

THÈSE

Modélisation numérique du contact pour matériaux composites

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Julien LEROUX

Ingénieur INSA Lyon

Thèse soutenue le 04 juillet 2013 devant la Commission d'examen

Jury

JEAN-FRANÇOIS MAIRE	Professeur associé (ONERA)	Rapporteur
YANN MONERIE	Ingénieur-Chercheur (IRSN)	Rapporteur
YVES REMOND	Professeur (IMFS)	Examineur
GEORGES CAILLETAUD	Professeur (ENSMP)	Examineur
ALAIN COMBESCURE	Professeur (INSA Lyon)	Examineur
PHILIPPE BOISSE	Professeur (INSA Lyon)	Examineur
JUAN-ANTONIO RUIZ-SABARIEGO	Ingénieur (Snecma)	Invité
FLORENT BOUILLON	Ingénieur (Herakles)	Invité
DANIEL NELIAS	Professeur (INSA-Lyon)	Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal
2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ http://ww2.ibcp.fr/ediss Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel - Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr	M. Johannes KELLENDONK Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS – INFOMATHS- Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon - École Doctorale Matériaux Secrétariat Mériem LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (ED n°162)	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon - École Doctorale MEGA Secrétariat Mériem LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@insa-lyon.fr Site web : http://www.ed-mega.com
ScSo	ScSo* M. OBADIA Lionel Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

* ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

Les aubes de turboréacteurs sont aujourd'hui sujets à de nouvelles technologies novatrices : les matériaux composites tissés 3D. Ces modifications matériaux permettent des réductions de masse significatives, et conduisent à des performances énergétiques et environnementales accrues. Ces structures tissées possèdent généralement des architectures complexes et requièrent une bonne caractérisation mécanique. Des outils de modélisation textile et d'homogénéisation ont été développés, la géométrie et les propriétés physiques de l'architecture tissée y sont analysées. Toutefois, il est important de prévoir les endommagements engendrés dans ces matériaux au niveau des zones de contact soumises à du fretting. En effet, les pieds d'aubes de turboréacteurs font face à des sollicitations de type fretting. Il en résulte deux types d'endommagements : l'amorçage et propagation de fissures et l'usure des surfaces en contact. Quantifier ces endommagements requiert une analyse fine du contact à partir d'un outil de calcul à la fois robuste et rapide. Pour mener à bien cet objectif, un code semi-analytique permettant aujourd'hui de traiter des problèmes hétérogènes de contacts élasto-plastiques est développé. La méthode d'inclusion équivalente proposée au sens d'Eshelby est utilisée dans le solveur de contact pour décrire l'effet des hétérogénéités (cavités, inclusions, fibres ou torons). L'un des corps en contact peut contenir de multiples hétérogénéités de formes parallélépipédiques, ellipsoïdales, et ses formes dégénérées (ellipsoïde oblate, ellipsoïde prolata, sphère, cylindre, disque plat,...). Cette méthode est modifiée et améliorée afin de prendre en compte les influences mutuelles entre les inclusions hétérogènes voisines, et la décohésion à l'interface hétérogénéité/matrice. Un premier couplage avec un modèle de contact aube/disque Eléments Finis permet de prendre en compte les effets de structures. Cette méthode est analogue à un zoom structural lorsqu'un maillage fin est nécessaire dans des zones de contact à fort gradient de contraintes soumises à un endommagement de type fretting. Un second couplage avec le logiciel WiseTex permet de décrire la géométrie réelle du tissage du composite, les propriétés matériaux des fibres et de la matrice. Une segmentation fine du modèle permet de discrétiser les mèches en de multiples hétérogénéités ellipsoïdales équivalentes et d'appliquer la méthode d'inclusion équivalente modifiée. A partir de cette mise en donnée d'un matériau composite tissé revêtu, des calculs de contact tridimensionnel multiéchelle en situation de fretting sont réalisés avec succès.

Mots-clés : fretting ; contact ; semi-analytique ; inclusion équivalente ; composite tissé ; approche multiéchelle.

Abstract

New baseline turbofan engines feature advanced blade technology made of 3D woven composites for a significant reduction in weight and an increase in energy and environmental performance. Woven structures generally have complex architectures which require high level of mechanical model. Modeling textile and homogenization tools have been developed to provide precisely the geometry and physical properties of the woven architecture. However, it is important to predict the damage mode under contact zone which are subjected to fretting. Indeed, the blade roots of turbofan engines are damaged by fretting phenomenon. Fretting modes generate two kinds of damage : (i) the initiation and propagation cracks, (ii) wear on contact surfaces. Quantify these two kinds of damage requires a detailed contact analysis from a robust and fast contact solver. In order to reach this goal, a semi-analytical solver allows to solve heterogeneous elasto-plastic contact problems. Equivalent inclusion method in the sense of Eshelby allows to describe accurately the effect of inhomogeneities (cavities, inclusions, fibers or strands). Only one of contact bodies contains multiple heterogeneous of cuboidal and ellipsoidal shapes, and their degenerated forms (oblate spheroid, prolate ellipsoid, sphere, cylinder, flat disk,...). This method is modified and improved in order to take into account the mutual influence between neighboring heterogeneous inclusions and decohesion at the interface heterogeneity/matrix. A first coupling with a finite element model of blade/disk contact allows to take into account the effects of structure. This method is analogous to a structural zoom when structural fine mesh is necessary within areas of high contact stress gradient subjected to fretting. A second coupling with the software WiseTex allows to describe the geometry of the actual weaving of the composite, the material properties of the fibers and the matrix. A fine segmentation of the numerical model allows to discretize reinforcements to multiple equivalent ellipsoidal heterogeneities and to apply the modified equivalent inclusion method. Three-dimensional simulation of frictional contact model are successfully completed from these data of a coating woven composite.

Keywords : fretting ; contact ; semi-analytic solution ; equivalent inclusion method ; woven composites ; multiscale modeling.

Table des matières

Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Introduction générale	1
I État de l'art	5
1 Problématique et contexte industrielle	6
1.1 Présentations des turboréacteurs	6
1.2 Problématique de la liaison aube/disque	8
2 Mode de défaillance de la liaison aube-disque	11
2.1 Fretting : phénoménologie	11
2.2 Fretting-wear : usure	16
3 Comportements et endommagements des matériaux composites tissés	20
3.1 Matériaux composites tissés : classification, intérêts, élaboration	20
3.2 Comportement mécanique des matériaux composites tissés . .	25
3.3 Mécanismes de dégradation/protection	27
4 Pratique de modélisations numériques : application au contact aube/disque	30
4.1 Méthodes en mécanique du contact	30
4.2 Modélisation numériques des composites à renforts tissés . . .	33
4.3 Application au contact aube/disque	38
5 Bilan	40
II Présentation du modèle de contact semi-analytique	43
1 Historique	44
2 Algorithme du solveur de contact	45
3 Méthode DC-FFT	47
3.1 Principe	47
3.2 Algorithme 2D-FFT	49
3.3 Algorithme 3D-FFT	51
4 Résolution du contact	51
4.1 Principe	51
4.2 Couplage du problème normal et tangentiel	53
4.3 Algorithme du gradient conjugué (CGM)	54
5 Bilan	55

III Hétérogénéités	57
1 Introduction	58
2 Méthode de l'inclusion équivalente	60
2.1 Théorie d'Eshelby	60
2.2 Méthode de résolution	62
3 Solution en demi-espace par décomposition	65
3.1 Formulations en espace infini	65
3.2 Décomposition en sous-problèmes	71
3.3 Déplacements générés en surface	74
3.4 Validations de solutions élémentaires	75
4 Solution en demi-espace par Galerkin	80
4.1 Théorie	80
4.2 Adaptation numérique	86
4.3 Validations	87
5 Prise en compte des influences mutuelles	89
5.1 Algorithme numérique	89
5.2 Application sur matériaux revêtus	90
6 Prise en compte des gradients de contraintes	92
6.1 Par approximation polynomiale	92
6.2 Par méthode de voxelisation	104
7 Bilan	111
IV Stratégies de modélisation multiéchelle	115
1 Introduction	116
2 Description d'une cellule élémentaire à l'échelle mésoscopique	116
2.1 Modélisation géométrique du renfort tissé	116
2.2 Approximation par la méthode des inclusions équivalentes	117
3 Description d'une cellule élémentaire à l'échelle microscopique	119
3.1 Caractérisation morphologique d'un fil	119
3.2 Estimation des propriétés élastiques	121
4 Description du modèle d'endommagement	124
4.1 Introduction	124
4.2 Modèle d'interface élastique linéaire	126
4.3 Résultats et discussions	129
5 Bilan	131
V Applications académiques et industrielles	133
1 Exemples académiques	134
1.1 Simulations en full sliding du contact cylindre-plan	134
1.2 Simulations en stick-slip du contact cylindre-plan	140
1.3 Comparaisons entre une solution hétérogène isotrope et homogène anisotrope	142
2 Simulations du contact sur matériaux composites tissés	152
2.1 Simulations d'un contact sphère/plan pour un matériau composite tissé 2D	152
2.2 Applications sur pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteur nouvelle génération	156

Conclusion et perspectives	163
Bibliographie	167
Table des figures	179
Liste des tableaux	185

Introduction générale

Contexte industriel et scientifique

En un peu plus d'un siècle, l'évolution des turboréacteurs a été profondément marquée par celle des matériaux de structure, dont les performances mécaniques ramenées à la densité ont été considérablement accrues, et auxquels on demande maintenant d'avoir un rendement très élevé (dans une optique d'économie de carburant et de réduction des coûts d'exploitation) et d'être moins polluants (en termes de niveau sonore et de contamination de l'atmosphère). On assiste depuis une trentaine d'années, au remplacement progressif des alliages métalliques et légers par des matériaux composites fibreux dans l'industrie aéronautique civile et militaire. Parmi les différentes classes de composites existantes, les composites à matrice polymère sont les plus utilisés pour les applications basse température sous forme d'empilement de plis ou de nappes unidirectionnels. La substitution des matériaux métalliques a d'abord porté sur les structures secondaires (capots, trappes, aménagements intérieurs) et ce n'est que très récemment qu'elle a été étendue à certaines parties des structures primaires (voilures, gouvernes).

Depuis quelques années, un nouveau composite à matrice organique (CMO) à l'architecture tissée permet de réaliser des structures complexes tout en ayant des procédés d'élaboration rentables. Ces composites tissés sont utilisés par la société Snecma du groupe Safran pour réaliser des éléments de structure froide comme les aubes de la soufflante des turboréacteurs. Améliorer le rendement des turboréacteurs et les rendre moins polluants constituent un formidable défi à la chimie et à la science des matériaux. Mais ceci suppose, entre autres, une élévation de leur température de fonctionnement. Actuellement, les parties les plus chaudes d'un turboréacteur, i.e. les aubes de la turbine, sont réalisées en superalliages base nickel. Leur température de fonctionnement est proche de 1000 °C (avec un système de refroidissement interne). Même sous forme monocristalline, ces alliages semblent avoir atteint leur limite d'emploi en température. Passer à 1300-1500 °C supposerait qu'on fasse appel à une autre classe de matériaux comme les céramiques. L'introduction des composites à matrice céramique (CMC) dans les structures aubagées de la turbine est en cours mais de façon prudente et limitée.

Aussi l'augmentation des performances des turboréacteurs et l'optimisation des structures mécaniques pour la réduction des masses passent par des roues aubagées aux propriétés matériaux de plus en plus complexes, de plus en plus chargées, couplées à une diminution des marges de résistance mécanique et une complexification des phénomènes physiques. Les constructeurs ont besoin d'avoir des outils leur permettant de prédire au mieux et au plus tôt dans la chaîne de conception le comportement durant toute la vie du moteur. La prédiction de la durée de vie des

composants du moteur est une étape importante. Pour une roue aubagée réalisée par assemblage, la liaison aube disque est un des éléments les plus importants du point de vue de la sécurité. L'usure par fretting, qui peut intervenir dans cette zone, peut entraîner la rupture prématurée d'une aube ou d'un disque. Il est donc nécessaire de mieux appréhender ce type d'endommagement pour la sécurité des passagers mais aussi pour diminuer les coûts de maintenance des compagnies aériennes. Pour cela, des méthodes ont été développées à Snecma pour étudier la cinétique d'usure lors des phases de décollage ou d'atterrissage en ce qui concerne les alliages de titane (Ta6V). Lors de ces phases une hypothèse de chargement quasi-statique peut être faite. Les méthodes utilisées font appel aux éléments finis via le logiciel ABAQUS ou à des méthodes semi-analytiques. Les modèles d'usure utilisés dans ces simulations ont été proposés à partir de résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de S.Fouvry au LTDS.

Enjeux de l'étude

Les matériaux composites tissés sont des matériaux multiéchelles par nature. On peut distinguer l'échelle microscopique (fibre/matrice), l'échelle mésoscopique (fil/matrice) et l'échelle macroscopique (cellule élémentaire). Disposer d'un caractère prédictif de la durée de vie requiert des modèles de changement d'échelle spécifiques capables de prendre en compte le caractère tridimensionnel du renfort ainsi que les concentrations de contrainte dues à l'ondulation des fils dans le tissu. A noter que, dans le cas des matériaux composites à renfort tissé, la périodicité se situe à l'échelle mésoscopique. Ces concentrations de contraintes ont un impact non négligeable sur les grandeurs recherchées pour caractériser le phénomène d'usure : les pressions de contact, les cisaillements en surface, les glissements relatifs, et les contraintes locales. L'endommagement observé au sein des constituants élémentaires (fibres et matrice) est à considérer en établissant un lien direct par homogénéisation entre l'échelle des constituants (microscopique) et l'échelle de l'assemblage du composite et du contact (mésoscopique).

Le phénomène d'usure demande de disposer d'une discrétisation fine du modèle afin de quantifier au mieux les profils de cisaillement et de glissement. De la même manière, une discrétisation très fine est nécessaire afin de quantifier au mieux les contraintes locales à l'échelle du contact. Il est fou de souhaiter disposer d'un descriptif complet et raffiné du matériau à cette échelle. Les temps de calcul seraient inconsidérées pour les bureaux d'étude. Quant aux modèles phénoménologiques, ils ne sont pas adaptés à l'étude de l'endommagement par fretting puisqu'ils fournissent une loi de comportement homogénéisé à l'échelle de la structure. Des informations utiles à la résolution du contact et donc de l'usure seront inaccessibles à partir de ce type de modèle.

L'objectif de ce travail de thèse est de reprendre le code de contact semi-analytique développé pour les bureaux d'étude, outil rapide et robuste pour pouvoir effectuer des calculs d'usure et intégrer la prise en compte de cet endommagement dès la phase de conception du moteur. Un travail de modélisation analytique et numérique est entrepris afin de proposer une approche multiéchelle du comportement mécanique des matériaux composites à renfort tissé, applicable aussi bien aux CMO qu'aux CMC. Le modèle développé devra en outre être capable de prendre

en compte les mécanismes d'endommagement prépondérants aux diverses échelles d'analyse du matériau (micro et meso).

Organisation du document

Le premier chapitre reprend le contexte industriel. Après une présentation rapide du fonctionnement d'un turboréacteur, les conditions de fonctionnement des roues aubagées sont détaillées, ce qui permet de mieux comprendre les risques suite aux différents endommagements observés en flotte. Une synthèse de la bibliographique sur les problématiques de fretting et d'usure est effectuée. Une troisième partie a pour objet de présenter les avantages et inconvénients des matériaux composites tissés par rapport aux composites stratifiés unidirectionnels, ainsi que leurs spécificités de comportement et leurs mécanismes de dégradation. Dans une dernière partie, on cherche à montrer comment concilier une modélisation numérique du phénomène d'endommagement par fretting-usure et une modélisation adéquate du composite tissé pour l'étude du contact. Pour cela, un résumé non-exhaustif des différentes méthodes de calcul utilisées en mécanique des contacts est présenté. De la même manière, différentes approches de la modélisation du comportement et de l'endommagement des matériaux composites tissés sont analysées au regard des objectifs fixés. En particulier, la prise en compte de l'aspect tissé au sein d'un modèle d'endommagement est discutée. Enfin, différentes méthodes pour la modélisation du contact frottant en pied d'aube et leurs apports pour la modélisation de l'usure sont explicités en tout point.

Le deuxième chapitre permet d'explicitier le fonctionnement du code de calcul de contact dans le but de simuler des usures par fretting. La méthode utilisée pour résoudre le contact est dite « semi-analytique ». Ce code de contact est développé depuis quelques années par l'équipe de D.Nelias au LaMCoS. Un historique de l'ensemble des travaux effectués est tout d'abord listé afin de montrer l'étendue des fonctionnalités offertes par ce code dans sa version actuelle. Un descriptif de la mise en forme numérique du problème de contact est fait. Les algorithmes utilisés, basés sur la méthode du gradient conjugué et les transformées de Fourier rapide (FFT) sont présentés. Leurs forts potentiels à accélérer les calculs seront largement exploités pour caractériser les hétérogénéités du matériau.

Le troisième chapitre s'attarde sur le modèle permettant de caractériser l'hétérogénéité de la structure. La méthode de l'inclusion équivalente au sens d'Eshelby est utilisée et adaptée pour prendre en compte de multiples hétérogénéités dans un massif semi-infini soumis à une sollicitation de fretting. L'intégration de ce « module hétérogène » dans le solveur de contact sera présentée. Les formulations analytiques reliées à la géométrie des hétérogénéités et aux propriétés matériaux de la matrice seront décrites et validées à partir des données existantes dans la littérature et à partir de modèles éléments finis. Deux approches numériques permettant d'adapter les formulations aux solutions en demi-espace seront abordées. Enfin les deux améliorations majeures de ce modèle seront décrites, à savoir la prise en compte des influences mutuelles et du gradient de contrainte dans les hétérogénéités.

Le quatrième chapitre montre la stratégie appliquée pour la modélisation d'un composite tissé. Cette stratégie multiéchelle s'appuie sur les évolutions du modèle d'inclusion équivalente exposées au Chapitre 3. La première étape consiste à modé-

liser la morphologie d'une cellule élémentaire du composite à l'échelle mésoscopique. Une fois la description mathématique de la géométrie connue à priori, un assemblage d'inclusions ellipsoïdales équivalentes permet de discrétiser très finement l'architecture tridimensionnelle du composite. Du fait de la périodicité de la cellule, on est capable de reconstituer assez fidèlement l'ondulation des fils à travers une capture précise des contraintes locales. Néanmoins le modèle doit être enrichi afin de connaître les propriétés matériaux à affecter pour chaque inclusion ellipsoïdale. A partir d'une caractérisation morphologique d'une cellule élémentaire à l'échelle microscopique, on peut remonter aux propriétés matériaux locales à l'échelle mésoscopique par des approches d'homogénéisation telles que le modèle de Mori-Tanaka et le modèle auto-cohérent. Cependant, ces propriétés homogénéisées restent dans le domaine élastique. Une première approche analytique, développée dans le cadre de cette thèse, permet de décrire la décohésion à l'interface d'une inclusion ellipsoïdale hétérogène. Ces développements prouvent la faculté de la méthode de l'inclusion d'équivalence à traiter les endommagements rencontrés dans les composites tissés.

Le dernier chapitre se consacre aux différentes applications couvertes par le modèle d'hétérogénéités. La première partie expose des exemples académiques de contact cylindre/plan. Un des massifs élastiques contient des fibres cylindriques unidirectionnelles. Deux situations de fretting en « full sliding » et « stick-slip » sont étudiées afin de montrer l'influence de différents paramètres des fibres (matériaux, rayon, profondeur) sur les paramètres caractéristiques de l'usure (pression, cisaillement, glissement). Les résultats obtenus prouvent la nécessité de modéliser la mésostructure du composite tissé et de ne pas utiliser de modèles macroscopiques homogénéisés. C. Bagault a ajouté une faculté supplémentaire au code de contact semi-analytique durant sa thèse, l'anisotropie d'un matériau non revêtu et revêtu. Une étude a donc été menée afin de comparer les résultats obtenus pour un matériau hétérogène constitué de fibres cylindriques unidirectionnelles et le matériau homogénéisé équivalent. Ce chapitre se termine par l'application du code au cas industriel. Ces simulations sont multiéchelles et font appel à un modèle éléments finis de la structure aube-disque.

Chapitre I

État de l'art

Ce premier chapitre expose tout d'abord la problématique industrielle qui a conduit à ce travail de thèse. Ensuite un état de l'art sur les modes d'endommagement du contact (fretting-wear) et du matériau employé sur les pièces mécaniques (composites tissés CMO et CMC), et leurs modélisations numériques en mécanique du contact.

Sommaire

1	Problématique et contexte industrielle	6
1.1	Présentations des turboréacteurs	6
1.2	Problématique de la liaison aube/disque	8
2	Mode de défaillance de la liaison aube-disque	11
2.1	Fretting : phénoménologie	11
2.2	Fretting-wear : usure	16
3	Comportements et endommagements des matériaux composites tissés	20
3.1	Matériaux composites tissés : classification, intérêts, élaboration	20
3.2	Comportement mécanique des matériaux composites tissés	25
3.3	Mécanismes de dégradation/protection	27
4	Pratique de modélisations numériques : application au contact aube/disque	30
4.1	Méthodes en mécanique du contact	30
4.2	Modélisation numériques des composites à renforts tissés	33
4.3	Application au contact aube/disque	38
5	Bilan	40

1 Problématique et contexte industrielle

1.1 Présentations des turboréacteurs

Le turboréacteur est un système de propulsion essentiellement utilisé pour les avions. Un turboréacteur fonctionne sur le principe d'action-réaction. La variation de vitesse de l'air entre l'entrée et la sortie du réacteur crée une quantité de mouvement (dénommée poussée) vers l'arrière du moteur qui, par réaction, — d'où le terme de moteur à réaction — engendre le déplacement de l'avion.

Le turboréacteur fonctionne sur le principe des turbines à gaz (voir Figure I.1). À l'admission, l'air est aspiré par la soufflante (aussi appelé fan) puis comprimé via un compresseur. Du kérosène est ensuite injecté puis mélangé avec l'air au niveau de la chambre de combustion puis enflammé, ce qui permet de fortement dilater les gaz. Ces derniers s'échappent du turboréacteur par la tuyère qui, en raison de sa section convergente, augmente la vitesse de l'air (suivant l'effet venturi). L'air passe au préalable par une turbine permettant d'entraîner le compresseur et les accessoires nécessaires au fonctionnement du réacteur ; le mouvement est auto-entretenu tant qu'il y a injection de carburant.

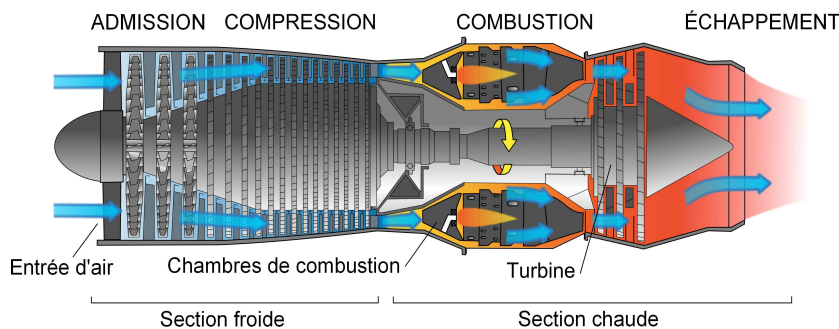


FIGURE I.1 – Schéma en coupe d'un turboréacteur illustrant son principe de fonctionnement.

Un turboréacteur peut être mono-, double- ou triple-corps. On appelle corps un ensemble compresseur-turbine accouplés sur un même arbre et tournant donc à la même vitesse. Pour accroître l'efficacité du turboréacteur, le compresseur est désormais divisé en deux parties successives cinématiquement indépendantes : une à basse pression et une à haute pression, couplées respectivement à une turbine basse et haute pression. On parle alors de turboréacteurs double corps ou double attelage (voir Figure I.2).

Les turbo-réacteurs font aussi appel à la technologie double-flux (voir Figure I.2). Contrairement aux réacteurs simple-flux qui sont bruyants et atteignent leur meilleur rendement pour des vitesses au delà de Mach 1, les réacteurs double-flux sont bien plus économiques. Le premier étage du compresseur basse pression des moteurs double-flux est la soufflante (ou « fan » en anglais). Les dimensions de la soufflante sont bien plus importantes que les étages suivants pour aspirer de grandes quantités d'air. Celle-ci comprime un flux qui va être divisé en deux parties : le flux primaire et le flux secondaire. Le flux primaire (ou flux chaud) est celui qui traverse l'ensemble haute et basse pression. Le flux secondaire (ou flux froid) contourne le moteur. L'essentiel de la poussée (80%) est fournit par le flux secondaire.

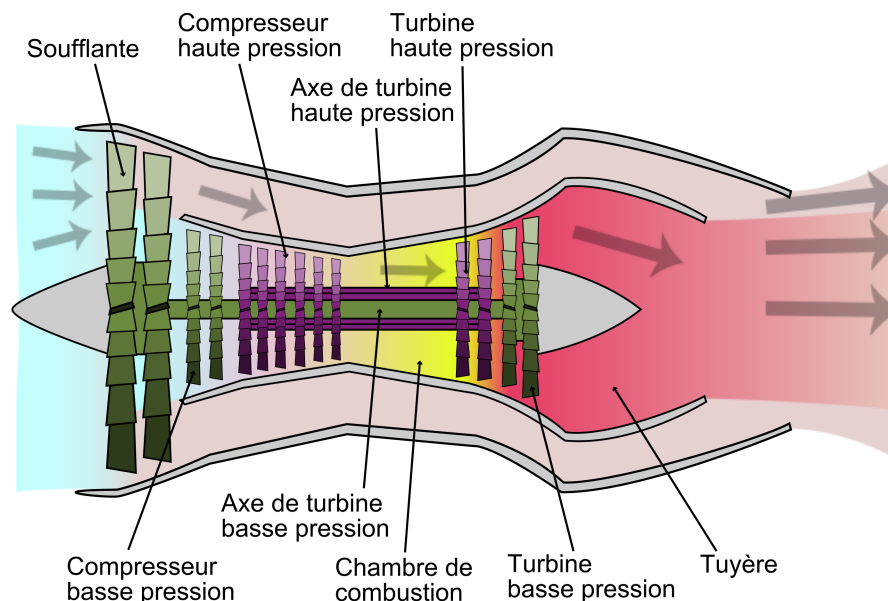


FIGURE I.2 – Représentation simplifiée d'un turboréacteur civil double corps et double flux.

Dans les turboréacteurs double-corps, le compresseur et la turbine sont constitués d'un empilage d'étages, composés chacun d'un aubage mobile et d'un aubage fixe (voir Figure I.3). Un étage est défini comme l'ensemble consécutif d'une roue mobile (rotor) et d'un redresseur (stator). L'aubage mobile est constitué d'un disque circulaire sur lequel sont fixées les aubes. Il tourne devant l'aubage fixe, circulaire, (ou grille fixe) qui est également constitué d'aubes, fixes celles-ci. La roue mobile procure une accélération aux particules d'air, en les déviant par rapport à l'axe du moteur. Le redresseur ralentit ces particules et transforme une partie de leur vitesse en pression. Il ramène l'écoulement de l'air, accéléré par l'aubage mobile, dans l'axe du moteur.

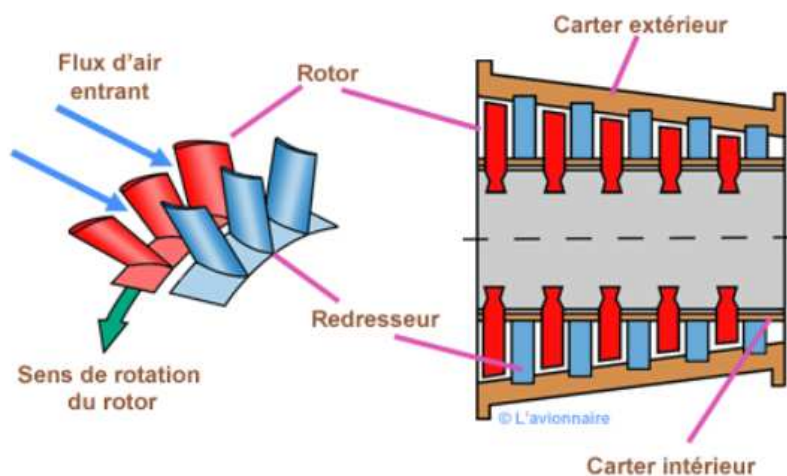


FIGURE I.3 – Architecture d'un compresseur axiale multi-étagé.

1.2 Problématique de la liaison aube/disque

L'aube mobile est assemblée au disque par l'intermédiaire d'une attache. Celle-ci est composée du pied de l'aube ou bulbe, et d'un alvéole, servant de logement au pied d'aube, situé à la périphérie du disque. Suite au progrès obtenu sur les machines outils une nouvelle conception, dénommée *Disque Aubagé Monobloc* (DAM), est depuis plusieurs années mise en place sur les moteurs d'avion. Elle se compose d'une structure monobloc dans laquelle sont usinés les aubes et le disque. Les principaux avantages de cette technologie sont : une réduction significative de la masse, une augmentation des performances aérodynamiques, une durée de vie en service accrue. Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement aux roues aubagées assemblées. Les particularités de cette technologie sont à présent présentées.

1.2.1 Conception des liaisons aube/disque

Les attaches aube/disque ont pour fonction essentielle d'assurer la rétention radiale de l'aube et de transmettre les efforts tangentiels entre l'aube et le disque. Elles peuvent avoir pour rôle secondaire d'assurer l'étanchéité de veine en évitant les recirculations de flux parasites. L'attache est un élément mécanique critique des turboréacteurs. En cas de perte d'une aube, les autres aubes ne doivent pas sortir de leur logement. Le dimensionnement de l'attache aube/disque doit être parfaitement maîtrisé en vue des vérifications lors de la certification du moteur. Les autorités demandent aux constructeurs de garantir le respect des critères d'intégrité et d'endurance de l'attache. Trois familles d'attache sont employées dans les turboréacteurs actuels (voir Figure I.4) : attache marteau, attache sapin, et attache en forme de queue d'aronde.

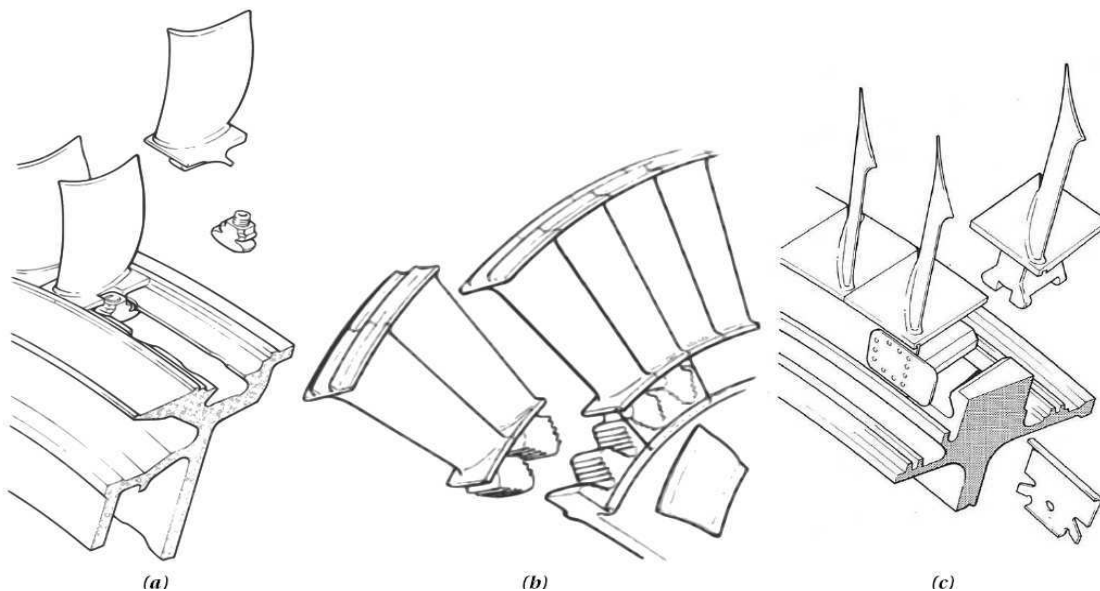


FIGURE I.4 – Différentes technologies de liaison aube-disque : (a) attache marteau, (b) attache sapin et (c) attache en forme de queue d'aronde [RR86].

Les attaches queues d'aronde sont surtout employées sur les compresseurs BP et HP, les turbines BP et la soufflante. Les attaches sapins sont quant à elles utilisées pour les roues mobiles des turbines HP. Les attaches sapin et queue d'aronde

peuvent être droites ou curvilignes. Une attache curviligne augmente la surface de contact. La figure I.5a montre l'attache droite de la soufflante du CFM56-5 et la figure I.5b montre l'attache curviligne de la soufflante du CFM56-7. Les attaches queue d'aronde et sapin font partie des attaches que l'on dénomme *attaches brochées*, caractérisées par plusieurs alvéoles usinées suivant l'axe du moteur. Un aspect important des liaisons aube-disque est le choix des matériaux qui sont présents dans la zone de contact. Ils vont définir le comportement mécanique de l'interface de contact.

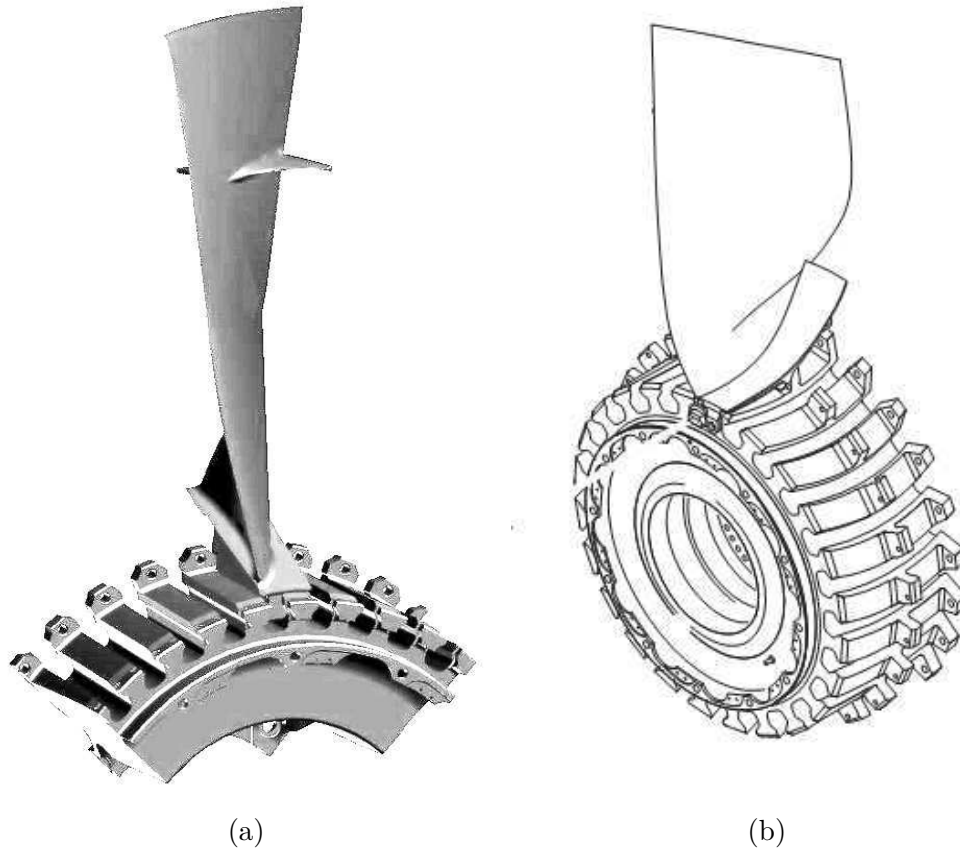


FIGURE I.5 – Vues du disque de la soufflante du CFM56-5 (a) et de la soufflante du CFM56-7 (b).

1.2.2 Matériaux utilisés

Sur les moteurs CFM56 le matériau utilisé pour la fabrication des aubes et du disque est un alliage de titane : le Ti-6Al-4V. Les alliages de titane présentent des qualités mécaniques remarquables pour une faible masse volumique. De plus, ils sont peu sensibles à la corrosion grâce à l'existence d'une couche d'oxyde en surface. Le disque est forgé puis usiné et grenaillé. Les aubes sont elles forgées, usinées puis grenaillées au niveau de la portée. Le grenaillage introduit des contraintes résiduelles de compression en surface pour limiter l'initiation et la propagation de fissures. Les propriétés tribologiques des alliages de titane se révèlent cependant médiocres. La technologie utilisée pour améliorer cette situation est un traitement superficiel des

portées d'aube. Outre le grenailage, un revêtement, actuellement un plasma de cuivre-nickel-indium (Ci-Ni-In), d'une épaisseur moyenne de $150\mu\text{m}$ est ajouté. Sur celui-ci est déposé un lubrifiant solide à faible coefficient de frottement : le Molydag (MoS_2).

Le lancement du programme moteur LEAP-X, appelé à prendre la succession du CFM56, vient bousculer les usages afin de répondre aux nouvelles exigences de critères environnementaux en matière de réduction de bruit et d'émission de CO_2 et NO_x . L'amélioration des performances par rapport aux moteurs actuels se fera grâce à une forte optimisation thermodynamique, une meilleure maîtrise de la conception 3D, l'émergence des matériaux composites (*composite à matrice organique* **CMO**, *composite à matrice céramique* **CMC**, aluminium de titane), et l'utilisation de procédés industriels innovants (tissage 3D associé au procédé de *Resin Transfer Modeling* **RTM**). Ces innovations se retrouvent sur les aubes et le carter fan, mais aussi sur la turbine basse pression qui recevra pour la première fois des aubes en CMC, permettant une augmentation de la température d'utilisation. Le gain de masse attendu pour le module fan et la turbine basse pression sera respectivement de 200 et 125 kg par rapport à une technologie type CFM56. Toutefois, le point faible de ces composites réside dans la faible tenue à l'oxydation des fibres céramiques qui conditionnent leur durée de vie. Afin de pallier ce problème, des matrices multiséquentées ont été développées depuis quelques années au sein du composite permettant, à partir d'une certaine température, la fabrication d'un verre qui ralentit l'arrivée de l'oxygène sur la fibre [Pen02], [Los10]. L'utilisation de ce type de matériau dans les moteurs civils nécessite aujourd'hui de disposer de méthodes de dimensionnement adéquates. Il apparaît alors indispensable d'avoir des modèles de comportement, d'endommagement et de rupture qui prennent en compte les phénomènes d'oxydation et qui sont utilisables dans un code de calcul.

1.2.3 Chargements subis par une attache

La rotation du moteur durant la phase de décollage entraîne le déplacement radial des aubes qui viennent se plaquer contre le disque au niveau des interfaces de contact aube/disque. Il résulte de l'effort centrifuge un chargement normal et tangentiel et des micro-déplacements relatifs des deux ensembles au niveau de la portée (voir Figure I.6a). Ces sollicitations sont dites oligocycliques, car caractérisées par de fortes intensités et de très faibles fréquences. Elles sont associées aux phases de changements de régime moteur au cours du vol et sont souvent simplifiées à la prise en compte du démarrage et de l'arrêt du turboréacteur. Un cycle oligocyclique correspond à un vol. Les portées ne sont pas seulement soumises à des sollicitations oligocycliques mais également polycycliques (voir Figure I.6b). Ce sont des sollicitations de faibles intensités (inférieures à une dizaine de microns) et de fortes fréquences (quelques centaines de Hertz). Ces sollicitations trouvent leurs origines dans les vibrations induites par des instabilités aérodynamiques apparaissant au cours du vol. Les cycles de vibrations sont nombreux durant le vol. Les phases de décollage et d'atterrissage peuvent atteindre la dizaine de milliers durant la vie du moteur. Nous listons ci-après les sollicitations d'origine statique qui agissent sur la liaison aube/disque.

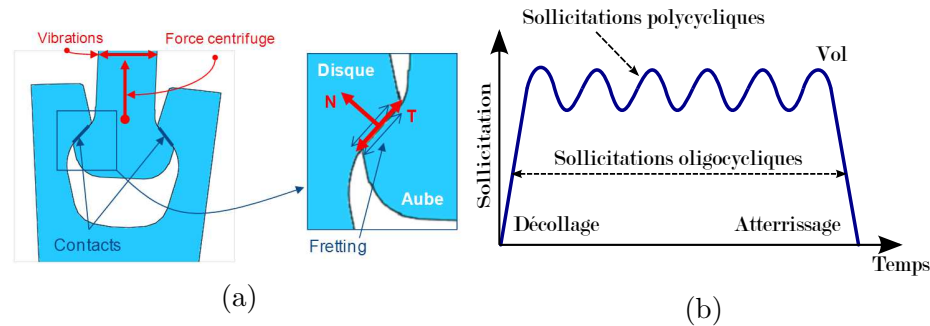


FIGURE I.6 – Sollicitations mécaniques en pieds d’aubes (a) durant les différentes phases de vols (b).

Effort centrifuge et dévissage

La rotation des aubes à forte vitesse crée une force centrifuge. Sur chaque section de pale s'exerce l'effort de traction provenant de la partie supérieure. L'effort est proportionnel au moment statique de cette partie et au carré de la vitesse de rotation. Au niveau du pied l'effort centrifuge provient de la pale, de la plateforme, de l'échasse et éventuellement du talon ou des nageoire. Soumise au champ centrifuge la pale se dévrie. Du fait du vrillage des sections de pale, les efforts centrifuges élémentaires ne sont pas tous confondus avec l'axe radial du rotor. Des composantes tangentielles apparaissent et créent un moment de torsion souvent maximal dans le pied d'aube. Pour les aubes à talon ou à nageoire le moment de dévissage peut être atténué par la pré-torsion obtenue au montage sur les faces d'appui des nageoires ou du talon.

Efforts aérodynamiques

La distribution des pressions aérodynamiques le long de la pale provoque des déformations de celle-ci. Au niveau du col de pied d'aube, zone se situant entre la pale et la partie du pied d'aube qui fait la liaison avec le disque, il en résulte des moments de flexion, de torsion et un effort tranchant. La valeur des efforts aérodynamiques est faible comparée à celle de l'effort centrifuge. Toutefois leurs effets ne doivent pas être négligés dans les calculs de durée de vie.

2 Mode de défaillance de la liaison aube-disque

2.1 Fretting : phénoménologie

2.1.1 Définition

Le terme de fretting est employé lorsque deux surfaces en contact sont soumises à des micro-déplacements tangentiels alternés. Suivant l'amplitude imposée de glissement, plusieurs types d'endommagement peuvent être rencontrés. Le fretting est souvent présenté comme l'une des avaries de surfaces les plus critiques des applications industrielles. Les exemples de fretting se retrouvent dans les systèmes suivants : les liaisons (cannelures, liaisons par axe, pieds d'aube de turbine,...), les empilages multiples (arbres de transmissions), les assemblages rivetés (boulonnés), les câbles, les conduits flexibles,... et concernent toutes les industries : constructions mécaniques, aéronautiques, biomédicales, industrie nucléaire, génie civil,... On

parle de *fretting-wear* (usure par fretting) lorsque les micro-glissements entraînent un enlèvement de matière au niveau des surfaces en contact. Si le déplacement est la conséquence de la déformation de l'une des deux structures en contact soumises à une sollicitation cyclique, il s'agit de *fretting-fatigue*. Le fretting-fatigue entraîne l'amorçage de fissures à partir de la zone de contact. Quand les produits de la dégradation sont le résultat d'une oxydation dans la zone de contact, on utilise le terme *fretting-corrosion*.

2.1.2 Nécessité d'essais normalisés

Les contacts réels sont généralement complexes et mal définis. Expérimentalement il est très difficile de travailler sur des configurations de contact réelles afin d'en déduire des lois générales. Pour modéliser les mécanismes de dégradation en fretting, les chercheurs ont rapidement choisi des géométries simplifiées et plus faciles à étudier, on trouve les trois configurations suivantes :

- le contact plan/plan,
- le contact cylindre/plan,
- le contact sphère/plan.

La configuration plan-plan permet de maintenir des aires de frottement constantes quelle que soit l'usure des interfaces. Cependant, l'analyse mécanique montre que la distribution de pression et surtout de cisaillement se caractérise par une discontinuité indéterminée en bordure de contact. L'analyse est alors complexe et il est difficile d'évaluer correctement le chargement qui est imposé au matériau. De plus, la mise en glissement engendre des mésalignements qui accentuent encore les effets de bords. A cette configuration, sont donc préférés les contacts cylindre-plan et sphère-plan. Tous deux sont décrits par l'analyse de Hertz [Her82]. Ces configurations peuvent dans le cas du contact aube-disque servir à représenter la zone de sortie de portée. Les distributions des contraintes dans le plan pour un contact cylindre-plan glissant sont données par McEwen [M'E49] pour des conditions de déformation plane (analyse élastique). Les distributions des chargements élastiques dans le plan du contact sphère plan glissant sont introduites par Hamilton puis explicitées sous une forme plus simple par Hills [Hil94]. Des informations plus complètes sur la mécanique des contacts peuvent être trouvées dans les ouvrages de références de Johnson [Joh85] et de Hills [Hil93]. Des configurations pion-plan avec bords arrondis sont utilisées pour être plus proches du contact aube/disque [Fri02, Pau06].

Trois modes de fretting ont été définis par Mohrbacher [Moh95]. Cette dénomination est bien adaptée au cadre du contact sphère-plan. Ces trois modes représentés sur la figure 1.7 sont :

- le mode I : déplacement tangent,
- le mode II : déplacement radial,
- le mode IV : déplacement circonférentiel.

2.1.3 Paramètres définissant un essai

Plus simple à mettre en œuvre et plus représentatif pour la plupart des situations industrielles, le mode I est le plus étudié, notamment par le biais de l'essai classique de fretting-wear. Le paramètre essentiel pour définir le fretting est le rapport e entre

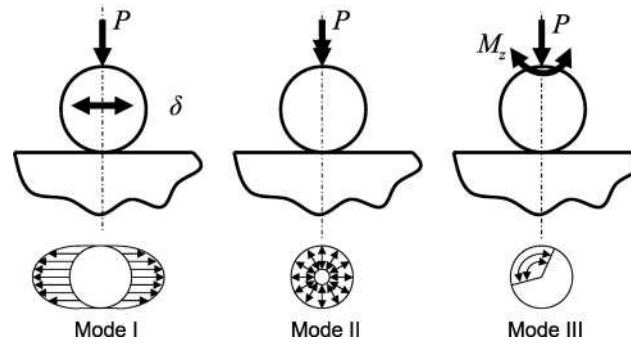


FIGURE I.7 – Les trois modes de fretting [Gal10b].

l'amplitude de glissement δ^* et la dimension du contact a_0 dans la direction de glissement.

$$e = \delta^*/a_0 \quad (\text{I.1})$$

Une distinction doit être faite entre le fretting et le glissement alterné, associé à de plus grandes amplitudes. Le domaine du fretting est alors associé à la condition $e < 1$ où il existe une zone centrale qui n'est jamais exposée à l'environnement extérieur, quelle que soit la géométrie du contact. Dans le cas de contacts sphère/plan ou cylindre/plan pour lesquels la théorie de Hertz permet la description en chargement normal selon les principes de l'élasticité linéaire, cette frontière peut être tracée sur un graphe force normale/amplitude de débattement (voir Figure I.8).

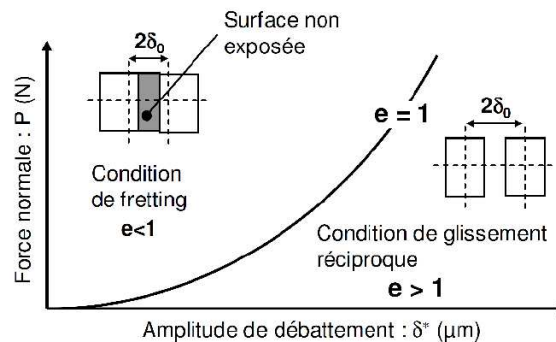


FIGURE I.8 – Définition de la condition de glissement alterné [Pau06].

Le comportement instantané d'un contact se traduit par son *cycle de fretting*, représentant l'évolution de l'effort tangentiel Q en fonction du débattement δ . En fonction de l'effort normal et de l'amplitude du débattement imposé, différentes conditions de glissement peuvent être rencontrées et différenciées (voir Figure I.9) :

- la **condition de collage** (ou « **stick-condition** ») : Si la distribution de cisaillement Q n'excède pas localement le seuil de Coulomb μP , où μ est le coefficient de frottement de Coulomb et P le champ de pression local, il n'y a pas de glissement local. Le débattement imposé est alors uniquement absorbé par déformation élastique des massifs et le cisaillement local est proportionnel aux déformations locales. Le cycle de fretting est fermé linéaire.
- la **condition de glissement partiel** (ou « **stick-slip condition** ») : Dès que la valeur du cisaillement Q atteint localement le seuil de Coulomb μP ,

il y a mise en glissement local des surfaces sous la forme d'un anneau de glissement autour d'une zone collée. Au fur et à mesure de l'augmentation du débattement, la proportion des domaines glissants progresse. La zone de contact est séparée en une zone d'adhérence et une zone de glissement. Dans le cas général, le cycle de fretting présente une forme elliptique en raison du glissement local et de la déformation plastique des massifs.

- la condition de **glissement total** (ou « **gross slip condition** ») : Si l'amplitude de débattement est encore augmentée, l'ensemble du contact passe en glissement. Au cours du cycle l'effort tangentiel maximal Q^* atteint en valeur absolue le produit de l'effort normal par le coefficient de frottement. La forme du cycle est un parallélogramme.

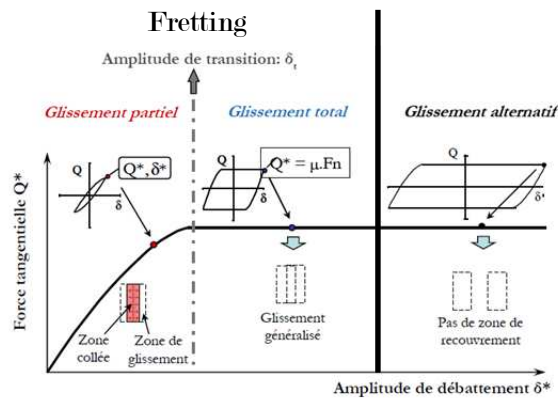


FIGURE I.9 – Transition entre conditions de glissement partiel et total pour une configuration d'essais donnée.

Différents paramètres permettent de définir un cycle de fretting (voir Figure I.10). L'étude de l'évolution de certains de ces paramètres au cours d'un essai nous renseigne sur la nature des surfaces en contact et des endommagements potentiels.

- L'amplitude de débattement δ^* est le paramètre qui est directement contrôlé dans les essais de fretting-wear. Cette amplitude est mesurée au plus près du contact.
- L'effort tangentiel maximal Q^* est représentatif des sollicitations tangentielles imposées au niveau du contact. En RGP (régime de glissement partiel) à l'aide de calculs de mécanique du contact glissant, Q^* permet de déterminer les contraintes induites dans les matériaux en contact. En RGT (régime de glissement total) l'effort normal est trouvé via le coefficient de frottement μ .
- La raideur tangentielle du cycle est la pente $\frac{dQ}{d\delta}$ du chargement suivant le sens de débattement. Cette valeur prend en compte la rigidité du montage, des échantillons massifs et du contact.
- L'ouverture du cycle δ^0 est définie comme la valeur du débattement pour un effort tangentiel nul. Cette valeur est indépendante de la rigidité du montage.
- L'énergie dissipée au cours d'un cycle E_d correspond à l'aire contenue à l'intérieur du cycle. La dissipation d'énergie se fait au travers de mécanismes tels que : création de débris, élévation de température, fissuration, déformation plastique, transformation physicochimique. Pour un cycle rectangulaire on obtient $E_d = E_t = 4\delta_0 Q^*$.

- Le coefficient de frottement énergétique $\mu_e = \frac{E_d}{4\delta_0 P}$.

Dans tous les cas sauf pour un cycle rectangulaire le coefficient de frottement énergétique est inférieur au coefficient de frottement. Pour un cycle idéal en glissement total ils sont égaux. L'utilisation de μ_e permet de s'affranchir de la forme du cycle.

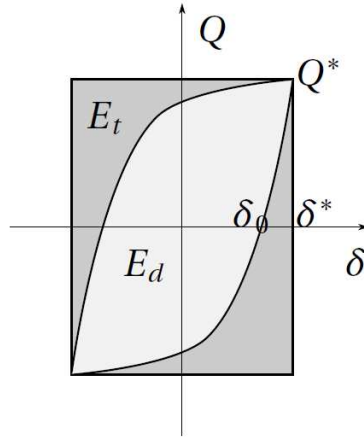


FIGURE I.10 – Cycle de fretting en glissement partiel

La quantification de la transition entre conditions de glissement partiel et total est longtemps restée basée uniquement sur l'observation de la forme des cycles de fretting. Cette description qualitative est ambiguë et subjective, en particulier au voisinage de la transition. Afin de formaliser cet aspect, Fouvry [Fou97] propose trois critères quantitatifs de transition, calculés à partir de la théorie de Mindlin [Min49] pour un contact sphère/plan élastique : le critère d'énergie $A = E_d/E_t$, le critère d'ouverture du cycle $B = \delta_0/\delta^*$, et le critère indépendant du montage $C = E_d/E_{d0}$.

2.1.4 Régimes de glissement et cartes de fretting

Le concept de « régimes de glissement » a été introduit par Colombie [Col86] pour y montrer l'évolution de la condition de glissement dans le temps. Il propose également une représentation 3D sous forme de *buches* des cycles de fretting en fonction du temps selon une échelle logarithmique. Les évolutions de la condition de glissement peuvent être définies par trois régimes, illustrés Figure I.11 :

- *Le régime de glissement partiel* (RGP) correspond à une condition de glissement partiel observée durant tout l'essai. Il se caractérise par un cycle de fretting elliptique. Au niveau du contact, une zone collée est entourée d'une zone de glissement.
- *Le régime de glissement total* (RGT) correspond à une condition de glissement total observée durant tout l'essai. La zone collée disparaît et toute la zone de contact est en glissement. Le cycle de fretting est un parallélogramme.
- *Le régime de glissement mixte* (RGM) est obtenu lorsque des cycles en glissement partiel et des cycles en glissement total sont observés au cours du même essai.

Le concept de *cartes de fretting* (voir Figure I.12a) a ensuite été introduit par Vingsbo [Vin88] dans le cas d'un contact sphère/plan pour tracer la transition entre

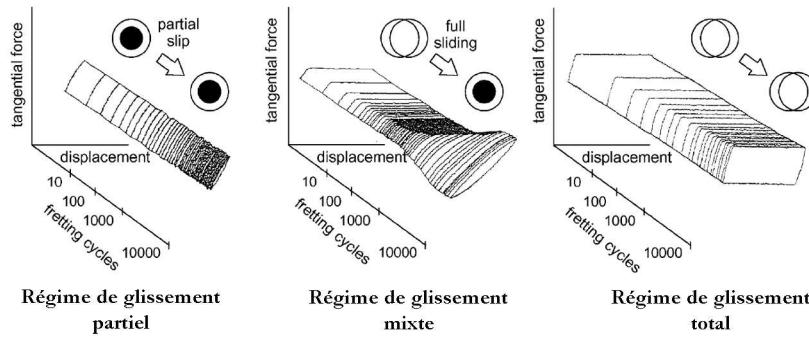


FIGURE I.11 – Évolution au cours du temps de la condition de glissement [Fou97].

les conditions de glissement. L'équipe de Vincent et al. [Vin92] propose une représentation basée sur les régimes de glissement et appelée *carte de sollicitation locale*. A partir de l'observation des endommagements classiquement observés, une deuxième carte de fretting peut lui être superposée, la *carte de réponse du matériau*, déterminée pour un nombre de cycles donné et dont les frontières évoluent avec le temps (voir Figure I.12b). De nombreuses études [Fou96, Fou04] s'accordent à dire que la fissuration est prépondérante en régime de glissement partiel et mixte, et que l'usure par formation de débris est l'endommagement principal en régime de glissement total. La fissuration ne sera donc pas prise en compte dans nos études mais à l'avenir le calcul d'amorçage de fissure peut être une voie à explorer. Les méthodes proposées pourraient être adaptées pour modéliser ce phénomène. Pour prédire la durée de vie d'une portée d'aube, il apparaît essentiel de quantifier le risque d'amorçage, les premiers stades de la propagation mais aussi la cinétique d'usure.

2.2 Fretting-wear : usure

2.2.1 Phénoménologie

Le phénomène d'usure sous sollicitations de fretting reste difficile à formaliser en raison d'un nombre important de mécanismes plus ou moins quantifiables (présence de troisième corps actif à l'interface, influence de l'environnement, mécanismes de transfert, flux de débris,...). Il s'agit d'un phénomène dissipatif et non d'une grandeur physique, l'usure n'a donc pas d'unité légale et universelle. Les études expérimentales de ce type d'endommagement sont importantes pour comprendre les mécanismes qui interviennent.

De manière générale, on distingue deux types d'usure : les usures liées au frottement et les autres. Parmi les usures liées au frottement, on retrouve l'usure adhésive (des surcharges locales engendrent des jonctions entre deux corps de faible dureté glissants l'un contre l'autre), l'usure abrasive (un corps dur déforme plastiquement avec ou sans enlèvement de matière un corps plus mou), l'usure corrosive (frottement dans un environnement corrosif) et l'usure par fatigue (des cycles de charge et décharge vont induire dans le matériau des craquements à la surface qui peuvent former de larges fragments qui se détachent). Parmi les autres types d'usures on peut citer l'usure par érosion et l'usure par cavitation.

Nous nous intéressons ici à l'usure par fretting considérée à part entière comme une forme d'usure liée au frottement. Elle est le plus souvent le produit d'une usure

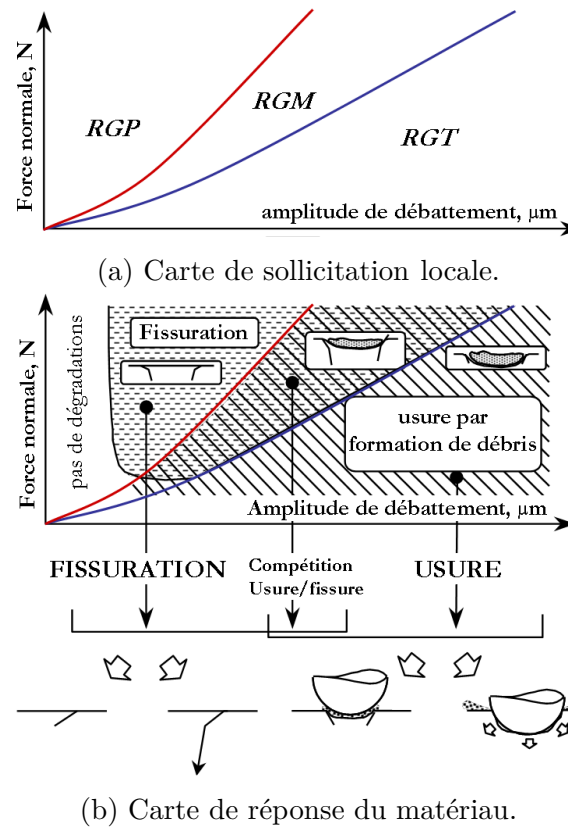


FIGURE I.12 – Représentation des cartes de fretting.

adhésive couplée à une usure abrasive dans le cas où il y a formation d'un oxyde beaucoup plus dur que le matériau originel.

Afin de définir une cinétique d'usure Meng et Ludema [Men95] répertorient différents modèles d'usure. Ils passent en revue plus de 5000 articles, ils dénombrent près de 300 équations différentes proposées pour quantifier les phénomènes tribologiques; 182 d'entre elles ont trait à la quantification de l'usure sous différentes conditions. Cependant tous ces modèles décrivent des conditions tribologiques bien particulières et aucun ne fait office de référence. La démarche générale consiste en la comparaison de différents systèmes tribologiques (couches de revêtements, matériaux massifs, traitements de surfaces,...) par la variation des paramètres macroscopiques de chargement (pression de contact, débattement, fréquence de sollicitation,...). Cela implique l'utilisation de résultats d'expériences dans les cas industriels. Ils arrivent à un classement chronologique de ces lois en trois catégories : lois d'usure empiriques, lois d'usure basées sur la mécanique des contacts et lois d'usure basées sur la mécanique de la rupture.

2.2.2 Outils d'analyse

Loi d'Archard et dérivées

L'une des modélisations de l'usure les plus utilisées de nos jours est celle d'Archard [Arc53] qui propose d'exprimer le volume usé W en fonction de la distance de

glissement s , et du chargement normal P .

$$W = Ks \frac{P}{p_m} \quad (\text{I.2})$$

Le coefficient p_m représente la limite d'écoulement en terme de pression (approximativement équivalente à la dureté) du matériau le plus mou. Le coefficient d'usure K est une constante reliant la probabilité lorsque deux aspérités se rencontrent de créer une particule d'usure. Sa valeur est obtenue par le biais de l'expérience. La loi d'Archard est théorique et s'applique difficilement à la réalité des contacts dans leur diversité. De plus, l'absence de prise en compte du coefficient de frottement dans la formulation est un facteur limitant. En effet, il est démontré que le coefficient de frottement joue un rôle primordial dans l'activation des endommagements, tant du point de vue de l'intensité que de la localisation des maximums de chargements [Joh85].

Approche énergétique

Actuellement une approche quantitative basée sur l'énergie dissipée par frottement est largement développée, notamment par une équipe du LTDS [Fou96, Fou03] et ce dans le cas du fretting. L'énergie dissipée par frottement est considérée comme activateur principal des processus de dégradation des systèmes tribologiques. Les processus d'usure sont pilotés par les températures de contact, les transformations de films tribochimiques, le transfert de matière entre surfaces, les ruptures par contraintes mécaniques ou thermiques. Mohrbacher [Moh95] est le premier à avoir introduit le concept d'énergie dissipée cumulée dans l'étude de l'usure en fretting. Une relation linéaire a été plusieurs fois constatée entre le volume usé et l'énergie dissipée [Fou97]. Cette approche permet de déterminer des coefficients énergétiques d'usure pour différents systèmes tribologiques. Le volume usé est comparé à la quantité cumulée d'énergie dissipée dans le contact, fonction du déplacement relatif δ des deux surfaces et de la valeur de la force tangentielle Q .

$$W = \alpha \sum_{k=1}^N E_d(n) \quad (\text{I.3})$$

avec

$$E_d = \sum Q \cdot \delta \approx 4Q\delta^* \quad (\text{I.4})$$

L'intérêt de cette méthode repose sur le caractère unique de l'énergie dissipée qui tient à la fois compte du chargement normal, de l'évolution du coefficient de frottement, de l'amplitude du débattement et de la durée de l'essai. Cette approche, largement validée pour nombre de systèmes non adhérents (TiN, aciers,...) est cependant difficilement adaptable à des tribosystèmes adhérents (tels que les alliages de titane). En effet, une part non négligeable de l'énergie dissipée est alors consommée dans le processus d'éjections des débris. L'influence de l'amplitude de fretting est alors prépondérante : une augmentation du débattement induit en effet une augmentation du taux d'éjection des débris et ainsi de la cinétique d'usure. Paulin [Pau05, Pau06] propose alors une formulation modifiée de l'énergie dissipée pour les contacts adhérents I.5 et une loi énergétique réduite d'usure I.6. Cette approche permet notamment de prédire avec précision des cinétiques d'usure observées pour des sollicitations variables (cas de blocs de chargements variables).

$$\sum \tilde{E}_d = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_0(k)}{\delta_{0ref}} E_d(k) \quad (\text{I.5})$$

$$V = \alpha \sum \tilde{E}_d \quad (\text{I.6})$$

Ces approches énergétiques précédemment citées sont intéressantes en raison de leur relative simplicité. Cependant, il ne faut pas oublier que cette globalisation du contact reflète en réalité des mécanismes locaux qui gouvernent les cinétiques d'usure. Aussi est-il intéressant de revenir également à d'autres modèles, plus spécifiques et complexes, décrivant les différents mécanismes et modes d'usure.

Approche thermodynamique

Une analyse micromécanique des interfaces est réalisé à l'aide des lois de la thermodynamique des processus irréversibles. Dragon-Louiset et al. [DL01] considèrent l'usure comme un phénomène dissipatif et lié à un critère d'évolution du mécanisme de détachement des particules. Ils se placent dans le cas le plus général et ils appliquent les lois connues de la mécanique (conservation de la masse et de la quantité de mouvement, énergie cinétique, 1er et 2nd principe de la thermodynamique) à un ensemble constitué de deux corps en contact et perdant de la matière, afin de dégager un critère d'évolution de l'usure - critère associé à une frontière mobile, le front d'usure. L'analyse thermodynamique a permis à Dragon-Louiset [DL00] de définir un critère d'usure pour chaque solide prenant en compte le troisième corps. Ce critère d'usure est lié au taux de restitution d'énergie. Les premiers modèles d'usure présentés ne prennent pas en compte le troisième corps pourtant essentiel dans le transfert des chargements. L'approche thermodynamique modélise mésoscopiquement le troisième corps. La difficulté de cette approche réside dans le passage de l'aspect microscopique de l'usure (échelle du troisième corps) au modèle mésoscopique. Nous allons voir qu'une approche microscopique à l'échelle des débris permet d'expliquer les phénomènes observés à l'échelle macroscopique.

Approche par le troisième corps

Dans les systèmes tribologiques il existe une interface entre les deux corps en contact. Cette interface est baptisée « troisième corps » par Godet [God84]. Le troisième corps est ici créé dans le contact par dégradation des premiers corps. Dans ce cas on parle de troisième corps solide. Le troisième corps transmet la charge dans le contact, accommode les vitesses entre les deux premiers corps et sépare les deux premiers corps en réduisant leur interaction.

Cette approche considère que l'usure est gouvernée par trois phénomènes essentiels : la création, la circulation et l'éjection des débris. La formation et le maintien des débris dans le contact sont vus comme bénéfiques car ceux-ci permettent d'assurer la séparation des surfaces et participent au transfert de charges à travers leur capacité de portance. Par la suite, Berthier [Ber88] propose un modèle d'accommodation des vitesses. Cette approche a permis une grande avancée dans la compréhension et l'unification des mécanismes d'usure existants. Dans une étude

récente, Varenberg [Var02] résume le rôle des débris dans le contact en distinguant deux rôles possibles pour les débris : soit ils protègent la surface en formant un lit aux propriétés lubrifiantes (dans le cas des mécanismes d'usure par adhésion), soit ils sont abrasifs et participent à l'endommagement de la surface (si l'usure est de nature abrasive).

Tous ces travaux restent cependant appliqués à une analyse qualitative de l'usure et en font une démarche non applicable à une prédiction d'usure quantitative dans un cadre industriel. Ces modèles décrivent relativement bien les mécanismes réels mais reste difficile à formaliser et ne permettent pas une comparaison simple de différents systèmes tribologiques. La modification d'un site ou d'un mécanisme de l'interface peut induire une évolution du coefficient de frottement et par conséquent modifier la condition de glissement du contact.

3 Comportements et endommagements des matériaux composites tissés

3.1 Matériaux composites tissés : classification, intérêts, élaboration

3.1.1 Classification des matériaux composites

Un matériau composite est constitué d'au moins deux éléments structuraux principaux (comme par exemple le béton armé), dans le but d'obtenir un nouveau matériau possédant des propriétés globalement améliorées par rapport à ses constituants pris séparément. Il est généralement composé :

- De **renforts**. Ils sont généralement constitués de fibres courtes ou longues, ou de particules, et constituent l'armure structurale du composite en assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite.
- Et d'une **matrice** dans laquelle sont noyés les renforts, assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.

Un troisième constituant, appelé **interphase**, peut éventuellement être déposé autour de chaque fibre qui joue un rôle fondamental dans les propriétés thermo-mécaniques du matériau, en assurant le transfert de charge entre les fibres et la matrice.

Il est d'usage de classer les composites par la nature de leur matrice, pour deux raisons : la matrice assure toutes les fonctions autres que la tenue mécanique voire une partie des propriétés mécaniques, et conditionne le choix du procédé de mise en forme. On distingue habituellement trois familles :

Les composites à matrice organique (CMO)

Il s'agit, de loin, des composites les plus répandus : ce sont en effet les seuls composites ayant, pour beaucoup d'entre eux, des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries. Les matrices employées pour ces composites sont des résines polymères de deux types : les thermodurcissables comme les résines polyester et époxy (les plus utilisées en raison de leur plus grande facilité de

mise en forme), et les thermoplastiques (moins utilisés mais recyclables). Différentes fibres peuvent être employées avec ces matrices. Les plus courantes sont les fibres de verre (95% des renforts), les fibres de carbone, les fibres d'aramide (kevlar) ou de polypropylène, et les fibres végétales (chanvre, lin). Les applications « hautes performances », comme dans l'industrie aéronautique, utilisent des fibres longues tissées ou encore empilées en plis unidirectionnels, ce qui permet d'optimiser les propriétés mécaniques du composite.

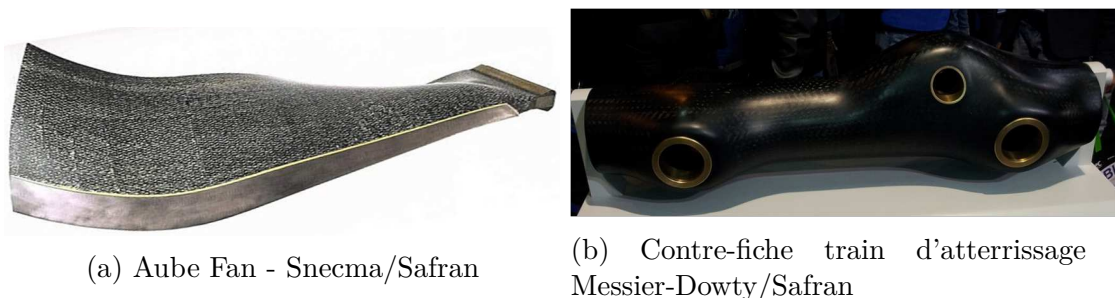


FIGURE I.13 – Quelques applications des composites à matrice organique (CMO) « hautes performances » dans l'industrie aéronautique

Les composites à matrice céramique (CMC)

Beaucoup moins répandus que les CMO en raison d'un coût élevé, les CMC sont des matériaux thermostructuraux généralement destinés aux applications de très haute technicité et à haute température comme l'aéronautique et le nucléaire. Les renforts et la matrice sont souvent constitués de carbure de silicium (SiC), de carbone (C) ou d'alumine (Al_2O_3). Ayant des comportements assez similaires aux matrices céramiques, les matrices de carbone sont souvent assimilées aux CMC. Il est relativement fréquent que les renforts et la matrice soient faits du même matériau : le rôle de la structure composite, ici, n'est pas tant de combiner les propriétés des constituants que d'en faire émerger de nouvelles, à savoir la ténacité et la ductilité.



(a) Volets froids en composites thermostructuraux C/SiC (Avion de combat Rafale). (b) Prototype de mélangeur en CMC sur moteur CFM56-5C.

FIGURE I.14 – Quelques applications des composites à matrice céramique (CMC) sur les moteurs civils et militaires.

Les composites à matrice métallique (CMM)

Ils comportent une matrice en métal léger (aluminium et ses alliages, magnésium, titane,...) et un renfort pouvant être, comme pour les CMO ou CMC, soit des fibres courtes céramiques ou particules, soit des fibres longues céramiques ou métalliques. Un avantage de ces composites est que la matrice étant métallique, ses caractéristiques mécaniques intrinsèques sont généralement bonnes. Un inconvénient est la grande réactivité chimique des métaux : lors de la mise au point du composite, il faut s'assurer que la matrice et le renfort ne peuvent pas réagir entre eux, faute de quoi les conséquences sur les propriétés mécaniques peuvent être catastrophiques. Les matériaux composites à matrice métallique (CMM) sont utilisés dans les zones de température relativement élevée (jusqu'à 500 °C). Le disque ANAM (Anneau Aubagé Monobloc), développé par Snecma, est fabriqué avec une matrice de titane renforcée des fibres longues Sic. L'usage de ce matériau a permis une optimisation de la structure (passage d'un disque à un anneau) réduisant ainsi la masse, à performance égale, d'environ 50% (voir Figure I.15). Les composites à matrice métallique sont également utilisés par Messier-Dowty pour la fabrication de trains d'atterrissage pour les avions Airbus A400M et Boeing 787.

