

THESE
STABILITE ET DYNAMIQUE NON LINEAIRE DE
ROTORS EMBARQUES

Présentée devant
l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir
le GRADE DE DOCTEUR

Ecole Doctorale :
MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique) **de Lyon**

Spécialité : Mécanique

Par
M. Zaki DAKEL
Ingénieur Université d'Alep

Thèse soutenue le 12 septembre 2014 devant la commission d'examen

Jury

Fabrice THOUVEREZ	Professeur	Ecole Centrale de Lyon	Président
Mihaï ARGHIR	Professeur	Université de Poitiers	Rapporteur
Alain BERLIOZ	Professeur	Université Toulouse III	Rapporteur
Kostandin GJIKI	Docteur	Honeywell Turbo Technologies	Examineur
Régis DUFOUR	Professeur	INSA de Lyon	Directeur de thèse
Sébastien BAGUET	Maître de Conférences	INSA de Lyon	Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON secretariat@edchimie-lyon.fr	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	M. Fabrice CORDEY Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.44.83.74 Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr fabrice.cordey@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 isavonb@dbmail.com

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

REMERCIEMENTS

La thèse rapportée par le présent manuscrit a été effectuée au sein du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA Lyon) dirigé par Messieurs les Professeurs Alain COMBESURE et David DUREISSEIX. Je tiens à leur exprimer toute ma gratitude pour m'avoir accueilli et permis de mener à bien mes travaux de recherche.

Le travail présenté ici n'était jamais réalisable sans les conseils importants de Régis DUFOUR, directeur de thèse, à qui j'adresse mes sincères remerciements du fond du cœur pour m'avoir permis d'explorer la dynamique des rotors embarqués traitée dans ce manuscrit avec une liberté complète de recherche. Je ne pourrai jamais oublier les discussions passionnantes que nous avons pu avoir sur les sens physiques des résultats obtenus dans cette thèse.

J'exprime également toute ma gratitude à Sébastien BAGUET, co-directeur de thèse, pour sa patience sans limite, son encouragement, son soutien dans tous les moments de cette thèse. Sa rigueur scientifique m'a permis d'approfondir et d'améliorer mon travail pour lui donner une consistance accrue. Je n'oublierai pas nos discussions concernant les cultures française et syrienne, la politique et les événements douloureux qui surviennent en Syrie depuis 2011.

Par ailleurs, je remercie chaleureusement Mihai ARGHIR de l'Université de Poitiers et Alain BERLIOZ de l'Université Paul Sabatier (Toulouse III) pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail. Leurs compétences dans le domaine de la dynamique des rotors et leurs conseils avisés ont permis de rendre ce manuscrit plus rigoureux, passionnant et constructif.

Je souhaite vivement remercier Fabrice THOUVEREZ de l'Ecole Centrale de Lyon pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Kostandin GJKA pour m'avoir fait le plaisir de s'intéresser à mes travaux en acceptant de faire partie du jury.

J'adresse ma profonde sympathie à tous les membres de l'équipe Dynamique et Contrôle des Structures (DCS) avec qui ce fut un réel plaisir de partager tous les moments de cette thèse.

J'adresse également mes vifs remerciements aux docteurs et aux doctorants que j'ai rencontrés durant ma thèse : Guillaume MOGENIER, Baraa AL SAYED, Loïc PELETAN, Bartolomé SEGUI VASQUEZ, Lihan XIE, Guillaume ALTMAYER, Fengyan DENG, Marc Andre DOUVILLE, Aroua FOURATI, Celio DURAN, Jose Luis GOMEZ CHIRINOS, Konstantinos GRYLLIAS, Abdelhak HMID, Clement JARROUX, Wafa MANSOURI, Van Nghi NGUYEN, Giovanna LACERRA, Guillaume SERGENT, Zhen WANG. J'aimerais surtout remercier Eric CHATELET et Sophie BAUDIN qui m'ont donné de leur temps pour que je puisse améliorer le texte de ce manuscrit et préparer au mieux la soutenance de thèse.

Je voudrais grandement exprimer mes remerciements les plus distingués à mes amis permanents en Syrie : Ziad LABABIDI, Mohamad MERI, Abdul Kader JOUHA, Bader ABOU GHALOUN, Othman ALRAJH, Othman ALFOTIMY, Maen ATLI, Ahmad Firas SHAAR, Mohamad SAMMAN, Mohamad Edris SANJAKDAR, Fadi SARRAJ, Mohamad HAJ MOUSTAPHA, Tayseer SHARABATY, Mohamad Zakwan GHAZAL, Mohamad MOBAYED, Moussa ALALI.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement ma mère Raghda, mes sœurs Manal et Maouya, ma fille Israa et la femme de ma vie Mays pour leur confiance, leur soutien et leurs encouragements durant mes études en France.

A la mémoire de mon père

A la mémoire des martyrs syriens

RESUME

Les rotors sont excités non seulement par le balourd tournant mais aussi par les différents mouvements de leur support : turbocompresseurs de véhicules, turbomoteurs aéronautiques, pompes à vide portées en sont des exemples industriels. Ainsi la conception de rotors robustes capables de bien fonctionner sous de telles conditions (excitations extrêmes) est nécessaire pour éviter des instabilités, source de défaillance catastrophique. Le présent travail a pour objectif de prévoir le comportement dynamique d'un rotor embarqué monté sur des paliers rigides ou élastiques hydrodynamiques et soumis à des excitations du support rigide.

Les énergies cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel des composants d'un rotor flexible tournant sont calculés. Le modèle proposé de rotor embarqué est basé sur les éléments finis de poutre de TIMOSHENKO. Il contient les effets relatifs à l'inertie de rotation des sections droites, à l'inertie gyroscopique, à la déformation de cisaillement d'arbre et à la dissymétrie géométrique de l'arbre et/ou du disque rigide et considère six types de mouvements déterministes (rotations et translations) du support. Suivant le type d'analyse utilisé pour le palier, les forces de rappel hydrodynamiques agissant sur l'arbre et calculées avec l'équation de REYNOLDS sont linéaires/non linéaires.

L'utilisation des équations de LAGRANGE fournit les équations différentielles linéaires/non linéaires du mouvement du rotor embarqué en flexion par rapport au support mobile supposé rigide, qui représente un système de coordonnées non inertiel. Les équations du mouvement contiennent des termes paramétriques périodiques en raison de la dissymétrie géométrique du rotor et des termes paramétriques variables dans le temps en raison des rotations du support. Ces termes paramétriques sont considérés comme des sources d'excitation intérieure et conduisent à une instabilité dynamique latérale.

Dans les applications numériques proposées, trois configurations de rotor embarqué sont analysées. Tout d'abord, un rotor symétrique monté sur des paliers rigides est soumis à un balourd combiné avec des mouvements de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Ensuite, un rotor avec une dissymétrie géométrique du disque monté sur des paliers rigides est excité par l'effet de balourd et par des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Enfin, un rotor symétrique monté sur des paliers hydrodynamiques est soumis au balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support.

Des méthodes et des approches quasi-analytiques et numériques, telles que la théorie de FLOQUET, le schéma implicite d'intégration temporelle pas à pas de type NEWMARK, la méthode de shooting et la méthode de la balance harmonique, sont employées pour traiter les équations différentielles du mouvement des systèmes rotor embarqué-palier, analyser leur comportement dynamique, étudier leur stabilité et calculer leurs réponses forcées.

Pour les première et deuxième configurations de rotor, le comportement dynamique est calculé en discutant l'influence des mouvements du support sur les cartes de stabilité, les diagrammes de CAMPBELL, les réponses en régime permanent et les orbites du rotor. Pour la troisième configuration de rotor, l'influence de mouvements sinusoïdaux de rotation ou de translation du support, la précision du modèle linéarisé de palier et l'intérêt du modèle non linéaire pour un palier hydrodynamique sont examinés et discutés grâce à des cartes de stabilité, des orbites du rotor, des réponses dans le domaine temporel, des transformées de FOURIER rapides (FFTs), des diagrammes de bifurcation ainsi que des sections de POINCARÉ.

Mots clés

Dynamique des rotors, rotor dissymétrique, rotor embarqué, méthode des éléments finis, palier hydrodynamique, mouvement du support, excitation paramétrique, instabilité latérale, dynamique non linéaire, mouvement transitoire, méthode de shooting, méthode de la balance harmonique, bifurcation, chaos.

ABSTRACT

Rotors are excited not only by the rotating mass unbalance but also by the different motions of their support: vehicle turbochargers, aircraft turbo-engines, carried vacuum pumps, are different industrial applications. Thus the design of robust rotors able to run well under such conditions (extreme excitations) and to avoid catastrophic failure is required. The present work aims to predict the dynamic behavior of an on-board rotor mounted on rigid or elastic hydrodynamic journal bearings and subjected to rigid support excitations.

The kinetic and strain energies as well as the virtual work of the rotating flexible rotor components are computed. The proposed on-board rotor model is based on TIMOSHENKO beam finite elements. It includes the effects relative to the rotary inertia, the gyroscopic inertia, the shear deformation of shaft as well as the geometric asymmetry of shaft and/or rigid disk and considers six types of deterministic motions (rotations and translations) of the support. Depending on the type of analysis used for the bearing, the restoring fluid film forces acting on the shaft and computed with the REYNOLDS equation are linear/non-linear.

The use of LAGRANGE's equations yields the linear/non-linear differential equations of vibratory motion of the on-board rotor in bending with respect to the moving rigid support which represents a non-inertial reference frame. The equations of motion contain periodic parametric coefficients because of the geometric asymmetry of the rotor and time-varying parametric coefficients because of the support rotations. These parametric coefficients are considered as sources of internal excitation and can lead to lateral dynamic instability.

In the proposed numerical application examples, three rotor configurations are studied. Firstly, a symmetric rotor mounted on rigid bearings is subjected to rotating mass unbalance combined with constant rotation and sinusoidal translation of the support. Secondly, a rotor with geometric asymmetry due to the disk mounted on rigid bearings is excited by the mass unbalance effect and by the combination of a constant rotation and a sinusoidal translation of the support. Thirdly, a symmetric rotor mounted on linearized/non-linear hydrodynamic bearings is subjected to the excitation due to the mass unbalance and to the sinusoidal rotational or translational excitations of the support.

Quasi-analytical and numerical methods and approaches, such as the FLOQUET theory, the implicit NEWMARK time-step integration scheme, the shooting method and the harmonic balance method, are employed to treat the differential equations of motion of the on-board rotor-bearing systems, to analyze their dynamic behavior, to study their stability and to calculate their forced responses.

For the first and second rotor configurations, their dynamic behavior is investigated by discussing the influence of the support motions on stability charts, CAMPBELL diagrams, steady-state responses and rotor orbits. For the third rotor configuration, the influence of sinusoidal rotational or translational motions of the support, the accuracy of the linear 8-coefficient bearing model and the interest of the non-linear model for a hydrodynamic journal bearing are examined and discussed by means of stability charts, rotor orbits, time history responses, fast FOURIER transforms (FFTs), bifurcation diagrams as well as POINCARÉ maps.

Keywords

Rotordynamics, asymmetric rotor, on-board rotor, finite element method, hydrodynamic journal bearing, support motion, parametric excitation, lateral instability, non-linear dynamics, transient motion, shooting method, harmonic balance method, bifurcation, chaos.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I : BIBLIOGRAPHIE ET ETAT DE L'ART.....	5
I.1 Aspects phénoménologiques de la dynamique des rotors classiques en flexion.....	6
I.2 Sources d'excitation extérieure d'un rotor.....	9
I.3 Systèmes sous excitations paramétriques.....	10
I.4 Rotors dissymétriques.....	11
I.5 Paliers hydrodynamiques.....	12
I.6 Rotors soumis à des excitations de type sismique, aléatoire ou choc.....	14
I.7 Effet de flexibilité de la fondation.....	15
I.8 Rotors soumis à des mouvements sinusoïdaux du support.....	16
I.9 Modèles et méthodes numériques.....	17
I.9.1 Méthodes d'approximation numérique.....	17
I.9.2 Analyse de stabilité des systèmes paramétriques périodiques.....	18
I.9.3 Méthodes de résolution des équations du mouvement.....	19
I.10 Apport et positionnement de la thèse.....	21
CHAPITRE II : MODELISATION DES ROTORS EMBARQUES.....	23
II.1 Introduction.....	24
II.2 Définition et transformation des systèmes de référence.....	26
II.2.1 Transformation du repère lié au support en repère local.....	28
II.2.2 Transformation du repère galiléen en repère lié au support.....	30
II.3 Vecteur rotation instantanée.....	32
II.4 Vecteur position de l'origine du repère lié au support.....	33
II.5 Calcul des énergies et du travail virtuel.....	34
II.5.1 Disque.....	34
II.5.2 Arbre.....	39
II.5.2.1 Energie cinétique.....	39
II.5.2.2 Energie de déformation.....	42
II.5.3 Balourd.....	55
II.5.4 Palier hydrodynamique.....	58

Table des matières

II.6	Conclusion.....	61
CHAPITRE III : EQUATIONS DU MOUVEMENT.....		63
III.1	Introduction.....	64
III.2	Méthode de RAYLEIGH-RITZ.....	64
III.2.1	Mise en équation.....	64
III.2.2	Equations du mouvement.....	66
III.3	Méthode des éléments finis.....	69
III.3.1	Disque.....	69
III.3.2	Arbre.....	73
III.3.3	Balourd.....	76
III.3.4	Palier.....	77
III.3.5	Equations du mouvement.....	77
III.4	Configurations rencontrées.....	79
CHAPITRE IV : OUTILS ET METHODES NUMERIQUES POUR L'ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE.....		81
IV.1	Introduction.....	82
IV.2	Analyse dynamique linéaire.....	82
IV.2.1	Système d'équations différentielles à coefficients constants.....	83
IV.2.1.1	Stabilité et fréquences naturelles.....	83
IV.2.1.2	Réponses aux forces d'excitation extérieure.....	85
IV.2.2	Système d'équations différentielles à coefficients paramétriques.....	86
IV.2.2.1	Analyse de stabilité dynamique.....	86
IV.2.2.2	Réponses forcées et orbites.....	89
IV.3	Analyse dynamique non linéaire.....	90
IV.3.1	Régime transitoire.....	91
IV.3.2	Calcul direct de la solution périodique.....	97
IV.3.2.1	Méthode de tir (de shooting).....	97
IV.3.2.2	Méthode de la balance harmonique.....	101
IV.3.3	Section de POINCARÉ.....	110
IV.3.4	Diagramme de bifurcation.....	110
IV.3.5	Stratégies de continuation.....	111
IV.3.5.1	Continuation séquentielle.....	111
IV.3.5.2	Continuation par longueur d'arc.....	112
CHAPITRE V : MISE EN EVIDENCE DES PHENOMENES PROPRES AUX ROTORS EMBARQUES.....		117
V.1	Introduction.....	118
V.2	Rotor symétrique sur paliers rigides.....	118
V.2.1	Configuration et données.....	118
V.2.2	Diagrammes de CAMPBELL.....	120
V.2.3	Influence des excitations du support sur les courbes de réponse.....	121
V.2.3.1	Réponses au balourd en présence de la rotation constante du support.....	121

	V.2.3.2 Réponses à l'excitation de translation du support en présence de sa rotation constante.....	123
	V.2.4 Influence des excitations du support sur les orbites.....	124
	V.2.4.1 Translation pure du support et validation par rapport à la méthode de RAYLEIGH-RITZ.....	124
	V.2.4.2 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support.....	124
	V.2.4.3 Combinaison de translation $z_o=Z_o\sin\Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support.....	125
V.3	Rotor dissymétrique sur paliers rigides.....	128
	V.3.1 Configuration et données.....	128
	V.3.2 Cartes de stabilité.....	129
	V.3.3 Réponses orbitales du rotor.....	131
	V.3.3.1 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support.....	131
	V.3.3.2 Combinaison de translation $z_o=Z_o\sin\Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support.....	131
V.4	Rotor symétrique sur paliers hydrodynamiques.....	134
	V.4.1 Description du rotor étudié.....	134
	V.4.2 Rôle des modèles de palier hydrodynamique dans l'analyse de stabilité.....	135
	V.4.2.1 Modèle linéarisé.....	135
	V.4.2.2 Modèle non linéaire.....	136
	V.4.3 Comparaisons de modèles linéaire et non linéaire de palier hydrodynamique.....	136
	V.4.3.1 Influence du balourd.....	136
	V.4.3.2 Influence de la fréquence du mouvement du support.....	137
	V.4.3.3 Influence de l'amplitude du mouvement du support.....	142
	V.4.4 Route vers le chaos dans le système rotor-palier hydrodynamique non linéaire.....	145
	V.4.4.1 Diagrammes de bifurcation.....	145
	V.4.4.2 Réponses sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques.....	148
	V.4.4.3 Sensibilité aux conditions initiales.....	149
	V.4.5 Réponses stationnaires périodiques aux excitations sinusoïdales du support.....	151
V.5	Conclusion.....	152
 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....		155
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		159
 ANNEXE A : CALCUL DES FONCTIONS t_1, t_2, t_3 ET t_4 DU CHAPITRE II.....		167
 ANNEXE B : EFFETS CENTRIFUGES DUS A LA ROTATION.....		171
 ANNEXE C : CARACTERISTIQUES STATIQUES ET DYNAMIQUES DES PALIERS HYDRODYNAMIQUES.....		173
 ANNEXE D : EXPRESSIONS DES TERMES MATRICIELS SUIVANT LA METHODE DE RAYLEIGH-RITZ.....		193

Table des matières

ANNEXE E : MATRICES ET VECTEURS ELEMENTAIRES DE L'ARBRE SUIVANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	197
ANNEXE F: METHODE DE RUNGE-KUTTA.....	209
ANNEXE G : VERSION LINEAIRE DE LA METHODE DE NEWMARK.....	211

INTRODUCTION GENERALE

Contexte

Les machines tournantes, telles que les pompes, les turbomachines, les moteurs d'avions et les compresseurs, sont depuis de nombreuses années des éléments primordiaux pour l'industrie moderne et divers domaines de la vie quotidienne. Les turbomachines permettent d'assurer un échange d'énergie entre un rotor tournant à vitesse stabilisée et un débit permanent de fluide. Dans les centrales électriques, les turboalternateurs ont pour but de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans de nombreuses applications industrielles, les pompes assurent la circulation des fluides. La plupart des véhicules comportent des machines tournantes : turboréacteur pour un avion, turbocompresseur pour une automobile et turbine pour un bateau. La figure **FIG. 1** présente quelques exemples de systèmes (automobile, bateau et turbomachine) possédant des machines tournantes.

Les machines tournantes peuvent présenter des problèmes d'équilibrage (dus au balourd), de contact rotor-stator et de fissuration, sources d'instabilité. Ainsi de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'étude de stabilité des rotors et de leurs réponses à des forces extérieures. Alors que dans la littérature présentant ces études, le rotor d'une machine tournante est généralement supposé avoir un support fixe, il est souvent embarqué dans de nombreuses applications industrielles. Par définition, le terme « rotor embarqué » signifie que le support du rotor est en mouvement.

En résumé, le rotor d'une machine tournante est excité non seulement par le balourd mais aussi par les mouvements différents de son support. Donc la conception dynamique robuste d'une machine tournante nécessite la prise en compte des excitations imposées au support.

Cette thèse de doctorat a été effectuée au sein du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA de LYON dans le but de prévoir le comportement dynamique en flexion d'un rotor embarqué monté sur paliers rigides ou flexibles hydrodynamiques, en présence de mouvements déterministes de rotation et/ou de translation du support rigide sans/avec des non linéarités.

L'intérêt pour la dynamique des rotors embarqués subissant des excitations déterministes du support est récent, mais peu de travaux y sont consacrés. Les équations du mouvement d'un rotor embarqué dissymétrique sont différentes de celles d'un rotor classique symétrique en présence d'un support fixe. Elles comportent des termes paramétriques périodiques dus à la dissymétrie géométrique du rotor et des termes paramétriques variables dans le temps dus aux rotations du support. Ces termes paramétriques sont considérés comme des sources d'excitation intérieure et peuvent créer une instabilité dynamique latérale.



FIG. 1 : Exemples de systèmes contenant des machines tournantes

Les paliers hydrodynamiques jouent un rôle clé dans la conception des systèmes de turbomachine. Ils sont des composants importants de turbines, de compresseurs et de pompes. Dans ce type de palier, le film de fluide permet de supporter les charges et d'atténuer les frottements. Les forces hydrodynamiques dans les paliers sont des fonctions fortement non linéaires des déplacements et des vitesses du centre géométrique de l'arbre et affectent significativement le comportement dynamique du système de rotor, ce qui conduit à des mouvements sous-harmoniques (multi-périodiques), quasi-périodiques et chaotiques du rotor. En raison de ces phénomènes vibratoires complexes, les fabricants des turbomachines ont commencé à tenir compte des non linéarités des paliers hydrodynamiques lors de la phase de conception.

La prévision du comportement dynamique des systèmes de rotor doit alors faire appel à la théorie non linéaire. L'utilisation d'un modèle linéarisé de palier cause une perte complète des informations sur les phénomènes non linéaires, tels que des vibrations sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques. Le critère de stabilité linéarisée de la position d'équilibre statique suggère que le rotor ne doit pas fonctionner au-dessus de la valeur du seuil d'instabilité. Cependant, le rotor peut être stable pour des valeurs au-delà du seuil d'instabilité lorsque la non linéarité des paliers est considérée.

Structure du mémoire

Le mémoire est organisé en cinq chapitres.

Le **Chapitre I** est consacré à une étude bibliographique la plus complète possible sur la modélisation, le comportement dynamique et les phénomènes observés des rotors classiques et embarqués ainsi que des systèmes paramétriques. Plus précisément, cette bibliographie

porte sur les aspects phénoménologiques de la dynamique des rotors classiques en flexion, les sources d'excitation extérieure d'un rotor, les systèmes sous excitations paramétriques, les rotors dissymétriques, les paliers hydrodynamiques, les rotors soumis à des excitations de type sismique, aléatoire ou choc, à des mouvements sinusoïdaux du support, l'effet de flexibilité de la fondation ainsi que les modèles et les méthodes numériques associées. Elle constitue la base sur laquelle la modélisation du rotor embarqué, la mise en équations du problème et les outils sont développés dans le cadre de cette thèse.

Le **Chapitre II** s'intéresse à la modélisation des différents composants d'un système rotor embarqué-palier hydrodynamique non linéaire et à la détermination de leurs caractéristiques ainsi que de leurs propriétés mécaniques. Il s'agit de calculer les énergies cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel correspondant aux éléments de base d'un rotor (disque rigide, arbre flexible, balourd concentré, palier élastique) en présence de six mouvements différents (rotations et translations) du support rigide.

Le **Chapitre III** a pour but de mettre en place les équations différentielles non linéaires du second ordre qui décrivent le mouvement d'un système rotor embarqué-palier hydrodynamique. Deux méthodes d'approximation numérique sont proposées pour établir les équations du mouvement. La première est la méthode de RAYLEIGH-RITZ qui permet de diminuer très largement la taille du système d'équations différentielles pour mettre en évidence la phénoménologie de la dynamique d'un rotor embarqué en flexion. La deuxième est la méthode des éléments finis qui donne une description plus complète du système d'équations du mouvement pour cibler les applications industrielles.

Dans le **Chapitre IV**, des outils et des méthodes numériques sont définis pour prévoir le comportement dynamique de systèmes de rotor embarqué. Suivant l'analyse considérée pour les paliers hydrodynamiques (linéarisés ou non linéaires) et les mouvements de rotation et de translation déterministes imposés par le support, trois types d'équations différentielles du mouvement peuvent être distingués : les équations différentielles sont linéaires et non linéaires à coefficients constants ou périodiques. Les équations linéaires du mouvement à coefficients constants sont traitées par des outils quasi-analytiques, les autres par des outils numériques.

Le **Chapitre V** consiste à appliquer les outils et les méthodes numériques exposés dans le **Chapitre IV** pour l'étude de stabilité et le calcul de réponses forcées du rotor embarqué excité par des mouvements déterministes de rotation et/ou de translation du support. Dans les exemples d'application numériques proposés, trois configurations de rotor embarqué sont étudiées. Premièrement, un rotor symétrique monté sur des paliers rigides est soumis au balourd combiné avec des mouvements de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Deuxièmement, un rotor avec une dissymétrie géométrique due au disque, monté sur des paliers rigides, est excité par l'effet de balourd et par des mouvements de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Troisièmement, un rotor symétrique monté sur des paliers hydrodynamiques linéarisés/non linéaires est soumis à l'excitation due au balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support. L'influence des différents mouvements du support sur le comportement dynamique de ces configurations de rotor est analysée grâce à des cartes de stabilité, des diagrammes de CAMPBELL, des réponses en régime permanent, des orbites du rotor, des réponses temporelles, des transformées de FOURIER rapides (FFTs), des diagrammes de bifurcation et des sections de POINCARÉ.

CHAPITRE I

BIBLIOGRAPHIE ET ETAT DE L'ART

Sommaire

I.1	Aspects phénoménologiques de la dynamique des rotors classiques en flexion	6
I.2	Sources d'excitation extérieure d'un rotor	9
I.3	Systèmes sous excitations paramétriques.....	10
I.4	Rotors dissymétriques	11
I.5	Paliers hydrodynamiques	12
I.6	Rotors soumis à des excitations de type sismique, aléatoire ou choc	14
I.7	Effet de flexibilité de la fondation.....	15
I.8	Rotors soumis à des mouvements sinusoïdaux du support	16
I.9	Modèles et méthodes numériques	17
	I.9.1 Méthodes d'approximation numérique	17
	I.9.2 Analyse de stabilité des systèmes paramétriques périodiques.....	18
	I.9.3 Méthodes de résolution des équations du mouvement	19
I.10	Apport et positionnement de la thèse	21

I.1 Aspects phénoménologiques de la dynamique des rotors classiques en flexion

Les machines tournantes jouent un rôle primordial dans de nombreuses applications industrielles dans le domaine des transports, des énergies et des technologies de la santé. Les rotors (composés d'éléments tournant autour d'un axe) représentent leur élément clé.

Afin d'améliorer les performances et notamment le rendement, le coefficient de sécurité, l'entrefer d'air et le jeu initial entre le disque et le stator doivent être réduits. Par conséquent, la prédiction du comportement dynamique des composants des machines tournantes doit être de plus en plus effectuée soigneusement. Dans ce contexte, la littérature comprend de nombreux livres étudiant un grand nombre de phénomènes reliés à la dynamique des systèmes de rotor rigides/flexibles et symétriques/dissymétriques montés sur des paliers élastiques linéaires/non linéaires dans le cas d'un support fixe, voir, par exemple, **RAO [131]**, **LALANNE et FERRARIS [99]**, **GENTA [66,67]**, **YAMAMOTO et ISHIDA [159]**, **BACHSCHMID et al. [11]**.

Le rotor est habituellement représenté par des poutres droites de sections constantes. L'étude des vibrations d'une poutre est un sujet relativement classique. **LALANNE et al. [100]** ainsi que **THOMAS et LAVILLE [153]** abordent ce type de problèmes comme un problème de mécanique des milieux continus.

Les rotors sont d'abord conçus et dimensionnés à partir de la résistance des matériaux, c'est-à-dire qu'il faut déterminer le diamètre minimal de l'arbre pouvant supporter le couple nominal fourni par un moteur électrique par exemple. La prévision du comportement dynamique en torsion est ensuite effectuée pour éviter le fonctionnement dans une plage de vitesse contenant des vitesses critiques de rotation. En outre, s'il y a des régimes transitoires, comme par exemple le cas d'un moteur électrique lors du démarrage ou lors d'un court-circuit accidentel, le comportement transitoire doit être calculé. Cette prévision fournit donc un diamètre de l'arbre supérieur au diamètre minimal calculé dans le cas statique. La dynamique des rotors en flexion est enfin à prendre en considération et ses équations sont souvent établies avec les équations de LAGRANGE.

Pour appliquer les équations de LAGRANGE, il faut tout d'abord écrire les énergies cinétique et de déformation des composants du rotor. Le calcul des énergies nécessite quelques hypothèses et simplifications détaillées par **LALANNE et FERRARIS [99]** telles que la prise en compte des effets d'inertie de rotation des sections (poutre de TIMOSHENKO) et des effets gyroscopiques dans le calcul de l'énergie cinétique.

Puis, il s'agit d'approximer le champ de déplacements soit par la méthode de RAYLEIGH-RITZ, soit par celle des éléments finis. La méthode de RAYLEIGH-RITZ utilise des fonctions de déplacement cinématiquement admissibles sur tout le domaine, alors que la méthode des éléments finis fait appel à des fonctions de forme qui approchent le champ de déplacements sur des sous-domaines.

Pour un nombre significatif de cas, la complexité de la géométrie et les conditions aux limites non classiques des rotors industriels requièrent l'utilisation de la méthode des éléments finis. En utilisant des fonctions de forme appropriées relatives aux poutres modélisant l'arbre du rotor (voir **NELSON et McVAUGH [120]**), les énergies élémentaires cinétique et de déformation sont exprimées en fonction des vecteurs des déplacements nodaux et des vitesses nodales correspondantes des éléments finis modélisant les composants du rotor. Les forces généralisées sont déterminées en établissant le travail virtuel des forces extérieures au rotor.

Les équations différentielles classiques du mouvement vibratoire du rotor en flexion sont linéaires à coefficients constants et s'écrivent alors sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\} \quad (I.1)$$

où :

- $\{\delta\}$, $\{\dot{\delta}\}$ et $\{\ddot{\delta}\}$ sont les vecteurs contenant les degrés de liberté et leurs dérivées d'ordres 1 et 2,
- $[M]$ est la matrice de masse incluant les caractéristiques massiques et inertielles des composants du rotor,
- $[C]$ est la matrice incluant les caractéristiques d'amortissement des paliers et de l'arbre ainsi que les effets gyroscopiques causés par la rotation du rotor,
- $[K]$ est la matrice de raideur incluant les caractéristiques des paliers et de la flexibilité de l'arbre,
- $\{F(t)\}$ est le vecteur des forces extérieures appliquées au système de rotor.

Les phénomènes de base caractéristiques de la dynamique latérale des rotors classiques (dans le cas d'un support fixe) sont la stabilité dynamique, les fréquences naturelles, le diagramme de CAMPBELL et les réponses

aux effets des forces d'excitation extérieure (forces synchrones de balourd, forces asynchrones et forces harmoniques de direction fixée dans l'espace), voir, par exemple, **LALANNE et FERRARIS [99]**.

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres est une étape primordiale en dynamique des rotors classiques. Les valeurs propres contiennent les amortissements modaux ainsi que les fréquences naturelles du rotor et les vecteurs propres décrivent les formes modales en flexion (modes propres). Afin d'effectuer cette recherche, il faut étudier le rotor en mouvement libre, c'est-à-dire résoudre le système d'équations différentielles linéaires homogènes du mouvement (I.1). La résolution consiste tout d'abord à transformer le système du second ordre en un système du premier ordre, c'est-à-dire que le système est d'abord mis sous forme d'état. Il est ensuite ramené à un problème aux valeurs propres de la matrice d'état de taille double du système d'origine.

Les valeurs propres sont des couples de solutions complexes conjuguées et ont deux à deux le même module. Elles comportent les coefficients d'amortissement propres (parties réelles) et les fréquences naturelles (parties imaginaires positives et négatives) du rotor et prennent la forme suivante :

$$\lambda_i = a_i \pm j2\pi f_i \quad \text{avec} \quad j = \sqrt{-1} \quad (\text{I.2})$$

où :

- $\xi_i^{am} \left(a_i = -\xi_i^{am} 2\pi f_i / \sqrt{1 - \xi_i^{am 2}} \right)$ est le $i^{\text{ème}}$ facteur d'amortissement visqueux modal et f_i la $i^{\text{ème}}$ fréquence naturelle.

Selon les configurations de système rotor-palier, il est possible d'obtenir des valeurs propres purement réelles, ce qui correspond à des modes propres stables et non oscillants.

Le mouvement libre d'un rotor sous l'influence de conditions initiales peut augmenter indéfiniment avec le temps, c'est-à-dire qu'il est asymptotiquement instable. L'instabilité dynamique latérale est détectée lors de la recherche des solutions des équations du mouvement sans second membre, c'est-à-dire lors de la résolution d'un problème aux valeurs propres dont la forme est donnée par l'équation (I.2). La condition impose que si au moins un des termes réels a_i est positif, le mouvement du rotor est instable.

Les fréquences naturelles f du rotor dépendent de sa vitesse de rotation Ω en raison de ses effets gyroscopiques et des impédances des paliers qui dépendent également de Ω . La représentation de f en fonction de la vitesse de rotation Ω du rotor (telle que $f = f(\Omega)$) est le diagramme de CAMPBELL. La vitesse de rotation du rotor devient une vitesse critique si une intersection des courbes des fréquences naturelles avec les droites représentant les fréquences d'excitation extérieure est trouvée et si l'amortissement est assez faible. En d'autres termes, le diagramme de CAMPBELL permet généralement d'évaluer les vitesses critiques potentielles, c'est-à-dire prévoir les possibles résonances des réponses. Cependant, dans la plupart des cas, les vitesses critiques réelles de rotation ne correspondent pas exactement à l'intersection d'une courbe des fréquences naturelles du rotor avec la droite de la fréquence d'excitation et ne sont déterminées qu'à partir des maximums des réponses au balourd ou à une force asynchrone en régime stationnaire (à vitesse de rotation stabilisée). Une vitesse de rotation est considérée comme critique si elle est reliée à un facteur de surtension suffisant. Ce facteur est obtenu par le rapport de l'amplitude due à la résonance à la largeur de bande à -3 dB et doit être supérieur à 2,5 selon les normes de l'American Petroleum Institute (API) de l'édition de 1995. Par ailleurs, lorsque le rotor a un amortissement important, l'amplitude maximale de la réponse au balourd correspond habituellement à une fréquence supérieure à celle obtenue avec le diagramme de CAMPBELL.

Les effets gyroscopiques génèrent des modes propres (et donc des fréquences naturelles correspondantes) appelés « modes à précession directe ou positive » orbitant dans le même sens que la rotation Ω du rotor et des modes propres appelés « modes à précession inverse ou négative » orbitant dans le sens opposé à celui de la rotation du rotor. Il est alors nécessaire de séparer, par leur précession, les deux modes propres qui ont le même type de forme modale (deux modes propres correspondant à la première flexion du rotor par exemple). Dans le cas, par exemple, d'un rotor symétrique monté sur des paliers isotropes (symétriques), seuls les modes propres à précession directe sont excitables par le balourd (au même titre qu'une poutre sollicitée horizontalement ne peut pas vibrer verticalement). La détermination du sens de la précession est effectuée par le signe du produit vectoriel des déplacements calculés à deux instants différents. Le sens de la précession peut varier tout au long du rotor et notamment au franchissement des nœuds de vibration.

En dynamique des rotors classiques, les forces d'excitation extérieure sont le balourd, la force asynchrone et la force harmonique fixée dans l'espace. L'excitation synchrone due au balourd est une force centrifuge tournant à la même vitesse de rotation Ω que le rotor, tandis que la force asynchrone est une force harmonique d'amplitude constante tournant à une vitesse différente de celle du rotor. Le calcul des réponses et des orbites du rotor dues aux forces d'excitation extérieure ne nécessite pas de connaître ses valeurs propres et ses vecteurs propres et est réalisé en résolvant les équations complètes du mouvement. Ces dernières sont directement résolues avec les vecteurs des forces extérieures de type sinusoïdal en cherchant leurs solutions particulières de type périodique sous la forme suivante :

$$\{\delta\} = \{\delta^c\} \cos \Omega_{ex} t + \{\delta^s\} \sin \Omega_{ex} t \quad (I.3)$$

où :

- Ω_{ex} est la fréquence de la force extérieure.

Les réponses en régime permanent (à vitesse de rotation stabilisée) à l'effet de balourd et à celui d'une force harmonique fixée dans l'espace représentent les amplitudes maximales des vibrations par rapport à la fréquence de l'excitation. La direction de la précession (figure **FIG. I.1**) de la réponse orbitale à une force extérieure peut être déterminée à l'aide du produit vectoriel entre les composantes horizontale et verticale du déplacement obtenues pour deux temps différents.

Dans le cas de paliers isotropes, le comportement dynamique du rotor est symétrique, c'est-à-dire que ses fréquences naturelles sont égales à l'arrêt et son orbite due à une force synchrone de balourd est classiquement circulaire et de précession directe. Pour un faible amortissement, la réponse stationnaire du rotor au balourd montre des vitesses critiques relatives à l'intersection de la droite $f = \Omega/60$ (Ω en tr/min) de la fréquence du balourd avec les courbes des fréquences naturelles de précession directe. D'autre part, l'influence des dissymétries en raideur des paliers (c'est-à-dire des paliers anisotropes) sur la dynamique des rotors en flexion est bien documentée. Si les raideurs dans les deux directions transversales sont différentes, le comportement du rotor est dissymétrique, c'est-à-dire que les modes propres du rotor dans les plans vertical et horizontal ont des fréquences naturelles distinctes à l'arrêt. Ensuite, la réponse orbitale au balourd devient elliptique au lieu de circulaire. En cas d'un faible amortissement et d'une dissymétrie en raideur des paliers, des phénomènes de dédoublement de résonance sont détectés, c'est-à-dire que les pics de la réponse au balourd représentant les vitesses critiques correspondent à l'intersection de la droite $f = \Omega/60$ avec toutes les courbes des fréquences naturelles du rotor. De plus, un mouvement de précession inverse du rotor est observé dans certaines plages de vitesse de rotation.

Enfin, quel que soit le type de paliers (isotropes ou anisotropes), les pics de la réponse stationnaire due à une force harmonique de direction fixée correspondent aux fréquences naturelles du rotor pour une vitesse de rotation considérée et un faible amortissement.

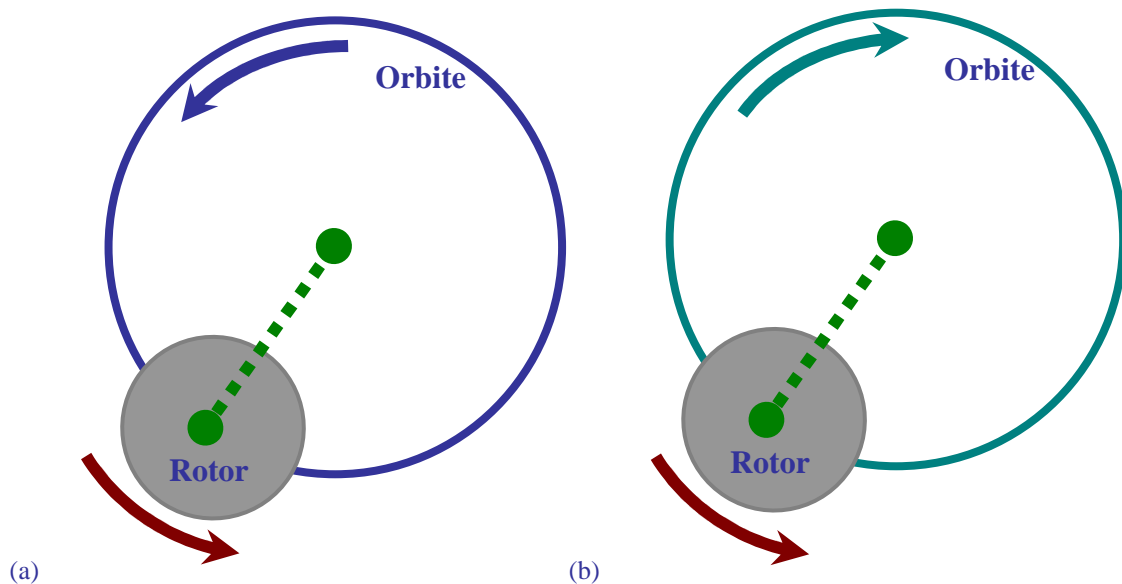


FIG. I.1 : Précessions (a) directe et (b) inverse de la réponse orbitale d'un rotor

I.2 Sources d'excitation extérieure d'un rotor

En raison de la nature des excitations appliquées aux rotors, la plupart d'entre eux peuvent être considérés comme des rotors embarqués principalement affectés à la fois par le balourd et par les mouvements du support. Des rotors de générateurs, de pompes, de compresseurs et de turbines à gaz installés dans les centrales de production d'électricité, des turbines d'aéronefs et de navires, des générateurs électriques de locomotives ainsi que des turbocompresseurs de véhicules sont des exemples de rotors sur un support mobile.

Le balourd inévitable et indésirable est dû à l'excentricité du centre de masse le long de l'axe du rotor. Les sources des balourds sur le rotor sont multiples. Elles peuvent être dues aux inhomogénéités de matériaux, aux défauts de fabrication, à l'assemblage des pièces tournantes ou aux conditions de service. Il est connu qu'un balourd installé sur le rotor génère, dans le cas d'un support fixe, des forces tournantes proportionnelles à sa masse et au carré de la vitesse de rotation.

