

# THÈSE

## TECHNIQUES MULTIGRILLES ET RAFFINEMENT POUR UN MODÈLE 3D EFFICACE DE MILIEUX HÉTÉROGÈNES SOUS SOLLICITATIONS DE CONTACT

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE**

par

**Hugo BOFFY**  
**Ingénieur I.N.S.A. de Lyon**

Thèse soutenue le 14 septembre 2012 devant la Commission d'examen

### Jury

A. CHATEAUMINOIS	Directeur de recherche (ESPCI)	Rapporteur
C.H. VENNER	Maître de conférence (University of Twente)	Rapporteur
G. CAILLETAUD	Professeur (MINES Paristech)	Examineur
M. RAOUS	Directeur de recherche (LMA)	Examineur
J. ROCCHI	Chef de projet (Liebherr Aerospace)	Invité
A.A. LUBRECHT	Professeur (INSA Lyon)	Encadrant
P. SAINOT	Maître de conférence (INSA Lyon)	Invité
M.C. BAIETTO	Directrice de recherche (INSA Lyon)	Directrice de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<u>CHIMIE DE LYON</u> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</u> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<u>MATÉRIAUX DE LYON</u>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATÉIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<u>MECANIQUE, ENERGÉTIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<u>ScSo*</u>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Au moment d'écrire cette section de remerciements, je me rends compte à quel point celle-ci est importante à mes yeux et qu'il sera difficile de citer toutes les personnes qui méritent d'être référencées ici. Je dédie cette page aux personnes qui me sont chères et qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude à mon jury de thèse pour avoir accepté de juger mon travail. Je remercie plus particulièrement C.H. Venner et A. Cha-teauminos pour avoir accepté de rapporter mes travaux ainsi que G. Cailletaud et M. Raous pour avoir accepté le rôle d'examineur dans mon jury.

Je tiens également à remercier tout particulièrement mes encadrants de thèse, ririe fifi et lulu, pour leur confiance et la sincérité de nos relations. Merci à toi Marie pour avoir accepté d'être ma directrice de thèse, pour m'avoir proposé ce sujet qui a su combler mes attentes et éveiller ma curiosité scientifique, pour tous les précieux conseils que tu m'as donnés, pour la rigueur que tu m'as apportée et pour avoir été à mon écoute à tous les instants, même les plus difficiles. Merci à toi Ton, pour les longues discussions tant scientifiques que philosophiques que nous avons eu, pour ton apprentissage des méthodes multigrilles qui m'ont permis de mener à bien ce projet et pour m'avoir aidé à améliorer grandement ma langue anglaise. Merci à toi Philippe, pour m'avoir supporté une année de plus que les autres et pour la transmission de ton savoir immense tant sur le plan scientifique que numérique. Merci pour ta bonne humeur et ton humour qui font que c'est un véritable plaisir de travailler avec toi au quotidien.

Je souhaite également remercier Christian Gauthier, Vincent le Houerou et Thibaud Châtel de l'ICS pour leur accueil dans leur laboratoire et les travaux que nous avons réalisés ensemble.

Je tiens à remercier particulièrement mes collègues thésards : Mathieu, Romain, Benjamin, Vincent, Florian, Hafedh, Laure et Ghizlane pour ces années que nous avons partagées dans le même bureau à nous supporter mutuellement. Une pensée pour toi aussi Romain B., compagnon de thèse aux Pays-Bas mais ami de toujours. Au sein du laboratoire, je ne pourrais également oublier Alain T. et Vincent B. pour les nombreuses parties de coinches partagées entre collègues durant la pause du midi.

Quelques lignes pour remercier mes compagnons de vie hors LaMCoS.

Les KA-Sociaux : Katia, Ewen et Pierre. Merci pour tous instants mythiques que nous avons pu passer autour d'un verre ou d'un jeu de plateau. Ce sont ces petits instants de la vie quotidienne qui nous permettent de garder toujours le moral et d'entretenir une belle amitié.

Les Myrmidons : Flavien, Romain, Pascal et Murielle. Merci pour votre humour sans

---

pareil et les rares moments que l'on peut passer tous ensemble qui restent à jamais mémorables.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à plusieurs personnes résidant dans ma Franche-Comté natale. Amandine, Aline et Sandra, merci pour le soutien que vous m'avez apporté malgré la distance qui nous sépare. Nous avons pu partager de nombreux moments durant ces années qui resteront inoubliables, même si ils ne furent pas toujours faciles. Une très grosse pensée pour Caroline et Valentin, pour votre générosité, votre sincérité et cette merveilleuse amitié que nous partageons depuis maintenant de nombreuses années.

Une pensée toute particulière pour mon papa, qui m'a insufflé l'envie d'étudier les sciences de l'ingénieur tout au long de mon enfance. Sa passion pour son métier et les voyages a été contagieuse dans le bon sens du terme.

Enfin, je dédie ces dernières lignes à ma maman pour son soutien au long de toutes ces années, pour avoir toujours cru en moi et m'avoir poussé à aller au bout de mon cursus. Maman, je te dédie cette thèse.

*"Le savoir que l'on ne complète pas  
chaque jour diminue tous les jours"*

Proverbe Chinois

# Résumé

Les problèmes de mécanique du contact sont des problèmes multi-échelles mettant en jeu de nombreux phénomènes physiques. Les premières études concernant ce domaine datent de la fin du  $XIX^{me}$  siècle et les développements majeurs ont été réalisés au cours du  $XX^{me}$  siècle en parallèle du besoin croissant des ingénieurs de prévoir le comportement des matériaux sous sollicitations tribologiques.

L'évolution des besoins industriels et les avancées technologiques réalisées dans le domaine du numérique conduisent à réaliser des simulations tridimensionnelles ayant pour objectif la prédiction du comportement de pièces sous sollicitations thermo-mécaniques transitoires, pour, soit alléger les structures, augmenter le niveau de sollicitations, étendre la durée de vie... Ces simulations se révèlent très souvent coûteuses en termes de temps de calcul et d'espace mémoire et nécessitent par conséquent l'utilisation de super calculateurs.

Dans ce contexte, cette thèse propose un modèle innovant basé sur les techniques multigrilles avec raffinement local afin de réaliser ces simulations pour des coûts numériques faibles. Ce modèle est basé sur les équations de Lamé généralisées et l'équation de la chaleur de Fourier discrétisée à l'aide des différences finies. Le système linéaire obtenu est résolu à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel couplée avec les techniques multigrilles. Ces techniques permettent d'accélérer la convergence d'un problème en utilisant plusieurs grilles et des opérateurs de transfert. Afin de garantir une convergence optimale et de minimiser la taille mémoire dans le cas de variations de propriétés importantes, des techniques numériques de localisation et d'optimisation ont été mises en place. Plusieurs calculs mettant en jeu plusieurs centaines de millions de degrés de liberté peuvent être réalisés en parallèle sur un ordinateur de bureau en quelques heures seulement.

Les applications visées ici sont centrées sur l'utilisation de revêtements ou de matériaux innovants pour permettre les gains attendus. Des validations du modèle ont été effectuées en comparant nos résultats avec ceux issus de la littérature. Des études paramétriques ont permis d'étudier l'influence de l'épaisseur du revêtement, de la valeur du module de Young mais aussi d'une couche à gradient de propriété sur le champ de contrainte et la tenue du système revêtement/substrat sous sollicitation de contact. Des études similaires ont été conduites sous sollicitations thermiques.

L'intérêt porté aux variations de propriétés des matériaux selon toutes les directions de l'espace a conduit à étudier l'effet de la microstructure, qui est constituée de grains ayant chacun leurs propriétés propres, sur les champs de contraintes. La mise en évidence de cet effet est explicitement montrée au travers de calculs de durée de vie utilisant des descriptions statistiques de type Weibull. La dispersion observée sur les résultats est conforme aux observations expérimentales.

**MOTS CLÉS:** mécanique du contact, thermique, multigrilles, revêtements, caractérisation mécanique

---

# Abstract

Contact mechanic problems are multi-scale and involve numerous physical phenomena. These problems have been studied since the end of the XIXth century and major developments have been made during the XXth century due to the necessity for engineers to predict material behavior under tribological loads.

Currently, industrial demands and technological breakthroughs drive people to consider three-dimensional simulations to study this behavior under thermo-mechanical loads. The objectives are multiple : reduce of the size of structures, increase of material resistance, improvement of fatigue life... These simulations, which often require high numerical costs in terms of memory size and CPU time, have to be performed on super computers.

In this context, this work proposes an innovative model based on multigrid methods using a local refinement strategy in order to perform these simulations at a low numerical cost. The model is based on the Lamé elasticity equations and the Fourier heat equation which have been discretized using a finite difference framework. The obtained linear system is solved using the Gauss-Seidel iterative method coupled with multigrid techniques. These methods allow an acceleration of the convergence speed, using different grids and transfer operators. In order to obtain an optimum convergence speed and decrease the required memory size, local refinement strategies and optimization techniques have been used. Several calculations required hundred millions of points, can be solved on a personal computer within a few hours.

Applications focus on the use of a coating or innovative materials which allow improvements in terms of fatigue life. The model has been validated against results found in the literature. Parametric studies allowed to analyse the influence of the coating thickness, the Young's modulus ratio or the use of a graded layer on the stress field and on the coating/substrate system behaviour under contact loads. Similar studies have been performed under thermal loads.

Special attention has been paid to the material property variations along all space directions. It has lead us to consider a material microstructure which is composed of grains with their individual properties. The influence of the microstructure on the fatigue life phenomenon is clearly highlighted using statistical Weibull charts. The dispersion observed in the numerical results tends to be similar to experiments found in the literature.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Etude Bibliographique</b>	<b>7</b>
1.1 Thermique . . . . .	9
1.1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.2 Historique analytique . . . . .	9
1.1.3 Historique numérique . . . . .	13
1.1.4 Synthèse . . . . .	17
1.2 Mécanique du contact . . . . .	17
1.2.1 Introduction . . . . .	17
1.2.2 Historique analytique . . . . .	17
1.2.3 Historique numérique . . . . .	22
1.2.4 Synthèse . . . . .	27
1.3 Généralités sur les milieux hétérogènes . . . . .	27
1.3.1 Revêtements . . . . .	28
1.3.2 Matériaux à gradient de propriétés . . . . .	29
1.3.3 Défauts . . . . .	30
1.3.4 Matériaux à gros grains . . . . .	31
1.3.5 Synthèse . . . . .	32
1.4 Bilan . . . . .	33
<b>2 Mécanique</b>	<b>35</b>
2.1 Modèle 3D mécanique . . . . .	37
2.2 Introduction . . . . .	37
2.3 Mécanique des milieux continus . . . . .	37
2.3.1 Équations de Lamé pour un solide homogène . . . . .	38

2.3.2	Équations de Lamé généralisées . . . . .	39
2.3.3	Conditions aux limites mécaniques . . . . .	40
2.3.4	Discrétisation du problème . . . . .	41
2.3.5	Discrétisation des équations de Lamé . . . . .	41
2.3.6	Discrétisation des conditions aux limites . . . . .	41
2.4	Modèle 3D-MG mécanique . . . . .	41
2.4.1	Méthodes multigrilles . . . . .	42
2.4.2	Techniques de raffinement local de maillage . . . . .	47
2.4.3	Traitement des conditions aux limites . . . . .	48
2.5	Résolution du système d'équations . . . . .	48
2.5.1	Relaxation de Jacobi . . . . .	49
2.5.2	Relaxation de Gauss-Seidel . . . . .	50
2.6	Résolution du problème de contact . . . . .	50
2.7	Validation . . . . .	52
2.7.1	modèle numérique multigrilles . . . . .	53
2.7.2	Matériaux revêtus . . . . .	56
2.7.3	Matériaux à gradients de propriétés . . . . .	58
2.7.4	Bilan . . . . .	59
2.8	Résultats . . . . .	60
2.8.1	Expérimentations sur des matériaux revêtus . . . . .	60
2.8.2	Matériaux à gradient de propriétés . . . . .	66
2.8.3	Matériaux hétérogènes . . . . .	69
2.9	Synthèse . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Thermique</b> . . . . .	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	75
3.2	Modèle 3D thermique . . . . .	75
3.2.1	Équation de la chaleur . . . . .	76
3.2.2	Conditions aux limites thermiques . . . . .	76
3.2.3	Adimensionnement . . . . .	77
3.2.4	Discrétisation . . . . .	78
3.3	Validation . . . . .	81
3.3.1	Modélisation du problème . . . . .	82
3.3.2	Massif homogène - Différents flux - Régime établi . . . . .	83
3.3.3	Massif homogène - Flux bande - Régime établi - Différents Péclets . . . . .	86
3.3.4	Calculs et comparaisons FFT . . . . .	88
3.3.5	Validation : massifs revêtus . . . . .	89
3.3.6	Synthèse . . . . .	90
3.4	Résultats . . . . .	91
3.4.1	Massif homogène et flux quelconque . . . . .	91
3.4.2	Systèmes revêtement/substrat . . . . .	95
3.4.3	Conclusion . . . . .	99
3.5	Modèle 3D thermo-élastique . . . . .	100

3.5.1	Introduction . . . . .	100
3.5.2	Équations de la thermo-élasticité . . . . .	100
3.5.3	Conditions aux limites thermo-élastiques . . . . .	101
3.5.4	Discrétisation des équations de la thermo-élasticité . . . . .	101
3.5.5	Validation . . . . .	102
3.5.6	Application . . . . .	103
3.5.7	Conclusion . . . . .	105
3.6	Synthèse . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Milieux polycristallins</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction . . . . .	109
4.2	Modélisation des grains . . . . .	109
4.2.1	introduction . . . . .	109
4.2.2	Principe de la méthode . . . . .	109
4.2.3	Construction du maillage . . . . .	111
4.3	Modélisation du problème numérique . . . . .	113
4.4	Contraintes dans les milieux polycristallins . . . . .	115
4.4.1	Introduction . . . . .	115
4.4.2	Milieu à variation de densité volumique . . . . .	115
4.4.3	Milieux polycristallins hétérogènes . . . . .	117
4.4.4	Synthèse . . . . .	118
4.5	Durée de vie en fatigue des milieux polycristallins . . . . .	118
4.5.1	Introduction . . . . .	118
4.5.2	Critère de Lundberg-Palmgren . . . . .	119
4.5.3	Critère de Ioannides-Harris . . . . .	119
4.5.4	Distribution statistique de Weibull . . . . .	120
4.5.5	résultats . . . . .	121
4.5.6	Conclusion . . . . .	127
4.6	Synthèse . . . . .	129
	<b>Conclusion générale</b>	<b>131</b>
	<b>Annexe A : Discrétisation du problème mécanique</b>	<b>135</b>
	<b>Annexe B : La théorie de Hertz</b>	<b>137</b>
	<b>Annexe C : Validation du raffinement tridimensionnel</b>	<b>141</b>
	<b>Annexe D : Discrétisation du problème thermique</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>



# Table des figures

1.1	Harmen Blok . . . . .	9
1.2	Solution thermique de Carslaw-Jaeger pour une source bande . . . . .	10
1.3	Solution thermique de Archard pour une source circulaire . . . . .	11
1.4	Évolution de $T_{max}$ en fonction du temps, source elliptique. . . . .	12
1.5	Champ de température : flux rugueux, grande vitesse. . . . .	14
1.6	Heinrich Hertz . . . . .	18
1.7	Illustration du modèle JKR . . . . .	20
1.8	Géométrie du contact adhésif DMT . . . . .	20
1.9	Solution de Bragallini : massif revêtu. $E_c/E_s=2$ . $t/a_0=0.025$ . . . . .	22
1.10	Maillage éléments finis : indentation d'un revêtement polymère . . . . .	24
1.11	Maillage élément fini : surface rugueuse . . . . .	25
1.12	Propriétés comparées des alliages de rechargement . . . . .	29
1.13	Schéma d'inclusion ellipsoïdale dans le problème d'Eshelby . . . . .	30
1.14	Matériaux à gros grains . . . . .	32
1.15	Triangulation de Delaunay en 2D - Tessellation de Voronoï en 3D . . . . .	33
2.1	Configuration et quelques exemples de variations de propriétés mécaniques	37
2.2	Contraintes mécaniques dans un repère cartésien normé . . . . .	39
2.3	Conditions aux limites du problème mécanique . . . . .	40
2.4	Schéma de résolution multigrilles . . . . .	43
2.5	Stratégies V-cycle et Full Multigrid (FMG) . . . . .	45
2.6	Représentation 3D de l'opérateur de restriction pondérée . . . . .	46
2.7	Technique de raffinement local . . . . .	47
2.8	Norme du résidu dans le cas d'un contact Hertzien . . . . .	51
2.9	Coefficient d'influence dans le cas d'un massif homogène . . . . .	52
2.10	Écart relatif : multigrilles-Boussinesq-Cerruti . . . . .	52
2.11	Contact élastique sphère-plan . . . . .	53
2.12	Déplacements $w$ en surface du problème Hertzien . . . . .	55
2.13	Évolution de $P_h/P_{hs}$ en fonction de $e_c/a_s$ . . . . .	58
2.14	Exemple de champs de pressions : revêtement dur . . . . .	58
2.15	Comparaisons Giannakopoulos-Suresh-Multigrilles . . . . .	59
2.16	Schéma du micro-indenteur . . . . .	61
2.17	Évolution de $p_m\sqrt{a}=f(a\sqrt{a}/R)$ pour l'échantillon D . . . . .	63

2.18	Évolution de $p_m\sqrt{a}=f(a\sqrt{a}/R)$ et régression linéaire pour l'échantillon D	64
2.19	Évolution du rayon de contact pour les échantillons G et H	65
2.20	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu ( $E_c/E_s = 3, e_c/a_0 = 0.5$ ), $f = 0$	66
2.21	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu ( $E_c/E_s = 3, e_c/a_0 = 0.5$ ), $f = 0.3$	67
2.22	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu avec variation linéaire de $E_c$ , $f = 0$	67
2.23	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu avec variation linéaire de $E_c$ , $f = 0.3$	67
2.24	Variation sinusoïdale du module de Young	68
2.25	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu avec variation sinusoïdale de $E_c$	69
2.26	$\bar{\sigma}_{VM}$ pour un matériau revêtu, $f = 0.3$	69
2.27	$\bar{\sigma}_{VM}$ dans un massif contenant deux inclusions : une dure et une ductile	70
3.1	Configuration et variations de propriétés pour le problème thermique	75
3.2	Conditions aux limites du problème thermique	77
3.3	Méthode des points fantômes	79
3.4	Résidu=f(V-cycles) - C.L Neumann et Dirichlet	81
3.5	Modélisation des problèmes thermiques	82
3.6	Représentation du flux de chaleur unitaire $Q(X,Y,Z=0) = 1$	84
3.7	Représentation du flux de chaleur Hertzien $Q(X,Y,Z=0)$	85
3.8	Effet de la taille du domaine sur $T(0,0,0)$	86
3.9	Flux bande : comparaison analytique-MG	87
3.10	Flux Hertzien et vitesse $Pe_x$ : comparaison FFT-MG	89
3.11	Modèle 3D thermique revêtement/substrat	90
3.12	Champ de température : différentes conductivités de revêtement	91
3.13	Champ de température, surface rugueuse, $Pe_x = 0$	93
3.14	Champ de température, surface rugueuse, $Pe_x = 10$	93
3.15	Champ de température, surface rugueuse, $Pe_x = 100$	94
3.16	Champ de température : flux sinusoïdaux et différents Péclets	94
3.17	Modélisation des problèmes thermique revêtement/substrat	96
3.18	Évolution de $T_{max}=f(k_c/k_s)$ pour différentes épaisseurs de revêtement	96
3.19	Évolution de $T_{max}=f(e_c)$ pour différents rapports de conductivité	97
3.20	Évolution du résidu pour les problèmes thermiques avec revêtement	98
3.21	Évolution de $T_{max}=f(e_c)$ pour des grands rapports de conductivité	98
3.22	Évolution de $T_{max}=f(e_c)$ en surface et à l'interface	99
3.23	Système de revêtement double céramique	104
3.24	Modélisation des problèmes TBC	104
3.25	Contraintes de compression dans les revêtements TBC	105
4.1	Photographie de la microstructure d'un acier cimenté.	110
4.2	Illustration du principe de la méthode de tessellation de Voronoï en 3D	110
4.3	Tessellation de Voronoï et triangulation de Delaunay en 2D	111
4.4	Tessellation de Voronoï 3D obtenue pour un maillage régulier	112
4.5	Disposition des points de nucléations	113
4.6	Maillage 3D obtenu à l'aide de la tessellation de Voronoï	113

---

4.7	Conditions aux limites des problèmes polycristallins. . . . .	115
4.8	Milieu polycristallin à variation de densité volumique . . . . .	116
4.9	$\sigma_{VM}$ dans un milieu polycristallin à variation de densité volumique . . . .	116
4.10	Exemple de répartition Gaussienne des modules de Young . . . . .	117
4.11	$\sigma_{VM}$ : comparaison milieux homogène/hétérogène . . . . .	117
4.12	Nombre de cycles effectués avant défaillance - différentes pressions . . . .	123
4.13	Weibull : probabilités de défaillance de l'ensemble. $P_h=2813$ MPa . . . . .	124
4.14	Weibull : probabilités de trouver une défaillance. $P_h=2813$ MPa . . . . .	124
4.15	Weibull : probabilités de défaillance de l'ensemble. $P_h=2700$ MPa . . . . .	125
4.16	Weibull : probabilités de trouver une défaillance. $P_h=2700$ MPa . . . . .	125
4.17	Weibull : probabilités de défaillance de l'ensemble. $P_h=2606$ MPa . . . . .	126
4.18	Weibull : probabilités de trouver une défaillance. $P_h=2606$ MPa . . . . .	126
4.19	Répartitions de la durée de vie des échantillons à $L_{10}$ . . . . .	127
4.20	Géométrie et paramètres du problème de Hertz . . . . .	137
4.21	Écart $\Theta$ entre les solutions globale et locales. Raffinement 1D et 2D . . . .	141
4.22	Écart $\Gamma$ entre les solutions globale et locale. Raffinement 3D . . . . .	142





# Liste des tableaux

2.1	Traitement des conditions aux limites mécaniques . . . . .	48
2.2	Erreur relative sur $\sigma_{VM}$ et sur $w$ pour différents niveaux . . . . .	55
2.3	Écarts entre stratégie globale et stratégie locale . . . . .	56
2.4	Configurations numériques pour les matériaux revêtus . . . . .	58
2.5	tableau des différents échantillons . . . . .	61
2.6	Rayons $R$ des indenteurs, précision $0.1 \mu m$ . . . . .	62
2.7	Charges appliquées (valeurs moyennes), précision $0.05 N$ . . . . .	62
3.1	Paramètres de modélisation pour les validations thermiques . . . . .	83
3.2	Erreur relative MG-FFT pour un flux Hertzien . . . . .	88
3.3	Caractéristiques des surfaces rugueuses . . . . .	92
3.4	Coefficients directeurs des courbes 3.18 . . . . .	97
3.5	Caractéristiques thermo-élastiques de l'aluminium. . . . .	102
3.6	Comparaison FEM, FFT et MG pour un problème thermo-élastique . . . . .	103
3.7	Propriétés des barrières thermiques (TBC) . . . . .	103
4.1	Paramètres numériques : milieux hétérogènes . . . . .	114
4.2	Paramètres de Weibull . . . . .	127



# Nomenclature

## Mécanique

$a$	rayon de contact
$E$	module de Young
$\nu$	coefficient de Poisson
$\lambda, \mu$	coefficients de Lamé
$\alpha$	coefficients de dilatation
$[\sigma]$	tenseur des contraintes
$[\varepsilon]$	tenseur des déformations
$u, v, w$	champs de déplacements suivant les directions $x, y$ et $z$

### indices

$c$	caractéristiques du revêtement
$s$	caractéristiques du substrat

## Thermique

$k$	conductivité thermique
$D$	diffusivité thermique
$\rho$	masse volumique
$T$	champ de température
$Q$	flux thermique
$Pe$	nombre de Péclet

## Méthodes multigrilles

$h$	pas de maillage
$e$	erreur numérique
$r$	résidu
$f$	second membre
$\Omega_n$	niveau $n$
$L_x, L_y, L_z$	dimensions du volume fini



# Introduction générale

L'étude de la mécanique du contact débute dans les années 1880 avec les théories énoncées à Berlin par Heinrich Hertz [HER 82]. Il s'agit de déterminer les pressions et cisaillements à l'interface de deux corps homogènes, isotropes et élastiques en contact, une ellipsoïde sur un plan, pour ensuite calculer les champs de contraintes et de déformations dans ces corps et quantifier les risques associés à un chargement via une contrainte de Von-Mises, par exemple. Les progrès technologiques dans l'élaboration des matériaux, la mise au point de procédés de dépôts de couches, par exemple, ont permis d'augmenter la durée de vie, les charges admissibles, d'alléger les pièces...

L'étendue des possibilités requière d'inverser la procédure de dimensionnement, en privilégiant les simulations numériques via des études paramétriques pour sélectionner des solutions admissibles avant de procéder à des essais expérimentaux de validation. L'industrie est de plus en plus demandeuse d'outils de simulation numérique capables de rendre compte de la complexité des systèmes mécaniques actuels et futurs. Ces outils numériques doivent être fiables, multi-échelles, et capables de gérer des millions de degrés de libertés en un temps CPU et une gestion de la mémoire raisonnable.

La méthode des éléments finis permet de satisfaire les exigences liées à la prise en compte de géométries quelconques, de lois de comportements linéaires et non linéaires, aux échelles macro et à celles de la microstructure, mais pour des temps de calcul qui peuvent devenir rédhibitoires. De plus, les limites à ces méthodes sont liées à la taille des problèmes numériques (nombre de degrés de liberté et temps CPU).

Les méthodes semi-analytiques sont quant à elles parfaitement adaptées aux échelles du contact, des revêtements, de la rugosité, de la microstructure, mais nécessitent des développements de modèles. La mise en place de modèles reposant sur des techniques numériques performantes permettant la résolution de problèmes dans des temps raisonnables représente donc un véritable défi.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire de thèse est de développer un modèle numérique robuste et efficace capable de traiter les différents éléments essentiels des problèmes de contact -revêtement, rugosité, microstructure- dans un contexte multi-échelle et tridimensionnel. La démarche envisagée met en synergie deux techniques numériques : les méthodes de différences finies d'une part et les méthodes multigrilles d'autre part. Ces dernières ont été introduites par Brandt [BRA 77] dans les années soixante-dix comme une famille de solveurs très performants pour résoudre les problèmes à grand nombre de degrés de liberté. Les méthodes multigrilles n'étant pas à proprement parler des techniques multi-échelles, nous verrons que l'utilisation d'une

stratégie de maillage locale permet d'atteindre les objectifs fixés. La structure itérative des méthodes multigrilles permet au système, grâce à des opérateurs d'interpolation et de restriction entre les différentes grilles de résolution, de tenir compte des phénomènes physiques locaux.

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre présente une revue assez exhaustive des différentes avancées théoriques et numériques réalisées dans les domaines de la thermique et de la mécanique du contact. Il met également en avant les besoins actuels d'étudier le comportement des structures dites à grains qui sont utilisées dans des domaines de pointe, notamment en aéronautique ou en aérospatial.

Cette étude bibliographique permet de comprendre l'utilité du développement d'un modèle 3D capable de prendre en compte les aspects multi-échelles et micro-structuraux de ces problèmes.

Le second chapitre pose les hypothèses des équations d'élasticité dans un massif hétérogène soumis à un chargement quelconque sur sa surface. Ce chargement peut se présenter sous la forme d'un champ de pression ou de déplacements imposés. Même si l'hypothèse d'élasticité peut sembler réductrice, celle-ci demeure néanmoins la première étape indispensable à la mise en place et à la validation d'un modèle numérique efficace avant d'introduire des lois de comportements plus complexes telles que la plasticité ou la viscoélasticité.

Ce chapitre présente également les concepts sur lesquels sont développés les méthodes multigrilles. Celles-ci utilisent une discrétisation aux différences finies et sont compatibles avec des techniques de localisation et d'optimisation qui permettent d'accélérer la convergence et de réduire les coûts numériques. Ces techniques sont implémentées dans le modèle afin de satisfaire les objectifs fixés en termes de précision sur les résultats et de temps de calculs. Une première étape de validation est réalisée à l'aide de comparaisons entre des solutions extraites de la littérature avec celles obtenues numériquement pour les mêmes configurations à l'aide du solveur. Dans une seconde étape, des comparaisons entre des essais d'indentation normale poinçons/système revêtement/substrat, réalisés à l'ICS en collaboration avec l'équipe de Christian Gauthier, ont été simulés numériquement. Ces étapes permettent de rendre compte de l'efficacité du modèle en termes de vitesse de convergence et de précision sur la solution avant d'aborder des problèmes complexes. Ces derniers se concentrent sur des massifs revêtus, à gradient de propriétés ou encore contenant des inclusions, soumis à des chargements Hertiens. Les contraintes sont évaluées en tout point à l'intérieur de ceux-ci à partir des déplacements obtenus par le solveur multigrilles. Une attention particulière est attachée à la richesse du maillage dans le cas de couches minces ou de gradients de propriétés important afin que ceux-ci puissent être correctement pris en compte dans la résolution tout en gardant des temps de calcul acceptables pour un ordinateur de bureau. Les bénéfices de l'utilisation d'une couche à gradient de propriété déposée en surface d'un substrat à la place d'un revêtement simple sont clairement mis en évidence au travers des résultats obtenus.

Le troisième chapitre pose les hypothèses de l'équation de la chaleur dans un massif hétérogène en trois dimensions soumis à un chargement quelconque sur sa surface. Ce

chargement peut se présenter sous la forme d'un flux de chaleur ou d'une température imposée. Les effets de convection sont pris en compte avec l'introduction du nombre de Péclet dans l'équation de la chaleur.

Une étape de validation est réalisée à partir de cas académiques simples ou extraits de la littérature avant d'étudier l'influence de la forme du flux ou du rapport de conductivité entre un revêtement et un substrat sur le champ de température. Dans le cas où ces gradients de propriétés deviennent important, nous proposons et implémentons une méthode spécifique afin de retrouver une vitesse de convergence optimale pour notre algorithme. La finalité de ce modèle thermique est la prédiction du champ de température dans un milieu hétérogène soumis à un flux quelconque. Ce champ de température peut être introduit en tant que condition aux limites dans un modèle basé sur les équations de la thermo-élasticité.

Le dernier chapitre est dédié à l'analyse des matériaux hétérogènes en intégrant leur microstructure dans la modélisation. La prise en compte de cette dernière est réalisée à l'aide d'une technique de partition de l'espace multidirectionnel : la tessellation de Voronoï. Chacun des grains possède ses propriétés propres, ce qui permet de réaliser une infinité de configuration. Les champs de contraintes sont évalués pour un matériau à variation de densité volumique et plusieurs matériaux hétérogènes dont les propriétés sont attribuées à l'aide d'une répartition Gaussienne. La durée de vie de ces milieux, face à une sollicitation de type roulement sans frottement, est finalement étudiée à l'aide d'un critère de fatigue extrait de la littérature. Ce type d'étude permet de se placer en complément d'expériences réalisées en entreprise, sur des aciers de type roulement par exemple et de réaliser des études statistiques de durée de vie.





# Chapitre 1

## Etude Bibliographique

*Dans ce premier chapitre, un état de l'art non exhaustif des différents travaux analytiques et numériques réalisés dans les domaines thermique et mécanique est présenté. Il s'agit de dresser les grandes lignes des évolutions réalisées dans les domaines de la thermique et de la mécanique du contact afin de positionner le contexte de l'étude qui sera présentée dans la suite de ce mémoire. Une dernière partie s'attachera à présenter quelques généralités sur les matériaux homogènes et leurs applications industrielles afin de justifier le besoin de ces travaux thèse.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Thermique</b>	<b>9</b>
1.1.1	Introduction	9
1.1.2	Historique analytique	9
1.1.3	Historique numérique	13
1.1.4	Synthèse	17
<b>1.2</b>	<b>Mécanique du contact</b>	<b>17</b>
1.2.1	Introduction	17
1.2.2	Historique analytique	17
1.2.3	Historique numérique	22

1.2.4	Synthèse . . . . .	27
<b>1.3</b>	<b>Généralités sur les milieux hétérogènes . . . . .</b>	<b>27</b>
1.3.1	Revêtements . . . . .	28
1.3.2	Matériaux à gradient de propriétés . . . . .	29
1.3.3	Défauts . . . . .	30
1.3.4	Matériaux à gros grains . . . . .	31
1.3.5	Synthèse . . . . .	32
<b>1.4</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>33</b>

---

## 1.1 Thermique

### 1.1.1 Introduction

La thermique est une science relative à la production d'énergie, son utilisation et aux transferts de chaleur suivant différents phénomènes physiques, en particulier la conduction, la convection et le rayonnement. Elle est de plus en plus étudiée par les ingénieurs et les designers étant donné les enjeux actuels que représentent les économies d'énergie et le réchauffement climatique. En effet, le champ de température à l'intérieur d'un matériau peut modifier ses propriétés et engendrer des sur-contraintes à l'origine de défaillances précoces des systèmes. Nous allons nous attacher ici à présenter les différentes avancées réalisées dans ce domaine, en couvrant l'essentiel des problèmes traités par cette discipline.

### 1.1.2 Historique analytique

C'est en 1937 que débutent les diverses études menées sur les températures de contact et l'échauffement des surfaces du au phénomène de friction. Blok [BLO 37] fut le premier à étudier l'élévation de température due à des sources de chaleur concentrées, dites températures flash.



FIGURE 1.1: Harmen Blok

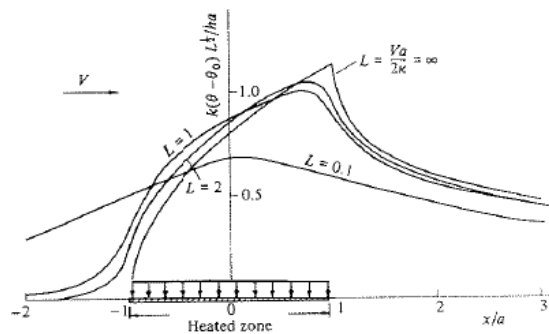
Il a étudié cette augmentation dans le cas d'une source de chaleur de type bande semi-infinie pour les grands nombres de Péclet en régime quasi-établi. Ce nombre représente une grandeur physique qui caractérise l'importance relative de la convection et de la conduction latérale et sera défini plus précisément dans le chapitre thermique de ce mémoire. Blok a considéré des situations où seules la conduction normale et la convection sont les mécanismes de transfert de chaleur. Par la suite, de nombreuses études ont été menées, notamment par Kennedy en 1984 [KEN 84a], sur les phénomènes de températures flash et d'échauffement par friction. Afin de répondre aux diverses problématiques industrielles, les travaux initiaux de Blok sur l'étude des températures ont été étendus selon quatre directions :

- La prise en compte de nombres de Péclet moyens et faibles. Ces cas de figure peuvent se trouver dans les transmissions par engrenages, les systèmes came-poussoir... où le phénomène de conduction devient important et ne peut pas être négligé.

- L'extension à la prise en compte de sources de chaleur de forme complexe (rectangulaire, elliptique...).
- L'approximation de la température en tout point de la source de chaleur. En effet, en chaque point du contact, les températures de surface des deux corps sont égales mais peuvent varier tout au long de celui-ci. Blok a approximé cette condition d'égalité des températures dans le contact en donnant l'équation du maximum de température dans celui-ci.
- La prise en compte des effets de l'augmentation de température en volume sur la température du contact.

### 1.1.2.1 Conduction

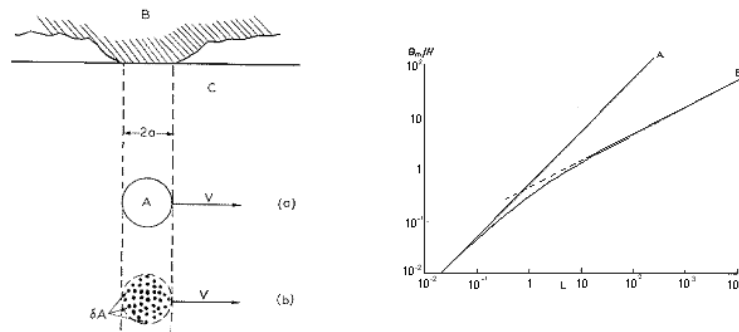
Jaeger [JAE 43], en 1943, puis Carslaw et Jaeger [CAR 59], en 1959, ont étendu le modèle de Blok aux contacts qui mettent en jeu des nombres de Péclets limités. Dans le cas des contacts de type bande, ils ont amélioré le modèle existant en considérant des situations où la conduction latérale devient un important mécanisme de transfert de chaleur. La figure 1.2 présente la solution classique de Carslaw et Jaeger pour un contact thermique de type flux bande se déplaçant à la surface d'un massif semi-infini homogène.



**FIGURE 1.2:** Champ de température en surface d'un massif semi-infini pour une source de type bande de demi-largeur  $a$  en mouvement selon une vitesse  $V$  caractérisée par un nombre de Péclet  $L$ .  $k$  représente la conductivité du matériau. Solution donnée par Carslaw et Jaeger [CAR 59]

### 1.1.2.2 Diverses formes de sources de chaleur

Jusqu'en 1959, la plupart des études considèrent la température de contact entre deux solides semi-infinis en régime établi, pour un contact de type bande, bien que Jaeger ait déjà traité dans son modèle le cas d'un contact rectangulaire. En ce qui concerne les contacts circulaires, Archard [ARC 59], en 1959, a proposé un modèle et une solution approximative en se servant des travaux précédent de Jaeger et d'une méthode empirique simple qui étudie la répartition de chaleur générée. La figure 1.3 présente le modèle d'Archard et la température moyenne dans le contact circulaire pour différents Péclets  $L$ .



**FIGURE 1.3:** Température moyenne en surface d'un massif semi-infini pour une source elliptique stationnaire (a) ou en mouvement (a). Solution donnée par Archard [ARC 59]

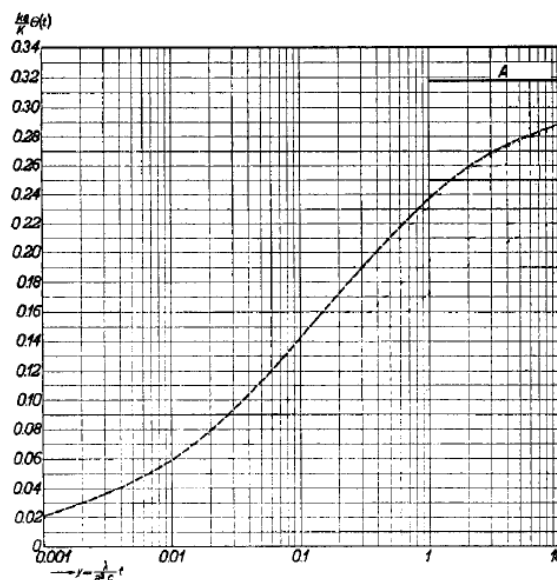
Cependant, en pratique, la plupart des contacts ne sont pas de type bande ou circulaires, mais elliptiques. Ce type de contact a d'abord été pris en compte en utilisant pour approximation la solution donnée par Jaeger pour les contacts rectangulaires. Dans le cas où la conduction latérale peut être négligée, cette approche permet d'obtenir de bonnes approximations. Néanmoins, dans le cas où elle ne peut pas être négligée et devient un facteur important, les dimensions et la distribution de la source de chaleur rectangulaire doivent être pris en compte. La première résolution du problème elliptique en lui-même est attribuée aux noms de Kuhlmann et Wilsdorf [KUH 86], en 1986-1987, qui ont introduit des solutions approximatives pour ce type de contact. Ces solutions sont généralement applicables. Il n'a pas encore été trouvé de solutions analytiques très précises pour la résolution des contacts elliptiques, cependant, beaucoup de travaux numériques permettent d'obtenir de bons résultats.

### 1.1.2.3 Répartition du flux de chaleur

La répartition du flux de chaleur à l'interface de la zone de contact entre les deux solides est basée sur l'hypothèse que les températures de surface dans le contact sont égales. Pour deux corps semi-infinis avec des températures nulles en volume, cette répartition de chaleur dépend des propriétés du matériau de chaque corps et de leur vitesse. Blok a approximé la condition d'égalité des températures en surface en donnant l'équation du maximum de température en surface tandis que Jaeger a donné l'équation de la température moyenne pour le contact. Suites à diverses études menées sur le sujet, la variation de température sur toute l'aire de contact a été prise en compte. L'approche la plus réaliste pour déterminer la répartition de chaleur en régime établi et les températures de contact associées (pour des formes de contact arbitraires) est de faire concorder les températures de surface des deux solides en tout point de l'aire de contact. Cela doit être fait en incluant la variation de la distribution de chaleur avec la position des solides. Pour résoudre ce type de problème, on utilise généralement les méthodes numériques.

### 1.1.2.4 Augmentation de température en volume

Pour des corps finis, la répartition du flux de chaleur dépend également de l'espace sur lequel ce flux est restreint. Par exemple, si l'un des corps est entièrement isolé, excepté à l'interface du contact, le flux total de chaleur entrant dans ce corps au travers de l'interface de contact doit être nul. Cela peut être facilement montré en considérant deux corps semi-infinis ayant des températures en volume différentes, sans génération de chaleur à leur interface. Holm [HOL 48, HOL 59], en 1948-1959, a mené des études sur ce problème mais uniquement dans le cas de solides stationnaires. La figure 1.4 présente la solution de Holm pour un contact elliptique ( $b=0.5a$ ). Elshof [ELS 94], en 1994, a commencé à généraliser cette étude en considérant des corps en mouvement relatif dans le cas d'un contact elliptique.



**FIGURE 1.4:** Augmentation de la température maximale en fonction du temps pour un contact elliptique ( $b=0.5a$ ). Solution de Holm [HOL 48]. A : asymptote de la solution

### 1.1.2.5 Synthèse

Les différentes évolutions analytiques réalisées dans le domaine de la thermique du contact viennent d'être présentées. Celles-ci montrent que la résolution d'un problème thermique transitoire n'est pas triviale puisque de nombreux phénomènes physiques sont mis en jeu. Il est donc nécessaire de réaliser des simulations numériques pour pouvoir prendre en compte ces derniers. Plusieurs stratégies peuvent être utilisées, comportant chacune leurs avantages et leurs défauts. Nous allons donc nous attacher à présenter ces différentes stratégies et justifier ainsi le développement d'un nouveau modèle 3D pour étudier ces problèmes dans un contexte plus général.

### 1.1.3 Historique numérique

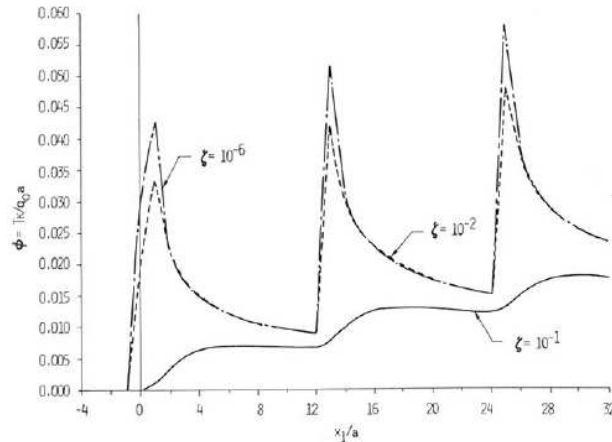
La nécessité de disposer de modèles plus proches de la réalité a conduit au développement de modèles basés sur les méthodes semi-analytiques, qui couplent la précision et le faible coût des méthodes analytiques à la souplesse et les possibilités d'hypothèses moins restrictives des méthodes numériques.

#### 1.1.3.1 Méthode des coefficients d'influence

Les premières solutions numériques concernant une source de chaleur qui se déplace linéairement ont été données par Jaeger en 1942 en se basant sur l'intégration de la solution obtenue pour une source ponctuelle. Cette méthode est mieux connue aujourd'hui sous le nom de méthode des coefficients d'influence. Il s'agit de calculer numériquement un champ de contraintes dû à une source ponctuelle sur un massif semi-infini ayant les propriétés souhaitées puis d'intégrer les résultats obtenus sur une source de forme quelconque. Par la suite, de nombreux travaux s'attachant à la détermination de solutions thermiques (et thermo-élastiques [BAR 82, BAR 84, AZA 85]) pour des massifs homogènes ont été réalisés dans les années 80 par Barber, Martin-Moran, Azarkin et Hills [HIL 85]. La solution thermique de Jaeger et les solutions thermo-élastiques de Barber [BAR 84] ont été utilisées comme fonctions de Green par Farris et Chandrasekar en 1990 [FAR 90] afin de déterminer le champ de température et les solutions thermo-élastiques en surface dus à une source de température en mouvement par convolutions. Il est cependant très difficile d'obtenir le champ thermique sous la surface en utilisant cette méthode. En règle générale, ces produits de convolution impliquent l'utilisation d'intégrales singulières et de fonctions de Bessel. L'évaluation des produits de convolution se fait uniquement de manière numérique et peut requérir des coûts numériques importants dans le cas par exemple des grands nombres de Péclet ou bien encore de matériaux revêtus à l'aide de couches minces.

#### 1.1.3.2 Transformées (intégrales et Fourier)

De nombreuses études ont été menées sur l'application des méthodes de transformées intégrales appliquées aux problèmes de sources de chaleur en mouvement. Il n'est cependant pas simple de trouver la transformée d'une source de chaleur de forme et d'intensité quelconques et de réaliser l'inversion de cette dernière. Ling et Mow [LIN 65, LIN 73] ont été les premiers à réussir à obtenir la température et les déplacements en surface dus à une source de chaleur linéique se déplaçant rapidement par la transformée de Fourier. Puis, Huang et Ju [HUA 85] ont utilisé la quadrature de Gauss-Laguerre ainsi que la loi de Simpson pour intégrer numériquement les transformées inverses dans les problèmes de glissement avec des vitesses élevées. Les résultats qu'ils ont obtenus pour un flux de chaleur rugueux (3 rugosités rectangulaires) se déplaçant en surface d'un massif sont présentés sur la figure 1.5.



**FIGURE 1.5:** Champ de température obtenu à différentes profondeurs  $\zeta$  d'un massif sur lequel se déplace un flux de chaleur rugueux à une vitesse de 15 m/s. Solution de Huang et al. calculée à l'aide des méthodes de transformées de Fourier [HUA 85].

Néanmoins, le problème d'une source linéique de chaleur en mouvement est le seul problème de forme fermée pouvant être résolu par cette méthode, ce qui la rend assez restrictive. En se servant de ces travaux pour base, Bryant [BRY 88] a obtenu les solutions thermiques et thermo-élastiques pour ce même type de source en utilisant une 'nouvelle' transformée de Fourier. L'avantage majeur de cette méthode est que les solutions fondamentales obtenues peuvent être utilisées comme des fonctions de Green pour trouver les champs thermiques et thermo-élastiques à l'aide des produits de convolution. La solution thermo-élastique implique néanmoins l'utilisation de fonctions complexes de Hankel rendant l'évaluation numérique de la solution coûteuse en terme de mémoire et surtout de temps de calcul. La résolution devient même instable pour les grands arguments complexes dans le cas des grands nombres de Péclet. De plus, le produit de convolution devient difficile à évaluer numériquement si la source de chaleur est distribuée sur une grande distance ou si celle-ci se déplace rapidement.

### 1.1.3.3 Problèmes périodiques et séries de Fourier

Pour la résolution des problèmes périodiques, les transformées de Fourier peuvent être remplacées par les séries de Fourier. Burton a, avec l'aide d'autres chercheurs durant les années 70 (Dow et Burton [DOW 72, DOW 73], Burton et al. [BUR 73], Oh et al. [OH 73], Kiliparti et Burton [KIL 78], Heckmann et Burton [HEC 80], Tseng et Burton [TSE 80]), utilisé les séries de Fourier pour les problèmes de distributions thermiques en mouvement périodique en se basant sur la solution d'une distribution de température en mouvement sinusoïdal. Cette méthode est très efficace pour la résolution des problèmes périodiques, cependant, les séries de Fourier peuvent converger lentement.



#### 1.1.3.4 Méthodes éléments finis et différences finies

En plus des solutions analytiques, les méthodes des éléments finis et des différences finies ont été développées pour quantifier les températures de surface (Kennedy et Ling [KEN 74], Kennedy [KEN 80], Ettles [ETT 85]). L'approche éléments finis peut s'étendre aux cas thermo-élastiques ou plastiques mais requiert des temps de calcul considérables. Cette méthode peut également être sujette à des instabilités numériques dans le cas des grands nombres de Péclet, engendrant des problèmes de détermination de la couche limite, comme l'a montré Kennedy et al. [KEN 84b].

#### 1.1.3.5 Méthodes FFT

L'utilisation des méthodes spectrales utilisant les techniques FFT rendent l'évaluation des transformées de Fourier et de leurs inverses beaucoup plus aisée. Le produit de convolution dans le domaine physique devient un produit dans le domaine fréquentiel en utilisant les transformées de Fourier. Ces techniques ont beaucoup été utilisées en traitement du signal, et, dans les années 90, en simulation numérique pour traiter le phénomène de turbulence. Leroy et al. [LER 89b]-[FLO 94] ont utilisés les transformées de Fourier sur des problèmes de couches moyennes soumises à une source de chaleur de mouvement et ont obtenu un système d'équations qui lie les quantités transformées. En trouvant la solution numérique pour le système d'équations et en appliquant la méthode FFT, ils ont réussi à évaluer les valeurs dans le domaine spatial. Floquet et Dubourg [FLO 94] ont par la suite défini une méthodologie similaire pour l'analyse des problèmes de freinage en prenant en compte des géométries 3D complexes (disques de freins ventilés) sous sollicitations transitoires. Ils ont utilisés la méthode des éléments finis afin de résoudre l'équation de la chaleur résultante dans le domaine fréquentiel et ont obtenus les champs de température dans le domaine spatial en utilisant la méthode FFT. L'un des grands avantages de la méthode spectrale est que si la fonction de transfert peut être obtenue, la solution dans le domaine fréquentiel est analytique et explicite. Aucune procédure numérique n'est nécessaire dans le domaine fréquentiel. De plus, la fonction de transfert représente les caractéristiques du système et peut être aussi utilisée afin d'étudier les effets d'échelle, déterminer la résolution requise (fréquence de coupure), et estimer les résultats pour des données quelconques. La fonction de transfert peut être trouvée de manière empirique, comme l'ont montré Ai et Cheng dans le cas de contacts linéiques EHL [AI 93], ou de manière analytique, comme l'ont montré Ju et Farris pour le contact sec EHL [JU 93]. Ces derniers ont par la suite [JU 97] utilisés la transformée de Fourier pour obtenir les expressions analytiques explicites de la solution thermique dans le domaine fréquentiel pour une source de chaleur arbitraire appliquée à un massif semi-infini. Ils utilisent les fonctions de transfert comme solutions fondamentales afin de trouver les résultats dans le domaine fréquentiel. Puis, utilisant les techniques FFT-IFFT, ils ont obtenu les résultats numériques. L'apparition de la rugosité dans la résolution des problèmes thermiques apparaît dans les années 2000. Gao et Lee [GAO 00] ont proposé un modèle 3D utilisant la méthode FFT afin de déterminer les températures flash sur des surfaces réelles de contact. Liu et Wang ont repris ces travaux afin de développer un

modèle applicable à des surfaces rugueuses non conformes en contact [LIU 01b] avant d'étudier le régime transitoire dans un massif semi-infini [LIU 02b]. Puis Liu et al. [LIU 02a] ont amélioré ce modèle afin d'obtenir les fonctions de réponse fréquentielles pour les élévations de température en surface sur un massif 3D semi-infini sujet à une élévation de chaleur transitoire par friction, où la vitesse et sa direction sur le massif peut être une fonction arbitraire du temps. En 2005, Martini et al. [MAR 05] ont inclus la convection dans la résolution par la méthode FFT et montré que le refroidissement est fortement dépendant des coefficients de transfert sur la surface. Les dernières utilisations des méthodes FFT dans le domaine concernent l'étude des transferts de chaleur dans les milieux biologiques. Dillensenger et Esneault [DIL 10] ont développé une méthode numérique rapide basée sur ces techniques pour caractériser l'évolution de la température dans les tissus biologiques dans les cas d'hyper et d'hypothermies.

### 1.1.3.6 Méthodes multigrilles

C'est dans les années 1980 que les méthodes multigrilles ont fait leurs apparitions dans la résolution des problèmes thermiques. L'idée d'appliquer ces techniques numériques avancées aux problèmes thermiques vient du fait qu'elles améliorent la vitesse de convergence des systèmes à résoudre et que la richesse des maillages qu'elles permettent de générer rend plus riche le panel de résolution fourni par les méthodes de différences finies classiques. On trouve de nombreux travaux relatifs à la prédiction des flux de chaleur dans les fluides [PAT 80, VAN 86, JOS 91, RAB 88, JIA 91].

Des travaux importants sur la résolution du problème thermique à l'aide des méthodes multigrilles ont été réalisés par Moes et Bos [BOS 93, MOE 95]. Dans leurs travaux, les effets de différents types de source sur la température des matériaux en contact ont été analysés en utilisant une approche intégrale. Ils ont utilisé les méthodes multigrilles afin d'évaluer rapidement les solutions des différentes intégrales. Ils ont également évalué les températures maximales en dérivant les expressions analytiques obtenues pour différents types de sources.