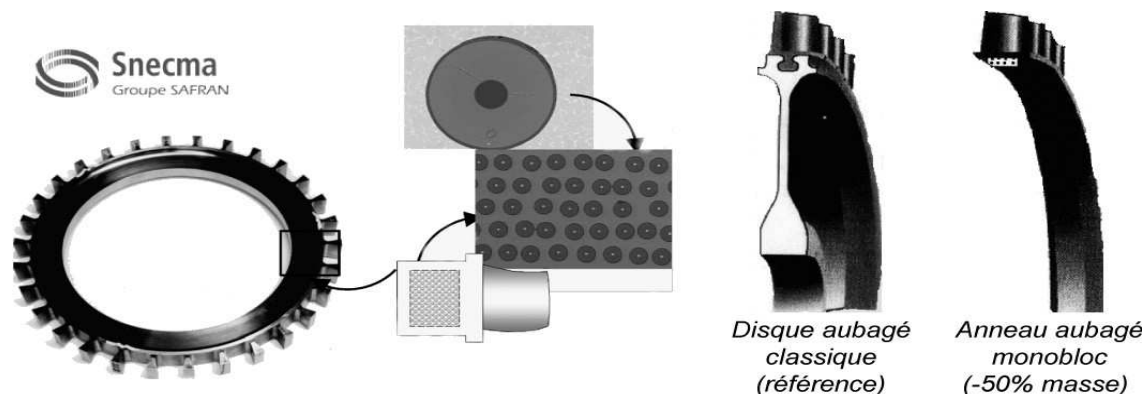


FIGURE I.15 – Utilisation du composite Sic/Titane pour la fabrication de disque ANAM.

L'architecture des renforts doit être adaptée aux fonctions techniques à remplir. Une voie intéressante concerne les techniques textiles qui sont maintenant utilisées pour concevoir des structures composites de plus en plus complexes. Dans ces structures, les fibres sont tressées ou alignées en « câbles » nommés torons ou simplement fils, comptant chacun quelques centaines ou milliers de fibres. Ces fils sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins sophistiqués. Une fois la mise en forme terminée, la matrice est présente à deux niveaux : au sein des fils (ie. entre les fibres), et au sein du tissu (ie. entre les fils). Les motifs du tissu peuvent être extrêmement variés. La figure I.16 montre une gamme type de préforme textile plus répandues dans le domaine des structures composites. Elles sont de deux types, bidimensionnelles et tridimensionnelles. Les préformes bidimensionnelles se composent d'un empilement de plis indépendants l'un de l'autre, dont le transfert de charge est réalisé principalement dans les deux directions du plan. Par contre, les préformes tridimensionnelles permettent d'assurer un transfert de charge selon les trois directions de l'espace. La majorité des préformes textiles bidimensionnelles sont les tissus, les tricotés, les

tressés et les triaxiaux. Pour les tridimensionnelles ce sont les tissés, les cousus, les tricotés et les tressés.

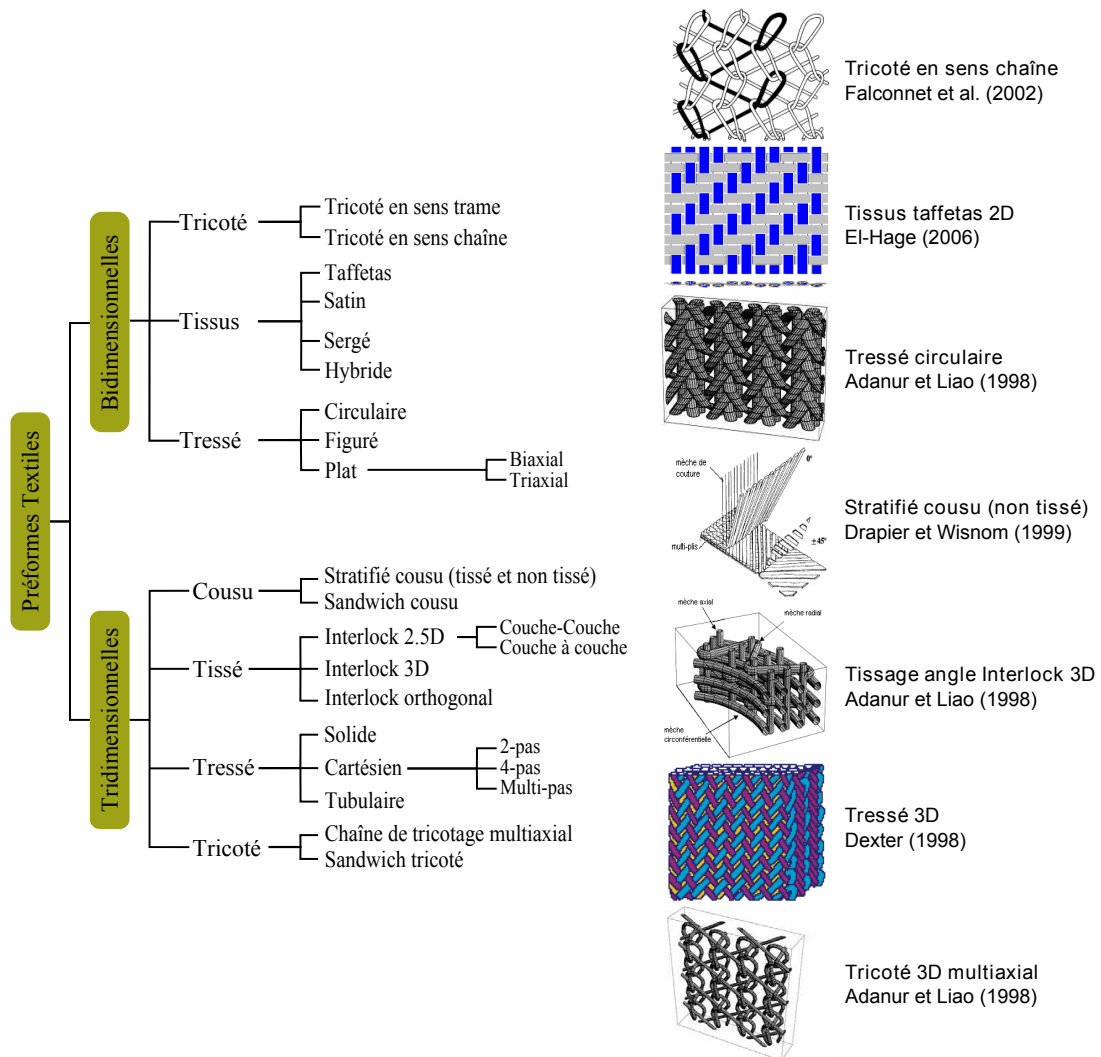


FIGURE I.16 – La structure des types de préforme textile

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux matériaux composites tissés qui sont caractérisés par une orientation à 90° des fils de chaîne et de trame dans le plan. La catégorie des renforts tissés bidimensionnels est constituée des taffetas, des sergés et des satins (voir Figure I.17). On distingue différentes catégories de préformes de tissage tridimensionnelles réunies sous le terme générique de tissage « angle interlocks ». Ils sont constitués d'une structure de plusieurs plans nominaux contenant des mèches droites dirigée en sens chaîne et sens trame qui sont reliés entre eux à travers des mèches tissés en sens chaîne. Plusieurs types de tissage angle interlock peuvent exister :

- Le tissage angle Interlock 3D, ou encore appelé « Through-Thickness Angle Interlock ».
- Le tissage couche-couche 2.5D, ou encore appelé « Layer-Layer Angle Interlock ».
- Le tissage couche à couche 2.5D, ou encore appelé « Layer to Layer Angle Interlock ».

- Le tissage orthogonal Interlock, ou encore appelé « Layer to Layer Angle Interlock ».

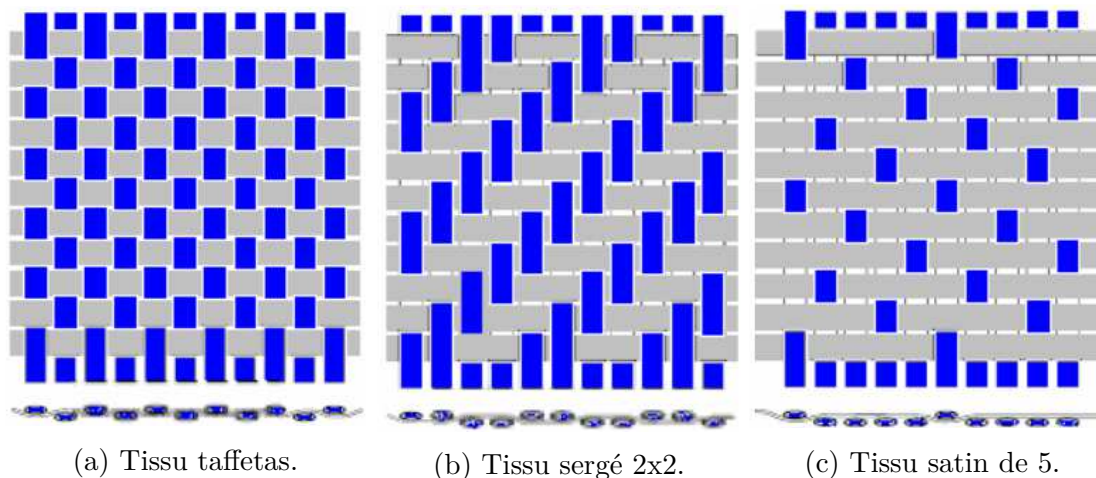


FIGURE I.17 – Quelques types de tissus 2D.

3.1.2 Procédés d'élaboration des matériaux composites tissés

Précédemment, nous avons vu que les composites diffèrent par la nature de leur architecture interne. Un autre critère de classification est la nature de la matrice. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous sommes focalisés uniquement sur les matériaux composites tissés à matrice organique et à matrice céramique. La fabrication de structures en composites tissés se décompose usuellement en deux étapes principales.

Dans un premier temps, il convient de réaliser une préforme fibreuse sèche ou armure demandant un savoir-faire technologique important. Ensuite, la matrice est injectée au sein de la préforme fibreuse sèche. Ce procédé de fabrication permet la réalisation de structures de formes complexes « one shot », réduisant au maximum l'étape d'assemblage et évitant l'introduction de jonctions (boulonnées ou collées) fragilisant la pièce. Il existe différents procédés de fabrication des matériaux tissés.

Les composites à matrice organique

Ils peuvent être élaborés par injection ou infusion. Les pièces tissées 3D CMO élaborées par Snecma sont conçues par injection RTM (Resin Transfer Moulding). Le procédé RTM consiste à placer la préforme fibreuse entre deux moules rigides chauffant et à injecter sous pression au moyen d'une pompe, la résine (matrice), mélangée au catalyseur. Les résines utilisées dans ce procédé présentent une faible viscosité afin de faciliter son écoulement au sein de la préforme fibreuse et de minimiser les porosités. Lorsque la résine est polymérisée, le moule est ouvert et le composite retiré. Ce procédé permet ainsi de fabriquer des structures composites de tailles modérées et présentant deux faces lisses.

Les composites à matrice céramique

On dénombre trois techniques de densification : la voie gazeuse, la voie liquide ou bien la voie solide [Pen02]. La technique retenue par Snecma Propulsion Solide est l'infiltration chimique en phase vapeur CVI (Chemical Vapor Infiltration). Le principe de la CVI consiste à densifier des préformes, constituées de fibres, par « craquage » d'un gaz porté à haute température [Nas04]. Autrement dit, un gaz est injecté dans une enceinte, et pénètre par diffusion, ou par convection, dans le réseau poreux jusqu'au cœur de la préforme, et vient y déposer par réaction chimique un dépôt solide. L'un des défauts majeurs de ces matériaux pour les applications à hautes températures ($>500^\circ\text{C}$) est la sensibilité de la fibre de carbone à la thermo-oxydation. C'est la raison pour laquelle des matrices multiséquencées ont été développées afin de ralentir la progression de l'oxygène et ainsi augmenter la durée de vie du matériau [Lam05].

3.2 Comportement mécanique des matériaux composites tissés

3.2.1 Comportement mécanique des matériaux composites tissés à matrice céramique

Le comportement des CMC est souvent considéré comme initialement orthotrope, symétrique lorsque l'architecture tissé est équilibrée (le comportement mécanique dans le sens chaîne et dans le sens trame sont équivalents). La Figure I.18 présente le comportement typique des CMCs à température ambiante [Gas96]. En traction dans les axes du renfort, les courbes de comportement présentent un très faible domaine linéaire élastique avant de devenir non linéaires et non élastiques jusqu'à la rupture. Les cycles de charge/décharge mettent en évidence l'effet de l'endommagement matriciel sur le comportement élastique soit une diminution progressive du module élastique apparent, ainsi que l'apparition de déformations résiduelles lors des décharges. De plus, ces cycles de charge/décharge s'accompagnent de cycles d'hystérésis dus au frottement entre les lèvres des fissures matricielles créées au cours du chargement. Lors du passage en compression, le matériau retrouve ses propriétés élastiques initiales du fait de la refermeture progressive des fissures matricielles.

Le comportement des CMC 3D est similaire à celui des tissés CMC 2D [Sir98, Cou08]. Dans l'axe du renfort, le comportement du matériau est élastique endommageable avec présence de déformations résiduelles. La non-linéarité observée au cours d'essais cycliques est due à l'apparition de l'endommagement. Hors-axes, le comportement est aussi fortement non-linéaire avec un effet important de l'endommagement sur la réponse du matériau. Le comportement en compression est de type élastique fragile jusqu'à la rupture. En conclusion, on peut considérer que les composites tissés à matrice céramique ont un comportement élastique endommageable.

3.2.2 Comportement mécanique des matériaux composites tissés à matrice organique

Le tissu n'étant pas toujours équilibré, le comportement des CMO tissés 2D est généralement considéré comme initialement orthotrope. Dans le cas d'un tissu équilibré, le comportement du matériau sollicité dans l'axe du renfort est linéaire élastique fragile (voir Figure I.19a). Sous sollicitation hors-axes à 45° , la courbe de compor-

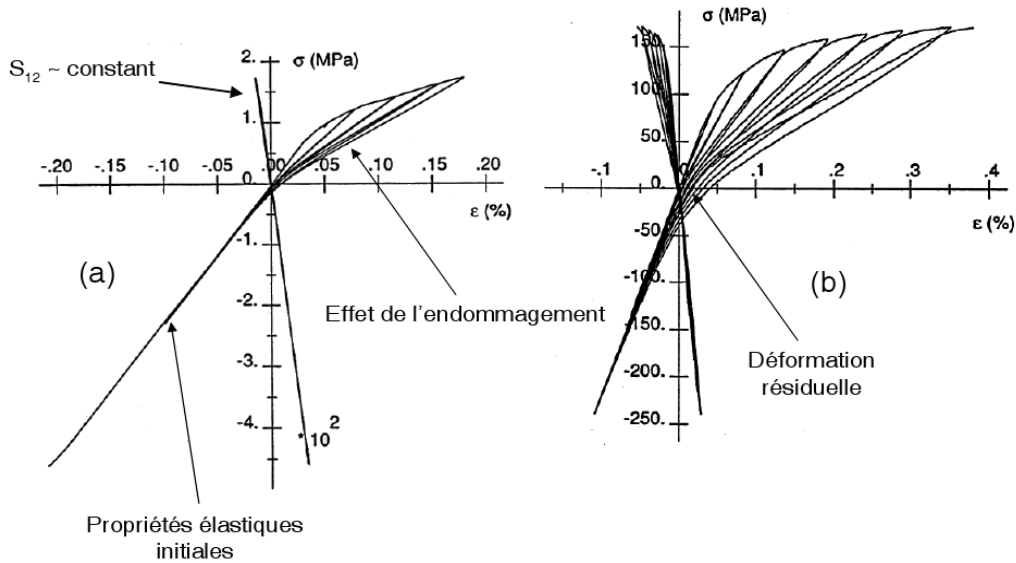


FIGURE I.18 – Courbes contrainte/déformation pour un essai de traction compression sur un composite tissé 2D SiC_f/SiC : (a) dans le sens du renfort (b) hors-axes à 45° [Gas96].

tement est fortement non-linéaire dès le début de la sollicitation. Elle présente également d'importantes boucles d'hystérésis lors des cycles de charge/décharge, ainsi que des déformations résiduelles (voir Figure I.19b). La non-linéarité du comportement est principalement due au comportement visqueux de la matrice polymère auquel s'ajoute l'apparition d'endommagement. Ce caractère visco-élastique est mis en évidence par l'ouverture des boucles d'hystérésis lors des cycles de chargement.

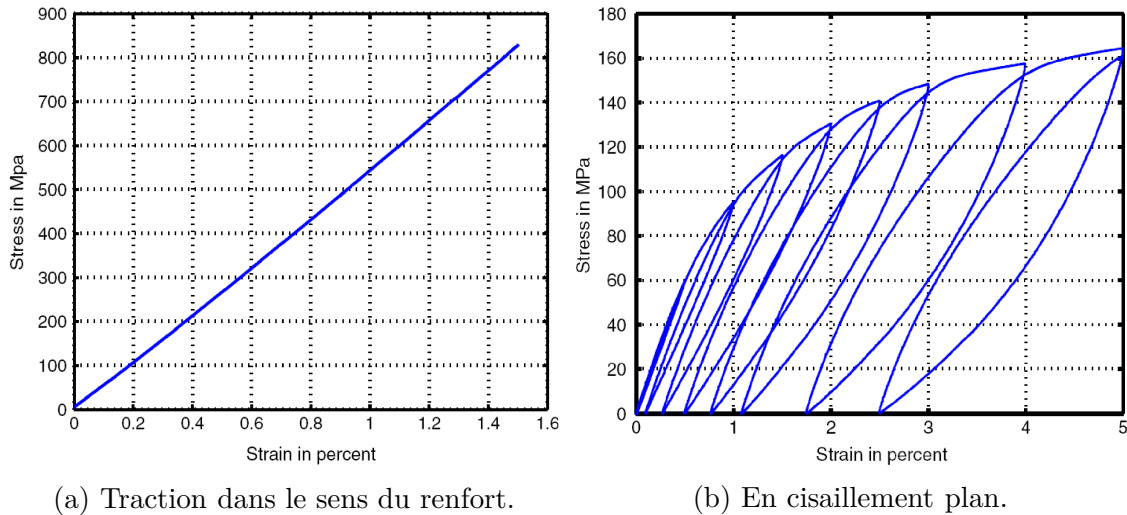


FIGURE I.19 – Comportement mécanique d'un CMO tissé 2D [bor04].

Contrairement aux CMO tissés 2D, le comportement des CMO tissés 3D sollicités dans l'axe des renforts (chaîne et trame) est légèrement non-linéaire. La rupture est fragile, que ce soit pour les composites à fibres de verre [Cal99], ou de carbone [Tan00]. Une campagne de caractérisation du comportement mécanique d'un matériau composite tissé 3D à matrice organique déséquilibré a mis en évidence

l'endommagement du matériau avec la présence de déformations résiduelles par l'intermédiaire d'essais de charge/décharge incrémentale dans les sens chaîne, trame et à 45° [Sch08].

3.3 Mécanismes de dégradation/protection

3.3.1 Mécanismes observés sur les matériaux composites à matrice céramique

Dégradations thermo-mécaniques

Après élaboration par CVI, le matériau présente une porosité résiduelle de l'ordre de 10 à 15% résultant d'une densification partielle à deux échelles (voir Figure I.20) : (i) des macropores correspondant aux vides laissés entre les fils et les couches de tissus, et (ii) des micropores résultant d'une infiltration incomplète au sein d'un même fil.

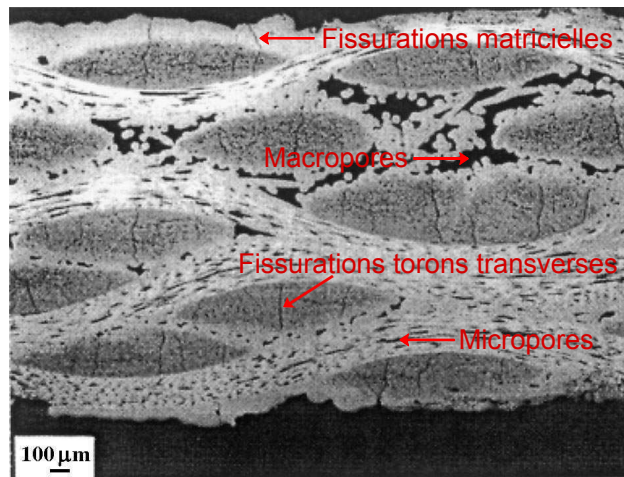


FIGURE I.20 – Défauts initiaux dus aux procédés d'élaboration d'un composite tissé 3D C_f/SiC [Dal00].

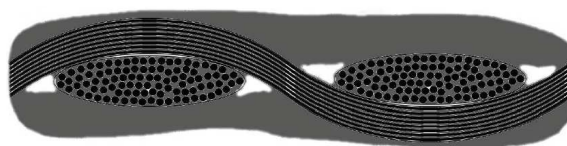
L'écart entre les coefficients de dilatation thermique de la fibre et de la matrice entraîne l'apparition de contraintes résiduelles au sein de la matrice lors de l'élaboration du matériau [Dal00]. Ces contraintes d'origine thermique sont partiellement relaxées lors du refroidissement du matériau et donnent naissance à des fissures orientées par la symétrie matérielle du composite. On distingue deux types de fissures préexistantes (voir Figure I.20) : (i) des fissures matricielles générées perpendiculairement au renfort tissé, et (ii) des fissures transverses à l'intérieur des fils, parallèlement à leur petit axe.

La présence de ces défauts initiaux (porosité, fissuration) est source d'endommagement et explique la forte non linéarité de comportement observée sur ce type de matériau. Cependant, contrairement aux composites C_f/SiC , les différents composants des composites SiC/SiC ont tous des coefficients de dilatation thermique proches les uns des autres. Ils ne sont alors pas endommagés par les variations de température associées aux procédés de fabrication.

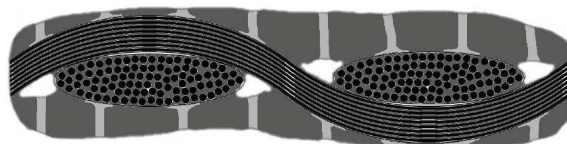
Dégradations mécaniques

Lorsque le matériau est chargé mécaniquement, différents réseaux de fissures apparaissent selon un scénario bien défini [Fan01, Gui96, Lam01] :

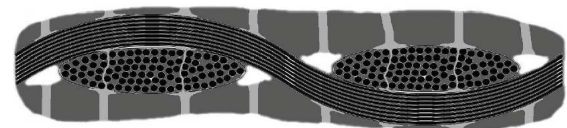
- Dans un premier temps, la matrice inter-fil se fissure (voir Figure I.21c). Ces fissures sont initiées à des macro-pores, se développent orthogonalement au chargement, et ne pénètrent pas les fils : lorsqu'elles arrivent sur les premières fibres, elles sont déviées le long des fibres et forment des fissures de décohesion.
- Dans un second temps, c'est la matrice des fils sollicités transversalement qui se fissure (voir Figure I.21d). Ces fissures sont initiées à des micro-pores, et se développent longitudinalement aux fibres. Elles se terminent en périphérie des fils par de nouvelles fissures de décohesion.
- Dans un troisième temps, c'est la matrice des fils sollicités longitudinalement qui se fissure (voir Figure I.21d). Ces fissures sont également initiées à des micro-pores, mais se développent orthogonalement aux fibres. Et de même que les fissures inter-fils contournent les fils, les fissures intrafils transverses ne cassent pas les fibres mais les contournent en formant des fissures de décohesion.
- Finalement, les ruptures de fibres, induites par des micro-défauts, mènent rapidement à la ruine du matériau.



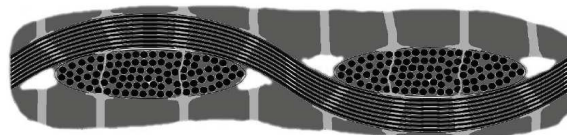
(a) Composite sain.



(b) Fissures inter-fils.



(c) Fissures intra-fils longitudinales.



(d) Fissures intra-fils transversales.

FIGURE I.21 – Réseaux de fissures [Gen10].

Ainsi, le mécanisme clef du comportement mécanique des CMCs est la décohesion fibre/matrice ou fibre/fibre au droit des fissures matricielles qui permet de générer un composite ductile à partir de deux constituants fragiles.

Dégradations/Protections physico-chimiques

Dans le cas d'un chargement mécanique inférieur à la contrainte à rupture du matériau (la matrice est fissurée, les fibres soutiennent la charge), plusieurs mécanismes, induits par l'environnement chimique (éventuellement oxydant) et la température (éventuellement élevée), coexistent et pilotent la durée de vie du matériau :

- L'air chaud pénètre le réseau de fissures et vient oxyder les fibres, qui voient leur contrainte à rupture diminuer. Éventuellement, la contrainte appliquée devient critique, et les fibres commencent à rompre, menant rapidement à la ruine du composite.
- L'air chaud va également oxyder certaines couches de la matrice auto-cicatrisante. L'oxydation produit un verre pâteux qui bouche les fissures et ralentit l'oxydation des fibres. La durée de vie du matériau s'en voit largement allongée.

Ainsi, l'un des mécanismes clefs de la durée de vie des CMCs est la dégradation des fibres et des fils sous chargement mécanique et chimique.

3.3.2 Mécanismes observés sur les matériaux composites à matrice organique

Contrairement aux tissés CMC, les tissés CMO ont un taux de porosité très faible, et n'ont pas de mode d'endommagement apparent après élaboration comme on peut le voir sur la figure I.22. De plus, la matrice polymère a un module de Young très faible devant celui des fibres et supporte donc peu d'effort. Il n'y a pas de processus de fissuration matricielle analogue à celui observé dans un CMC.

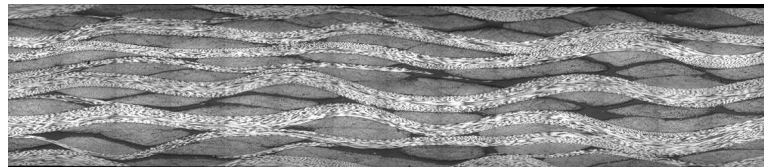
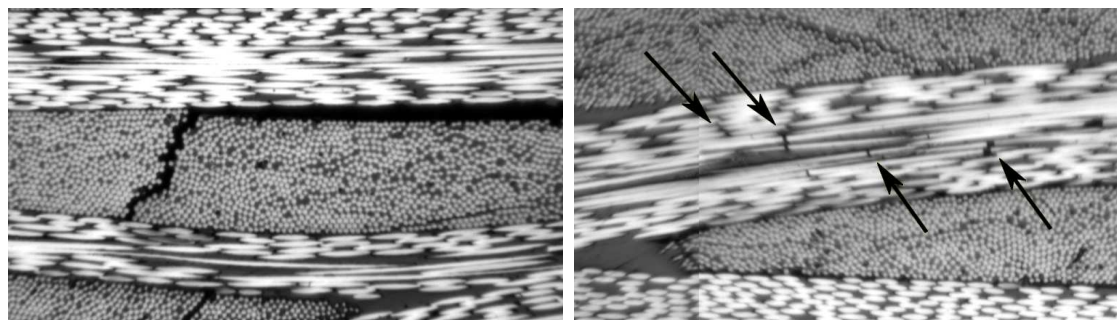


FIGURE I.22 – État initial d'un composite tissé 3D CMO [Cou08].

Les mécanismes d'endommagement mis en évidence lors d'une sollicitation uniaxiale d'un composite tissé 2D/2.5D CMO sont en premier lieu la fissuration des torons transverses (voir Figure I.23a). Pour des chargements plus importants, apparaissent des décohésions à l'interface torons/matrice ou bien à l'interface entre deux torons orthogonaux. La ruine du matériau est due à la rupture des fibres dans les fils longitudinaux [Gao99] (voir Figure I.23b).

Pour les composites tissés 3D, la faible non linéarité observée dans le sens du renfort est liée à l'insertion d'un renfort dans la troisième direction. Les torons parallèles à l'axe de sollicitations auront tendance à se tendre entraînant une dégradation du matériau. La Figure I.24 présente les mécanismes de dégradation mis en évidence par El Hage sur un composite tissé 3D CMO sollicité en traction uniaxiale dans le sens chaîne [EH06]. L'endommagement s'initie à l'interface des torons sens chaîne et de la matrice ainsi qu'à l'interface entre les torons sens chaîne et sens trame. Cet endommagement est suivi d'une fissuration inter-torons. Cela se traduit par la propagation de la fissuration de la matrice d'une interface à l'autre entre deux torons



(a) Fissure transverse et décohésion associée. (b) Ruptures de fibres dans un fil longitudinal.

FIGURE I.23 – Mécanismes d'endommagement du 2.5D-C/époxy [Cou08].

de trame juxtaposés, suivie par la décohésion à l'interface torons sens chaîne/trame. Le scénario d'endommagement est complété par la fissuration des torons sens trame. Pour des niveaux de sollicitation plus importants, les fils longitudinaux (parallèle à la direction de chargement) s'endommagent. Pour finir, on observe une multiplication de la fissuration des torons sens trame. Ces observations sont similaires à celles réalisées par d'autres auteurs sur des composites tissés 3D à matrice organique [Cou08]. La rupture finale intervient par rupture transverse des torons parallèles à la direction de chargement et par rupture longitudinale des torons orthogonaux à la direction de chargement [Tan00].

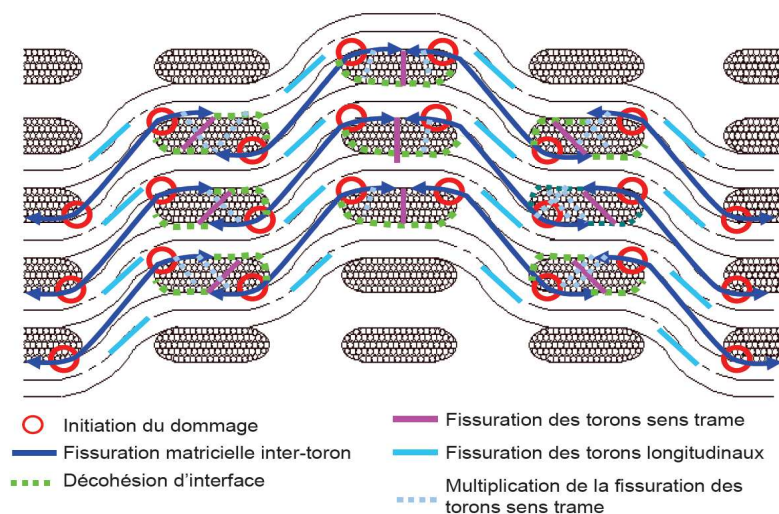


FIGURE I.24 – Mécanismes de dégradation observés sur un tissu 3D CMO [EH06].

4 Pratique de modélisations numériques : application au contact aube/disque

4.1 Méthodes en mécanique du contact

Les méthodes permettant de modéliser le contact peuvent être divisées en deux grandes familles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Les mé-

thodes analytiques reposent sur la théorie des plans semi-infinis. Dans certains cas, une discrétisation numérique des intégrales est nécessaire et on parle de méthode semi-analytique (SAM). Les méthodes numériques présentées ici utilisent la discrétisation de la structure par un maillage mais il existe des méthodes sans maillage. Deux approches sont envisageables les méthodes des éléments finis (FEM) et les méthodes des éléments de frontière (BEM).

4.1.1 Solutions analytiques

Contact Hertzien

Hertz fut le premier à travailler sur le contact entre solides déformables. Son article *On the contact of elastic solids* [Her82] publié en 1882 peut-être considéré comme le début de la mécanique du contact qui est devenue une branche de la mécanique à part entière. Le problème traité est celui du contact élastique, sous un chargement normal statique. Les surfaces des corps en contact sont de type parabolöide elliptique et non-conforme. Cette non-conformité indique que les surfaces non-déformées des deux corps ne sont superposables autrement qu'en un point (contact pseudo-ponctuel) ou une ligne (contact pseudo-linéique). Le contact aube-disque ne peut pas être représenté par la théorie de Hertz. La définition du frottement de Coulomb est utilisée dans la plupart des modèles analytiques existants. Une première solution est celle du contact hertzien en glissement. Les cisaillements en surface sont directement obtenus par l'application de la loi de Coulomb. La solution du champ de contraintes résultant de cette configuration est fournie pour les contacts elliptiques par Sackfields et Hills [Sac83]. Cattaneo [Cat38] et Mindlin [Min49] fournissent les solutions du contact en glissement partiel. Le problème posé est celui du contact sphérique chargé normalement sur lequel un effort tangentiel, ne dépassant pas la limite fixée par la loi de Coulomb pour atteindre le glissement, est ensuite imposé. Le respect de la loi de Coulomb en tout point de la surface de contact crée une zone annulaire de glissement sur les bords du contact. Le problème de Cattaneo-Mindlin est étendu et généralisé à la fois par Ciavarella [Cia98a, Cia98b] et Jäger [Jä98] dans le cas bidimensionnel pour des géométries quelconques.

La théorie de Hertz est fondée sur trois hypothèses principales : une zone de contact elliptique, sans frottement et les hypothèses des massifs élastiques semi-infinis. Ce dernier point permet l'utilisation d'un pan important de la théorie de l'élasticité développée dans le cadre d'un espace élastique semi-infini sous certaines conditions énumérées ci-dessous :

- La zone de contact est de faible dimension par rapport à celle des corps. Dans ce cas les contraintes sont fortement concentrées dans la région proche de la zone de contact et ne sont pas influencées par des conditions limites lointaines. Cette condition est assurée par la non-conformité ;
- Les rayons de courbure doivent cependant être importants comparés à la dimension du contact. Cette condition permet de valider la précédente. Mais elle implique aussi que l'inclinaison des surfaces en contact est faible. Cela permet d'approcher la région proche du contact par un plan et d'éviter d'atteindre des niveaux de contraintes non compatibles avec la théorie de l'élasticité.

Les hypothèses de Hertz sont restrictives mais suffisent souvent à l'étude de la plupart des problèmes industriels. Elles fournissent la distribution de pression, les

dimensions du contact et l'amplitude des différents déplacements élastiques ou rigide et la solution en contraintes dans le volume. De nombreuses solutions analytiques ont été formulées dans le cas de contact non-hertziens particuliers. L'ouvrage référence de la mécanique des contacts rédigé par Johnson [Joh85] présente de façon quasi-exhaustive toutes ces solutions.

Géométries non-hertziennes

Un nombre important de solutions existe lorsque les géométries en contact ne peuvent être assimilées à des ellipsoïdes, telles que les contacts conformes. Les solutions restent cependant basées sur les hypothèses des massifs semi-infinis. La plupart de ces solutions sont données pour des problèmes bi-dimensionnels. Certaines configurations tridimensionnelles permettent une résolution analytique, en particulier des géométries présentant une axisymétrie. La méthode employée repose sur les solutions des « équations intégrales singulières ». Plus de détails sur cette méthode se trouvent dans le livre de Galin [Gal53]. Concernant des contacts plus proches du contact aube-disque, il existe des solutions pour un contact entre un pion avec bords incurvés et un plan élastique. Alexandrov [Ale86] propose une solution analytique entre deux solides élastiques ayant une géométrie de contact de type queue d'aronde. La solution est donnée pour un chargement au niveau de l'axe de symétrie du pion. Il n'existe pas de solution analytique du problème tridimensionnel d'un pion avec bords incurvés avec massif élastique. Le problème s'écrit sous la forme d'équations intégrales dont il semble qu'il n'y ait pas de solution analytique simple. La résolution de ce problème nécessite l'utilisation de méthodes numériques. Ces approches permettent de prendre en compte la modification des géométries de contact, résultat de l'usure.

4.1.2 Modèles numériques

Méthodes des éléments finis

Cette méthode FEM (Finite Element Method) est certainement la plus aboutie des modélisations numériques en mécanique. De nombreux logiciels commerciaux, avec des interfaces graphiques facilitant l'utilisation existent. La quantité de phénomènes physiques pouvant être pris en compte est importante (dynamique, thermique, plasticité, viscosité, champs magnétique,...). La littérature sur la résolution du problème du contact par éléments finis est très riche, environ 20000 références sur *sciencedirect*. Les livres de Wriggers et Laursen [Wri06, Lau03] constituent de riches synthèses des aspects ayant trait aux éléments finis en mécanique du contact.

Cependant les temps de calculs sont importants, et le sont d'autant plus que les forts gradients de contraintes à proximité des zones de contact obligent à utiliser un maillage fin. Des alternatives proches de la méthode des éléments finis ont été développées comme l'ajout d'une méthode sans maillage pour enrichir les éléments en contact. Kim et al. [Kim08] proposent une méthode intéressante pour le calcul du contact entre maillages incompatibles. Ils ajoutent des nœuds dans le maillage à l'interface de contact. Cette approche se nomme « MLS-based FEM » (moving least-square finite element method). Elle permet de transformer un contact nœud-surface en contact nœud à nœud. Une autre alternative proche de la méthode des éléments

finis est la méthode des éléments frontières BEM (Boundary Element Method). Cette méthode repose sur le seul maillage de la frontière de la structure. L'ouvrage de Man [Man94] donne des explications sur les problèmes de contact résolus par la méthode des éléments frontières.

Méthodes semi-analytiques

Lorsque les solutions analytiques sont insuffisantes, il est possible de discrétiser le problème et de le résoudre en sommant numériquement des solutions analytiques de problèmes élémentaires telles que les solutions de Boussinesq [Bou85]. Ce type de modèle se nomme méthode « semi-analytique ». Kalker [Kal90] fut l'un des premiers à formaliser cette méthode. Les techniques numériques utilisées par les différents auteurs diffèrent. Jaeger [Jae04] propose d'utiliser un algorithme de Gauss Seidel au lieu de l'algorithme de Newton-Raphson utilisé par Kalker. Ces méthodes ont ensuite été améliorées avec l'utilisation de techniques accélératrices comme les méthodes multigrilles [Bra90, Lub91] ou les transformées de Fourier rapides [Ju96, Liu00, Pol00] et des algorithmes de résolutions performants tel que le gradient conjugué [Pol99]. La finesse des discrétisations rendue possible par ces méthodes les rendent incontournables dans l'étude des contacts rugueux [All05], presque impossible à envisager avec d'autres méthodes numériques. Récemment les phénomènes d'élasto-plasticité et de thermo-élastoplasticité [Ant04, Bou05, Jac02] ont été ajoutés à ce type de méthodes.

4.2 Modélisation numériques des composites à renforts tissés

4.2.1 Problématique

Les composites tissés possèdent une structure à plusieurs niveaux : les constituants élémentaires (fibres et matrice) sont assemblés pour former des fils ou des plis, qui sont eux-mêmes tissés ou empilés pour former des pièces. L'organisation géométrique interne obtenue peut être très complexe. Pour modéliser une structure composite complexe, il est donc important de préciser à quelle échelle on se place.

Dans le cas des composites à fibres longues, on distingue généralement trois échelles :

- l'échelle « **micro** » : c'est l'échelle des constituants élémentaires où l'on modélise les fibres et la matrice ; sa taille caractéristique est le diamètre d'une fibre (quelques microns) ;
- l'échelle « **méso** » : c'est l'échelle des constituants intermédiaires tels qu'un fil ou toron de fibres ; à cette échelle, on ne distingue plus les fibres et la matrice au sein des fils (c'est-à-dire qu'on modélise ces derniers par des milieux homogènes), et sa taille caractéristique est le diamètre d'un fil ou l'épaisseur d'un pli (quelques dixièmes de millimètre) ;
- l'échelle « **macro** » : c'est l'échelle de la pièce ; à cette échelle, on ne modélise aucun constituant élémentaire ni intermédiaire (c'est-à-dire qu'on modélise la pièce par un milieu homogène), et sa taille caractéristique est généralement de l'ordre du centimètre, voire beaucoup plus.

La simulation numérique d'un composite tissé 3D demande de jongler entre ces différentes échelles. Les méthodes peuvent être maîtrisées en élasticité linéaire dans

les cas les plus simples (cas des bureaux d'étude), mais peuvent s'avérer complexes et coûteuses lorsque l'on veut tenir compte des endommagements. Deux approches de modélisation des composites tissés se confrontaient jusqu'à maintenant : la micro-mécanique, proche de la physique, et la macro-mécanique, qui permet le calcul de structure. Elles se sont ensuite unifiées au sein d'approches multiéchelles, qui combinent les avantages de chacune au prix d'un effort de calcul. Les grands lignes de ces différentes approches sont présentées ici, et illustrées par quelques travaux caractéristiques.

4.2.2 Approches microscopiques

La prise en compte de la véritable microstructure des composites à renforts tissés représente une difficulté technique majeure, car il est nécessaire d'introduire les morphologies des différents constituants et réseaux de fissures complexes, qui doivent alors être traités dans le cadre éléments finis. En terme de représentation des fissures, on distingue principalement i) les représentations implicites, à travers la réduction de la rigidité des éléments du maillage ; et ii) les représentations explicites, à travers le dédoublement des nœuds du maillage. Quelques approches de référence extraites de la thèse de Genet [Gen10] sont rappelées ici :

Zako et al. [Zak03]

Des cellules sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu. Les fils peuvent s'endommager de manière anisotrope grâce à trois variables internes scalaires représentant les trois modes de fissuration des fils : la fissuration longitudinale et les fissurations transverses dans les deux directions, et la matrice de manière isotrope grâce à une variable interne scalaire. Lorsque la contrainte atteint un certain critère dans un élément de la cellule, sa rigidité dans une direction donnée par le critère est réduite (sans intermédiaire entre les états sain et endommagé : la variable interne passe directement de 0 à 1) et le calcul à ce pas de chargement est reconduit.

Lomov et al. [Lom07]

Les travaux de l'équipe de Louvain sur la modélisation géométrique [Ver05] et ceux de l'équipe d'Osaka sur la modélisation mécanique [Zak03] sont ici rassemblés, donnant lieu à une analyse proche de la précédente. La différence majeure se situe au niveau des cellules éléments finis, qui sont ici générées grâce à la combinaison de WiseTex pour la géométrie et ANSYS pour le maillage, et sont donc plus proches de la réalité des tissus.

Guillaumat et Lamon [Gui96, Lam98]

C'est la seule étude spécifique aux CMCs. Des cellules 2D sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu. La fissuration de la matrice inter-fil, ainsi que la décohésion fil-matrice qui en découle lorsque la fissure arrive à un fil et le contourne, sont décrites directement par un dédoublement des nœuds du maillage. Leur apparition est pilotée par une loi statistique de type Weibull et

leur position est prise aléatoirement. L'effet de la fissuration de la matrice intra-fils est décrit par une diminution des propriétés mécaniques locales des fils, au lieu d'apparition de la fissure (également déterminée par la méthode précédente).

4.2.3 Approches macroscopiques

Ce type d'approche paraît la mieux adaptée aux applications industrielles : le matériau est vu comme une boîte « grise » où l'on s'affranchit de la description fine de l'architecture. ce modèle dit « phénoménologique » repose sur une description fine des effets des mécanismes physiques observés aux échelles inférieures expérimentalement (anisotropie initiale du matériau, anisotropie de l'endommagement, viscosité). Il existe deux approches macroscopiques de référence où le problème est résolu dans le cas général d'un endommagement anisotrope piloté par le chargement avec une cinématique éventuellement complexe et non connue a priori. Ces deux modèles visent des applications sur structures composites à matrice céramique.

Modèle d'endommagement du LMT

Dans l'optique d'appliquer cette méthode aux CMCs, un modèle continu avec endommagement anisotrope et effet de fermeture des fissures [Lad95] a été introduit pour prédire le comportement mécanique du matériau à l'échelle de la structure, avec une cinématique d'endommagement définie a priori. Un autre modèle [Lad02], à cinématique d'endommagement non définie a priori, est ensuite développé pour faciliter l'introduction d'informations micros. Enfin, un lien entre l'endommagement mécanique et la morphologie (densité, ouverture) du réseau de fissure qui permet à l'oxygène d'arriver sur les fibres chargées, ainsi que les mécanismes chimiques tels que la cicatrisation de la matrice et la dégradation des fibres, ont été introduits [Lad06] dans le but de prédire la durée de vie du matériau. Des travaux de développements et d'identification sont toujours en cours.

Modèle Onera Damage Model (ODM)

L'Onera développe depuis quelques années un modèle de comportement d'endommagement et de rupture sous sollicitation statique, prenant en compte les phénomènes d'oxydation [Mar10]. Ce modèle d'endommagement exprimé en déformation est écrit dans le cadre de la Mécanique Continue de l'Endommagement. Ce cadre considère l'endommagement comme un processus de déformation de la matière faisant intervenir les défauts au travers d'un concept d'homogénéisation et décrit leur évolution de façon macroscopique, en restant dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus. Comme le montre la Figure I.25, le modèle d'endommagement peut-être décomposé en trois grandes parties : (i) linéaire jusqu'à un seuil du dommage matriciel (ii) non linéaire jusqu'au seuil de rupture des torons et (iii) un comportement adoucissant qui prend en compte la rupture progressive des torons. Contrairement au modèle d'endommagement du LMT qui couple un modèle mécanique macroscopique avec un modèle physico-chimique microscopique, le modèle ODM génère un unique modèle macroscopique homogénéisé.

Cependant, ces méthodes nécessitent une lourde procédure d'identification expérimentale pour chaque nuance de matériaux [Clu09]. Ces modèles sont donc peu adaptés à une démarche d'optimisation du produit, pour lequel le design et le process de fabrication est susceptible d'évoluer. De plus, les pertes d'informations sur la géométrie du tissage à l'échelle mésoscopique peuvent être rédhibitoires pour les modèles de contact.

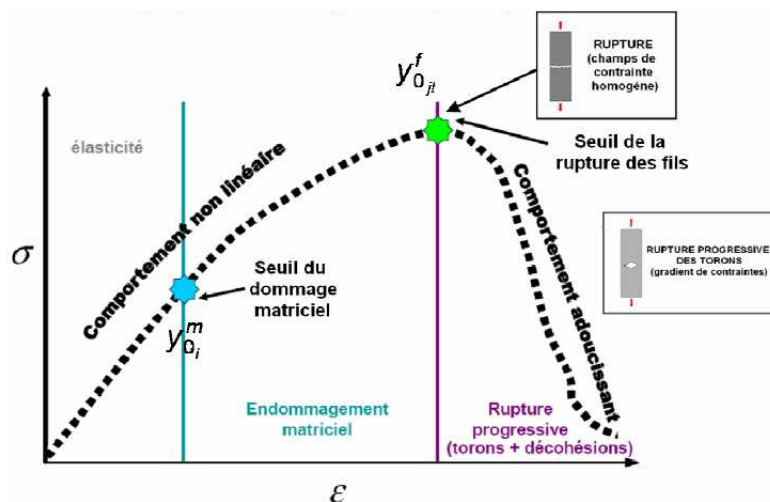
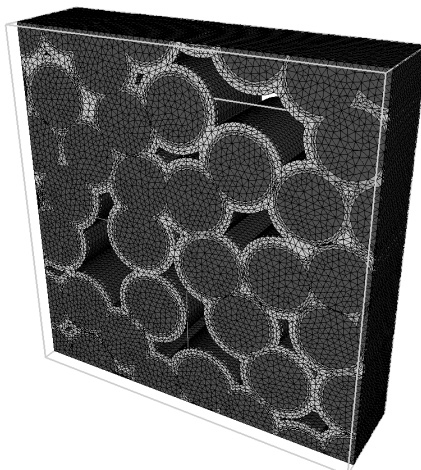


FIGURE I.25 – Schématisation du comportement de matériaux tissés jusqu'à la rupture en statique [Hé11].

4.2.4 Approches multiéchelles

Les possibilités et limites de chacune des deux approches précédentes - micro et macro - sont aujourd'hui bien maîtrisées. La modélisation du matériau peut donc se faire soit à l'une, quelconque, de ces différentes échelles, soit en établissant un lien direct entre elles par homogénéisation. En effet, l'une des façons d'étudier le comportement des matériaux composites à renforts tissés est de partir de la connaissance expérimentale des propriétés mécaniques des constituants (fibres et matrice), d'homogénéiser ces propriétés à l'échelle du toron, de déterminer les propriétés mécaniques initiales d'une cellule tissée élémentaire par homogénéisation, et enfin d'effectuer une réanalyse locale consistant à repasser des variables macroscopiques - continues - aux variables microscopiques - discrètes -, au moins sur les parties critiques de la structure. De par la complexité du renfort textile, il est exclu d'appréhender le dimensionnement d'une structure aéronautique complète à l'échelle mésoscopique car le maillage associé serait de trop grande taille pour les capacités de calculs actuelles.

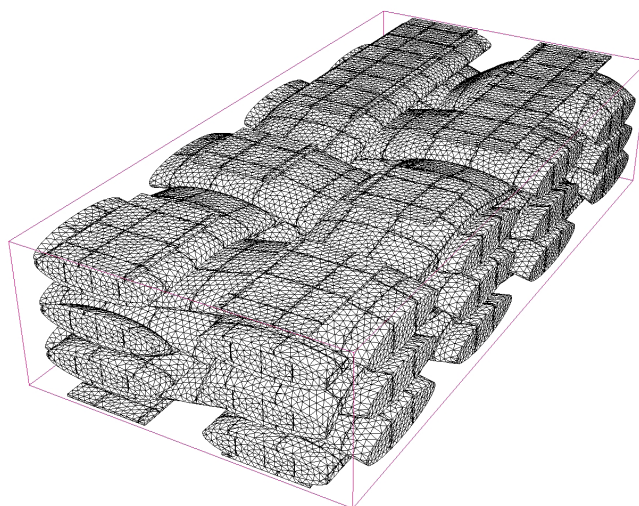
Cougnat [Cou08] a mis en place une approche multiéchelle aboutie en trois étapes pour les cas spécifiques des composites CMO et CMC. Une première série de calculs pour différents scénarios d'endommagement est menée sur des cellules élémentaires à l'échelle microscopique (voir I.26a), qui contiennent suffisamment de fibres pour représenter leur distribution non totalement périodique. La fissuration transverse des fils y est introduite de manière discrète. Une seconde série de calculs est menée sur des cellules élémentaires à l'échelle mésoscopique (voir I.26b). La fissuration transverse des fils y est introduite à travers le comportement endommagé



(a) Maillage EF d'une cellule élémentaire périodique tridimensionnelle représentative d'un fil CMC [Cou08].



(b) Maillage EF volumique d'un renfort tissé [Cou08].



(c) Fissuration multiple d'une cellule tissée [Cou08].

FIGURE I.26 – Modélisation multiéchelle pour différents scénario d'endommagement menés sur des cellules élémentaires à l'échelle microscopique et mésoscopique [Cou08].

des fils calculé à l'étape précédente, alors que la fissuration longitudinale des fils et la fissuration matricielle sont introduites de manière discrète (voir I.26c). Si les étapes précédentes permettent de calculer la cinématique du modèle d'endommagement caractérisant le comportement du matériau à l'échelle de la structure, la détermination des cinétiques d'endommagement nécessite des résultats expérimentaux. Des calculs sont finalement menés sur des structures CMCs qui possèdent le comportement endommageable construit aux étapes précédentes. Les limites actuelles de l'approche semblent être i) la prise en compte du frottement dans les zones de décohésion fibres et fils-matrices; ii) le traitement de la fissuration matricielle dans le cas où elle est entièrement orientée par le chargement; et iii) les cinétiques d'endommagement, qui ne sont pas calculées sur les cellules micros mais doivent être identifiées sur essais macroscopiques.

4.3 Application au contact aube/disque

Les besoins actuels se situent au niveau de la modélisation. Actuellement les phénomènes ayant lieu dans la zone de contact restent obscurs. Les constructeurs sont encore loin de posséder des outils permettant un calcul prédictif précis de la durée de vie des attaches. Les gradients de contraintes sont très marqués à cause de la géométrie des portées. Il est difficile de rendre compte numériquement de ces gradients. La variation est de l'ordre du $MPa/\mu m$.

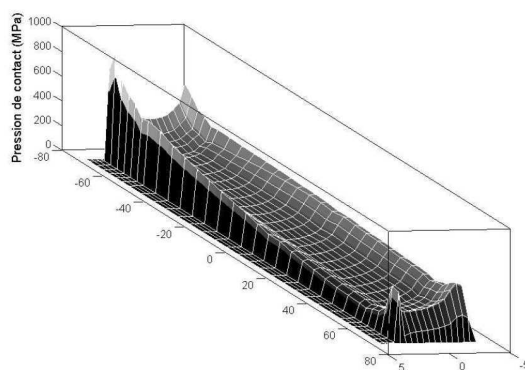


FIGURE I.27 – Distribution de pression de contact entre le pied d'aube et l'alvéole de disque obtenue par EF.

Les capacités de calcul tridimensionnelles actuelles commencent à permettre d'envisager l'utilisation de maillages assez fins pour visualiser les profils de pressions. Pourtant sur les résultats de simulation EF représentés sur la Figure I.27 on observe à peine les pics de pression. Le calcul reste très coûteux et ne peut pas être répété sur de nombreuses géométries lors de la conception. Des solutions analytiques sont alors bien souvent appliquées à l'étude du contact aube-disque [Gal08, Ale86]. Le contact aube-disque est supposé équivalent à un contact poinçon-plan avec des rayons de courbure en sortie de portée comme l'illustre la Figure I.28. Un pic de pression (Figure I.29) apparaît au niveau des congés de raccordement illustrés sur la figure I.28b. Celui-ci est d'autant plus étroit et prononcé que les rayons sont faibles. Les durées de vie en fatigue calculées dépendent donc de la finesse de la représentation.

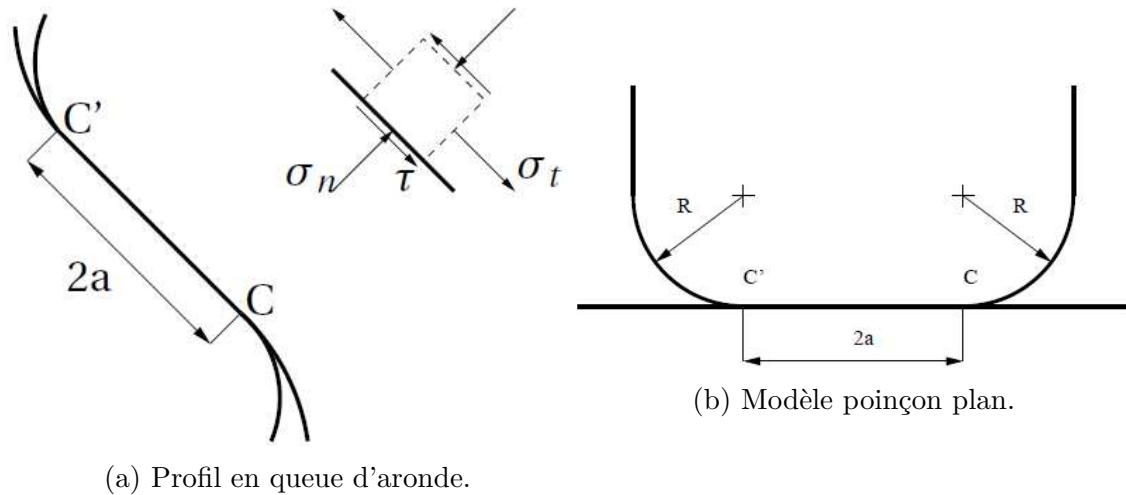


FIGURE I.28 – Approximation de la géométrie du contact aube/disque par un contact poinçon plan sur un massif semi-infini.

La méthode des éléments finis est largement utilisée dans la modélisation du contact aube-disque [Meg96]. Une technique de zoom structural [Sin02] peut être utilisée pour obtenir un maillage plus fin au niveau de la portée de l'aube. Le modèle fin est piloté à partir des déplacements relevés sur le modèle global. J.R. Beisheim [Bei03] montre que les analyses 3D conduisent à des surcontraintes en zone de contact qui peuvent être significativement supérieures à celles prédites par les modèles bidimensionnels. Pour prendre en compte la microstructure cristalline du matériau ou introduire la plasticité, la modélisation éléments finis est très souvent employée [Ara11, Her07]. Les méthodes semi-analytiques peuvent également être utilisées [Jac02, Bof12].

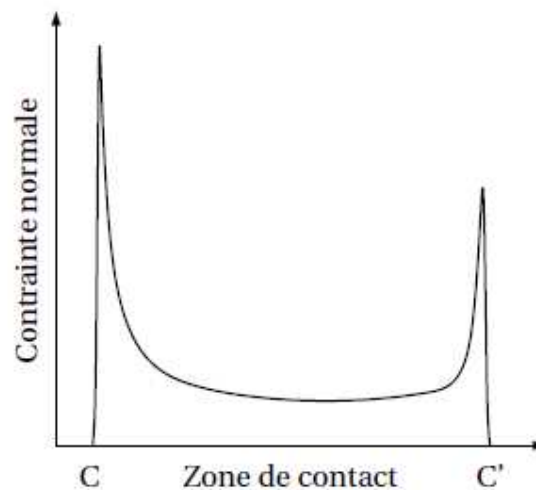


FIGURE I.29 – Distribution de pression de contact sur la portée bidimensionnelle.

Une deuxième difficulté apparaît du fait de l'usure des surfaces. L'usure doit être prise en compte lors du calcul de la durée de vie. L'usure modifie les surfaces de telle sorte que les champs de pression sont plus lisses, les pics de pression s'effacent. L'usure observée en flotte peut atteindre $200 \mu\text{m}$ sur le disque, soit plus que la pro-

fondeur d'action du grenailage. L'usure ôte la couche superficielle du matériau, là où sont initiées les micro-fissures. Il faut dès la phase de conception du moteur, pouvoir estimer la durée de vie du revêtement afin d'augmenter celle-ci pour réduire les opérations de maintenance sur les moteurs en flotte. Là encore les moyens de calcul numérique limitent la simulation d'usure sur des géométries tridimensionnelles. Et cela d'autant plus que l'usure à simuler est un phénomène cyclique.

Snecma a fait développer des outils qui lui permettent de calculer l'usure sous chargement quasi-statique : un outil basé sur un calcul éléments finis sous ABAQUS et un outil semi-analytique. Dans le calcul éléments finis de l'aube en contact avec le disque l'usure est prise en compte grâce à un remaillage dans la zone de contact. Le secteur de roue aubagée est chargé incrémentalement en augmentant la vitesse de rotation pour simuler le décollage jusqu'au point de fonctionnement puis elle est diminuée pour simuler l'atterrissage. Pendant le vol on considère qu'il n'y a pas d'évolution du système. Le chargement est cyclique en triangle. Pendant ce cycle la cinétique d'usure est par hypothèse nulle. Après avoir simulé un cycle, les variables de contraintes et de déplacements obtenues à l'interface permettent de calculer le taux d'usure via les lois d'usure développées par l'équipe de Fouvry et al. [Pau05]. Une stratégie de saut de cycle est utilisée pour mettre à jour le maillage.

Une autre approche consiste à modéliser le contact aube-disque avec les méthodes analytiques. Les rares exemples sont des applications bidimensionnelles. Dini et Nowell [Din04] résolvent ainsi le contact aube-disque revêtu. Le gros défaut des approches analytiques est qu'elles ne prennent pas en compte les effets de bord. Dans le cas d'une alvéole de disque, Gallego [Gal10a] a utilisé une stratégie multi-échelle pour calculer l'usure en pied d'aube sous chargement quasi-statique. Un premier calcul incrémental est effectué au niveau macroscopique par éléments finis sous Abaqus. Les résultats obtenus permettent de calculer les torseurs d'efforts transmis localement dans le pied d'aube qui servent au calcul, par une approche semi-analytique, des contraintes et des déplacements au niveau du contact. L'usure en est déduite et la géométrie est mise à jour par une technique de saut de cycles. Ensuite deux stratégies sont possibles soit un calcul EF est réeffectué avec la géométrie mise à jour tous les n cycles pour calculer le nouveau torseur des efforts soit le torseur est considéré comme identique entre la géométrie saine et la géométrie usée en considérant que les effets d'usure microscopiques ont peu d'effets sur la structure complète.

5 Bilan

Le travail à effectuer au cours de cette thèse consiste à analyser un contact frottant sur matériaux composites tissés 3D CMO et CMC en s'appuyant sur une méthode semi-analytique via un code de recherche développé au LaMCoS. L'application visée concerne la prédiction des usures au niveau des portées de la liaison aube-disque des turboréacteurs soumises aux sollicitations de type fretting. Au travers de la bibliographie concernant le fretting, quantifier l'usure en surface nécessite de connaître les lois de cinétique d'usure. Ne disposant pas de données matériaux pour les revêtements employés sur les aubes en composites ainsi que de résultats expérimentaux d'essais technologiques sur pied d'aube, les calculs d'usure ne seront pas entrepris. En revanche, l'usure reste un phénomène cyclique qui peut être relié

à l'énergie dissipée dans le contact. Il convient alors de savoir quantifier précisément cette énergie dissipée pour un contact de type métallique/composite soumis à une sollicitation oligocyclique. Pour que l'outil soit utilisable en bureau d'étude, la résolution du contact doit se faire rapidement. La solution est d'effectuer la résolution du contact via des méthodes semi-analytiques couplées à un calcul de structure EF. Ces méthodes permettent de résoudre le contact tridimensionnel dans des temps raisonnables avec un maillage très fin.

La résolution du contact sur des matériaux composites nécessite de se placer à l'échelle mésoscopique du matériau (à l'échelle du fil ou de la mèche) correspondant à l'échelle microscopique du contact afin de réussir à capturer les perturbations induites sur les paramètres d'usure (cisaillement, glissement, coefficient de frottement,...).

Chapitre II

Présentation du modèle de contact semi-analytique

Un modèle de contact semi-analytique a été développé et étendu pour étudier diverses problématiques de contact entre deux corps élasto-plastiques non-conformes. Pour résoudre le problème du contact, on se place dans le cadre des hypothèses classiques de Hertz, où les déformations sont petites et les zones de contact sont faibles par rapport aux courbures des massifs en contact, permettant ainsi de considérer les massifs comme étant semi-infinis. Le problème de contact est décrit de façon incrémentale pour prendre en compte le trajet de chargement imposé ainsi que les déformations inélastiques en sous couche. Il est nécessaire de discrétiser le massif en volume afin de considérer le comportement volumique des massifs en contact. Des algorithmes de résolution numérique comme la méthode de gradient conjugué (CGM) et les techniques de transformées de Fourier (DC-FFT) sont utilisées pour résoudre efficacement l'ensemble des formulations analytiques élémentaires définies pour un massif homogène semi-infini. Le modèle doit donc posséder un maillage de taille constante dans chaque direction du demi-espace. La prise en compte des conditions limites est intrinsèque aux formulations semi-analytiques. Ainsi seule la zone utile de contact est discrétisée, générant un gain en temps de calcul considérable.

Sommaire

1	Historique	44
2	Algorithme du solveur de contact	45
3	Méthode DC-FFT	47
	3.1 Principe	47
	3.2 Algorithme 2D-FFT	49
	3.3 Algorithme 3D-FFT	51
4	Résolution du contact	51
	4.1 Principe	51
	4.2 Couplage du problème normal et tangentiel	53
	4.3 Algorithme du gradient conjugué (CGM)	54
5	Bilan	55

1 Historique

Les méthodes semi-analytiques sont particulièrement intéressantes et adaptées pour la résolution de problèmes de contact complexes. En plus d'être simple d'utilisation comparé aux méthodes EF, elles permettent de réduire considérablement les temps de calcul. Le modèle de contact semi-analytique présenté ici est fondé sur les travaux de Jacq et al. [Jac01]. Chiu [Chi77, Chi78] développa des solutions analytiques élémentaires pour déterminer les contraintes résiduelles induites par un cube élémentaire de déformation plastique dans un massif semi-infini. Les solutions analytiques de ces intégrales ont été découvertes par Jacq et al. [Jac02] puis implémentées dans l'algorithme de résolution du contact tridimensionnel afin d'y introduire l'effet des déformations plastiques. Ces développements ouvrirent la porte aux problématiques de contact élasto-plastique [Sai02] et de contact entre surfaces fractales, particulièrement étudié par Willner [Wil04].

De nombreux phénomènes furent par la suite étudiés à partir de ce modèle élasto-plastique. Les aspects d'échauffement thermique par friction ont été ajoutés à la partie élasto-plastique du modèle SAM par Boucly et al. [Bou05]. En parallèle, le modèle de plasticité est enrichi d'un algorithme de retour radial (« Return-Mapping ») initialement adopté par Simo and Taylor [Sim85]. Cette méthode fut appliquée à l'analyse du transfert de chaleur par friction en fonction de sa répartition et de la vitesse de glissement (Chen et al. [Che08]).

La possibilité de discrétiser finement la zone de contact, un des avantages majeurs de la méthode semi-analytique, permet d'appliquer cette méthode à l'étude des contact rugueux. Antaluca et al. [Ant04, Ant05] appliqua sur des surfaces dentées un chargement tangentiel en régime de glissement total sur des surfaces indentées. Il étudia le cas d'une charge roulante avec comportement elasto-plastique pour des applications sur roulements à rouleaux cylindriques [Nel07]. De la même manière, Boucly et al. [Bou07] étudia les phénomènes de roulement et de glissement en présence d'aspérités en surface.

A partir de la simplification de régime en glissement total, Gallego et al. [Gal07a] propose un modèle élastique de contact sous condition de stick-slip. Ce modèle a été étendu au phénomène de fretting-wear [Gal06] et au glissement partiel [Gal07b]. Le modèle, dès lors capable de simuler les 3 modes de fretting [Gal10b], a été couplé à un modèle éléments finis de contact aube/disque pour en étudier l'endommagement par fretting-wear [Gal10a]. Ce modèle a été appliqué aux cas de matériaux élastiques revêtus [Wan10]. Dans cette méthode, le problème normal et tangentiel sont résolus alternativement. Une méthode au couplage complet est proposé par Willner [Wil88].

Les solutions analytiques pour prendre en compte la plasticité dans la résolution du contact tangentiel ont été développées et intégrées à ce modèle par Fullinger [Ful10]. Il développa également un modèle permettant de traiter la présence d'hétérogénéités sphériques dans l'un des massifs en contact, et l'appliqua à l'étude de matériaux revêtus élasto-plastiques sous sollicitation de fretting-wear [Ful11].

Chaise [Cha11b] a étendu l'usage de ce modèle semi-analytique aux procédés mécaniques de mise en compression des surfaces. Cette méthode est d'abord utilisée pour la simulation du procédé de galetage avec un chargement de type contact roulant. Elle est également appliquée à la simulation d'impacts uniques puis répétés dans le cadre des procédés de type billage [Cha11a, Cha12].

De récents travaux ont permis de coupler les modèles semi-analytiques de contact

sec avec les contacts lubrifiés [Bos11]. Le couplage entre le modèle de contact élasto-plastique et un modèle de lubrification hydrodynamique (EHL) menant à un modèle PEHL fut réalisé par Ren et al. [Ren10].

Enfin, Bagault [Bag12] y a incorporé récemment les formulations analytiques en déplacements et en contraintes traduisant l'effet de l'anisotropie de l'un des deux corps en contact sur les paramètres de contact (pression et surface de contact). Cette formulation permet de rajouter un revêtement uniforme en surface.

2 Algorithme du solveur de contact

Le fonctionnement global du code SAM est décrit par l'organigramme Figure II.1. Au corps principal constituant le solveur de contact se greffe différents modules qui, à l'heure actuelle, permettent de traiter les phénomènes d'impact, d'hétérogénéités, et d'usure. Une majorité des développements apportés par ces travaux de thèse concerne le module d'hétérogénéités et sera explicitée à partir du Chapitre III.

Le système doit tout d'abord être initialisé. Les géométries des deux corps en contact ainsi que les propriétés matériaux associées sont définies. Seul un des corps en contact peut être considéré élasto-plastique mais cette restriction pourrait être étendue aux deux corps sans grandes difficultés. Des déformations ou contraintes initiales peuvent être considérées comme données d'entrée. Les déformations peuvent être des déformations plastiques initiales provenant d'une étape de chargement précédente. Ces déformations peuvent également traduire des déformations plastiques initialement présentes dans une inclusion hétérogène en sous-couche. Les contraintes initiales, notées σ^{init} peuvent provenir des transformations de phase dans le matériau ou encore des traitements de surface. Enfin, le trajet de chargement doit être défini : efforts de contact ou déplacements de corps rigide, la zone de roulement et son chargement dans le cas d'une charge roulante, ou encore la vitesse initiale dans le cas de simulation d'impact.

La prochaine étape consiste à résoudre le problème de contact piloté en effort ou en déplacement. La méthode du gradient conjugué (CGM) est utilisée pour résoudre le problème de contact. Si l'on considère les effets tangentiels, le problème de contact normal et tangentiel sont résolus alternativement, l'autre étant maintenu constant, jusqu'à convergence des deux problèmes [Gal07a]. A cette étape, les pressions de contact ainsi que les déplacements et les cisaillements imposés en surface sont connus.

A partir des champs de pression et de cisaillement déterminés précédemment, les contraintes élastiques dans le volume sont calculées à partir de solutions analytiques élémentaires, obtenues en résolvant le problème de Neumann. Toutes ces solutions analytiques, valides dans un espace semi-infini élastique homogène et isotrope, sont regroupées dans le livre de Johnson [Joh85]. Les contraintes élastiques initiales σ^{init} générées par les déformations inélastiques provenant d'inclusions hétérogènes ainsi que les contraintes résiduelles σ^{res} sont tout simplement ajoutées aux contraintes élastiques σ^e afin d'obtenir la contrainte totale.

$$\sigma^{tot}(x) = \sigma^e(x) + \sigma^{res}(x) + \sigma^{init}(x) \quad (\text{II.1})$$

Ceci est valable sous hypothèse de petites déformations, généralement valide en EF pour des déformations n'excédant pas 10%. La contrainte totale est alors utilisée comme entrée pour l'algorithme de Retour Radial « return-mapping ». L'incrément

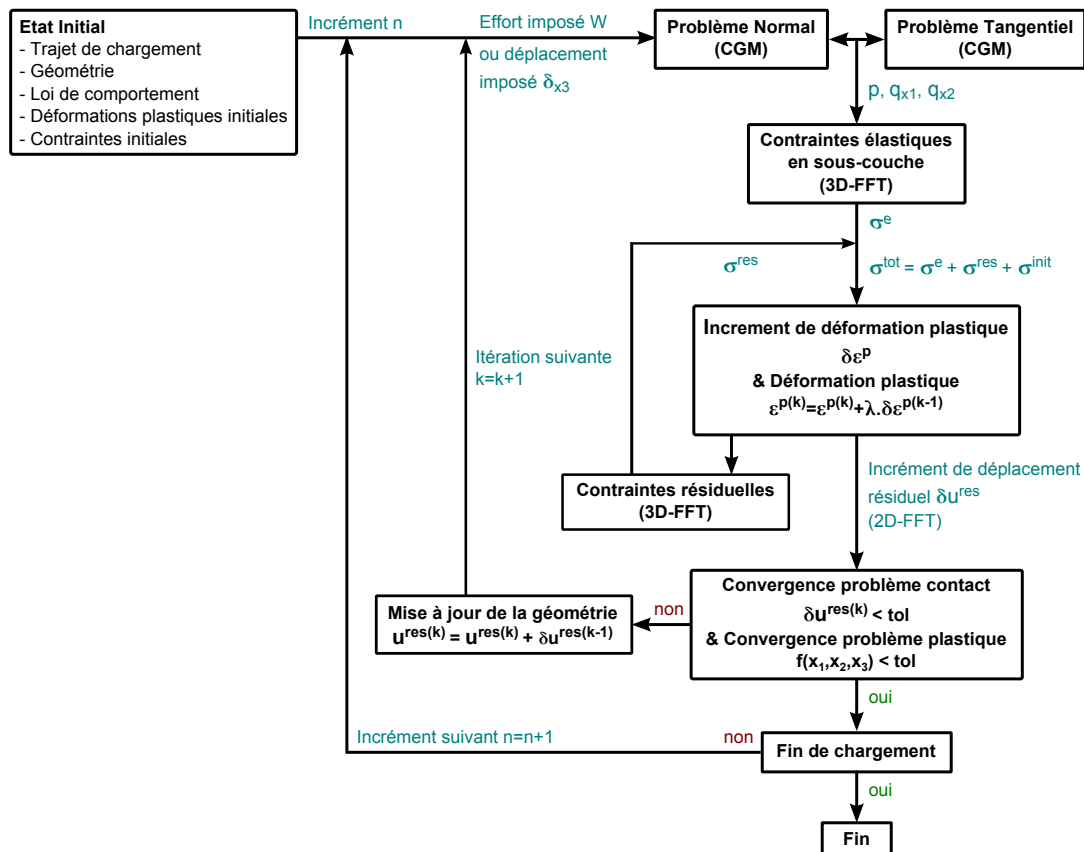


FIGURE II.1 – Algorithme général du modèle de contact semi-analytique élastoplastique

de déformation plastique est déterminé en chaque point du volume. Les nouvelles contraintes résiduelles ainsi que les incréments de déplacements résiduels en surface sont alors calculés à partir des incréments de déformations plastiques. La convergence du problème plastique et des déplacements résiduels assurent la convergence du problème de contact. Dans le cas d'une convergence du problème, on passe à l'étape de chargement suivante. Dans le cas contraire, la géométrie de la surface de contact est actualisée par la prise en compte des déplacements résiduels, le problème de contact est alors de nouveau résolu ainsi que les contraintes et déplacements résiduels.

Trois quantités mécaniques nécessitent une lourde résolution numérique : les déplacements en surface, les contraintes et les déformations en volume.

Déformations plastiques

Comme expliqué précédemment, les déformations plastiques sont résolues pour chaque élément de discrétisation en utilisant l'algorithme de « *return-mapping* ».