Autrement dit, un des problèmes vibratoires rencontré dans les machines tournantes est dû au balourd initial qui génère un déplacement important à certaines vitesses de rotation du rotor appelées « vitesses critiques ». Par conséquent, il semble indispensable de compenser ce balourd pour assurer un fonctionnement en toute sécurité.

La résolution du problème de balourd consiste ponctuellement à ramener le centre de masse sur l'axe de rotation, mais la difficulté rencontrée est que la distribution du balourd initial tout au long du rotor est continue, arbitraire et inconnue. Comme le balourd n'est pas ponctuel, il est difficile de réaliser un équilibrage parfait. Une définition plus rigoureuse est alors que l'équilibrage du rotor est l'opération qui cherche à réduire le balourd, ce qui conduit à la minimisation de l'influence du balourd sur les vibrations du rotor, mais ne peut pas conduire généralement à une annulation complète (voir, par exemple, [XU et al. \[155\]](#), [KANG et al. \[90,91\]](#), [LEVECQUE et al. \[107\]](#)).

Les méthodes les plus utilisées sont la méthode modale d'équilibrage et la méthode des coefficients d'influence. La première utilise la réduction modale du balourd continu initial et le rotor est équilibré à ses vitesses critiques mode après mode, c'est-à-dire il faut calculer les balourds de correction équilibrant un mode déterminé sans déséquilibrer les modes inférieurs et supérieurs, [GNIELKA \[69\]](#). Elle requiert une bonne connaissance de la base modale du rotor (qui est considérée comme un inconvénient car la modélisation de la machine tournante est habituellement complexe) et est souvent utilisée pour des rotors à grande vitesse ayant un grand nombre de vitesses critiques de rotation dans leur plage de fonctionnement. La deuxième est une méthode expérimentale. Elle est ainsi très largement répandue et la plus utilisée à ce jour pour des rotors à faible vitesse ayant un petit nombre de vitesses critiques dans leur plage de fonctionnement. D'une manière générale, la méthode des coefficients d'influence a pour but d'obtenir un balourd résiduel faible devant un balourd introduit (d'essai) ensuite celui connu (correcteur), qui servira de référence et sera introduit dans les modèles de rotor pour une comparaison adéquate entre calculs et mesures expérimentales (voir [MAHFOUDH \[112\]](#), [KANG et al. \[86,87\]](#), [LEVECQUE et al. \[107\]](#)). Les plans d'équilibrage, les vitesses d'équilibrage et les points de mesure de vibrations sont les paramètres nécessaires à cette méthode. Ces paramètres sont sélectionnés en fonction du comportement dynamique d'un rotor étudié pour une certaine plage de vitesse de fonctionnement. Les hypothèses suivantes sont considérées pour appliquer ladite méthode :

- la relation entre les déplacements du rotor et les forces dues au balourd est linéaire car les équations différentielles du mouvement sont de type linéaire,
- le balourd initial, qui cause le déséquilibre, est supposé constitué de balourds discrets dans les plans d'équilibrage.

L'équilibrage d'un rotor nécessite souvent un certain nombre de plans dépendant de la plage de fonctionnement et de la répartition du balourd initial. L'expérimentation montre que certains plans sont plus efficaces que d'autres pour un cas donné. Un coefficient d'influence est déterminé expérimentalement par une procédure itérative, c'est-à-dire à partir de la mesure des déplacements avant et après l'addition de balourds d'essai dans les plans d'équilibrage. Il est défini comme le rapport vectoriel des amplitudes vibratoires d'un point de mesure au balourd d'essai choisi et situé dans un plan d'équilibrage pour une certaine vitesse d'équilibrage. Dans le cas où le nombre de points de mesure est supérieur à celui de plans d'équilibrage, la méthode des coefficients d'influence est utilisée en introduisant une technique de moindres carrés pour minimiser la norme quadratique des déplacements résiduels. Elle peut également être améliorée avec l'optimisation du choix des plans d'équilibrage et avec la possibilité de pondérer les points de mesure ([MAHFOUDH \[112\]](#)). L'inconvénient majeur est que ce type d'équilibrage nécessite un grand nombre de démarrages-arrêts pour caractériser la machine tournante.

Les rotors peuvent être également soumis à des mouvements déterministes extérieurs fréquents de leur support qui peuvent augmenter leurs vibrations en flexion et créer un comportement dynamique instable. Par conséquent, un modèle dynamique de rotor, qui tient compte des excitations de multi-sources, est d'un intérêt primordial au stade de conception afin de produire des machines tournantes aussi fiables que possible et d'éviter

CHAPITRE I : Bibliographie et état de l'art

une défaillance catastrophique au cours de la phase de fonctionnement. Depuis peu, des recherches ont été consacrées à la conception et à la prévision du comportement dynamique de tels types de rotors.

Au début des années 2000, **DUCHEMIN et al. [47]** calculent la réponse temporelle en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ pour mettre en place les équations du mouvement d'un rotor embarqué soumis à une vitesse angulaire du support qui augmente de manière logarithmique jusqu'à atteindre la vitesse constante. L'étude de **LIN et MENG [109]** est considérée comme une des premières études portant sur les rotors embarqués dans des avions. Dans leur étude, ils prévoient l'influence des mouvements de translation à vitesse constante et à accélération constante ainsi que de translation sinusoïdale du support sur les réponses temporelles d'un rotor de type JEFFCOTT en présence de balourd.

I.3 Systèmes sous excitations paramétriques

Dans le domaine de génie mécanique, le comportement dynamique de plusieurs systèmes linéaires est gouverné par des équations différentielles avec des paramètres variables dans le temps, comme par exemple un rotor géométriquement dissymétrique, un arbre et une aube de rotor d'hélicoptère, un système à engrenages, etc. Par conséquent, ce comportement comprend une instabilité paramétrique. Les conditions de fonctionnement du système peuvent introduire des excitations paramétriques qui sont considérées comme des sources d'excitation intérieure. Dans le cas d'excitations paramétriques déterministes de type périodique, les fréquences de ces excitations peuvent générer différents types d'instabilité si elles sont proches d'une combinaison des $m^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ fréquences naturelles f du système, c'est-à-dire $(f_m \pm f_n)/k$ (avec $m, n = 1, 2, 3, \dots$) où le nombre entier k définit l'ordre de l'instabilité.

Certaines études observent l'instabilité des systèmes paramétriquement excités. **BERLIOZ et al. [16]** développent un banc d'essai expérimental permettant d'observer les phénomènes de vibration latérale d'une tige de forage causés par les couplages torsionnel-latéral et longitudinal-latéral. Comme montré dans leur travail, le couple constant et la partie constante de la force de compression périodique diminue la fréquence latérale de la tige considérée comme poutre encastree-encastree, tandis que celle de la force de traction périodique l'augmente. De plus, l'influence de la force axiale est plus grande que celle du couple sur les fréquences naturelles latérales et une excitation paramétrique ainsi que des régions d'instabilité latérale sont créées par la fréquence de la force axiale. **DUFOUR et BERLIOZ [50]** accomplissent l'étude de **BERLIOZ et al. [16]** sur la dynamique d'une tige de forage. Ils analysent les équations paramétriques variables dans le temps du mouvement du système et prévoient la stabilité des poutres appuyée-appuyée, encastree-appuyée et encastree-encastree sous des forces et des couples axiaux périodiques en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ, la théorie de FLOQUET et l'approche de **FRIEDMANN [61]**. Finalement, leurs essais expérimentaux permettent la validation des résultats numériques.

Des systèmes auto-paramétriques sont constitués de sous-systèmes paramétriquement excités et couplés de manière non linéaire à des sous-systèmes extérieurement excités. Quelques chercheurs se sont focalisés sur ce type de systèmes. **BERLIOZ et al. [17]** prévoient numériquement et expérimentalement (figure **FIG. I.2**) la bifurcation de solutions des équations différentielles non linéaires du mouvement avec des paramètres périodiques pour un pendule embarqué. La stabilité et la bifurcation (de type doublement de période) des solutions semi-triviales sont étudiées par une approximation trigonométrique basée sur la méthode de la balance

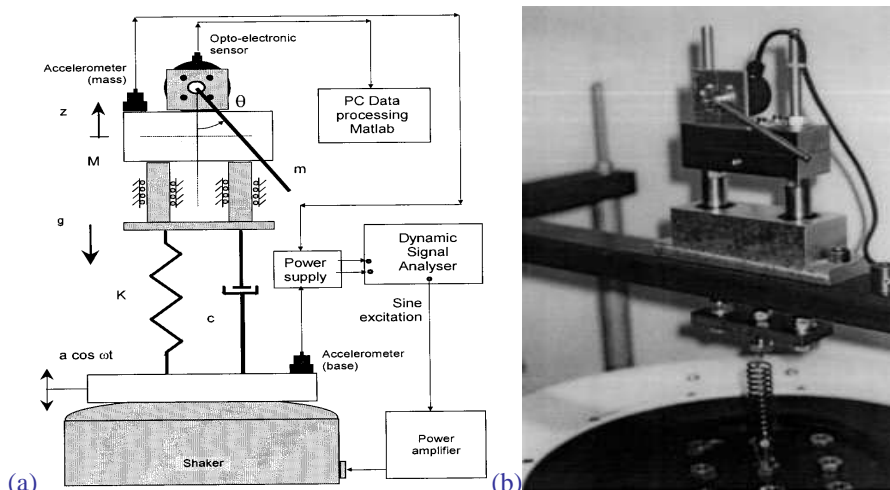


FIG. I.2 : (a) Diagramme schématique et (b) photo du banc d'essai présenté par BERLIOZ et al. [17]

harmonique et le calcul symbolique de la matrice de transition d'état de la théorie de FLOQUET basé sur l'expansion polynomiale de CHEBYSHEV. Les équations du mouvement sont intégrées par la méthode de RUNGE-KUTTA et des mouvements 1/2 sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques sont observés. Enfin, la corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux est bonne.

L'excitation paramétrique du système dynamique peut être de nature aléatoire et sa stabilité est examinée par des méthodes différentes de celles utilisées pour une excitation paramétrique périodique (déterministe). **SUBRAMANIAN et NARAYANAN [148]** vérifient la stabilité d'un système gyroscopique à deux degrés de liberté sous des excitations paramétriques aléatoires en utilisant une approche analytique basée sur le moyennage stochastique et appelée « stabilité des moments statistiques » de la réponse du système. **NOLAN et SRI NAMACHCHIVAYA [121]** étudient la stabilité presque sûre d'un système gyroscopique (arbre tournant) à deux degrés de liberté soumis à des excitations axiales aléatoires de type bruit blanc et bruit réel et déterminent ses frontières en appliquant une méthode basée sur le calcul du plus grand exposant de LYAPUNOV.

I.4 Rotors dissymétriques

Le terme « rotor dissymétrique » recouvre plusieurs phénomènes différents. En effet, la dissymétrie peut se trouver au niveau du disque, de l'arbre, du palier. Le disque considéré comme rigide peut posséder des inerties de masse différentes selon ses axes principaux d'inertie, comme par exemple celui d'un vilebrequin. L'arbre présente une dissymétrie géométrique s'il n'est pas de section circulaire sur toute sa longueur. C'est, par exemple, le cas de certaines machines électriques qui possèdent des rainures ou des méplats pour permettre l'enroulement des bobinages de l'inducteur. Ceci entraîne principalement une différence d'inerties de section suivant les axes principaux d'inertie de section de l'arbre. Le palier est dissymétrique ou encore anisotrope s'il a des caractéristiques d'amortissement et de raideur différentes par rapport aux deux directions orthogonales (horizontale et verticale). Les paliers à film d'huile, qui sont très largement utilisés dans les applications industrielles, présentent cette propriété.

Dans le cas où la dissymétrie géométrique du disque ou de l'arbre est présente, les équations du mouvement en flexion d'un rotor en régime permanent sont des équations de type particulier. En effet, il y a au moins une des matrices du système étudié qui possède des termes périodiques fonctions du temps de période $T = \pi/\Omega$ (où Ω est la vitesse de rotation du rotor). Ces équations sont appelées « équations différentielles à coefficients paramétriques périodiques ». Ces derniers peuvent être des producteurs d'une instabilité dynamique latérale.

La dissymétrie due au disque, à l'arbre et/ou au palier est traitée dans certains travaux. **GENTA [65]** cherche des changements de repère basés sur l'utilisation de coordonnées complexes pour transformer le système d'équations différentielles à coefficients périodiques en un système à coefficients constants et calculer la réponse d'un modèle éléments finis de rotor dissymétrique. **GUILHEN [71]** ainsi que **GUILHEN et al. [72]** notent que les équations différentielles du mouvement sans coefficients paramétriques périodiques peuvent être obtenues soit dans le système de coordonnées inertiel, soit dans celui mobile avec le rotor. La stabilité dynamique du rotor est étudiée en utilisant la théorie de FLOQUET et sa réponse au balourd est calculée avec le schéma de NEWMARK.

KANG et al. [85] modélisent des systèmes rotor-palier en employant des éléments finis de poutre de TIMOSHENKO et en prenant en compte la dissymétrie du disque, de l'arbre et/ou du palier. Ils montrent que les vitesses critiques peuvent varier en fonction des différents angles entre les axes majeurs de disque et d'arbre, de la dissymétrie de l'arbre ainsi que des caractéristiques du palier. **BELEY-SAYETTAT [15]** étudie l'influence de la dissymétrie de l'arbre et du tremblement de terre sur le comportement dynamique d'un rotor. Dans le cas d'un arbre dissymétrique, les équations du mouvement sont développées dans le repère galiléen (fixe dans l'espace) et dans le repère tournant en utilisant les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis. En employant la théorie de FLOQUET pour la stabilité dynamique et la méthode de NEWMARK pour la réponse forcée, le comportement d'un turboalternateur d'un porte-avions est prévu dans le cas d'une dissymétrie répartie (bobinages) et d'une dissymétrie locale (fissure). **KANG et al. [88]** expriment les équations du mouvement dans le repère tournant pour un rotor avec une dissymétrie due au disque rigide, à l'arbre flexible et/ou aux paliers linéaires anisotropes. Ils présentent une méthode de matrice de transfert modifiée (modified transfer matrix method) afin de déterminer les frontières de transition entre les régions stables et instables en fonction de la dissymétrie de l'arbre et des caractéristiques des paliers. **LEE et LEE [104]** développent une théorie efficace de test modal dans le domaine complexe pour des systèmes de rotor géométriquement dissymétrique dont les équations du mouvement ont des termes périodiques variables dans le temps lorsqu'elles sont exprimées par rapport au système de coordonnées stationnaire (inertiel). Leur idée clé est que l'utilisation de ce dernier est plus sensible que celle du système de coordonnées tournant dans l'application de l'approche proposée puisque les excitations imposées au rotor et ses réponses sont habituellement mesurées dans le système de coordonnées stationnaire. **GRISIN [70]** étudie les effets du couplage torsion-flexion et des dissymétries géométriques sur le comportement dynamique de pompes à vide constituées de deux rotors parallèles engrenés supportant des lobes

(disques dissymétriques). Il calcule les réponses dynamiques des rotors en régimes permanent et transitoire (lors d'une montée en vitesse de rotation) en employant des méthodes de résolution numérique pas à pas dans le temps pour les équations du mouvement et identifie les zones d'instabilité grâce à la théorie de FLOQUET.

ONCESCU et al. [123] généralisent une procédure de discrétisation par la méthode des éléments finis pour les systèmes rotor-palier afin d'inclure les effets de la dissymétrie de l'arbre et/ou du palier. Ils donnent les matrices correspondant à l'élément fini d'arbre dissymétrique et appliquent la méthode de matrice de transfert temporelle (time-transfer matrix method) basée sur la théorie de FLOQUET pour les équations linéaires de mouvement avec des coefficients périodiques, exprimées dans le repère inertiel. Comme montré dans leur étude, la méthode indiquée est un moyen commode pour prévoir le comportement dynamique des systèmes rotor dissymétrique-palier. **NANDI et NEOGY [115]** proposent une analyse efficace de stabilité pour des modèles éléments finis de rotor dissymétrique basés sur la poutre de RAYLEIGH et vérifient si un rotor instable peut être stabilisé à l'aide d'un amortisseur visqueux isotrope. **SABUNCU et EVRAN [132]** étudient la stabilité du mouvement d'une aube dissymétrique induit par une excitation paramétrique latérale en utilisant des éléments finis de poutre de TIMOSHENKO. Ils discutent les effets du coefficient de cisaillement (coefficient de réduction de section), de la variation de la longueur de poutre, de la vitesse de rotation et du couplage dû à la distance entre le centre de flexion et celui de gravité sur les régions d'instabilité dynamique.

Des études théoriques et expérimentales pour les résonances intérieures et isolées d'oscillations paramétriques et forcées non linéaires d'un rotor dissymétrique avec des caractéristiques de raideur non linéaires sont effectuées par **ISHIDA et al. [83]**. Plus récemment, **DIDIER et al. [44]** étudient, à l'aide de l'expansion en chaos polynomial avec la méthode de la balance harmonique, les réponses dynamiques non linéaires d'un rotor comportant plusieurs paramètres incertains, dont la dissymétrie géométrique de l'arbre.

I.5 Paliers hydrodynamiques

La prévision du comportement dynamique d'un système mécanique dépend de sa nature linéaire ou non linéaire. Sa conception ou la mesure de phénomène vibratoire sont de précieux indicateurs pour évaluer la présence de non linéarités. Par exemple, le spectre fréquentiel d'un système linéaire forcé montre des raies correspondant aux fréquences de l'excitation, alors que celui d'un système non linéaire s'enrichit de sous- et sur-harmoniques.

En raison de la complexité de l'analyse non linéaire en dynamique des rotors, il a été fréquemment choisi de traiter des modèles non linéaires simples. Par exemple, **CHOI et NOAH [27]** publient des formulations analytiques du problème non linéaire qui proviennent de la méthode de la balance harmonique et justifient la nature générale des réponses sur-harmoniques et sous-harmoniques d'un système dynamique simple de rotor avec une non linéarité de type jeu de fonctionnement radial interne (défini comme l'entrefer entre le rotor et le roulement) et un frottement dans les roulements. **EHRICH** utilise une intégration numérique d'une formulation différences finies pour montrer l'apparition de réponses sous-harmoniques d'ordre élevé [52] et chaotiques [53] dans un système non linéaire de rotor JEFFCOTT à haute vitesse de rotation avec une non linéarité de type jeu radial de roulement. **KIM et NOAH [94]** analysent la bifurcation de réponse dynamique d'un rotor de type JEFFCOTT avec une non linéarité due au jeu radial de roulement (i.e., raideur linéaire par morceau). Au cours du temps, les modèles non linéaires sont devenus plus développés. Par exemple, **KIM et NOAH [95]** étendent l'étude présentée dans [94] à un modèle éléments finis de rotor.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie, le rotor est monté sur des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des composants passifs, mais souvent comme des composants intervenant sur le comportement vibratoire de la machine tournante, c'est-à-dire sur les vitesses critiques du rotor et sa stabilité dynamique.

Les paliers hydrodynamiques sont couramment utilisés dans l'industrie et jouent un rôle clé dans la conception de systèmes de rotor car ils correspondent actuellement à une des bonnes solutions technologiques afin d'améliorer la performance dynamique pour certains mécanismes qui sont rencontrés dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc. Les modèles de palier hydrodynamique les plus simples sont constitués d'un arbre de section circulaire qui tourne à l'intérieur d'un alésage en présence d'huile lubrifiante.

Une prédiction précise des caractéristiques de vibrations des systèmes rotor-palier doit être faite et la littérature est actuellement riche de travaux numériques et expérimentaux qui prévoient l'influence des performances statiques et dynamiques des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des rotors. De plus, ces performances sont prévues et rapportées dans la littérature à l'aide des formulations mathématiques formellement établies. La contribution du palier est traitée et représentée comme des forces hydrodynamiques extérieures exercées sur le rotor. Ces forces sont fortement des fonctions non linéaires des déplacements et des vitesses du centre géométrique de l'arbre dans le palier. Si le rotor monté sur des paliers fluides est flexible et modélisé, par exemple, avec la méthode des éléments finis, il est considéré comme un système dynamique à

grand nombre de degrés de liberté avec des sous-structures non linéaires spatialement localisées. Alors que les forces non linéaires du film de fluide agissent localement sur le système, la dynamique du rotor est significativement affectée et entièrement non linéaire.

HOLMES et al. [79] publient le premier article traitant le comportement dynamique non périodique du rotor dans les paliers courts hydrodynamiques non linéaires. Ils concluent que des niveaux modérés du balourd et des valeurs élevées de l'excentricité conduisent à une réponse non périodique pour une vitesse de rotation du rotor au-dessus de la valeur du seuil d'instabilité produit par l'analyse de stabilité linéarisée. **KHONSARI et CHANG [93]** montrent qu'il existe une région stable dans le cercle de jeu de palier court en dehors de laquelle les conditions initiales pour le problème dynamique transitoire non linéaire donnent une orbite instable même si le palier hydrodynamique doit être stable selon l'analyse de stabilité linéarisée. **VAN DE VORST et al. [156]** étudient un rotor flexible monté sur des paliers hydrodynamiques basés sur la théorie des paliers de longueur finie. Ils modélisent le rotor en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de synthèse modale (component mode synthesis method) qui décompose le système en un ensemble de sous-structures et réduit les degrés de liberté en conservant ceux sur lesquels les non linéarités agissent. De plus, ils calculent les oscillations auto-excitées (self-excited oscillations) et prévoient numériquement les réponses périodiques du rotor et leur stabilité grâce à la théorie de FLOQUET. **ADILETTA et al. [1]** dérivent les équations du mouvement d'un rotor rigide sur des paliers courts fluides et les résolvent numériquement en employant la méthode de RUNGE-KUTTA. Ils obtiennent des diagrammes de bifurcation et des réponses harmoniques, sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques. Dans [2], ces auteurs complètent leur travail présenté dans [1] et montrent que les prédictions numériques et les données expérimentales s'accordent très bien. Des phénomènes dynamiques non linéaires, tels que une bifurcation de type quasi-périodique et un phénomène de saut, sont identifiés par **ZHENG et HASEBE [164]** pour des systèmes de rotor flexible montés sur des paliers hydrodynamiques elliptiques et modélisés avec la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO. **LI et XU [108]** étudient un rotor de type JEFFCOTT supporté sur des paliers infiniment longs à film d'huile afin d'obtenir des orbites périodiques, leur période et leur stabilité à l'aide de la méthode de tir généralisée (generalized shooting method).

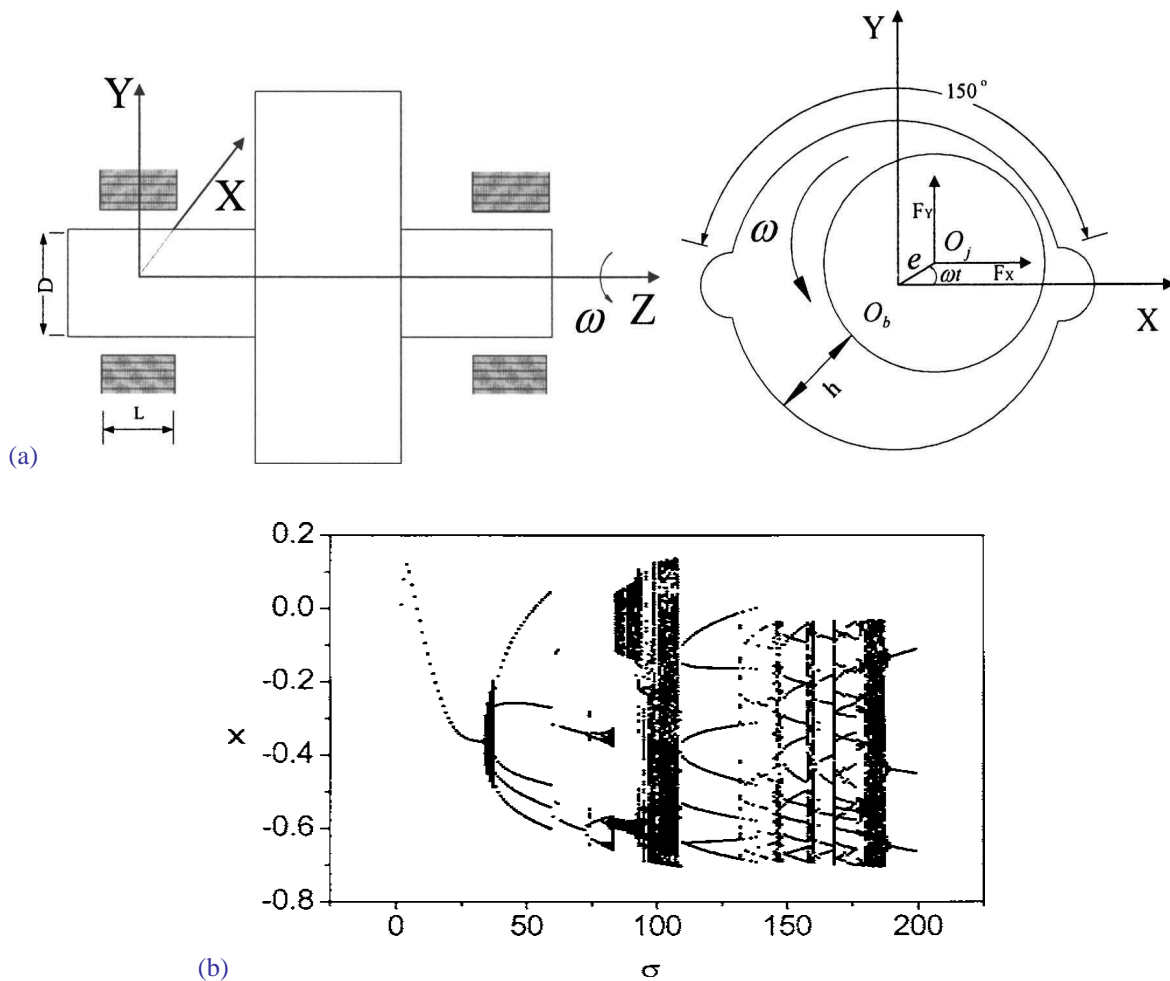


FIG. I.3 : (a) Modèle d'un rotor rigide monté sur des paliers elliptiques hydrodynamiques non linéaires et (b) diagramme de bifurcation en fonction de la vitesse de rotation [135]

ZHAO et al. [162] prévoient la stabilité linéarisée et présentent une comparaison entre des réponses linéaires et non linéaires au balourd pour un système rotor flexible-palier hydrodynamique modélisé par la méthode de masse localisée (lumped mass method) pour réduire les degrés de liberté. Plus récemment, **LU et al. [111]** discrétisent un rotor flexible sur des paliers fluides multiples en utilisant les éléments finis de poutre de TIMOSHENKO. Ils introduisent l'approche de contrainte variationnelle (variational constraint approach) et la méthode des éléments finis isoparamétriques pour résoudre l'équation de REYNOLDS et calculer les forces du film d'huile et leurs jacobiennes. Par ailleurs, ils présentent des orbites harmoniques et sous-harmoniques (doublement de période du mouvement).

Des réponses harmoniques, sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques ainsi que leurs sections de POINCARÉ sans/avec des diagrammes de bifurcation sont étudiées pour :

- un rotor rigide sur des paliers courts hydrodynamiques par **BROWN et al. [19]**,
- un rotor flexible sur des paliers longs par **CHEN et YAU [24]**,
- un modèle éléments finis de rotor sur des paliers elliptiques par **ZHENG et HASEBE [163]**,
- un rotor flexible sur des paliers courts par **YAU et al. [160]** et **CHEN et YAU [25]**,
- un rotor rigide sur des paliers elliptiques (figure **FIG. I.3**) par **SHEN et al. [135]**,
- un rotor rigide symétrique sur des paliers à patins oscillants par **LU et al. [110]**,
- un rotor rigide vertical supporté sur des paliers courts hydrodynamiques par **SHI et al. [136]**.

Le comportement dynamique de réducteurs à engrenages sur des paliers hydrodynamiques est analysé dans plusieurs études. **KISHOR et GUPTA [98]** utilisent des caractéristiques analytiques non linéaires pour des paliers longs hydrodynamiques et les introduisent dans un modèle rotor rigide-palier avec un modèle simplifié d'engrenages à dentures droites. **BAGUET et VELEX [12]** combinent un modèle éléments finis d'arbre basé sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO avec les non linéarités de l'engrènement et des paliers. Ces non linéarités sont représentées par une raideur d'engrènement à dentures droites et des forces des paliers courts hydrodynamiques. **BAGUET et JACQUENOT [13]** étendent l'étude présentée dans [12] pour inclure des engrenages hélicoïdaux ainsi que des paliers hydrodynamiques de longueur finie et analysent de manière paramétrique les orbites de l'arbre, les coefficients dynamiques de chargement de la denture ainsi que les forces hydrodynamiques.

Certains travaux effectuent l'analyse dynamique non linéaire d'un rotor d'un turbocompresseur en présence de paliers hydrodynamiques de points de vue numérique et expérimental, voir **GJIKA et al. [68]**.

I.6 Rotors soumis à des excitations de type sismique, aléatoire ou choc

Plusieurs études se sont concentrées sur le comportement dynamique d'un rotor sous des excitations de type sismique, aléatoire ou choc de son support.

SONI et SRINIVASAN [142] présentent l'analyse dynamique d'un rotor rigide monté sur des paliers hydrodynamiques linéarisés et soumis à des excitations sismiques de rotation et de translation du support. Leur travail montre bien l'intérêt de la prise en compte de la rotation du support dans l'analyse. **SRINIVASAN et SONI [144]** dérivent les équations du mouvement d'un système rotor-palier fluide excité par un tremblement de terre et modélisé par la méthode des éléments finis basée sur une formulation de GALERKIN. Ils étudient l'effet de la vitesse de rotation, de la rotation du support ainsi que de la force et du couple axiaux sur la réponse sismique du rotor. **SAMALI et al. [133]** utilisent la simulation de MONTE CARLO pour simuler les mouvements de tremblement de terre non stationnaires et pour déterminer les statistiques de la réponse des machines tournantes. **HORI et KATO [80]** examinent une réponse sismique d'un rotor de type JEFFCOTT supporté par des paliers à film de fluide et excité par une onde sismique et prévoient sa stabilité en calculant les positions du disque et de l'arbre dans les paliers (en utilisant la méthode de RUNGE-KUTTA avec coefficients de GILL). **SUAREZ et al. [146]** présentent (sans dérivation) les équations du mouvement d'un modèle éléments finis de rotor soumis à six composantes d'excitations du support et étudient sa réponse sismique. Ils observent que même pour des entrées de rotation fortes, les termes paramétriques dans ces équations peuvent être négligés sans affecter la réponse du rotor. **BELEY-SAYETTAT [15]** dérive les équations du mouvement d'un rotor dans le cas d'un mouvement du séisme pour un support rigide (mono-excitation) et un support flexible (multi-excitation). Elle utilise une méthode spectrale avec des modes complexes pour résoudre les équations du mouvement. **GAGANIS et al. [64]** considèrent que les coefficients des paliers non linéaires sont constants par morceaux et modélisent les excitations dues au tremblement de terre comme un mouvement du support des systèmes rotor-palier en utilisant les données du tremblement de terre d'EL CENTRO. Dans leur travail, la réponse et la variation des propriétés dynamiques des systèmes de rotor discrétisés à l'aide de la méthode des éléments finis sont prévues. **CHEN et ZHU [26]** vérifient la faisabilité et la validité de certaines stratégies du

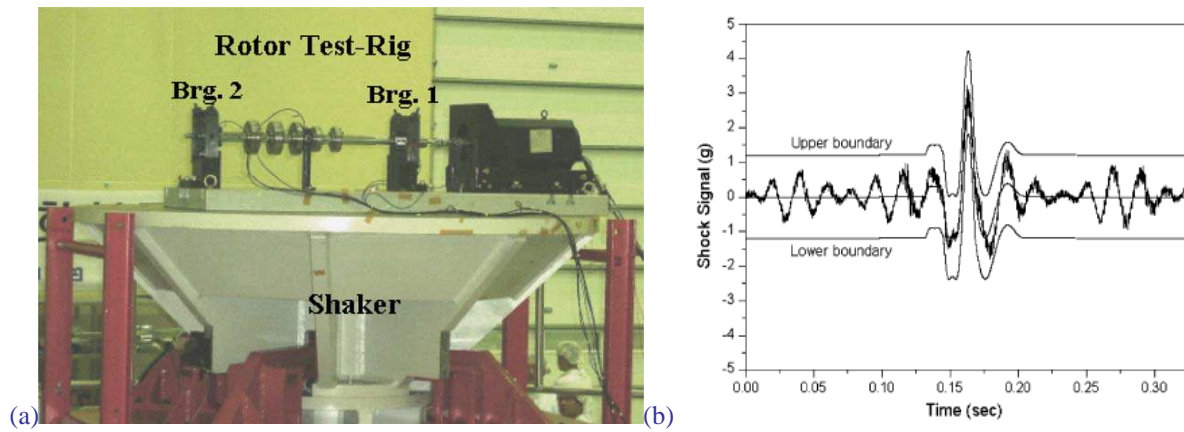


FIG. I.4 : (a) Banc d'essai proposé par LEE et al. [105] pour un rotor soumis à (b) un choc de type demi-sinus généré par un pot vibrant électromagnétique

contrôle actif des vibrations d'un rotor flexible sous l'excitation sismique non stationnaire d'EL CENTRO afin d'améliorer la performance dynamique robuste du rotor.

SUBBIAH et al. [147] obtiennent la densité spectrale de puissance (PSD) d'amplitude due à des excitations aléatoires du support pour l'étude de la réponse du rotor en utilisant des méthodes d'analyse modale. BACHELET et al. [7] développent une approche spectrale originale pour la tester sur le calcul de la densité spectrale de puissance de réponse des rotors géométriquement symétriques et dissymétriques soumis à des excitations aléatoires de translation du support. Ils étudient aussi la stabilité d'un rotor symétrique dans le cas d'un mouvement de rotation aléatoire du support en calculant le plus grand exposant de LYAPUNOV et en le comparant à zéro. Dans [8], ils prévoient le comportement dynamique d'un rotor dissymétrique soumis à une excitation aléatoire de translation du support et appliquent la méthode spectrale itérative proposée dans [7] pour approximer la réponse du rotor modélisé avec la méthode de RAYLEIGH-RITZ considérant seulement le premier mode de flexion. Ils discutent les résultats de l'approche spectrale à travers une comparaison avec les résultats d'une simulation de MONTE CARLO. Dans [9], ils étendent l'étude présentée dans [8]. En d'autres termes, ils utilisent quatre fonctions de déplacement (deux premiers modes de corps rigide et deux premiers modes de flexion) pour appliquer la méthode de RAYLEIGH-RITZ à la modélisation du rotor et cherchent les limites de l'approche spectrale itérative. Comme montré dans leur travail, ladite approche n'est pas applicable aux équations du mouvement dont les coefficients paramétriques sont créés par la dissymétrie géométrique du rotor. Dans [10], les auteurs complètent l'étude proposée dans [7] en ce qui concerne la rotation aléatoire du support, c'est-à-dire qu'ils obtiennent la réponse forcée du rotor symétrique grâce à la simulation de MONTE CARLO car la méthode spectrale itérative n'est pas aussi applicable pour ce type d'excitation du support.

DUCHEMIN et al. [48] emploient la méthode de RAYLEIGH-RITZ afin d'établir les équations différentielles du mouvement en flexion d'un rotor excité par un choc angulaire de son support. Ils comparent les résultats numériques et expérimentaux pour mettre en valeur certains phénomènes de base, comme par exemple l'effet de la vitesse et de l'accélération du mouvement du support. LEE et al. [105] proposent un modèle éléments finis de rotor basé sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO en considérant une excitation de type choc en translation du support et la méthode de NEWMARK basée sur la vitesse moyenne. Ils se concentrent aussi sur le comportement expérimental d'un rotor (figure FIG. I.4) sous cette excitation du support et le comparent aux résultats numériques.

I.7 Effet de flexibilité de la fondation

Quelques travaux dans la littérature ont incorporé la flexibilité de la fondation dans la prédiction de la dynamique des rotors. La modélisation de la fondation flexible est d'un intérêt pratique puisque la disponibilité d'un modèle de fondation suffisamment précis est un atout important pour un fonctionnement et un équilibrage efficaces.

L'effet de la fondation flexible sur le comportement dynamique des rotors est prévu de points de vue théorique et expérimental, voir, par exemple, BONELLO et BRENNAN [18]. KANG et al. [89] étudient l'influence du support flexible (fondation) sur les caractéristiques dynamiques des rotors montés sur des paliers linéaires en utilisant une modélisation de type éléments finis. EDWARDS et al. [51] vérifient de manière expérimentale une méthode qui identifie à la fois l'excitation et les paramètres du support flexible d'un système rotor-palier-fondation.

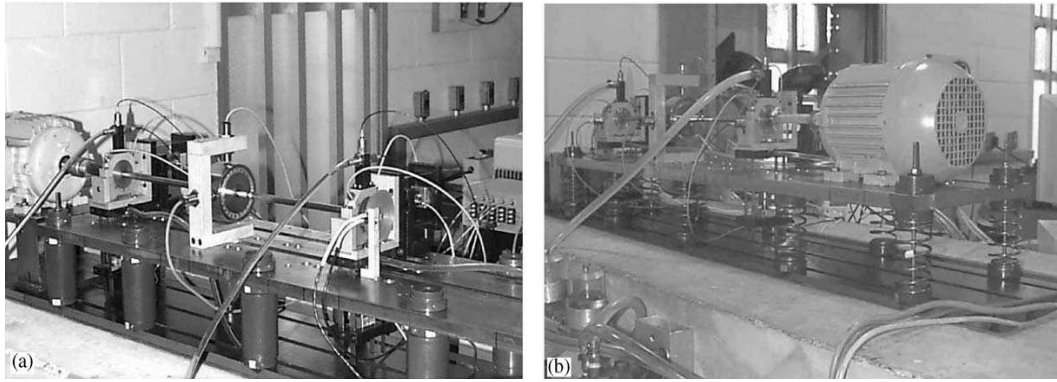


FIG. I.5 : Banc d'essai présenté par CAVALCA et al. [21] pour un rotor monté sur des paliers hydrodynamiques linéarisés et supporté par : (a) une fondation rigide, (b) une fondation flexible

FENG et HAHN [56] étudient la faisabilité d'identification des paramètres modaux d'un carter rigide avec un support flexible pour prévoir la réponse forcée du rotor au balourd. Ils considèrent que la procédure suivie est pratiquement possible même si aucunes études de sensibilité n'ont été effectuées afin de déterminer les limites imposées par les positions supposées des axes principaux d'inertie du carter. CAVALCA et al. [21] estiment expérimentalement (figure FIG. I.5) les paramètres modaux de la fondation via des courbes de réponse en fréquence (frequency response functions (FRF)) et étudient l'effet de la fondation flexible sur les caractéristiques dynamiques des systèmes rotor-palier.

LEES et al. [106] parlent des techniques proposées dans la littérature jusqu'à 2009 pour identifier un modèle fiable de fondation de la machine tournante et simuler la dynamique complète de cette dernière. Par ailleurs, ils discutent l'utilisation de ces modèles pour les défauts de détection et de quantification. HAN et al. [76] établissent les équations du mouvement d'un rotor avec la rigidité élastique de son support. Ils simulent le comportement vibratoire du système lors de la montée en vitesse et du passage de sa première vitesse critique de rotation avec des conditions initiales différentes et discutent des analyses théoriques et expérimentales de la vibration du rotor lors de « resonance capture » et de « pass-through ».

Les essais expérimentaux de FENG et HAHN [57] complètent le résultat présenté dans [56] et montrent que même avec des données d'entrée tronquées à deux chiffres significatifs, des identifications satisfaisantes sont possibles pour une fondation flexible dans les machines tournantes. DA SILVA TUCKMANTEL et al. [31] représentent la structure du support (fondation) d'un système tournant par des modes couplés et découplés et testent les méthodes d'impédance mécanique (mechanical impedance) et de coordonnées mixtes (mixed coordinates) pour calculer les réponses du système.

I.8 Rotors soumis à des mouvements sinusoïdaux du support

A ce jour, peu de travaux dans la littérature s'intéressent à la prévision du comportement dynamique d'un rotor dans le cas d'un mouvement harmonique de son support.