Depuis les années 1990, ces méthodes ont été utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes, tout d'abord dans les travaux de Thompson et al. [THO 89] en incompressible, puis Lemos et al. dans les années 2000 qui ont étudié les problèmes de conduction-convection et convection-conduction [RAB 98, RAB 01, MES 04]. Ces travaux montrent, au travers d'études réalisées sur la convergence des problèmes et sur la consistance des grilles utilisées, que les méthodes multigrilles permettent de résoudre de manière rapide et efficace un problème 2D thermique en régime permanent.

Plus récemment, Watremetz [WAT 06] a proposé un modèle efficace pour la résolution des problèmes thermiques en considérant désormais les aspects transitoires et des matériaux dont les propriétés thermiques varient selon la profondeur (revêtements, couches à gradients de propriétés). Ces études, qui ont pour application la détermination des champs de contraintes dans des moules d'injection de polymères, ont servi de base à notre modèle.

### 1.1.4 Synthèse

Cette bibliographie traite des différentes évolutions réalisées dans le domaine de la thermique. Au travers de celle-ci, nous avons montré qu'aujourd'hui il n'existe pas de modèle optimal pour la résolution de problèmes thermiques 3D transitoires dans un matériau hétérogène et que la réalisation d'un tel modèle représente donc un certain challenge. L'évolution des moyens numériques nous permet d'imaginer que la plupart des méthodes présentées seront très efficaces dans quelques années. Cependant les ingénieurs/designers doivent répondre quotidiennement à des demandes plus ou moins complexes de la part du monde industriel ou des autorités demandant la diminution des pertes énergétiques. Les méthodes multigrilles ont ainsi été choisies pour la réalisation d'un nouveau modèle thermique, étant donné que celles-ci offrent la possibilité de répondre à tous les critères évoqués. Nous traiterons cela en détail dans la partie thermique du mémoire.

La deuxième partie de cette revue bibliographique est consacrée aux modèles développés et aux méthodes utilisées pour analyser un solide soumis à un chargement mécanique de contact.

## 1.2 Mécanique du contact

### 1.2.1 Introduction

La mécanique du contact permet d'étudier le comportement de corps élastiques, visco-élastiques ou plastiques soumis à des chargements statiques ou dynamiques de contact. Elle est notamment utilisée en ingénierie lors de la réalisation de projets mettant en jeu la sécurité ou encore les économies d'énergie. De nombreux domaines d'application peuvent être énoncés tel que le contact roue-rail, les freins, les paliers et roulements, les moteurs à combustion, les liaisons mécaniques, les joints ou encore le soudage par ultrasons. Les applications vont de l'analyse des efforts au sein d'éléments de contact et de liaisons jusqu'à l'influence de la lubrification et de la géométrie sur l'usure et les frottements d'un système en passant par l'étude de systèmes multi-échelles (nano et microscopiques). Nous allons nous attacher ici à présenter les différentes avancées réalisées dans ce domaine, en couvrant l'essentiel des problèmes traités par cette discipline.

### 1.2.2 Historique analytique

On considère que l'étude de la mécanique des contacts a débuté avec les travaux de Heinrich Hertz.

En 1882, Hertz [HER 82] résout de manière analytique le problème du contact entre deux corps élastiques avec des surfaces courbes. Il a auparavant mené des expériences basée sur les interférences optiques entre des lentilles de verre. Ses connaissances sur la théorie des potentiels électrostatiques lui ont permis de montrer, par analogie, qu'une



**FIGURE 1.6:** Heinrich Hertz

distribution ellipsoïdale (dite désormais Hertzienne) de la pression de contact produit des déplacements élastiques dans les deux corps qui sont compatibles avec une aire de contact elliptique. La théorie de Hertz est cependant restreinte aux surfaces lisses (sans friction) et aux solides parfaitement élastiques. Des progrès réalisés durant la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle ont permis de mettre fin à ces restrictions. En effet, une prise en compte correcte du frottement à l'interface entre deux corps ont permis d'étendre la théorie élastique aux contacts roulants et glissants. Le développement en parallèle des théories concernant la plasticité et la visco-élasticité linéaire ont permis d'analyser les contraintes et déformations dans le cas de contacts entre des corps non élastiques. De plus, de nombreux travaux ont permis d'étudier également le phénomène d'adhésion entre deux corps en contact, qui modifie de manière plus ou moins importante les profils de contact déterminés à l'aide des modèles classiques.

### 1.2.2.1 Fonctions potentielles de Boussinesq et Cerruti et évolutions

L'approche classique pour déterminer les contraintes et les déplacements dans un massif semi-infini élastique dus à un contact normal (traction) entre deux surfaces est due à Boussinesq [BOU ] et Cerruti [CER ]. Ils ont utilisés la théorie des potentiels et la fonction d'Airy [AIR 38]. Cette approche a été reprise puis publiée par Love [LOV 52]. Les équations de Boussinesq donnent les relations entre les charges surfaciques et les déplacements sur la surface d'un massif semi-infini. Ainsi, si les distributions de traction à l'intérieur de l'aire du contact sont explicitement connues, les contraintes et les déplacements peuvent être déterminés en chaque point du massif. C'est la loi de Hooke qui permet de calculer les contraintes à partir des déplacements [JOH 85a]. Pour des circonstances particulières, des techniques analytiques ont été développées afin de s'affranchir des difficultés dues à l'approche classique. Le passage, par exemple, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées ellipsoïdales engendre des problèmes pour lesquels la zone chargée est entourée par une ellipse afin d'être traitée plus facilement ([GAL 61, LUR 64, PAT 64]). Pour les aires de contact circulaires, l'utilisation d'une fonction complexe suggérée par Rostovtzev [ROS 53] permet de déterminer les contraintes lorsque les déplacements sont connus dans la zone chargée. Dans le cas d'une symétrie axiale Sneddon [SNE 51] a proposé l'utilisation des méthodes de

transformées intégrales qui ont été développées par Noble et Spence [NOB 71]. Une méthode alternative proposée par Johnson [JOH 85a] est de partir des contraintes et des déplacements produits par des forces normales et tangentielles concentrées. La distribution de contrainte et le champ de déformation résultant de n'importe quelle charge distribuée peuvent être trouvés par superposition. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre les problèmes dus à des géométries de charge complexes pour lesquelles les méthodes analytiques classiques ne fonctionnent pas.

Cependant, ces méthodes ne peuvent pas prendre en compte certains phénomènes physiques qui modifient les paramètres du contact (aire, pression...). C'est le cas de l'adhésion qui se produit lorsque l'on met en contact deux matériaux et qu'une résistance mécanique à la séparation se crée entre ceux-ci. Nous allons aborder maintenant plus particulièrement ce phénomène.

### 1.2.2.2 Lois d'adhésion

En mécanique du contact, la maîtrise globale du comportement de l'interface entre les deux solides est liée aux mécanismes d'adhésion. De nombreuses théories ont été développées à ce sujet, un siècle après les travaux de Hertz. Les travaux les plus importants relatifs à la zone cohésive sont attribués à Dugdale (1960), Needleman (1987), Tvergaard (1990), Michel et al. (1992-1994), Cangémi et al. (1992-1994) [CAN 97], Raous et al. [RAO 99] et Chaboche et al. (1997). L'adhésion apparaît toujours comme un phénomène moléculaire, comme le décrit Kendall [KEN 01].

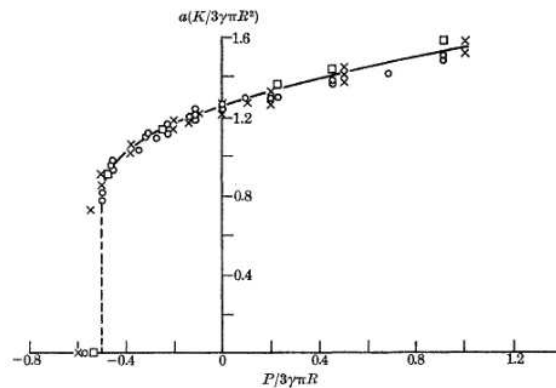
#### La théorie d'Eley (1961)

Cette théorie, dite de l'adsorption, a été développée en considérant qu'une faible quantité de liquide déposée à la surface d'un solide prend la morphologie d'une goutte car les forces adhésives en présence empêchent son étalement. Le degré d'étalement, correspondant à l'angle formé entre la surface et les extrémités de la goutte, dépend des énergies libres de surface de chacun des composants et permet de déterminer l'énergie d'adhésion dite de Dupré. En étendant ce principe à l'adhésion entre deux solides, on considère qu'il faut fournir un travail d'adhésion pour les séparer, correspondant à la quantité d'énergie stockée par unité de surface à l'interface (Israelachvili [ISR 97]).

#### Le modèle de Johnson-Kendall-Roberts (JKR) (1971)

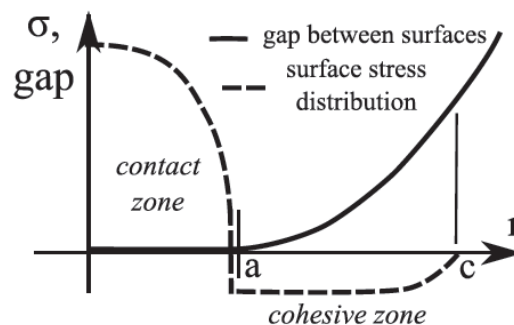
Les travaux de Hertz (1881) ont permis de déterminer, sous l'effet d'une charge normale de compression dans le cas de corps élastiques linéaires en l'absence de frottement et d'adhésion, la distribution de pression, l'enfoncement élastique ainsi que le rayon réel de contact sur la surface de contact déformée. Johnson et al. [JOH 71] ont montré expérimentalement que ce rayon était sous-estimé dans le cas d'un contact entre une sphère de gélatine et un plan en plexiglas. Pour les séparer lorsque la charge de compression s'annule, il faut fournir un effort de traction non-négligeable. Ils ont donc décrit ce phénomène comme une conséquence de l'adhésion et ont alors formulé la théorie dite de JKR, qui consiste à prendre en compte l'effet de l'énergie de surface des

matériaux dans l'équation Hertzienne classique. Cette théorie a été développée dans le cadre de l'adhésion des élastomères. La figure 1.7 montre l'évolution adimensionnée du rayon de contact en fonction de la charge dans le cas d'un contact entre des sphères de gélatine et un plan plexiglas [JOH 71]. On observe que pour un faible effort négatif ou nul il existe un rayon de contact. L'effort d'adhésion ne peut ainsi pas être négligé lors de la résolution d'un problème de contact mettant en jeu ces matériaux.



**FIGURE 1.7:** Illustration du modèle JKR : évolution du rayon de contact en fonction de la charge pour des sphères de gélatine en contact sec avec un plan plexiglas [JOH 71].

Cette théorie a été validée expérimentalement et associée, par la suite, à une démarche permettant l'obtention du travail d'adhésion entre deux corps (Woerdeman [WOE 99]). Ces travaux ont permis de déterminer la charge de décollement nécessaire pour deux solides en contact. A partir du modèle Hertzien, Derjaguin et al. [DER 75] (DMT) ont présenté un modèle prenant en compte les forces d'attraction hors de la zone de contact. Ce modèle est présenté sur la figure 1.8. Par la suite, Maugis [MAU 92, MAU 00] a proposé un modèle de transition analytique entre ces deux approches.



**FIGURE 1.8:** Géométrie du contact adhésif selon Derjaguin et al. [DER 75]. Le modèle s'applique dans le cas où  $c \gg a$ .

### Le modèle de Frémond (1971)

Les travaux plus récents réalisés sur l'adhésion utilisent des formulations dites locales,

issues de la mécanique des contacts. Celles-ci permettent de retrouver les propriétés macroscopiques et décrivent la décohésion de façon réaliste. En utilisant la mécanique des milieux continus, Frémond [FRÉ 87a, FRÉ 87b, FRÉ 88] a proposé une théorie moderne du contact avec adhésion qui se base sur les conditions du contact unilatéral et sur une variable interne mesurant l'intensité de l'adhésion localement. Frémond a par ailleurs montré que sa loi dérive d'un potentiel d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation complémentaire (Germain et al. [GER 83], Lemaitre et Chaboche [LEM 85]). Plus récemment, ce modèle a été couplé avec la loi de Coulomb pour le frottement [RAO 97, RAO 99]. Il a alors été utilisé afin de simuler des expériences de micro-indentations pour caractériser le comportement de l'interface fibre/matrice dans une céramique composite.

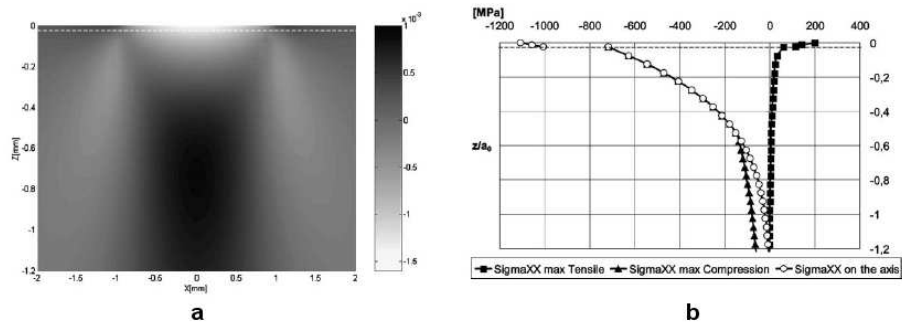
### 1.2.2.3 Rugosité

Des progrès dans le domaine de la mécanique des contacts dans le milieu du XXe siècle peuvent être attribuées aux noms de Bowden et Tabor [BOW 54, BOW 56, BOW 58]. Ils ont en effet découvert que, dû à la rugosité, la surface de contact réelle est en fait beaucoup plus petite que celle observée à l'oeil nu. Cette découverte a orienté de nombreuses études de tribologie conduisant à de nouvelles théories sur les contacts entre les surfaces rugueuses. On peut aussi citer dans ce domaine les travaux d'Archard et al. [ARC 56, ARC 74], qui ont démontré que dans les contacts entre des surfaces flexibles et rugueuses, la surface de contact est à peu près proportionnelle à la force normale. D'autres contributions importantes sont liées à des noms tels que Greenwood et Williamson [GRE 66, GRE 11], Bush [BUS 76] et Persson et al. [PER 99, ZIL 02, ALM 11]. Le principal résultat de leurs travaux est que, si la surface réelle de contact d'une surface rugueuse est en général proportionnelle à la force normale, dans des conditions de micro-contact (pression, dimension), elle ne dépend que très peu de cette force. Sainsot [SAI 11] a récemment proposé une solution analytique pour l'expression des contraintes dans un contact rugueux.

### 1.2.2.4 Matériaux revêtus

Les grandes avancées analytiques dans le domaine des matériaux revêtus apparaissent vers la fin des années 90 avec les travaux de Giannakopoulos et Suresh [GIA 97a] qui ont déterminé des solutions dans le cas d'un matériau soumis à une indentation axisymétrique. Par la suite, ils ont étendu ces résultats au cas de l'indentation d'un système gradient/substrat par un indenteur sphérique, puis, ils ont commencé à étudier les matériaux à gradients de propriété en considérant des variations du module de Young dans un massif selon des lois puissances et exponentielles [GIA 97b]. Au début des années 2000, Bragallini et al. [BRA 03] ont proposé une approche par les contraintes en déterminant celles-ci par la superposition de deux effets : les effets de compression et les effets latéraux. Ces derniers sont particulièrement considérés car ils causent des discontinuités au niveau des contraintes longitudinales. La figure 1.9 présente, selon

Bragallini et al., les déformations et la distribution de la contrainte de traction dans le cas d'un revêtement dont l'épaisseur équivaut à 0.025 fois le demi-rayon de contact et dont le module de Young est 2 fois plus élevé que celui du substrat.



**FIGURE 1.9:** Solution de Bragallini et al. [BRA 03] pour un massif revêtu :  $E_c/E_s=2$ .  $t/a_0=0.025$ . a : profil des déformations. b : distribution de la contrainte de traction  $\sigma_{xx}$  selon l'axe  $z$ .

Plus récemment, Vallet et al. [VAL 09] ont mis en place une approche globale et déterministe afin de calculer les déformations dans le cas d'un contact rugueux avec une source en mouvement sur un massif revêtu.

Aujourd'hui, la plupart des études sur la mécanique des contacts s'effectue avec des programmes de simulation qui sont basés sur les méthodes des éléments finis, des éléments discrets ou encore des différences finies. Ces aspects numériques vont être développés dans le paragraphe suivant.

## 1.2.3 Historique numérique

### 1.2.3.1 Méthode des éléments finis

Les différents modèles analytiques développés précédemment ne permettent pas de calculer les champs de contraintes et de déformations dans les corps élastiques. De plus, ces modèles ne sont pas adaptés à la prise en compte de géométries complexes telles que les rugosités réelles des surfaces en contact ou encore les très petites épaisseurs parfois mises en jeu dans un système revêtement/substrat. Une approche permettant de s'affranchir de ces problèmes consiste à utiliser la méthode des éléments finis (FEM). Cette méthode est basée sur la division du domaine étudié en  $X$  domaines élémentaires dits éléments finis. Ces éléments sont reliés entre eux par des noeuds qui sont situés sur leurs contours. Il s'agit alors de résoudre un système constitué de  $X$  équations à  $X$  inconnues. Lors des premières études, afin que les calculs FEM puissent modéliser correctement le contact entre deux solides, il était nécessaire de faire de nombreuses hypothèses restrictives. Ainsi, les surfaces modélisées étaient considérées lisses et le maillage grossier afin de pouvoir étudier le régime transitoire dans des temps de calcul CPU raisonnables. L'axisymétrie, utilisée en général lors de la modélisation d'un problème, était un frein à la prise en compte du frottement.



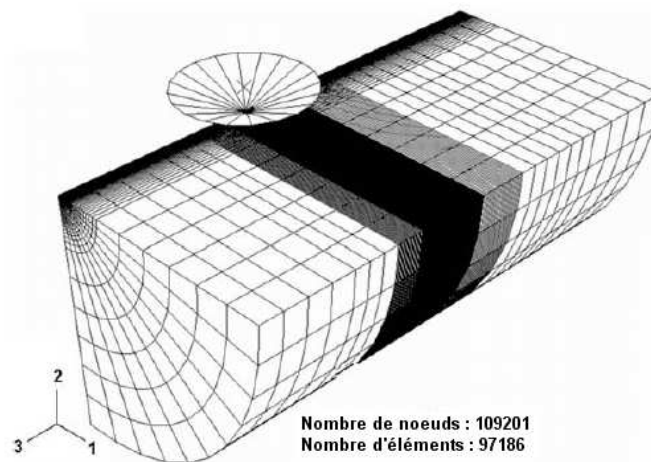
## analyse des revêtements

L'utilisation des méthodes éléments finis pour simuler la présence de revêtements débute dans les années 1990. De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées afin de déterminer les caractéristiques des revêtements (épaisseurs de couches, modules de Young...) [KES 96]. Ces résultats sont utilisés comme paramètres dans les simulations afin de développer ou de prédire le comportement des systèmes revêtements/substrats sous certaines conditions. Les premières études ont été menées par Syed Asif et al. [SYE 94] qui ont simulé le processus de nanoindentation afin d'étudier le comportement mécanique des matériaux et des systèmes à couches minces. Cependant, les résultats obtenus dans le cadre de ces simulations ont montré de grandes divergences avec les résultats expérimentaux dans le cas des matériaux revêtus.

Finot et Suresh [FIN 96] ont développé une autre approche basée sur des formulations analytiques fortes, afin d'étudier le cas de matériaux multi-couches (2 ou 3) soumis à des petites et grandes déformations. Ils ont pu considérer également une variation du coefficient de poisson avec la profondeur. De nombreux développements, tels que l'étude de l'interface ou des matériaux à gradients à propriété ont été effectués.

Houmid Bennani et Takadoum [HOU 99] ont utilisés les FEM pour étudier les contraintes dues à une combinaison d'efforts normal et tangentiel sur un système revêtement/substrat. Les progrès réalisés dans le choix des éléments finis ont permis d'étudier de plus grandes gammes de propriété entre le revêtement et le substrat ( $0.7 < E_r/E_s < 1.7$ ) et de montrer que l'épaisseur du revêtement ( $0 < t/a < 0.1$ ) a autant d'influence sur les contraintes que ces ratios. Ils ont montré également que le rapport des modules de Young ainsi que le coefficient de frottement étaient les paramètres à l'origine de la position du maximum de contrainte de Von-Mises. Une étude plus approfondie sur les revêtements durs soumis à une distribution uniforme de traction (pression normale et tangentielle) est due à El-Shazly et al. [EIS 99]. Ils ont également montré l'influence des propriétés (plus grands ratios de modules de Young ( $1 < E_r/E_s < 3$ )) sur la position et l'intensité de la contrainte équivalente de Von-Mises maximale. Une des difficultés des méthodes FEM est la gestion de l'interface entre le revêtement et le substrat. Afin de palier à celle-ci, Liu et al. [LIU 01a] ont montré comment mesurer l'énergie d'adhésion à l'interface. A la fin des années 1990, l'analyse des matériaux à gradients de propriété (FGI) via les méthodes FEM a débuté. On peut citer notamment les travaux de Suresh et al. [SUR 97] et Liu et Meletis [LIU 02c] qui font suite au constat que le dépôt d'un revêtement dur sur un substrat mou affecte de façon néfaste le comportement tribologique et la durée de vie du matériau. Les résultats montrent une amélioration de 80% de la durée de vie dans le cas de matériaux FGI. Des solutions analytiques ont également découlé de ces travaux. Durant les années 2000, les besoins actuels des entreprises concernent les revêtements en titane déposés sur des aciers. Holmberg et al. [HOL 03] ont montré l'intérêt d'utiliser ce type de revêtement en termes de réduction des contraintes thermomécanique et d'augmentation de la durée de vie. Les besoins actuels en termes d'économie et d'allègement des structures orientent les designers vers les matériaux polymères. On trouve dans la littérature de nombreux travaux se référant à

ce domaine via des études FEM (Choi et al. [CHO 08], Prasad et al. [PRA 09], Kubair [KUB 11], Fuping et al. [FUP 12]). Le maillage utilisé par Prasad et al. pour un problème d'indentation de revêtement polymère est présenté sur la figure 1.10



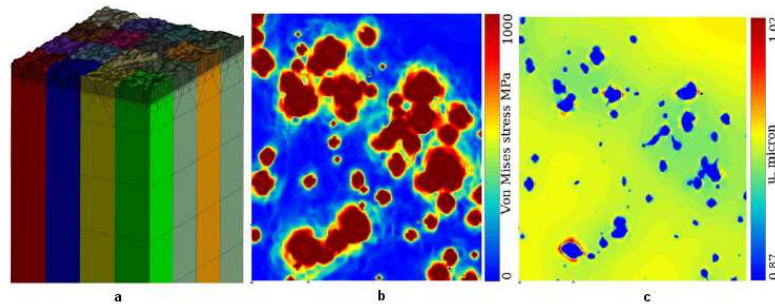
**FIGURE 1.10:** Maillage éléments finis : indentation d'un revêtement plastique [PRA 09].

### analyse du contact rugueux

L'analyse élastoplastique du contact rugueux à l'aide des méthodes FEM a débuté avec les travaux de Kogut et Etsion [KOG 02]. Leurs études concernent le contact entre une aspérité sphérique et un plan rigide. Les résultats montrent des disparités avec les modèles (semi)-analytiques cités précédemment. Par la suite, Jackson et Green [JAC 05] ont implémentés plus d'éléments dans un nouveau modèle afin d'obtenir des résultats dans le cas de plus grandes interférences. Ils ont également considéré la dureté du matériau comme un paramètre évoluant en fonction de la géométrie déformée de contact et des propriétés des matériaux. Cependant, afin d'obtenir de bons résultats, de nombreuses simplifications telles que la plasticité parfaite ou encore l'axisymétrie ont été considérées. Afin de réaliser un calcul pour un contact rugueux réel, les résultats obtenus pour un contact entre deux aspérités (interactions) peuvent être utilisés dans un modèle statistique (Kogut et Etsion [KOG 03], Kucharski [KUC 94]).

Plusieurs modèles FEM traitent de contacts prenant en compte plusieurs aspérités. Cependant, ils sont limités à des analyses 2D. Dans le cas de surfaces isotropes, ce choix de représentation d'une surface rugueuse par un modèle en 2D est tout à fait acceptable. Komvopoulos et Choi [KOM 92] ont ainsi développé un modèle utilisant l'hypothèse des déformations planes afin d'étudier le contact entre un massif semi-infini élastique et une surface rugueuse rigide, constituée d'un système régulier d'aspérités de formes circulaires ayant chacune le même rayon et la même hauteur. Ils ont analysé les effets de la largeur et du rayon des aspérités, de la profondeur d'indentation des microcontacts sur la pression, de la charge et de la contrainte. Par la suite, Sabelkin et Mall [SAB 07] ont introduit les déformations plastiques et le frottement afin de développer un modèle plus complet.

Les améliorations réalisées dans le domaine numérique ont permis aux méthodes FEM de mieux étudier le contact rugueux en prenant en compte plusieurs aspérités et les déformations mixtes élastoplastiques. Sahoo et Ghosh [SAH 07] ont réalisé une analyse 3D FEM en utilisant les modes élastique et élastoplastique tout en négligeant l'adhésion et les frottements entre une surface rugueuse définie par une représentation fractale et une surface plane rigide et lisse. Vladislav et al. [VLA 11] ont eux proposé une nouvelle analyse du contact entre surfaces rugueuses utilisant les méthodes FEM et une approche simplifiée. Leur modèle, basé sur des résultats expérimentaux, permet de prédire l'aire réelle de contact et le volume libre laissé entre les deux surfaces de contact au cours de la compression d'une surface rugueuse par un plan rigide dans des temps de calcul CPU pouvant varier de quelques secondes pour le modèle simplifié à plusieurs jours pour un modèle complet. La figure 1.11 illustre un modèle complet selon Vladislav et al. Une méthode de parallélisation des calculs a été utilisée afin de rendre les temps de calcul raisonnables.



**FIGURE 1.11:** Maillage élément fini et solution d'un problème de contact rugueux selon [VLA 11]. a : maillage de la surface rugueuse. b : distribution des contraintes de Von-Mises. c : distribution des déplacements verticaux.

Bryant et al. [BRY 12] ont récemment étudié, à l'aide d'un logiciel commercial, le contact élastoplastique linéique entre un cylindre et un plan rigide en considérant une rugosité sinusoïdale. La rapidité et la précision des calculs permettent l'analyse de la transition entre le domaine purement élastique et purement plastique. Ils ont également étendu ces travaux au cas d'une rugosité réelle après validation du modèle.

### 1.2.3.2 Méthodes de transformations intégrales et FFT

Une des techniques les plus couramment employées pour résoudre les équations d'élasticité (dites de Lamé) consiste en l'utilisation des transformées intégrales. On en dénombre plusieurs : transformées de Fourier finies ou infinies, de Hankel, de Laplace et bien d'autres encore. Dans le cas de problèmes de contact où le solide possède une géométrie et des conditions aux limites régulières, on emploie fréquemment ces transformées et plus particulièrement celle de Fourier. Le principe consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en une équation différentielle qui ne dépend plus que d'une seule variable. L'une des difficultés rencontrées se situe dans l'évaluation

numérique des intégrales. Afin de palier à ce problème, des stratégies numériques sont utilisées. Un algorithme numérique développé par Singleton [SIN 69], appelé méthodes FFT (fast fourier transform), permet l'amélioration du calcul. La rapidité de cet algorithme repose sur les fonctions circulaires.

### **analyse des revêtements**

Au début des années 80, Villechaise [VIL 85] a été le premier à appliquer les transformées, jusqu'alors utilisées pour le traitement des signaux temporels, aux problèmes de contact. Afin de réaliser la transformation inverse, principale difficulté pour le calcul, il a utilisé un algorithme de transformation rapide de Fourier développé par Elliot et Rao [ELL 82]. Il détermine alors les coefficients d'influence nécessaires afin de résoudre le problème inverse. Cette méthode peut être généralisée à la superposition des couches en utilisant les principes généraux de la mécanique du contact. Leroy [LER 89a] reprend les transformées pour résoudre le problème thermo-élastique sur des milieux bicouches. Il introduit les notions de régime transitoire et de vitesse de la source dans la résolution. Cependant ce modèle est limité aux cas où la vitesse est constante et où la transformée de Laplace des conditions limites peut être calculée analytiquement. On trouve par la suite de nombreux travaux sur les massifs revêtus comme ceux de Bettayeb [BET 94], Ju et Farris [JU 97] ou encore Nogi et Kato [NOG 97]. Ces derniers utilisent un algorithme basé sur la méthode du gradient conjugué combiné avec les méthodes FFT afin de résoudre plus rapidement les calculs. Ces études ont permis le traitement de plus grandes gammes de propriétés entre revêtements et substrats. Dans sa thèse, Plumet [PLU 98a] étudie un milieu multicouche 3D sous sollicitations de contact via la méthode FFT. Afin de traiter l'assemblage des couches, deux configurations ont été utilisées : une adhérence parfaite entre les couches, se traduisant par la continuité des déplacements et des contraintes de contact, ou l'utilisation de l'hypothèse de glissement sans perte de contact aux interfaces.

### **analyse du contact rugueux**

Les premiers travaux réalisés sur l'étude de la rugosité dans les contacts via les techniques FFT ont été réalisés à la fin des années 80 par Carneiro [CAR 87] qui a étudié le contact élastique entre deux corps rugueux. Puis ont été repris au milieu des années 90 par Mayeur et al. [MAY 94, MAY 95] qui ont introduit la plasticité dans le modèle existant. Stanley et Kato [STA 97] et Nogi et Kato [NOG 97] ont ensuite utilisé les travaux de Johnson et al. [JOH 85b] sur les séries de Fourier pour un problème de contact avec une distribution de pression sinusoïdale et les travaux de Ju et Farris [JU 97], qui ont utilisé une analyse spectrale pour les problèmes de contact en 2D en utilisant les méthodes FFT en 1D, pour développer une méthode basée sur les FFT et les formulations variationnelles capable de traiter une topographie de surface quelconque. De nombreux auteurs ont par la suite utilisé ces méthodes pour les avantages qu'elles confèrent en termes de temps de calcul et de précision. Sainsot et al. [SAI 02] ont développé plus récemment une méthode numérique basée sur les techniques FFT et les

formulations intégrales aux frontières pour un massif élastoplastique semi-infini afin d'améliorer la vitesse de convergence des calculs.

### 1.2.3.3 Différences finies et méthodes multigrilles

Dans le domaine de la mécanique du contact, les méthodes de différences finies sont apparues pour la première fois dans les travaux de Terzopoulos et al. [TER 87] pour simuler des corps élastiques. Ce modèle a été étendu par la suite à la plasticité et à la fissuration fragile [TER 88]. Cependant, bien qu'ils soient efficaces, les schémas de type différences finies souffrent souvent du manque de souplesse inhérent à l'utilisation d'une grille : il est difficile d'approximer des géométries de contact complexe et de gérer correctement les conditions aux limites. Afin de palier à ces difficultés, Watremetz [WAT 06] s'est tourné vers les méthodes multigrilles, qui utilisent les méthodes de différences finies sur plusieurs grilles et des techniques de raffinement local de maillage. Cette approche permet de mieux gérer les problèmes dus à la modélisation et la discrétisation d'un problème élastique.

### 1.2.4 Synthèse

Les méthodes présentées présentent toutes leurs avantages et inconvénients. Dans le cas des matériaux revêtus ou à gradients de propriété, qui représentent l'axe principal d'étude de cette thèse, il faut veiller, quelque soit la méthode, à posséder suffisamment de points/éléments à l'intérieur des couches afin de discrétiser celles-ci correctement et éviter les erreurs de modélisation. Le compromis précision/temps de calculs est par conséquent difficile à optimiser dans ces conditions mais représente un atout majeur pour la personne qui sait le maîtriser. Pour les différentes études qui vont être présentées dans la suite de ce rapport, le choix numérique s'est porté vers les différences finies et plus particulièrement les méthodes multigrilles, car celles-ci permettent l'obtention de résultats précis pour des temps de calculs très raisonnables, grâce aux techniques de raffinement de maillage adaptées à ces méthodes et ce type de problèmes. De plus, les méthodes différences finies permettent facilement d'attribuer des propriétés différentes dans tout le domaine de calcul.

## 1.3 Généralités sur les milieux hétérogènes

Dans cette dernière section de l'étude bibliographique sont présentées des généralités sur les matériaux hétérogènes. Les différents types de matériaux présentés ici peuvent être décrits par la mécanique des milieux continus classiques et sont souvent soumis à des sollicitations macroscopiques thermomécaniques. De nombreux industriels réalisent des études afin de déterminer quel type de propriété est le plus à même de répondre à ces sollicitations qui peuvent se révéler très sévères.

### 1.3.1 Revêtements

Un revêtement de surface consiste à substituer au matériau d'origine d'un composant un nouveau matériau possédant des propriétés de surface et de volume mieux adaptées pour répondre aux besoins fonctionnels et aux diverses applications tribologiques. Cette substitution peut faire appel à de nombreuses familles de matériaux : polymères, métaux, céramiques, ainsi qu'à de nombreuses techniques de déposition. Nous nous intéresserons uniquement aux revêtements de types polymères et métalliques, pour lesquels des simulations ont été réalisées durant nos travaux.

#### Revêtements de polymères

Les revêtements en polymère peuvent être mis en oeuvre par de nombreuses techniques de déposition [GRA 11]. De façon générale, les polymères ayant un travail d'adhésion relativement plus faible (que ce soit contre les métaux, les céramiques, ou même entre eux), ils réduisent le frottement à l'interface et les risques d'adhésion. On peut de plus y ajouter facilement des lubrifiants solides, ce qui en fait des matériaux très utilisés dans le monde de la tribologie. Le comportement des revêtements suit celui des polymères massifs en ayant l'avantage d'évacuer plus facilement la chaleur et protéger ainsi un substrat des contraintes thermiques.

#### Revêtements métalliques

Les revêtements métalliques offrent également des solutions très intéressantes pour améliorer le comportement des matériaux face aux sollicitations thermomécaniques [LEV 07]. Ils sont couramment employés pour protéger l'acier, notamment contre la corrosion atmosphérique. Ils peuvent également être appliqués sur d'autres substrats comme le cuivre ou le laiton, comme c'est le cas par exemple pour les revêtements de chrome sur les robinets. Deux types de revêtements métalliques peuvent être distingués : les revêtements anodiques et les revêtements cathodiques [LEB 05]. La figure 1.12 représente, à titre d'exemple, les propriétés comparées de plusieurs alliages dits de rechargement [GRA 11].

#### Revêtements multi-couches

L'évolution des procédés de fabrication a permis de déposer des revêtements de plus en plus fins sur les substrats. Afin d'obtenir une transition moins brutale des contraintes thermo-mécaniques à l'interface entre le revêtement et le substrat, les chercheurs se sont penchés sur le cas des revêtements multi-couches. Ceux-ci sont utilisés dans différents domaines de l'industrie et plusieurs travaux de thèses, sur des applications précises, ont été réalisés durant ces dernières années [LER 86, MEN 03, ROU 06, PLU 98a]. De l'utilisation de ces revêtements multi-couches est née l'idée de réaliser des matériaux à gradient de propriétés, permettant d'éliminer les discontinuités entre les différentes couches de revêtements et augmenter ainsi la durée de vie en fatigue des matériaux.

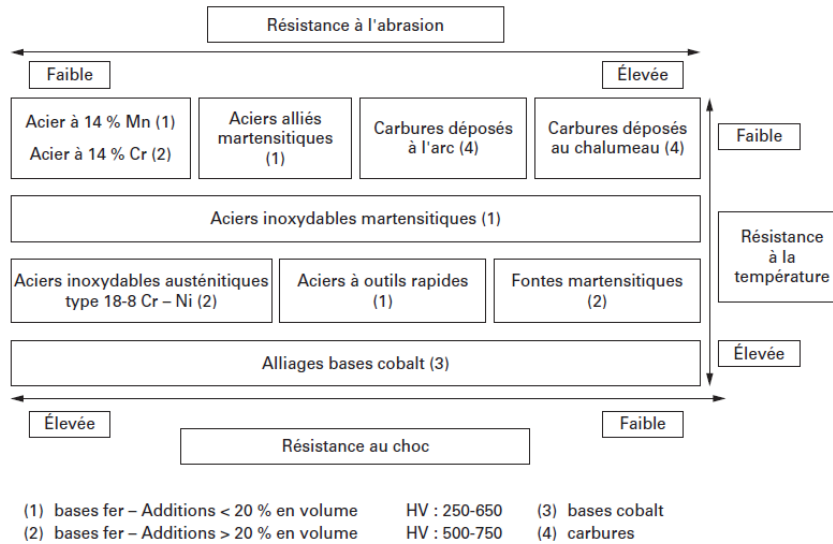


FIGURE 1.12: Propriétés comparées des alliages de rechargement [GRA 11].

### 1.3.2 Matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient de propriétés, ou fonctionnaly graded materials (FGM), ont été utilisés pour la première fois dans le cadre d'applications aéronautiques au Japon dans les années 1980. De nombreuses études appuyées par des publications sur le sujet ont été réalisées durant ces quinze dernières années, montrant l'intérêt des industriels qui cherchent à toujours améliorer les performances de leurs matériaux face aux diverses sollicitations. La principale application liée à ce concept concerne les barrières thermiques dont le rôle majeur est d'éviter d'avoir une forte différence entre les propriétés thermiques d'une céramique et celles d'un acier ou du titane, ce qui peut engendrer des phénomènes de délamination. Shodja et Ghahremaninejad [SHO 06] ont étudié les contraintes thermomécaniques dans un système FGM/substrat soumis à un chargement de type Hertzien avec glissement et échauffement au niveau du contact. Leurs résultats ont montré que ce type de matériau est plus résistant en termes de fatigue à la fois mécanique et thermique comparé à un matériau revêtu classique. Plus tard, Guler et Erdogan [GUL 04, GUL 06] ont étudié le contact entre deux massifs revêtus à l'aide de revêtements à gradient de propriétés en fonction du type de variation des propriétés mécaniques dans la couche. Schwarzer [SCH 00] a quant à lui montré qu'une couche avec un module de Young variable selon la profondeur avec une valeur au niveau de l'interface définie comme celle du substrat, passant par un maximum puis diminuant à nouveau vers la surface, est la plus adaptée pour protéger une pièce soumise à de forts changements normaux et tangentiels. Ce type de variation doit être adapté en fonction des propriétés du substrat et du type de chargement auquel le matériau est soumis. Les progrès réalisés dans les procédés de fabrication permettent aujourd'hui de réaliser ce type de modulation avec certains matériaux. A titre illustratif, Linss et al

[LIN 05] ont montré que les propriétés d'un revêtement B-C-N variaient d'un facteur 3 dans le cas amorphe en fonction du taux d'azote présent dans le gaz de l'enceinte de dépôt. En faisant varier ce même taux durant le processus de fabrication, il est possible de moduler les propriétés mécaniques du revêtement.

Malgré l'amélioration des procédés de fabrication, il est néanmoins possible de trouver des défauts dans les matériaux utilisés à des fins industrielles. La présence de ces défauts, tels que les inclusions, est mauvaise pour la durée de vie des composants.

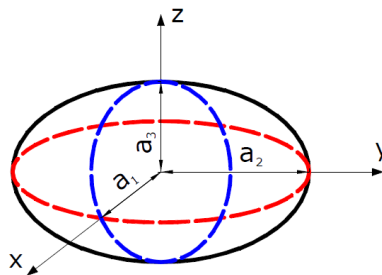
Eshelby [ESH 57] s'était déjà intéressé à ce problème dans les années 50.

### 1.3.3 Défauts

Les travaux d'Eshelby permettent d'estimer les concentrations de contraintes locales liées aux inclusions et de justifier par exemple l'amorçage de fissures. Des solutions analytiques ont été proposées pour les inclusions ellipsoïdales dans le cas linéaire. Dans cette configuration, les champs de contrainte et de déformation sont homogènes dans l'inclusion. Eshelby a considéré un inclusion ellipsoïdale élastique dans une matrice infinie élastique qui peut être définie par :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} \leq 1$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont les axes de l'ellipsoïde. La figure 1.13 illustre une inclusion ellipsoïdale.



**FIGURE 1.13:** Schéma d'inclusion ellipsoïdale dans le problème d'Eshelby

D'après Eshelby, les champs de déformation et de contrainte sont uniformes à l'intérieur de l'inclusion. Eshelby a déterminé un tenseur du 4ème ordre dépendant des modules d'élasticité de la matrice et de la géométrie de l'inclusion. Il contient toutes les informations relatives à la géométrie des inclusions de type sphère, cylindre, sphéroïdes... Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, le tenseur élastique s'exprime de la manière suivante :

$$C_{i,j,k,l} = 2\mu \left[ \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right]$$



où  $\nu$  et  $\mu$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de poisson du matériau. Dans le cas d'une inclusion quelconque présente dans une matrice élastique isotrope, un modèle plus général du tenseur d'Eshelby a été proposé par Nemat-Nasser et al. [NEM 93]. Pour plus d'informations, le lecteur peut se référer aux récents travaux de Nguyen [NGU 08]. Les travaux d'Eshelby ont servi de base à des travaux d'homogénéisation afin de traiter des milieux continus généralisés [FOR 06].

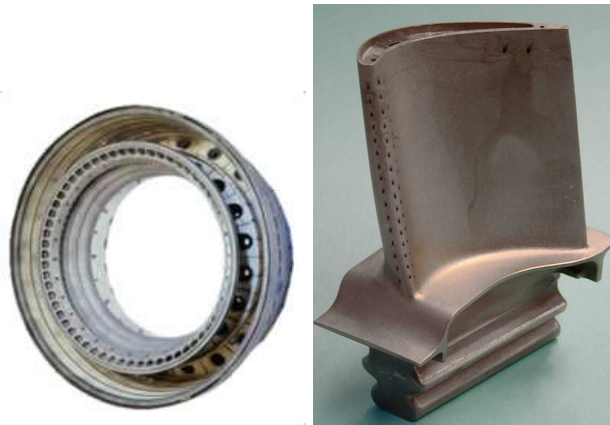
### 1.3.4 Matériaux à gros grains

La notion de structure à gros grains désigne une structure constituée d'un matériau hétérogène soumise à un chargement appliqué dont la longueur d'onde de variation au sein de la structure n'est pas infiniment grande devant la taille des hétérogénéités. C'est une notion qui associe donc le matériau et le type de chargement. Si cette longueur d'onde est plus grande que celle des grandeurs macroscopiques du système considéré, les techniques classiques d'homogénéisation ne peuvent pas être utilisées afin de résoudre le problème car elles requièrent des efforts numériques considérables. Cependant, ce cas d'étude se retrouve dans de nombreuses applications industriels, dont certains exemples vont maintenant être présentés.

- Les joints de culasse garantissant l'étanchéité d'un moteur automobile. Ils sont dans la majorité des cas constitués de multicouches métalliques ou de sandwich latex/acier/latex avec un réseau périodique de picots qui assure l'agrafage du latex sur l'acier. Entre les zones chaudes et froides du réseau, des gradients de sollicitation importants se développent en raison essentiellement des contraintes d'origine thermique.
- Les chambres de combustion des moteurs d'avions, présentées sur la figure 1.14 (source SNECMA), ont un réseau périodique de perforation servant à l'apport de carburant. Il faut tenir compte de l'affaiblissement du matériau afin de dimensionner les chambres. Les très forts gradients de température rencontrés durant les phases de fonctionnement induisent la présence de gradient de sollicitation importants sur des distances de l'ordre de grandeur des trous.
- Les aubes de turbine des parties chaudes des moteurs d'avions et des turbines terrestres, également présentées sur la figure 1.14, qui sont refroidies par un réseau complexe de canalisations qui débouchent à la surface par des réseaux de trous et de fentes. Les méthodes éléments finis permettent de calculer une aube complète, munie de ses trous et fentes, grâce à la parallélisation des calculs [CAR 00]. Ces calculs sont une référence qui ne peut être mise à jour que de temps en temps à cause de la complexité et des temps de calcul. Les travaux quotidiens sont réalisés avec un dimensionnement qui ne tient pas en compte des trous. Il est cependant important de tenir compte d'une manière ou d'une autre de l'affaiblissement local dû à leur présence. Cailletaud et al. [CAI 03] ont notamment travaillé sur ces modèles, prenant en compte les gradients de température très importants de l'extérieur à l'intérieur et du haut en

bas de l'aube.

- Les nouvelles générations de disques de turbines sont composées d'anneaux renforcés par des composites à fibres longues. Celles-ci ont une orientation judicieusement choisie. Le diamètre des fibres composites SiC à matrice de titane retenus pour cette application est relativement important et le nombre de fibres en présence relativement peu élevé. Les soucis numériques proviennent des effets de bord, à la frontière entre matériau massif et matériau renforcé. De nombreuses études sur le sujet [KRU 98, FEY 00, CAR 03] ont permis leur prise en compte via des méthodes d'homogénéisation mais les temps de calculs requis par les méthodes éléments finis restent cependant, tout comme l'espace mémoire nécessaire, assez élevés.



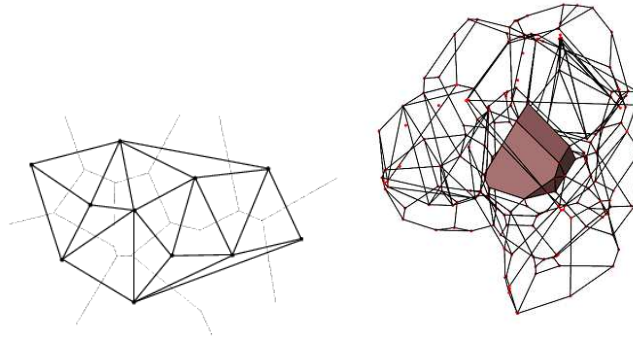
**FIGURE 1.14:** Matériaux à gros grains : chambre de combustion - Aube monocristalline multiperforée (source SNECMA)

Les nombreux cas industriels présentés font part des difficultés rencontrées par les numériciens afin de modéliser et résoudre ces problèmes. De nombreuses études récentes sur le sujet utilisent la tessellation de Voronoi afin de modéliser la géométrie des structures à grains. Cette méthode est basée sur la triangulation de Delaunay [KIR 80]. La figure 1.15 illustre la méthode de triangulation en 2 dimensions et montre une représentation en 3 dimension d'un polygone de Voronoi.

Les polygones de Voronoi sont essentiellement utilisés dans les méthodes éléments finis car elles permettent d'étudier efficacement les effets dus à la taille des grains, leurs propriétés ou encore d'étudier la cohésion entre ceux-ci. Plusieurs travaux sur le sujet ont été menés par Slack et Sadeghi [RAJ 09, SLA 10, SLA 11, WAR 12] qui étudient notamment la durée de vie en roulement des matériaux à l'aide de représentations de type Weibull.

### 1.3.5 Synthèse

Quelques généralités sur l'évolution des matériaux ont été présentées dans cette section. De nombreux progrès ont été réalisés dans les procédés de fabrication afin d'améliorer la



**FIGURE 1.15:** Triangulation de Delaunay en 2D - Tessellation de Voronoï en 3D

réponse de ceux-ci face aux diverses sollicitations tribologiques, qui peuvent être de type thermique et/ou mécanique. Des évolutions importantes ont été réalisées le domaine des matériaux revêtus et à gradient de propriétés à cause de l'amélioration des modèles numériques qui permettent de mieux prédire leurs comportements sous divers types de sollicitations. Aujourd'hui, les chercheurs s'attachent désormais à étudier les aspects hétérogènes et micro-structuraux de ces matériaux afin de réaliser des simulations et obtenir des comportements encore plus réalistes. La qualité des travaux numériques actuels permet, par couplage avec des études expérimentales, d'optimiser les performances et de réduire les coûts matériaux dans des domaines de pointe tels que l'aéronautique ou l'aérospatial. Cependant, les ordinateurs de bureau ne permettent pas aujourd'hui de traiter un tel type de problème dans des temps de calcul raisonnables, ce qui est contraignant face à une industrie qui progresse toujours plus vite.

## 1.4 Bilan

Ce premier chapitre présente un état de l'art non exhaustif des travaux réalisés dans le domaine de la thermique et de la mécanique du contact. Il met en avant les différentes méthodes numériques utilisées ainsi que leurs évolutions qui leur permettent de traiter avec des problématiques de plus en plus complexes. L'étendue des domaines thermique et de la mécanique du contact explique l'importance des besoins de calcul sous-tendus par des enjeux financiers.

La dernière partie de ce chapitre s'attache à présenter les différentes évolutions dans le domaine des matériaux pour permettre à ceux-ci de faire face aux exigences industrielles toujours croissantes. Les revêtements, qu'ils soient mono ou multi-couches, sont couramment utilisés afin d'agir en tant que barrière thermique ou pour protéger le substrat contre la corrosion, l'oxydation, l'usure, etc. D'un point de vue analytique et numérique, la majorité des problématiques liées aux massifs revêtus a été abordée. Les industriels se tournent aujourd'hui souvent vers les procédés expérimentaux afin de qualifier de manière empirique le comportement des revêtements qu'ils souhaitent utiliser pour un type d'application précis.

Les matériaux à gradient de propriétés peuvent être considérés comme une évolution naturelle des revêtements multi-couches. Ils sont de plus en plus utilisés car de nets progrès ont été réalisés dans le domaine des procédés de dépôts. Les travaux numériques réalisés permettent de déterminer la configuration optimale à donner à la variation de propriété afin que celle-ci satisfasse à une problématique donnée.

Les industriels se penchent cependant désormais beaucoup vers la microstructure de leurs matériaux. En effet, une bonne connaissance de celle-ci permet d'envisager quelle taille et quelle répartition dans l'espace doivent avoir les grains afin de minimiser des risques de rupture, délaminage, usure... Certains industriels, tels que l'ONERA réalisent également des structures monocristalines car elles ont pour avantage de ne pas disposer de joints de grains (évitant ainsi tout risque de dislocation) et ont une très bonne résistance au fluage et à la fatigue thermique à haute température.

Les diverses techniques numériques utilisées afin de modéliser et résoudre ces problèmes se révèlent cependant coûteuses en termes d'espace mémoire et de temps de calcul pour un ordinateur de bureau. De plus, elles ne permettent pas toutes de prendre en compte le caractère hétérogène des matériaux. La réalisation d'un modèle 3D complexe est donc nécessaire afin de prendre en compte tous ces phénomènes. Celui-ci doit être capable de résoudre les problèmes thermo-élastiques considérant un chargement quelconque sur la surface du solide et des variations de propriétés selon toutes les directions de l'espace.

Le prochain chapitre présente la construction de ce modèle dans le cadre de la mécanique des milieux continus

# Chapitre 2

## Mécanique

*Dans ce second chapitre nous présentons le problème mécanique 3D avec les hypothèses et les techniques numériques utilisées ainsi que les variations hétérogènes considérées. Des cas de validation seront présentés ainsi que des résultats obtenus pour des systèmes revêtements/substrats pour lesquels les revêtements ont des propriétés constantes ou à gradients, avant de conclure pour des cas où les matériaux sont hétérogènes.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle 3D mécanique</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>2.3</b>	<b>Mécanique des milieux continus</b> . . . . .	<b>37</b>
2.3.1	Équations de Lamé pour un solide homogène . . . . .	38
2.3.2	Équations de Lamé généralisées . . . . .	39
2.3.3	Conditions aux limites mécaniques . . . . .	40
2.3.4	Discretisation du problème . . . . .	41
2.3.5	Discretisation des équations de Lamé . . . . .	41
2.3.6	Discretisation des conditions aux limites . . . . .	41
<b>2.4</b>	<b>Modèle 3D-MG mécanique</b> . . . . .	<b>41</b>
2.4.1	Méthodes multigrilles . . . . .	42

---

2.4.2	Techniques de raffinement local de maillage . . . . .	47
2.4.3	Traitement des conditions aux limites . . . . .	48
<b>2.5</b>	<b>Résolution du système d'équations . . . . .</b>	<b>48</b>
2.5.1	Relaxation de Jacobi . . . . .	49
2.5.2	Relaxation de Gauss-Seidel . . . . .	50
<b>2.6</b>	<b>Résolution du problème de contact . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>2.7</b>	<b>Validation . . . . .</b>	<b>52</b>
2.7.1	modèle numérique multigrilles . . . . .	53
2.7.2	Matériaux revêtus . . . . .	56
2.7.3	Matériaux à gradients de propriétés . . . . .	58
2.7.4	Bilan . . . . .	59
<b>2.8</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>60</b>
2.8.1	Expérimentations sur des matériaux revêtus . . . . .	60
2.8.2	Matériaux à gradient de propriétés . . . . .	66
2.8.3	Matériaux hétérogènes . . . . .	69
<b>2.9</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>70</b>

---

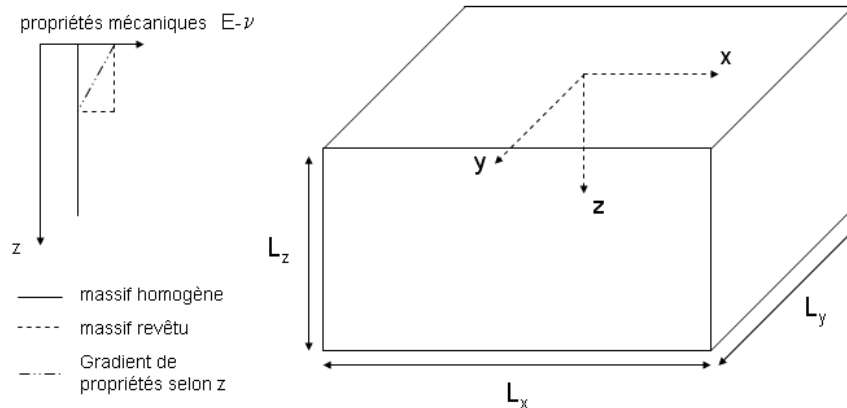
## 2.1 Modèle 3D mécanique

### 2.2 Introduction

Le chapitre précédent était consacré à un état de l'art non exhaustif sur l'utilisation et le développement des méthodes numériques capables de traiter un problème de contact entre deux corps soumis à des sollicitations thermiques et mécaniques. Dans le cas où les corps sont revêtus, constitués de matériaux à gradients de propriétés ou hétérogènes, les modélisations sont le plus souvent limitées à 2 dimensions

[JU 93, LIU 02c, GUL 04, GUL 06]. En effet, une étude dans l'espace à 3 dimensions présente un coût élevé en termes d'espace mémoire et de temps de calcul. La variation de propriétés en fonction des coordonnées  $(x,y,z)$  rend cette étude encore plus coûteuse. Elle est de ce fait limitée, dans la plupart des travaux [WAT 06, CHO 08], à l'étude de la variation des propriétés selon une seule dimension, la profondeur.