Déplacements en surface

Les déplacements élastiques en surface sont calculés à partir des pressions et des cisaillements en surface. Les déplacements résiduels sont calculés à partir des déformations plastiques.

Contraintes en volume

Les contraintes élastiques en volume sont calculées à partir des pressions et des cisaillements en surface. Les contraintes résiduelles en volume sont calculées à partir des déformations plastiques.

Ces relations liant ces quantités à la source élémentaire associée sont appelées « coefficients d'influence » et sont déterminées analytiquement. Les méthodes de transformées de Fourier discrètes (DC-FFT) sont alors appliquées pour le calcul de ces différentes quantités afin de réduire l'espace mémoire ainsi que les temps de calcul.

3 Méthode DC-FFT

3.1 Principe

Le but est de résoudre le problème de Neumann : déterminer l'état élastique (contraintes et déformations) de ce demi-espace sous l'action de contraintes normales $p(x_1, x_2)$ et tangentielles $q_1(x_1, x_2)$ et $q_2(x_1, x_2)$ appliquées sur une surface fermée S proche de l'origine. Les conditions aux limites en terme de déplacement, appliquées à l'infini sur un demi-espace élastique homogène isotrope, sont nulles. La théorie des potentiels a été utilisée par Boussinesq [Bou85] pour déterminer les champs de contraintes et déformations de ce demi-espace élastique. Cette approche a été reprise par Love [Lov20] et résumée par Johnson [Joh85] dans le cas d'une surface rectangulaire discrétisée soumise à un chargement normal et tangentiel. Ces solutions élémentaires sont tirées des fonctions de Green encore appelées coefficients d'influence.

Pour pouvoir effectuer une résolution numérique du problème de contact, une discrétisation du problème est nécessaire. La surface est définie par une grille de points de taille $N_p = N_1 \times N_2$, chaque point étant espacé d'une distance Δ_1 en x_1 et Δ_2 en x_2 . L'utilisation de la transformée de Fourier discrète va par la suite obliger à garder ce pas constant. Chaque point représente une zone rectangulaire sur laquelle sont appliqués des champs de pression p et cisaillement q_1 et q_2 constants. Les coordonnées des points sont définies par les coordonnées x_i, x_j ou (i, j) . La discrétisation en profondeur x_3 est ajoutée pour la détermination des contraintes en volume.

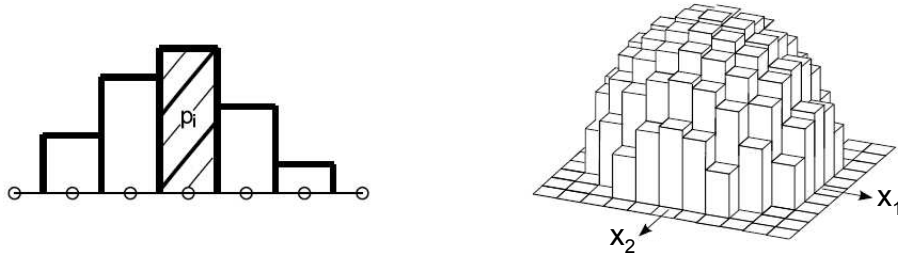


FIGURE II.2 – Chargement discrétisé uniformément en N_p surfaces rectangulaires élémentaires

La théorie de l'élasticité linéaire autorise la superposition de chaque solution élémentaire. Ainsi les déplacements élastiques en surface sont obtenus à partir d'une double sommation :

$$u_1(i, j) = \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_1}^p(i - j, k - l) p(k, l) + \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_1}^{q_1}(i - j, k - l) q_1(k, l) \quad (\text{II.2})$$

$$+ \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_1}^{q_2}(i - j, k - l) q_2(k, l)$$

$$u_2(i, j) = \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_2}^p(i - j, k - l) p(k, l) + \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_2}^{q_1}(i - j, k - l) q_1(k, l) \quad (\text{II.3})$$

$$+ \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_2}^{q_2}(i - j, k - l) q_2(k, l)$$

$$u_3(i, j) = \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_3}^p(i - j, k - l) p(k, l) + \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_3}^{q_1}(i - j, k - l) q_1(k, l) \quad (\text{II.4})$$

$$+ \sum_{k=1, N_1} \sum_{l=1, N_2} K_{x_3}^{q_2}(i - j, k - l) q_2(k, l) \quad (\text{II.5})$$

Où les matrices K représentent les coefficients d'influence, fonctions des propriétés matériaux des deux massifs en contact et de la distance relative entre le point de calcul du déplacement et le point source du chargement. Ces formulations font apparaître un couplage entre le problème normal et tangentiel, fonction des différences de propriétés matériaux et des asymétries géométriques des massifs en contact.

Les déplacements en surface et les contraintes en volume sont alors exprimés par des produits de convolutions discrètes entre les coefficients d'influence et la

source surfacique ou volumique. L'écriture peut se faire sous forme matricielle ou indicielle avec des doubles sommations (pour les déplacements en surface) et triple sommation (pour les contraintes en volume). La taille de la matrice peut être très importante. Si la taille de la zone de calcul est N , le nombre d'opérations nécessaires à une seule des doubles sommations est $O(N^2)$. Les temps de calculs peuvent donc devenir considérables. Il convient alors d'utiliser les techniques d'accélération. Une méthode, initiée par Ju et Farris [Ju96], est l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT). Cet algorithme permet d'effectuer la transformée de Fourier (FT) en $O(N \log N)$ au lieu de $O(N^2)$ opérations. De la même façon, la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) permet d'effectuer la transformée de Fourier inverse (IFT) en $O(N \log N)$ au lieu de $O(N^2)$ opérations. Il est donc intéressant d'utiliser le théorème de convolution pour effectuer une convolution dans le domaine fréquentiel qui coûte $O(N)$ opérations au lieu de $O(N^2)$ dans le domaine initial (temporel ou spatial). Au final il aura fallu $O(N + 3N \log N)$ opérations au lieu de $O(N^2)$ ce qui devient très avantageux pour un N important.

Lors de l'introduction de cette méthode dans les calculs de contact, une erreur a été constatée dans le résultat si la taille de la zone de calcul n'est pas au moins égale à cinq fois la taille de la zone de contact [Ju96] voir huit [Pol00]. Plus récemment, Liu et al. [Liu00] décrit précisément l'origine des erreurs constatées précédemment. Pour les problèmes de contact, les fonctions à convoluer ne sont pas périodiques. Ce dernier met alors au point une méthodologie appropriée basé sur l'emploi des DC-FFT (Discrete Convolution and Fast Fourier Transform) et ne nécessitant qu'une extension par deux de la zone de calcul. Cette méthode fait appel aux techniques de « zero-padding » et de « wrap-around order ».

Zero-padding [Pre92]

Cette technique consiste à étendre la taille des deux échantillons (sources et coefficients d'influence définis de 0 à $N - 1$) de N à $2N + 1$ à l'aide de zéros.

Wrap-around order

Le zero-padding n'est pas étendu aux coefficients d'influence. Les coefficients d'influence sont calculés de 0 à $N - 1$, le coefficient d'indice N est mis égal à zéro, les coefficients de $N + 1$ à $2N - 1$ sont obtenus à partir des coefficients 1 à $N - 1$ mais rangés dans le sens inverse, un signe négatif est éventuellement ajouté à ces derniers suivant la parité de la fonction des coefficients d'influence.

La réponse fréquentielle étant obtenue, une transformée de Fourier inverse est effectuée pour obtenir le résultat dans le domaine spatial avec une minimisation de l'erreur. Plus de détails peuvent être trouvés dans les travaux de Liu [Liu00] et Gallego [Gal07a].

3.2 Algorithme 2D-FFT

La transformée de Fourier bidimensionnelle (2D-FFT) consiste à utiliser une transformée de Fourier suivant une première direction, suivie d'une deuxième suivant l'autre direction. L'ordre d'application n'a aucune influence sur le résultat final. Aujourd'hui, cet algorithme est utilisé uniquement dans le cas où une source surfa-

cique agit sur une image surfacique. Cependant, cette méthode peut être étendue au problème tridimensionnel en calculant plan par plan. Tous les cas de figures pouvant faire appel à cette méthode sont énumérés ci-dessous.

Image surfacique fonction d'une source surfacique :

Cette catégorie correspond aux déplacements élastiques en surface causés par les champs de pression et de cisaillements.

Image volumique fonction d'une source surfacique :

Cette catégorie correspond aux contraintes élastiques localisées en profondeur causées par les pressions de contact et les cisaillements. Pour obtenir les contraintes en tout point du volume, l'algorithme de 2D-FFT sera exécuté N_3 fois, avec N_3 le nombre d'éléments en profondeur.

Image surfacique fonction d'une source volumique :

Cette catégorie correspond aux déplacements résiduels en surface causés par les déformations plastiques en sous-couche. Dans ce cas, les coefficients d'influence doivent être définis pour un demi-espace infini [Chi78]. L'algorithme 2D-FFT sera alors exécuté pour chaque profondeur N_3 de la source volumique.

Image volumique fonction d'une source volumique :

Cette catégorie correspond aux contraintes résiduelles introduites par les déformations plastiques. Chaque domaine source est examiné pour chaque profondeur N_3^{source} , la 2D-FFT est exécuté pour chaque profondeur image N_3^{image} . Cette technique devient alors gourmande en temps de calcul vu que l'on examine $N_3^{source} \times N_3^{image}$ fois le domaine volumique (si on suppose $N_{1,2}^{source} = N_{1,2}^{image}$). Mais cet effet est secondaire devant l'espace mémoire nécessaire à la sauvegarde des coefficients d'influence. Une alternative serait d'effectuer une série de Lecture/Écriture de fichiers, mais cette méthode est encore trop lourde vu les grandes dimensions des matrices à stocker, à lire et à manipuler. L'alternative majeure reste l'utilisation d'un algorithme 3D-FFT.

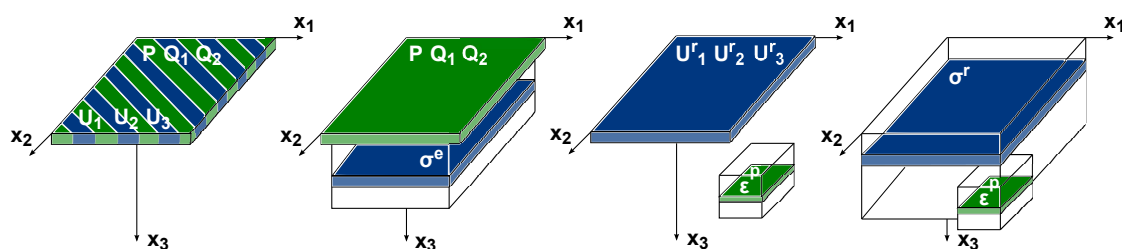


FIGURE II.3 – Différentes utilisations de la 2D-FFT. Les sources sont en vert. Les images sont en bleu.

La méthode 2D-FFT réduit le nombre d'opérations de N^4 à $2N \log(2N)$. La convolution dans le domaine fréquentiel requiert encore $2N$ itérations. Avec la transformée de Fourier inverse $2N + 6N \log(2N)$ opérations sont requises au total pour la double sommation.

3.3 Algorithme 3D-FFT

La transformée de Fourier tridimensionnelle (3D-FFT) consiste à utiliser la transformée de Fourier rapide suivant les trois directions x_1, x_2, x_3 . Cet algorithme est principalement utilisé dans le cas d'une source volumique et d'une image volumique car le gain en temps de calcul est conséquent dans ce cas de figure, comparé à la méthode 2D-FFT.

Le premier avantage de cette méthode est une réduction prononcée des temps de calcul comparé à ceux obtenus pour une 2D-FFT. Le domaine d'étude D étant d'abord multiplié par 2 suivant les 3 directions soit $2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3$ opérations pour obtenir un produit de convolution cyclique, la transformée de Fourier discrète requière alors $O(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3 \times \log(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3))$ opérations [Pre92]. La transformée de Fourier inverse requière le même nombre d'opérations. Étant donné que la 3D-FFT exécute 3 transformées directes, le nombre d'opérations nécessaires est $O(3 \times 2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3 \times \log(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3))$.

Le second avantage de cette méthode reste la réduction de la taille mémoire des tenseurs de coefficients d'influence. Dans le cas de la 2D-FFT, la matrice des coefficients d'influence pour une source donnée est de taille $N_1 \times N_2 \times N_3^2$. A l'inverse, dans le cas de la 3D-FFT, la matrice des coefficients d'influence pour une source donnée a une taille de $N_1 \times N_2 \times 2N_3$. Cela génère un gain considérable en temps de calcul des coefficients, et surtout en écriture/lecture/manipulation des données.

4 Résolution du contact

4.1 Principe

La procédure de résolution du contact est divisée en deux étapes : le contact normal et le contact tangentiel. Lorsque les matériaux des massifs en contact sont différents, les résolutions du problème normal et du problème tangentiel doivent être couplées du fait des interactions introduites par les cisaillements et les pressions de contact. Un bref résumé de leurs résolutions est présenté ici.

Soit deux corps élastiques 1 et 2 définis par leurs surfaces non-déformées dans le repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$. Le plan Ox_1x_2 est disposé de façon à séparer au mieux ces deux corps. Les surfaces sont initialement définies par leur séparation normale au plan tangent, $h_1(x_1, x_2)$ et $h_2(x_1, x_2)$. Une géométrie équivalente est définie à partir la distance relative entre les deux corps, $h(x_1, x_2) = h_1(x_1, x_2) - h_2(x_1, x_2)$. Le problème de contact peut être piloté en effort ou en déplacement de corps rigide.

Problème normal

Il s'agit ici de résoudre simultanément l'unique solution d'un système d'équations et d'inéquations qui vérifient les conditions aux limites à l'interface de contact. Pour un problème piloté en effort, l'effort normal W est connu. Le domaine d'étude Γ_p

doit être plus grand que la zone réelle de contact Γ_c , pour l'instant inconnue.

$$p(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_c \quad (\text{II.6})$$

$$h(x_1, x_2) + u_3^{tot}(x_1, x_2) - \delta_3 = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_c \quad (\text{II.7})$$

$$p(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \ni \Gamma_c \quad (\text{II.8})$$

$$h(x_1, x_2) + u_3^{tot}(x_1, x_2) - \delta_3 > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \ni \Gamma_c \quad (\text{II.9})$$

$$\sum_{\Gamma_p} p(x_1, x_2) \cdot S = W \quad (\text{II.10})$$

Où $u_3^{tot}(x_1, x_2)$ représente le déplacement total des deux corps au point (i, j) de la surface de contact comprenant l'effet de la pression, des cisaillements et des déformations inélastiques.

Problème tangentiel

Lorsque les déplacements tangentiels u_τ sont non nuls (une des composantes u_1 et u_2), le problème tangentiel doit être résolu. Le système d'équations et d'inéquations à résoudre traduit ici les conditions de contact en stick-slip. Le chargement tangentiel Q_τ est connu ainsi que le domaine de contact Γ_c à partir de la résolution du problème normal. Les cisaillements sont exprimés à partir d'une loi de Coulomb.

$$q_\tau(x_1, x_2) = -\mu \cdot p(x_1, x_2) \cdot \frac{\Delta s_\tau(x_1, x_2)}{\|\Delta s_\tau(x_1, x_2)\|} \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl} \quad (\text{II.11})$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2) - \Delta \delta_\tau = \Delta s_\tau(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl} \quad (\text{II.12})$$

$$\|q_\tau(x_1, x_2)\| < \mu \cdot p(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st} \quad (\text{II.13})$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2) - \Delta \delta_\tau = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st} \quad (\text{II.14})$$

$$\sum_{\Gamma_p} q(x_1, x_2) S = Q_\tau \quad (\text{II.15})$$

$$\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st} = \Gamma_c \quad (\text{II.16})$$

Où le domaine Γ_{st} définit la zone en adhérence (« stick ») et Γ_{sl} la zone annulaire de glissement (« slip »). La variable q_τ est une composante du champ de cisaillements q , q_1 ou q_2 , δ_τ une des composantes tangentielles du déplacement de corps rigide, δ_1 ou δ_2 , s_τ une des composantes du glissement, s_1 ou s_2 . Les déplacements en surface u_τ^{tot} sont la résultante des déplacements élastiques générés par le champ de cisaillement et de pression, et des déplacements résiduels générés par des déformations inélastiques en volume.

Optimisation sous contrainte

Une unique solution du problème de contact peut être trouvée en minimisant l'énergie complémentaire (énergie de déformation élastique exprimée en fonction des contraintes), sous contraintes de respecter la positivité des pressions et la loi de Coulomb en terme de limite de cisaillement. L'énergie complémentaire est divisée en deux parties pour le chargement normal et tangentiel. La contribution normale sur l'énergie complémentaire est $V_N = \frac{1}{2}p \cdot A \cdot p + (h - \delta_3) \cdot p$ et la contribution

tangentielle est $V_\tau = \frac{1}{2}q_\tau \cdot B \cdot q_\tau - \delta_\tau \cdot q_\tau$, où les matrices A et B sont dérivées des coefficients d'influence : $u_{x_3} = A \cdot p$ et $\Delta u_\tau = B \cdot \Delta q_\tau$, respectivement. Ces deux problèmes sont des problèmes de minimisation de formes quadratiques convexes. De par les propriétés des coefficients d'influence les matrices sont symétriques. Pour pouvoir résoudre ce type de problème il est nécessaire de s'intéresser aux problèmes d'optimisation avec contraintes. Une méthode de gradient conjugué (CGM) [Pol99] est utilisée pour résoudre ces deux problèmes. Les techniques de DC-FFT sont utilisées pour accélérer les produits de convolutions discrètes. Deux approches itératives seront ainsi utilisées pour résoudre le problème de contact : couplage entre problème normal et tangentiel, et la CGM.

4.2 Couplage du problème normal et tangentiel

Une première approche itérative est utilisée pour résoudre le problème de contact. Le problème normal et tangentiel sont résolus l'un après l'autre :

1. Le problème normal est résolu sans prise en compte des cisaillements à la surface. L'aire de contact Γ_c et le champ de pression p sont trouvés.
2. Le problème tangentiel est résolu en considérant le champ de pression p déterminé précédemment. Les cisaillements en surface q_1 et q_2 , les glissements s_1 et s_2 ainsi que la zone de glissement Γ_{sl} et d'adhérence Γ_{st} sont déterminés.
3. Si les cisaillements sont non-nuls, le problème normal est de nouveau résolu en considérant les cisaillements en surface q_1 et q_2 .

Cette boucle itérative est réalisée jusqu'à convergence des deux solutions (processus de Panagiotopoulos [Pan75]). Pour rappel, ce couplage entre le problème normal et le problème tangentiel est nécessaire dès lors que les propriétés élastiques des deux matériaux en contact sont différentes.

$$u_c(i, j) = u_c^p(i, j) + u_c^{q_1}(i, j) + u_c^{q_2}(i, j) \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} K_c^p(i-k, j-l) p(k, l) + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} K_c^{q_1}(i-k, j-l) q_1(k, l) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} K_c^{q_2}(i-k, j-l) q_2(k, l) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Pour résumer, on définira un couplage d'ordre 2 lorsque, par exemple, l'effort normal induit des efforts tangentiels en mode II de Fretting (indentateur sphérique). Des solutions analytiques pour ce cas de figure peuvent se trouver dans la littérature [Spe75].

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^p + u_1^{q_1} + u_1^{q_2} \\ u_2 &= u_2^p + u_2^{q_2} + u_2^{q_2} \\ u_3 &= u_3^p + u_3^{q_1} + u_3^{q_2} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Un couplage partiel d'ordre 1 est suffisant si seules les directions tangentielles dépendent l'une de l'autre. Par exemple, pour le mode III de fretting (sphère en rotation sur un plan), l'effort normal n'a aucune influence sur les cisaillements tangentiels circonférentiels. Des formulations analytiques de ce mode peuvent être trouvées dans

Johnson [Joh85] et [Dim05]. La méthode de Panagiotopoulos n'est donc pas employée ici, réduisant ainsi les temps de calcul.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{q1} + u_1^{q2} \\ u_2 &= u_2^{q1} + u_2^{q2} \\ u_3 &= u_3^p \end{aligned} \tag{II.20}$$

Un couplage d'ordre 0 correspond au découplage complet des problèmes. Le mode I de fretting peut être simplifié en considérant que les cisaillements suivant l'axe x_1 dépendent uniquement des déplacements/efforts tangentiels suivant l'axe x_1 . Cette hypothèse est admise notamment par le concept de Cattaneo-Mindlin [Cat38, Min49] et de Johnson [Joh85]. Dans ce cas, le process de Panagiotopoulos n'est pas utilisé et la direction de glissement est connue initialement.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{q1} \\ u_2 &= u_2^{q2} \\ u_3 &= u_3^p \end{aligned} \tag{II.21}$$

4.3 Algorithme du gradient conjugué (CGM)

L'algorithme du gradient conjugué va être particulièrement utilisé dans ce travail pour résoudre les problèmes de contact mais aussi le problème d'hétérogénéité. Cette méthode a initialement été proposée par Hestenes et Stiefel [Hes80]. C'est une méthode itérative pour résoudre les problèmes linéaires

$$Ax = b \tag{II.22}$$

Où A est une matrice carrée symétrique et définie positive. Ce problème est équivalent à la minimisation de la forme quadratique

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \tag{II.23}$$

Le gradient conjugué peut donc être interprété comme un algorithme pour résoudre les systèmes linéaires, ou une technique de minimisation des formes quadratiques convexes. Le gradient de ϕ est le résidu du système linéaire,

$$\nabla\phi(x) = Ax - b \equiv r(x) \tag{II.24}$$

Cette méthode est itérative. La solution est obtenue à partir des vecteurs direction de descente p_k ,

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \tag{II.25}$$

Le gradient conjugué s'avère performant en temps de calcul, notamment pour résoudre de grands systèmes linéaires. L'autre avantage du gradient conjugué est le gain en mémoire par rapport à certaines méthodes. A chaque itération, la direction conjuguée p_k est obtenue uniquement à partir de l'itération p_{k-1} . Le stockage des itérations précédentes n'est pas nécessaire. Techniquement, une combinaison linéaire entre la direction précédente p_{k-1} et la direction de descente la plus directe, $-\nabla\phi(x_k)$ (soit $-r_k$) définit la nouvelle direction de descente

$$p_k = -r_k + \beta_k p_{k-1} \tag{II.26}$$

Où β_k est choisi de façon à vérifier la propriété de conjugaison, $p_{k-1}^T A p_k = 0$. Finalement, l'algorithme est le suivant :

Choix d'une valeur initiale x_0 ;

Initialisation des variables : $r_0 \leftarrow Ax_0, p_0 \leftarrow -r_0, k \leftarrow 0$;

while $r_k \neq 0$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}; \quad (\text{II.27})$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_{k+1} + \alpha_k p_k; \quad (\text{II.28})$$

$$r_{k+1} \leftarrow r_{k+1} + \alpha_k A p_k; \quad (\text{II.29})$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}; \quad (\text{II.30})$$

$$p_{k+1} \leftarrow -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k; \quad (\text{II.31})$$

$$k \leftarrow k + 1; \quad (\text{II.32})$$

end while

Initialement cette méthode a été développée pour résoudre des problèmes sans contrainte. Cependant elle est utilisable dans le cadre des problèmes d'optimisation avec contraintes [Hes80],

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \text{ avec } \begin{cases} c_i(x) = 0 & i \in E, \\ c_i(x) \geq 0 & i \in I. \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

5 Bilan

Un code de contact élastoplastique a été développé dans le cadre des hypothèses classiquement utilisées en mécanique des contacts. La méthode de gradient conjugué est adapté à la résolution avec couplage du problème normal et tangentiel. L'algorithme d'optimisation sous contrainte cherche à minimiser l'énergie complémentaire. Les temps de calculs, générés pour la résolution des produits de convolution liant les contraintes en surface et les coefficients d'influence, sont minimisés grâce à l'utilisation d'algorithmes de transformées de Fourier discrètes (DC-FFT). Cette méthode actuelle se prête particulièrement à l'étude des modes de fretting I, II, et III pour des matériaux homogènes élastoplastiques. Si l'on veut appliquer cette méthode à l'étude du phénomène de fretting sur matériaux composites complexes, on doit disposer de formulations analytiques élémentaires valides en espace semi-infini ainsi que d'un algorithme de résolution qui permet de traduire l'hétérogénéité du matériau. La modélisation de la plasticité ne fera pas l'objet d'études particulières ici. Les matériaux d'applications visés dans ce cadre d'étude sont uniquement élastiques endommageables.

Chapitre III

Hétérogénéités

Un matériau composite est par définition un matériau hétérogène. Dans ce chapitre on s'intéresse aux développements analytiques et numériques apportés au module d'hétérogénéité du modèle semi-analytique. Ce modèle propose en données d'entrée des matériaux élastiques hétérogènes constitués d'inclusions sphériques. Cependant, ce modèle atteint très vite ces limites lorsqu'il faut traiter des milliers d'inclusions hétérogènes proches de la surface de contact ou lorsque les propriétés matériaux sont très disparates. La méthode de résolution a donc été refondée, de nombreuses formulations analytiques ont été apportées, un schéma de validation est proposé, dans l'objectif d'être en mesure de modéliser un matériau composite tissé.

Sommaire

1	Introduction	58
2	Méthode de l'inclusion équivalente	60
2.1	Théorie d'Eshelby	60
2.2	Méthode de résolution	62
3	Solution en demi-espace par décomposition	65
3.1	Formulations en espace infini	65
3.2	Décomposition en sous-problèmes	71
3.3	Déplacements générés en surface	74
3.4	Validations de solutions élémentaires	75
4	Solution en demi-espace par Galerkin	80
4.1	Théorie	80
4.2	Adaptation numérique	86
4.3	Validations	87
5	Prise en compte des influences mutuelles	89
5.1	Algorithme numérique	89
5.2	Application sur matériaux revêtus	90
6	Prise en compte des gradients de contraintes	92
6.1	Par approximation polynomiale	92
6.2	Par méthode de voxelisation	104
7	Bilan	111

1 Introduction

La durée de vie des pièces mécaniques en contact est fortement affectée par la présence d'hétérogénéités dans le matériau, comme des renforts (fibres, particules), des précipités, des porosités, ou encore des fissures. Des hétérogénéités dures et de formes complexes peuvent créer des surcontraintes locales, initiatrices de fissures par fatigue proche de la surface de contact [Nel99, Vos85]. La présence d'hétérogénéités influence grandement les propriétés physiques et mécaniques du matériau à l'échelle locale et globale [Mur94]. Une analyse quantitative des surcontraintes créées par les hétérogénéités est nécessaire à la compréhension des mécanismes d'endommagement.

Les hétérogénéités peuvent altérer aussi bien le comportement du matériau à l'échelle macroscopique que le champ de contraintes dans son voisinage dû à des déformations d'incompatibilité entre les hétérogénéités et le matériau environnant (la matrice). Eshelby [Esh57, Esh59, Esh06] a étudié les variations de contraintes engendrées par des hétérogénéités ellipsoïdales dans un massif infini. Cette résolution utilise la méthode de l'inclusion équivalente (EIM) consistant à assimiler une hétérogénéité à une inclusion contenant des déformations d'incompatibilité équivalentes et ayant les mêmes propriétés matériaux que celles de la matrice. Ces déformations d'incompatibilité, encore appelées « eigenstrains », peuvent être présentes sous forme de déformations inélastiques dans une inclusion. Ces déformations inélastiques peuvent être issues de transformations de phases, de déformations plastiques et/ou thermiques. Par définition [Mur87], de telles hétérogénéités sont encore appelées inclusions hétérogènes. Du fait de la qualité et la précision des résultats obtenus, la méthode EIM fut intensivement étudiée et développée. Cependant, la plupart des développements appliqués aux problèmes d'hétérogénéités sont truffés d'hypothèses généralement incompatibles pour l'étude des contacts tridimensionnelles. Ces différentes hypothèses sont résumées ci-dessous.

La plupart des études se focalisent sur des hétérogénéités de géométries simples et régulières dans un massif élastique infini. De nombreuses solutions analytiques élémentaires sont obtenues pour des inclusions de formes simples (ellipsoïde [Esh57], cuboïdale [Chi77, Joh80], cylindrique [Wu95a, Wu95b]) dans une matrice infinie élastique isotrope. Très peu d'études traitent des hétérogénéités de formes arbitraires bidimensionnelles [Nak00] et encore moins d'hétérogénéités de formes arbitraires dans un massif semi-infini pour le cas tridimensionnel. Les travaux de Mura [Mur77, Seo79] et Chiu [Chi78] exposent les solutions analytiques pour des hétérogénéités de formes ellipsoïdales et cuboïdales dans un massif semi-infini élastique isotrope. Ces solutions, relativement complexes, considèrent une inclusion contenant des eigenstrains hydrostatiques ($\varepsilon_{kk} = 0$) équivalentes à des cubes de déformations plastiques. Une approche plus générale, sans a priori sur la nature des eigenstrains, consiste à décrire une inclusion de forme arbitraire en de multiples inclusions cuboïdales en se référant aux solutions de Chiu [Chi77] pour une matrice infinie élastique isotrope. Néanmoins discrétiser une forme tridimensionnelle arbitraire avec des cubes est beaucoup plus difficile qu'une discrétisation avec des éléments tétraédriques. De telles solutions [Rod96, Tay01, Gao11] pourraient améliorer la résolution numérique du problème hétérogène grâce à une représentation géométrique adaptée et précise.

Devoir modéliser un contact entre deux massifs élastiques nécessite de décrire le comportement des hétérogénéités dans un massif semi-infini avec des formulations analytiques pour un massif infini. Deux possibilités sont alors envisagées dans ces tra-

vaux. La première consiste à utiliser une méthode de décomposition du demi-espace en sous-espaces infinis, nécessitant une résolution numérique [Zho09]. Cette méthode fut initialement introduite et validée dans le code semi-analytique par Jacq [Jac02] puis reprise par Fulleringer [Ful11], et sera utilisée pour décrire le phénomène plastique [Cha11b]. La seconde est une méthode directe dite de Galerkin [Liu05, Liu12], initialement proposée par Mindlin and Cheng [Min50b], qui permet de déterminer analytiquement la solution du champ élastique causée par une eigenstrain dans un massif semi-infini élastique.

Du fait de la difficulté de traiter les interactions entre les inclusions hétérogènes, la plupart des études se concentre sur les interactions entre deux ou trois inclusions au maximum. Moschovidis et Mura [Mos75a] ont précisément étudié l'influence de deux hétérogénéités ellipsoïdales sans interpénétrations en approximant l'expression des eigenstrains équivalentes avec des séries de Taylor. Cette approche fut massivement explorée et adaptée pour différents cas d'applications restrictives [Fon01, Ben06]. Ces solutions deviennent très lourdes numériquement dès lors que l'on souhaite traiter des centaines voir des milliers d'hétérogénéités. On sera alors amené à mettre en place une méthode numérique basé sur les algorithmes de gradients conjugués afin de résoudre un système linéaire de milliers d'équations générées par les milliers d'inclusions en minimisant les itérations de convergence.

Le champ de contrainte généré par le chargement extérieur est dans la plupart des cas considéré uniforme. Cependant, dans le cadre de nos simulations de contact, de forts gradients apparaissent en sous-couche. Deux possibilités sont alors envisagées dans ces travaux. La première consiste à exploiter les développements analytiques de Moschovidis et Mura [Mos75a] en exprimant chacun des champs élastiques sous formes polynomiales. La seconde méthode envisagée consiste à discrétiser une hétérogénéité de forme arbitraire en de multiples cuboïdes élémentaires, de taille correspondante à la discrétisation numérique du problème. L'eigenstrain dans chacun des cuboïdes est considérée uniforme.

Généralement soit une déformation inélastique initiale soit un chargement extérieur est considéré mais très peu traitent de la combinaison des deux sources d'eigenstrains. Dans ce chapitre, la formulation des eigenstrains correspondra à la somme de ces deux sources.

La plupart du temps, les problèmes de contact avec présence d'hétérogénéités en sous-couche ne sont pas résolus explicitement et une distribution de contact de type Hertzienne est considérée à la place [Kab02b, Kab02a, Cou03]. Cependant, la pression de contact peut être fortement affectée par des hétérogénéités proche de la surface de contact [Kuo07, Kuo08, Mil83]. Un couplage entre la résolution du contact et la résolution des eigenstrains est entrepris en actualisant la géométrie de la surface de contact modifiée par les surcontraintes inclusionnaires.

Les travaux effectués et exposés dans ce chapitre, s'appuyant sur la technique EIM, tentent de s'affranchir de toutes ces simplifications afin d'obtenir une solution semi-analytique pour de multiples hétérogénéités de formes arbitraires et en interaction dans un massif semi-infini soumis à une sollicitation de fretting. Ce chapitre commence par introduire la théorie d'Eshelby nécessaire à la formalisation de la méthode de l'inclusion équivalente (EIM). Les deux méthodes permettant de considérer un massif semi-infini élastique isotrope seront décrites, validées et comparées. La méthode numérique permettant de prendre en compte les interactions

entre de multiples hétérogénéités sera ensuite formalisée et étudiée. Enfin, les deux méthodes utilisées pour la prise en compte des gradients de contraintes à l'intérieur des inclusions seront explicitées, étudiées, et comparées.

2 Méthode de l'inclusion équivalente

2.1 Théorie d'Eshelby

Dans la théorie d'Eshelby, deux types de problèmes sont exposés dans le but de faire la distinction entre une « inclusion » et une « hétérogénéité ». Tous deux font appel à la théorie de l'élasticité linéaire.

Problème de transformation

Une région « inclusion », de domaine Ω d'un milieu infini, homogène, isotrope, et élastique, peut engendrer des changements d'état (forme, taille,...) causés par une déformation uniforme arbitraire, encore appelée « eigenstrain », en l'absence d'un milieu environnant. Une inclusion a les mêmes propriétés matériaux que le milieu environnant.

Quel est le champ de déformation élastique dans la matrice et l'inclusion généré par la présence de celle-ci ?

On peut d'ores et déjà noter que la déformation induite n'est pas perturbée par le champ de déformation appliqué à l'infini. De nombreuses solutions analytiques ont été obtenues pour des formes géométriques simples (ellipsoïdale, cubique, cylindrique) d'une inclusion dans un massif infini isotrope. Ce problème est explicitement décrit et interprété par Mura [Mur87].

Problème d'hétérogénéité

Une hétérogénéité a des propriétés matériaux différentes du milieu environnant, encore appelé matrice. Par exemple, une cavité aura des constantes d'élasticité nulles.

Comment le champ de contraintes dans un milieu homogène et élastique est-il modifié par la présence d'hétérogénéités ?

Les hétérogénéités n'engendrent aucune déformation dans le matériau si aucun chargement n'est appliqué. A l'inverse, si la matrice est soumise à un champ de déformation uniforme à l'infini, les déformations induites non nulles seront alors différentes à l'intérieur et à l'extérieur de l'hétérogénéité.

Méthode de l'inclusion équivalente

Chaque inclusion hétérogène peut être simulée par une inclusion (homogène) contenant une eigenstrain initiale ε^p et une eigenstrain équivalente ε^* . Ainsi le problème de l'inclusion hétérogène (Problème A) est équivalent au problème de l'inclusion homogène (Problème B) représenté Figure III.1. L'eigenstrain équivalente

représente les différences de propriétés matériaux entre les hétérogénéités et la matrice, les interactions entre les hétérogénéités, et leurs réponses à un chargement extérieur ainsi qu'aux eigenstrains initiales ε^p qu'elles contiennent.

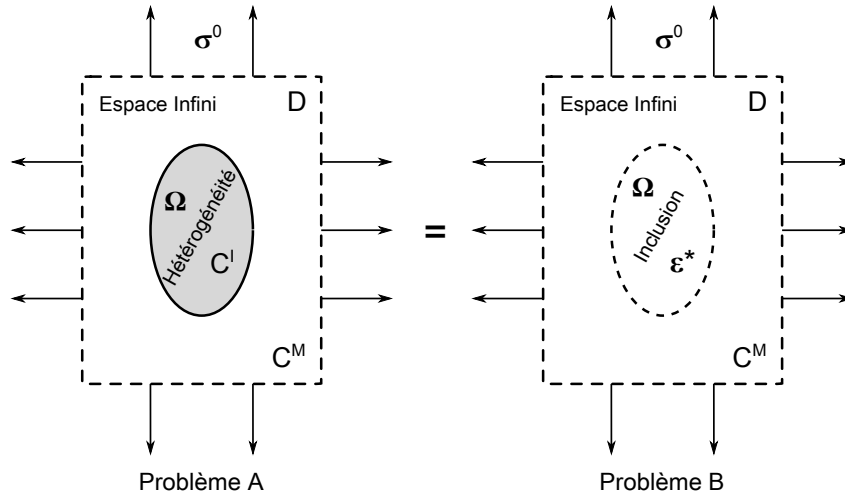


FIGURE III.1 – Méthode de l'inclusion équivalente

Dans le cas d'un problème d'hétérogénéité, la déformation totale ε induite en un point à l'intérieur de l'inclusion se décompose en deux parties : la déformation élastique ε^e et l'eigenstrain initiale ε^p . Ainsi, à partir de la loi de Hooke, l'équation suivante peut être établie en tout point à l'intérieur d'une hétérogénéité de tenseur matériau élastique C^I :

$$\sigma = C^I(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (\text{III.1})$$

Dans le cas du problème d'inclusion équivalente, la déformation élastique ε^e dans l'inclusion équivalente peut se décomposer comme $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p$. Ainsi, à partir de la loi de Hooke, le champ de contrainte à l'intérieur de l'inclusion peut s'exprimer comme :

$$\sigma = C^M(\varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p) \quad (\text{III.2})$$

Où C^M est le tenseur matériau élastique de la matrice.

En substituant l'équation (III.1) dans l'équation (III.2), on obtient l'équation d'équivalence suivante :

$$C^I(\varepsilon - \varepsilon^p) = C^M(\varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon^p) \quad (\text{III.3})$$

ou

$$\sigma = C^M(C^{I-1}\sigma - \varepsilon^*) \quad (\text{III.4})$$

Le champ de contrainte σ à l'intérieur de l'inclusion équivalente se décompose alors en trois parties :

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^p + \sigma^* \quad (\text{III.5})$$

Où σ^0 représente la contrainte appliquée causée par le chargement externe, σ^p la contrainte causée par l'eigenstrain initiale ε^p , et σ^* la contrainte causée par l'eigenstrain équivalente ε^* . En utilisant l'équation (III.5), on peut réécrire l'équation (III.4) telle que :

$$(C^I C^{M-1} - I^d)\sigma^* + C^I \varepsilon^* = (I^d - C^I C^{M-1})(\sigma^0 + \sigma^p) \quad (\text{III.6})$$

Où I^d est la matrice identité.

L'équation (III.6) est nécessaire et suffisante pour résoudre le problème d'inclusion hétérogène avec comme seule inconnue l'eigenstrain équivalente ε^* . Cependant, ce système ne peut être résolu tant que les relations liant la contrainte équivalente σ^* à l'eigenstrain équivalente ε^* ainsi que la contrainte initiale σ^p à l'eigenstrain initiale ε^p ne sont pas établies. Pour cela, une méthode numérique doit être mise en place dans le but de déterminer de telles relations et de résoudre le système d'équivalence (III.6).

2.2 Méthode de résolution

2.2.1 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme d'homogénéisation fait office de module au sein du modèle de contact semi-analytique. Les variables d'entrée sont les contraintes locales appliquées « à l'infini » σ_0 , les géométries d'inclusions, ainsi que les propriétés matériaux de la matrice et des hétérogénéités.

Ce module peut donc être utilisé extérieurement à la résolution du contact comme un outil de détermination des champs de déformation à l'échelle microscopique grâce à une discrétisation fine, notamment pour de petites hétérogénéités, un peu à la manière d'un zoom structural. Une fois ce module greffé à l'algorithme de contact, les contraintes calculées en sous-couche, à partir de la résolution du contact normal et tangentiel, sont utilisées localement à l'intérieur de chaque hétérogénéité afin de déterminer leurs eigenstrains respectives à partir de la méthode de l'inclusion équivalente. Les surcontraintes engendrées en sous-couche sont alors connues et ajoutées aux contraintes dues aux contacts, et éventuellement, aux contraintes résiduelles si le calcul est élasto-plastique.

Les conditions de contact seront alors modifiées par la présence des hétérogénéités. La géométrie de la surface de contact doit être actualisée par l'ajout d'« eigen-displacements ». De la même manière que pour la recherche de relations entre les surcontraintes élastiques et les eigenstrains, il sera nécessaire d'établir les relations entre les « eigen-displacements » et les eigenstrains. Après convergence de ces déplacements en surface, on actualise définitivement la géométrie de la surface de contact et la solution au problème de contact élastique homogénéisé est devenue équivalente au problème hétérogène.

La Figure III.2 montre l'algorithme global d'homogénéisation comportant trois modules généraux : la phase d'initialisation, la résolution du contact normal et tangentiel suivie du calcul des contraintes élastiques en volume, et le module d'homogénéisation par la méthode de l'inclusion équivalente. Le module d'homogénéisation comporte lui-même deux étapes globales de résolution : le calcul des eigenstrains et des surcontraintes élastiques, suivi des déplacements élastiques en surface. Une boucle itérative sur les « eigen-displacements » générés en surface permet de coupler l'étape d'homogénéisation avec la résolution du contact et d'actualiser la géométrie de la surface de contact.

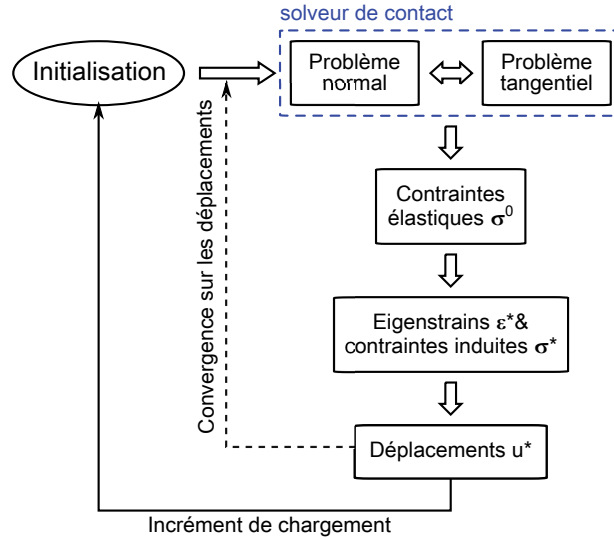


FIGURE III.2 – Algorithme général du code de contact semi-analytique pour matériaux élastiques hétérogènes.

2.2.2 Calculs des contraintes élastiques

La zone de résolution D contient n inclusions hétérogènes Ω_ψ ($\psi = 1, 2, \dots, n$). L'origine du repère cartésien ($Ox_1x_2x_3$) est située en un coin du domaine D (voir Figure). Cette zone de domaine D est discrétisée en $N_1 \times N_2 \times N_3$ éléments de même taille $2\Delta_1 \times 2\Delta_2 \times 2\Delta_3$, indexés d'une séquence de trois entiers $[\alpha, \beta, \gamma]$. Comme dans la section précédente, chaque inclusion hétérogène de région Ω_ψ ($\psi = 1, 2, \dots, n$) est aussi simulée avec une eigenstrain initiale et une eigenstrain équivalente. L'équation d'équivalence (III.6) doit ainsi être satisfaite pour chaque inclusion hétérogène, soit

$$(C_{\alpha,\beta,\gamma}^I C^{M-1} - I^d) \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^* + C_{\alpha,\beta,\gamma}^I \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma}^* = (I^d - C_{\alpha,\beta,\gamma}^I C^{M-1}) (\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^0 + \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^p),$$

$$(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \quad (\text{III.7})$$

Où $C_{\alpha,\beta,\gamma}^I$ est le tenseur matériau élastique de l'inclusion hétérogène $[\alpha, \beta, \gamma]$ centrée en $(x_1^\alpha, x_2^\beta, x_3^\gamma)$.

La contrainte élastique en un point d'observation $(x_1^\alpha, x_2^\beta, x_3^\gamma)$ de l'élément $[\alpha, \beta, \gamma]$ induite par chacune des inclusions hétérogènes centrées en $(x_1^\xi, x_2^\zeta, x_3^\varphi)$ de l'élément $[\xi, \zeta, \varphi]$ est obtenue en sommant l'ensemble des contributions de toutes les inclusions contenues dans le domaine d'étude D ,

$$\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^* = \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^*$$

$$(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \quad (\text{III.8})$$

Où $B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi}$ sont des coefficients d'influence dont les expressions analytiques seront détaillées dans les sections suivantes. Ils ne dépendent que de la géométrie de l'inclusion et des propriétés matériaux de la matrice. Les indices $\alpha - \xi, \beta - \zeta, \gamma - \varphi$ signifient que les coefficients d'influence dépendent de la distance relative entre les points $(x_1^\alpha, x_2^\beta, x_3^\gamma)$ et $(x_1^\xi, x_2^\zeta, x_3^\varphi)$ selon chacune des directions.

La triple somme fait intervenir un produit de convolution discret 3D résolu numériquement avec un algorithme de transformée de Fourier rapide (3D-FFT) permettant d'accélérer efficacement la sommation. Il est important de noter que le calcul est exécuté sur l'intégralité du domaine D même si les éléments de discrétisation ne contiennent pas tous des eigenstrains initiales et/ou équivalentes. De la même manière est obtenue la contrainte induite par les déformations plastiques initiales :

$$\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^p = \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^p \quad (0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \quad (\text{III.9})$$

Les équations III.8 et III.9 donnent la relation directe entre les contraintes et les eigenstrains pour résoudre l'équation d'équivalence III.6, devenant :

$$\begin{aligned} & \left(C_{\alpha,\beta,\gamma}^I C^{M-1} - I^d \right) \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^* + C_{\alpha,\beta,\gamma}^I \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma}^* \\ &= \left(I^d - C_{\alpha,\beta,\gamma}^I C^{M-1} \right) \left(\sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^p + \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^0 \right), \\ & (0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

L'équation III.10 devient l'équation générale nécessaire et suffisante pour résoudre le problème d'inclusions hétérogènes. Si le domaine d'étude D contient n hétérogénéités, il faut résoudre un système à $6n$ équations, $6n$ composantes d'eigenstrain inconnues du fait de la symétrie $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Avant de résoudre ce système d'équations équivalentes, il est nécessaire de calculer les triples sommes des équations III.8 et III.9 insérées dans l'équation III.10, de connaître les solutions analytiques des coefficients d'influence, et une méthodologie pour le résoudre efficacement.

2.2.3 Calculs des déplacements en surface

La résolution du contact est divisée en deux parties. Le problème normal détermine, à partir de nombreux paramètres d'entrées, la surface de contact et le champ de pression associé. L'équation de la séparation des surfaces, qui permet de définir la condition de contact, s'exprime de la manière suivante,

$$g(x_1, x_2) = u_3^p(x_1, x_2) + u_3^{q1}(x_1, x_2) + u_3^{q2}(x_1, x_2) + u_3^r(x_1, x_2) + u_3^*(x_1, x_2) + h(x_1, x_2) - \varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_1 - \delta_3 = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_c \quad (\text{III.11})$$

$$g(x_1, x_2) = u_3^p(x_1, x_2) + u_3^{q1}(x_1, x_2) + u_3^{q2}(x_1, x_2) + u_3^r(x_1, x_2) + u_3^*(x_1, x_2) + h(x_1, x_2) - \varphi_1 x_2 + \varphi_2 x_1 - \delta_3 > 0, (x_1, x_2) \notin \Gamma_c \quad (\text{III.12})$$

Où h représente la séparation initiale des corps, δ_3 le déplacement de corps rigide, Γ_c la zone de contact, φ_1 et φ_2 les angles de « roulement » autour de x_1 et de x_2 respectivement. Il est donc nécessaire de déterminer :

- Les déplacements normaux élastiques dus au champ de pression u_3^p .
- Les déplacements normaux créés par les cisaillements en surface u_3^{q1} et u_3^{q2} .

- Les déplacements normaux causés par les déformations plastiques u_3^r , supposées constantes lors de la résolution du contact normal.
- Les déplacements normaux dus à la présence d'hétérogénéités dans le massif u_3^* , supposés constants lors de la résolution du contact normal.

Le problème tangentiel détermine les cisaillements et les glissements en surface, ainsi que la zone de glissement. L'équation de zone collée Γ_{st} et de glissement Γ_{sl} peut s'écrire comme,

$$\left[u_{1,2}^p(x_1, x_2) + u_{1,2}^{q1}(x_1, x_2) + u_{1,2}^{q2}(x_1, x_2) + u_{1,2}^r(x_1, x_2) + u_{1,2}^*(x_1, x_2) \right]_{t'}^t - \Delta \delta_{1,2}^t = s_{1,2}^t = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_{st} \quad (\text{III.13})$$

$$\left[u_{1,2}^p(x_1, x_2) + u_{1,2}^{q1}(x_1, x_2) + u_{1,2}^{q2}(x_1, x_2) + u_{1,2}^r(x_1, x_2) + u_{1,2}^*(x_1, x_2) \right]_{t'}^t - \Delta \delta_{1,2}^t = s_{1,2}^t \neq 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl} \quad (\text{III.14})$$

Où $\Delta \delta^t$ représente la différence de déplacement de corps rigides entre deux instants. Les glissements dépendent des déplacements tangentiels entre deux itérations. Ils sont donc fortement dépendants de l'historique du trajet de chargement, et nécessite de connaître :

- Les déplacement tangentiels dus au champ de pression $u_{1,2}^p$.
- Les déplacements tangentiels créés par les cisaillements en surface $u_{1,2}^{q1}$ et $u_{1,2}^{q2}$.
- Les déplacements tangentiels causés par les déformations plastiques supposées constantes lors de la résolution du contact tangentiel $u_{1,2}^r$.
- Les déplacements tangentiels dus à la présence d'hétérogénéités dans le massif supposés constants lors de la résolution du contact tangentiel $u_{1,2}^*$.

3 Solution en demi-espace par décomposition

3.1 Formulations en espace infini

Le champ de déplacement induit « eigendisplacement » par une eigenstrain peut s'exprimer en terme de fonction de Green G_{ij} pour un massif infini. La fonction $G_{ij}(x, x')$ représente la $i^{\text{ième}}$ composante du déplacement en un point $x (x_1, x_2, x_3)$ induit par un effort unitaire appliqué en un point $x' (x'_1, x'_2, x'_3)$ dans la direction x_j . On peut montrer qu'une distribution de type eigenstrain est équivalente à une distribution d'effort telle que,

$$f_i^* = -C_{ijkl}^M \varepsilon_{kl,j}^* \quad (\text{III.15})$$

Le champ de déplacement induit par un effort s'écrit comme,

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(x, x') f_j^*(x') dx' \\ &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_{jlmn}^M \frac{\partial}{\partial x'_l} \varepsilon_{mn}^*(x') G_{ij}(x, x') dx' \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

On évalue l'intégrale III.16 sur un domaine contenu entre deux surface sphériques centrées en x , et de rayon R et r , $r < R$. On effectue alors une intégration par partie en faisant tendre $R \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} u_i(x) &= - \left[\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_r} + \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} \right] C_{jlmn}^M \varepsilon_{mn}^*(x') n'_l G_{ij}(x, x') dS_{x'} \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_{jlmn}^M \varepsilon_{mn}^*(x') \frac{\partial}{\partial x'_l} G_{ij}(x, x') dx' \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

où $dS_{x'}$ est un élément de surface sphérique de vecteur normal n'_l . Les intégrales surfaciques s'annulent puisque $\lim_{r \rightarrow 0} S_r = 0$ et $\lim_{|x-x'| \rightarrow \infty} G_{ij}(x, x') = 0$.

Considérant que $\frac{\partial}{\partial x_l} G_{ij}(x, x') = -\frac{\partial}{\partial x'_l} G_{ij}(x, x')$ et que $\varepsilon^* = 0$ en dehors de l'inclusion, on obtient

$$u_i(x) = - \iiint_{\Omega} C_{jlmn}^M \varepsilon_{mn}^*(x') G_{ij,l}(x, x') dx' \quad (\text{III.18})$$

L'équation correspondante pour le champ de contrainte élastique devient,

$$\sigma_{ij}(x) = -C_{ijkl}^M \left[\iiint_{\Omega} C_{pqmn}^M \varepsilon_{mn}^* G_{kp,ql}(x, x') dx' + \begin{cases} \varepsilon_{kl}^*(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases} \right] \quad (\text{III.19})$$

Ces résultats mathématiques, résumés ci-dessus, peuvent être trouvés dans les travaux de Love [Lov20]. On peut y trouver notamment les expressions des fonctions de Green,

$$G_{ij}(x, x') = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{|x-x'|} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |x-x'| \quad (\text{III.20})$$

Où λ et μ sont les coefficients de Lamé, ν le coefficient de Poisson du milieu infini, et la distance $|x-x'|^2 = (x_i - x'_i)(x_i - x'_i)$.

En insérant l'équation III.20 dans l'équation III.26, le champ de déplacement élastique s'exprime en fonction de potentielles harmoniques Φ et biharmoniques Ψ ,

$$u_i(x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [\Psi_{j,l,jli} - 2\nu\Psi_{mn,i} - 4(1-\nu)\Phi_{il,l}] \quad (\text{III.21})$$

Où,

$$\Psi_{ij}(x) = \iiint_{\Omega} |x-x'| \varepsilon_{ij}^*(x') dx' \quad (\text{III.22})$$

et

$$\Phi_{ij}(x) = \iiint_{\Omega} \frac{\varepsilon_{ij}^*(x')}{|x-x'|} dx' \quad (\text{III.23})$$

Ces fonctions potentielles possèdent les propriétés suivantes,

$$\Psi_{ij,kk} = 2\Phi_{ij} \quad (\text{III.24})$$

et

$$\Psi_{ij,kl} = 2\Phi_{ij,kl} = \begin{cases} 8\pi\varepsilon_{kl}^*(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Le champ de déformation induit s'écrit alors,

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [\Psi_{kl,kl} - 2\nu\phi_{kk,ij} - 2(1-\nu)(\Phi_{ik,kj} + \Phi_{jk,ki})] \quad (\text{III.26})$$

Dorénavant une hypothèse forte est faite. On considère des eigenstrains uniformes pour chaque inclusion de domaine Ω telles que $\varepsilon_{ij}^*(x) = e_{ij}^*$, d'où

$$\Phi_{ij}(x) = \phi(x) e_{ij}^* \quad (\text{III.27})$$

et

$$\Psi_{ij}(x) = \psi(x) e_{ij}^* \quad (\text{III.28})$$

où,

$$\psi(x) = \iiint_{\Omega} |x - x'| dx' \quad (\text{III.29})$$

et

$$\phi(x) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} dx' \quad (\text{III.30})$$

On peut alors simplifier l'expression du champ de déformation en utilisant la notion de coefficient d'influence D_{ijkl} ,

$$\varepsilon_{ij}(x) = D_{ijkl}(x) e_{kl}^* \quad (\text{III.31})$$

Où,

$$D_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ \psi_{,kl} - 2\nu\delta_{kl}\phi_{,ij} - (1-\nu)[\phi_{,kj}\delta_{il} + \phi_{,ki}\delta_{jl} + \phi_{,lj}\delta_{ik} + \phi_{,li}\delta_{jk}] \} \quad (\text{III.32})$$

Ces coefficients d'influence dépendent donc des propriétés matériaux de la matrice et de la géométrie des inclusions qui vont conditionner les fonctions potentielles. Pour certaines formes géométriques particulières, des solutions analytiques des fonctions potentielles peuvent être explicitement calculées.

Inclusion ellipsoïdale

Dans ce cas de figure géométrique, les fonctions potentielles sont explicitement formulées [Dys91, Fer77]. Eshelby fut un des premiers à montrer que les coefficients d'influence D_{ijkl} à l'intérieur de l'inclusion sont constants. Prenons une ellipsoïde de demi-axe a_1, a_2, a_3 suivant x_1, x_2 , et x_3 respectivement. Ces fonctions potentielles peuvent alors s'exprimer comme,

$$\phi = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U ds}{\Delta} \quad (\text{III.33})$$

$$\psi = \pi a_1 a_2 a_3 \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s^2 U^2}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \frac{U^2 s}{\Delta} \right] ds \quad (\text{III.34})$$

Où,

$$U(s) = 1 - \frac{x_i x_i}{a_i^2 + s} \quad (\text{III.35})$$

$$\Delta(s) = \sqrt{(a_1^2 + s) + (a_2^2 + s) + (a_3^2 + s)} \quad (\text{III.36})$$

La borne inférieure de l'intégrale λ est la plus grande racine de l'équation $U(\lambda) = 0$ pour les points extérieurs à l'inclusion et $\lambda = 0$ à l'intérieur. Si l'on pose les intégrales suivantes définies par,

$$I(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\Delta(s)} \quad (\text{III.37})$$

$$I_i(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a_i^2 + s) \Delta(s)} \quad (\text{III.38})$$

$$I_{ij}(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a_i^2 + s)(a_j^2 + s) \Delta(s)} \quad (\text{III.39})$$

Les fonctions potentielles s'écrivent alors,

$$\phi = V \quad (\text{III.40})$$

$$\psi_{,i} = x_i (V - a_i^2 V_i) \quad (\text{III.41})$$

Avec,

$$V(x) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{\Delta(s)} ds = \frac{1}{2} [I(\lambda) - x_r x_r I_r(\lambda)] \quad (\text{III.42})$$

$$V_i(x) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{(a_i^2 + s) \Delta(s)} ds = \frac{1}{2} [I_i(\lambda) - x_r x_r I_{ri}(\lambda)] \quad (\text{III.43})$$

Les intégrales I sont calculées pour différentes catégories d'ellipsoïdes,

– **Ellipsoïde triaxial** ($a_1 > a_2 > a_3$)

Dans ce cas les intégrales I, I_1, I_2 et I_3 sont exprimées en terme d'intégrales elliptiques du premier F et du second ordre E, définies comme :

$$F(\Theta, K) = \int_0^{\Theta} \frac{dw}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2(w)}} \quad \text{avec } 0 < K < 1 \quad (\text{III.44})$$

$$E(\Theta, K) = \int_0^{\Theta} \sqrt{1 - K^2 \sin^2(w)} dw \quad \text{avec } 0 < K < 1 \quad (\text{III.45})$$

Où,

$$0 < \Theta = \arcsin \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + \lambda}} < \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.46})$$

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}} < 1 \quad (\text{III.47})$$

$$w = \arcsin \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + s}} \quad (\text{III.48})$$

Dès lors les expressions des intégrales I deviennent [Gra00] :

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} F(\Theta, K) \quad (\text{III.49})$$

$$I_1(\lambda) = 4\pi a_1 a_2 a_3 \frac{F(\Theta, K) - E(\Theta, K)}{(a_1^2 - a_2^2) \sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \quad (\text{III.50})$$

$$I_2(\lambda) = 4\pi a_1 a_2 a_3 \left\{ \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)} E(\Theta, K) - \frac{F(\Theta, K)}{(a_1^2 - a_2^2) \sqrt{a_1^2 - a_3^2}} - \frac{1}{a_2^2 - a_3^2} \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)}} \right\} \quad (\text{III.51})$$

$$I_3(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\Delta(\lambda)} - I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \quad (\text{III.52})$$

– **Ellipsoïde oblate** ($a_1 = a_2 > a_3$)

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \arccos b_o, \quad (\text{III.53})$$

$$I_1(\lambda) = I_2(\lambda) = 2\pi a_1^2 a_3 \frac{(\arccos b_o - b_o d_o)}{(a_1^2 - a_3^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III.54})$$

$$I_3(\lambda) = \frac{4\pi a_1^2 a_3}{\Delta(\lambda)} - 2I_1(\lambda) \quad (\text{III.55})$$

Où,

$$b_o = \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_1^2 + \lambda}} \quad (\text{III.56})$$

$$d_o = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + \lambda}} \quad (\text{III.57})$$

– **Ellipsoïde prolate** ($a_1 > a_2 = a_3$)

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_3^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \operatorname{arccosh} b_p, \quad (\text{III.58})$$

$$I_1(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_3^2 \left(\operatorname{arccosh} b_p - \frac{d_p}{b_p} \right)}{(a_1^2 - a_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{III.59})$$

$$I_2(\lambda) = I_3(\lambda) = \frac{2\pi a_1 a_3^2}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{2} I_1(\lambda) \quad (\text{III.60})$$

Où,

$$b_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + \lambda}{a_3^2 + \lambda}} \quad (\text{III.61})$$

$$d_p = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}} \quad (\text{III.62})$$

– **Sphère** ($a_1 = a_2 = a_3 = a$)

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a^3}{\sqrt{a^2 + \lambda}}, \quad (\text{III.63})$$

$$I_1(\lambda) = I_2(\lambda) = I_3(\lambda) = \frac{4\pi a^3}{3(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III.64})$$

Inclusion parallélépipédique rectangle

Les champs élastiques causés par une inclusion cuboïdale contenant des eigenstrains uniformes dans un massif infini isotrope ont été calculés par Lee et Johnson [Joh80], et Chiu [Chi77]. Ils montrent que la distribution de contraintes à l'intérieur de l'inclusion est non-uniforme pour une eigenstrain uniforme contrairement aux cas des inclusions ellipsoïdales où le champ de contraintes est uniforme.

Les formulations établies par Chiu sont utilisées pour résoudre la plasticité mais ne seront pas utilisées ici car elles ne reprennent pas le formalisme des fonctions potentielles harmoniques et biharmoniques. Lee et Johnson ont trouvé une alternative pour exprimer les champs élastiques avec le même formalisme que celui établi précédemment pour les inclusions ellipsoïdales. Les fonctions potentielles $\phi(x)$ et $\psi(x)$ pour un cuboïde sont décrites par MacMillan [Mac58],

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^8 D(c_n) \quad (\text{III.65})$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^8 E(c_n) \quad (\text{III.66})$$

avec

$$D = c_1 c_2 \log(R + c_3) + c_2 c_3 \log(R + c_1) + c_3 c_1 \log(R + c_2) \quad (\text{III.67})$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ c_1^2 \tan^{-1} \left(\frac{c_2 c_3}{c_1 R} \right) + c_2^2 \tan^{-1} \left(\frac{c_3 c_1}{c_2 R} \right) + c_3^2 \tan^{-1} \left(\frac{c_1 c_2}{c_3 R} \right) \right\} \quad (\text{III.68})$$

$$E = \frac{1}{4} c_1 c_2 c_3 R + \frac{1}{6} \left\{ (R^2 - c_1^2) c_2 c_3 \log(R + c_1) \right. \quad (\text{III.69})$$

$$\left. + (R^2 - c_2^2) c_3 c_1 \log(R + c_2) + (R^2 - c_3^2) c_1 c_2 \log(R + c_3) \right\} \quad (\text{III.70})$$

$$- \frac{1}{12} \left\{ c_1^4 \tan^{-1} \left(\frac{c_2 c_3}{c_1 R} \right) + c_2^4 \tan^{-1} \left(\frac{c_3 c_1}{c_2 R} \right) + c_3^4 \tan^{-1} \left(\frac{c_1 c_2}{c_3 R} \right) \right\} \quad (\text{III.71})$$

et

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad (\text{III.72})$$

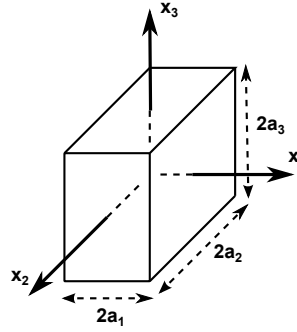


FIGURE III.3 – Inclusion parallélépipédique rectangle

Le vecteur $c = (c_1, c_2, c_3)$ est défini par les équations suivantes,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\
 c_2 &= (x_1 + a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\
 c_3 &= (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 - a_3) \\
 c_4 &= (x_1 - a_1, x_2 + a_2, x_3 - a_3) \\
 c_5 &= (x_1 - a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3) \\
 c_6 &= (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 + a_3) \\
 c_7 &= (x_1 + a_1, x_2 - a_2, x_3 + a_3) \\
 c_8 &= (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)
 \end{aligned} \tag{III.73}$$

3.2 Décomposition en sous-problèmes

Le champ élastique généré par une inclusion contenant une eigenstrain uniforme dans un espace semi-infini isotrope s'obtient en décomposant le problème en trois sous-problèmes (voir Figure III.4) :

1. une inclusion contenant une eigenstrain $\varepsilon^* = (\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{33}^*, \varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{13}^*, \varepsilon_{23}^*)^t$ dans un espace infini ;
2. une inclusion miroir contenant une eigenstrain dans le même espace infini telle que $\varepsilon^{s*} = (\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{33}^*, \varepsilon_{12}^*, -\varepsilon_{13}^*, -\varepsilon_{23}^*)^t$;
3. un problème en demi-espace soumis à une répartition de pression normale σ^n .

La somme des deux premières solutions, résolues par Chiu [Chi77], génère une surface en $x_3 = 0$ libre de contraintes tangentielles mais avec une contrainte normale résiduelle. La soustraction de la troisième solution simule alors un espace semi-infini isotrope. La solution finale obtenue s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= B_{ijkl} (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3) \varepsilon_{kl}^* (x'_1, x'_2, x'_3) \\
 &\quad + B_{ijkl} (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 + x'_3) \varepsilon_{kl}^{s*} (x'_1, x'_2, -x'_3) \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ij} (x_1 - x''_1, x_2 - x''_2, x_3) \sigma^n (x''_1, x''_2, 0) dx''_1 dx''_2, \\
 &\quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{III.74}
 \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de l'équation III.74 représentent les solutions en espace infini des deux inclusions symétriques. Les coefficients d'influence B_{ijkl} relie la contrainte élastique au point (x_1, x_2, x_3) causée par une inclusion centrée

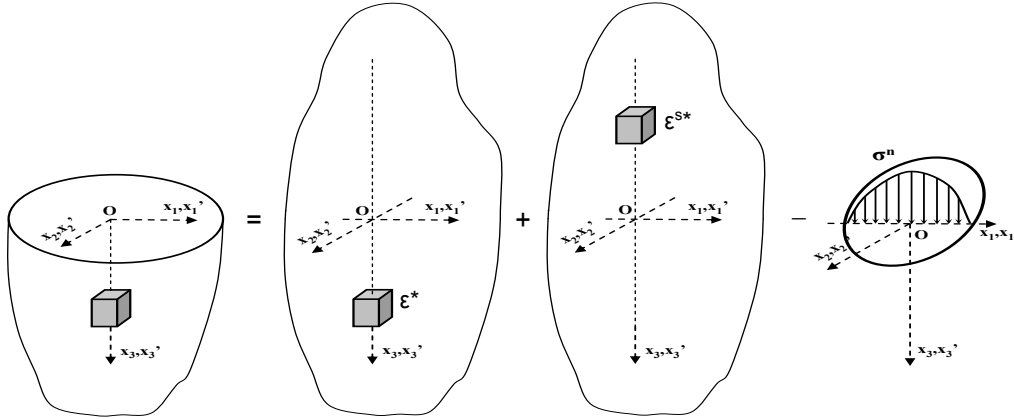


FIGURE III.4 – Méthode de décomposition en trois sous-problèmes.

en (x'_1, x'_2, x'_3) ou $(x'_1, x'_2, -x'_3)$. La contrainte normale en surface σ^n en un point $(x_1, x_2, 0)$ s'obtient à partir de ces mêmes coefficients,

$$\begin{aligned} \sigma^n(x_1, x_2, 0) &= -B_{33kl} \left(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, -x'_3 \right) \varepsilon_{kl}^* \left(x'_1, x'_2, x'_3 \right) \\ &\quad - B_{33kl} \left(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x'_3 \right) \varepsilon_{kl}^{s*} \left(x'_1, x'_2, -x'_3 \right), \\ &\quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

Les fonctions $T_{ij}()$ ($i, j = 1, 2, 3$) relient la contrainte élastique en un point (x_1, x_2, x_3) à la contrainte normale σ^n au point $(x''_1, x''_2, 0)$, la double intégration somme l'influence de toutes les contraintes normales discrétisées en surface. Ces fonctions $T_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, représentant la contrainte élastique au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ du demi-espace due à un effort normal unitaire localisé au centre O de la surface, s'écrit [Joh85] :

$$T_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{x_3}{\rho} \right) \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^2} + \frac{x_3 x_2^2}{\rho^3} \right\} - \frac{3x_3 x_1^2}{\rho^5} \right] \quad (\text{III.76})$$

$$T_{22}(x_1, x_2, x_3) = T_{11}(x_2, x_1, x_3), \quad (\text{III.77})$$

$$T_{33}(x_1, x_2, x_3) = \frac{-3x_3^3}{2\pi \rho^5}, \quad (\text{III.78})$$

$$T_{12}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{x_3}{\rho} \right) \frac{x_1 x_2}{r^2} - \frac{x_1 x_2 x_3}{\rho^3} \right\} - \frac{3x_1 x_2 x_3}{\rho^5} \right] \quad (\text{III.79})$$

$$T_{13}(x_1, x_2, x_3) = \frac{-3x_1 x_3^2}{2\pi \rho^5}, \quad (\text{III.80})$$

$$T_{23}(x_1, x_2, x_3) = T_{12}(x_2, x_1, x_3), \quad (\text{III.81})$$

Où

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (\text{III.82})$$

$$\rho^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (\text{III.83})$$

En principe la méthode de décomposition n'interdit pas d'avoir des inclusions contenant des eigenstrains en surface. Cependant ce principe n'est valable que si le domaine d'étude D est assez discrétisé pour décrire finement la répartition de la contrainte normale en surface. En dehors du domaine D la contrainte normale σ^n est négligée, et considérée constante sur un élément de surface discrétisée de taille $2\Delta_1 2\Delta_2$. Ainsi l'équation III.74 peut être réécrite sous forme discrétisée,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha,\beta,\gamma} = & B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^* + B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma+\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^{s*} \\ & - \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} M_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma} \sigma_{\xi,\zeta}^n \end{aligned} \quad (\text{III.84})$$

Où,

$$\begin{aligned} M_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma} = & \int_{x_1^\xi-\Delta_1}^{x_1^\xi+\Delta_1} \int_{x_2^\zeta-\Delta_2}^{x_2^\zeta+\Delta_2} T_{x_1^\alpha-x_1, x_2^\beta-x_2, x_3^\gamma} dx_1 dx_2, \\ & (0 \leq \alpha, \xi \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta, \zeta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma, \varphi \leq N_3 - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Si le domaine d'étude D contient de multiples inclusions, la contribution de chaque eigenstrain contenu dans chacune des inclusions est alors sommée pour obtenir le champ de contrainte élastique de chaque élément :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha,\beta,\gamma} = & \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^* \\ & + \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma+\varphi} \varepsilon_{\xi,\zeta,\varphi}^{s*} - \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} M_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \sigma_{\xi,\zeta}^n, \\ & (0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

La contrainte normale $\sigma_{\xi,\zeta}^n$ de l'équation III.86 est obtenue à partir deux premiers termes de l'équation III.86. Le premier terme de la somme contient un produit de convolution discret 3D, le second terme un produit de convolution discret dans les directions x_1 et x_2 avec une corrélation discrète unidirectionnelle suivant x_3 , le dernier terme un produit de convolution discret 2D suivant les directions x_1 et x_2 . Les algorithmes de transformée de Fourier (3D-FFT et 2D-FFT) sont alors utilisés pour réduire les temps de calcul.

L'algorithme 2D-FFT utilise des coefficients valides en espace semi-infini. La différence réside sur la forme utilisée pour le champ de pression σ^n . Pour les coefficients associés à la 2D-FFT, le champ de pression σ^n a une forme explicite et continue, exprimé comme une fonction du premier et du second sous-problème, le champ de contraintes utile à la surface libre σ^n est exprimé analytiquement. Ces solutions analytiques deviennent très complexe et impose de prendre en compte des hypothèses sur la source telle que son incompressibilité. Ce genre d'hypothèse est compatible avec la plasticité mais ne l'ai pas dans le cadre général des hétérogénéités. La 3D-FFT utilise quant à elle une forme discrétisée du champ de pression et se retrouve donc résolu numériquement.

Cet algorithme de décomposition nous permet donc de relier numériquement les surcontraintes générées par les hétérogénéités aux eigenstrains respectives, et de pouvoir déterminer la totalité des eigenstrains à partir de la méthode de l'inclusion

équivalente. La Figure III.5 montre l'algorithme numérique du code pour déterminer les surcontraintes élastiques à partir des eigenstrains, dans le cadre de la méthode de décomposition en sous-problèmes élémentaires. Un bouclage sur les eigenstrains est mis en place afin de prendre en compte l'effet des interactions entre les hétérogénéités voisines. Une fois les eigenstrains connues, il est nécessaire de déterminer les déplacements en surface induits par les hétérogénéités en sous-couche afin d'actualiser la géométrie de la surface de contact, et par conséquent la pression de contact et les cisaillements en surface.