TAN et al. [152] développent les équations du mouvement d'une poutre cantilever (encastrée-libre) tournante attachée à un moyeu et soumise à une excitation du support en employant la théorie des poutres d'EULER-BERNOULLI et la méthode de RAYLEIGH-RITZ. Ils utilisent la méthode des échelles multiples pour déterminer les régions d'instabilité et présentent des résultats numériques pour illustrer l'influence du rapport du rayon du moyeu à la longueur de la poutre, de la vitesse de rotation stationnaire et de la fréquence de l'excitation du support sur la stabilité dynamique du système. DUCHEMIN et al. [49] développent les équations du mouvement en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ afin d'étudier les phénomènes de base d'un modèle simple de rotor sous une rotation sinusoïdale du support (voir la figure FIG. I.6). Ils appliquent la méthode des échelles multiples pour observer la stabilité du mouvement du rotor et présentent des résultats expérimentaux pour valider l'étude quasi-analytique. CHATELET et al. [22] complètent le travail de DUCHEMIN et al. [49] en ajoutant l'amortissement pour rétrécir les zones d'instabilité du rotor jusqu'à les faire disparaître. DRIOT et al. [45] obtiennent deux équations couplées paramétriques et gyroscopiques du mouvement d'un rotor induit par un mouvement de rotation harmonique du support en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ. Ils décrivent les orbites en utilisant deux méthodes de résolution des équations du mouvement (méthode de RUNGE-KUTTA et méthode de formes normales). D'après leur travail, la comparaison entre des résultats numériques et expérimentaux est assez satisfaisante.

EL-SAEIDY et STICHER [54] dérivent les équations du mouvement d'un système rotor rigide-palier linéaire/non linéaire soumis à un balourd tournant et à des excitations harmoniques du support selon ou autour de directions latérales. Dans le cas de paliers linéaires, ils présentent des solutions analytiques et obtiennent les

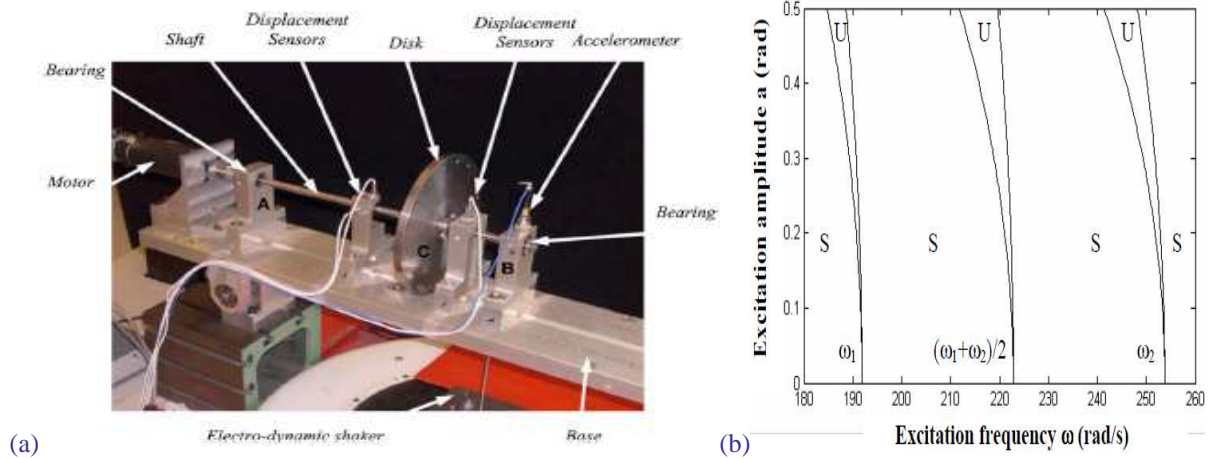


FIG. I.6 : (a) Banc d'essai et (b) carte de stabilité pour un rotor soumis à une rotation sinusoïdale du support autour d'un axe horizontal [49]

réponses en fréquence (amplitude maximale des vibrations du rotor par rapport à la fréquence de l'excitation du support). Dans le cas d'une non linéarité cubique de paliers, ils trouvent des résultats à travers un schéma d'intégration temporelle et les discutent grâce aux réponses temporelles, aux transformées de FOURIER rapides (fast FOURIER transforms (FFTs)) et aux sections de POINCARÉ. **DAS et al. [42]** étudient le contrôle actif des vibrations linéaires d'un rotor flexible excité par un balourd et un mouvement de rotation périodique du support. Ils effectuent le contrôle avec une force électromagnétique fournie par un actionneur placé sur le stator dans un plan approprié autour du rotor. Comme montré dans leur publication, une simulation numérique du système de rotor flexible modélisé par des éléments finis de poutre de RAYLEIGH est effectuée et le contrôle actif est fructueux pour éviter l'instabilité paramétrique latérale due à la rotation sinusoïdale du support.

HAN et CHU [74] étudient la réponse dynamique linéaire d'un système rotor fissuré-palier sous des rotations sinusoïdales du support en utilisant un modèle éléments finis basé sur la théorie des poutres d'EULER-BERNOULLI. Ils introduisent une méthode améliorée de la balance harmonique pour obtenir la réponse stabilisée du système linéaire et discutent l'influence de diverses rotations du support, de l'amplitude et de la fréquence des excitations du support ainsi que de la profondeur de la fissure sur le comportement dynamique du rotor. Plus récemment, ces auteurs (voir [75]) prévoient le comportement dynamique d'un système de rotors couplés par des engrenages à dentures droites et soumis à des excitations de rotation sinusoïdale du support. Ils montrent que lors d'une rotation du support autour d'une des directions transversales, les amplitudes des réponses pour cette direction sont légèrement affectées. De plus, les fréquences des excitations du support et leurs multiples sont trouvés dans les spectres de réponses du système de rotors.

I.9 Modèles et méthodes numériques

I.9.1 Méthodes d'approximation numérique

Il s'agit d'employer certaines techniques d'approximation numérique lorsque le calcul d'une solution analytique d'un problème mécanique lié à des structures réelles est difficile ou impossible. Les simulations numériques basées sur des méthodes d'approximation ont un formidable essor grâce à la croissance de la puissance des ordinateurs qui prennent de plus en plus d'importance dans les sciences et les recherches. En outre, elles peuvent remplacer l'expérimentation car une fois bien maîtrisées, elles sont moins chères, plus rapides et plus flexibles. Ensuite, elles permettent d'accéder à des informations difficilement mesurables ou de réaliser un très grand nombre d'essais. Les méthodes d'approximation numérique sont utilisées dans la plupart des domaines de la science, dont la dynamique des rotors, et il est donc très important d'en avoir un aperçu pour le calcul approché des équations différentielles du mouvement de la structure dans la littérature.

Dans la méthode de masse localisée, la structure du rotor est discrétisée en un certain nombre d'éléments et les déformations de chaque élément sont négligées. Par conséquent, une matrice de masse diagonale est créée sans passer par l'intégration de la masse à travers les éléments déformés. Cette méthode est utilisée afin de réduire le nombre de degrés de liberté du système de rotor, voir **ZHAO et al. [162]**.

La méthode de RAYLEIGH-RITZ met en place un modèle simple de structure d'un rotor déformable ou non, possédant un nombre réduit de degrés de liberté, et définit les déplacements du rotor à l'aide du produit entre des fonctions de déplacement et des variables du temps, voir **GUILHEN et al. [72]**, **DUCHEMIN et al.**

[49], **DRIOT et al. [45]** et **BACHELET et al. [8]**. Elle permet d'examiner et de mettre en évidence les phénomènes de base sur des exemples simples et de montrer l'influence principale des différents composants du rotor sur son comportement dynamique.

La conception en utilisant un ordinateur ouvre les portes pour une technique appelée « méthode des éléments finis » à appliquer à la modélisation des rotors et de nombreuses études contribuent à ce thème. La percée véritable dans la modélisation d'un rotor par la méthode des éléments finis est présentée par **NELSON et McVAUGH [120]** qui étudient un modèle appelé « poutre de RAYLEIGH » prenant en compte l'inertie de rotation des sections de l'arbre et les effets gyroscopiques dépendant de la vitesse de rotation du rotor. La méthode des éléments finis donne une discrétisation et une description plus complètes du système à étudier grâce à un grand nombre de degrés de liberté. Elle est utilisée afin de prévoir le comportement dynamique des rotors complexes et industriels dont les déplacements sont exprimés par des variables spatiales et temporelles séparées comme pour la méthode de RAYLEIGH-RITZ. Ses formulations matricielles sont créées en intégrant les fonctions de forme des éléments déformables. Même si la modélisation en utilisant la méthode des éléments finis peut rendre la formulation compliquée, elle est considérée comme référence pour valider les autres approximations de discrétisation. Certaines variantes de la méthode des éléments finis existent, comme par exemple la méthode basée sur la poutre soit de RAYLEIGH (voir **ONCESCU et al. [123]**, **NANDI et NEOGY [115]**, **DAS et al. [42]**), soit d'EULER-BERNOULLI (voir **KIM et NOAH [95]**, **VILLA et al. [157]**, **DIDIER et al. [44]**, **HAN et CHU [74]**), soit de TIMOSHENKO (voir **NELSON [119]**, **NEVZAT ÖZGÜVEN et LEVENT ÖZKAN [124]**, **KANG et al. [85]**, **CHEN et KU [23]**, **ZHENG et HASEBE [163]**, **BAGUET et VELEX [12]**, **LU et al. [111]**, **SINOUE [140]**, **BAGUET et JACQUENOT [13]**).

A la fin des années 1980, la méthode de modes assumés (assumed mode method (AMM)) identique à la méthode d'expansion polynomiale généralisée (generalized polynomial expansion method (GPEM)) est proposée par **SHIAU et HWANG [137,138]**. Ladite méthode décrit les déplacements en flexion du rotor tournant par une série de polynômes. Elle peut être appliquée aux systèmes de rotor linéaires et non linéaires. Les auteurs démontrent et valident son efficacité et la précision de ses résultats par comparaison avec la méthode des éléments finis.

I.9.2 Analyse de stabilité des systèmes paramétriques périodiques

Depuis le début de la deuxième moitié du 20^{ème} siècle, la stabilité dynamique de systèmes d'équations différentielles à coefficients paramétriques périodiques a été évaluée dans de nombreuses études. La littérature est très riche d'ouvrages et d'articles sur le sujet. A présent, la méthode du déterminant de HILL, la méthode de perturbation et la théorie de FLOQUET sont les trois approches les plus fréquemment utilisées afin d'étudier la stabilité du mouvement.

La méthode du déterminant de HILL est largement employée pour les systèmes à petit nombre de degrés de liberté et consiste à transformer le système d'équations différentielles homogènes en un système d'équations algébriques de dimension infinie (à l'aide d'une solution sous forme de série de FOURIER) et à interpréter la valeur de la partie réelle de la variable du polynôme produit lors du calcul du déterminant du système algébrique rendu nul. Le principe de la méthode de perturbation est que si un système différentiel est différent d'un autre solvable seulement en ajoutant des termes de faible amplitude, alors leurs solutions sont supposées être très proches. L'inconvénient est que cette méthode ne peut pas être généralisée pour tous les systèmes paramétriques. Pour une description détaillée et complète de ces deux méthodes, le lecteur peut consulter les ouvrages de **NAYFEH [117,118]**.

La majorité des travaux de recherche analysant la stabilité des machines tournantes avec des équations différentielles à coefficients paramétriques périodiques et des non linéarités est basée sur l'emploi de la théorie de FLOQUET. L'obstacle principal pour l'application de ladite méthode se trouve dans l'évaluation de la matrice de transition d'état (matrice de monodromie). **GUILHEN et al. [72]** comparent alors trois méthodes d'intégration temporelle (ADAMS MOULTON, RUNGE-KUTTA d'ordre 4 avec coefficients de GILL et NEWMARK) afin de calculer la matrice de monodromie. Conformément à leur travail, l'utilisation de la méthode de NEWMARK optimise la vitesse d'exécution et réduit le temps d'exécution d'un calcul sans impacter la précision des résultats et la simplicité de mise en œuvre. **FRIEDMANN et al. [62]** proposent deux approches numériques. La première approche est basée sur un schéma d'intégration temporelle de type trapèzes développé par HSU, c'est-à-dire que la matrice d'état du système différentiel du mouvement est découpée sur une période de l'excitation paramétrique en un nombre fini de sous-domaines sur lesquels elle est supposée être constante. Enfin, la matrice de monodromie est calculée grâce au produit d'exponentielles de matrices obtenues par intégration de la matrice d'état sur chaque sous-domaine temporel. La deuxième approche proposée est basée sur un schéma d'intégration numérique de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 à coefficients de GILL. **FRIEDMANN [61]** donne une bonne révision des différentes techniques existantes dans la littérature jusqu'au début des années 1990 et teste certaines d'entre elles. Il montre que pour évaluer la matrice de monodromie, la méthode de HSU est plus commode et plus concise que la méthode de RUNGE-KUTTA proposée dans **[62]**. **KHADER [92]**, **FRULLA**

[63] et ONCESCU et al. [123] prévoient la stabilité du rotor en profitant des études de FRIEDMANN et al. [62].

Même si les méthodes d'intégration numérique sont considérées comme efficaces, elles nécessitent des temps de calcul très longs dans le cas de systèmes à grand nombre de degrés de liberté (par exemple, des modèles de type éléments finis). Pour cela, des auteurs cherchent d'autres moyens pour étudier la stabilité de tels systèmes. FLOWERS et al. [59] proposent une approche combinant des résultats expérimentaux et la théorie de FLOQUET afin d'étudier la stabilité locale d'un rotor monté sur des paliers non linéaires. Des sections de POINCARÉ sont déduites à partir des données expérimentales et établies de manière à déterminer les positions d'équilibre pour le système de rotor non linéaire. Ces positions sont alors soumises à de petites perturbations et la théorie de FLOQUET est appliquée aux équations différentielles du mouvement linéarisées autour des points d'équilibre pour savoir si ces derniers sont stables ou non. BAUCHAU et NIKISHKOV [14] proposent le calcul de la plus grande des valeurs propres de la matrice de monodromie en employant l'algorithme d'ARNOLDI sans calculer explicitement cette matrice. NANDI et NEOGY [115] décrivent le système différentiel homogène du mouvement sous forme d'état et suggèrent d'exprimer sa solution sous forme d'une somme d'un nombre fini de fonctions trigonométriques (cosinus et sinus). Les équations sont alors regroupées de manière à obtenir un problème aux valeurs propres où la matrice à inverser est diagonale.

I.9.3 Méthodes de résolution des équations du mouvement

Dans le domaine de la mécanique vibratoire, les équations en question sont celles du mouvement. Il s'agit d'équations différentielles ordinaires temporelles du second ordre provenant de la semi-discretisation via la méthode des éléments finis par exemple. Pour la résolution des équations différentielles du mouvement et l'analyse numérique des problèmes linéaires et non linéaires de dynamique des rotors en flexion, le chercheur peut distinguer les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles dans la littérature. Dans le cas d'excitations extérieures périodiques, les méthodes fréquentielles permettent d'atteindre des régimes périodiques (pour des systèmes linéaires et non linéaires) ou quasi-périodiques (pour seulement des systèmes non linéaires), tandis que les méthodes temporelles permettent aussi d'atteindre des régimes chaotiques (pour seulement des systèmes non linéaires).

Les méthodes temporelles sont basées sur les schémas d'intégration numérique pas à pas dans le temps. Ces méthodes peuvent être explicites et implicites. Dans le cas de méthodes explicites, l'expression des grandeurs à l'instant actuel $t + \Delta t$ (où Δt est le pas de temps) s'écrit en fonction des grandeurs calculées à l'instant précédent t , comme par exemple la méthode de RUNGE-KUTTA (voir KHONSARI et CHANG [93], BROWN et al. [19], ADILETTA et al. [1], CHEN et YAU [24,25], YAU et al. [160], ZHAO et al. [162], SHEN et al. [135], LU et al. [110], SHI et al. [136]). Dans le cas de méthodes implicites, l'expression de certaines grandeurs à l'instant $t + \Delta t$ est donnée en fonction des grandeurs aux instants t et $t + \Delta t$, comme par exemple la méthode de NEWMARK (voir ZHENG et HASEBE [162,163], BAGUET et VELEX [12], BAGUET et JACQUENOT [13]). L'inconvénient de la méthode de RUNGE-KUTTA est qu'elle nécessite d'écrire un système différentiel du second ordre sous forme d'état pour se ramener à un système différentiel du premier ordre, doublant ainsi la taille des matrices et le nombre d'inconnues à calculer. En outre, les méthodes explicites ou implicites sont nécessaires lorsque les réponses transitoires du rotor sont observées lors de la montée en vitesse de rotation ou suite à un choc par exemple.

L'utilisation des schémas numériques nécessite des paramètres (par exemple, le pas de temps) qui affectent fortement la précision des résultats calculés. Si les réponses stationnaires sont recherchées, les méthodes temporelles sont généralement très lourdes en termes de temps d'exécution d'un calcul et particulièrement pour des systèmes dynamiques avec un faible amortissement parce que le calcul requiert un régime transitoire avant d'atteindre le régime permanent.

Les méthodes d'intégration temporelle peuvent être couplées avec certaines techniques afin de réduire le temps de calcul lors de la recherche de réponses stationnaires périodiques et donc de faciliter la réalisation des études paramétriques relatives aux réponses en fréquence d'un système dynamique, comme par exemple la méthode de tir (de shooting). Cette méthode est très bien connue dans le domaine des mathématiques et son emploi dans le domaine de la mécanique vibratoire est relativement récent. Elle consiste à résoudre simultanément les équations différentielles du mouvement du système dynamique et le problème de valeurs aux limites en deux points (two-point boundary-value problem) qui est une équation caractérisant la solution périodique du système.

Certaines variantes de la méthode de shooting existent, comme par exemple une version simple (voir LI et XU [108]), et une version combinée avec des techniques de continuation, telles que la continuation séquentielle ou la continuation par longueur d'arc, pour :

- approximer les orbites et les réponses dues à l'effet de balourd en fonction de la vitesse de rotation du système non linéaire de rotor rigide monté sur des amortisseurs squeeze-film et sur des paliers

courts hydrodynamiques (voir [SUNDARARAJAN et NOAH \[149\]](#)) ou du rotor flexible discrétisé grâce à la méthode des éléments finis et monté sur des paliers courts fluides non linéaires (voir [SUNDARARAJAN et NOAH \[150\]](#)),

- étudier la dynamique non linéaire de systèmes discrets et d'une poutre cantilever (voir [PEETERS et al. \[125\]](#)),
- déterminer les réponses forcées non linéaires de poutres courbes isotropes et composites dont la non linéarité provient des matrices de raideur dépendant du champ de déplacements (voir [IBRAHIM et al. \[81\]](#)).

La méthode spectrale est considérée comme la plus ancienne mais également la moins réalisée des méthodes fréquentielles. Cette méthode est employée par [ALAM et NELSON \[3\]](#) afin de calculer la réponse d'un rotor à la suite d'une perte d'aube. Les auteurs utilisent une méthode spectrale issue de la théorie des chocs. Cette méthode est considérée comme efficace mais reste linéaire : le comportement des paliers est considéré comme linéaire et le contact possible entre le rotor et le stator n'est pas pris en compte. [FERREIRA et SERPA \[58\]](#) proposent une méthode similaire mais cette fois l'appliquent à un système de rotor non linéaire. Selon l'hypothèse faite dans leur article, la fréquence fondamentale a une importance prépondérante dans la réponse du rotor et les harmoniques ont alors un effet du second ordre.

Comme pour la méthode de shooting, la recherche directe des solutions périodiques est couramment effectuée grâce à la méthode de la balance harmonique (HBM). Par ailleurs, cette dernière peut être considérée comme une méthode quasi-analytique parce que même si elle peut complètement être mise en œuvre numériquement, elle peut également être améliorée par des développements analytiques. Ladite technique consiste à décrire les solutions sous la forme d'une série de FOURIER contenant un certain nombre d'harmoniques dans le cas d'un système dynamique non linéaire. Cependant, la solution périodique contient une seule composante harmonique égale à la fréquence de l'excitation extérieure harmonique dans le cas d'un système linéaire. Pour être raisonnable et ne pas employer trop de composantes harmoniques, l'utilisation de la méthode de la balance harmonique assume une certaine connaissance a priori du comportement dynamique du système non linéaire et une expérience acquise par les expérimentations ou les simulations temporelles préliminaires. Des perfectionnements sont proposés pour cette méthode afin de pouvoir prévoir des régimes quasi-périodiques, ce qui peut être rencontré, par exemple, quand diverses excitations extérieures périodiques de périodes incommensurables sont simultanément appliquées au système dynamique.

Il y a diverses variantes de la méthode de la balance harmonique dans la littérature, comme par exemple une HBM simple pour étudier le comportement dynamique non linéaire d'un système de rotor JEFFCOTT dû aux forces de contact frottant rotor-stator (voir [CHU et ZHANG \[28\]](#)), une HBM contenant un algorithme d'alternating frequency/time (AFT) pour prévoir la réponse quasi-périodique d'un rotor de type JEFFCOTT aux forces sinusoïdales du balourd en présence d'une non linéarité due au jeu radial de roulement (voir [KIM et NOAH \[96\]](#)) et pour prévoir les réponses non linéaires périodiques au balourd et leur stabilité dans le cas d'un modèle éléments finis de rotor flexible monté sur des roulements à billes engendrant des forces de rappel fortement non linéaires dues au contact entre les billes et les bagues (voir [VILLA et al. \[157\]](#)), une HBM associée à une technique d'AFT et appliquée avec la continuation par longueur d'arc pour calculer la réponse non linéaire périodique d'un rotor entrant en contact avec le stator (voir [VON GROLL et EWINS \[158\]](#)) et pour analyser la dynamique d'un rotor flexible modélisé par les éléments finis de poutres de TIMOSHENKO et supporté par des roulements à billes avec une non linéarité de contact (voir [SINOUE \[140\]](#)).

Une autre variante de la HBM est la technique dite « de la balance harmonique incrémentale » qui est en réalité équivalente à la méthode de balance harmonique standard alors qu'elle est légèrement plus compliquée à mettre en œuvre. Les premiers travaux liés à cette technique sont effectués par [LAU et CHEUNG \[101\]](#) ainsi que [LAU et al. \[102\]](#). Dans ladite technique, les termes non linéaires sont plus faciles à calculer parce que la stratégie de NEWTON-RAPHSON est tout d'abord effectuée, ce qui linéarise les équations du mouvement. [LAU et al. \[103\]](#) ainsi que [KIM et CHOI \[97\]](#) développent la méthode de la balance harmonique multiple (MHBM) afin de prévoir les vibrations non linéaires d'un rotor JEFFCOTT dans le cas d'une non linéarité de type jeu de roulement.

Comme autres méthodes fréquentielles, la méthode de collocation trigonométrique est trouvée dans la littérature. [NATARAJ et NELSON \[116\]](#) combinent cette approche avec la technique de synthèse modale en vue d'analyser le mouvement périodique de grands systèmes de rotor sur des paliers non linéaires à film de fluide. [ZHAO et al. \[161\]](#) emploient ladite méthode afin de prévoir le comportement dynamique et les mouvements sous-harmoniques et quasi-périodiques d'un rotor avec des paliers hydrodynamiques non linéaires. Afin de traiter un système de rotor similaire, une approche hybride entre la méthode de la balance harmonique et celle de collocation trigonométrique est proposée par [SHIAU et al. \[139\]](#).

I.10 Apport et positionnement de la thèse

Un nombre important de travaux précédemment mentionnés traitent des systèmes support-rotor excité. Cependant, peu d'études se concentrent sur les rotors embarqués excités de manière harmonique. De plus, ces travaux se concentrent sur la construction de modèles simplifiés. L'adoption de ces modèles simplifiés facilite la compréhension du comportement de tels systèmes dynamiques, mais elle est limitée dans les applications pratiques et réduit la précision requise et l'adéquation satisfaisante entre les modèles théoriques de rotor et ceux réalistes sous les conditions de fonctionnement.

Les simplifications et les limitations les plus communes sont liées soit à la géométrie du rotor (par exemple, le rotor de type JEFFCOTT, voir **HORI et KATO [80]**), soit à l'utilisation de la méthode de RAYLEIGH-RITZ au lieu de la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale du modèle de rotor (voir, par exemple, **DRIOT et al. [45]** et **DUCHEMIN et al. [49]**), soit aux rotors supportés par des paliers élastiques avec des coefficients constants d'amortissement et de raideur (voir, par exemple, **DAS et al. [42]**, **EL-SAEIDY et STICHER [54]** et **HAN et CHU [74]**), soit au type de mouvement du support (rotation ou translation simple).

La présente étude surmonte les limitations précédentes et contribue à la construction d'un modèle amélioré de rotor embarqué, c'est-à-dire qu'un rotor avec une dissymétrie géométrique due à l'arbre et/ou au disque rigide est discrétisé en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO, monté sur des paliers hydrodynamiques de forces extérieures calculées en utilisant l'équation de REYNOLDS (**FRÈNE et al. [60]**), et excité par des mouvements déterministes combinés du support (trois rotations et trois translations, voir la figure **FIG. I.7**).

L'analyse des vibrations porte sur le comportement dynamique du rotor en flexion. Comme pour le mouvement général de tout solide, les angles d'EULER sont ainsi employés pour décrire l'orientation de disque ou d'arbre par rapport au support rigide et mobile. L'hypothèse de petits déplacements des points de la ligne moyenne de l'arbre est prise en compte. Les énergies cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel des différents composants du rotor flexible sont calculés. Des éléments finis de poutre de TIMOSHENKO contenant les effets relatifs à l'inertie de rotation des sections droites, à l'inertie gyroscopique, à la déformation de cisaillement d'arbre et à la dissymétrie géométrique du rotor sont considérés pour la modélisation dynamique du rotor embarqué.

En utilisant la théorie des paliers courts afin d'obtenir les forces fluides à partir de l'équation de REYNOLDS, deux modèles sont considérés pour le palier hydrodynamique :

- un modèle linéarisé simplifié avec huit coefficients constants d'amortissement et de raideur,
- un modèle non linéaire où le palier est traité comme des forces de restitution non linéaires agissant sur l'arbre.

Les équations de LAGRANGE sont appliquées pour établir les équations différentielles linéaires/non linéaires du mouvement vibratoire en flexion du rotor par rapport au support rigide qui représente un système de référence non inertiel. Les équations du mouvement montrent des coefficients paramétriques périodiques dus à la dissymétrie du rotor et des coefficients paramétriques variables dans le temps dus aux trois rotations du support. Ces coefficients paramétriques sont considérés comme des sources d'excitation intérieure et peuvent créer une instabilité dynamique latérale.

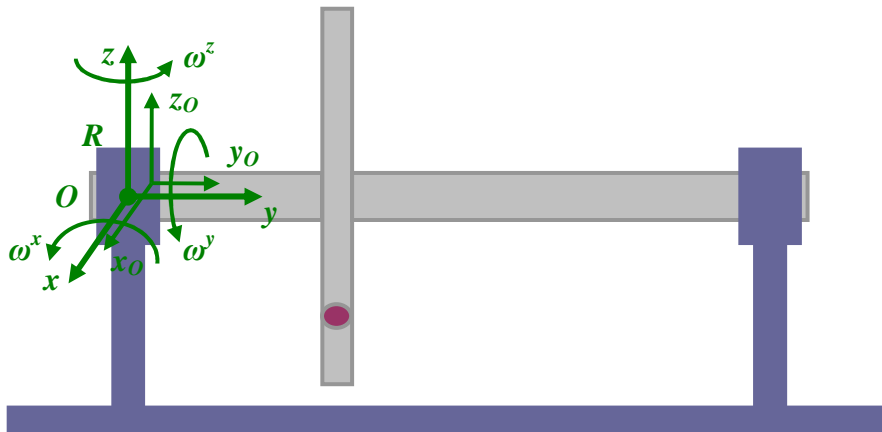


FIG. I.7 : Six types de mouvements du support d'un rotor

CHAPITRE I : Bibliographie et état de l'art

Dans le cadre des travaux de recherche réalisés au cours de cette thèse, trois configurations de rotor flexible embarqué sont étudiées lors des mouvements de rotation et/ou de translation déterministes du support, c'est-à-dire :

- ⇒ Un rotor géométriquement symétrique sur des paliers rigides est excité par le balourd et par des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale de son support, voir **DAKEL et al. [33,41]**.
- ⇒ Un rotor avec une dissymétrie géométrique due au disque et sur des paliers rigides est soumis à l'effet de balourd et à une vitesse angulaire constante et une translation sinusoïdale combinées du support, voir **DAKEL et al. [32,41]**.
- ⇒ Un rotor géométriquement symétrique sur des paliers hydrodynamiques linéarisés/non linéaires est soumis à l'excitation due au balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation et/ou de translation du support, voir **DAKEL et al. [34-40]**.

Des méthodes quasi-analytiques et numériques sont développées, optimisées et employées en vue de bien pouvoir prévoir les comportements dynamiques linéaire et non linéaire des rotors embarqués soumis aux excitations évoquées ci-dessus.

Finalement, l'analyse dynamique globale de ces configurations de rotor est effectuée grâce à des cartes de stabilité, des diagrammes de CAMPBELL, des réponses en régime permanent, des orbites du rotor, des réponses temporelles, des transformées de FOURIER rapides (FFTs), des diagrammes de bifurcation et des sections de POINCARÉ.

CHAPITRE II

MODELISATION DES ROTORS EMBARQUES

Sommaire

II.1	Introduction.....	24
II.2	Définition et transformation des systèmes de référence.....	26
	II.2.1 Transformation du repère lié au support en repère local.....	28
	II.2.2 Transformation du repère galiléen en repère lié au support.....	30
II.3	Vecteur rotation instantanée.....	32
II.4	Vecteur position de l'origine du repère lié au support.....	33
II.5	Calcul des énergies et du travail virtuel.....	34
	II.5.1 Disque.....	34
	II.5.2 Arbre.....	39
	II.5.2.1 Energie cinétique.....	39
	II.5.2.2 Energie de déformation.....	42
	II.5.3 Balourd.....	55
	II.5.4 Palier hydrodynamique.....	58
II.6	Conclusion.....	61

II.1 Introduction

Depuis les 70 dernières années, de nombreux travaux de recherche ont étudié la dynamique des machines tournantes. Quelques études et ouvrages de référence peuvent être cités ici (TRAN [154], RAO [131], LALANNE et FERRARIS [99], GENTA [66,67], YAMAMOTO et ISHIDA [159], BACHSCHMID et al. [11]). Au cours du temps, la modélisation des rotors et leurs méthodes d'analyse dynamique ont progressé avec les moyens de calcul.

Le but de ce chapitre est de donner les principales démarches permettant de modéliser un rotor dont le support supposé indéformable est en mouvement déterministe connu. La modélisation conduit à l'établissement des équations différentielles du mouvement du rotor nécessaires à la compréhension et à la prédiction de son comportement dynamique.

D'une manière générale, les composants de base du rotor sont les suivants (voir la figure FIG. II.1) :

- le disque,
- l'arbre,
- le balourd,
- le palier,
- le support.

Le nombre de chacun des composants du rotor peut être supérieur à 1. Cependant, dans le cadre de cette thèse, le rotor contenant un seul arbre sera étudié. Ce type de rotors est appelé « monorotor ».

Le balourd est distribué de manière continue et quelconque sur le rotor et provient des défauts de symétrie qui peuvent avoir plusieurs origines. Une opération appelée « équilibrage de rotors » conduit à minimiser le balourd installé sur le rotor mais ne peut pas complètement l'annuler. Les excitations prises en comptes sont alors dues au balourd inévitable et aux mouvements imposés au support.

Les hypothèses suivantes sont retenues dans le cadre de ce travail :

- le disque est rigide,
- l'arbre est déformable et modélisé par des poutres droites homogènes, isotropes, élastiques linéaires de sections constantes sollicitées en flexion dans deux directions orthogonales (directions horizontale et verticale),
- le disque et/ou l'arbre peuvent être dissymétriques,
- le balourd est modélisé par des masses concentrées (balourds discrets),
- les paliers supportant l'arbre sont flexibles et de type hydrodynamique non linéaire,
- le support du rotor est infiniment rigide et mobile,
- le rotor tourne à une vitesse constante Ω .

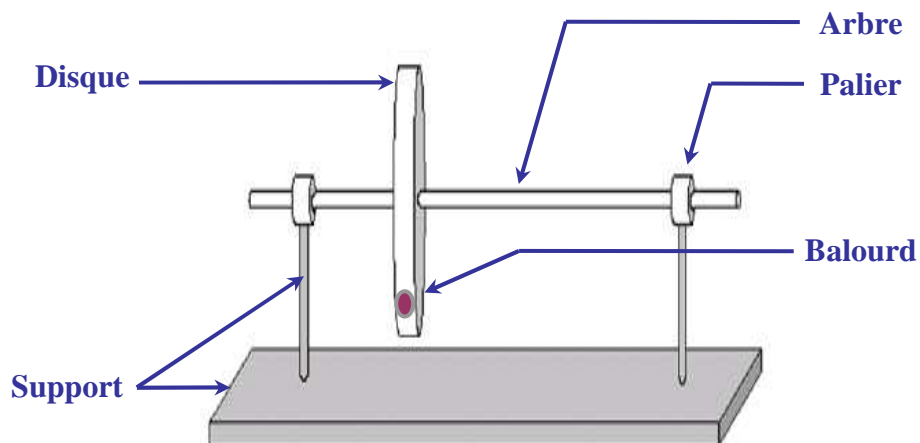


FIG. II.1 : Composants mécaniques de base du rotor

La prise en considération du mouvement du support peut modifier significativement la forme des équations du mouvement d'un rotor en flexion par rapport à celles obtenues dans le cas d'un support fixe. Afin d'entreprendre une modélisation la plus simple possible, l'approche présentée par **DUCHEMIN [46]** est adoptée. Il propose de modéliser un rotor à support mobile en considérant le mouvement du rotor par rapport au support et celui du support par rapport au sol. Il s'agit d'étudier les déflexions transversales de la ligne moyenne de l'arbre du rotor par rapport à un repère lié au support rigide.

Les deux effets secondaires de flexion suivants correspondant à la poutre de TIMOSHENKO sont à prendre en compte lors de la modélisation de l'arbre du rotor :

- l'effet d'inertie de rotation des sections droites introduit par RAYLEIGH,
- l'effet de cisaillement mis en évidence par TIMOSHENKO.

Ces deux considérations rendent le système étudié plus adapté à la réalité et permettent d'obtenir une adéquation satisfaisante entre les résultats numériques et ceux expérimentaux.

Les démarches employées pour l'établissement des équations du mouvement sont inspirées de la théorie décrite par **LALANNE et FERRARIS [99]** et présentées ci-après. Tout d'abord, les systèmes de référence nécessaires à la description du mouvement d'un rotor embarqué sont définis et les vecteurs exprimant les rotations entre ceux-ci sont calculés. Ensuite, le calcul des différentes énergies et du travail virtuel des composants du rotor étudié est effectué comme suit :

- l'énergie cinétique d'un disque,
- les énergies cinétique et potentielle de déformation d'un élément d'arbre,
- l'énergie cinétique d'un balourd discret,
- le travail virtuel des forces extérieures dues à un palier.

De plus, une méthode numérique est choisie afin de décrire le mouvement d'un rotor embarqué en fonction des coordonnées généralisées utilisées dans l'étude. C'est pourquoi deux principales approches sont distinguées :

- la méthode de RAYLEIGH-RITZ utilisée dans un premier temps pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et d'étudier les phénomènes de base,
- la méthode des éléments finis utilisée dans un deuxième temps pour l'étude des systèmes réels et des applications industrielles.

Enfin, les équations différentielles du mouvement en flexion d'un rotor embarqué en régime permanent (ceci est le cas d'un rotor lorsque sa vitesse de rotation est une constante) sont déduites des équations de LAGRANGE appliquées par rapport aux coordonnées généralisées (aux degrés de liberté) q_i sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (\text{II.1})$$

où :

- n_{ddl} est le nombre de degrés de liberté,
- $i (1 \leq i \leq n_{ddl})$ est le numéro du degré de liberté,
- T et U sont les énergies cinétique et potentielle,
- F_{q_i} sont les forces extérieures correspondant à q_i ,
- le symbole « \cdot » désigne la dérivée par rapport au temps t .

Des méthodes quasi-analytiques et numériques développées sont mises en place pour la résolution des équations différentielles du mouvement.

L'étude du comportement dynamique d'un rotor embarqué s'effectue généralement avec les deux étapes suivantes :

- ⇒ La vérification de la stabilité du rotor en considérant certains paramètres, comme par exemple la géométrie du rotor, la présence de paliers amortis à comportement linéarisé ou de paliers à comportement non linéaire.
- ⇒ La détermination des fréquences naturelles, des vitesses critiques de rotation, de la réponse forcée du rotor à des excitations extérieures (effet de balourd et/ou mouvement du support) de manière à donner les orbites décrites par les points situés sur la ligne moyenne de l'arbre déformé.

II.2 Définition et transformation des systèmes de référence

Afin de pouvoir déterminer les positions et les énergies des composants du rotor, il faut définir des systèmes de référence qui simplifient l'étude. L'utilisation de plus d'un système de référence nécessite la recherche des relations entre les différents systèmes définis pour réaliser le changement de système de référence (transformation des systèmes de référence).

Remarque : les termes suivants remplacent le terme « système de référence » et donnent la même signification : « système de coordonnées », « repère », « référentiel ».

Trois repères cartésiens principaux présentés sur la figure **FIG. II.2** sont définis pour la prise en compte de la mobilité du support du rotor lors de l'étude de la dynamique d'un rotor embarqué :

- $R^g(x^g, y^g, z^g)$ est le repère galiléen (fixe ou absolu) lié au sol,
- $R(x, y, z)$ est le repère non inertiel lié au support rigide,
- $R'(x', y', z')$ est le repère local non inertiel (mobile avec le rotor lors de son fonctionnement) lié au centre de masse du disque rigide ou au centre géométrique d'une section de l'arbre déformable.

Les points O^g , O et O' représentent les origines des repères R^g , R et R' respectivement.

Puisque le support du rotor est considéré comme rigide, il est modélisé uniquement par l'intermédiaire de son référentiel R . Les mouvements de rotation du support sont définis par les trois angles α , β et γ permettant de passer du repère galiléen R^g au repère R . Les mouvements de translation du support sont définis par les trois coordonnées x_o^g , y_o^g et z_o^g du vecteur position $\overrightarrow{O^gO}$ de l'origine O du repère R exprimées dans le repère galiléen R^g .

A l'arrêt, l'arbre du rotor n'est pas déformé et l'axe Oy du référentiel attaché au support R est normal à ses sections droites et coïncide avec sa ligne moyenne (fibre neutre), c'est-à-dire que l'axe longitudinal de l'arbre est Oy sur lequel le centre de masse du disque est situé. De plus, xOy et yOz sont des plans de symétrie du disque et de l'arbre non déformé. Ainsi Ox , Oy et Oz du repère R sont des axes principaux d'inertie correspondant aux moments principaux d'inertie du disque et de l'arbre.

Le rotor idéal, qui ne présente aucun balourd, tourne autour de l'axe Oy avec une vitesse constante Ω selon les hypothèses évoquées au paragraphe précédent. Par contre, le mouvement de rotation du rotor réel s'effectue autour de l'axe Oy' en raison des différentes déformées angulaires que l'arbre subit.

