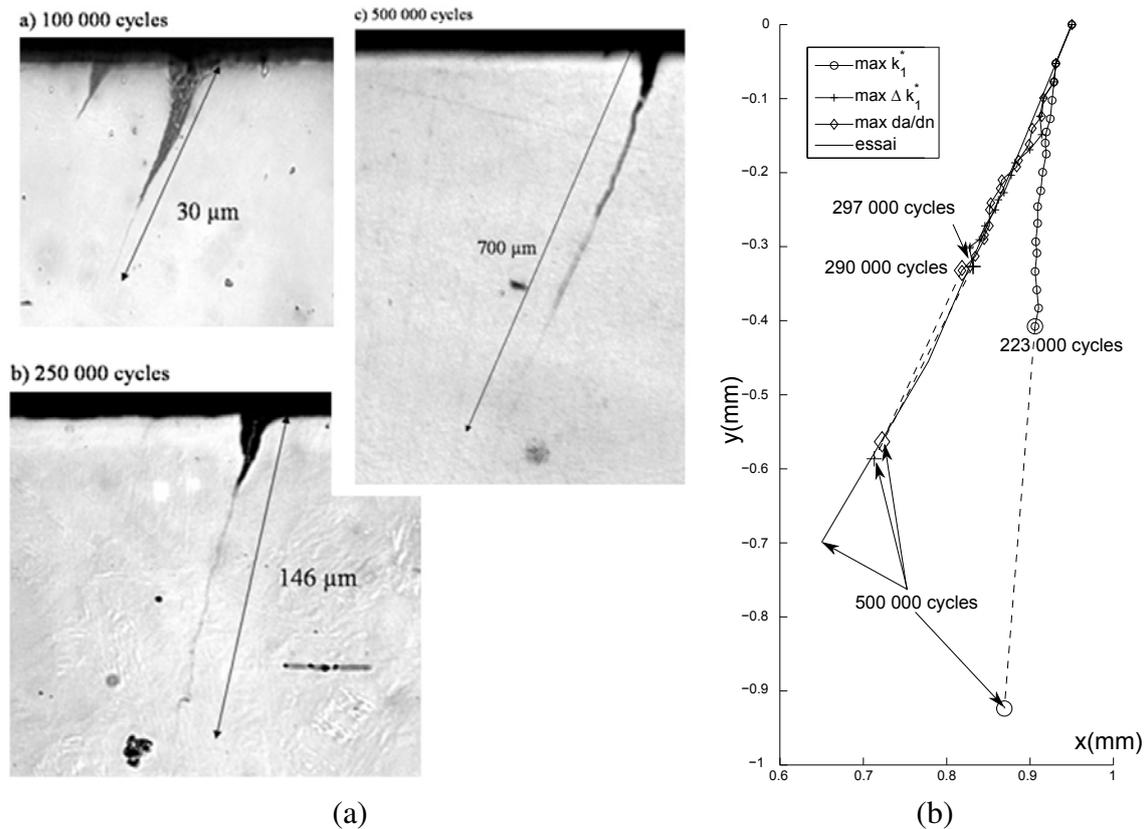


FIGURE 2.35: Comparaison des trajets de propagations simulés avec le critère utilisant  $\max_{\theta,t} \Delta k_1^*(\theta,t)$  et issus des essais.

des contraintes en pointe d'une extension virtuelle de la fissure. Cette approche permet de pouvoir tenir compte du caractère non proportionnel du chargement. A l'inverse, le critère en  $\max_{\theta,t} k_1^*(\theta,t)$  fait appel à des maxima en un instant donné du cycle. Pour le type de matériau considéré (peu ductile), il n'est pas adapté au chargement non-proportionnel. Ce critère ne permet pas de restituer le comportement des fissures dans un cas de fretting-fissuration. On constate en revanche que pour ce qui est de l'accroissement, les valeurs simulées montrent des fissures plus lentes que celles obtenues dans les essais (FIG.2.36).



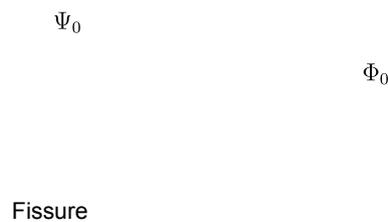
**FIGURE 2.36:** (a) Identification des trajets de fissuration à 100 000, 250 000 et 500 000 cycles obtenus par coupe métallographique des éprouvettes [BAI 13]. (b) Comparaison des trajets de propagation simulés obtenus avec les 3 critères de Hourlier.

Ces comparaisons bi-dimensionnelles entre expérience et simulation numérique valident la stratégie générale de simulation. Cependant, dans le cas des fissures de fatigue dans les rails, le besoin de tendre vers des simulations tri-dimensionnelles a déjà été souligné dans ce mémoire. La partie suivante introduit les aspects numériques importants lié à ces simulations de propagation en fatigue, avec contact et frottement à l'interface.

### 2.7.3 Eléments pour la simulation tri-dimensionnelle de la propagation des fissures de fatigue

#### 2.7.3.1 Représentation implicit-explicite des interfaces dans CAST3M

L'introduction d'une fissure, indépendamment du maillage de structure, est un des points clés de la X-FEM. Cela implique de se donner un moyen de positionner la discontinuité et la singularité dans le maillage tri-dimensionnel de la structure. L'utilisation de fonctions de niveaux [OSH 88] ( $\Psi, \Phi$ ) est une méthode répandue pour faire propager des fissures tri-dimensionnelles non planes [PIE 10b, PRA 14]. Ces fonctions consistent en une représentation implicite d'une interface par un champ scalaire de distances signées défini sur l'ensemble du domaine. Moës et Gravouil [MOë 02, GRA 02] ont proposé d'utiliser un jeu de deux fonctions de niveau pour modéliser la fissure. Une première, notée  $\Psi$ , est utilisée pour représenter la surface de discontinuité. La seconde, notée  $\Phi$ , permet de modéliser le front de fissure localisé à l'intersection des surfaces iso-0 de ces fonctions de niveaux (FIG.2.37). Elles peuvent avoir comme support les mêmes fonctions de formes que celles utilisées pour la discrétisation de la structure.



**FIGURE 2.37:** Définition de la géométrie d'une fissure tri-dimensionnelle à l'aide de deux fonctions de niveaux. Les surfaces  $\Psi_0$  et  $\Phi_0$  correspondent aux iso-0 de ces fonctions [PIE 10a].

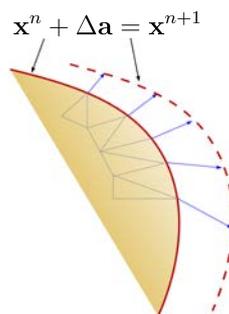
La représentation implicite des fissures possède des avantages importants. La mise à jour des fonctions de niveaux reste néanmoins difficile dans les cas où un changement brusque de direction est simulé [DUF 07, PRA 07a]. Cela tient principalement au fait que la méthode initialement proposée pour la mise à jour des fonctions de niveaux a été développée pour des fissures "lisses" [GRA 02]. La méthode a donc été adaptée aux fissures de topologies plus évoluées [DUF 07, COL 11]. Il est cependant important de rappeler que les propriétés d'orthogonalité ( $\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi = 0$ ) et de distance ( $|\nabla\Psi| \cdot |\nabla\Phi| = 1$ ) des fonctions de niveaux ne peuvent pas être simultanément vérifiées dans le cas de fissures non-planes. Certains aménagements numériques (utilisation d'une grille auxiliaire [PRA 07b], raffinement de type multi-grilles [RAN 09]) permettent de minimiser ces difficultés, mais elles subsistent [PRA 11].

Afin de pouvoir mener des simulations de propagation à un coût numérique limité, une représentation explicite de la fissure est utilisée dans CAST3M. La fissure est alors explicitement maillée avec une discrétisation complètement indépendante. Des relations géométriques simples permettent de construire dans un temps très court les valeurs nodales des deux fonctions de niveaux  $\Psi$  et  $\Phi$  [PRA 14].

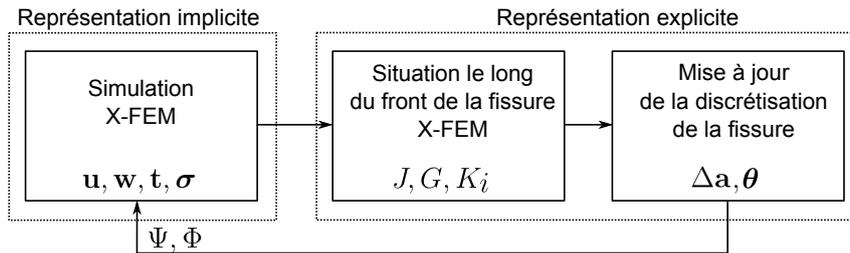
Les principaux avantages de cette méthode sont les suivants :

- Les fonctions de niveaux initiales, quelle que soit la fissure maillée, sont calculées sans itérations.
- La mise à jour des fonctions de niveaux n'est pas réalisée par un algorithme itératif. Elle est effectuée en utilisant la nouvelle discrétisation explicite de la fissure après l'étape de propagation (FIG.2.39).
- L'étape de propagation est réalisée aisément grâce à la définition explicite du front. Le nouveau front résulte simplement dans ce cas d'une translation  $\Delta \mathbf{a}$  de l'ancien. L'allongement et l'orientation de la translation sont définis grâce à l'utilisation des FICs sur le front (en imposant une propagation à propagation à iso-nombre de cycle  $\Delta N$  le long du front) et d'un critère définissant la direction de propagation (FIG.2.38). Le nouveau front est alors utilisé pour la mise à jour de la discrétisation de la fissure. Lorsque les taux d'accroissements le long du front sont d'ordre de grandeur différent, la difficulté La nouvelle discrétisation sert de base pour la mise à jour des fonctions de niveaux  $\Psi$  et  $\Phi$  (FIG.2.39).

Ces fonctions de niveaux sont un moyen efficace de stocker de nombreuses informations. Ainsi, l'étude du signe de  $\Phi$  et  $\Psi$  permet respectivement de positionner la discontinuité et la singularité dans la structure. Elle facilite en cela l'introduction des enrichissements de la X-FEM. Leurs gradients fournissent également très aisément la base locale en front de fissure. Elles servent aussi notamment de base pour la détermination du champ d'extension virtuelle en volume utilisé pour le calcul des FICs.



**FIGURE 2.38:** Propagation basée sur la description explicite du front de fissure [PRA 14].



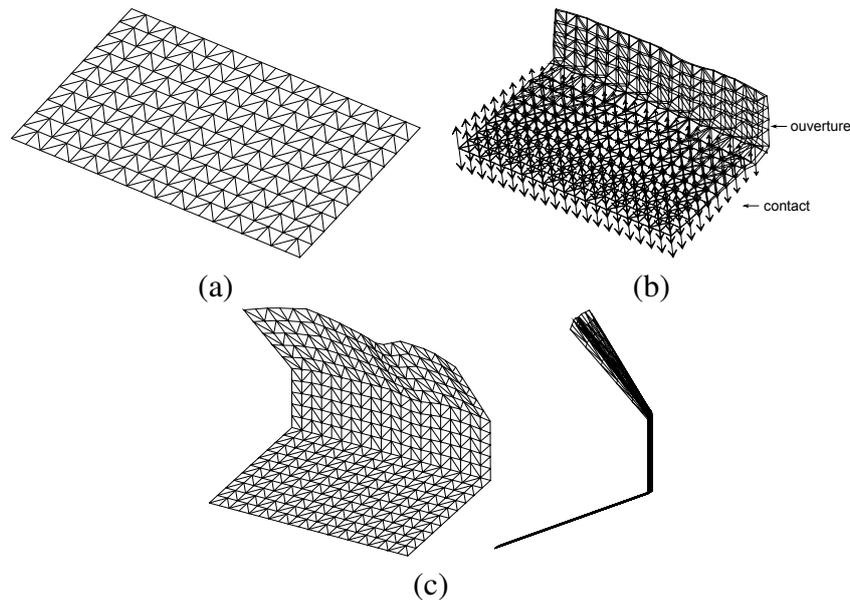
**FIGURE 2.39:** Représentation implicite/explicite de la fissure. La fissure est définie initialement de manière explicite. Elle est convertie en une description implicite uniquement pour la partie X-FEM du problème.

### 2.7.3.2 Exemples de propagation tri-dimensionnelle

#### Fissure débouchante inclinée

Le cas test considéré est identique à celui présenté dans la partie 2.6.4 (FIG.2.23). Un chargement cyclique proportionnel avec un rapport de charge négatif est appliqué en deux pas de temps. Pour le pas de temps initial, la pression extérieure appliquée vaut 5 MPa, puis 50 MPa au second pas de temps. Afin de limiter les temps de calcul, la discrétisation de l'interface est choisie plus grossière que dans la partie 2.6.4 (FIG.2.40). Les autres paramètres demeurent inchangés. Les mouvements de corps rigides sont bloqués sur la face inférieure. La direction de recherche et le paramètre de stabilisation sont actualisés au cours de la propagation avec les formules proposées,  $k = \frac{E}{l}$  avec  $l = A^{\frac{1}{2}}$  où  $A$  est l'aire de l'interface, et  $\xi = -\frac{1}{k}$ . Le critère de la contrainte circonférentielle maximale est utilisé pour la prédiction de la direction de propagation. La loi de propagation appelée est celle donnée dans la partie 1.2.6.2 (p. 38).

La FIG.2.40 (b) présente les efforts d'interface sur la déformée locale après un pas de propagation. Les sollicitations en compression ont amené la fissure à brancher. Après ce pas de branchement, l'état de contact le long des lèvres de la fissure se décompose en une partie en ouverture et une autre partie partie en contact. Les FICs étant du même ordre de grandeur le long du front (cf. FIG.2.27), l'extension de fissure prédite est de taille homogène. Après le premier pas de propagation, la fissure est ouverte sur sa partie branchée. Elle est sollicitée en mode I. Elle devrait propager de manière coplanaire au pas de propagation suivant. Ce comportement n'est pas observé sur la FIG.2.40 (c) car l'algorithme non-linéaire ne parvient pas à converger avec la fissure tri-dimensionnelle branchée. La solution non-linéaire erronée fausse la simulation de propagation. Le fort changement de direction rend difficile l'obtention d'une solution locale convergée. Ce point est une première difficulté à la simulation tri-dimensionnelle des fissures avec contact et frottement entre les lèvres. Néanmoins, l'angle de branchement considéré ici est extrême et peu réaliste.



**FIGURE 2.40:** (a) Discretisation locale initiale. (b) Champ des pressions d'interface sur la déformée locale après une étape de propagation. (c) Interface après deux pas de propagation. La solution non-linéaire obtenue avec la fissure branchée (b) est erronée.

### Fissure interne inclinée

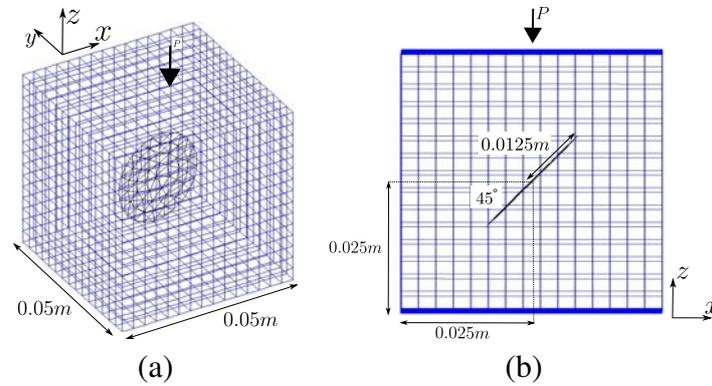
Ce second cas test vise à illustrer une autre difficulté de la simulation de la propagation tri-dimensionnelle des fissures. Lorsque les taux d'accroissement le long du front sont d'ordres de grandeur différents, des étapes de lissage des FICs et de remaillage plus ou moins évolué de la nouvelle discrétisation peuvent être nécessaires.

Le cas test considère le même domaine cubique que dans le paragraphe précédent. Des conditions aux limites et un chargement cyclique identique sont utilisés. La fissure est cette fois interne, circulaire de rayon  $0.0125\text{ m}$  et inclinée de  $45^\circ$  (FIG.2.41). Le problème est résolu avec une précision  $\eta < 10^{-3}$ . La direction de recherche et le paramètre de stabilisation sont fixés selon les formules proposées. Le critère de la contrainte circonférencielle maximale est utilisé pour la prédiction de la direction de propagation. La loi de propagation appelée est celle donnée dans la partie 1.2.6.2 (p. 38).

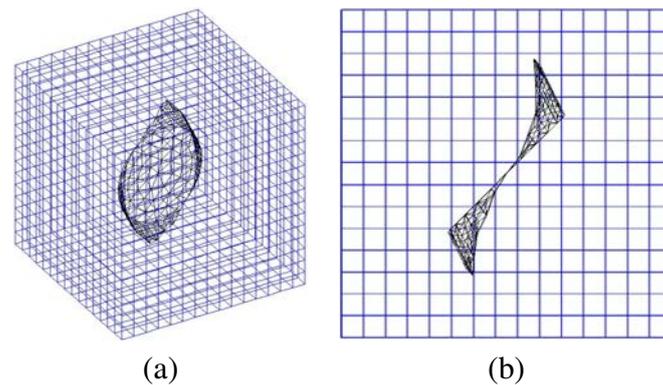
La FIG.2.43 présente le trajet obtenu après une étape de propagation. La fissure, sollicitée en mode II et III, branche à  $70^\circ$  avec des taux d'accroissement symétriques le long du front. Le mode III n'est cependant pas pris en compte ni dans le critère d'orientation ni dans la loi de propagation.

Le but est ici d'illustrer la difficulté du remaillage lors de la propagation de la fissure. Les taux d'accroissement varient de plusieurs ordres de grandeur le long du front. Certains points du front ne propagent que très peu par rapport aux autres (FIG.2.43). De plus, la surface entre l'ancien front et le nouveau front n'est plus plane. Ces deux points impliquent des opérations de maillage exigeantes. Dans le but d'une application industrielle,

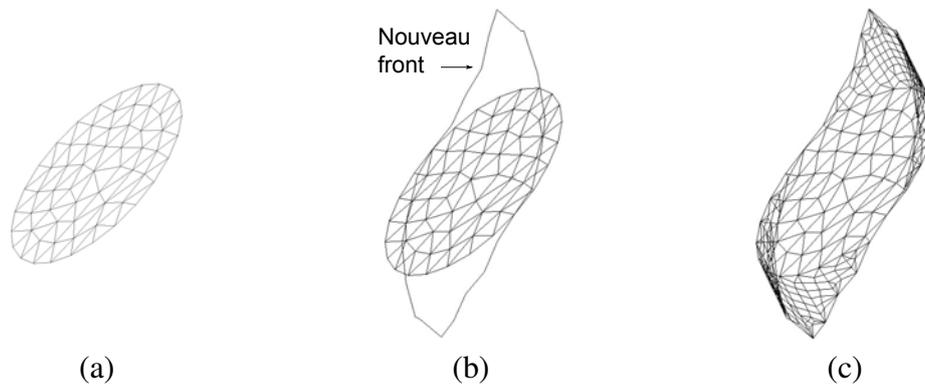
introduire des étapes de lissage des FICs sur le front et de remaillage, avec des critères de forme robuste sur l'extension créée, semble indispensable.



**FIGURE 2.41:** (a) Vue isométrique et (b) vue de profil de la fissure interne circulaire inclinée dans la configuration initiale.



**FIGURE 2.42:** (a) Vue isométrique et (b) vue de profil de la fissure interne circulaire inclinée après un pas de propagation.



**FIGURE 2.43:** (a) Discrétisation locale initiale. (b) Discrétisation locale initiale et extension du front. (c) Nouvelle représentation explicite de la fissure.

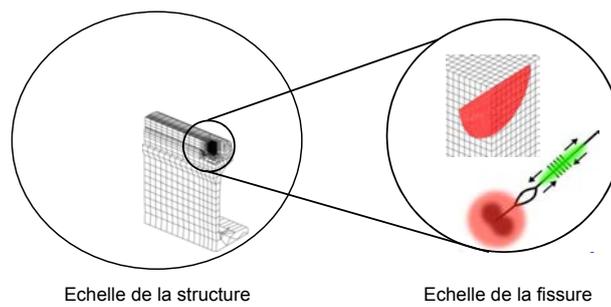
### Conclusion de ce chapitre

Le modèle X-FEM/LATIN multi-échelles avec contact et frottement interfacial tel que proposé par [PIE 10a] a été implémenté et optimisé dans CAST3M. L'utilisation d'une formulation faible mixte permet une description multi-échelles du problème (FIG.2.44). La discrétisation de l'interface est complètement indépendante du maillage de structure et peut être ainsi adaptée à l'échelle des non linéarités locales. La stabilisation de la formulation permet de s'affranchir des éventuelles oscillations numériques de la solution de contact et améliore le taux de convergence du solveur non-linéaire. Des formules a priori, assurant un taux de convergence proche de l'optimal du solveur non-linéaire, ont été proposées. Elles mettent en évidence la dépendance du taux de convergence au paramètre matériau et à la taille caractéristique de l'interface.

Plusieurs exemples, bi-dimensionnel et tri-dimensionnels, ont montré les performances du modèle proposé en ce qui concerne la finesse et la stabilité de la solution de contact. La comparaison avec un modèle de référence a permis de valider quantitativement les résultats obtenus. Les exemples tri-dimensionnels ont permis de soulever les problèmes liés à des valeurs de  $\delta K_{eq}$  hétérogènes le long du front, à des angles de bifurcations importants sur la maillage et la résolution du problème linéaire. En outre, dans ces cas tri-dimensionnels, le mode III n'est pas pris en compte que ce soit dans la direction de propagation ou la loi de propagation.

Enfin, la stratégie générale de simulation de la propagation des fissures a été validée par comparaison avec des résultats d'essais réalisés sur un cas de fretting. Ces simulations ont également permis de montrer que le premier critère de Hourlier ( $\max_{\theta,t} k_1^*(\theta,t)$ ) n'est pas adapté à la fatigue sous chargement non proportionnel.

L'étape suivante consiste à appliquer cette stratégie au problème de la fissuration par fatigue des rails de chemin de fer. Il faudra pour cela ajouter une échelle au modèle, coupler les outils numériques disponibles et développer un module utilisateur de simulation adapté aux exigences industrielles. Son utilisation permettra ensuite de proposer une méthode de prédiction de durée de vie des rails soumis aux problèmes de fissuration par fatigue.



**FIGURE 2.44:** Couplage de l'échelle locale et de la structure pour la prise en compte du contact et du frottement à l'interface à l'aide de la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles.



# Chapitre 3

## Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Couplage avec les phénomènes agissant à l'échelle de la structure . . . .</b>	<b>103</b>
3.1.1	Introduction du chargement mobile de contact . . . . .	103
3.1.2	Introduction d'un état initial non-vierge . . . . .	113
3.1.3	Bilan de l'introduction des phénomènes agissant à l'échelle du rail dans la stratégie XFEM/LATIN à deux échelles . . . . .	122
<b>3.2</b>	<b>Introduction des phénomènes agissant à l'échelle du système : prise en compte de la flexion . . . . .</b>	<b>123</b>
3.2.1	Couplage avec un macro-modèle non fissuré pour la prise en compte de la flexion . . . . .	123
3.2.2	Modèle réduit avec appuis élastiques . . . . .	127
<b>3.3</b>	<b>Bilan de l'approche multi-échelles . . . . .</b>	<b>128</b>

---

Après la validation du modèle de rupture à deux échelles spatiales, les échelles de la structure et de la fissure sont maintenant couplées. Dans ce chapitre, les aspects spécifiques à l'application visée sont traités. Dans un premier temps, les phénomènes liés à l'échelle du rail, sa plastification et le chargement mobile de contact, sont introduits dans la modélisation. Une échelle supplémentaire est ensuite ajoutée, celle de la voie ferrée, avec la prise en compte du phénomène de flexion du rail. Son influence sur la solution du problème de rupture est finalement étudiée en fin de chapitre.

Le chapitre précédent a permis de développer et de valider la stratégie numérique de modélisation de la propagation des fissures de fatigue en prenant en compte le contact et le frottement entre les lèvres. Ce modèle a démontré sa robustesse et sa capacité à rendre compte des phénomènes complexes ayant lieu à l'échelle de la fissure. Cette formulation reste un modèle de rupture général utilisable dans de nombreuses applications. Il nous faut donc maintenant introduire les phénomènes présents aux échelles de l'application visée : le rail et la voie ferrée. L'objectif de ce chapitre est donc d'introduire dans la modélisation les phénomènes agissant entre la roue, le rail et la voie sur la fissuration par fatigue. Ces couplages se déroulent à deux échelles différentes.

- Le rail, dans lequel les champs résiduels modifient les rapports  $K_I/K_{II}$ . Par conséquent, ils influencent également les mécanismes de propagation. Ces champs stabilisés sont la combinaison de deux phénomènes principaux. Dans un premier temps, des déformations plastiques existent à la sortie du processus de fabrication du rail [WEB 92, KEL 03]. Dans un second temps, le passage répété des trains entraîne également une plastification du rail [JOH 89, KAP 94]. Les contraintes résiduelles résultantes de ces deux phénomènes modifient l'état initial des champs dans lesquels les fissures de fatigue se propagent. Prendre en compte ces champs est un des objectifs de ce chapitre.

D'autre part, les sollicitations mobiles de contact agissant sur le rail et provenant du contact entre la roue et le rail sont le mécanisme moteur majeur de la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Introduire correctement les gradients induits par le chargement mobile et définir l'échelle de temps adéquate à leurs prises en compte revêt un caractère indispensable.

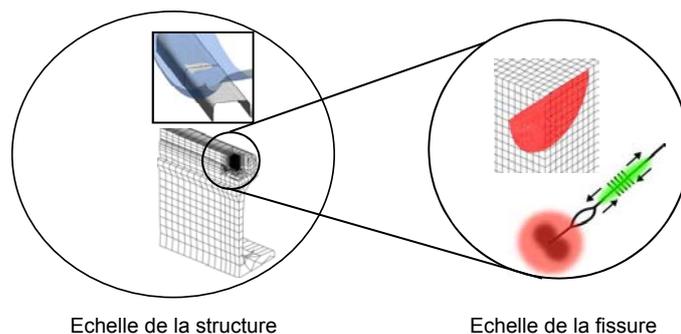
- A une échelle supérieure, celle de la voie ferrée, le rail est fixé sur des traverses, elles-mêmes posées sur les couches de ballast. Ce dernier fléchit sous le poids des trains. L'ordre de grandeur de la flèche entre deux traverses est compris entre  $0.8mm$  et  $1.5mm$  et n'est donc pas négligeable. L'importance de ce phénomène sur les FICs a été montrée [Dan 09, FAR 12a, FAR 12b]. Prendre en compte la flexion des rails est donc nécessaire.

### 3.1 Couplage avec les phénomènes agissant à l'échelle de la structure

Comme nous l'avons mentionné les phénomènes agissant à l'échelle du rail sont au nombre de deux, les contraintes résiduelles et le chargement mobile introduit par le contact roue-rail. L'introduction des sollicitations tribologiques mobiles et ses implications sont tout d'abord abordées.

#### 3.1.1 Introduction du chargement mobile de contact

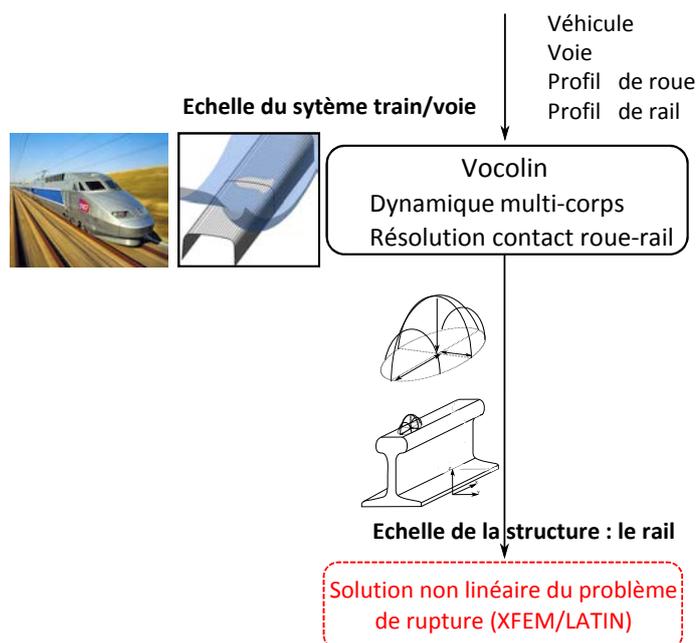
Nous avons vu dans la partie 1.1.3.1 que le contact entre la roue et le rail constitue un problème à lui seul. Les non-linéarités présentes dans le contact se produisent à une échelle inférieure à celle des surfaces en contact. Ce chargement mobile de contact introduit dans les rails de très forts gradients sous et autour de la zone sur laquelle il est appliqué. Ces gradients dépendent de la géométrie du contact considéré et des pressions mises en jeu. Toutefois, on considère que ces champs agissent à l'échelle du tronçon de rail considéré (FIG.3.1). Ces sollicitations tribologiques, à l'origine de la fatigue, sont introduites via l'utilisation d'un outil dédié à la résolution du contact entre la roue et le rail. Cette solution est ensuite utilisée comme chargement mobile pour la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture (FIG.3.2).



**FIGURE 3.1:** Introduction du chargement mobile de contact dans la stratégie XFEM/LATIN à deux échelles.

Pour cette application ferroviaire, l'échelle du contact entre la roue et le rail et celle de la fissure sont relativement séparées une fois que les fissures sont longues par rapport aux dimensions du contact roue-rail. Cette remarque justifie le découplage de ces deux échelles dans ces travaux. On suppose ces deux échelles séparables et les hypothèses ne sont pas remontées.

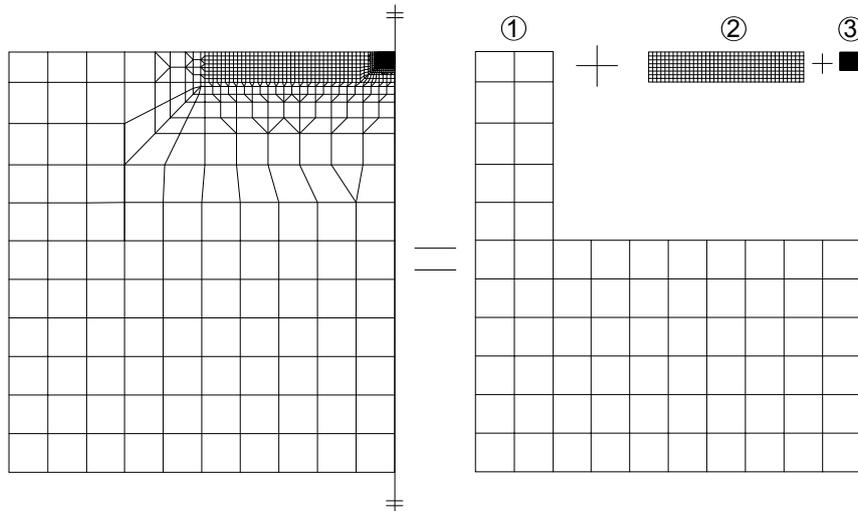
### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails



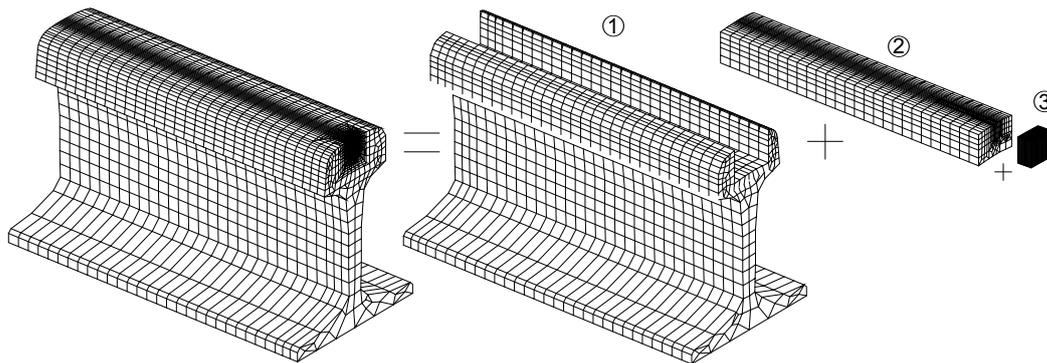
**FIGURE 3.2:** Schéma de calcul pour l'introduction du chargement mobile de contact dans la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture.

#### 3.1.1.1 Prise en compte du chargement mobile de contact

La modélisation quasi-statique d'un cycle de chargement se fait selon une approche Lagrangienne. Le chargement mobile se déplace sur la partie supérieure du rail. A chaque pas de temps simulé correspond une position différente du chargement. Il introduit des gradients sous et autour de la zone de chargement. Nous avons également vu dans le premier chapitre qu'il était nécessaire d'avoir des maillages très fins proches de la pointe de la fissure afin d'assurer une modélisation correcte de la zone de K-dominance. Sur la FIG.3.3, la zone marquée 1 permet de travailler avec un domaine semi-infini (pour information, la hauteur d'un rail de profil UIC est de 172 mm et la largeur du champignon est de 74 mm). La zone 2 permet de capturer les gradients introduits par le chargement mobile de contact sous la surface du rail. Enfin la zone 3 vise une modélisation correcte de la zone de K-dominance. Le but est de contrôler l'erreur de discrétisation et d'obtenir des valeurs de FICs convergées. C'est dans cette zone du maillage que la fissure est introduite et se propage. Les mêmes principes ont été utilisés pour la réalisation du maillage tri-dimensionnel (FIG.3.4). Dans CAST3M, à l'heure actuelle, les seuls éléments pouvant être enrichis avec les fonctions saut et singulière sont des quadrilatères en deux dimensions et des hexaèdres en trois dimensions avec dans chacun des cas des interpolations linéaires. Ces maillages, où le ratio entre les dimensions des éléments les plus fins et les éléments les plus grossiers peut être supérieur à 1000, montrent les limites de la modélisation multi-échelles par les méthodes de type éléments finis classiques. Pour une modélisation multi-échelles optimisée, il faudrait utiliser des techniques multi-grilles couplant différentes grilles de discrétisations et les X-FEM [FIS 05, RAN 07, PAS 11].



**FIGURE 3.3:** Maillage multi-échelles paramétré bi-dimensionnel du rail.



**FIGURE 3.4:** Maillage multi-échelles paramétré tri-dimensionnel du rail.

Ce type de maillage multi-échelles paramétré doit permettre de capturer les différents effets inhérents au chargement mobile de contact ainsi que la discontinuité et la singularité introduite par la fissure. Le caractère mobile du chargement associé à la non linéarité introduite par le contact frottant entre les lèvres de la fissure requiert une bonne représentation des différentes étapes du chargement. En effet, lorsque les lèvres de la fissure sont en contact, la solution dépend de l'histoire au cours du cycle.

**Remarque :** Dans l'implémentation de la résolution du problème non linéaire à l'aide de la méthode LATIN dans CAST3M, si après quelques itérations, tous les noeuds de la discrétisation locale sont détectés dans un état d'ouverture, la formulation à trois champs est abandonnée et une formulation X-FEM linéaire à un champ est utilisée. Cela permet de gagner en temps de calcul en s'affranchissant de la résolution itérative introduite par le solveur non-linéaire.

### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

La résolution du problème est alors directe. Les efforts d'interface sont alors définis comme nuls ( $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ ) et les déplacements sur les lèvres sont déduits de la résolution en déplacement :  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t)$  sur  $\Gamma$ .

#### 3.1.1.2 Modélisation d'un cycle de chargement

Afin d'assurer une modélisation quasi-statique pertinente du passage d'une roue sur la fissure, différents paramètres sont introduits. Ces paramètres initiaux sont définis dans des objets de type TABLE (pointeurs GIBIANE) définis en annexe B. Les paramètres principaux définissant la configuration étudiée et le chargement quasi-statique simplifié sont introduits sur les FIG.3.5 et FIG.3.6. Dans toutes les simulation présentées dans ce mémoire, le trafic est toujours orienté dans le même sens.

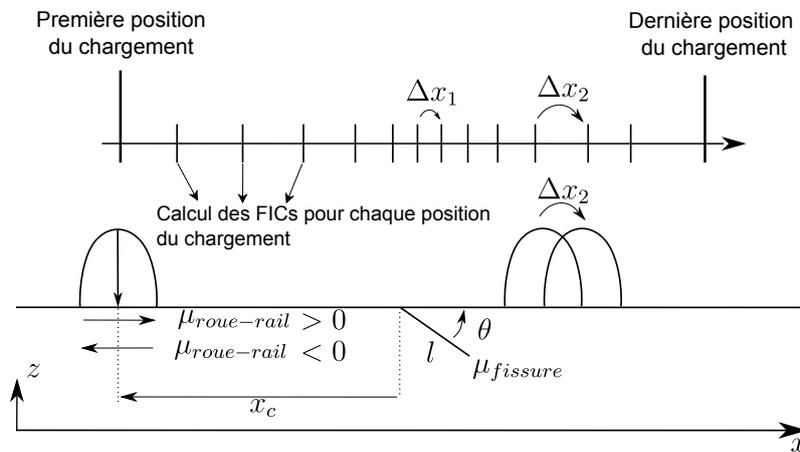


FIGURE 3.5: Définition des paramètres pour la modélisation quasi-statique d'un cycle.

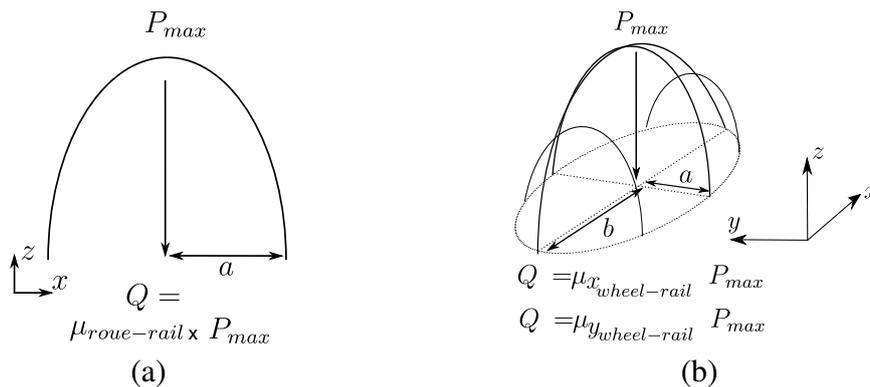


FIGURE 3.6: Définition des paramètres pour la définition d'un chargement de contact Hertzien en glissement complet dans les simulations (a) bi-dimensionnelles et (b) tri-dimensionnelles.

Selon la convention définie sur la FIG.3.5, lorsque  $\mu_{roue-rail} > 0$ , le train est en situation de freinage. Inversement, lorsque  $\mu_{roue-rail} < 0$ , le train est en phase d'accélération.