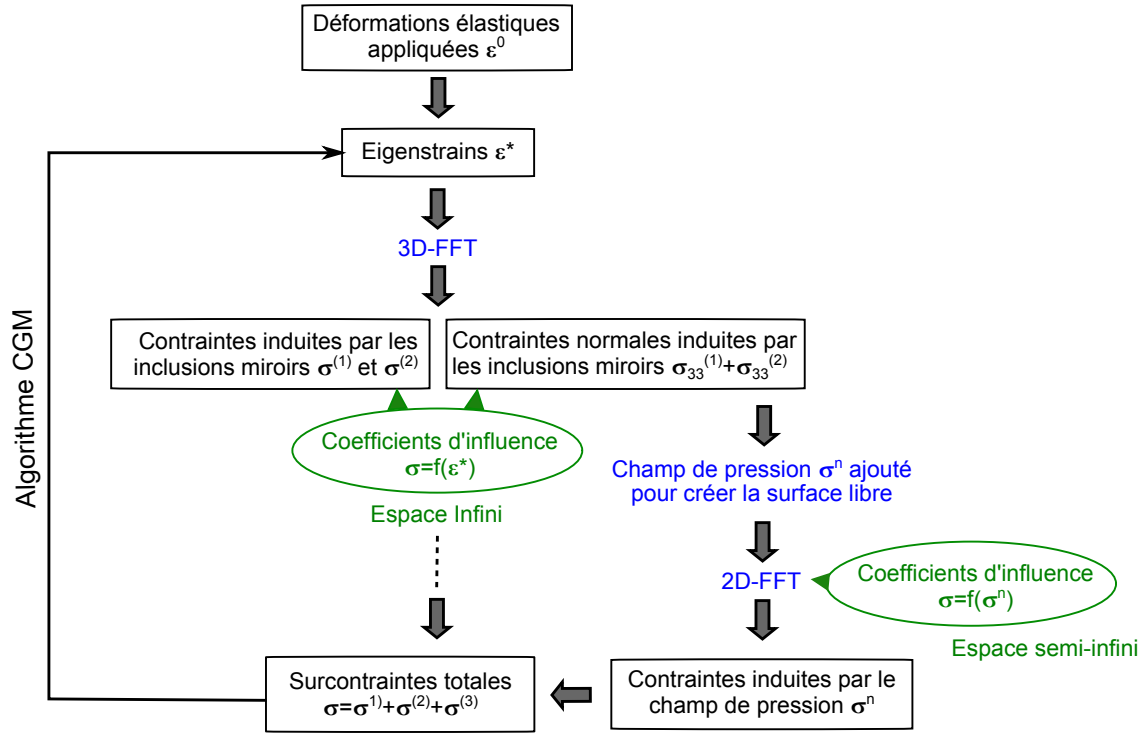


FIGURE III.5 – Algorithme de détermination des eigenstrains et des surcontraintes induites par de multiples hétérogénéités.

3.3 Déplacements générés en surface

Les déplacements normaux u_3^* dus aux hétérogénéités sont uniquement générés par le champ de pression σ_n permettant de créer une surface libre (massif semi-infini).

$$u_3^*(x_1, x_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} K_3^p(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \sigma^n(x'_1, x'_2) \quad (\text{III.87})$$

L'effet d'une pression uniforme sur une surface rectangulaire a été analysé en détail par [Lov20] et [Joh85]. Les coefficients K^p représentent les coefficients d'influence reliant les déplacements normaux et tangentiels en un point de la surface $(x_1, x_2, 0)$ générés par un champ de pression σ_n en un point de la surface $(x'_1, x'_2, 0)$.

Les déplacements tangentiels sont à la fois causés par les eigenstrains dues aux

hétérogénéités et par le champ de pression σ^n .

$$\begin{aligned}
 u_i^*(x_1, x_2) = & \sum_{x_3} \sum_{x_2} \sum_{x_1} D_{ikl}^u(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, -x'_3) \varepsilon_{kl}^*(x'_1, x'_2, x'_3) \\
 & + \sum_{x_3} \sum_{x_2} \sum_{x_1} D_{ikl}^u(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x'_3) \varepsilon_{kl}^{s*}(x'_1, x'_2, x'_3) \\
 & + \sum_{x_2} \sum_{x_1} K_i^p(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \sigma^n(x'_1, x'_2)
 \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (\text{III.88})$$

Où

$$D_{ikl}^u = \frac{1}{8\pi(1-\nu_m)} (\psi_{kli} - 2\nu_m \delta_{kl} \phi_{,i} - 2(1-\nu_m) [\phi_{,k} \delta_{ij} + \phi_{,j} \delta_{ik}]) \quad (\text{III.89})$$

La Figure III.6 montre l'algorithme numérique du code pour déterminer le déplacement normal et tangentiel en surface à partir de la connaissance des eigenstrains et des contraintes normales en surface, dans le cadre de la méthode de décomposition en sous-problèmes élémentaires.

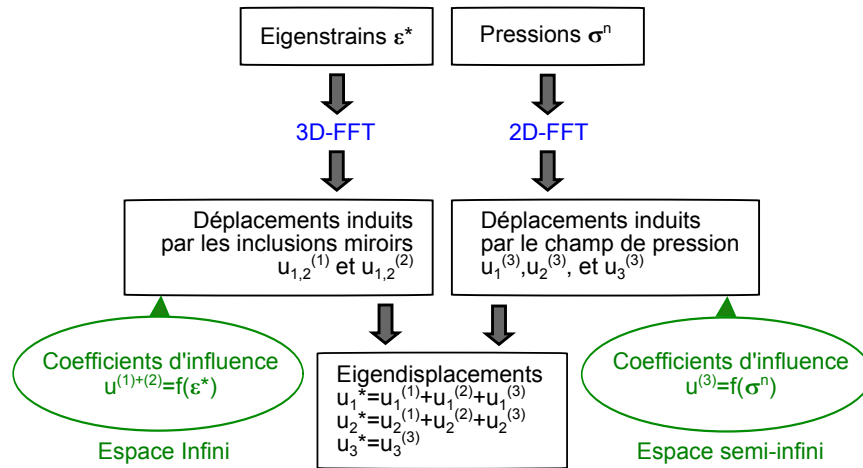


FIGURE III.6 – Algorithme de détermination des déplacements induits par de multiples hétérogénéités.

3.4 Validations de solutions élémentaires

La première étape est de valider à la fois les coefficients d'influence en espace infini ainsi que leurs utilisations en espace semi-infini dans la méthode de décomposition, à partir de résultats analytiques et numériques extraits de la littérature. Ces sources de comparaison imposent des conditions restrictives sur la nature de l'eigenstrain. La détermination des eigenstrains à partir de la méthode de l'inclusion équivalente n'est pas abordée dans cette partie.

3.4.1 Hypothèse de massif infini

Inclusion sphérique et ellipsoïdale

Considérons une inclusion ellipsoïdale inscrite dans un massif infini, élastique et isotrope. L'eigenstrain générée se trouve être du type d'une dilatation uniforme telle que $\varepsilon_{ij}^* = \delta_{ij}e^*$. L'évolution des contraintes σ_{11} et σ_{33} le long de l'axe x_3 (voir Figure III.7) est comparée aux résultats numériques obtenus par Mura [Mur87] dans le cas d'une inclusion sphérique ($a_1 = a_2 = a_3 = a$) et une inclusion ellipsoïdale ($a_1 = a_2 = 3a_3$). Les solutions de Mura sont représentées par une ligne continue sur le graphe. Notons que les valeurs de contraintes sont normalisées par $\sigma_0 = 2G_m e^* \frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m}$, G_m étant le module de cisaillement de la matrice et ν_m le coefficient de Poisson de la matrice ($\nu_m = 0.3$).

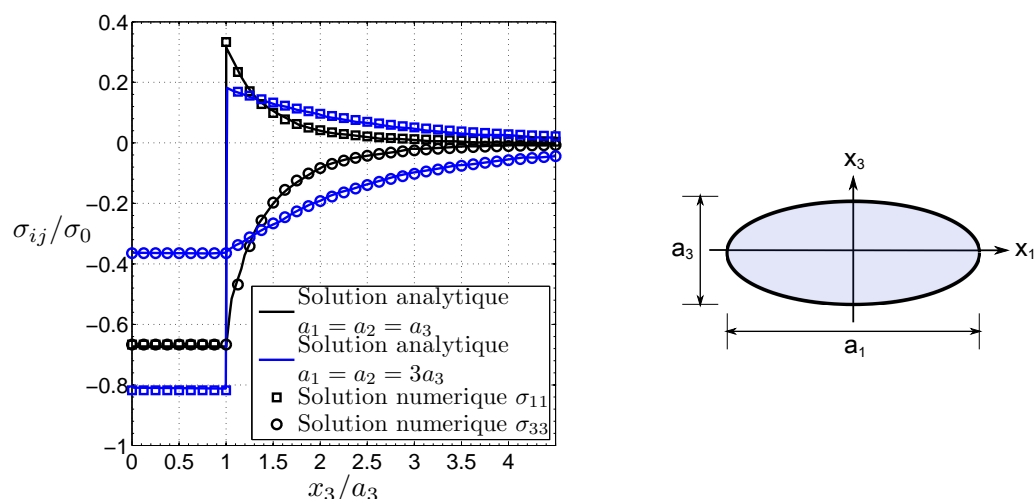


FIGURE III.7 – Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_3 d'une inclusion ellipsoïdale soumise à une dilatation uniforme.

Inclusion cuboïdale

Pour une inclusion de forme cuboïdale contenant une eigenstrain uniforme, les résultats présentés par Chiu [Chi77] constituent une excellente base de validation. De nouveau, par simplicité, toutes les composantes de l'eigenstrain sont nulles, exceptées ε_{11}^* . La Figure III.8 montre les variations des contraintes normales le long de l'axe x_1 pour trois configurations géométriques $2a_1 \times 2a_2 \times 2a_3$. On peut noter que les contraintes normales sont continues à l'interface inclusion-matrice en $x_1 = a_1$. À l'inverse, on peut observer sur la Figure III.9 que seule la contrainte σ_{22} est continue à l'interface inclusion-matrice en $x_2 = a_2$. Ces discontinuités sont indépendantes de la forme de l'inclusion. Les résultats numériques obtenus prouvent l'exactitude des solutions analytiques employées ici. De très faibles différences peuvent apparaître selon la finesse de discrétisation.

3.4.2 Hypothèse de massif semi-infini

Inclusion sphérique

Dans le cas d'une inclusion sphérique de rayon a , Mindlin and Cheng [Min50a] ont exprimé analytiquement les surcontraintes induites par une déformation ther-

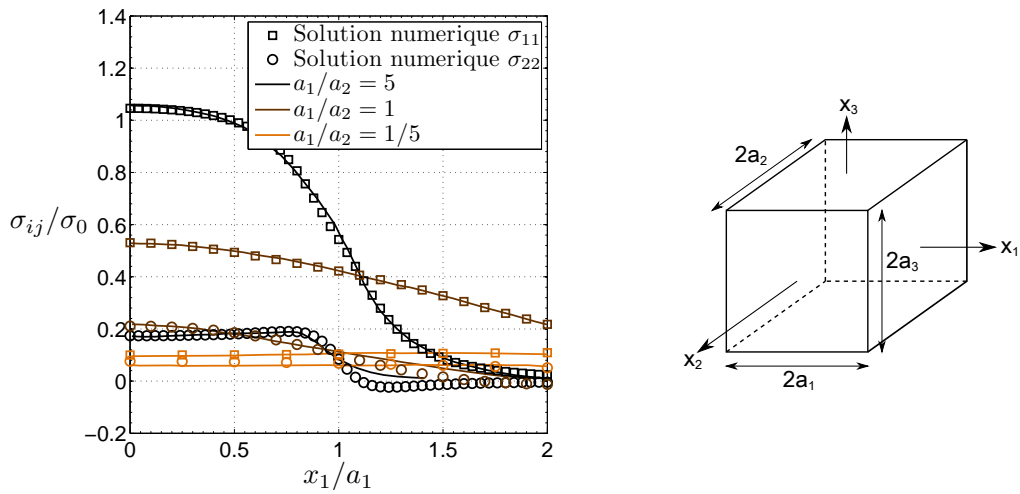


FIGURE III.8 – Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_1 d'une inclusion cuboïdale soumise à une eigenstrain constante ε_{11}^* pour différents rapports de forme a_1/a_2 et $a_2 = a_3$.

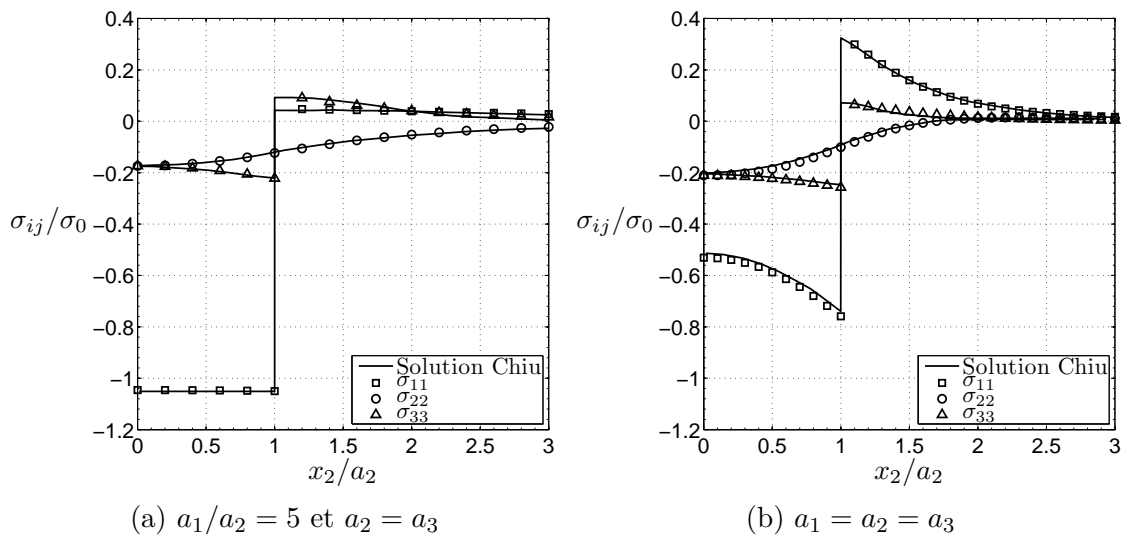


FIGURE III.9 – Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_2 d'une inclusion cuboïdale soumise à une eigenstrain constante ε_{11}^* .

moélastique telle que $\varepsilon_{ij} = \alpha T \delta_{ij}$, α et T désignant respectivement les coefficients d'expansion thermique et de température. Le symbole δ représente ici le symbole de Kronecker tel que $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ sinon $\delta_{ij} = 0$. Le modèle analytique de Mindlin and Cheng et les résultats numériques obtenus par cette méthode sont comparés Figure III.10. Les contraintes sont normalisées par $\sigma_0 = E\alpha T/3(1 - \nu_m)$, E et ν_m étant le module de Young et le coefficient de Poisson de la matrice ($\nu_m = 0.3$). La précision des résultats numériques obtenus prouvent l'efficacité de la méthode proposée. La composante σ_{11} est continue à l'interface inclusion/matrice selon l'axe x_1 à l'inverse des deux autres composantes normales σ_{22} et σ_{33} , validant la continuité des contraintes à l'interface. De la même manière, la composante σ_{33} est continue à l'interface inclusion/matrice selon l'axe x_3 contrairement aux contraintes normales σ_{11} et σ_{22} identiques.

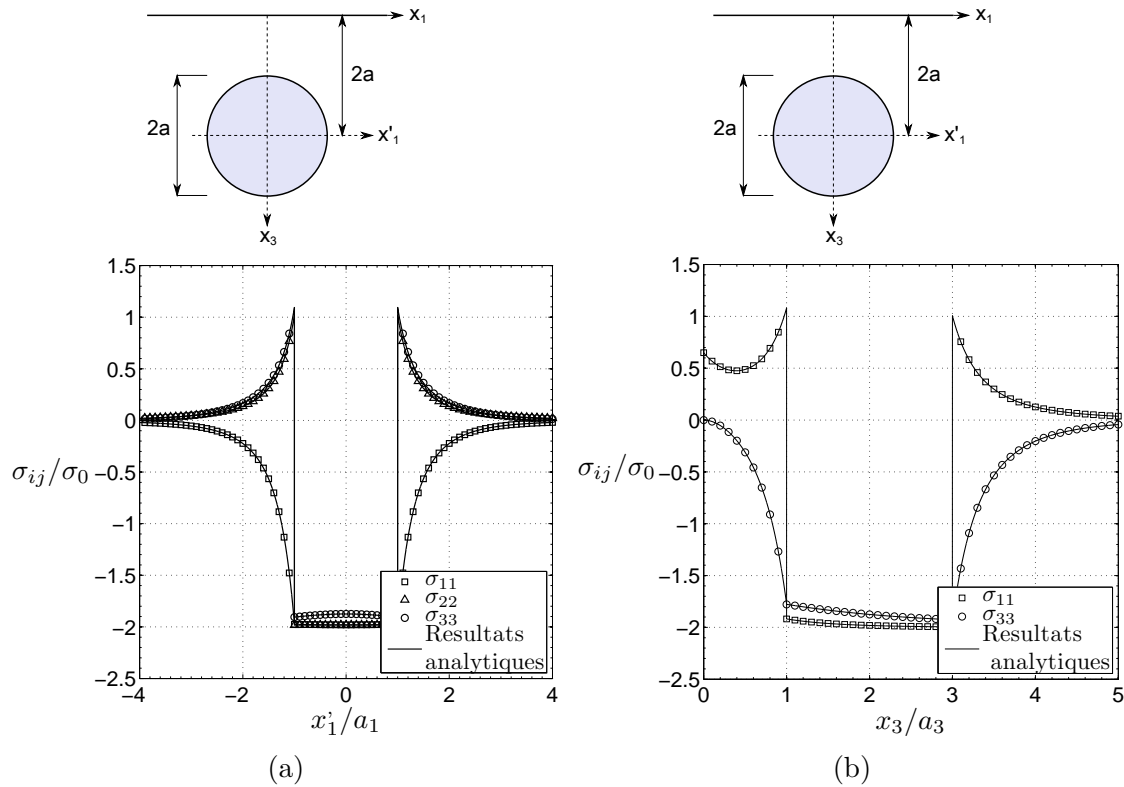


FIGURE III.10 – Contraintes normales dans un massif semi-infini contenant une inclusion sphérique $a_1 = a_2 = a_3 = a$ soumise à une déformation thermo-élastique (a) suivant l'axe x_1' et (b) suivant l'axe x_3 .

Inclusion ellipsoïdale

Considérons une inclusion ellipsoïdale inscrite dans un massif semi-infini, élastique et isotrope. L'eigenstrain est générée par une dilatation uniforme telle que $\varepsilon_{ij}^* = \delta_{ij}e^*$. L'évolution des contraintes σ_{11} et σ_{33} le long de l'axe x_3 (voir la Figure III.11) est comparée aux résultats numériques obtenus par Mura [Mur87] dans le cas d'une inclusion sphérique ($a_1 = a_2 = a_3 = a$) et d'une inclusion ellipsoïdale ($a_1 = a_2 = 3a_3$). Les solutions de Mura sont représentées par une ligne continue sur le graphe. Notons que les valeurs de contraintes sont normalisées par

$\sigma_0 = 2Ge^* (1 + \nu_m) / (1 - \nu_m)$, G_m et ν_m étant le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la matrice ($\nu_m = 0.3$). Ces résultats analytiques et numériques correspondent parfaitement.

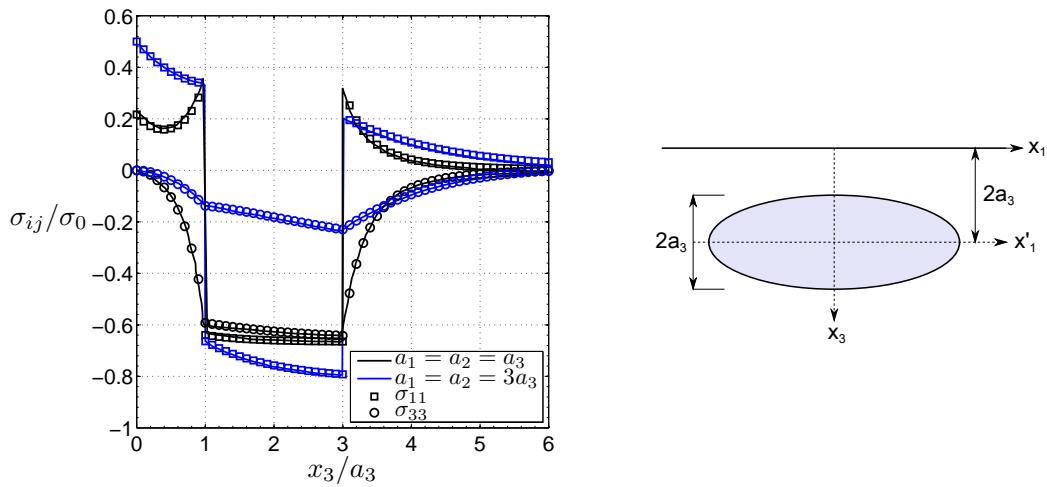


FIGURE III.11 – Distribution des contraintes normales dans un massif semi-infini contenant une inclusion ellipsoïdale soumise à une dilatation uniforme suivant l'axe x_3 .

Inclusion cuboïdale

Pour cette partie, les résultats obtenus par Chiu [Chi78] sont de nouveau une base solide de comparaison et de validation. Considérons une inclusion cubique de dimension $a_1 = a_2 = a_3 = a$ et de coefficient de Poisson $\nu_m = 0.3$, situé à une profondeur h de la surface $x_3 = 0$. Les contraintes normales sont observées en différents points (A, B, C) le long de l'axe x_3 . Le point A est situé à la surface $x_3 = 0$, le point B au centre du cube, et le point C à l'interface inclusion-matrice. Pour des eigenstrains uniformes ε_{22}^* et ε_{33}^* , la Figure III.12 montre les contraintes normales le long de l'axe x_3 en fonction de la profondeur h adimensionnée par la demi-largeur a_3 . Ces résultats numériques restent en accord avec les solutions obtenues par Chiu, même si de légères différences persistent notamment pour σ_{33} au point C pour de faibles profondeurs. Plusieurs observations peuvent être notées :

- Les contraintes en A (en surface) sont nulles.
- Pour de grandes profondeurs h , les contraintes en B et C approchent asymptotiquement la solution en espace infini.
- Les composantes d'eigenstrains ε_{22}^* et ε_{33}^* génèrent des contraintes de traction proche de la surface.
- Cette traction en surface peut atteindre 5 fois la valeur obtenue dans le cas d'un massif infini (voir Figure III.8).
- Les effets de la surface s'annulent quand la profondeur h est supérieure à 3 fois la demi-largeur a .

La Figure III.13 montre les variations du déplacement normal u_3 au centre de la surface en fonction de la profondeur du centre de l'inclusion de forme cubique. Les résultats sont comparés avec trois eigenstrains par rapport à ceux obtenus numériquement par [Chi78]. Pour une inclusion cubique, l'effet de la surface s'estompe

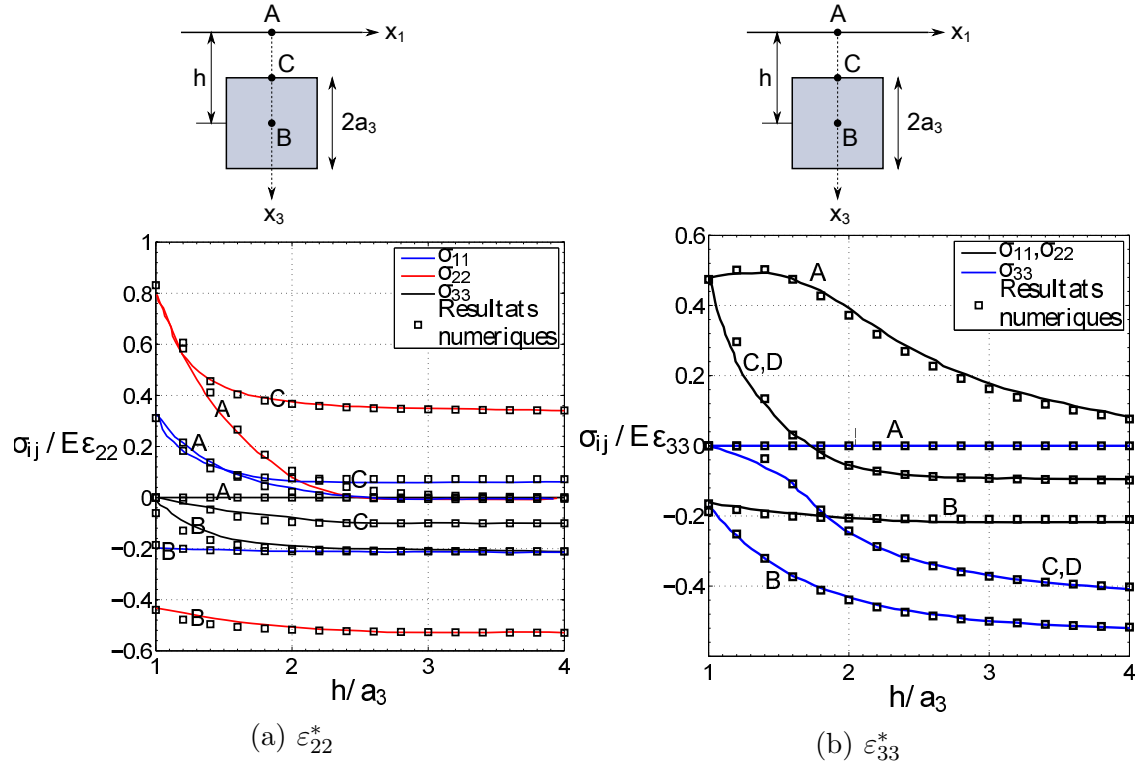


FIGURE III.12 – Contraintes normales localisées en trois points du demi-espace en fonction de la profondeur du centre de l'inclusion cubique.

rapidement et s'annule lorsque la profondeur est supérieure à trois fois la demi-largeur du cube.

4 Solution en demi-espace par Galerkin

4.1 Théorie

Contrairement à la méthode de décomposition, les formulations développées ici s'inscrivent dans le cadre d'un massif semi-infini élastique et isotrope ($Ox_1x_2x_3$) contenant au moins une inclusion de région Ω soumise à une eigenstrain de nature quelconque ε_{ij}^* . Les propriétés matériaux du demi-espace sont données par les coefficients de Lamé λ_m et μ_m ainsi que le coefficient de Poisson noté ν_m . Rappelons que le vecteur x dénote le point d'observation tandis que le point x' dénote la source d'excitation. La dérivée d'une entité par rapport au point d'observation se note $a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$. Le champ élastique (u_i, σ_{ij}) généré par une source d'eigenstrains est exprimé en terme de vecteurs de Galerkin F [Yu91a].

$$2\mu_m u_i(x) = 2H F_{i,jj} - F_{k,ki} \quad (\text{III.90})$$

$$\sigma_{ij}(x) = \nu_m F_{k,kmn} \delta_{ij} - F_{k,kij} + H (F_{i,kkj} + F_{j,kki}), x \notin \Omega \quad (\text{III.91})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) &= \nu_m F_{k,kmn} \delta_{ij} - F_{k,kij} + H (F_{i,kkj} + F_{j,kki}) \\ &\quad - 2\mu_m \varepsilon_{ij}^* - \lambda_m \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij}, x \in \Omega \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Avec $H = 1 - \nu_m$.

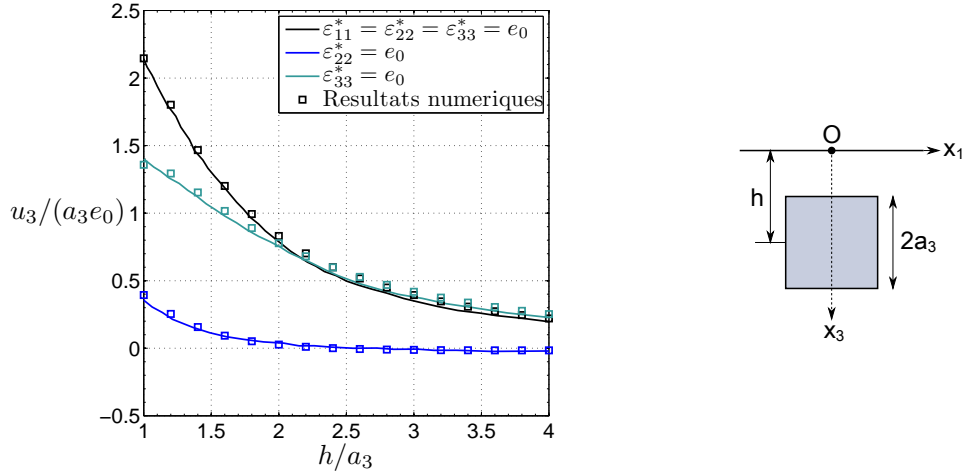


FIGURE III.13 – Variation de déplacement normal u_3 au centre O de la surface en fonction de la profondeur de l'inclusion cubique pour trois configurations.

4.1.1 Vecteurs de Galerkin

Les vecteurs de Galerkin sont exprimés sous forme intégrale de volume [Yu91a]

$$F(x) = \frac{\mu_m}{4\pi H} \int_{\Omega} (2\nu_m \varepsilon_{kk}^* g_c - \varepsilon_{jk}^* g_{jk}) dx' \quad (\text{III.93})$$

Où g_c est le vecteur de Galerkin associé à une source unique de dilatation uniforme dans un demi-espace, et g_{jk} est le vecteur de Galerkin associé à différents chargements générant des singularités, encore appelés « nuclei of strain » par Mindlin [Min36]. Mindlin et Cheng [Min50a] ou encore Yu et Sanday [Yu91b] ont exprimé ces différents vecteurs de Galerkin pour diverses sources de déformation. Par exemple, les vecteurs de Galerkin lié à un effort unitaire en x' du demi-espace s'écrivent :

$$g_1 = [R^I + R - 2x_3'^2 \phi - 4HD\theta; 0; 2x_3'^2 R_{,1} + 2D(x_1 - x_1') \psi]^t \quad (\text{III.94})$$

$$g_2 = [0; R^I + R - 2x_3'^2 \phi - 4HD\theta; 2x_3'^2 R_{,2} + 2D(x_2 - x_2') \psi]^t \quad (\text{III.95})$$

$$g_3 = [0; 0; R^I + (3 - 4\nu_m) R - 2x_3' x_3 \phi - 4Dx_3' \psi - 4HD\theta]^t \quad (\text{III.96})$$

Avec $D = 1 - 2\nu_m$. R^I et R représentent les fonctions potentielles biharmoniques telles que :

$$R^I = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \quad (\text{III.97})$$

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 + x_3')^2} \quad (\text{III.98})$$

ϕ, ψ , et θ représentent les fonctions potentielles harmoniques telles que :

$$\phi = 1/R \quad (\text{III.99})$$

$$\psi = \ln [R + (x_3 + x_3')] \quad (\text{III.100})$$

$$\theta = R - (x_3 + x_3') \psi \quad (\text{III.101})$$

Notons que $\theta_{,3} = -\psi$ et $\psi_{,3} = \phi$. L'indice I indique que la source se situe dans l'espace euclidien du demi-espace. Physiquement, R^I représente la distance entre les

points x et x' tandis que R représente la distance entre x et l'image de x' (symétrie par rapport à la surface libre Ox_1x_2).

Les vecteurs de Galerkin pour une déformation quelconque g_{ij} , et une dilatation uniforme g_c s'écrivent :

$$g_{ij} = -\frac{\partial g_j}{\partial x'_i} \quad (\text{III.102})$$

$$g_c = \left[0; 0; \log \left\{ R^I + (x_3 - x'_3) \right\} + (1 - 4\nu_m) \psi + 2x_3 \phi \right]^t \quad (\text{III.103})$$

La résolution des équations III.74 requièrent de connaître les dérivées des vecteurs de Galerkin exprimées dans l'équation III.93 sous forme intégrale. Étant donné que les phases d'intégration et de dérivation peuvent être interchangées, les dérivées de f_i sont essentielles. Les expressions de ces dérivées sont énumérées par Liu et Wang [Liu05]. L'écriture des équations (10a-d) publiées par Liu [Liu05] est simplifiée grâce à l'égalité $(x_3 + x'_3)\psi = R - \theta$. A partir de là, toutes les composantes du champ élastique peuvent être exprimées sous forme intégrale en quatre sous-parties.

4.1.2 Champ de déplacement

Après de nombreuses manipulations mathématiques, l'écriture sous forme intégrale des déplacements élastiques est la suivante :

$$u_i = \frac{-1}{8\pi H} \int_{\Omega} \left(U_i - \overline{\overline{R}}^I_{,i} - \overline{\overline{R}}_{,i} - 2D\overline{\overline{R}}_{,i} - 2x_3\overline{\overline{R}}_{,3i} + 2x_3^2\overline{\overline{\phi}}_{,i} \right) [\varepsilon^*] dx' \quad (\text{III.104})$$

Où,

$$\overline{\overline{\phi}} = [\phi_{,11}; \phi_{,22}; \phi_{,33}; \phi_{,12}; -\phi_{,13}; -\phi_{,23}] \quad (\text{III.105})$$

$$\overline{\overline{R}} = [R_{11}; R_{22}; R_{33}; R_{12}; -R_{13}; -R_{23}] \quad (\text{III.106})$$

$$\overline{\overline{R}}^I = [R^I_{11}; R^I_{22}; R^I_{33}; R^I_{12}; R^I_{13}; R^I_{23}] \quad (\text{III.107})$$

La notation de Voigt est adoptée pour les composantes des eigenstrains,

$$[\varepsilon^*] = [\varepsilon^*_{11}; \varepsilon^*_{22}; \varepsilon^*_{33}; 2\varepsilon^*_{23}; 2\varepsilon^*_{13}; 2\varepsilon^*_{12}] \quad (\text{III.108})$$

Chaque vecteur U_i est décomposé en trois parties :

$$U_1 = 2 \begin{pmatrix} (2 - \nu_m) (\phi^I_{,1} + \phi_{,1}) \\ \nu_m (\phi^I_{,1} + \phi_{,1}) \\ \nu_m (\phi^I_{,1} + \phi_{,1}) \\ 0 \\ H (\phi^I_{,3} - \phi_{,3}) \\ H (\phi^I_{,2} + \phi_{,2}) \end{pmatrix}^t + 4D \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,1} + H\theta_{,111} \\ \nu_m \phi_{,1} + H\theta_{,221} \\ \phi_{,1} \\ 0 \\ 0 \\ H\theta_{,121} \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,31} \\ \nu_m \phi_{,31} \\ (2 - \nu_m) \phi_{,31} \\ -H\phi_{,21} \\ -H\phi_{,11} \\ 0 \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.109})$$

$$U_2 = 2 \begin{pmatrix} \nu_m (\phi_{,2}^I + \phi_{,2}) \\ (2 - \nu_m) (\phi_{,2}^I + \phi_{,2}) \\ \nu_m (\phi_{,2}^I + \phi_{,2}) \\ H (\phi_{,3}^I - \phi_{,3}) \\ 0 \\ H (\phi_{,1}^I + \phi_{,1}) \end{pmatrix}^t + 4D \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,2} + H\theta_{,112} \\ \nu_m \phi_{,2} + H\theta_{,222} \\ \phi_{,2} \\ 0 \\ 0 \\ H\theta_{,122} \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,32} \\ \nu_m \phi_{,32} \\ (\nu_m - 2)\phi_{,32} \\ -H\phi_{,22} \\ -H\phi_{,12} \\ 0 \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.110})$$

$$U_3 = 2 \begin{pmatrix} \nu_m (\phi_{,3}^I + \phi_{,3}) \\ (\phi_{,3}^I + \phi_{,3}) \\ (2 - \nu_m) (\phi_{,3}^I - \phi_{,3}) \\ H (\phi_{,2}^I + \phi_{,2}) \\ H (\phi_{,1}^I + \phi_{,1}) \\ 0 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 2R_{,113} - 8\nu_m H\phi_3 + 4HD\psi_{,11} \\ 2R_{,223} - 8\nu_m H\phi_3 + 4HD\psi_{,22} \\ -4D\phi_{,3} \\ 0 \\ 0 \\ 4HD\psi_{,12} \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,33} - D\phi_{,11} \\ \nu_m \phi_{,33} - D\phi_{,22} \\ (1 + \nu_m) \phi_{,33} \\ -\nu_m \phi_{,23} \\ -\nu_m \phi_{,13} \\ -D\phi_{12} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.111})$$

On peut d'ores et déjà voir apparaître 4 catégories dans l'équation III.104. La première a un facteur multiplicateur par x_3^2 , la seconde un facteur multiplicateur par x_3 , la troisième n'a pas de facteur multiplicateur et pas d'indice I , la dernière n'a pas de facteur multiplicateur mais a l'indice I . Cette dernière partie représente la solution en espace infini. La troisième catégorie, contenant l'inclusion miroir dans un même espace infini, caractérise le demi-espace de surface libre en cisaillement. Cette approche est commune à celle utilisée par Chiu [Chi78] pour résoudre le problème inclusionnaire en demi-espace. Les deux premières catégories sont des termes correctifs traduisant la surface libre. Pour déterminer les déplacements élastiques à partir d'eigenstrains analytiquement exprimés dans une inclusion, il est nécessaire de déterminer les intégrales des dérivées suivantes : $\phi_{,i}, \phi_{,ij}, \phi_{,ijk}, R_{,ijk}, R_{,3ijk}, \psi_{,11}, \psi_{,22}, \psi_{,12}, \theta_{,111}, \theta_{,122}, \theta_{,112}, \theta_{,222}$.

4.1.3 Champ de contrainte à l'extérieur de l'inclusion Ω

L'expression du champ de contrainte à l'extérieur de l'inclusion de domaine Ω est la suivante :

$$\sigma_{ij}^{out} = \frac{-\mu_m}{4\pi H} \int_{\Omega} \left(\Theta_{ij} - \overline{\overline{R}}_{,ij} - \overline{\overline{R}}_{,ij} - 2x_3 \overline{\overline{R}}_{,3ij} + 2x_3^2 \overline{\overline{\Phi}}_{,ij} \right) [\varepsilon^*] dx' \quad (\text{III.112})$$

Où,

$$\Theta_{11} = 4\nu_m \overline{\overline{R}}_{,33} - 2D \overline{\overline{R}}_{,11} + 2 \begin{pmatrix} 2(\phi_{,11}^I + \phi_{,11}) \\ \nu_m (\phi_{,11}^I + \phi_{,22}^I + \phi_{,11} + \phi_{,22}) \\ \nu_m (\phi_{,11}^I + \phi_{,33}^I + \phi_{,11} + \phi_{,33}) \\ \nu_m (\phi_{,23}^I - \phi_{,23}) \\ (\phi_{,13}^I - \phi_{,13}) \\ (\phi_{,12}^I + \phi_{,12}) \end{pmatrix}^y + 4\nu_m \begin{pmatrix} 2\nu_m \phi_{,22} \\ \phi_{,11} \\ -4\phi_{,33} \\ 2\phi_{,23} \\ 2\phi_{,13} \\ -2\nu_m \phi_{,12} \end{pmatrix}^t$$

$$+ 4D \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,22} + H\theta_{,1111} \\ H\theta_{,2211} \\ \phi_{,11} \\ 0 \\ 0 \\ H\theta_{,1211} \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_m \phi_{,311} - \nu_m \phi_{,223} \\ \nu_m \phi_{,223} + 2\phi_{,311} \\ -\nu_m \phi_{,222} - \nu_m \phi_{,211} \\ -\nu_m \phi_{,122} - \nu_m \phi_{,111} \\ -\nu_m \phi_{,123} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.113})$$

$$\Theta_{22} = 4\nu_m \overline{\overline{R}}_{,33} - 2D \overline{\overline{R}}_{,22} + 2 \begin{pmatrix} \nu_m (\phi_{,11}^I + \phi_{,22}^I + \phi_{,11} + \phi_{,22}) \\ 2(\phi_{,22}^I + \phi_{,22}) \\ \nu_m (\phi_{,22}^I + \phi_{,33}^I + \phi_{,22} + \phi_{,33}) \\ (\phi_{,23}^I - \phi_{,23}) \\ \nu_m (\phi_{,13}^I - \phi_{,13}) \\ (\phi_{,12}^I + \phi_{,12}) \end{pmatrix}^t + 4\nu_m \begin{pmatrix} \phi_{,22} \\ 2\nu_m \phi_{,11} \\ -\phi_{,33} \\ 2\phi_{,23} \\ 2\phi_{,13} \\ -2\nu_m \phi_{,12} \end{pmatrix}^t$$

$$+ 4D \begin{pmatrix} H\theta_{,2211} \\ \nu_m \phi_{,22} + H\theta_{,2222} \\ \phi_{,22} \\ 0 \\ 0 \\ H\theta_{,1222} \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,322} - \nu_m \phi_{,311} \\ 0 \\ \nu_m \phi_{,113} + 2\phi_{,322} \\ -\phi_{,222} - \nu_m \phi_{,211} \\ -\phi_{,122} - \nu_m \phi_{,111} \\ -\nu_m \phi_{,123} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.114})$$

$$\Theta_{33} = 2 \begin{pmatrix} \nu_m (\phi_{,11}^I + \phi_{,33}^I - \phi_{,11} - \phi_{,33}) \\ \nu_m (\phi_{,22}^I + \phi_{,33}^I - \phi_{,22} - \phi_{,33}) \\ 2(\phi_{,33}^I - \phi_{,33}) \\ (\phi_{,23}^I + \phi_{,23}) \\ (\phi_{,13}^I + \phi_{,13}) \\ \nu_m (\phi_{,12}^I - \phi_{,12}) \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} -\nu_m \phi_{,223} \\ -\nu_m \phi_{,113} \\ 2\phi_{,333} \\ -\phi_{,233} \\ -\phi_{,133} \\ \nu_m \phi_{,123} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.115})$$

$$\Theta_{32} = \begin{pmatrix} 2\nu_m (\phi_{,32}^I + \phi_{,32}) \\ 2(\phi_{,32}^I + \phi_{,32}) \\ 2(\phi_{,32}^I + \phi_{,32}) \\ H(\phi_{,22}^I + \phi_{,33}^I - \phi_{,22} - \phi_{,33}) \\ H(\phi_{,12}^I - \phi_{,12}) \\ H(\phi_{,13}^I + \phi_{,13}) \end{pmatrix}^t + 4x_3 \begin{pmatrix} -\nu_m \phi_{,222} \\ -\nu_m \phi_{,112} \\ 2\phi_{,332} \\ -\phi_{,232} \\ -\phi_{,132} \\ \nu_m \phi_{,122} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.116})$$

$$\Theta_{31} = \begin{pmatrix} 2(\phi_{,13}^I + \phi_{,31}) \\ 2(\phi_{,31}^I + \phi_{,31}) \\ 2(\phi_{,31}^I + \phi_{,31}) \\ H(\phi_{,21}^I - \phi_{,21}) \\ H(\phi_{,11}^I + \phi_{,33}^I - \phi_{,11} - \phi_{,33}) \\ H(\phi_{,23}^I + \phi_{,23}) \end{pmatrix}^T + 4x_3 \begin{pmatrix} -\nu_m \phi_{,221} \\ -\nu_m \phi_{,111} \\ 2\phi_{,331} \\ -\phi_{,231} \\ -\phi_{,131} \\ \nu_m \phi_{,121} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.117})$$

$$\Theta_{12} = -2D\overline{\overline{R}}_{,12} + \begin{pmatrix} 2(\phi_{,12}^I + \phi_{,12}) \\ 2(\phi_{,12}^I + \phi_{,12}) \\ 2\nu_m(\phi_{,12}^I + \phi_{,12}) \\ H(\phi_{,31}^I - \phi_{,31}) \\ H(\phi_{,32}^I - \phi_{,32}) \\ H(\phi_{,11}^I + \phi_{,22}^I + \phi_{,11} + \phi_{,22}) \end{pmatrix}^t + 4D \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,12} + H\theta_{,1112} \\ \nu_m \phi_{,12} + H\theta_{,2212} \\ \phi_{,12} \\ 0 \\ 0 \\ H\theta_{1212} \end{pmatrix}^t \\ + 4x_3 \begin{pmatrix} \nu_m \phi_{,312} \\ \nu_m \phi_{,312} \\ (2 - \nu_m)\phi_{,312} \\ -H\phi_{,212} \\ -H\phi_{,112} \\ 0 \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.118})$$

Afin de déterminer toutes les composantes du champ de contrainte, il est nécessaire de connaître toutes les intégrales des dérivées suivantes : $\phi_{,ij}, \phi_{,ijk}, \phi_{,ijkl}, R_{ijkl}, R_{3ijkl}, \theta_{,1111}, \theta_{,1112}, \theta_{,2222}$.

4.1.4 Champ de contrainte à l'intérieur de l'inclusion

A partir de la théorie du potentiel, on peut écrire

$$\phi_{,ii}^I = -4\pi\delta(x - x') \quad (\text{III.119})$$

Où $\delta()$ est une fonction Dirac. Eshelby [Esh57] remarque que :

$$\left(\int_{\Omega} \phi^I dx' \right)_{,ii} = \begin{cases} -4\pi, x \in \Omega \\ 0, x \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{III.120})$$

De la même manière on peut vérifier

$$\left(\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^* \phi^I dx' \right)_{,kk} = \begin{cases} -4\pi\varepsilon_{ij}^*(x), x \in \Omega \\ 0, x \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{III.121})$$

Le terme $\lambda_m \delta_{ij} u_{k,k}$ de l'équation III.91 contient,

$$\lambda_m \delta_{ij} \int_{\Omega} 2\nu_m \varepsilon_{kk}^* \phi_{,jj}^I dx' = -8\pi\nu_m \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^*, x \in \Omega \quad (\text{III.122})$$

qui peut être ajouté au dernier terme de l'équation III.92. A partir de l'équation III.92, le champ de contrainte à l'intérieur de l'inclusion peut s'écrire comme

$$\sigma_{ij}^{in}(x) = \sigma_{ij}^{out}(x) - 2\mu_m \varepsilon_{ij}^* - \frac{2\mu_m}{1 - \nu_m} \nu_m \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij} \quad (\text{III.123})$$

4.1.5 Champ de déplacement en surface

Lorsque $x_3 = 0$ on peut facilement relier les potentiels liés au cas infini (indice I) et ceux liés à l'inclusion miroir (sans indice I). Les égalités ci-dessous sont valables uniquement pour les potentiels R^I et ϕ^I :

1. quand l'indice de la dérivée est impair, on a par exemple $R_{,3}^I = -R_{,3}$, $\phi_{,3}^I = -\phi_{,3}$
2. quand l'indice de la dérivée est pair, on a par exemple $R_{,33}^I = R_{,33}$, $\phi_{,33}^I = \phi_{,33}$

Ainsi,

$$u_i^s = \frac{-1}{2\pi} \int_{\Omega} U_i^s [\varepsilon^*] dx' \quad (\text{III.124})$$

Où,

$$U_1^s = -\overline{\overline{R}}_1 + \begin{pmatrix} 2(1 + \nu_m) \phi_{,1} + D\theta_{,111} \\ 2\nu_m \phi_{,1} + D\theta_{,221} \\ \phi_1 \\ 0 \\ -\phi_{,3} \\ \phi_{,2} + D\theta_{121} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.125})$$

$$U_2^s = -\overline{\overline{R}}_2 + \begin{pmatrix} 2\nu_m \phi_{,2} + D\theta_{,112} \\ 2(1 + \nu_m) \phi_{,2} + D\theta_{222} \\ \phi_2 \\ -\phi_{,3} \\ 0 \\ \phi_{,1} + D\theta_{122} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.126})$$

$$U_3^s = -\overline{\overline{R}}_3 + \begin{pmatrix} -2\nu_m \phi_{,3} + D\psi_{,11} \\ -2\nu_m \phi_{,3} + D\psi_{,22} \\ -3\phi_{,3} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,1} \\ D\psi_{12} \end{pmatrix}^t \quad (\text{III.127})$$

Afin de déterminer toutes les composantes du champ de déplacement en surface, il est nécessaire de connaître toutes les intégrales des dérivées suivantes : $\phi_{,i}, R_{ijk}, \psi_{,11}, \psi_{,22}, \psi_{,12}, \theta_{,111}, \theta_{,122}, \theta_{,112}, \theta_{,222}$.

4.2 Adaptation numérique

Les champs élastiques dus à la présence d'une inclusion de forme arbitraire et contenant une déformation inélastique uniforme, sont exprimés par les équations [III.104](#), [III.112](#), [III.123](#), [III.124](#). Prenons pour exemple l'expression du déplacement normal u_3 ,

$$u_3 = \frac{-1}{8\pi H} \int_{\Omega} \left(U_3 - \overline{\overline{R}}_{,3}^I - \overline{\overline{R}}_{,3} - 2D\overline{\overline{R}}_{,3} - 2x_3 \overline{\overline{R}}_{,33} + 2x_3^2 \overline{\overline{\Phi}}_3 \right) [\varepsilon^*] dx' \quad (\text{III.128})$$

L'astuce ici est de décomposer le vecteur U_3 en deux vecteurs tels que $U_3 = U_{3a} + x_3 U_{3b}$. Ainsi l'intégrale de l'équation III.128 se divise en quatre parties telles que,

$$u_3 = \frac{1}{8\pi H} \left\{ \int_{\Omega} \overline{\overline{R}}^I_{,3} [\varepsilon^*] dx' - \int_{\Omega} (U_{3a} - \overline{\overline{R}}_{,3} - 2D\overline{\overline{R}}_{,3}) [\varepsilon^*] dx' \right. \\ \left. + x_3 \int_{\Omega} (2\overline{\overline{R}}_{,33} - U_{3b}) [\varepsilon^*] dx' - 2x_3^2 \int_{\Omega} \overline{\overline{\Phi}}_{,3} [\varepsilon^*] dx' \right\} \quad (\text{III.129})$$

De cette équation sont recensées deux catégories :

1. La première catégorie $\overline{\overline{R}}^I_{,3}$, qui correspond à la solution en espace infini et en résulte un produit de convolution 3D ;
2. Les trois autres intégrales correspondent à un produit de convolution 2D suivant x_1 et x_2 et une corrélation 1D suivant x_3 . L'utilisation combinée des algorithmes de convolution (DC-FFT) et de corrélation (DCR-FFT) par transformée de Fourier permet de résoudre numériquement ces 4 intégrales en tout point de la zone discrétisée puis de les assembler pour obtenir la valeur du champ élastique en ces points.

4.3 Validations

Afin de valider les solutions analytiques décrites ci-dessus, un massif semi-infini élastique est modélisé par éléments finis [Liu12]. Le modèle EF Abaqus contient des éléments 3D3T sur un domaine de dimensions $40 \times 40 \times 20 \text{ mm}^3$. Les paramètres de configuration sont répertoriés dans le tableau III.1. Dans le modèle EF, l'eigenstrain est équivalente à une déformation thermique anisotrope $\varepsilon^*_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T$ dans une région cubique (voir Figure III.14), où α_{ij} est le coefficient de dilatation thermique et ΔT la variation de température. Les contraintes obtenues par les deux modèles sont visualisées en profondeur le long d'un axe $x_1 = 0$ et $x_2 = \delta_2 = 0.5 \text{ mm}$, parallèle à l'axe x_3 (voir Figure III.15). Les figures III.15a et III.15b démontrent une très bonne corrélation des résultats en contraintes. On retrouve les discontinuités des contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} à la frontière du cube comme observées avec la méthode de décomposition de Chiu. Les autres contraintes sont quant à elles continues. Si le maillage employé est grossier, le modèle EF n'est pas capable de capturer correctement ces discontinuités.

Paramètres	Valeurs
Taille du cube $2a_1 \times 2a_2 \times 2a_3$ [mm]	$2.25 \times 2.25 \times 2.25$
Centre du cube $(0, 0, h)$ [mm]	$(0, 0, 2)$
Coefficient de Poisson ν_i	0.3
Eigenstrain ε^*	$10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$

TABLE III.1 – Paramètres utilisés pour la modélisation éléments finis et le modèle semi-analytique.

La figure III.16 montre la comparaison du déplacement normal en surface ($x_3 = 0$) le long de l'axe $x_2 = 0$ entre la méthode de Galerkin et la méthode de décomposition de Chiu. Le déplacement en surface est une quantité déterminée numériquement à partir de contraintes normales en surface dans le cadre de la méthode

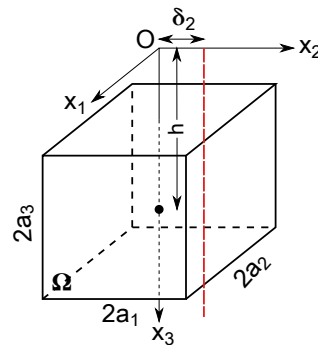
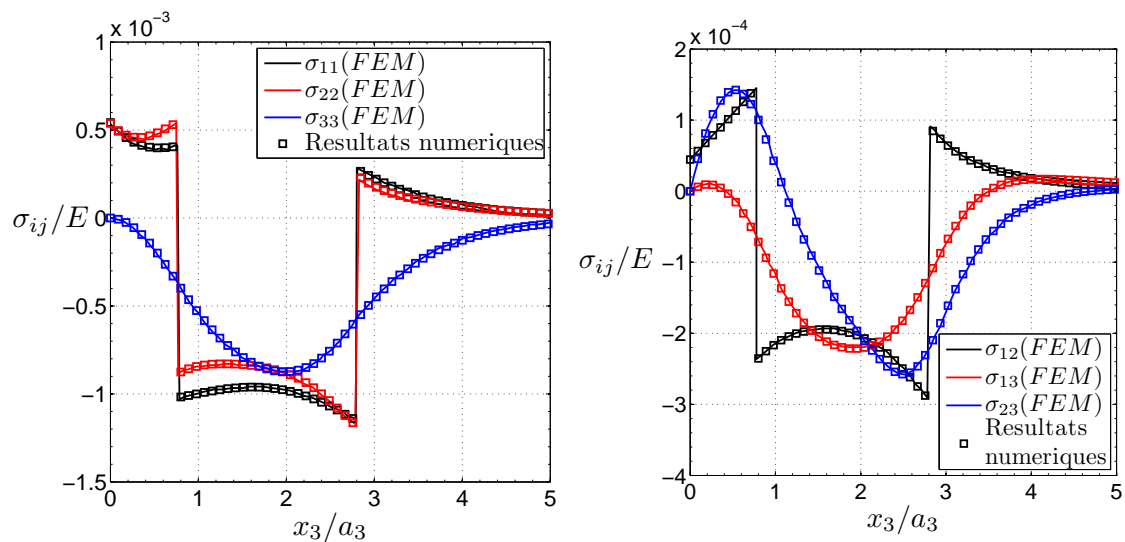


FIGURE III.14 – Inclusion cuboïdale à une profondeur h dans un massif semi-infini ($Ox_1x_2x_3$).



(a) Visualisation des contraintes normales suivant l'axe x_3 .

(b) Visualisation des contraintes tangentielles suivant l'axe x_3 .

FIGURE III.15 – Distributions des contraintes le long de l'axe $x_1 = 0$ et $x_2 = 0.5mm$. Comparaison avec les résultats EF obtenus par Liu [Liu12].

de décomposition. La précision obtenue sur les déplacements en surface est alors dépendante du raffinement utilisé pour la décomposition des contraintes normales. Cette visualisation nous permet donc de se rendre compte des différences que l'on peut obtenir entre une résolution sans approximation (méthode de Galerkin) et avec approximation numérique (méthode de décomposition). Une erreur maximale de 5% est trouvée pour cette configuration.

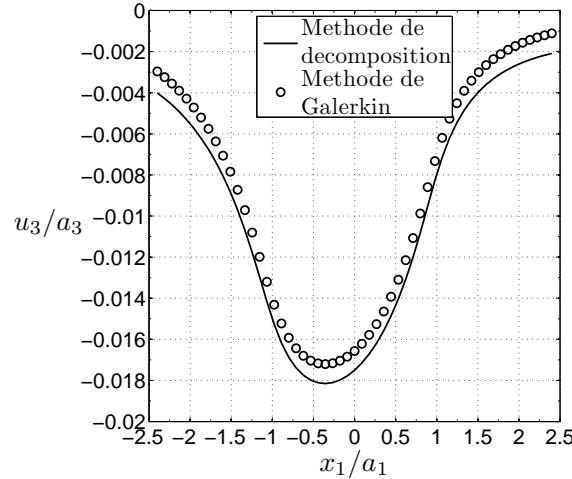


FIGURE III.16 – Visualisation du déplacement normal en surface $x_3 = 0$ le long de l'axe $x_2 = 0$. Comparaison entre la méthode de décomposition de Chiu et la méthode de Galerkin.

5 Prise en compte des influences mutuelles

5.1 Algorithme numérique

Nous cherchons à résoudre le système d'équivalence. Ce système est composé d'équations linéaires et peut s'écrire sous une forme simplifiée, $A\varepsilon^* = B$. La méthode du gradient conjugué (CGM) se prête tout particulièrement à la résolution de systèmes linéaires $Ax = B$ par méthode itérative. Le problème converge rapidement si la matrice G est définie positive symétrique. Pour des matrices non définies symétriques et positives, la solution converge lentement avant de diverger ou d'osciller. L'algorithme de CGM modifié pour la résolution du système $A\varepsilon^* = B$ s'écrit comme,

$$d_{(0)} = r_{(0)} = B - A\varepsilon_{(0)}^* \quad (\text{III.130})$$

$$\tau_{(i)} = \kappa \frac{r_{(i)}^t r_{(i)}}{d_{(i)}^t A d_{(i)}} \quad (\text{III.131})$$

$$\varepsilon_{(i+1)}^* = \varepsilon_{(i)}^* + \tau_{(i)} d_{(i)} \quad (\text{III.132})$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \tau_{(i)} A d_{(i)} \quad (\text{III.133})$$

$$\rho_{(i+1)} = \frac{r_{(i+1)}^t r_{(i+1)}}{r_{(i)}^t r_{(i)}} \quad (\text{III.134})$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \rho_{(i+1)} d_{(i)} \quad (\text{III.135})$$

Où l'indice entier i désigne le nombre d'itérations. Les vecteurs d et r sont les directions et les résidus conjugués, respectivement. Le vecteur r^t est le vecteur transposé de r . La variable τ est la longueur du pas à chaque itération. Le facteur κ est nouvellement introduit au sein de l'algorithme du CGM afin de réduire le pas de convergence avant que la solution diverge ou oscille. Dans la plupart des cas, la solution converge pour un nombre d'itérations compris entre 5 et 10. Une profonde divergence a lieu dans le cas de cavités et sera régulée en jouant sur le coefficient de relaxation κ ($0 < \kappa < 1$). Le terme $A \cdot \varepsilon^*$ de l'équation III.130 est calculé à partir de la partie gauche de l'équation III.6. Le terme $A \cdot d$ est calculé en remplaçant ε^* par d . La technique de 3D-FFT est utilisée pour accélérer le calcul des termes $A \cdot d$. Cette méthode itérative ne dégrade en rien la précision de la solution. Au contraire, elle permet de prendre en compte toutes les interactions mécaniques entre les inclusions hétérogènes. Ceci diffère grandement des méthodes basées sur des contraintes moyennes pour l'étude des interactions dans les matériaux composites [Hor93, Luo87].

5.2 Application sur matériaux revêtus

Le modèle d'homogénéisation a été jusqu'à maintenant appliqué sur des géométries pleines cuboïdales ou ellipsoïdales sans vraiment se préoccuper des influences mutuelles entre hétérogénéités voisines. L'étude d'un matériau revêtu constitue une bonne application pour montrer l'importance d'ajuster les eigenstrains en fonction des inclusions voisines. Fulleringer [Ful11] a étudié durant sa thèse la présence d'un revêtement uniforme et comparé les pressions de contact à celles obtenues par O'Sullivan [O's88].

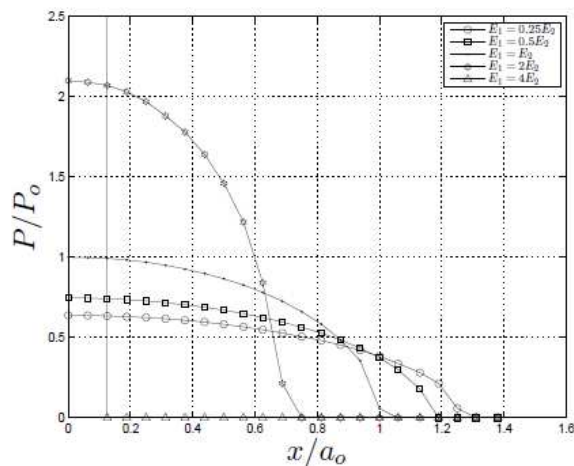


FIGURE III.17 – Distributions de la pression de contact pour différents revêtements avec la méthode semi-analytique EIM : $E_c = 0.25E_s$, $E_c = 0.5E_s$, $E_c = E_s$, $E_c = 2E_s$, et $E_c = 4E_s$ [Ful11].

Une sphère rigide de rayon R est en contact sur un massif semi-infini élastique (substrat) de module d'Young E_s et de coefficient de Poisson ν_s recouvert d'un revêtement uniforme de propriétés matériaux (E_c, ν_c) . Dans le cas du substrat sans revêtement, la théorie de Hertz prescrit un rayon de contact a_0 et une pression de contact maximale P_0 . L'épaisseur du revêtement h est prise telle que $h = a_0$. Les coefficients de Poisson du revêtement et du substrat sont égaux à 0.3. Cinq confi-

gurations de revêtements sont employés : $E_c = 0.25E_s$ et $E_c = 0.5E_s$ (revêtement mou), $E_c = E_s$ (cas homogène), $E_c = 2E_s$ et $E_c = 4E_s$ (revêtement dur). La figure III.17 montre les pressions de contact le long de l'axe $x_2 = 0$ obtenues par Fulleringer [Full11]. Ces résultats révèlent une insuffisance de la méthode semi-analytique à décrire précisément le comportement d'un matériau revêtu en particulier dans le cas d'un revêtement plus dur que le substrat. Lorsque que le revêtement est plus dur que le substrat ($E_c = 4E_s$), la pression de contact augmente telle qu'il ne reste plus qu'un seul point en contact. La source d'erreur avancée dans cette thèse serait que les hétérogénéités sont proches de la surface, repoussant dans ses retranchements les limites de la méthode de décomposition. Afin de palier à ce problème, l'astuce était d'enrichir le substrat au lieu du revêtement. Dans notre cadre d'étude, cette astuce n'est pas applicable étant donné que le substrat sera lui-même enrichi pour tenir compte du caractère composite de celui-ci.

La même analyse est effectuée avec la méthode de l'inclusion équivalente modifiée (MEIM) présentée ici et qui tient compte des influences mutuelles entre les hétérogénéités. Afin de pouvoir analyser les améliorations et/ou inconvénients apportés par les méthodes, la méthode de décomposition en sous-domaines est employée avec la même taille de maille que celle pour l'analyse III.17. Le domaine de calcul de taille $(8a_0 \times 8a_0 \times 2.5a_0)$ est maillé par $128 \times 128 \times 40$ éléments cuboïdaux. La figure III.18 prouve que les modifications apportées à la méthode à travers l'algorithme CGM apporte une très bonne estimation des pressions de contact quelque soit la configuration du revêtement. La discrétisation de la contrainte normale dans la méthode de décomposition en sous-domaines n'est donc pas la source du problème de divergence pour cette étude. La version initiale de la méthode de l'inclusion équivalente utilise uniquement et directement le tenseur d'Eshelby pour relier la déformation induite à l'eigenstrain d'une hétérogénéité. En plus de ne pas prendre en compte l'influence des hétérogénéités voisines, le tenseur d'Eshelby est définie dans un espace infini. Dans la méthode EIM, la résolution des eigenstrains est donc effectuée dans un espace infini, ce qui peut expliquer les problèmes rencontrés auparavant pour des hétérogénéités proches de la surface.

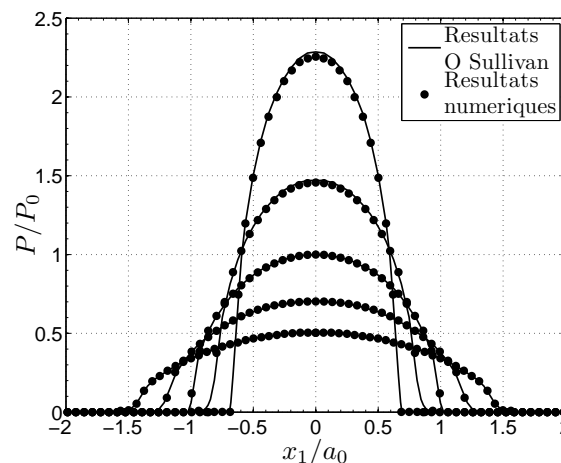


FIGURE III.18 – Distributions des pressions de contact pour différents revêtements avec la méthode semi-analytique MEIM : $E_c = 0.25E_s$, $E_c = 0.5E_s$, $E_c = E_s$, $E_c = 2E_s$, et $E_c = 4E_s$.

6 Prise en compte des gradients de contraintes

6.1 Par approximation polynomiale

6.1.1 Inclusions avec des eigenstrains polynomiales

Considérons une inclusion isotrope dans un massif infini élastique isotrope contenant des eigenstrains pouvant s'écrire sous forme polynomiale,

$$\varepsilon_{ij}^* = E_{ij}^* + E_{ijk}^* x_k + E_{ijkl}^* x_k x_l + \dots \quad (\text{III.136})$$

où les termes $E_{ij}^*, E_{ijk}^*, E_{ijkl}^*, \dots$ sont des constantes avec respect des symétries sur les indices i, j et telles que $E_{ijkl}^* = E_{ijlk}^*$, $E_{ijklm}^* = E_{ijkml}^*, \dots$. Les thèses de Sendekyj [Sen67] et de Moschovidis [Mos75b] constituent les deux grosses références sur les développements autour des expressions polynomiales pour des inclusions ellipsoïdales. Si l'on reprend l'expression générale du champ de déformation (Eq. III.26), on peut enrichir l'expression des potentiels harmoniques et biharmoniques telle que,

$$\Psi_{ij} = E_{ij}^* \psi + E_{ijk}^* \psi_k + E_{ijkl}^* \psi_{kl} + \dots \quad (\text{III.137})$$

$$\Phi_{ij} = E_{ij}^* \phi + E_{ijk}^* \phi_k + E_{ijkl}^* \phi_{kl} + \dots \quad (\text{III.138})$$

et

$$\phi_{ij..k}(x) = \int_{\Omega} \frac{x'_i x'_j \dots x'_k}{|x - x'|} dx' \quad (\text{III.139})$$

$$\psi_{ij..k}(x) = \int_{\Omega} x'_i x'_j \dots x'_k |x - x'| dx' \quad (\text{III.140})$$

Le champ de déformation induit par une inclusion équivalente s'exprime alors comme,

$$\varepsilon_{ij}(x) = D_{ijkl}(x) E_{kl}^* + D_{ijklq} E_{klq}^* + D_{ijklqr} E_{klqr}^* + \dots \quad (\text{III.141})$$

Les expressions des coefficients D_{ijklq} et D_{ijklqr} sont obtenues à partir de l'expression des coefficients D_{ijkl} (Eq. III.32) en remplaçant ϕ et ψ par ϕ_q et ψ_q ou ϕ_{qr} et ψ_{qr} , respectivement.

Inclusion ellipsoïdale

Comme vu précédemment, les potentiels harmoniques et biharmoniques définis par les équations III.139 et III.140 peuvent être exprimés sous forme d'intégrales elliptiques :

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{\Delta(s)} ds, \\ V_i(x) &= \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{(a_i^2 + s) \Delta(s)} ds, \\ V_{ij}(x) &= \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{(a_i^2 + s)(a_j^2 + s) \Delta(s)} ds, \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \quad (\text{III.142})$$

où $\Delta(s) = \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}$, $U(s) = 1 - \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2 + s} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + s} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + s} \right\}$, et λ est la plus grande racine positive de l'équation $U(\lambda) = 0$ (Eq. III.35) pour un point x extérieur à l'inclusion ($\lambda = 0$ pour un point intérieur à l'inclusion). D'après Dyson [Dys91], les expressions III.139 et III.140 deviennent,

$$\phi = V \quad (\text{III.143})$$

$$\phi_n = a_n^2 x_n V_n \quad (\text{III.144})$$

$$\phi_{mn} = a_m^2 \left\{ x_m x_n a_n^2 V_{mn} + \frac{1}{4} \delta_{mn} \left[V - x_r x_r V_r - a_m^2 (V_m - x_r x_r V_{rm}) \right] \right\} \quad (\text{III.145})$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{n,i} &= -\frac{1}{4} \delta_{in} a_n^2 \left\{ (V - x_r x_r V_r) - a_n^2 (V_n - x_r x_r V_{rn}) \right\} \\ &+ a_n^2 x_n x_i (V_i - a_n^2 V_{in}) \end{aligned} \quad (\text{III.146})$$

$$\begin{aligned} \psi_{mn,i} &= a_m^2 a_n^2 \left\{ -\frac{1}{4} (\delta_{mi} x_n + \delta_{ni} x_m) \left[V_m - x_r x_r V_{rm} - a_n^2 (V_{nm} - x_r x_r V_{rmn}) \right] \right. \\ &+ x_m x_n x_i (V_{mn} - a_i^2 V_{imn}) \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{4} a_m^2 \delta_{mn} x_i \left\{ (V - x_r x_r V_r) - (a_i^2 + a_m^2) (V_m - x_r x_r V_{rm}) \right. \\ &+ a_i^4 (V_{mi} - x_r x_r V_{rmi}) \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.147})$$

Par définition, ces intégrales sont liées aux intégrales I (III.37, III.38, III.39) par,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \{ I(\lambda) - x_r x_r I_r(\lambda) \}, \\ V_i(x) &= \frac{1}{2} \{ I_i(\lambda) - x_r x_r I_{ri}(\lambda) \}, \end{aligned} \quad (\text{III.148})$$

$$\begin{aligned} V_{ij}(x) &= \frac{1}{2} \{ I_{ij}(\lambda) - x_r x_r I_{rij}(\lambda) \}, \\ &etc. \end{aligned} \quad (\text{III.149})$$

Lorsque le point d'analyse x est à l'intérieur de l'inclusion, $\lambda = 0$ et les intégrales I, I_i, I_{ij} , sont des constantes. Les dérivées premières des intégrales V sont donc des fonctions linéaires et les dérivées secondes sont constantes. Ainsi, pour un point à l'intérieur de l'inclusion, les coefficients $D_{ijklq}(x)$ sont des fonctions linéaires et les coefficients $D_{ijklqr}(x)$ sont des fonctions quadratiques telles que,

$$D_{ijklq}(x) = D_{ijklq,m}(0) x_m \quad (\text{III.150})$$

$$D_{ijklqr}(x) = D_{ijklqr}(0) + \frac{1}{2} D_{ijklqr,mn}(0) x_m x_n \quad (\text{III.151})$$

Le champ de déformation induit à l'intérieur de l'inclusion se trouve alors être de forme polynomiale de degré $n, (n-2), (n-4), \dots$, si l'eigenstrain est polynomiale de degré n . Cette conclusion fut d'abord établi par Eshelby [Esh61] puis par Asaro et Barnett [Asa75] pour les matériaux anisotropes.

Les intégrales I_n et I_{mn} sont exprimées à partir des intégrales I (III.37,III.38,III.39) telles que,

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda) &= 4\pi \frac{a_1 a_2 a_3}{\Delta(\lambda)} \\ I_{12}(\lambda) &= \frac{[I_2(\lambda) - I_1(\lambda)]}{a_1^2 - a_2^2} \\ 3I_{11}(\lambda) &= 4\pi \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 + \lambda) \Delta(\lambda)} - I_{12}(\lambda) - I_{13}(\lambda) \\ I_{123}(\lambda) &= \frac{[I_{23}(\lambda) - I_{13}(\lambda)]}{a_1^2 - a_2^2} \end{aligned} \quad (\text{III.152})$$

$$I_{112}(\lambda) = \frac{[I_{12}(\lambda) - I_{11}(\lambda)]}{a_1^2 - a_2^2} \quad (\text{III.153})$$

$$I_{113}(\lambda) = \frac{[I_{13}(\lambda) - I_{11}(\lambda)]}{a_1^2 - a_3^2} \quad (\text{III.154})$$

$$5I_{111}(\lambda) = 4\pi \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 + \lambda)^2 \Delta(\lambda)} - I_{112}(\lambda) - I_{113}(\lambda)$$

où

$$2 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Delta(s)} \right) = - \frac{(a_1^2 + s)^{-1} + (a_2^2 + s)^{-1} + (a_3^2 + s)^{-1}}{\Delta(s)} \quad (\text{III.155})$$

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\}} \quad (\text{III.156})$$

Les permutations cycliques suivant les indices permettent d'obtenir l'ensemble des intégrales I.