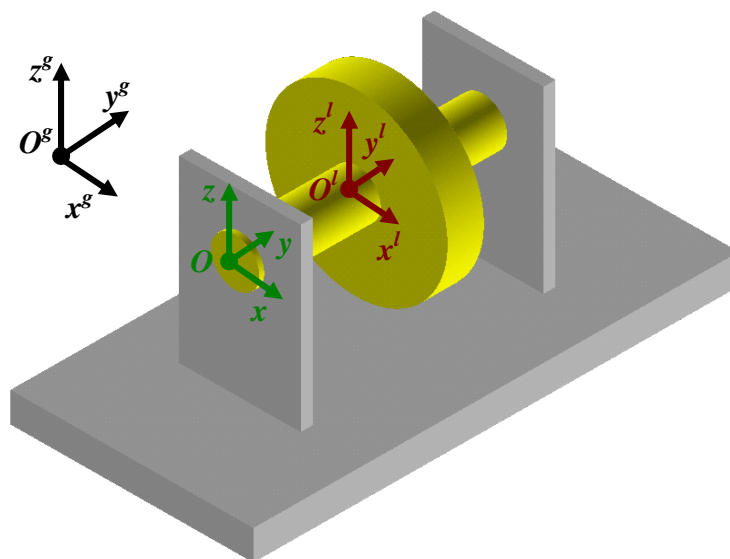


FIG. II.2 : Définition des repères utilisés pour la modélisation du rotor embarqué

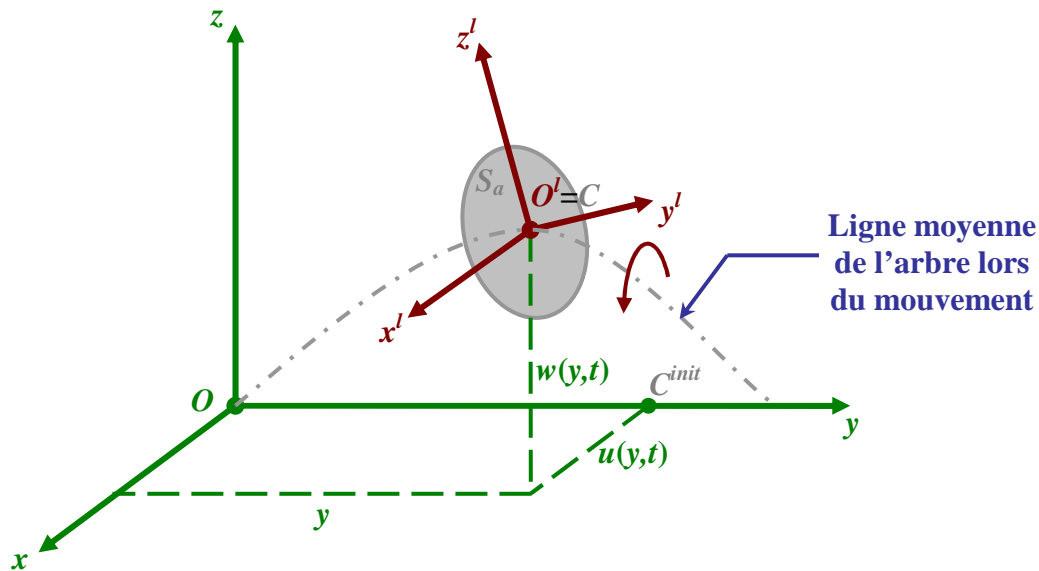


FIG. II.3 : Déplacements en flexion du rotor exprimés dans le repère lié au support R

Dans le cas le plus général du rotor réel, ce dernier est soumis à un mouvement en raison de sa rotation et/ou de la mobilité de son support. Par conséquent, l'arbre devient déformé (sollicité en flexion dans l'espace) et sa ligne moyenne ne reste pas confondue avec l'axe Oy et devient une courbe.

Soit un point quelconque C^{init} de la ligne moyenne de l'arbre non déformé de coordonnées $(0, y, 0)$ dans le repère lié au support R , c'est-à-dire qu'il représente le centre géométrique d'une section droite S_a de l'arbre. Il s'agit d'étudier ses déplacements en flexion $u(y, t)$ et $w(y, t)$ respectivement suivant les axes Ox et Oz du repère R comme le montre la figure FIG. II.3.

Les déplacements latéraux dynamiques $u(y, t)$ et $w(y, t)$ dépendent de la position du point C^{init} de la fibre neutre de l'arbre non déformé selon l'axe longitudinal Oy et du temps t , tandis que le déplacement longitudinal v selon Oy est négligé, c'est-à-dire que la coordonnée suivant l'axe axial Oy est considérée comme une constante temporelle par rapport au support R et seuls les mouvements de flexion de l'arbre par rapport au support sont étudiés ici.

Lorsque le rotor est en mouvement, l'origine O' du référentiel local R' se déplace du point C^{init} au centre géométrique C de l'arbre déformé comme présenté sur la figure FIG. II.3. L'axe Oy' du référentiel R' est normal à la section droite S_a et les plans $x'O'y'$ et $y'O'z'$ sont des plans de symétrie du disque et de l'arbre déformé. Par conséquent, les axes Ox' , Oy' et Oz' de R' deviennent les axes principaux d'inertie du disque et de l'arbre.

Notation : par la suite, afin de faciliter l'écriture des équations utilisées dans l'étude, les déplacements $u(y, t)$ et $w(y, t)$ seront abrégés par u et w .

Remarque : puisque l'influence d'une force axiale sur la flexion de l'arbre est prise en compte avec la matrice de raideur géométrique, seuls les déplacements dus à la flexion u et w sont considérés pour décrire le mouvement du rotor.

CHAPITRE II : Modélisation des rotors embarqués

Comme il existe trois repères pris en considération, deux changements de système de référence peuvent être exécutés par :

- la transformation du repère lié au support R en repère local R^l ,
- la transformation du repère galiléen R^g en repère lié au support R .

II.2.1 Transformation du repère lié au support en repère local

En dynamique des rotors classiques, le passage du référentiel fixé au support R au référentiel local R^l représenté sur la figure **FIG. II.4** s'effectue par trois angles d'EULER ψ , θ et ϕ en faisant intervenir deux référentiels intermédiaires $R^{i1}(x^{i1}, y^{i1}, z^{i1})$ et $R^{i2}(x^{i2}, y^{i2}, z^{i2})$.

Ces trois angles de rotation permettent de définir la rotation du rotor par rapport au support :

- une rotation d'un angle ψ autour de l'axe $O^l z$ appelée « angle de précession » : le système de référence R d'axes orthogonaux xyz est transformé en celui R^{i1} d'axes orthogonaux $x^{i1}y^{i1}z^{i1}$ défini tel que l'axe de coordonnées $O^l z$ coïncide avec $O^l z^{i1}$ (c'est-à-dire $O^l z = O^l z^{i1}$) et que l'axe $O^l y^{i1}$ provient de l'intersection du plan $y^l O^l z$ avec $x O^l y$,
- une rotation d'un angle θ autour de l'axe $O^l x^{i1}$ appelée « angle de nutation » : le système de référence R^{i1} d'axes $x^{i1}y^{i1}z^{i1}$ est transformé en celui R^{i2} d'axes orthogonaux $x^{i2}y^{i2}z^{i2}$ défini tel que l'axe de coordonnées $O^l x^{i1}$ coïncide avec $O^l x^{i2}$ (c'est-à-dire $O^l x^{i1} = O^l x^{i2}$) et que l'axe $O^l z^{i2}$ provient de l'intersection du plan $y^l O^l z$ avec $z^l O^l x^l$,
- une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe $O^l y^{i2}$ appelée « angle de rotation propre » : le système de référence R^{i2} d'axes $x^{i2}y^{i2}z^{i2}$ est transformé en celui R^l d'axes orthogonaux $x^l y^l z^l$ défini tel que l'axe de coordonnées $O^l y^{i2}$ coïncide avec $O^l y^l$ (c'est-à-dire $O^l y^{i2} = O^l y^l$).

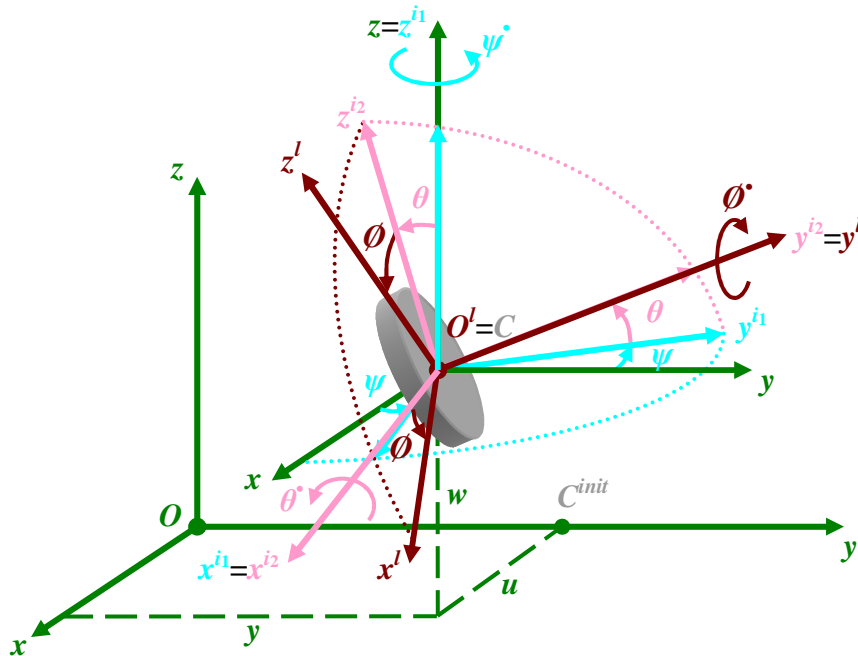


FIG. II.4 : Passage du repère lié au support R au repère local R^l en utilisant deux repères intermédiaires R^{i1} et R^{i2}

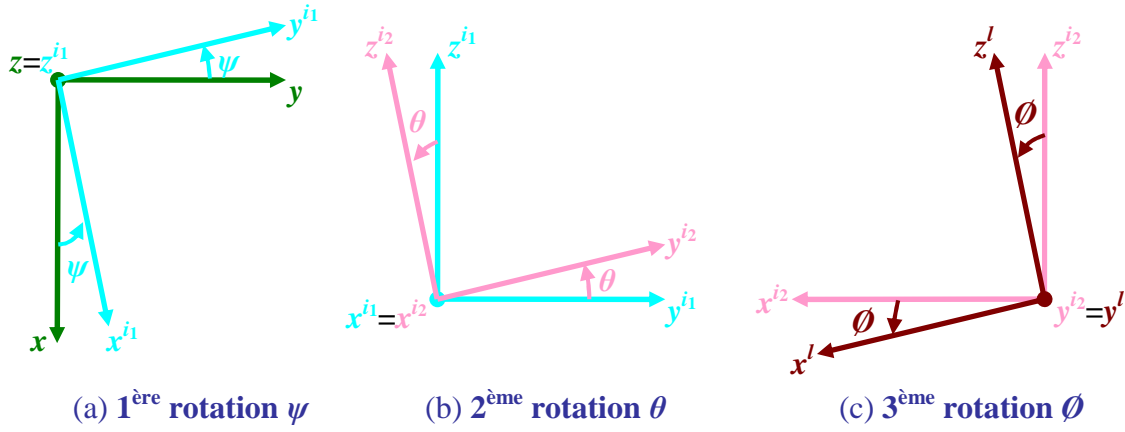


FIG. II.5 : Angles d'EULER pour le changement de repère

La figure FIG. II.5 montre des rotations simples autour des axes dans un espace euclidien à deux dimensions pour effectuer la transformation entre R et R^l . Les relations de changement de repère sont déterminées en décrivant les vecteurs unitaires \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} du repère R en fonction des vecteurs unitaires \vec{x}^l , \vec{y}^l et \vec{z}^l du repère R^l de la manière suivante (voir TRAN [154] et CRESPO DA SILVA [30]) :

- 1^{ère} rotation ψ (figure FIG. II.5(a))

$$\vec{x} = \cos \psi \vec{x}^i_1 - \sin \psi \vec{y}^i_1 \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{y} = \sin \psi \vec{x}^i_1 + \cos \psi \vec{y}^i_1 \quad (\text{II.3})$$

$$\vec{z} = \vec{z}^i_1 \quad (\text{II.4})$$

Les trois équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}^i_1 \\ \vec{y}^i_1 \\ \vec{z}^i_1 \end{Bmatrix}_{R^i} \quad (\text{II.5})$$

- 2^{ème} rotation θ (figure FIG. II.5(b))

$$\vec{x}^i_1 = \vec{x}^i_2 \quad (\text{II.6})$$

$$\vec{y}^i_1 = \cos \theta \vec{y}^i_2 - \sin \theta \vec{z}^i_2 \quad (\text{II.7})$$

$$\vec{z}^i_1 = \sin \theta \vec{y}^i_2 + \cos \theta \vec{z}^i_2 \quad (\text{II.8})$$

alors :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x}^i_1 \\ \vec{y}^i_1 \\ \vec{z}^i_1 \end{Bmatrix}_{R^i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}^i_2 \\ \vec{y}^i_2 \\ \vec{z}^i_2 \end{Bmatrix}_{R^i_2} \quad (\text{II.9})$$

- 3^{ème} rotation ϕ (figure FIG. II.5(c))

$$\vec{x}^i_2 = \cos \phi \vec{x}^l + \sin \phi \vec{z}^l \quad (\text{II.10})$$

$$\vec{y}^i_2 = \vec{y}^l \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{z}^i_2 = -\sin \phi \vec{x}^l + \cos \phi \vec{z}^l \quad (\text{II.12})$$

CHAPITRE II : Modélisation des rotors embarqués

L'ensemble des équations (II.10), (II.11) et (II.12) peut prendre la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x}^{i_2} \\ \vec{y}^{i_2} \\ \vec{z}^{i_2} \end{Bmatrix}_{R^2} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}^j \\ \vec{y}^j \\ \vec{z}^j \end{Bmatrix}_{R^j} \quad (\text{II.13})$$

La relation entre les composantes d'un vecteur quelconque $\{V\}$ exprimées dans le repère lié au support R et celles exprimées dans le repère local R^l peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}^j \\ \vec{y}^j \\ \vec{z}^j \end{Bmatrix}_{R^j} \quad (\text{II.14})$$

c'est-à-dire :

$$\{V\}_R = [P_R^{R^l}] \{V\}_{R^l} \quad (\text{II.15})$$

avec :

$$[P_R^{R^l}] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

où :

- $[P_R^{R^l}]$ est la matrice de passage du repère lié au support R au repère local R^l dans un espace euclidien à trois dimensions. Cette matrice est orthogonale. Autrement dit, son inverse $[P_R^{R^l}]^{-1}$ est égale à sa transposée $[P_R^{R^l}]^T$ où le caractère « T » sert à désigner la transposée d'une matrice ou d'un vecteur.

La relation entre les composantes du vecteur $\{V\}$ exprimées dans les deux dits repères peut également être définie d'une autre façon comme suit :

$$\{V\}_{R^l} = [P_R^{R^l}]^T \{V\}_R = [\mathfrak{R}_{R^l}^R] \{V\}_R \quad (\text{II.17})$$

avec :

$$[\mathfrak{R}_{R^l}^R] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

où :

- $[\mathfrak{R}_{R^l}^R]$ est la matrice de rotation composée du rotor R^l par rapport au support rigide R .

Notation : la précession ψ et la nutation θ dépendent de l'abscisse y d'un point quelconque de la ligne moyenne de l'arbre non déformé selon l'axe Oy du référentiel R et du temps t , tandis que la rotation propre ϕ dépend uniquement du temps t . Pour faciliter l'écriture des équations utilisées dans le cadre de ce travail, les variables y et t ne sont pas explicitement indiquées.

II.2.2 Transformation du repère galiléen en repère lié au support

En définissant deux systèmes de coordonnées intermédiaires $R^3(x^3, y^3, z^3)$ et $R^4(x^4, y^4, z^4)$, le système de coordonnées lié au support R est relié au système de coordonnées galiléen R^g à l'aide de trois angles de rotation α , β et γ comme illustré sur la figure **FIG. II.6**.

Ces trois rotations permettent de définir la rotation du support mobile par rapport au sol :

- une rotation d'un angle α autour de l'axe Oz^g : le système de référence d'axes $x^g y^g z^g$ est transformé en celui d'axes $x^{i3} y^{i3} z^{i3}$ défini tel que l'axe Oz^g coïncide avec Oz^{i3} (c'est-à-dire $Oz^g = Oz^{i3}$) et que l'axe Oy^{i3} correspond à l'intersection entre les deux plans yOz^g et $x^g Oy^g$,
- une rotation d'un angle β autour de l'axe Ox^{i3} : le système de référence d'axes $x^{i3} y^{i3} z^{i3}$ passe à celui d'axes $x^{i4} y^{i4} z^{i4}$ défini tel que l'axe Ox^{i3} coïncide avec Ox^{i4} (c'est-à-dire $Ox^{i3} = Ox^{i4}$) et que l'axe Oz^{i4} correspond à l'intersection du plans yOz^g avec zOx ,
- une rotation d'un angle γ autour de l'axe Oy^{i4} : le système de référence d'axes $x^{i4} y^{i4} z^{i4}$ est projeté en celui d'axes xyz défini tel que l'axe Oy^{i4} coïncide avec Oy (c'est-à-dire $Oy^{i4} = Oy$).

De la même manière que précédemment, la relation entre les composantes projetées dans le repère fixe R^g et celles projetées dans le repère lié au support R s'exprime par :

$$\{V\}_R = \left[\mathfrak{R}_R^{R^g} \right] \{V\}_{R^g} \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$\left[\mathfrak{R}_R^{R^g} \right] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

où :

- $\left[\mathfrak{R}_R^{R^g} \right]$ est la matrice de rotation composée du support R par rapport au sol R^g dans un espace euclidien à trois dimensions.

Notation : les rotations α , β et γ dépendent du temps t . Pour simplifier l'écriture des équations utilisées dans le cadre de cette thèse, la variable t est omise.

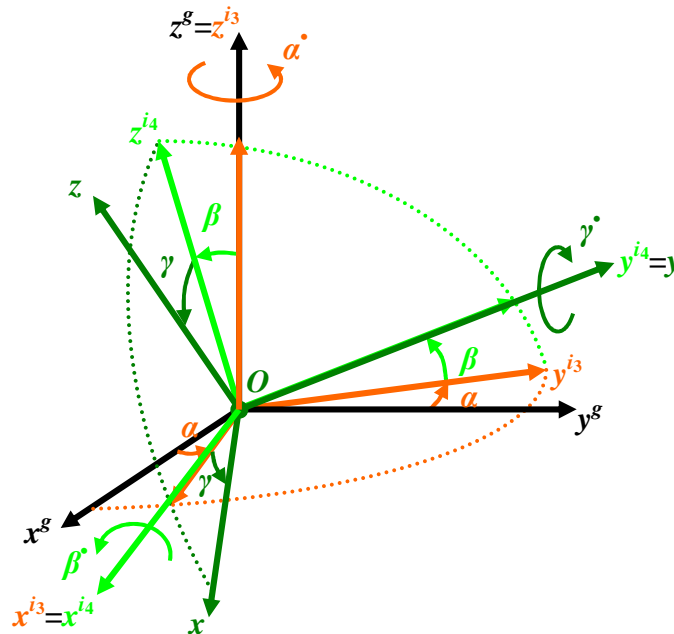


FIG. II.6 : Passage du repère fixe R^g au repère lié au support R en utilisant deux repères intermédiaires R^{i3} et R^{i4}

II.3 Vecteur rotation instantanée

Le calcul des énergies des composants du rotor requiert l'établissement des vecteurs des vitesses angulaires des systèmes de coordonnées et des vecteurs position de leurs origines.

Le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{R^l}^R$ représente le vecteur de la vitesse angulaire du repère local R^l par rapport au repère fixé au support R et traduit la position de R^l dans R . Il s'écrit alors par :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \dot{\theta} \vec{x}^l + \dot{\phi} \vec{y}^l + \dot{\psi} \vec{z} \quad (\text{II.21})$$

Après avoir inséré les équations (II.4), (II.6), (II.8), (II.10), (II.11) et (II.12) dans l'expression (II.21) pour projeter cette dernière dans le repère local R^l , les termes en \vec{x}^l , \vec{y}^l et \vec{z}^l sont regroupés de manière à obtenir l'expression suivante :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = (-\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \vec{x}^l + (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}) \vec{y}^l + (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi) \vec{z}^l \quad (\text{II.22})$$

Soient les composantes $\omega_1^{x^l}$, $\omega_1^{y^l}$ et $\omega_1^{z^l}$ du vecteur rotation $\vec{\omega}_{R^l}^R$ exprimées dans le repère local R^l . Leur expression est donnée par (voir LALANNE et FERRARIS [99]) :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \begin{Bmatrix} \omega_1^{x^l} \\ \omega_1^{y^l} \\ \omega_1^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.23})$$

Comme précédemment, le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_R^{R^s}$ permettant de passer du référentiel galiléen R^s à celui attaché au support R est exprimé dans le référentiel R par :

$$\vec{\omega}_R^{R^s} = \begin{Bmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.24})$$

où :

- ω^x , ω^y et ω^z sont les composantes du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_R^{R^s}$ définies dans le référentiel R .

Soient les composantes $\omega_2^{x^l}$, $\omega_2^{y^l}$ et $\omega_2^{z^l}$ du vecteur $\vec{\omega}_R^{R^s}$ projetées dans le repère local R^l . En utilisant l'équation (II.17) exprimant la relation entre les repères R et R^l , il vient :

$$\vec{\omega}_R^{R^s} = \begin{Bmatrix} \omega_2^{x^l} \\ \omega_2^{y^l} \\ \omega_2^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} = [\mathfrak{R}_{R^l}^R] \begin{Bmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.25})$$

soit :

$$\vec{\omega}_R^{R^s} = \begin{Bmatrix} (\omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \cos \phi - ((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + \omega^z \cos \theta) \sin \phi \\ -(\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \cos \theta + \omega^z \sin \theta \\ ((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + \omega^z \cos \theta) \cos \phi + (\omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \sin \phi \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.26})$$

Enfin, le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{R^l}^R$ du rotor R^l par rapport au sol R^s exprimé dans le système de coordonnées local R^l représente la somme des deux vecteurs rotation $\vec{\omega}_{R^l}^R$ et $\vec{\omega}_R^{R^s}$ présentés dans les équations (II.23) et (II.26), c'est-à-dire :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \vec{\omega}_{R^l}^R + \vec{\omega}_R^{R^s} = \begin{Bmatrix} \omega_1^{x^l} \\ \omega_1^{y^l} \\ \omega_1^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} + \begin{Bmatrix} \omega_2^{x^l} \\ \omega_2^{y^l} \\ \omega_2^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} = \begin{Bmatrix} \omega^{x^l} \\ \omega^{y^l} \\ \omega^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.27})$$

avec :

$$\omega^x = (\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \cos \phi - ((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta) \sin \phi \quad (\text{II.28})$$

$$\omega^y = \dot{\phi} - (\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \sin \theta \quad (\text{II.29})$$

$$\omega^z = ((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta) \cos \phi + (\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \sin \phi \quad (\text{II.30})$$

II.4 Vecteur position de l'origine du repère lié au support

Les composantes du vecteur position absolue $\overrightarrow{O^s O}$ de l'origine O du repère lié au support R , exprimé dans le repère galiléen R^g , sont définies par x_o^g , y_o^g et z_o^g . Il vient alors :

$$\overrightarrow{O^s O} = \begin{Bmatrix} x_o^g \\ y_o^g \\ z_o^g \end{Bmatrix}_{R^g} \quad (\text{II.31})$$

En utilisant l'équation (II.19) exprimant la relation entre les repères R^g et R , le vecteur position absolue $\overrightarrow{O^s O}$ exprimé dans le référentiel lié au support R s'écrit alors :

$$\overrightarrow{O^s O} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix}_R = \left[\mathfrak{H}_R^{R^g} \right] \begin{Bmatrix} x_o^g \\ y_o^g \\ z_o^g \end{Bmatrix}_{R^g} \quad (\text{II.32})$$

d'où :

$$x_o = (x_o^g \cos \alpha + y_o^g \sin \alpha) \cos \gamma - ((x_o^g \sin \alpha - y_o^g \cos \alpha) \sin \beta + z_o^g \cos \beta) \sin \gamma \quad (\text{II.33})$$

$$y_o = -(x_o^g \sin \alpha - y_o^g \cos \alpha) \cos \beta + z_o^g \sin \beta \quad (\text{II.34})$$

$$z_o = (x_o^g \cos \alpha + y_o^g \sin \alpha) \sin \gamma + ((x_o^g \sin \alpha - y_o^g \cos \alpha) \sin \beta + z_o^g \cos \beta) \cos \gamma \quad (\text{II.35})$$

où :

- x_o , y_o et z_o sont les composantes du vecteur position absolue $\overrightarrow{O^s O}$ exprimées dans le référentiel R .

Dans ce qui suit, les équations sont présentées en fonction des composantes de rotation $(\omega^x, \omega^y, \omega^z)$ et de celles de translation (x_o, y_o, z_o) du support ainsi que de leurs dérivées par rapport au temps.

Notation : les coordonnées ω^x , ω^y et ω^z du vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}_R^{R^g}$ ainsi que les coordonnées x_o , y_o et z_o du vecteur position $\overrightarrow{O^s O}$ sont variables fonctions du temps t . Pour simplifier l'écriture des équations utilisées dans le cadre de ce travail, la variable t est omise.

II.5 Calcul des énergies et du travail virtuel

A présent, il convient d'établir les expressions pour l'énergie cinétique d'un disque, les énergies cinétique et de déformation d'un élément d'arbre, l'énergie cinétique d'un balourd discret ainsi que le travail virtuel d'un palier hydrodynamique dans le but de modéliser les composants du rotor embarqué et de déterminer leurs caractéristiques.

Les énergies cinétique et de déformation sont calculées par un observateur localisé au sol et leurs termes sont écrits par rapport au repère lié au support R . L'inertie de rotation des sections droites, l'inertie gyroscopique, les déformations de cisaillement de l'arbre ainsi que la dissymétrie géométrique du disque et/ou de l'arbre sont prises en considération.

II.5.1 Disque

D'après les hypothèses indiquées au **Paragraphe II.1**, le disque est supposé rigide. Par conséquent, son énergie cinétique est calculée et son énergie potentielle négligée.

Lors de la mobilité du rotor grâce à sa rotation et/ou au mouvement de son support, l'origine O_d^l du repère local R^l lié au centre de masse du disque se déplace du point C^{init} à celui C de la ligne moyenne de l'arbre déformé. Les coordonnées de l'origine O_d^l du repère local R^l lié au centre de masse du disque par rapport au support sont exprimées dans le repère R (figure **FIG. II.7**) par :

$$\overrightarrow{OO_d^l} = \overrightarrow{OC^{init}} + \overrightarrow{C^{init}O_d^l} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_d \\ 0 \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} u_d \\ 0 \\ w_d \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} u_d \\ y_d \\ w_d \end{Bmatrix}_R \tag{II.36}$$

où :

- u_d et w_d sont les coordonnées en mouvement transversal au centre de masse du disque.

La position de l'origine O_d^l du repère R^l par rapport au sol (position absolue) définie dans le repère fixé au support mobile R est donnée par :

$$\overrightarrow{O^g O_d^l} = \overrightarrow{O^g O} + \overrightarrow{OO_d^l} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} u_d \\ y_d \\ w_d \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} u_d + x_o \\ y_d + y_o \\ w_d + z_o \end{Bmatrix}_R \tag{II.37}$$

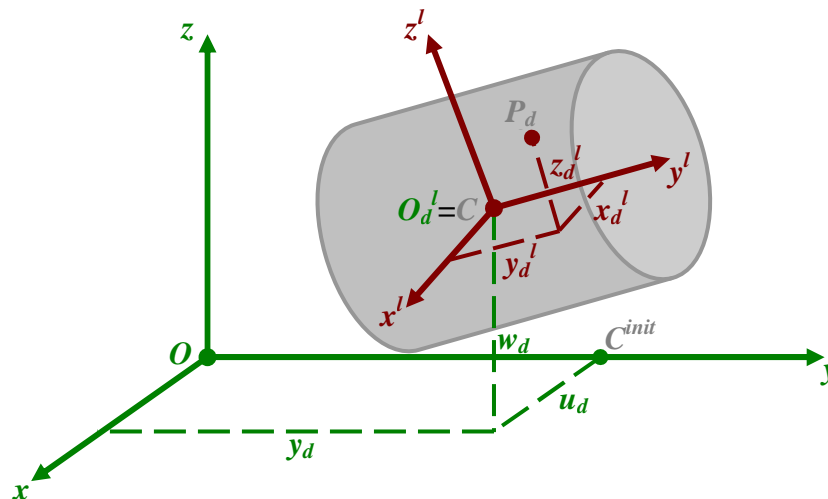


FIG. II.7 : Coordonnées de l'origine O_d^l du repère local R^l et d'un point quelconque P_d du disque exprimées dans le repère lié au support mobile R

Considérons une masse élémentaire dm_d du disque située au point P_d dont les coordonnées par rapport au repère local R^l sont exprimées par :

$$\overrightarrow{O_d^l P_d} = \begin{Bmatrix} x_d^l \\ y_d^l \\ z_d^l \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.38})$$

Donc le vecteur position du point P_d par rapport au sol R^s s'écrit :

$$\overrightarrow{O^s P_d} = \overrightarrow{O^s O_d^l} + \overrightarrow{O_d^l P_d} \quad (\text{II.39})$$

Le vecteur vitesse du point P_d par rapport au repère fixe R^s (vecteur vitesse absolue) est calculé par :

$$\overrightarrow{v_{P_d}^{R^s}} = \frac{d\overrightarrow{O^s P_d}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \quad (\text{II.40})$$

L'énergie cinétique T_d du disque peut maintenant être déterminée par l'intégration de l'énergie cinétique de la masse élémentaire considérée dm_d de vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P_d}^{R^s}}$:

$$T_d = \frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\overrightarrow{v_{P_d}^{R^s}} \right)^2 dm_d = \frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \right)^2 dm_d \quad (\text{II.41})$$

soit :

$$T_d = \frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} \right)^2 dm_d + \frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \right)^2 dm_d + \int_{m_d} \frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} dm_d \quad (\text{II.42})$$

où :

- m_d est la masse du disque.

Les trois termes de l'énergie cinétique du disque seront successivement calculés de la manière suivante :

▪ **1^{er} terme**

Selon la formule de dérivation composée (formule de BOUR) reliant les taux de variation temporelle d'un vecteur par rapport à différents repères (fixe et mobile), la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{O^s O_d^l}$ du point O_d^l observé dans le repère fixe R^s s'écrit comme suit (voir **HIBBELER [77]**) :

$$\frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} + \overrightarrow{\omega_R^{R^s}} \wedge \overrightarrow{O^s O_d^l} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_d + \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{w}_d + \dot{z}_o \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{Bmatrix}_R \wedge \begin{Bmatrix} u_d + x_o \\ y_d + y_o \\ w_d + z_o \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.43})$$

Puisque la coordonnée y_d selon l'axe Oy du repère lié au support R est considérée comme une constante temporelle par rapport au support, sa dérivée temporelle par rapport à R est nulle. Le vecteur vitesse de l'origine O_d^l par rapport au référentiel fixe R^s projeté dans le référentiel R est donc donné par :

$$\frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_d + \dot{x}_o + (w_d + z_o)\omega^y - (y_d + y_o)\omega^z \\ \dot{y}_o - (w_d + z_o)\omega^x + (u_d + x_o)\omega^z \\ \dot{w}_d + \dot{z}_o + (y_d + y_o)\omega^x - (u_d + x_o)\omega^y \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{O_d^l} \\ \dot{v}_{O_d^l} \\ \dot{w}_{O_d^l} \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.44})$$

ce qui conduit alors au calcul du premier terme de l'expression de l'énergie cinétique du disque décrite par l'équation (II.42) :

$$\frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O^s O_d^l}}{dt} \right)^2 dm_d = \frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\dot{u}_{O_d^l}^2 + \dot{v}_{O_d^l}^2 + \dot{w}_{O_d^l}^2 \right) dm_d = \frac{m_d}{2} \left(\dot{u}_{O_d^l}^2 + \dot{v}_{O_d^l}^2 + \dot{w}_{O_d^l}^2 \right) \quad (\text{II.45})$$

2^{ème} terme

En appliquant la formule de dérivation temporelle d'un vecteur quelconque par rapport à un repère, la dérivée du vecteur $\overrightarrow{O_d^l P_d}$ mesuré dans le référentiel fixe R^s s'écrit comme suit :

$$\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} = \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^l} + \overrightarrow{\omega}^{R^s} \wedge \overrightarrow{O_d^l P_d} = \overrightarrow{\omega}^{R^s} \wedge \overrightarrow{O_d^l P_d} = \begin{Bmatrix} \omega_d^{x^l} \\ \omega_d^{y^l} \\ \omega_d^{z^l} \end{Bmatrix}_{R^l} \wedge \begin{Bmatrix} x_d^l \\ y_d^l \\ z_d^l \end{Bmatrix}_{R^l} = \begin{Bmatrix} z_d^l \omega_d^{y^l} - y_d^l \omega_d^{z^l} \\ -(z_d^l \omega_d^{x^l} - x_d^l \omega_d^{z^l}) \\ y_d^l \omega_d^{x^l} - x_d^l \omega_d^{y^l} \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.46})$$

alors :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} \right)^2 = (z_d^l \omega_d^{y^l} - y_d^l \omega_d^{z^l})^2 + (z_d^l \omega_d^{x^l} - x_d^l \omega_d^{z^l})^2 + (y_d^l \omega_d^{x^l} - x_d^l \omega_d^{y^l})^2 \quad (\text{II.47})$$

Après avoir développé l'équation (II.47) et regroupé les termes obtenus, il vient :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} \right)^2 = (y_d^{l2} + z_d^{l2}) \omega_d^{x^l 2} + (x_d^{l2} + z_d^{l2}) \omega_d^{y^l 2} + (x_d^{l2} + y_d^{l2}) \omega_d^{z^l 2} - 2x_d^l y_d^l \omega_d^{x^l} \omega_d^{y^l} - 2y_d^l z_d^l \omega_d^{y^l} \omega_d^{z^l} - 2x_d^l z_d^l \omega_d^{x^l} \omega_d^{z^l} \quad (\text{II.48})$$

ce qui conduit au calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} \right)^2 dm_d = \left(\int_{m_d} (y_d^{l2} + z_d^{l2}) dm_d \right) \omega_d^{x^l 2} + \left(\int_{m_d} (x_d^{l2} + z_d^{l2}) dm_d \right) \omega_d^{y^l 2} + \left(\int_{m_d} (x_d^{l2} + y_d^{l2}) dm_d \right) \omega_d^{z^l 2} - 2 \left(\int_{m_d} x_d^l y_d^l dm_d \right) \omega_d^{x^l} \omega_d^{y^l} - 2 \left(\int_{m_d} y_d^l z_d^l dm_d \right) \omega_d^{y^l} \omega_d^{z^l} - 2 \left(\int_{m_d} x_d^l z_d^l dm_d \right) \omega_d^{x^l} \omega_d^{z^l} \quad (\text{II.49})$$

En prenant en compte le fait que les axes $O_d^l x_d^l$, $O_d^l y_d^l$ et $O_d^l z_d^l$ sont les axes principaux d'inertie du disque, les produits d'inertie correspondant aux trois dernières intégrales de l'équation (II.49) sont nuls. Le deuxième terme de l'expression de l'énergie cinétique du disque donnée par l'équation (II.42) devient alors :

$$\frac{1}{2} \int_{m_d} \left(\frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} \right)^2 dm_d = \frac{1}{2} \left(I_{m_d}^{x^l} \omega_d^{y^l 2} + I_{m_d}^{y^l} \omega_d^{x^l 2} + I_{m_d}^{z^l} \omega_d^{z^l 2} \right) \quad (\text{II.50})$$

où :

- $I_{m_d}^{x^l}$, $I_{m_d}^{y^l}$ et $I_{m_d}^{z^l}$ sont les moments d'inertie de masse du disque par rapport aux axes $O_d^l x_d^l$, $O_d^l y_d^l$ et $O_d^l z_d^l$ du référentiel local R^l .

Notation : comme les inerties $I_{m_d}^{x^l}$, $I_{m_d}^{y^l}$ et $I_{m_d}^{z^l}$ sont égales à celles par rapport aux axes du référentiel lié au support R à l'arrêt, leur écriture ainsi que l'écriture de toutes les inerties calculées par rapport au repère local R^l seront simplifiées en omettant le caractère "l" dans toute la suite du texte.

Remarque : si le disque est symétrique, il vient que $I_{m_d}^{x^l} = I_{m_d}^{z^l}$.

3^{ème} terme

Soit le troisième terme de l'expression de l'énergie cinétique du disque calculé par :

$$\int_{m_d} \frac{d\overrightarrow{O_d^s O_d^l}}{dt} \Big|^{R^s} \cdot \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} dm_d = \frac{d\overrightarrow{O_d^s O_d^l}}{dt} \Big|^{R^s} \cdot \int_{m_d} \frac{d\overrightarrow{O_d^l P_d}}{dt} \Big|^{R^s} dm_d = \frac{d\overrightarrow{O_d^s O_d^l}}{dt} \Big|^{R^s} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{m_d} \overrightarrow{O_d^l P_d} dm_d \right) \Big|^{R^s} = 0 \quad (\text{II.51})$$

L'intégrale est nulle car l'origine O_d^l du repère local R^l est liée au centre de masse C du disque qui représente aussi son centre d'inertie.

Après calcul des trois termes trouvés dans (II.42), l'énergie cinétique T_d du disque devient alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d \left(\dot{u}_{O_d}^2 + \dot{v}_{O_d}^2 + \dot{w}_{O_d}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(I_{m_d}^x \omega_d^{x'2} + I_{m_d}^y \omega_d^{y'2} + I_{m_d}^z \omega_d^{z'2} \right) \quad (\text{II.52})$$

Afin de distinguer les effets dus à l'inertie moyenne de masse du disque de ceux dus à l'inertie modélisant la dissymétrie géométrique du disque, les notations suivantes sont alors utilisées :

$$I_{m_d}^{mo} = \frac{I_{m_d}^x + I_{m_d}^z}{2} \quad (\text{II.53})$$

$$I_{m_d}^{di} = \frac{I_{m_d}^x - I_{m_d}^z}{2} \quad (\text{II.54})$$

ce qui donne :

$$I_{m_d}^x = I_{m_d}^{mo} + I_{m_d}^{di} \quad (\text{II.55})$$

$$I_{m_d}^z = I_{m_d}^{mo} - I_{m_d}^{di} \quad (\text{II.56})$$

Ainsi en présence d'une dissymétrie, les moments d'inertie $I_{m_d}^x$ et $I_{m_d}^z$ sont différents et la contribution de l'inertie $I_{m_d}^{di}$ aux deux quantités n'est pas nulle. En utilisant les équations (II.55) et (II.56), l'énergie cinétique T_d du disque s'écrit comme suit :

$$T_d = \frac{m_d}{2} t_1(y_d, t) + \frac{1}{2} \left(I_{m_d}^{mo} t_2(y_d, t) + I_{m_d}^y t_3(y_d, t) + I_{m_d}^{di} t_4(y_d, t) \right) \quad (\text{II.57})$$

avec les fonctions $t_1(y_d, t)$, $t_2(y_d, t)$, $t_3(y_d, t)$ et $t_4(y_d, t)$ définies par :

$$t_1(y_d, t) = \dot{u}_{O_d}^2 + \dot{v}_{O_d}^2 + \dot{w}_{O_d}^2 \quad (\text{II.58})$$

$$t_2(y_d, t) = \omega_d^{x'2} + \omega_d^{z'2} \quad (\text{II.59})$$

$$t_3(y_d, t) = \omega_d^{y'2} \quad (\text{II.60})$$

$$t_4(y_d, t) = \omega_d^{x'2} - \omega_d^{z'2} \quad (\text{II.61})$$

Le calcul de ces quatre fonctions est détaillé dans l'**Annexe A** pour le cas où l'abscisse est égale à y .

Suivant les hypothèses évoquées dans le **Paragraphe II.1**, le rotor fonctionne à une vitesse de rotation constante Ω . Donc la rotation propre ϕ est remplacée par Ωt et sa dérivée $\dot{\phi}$ par Ω . Les déplacements (u_d, w_d) et les rotations (ψ_d, θ_d) ainsi que leurs dérivées par rapport au temps sont infiniment petits. Ainsi les fonctions trigonométriques sont remplacées par leur développement en série de TAYLOR et les expressions obtenues sont limitées à l'ordre 2.