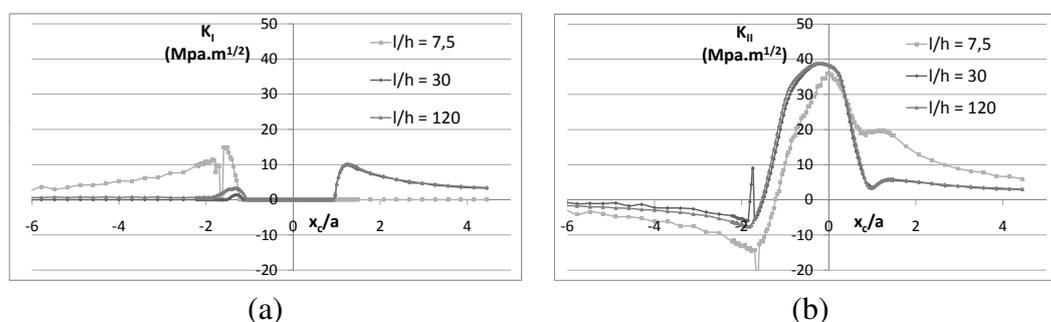
### Contrôle de l'erreur de discrétisation spatiale et temporelle

On considère l'erreur de résolution négligeable une fois que l'indicateur d'erreur local atteint une valeur inférieure à  $\eta < 10^{-3}$ . Cette condition est imposée pour toutes les simulations qui suivent. Il faut cependant assurer le contrôle de l'erreur de discrétisation spatiale et de l'erreur de discrétisation temporelle quasi-statique à cause des non linéarités de contact. En considérant la situation bi-dimensionnelle décrite dans la TAB.3.1, une étude de convergence sur l'erreur de discrétisation est menée.  $h$  est la taille caractéristique des éléments enrichis utilisés (longueur des côtés des éléments carrés X-FEM). Dans cette étude, il est important de signaler que les éléments d'interface utilisés sont des segments de longueur  $h$  et que la discrétisation locale est incompatible avec la discrétisation globale.

$l$ (mm)	$\theta$ (°)	$\mu_{fissure}$	$\mu_{roue-rail}$	$P_{max}$ (MPa)	$2a$ (mm)
6	15	0.1	0.4	845	13.5

**TABLE 3.1:** Paramètres pour la comparaison avec des résultats issus de la littérature [DUB 02].

A partir de la FIG.3.7, on note qu'un ratio  $l/h$  de 120 permet de contrôler l'erreur de discrétisation présente lors du calcul des FICs. C'est ce ratio qui sera utilisé dans le reste des simulations bi-dimensionnelles réalisées dans ce travail de thèse. De plus, la convergence des valeurs des FICs met également en évidence la convergence temporelle de la simulation d'un cycle. Ces calculs ont été réalisés avec des ratios  $l/\Delta x_1 = 24$  et  $a/\Delta x_1 = 27$  ( $\Delta x_1 = 0.25mm$ ). Ces valeurs semblent donc assurer une convergence quasi-statique de la solution non-linéaire du problème.



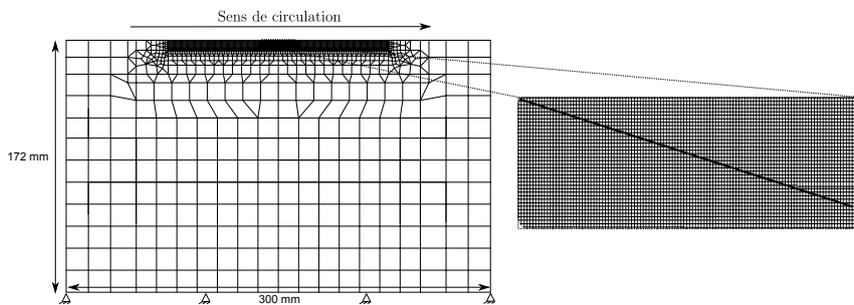
**FIGURE 3.7:** Convergence des valeurs de (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  en fonction de la finesse du maillage de structure utilisé.

#### 3.1.1.3 Validation bi-dimensionnelle de la modélisation quasi-statique d'un cycle de chargement

Afin de valider la modélisation quasi-statique d'un cycle de chargement et le calcul des FICs intégrant le frottement entre les lèvres de la fissure, les résultats obtenus avec le module développé sont comparés avec des résultats disponibles dans la littérature. Le cas considéré correspond aux paramètres présentés précédemment dans la TAB.3.1.

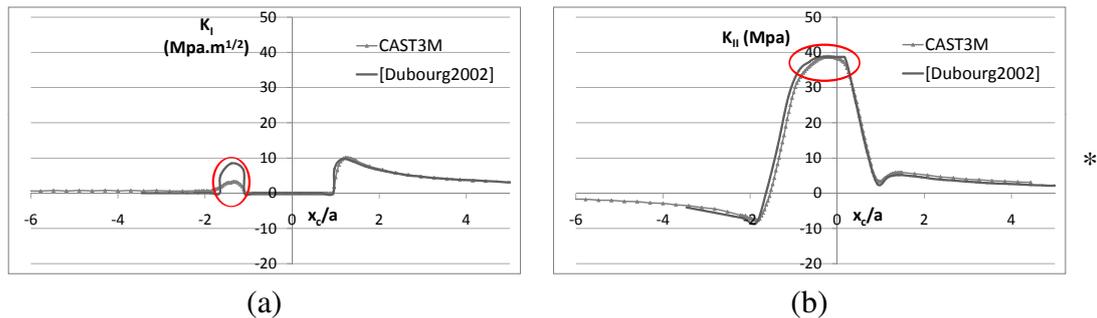
### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

La solution utilisée comme référence fait appel à une description de la fissure à l'aide d'une distribution continue de dislocation combinée avec la prise en compte du contact et frottement à l'interface. Cette description autorise notamment de calculer les FICs pour des fissures droites ou non et pour plusieurs fissures. Elle permet également de rendre compte des phénomènes d'interaction entre fissures [DUB 92b, DUB 92a]. Un domaine rectangulaire long de 300 mm et haut de 172 mm est considéré comme un plan semi-infini [RIB 06]. Le maillage élément fini utilisé est présenté sur la FIG.3.8. La zone fine dans laquelle se trouve la fissure est automatiquement ajustée en fonction de la géométrie de la fissure non seulement dans la configuration initiale considérée mais aussi au cours de la propagation. Pour la configuration initiale considérée, les dimensions de la zone fine sont  $l = 10\text{mm}$  et  $b = 3\text{mm}$ . Le ratio entre les éléments les plus grossiers et les plus fins est supérieur à 500.



**FIGURE 3.8:** Maillage multi-échelles, composé de 17840 éléments dont 12000 sont compris dans la zone fine ( $h = 0.05\text{mm}$ ), utilisé pour la validation.

Les FICs obtenus avec les deux modèles sont présentés en fonction de  $x_c/a$  sur la FIG.3.9. Il est important de remarquer que dans [DUB 02], les FICs sont des facteurs d'intensité des contraintes cinématiques basés sur les valeurs du saut de déplacement proche du front. Dans ces travaux de thèse, les FICs sont issus d'une approche énergétique et calculés grâce à des intégrales de domaine autour de la singularité introduite par le front de fissure. C'est pourquoi des valeurs différentes sont obtenues pour les deux modèles, notamment dans le cas particulier où des conditions d'adhérence se produisent à l'interface. En effet, dans ce cas les variations des sauts de déplacement sont nulles, entraînant une valeur constante de  $K_{II}$  et un plateau pour les valeurs maximales de  $K_{II}$  [DUB 02] (FIG.3.9 (b)). À l'inverse, avec une approche énergétique, dans des conditions d'adhérence à l'interface, les champs mécaniques dans la structure subissent encore de légères variations autour de la pointe de fissure. Cela se traduit par des variations des valeurs des FICs dans ce cas (CAST3M sur la FIG.3.9 (b)). De légères différences sont également observées sur  $K_I$  avant le passage du chargement sur la fissure. Autrement dit, dans le cas non-linéaire, la symétrie des FICs statiques et cinématiques n'est pas forcément garantie. En effet, seul le cas linéaire statique permet de garantir que  $G = K_I^2$  et dans ce cas  $K_{I\sigma} = K_{I_{cin}} = K_I$  [BUI 78]. Dans le cas non-linéaire  $G \equiv K_{I\sigma}K_{I_{cin}}$  mais avec  $K_{I\sigma} \neq K_{I_{cin}}$ .



**FIGURE 3.9:** Comparaison des valeurs de (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  obtenues avec l'outil développé dans CASTEM et un modèle semi-analytique [DUB 02].

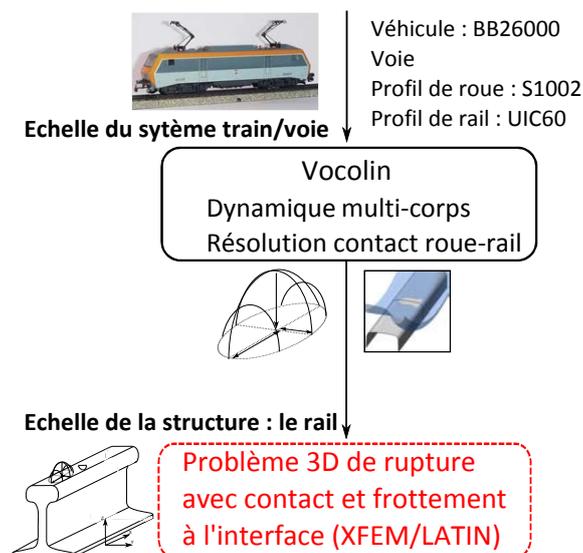
Cette comparaison avec la littérature permet de valider d'une part la bonne modélisation du chargement mobile, et d'autre part la bonne prise en compte du frottement le long des lèvres de la fissure dans le calcul des FIC. Les erreurs de discrétisation spatiale et temporelle pour l'introduction du chargement mobile dans les simulations bi-dimensionnelles sont contrôlées. La partie suivante utilise ces résultats afin d'introduire dans les simulations tri-dimensionnelles la solution de contact roue-rail provenant du logiciel dédié.

### 3.1.1.4 Couplage avec le logiciel de dynamique ferroviaire pour les simulations tri-dimensionnelles

Le logiciel de dynamique ferroviaire effectue également la résolution du contact roue-rail et permet d'obtenir des solutions de contact tri-dimensionnelles. Cette solution est ensuite introduite dans une simulation tri-dimensionnelle. On considère un véhicule de type BB26000 (motrice de train corail) sur une voie parfaite en alignement avec des roues de type S1002 sur des rails avec un profil classique (UIC60). L'introduction de ces caractéristiques dans le logiciel de dynamique ferroviaire nous permet d'obtenir la solution du problème de contact entre la roue et le rail en un point kilométrique donné de la voie. Pour ce cas simple, une solution Hertzienne est obtenue ( $2a = 6.75$  mm,  $2b = 4.7$  mm et  $P_{max} = 1348$  MPa cf. FIG.3.6). Elle est ensuite introduite dans les simulations tri-dimensionnelles du problème de rupture avec contact et frottement à l'interface (FIG.3.10).

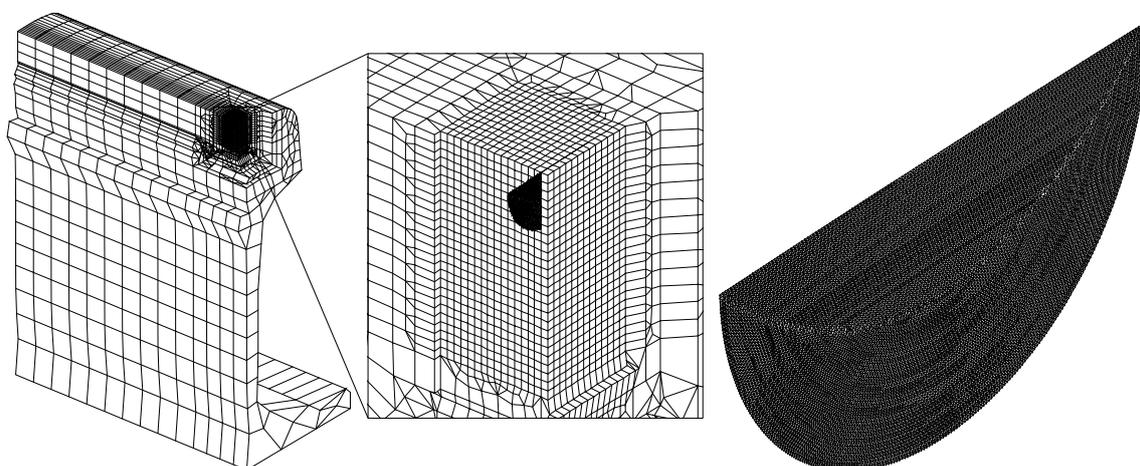
Un domaine maillé de 300mm de long est considéré. Une coupe du maillage utilisé est présentée sur la FIG.3.11. Le rail est encastré sur sa surface inférieure. Le chargement est choisi en glissement complet sans efforts transverses,  $\mu_{x_{roue-rail}} = 0.3$  et  $\mu_{y_{roue-rail}} = 0$  selon la convention définie sur la FIG.3.6. Une fissure verticale semi-circulaire débouchante de rayon 5mm est introduite. Le cas est traité avec des conditions de contact unilatéral à l'interface  $\mu_{fissure} = 0$ . Les éléments enrichis sont des hexaèdres linéaires réguliers de 0.5mm de côté. Les éléments d'interface sont des triangles linéaires de taille 10 fois inférieure aux éléments de structure (FIG.3.11). Les discrétisations locales et globales sont incompatibles. Une discrétisation temporelle équivalente au cas bi-dimensionnel traité précédemment est utilisée.

### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

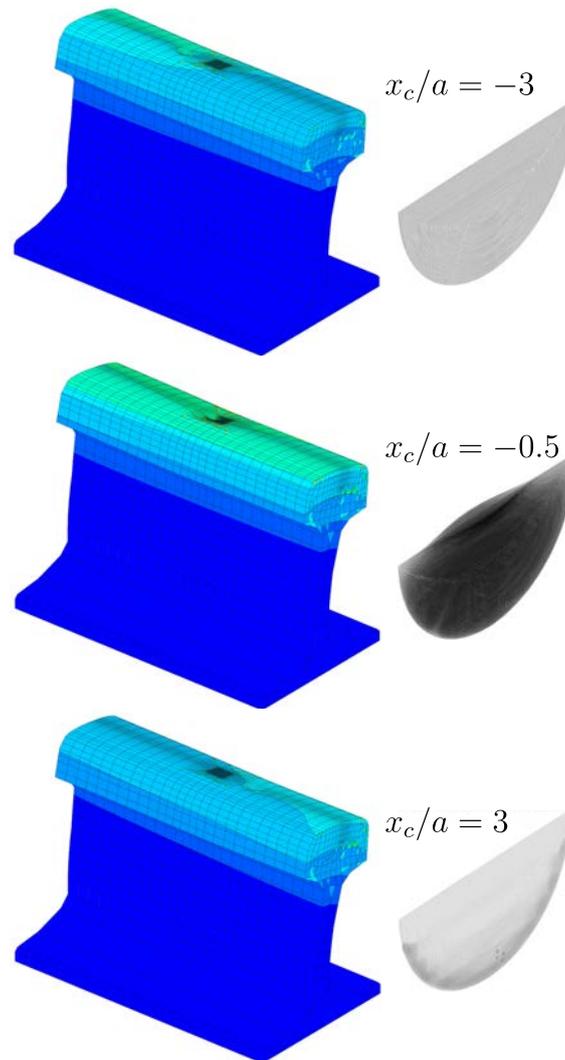


**FIGURE 3.10:** Schéma de calcul pour l'introduction du chargement mobile de contact 3D dans la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture.

Les résultats montrent des efforts de contact lisses à l'interface sans oscillations dans la solution locale (FIG.3.12). De plus, le comportement obtenu avec une inversion du glissement entre les lèvres une fois le chargement passé de part et d'autre de la fissure est cohérent (inversion du signe de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur les FIG.3.13 et 3.14).

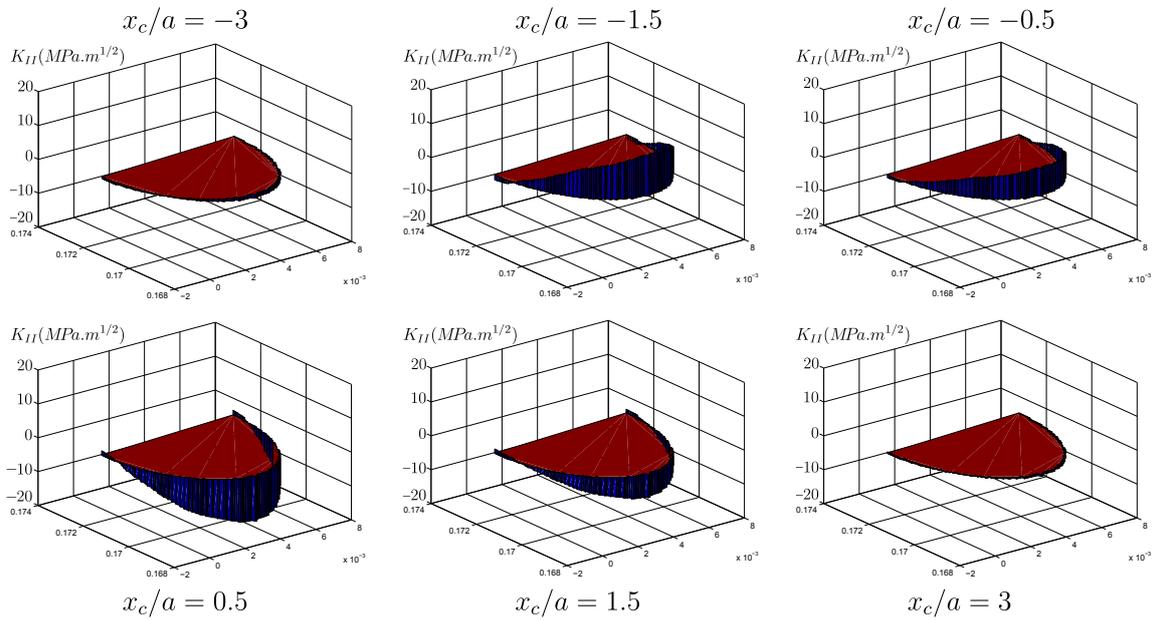


**FIGURE 3.11:** Maillage de 56 464 éléments dont 20 280 sont dans la zone dédiée à la propagation de la fissure ( $h = 0.5mm$ ).

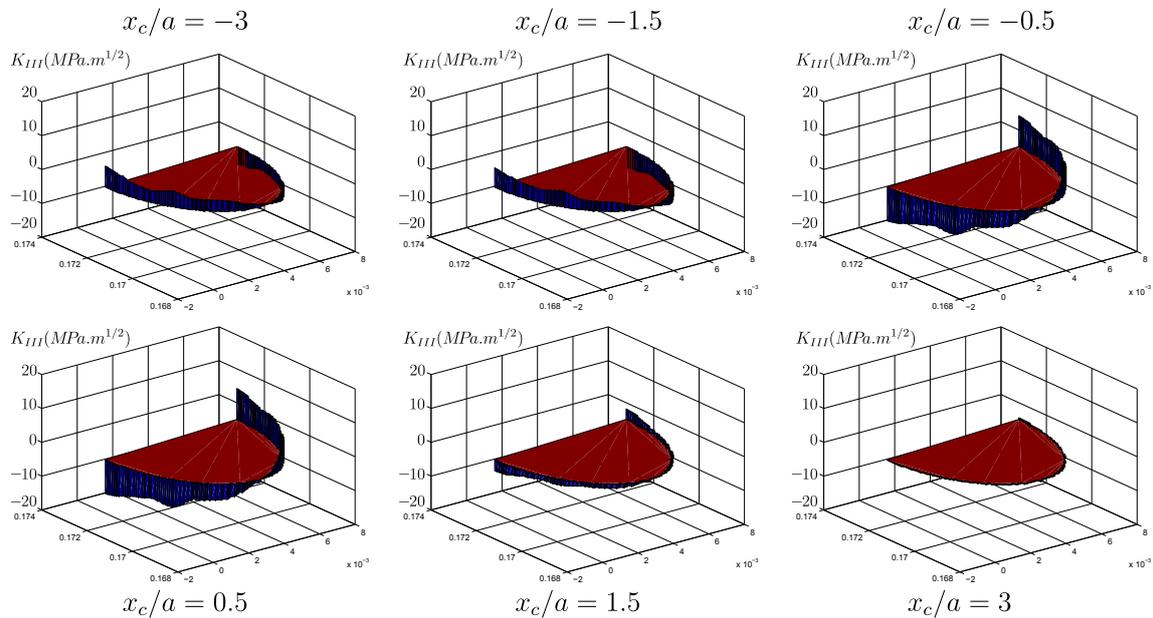


**FIGURE 3.12:** Représentation du champ de déplacement global  $\mathbf{u}$  sur la déformée amplifiée et des efforts de contact  $\mathbf{t}$  pour  $x_c/a = -3; 0.5; 3$ .

### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails



**FIGURE 3.13:** Facteurs d'intensité des contraintes  $K_{II}$  pour différentes positions du chargement au cours du cycle calculés à l'aide de l'intégrale d'interaction en 3D.



**FIGURE 3.14:** Facteurs d'intensité des contraintes  $K_{III}$  pour différentes positions du chargement au cours du cycle calculés à l'aide de l'intégrale d'interaction en 3D.

Pour les simulations tri-dimensionnelles de rupture, la définition du chargement mobile provient du logiciel de dynamique multi-corps intégrant une résolution du contact roue-rail. Le maillage multi-échelles paramétré permet une grande flexibilité dans le choix des dimensions des différentes zones pour des problèmes bi-dimensionnels. La bonne représentation de la zone de K-dominance est assurée grâce à des éléments de taille très fine dans cette zone. Après avoir maîtrisée l'erreur de discrétisation spatiale et temporelle, nous introduisons désormais un autre effet agissant à l'échelle du rail : la présence de champs de contraintes résiduelles.

### 3.1.2 Introduction d'un état initial non-vierge

De nombreux travaux numériques ont déjà été réalisés afin d'évaluer de manière quantitative les contraintes résiduelles dans la profondeur du rail [RIN 03, SKY 05, KAP 06a, KAP 06b, KAP 06c, KAP 06d, SEO 08, Dan 09]. D'autres travaux fournissent également des mesures de ces contraintes [WEB 92, KEL 03]. Toutes ces études mettent en évidence un fort gradient suivant la profondeur du rail. Cependant, dans les travaux introduisant une fissure, les contraintes résiduelles sont introduites par des conditions aux limites uniformes en effort [BOG 02, DUB 02, MEL 05]. Dans toutes ces études, l'influence des contraintes résiduelles sur les vitesses de propagation obtenues a été montrée. Modéliser le gradient de ces contraintes est donc essentiel pour obtenir des simulations s'approchant de la physique du problème.

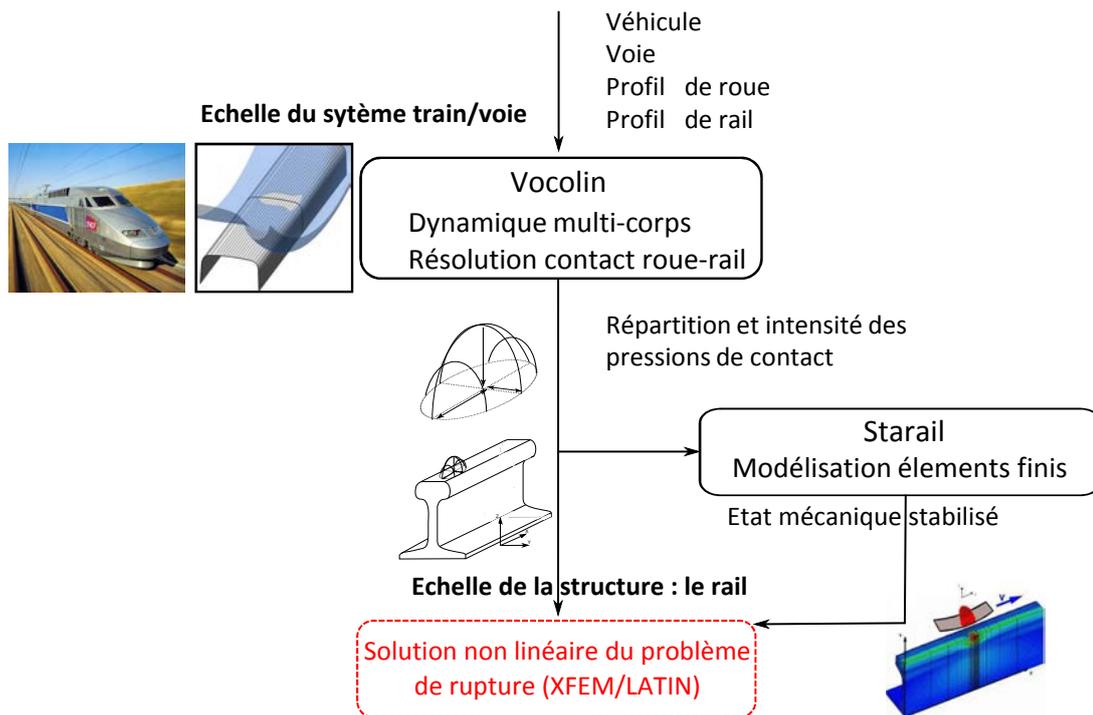
Dans ces travaux, ces contraintes sont issues d'un calcul élasto-plastique. Ces champs stabilisés sont le résultat des contraintes présentes à la fin du processus de fabrication et de l'accumulation des déformations plastiques dues aux passages répétés des trains [WEB 92, RIN 03]. La difficulté de leur évaluation provient de la présence des très forts gradients de déformations plastiques et de contraintes sous et proche de la zone de contact entre la roue et le rail. Dès lors, des éléments fins fins sont nécessaires pour capturer précisément ces gradients. Simuler un grand nombre de passages de roue par des méthodes éléments finis classiques basées sur des schémas d'intégration usuels demanderait des temps de calcul non négligeables. Pour surmonter cet inconvénient, la méthode stationnaire directe [NGU 77, Dan 93, Dan 09] permet d'obtenir directement l'état d'équilibre stabilisé pour un rail soumis à un chargement mobile. La méthode est basée sur les idées suivantes.

- La simulation est réalisée dans le référentiel du chargement, c'est-à-dire celui de la roue. Cette modélisation permet de tirer profit de l'indépendance temporelle des champs mécaniques recherchés ;
- le régime est supposé stationnaire dans ce référentiel ;
- l'écoulement plastique est modélisé selon une formulation Eulérienne ;
- des états stabilisés, adaptés (élastique) ou accommodés (élasto-plastique), sont considérés ;

### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

- des éléments fins sont uniquement nécessaires aux alentours de la zone de contact entre la roue et le rail ;

Cette méthode permet de réaliser des calculs d'état stabilisé dans des temps très faibles. C'est cette méthode qui a été utilisée pour le calcul de l'état stabilisé dans le rail en utilisant séquentiellement VOCOLIN et STARAIL [NGU 11] (FIG.3.15). Dans le calcul stationnaire direct, une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire est utilisée pour le comportement de l'acier.

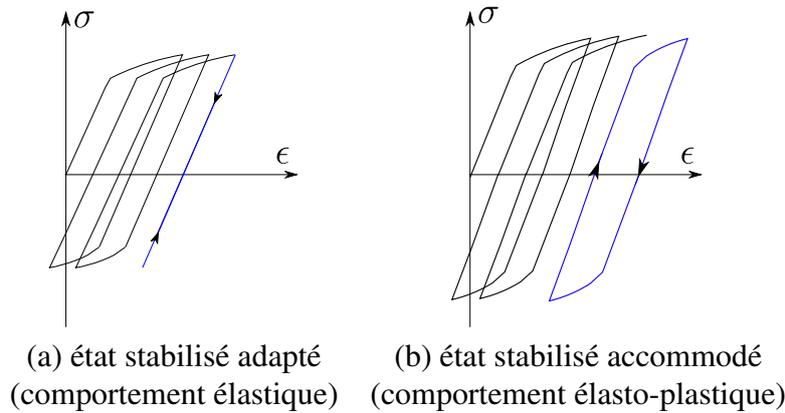


**FIGURE 3.15:** Schéma de calcul pour l'introduction des champs de contraintes résiduelles dans la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture.

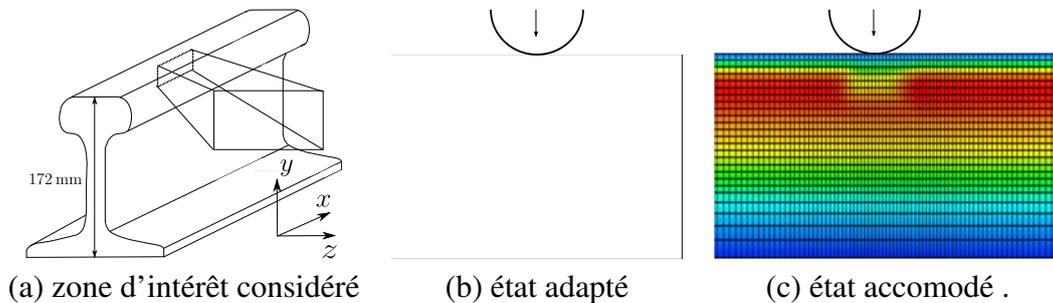
En utilisant cette méthode, deux états stabilisés sont possibles :

- **adapté** (FIG.3.16 (a)) : la réponse limite est élastique, mais le matériau a pu se déformer plastiquement au cours des premiers cycles. Champs de déformations plastiques et de contraintes résiduelles tendent après un certain nombre de cycles de sollicitations répétées vers des champs fixes indépendants du temps ;
- **accommodé** (FIG.3.16 (b)) : la réponse en déformations plastiques devient périodique à partir d'un certain nombre de cycles. Les cycles stabilisés sont élasto-plastiques.

Les déformations plastiques obtenues dans la direction de roulement  $\varepsilon_{p_{xx}}$  pour des cas adapté et accommodé en présence du chargement de contact sont présentés sur la FIG.3.17. Dans le cas d'un état adapté, les déformations plastiques sont constantes dans la direction de roulement alors qu'elles ne le sont pas pour un état accommodé.



**FIGURE 3.16:** Deux états stabilisés possibles pour une structure avec un comportement élasto-plastique sollicité en fatigue.



**FIGURE 3.17:** Déformations plastiques  $\epsilon_{p_{xx}}$  sous chargement dans le cas d'état adapté (a) et accommodé (b).

Dans la plupart des situations étudiées, il apparaît que sous le passage des trains de voyageurs, un état adapté est obtenu [NGU 11]. En outre le modèle de mécanique de la rupture utilisé est basé sur un comportement élastique linéaire du matériau. Nous considérerons donc un rail dont l'état stabilisé est adapté.

### 3.1.2.1 Définition du problème mécanique

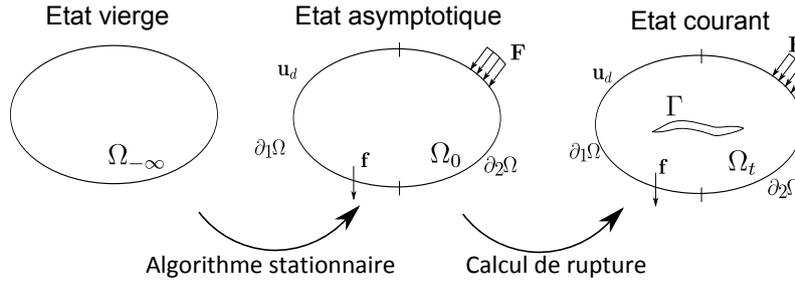
Le problème à résoudre est exprimé comme suit. A l'instant initial ( $t = -\infty$ ), l'état est considéré comme vierge. A  $t = 0$ , il est supposé que le rail est dans un état asymptotique et qu'un état stabilisé a été atteint avant l'initiation d'une fissure. Dans notre cas cet état est élastique linéaire (adapté). Une fissure est ensuite introduite et la résolution du problème de rupture est effectuée selon l'application appelée  $\Delta$  (FIG.3.18). Cette application introduit des variations  $\Delta$  des champs élastiques  $\mathbf{u}(0)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(0)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}(0)$  présents initialement dans la structure pour le problème de rupture. L'état  $\Omega_t$  correspond à l'addition d'une variation  $\Delta$  des contraintes, déformations et déplacements par rapport à ceux de l'état initial  $\Omega_0$ .

Un champ de déformation  $\boldsymbol{\epsilon}$  est compatible s'il existe une champ de déplacement  $\mathbf{u}$

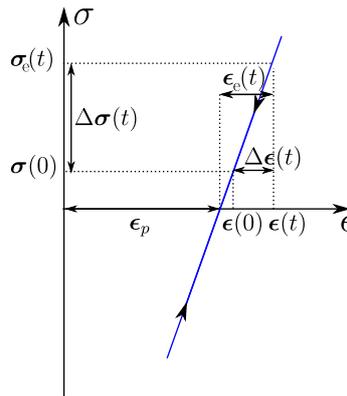
### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

continu et dérivable tel que  $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ . Les contraintes résiduelles proviennent de l'incompatibilité des déformations plastiques  $\epsilon_p$ . Dans ces travaux seules les contraintes plastiques sont considérées. Elles sont définies par :

$$\sigma_{\text{plastiques}} = \mathbf{K}\epsilon_p \quad (3.1)$$



**FIGURE 3.18:** Notation utilisée pour l'introduction d'un état initial non vierge dans la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles.



**FIGURE 3.19:** Notation pour l'introduction d'un état initial adapté dans la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles.

On peut alors écrire, avec les notations introduites sur la FIG.3.19, qu'à tout instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \text{Equilibre} & : \operatorname{div} \sigma_e(t) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \text{Comportement} & : \sigma_e(t) = \mathbf{K} \epsilon_e(\mathbf{u}(t)) & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions de Neumann} & : \sigma_e(t) \mathbf{n} = \mathbf{F}(t) & \text{sur } \partial_2\Omega \\ \text{Conditions de Dirichlet} & : \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_d(t) & \text{sur } \partial_1\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\sigma_e(t) = \sigma(0) + \Delta\sigma(t) \quad (3.3)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon(0) + \Delta\epsilon(t) \quad (3.4)$$

Dans les équations (3.3) et (3.4),  $\boldsymbol{\sigma}(0)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}(0)$  correspondent à une pré-contrainte et à une pré-déformation élastique appliquée initialement à la structure dans le calcul de rupture.

De plus, on peut également écrire qu'à tout instant  $t$  de la configuration courante :

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{\epsilon}_p(t) + \boldsymbol{\epsilon}_e(t) \quad (3.5)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3.5) par  $\mathbf{K}$  et en introduisant l'équation (3.4) dans le membre de gauche nous obtenons :

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\epsilon}(0) + \Delta\boldsymbol{\epsilon}(t)) = \boldsymbol{\sigma}_{\text{plastiques}} + \boldsymbol{\sigma}_e(t) \quad (3.6)$$

Puis en introduisant l'équation (3.3) dans (3.6), il vient :

$$\mathbf{K}\Delta\boldsymbol{\epsilon}(t) - \Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_{\text{plastiques}} - (\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(0) - \boldsymbol{\sigma}(0)) \quad (3.7)$$

équation équivalente à :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{K}\Delta\boldsymbol{\epsilon}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\text{plastiques}} + (\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(0) - \boldsymbol{\sigma}(0)) \quad (3.8)$$

La formulation est la même formulation faible mixte à trois champs (équation (2.18)) que celle introduite dans la section 2.2. Cependant, les grandeurs calculées sur la structure  $\Omega_t$  le sont en terme de variation  $\Delta$  par rapport à l'état initial 0. En effectuant le même cheminement que dans le chapitre précédent, la forme discrétisée stabilisée du problème de structure après introduction de la LATIN devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{ut} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{wt} \\ -\mathbf{K}_{ut}^T & \mathbf{K}_{wt}^T & \mathbf{K}_{tt} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{T}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{F}(0) \\ \mathbf{K}_{wt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

avec (FIG.3.21) :

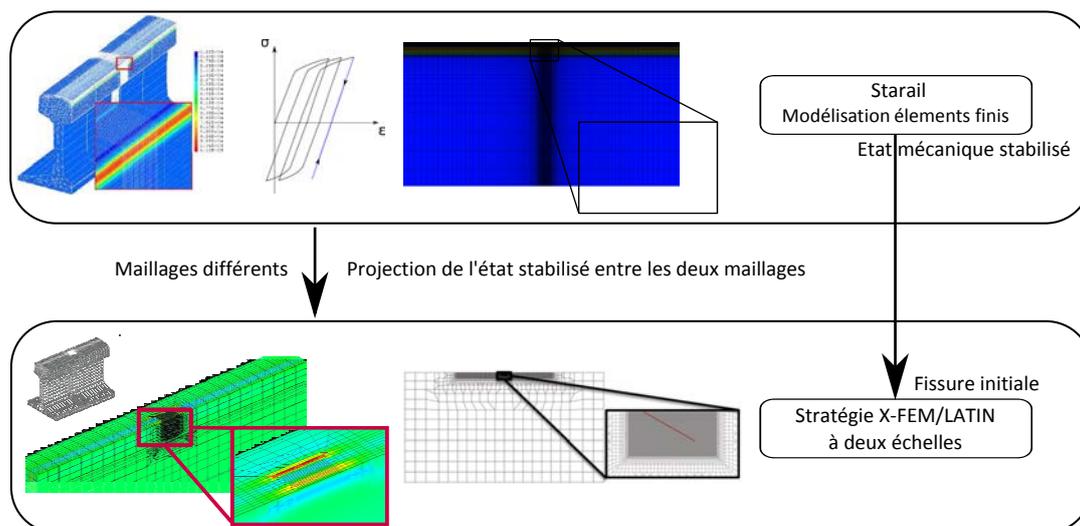
$$\mathbf{F}(0) = \langle \mathbf{F}_l(0) \rangle \quad (3.10)$$

et

$$\mathbf{F}_l(0) = \int_{\Omega} Tr [(\boldsymbol{\sigma}_{\text{plastiques}} - (\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(0) - \boldsymbol{\sigma}(0))) \boldsymbol{\epsilon}(\phi_l)] d\Omega \quad (3.11)$$

Le système linéaire discrétisé (equation (3.9)) est obtenu avec  $\Delta\mathbf{U}_{i+1}$  au lieu de  $\mathbf{U}_{i+1}$  dans le vecteur des inconnues. Avant de post-traiter les résultats pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, une étape de mise à jour est nécessaire pour obtenir le champ  $\mathbf{U}$ . Cette étape est similaire aux équations (3.3) et (3.4).

Le terme d'effort interne généralisé doit donc être ajouté au second membre du système linéaire. Son calcul est réalisé à partir des champs calculés sur le maillage utilisé dans la méthode stationnaire. Pour rappel, dans cette méthode, il est supposé que tous les gradients dans la direction du mouvement du chargement sont nuls. Par conséquent, le maillage est créé par translation de tranche du domaine suivant cette direction. Ces maillages n'autorisent pas les raffinements locaux et les maillages non structurés requis pour une simulation efficace d'un cycle de fatigue pour le problème de rupture. C'est pourquoi une étape de transfert des champs d'un maillage vers l'autre est nécessaire.