Dans ce chapitre, le modèle 3D, développé à partir des équations d'élasticité et satisfaisant aux contraintes énoncées va être présenté. Les équations et leur discrétisation sont tout d'abord posées, puis plusieurs validations sont présentées pour des cas homogènes et revêtus. La configuration utilisée dans ce chapitre est présentée sur la figure 2.1. Avant de conclure sur ce modèle et ses performances, ces dernières vont être illustrées au travers de plusieurs études mettant en jeu des matériaux hétérogènes et des expériences réalisées en laboratoire sur des matériaux revêtus.



**FIGURE 2.1:** Configuration et quelques exemples de variations de propriétés mécaniques

### 2.3 Mécanique des milieux continus

Dans un milieu élastique, l'étude des contraintes repose sur la modélisation mathématique du comportement de ce milieu soumis à des sollicitations mécaniques

exprimées en déplacements ou en contraintes. Les relations présentées utilisent les notations dites de Einstein dont les principales règles sont :

- un indice de sommation est appelé indice muet. Dans un monôme, il doit apparaître exactement deux fois, ce qui évite d'écrire le signe de la somme.
- la dérivée partielle suivant une direction correspondant à l'indice  $i$  est remplacé par une virgule avant cet indice. Ainsi  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  peut s'écrire  $\partial_i u$  ou de façon plus simple  $u_{,i}$ . Il faut également définir les grandeurs caractéristiques du milieu et préciser les hypothèses encadrant la théorie de l'élasticité afin d'établir les équations de base, ou équations de Lamé (équations d'équilibre exprimées en déplacements). Le tenseur des contraintes, qui peut être diagonalisé, s'exprime de la façon suivante :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yx} \\ sym & & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Sous la forme diagonalisée il contient trois termes, appelés contraintes principales, et notés  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . En chaque point, les trois directions principales peuvent être déterminées.

### 2.3.1 Équations de Lamé pour un solide homogène

Les notations suivantes sont utilisées :

- $\underline{u}$  : vecteur déplacement :  $\underline{u} = \{u_x \ u_y \ u_z\}$
- $[\varepsilon_{i,j}]$  : tenseur des déformations. Il s'agit d'un tenseur d'ordre 2 symétrique représentant toutes les déformations homogènes.
- $[\sigma_{i,j}]$  : tenseur des contraintes, d'ordre 2 et symétrique représenté sur la figure 2.2.
- $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad et \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les équations de la mécanique des milieux continus s'obtiennent en écrivant l'équilibre d'un petit élément et en utilisant les hypothèses suivantes : • Cas stationnaire : adoption

d'une formulation quasi-statique. Non prise en compte des effets dynamiques dans le modèle. Le principe fondamental de la statique s'écrit :

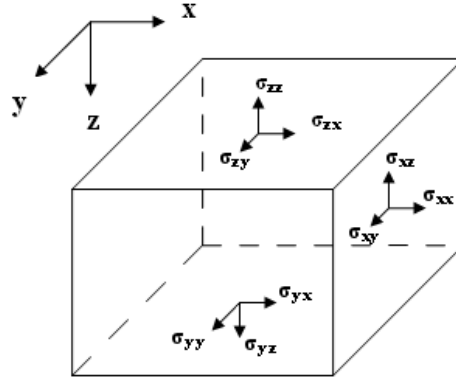
$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2.1)$$

- Élasticité linéaire isotrope : non prise en compte des effets non-linéaires et des couplages. La loi représentant le comportement du matériau est la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

avec





**FIGURE 2.2:** Contraintes mécaniques dans un repère cartésien normé

$$\Theta = tr(\epsilon_{ij}) = \epsilon_{ll} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- Petites déformations : les déplacements, les rotations et les déformations sont supposés petits devant la taille du domaine considéré. Cette hypothèse permet de beaucoup simplifier les équations, les grands déplacements étant souvent synonymes d'effets non-linéaires. Le tenseur des déformations s'écrit alors à partir de la relation de Green-Lagrange :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{u_{i,j} + u_{j,i}\} \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2.3)$$

- Forces internes : les forces internes, notées  $f_i$ , dans le matériau sont négligées. L'unique force interne est la gravité qui est négligeable devant les autres forces mises en jeu. Ainsi, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Équations de Lamé généralisées

En reportant la loi de Hook (2.2) dans l'équation (2.4) la relation suivante est obtenue :

$$\sigma_{ij,j} = (\lambda \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}),j \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2.5)$$

En écrivant les déformations en fonction des déplacements (2.3) dans l'équation (2.6) et en tenant compte que les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions des directions de l'espace nous obtenons l'expression des équations de Lamé généralisées :

$$(\lambda u_{j,j}),i + (\mu u_{i,j}),j + (\mu u_{j,i}),j = 0 \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2.6)$$

Nous pouvons décrire un matériau à propriétés constantes, variables avec des gradients quelconques selon les 3 directions, et également un matériau hétérogène, comme nous le verrons dans le dernier chapitre. Nous nous intéressons maintenant aux conditions aux limites du problème.

### 2.3.3 Conditions aux limites mécaniques

Les conditions aux limites mécaniques peuvent être de deux types :

- de type Dirichlet, avec l'application d'un déplacement,
- de type Neumann, avec l'application d'une contrainte, normale ou tangentielle.

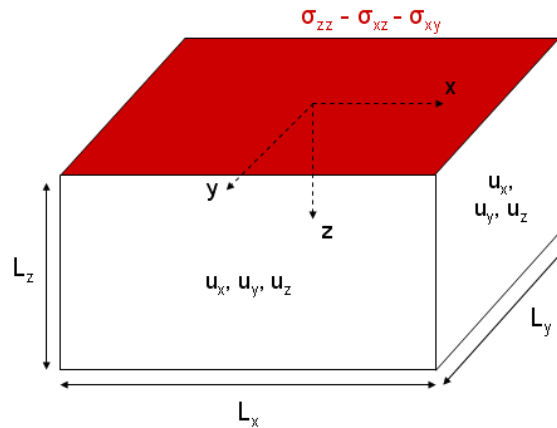
Ces conditions peuvent s'appliquer sur une ou plusieurs zones du domaine. Dans le cadre de nos travaux, nous avons considéré des conditions de type Neumann en surface du massif ( $z = 0$ ) et de type Dirichlet sur les autres faces. On note  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$  et  $\sigma_{zy}$  les trois contraintes appliquées en surface du massif.  $\sigma_{zz}$  correspond à la contrainte normale (ou pression) et  $\sigma_{zx}$  ainsi que  $\sigma_{zy}$  correspondent aux contraintes tangentielles. Ces contraintes s'expriment à l'aide de la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda(u_{l,l})\delta_{i,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (2.7)$$

avec

$$\lambda = \lambda(x, y, z) \quad \mu = \mu(x, y, z)$$

La figure 2.3 présente les conditions aux limites appliquées sur le volume élémentaire de calcul.



**FIGURE 2.3:** Conditions aux limites du problème mécanique : contraintes  $\sigma$  sur la surface supérieure ( $z = 0$ ), déplacements  $u$  imposés sur les autres faces

Les équations et les conditions aux limites ayant été décrites, nous allons détailler l'adimensionnement utilisé pour la résolution numérique.

### 2.3.4 Discrétisation du problème

### 2.3.5 Discrétisation des équations de Lamé

La discrétisation des équations d'élasticité est maintenant abordée. La discrétisation des équations de Lamé nécessite l'expression en chaque point  $(i,j,k)$  des dérivées partielles des déplacements  $u_{i,j,k}$ . Les 3 équations obtenues à partir de l'expression générale (2.6) sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Ces expressions ont été discrétisées en tout point à l'intérieur du volume élémentaire fini en utilisant en schéma aux différences centrées qui est présenté en annexe A.

### 2.3.6 Discrétisation des conditions aux limites

Les relations (2.7) sont discrétisées en surface  $(z=0)$  du volume uniquement. Un schéma aux différences avant d'ordre 2 est utilisé :

$$u'(z) = \frac{-3u(z) + 4u(z+h) - u(z+2h)}{2h} \quad (2.11)$$

Ce schéma est d'ordre 2. Il introduit par conséquent une erreur de discrétisation d'ordre 2. Nous allons nous attacher maintenant à présenter le modèle numérique multigrilles utilisé pour résoudre ces équations.

## 2.4 Modèle 3D-MG mécanique

Nous avons présenté les hypothèses utilisées pour établir les équations de Lamé en élasticité linéaire. Ces équations servent de base au modèle numérique 3D. Cette section est dédiée à la description du modèle et présente la méthode numérique utilisée.

### 2.4.1 Méthodes multigrilles

Le travail numérique effectué dans le cadre de cette thèse a été réalisé en utilisant les méthodes de différences finies couplées aux méthodes multigrilles. Les techniques des différences finies permettent de modéliser de façon simple des variations quelconques de propriétés mécaniques et/ou thermiques dans un espace à 3 dimensions sur un domaine de géométrie simple (parallélépipède) et de dimension finie. Les techniques multigrilles, développées par Brandt au début des années 1980 [BRA 84], sont un outil numérique permettant d'accélérer la convergence en résolvant les différentes fréquences d'erreur de la solution sur plusieurs niveaux de grille. Cet atout permet de considérer et de résoudre de manière efficace des systèmes dits larges comportant un nombre très élevé de points, et par conséquent de degrés de liberté. Le principe de ces méthodes est maintenant abordé, en s'attachant au type de problème à résoudre et à la manière dont les informations sont transférées entre les différentes grilles. Notons qu'il existe aujourd'hui dans la littérature plusieurs ouvrages traitant de ces méthodes [BRI 00, TRO 01].

#### Principe des méthodes

Le principe des méthodes multigrilles est présenté par Venner et Lubrecht [VEN 00] qui les utilisent pour la résolution de problèmes de contact en élastohydrodynamique. Le problème considéré doit être continu et doit pouvoir se mettre sous la forme linéaire suivante :

$$Lu = f$$

$L$  est un opérateur différentiel,  $u$  la solution exacte du problème et  $f$  représente le second membre de l'équation. Le problème est discrétisé à l'aide de techniques de différences finies sur un maillage uniforme dont le pas est noté  $h$ . Les techniques multigrilles sont un outil permettant de transformer des équations locales en un système d'équations linéaires. L'opérateur différentiel  $L$  est alors exprimé à l'aide de la forme matricielle  $L^h$ . La solution et le second membre deviennent quant à eux les vecteurs  $u^h$  et  $f^h$ . Il est évident que la solution exacte du problème discrétisé est différente de celle du problème continu. Le terme d'erreur de discrétisation définit cette différence entre les deux solutions. Celle-ci tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers 0. On obtient alors le système d'équations suivant qui peut être résolu avec des méthodes directes ou itératives :

$$L^h u^h = f^h \tag{2.12}$$

où  $L^h$  est une matrice,  $u^h$  le vecteur des inconnues et  $f^h$  le second membre. Dans le cadre de nos travaux, nous nous plaçons uniquement dans le cas de méthodes itératives qui présentent l'avantage fondamental de ne pas avoir à effectuer d'inversions de matrices, ce qui est une opération très coûteuse d'un point de vue numérique.

Les équations sont discrétisées et résolues sur plusieurs maillages uniformes et hiérarchiques, de pas  $h$  décroissants définissant  $n$  niveaux, numérotés de 1 à  $n$ . Cette

méthode part du fait que les relaxations convergent lentement mais que l'erreur est rapidement lissée sur les différents niveaux de grille. Une valeur initiale est imposée comme solution. Après plusieurs relaxations, cette solution a évolué vers sa valeur approchée notée  $\tilde{u}^h$ . Cette solution différente de la solution exacte  $u^h$  du problème discret comporte une erreur numérique notée  $e^h$ .

$$e^h = u^h - \tilde{u}^h \quad (2.13)$$

Ainsi, l'équation discrète n'est pas résolue de façon exacte et on obtient un résidu  $r^h$  qui représente la différence entre ses deux membres :

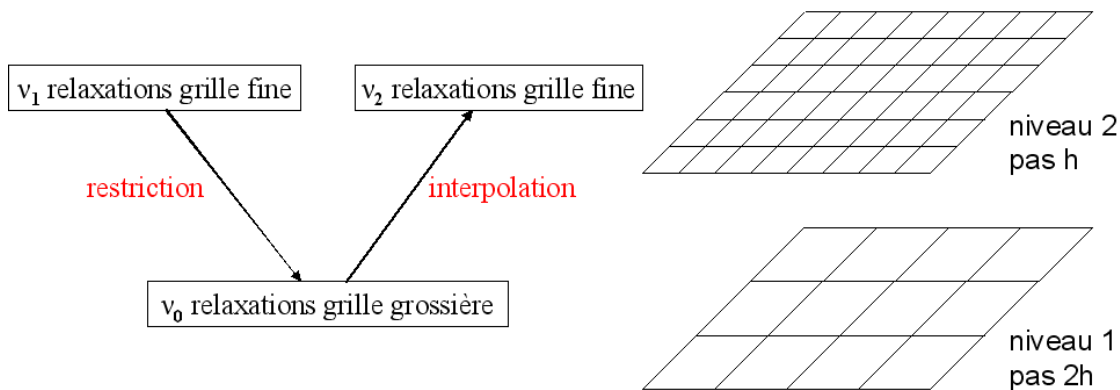
$$r^h = f^h - L^h \tilde{u}^h = L^h e^h \quad (2.14)$$

L'erreur numérique  $e^h$  peut être décomposée dans l'espace des fréquences. L'erreur dite globale est la superposition des hautes et des basses fréquences. Si les relaxations sont effectuées sur une grille de pas  $h$ , les erreurs numériques de longueur d'onde proche de  $h$  sont rapidement atténuées, alors que les basses fréquences diminuent très lentement. Pour réduire plus rapidement les erreurs de grandes longueurs d'onde, il faut relaxer le problème sur des grilles plus grossières, dont le pas de discrétisation est plus grand. Le problème peut être transféré sur la grille de niveau inférieur, dont le pas  $H$  est défini par  $H = 2h$ . Le problème prend alors la forme suivante :

$$L^H u^H = f^H \quad (2.15)$$

Les vecteurs  $f^H$  et  $u^H$  sont obtenus avec l'opérateur de restriction  $I_h^H$  qui permet de transférer les variables de la grille fine vers la grille grossière.

Le schéma présenté figure 2.4 résume le principe pour une résolution utilisant deux grilles (niveaux).



**FIGURE 2.4:** Schéma de résolution. Illustration pour 2 niveaux de grille, de pas  $2h$  et  $h$ , en 2 dimensions

Dans le cas où le système à résoudre est non-linéaire, la méthode FAS (Full Approximation Scheme) est utilisée :

$$\hat{u}^H = I_h^H \tilde{u}^h + e^H \quad (2.16)$$

$$\hat{f}^H = L^H(I_h^H \tilde{u}^h) + I_h^H r^h \quad (2.17)$$

Le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Venner et Lubrecht [VEN 00] pour plus de détails sur les changements de grilles et l'application de cette méthode.

Après quelques relaxations, la solution approchée  $\tilde{u}^H$  du problème discret 2.12 est obtenue sur la grille grossière. Celle-ci peut alors être transférée vers la grille fine grâce à l'opérateur d'interpolation  $I_H^h$  et une nouvelle approximation  $\bar{u}^h$  est obtenue sur la grille fine :

$$\bar{u}^h = \tilde{u}^h + I_H^h(\tilde{u}^H - \hat{u}^H) \quad (2.18)$$

Différentes stratégies de résolutions, avec leurs avantages et inconvénients, peuvent être utilisées via les méthodes multigrilles. Ces stratégies requièrent le transfert des résidus et de la solution entre les différents niveaux à l'aide d'opérateurs qui peuvent également être plus ou moins complexes en fonction du type de problème étudié. Les stratégies et les opérateurs que nous avons utilisé vont maintenant être présentés.

**La stratégie V-Cycle** On définit un V-cycle comme étant le parcours entre les différents niveaux au cours de la résolution. Il est nécessaire d'utiliser plusieurs V-cycles afin de réduire l'erreur de plusieurs ordres de grandeur et par conséquent d'obtenir un problème convergé. La résolution sur deux niveaux est possible et permet la réduction efficace des erreurs de longueur d'onde de l'ordre de  $h$  et de  $H$ , mais la réduction des longueurs d'onde d'ordre supérieur à  $H$  va nécessiter un nombre de cycles important. Pour diminuer le coût de la résolution du problème (réduction des erreurs de toutes les longueurs d'onde), il faut utiliser des niveaux inférieurs. Ainsi, les grandes longueurs d'onde sont réduites à moindre coût car :

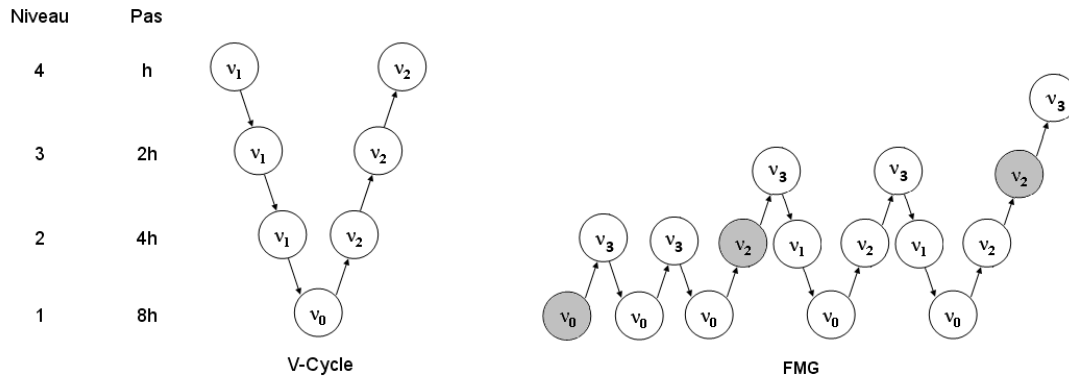
- plus le nombre de points sur une grille est faible, plus le nombre de relaxations nécessaire à la résolution est faible. Lorsqu'on utilise des niveaux inférieurs, le nombre de relaxations nécessaires à la convergence est réduit,

- le coût de chacune des relaxations sur les grilles inférieures est plus faible car il y a moins de points à parcourir sur celles-ci,

Le changement de grilles permet donc de réduire de manière efficace le temps de calcul, les relaxations étant utilisées là où elles sont le plus efficace. En revanche, les opérations de restriction et de correction introduisent dans la solution des erreurs de longueur d'onde proche du pas de maillage. Après chaque opération de changement de grille, il est donc nécessaire d'effectuer une ou plusieurs relaxations afin de corriger ces erreurs. La figure 2.5 représente un V-cycle sur 4 niveaux.

La phase descendante du cycle permet de lisser les hautes fréquences de l'erreur alors que l'allure générale de la solution (basses fréquences) n'est pas encore obtenue.

L'inconvénient de cette méthode réside dans la perte du bénéfice de cette phase descendante lorsque l'on atteint le niveau le plus grossier. Cette stratégie s'avère



**FIGURE 2.5:** Stratégies V-cycle et Full Multigrid (FMG).  $v$  représente le nombre de relaxations utilisée sur les différents niveaux avec  $v_3 = v_1 + v_2$

avantageuse dans le cas où des informations très locales doivent être rapidement transmises aux grilles grossières afin de réduire l'erreur que celles-ci peuvent introduire dans la solution (exemple : couches très minces).

**La stratégie FMG** Afin de palier le problème énoncé précédemment, il est possible d'utiliser la méthode FMG (Full Multigrid). Cette stratégie consiste à d'abord réduire les basses fréquences à l'aide des maillages grossiers, puis, lorsque la solution a convergé sur ces niveaux, à interpoler ce résultat sur une grille plus fine et effectuer plusieurs V-cycles à partir de ce niveau. On répète ce schéma jusqu'au niveau le plus élevé. Ce principe est présenté sur la figure 2.5.

En assurant la convergence de la forme générale de la solution, la technique FMG améliore la stabilité de la résolution par rapport à la technique V-cycles. De plus, en utilisant moins de relaxations sur les grilles les plus fines (coûteuses en temps de calcul), elle permet de diminuer considérablement le temps de calcul. La complexité de l'algorithme classique est  $O(N) \log(\epsilon)$  avec  $N$  le nombre de variables, et  $\epsilon$  la précision demandée. En utilisant la technique FMG, elle diminue et est de l'ordre  $O(N)$ .

Néanmoins, l'interpolation entre chaque série de V-cycles doit être d'un ordre supérieur à celui du schéma numérique utilisé. Sauf pour les cas extrêmes concernant les couches très minces et les forts gradients de propriétés, cette stratégie sera celle que nous emploierons.

Ces stratégies ont pour point commun les opérateurs de changement de grille qui sont présentés dans le paragraphe suivant.

**Opérateurs de changement de grille** L'étape suivante est donc la définition des opérateurs de changement de grille  $I_H^h$  et  $I_h^H$ , utilisés respectivement pour les interpolations et les restrictions dans les V-cycles. Les opérateurs de restriction,  $I_h^H$ , ont pour finalité de permettre le passage d'une grille de pas  $h$  à une grille de pas  $2h$ . Il y a deux types de restrictions :

1) l'injection : c'est l'opérateur le plus simple. Tous les points de la grille grossière coïncident avec des points de la grille fine. On se contente d'affecter les valeurs des points coïncidant aux points de la grille grossière. Les autres sont ignorés. Le transfert est direct (et donc rapide), mais la qualité de l'information transmise est de moins bonne qualité qu'avec les autres méthodes.

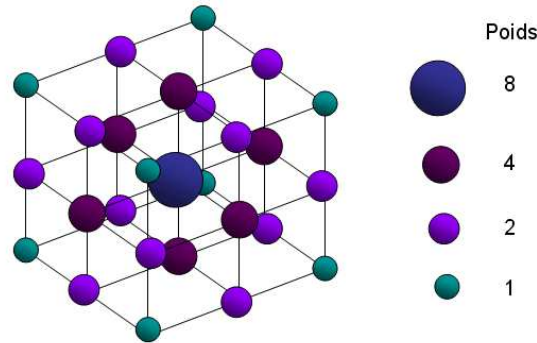
En tout point de la grille l'injection s'écrit :

$$u_{I,J}^H = [I_h^H \tilde{u}^h]_{I,J} = u_{2I,2J}^h$$

2) la restriction pondérée : cet opérateur est complexe, il consiste à affecter à un point de la grille grossière une moyenne pondérée de sa valeur et de celles des points qui l'entourent.

L'expression de cet opérateur et sa représentation en 3D sont donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned} u_{I,J,K}^H = [I_h^H \tilde{u}^h]_{I,J,K} = & \frac{1}{64} (u_{2I+1,2J+1,2H+1}^h + u_{2I+1,2J-1,2H+1}^h + u_{2I-1,2J+1,2H+1}^h + u_{2I-1,2J-1,2H+1}^h \\ & + u_{2I+1,2J+1,2H-1}^h + u_{2I+1,2J-1,2H-1}^h + u_{2I-1,2J+1,2H-1}^h + u_{2I-1,2J-1,2H-1}^h \\ & + 2(u_{2I-1,2J+1,2H}^h + u_{2I+1,2J+1,2H}^h + u_{2I-1,2J-1,2H}^h + u_{2I+1,2J-1,2H}^h \\ & + u_{2I,2J+1,2H-1}^h + u_{2I-1,2J,2H-1}^h + u_{2I+1,2J,2H-1}^h + u_{2I,2J-1,2H-1}^h \\ & + u_{2I,2J+1,2H+1}^h + u_{2I-1,2J,2H+1}^h + u_{2I+1,2J,2H+1}^h + u_{2I,2J-1,2H+1}^h \\ & + 4(u_{2I-1,2J,2H}^h + u_{2I,2J+1,2H}^h + u_{2I+1,2J,2H}^h + u_{2I,2J-1,2H}^h \\ & + u_{2I,2J,2H-1}^h + u_{2I,2J,2H+1}^h) + 8u_{2I,2J,2H}^h) \end{aligned}$$



**FIGURE 2.6:** Représentation 3D de l'opérateur de restriction pondérée. Taille de sphère proportionnelle au poids du point

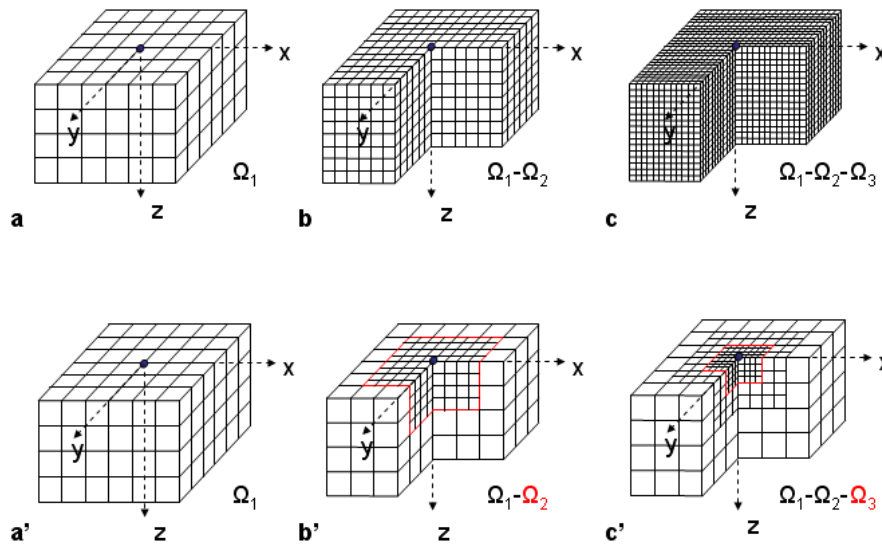
Les opérateurs d'interpolation  $I_H^h$  sont utilisés pour interpoler les valeurs d'une grille grossière de pas  $H$  vers une grille plus fine de pas  $h = H/2$ . Une interpolation linéaire peut être suffisante dans la majorité des cas.



## 2.4.2 Techniques de raffinement local de maillage

La technique du raffinement local de maillage consiste à effectuer des calculs selon une méthode choisie, sur un maillage doté d'une plus grande finesse uniquement sur des domaines identifiés. Cette technique permet ainsi de diminuer le nombre de degrés de liberté de façon importante sur les grilles fines tout en assurant une précision suffisante. Bai et Brandt [BAI 87] ont été les premiers à s'intéresser à l'utilisation de ces techniques avec les méthodes multigrilles. Des diminutions importantes des temps de calcul et de l'espace mémoire requis sont obtenus. Nous reviendrons sur ces points dans les paragraphes suivants.

Une technique dite multi-échelle est mise en place. Elle consiste en la définition de grilles de différents niveaux sur des domaines géométriques hiérarchiques. Le principe de la méthode est illustrée sur la figure 2.7 dans les cas globaux et locaux pour 3 niveaux de grille.



**FIGURE 2.7:** Technique de raffinement local : a-b-c illustration de la stratégie globale sur 3 niveaux. a'-b'-c' illustration de la stratégie locale sur 3 niveaux. 1/4 du volume élémentaire a été enlevé afin de visualiser le raffinement selon  $z$ .

Soit  $\Omega_n$  le niveau raffiné le plus fin ( $n = 3$  dans le cas illustré par la figure 2.7). Ce niveau est limité à une zone restreinte du domaine de calcul dans le cas local (a'-b'-c'). Ses limites sont interpolées puis transférées depuis le niveau inférieur. Aucune modification n'est nécessaire pour adapter le FAS au raffinement local de maillage. Le résidu  $r^h$  sur un niveau fin  $\Omega_n$  est calculé uniquement sur la zone du domaine de calcul couverte. Le résidu est nul sur les zones non couvertes de  $\Omega_{n-1}$ . Ainsi, la correction de la grille  $\Omega_{n-1}$  est seulement prise en compte où  $\Omega_n$  existe. Le stockage dans la mémoire interne doit être modifié afin de ne pas avoir un espace alloué trop important qui limiterait le nombre de niveaux utilisables et augmenterait les temps de calcul. Pour se faire, on alloue à chaque niveau un espace mémoire correspondant au nombre de points de calcul utilisés

(matrices de dimension  $(i_e - i_b) * (j_e - j_b) * (k_e - k_b)$  où  $b$  et  $e$  désignent successivement les indices de début et fin de grilles).

L'un des avantages majeurs des techniques multigrille vient d'être développé. En effet, ces méthodes permettent d'utiliser de façon naturelle des techniques de raffinement de maillage pour obtenir des solutions très précises sur des domaines localisés. Le gain associé à ce raffinement est lié à l'utilisation de plusieurs niveaux supplémentaires pour les calculs et ainsi obtenir des meilleurs résultats pour un nombre de degrés de liberté équivalent ou moindre que dans le cas d'une stratégie de calcul globale. Cet outil est par conséquent nécessaire pour l'analyse d'un système multi-échelles.

Les techniques numériques employées ayant été énoncées, nous passons maintenant au traitement des conditions aux limites et à la résolution numérique des équation de Lamé.

### 2.4.3 Traitement des conditions aux limites

La condition de type Neumann décrite précédemment détériore initialement la convergence du problème. Il est donc nécessaire de faire quelques pré-relaxations afin de retrouver la même vitesse de convergence que celle obtenue dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet.

Brandt et al. [BRA 00] ont donc développé un algorithme pour traiter les conditions aux limites de type intégrale tout en conservant l'efficacité des techniques multigrilles. Cet algorithme est détaillé dans le tableau suivant.

<p>1. Relaxation de la grille fine <math>\Omega_h</math>          Relaxation des conditions aux limites en surface (<math>k=0</math>)          Relaxation de plusieurs couches situées sous la surface (<math>k=[1,n]</math>)</p> <p>2. Transfert de la solution et des résidus vers la grille grossière à l'aide de <math>\Omega_H</math></p> <p>3. Résolution du problème sur <math>\Omega_H</math></p> <p>4. Interpolation de la solution sur <math>h</math>, correction des points intérieurs et des limites</p> <p>5. Reprendre à l'étape 1</p>
--

**TABLE 2.1:** Traitement des conditions aux limites mécaniques selon Brandt et al. [BRA 00]

## 2.5 Résolution du système d'équations

Afin de résoudre numériquement les équations de Lamé à l'aide des méthodes multigrilles, on les exprime sous la forme d'un système d'équations de forme :

$$[A]^h \{u\}^h = \{f\}^h$$

Les différentes méthodes utilisées pour résoudre ce genre de système ont été décrites par Ames [AME 65], Brandt [BRA 84], ainsi que par Venner et Lubrecht [VEN 00]. Ces

méthodes de résolution peuvent être de type direct ou bien de type itératif.

Une résolution directe nécessite l'inversion de la matrice  $[A]$  en utilisant un algorithme de type LU. Cette opération d'inversion est très coûteuse en temps de calcul pour une matrice de taille importante. En effet le temps de calcul pour un algorithme LU classique est proportionnel à  $N^2$  par variable. Ainsi, pour la résolution d'un système à  $N$  variables, le temps de calcul global est proportionnel à  $N^3$  tandis qu'il est proportionnel à  $N^2 \log(N)$  pour une résolution à l'aide des méthodes multigrilles.

Les méthodes itératives consistent à appliquer un algorithme de façon répétée. Ce type de méthode utilise souvent les propriétés de la matrice  $[A]$ . L'algorithme commence par le choix d'une solution initiale qui va être modifiée à chaque itération selon certaines règles en convergeant vers la solution finale. Afin d'évaluer les différentes techniques de relaxation, la vitesse de convergence est l'un des critères importants. Parmi ces techniques, les plus couramment usitées sont la relaxation de Jacobi et celle de Gauss-Seidel qui vont être maintenant abordées.

### 2.5.1 Relaxation de Jacobi

Cette méthode est illustrée simplement à l'aide de l'équation de Poisson en une dimension :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = f(x) \quad (2.19)$$

En chaque point de la grille  $x_i$ , pour  $i \in [1, n - 1]$ , on résout l'approximation discrète  $u_i$  de  $u(x_i)$  avec

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + 2u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad (2.20)$$

Soit  $\bar{u}_i$  la solution calculée à l'itération  $k + 1$  au point  $i$  et  $\tilde{u}_i$  la solution de l'itération  $k$  au point  $i$ . A chaque point, une nouvelle approximation  $\bar{u}_i$  de la solution exacte  $u_i$  est calculée à l'aide de la relation :

$$\bar{u}_i = \tilde{u}_i + w\delta_i \quad \text{avec} \quad \delta_i = -\frac{r_i h^2}{2} \quad (2.21)$$

où  $w$  est appelé facteur de relaxation et  $r_i$  le résidu qui est défini de la manière suivante :

$$r_i = f_i - \frac{\tilde{u}_{i-1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{h^2} \quad (2.22)$$

La relaxation de Jacobi utilise les valeurs calculées pendant l'itération  $k$  afin de calculer la nouvelle valeur de  $\bar{u}_i$  à l'itération  $k + 1$ . Cette méthode permet le calcul en parallèle des différents points du maillage.  $w < 1$  correspond à une sous-relaxation et  $w > 1$  à une sur-relaxation.

### 2.5.2 Relaxation de Gauss-Seidel

La différence entre la relaxation de Gauss-Seidel et celle de Jacobi ne semble pas importante mais a des conséquences importantes. Le résidu s'exprime de la manière suivante à l'itération  $k+1$  :

$$r_i = f_i - \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{h^2}$$

Avec  $\bar{u}_{i-1}$  la solution à l'itération  $k$ . Cette relaxation nécessite une seule matrice de stockage, au lieu de deux pour la méthode de Jacobi. Elle a donc été privilégiée afin de réduire le coût numérique, étant donné que les problèmes étudiés possèdent un grand nombre de degrés de liberté (plusieurs centaines de millions).

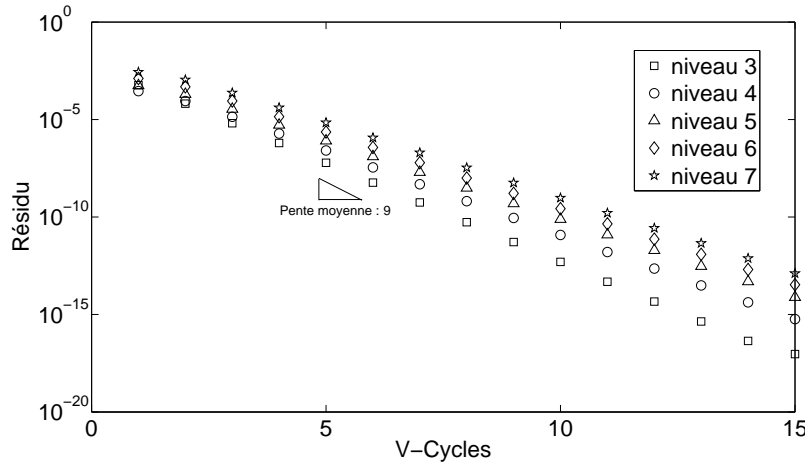
#### Application : vitesse de convergence en fonction du nombre de niveau

Le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre le système d'équations avec ces méthodes de relaxation varie entre  $N^2$  et  $N^3$  pour les inversions directes de matrice, c'est à-dire que si le nombre de points est multiplié par deux selon chacune des dimensions de l'espace, le temps de calcul est dans le meilleur des cas multiplié par 64 pour un système en trois dimensions.

Les solveurs sont dit efficaces lorsque le temps de calcul augmente proportionnellement au nombre de points utilisés pour la discrétisation. Ils permettent de réduire grandement les efforts de calcul. L'utilisation des techniques multi-échelles peut servir à parvenir à cet objectif, c'est pourquoi nous les avons utilisées afin de résoudre les problèmes d'élasticité linéaire. La vitesse de convergence de notre algorithme est illustrée sur la figure 2.8. Cette figure représente l'évolution du résidu en fonction du nombre de V-cycles employés pour la résolution d'un contact de type Hertzien ( $a=1, P_0=1$ ) sur un massif homogène. Le domaine de calcul est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ . Le niveau 1 est maillé à l'aide de  $17 * 17 * 9$  points. La stratégie choisie utilise pour relaxations  $v_0 = 10$  et  $v_1 = v_2 = 2$ . Les stratégies locales et globales ayant la même vitesse de convergence, une seule courbe est présentée sur la figure 2.8.

## 2.6 Résolution du problème de contact

La résolution d'un problème de contact est un problème itératif qui doit être résolu à l'aide d'une méthode itérative. Dans ce processus, il est nécessaire de connaître les expressions des déplacements  $u_{ij}$  en surface en fonction de la pression via les valeurs des coefficients d'influence  $a_{ij}$ . Ces coefficients  $a_{ij}$  sont connus analytiquement dans le cas d'un massif homogène ou d'un revêtement à propriétés constantes. Le modèle numérique qui vient d'être exposé est utilisé afin de déterminer ces déplacements en surface dans le cas d'un solide avec gradient de propriété selon la profondeur soumis à une pression unitaire ponctuelle. Dans le cas d'un contact où la dimension de celui-ci est très petite devant celle du solide (aucun effet de bord), il est possible d'écrire les



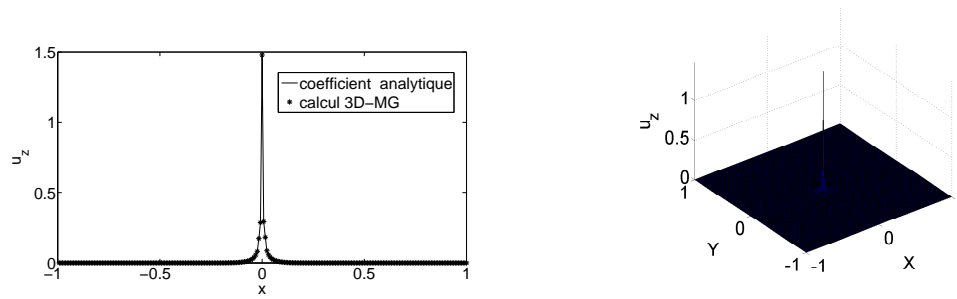
**FIGURE 2.8:** Évolution du résidu en fonction du nombre de V-cycles ( $v_0 = 10$  et  $v_1 = v_2 = 2$ ) dans le cas d'un contact Hertzien ( $a=1$ ,  $P_0=1$ ) appliqué sur un massif homogène. Le domaine de calcul est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ . Le niveau 1 est maillé à l'aide de  $17 * 17 * 9$  points.

déplacements obtenus en surface à l'aide d'un produit de convolution entre les coefficients d'influence ( $a_{mn}$ ) et le champ de pression ( $P_{kl}$ ), coefficients d'influence que l'on détermine alors numériquement.

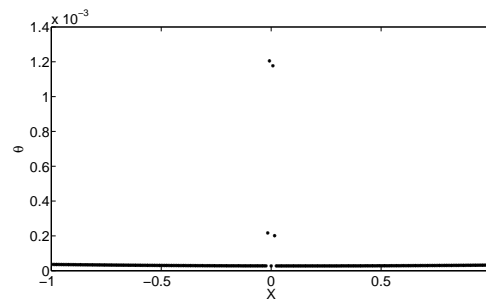
$$u_{ij} = \sum_{k,l=1}^{N_x, N_y} a_{i-k, j-l} \cdot P_{kl} \quad (2.23)$$

Pour les matériaux homogènes et les matériaux dont les propriétés varient uniquement selon la profondeur (par exemple  $E(x, y, z) = f(z)$ ), nous avons résolu le problème de contact en calculant ce produit de convolution très rapidement (quelques secondes-minutes) à l'aide des méthodes FFT (code développé au laboratoire [SAI 10]). Cette résolution n'a pas été traitée dans le cas où les variations de propriétés sont fonctions de plusieurs directions de l'espace.

A l'aide des équations de Boussinesq-Cerruti, il est également possible de déterminer ces coefficients d'influence pour un massif semi-infini homogène, isotrope et élastique. La figure 2.9 présente une comparaison entre un coefficient calculé par le modèle (déplacement vertical  $u_z$  dû à une pression ponctuelle unitaire appliquée au centre de la surface ( $x=0, y=0, z=0$ )) et la solution analytique donnée par les équations de Boussinesq-Cerruti. La figure 2.10 représente l'écart relatif  $\theta$  entre les deux solutions. Les courbes obtenues montrent que l'écart entre les deux solutions est faible (de l'ordre de  $10^{-5}$  en dehors de la discontinuité et de l'ordre de  $10^{-3}$  au niveau de celle-ci). La légère dissymétrie obtenue est due au sens de la relaxation effectuée selon  $x$ . Les coefficients obtenus à l'aide du modèle peuvent donc être utilisés pour résoudre le problème de contact à l'aide d'un algorithme utilisant les techniques FFT développé au laboratoire.



**FIGURE 2.9:** Coefficient d'influence obtenu pour un massif homogène (déplacement vertical  $u_z$  dû à une pression ponctuelle unitaire appliquée au centre de la surface ( $x=0, y=0, z=0$ )). a : comparaison entre la solution multigrilles et la solution analytique donnée par Boussinesq-Cerruti. b : représentation 3D du coefficient d'influence.



**FIGURE 2.10:** Écart relatif obtenu entre la solution multigrilles et la solution analytique donnée par Boussinesq-Cerruti.

Le problème d'élasticité et le modèle numérique ayant été posés, nous allons maintenant présenter plusieurs cas tests qui ont permis de valider et d'illustrer les possibilités de notre modèle dans le cas de matériaux homogènes ou de matériaux dont les propriétés mécaniques varient selon la profondeur.

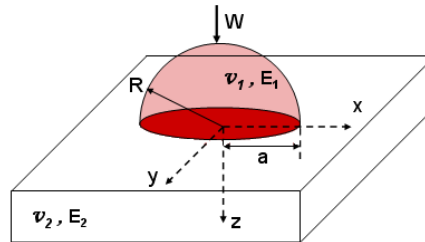
## 2.7 Validation

Nous allons procéder à des comparaisons entre les calculs effectués avec notre modèle et des résultats obtenus avec des approches analytiques ou numériques. Le but est de montrer la précision de la technique numérique multigrilles :

- sans raffinement local,
- avec raffinement local,
- ainsi que sa robustesse et son efficacité à traiter le cas de revêtements avec des gammes de propriétés et d'épaisseurs importantes.

### 2.7.1 modèle numérique multigrilles

Il s'agit ici de montrer la précision du modèle dans un cas simple, un contact Hertzien. Nous comparerons les valeurs du déplacement sur la surface ainsi que la valeur et la position de la contrainte maximale de Von-Mises, obtenus analytiquement et numériquement. La théorie de Hertz [HER 82] (voir annexe B) permet de calculer le rayon de l'aire du contact et la pression moyenne en surface dans le cas notamment d'un contact entre une sphère rigide et un plan semi-infini.



**FIGURE 2.11:** Contact élastique sphère-plan illustrant la théorie de Hertz

Le rayon de contact est déterminé à l'aide de la formule :

$$a = \left( \frac{3WR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (2.24)$$

Ainsi, le rayon de contact  $a$  dépend directement de la charge normale  $W$  appliquée et du module de Young équivalent  $E^*$  déterminé à partir des propriétés mécaniques des deux corps en contact. Ces propriétés sont mieux connues sous les noms de module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ . Le module de Young équivalent est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{1}{E^*} = \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (2.25)$$

La pression moyenne s'obtient à partir de la relation suivante :

$$P_m = \left( \frac{2E^* a}{\pi R} \right) \quad (2.26)$$

L'expression analytique des déplacements verticaux en surface  $w_a$  est quant à elle donnée par Johnson [JOH 85a] avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $p_0$  la pression maximale :

Pour  $r \leq a$

$$w_a(r) = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad (2.27)$$

Pour  $r \geq a$

$$w_a(r) = \frac{1 - \nu^2}{E_2} \frac{p_0}{2a} \left( (2a^2 - r^2) \sin^{-1}(a/r) + r^2(a/r)(1 - a^2/r^2)^{1/2} \right) \quad (2.28)$$

Un adimensionnement peut être réalisé de la manière suivante :

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \quad \bar{w} = \frac{w}{a^2/R} \quad (2.29)$$

avec  $a^2/R = \pi P_0 a (1 - \nu^2) / E_2$

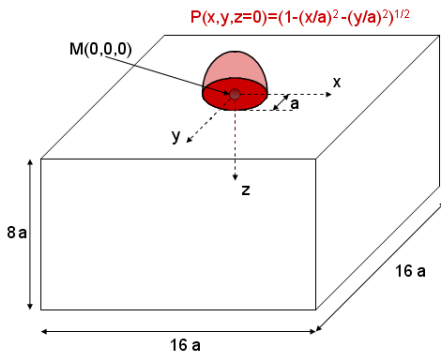
La contrainte de Von-Mises est définie par :

$$\sigma_{vm} = \sqrt{J_2} \quad (2.30)$$

avec  $J_2$  le second invariant du tenseur déviatorique des contraintes défini par l'équation (2.31) :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2] \quad (2.31)$$

La valeur maximum est  $\sigma_{VMmax} / P_m = 0.36$  et sa position  $z_{max} / a = 0.48$ .



#### Description numérique

Dimensions du solide : [16a ; 16a ; 8a]

Nombre de niveaux : 1-7

17\*17\*9 points sur le niveau grossier

Stratégie de calcul globale

Les données utilisées pour la simulation numérique de ce chargement Hertzien sont les suivantes : un domaine de dimension [16a ; 16a ; 8a] est considéré. Le niveau 1 est maillé à l'aide de 17\*17\*9 points et possède un pas de maillage de valeur  $a$ . Une stratégie de calcul globale est utilisée. 7 calculs sont effectués, en considérant soit un seul niveau, soit  $n$  niveaux variant de 2 à 7. Ce dernier niveau est maillé à l'aide de  $N=1025*1025*513$  points et possède un pas de maillage de  $a/64$ . Le tableau 2.2 présente l'erreur relative obtenue sur le maximum de la contrainte de Von-Mises ainsi que sur le déplacement  $\bar{w}$  (avec  $\bar{w}_n$  la valeur numérique du déplacement obtenu à l'aide de la stratégie globale) en surface du massif pour un résidu de  $10^{-8}$  sur la solution.  $n$  représente le nombre de niveaux utilisés et  $N$  le nombre de points utilisés dans la simulation.

Les résultats obtenus montrent une diminution de l'erreur d'ordre 2 avec l'augmentation du nombre de niveaux (diminution du pas de maillage), ce qui est conforme à la discrétisation utilisée pour la résolution des équations. L'erreur est inférieure à 1% pour un calcul réalisé à l'aide de 5 niveaux. Cette étude permet par conséquent de valider le calcul élastique 3D multigrille pour un massif homogène.

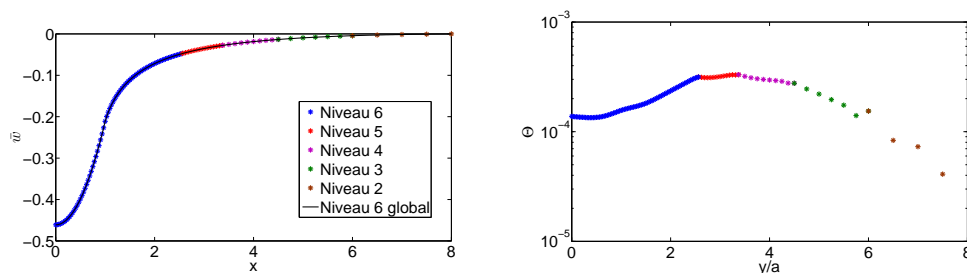
#### calcul local



$n$	$N$	$\  \max(\sigma_{vm})/P_{mn} - \max(\sigma_{vm})/P_{ma} \ _1$	$\  \bar{w}_n - \bar{w}_a \ _1$	résidu	CPU
1	$2.6 * 10^3$	1.2	0.287	$10^{-8}$	1 sec
2	$1.8 * 10^4$	0.357	0.1558	$10^{-8}$	4 sec
3	$1.4 * 10^5$	0.102	0.052	$10^{-8}$	28 sec
4	$1.1 * 10^6$	0.024	0.0174	$10^{-8}$	4 min
5	$8.5 * 10^6$	0.0061	0.0046	$10^{-8}$	35 min
6	$6.8 * 10^7$	0.00175	0.0012	$10^{-8}$	4h50
7	$5.4 * 10^8$	0.0005	0.0002	$10^{-8}$	40h

**TABLE 2.2:** Erreur relative sur le maximum de la contrainte de Von-Mises et sur le déplacement vertical en fonction du nombre de niveaux utilisés pour le calcul. Le niveau grossier est maillé à l'aide de  $17 * 17 * 9$  points et possède un pas de maillage de  $a$ . Le niveau 7 est maillé à l'aide de  $1025 * 1025 * 513$  points et possède un pas de maillage de  $a/64$ .

La stratégie de raffinement de maillage est maintenant utilisée pour réaliser les mêmes calculs et montrer son efficacité. Le raffinement de maillage est effectué selon la direction  $y$ . Dû à la symétrie du problème, les résultats obtenus sont les mêmes selon la direction  $x$ . Afin de passer d'un niveau  $i$  vers un niveau plus fin localisé  $i + 1$  le rapport de longueur est de  $3/4$  selon  $y$ . La figure 2.12 compare les solutions obtenues sur le déplacement  $\bar{w}$  à l'aide de stratégies locale et globale. 2 niveaux globaux et 4 locaux sont utilisés pour le calcul local qui est comparé au calcul global utilisant 6 niveaux. Le niveau 6 possède un pas de maillage  $h$  dont la valeur est  $a/32$ .



**FIGURE 2.12:** Déplacements  $w$  en surface pour le problème de Hertz : représentation et comparaison via l'écart relatif  $\Theta$  entre la solution globale 6 niveaux et une solution locale utilisant 2 niveaux globaux et 4 niveaux fins. Le massif est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ , le niveau 6 possède un pas de  $a/32$ .

La courbe de gauche présentée sur la figure 2.12 montre le tracé des deux solutions (locale et globale). Celle de droite présente l'écart relatif  $\Theta$  entre ces solutions, en considérant la solution globale comme solution de référence.

Cette dernière courbe montre que l'erreur introduite par la technique de raffinement de maillage est très faible, puisqu'elle est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Le maximum de cette erreur s'élève à  $4.8 * 10^{-3}$ . Afin de présenter tous les avantages de la technique de raffinement

de maillage utilisée, les gains en termes de temps de calcul (CPU) ainsi que l'erreur maximale obtenue pour un nombre choisi de niveaux raffinés par rapport au même calcul effectué en stratégie globale sur 6 niveaux ( $\|\bar{w}_{loc} - \bar{w}_{glo}\|_\infty$ ) sont présentés dans le tableau 2.3. Ce tableau présente également le gain en temps CPU dans le cas d'une stratégie de raffinement selon les 3 directions de l'espace (rapport de longueur de 3/4 selon  $x$  et  $y$ , de 1/2 selon  $z$ ).

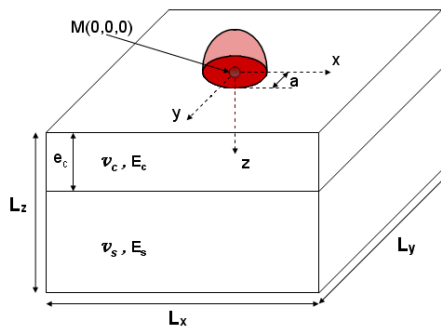
Niveaux fins	$\ \bar{w}_{loc} - \bar{w}_{glo}\ _\infty$	Gain CPU 1D	Gain CPU 3D
1	$2.5 * 10^{-4}$	1.5	3.2
2	$1.1 * 10^{-4}$	4.5	9.1
3	$2.3 * 10^{-3}$	14.5	38.7
4	$3.2 * 10^{-3}$	52.8	142.5
5	$4.6 * 10^{-3}$	124.6	346.2

**TABLE 2.3:** Écart maximal par rapport à un calcul 6 niveaux global sur le déplacement  $\bar{w}$  en surface obtenu en utilisant un raffinement et gain de temps par rapport au nombre de niveau fins localisés utilisés, suivant une ou trois directions.

Le tableau 2.3 montre l'efficacité de la technique de raffinement de maillage, tant sur la précision des résultats obtenus que sur la vitesse de résolution. Ces résultats permettent de valider la stratégie de raffinement selon la direction  $y$ . Des études analogues validant la stratégie selon toutes les directions de l'espace sont présentées en annexe C de ce rapport.