L'expression finale de l'énergie cinétique T_d du disque de centre de masse placé à l'abscisse arbitraire y_d suivant l'axe Oy du référentiel lié au support R est alors :

$$T_d = T_{d,1} + T_{d,2} + T_{d,3} + T_{d,4} \quad (\text{II.62})$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{d,1} = & \frac{m_d}{2} \left((\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y_d) \omega^z)^2 + (\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)^2 + (\dot{z}_o + (y_o + y_d) \omega^x - x_o \omega^y)^2 + \dot{u}_d^2 + \dot{w}_d^2 \right. \\ & + 2(\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y_d) \omega^z)(\dot{u}_d + w_d \omega^y) + 2(\dot{z}_o + (y_o + y_d) \omega^x - x_o \omega^y)(\dot{w}_d - u_d \omega^y) \\ & \left. - 2(\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)(w_d \omega^x + u_d \omega^z) + 2(\dot{u}_d w_d - \dot{w}_d u_d) \omega^y + w_d^2 \omega^{x2} + (u_d^2 + w_d^2) \omega^{y2} + u_d^2 \omega^{z2} - 2u_d w_d \omega^x \omega^z \right) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

$$\begin{aligned} T_{d,2} = & \frac{I_{m_d}^{mo}}{2} \left(\dot{\psi}_d^2 + \dot{\theta}_d^2 + 2\dot{\theta}_d \omega^x - 2(\dot{\psi}_d \theta_d - \dot{\theta}_d \psi_d) \omega^y + 2\dot{\psi}_d \omega^z - (\psi_d^2 - 1) \omega^{x2} + (\psi_d^2 + \theta_d^2) \omega^{y2} - (\theta_d^2 - 1) \omega^{z2} \right. \\ & \left. + 2\psi_d \theta_d \omega^x \omega^z + 2(\psi_d \omega^x - \theta_d \omega^z) \omega^y \right) \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

$$T_{d,3} = \frac{I_d^y}{2} \left((\Omega + \omega^y)^2 + \psi_d^2 \omega^{x^2} + \theta_d^2 \omega^{z^2} + (\Omega + \omega^y)(2\dot{\psi}_d \theta_d - (\psi_d^2 + \theta_d^2) \omega^y - 2(\psi_d \omega^x - \theta_d \omega^z)) - 2\psi_d \theta_d \omega^x \omega^z \right) \quad (\text{II.65})$$

$$\begin{aligned} T_{d,4} = & -\frac{I_d^{di}}{2} (\dot{\psi}_d^2 - \dot{\theta}_d^2 - 2\dot{\theta}_d \omega^x - 2(\dot{\psi}_d \theta_d + \dot{\theta}_d \psi_d) \omega^y + 2\dot{\psi}_d \omega^z + (\psi_d^2 - 1) \omega^{x^2} - (\psi_d^2 - \theta_d^2) \omega^{y^2} - (\theta_d^2 - 1) \omega^{z^2} \\ & + 2\psi_d \theta_d \omega^x \omega^z - 2(\psi_d \omega^x + \theta_d \omega^z) \omega^y) \cos 2\Omega t \\ & -\frac{I_d^{di}}{2} (2\dot{\psi}_d \dot{\theta}_d + 2\dot{\psi}_d \omega^x + 2(\dot{\psi}_d \psi_d - \dot{\theta}_d \theta_d) \omega^y + 2\dot{\theta}_d \omega^z + 2\psi_d \theta_d (\omega^{x^2} - \omega^{y^2}) - (\psi_d^2 + \theta_d^2 - 2) \omega^x \omega^z \\ & - 2(\theta_d \omega^x - \psi_d \omega^z) \omega^y) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

L'expression précédente de l'énergie cinétique T_d du disque fait apparaître les mêmes termes classiques que la dynamique des rotors en flexion dans le cas d'un support fixe :

- ⇒ $\frac{m_d}{2} (\dot{u}_d^2 + \dot{w}_d^2)$ est l'expression classique de l'énergie cinétique due à la translation d'un corps rigide de masse m_d dans un plan parallèle à zOx .
- ⇒ $\frac{I_d^{mo}}{2} (\dot{\psi}_d^2 + \dot{\theta}_d^2)$ correspond à l'énergie cinétique due à la rotation d'un élément de moment d'inertie I_d^{mo} autour des axes Ox et Oz .
- ⇒ $\frac{I_d^y}{2} \Omega^2$ ne concerne pas les déplacements en flexion (u_d, w_d) et donc n'a pas d'influence sur les équations du mouvement. Il représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse constante Ω dans le cas où les autres déplacements sont nuls.
- ⇒ $I_d^y \Omega \dot{\psi}_d \theta_d$ correspond à l'effet gyroscopique.
- ⇒ $-\frac{I_d^{di}}{2} (\dot{\psi}_d^2 - \dot{\theta}_d^2) \cos 2\Omega t$ et $-I_d^{di} \dot{\psi}_d \dot{\theta}_d \sin 2\Omega t$ représentent l'expression de l'énergie cinétique due à la prise en compte de l'effet de la différence des inerties de masse du disque par rapport aux axes Ox et Oz du repère R (effet de la dissymétrie géométrique du disque) et font apparaître des termes périodiques de période $\tau = \pi/\Omega$ dans les équations différentielles du mouvement.

Il est à remarquer une certaine symétrie des termes que l'expression de l'énergie cinétique du disque contient. Cette symétrie est présentée comme suit :

- ⇒ Les déplacements (u_d, w_d) ainsi que les angles d'EULER (ψ_d, θ_d) interviennent de manière équivalente. Ceci s'explique par la prise en compte du fait que l'axe Oy du repère R représente un axe de symétrie du disque.
- ⇒ En outre, ω^x et ω^z ont le même effet sur les équations du mouvement, comme par exemple le terme $\frac{I_d^{mo}}{2} (\omega^{x^2} + \omega^{z^2})$, tandis que ω^y représentant la rotation autour de l'axe Oy du référentiel R possède un rôle prépondérant. Le terme $I_d^{mo} \omega^y (\omega^x \psi_d - \omega^z \theta_d)$ en est une parfaite illustration.
- ⇒ Deux exceptions à cette symétrie sont à constater :
 - ⊕ il manque le terme $I_d^y (\omega^y + \Omega) \psi_d \dot{\theta}_d$ nécessaire pour correspondre au terme $I_d^y (\omega^y + \Omega) \dot{\psi}_d \theta_d$. Cette dissymétrie se retrouve d'ailleurs pour un support fixe. Elle est due au paramétrage et particulièrement au choix des angles d'EULER.
 - ⊕ Par ailleurs, ω^x joue le même rôle que ω^y dans le terme $I_d^{di} (\omega^{x^2} - \omega^{y^2}) \psi_d \theta_d \sin 2\Omega t$.

II.5.2 Arbre

D'après les hypothèses présentées au **Paragraphe II.1**, l'arbre est considéré comme flexible. Par conséquent, il est caractérisé par son énergie cinétique et son énergie de déformation.

L'arbre est représenté par des poutres droites de sections droites supposées constantes et d'inerties de section également supposées constantes.

II.5.2.1 Energie cinétique

Soit un élément d'arbre non déformé de longueur l_a et de section droite S_a . Son centre géométrique C^{init} localisé sur la fibre neutre est de coordonnées $(0, y, 0)$ dans le référentiel R (figure **FIG. II.8**).

Lors du mouvement du rotor, l'origine O' du repère local R' lié au centre géométrique de l'élément d'arbre se déplace du point C^{init} à celui C de la fibre neutre de l'arbre déformé. L'énergie cinétique de l'élément d'arbre peut être obtenue en prenant un volume élémentaire dV_a de très petite longueur dy . Ce volume dV_a peut être considéré comme un disque d'épaisseur dy , de section S_a et de centre de masse situé au point C de coordonnées (u, y, w) dans le repère R (figure **FIG. II.9**).

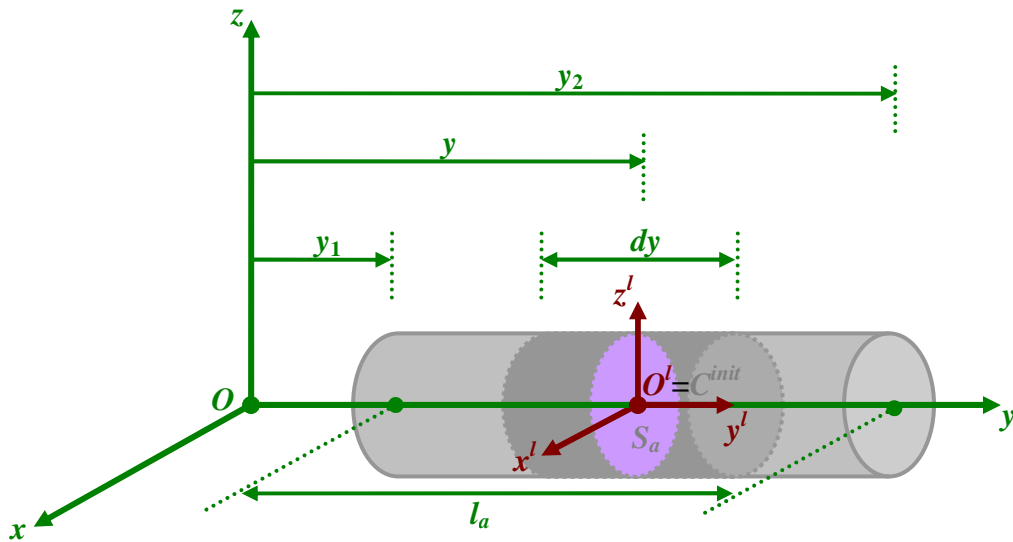


FIG. II.8 : Représentation d'un élément d'arbre de section droite constante S_a

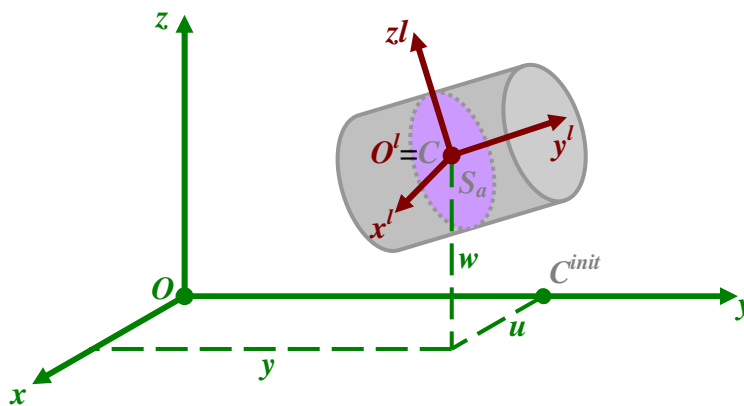


FIG. II.9 : Coordonnées de l'origine O' du repère R' liée au centre géométrique C d'un volume élémentaire d'arbre exprimées dans le repère R

CHAPITRE II : Modélisation des rotors embarqués

La masse élémentaire dm_a d'arbre et ses inerties élémentaires de masse $dI_{m_a}^x$, $dI_{m_a}^y$ et $dI_{m_a}^z$ exprimées dans le référentiel local R^l sont alors données par :

$$dm_a = \rho_a dV_a = \rho_a S_a dy \quad (\text{II.67})$$

$$\begin{aligned} dI_{m_a}^x &= d \int_{m_a} (y^{l2} + z^{l2}) dm_a = d \int_{V_a} \rho_a (y^{l2} + z^{l2}) dV_a = d \int_{V_a} \rho_a z^{l2} dV_a = \int_{S_a} \rho_a z^{l2} dS_a dy \\ &= \rho_a \left(\int_{S_a} z^{l2} dS_a \right) dy = \rho_a I_{S_a}^x dy \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

$$\begin{aligned} dI_{m_a}^y &= d \int_{m_a} (x^{l2} + z^{l2}) dm_a = d \int_{V_a} \rho_a (x^{l2} + z^{l2}) dV_a = \int_{S_a} \rho_a (x^{l2} + z^{l2}) dS_a dy \\ &= \rho_a \left(\int_{S_a} x^{l2} dS_a + \int_{S_a} z^{l2} dS_a \right) dy = \rho_a (I_{S_a}^z + I_{S_a}^x) dy = \rho_a (I_{S_a}^x + I_{S_a}^z) dy \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

$$\begin{aligned} dI_{m_a}^z &= d \int_{m_a} (x^{l2} + y^{l2}) dm_a = d \int_{V_a} \rho_a (x^{l2} + y^{l2}) dV_a = d \int_{V_a} \rho_a x^{l2} dV_a = \int_{S_a} \rho_a x^{l2} dS_a dy \\ &= \rho_a \left(\int_{S_a} x^{l2} dS_a \right) dy = \rho_a I_{S_a}^z dy \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

où :

- m_a , ρ_a et V_a sont respectivement la masse, la masse volumique et le volume de l'élément d'arbre,
- $I_{S_a}^x$ et $I_{S_a}^z$ sont les moments d'inertie (moments quadratiques) de la surface plane S_a de l'élément d'arbre par rapport aux axes Ox^l et Oz^l du référentiel lié à l'arbre R^l ,
- $I_{S_a}^x + I_{S_a}^z = I_{S_a}^y$ est le moment d'inertie polaire (moment quadratique polaire) de la surface plane S_a par rapport à son centre géométrique.

Remarque : puisque la valeur de dy est infiniment petite, l'intégrale $d \int_{V_a} \rho_a y^{l2} dV_a$ est négligeable dans l'expression de $I_{S_a}^x$ et $I_{S_a}^z$.

L'énergie cinétique élémentaire dT_a de l'élément d'arbre est calculée en appliquant l'expression (II.57) de l'énergie cinétique du disque au volume élémentaire dV_a de longueur dy :

$$dT_a = \frac{\rho_a S_a}{2} (\dot{u}_{O'}^2 + \dot{v}_{O'}^2 + \dot{w}_{O'}^2) + \frac{1}{2} (\rho_a I_{S_a}^x \omega^{y^l2} dy + \rho_a (I_{S_a}^x + I_{S_a}^z) \omega^{y^l2} dy + \rho_a I_{S_a}^z \omega^{z^l2} dy) \quad (\text{II.71})$$

Lorsque l'élément d'arbre n'est pas symétrique (c'est-à-dire $I_{S_a}^x \neq I_{S_a}^z$), il vient les quantités suivantes :

$$I_{S_a}^{mo} = \frac{I_{S_a}^x + I_{S_a}^z}{2} \quad (\text{II.72})$$

$$I_{S_a}^{di} = \frac{I_{S_a}^x - I_{S_a}^z}{2} \quad (\text{II.73})$$

ce qui donne :

$$I_{S_a}^x = I_{S_a}^{mo} + I_{S_a}^{di} \quad (\text{II.74})$$

$$I_{S_a}^z = I_{S_a}^{mo} - I_{S_a}^{di} \quad (\text{II.75})$$

où :

- $I_{S_a}^{mo}$ et $I_{S_a}^{di}$ sont respectivement l'inertie moyenne de la section droite et celle caractérisant la dissymétrie de l'arbre.

En introduisant les équations (II.74) et (II.75) dans (II.71), l'énergie cinétique élémentaire dT_a de l'élément d'arbre s'écrit sous la forme suivante :

$$dT_a = \frac{\rho_a S_a}{2} t_1(y, t) dy + \frac{1}{2} (\rho_a I_{S_a}^{mo} t_2(y, t) dy + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} t_3(y, t) dy + I_{S_a}^{di} \rho_a t_4(y, t) dy) \quad (\text{II.76})$$

Les fonctions $t_i(y, t)$ (pour $i = 1 \dots 4$) sont calculées de manière détaillée dans l'**Annexe A**.

L'intégration de l'équation (II.76) sur l'intervalle $[y_1, y_2]$ (c'est-à-dire sur toute la longueur l_a de l'élément d'arbre) donne l'énergie cinétique T_a :

$$T_a = \frac{\rho_a S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} t_1(y, t) dy + \frac{1}{2} \left(\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} t_2(y, t) dy + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} t_3(y, t) dy + \rho_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} t_4(y, t) dy \right) \quad (\text{II.77})$$

avec :

$$l_a = y_2 - y_1 \quad (\text{II.78})$$

où :

- y_1 et y_2 sont les abscisses des extrémités de l'élément d'arbre sur l'axe Oy du repère R .

Remarque : si l'origine de l'axe Oy est positionnée à une extrémité de l'arbre, il vient :

$$T_a = \frac{\rho_a S_a}{2} \int_0^{l_a} t_1(y, t) dy + \frac{1}{2} \left(\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_0^{l_a} t_2(y, t) dy + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_0^{l_a} t_3(y, t) dy + \rho_a I_{S_a}^{di} \int_0^{l_a} t_4(y, t) dy \right) \quad (\text{II.79})$$

Le développement de l'équation (II.77) conduit à l'expression finale de l'énergie cinétique T_a :

$$T_a = T_{a,1} + T_{a,2} + T_{a,3} + T_{a,4} \quad (\text{II.80})$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{a,1} = & \frac{\rho_a S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left((\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y) \omega^z)^2 + (\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)^2 + (\dot{z}_o + (y_o + y) \omega^x - x_o \omega^y)^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right. \\ & + 2(\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y) \omega^z)(\dot{u} + w \omega^y) + 2(\dot{z}_o + (y_o + y) \omega^x - x_o \omega^y)(\dot{w} - u \omega^y) \\ & \left. - 2(\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)(w \omega^x + u \omega^z) + 2(\dot{u}w - \dot{w}u) \omega^y + w^2 \omega^{x2} + (u^2 + w^2) \omega^{y2} + u^2 \omega^{z2} - 2uw \omega^x \omega^z \right) dy \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

$$\begin{aligned} T_{a,2} = & \frac{\rho_a I_{S_a}^{mo}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta} \omega^x - 2(\dot{\psi} \theta - \dot{\theta} \psi) \omega^y + 2\dot{\psi} \omega^z - (\psi^2 - 1) \omega^{x2} + (\psi^2 + \theta^2) \omega^{y2} - (\theta^2 - 1) \omega^{z2} \right. \\ & \left. + 2\psi \theta \omega^x \omega^z + 2(\psi \omega^x - \theta \omega^z) \omega^y \right) dy \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

$$T_{a,3} = \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left((\Omega + \omega^y)^2 + \psi^2 \omega^{x2} + \theta^2 \omega^{z2} + (\Omega + \omega^y)(2\dot{\psi} \theta - (\psi^2 + \theta^2) \omega^y - 2(\psi \omega^x - \theta \omega^z)) - 2\psi \theta \omega^x \omega^z \right) dy \quad (\text{II.83})$$

$$\begin{aligned} T_{a,4} = & -\frac{\rho_a I_{S_a}^{di}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} \omega^x - 2(\dot{\psi} \theta + \dot{\theta} \psi) \omega^y + 2\dot{\omega}^z \dot{\psi} + (\psi^2 - 1) \omega^{x2} - (\psi^2 - \theta^2) \omega^{y2} - (\theta^2 - 1) \omega^{z2} \right. \\ & \left. + 2\psi \theta \omega^x \omega^z - 2(\psi \omega^x + \theta \omega^z) \omega^y \right) dy \cos 2\Omega t \\ & -\frac{\rho_a I_{S_a}^{di}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(2\dot{\psi} \dot{\theta} + 2\dot{\psi} \omega^x + 2(\dot{\psi} \psi - \dot{\theta} \theta) \omega^y + 2\dot{\theta} \omega^z + 2\psi \theta (\omega^{x2} - \omega^{y2}) - (\psi^2 + \theta^2 - 2) \omega^x \omega^z \right. \\ & \left. - 2(\theta \omega^x - \psi \omega^z) \omega^y \right) dy \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

L'expression précédente de l'énergie cinétique T_a fait apparaître les mêmes termes classiques que la dynamique des rotors en flexion dont le support n'est pas en mouvement :

$$\Rightarrow \frac{\rho_a S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \text{ est l'expression de l'énergie cinétique d'un élément de poutre d'EULER-BERNOULLI en flexion.}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_a I_{S_a}^{mo}}{2} \int_{y_1}^{y_2} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy \text{ correspond à l'énergie cinétique due à l'effet secondaire d'inertie de rotation}$$

des sections droites d'un élément de poutre (poutre de TIMOSHENKO) introduit par RAYLEIGH.

$$\Rightarrow \rho_a I_{S_a}^{mo} l_a \Omega^2 \text{ est une constante et sans influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie de rotation de l'élément d'arbre tournant à la vitesse constante } \Omega \text{ dans le cas où les autres déplacements sont nuls.}$$

$$\Rightarrow 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \Omega \int_{y_1}^{y_2} \dot{\psi} \theta dy \text{ correspond à l'effet gyroscopique.}$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_a I_{S_a}^{di}}{2} \int_{y_1}^{y_2} (\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2) dy \cos 2\Omega t \text{ et } -\rho_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \dot{\psi} \dot{\theta} dy \sin 2\Omega t \text{ représentent l'expression de l'énergie cinétique due à la prise en compte de l'effet de la différence des inerties de la surface plane } S_a \text{ de l'élément d'arbre suivant les axes } Ox \text{ et } Oz \text{ du repère } R \text{ (effet de la dissymétrie de l'arbre). Ces termes montrent des coefficients périodiques de période } \tau = \pi/\Omega \text{ dans les équations du mouvement.}$$

En ce qui concerne la symétrie des termes qui constituent l'expression de l'énergie cinétique de l'élément d'arbre, les mêmes remarques que pour le disque peuvent être faites pour l'arbre.

II.5.2.2 Energie de déformation

Le mouvement de translation du support rigide par rapport au sol n'a pas d'influence sur l'énergie de déformation de l'arbre car cette dernière ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support.

Avant d'établir l'énergie de déformation de l'arbre, il convient de formaliser rigoureusement la relation entre les angles d'EULER et ceux de la théorie des poutres. Ensuite, il est alors possible d'exprimer les déplacements latéraux et les rotations de section dans les repères lié au support et tournant.

- **Relation entre angles d'EULER et angles de la théorie des poutres**

Il est nécessaire de prendre en compte certaines approximations correspondant aux rotations des sections droites de l'arbre lors du calcul de son énergie de déformation. Soit une section droite S_a d'un élément d'arbre non déformé. Ce dernier est représenté par un élément de poutre droite dans la configuration initiale non déformée. La section droite S_a est de centre géométrique C^{init} localisé à l'abscisse y sur l'axe Oy du repère R . Lors de la flexion de l'élément d'arbre dans deux plans orthogonaux de l'espace, la section S_a est orientée par rapport à la position initiale non déformée à l'aide des rotations ψ et θ respectivement autour des axes $O^l z$ et $O^l x$ du repère R comme vu sur la figure **FIG. II.10(a)** et son centre géométrique devient représenté par le point C de coordonnées (u, y, w) dans le référentiel R . Le vecteur rotation instantanée du repère local $\widetilde{R}^{i_2}(\widetilde{x}^{i_2}, \widetilde{y}^{i_2}, \widetilde{z}^{i_2})$ lié au centre géométrique C par rapport au support projeté dans le repère R s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R^{i_2}}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R \quad (II.85)$$

D'autre part, en dynamique des rotors, les angles d'EULER ψ , θ et ϕ sont utilisés avec deux repères intermédiaires R^{i_1} et R^{i_2} de manière à définir le vecteur rotation instantanée du repère local R^l par rapport au repère lié au support R afin de faire apparaître les termes dus à l'effet gyroscopique dans l'expressions de l'énergie cinétique du disque et de l'arbre. A présent, seuls les deux angles d'EULER ψ et θ sont pris en considération (figure **FIG. II.10(b)**) et le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{R^{i_2}}^R$ du repère intermédiaire R^{i_2} par rapport au support exprimé dans le repère R^{i_1} s'écrit alors :

$$\vec{\omega}_{R^{i_2}}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R^{i_1}} \quad (II.86)$$

En utilisant l'équation (II.5) exprimant la relation entre les repères R et R^{i_1} , le précédent vecteur rotation projeté dans le repère lié au support R s'écrit alors :

$$\vec{\omega}_{R^{i_2}}^R = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R^{i_1}} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R \quad (II.87)$$

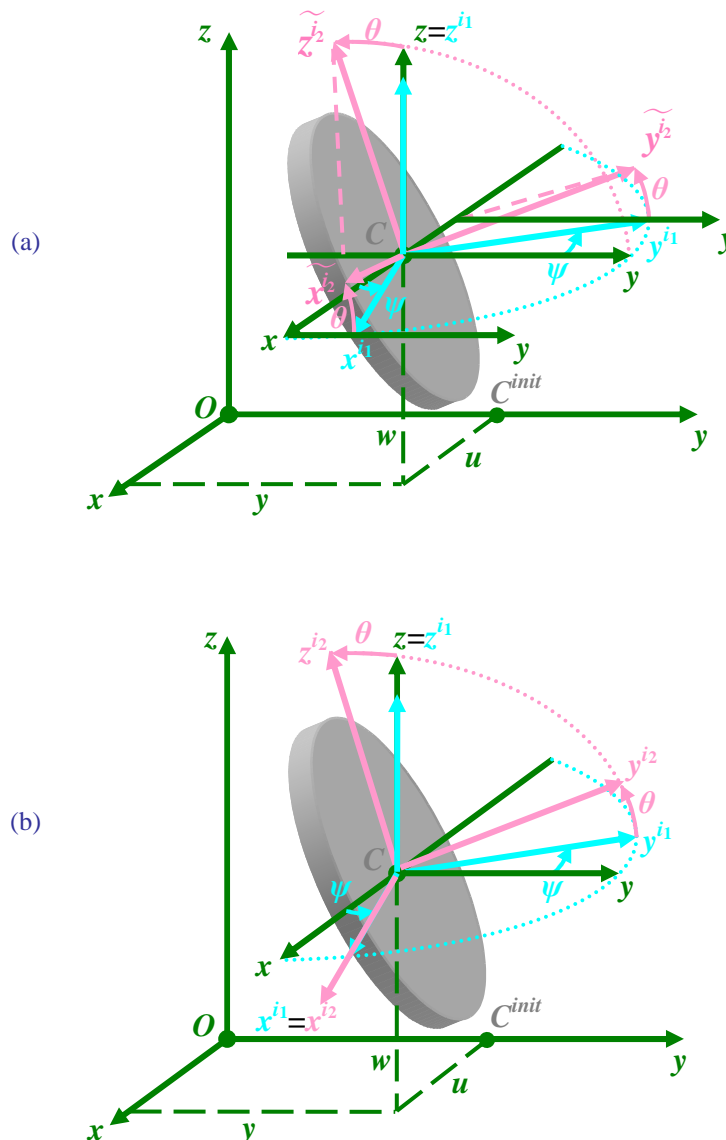
En supposant que l'angle ψ est infiniment petit, c'est-à-dire $\cos\psi \simeq 1$ et $\sin\psi \simeq \psi$, il vient :

$$\vec{\omega}_{R^2}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}\psi \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.88})$$

En négligeant le terme $\dot{\theta}\psi$ en raison de sa petite valeur, l'expression (II.85) est retrouvée :

$$\vec{\omega}_{R^2}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.89})$$

L'approximation précédente représente la première et concerne le vecteur rotation instantanée projeté dans le repère lié au support R en utilisant les angles d'EULER ψ et θ supposés petits. Elle conduit à la coïncidence entre les angles d'EULER et ceux issus de la théorie des poutres lors de rotation de la section droite de l'élément d'arbre en flexion dans l'espace, voir **MOGENIER [114]**.



Orientations de la section droite S_a de l'élément d'arbre en flexion dans l'espace grâce aux :
 (a) angles issus de la théorie des poutres, (b) deux angles d'EULER ψ et θ

FIG. II.10 : Approximation conduisant à la coïncidence entre les angles d'EULER ψ et θ et ceux issus de la théorie des poutres lors de rotation de la section droite S_a de l'élément d'arbre en flexion dans l'espace

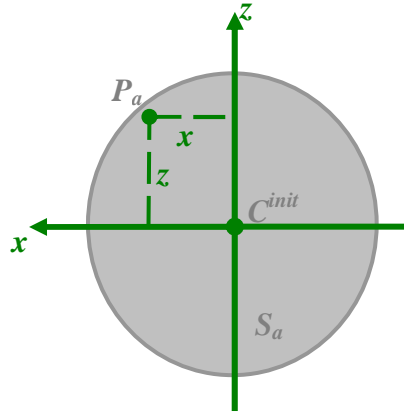


FIG. II.11 : Représentation d'un point arbitraire de la section droite d'un arbre non déformé

Soit un point P_a de la section droite S_a de l'élément d'arbre non déformé (figure FIG. II.11). Ses coordonnées (x, z) sont exprimées dans un repère local lié au centre géométrique C^{init} de la section S_a . A l'arrêt, ce repère local correspond au repère lié au support R précédemment défini. En fait, il est obligatoire de décrire les déformations et les contraintes du point P_a dans ce repère lié à un élément non déformé. En revanche, dans le cadre classique de la dynamique des rotors, l'élément d'arbre non déformé tourne d'un angle ϕ défini autour de son axe longitudinal $O^l y$. En conséquence, pour pouvoir décrire les déformations et les contraintes lors de la rotation du rotor, il semble intéressant de définir un repère supplémentaire nommé « repère tournant $R^l(x', y', z')$ » correspondant au repère local considéré et résultant de la transformation du repère R à l'aide de l'angle de rotation propre ϕ autour de l'axe $O^l y$. Donc ce dernier coïncide avec l'axe $O^l y'$ (c'est-à-dire $y = y'$) où le point O^l représente l'origine du référentiel tournant R^l .

En effet, en dynamique des rotors, le repère intermédiaire R^{i2} est transformé en repère local R^l par la rotation propre ϕ autour de l'axe $O^l y^{i2}$ (c'est-à-dire que l'axe $O^l y^{i2}$ coïncide avec l'axe $O^l y'$) (figure FIG. II.12(a)) et non par l'angle ϕ autour de l'axe $O^l y$ comme indiqué précédemment lors de la définition du repère tournant R^l . La rotation du repère local R^l est approximée de la même manière que pour celle du repère R^{i2} par rapport au repère lié au support R (figure FIG. II.12(b)). En considérant la première approximation, le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}_{R^l}^R$ du repère R^l par rapport au repère R est donné par :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \vec{\omega}_{R^{i2}}^R + \vec{\omega}_{R^l}^{R^{i2}} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R^l} \quad (\text{II.90})$$

En introduisant l'équation (II.15) dans (II.90), le vecteur rotation $\vec{\omega}_{R^l}^R$ projeté dans R est alors exprimé par :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R + [P_R^{R^l}] \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R^l} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\phi} \sin \psi \cos \theta \\ \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \theta \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.91})$$

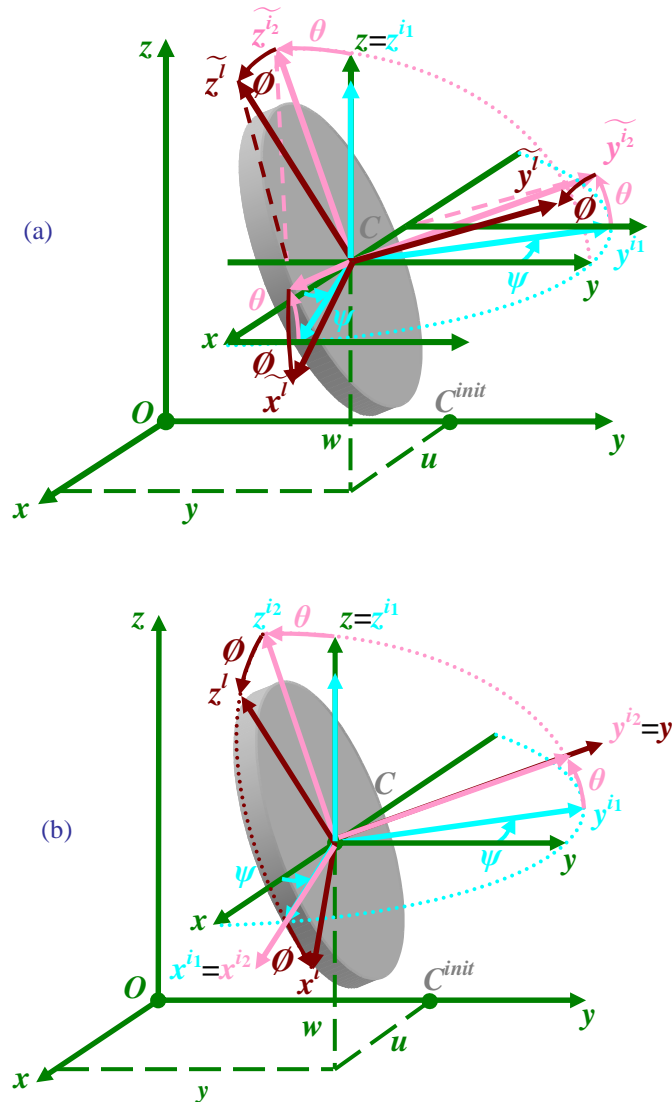
En supposant que les angles ψ et θ sont infiniment petits, c'est-à-dire $\cos \psi \simeq 1$, $\sin \psi \simeq \psi$, $\cos \theta \simeq 1$ et $\sin \theta \simeq \theta$, il vient :

$$\vec{\omega}_{R^l}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\phi} \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \theta \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.92})$$

En négligeant les termes $\dot{\phi}\psi$ et $\dot{\phi}\theta$ en raison de leur faible valeur devant la valeur de $\dot{\phi}$, l'expression finale du vecteur rotation $\vec{\omega}_{R'}^R$ est :

$$\vec{\omega}_{R'}^R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.93})$$

L'approximation précédente, qui représente la deuxième, est relative au vecteur rotation $\vec{\omega}_{R'}^R$ projeté dans le repère R . Cette approximation conduit à la rotation d'un angle ϕ autour de l'axe $O'y$ pour orienter le repère tournant R' vis-à-vis du repère lié au support R , voir **MOGENIER [114]**.



Orientation de la section droite S_a de l'élément d'arbre en flexion dans l'espace grâce aux :
 (a) angles issus de la théorie des poutres, (b) angles d'EULER ψ , θ et ϕ

FIG. II.12 : Approximation conduisant à la coïncidence entre les angles d'EULER ψ , θ et ϕ et ceux issus de la théorie des poutres lors de rotation de la section droite S_a de l'élément d'arbre en flexion dans l'espace

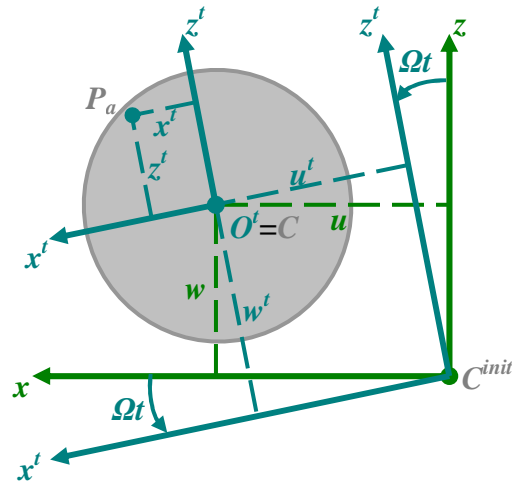


FIG. II.13 : Relation entre les déplacements dans le repères lié au support R et ceux dans le repère tournant R'

▪ **Relation entre déflexions latérales et rotations de section dans les différents repères**

Soient les composantes u' , v' et w' du déplacement au centre géométrique C de l'élément d'arbre déformé respectivement suivant les axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ du repère tournant R' ainsi que les rotations θ' et ψ' autour des axes $O'x'$ et $O'z'$ respectivement. Comme illustré sur la figure FIG. II.13, le passage des déplacements u et w exprimés dans le repère lié au support R à ceux u' et w' exprimés dans le repère tournant R' correspond à une rotation géométrique d'un angle $\phi = \Omega t$ autour de l'axe $C^{init}y$ dans un espace euclidien à deux dimensions et s'écrit de la manière suivante :

$$u' = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \tag{II.94}$$

$$w' = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \tag{II.95}$$

D'autre part, les relations entre les rotations θ et ψ de la section droite S_a autour des axes $O'x$ et $O'z$ respectivement et celles θ' et ψ' autour des axes $O'x'$ et $O'z'$ respectivement ne sont jamais identifiables avec la figure FIG. II.13. Afin de les trouver, il convient de suivre une démarche permettant d'exprimer toute rotation autour d'un vecteur arbitraire contenu dans un espace euclidien à trois dimensions en fonction d'une combinaison de rotations élémentaires autour des axes du repère défini dans cet espace. Le lecteur peut se référer à l'ouvrage d'ANAND [4] où une description détaillée de cette démarche est présentée.

Tout d'abord, il est supposé que la section droite S_a n'a tourné que d'un angle ϕ défini autour de l'axe $O'y'$ et que les déplacements u' , v' et w' de son centre C sont nuls. Cette section droite est alors incluse dans un plan parallèle à celui zOx .

Ensuite, dans une première étape, une seule rotation d'un angle positif ψ' autour de l'axe $O'z'$ est appliquée à la section droite. Le vecteur unitaire normal à la section droite déformée accomplit alors une rotation d'un angle ψ' dans le plan $x'O'y'$. Les longueurs des arcs $\overline{M^{\psi'}M^\psi}$, $\overline{M^\psi M^\theta}$ et $\overline{M^{\psi'}M^\theta}$ délimités par les extrémités des vecteurs unitaires \vec{y}' , \vec{y} et \vec{y}^i sont données par :

$$\overline{M^{\psi'}M^\psi} = \psi' \approx \overline{M^{\psi'}M^\psi} \tag{II.96}$$

$$\overline{M^\psi M^\theta} = \theta \approx \overline{M^\psi M^\theta} \tag{II.97}$$

$$\overline{M^{\psi'}M^\theta} = \psi' \approx \overline{M^{\psi'}M^\theta} \tag{II.98}$$

Après avoir illustré le triangle $MM^\psi M^\theta$ contenu dans un plan parallèle à zOx en figure FIG. II.14(b), l'angle ψ' peut être exprimé en fonction des rotations θ et ψ autour des axes $O'x$ et $O'z$ respectivement à partir du calcul de la longueur du segment $\overline{M^{\psi'}M^\theta}$ comme suit :

$$\overline{M^{\psi'} M^{\theta}} = \overline{M^{\psi'} H^{\psi'}} + \overline{H^{\psi'} M^{\theta}} \quad (\text{II.99})$$

avec :

$$\overline{M^{\psi'} H^{\psi'}} = \overline{M^{\psi'} M^{\psi}} \cos \Omega t = \psi \cos \Omega t \quad (\text{II.100})$$

$$\overline{H^{\psi'} M^{\theta}} = \overline{M^{\psi'} M^{\theta}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Omega t \right) = \theta \sin \Omega t \quad (\text{II.101})$$

En reportant les équations (II.98), (II.100) et (II.101) dans (II.99), il vient :

$$\psi' = \psi \cos \Omega t + \theta \sin \Omega t \quad (\text{II.102})$$

Enfin, dans une deuxième étape, après l'avoir ramenée à la position correspondant à la rotation d'un angle ϕ autour de l'axe $O^i y^i$, appliquons à la section S_a une seule rotation d'un angle positif θ' autour de l'axe $O^i x^i$. Le vecteur unitaire normal à la section droite déformée accomplit alors une rotation d'un angle θ' dans le plan $x^i O^i y^i$. Les longueurs des arcs $\overline{N^{\theta'} N^{\psi}}$, $\overline{N^{\psi} N^{\theta}}$ et $\overline{N^{\theta'} N^{\theta}}$ délimités par les extrémités des vecteurs unitaires \vec{y}^i , \vec{y} et \vec{y}' sont données par :

$$\overline{N^{\theta'} N^{\psi}} = -\psi \approx \overline{N^{\theta'} N^{\psi}} \quad (\text{II.103})$$

$$\overline{N^{\psi} N^{\theta}} = \theta \approx \overline{N^{\psi} N^{\theta}} \quad (\text{II.104})$$

$$\overline{N^{\theta'} N^{\theta}} = \theta' \approx \overline{N^{\theta'} N^{\theta}} \quad (\text{II.105})$$

La valeur de l'angle ψ est négative car lors de la rotation autour de l'axe $O^i z$, le sens de la trajectoire circulaire d'un point de l'axe $O^i \vec{y}^i$ est anti-trigonométrique.