**FIGURE 3.20:** Projection des champs stabilisés calculés sur le maillage  $m_1$  vers le maillage utilisé pour la simulation de la propagation (maillage  $m_2$ ).

#### 3.1.2.2 Étape de projection pour l'introduction des efforts internes généralisés

Une procédure de transfert des champs obtenus avec la méthode stationnaire vers le maillage dédié à la résolution du problème de rupture est introduite. Deux grandes catégories de méthode existent pour la projection de champs mécaniques entre deux maillages différents. Très brièvement, soit l'on projette toutes les quantités du maillage 1 vers le maillage 2 et une étape de rééquilibrage est introduite pour assurer le respect des équations d'équilibre sur le maillage 2. Soit une partie des champs mécaniques est projetée du maillage 1 vers le maillage 2. Les quantités manquantes sont alors calculées selon la loi de comportement sur le nouveau maillage et les variables internes sont mises à jour.

C'est cette méthode qui sera utilisée dans ce travail. L'hypothèse d'un état stabilisé adapté est faite et un comportement élastique linéaire est également considéré pour le calcul de rupture. Si l'on considère un état final non chargé à l'issue du calcul stationnaire, nous avons alors uniquement des déformations plastiques ( $\sigma_{\text{plastiques}} \neq \mathbf{0}$ ) et  $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\epsilon}(0) = \boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$  et :

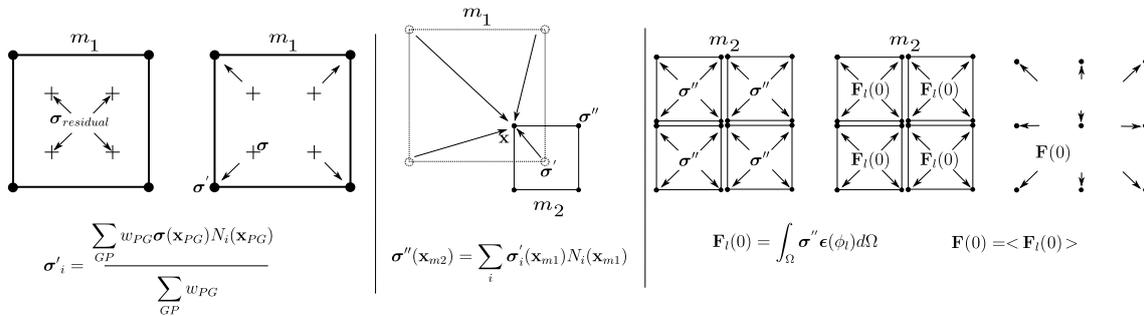
$$\mathbf{F}_l(0) = \int_{\Omega} Tr[(\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}_p)\boldsymbol{\epsilon}(\Phi_l)] d\Omega \quad (3.12)$$

Les contraintes plastiques sont définies par :  $\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}_p = \boldsymbol{\sigma}_{\text{plastiques}}$  et le vecteur des inconnues devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{T}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{T}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Initialement, le champ  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{résiduelles}}$  est défini aux points de Gauss du maillage utilisé pour le calcul stationnaire. Le transfert se fait en trois temps (FIG.3.21).

- Le champ par élément défini aux points de Gauss est tout d'abord extrapolé élément par élément aux noeuds des éléments. Cette extrapolation est basée sur les fonctions de forme et sur une approximation moindre carré pour calculer les valeurs en un noeud donné (opérateur PROI dans CAST3M).
- Dans un deuxième temps, la projection en elle-même est réalisée élément par élément, des noeuds du maillage  $m_1$  vers ceux du maillage  $m_2$  en utilisant les fonctions de formes linéaire comme fonctions d'interpolation. L'approximation élément fini n'étant valable que pour le champ déplacement, cette interpolation aurait pu être réalisée en utilisant des fonctions différentes des fonctions de formes. Ce choix a été fait pour des raisons pratiques.
- La dernière étape consiste à calculer les efforts internes généralisés correspondant aux contraintes projetées sur le maillage  $m_2$  et enfin de moyenner pour chaque noeud ce champ par élément défini aux noeuds.



**FIGURE 3.21:** Procédure de projection des contraintes plastiques d'un maillage  $m_1$  vers un maillage  $m_2$  et calcul des efforts internes généralisés moyennés sur chaque noeud du maillage  $m_2$ .

Un comportement élastique linéaire est considéré pour le calcul de rupture. Une résolution élastique à partir des efforts internes calculés sur le maillage utilisé pour le problème de rupture permet d'obtenir automatiquement un état de contraintes équilibré. L'équation d'équilibre au sens fort (3.14) est automatiquement vérifiée.

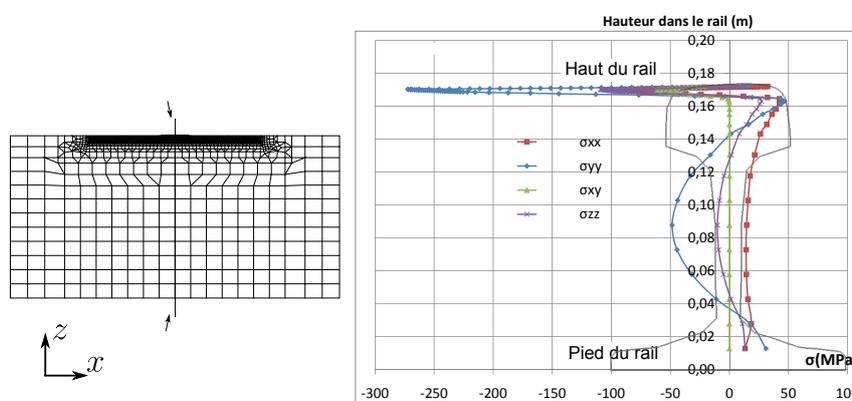
$$\text{div } \sigma_{\text{plastiques}_{m_2}}(0) + \mathbf{F}(0) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (3.14)$$

Les champs de contraintes plastiques, appelées contraintes résiduelles dans la suite de ce mémoire, peuvent donc être intégrés dans les simulations de propagation comme un état initial non uniforme et non vierge pour le calcul de rupture. Dans ces travaux, cet état est de plus supposé permanent. La redistribution de la plasticité avec la propagation de la fissure n'est pas étudiée. Cette étape a été programmée pour des problèmes en deux et trois dimensions. Pour des raisons de visualisation, seule une illustration bi-dimensionnelle de l'effet de cet état initial non-vierge est présentée.

### 3.1.2.3 Influence des contraintes résiduelles sur les modélisations bi-dimensionnelles de référence

Les contraintes résiduelles issues du calcul stationnaire sont projetées sur le maillage dédié au problème de rupture selon la procédure décrite précédemment. Les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes résiduelles sont présentées sur la FIG.3.22. Les valeurs exposées proviennent de la hauteur au centre du domaine maillé pour le problème de rupture. Cette figure illustre l'état de contraintes résiduelles complexe qui existe sous la bande de roulement mais également dans l'âme du rail. Des successions de couches, d'épaisseur et d'intensité différentes, en traction et en compression, sont calculées.

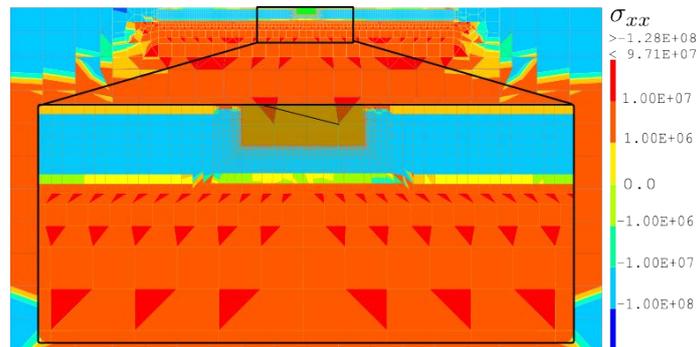
En allant du haut du rail vers le pied, il existe dans la partie la plus supérieure du rail une couche en traction avec des valeurs autour de 25 MPa. Juste au dessous de celle-ci, il existe une bande épaisse d'environ 5mm avec des contraintes de compression élevées (autour de  $-110$  MPa pour  $\sigma_{xx}$  et  $-250$  MPa pour  $\sigma_{yy}$ ). Ces deux couches trouvent leur origine dans le passage répété des trains sur les rails. Les contraintes de cisaillement sont uniquement présentes dans ces couches supérieures. Puis, à mesure que l'on s'enfonce dans le rail, les contraintes résiduelles proviennent du processus de fabrication. On retrouve alors dans la profondeur du rail la forme en "C" caractéristique [WEB 92, KEL 03]. Cette forme introduit sous la couche en forte compression une zone en traction, puis en compression et enfin en traction dans le pied du rail avec des magnitudes inférieures à 50 MPa.



**FIGURE 3.22:** Champ des contraintes résiduelles après projection sur le maillage dédié au problème de rupture sur la ligne située au centre du domaine.

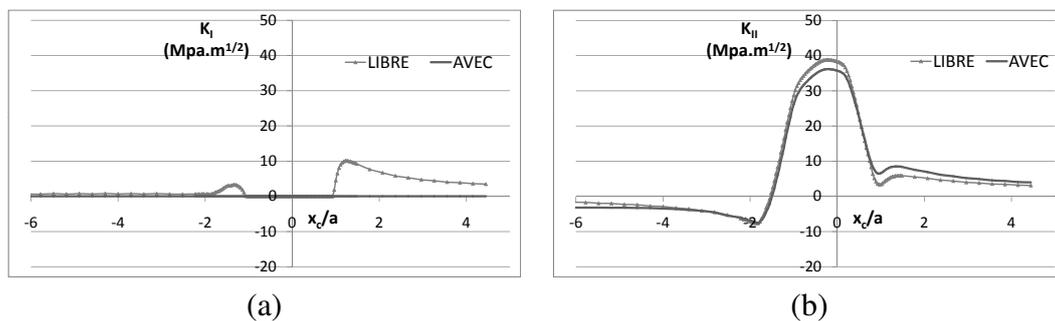
L'allure de la composante  $\sigma_{xx}$  du tenseur des contraintes résiduelles après projection sur le maillage dédié au problème de rupture est présentée sur la FIG.3.23.

L'effet des contraintes résiduelles sur les FICs est de nouveau étudié sur le cas décrit dans la TAB.3.1. Les paramètres de la discrétisation temporelle et spatiale sont les mêmes que ceux utilisés pour la validation des résultats. Les FICs pour le cycle de chargement initial avec et sans contraintes résiduelles sont présentés sur la FIG.3.24.



**FIGURE 3.23:** Composante  $\sigma_{xx}$  du tenseur des contraintes résiduelles après projection sur le maillage dédié au problème de rupture (sans la fissure).

Pour la configuration étudiée, le front de fissure se situe dans la bande de fortes contraintes de compression au dessous de la bande de roulement (FIG.3.23). Ces contraintes de compression mènent à une fissure fermée dont les lèvres sont en contact tout au long du cycle de chargement ( $K_I = 0$  sur la FIG.3.24 (a)). Pour le glissement relatif entre les lèvres de la fissure, on observe de même une diminution des valeurs de  $\Delta K_{II}$  en présence des contraintes résiduelles de compression (FIG.3.24 (b)). Les contraintes de compression s'opposent dans ce cas aux glissements relatifs entre les lèvres de la fissure. Ces conclusions ne sont pas générales et dépendront de la position de la fissure dans le champ de contraintes résiduelles, de forts gradients étant présents dans ce champ. En revanche, l'influence des contraintes résiduelles réalistes sur les valeurs des  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{II}$  est prouvée. Ces modifications résulteront en des taux d'accroissement et des directions de propagation différents.



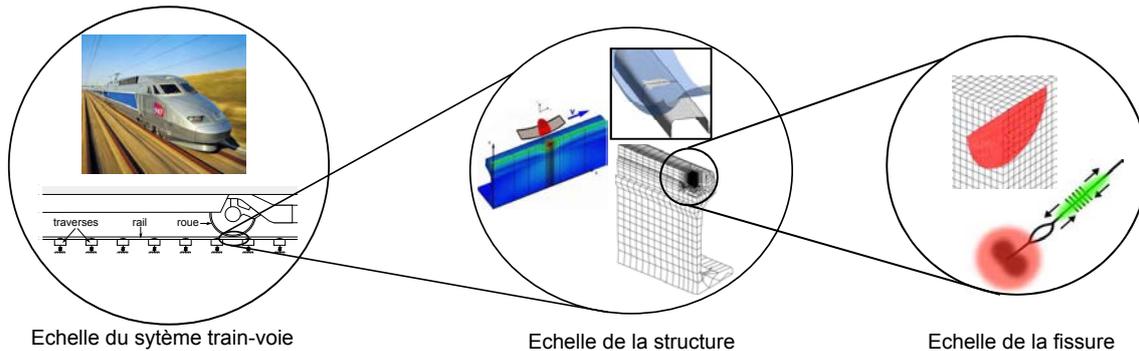
**FIGURE 3.24:** Comparaison des valeurs de (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  obtenues avec l'outil développé dans CASTEM avec et sans contraintes résiduelles.

### **3.1.3 Bilan de l'introduction des phénomènes agissant à l'échelle du rail dans la stratégie XFEM/LATIN à deux échelles**

L'introduction du chargement mobile de contact et la prise en compte de champs initiaux non vierges dans la modélisation d'un cycle de rupture ont été traités. La bonne modélisation d'un cycle de fatigue est assurée par le maillage utilisant des discrétisations adaptées aux différents phénomènes (chargement mobile, zone de K-dominance). Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec un modèle semi-analytique. L'intégration des contraintes plastiques se fait en considérant un état initial non vierge non uniforme mais permanent pour la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture. Elle consiste en l'ajout au second membre du système linéaire de l'étape globale de la LATIN d'un terme d'efforts internes généralisés. Ces contraintes plastique, dites résiduelles, calculées à partir d'un logiciel dédié, permettent l'introduction de champs avec de forts gradients dans la modélisation. Ces gradients influencent la solution non-linéaire du problème de rupture avec contact et frottement. Elles joueront un rôle important dans les mécanismes de propagation. L'ajout de ces phénomènes agissant à l'échelle du rail a été effectué pour des problèmes bi et tri-dimensionnels. Pour une modélisation complète du problème de la fissuration par fatigue des rails, la dernière échelle à introduire est celle du système où la flexion du rail est considérée.

## 3.2 Introduction des phénomènes agissant à l'échelle du système : prise en compte de la flexion du rail

Le but de cette partie est d'introduire l'échelle du système dans la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles (FIG.3.25).



**FIGURE 3.25:** Introduction des phénomènes agissant à l'échelle du système dans la stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles.

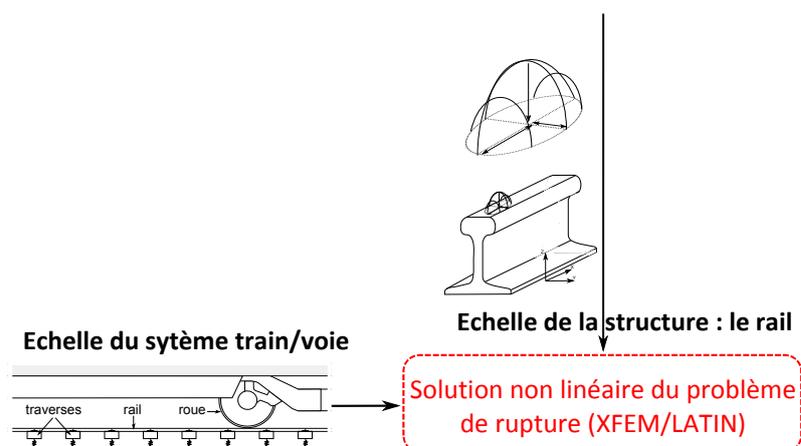
Une fois ce couplage réalisé, il faudra notamment déterminer l'influence de ce phénomène sur les facteurs d'intensité des contraintes. L'étude bibliographique a permis de dégager deux grands types d'étude (partie 1.1.2.1).

- Les travaux qui quantifient l'influence de l'onde de flexion en aval et en amont du chargement. Ces études font appel à des modèles de rail de plusieurs mètres [MEC 06a, HOB 06].
- Les études qui se concentrent sur un tronçon réduit de rail. Les FICs sont alors uniquement évalués lors du passage du chargement mobile sur la fissure. La flexion est alors simplement introduite par des appuis élastiques sous le rail [FAR 12a, FAR 12b].

Ces deux approches ont été étudiées et comparées. La première approche a été investiguée grâce au couplage du modèle de rupture avec un macro-modèle non fissuré (FIG.3.26).

### 3.2.1 Couplage avec un macro-modèle non fissuré pour la prise en compte de la flexion

Le but est ici de s'intéresser à l'onde de flexion en avant et en arrière du contact roue-rail. Il s'agit d'étudier l'influence de cet effet systémique sur la solution non-linéaire du problème de rupture. Pour cela un macro-modèle non fissuré et dédié à la flexion est créé (FIG.3.27). Ce macro modèle vise à obtenir les conditions aux limites en déplacement à appliquer sur un modèle réduit fissuré. Ceci doit permettre de prendre en compte la flexion du rail lorsque que le chargement est éloigné de la fissure tout en conservant des dimensions raisonnables pour le modèle de rupture. Ce problème de structure peut être



**FIGURE 3.26:** Schéma de calcul pour l'introduction des phénomènes agissant à l'échelle du système dans la résolution du problème de rupture.

modélisé à l'aide d'un modèle de poutre et d'un effort ponctuel agissant sur le rail, ou à l'aide d'une modèle élément fini classique où le chargement mobile de contact est utilisé. C'est cette seconde option qui a été sélectionnée. L'hypothèse effectuée lors de ce couplage est que la présence de la fissure ne modifie pas le comportement en flexion du rail. Pour cela, un modèle bi-dimensionnel massique a été créé avec un maillage adaptatif pour la bonne prise en compte des pressions de contact. Ce maillage est mis à jour pour chaque position du chargement. Le maillage étant créé par simple translation de la ligne supérieure du rail, cette étape est instantanée. Il faut tout de même ré-assembler la matrice de rigidité et la factoriser pour chaque pas de temps. Cependant, le temps pris par cette étape, avec le maillage simple de 11685 éléments utilisé pour la modélisation de 21 mètres de rail, est très acceptable (de l'ordre de quelques secondes). De plus, cette étape est exécutée une seule fois et les conditions aux limites extraites peuvent être stockées en vue d'une utilisation sur plusieurs problèmes de rupture différents. Ce modèle est composé de 35 traverses introduites comme étant des appuis élastiques sur une largeur de 20 cm et distantes chacune les unes des autres de 60 cm. Le chargement appliqué est le même qu'introduit pour le chargement mobile dans le problème de rupture. La raideur  $k_y$  des appuis élastiques a été ajustée pour assurer une flèche maximale de 1 mm avec le chargement introduit et il a été fait le choix de  $k_x = 10k_y$ .

L'extraction des conditions aux limites est réalisée pour toutes les positions définies sur le macro-modèle et pour toutes les positions introduites sur le modèle dédié au problème de rupture. Le problème non-linéaire de rupture est ensuite résolu pour l'ensemble de ces positions. Le chargement mobile de contact est uniquement appliqué sur le modèle fissuré pour toutes les positions du chargement définies dans une zone autour de la fissure (noté chargement de contact sur la FIG.3.28). Si le chargement ne se trouve pas dans cette zone, seules les conditions aux limites en flexion sont appliquées et le problème de rupture est résolu avec ces uniques sollicitations. Des appuis élastiques sont également introduits dans le modèle dédié au problème de rupture (FIG.3.28).

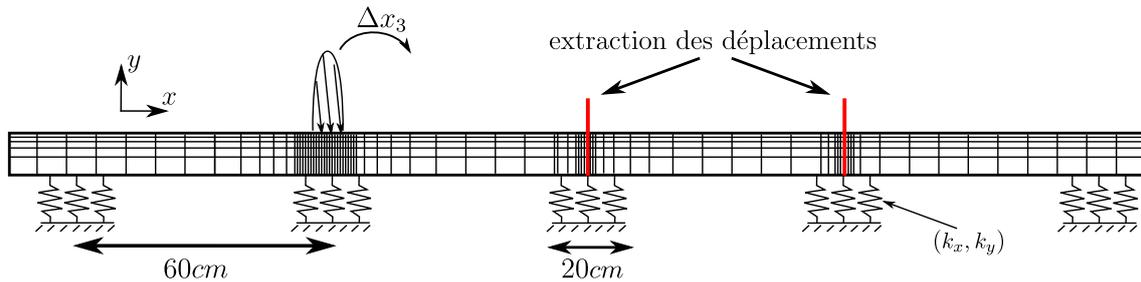


FIGURE 3.27: Représentation schématique du macro modèle élément fini bi-dimensionnel utilisé pour l'extraction des conditions aux limites en déplacement à appliquer au modèle dédié au problème de rupture.

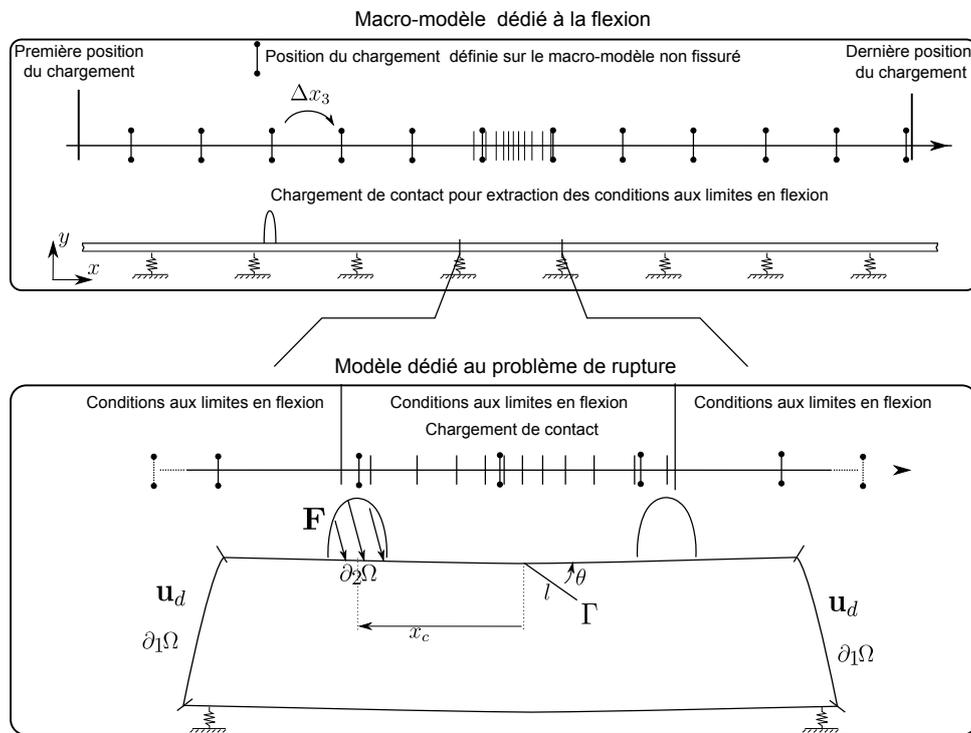


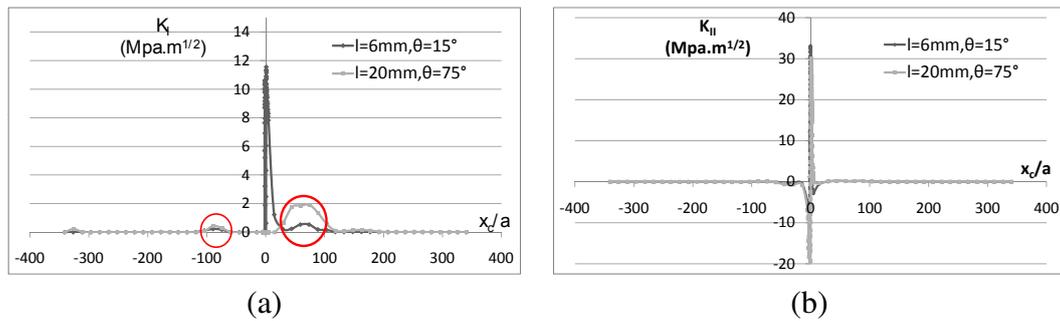
FIGURE 3.28: Couplage de modèle dédié au problème de rupture avec un macro-modèle non fissuré.

La configuration étudiée est une fois de plus le cas de référence défini dans la TAB.3.1. Le chargement de flexion a été appliqué pour  $x_c = -2$  m à  $x_c = 2.5$  m avec  $\Delta x_3 = 10$  mm. Ce choix a été fait afin d'étudier l'influence de la flexion du rail en amont et en aval du passage du chargement sur les FICs. Des discrétisations spatiales et temporelles identiques à la partie 3.1.1.3 sont utilisées.

L'analyse des résultats présentés sur la FIG.3.29 (a) montre que pour une fissure inclinée de  $15^\circ$  et longue de 6 mm, l'onde de flexion n'ouvre que très légèrement la fissure.  $K_I$  est dans ce cas inférieur à  $1 \text{ MPa.m}^{1/2}$ . Si ce résultat est essentiellement la conséquence de

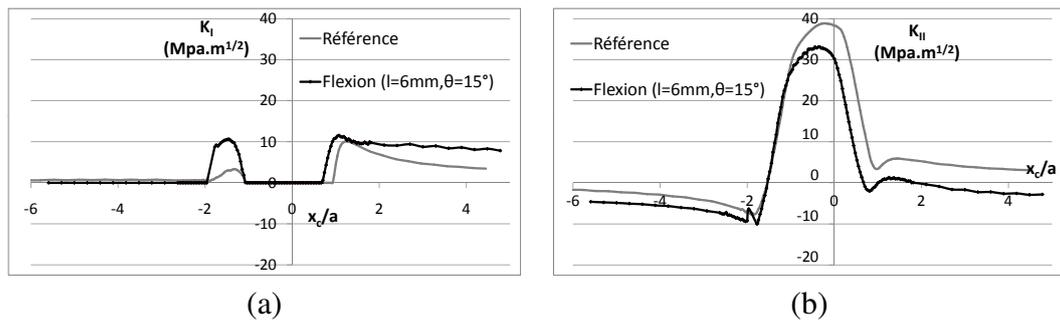
### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

la géométrie initiale de la fissure, le même calcul a été effectué avec une fissure longue de 20 mm et inclinée de 75°. Cependant même avec cette fissure longue et presque verticale, l'onde de flexion ne permet pas de dépasser la valeur de 2 MPa.m<sup>1/2</sup> pour  $K_I$  (marqué  $l = 20\text{mm}$ ,  $\theta = 75^\circ$  sur la FIG.3.29 (a)). On note également que l'onde de flexion n'a pas d'influence sur  $K_{II}$  lorsque le chargement est éloigné.



**FIGURE 3.29:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  obtenus dans deux configurations différentes par couplage avec le macro-modèle non fissuré pour l'évaluation de l'influence de l'onde de flexion.

On étudie à présent l'influence de la flexion introduite par couplage avec le macro-modèle lors du passage du chargement sur la fissure. La FIG.3.30 présente les résultats obtenus pour ce cas de référence (TAB.3.1) sans et avec la flexion lors du passage du chargement sur la fissure. On observe alors que pour la configuration considérée, l'ajout de contraintes aux limites en flexion modifie notablement la valeur de  $\Delta K_I$  avant le passage de la roue sur la fissure. La fissure est également ouverte plus longuement une fois le chargement passé. En revanche dans ce cas, on observe une diminution de la valeur moyenne de  $K_{II}$  avec une légère contraction des amplitudes  $\Delta K_{II}$ .



**FIGURE 3.30:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  obtenus avec et sans flexion lors du passage du chargement sur la fissure.

Pour conclure, la flexion possède une influence uniquement lors du passage de la roue sur la fissure. Ce point rejoint les conclusions de l'étude bibliographique (partie 1.1.2.1). L'introduction de ce phénomène pourra donc se faire uniquement par l'introduction d'appuis élastiques aux limites du domaine. La section suivante s'attache à cela.

### 3.2.2 Modèle réduit avec appuis élastiques

Nous avons vu que l'onde de flexion en amont et en aval du chargement n'avait qu'une très faible influence sur les FICs. A l'inverse, l'influence de la flexion au moment du passage du chargement sur la fissure a été mise en évidence. On propose donc de laisser de côté le macro modèle de flexion et d'introduire uniquement des appuis élastiques sur le modèle réduit fissuré (FIG.3.31). Pour cela le domaine considéré est allongé pour correspondre à l'espacement entre deux traverses (600 mm). Les raideurs des appuis élastiques sont identiques à celles introduites pour le macro-modèle non fissuré. On observe ici l'avantage du maillage multi-échelles mis en place. L'augmentation de la taille du domaine considéré n'introduit que très peu d'éléments finis supplémentaires dans les simulations. Les déplacements selon la direction d'avancement du chargement sont bloqués sur les bords du domaine.

La FIG.3.32 présente les résultats obtenus avec ce modèle réduit (annoté Flexion sur modèle réduit sur la FIG.3.32) pour la même configuration en comparaison de ceux obtenus sans flexion (annoté Référence) et avec le couplage avec le macro modèle (annoté Macro modèle de flexion). On remarque alors que l'introduction d'appuis élastiques permet d'obtenir les mêmes résultats qu'avec le couplage avec le macro-modèle de flexion. L'introduction de l'échelle systémique n'est donc pas nécessaire et seule l'introduction d'appuis élastiques sur le modèle initial est suffisante pour la prise en compte de ce phénomène.

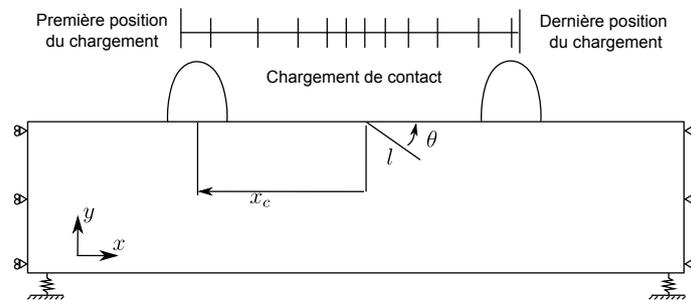


FIGURE 3.31: Modèle réduit sur appuis élastiques avec conditions de symétrie aux limites.

### 3. Approche multi-échelles des mécanismes de fissuration par fatigue des rails

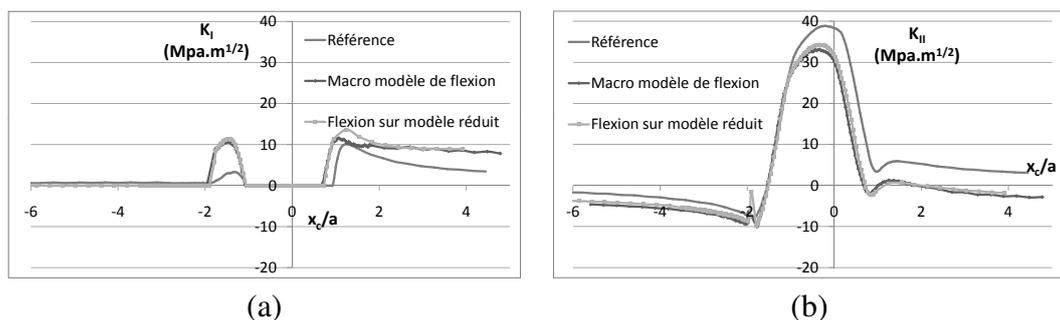


FIGURE 3.32: (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  obtenus avec le macro-modèle non fissuré, le modèle réduit fissuré et sans flexion.

### 3.3 Bilan de l'approche multi-échelles

Les différents phénomènes inhérents à l'application visée ont été introduits dans le modèle X-FEM/LATIN. La bonne modélisation du chargement mobile de contact a été étudiée. Cette dernière est assurée par l'utilisation d'un maillage convergé spatialement et d'une description temporelle adaptée au problème quasi-statique non-linéaire. Cette modélisation a été validée par comparaison avec un modèle semi-analytique basé sur la théorie des dislocations. Cette étape de validation, par comparaison des FICs avec ceux disponibles dans la littérature, montre également l'intégration correcte des termes de frottement dans le calcul des intégrales de domaine.

A partir de là, la possibilité d'ajouter un champ initial non uniforme mais permanent, sous l'hypothèse d'un comportement stabilisé élastique du rail, a été développée. Cet état initial non vierge pour la résolution du problème de mécanique de la rupture a été introduit comme un vecteur d'efforts internes généralisés. La stratégie X-FEM/LATIN à deux échelles développée dans le chapitre 2 permet d'ajouter ce terme au second membre du système linéaire discrétisé décrivant l'équilibre de la structure fissurée. La procédure de transfert des champs, du maillage utilisé pour le calcul de l'état stabilisé du rail vers celui utilisé pour la résolution du problème de rupture, a également été précisée.

Tous ces travaux ont été réalisés pour des problèmes bi et tri-dimensionnels. L'ajout d'un état initial non vierge dans la simulation de référence a souligné le rôle important des contraintes résiduelles sur les FICs. Cela laisse présager une modification des mécanismes de propagation.

Enfin, la flexion du rail, décrite comme un phénomène provenant de l'échelle du système, a été étudiée. Elle a été modélisée par couplage du modèle de rupture avec un macro-modèle dédié non fissuré. Cette étude bi-dimensionnelle a mis en évidence la très faible influence de l'onde de flexion sur la solution du problème de rupture. En revanche, l'introduction d'appuis élastiques a démontré l'importance du fléchissement du rail lors du passage du chargement sur la fissure. Avec ces conditions aux limites, les valeurs des

FICs sont modifiées. On observe en effet une plus longue séquence d'ouverture de la fissure avant et après le passage du chargement et une diminution de  $\Delta K_{II}$ .

Les développements réalisés pour le couplage de l'échelle locale avec celle de la structure dans le chapitre précédent et l'ajout des contraintes résiduelles permettent une modélisation complète du problème de rupture en lien avec l'application visée. Le chapitre suivant étudie l'influence des différents paramètres du modèle sur les mécanismes de propagation des fissures de fatigue.



## Chapitre 4

# Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Définition des paramètres utilisés . . . . .</b>	<b>132</b>
<b>4.2</b>	<b>Influence de l'échelle locale . . . . .</b>	<b>133</b>
4.2.1	Coefficient de frottement interfacial . . . . .	134
4.2.2	Orientation de la fissure . . . . .	136
4.2.3	Longueur initiale de la fissure . . . . .	141
<b>4.3</b>	<b>Influence de l'échelle de la structure . . . . .</b>	<b>145</b>
4.3.1	Contact roue-rail . . . . .	145
4.3.2	Introduction d'un état initial non-vierge . . . . .	148
<b>4.4</b>	<b>Etude des réseaux de fissures . . . . .</b>	<b>152</b>
4.4.1	Etude d'une configuration "squat" . . . . .	152
4.4.2	Etude d'un réseau de fissures parallèles . . . . .	155
4.4.3	Introduction des contraintes résiduelles dans le réseau de fissures . . . . .	159
<b>4.5</b>	<b>Synthèse de l'étude numérique . . . . .</b>	<b>162</b>
<b>4.6</b>	<b>Estimation des vitesses de fissuration mesurées : étude préliminaire . . . . .</b>	<b>163</b>

---

Dans ce dernier chapitre, une étude numérique bi-dimensionnelle des paramètres influençant les mécanismes de propagation est menée. L'influence des paramètres locaux est tout d'abord étudiée. L'étude paramétrique se tourne ensuite vers les paramètres agissant à l'échelle de la structure. Ces études mettent en évidence l'influence d'un paramètre, sur d'une part les facteurs d'intensité des contraintes dans la configuration initiale étudiée et d'autre part sur la modification du trajet et des vitesses de propagation qui en découle. Enfin, la dernière partie introduit un travail préliminaire effectué pour la comparaison des résultats numériques avec les accroissements mesurés sur le réseau ferré national.

### 4.1 Définition des paramètres utilisés

Le cas étudié est celui d'une fissure débouchante. Pour toutes les simulations menées, la direction de recherche et le terme de stabilisation sont choisis selon les formules proposées dans ce mémoire ( $k = E/l$  et  $\xi = 1/k$ ). Les valeurs de ces paramètres sont mis à jour automatiquement à chaque début de cycle lors de l'assemblage du système linéaire matriciel. La taille des éléments de la zone dans laquelle la fissure est placée assure un ratio  $l_0/h = 120$ .  $h$  est la longueur des cotés des éléments carrés enrichis. La taille des éléments d'interface est choisie égale à  $h$  (cf. TAB.4.1). Ces éléments sont non conformes avec les éléments de structure. Le module de Young est fixé à  $E = 210$  GPa et le coefficient de Poisson est choisi égal à 0.3 (cf. TAB.4.2). Le chargement considéré est Herztien en glissement complet et identique à celui utilisé dans le chapitre précédent (cf. TAB.4.3). Il déroule d'une résolution cylindre-plan avec un effort appliqué de 90kN. La longueur sur laquelle le chargement se déplace de  $\Delta x_1$  est égale à  $6a$ , centrée sur l'extrémité débouchante de la fissure. Selon la convention définie sur la FIG.4.1, lorsque  $\mu_{roue-rail} > 0$ , l'effort tangentiel est orienté dans le sens du mouvement du chargement et le train est en situation de freinage. Inversement, lorsque  $\mu_{roue-rail} < 0$  le train est en phase d'accélération. Le critère utilisé pour la détermination de la direction de propagation est l'extension de Pineau et Hourlier utilisant  $\max_{\theta} \Delta K_{eq}^*(\theta)$  pour les raisons précisées dans la partie 2.7.2.2. Le facteur  $n$  présent dans l'algorithme utilisé pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue (cf. FIG.2.29) est défini égal à 4%. Cette valeur assure une propagation lisse des fissures, c'est-à-dire qu'elle semble vérifier l'hypothèse de linéarité inhérente au saut de cycles. La loi de propagation utilisée est celle issue des essais réalisés sur machine à galets pour les raisons exprimées dans la partie 1.2.6 :

$$\frac{da}{dN} = 2.10^{-9} (\Delta K_{eq})^{3.33} \quad (4.1)$$

avec

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{\Delta K_I^2 + 0.772 * \Delta K_{II}^2} \quad (4.2)$$

$k$ (Pa.m <sup>-1</sup> )	$\xi$ (m.Pa <sup>-1</sup> )	$n$ (%)	$l_0/h$	taille élément interface
$E/l$	$1/k$	4	120	$h$

**TABLE 4.1:** Paramètres numériques utilisés.

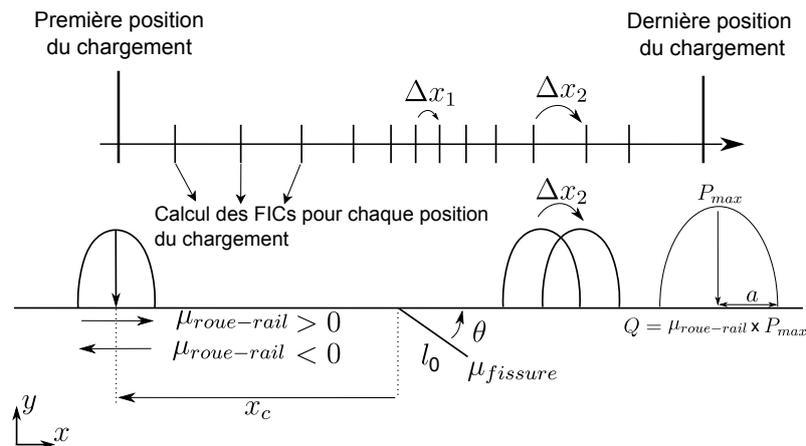
$E$ (GPa)	$\nu$
210	0.3

**TABLE 4.2:** Paramètres matériaux utilisés.

$P_{max}$ (MPa)	$2a$ (mm)	$l_0/\Delta x_1$	$\Delta x_2$ (mm)
845	13.5	24	2

**TABLE 4.3:** Paramètres utilisés pour la définition du chargement hertzien.

$l_0$ (mm)	$\theta$ (°)	$\mu_{fissure}$	$\mu_{roue-rail}$	$P_{max}$ (MPa)	$2a$ (mm)
6	15	0.5	0.025	845	13.5

**TABLE 4.4:** Paramètres de référence utilisés.**FIGURE 4.1:** Définition des paramètres dans la configuration initiale pour la modélisation quasi-statique d'un cycle utilisant un chargement hertzien en glissement complet.