## 2.7.2 Matériaux revêtus

Le modèle est maintenant utilisé pour la simulation de massifs revêtus. Les résultats sont comparés à des solutions de la littérature. Soit un revêtement de module de Young et de coefficient de Poisson ( $E_c, \nu_c$ ) constant, d'épaisseur  $e_c$ , déposé sur un substrat ( $E_s, \nu_s$ ). Les dimensions du domaine sont  $L_x, L_y, L_z$ . La performance de l'algorithme 3D-MG est analysée au travers d'une étude paramétrique décrivant l'influence de l'épaisseur de revêtement ( $0.01 < e_c/a < 10$ ) et des propriétés mécaniques ( $0.005 < E_c/E_s < 10$ ) sur les paramètres de contact ( $P_h, a$ ). La modélisation du problème est représentée sur la figure suivante :



Validation : massifs revêtus

Dimensions du solide :  $L_x * L_y * L_z$

Nombre de niveaux : 8

Pas de maillage sur le niveau grossier : 1

Stratégie de calcul globale

Le problème de contact a été résolu entre une bille rigide et un massif revêtu ( $\nu = 0.3$ ,  $E_c, E_s$ ). Les notations utilisées sont les suivantes :

- $P_h$  et  $a$  représentent la pression maximale et le rayon de contact.
- $P_{hc}$  et  $a_c$  représentent la pression maximale et le rayon de contact dans le cas où  $e_c = L_z$ .
- $P_{hs}$  et  $a_s$  représentent la pression maximale et le rayon de contact dans le cas où  $e_c = 0$ .

Ce problème a notamment été étudié par Plumet et Dubourg [PLU 98b] qui ont utilisé les transformées de Fourier discrètes pour des rapports de propriétés moins importants ( $0.5 < E_c/E_s < 3$ ) et par Fretigny et Chateauminois [FRE 07] qui ont développé une méthode semi-analytique pour les revêtements mous ( $0.1 < E_c/E_s < 0.01$ ).

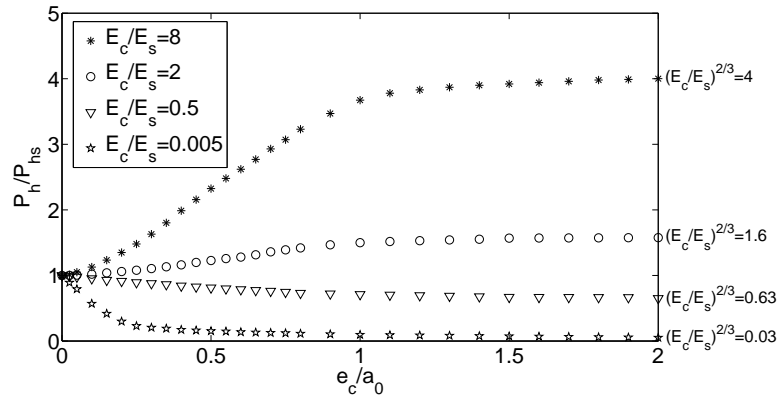
Les calculs ont été réalisés en utilisant jusqu'à 8 niveaux afin d'avoir au moins 9 points dans l'épaisseur du revêtement sur le niveau le plus fin. 3 ou 4 niveaux locaux sont utilisés pour les calculs afin de réduire les coûts numériques. Un résidu de  $10^{-8}$  sur la solution est considéré pour la convergence de l'algorithme.

La taille du massif utilisée pour le calcul dépend des propriétés du revêtement ( $e_c, E_c/E_s$ ) afin de pouvoir visualiser entièrement la géométrie réelle du contact sur le niveau le plus fin. La théorie de Hertz permet de constater que pour les grands rapports de  $e_c/a$ , le rayon réel de contact  $a/a_s$  tend vers le rapport  $(E_s/E_c)^{1/3}$  et la pression  $P_h/P_{hs}$  vers  $(E_c/E_s)^{2/3}$ . Le nombre de niveaux utilisés pour les calculs permet d'obtenir jusqu'à  $1025 \times 1025$  points en surface pour mailler la zone de contact.

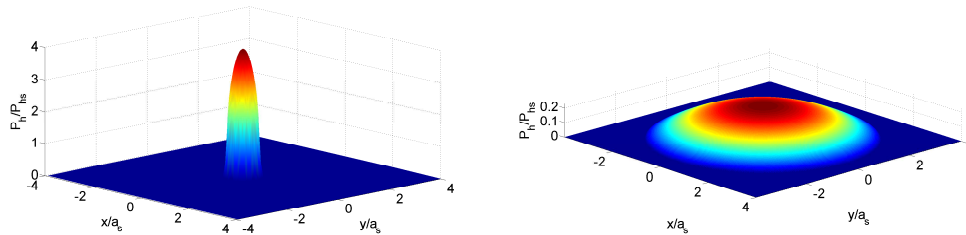
Les coefficients d'influence sont tout d'abord déterminés à l'aide du modèle 3D-MG puis les champs de pression sont calculés à l'aide du logiciel de résolution du contact utilisant la technique de gradients conjugués [SAI 10]. L'évolution de la pression adimensionnée en fonction de l'épaisseur du revêtement pour plusieurs rapports de propriétés est présentée sur la figure 2.13. Deux cas particuliers de champ de pression sont présentés sur la figure 2.14 à titre d'illustration. Ces cas considèrent un revêtement dur de propriété  $E_c/E_s=8$  pour un ratio  $e_c/a_s=2$  et un revêtement mou de propriété  $E_c/E_s=0.005$  pour un ratio  $e_c/a_s=0.25$ . Nous précisons que dans le cas des grands rapports de propriétés entre revêtements et substrats, afin d'obtenir une convergence optimale de l'algorithme de résolution, il est nécessaire d'implémenter des traitements spéciaux au niveau de l'interface [ALC 81]. Une approche générale prenant en compte ces difficultés pourrait être l'utilisation des techniques multigrilles algébriques (AMG) [RUG 85, BRI 00, TRO 01].

Les résultats obtenus pour des revêtements épais sont en accord avec le comportement asymptotique donné par la théorie de Hertz. Le tableau 2.4 présente les configurations extrêmes utilisées pour les calculs. Ceux-ci ont été menés en considérant des résidus de  $10^{-8}$  sur la solution.

Les résultats présentent un bon accord avec les résultats de Plumet, pour des rapports de propriétés  $E_c/E_s$  compris entre ( $0.5 < E_c/E_s < 3$ ), validant le modèle dans le cas de revêtements à propriétés constantes.



**FIGURE 2.13:** Évolution de la pression de contact  $P_h/P_{h_s}$  en fonction de l'épaisseur de revêtement  $e_c/a_s$  pour différents rapports de modules de Young  $E_c/E_s$  [0.005 ; 0.5 ; 2 ; 8].



**FIGURE 2.14:** Exemples de champs de pressions obtenus dans le cas d'un revêtement dur :  $E_c/E_s=8 - e_c/a_s=2$  et d'un revêtement mou  $E_c/E_s=0.005 - e_c/a_s=0.25$ .

### 2.7.3 Matériaux à gradients de propriétés

Après avoir étudié un massif homogène et des massifs revêtus, le cas d'un matériau à gradient de propriété est maintenant abordé afin de valider le modèle dans le cas d'une variation du module de Young du matériau selon la profondeur. Giannakopoulos et Suresh [GIA 97b] ont donné des solutions analytiques dans le cas d'une variation exponentielle ou d'une variation selon une loi puissance du module de Young dans la profondeur du massif, i.e.  $E = E(z)$ . Le cas d'une variation exponentielle est présentée ici. La variation selon une loi puissance n'a pas été étudiée car elle considère un module de Young nul en surface, ce qui a peu de sens physique.  $E$  varie selon une loi exponentielle donnée par la relation (2.32) :

$e_c/a_s$	Nombre de points grille fine	Nombre de points	Temps CPU	Résidu
0.1	$3.5 * 10^8$	$8.0 * 10^8$	6 heures	$10^{-8}$
2	$8.5 * 10^6$	$1.8 * 10^7$	15 minutes	$10^{-8}$

**TABLE 2.4:** Configurations numériques extrêmes utilisées durant les calculs 3D multi-grilles pour des matériaux revêtus.

$$E(\bar{z}) = \pi e^{\bar{\alpha}\bar{z}} \quad (2.32)$$

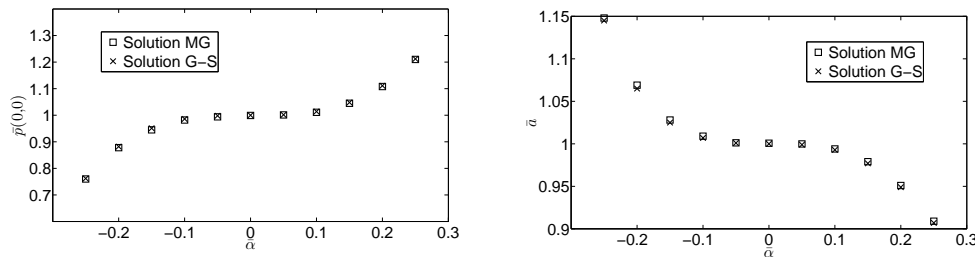
La pression et le rayon de contact sont approximés à l'aide des relations suivantes :

$$\bar{p}(r) \approx \sqrt{1 - \bar{r}^2} \quad \text{for } 0 \leq r \leq a \quad (2.33)$$

$$\bar{a}^3 \approx \left(1 + \frac{C_1 \bar{\alpha}^3}{3}\right)^{-1} \quad (2.34)$$

Avec  $\bar{\alpha} = a_0\alpha$ ,  $\bar{z} = z/a_0$ ,  $\bar{p}(r) = p(r)/p_{h0}$ ,  $\bar{a} = a/a_0$  et  $C_1 = 403.5$ . Dans le cas où  $\alpha = 0$  les équations sont ramenées au cas Hertzien classique. Dans ce cas, le rayon de contact prend la valeur :  $a_0=1$ .

Des calculs de coefficients d'influences ont été réalisés à partir du modèle 3D-MG dans le cas où  $-0.25 \leq \bar{\alpha} \leq 0.25$  puis la résolution du contact a été effectuée afin de calculer les pressions et aires de contact. Pour les calculs MG, 8 niveaux ont été utilisés avec un raffinement de maillage sur les 3 derniers niveaux. Le volume considéré possède une taille élémentaire de  $[16a_0; 16a_0; 8a_0]$  et le niveau le plus fin couvre une zone de taille  $[2a_0; 2a_0; a_0]$  avec un pas de maillage  $a_0/128$ . Un résidu de  $10^{-8}$  sur la solution a été considéré lors des calculs. La pression maximale et le rayon de contact ont été comparés aux solutions de référence (2.33)-(2.34). Les résultats sont présentés sur la figure 2.15.



**FIGURE 2.15:** Comparaisons des rayons et des pressions de contact obtenus pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  selon Giannakopoulos-Suresh (GS) et le modèle MG dans le cas d'un revêtement à gradient de propriétés suivant une loi exponentielle :  $E(\bar{z}) = \pi e^{\bar{\alpha}\bar{z}}$

Sur la figure 2.15, la courbe de gauche présente l'évolution de la pression maximale par rapport au coefficient  $\bar{\alpha}$  et celle de droite l'évolution du rayon de contact par rapport à ce même coefficient. On constate une assez bonne corrélation entre les deux solutions que l'on peut quantifier à partir de l'écart relatif entre celles-ci. Cet écart est de l'ordre du pourcent pour toutes les valeurs de  $\bar{\alpha}$  choisies. Cette étude permet ainsi de montrer la fiabilité du logiciel pour le traitement des variations de propriété selon la profondeur.

## 2.7.4 Bilan

Différents tests de validation du modèle 3D-MG ont été réalisés. Les résultats obtenus ont été comparés avec des modèles analytiques développés pour des solides homogènes

ou des matériaux à gradient de propriétés. Les chargements mécaniques utilisés étaient des distributions de pressions Hertziennes avec frottement nul. La très bonne corrélation entre les résultats a permis de valider le modèle MG ainsi que la résolution du problème de contact par les techniques du gradient conjugué. Dans le cas de revêtements minces, c'est-à-dire pour un rapport entre l'épaisseur du revêtement et la demi largeur de contact inférieure à 2, le champ de pression du problème de contact est inchangé dans le cas revêtu par rapport à celui calculé sans tenir compte de la présence du revêtement [LER 89a, PLU 98a]. Le modèle développé prend en charge la possibilité de déterminer ce champ de pression pour des calculs à charge imposée.

## 2.8 Résultats

Le modèle 3D multigrilles ayant été présenté et validé dans les sections précédentes, différents résultats obtenus à partir de celui-ci vont maintenant être présentés. Ces résultats concernent à la fois des massifs revêtus, des couches à gradients de propriétés ou encore des massifs hétérogènes. Une application sur des matériaux revêtus est tout d'abord présentée : plusieurs comparaisons entre des résultats obtenus via le modèle 3D-MG et des essais réalisés en laboratoire sur une couche polymère ont été effectuées. Une seconde étude concernant les matériaux à gradients de propriétés et leurs avantages par rapport à un matériau revêtu est ensuite présentée avant de traiter le cas plus général des matériaux hétérogènes.

### 2.8.1 Expérimentations sur des matériaux revêtus

Des résultats obtenus à l'aide du modèle vont maintenant être confrontés à des résultats obtenus expérimentalement en laboratoire dans le cas d'indentations réalisées sur un système revêtement/substrat. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec Christian Gauthier, Vincent le Houerou et Thibaud Chatel de l'Institut Charles Sadron (ICS) à Strasbourg.

#### 2.8.1.1 Matériaux utilisés

Les systèmes revêtement/substrat utilisés dans cette étude sont des combinaisons réalisées entre les composants suivants : de l'époxy, du PDMS, du CR39 et du verre minéral. Deux types d'époxy, préparés à l'aide d'une base DER-330, ont été utilisés. L'un d'entre eux possède une température de transition vitreuse située autour de 60 °C (Epoxy60) et l'autre, préparé à l'aide d'une proportion spécifique de ED-600 et de ED-2003, une température de transition vitreuse située autour de 0 °C (Epoxy0). Les différents essais ont été réalisés pour des conditions parfaitement élastiques, et, aucun phénomène de plasticité n'a été observé. Les modules de Young des différents matériaux ont été mesurés par la technique DMTA (étude de la réponse du matériau à une sollicitation mécanique dynamique) pour une fréquence de 0.06 Hz. Cette valeur correspond à la moyenne de trois mesures d'indentations. L'épaisseur des couches a

quant à elle été mesurée par profilométrie. Le tableau 2.5 résume les différents matériaux utilisés ainsi que leurs caractéristiques.

Substrat	$E_s$ (MPa)	Revêtement	$E_c$ (MPa)	$E_c/E_s$	T (°C)	Nom de l'échantillon. Film fin (*)	Nom de l'échantillon. Film épais (*)
CR39	2190	Epoxy0	7	0.0032	30	A(17.5)	B(360)
Epoxy60	2130	Epoxy0	7	0.0033	30	C(320)	D(890)
Epoxy0	6.5	PDMS	1.7	0.46	30	E(142.5)	F(3430)
Verre	70000	Epoxy0	1380	0.02	-30✕	G(50)	H(1570)

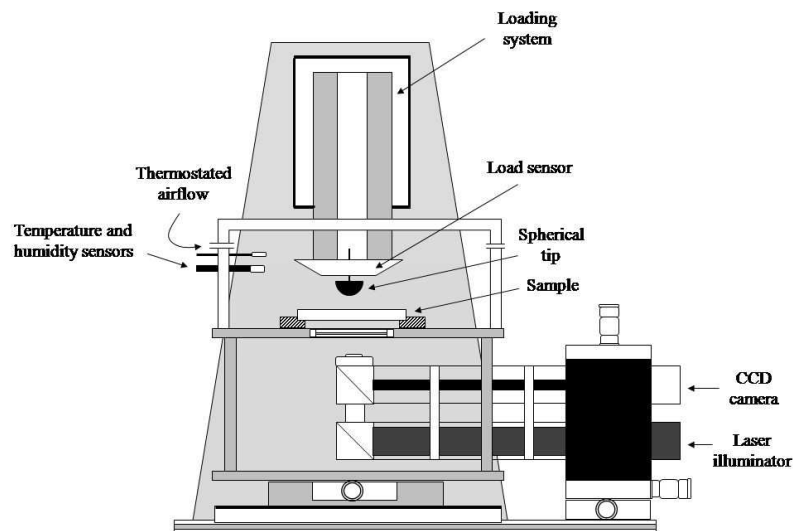
**TABLE 2.5:** tableau des différents échantillons

(\*) épaisseur de revêtement en  $\mu\text{m}$ .

✕ test réalisé à  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  afin d'obtenir de manière précise le module de Young élastique.

### 2.8.1.2 Procédure expérimentale

La figure 2.16 présente le micro-indenteur développé à l'ICS et utilisé afin d'étudier le comportement en surface des différents matériaux.



**FIGURE 2.16:** Schéma du micro-indenteur utilisé pour les expériences [CHA 12].

Ce micro-indenteur [CHA 11] permet de réaliser des observations in-situ de l'aire de contact durant toute la durée des tests et par conséquent permet de déterminer l'aire réelle de contact sans avoir à utiliser de modèle intermédiaire. Les essais consistent à appliquer un effort normal constant à un indenteur en contact avec la surface d'un

système revêtement/surface et d'étudier in-situ la géométrie de l'aire de contact. Les indenters utilisés sont des lentilles en verre ayant six rayons différents. 16 niveaux de charge ont été considérés pour les essais. Ces données sont récapitulées dans les tableaux 2.6 et 2.7.

Rayons des indenters (mm)	0.5	1.5	2.5	9.8	25.9	51.7
---------------------------	-----	-----	-----	-----	------	------

**TABLE 2.6:** Rayons  $R$  des indenters, précision  $0.1 \mu\text{m}$

Charges(N)	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95	1
	1.25	1.4	1.55	1.7	1.85	2	2.15	2.25

**TABLE 2.7:** Charges appliquées (valeurs moyennes), précision  $0.05 \text{ N}$

Les essais ont été menés à température ambiante sauf pour les tests réalisés sur les échantillons G et H pour lesquels une température de  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$  a été imposée. 96 tests ont ainsi été réalisés pour chacun des systèmes revêtement/substrat et une procédure de post-traitement, basée sur un logiciel d'analyse d'image développé à l'ICS, a été conduite afin d'obtenir les différentes géométries réelles de contact.

### 2.8.1.3 Théorie et analyse

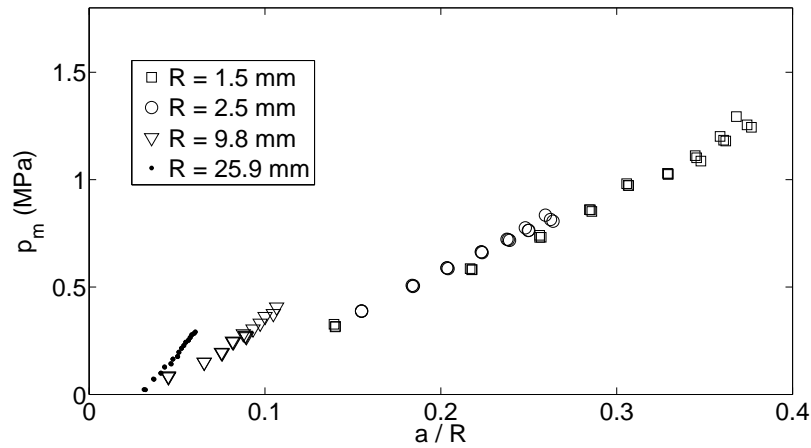
La théorie de Hertz ne peut pas être utilisée afin d'étudier le comportement sous charge d'un massif revêtu pour lequel des phénomènes d'adhésion sont mis en jeu. En effet ces phénomènes, tout comme l'épaisseur du revêtement, peuvent modifier les paramètres de contact (pression et rayon) et par conséquent modifier les champs de contraintes résultants. Le principal effet dû au revêtement est l'augmentation ou la diminution du rayon de contact, par rapport à la solution Hertzienne, et l'augmentation ou la diminution correspondante de la pression. Concernant le phénomène d'adhésion, le principal effet résultant est une augmentation de l'aire de contact pour une charge donnée. Un effort doit alors être fourni afin de séparer les surfaces en contact.

Pour l'échantillon D, la figure 2.17 représente l'évolution de la pression moyenne en fonction du rayon de contact adimensionné  $a/R$ . Pour chaque rayon d'indenteur  $R$ , on remarque que les effets d'adhésions sont mis en évidence et qu'ils ne peuvent pas être négligés. En effet, on observe un rayon de contact résiduel pour un chargement nul.

Johnson et al. [JOH 71] puis Derjaguin et al. [DER 75] ont respectivement proposé les modèles JKR et DMT afin de traiter le phénomène d'adhésion dans et en dehors de la zone de contact, considérant les forces d'adhésion de Van der Waals. La transition entre ces deux modèles a été décrite par Maugis [MAU 92] et plus récemment par Greenwood [GRE 97]. Le modèle JKR a été retenu pour cette étude.

Ce modèle prend en compte l'augmentation du rayon de contact en ajoutant un effort d'adhésion à l'effort appliqué. Le rayon de contact  $a$  devient :





**FIGURE 2.17:** Pression moyenne  $p_m$  en fonction de  $a/R$  pour l'échantillon D

$$a = \left( \frac{3(P + P_{ad})R}{4E_{equ}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.35)$$

Où  $P$  est l'effort appliqué et  $P_{ad}$  la charge fictive. Le modèle JKR donne l'expression de  $P_{ad}$  en fonction de l'énergie d'adhésion  $\gamma$  du contact sphère/plan :

$$P_{ad} = \sqrt{8\pi E_{equ} \gamma a^3} \quad (2.36)$$

La charge appliquée est :

$$P = \frac{4E_{equ}}{3R} a^3 - P_{ad} \quad (2.37)$$

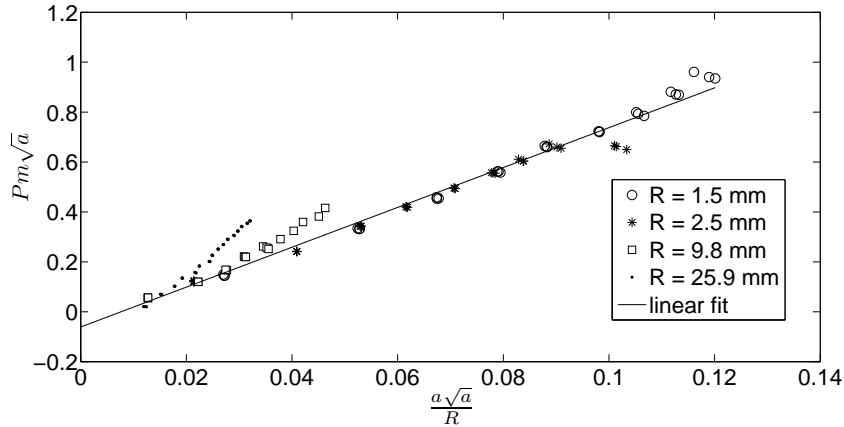
En termes de pression moyenne cette équation peut s'écrire :

$$p_m \sqrt{a} = \frac{4E_{equ}}{3\pi} \frac{a\sqrt{a}}{R} - \sqrt{\frac{8E_{equ}\gamma}{\pi}} \quad (2.38)$$

L'évolution linéaire de  $p_m \sqrt{a}$  en fonction de  $a\sqrt{a}/R$  donné par l'équation (2.38) est tracée pour l'échantillon D sur la figure 2.18.

Comme différents rayon d'indenteur ont été considérés, l'influence du module de Young et de l'énergie de surface sur l'aire de contact peut correctement être identifié. La pente de la régression linéaire obtenue fournit directement le module de Young équivalent. Puis, l'intersection avec l'axe  $y$  permet d'obtenir la valeur  $\gamma$ , qui représente l'énergie d'adhésion. Cette valeur peut s'écrire à l'aide de l'équation de Dupré :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12} \quad (2.39)$$



**FIGURE 2.18:** Pression moyenne  $p_m\sqrt{a}$  en fonction de  $a\sqrt{a}/R$  et régression linéaire pour l'échantillon D

Avec  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_{12}$  respectivement les énergies de surface du matériau 1, de l'indenteur en verre (environ  $260.0 \text{ mJ/m}^2$  [FUJ 01]) et de l'interface. En utilisant l'approximation de Fowkes [FOW 63],  $\gamma_{12}$  s'écrit :

$$\gamma_{12} = 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \quad (2.40)$$

Finalement, en substituant l'équation (2.36) dans l'équation (2.37), on obtient la charge fictive  $P_{ad}$ .

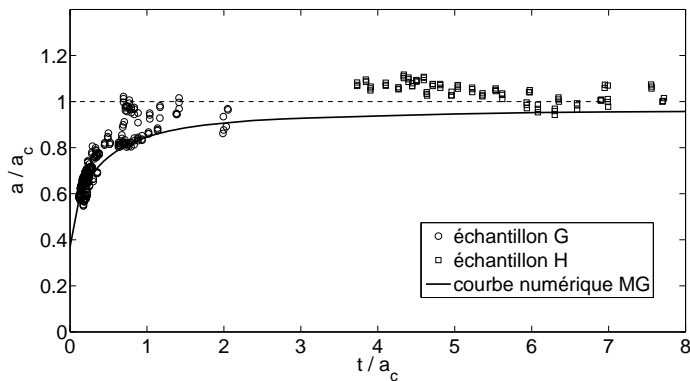
$$P_{ad} = 3\pi\gamma R \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2P}{3\pi\gamma R}} \right) \quad (2.41)$$

Le modèle d'adhésion n'étant pas inclus dans le modèle numérique développé, les simulations numériques ont été réalisées pour les échantillons G et H uniquement, où aucun phénomène d'adhésion n'est observable.

#### 2.8.1.4 simulations numériques

Pour le système revêtement/substrat H/G, des études numériques et expérimentales ont été menées afin de déterminer successivement l'énergie d'adhésion  $\gamma$  et le module de Young du revêtement analysé. Les résultats sont adimensionnés par rapport à  $a_c$  (théorie de Hertz dans le cas d'un revêtement épais  $e_c \gg a_c$ ) Pour les calculs, des domaines de taille  $[32a_s; 32a_s; 16a_s]$  ou  $[16a_s; 16a_s; 8a_s]$  ont été considérés afin de visualiser entièrement l'aire de contact et l'épaisseur du revêtement sur le niveau le plus fin. 8 niveaux ont été utilisés, conduisant à avoir 100 millions de points sur le niveau raffiné le plus fin et au moins 9 points dans l'épaisseur du revêtement.

**Epoxy0 à  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$  (échantillons G et H)** Les échantillons G et H sont constitués d'un revêtement en epoxy0 déposé sur un substrat en verre. Pour ces échantillons les expériences ont été menées à  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$  afin d'augmenter la valeur du module de Young de l'epoxy0, réduisant ainsi l'écart entre le module de Young du revêtement et celui du substrat. Le rapport vaut environ  $E_c/E_c = 0.02$ . L'échantillon H est ici pris comme référence pour le calcul du module de Young et de l'énergie d'adhésion. Le module de Young pour le revêtement en epoxy0 déterminé à l'aide des valeurs expérimentales est  $E_c = 1000\text{ MPa}$ . La température utilisée durant l'essai engendre la perte des effets d'adhésion, avec  $\gamma \simeq 0\text{ mJ/m}^2$ . Les résultats obtenus pour ces essais et confrontés aux résultats numériques sont présentés sur la figure 2.19.



**FIGURE 2.19:** Évolution adimensionnée du rayon de contact  $a/a_c$  en fonction de l'épaisseur du revêtement  $e_c/a_c$  avec  $E_c = 1000\text{ MPa}$  pour les échantillons G et H

Les résultats montrent une corrélation plutôt bonne entre les résultats pour toutes les valeurs de  $e_c/a_c$  et confirment l'absence d'adhésion. Cependant on constate une plus grande dispersion dans les résultats expérimentaux, qui peut s'expliquer par les difficultés de mesure à basse température.

### 2.8.1.5 Conclusion

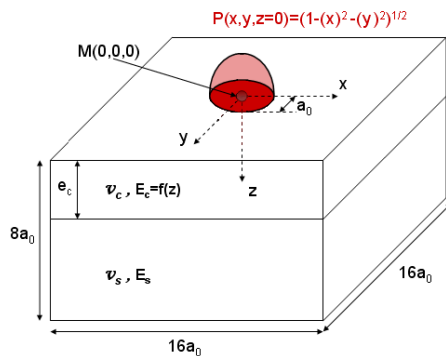
Pour cette étude, nous avons travaillé en collaboration avec l'ICS de Strasbourg. Leur appareil de mesure est capable d'observer de manière précise l'aire de contact entre un indenteur sphérique et une surface plane. Des expériences ont été menées sur des systèmes revêtement/substrat ayant des ratios de propriétés importants et mettant en jeu des phénomènes d'adhésion. Les expériences ont permis de déterminer l'énergie d'adhésion de surface et le module de Young du revêtement. Les comparaisons réalisées à l'aide des résultats obtenus expérimentalement et numériquement, pour un système revêtement/substrat avec absence d'adhésion, montrent une bonne corrélation. Afin de pouvoir traiter avec les autres systèmes présentés, il faudrait inclure dans le modèle numérique un modèle d'adhésion (JKR où DMT par exemple).

## 2.8.2 Matériaux à gradient de propriétés

L'utilisation de matériaux à gradient de propriétés est un moyen pour réduire les fortes discontinuités de contraintes à l'interface entre un revêtement et un substrat et par conséquent augmenter la durée de vie des substrats. Les résultats présentés dans cette section ont pour but de confronter les matériaux revêtus aux matériaux à gradient de propriétés et d'illustrer le fait que le modèle 3D-MG permet de prendre en compte n'importe quel type de variation de propriétés à l'intérieur du matériau. L'étude présentée considère un rapport de module  $E_c/E_s$  de 3 entre la surface du revêtement et l'interface. Un chargement de type hertzien est appliqué en surface avec  $P_{h0} = 1$  et  $a_0 = 1$ . Trois types de variation de propriétés vont être confrontés : un revêtement avec

- (1) des propriétés constantes,
- (2) une variation linéaire du module de Young,
- (3) une variation sinusoïdale du module de Young caractérisée par sa longueur d'onde  $l$ .

L'épaisseur du revêtement choisie est  $z/a_0 = 0.5$ . 9 niveaux dont 3 locaux ont été utilisés pour les calculs sur un massif de taille  $[16a_0; 16a_0; 8a_0]$ , permettant d'avoir 65 points dans l'épaisseur du revêtement (le niveau 1 possède un pas de  $2a_0$ ). Cette modélisation est représentée sur la figure suivante :



Modélisation : gradient de propriété

Chargement hertzien :  $P_{h0} = 1, a_0 = 1$

Dimensions du solide :  $[16a_0; 16a_0; 8a_0]$

Nombre de niveaux : 9

6 niveaux globaux, 3 niveaux locaux

Pas de maillage sur le niveau grossier :  $2a_0$

Les résultats sont présentés dans les trois cas.

### 2.8.2.1 module de Young constant

Les figures 2.20 et 2.21 présentent les contraintes de Von-Mises dans le plan  $(x, y = 0, z)$  pour un chargement normal et un chargement avec frottement.

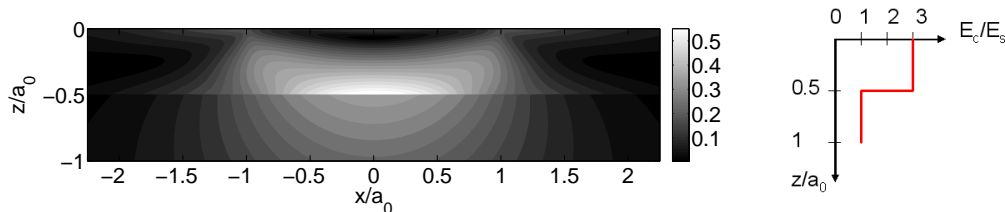
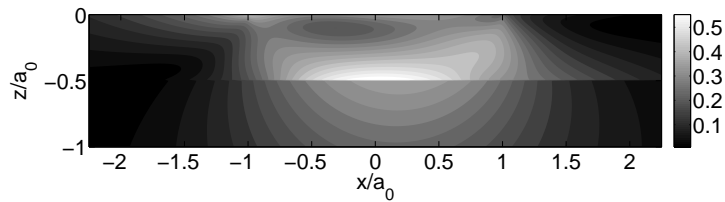


FIGURE 2.20:  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu ( $E_c/E_s = 3, e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact normal pur  $f = 0$

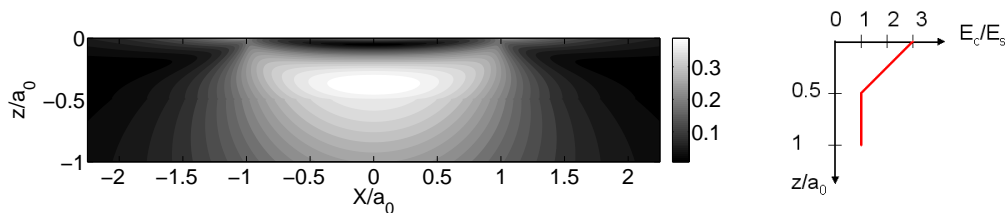


**FIGURE 2.21:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu ( $E_c/E_s = 3$ ,  $e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact avec glissement  $f = 0.3$

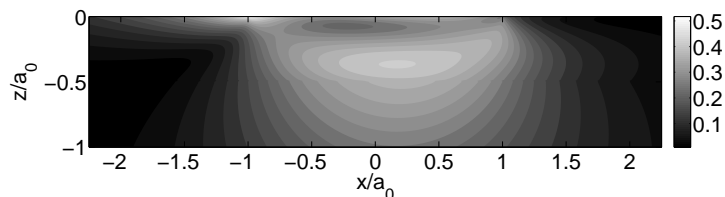
Ces figures mettent clairement en évidence la discontinuité des contraintes au niveau de l'interface revêtement/substrat. Le saut de propriété abrupte à l'interface est à l'origine de la discontinuité dans la contrainte générant des risques importants dans le matériau. Ces risques sont d'autant plus importants que le rapport des modules de Young entre le revêtement et le substrat sont grands ou que l'épaisseur de revêtement est faible devant le rayon de contact. L'utilisation d'un matériau à gradient de propriétés permet de réduire ces risques.

### 2.8.2.2 Revêtement avec variation linéaire selon la profondeur

Une variation linéaire du module de Young entre la surface ( $E_c/E_s = 3$ ) et l'interface ( $E_c/E_s = 1$ ) est maintenant considérée. Les contraintes de Von-Mises sont représentées sur les figures 2.22 et 2.23.



**FIGURE 2.22:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu avec variation linéaire de  $E_c$  ( $E_c/E_s = 3$ ,  $e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact normal pur  $f = 0$



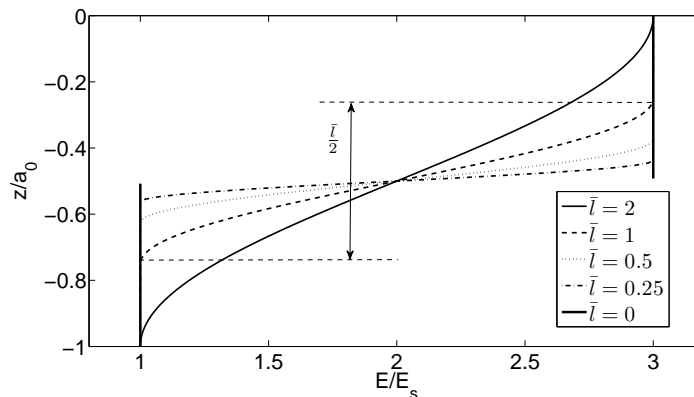
**FIGURE 2.23:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu avec variation linéaire de  $E_c$  ( $E_c/E_s = 3$ ,  $e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact avec glissement  $f = 0.3$

Les résultats obtenus montrent une forte diminution de la discontinuité des contraintes de Von-Mises au niveau de l'interface comparé aux résultats précédents. De plus, la

valeur de la contrainte maximale de Von-Mises diminue de manière significative. Les performances tribologiques du matériau s'en trouvent par conséquent améliorées. Ce type de solution permet de limiter les risques de fissures au niveau de l'interface tout en conservant une bonne protection de la surface sous un contact normal ou glissant.

### 2.8.2.3 Revêtement avec variation sinusoïdale

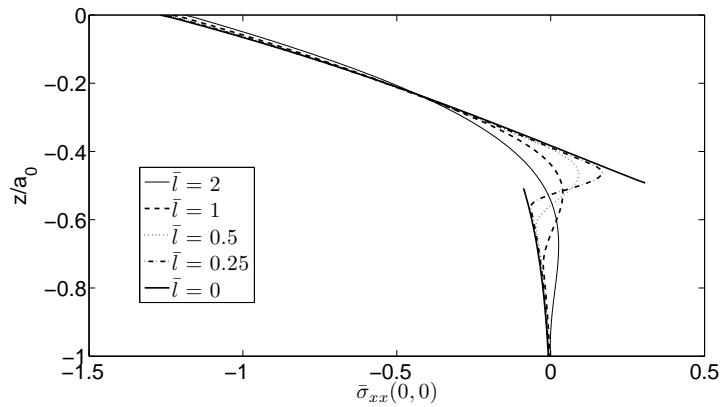
La simulation est menée pour une variation sinusoïdale du module de Young entre la surface du revêtement et l'interface. Ce travail a été réalisé afin d'obtenir une meilleure compréhension du rôle du revêtement à gradient de propriétés sur la contrainte de Von-Mises et par conséquent sur les risques d'endommagement dans le matériau. La modélisation de la variation du module de Young est présentée sur la figure 2.24. La variation est caractérisée par la longueur d'onde du sinus  $\bar{l}$  qui représente la longueur de transition entre le revêtement et le substrat.



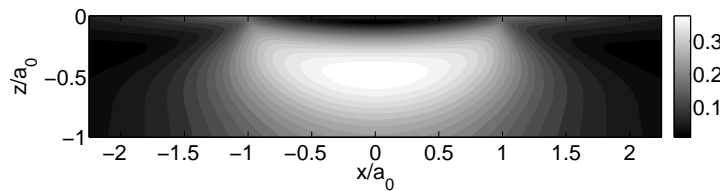
**FIGURE 2.24:** Variation sinusoïdale du module de Young,  $E(z) = (E_s - E_c)/2 * \sin(2\pi/\bar{l} * (z/t - 1)) + (E_c + E_s)/2$

Le figure 2.25 représente l'évolution de la contrainte de traction au centre du contact  $\bar{\sigma}_{xx}(x = y = 0)$  pour les différentes longueurs d'onde étudiées en fonction de la profondeur. Un profil continu de la contrainte de traction est obtenu sauf dans le cas où la longueur d'onde est nulle (cas revêtement simple). Au niveau de l'intercouche, la discontinuité disparaît et la contrainte de traction dans le revêtement diminue avec l'augmentation de la longueur d'onde. La contrainte de Von Mises  $\bar{\sigma}_{VM}$  correspondant au cas  $\bar{l} = 2$  est tracée dans le plan  $(x, y = 0, z)$  sur la figure 2.26.

La comparaison avec les contraintes de Von-Mises pour les cas précédents met clairement en évidence les bénéfices de la variation de propriété dans le matériau. Le revêtement simple est le cas le plus critique, dû au saut brutal de propriété au niveau de l'interface. Les processus de fabrication actuels permettent de réaliser des matériaux à gradient de propriétés.



**FIGURE 2.25:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu avec variation sinusoïdale de  $E_c$  ( $E_c/E_s = 3$ ,  $e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact avec glissement  $f = 0.3$



**FIGURE 2.26:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  pour un matériau revêtu ( $E_c/E_s = 3$ ,  $e_c/a_0 = 0.5$ ) lors d'un contact avec glissement  $f = 0.3$

### 2.8.3 Matériaux hétérogènes

Les matériaux hétérogènes sont abordés, comme dernier exemple d'application, avant de clôturer ce chapitre. L'écriture et la discrétisation des équations d'élasticité permet la prise en compte de variations de propriétés selon toutes les directions de l'espace. L'hétérogénéité peut être par exemple la présence d'inclusions dures et/ou ductiles dans un massif homogène.

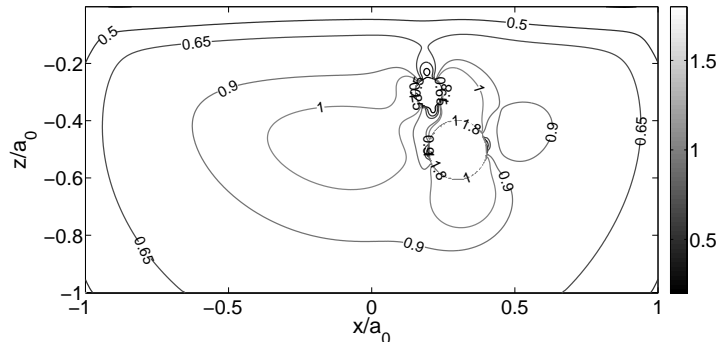
Nous considérons deux inclusions sphériques de différents diamètres possédant des modules de Young respectivement supérieur et inférieur à celui du massif dans lequel elles sont introduites. Les champs de déformations et de contraintes dus à une inclusion ellipsoïdale ont été déterminés initialement par Eshelby [ESH 57]. Plusieurs travaux ont été développés à partir de ces résultats, comme ceux récents de Leroux et al. [LER 10] qui s'intéressent notamment aux problèmes de contact dans des massifs contenant de multiples inclusions de propriétés identiques. Le massif a pour dimensions  $[8a_0; 8a_0; 4a_0]$ .

Les rayons, les modules de Young et la position des inclusions sont respectivement :

Inclusion 1.  $R_{inc1}/a_0 = 0.05$ .  $E_{inc1} = 0.01E$ . ( $x_{inc1}/a_0 = 0.2$ ,  $y_{inc1}/a_0 = 0$ ,  $z_{inc1}/a_0 = 0.3$ ).

Inclusion 2.  $R_{inc2}/a_0 = 0.1$ .  $E_{inc2} = 5E$ . ( $x_{inc2}/a_0 = 0.3$ ,  $y_{inc2}/a_0 = 0$ ,  $z_{inc2}/a_0 = 0.5$ ).

Une pression Hertzienne est appliquée en surface. 8 niveaux sont utilisés pour le calcul en considérant 5 niveaux globaux et 3 niveaux locaux. Le niveau 1 est maillé à l'aide de  $9 * 9 * 5$  points et le pas sur la grille fine est de  $a_0/128$  ce qui permet de mailler les inclusions 1 et 2 à l'aide respectivement de 70000 et 8000 points. Il faut environ une vingtaine de minutes pour obtenir un résidu de  $10^{-8}$  sur ce type de problème sur un PC. Le champ de contrainte de Von-Mises est calculé et représenté dans le plan  $(x, y = 0, z)$  sur la figure 2.27



**FIGURE 2.27:**  $\bar{\sigma}_{VM}$  dans un massif homogène  $[8a_0; 8a_0; 4a_0]$  contenant une inclusion ductile  $E_{inc1} = 0.01E$  et une inclusion dure  $E_{inc2} = 5E$  dans le plan  $(x, y = 0, z)$ .

L'influence des inclusions sur le champ de contrainte global ainsi que leur interaction peuvent être analysées à l'aide des résultats obtenus. On relève une concentration de contraintes importante au niveau de l'inclusion dure. En revanche, les contraintes sont faibles au niveau de l'inclusion ductile. Les maxima se situent aux bords des inclusions à cause des fortes discontinuités entre le matériau et celles-ci. On observe également le profil de contraintes qui est à l'origine du phénomène des papillons de fatigue [DEF 83] autour des inclusions, dont la forme est légèrement modifiée à cause de l'interaction entre celles-ci. Cette application et les précédentes soulignent l'efficacité du logiciel à modéliser n'importe quel type de variation de propriétés. De plus, les coûts numériques restent raisonnables devant le nombre de points et de degrés de libertés utilisés pour les calculs.

## 2.9 Synthèse

Dans ce chapitre, le modèle 3D multigrilles mécanique pour les matériaux homogènes, revêtus, à gradient de propriétés ou hétérogènes a été décrit. Ce modèle repose sur les équations de l'élasticité (dîtes de Lamé) qui sont discrétisées à l'aide de la méthode des différences finies. Le choix de travailler à l'aide des méthodes de différences finies repose sur leur grande flexibilité à modéliser des problèmes hétérogènes et sur leurs compatibilités avec les méthodes multigrilles. L'avantage de ces méthodes par rapport



aux méthodes classiques est leur capacité à maintenir une bonne convergence et des faibles temps de calculs pour des problèmes complexes qui requièrent un grand nombre de degrés de libertés. Cependant, afin de garder une vitesse de convergence acceptable, des méthodes d'optimisation doivent être utilisées. Celles-ci peuvent être du type relaxation locale, traitement particulier des conditions aux limites, interpolation des propriétés sur les différents niveaux ou encore complexification des opérateurs de transfert. Ces améliorations permettent au modèle d'être plus robuste face aux difficultés numériques rencontrées, notamment dans le cas des fortes discontinuités.

Afin de réduire les coûts numériques et d'obtenir des calculs plus précis au niveau de la zone de contact ou de l'interface entre le revêtement et le substrat, une stratégie de raffinement local de maillage a été implémentée dans le modèle. Bien que les niveaux raffinés soient ici fixés par l'utilisateur, il est possible de les déterminer de manière automatique [BIO 10] afin d'atteindre une précision donnée. Cette stratégie a été validée à l'aide d'une étude menée sur un cas académique simple (pression Hertzienne appliquée en surface d'un massif semi-infini).

Puis le modèle a été validé avec des résultats analytiques et numériques issus de la littérature. Les résultats obtenus montrent la capacité du modèle à traiter de nombreux types de problèmes, pour des chargements mécaniques et des propriétés matériaux quelconques. Pour les cas homogènes, revêtus et les couches à gradient de propriétés selon la profondeur, un algorithme de contact, basé sur la méthode du gradient conjugué, peut-être utilisé afin de traiter les problèmes à géométrie et charge imposée.

Les difficultés numériques rencontrées sont dues aux forts gradients de propriétés et aux discontinuités qui requièrent des coûts numériques plus importants. Dans le cadre des expériences réalisées en laboratoire, le modèle a été utilisé afin de résoudre le problème de contact puis comparer les rayons de contact obtenus. En l'absence d'adhésion, une bonne corrélation a pu être observée.

Bien que les aspects mécaniques soient prépondérant dans les problèmes de contact, les aspects thermiques ne doivent pas être négligés car la température peut modifier le comportement global ou local du matériau et engendrer des perturbations au niveau des contraintes. Il est donc important de pouvoir prédire la réponse de ce matériau face à des sollicitations thermiques quelconques.



# Chapitre 3

## Thermique

*Dans ce troisième chapitre nous présentons le problème thermique au travers de l'équation et des hypothèses utilisées. Des cas de validation seront présentés, ainsi que des résultats obtenus pour des systèmes revêtement/substrat pour lesquels les revêtements ont des propriétés constantes, avant de conclure par le développement d'un modèle thermo-élastique élaboré à l'aide des modèles mécaniques et thermiques.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle 3D thermique</b>	<b>75</b>
3.2.1	Équation de la chaleur	76
3.2.2	Conditions aux limites thermiques	76
3.2.3	Adimensionnement	77
3.2.4	Discretisation	78
<b>3.3</b>	<b>Validation</b>	<b>81</b>
3.3.1	Modélisation du problème	82
3.3.2	Massif homogène - Différents flux - Régime établi	83
3.3.3	Massif homogène - Flux bande - Régime établi - Différents Péclets	86
3.3.4	Calculs et comparaisons FFT	88

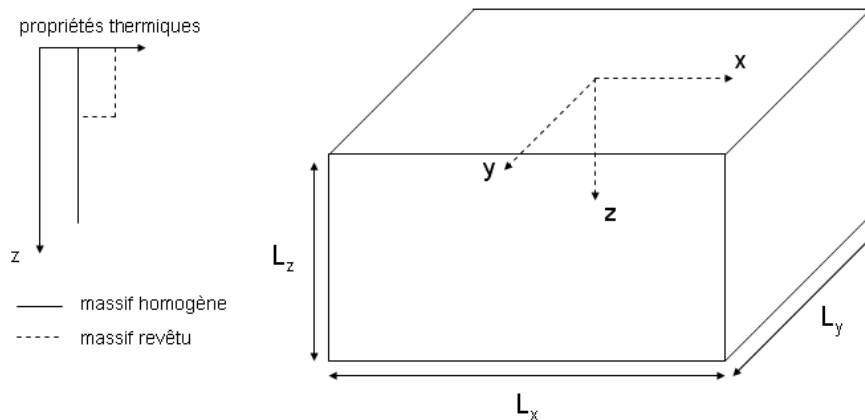
---

3.3.5	Validation : massifs revêtus . . . . .	89
3.3.6	Synthèse . . . . .	90
<b>3.4</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>91</b>
3.4.1	Massif homogène et flux quelconque . . . . .	91
3.4.2	Systèmes revêtement/substrat . . . . .	95
3.4.3	Conclusion . . . . .	99
<b>3.5</b>	<b>Modèle 3D thermo-élastique . . . . .</b>	<b>100</b>
3.5.1	Introduction . . . . .	100
3.5.2	Équations de la thermo-élasticité . . . . .	100
3.5.3	Conditions aux limites thermo-élastiques . . . . .	101
3.5.4	Discrétisation des équations de la thermo-élasticité . . . . .	101
3.5.5	Validation . . . . .	102
3.5.6	Application . . . . .	103
3.5.7	Conclusion . . . . .	105
<b>3.6</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>106</b>

---

### 3.1 Introduction

Les échanges thermiques jouent un rôle important dans les problèmes de contact. Ils ont une influence sur les propriétés mécaniques et thermiques des matériaux, ainsi que sur les champs de déformations et de température. Déterminer le champ de température au cours du temps est donc un enjeu important car la température peut modifier les propriétés des matériaux mis en jeux. Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le modèle 3D multigrilles, sa validation ainsi que ses performances au travers de calculs mettant en jeu des problèmes mécaniques. Les techniques multigrilles vont être également employées pour résoudre l'équation de la chaleur. La configuration utilisée ici est présentée sur la figure 3.1. Le domaine d'étude est un volume fini qui peut être homogène ou revêtu.



**FIGURE 3.1:** Configuration et variations de propriétés pour le problème thermique

Nous allons présenter la mise en équation du problème, les conditions aux limites et la discrétisation utilisée pour la résolution. Comme dans l'étude précédente, une section sera attachée à la validation du modèle et ses performances avant de présenter diverses applications mettant en jeux plusieurs paramètres propres au problème thermique. Enfin, nous terminerons ce chapitre par la mise en place du modèle thermo-élastique, réalisé en combinant les deux modèles développés jusqu'alors.

### 3.2 Modèle 3D thermique

Dans cette première partie, nous allons présenter le modèle thermique basé sur l'équation de la chaleur de Fourier. La mise en équation est réalisée dans le cas tridimensionnel en considérant les échanges de chaleur par convection. Nous présenterons ensuite la forme discrétisée pour un régime transitoire et le traitement des conditions aux limites thermiques.

### 3.2.1 Équation de la chaleur

L'équation de la conduction s'obtient à partir de l'équilibre énergétique d'un volume élémentaire dans un milieu au repos et doté d'un repère fixe.

Dans le cas d'une source de chaleur en mouvement à la surface d'un solide, celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C V \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.1)$$

où  $\rho$  est la densité du matériau,  $C$  la chaleur spécifique de celui-ci,  $k$  sa conductivité thermique et  $g$  la chaleur produite pour une source interne. Les paramètres  $\rho$  et  $C$  seront considérés constants dans le volume élémentaire de calcul pour toutes les applications traitées. Dans le cas où aucune source interne n'est considérée,  $g$  prend la valeur nulle.  $U$  et  $V$  représentent la vitesse de la source selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement. Ainsi, l'équation différentielle de la conduction de la chaleur pour un massif semi-infini, homogène avec des propriétés thermiques variables, une source de chaleur en mouvement en surface et qui ne génère pas de chaleur s'écrit (équation de la conduction de Fourier) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C V \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2)$$

L'équation générale du problème ayant été posée, nous allons maintenant présenter les conditions aux limites du problème thermique.

### 3.2.2 Conditions aux limites thermiques

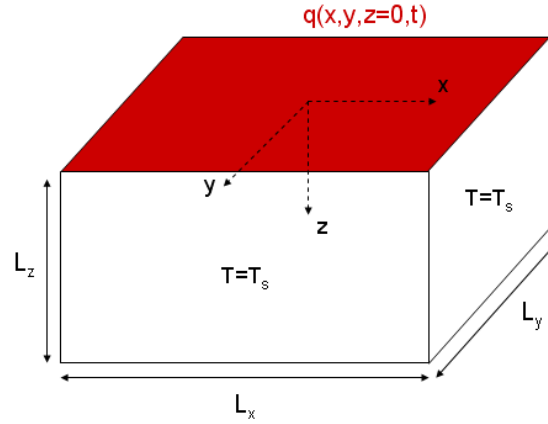
Les conditions aux limites de type thermiques peuvent être de deux types :

- Dirichlet : on impose la valeur de la température.
- Neumann : on impose un flux de chaleur.