En illustrant le triangle $N^{\theta'} N^{\psi} N^{\theta}$ contenu dans un plan parallèle à zOx sur la figure **FIG. II.15(b)**, l'angle θ' peut être obtenu en fonction des angles θ et ψ autour des axes $O^i x$ et $O^i z$ respectivement à partir du calcul de la longueur du segment $\overline{N^{\theta'} N^{\theta}}$ comme suit :

$$\overline{N^{\theta'} N^{\theta}} = \overline{N^{\theta'} H^{\theta'}} + \overline{H^{\theta'} N^{\theta}} \quad (\text{II.106})$$

avec :

$$\overline{N^{\theta'} H^{\theta'}} = \overline{N^{\theta'} N^{\psi}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Omega t \right) = -\psi \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Omega t \right) = -\psi \sin \Omega t \quad (\text{II.107})$$

$$\overline{H^{\theta'} N^{\theta}} = \overline{N^{\psi} N^{\theta}} \cos \Omega t = \theta \cos \Omega t \quad (\text{II.108})$$

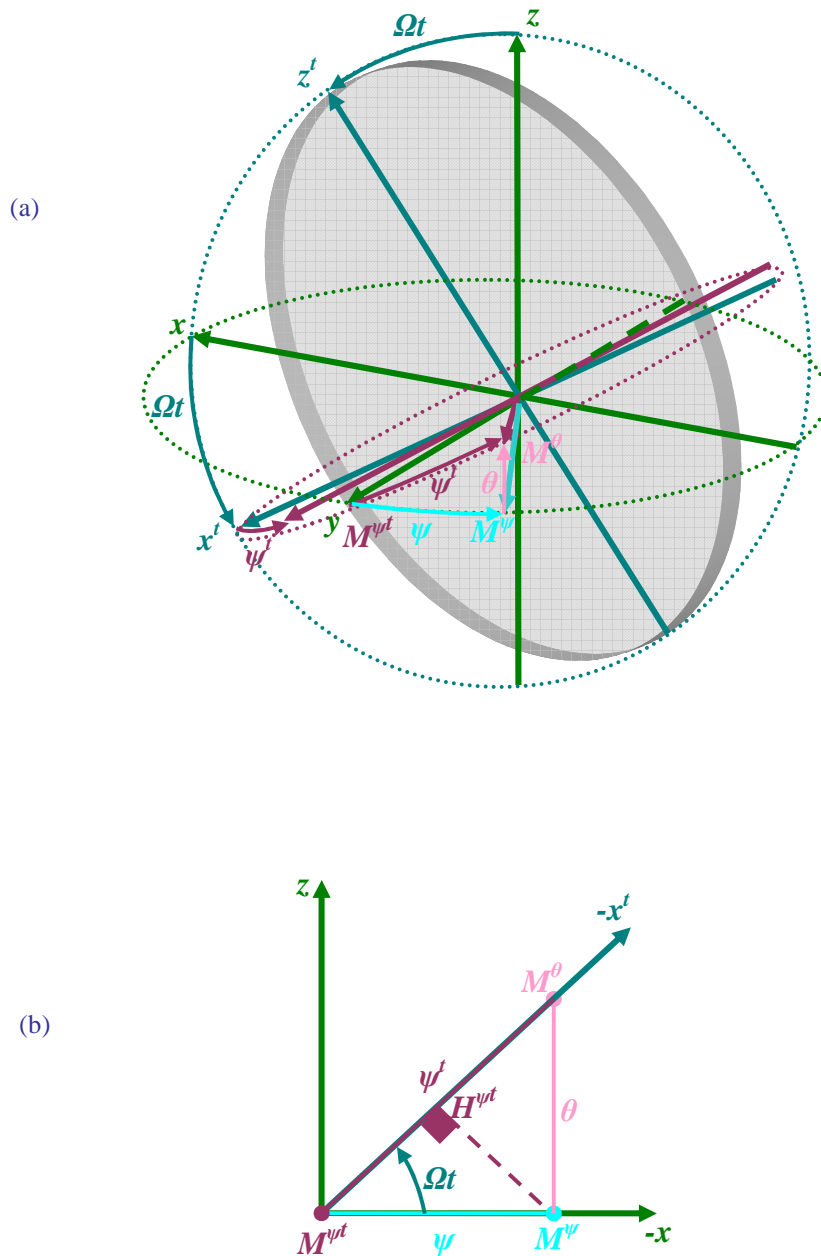
En reportant les équations (II.105), (II.107) et (II.108) dans (II.106), il vient :

$$\theta' = -\psi \sin \Omega t + \theta \cos \Omega t \quad (\text{II.109})$$

Ainsi les relations entre les rotations (θ, ψ) de la section droite S_a respectivement autour des axes $O^i x$ et $O^i z$ du repère lié au support R et celles (θ', ψ') respectivement autour des axes $O^i x^i$ et $O^i z^i$ du repère tournant R^i peuvent s'écrire (voir **KANG et al. [85]**, **RAFFA et VATTA [130]**, **ONCESCU et al. [123]**) :

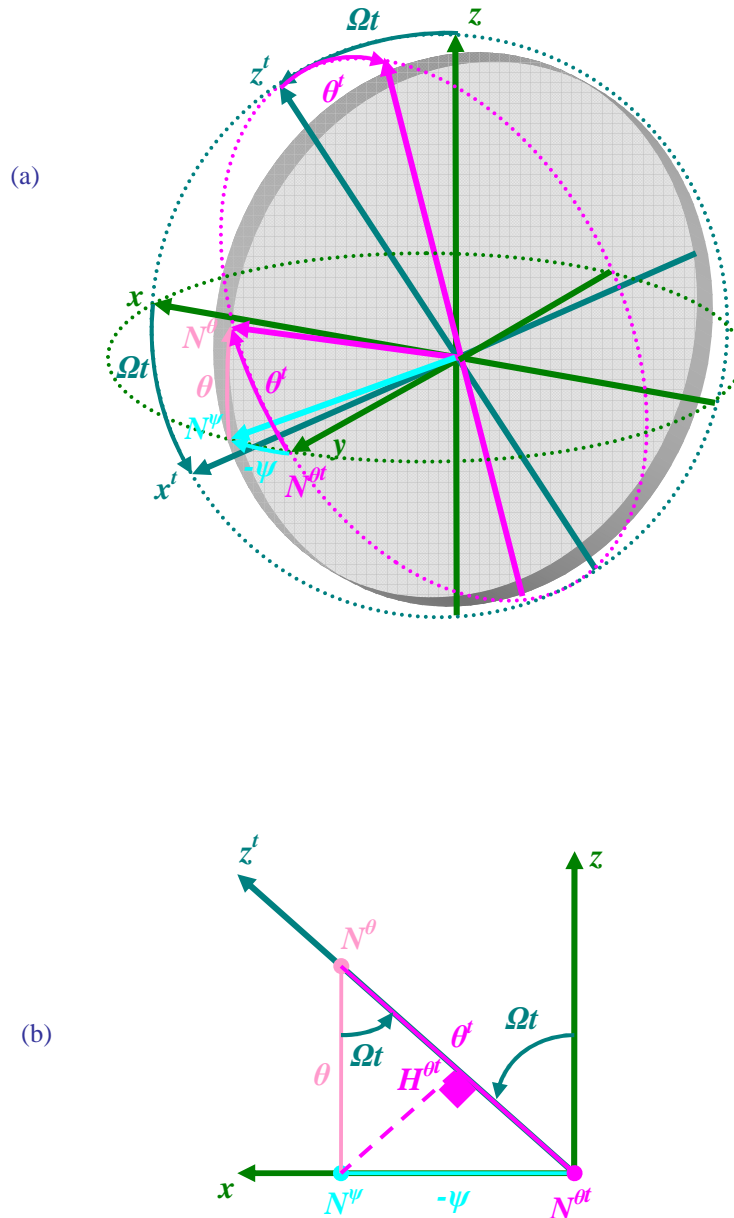
$$\psi' = \psi \cos \Omega t + \theta \sin \Omega t \quad (\text{II.110})$$

$$\theta' = -\psi \sin \Omega t + \theta \cos \Omega t \quad (\text{II.111})$$



(a) Rotation de la section droite de l'élément d'arbre d'un angle ψ' autour de l'axe Oz'
 (b) Illustration du triangle créé par les rotations élémentaires autour des axes du repère R lors d'une rotation de la section droite de l'élément d'arbre d'un angle ψ' autour de l'axe Oz'

FIG. II.14 : Relation entre les rotations θ et ψ de la section droite autour des axes Ox et Oz du repère lié au support R et la rotation ψ' autour de l'axe Oz' du repère tournant R'



(a) Rotation de la section droite de l'élément d'arbre d'un angle θ^t autour de l'axe $O^t x^t$
 (b) Illustration du triangle créé par les rotations élémentaires autour des axes du repère R lors d'une rotation de la section droite de l'élément d'arbre d'un angle θ^t autour de l'axe $O^t x^t$

FIG. II.15 : Relation entre les rotations θ et ψ de la section droite autour des axes Ox et Oz du repère lié au support R et la rotation θ^t autour de l'axe $O^t x^t$ du repère tournant R^t

■ Calcul de l'énergie de déformation

Les relations entre les mouvements dans le référentiel attaché au support R et ceux dans le référentiel tournant R' étant calculées, il reste à présent à calculer l'énergie de déformation de l'élément d'arbre qui a comme expression, voir **PRZEMIENIECKI [129]**, **IMBERT [82]**, **LALANNE et FERRARIS [99]**, **GENTA [67]** :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{V_a} \{\varepsilon_a\}^T \{\sigma_a\} dV_a \quad (\text{II.112})$$

où :

- V_a est le volume de l'élément d'arbre,
- $\{\varepsilon_a\}$ et $\{\sigma_a\}$ sont respectivement les vecteurs des déformations et des contraintes évaluées au point P_a ,
- le caractère T est le symbole matriciel de transposition.

Le champ de déplacements $\{\mathcal{U}_{P_a}\}$ du point P_a est décrit en fonction des coordonnées en mouvement u^t , v^t et w^t du centre géométrique C de la section droite S_a respectivement par rapport aux axes $O^t x^t$, $O^t y^t$ et $O^t z^t$, voir **MOGENIER [114]** :

$$\{\mathcal{U}_{P_a}\} = \begin{Bmatrix} u_{P_a}^t \\ v_{P_a}^t \\ w_{P_a}^t \end{Bmatrix}_{R'} = \begin{Bmatrix} u^t \\ v^t + x^t \psi^t - z^t \theta^t \\ w^t \end{Bmatrix}_{R'} \quad (\text{II.113})$$

Le champ de déformations du point P_a dans R' correspondant à la poutre de TIMOSHENKO est calculé de la manière suivante (voir **GENTA [67]**) :

$$\varepsilon^{y^t y^t} = \frac{\partial v_{P_a}^t}{\partial y^t} = \frac{\partial v^t}{\partial y^t} + x^t \frac{\partial \psi^t}{\partial y^t} - z^t \frac{\partial \theta^t}{\partial y^t} \quad (\text{II.114})$$

$$2\varepsilon^{y^t x^t} = \frac{\partial u_{P_a}^t}{\partial y^t} + \frac{\partial v_{P_a}^t}{\partial x^t} = \frac{\partial u^t}{\partial y^t} + \psi^t \quad (\text{II.115})$$

$$2\varepsilon^{y^t z^t} = \frac{\partial v_{P_a}^t}{\partial z^t} + \frac{\partial w_{P_a}^t}{\partial y^t} = -\theta^t + \frac{\partial w^t}{\partial y^t} = \frac{\partial w^t}{\partial y^t} - \theta^t \quad (\text{II.116})$$

La déformation relative aux déflexions transversales dans les directions $O^t x^t$ et $O^t z^t$ comporte des termes linéaires et non linéaires (du second ordre) lorsque la non linéarité géométrique de la structure est considérée. Dans cette étude, les termes non linéaires introduits dans la déformation $\varepsilon^{y^t y^t}$ et supposés petits sont pris en compte. Le vecteur des déformations exprimées dans R' peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^{y^t y^t} \\ 2\varepsilon^{y^t x^t} \\ 2\varepsilon^{y^t z^t} \end{Bmatrix}_{R'} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v^t}{\partial y^t} + x^t \frac{\partial \psi^t}{\partial y^t} - z^t \frac{\partial \theta^t}{\partial y^t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y^t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y^t} \right)^2 \\ \frac{\partial u^t}{\partial y^t} + \psi^t \\ \frac{\partial w^t}{\partial y^t} - \theta^t \end{Bmatrix}_{R'} \quad (\text{II.117})$$

où :

- $\varepsilon^{y^t y^t}$ représente la déformation normale longitudinale du point P_a suivant l'axe $O^t y^t$ due à la composition de l'effet de la traction longitudinale (ou de la compression longitudinale) dans la direction $O^t y^t$ ainsi que de celui des déflexions transversales de l'élément d'arbre dans les directions $O^t x^t$ et $O^t z^t$,
- $2\varepsilon^{y^t x^t}$ et $2\varepsilon^{y^t z^t}$ représentent les déformations du point P_a dues au cisaillement transversal dans le plan $z^t O^t x^t$ associé au cisaillement longitudinal dans les plans $y^t O^t z^t$ et $x^t O^t y^t$ respectivement.

Dans le cas de la rotation du support autour des axes transversaux, une force longitudinale centrifuge proportionnelle au carré des vitesses angulaires ω^x et ω^z du support est créée. Elle est établie dans l'**Annexe B** et rappelée ici par :

$$F^{cen} = \frac{\rho_a S_a}{2} \left((l_a + y_1)^2 - y^2 \right) (\omega^{x^2} + \omega^{z^2}) = E_a S_a \frac{\partial v^t}{\partial y^t} \quad (\text{II.118})$$

Suivant la théorie des poutres, les déformations normales transversales $\varepsilon^{x'x'}$ et $\varepsilon^{z'z'}$ sont négligées (alors qu'elles sont associées à la déformation longitudinale $\varepsilon^{y'y'}$ par le coefficient de POISSON ν_a) et la déformation $2\varepsilon^{x'z'}$ due au cisaillement transversal dans le plan $y^t O^t z^t$ associé à celui dans le plan $x^t O^t y^t$ est nulle. Donc les contraintes $\sigma^{x'x'}$, $\sigma^{z'z'}$ et $\sigma^{x'z'}$ sont nulles. Sous l'hypothèse mentionnée ci-dessus, la relation entre les déformations et les contraintes élastiques s'exprime alors par (voir **MOGENIER [114]**) :

$$\sigma^{y'y'} = E_a \varepsilon^{y'y'} \quad (\text{II.119})$$

$$\sigma^{x'y'} = G_a \kappa_a^{x'y'} 2\varepsilon^{x'y'} \quad (\text{II.120})$$

$$\sigma^{y'z'} = G_a \kappa_a^{z'y'} 2\varepsilon^{y'z'} \quad (\text{II.121})$$

Le vecteur des contraintes exprimées dans le référentiel R^t est alors de la forme suivante :

$$\{\sigma\}_{R^t} = \begin{Bmatrix} \sigma^{y'y'} \\ \sigma^{x'y'} \\ \sigma^{y'z'} \end{Bmatrix}_{R^t} = \begin{Bmatrix} E_a \left(\frac{\partial v^t}{\partial y^t} + x^t \frac{\partial \psi^t}{\partial y^t} - z^t \frac{\partial \theta^t}{\partial y^t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y^t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y^t} \right)^2 \right) \\ G_a \kappa_a^{x'y'} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y^t} + \psi^t \right) \\ G_a \kappa_a^{z'y'} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y^t} - \theta^t \right) \end{Bmatrix}_{R^t} \quad (\text{II.122})$$

où :

- E_a et G_a sont respectivement le module d'YOUNG et celui de cisaillement de l'arbre entre lesquels il existe une relation donnée par :

$$G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)} \quad (\text{II.123})$$

- $\kappa_a^{x'y'}$ et $\kappa_a^{z'y'}$ sont respectivement les coefficients de réduction de section droite de l'élément d'arbre suivant les axes $O^t x^t$ et $O^t z^t$ du repère R^t (voir **COWPER [29]**).

Le terme de l'intégrale dans l'expression (II.122) de l'énergie de déformation de l'élément d'arbre est alors calculé par :

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = E_a \left(\frac{\partial v^t}{\partial y^t} + x^t \frac{\partial \psi^t}{\partial y^t} - z^t \frac{\partial \theta^t}{\partial y^t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y^t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y^t} \right)^2 \right)^2 + G_a \kappa_a^{x'y'} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y^t} + \psi^t \right)^2 + G_a \kappa_a^{z'y'} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y^t} - \theta^t \right)^2 \quad (\text{II.124})$$

Notation : puisque l'axe $O^t y^t$ possède une coïncidence avec l'axe $O^t y$, la variable y^t sera abrégée par y pour simplifier l'écriture des équations dans toute la suite de ce mémoire.

Suivant cette notation, l'équation (II.124) peut être de la forme suivante :

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = E_a \left(\frac{\partial v^t}{\partial y} + x^t \frac{\partial \psi^t}{\partial y} - z^t \frac{\partial \theta^t}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} \right)^2 \right)^2 + G_a \kappa_a^{x'y'} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y} + \psi^t \right)^2 + G_a \kappa_a^{z'y'} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} - \theta^t \right)^2 \quad (\text{II.125})$$

En insérant (II.125) dans (II.112), il vient :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{V_a} \left(E_a \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + x' \frac{\partial \psi'}{\partial y} - z' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) + G_a \kappa_a^{x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \psi' \right) + G_a \kappa_a^{z'} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \theta' \right) \right) dV_a \quad (\text{II.126})$$

c'est-à-dire :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(E_a \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + x' \frac{\partial \psi'}{\partial y} - z' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) + G_a \kappa_a^{x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \psi' \right) + G_a \kappa_a^{z'} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \theta' \right) \right) dS_a dy \quad (\text{II.127})$$

alors :

$$U_a = \frac{E_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + x' \frac{\partial \psi'}{\partial y} - z' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) dS_a dy + \frac{G_a \kappa_a^{x'}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \psi' \right) dS_a dy + \frac{G_a \kappa_a^{z'}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \theta' \right) dS_a dy \quad (\text{II.128})$$

L'équation (II.128) se développe de la manière suivante :

$$U_a = \frac{E_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 dS_a dy + \frac{E_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(x'^2 \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial y} \right)^2 - 2x'z' \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) dS_a dy + \frac{E_a}{8} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^4 + 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) dS_a dy + E_a \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \frac{\partial v'}{\partial y} \left(x' \frac{\partial \psi'}{\partial y} - z' \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) dS_a dy + \frac{E_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \frac{\partial v'}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) dS_a dy + \frac{E_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(x' \frac{\partial \psi'}{\partial y} - z' \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right) dS_a dy + \frac{G_a \kappa_a^{x'}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \psi' \right) dS_a dy + \frac{G_a \kappa_a^{z'}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{S_a} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \theta' \right) dS_a dy \quad (\text{II.129})$$

En prenant en compte le fait que le repère tournant R^t d'axes $x^t y^t z^t$ est celui des axes principaux d'inertie de l'élément d'arbre, le produit quadratique (produit d'inertie) et les moments statiques de la section droite S_a par rapport aux axes $O^t x^t$ et $O^t z^t$ s'annulent et les moments quadratiques $I_{S_a}^{x^t}$ et $I_{S_a}^{z^t}$ de la section S_a par rapport à $O^t x^t$ et $O^t z^t$ sont calculés tels que (voir **HIBBELER [78]**) :

$$\int_{S_a} x^t z^t dS_a = 0 \quad (\text{II.130})$$

$$\int_{S_a} x^t dS_a = 0 \quad (\text{II.131})$$

$$\int_{S_a} z^t dS_a = 0 \quad (\text{II.132})$$

$$\int_{S_a} x'^2 dS_a = I_{S_a}^{x^t} \quad (\text{II.133})$$

$$\int_{S_a} z'^2 dS_a = I_{S_a}^{z^t} \quad (\text{II.134})$$

Notation : comme les inerties $I_{S_a}^{x^t}$ et $I_{S_a}^{z^t}$ sont égales à celles par rapport aux axes du référentiel lié au support R à l'arrêt, leur écriture seront simplifiées en omettant le caractère « t » dans toute la suite du texte.

Remarque : la notation précédente est utilisée de manière similaire pour les quantités $\kappa_a^{x^t}$ et $\kappa_a^{z^t}$.

Ainsi en introduisant les cinq équations précédentes dans (II.129), il vient :

$$\begin{aligned}
 U_a = & \frac{ES_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial v^t}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{E_a I_{S_a}^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{E_a I_{S_a}^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial y} \right)^2 dy \\
 & + \frac{E_a S_a}{8} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u^t}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} \right)^4 + 2 \left(\frac{\partial u^t}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} \right)^2 \right) dy + \frac{E_a S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v^t}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u^t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.135}) \\
 & + \frac{G_a S_a \kappa_a^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y} + \psi^t \right)^2 dy + \frac{G_a S_a \kappa_a^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} - \theta^t \right)^2 dy
 \end{aligned}$$

La première intégrale de l'équation (II.135) correspond à l'énergie de déformation due à la traction longitudinale dans la direction $O'y^t$ et n'a donc pas d'influence sur les équations du mouvement prenant en compte les déplacements en flexion seulement. Les termes de la quatrième intégrale sont d'ordre 4 et donc négligés. La cinquième intégrale est relative à l'énergie potentielle géométrique correspondant au raidissement centrifuge, c'est-à-dire au couplage entre la force de traction centrifuge F^{cen} calculée à partir de l'équation (II.118) et les termes non linéaires de la déformation dus aux déplacements transversaux u^t et w^t dans les directions $O'x^t$ et $O'z^t$.

L'énergie de déformation de l'élément d'arbre devient alors :

$$\begin{aligned}
 U_a = & \frac{E_a I_{S_a}^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial \psi^t}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{E_a I_{S_a}^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} F^{cen} \left(\left(\frac{\partial u^t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} \right)^2 \right) dy \\
 & + \frac{G_a S_a \kappa_a^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial u^t}{\partial y} + \psi^t \right)^2 dy + \frac{G_a S_a \kappa_a^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial w^t}{\partial y} - \theta^t \right)^2 dy \quad (\text{II.136})
 \end{aligned}$$

Comme les expressions de l'énergie cinétique caractérisant le disque et l'arbre sont exprimées dans le repère fixé au support R , l'expression de l'énergie de déformation de l'élément d'arbre sera écrite en fonction des composantes u et w du déplacement en flexion au centre géométrique C . Les équations (II.94), (II.95), (II.110) et (II.111) permettent d'exprimer les dérivées des déplacements et des rotations de section droite dans le repère R telles que :

$$\frac{\partial u^t}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \Omega t - \frac{\partial w}{\partial y} \sin \Omega t \quad (\text{II.137})$$

$$\frac{\partial w^t}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \sin \Omega t + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \Omega t \quad (\text{II.138})$$

$$\frac{\partial \psi^t}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \Omega t + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \Omega t \quad (\text{II.139})$$

$$\frac{\partial \theta^t}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \Omega t + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \Omega t \quad (\text{II.140})$$

En substituant les quatre dernières équations dans (II.136), l'expression de l'énergie de déformation prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 U_a = & \frac{E_a I_{S_a}^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \Omega t + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \Omega t \right)^2 dy + \frac{E_a I_{S_a}^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \Omega t + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \Omega t \right)^2 dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} F^{cen} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos \Omega t - \frac{\partial w}{\partial y} \sin \Omega t \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin \Omega t + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \Omega t \right)^2 \right) dy \\
 & + \frac{G_a S_a \kappa_a^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) \cos \Omega t - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \sin \Omega t \right)^2 dy \\
 & + \frac{G_a S_a \kappa_a^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) \sin \Omega t + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \cos \Omega t \right)^2 dy \quad (\text{II.141})
 \end{aligned}$$

En développant l'équation (II.141), il vient :

$$\begin{aligned}
 U_a = & \frac{E_a I_{S_a}^z}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \\
 & + \frac{E_a I_{S_a}^x}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t - 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} F^{cen} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} F^{cen} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \\
 & + \frac{G_a \kappa_a^x S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2 \cos^2 \Omega t + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \sin^2 \Omega t - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy \\
 & + \frac{G_a \kappa_a^z S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2 \sin^2 \Omega t + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \cos^2 \Omega t + 2 \left(\psi + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) \cos \Omega t \sin \Omega t \right) dy
 \end{aligned} \tag{II.142}$$

La dissymétrie de la section de l'élément d'arbre (c'est-à-dire $\kappa_a^x \neq \kappa_a^z$) conduit aux quantités suivantes :

$$\kappa_a^{mo} = \frac{\kappa_a^x + \kappa_a^z}{2} \tag{II.143}$$

$$\kappa_a^{di} = \frac{\kappa_a^x - \kappa_a^z}{2} \tag{II.144}$$

ce qui donne :

$$\kappa_a^x = \kappa_a^{mo} + \kappa_a^{di} \tag{II.145}$$

$$\kappa_a^z = \kappa_a^{mo} - \kappa_a^{di} \tag{II.146}$$

où :

- κ_a^{mo} et κ_a^{di} sont respectivement le coefficient moyen de réduction de section et celui relatif à la dissymétrie de la section de l'élément d'arbre.

Après avoir pris en compte les équations (II.74) et (II.75) permettant de séparer les termes liés aux effets dus à l'inertie moyenne de section de ceux relatifs aux effets de l'inertie modélisant la dissymétrie de la section de l'élément d'arbre et reporté les équations (II.118), (II.145) et (II.146) dans (II.142), l'expression finale de l'énergie de déformation U_a peut ainsi s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
 U_a = & \frac{E_a I_{S_a}^{mo}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) dy + \frac{G_a \kappa_a^{mo} S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \right) dy \\
 & - \frac{1}{2} \left(E_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) dy - G_a \kappa_a^{di} S_a \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right)^2 \right) dy \right) \cos 2\Omega t \\
 & - \left(E_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + G_a \kappa_a^{di} S_a \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \psi \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \right) dy \right) \sin 2\Omega t \\
 & + \frac{\rho_a S_a}{4} \int_{y_1}^{y_2} \left((l_a + y_1)^2 - y^2 \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dy (\omega^{x^2} + \omega^{z^2})
 \end{aligned} \tag{II.147}$$

La différence des inerties de la surface plane S_a de l'élément d'arbre dans les directions orthogonales Ox et Oz du repère R montre des termes périodiques de période $\tau = \pi/\Omega$ dans les équations différentielles du mouvement du rotor.

Remarque : dans le cas d'une poutre d'EULER-BERNOULLI, les effets de cisaillement sont négligés (c'est-à-dire $2\epsilon^{x'y'} = 2\epsilon^{y'z'} = 0$) et les relations entre les rotations ψ et θ supposées petites et les déplacements u et w sont exprimées par :

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.148})$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II.149})$$

En insérant les équations (II.148) et (II.149) dans (II.147), l'expression de l'énergie de déformation de l'élément d'arbre modélisé par la poutre d'EULER-BERNOULLI est obtenue par :

$$U_a = \frac{E_a I_{S_a}^{mo}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy - \frac{E_a I_{S_a}^{di}}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \cos 2\Omega t$$

$$+ E_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \sin 2\Omega t + \frac{\rho_a S_a}{4} \int_{y_1}^{y_2} \left((l_a + y_1)^2 - y^2 \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dy (\omega^{x^2} + \omega^{z^2}) \quad (\text{II.150})$$

II.5.3 Balourd

En général, le balourd est réparti de manière continue et quelconque tout au long du rotor comme le montre la figure **FIG. II.16**. Il rend le centre de masse de l'ensemble du rotor non situé sur l'axe de rotation et provient des défauts de symétrie. Les origines multiples de ces défauts sont les suivantes :

- les inhomogénéités de matériaux,
- la géométrie des pièces tournantes (défauts de fabrication),
- l'assemblage des pièces tournantes,
- les conditions de service.

Une procédure appelée « équilibrage de rotors » consiste à minimiser le balourd installé sur le rotor mais ne conduit pas à son annulation complète.

Le balourd est supposé composé de masses concentrées (balourds discrets) qui ne sont pas dans un même plan mais dans différents plans normaux à l'axe Oy du repère R contenant les sections droites de l'arbre non déformé comme illustré en figure **FIG. II.17**. Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor. L'énergie cinétique d'un balourd discret est calculée.

A l'arrêt, la position de chaque masse m_b supposée connue est définie par (figure **FIG. II.17**) :

- la distance r_b qui la sépare du centre géométrique C^{ini} de la section droite de l'arbre non déformé,
- l'angle initial η_b qu'elle fait avec l'axe Oz du système de référence R ,
- son abscisse y_b sur l'axe Oy restant une constante par rapport au support lors du mouvement du rotor.

Remarque : puisque l'axe $O^i z^i$ du repère tournant R^i coïncide avec l'axe Oz du repère lié au support R à l'arrêt, le balourd discret m_b fait un angle η_b appelé « angle du balourd » avec $O^i z^i$ lors de la rotation du rotor car le repère R^i tourne à la même vitesse que le balourd.

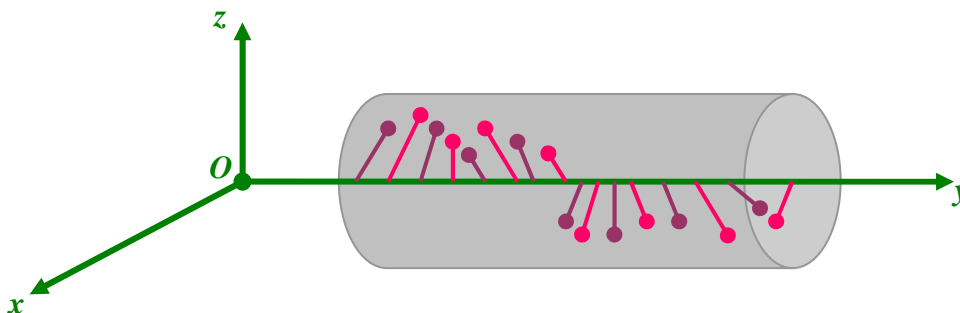


FIG. II.16 : Répartition continue et quelconque du balourd sur le rotor

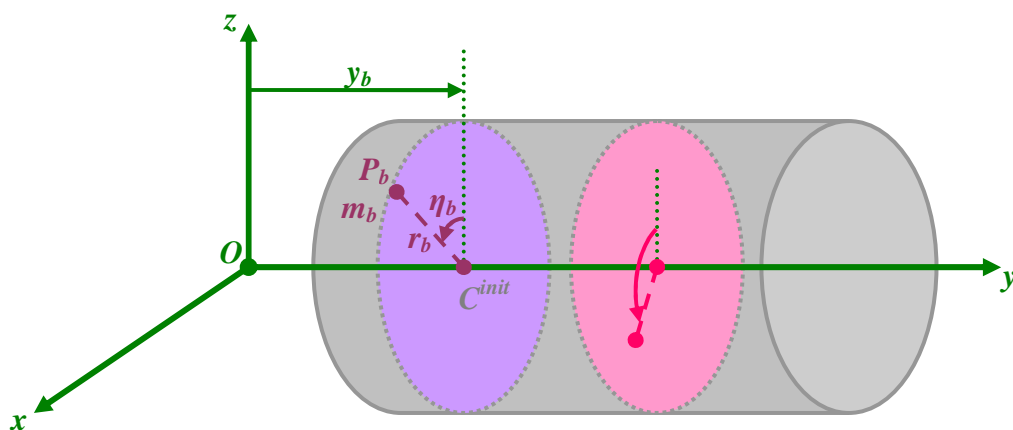


FIG. II.17 : Modélisation du balourd par des masses concentrées

Soit une section droite S_a de l'arbre non déformé dont le centre géométrique C^{init} est de coordonnées $(0, y_b, 0)$ dans le référentiel R . Lorsque le rotor est soumis à un mouvement en raison de sa rotation et/ou de la mobilité de son support, l'arbre devient déformé et le centre géométrique de la section droite S_a est représenté par le point C localisé sur la fibre neutre. En supposant que le balourd discret m_b positionné au point P_b de la section S_a reste contenu dans le même plan perpendiculaire à l'axe Oy qu'à l'arrêt, ses coordonnées par rapport au support (figure FIG. II.18) sont exprimées dans le repère R par :

$$\overline{OP_b} = \overline{OC^{init}} + \overline{C^{init}O_b} + \overline{O_bP_b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_b \\ 0 \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} u_b \\ 0 \\ w_b \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} r_b \sin(\Omega t + \eta_b) \\ 0 \\ r_b \cos(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} u_b + r_b \sin(\Omega t + \eta_b) \\ y_b \\ w_b + r_b \cos(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.151})$$

où :

- u_b et w_b sont les coordonnées en mouvement transversal au centre géométrique C de l'arbre contenant le balourd.

Les coordonnées du balourd par rapport au sol R^s sont projetées dans R par :

$$\overline{O^s P_b} = \overline{O^s O} + \overline{O P_b} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} u_b + r_b \sin(\Omega t + \eta_b) \\ y_b \\ w_b + r_b \cos(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b) \\ y_b + y_o \\ w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.152})$$

En utilisant la formule de dérivation composée (formule de BOUR), la vitesse du balourd par rapport au repère fixe R^s (vitesse absolue) exprimée dans R est alors calculée :

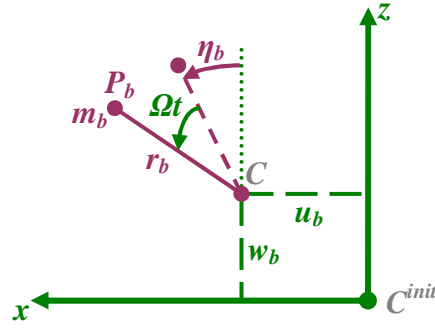
$$\overrightarrow{v_{P_b}^{R^s}} = \frac{d\overline{O^s P_b}^{R^s}}{dt} = \frac{d\overline{O P_b}^R}{dt} + \overrightarrow{\omega_R^{R^s}} \wedge \overline{O P_b} \quad (\text{II.153})$$

Puisque la coordonnée y_b selon l'axe Oy est considérée comme une constante temporelle par rapport au support, sa dérivée temporelle par rapport au repère R est nulle. Soit :

$$\overrightarrow{v_{P_b}^{R^s}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_b + \dot{x}_o + r_b \Omega \cos(\Omega t + \eta_b) \\ \dot{y}_o \\ \dot{w}_b + \dot{z}_o - r_b \Omega \sin(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{Bmatrix}_R \wedge \begin{Bmatrix} u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b) \\ y_b + y_o \\ w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.154})$$

ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{v_{P_b}^{R^s}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_b + \dot{x}_o + r_b \Omega \cos(\Omega t + \eta_b) + (w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b)) \omega^y - (y_b + y_o) \omega^z \\ \dot{y}_o - (w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b)) \omega^x + (u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b)) \omega^z \\ \dot{w}_b + \dot{z}_o - r_b \Omega \sin(\Omega t + \eta_b) + (y_b + y_o) \omega^x - (u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b)) \omega^y \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.155})$$


 FIG. II.18 : Coordonnées du balourd discret m_b positionné au point P_b exprimées dans le repère R

L'énergie cinétique T_b du balourd discret s'écrit :

$$T_b = \frac{m_b}{2} \left(\begin{matrix} -R^s \\ v_{P_b} \end{matrix} \right)^2 \quad (\text{II.156})$$

En remplaçant le vecteur $\begin{matrix} -R^s \\ v_{P_b} \end{matrix}$ par ses composantes données par l'équation (II.155) dans (II.156), il vient :

$$\begin{aligned} T_b = & \frac{m_b}{2} \left(\left(\dot{u}_b + \dot{x}_o + r_b \Omega \cos(\Omega t + \eta_b) + (w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b)) \omega^y - (y_b + y_o) \omega^z \right)^2 \right. \\ & + \left(\dot{y}_o - (w_b + z_o + r_b \cos(\Omega t + \eta_b)) \omega^x + (u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b)) \omega^z \right)^2 \\ & \left. + \left(\dot{w}_b + \dot{z}_o - r_b \Omega \sin(\Omega t + \eta_b) + (y_b + y_o) \omega^x - (u_b + x_o + r_b \sin(\Omega t + \eta_b)) \omega^y \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.157})$$

Les termes de l'équation (II.157) sont regroupés de manière à obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_b = & \frac{m_b}{2} t_1(y_b, t) + \frac{m_b r_b^2}{2} \left((\Omega + \omega^y)^2 + (\omega^x \cos(\Omega t + \eta_b) - \omega^z \sin(\Omega t + \eta_b))^2 \right) \\ & + m_b r_b \left((\dot{u}_b + \dot{x}_o + (w_b + z_o) \omega^y - (y_b + y_o) \omega^z) (\Omega + \omega^y) \cos(\Omega t + \eta_b) \right. \\ & - (\dot{y}_o - (w_b + z_o) \omega^x + (u_b + x_o) \omega^z) (\omega^x \cos(\Omega t + \eta_b) - \omega^z \sin(\Omega t + \eta_b)) \\ & \left. - (\dot{w}_b + \dot{z}_o + (y_b + y_o) \omega^x - (u_b + x_o) \omega^y) (\Omega + \omega^y) \sin(\Omega t + \eta_b) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.158})$$

Le terme $\frac{m_b r_b^2}{2} \left((\Omega + \omega^y)^2 + (-\omega^x \cos(\Omega t + \eta_b) + \omega^z \sin(\Omega t + \eta_b))^2 \right)$ a une contribution nulle dans les équations du mouvement puisqu'il n'est pas fonction des coordonnées en mouvement u_b et w_b . De plus, la masse m_b fait partie de la masse totale du rotor, déjà comptabilisée. L'expression finale de l'énergie cinétique T_b du balourd s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_b = & m_b r_b \left((\dot{u}_b + \dot{x}_o + (w_b + z_o) \omega^y - (y_b + y_o) \omega^z) (\Omega + \omega^y) \cos(\Omega t + \eta_b) \right. \\ & - (\dot{y}_o - (w_b + z_o) \omega^x + (u_b + x_o) \omega^z) (\omega^x \cos(\Omega t + \eta_b) - \omega^z \sin(\Omega t + \eta_b)) \\ & \left. - (\dot{w}_b + \dot{z}_o + (y_b + y_o) \omega^x - (u_b + x_o) \omega^y) (\Omega + \omega^y) \sin(\Omega t + \eta_b) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.159})$$

Les forces extérieures obtenues par l'application des équations de LAGRANGE à l'énergie cinétique du balourd contiennent des forces centripètes et centrifuges, des forces tangentielles sinusoïdales et des forces sinusoïdales fixées dans l'espace par rapport au repère R , c'est-à-dire qu'elles correspondent non seulement à des forces synchrones (comme dans le cas de rotors classiques dont le support est fixe) mais aussi à des forces asynchrones et des forces harmoniques de direction fixée. Ainsi en présence de rotations sinusoïdales du support, l'excitation due au balourd combinée avec les rotations du support est sinusoïdale et possède non seulement une fréquence égale à la vitesse de rotation Ω du rotor mais aussi une combinaison de fréquences de la vitesse de rotation du rotor et de la rotation du support.

II.5.4 Palier hydrodynamique

La figure **FIG. II.19** montre une représentation simple d'un palier circulaire hydrodynamique. Ce dernier est également connu sous le nom « palier lisse ». Ce type de paliers est constitué d'un coussinet fixe contenant un arbre tournant et un film d'huile séparant ces deux composants. Les points O et O' représentent respectivement le centre du palier et le centre géométrique de l'arbre. Le rayon, la longueur, le jeu radial et la viscosité dynamique du palier sont respectivement r_p , l_p , $j_p = r_p - r_a$ et μ_p (où r_a est le rayon de l'arbre).

Alors à une vitesse de rotation constante Ω du rotor et pour une charge statique constante W_r (voir la figure **FIG. II.19**), le centre de l'arbre O' dans le palier ne coïncide pas avec le centre O du palier et occupe une position d'équilibre statique C_p^0 définie par le vecteur des déplacements $\{\delta_p^0\} = \langle u_p^0, w_p^0 \rangle_R^T$ exprimé dans le repère lié au support R ou de manière équivalente par l'intermédiaire du repère polaire attaché au palier $R^{po}(ta, ra)$, c'est-à-dire à la fois par l'excentricité statique $e_p^0 = \|\{\delta_p^0\}\|$ du centre géométrique de l'arbre dans le palier et par l'angle de calage statique φ_p^0 entre la direction de la charge W_r et la ligne des centres OO' .