## 4.2 Influence de l'échelle locale

Nous étudions l'influence de paramètres agissant à l'échelle locale sur la propagation des fissures. L'étude porte sur les paramètres suivants :

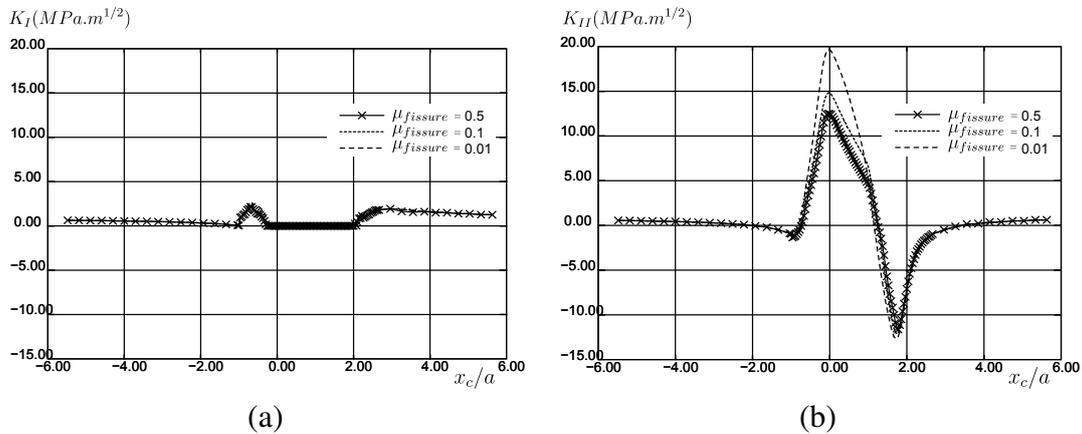
- le coefficient de frottement entre les lèvres de la fissure  $\mu_{fissure}$  ;
- l'orientation initiale de la fissure  $\theta$  ;
- la longueur initiale de la fissure  $l_0$ .

L'influence du coefficient de frottement interfacial est tout d'abord étudiée.

### 4.2.1 Coefficient de frottement interfacial

Dans cette partie, seules varient les valeurs du coefficient de frottement entre les lèvres de la fissure. Les autres paramètres sont fixés et gardent les valeurs définies dans le TAB.4.4. Trois cas sont étudiés, un coefficient de frottement très faible, un intermédiaire et un élevé ( $\mu_{fissure} = 0.01; 0.1; 0.5$ ).

La FIG.4.2 (b) présente les variations de  $K_{II}$  au cours du cycle. Une augmentation du coefficient de frottement se traduit par un glissement relatif des lèvres moins important et une diminution de  $\Delta K_{II}$ . Le coefficient de frottement local n'a évidemment aucune influence sur l'ouverture de la fissure et  $\Delta K_I$  reste inchangé (FIG.4.2 (a)). Ces résultats simples rejoignent les résultats d'autres études menées [DUB 02, FLE 09].



**FIGURE 4.2:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour différents coefficients de frottement entre les lèvres de la fissure  $\mu_{fissure}$  ( $l = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

$\Delta K_{II}$  est donc dépendant du coefficient de frottement local. Cela se traduit par des modifications des trajets de propagation des fissures (FIG.4.3). Le trajet de propagation est divisé en deux phases. Durant la première phase, une propagation coplanaire de la fissure est obtenue jusqu'à une profondeur  $z_b = 3.27; 3.98; 1.75$  mm pour respectivement les trois valeurs de  $\mu_{fissure} = 0.01; 0.1; 0.5$  (cf TAB.4.5). La seconde phase prédit des trajets de fissuration différents selon le coefficient de frottement appliqué. Cette seconde phase montre des changements faibles de direction de propagation. Ces faibles changements de direction mènent à des vitesses de propagation augmentant de manière continue avec l'allongement de la fissure (FIG.4.4).

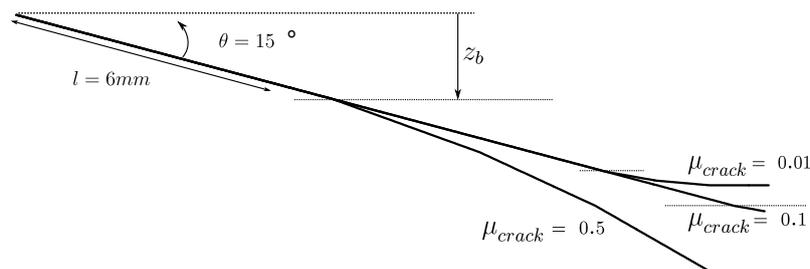
Les conclusions tirées de l'étude des FICs dans la configuration initiale restent valables avec l'augmentation de la taille des fissures dans ces cas de propagation lisse. Des glissements relatifs aisés entre les lèvres engendrent donc une augmentation plus rapide de la vitesse de propagation des fissures avec l'allongement de la fissure qu'avec un coefficient de frottement élevé (FIG.4.4). Pour un allongement donné, ces écarts de taux d'accroissement mènent à des nombres de cycles différents. Ainsi, il faut 71 900 cycles

$\mu_{fissure}$		0.01	0.1	0.5
Profondeur de branchement $z_b$	(mm)	3.27	3.98	1.75
Nombre de cycles	(en milliers de cycles)	22.9	38.4	71.9
Trafic équivalent (tonnage)	(kt)	206.1	345.6	647.1
Allongement	(mm)	8.79	8.79	8.79

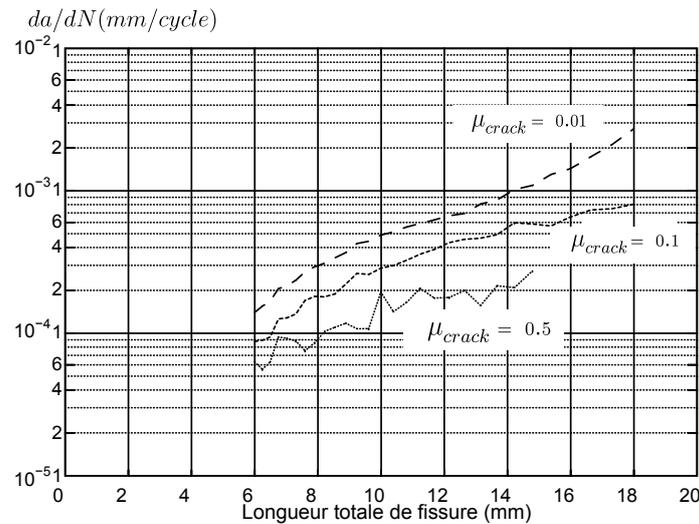
**TABLE 4.5:** Profondeur de branchement, nombre de cycles, tonnage équivalent et longueur finale pour différents coefficients de frottement interfacial  $\mu_{fissure}$  ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

de chargement à la fissure avec un coefficient de frottement de  $\mu_{fissure} = 0.5$  pour atteindre un allongement de 8.79mm. Pour la fissure avec des glissements relatifs importants ( $\mu_{fissure} = 0.01$ ), ce nombre chute à 22 900 cycles (TAB.4.5).

Il semble donc que le coefficient de frottement interfacial ne modifie que le glissement entre les lèvres de la fissure. Il influence principalement le taux d'accroissement des fissures. Ces conclusions ne sont cependant pas générales et dépendent également des autres paramètres définissant la configuration étudiée.



**FIGURE 4.3:** Trajets de fissuration calculés pour différents coefficients de frottement local  $\mu_{fissure}$  (23 pas de propagation,  $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).



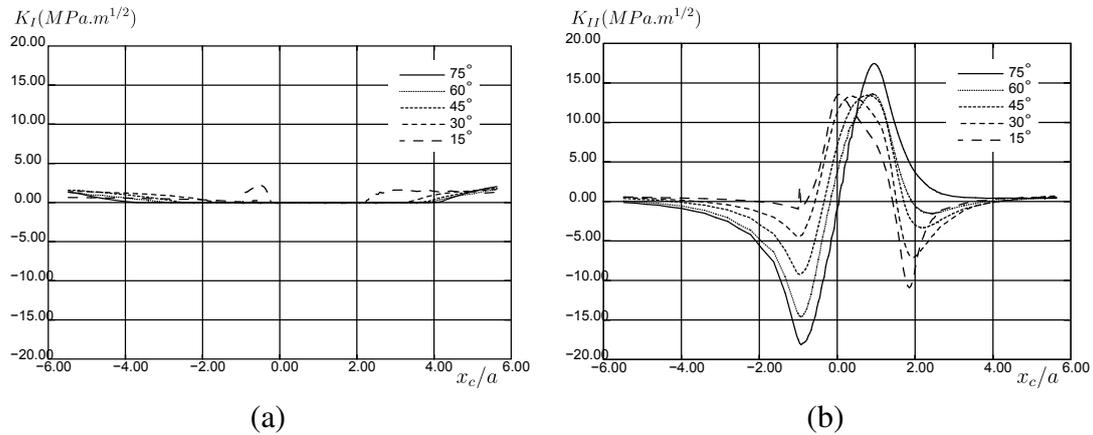
**FIGURE 4.4:** Taux d'accroissement des fissures (mm/cycle) en fonction de la longueur de fissure (mm) pour différents coefficients de frottement interfacial  $\mu_{fissure}$  ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

#### 4.2.2 Orientation de la fissure

L'influence de l'orientation initiale de la fissure sur les sollicitations subies par la fissure est à présent étudiée. Seule l'orientation initiale de la fissure varie et les autres paramètres ont les valeurs définies dans le TAB.4.4. Différents angles  $\theta$  sont testés ( $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $75^\circ$ ), permettant de simuler une fissure faisant un angle faible avec la bande roulement jusqu'à une fissure proche de la verticale.

Les variations de  $K_I$  et  $K_{II}$  au cours du cycle sont tracées en fonction de la position du chargement (cf. FIG.4.5 (a) et FIG.4.5 (b)). Pour le chargement considéré, un angle faible diminue le glissement relatif entre les lèvres mais facilite l'ouverture de la fissure. Dans ce cas, le front de la fissure se trouve proche de la bande de roulement et le chargement tangentiel appliqué influence encore le comportement en front de fissure, facilitant son ouverture. À l'inverse, lorsque la fissure s'approche de la verticale, de par la configuration géométrique, le chargement normal facilite le glissement entre les lèvres. Par conséquent,  $\Delta K_{II}$  augmente avec l'angle  $\theta$  tandis que  $\Delta K_I$  diminue.  $\Delta K_{II}$  est cependant plus faible pour les fissures inclinées de  $30^\circ$  et  $45^\circ$  que pour un angle de  $15^\circ$ . Ces angles intermédiaires ont pour effet de limiter la contribution du chargement tangentiel dans le glissement relatif sans réellement permettre à la composante normale du chargement de compenser cette diminution.

La force motrice de la propagation sous un chargement en mode mixte impliquant des mécanismes de tension et de glissement en front de fissure, les trajets et vitesses de fissuration en sont modifiés. Dans la configuration étudiée dans ce paragraphe, la fissure branche vers l'âme du rail quelle que soit la valeur de  $\theta$ . Il est intéressant de noter que, lorsque les fissures ont branché, les directions de propagation prédites sont quasiment pa-



**FIGURE 4.5:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour différentes orientations initiales  $\theta$  ( $l = 6\text{mm}$ ,  $\mu_{\text{fissure}} = 0.5$ ,  $\mu_{\text{roue-rail}} = 0.025$ ).

$\theta$		15°	30°	45°	60°
Nombre de cycles	(milliers de cycles)	71.9	122.6	85.8	46.7
Trafic équivalent (tonnage)	(kt)	647.1	1103	772.2	420.3
Allongement	(mm)	8.79	8.79	8.79	8.79

**TABLE 4.6:** Nombre de cycles, tonnage équivalent pour un même allongement et différentes orientations initiales  $\theta$  ( $l = 6\text{mm}$ ,  $\mu_{\text{roue-rail}} = 0.5$ ,  $\mu_{\text{roue-rail}} = 0.025$ ).

rallèles, faisant un angle autour  $75^\circ$  avec la surface du rail. Cette conclusion est renforcée par la propagation coplanaire de la fissure dont l'angle initial est de  $\theta = 75^\circ$ .

En outre, la profondeur de branchement semble décrire un cercle de rayon très proche de  $a$  (FIG.4.6). La fissure ayant une longueur initiale de 6 mm, valeur proche de  $a$  également, cette remarque demandera à être étudiée plus en détail.

Pour les fissures dont l'angle de branchement au cours de la propagation est faible (pour les orientations initiales  $\theta = 15^\circ ; 60^\circ ; 75^\circ$ ), une augmentation lisse et similaire de la vitesse de propagation avec l'allongement des fissures est obtenue (FIG.4.7). En revanche, pour les angles intermédiaires ( $\theta = 30^\circ ; 45^\circ$ ), les vitesses initiales sont plus faibles. Une fois que la fissure branche avec un coude plus prononcé, l'augmentation relative du mode II est plus importante qu'avec les autres angles (FIG.4.8). Ceci se traduit par une rapide augmentation de la vitesse de fissuration pour  $\theta = 45^\circ$  (FIG.4.7), jusqu'à dépasser le taux d'accroissement de la fissure faiblement inclinée ( $\theta = 15^\circ$ ) qui n'a pas branché. Après 21 pas de propagation, les deux configurations  $\theta = 45^\circ$  et  $\theta = 75^\circ$  mènent à des sollicitations similaires (FIG.4.8).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

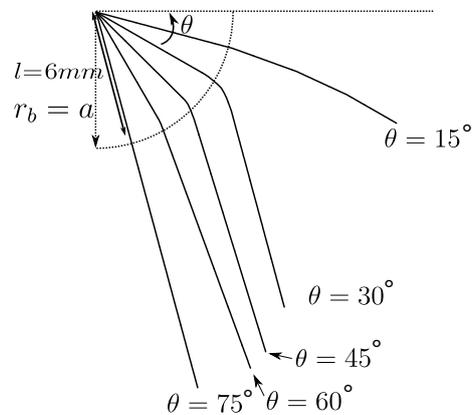


FIGURE 4.6: Trajets de propagation calculés pour différents angles  $\theta$  ( $l_0 = 6 \text{ mm}$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

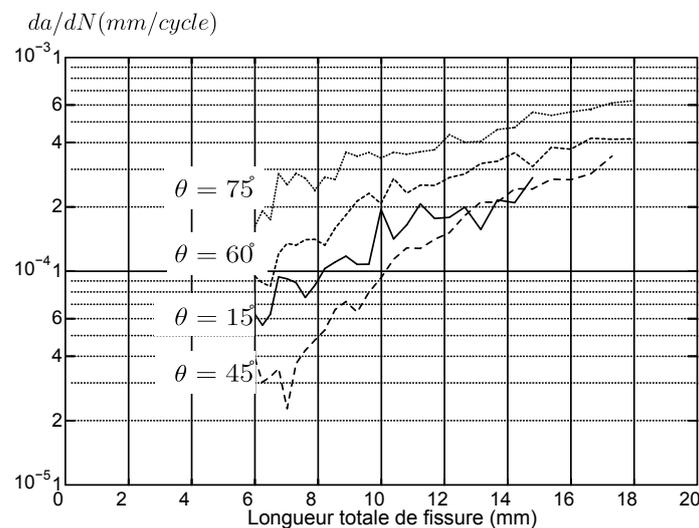
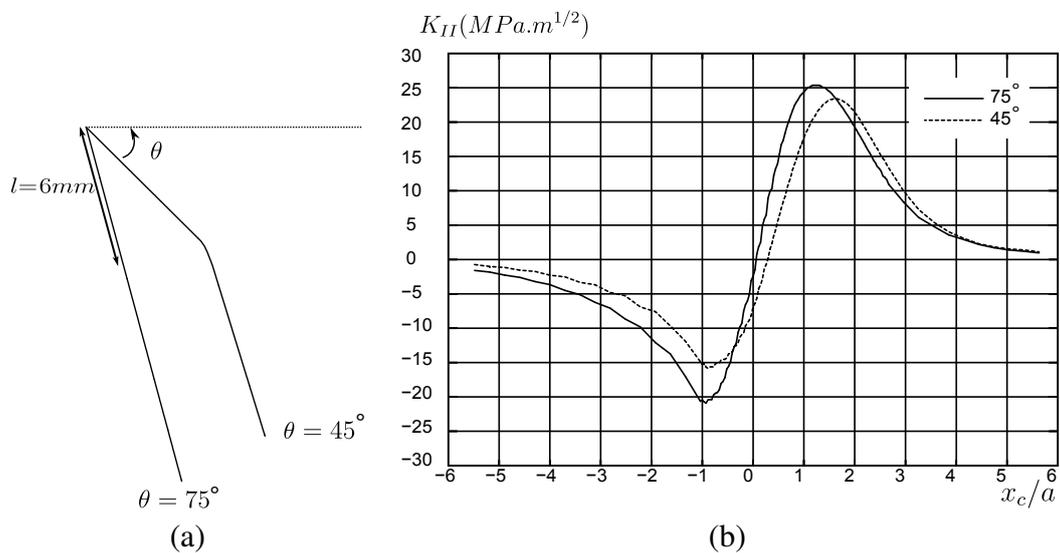


FIGURE 4.7: Taux d'accroissement (mm/cycle) selon la longueur totale de la fissure (mm) pour différentes orientations initiales  $\theta$  ( $l_0 = 6 \text{ mm}$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).



**FIGURE 4.8:**  $K_{II}$  pour  $\theta = 45^\circ$  et  $\theta = 75^\circ$  après 21 pas de propagations ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

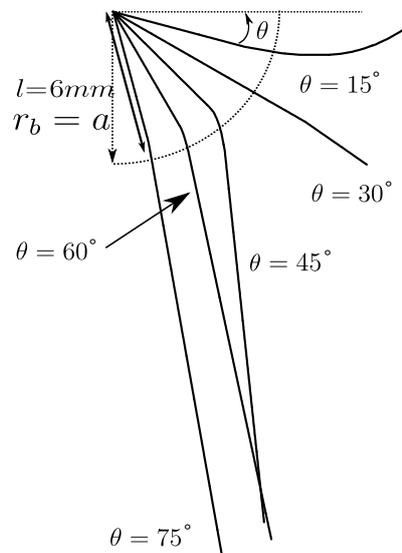
#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

Une seconde configuration est étudiée. Le coefficient de frottement entre la roue et le rail utilisé est à présent de  $-0.1$ . L'effort tangentiel agissant à la surface du rail est dans ce cas situé dans le sens inverse à celui de l'avancement du chargement (cf. FIG.4.1).

Nous observons dans ce cas, pour un angle  $\theta$  de  $15^\circ$ , un branchement de la fissure vers la surface. Pour les angles supérieurs ou égaux à  $30^\circ$ , les fissures branchent en profondeur. Cette conclusion est cohérente avec les méthodes de mesures utilisées pour la détection et le suivi des fissures. Ces techniques sont essentiellement basées sur le retour d'expérience et utilisent des capteurs à ultrason faisant un angle de  $68^\circ$  avec la surface du rail. Cet angle est utilisé afin d'émettre des ondes perpendiculairement aux fissures plongeantes dans le rail, dont l'angle initial est de  $22^\circ$ .

De plus, une étude simplifiée portant également sur l'influence de l'inclinaison initiale de fissures courtes débouchantes ( $l = 1 \text{ mm}$ ), avec un chargement tangentiel important et orienté dans le même sens que ce cas d'étude ( $\mu_{roue-rail} = -0.45$ ), met en évidence le même type de comportement [BRO 12]. Les trajets de propagation  $y$  sont prédits vers la surface du rail pour des inclinaisons initiales inférieures à  $30^\circ$  et vers l'âme du rail pour des angles plus importants.

Il semble donc que pour une inclinaison initiale, supérieure ou égale à  $30^\circ$ , la propagation des fissures soit plongeante dans le rail. Nous nous intéressons à présent à l'influence de la longueur initiale de la fissure sur les FICs et trajets de propagation.



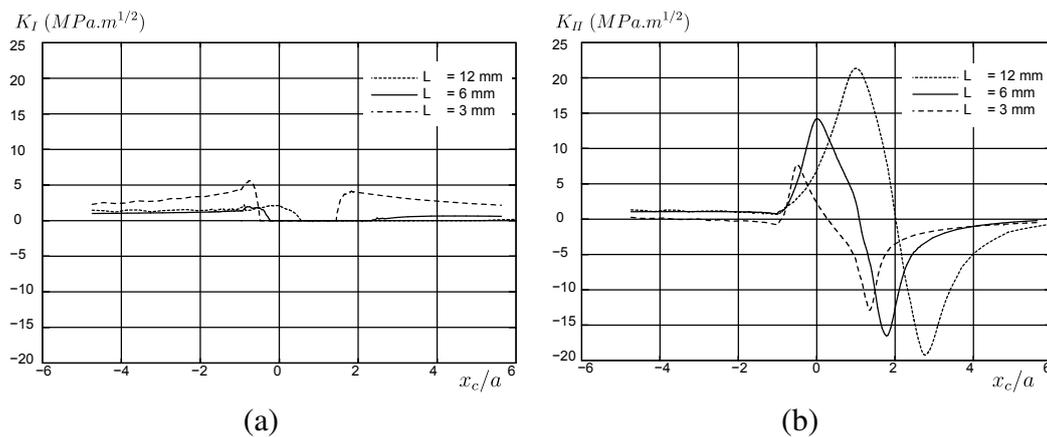
**FIGURE 4.9:** Trajets de propagation calculés pour différents angles  $\theta$  ( $l_0 = 6 \text{ mm}$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = -0.1$ ).

### 4.2.3 Longueur initiale de la fissure

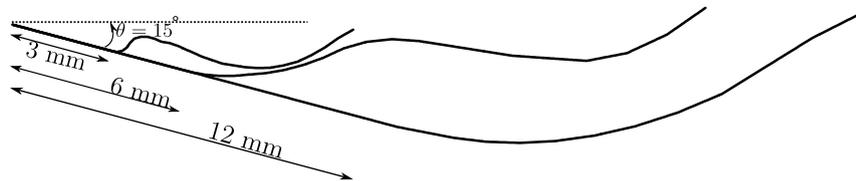
Trois longueurs initiales sont testées ( $l = 3 ; 6 ; 12$  mm). Le coefficient de frottement entre la roue et le rail est conservé égal à  $-0.1$  ( $\mu_{roue-rail} = -0.1$ ). Les autres paramètres sont définis dans le TAB.4.4. Les paramètres numériques des TAB.4.1 et TAB.4.3 sont ajustés selon la longueur initiale utilisée ( $h$  et  $\Delta x_1$ ).

La FIG.4.10 présente l'évolution des FICs pour les trois configurations initiales considérées. Lorsque la fissure est longue ( $l = 12$  mm), le chargement tangentiel n'est plus suffisant pour ouvrir la fissure jusqu'à son front. Les valeurs maximales de  $K_I$  diminuent ainsi que la partie du cycle pendant laquelle la fissure est ouverte (FIG.4.10 (a)). En revanche, l'augmentation de la taille de la fissure provoque une augmentation de  $K_{II}$ .

Pour la configuration étudiée, la simulation prédit la formation d'une écaille pour les trois longueurs considérées (FIG.4.11). Avec cette orientation générale des trajets de propagation, l'étude du nombre de cycles nécessaire pour atteindre un allongement donné (TAB.4.7) révèle que la fissure courte se propage lentement comparée aux deux autres.



**FIGURE 4.10:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour différentes longueurs initiales  $l$  ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = -0.1$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).



**FIGURE 4.11:** Trajets de propagation simulés pour trois longueurs initiales de fissure  $l$  avec  $\mu_{roue-rail} < 0$  ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = -0.1$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

---

$l$	(mm)	3	6	12
Nombre de cycles	(milliers de cycles)	129.5	78.0	34.2
Trafic équivalent (tonnage)	(kt)	1165.5	702	307.8
Allongement	(mm)	8.2	15.7	15

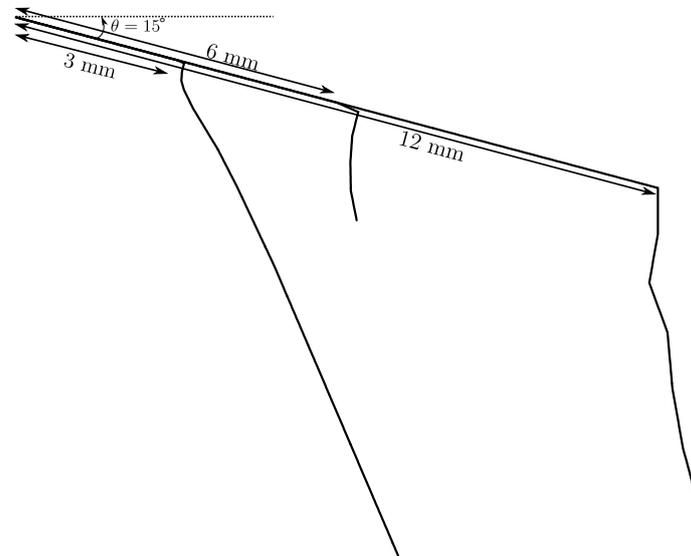
**TABLE 4.7:** Nombre de cycles, tonnage équivalent et allongement pour trois longueurs initiales  $l$  avec  $\mu_{roue-rail} < 0$  ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = -0.1$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).

D'autres travaux utilisant un effort tangentiel orienté dans le sens d'avancement du chargement prédisent une orientation de branchement coplanaire ou plongeante selon la longueur de la fissure [DUB 02]. Ces travaux étudient cependant la propagation des fissures pour un unique pas de propagation. La configuration considérée dans cette étude est simulée pour les trois longueurs étudiées ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.4$ ,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).

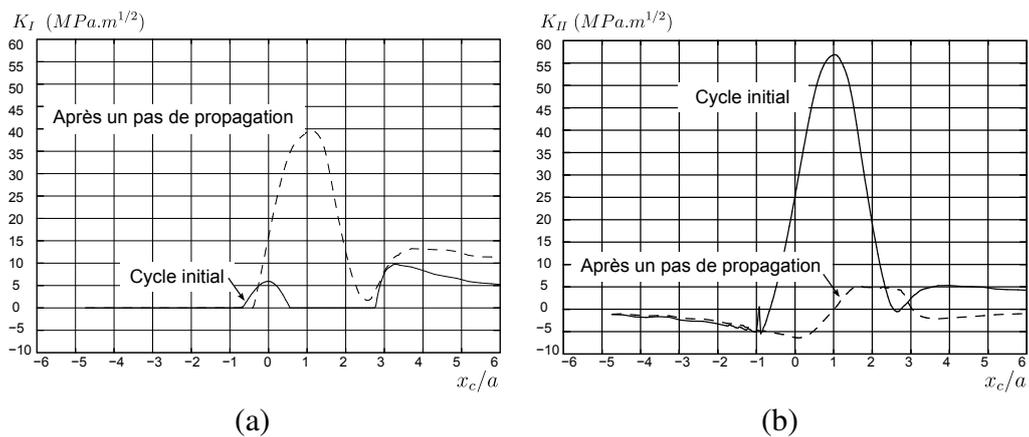
La FIG.4.12 présente les trajets de propagation obtenus. Si la fissure la plus courte ( $l = 3$  mm) propage de manière quasi coplanaire pendant 2 pas de propagation, un trajet plongeant dans le rail est prédit ensuite. Ce comportement est obtenu pour les deux autres longueurs considérées ( $l = 6$ ; 12 mm) dès le premier pas de propagation. Ces résultats sont cohérents avec ceux présentés dans [DUB 02].

Les FICs après le premier pas de propagation pour la fissure longue de 12 mm sont présentés sur la FIG.4.13. On observe clairement un changement dans les sollicitations. Après branchement, les fissures sont principalement sollicitées en mode I. La partie branchée verticale de la fissure est en effet ouverte par la composante normale du chargement. Avec cet effort tangentiel important, une diminution de la vitesse de fissuration après branchement est observée. L'augmentation du mode I ne compense pas la diminution du mode II (FIG.4.14).

La propagation plongeante semble une fois de plus fortement liée à l'orientation de l'effort tangentiel. Ce point est développé dans la partie suivante. Ces résultats montrent l'indépendance à la longueur initiale de la macro-fissure sur le trajet global de propagation (vers la surface ou plongeante). Cette conclusion est également proposée par d'autres auteurs [BRO 12].

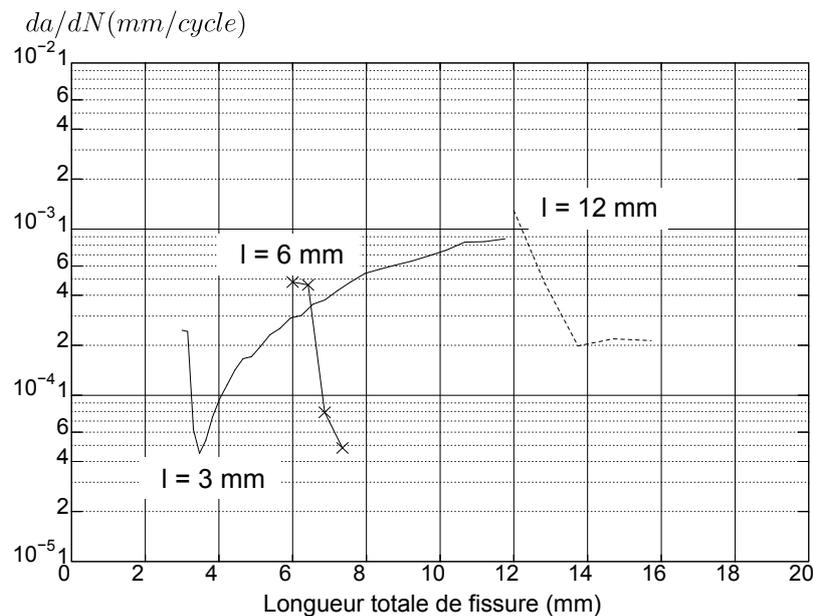


**FIGURE 4.12:** Trajets de propagation simulés pour trois longueurs initiales de fissure  $l$  avec  $\mu_{roue-rail} > 0$  ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.4$ ,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).



**FIGURE 4.13:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  dans la configuration initiale avant et après branchement pour  $l = 12$  mm ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.4$ ,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails



**FIGURE 4.14:** Taux d'accroissement (mm/cycle) selon la longueur totale de la fissure (mm) pour trois longueurs initiales  $l$  avec  $\mu_{roue-rail} > 0$  ( $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.4$ ,  $\mu_{fissure} = 0.1$ ).

L'étude des phénomènes agissant sur l'échelle de la fissure a révélé la forte influence de l'inclinaison initiale de la fissure sur son trajet. Les fissures formant un angle initial de plus  $30^\circ$  avec la table de roulement sont néanmoins toujours prédites plongeantes. A l'inverse, la longueur initiale de la fissure ne semble pas avoir d'incidence sur le trajet global de propagation. De même, le coefficient de frottement entre les lèvres de la fissure ne modifie que légèrement les trajets de propagation. Il a cependant une forte influence sur les vitesses de fissuration. Enfin, cette étude laisse entrevoir le rôle majeur du sens de l'effort tangentiel sur la direction globale de propagation des fissures. Ce sera l'objet de la partie suivante.

### 4.3 Influence de l'échelle de la structure

Cette partie étudie l'influence des phénomènes agissant à l'échelle de la structure sur les mécanismes de propagation. L'étude porte sur les paramètres suivants :

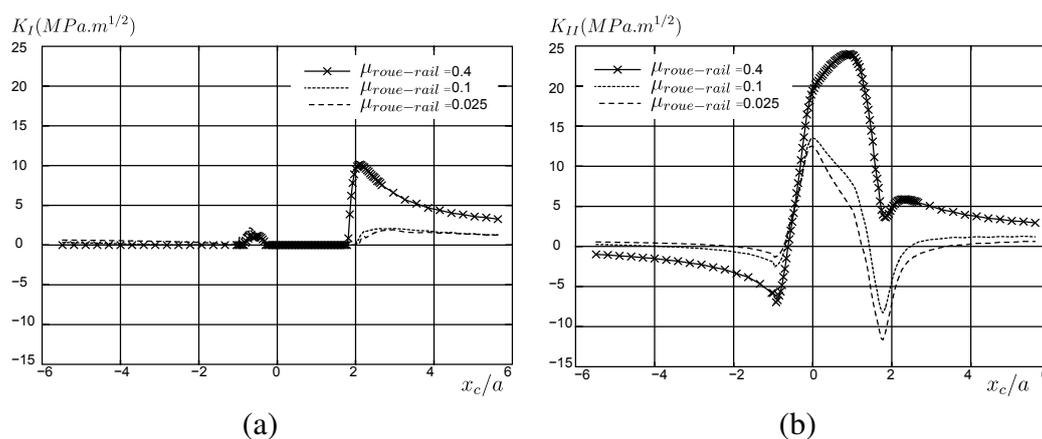
- le coefficient de frottement entre la roue et le rail  $\mu_{roue-rail}$  ;
- l'introduction d'un état initial non vierge complexe.

L'influence du coefficient de frottement est tout d'abord étudiée.

#### 4.3.1 Contact roue-rail

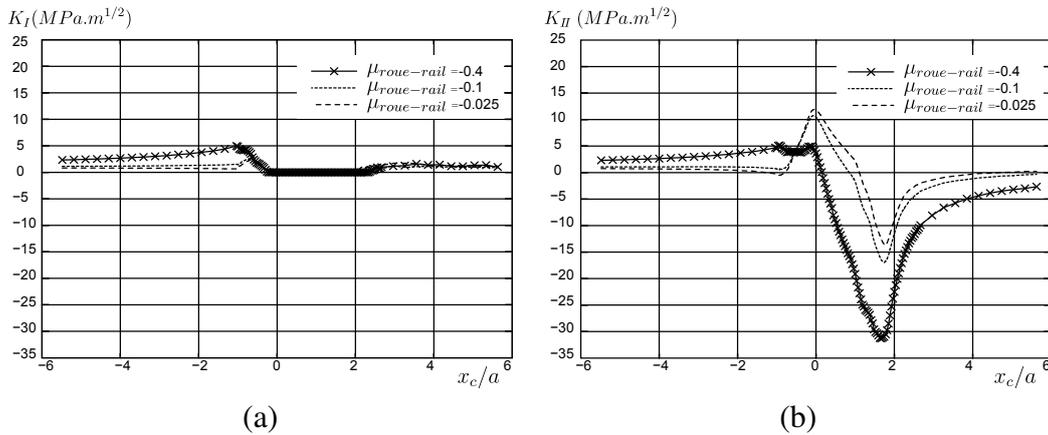
Dans cette section, la valeur du coefficient de frottement entre la roue et le rail varie. Les autres paramètres sont ceux définis dans le TAB.4.4. La convention utilisée pour l'orientation des efforts tangentiels est celle définie sur la FIG.4.1. Selon cette convention, un coefficient de frottement négatif équivaut à un train en situation d'accélération et un coefficient positif correspond à une situation en freinage. Des valeurs du coefficient de frottement de 0.025, 0.1 et 0.4 sont considérées.

Pour la configuration étudiée, l'ouverture de la fissure est liée à l'intensité du chargement tangentiel. Plus celui-ci est élevé plus il facilite l'ouverture de la fissure (FIG.4.15 (a) et FIG.4.16 (a) ). De plus, s'il est orienté dans la direction d'inclinaison de la fissure, le mode d'ouverture est d'autant plus activé. De même, un effort tangentiel élevé favorise le glissement entre les lèvres et  $\Delta K_{II}$  augmente avec  $\mu_{roue-rail}$  (FIG.4.15 (b) et FIG.4.16 (b)). Cet effet aurait été moins marqué si une fissure proche de la verticale avait été considérée. Dans ce cas, le glissement relatif des lèvres trouve principalement son origine dans le chargement normal appliqué. Ces conclusions, tirées de l'étude de la configuration initiale, rejoignent celles de résultats disponibles dans la littérature [SEO 10].



**FIGURE 4.15:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour différents coefficients de frottement entre la roue et le rail  $\mu_{roue-rail} > 0$  (freinage) ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails



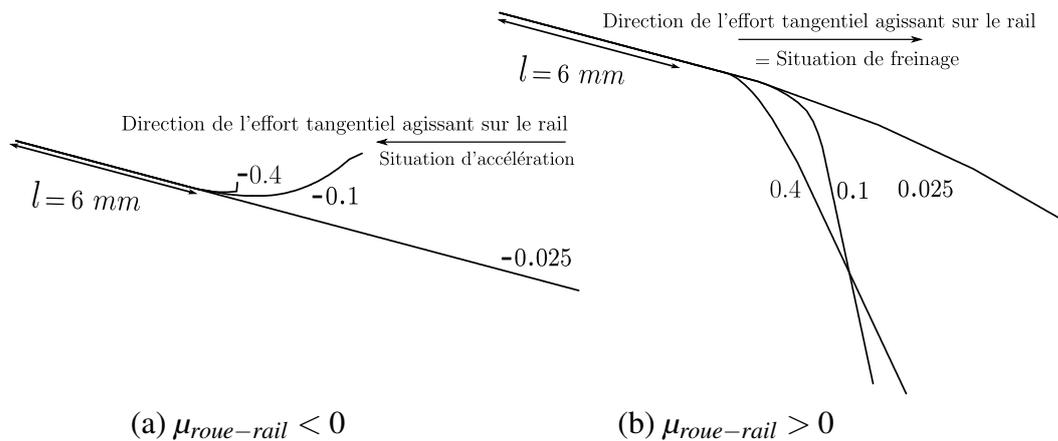
**FIGURE 4.16:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour différents coefficients de frottement entre la roue et le rail,  $\mu_{roue-rail} < 0$  (accélération) ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).