Dans le cas de conditions de type Dirichlet on impose, sur les faces du volume élémentaire sauf la face supérieure ( $z=0$ ), une valeur à la variable  $T$ . Cela se traduit par  $T_{i,j,k}=T_s$ . Sur la face supérieure, une condition en flux de type Neumann est considérée. Ce flux prend la forme donnée par l'équation (3.3).

$$q(x, y, z = 0, t) = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.3)$$

La figure 3.2 résume les conditions aux limites appliquées sur le volume élémentaire de calcul.



**FIGURE 3.2:** Conditions aux limites du problème thermique : flux imposé sur la surface supérieure ( $z = 0$ ), température  $T_s$  imposée sur les autres faces

L'équation du problème ainsi que ses conditions aux limites ayant été décrites, nous allons nous attacher désormais à présenter l'adimensionnement utilisé pour la résolution numérique.

### 3.2.3 Adimensionnement

#### 3.2.3.1 Adimensionnement de l'équation de la chaleur

L'équation (3.2) peut s'écrire de façon adimensionnée en considérant la diffusivité thermique  $D(x, y, z) = k(x, y, z)/\rho C$  et les paramètres sans dimension suivant :

$$X = \frac{x}{a} ; Y = \frac{y}{a} ; Z = \frac{z}{a} ; \bar{k} = \frac{k}{k_0} ; \bar{D} = \frac{D}{D_0} ; \bar{C} = \frac{C}{C_0} ; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \bar{t} = \frac{t}{\tau} ; \bar{T} = \frac{T - T_s}{\Delta T}$$

$$Pe_x = \frac{aU}{D_0} ; Pe_y = \frac{aV}{D_0} ; Fo = \frac{D_0\tau}{a^2}$$

avec respectivement  $k_0$  et  $D_0$  les conductivités et diffusivités thermiques de référence (substrat dans le cas d'un matériau revêtu) et  $q_{max}$  la valeur maximale du flux de chaleur imposé en surface.  $\Delta T$  correspond à l'élévation de la température caractéristique par rapport à la condition limite en température  $T_s$ . On obtient ainsi l'équation sans dimension :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right) = \frac{1}{Fo} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} \right) + Pe_x \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial X} \right) + Pe_y \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial Y} \right) \quad (3.4)$$

Avec  $Pe$  le nombre de Péclet qui caractérise la vitesse de la source (selon les directions  $x$  et  $y$ ) et  $Fo$  le nombre de Fourier qui caractérise le régime stationnaire. Ainsi, dans le cas où  $Fo$  tend vers l'infini (suppression du régime transitoire), la résolution de l'équation (3.4) donne immédiatement la solution en régime établi.

#### 3.2.3.2 Adimensionnement des conditions aux limites

L'équation du flux de chaleur en surface (3.3) peut être adimensionnée en considérant que la variation de température  $\Delta T$  est fonction du flux maximal  $q_{max}$  :

$$Q = \frac{q}{q_{max}} = -\frac{k}{q_{max}} \frac{\Delta T}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z}$$
$$\Delta T = \frac{aq_{max}}{k}$$

Ainsi, l'équation (3.3) devient

$$Q = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \quad (3.5)$$

Afin de résoudre les équations différentielles du problème (équations de Lamé pour le problème intérieur et équation du flux en surface) à l'aide des techniques de différences finies, celles-ci doivent être transformées en équations discrètes. Ces équations discrètes introduisent une erreur en accord avec la solution de l'équation différentielle partielle. Nous allons donc nous attacher à présenter la discrétisation des équations.

#### 3.2.4 Discrétisation

La discrétisation du problème thermique passe par deux étapes : la discrétisation du problème intérieur, pour lequel l'équation de la chaleur est utilisée et la discrétisation des conditions aux limites, où il faut discrétiser l'équation du flux de chaleur. Un champ de température est imposé sur les autres faces du volume élémentaire.

##### 3.2.4.1 Discrétisation du problème intérieur

Pour résoudre l'équation de la chaleur (3.4) à l'aide des méthodes multigrilles, nous utilisons la méthode des différences finies. La discrétisation utilisée sur les termes aux dérivées secondes de l'équation (3.4) est, comme pour le problème mécanique, une discrétisation du second ordre. Les détails sont présentés en annexe E de ce rapport. Pour la dérivée du premier ordre portant sur le terme convectif (terme associé au nombre de Péclet), une dérivée arrière (3.6) est utilisée car elle permet une meilleure prise en compte de l'effet de traînée, localisé à l'arrière de la source.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial X} = \frac{T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}}{h} + O(h_x) \quad (3.6)$$



La discrétisation introduit une erreur. Afin de diminuer celle-ci, il faut diminuer le pas de maillage ( $h$ ), ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de points de discrétisation et donc la taille du système à résoudre. L'équation ainsi discrétisée s'écrit en chaque point afin d'obtenir un système d'équations linéaires. Ce système peut s'écrire à l'aide de matrices sous la forme générale d'un problème solvable à l'aide des techniques multigrilles :

$$[A]^h \{T\}^h = \{f\}^h$$

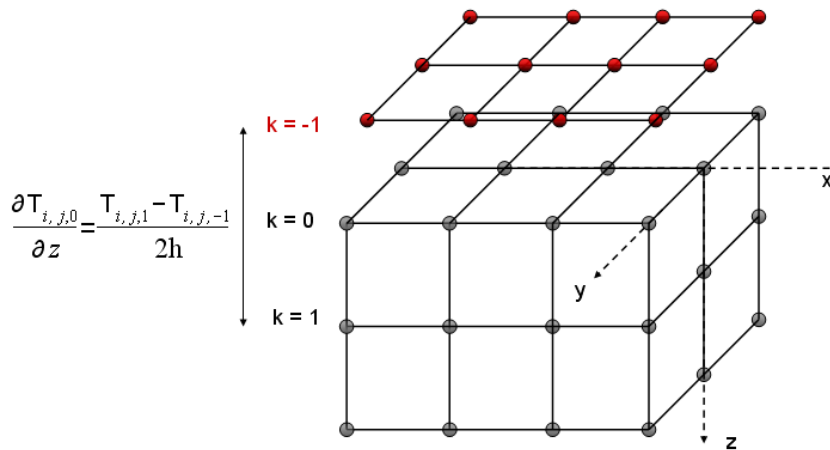
où  $A$  est une matrice,  $T$  le vecteur des inconnues et  $f$  le second membre de l'équation. Plusieurs méthodes peuvent donc être utilisées pour résoudre ce système, mais, comme pour le cas des problèmes d'élasticité, une résolution itérative basée sur la relaxation de Gauss-Seidel a été choisie.

### 3.2.4.2 Discrétisation des conditions aux limites

La discrétisation des conditions aux limites de type Neumann nécessite la discrétisation de l'équation (3.5) à l'aide d'un schéma au second ordre centré qui s'écrit :

$$\bar{T}_{i,j,k-1} = \bar{T}_{i,j,k+1} - 2hQ \quad (3.7)$$

L'inconnue  $\bar{T}_{i,j,k-1}$  est alors substituée dans l'équation de la chaleur discrétisée en surface ( $z = 0, k = 0$ ) à l'aide de la méthode dite des points fantômes [BRA 84]. Cette méthode consiste à ajouter une série de points hors du volume élémentaire dans lequel l'équation est résolue et à associer à chaque point une équation à discrétiser. Cette technique est représentée sur la figure 3.3.



**FIGURE 3.3:** Méthode des points fantômes, conditions aux limites thermique de type Neumann.

Résoudre le problème thermique en considérant des conditions aux limites de type Neumann ajoute cependant plusieurs difficultés. Dans le but d'obtenir un solveur ayant

la même efficacité que celui utilisant les conditions aux limites de type Dirichlet, deux conditions importantes doivent être satisfaites :

- conserver la consistance sur toutes les grilles,
- ne pas introduire d'erreurs locales.

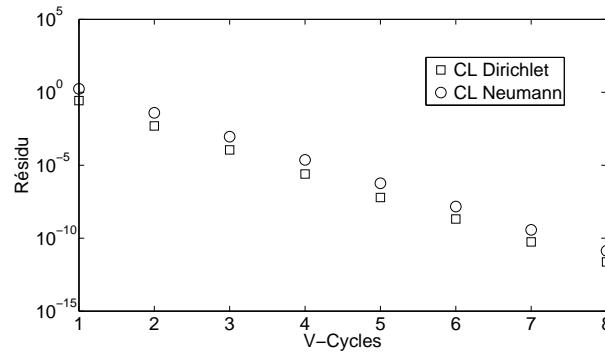
Les deux conditions peuvent être satisfaites lorsque le point situé en  $k = -1$  n'est pas vraiment implémenté. Cette non-implémentation nous affranchit des problèmes de transfert dans les différents opérateurs de transfert. Dans un cas unidimensionnel, la condition de Neumann est utilisée lorsque l'on relaxe l'équation intérieure au point  $k = 0$ , modifiant ainsi efficacement l'équation en ce point. En effet  $T_{-1} = T_1 - 2hQ_0$  est utilisée lorsque l'on relaxe l'équation intérieure au point  $k = 0$ . Cette simple modification permet au solveur d'obtenir la même efficacité que celle obtenue dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet. Il est clair que les conditions aux limites de type Neumann peuvent être implémentées d'une façon similaire au point  $z_n$ . Cette approche s'étend simplement au cas multi-dimensionnel.

Venner et Lubrecht [VEN 00] relaxent le problème interne sur la surface en utilisant les conditions de Neumann pour satisfaire les deux critères. Cette technique a été implémentée ici afin d'obtenir une convergence optimale pour l'utilisation d'une condition aux limites de type Neumann.

La figure 3.4 illustre la comparaison de la convergence pour un problème thermique de type Hertzien résolu à l'aide de conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. La source Hertzienne est caractérisée par les paramètres suivants :  $a=1$ ,  $T_{max}=\pi/4$  ou  $Q_{max}=1$ . Le volume élémentaire utilisé pour la modélisation du problème est un parallélépipède de taille  $[16a; 16a; 8a]$  maillé à l'aide de  $17*17*9$  points sur le niveau 1. La stratégie de calcul multigrilles utilisée est une stratégie globale utilisant 6 niveaux. Ainsi, le pas de maillage sur la grille la plus fine est de  $a/32$ . 67 millions de points sont ainsi utilisés pour le calcul, correspondant également au nombre de degrés de libertés du problème.

Cette figure présente l'évolution du résidu en fonction du nombre de V-cycles utilisés pour le calcul dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet (carrés) et de type Neumann (cercles). Elle montre que la vitesse de convergence n'est pas affectée par le type de condition limite (droites parallèles) mais que le résidu est plus grand dans le cas des conditions de type Neumann, ce qui est normal puisque le solveur ne démarre pas avec la solution exacte en surface dans cette configuration. Des phases de pré-relaxations locales sont nécessaires pour diminuer le résidu près des frontières avant de résoudre le problème sur toute la grille.

Le problème thermique et le modèle numérique multigrilles associé ayant été posés, nous allons maintenant présenter plusieurs cas tests qui ont été réalisés afin de valider et illustrer les possibilités de résolution de notre modèle pour des matériaux homogènes et matériaux revêtus en régime permanent.



**FIGURE 3.4:** Résidu=f(V-cycles) pour les C.L. de type Dirichlet et Neumann pour un problème thermique de type Hertzien ( $a=1$ ,  $T_{max}=\pi/4$  ou  $Q_{max}=1$ ). Le volume élémentaire est un parallélépipède de taille  $[16a; 16a; 8a]$  maillé à l'aide de  $17*17*9$  points sur le niveau 1. La stratégie de calcul multigrilles utilisée est une stratégie globale mettant en jeu 6 niveaux pour les calculs.

### 3.3 Validation

L'étape suivante est la validation du modèle. Des simulations de complexités croissantes pour lesquelles des solutions existent dans la littérature vont être réalisées et les résultats comparés.

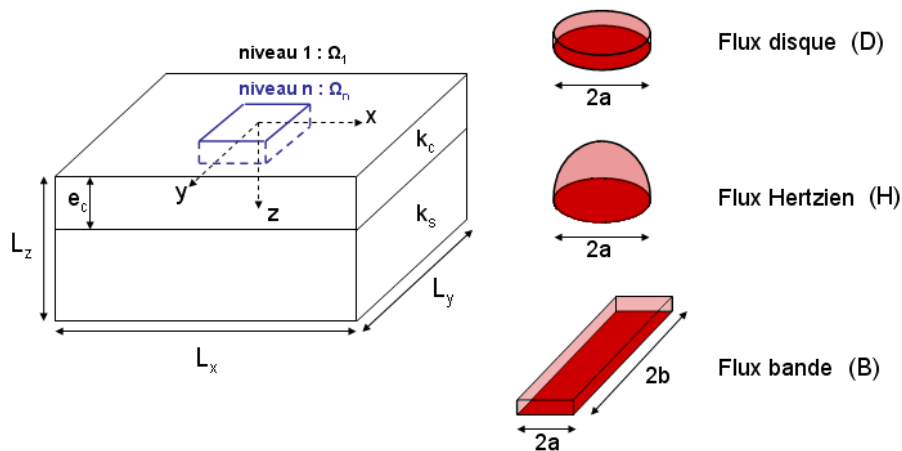
- Nous allons ainsi considérer en premier lieu un massif homogène (M) sur lequel est appliqué un flux de chaleur disque (D), Hertzien (H) et bande (B) dans le cas stationnaire pour lequel des solutions analytiques existent [JAE 42, LIU 04].
- Dans une seconde étape de validation, nous nous intéresserons au cas d'un flux bande se déplaçant en surface d'un massif homogène. Dans le cas d'un nombre de Péclet infini, il existe une solution dans la littérature [CAR 59] qui sera comparée aux résultats de simulations réalisées pour des grands nombres de Péclet.
- La troisième étape de validation consistera en une comparaison numérique de résultats obtenus à l'aide des méthodes MG et FFT. L'étude considérera un flux Hertzien se déplaçant sur la surface du volume élémentaire. La vitesse de la source sera caractérisée par des nombres de Péclet variés.
- Enfin, la dernière étape de validation du modèle consistera à comparer, dans le cas de massifs revêtus (R) soumis à un chargement Hertzien (H), les solutions 2D calculées par Leroy [LER 89a] dans ses travaux de thèse à des calculs 3D réalisés à l'aide du modèle MG.

### 3.3.1 Modélisation du problème

Nous allons tout d'abord présenter la modélisation générale utilisée pour les différents problèmes abordés dans cette étape de validation du modèle numérique.

Un volume fini de taille  $[L_x; L_y; L_z]$  est considéré. Un flux de chaleur, caractérisé par son intensité et sa forme, se déplace à une certaine vitesse selon la direction  $x$ ,  $Pe=Pe_x$ . Ce volume peut représenter un matériau homogène (H) ( $k(x, y, z)$  constant) ou un matériau revêtu (R) caractérisé par le rapport des conductivités du revêtement du substrat  $k_c/k_s$  et l'épaisseur  $e_c$  du revêtement. La stratégie de calcul employée est une stratégie locale ou globale mettant en jeux  $n$  niveaux (le niveau  $n$  est noté  $\Omega_n$ ). Dans le cas d'une stratégie locale, le raffinement choisi est tridimensionnel et considère un rapport entre les niveaux raffinés de 1/2 selon la profondeur  $z$  et de 3/4 selon les directions  $x$  et  $y$ . Ce choix a été motivé par le fait que le nombre de points utilisés pour les calculs selon la profondeur est constant entre les niveaux raffinés et qu'un rapport 3/4 selon les autres directions permet de capturer plus facilement les gradients de température dûs au flux de chaleur en surface (effet de trainée par exemple).

Les différents flux utilisés pour la validation sont de type disque (D), Hertzien (H) et bande (B). Ces flux sont appliqués à la surface ( $z = 0$ ) du massif. Sur les autres faces, on impose un champ de température. La figure 3.5 résume les notations utilisées.



**FIGURE 3.5:** Modélisation des différents problèmes thermiques : volume finis, repère et type de source.

Les différents paramètres numériques utilisés pour ces simulations sont résumés dans le tableau 3.1.

L'utilisation des fonctions de Green appliquées au problème thermique va maintenant être abordée, au travers de flux de type disque et Hertzien.

Problème	niveaux	niv. locaux	$L_x-L_y-L_z$	points	points ( $\Omega_n$ )	pas ( $\Omega_n$ )
M-D	9	3	16-16-8	118M	96M	1/128
M-H (S)	9	3	16-16-8	118M	96M	1/128
M-B	6	0	16-16-8	8.5M	8.5M	1/16
M-H (T)	6	0	16-16-8	8.5M	8.5M	1/16
R-H	9	3	16-16-8	118M	96M	1/128

**TABLE 3.1:** Paramètres utilisés pour la modélisation des différents problèmes de la section validation. (S) source stationnaire. (T) source en mouvement.

### 3.3.2 Massif homogène - Différents flux - Régime établi

La première étape de validation du modèle consiste à comparer les résultats numériques avec des solutions analytiques obtenues dans le cas de massifs semi-infinis, homogènes, isotropes. La solution générale de l'équation de la chaleur pour une source en surface d'un massif semi-infini a été déterminée par Jaeger [JAE 42]. Cette solution est donnée par l'équation (3.8) :

$$\bar{T}(X, Y, Z, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \frac{2}{[4\pi(\bar{t}-\bar{t}')]^{3/2}} \int \int Q(X', Y', \bar{t}') * e^{\left[ -\frac{(X-X' - [\int_{\bar{t}'}^{\bar{t}} Pe_x(\bar{\tau}) d\bar{\tau}])^2 + (Y-Y' - [\int_{\bar{t}'}^{\bar{t}} Pe_y(\bar{\tau}) d\bar{\tau}])^2 + Z^2}{4(\bar{t}' - \bar{t}')} \right]} dX' dY' d\bar{t}' \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un flux stationnaire cette équation devient :

$$\bar{T}(X, Y, Z, \bar{t}) = Q(X, Y) \otimes \int_0^{\bar{t}} G(X, Y, Z, \bar{t} - \bar{t}') d\bar{t}' \quad (3.9)$$

L'intégrale de la fonction de Green de l'équation précédente a été déterminée de manière algébrique par Liu et al. [LIU 04] dans le cas où la source se déplace à vitesse constante, i.e.  $Pe = constant$ . Cette intégrale s'écrit :

$$\int_0^{\bar{t}} G(X, Y, Z, \bar{t} - \bar{t}') d\bar{t}' = G^s(X, Y, Z, \bar{t}) = \frac{e^{-Pe(R-X)/2}}{4\pi R} \left[ 2 - \operatorname{erfc} \left( \frac{Pe\sqrt{\bar{t}}}{2} - \frac{R}{2\sqrt{\bar{t}}} \right) + e^{(R.Pe)} \operatorname{erfc} \left( \frac{Pe\sqrt{\bar{t}}}{2} + \frac{R}{2\sqrt{\bar{t}}} \right) \right] \quad (3.10)$$

Avec  $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ .

Cette équation permet de déterminer le champ de température en surface d'un massif semi-infini homogène soumis à une source de chaleur de géométrie quelconque en mouvement. Plusieurs solutions analytiques peuvent être extraites à partir de cette dernière équation.

### 3.3.2.1 Solutions analytiques

Dans le cas d'une source stationnaire en régime établi, i.e.  $Pe = 0$  et  $\bar{t} = \infty$ , on obtient à partir de la solution algébrique (3.10) :

$$\int_0^\infty G(X, Y, Z, \bar{t} - \bar{t}') d\bar{t}' = G^{Pe}(X, Y, Z) = \frac{1}{2\pi R} \quad (3.11)$$

Notons que la même fonction de Green peut être obtenue pour un déplacement normal dû à une contrainte normale en mécanique du solide.

• Pour un flux  $Q(X, Y, Z = 0) = 1$  appliqué sur un disque de rayon  $R_{ay}$  centré en  $M(0,0,0)$  la solution devient :

\* si  $R < R_{ay}$

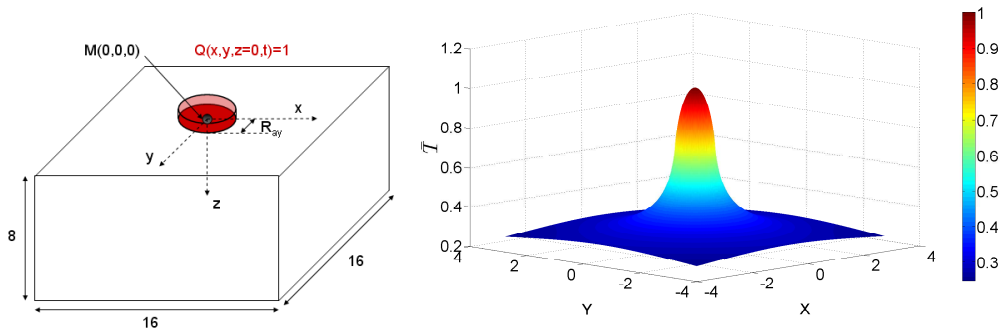
$$T(X, Y, Z = 0) = R_{ay} * \frac{2}{\pi} * \left[ \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{R^2}{R_{ay}^2} + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.12)$$

$$R_{ay} = 1; \quad T(0, 0, 0) = 1; \quad T(R = R_{ay}, 0) = \frac{2}{\pi}$$

\* si  $R > R_{ay}$

$$T(X, Y, Z = 0) = R_{ay} * \frac{2}{\pi} \left[ 2 * \left( \frac{R_{ay}^2}{R^2} \right) - 1 \right] \quad (3.13)$$

Cette solution est représentée sur la figure 3.6.



**FIGURE 3.6:** Représentation du flux de chaleur unitaire  $Q(X, Y, Z = 0) = 1$  dans un disque de rayon  $R_{ay}$  appliqué à la surface d'un massif semi-infini, homogène et isotrope - Champ de température correspondant.

• Pour un flux Hertzien  $Q(X, Y, Z = 0) = \sqrt{1 - [R/R_{ay}]^2}$  sur un disque de rayon  $R_{ay}$  centré en  $M(0,0,0)$  les calculs donnent :

\* si  $R < R_{ay}$

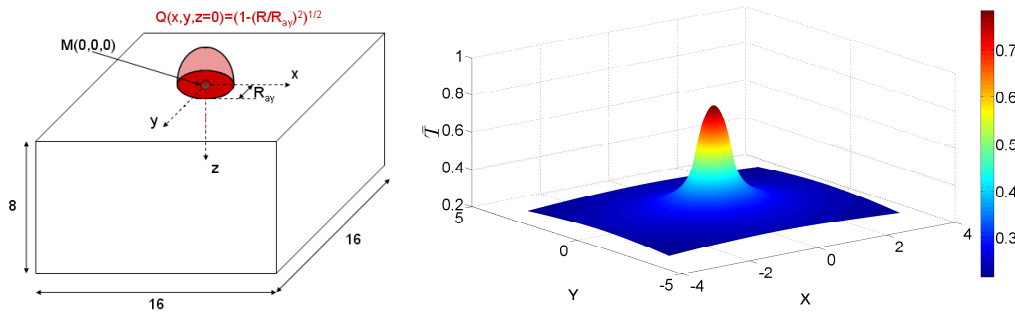
$$T(X, Y, Z = 0) = R_{ay} * \frac{\pi}{8} \left( 2 - \frac{R^2}{R_{ay}^2} \right) \quad (3.14)$$

$$T(R = 0, 0) = R_{ay} * \frac{\pi}{4}; \quad T(R = R_{ay}, 0) = R_{ay} * \frac{\pi}{8}$$

\* si  $R > R_{ay}$

$$T(X, Y, Z = 0) = \frac{1}{4} R_{ay} \left[ \left( 2 - \frac{R^2}{R_{ay}^2} \right) * \arcsin \left( \frac{R_{ay}}{R} \right) + \frac{R}{R_{ay}} \sqrt{1 - \frac{R_{ay}^2}{R^2}} \right] \quad (3.15)$$

Cette solution est représentée sur la figure 3.7.

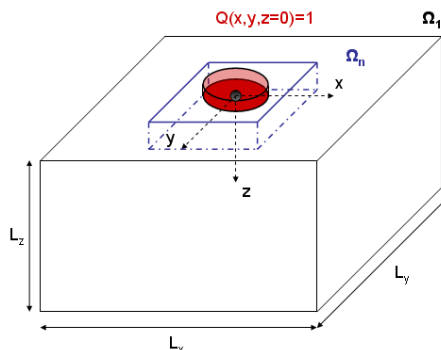


**FIGURE 3.7:** Représentation du flux de chaleur Hertzien  $Q(X, Y, Z = 0) = \sqrt{1 - [R/R_{ay}]^2}$  appliqué à la surface d'un massif semi-infini, homogène et isotrope - Champ de température correspondant.

Nous allons maintenant nous intéresser spécifiquement au problème du flux disque unitaire (équations (3.12) et (3.13)).

Afin d'approximer les conditions de massif semi-infini, il est possible d'imposer aux limites (hors surface) du volume fini les températures obtenues dans le cas d'une source ponctuelle équivalente en surface ou d'avoir un volume dont la demi-largeur équivaut à environ dix fois celle de la source.

La figure suivante illustre la configuration utilisée pour les calculs.



#### Modélisation du flux disque unitaire

Hypothèse de massif semi-infini :

$L_x = L_y = 2L_z > 2 * \text{demi largeur de source}$

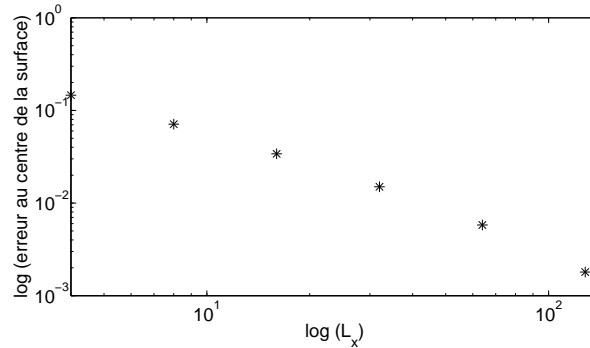
Nombre de niveaux :  $n = 4 \text{ à } 9$

Pas de maillage sur  $\Omega_n$  :  $1/32$

Stratégie de calcul locale

On s'intéresse à l'erreur de modélisation introduite par la taille du domaine ( $L_x$ ). Afin d'observer l'évolution de cette erreur, le dernier niveau utilisé pour les calculs permet de

discrétiser la source avec le même nombre de points (65 pour cette étude). La figure 3.8 représente l'évolution de l'erreur relative sur la température au centre de la surface en fonction de la taille du volume élémentaire utilisé par rapport à la solution analytique développée à partir de l'équation (3.9).



**FIGURE 3.8:** Effet de la taille du domaine sur  $T(0,0,0)$  pour un flux unitaire dans un disque avec une erreur de discrétisation constante : 65 points dans la source (sur la grille la plus fine).

Les résultats de cette étude montrent que pour une discrétisation constante et en doublant la taille du volume, l'erreur relative décroît, en accord avec l'hypothèse de massif semi-infini. Watremetz [WAT 06] a réalisé une étude similaire en 2D montrant la même décroissance de l'erreur avec l'augmentation de la taille du massif. Ces calculs permettent de valider ainsi le modèle 3D sous ces conditions.

### 3.3.3 Massif homogène - Flux bande - Régime établi - Différents Péclets

Tout problème thermique considérant une source de chaleur en mouvement peut être caractérisé à l'aide du nombre de Péclet défini au début de ce chapitre. Jaeger [JAE 42] a calculé le champ de température correspondant au déplacement d'une bande semi-infinie à la surface d'un volume semi-infini. Pour les grandes valeurs du nombre de Péclet (i.e.  $Pe > 10$ ), la chaleur diffuse à une faible épaisseur du solide pendant le temps pris par la source pour se déplacer sur la surface. Il a été montré que le flux de chaleur est approximativement perpendiculaire à la surface en tous points.

Dans le cas d'un flux de chaleur unitaire ( $q(X, Z = 0) = 0$  pour  $-1 \leq X \leq 1$ ) ayant la forme d'une bande semi-infinie,  $T$  est donnée par Carslaw et Jaeger [CAR 59] et rappelée par l'équation (3.16) :

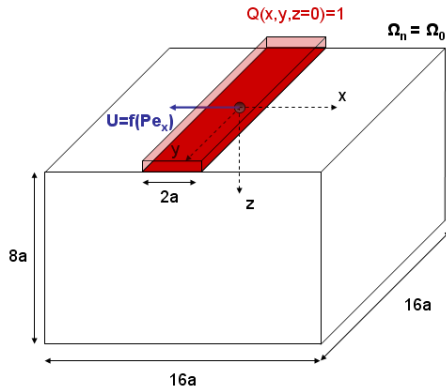
$$\bar{T}\sqrt{Pe} = \left[ \frac{4}{\pi}(1+X) \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

La température moyenne est donnée par l'équation (3.17) :



$$\bar{T}_{moy} \approx \frac{4}{3\pi^{1/2}} Pe^{-1/2} \quad (3.17)$$

Nous avons mené cette étude à l'aide de notre modèle en considérant une bande de chaleur dont la longueur est grande devant l'épaisseur. La configuration est présentée sur la figure suivante :



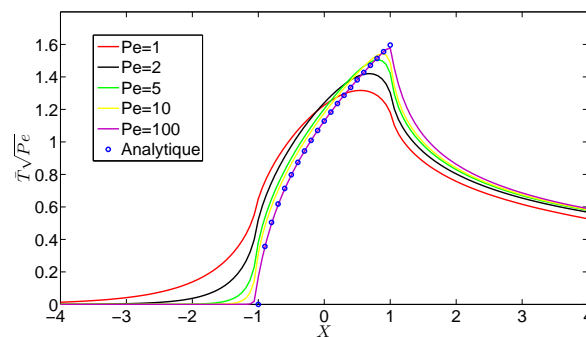
#### Flux bande en mouvement

Dimension du solide : [16a ;16a ;8a]

Nombre de niveaux : 6

Pas de maillage sur  $\Omega_6$  : 1/16

Stratégie de calcul globale



**FIGURE 3.9:** Champ de température en surface obtenu dans le cas d'une bande de chaleur semi-infinie avec un nombre de Péclet de 1 à 100. Solution analytique correspondant à un nombre de Péclet infini.

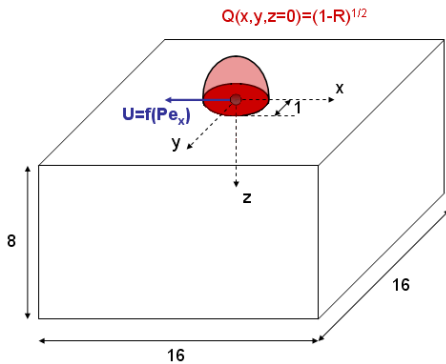
Le volume élémentaire fini utilisé pour les calculs est de dimension [16a ;16a ;8a]. Le maillage est constitué de six niveaux sans raffinement local. Les résultats obtenus montrent l'évolution du champ de température dans la source en fonction de l'accroissement du nombre de Péclet et sont présentés sur la figure 3.9. Les temps de calculs sont de l'ordre de 4 minutes pour obtenir un résidu de  $10^{-8}$  sur la solution. L'erreur relative maximale observée entre la solution numérique pour un Péclet de 100 et la solution analytique pour nombre de Péclet "infini" est de l'ordre du pour-cent. Ce résultat permet donc la validation du modèle 3D via une solution analytique reposant sur un formalisme bidimensionnel.

Nous avons présenté deux études montrant une bonne corrélation entre des résultats théoriques et numériques, validant ainsi le calcul thermique en 3 dimensions dans le cas d'un massif homogène. La prochaine étape de validation consiste à étudier le champ de

température pour une source Hertzienne à l'aide de notre modèle et d'un modèle basé sur des techniques FFT développé au laboratoire [SAI 92].

### 3.3.4 Calculs et comparaisons FFT

L'étape suivante est la comparaison de résultats issus du code 3D-MG avec ceux issus d'un modèle basé sur les techniques FFT dans le cas de simulations incluant divers types de source. L'emploi de ces techniques a été motivé par le fait qu'il n'existe pas de solutions analytiques directes dans le cas d'une source en mouvement caractérisé à l'aide d'un nombre de Péclet quelconque. Un massif homogène, modélisé à l'aide d'un volume élémentaire fini de taille [16a ; 16a ; 8a], sur lequel se déplace un flux Hertzien défini par les paramètres :  $a = 1$ ,  $Q_{max} = 1$  a été considéré. Les différents nombres de Péclet considérés pour le calcul prennent les valeurs suivantes :  $Pe=0.0001$ , 1.0, 2.0, 5.0 et 10.0. La figure suivante présente la modélisation de ce problème :



Modélisation du problème Hertzien

Dimension du solide : [16a ; 16a ; 8a]

Nombre de niveaux : 6

Pas de maillage sur  $\Omega_6$  :  $h=a/32$

Vitesse de source :  $U = f(Pe_x)$

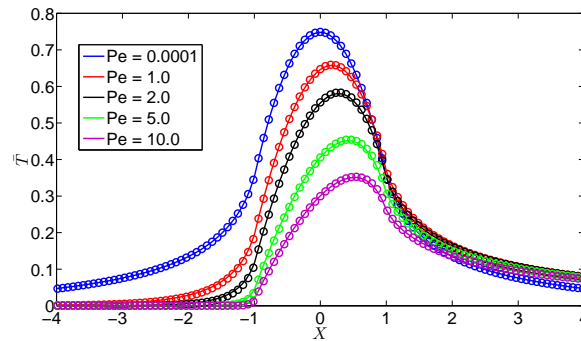
Stratégie de calcul globale 8.5M de DDL mis en jeux.

Une stratégie de calcul globale a été utilisée, conduisant à avoir 65 points dans la source selon les axes  $x$  et  $y$  sur le niveau le plus fin. Cette stratégie a été conservée pour tous les nombres de Péclet étudiés. Les résultats FFT et MG sont présentés sur la figure 3.10. Cette figure présente les champs de température obtenus en surface du massif pour les différents nombres de Péclet. Les traits pleins représentent les solutions obtenues via le logiciel thermique 3D-MG et les cercles les solutions obtenues par FFT. L'écart relatif maximal  $\|T_{FFT} - T_{MG}\|_{\infty}$  entre ces solutions ainsi que les temps de calcul sont présentés dans le tableau 3.2.

Péclet	$\ T_{FFT} - T_{MG}\ _{\infty}$	Temps CPU MG	Temps CPU FFT	Résidu
0.00001	$1.5 * 10^{-3}$	4 minutes	<1 minute	$10^{-8}$
1.0	$2.4 * 10^{-3}$	4 minutes	<1 minute	$10^{-8}$
2.0	$5.0 * 10^{-3}$	4 minutes	<1 minute	$10^{-8}$
5.0	$5.2 * 10^{-3}$	4 minutes	<1 minute	$10^{-8}$
10.0	$4.4 * 10^{-3}$	4 minutes	<1 minute	$10^{-8}$

**TABLE 3.2:** Erreur relative maximale entre la solution MG et la solution FFT dans le cas d'un flux de chaleur Hertzien.

Le tableau 3.2 montre que l'écart maximal entre les deux solutions est de l'ordre de  $10^{-3}$



**FIGURE 3.10:** Champ de température en surface obtenu dans le cas d'un flux Hertzien via les méthodes FFT (o) et MG (-).

quelle que soit la valeur du nombre de Péclet. L'influence de ce dernier sur les temps de calcul est négligeable. La comparaison des temps de calcul est indiquée afin de montrer l'efficacité des méthodes multigrilles à traiter un grand nombre de points rapidement par rapport à une autre méthode. Cette étude nous a permis de valider notre modèle et de montrer ses performances dans un cas où il n'existe pas de solution analytique dans la littérature.

### 3.3.5 Validation : massifs revêtus

La dernière étape de validation du modèle concerne les massifs revêtus. L'influence d'un revêtement de surface, supposé adhérent sur un substrat donné est étudié. Le milieu revêtu est soumis sur une partie de sa surface à un flux de chaleur connu. Ce type de modélisation reproduit des problèmes réels très spécifiques, tel que l'utilisation de revêtements à titre de barrières thermiques dans les aubes de turbine où les matériaux mis en jeu sont soumis à des températures très élevées. Les simulations expérimentales étant difficiles à mettre en place, les modèles numériques permettent de prévoir le comportement du revêtement face à ces sollicitations extrêmes.

Le modèle étudié est présenté sur la figure 3.12. Il s'agit d'un système revêtement/substrat donc les conductivités sont respectivement notées  $k_c$  et  $k_s$ . Un flux de chaleur  $Q(x, y, z = 0)$  de type bande hertzienne ( $a = 0.5$  mm,  $Q(x, y = 0, z = 0) = 10^6$  W) est appliqué en surface. Sur les autres faces du solide, une température nulle est imposée.

Les propriétés thermiques du substrat sont :

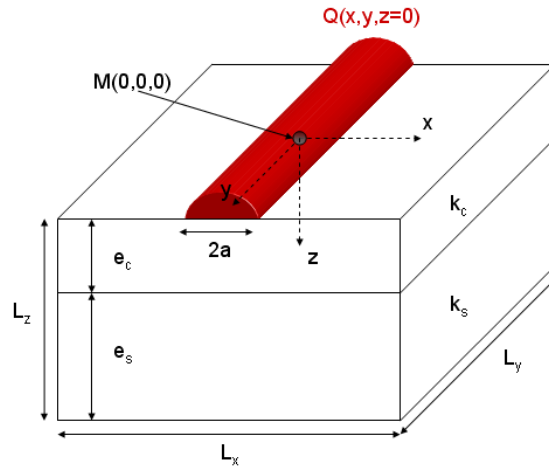
$$k_s = 46 \text{ W/m}^\circ\text{C}, \rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3, c_s = 460 \text{ J/kg}^\circ\text{C}, e_s = 10 \text{ cm.}$$

Les propriétés thermiques du revêtement sont :

$$\rho_c = \rho_s, c_c = c_s \text{ et un rapport de conductivité } k_c/k_s \text{ variable.}$$

Les calculs ont été réalisés à l'aide d'une stratégie de résolution locale mettant en jeu 8 niveaux dont 3 raffinés. Le volume élémentaire considéré est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ . La technique de raffinement tridimensionnelle utilisée considère un rapport 1/2 entre les niveaux raffinés selon la profondeur  $z$  et 3/4 selon les directions  $x$  et  $y$ . La grille fine possède un pas de  $a/64$  et est maillée à l'aide de 96 millions de points. 118 millions de

points sont utilisés au total pour réaliser le calcul 3D-MG. Le temps CPU pour effectuer un calcul est de 10 minutes environ afin d'obtenir un résidu sur la solution de  $10^{-8}$ .



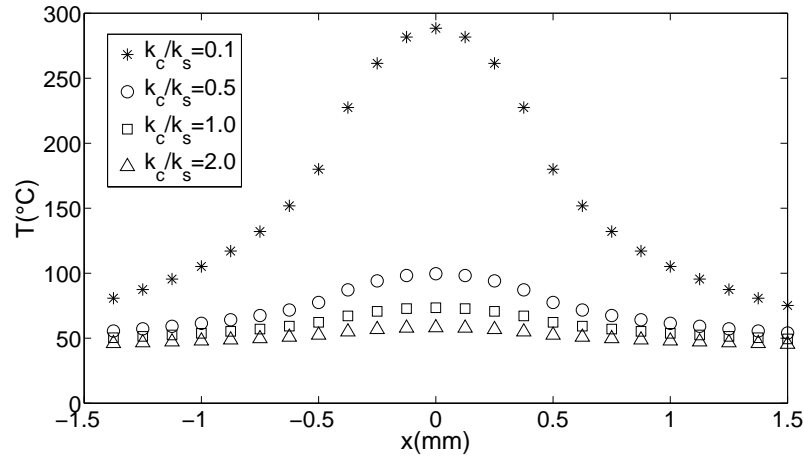
**FIGURE 3.11:** Modèle 3D thermique revêtement/substrat

Des études similaires sur le champ de température dans un bicouche ont déjà été réalisées [FLO 85, LER 86]. Il s'agit ici de valider notre modèle en utilisant les résultats obtenus par Jean-Marc Leroy [LER 89a]. L'effet de la conductivité du revêtement sur le champ de température est spécifiquement étudié. Par comparaison avec le cas non revêtu, la température maximale augmente ou diminue si le revêtement est plus isolant ou plus conducteur que le substrat, comme le montre la figure 3.12 avec  $e_c = 1mm$ . L'augmentation de température est d'autant plus concentrée sous la source de chaleur que la conductivité du revêtement  $k_c$  est faible par rapport à celle du substrat  $k_s$  [FLO 85].

La figure 3.12 montre le champ de température en surface d'un système revêtement/substrat pour différents rapports de conductivité ( $k_c/k_s=2,1,0.5,0.1$ ). Ces résultats présentent les mêmes profils que ceux obtenus par Leroy à l'aide d'un modèle 2D. Lorsque  $k_c > k_s$  le revêtement absorbe rapidement la chaleur de la source. Celle-ci se déplace rapidement vers le substrat et la température en surface est donc inférieure à celle observée dans le cas non revêtu. Dans le cas où  $k_c < k_s$ , le revêtement a tendance à conserver la chaleur, augmentant ainsi le gradient de température localement et donc la température en surface. Cette étude permet ainsi de conclure sur la validation de notre modèle numérique qui conserve une très bonne robustesse face aux divers types de problèmes rencontrés.

### 3.3.6 Synthèse

Les différentes études menées à partir du logiciel 3D-MG sur des cas analytiques et des comparaisons avec d'autres méthodes numériques ont permis de valider le modèle sur différents cas tests : massifs homogènes, source en mouvement ou encore massifs



**FIGURE 3.12:** Distribution de température en surface pour différentes conductivités du revêtement,  $e_c = 1$  mm

revêtus dans le cas d'un régime permanent.

En effet, les erreurs numériques obtenues pour ces différents cas sont de l'ordre du pour-cent ou du pour-mille. Diverses études mettant en jeu les différents paramètres thermiques vont maintenant être présentées, illustrant d'autres avantages du modèle multigrilles mais également quelques unes de ses limites.

## 3.4 Résultats

Avant de conclure sur les aspects thermiques, nous allons présenter dans cette section plusieurs études mettant en jeu des flux appliqués sur des surfaces rugueuses afin de montrer l'efficacité du modèle à traiter des sources de chaleur quelconques à l'aide de plusieurs millions de points et approcher des cas industriels réels. Puis nous nous intéresseront à des massifs revêtus afin d'analyser l'influence des rapports de conductivité entre le substrat et le revêtement ainsi que l'épaisseur de ce dernier. Ce type d'analyse permet de tirer des conclusions sur l'utilisation des revêtements afin de diminuer les contraintes thermiques à la surface du matériau protégé.

### 3.4.1 Massif homogène et flux quelconque

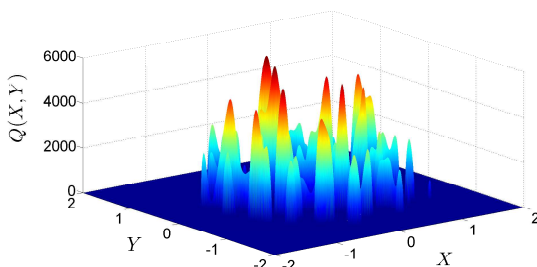
Les flux de chaleur étudiés jusqu'à présent dans ce chapitre à l'aide du modèle ont permis la validation de celui-ci mais ne rendent pas compte des réalités industrielles actuelles, où les flux de chaleur peuvent prendre des formes quelconques dues à l'état de surface des matériaux. Le cas d'un flux de chaleur appliqué sur une surface rugueuse est donc traité dans cette section au travers d'une étude mettant en jeu l'influence du nombre de Péclet et de la longueur d'onde de la rugosité sur le champ de température.

**Modélisation des flux appliqués sur des surfaces rugueuses** Afin de modéliser des flux appliqués sur des surfaces rugueuses nous avons résolu le problème de contact entre une sphère rugueuse et un plan lisse mobile. Le coefficient d'influence a été déterminé numériquement à l'aide du modèle multigrilles, de la même manière que celle présentée dans le chapitre mécanique, puis la pression de contact normale a été déterminée pour différentes géométries de bille. La loi de Coulomb est adoptée pour régir les relations entre pression normale et traction tangentielle. 3 cas de rugosités sont modélisés : deux cas de rugosités de type sinusoïdal et un troisième de type gaussien. Nous considérons que le flux est proportionnel aux pressions de contact et qu'il se dissipe entièrement dans le plan mobile. Les flux obtenus sont caractérisés par leurs longueurs d'ondes  $\lambda$  suivant les axes  $x$  et  $y$  et leurs amplitudes maximales  $Q_{max}$ . La longueur d'onde du flux correspond à la longueur d'onde de la rugosité et l'amplitude des variations est liée au rapport amplitude/longueur d'onde de la rugosité. Le flux moyen est pour tous les cas égal à  $2/3$  :  $Q_{moy} = 2/3$ . Cette valeur a été choisie car elle correspond à celle d'un cas lisse Hertzien dont la valeur maximale du flux est  $Q_{max} = 1$ . Le tableau 3.3 présente ces différentes caractéristiques.

Rugosité de surface	$\lambda_x$	$\lambda_y$	$Q_{max}$	$Q_{moy}$
Gaussienne (G)	0.2	0.2	6.55	$2/3$
Sinusoïdale 1 (S1)	0.2	0.2	3.45	$2/3$
Sinusoïdale 2 (S2)	0.4	0.4	3.45	$2/3$

**TABLE 3.3:** Caractéristiques des surfaces rugueuses

La modélisation utilisée est présentée sur la figure suivante :



Modélisation des flux rugueux

Dimension du solide : [16;16;8]

Flux moyen :  $Q_{moy}=2/3$

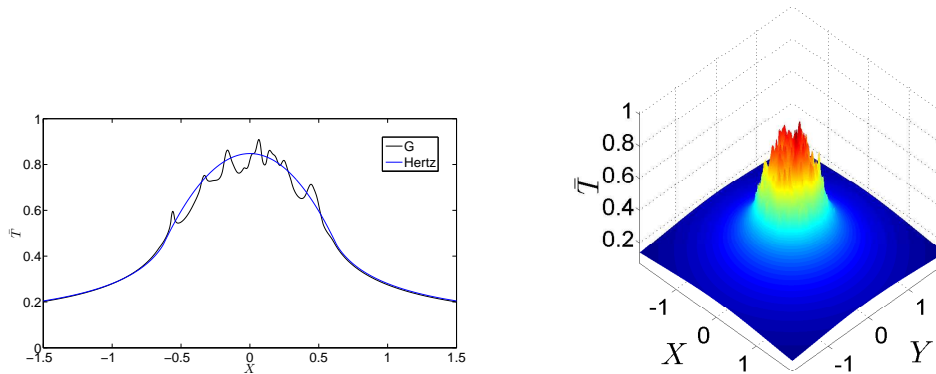
Pas de maillage sur le niveau fin  $\Omega_n$  :  $1/256$

Stratégie locale : 10 niveaux, 5 raffinés

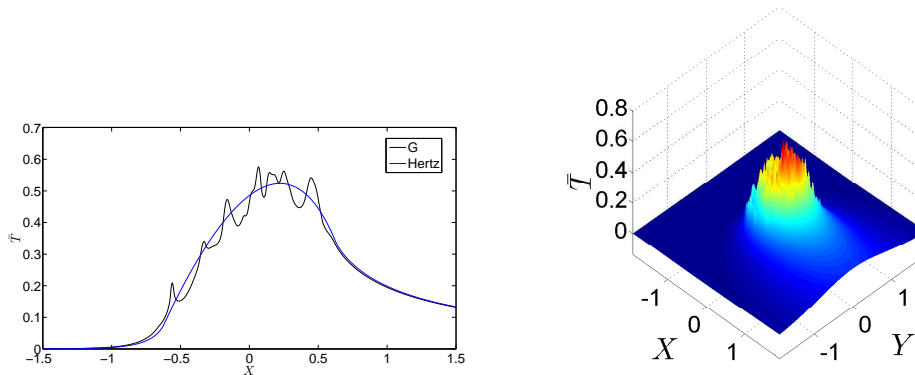
Ratios de raffinement :  $1/2$  selon  $z$   $3/4$  selon  $x$  et  $y$

Afin d'étudier l'influence de la vitesse de la source sur l'allure du champ de température, les calculs ont été réalisés pour chaque flux en considérant 3 vitesses, selon l'axe  $-x$ , caractérisées par les nombres de Péclet :  $Pe_x=0, 10$  et  $100$ . La stratégie de calcul utilisée est une stratégie locale avec 10 niveaux dont 5 globaux et 5 locaux. Le raffinement choisi considère un ratio de  $1/2$  selon la profondeur  $z$  et de  $3/4$  selon les directions  $x$  et  $y$ . Ainsi, le maillage grossier de taille [16;16;8] est maillé à l'aide de  $17*17*9$  points et le maillage fin est localisé sur un domaine [3.8;3.8;0.25] maillé à l'aide de  $973*973*433$  points. Un résidu de  $10^{-5}$  sur la solution a été considéré menant à des temps de calcul d'environ 4 heures pour traiter un cas. Plus de 600 millions de points sont utilisés pour résoudre les calculs, ce qui représente un coup mémoire de 41 Gb. Ainsi 5 calculs ont pu être effectués en parallèle sur une machine ayant une mémoire de 220 Gb et 24 coeurs.

De plus, les mêmes configurations de calcul ont été utilisées pour déterminer le champ de température dû à une source Hertzienne appliquée sur une surface lisse. Les résultats sont présentés pour chaque nombre de Péclet en séparant les géométries de surface Gaussiennes et sinusoïdales pour plus de clarté.

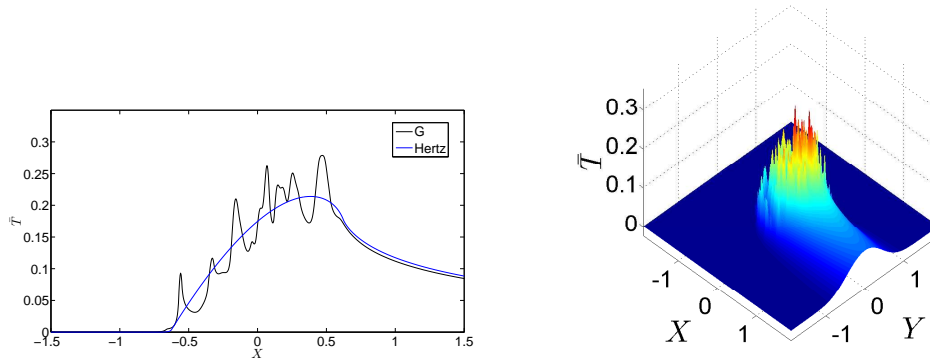


**FIGURE 3.13:** Champ de température en surface ( $x, y = 0, z = 0$ ) d'un massif homogène obtenu pour la surface rugueuse G dans le cas stationnaire :  $Pe_x = 0$ .



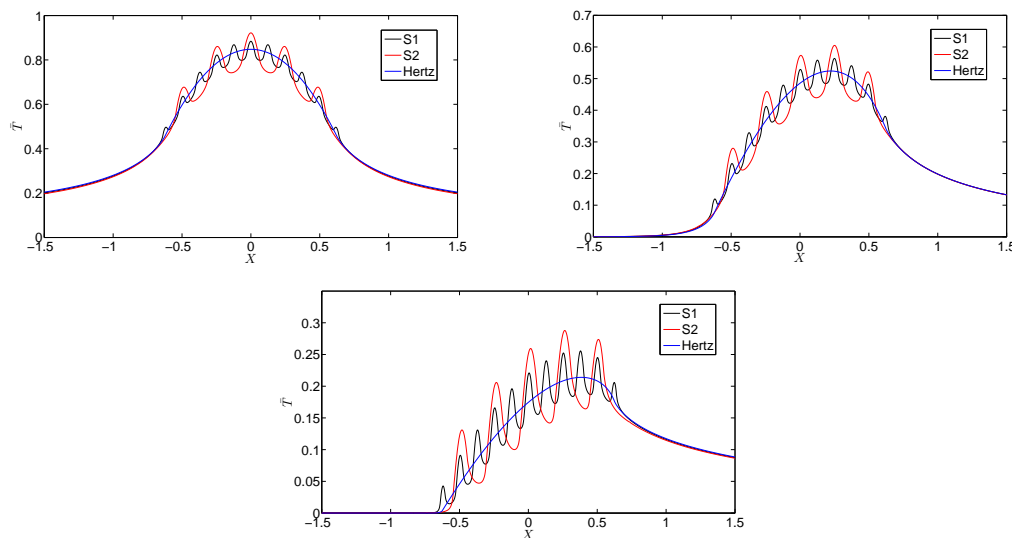
**FIGURE 3.14:** Champ de température en surface ( $x, y = 0, z = 0$ ) d'un massif homogène obtenu pour la surface rugueuse G pour une vitesse de source caractérisée par  $Pe_x = 10$ .

**Rugosité gaussienne G** La figure 3.16 présente le champ de température en surface d'un massif homogène soumis à un flux rugueux (G) dans le cas stationnaire  $Pe=0$  ou en considérant une vitesse  $U_x$  caractérisée par  $Pe_x=10$  et 100. Les figures de gauche présentent le champ de température sur l'axe  $x$  et celles de droite le champ de température en surface sur le niveau le plus fin, maillé à l'aide d'un million de points. Cette étude montre l'habileté du modèle à traiter une rugosité quelconque grâce à sa capacité à mailler la surface avec suffisamment de points sur le niveau le plus fin afin d'obtenir une bonne discrétisation du problème. De plus, on constate que l'effort



**FIGURE 3.15:** Champ de température en surface ( $x, y = 0, z = 0$ ) d'un massif homogène obtenu pour la surface rugueuse G pour une vitesse de source caractérisée par  $Pe_x = 100$ .

numérique en termes de temps CPU reste le même pour n'importe quel nombre de Péclet.