6.1.2 Méthode de l'inclusion équivalente

La méthode de l'inclusion équivalente peut être étendue dans le cas où le champ de contraintes appliqué est non-uniforme. Généralement, lorsque le champ de contraintes est polynomial d'ordre n , il en résulte une eigenstrain équivalente de forme polynomiale d'ordre n . Cette observation émane du fait que le champ de contraintes induit par une eigenstrain polynomiale de degré n est la somme de polynôme de degré n , $n-2$, $n-4$,... à l'intérieur de l'inclusion. Supposons que le champ de déformation appliqué s'écrit comme un polynôme de degré n ,

$$\varepsilon_{ij}^0 = E_{ij}^0 + E_{ijk}^0 x_k + E_{ijkl}^0 x_k x_l + \dots \quad (\text{III.157})$$

Où les coefficients E_{ij}^0 , E_{ijk}^0 , E_{ijkl}^0 sont des constantes. Ces coefficients sont estimés à partir d'une régression multiple par la méthode des moindres carrés. Cela nécessite de disposer d'un minimum de points de discrétisation à l'intérieur de l'hétérogénéité selon le degré du polynôme à déterminer. Étant donné que l'eigenstrain équivalente s'écrit également sous forme d'un polynôme de degré n (Eq. III.136), le champ de déformation s'écrit sous forme polynomiale en série de Taylor étendue autour du centre de l'inclusion hétérogène x^I tel que :

$$\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}(x^I) + \varepsilon_{ij,k}(x^I) x_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij,kl}(x^I) x_k x_l + \dots \quad (\text{III.158})$$

En combinant les équations III.158 et III.141, on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(x) = & D_{ijkl}(x^I) E_{kl}^* + D_{ijkilm}(x^I) E_{klm}^* + D_{ijklmnn}(x^I) E_{klmn}^* + \dots \\
& + \{D_{ijkl,p} E_{kl}^* + D_{ijkilm,p} E_{klm}^* + D_{ijklmnn,p} E_{klmn}^* + \dots\} x_p \\
& + \frac{1}{2} \{D_{ijkl,pq} E_{kl}^* + D_{ijkilm,pq} E_{klm}^* + D_{ijklmnn,pq} E_{klmn}^* + \dots\} x_p x_q \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{III.159}$$

L'équation d'équivalence peut être résolue par identification des coefficients associés aux termes en $1, x, x^2$ telle que,

$$\begin{aligned}
\Delta C_{ijkl} [D_{klmnn} E_{mn}^* + D_{klmnp} E_{mnp}^* + D_{klmnpq} E_{mnpq}^* + \dots] \\
& - C_{ijkl}^m E_{kl}^* = -\Delta C_{ijkl} E_{kl}^0, \\
\Delta C_{ijkl} [D_{klmnn,s} E_{mn}^* + D_{klmnp,s} E_{mnp}^* + D_{klmnpq,s} E_{mnpq}^* + \dots] \\
& - C_{ijkl}^m E_{kls}^* = -\Delta C_{ijkl} E_{kls}^0, \\
\Delta C_{ijkl} [D_{klmnn,st} E_{mn}^* + D_{klmnp,st} E_{mnp}^* + D_{klmnpq,st} E_{mnpq}^* + \dots] \\
& - C_{ijkl}^m E_{klst}^* = -\Delta C_{ijkl} E_{klst}^0, \\
& \text{etc.}
\end{aligned} \tag{III.160}$$

6.1.3 Gradients générés par les influences mutuelles entre hétérogénéités

Les influences mutuelles entre les inclusions sont la première source de gradients de contraintes. Même si l'inclusion est soumise à un champ de contrainte extérieur uniforme, les inclusions voisines ajoutent des surcontraintes à l'intérieur d'une inclusion. Le champ de contrainte appliqué sur cette inclusion n'est donc plus uniforme. Comme premier exemple, nous considérons deux hétérogénéités sphériques Ω_1 et Ω_2 de rayon $a_1 = a_2 = a_3 = a$ entourées d'un massif infini homogène isotrope soumis à une contrainte uniforme σ_0 . La disposition des hétérogénéités est présentée en Figure III.19. Le coefficient de Poisson des hétérogénéités et de la matrice sont identiques $\nu_m = \nu_i = 0.3$. Deux configurations matériaux sont étudiées : dans la première les hétérogénéités sont deux fois plus dures que la matrice, et 12 fois plus dures $\gamma = 12$ dans la seconde. Les valeurs de contraintes obtenues et présentées par la suite sont normalisées par la contrainte uniforme σ_0 obtenue à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 considérée seule (sans interaction).

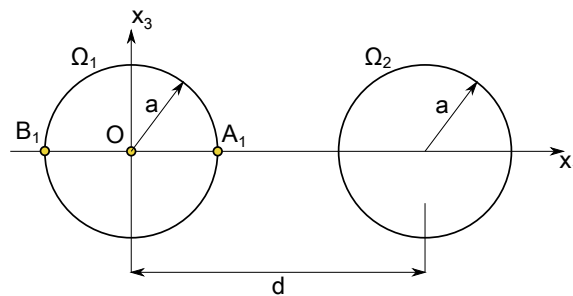


FIGURE III.19 – Interactions entre deux hétérogénéités sphériques Ω_1 et Ω_2 séparées d'une distance d dans un massif infini élastique isotrope.

La Figure III.20 montre les variations de contraintes σ_{11} et $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 le long de l'axe x_1 pour trois distances de séparation $d = [2.125a, 2.5a, 3a]$. La contrainte appliquée à l'infini est considérée uniaxiale telle que $\sigma_{11} = \sigma_0$. Les figures III.20a, III.20c et III.20e considèrent des hétérogénéités deux fois plus dures que la matrice ($\gamma = 2$). Les Figures III.20b, III.20d et III.20f considèrent des hétérogénéités 12 fois plus dures que la matrice ($\gamma = 12$). On peut noter que la formulation au second ordre permet de mieux capter les valeurs de contraintes à l'interface autour du point A_1 . Cependant, une expression au second ordre des déformations n'est pas adaptée à la loi d'évolution des contraintes à l'intérieur de l'inclusion hétérogène pour cette configuration bien précise de deux hétérogénéités soumises à un chargement uniaxial dans un espace infini. Pour cela il serait nécessaire d'étendre l'expression des polynômes jusqu'au 6^{ième} ordre. Ceci demanderait de déterminer et de stocker un nombre considérable de fonctions d'influence. Les performances de calcul s'en trouveraient fortement dégradées. Dans certains cas les eigenstrains peuvent s'exprimer sous forme d'une gaussienne ou encore sous forme exponentielle [Sha03].

Néanmoins ce type de chargement ne correspond pas à un chargement généré par le contact entre deux massifs. La Figure III.21 montre les variations de contraintes à l'intérieur de l'hétérogénéité Ω_1 générées par une contrainte infinie triaxiale $\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij}$. La distribution des contraintes est ici adaptée à une formulation au second ordre pour ce type de chargement, excepté dans un cas très sollicitant comme observé sur la Figure III.21b. La contrainte aux alentours du point B_1 est surestimée quelque soit la configuration ; à l'inverse, pour un chargement uniaxial, la contrainte est sous-estimée.

Une deuxième propriété, autre que le type de chargement appliqué et pouvant montrer l'importance d'une expression au second ordre des eigenstrains, est la dureté ou la souplesse du matériau hétérogène. La Figure III.22 montre les variations de la contrainte normale σ_N et tangentielle σ_T au point A_1 pour différents rapports de module d'Young $\gamma = E_i/E_m$. Les hétérogénéités sont espacées d'une distance $d = 2.25a$ afin de se placer dans un cas très sollicitant. La contrainte appliquée est considérée uniaxiale $\sigma_{11} = \sigma_0$. Clairement une formulation au second ordre est nécessaire pour des hétérogénéités nettement plus dures que la matrice. A l'inverse, pour des hétérogénéités plus molles, l'extension des formulations au second ordre n'apporte pas forcément de nettes améliorations. On note également une difficulté commune des deux approches à capter la contrainte normale à l'interface pour de grands rapports de module d'Young ($\gamma \geq 40$).

Étudier uniquement deux hétérogénéités en interaction est un cas particulier ne sollicitant en quelques sortes qu'une « demi-partie » de l'hétérogénéité et accentuant ainsi la surcontrainte à l'interface proche de l'hétérogénéité voisine. Prenons plutôt le cas où une hétérogénéité sphérique Ω_1 est entourée de 6 autres hétérogénéités de même rayon et uniformément espacées d'une distance d (voir Figure III.23). La Figure III.24 montre les variations de contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 le long de l'axe x_1 pour trois distances de séparation $d = [2.2a - 2.6a - 3a]$. La contrainte appliquée à l'infini est considérée triaxiale telle que $\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij}$. Les figures III.24a, III.24c et III.24e considèrent des hétérogénéités deux fois plus dures que la matrice ($\gamma = 2$). Les Figures III.24b, III.24d et III.24f considèrent des hétérogénéités 12 fois plus dures que la matrice ($\gamma = 12$). Globalement, la formulation

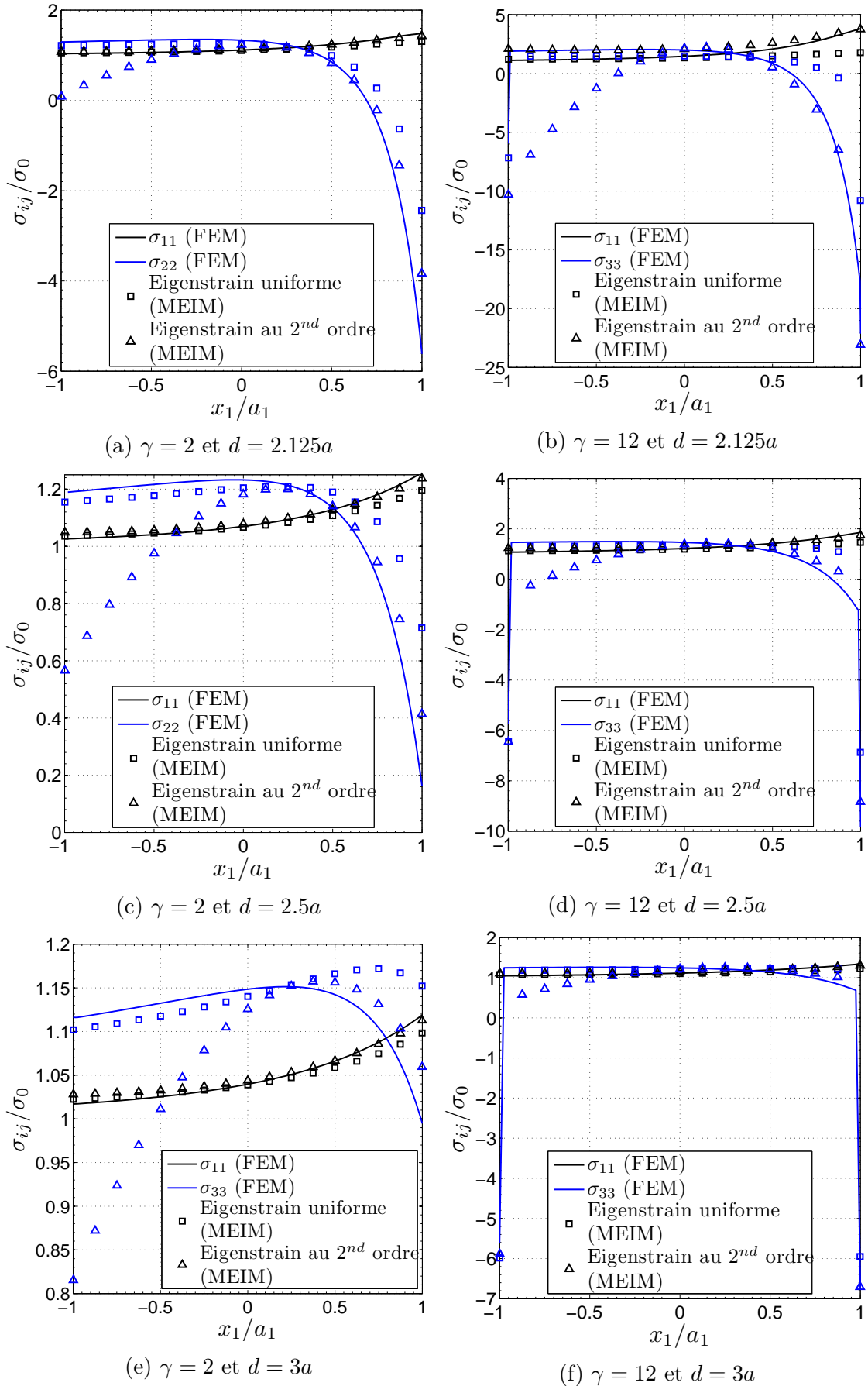


FIGURE III.20 – Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 pour différentes distances de séparation d et rapports de modules de Young γ , générées par une contrainte externe uniaxiale $\sigma_{11} = \sigma_0$. Comparaisons entre les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis EBC et ceux obtenus avec la méthode d'inclusion équivalente modifiée MEIM avec une formulation uniforme et au 2nd ordre.

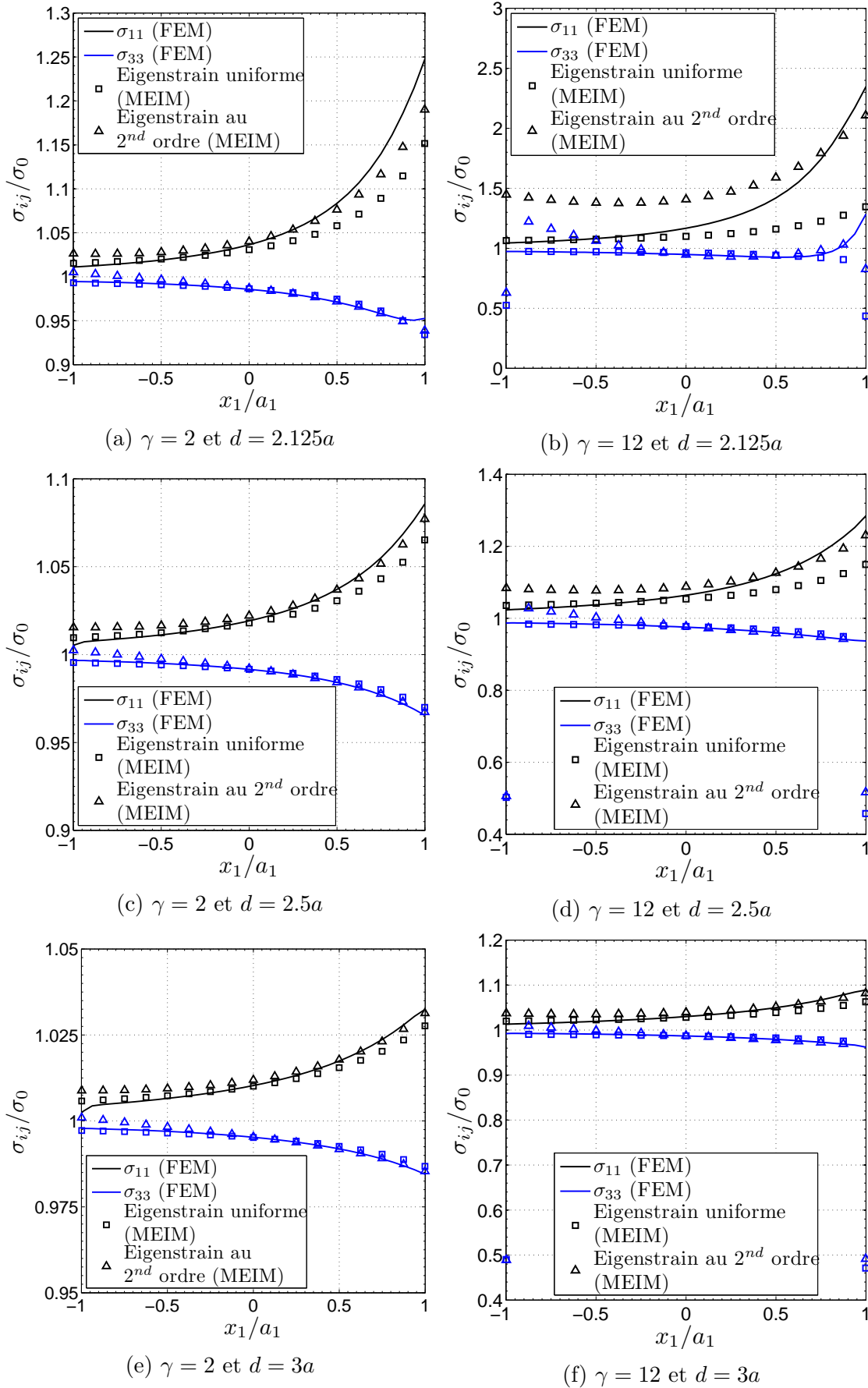


FIGURE III.21 – Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 pour différentes distances de séparation d et rapports de modules de Young γ , générées par une contrainte externe triaxiale $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$. Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode d'Éléments Finis FF et par la Méthode d'Inclusion Équivalente MISEM avec formulation uniforme et formulation au 2nd ordre.

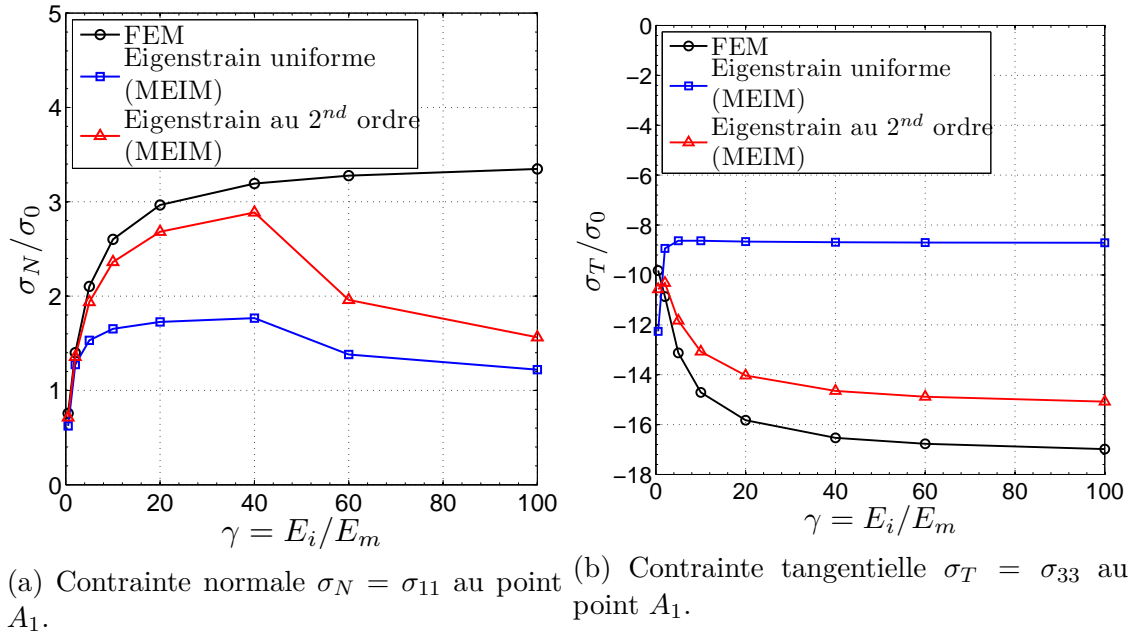


FIGURE III.22 – Variation de la contrainte à l’interface de l’hétérogénéité Ω_1 au point A_1 en fonction du rapport de rigidité γ .

au second ordre décrit les mêmes courbes de contraintes que celles obtenues par éléments finis mais avec un « offset » supplémentaire correspondant à la différence de contrainte au centre de l’hétérogénéité. Il reste néanmoins intéressant d’utiliser l’approche au second ordre comme on peut le voir sur la Figure III.24b.

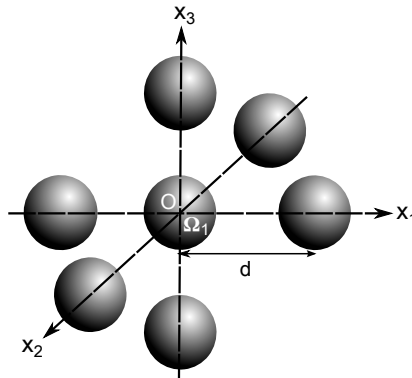


FIGURE III.23 – Interactions entre 7 hétérogénéités de même rayon et uniformément espacées d’une distance d dans un espace infini isotrope.

6.1.4 Gradients générés par le contact

Un contact entre deux massifs élastiques génère de forts gradients de contraintes proche de la surface de contact. L’analyse proposée ici consiste à étudier un contact sphère/sphère où l’un des massifs contient une hétérogénéité sphérique de rayon $a_1 = a_2 = a_3 = a$ positionnée à une profondeur $h = a$ et $h = 2a$ (voir Figure III.25). Les données géométriques et matériaux de cette étude sont répertoriées dans le tableau III.2. Un modèle éléments finis avec les mêmes propriétés caractéristiques

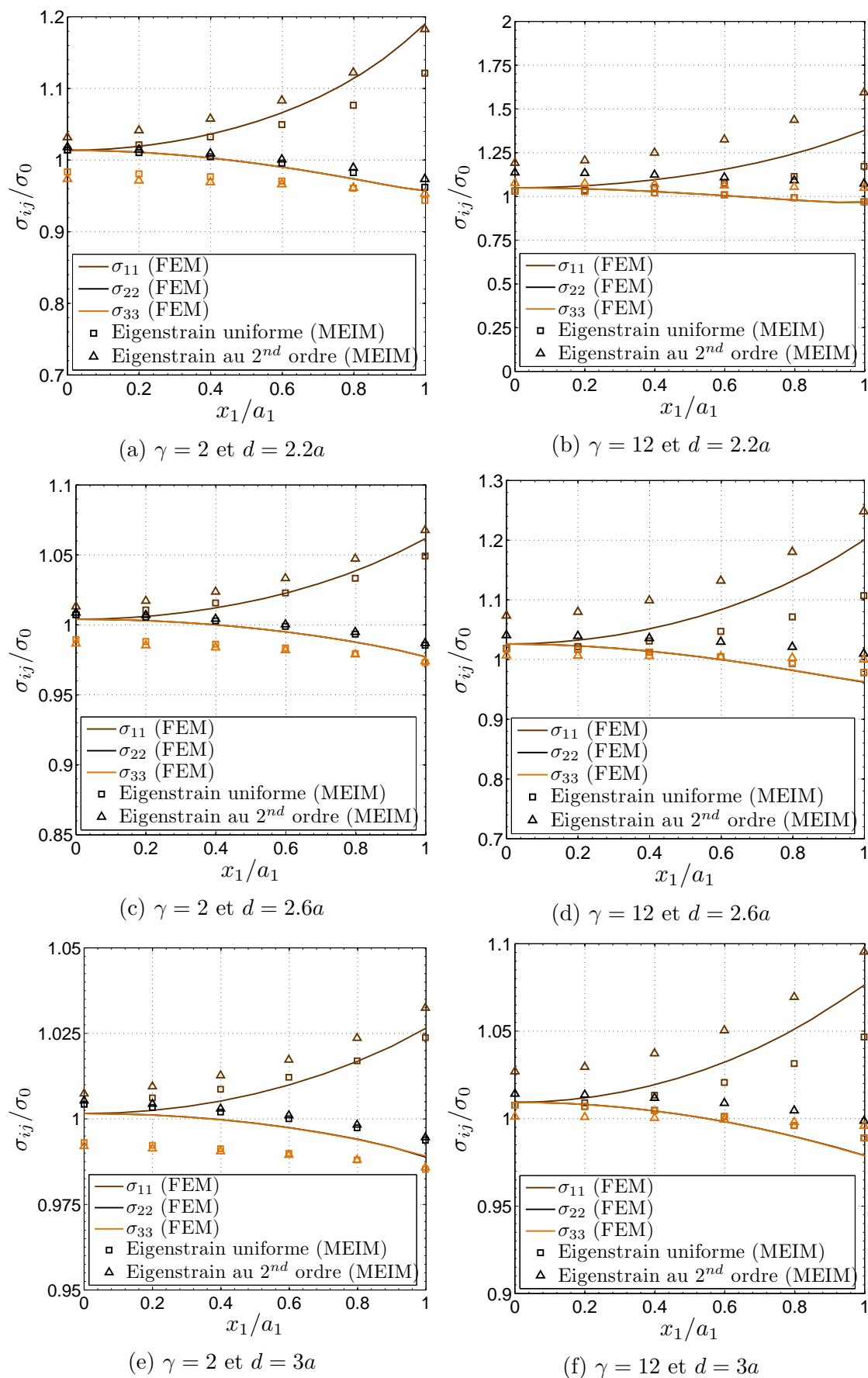


FIGURE III.24 – Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion pour différentes distances de séparation d et rapports de modules d'Young γ , générées par une contrainte externe triaxiale $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$. Comparaisons entre les résultats obtenus par EF et par la méthode d'inclusion équivalente modifiée avec formulation

de l'étude sert de base de comparaison pour les résultats obtenus par la méthode MEIM avec une formulation uniforme et au second ordre des eigenstrains.

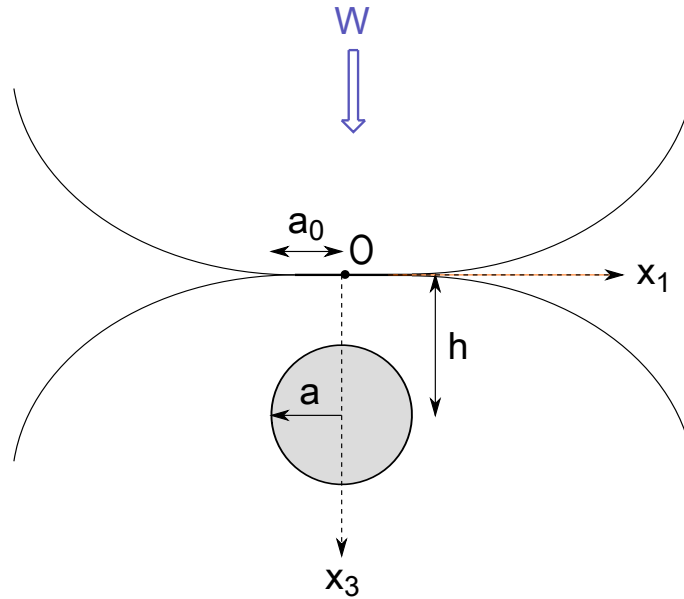


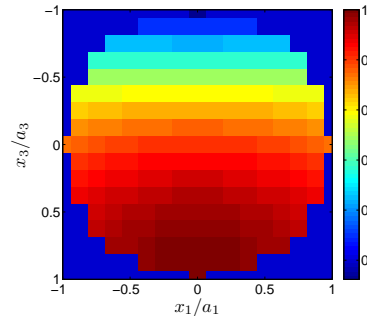
FIGURE III.25 – Schéma de contact sphère/sphère avec un des massifs élastiques qui contient une hétérogénéité sphérique de rayon a à une profondeur h .

Propriétés des massifs	
Rayons	$R_1 = R_2 = 5.48mm$
Modules d'Young	$E_1 = E_2 = 210GPa$
Coefficients de Poisson	$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$
Chargement de Hertz	
Effort normal	$W = 10N$
Pression de Hertz	$P_0 = 1507.95MPa$
Rayon de Hertz	$a_0 = 56.3\mu m$
Propriétés de l'hétérogénéité	
Rayon	$a = 10\mu m$
Module d'Young	$E_i = 420GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu_i = 0.3$

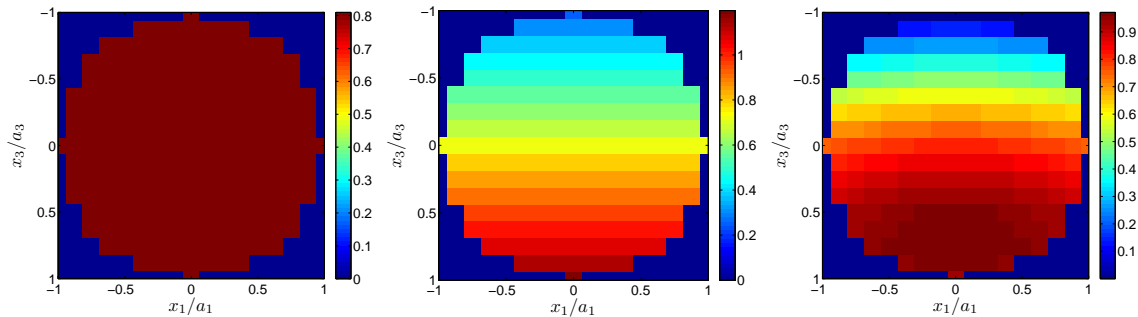
TABLE III.2 – Paramètres géométriques et matériaux de l'étude.

Avant de déterminer et montrer la contrainte induite par la présence d'une hétérogénéité sphérique dans une demi-sphère soumise à un gradient de déformation générée par une condition de contact à l'interface des deux massifs élastiques, il est nécessaire de déterminer explicitement l'expression polynomiale de la déformation appliquée à l'hétérogénéité. Une interpolation par la méthode des moindres carrés en trois dimensions permet de trouver les coefficients associés à l'équation III.157. La Figure III.26 montre le champ de déformation ε_{11} interpolé dans le cas uniforme III.26b, linéaire III.26c, et quadratique III.26d à l'intérieur de l'hétérogénéité sphérique dans un plan de coupe $x_2 = 0$. La déformation ε_{11} est normalisée par la déformation maximale initialement appliquée à l'intérieur de l'hétérogénéité. On

peut noter que le champ interpolé au second ordre est plutôt fidèle au champ appliqué initialement III.26a. La méthode d'interpolation n'a pas vraiment fait l'objet d'investigations précises mais peut être un point source à souligner si les apports de la méthode par approximation polynomiale ne sont pas satisfaisants.



(a) Champ de déformation ε_{11} appliqué initialement.

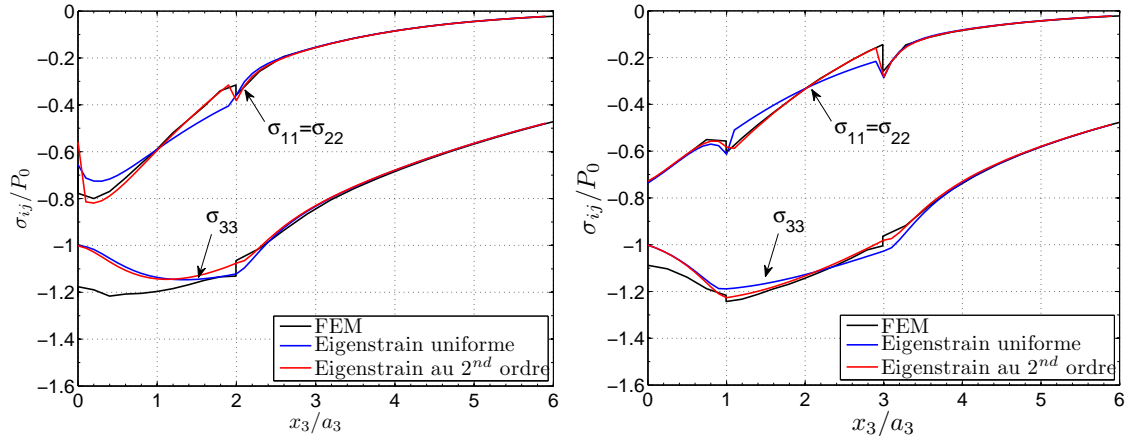


(b) Champ de déformation ε_{11} uniforme. (c) Champ de déformation ε_{11} interpolé au premier ordre. (d) Champ de déformation ε_{11} interpolé au second ordre.

FIGURE III.26 – Champ de déformation ε_{11} normalisé par la déformation maximale générée par le contact dans une hétérogénéité sphérique.

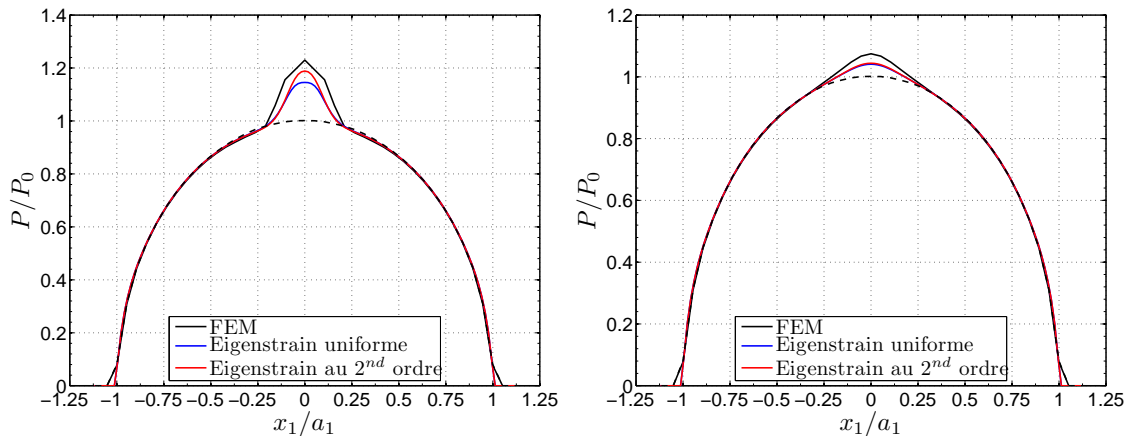
La Figure III.27 montre les variations des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en profondeur le long de l'axe $x_1 = x_2 = 0$. Ces contraintes sont obtenues à la fois par la méthode éléments finis, par la méthode MEIM avec formulation uniforme des eigenstrains, et par la méthode MEIM avec formulation au second ordre des eigenstrains. On peut noter que les contraintes obtenues avec une formulation au 2^{nd} ordre à l'intérieur de l'inclusion se rapprochent de la solution EF. Cependant, la contrainte normale σ_{33} est très mal estimée proche de la surface de contact, d'autant plus si l'hétérogénéité est tangente à la surface de contact (voir Figure III.27a). Cette erreur d'estimation doit en principe fortement influencer le profil de pression et tout particulièrement la pression de contact maximale. La Figure III.28 montre la pression de contact le long de l'axe $x_2 = 0$ pour une hétérogénéité sphérique tangente à la surface ($h = a$) et une hétérogénéité à une profondeur $h = 2a$. Sans surprise, dans le cas où l'hétérogénéité est disposée à une profondeur $h = 2a$, une erreur de 10% entre la pression maximale obtenue par la méthode d'inclusion équivalente et la méthode EF, est causée par la mauvaise estimation de la contrainte σ_{33} . On peut néanmoins noter que, dans le cas où l'hétérogénéité est tangente à la surface de contact ($h = a$), la formulation au 2^{nd} ordre permet de se rapprocher de la solution EF.

Les résultats obtenus dans cette étude sont néanmoins fortement dépendants



(a) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = a$. (b) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = 2a$.

FIGURE III.27 – Distributions des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} le long de l'axe x_3 en $x_1 = x_2 = 0$. Comparaisons entre les résultats obtenues par la méthode EF et par la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2nd ordre.



(a) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = a$. (b) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = 2a$.

FIGURE III.28 – Distributions de la pression de contact en $x_2 = 0$ obtenues par la méthode EF, et la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2nd ordre.

des dimensions de l'hétérogénéité en comparaison de la taille du contact, menant à réfléchir sur un éventuel effet d'échelle. Une seconde étude est alors menée sur un contact élastique sphère/sphère contenant une hétérogénéité sphérique de rayon $a_1 = a_2 = a_3 = a$ à une profondeur $h = 2a$ telle que le rapport entre le rayon de contact et de l'hétérogénéité varie selon $a_0/a = [2; 3; 5; 10; 20]$. Les données géométriques et matériaux de cette étude sont répertoriées dans le tableau III.3. La Figure III.29 montre les contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en profondeur le long de l'axe $x_1 = x_2 = 0$ obtenues par la méthode de l'inclusion équivalente modifiée (MEIM) avec une formulation uniforme et une formulation au 2nd ordre des eigenstrains pour les différents rayons de l'hétérogénéité listés dans le Tableau III.3. On peut noter que pour un rapport a_0/a compris entre 5 et 10, la prise en compte du second ordre dans les formulations ne devient plus nécessaire. Néanmoins les contraintes σ_{11} et σ_{22} , évoluant linéairement à l'intérieur de l'hétérogénéité, varient différemment selon la formulation pour un rapport $a_0/a > 5$. Une formulation au premier ordre de l'eigenstrain serait alors suffisante pour un rapport $a_0/a > 5$. La Figure III.30 montre la différence en % entre la contrainte de Von Mises obtenue avec la formulation uniforme de l'eigenstrain et celle obtenue avec la formulation au second ordre en tout point de discrétisation du plan $x_2 = 0$ pour les différents rapports de rayons. On peut noter que, pour de faibles rapports $a_0/a < 5$, des zones à l'interface de l'hétérogénéité et suivant la direction du contact sont plus sollicitées avec la formulation du second ordre. Ces zones correspondent à des zones d'amorçage de fissures que l'on pourrait éventuellement retrouver expérimentalement. A partir d'un rapport $a_0/a > 5$, les différences se concentrent à l'intérieur de l'inclusion.

Les Figures III.31a et III.31b confirment les observations faites avec les autres visualisations des résultats de l'étude. L'erreur maximale sur la pression de contact reste toutefois inférieure à 4%.

Propriétés des massifs	
Rayons	$R_1 = R_2 = 0.21mm$
Modules d'Young	$E_1 = E_2 = 210GPa$
Coefficients de Poisson	$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$
Chargement de Hertz	
Effort normal	$W = 80mN$
Pression de Hertz	$P_0 = 4213MPa$
Rayon de Hertz	$a_0 = 3\mu m$
Propriétés de l'hétérogénéité	
Rayon	$a = [1.5\mu m; 1\mu m; 0.6\mu m; 0.3\mu m; 0.15\mu m]$
Module d'Young	$E_i = 630GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu_i = 0.3$

TABLE III.3 – Paramètres géométriques et matériaux de l'étude.

6.2 Par méthode de voxelisation

La technique de voxelisation consiste à discrétiser une géométrie volumique (tri-dimensionnelle) en éléments parallélépipédiques, équivalent à la pixelisation en bidimensionnel. Une hétérogénéité avec des dimensions du même ordre de grandeur que

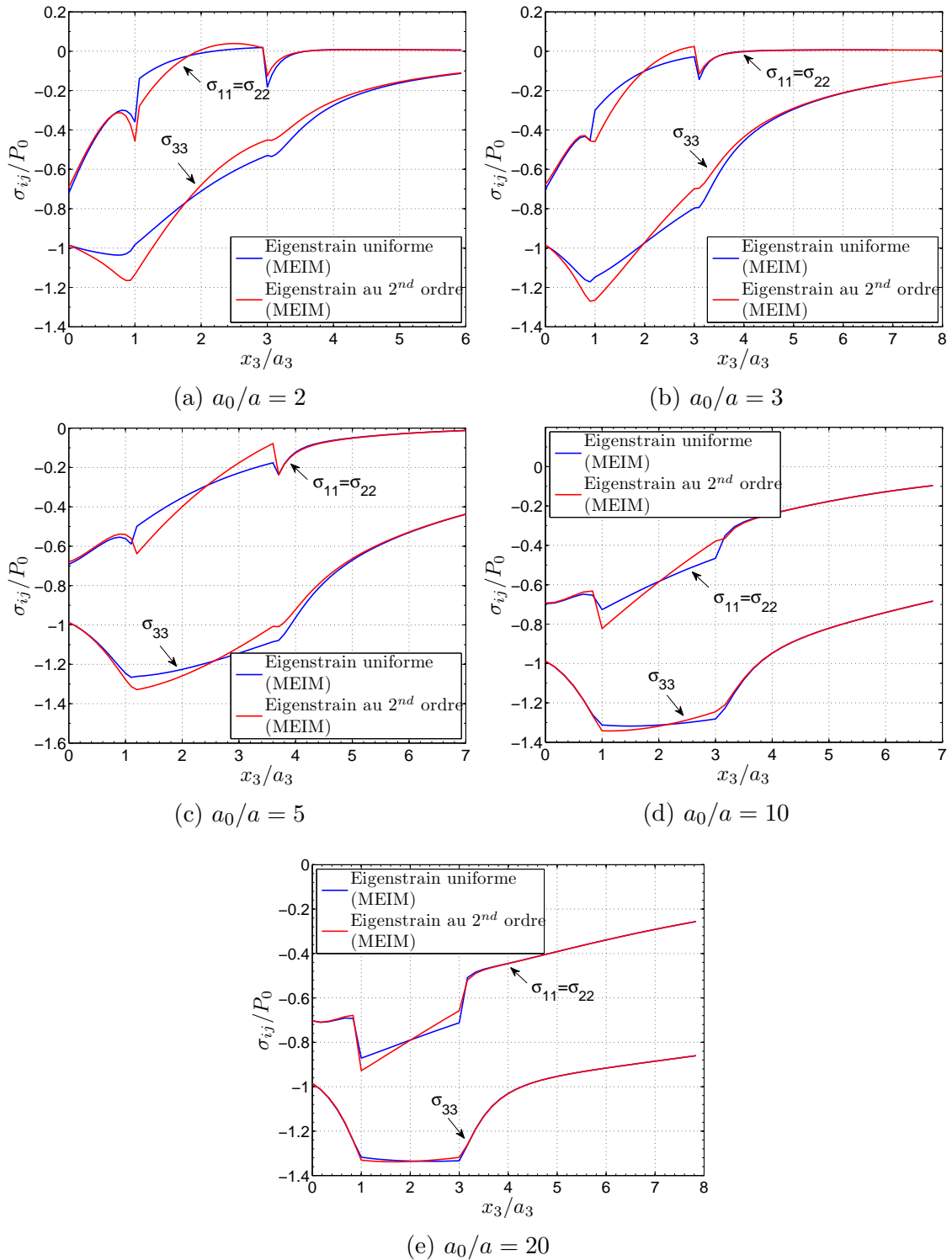


FIGURE III.29 – Distributions des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} le long de l'axe x_3 en $x_1 = x_2 = 0$ pour différents rapports géométriques a_0/a . Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2nd ordre.

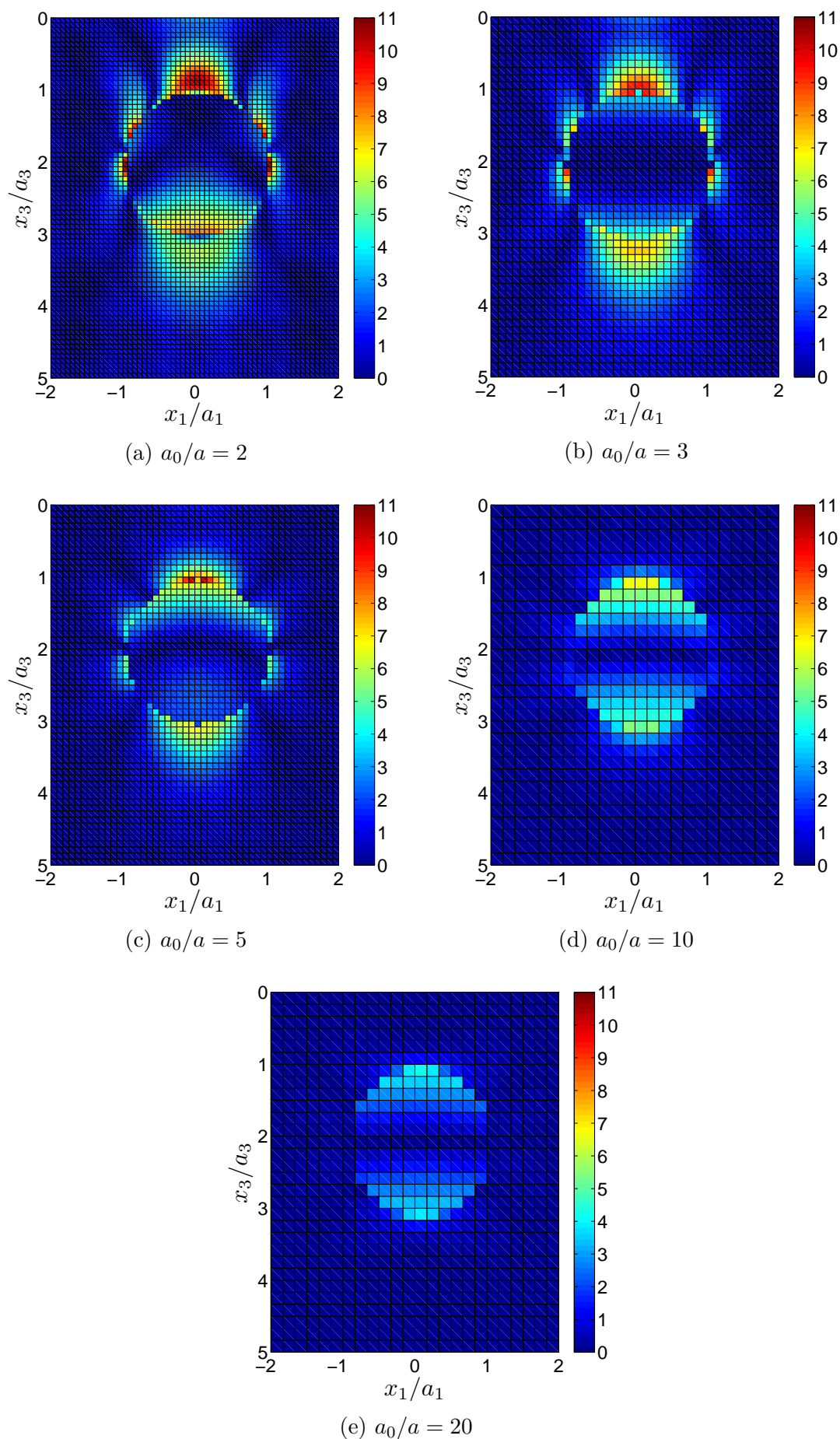
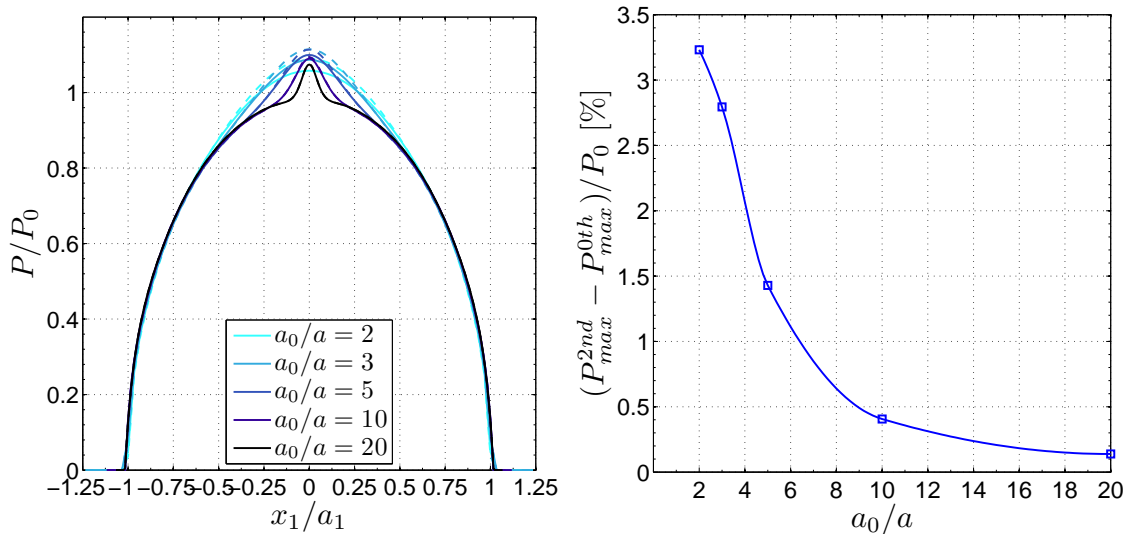


FIGURE III.30 – Différence en % entre la contrainte de Von Mises obtenue à partir de cette thèse et celle obtenue à l'adresse <http://theses.inra.fr/publication/2013/INRA0042/these.pdf> dans un plan de coupe $x_2 = 0$ pour différents rapports de rayons.



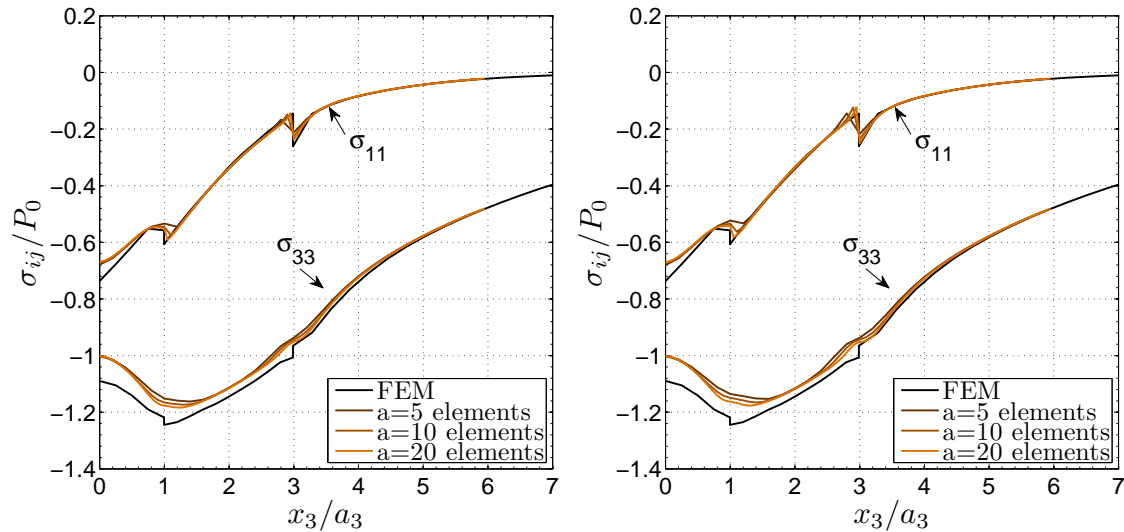
(a) Évolution de la pression de contact en $x_2 = 0$ pour différents rapports géométriques a_0/a . (b) Écart de pression maxi obtenue entre les deux formulations en fonction du rapport géométriques a_0/a .

FIGURE III.31 – Visualisation des pressions de contact obtenues par la formulation uniforme et la formulation au 2nd ordre de l'eigenstrain pour différents rapports de rayons.

la zone de contact peut alors être discrétisée en éléments cuboïdales élémentaires correspondant à la discrétisation du modèle. La finesse de discrétisation doit permettre de décrire au mieux la géométrie de l'hétérogénéité. Les gradients de contraintes générés par le contact pourront alors être captés par les hétérogénéités élémentaires cuboïdales si la discrétisation le permet. Une étude de la taille de maille nécessaire à la bonne prise en compte du gradient de contrainte est donc nécessaire.

Un modèle éléments finis, identique à celui utilisé pour l'approximation polynomiale, va permettre de comparer les résultats obtenus avec le code semi-analytique pour différentes tailles de maille. Une hétérogénéité sphérique, de rayon a deux fois plus dure que la matrice et de coefficient de Poisson identique à la matrice, est disposée à une profondeur $h = 2a$. Les caractéristiques géométriques et matériaux sont rappelées dans le Tableau III.2. Trois configurations de maillage avec un pas de $(2\mu m, 1\mu m, 0.5\mu m)$ uniforme dans les trois directions (x_1, x_2, x_3) sont simulées avec prise en compte ou non des influences mutuelles (activation de l'algorithme de gradient conjugué CGM). Pour une taille de maille de $1\mu m$, le rayon de la surface de contact est constitué d'environ 56 éléments et le rayon de l'inclusion hétérogène est discrétisé en 10 éléments cuboïdales élémentaires, ce qui revient un rapport de $1/5^{\text{ième}}$ environ entre la taille de l'inclusion et la dimension de la zone de contact. La Figure III.32 montre la distribution des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en profondeur le long de l'axe $x_1 = x_2 = 0$. Aucune différence est constatée entre la Figure III.32a et III.32b laissant penser que le gradient de contrainte généré par le contact masque les influences mutuelles entre les hétérogénéités cuboïdales élémentaires. De la même manière que les observations faites dans le cas d'une approximation polynomiale, la contrainte σ_{33} reste mal estimée proche de la surface de contact. De plus, on peut noter qu'une discrétisation fine de l'hétérogénéité permet de mieux décrire les

contraintes à l'interface. D'un point de vue macroscopique, la Figure III.33 nous montre un profil de pression identique quelque soit la configuration choisie. Cette observation dépend toutefois de la profondeur de l'hétérogénéité.



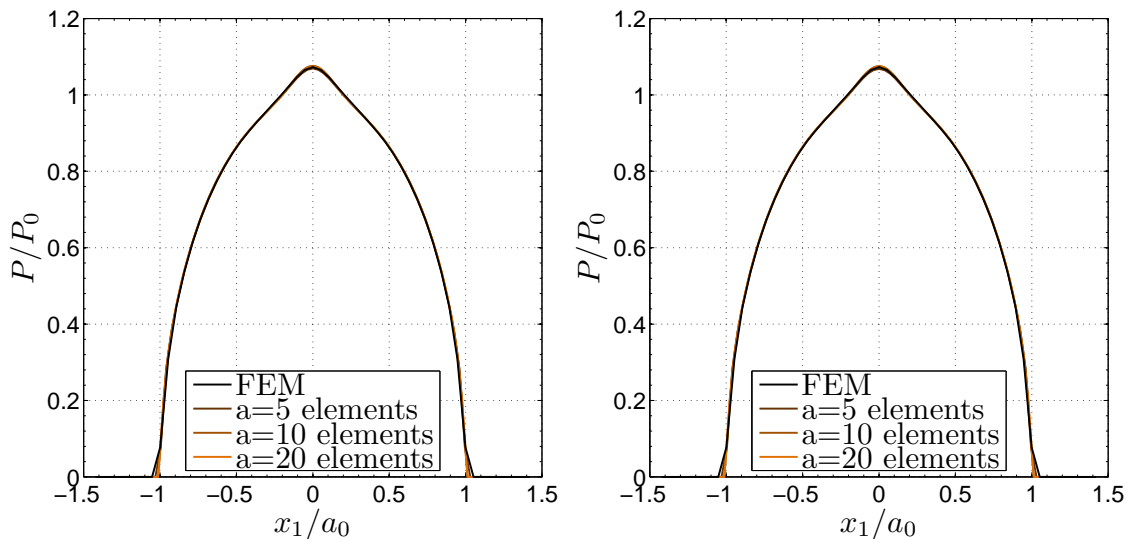
(a) Sans prise en compte des influences mutuelles - Désactivation du CGM. (b) Avec prise en compte des influences mutuelles - Activation du CGM.

FIGURE III.32 – Évolutions des contraintes le long de l'axe x_3 pour différentes tailles de discrétisation.

On se place dans le cas où l'hétérogénéité est tangente à la surface de contact ($h = a$) avec un pas de discrétisation de $1\mu m$. La Figure III.34 montre la distribution des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en profondeur le long de l'axe $x_1 = x_2 = 0$, soit pour une hétérogénéité tangente à la surface (Figure III.34a), soit pour une hétérogénéité à une profondeur $h = 2a$ (Figure III.34b). Les influences mutuelles sont dans les deux cas prises en compte à travers l'utilisation de l'algorithme de CGM. On constate les mêmes observations que celles établies pour l'approximation polynomiale. Les résultats obtenus avec une approche de voxelisation sont quasi-identiques à ceux obtenus avec une approximation polynomiale au second ordre. Néanmoins, en regardant le profil de pression obtenue pour une hétérogénéité tangente à la surface (Figure III.35a), on s'aperçoit que la discrétisation cubique cause des problèmes en surface, contrairement à l'approximation polynomiale.

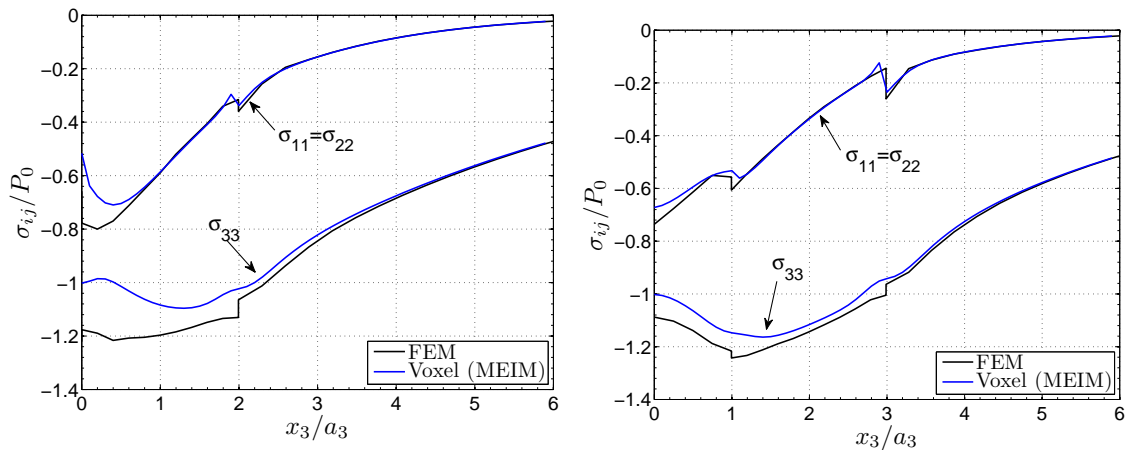
Un deuxième point à vérifier est la bonne prise en compte des interactions mécaniques entre les hétérogénéités non discrétisées. Les résultats précédents valident une prise en compte correcte des influences mutuelles entre les inclusions cuboïdales élémentaires discrétisant une hétérogénéité sphérique. Les hétérogénéités peuvent aussi être présentes sous formes parallélépipédiques dans une matrice. Par exemple, des hétérogénéités cubiques de carbure de silicium SiC et de d'alumine Al_2O_3 sont observées dans certains aciers par microscopie électrique à balayage [Bal05].

La figure III.36 montre le schéma de deux hétérogénéités Ω_1 et Ω_2 cubiques de largeur $2a$ séparées d'une distance d dans une matrice infinie. La matrice possède les caractéristiques matériaux de l'acier, c'est à dire un module de Young $E_m = 210GPa$ et un coefficient de Poisson $\nu_m = 0.3$. Les hétérogénéités sont en carbure de silicium SiC de module de Young $E_1 = E_2 = 410GPa$ et de coefficient de Poisson



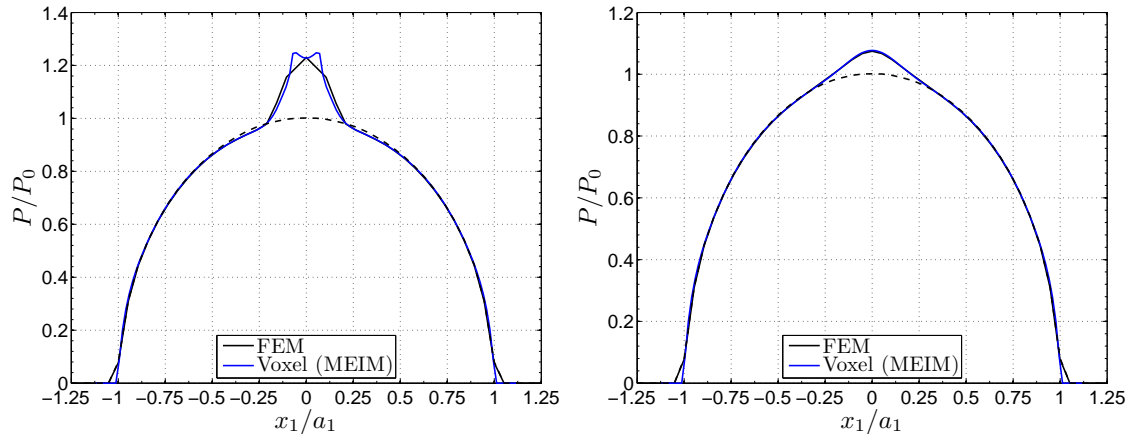
(a) Sans prise en compte des influences mutuelles - Désactivation du CGM. (b) Avec prise en compte des influences mutuelles - Activation du CGM.

FIGURE III.33 – Profil de la pression de contact le long de l'axe $x_2 = 0$ pour différentes tailles de discrétisation.



(a) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = a$. (b) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = 2a$.

FIGURE III.34 – Distributions des contraintes le long de l'axe x_3 en $x_1 = x_2 = 0$. Comparaisons entre les résultats obtenue par la méthode EF et par la méthode de l'inclusion équivalente modifiée MEIM avec l'algorithme CGM.



(a) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = a$. (b) Perturbations induites par une hétérogénéité sphérique dont le centre est disposé à une profondeur $h = 2a$.

FIGURE III.35 – Profils de la pression de contact en $x_2 = 0$ obtenus par la méthode EF et la méthode de l’inclusion équivalente modifiée MEIM avec l’algorithme CGM.

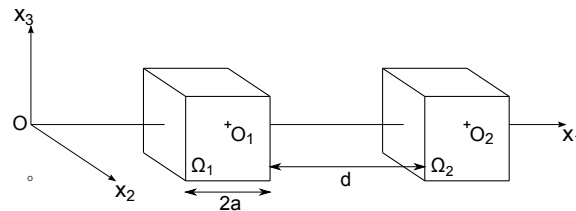


FIGURE III.36 – Deux hétérogénéités cubiques Ω_1 et Ω_2 de demi-largeur a séparées d’une distance d dans un massif infini soumis à une contrainte uniaxiale σ_{11} .

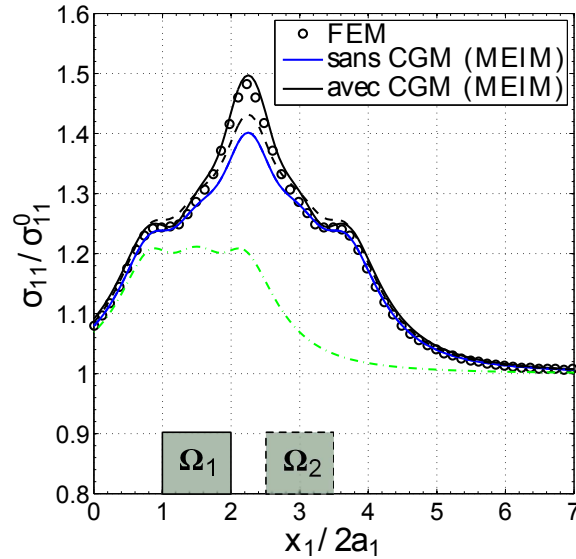


FIGURE III.37 – Différentes distributions de la contrainte normale σ_{11} le long de l'axe x_1 pour deux hétérogénéités Ω_1 et Ω_2 en interaction. Comparaison des résultats obtenus par la méthode EF, la méthode sans CGM et la méthode avec CGM. La courbe vert pointillée correspond au résultat pour une seule hétérogénéité voxelisée, et la courbe noire pointillée à deux hétérogénéités non-voxélisées.

$\nu_1 = \nu_2 = 0.16$. Une contrainte uniaxiale σ_{11}^∞ est appliquée au massif infini élastique isotrope. La discrétisation utilisée est telle qu'une demi-largeur du cube a est discrétisée en 10 éléments cubiques élémentaires. De fortes concentrations de contraintes à l'origine de déformations plastiques ou d'amorçage de fissures apparaissent pour de faibles distances d'interactions entre les inclusions. La Figure III.37 montre les distributions de la contrainte σ_{11} le long de l'axe x_1 obtenues par la méthode éléments finis EF, le code semi-analytique sans prise en compte des interactions (courbe bleue) et avec prise en compte des influences mutuelles (courbe noire) pour une distance de séparation $d = a$, impliquant une forte interaction. Pour comparaison, la courbe verte en pointillée correspond à la contrainte σ_{11} pour une seule hétérogénéité Ω_1 voxelisée (discrétisée en de multiples cuboïdes élémentaires). La courbe pointillée noire correspond cette fois-ci à la contrainte σ_{11} pour les deux hétérogénéités Ω_1 et Ω_2 non voxelisées (une seule inclusion cuboïdale utilisée pour décrire l'hétérogénéité). Avec ou sans prise en compte des influences mutuelles, cette courbe est quasi-identique. On note une très bonne corrélation entre le profil obtenu par la méthode MEIM avec le CGM et la méthode EF, ce qui prouve l'importance de tenir compte des multiples interactions mécaniques dans la résolution des formulations en demi-espace.

7 Bilan

Ce chapitre expose l'intégralité des développements analytiques et numériques qui permettent de traiter de multiples hétérogénéités de forme arbitraire dans un massif semi-infini élastique et isotrope soumis à un chargement de contact normal et tangentiel. Les hétérogénéités sont retranscrites localement sous forme d'inclusions

équivalentes au sens d'Eshelby. Ces inclusions équivalentes contiennent des déformations inélastiques appelées « eigenstrains ». Ces eigenstrains équivalentes sont sensées refléter les influences mutuelles entre toutes les inclusions hétérogènes, leurs différences de propriétés matériaux et leurs réponses aux chargements extérieurs. Ainsi la clé de cette méthode réside dans une détermination fine de chacune des composantes des eigenstrains. La méthode des inclusions équivalentes, extraite de la théorie d'Eshelby, est appliquée et modifiée afin de répondre aux différents critères listés ci-dessous :

1. Une multitude d'hétérogénéités en terme de géométries et de propriétés matériaux peuvent être modélisées. Les coefficients d'influence sont déterminés analytiquement pour des géométries simples comme la sphère, l'ellipsoïde, le cylindre infini et le parallélépipède rectangle (encore appelé « cuboïde »). Les hétérogénéités peuvent aussi avoir des géométries arbitraires grâce à la méthode de voxelisation qui consiste à discrétiser la géométrie en de multiples cuboïdes élémentaires. Cette méthode nécessite de disposer d'une discrétisation numérique fine afin de décrire au mieux les contraintes à l'interface. Le matériau d'une hétérogénéité peut être très différent des autres. On peut ainsi imaginer décrire un revêtement avec des hétérogénéités plus dures que le substrat et y incorporer des porosités ou même des fissures par des inclusions de type « penny-shaped » et calculer les facteurs d'intensité de contraintes.
2. Toutes les interactions mécaniques entre les hétérogénéités sont gérées à travers la mise en place d'un algorithme de gradient conjugué CGM. L'emploi de cet algorithme numérique permet de résoudre efficacement le système d'équations équivalentes. Le temps de résolution pour des milliers d'hétérogénéités est du même ordre de grandeur que celui pour résoudre une dizaine d'hétérogénéités. Cette méthode nous permet de retranscrire fidèlement le comportement d'un matériau revêtu où le revêtement est discrétisé en de multiples cuboïdes élémentaires.
3. Une déformation initiale inélastique de type thermique ou plastique peut être introduite pour chaque hétérogénéité. Effectuer un calcul elasto-plastique hétérogène n'ajoute pas de difficultés et de développements supplémentaires grâce à un calcul élastique hétérogène combiné avec un calcul elasto-plastique homogène.
4. Le champ de déformation élastique appliqué initialement en chacune des hétérogénéités peut être non-uniforme. Une procédure basée sur la méthode des moindres carrés permet de déterminer l'expression du champ de déformation appliqué. Ce champ exprimé sous forme polynomiale au second ordre génère une eigenstrain et une déformation non-uniforme du même ordre que le champ appliqué. Ces études ont montré que l'expression des eigenstrains sous forme de polynômes au second ordre est suffisante pour décrire l'évolution des contraintes à l'intérieur de l'hétérogénéité ainsi qu'à l'interface inclusion/matrice pour un chargement multi-axiale. D'autres auteurs [Ben06] ont amélioré cette méthode en trouvant des résultats en parfaite correspondance entre des résultats au second ordre et des résultats EF. Cette amélioration consiste à déterminer l'expression des champs de déformation à partir du point de calcul de la contrainte induite et non pas du centre de l'hétérogénéité.

Néanmoins il est évident que cette méthode n'est pas adaptée à la détermination de milliers d'eigenstrains. Elle est aussi incompatible avec les méthodes semi-analytiques qui font appels aux techniques de transformées de Fourier.

Chacune des solutions apportées pour répondre à ces différents besoins sont comparées et validées par rapport à des résultats analytiques et/ou numériques extraits de la littérature, ainsi que des modèles éléments finis spécifiquement développés pour la démonstration visée. Une des nouveautés de cette méthode est l'utilisation de la méthode d'inclusion équivalente d'Eshelby sans passer par le tenseur d'Eshelby. En effet, le tenseur d'Eshelby relie la déformation élastique totale à l'eigenstrain d'une unique inclusion. La détermination d'un tenseur d'Eshelby pour de multiples hétérogénéités est peine perdue. De plus, par définition le tenseur d'Eshelby est valable pour une inclusion dans un espace infini. Les deux sources de gradients - les influences mutuelles et la surface libre - ne sont pas compatibles avec un modèle d'homogénéisation basé sur l'utilisation du tenseur d'Eshelby. La méthode présentée ici a la force de manipuler de nombreuses hétérogénéités de la même manière que pour une seule hétérogénéité isolée sans radicalement augmenter les temps de calcul pour une zone discrétisée équivalente.

Cette technique est capable de retranscrire fidèlement la surcontrainte locale induite par de multiples hétérogénéités contrairement aux méthodes d'homogénéisation analytique classiquement appliquées pour les matériaux composites [Luo87, Hor93]. Ces méthodes, dont certaines seront explicitées au Chapitre IV, considèrent un champ macro moyenné ayant pour effet d'atténuer et de sous-évaluer les contraintes élastiques, en particulier les contraintes à l'interface. De plus, ces pratiques ne sont plus valables pour des hétérogénéités proches d'une surface libre, et en particulier proche d'une surface de contact où cohabite un fort gradient de contrainte.

Grâce à ces améliorations visant à mieux décrire les contraintes élastiques ainsi que les déplacements induits en surface, on peut envisager d'appliquer cette méthode à une distribution périodique d'hétérogénéités de manière à reconstituer un matériau composite. En effet, grâce à l'emploi de l'algorithme de FFT, le domaine d'étude englobant la zone de contact est vu comme périodique ainsi que les hétérogénéités qu'il contient. Si l'on souhaite isoler le domaine d'étude de la structure périodique, la technique de « zero-padding » [Liu00] peut être utilisée comme explicitée au II. A l'inverse si cette technique n'est pas employée, le domaine d'étude est vu comme une cellule périodique. Aussi les inclusions hétérogènes dans un domaine ne sont pas seulement en interaction avec elles-mêmes mais aussi avec les inclusions hétérogènes des domaines voisins. Néanmoins il n'y a pas d'interactions entre les inclusions hétérogènes qui sont localisées dans un domaine voisin. Cette méthode étendue des inclusions équivalentes nous permet à la fois de caractériser le comportement global (à l'échelle macroscopique) et le comportement local (à l'échelle microscopique) avec un seul et même calcul.

Chapitre IV

Stratégies de modélisation multiéchelle d'un composite tissé

Nous proposons dans ce chapitre de modéliser le comportement mécanique d'un composite tissé sous sollicitation de fretting au travers d'un processus multiéchelle basé sur les modèles d'homogénéisation. On y explique comment faire le lien entre le modèle d'hétérogénéité - basé sur une méthode d'inclusion équivalente modifiée - présenté dans le chapitre III et un modèle géométrique des renforts tissés - basé sur la détermination de cellules élémentaires à l'échelle mésoscopique et microscopique - permettant de retranscrire fidèlement la rigidité locale des mèches, source de variations sur les paramètres de contact tels que la pression et le cisaillement.

Sommaire

1	Introduction	116
2	Description d'une cellule élémentaire à l'échelle mésoscopique	116
2.1	Modélisation géométrique du renfort tissé	116
2.2	Approximation par la méthode des inclusions équivalentes	117
3	Description d'une cellule élémentaire à l'échelle microscopique	119
3.1	Caractérisation morphologique d'un fil	119
3.2	Estimation des propriétés élastiques	121
4	Description du modèle d'endommagement	124
4.1	Introduction	124
4.2	Modèle d'interface élastique linéaire	126
4.3	Résultats et discussions	129
5	Bilan	131

1 Introduction

L'objectif de ces travaux est de modéliser le comportement mécanique de composites mécaniques à l'échelle du fil, et d'être capable d'en prédire son endommagement. Le fil possède une microstructure complexe regroupant typiquement quelques centaines de fibres, plusieurs couches matricielles différentes, des pores et des nodules de voie liquide en ce qui concerne le matériau CMC. Pour pouvoir mettre en place un modèle du fil et de son endommagement, il est nécessaire d'utiliser une méthode adaptée au modèle semi-analytique, capable de gérer à la fois la finesse de description nécessaire et de limiter le coût numérique de la résolution d'un tel modèle. La littérature propose de nombreuses méthodes pour cela, de la stratégie de résolution aux modèles multiéchelles. Le développement d'un modèle multiéchelle de comportement mécanique de composites tissés nécessite d'avoir une représentation de la morphologie du matériau aux échelles fibre et fil. L'obtention de telles représentations est un problème de recherche actuelle [Lom07, Cou08, Gen10, Tra12]. Néanmoins, le but n'est pas ici de proposer des études sur la modélisation des renforts et des fibres ainsi que des endommagements associés mais d'analyser comment incorporer des modèles déjà existants dans un modèle semi-analytique à l'échelle du contact. La stratégie proposée dans ce travail consiste à s'appuyer sur les données numériques fournis par le logiciel WiseTex développé par l'équipe de Lomov et de Verpoest [Ver05]. Les données géométriques vont nous permettre de reconstruire numériquement la géométrie des renforts tissés sur l'intégralité de la zone de contact. Les données matériaux sont quant à elles issues d'une étape d'homogénéisation sur des cellules élémentaires à l'échelle microscopique afin d'en déduire leurs propriétés équivalentes à l'échelle mésoscopique. Cette méthode multiéchelle peut se montrer largement satisfaisante du point de vue de l'homogénéisation linéaire. En revanche, elle est limitée dans le traitement des mécanismes de dégradation, où les interfaces sont primordiales. Une première approche sera donc proposée pour prendre en compte de manière explicite la décohésion aux interfaces renforts/matrice.