Les trajets de propagation obtenus pour ces différents sens et intensités du chargement tangentiel démontrent la très forte influence de ce paramètre (FIG.4.17). Quel que soit le signe  $\mu_{roue-rail}$ , un effort élevé provoque un branchement plus rapide de la fissure. La direction de branchement est fonction du signe de  $\mu_{roue-rail}$ . Un effort tangentiel dans le sens de déplacement du chargement (freinage,  $\mu_{roue-rail} > 0$ ) mène à la création d'une écaille. Ce point corrobore ce qui est fréquemment mentionné oralement sur l'effet de l'augmentation des efforts tangentiels. Leur augmentation contribuerait à faire remonter les fissures. A l'inverse, en situation d'accélération ( $\mu_{roue-rail} < 0$ ), les fissures plongent toutes dans le rail, menant à terme à un risque de rupture.

Il est également intéressant de comparer l'allure des trajets avec ceux obtenus précédemment dans l'étude de l'influence de la longueur initiale de la fissure (partie 4.2.3). Pour  $\mu_{roue-rail} = 0.4$ , et avec un coefficient de frottement interfacial de 0.1, des changements de direction prononcés ont été obtenus (FIG.4.12). Ce résultat, comparé aux trajets obtenus avec  $\mu_{fissure} = 0.5$  (FIG.4.17 (b)), suggère un effet lisseur du coefficient de frottement entre les lèvres. Lorsqu'il est élevé, la diminution du glissement relatif qui en découle mène à des changements de direction plus lisses.

$\mu_{roue-rail}$		-0.4	-0.1	-0.025	0.025	0.1	0.4
Nombre de cycles	(milliers de cycles)	4.68	25.0	56.4	74.1	143.8	34.3
Trafic équivalent (tonnage)	(kt)	42,12	225	507,6	666,9	1294,2	308,7
Allongement	(mm)	1.3	5.7	12.0	9.38	9.38	9.38

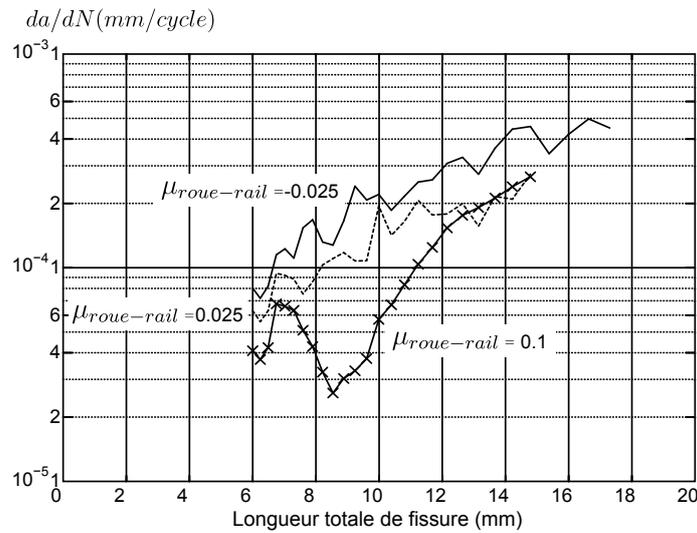
**TABLE 4.8:** Nombre de cycles, tonnage équivalent pour un même allongement et différents coefficients de frottement entre la roue et le rail  $\mu_{roue-rail}$  ( $l_0 = 6\text{ mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).



**FIGURE 4.17:** Trajet de propagation pour différents coefficients de frottement entre la roue et le rail en situation d'accélération (a) et de freinage (b).

Ces cas d'études mettent une fois de plus en évidence l'influence de la géométrie de la fissure sur les vitesses de fissuration (FIG.4.18). Lorsque les fissures changent brusquement de direction de propagation ( $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ), une diminution du taux d'accroissement est observée au pas de propagation suivant. La vitesse de fissuration augmente ensuite à nouveau avec l'allongement de la fissure. Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, le mode I compense la diminution du glissement relatif après un allongement conséquent de la partie branchée. A l'inverse, une géométrie lisse favorise une augmentation continue mais plus faible des vitesses de fissuration. Ces deux comportements aboutissent à des nombres de cycles très différents pour un allongement identique. Par exemple, il faut  $143.8 \cdot 10^3$  cycles avec  $\mu_{roue-rail} = 0.1$  contre  $74.1 \cdot 10^3$  cycles avec  $\mu_{roue-rail} = 0.025$  pour atteindre un allongement de 9.38 mm de la fissure (TAB.4.8).

Enfin, on note que dans cette configuration, lorsque  $\mu_{roue-rail} > 0$ , une augmentation de l'effort tangentiel ne mène pas immédiatement à un taux d'accroissement plus important. C'est seulement une fois que les fissures sont longues de plus de 14 mm que les vitesses deviennent équivalentes (FIG.4.18).



**FIGURE 4.18:** Taux d'accroissement (mm/cycle) selon la longueur totale de la fissure (mm) pour différents coefficients de frottement entre la roue et le rail  $\mu_{roue-rail}$  ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ).

### 4.3.2 Introduction d'un état initial non-vierge

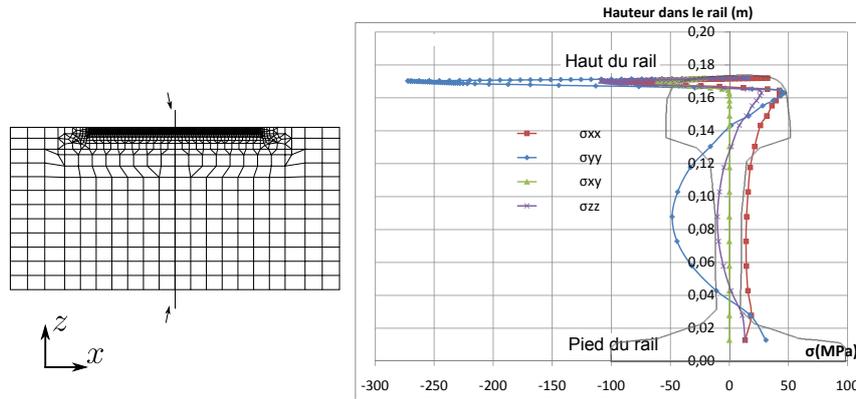
Le second effet agissant à l'échelle du rail, analysé dans cette section, est la prise en compte de contraintes résiduelles. Comme détaillée dans la partie 3.1.2, l'introduction d'un état initial non vierge dans les simulations de propagation est réalisée sous l'hypothèse d'un état stabilisé élastique linéaire pour le rail. Le transfert des champs se fait grâce à la procédure introduite dans la partie 3.1.2. Les contraintes résiduelles considérées sont issues du processus de fabrication et de l'accumulation des déformations plastiques induites par la circulation des trains.

#### 4.3.2.1 Tenseur des contraintes résiduelles

L'état de contraintes résiduelles considéré est identique à celui de la partie 3.1.2. Pour rappel, les composantes du tenseur des contraintes résiduelles  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$ , sur une ligne verticale au centre du domaine sans la fissure après l'étape de rééquilibrage élastique initiale, sont présentées sur la FIG.4.19. Cette figure met en évidence l'état de contraintes résiduelles complexes existant dans le rail avec la présence de forts gradients. Comme déjà mentionné dans ce manuscrit, cet état de contraintes non uniformes est considéré comme permanent pour le problème de mécanique élastique linéaire de la rupture.

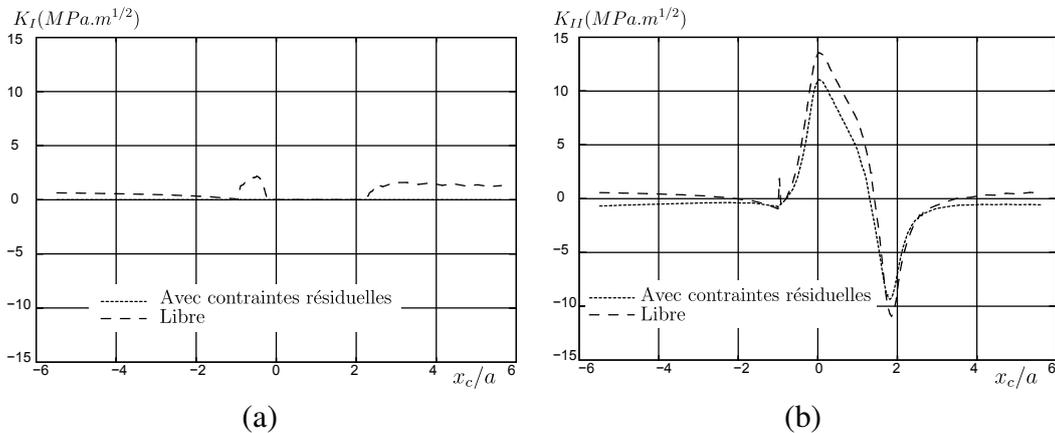
#### 4.3.2.2 Influence des contraintes résiduelles

De la même manière, l'influence des contraintes résiduelles sur les FICs et les trajets de propagation sont analysés. Les FICs sans et avec contraintes résiduelles pour le



**FIGURE 4.19:** Contraintes résiduelles après projection et rééquilibrage élastique sur la ligne verticale au centre du maillage utilisé pour la résolution du problème de rupture.

cas défini dans le TAB.4.4 sont présentés sur la FIG.4.20. Pour la configuration étudiée, des contraintes résiduelles de traction s'exercent en surface et en sous surface sur une épaisseur très fine, au niveau de l'extrémité débouchante de la fissure. Des contraintes de compression s'exercent en fond de fissure, empêchant l'ouverture complète de cette dernière.  $\Delta K_{II}$  est également diminué. Les contraintes résiduelles de compression limitent le glissement relatif entre les lèvres de la fissure. Ces effets mènent à un changement des mécanismes de propagation.



**FIGURE 4.20:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés avec et sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

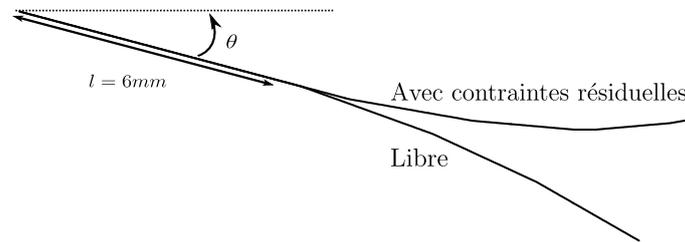
La FIG.4.21 illustre les trajets simulés avec et sans contraintes résiduelles. Ainsi, pour le cas étudié, la prise en compte des contraintes résiduelles provoque une propagation coplanaire plus longue. La fissure branche ensuite légèrement vers la surface du rail favorisant la formation d'une écaille plutôt qu'une fissuration plongeante. Dans ce cas, le trajet de propagation et le type de défaut associé sont modifiés. Cette modification dépend cependant du cas étudié.

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

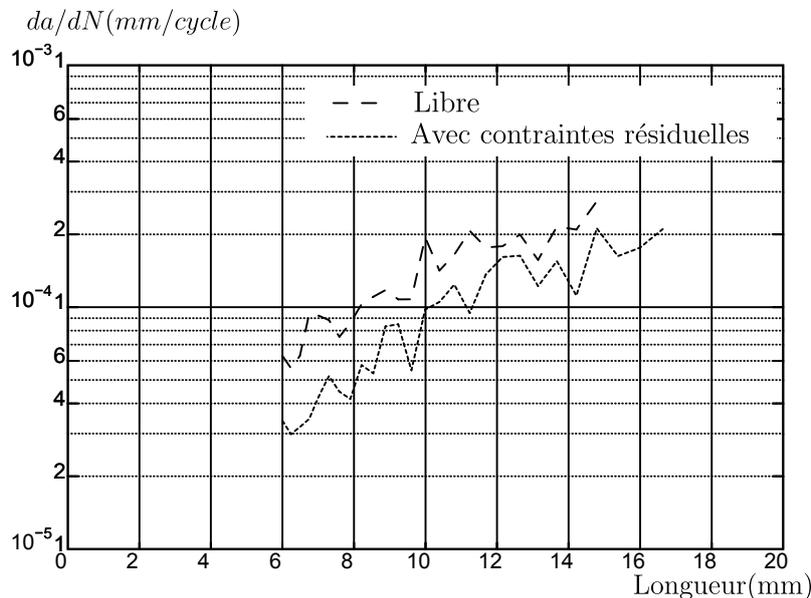
Pour un effort tangentiel ou une inclinaison favorisant une propagation franche vers la profondeur du rail, la prise en compte des contraintes résiduelles modifie ce trajet mais sans en influencer l'orientation globale (cf. FIG.4.23).

Le second effet observé est une propagation environ deux fois plus lente de la fissure en présence de contraintes résiduelles (FIG.4.23). Pour un allongement équivalent, deux fois plus de cycles sont nécessaires avec les contraintes résiduelles (TAB.4.9).

De part ces modifications sur les trajets de fissuration et les taux d'accroissement calculés, prendre en compte les contraintes résiduelles dans les simulations de propagation est indispensable à l'obtention de résultats quantitatifs.



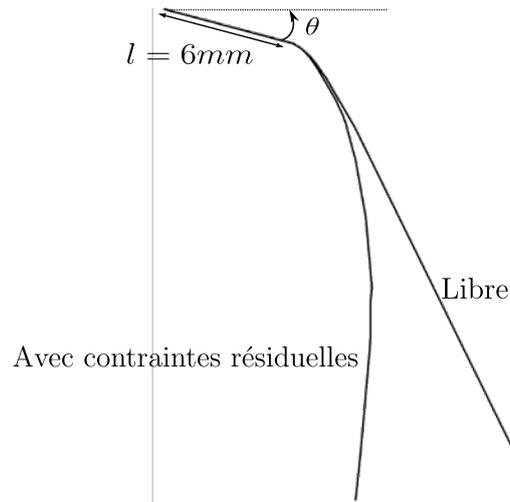
**FIGURE 4.21:** Trajets de propagation avec et sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).



**FIGURE 4.22:** Taux d'accroissement (mm/cycle) en fonction de la longueur de la fissure (mm) avec et sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

$l$	(mm)	Libre	Avec $\sigma_{\text{résiduelles}}$
Nombre de cycles	(milliers de cycles)	74.1	127.2
Trafic équivalent (tonnage)	(kt)	666.9	1144.8
Allongement	(mm)	9.38	9.38

**TABLE 4.9:** Nombre de cycles, tonnage équivalent et allongement avec et sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{\text{fissure}} = 0.5$ ,  $\mu_{\text{roue-rail}} = 0.025$ ).



**FIGURE 4.23:** Trajets de propagation avec et sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{\text{fissure}} = 0.5$ ,  $\mu_{\text{roue-rail}} = -0.4$ ).

Le chargement tangentiel et les contraintes résiduelles jouent un rôle majeur dans la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Ces calculs sont cependant basés sur la modélisation d'une unique fissure dans un milieu semi-infini. Des travaux ont déjà montré l'importance de la présence d'un réseau de fissures dans les mécanismes d'endommagement [DUB 92a, DUB 92b, GUO 10] et leur influence sur les mécanismes de transfert de charge. Dans les rails, des réseaux de fissures peuvent se développer dans le champignon ou au niveau du congé de roulement [TIL 09]. Des effets boucliers, dépendants de la distance entre les fissures, ont déjà été mis en évidence [DUB 02, KAN 06].

Afin de compléter l'analyse, il est important de quantifier la modification des FICs due aux interactions entre fissures en comparaison des résultats obtenus pour une fissure seule.

## 4.4 Etude des réseaux de fissures

L'étude des réseaux de fissures nécessite d'effectuer des pas de propagation à iso-nombre de cycles pour toutes les fissures modélisées. A la manière de ce qui a été fait pour les simulations de fretting avec deux fissures, ou les simulations de propagation tri-dimensionnelles, une légère modification de l'algorithme de propagation pour la gestion des différentes fissures est effectuée. Des travaux ont proposé des algorithmes afin de faire propager plusieurs dizaines de fissures et de pouvoir gérer les coalescences éventuelles dans le cadre des X-FEM [BUD 04, ZI 04]. La coalescence de fissure n'est pas traitée dans ces travaux. Dans ce mémoire, l'extension de la fissure est imposée égale à  $\Delta a = 0.04 l_{totale}$  pour une unique fissure. Pour l'étude des fissures multiples, cette valeur devient l'extension maximale  $\Delta a_{max} = 4\%$  (pour la fissure la plus rapide). L'extension  $\Delta a_i$  pour chaque fissure  $i$  est ensuite calculée proportionnellement au facteur d'intensité des contraintes équivalent  $\Delta K_{eq_i}$  à la puissance utilisée dans la loi de propagation :

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta a_{max}} = \left( \frac{\Delta K_{eq_i}}{\Delta K_{eq_{max}}} \right)^{3.33} \quad (4.3)$$

avec

$$\Delta K_{eq_i} = \left( \Delta K_{I_i}^2 + 0.772 * \Delta K_{II_i}^2 \right)^{0.5} \quad (4.4)$$

Cette étude s'intéresse tout d'abord à deux fissures symétriques dans une configuration dite "squat". Le second cas étudié est celui de neuf fissures parallèles avec la présence de contraintes résiduelles.

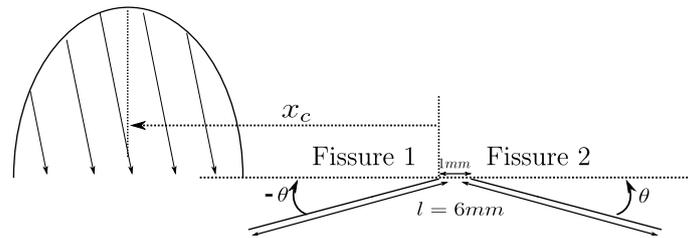
### 4.4.1 Etude d'une configuration "squat"

Deux fissures symétriques, nommées 1 et 2 (voir la FIG.4.24), sont considérées. Ces deux fissures ont les mêmes caractéristiques ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure1} = \mu_{fissure2} = 0.01$ ) et sont séparées d'une distance de 1 mm. La position du chargement est définie par rapport à l'extrémité débouchante de la fissure 1. Les conditions de chargement restent inchangées (TAB.4.3).

**Remarque :** une valeur extrêmement faible du coefficient de frottement local a été choisie afin d'obtenir des changements prononcés des directions de propagation. Comme montré précédemment, une valeur élevée du coefficient de frottement local induit un effet lisseur sur les trajets de propagation.

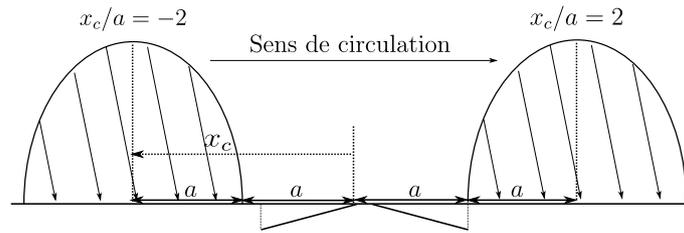
Les variations des FICs selon la position du chargement sont présentées sur la FIG.4.26 pour les fissures 1 et 2. Deux courbes de référence sont ajoutées, correspondant aux résultats obtenus pour des configurations avec une unique fissure, fissure 1 seule et fissure 2 seule. Les conséquences de l'interaction entre les fissures sont ainsi identifiées.

Les différences sur le mode II ne sont que peu significatives (FIG.4.26 (b) ). Cela est lié à la géométrie de la configuration étudiée. La différence majeure pour ce cas d'étude est obtenue pour le mode I. La présence d'une double discontinuité et l'orientation du

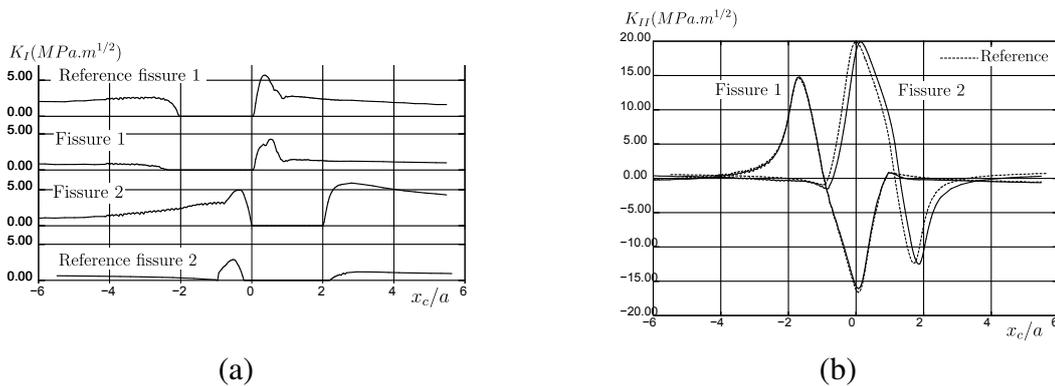


**FIGURE 4.24:** Configuration dite "squat" considérée ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.01$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

chargement tangentiel modifie l'ouverture des deux fissures. Les positions  $x_c/a = \pm 2$  sont caractéristiques (FIG.4.25). En  $x_c/a = -2$ , le bord droit de la zone de chargement est proche de la pointe de la fissure 1. L'orientation du chargement tangentiel ferme la fissure avant que le chargement normal ne soit parfaitement au dessus de cette dernière. En  $x_c/a = +2$ , le bord gauche est situé au bord de la pointe de la fissure 2, maintenant la fissure 2 fermée en sa pointe jusqu'à cette position (FIG.4.26 (a)). L'ouverture de la fissure 1 est diminuée lorsque  $x_c/a < -2$ . A l'inverse, l'ouverture de la fissure 2 est amplifiée par la présence de la première discontinuité lorsque  $x_c/a > 2$ .



**FIGURE 4.25:** Représentation schématique des positions du chargement par rapport aux fissures lorsque  $x_c/a = \pm 2$ .



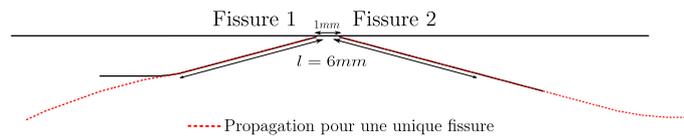
**FIGURE 4.26:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés dans la configuration initiale pour un réseau de deux fissures dans un configuration squat comparés aux FICs obtenus pour une unique fissure ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.01$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

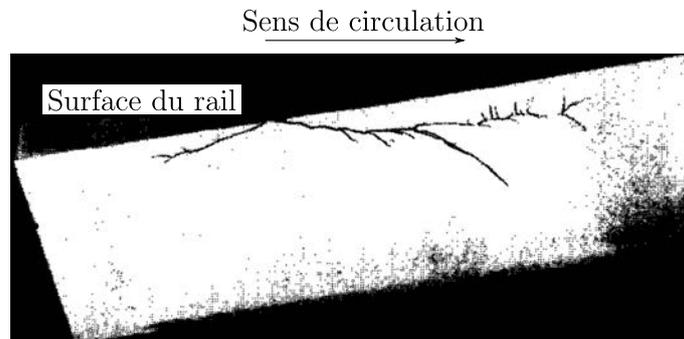
Le trajet de propagation est ensuite simulé. Les résultats sont présentés sur la FIG.4.27. Après une courte propagation coplanaire (un pas de propagation), la fissure 1 branche et se développe parallèlement à la surface du rail. La fissure 2 se propage elle de manière coplanaire, s'enfonçant dans le rail, de manière similaire au comportement pour une unique fissure dans cette configuration.

Ces prédictions sont cohérentes avec les observations d'études présentant des coupes longitudinales de rails fissurés par des squats [CAN 96, GRA 12, STE 13]. Ces résultats montrent des trajets de propagation similaires, où la fissure 1 propage parallèlement à la surface du rail tandis que la fissure 2 s'enfonce dans le rail (FIG.4.28, FIG.4.29 et FIG.4.30). Dans toutes ces études phénoménologiques, de fortes incertitudes sur les sollicitations subies par les fissures persistent. Si cette comparaison qualitative n'a pas valeur de validation, elle illustre la capacité du modèle à obtenir des résultats cohérents avec les observations réalisées sur différents réseaux ferrés.

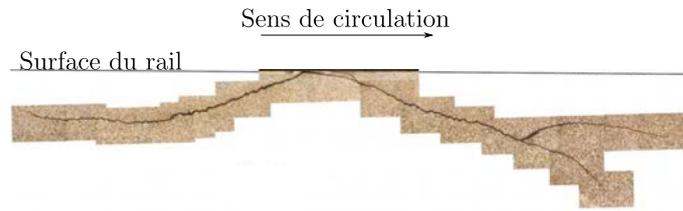
L'étude des réseaux de fissures se poursuit avec l'introduction de neuf fissures parallèles dans le domaine maillé.



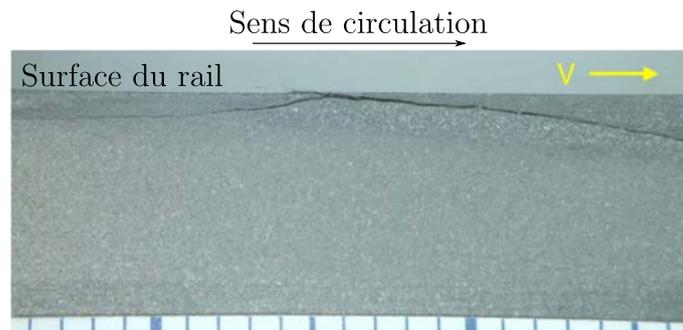
**FIGURE 4.27:** Trajets de propagation pour deux fissures dans une configuration squat (6 pas de propagation) en comparaison avec les trajets obtenus pour chacune des fissures séparément ( $l_0 = 6\text{ mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.01$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.025$ ).



**FIGURE 4.28:** Coupe longitudinale d'un squat d'origine inconnue [CAN 96].



**FIGURE 4.29:** Coupe longitudinale d'un "stud" provenant du réseau ferré londonien [GRA 12].



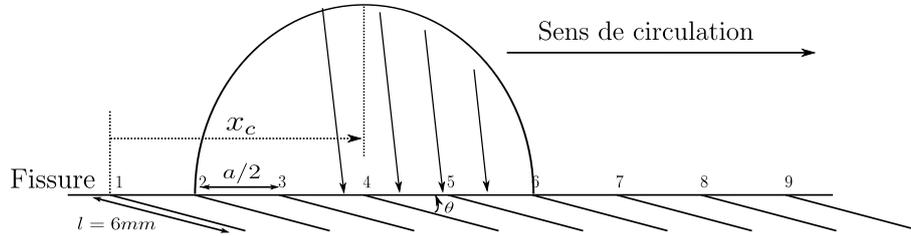
**FIGURE 4.30:** Coupe longitudinale d'un squat provenant du réseau ferré néerlandais [STE 13].

#### 4.4.2 Etude d'un réseau de fissures parallèles

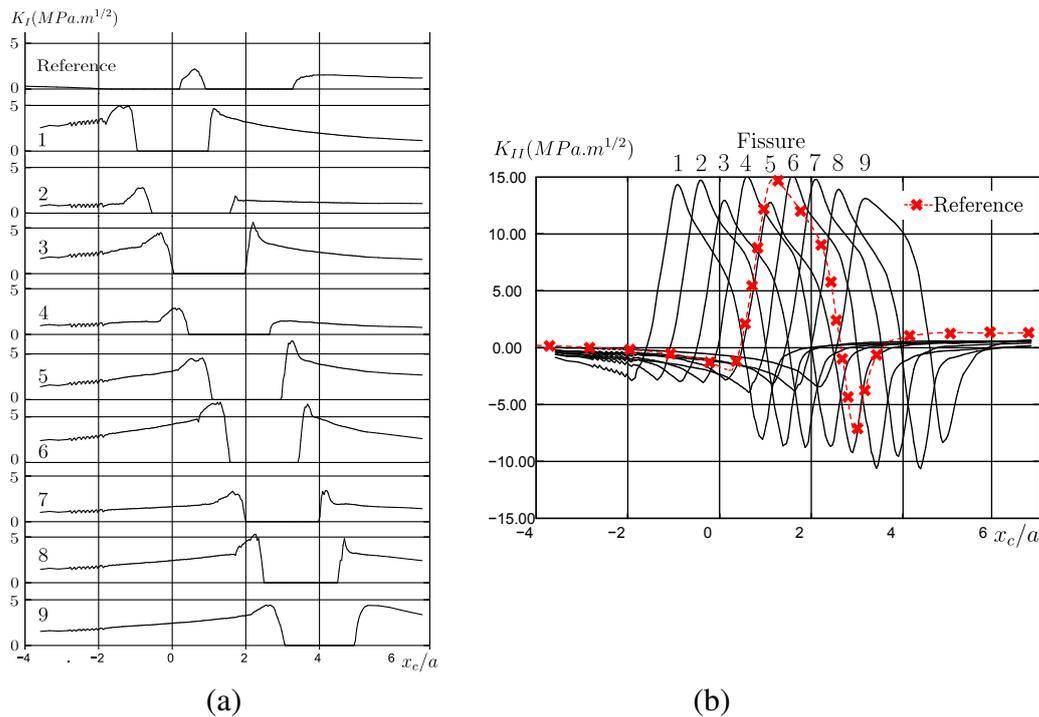
Le cas d'étude est présenté sur la FIG.4.31. Neuf fissures parallèles, identifiées de 1 à 9, définies avec les mêmes caractéristiques ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure}=0.5$ ) et équidistantes de  $3.375\text{ mm}$  (égale à  $a/2$ , un quart de la zone de contact roue-rail) sont considérées. Le coefficient de frottement entre la roue et le rail est de  $\mu_{roue-rail} = 0.1$  (situation de freinage).

$K_I$  et  $K_{II}$  sont présentés sur la FIG.4.32 (a) et la FIG.4.32 (b) respectivement, pour les neuf fissures. Les variations de référence pour  $K_I$  et  $K_{II}$ , obtenues pour une unique fissure, sont ajoutées sur les figures afin de permettre la comparaison et d'estimer les effets d'interaction. Les résultats permettent d'identifier deux types d'interaction. La première d'entre elles est la même qu'observée sur la configuration dite squat. La présence de discontinuités multiples modifie la rigidité du matériau amplifiant l'ouverture de certaines fissures. Une augmentation maximale de 150 % est obtenue pour la fissure 6. Pour ce qui est du glissement relatif entre les lèvres, une diminution de 0 à 25 % de  $\Delta K_{II}$  est obtenue pour les fissures centrales du réseau (4 à 6) pour lesquelles on peut supposer le régime de sollicitation comme stabilisé. Ceci met en évidence un effet bouclier pour ces fissures centrales. Une fois de plus, cet effet est dépendant de la configuration étudiée (longueur et orientation des fissures par rapport à celle du chargement tangentiel ainsi que l'espacement entre les fissures).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

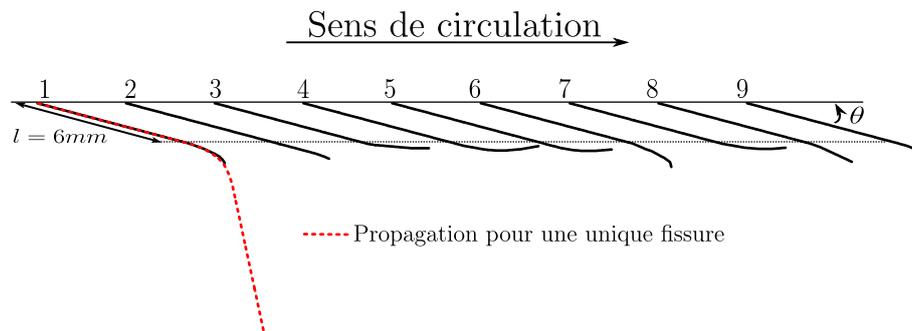


**FIGURE 4.31:** Représentation schématique de la configuration initiale pour l'étude du réseau de neuf fissures parallèles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).



**FIGURE 4.32:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés dans la configuration initiale pour le réseau de neuf fissures parallèles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

Les résultats des simulations de propagation après 5 pas, en comparaison avec le trajet obtenu pour une unique fissure, sont présentés sur la FIG.4.33. Le trajet obtenu pour une unique fissure montre deux phases, une première coplanaire puis une seconde où la fissure branche dans la profondeur du rail. Ce type de propagation est également obtenu pour les fissures situées sur les bords du réseau. En revanche, pour les fissures centrales, dont le régime de sollicitation est considéré comme stabilisé, l'effet du réseau sur le trajet simulé est visible. Pour les fissures 3, 4, 5 et 7 les trajets de propagation sont modifiés. Les fissures se propagent alors parallèlement à la surface du rail. La simulation est alors rapidement arrêtée car la coalescence des fissures n'est pas analysée dans ce travail.

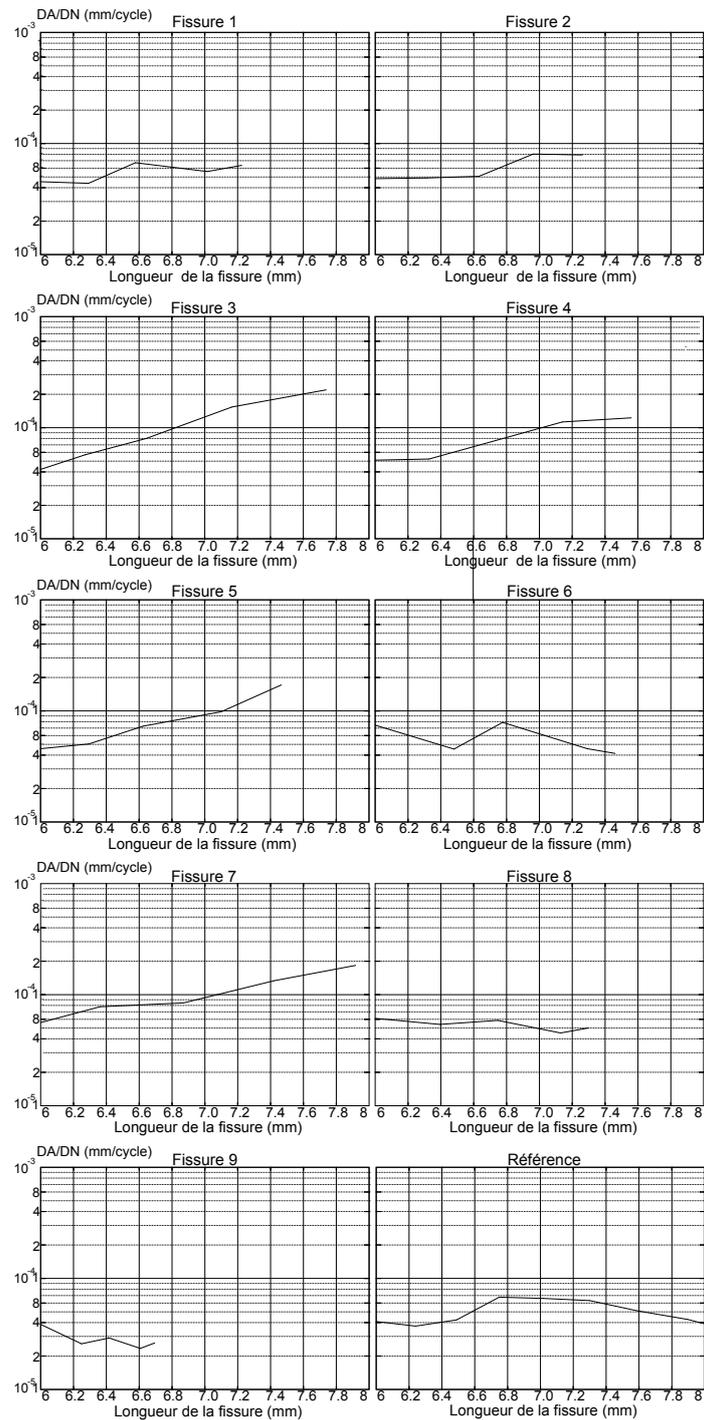


**FIGURE 4.33:** Trajets simulés après 5 pas de propagation (26 000 cycles de chargement) pour le réseau de fissures en comparaison avec le trajet obtenu pour une unique fissure ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

La comparaison des taux d'accroissement de chacune des fissures avec le cas de référence (fissure unique dans les mêmes conditions) met en évidence deux types de propagation (FIG.4.34). Les fissures prédites plongeantes (fissure 1, 2, 6, 8 et 9) présentent des vitesses plus faibles que les autres fissures et le cas de référence. Les trajets des fissures 3, 4, 5 et 7 montre des vitesses qui augmentent une fois que ces fissures se propagent parallèlement à la surface du rail. Ces vitesses deviennent alors rapidement supérieures à celles calculées pour une unique fissure.

La présence de l'effet bouclier au cycle initial modifie donc le taux de mixité de la sollicitation. Une modification des trajets est alors prédite. Ce changement de trajet amène alors ces fissures à se propager plus rapidement que dans le cas avec une unique fissure. L'influence du réseau de fissures ne se résume donc pas à l'effet bouclier observé pour la configuration initiale.

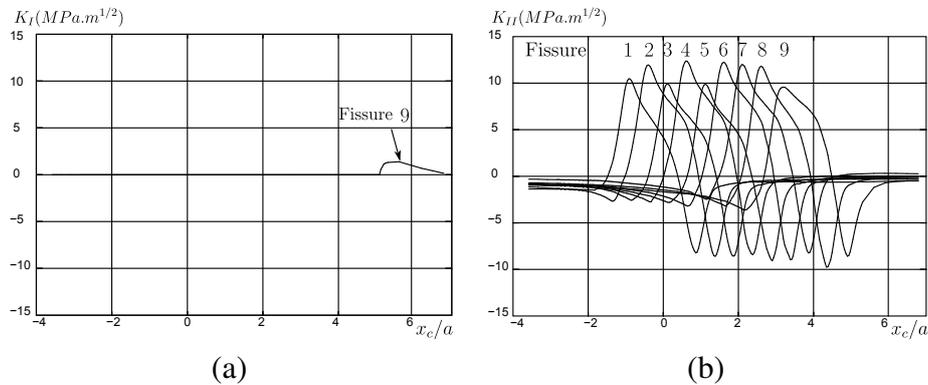
## 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails



**FIGURE 4.34:** Taux d'accroissement des neuf fissures parallèles du réseau pour 26 000 cycles de chargement en comparaison avec le taux d'accroissement pour une unique fissure dans les mêmes conditions (Référence) ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

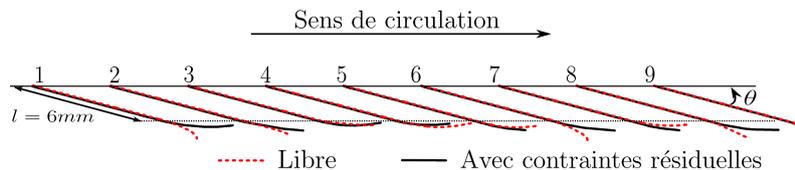
### 4.4.3 Introduction des contraintes résiduelles dans le réseau de fissures

Un champ de contraintes résiduelles identique à celui présenté dans la partie 4.3.2.2 est maintenant introduit dans le réseau de fissures. Les FICs pour le mode I et II sont tracés sur la FIG.4.35 (a) et (b) respectivement. La configuration étudiée positionne le front des fissures dans la zone de contraintes résiduelles en compression. Ces contraintes de compression empêchent l'ouverture des fissures, exceptée pour la fissure 9. L'orientation du chargement tangentiel et sa position particulière dans le réseau avec une discontinuité en amont mais pas en aval, permettent une légère ouverture de cette fissure. Le glissement entre les lèvres de la fissure est également réduit et une diminution de  $\Delta K_{II}$  est observée pour toutes les fissures.