**FIGURE 3.16:** Champ de température en surface ( $x, y = 0, z = 0$ ) d'un massif homogène obtenu pour les différents flux sinusoidaux (S) et le flux Hertzien (H) pour des vitesses de source caractérisées par  $Pe_x=0, 10$  et  $100$ .

**rugosités sinusoidales S** La figure 3.16 présente le champ de température en surface d'un massif homogène obtenu pour les différents champs sinusoidaux S et le champ Hertzien pour des vitesses de source caractérisées par  $Pe_x=0, 10$  et  $100$ . Ce champ de température est représenté sur l'axe  $x$ . Il est intéressant de noter que le champ de température possède, pour chaque nombre de Péclet, le même profil en dehors de la source. Au niveau de la source, on observe l'influence de la longueur d'onde et de



l'amplitude des sinusoïdes sur le profil de température. Afin de quantifier cette influence, on peut introduire un nombre de Péclet local  $Pe_{loc}$  exprimé à l'aide de l'équation (3.18).

$$Pe_{loc} = \frac{\lambda U}{D} \quad (3.18)$$

Ainsi défini, dans le cas d'un Péclet global de 100, on obtient des Péclet locaux de 20 et 40 selon la direction  $x$  pour les sources S1 et S2 respectivement. On trouve dans la littérature de nombreux ouvrages faisant référence à la notion de Péclet local [QUA 11, BIA 04]. Ces ouvrages soulignent l'importance d'avoir une discrétisation suffisamment fine afin de décrire correctement le comportement du champ de température. Le critère imposé à la discrétisation est donné par la relation (3.19).

$$h_{\Omega} < \frac{D}{\lambda U} \quad (3.19)$$

La discrétisation choisie imposant un pas  $h_{\Omega}=1/256$  sur le niveau le plus fin, le critère est amplement satisfait pour les différents cas étudiés.

Nous venons de voir que l'augmentation du nombre de Péclet et la forme de la source n'altèrent pas la convergence de l'algorithme. Il faut cependant veiller à avoir suffisamment de points pour discrétiser la source lors de l'augmentation du nombre de Péclet. Nous allons maintenant voir que cette convergence peut être dégradée dans le cas de fortes discontinuités à l'interface d'un système revêtement/substrat.

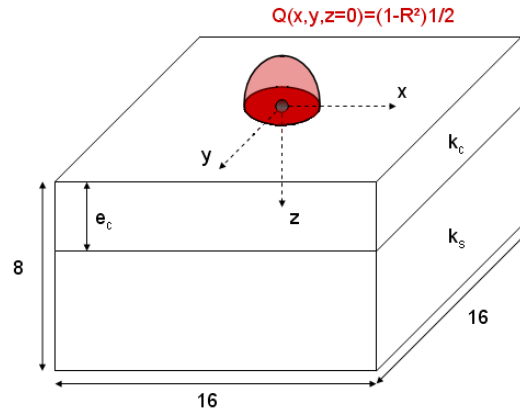
### 3.4.2 Systèmes revêtement/substrat

Nous allons maintenant nous intéresser à des massifs revêtus afin d'observer le comportement du champ de température en surface et à l'interface du système. Cette étude a été menée pour analyser l'influence d'un revêtement sur le champ de température en surface d'un substrat mais également pour analyser l'une des limites du modèle : sa capacité à traiter des fortes discontinuités.

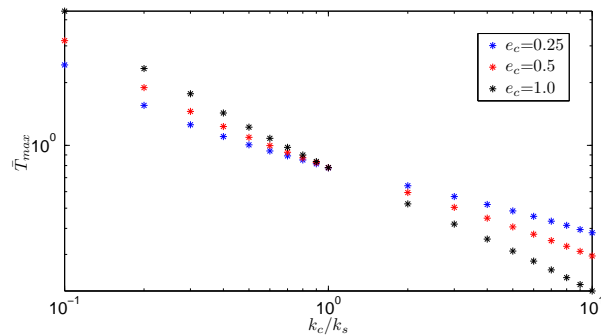
Afin d'observer le comportement du champ de température en surface et à l'interface du système pour les mêmes conditions thermiques, un flux de chaleur Hertzien est considéré en surface. Les paramètres variables sont l'épaisseur du revêtement  $e_c$  et le rapport de conductivité entre le revêtement et le substrat  $k_c/k_s$ .

La modélisation utilisée est présentée sur la figure 3.17.

Plusieurs cas d'études peuvent être étudiés à partir de cette configuration. On s'intéresse en premier lieu à l'influence globale de l'épaisseur du revêtement et du rapport de conductivité  $k_c/k_s$  sur le champ de température en surface ( $z = 0$ ). Un résidu de  $10^{-8}$  sur la solution a été considéré pour les calculs. Les temps CPU varient de 5 à 30 minutes en fonction de la taille du revêtement, en effet, l'analyse d'un revêtement fin nécessite d'avoir plus de points afin de discrétiser convenablement celui-ci (au moins 33 points dans l'épaisseur). La figure 3.18 représente l'évolution de la température maximale en surface du revêtement en fonction du rapport de conductivité  $k_c/k_s$  pour plusieurs épaisseurs :  $e_c=1, 0.5$  et  $0.25$ . Ces rapports de conductivité sont compris entre 0.1 et 10.



**FIGURE 3.17:** Modélisation des problèmes revêtement/substrat soumis à un flux de chaleur Hertzien :  $q_{max} = 1$ ,  $a = 1$ . Le domaine de calcul est un volume élémentaire de taille  $[16; 16; 8]$  maillé à l'aide de  $17 \times 17 \times 9$  points sur la grille grosse. La stratégie de calcul est locale, utilisant de 8 à 9 niveaux en fonction de la taille du revêtement.



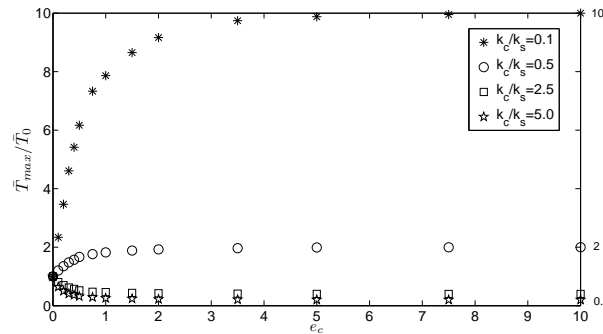
**FIGURE 3.18:** Évolution de la température maximale en surface du revêtement en fonction du rapport de conductivité  $k_c/k_s$ . Épaisseurs de celui-ci :  $e_c=1.0$ ,  $0.5$  et  $0.25$ .

La figure 3.18 montre que la température maximale en surface du revêtement, selon une échelle logarithmique, possède un comportement quasi linéaire et ce quelle que soit l'épaisseur  $e_c$ . La deuxième observation concerne la diminution de cette température avec l'augmentation de l'épaisseur dans le cas où le rapport  $k_c/k_s$  est supérieur à 1. Le revêtement est conducteur et la température se diffuse facilement à l'intérieur de celui-ci. En revanche, si ce même rapport est inférieur à 1, on constate une diminution de celle-ci avec la diminution de l'épaisseur. Le revêtement joue ainsi un rôle d'isolant, conservant un maximum de quantité de chaleur en sa surface afin de protéger le substrat à l'interface. Les coefficients directeurs des courbes obtenues sont résumés dans le tableau 3.4. On observe entre 30 et 40% d'augmentation de la pente lorsque l'on double l'épaisseur du revêtement. Cette augmentation tend à diminuer avec l'augmentation de l'épaisseur, caractéristique de l'effet asymptotique dû aux très grandes épaisseurs de revêtement.

Épaisseur ( $e_c$ )	0.25	0.5	1.0
Pente : $\bar{T}_{max} * k_s/k_c$	0.13	0.18	0.24

**TABLE 3.4:** Coefficients directeurs des courbes présentées sur la figure 3.18

Afin d'étudier le comportement asymptotique du maximum de température en surface du revêtement, on trace l'évolution de la température maximale adimensionnée par rapport à celle obtenue dans le cas non revêtu  $\bar{T}_{max}/\bar{T}_0$  en fonction de l'épaisseur du revêtement  $e_c$ . La discrétisation et les temps de calculs sont les mêmes que pour le cas précédent.



**FIGURE 3.19:** Évolution de la température maximale en surface  $\bar{T}_{max}/\bar{T}_0$  par rapport à l'épaisseur du revêtement  $e_c$  pour plusieurs rapports de conductivité  $k_c/k_s=0.1, 0.5, 2.5, 5.0$

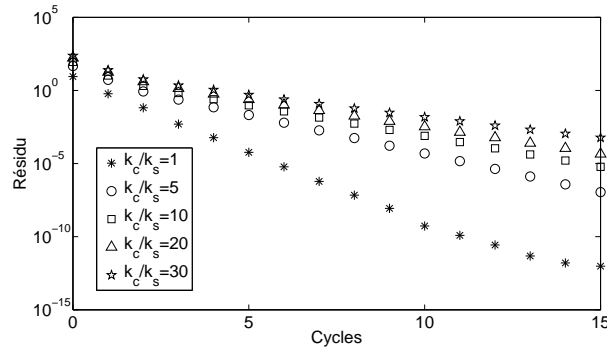
La figure 3.19 présente l'évolution de la température maximale en surface par rapport à l'épaisseur du revêtement  $e_c$  pour divers rapports de conductivité  $k_c/k_s$ . On observe que pour les grandes valeurs d'épaisseur de revêtement  $e_c$ , la température adopte le comportement asymptotique donné par l'équation (3.20).

$$\lim_{t \rightarrow (\infty)} T_{max}/T_0 = k_s/k_c \quad (3.20)$$

On s'intéresse désormais particulièrement au cas des grands rapports de conductivité ( $k_c/k_s > 5$ ) et des petites épaisseurs ( $e_c < 0.5$ ) de revêtement. De grands rapports de conductivité entre revêtement et substrat sont utilisés dans le domaine aérospatial où les rapports  $k_c/k_s$  peuvent atteindre des valeurs de 15-20. Ce type de problème engendre une dégradation de la convergence de l'algorithme due à la discontinuité importante au niveau de l'interface. Cette dégradation est d'autant plus importante que la discontinuité est grande. La figure 3.20 illustre cette dégradation de la convergence pour un revêtement d'épaisseur  $e_c = 0.5$ . 5 niveaux et 15 cycles sont utilisés pour la résolution. Le massif est de taille  $[16;16;8]$  maillé à l'aide de  $17*17*9$  points sur la grille de niveau 1 ( $\Omega_1$ ). La stratégie de calcul est globale.

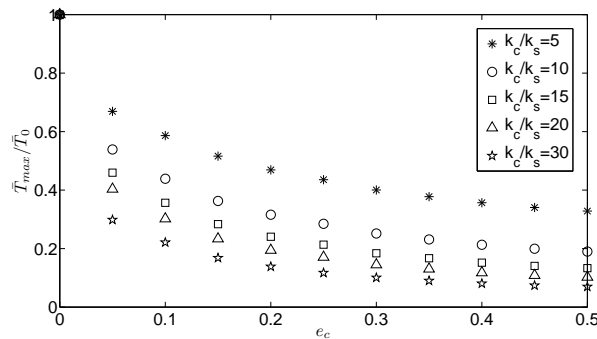
On observe une diminution de la pente avec l'augmentation du ratio  $k_c/k_s$  traduisant l'augmentation de l'effort numérique à fournir pour résoudre le problème.

Afin de palier à ce problème, on utilise le même type de procédé que celui utilisé dans le



**FIGURE 3.20:** Évolution du résidu en fonction du nombre de cycles pour un problème de thermique mettant en jeu un revêtement.  $v_0=10$ ,  $v_1=v_2=5$ ,  $t=0.5$

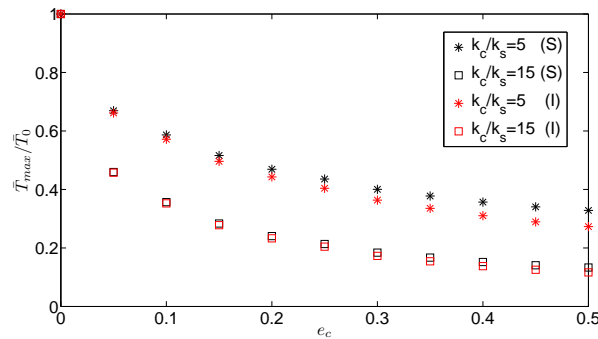
problème mécanique pour traiter les conditions aux limites de type Neumann. Plusieurs pré-relaxations sont utilisées autour de l'interface et on augmente le nombre de relaxations  $v_0$  utilisées sur le niveau grossier afin de faire converger celui-ci suffisamment durant les V-cycles. Ce nombre de relaxations doit être d'autant plus important que la discontinuité est grande [ALC 81]. L'amélioration de la convergence nous permet d'étudier plus efficacement le rôle de barrière thermique joué par les revêtements sur le champ de température.



**FIGURE 3.21:** Évolution de la température maximale en surface en fonction de l'épaisseur de revêtement  $e_c$  pour des rapports de propriétés  $k_c/k_s=5, 10, 15, 20, 30$ .

La figure 3.21 présente l'évolution de la température maximale en surface en fonction de l'épaisseur de revêtement. On observe la diminution de cette température avec l'augmentation du rapport  $k_c/k_s$ . Ainsi, un revêtement ayant une forte conductivité subira moins de contraintes thermiques qu'un revêtement ayant une faible conductivité. On observe maintenant le champ de température à l'interface.

La figure 3.22 présente l'évolution de la température maximale en surface et à l'interface en fonction de l'épaisseur de revêtement pour deux rapports de conductivité  $k_c/k_s$  : 5 et 15. On constate que le comportement du maximum de température à l'interface suit le même type de comportement que celui localisé à la surface. L'écart entre ces



**FIGURE 3.22:** Évolution de la température maximale en surface (S) en surface et à l'interface (I) en fonction de l'épaisseur de revêtement  $e_c$  pour des rapports de propriétés  $k_c/k_s=5$  et 15.

températures augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du revêtement et diminue avec l'augmentation du rapport de conductivité. Ainsi, la température devient presque constante selon l'épaisseur pour des grands rapports de propriétés ( $\bar{T}=f(x,y)$  dans le revêtement) et les contraintes thermiques deviennent plus faibles à la surface du revêtement.

### 3.4.3 Conclusion

Les diverses études présentées dans cette section ont permis de montrer la capacité du modèle à traiter de nombreux problèmes thermiques à partir de l'équation de la chaleur. Ces études ont mis en jeu des matériaux homogènes et revêtus, des sources lisses et rugueuses mais également des nombres de Péclet variés afin d'observer l'influence de ces différents paramètres sur le champ de température et sur les performances de l'algorithme de résolution. Les coûts numériques thermiques n'ont pas été comparés à ceux mécaniques puisque le nombre de degrés de liberté est triplé pour un problème équivalent en termes de conditions aux limites.

D'un point de vue physique, nous avons quantifié le rôle des revêtements utilisés pour la protection des substrats en considérant des applications extrêmes (forts gradients de propriétés  $k_c/k_s$ ) correspondant à des cas industriels. L'augmentation du rapport de conductivité tend à uniformiser la température à l'intérieur du revêtement, protégeant ainsi le substrat des contraintes thermiques.

Nous avons pu également constater que la convergence du problème se dégradait lorsque l'on a affaire à d'importants gradients de propriétés mais que, monnayant un coût numérique plus élevé en termes de relaxations, et par conséquent en temps CPU, une bonne convergence pouvait être maintenue.

Nous allons maintenant présenter la façon dont nous avons combiné ce modèle thermique et le modèle élastique présenté dans le chapitre précédent pour résoudre des problèmes thermo-élastiques.

## 3.5 Modèle 3D thermo-élastique

### 3.5.1 Introduction

Les travaux réalisés jusqu'à présent se sont attachés aux problèmes de l'élasticité linéaire et de la thermique. Nous avons pu constater durant l'étude bibliographique et dans ce chapitre que les échanges thermiques avaient un rôle notable dans les problèmes de contact. En effet, ils possèdent une influence sur les propriétés mécaniques et thermiques des matériaux, et par conséquent sur les champs de déformations et de température à l'intérieur de ceux-ci. Le modèle thermique développé nous permet l'évaluation, en 3 dimensions, du champ de température dans un milieu hétérogène soumis à un flux quelconque. Ce champ de température peut être utilisé comme donnée d'un problème thermo-élastique mettant en jeu un matériau hétérogène soumis à un chargement quelconque. Il n'est pas question ici de réaliser un modèle de couplage thermo-mécanique étant donné que nous nous plaçons à un instant  $t$  pour la résolution. Ainsi, les propriétés du matériau mis en jeu n'évoluent pas durant la résolution. L'objectif de ce modèle est l'observation de l'influence du champ de température sur les champs de contraintes à l'intérieur d'un matériau hétérogène. Nous allons présenter les équations de la thermo-élasticité, les conditions aux limites du problème et la discrétisation des équations. Puis, une étape de validation du modèle sera réalisée avant de présenter une étude sur le rôle protecteur des revêtements céramiques multi-couches.

### 3.5.2 Équations de la thermo-élasticité

Dans le cas d'un système où les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, le phénomène de dilatation engendre la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant. La loi de Hooke (2.2) s'écrit alors :

$$[\sigma] = [C] : ([\varepsilon] - [\varepsilon_{th}]) \quad (3.21)$$

où  $[C]$  est le tenseur de rigidité du quatrième ordre. 81 coefficients sont théoriquement à déterminer pour ce tenseur. Cependant, dans les cas où l'on peut considérer une condition de symétrie des contraintes et des déformations, on peut réduire ce nombre à 36. Si l'on développe la notation tensorielle (3.22), on obtient l'équation suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}\alpha T \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (3.22)$$

Selon le même principe qu'en mécanique classique, on obtient les équations de Lamé généralisées thermo-élastiques en reportant l'équation (2.6) dans les équations d'équilibre et en utilisant l'équation (3.22) :

$$(\lambda\mu_{j,j})_{,i} + (\mu\mu_{i,j})_{,j} + (\mu\mu_{j,i})_{,j} - ((3\lambda + 2\mu)\alpha T)_{,i} = 0 \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (3.23)$$

Les propriétés peuvent varier selon toutes les directions de l'espace. Le système (3.23) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} ((3\lambda + 2\mu)\alpha T) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} ((3\lambda + 2\mu)\alpha T) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial z} ((3\lambda + 2\mu)\alpha T) \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.5.3 Conditions aux limites thermo-élastiques

Comme pour le problème élastique ou le problème thermique, il existe deux types de conditions aux limites dans un problème thermo-élastique :

- les conditions de type Neumann, où l'on impose des dérivées. Celles-ci requièrent, comme nous l'avons vu, un traitement particulier durant la phase de résolution du problème.
- les conditions de type Dirichlet, où l'on impose une valeur. Cette valeur est de type déplacement.

Ici, une condition mécanique de type Neumann est considérée à la surface du volume ( $z = 0$ ). Sur toutes les autres faces, un champ de déplacement est imposé. Un champ de température, déterminé à l'aide du modèle thermique, est quant à lui imposé en tout point du volume.

### 3.5.4 Discrétisation des équations de la thermo-élasticité

La discrétisation utilisée pour les équations de la thermo-élasticité se base sur la discrétisation au second ordre utilisée pour l'équation de la chaleur et les équations de Lamé en élasticité. Cette discrétisation introduit ainsi également une erreur de discrétisation d'ordre 2.

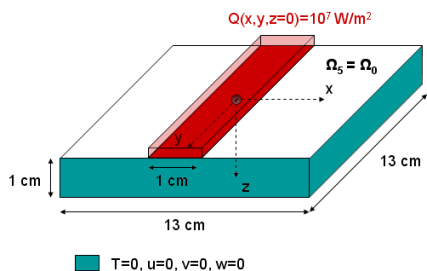
### 3.5.5 Validation

Afin de valider le modèle 3D thermo-élastique, nous allons comparer les résultats obtenus avec :

- une étude réalisée en 2 dimension à l'aide d'un logiciel d'éléments finis : ANSYS.
- la même étude réalisée à l'aide d'un logiciel utilisant les techniques FFT développé par Jean Marc Leroy [LER 89b].

#### Problème étudié

La figure suivante présente le cas 3D étudié :



Validation du modèle thermo-élastique  
 Dimension du solide : [13cm ; 13cm ; 1cm]  
 Nombre de niveaux : 5  
 Pas de maillage sur  $\Omega_5$  :  $h=1/32$  cm  
 Stratégie de calcul globale  
 17 millions de DDL mis en jeux.

Il s'agit d'un flux constant  $Q = 10^7 \text{ W/m}^2$  qui est dissipé sur une source de chaleur de largeur  $l=1$  cm. La longueur, la largeur et la profondeur du milieu étudié sont respectivement  $L_x = 13$  cm,  $L_y = 13$  cm et  $L_z = 1$  cm. Dans l'étude en 2 dimensions menée par les techniques éléments finis et FFT, on travaille dans le plan  $(x, y = 0, z)$ . L'étude réalisée en 3D est physiquement acceptable étant donné que la dimension  $L_y$  est grande devant la taille du contact et la profondeur du domaine. Le matériau étudié est un aluminium dont les caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 3.5 :

$E$	$7.10^{10} \text{ Pa}$
$\nu$	0.33
$k$	$240 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$
$\rho$	$2700 \text{ Kg/m}^3$
$C$	$860 \text{ J/(Kg.}^\circ\text{C)}$
$\alpha$	$24.10^{-6} (\text{}^\circ\text{C})^{-1}$

TABLE 3.5: Caractéristiques thermo-élastiques de l'aluminium.

Les températures et les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont imposés nuls sur les faces du volume hormis sur la surface supérieure où le flux de chaleur est imposé. Cette surface est libre de se dilater.

Nous avons utilisé 5.7 millions de points afin de discrétiser le problème sur le niveau le plus fin  $\Omega_5$  à l'aide des méthodes multigrilles, ce qui représente environ 17 millions de degrés de liberté à résoudre. Pour l'étude par éléments finis, le maillage est constitué de 1784 noeuds de discrétisation et 1404 éléments isoparamétriques rectangulaires à 4 noeuds (Q4).



### Comparaison des résultats

Le tableau 3.6 présente les valeurs maximales des différentes quantités calculées par la méthode des éléments finis (FEM), la méthode de transformée de Fourier (FFT) et par notre modèle multigrilles (MG).

quantité maximale calculée	FEM	FFT	MG
Température ( $^{\circ}$ )	260	258	261
Déplacement $w$ ( $\mu m$ )	-46	-46	-47
Déplacement $u$ ( $\mu m$ )	-22	-22	-23
Contrainte $\sigma_{zz}$ (Mpa)	47	49	49
Contrainte $\sigma_{xx}$ (Mpa)	-280	-283	-281

**TABLE 3.6:** Comparaison des valeurs maximales obtenues via les méthodes FEM, FFT et MG.

Le tableau 3.6 montre que les résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes présentent une bonne corrélation. En effet, l'erreur maximale observée sur les résultats est de l'ordre du pourcent. Cette étude nous permet donc de valider le modèle 3D thermo-élastique pour un massif homogène. Nous allons maintenant réaliser une application mettant en jeu des revêtements céramiques afin d'illustrer les possibilités de ce modèle.

### 3.5.6 Application

Cette application s'intéresse au rôle des matériaux céramiques à protéger un substrat des fortes contraintes thermiques. Les céramiques, aux contraires des métaux, sont souvent plus résistantes à l'oxydation, à la corrosion ou encore à l'usure.

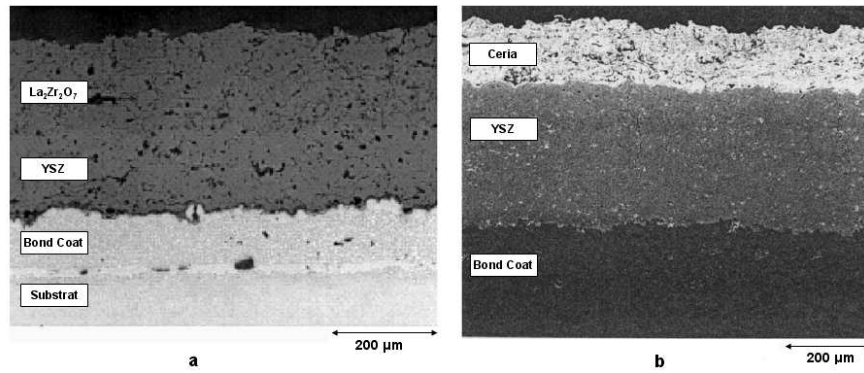
Deux configurations de barrière thermique (TBC) sont considérées. Celles-ci ont été décrites par Cao et al. [CAO 04] et sont représentées sur la figure 3.23.

Les propriétés thermiques et mécaniques des composants de ces barrières sont résumées dans le tableau 3.7.

Matériau	E (GPa)	$\nu$	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )
$La_2Zr_2O_7$	175	0.25	$9.1 * 10^{-6}$
Ceria : $CeO_2$	172	0.27	$13 * 10^{-6}$
YSZ	40	0.22	$10.7 * 10^{-6}$
Bond Coat : NiCoCrAlY	86	0.3	$17.5 * 10^{-6}$
Substrat : IN737	197	0.3	$16 * 10^{-6}$

**TABLE 3.7:** Propriétés des matériaux constituant les barrières thermiques (TBC) étudiées.

Pour la modélisation numérique du problème, nous avons considéré un volume de taille [6mm ;6mm ;2mm]. Les épaisseurs de couches céramiques pour les deux configurations



**FIGURE 3.23:** Système de revêtement double céramique [CAO 04]. (a) revêtement céramique composé de  $La_2Zr_2O_2$  en surface. (b) revêtement céramique composé de Ceria en surface.

TBC sont les suivantes :

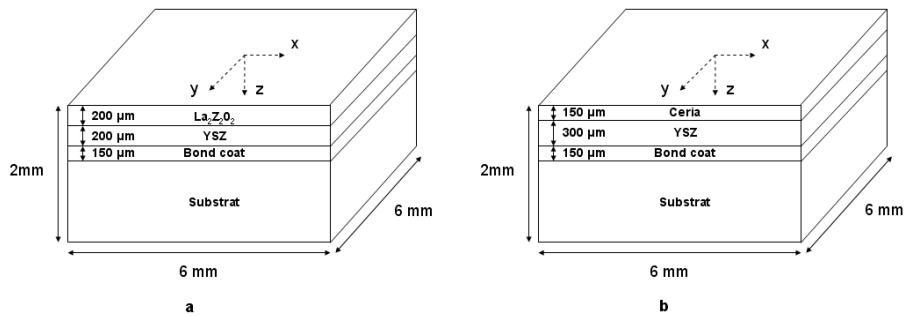
**configuration (a) :**

$$e_{La_2Zr_2O_2} = 200 \mu\text{m}, e_{YSZ} = 200 \mu\text{m}, e_{BondCoat} = 150 \mu\text{m}.$$

**configuration (b) :**

$$e_{Ceria} = 150 \mu\text{m}, e_{YSZ} = 300 \mu\text{m}, e_{BondCoat} = 150 \mu\text{m}.$$

Ces paramètres sont présentés sur la figure 3.24.

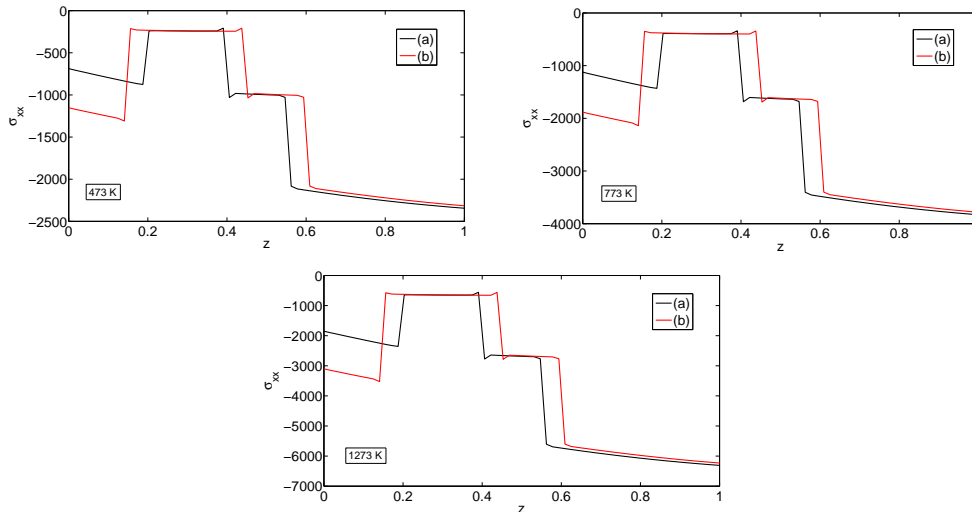


**FIGURE 3.24:** Modélisation des problèmes TBC. (a) revêtement céramique composé de  $La_2Zr_2O_2$  en surface. (b) revêtement céramique composé de Ceria en surface.

Une température uniforme a été imposée dans tout le volume. Cette température prend les valeurs suivantes : 473, 773 et 1273 degrés Kelvin (K). Pour ces températures, les valeurs des différents modules de Young, coefficients de dilatation et coefficients de Poisson de chacun des matériaux restent inchangées [CAO 04]. Des déplacements nuls ont été considérés sur chacune des faces du volume exceptée en surface ( $z = 0$ ) où les déplacements sont laissés libres. Aucune contrainte n'est appliquée en surface. La stratégie multigrilles utilise 6 niveaux dont 1 raffiné. Le niveau 1 est maillé à l'aide de  $13 \times 13 \times 5$  points et le niveau 6 à l'aide de  $289 \times 289 \times 65$  points. Le temps CPU est de 20 minutes environ pour obtenir un résidu de  $10^{-10}$  sur la solution.

## Résultats

Sous l'effet de la température, le massif a tendance à se comprimer sur lui même, engendrant de fortes contraintes de compression  $\sigma_{xx}$ . Nous allons donc nous intéresser particulièrement à ces contraintes en les traçant dans le plan médian ( $x, y = 0, z$ ) du volume. La figure 3.25 présente la contrainte moyenne de compression  $\sigma_{xx}$  dans ce plan pour les configurations TBC (a) et (b) à différentes températures.



**FIGURE 3.25:** Contraintes de compression  $\sigma_{xx}$  dans les revêtements TBC (configurations (a) et (b)) pour différentes températures : 473, 773 et 1273 Kelvin.

Les résultats obtenus montrent que le champ de contrainte varie peu dans les différentes couches de revêtement. L'effet du coefficient de dilatation de chaque couche du revêtement est mis en évidence : la contrainte de compression est deux à trois fois plus faible dans celles-ci que dans le substrat. Les travaux de Vassen et al. [VAS 01] ainsi que ceux de Wilden et al. [WIL 01] mettent en évidence le rôle d'isolant thermique tenu par la couche céramique supérieure. Afin d'assurer ce rôle, celle-ci doit avoir une conductivité thermique plus faible que celle du YSZ situé juste en dessous. Ils ont également montré que les performances cycliques thermiques du système (a)-(La<sub>2</sub>Z<sub>2</sub>O<sub>7</sub>/YSZ) étaient meilleures que celles du système (b)-(CeO<sub>2</sub>/YSZ) qui est plus efficace dans la résistance aux chocs thermiques.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle corroborent ces observations qui étaient néanmoins prévisibles. En effet, la diminution de la contrainte de compression entre les deux configurations est majoritairement due au coefficient de dilatation de la couche supérieure, dont le rapport est de 1.4 entre les deux céramiques testées.

### 3.5.7 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section un modèle 3D thermo-élastique basé sur les équations de Lamé thermo-élastiques. Ce modèle est l'extension naturelle des travaux

réalisés en thermique sur l'équation de la chaleur et en mécanique du solide sur les équations de Lamé pour l'élasticité linéaire.

Ce modèle a été conçu afin de pouvoir tenir compte d'une variation quelconque des propriétés selon toutes les directions de l'espace, en particulier des variations de propriétés en fonction de la température. Une validation du modèle à l'aide d'une solution extraite de la littérature a été réalisée puis une application aux barrières thermique a été présentée.

Cette application a permis de montrer l'efficacité des techniques multigrilles à modéliser un ensemble de couches minces et à résoudre le problème associé dans des temps de calculs faibles.

## 3.6 Synthèse

Au cours de ce chapitre, nous avons montré que l'algorithme 3D multigrille localisé utilisé précédemment pour résoudre les équations d'élasticité est tout aussi efficace pour résoudre l'équation de la chaleur de Fourier. L'algorithme a cependant été modifié afin de traiter différemment les conditions aux limites de type Neumann, qui utilisent, pour ce problème, la méthode des points fantômes. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'altère pas la convergence de l'algorithme. Plusieurs validations sur des massifs homogènes ou revêtus dans des cas stationnaires ou considérant une source en mouvement ont été effectuées, montrant les performances du modèle à résoudre tout type de problème thermique de façon précise (1 millions de points en surface sur le niveau fin) pour des coûts numériques faibles (temps CPU et mémoire).

Les différents cas d'études présentés illustrent le comportement du champ de température en surface et à l'interface d'un système revêtement/substrat. Durant l'étude de ces systèmes, nous avons été confrontés à des problèmes de convergence engendrés par la discontinuité des propriétés au niveau de l'interface. Il est cependant possible de mener une résolution efficace à ces problème moyennant un coût numérique plus important en termes de temps CPU. Cette augmentation des temps de calcul est due à la nécessité de croître le nombre de relaxations utilisées durant les différentes phases de cycles FMG. Le comportement des revêtement à forte conductivité a été spécifiquement abordé afin de montrer les effets bénéfiques de celui-ci sur le champ de température en surface d'un substrat et par conséquent sur le champ de contrainte thermique engendré. Enfin, nous avons présenté le développement et la validation d'un modèle 3D thermo-élastique basé sur l'assemblage des modèles thermiques et élastiques. Les avantages majeurs de ce modèle par rapport à ceux existant sont sa capacité à modéliser tout type de variations de propriétés à l'intérieur d'un matériau et à résoudre un problème mettant en jeu un nombre important de degrés de libertés dans des temps de calculs faibles.

Dans le prochain chapitre, nous aborderons les problèmes de nature mécaniques au travers d'études sur des matériaux hétérogènes.

# Chapitre 4

## Milieus polycristallins

*Dans ce dernier chapitre sont abordés des problèmes mettant en jeu des matériaux dont les propriétés varient selon toutes les directions de l'espace. Ces variations de propriétés se caractérisent au sein même de la microstructure des matériaux qui a donc été modélisée à l'aide d'une méthode de partition de l'espace. Des calculs de contraintes dans plusieurs milieux hétérogènes sont effectués avant de conclure sur la durée de vie en fatigue de ceux-ci à l'aide d'un critère extrait de la littérature et des représentations graphiques de type Weibull.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>4.2</b>	<b>Modélisation des grains</b>	<b>109</b>
4.2.1	introduction	109
4.2.2	Principe de la méthode	109
4.2.3	Construction du maillage	111
<b>4.3</b>	<b>Modélisation du problème numérique</b>	<b>113</b>
<b>4.4</b>	<b>Contraintes dans les milieux polycristallins</b>	<b>115</b>
4.4.1	Introduction	115
4.4.2	Milieu à variation de densité volumique	115

4.4.3	Milieux polycristallins hétérogènes . . . . .	117
4.4.4	Synthèse . . . . .	118
<b>4.5</b>	<b>Durée de vie en fatigue des milieux polycristallins . . . . .</b>	<b>118</b>
4.5.1	Introduction . . . . .	118
4.5.2	Critère de Lundberg-Palmgren . . . . .	119
4.5.3	Critère de Ioannides-Harris . . . . .	119
4.5.4	Distribution statistique de Weibull . . . . .	120
4.5.5	résultats . . . . .	121
4.5.6	Conclusion . . . . .	127
<b>4.6</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>129</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans les précédents chapitres de cette thèse, nous avons présenté le contexte de notre étude et les différentes techniques numériques développées pour la résolution des problèmes de thermique et de mécanique du contact. Des études ont été présentées pour montrer les performances des modèles en termes de précision et de coûts numériques (temps CPU et espace mémoire). Ces techniques ont permis une modélisation macroscopique 3D du comportement des matériaux isotropes (homogènes, revêtus, à gradients de propriétés) soumis à des sollicitations simples.

L'objectif de ce dernier chapitre est de montrer comment notre modèle peut intégrer, à l'aspect multi-échelles des problèmes de contact, l'échelle microstructurale des matériaux. Nous allons détailler comment, à l'aide des méthodes multigrilles, nous réalisons une description multi-échelles au niveau des grains des matériaux, en associant à chaque grain des propriétés mécaniques propres. Ce modèle simplifié n'intègre pas les joints entre les grains. La continuité des déplacements entre ces derniers a donc été considérée.

Nous allons aborder en premier lieu la modélisation géométrique et numérique des grains puis nous présenterons les champs de contraintes obtenus dans le cas de chargements mécaniques Hertiens. Enfin, nous utiliserons un modèle de fatigue existant dans la littérature pour estimer la durée de vie d'une population de milieux hétérogènes dans le cas de sollicitations de contacts roulants sans frottement.

## 4.2 Modélisation des grains

### 4.2.1 introduction

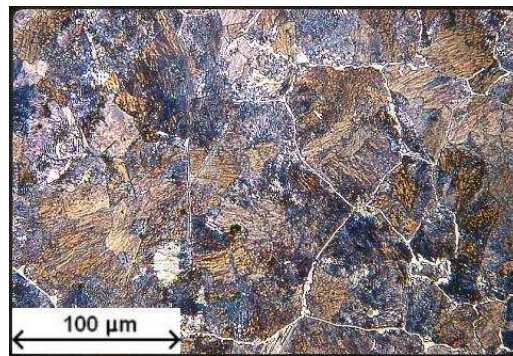
Les observations microscopiques réalisées sur des aciers de type roulement montrent que leur microstructure peut être considérée comme une assemblage de grains, que l'on peut modéliser numériquement à l'aide de polyèdres. La figure 4.1 présente une photographie d'un acier cémenté, réalisée au microscope, montrant la structure micro-cristalline. Une solution de nital a été utilisée pour colorer les grains.

Une des méthodes retenue pour modéliser ce type de micro-structure est la tessellation de Voronoï, qui va maintenant être décrite.

### 4.2.2 Principe de la méthode

La méthode de tessellation de Voronoï est une technique de partition de l'espace qui a été introduite au milieu des années 80 par Johann Dirichlet [DIR 50]. Cette méthode a été généralisée aux espaces à  $n$  dimensions par le mathématicien Georgy Voronoï [VOR 08]. Afin de modéliser les polyèdres, on définit un ensemble de points  $\mathfrak{P}=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , appelés points de nucléations, dans l'espace à 3 dimensions  $\mathbb{R}^3$ . Cet ensemble de points est inclus dans un volume  $V$ .

On appelle diagramme de Voronoï de l'ensemble  $\mathfrak{P}$  l'ensemble des régions polyédriques



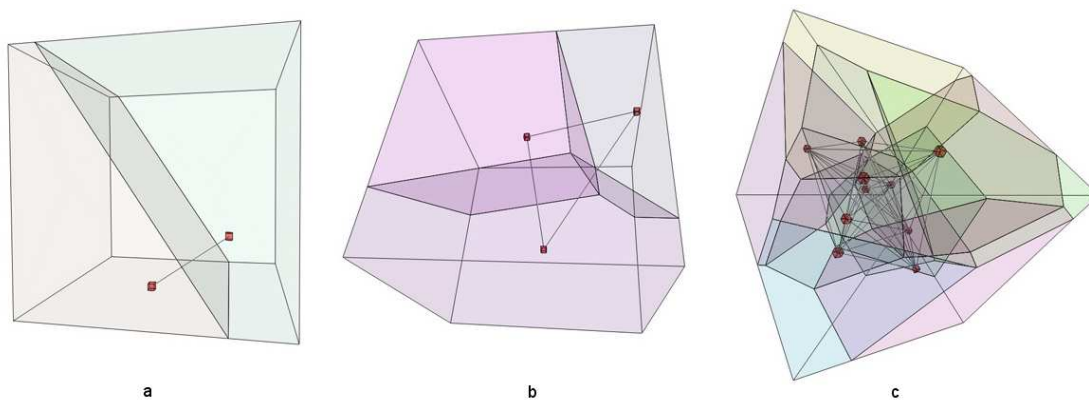
**FIGURE 4.1:** Photographie de la microstructure d'un acier cémenté.

convexes notées  $\{Vor(p_1), Vor(p_2), \dots, Vor(p_n)\}$ . Chacune des régions  $Vor(p_i)$  est associée à un point  $p_i$  et est constituée des points de l'espace dont la distance avec  $p_i$  est plus courte qu'avec celle des autres points de  $\mathfrak{P}$ . Soit  $M$  un point de l'espace, cela se traduit mathématiquement par l'expression (4.1).

$$Vor(p_i) = \{d(p_i, M) \leq d(p_j, M) \forall j, \forall M \in \mathbb{R}^3\} \quad (4.1)$$

Ainsi, la frontière de chacune des régions  $Vor(p_i)$  est la plus petite enveloppe des plans médiateurs des segments reliant le centre ( $p_i$ ) à tous les autres points ( $p_j$ ). Chacune des faces est commune à 2 polyèdres.

La figure 4.2 illustre cette méthode de création d'enveloppe 3D à l'aide des plans médiateurs.



**FIGURE 4.2:** Illustration du principe de la méthode de tessellation de Voronoï en 3D. Construction des plans médiateurs à partir de a : 2 points, b : 3 points et c : 10 points.

En appliquant cette méthodologie pour chacun des points  $p_i$  dans le volume  $V$ , on obtient une partition de celui-ci en polyèdres convexes bornés.

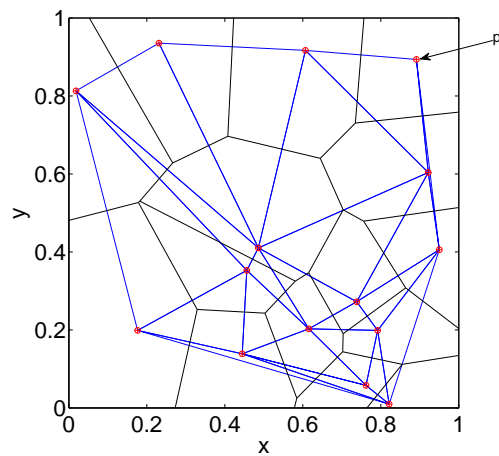


## 4.2.3 Construction du maillage

### 4.2.3.1 triangulation de Delaunay

La construction du maillage, basée sur la tessellation de Voronoï, a été réalisée à l'aide de l'outil Voronoï de Matlab, étendu au cas tridimensionnel. Cet algorithme est basé sur la méthode de la triangulation duale de Delaunay [DEL 34].

Cette triangulation s'obtient en reliant les paires de points qui possèdent une facette de Voronoï en commun. De cette façon, la détermination des régions polyédriques de Voronoï sert à situer précisément la forme de toutes les surfaces communes entre chacune des paires de points qui interagissent. La figure 4.3 illustre un exemple de Tessellation de Voronoï et de triangulation de Delaunay en 2 dimensions obtenue pour une répartition aléatoire de 15 points.



**FIGURE 4.3:** Tessellation de Voronoï et triangulation de Delaunay en 2 dimensions obtenue pour une répartition aléatoire de 15 points  $p_i$ .

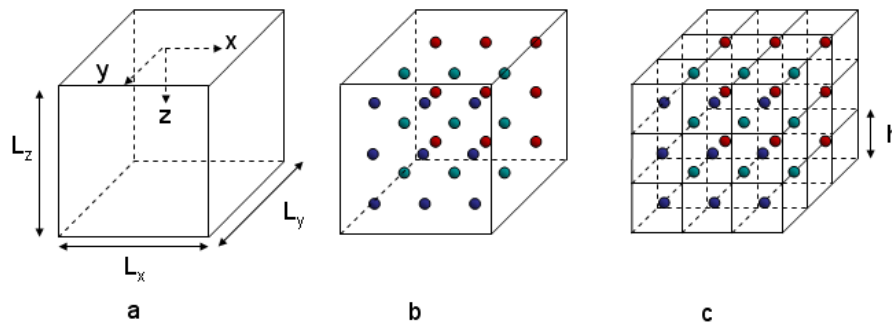
Dans l'espace à 3 dimensions, on détermine les sommets des polyèdres à partir des centres de gravité des tétraèdres de Delaunay. Les plans sont obtenus en déterminant les deux tétraèdres adjacents à chacune des faces de Delaunay. On obtient les polygones de Voronoï en cherchant tous les tétraèdres adjacents à chacun des plans de Delaunay. Enfin, chaque polyèdre de Voronoï est déduit en déterminant tous les plans de Delaunay qui contiennent le point considéré. Des travaux très détaillés sur ce type de modélisation en 2 dimensions ont été réalisés par Aurenhammer et Klein [AUR 00]. Il existe dans la littérature plusieurs types de travaux sur la modélisation en 3D. Celle-ci peut être de deux types : globale ou incrémentale.

Dans le cas d'une méthode globale, tous les points  $p_i$  sont nécessaires à la construction des polyèdres. Les méthodes incrémentales sont quant à elles des méthodes intrinsèquement dynamiques qui nécessitent l'utilisation d'algorithmes complexes comme celui de Watson [WAT 81]. Ces derniers permettent de mieux contrôler la répartition des polyèdres mais requièrent l'implémentation de plusieurs étapes qui

peuvent être très coûteuses en termes de temps de calcul. C'est pour cette raison qu'une méthode globale a été retenue. Pour plus d'informations sur les méthodes incrémentales, le lecteur peut se rapporter aux travaux de thèse de Lachihab [LAC 04].

#### 4.2.3.2 Positionnement des points de nucléation

La disposition des points de nucléation  $p_i$  dans l'espace permet de piloter la dispersion et la taille des polyèdres de Voronoï. Une disposition régulière de ces points engendre une répartition régulière des polyèdres dans l'espace. Si l'on considère un maillage cubique régulier des points de nucléation dans l'espace ( $h_x=h_y=h_z=h$ ) l'algorithme de tessellation produit un assemblage de cubes d'arêtes  $h$ , comme le montre la figure 4.4.



**FIGURE 4.4:** Tessellation de Voronoï obtenue pour un maillage régulier selon toutes les directions de l'espace. a : volume élémentaire, b : positionnement régulier des points de nucléation, c : tessellation de Voronoï.

Lors de la procédure de tessellation, nous avons veillé à ce qu'il n'y ait pas de variation significative de la taille des polyèdres dans le volume élémentaire.

Afin d'atteindre cet objectif, on débute la procédure en considérant un maillage de points répartis régulièrement dans le volume élémentaire de calcul ( $h_x=h_y=h_z=h$ ). Nous avons alors considéré que chacun de ces points était le centre d'une sphère de rayon  $R$  (avec  $R < h/2$ ). Puis, on les déplace de manière aléatoire (utilisation d'une fonction random) à l'intérieur de la sphère dont ils sont le centre. La figure 4.5 illustre, en 2 dimensions, cette procédure de création de maillage aléatoire à partir d'un maillage régulier.

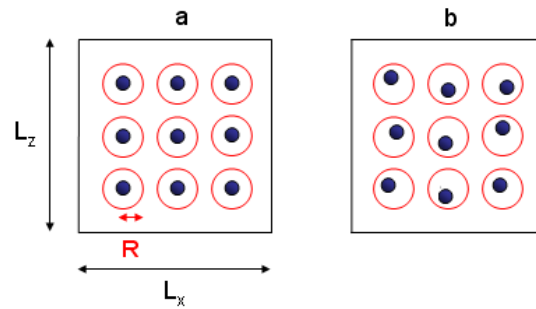
Les résultats sont conformes aux développements théoriques de Brakke [BRA ] et vérifient entre autre les relations de Euler-Poincaré pour les polyèdres 3D :

$$v + f = e + 2 \qquad n = \frac{6v}{v+4} \qquad e = \frac{3v}{2} \qquad f = \frac{v}{2} + 2$$

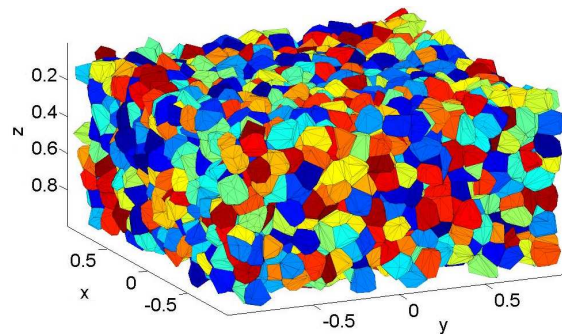
Avec  $v$  le nombre de points,  $f$  le nombre de faces,  $e$  le nombre de segments et  $n$  le nombre de segments par face.

Le type de maillage obtenu en 3 dimensions pour un volume de taille  $[2; 2; 1]$  est représenté sur la figure 4.6.

Nous avons détaillé la méthode de modélisation utilisée pour l'étude des milieux polycristallins. Cette méthode, basée sur la tessellation de Voronoï, fait l'objet de travaux



**FIGURE 4.5:** Disposition des points de nucléations à partir d'un maillage régulier. a : maillage initial et choix d'un rayon de sphère  $R$ , b : maillage aléatoire contrôlé par la taille des sphères.



**FIGURE 4.6:** Maillage 3D obtenu à l'aide de la tessellation de Voronoï à l'intérieur d'un volume élémentaire de taille  $[2 ; 2 ; 1]$ . Environ 4000 grains sont modélisés.

en mécanique du solide, au travers d'études via les éléments finis notamment [WAR 10, WAR 12, CAI 03].

Nous allons maintenant présenter en détail la modélisation utilisée pour les différents cas d'étude menés.

### 4.3 Modélisation du problème numérique

La description géométrique de la microstructure est donc assurée via une procédure de tessellation de Voronoï. Cette section est dédiée à la présentation des différents cas que nous avons étudiés et à leurs modélisations numériques.

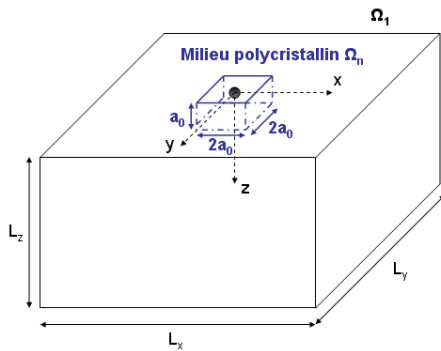
Un volume élémentaire fini de taille  $[L_x ; L_y ; L_z]$  est considéré sur lequel un champ de pression Hertzien est appliqué, caractérisé par son rayon  $a_0$  et son intensité maximale  $P_0$ . Ce volume peut représenter :

- un matériau homogène (Les valeurs de  $E$  et  $\nu$  sont identiques et constantes pour tous les grains)
- un matériaux à variation de densité volumique selon la profondeur  $z$  (variation de la

densité des propriétés du revêtement en fonction de la profondeur, i.e.  $d(E_c, \nu_c) = f(z)$

- un matériau hétérogène (répartition aléatoire de  $E$  et  $\nu$  entre les différents grains).

La stratégie multigrilles de calcul est une stratégie locale mettant en jeux  $n$  niveaux (le niveau  $n$  est noté  $\Omega_n$ ). Le raffinement est tridimensionnel et piloté pour que le niveau le plus fin possède une taille de  $[2a_0; 2a_0; a_0]$ . Ce choix est motivé par le fait que la tessellation de Voronoï a été réalisée uniquement sur un volume de cette taille pour des raisons d'espace mémoire et de temps de calcul : à titre d'exemple, la modélisation d'un milieu polycristallin contenant 4000 grains maillés à l'aide de 2000 points par grains environ nécessite la création d'un fichier de données de taille 150 Mo et une heures de procédure de calcul sous Matlab. En dehors de cette zone, les propriétés attribuées au massif sont les propriétés moyennes de la zone polycristalline. La figure suivante présente le volume élémentaire de calcul.



Modélisation de milieux polycristallin

Volume élémentaire  $[L_x; L_y; L_z]$

Nombre de niveaux :  $n$

Pas de maillage sur  $\Omega_n$  :  $a_0/128$  ou  $a_0/256$

Stratégie de calcul locale

Les études réalisées concernent un milieu à variation de densité volumique (VD) et plusieurs milieux hétérogènes (HE) qui seront décrits par la suite.

Les différents paramètres numériques utilisés pour la résolution sont référencés dans le tableau 4.1.