En régime dynamique, la distribution de pression du film de fluide dans le palier est gouvernée par l'équation de REYNOLDS et son intégration sur le palier donne les forces hydrodynamiques extérieures $\{F_p\} = \langle F_p^u, F_p^w \rangle_R^T$ qui agissent sur l'arbre et qui sont projetées dans le repère cartésien lié au support R . En désignant la variation dynamique de la position du centre géométrique de l'arbre dans le palier en raison de la variation dynamique des forces appliquées au rotor (c'est-à-dire le balourd, les forces du film d'huile et les excitations du support), le vecteur des déplacements transversaux dynamiques du centre de l'arbre est défini par $\{\delta_p\} = \langle u_p, w_p \rangle_R^T$. Les coordonnées polaires dynamiques du centre de l'arbre dans le palier exprimées dans le repère $R^{po}(ta, ra)$ sont l'excentricité dynamique relative ε_p (déplacement radial dynamique relatif) et l'angle de calage dynamique φ_p (voir la figure **FIG. II.19**). Ces coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont exprimées ci-après :

$$\varepsilon_p = \frac{e_p}{j_p} = \frac{\sqrt{u_p^2 + w_p^2}}{j_p} \quad (\text{II.160})$$

$$\tan \varphi_p = \frac{u_p}{w_p} \quad (\text{II.161})$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\dot{u}_p u_p + \dot{w}_p w_p}{j_p^2 \varepsilon_p} \quad (\text{II.162})$$

$$\dot{\varphi}_p = \frac{\dot{u}_p w_p - \dot{w}_p u_p}{j_p^2 \varepsilon_p^2} \quad (\text{II.163})$$

Dans le cadre de cette étude, la théorie des paliers courts est considérée (c'est-à-dire $l_p/d_p \leq 1/8$ où $d_p = 2r_p$). En assumant un écoulement isotherme et laminaire d'un fluide isovisqueux et incompressible, les composantes dynamiques tangentielle et radiale des efforts hydrodynamiques dans le repère polaire attaché au palier R^{po} peuvent être analytiquement déduites de l'intégration du champ de pression de fluide hydrodynamique basé sur l'équation de REYNOLDS utilisant les conditions aux limites de GÜMBEL qui écartent la pression négative de l'intégral de la force. Les expressions de ces deux composantes polaires dynamiques des forces fluides sont établies dans l'**Annexe C** et rappelées ici par :

$$F_p^{ta} = \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2 j_p^2} \frac{\varepsilon_p}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \varepsilon_p^2} (\Omega - 2\dot{\varphi}_p) + 4\dot{\varepsilon}_p \right) \quad (\text{II.164})$$

$$F_p^{ra} = -\frac{\mu_p r_p l_p^3}{2 j_p^2} \frac{1}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \left(2\varepsilon_p^2 (\Omega - 2\dot{\varphi}_p) + \frac{\pi \dot{\varepsilon}_p (1 + 2\varepsilon_p^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon_p^2}} \right) \quad (\text{II.165})$$

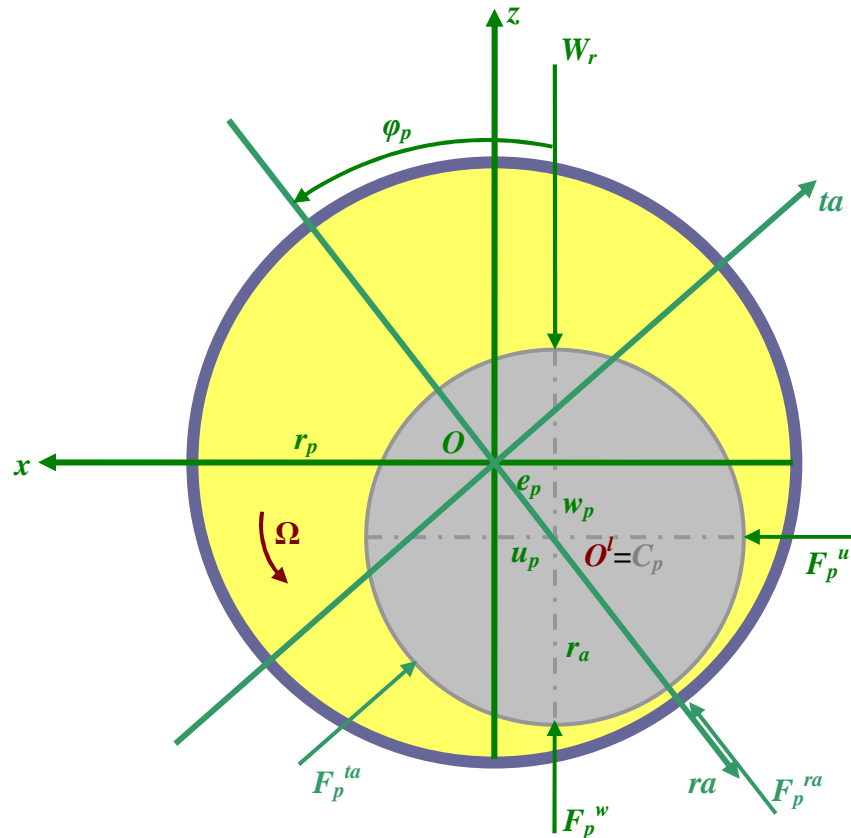


FIG. II.19 : Diagramme schématique d'un palier circulaire hydrodynamique

Les coordonnées de la position statique C_p^0 peuvent être obtenues en rendant nulles les dérivées temporelles de $(\varepsilon_p, \varphi_p)$ dans les équations (II.164) ainsi que (II.165) et la magnitude de la somme vectorielle pour les composantes (F_p^{ta}, F_p^{ra}) égale à la charge statique W_r . Ainsi l'équation non linéaire obtenue est résolue par une méthode itérative de NEWTON-RAPHSON (présentée dans l'Annexe C) et fournit l'excentricité statique relative ε_p^0 et puis le déplacement radial statique e_p^0 du centre de l'arbre dans le palier. Les composantes du vecteur de la position d'équilibre statique $\{\delta_p^0\}$ et celles du vecteur des forces fluides dynamiques $\{F_p\}$ exprimées dans R sont obtenues par un changement classique de repère (figure FIG. II.19) donné comme suit :

$$\{\delta_p^0\} = -[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^{-T} \begin{Bmatrix} 0 \\ e_p^0 \end{Bmatrix}_{R^{p0}} \quad (\text{II.166})$$

$$\{F_p\} = -[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^{-T} \begin{Bmatrix} F_p^{ta} \\ F_p^{ra} \end{Bmatrix}_{R^{p0}} \quad (\text{II.167})$$

où :

- $[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]$ et $[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]$ sont les matrices de rotation du repère polaire R^{p0} par rapport au repère R dans les cas statique et dynamique respectivement (voir l'Annexe C).

Selon les équations (II.160)-(II.165) et (II.167), les composantes du vecteur des forces fluides dynamiques dépendent de manière non linéaire des coordonnées polaires dynamiques $(\varepsilon_p, \varphi_p)$ et de leurs dérivées temporelles. Donc elles sont des fonctions non linéaires du vecteur $\{\delta_p\}$ des déplacements dynamiques en flexion et du vecteur vitesse $\{\dot{\delta}_p\}$ du centre de l'arbre, c'est-à-dire $\{F_p\} = \{F_p(\{\delta_p\}, \{\dot{\delta}_p\})\}$. Puisque la contribution de palier apparaît comme des forces $\{F_p\}$ extérieures au rotor, leur travail virtuel doit être établi afin d'appliquer les équations de LAGRANGE :

$$\delta W_p = \left\{ F_p \left(\{ \delta_p \}, \{ \dot{\delta}_p \} \right) \right\}^T \delta \{ \delta_p \} = F_p^u \delta u_p + F_p^w \delta w_p \quad (\text{II.168})$$

Si les déplacements latéraux dynamiques $\{ \delta_p \}$ de la ligne moyenne de l'arbre dans le palier sont supposés être très petits au voisinage de la position d'équilibre statique $\{ \delta_p^0 \}$, l'analyse linéaire d'un palier hydrodynamique est appliquée. Ce processus de linéarisation est basé sur un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 des forces fluides dynamiques $\left\{ F_p \left(\{ \delta_p \}, \{ \dot{\delta}_p \} \right) \right\}$ du film d'huile au voisinage des forces hydrodynamiques statiques $\left\{ F_p \left(\{ \delta_p^0 \}, \{ 0 \} \right) \right\}$ comme suit :

$$\left\{ F_p \left(\{ \delta_p \}, \{ \dot{\delta}_p \} \right) \right\} = \left\{ F_p \left(\{ \delta_p^0 \}, \{ 0 \} \right) \right\} - [c_p] \{ \Delta \dot{\delta}_p \} - [k_p] \{ \Delta \delta_p \} \quad (\text{II.169})$$

avec :

$$[c_p] = - \left. \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ \dot{\delta}_p \}} \right|_{(\{ \delta_p^0 \}, \{ 0 \})} = \begin{bmatrix} c_p^{xx} & c_p^{xz} \\ c_p^{zx} & c_p^{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.170})$$

$$[k_p] = - \left. \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ \delta_p \}} \right|_{(\{ \delta_p^0 \}, \{ 0 \})} = \begin{bmatrix} k_p^{xx} & k_p^{xz} \\ k_p^{zx} & k_p^{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.171})$$

$$\{ \Delta \delta_p \} = \{ \delta_p \} - \{ \delta_p^0 \} \quad (\text{II.172})$$

$$\{ \Delta \dot{\delta}_p \} = \{ \dot{\delta}_p \} \quad (\text{II.173})$$

où :

- c_p^{xx} et k_p^{xx} sont respectivement le coefficient d'amortissement et la raideur dans la direction Ox du repère lié au support R ,
- c_p^{xz} et k_p^{xz} sont respectivement le coefficient d'amortissement et la raideur de couplage produisant des forces dans la direction Ox sous l'effet d'un déplacement dans la direction Oz ,

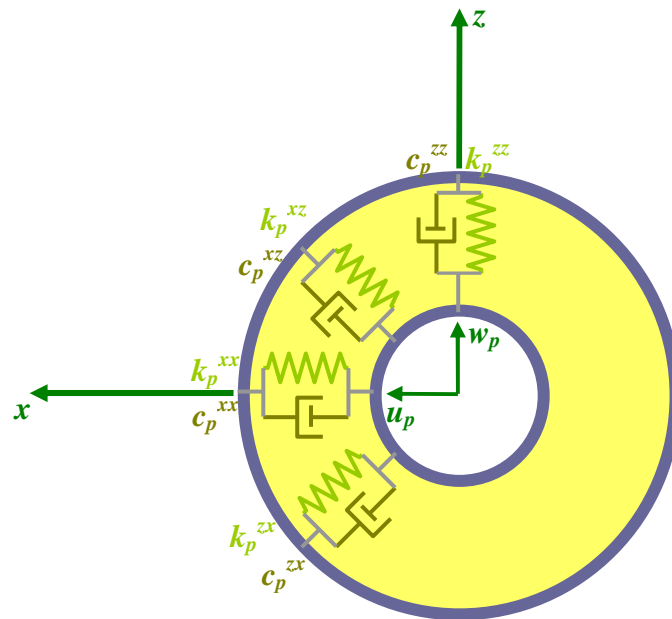


FIG. II.20 : Coefficients d'amortissement et de raideur du modèle linéaire de palier

- c_p^{zx} et k_p^{zx} sont respectivement le coefficient d'amortissement et la raideur de couplage produisant des forces dans la direction Oz sous l'effet d'un déplacement dans la direction Ox ,
- c_p^{zz} et k_p^{zz} sont respectivement le coefficient d'amortissement et la raideur dans la direction Oz .

Le vecteur $\{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\}$ des forces statiques du palier hydrodynamique est relié au vecteur des déplacements statiques $\{\delta_p^0\}$ et doit équilibrer la charge constante W_r induite par le poids du rotor. Les matrices d'amortissement $[c_p]$ et de raideur $[k_p]$ du palier hydrodynamique linéarisé sont caractérisées par huit coefficients (soient quatre coefficients pour chaque matrice), voir la figure **FIG. II.20**, et dépendent seulement de la position statique $\{\delta_p^0\}$. En effet, elles sont plus faciles à obtenir dans le repère polaire R^{po} , c'est-à-dire $[c_p^{R^{po}}]$ et $[k_p^{R^{po}}]$. Pour cela, il est nécessaire d'exécuter une transformation entre les repères R^{po} et R pour produire les matrices $[c_p]$ et $[k_p]$ de la manière suivante :

$$[c_p] = [\mathfrak{R}_{R^{po}}^R]^T [c_{be}^{R^{po}}] [\mathfrak{R}_{R^{po}}^R] \quad (\text{II.174})$$

$$[k_p] = [\mathfrak{R}_{R^{po}}^R]^T [k_p^{R^{po}}] [\mathfrak{R}_{R^{po}}^R] \quad (\text{II.175})$$

Les expressions des composantes des matrices d'amortissement $[c_p^{R^{po}}]$ et de raideur $[k_p^{R^{po}}]$ sont présentées dans l'**Annexe C**.

Remarque : le palier est appelé « isotrope » ou « symétrique » si les termes diagonaux (c_p^{xx}, c_p^{zz}) et (k_p^{xx}, k_p^{zz}) sont deux à deux égaux et si les termes extra-diagonaux (c_p^{xz}, c_p^{zx}) et (k_p^{xz}, k_p^{zx}) sont deux à deux de signes contraires. Fréquemment, dans le cas de palier hydrodynamique, les composantes diagonales des matrices d'amortissement et de raideur ne sont pas identiques, c'est-à-dire $c_p^{xx} \neq c_p^{zz}$ et $k_p^{xx} \neq k_p^{zz}$.

II.6 Conclusion

Ce chapitre concerne la modélisation des composants d'un rotor embarqué : disque rigide, arbre flexible, balourd concentré et palier élastique. Les six mouvements du support rigide (trois rotations et trois translations), l'inertie de rotation des sections droites, l'inertie gyroscopique, les déformations de cisaillement de l'arbre ainsi que la dissymétrie géométrique du disque et/ou de l'arbre sont pris en compte. Les énergies cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel sont établis pour un observateur lié au sol et sont exprimés par rapport au repère lié au support mobile. Les effets de raidissement géométrique dus aux contraintes centrifuges dues à la rotation du support sont considérés lors du calcul de l'énergie de déformation de l'arbre. La théorie des paliers courts est choisie pour les paliers hydrodynamiques lisses. Le champ de pression du film de fluide dans le palier est trouvé à partir de l'équation de REYNOLDS. Son intégration et l'utilisation des conditions aux limites de GÜMBEL conduisent aux forces hydrodynamiques qui sont des fonctions non linéaires du déplacement et de la vitesse du centre géométrique de l'arbre. Lorsque les déplacements latéraux dynamiques de la ligne moyenne de l'arbre dans le palier restent très petits au voisinage de la position d'équilibre statique, il est possible d'approximer le comportement des paliers à l'aide de matrices d'amortissement et de raideur.

CHAPITRE III

EQUATIONS DU MOUVEMENT

Sommaire

III.1	Introduction.....	64
III.2	Méthode de RAYLEIGH-RITZ.....	64
	III.2.1 Mise en équation.....	64
	III.2.2 Equations du mouvement.....	66
III.3	Méthode des éléments finis.....	69
	III.3.1 Disque.....	69
	III.3.2 Arbre	73
	III.3.3 Balourd	76
	III.3.4 Palier	77
	III.3.5 Equations du mouvement.....	77
III.4	Configurations rencontrées	79

III.1 Introduction

Il est difficile voire impossible de trouver des solutions analytiques d'un problème mécanique relatif à des structures déformables industrielles. Ce type de solutions ne peut être recherché que pour des cas d'école, des structures de géométrie très simple, élaborées avec des matériaux homogènes et munies de liaisons bien définies, etc.

Dans un premier temps, des modélisations rendant compte des comportements de base des différents composants d'un système industriel permettent d'analyser les phénomènes engendrés.

Dans un deuxième temps, des méthodes d'approximation reliées à des techniques numériques sont utilisées afin d'obtenir de manière approchée les équations différentielles du mouvement et puis la solution du problème mécanique. Ces méthodes sont fréquemment basées sur des formulations matricielles de l'élasticité et exploitent le grand développement des logiciels de calcul sur l'ordinateur.

La mécanique des structures flexibles s'intéresse à la détermination des champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Dans ce contexte, les hypothèses suivantes sont retenues :

- les matériaux homogènes ont un comportement élastique linéaire,
- le chargement est appliqué de telle sorte que la relation entre le champ de déplacements et celui de déformations est toujours linéaire et que les déformations restent petites,
- il existe un potentiel de déformation.

A partir des relations entre les différents champs, l'approche cinématique est adoptée grâce à sa simplicité de mise en œuvre. Elle est la plus commune afin de construire les formulations matricielles de type cinématique utilisées dans les logiciels de calcul. Dans cette approche, il s'agit de privilégier la connaissance des déplacements et en déduire les déformations et les contraintes, c'est-à-dire que les relations sont exprimées en fonction des déplacements qui sont les inconnues du problème de la structure flexible.

Après avoir déterminé les différentes énergies et le travail virtuel des forces généralisées des composants du rotor, il convient à présent de choisir une technique numérique basée sur des méthodes d'approximation afin de décrire les déplacements dus à la flexion d'un rotor embarqué par rapport au support en fonction des coordonnées généralisées utilisées dans l'étude puisqu'il n'existe pas de solution analytique du problème considéré.

A partir de l'approche cinématique, deux méthodes d'approximation du champ de déplacements peuvent être employées afin d'établir les équations différentielles du mouvement vibratoire du rotor embarqué :

- ✦ **Méthode de RAYLEIGH-RITZ** : elle utilise peu de degrés de liberté pour écrire les équations du mouvement. Cette méthode est généralement utile dans le cadre d'une étude des phénomènes de base.
- ✦ **Méthode des éléments finis** : elle permet de décrire plus complètement le système étudié. Ladite méthode est utile dans le cadre d'une étude et d'une conception des systèmes complexes et des rotors industriels.

III.2 Méthode de RAYLEIGH-RITZ

La méthode d'approximation appelée « RAYLEIGH-RITZ » consiste à remplacer le champ continu inconnu par un nombre fini de coefficients inconnus. Elle permet de développer un modèle simple afin d'examiner les phénomènes souhaitables lorsque le support rigide est en mouvement. La troncature de l'expansion de RAYLEIGH-RITZ aboutit à un champ de déplacements plus petit que la solution exacte. Donc le modèle approché est plus rigide que le modèle exact. Le principe de la méthode de RAYLEIGH-RITZ est brièvement rappelé ci-après.

III.2.1 Mise en équation

La méthode de RAYLEIGH-RITZ conduit à définir les déplacements u et w à un point quelconque de la ligne moyenne de l'arbre en flexion suivant les axes Ox et Oz respectivement dans le repère lié au support R en utilisant des variables d'espace et du temps séparées, c'est-à-dire :

$$u = \sum_{i=1}^{n_q} f_i^d(y) q_i^u(t) = \left\langle f_1^d(y), \dots, f_i^d(y), \dots, f_{n_q}^d(y) \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^u(t) \\ \vdots \\ q_i^u(t) \\ \vdots \\ q_{n_q}^u(t) \end{Bmatrix} = \left\langle f^d(y) \right\rangle \{q^u(t)\} \quad (\text{III.1})$$

$$w = \sum_{i=1}^{n_q} f_i^d(y) q_i^w(t) = \left\langle f_1^d(y), \dots, f_i^d(y), \dots, f_{n_q}^d(y) \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^w(t) \\ \vdots \\ q_i^w(t) \\ \vdots \\ q_{n_q}^w(t) \end{Bmatrix} = \left\langle f^d(y) \right\rangle \{q^w(t)\} \quad (\text{III.2})$$

où :

- n_q est le nombre de degrés de liberté utilisés pour chaque déplacement dans les directions Ox et Oz ,
- $f_i^d(y)$ (pour $i=1\dots n_q$) sont les fonctions de déplacement choisies, cinématiquement admissibles et linéairement indépendantes,
- $q_i^u(t)$ et $q_i^w(t)$ (pour $i=1\dots n_q$) sont les coordonnées généralisées indépendantes (degrés de liberté ou coefficients inconnus).

Remarque : les fonctions de déplacement forment une base fonctionnelle, satisfont les conditions aux limites et respectent la complétude : n'importe quelle fonction peut être représentée en augmentant le nombre de degrés de liberté.

Notation : par la suite, afin de faciliter l'écriture des équations utilisées dans l'étude, les coordonnées dépendantes du temps $q_i^u(t)$, $q_i^w(t)$ et les fonctions spatiales $f_i^d(y)$ sont abrégées par q_i^u , q_i^w et f_i^d .

Les angles de précession ψ (rotation autour de l'axe Oz) et de nutation θ (rotation autour de l'axe Ox) sont petits et ils sont alors approximés (selon la poutre d'EULER-BERNOULLI) par (figure FIG. III.1) :

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n_q} \frac{df_i^d}{dy} q_i^u = -\left\langle \frac{df_1^d}{dy}, \dots, \frac{df_i^d}{dy}, \dots, \frac{df_{n_q}^d}{dy} \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^u \\ \vdots \\ q_i^u \\ \vdots \\ q_{n_q}^u \end{Bmatrix} = -\left\langle \frac{df^d}{dy} \right\rangle \{q^u\} \quad (\text{III.3})$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n_q} \frac{df_i^d}{dy} q_i^w = \left\langle \frac{df_1^d}{dy}, \dots, \frac{df_i^d}{dy}, \dots, \frac{df_{n_q}^d}{dy} \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^w \\ \vdots \\ q_i^w \\ \vdots \\ q_{n_q}^w \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{df^d}{dy} \right\rangle \{q^w\} \quad (\text{III.4})$$

L'expression de l'énergie de déformation nécessite les dérivées du second ordre des déplacements u et w par rapport à la variable y . Les expressions de ces dérivées sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n_q} \frac{d^2 f_i^d}{dy^2} q_i^u = \left\langle \frac{d^2 f_1^d}{dy^2}, \dots, \frac{d^2 f_i^d}{dy^2}, \dots, \frac{d^2 f_{n_q}^d}{dy^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^u \\ \vdots \\ q_i^u \\ \vdots \\ q_{n_q}^u \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{d^2 f^d}{dy^2} \right\rangle \{q^u\} \quad (\text{III.5})$$

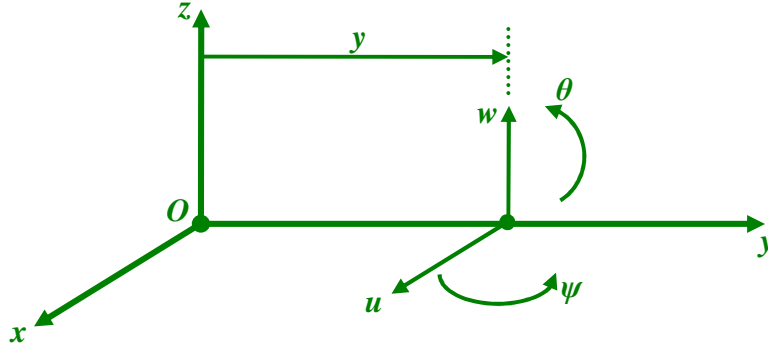


FIG. III.1 : Degrés de liberté d'une poutre en flexion

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n_q} \frac{d^2 f_i^d}{dy^2} q_i^w = \left\langle \frac{d^2 f_1^d}{dy^2}, \dots, \frac{d^2 f_i^d}{dy^2}, \dots, \frac{d^2 f_{n_q}^d}{dy^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} q_1^w \\ \vdots \\ q_i^w \\ \vdots \\ q_{n_q}^w \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{d^2 f^d}{dy^2} \right\rangle \{q^w\} \quad (\text{III.6})$$

III.2.2 Equations du mouvement

Après avoir inséré les six dernières équations dans les expressions des énergies et du travail virtuel définies dans le **Chapitre II** et calculé la somme des énergies cinétiques des composants du rotor embarqué, les équations de LAGRANGE sont appliquées sous la forme donnée par l'équation (II.1). Après calcul et prise en compte du nombre de disques, de balourds discrets et de paliers que le rotor comporte, les équations différentielles du mouvement de flexion d'un rotor embarqué sont écrites sous la forme matricielle suivante :

$$[M_r(t)]\{\ddot{q}\} + [C_r(t)]\{\dot{q}\} + [K_r(t)]\{q\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{q\}, \{\dot{q}\})\} \quad (\text{III.7})$$

avec :

$$[M_r(t)] = [M_{d,a}] + [M_{d,a}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{d,a}^{s_2}] \sin 2\Omega t \quad (\text{III.8})$$

$$[C_r(t)] = [C_{d,a}^g] \Omega + [C_{d,a}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t + [C_{d,a}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t + [C_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \omega^y \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{aligned} [K_r(t)] = & [K_a^e] + [K_a^{e,c_2}] \cos 2\Omega t + [K_a^{e,s_2}] \sin 2\Omega t + [K_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y}] \Omega \omega^y \\ & + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2}}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{x^2}}] \right) \omega^{x^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2}}] \omega^{y^2} + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^{z^2}}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{z^2}}] \right) \omega^{z^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z}] \omega^x \omega^z \\ & + \left([K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,c_2}] \right) \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},c_2}] \omega^{x^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},c_2}] \omega^{y^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{z^2},c_2}] \omega^{z^2} \\ & + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,c_2}] \omega^x \omega^z \cos 2\Omega t + \left([K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,s_2}] \right) \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},s_2}] \omega^{x^2} \\ & + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},s_2}] \omega^{y^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,s_2}] \omega^x \omega^z \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$\{F_r(t)\} = \{F_{d,a}^{w_r}\} + \{F_b(t)\} + \{F_{b,su}(t)\} + \{F_{d,a,su}(t)\} + \{F_{d,a,su}^{c_2}(t)\} \cos 2\Omega t + \{F_{d,a,su}^{s_2}(t)\} \sin 2\Omega t \quad (\text{III.11})$$

d'où :

$$[M_{d,a}] = \begin{bmatrix} [M_{d,a,1}] & [0] \\ [0] & [M_{d,a,1}] \end{bmatrix}; [M_{d,a}^{c_2}] = \begin{bmatrix} -[M_{d,a,2}] & [0] \\ [0] & [M_{d,a,2}] \end{bmatrix}; [M_{d,a}^{s_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [M_{d,a,2}] \\ [M_{d,a,2}] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{aligned} [C_{d,a}^g] &= \begin{bmatrix} [0] & -[C_{d,a,1}^g] \\ [C_{d,a,1}^g] & [0] \end{bmatrix}; [C_{d,a}^{g,c_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [C_{d,a,2}^g] \\ [C_{d,a,2}^g] & [0] \end{bmatrix}; [C_{d,a}^{g,s_2}] = \begin{bmatrix} [C_{d,a,2}^g] & [0] \\ [0] & -[C_{d,a,2}^g] \end{bmatrix}, \\ [C_{d,a,su}^{er,\omega^y}] &= \begin{bmatrix} [0] & [C_{d,a,su,1}^{er}] \\ -[C_{d,a,su,1}^{er}] & [0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.13)$$

$$[K_a^e] = \begin{bmatrix} [K_{a,1}^e] & [0] \\ [0] & [K_{a,1}^e] \end{bmatrix}; [K_a^{e,c_2}] = \begin{bmatrix} -[K_{a,2}^e] & [0] \\ [0] & [K_{a,2}^e] \end{bmatrix}; [K_a^{e,s_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{a,2}^e] \\ [K_{a,2}^e] & [0] \end{bmatrix} \quad (III.14)$$

$$\begin{aligned} [K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y}] &= \begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,1}^{er}] \\ [K_{d,a,su,2}^{er}] & [0] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y}] = \begin{bmatrix} [K_{d,a,su,3}^{er}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,3}^{er}] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2}}] &= -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,4}^{er}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,5}^{er}] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2}}] = -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,1}^{er}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,1}^{er}] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^{z^2}}] &= -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,5}^{er}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,4}^{er}] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z}] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,1}^{er}] \\ [K_{d,a,su,1}^{er}] & [0] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{x^2}}] &= [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{z^2}}] = \begin{bmatrix} [K_{d,a,su,1}^{erg}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,1}^{erg}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.15)$$

$$\begin{aligned} [K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,c_2}] &= -\begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \\ [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] = -2\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \\ [0] & -[K_{d,a,su,6}^{er}] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},c_2}] &= \begin{bmatrix} [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},c_2}] = -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \\ [0] & -[K_{d,a,su,6}^{er}] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^{z^2},c_2}] &= -\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,c_2}] = -\begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \\ [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.16)$$

$$\begin{aligned} [K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,s_2}] &= -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \\ [0] & -[K_{d,a,su,6}^{er}] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] = 2\begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \\ [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},s_2}] &= -\begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \\ [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \end{bmatrix}; [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},s_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \\ [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \end{bmatrix}, \\ [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,s_2}] &= -\begin{bmatrix} [K_{d,a,su,6}^{er}] & [0] \\ [0] & [K_{d,a,su,6}^{er}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.17)$$

$$\{F_{d,a}^{W_r}\} = -\{V_{d,a}^{W_r}\} W_r \quad (III.18)$$

$$\{F_b(t)\} = \{V_b^{c_1}\} \Omega^2 \cos \Omega t + \{V_b^{s_1}\} \Omega^2 \sin \Omega t \quad (III.19)$$

$$\begin{aligned} \{F_{b,su}(t)\} &= \left(\{V_{b,su}^{\dot{\omega}^y,c_1}\} \dot{\omega}^y + \{V_{b,su}^{\Omega\omega^y,c_1}\} \Omega \omega^y + \{V_{b,su}^{\omega^{x^2},c_1}\} \omega^{x^2} + \{V_{b,su}^{\omega^{y^2},c_1}\} \omega^{y^2} + \{V_{b,su}^{\omega^{z^2},c_1}\} \omega^{z^2} \right. \\ &\quad \left. + \{V_{b,su}^{\omega^x\omega^z,c_1}\} \omega^x \omega^z \right) \cos \Omega t + \left(\{V_{b,su}^{\dot{\omega}^y,s_1}\} \dot{\omega}^y + \{V_{b,su}^{\Omega\omega^y,s_1}\} \Omega \omega^y + \{V_{b,su}^{\omega^{x^2},s_1}\} \omega^{x^2} \right. \\ &\quad \left. + \{V_{b,su}^{\omega^{y^2},s_1}\} \omega^{y^2} + \{V_{b,su}^{\omega^{z^2},s_1}\} \omega^{z^2} + \{V_{b,su}^{\omega^x\omega^z,s_1}\} \omega^x \omega^z \right) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (III.20)$$

$$\begin{aligned} \{F_{d,a,su}(t)\} &= -\{V_{d,a,su}^u\} \left(\ddot{x}_o + 2\dot{z}_o \omega^y - 2\dot{y}_o \omega^z + z_o (\dot{\omega}^y + \omega^x \omega^z) - y_o (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - x_o (\omega^{y^2} + \omega^{z^2}) \right) \\ &\quad - \{V_{d,a,su}^v\} \left(\ddot{z}_o + 2\dot{y}_o \omega^x - 2\dot{x}_o \omega^y + y_o (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) - x_o (\dot{\omega}^y - \omega^x \omega^z) - z_o (\omega^{x^2} + \omega^{y^2}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\{V_{d,a,su}^{yw}\}(\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{yu}\}(\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - \{V_{d,a,su}^{\theta}\}(\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) \\ & -\{V_{d,a,su}^{\psi}\}(\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - \{V_{d,a,su}^{y\psi}\}(\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) + \{V_{d,a,su}^{y\theta}\}(\Omega \omega^z + \omega^y \omega^z) \end{aligned} \quad (III.21)$$

$$\{F_{d,a,su}^{c_2}(t)\} = -\{V_{d,a,su}^{\theta,c_2}\}(\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{y,c_2}\}(\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \quad (III.22)$$

$$\{F_{d,a,su}^{s_2}(t)\} = \{V_{d,a,su}^{\psi,s_2}\}(\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{\theta,s_2}\}(\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \quad (III.23)$$

Les expressions des composantes des matrices et des vecteurs de l'ensemble des équations (III.12)-(III.23) sont données en **Annexe D**.

Remarque : les matrices et les vecteurs trouvés dans le système d'équations différentielles du mouvement (III.7) sont de tailles $2n_q \times 2n_q$ et $2n_q \times 1$.

Il s'agit de présenter la définition des vecteurs et des matrices construisant les équations du mouvement d'un rotor embarqué établies en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ :

- ⇒ $\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q^u\} \\ \{q^w\} \end{Bmatrix} = \langle q_1^u, \dots, q_i^u, \dots, q_{n_q}^u, q_1^w, \dots, q_i^w, \dots, q_{n_q}^w \rangle^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées.
- ⇒ $[M_{d,a}]$, $[C_{d,a}^g]$ et $[K_a^e]$ sont les matrices classiques respectivement de masse, d'effet gyroscopique et de raideur du rotor symétrique correspondant au cas d'un support fixe. Elles présentent des termes constants dans les équations du mouvement quelle que soit la géométrie des disques et de l'arbre.
- ⇒ $[M_{d,a}^{c_2}]$, $[M_{d,a}^{s_2}]$, $[C_{d,a}^{g,c_2}]$, $[C_{d,a}^{g,s_2}]$, $[K_a^{e,c_2}]$ et $[K_a^{e,s_2}]$ sont les matrices respectivement de masse, gyroscopique et de raideur dues à la dissymétrie géométrique du disque et/ou de l'arbre et obtenues dans le cas où le support du rotor est fixe. Chaque matrice est pondérée par une des fonctions trigonométriques $\cos 2\Omega t$ et $\sin 2\Omega t$, c'est-à-dire que des termes périodiques sont produits dans le système différentiel du mouvement.
- ⇒ $[C_{d,a,su}^{er}]$, $[K_{d,a,su}^{er}]$ et $[K_{d,a,su}^{erg}]$ sont les matrices respectivement gyroscopique et de raideur de l'ensemble disque/arbre dues à la mobilité du support rigide. Elles sont pondérées par des fonctions correspondant aux différentes rotations du support. La forme des coefficients des équations du mouvement correspondant à ces matrices dépend uniquement de la nature de la rotation du support.
- ⇒ $[K_{d,a,su}^{er,c_2}]$ et $[K_{d,a,su}^{er,s_2}]$ sont les matrices de raideur dues à la dissymétrie géométrique du disque et/ou de l'arbre et au mouvement du support rigide. Chacune d'entre elles est pondérée par le produit entre une fonction décrivant les mouvements de rotation du support et une des fonctions trigonométriques $\cos 2\Omega t$ et $\sin 2\Omega t$. A partir de ces matrices, des termes périodiques provenant de la géométrie du rotor sont rencontrés dans les équations du mouvement quelle que soit la nature de la rotation du support.
- ⇒ $\{F_{d,a}^{W_r}\}$ est le vecteur du poids du rotor.
- ⇒ $\{F_b(t)\}$ est le vecteur classique des forces dues au balourd dans le cas d'un support fixe. Il est proportionnel au carré de la vitesse de rotation Ω du rotor et change périodiquement avec le temps tel que la période τ est égale à $2\pi/\Omega$.
- ⇒ $\{F_{b,su}(t)\}$ est le vecteur des forces dues au balourd et aux mouvements du support. Il dépend des mobilités de rotation du support et des fonctions trigonométriques $\cos \Omega t$ et $\sin \Omega t$.
- ⇒ $\{F_{d,a,su}(t)\}$ est le vecteur des forces dues aux mobilités de translation et de rotation du support. Ses termes apparaissant dans les équations du mouvement dépendent uniquement des fonctions relatives aux mouvements du support quelle que soit la géométrie du rotor.
- ⇒ $\{F_{d,a,su}^{c_2}(t)\}$ et $\{F_{d,a,su}^{s_2}(t)\}$ sont les vecteurs des forces dues à la dissymétrie géométrique du rotor et aux mouvements de rotation du support. Chacun des vecteurs est pondéré par une des fonctions trigonométriques $\cos 2\Omega t$ et $\sin 2\Omega t$.

III.3 Méthode des éléments finis

Trouver les fonctions de déplacement valables sur tout le domaine étudié n'est possible que dans le cas de rotors de géométrie pas complexe et munis de conditions aux limites simples. Pour cela, il s'agit de développer et de mettre en place un système dont les équations différentielles du mouvement sont établies à l'aide de la méthode des éléments finis afin d'avoir un modèle capable de traiter les machines tournantes réelles et les rotors industriels. En fait, la méthode des éléments finis est largement utilisée dans le domaine de la mécanique des structures et particulièrement en dynamique des rotors, avec l'emploi de méthodes adaptées de résolution numérique.

En ce qui concerne la modélisation des structures, la méthode des éléments finis est généralement décomposée en trois étapes :

- **Interpolation géométrique :** le domaine étudié est divisé en domaines élémentaires de forme géométrique simple appelés « éléments finis ». Cette discrétisation donnant le maillage doit être effectuée de manière à approcher le mieux possible la géométrie et doit gérer le meilleur compromis entre le nombre d'éléments et la précision souhaitée. Les éléments finis sont définis par leur forme, le type de courbe ou de surface de la frontière et le nombre de nœuds géométriques.
- **Approximation nodale :** l'approximation de la solution est exprimée à n'importe quel point sur chaque élément fini en fonction des coordonnées généralisées (degrés de liberté, variables nodales ou déplacements nodaux) définies aux nœuds d'interpolation nodale qui ne sont pas forcément les nœuds géométriques. Ces coordonnées permettent d'exprimer simplement la continuité de la solution et les conditions d'équilibre entre les éléments.
- **Méthode des déplacements :** en prenant comme inconnues les déplacements, la formulation et la résolution du problème sont effectuées à deux niveaux (c'est-à-dire la formulation élémentaire et la formulation globale). Par conséquent, les matrices élémentaires des différents composants du rotor et les vecteurs des forces nodales équivalentes sont déduits, leur assemblage est effectué, les conditions de déplacements imposés nuls (conditions aux limites) sont prises en compte et la forme générale des équations du mouvement en flexion d'un rotor embarqué modélisé par les éléments finis est exposée.

III.3.1 Disque

Le disque est modélisé par un élément fini ed qui contient un nœud situé au centre de masse du disque placé à l'abscisse y_d suivant l'axe Oy du référentiel attaché au support R (figure FIG. III.2). Ce nœud correspond à celui n_i de l'élément fini d'arbre non déformé ea_i où i est le numéro de l'élément fini d'arbre. Il est associé à quatre degrés de liberté (variables nodales au nœud d'interpolation nodale) :

- deux translations $u_{ed}^{n_i}$ et $w_{ed}^{n_i}$ respectivement suivant les axes Ox et Oz du référentiel R ,
- deux rotations $\theta_{ed}^{n_i}$ et $\psi_{ed}^{n_i}$ autour des directions Ox et Oz respectivement.

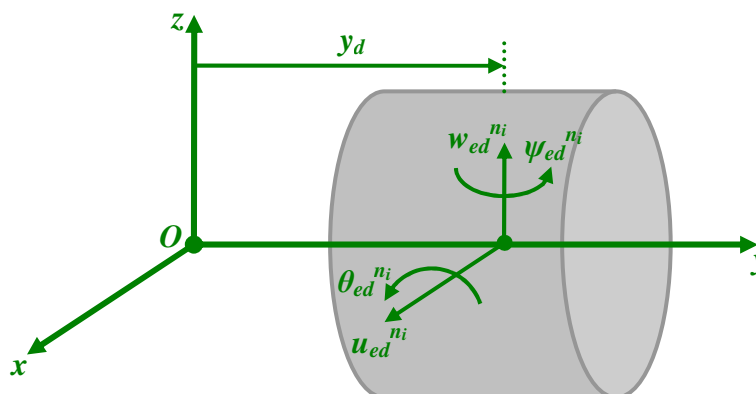


FIG. III.2 : Variables nodales pour un élément fini de disque

Le vecteur des déplacements nodaux $\{\delta_{ed}^n\}$ de l'élément fini de disque ed exprimé dans le référentiel R est de la forme suivante :

$$\{\delta_{ed}^n\} = \langle u_{ed}^{n_i}, w_{ed}^{n_i}, \theta_{ed}^{n_i}, \psi_{ed}^{n_i} \rangle_R^T \quad (III.24)$$

Notation : puisque le vecteur $\{\delta_{ed}^n\}$ est fonction des variables $u_{ed}^{n_i}$, $w_{ed}^{n_i}$, $\theta_{ed}^{n_i}$ et $\psi_{ed}^{n_i}$, il dépend de l'abscisse y_d suivant l'axe Oy et du temps t . Pour simplifier l'écriture des équations utilisées dans ce travail, les variables y_d et t sont omises.