**FIGURE 4.35:** (a)  $K_I$  et (b)  $K_{II}$  calculés pour un réseau de neuf fissures parallèles en présence de contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

La propagation des fissures du réseau est également affectée. Il est désormais prédit pour toutes les fissures une propagation parallèle à la surface du rail dans la direction de circulation du chargement (FIG.4.36). Les mécanismes de propagation des fissures centrales résultent dans ce cas de l'interaction des fissures et de l'influence des contraintes résiduelles. Pour les fissures périphériques, seules les contraintes résiduelles influencent les trajets de propagation. Le trajet de la fissure 9 n'est cependant pas affecté par les contraintes résiduelles de part sa position spécifique dans la configuration étudiée.

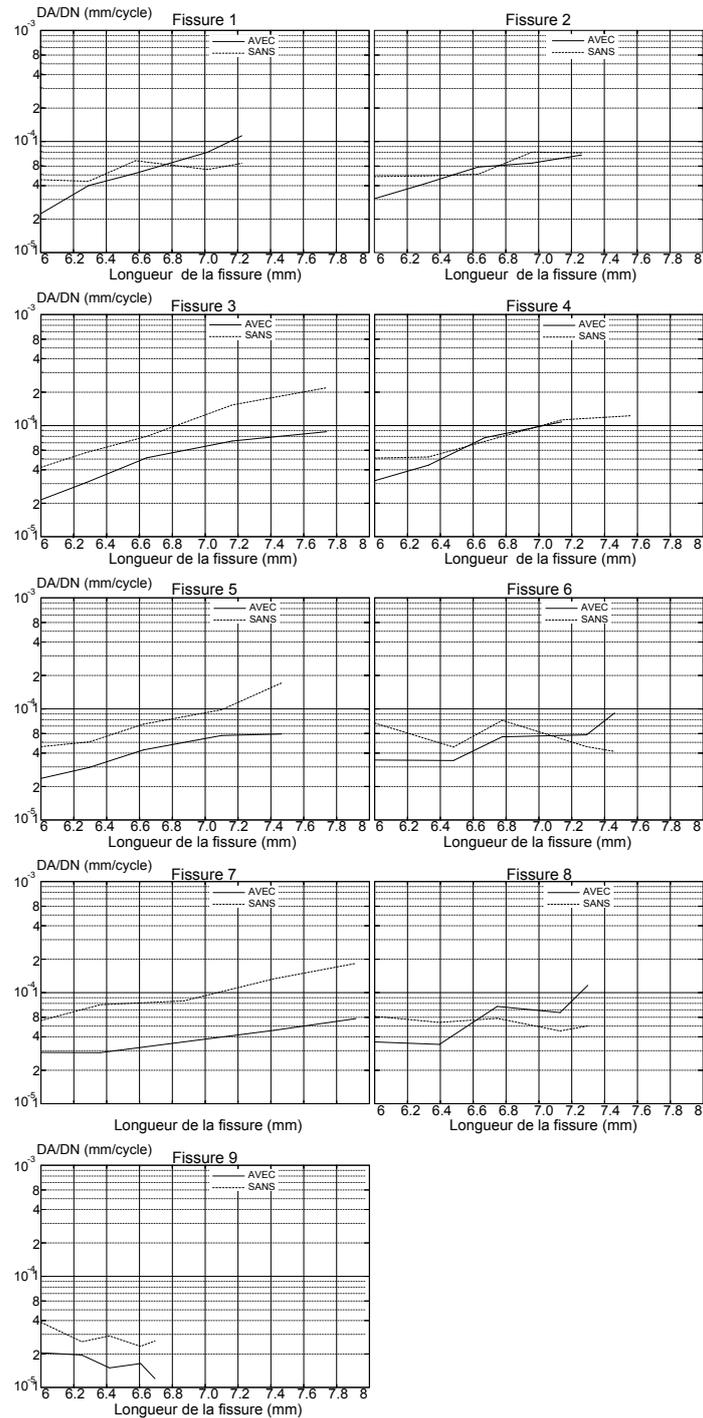


**FIGURE 4.36:** Trajets simulés après 5 pas de propagation (44 200 cycles de chargement) pour un réseau de neuf fissures parallèles avec et sans contraintes résiduelles  $\theta$  ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

#### 4. Étude numérique de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

---

La comparaison des vitesses de fissuration du réseau de fissure avec et sans contraintes résiduelles confirme les remarques faites précédemment. Les vitesses de propagation dans la configuration initiale sont plus faibles avec la prise en compte des contraintes résiduelles. Cependant elles entraînent une propagation parallèle à la bande de roulement pour toutes les fissures exceptée la fissure 9. Cette modification des trajets des fissures 1,2, 6 et 8 avec les contraintes résiduelles se traduit par des taux d'accroissement pouvant égaler les taux calculés sans contraintes résiduelles (FIG.4.37). Pour les fissures dont le trajet global n'est pas modifié par le champ de contraintes résiduelles (fissure 3, 5, 7 et 9), les vitesses de fissuration prédites sont environ deux fois plus faibles. Pour les fissures dont les trajets se trouvent modifiés par les contraintes résiduelles, l'effet des contraintes résiduelles sur les vitesses de propagation tel qu'illustré dans la partie 4.3.2.2 pour une unique fissure, n'est donc plus évident dans cette configuration.



**FIGURE 4.37:** Taux d'accroissement des neuf fissures parallèles du réseau avec contraintes résiduelles pour 44 200 cycles de chargement en comparaison avec les taux d'accroissement sans contraintes résiduelles ( $l_0 = 6\text{mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\mu_{fissure} = 0.5$ ,  $\mu_{roue-rail} = 0.1$ ).

## 4.5 Synthèse de l'étude numérique

Avec les conventions de signes définies dans ce mémoire, lorsque  $\mu_{roue-rail} > 0$  les trajets de propagation sont prédits en direction de l'âme du rail alors qu'ils sont obtenus vers la table de roulement avec  $\mu_{roue-rail} < 0$ .

Pour des inclinaisons initiales de fissures supérieures à  $30^\circ$ , quelle que soit l'orientation du chargement tangentiel, des propagations plongeantes ont été calculées. Pour des angles inférieurs, le sens du chargement tangentiel joue un rôle majeur sur les mécanismes de fissuration.

Dans le cas où la propagation d'une unique fissure met en jeu de faibles changements de direction, une modification globale du trajet de propagation sous l'influence des contraintes résiduelles a pu être simulée. Pour une fissure bifurquant franchement vers la profondeur du rail, l'effet des contraintes résiduelles s'est limité à une diminution du taux d'accroissement.

L'effet lisseur d'un coefficient de frottement interfacial élevé sur les trajets de propagation a été souligné. Cet effet est associé à des vitesses de fissuration plus faibles dans ce cas. Nous avons aussi montré que lors de forts changements de direction de propagation, l'augmentation du mode I ne compense pas immédiatement la diminution du mode II.

L'étude des réseaux de fissures a également mis en évidence les phénomènes d'interaction existant entre les fissures et leurs influences sur le taux de mixité des sollicitations. Elle a montré l'influence du réseau sur les trajets de propagation prédits.

Ainsi, la présence de l'effet bouclier au cycle initial modifie les mécanismes de propagation des fissures centrales du réseau. Une modification des trajets de propagation est alors prédite. Ce changement de trajet peut mener à des fissures plus rapides que dans le cas avec une unique fissure. L'influence du réseau de fissures ne se résume donc pas à l'effet bouclier observé pour la configuration initiale.

En présence de contraintes résiduelles, ce même type d'effet a été observé pour les fissures dont les trajets de propagation n'étaient pas initialement modifiés par le réseau.

L'étude de la configuration dite "squat" a également permis une comparaison qualitative des résultats obtenus avec des observations phénoménologiques. Ce travail a renforcé l'idée d'une modélisation multi-échelle adéquate de la propagation des fissures de fatigue dans les rails à l'aide de la stratégie déployée.

Ces simulations visant un but industriel, il serait intéressant de comparer à l'avenir les taux d'accroissement prédits avec ceux effectivement mesurés sur le réseau ferré national.

## 4.6 Estimation des vitesses de fissuration mesurées : étude préliminaire

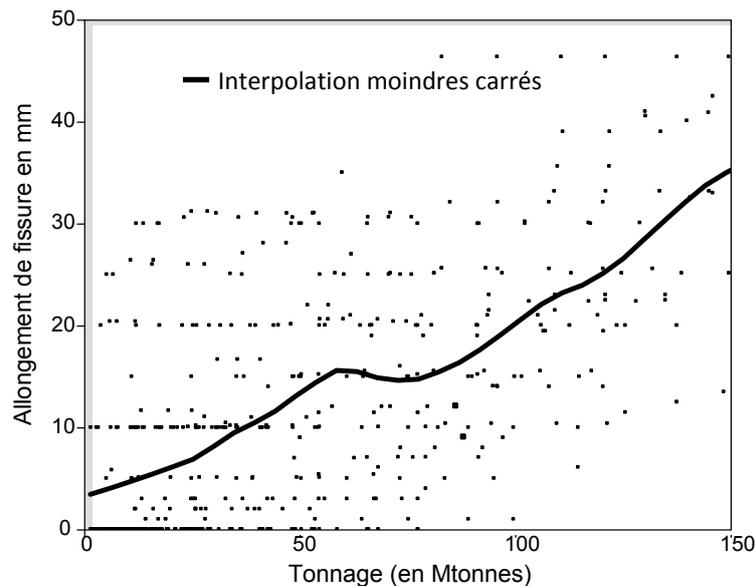
L'outil développé pour la simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails permet d'identifier différents comportements de fissuration. Cependant, afin de pouvoir entrevoir une utilisation industrielle, les résultats numériques obtenus doivent être validés. Pour l'application visée, la réalisation d'essais requiert le contrôle des différents paramètres. Le contrôle du glissement au niveau du chargement [FLE 00], des conditions de lubrification du contact [CLA 96a, CLA 96b], de la température au sein du contact roue-rail [GAL 06], de la géométrie initiale de la fissure et des conditions de contact interfacial ainsi que leur suivi lors de la propagation reste des procédures lourdes et coûteuses à déployer. Il a donc été choisi de confronter ces résultats de calculs numériques issus des modèles déterministes aux fissures réellement mesurées et suivies sur le réseau ferré national. Les mesures utilisées proviennent de relevés effectués de manière régulière à l'aide de techniques ultrasonores par des engins lourds circulant sur le réseau ou des opérateurs intervenant en voie. Ces mesures permettent d'obtenir des photographies (dépendantes des moyens de mesure) de l'état des fissures à différents stades de leur propagation.

Des travaux étudiant les densités de squats sur une portion limitée d'une ligne classique australienne selon le type de rail, leur âge, les types de traverse, en alignement et pour différents rayons de courbure, sont disponibles [FAR 13]. Cette étude fait apparaître une forte présence de squat en courbe mais se limite à chercher une corrélation entre les données techniques de la voie et l'apparition de ces défauts. Ces travaux de thèse visent à estimer la vitesse de propagation d'un type de défaut donné, en fonction du tonnage supporté. Cette problématique soulève plusieurs questions du point de vue statistique :

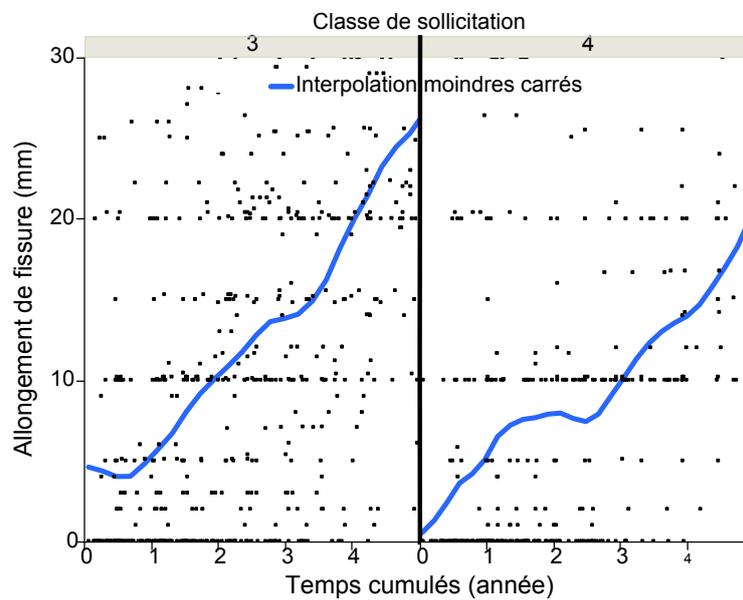
- Maîtriser les incertitudes inhérentes aux moyens et pratiques de mesures mises en oeuvre en voie.
- Assurer l'indépendance entre les mesures réalisées.

Le travail préliminaire présenté ici porte sur les données collectées pour les défauts mesurés de type squat sur une portion de ligne (la ligne 431 000) posée en alignement. Un pré-traitement des données, effectué en partenariat avec les experts de la maintenance, a été réalisé. Il vise à trier et homogénéiser les mesures répertoriées dans les bases disponibles. L'accroissement des fissures présentes sur la ligne en fonction du tonnage supporté est ensuite analysé. La FIG.4.38 est une illustration de ces résultats. Avec cette approche globale, une très grande dispersion est observée et ne permet pas de procéder à un traitement rigoureux des données. Une interpolation au sens des moindres carrés a tout de même été pratiquée. On constate alors qu'une tendance se dégage pour la famille de fissures considérée permettant d'identifier un accroissement selon le tonnage supporté. Cette approche ne rend cependant pas compte des contextes observés localement sur le réseau. Il sera nécessaire de réaliser des regroupements de portions de voies et des défauts associés homogènes (homogénéité à apprécier selon le contexte systémique et local). Ainsi, la

FIG.4.39 présente les résultats obtenus en distinguant les classes de sollicitation de l'infrastructure. On retrouve alors une tendance triviale : les rails les plus sollicités (classe de sollicitation 3) tendent à présenter des accroissements de défauts plus importants pour une même période de temps. Ces conclusions préliminaires seront à conforter afin de s'assurer de la présence d'écart significatifs entre les taux d'accroissements de défauts. Ce travail, une fois réalisé, pourra permettre la comparaison des vitesses mesurées avec les résultats issus du modèle déterministe de mécanique élastique linéaire de la rupture.



**FIGURE 4.38:** Evolution de l'allongement des fissures en alignement en fonction du tonnage supporté (en Mt).



**FIGURE 4.39:** Analyse comparative. Evolution de l'allongement des fissures en alignement pour deux classes de sollicitations différentes.



# Conclusions et perspectives

## Rappel du contexte

Sous l'effet des sollicitations mécaniques répétées induites par les passages des trains, des fissures de fatigue de contact s'amorcent dans les rails. Une fois amorcées, celles-ci peuvent se propager et mener à la rupture du rail. Dans un contexte d'intensification du trafic et d'augmentation globale des vitesses de circulation, il devient de plus en plus stratégique pour la Direction de l'Infrastructure du Groupe SNCF d'optimiser sa politique maintenance. Ce contexte conduit à des accès aux voies de plus en plus restreints pour effectuer les opérations de maintenance. Dans le but d'anticiper la mobilisation des moyens humains, matériels, financiers et la réservation des sillons (accès aux zones de travaux), une planification anticipée des opérations s'avère nécessaire. C'est la raison pour laquelle les mainteneurs souhaiteraient disposer d'outils permettant de fournir des ordres de grandeur de l'accroissement des fissures selon les sollicitations subies. Ces sollicitations étant amenées à évoluer dans le temps (renouvellement de matériel roulant, intensification du trafic), une politique de maintenance uniquement basée sur le retour d'expérience n'est pas suffisante. Répondre à ces enjeux nécessite de mieux connaître les mécanismes d'endommagement par fatigue du rail.

La prédiction de la durée de vie des fissures de fatigue dans les structures et plus précisément dans les rails n'est pas encore maîtrisée. Les outils numériques et les méthodes de développement actuels ont permis d'améliorer considérablement cette prédiction. La méthode des éléments finis (MEF) a largement contribué à cette avancée et représente aujourd'hui le moyen le plus répandu pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture. Toutefois, elle pose un certain nombre de difficultés. Elle requière la construction d'un maillage très fin d'éléments singuliers en pointe de fissure [BAR 74] et nécessite des étapes de remaillage et d'interpolation des champs lorsque la fissure se propage. Avec cette méthode, la prise en compte de fissures tri-dimensionnelles sollicitées en mode mixte avec contact et frottement entre les lèvres demeure complexe à réaliser. Au cours de l'étude bibliographique réalisée dans le chapitre 1, nous avons vu que de nombreuses alternatives existent. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis étendus figure en bonne place. Extension de la MEF, elle permet d'en conserver les principaux avantages et de lever les difficultés liés au remaillage ou à la projection de champs. Ces avantages la rendent particulièrement adaptée au problème de discontinuité mobile [MOë 99]. De plus, son degré de maturité lui permet maintenant d'avoir été appliquée avec succès à des problèmes

intégrant des non linéarités telles que la plasticité [ELG 07a] ou le contact et le frottement entre les lèvres [DOL 01, Gén 07, RIB 07, PIE 10b]. Elle est maintenant implémentée dans un nombre croissant de codes de calcul industriel (Code\_Aster, SAMCEF, Abaqus, Ansys, CAST3M, ...).

De nombreux travaux se sont intéressés aux problèmes des fissures de fatigue dans les rails. Certains considèrent uniquement le contact unilatéral à l'interface [BRO 12], d'autres introduisent des contraintes résiduelles simplifiées [BOG 02, DUB 02, MEL 05], beaucoup s'intéressent au phénomène de piégeage et de pressurisation qu'il en résulte [BOG 05a, BOG 05c, BOG 08, FLE 08, FLE 09, FAR 12b] ou étudient l'introduction d'appuis élastiques [FAR 12a, FAR 12b]. Cependant aucun n'intègre les différentes échelles du problème dans une même modélisation. L'étude bibliographique a donc identifié le besoin d'une modélisation capable de prendre en compte les différentes échelles du problème. La modélisation des sollicitations mobiles multi axiales et non proportionnelles, des champs de contraintes résiduelles présents dans le rail et du contact frottant entre les lèvres de la fissure requiert une vision du problème à deux échelles. Une stratégie XFEM/LATIN issue de travaux antérieurs [RIB 07, PIE 10a], faisant appel à une formulation faible à trois champs du problème de rupture pour la prise en compte du contact et du frottement à l'interface, a constitué le point de départ de ces travaux. Cette stratégie a été optimisée, adaptée et implémentée dans CAST3M pour la réalisation de ce travail de thèse. En outre, le besoin d'un outil numérique robuste capable de réaliser des simulations de propagation, et non pas de résoudre le problème de mécanique élastique linéaire de la rupture pour une configuration donnée fixée, a été souligné. Ces développements ont pour but d'améliorer la compréhension des mécanismes de propagation des fissures de fatigue dans les rails.

### **Contributions scientifiques**

Une étude empirico-numérique basée sur plus de 100 000 calculs a permis de proposer des formules a priori pour le choix des paramètres gouvernant le taux de convergence du solveur non-linéaire LATIN. Ces paramètres optimaux, la direction de recherche et le terme de stabilisation, sont dépendants du matériau et de la taille caractéristique de l'interface. L'étude a révélé la très faible influence des conditions de contact locales, des conditions aux limites et de la taille du domaine considéré sur le taux de convergence dès lors que les échelles de la fissure et de la structure restent dissociées. Ces formules permettent de diminuer les temps de calcul en diminuant le nombre d'itération lors de la résolution du problème non-linéaire. Leurs mises à jour lors de l'assemblage du système linéaire en début de cycle au fur et à mesure que la fissure propage contribue également à cette réduction.

La confrontation des résultats de simulation de propagation avec des essais de fissuration sous fretting dans une configuration cylindre plan constitue également un des points importants de ce mémoire. Le très bon accord obtenu met en évidence la validité de la

stratégie utilisée et confirme l'utilisation des deuxième critères de Pineau et Hourlieret et de son extension pour la prédiction de la direction de propagation pour des chargements de fretting. Ces critères font appel aux amplitudes des FICs, calculés à la pointe d'une extension virtuelle orientée. L'utilisation des amplitudes au cours du cycle rend ces critères adaptés à un chargement multi-axial et non proportionnel.

Ces travaux proposent également une approche multi-échelles globale du problème de fissuration par fatigue des rails. Les développements cités dans le paragraphe précédent ont permis de résoudre le problème de mécanique élastique linéaire de la rupture en prenant en compte le contact et le frottement à l'interface. L'introduction du chargement mobile, la bonne modélisation de la zone de K-dominance ainsi que le calcul correct des FICs ont été validés par comparaison avec des résultats disponibles dans la littérature. A l'échelle du rail, des champs de contraintes résiduelles réalistes ont été intégrés à la stratégie XFEM/LATIN. Cette introduction est réalisée sous l'hypothèse d'un état stabilisé élastique pour le rail. Elle consiste en l'ajout d'un terme d'effort interne généralisé au second membre du système linéaire discrétisé stabilisé décrivant l'équilibre de la structure fissurée. Ces champs, issus du procédé de fabrication et de la circulation des trains, comportent de forts gradients et influencent les mécanismes de fissuration. L'étude de la flexion en amont et aval du chargement par couplage avec un macro-modèle dédié a révélé la faible influence de ce phénomène. En revanche, l'introduction d'appuis élastiques a montré l'influence de la flexion du rail sur les facteurs d'intensité des contraintes lors du passage du chargement sur la fissure.

Les résultats de simulations de propagation en fatigue de roulement sont encore très rares. Les études de sensibilité se limitent essentiellement à l'étude des facteurs d'intensité des contraintes pour une configuration donnée [SEO 10]. Le présent travail permet de réaliser de réelles simulations de propagation. Ces études sont facilitées par l'utilisation de la méthode des X-FEM qui diminue grandement le travail de maillage. Ces études ont permis de montrer la grande influence de la direction du chargement tangentiel agissant sur le rail, de l'inclinaison initiale des fissures, des champs de contraintes résiduelles et des réseaux de fissure sur le trajet global ainsi que les taux d'accroissement des fissures.

Le rôle majeur de l'orientation du chargement tangentiel a ainsi été souligné. Avec les conventions de signes définies dans ce mémoire, lorsque  $\mu_{roue-rail} > 0$  les trajets de propagation sont prédits en direction de l'âme du rail alors qu'ils sont obtenus vers la table de roulement avec  $\mu_{roue-rail} < 0$ .

Pour des angles supérieurs à  $30^\circ$ , les propagations ont été prédites plongeantes. Dans le cas de fissure faiblement inclinée avec la bande de roulement, le sens du chargement tangentiel joue un rôle majeur sur les mécanismes de fissuration.

Dans le cas où la propagation d'une unique fissure met en jeu de faibles changements de direction, une modification globale du trajet de propagation sous l'influence des contraintes résiduelles a pu être simulée. Pour une fissure bifurquant franchement vers la profondeur du rail, l'effet des contraintes résiduelles s'est limité à une diminution du taux d'accroissement.

En outre, la présence de l'effet bouclier au cycle initial modifie les mécanismes de propagation des fissures centrales du réseau. Une modification des trajets de propagation est alors prédite. Ce changement de trajet peut mener à des fissures plus rapides que dans le cas avec une unique fissure. L'influence du réseau de fissures ne se résume donc pas à l'effet bouclier observée pour la configuration initiale.

Enfin, l'effet lisseur d'un coefficient de frottement interfacial élevé sur les trajets de propagation a également été souligné. Cet effet est associé à des vitesses de fissuration plus faibles dans ce cas.

### Perspectives scientifiques

Une extension intéressante de ce travail serait d'aller jusqu'au bout de la démarche amorcée. Cela passerait par la prise en compte de chargements Hertiens en glissement partiel pour les simulations bi-dimensionnelles et bi voir tri contact pour les calculs tri-dimensionnels. In fine, insérer un réel couplage entre les échelles de la fissure et du contact roue-rail serait intéressant. Cela suppose d'effectuer une résolution du problème de contact qui tiendrait compte de la présence de la discontinuité. Idéalement, cette résolution se ferait dans le même modèle utilisé que celui pour la simulation de la propagation des fissures de fatigue.

De nombreux travaux se sont intéressés au piégeage de liquide entre les lèvres de la fissure et à la pressurisation en pointe de fissure qu'il en résulte [BOG 05a, BOG 05c, BOG 08, FAR 12b, FLE 08, BAL 11]. Cet aspect n'a pas été abordé dans ces travaux et une approche macroscopique du problème de contact à l'interface a été utilisée. Il a été considéré que cet effet joue sur la valeur du coefficient de frottement macroscopique à l'interface. La prise en compte de ce phénomène semble cependant réalisable. Dans la stratégie développée, en envisageant une introduction simplifiée de ce phénomène à l'échelle de la fissure, cela se ferait en modifiant les équations de mise à jour des quantités locales (l'étape locale). Une distribution surfacique résultant de la pressurisation du fluide serait en plus imposée sur les lèvres de la fissure [FLE 08].

La continuité directe de ces travaux est de simuler de réelle propagation tri-dimensionnelle sur une application industrielle. Dans un premier temps, débuter avec des parallélépipèdes réguliers avec des interfaces planes avant d'introduire des géométries de structure et des fissures de topologies plus évoluées semblent nécessaire. Si cette modélisation est incompatible avec le problème des head-checks (fissure située au congé de roulement du rail), elle permettrait d'étudier les fissures de type squat. L'automatisation de la construction du maillage 3D à l'aide d'une stratégie multi-grilles localisée couplée avec X-FEM et la prise en compte du contact interfacial semblent une extension intéressante [FIS 05, RAN 07, PAS 11].

La détermination de lois de propagation en volume dédiées aux problèmes de la fatigue de roulement nécessite encore de disposer d'informations expérimentales plus nom-

breuses et plus précises faisant intervenir  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  voir la contrainte  $T$ . Les techniques d'extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes à l'aide de technique d'imagerie permettant la mesure de champ de déplacement 3D, offrent des perspectives intéressantes dans ce domaine [RAN 10, RÉT 12].

En vue d'étude paramétrique massive, des techniques de réductions de modèles permettent maintenant de rendre envisageable des réductions élevées des temps de calcul (facteur 10). Ces méthodes font appel à une base de résultats disponibles pour des configurations définies. La solution correspondant à une variation de l'un des paramètres du modèle peut alors être obtenue de manière efficace à partir de l'utilisation de la base de résultats disponibles.

### **Contributions industrielles**

Ces travaux de thèse ont permis de développer et d'étendre certains opérateurs dans CAST3M. Comme détaillé dans le chapitre 2, la création des matrices du système linéaire discrétisé et stabilisé, résultant de la formulation à trois champs avec l'introduction du solveur non-linéaire LATIN, a été programmé dans l'opérateur 'RELA' 'ACCR' 'FAIB'. Cet opérateur permet la création des matrices de couplage, des matrices de "pénalité" et des matrices de stabilisation. Cet opérateur est disponible pour des problèmes bi et tri-dimensionnels pour des champs d'interface écrits à l'aide d'enrichissements sauts. Afin de résoudre le problème non-linéaire, le solveur non-linéaire LATIN a également été implémenté dans une procédure spécifique ainsi que l'indicateur d'erreur distinguant les quantités normales et tangentielles. De plus, l'ajout des termes de frottement dans le calcul des intégrales de domaine a été effectué. Cette étape a nécessité l'extension des opérateurs d'intégration et de calcul du gradient des champs locaux sur l'interface. Tous ces développements sont disponibles dans la version 2014 de CAST3M.

Une autre contribution industrielle de ce travail de thèse a été la réalisation d'un module utilisateur permettant la simulation de la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Cet outil a été réalisé en faisant appel à un macro langage de programmation que sont les procédures dans CAST3M. Un maximum de paramètres numériques est sélectionné automatiquement rendant plus aisée son utilisation (création du maillage, taille des éléments à utiliser, adaptation de maillage, choix des paramètres pour le solveur non-linéaire LATIN stabilisé, loi de propagation et critère). Cet outil a également été couplé au code utilisé pour le calcul de l'état stabilisé du rail et des versions bi et tri-dimensionnelles sont disponibles.

Cet outil permet d'obtenir un accroissement des fissures de fatigue en fonction du nombre de cycles. Une simple règle de proportionnalité permet de remonter au tonnage correspondant.

### Perspectives industrielles

La principale perspective industrielle à ce travail de thèse sera l'intégration des modèles développés dans les outils actuellement utilisés par l'Ingénierie de Maintenance SNCF. Avant de conduire ce changement, une phase de validation sera nécessaire. L'étude préliminaire présentée en section 4.6. devra être poursuivie, et contribuera à valider et renforcer les modèles déterministes développés dans le cadre de cette thèse. L'enjeu sera d'assurer une adéquation acceptable, au regard de l'expertise SNCF, entre ces résultats de calculs numériques et les données de retour d'expérience (apparition et évolution de squats) capitalisées au sein des bases de données SNCF.

Pour ce qui est des développements dans CAST3M, l'amélioration du calcul des fonctions de niveaux lorsque les fissures prennent des formes complexes est à prévoir. De plus, le long des lèvres de la fissure, l'intégration n'est pas exacte sur les éléments d'interface à cheval sur deux éléments de structure. Dans ce cas, la solution locale sur cet élément d'interface peut être perturbée. Prévoir un opérateur permettant de rendre ces discrétisations conformes en 2D et en 3D permettrait d'éviter ces configurations délicates.

D'un point de vue ingénierie, la contribution des sollicitations thermiques sur les mécanismes de propagation pourrait également être introduite dans la modélisation. Cela se ferait par l'introduction d'un champ uniforme en traction ou compression à l'aide de la formule linéaire classique [MEC 06b].

Une autre application envisageable serait de s'intéresser aux fissures très courtes, de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ , encore considérées comme micro-structurellement longues. Ces configurations autoriseraient une utilisation de l'outil pour des applications en lien avec la politique de meulage des rails. Il faudrait alors prendre en compte les phénomènes d'usure dans les simulation [RIN 05]. Cela signifie s'intéresser à la compétition entre usure et fissuration pour les fissures courtes [KAP 03, DON 05]. Il serait intéressant d'utiliser une fonction d'usure plus ou moins évoluée [TAS 10, POM 11] et de comparer le nombre de cycles nécessaires à la propagation avec la quantité de matière éjectée selon les sollicitations appliquées.

Les résultats des études paramétriques présentées dans ce mémoire demandent à être complétés. L'influence du chargement mobile de contact n'a notamment pas été analysé. On pourra également travailler avec des doubles sens de circulation.

# Annexe A : Remarques sur les enrichissements des champs locaux et l'implémentation des matrices dans RELA ACCRO FAIBLE

Le choix a été fait de décrire les champs locaux à l'aide d'enrichissement saut porté par les noeuds de la discrétisation locale. Dans cette approche toutes les inconnues locales sont portées aux noeuds de la discrétisation de l'interface. Les champs sont donc discrétisés sous la forme suivante pour une fissure débouchante avec un unique front :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i \in N_n} \mathbf{u}_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) + H \sum_{j \in N_c} \mathbf{a}_{u_j}(t) \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^4 B_l \sum_{k \in N_f} \mathbf{b}_{lk}(t) \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m \in N_m} \mathbf{w}_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}) + H \mathbf{a}_{w_m}(t) \Psi_m(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m \in N_m} \mathbf{t}_m(t) \Psi'_m(\mathbf{x}) + H \mathbf{a}_{t_m}(p) \Psi'_m(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

Dans ces équations  $H$  est la fonction Heavyside prenant pour valeur respectivement  $+1$  et  $-1$  de part et d'autre de l'interface (voir FIG.1.34). Les sauts en déplacement et en pression sur l'interface sont donc :

$$[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^- = 2\mathbf{a}_{w_m} \quad (4.8)$$

$$[\mathbf{t}] = \mathbf{t}^+ - \mathbf{t}^- = 2\mathbf{a}_{t_m} \quad (4.9)$$

ce qui revient à :

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{w}_m + \mathbf{a}_{w_m} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{w}^- = \mathbf{w}_m - \mathbf{a}_{w_m} \quad (4.11)$$

et de même pour les pressions :

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}_m + \mathbf{a}_{t_m} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{t}^- = \mathbf{t}_m - \mathbf{a}_{t_m} \quad (4.13)$$

le terme de couplage faible s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{couplage}^* &= \int_{\Gamma} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{t}^* dS \\ &= \int_{\Gamma^+} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{w}^+) \cdot \mathbf{t}^{+*} dS + \int_{\Gamma^-} (\mathbf{u}^- - \mathbf{w}^-) \cdot \mathbf{t}^{-*} dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} (\mathbf{t}^{+*} + \mathbf{t}^{-*}) (\mathbf{u}^+ - \mathbf{w}^+) + \frac{1}{2} (\mathbf{t}^{+*} - \mathbf{t}^{-*}) (\mathbf{u}^+ - \mathbf{w}^+) dS \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^-} (\mathbf{t}^{+*} + \mathbf{t}^{-*}) (\mathbf{u}^- - \mathbf{w}^-) + \frac{1}{2} (\mathbf{t}^{+*} - \mathbf{t}^{-*}) (\mathbf{u}^- - \mathbf{w}^-) dS \\ &= \int_{\Gamma^-} (\mathbf{t}^{+*} + \mathbf{t}^{-*}) \left( \left( \frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2} \right) - \left( \frac{\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-}{2} \right) \right) \\ &\quad + (\mathbf{t}^{+*} - \mathbf{t}^{-*}) \left( \left( \frac{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-}{2} \right) - \left( \frac{\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-}{2} \right) \right) dS \end{aligned} \quad (4.14)$$

Or d'après l'équilibre statique :

$$\mathbf{t}^{+*} + \mathbf{t}^{-*} = 2\mathbf{t}_m = 0 \text{ si équilibre statique } \mathbf{t}^{+*} = -\mathbf{t}^{-*} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{t}^{+*} - \mathbf{t}^{-*} = 2\mathbf{a}_{t_m} \quad (4.16)$$

$$\frac{\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-}{2} = \mathbf{w}_m \quad (4.17)$$

$$\frac{\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-}{2} = \mathbf{a}_{w_m} \quad (4.18)$$

En introduisant ces équations dans l'équation (4.14), on obtient finalement le terme de couplage suivant :

$$W_{couplage}^* = \int_{\Gamma} 2\mathbf{t}_m \Psi'_m (\mathbf{u}_i(t) \Phi_i - \Psi_p \mathbf{a}_{w_p}) + 2\mathbf{a}_{t_m} \Psi'_m (\mathbf{a}_{u_j}(t) \Phi_j + B_1 \mathbf{b}_{1k}(t) \Phi_k - \Psi_p \mathbf{a}_{w_p}) dS \quad (4.19)$$

Il est important de noter dans l'équation (4.19) le facteur 2. Ce facteur est introduit en sortie de RELA ACCRO FAIB. Ces matrices ont la même forme que des matrices de masses.

Pour ce qui est de l'implémentation dans CAST3M,  $w_m$  et  $t_m$  ont été directement identifiées comme les valeurs moyennes en déplacement et en pression aux noeuds de l'interface. En considérant uniquement la composante selon la direction X :

$$w_m = WX \text{ dans accro2.eso} \quad (4.20)$$

$$t_m = FX \text{ dans accro2.eso} \quad (4.21)$$

$$a_{w_m} = WAX \text{ dans accro2.eso} \quad (4.22)$$

$$a_{t_m} = FAX \text{ dans accro2.eso} \quad (4.23)$$



# Annexe B : Module utilisateur développé

Cette annexe précise le contenu du code développé ainsi que son organisation.

Le dossier Propafiss2D contient les dossiers suivants :

- Input/ : contient dans le dossier nom\_cas\_test/ les tables définissant les entrées du calcul. Les FIG.4.40 et 4.41 précisent ces entrées.
- Output/ : contient dans le dossier nom\_cas\_test/ les tables résultats du calcul.
- source/ : contient le Main.dgibi ainsi que les procédures utiles au calcul (dans le dossier procedures/). La FIG.4.42 illustre la structure du fichier Main.dgibi. Les FIG.4.43, 4.44, 4.45, 4.46, 4.47, 4.48, 4.49, 4.50 et 4.51 détaillent le contenu des fichiers présents dans le dossier source/procedures/.
- esope/ : contient les développements esope réalisés (les fichiers.eso).
- script/ : contient les scripts "bash" utilisés pour l'exécution du calcul dans le terminal.
- PropaFiss2D : ce script permet l'exécution d'un calcul à l'aide de la commande ./PropaFiss2D nom\_cas\_test.

**Les calculs doivent être effectués en définissant des longueurs en millimètres pour éviter les problèmes numériques introduits par des éléments d'interface de tailles trop faibles.**

Les pressions de contact du chargement roue-rail doivent donc être divisé par  $10^3$  (1 MPa =  $1.10^3$  Pa dans le module de simulation). De la même manière, le module de Young doit être divisées par 1000 ( $E = 2.1 \cdot 10^8$  Pa). Dans le cas où des contraintes résiduelles sont introduites, il faut de même diviser par un facteur 1000 les contraintes introduites. Cette étape est réalisée dans STA2PROP (fichier Residual\_field.proc). Les FICs sont ajustés dans la procédure CALCFIC. Ils sont multipliés par  $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$ .

Chargement.dgibi	Fissure.dgibi	GeoMesh.dgibi	Materiau.dgibi
<b>Tchar</b>	<b>Tfissure</b>	<b>TGeo</b>	<b>Tmat</b>
<b>TYPE</b> : 'HERTZ_GLISS_TOTAL' (seule disponible pour le moment)	<b>Nfissure</b> : nombre de fissures définies	<b>xfine</b> : dimension selon x de la zone contenant les éléments XFEM	<b>YoungModulus</b> : module de Young
<b>a</b> : demi-longueur de l'axe de l'ellipse dans la direction de roulement	<b>x</b> : liste des abscisses des points définissant la ou les fissures	<b>yfine</b> : dimension selon y de la zone contenant les éléments XFEM	<b>PoissonRatio</b> : coefficient de poisson
<b>Pmax</b> : pression maximale de hertz	<b>y</b> : liste des ordonnées des points définissant la ou les fissures	<b>L2</b> : dimension selon y de la zone contenant des éléments de 1 mm pour la prise en compte du chargement mobile	<b>Kseuil</b> : Valeur seuil à partir de laquelle la fissure se propage
<b>mu_rt</b> : coefficient de frottement entre la roue et le rail dans la direction de l'avancement	<b>Npoint</b> : liste des nombres de points à prendre en compte dans les liste de coordonnées x et y pour chaque fissure	<b>hauteur</b> : dimension selon x du domaine	<b>K1c</b> : Ténacité
<b>position</b> : liste des positions du chargement	<b>Nfront</b> : nombre de front par fissure (1 ou 2 en 2D)	<b>Longueur</b> : dimension selon y du domaine	
<b>Flex</b> : vrai pour introduire des appuis élastiques comme conditions aux limites	<b>mu_fiss</b> : liste des coefficients de frottements interfacial pour chaque fissure	<b>TMesh</b>	
<b>Pcentre</b> (si 3D) : coordonnées du point centrale de l'ellipse de hertz sur la section du rail		<b>Adap</b> : si vrai, maillage qui s'adapte automatiquement à la propagation de la fissure	
<b>b</b> (si 3D) : demi-longueur de l'axe de l'ellipse dans la direction transversale au roulement		<b>n_sup_x</b> : si adap, nombre de couches d'éléments à ajouter selon x au domaine rectangulaire dans laquelle la fissure peut être placée	
		<b>n_sup_y</b> : si adap, nombre de couches d'éléments à ajouter selon y au domaine rectangulaire dans laquelle la fissure peut être placée	
		<b>txfem</b> : dimension du côté des éléments carrés de structure dans lesquels est placée la fissure	
		<b>tfiss</b> : dimension des éléments de la discrétisation locale	

FIGURE 4.40: Tables des entrées disponibles dans le dossier Input/nom\_cas\_test définissant le chargement, la fissure, la géométrie et le maillage.