2 Description d'une cellule élémentaire à l'échelle mésoscopique

2.1 Modélisation géométrique du renfort tissé

Les outils usuels de la modélisation géométrique des renforts tissés sont ici difficilement utilisables en raison de la grande complexité du motif de tissage. Les travaux les plus complexes sont développés par la Katholieke Universiteit Leuven [Lom00a, Lom01, Lom07, Lom11, Ver05] et sont regroupés au sein d'un soft commercial. Ce logiciel est extrêmement répandu dans l'industrie et majoritairement utilisé à Snecma. Sa bibliothèque dispose d'une très large gamme de renforts tissés (2D et 3D), tressés, et non-crimp-fabric (NCF).

Ce type d'outils nécessite de modéliser les trajectoires des mèches et la forme des sections. Pour cela, la mèche est modélisée a posteriori dans son environnement tissé à partir d'observations, d'analyses, et d'identifications expérimentales basées sur :

- *Des coupes des renforts enduits de résine.* La forme est conservée lors de la coupe mais la résine peut modifier les propriétés de la section.
- *Des mesures 3D externes sans contact* à partir de mesures optiques sur les parties visibles par corrélation d'images numériques, des tomographies par rayons X, et des mesures par émission acoustique.

Les différentes études expérimentales effectuées sur des composites tissés bidimensionnels et tridimensionnels convergent vers une liste type de caractéristiques dont le modèle géométrique doit disposer, à savoir :

- *Des trajectoires décomposables en une suite de droites et de courbes tangentes.* Le logiciel WiseTex modélise la mèche comme un tuyau à section constante suivant une trajectoire courbe (polynôme de degré 5). Cependant, modéliser une mèche de section constante n'est pas cohérent avec les observations expérimentales. Les sections varient le long de la trajectoire.
- *Contact surfacique au niveau des entrelacements.* Le logiciel WiseTex ne gère pas, ce qui peut engendrer des interpénétrations ou des espaces vides entre les mèches en lieu et place du contact. Il peut exister d'autres contacts entre les mèches que ceux liés à l'entrelacement.
- *La forme de la section peut être variable et dissymétrique* (lenticulaire, elliptique, aplatie sur le bord).
- *Les Plans tangents aux deux directions des mèches ne sont pas au même niveau.*

Une des conséquences majeures du non-respect de ces points est une représentation de l'espace poreux peu réaliste, menant à des calculs de perméabilité faussés à l'échelle mésoscopique. La cellule élémentaire est alors bien souvent modifiée afin de gérer les problèmes d'interférences. Une option permet automatiquement de corriger les interférences en déformant localement la section. Une séparation artificielle est insérée entre les zones en contact. Les mèches sont ensuite comprimées pour forcer la mise en contact. Cette approche a d'abord été proposée par Zako [Zak03] à travers un modèle intermédiaire éléments finis, puis implémentée dans le soft MeshTex intégré au logiciel WiseTex. Cependant, les mèches se retrouvent fortement déformées localement conduisant à des fractions volumiques de fibres peu réalistes. Récemment, Durville a appliqué une méthode multifil [Dur05] basée sur la description géométrique des mèches fournie par le logiciel WiseTex [Dur07]. Ce modèle EF est constitué d'un assemblage de multiples fibres constituées d'éléments poutres. Un modèle gérant les inter-contacts entre fibres constituant la mèche est une solution optimale pour gérer les problèmes d'interpénétration.

2.2 Approximation par la méthode des inclusions équivalentes

Les mèches constituant la cellule élémentaire extraite du modèle WiseTex sont décomposées en de multiples segments caractérisés par leurs fractions volumiques, leurs orientations spatiales, les dimensions de la section et le rayon de courbure de la mèche. Tous ces paramètres sont fournis par le modèle géométrique. La mé-

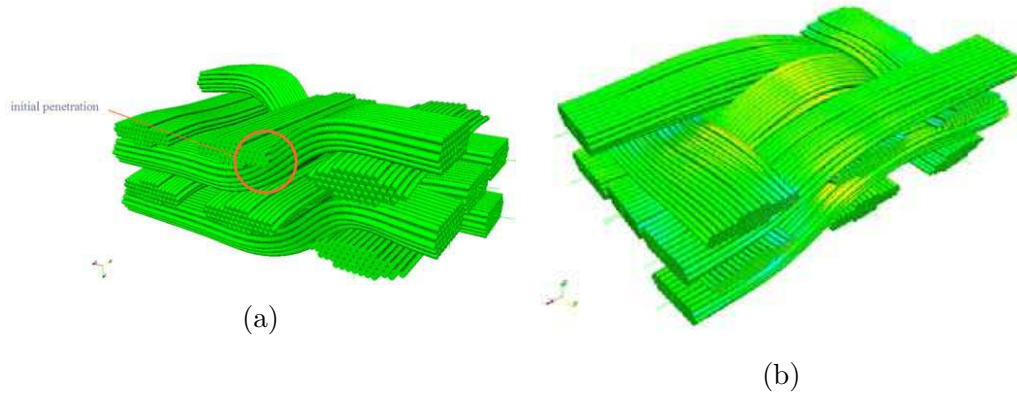


FIGURE IV.1 – Correction d'une cellule élémentaire extraite de WiseTex (a) et construite sans interpénétration (b)

thode de l'inclusion équivalente est alors adaptée pour transformer chaque segment hétérogène en inclusions ellipsoïdales équivalentes. Ces ellipsoïdes ont les mêmes propriétés (orientation, section, fraction volumique) que ceux des segments associés. La discrétisation fine de l'architecture permet de préserver la fraction volumique totale et l'orientation globale du composite. Cette équivalence n'est pas une substitution physique des segments constituant la mèche, mais une alternative mathématique pour exprimer de façon équivalente l'état de déformations à l'intérieur et à l'extérieur de la mèche. Une relation entre les dimensions du segment et les dimensions de l'ellipsoïde équivalent reste très difficile à exprimer mais peut s'appuyer sur différentes observations.

La figure IV.2 représente trois différentes configurations géométriques d'une mèche plongée dans une matrice chargée en traction. Sur la première configuration (a), la mèche est parfaitement droite, ce qui génère des contraintes axiales uniformes dans la section, égales à la contrainte moyenne dans la mèche. Elle possède la plus importante capacité de chargement possible en traction. L'ellipsoïde équivalente aurait dans ce cas un rapport de forme infini. Lorsque la mèche est courbée, les contraintes axiales sont réduites et des contraintes en flexion s'y ajoutent. La diminution de la contrainte moyenne axiale est compensée par une augmentation du transfert de charge entre la mèche et la matrice. La contrainte moyenne en flexion dans la section droite devrait être nulle et ne pas contribuer à l'état de contrainte moyen de la section du segment considéré. Si le rayon devient très faible, la flexion est prédominante dans la section et la contrainte axiale dans la partie droite de la mèche diminue. Le rapport de forme de l'ellipsoïde doit donc refléter l'effet de la courbure des mèches sur leurs capacités mécaniques en charge. Une expression simpliste entre le rayon de courbure et le rapport de forme de l'ellipsoïde équivalent est proposée :

$$\frac{a_1}{a_2} = \alpha \left(\frac{R_c}{a_2} \right) \quad (\text{IV.1})$$

Où a_1 est la longueur du demi-axe dans le sens longitudinal de l'ellipsoïde équivalent (sens axial de la mèche), et R_c le rayon de courbure du segment correspondant (voir Figure IV.3). Le facteur α est affecté par le mécanisme de transfert de charge entre la matrice et la mèche. Dans le cas de figure où les courbures ne sont pas trop prononcées (faible rayon de courbure), le facteur α est choisi constant et calibré en

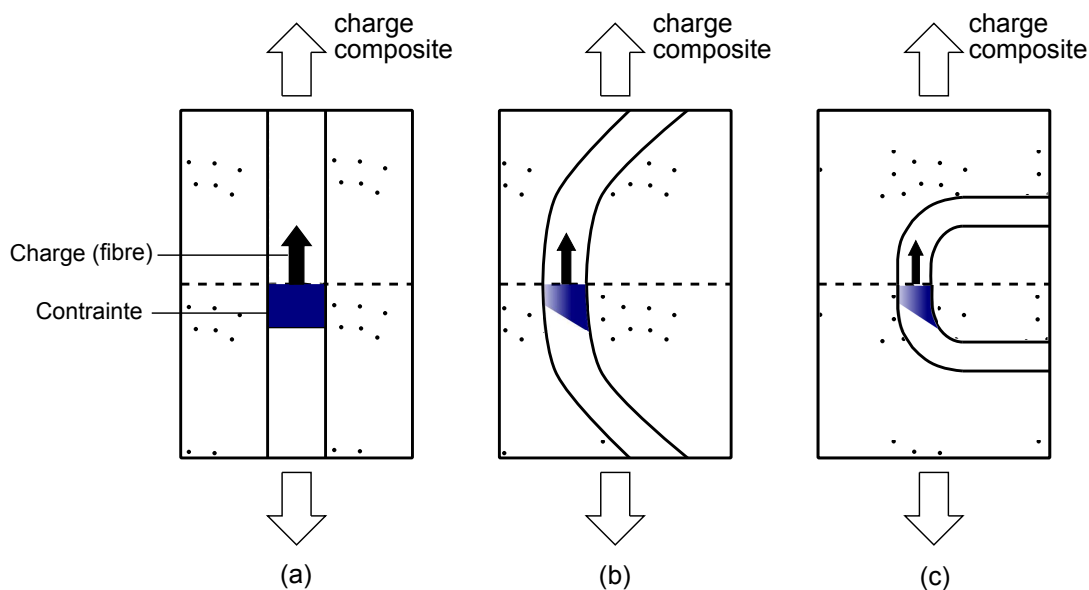


FIGURE IV.2 – Traduction de la capacité en charge d'une mèche comme une fonction du rayon de courbure.

fonction des données expérimentales recueillies.

3 Description d'une cellule élémentaire à l'échelle microscopique

3.1 Caractérisation morphologique d'un fil

3.1.1 Fraction volumique de fibres

La fraction volumique de fibres est certainement l'un des paramètres importants étant donné qu'il affecte au premier ordre les propriétés effectives des fils. Cette quantité peut être mesurée par dissolution chimique de la matrice. On en détermine le poids et la densité volumique des constituants. Des techniques de photomicrographies sont également utilisées pour déterminer le nombre de fibres suivant un fil sectionné, et caractériser l'arrangement des fibres. Pour un composite tissé de type CMO et CMC, le fil est composé d'un amas de fibres cylindriques très désordonnées, comme le montre la Figure IV.4. Les propriétés locales d'un fil se trouvent être fortement influencées par les distances locales interfibres. Les modélisations basées sur un arrangement parfait des fibres (arrangement carré ou hexagonal) ne sont pas capables de prendre en compte cette variabilité et restent donc très insuffisantes. Couegnat [Cou08] a mis en place un programme, nommé GENCELL, permettant de caractériser le "désordre" dans l'arrangement des fibres à partir d'analyses de covariance, dans le but de déterminer la taille minimale d'un volume élémentaire représentatif (VER).

De plus, l'organisation des fibres est localement modifiée par des sollicitations mécaniques externes comme la compression. La fraction volumique de fibres n'est donc pas uniforme le long d'un fil. Ces fluctuations peuvent être estimées à partir de modèles mécaniques prenant en compte la compressibilité des fils [Lom00b].

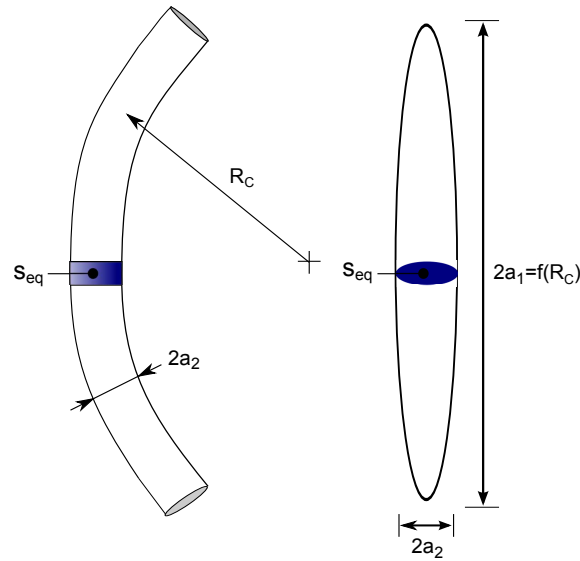
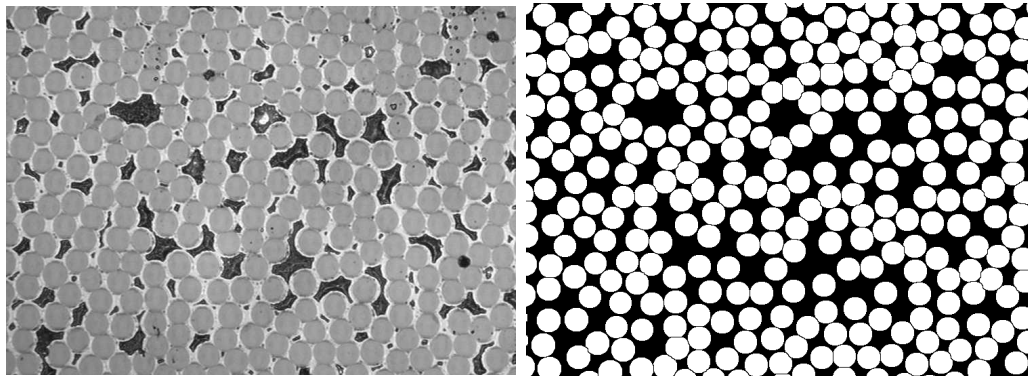


FIGURE IV.3 – Définition géométrique de l'ellipsoïde équivalent représentant un segment courbe d'une mèche.

L'arrangement des fibres est estimé à partir d'observation sur des coupes expérimentales. Des fractions volumiques moyennes sont alors obtenues pour chaque segment discrétisant et constituant le fil. Leurs valeurs oscillent typiquement entre 60 et 80% pour des composites tissés.



(a) Micrographie d'une section de fil (b) Image binarisée obtenue à partir de la micrographie

FIGURE IV.4 – Arrangement de fibres dans un fil de CMC [Cou08]

3.1.2 Orientation des fibres

Alors que la fraction volumique de fibres est principalement responsable du comportement mécanique global du composite, les directions d'anisotropie sont quant à elles pilotées par les distributions d'orientations des renforts. Les différentes orientations dans les composites tissés ne sont pas simples à obtenir expérimentalement, c'est pourquoi elles sont généralement issues des modèles géométriques. Les mesures expérimentales s'appuient sur les propriétés géométriques des fibres, à savoir qu'elles sont de sections circulaires. Ainsi, en mesurant les longueurs des demi-

axes des sections elliptiques des fibres inclinés, on peut remonter à l'orientation des fibres [Gom98, May92]. Cette méthode laborieuse laisse supposer que les fibres restent parallèles à ligne moyenne du fil. L'orientation de chaque section du fil est caractérisée par trois angles ZXZ (voir Figure IV.5). Les trois étapes suivantes décrivent la rotation :

1. Effectue la rotation des axes x_1, x_2 et x_3 autour de l'axe x_3 par ϕ ($\sim \pi < \phi < \pi$), ce qui produit les axes x_1', x_2' et x_3 .
2. Effectue la rotation des axes x_1', x_2' et x_3 autour de l'axe x_1' par θ ($0 < \theta < \pi$), ce qui produit les axes x_1', x_2'' et x_3' .
3. Effectue la rotation des axes x_1', x_2'' et x_3' autour de l'axe x_3' par ($\sim \pi < \psi < \pi$), ce qui produit les axes x_1'', x_2'' et x_3'' .

D'autres combinaisons plus classiques comme les angles d'Euler(ZXY) sont également applicables. La distribution des orientations peut alors être décrite avec des fonctions probabilistes.

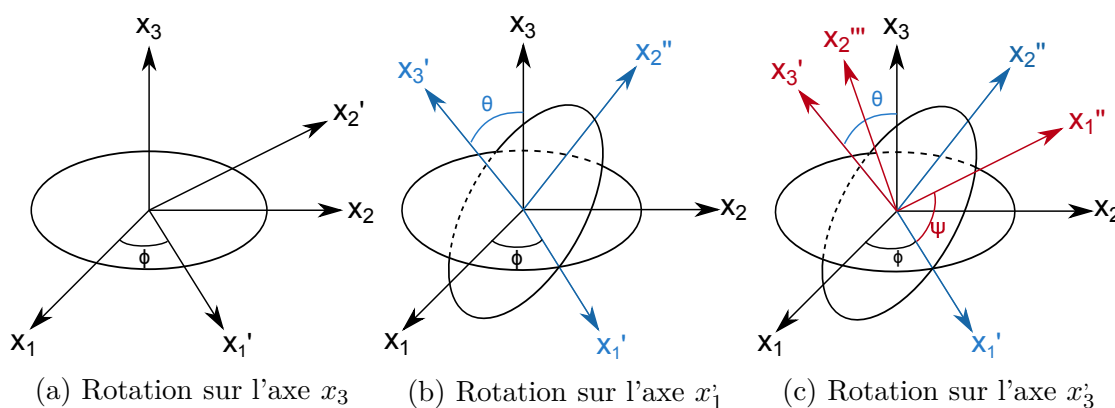


FIGURE IV.5 – Définition de la rotation de chaque section d'un fil avec les angles d'Euler ϕ , θ , et ψ .

3.2 Estimation des propriétés élastiques

Pour déterminer les propriétés élastiques effectives du fil, deux approches analytiques sont généralement utilisées pour les composites à renforts particuliers et à fibres courtes : la méthode de Mori-Tanaka et la méthode auto-cohérente. Quelque soit la méthode utilisée, le comportement effectif du composite est donné par :

$$C^{eff} = C^M + \sum_{\alpha=1}^n V_f^\alpha (C^\alpha - C^M) A^\alpha \quad (IV.2)$$

où C^{eff} représente le tenseur de rigidité effectif du composite, A^α le tenseur de localisation des déformations pour une inclusion ellipsoïdale α , ν_f^α la fraction volumique des renforts, C^α la rigidité des fibres et C^M celle de la matrice.

Le tenseur de localisation des déformations prend une forme différente selon la méthode d'homogénéisation utilisée. Ces méthodes restent basées sur le principe de transformation d'Eshelby. Quelques équations utiles aux développements des différents méthodes d'homogénéisation sont rappelés. La solution du champ de

déformation induit par une hétérogénéité ellipsoïdale Ω^α de constantes d'élasticité C^α dans une matrice élastique infinie de constantes d'élasticité C^M soumise à une déformation à l'infinie ε^0 , est donnée par :

$$\varepsilon_{ij}^\alpha(x) = S_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{ijkl}^{\alpha*}, \forall x \in \Omega \quad (\text{IV.3})$$

$$\varepsilon_{ij}^\alpha(x) = D_{ijkl}^\alpha(x) \varepsilon_{ijkl}^{\alpha*}, \forall x \notin \Omega \quad (\text{IV.4})$$

Ces deux équations permettent d'établir l'équation d'équivalence suivante :

$$C_{ijkl}^\alpha \left(\varepsilon_{kl}^0 + S_{klmn}^\alpha \varepsilon_{mn}^{\alpha*} \right) = C_{ijkl}^M \left(\varepsilon_{kl}^0 + S_{klmn}^\alpha \varepsilon_{mn}^{\alpha*} - \varepsilon_{kl}^{\alpha*} \right) \quad (\text{IV.5})$$

Les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes sont exposés par la suite.

3.2.1 Modèle de Mori-Tanaka

L'approche proposée par Mori-Tanaka considère une fraction volumique V_f d'inclusions de même forme et de même orientation dans une matrice infinie [Mor73]. Le principe de l'estimation des modules effectifs du matériau par cette approche consiste à considérer, pour chaque famille d'inclusions, une inclusion ellipsoïdale unique équivalente, dans la phase matrice supposée infinie, en supposant que cette inclusion est soumise à l'infini, à un champ de déformation homogène égal au champ moyen ε^m dans la matrice. En d'autres termes, la déformation moyenne de la matrice est égale à la déformation macroscopique du VER.

On cherche à déterminer le champ de déformation moyen dans une inclusion α , entourée de $(n - 1)$ inclusions β (voir Figure IV.6),

$$\varepsilon^\alpha = S^{\alpha\alpha} \varepsilon^{\alpha*} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^n S^{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta*} \quad (\text{IV.6})$$

où

$$S^{\alpha\beta} = D_{ijkl}^\beta(x^\alpha) \quad (\text{IV.7})$$

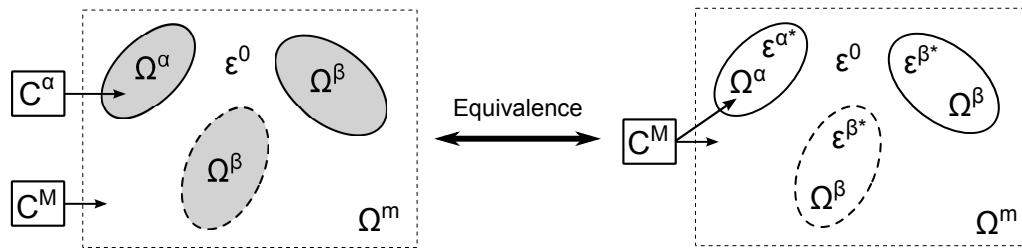


FIGURE IV.6 – Passage d'un milieu constitué d'hétérogénéités vers un milieu constitué d'inclusions par ajout de déformations d'incompatibilité nommées « eigenstrains »

Le champ de déformation total dans un domaine constitué de la matrice et de n inclusions s'exprime tel que,

$$V_f^m \varepsilon^m + \sum_{\alpha=1}^n V_f^\alpha \varepsilon^\alpha = 0 \quad (\text{IV.8})$$

ε^m représente le champ de déformation moyen de la matrice, V_f^α et V_f^m sont les fractions volumiques des inclusions et de la matrice, respectivement.

$$V_f^m + \sum_{\alpha=1}^n V_f^\alpha = 1 \quad (\text{IV.9})$$

Le second terme de l'équation IV.6 représente les perturbations secondaires induites par les inclusions voisines sur l'inclusion α . Cette seconde partie, encore appelée déformation image ε^{im} , est considérée identique dans tout le domaine, quelque soit l'inclusion α .

$$\varepsilon_\Sigma^m = \varepsilon^0 + \varepsilon^{im} \quad (\text{IV.10})$$

$$\varepsilon_\Sigma^\alpha = \varepsilon^0 + \varepsilon^{im} + S^{\alpha\alpha} \varepsilon^{\alpha*} \quad (\text{IV.11})$$

$$\varepsilon^{\alpha*} = (S^{\alpha\alpha})^{-1} (\varepsilon_\Sigma^\alpha - \varepsilon_\Sigma^m) \quad (\text{IV.12})$$

La première étape de ce procédé d'homogénéisation consiste à définir un tenseur de localisation et un tenseur de localisation dilué (voir Figure IV.7). Le tenseur de localisation A^α relie la totalité des déformations induites dans l'inclusion en fonction de la déformation appliquée à l'infini. Le tenseur de localisation dilué A_m^α (« pseudo-tenseurs de localisation ») relie la déformation totale dans l'inclusion en fonction de la déformation moyenne de la matrice.

$$\varepsilon_\Sigma^\alpha = A^\alpha \varepsilon^\infty \quad (\text{IV.13})$$

$$\varepsilon_\Sigma^\alpha = A_m^\alpha \varepsilon_\Sigma^m \quad (\text{IV.14})$$

A partir de l'équation IV.8 une expression explicite du tenseur de localisation est établie,

$$A^\alpha = A_m^\alpha \left(V_f^m I^d + \sum_{\beta=1}^n V_f^\beta A_m^\beta \right) \quad (\text{IV.15})$$

Le tenseur de localisation dilué est obtenu à partir de la combinaison des équations IV.5 et IV.12 telle que,

$$A_m^\alpha = \left[I^d + S^{\alpha\alpha} (C^M)^{-1} (C^\alpha - C^M) \right]^{-1} \quad (\text{IV.16})$$

Les interactions entre les inclusions sont prises en compte de manière indirecte à travers la moyennation des déformations. Chacune des inclusions ressent indirectement la présence des inclusions voisines à travers la déformation totale dans la matrice. Néanmoins, ce modèle ne s'applique correctement que lorsque la fraction volumique d'inclusions reste modérée, typiquement, inférieure à 30%.

3.2.2 Modèle auto-cohérent

Cette approche [Hil65], initialement développée pour les agrégats (polycristaux), consiste à établir une loi de localisation en considérant chaque phase du matériau (renforts) comme une seule inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini homogène

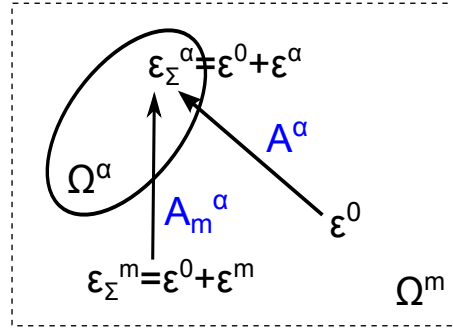


FIGURE IV.7 – Différents tenseurs de localisation.

qui possède le comportement du milieu homogène équivalent recherché, caractérisé par C^{eff} . La résolution de l'équation s'effectue selon une procédure itérative sur le tenseur matériau effectif C^{eff} :

1. Le tenseur matériau effectif est initialisé par la valeur du tenseur matériau de la matrice $C^{eff} = C^M$.
2. Le tenseur d'Eshelby $S^{\alpha\alpha}$ est calculé pour chaque inclusion individuellement. Sa valeur dépend des propriétés matériaux effectifs de la matrice.
3. On détermine le tenseur de localisation des déformations.

$$A^\alpha = A_m^\alpha \left(V_f^m I^d + \sum_{\beta=1}^n V_f^\beta A_m^{\beta\alpha} \right)^{-1} \quad (IV.17)$$

où,

$$A_m^\alpha = \left[I^d + S^{\alpha\alpha} (C^{eff})^{-1} (C^\alpha - C^{eff}) \right]^{-1} \quad (IV.18)$$

4. On calcule le tenseur matériau effectif du composite actualisé

$$C^{eff} = C^{eff} + \sum_{\alpha=1}^n V_f^\alpha (C^\alpha - C^{eff}) A^\alpha \quad (IV.19)$$

5. On itère sur le tenseur matériau effectif jusqu'à convergence de celui-ci.

La convergence est relativement rapide, hormis des situations impliquant des inclusions de propriétés matériaux très différentes. L'approximation autocohérente prend en compte de manière globale les interactions entre les inclusions d'un agrégat dans une hypothèse de « désordre parfait ». En comparaison, la méthode de Mori-Tanaka ne les considère que partiellement.

4 Description du modèle d'endommagement

4.1 Introduction

La plupart des matrices composites, renforcées par des fibres continues (comme les CMC) sont des matériaux fragiles. Ces fibres contenues dans la matrice sont des

orientations privilégiées pour la rupture. Le comportement mécanique de ce matériau est affecté par différents facteurs comme le pontage des fibres, la multi-fissuration, le phénomène de délamination, la décohésion fibre/matrice, la rupture des fibres, etc. Le facteur le plus important reste la décohésion à l'interface fibre/matrice puisqu'il contrôle localement le champ élastique et donc les propriétés intrinsèques du composite. La présence d'une interface relativement peu tenace donne une certaine tolérance à l'endommagement après fissuration de la matrice. Le comportement des interfaces dépend de la nature et de la structure des interphases présentes entre fibre et matrice. Celle-ci joue un rôle très important sur la nature et la localisation de la fissuration lors de la décohésion fibre/matrice, mais aussi sur les mécanismes qui opèrent pendant le glissement contrôlé par frottement. Il est donc nécessaire de caractériser le comportement mécanique de la zone interface de manière aussi détaillée que possible. Deux types de modèles pour décrire l'interface abondent dans la littérature.

Le premier modèle est dit « modèle d'interface » et considère la discontinuité des déplacements et des contraintes à l'interface [Mur84, Jas87, Qu93]. Le second modèle est dit « modèle d'interphase » [Wal78]. On y décrit l'interface comme une couche de fine épaisseur, appelée « interphase », entre la matrice et l'hétérogénéité. Cette interphase peut, par exemple, être vue comme une zone de diffusion, une zone de nucléation, ou encore une zone de réaction chimique. Les propriétés matériaux de l'interphase peuvent être uniformes ou non. Une cohésion parfaite est généralement considérée à l'interface matrice/interphase et interphase/inhomogénéité. Il est reconnu que les modèles par interface restent plus simple à mettre en œuvre analytiquement [Rub04]. Des équivalences entre les deux modèles ont été étudiées par Hashin et Rubin [Has91, Has02] et Benveniste [Rub04].

Dans ce cadre d'étude, le premier modèle à interface dite « élastique » fait l'objet d'une attention particulière du fait de sa compatibilité analytique avec la méthode des inclusions équivalentes. Ce type de modèle considère que les discontinuités des déplacements sont proportionnelles aux efforts dans l'interface. Dans un modèle à interface élastique, les tractions à l'interface sont considérées continues mais les déplacements sont discontinues à travers l'interface, et considérés proportionnels aux efforts associés dans l'interface. Zhong and Meguid [Zho97] ont obtenu le champ élastique d'une hétérogénéité sphérique dans un champ infini soumis à un chargement extérieur arbitraire avec un modèle à interface linéaire à partir de la méthode des inclusions équivalentes d'Eshelby et d'un modèle de dislocation de type Somigliana. Le champ élastique causé par la présence d'une hétérogénéité avec décohésion à l'interface est décomposé en deux parties :

1. Champ élastique causé par une déformation libre équivalente non-uniforme distribué à l'intérieur d'une hétérogénéité avec interface parfaite (voir Chapitre III).
2. Champ élastique causé par une dislocation imaginaire de type Somigliana qui modélise la séparation normale et tangentielle de l'interface.

Les différentes constantes d'une eigenstrain équivalente non-uniforme (uniforme, linéaire, et quadratique) sont alors entièrement déterminées. Des dislocations de type Somigliana sont alors utilisées pour modéliser le glissement à l'interface ainsi que la séparation normale. Dans ce cas, on déterminera entièrement le vecteur de Burger associé aux dislocations imaginaires de Somigliana.

4.2 Modèle d'interface élastique linéaire

4.2.1 Généralisation

Considérons une hétérogénéité ellipsoïdale Ω d'interface S dans un milieu infini élastique isotrope D soumis à un chargement extérieur. L'hétérogénéité a des propriétés matériaux élastiques C^I différentes de ceux de la matrice C^M . Des conditions de décohésion linéaire sont appliquées à l'interface hétérogénéité/matrice. Dans ce modèle, seule la contrainte normale à l'interface est continue. Les conditions à l'interface s'écrivent alors comme,

$$\Delta\sigma_{ij}n_j = [\sigma_{ij}(S^+) - \sigma_{ij}(S^-)]n_j = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$\Delta u_i = [u_i(S^+) - u_i(S^-)] = \eta_{ij}\sigma_{jk}n_k \quad (\text{IV.21})$$

$u_i(S^+)$ et $u_i(S^-)$ représentent respectivement les valeurs de déplacement de la face matrice/interface et de la face interface/inclusion. Le même principe est appliqué aux variables $\sigma_{ij}(S^+)$ et $\sigma_{ij}(S^-)$. La variable n_i représente le vecteur normal unitaire à l'interface. Le tenseur de second ordre η_{ij} représente un facteur de conformité de l'interface. Afin de simplifier le problème, le facteur η_{ij} est considéré symétrique et défini positif. A partir de l'équation IV.21, on peut voir que $\eta_{ij} = 0$ correspond à une interface parfaite et que $\eta_{ij} \rightarrow \infty$ représente la décohésion totale de l'hétérogénéité ($\sigma_{jk}n_k = 0$ sur S). Une interface faiblement endommagée peut être modélisée par de faibles coefficients η_{ij} . Une formulation simple et physique de ce tenseur peut être écrite de la manière suivante,

$$\eta_{ij} = \alpha\delta_{ij} + (\beta - \alpha)n_in_j \quad (\text{IV.22})$$

Les constantes α et β représentent respectivement la conformité dans les directions tangentielle et normale à l'interface,

$$\Delta u_i(\delta_{ik} - n_in_k) = \alpha\sigma_{ij}n_j(\delta_{ik} - n_in_k) \quad (\text{IV.23})$$

$$\Delta u_in_i = \beta\sigma_{ij}n_jn_i \quad (\text{IV.24})$$

Lorsque $\beta = 0$, seul le déplacement tangentiel à l'interface est autorisé. Dès lors, le cas d'une interface en glissement totale étudié par [Mur84] peut être simulé pour $\beta = 0$ et α très grand. A l'inverse, on peut imaginer que l'interpénétration soit possible pour un coefficient β non nul donné. Or l'interpénétration est physiquement impossible. Plusieurs voies pour résoudre ce problème peuvent être trouvées dans la littérature comme le papier d'Achenbach et Zhu [Ach89].

4.2.2 Décomposition du problème

Le problème existant d'une hétérogénéité avec décohésion à l'interface est décomposé en trois sous-problèmes. Ces sous-problèmes sont résolus séparément puis additionnés pour obtenir la solution finale (voir Figure IV.8).

Sous-problème (1)

La solution élastique dans un milieu infini homogène élastique isotrope D soumis à une déformation non-uniforme peut s'exprimer à partir de la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x) = C_{ijkl}^M \varepsilon_{kl}^0(x) \quad (\text{IV.25})$$

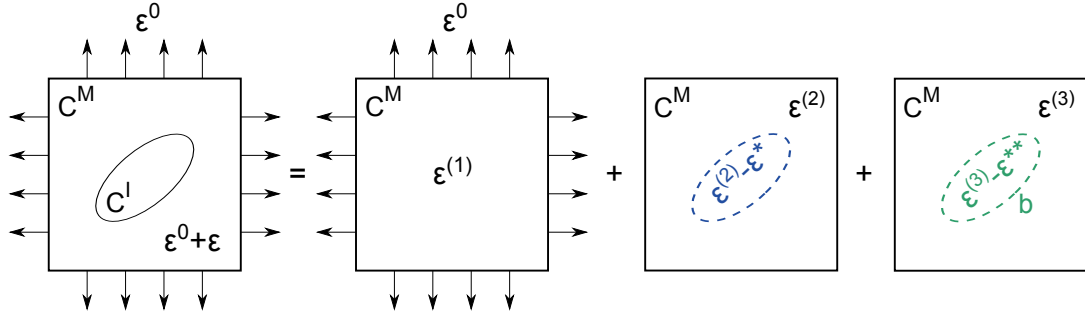


FIGURE IV.8 – Décomposition du problème d'hétérogénéité avec décohésion en trois sous-problèmes élémentaires.

Avec,

$$\varepsilon_{ij}^0(x) = E_{ij}^0 + E_{ijk}^0 x_k + E_{ijkl}^0 x_k x_l \quad (\text{IV.26})$$

Pour un matériau élastique isotrope, le tenseur matériau C^M peut s'écrire comme,

$$C_{ijkl}^M = 2 \frac{\mu\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{IV.27})$$

Où μ représente les modules de cisaillement et ν le coefficient de Poisson de la matrice.

Sous-problème (2)

Une eigenstrain non-uniforme est définie à l'intérieur de l'inclusion Ω d'interface parfaite dans le même milieu D du sous-problème (1), soumis à aucun chargement.

$$\varepsilon_{ij}^*(x) = E_{ij}^* + E_{ijk}^* x_k + E_{ijkl}^* x_k x_l \quad (\text{IV.28})$$

Le champ de contrainte induit pour le sous-problème (2) s'obtient alors par,

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x) = C_{ijkl}^M \left[D_{klmn}(x) E_{mn}^* + D_{klmnp}(x) E_{mnp}^* + D_{klmnpq}(x) E_{mnpq}^* \right], \forall x \in \{D - \Omega\} \quad (\text{IV.29})$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x) = C_{ijkl}^M \left[\left(D_{klmn}(x) E_{mn}^* + D_{klmnp}(x) E_{mnp}^* + D_{klmnpq}(x) E_{mnpq}^* \right) - \varepsilon_{kl}^*(x) \right], \forall x \in \Omega \quad (\text{IV.30})$$

Sous-problème (3)

Des dislocations équivalentes de type Somigliana sont introduites pour modéliser les libertés de déplacements tangentiel et normal à l'interface. Les vecteurs de Burger b_i introduits sont définis tels que,

$$b_i = -\Delta u_i \quad (\text{IV.31})$$

En utilisant les fonctions de Green et les solutions de Volterra s , le champ de dislocation sur l'interface inclusion/matrice peut s'écrire comme,

$$u_i^{(3)}(x) = \int_{\partial\Omega} C_{mnkl}^M b_l(x') n_k(x') G_{im,n}(x-x') dS' \quad (\text{IV.32})$$

Une expression plus adaptée peut être obtenue en définissant les vecteurs de Burger sur le volume de l'inclusion Ω et en appliquant ensuite le théorème de Gauss, tel que

$$u_i^{(3)}(x) = - \int_{\Omega} C_{mnkl}^M \varepsilon_{kl}^{**}(x') G_{im,n}(x-x') dV' + b_i(x) \quad (\text{IV.33})$$

Avec,

$$\varepsilon_{kl}^{**} = \frac{-1}{2} (b_{k,l} + b_{l,k}) \quad (\text{IV.34})$$

Le champ de contrainte correspondant s'écrit donc comme,

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x) = -C_{ijmn}^M \left[\int_{\Omega} C_{pqkl} \varepsilon_{kl}^{**}(x') G_{mp,qn}(x-x') dV' + \varepsilon_{mn}^{**}(x) \right] \quad (\text{IV.35})$$

Le vecteur de Burger b_i peut être écrit, comme l'eigenstrain, sous forme polynomiale tel que

$$b_i(x) = B_{ij}x_j + B_{ijk}x_jx_k + B_{ijkl}x_jx_kx_l \quad (\text{IV.36})$$

D'où,

$$b_{i,j}(x) = B_{ij} + B_{ijk}x_k + B_{ijk}x_k\delta_{jk} + B_{ijkl}x_kx_l + B_{ikjl}x_kx_l + B_{ikjl}x_kx_l\delta_{jl} \quad (\text{IV.37})$$

En substituant l'équation IV.37 dans l'équation IV.34, on obtient l'expression des contraintes suivantes,

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x) = C_{ijkl} \left[D_{klmn}(x) E_{mn}^{**} + D_{klmnp}(x) E_{mnp}^{**} + D_{klmnpq}(x) E_{mnpq}^{**} \right], \forall x \in \{D - \Omega\} \quad (\text{IV.38})$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x) = C_{ijkl} \left[(D_{klmn}(x) E_{mn}^{**} + D_{klmnp}(x) E_{mnp}^{**} + D_{klmnpq}(x) E_{mnpq}^{**}) - \varepsilon_{kl}^{**}(x) \right], \forall x \in \Omega \quad (\text{IV.39})$$

Et

$$\varepsilon_{ij}^{**}(x) = E_{ij}^{**} + E_{ijk}^{**}x_k + E_{ijkl}^{**}x_kx_l \quad (\text{IV.40})$$

Où,

$$E_{ij}^{**} = \frac{-1}{2} (B_{ij} + B_{ji}) \quad (\text{IV.41})$$

$$E_{ijk}^{**} = \frac{-1}{2} (B_{ijk} + B_{jik} + B_{ijk}\delta_{jk} + B_{jik}\delta_{ik}) \quad (\text{IV.42})$$

$$E_{ijkl}^{**} = \frac{-1}{2} (B_{ijkl} + B_{ikjl} + B_{ikjl}\delta_{jl} + B_{jikl} + B_{jkil} + B_{jkil}\delta_{il}) \quad (\text{IV.43})$$

Dés lors, la solution générale du problème s'écrit comme la somme des solutions des trois sous-problèmes,

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)} \quad (\text{IV.44})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)} \quad (\text{IV.45})$$

La condition de continuité des tractions à l'interface est satisfaite automatiquement. Les coefficients des eigenstrains du problème (2) et des vecteurs de Burger du problème (3) sont entièrement déterminés par le système d'équivalence exposé au III et des conditions d'interface IV.21.

4.2.3 Superposition des sous-problèmes

Bien que les solutions aux sous-problèmes (2) et (3) sont exposées ci-dessus, les coefficients E_{ij}^* , E_{ijk}^* , E_{ijkl}^* , E_{ij}^{**} , E_{ijk}^{**} , et E_{ijkl}^{**} sont inconnus. Le système d'équivalence peut être réécrit de la manière suivante,

$$\Delta C_{stmn}^M \left(D_{mnij} \left(x^I \right) \Gamma_{ij} + D_{mniijk} \left(x^I \right) \Gamma_{ijk} + D_{mniijkl} \left(x^I \right) \Gamma_{ijkl} \right) - C_{stmn}^M E_{mn} = -\Delta C_{stmn}^M E_{mn}^0 \quad (\text{IV.46})$$

$$\Delta C_{stmn}^M \left(D_{mnij,p} \left(x^I \right) \Gamma_{ij} + D_{mniijk,p} \left(x^I \right) \Gamma_{ijk} + D_{mniijkl,p} \left(x^I \right) \Gamma_{ijkl} \right) - C_{stmn}^M E_{mnp} = -\Delta C_{stmn}^M E_{mnp}^0 \quad (\text{IV.47})$$

$$\frac{1}{2} \Delta C_{stmn}^M \left(D_{mnij,pq} \left(x^I \right) \Gamma_{ij} + D_{mniijk,pq} \left(x^I \right) \Gamma_{ijk} + D_{mniijkl,pq} \left(x^I \right) \Gamma_{ijkl} \right) - C_{stmn}^M E_{mnpq} = -\Delta C_{stmn}^M E_{mnpq}^0 \quad (\text{IV.48})$$

Avec $\Gamma_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}^*(x) + \varepsilon_{ij}^{**}(x)$ et $\Gamma_{ijk}(x) = \Gamma_{ij} + \Gamma_{ijk}x_k + \Gamma_{ijkl}x_kx_l$. L'expression des déplacements tangentiels et normaux à l'interface s'écrit comme fonction des coefficients du vecteur de Burger selon l'équation IV.31,

$$\Delta u_i = -B_{ij}x_j - B_{ijk}x_jx_k - B_{ijkl}x_jx_kx_l \quad (\text{IV.49})$$

Les efforts tangentiels (cisaillement) et normaux (traction) s'écrivent comme une somme des composantes des trois sous-problèmes,

$$T_k = T_k^{(1)} + T_k^{(2)} + T_k^{(3)} \quad (\text{IV.50})$$

$$N_k = N_k^{(1)} + N_k^{(2)} + N_k^{(3)} \quad (\text{IV.51})$$

Les termes de cisaillement et de traction sont obtenus à partir de l'expression des contraintes,

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x) = C_{ijkl} \left(E_{kl}^0 + E_{klm}^0 x_m + E_{klmn}^0 x_m x_n \right) \quad (\text{IV.52})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(x) = & C_{ijkl}^I \left[\left(D_{klmn} \left(x^I \right) E_{mn}^* + D_{klmnp} \left(x^I \right) E_{mnp}^* + D_{klmnpq} \left(x^I \right) E_{mnpq}^* \right) \right. \\ & + x_r \left(D_{klmn,r} \left(x^I \right) E_{mn}^* + D_{klmnp,r} \left(x^I \right) E_{mnp}^* + D_{klmnpq,r} \left(x^I \right) E_{mnpq}^* \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} x_r x_t \left(D_{klmn,rt} \left(x^I \right) E_{mn}^* + D_{klmnp,rt} \left(x^I \right) E_{mnp}^* + D_{klmnpq,rt} \left(x^I \right) E_{mnpq}^* \right) \right] \quad (\text{IV.53}) \end{aligned}$$

L'expression du champ de contrainte pour le sous-problème (3) est obtenue en substituant les termes E_{mn}^* , E_{mnp}^* , et E_{mnpq}^* par E_{mn}^{**} , E_{mnp}^{**} , et E_{mnpq}^{**} dans l'équation IV.53. En combinant ces équations avec les équations IV.21 et IV.44 on obtient trois équations supplémentaires pour chaque composante du vecteur de Burger b_i .

4.3 Résultats et discussions

Pour étudier simplement le phénomène de décohésion décrit par un modèle d'interface élastique linéaire, une inclusion sphérique de rayon $a_1 = a_2 = a_3 = a$ de module d'Young E^I et de coefficient de Poisson $\nu^I = 0.2$ est située dans un massif infini élastique isotrope de module d'Young E^M et $\nu^M = 0.35$. La Figure IV.9

montre les variations de la contrainte normale σ_{11} pour un chargement uniaxial appliqué $\sigma_0 = \sigma_{11}^0$ et $\sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq 1$ et $j \neq 1$ avec un rapport de module de Young $\gamma = E^I/E^M = 20$. Différentes constantes α et β sont étudiées et adimensionnées telles que $\alpha_0 = \alpha\sigma_0/a$ et $\beta_0 = \beta\sigma_0/a$. Dans le cas d'une interface parfaite sans décohésion, les coefficients α et β sont nuls. On retrouve alors la solution équivalente d'Eshelby. Ghahremani [Gha80], Mura [Mur84] et Hashin [Has91] ont montré que la contrainte à l'intérieur d'une hétérogénéité avec décohésion à l'interface n'est pas uniforme comme le confirme l'équation IV.53. Cependant, on peut noter que deux cas de figure génèrent une contrainte uniforme dans l'hétérogénéité. Dans le premier cas, la contrainte appliquée génère une dilatation volumétrique telle que $\sigma_{ij}^0 = \sigma_0\delta_{ij}$ causant uniquement une séparation normale (sans glissement) à l'interface hétérogénéité/matrice. Dans le second cas, les coefficients α et β sont égaux. Pour notre étude, la contrainte obtenue à l'intérieur de l'hétérogénéité est uniforme car les expressions analytiques n'ont pas été étendues aux ordres supérieurs (premier et second ordre).

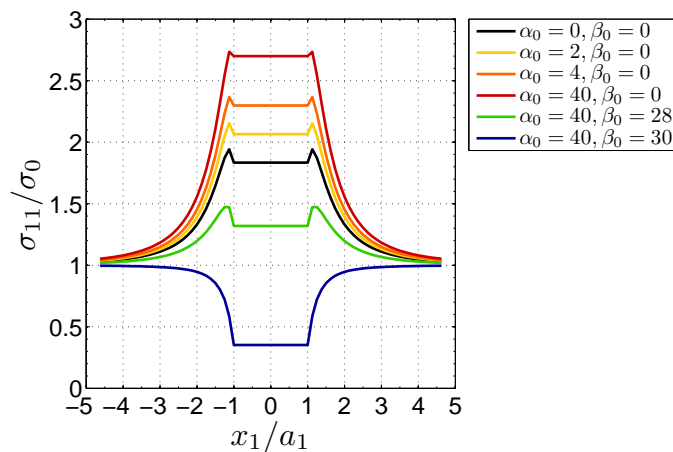


FIGURE IV.9 – Distribution de la contrainte normale σ_{11}/σ_0 le long de l'axe x_1 ($x_2 = x_3 = 0$) pour une hétérogénéité sphérique de rapport $\gamma = 20$ soumise à un chargement uniaxial $\sigma_0 = \sigma_{11}^0$.

La Figure IV.9 montre une forte influence des coefficients α et β sur la distribution de contrainte à l'intérieur de l'hétérogénéité. Pour un glissement pur ($\beta_0 = 0$), la contrainte à l'intérieur de l'hétérogénéité augmente avec l'augmentation de α_0 . Cependant, l'augmentation du paramètre β_0 , qui représente la séparation normale à l'interface, a tendance à réduire la contrainte à l'intérieur de l'hétérogénéité. Ainsi on peut en déduire que la contrainte à l'intérieur de l'hétérogénéité s'annule dans le cas d'une décohésion totale ($\alpha_0 \rightarrow \infty$ et $\beta_0 \rightarrow \infty$).

La Figure IV.10 montre la distribution de la contrainte normale σ_{11} le long de l'axe x_1 dans les mêmes conditions que la Figure IV.9, excepté le rapport de module de Young $\gamma = 1/20$. Il est intéressant d'observer que les distributions de contraintes obtenues pour différents couples α_0 et β_0 à l'intérieur de l'hétérogénéité sont quasiment identiques. L'effet de la décohésion à l'interface hétérogénéité/matrice sur la distribution de contrainte est plus prononcé pour des hétérogénéités dures ($\gamma > 1$) que pour des hétérogénéités molles ($\gamma < 1$). De manière générale, les résultats numériques obtenus révèlent une forte sensibilité au rapport de modules de Young

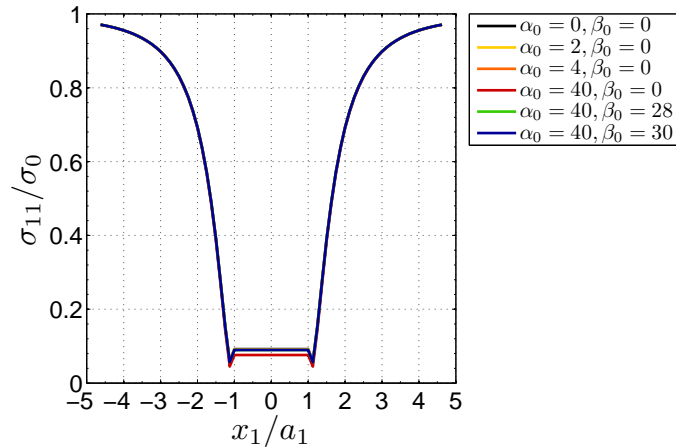


FIGURE IV.10 – Distribution de la contrainte normale σ_{11}/σ_0 le long de l'axe x_1 ($x_2 = x_3 = 0$) pour une hétérogénéité sphérique de rapport $\gamma = 1/20$ soumise à un chargement uniaxial $\sigma_0 = \sigma_{11}^0$.

des différents constituants, aux paramètres de décohésion (α, β) , et à la nature du chargement appliqué sur le massif.

5 Bilan

A partir de la morphologie géométrique des mèches connue à priori et d'une discrétisation numérique par assemblage d'inclusions ellipsoïdales équivalentes, on est capable de résoudre un problème de contact élastique qui tient compte explicitement des différences de rigidité locale dans les mèches. Les méthodes d'homogénéisation permettent de coupler localement l'échelle microscopique et l'échelle mésoscopique pour chaque inclusion. Cependant, elles ne sont pas très adaptées à la modélisation du fil. En effet, ces méthodes présentent des difficultés près des bords libres, et en particulier proche de la surface de contact où on peut observer un fort gradient. De plus, la définition d'une cellule élémentaire périodique est plutôt délicate pour le fil, l'arrangement des fibres étant fortement aléatoire. Cela nécessite la mise en place d'un volume élémentaire statistiquement représentatif. Enfin, ces approches sont adaptées aux problèmes élastiques, la présence de non-linéarités au niveau microscopique (plasticité, décohésions fibre/matrice) demandant une mise à jour du VER et de la procédure d'essais numériques.

De récents développements ont permis de proposer un modèle de décohésion à l'interface inclusion/matrice considérant le glissement et la séparation normale à la surface. Ce modèle suppose une relation linéaire entre la discontinuité des déplacements et les efforts à l'interface. Des premiers résultats numériques ont montré que le champ de contrainte local est fortement influencé par ces propriétés à l'interface. Pour le moment, ce modèle ne permet pas de gérer l'interpénétration des deux matériaux. Il est envisagé d'utiliser un modèle de décohésion non-linéaire progressive avec une gestion du contact/friction après décollement qui permet le transfert de charge entre les fils et la matrice. Ce modèle est basé sur une approche de zone cohésive [Cha97, Cha01]. Le comportement à l'interface pilote en grande partie le taux de fissuration limite de la matrice inter-fil. Enfin, il serait intéressant de pouvoir ob-

tenir une décohésion localisée, et non sur toute la surface constituant l'interface de l'ellipsoïde. Une méthode proposée par Fitoussi [Fit95] consiste à discrétiser l'inclusion en de multiples segments, et à dégrader les propriétés élastiques de l'inclusion en fonction du nombre de segments en décohésion. Un critère de décohésion de type Coulomb permet de prendre en compte la séparation normale et le glissement à l'interface.

Chapitre V

Applications académiques et industrielles

Le code développé est appliqué aux problématiques de composites unidirectionnels et tissés. Une première partie concerne la simulation de fretting sur géométrie cylindre/plan. L'un des massifs en contact est constitué de fibres cylindriques unidirectionnelles orthogonalement orientés par rapport à la direction de l'effort tangentiel imposé. Une étude des paramètres géométriques et matériaux des fibres est d'abord effectuée en situation de « full-sliding » (à l'échelle microscopique). Une étude des paramètres de contact est ensuite réalisée en situation de stick-slip (à l'échelle macroscopique). Les différences selon que l'on utilise des modèles définis à l'échelle microscopique ou à l'échelle macroscopique sont alors étudiées. La seconde partie concerne l'application aux composites tissés. Un contact sphère/plan sur un composite tissé 2D est tout d'abord analysé par soucis de simplicité et de clarté afin d'en analyser toutes les étapes de description présentées au Chapitre IV. A partir d'un modèle éléments finis, une application au problème aube-disque équipé d'une aube en CMO est proposée afin de se rendre compte de l'intérêt à modéliser un composite tissé à l'échelle mésoscopique dans toute sa complexité.

Sommaire

1	Exemples académiques	134
1.1	Simulations en full sliding du contact cylindre-plan	134
1.2	Simulations en stick-slip du contact cylindre-plan	140
1.3	Comparaisons entre une solution hétérogène isotrope et homogène anisotrope	142
2	Simulations du contact sur matériaux composites tissés	152
2.1	Simulations d'un contact sphère/plan pour un matériau composite tissé 2D	152
2.2	Applications sur pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteur nouvelle génération	156

1 Exemples académiques

1.1 Simulations en full sliding du contact cylindre-plan

1.1.1 Comparaisons et Validations

Une première validation des résultats numériques obtenus par la méthode MEIM pour un contact frottant est effectuée en les comparant aux solutions numériques obtenues par la méthode EF et BEM de Kuo [Kuo07, Kuo08]. Kuo a utilisé une méthode d'éléments de frontière pour analyser un problème de contact bidimensionnel d'un cylindre rigide en glissement sur un demi-espace élastique contenant des hétérogénéités ellipsoïdales [Kuo07] et cylindriques [Kuo08].

Le massif semi-infini contient trois hétérogénéités cylindriques identiques de rayon a séparées d'une même distance d (voir Figure V.1). Pour cette étude, le rayon des hétérogénéités est $a = 20\mu\text{m} = 0.066a_0$ et le centre des inclusions est localisé en $x_3 = 2a$ et en $x_1 = \{-6a, 0, 6a\}$ respectivement.

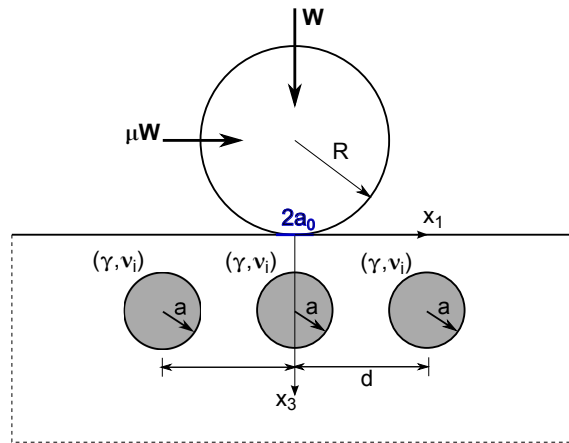


FIGURE V.1 – Schéma du contact cylindrique en glissement sur un demi-espace élastique contenant trois fibres cylindriques identiques.

On applique un chargement normal linéique $W = 1.67 \times 10^6 \text{ N/m}$ sur un cylindre rigide élastique de rayon $R = 10 \text{ mm}$. Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson considérés pour le demi-espace élastique ont pour valeurs respectives $G_m = 80.77 \text{ GPa}$ et $\nu_m = 0.3$. Un coefficient de frottement constant $\mu = 0.1$ est appliqué sur la surface de contact. Le rapport des modules de Young de l'inclusion et de la matrice est défini comme $\gamma = E_i/E_m$, avec E_i et ν_i les modules de Young et les coefficients de Poisson des hétérogénéités. Dans le cas d'un massif homogène, la théorie de Hertz prescrit une demi-largeur de contact $a_0 = 304 \mu\text{m}$ et une pression de contact maximale $P_0 = 3.5 \text{ GPa}$.

La figure V.2b montre la pression de contact obtenue le long de l'axe x_1 avec la méthode MEIM. Pour titre de comparaison, la figure V.2a montre les solutions obtenues par la méthode d'éléments frontières (BEM) de Kuo et par la méthode éléments finis (FEM). L'erreur maximale entre les solutions MEIM et FEM est de 5% pour le cas $\gamma = 0.5$ et 3% pour $\gamma = 2$. De la même manière la figure V.3 montre les comparaisons des distributions de contraintes normales σ_{11} et σ_{33} le long de l'axe x_1 ($-1.5a_0 \leq x_1 \leq 1.5a_0$) en $x_3 = 2a$. Les résultats obtenus montrent une très bonne cohérence entre les trois solutions.

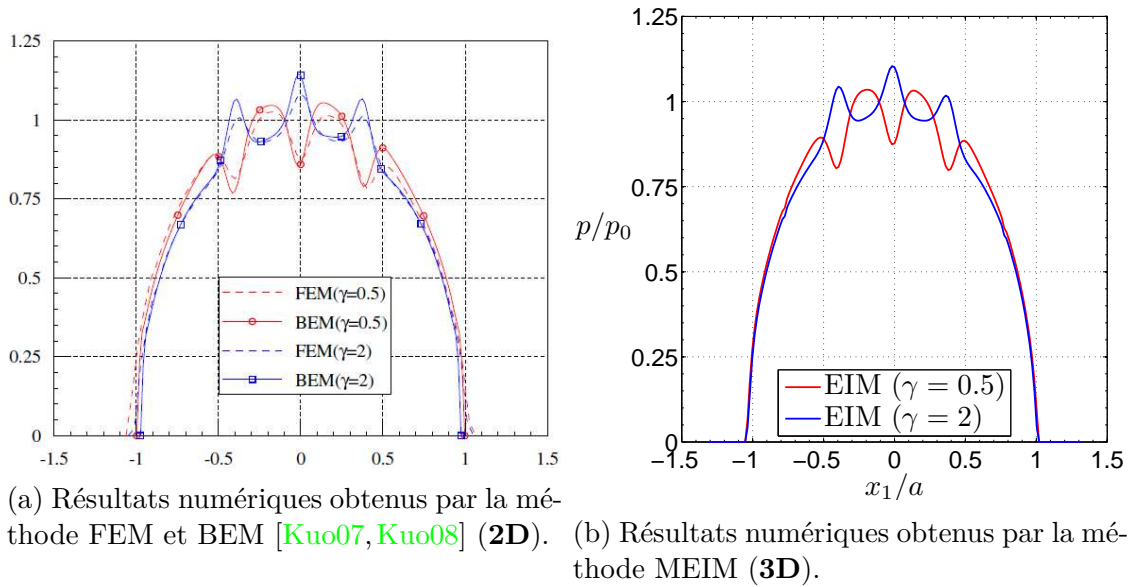


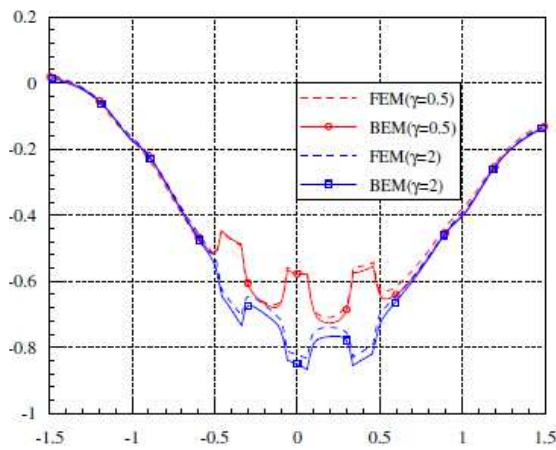
FIGURE V.2 – Distributions des pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour $\gamma = 0.5$ et $\gamma = 2$.

Afin d'analyser l'effet des différents paramètres matériaux et géométriques des hétérogénéités sur les paramètres de contact (pression de contact, cisaillement en surface, glissement), les paramètres du modèle présenté ci-dessus sont utilisés pour ce qui suit. Le chargement ainsi que les propriétés matériaux de la matrice sont gardés identiques. Seuls les paramètres matériaux et géométriques des hétérogénéités cylindriques, que l'on désignera désormais par le terme de fibres, vont varier. Le tableau V.1 résume les différents paramètres utilisés pour chaque étude paramétrique.

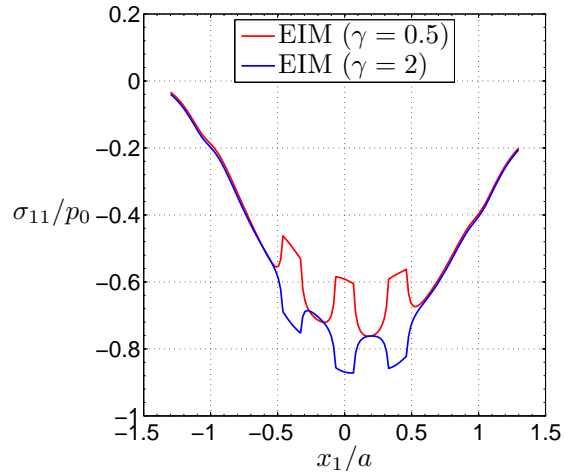
1.1.2 Effet des fibres voisines sur les distributions de pression et de contraintes

Les interactions entre les hétérogénéités sont susceptibles de fortement modifier la cartographie des contraintes, et tout particulièrement les contraintes à l'interface. Pour étudier l'influence des inclusions voisines dans un demi-espace élastique soumis à un chargement de contact, deux fibres cylindriques de rayon $a = 20\mu m = 0.066a_0$ séparées d'une distance d sont considérées, comme le montre la Figure V.4. La distance d sera dorénavant exprimée à travers la variable adimensionnée $\beta = (d - 2a)/a$. $h = 0$ signifie que les deux hétérogénéités sont en contact ($\beta \in [0, \infty]$).

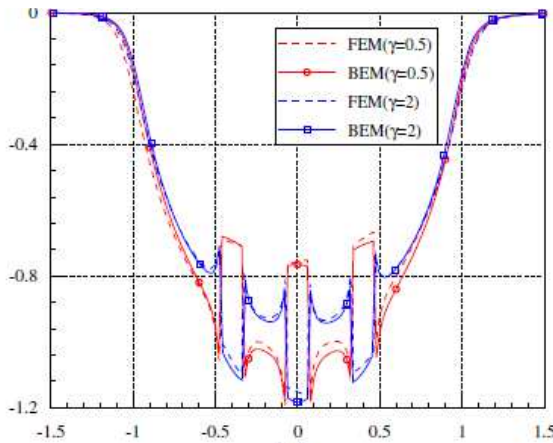
La Figure V.5 montre les profils de pression pour différents rapports de modules de Young des deux hétérogénéités de rapports de module de Young γ_1 et γ_2 . Les fibres sont séparées d'une distance $d = [2r; 3r; 4r]$ et placée à une profondeur $x_3 = 2r$. Quelques soient les différences de propriétés matériaux de la première hétérogénéité, le pic (ou la chute de pression) au dessus de la première hétérogénéité est très peu perturbé par la présence de l'hétérogénéité voisine, même lorsqu'elles sont collées. A l'inverse, deux hétérogénéités localisées non pas à la même profondeur mais suivant la même direction verticale engendreraient des modifications significatives des maximums ou minimums de pression.



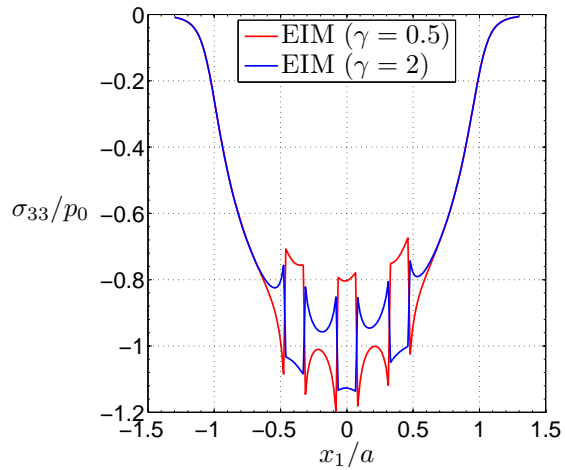
(a) Contraintes σ_{xx} obtenues par la méthode FEM et BEM [Kuo07, Kuo08] (2D).



(b) Contraintes σ_{xx} obtenues par la méthode MEIM (3D).



(c) Contraintes σ_{zz} obtenues par la méthode FEM et BEM [Kuo07, Kuo08] (3D).



(d) Contraintes σ_{zz} obtenues par la méthode MEIM (3D).

FIGURE V.3 – Distributions des contraintes normalisées par la pression de Hertz en $x_3 = 2a$ pour $\gamma = 0.5$ et $\gamma = 2$.

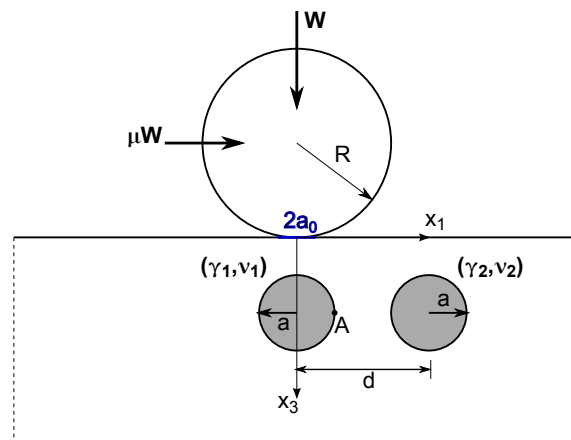


FIGURE V.4 – Schéma du contact cylindrique en full sliding sur un demi-espace élastique contenant deux fibres cylindriques.

Étude	Rapport de module de Young γ	Coefficient de Poisson ν_i	Rayon des fibres r	Coefficient de frottement μ
Influence mutuelle	0.5; 2	0.3	0.066a	0.1
Profondeur	2	0.3	0.066a; 0.132a	0.1
Coefficient de Poisson	0.5; 2	0.1; 0.3; 0.45	0.066a	0.1
Coefficient de friction	2	0.3	0.066a	0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9

TABLE V.1 – Liste de paramètres à faire varier pour étudier l'influence des interactions, de la profondeur, du coefficient de Poisson, et du coefficient de friction.

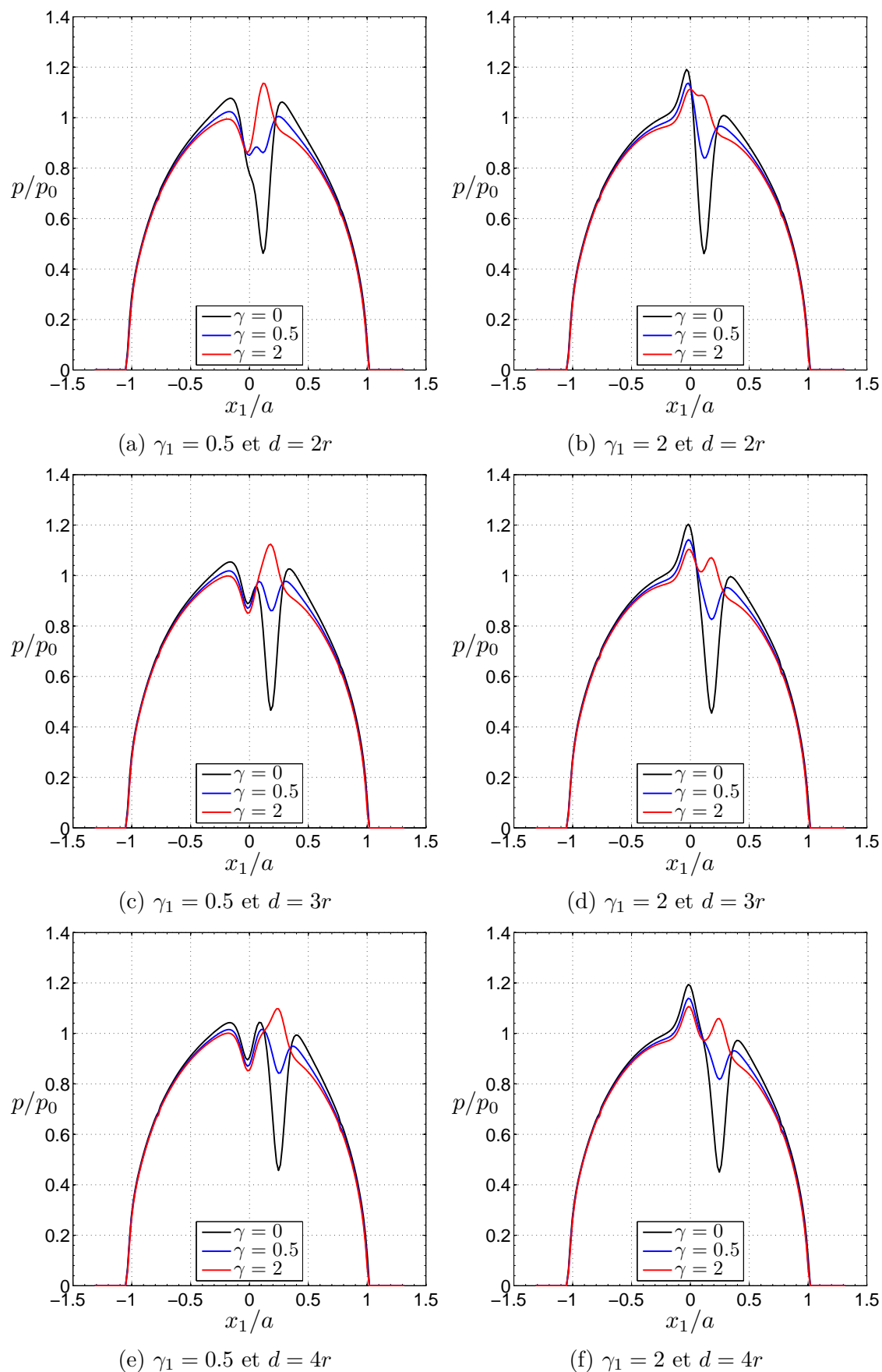


FIGURE V.5 – Pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour deux fibres cylindriques séparées d'une distance $d = [2r; 3r; 4r]$ pour un frottement de Coulomb de 0.1.

1.1.3 Effet de la profondeur des fibres sur la distribution de pression

Des études de fretting sont bien souvent menées sur des matériaux revêtus. Il peut alors être intéressant d'analyser la profondeur minimale des fibres qui engendre peu de fluctuations des pressions de contact. La présence d'un revêtement permettrait d'atténuer ces variations de pressions pour contenir les contraintes maximum dans le matériau. Trois fibres cylindriques identiques sont disposées dans un massif semi-infini élastique selon deux configurations : soit les fibres de rayon $a = 20\mu\text{m} = 0.066a_0$ sont espacées d'une distance $d = 6a$, soit les fibres de rayon $a = 40\mu\text{m} = 0.132a_0$ sont espacées d'une distance $d = 3a$. La Figure V.6 montre les variations des pressions de contact dans les deux configurations pour différentes profondeurs de fibres $h = [a; 2a; 3a; 4a]$. A partir d'une profondeur $h = 3a$, la pression de contact ne subit plus de fluctuations significatives liées à la présence de fibres en profondeur. La pression de contact reste plus perturbée pour la première configuration où le rayon des fibres est plus faible que la seconde configuration. Plus les hétérogénéités sont rapprochées les unes des autres avec une taille proche du rayon de contact, plus le champ de pression aura un effet lissé sous une forme « moyennée ».