Problème	niveaux	niveaux locaux	$[L_x-L_y-L_z]/a_0$	points ( $\Omega_n$ )	pas ( $\Omega_n$ )
VD	9	4	8-8-4	32M	1/256
HE	8	3	8-8-4	8M	1/128

**TABLE 4.1:** Paramètres utilisés pour la modélisation des différents problèmes polycristallins.

Pour les conditions aux limites mécaniques, nous imposons en surface une pression Hertzienne dont les paramètres sont  $a_0 = 1$  et  $P_0 = 1$ . Comme nous voulons comparer les résultats avec ceux obtenus pour un massif semi-infini homogène, nous imposons comme condition aux limites sur les autres faces du volume les déplacements obtenus dans le cas d'un massif semi-infini homogène soumis à la même pression Hertzienne. La figure 4.7 donne une représentation du volume élémentaire et des conditions aux limites choisies. Nous venons de détailler la modélisation mise en place pour la résolution numérique des problèmes mécaniques à l'échelle micro-structurale. La difficulté majeure rencontrée lors de la mise en place de celle-ci provient du coût numérique requis par la tessellation de Voronoï pour un ensemble de points de nucléation et un maillage important. Les

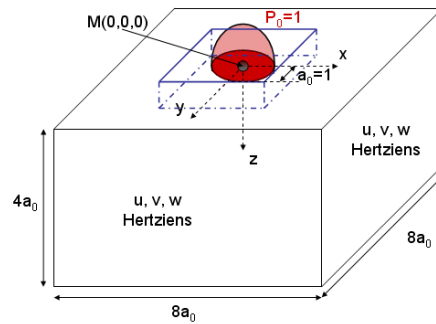


FIGURE 4.7: Conditions aux limites des problèmes polycristallins.

autres étapes demeurent, quant à elles, des procédés classiques de modélisation. Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus en termes de contraintes à l'aide du modèle 3D-MG pour les différents cas d'étude.

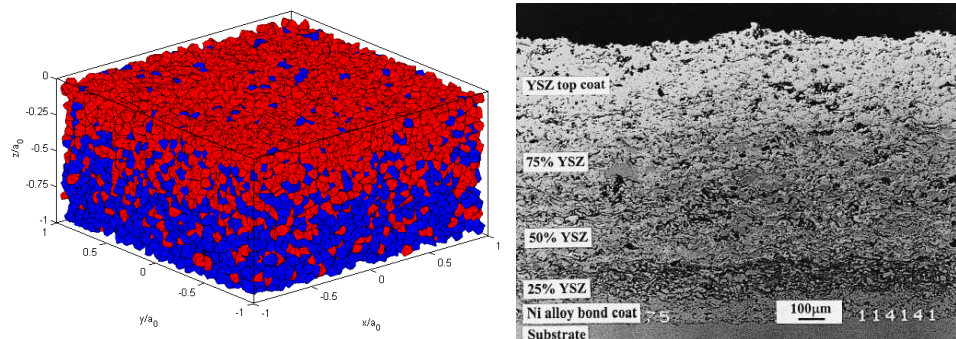
## 4.4 Contraintes dans les milieux polycristallins

### 4.4.1 Introduction

Le calcul des contraintes est maintenant présenté. Les déplacements sont déterminés en tout point du volume élémentaire de calcul à l'aide du solveur multigrilles et les contraintes sont ensuite calculées à partir de la loi de Hooke (cf chapitre mécanique). Deux cas d'étude sont présentés : un milieu polycristallin constitué de 2 familles de grains donc la densité varie linéairement entre les surfaces supérieure et inférieure du domaine et plusieurs milieux hétérogènes avec des variations de propriétés décrites selon une répartition Gaussienne d'écart type 2.5% par rapport à la valeur moyenne. Les temps de calcul, de coûts mémoire et les résidus sur la solution seront présentés pour chacun des cas.

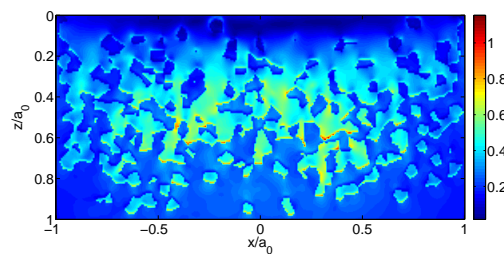
### 4.4.2 Milieu à variation de densité volumique

Une première application correspond à la modélisation d'un matériau ayant subi un dépôt de particules à l'aide d'un jet plasma pour créer un revêtement à variation de densité volumique [HU 98, ZHA 11, KHO 99]. Nous obtenons un milieu constitué de 2 types de grains donc la densité  $d$  varie linéairement entre les surfaces supérieure et inférieure du domaine. Les cristaux du matériau déposé possèdent un module de Young trois fois plus élevé que ceux du matériau constituant le substrat. 16 000 grains sont utilisés pour la modélisation et chacun est maillé à l'aide de 2000 points en moyenne. La figure 4.8 présente la description géométrique utilisée numériquement et une photographie SEM d'un revêtement à variation de densité volumique réalisé à l'aide d'un procédé de déposition plasma [KHO 99].



**FIGURE 4.8:** Milieu polycristallin à variation de densité volumique : variation linéaire de la densité  $d$  des grains mis en jeu - Photographie SEM d'un revêtement à variation de densité volumique réalisé à l'aide d'un procédé de dépôt plasma [KHO 99]

Une convergence de  $10^{-5}$  sur la solution est considérée. Le temps de calcul CPU est de 1h30 environ sur un ordinateur de bureau. Toutes les composantes du tenseur des contraintes sont calculées. Seule la contrainte de Von-Mises est tracée ici, dans le plan  $(x, y = 0, z)$ , sur la figure 4.9.

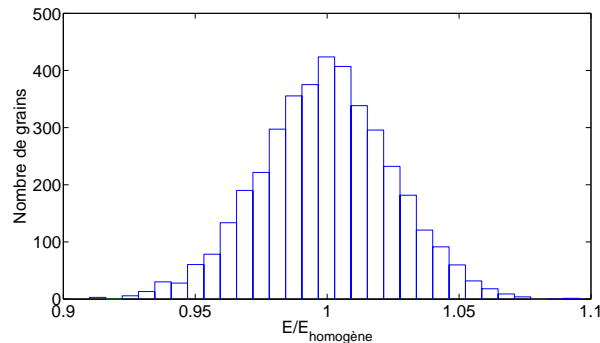


**FIGURE 4.9:** Contraintes de Von-Mises dans le plan  $(x, y = 0, z)$  dans un milieu polycristallin à variation de densité volumique : variation linéaire de la densité du revêtement au travers du milieu polycristallin ( $d=1$  pour  $z/a=0$  -  $d=0$  pour  $z/a=1$ ).

La faible densité de revêtement en profondeur implique que les grains le constituant se comportent comme un ensemble d'inclusions dures à ce niveau. En effet, la représentation des contraintes de Von-Mises sur la figure 4.9 montre qu'il existe plusieurs maxima situés au niveau de la profondeur de Hertz ( $0.4 < z/a < 0.6$ ). Ces maxima sont observables aux frontières (joints) entre les grains du revêtement et ceux du substrat et leur intensité ( $\sigma_{VM}(max) = 1.12$ ) est environ trois fois supérieure à celle obtenue dans le cas d'un massif homogène ( $\sigma_{VM}(max) = 0.366$ ) et deux fois supérieure à celle obtenue dans le cas d'un revêtement à gradient de propriété linéaire sans prise en compte d'une description géométrique à l'échelle du grain ( $\sigma_{VM}(max) = 0.55$ ). Cette étude montre l'importance de la prise en compte de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques. Afin de rendre compte d'une façon plus générale de ces effets microstructuraux, nous allons nous intéresser au cas d'un milieu polycristallin hétérogène.

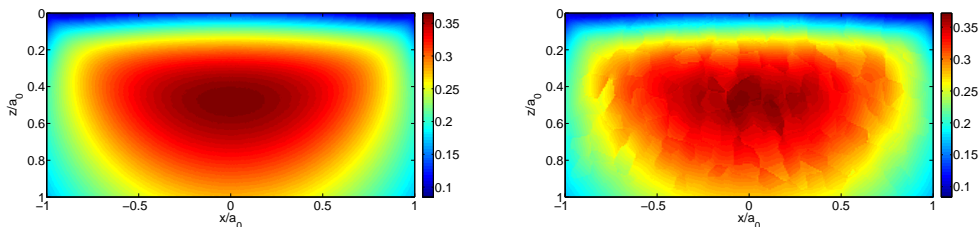
### 4.4.3 Milieux polycristallins hétérogènes

Nous considérons ici des milieux qualifiés de "polycristallins hétérogènes". La répartition des modules de Young entre les grains est de type Gaussienne, d'écart type 2.5% de la valeur moyenne. Le coefficient de Poisson est constant. Huit milieux ont été générés aléatoirement. Un seul milieu est présenté car aucune différence notable n'a été observée sur les résultats. La figure 4.10 illustre la répartition des modules de Young dans ce milieu.



**FIGURE 4.10:** Exemple de répartition Gaussienne des modules de Young (en termes de points) dans le domaine polycristallin.

4000 grains sont maillés à l'aide de 2000 points chacun environ. Un résidu de  $10^{-5}$  sur la solution a été considéré, menant à des temps de calcul CPU de 15 minutes environ sur un ordinateur de bureau.



**FIGURE 4.11:** Contraintes de Von-Mises dans le plan  $(x, y = 0, z)$  dans un milieu homogène et dans un milieu polycristallin hétérogène avec une répartition Gaussienne du module de Young d'écart type 2.5% de la valeur moyenne.

On s'intéresse aux contraintes de Von-Mises obtenues pour les milieux hétérogènes que l'on compare avec celles obtenues dans le cas d'un matériau homogène. La figure 4.11 les représente dans le plan  $(x, y = 0, z)$ . La différence entre les valeurs maximales est assez faible, inférieure à 5% :  $\sigma_{VM}(max) = 0.364$  dans le cas homogène et  $\sigma_{VM}(max)$  compris entre 0.372 et 0.378 pour les différents cas hétérogènes. La prise en compte d'une hétérogénéité géométrique, représentant en 1<sup>ère</sup> approche une microstructure au niveau des grains, permet ici de constater que certains grains sont plus sollicités que

d'autres au niveau de la profondeur de Hertz. Ces grains sont ceux qui possèdent un module de Young plus élevé que la moyenne.

### 4.4.4 Synthèse

Différents types de répartition des propriétés mécaniques dans des milieux hétérogènes, décrits comme un agrégat de grains avec des propriétés différentes, ont été modélisés. Le but est d'étudier à cette échelle le comportement du champs de contraintes. Toutes les composantes du tenseur des contraintes sont calculées. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux présentés dans le chapitre mécanique, où un comportement homogène et isotrope est supposé.

Les observations réalisées montrent l'importance de la prise en compte de ces effets. En effet, on observe des maxima locaux dus à des gradients de propriétés importants entre les différents grains constituant le milieu. Ces maxima sont d'autant plus importants que les rapports de propriétés entre les grains sont grands. Ces derniers se comportent alors comme un ensemble d'inclusions dures ou ductiles à l'intérieur d'un matériau homogène. Ainsi, une variation de 2.5% sur E implique une variation inférieure à 5% de la contrainte de Von-Mises.

Les concentrations de contraintes observées agissent comme des catalyseurs susceptibles de se développer sous sollicitations cycliques. Les étapes suivantes consistent donc à étudier le comportement d'un matériau, à cette échelle, sous sollicitation cyclique. Nous nous intéressons ici à un chargement de type roulement pur.

- L'estimation de la durée de vie sera faite en utilisant un critère extrait de la littérature [IOA 85].
- Enfin une étude de la dispersion de la durée de vie autour d'une valeur moyenne sera réalisée en utilisant les lois de type Weibull avec comme objectif de relier la dispersion obtenue en fatigue avec la distribution aléatoire des propriétés par grain.

## 4.5 Durée de vie en fatigue des milieux polycristallins

### 4.5.1 Introduction

La fatigue est un processus d'accumulation de dommages qui se manifeste par des dégradations internes progressives des propriétés des matériaux. Le mécanisme de rupture par fatigue consiste généralement en trois étapes : l'initiation de fissures, leur propagation puis la rupture du matériau mis en jeu. La durée de vie des matériaux suit ces trois étapes, qui peuvent être plus ou moins longues en fonction des propriétés de ceux-ci et des conditions de chargement auxquelles ils sont soumis.

La phase d'initiation de fissures est un événement très localisé qui est fortement affecté par la distribution aléatoire des propriétés et des défauts qui existent au niveau microstructural. De plus, les frontières entre chaque grain agissent comme des discontinuités physiques, ce que nous avons vu dans la section précédente. Le modèle



développé permet de quantifier à cette échelle l'influence de la distribution aléatoire des propriétés sur les champs de contraintes et de déformations.

Nous allons présenter en premier lieu le critère de fatigue retenu pour cette étude puis, dans une seconde partie, présenter et critiquer les résultats obtenus au travers de plusieurs représentations graphiques.

#### 4.5.2 Critère de Lundberg-Palmgren

C'est sur la base de la théorie statistique de Weibull [WEI 39] que Lundberg et Palmgren [LUN 47] ont proposé des concepts de durée de vie des roulements. Ils se sont basés sur le constat des détériorations du matériau dans un volume restreint, de profondeur limitée, défini par la théorie de Hertz (en élasticité) et en faisant l'hypothèse que l'influence de la contrainte de cisaillement maximale est prépondérante.

Ils ont exprimé la probabilité de défaillance comme étant une fonction puissance de la valeur maximale de la contrainte de cisaillement  $\tau$ , de la profondeur  $z$  à laquelle elle s'exerce, du nombre de fois  $N$  (nombre de cycles) où cette contrainte  $\tau$  est répétée, pondéré par les exposants matériaux déterminés expérimentalement  $e$ ,  $c$  et  $h$ . La formulation mathématique est donnée par l'équation (4.2).

$$\ln\left(\frac{1}{S}\right) \propto \frac{N^e \tau^c V}{z^h} \quad (4.2)$$

Avec  $N$  le nombre de cycles pour une probabilité de survie  $S$ ,  $\tau$  la valeur maximale de la contrainte de cisaillement,  $V$  le volume du matériau soumis au chargement et  $z$  la profondeur de la contrainte  $\tau$ .

Cette formulation a été utilisée pour calculer la durée de vie en introduisant la notion de capacité dynamique de charge  $C$  (charge pour laquelle 90% de la population atteint un million de de révolutions) qui est traduite par la relation (4.3) (ISO 281).

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^n \quad (4.3)$$

Plusieurs expériences ont été menées afin de déterminer les constantes  $c$ ,  $h$  et  $e$ . Les valeurs trouvées sont  $c=31/3$ ,  $h=7/3$  et  $e=10/9$  pour les contacts ponctuels et  $e=9/8$  dans le cas de contacts linéiques [IOA 85]. Ces valeurs ont été utilisées afin de calculer l'exposant  $n$  de la formulation normée, menant à  $n=3$  dans le cas de roulements à billes et  $n=10/3$  dans le cas de roulements à rouleaux.

#### 4.5.3 Critère de Ioannides-Harris

A partir des travaux de Lundberg-Palmgren, Ioannides et Harris [IOA 85] ont développé une relation afin de prendre en compte l'existence d'une durée de vie en fatigue pratiquement infinie, constatée dans certaines applications, en introduisant une limite de fatigue du matériau  $\tau_m$  dans l'équation (4.2) appliquée à un volume élémentaire de matière  $\Delta V$  positionné à la profondeur  $Z$ . Cette relation est donnée par l'équation (4.4).

$$\ln\left(\frac{1}{S}\right) \propto \frac{N^e(\tau - \tau_m)^c \Delta V}{Z^h} \quad (4.4)$$

Avec  $\Delta V$  le volume élémentaire dans lequel la contrainte de cisaillement  $\tau$  est appliquée,  $Z$  la profondeur à laquelle est située le volume élémentaire et  $\tau_m$  la limite de fatigue en cisaillement.

La probabilité de défaillance définie ici concerne le volume exposé au risque dans lequel  $\tau > \tau_m$ . L'avantage de ce modèle est que tout critère de fatigue est admissible dans la mesure où celui-ci peut-être calculé à partir des composantes du tenseur de contrainte local.

#### 4.5.4 Distribution statistique de Weibull

La loi de distribution de Weibull est couramment utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie des roulements de part sa flexibilité. En effet, elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité.

En considérant le paramètre de forme  $k$  et le nombre de cycles  $L_D$  correspondant à  $D\%$  de défaillance, la densité de probabilité de la loi est donnée par l'équation (4.5).

$$f(N, k, L_D) = \ln(2) \left(\frac{k}{L_D}\right) \left(\frac{N}{L_D}\right)^{k-1} \exp\left[-\ln(2) \left(\frac{N}{L_D}\right)^k\right] \quad (4.5)$$

On peut alors définir la fonction de répartition (4.6) qui peut s'écrire de manière inverse (4.7).

$$F(N, k, L_D) = 1 - \exp\left[-\ln(2) \left(\frac{N}{L_D}\right)^k\right] \quad (4.6)$$

$$N = L_D \left[\frac{\ln(1-F)}{\ln(1/2)}\right]^{1/k} \quad (4.7)$$

Avec  $F$  la probabilité de défaillance du système. Si le taux de défaillance diminue au cours du temps alors  $k$  prend une valeur inférieure à 1, i.e  $k < 1$ . Dans le cas où ce taux est constant  $k = 1$  et enfin si celui-ci augmente avec le temps on a alors  $k > 1$ . Le suivi de cette variable peut fournir une indication au sujet de la cause des pannes, on peut alors les lister de façon hiérarchique.

- Un taux de panne décroissant suggère un phénomène de rupture précoce, avec des éléments défectueux rapidement en panne ; le taux diminue donc au cours du temps, quand les éléments fragiles sortent de la population.
- Un taux de panne constant suggère que les pannes ont une cause stationnaire.
- Un taux de panne croissant suggère une usure ou un problème de fiabilité, c'est à dire que les éléments ont de plus en plus de chances de tomber en panne dans le temps.

On détermine les paramètres de la loi à l'aide de régressions linéaires, en exprimant la fonction de répartition sur une échelle logarithmique. Cela se traduit par l'équation (4.8) qui permet l'écriture de l'équation (4.9).

$$\ln(1 - F) = -\ln(2) (N/L_D)^k \quad (4.8)$$

$$\ln \left( \ln \left( \frac{1}{1 - F} \right) \right) = k * \ln(N) - k * \ln(L_D) + \ln(\ln(2)) \quad (4.9)$$

Le paramètre  $k$  correspond à la pente de la droite obtenue à l'aide de l'équation (4.9) et le nombre de cycles  $L_D$  correspond à l'ordonnée à l'origine.

## 4.5.5 résultats

### 4.5.5.1 critère de fatigue

Le critère de Ioannides-Harris permet l'estimation de la durée de vie. Le critère a été adapté pour une utilisation dans le cadre d'un milieu 3D à l'échelle des grains. Nous considérons le volume du grain le plus endommagé  $\Delta V_g$ , la profondeur de son point de nucléation  $Z_g$ , le nombre de cycles auquel il est soumis  $N_0$  et la contrainte de Von-Mises limite  $\sigma_{VML}$ . Ainsi, la probabilité de survie d'un grain appartenant à l'ensemble est donné par l'équation (4.10).

$$\log\left(\frac{1}{S_g}\right) \propto \frac{AN_0^e (\sigma_{VMg} - \sigma_{VML})^c}{Z_g^h} \Delta V_g \quad (4.10)$$

où  $A$  est une constante. Les coefficients  $c$ ,  $h$  et  $e$  employés pour ce critère sont ceux utilisés pour des roulements à billes :  $c=31/3$ ,  $h=7/3$  et  $e=10/9$ .

A partir de l'équation (4.10), il est possible d'exprimer la probabilité de survie de l'ensemble à l'aide de l'équation (4.11).

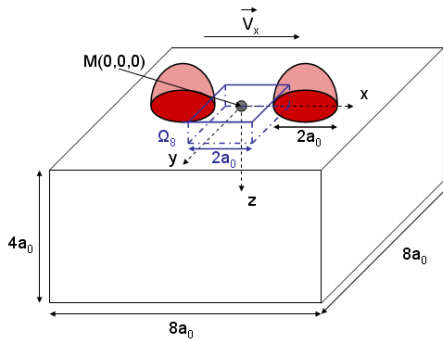
$$\log\left(\frac{1}{S}\right) = BN^e \sum_g \left( \frac{(\sigma_{VMg} - \sigma_{VML})}{Z_g^h} \Delta V_g \right) \quad (4.11)$$

Avec  $B$  une constante et  $S$  la probabilité de survie du système ( $0 < S_g < 1$ ). Ainsi, il est possible de tracer, pour une contrainte de Von-Mises limite  $\sigma_{VML}$  et pour chacun des milieux, le nombre de cycles effectués avant défaillance du système en fonction de la pression appliquée.

### 4.5.5.2 Chargement

Pour l'application du critère de fatigue, un chargement à pression imposée Hertzienne, en roulement sans frottement, a été considéré. La modélisation du volume élémentaire utilisée pour cette étude est la même que celle présentée précédemment pour l'étude des contraintes de Von-Mises dans un milieu hétérogène. Le champ de pression ( $a_0 = 1$ ,

$P_0 = 1$ ) se déplace à la surface du milieu, selon une vitesse  $V_x$  dans la direction  $x$ . La distance parcourue par la source en un pas de temps est équivalente à 5 pas de maillage du niveau le plus fin  $\Omega_8$ . On rappelle que ce niveau est de taille  $[2a_0; 2a_0; a_0]$  et est maillé à l'aide de  $257 \times 257 \times 129$  points, ce qui mène à réaliser 51 calculs pour décrire un cycle de chargement. Ainsi, la distance parcourue par la source étant plus petite que la dimension caractéristique des grains pour cette configuration (environ 13 points par grain selon  $x$ ), tous peuvent voir passer le champ de pression en leur surface. La figure suivante présente ce trajet dans le plan  $(x, y = 0, z)$  et les paramètres numériques utilisés.



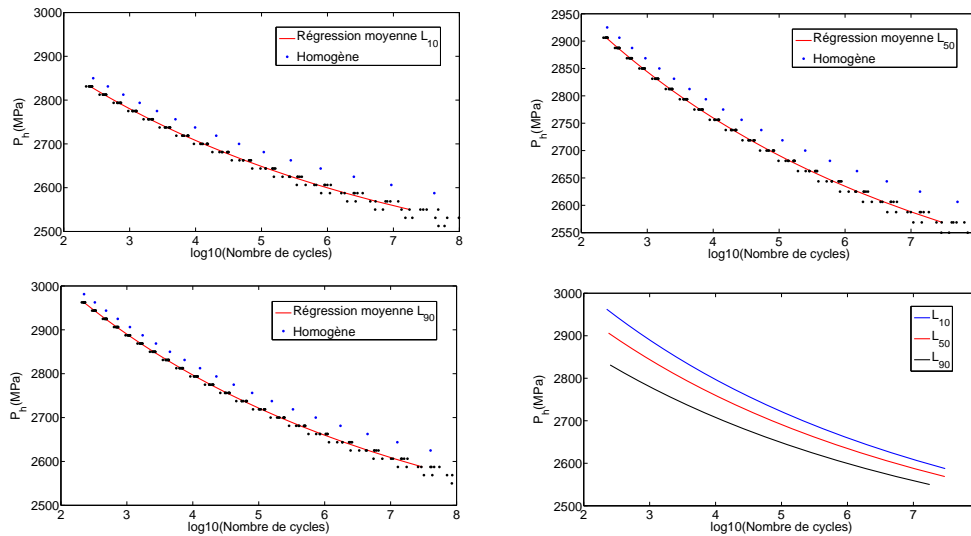
Critère de fatigue : chargement  
 Volume élémentaire  $[8a_0; 8a_0; 4a_0]$   
 Nombre de niveaux : 8  
 Pas de maillage sur  $\Omega_8$  :  $a_0/128$   
 Stratégie de calcul locale

Chaque calcul requiert un espace mémoire de 8 gigas environ. Ainsi, 8 calculs, dont la durée est de 15 minutes, ont pu être lancés en parallèle sur une machine possédant 10 coeurs et 64 gigas de mémoire. 8 milieux hétérogènes ayant été modélisés, cela représente 408 calculs qui ont pu ainsi être réalisés en moins de 13 heures.

#### 4.5.5.3 Application : critère de fatigue

A chaque étape du trajet de chargement, les déplacements ont été déterminés sur 8 milieux Gaussiens à l'aide du modèle 3D-MG et les contraintes de Von-Mises calculées à l'aide d'un post-traitement effectué sous Matlab. Les contraintes de Von-Mises sont moyennées à l'intérieur de chacun des grains. On peut alors observer quels sont les grains dont la contrainte de Von-Mises a dépassé la contrainte limite  $\sigma_{VML}$ . Ces grains représentent les volumes dans lesquels le processus d'endommagement peut s'amorcer. La contrainte de Von-Mises étant directement proportionnelle à la pression appliquée, on considère plusieurs cas de chargement compris entre 2400 et 3300 MPa. La constante  $A$  est imposée à  $10^{-15}$  et la contrainte limite  $\sigma_{VML}$  à 900 MPa. L'équation (4.11) nous permet de tracer l'évolution du nombre de cycles effectués avant défaillance en fonction de la pression appliquée pour différentes probabilités de défaillance du système. La figure 4.12 représente cette évolution pour respectivement 10, 50 et 90% de défaillance dans chacun des 8 milieux ( $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$ ). Le cas homogène est également représenté afin de rendre compte de l'influence des 10% de variation sur le module de Young dans le matériau.

Cette figure montre que la dispersion de la durée de vie des différents milieux hétérogènes est faible dans le cas des fortes charges. En revanche, celle-ci augmente fortement avec la diminution de la charge. On observe également une nette diminution de la durée de vie par rapport à un milieu homogène que nous allons quantifier à l'aide



**FIGURE 4.12:** Évolution du nombre de cycles effectués avant 10, 50 ou 90% de défaillance dans chacun des 8 milieux polycristallins pour différents niveaux de pression appliqués.

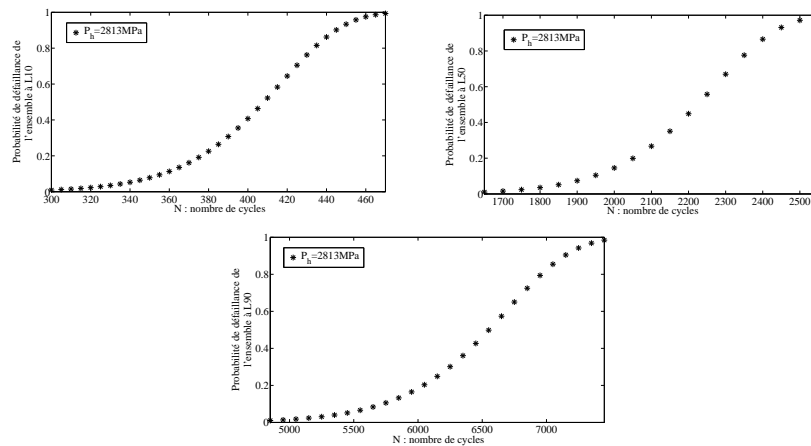
des diagrammes de Weibull.

#### 4.5.5.4 Application : diagrammes de Weibull

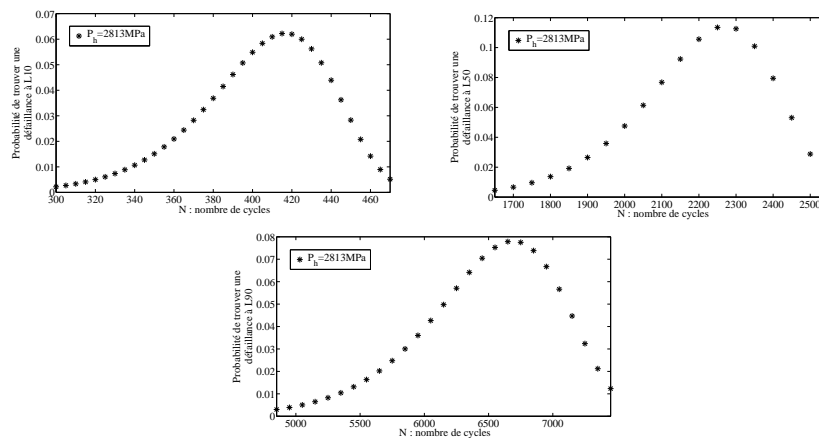
On s'intéresse désormais à la représentation de la durée de vie de l'ensemble de ces milieux à l'aide de représentations graphique de type Weibull. Pour cette étude, 3 niveaux de charges ont été choisis afin d'observer la dispersion obtenue sur les courbes précédentes : 2813, 2700 et 2606 MPa. Pour chacune de ces valeurs de pression, nous avons représenté la probabilité de défaillance de l'ensemble à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles. Les dérivées des courbes obtenues, également tracées, représentent la probabilité de trouver une défaillance dans l'ensemble en fonction du nombre de cycles.

**$P_h=2813$  MPa :** Les diagrammes de Weibull présentés sur les figures 4.13 et 4.14 montrent successivement les probabilités de défaillance et les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2813$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$ . On obtient un facteur de forme  $k$  de valeur 13.56. Cette valeur élevée est caractéristique d'une faible dispersion de la durée de vie pour une population considérée. Les nombres de cycles moyens correspondant à 10, 50 et 90% de défaillance sont respectivement  $L_{10} = 410$ ,  $L_{50} = 2250$  et  $L_{90} = 6600$ . Dans le cas homogène, on obtient  $L_{10} = 802$ ,  $L_{50} = 4375$  et  $L_{90} = 13000$  dans les mêmes conditions de chargement. Ces résultats indiquent que la variation du module de Young conduit à une faible dispersion en termes de durée de vie entre les différents échantillons et à une diminution assez prononcée de la durée de vie de ceux-ci par rapport à celle d'un milieu homogène : le

ratio entre les deux est de 1.7.



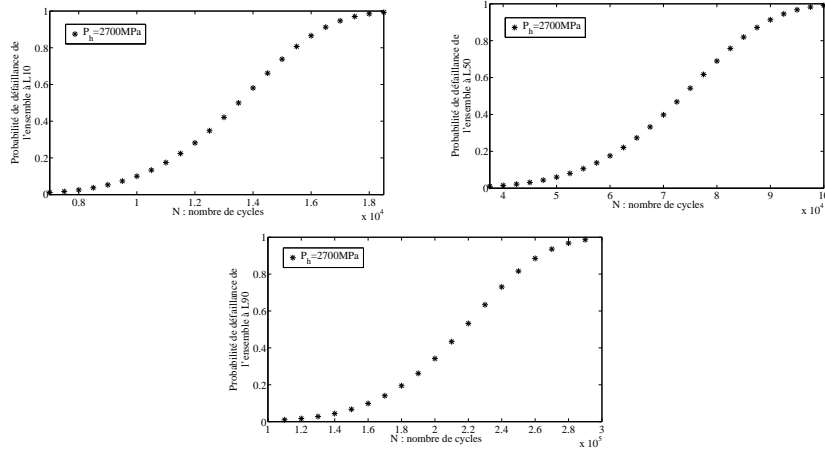
**FIGURE 4.13:** Diagrammes de Weibull présentant les probabilités de défaillance de l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2813$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.



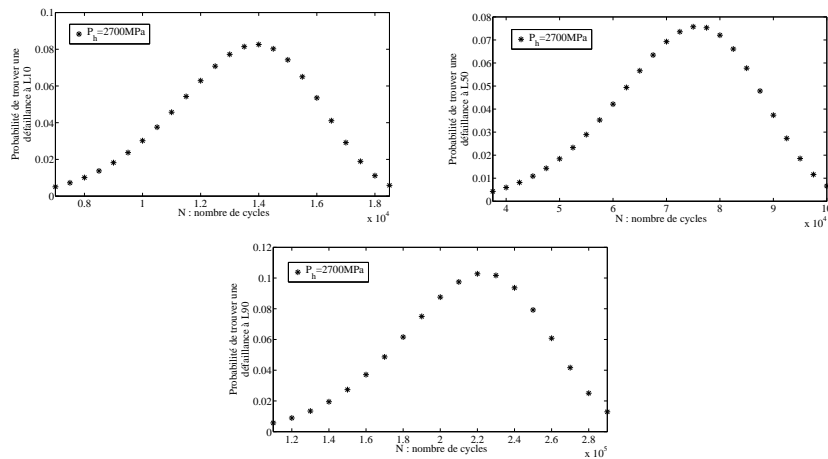
**FIGURE 4.14:** Diagrammes de Weibull présentant les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2813$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.

**$P_h=2700$  MPa :** Les diagrammes de Weibull présentés sur les figures 4.13 et 4.14 montrent successivement les probabilités de défaillance et les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2700$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$ . Le facteur de forme  $k$  prend la valeur 6.26. Les nombres de cycles moyens correspondant à 10, 50 et 90% de défaillance sont respectivement  $L_{10} = 1.35 \cdot 10^4$ ,  $L_{50} = 7.4 \cdot 10^4$  et  $L_{90} = 2.2 \cdot 10^5$ . Pour un milieu homogène, soumis au même chargement, on obtient  $L_{10} = 4.56 \cdot 10^4$ ,  $L_{50} = 2.5 \cdot 10^5$  et  $L_{90} = 7.3 \cdot 10^5$ . Ces

résultats indiquent que la variation du module de Young conduit à une dispersion notable en termes de durée de vie entre les différents milieux et à une diminution prononcée de la durée de vie de ceux-ci par rapport à celle d'un milieu homogène : le ratio entre les deux est de 3.4. Ce ratio est 2 fois supérieur à celui obtenu pour une pression  $P_h$  de 2818 MPa.



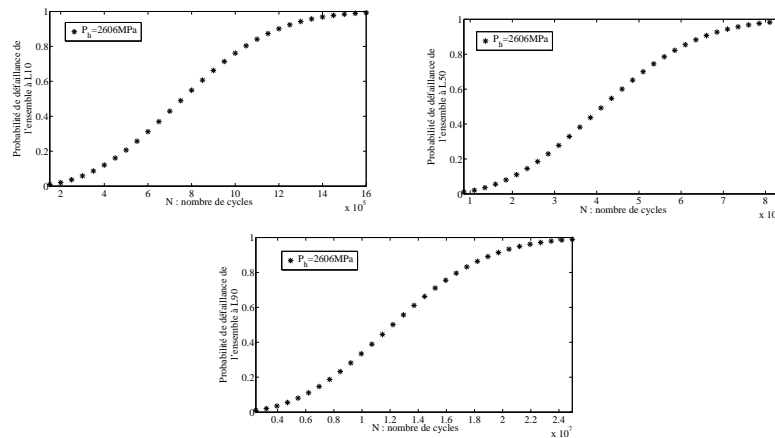
**FIGURE 4.15:** Diagramme de Weibull présentant les probabilités de défaillance de l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2700$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.



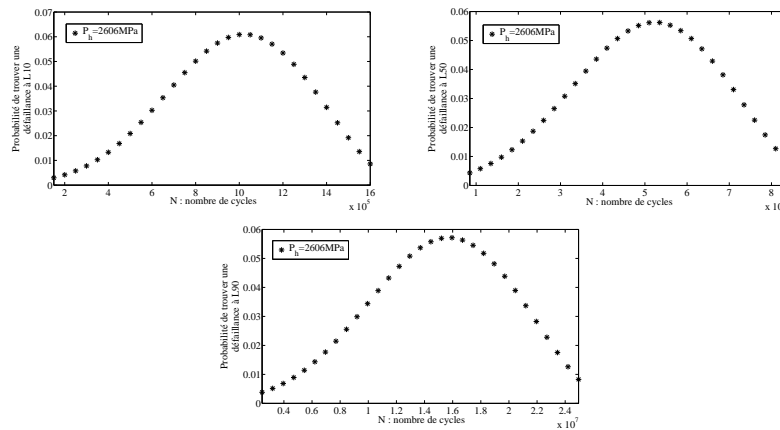
**FIGURE 4.16:** Diagramme de Weibull présentant les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2700$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.

**$P_h=2606$  MPa :** Les diagrammes de Weibull présentés sur les figures 4.13 et 4.14 montrent successivement les probabilités de défaillance et les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2606$  MPa à

$L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$ . Le facteur de forme  $k$  prend maintenant la valeur 2.63 montrant une forte augmentation de la dispersion par rapport aux cas précédents. Les nombres de cycles moyens correspondant à 10, 50 et 90% de défaillance sont respectivement  $L_{10} = 7.6 * 10^5$ ,  $L_{50} = 4.1 * 10^6$  et  $L_{90} = 1.2 * 10^7$ . Pour un milieu homogène, soumis au même chargement, on obtient  $L_{10} = 9.3 * 10^6$ ,  $L_{50} = 5.0 * 10^7$  et  $L_{90} = 1.5 * 10^8$ . Ces résultats indiquent que la variation du module de Young conduit à une forte dispersion en termes de durée de vie entre les différents milieux et à une diminution forte de la durée de vie de ceux-ci par rapport à un milieu homogène : le rapport est de 12.1. Ce ratio est 7 fois supérieur à celui obtenu pour une pression  $P_h$  de 2818 MPa et 3 fois et demi supérieur à celui obtenu pour une pression  $P_h$  de 2700 MPa.



**FIGURE 4.17:** Diagramme de Weibull présentant les probabilités de défaillance de l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2606$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.



**FIGURE 4.18:** Diagramme de Weibull présentant les probabilités de trouver une défaillance dans l'ensemble des milieux hétérogènes pour une charge  $P_h=2606$  MPa à  $L_{10}$ ,  $L_{50}$  et  $L_{90}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  effectués.

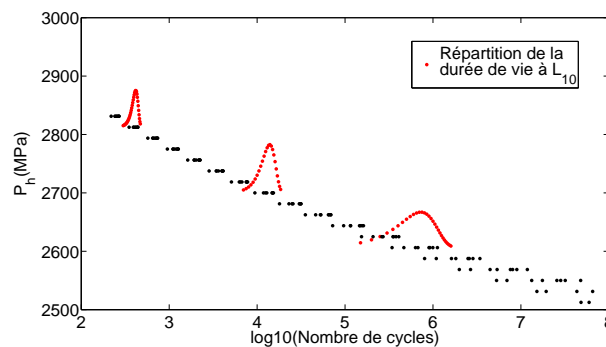


**Résumé :** Le tableau 4.2 présente un récapitulatif des différents paramètres de Weibull obtenus pour les 8 milieux polycristallins hétérogènes pour les différentes pressions  $P_h$  considérées.

$P_h$	$L_{10}$	$L_{50}$	$L_{90}$	$k$
2813	410	2250	6600	13.56
2700	$1.35 * 10^4$	$7.4 * 10^4$	$2.2 * 10^5$	6.26
2606	$7.6 * 10^5$	$4.1 * 10^6$	$1.2 * 10^7$	2.63

**TABLE 4.2:** Paramètres de Weibull obtenus à l'aide des 8 échantillons pour différents niveaux de pressions.

Afin de rendre compte de l'effet de dispersion entre les différents échantillons, traduit par le facteur de forme  $k$ , on représente celui-ci à l'aide de la figure 4.19. Cette figure montre la répartition de la durée de vie dans la population à  $L_{10}$  pour  $P_h=2813$ , 2700 et 2606 MPa et met clairement en valeur l'augmentation de la dispersion avec la diminution de la charge.



**FIGURE 4.19:** Répartitions de la durée de vie des échantillons à  $L_{10}$  pour  $P_h=2813$ , 2700 et 2606 MPa.

#### 4.5.6 Conclusion

Cette dernière section s'est concentrée sur l'analyse du rôle des propriétés des grains dans le processus d'endommagement lors d'un chargement de type roulement sans frottement. Un critère de fatigue, basé sur la contrainte équivalente de Von-Mises moyennée à l'intérieur de chaque grain, a été défini puis utilisé afin de déterminer la durée de vie et le facteur de dispersion d'une population constituée de 8 échantillons soumis à plusieurs intensités de chargements. Les grains constituant ces échantillons possèdent des modules de Young répartis avec  $\pm 10\%$  de variation selon une dispersion de type Gaussienne. L'introduction de cette variation de propriétés dans un milieu entraîne une diminution de sa durée de vie et une dispersion de celle-ci d'autant plus importante que le chargement auquel il est soumis est faible. L'utilisation du modèle

3D-MG a permis de réaliser un important volume de calculs pour des temps CPU qui ne peuvent pas être atteints à l'aide des méthodes conventionnelles utilisées pour ce genre de problème. Ce type de modélisation peut ainsi être utilisé et calibré à l'aide de données expérimentales afin d'évaluer la durée de vie en fatigue d'un milieu quelconque.

## 4.6 Synthèse

Ce dernier chapitre nous a permis d'illustrer les compétences et la robustesse du modèle 3D-MG face à un milieu polycristallin.

La modélisation de ce type de milieu a été réalisée à l'aide de la technique de tessellation de Voronoi, qui est basée sur le principe de la triangulation de Delaunay. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de réaliser une infinité de maillages constitués de polyèdres dont le volume et le nombre de faces sont pilotés par la répartition des points de nucléation.

La modélisation numérique utilisée nous a permis de réaliser un maillage local englobant le milieu polycristallin et contenant plusieurs millions de points afin de mailler abondamment chaque polyèdre. Les temps CPU et les coûts mémoire résultant de cette modélisation montrent que cette méthode permet de résoudre efficacement plusieurs problèmes en parallèle sur un simple ordinateur de bureau.

Différents types de milieux polycristallins ont été modélisés afin de s'approcher des réalités industrielles et d'évaluer les contraintes à l'intérieur de ceux-ci lorsqu'ils sont soumis à un chargement mécanique Hertzien. Nous avons constaté que les grains jouaient le rôle d'inclusions, pouvant être dures ou ductiles, influant sur la durée de vie globale du milieu. En effet, des zones de sur-contraintes liées à des gradients de propriétés importants entre les différents grains sont observables et constituent des sites privilégiés pour l'amorçage du phénomène d'endommagement. Le type de chargement et l'état de surface mis en jeu jouent également des rôles prépondérants dans ce phénomène, influant sur la profondeur à laquelle les contraintes maximales sont observables.

La dernière étape de ces travaux a été l'étude de la durée de vie de ces milieux dans le cas d'un chargement de type roulement sans frottement. Les résultats ont été obtenus pour une population constituée de 8 échantillons dont les polyèdres possèdent un module de Young variant selon une répartition Gaussienne à  $\pm 10\%$ . Une diminution prononcée de la durée de vie de cette population par rapport à un milieu homogène a été observée, soulignant l'importance de considérer les aspects micro-structuraux. Nous avons également pu caractériser la dispersion dans la durée de vie des échantillons à l'aide du facteur de forme de Weibull, qui varie fortement avec le chargement imposé.

Une perspective à ces travaux peut concerner l'augmentation du nombre d'échantillons afin d'étudier une population plus grande et observer l'évolution des paramètres de durée de vie. L'avantage du modèle développé est qu'il permet d'étudier tout type de configuration dans des proportions temporelles acceptables tant pour des travaux académiques qu'industriels.



# Conclusion générale

La résolution de problèmes thermique et/ou d'élasticité peut être encore, de nos jours, un travail difficile à mener à terme lorsque celle-ci met en jeu des gradients de propriétés important ou des échelles variant de plusieurs ordres de grandeur. Cependant, l'utilisation d'un modèle numérique reste essentiel à l'ingénieur pour réaliser de nombreuses simulations servant à comprendre quelles sont les propriétés thermiques, mécaniques et géométriques des matériaux les mieux adaptées à un type de sollicitation bien défini.

De nombreuses études ont été réalisées ces dernières années sur le sujet, notamment à l'aide des méthodes éléments finis qui permettent de prendre en compte l'aspect multiéchelles et l'hétérogénéité des matériaux dans la résolution. De plus, ces méthodes sont adaptées à la prise en compte des effets non-linéaires tels que la plasticité ou la visco-élasticité. Il est parfois nécessaire de coupler ces méthodes avec des techniques numériques avancées afin de réduire le nombre d'éléments et de degrés de libertés, diminuant ainsi les temps de calculs qui peuvent cependant être rédhibitoire.

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse a été consacré à la mise en place et à l'exploitation d'un modèle numérique pour l'analyse du comportement d'un solide hétérogène soumis à une sollicitation thermique ou mécanique quelconque. L'étude bibliographique a montré l'utilité de mettre en place ce type de modèle en donnant les avantages mais également les limites des méthodes utilisées jusqu'à présent.

Le modèle élastique est basé sur les équations de Lamé généralisées et le modèle thermique sur l'équation de la chaleur de Fourier dans un solide hétérogène. Les problèmes sont résolus à l'aide d'une discrétisation aux différences finies du deuxième ordre de ces équations. Le système résultant est traité à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel couplée avec les techniques multigrilles et une technique de raffinement local de maillage. Afin de conserver des temps de calcul et des coûts mémoire raisonnable, l'utilisation des méthodes numériques avancées est obligatoire. En effet, les problèmes mettant en jeu des couches minces et/ou la microstructure polycristalline des matériaux comptent plusieurs centaines de millions de degrés de libertés à résoudre.

Cependant, la résolution de ce type de problème peut engendrer des problèmes de convergence de l'algorithme pour deux raisons particulières :

- les variations de propriétés dans le matériau qui causent une perte d'ellipticité des équations.
- Les couches minces, les rugosités ou bien encore les microstructures qui ne sont pas visibles sur les grilles grossières. Le pas de maillage sur ces grilles étant supérieur à

leurs dimensions caractéristiques, les corrections apportées par les niveaux inférieurs ne correspondent pas au problème des niveaux supérieurs. La convergence peut alors très rapidement se dégrader.

Afin de palier à ces problèmes, il est possible d'utiliser des méthodes de relaxation et de transfert spécifiques sur les différentes grilles. Un effort numérique supplémentaire est également nécessaire sur les grilles grossières afin de retrouver un taux de convergence optimal, même dans le cas de gradients de propriétés importants. La résolution du contact a été réalisée pour des problèmes mettant en jeu des matériaux homogènes, revêtus ou à gradient de propriétés selon la profondeur. Le modèle multigrilles a été utilisé afin de déterminer les coefficients d'influence et un logiciel basé sur les techniques de gradients conjugués a permis de calculer les paramètres du contact pour plusieurs configurations de chargement et de géométrie.

Les modèles ont été validés à partir de solutions académiques simples, extraites de la littérature ou calculées à l'aide d'un logiciel développé au laboratoire. Une très bonne corrélation a été observée dans les différentes études.

L'avantage majeur du modèle est qu'il peut s'appliquer à de nombreux domaines. Nous avons pu par exemple comparer des résultats expérimentaux réalisés en laboratoire aux résultats de nos simulations. Les expériences, réalisées à l'ICS, concernent l'indentation de couches polymères à l'aide de billes en verre. Le phénomène d'adhésion est clairement mis en évidence avec l'augmentation du rayon de contact par rapport à un cas Hertzien classique. En l'absence d'adhésion, nous avons montré l'efficacité du modèle. Dans le cas contraire, l'utilisation d'une loi d'adhésion (JKR, DMT) couplée à notre modèle nous permettrait de faire coïncider les résultats issus des expérimentations et des simulations numériques.

Un autre domaine d'application présent dans ce rapport concerne la durée de vie en fatigue des aciers de type roulement, en prenant en compte leurs structures polycristallines. Le modèle numérique sert à évaluer les contraintes dans chaque grain à chaque étape du trajet de chargement puis, à l'aide d'un modèle de fatigue extrait de la littérature adapté au problème, des courbes statistiques de type Weibull peuvent être tracées. Ce type d'application peut être très utile à l'industrie du roulement en se plaçant en complément d'expériences réalisées en laboratoire qui permettent d'évaluer les constantes et les paramètres utiles au modèle de fatigue. De nombreuses études statistiques peuvent alors être menées en parallèle dans des temps très courts.

## **perspective**

Les différents travaux réalisés ont permis la mise en place de modèles 3D permettant de résoudre des problèmes thermiques et élastiques. Le choix des méthodes multigrilles afin d'accélérer la convergence de ces problèmes et mettre en place des stratégies de raffinement de maillage c'est avéré judicieux pour mener à bien nos objectifs. Le modèle est capable de traiter avec les gradients de propriétés et peut fournir des résultats dans des zones très raffinées avec une très bonne précision. Les coûts numériques ont été réduits

et les temps de calculs restent faibles même pour des systèmes mettant en jeu plusieurs centaines de millions de degrés de liberté. Couplé à des modèles théoriques, il peut permettre entre autre de résoudre des problèmes mettant en jeu des effets d'adhésion ou d'estimer la durée de vie d'un système soumis à un chargement périodique.

Plusieurs études peuvent venir compléter ce modèle :

- La résolution du problème de contact à l'aide des méthodes multigrilles : dans le cas où les variations de propriétés ont lieu dans plus d'une dimension de l'espace, le problème de contact ne peut plus être résolu à l'aide des techniques de gradient conjugué-FFT. Il est nécessaire alors d'implémenter un processus itératif vérifiant les équations de compatibilité sur chaque grille durant la phase de relaxation et vérifiant l'équation de la charge sur la grille grosse uniquement.
- Le couplage thermo-mécanique : en se dilatant, le solide provoque une modification de la répartition des températures. Tant que les déformations restent faibles, ce couplage peut être négligé. En revanche, ce n'est plus le cas lorsque le solide est soumis à des températures importantes.
- La prise en compte de la plasticité : il s'agit là d'un phénomène complexe nécessitant de déterminer la zone plastifiée et de la transférer sur les différentes grilles utilisées lors de la résolution. La frontière de cette zone étant inconnue et pouvant changer au cours de la résolution, il faut développer des méthodes spécifiques afin de transférer l'état de contrainte d'une grille à l'autre.
- La prise en compte de l'anisotropie : de part la constitution anisotrope des matériaux, leur comportement mécanique est anisotrope (dépendance de la réponse vis-à-vis de la direction de sollicitation). L'anisotropie évolue avec les déformations qui modifient l'organisation de la microstructure. Cependant, lorsque la microstructure présente certains éléments de symétrie il en est de même de l'anisotropie et la loi de comportement correspondante doit respecter ces éléments de symétrie [FRA ].





# Annexe A : Discrétisation du problème mécanique

## Discrétisation du problème mécanique

Les équations de Lamé généralisées ont été décrites au paragraphe 2.3.5. Le pas de maillage  $h$  est le même dans les trois directions de l'espace. On pose  $Q = \lambda + 2\nu$ . La première équation de Lamé s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_5 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_6 = 0$$

Sous forme discrétisée au seconde ordre :

$$(1) \quad \frac{Q_{i+1/2,j,l} u_{i+1,j,l} - (Q_{i+1/2,j,l} + Q_{i-1/2,j,l}) u_{i,j,l} + Q_{i-1/2,j,l} u_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(2) \quad \frac{Q_{i+1/2,j,l} v_{i,j+1,l} - (Q_{i+1/2,j,l} + Q_{i-1/2,j,l}) v_{i,j,l} + Q_{i-1/2,j,l} v_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(3) \quad \frac{Q_{i+1/2,j,l} w_{i,j,l+1} - (Q_{i+1/2,j,l} + Q_{i-1/2,j,l}) w_{i,j,l} + Q_{i-1/2,j,l} w_{i,j,l-1}}{h^2}$$

$$(4) \quad \frac{\mu_{i+1/2,j,l} u_{i+1,j,l} - (\mu_{i+1/2,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l}) u_{i,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l} u_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(5) \quad \frac{\mu_{i,j+1/2,l} u_{i,j+1,l} - (\mu_{i,j+1/2,l} + \mu_{i,j-1/2,l}) u_{i,j,l} + \mu_{i,j-1/2,l} u_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(6) \quad \frac{\mu_{i,j,l+1/2} u_{i,j,l+1} - (\mu_{i,j,l+1/2} + \mu_{i,j,l-1/2}) u_{i,j,l} + \mu_{i,j,l-1/2} u_{i,j,l-1}}{h^2}$$

La seconde équation de Lamé s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( Q \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( Q \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( Q \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_5 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_6 = 0$$

Sous forme discrétisée au seconde ordre :

$$(1) \quad \frac{Q_{i,j+1/2,l}u_{i+1,j,l} - (Q_{i,j+1/2,l} + Q_{i,j-1/2,l})u_{i,j,l} + Q_{i,j-1/2,l}u_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(2) \quad \frac{Q_{i,j+1/2,l}v_{i,j+1,l} - (Q_{i,j+1/2,l} + Q_{i,j-1/2,l})v_{i,j,l} + Q_{i,j-1/2,l}v_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(3) \quad \frac{Q_{i,j+1/2,l}w_{i,j,l+1} - (Q_{i,j+1/2,l} + Q_{i,j-1/2,l})w_{i,j,l} + Q_{i,j-1/2,l}w_{i,j,l-1}}{h^2}$$

$$(4) \quad \frac{\mu_{i+1/2,j,l}v_{i+1,j,l} - (\mu_{i+1/2,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l})v_{i,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l}v_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(5) \quad \frac{\mu_{i,j+1/2,l}v_{i,j+1,l} - (\mu_{i,j+1/2,l} + \mu_{i,j-1/2,l})v_{i,j,l} + \mu_{i,j-1/2,l}v_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(6) \quad \frac{\mu_{i,j,l+1/2}v_{i,j,l+1} - (\mu_{i,j,l+1/2} + \mu_{i,j,l-1/2})v_{i,j,l} + \mu_{i,j,l-1/2}v_{i,j,l-1}}{h^2}$$

La troisième équation de Lamé s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( Q \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( Q \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( Q \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_5 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_6 = 0$$

Sous forme discrétisée au seconde ordre :

$$(1) \quad \frac{Q_{i,j,l+1/2}u_{i+1,j,l} - (Q_{i,j,l+1/2} + Q_{i,j,l-1/2})u_{i,j,l} + Q_{i,j,l-1/2}u_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(2) \quad \frac{Q_{i,j,l+1/2}v_{i,j+1,l} - (Q_{i,j,l+1/2} + Q_{i,j,l-1/2})v_{i,j,l} + Q_{i,j,l-1/2}v_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(3) \quad \frac{Q_{i,j,l+1/2}w_{i,j,l+1} - (Q_{i,j,l+1/2} + Q_{i,j,l-1/2})w_{i,j,l} + Q_{i,j,l-1/2}w_{i,j,l-1}}{h^2}$$

$$(4) \quad \frac{\mu_{i+1/2,j,l}w_{i+1,j,l} - (\mu_{i+1/2,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l})w_{i,j,l} + \mu_{i-1/2,j,l}w_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(5) \quad \frac{\mu_{i,j+1/2,l}w_{i,j+1,l} - (\mu_{i,j+1/2,l} + \mu_{i,j-1/2,l})w_{i,j,l} + \mu_{i,j-1/2,l}w_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(6) \quad \frac{\mu_{i,j,l+1/2}w_{i,j,l+1} - (\mu_{i,j,l+1/2} + \mu_{i,j,l-1/2})w_{i,j,l} + \mu_{i,j,l-1/2}w_{i,j,l-1}}{h^2}$$

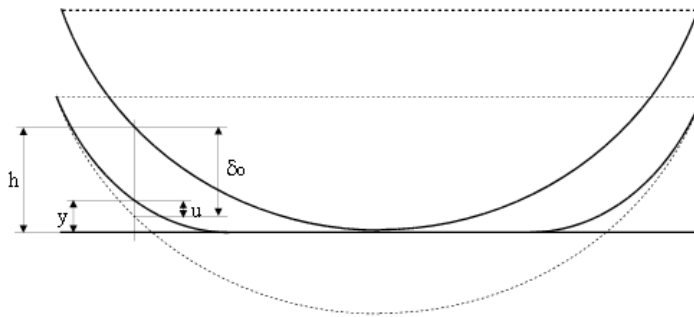
# Annexe B : La théorie de Hertz

## La théorie de Hertz

La théorie de Hertz permet de déterminer la répartition du champ de pression dans un contact entre deux corps (1 et 2) élastiques et lisses. Le problème est traité en ne considérant que les effets purement normaux. La zone de contact est supposée restreinte devant les dimensions caractéristiques des deux corps. Selon ces hypothèses, la relation entre les pressions de contact et les déplacements normaux des surfaces sera donnée par Boussinesq en considérant les massifs comme étant semi-infinis, et la géométrie du contact sera définie par ces deux principaux rayons de courbure  $R_x$  et  $R_z$ . Le problème du contact entre deux corps quelconques est donc ramené au problème du contact entre deux paraboloides (1) et (2) de géométrie :

$$h_i(x, y) = \frac{x^2}{2R_{x_i}} + \frac{z^2}{2R_{z_i}} \quad i = 1, 2$$

La mise sous charge ( $W$ ) des deux corps est effectuée en rapprochant globalement ces deux massifs d'une quantité  $\delta_0$ . Les corps se déforment de façon élastique ( $u_1, u_2$ ), dans la zone de contact la distance entre les surfaces est nulle (non interpénétration des solides).