Propagation.dgibi	Solveur.dgibi	Display.dgibi	Residual_field.dgibi
<b>Tpropa</b>	<b>Tsolveur</b>	<b>Tdisplay</b>	<b>Tstress</b>
<b>DeltaLaw</b> : 'fixe' pour une extension fixée; 'auto' pour une extension égale à 4% de la longueur courante	<b>Klatin</b> : Direction de recherche de la méthode LATIN ( <i>la commenter si on ne sait pas quoi mettre</i> )	<b>Inichar</b> : Affichage du chargement en début de calcul	'AVEC' : vrai ou faux si avec ou sans contraintes résiduelles
<b>Delta_A</b> : si 'fixe', valeur de l'extension de la fissure	<b>Kstab</b> : terme de stabilisation de la méthode LATIN ( <i>la commenter si on ne sait pas quoi mettre</i> )	<b>ResiField</b> : Affichage des champs avant et après projection	'FICHIER': 'chemin_et_nom_du_fichier_issu_de_starail_à_charger'
<b>AngleLaw</b> : critère pour la prédiction de la direction de propagation 'MaxHoopStress', 'Hourlier1', 'Hourlier2', 'Hourlier2', sont disponibles	<b>IterMax</b> : Nombre d'itérations autorisées maximum pour le solveur non linéaire	<b>PasTemps</b> : Affichage des solutions globales et locales sur la déformée à la fin d'un pas de temps	
Loi de la forme $da/dn = Cparis * (DeltaKeq)^{Mparis}$	<b>Error</b> : Précision demandée	<b>Newtip</b> : Affichage de la propagation à la fin des cycles au fur et à mesure du calcul	
<b>Mparis</b>	<b>SifDomain</b> : nombre de couches d'éléments autour de la pointe de fissure utilisées pour le calcul des FIC ( <i>la commenter si on ne sait pas quoi mettre</i> )	<b>Iteration</b> : Affichage des solutions locales au cours des itérations	
<b>Cparis</b>		<b>levelset</b> : Affichage des levels set en début de cycle	
$Delta Keq = (Acoef * Deltak1^{Ncoef} + Bcoef * Deltak2^{Ncoef})^{1/Ncoef}$			
<b>Acoef</b>			
<b>Bcoef</b>			
<b>Ncoef</b>			
<b>MaxCycle</b> : Nombre de pas de propagation (1 = PAS de propagation)			

**FIGURE 4.41:** Tables des entrées disponibles dans le dossier Input/nom\_cas\_test permettant de contrôler la propagation, le solveur non-linéaire, l'affichage pour le débogage et l'introduction de champs de contraintes résiduelles.

```
Chargement des entrées: OPTI REST 'fichier'; REST 'table_dans_fichier';
Pré-processing: PREPROC
Boucle sur les cycles
  Déplacement à appliquer aux limites pour couplage avec macro-modèle de flexion: UFLEX
  Efforts à appliquer aux limites: PBORDS
  Projection des contraintes résiduelles: STA2PROP
  Creation des tables pour le nouveau cycle: NEWCYCLE
  Boucle sur les fissures pour la création des levelsets
    création des levelsets: PSIPHI
  FIN Boucle sur les fissures pour la création des levelsets
  Définitions des modèles, matériau, enrichissements, et rigidité: MODE, MATE, TRIE, RIGI
  Ajout appuis élastiques: MODE, MATE, TRIE, RIGI
  Boucle sur les fissures pour création des matrices de couplage et repère local
    RELA ACCR FAIB, LOCABASE
  FIN Boucle sur les fissures pour création des matrices de couplage et repère local

  Boucle sur les pas de temps
    Creation du second membre
    Résolution du problème non-linéaire: LATIN
    Boucle sur les fissures pour le calcul des FICS
      Boucle sur les fronts pour le calcul des FICS
        Détermination du domaine d'intégration: entrée utilisateur ou FINDBOX
        Calcul des FICs : CALCFIC
        Sauvegarde des résultats pour le pas de temps : SAVEPAS
      FIN Boucle sur les fronts pour le calcul des FICS
    FIN Boucle sur les fissures pour le calcul des FICS
  FIN Boucle sur les pas de temps

  Boucle sur les fissures pour la propagation
    Boucle sur les fronts pour la propagation
      Calcul de l'angle de propagation: CALCANGL
      Calcul de l'extension: ADDDA
      Calcul du saut de cycle équivalent: CALCDN
      Sauvegarde du saut de cycle minimal (fissure la plus rapide)
    FIN Boucle sur les fronts pour la propagation
  FIN Boucle sur les fissures pour la propagation

  Tant que conditions géométriques sur extension pour la propagation non satisfaites
    Boucle sur les fissures pour la propagation à iso-nombre de cycles
      Boucle sur les fronts pour la propagation à iso-nombre de cycles
        Ajustement des longueurs : ADJUSTDA
        Création des maillages des nouvelles fissures
        Sauvegarde des grandeurs en fin de cycle: SAVECYCL
      FIN Boucle sur les fronts pour la propagation à iso-nombre de cycles
    FIN Boucle sur les fissures pour la propagation à iso-nombre de cycles
  FIN Tant que conditions sur la propagation non satisfaites

  Ecriture des résultats
  Adaptation du maillage de structure
  FIN Boucle sur les cycles

FIN DU CALCUL
```

**FIGURE 4.42:** Algorithme simplifié du fichier source/Main.dgibi.

Nlsolver.proc			
Norm	Entrées	Sorties	Description
LATIN	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Table contrôlant l'affichage (Tdisplay)</li> <li>- Maillage de la fissure (crack)</li> <li>- Rigidité du problème enrichi 1 champ (K1tot)</li> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> <li>- Second membre (RHS0)</li> <li>- Numéro du pas de temps (IdPast)</li> <li>- Rigidité du problème enrichi 3 champs (Ktot1)</li> <li>- Matrice de couplage (Kuw1)</li> <li>- Repère local tangentiel (cht1)</li> <li>- Repère local normal (chn)</li> <li>- Nombre d'itération maximum (ItMax)</li> <li>- Précision demandée (eps1)</li> <li>- Direction de recherche de la LATIN (k)</li> <li>- Coefficient de frottement à l'interface (f_crack)</li> <li>- Maillage complet de la structure (mai1tot)</li> </ul> <p><i>Entrées optionnelles</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement x sur <math>\Gamma^+</math> (P) et <math>\Gamma^-</math> (M) (TPglo TMglo WPglo WMglo)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ de déplacement global (uz)</li> <li>- Champ des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (TPglo TMglo WPglo WMglo)</li> <li>- Liste des erreurs locales pour chaque itération (error)</li> </ul>	Contient le solveur non linéaire LATIN et les différentes étapes associées
SAVFIELD	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ de déplacement global (u1)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Tplus Tmoins Wplus Wmoins)</li> <li>- Numéro de l'itération (it1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables contenant les champs locaux et globaux aux différentes itérations (tplus tmoins twplus twmoins tu)</li> </ul>	Sauvegarde les champs dans les tables au cours des itérations de la LATIN
EXTCRACK	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ de déplacement global (u1)</li> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs de déplacement et des pressions de contact sur <math>\Gamma</math> (wsauv fsauv)</li> </ul>	Extrait les inconnues locales du champ solution du problème global
SPLIT	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> <li>- Champ des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma</math> (fint uint1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (uin1 usup tin1 tsup)</li> </ul>	Différencie les champs locaux sur l'interface des champs sur les 2 lèvres de la fissure
LOCABA3D	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> <li>- Modèle de l'interface (mod_int)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs nodaux des normales et des deux tangentes à l'interface (chn cht1 cht2)</li> </ul>	Création des repères locaux 3D sur chaque noeud de l'interface
GLO2LOC	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs nodaux des normales et des tangentes à l'interface (chn cht1)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère global (Tplus Tmoins Wplus Wmoins)</li> </ul> <p><i>Entrées optionnelles</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs nodaux des secondes tangentes à l'interface (cht2 (3D))</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> </ul>	Projection des champs de l'interface du repère global vers le repère local

FIGURE 4.43: Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Nlsolver.proc.

				Etape locale
LOCSTEP1	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Direction de recherche de la LATIN (Klatin)</li> <li>- Coefficient de frottement à l'interface (f_crack)</li> <li>- Maillage de l'interface (meshint)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Numéro de l'itération (it1)</li> <li>- Champs de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local à l'itération précédente (WlocPold WlocMold)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Champs nodaux des normales et des tangentes à l'interface (cht1)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP tlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Entrées optionnelles</li> <li>- Champs nodaux des secondes tangentes à l'interface (cht2 (3D))</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP_a WlocP_a WlocM_a (_a=after))</li> <li>- Booléen détectant l'ouverture complète de la fissure (ouv1)</li> </ul>	Projection des champs de l'interface du repère local vers le repère global
LOC2GLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP tlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Entrées optionnelles</li> <li>- Champs nodaux des secondes tangentes à l'interface (cht2 (3D))</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP tlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Entrées optionnelles</li> <li>- Champs nodaux des secondes tangentes à l'interface (cht2 (3D))</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP_a WlocP_a WlocM_a (_a=after))</li> </ul>	Recombine les champs locaux des 2 lèvres de la fissure sur l'interface en calculant les enrichissements sauts correspondants
LIPSRECO	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Wmoins Wplus Tmoins Tplus)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Wmoins Wplus Tmoins Tplus)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP_a WlocP_a WlocM_a (_a=after))</li> </ul>	Mise à jour du second membre du système linéaire matriciel discrétisé de l'étape globale
UPDATRHS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Matrice de couplage (kuwt)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma</math> (Wglo Tglo)</li> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> <li>- Numéro de l'itération (it1)</li> <li>- Efforts extérieurs (f1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Matrice de couplage (kuwt)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma</math> (Wglo Tglo)</li> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> <li>- Numéro de l'itération (it1)</li> <li>- Efforts extérieurs (f1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Second membre mis à jour du système linéaire matriciel discrétisé (rhs1)</li> </ul>	Calcul de l'indicateur d'erreur INITIALE basé sur les quantités w et t sur l'interface dans les bases locales entre la solution 0+ 1/2 et 0 + 1 (Fixe les dénominateurs)
ERRORINI	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> à l'itération 0+1 (TlocM_n WlocP_n WlocM_n)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> à l'itération 0+1/2 (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Direction de recherche de la LATIN (Klatin)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> à l'itération 0+1 (TlocM_n WlocP_n WlocM_n)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> à l'itération 0+1/2 (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> <li>- Direction de recherche de la LATIN (Klatin)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur totale (TotalErr)</li> <li>- Dénominateur pour le calcul des erreurs normale et tangentielle (denT denN)</li> <li>- Erreur tangentielle et normale (etaT**0.5) (etaN**0.5)</li> </ul>	Calcul de l'indicateur d'erreur basé sur les quantités w et t sur l'interface dans les bases locales entre la solution i + 1/2 et i + 1
GETERROR	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Idem a ERRORINI</li> <li>- Dénominateur pour le calcul des erreurs normale et tangentielle (denT denN)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Idem a ERRORINI</li> <li>- Dénominateur pour le calcul des erreurs normale et tangentielle (denT denN)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur totale (TotalErr)</li> <li>- Erreur tangentielle et normale (etaT**0.5) (etaN**0.5)</li> </ul>	Etape locale pour l'itération initiale du premier pas de temps
LOCSTEP1	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Direction de recherche de la LATIN (Klatin)</li> <li>- Coefficient de frottement à l'interface (f_crack)</li> <li>- Maillage de l'interface (meshint)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Direction de recherche de la LATIN (Klatin)</li> <li>- Coefficient de frottement à l'interface (f_crack)</li> <li>- Maillage de l'interface (meshint)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP TlocM WlocP WlocM)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> dans le repère local (TlocP_a TlocM_a WlocP_a WlocM_a (_a=after))</li> </ul>	

FIGURE 4.44: Procédures contenues dans le fichier source/procedures/NLsolver.proc.

Meca_rupture.proc			
Nom	Entrées	Sorties	Description
FINDBOX	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Levels sets (psi0 phi0)</li> <li>- Front de fissure (tip3)</li> <li>- Modèle et matériau pour la structure (mod1 mat1)</li> <li>- Chargement mécanique extérieur (cha1)</li> <li>- Solution champ de déplacement global (u0)</li> <li>- Modèle pour la fissure (mod_int)</li> <li>- Champ de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (wplus wmoins)</li> <li>- Champ des pressions de contact sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (tplus)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nombre de couches assurant une valeur convergée de J (ico1)</li> <li>- Valeur convergée de J (Jin1)</li> </ul>	Détermine le nombre de couche à utiliser pour le calcul des FICs à partir de la valeur de l'intégrale J
CALCFIC	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Levels sets (psi0 phi0)</li> <li>- Front de fissure (tip3)</li> <li>- Modèle et matériau pour la structure (mod1 mat1)</li> <li>- Solution champ de déplacement global (u0)</li> <li>- Chargement mécanique extérieur (cha1)</li> <li>- Nombre de couche entourant le front pour l'intégration (nco1)</li> <li>- Module de Young (E1)</li> <li>- Modèle pour la fissure (mod_int)</li> <li>- Champ de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (wplus wmoins)</li> <li>- Champ des pressions de contact sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (tplus)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- K1, K2 et <math>(E1 * K1^2 + K2^2)/(K1G K2G GK1K2)</math></li> <li>- Table utilisée pour le calcul des FICs (KTAB)</li> </ul>	Calcul des facteurs d'intensité des contraintes
CALCANGL	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Liste des FICs pour tous les pas de temps du cycle (K1tmp K12tmp)</li> <li>- Critère utilisé (lawdir)</li> <li>- Coefficients de la loi de propagation (Mparis Cparis ak1 bk2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Angle de propagation (ang1)</li> </ul>	Calcul de la direction de propagation de la fissure
AMESTFIC	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Table des FICs pour tous les pas de temps du cycle (K1 KII)</li> <li>- Coefficients de la loi de propagation (Mparis Cparis ak1 bk2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>k1(\theta, t_n)</math>, <math>k2(\theta, t_n)</math> à l'extrémité d'une extension orientée pour tous les angles <math>\theta</math> et tous les pas de temps <math>t_n</math> (k1 k2)</li> <li>- Tables contenant pour chaque angle <math>\theta</math> les maximum sur le cycle de <math>(k1max(\theta), Dk1(\theta), dadn(\theta))</math></li> </ul>	Calcul des FICs à l'extrémité d'une extension orientée et prétraitement des grandeurs utiles aux critères de Hourlier
ADDDA	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Angle de propagation (tet1c)</li> <li>- Repère local en pointe de fissure (ETIP1 ETIP2)</li> <li>- Front en début de cycle (avant étape de propagation) (OldTip)</li> <li>- Table définissant la propagation (Tpropa)</li> <li>- Maillage de la fissure (crack)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Extension de la fissure <math>\Delta a</math> (DeltaA)</li> <li>- Nouveau front (NewPtip)</li> </ul>	Calcul de l'extension $\Delta a$ de la fissure

FIGURE 4.45: Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Meca\_rupture.proc.

ADJUSTDA	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Angle de propagation (tet1c)</li> <li>- Repère local en pointe de fissure (ETIP1 ETIP2)</li> <li>- Front en début de cycle (avant étape de propagation) (OldTip)</li> <li>- Table définissant la propagation (Tpropa)</li> <li>- Maillage de la fissure (crack)</li> <li>- Saut de cycle à imposer (DN1)</li> <li>- Taux d'accroissement (dadn1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Extension de la fissure <math>\Delta a</math> (DeltaA)</li> <li>- Nouveau front (NewPtip)</li> </ul>	Ajuste $\Delta a$ dans le cadre de plusieurs fronts ou fissure
CALCDN	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Table des FICs pour tous les pas de temps du cycle (K1tmp K2tmp)</li> <li>- Extension de la fissure <math>\Delta a</math> (DeltaA)</li> <li>- Coefficients de la loi de propagation (Mparis Cparis ak1 bk2)</li> <li>- Valeur seuil pour la propagation (Kseuil)</li> <li>- Ténacité pour la détection de la rupture (K1C)</li> </ul>	- Saut de cycle $\Delta N$ (DN)	Calcul du saut de cycle $\Delta N$ correspondant à une extension $\Delta a$

**FIGURE 4.46:** Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Meca\_rupture.proc.

Pre_processing.proc			
Nom	Entrées	Sorties	Description
PREPROC	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables définissant les entrées du problème (Tgeo, Tffissure, Tchar, Tmat, Tsolveur, Tmesh)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractéristiques matériau (mat1)</li> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TCHAMP, TMAIL, TFICS)</li> <li>- Tables définissant les interfaces (Tffissure)</li> <li>- Maillage total (FEM+XFEM) (mai1tot)</li> <li>- Maillage XFEM (sur7)</li> <li>- Maillage FEM (mai1)</li> <li>- Contour du domaine avec éléments SEGZ ( linbas1, lincoted, lincoteg, linsup)</li> <li>- Table du chargement roue-rail pour chaque pas de temps (CHAHERTZ)</li> <li>- Modèle associé à la zone XFEM (mod1a)</li> <li>- Maillage complet du domaine FEM (mai2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Pré-traitement des données entrées par l'utilisateur</li> </ul>
PHERTZ	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> <li>- Maillage total (FEM+XFEM) (mai1tot)</li> <li>- Maillage sur lequel s'applique le chargement (MS)</li> <li>- Point central d'application du chargement (PP)</li> <li>- Pression maximale (PM)</li> <li>- Demi-longueur dans le sens d'avancement du chargement (AA)</li> <li>- Entrées optionnelles (3D)</li> <li>- Demi-longueur dans le sens transverse à l'avancement du chargement (BB)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ par points de force nodale équivalent à la pression de Hertz (CHA)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcule le champ par points donnant la force nodale FZ correspondant à la pression de Hertz :</li> </ul>
CREAFISS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables définissant les entrées relatives aux fissures (Tffissure)</li> <li>- Numéro de la fissure (i)</li> <li>- Densité des éléments d'interface (TeleFiss)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Table actualisée définissant les interfaces (Tffissure)</li> <li>- Les deux extrémités de la fissure (ptip1 ptip2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Création de la géométrie initiale et des maillages des fissures à partir des données entrées par l'utilisateur</li> </ul>
PBORDS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables définissant les entrées relatives au chargement (Tchar)</li> <li>- Liste des positions du chargement (Lpos)</li> <li>- Maillages sur lesquels s'appuie le chargement (lincoted, lincoteg)</li> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ par points de force nodale sur les maillages concernés</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition des efforts sur les bords du domaine (gauche et droit)</li> </ul>

FIGURE 4.47: Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Pre\_processing.proc.

UFLEX	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Tables définissant les entrées relatives au chargement, à la flexion, au matériau et à la géométrie (Tchar, Rflex, Tmat, Tgeo)</li> <li>-Maillages sur lesquels s'appuie les conditions aux limites en flexion (lincoted, lincoteg)</li> <li>-Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Liste des positions du chargement (Lpos)</li> <li>- Conditions aux limites en déplacement sur les bords du domaine gauche et droit (cG, cD)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Définition des déplacements sur les bords du domaine gauche et droite pour couplage avec macro modèle de flexion</li> </ul>
-------	--	---	--

**FIGURE 4.48:** Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Pre\_processing.proc.

Pilot.proc			
Nom	Entrées	Sorties	Description
INIPROPA	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Table définissant les fissures introduites dans le calcul (Tfissure)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats TCHAMP : champ globaux et locaux TMAIL : maillage structure et interface TFICS : FICS pour chaque fissure TABLE : cycle.fissure.front.quantité.pas_de_tps</li> </ul>	Initialisation des tables stockant les grandeurs utiles à la gestion de la propagation
NEWCYCLE	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TCHAMP, TMAIL, TFICS)</li> <li>- Table définissant les fissures introduites dans le calcul (Tfissure)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TCHAMP, TMAIL, TFICS)</li> </ul>	Actualisation des indices des tables pour la sauvegarde des grandeurs utiles à la gestion de la propagation
SAVEPAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TCHAMP, TFICS)</li> <li>- Numéro du cycle, pas de temps, front (IdCy, IdPasTps, IdFront)</li> <li>- K1, K2 et <math>(E1 * K1^2 + K2^2)</math> (K1, K2, GK1K2)</li> <li>- Champ de déplacement global (u0)</li> <li>- Champ des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Tplus Tmoins Wplus Wmoins)</li> <li>- Nombre de couche utilisé pour le calcul des FICS (nco1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TCHAMP, TFICS)</li> </ul>	Sauvegarde des quantités calculées pour un pas de temps
SAVECYCL	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TMAIL, TFICS)</li> <li>- Numéro du cycle, pas de temps, front (IdCy, IdPasTps, IdFront)</li> <li>- Extension de la fissure <math>\Delta a</math> (DA)</li> <li>- Saut de cycle <math>\Delta N</math> (DN)</li> <li>- Angle de propagation <math>\theta</math> (ang1)</li> <li>- Nouveau front de la fissure (Newfront)</li> <li>- Nouveau maillage de la fissure (Newfiss)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables permettant le stockage des résultats (TMAIL, TFICS)</li> </ul>	Sauvegarde des quantités calculées en fin de cycle

FIGURE 4.49: Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Pilot.proc.

Affichage.proc			
Nom	Entrées	Sorties	Description
PLOTSET	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Levels sets (psi0 phi0)</li> <li>- Maillage total (FEM+XFEM) (mai1tot)</li> <li>- Maillage de la fissure (crack)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sortie graphique</li> </ul>	Affichage des levels sets
PLOTSTEP	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Solution champ de déplacement global (u0)</li> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> <li>- Caractéristiques matériau (mat1)</li> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Wmoins Wplus Tmoins Tplus)</li> <li>- Maillage de la fissure (crack)</li> <li>- Champ des pressions du contact roue-rail (pex1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sortie graphique</li> </ul>	Affichage su chargement appliqué et des déplacements, déformée, contraintes pour un pas de temps.
PLOTITER	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champs des pressions de contact et de déplacement sur <math>\Gamma^+</math> et <math>\Gamma^-</math> (Wmoins Wplus Tmoins Tplus)</li> <li>- Maillage de la fissure (meshint)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sortie graphique</li> </ul>	Affichage des champs locaux au cours des itérations de la LATIN
PLOTCONV	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Liste des erreurs normale, tangentielle et globale au cours des itérations du solveur non linéaire</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sortie graphique</li> </ul>	Affichage des courbes de convergence de l'indicateur d'erreur normal, tangentiel et global

**FIGURE 4.50:** Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Affichage.proc.

Residual_field.proc			
Nom	Entrées	Sorties	Description
STA2PROP	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tables contenant les résultats issus du calcul stationnaire et la géométrie du modèle (Tstarail, Tgeo)</li> <li>- Modèle total (FEM + XFEM) (mod1tot)</li> <li>- Maillage total (FEM+XFEM) (mai1tot)</li> <li>- Maillage complet du domaine FEM (mai2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Champ des efforts internes généralisés (fint3)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lit les résultats en sortie de starail</li> <li>- Les projette sur le maillage utilisé pour le calcul de propagation</li> </ul>

**FIGURE 4.51:** Procédures contenues dans le fichier source/procedures/Residual\_field.proc.



# **Annexe C : Contenu du fichier accro2.eso**



<pre> IF (ICL.EQ.3) THEN   INOM(1)=1   GOTO 700 ENDIF GOTO 799  701  C LECTURE DE LA DIRECTION DE RECHERCHE (FLOTTANT)       CALL LIRREE(RLATIN,1,IRETOU)       IF (IERR.NE.0) RETURN       if (limp.ge.2) write(iolimp,*) 'On a lu la raideur :',RLATIN       GOTO 700  702  C LECTURE DE LA STABILISATION (FLOTTANT)       CALL LIRREE(XISTAB,1,IRETOU)       IF (IERR.NE.0) RETURN       if (limp.ge.2) write(iolimp,*) 'On a lu la STABILISATION :',XISTAB       GOTO 700  799  CONTINUE  ----- C  RECUPERATION DU MAILLAGE MASSIF C-----       CALL LIROBJ ('MMODEL',IPMODL,1,IRETOU)       IF (IERR.NE.0) RETURN       MMODEL=IPMODL       segact,IMODE1       C Récupération du nombre de zones du modèle       N1 = MMODEL.KMODEL(/1)       if (N1.gt.1) write(iolimp,*) 'attention 1 seule zone a ce jour!'       IMODE1 = MMODEL.KMODEL(1)       segdes,IMODE1       C Récupération du maillage et du numéro d'élément du modèle       segact,IMODE1       nele1 = IMODE1.NEFORMOD       IPT1 = IMODE1.IMAMOD       SEGACT IPT1       C Récupération du numéro d'élément du maillage, du nombre de noeuds et d'éléments       nele1 = IPT1.itypel       nbnn1 = IPT1.num(/1)       nbel1 = IPT1.num(/2)       C récupération des caractéristiques EF IPT1       call elqoui(nele1,0,3,IPT1,IMODE1)       segdes,IMODE1       INFO = IPT1       nele1 = INFELL(1)       MINTE1 = INFELL(11)       segdes,INFO       ----- C  RECUPERATION DU MAILLAGE INTERFACE C-----       IPMAI2 = 0       CALL LIROBJ ('MMODEL',IPMODL,0,IRETOU)       IF (IERR.NE.0) RETURN </pre>	<pre> if (IRETOU.EQ.1) then   MMODEL=IPMODL   segact,IMODE2   NZ = MMODEL.KMODEL(/1)   if (NZ.gt.1) write(iolimp,*) 'attention 1 seule zone a ce jour!'   IMODE2 = MMODEL.KMODEL(1)   segdes,IMODE2   segact,IMODE2   nele2 = IMODE2.NEFORMOD   IPT2 = IMODE2.IMAMOD   SEGACT IPT2   C pour l'instant on dit que nele = iele (marche pour iele entre 2 et 26, voir bdata.eso)   nele2 = IPT2.itypel   nbnn2 = IPT2.num(/1)   nbel2 = IPT2.num(/2)    C récupération des caractéristiques de l'élément   C call elqoui(nele2,0,3,IPT2,IMODE2)   segdes,IMODE2   INFO = IPT2   MINTE2 = INFELL(11)   ngau2 = INFELL(6)   segdes,INFO   else   C Dans le cas où on a un maillage en entrée   CALL LIROBJ ('MAILLAGE',IPMAI2,1,IRETOU)   IF (IERR.NE.0) RETURN   IPT2 = IPMAI2   SEGACT IPT2   C pour l'instant on dit que nele = iele (marche pour iele entre 2 et 26, voir bdata.eso)   nele2 = IPT2.itypel   nele2 = iele2   if (nele2.lt.2.or.nele2.gt.26) then     write(iolimp,*) 'élément géométrique différent de 1 élément fini'     call erreur(16)   endif   nbnn2 = IPT2.num(/1)   nbel2 = IPT2.num(/2)   C SEG2   if (nele2.EQ.2) ngau2 = 2   C SEG3   if (nele2.EQ.3) ngau2 = 3   C TRI3   if (nele2.EQ.4) ngau2 = 1   C TRI6   if (nele2.EQ.6) ngau2 = 4   C QUA4   if (nele2.EQ.8) ngau2 = 4   C QUA8   if (nele2.EQ.10) ngau2 = 9   endif    call RESHPT(ngau2,nbnn2,iele2,nele2,0,IPT2,IRET)   MINTE2 = IPT2   segact,MINTE1,MINTE2 </pre>
--	--

-4-

-3-

FIGURE 4.53: Accro2.eso



<pre> LISDUA(iodd)=DUAOB2(iidam) else   LISINC(iodd)=DLEFAC(iidam)   LISDUA(iodd)=DUAOB1(iidam) endif NOLEP(iodd)=ino2 NOLED(iodd)=ino2 enddo if (nenr1.eq.1) then   do ino1=1,nbn1     iddl=iddl+1   LISINC(iodd)=DLEOBL(iidam)   LISDUA(iodd)=DUAOB1(iidam)   NOLEP(iodd)=nbnn2*ino1   NOLED(iodd)=nbnn2*ino1 enddo else   do ino1=1,(nenr1-1)   do ino1=1,nbn1     iddl=iddl+1   LISINC(iodd)=DLEFAC(iidam+(3*(ino1-1)))   LISDUA(iodd)=DUAOB1(iidam+(3*(ino1-1)))   NOLEP(iodd)=nbnn2*ino1   NOLED(iodd)=nbnn2*ino1 enddo enddo endif if (limpi.ge.3) write(iolimp,*) ity, (LISINC(iou), iou=1, NLIGRP) SEGES,DESCR c c -initialisation du XMATRI NLRIG=0 SEGINI,XMATRI IRIGEL(4,ityy) = XMATRI IRIGEL(5,ityy) = NIFOUR IRIGEL(6,ityy) = 0 IRIGEL(7,ityy) = 0 IRIGEL(8,ityy) = 0 enddo enddo c c----- c 1. RECHERCHE DES ELEMENTS DE STRUCTURE CONTENANT DES POINTS DE GAUSS c 2. REMPLISSAGE DU MELEME + MRIGID en FONCTION c----- c c==== Boucle sur les elements de fissure ===== DO 1100 iem2=i, nbe12   call doxe(xcoor, idim, nbnn2, ipt2, num, iem2, xe2)   nbenzj = 0   nbnnoc = 0 </pre>	<pre> call ZERO(RINT, nbnn2, nbnn2) call ZERO(RINT0, nbnn2, ngau2*nbnn1) call ZERO(RINT1, nbnn2, ngau2*nbnn1) call ZERO(RINT2, nbnn2, ngau2*nbnn1) call ZERO(RINT3, nbnn2, ngau2*nbnn1) DO 1132 igau2=i, ngau2   izok = 0   c récupération des coordonnées du point de gauss dans le repère global   XFO(1) = 0.D0   XFO(2) = 0.D0   XFO(3) = 0.D0   DO ino=1, nbnn2     XFO(1) = XFO(1) + (MINTE2.SHFOT(1,ino,IGA02)*xe2(1,ino))     XFO(2) = XFO(2) + (MINTE2.SHFOT(2,ino,IGA02)*xe2(2,ino))   IF(IDIM.EQ.3) then     XFO(3) = XFO(3) + (MINTE2.SHFOT(3,ino,IGA02)*xe2(3,ino))   ENDIF ENDDO c c if (limpi.ge.5) write(iolimp,*) 'Fissure: element', iem2, c &amp; ' point de Gauss', igau2, ' &amp;', XFO(1), XFO(2) c----- Boucle sur les elements de structure ----- DO 1131 iem1=i, nbe11   c si pas d'enrichissement, on travaille sur tous les elements   if (MCHAMI.eq.0) goto 1133   c on saute les elements non enrichi car a priori ne contiennent pas la fissure   do ienr2=i, NBNENR2     MELVAI=MCHAMI.IELVAL(IENR2)     if (MELVAI.ne.0) then       do inodel=i, nbnn1         if (MELVAI.IELCHE(inodel,iem1).ne.0) goto 1133       enddo     endif   enddo   goto 1131   continue 1133 c c recuperation des coordonnées des noeuds de IPT1 : xell (dans le repère x,y,z)   call doxe(xcoor, idim, nbnn1, ipt1, num, iem1, xell) c c calcul des fonctions de formes de IPT1 au pt de Gauss de IPT2   call QSTJIS(xell, iele1, nbnn1, idim, XFO, SHPPI, qsi, IRET)   c if (limpi.ge.5) write(iolimp,*) 'Structure: element', iem1,   c &amp; ' noeuds:', (ipt1, num(iou, iem1), iou=1, nbnn1)   c if (limpi.ge.5) write(iolimp,*)   c &amp; ' N_i=', (SHPPI(1, iou), iou=1, nbnn1) c c test pour savoir si PG est dans EF de IPT1 DO 1130 ino1=i, NBNN1   if (SHPPI(1, ino1).LT. -1.01D-7) then     go to 1131   endif endif </pre>
---	--

FIGURE 4.55: Accro2.eso

<pre> 1130 continue       izok = 1       ON a trouvé l'élément de structure !       write(ioimp,*) 'On a trouvé l'élément de structure !'       DETECTION DU TYPE D'ENRICHISSEMENT MAX DE CET ELEMENT = nbentj       DO 3001 IENR2=1,NBNR2         MELVAL=CHAM1.IELVAL.IENR2         IF (MELVAL.EQ.0) GOTO 3001         DO 3002 ino1=1,nbnm1           MESEEL = MELVAL.IELCHE(ino1,iem1)           Test pour savoir si le noeud est enrichi           IF (MESEEL.EQ.0) GOTO 3002           nbentj=MAX(nbentj,IENR2)         continue       continue 3001 continue 3002 continue       if (l(imp1.ge.3) .write(ioimp,*) 'EF fissure ',iem2,       ' ptdég ',igau2, ' -&gt; EF MASSIF ',iem1, ' nbenrj=',nbenrj       &amp;       c Préparation du Remplissage du MELEME       do 3003 ino1=1,nbnm1         ino1=IPT1.NUM(ino1,iem1)         if (nbno2.gt.0) then           do ino2=i,nbno2             if (PRELEM(ino2).eq.ino1) goto 3003           enddo         endif         nouveau noeud : on l'ajoute         nbno2=nbno2+1         PRELEM(nbno2)=ino1       continue 3003 if (l(imp1.ge.3) then       write(ioimp,*) 'PRELEM=', (PRELEM(ino),iou=1,nbnmo2)       write(ioimp,*) 'EF Fissure ',iem2, ' ptdég ',igau2       endif       c CALCUL DE REL ET REL1       c matrices des fonctions de forme de l'élément associé à IPT2       do ino2=1,NBNR2         xe3(1,ino2) = sqrt(xe2(1,ino2)*xe2(1,ino2)         + xe2(2,ino2)*xe2(2,ino2) )         NGENE2(1,ino2)=MINTP2.SHPPTOT(1,ino2,IGA2)         do ipr2=1,6           SHPP2(ipr2,ino2)=MINTP2.SHPPTOT(ipr2,ino2,IGA2)         enddo       if (l(imp1.ge.4) then         write(ioimp,*) 'SHPP2', (SHPP2(iou,ino2),iou=1,6)         write(ioimp,*) 'xe2', (xe2(iou,ino2),iou=1,2)       endif       enddo       calcul du jacobien       c calcul du jacobien en 2D pour un seg2       y = XE2(2,2) - XE2(2,1)       x = XE2(1,2) - XE2(1,1) </pre>	<pre>       p = sqrt(x*x+y*y)       DJAC2 = p/2.*d0       else       CALL JACOBI(XE2,SHP2,IDIM-1,NBNR2,DJAC2)     endif   c matrices des fonctions de forme de l'élément associé à IPT1   do ino1=1,NBNM1     NGENE1(1,ino1)=SHPF1(1,ino1)   enddo   if (l(imp1.ge.4)   write(ioimp,*) 'NGENE1=', (NGENE1(1,iou),iou=1,NBNM1)   1   c calcul des matrices elementaires = produits des fonctions de forme   DO II=1,nbnm2     XGENE2 = NGENE2(1,II)*DJAC2   c calcul de K_w, Kwt et Ktt   DO JJ=1,nbnm2     jjj = JJ     CC = Jacobien * transposee(N)(II,i) * N(i,JJ) (somme sur i)     Dans le cas des seg2, poids des pts de gauss = 1     CC = XGENE2*NGENE2(1,jjj)   c REL est une matrice symétrique     REL(II,JJ) = CC     REL(JJ,II) = REL(II,JJ)   ENDDO   c calcul de K_tu   DO JJ=1,nbnm1     CC = Jacobien * transposee(N)(II,i) * N(i,JJ) (somme sur i)     CC=XGENE2*NGENE1(1,JJ)     write(ioimp,*) ' CC = ', CC     REL(II,JJ)=CC     REL(JJdec,II)=REL(II,JJdec)   ENDDO   if (l(imp1.ge.4) .write(ioimp,*)   'REL(1,II,1,1)=' , (REL(11,iou),iou=1,NBNM1)   ENDDO   1   c CUMUL DANS RINT ET RINT1   c CUMUL DANS RINT(II,JJ) pour Kww, Kwt, Ktt et Ktt   c (4 fois la meme matrices = N*(w T) * N*(w T) * N*(w T) * N*(t) = ...)   DO II=1,nbnm2     DO JJ=1,nbnm2       RINT(11,JJ) = RINT(11,JJ) + REL(11,JJ)     ENDDO   ENDDO   c CUMUL DANS RINT(II,JJ) pour Kut (= N*(t T) * N*(u))   c INTEGRATION POSSIBLEMENT INCOMPATIBLE POUR KUT !   c on peut prendre le 1er enrichissement (ou le standard) car on a   c toujours les memes noeuds au début (sans tenir compte des BIX)   c Stockage de l'élément iem1 pour les differents PG   elemFG(igau2) = iem1 </pre>
--	--