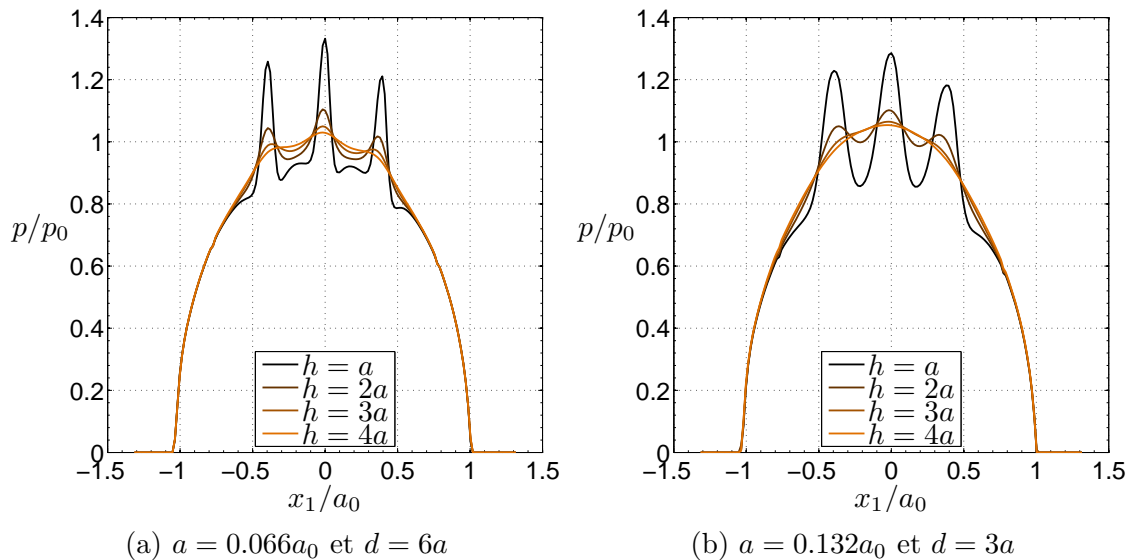


FIGURE V.6 – Profils de pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour différents rapports de forme et profondeurs des fibres.

1.1.4 Effet du coefficient de Poisson sur les distributions de pression

Des matériaux comme les composites peuvent présenter des rapports de coefficients de Poisson très contrastés entre la matrice et les renforts. Pour cette étude, trois fibres cylindriques identiques (voir Figure V.1) sont placées à une profondeur $h = 2a$ et espacées d'une distance $d = 6a$ dans un massif semi-infini élastique soumis à un chargement de contact frottant. La Figure V.7 montre les distributions de pressions de contact le long de l'axe x_1 pour différents coefficients de Poisson des fibres ν_i et pour deux configurations de rapport de module de Young $\gamma = 0.5$ V.7a et $\gamma = 2$ V.7b. L'augmentation des pressions de contact avec l'augmentation du coefficient de Poisson dans le cas de fibres plus dures que la matrice (voir Figure

V.7b) est cohérente physiquement. Le matériau devient incompressible lorsque son coefficient de Poisson se rapproche de la valeur 0.5. Dans le cas des fibres plus molles que la matrice (voir Figure V.7a), le profil de pression de contact est très perturbé pour un coefficient de Poisson ν_i proche de 0.5 au point de se comporter comme des fibres plus dures que la matrice.

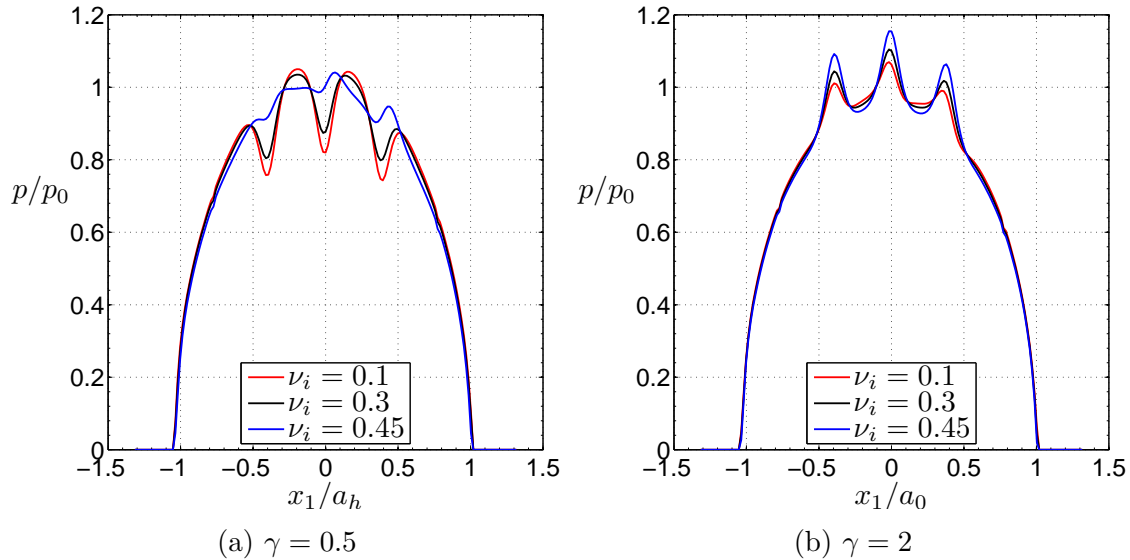


FIGURE V.7 – Profils de pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour des fibres molles ($\gamma = 0.5$) ou dures ($\gamma = 2$) en fonction du coefficient de Poisson des fibres.

1.1.5 Effet du coefficient de frottement sur les distributions de pression

Pour cette étude, trois fibres cylindriques identiques (voir Figure V.1) sont placées à une profondeur $h = 2a$ et espacées d'une distance $d = 6a$ dans un massif semi-infini élastique soumis à un chargement de contact frottant. Les fibres de coefficient de Poisson $\nu_i = 0.3$ sont deux fois plus dures que la matrice. La figure V.8 montre les profils de pression de contact pour différents coefficients de frottement $\mu = [0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9]$. Les résultats observés pour les valeurs de coefficient de frottement μ supérieures à 0.3 montrent que des fibres proches de la surface de contact peuvent naturellement induire une certaine résistance au frottement et augmenter localement les cisaillements en surface, générant un couple résistant au mouvement.

Une étude plus approfondie en situation de stick-slip doit être menée afin d'étudier l'influence des fibres sur la localisation et la taille des zones de glissement.

1.2 Simulations en stick-slip du contact cylindre-plan

On considère un effort tangentiel Q oscillant entre $Q^* = 0.5\mu W$ et $Q^* = -0.5\mu W$ où μ désigne le coefficient de frottement. Le trajet de chargement est représenté sur la Figure V.9 pour un cycle de fretting. Les différents résultats obtenus pour cette simulation en stick-slip sont représentés en 4 instants correspondants aux points A ($Q^* = 0$), B ($Q^* = 0.5\mu W$), C ($Q^* = 0$), et D ($Q^* = -0.5\mu W$). Il est parfois

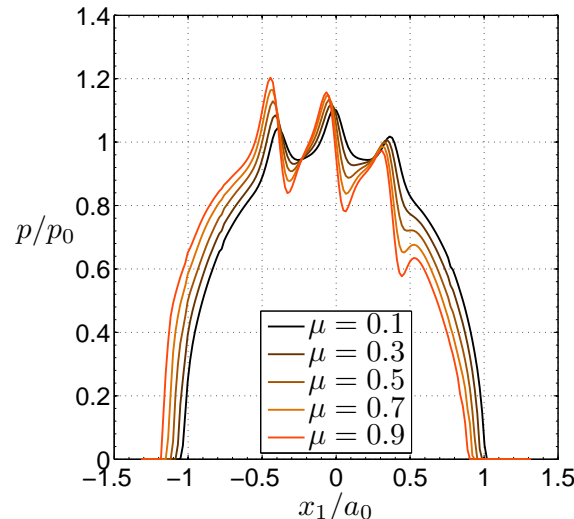


FIGURE V.8 – Profils de pression de contact pour différents coefficients de frottement.

aussi intéressant de regarder ce qui se passe au point E, qui diffère du point A. Les fibres sont choisies deux fois plus dures que la matrice ($\gamma = 2$) avec un coefficient de Poisson de 0.3. Elles sont disposées à une profondeur $x_3 = 2a$ et espacées suivant $x_2 = \{-6a; 0; 6a\}$. Afin de comparer l'effet des hétérogénéités sur les paramètres caractéristiques de l'usure, les résultats pourront être comparés à ceux obtenues dans le cas homogène sans présence de fibres.

La Figure V.10 montre les profils de pressions en traits pleins et de cisaillements en traits pointillés pour différents coefficients de frottement $\mu = [0.1; 0.3; 0.5; 0.7]$ à différents instants du cycle de fretting (A,B,C,D). Le premier point à noter est la dissymétrie des profils de pression s'accroissant avec l'augmentation du coefficient de frottement. Cette dissymétrie est due aux différents couplages existants entre les efforts et les déplacements en surface dans toutes les directions du contact. Ce couplage est nécessaire dès lors que les matériaux des deux massifs en contact diffèrent. Le deuxième point à noter est l'augmentation de la pression de contact avec l'augmentation du coefficient de frottement tandis que le déplacement normal de corps rigide diminue. Les fibres cylindriques en sous-couche génèrent des augmentations locales de la pression de contact pouvant aller jusqu'à 20% au centre du profil. Au démarrage du cycle au point A (voir Figure V.10a), les perturbations induites par la présence des fibres sur les profils de cisaillements sont très légères. En revanche, ces perturbations deviennent prépondérantes à l'instant B (voir Figure V.10c) où l'effort tangentiel imposé est maximal et d'autant plus si le coefficient de frottement est important. Les mêmes constatations peuvent être faites sur le chemin du retour aux instants C et D (voir Figures V.10e et V.11g). En dernier lieu, il convient de remarquer que la zone de glissement a tendance à se réduire pour de faibles coefficients de frottement dans le cas du matériau hétérogène en comparaison de la zone de glissement du matériau homogène (voir Figures V.10c et V.10d). Il serait donc intéressant d'examiner l'effet des fibres en sous couche sur les glissements en surface pour différents coefficients de frottement à l'interface de contact.

La Figure V.11 montre le profil de glissement s_1 suivant l'axe x_1 en $x_2 = 0$. Au début du cycle au point A (voir Figures V.11a et V.11b), les profils pour les

massifs homogènes et hétérogènes sont identiques. Au point B où l'effort tangentiel appliqué est maximal (voir Figures V.11c et V.11d), la zone annulaire de glissement est plus importante dans le cas du matériau homogène pour de faibles coefficients de frottement. Les amplitudes de glissement restent quant à elles très peu perturbées. En revanche, au point D où le chargement tangentiel appliqué est minimal (voir Figures V.11g et V.11h), à la fois les zones de glissement pour de faibles coefficients de frottement ($\mu = 0.1$) et les amplitudes pour de forts coefficients de frottement ($\mu = 0.7$) sont amplifiées dans le cas du matériau homogène. Les fibres, plus dures que la matrice, ont tendances à s'opposer au déplacement du corps antagoniste qui a pour effet de réduire la zone de glissement et de diminuer l'amplitude de glissement. Cependant, le coefficient de frottement est considéré ici constant sur la surface de contact. En effet, les fibres auraient tendance à créer en surface un coefficient de frottement auquel cas il serait nécessaire de disposer de coefficients de frottement « composites » définis localement à l'interface.

La Figure V.12 montre les boucles de fretting représentant l'effort tangentiel imposé (normalisé par le coefficient de frottement fois l'effort normal maximal μW_{max}) en fonction du déplacement tangentiel δ_1 (normalisé par le déplacement tangentiel maximal δ_1^{max}) pour les 4 coefficients de frottement étudiés dans le cas du matériau fibreux hétérogène et du matériau homogène. Les boucles de fretting présentent très peu de différences voir aucunes entre le matériau hétérogène constitué de fibres cylindriques et le matériau considéré homogène. Cette constatation indique qu'il n'y a pas d'effets notables de la présence des fibres à l'échelle macroscopique du contact.

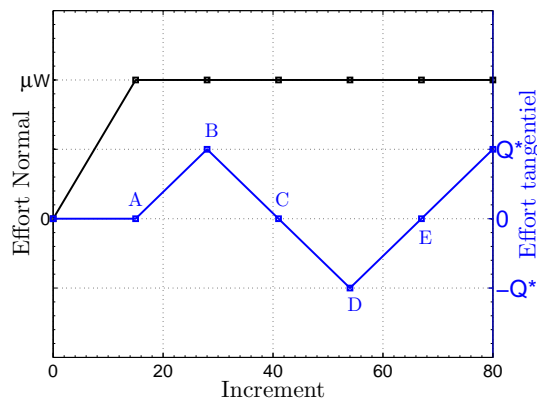
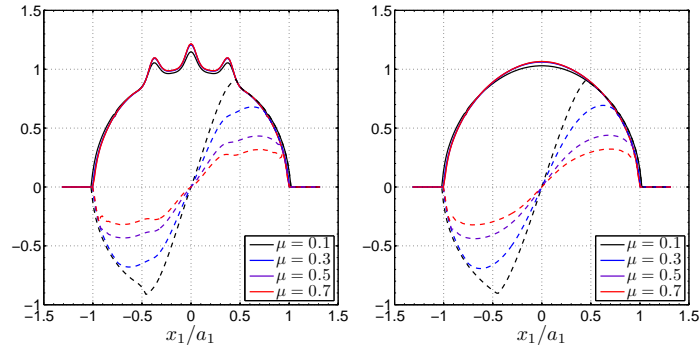


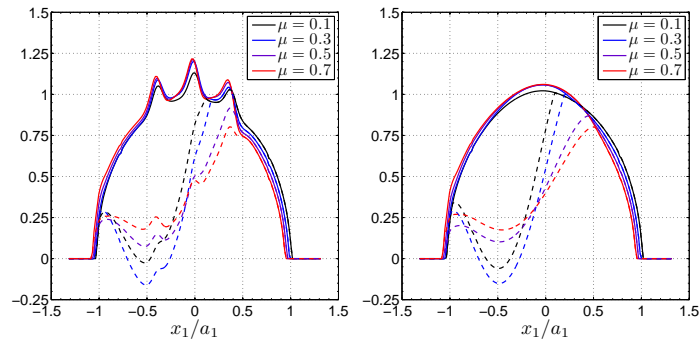
FIGURE V.9 – Trajet de chargement normal et tangentiel.

1.3 Comparaisons entre une solution hétérogène isotrope et homogène anisotrope

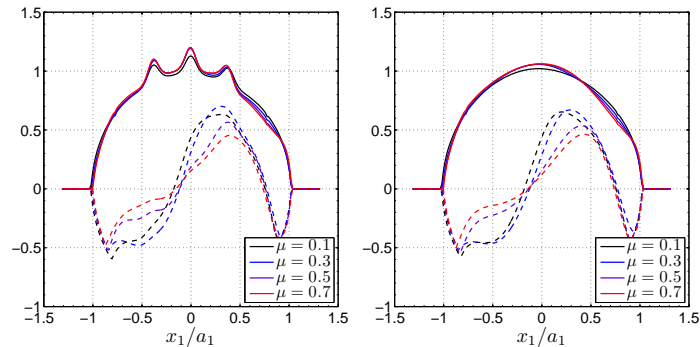
Pour modéliser le problème de contact sur un matériau composite, deux méthodes sont envisageables : (i) Prendre en compte explicitement les hétérogénéités dans le massif en contact ; (ii) Utiliser des propriétés matériaux anisotropes obtenues par une technique d'homogénéisation. Un premier critère de choix concernant la méthode à employer serait la dimension caractéristique des hétérogénéités vis à vis des dimensions de la zone de contact.



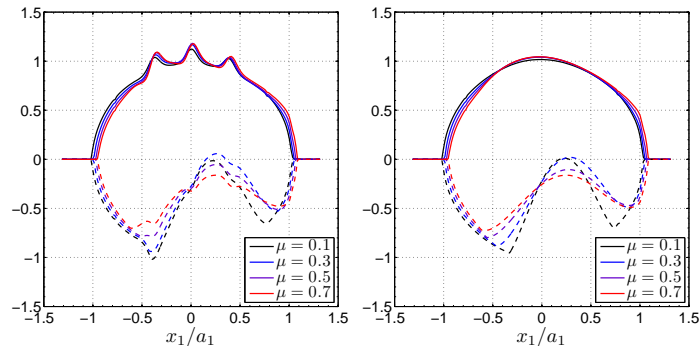
(a) Solution à l'incrément A pour le massif fibreux (b) Solution à l'incrément A pour le massif homogène



(c) Solution à l'incrément B pour le massif fibreux (d) Solution à l'incrément B pour le massif homogène

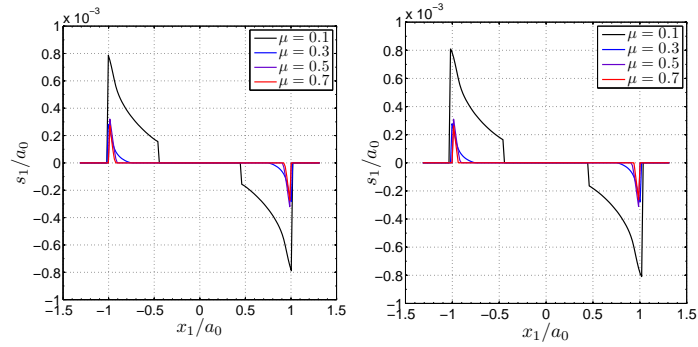


(e) Solution à l'incrément C pour le massif fibreux (f) Solution à l'incrément C pour le massif homogène

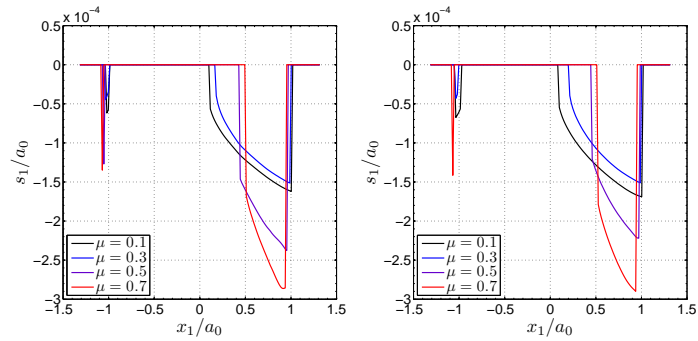


(g) Solution à l'incrément D pour le massif fibreux (h) Solution à l'incrément D pour le massif homogène

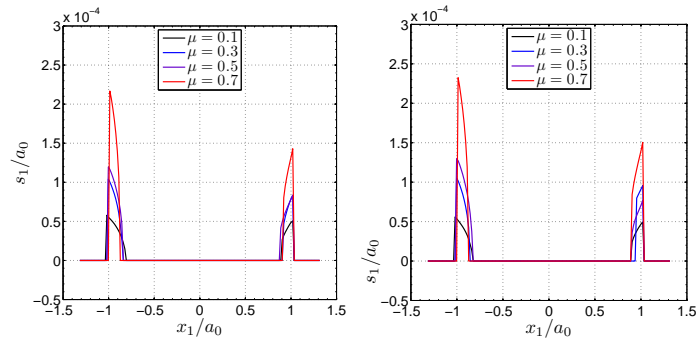
FIGURE V.10 – Profils de pressions (lignes pleines) normalisés par la pression de Hertz P_0 et profils de cisaillements (lignes pointillées) normalisés par μP_0 représentant le coefficient de frottement multipliée par la pression de Hertz, en fonction du coefficient de frottement à l'interface μ .



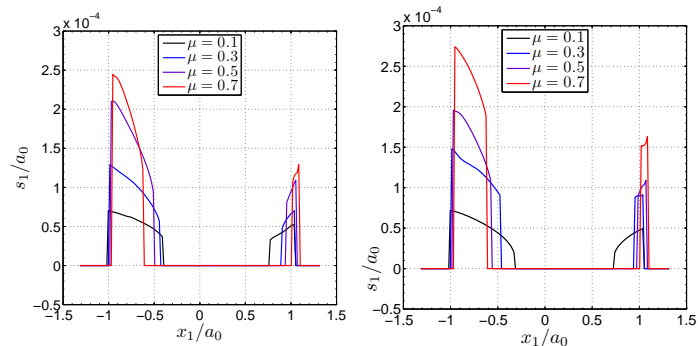
(a) Solution à l'incrément A pour le massif fibreux (b) Solution à l'incrément A pour le massif homogène



(c) Solution à l'incrément B pour le massif fibreux (d) Solution à l'incrément B pour le massif homogène



(e) Solution à l'incrément C pour le massif fibreux (f) Solution à l'incrément C pour le massif homogène



(g) Solution à l'incrément D pour le massif fibreux (h) Solution à l'incrément D pour le massif homogène

FIGURE V.11 – Glissements suivant l'axe x_1 normalisés par le rayon de contact Hertzien a_0 en fonction du coefficient de frottement à l'interface μ .

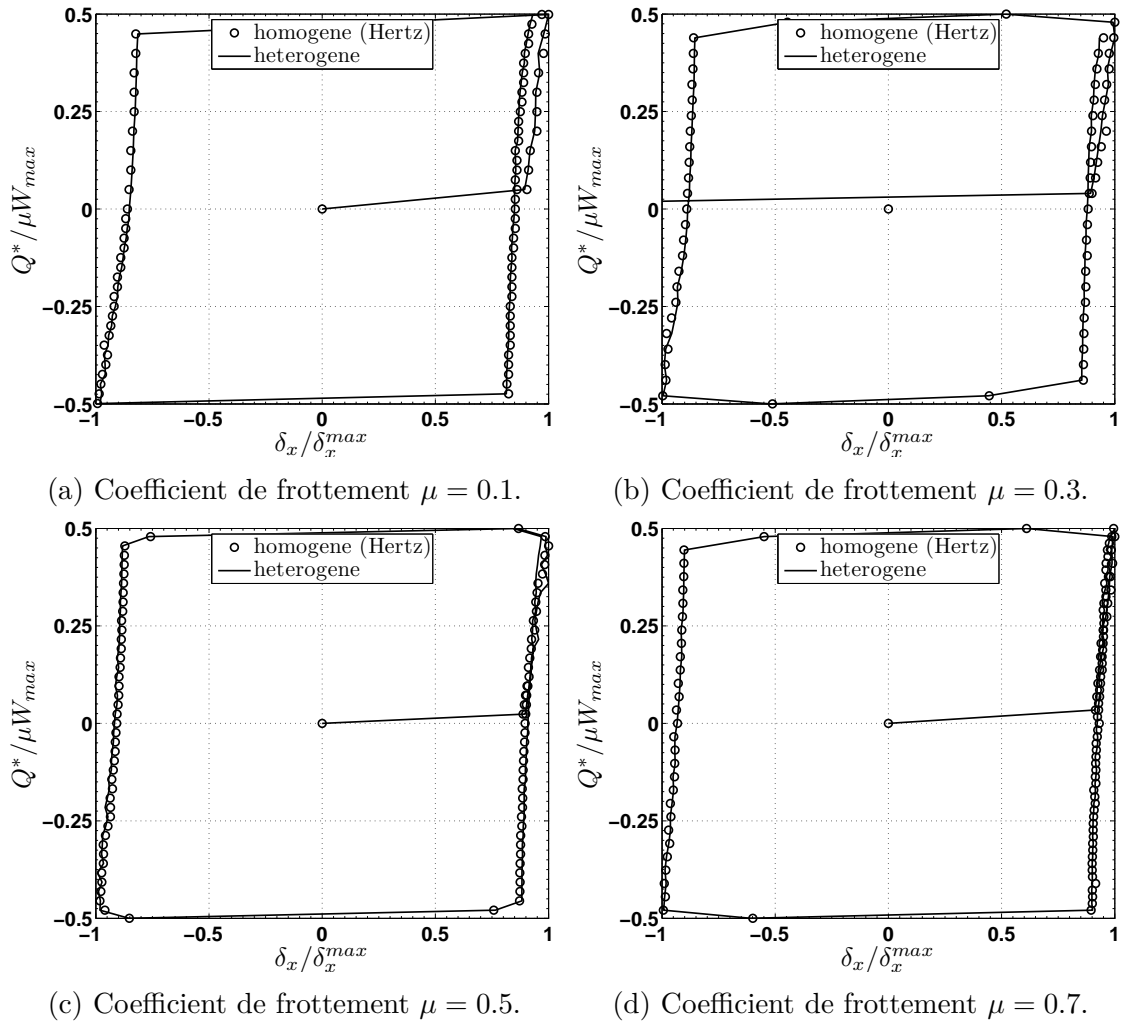


FIGURE V.12 – Tracés des boucles de frottement pour différents coefficients de frottement à l'interface de contact.

Afin de comparer ces deux approches dans le cas où les hétérogénéités ont la même échelle que la zone de contact, une indentation normale sans frottement est effectuée sur un corps élastique semi-infini contenant des fibres cylindriques unidirectionnelles identiques (voir Figure V.13). Une charge normale $W = 10kN$ est appliquée sur une sphère rigide de rayon $R = 40mm$. Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du massif semi-infini qui constituera la matrice du composite sont pris comme $E_m = 120GPa$ et $\nu_m = 0.3$. Dans le cas d'un matériau homogène, la théorie de Hertz prescrit une demi-largeur de contact $a_0 = 1.315mm$ et une pression de contact maximale $P_0 = 2760MPa$.

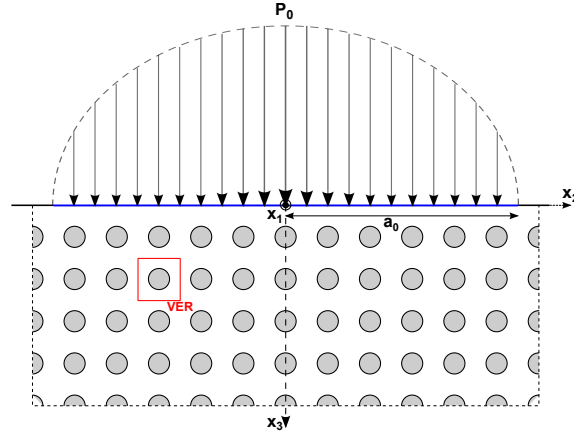


FIGURE V.13 – Indentation normale sans frottement sur un demi-espace élastique contenant des fibres cylindriques unidirectionnelles uniformément réparties.

Deux études d'influence sur les paramètres matériaux sont menées : (i) une variation du rapport des modules de Young de la fibre et la matrice γ et (ii) une variation de la fraction volumique de fibres V_f . L'arrangement ordonné des fibres, leurs géométries circulaires dans le plan (Ox_2x_3) et une longueur supposée infinie suivant l'axe x_1 comparée à la dimension du contact nous permettent d'utiliser un VER carré (voir Figure V.13). L'utilisation de l'algorithme de Mori-Tanaka, présenté précédemment, permet d'obtenir les propriétés matériaux homogénéisées équivalentes à l'échelle macro. C'est pourquoi la valeur maximale autorisée de la fraction volumique de fibres ne dépasse pas $V_f = 0.4$ pour rester dans le domaine de validité de la méthode de Mori-Tanaka. Au delà les interactions entre fibres sont trop fortes rendant cette approche insuffisante. La solution serait d'utiliser l'algorithme auto-cohérent mais celui-ci peut poser des problèmes de convergence pour de faibles rapports de modules de Young.

L'homogénéisation pour cette configuration génère un matériau isotrope transverse dû à la symétrie de révolution autour de l'axe x_1 . Dans la base isotrope transverse (x_1, x_2, x_3) , la matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse s'exprime en fonction des modules d'élasticité sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (V.1)$$

avec,

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_2 \Delta} \quad (\text{V.2})$$

$$C_{22} = C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} \quad (\text{V.3})$$

$$C_{12} = C_{13} = \frac{\nu_{12} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_2 E_2 \Delta} \quad (\text{V.4})$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} \quad (\text{V.5})$$

$$C_{44} = C_{22} - C_{23} = \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \quad (\text{V.6})$$

$$C_{55} = C_{66} = 2G_{12} \quad (\text{V.7})$$

et

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu_{12}\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2 E_2} \quad (\text{V.8})$$

Les relations sont établies à partir d'une simple inversion matricielle de la matrice de souplesse. Les propriétés mécaniques élastiques du matériau sont déterminées par cinq constantes d'élasticité indépendantes $E_L = E_1$, $E_T = E_2 = E_3$, $G_{LT} = G_{12}$, $\nu_{LT} = \nu_{12}$, et $\nu_{TT} = \nu_{23}$. Les valeurs obtenues par homogénéisation sont répertoriées dans le tableau V.2 pour l'étude du rapport de module de Young γ , et le tableau V.3 pour l'étude d'influence de la fraction volumique de fibres.

n°	γ	V_f	E_L [MPa]	E_T [MPa]	G_{LT} [MPa]	ν_{LT}	ν_{TT}
1 – 1	1/20	0.4	74400	48127	21625	0.300	0.303
1 – 2	1/10	0.4	76800	54109	23393	0.300	0.307
1 – 3	1/2	0.4	96000	90539	35294	0.300	0.304
1 – 4	2	0.4	168000	155478	60355	0.300	0.307
1 – 5	10	0.4	551962	226852	91061	0.300	0.361
1 – 6	20	0.4	1031832	243748	98508	0.300	0.381

TABLE V.2 – Paramètres matériaux pour l'étude d'influence du rapport de module de Young

La résolution du contact se fait ensuite à partir d'une version modifiée du code. C.Bagault [Bag12] y a récemment incorporé avec succès le calcul des déplacements en surface et des contraintes en volume dans le cas de matériaux anisotropes avec possibilité d'ajouter un revêtement anisotrope uniforme. Pour chaque configuration, les pressions de contact et la surface de contact sont analysées et comparées entre les deux approches, la première considérant un matériau homogène anisotrope équivalent et la seconde considérant explicitement les hétérogénéités du matériau. Les Figures V.14 et V.15 montrent l'influence du rapport du module de Young sur les pressions de contact dans le plan (Ox_2x_3) ainsi que l'évolution de la zone de contact pour des fibres plus molles ou plus dures que la matrice.

Dans le cas de fibres plus molles que la matrice ($\gamma < 1$), le comportement homogène isotrope transverse a tendance à minimiser la pression locale de contact. La surface de contact obtenue par l'approche homogène est donc plus grande que celle obtenue par l'approche hétérogène. Pour le cas $\gamma = 0.5$, l'approche homogène

« moyenne » les fluctuations de pression obtenues par l'approche hétérogène. Les zones de contact obtenues selon les deux approches sont très similaires. Ceci s'explique également par des valeurs de E_L et de E_T très rapprochées, ainsi que les coefficients de Poisson ν_{LT} et ν_{TT} . Pour les deux approches, la zone de contact se trouve agrandie en comparaison de celle obtenue dans le cas Hertzien, image d'un matériau plus mou que le cas de référence Hertzien.

Inversement, dans le cas de fibres plus dures que la matrice ($\gamma > 1$), le comportement homogène isotrope transverse a tendance à maximiser voir surestimer la pression locale de contact créant une « enveloppe » des pics de pression obtenues par l'approche hétérogène (voir Figure V.15a). La surface de contact obtenue par l'approche homogène épouse celle obtenue par l'approche hétérogène. Pour les deux approches, la zone de contact se trouve réduite dans la direction transverse en comparaison de celle obtenue dans le cas Hertzien, image d'un matériau plus dur que le cas de référence Hertzien. Pour un rapport de module de Young très faible, les zones de contact sont très différentes selon l'approche. Ces différences sont peut-être justifiées pour une fraction volumique $V_f = 0.4$ à la limite du domaine de validité de la méthode de Mori-Tanaka. La Figure V.16 montre l'influence de la fraction volumique de fibres sur les pressions de contact dans le plan (Ox_2x_3) ainsi que l'évolution de la zone de contact. On observe bien une réduction de la zone de contact suivant la direction transverse x_2 avec l'augmentation de la fraction volumique de fibres. Le comportement homogène anisotrope transverse épouse l'« enveloppe inférieure » de la zone de contact hétérogène. L'approche homogène minimise l'aire de contact obtenue par l'approche hétérogène.

n°	γ	V_f	E_L [MPa]	E_T [MPa]	G_{LT} [MPa]	ν_{LT}	ν_{TT}
2 – 1	10	0.1	227986	142077	54379	0.300	0.344
2 – 2	10	0.2	335975	165352	64214	0.300	0.357
2 – 3	10	0.4	551962	226852	91061	0.300	0.361

TABLE V.3 – Paramètres matériaux pour l'étude de la fraction volumique de fibres

Visualiser les contraintes en profondeur mène à découvrir des discontinuités aux interfaces des fibres « moyennées » dans le cas d'une loi matériau anisotrope homogénéisé équivalente. Contrairement à précédemment, une charge normale plus importante de $W = 20kN$ est appliquée sur l'indenteur sphérique considéré rigide. Les propriétés matériaux de la matrice sont identiques au cas d'étude précédent. Dans le cas du matériau homogène, la théorie de Hertz prescrit une demi-largeur de contact $a_0 = 1.657mm$ et une pression de contact maximale $P_0 = 3478MPa$. Les fibres sont choisies deux fois plus dures que la matrice ($\gamma = 2$) avec un coefficient de Poisson $\nu_i = 0.3$. La matrice contient une fraction volumique de fibres $V_f = 0.4$. La Figure V.17 montre les distributions de contraintes normales ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) en profondeur par les deux approches suivant différents plans de coupe : le plan $x_1 = 0$, le plan $x_2 = 0$, et le plan $x_3 = 0.22a_0$ qui passe par le centre des fibres constituant le second étage parallèle à la surface de contact. Pour l'approche homogénéisé avec matériau anisotrope, le massif a tendance à être plus contraints que le massif fibreux hétérogène. C.Bagault [Bag13] a remonté durant sa thèse des problèmes de détermination des contraintes élastiques proches de la surface de contact. Il est important de faire abstraction de cette zone surcontrainte pour la comparaison des deux ap-

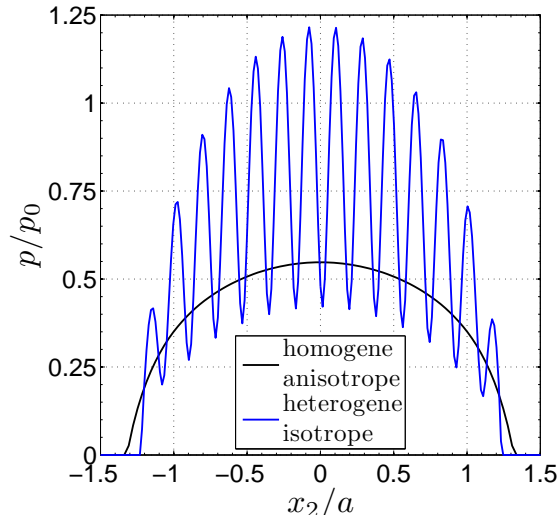
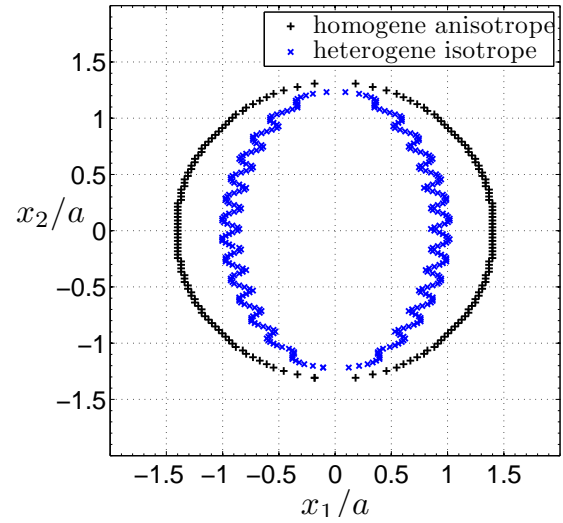
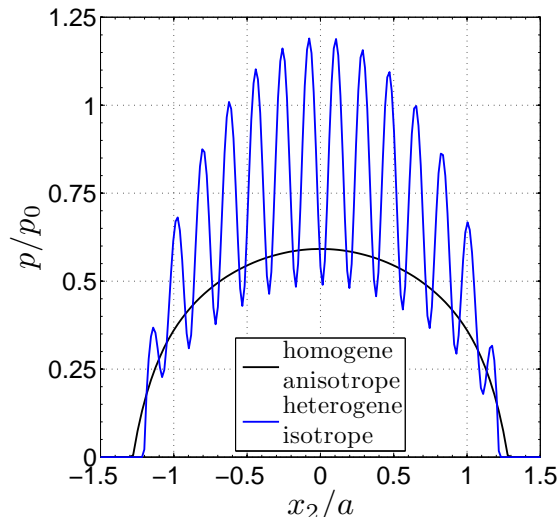
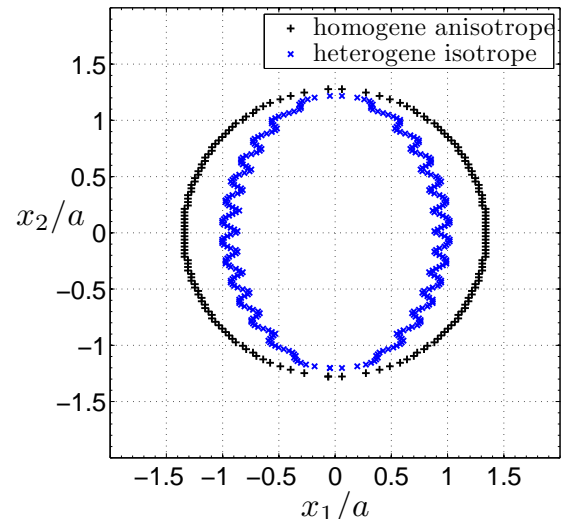
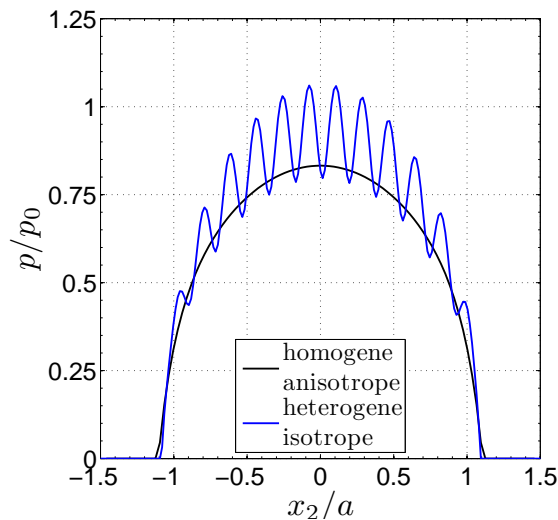
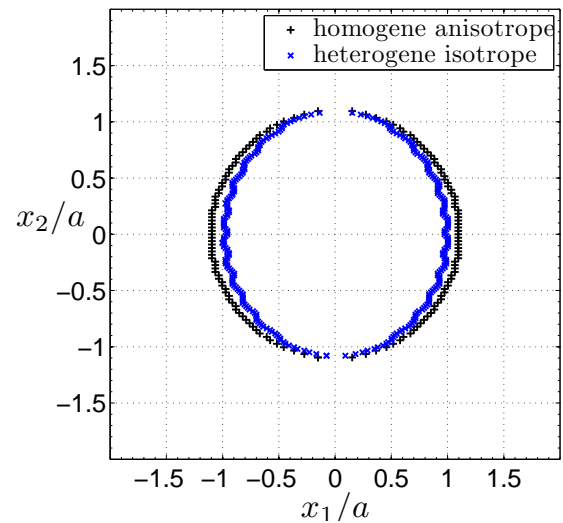
(a) n° 1-1 ($\gamma = 1/20$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (b) n° 1-1 ($\gamma = 1/20$) : Zone de contact(c) n° 1-2 ($\gamma = 1/10$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (d) n° 1-2 ($\gamma = 1/10$) : Zone de contact(e) n° 1-3 ($\gamma = 1/2$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (f) n° 1-3 ($\gamma = 1/2$) : Zone de contact

FIGURE V.14 – Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence des rapports de module de Young $\gamma < 1$ pour une fraction volumique $V_f = 0.4$.

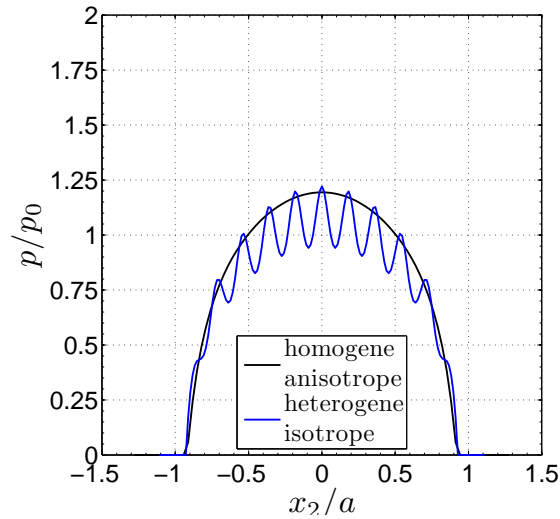
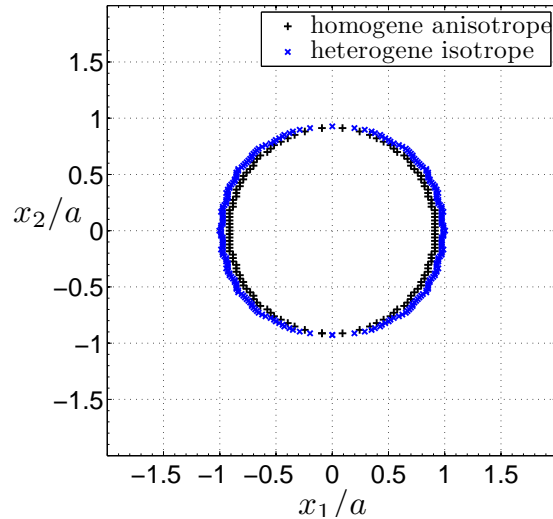
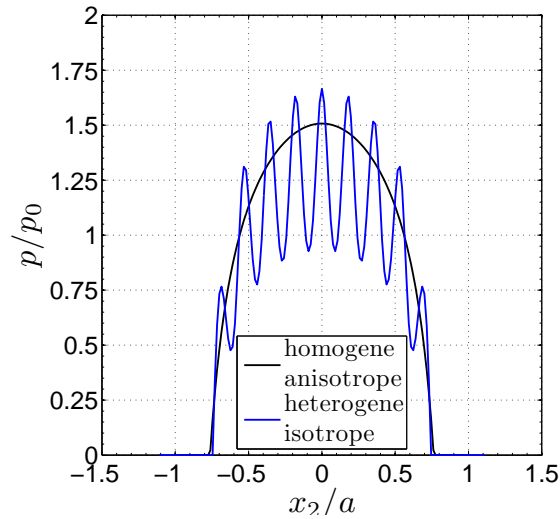
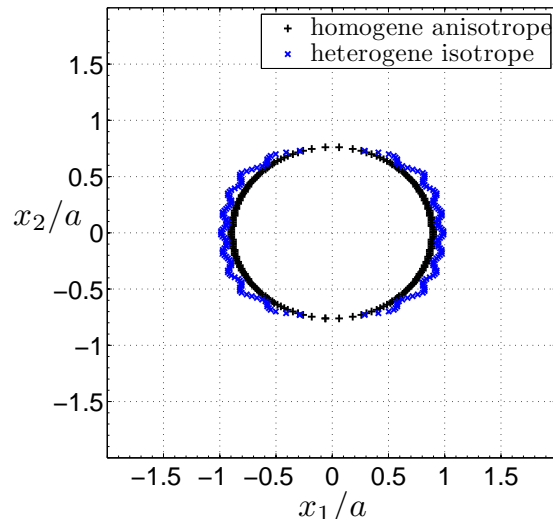
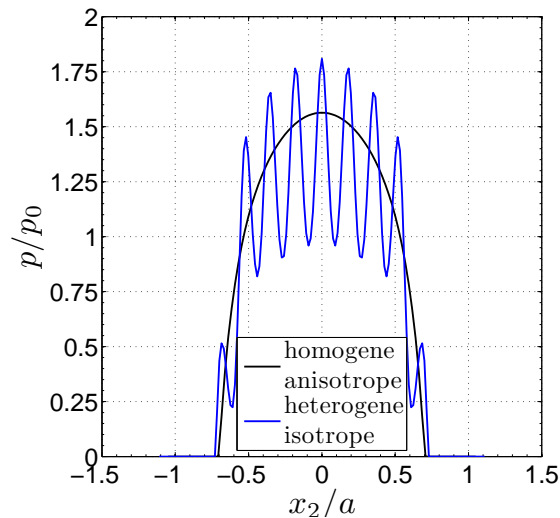
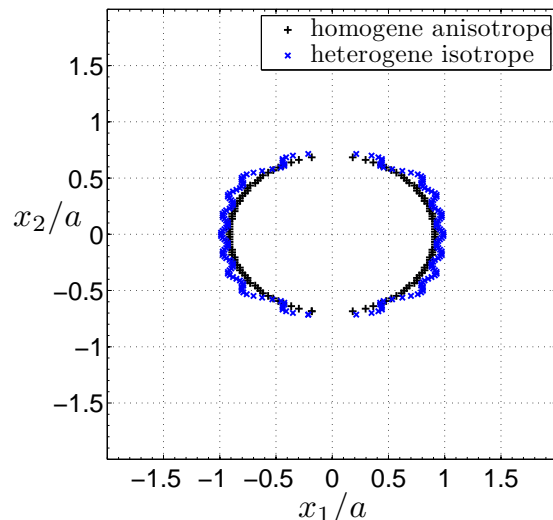
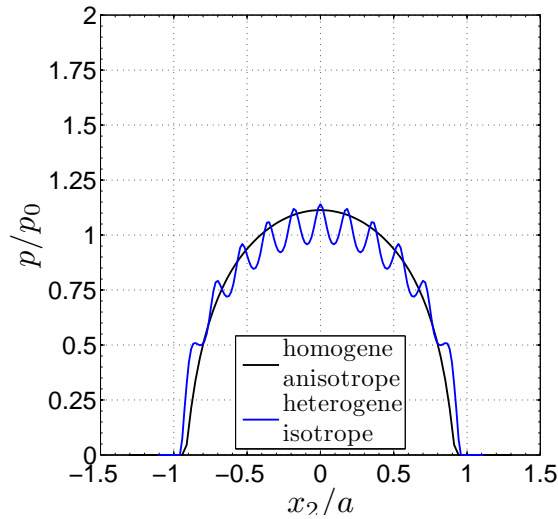
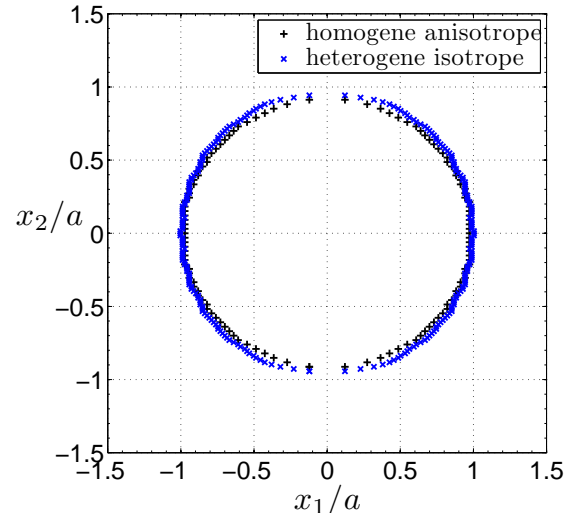
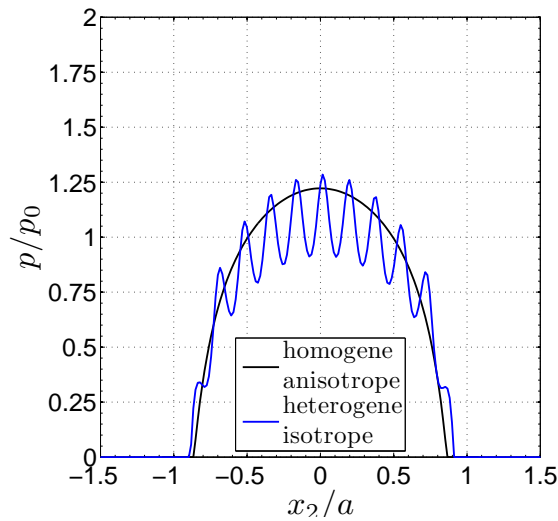
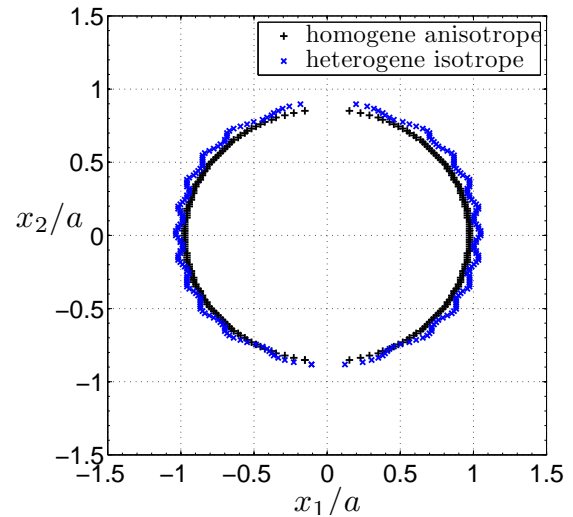
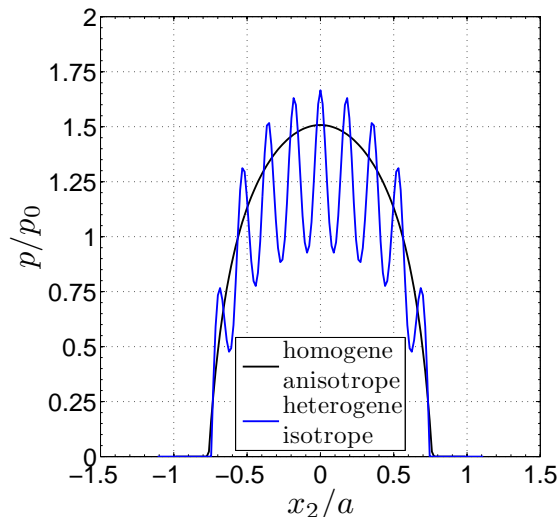
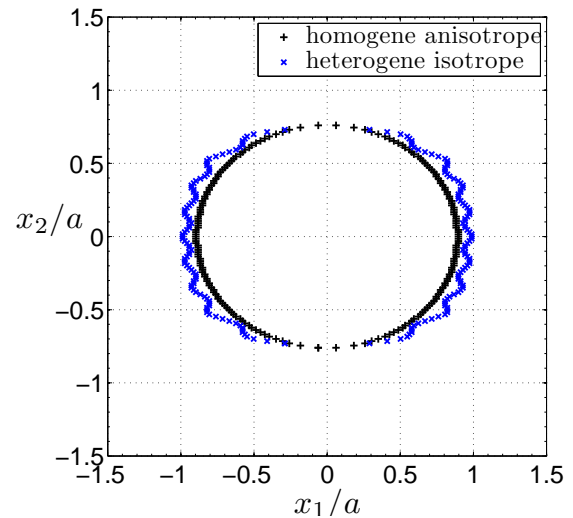
(a) n° 1-4 ($\gamma = 2$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (b) n° 1-4 ($\gamma = 2$) : Zone de contact(c) n° 1-5 ($\gamma = 10$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (d) n° 1-5 ($\gamma = 10$) : Zone de contact(e) n° 1-6 ($\gamma = 20$) : Pression de contact en $x_1 = 0$ (f) n° 1-6 ($\gamma = 20$) : Zone de contact

FIGURE V.15 – Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence des rapports de module de Young $\gamma > 1$ pour une fraction volumique $V_f = 0.4$.

(a) n° 2-1 $V_f = 0.1$: Pression de contact en $x_1 = 0$ (b) n° 2-1 $V_f = 0.1$: Zone de contact(c) n° 2-2 $V_f = 0.2$: Pression de contact en $x_1 = 0$ (d) n° 2-2 $V_f = 0.2$: Zone de contact(e) n° 2-3 $V_f = 0.4$: Pression de contact en $x_1 = 0$ (f) n° 2-3 $V_f = 0.4$: Zone de contactFIGURE V.16 – Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence de la fraction volumique de fibres V_f pour un rapport $\gamma = 10$.

proches. On peut néanmoins noter que l'évolution du gradient de contrainte est en moyenne similaire. Seuls les niveaux de contraintes se trouvent accentués dans le cas d'un matériau anisotrope équivalent.

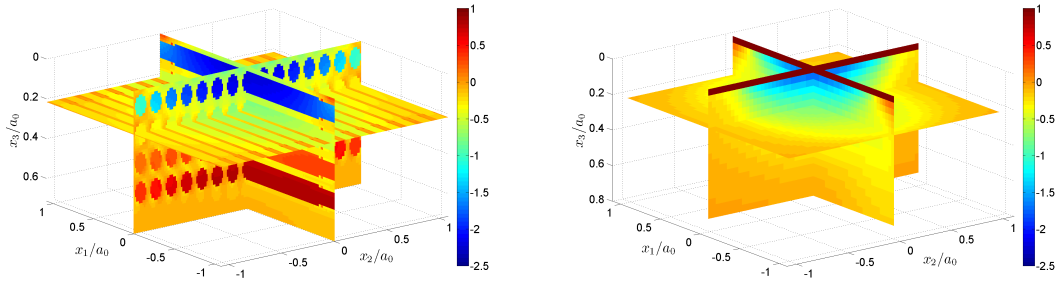
Étant donné les observations effectuées précédemment, il peut s'avérer intéressant d'analyser ces différences d'un point de vue macroscopique en visualisant la courbe d'indentation pour la configuration n° 1-5. La Figure V.18 montre les variations de l'effort normal en fonction de la réponse en déplacement. Une nette différence observée entre les deux approches s'installent lorsque l'effort augmente. Cette observation est cohérente avec celles faites précédemment à l'échelle micro étant donné que la zone de contact est plus faible pour l'approche homogène que l'approche hétérogène. L'approche hétérogène fournit un matériau plus dur que l'approche homogène isotrope transverse. Cependant cette forte différence observée entre les deux courbes peut éventuellement venir de la méthode d'homogénéisation. En effet, la méthode de Mori-Tanaka suppose un espace infini constitué d'une matrice et d'hétérogénéités qui est ramené à un VER avec une répartition uniforme ou aléatoire des hétérogénéités. Pour simuler le contact entre deux massifs, la condition d'espace semi-infini impose un cadre restrictif, notamment dans les approches d'homogénéisation où les conditions aux limites sont obsolètes. La méthode de Mori-Tanaka auraient donc des limitations pour son application dans ce cadre d'étude. Une réflexion plus approfondie et des développements futurs seront nécessaires afin de traduire cette notion de demi-espace dans la phase d'homogénéisation.

2 Simulations du contact sur matériaux composites tissés

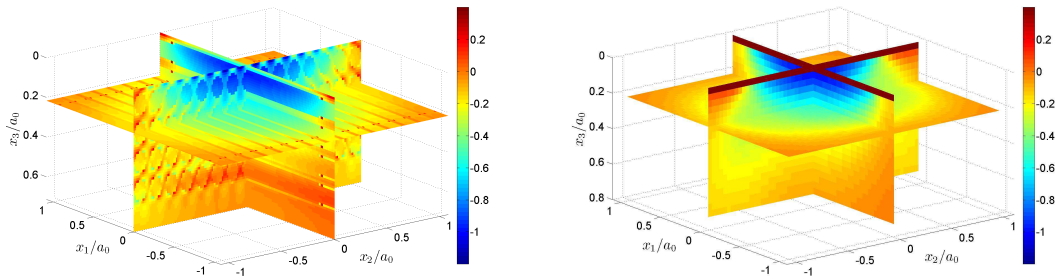
2.1 Simulations d'un contact sphère/plan pour un matériau composite tissé 2D

Une application académique a d'abord été envisagée tout en cherchant à conserver les ordres de grandeurs en termes de géométrie et de pression maximale appliquée pour l'application industrielle visée, sur les portées d'aubes de turbine BP en composite CMC. Une indentation normale sans frottement d'une sphère rigide de rayon $R = 2500mm$ est effectuée sur un massif constitué d'un composite taffetas 2D multicouches. L'application d'un effort normal de $5kN$ engendre sur le massif homogène une pression de Hertz de $P_0 = 127MPa$ et un rayon de contact $a_0 = 4.33mm$.

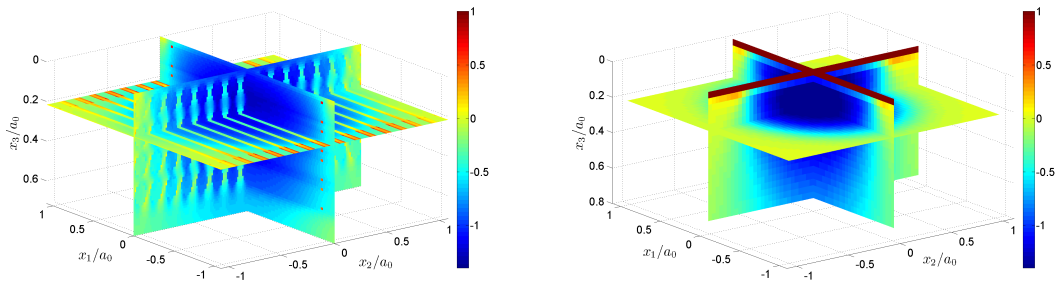
La première étape consiste à adapter les données fournies par Wisetex aux données types d'entrées pour le modèle semi-analytique. L'objectif est d'ajuster la discrétisation numérique du modèle SA afin de décrire au mieux l'évolution spatiale des mèches dans un VER donné. La Figure V.19a montre un massif semi-infini élastique composite constitué de plusieurs couches de satin 2D avec un visuel virtuel du VER issu du jeu de données WiseTex (voir Figure V.19b). A partir du jeu de données WiseTex, on récupère les coordonnées de chaque point de la segmentation qui discrétise les lignes moyennes des mèches dans le sens chaîne et trame (voir Figure V.19c). On ajuste ensuite la discrétisation numérique du modèle semi-analytique afin de faire correspondre au mieux les nœuds de la discrétisation avec les points de la segmentation Wisetex par interpolation linéaire (voir Figure V.19d). Au final un



(a) Visualisation de la contrainte σ_{11} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif hétérogène. (b) Visualisation de la contrainte σ_{11} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif homogène équivalent.



(c) Visualisation de la contrainte σ_{22} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif hétérogène. (d) Visualisation de la contrainte σ_{22} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif homogène équivalent.



(e) Visualisation de la contrainte σ_{33} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif hétérogène. (f) Visualisation de la contrainte σ_{33} normalisée par la pression de Hertz P_0 pour un massif homogène équivalent.

FIGURE V.17 – Visualisations des contraintes normalisées par la pression de Hertz σ_{ij}/P_0 dans trois plans de coupes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, et $x_3 = 0.22a_0$ (aux centres de la deuxième couche de fibres unidirectionnelles). Comparaisons entre les contraintes obtenues pour un massif isotrope hétérogène fibreux et pour un massif anisotrope homogène équivalent.

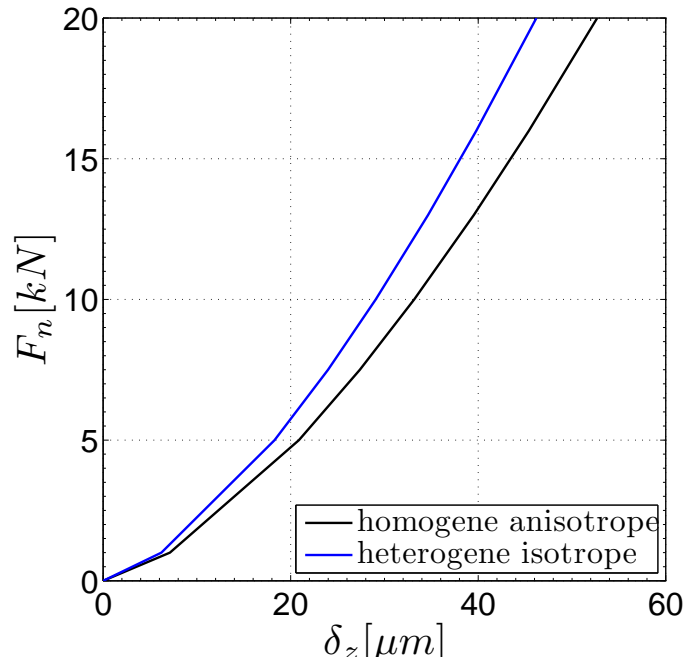
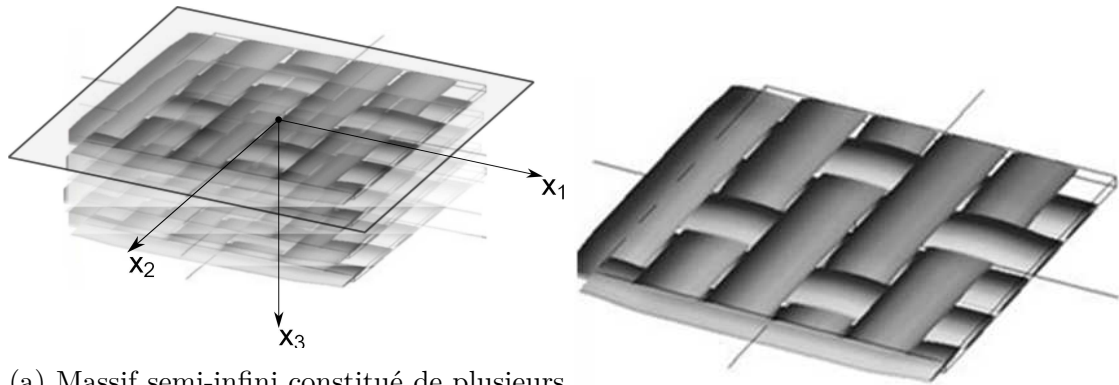


FIGURE V.18 – Évolution de l’effort normal en fonction du déplacement pour l’approche hétérogène et homogène anisotrope.

assemblage d’hétérogénéités ellipsoïdales équivalentes est généré tel que les centres des ellipsoïdes correspondent aux nœuds des segments interpolés V.19e. Les sections locales et leurs orientations sont identiques à celles données par le modèle Wisetex .

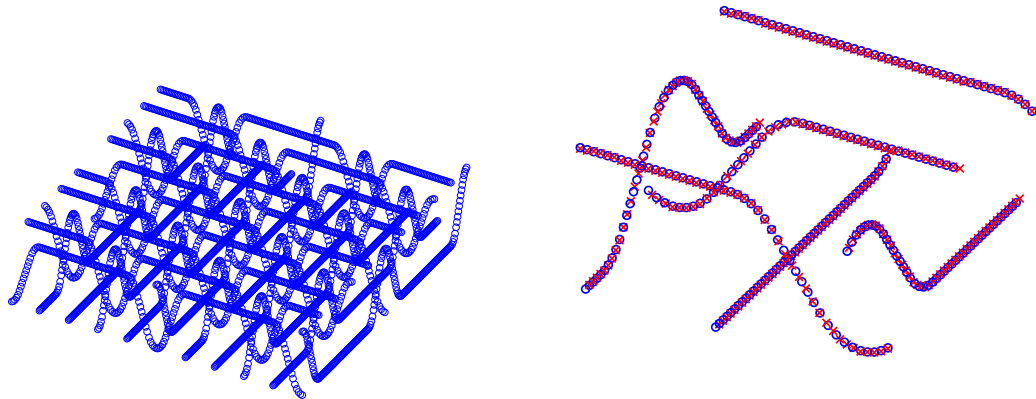
Après avoir caractérisé géométriquement le matériau composite dans la zone de contact, on doit ajouter les propriétés matériaux à affecter à chaque hétérogénéité ellipsoïde. Le fichier d’entrée Wisetex fournit les propriétés des fibres pour chaque type de mèches (leurs masses volumiques, leurs diamètres, et leurs propriétés mécaniques). La fraction volumique de fibres est quant à elle fournie localement pour chaque segment de la mèche. L’utilisation d’un algorithme d’homogénéisation tel que la méthode auto-cohérente permet d’obtenir pour chaque ellipsoïde des propriétés matériaux homogénéisés à l’échelle mésoscopique. Le modèle actuel d’inclusion équivalente autorise uniquement des matériaux isotropes. Or les propriétés matériaux homogénéisées à l’échelle de la mèche sont de natures orthotropes. Par défaut les mèches auront pour cette application plutôt académiques des propriétés isotropes et seront choisies 4 fois plus dures que la matrice isotrope afin de faire apparaître les fluctuations de pression causées par les ondulations des mèches.

Dans le but de montrer l’intérêt de modéliser un contact composite/métallique à l’échelle mésoscopique, l’indentation est effectuée en deux endroits distincts : soit dans un creux entre les mèches (voir Figure V.20a), soit au centre d’une mèche (voir Figure V.20b). La Figure V.21 montre la réponse du matériau composite en terme de pression de contact. Comme on pouvait s’y attendre, la réponse obtenue est très différente selon le lieu d’indentation. Pour l’indentation dans un creux (voir Figure V.21a), on retrouve un creux de la pression entouré de 4 pics de pression reflétant l’entrelacement des mèches environnantes. Pour l’indentation au centre d’une mèche (voir Figure V.21b), un important pic de pression est également observé au centre la surface de contact entouré de 4 pics plus faibles que le pic central. On



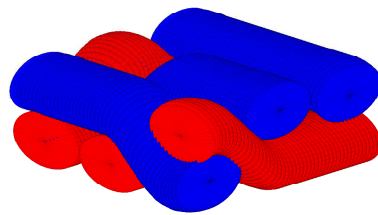
(a) Massif semi-infini constitué de plusieurs couches d'un composite tissé satin 2D avec les directions chaîne et trame orthogonales correspondant aux repères orthonormés de la surface de contact.

(b) Représentation graphique du VER extrait du logiciel Wisetex.



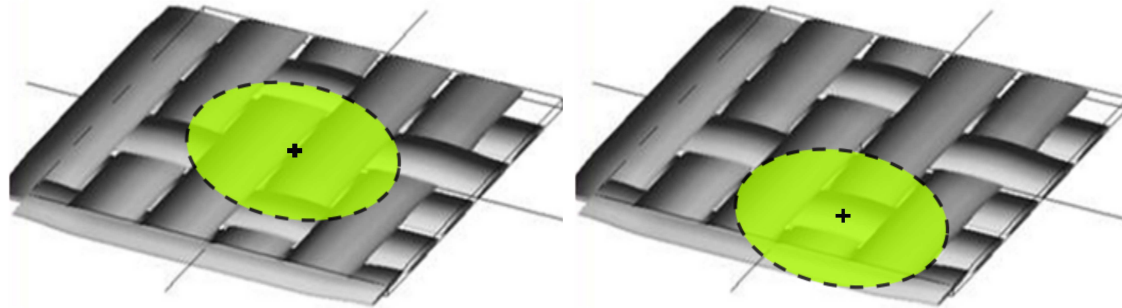
(c) Récupération des points de segmentations des lignes moyennes des mèches fournis par Wisetex.

(d) Ajustement de la taille de discrétisation et interpolation de la position des nœuds (croix rouge) par rapport à la position des points extraite du jeu de données Wisetex (ronds bleu).



(e) Assemblage de multiples ellipsoïdes en respectant les dimensions des sections locales des mèches fournies par le jeu de données Wisetex.

FIGURE V.19 – Lecture du jeu de données fourni par Wisetex et interpolation de la géométrie du tissage en entrée du code semi-analytique.



(a) Le centre du point d'application de l'indenteur sphérique se situe dans un creux entre plusieurs mèches qui s'entrelacent. (b) Le centre du point d'application de l'indenteur sphérique se situe au dessus de la ligne moyenne d'une mèche.

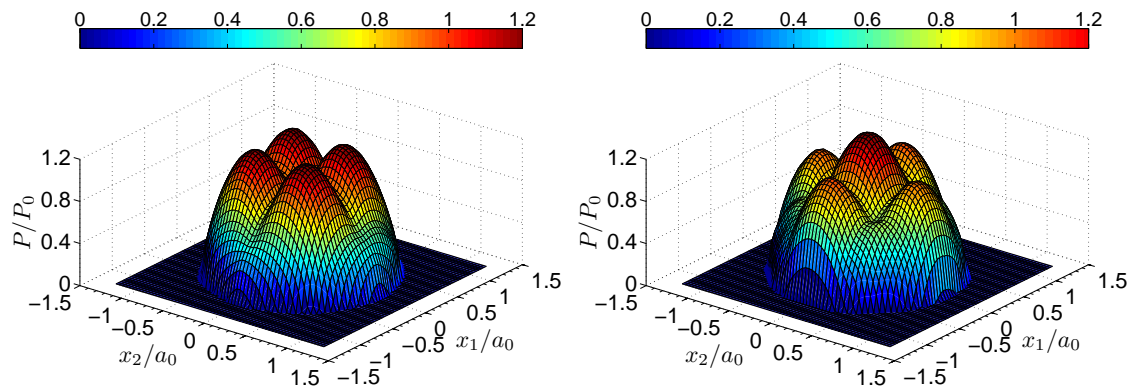
FIGURE V.20 – Différentes possibilités de localiser l'indentation normale pouvant modifier la réponse du matériau sur la zone de contact (en vert).

peut observer jusqu'à une augmentation locale de 20 % de la pression de contact. De la même manière on peut visualiser sur la Figure V.22 les contraintes de Von Mises sur différents plans de coupes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0.21a_0$ dans le cas d'une indentation normale dans un creux (voir Figure V.22a) et sur une mèche (voir Figure V.22b). Les visualisations obtenues retranscrivent plutôt bien l'architecture du tissage utilisé dans ce modèle. La finesse de la discrétisation permet quant à elle de mieux quantifier l'endommagement à venir du matériau. On peut d'ores et déjà remarquer que les interfaces sont fortement sollicitées et seront des zones sujettes à l'endommagement du matériau composite. Une indentation au cœur d'une mèche génère une élévation de la contrainte à l'interface plus importante que dans le cas d'une indentation dans un creux entre les mèches. Au final, le lieu d'indentation a un impact considérable sur la réponse du matériau à l'échelle du contact, c'est-à-dire à l'échelle mésoscopique. On assiste ici à un effet d'échelle car les dimensions de la zone de contact et les dimensions d'une mèche sont du même ordre de grandeur au point de pouvoir capter l'influence de l'une sur l'autre. Pour rappel, les configurations choisies dans ce cas d'études se rapprochent des ordres de grandeurs de l'application industrielle en termes de dimensions de la zone de contact par rapport à la taille des mèches.

La Figure V.23 montre l'évolution de l'effort normal en fonction du déplacement normal élastique pour une indentation dans un creux et au cœur d'une mèche. Le fait d'observer aucune différence entre les deux courbes prouvent qu'il n'y a pas d'effet significatif à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle globale de la structure.

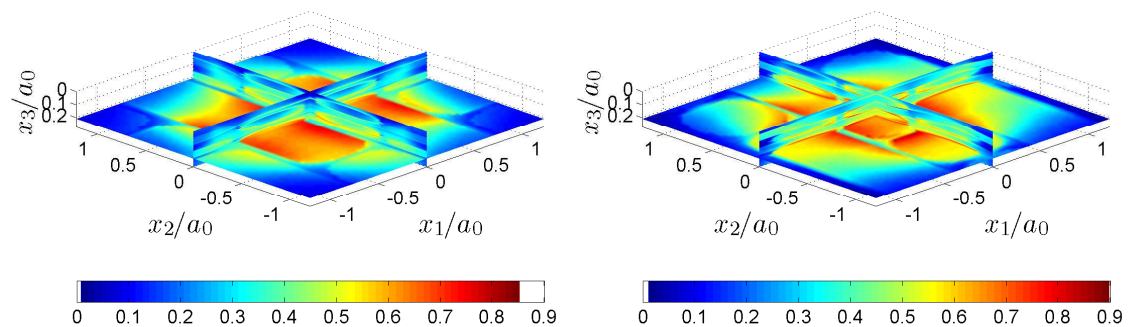
2.2 Applications sur pieds d'aubes de soufflantes de turbo-réacteur nouvelle génération

Le code développé est capable de simuler un contact composite/métallique avec prise en compte de la mésostructure des composites tissés utilisés par les futurs moteurs Snecma mais avec une structure et un chargement académique. Dans cette partie, le code de contact semi-analytique est couplé à un modèle éléments finis tri-sectoriel de la soufflante constituée d'aubes fans en composite CMO comportant des portées de type rectilignes (voir Figure V.24). La description des modèles sera gros-



(a) Pression de contact normalisée par la pression de Hertz pour une indentation localisée dans un creux entre les mèches. (b) Pression de contact normalisée par la pression de Hertz pour une indentation localisée sur la ligne moyenne d'une mèche.

FIGURE V.21 – Pressions de contact pour différentes localisations de l'indenteur sphérique.



(a) Indentation normale localisée dans un creux entre les mèches. (b) Indentation normale localisée au dessus de la ligne moyenne d'une mèche.

FIGURE V.22 – Évolution de la contrainte de Von Mises normalisée par la pression de Hertz dans différents plans de coupes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0.21a_0$ en fonction de la localisation de l'indenteur.