**FIGURE 4.20:** Géométrie et paramètres du problème de Hertz

Dans la zone de contact peut être écrite la relation géométrique suivante :

$$0 = h(x, y) - \delta_0 + u_1(x, z) + u_2(x, z) \quad (4.12)$$

$h(x,z)$  est la distance entre les surfaces avant la mise en charge, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} h(x,z) &= h_1(x,z) + h_2(x,z) \\ &= \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{Rx_1} + \frac{1}{Rx_2} \right) + \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{Rz_1} + \frac{1}{Rz_2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2Rx} + \frac{z^2}{2Rz} \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec

$$\frac{1}{Rx} = \left( \frac{1}{Rx_1} + \frac{1}{Rx_2} \right) \quad ; \quad \frac{1}{Rz} = \left( \frac{1}{Rz_1} + \frac{1}{Rz_2} \right)$$

Les déplacements  $u_i(x,z)$  sont reliés au champ de pression  $p(x,z)$  par la relation de Boussinescq :

$$\begin{aligned} u_i(x,z) &= \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} \iint \frac{p(x',z') dx' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 (z-z')^2}} \\ u_1(x,z) + u_2(x,z) &= \frac{2}{\pi E_{equ}} \iint \frac{p(x',z') dx' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 (z-z')^2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec

$$\frac{1}{E_{equ}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

Selon les équations (4.12) et (4.13) les déplacements dans la zone de contact sont de la forme :

$$u_1(x,z) + u_2(x,z) = u(x,z) = \delta_0 - \frac{x^2}{2Rx} - \frac{z^2}{2Rz} \quad (4.15)$$

La pression de contact générant ces déplacements est donnée par Hertz :

$$p(x,z) = P_H \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}} \quad (4.16)$$

avec

$$\iint p(x',z') dx' dz' = W \quad (4.17)$$

Cette dernière équation nous donne une première relation :

$$P_H = \frac{3W}{2\pi ac}$$

En reportant (4.16) dans (4.14) on obtient

$$u(x, z) = \frac{2P_H}{\pi E_{equ}} \int \int \frac{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} dx' dz'$$

Le problème est résolu en introduisant les coordonnées ellipsoïdales telles que :

$$\frac{x^2}{a^2 + v^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{c^2 + v^2} = 1$$

en effectuant le changement de variable et en posant  $y = 0$ , on obtient :

$$u(x, z) = \frac{2acP_H}{E_{equ}} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + v^2} - \frac{z^2}{c^2 + v^2}}{\sqrt{(a^2 + v^2)(c^2 + v^2)}} dv$$

On a alors par identification avec la relation (4.15)

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{2acP_H}{E_{equ}} \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{(a^2 + v^2)(c^2 + v^2)}} \\ \frac{1}{2Rx} &= \frac{2acP_H}{E_{equ}} \int_0^\infty \frac{dv}{(a^2 + v^2)\sqrt{(a^2 + v^2)(c^2 + v^2)}} \\ \frac{1}{2Rz} &= \frac{2acP_H}{E_{equ}} \int_0^\infty \frac{dv}{(c^2 + v^2)\sqrt{(a^2 + v^2)(c^2 + v^2)}} \end{aligned}$$

ou encore en faisant apparaître la charge ( $W$ ) et le paramètre d'ellipticité ( $k = c/a$ ) :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{3W}{\pi E_{equ} c} \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{(\frac{1}{k^2} + v^2)(1 + v^2)}} \\ \frac{1}{2Rx} &= \frac{3W}{\pi E_{equ} c^3} \int_0^\infty \frac{dv}{(\frac{1}{k^2} + v^2)\sqrt{(\frac{1}{k^2} + v^2)(1 + v^2)}} \\ \frac{1}{2Rz} &= \frac{3W}{\pi E_{equ} c^3} \int_0^\infty \frac{dv}{(1 + v^2)\sqrt{(\frac{1}{k^2} + v^2)(1 + v^2)}} \end{aligned}$$

Ces intégrales peuvent être exprimées à partir des intégrales elliptiques de première et deuxième espèce sous leur forme complète :

$$\mathbf{K} = F \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \mathbf{E} = E \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, \frac{\pi}{2} \right]$$

On a alors :

$$\delta_0 = \frac{3W}{\pi E_{equ}} \frac{\mathbf{K}}{c}$$

$$\frac{1}{2R_x} = \frac{3W}{\pi E_{equ}} \frac{(k^2 \mathbf{E} - \mathbf{K})}{c^3 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}$$

$$\frac{1}{2R_z} = \frac{3W}{\pi E_{equ}} \frac{\mathbf{K} - \mathbf{E}}{c^3 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}$$

le paramètre d'ellipticité  $k = c/a$  est uniquement fonction du rapport des rayons de courbure principaux  $R_z$  et  $R_x$ .

$$\frac{R_z}{R_x} = \frac{k^2 \mathbf{E} - \mathbf{K}}{\mathbf{K} - \mathbf{E}}$$

On obtient également les autres paramètres de contact :

$$a^3 = \frac{3WR}{2E_{equ}} \frac{2\mathbf{E}}{\pi k}$$

$$c^3 = \frac{3WR}{2E_{equ}} \frac{2k^2 \mathbf{E}}{\pi}$$

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R} \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{E}}$$

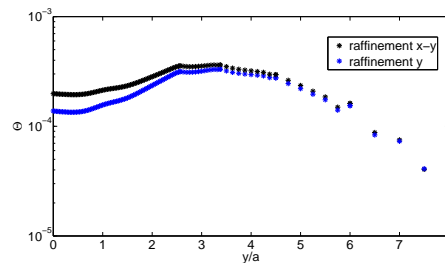
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_z} \right)$$

# Annexe C : Validation du raffinement tridimensionnel

## Validation : technique de localisation tridimensionnelle

Dans la section 2.7.1, la validation de la technique de localisation, selon la direction  $y$  de l'espace, a été présentée. Nous allons nous attacher dans cette annexe à montrer que cette technique n'engendre pas de dégradations importantes sur la précision des résultats lorsqu'elle est utilisée de manière multidirectionnelle. Nous rappelons que cette technique n'affecte pas la convergence de l'algorithme multigrilles.

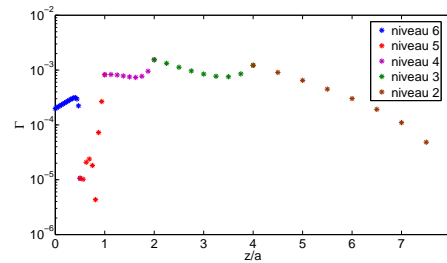
**Raffinement selon 2 directions de l'espace** On s'intéresse tout d'abord à la technique de raffinement lorsque celle-ci est utilisée selon 2 directions de l'espace, en l'occurrence ici selon  $x$  et  $y$ . La modélisation et les conditions de chargement mécanique utilisés sont les mêmes que ceux décrits dans la section 2.7.1. Ainsi, afin de passer d'un niveau  $i$  vers un niveau plus fin localisé  $i + 1$  le rapport de longueur est de  $3/4$  selon  $x$  et  $y$ . On représente sur la figure 4.21 les écarts relatifs  $\Theta$  entre les déplacements  $w$  en surface, selon l'axe  $y$ , obtenus à l'aide des solutions globales et locales.



**FIGURE 4.21:** Écarts  $\Theta$  entre la solution globale utilisant 6 niveaux et celles locales utilisant 2 niveaux globaux et 4 locaux avec un raffinement selon  $x$  ou selon  $x$  et  $y$ . Le massif est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ , le niveau 6 possède un pas de  $a/32$

Une comparaison des courbes obtenues montre que la solution obtenue dans le cas d'un raffinement bidirectionnel diffère peu de celle obtenue dans le cas unidirectionnel. En effet, l'ordre de grandeur sur l'erreur reste le même en tout point de la surface. Nous avons donc conclu à la validation de la stratégie utilisée de façon bidirectionnelle.

**Raffinement selon 3 directions de l'espace** Nous nous intéressons maintenant au cas d'une localisation tridirectionnelle. Le problème considéré et les conditions aux limites restent les mêmes que ceux énoncés précédemment (section 2.7.1). Afin de passer d'un niveau  $i$  vers un niveau plus fin localisé  $i + 1$  le rapport de longueur est de  $3/4$  selon  $x$  et  $y$  et  $1/2$  selon  $z$ . La figure 4.22 représente l'écart relatif  $\Gamma$  entre les déplacements  $w$ , selon l'axe  $z$ , obtenus à l'aide des solutions globale et locale.



**FIGURE 4.22:** Écart  $\Gamma$  entre la solution globale utilisant 6 niveaux et celles locales utilisant 2 niveaux globaux et 4 locaux avec un raffinement tridimensionnel. Le massif est de taille  $[16a; 16a; 8a]$ , le niveau 6 possède un pas de  $a/32$

Les résultats montrent que l'écart maximal sur la solution est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Une dégradation plus importante de l'écart entre les solutions est obtenus. Cependant, cet écart reste une nouvelle fois acceptable et cette simulation valide ainsi la stratégie complète de localisation.



# Annexe D : Discrétisation du problème thermique

## Discrétisation du problème thermique

L'équation de la chaleur de Fourier a été décrite au paragraphe 3.3.1. Le pas de maillage  $h$  est le même dans les trois directions de l'espace. Cette équation s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_3 = \underbrace{\rho C \frac{\partial T}{\partial t}}_4 + \underbrace{\rho CU \frac{\partial T}{\partial x}}_5 + \underbrace{\rho CV \frac{\partial T}{\partial y}}_6$$

Sous forme discrétisée :

$$(1) \quad \frac{k_{i+1/2,j,l} T_{i+1,j,l} - (k_{i+1/2,j,l} + k_{i-1/2,j,l}) T_{i,j,l} + k_{i-1/2,j,l} T_{i-1,j,l}}{h^2}$$

$$(2) \quad \frac{k_{i,j+1/2,l} T_{i,j+1,l} - (k_{i,j+1/2,l} + k_{i,j-1/2,l}) T_{i,j,l} + k_{i,j-1/2,l} T_{i,j-1,l}}{h^2}$$

$$(3) \quad \frac{k_{i,j,l+1/2} T_{i,j,l+1} - (k_{i,j,l+1/2} + k_{i,j,l-1/2}) T_{i,j,l} + k_{i,j,l-1/2} T_{i,j,l-1}}{h^2}$$

$$(4) \quad \rho C \frac{T_{i,j,k}^n - T_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t}$$

$$(5) \quad \rho CU \frac{T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}}{h}$$

$$(6) \quad \rho CV \frac{T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k}}{h}$$



# Bibliographie

- [AI 93] AI X., CHENG H.  
A fast Model for Pressure in Rough EHL Line Contacts. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 115, 1993, p. 460-465.
- [AIR 38] AIRY G. B.  
On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 6, 1838, p. 379-402.
- [ALC 81] ALCOUFFE R. E., BRANDT A., DENDY J. E., PAINTER J. W.  
The multi-grid method for the diffusion equation with strongly discontinuous coefficients. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 2, 1981, p. 430-454.
- [ALM 11] ALMQVIST A., CAMPAÑA C., PRODANOV N., PERSSON B. N. J.  
Interfacial separation between elastic solids with randomly rough surfaces : Comparison between theory and numerical techniques. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 59, 2011, p. 2355-2369.
- [AME 65] AMES W. F.  
Non Linear Partial Differential Equations in Engineering. *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 18, 1965, p. 1-511.
- [ARC 56] ARCHARD J. F., COWKING E. W.  
Elastohydrodynamic lubrication at point contacts. *Proceedings, Institution of Mechanical Engineers*, vol. 180, 1956, page 339.
- [ARC 59] ARCHARD J.  
The temperature of rubbing surfaces. *Wear*, vol. 2, 1959, p. 438-455.
- [ARC 74] ARCHARD J. F.  
Surface topography and tribology. *Tribology*, vol. 7, 1974, p. 213-220.
- [AUR 00] AURENHAMMER F., KLEIN R.  
*Voronoi diagrams*, Chapitre Handbook of Computational Geometry, p. 201-290. Elsevier Science Publishing, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [AZA 85] AZARKIN A., BARBER J.  
Transient Thermoelastic Contact Problem of Two Sliding Half-Plane. *Wear*, vol. 102, 1985, p. 1-13.
- [BAI 87] BAI D., BRANDT A.  
Local Mesh Refinement Multilevel Techniques. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 8, 1987, p. 109-134.

- [BAR 82] BARBER J., MARTIN-MORAN C.  
Green's Functions for Transient Thermoelastic Contact Problems for the Half Plane. *Wear*, vol. 79, 1982, p. 11-19.
- [BAR 84] BARBER J.  
Thermoelastic Displacement and Stresses Due to a Heat Source Moving Over the Surface of a Half Plane. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, 1984, p. 636-640.
- [BET 94] BETTAYEB A.  
Contribution à l'étude du comportement de secteurs circulaires revêtus, élastiques et viscoélastiques : Développement d'un modèle analytique 2D et 3D. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1994.
- [BIA 04] BIANCHI A. M., FAUTRELLE Y., ETAY J.  
*Transferts thermiques*. PPUR presses polytechniques, 2004.
- [BIO 10] BIOTTEAU E., COMBESURE A., GRAVOUIL A., LUBRECHT A. A.  
Multigrid solver with automatic mesh refinement for transient elastoplastic dynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, 2010, p. 947-971.
- [BLO 37] BLOK H.  
Theoretical study of temperature rise at surface of actual contact under oiliness lubricating conditions. *Proceeding of general discussion on lubrication and lubricants*, vol. 2, 1937, p. 222-235.
- [BOS 93] BOS J.  
Frictional heating of tribological contacts. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1993.
- [BOU ] BOUSSINESQ J.  
Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. 1985. Paris : Gauthier-Villars.
- [BOW 54] BOWDEN F. P., TABOR D.  
*The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, New York, 1954.
- [BOW 56] BOWDEN F. P.  
Methods of studying the surface structure of solids. *Journal of Colloid Science*, vol. 11, 1956, p. 555-564.
- [BOW 58] BOWDEN F. P.  
A review of the friction of solids. *Wear*, vol. 1, 1958, p. 333-346.
- [BRA ] BRAKKE K. A.  
Statistics of 3D random Voronoi tessellations. 1985. <http://www.susqu.edu/brakke/>.
- [BRA 77] BRANDT A.  
Multi-level adaptative technique (mlat) for fast numerical solution to boundary value problems. *Mathematics of Computation*, vol. 31, 1977, p. 333-390.

- [BRA 84] BRANDT A.  
*Multigrid Techniques : 1984 Guide with Application to Fluid Dynamics*. BOHN :  
Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1984.
- [BRA 00] BRANDT A., ISRAELI M., YAVNEH I., SIEGEL A.  
Multigrid solution of an Elliptic Boundary-Value Problem with Integral Constraints.  
*SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, 2000, p. 1357-1369.
- [BRA 03] BRAGALLINI G. M., CAVATORTA M. P., SAINOT P.  
Coated contacts : A strain approach. *Tribology International*, vol. 33, 2003,  
p. 935-941.
- [BRI 00] BRIGGS W. L., EMDEN HENSON V., MCCORMICK S. F.  
*A Multigrid Tutorial, second edition*. SIAM J. Trib., 2000.
- [BRY 88] BRYANT M.  
Thermoelastic Solutions for Thermal Distributions Moving Over Half Space Surfaces  
and Application to the Moving Heat Source. *ASME, Journal of Applied Mechanics*,  
vol. 55, 1988, p. 87-92.
- [BRY 12] BRYANT M. J., EVANS H. P., SNIDLE R. W.  
Plastic deformation in rough surface line contacts-a finite element study. *Tribology  
International : 37th Leeds-Lyon Symposium on Tribology Special issue*, vol. 46,  
2012, p. 269-278.
- [BUR 73] BURTON R., NERLIKAR V., KILIPATI S.  
Thermoelastic Instability in a Seal-Like Configuration. *Wear*, vol. 24, 1973,  
p. 177-188.
- [BUS 76] BUSH A. W., GIBSON R. D., KEOGH G. P.  
The limit of elastic deformation in the contact of rough surfaces. *Mechanics Research  
Communications*, vol. 3, 1976, p. 169-174.
- [CAI 03] CAILLETAUD G., CHABOCHE J. L., FOREST S., RÉMY L.  
On the design of single crystal blades. *La Revue de Métallurgie*, vol. Février, 2003,  
p. 165-172.
- [CAN 97] CANGÉMI L.  
Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface  
fibre/matrice. Thèse de doctorat, Institut Mécanique de Marseille (I.M.2), 1997.
- [CAO 04] CAO X. Q., VASSEN R., STOEVEER D.  
Ceramic materials for thermal barrier coatings. *Journal of the European Ceramic  
Society*, vol. 24, 2004, p. 1-10.
- [CAR 59] CARSLAW H., JAEGER J.  
*Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1959.
- [CAR 87] CARNEIRO ESTEVES A.  
Résolution du contact élastique entre deux corps rugueux. Thèse de doctorat, INSA  
de Lyon, 1987.

- [CAR 00] CARDONA J. M.  
Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [CAR 03] CARRÈRE N., FEYEL N., KRUCH S.  
Multi-scale modelling of silicon carbide reinforced titanium MMCs : Application to advanced compressor design. *Aerospace Science and Technology*, vol. 7, 2003, p. 307-315.
- [CER ] CERRUTI V.  
Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi. 1882. Atti accad. Lincei, Mem. Classe sci. fis. mat. et nat., Rome.
- [CHA 11] CHATEL T., GAUTHIER C., PELLETIER H., LE HOUEROU V., FAVIER D., SCHIRRER R.  
Creep of the contact with a spherical tip and recovery of the imprint on amorphous polymer surfaces. *Journal of Physics D-Applied Physics*, vol. 44(37), 2011, p. doi :10.1088/0022-3727/44/37/375403.
- [CHA 12] CHATEL T., PELLETIER H., LE HOUEROU V., GAUTHIER C., FAVIER D., SCHIRRER R.  
Original in situ observations of creep during indentation and recovery of the residual imprint on amorphous polymer. *Journal of Materials Research*, vol. 27, 2012, p. 12-19.
- [CHO 08] CHOI I. S., DAO M., SURESH S.  
Mechanics of indentation of plastically graded materials I : Analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 56, 2008, p. 157-171.
- [DEF 83] DE FREITAS M., FRANCOIS D.  
Formation de phase blanche en fatigue de roulement. *Scripta metallurgica*, vol. 17, 1983, p. 683-686.
- [DEL 34] DELAUNAY B.  
Sur la sphère vide. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, vol. 7, 1934, p. 793-800.
- [DER 75] DERJAGUIN B. V., MULLER V. M., TOPOROV Y. P.  
Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid Interface Science*, vol. 53, 1975, p. 314-326.
- [DIL 10] DILLENSEGER J., ESNEAULT S.  
Fast FFT-based bioheat transfer equation computation. *Computers in Biology and Medicine*, vol. 40, 2010, p. 119-123.
- [DIR 50] DIRICHLET G. L.  
Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, 1850, p. 209-227.

- [DOW 72] DOW T., BURTON R.  
Thermoelastic Instability of Sliding Contact in the Absence of Wear. *Wear*, vol. 19, 1972, p. 315-328.
- [DOW 73] DOW T., BURTON R.  
The Role of Wear in the Initiation of Thermoelastic Instabilities of Rubbing Contact. *ASME, Journal of Lubrication Technology*, vol. 95, 1973, p. 71-75.
- [EIS 99] EI-SHAZLYA M. H., EI-SHERBINYA M., MATTHEWSB A., LEYLANDB A., RAINESB M.  
Effect of hard coating properties on substrate stresses under tribological loads *Mater. Materials and Manufacturing Processes*, vol. 14, 1999, p. 243-255.
- [ELL 82] ELLIOTT D. F., RAO K. R.  
*Fast transforms, Algorithms, Analyses, Applications*. Academic press, 1982.
- [ELS 94] ELSHOF H. L. J.  
Heat fluxes between semi-infinite solids. Master's thesis, University of Twente, Enschede, 1994.
- [ESH 57] ESHELBY J.  
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society London*, vol. A 241, 1957, p. 376-396.
- [ETT 85] ETTLES C.  
Heat Generation and Friction in Rotating Bands. *ASME, Transaction*, vol. 29, 1985, p. 312-320.
- [FAR 90] FARRIS T., CHANDRASEHAR S.  
High-Speed Sliding Indentation of Ceramics : Thermal Effects. *Journal of Materials Science*, vol. 25, 1990, p. 4047-4053.
- [FEY 00] FEYEL F., CHABOCHE J. L.  
FE multiscale approach for the modelling of the elastoviscoplastic behavior of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, 2000, p. 309-330.
- [FIN 96] FINOT M., SURESH S.  
Small and large deformation of thick and thin-film multi-layers : effects of layer geometry, plasticity and compositional gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, 1996, p. 683-721.
- [FLO 85] FLOQUET A.  
Les températures éclairés en milieu multicouches. *Eurotrib, 4ème Congrès Européen de Tribologie, Ecully, 1985. Amsterdam : Elsevier*, vol. 1, 1985, p. 1-10.
- [FLO 94] FLOQUET A., DUBOURG M.  
Nanoaxisymmetric Effects for Three-Dimensional Analysis of Brake. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 116, 1994, p. 401-408.
- [FOR 06] FOREST S.  
*Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Mines Paris, Les Presses, 2006.

- [FOW 63] FOWKES F. M.  
Additivity of intermolecular forces at interfaces. I. Determination of the contribution to surface and interfacial tensions of dispersion forces in various liquids. *Ibid*, vol. 67, 1963, p. 2538-2541.
- [FRé 87a] FRÉMOND M.  
Adhérence des solides. *Journal de Mécanique Théorique et Application*, vol. 6, 1987, p. 383-407.
- [FRé 87b] FRÉMOND M.  
*Contact unilatéral avec adhérence*. Springer Verlag, Heidelberg, 1987.
- [FRé 88] FRÉMOND M.  
*Contact with adhesion*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.
- [FRA ] FRANCOIS M.  
Elasticite anisotrope. 2004, [www.fast.u-psud.fr](http://www.fast.u-psud.fr).
- [FRE 07] FRETIGNY C., CHATEAUMINOIS A.  
Solution for the elastic field in a layered medium under axisymmetric contact loading. *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 40, 2007, p. 5418-5426.
- [FUJ 01] FUJIHARA S., SASAKI C., KIMURA T.  
Crystallization behavior and origin of c-axis orientation in sol-gel-derived ZnO : Li thin films on glass substrates. *Applied Surface Science*, vol. 180, 2001, p. 341-350.
- [FUP 12] FUPING Y., PING J., JIJIA X., XIAOLEI W.  
Analysis of spherical indentation of materials with plastically graded surface layer. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, 2012, p. 527-536.
- [GAL 61] GALIN L. A., MOSS H., SNEDDON I. N.  
*Contact Problems in the Theory of Elasticity*. Defense Technical Information Center, 1961.
- [GAO 00] GAO J., LEE C.  
An FFT-Based Transient Flash Temperature Model for General Three-Dimensional Rough Surface Contacts. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 122, 2000, p. 519-523.
- [GER 83] GERMAIN P., NGUYEN Q. S., SUQUET P.  
Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, p. 1010-1020.
- [GIA 97a] GIANNAKOPOULOS A. E., SURESH S.  
Indentation of solids with gradients in elastic properties : Part I. Point forces. *International journal of solids and structures*, vol. 34, 1997, p. 2357-2392.
- [GIA 97b] GIANNAKOPOULOS A. E., SURESH S.  
Indentation of solids with gradients in elastic properties : Part II. Axisymmetric indentors. *international journal of solids and structures*, vol. 34, 1997, p. 2393-2428.
- [GRA 11] GRAS R.  
Traitements et revêtements de surface à usage tribologique. *Techniques de l'ingénieur*, vol. 5-100, 2011, p. 1-25.



- [GRE 66] GREENWOOD J. A., WILLIAMSON J. B. P.  
Contact of nominally flat surfaces. *Proceeding of the Royal Society, London, A.295*, pp.300-319, 1966.
- [GRE 97] GREENWOOD J. A.  
Adhesion of elastic spheres. *Proceedings of the Royal Society London A.*, vol. 453, 1997, p. 1277-1297.
- [GRE 11] GREENWOOD A., PUTIGNANO C., CIAVARELLA M.  
A Greenwood and Williamson theory for line contact. *Wear*, vol. 270, 2011, p. 332-334.
- [GUL 04] GULER M. A., ERDOGAN F.  
Contact mechanics of graded coatings. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, 2004, p. 3865-3889.
- [GUL 06] GULER M. A., ERDOGAN F.  
Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings. *Mechanics of Materials*, vol. 38, 2006, p. 633-647.
- [HEC 80] HECKMAN S., BURTON R.  
Surface Displacements for High Speed Rub. *Wear*, vol. 59, 1980, p. 61-77.
- [HER 82] HERTZ H.  
Über die Berührung fester elastischer Körper. *J. Reine Angew. Math*, vol. 92, 1882, p. 156-171.
- [HIL 85] HILLS D., BARBER J.  
Steady Motion of an Insulated Rigid Flat-Ended Punch over a Thermally Conducting Half-Plane. *Wear*, vol. 102, 1985, p. 15-22.
- [HOL 48] HOLM R.  
Calculation of the Temperature Development in a Contact Heated in the Contact Surface, and Application to the Problem of the Temperature Rise in a Sliding Contact. *Journal of Applied physic*, vol. 19, 1948, p. 361-366.
- [HOL 59] HOLM R.  
*Electric Contacts Handbook*. Oxford University Press, 1959.
- [HOL 03] HOLMBERG K., LAUKKANEN A., RONKAINEN H., WALLIN K., VARJUS S.  
A model for stresses, crack generation and fracture toughness calculation in scratched TiN-coated steel surfaces. *Wear*, vol. 254, 2003, p. 278-291.
- [HOU 99] HOUMID BENNANI H., TAKADOUM J.  
Finite element model of elastic stresses in thin coatings submitted to applied forces. *Surface and Coatings Technology*, vol. 111, 1999, p. 80-85.
- [HU 98] HU W., GUAN H., SUN X., LI S.  
Graded coatings prepared by plasma spraying with Ni-coated ZrO<sub>2</sub> powders. *Surface and Coatings Technology*, vol. 105, 1998, p. 102-108.
- [HUA 85] HUANG J., JU F.  
Thermomechanical Cracking Due to Moving Frictional Loads. *Wear*, vol. 102, 1985, p. 81-104.

- [IOA 85] IOANNIDES E., HARRIS T. A.  
A new fatigue life model for rolling bearings. *ASME Journal of Tribology*, vol. 107, 1985, p. 367-378.
- [ISR 97] ISRAELACHVILI J. N.  
*Intermolecular and surface forces*. Academic press, San Diego, 1997.
- [JAC 05] JACKSON R. L., GREEN I.  
A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat. *Journal of Tribology*, vol. 127, 2005, p. 343-354.
- [JAE 42] JAEGER J.  
Moving sources of heat and temperature at sliding contacts. *J. of Proc. Roy. Soc. N.S.W.*, vol. 56, 1942, page 203.
- [JAE 43] JAEGER J.  
Moving sources of heat. *J. of Proc. Roy. Soc. N.S.W.*, vol. 76, 1943, p. 203-224.
- [JIA 91] JIANG Y., CHEN C., TUCKER P.  
Multigrid solutions of unsteady Navier-Stokes Equations using a pressure method. *Numer. Heat Transfer*, vol. 20, 1991, p. 81-93.
- [JOH 71] JOHNSON K. L., KENDALL K., ROBERTS A. D.  
Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceeding of the Royal Society London*, vol. A324, 1971, p. 301-313.
- [JOH 85a] JOHNSON K. L.  
*Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [JOH 85b] JOHNSON K. L., GREENWOOD J. A., HIGGINSON J. G.  
The contact of elastic regular way surfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 27, 1985, p. 383-396.
- [JOS 91] JOSHI D., VANKA S.  
Multigrid Calculation Procedure for Internal Flows in Complex Geometries. *Numer. Heat Transfer*, vol. 20, 1991, p. 61-80.
- [JU 93] JU Y., FARRIS T.  
Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 118, 1993, p. 320-328.
- [JU 97] JU Y., FARRIS T.  
FFT Thermoelastic solutions for Moving Heat Sources. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 119, 1997, p. 156-162.
- [KEN 74] KENNEDY F., LING F.  
A Thermal, Thermoelastic, and Wear Simulation of a High-Energy Sliding Contact Problem. *ASME, Journal of Lubrication Technology*, vol. 96, 1974, p. 497-508.
- [KEN 80] KENNEDY F.  
Thermomechanical Phenomena in High Speed Rubing. *Wear*, vol. 59, 1980, p. 149-163.

- [KEN 84a] KENNEDY F.  
Thermal and thermomechanical effects in dry sliding. *Wear*, vol. 100, 1984, p. 453-467.
- [KEN 84b] KENNEDY F., COLIN F., FLOQUET A., GLOVSKY R.  
Improved Techniques for Finite Element Analysis of Sliding Surface Temperature. *Developments in Numerical and Experimental Methods Applied to Tribology*, D. Dowson, et al., eds., Butterworths, London, vol. 10, 1984, p. 138-150.
- [KEN 01] KENDALL K.  
*Molecular adhesion and its applications*. Plenum publishers, New York, 2001.
- [KES 96] KESLER O., FINOT M., SURESH S., SAMPATH S.  
Determination of processing-induced stresses and properties of layered and graded coatings : experimental method and results for plasma-sprayed Ni-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. *Acta Materiala*, vol. 45, 1996, p. 3113-3134.
- [KHO 99] KHOR K. A., DONG Z. L., GU Y. W.  
Plasma sprayed functionally graded thermal barrier coatings. *Materials Letters*, vol. 38, 1999, p. 437-444.
- [KIL 78] KILIPARTI S., BURTON R.  
The Thermoelastic Patch Contact Problem for Large Peclet Number. *ASME, Journal of Lubrication Technology*, vol. 100, 1978, p. 65-69.
- [KIR 80] KIRKPATRICK D. G.  
A note on Delaunay and optimal triangulations. *Information Processing Letters*, vol. 10, 1980, p. 127-128.
- [KOG 02] KOGUT L., ETSION I.  
Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 69, 2002, p. 657-662.
- [KOG 03] KOGUT L., ETSION I.  
A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *tribology Transactions*, vol. 46, 2003, p. 383-390.
- [KOM 92] KOMVOPOULOS K., CHOI D. H.  
Elastic finite element analysis of multi-asperity contacts. *Journal of tribology*, vol. 114, 1992, p. 823-831.
- [KRU 98] KRUCH S., FOREST S.  
Computation of Coarse Grain Structures Using a Homogeneous Equivalent Medium. *Journal de Physique IV*, vol. 8, 1998, p. 197-205.
- [KUB 11] KUBAIR D. V.  
Analysis and finite element simulations of the near-tip singular fields around a mode-3 stationary crack in plastically graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, 2011, p. 428-440.
- [KUC 94] KUCHARSKI S., KLIMCZAK T., POLJANIUK A., KACZMAREK J.  
Finite-element model for the contact of rough surfaces. *Wear*, vol. 177, 1994, p. 1-13.

- [KUH 86] KUHLMANN-WILSDORF D.  
Sample calculations of flash temperatures at a silver-graphite electric contact sliding over copper. *Wear*, vol. 107, 1986, p. 71-90.
- [LAC 04] LACHIHAB A.  
Un modèle numérique pour les composites biphasés matrice-inclusions rigides : Application à la détermination des propriétés élastiques et en fatigue des enrobés bitumineux. Thèse de doctorat, école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [LEB 05] LEBRINI M.  
Synthèses et études physicochimiques de nouveaux thiadiazoles inhibiteurs de corrosion de l'acier en milieu acide. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2005.
- [LEM 85] LEMAITRE J., CHABOCHE J. L.  
*Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [LER 86] LEROY J. M.  
Calcul du champ de température en surface d'un massif multicouche en translation-Etude du problème tridimensionnel et transitoire. Master's thesis, Lyon : Institut National des sciences Appliquées, Laboratoire de Mécanique des Contacts, 1986.
- [LER 89a] LEROY J. M.  
Modélisation thermoélastique des revêtements de surface utilisés dans les contacts non lubrifiés. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université Lyon I, 1989.
- [LER 89b] LEROY J., FLOQUET A., VILLECHAISE B.  
Thermomechanical Behaviour of Multilayered Media : Theory. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 111, 1989, p. 538-544.
- [LER 10] LEROUX J., FULLERINGER B., NÉLIAS D.  
Contact analysis in presence of spherical inhomogeneities within a half-space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, 2010, p. 3034-3049.
- [LEV 07] LEVÊQUE R.  
*Traitements et revêtements de surfaces des métaux*. Dunod, 2007.
- [LIN 65] LING F., MOW V.  
Surface Displacement of Convective Elastic Half-Space Under an Arbitrary Distributed Fast-Moving Heat Source. *ASME, Journal of Basic Engineering*, vol. 87, 1965, p. 729-734.
- [LIN 73] LING F.  
*Surface Mechanics*. Wiley, New-York, 1973.
- [LIN 05] LINSS V., SCHWARZER N., CHUDOBA T., KARNIYCHUK M., RICHTER F.  
Mechanical properties of a graded B-C-N sputtered coating with varying Young's modulus : deposition, theoretical modelling and nanoindentation. *SCT*, vol. 195, 2005, p. 287-297.

- [LIU 01a] LIU P., CHENG L., ZHANG Z. W.  
Measuring interface parameters and toughness - a computational study. *Acta Materialia*, vol. 49, 2001, p. 817-825.
- [LIU 01b] LIU S., WANG Q.  
A Three-Dimensional Thermomechanical Model of contact Between Non-Conforming Rough Surfaces. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 123, 2001, p. 17-26.
- [LIU 02a] LIU S., RODGERS M., WANG Q., KEER L., CHENG H.  
Temperature Distributions and Thermoelastic Displacements In Moving Bodies. *CMES*, vol. 3, 2002, p. 465-481.
- [LIU 02b] LIU S., WANG Q.  
Transient Thermoelastic Stress Fields in a Half-Space. *Proceedings of ASME/STLE Joint International Tribology Conference, Cancun, Mexico, 2002*.
- [LIU 02c] LIU Y., MELETIS E. I.  
Tribological behavior of DLC coatings with functionally gradient interfaces. *Surface and Coatings Technology*, vol. 153, 2002, p. 178-183.
- [LIU 04] LIU S., LANNOU S., WANG Q., KEER L.  
Solutions for Temperature Rise in Stationnary/Moving Bodies Caused by Surface Heating With Surface Convection. *ASME, Journal of Heat Transfer*, vol. 126, 2004, p. 776-785.
- [LOV 52] LOVE A. E. H.  
*A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge : University Press, 1952.
- [LUN 47] LUNDBERG G., PALMGREN A.  
Dynamic capacity of rolling bearings. *Acta Polytechnica, Mechanical Engineering series 2*, vol. 1, 1947, page 7.
- [LUR 64] LURE A. I.  
*Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. Radok, Interscience, 1964.
- [MAR 05] MARTINI M., LIU S., WANG Q.  
Transient Three-Dimensional Solution for Thermoelastic Displacement Due to Surface Heating and Convective Cooling. *ASME, Journal of Tribology*, vol. 127, 2005, p. 750-755.
- [MAU 92] MAUGIS D.  
Adhesion of spheres : The JKR-DMT transition using a Dugdale model. *Journal of Colloid Interface Science*, vol. 150, 1992, p. 243-269.
- [MAU 00] MAUGIS D.  
*Contact, adhesion and rupture of elastic solids*. Springer, Heidelberg, 2000.
- [MAY 94] MAYEUR C., SAINOT P., FLAMAND L.  
Modélisation du contact rugueux élastoplastique. *Revue Française de Mécanique*, vol. 2, 1994, p. 83-91.

- [MAY 95] MAYEUR C., SAINOT P., FLAMAND L.  
A Numerical elastoplastic model for rough contact. *ASME Journal of Tribology*, vol. 117, 1995, p. 422-429.
- [MEN 03] MENDIBIDE C.  
Caractérisation de revêtements PVD nanostructurés à base de nitrures de métaux de transition pour application mécanique. Thèse de doctorat, Insa de Lyon, 2003.
- [MES 04] MESQUITA M., DE LEMOS M.  
Optimal Multigrid Solutions of Two-Dimensional Convection-Conduction Problems. *Appl. Math. Comput.*, vol. 152, 2004, p. 725-742.
- [MOE 95] MOES H., BOS J.  
Frictional heating of tribological contacts. *J. Tribology*, vol. 117, 1995, p. 171-177.
- [NEM 93] NEMAT-NASSER S., HORI  
*M. Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, 1993.
- [NGU 08] NGUYEN H. G.  
Approche micromécanique pour la modélisation du comportement élastoplastique des composites : application aux mortiers de résine. Thèse de doctorat, Laboratoire de mécanique et Matériaux du Génie Civil - L2MGC-EA4114, 2008.
- [NOB 71] NOBLE B., SPENCE D. A.  
*Formulation of Two-dimensional and Axi-symmetric Boundary Value Problems*. University of Wisconsin Math. Res. Centre Report TR1089, 1971.
- [NOG 97] NOGI T., KATO T.  
Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact-part I : analysis using a real surface model. *Journal of Tribology*, vol. 119, 1997, p. 493-500.
- [OH 73] OH S., BRYANT M., BURTON R.  
The Complete Stress Field Produced by Frictional Heating of a Thin Conductor Sliding Against an Insulator. *Journal of Thermal Stress*, vol. 6, 1973, p. 307-321.
- [PAT 64] DE PATER A. D.  
*On the reciprocal pressure between two elastic bodies in contact*. In *Rolling contact phenomena*. Bidwell. New York : Elsevier, 1964.
- [PAT 80] PATANKAR S.  
*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [PER 99] PERSSON B. N. J.  
Sliding friction. *Surface Science Reports*, vol. 33, 1999, p. 83-119.
- [PLU 98a] PLUMET S.  
Modélisation d'un milieu multicouche 3D sous sollicitations de contact : Application aux prothèses de genou stérilisées. Thèse de doctorat, Institut national des Sciences Appliquées de Lyon-université Lyon 1, 1998.
- [PLU 98b] PLUMET S., DUBOURG M. C.  
A 3D model for a multilayered body loaded normally and tangentially against a rigid body : application. *Journal of tribology*, vol. 120, 1998, p. 668-676.

- [PRA 09] PRASAD A., DAO M., SURESH S.  
Steady-state frictional sliding contact on surfaces of plastically graded materials. *Acta Materiala*, vol. 57, 2009, p. 511-524.
- [QUA 11] QUARTERONI A., SALERI F., GERVASIO P.  
*Calcul scientifique*. Springer, 2011.
- [RAB 88] RABI J.  
Application of the Multigrid Method to the Numerical Solution of Two-Dimensional Flow and Heat Transfer. Thèse de doctorat, Instituto Tecnológico de Aeronautica, Sao José dos Campo, Brazil, 1988.
- [RAB 98] RABI J. A., DE LEMOS M. J. S.  
The Effects of Peclet Number and Cycling Strategy on Multigrid Numérical Solutions of Convective-Conductive Problems. *7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conf., Albuquerque, New Mexico, USA, Paper AIAA-98-2584*, 1998.
- [RAB 01] RABI J. A., DE LEMOS M. J. S.  
Optimization of Convergence Acceleration in Multigrid Numerical Solution of Conductive-Convection Problems. *Appl. Math. Comput.*, vol. 124, 2001, p. 215-226.
- [RAJ 09] RAJE N., SLACK T., SADEGHI F.  
A discrete damage mechanics model for high cycle fatigue in polycrystalline materials subject to rolling contact. *International Journal of Fatigue*, vol. 31, 2009, p. 346-360.
- [RAO 97] RAOUS M., CANGÉMI L., COCU M.  
Un modèle couplant adhérence et frottement pour le contact entre deux solides déformables. *Cptes Rend. Acad. Sc. Paris*, vol. 325, 1997, p. 503-509.
- [RAO 99] RAOUS M., CANGÉMI L., COCU M.  
A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engr.*, vol. 177, 1999, p. 383-399.
- [ROS 53] ROSTOVTZEV N. A.  
Complex stress functions in the axi-symmetric contact problem of the theory of elasticity. *PMM*, vol. 17, 1953, page 611.
- [ROU 06] ROUSSELOT C., THOBOR-KECK A., ERSÉN O., TUILIER M. H.  
Modification des interfaces dans des multicouches TiN/AIN : effet du bombardement ionique. *MATERIAUX*, 2006.
- [RUG 85] RUGE J. W., STUEBEN K.  
*Efficient solution of finite difference and finite element equations by algebraic multigrid (AMG). Multigrid methods, for Integral and Differential equations*. Institute of Mathematics and its Applications Conferences Series 3, 1985.
- [SAB 07] SABELKIN V., MALL S.  
Elastic-plastic multi-asperity contact analysis of cylinder-on-flat configuration. *Journal of tribology*, vol. 139, 2007, p. 292-304.

- [SAH 07] SAHOO P., GHOSH N.  
Finite element contact analysis of fractal surfaces. *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 40, 2007, p. 4245-4252.
- [SAI 92] SAINOT P., FLAMAND L.  
Influence de la microgéométrie dans les contacts fortement chargés. *Journées d'études sur les aspects thermiques du frottement, G.U.T. -S.F.T. -S.T.F., Paris*, 1992.
- [SAI 02] SAINOT P., JACQ C., NELIAS D.  
A numerical model for elastoplastic rough contact. *CMES*, vol. 3, 2002, p. 497-506.
- [SAI 10] SAINOT P., LUBRECHT A. A.  
Efficient solution of the dry contact of rough surfaces : a comparison of FFT and MG methods. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 225, 2010, p. 441-448.
- [SAI 11] SAINOT P.  
Analytical stresses in rough contacts. *Proceedings of the IMECH E Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 225, 2011, p. 274-279.
- [SCH 00] SCHWARZER N.  
Coating design due to analytical modelling of mechanical contact problems on multilayer systems. *Surface and Coatings Technology*, vol. 133-134, 2000, p. 215-219.
- [SHO 06] SHODJA H. M., GHAREMANINEJAD A.  
An FMG coated elastic solid under thermomechanical loading : a two dimensional linear elastic approach. *Surface and Coatings Technology*, vol. 200, 2006, p. 4050-4064.
- [SIN 69] SINGLETON R. C.  
An algorithm for computing the mixed radix Fast Fourier Transform. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, vol. AU-17, 1969, p. 93-103.
- [SLA 10] SLACK T., SADEGHI F.  
Explicit finite element modeling of subsurface initiated spalling in rolling contacts. *Tribology International*, vol. 43, 2010, p. 1693-1702.
- [SLA 11] SLACK T., SADEGHI F.  
Cohesive zone modeling of intergranular fatigue damage in rolling contacts. *Tribology International*, vol. 44, 2011, p. 797-804.
- [SNE 51] SNEDDON I. N.  
*Fourier Transforms*. New York, Toronto, London : McGraw-Hill, 1951.
- [STA 97] STANLEY H. M., KATO T.  
An FFT-based method for rough surface contact. *Journal of tribology*, vol. 119, 1997, p. 481-485.
- [SUR 97] SURESH S., GIANNAKOPOULOS A. E., ALCALA J.  
Spherical indentation of compositionally graded materials : Theory and experiments. *Acta Materiala*, vol. 45, 1997, p. 1307-1321.



- 
- [SYE 94] SYED ASIF S. A., DERBY B., ROBERTS S. G.  
Nanomechanical Response of Materials and Thin Film Systems : Finite Element Simulation. *MRS Proceedings*, vol. 356, 1994, p. 356-681.
- [TER 87] TERZOPOULOS D., PLATT J., BARR A., FLEISCHER K.  
Elastically deformable models. *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, vol. 87, 1987, p. 205-214.
- [TER 88] TERZOPOULOS D., FLEISCHER K.  
Modeling inelastic deformation : viscoelasticity, plasticity, fracture. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, vol. 22, 1988, p. 269-278.
- [THO 89] THOMPSON M., FERZIGER J.  
An adaptive Multigrid Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equation. *J. Comput. Phys.*, vol. 82, 1989, p. 94-121.
- [TRO 01] TROTTEMBERG U., OOSTERLEE C. W., SCHUELLER A.  
*Multigrid*. Academic Press, London, UK, 2001.
- [TSE 80] TSENG M., BURTON R.  
Thermal Stresses in a Two-Dimensional (Plan Stress) Half Space for a Moving Heat Input. *Wear*, vol. 59, 1980, p. 61-77.
- [VAL 09] VALLET C., LASSEUX D., SAINOT P., ZAHOUANI H.  
Real versus synthesized fractal surfaces : Contact mechanics and transport properties. *Tribology International*, vol. 42, 2009, p. 250-259.
- [VAN 86] VANKA S.  
Block-implicit Multigrid Calculation of Two-Dimensional Recirculating flows. *Comput. Methods Appl. Mech.*, vol. 86, 1986, p. 29-48.
- [VAS 01] VASSEN R., DIETRICH M., LEHMANN H., CAO X., PRACHT G., TIETZ F., PITZER D., STOEVER D.  
Development of oxide ceramics for an application as TBC. *Mater. Sci. Eng. Technol.*, vol. 32, 2001, p. 673-677.
- [VEN 00] VENNER C. H., LUBRECHT A. A.  
*Multilevel methods in lubrication*. Amsterdam. Elsevier, 2000.
- [VIL 85] VILLECHAISE B.  
Mécanique des Contact : élasticité et rupture. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées et Université de Lyon, 1985.
- [VLA 11] VLADISLAV A., YASTREBOV J. D., PROUDHON H., CAILLETAUD G.  
Rough surface contact analysis by means of the Finite Element Method and of a new reduced model. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 339, 2011, p. 473-490.
- [VOR 08] VORONOI G.  
Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, doi :10.1515/crll.1908.133.97, vol. 133, 1908, p. 97-178.
-

- [WAR 10] WARHADPANDE A., JALALAHMADI B., SLACK T., SADEGHI F.  
A new finite element fatigue modeling approach for life scatter in tensile steel specimens. *International Journal of Fatigue*, vol. 32, 2010, p. 685-697.
- [WAR 12] WARHADPANDE A., SADEGHI F., KOTZALAS M. N., DOLL G.  
Effects of plasticity on subsurface initiated spalling in rolling contact fatigue. *International Journal of Fatigue*, vol. 36, 2012, p. 80-95.
- [WAT 81] WATSON D. F.  
Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *Computer Journal*, vol. 24, 1981, p. 167-172.
- [WAT 06] WATREMETZ B.  
Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon-Université de Lyon, 2006.
- [WEI 39] WEIBULL W.  
A statistical theory of the strength of materials. *Royal Swedish Academy of Engineering Sciences Proc.*, vol. 151, 1939, p. 4-45.
- [WIL 01] WILDEN J., WANK A.  
Application study on ceria based thermal barrier coatings. *Mater. Sci. Eng. Technol.*, vol. 32, 2001, p. 654-659.
- [WOE 99] WOERDEMAN D. L., AMOUROUX N., PONSINET V., JANDEAU G., HERVET H., LÉGER L.  
Characterization of glass-epoxy adhesion using JKR methods and atomic force microscopy. *Composites : Part A*, vol. 30, 1999, p. 95-109.
- [ZHA 11] ZHANGJIAN Z., SHUANGQUAN G., SHUXIANG S., WEIZHI Y., CHANGCHUN G.  
The development and prospect of fabrication of Wbased plasma facing component by atmospheric plasma spraying. *Fusion Engineering and Design*, vol. 86, 2011, p. 1625-1629.
- [ZIL 02] ZILBERMAN S., PERSSON B. N. J.  
Adhesion between elastic bodies with rough surfaces. *Solid State Communications*, vol. 123, 2002, p. 173-177.

NOM : BOFFY

DATE de SOUTENANCE : 14 septembre 2012

Prénoms : Hugo

TITRE : Techniques multigrilles et raffinement pour un modèle 3D efficace de milieux hétérogènes sous sollicitations de contact.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2012-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Les problèmes de mécanique du contact sont des problèmes multi-échelles mettant en jeu de nombreux phénomènes physiques. Les premières études concernant ce domaine datent de la fin du XIX<sup>me</sup> siècle et les développements majeurs ont été réalisés au cours du XX<sup>me</sup> siècle en parallèle du besoin croissant des ingénieurs de prévoir le comportement des matériaux sous sollicitations tribologiques.

L'évolution des besoins industriels et les avancées technologiques réalisées dans le domaine du numérique conduisent à réaliser des simulations tridimensionnelles ayant pour objectif la prédiction du comportement de pièces sous sollicitations thermo-mécaniques transitoires, pour, soit alléger les structures, augmenter le niveau de sollicitations, étendre la durée de vie... Ces simulations se révèlent très souvent coûteuses en termes de temps de calcul et d'espace mémoire et nécessitent par conséquent l'utilisation de super calculateurs.

Dans ce contexte, cette thèse propose un modèle innovant basé sur les techniques multigrilles avec raffinement local afin de réaliser ces simulations pour des coûts numériques faibles. Ce modèle est basé sur les équations de Lamé généralisées et l'équation de la chaleur de Fourier discrétisée à l'aide des différences finies. Le système linéaire obtenu est résolu à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel couplée avec les techniques multigrilles. Ces techniques permettent d'accélérer la convergence d'un problème en utilisant plusieurs grilles et des opérateurs de transfert et sont compatibles avec des techniques de localisation.

Les applications visées ici sont centrées sur l'utilisation de revêtements ou de matériaux innovants pour permettre les gains attendus. Des validations du modèle ont été effectuées en comparant nos résultats avec ceux issus de la littérature. Des études paramétriques ont permis d'étudier l'influence de l'épaisseur du revêtement, de la valeur du module de Young mais aussi d'une couche à gradient de propriété sur le champ de contrainte et la tenue du système revêtement/substrat sous sollicitation de contact. Des études similaires ont été conduites sous sollicitations thermiques.

L'intérêt porté aux variations de propriétés des matériaux selon toutes les directions de l'espace a conduit à étudier tout particulièrement leur microstructure, qui est constituée de grains ayant chacun leurs propriétés propres. L'intérêt de la prise en compte de la microstructure dans un problème de contact est mise en évidence au travers de calculs de durée de vie utilisant des descriptions statistiques de type Weibull. La dispersion observée sur les résultats est conforme aux observations expérimentales.

MOTS-CLÉS : mécanique du contact, thermique, multigrilles, revêtements, caractérisation mécanique

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon

18-20 rue des Sciences

69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directrice de thèse : Dr. M.C. Baietto

Composition du jury : CHATEAUMINOIS antoine

CAILLETAUD Georges

ROCCHI Jérôme

BAIETTO Marie-Christine

VENNER Kees

RAOUS Michel

LUBRECHT Ton

SAINSOT Philippe