FIGURE 4.56: Accro2.eso

<pre> DO 4205 JI=1,nbnn1   iino1=IPT1.NUM(JI,iem1) do JJI = 1,nbmo2   if (PRELEM(JJI) .eq. iino1) goto 4207 enddo write(iOIMP,*) 'On n a pas trouvé le noeud ',iino1 call ERREUR(5) continue itoco = 0 4207 c UX DO II=1,nbnn2   RINTO(II,JJI) = RINTO(II,JJI) + RELI(II,JJ) ENDDO AX DO II=1,nbnn2   MELVA1 = MCHAM1.IELVAL(1)   MLREEL = MELVA1.IELCHE(JJ,iem1)   if (MLREEL.ne.0) then     RINTI(II,JJI) = RINTI(II,JJI) + RELI(II,JJ)     write(iOIMP,*) ' RINTI(,II,JJI,') = ', RINTI(II,JJI)   endif ENDDO c BLX IF (nbentJ.ge.2) THEN   MELVA1 = MCHAM1.IELVAL(2)   MLREEL = MELVA1.IELCHE(JJ,iem1)   if (MLREEL.ne.0) then     PSIX = 0.60     do iio = 1,nbnn1       PSIX = PSIX + (SHPP1(1,iio) * PROG(iio))     enddo   endif   SEGDES,MLREEL   RXO5= SQRT(ABS(PSIX))   write(iOIMP,*) 'RXO5 = ', RXO5   do II=1,nbnn2     RINTZ(II,JJI) = RINTZ(II,JJI) + RXO5*RELI(II,JJ)   enddo endif ENDIF c B2X IF (nbentJ.ge.3) THEN   MELVA1 = MCHAM1.IELVAL(3)   MLREEL = MELVA1.IELCHE(JJ,iem1)   if (MLREEL.ne.0) then     PSIX = 0.60     SEGACT,MLREEL     do iio = 1,nbnn1       PSIX = PSIX + (SHPP1(1,iio) * PROG(iio))     enddo   endif endif </pre>	<pre> SEGDES,MLREEL RXO5= SQRT(ABS(PSIX)) do II=1,nbnn2   RINT3(II,JJI) = RINT3(II,JJI) + RXO5*RELI(II,JJ) enddo endif ENDIF 4205 CONTINUE if (limpi.ge.4) then   DO II=1,nbnn2     write(iOIMP,*) 'RINTI(,II,') = ', (RINTI(II,iou),iou=1,nbmo2)   ENDDO endif c c on a trouvé le iem1 élément et on a fait le travail : c on passe au point de gauss suivant goto 1132 1131 CONTINUE fin de la Boucle sur les éléments de structure ----- if (limpi.ge.2) write(iOIMP,*) 1 'Fin de la boucle sur les éléments de structure' &amp; if (izok.eq.0) write(iOIMP,*) 'Attention le pt de Gauss ' &amp; ,igauez,'de l'élément ',iem2,' est hors support' 1132 CONTINUE c ----- fin de la Boucle sur les pt de G de fissure ----- c --- Remplissage du MELEME et DU XMATRI --- DO itypl=1,2 c on commence par le MELEME des ddls obligatoire (U)   izeone = 1 c on poursuit avec le MELEME des ddls Sauts (H ou HB1 ou HB1B2)   if (itypl.ge.2) izeone=nbentJ+1   ity = ITAMYT(nbmo2,izeone)   do iidim=1,iidim     ity = (ity-1) * iidim + iidim     if (limpi.ge.4) write(iOIMP,*) ity,nbmo2,izeone,' -&gt; ',ityty   endif c --- Remplissage du MELEME ---   MELEME = IRIGEL(1,ityty)   NBNB = NUM(/1)   NBELEM = NUM(/2) + 1   if (limpi.ge.4) then     write(iOIMP,*) 'on remplit le type de matrice ',ityty,     ' NBNB,NBELEM=',NBNB,NBELEM   endif   segadj,MELEME   element de fissure   do iino2=1,nbnn2     NUM(iino2,NBELEM) = IPT2.NUM(iino2,iem2)   enddo </pre>
---	---

FIGURE 4.57: Accro2.eso



```

RETURN
END

C BOUCLE SUR LES SOUS RIGIDIFÉS
ityok = 0
DO 2000 ityty=1, (ldim*NTMAT)
  MELEME = IRIGEL(1,ityty)
  DESCR = IRIGEL(3,ityty)
  XMATRI = IRIGEL(4,ityty)
  NBELEM = NOK(//)
  if (NBELEM.ne.0) then
    ityok = ityok + 1
    IRIGEL(1,ityok) = MELEME
    IRIGEL(3,ityok) = DESCR
    IRIGEL(4,ityok) = XMATRI
    segdes,MELEME,XMATRI
  else
    segsup,MELEME,DESCR,XMATRI
  endif
2000 continue
NRIGEL = ityok
segadj,MRIGID
C-----
C MENAGE AVANT DE QUITTER
C-----

C-----
segsup,MTRAV
segdes,MINTEL,MINTEZ
segdes,IPT1,IPT2
segdes,MCHM1
C-----
C ON REMPLACE LES EX PAR DES LX
C-----
IF (INOMD.eq.0) THEN
  JGNS=4
  JGMS=*ldim
  segini,MLMOT1
  do lidim=1,ldim
    MLMOT1.MOTS(lidim) = DUAOBL(lidim)
    MLMOT1.MOTS(lidim+ldim) = DUNFAC(lidim)
  enddo
  ILMOT1 = MLMOT1
  IFRIG1 = MRIGID
  if (limp1.ge.2) write(ioimp,*) ' APPEL A FX2LX '
  CALL FX2LX(IPRIG1,ILMOT1,IPRIG2)
  MRIGID = IPRIG2
  SEGSUP,MLMOT1
  ENDDIF
C
write(ioimp,*) 'desactivation du MRIGID',MRIGID
SEGES,MRIGID
if (limp1.ge.3) write(ioimp,*) 'écriture du MRIGID',MRIGID
CALL ECRBUJ('RIGIDITE',MRIGID)

```

-16-

-15-

FIGURE 4.59: Accro2.eso



# Bibliographie

- [AMD 12] AMDOUNI S., HILD P., LLERAS V., MOAKHER M., RENARD Y.  
A stabilized Lagrange multiplier method for the enriched finite-element approximation of contact problems of cracked elastic bodies. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 46(4), 2012, p. 813-839.
- [AME 79] AMESTOY M., BUI H., DANG-VAN K.  
Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 289, 1979, p. 99-102.
- [AND 07] ANDERSSON E., BERG M., STICHEL S.  
*Rail vehicle dynamics*. Dep of Aeronautical & Vehicle Eng., KTH, 2007.
- [BAI 02] BAIETTO-DUBOURG M.-C., BERTHIER Y., VINCENT L.  
Cracking under fretting fatigue : damage prediction under multiaxial fatigue. *Journal of Strain Analysis*, vol. 37(6), 2002, p. 519-533.
- [BAI 10] BAIETTO M.-C., PIERRÈS E., GRAVOUIL A.  
A multi-model X-FEM strategy dedicated to frictional crack growth under cyclic fretting fatigue loadings. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, 2010, p. 1405-1423.
- [BAI 13] BAIETTO M.-C., PIERRÈS E., GRAVOUIL A., BERTHEL B., FOUVRY S., TROLLÉ B.  
Fretting fatigue crack growth simulation based on a combined experimental and XFEM strategy. *International Journal of Fatigue*, vol. 47, 2013, p. 31-43.
- [BAL 11] BALCOMBE R., FOWELL M. T., OLVER A. V., IOANNIDES S., DINI D.  
A coupled approach for rolling contact fatigue cracks in the hydrodynamic lubrication regime : The importance of fluid/solid interactions. *Wear*, vol. 271, 2011, p. 720-733.
- [BAR 74] BARSOUM R.  
Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, vol. 10, 1974, p. 603-605.
- [BAT 97] BATHIAS C., BAÏLON J.-P.  
*La fatigue des matériaux et des structures. 2ème édition revue et augmentée*. 1997.
- [BÉC 09] BÉCHET E., MOËS N., WOHLMUTH B.  
A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 78, 2009, p. 931-954.

- [BOG 96] BOGDANSKI S., OLZAK M., STUPNICKI J.  
Numerical stress analysis of rail rolling contact fatigue cracks. *Wear*, vol. 191, 1996, p. 14–24.
- [BOG 02] BOGDANSKI S., BROWN M. W.  
Modelling the three-dimensional behaviour of shallow rolling contact fatigue cracks in rails. *Wear*, vol. 253, 2002, p. 17–25.
- [BOG 05a] BOGDANSKI S.  
Liquide-solid interaction at opening in rolling contact fatigue cracks. *Wear*, vol. 258, 2005, p. 1273–1279.
- [BOG 05b] BOGDANSKI S.  
Predicting the growth of RCF crack with the use of the 3D multi size finite element model. D. DOWSON M. PRIEST G. D., LUBRECHT A., Eds., *Life Cycle Tribology Proceedings of the 31st Leeds-Lyon Symposium on Tribology Held at Trinity and All Saints College, Horsforth, Leeds, UK 7th-10th September 2004*, vol. Volume 48, p. 709-721 Elsevier, 2005.
- [BOG 05c] BOGDANSKI S., LEWICKI P., SZYMANIAK M.  
Experimental and theoretical investigation of the phenomenon of filling the RCF crack with liquid. *Wear*, vol. 258, 2005, p. 1280–1287.
- [BOG 08] BOGDANSKI S., LEWICKI P.  
3D model of liquid entrapment mechanism for rolling contact fatigue cracks in rails. *Wear*, vol. 265, 2008, p. 1356–1362.
- [BOL 91] BOLD P., BROWN M., ALLEN R.  
Shear mode crack growth and rolling contact fatigue. *Wear*, vol. 144, 1991, p. 307–317.
- [BOW 88] BOWER A. F.  
The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks. *Journal of Tribology*, vol. 110(4), 1988, p. 704–711.
- [BOW 91] BOWER A. F., JOHNSON K. L.  
Plastic flow and shakedown of the rail surface in repeated wheel-rail contact. *Wear*, vol. 144, 1991, p. 1-18.
- [BRO 12] BROUZOULIS J., EKH M.  
Crack propagation in rails under rolling contact fatigue loading conditions based on material forces. *International Journal of Fatigue*, vol. 45, 2012, p. 98–105.
- [BUD 04] BUDYN ., Z G., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61(10), 2004, p. 1741-1770.
- [BUF 05] BUFFIÈRE J.-Y., PROUDHON H., FERRIE E., LUDWIGA W., MAIRE E., CLOETEN P.  
Three dimensional imaging of damage in structural materials using high resolution microtomography. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, vol. 238, 2005, p. 75-82.

- [BUI 78] BUI H.  
*Mécanique de la rupture fragile*. Masson, p.215, 1978.
- [CAN 96] CANNON D., PRADIER H.  
Rail rolling contact fatigue Research by the European Rail Research Institute. *Wear*, vol. 191, 1996, p. 1-13.
- [CAR 26] CARTER F. W.  
On the Action of a Locomotive Driving Wheel. *Proc. R. Soc. London A*, vol. 112, 1926, p. 151-157.
- [CAR 00] CARTER B. J., WAWRZYNEK P. A., INGRAFFEA A. R.  
Automated 3-D crack growth simulation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 47, 2000, p. 229–253, John Wiley & Sons, Ltd.
- [CAS 13] CAST3M  
*Code de calcul pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis développé par le CEA*. <http://www-cast3m.cea.fr/>, 2013.
- [CHA 99] CHAMPANEY L., COGNARD J. Y., LADÈVEZE P.  
Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures*, vol. 73, 1999, p. 249–266.
- [CLA 96a] CLAYTON P.  
Tribological aspects of wheel-rail contact : a review of recent experimental research. *Wear*, vol. 191, 1996, p. 170–183.
- [CLA 96b] CLAYTON P., JIN N.  
Unlubricated sliding and rolling/sliding wear behavior of continuously cooled, low/medium carbon bainitic steels. *Wear*, vol. 200, 1996, p. 74–82.
- [COL 11] COLOMBO D., MASSIN P.  
Fast And Robust Level Set Update For 3d Non-Planar X-Fem Crack Propagation Modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 2011, p. 2160-2180.
- [COM 77] COMINOU M.  
The interface crack with friction in the contact zone. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, p. 780-781.
- [CSC 09] CSC  
IN 0285 Codification des défauts de rails Version 03 du 01-07-2009. rapport, 2009, SNCF.
- [CSC 12] CSC :ER-IM2 S. M. D. R.  
Bilan Annuel du domaine Rail pour l'année 2010. rapport, 2012, SNCF.
- [Dan 93] DANG VAN K., MAITOURNAM M.  
Steady-state flow in classical elastoplasticity : Applications to repeated rolling and sliding contact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, 1993, p. 1691–1710.

- [Dan 96] DANG VAN K., MAITOURNAM M., PRASIL B.  
Elastoplastic analysis of repeated moving contact : application to railways damage phenomena. *Wear*, vol. 196, 1996, p. 77-81.
- [Dan 09] DANG VAN K., MAITOURNAM M., MOUMNI Z., ROGER F.  
A comprehensive approach for modeling fatigue and fracture of rails. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, 2009, p. 2626–2636.
- [DAT 05] DATSYSHYN O. P.  
Service life and fracture of solid bodies under the conditions of cyclic contact interaction. *Materials Science*, vol. 41(6), 2005, p. 709-733.
- [DOL 01] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
An extended finite element method for modelling cack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6825–6846.
- [DON 05] DONZELLA G., FACCOLI M., GHIDINI A., MAZZU A., ROBERTI R.  
The competitive role of wear and RCF in a rail steel. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, 2005, p. 287–308.
- [DOQ 04] DOQUET V., POMMIER S.  
Fatigue crack growth under nonproportional mixed mode loading in ferritic pearlitic steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 27(11), 2004, p. 1051-1060.
- [DUB 92a] DUBOURG M.-C., GODET M., VILLECHAISE B.  
Analysis of Multiple Fatigue Cracks, Part II : Results. *ASME Journal of Tribology*, vol. 114, 1992, p. 462-468.
- [DUB 92b] DUBOURG M.-C., VILLECHAISE B.  
Analysis of Multiple Fatigue Cracks, Part I : Theory. *ASME Journal of Tribology*, vol. 114, 1992, p. 455-461.
- [DUB 93] DUBOURG M.-C., KALKER J. J., CANNON D. F., ORRINGER O.  
*Crack behavior under rolling contact fatigue, Rail quality and maintenance for modern railway operation. pp 373-384. Kluwer Academics Publishers, 1993.*
- [DUB 00] DUBOURG M.-C., LAMACQ V.  
Stage II Crack Propagation Direction Under Fretting Fatigue Loading. A New Approach in Accordance with Experimental Observations. *in Fretting Fatigue : Current Technology and Practices, ASTM*, vol. 1367, 2000, p. 436-450.
- [DUB 02] DUBOURG M.-C., LAMACQ V.  
A Predictive Rolling Contact Fatigue Crack Growth Model : Onset of Branching, Direction, and Growth. Role of Dry and Lubricated Conditions on Crack Patterns. *Journal of Tribology*, vol. 124, 2002, p. 680–688.
- [DUF 07] DUFLOT M.  
A study of the representation of cracks with level sets. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 70, 2007, p. 1261–1302, John Wiley & Sons, Ltd.

- [DUK 99] DUKKIPATI R. V., DONG R.  
Idealized steady state interaction between railway vehicle and track. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit*, vol. 213, 1999, p. 15-29.
- [EKB 05] EKBERG A., KABO E.  
Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading :an overview. *Wear*, vol. 258, 2005, p. 1288-1300.
- [EKB 09] EKBERG A., KABO E., NIELSEN J.  
Alarm limits for wheel-rail impact loads - part 2 : analysis of crack growth and fracture. rapport, 2009, Department of Applied Mechanics - Chalmers University of Technology.
- [EKH 00] EKH M., JOHANSSON A., THORBERNTSSON H., B.L.JOSEFSON  
Models for cyclic ratchetting plasticity, integration and calibration. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 122, 2000, p. 49-55.
- [ELB 70] ELBER W.  
Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, 1970, p. 37-45.
- [ELB 71] ELBER W.  
The significance of fatigue crack closure. *Dammage Tolerant Aircraft Structures, ASTM STP*, vol. 486, 1971, p. 230-242.
- [ELG 07a] ELGUEDJ T.  
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2007.
- [ELG 07b] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, 2007, p. 1569–1597.
- [ERD 63] ERDOGAN F., SIH G.  
On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Engng.*, vol. 85, 1963, p. 519–527.
- [FAR 12a] FARJOO M., DANIEL W., MEEHAN P. A.  
Modelling a squat form crack on a rail laid on an elastic foundation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 85, 2012, p. 47–58.
- [FAR 12b] FARJOO M., PAL S., DANIEL W., MEEHAN P. A.  
Stress intensity factors around a 3D squat form crack and prediction of crack growth direction considering water entrapment and elastic foundation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 94, 2012, p. 37–55.
- [FAR 13] FARJOO M., DANIEL W., BELLETTE P., MEEHAN P. A.  
Field statistical and finite element analysis of rail squats. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 109, 2013, p. 117-129.

- [FIS 05] FISH J., YUAN Z.  
Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2005, p. 1341–1359.
- [FLE 00] FLETCHER D., BEYNON J.  
Development of a machine for closely controlled rolling contact fatigue and wear testing. *Journal of Testing and Evaluation*, vol. 28(4), 2000, p. 267-275.
- [FLE 08] FLETCHER D., HYDE P., KAPOOR A.  
Modelling and full-scale trials to investigate fluid pressurisation of rolling contact fatigue cracks. *Wear*, vol. 265, 2008, p. 1317–1324.
- [FLE 09] FLETCHER D., SMITH L., KAPOOR A.  
Rail rolling contact fatigue dependence on friction, predicted using fracture mechanics with a three-dimensional boundary element model. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, 2009, p. 2612–2625.
- [FOR 67] FORMAN R., KEARNEY R., ENGLE V.  
Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of Basic Engineering*, vol. 89, 1967, p. 459–464.
- [FOU 96] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L., VAN K. D.  
Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions. *Wear*, vol. 195, 1996, p. 21-34.
- [FRI 12] FRIES T., BAYDOUN M.  
Crack propagation with the extended finite element method and a hybrid explicit-implicit crack description,. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, 2012, p. 1527–1558.
- [GAL 06] GALLARDO-HERNANDEZ E., LEWIS R., DWYER-JOYCE R.  
Temperature in a twin-disc wheel/rail contact simulation. *Tribology International*, vol. 39, 2006, p. 1653–1663.
- [GAR 84] GARG V. K., DUKKIPATI R. V.  
*Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1984.
- [GIN 08] GINER E., SUKUMAR N., DENIA F., FUENMAYOR F.  
Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, 2008, p. 5675–5687.
- [GIN 11] GINER E., NAVARRO C., SABSABI M., TUR M., DOMINGUEZ J., FUENMAYOR F.  
Fretting fatigue life prediction using the extended finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, 2011, p. 217–225.
- [GIN 14] GINER E., SABSABI M., RODENAS J. J., JAVIER FUENMAYOR F.  
Direction of crack propagation in a complete contact fretting-fatigue problem. *International Journal of Fatigue*, vol. 58, 2014, p. 172–180.
- [GéN 06] GÉNIAUT S.  
Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2006.

- [GéN 07] GÉNIAUT S., MASSIN P., MOËS N.  
A stable 3D contact formulation for cracks using X-FEM. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16(2), 2007, p. 259–275.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2569–2586.
- [GRA 11] GRAVOUIL A., PIERRÈS E., BAIETTO M.-C.  
Stabilized global-local X-FEM for 3D non-planar frictional crack using relevant meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 88, 2011, p. 1449–1475.
- [GRA 12] GRASSIE S. L., FLETCHER D. I., HERNANDEZ E. A. G., SUMMERS P.  
Studs : a squat-type defect in rails. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit*, , 2012, p. 243-256.
- [GRI 20] GRIFFITH A.  
The phenomena of rupture and flow in solids. *philosophical transaction of royal society of London*, vol. 221, 1920, p. 163–197.
- [GUI 08] GUIDAULT P., ALLIX O., CHAMPANEY L., CORNUAULT C.  
A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 381–399.
- [GUO 10] GUO J., LI W., Z. WEN A. X.  
Mutual interaction of two rail surface cracks under thermo-mechanical contact loading. *Advanced Materials Research*, vol. 97-110, 2010, p. 543-546.
- [HAR 70] HARTMAN A., SCHIJVE J.  
The effects of environment and load frequency on the crack propagation law for macro fatigue crack growth in aluminum alloys. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 1(4), 1970, p. 615–631.
- [HIL 96] HILLS D., KELLY P., DAI D., KORSUNSKY A.  
*Solution of crack problems - the distributed dislocation technique*. Kluwer Academic press, 1996.
- [HOB 06] HOBBS J.  
Post Hatfield rolling contact fatigue. Modelling of bending stresses in rails. rapport, 2006, Health & Safety Laboratory.
- [HOU 82a] HOURLIER F., DHONDT H., TRUCHON M., PINEAU A.  
Etude du branchement des fissures de fatigue sous sollicitations bimodales non proportionnelles. Influence de la cinétique de propagation du matériau. rapport, 1982, Institut de recherche de la sidérurgie française IRSID.
- [HOU 82b] HOURLIER F., PINEAU A.  
Propagation of fatigue cracks under polymodal loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 5, 1982, p. 287–302, Blackwell Publishing Ltd.

- [IRW 57] IRWIN G.  
Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics Transactions*, vol. 24, 1957, p. 361–364.
- [JIA 96a] JIANG Y., H. SEHITOGLU  
Modeling of cyclic ratchetting plasticity, part II : comparison of model simulations with experiments. *Trans ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 63, 1996, p. 726-33.
- [JIA 96b] JIANG Y., SEHITOGLU H.  
Modeling of cyclic ratchetting plasticity, part I : development of constitutive relations. *Trans ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 63, 1996, p. 720-725.
- [JOH 58] JOHNSON K. L.  
The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 25, 1958, p. 339-346.
- [JOH 89] JOHNSON K.  
The strength of surfaces in rolling contact. *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 203, 1989, p. 151–63.
- [KAL 82] KALKER J. J.  
A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics*, vol. 11, 1982, p. 1–13.
- [KAL 90] KALKER J.  
Wheel-rail rolling contact theory. GRASSIE S., Ed., *Mechanics and Fatigue in Wheel/Rail Contact*, p. 243–261 Elsevier, Oxford, 1990.
- [KAN 06] KANE A., DOQUET V.  
Surface crack and cracks networks in biaxial fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, 2006, p. 233-251.
- [KAP 94] KAPOOR A.  
A re-evaluation of the life to rupture of ductile metals by cyclic plastic. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 17, 1994, p. 201-219.
- [KAP 03] KAPOOR A., FLETCHER D., FRANKLIN F.  
The Role of Wear in Enhancing Rail Life. *Tribological Research and Design for Engineering Systems*, vol. 41, 2003, p. 331-340.
- [KAP 06a] KAPOOR A., FLETCHER D. I.  
Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven growth in rail. Part 1 : the model. rapport, 2006, Newrail Report NO. WR061106-2. Newcastle University.
- [KAP 06b] KAPOOR A., FLETCHER D. I.  
Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven growth in rail. Part 2 : Data. rapport, 2006, Newrail Report NO. WR061106-3. Newcastle University.

- [KAP 06c] KAPOOR A., FLETCHER D. I.  
Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven growth in rail. Part 3 : Further Data. rapport, 2006, Newrail Report NO. WR061106-4. Newcastle University.
- [KAP 06d] KAPOOR A., FLETCHER D. I., FRANKLIN F. J., SMITH L., HYDE P.  
Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven growth in rail. Comparison of the Hatfield and alternative UK rails using models to assess the effect of residual stress on crack growth from rolling contact fatigue. rapport, 2006, Newrail Report NO. WR061106-6. Newcastle University.
- [KEL 03] KELLEHER J., MICHAEL B., BUTTLE D., MUMMERY P., WEBSTER P., SHACKLETON J., WITHERS P.  
The measurement of residual stress in railway rails by diffraction and other methods. *Journal of Neutron Research*, vol. 11(4), 2003, p. 187-193.
- [KIM 02] KIM J.-K., KIM C.-S.  
Fatigue crack growth behavior of rail steel under mode I and mixed mode loadings. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 338, 2002, p. 191–201.
- [LAD 85] LADEVÈZE P.  
Notes : Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 300,nř2, 1985, p. 41–44.
- [LAD 99] LADEVÈZE P.  
*Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. 1999.
- [LAM 97] LAMACQ V., DUBOURG M.-C., VINCENT L.  
A theoretical model for the prediction of initial growth angles and sites of fretting fatigue cracks. *Tribology International*, vol. 30, 1997, p. 391–400.
- [LIU 84] LIU H., LIU D.  
A quantitative analysis of structure sensitive fatigue crack growth in steels. *Scr Metall*, vol. 18, 1984, p. 7–12.
- [LIU 08] LIU F., BORJA R. I.  
A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, 2008, p. 1489–1512.
- [LIU 10] LIU F., BORJA R. I.  
Stabilized low-order finite elements for frictional contact with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 2456–2471.
- [LUZ 04] LUZIN V., GORDON J., GNAUPEL-HEROLD T., PRASK H.  
Neutron Residual Stress Measurements on Rail Sections for Different Production Conditions. *ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Rail Transportation, Anaheim, CA*, vol. 24(3), 2004, p. 117-122.

- [MAI 01] MAIRE E., BABOUT L., BUFFIERE J.-Y., FOUGERES R.  
Recent results on 3D characterisation of microstructure and damage of metal matrix composites and a metallic foam using X-ray tomography. *Materials Science and Engineering*, vol. 319-321, 2001, p. 216-219.
- [MAL 10] MALIGNO A., RAJARATNAM S., LEEN S., WILLIAMS E.  
A three-dimensional (3D) numerical study of fatigue crack growth using remeshing techniques. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, 2010, p. 94-111.
- [MEC 06a] MECAMIX  
TÂCHE 4.3a : Simulation Numérique des Essais DB. rapport, 2006, SNCF.
- [MEC 06b] MECAMIX  
TÂCHE 5.1 : Règles d'Evaluation de l'Endommagement des Rails. rapport, 2006, SNCF.
- [MEL 96] MELENK J., BABUSKA I.  
The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, 1996, p. 289-314.
- [MEL 05] MELLINGS S., BAYNHAM J., ADEY R.  
Automatic crack growth prediction in rails with BEM. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, 2005, p. 309-318.
- [MIL 81] MILLER M., GALLAGHER J.  
An analysis of several fatigue crack growth rate (FCGR) descriptions. In : *Hudak Jr SJ, Bucci RJ, editors.*, vol. Fatigue crack growth measurement and data analysis, ASTM STP 738. American Society for Testing and Materials, 1981, p. 205-251.
- [MOë 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.  
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [MOë 02] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2549-2568.
- [MOë 06] MOËS N., E ; BÉCHET, TOURBIER M.  
Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 67, 2006, p. 1641-1669, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOR 65] MORROW J.  
Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals. In : *International friction, damping, and cyclic plasticity*, ASTM STP378. Philadelphia, PA, USA : American Society for Testing and Materials, , 1965, p. 45-87.
- [NGU 77] NGUYEN Q.  
On the elastic plastic initial-value problem and its numerical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, 1977, p. 817-832.

- [NGU 11] NGUYEN-TAJAN M., FUNFSCHILLING C.  
A numerical modeling strategy for the rolling contact fatigue analysis of rails. *WCRR*, 2011.
- [OSH 88] OSHER S., SETHIAN J.  
Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, vol. 79, 1988, p. 12-49.
- [OTS 75] OTSUKA A., MORI K., MIYATA T.  
Condition of fatigue crack growth in mixed mode condition. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 7, 1975, p. 429-432.
- [PAP 97] PAPADOPOULOS I. A.  
A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 19, 1997, p. 219-235.
- [PAP 01] PAPADOPOULOS I. V.  
Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 23, 2001, p. 839-849.
- [PAR 63] PARIS P., ERDOGAN F.  
A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic engineering*, vol. 85, 1963, p. 528-534.
- [PAS 08] PASSIEUX J.-C.  
Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2008.
- [PAS 11] PASSIEUX J., GRAVOUIL A., RÉTHORÉ J., BAIETTO M.-C.  
Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, 2011, p. 1648-1666.
- [PIE 10a] PIERRÈS E.  
Simulation numérique multi-échelle et de la propagation de fissures expérimentales tridimensionnelles sous chargement de fretting fatigue par la méthode des éléments finis étendus. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [PIE 10b] PIERRÈS E., BAIETTO M.-C., GRAVOUIL A.  
A two-scale extended finite element method for modelling 3D crack growth with interfacial contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199 : 17-20, 2010, p. 1165-1177.
- [PIE 10c] PIERRÈS E., BAIETTO M.-C., GRAVOUIL A., MORALES-ESPEJEL G.  
3D two scale X-FEM crack model with interfacial frictional contact : Application to fretting fatigue. *Tribology International*, vol. 43, 2010, p. 1831-1841.
- [POM 09] POMMIER S., GRAVOUIL A., MOËS N., COMBESCURE A.  
*La simulation numérique de la propagation des fissures*. Hermès science, 2009.

- [POM 11] POMBO J., AMBRÓSIO J., PEREIRA M., LEWIS R., DWYER-JOYCE R., ARIAUDO C., N.KUKA  
Development of a wear prediction tool for steel railway wheels using three alternative wear functions. *Wear*, vol. 271, 2011, p. 238-245.
- [POT 92] POTELO A., ALIABADI M., ROOKE D.  
The dual boundary element method - Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33(6), 1992, p. 1269-1287.
- [PRA 07a] PRABEL B.  
Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [PRA 07b] PRABEL B., COMBESURE A., GRAVOUIL A., MARIE. S.  
Level set X-FEM non-matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, 2007, p. 1553-1569.
- [PRA 11] PRABEL B., SIMATOS A., YURITZINN T., CHARRAS T.  
Propagation de fissures tridimensionnelles dans des matériaux inélastiques avec XFEM dans Cast3m. *CSMA 2011 10ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2011.
- [PRA 14] PRABEL B., CHARRAS T., YURITZINN T., GRAVOUIL A.  
An explicit/implicit XFEM crack description for 3D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. Soumis, 2014.
- [RAN 07] RANNOU J., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
A multi-grid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16, 2007, p. 161-182.
- [RAN 09] RANNOU J., GRAVOUIL A., BAIETTO-DUBOURG M. C.  
A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 77, 2009, p. 581-600, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RAN 10] RANNOU J., LIMODIN N., RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., LUDWIG W., BAIETTO-DUBOURG M.-C., BUFFIÈRE J.-Y., COMBESURE A., HILD F., ROUX S.  
Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 1307-1325.
- [RIB 06] RIBEAUCOURT R.  
Gestion du contact avec frottement le long des faces de fissures dans le cas de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [RIB 07] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG M.-C., GRAVOUIL A.  
A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 3230-3247.

- [RIC 68] RICE J.  
A path independent integral and the approximate analysis of stress concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, 1968, p. 379–386.
- [RIN 01] RINGSBERG J. W.  
Life prediction of rolling contact fatigue crack initiation. *International Journal of Fatigue*, vol. 23, n° 7, 2001, p. 575–586.
- [RIN 03] RINGSBERG J. W., LINDÄCK T.  
Rolling contact fatigue analysis of rails including numerical simulations of the rail manufacturing process and repeated wheel-rail contact loads. *International Journal of Fatigue*, vol. 25, n° 6, 2003, p. 547–558.
- [RIN 05] RINGSBERG J. W.  
Shear mode growth of short surface-breaking RCF cracks. *Wear*, vol. 258 :7-8, 2005, p. 955-963.
- [ROD 13] RODESCH P.-A.  
Prise en compte de Contraintes Résiduelles Dans la fatigue de composants ferroviaires. rapport, 2013, Rapport de stage SNCF - Ecole des Ponts.
- [RÉT 12] RÉTHORÉ J., LIMODIN N., BUFFIÈRE J.-Y., ROUX S., HILD F.  
Three-dimensional Analysis of Fatigue Crack Propagation using X-Ray Tomography, Digital Volume Correlation and Extended Finite Element Simulations. *Procedia IU-TAM*, vol. 4, 2012, p. 151-158.
- [SEB 03] SEBES M., CHOLLET H., AYASSE J.-B.  
Rapport de phase 1 : Elaboration d'un modèle dynamique et adaptation dans Vocolin. rapport, 2003, INRETS-LTN.
- [SEB 14] SEBÈS M., CHOLLET H., AYASSE J.-B., CHEVALIER L.  
A multi-Hertzian contact model considering plasticity. *Wear*, vol. A paraître, 2014, page Disponible en ligne.
- [SEO 08] SEO J. W., C.GOO B., CHOI J. B., KIM J. K.  
Effects of metal removal and residual stress on the contact fatigue life of railway wheels. *International Journal of Fatigue*, vol. 30, 2008, p. 2021–2029.
- [SEO 10] SEO J., KWON S., JUN H., LEE D.  
Fatigue crack growth behavior of surface crack in rails. *Procedia Engineering*, vol. 2, 2010, p. 865–872.
- [SHE 99] DE SHEFFIELD U.  
Integrated Study of Rolling Contact Fatigue. rapport, 1999, ICON CIG Funded Supported ResearchProject, Task 3.
- [SHI 88] SHIH C. F., ASARO R. J.  
Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces : Part I-Small Scale Yielding. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55(2), 1988, p. 299-316.
- [SHI 10] SHI J., CHOPP D., LUA J., SUKUMAR N., BELYTSCHKO T.  
Abaqus implementation of extended finite element method using a level set represen-

- tation for three-dimensional fatigue crack growth and life predictions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, 2010, p. 2840–2863.
- [SIM 13] SIMON S., A.SAULOT, C.DAYOT, X.QUOST, Y.BERTHIER  
Tribological characterization of rail squat defects. *Wear*, vol. 297, 2013, p. 926–942.
- [SKY 05] SKYTTEBOL A., JOSEFSON B., RINGSBERG J.  
Fatigue crack growth in a welded rail under the influence of residual stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, n° 2, 2005, p. 271–285.
- [SMI 70] SMITH K., P P. W., TOPPER T.  
A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, vol. 5(4), 1970, p. 767–778.
- [STE 13] STEENBERGEN M., DOLLEVOET R.  
On the mechanism of squat formation on train rails Part I : Origination. *International Journal of Fatigue*, vol. 47, 2013, p. 361–372.
- [SUK 00] SUKUMAR N., MOÑÁS N., MORAN B., BELYTSCHKO T.  
Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 48, 2000, p. 1549–1570, John Wiley & Sons, Ltd.
- [SUR 98] SURESH S.  
*Fatigue of materials, 2nd Edition*. Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [TAN 74] TANAKA K.  
Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6, 1974, p. 493–507.
- [TAS 10] TASSINI N., QUOST X., LEWIS R., DWYER-JOYCE R., ARIAUDO C., KUKAB N.  
A numerical model of twin disc test arrangement for the evaluation of railway wheel wear prediction methods. *Wear*, vol. 268, 2010, p. 660-667.
- [THO 93] THOMPSON A., ALBERT D., GRAY G.  
Fatigue crack growth in rail steels. in : *J.J. Kalker, D.F. Cannon, O. Orringer (Eds), Rail Quality and Maintenance for Modern Railway Operation*, , 1993, p. 361–372.
- [TIL 09] TILLBERG J., LARSSON F., RUNESSON K.  
A study of multiple crack interaction at rolling contact fatigue loading of rails. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part F-journal of Rail and Rapid Transit - PROC INST MECH ENG*, vol. 223(4), 2009, p. 319-330.
- [TRO 12] TROLLÉ B., GRAVOUIL A., BAIETTO M.-C., NGUYEN-TAJAN T.  
Optimization of a stabilized X-FEM formulation for frictional cracks. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 59, 2012, p. 18–27.
- [TRU 81] TRUCHON M., AMESTOY M.  
Etude théorique et expérimentale de la fissuration par fatigue sous sollicitations biaxiales. rapport, 1981, Insitut de recherche de la sidérurgie française, IRSID.
- [VER 64] VERMEULEN P. J., JOHNSON K. L.  
Contact of non-spherical bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, 1964, p. 338–340.

- [WEB 92] WEBSTER P., WANG X., MILLS G., WEBSTER G.  
Residual stress changes in railway rails. *Physica B*, vol. 180 & 181, 1992, p. 1029-1031.
- [WES 39] WESTERGAARD H.  
Bearing Pressures and cracks. *J. Appl. Mech.*, vol. 6, 1939, p. 49–53.
- [WIC 03] WICKENS A. H.  
*Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics : Guidance and Stability*. Taylor & Francis, 2003.
- [WON 96] WONG S., BOLD P., BROWN M., ALLEN R.  
A branch criterion for shallow angled rolling contact fatigue cracks in rails. *Wear*, vol. 191, 1996, p. 45–53.
- [YAU 80] YAU J., WANG S., CORTEN H.  
A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, 1980, p. 335–341.
- [ZI 04] ZI G., SONG J.-H., BUDYN E., LEE S.-H., BELYTSCHKO T.  
A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 12, 2004, p. 901-915.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : TROLLÉ

DATE de SOUTENANCE : 20 mars 2014

Prénoms : Benoît, Jean, Gérard

TITRE : Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2006-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

#### RÉSUMÉ :

Sous l'effet des sollicitations mécaniques répétées induites par les passages des trains, on observe l'apparition de fissures de fatigue de contact dans les rails. Une fois amorcées, celles-ci peuvent se propager et mener à la rupture du rail. Dans un contexte d'intensification du trafic et d'augmentation globale des vitesses de circulation, il devient stratégique pour SNCF d'optimiser sa politique de maintenance. Afin de définir des pas de surveillance adaptés et une planification optimisée des opérations de maintenance, une meilleure connaissance des mécanismes d'endommagement par fatigue du rail s'avère nécessaire. Tendre vers cette stratégie de maintenance prédictive passe par la mise en place d'outils de simulation numérique adaptés. Dans ce contexte, estimer le risque lié à la présence de fissures et étudier leurs propagations font partie des objectifs de ces travaux. La résolution du problème tri-dimensionnel d'une structure fissurée, avec contact et frottement entre les lèvres, est effectuée grâce à un modèle tri-dimensionnel éléments finis étendus multi-échelles. Ce modèle fait appel à une formulation mixte stabilisée où chaque champ est écrit à l'aide d'enrichissement. La fissure est représentée grâce à une stratégie implicite-explicite. Le problème de contact à l'interface est résolu à l'aide du solveur non-linéaire LATIN. Une étude empirico-numérique a permis de proposer des formules a priori assurant un taux de convergence de la méthode de résolution proche de l'optimal. La simulation de la propagation des fissures de fatigue est réalisée à l'aide de critères spécifiques, adaptés à un chargement multi-axial et non-proportionnel, et d'une loi de propagation dédiée en mode mixte. La confrontation des résultats de simulation avec des essais réalisés sur une configuration cylindre-plan a validé la stratégie XFEM/LATIN à deux échelles. Tous ces développements ont été implémentés dans le code de calcul éléments finis CAST3M. Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec des études similaires disponibles dans la littérature. Des contraintes résiduelles réalistes, provenant d'un logiciel externe, ont été introduites. Cette étape a requis la mise en place d'une procédure de transfert des champs entre les deux maillages (celui utilisé pour le calcul des contraintes résiduelles et celui utilisé pour la résolution du problème de mécanique élastique linéaire de la rupture). L'étude de la flexion du rail a révélé l'influence de ce phénomène uniquement lors du passage du chargement sur la fissure. Enfin, une étude numérique a montré la très forte influence de l'orientation du chargement tangentiel, des contraintes résiduelles et de la présence de plusieurs fissures sur la direction et les vitesses de propagation des fissures de fatigue.

**MOTS-CLÉS :** Fatigue de roulement, propagation des fissures, éléments finis étendus, contact, frottement, contraintes résiduelles, rail, CAST3M.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directrice de thèse : BAIETTO Marie-Christine  
Co-encadrant : GRAVOUIL Anthony

Président du jury :

Composition du jury : DOQUET Véronique	PRABEL Benoit
MAITOURNAM Habibou	MAI Si Hai
DWYER-JOYCE Robert	GRAVOUIL Anthony
RANNOU Johann	BAIETTO Marie-Christine
DUREISSEX David	