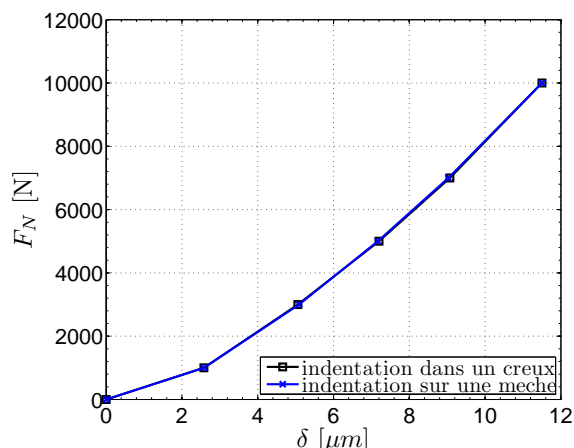


FIGURE V.23 – Évolution de l'effort normal en fonction du déplacement normal pour une indentation au dessus d'un creux et au dessus de la ligne moyenne d'une meche.

sière et ambiguë à des fins de confidentialité. Le contact est résolu en s'attachant à la définition des géométries des corps proches du contact et en faisant l'hypothèse d'un comportement structural ayant une influence négligeable sur le contact. Ces hypothèses permettent d'utiliser en partie la théorie des massifs semi-infinis. Cependant le trajet de chargement dépend lui de la structure et de son comportement global. Grâce à une modélisation multi-échelle on peut savoir ce qui se passe au niveau structural pour pouvoir ensuite effectuer un calcul au niveau du contact [Gal10a].

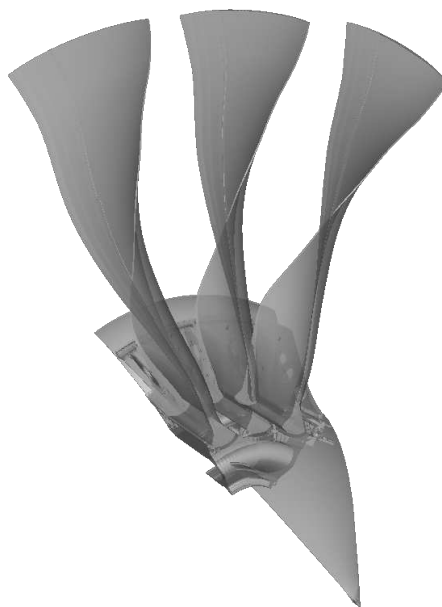


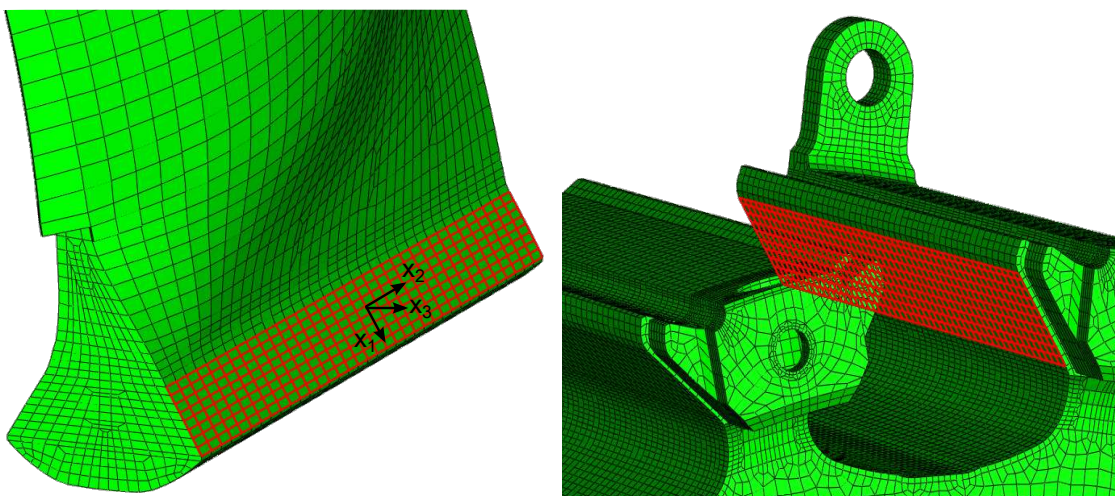
FIGURE V.24 – Modèle trisecteur d'une soufflante constituée d'aubes fan en composite CMO.

Le modèle éléments-finis fourni par les bureaux d'étude Snecma est un modèle Abaqus Standard. Le calcul est statique et correspond à l'application d'un chargement centrifuge sur l'aube et le disque et d'un chargement de type pressions aérodynamiques sur les faces de l'aube. Le coefficient de frottement est de 0.1. Le trajet

de chargement appliqué est triangulaire et correspond à un démarrage et arrêt du moteur. Le contact est défini en sélectionnant les surfaces maîtres et esclaves des deux portées. Le contact est résolu à partir d'une méthode de pénalité préférée à la formulation Lagrangienne. Cette dernière est exacte et devrait être privilégiée dans les problèmes de fretting mais des difficultés de convergence empêchent de mener à terme un calcul du modèle avec une usure des surfaces. Un clinquant englobant les portées et le fond de l'aube est inséré entre l'aube et le disque. Un revêtement, encore appelé « wearstrip », est déposé sur les portées du fan. Dans ce modèle, ces deux couches matériaux ne sont pas maillées. Un espace vide existe alors entre l'aube et le disque au niveau des portées. Pour combler ce vide, une interférence « gap » est ajoutée pour que les surfaces soient initialement en condition de contact. La taille du modèle est de 420000 éléments.

Les données en termes de pressions, cisaillements, glissements sont recueillies sur chaque portée pour chaque incrément de chargement. A partir de ces données, les torseurs des efforts transmis dans le contact sont construits par sommation des contraintes. Un repère local est préalablement défini pour chaque portée pour pouvoir correctement effectuer les sommations des pressions, cisaillements et glissements. Ce repère est positionné au centre de la portée. A partir des contraintes de cisaillement et de glissements, l'énergie dissipée par frottement dans chaque portée est calculée.

Les surfaces des portées sont construites pour leur utilisation dans le code semi-analytique. Elles sont définies par les dimensions des portées et les rayons en sortie de portées. Elles sont discrétisées avec 8 éléments dans la direction x (direction radiale du moteur), c'est à dire la petite dimension de la portée et 36 éléments dans la direction y (direction axiale du moteur), c'est-à-dire la grande dimension de la portée (voir Figure V.25). Les repères locaux de chaque portée sont définis à la Figure V.25a. Le bord d'attaque se trouve du côté des y négatifs pour la portée intrados et extrados. L'axe central du moteur est lui du côté des x négatifs et des x positifs pour la portée intrados et extrados respectivement.



(a) Discrétisation de la surface esclave constituant la portée extrados de l'aube. (b) Discrétisation de la surface maître constituant la portée extrados du disque.

FIGURE V.25 – Modèles éléments finis des portées extrados de l'aube et du disque.

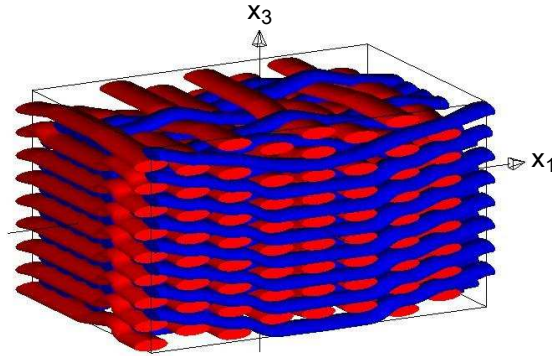


FIGURE V.26 – Image virtuelle d'un VER du composite tissé tridimensionnel CMO orienté dans le repère du contact.

La discrétisation des surfaces de contact dans le modèle SA est plus fine que ne le permettent la méthode EF. Cette discrétisation dépend directement du schéma de tissage du composite CMO afin de décrire au mieux la position et les ondulations géométriques des mèches. Pour cette application, le massif élastique représentant la portée de l'aube (intradados ou extradados) est constitué d'un assemblage de 13 VER dans la direction y et de deux VER dans la direction x (voir Figure V.26). Cela génère une surface de contact discrétisée en 1000×120 éléments et 200 éléments en profondeur. Cette finesse de discrétisation permet aussi de capturer les variations de pressions et de cisaillements induites par la présence des mèches proches de la surface de contact. De telles finesses de maillage est inconcevable pour des modèles EF représentant la structure. Un code s'affranchissant au maximum des résultats du modèle de la structure reste une bonne alternative pour pouvoir quantifier au mieux ce qu'il se passe à l'échelle du contact.

Une fois le chargement et la géométrie des surfaces bien connus on résout le contact avec le code semi-analytique de manière à déterminer ce qui se passe localement à l'échelle micro du contact. A chaque incrément, la résolution dépend de la situation de glissement dans laquelle le contact se trouve. Soit le contact est en situation de glissement partiel, alors c'est le torseur statique qui permet de résoudre le contact. Soit le contact est en situation de glissement total et c'est le torseur statique couplé à l'énergie dissipée qui permet de résoudre le contact. Pour cette étude, on se place directement à l'incrément de chargement maximal et on résout uniquement le problème normal en supposant qu'on se trouve en régime de glissement total. L'objectif n'est pas d'effectuer des cycles de fretting répétés mais uniquement de savoir s'il est nécessaire de modéliser la mésostructure du composite sur des cas d'applications industrielles réelles. En effet, les portées aube-disque sont recouvertes d'un revêtement nommé « wearstrip ». La présence de ce revêtement pourrait éventuellement annihiler l'effet de la mésostructure sur les pressions de contact. Ne disposant pas de propriétés matériaux du revêtement, celui-ci sera modélisé avec les mêmes propriétés que la matrice. Deux configurations de revêtement sont étudiées : la première considère l'épaisseur réelle du revêtement sain tandis que la seconde considère un revêtement dont l'épaisseur est uniformément diminuée de $2/3$ par rapport au revêtement sain. La Figure V.27 montre les profils de pression de contact sur la portée extradados de l'aube fan obtenu pour les deux épaisseurs de revêtement. A première vue, les pics de pression générés par les ondulations géométriques des mèches

sont plus prononcés pour le revêtement de plus faible épaisseur. Néanmoins pour le revêtement d'épaisseur initiale, les fluctuations de pression restent prononcées. La géométrie « allongée » de la portée ne permet pas de visualiser clairement ces fluctuations. Les Figures V.28 et V.29 montrent les mêmes profils de pression pour les deux épaisseurs de revêtement sur une échelle disproportionnée. Un zoom sur une zone particulière y est ajouté. Les fluctuations sont de nouveau légèrement accentuées pour le revêtement de plus faible épaisseur. Il a été observé sur des essais type vol effectués en interne que l'usure sur les portées était trop importante. Une des solutions est de rajouter un clinquant, pièce métallique intermédiaire insérée entre le disque et le pied de l'aube. Cet ajout a pour effet d'atténuer les perturbations induites par les ondulations des mèches à l'échelle du contact, i.e. l'échelle mésoscopique. Cet outil peut donc nous fournir une information utile et importante quant aux propriétés matériaux et géométriques des revêtements. Le phénomène d'usure s'en trouvera d'autant plus atténué.

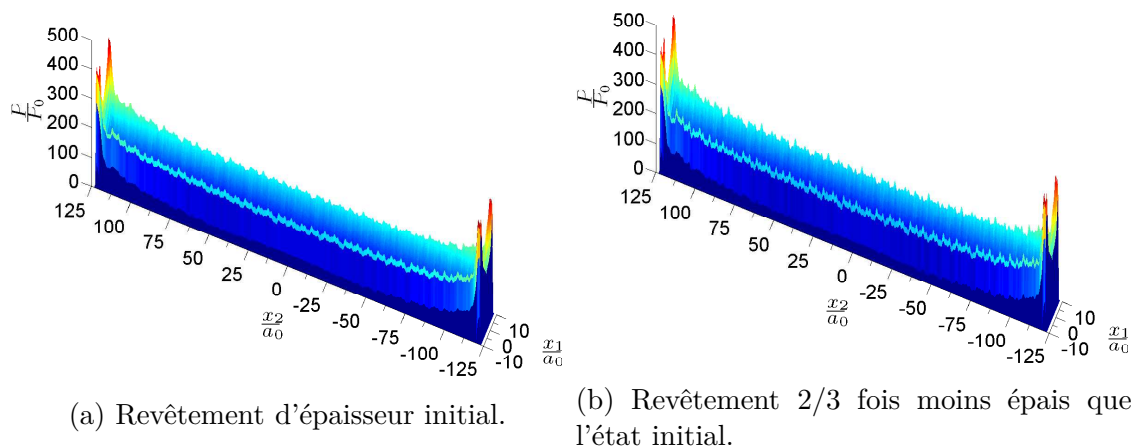


FIGURE V.27 – Profils de pression de contact sur la portée extradors de l'aube pour différentes épaisseurs de revêtement.

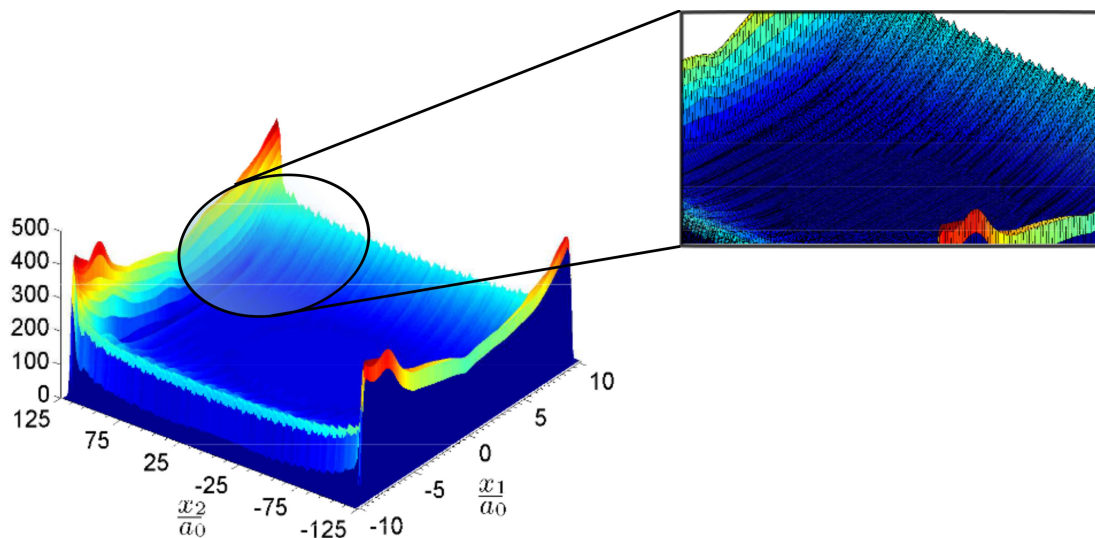


FIGURE V.28 – Profil de pression de contact pour le revêtement d'épaisseur initial sur une échelle disproportionnée avec zoom.

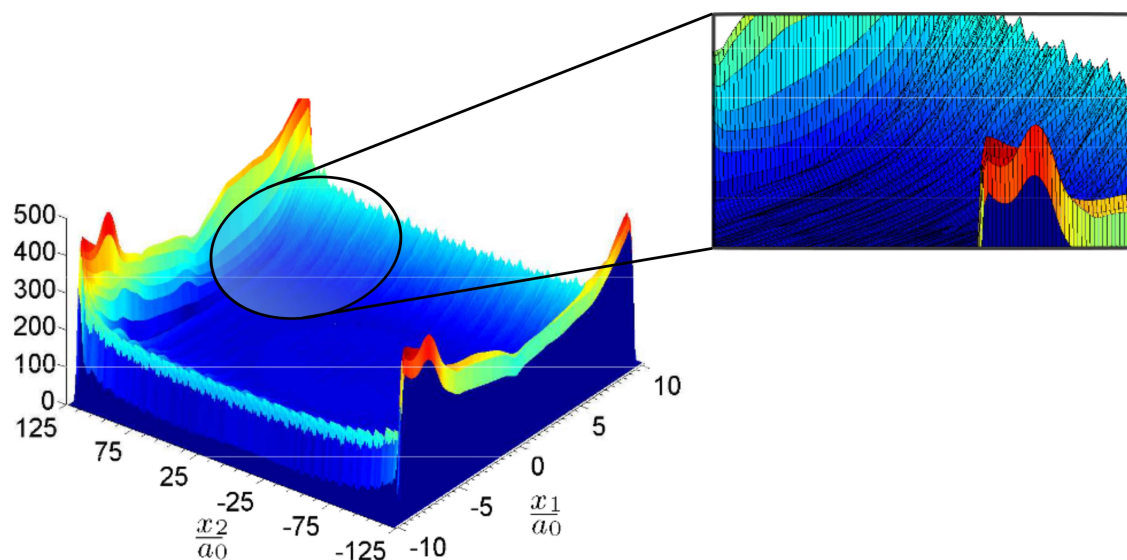


FIGURE V.29 – Profil de pression de contact pour le revêtement 2/3 fois moins épais que l'état initial sur une échelle disproportionnée avec zoom.

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse apportent des premiers éléments de réponse à la problématique industrielle concernant l'endommagement par fretting des pieds d'aube de turbomachines de nouvelle génération. Les objectifs fixés par le motoriste ont mené à l'émergence de matériaux composites tissés CMO et CMC. L'élaboration des aubes en composite oblige de revoir les modèles numériques, et en particulier la modélisation de l'usure pour les contacts frottants. Traiter les problématiques de fretting sur un composite tissé CMO/CMC nécessite de décrire précisément les ondulations des mèches à l'échelle mésoscopique ainsi que de connaître les propriétés matériaux localement modifiées par l'endommagement au cours des cycles de fretting. Un modèle multiéchelle micro/meso avec une résolution du contact composite/métallique à l'échelle mésoscopique est une solution pertinente afin de caractériser au mieux les paramètres d'usure, fonction des glissements à l'interface et des cisaillements en surface.

Pour analyser les contacts en général et le contact aube-disque en particulier, une modélisation dite « semi-analytique » a été développée ces dernières années. Cette modélisation, basée sur la théorie des massifs élastiques semi-infinis, permet de retranscrire, par le biais de solutions analytiques élémentaires, des relations entre les efforts en surface, les déplacements en surface, et les contraintes en volume. Ces relations s'expriment sous forme de produits de convolution discrète entre des coefficients d'influence et la source élémentaire discrétisée. Pour accélérer le produit de convolution qui s'avère coûteux en temps de calcul, les transformées de Fourier rapides (FFT) sont utilisées. Ce code possède aujourd'hui de nombreux acquis pour la modélisation du contact : matériau élasto-plastique, matériau anisotrope, problème d'impact, rugosité, etc. Les récents travaux de B.Fulleriger [Full11] ont prouvé la capacité du code à traiter les problèmes d'hétérogénéité. La méthode d'inclusion équivalente, initialement proposée par Eshelby, a été utilisée pour modéliser un matériau élasto-plastique revêtu discrétisé en de multiples inclusions sphériques équivalentes. Cependant, ses travaux ont trouvé leurs limites lorsque l'hypothèse de massif semi-infini et les influences entre les hétérogénéités deviennent fortes.

Afin de pouvoir traiter des problèmes d'hétérogénéités sans restriction et d'adapter la méthode au caractère multiéchelle des composites tissés, quatre modifications majeures ont été effectuées :

1. Les coefficients d'influence reliant les déformations inélastiques et les surcontraintes élastiques ont été développés pour des inclusions ellipsoïdales et ses formes dégénérées (sphère, cylindre infini, ellipsoïde prolata, ellipsoïde oblate),

et pour des inclusions parallélépipédiques rectangles (cuboïdes). Tous ces coefficients peuvent être déterminés analytiquement, excepté les coefficients pour une forme ellipsoïdale n'entrant pas dans les cas appelés « formes dégénérées ». Dans ce cas précis les formulations contiennent des intégrales elliptiques du premier et/ou du second ordre nécessitant d'être résolues numériquement.

2. Initialement la méthode d'inclusion équivalente incorpore la définition du tenseur d'Eshelby et fait abstraction de toutes influences des hétérogénéités voisines. L'expression du système d'équations équivalentes a donc été réécrite afin de tenir compte de toutes les influences mutuelles et de l'influence de la surface libre sur les eigenstrains (espace semi-infini). Afin de résoudre ce système d'équations efficacement, la méthode de gradient conjugué a été adaptée afin de déterminer des milliers d'eigenstrains en très peu d'itérations (en moyenne 5). On peut ainsi traiter des milliers d'hétérogénéités dans un massif élastique semi-infini avec une durée équivalente à une résolution pour une dizaine d'hétérogénéités.
3. La forte hypothèse de départ est d'appliquer un champ élastique uniforme à l'hétérogénéité correspondant à la valeur calculée au centre de l'inclusion. L'objectif dans ces travaux est d'estimer une limite à la validité de cette hypothèse et d'essayer d'en quantifier les conséquences. Pour cela, la déformation appliquée et l'eigenstrain sont exprimées en série de Taylor jusqu'au second ordre. Les coefficients d'influence associés aux inconnues du premier et du second ordre sont calculés analytiquement. La technique de wrap-around utilisée pour l'application des transformées de Fourier et l'algorithme de CGM sont adaptées aux expressions de Taylor au second ordre. A partir de résultats obtenus par éléments finis, il est observé que la formulation au second ordre permet de mieux capturer la contrainte élastique à l'interface.
4. Les formulations analytiques permettant de décrire tout type d'hétérogénéité soumise à un chargement arbitraire sont valables uniquement pour un massif infini. Un artifice numérique basé sur une décomposition en sous-problème permet d'utiliser les coefficients valides en espace infini pour déterminer des contraintes élastiques en espace semi-infini. Cependant, cette méthode nécessite de disposer d'une discrétisation fine des contraintes normales en surface. Il est à noter qu'une mauvaise discrétisation a des effets notables lorsque l'inclusion se trouve proche de la surface de contact. Pour y palier, des formulations dites de Galerkin ont été développées pour des inclusions ellipsoïdales. A la différence de la méthode de décomposition initialement établi par Chiu, cette méthode fait appel uniquement à des formulations analytiques. Cette méthode n'a pas montré de nettes différences dans les cas d'applications entrepris lors de cette thèse. En revanche, de forts problèmes de convergence sont observés lors de calculs élasto-plastiques avec la méthode de décomposition. Cette méthode devrait prouver ces bienfaits dans ces conditions.

Perspectives

Tous ces développements analytiques et numériques sont uniquement valables pour des massifs élastiques isotropes. Fulleringer [Ful10] a traité le comportement elasto-plastique de la matrice. C.Bagault [Bag12] a traité le comportement anisotrope élastique de la matrice. Cependant, si on souhaite traiter un massif hétérogène anisotrope il est nécessaire de développer et de disposer de nouvelles formulations pour les coefficients d'influence. Si le matériau de l'hétérogénéité est élastique orthotrope ou anisotrope transverse et que la matrice environnante est élastique isotrope, les coefficients d'influence développés dans ce travail sont identiques dans les axes d'orthotropie. En revanche, ceux-ci sont entièrement à déterminer lorsque la matrice environnante est elle-aussi orthotrope. Dans les applications visées à long terme, les hétérogénéités et la matrice sont respectivement anisotropes transverses et orthotropes.

Une fois avoir démontré l'intérêt des améliorations apportées à la méthode des inclusions équivalentes et de les avoir validées, une stratégie multiéchelle a été mise en place pour simuler la mésostructure d'un composite tissé bidimensionnel et tridimensionnel en y incorporant les propriétés mécaniques de la mèche déterminées localement à l'échelle microscopique. La texture du tissage ainsi que les propriétés mécaniques et matériaux sont recueillies à partir du logiciel WiseTex utilisé en interne Snecma. Un assemblage d'inclusions ellipsoïdales équivalentes et une optimisation du schéma de discrétisation numérique permet de retranscrire fidèlement les ondulations et la position des mèches dans un espace semi-infini dont l'origine correspond au centre de la surface de contact. De premiers développements analytiques ont permis de quantifier l'impact de l'endommagement par décohésion interfaciale sur l'état de contraintes. Cette méthode basée sur les vecteurs de Burger a l'avantage d'être compatible et en lien direct avec la méthode des inclusions équivalentes. Un seul paramètre à déterminer expérimentalement relie linéairement les déplacements à l'interface aux efforts normaux et tangentiels associés. Cette méthode laisse la porte ouverte à différentes lois cohésives non-linéaires disponibles dans la littérature.

Perspectives

Des difficultés de représentation pour les composites tridimensionnels persistent dans la description du comportement hors-plan. Les procédés d'injection pour la fabrication des aubes génèrent localement des phénomènes de compaction. Néanmoins La plupart des modèles considèrent une section constante générant une mauvaise estimation des fractions volumiques de fibre. Des problèmes d'interpénétrations peuvent alors apparaître dans le modèle. Une récente méthode basée sur les approches de voxelisation [Sch09] permet de retranscrire fidèlement les sections locales des mèches et de caractériser précisément le comportement hors-plan du composite. Il serait donc intéressant de générer un jeu de données en entrée du code semi-analytique à partir de ce modèle. Chaque point de discrétisation du modèle semi-analytique serait alors constitué d'hétérogénéité cuboïdale. La discrétisation numérique du modèle semi-analytique serait identique à celle fournie par l'algorithme de voxelisation.

Différentes applications de contacts académiques cylindre/plan ont d'abord été menées sur deux modes de fretting, en « full-sliding » et en « stick-slip ». Le matériau traité dans cette première partie se rapproche des composites à fibres unidirectionnelles largement étudiés et utilisés dans les structures industrielles. La première étude concerne l'influence de différents paramètres géométriques et matériaux relatifs aux hétérogénéités sur les paramètres caractéristiques de l'endommagement par fretting (pression, cisaillement, et glissement). La seconde étude concerne l'influence du frottement à l'interface sur les fluctuations de pression et de cisaillement générées par la présence des fibres en sous-couche. Ces études paramétriques nous ont permis de quantifier des frontières d'influence ramenées à des références caractéristiques du contact (pression maximale de hertz, rayon de hertz, etc.).

Dans une seconde partie, le matériau traité fait parti de la catégorie des composites tissés. Une première étude considère un contact académique sphère/plan où l'un des massifs en contact est constitué d'un composite tissé bidimensionnel. Toutes les caractéristiques dimensionnelles et matériaux ne sont pas choisies par hasard. Les dimensions des mèches constituant la cellule élémentaire comparées aux dimensions de la zone de contact ainsi que les niveaux de pression coïncident avec les dimensions industrielles d'une application de contact aube/disque de turbine basse pression.

Une dernière étude se rapproche quant à elle précisément de la réalité industrielle. Le code semi-analytique est couplé à un modèle trisecteur éléments finis de contact pied d'aube revêtu de soufflante en composite CMO. Ce couplage permet de récupérer le torseur des efforts appliqué sur les portées aube/disque afin de prendre en compte l'effet de la structure dans le modèle semi-analytique. Un second couplage avec le logiciel Wisetex permet de récupérer la séquence de tissage du composite et les propriétés matériaux des portées respectives. Une discrétisation extrêmement fine et les optimisations effectuées sur les méthodes numériques permettent de retranscrire fidèlement les fluctuations sur les pressions de contact. Néanmoins le gros manque de données matériaux sur le revêtement employé et des faiblesses constatées dans le modèle éléments finis recueilli n'ont pas permis d'obtenir de résultats quantitatifs. Ces résultats ont néanmoins l'avantage de prouver l'intérêt d'une modélisation multiéchelle dans un scénario d'endommagement par fretting des contacts pieds d'aube.

Perspectives

Il serait intéressant de pouvoir établir à partir de ce modèle une « matrice d'essai » sur l'ensemble des paramètres étudiés dans ce chapitre afin d'en ressortir des tendances. Une grande partie d'entre elles sont recueillis à travers ces différents études et pourront éventuellement permettre d'optimiser les structures composites comme par exemple sur le choix de l'épaisseur du revêtement et de ses propriétés matériaux, l'orientation des mèches par rapport aux directions de glissement et l'ajustement de la rigidité locale des mèches à partir des fractions volumiques de fibre.

Bibliographie

- [Ach89] Zhu-H. ACHENBACH, J.D. : Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37(3):381–393, 1989.
- [Ale86] Romalis-B.L. ALEKSANDROV, V.M. : Contact problems in mechanical engineering. *Mashinostroenie, Moscow*, 1986.
- [All05] J. ALLWOOD : Survey and performance assessment of solution methods for elastic rough contact problems. *Journal of tribology*, 127(1):10–23, 2005.
- [Ant04] Nelias-D. Cretu S. ANTALUCA, E. : A three-dimensional friction model for elastic-plastic contact with tangential loading : Application to dented surfaces. ASME, 2004.
- [Ant05] E. ANTALUCA : *Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques - effet d'un chargement normal et tangentiel*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, France, 2005.
- [Ara11] Orozco-E. ARAKERE, N.K. : Analysis of low cycle fatigue properties of single crystal nickel-base turbine blade superalloys. *High Temperature Materials and Processes*, 20(5-6):403–420, 2011.
- [Arc53] J.F. ARCHARD : Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of applied physics*, 24(8):981–988, 1953.
- [Asa75] Barnett-D.M. ASARO, R.J. : The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(1):77–83, 1975.
- [Bag12] Nelias-D. Baietto M.C. BAGAULT, C. : Contact analyses for anisotropic half space : Effect of the anisotropy on the pressure distribution and contact area. *Journal of tribology*, 134(3), 2012.
- [Bag13] C. BAGAULT : *Mechanical Contact for Layered Anisotropic Materials Using a Semi-Analytical Method*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2013.
- [Bal05] Davis-C.L. Strangwood M. Knott J.F. BALART, M.J. : Cleavage initiation in ti-vn and vn microalloyed forging steels. 500:729–736, 2005.
- [Bei03] Sinclair-G.B. BEISHEIM, J.R. : On the three-dimensional finite element analysis of dovetail attachments. *Journal of turbomachinery*, 125(2):372–379, 2003.
- [Ben06] Lewis-M. Rangaswamy P. BENEDIKT, B. : On elastic interactions between spherical inclusions by the equivalent inclusion method. *Computational materials science*, 37(3):380–392, 2006.

- [Ber88] Y. BERTHIER : *Mécanisme et tribologie*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 1988.
- [Bof12] Baietto-M.C. Sainsot P. Lubrecht A.A. BOFFY, H. : An efficient 3d model of heterogeneous materials for elastic contact applications using multigrid methods. *Journal of tribology*, 134(2), 2012.
- [bor04] *Rupture prediction of woven ply laminated plate with an open hole*, 2004.
- [Bos11] Schipper-D.J. BOSMAN, R. : Transition from mild to severe wear including running in effects. *Wear*, 270(7):472–478, 2011.
- [Bou85] J. BOUSSINESQ : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, 1885.
- [Bou05] Nelias-D. Liu S. Wang Q.J. Keer L.M. BOUCLY, V. : Contact analyses for bodies with frictional heating and plastic behavior. *Journal of tribology*, 127:355, 2005.
- [Bou07] Nelias-D. Green I. BOUCLY, V. : Modeling of the rolling and sliding contact between two asperities. *ASME Journal of Tribology*, 129(2):235–245, 2007.
- [Bra90] Lubrecht-A.A. BRANDT, A. : Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *Journal of Computational Physics*, 90(2): 348–370, 1990.
- [Cal99] Mouritz-A.P. Bannister M.K. Leong K.H. CALLUS, P.J. : Tensile properties and failure mechanisms of 3d woven grp composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 30(11):1277–1287, 1999.
- [Cat38] C. CATTANEO : Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 27:342–348, 1938.
- [Cha97] Girard-R. Schaff A. CHABOCHE, J.L. : Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20(1):3–11, 1997.
- [Cha01] Feyel-F. Monerie Y. CHABOCHE, J.L. : Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *International journal of solids and structures*, 38(18):3127–3160, 2001.
- [Cha11a] Nelias-D. Sadeghi F. CHAISE, T. : On the effect of isotropic hardening on the coefficient of restitution for single or repeated impacts using a semi-analytical method. *Tribology Transactions*, 54(5):714–722, 2011.
- [Cha11b] T. CHAISE : *Modélisation mécanique par méthode semi analytique : du contact roulant élastoplastique aux impacts multiples*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [Cha12] Li-J. Nelias D. Kubler R. Taheri S. Douchet G. Robin V. Gilles P. CHAISE, T. : Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by ultrasonic shot peening (usp). *Journal of Materials Processing Technology*, 2012.
- [Che08] Wang-Q.J. CHEN, W.W. : Thermomechanical analysis of elastoplastic bodies in a sliding spherical contact and the effects of sliding speed, heat partition, and thermal softening. *Journal of Tribology*, 130:041402, 2008.

- [Che09] Wang-Q.J. Kim W. CHEN, W.W. : Transient thermomechanical analysis of sliding electrical contacts of elastoplastic bodies, thermal softening, and melting inception. *Journal of Tribology*, 131:021406, 2009.
- [Chi77] YP CHIU : On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space. *Journal of Applied Mechanics*, 44:587, 1977.
- [Chi78] YP CHIU : On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform. *Journal of Applied Mechanics*, 45:302, 1978.
- [Cia98a] M. CIAVARELLA : The generalized cattaneo partial slip plane contact problem. i-theory. *International Journal of solids and structures*, 35(18): 2349–2362, 1998.
- [Cia98b] M. CIAVARELLA : The generalized cattaneo partial slip plane contact problem. ii-examples. *International journal of solids and Structures*, 35(18):2363–2378, 1998.
- [Clu09] Baranger-E. Ladeveze P. Mouret A. CLUZEL, C. : Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(8):976–984, 2009.
- [Col86] C. COLOMBIÉ : *Usure induite sous petits débattements*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1986.
- [Cou03] Lormand-G. Dudragne G. Daguiet P. Vincent A. COURBON, J. : Influence of inclusion pairs, clusters and stringers on the lower bound of the endurance limit of bearing steels. *Tribology international*, 36(12):921–928, 2003.
- [Cou08] G. COUÉGNAT : *Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2008.
- [Dal00] Ducret-D. El Guerjouma R. Reynaud P. Franciosi P. Rouby D. Fantozzi G. Baboux J.C. DALMAZ, A. : Elastic moduli of a 2.5 d cf/sic composite : experimental and theoretical estimates. *Composites science and technology*, 60(6):913–925, 2000.
- [Din04] Nowell-D. DINI, D. : Flat and rounded fretting contact problems incorporating elastic layers. *International journal of mechanical sciences*, 46(11):1635–1657, 2004.
- [Din05] Zeebroeck-M.V. Tijskens E. Ramon H. DINTWA, E. : Torsion of viscoelastic spheres in contact. *Granular Matter*, 7(2):169–179, 2005.
- [DL00] M. DRAGON-LOUISET : *Contribution à une approche théorique de la mécanique de l'usure*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2000.
- [DL01] M. DRAGON-LOUISET : On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations. *International journal of solids and structures*, 38(9):1625–1639, 2001.
- [Dur05] D. DURVILLE : Numerical simulation of entangled materials mechanical properties. *Journal of Materials Science*, 40(22):5941–5948, 2005.

- [Dur07] D. DURVILLE : Finite element simulation of textile materials at mesoscopic scale. *Finite element modelling of textiles and textile composites*, 2007.
- [Dys91] F.W. DYSON : The potentials of ellipsoids of variable densities. *Quart. J. Pure Appl. Math*, 25:259–288, 1891.
- [EH06] C. EL HAGE : *Modélisation du comportement élastique endommageable de matériaux composites à renfort tridimensionnel*. Thèse de doctorat, 2006.
- [Esh57] J.D. ESHELBY : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396, 1957.
- [Esh59] J.D. ESHELBY : The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 561–569, 1959.
- [Esh61] J.D. ESHELBY : Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics 2*, pages 89–140, 1961.
- [Esh06] J.D. ESHELBY : *Collected Works of JD Eshelby. The Mechanics of Defects and Inhomogeneities*. Springer, 2006.
- [Fan01] Reynaud-P. Rouby D. FANTOZZI, G. : Thermomechanical behaviour of long fibres ceramic-ceramic composites. *Silicates industriels*, (9-10):109–119, 2001.
- [Fer77] N.M. FERRERS : On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings of variable densities. *QJ Pure Appl. Math*, 14(1):1–22, 1877.
- [Fit95] Guo-G. Baptiste D. FITOUSSI, J. : Modélisation micromécanique de l'endommagement des composites à fibres courtes. *Mécanique industrielle et matériaux*, 48(2):67–69, 1995.
- [Fon01] Riccardi-A. Schirrer R. Montheillet F. FOND, C. : Mechanical interaction between spherical inhomogeneities : An assessment of a method based on the equivalent inclusion. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20(1):59–75, 2001.
- [Fou96] Kapsa-P. Vincent L. FOUVRY, S. : Quantification of fretting damage. *Wear*, 200(1-2):186–205, 1996.
- [Fou97] S. FOUVRY : *Etude quantitative des dégradations en fretting*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [Fou03] Liskiewicz-T. Kapsa P. Hannel S. Sauger E. FOUVRY, S. : An energy description of wear mechanisms and its applications to oscillating sliding contacts. *Wear*, 255(1-6):287–298, 2003.
- [Fou04] Duo-P. Perruchaut P. FOUVRY, S. : A quantitative approach of ti-6al-4v fretting damage : friction, wear and crack nucleation. *Wear*, 257(9):916–929, 2004.
- [Fri02] V. FRIDRICI : *Fretting d'un alliage de titane revêtu et lubrifié : application au contact aube/disque*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.

- [Ful10] Nelias-D. FULLERINGER, B. : On the tangential displacement of a surface point due to a cuboid of uniform plastic strain in a half-space. *Journal of Applied Mechanics*, 77:021014, 2010.
- [Ful11] B. FULLERINGER : *Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : application to inclusions and wear of coated surfaces*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [Gal53] L.A. GALIN : *Contact Problems of Elasticity Theory*. 1953.
- [Gal06] Nelias-D. Jacq C. GALLEGO, L. : A comprehensive method to predict wear and to define the optimum geometry of fretting surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 128(3):476–485, 2006.
- [Gal07a] L. GALLEGO : *Fretting et usure des contacts mécaniques : Modélisation numérique*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2007.
- [Gal07b] Nelias-D. GALLEGO, L. : Modeling of fretting wear under gross slip and partial slip conditions. *ASME Journal of Tribology*, 129(3):528–535, 2007.
- [Gal08] L.A. GALIN : *Contact problems : the legacy of LA Galin*, volume 155. Springer, 2008.
- [Gal10a] Fulleringer-B. Deyber S. Nelias D. GALLEGO, L. : Multiscale computation of fretting wear at the blade/disk interface. *Tribology International*, 43(4): 708–718, 2010.
- [Gal10b] Nelias-D. Deyber S. GALLEGO, L. : A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes i, ii and iii. *Wear*, 268(1): 208–222, 2010.
- [Gao99] Boniface-L. Ogin S.L. Smith P.A. Greaves R.P. GAO, F. : Damage accumulation in woven-fabric cfrp laminates under tensile loading : Part 1. observations of damage accumulation. *Composites science and technology*, 59(1):123–136, 1999.
- [Gao11] Liu-M.Q. GAO, X.L. : Strain gradient solution for the eshelby-type polyhedral inclusion problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011.
- [Gas96] Ladeveze-P. Poss M. GASSER, A. : Damage mechanisms of a woven sicsic composite : Modelling and identification. *Composites science and technology*, 56(7):779–784, 1996.
- [Gen10] M. GENET : *Vers un matériau virtuel pour les composites céramiques*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2010.
- [Gha80] F. GHAREMANI : Effect of grain boundary sliding on anelasticity of polycrystals. *International Journal of Solids and Structures*, 16(9):825–845, 1980.
- [God84] M. GODET : The third-body approach : a mechanical view of wear. *Wear*, 100(1-3):437–452, 1984.
- [Gom98] Verpoest-I. Van Houtte P. GOMMERS, B. : Analysis of knitted fabric reinforced composites : Part i. fibre orientation distribution. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(12):1579–1588, 1998.
- [Gra00] Ryzhik-I.M. Jeffrey A. GRADSHTEÏN, I.S. : *Table of integrals, series, and products*. Academic Pr, 2000.

- [Gui96] Lamon-J. GUILLAUMAT, L. : Probabilistic-statistical simulation of the non-linear mechanical behavior of a woven sicsic composite. *Composites science and technology*, 56(7):803–808, 1996.
- [Hé11] Kaminski-M. Carrere N. Maire J.F. Otin S. Mouret A. Martin E. HÉMON, E. : Modélisation du comportement de composite à matrice céramique sous sollicitation de fatigue. *Comptes-rendus des 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17)*, 2011.
- [Has91] Z. HASHIN : The spherical inclusion with imperfect interface. *Journal of applied Mechanics*, 58(2):444–449, 1991.
- [Has02] Z. HASHIN : Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(12):2509–2537, 2002.
- [Her82] H. HERTZ : Uber die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92(156-171):22–37, 1882.
- [Her07] Cailletaud-G. HERIPRE, E. : Etude de l'effet du revêtement sur le comportement en fretting. *18eme Congres Francais de Mecanique (Grenoble 2007)*, 2007.
- [Hes80] M.R. HESTENES : *Conjugate direction methods in optimization*, volume 175. Springer-Verlag New York, 1980.
- [Hil65] R. HILL : A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222, 1965.
- [Hil93] Nowell-D. Sackfield A. HILLS, D.A. : *Mechanics of elastic contacts*, volume 22. Butterworth-Heinemann Oxford, 1993.
- [Hil94] Nowell-D. HILLS, D.A. : *Mechanics of Fretting Fatigue*, volume 22. Springer, 1994.
- [Hor93] Nemat-Nasser S. HORI, M. : Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 14(3):189–206, 1993.
- [Jä98] J. JÄGER : A new principle in contact mechanics. *Journal of tribology*, 120(4):677–684, 1998.
- [Jac01] C. JACQ : *Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitrurée en présence d'indentations*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2001.
- [Jac02] Nelias-D. Lormand G. Girodin D. JACQ, C. : Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of tribology*, 124:653, 2002.
- [Jae04] J. JAEGAR : New solutions in contact mechanics. 2004.
- [Jas87] Tsuchida-E. Mura T. JASIUK, I. : The sliding inclusion under shear. *International journal of solids and structures*, 23(10):1373–1385, 1987.
- [Joh80] Lee-J.K. Earmme Y.Y. JOHNSON, W.C. : Approximation of the strain field associated with an inhomogeneous precipitate. i- theory. ii- the cuboidal inhomogeneity. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 47:775–788, 1980.
- [Joh85] K.L. JOHNSON : *Contact mechanics*. Press syndicate of the university of Cambridge, 1985.

- [Ju96] Farris-T.N. JU, Y. : Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *Journal of tribology*, 118(2):320–328, 1996.
- [Kab02a] E. KABO : Material defects in rolling contact fatigue - influence of overloads and defect clusters. *International journal of fatigue*, 24(8):887–894, 2002.
- [Kab02b] Ekberg-A. KABO, E. : Fatigue initiation in railway wheels - a numerical study of the influence of defects. *Wear*, 253(1):26–34, 2002.
- [Kal90] J.J. KALKER : *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*, volume 2. Springer, 1990.
- [Kim08] Lim-J.H. Lee J.H. Im S. KIM, J.H. : A new computational approach to contact mechanics using variable-node finite elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 73(13):1966–1988, 2008.
- [Kuo07] C.H. KUO : Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-space subjected to contact loading. *International journal of solids and structures*, 44(3):860–873, 2007.
- [Kuo08] C.H. KUO : Contact stress analysis of an elastic half-plane containing multiple inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 45(16):4562–4573, 2008.
- [Lad95] P. LADEVEZE : Modeling and simulation of the mechanical behaviour of cmcs. *High-Temperature Ceramic-Matrix Composites*, 47:53–63, 1995.
- [Lad02] P. LADEVEZE : An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminate and three- and four-dimensional composites. *Continuum damage mechanics of materials and structures*, 2002.
- [Lad06] Letombe-S. Cluzel C. LADEVEZE, P. : A cmc damage model based on micro-and macromechanics for high-temperature and complex loading. *High Temperature Ceramic Matrix Composites*, pages 578–583, 2006.
- [Lam98] Thommeret-B. Percevault C. LAMON, J. : Probabilistic-statistical approach to matrix damage and stress-strain behavior of 2-d woven sic/sic ceramic matrix composites. *Journal of the European Ceramic Society*, 18(13):1797–1808, 1998.
- [Lam01] J. LAMON : A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites. *Composites science and technology*, 61(15):2259–2272, 2001.
- [Lam05] Camus-G. Thebault J. LAMOUREUX, F. : Kinetics and mechanisms of oxidation of 2d woven c/sic composites : I, experimental approach. *Journal of the American ceramic society*, 77(8):2049–2057, 2005.
- [Lau03] T.A. LAURSEN : *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer, 2003.
- [Liu00] Wang-Q. Liu G. LIU, S. : A versatile method of discrete convolution and fft (dc-fft) for contact analyses. *Wear*, 243(1-2):101–111, 2000.
- [Liu05] Wang-Q. LIU, S. : Elastic fields due to eigenstrains in a half-space. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, 72(6):871, 2005.

- [Liu12] Jin-X. Wang Z. Keer L.M. Wang Q. LIU, S. : Analytical solution for elastic fields caused by eigenstrains in a half-space and numerical implementation based on fft. *International Journal of Plasticity*, 2012.
- [Lom00a] Gusakov-A.V. Huysmans G. Prodromou A. Verpoest I. LOMOV, S.V. : Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. *Composites Science and Technology*, 60(11):2083–2095, 2000.
- [Lom00b] Verpoest-I. LOMOV, S.V. : Compression of woven reinforcements : a mathematical model. *Journal of reinforced plastics and composites*, 19(16):1329–1350, 2000.
- [Lom01] Huysmans-G. Luo Y. Parnas R.S. Prodromou A. Verpoest I. Phelan F.R. LOMOV, S.V. : Textile composites : modelling strategies. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 32(10):1379–1394, 2001.
- [Lom07] Ivanov-D.S. Verpoest I. Zako M. Kurashiki T. Nakai H. Hirosawa S. LOMOV, S.V. : Meso-fe modelling of textile composites : Road map, data flow and algorithms. *Composites Science and Technology*, 67(9):1870–1891, 2007.
- [Lom11] Perie-G. Ivanov D.S. Verpoest I. Marsal D. LOMOV, S.V. : Modeling three-dimensional fabrics and three-dimensional reinforced composites : challenges and solutions. *Textile Research Journal*, 81(1):28–41, 2011.
- [Los10] O. LOSEILLE : *Prévision de la durée de vie des composites à matrice céramique auto cicatrisante, en fatigue statique, à haute température (= 800 °C)*. Thèse de doctorat, 2010.
- [Lov20] A.E.H. LOVE : *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. at the University Press, 1920.
- [Lub91] Ioannides-E. LUBRECHT, A.W. : A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques. *Journal of tribology*, 113(1):128–133, 1991.
- [Luo87] Weng-G.J. LUO, H.A. : On eshelby's inclusion problem in a three-phase spherically concentric solid, and a modification of mori-tanaka's method. *Mechanics of Materials*, 6(4):347–361, 1987.
- [Mac58] W.D. MACMILLAN : *The Theory of the Potential : Theoretical Mechanics*. Dover publications, 1958.
- [Man94] K.W. MAN : *Contact mechanics using boundary elements*. 1994.
- [Mar10] L. MARCIN : *Modelisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2010.
- [May92] Lüscher-P. Wintermantel E. MAYER, J. : Knitted carbon fiber reinforced thermoplastics : Structural characterization with image analysis. *Technical Research Centre of Finland, Textiles and Composites*, pages pp. 315–320, 1992.
- [M'E49] E. M'EWEN : Xli. stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix (including the effect of tangential friction). *Philosophical Magazine*, 40(303):454–459, 1949.

- [Meg96] Refaat-M.H. Papanikos P. MEGUID, S.A. : Theoretical and experimental studies of structural integrity of dovetail joints in aeroengine discs. *Journal of materials processing technology*, 56(1):668–677, 1996.
- [Men95] Ludema-K.C. MENG, H.C. : Wear models and predictive equations : their form and content. *Wear*, 181:443–457, 1995.
- [Mil83] Keer-L.M. MILLER, G.R. : Interaction between a rigid indenter and a near-surface void or inclusion. 1983.
- [Min36] R.D. MINDLIN : Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, 7(5):195–202, 1936.
- [Min49] R.D. MINDLIN : Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16(3):259, 1949.
- [Min50a] Cheng-D.H. MINDLIN, R.D. : Nuclei of strain in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, 21(9):926–930, 1950.
- [Min50b] Cheng-D.H. MINDLIN, R.D. : Thermoelastic stress in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, 21:931–933, 1950.
- [Moh95] Blanpain-B. Celis J.P. Roos J.R. Stals L. Van Stappen M. MOHRBACHER, H. : Oxidational wear of tin coatings on tool steel and nitrided tool steel in unlubricated fretting. *Wear*, 188(1-2):130–137, 1995.
- [Mor73] Tanaka-K. MORI, T. : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- [Mos75a] Mura-T. MOSCHOVIDIS, Z.A. : Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of Applied Mechanics*, 42:847, 1975.
- [Mos75b] Z.A. MOSCHOVIDIS : *Two Ellipsoidal Inhomogeneities and Related Problems Treated by the Equivalent Inclusion Method*. Thèse de doctorat, 1975.
- [Mur77] Cheng-P.C. MURA, T. : The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Journal of Applied Mechanics*, 44:591, 1977.
- [Mur84] Furuhashi-R. MURA, T. : The elastic inclusion with a sliding interface. *Journal of applied mechanics*, 51(2):308–310, 1984.
- [Mur85] Jasiuk-I. Tsuchida B. MURA, T. : The stress field of a sliding inclusion. *International journal of solids and structures*, 21(12):1165–1179, 1985.
- [Mur87] T. MURA : *Micromechanics of defects in solids*, volume 3. Springer, 1987.
- [Mur94] Endo-M. MURAKAMI, Y. : Effects of defects, inclusions and inhomogeneities on fatigue strength. *International Journal of Fatigue*, 16(3):163–182, 1994.
- [Nak00] Nishiyama-H. Nojiri T. NAKASONE, Y. : Numerical equivalent inclusion method : a new computational method for analyzing stress fields in and around inclusions of various shapes. *Materials Science and Engineering : A*, 285(1):229–238, 2000.
- [Nas04] R. NASLAIN : Design, preparation and properties of non-oxide cmcs for application in engines and nuclear reactors : an overview. *Composites Science and Technology*, 64(2):155–170, 2004.

- [Nel99] Dumont-M.L. Champiot F. Vincent A. Girodin D. Fougères R. Flaman L. NELIAS, D. : Role of inclusions, surface roughness and operating conditions on rolling contact fatigue. *Journal of tribology*, 121(2):240–251, 1999.
- [Nel07] Antaluca-E. Boucly V. NELIAS, D. : Rolling of an elastic ellipsoid upon an elastic-plastic flat. *ASME Journal of Tribology*, 129(4):791–800, 2007.
- [O's88] King-R.B. O'SULLIVAN, T.C. : Sliding contact stress field due to a spherical indenter on a layered elastic half-space. *Journal of tribology*, 110(2):235–240, 1988.
- [Pan75] P.D. PANAGIOTOPOULOS : A nonlinear programming approach to the unilateral contact-, and friction-boundary value problem in the theory of elasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 44(6):421–432, 1975.
- [Pau05] Fouvry-S. Deyber S. PAULIN, C. : Wear kinetics of ti-6al-4v under constant and variable fretting sliding conditions. *Wear*, 259(1):292–299, 2005.
- [Pau06] C. PAULIN : *Etude de l'endommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : Impact des sollicitations variables et de la dimension du contact*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [Pen02] O. PENAS : *Etude de composites SiC/SiBC à matrice multiséquentée en fatigue cyclique à hautes températures sous air*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.
- [Pol99] Keer-L.M. POLONSKY, I.A. : A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 231(2):206–219, 1999.
- [Pol00] I.A. POLONSKY : Fast methods for solving rough contact problems : a comparative study. *Journal of tribology*, 122:36, 2000.
- [Pre92] Teukolsky-S.A. Vetterling W.T. Flannery B.P. PRESS, W.H. : Numerical recipes in fortran 77 : the art of scientific computing, vol. 1. *Fortran Numer. Recipes*, 994, 1992.
- [Qu93] J. QU : The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials. *Mechanics of Materials*, 14(4):269–281, 1993.
- [Ren10] Zhu-D. Chen W.W. Wang Q.J. REN, N. : Plasto-elastohydrodynamic lubrication (pehl) in point contacts. *Journal of tribology*, 132(3), 2010.
- [Rod96] G.J. RODIN : Eshelby's inclusion problem for polygons and polyhedra. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(12):1977–1995, 1996.
- [RR86] ROLLS-ROYCE : *The Jet Engine*. Rolls-Royce, 1986.
- [Rub04] Benveniste-Y. RUBIN, M.B. : A cosserat shell model for interphases in elastic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(5):1023–1052, 2004.
- [Sac83] Hills-D.A. SACKFIELD, A. : Some useful results in the tangentially loaded hertzian contact problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 18(2):107–110, 1983.

- [Sai02] Jacq-C. Nelias D. SAINOT, P. : A numerical model for elastoplastic rough contact. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 3(4):497–506, 2002.
- [Sch08] Marcin-L. Aboura Z. Marsal D. SCHNEIDER, J. : Experimental investigation and behavior modeling of a 3d interlock woven fabric composite : Part 1. pages 380–388, 2008.
- [Sch09] Hello-G. Aboura Z. Benzeggagh M.L. Marsal D. SCHNEIDER, J. : A meso-fe voxel model of an interlock woven composite. *In Poster of the 17th International Conference on Composite Materials*, 2009.
- [Sen67] G.P. SENDECKYJ : *Ellipsoidal inhomogeneity problem*. Thèse de doctorat, Northwestern University, 1967.
- [Seo79] Mura-T. SEO, K. : The elastic field in a half space due to ellipsoidal inclusions with uniform dilatational eigenstrains. *Journal of Applied Mechanics*, 46:568, 1979.
- [Sha03] Sharma-R. SHARMA, P. : On the eshelby's inclusion problem for ellipsoids with nonuniform dilatational gaussian and exponential eigenstrains. *Journal of applied mechanics*, 70(3):418–425, 2003.
- [Sim85] Taylor-R.L. SIMO, J.C. : Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 48(1):101–118, 1985.
- [Sin02] Cormier-N.G. Griffin J.H. Meda G. SINCLAIR, G.B. : Contact stresses in dovetail attachments : finite element modeling. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 124(1):182–189, 2002.
- [Sir98] Lamon-J. SIRON, O. : Damage and failure mechanisms of 2.5d carbon/carbon composite under uniaxial tensile and shear loads. *Acta materialia*, 46(18):6631–6643, 1998.
- [Spe75] D.A. SPENCE : The hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity*, 5(3):297–319, 1975.
- [Tan00] Tong-L. Steven G.P. Ishikawa T. TAN, P. : Behavior of 3d orthogonal woven cfrp composites. part i. experimental investigation. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(3):259–271, 2000.
- [Tay01] M. TAYA : Elastic fields in a polyhedral inclusion with uniform eigenstrains and related problems. 2001.
- [Tra12] B. TRANQUART : *Vers un matériau virtuel pour l'optimisation qualitative d'une nouvelle famille de CMCs*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2012.
- [Var02] Halperin-G. Etsion I. VARENBERG, M. : Different aspects of the role of wear debris in fretting wear. *Wear*, 252(11-12):902–910, 2002.
- [Ver05] Lomov-S.V. VERPOEST, I. : Virtual textile composites software wisetex : Integration with micromechanical, permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, 65:2563–2574, 2005.
- [Vin88] Soderberg-S. VINGSBO, O. : On fretting maps. *Wear*, 126(2):131–147, 1988.

- [Vin92] Berthier-Y. Godet M. VINCENT, L. : Testing methods in fretting fatigue : a critical appraisal. *ASTM SPECIAL TECHNICAL PUBLICATION*, 1159:33–33, 1992.
- [Vos85] A.P. VOSKAMP : Material response to rolling contact loading. *J. Tribology(Trans. ASME)*, 107(3):359–366, 1985.
- [Wal78] L.J. WALPOLE : Coated inclusion in an elastic medium. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 83(3):495–506, 1978.
- [Wan10] Wang-W.Z. Wang H. Zhu D. HU Y.Z. WANG, Z.J. : Partial slip contact analysis on three-dimensional elastic layered half-space. *ASME Journal of Tribology*, 132(2), 2010.
- [Wil88] K. WILLNER : Fully coupled frictional contact using elastic halfspace theory. *ASME Journal of Tribology*, 130(3), 1988.
- [Wil04] K. WILLNER : Elasto-plastic normal contact of three-dimensional fractal surfaces using halfspace theory. *Journal of tribology*, 126:28, 2004.
- [Wri06] P. WRIGGERS : *Computational contact mechanics*. Springer, 2006.
- [Wu95a] Du-S. WU, L. : The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion. i : Inside the region. *Journal of applied mechanics*, 62(3):579–584, 1995.
- [Wu95b] Du-S.Y. WU, L. : The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion. ii : Inside the region. *Journal of applied mechanics*, 62(3):585–589, 1995.
- [Yu91a] Sanday-S.C. YU, H.Y. : Elastic field in joined semi-infinite solids with an inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 434(1892):521–530, 1991.
- [Yu91b] Sanday-S.C. YU, H.Y. : Elastic fields in joined half-spaces due to nuclei of strain. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 434(1892):503–519, 1991.
- [Zak03] Uetsuji-Y. Kurashiki T. ZAKO, M. : Finite element analysis of damaged woven fabric composite materials. *Composites Science and Technology*, 63(3):507–516, 2003.
- [Zho97] Meguid-S.A. ZHONG, Z. : On the elastic field of a spherical inhomogeneity with an imperfectly bonded interface. *Journal of elasticity*, 46(2):91–113, 1997.
- [Zho09] Chen-W.W. Keer L.M. Wang Q.J. ZHOU, K. : A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9):885–892, 2009.

Table des figures

I.1	Schéma en coupe d'un turboréacteur illustrant son principe de fonctionnement.	6
I.2	Représentation simplifiée d'un turboréacteur civil double corps et double flux.	7
I.3	Architecture d'un compresseur axiale multi-étagé.	7
I.4	Différentes technologies de liaison aube-disque : (a) attache marteau, (b) attache sapin et (c) attache en forme de queue d'aronde [RR86].	8
I.5	Vues du disque de la soufflante du CFM56-5 (a) et de la soufflante du CFM56-7 (b).	9
I.6	Sollicitations mécaniques en pieds d'aubes (a) durant les différentes phases de vols (b).	11
I.7	Les trois modes de fretting [Gal10b].	13
I.8	Définition de la condition de glissement alterné [Pau06].	13
I.9	Transition entre conditions de glissement partiel et total pour une configuration d'essais donnée.	14
I.10	Cycle de fretting en glissement partiel	15
I.11	Évolution au cours du temps de la condition de glissement [Fou97].	16
I.12	Représentation des cartes de fretting.	17
I.13	Quelques applications des composites à matrice organique (CMO) « hautes performances » dans l'industrie aéronautique	21
I.14	Quelques applications des composites à matrice céramique (CMC) sur les moteurs civils et militaires.	21
I.15	Utilisation du composite Sic/Titane pour la fabrication de disque ANAM.	22
I.16	La structure des types de préforme textile	23
I.17	Quelques types de tissus 2D.	24
I.18	Courbes contrainte/déformation pour un essai de traction compression sur un composite tissé 2D SiC_f/SiC : (a) dans le sens du renfort (b) hors-axes à 45° [Gas96].	26
I.19	Comportement mécanique d'un CMO tissé 2D [bor04].	26
I.20	Défauts initiaux dus aux procédés d'élaboration d'un composite tissé 3D C_f/SiC [Dal00].	27
I.21	Réseaux de fissures [Gen10].	28
I.22	État initial d'un composite tissé 3D CMO [Cou08].	29
I.23	Mécanismes d'endommagement du 2.5D-C/époxy [Cou08].	30
I.24	Mécanismes de dégradation observées sur un tissé 3D CMO [EH06].	30

I.25	Schématisation du comportement de matériaux tissés jusqu'à la rupture en statique [Hé11].	36
I.26	Modélisation multiéchelle pour différents scénario d'endommagement menés sur des cellules élémentaires à l'échelle microscopique et mésoscopique [Cou08].	37
I.27	Distribution de pression de contact entre le pied d'aube et l'alvéole de disque obtenue par EF.	38
I.28	Approximation de la géométrie du contact aube/disque par un contact poinçon plan sur un massif semi-infini.	39
I.29	Distribution de pression de contact sur la portée bidimensionnelle.	39
II.1	Algorithme général du modèle de contact semi-analytique élastoplastique	46
II.2	Chargement discrétisé uniformément en N_p surfaces rectangulaires élémentaires	48
II.3	Différentes utilisations de la 2D-FFT. Les sources sont en vert. Les images sont en bleu.	50
III.1	Méthode de l'inclusion équivalente	61
III.2	Algorithme général du code de contact semi-analytique pour matériaux élastiques hétérogènes.	63
III.3	Inclusion parallélépipédique rectangle	71
III.4	Méthode de décomposition en trois sous-problèmes.	72
III.5	Algorithme de détermination des eigenstrains et des surcontraintes induites par de multiples hétérogénéités.	74
III.6	Algorithme de détermination des déplacements induits par de multiples hétérogénéités.	75
III.7	Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_3 d'une inclusion ellipsoïdale soumise à une dilatation uniforme.	76
III.8	Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_1 d'une inclusion cuboïdale soumise à une eigenstrain constante ε_{11}^* pour différents rapports de forme a_1/a_2 et $a_2 = a_3$	77
III.9	Distribution des contraintes dans un massif infini le long de l'axe x_2 d'une inclusion cuboïdale soumise à une eigenstrain constante ε_{11}^*	77
III.10	Contraintes normales dans un massif semi-infini contenant une inclusion sphérique $a_1 = a_2 = a_3 = a$ soumise à une déformation thermoélastique (a) suivant l'axe x'_1 et (b) suivant l'axe x_3	78
III.11	Distribution des contraintes normales dans un massif semi-infini contenant une inclusion ellipsoïdale soumise à une dilatation uniforme suivant l'axe x_3	79
III.12	Contraintes normales localisées en trois points du demi-espace en fonction de la profondeur du centre de l'inclusion cubique.	80
III.13	Variation de déplacement normal u_3 au centre O de la surface en fonction de la profondeur du centre de l'inclusion cubique pour trois configurations.	81
III.14	Inclusion cuboïdale à une profondeur h dans un massif semi-infini ($Ox_1x_2x_3$).	88

III.15	Distributions des contraintes le long de l'axe $x_1 = 0$ et $x_2 = 0.5mm$. Comparaison avec les résultats EF obtenus par Liu [Liu12].	88
III.16	Visualisation du déplacement normal en surface $x_3 = 0$ le long de l'axe $x_2 = 0$. Comparaison entre la méthode de décomposition de Chiu et la méthode de Galerkin.	89
III.17	Distributions de la pression de contact pour différents revêtements avec la méthode semi-analytique EIM : $E_c = 0.25E_s$, $E_c = 0.5E_s$, $E_c = E_s$, $E_c = 2E_s$, et $E_c = 4E_s$ [Ful11].	90
III.18	Distributions des pressions de contact pour différents revêtements avec la méthode semi-analytique MEIM : $E_c = 0.25E_s$, $E_c = 0.5E_s$, $E_c = E_s$, $E_c = 2E_s$, et $E_c = 4E_s$	91
III.19	Interactions entre deux hétérogénéités sphériques Ω_1 et Ω_2 séparées d'une distance d dans un massif infini élastique isotrope.	95
III.20	Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 pour dif- férentes distances de séparation d et rapports de modules de Young γ , générées par une contrainte externe uniaxiale $\sigma_{11} = \sigma_0$. Compa- raisons entre les résultats obtenus par la méthode éléments finis EF et par la méthode d'inclusion équivalente modifiée MEIM avec une formulation uniforme et au 2^{nd} ordre.	97
III.21	Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion Ω_1 pour dif- férentes distances de séparation d et rapports de modules de Young γ , générées par une contrainte externe triaxiale $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$. Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode Éléments Finis EF et par la Méthode d'Inclusion Équivalente Modifiée MEIM avec formulation uniforme et formulation au 2^{nd} ordre.	98
III.22	Variation de la contrainte à l'interface de l'hétérogénéité Ω_1 au point A_1 en fonction du rapport de rigidité γ	99
III.23	Interactions entre 7 hétérogénéités de même rayon et uniformément espacées d'une distance d dans un espace infini isotrope.	99
III.24	Distributions des contraintes à l'intérieur de l'inclusion pour diffé- rentes distances de séparation d et rapports de modules d'Young γ , générées par une contrainte externe triaxiale $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$. Comparaisons entre les résultats obtenus par EF et par la méthode d'inclusion équivalente modifiée avec formulation uniforme et formu- lation au 2^{nd} ordre.	100
III.25	Schéma de contact sphère/sphère avec un des massifs élastiques qui contient une hétérogénéité sphérique de rayon a à une profondeur h	101
III.26	Champ de déformation ε_{11} normalisé par la déformation maximale générée par le contact dans une hétérogénéité sphérique.	102
III.27	Distributions des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} le long de l'axe x_3 en $x_1 =$ $x_2 = 0$. Comparaisons entre les résultats obtenus par la méthode EF et par la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2^{nd} ordre.	103
III.28	Distributions de la pression de contact en $x_2 = 0$ obtenues par la méthode EF, et la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2^{nd} ordre.	103

III.29	Distributions des contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} le long de l'axe x_3 en $x_1 = x_2 = 0$ pour différents rapports géométriques a_0/a . Comparaisons entre les résultats obtenues par la méthode MEIM avec une formulation uniforme et une formulation au 2^{nd} ordre.	105
III.30	Différence en % entre la contrainte de Von Mises obtenue à partir de la formulation uniforme et celle obtenue par la formulation au 2^{nd} ordre, dans un plan de coupe $x_2 = 0$ pour différents rapports de rayons.	106
III.31	Visualisation des pressions de contact obtenues par la formulation uniforme et la formulation au 2^{nd} ordre de l'eigenstrain pour différents rapports de rayons.	107
III.32	Évolutions des contraintes le long de l'axe x_3 pour différentes tailles de discrétisation.	108
III.33	Profil de la pression de contact le long de l'axe $x_2 = 0$ pour différentes tailles de discrétisation.	109
III.34	Distributions des contraintes le long de l'axe x_3 en $x_1 = x_2 = 0$. Comparaisons entre les résultats obtenue par la méthode EF et par la méthode de l'inclusion équivalente modifiée MEIM avec l'algorithme CGM.	109
III.35	Profils de la pression de contact en $x_2 = 0$ obtenus par la méthode EF et la méthode de l'inclusion équivalente modifiée MEIM avec l'algorithme CGM.	110
III.36	Deux hétérogénéités cubiques Ω_1 et Ω_2 de demi-largeur a séparées d'une distance d dans un massif infini soumis à une contrainte uniaxiale σ_{11}	110
III.37	Différentes distributions de la contrainte normale σ_{11} le long de l'axe x_1 pour deux hétérogénéités Ω_1 et Ω_2 en interaction. Comparaison des résultats obtenus par la méthode EF, la méthode sans CGM et la méthode avec CGM. La courbe vert pointillée correspond au résultat pour une seule hétérogénéité voxelisée, et la courbe noire pointillée à deux hétérogénéités non-voxélisées.	111
IV.1	Correction d'une cellule élémentaire extraite de WiseTex (a) et construite sans interpénétration (b)	118
IV.2	Traduction de la capacité en charge d'une mèche comme une fonction du rayon de courbure.	119
IV.3	Définition géométrique de l'ellipsoïde équivalent représentant un segment courbe d'une mèche.	120
IV.4	Arrangement de fibres dans un fil de CMC [Cou08]	120
IV.5	Définition de la rotation de chaque section d'un fil avec les angles d'Euler ϕ , θ , et ψ	121
IV.6	Passage d'un milieu constitué d'hétérogénéités vers un milieu constitué d'inclusions par ajout de déformations d'incompatibilité nommées « eigenstrains »	122
IV.7	Différents tenseurs de localisation.	124
IV.8	Décomposition du problème d'hétérogénéité avec décohésion en trois sous-problèmes élémentaires.	127

IV.9	Distribution de la contrainte normale σ_{11}/σ_0 le long de l'axe x_1 ($x_2 = x_3 = 0$) pour une hétérogénéité sphérique de rapport $\gamma = 20$ soumise à un chargement uniaxial $\sigma_0 = \sigma_{11}^0$	130
IV.10	Distribution de la contrainte normale σ_{11}/σ_0 le long de l'axe x_1 ($x_2 = x_3 = 0$) pour une hétérogénéité sphérique de rapport $\gamma = 1/20$ soumise à un chargement uniaxial $\sigma_0 = \sigma_{11}^0$	131
V.1	Schéma du contact cylindrique en glissement sur un demi-espace élastique contenant trois fibres cylindriques identiques.	134
V.2	Distributions des pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour $\gamma = 0.5$ et $\gamma = 2$	135
V.3	Distributions des contraintes normalisées par la pression de Hertz en $x_3 = 2a$ pour $\gamma = 0.5$ et $\gamma = 2$	136
V.4	Schéma du contact cylindrique en full sliding sur un demi-espace élastique contenant deux fibres cylindriques.	136
V.5	Pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour deux fibres cylindriques séparées d'une distance $d = [2r; 3r; 4r]$ pour un frottement de Coulomb de 0.1.	138
V.6	Profils de pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour différents rapports de forme et profondeurs des fibres.	139
V.7	Profils de pressions de contact normalisées par la pression de Hertz pour des fibres molles ($\gamma = 0.5$) ou dures ($\gamma = 2$) en fonction du coefficient de Poisson des fibres.	140
V.8	Profils de pression de contact pour différents coefficients de frottement.	141
V.9	Trajet de chargement normal et tangentiel.	142
V.10	Profils de pressions (lignes pleines) normalisées par la pression de Hertz P_0 et profils de cisaillements (lignes pointillées) normalisées par μP_0 représentant le coefficient de frottement multipliée par la pression de Hertz, en fonction du coefficient de frottement à l'interface μ	143
V.11	Glissements suivant l'axe x_1 normalisés par le rayon de contact Hertzien a_0 en fonction du coefficient de frottement à l'interface μ	144
V.12	Tracés des boucles de fretting pour différents coefficients de frottement à l'interface de contact.	145
V.13	Indentation normale sans frottement sur un demi-espace élastique contenant des fibres cylindriques unidirectionnelles uniformément réparties.	146
V.14	Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence des rapports de module de Young $\gamma < 1$ pour une fraction volumique $V_f = 0.4$	149
V.15	Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence des rapports de module de Young $\gamma > 1$ pour une fraction volumique $V_f = 0.4$	150
V.16	Comparaison entre l'approche hétérogène et homogène anisotrope : étude d'influence de la fraction volumique de fibres V_f pour un rapport $\gamma = 10$	151

V.17 Visualisations des contraintes normalisées par la pression de Hertz σ_{ij}/P_0 dans trois plans de coupes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, et $x_3 = 0.22a_0$ (aux centres de la deuxième couche de fibres unidirectionnelles). Comparaisons entre les contraintes obtenues pour un massif isotrope hétérogène fibreux et pour un massif anisotrope homogène équivalent.	153
V.18 Évolution de l'effort normal en fonction du déplacement pour l'approche hétérogène et homogène anisotrope.	154
V.19 Lecture du jeu de données fourni par Wisetex et interpolation de la géométrie du tissage en entrée du code semi-analytique.	155
V.20 Différentes possibilités de localiser l'indentation normale pouvant modifier la réponse du matériau sur la zone de contact (en vert).	156
V.21 Pressions de contact pour différentes localisations de l'indenteur sphérique.	157
V.22 Évolution de la contrainte de Von Mises normalisée par la pression de Hertz dans différents plans de coupes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0.21a_0$ en fonction de la localisation de l'indentation.	157
V.23 Évolution de l'effort normal en fonction du déplacement normal pour une indentation au dessus d'un creux et au dessus de la ligne moyenne d'une mèche.	158
V.24 Modèle trisecteur d'une soufflante constituée d'aubes fan en composite CMO.	158
V.25 Modèles éléments finis des portées extradados de l'aube et du disque.	159
V.26 Image virtuel d'un VER du composite tissé tridimensionnel CMO orienté dans le repère du contact.	160
V.27 Profils de pression de contact sur la portée extradados de l'aube pour différentes épaisseurs de revêtement.	161
V.28 Profil de pression de contact pour le revêtement d'épaisseur initial sur une échelle disproportionnée avec zoom.	162
V.29 Profil de pression de contact pour le revêtement 2/3 fois moins épais que l'état initial sur une échelle disproportionnée avec zoom.	162

Liste des tableaux

III.1 Paramètres utilisés pour la modélisation éléments finis et le modèle semi-analytique.	87
III.2 Paramètres géométriques et matériaux de l'étude.	101
III.3 Paramètres géométriques et matériaux de l'étude.	104
V.1 Liste de paramètres à faire varier pour étudier l'influence des interactions, de la profondeur, du coefficient de Poisson, et du coefficient de friction.	137
V.2 Paramètres matériaux pour l'étude d'influence du rapport de module de Young	147
V.3 Paramètres matériaux pour l'étude de la fraction volumique de fibres	148