En utilisant l'expression (II.62), l'énergie cinétique de l'élément fini de disque ed s'écrit comme suit :

$$T_{ed} = T_{ed,1} + T_{ed,2} + T_{ed,3} + T_{ed,4} \quad (III.25)$$

$$\begin{aligned} T_{ed,1} = & \frac{1}{2} m_d \left((\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y_d) \omega^z)^2 + (\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)^2 + (\dot{z}_o + (y_o + y_d) \omega^x - x_o \omega^y)^2 + \dot{u}_{ed}^{n_i,2} + \dot{w}_{ed}^{n_i,2} \right. \\ & + 2(\dot{x}_o + z_o \omega^y - (y_o + y_d) \omega^z)(\dot{u}_{ed}^{n_i} + w_{ed}^{n_i} \omega^y) + 2(\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)(\dot{w}_{ed}^{n_i} - u_{ed}^{n_i} \omega^y) \\ & - 2(\dot{y}_o - z_o \omega^x + x_o \omega^z)(w_{ed}^{n_i} \omega^x + u_{ed}^{n_i} \omega^z) + 2(\dot{u}_{ed}^{n_i} w_{ed}^{n_i} - \dot{w}_{ed}^{n_i} u_{ed}^{n_i}) \omega^y + w_{ed}^{n_i,2} \omega^{x2} + (u_{ed}^{n_i,2} + w_{ed}^{n_i,2}) \omega^{y2} \\ & \left. + u_{ed}^{n_i,2} \omega^{z2} - 2u_{ed}^{n_i} w_{ed}^{n_i} \omega^x \omega^z \right) \end{aligned} \quad (III.26)$$

$$\begin{aligned} T_{ed,2} = & \frac{1}{2} I_{m_d}^{m_o} \left(\dot{\psi}_{ed}^{n_i,2} + \dot{\theta}_{ed}^{n_i,2} + 2\dot{\theta}_{ed}^{n_i} \omega^x - 2(\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} - \dot{\theta}_{ed}^{n_i} \psi_{ed}^{n_i}) \omega^y + 2\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \omega^z - (\psi_{ed}^{n_i,2} - 1) \omega^{x2} \right. \\ & \left. + (\psi_{ed}^{n_i,2} + \theta_{ed}^{n_i,2}) \omega^{y2} - (\theta_{ed}^{n_i,2} - 1) \omega^{z2} + 2\psi_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} \omega^x \omega^z + 2(\psi_{ed}^{n_i} \omega^x - \theta_{ed}^{n_i} \omega^z) \omega^y \right) \end{aligned} \quad (III.27)$$

$$\begin{aligned} T_{ed,3} = & \frac{1}{2} I_{m_d}^y \left((\Omega + \omega^y)^2 + \psi_{ed}^{n_i,2} \omega^{x2} + \theta_{ed}^{n_i,2} \omega^{z2} + (\Omega + \omega^y)(2\psi_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} - (\psi_{ed}^{n_i,2} + \theta_{ed}^{n_i,2}) \omega^y - 2(\psi_{ed}^{n_i} \omega^x - \theta_{ed}^{n_i} \omega^z)) \right. \\ & \left. - 2\psi_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} \omega^x \omega^z \right) \end{aligned} \quad (III.28)$$

$$\begin{aligned} T_{ed,4} = & -\frac{1}{2} I_{m_d}^{d_i} \left(\dot{\psi}_{ed}^{n_i,2} - \dot{\theta}_{ed}^{n_i,2} - 2\dot{\theta}_{ed}^{n_i} \omega^x - 2(\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} + \dot{\theta}_{ed}^{n_i} \psi_{ed}^{n_i}) \omega^y + 2\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \omega^z + (\psi_{ed}^{n_i,2} - 1) \omega^{x2} \right. \\ & - (\psi_{ed}^{n_i,2} - \theta_{ed}^{n_i,2}) \omega^{y2} - (\theta_{ed}^{n_i,2} - 1) \omega^{z2} + 2\psi_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} \omega^x \omega^z - 2(\psi_{ed}^{n_i} \omega^x + \theta_{ed}^{n_i} \omega^z) \omega^y \left. \right) \cos 2\Omega t \\ & - \frac{1}{2} I_{m_d}^{d_i} \left(2\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \dot{\theta}_{ed}^{n_i} + 2\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \omega^x + 2(\dot{\psi}_{ed}^{n_i} \psi_{ed}^{n_i} - \dot{\theta}_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i}) \omega^y + 2\dot{\theta}_{ed}^{n_i} \omega^z + 2\psi_{ed}^{n_i} \theta_{ed}^{n_i} (\omega^{x2} - \omega^{y2}) \right. \\ & \left. - (\psi_{ed}^{n_i,2} + \theta_{ed}^{n_i,2} - 2) \omega^x \omega^z - 2(\theta_{ed}^{n_i} \omega^x - \psi_{ed}^{n_i} \omega^z) \omega^y \right) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (III.29)$$

L'application des équations de LAGRANGE à l'expression (III.25) conduit à obtenir les matrices élémentaires et les vecteurs des forces nodales de cet élément fini :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{ed}}{\partial \{\dot{\delta}_{ed}^n\}} \right) - \left(\frac{\partial T_{ed}}{\partial \{\delta_{ed}^n\}} \right) = [M_{ed}(t)] \{\ddot{\delta}_{ed}^n\} + [C_{ed}(t)] \{\dot{\delta}_{ed}^n\} + [K_{ed}(t)] \{\delta_{ed}^n\} - \{F_{ed}(t)\} \quad (III.30)$$

avec :

$$[M_{ed}(t)] = [M_{ed}^{tr}] + [M_{ed}^{ro}] + [M_{ed}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{ed}^{s_2}] \sin 2\Omega t \quad (III.31)$$

$$[C_{ed}(t)] = [C_{ed}^g] \Omega + [C_{ed}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t + [C_{ed}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t + [C_{ed,su}^{er,\omega^y}] \omega^y \quad (III.32)$$

$$\begin{aligned} [K_{ed}(t)] = & [K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y}] \dot{\omega}^y + [K_{ed,su}^{er,\Omega \omega^y}] \Omega \omega^y + [K_{ed,su}^{er,\omega^{x2}}] \omega^{x2} + [K_{ed,su}^{er,\omega^{y2}}] \omega^{y2} + [K_{ed,su}^{er,\omega^{z2}}] \omega^{z2} \\ & + [K_{ed,su}^{er,\omega^x \omega^z}] \omega^x \omega^z \\ & + \left([K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y,c_2}] \dot{\omega}^y + [K_{ed,su}^{er,\Omega \omega^y,c_2}] \Omega \omega^y + [K_{ed,su}^{er,\omega^{x2},c_2}] \omega^{x2} + [K_{ed,su}^{er,\omega^{y2},c_2}] \omega^{y2} \right. \\ & \left. + [K_{ed,su}^{er,\omega^{z2},c_2}] \omega^{z2} + [K_{ed,su}^{er,\omega^x \omega^z,c_2}] \omega^x \omega^z \right) \cos 2\Omega t \\ & + \left([K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y,s_2}] \dot{\omega}^y + [K_{ed,su}^{er,\Omega \omega^y,s_2}] \Omega \omega^y + [K_{ed,su}^{er,\omega^{x2},s_2}] \omega^{x2} + [K_{ed,su}^{er,\omega^{y2},s_2}] \omega^{y2} \right. \\ & \left. + [K_{ed,su}^{er,\omega^x \omega^z,s_2}] \omega^x \omega^z \right) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (III.33)$$

$$\{F_{ed}(t)\} = \{F_{ed,su}(t)\} + \{F_{ed,su}^{c_2}(t)\} \cos 2\Omega t + \{F_{ed,su}^{s_2}(t)\} \sin 2\Omega t \quad (\text{III.34})$$

et :

$$\begin{aligned} \{F_{ed,su}(t)\} = & -\{V_{ed,su}^u\}(\ddot{x}_o + 2\dot{z}_o\omega^y - 2\dot{y}_o\omega^z + z_o(\dot{\omega}^y + \omega^x\omega^z) - y_o(\dot{\omega}^z - \omega^x\omega^y) - x_o(\omega^{y^2} + \omega^{z^2})) \\ & -\{V_{ed,su}^w\}(\ddot{z}_o + 2\dot{y}_o\omega^x - 2\dot{x}_o\omega^y + y_o(\dot{\omega}^x + \omega^y\omega^z) - x_o(\dot{\omega}^y - \omega^x\omega^z) - z_o(\omega^{x^2} + \omega^{y^2})) \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

$$\begin{aligned} & -\{V_{ed,su}^{yw}\}(\dot{\omega}^x + \omega^y\omega^z) + \{V_{ed,su}^{yu}\}(\dot{\omega}^z - \omega^x\omega^y) - \{V_{ed,su}^\theta\}(\dot{\omega}^x + \omega^y\omega^z) \\ & -\{V_{ed,su}^\psi\}(\dot{\omega}^z - \omega^x\omega^y) - \{V_{ed,su}^{y\psi}\}(\Omega\omega^x + \omega^x\omega^y) + \{V_{ed,su}^{y\theta}\}(\Omega\omega^z + \omega^y\omega^z) \end{aligned}$$

$$\{F_{ed,su}^{c_2}(t)\} = -\{V_{ed,su}^{\theta,c_2}\}(\dot{\omega}^x - 2\Omega\omega^z - \omega^y\omega^z) + \{V_{ed,su}^{\psi,c_2}\}(\dot{\omega}^z + 2\Omega\omega^x + \omega^x\omega^y) \quad (\text{III.36})$$

$$\{F_{ed,su}^{s_2}(t)\} = \{V_{ed,su}^{\psi,s_2}\}(\dot{\omega}^x - 2\Omega\omega^z - \omega^y\omega^z) + \{V_{ed,su}^{\theta,s_2}\}(\dot{\omega}^z + 2\Omega\omega^x + \omega^x\omega^y) \quad (\text{III.37})$$

d'où :

$$\begin{aligned} [M_{ed}^{tr}] = & \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [M_{ed}^{ro}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{mo} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{mo} \end{bmatrix}; [M_{ed}^{c_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

$$[M_{ed}^{s_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [C_{ed}^g] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^y \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y & 0 \end{bmatrix}; [C_{ed}^{g,c_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

$$\begin{aligned} [C_{ed}^{g,s_2}] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}; [C_{ed,su}^{er,\omega^y}] = \begin{bmatrix} 0 & 2m_d & 0 & 0 \\ -2m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(I_{m_d}^y - 2I_{m_d}^{mo}) \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y - 2I_{m_d}^{mo} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y}] = & \begin{bmatrix} 0 & m_d & 0 & 0 \\ -m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{mo} \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo} & 0 \end{bmatrix}; [K_{ed,su}^{er,\Omega\omega^y}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{ed,su}^{er,\omega^{x^2}}] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo}) \end{bmatrix}; [K_{ed,su}^{er,\omega^{y^2}}] = \begin{bmatrix} -m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

$$\begin{aligned} [K_{ed,su}^{er,\omega^{z^2}}] = & \begin{bmatrix} -m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [K_{ed,su}^{er,\omega^x\omega^z}] = \begin{bmatrix} 0 & m_d & 0 & 0 \\ m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo} \\ 0 & 0 & I_{m_d}^y - I_{m_d}^{mo} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y,c_2} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\Omega\omega^y,c_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\omega^x,c_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}, \\
 \left[K_{ed,su}^{er,\omega^y,c_2} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\omega^z,c_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\omega^x\omega^z,c_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

$$\begin{aligned}
 \left[K_{ed,su}^{er,\dot{\omega}^y,s_2} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\Omega\omega^y,s_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & -2I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}, \\
 \left[K_{ed,su}^{er,\omega^z,s_2} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\omega^z,s_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \\ 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} & 0 \end{bmatrix}; \left[K_{ed,su}^{er,\omega^z,s_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_d}^{di} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

$$\left\{ V_{ed,su}^u \right\} = \begin{Bmatrix} m_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^w \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m_d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{yw} \right\} = y_d \begin{Bmatrix} 0 \\ m_d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{yu} \right\} = y_d \begin{Bmatrix} m_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.43}$$

$$\left\{ V_{ed,su}^\theta \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^{mo} \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^\psi \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^{mo} \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{y\psi} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^y \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{y\theta} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^y \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.44}$$

$$\left\{ V_{ed,su}^{\theta,c_2} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^{di} \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{\psi,c_2} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^{di} \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{\psi,s_2} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^y \\ 0 \end{Bmatrix}; \left\{ V_{ed,su}^{\theta,s_2} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m_d}^{di} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.45}$$

III.3.2 Arbre

L'arbre est modélisé par des éléments finis de poutre basés sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO dont les hypothèses sont précisées au **Chapitre II**. Il est discrétisé en n_{ea} éléments finis appelés « éléments finis d'arbre » et a ainsi $n_{ea} + 1$ nœuds d'interpolation nodale.

Soit un élément fini d'arbre non déformé ea_i (figure **FIG. III.3**) qui comprend deux nœuds n_i et n_{i+1} de coordonnées $y_a^{n_i}$ et $y_a^{n_{i+1}}$ sur l'axe Oy . Cet élément est de masse volumique ρ_{ea_i} , de section droite S_{ea_i} , de longueur l_{ea_i} , d'inerties de section $I_{S_{ea_i}}^{mo}$ et $I_{S_{ea_i}}^{di}$, de module d'YOUNG E_{ea_i} , de module de cisaillement G_{ea_i} , de coefficient de POISSON ν_{ea_i} ainsi que de coefficients de réduction de section $\kappa_{ea_i}^{mo}$ et $\kappa_{ea_i}^{di}$ où $i (1 \leq i \leq n_{ea})$ est le numéro de l'élément fini d'arbre.

Le vecteur des déplacements nodaux $\{\delta_{ea_i}^n\}$ de l'élément fini d'arbre ea_i associé à huit degrés de liberté et exprimé dans le repère R est donné par :

$$\{\delta_{ea_i}^n\} = \langle u_{ea_i}^{n_i}, w_{ea_i}^{n_i}, \theta_{ea_i}^{n_i}, \psi_{ea_i}^{n_i}, u_{ea_i}^{n_{i+1}}, w_{ea_i}^{n_{i+1}}, \theta_{ea_i}^{n_{i+1}}, \psi_{ea_i}^{n_{i+1}} \rangle_R^T \quad (\text{III.46})$$

Ce vecteur est séparé en deux vecteurs de déplacements correspondant aux mouvements des nœuds n_i et n_{i+1} dans les plans xOy et yOz , c'est-à-dire :

$$\{\delta_{ea_i}^{n,u}\} = \langle u_{ea_i}^{n_i}, \psi_{ea_i}^{n_i}, u_{ea_i}^{n_{i+1}}, \psi_{ea_i}^{n_{i+1}} \rangle_R^T \quad (\text{III.47})$$

$$\{\delta_{ea_i}^{n,w}\} = \langle w_{ea_i}^{n_i}, \theta_{ea_i}^{n_i}, w_{ea_i}^{n_{i+1}}, \theta_{ea_i}^{n_{i+1}} \rangle_R^T \quad (\text{III.48})$$

Les déplacements en flexion u_{ea_i} et w_{ea_i} du point C^{init} respectivement selon les axes Ox et Oz du repère R ainsi que les angles correspondants de nutation θ_{ea_i} et de précession ψ_{ea_i} autour de Ox et Oz respectivement sont exprimés en fonction des vecteurs des déplacements nodaux $\{\delta_{ea_i}^{n,u}\}$ et $\{\delta_{ea_i}^{n,w}\}$ par :

$$u_{ea_i} = \langle \overline{F_{ea_i}^u}(\bar{y}) \rangle \{\delta_{ea_i}^{n,u}\} \quad (\text{III.49})$$

$$\psi_{ea_i} = \langle \overline{F_{ea_i}^\psi}(\bar{y}) \rangle \{\delta_{ea_i}^{n,u}\} \quad (\text{III.50})$$

$$w_{ea_i} = \langle \overline{F_{ea_i}^w}(\bar{y}) \rangle \{\delta_{ea_i}^{n,w}\} \quad (\text{III.51})$$

$$\theta_{ea_i} = \langle \overline{F_{ea_i}^\theta}(\bar{y}) \rangle \{\delta_{ea_i}^{n,w}\} \quad (\text{III.52})$$

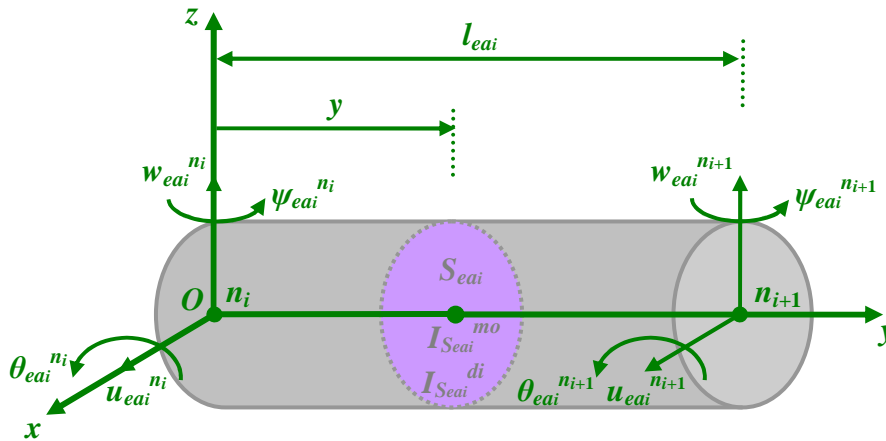


FIG. III.3 : Variables nodales pour un élément fini d'arbre

CHAPITRE III : Equations du mouvement

Pour chaque élément, l'approximation des déplacements est alors fonction des coordonnées d'espace et du temps. Les fonctions de forme (fonctions d'interpolation nodale) $\langle \overline{F}_{ea_i}^u(\bar{y}) \rangle$, $\langle \overline{F}_{ea_i}^\psi(\bar{y}) \rangle$, $\langle \overline{F}_{ea_i}^w(\bar{y}) \rangle$ et $\langle \overline{F}_{ea_i}^\theta(\bar{y}) \rangle$ pour la dynamique sont celles de la statique même si ce n'est pas toujours rigoureux. Ce choix permet l'extension aisée de l'analyse statique à celle de la dynamique. Les vecteurs des fonctions de forme d'un élément fini de poutre de TIMOSHENKO en flexion dépendent de la variable adimensionnée \bar{y} selon l'axe Oy , sont des fonctions polynomiales de degrés 3 et 2 en \bar{y} et contiennent les effets de cisaillement. Ces fonctions sont données par (voir NELSON [119], CHEN et KU [23] et MOGENIER [114]) :

$$\langle \overline{F}_{ea_i}^u(\bar{y}) \rangle = \frac{1}{1 + \varphi_{ea_i}^x} \begin{Bmatrix} 1 + \varphi_{ea_i}^x - \varphi_{ea_i}^x \bar{y} - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3 \\ -\frac{1}{2} l_{ea_i} \bar{y} (2 + \varphi_{ea_i}^x - (4 + \varphi_{ea_i}^x) \bar{y} + 2\bar{y}^2) \\ \bar{y} (\varphi_{ea_i}^x + 3\bar{y} - 2\bar{y}^2) \\ \frac{1}{2} l_{ea_i} \bar{y} (\varphi_{ea_i}^x + (2 - \varphi_{ea_i}^x) \bar{y} - 2\bar{y}^2) \end{Bmatrix}^T \quad (\text{III.53})$$

$$\langle \overline{F}_{ea_i}^\psi(\bar{y}) \rangle = \frac{1}{l_{ea_i} (1 + \varphi_{ea_i}^x)} \begin{Bmatrix} 6\bar{y}(1 - \bar{y}) \\ l_{ea_i} (1 + \varphi_{ea_i}^x - (4 + \varphi_{ea_i}^x) \bar{y} + 3\bar{y}^2) \\ -6\bar{y}(1 - \bar{y}) \\ -l_{ea_i} \bar{y} (2 - \varphi_{ea_i}^x - 3\bar{y}) \end{Bmatrix}^T \quad (\text{III.54})$$

$$\langle \overline{F}_{ea_i}^w(\bar{y}) \rangle = \frac{1}{1 + \varphi_{ea_i}^z} \begin{Bmatrix} 1 + \varphi_{ea_i}^z - \varphi_{ea_i}^z \bar{y} - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3 \\ \frac{1}{2} l_{ea_i} \bar{y} (2 + \varphi_{ea_i}^z - (4 + \varphi_{ea_i}^z) \bar{y} + 2\bar{y}^2) \\ \bar{y} (\varphi_{ea_i}^z + 3\bar{y} - 2\bar{y}^2) \\ -\frac{1}{2} l_{ea_i} \bar{y} (\varphi_{ea_i}^z + (2 - \varphi_{ea_i}^z) \bar{y} - 2\bar{y}^2) \end{Bmatrix}^T \quad (\text{III.55})$$

$$\langle \overline{F}_{ea_i}^\theta(\bar{y}) \rangle = \frac{1}{l_{ea_i} (1 + \varphi_{ea_i}^z)} \begin{Bmatrix} -6\bar{y}(1 - \bar{y}) \\ l_{ea_i} (1 + \varphi_{ea_i}^z - (4 + \varphi_{ea_i}^z) \bar{y} + 3\bar{y}^2) \\ 6\bar{y}(1 - \bar{y}) \\ -l_{ea_i} \bar{y} (2 - \varphi_{ea_i}^z - 3\bar{y}) \end{Bmatrix}^T \quad (\text{III.56})$$

avec :

$$\varphi_{ea_i}^x = \frac{12E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^z}{l_{ea_i}^2 G_{ea_i} \kappa_{ea_i}^x S_{ea_i}} \quad (\text{III.57})$$

$$\varphi_{ea_i}^z = \frac{12E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^x}{l_{ea_i}^2 G_{ea_i} \kappa_{ea_i}^z S_{ea_i}} \quad (\text{III.58})$$

$$\bar{y} = \frac{y_{ea_i}}{l_{ea_i}} \quad (\text{III.59})$$

où :

- $\varphi_{ea_i}^x$ et $\varphi_{ea_i}^z$ sont les coefficients de cisaillement de l'élément fini d'arbre ea_i dans les plans xOy et yOz respectivement.

Les matrices et vecteurs élémentaires d'un élément fini d'arbre sont obtenus à partir de ses énergies cinétique et de déformation. La substitution des déplacements en flexion (u_{ea_i}, w_{ea_i}) et des angles de rotation $(\psi_{ea_i}, \theta_{ea_i})$ dans les expressions (II.80) et (II.147) donne les expressions des énergies cinétique et de déformation d'un élément fini d'arbre. Après avoir intégré ces dernières sur toute la longueur de l'élément fini d'arbre l_{ea_i} , les équations de LAGRANGE sont appliquées de manière à obtenir le système d'équations suivant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{ea_i}}{\partial \{\delta^n_{ea_i}\}} \right) - \left(\frac{\partial T_{ea_i}}{\partial \{\delta^n_{ea_i}\}} \right) + \left(\frac{\partial U_{ea_i}}{\partial \{\delta^n_{ea_i}\}} \right) = [M_{ea_i}(t)] \{\delta^n_{ea_i}\} + [C_{ea_i}(t)] \{\dot{\delta}^n_{ea_i}\} + [K_{ea_i}(t)] \{\delta^n_{ea_i}\} - \{F_{ea_i}(t)\} \quad (\text{III.60})$$

avec :

$$[M_{ea_i}(t)] = [M_{ea_i}^{tr}] + [M_{ea_i}^{ro}] + [M_{ea_i}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{ea_i}^{s_2}] \sin 2\Omega t \quad (\text{III.61})$$

$$[C_{ea_i}(t)] = [C_{ea_i}^g] \Omega + [C_{ea_i}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t + [C_{ea_i}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t + [C_{ea_i}^{er,\omega^y}] \omega^y \quad (\text{III.62})$$

$$\begin{aligned} [K_{ea_i}(t)] &= [K_{ea_i}^e] + [K_{ea_i}^{e,c_2}] \cos 2\Omega t + [K_{ea_i}^{e,s_2}] \sin 2\Omega t \\ &+ [K_{ea_i}^{er,\dot{\omega}^y}] \dot{\omega}^y + [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y}] \Omega \omega^y + \left([K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2}}] + [K_{ea_i}^{erg,\omega^{x^2}}] \right) \omega^{x^2} + [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2}}] \omega^{y^2} \\ &+ \left([K_{ea_i}^{er,\omega^{z^2}}] + [K_{ea_i}^{erg,\omega^{z^2}}] \right) \omega^{z^2} + [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z}] \omega^x \omega^z \\ &+ \left([K_{ea_i}^{er,\omega^y,c_2}] \dot{\omega}^y + [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] \Omega \omega^y + [K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2},c_2}] \omega^{x^2} + [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2},c_2}] \omega^{y^2} \right. \\ &+ [K_{ea_i}^{er,\omega^{z^2},c_2}] \omega^{z^2} + [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z,c_2}] \omega^x \omega^z \left. \right) \cos 2\Omega t \\ &+ \left([K_{ea_i}^{er,\omega^y,s_2}] \dot{\omega}^y + [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] \Omega \omega^y + [K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2},s_2}] \omega^{x^2} + [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2},s_2}] \omega^{y^2} \right. \\ &+ \left. [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z,s_2}] \omega^x \omega^z \right) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

$$\{F_{ea_i}(t)\} = \{F_{ea_i,su}(t)\} + \{F_{ea_i,su}^{c_2}(t)\} \cos 2\Omega t + \{F_{ea_i,su}^{s_2}(t)\} \sin 2\Omega t \quad (\text{III.64})$$

d'où :

$$[M_{ea_i}^{tr}] = \rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,1}]; [M_{ea_i}^{ro}] = \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,2}]; [M_{ea_i}^{c_2}] = \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,3}], \quad (\text{III.65})$$

$$[M_{ea_i}^{s_2}] = \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}]$$

$$[C_{ea_i}^g] = 2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,5}]; [C_{ea_i}^{g,c_2}] = 2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}]; [C_{ea_i}^{g,s_2}] = -2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,3}], \quad (\text{III.66})$$

$$[C_{ea_i}^{er,\omega^y}] = 2\rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,6}]$$

$$[K_{ea_i}^e] = E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,7}]; [K_{ea_i}^{e,c_2}] = E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,8}]; [K_{ea_i}^{e,s_2}] = E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,9}] \quad (\text{III.67})$$

$$\begin{aligned} [K_{ea_i}^{er,\dot{\omega}^y}] &= \rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,6}] - \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,4}]; [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y}] = 2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,2}], \\ [K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2}}] &= \rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,10}] + \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,11}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2}}] = -(\rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,1}] - \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,2}]), \\ [K_{ea_i}^{er,\omega^{z^2}}] &= \rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,12}] + \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,13}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z}] = \rho_{ea_i} S_{ea_i} [M_{ea_i,14}] - \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} [M_{ea_i,4}], \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

$$[K_{ea_i}^{erg,\omega^{x^2}}] = [K_{ea_i}^{erg,\omega^{z^2}}] = \frac{\rho_{ea_i} S_{ea_i} (I_{ea_i}^2 - y_a^{n_i,2})}{2} [M_{ea_i,15}] - \frac{\rho_{ea_i} S_{ea_i} y_a^{n_i}}{2} [M_{ea_i,16}] - \frac{\rho_{ea_i} S_{esh_i}}{2} [M_{ea_i,17}]$$

$$\begin{aligned} [K_{ea_i}^{er,\omega^y,c_2}] &= -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}]; [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] = 2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,3}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2},c_2}] = -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,11}], \\ [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2},c_2}] &= \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,3}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^{z^2},c_2}] = \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,13}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z,c_2}] = -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}] \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

$$\begin{aligned} [K_{ea_i}^{er,\omega^y,s_2}] &= \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,3}]; [K_{ea_i}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] = 2\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^{x^2},s_2}] = -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}], \\ [K_{ea_i}^{er,\omega^{y^2},s_2}] &= \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,4}]; [K_{ea_i}^{er,\omega^x\omega^z,s_2}] = -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} [M_{ea_i,2}] \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

$$\begin{aligned} \{F_{ea_i, su}(t)\} = & -\rho_{ea_i} S_{ea_i} \{V_{ea_i,1}\} (\ddot{x}_O + 2\dot{z}_O \omega^y - 2\dot{y}_O \omega^z + z_O (\dot{\omega}^y + \omega^x \omega^z) - y_O (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - x_O (\omega^{y2} + \omega^{z2})) \\ & -\rho_{ea_i} S_{ea_i} \{V_{ea_i,2}\} (\ddot{z}_O + 2\dot{y}_O \omega^x - 2\dot{x}_O \omega^y + y_O (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) - x_O (\dot{\omega}^y - \omega^x \omega^z) - z_O (\omega^{x2} + \omega^{y2})) \\ & -\rho_{ea_i} S_{ea_i} \{V_{ea_i,3}\} (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) + \rho_{ea_i} S_{ea_i} \{V_{ea_i,4}\} (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) \\ & -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} \{V_{ea_i,5}\} (\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo} \{V_{ea_i,6}\} (\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \end{aligned} \quad (III.71)$$

$$\{F_{ea_i, su}^{c2}(t)\} = -(\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} \{V_{ea_i,5}\} (\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} \{V_{ea_i,6}\} (\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y)) \quad (III.72)$$

$$\{F_{ea_i, su}^{s2}(t)\} = -\rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} \{V_{ea_i,6}\} (\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \rho_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di} \{V_{ea_i,5}\} (\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \quad (III.73)$$

Les expressions des matrices et des vecteurs vues dans l'ensemble des équations (III.65)-(III.73) sont données en **Annexe E**.

III.3.3 Balourd

Un balourd discret est modélisé à l'aide d'un élément fini comportant un nœud positionné au centre géométrique de l'arbre non déformé localisé à l'abscisse y_b suivant l'axe Oy et ayant quatre degrés de liberté : deux déplacements $u_{eb}^{n_i}$, $w_{eb}^{n_i}$ et deux rotations $\theta_{eb}^{n_i}$, $\psi_{eb}^{n_i}$.

Le vecteur des déplacements nodaux $\{\delta_{eb}^n\}$ de l'élément fini de balourd a la forme suivante :

$$\{\delta_{eb}^n\} = \langle u_{eb}^{n_i}, w_{eb}^{n_i}, \theta_{eb}^{n_i}, \psi_{eb}^{n_i} \rangle_R^T \quad (III.74)$$

En utilisant l'expression (II.159), l'énergie cinétique de l'élément fini de balourd eb s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} T_{eb} = & m_b r_b \left((\dot{u}_{eb}^{n_i} + \dot{x}_O + (w_{eb}^{n_i} + z_O) \omega^y - (y_b + y_O) \omega^z) (\Omega + \omega^y) \cos(\Omega t + \eta_b) \right. \\ & - (\dot{y}_O - (w_{eb}^{n_i} + z_O) \omega^x + (u_{eb}^{n_i} + x_O) \omega^z) (\omega^x \cos(\Omega t + \eta_b) - \omega^z \sin(\Omega t + \eta_b)) \\ & \left. - (\dot{w}_{eb}^{n_i} + \dot{z}_O + (y_b + y_O) \omega^x - (u_{eb}^{n_i} + x_O) \omega^y) (\Omega + \omega^y) \sin(\Omega t + \eta_b) \right) \end{aligned} \quad (III.75)$$

L'application des équations de LAGRANGE à l'expression de l'énergie cinétique (III.75) pour un élément fini de balourd discret, qui fait un angle η_b avec l'axe Oz à l'instant $t = 0$ (à l'arrêt), donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{eb}}{\partial \{\delta_{eb}^n\}} \right) - \left(\frac{\partial T_{eb}}{\partial \{\delta_{eb}^n\}} \right) = -\{F_{eb}(t)\} - \{F_{eb, su}(t)\} \quad (III.76)$$

Ainsi les vecteurs des forces élémentaires correspondantes (trouvés dans le second membre du système d'équations du mouvement) sont définis comme suit :

$$\{F_{eb}(t)\} = \{V_{eb}^{c1}\} \Omega^2 \cos \Omega t + \{V_{eb}^{s1}\} \Omega^2 \sin \Omega t \quad (III.77)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eb, su}(t)\} = & \left(\{V_{eb, su}^{\omega^y, c1}\} \dot{\omega}^y + \{V_{eb, su}^{\Omega \omega^y, c1}\} \Omega \omega^y + \{V_{eb, su}^{\omega^{x2}, c1}\} \omega^{x2} + \{V_{eb, su}^{\omega^{y2}, c1}\} \omega^{y2} + \{V_{eb, su}^{\omega^{z2}, c1}\} \omega^{z2} \right. \\ & + \{V_{eb, su}^{\omega^x \omega^z, c1}\} \omega^x \omega^z \cos \Omega t + \left(\{V_{eb, su}^{\omega^y, s1}\} \dot{\omega}^y + \{V_{eb, su}^{\Omega \omega^y, s1}\} \Omega \omega^y + \{V_{eb, su}^{\omega^{x2}, s1}\} \omega^{x2} \right. \\ & \left. \left. + \{V_{eb, su}^{\omega^{y2}, s1}\} \omega^{y2} + \{V_{eb, su}^{\omega^{z2}, s1}\} \omega^{z2} + \{V_{eb, su}^{\omega^x \omega^z, s1}\} \omega^x \omega^z \right) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (III.78)$$

avec :

$$\{V_{eb}^{c1}\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{V_{eb}^{s1}\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \cos \eta_b \\ -\sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III.79)$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\dot{\omega}^y, c_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} -\cos \eta_b \\ \sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\dot{\omega}^y, s_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.80})$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\Omega \omega^y, c_1} \right\} = 2m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\Omega \omega^y, s_1} \right\} = 2m_b r_b \begin{Bmatrix} \cos \eta_b \\ -\sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.81})$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\omega^{x^2}, c_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\omega^{x^2}, s_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.82})$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\omega^{y^2}, c_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\omega^{y^2}, s_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \cos \eta_b \\ -\sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.83})$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\omega^{z^2}, c_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\omega^{z^2}, s_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.84})$$

$$\left\{ V_{eb,su}^{\omega^x \omega^z, c_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} -\cos \eta_b \\ -\sin \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \left\{ V_{eb,su}^{\omega^x \omega^z, s_1} \right\} = m_b r_b \begin{Bmatrix} \sin \eta_b \\ -\cos \eta_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.85})$$

III.3.4 Palier

Le palier est modélisé en utilisant un élément fini avec un seul nœud positionné au centre de la section de l'arbre non déformé. Cet élément a quatre degrés de liberté : deux déplacements $u_{ep}^{n_i}$, $w_{ep}^{n_i}$ et deux rotations $\theta_{ep}^{n_i}$, $\psi_{ep}^{n_i}$.

Le vecteur des déplacements nodaux $\{\delta_{ep}^n\}$ de l'élément fini de palier est de la forme suivante :

$$\{\delta_{ep}^n\} = \langle u_{ep}^{n_i}, w_{ep}^{n_i}, \theta_{ep}^{n_i}, \psi_{ep}^{n_i} \rangle_R^T \quad (\text{III.86})$$

Compte tenu de l'expression (II.168), le vecteur des forces nodales non linéaires de l'élément fini de palier est donné par :

$$\{F_{ep}\} = \left\{ F_{ep} \left(\{\delta_{ep}^n\}, \{\dot{\delta}_{ep}^n\} \right) \right\} = \begin{Bmatrix} F_{ep}^u \\ F_{ep}^w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_R \quad (\text{III.87})$$

III.3.5 Equations du mouvement

Les matrices élémentaires et les vecteurs des forces nodales sont assemblés de manière appropriée. En raison de la présence de paliers hydrodynamiques, les conditions aux limites n'existent pas. Par conséquent, il n'y a ni de lignes, ni de colonnes dans les matrices et les vecteurs assemblés à éliminer. Ainsi les matrices et les

CHAPITRE III : Equations du mouvement

vecteurs globaux sont respectivement de dimensions $n_g \times n_g$ et $n_g \times 1$ où $n_g = 4(n_{ea} + 1)$ est le nombre total de degrés de liberté.

Les équations différentielles non linéaires du second ordre décrivant le comportement dynamique du système rotor embarqué-palier en flexion sont écrites par rapport au repère non inertiel connecté au support rigide R sous la forme matricielle suivante :

$$[M_r(t)]\{\ddot{\delta}_r\} + [C_r(t)]\{\dot{\delta}_r\} + [K_r(t)]\{\delta_r\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\} \quad (\text{III.88})$$

où :

- $[M_r(t)]$, $[C_r(t)]$ et $[K_r(t)]$ sont respectivement les matrices globales de masse, d'amortissement et de raideur avec des termes paramétriques périodiques et variables dans le temps dus à la dissymétrie géométrique du rotor tournant et aux rotations de son support rigide,
- $\{\ddot{\delta}_r\}$, $\{\dot{\delta}_r\}$ et $\{\delta_r\}$ sont respectivement les vecteurs accélération, vitesse et déplacement globaux adaptés à la connectivité des éléments finis,
- $\{F_r(t)\}$ est le vecteur global des forces extérieures linéaires contenant les excitations dues à l'effet de balourd ainsi qu'aux mouvements de rotation et de translation du support,
- $\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}$ est le vecteur des forces extérieures non linéaires du palier hydrodynamique qui est contraire au mouvement du rotor.

Les matrices $[M_r(t)]$, $[C_r(t)]$ et $[K_r(t)]$ mentionnées dans l'équation (III.88) sont définies comme suit :

$$[M_r(t)] = [M_{d,a}] + [M_{d,a}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{d,a}^{s_2}] \sin 2\Omega t \quad (\text{III.89})$$

$$[C_r(t)] = [C_{d,a}^g] \Omega + [C_{d,a}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t + [C_{d,a}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t + [C_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \omega^y \quad (\text{III.90})$$

$$\begin{aligned} [K_r(t)] = & [K_a^e] + [K_a^{e,c_2}] \cos 2\Omega t + [K_a^{e,s_2}] \sin 2\Omega t \\ & + [K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y}] \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y}] \Omega \omega^y + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^{x2}}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{x2}}] \right) \omega^{x2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y2}}] \omega^{y2} \\ & + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^{z2}}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{z2}}] \right) \omega^{z2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z}] \omega^x \omega^z \\ & + \left([K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,c_2}] \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x2},c_2}] \omega^{x2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y2},c_2}] \omega^{y2} \right. \\ & \left. + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{z2},c_2}] \omega^{z2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,c_2}] \omega^x \omega^z \right) \cos 2\Omega t \\ & + \left([K_{d,a,su}^{er,\dot{\omega}^y,s_2}] \dot{\omega}^y + [K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x2},s_2}] \omega^{x2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y2},s_2}] \omega^{y2} \right. \\ & \left. + [K_{d,a,su}^{er,\omega^x\omega^z,s_2}] \omega^x \omega^z \right) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Les indices « d », « a » et « su » se réfèrent au disque, à l'arbre ainsi qu'au support respectivement et expriment la contribution aux phénomènes représentés par la matrice correspondante. Les exposants « c_2 » et « s_2 » désignent la dissymétrie géométrique du rotor exprimée en termes de fonctions trigonométriques variables dans le temps $\cos 2\Omega t$ et $\sin 2\Omega t$. L'exposant « g » représente l'effet gyroscopique du rotor, « e » l'élasticité de l'arbre correspondant aux déformations de flexion et de cisaillement, « er » les effets de rotation dus aux mouvements de rotation du support (ces effets proviennent des énergies cinétiques du disque et de l'arbre) et « erg » les effets de raidissement géométrique correspondant aux contraintes centrifuges dues aux rotations du support (ces effets proviennent de l'énergie de déformation de l'arbre).

Le vecteur $\{F_r(t)\}$ indiqué dans l'équation (III.88) est exprimé par :

$$\{F_r(t)\} = \{F_{d,a}^{Wr}\} + \{F_b(t)\} + \{F_{b,su}(t)\} + \{F_{d,a,su}(t)\} + \{F_{d,a,su}^{c_2}(t)\} \cos 2\Omega t + \{F_{d,a,su}^{s_2}(t)\} \sin 2\Omega t \quad (\text{III.92})$$

avec :

$$\{F_{d,a}^{Wr}\} = -\{V_{d,a}^{Wr}\} W_r \quad (\text{III.93})$$

$$\{F_b(t)\} = \{V_b^{c_1}\} \Omega^2 \cos \Omega t + \{V_b^{s_1}\} \Omega^2 \sin \Omega t \quad (\text{III.94})$$

$$\begin{aligned} \{F_{b,su}(t)\} = & \left(\{V_{b,su}^{\dot{\omega}^x, c_1}\} \dot{\omega}^x + \{V_{b,su}^{\Omega \omega^x, c_1}\} \Omega \omega^x + \{V_{b,su}^{\omega^{x2}, c_1}\} \omega^{x2} + \{V_{b,su}^{\omega^{y2}, c_1}\} \omega^{y2} + \{V_{b,su}^{\omega^{z2}, c_1}\} \omega^{z2} \right. \\ & + \{V_{b,su}^{\omega^x \omega^z, c_1}\} \omega^x \omega^z \left. \right) \cos \Omega t + \left(\{V_{b,su}^{\dot{\omega}^y, s_1}\} \dot{\omega}^y + \{V_{b,su}^{\Omega \omega^y, s_1}\} \Omega \omega^y + \{V_{b,su}^{\omega^{x2}, s_1}\} \omega^{x2} \right. \\ & + \{V_{b,su}^{\omega^{y2}, s_1}\} \omega^{y2} + \{V_{b,su}^{\omega^{z2}, s_1}\} \omega^{z2} + \{V_{b,su}^{\omega^x \omega^z, s_1}\} \omega^x \omega^z \left. \right) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

$$\begin{aligned} \{F_{d,a,su}(t)\} = & -\{V_{d,a,su}^u\} \left(\ddot{x}_o + 2\dot{z}_o \omega^y - 2\dot{y}_o \omega^z + z_o (\dot{\omega}^y + \omega^x \omega^z) - y_o (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - x_o (\omega^{y2} + \omega^{z2}) \right) \\ & - \{V_{d,a,su}^w\} \left(\ddot{z}_o + 2\dot{y}_o \omega^x - 2\dot{x}_o \omega^y + y_o (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) - x_o (\dot{\omega}^y - \omega^x \omega^z) - z_o (\omega^{x2} + \omega^{y2}) \right) \\ & - \{V_{d,a,su}^{yw}\} (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{yu}\} (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - \{V_{d,a,su}^\theta\} (\dot{\omega}^x + \omega^y \omega^z) \\ & - \{V_{d,a,su}^\psi\} (\dot{\omega}^z - \omega^x \omega^y) - \{V_{d,a,su}^{y\psi}\} (\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) + \{V_{d,a,su}^{y\theta}\} (\Omega \omega^z + \omega^y \omega^z) \end{aligned} \quad (\text{III.96})$$

$$\{F_{d,a,su}^{c_2}(t)\} = -\{V_{d,a,su}^{\theta, c_2}\} (\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{\psi, c_2}\} (\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \quad (\text{III.97})$$

$$\{F_{d,a,su}^{s_2}(t)\} = \{V_{d,a,su}^{\psi, s_2}\} (\dot{\omega}^x - 2\Omega \omega^z - \omega^y \omega^z) + \{V_{d,a,su}^{\theta, s_2}\} (\dot{\omega}^z + 2\Omega \omega^x + \omega^x \omega^y) \quad (\text{III.98})$$

Les vecteurs $\{V_b\}$, $\{V_{b,su}\}$ et $\{V_{d,a,su}\}$ des chargements et leurs vecteurs correspondants $\{F_b\}$, $\{F_{b,su}\}$ et $\{F_{d,a,su}\}$ des forces sont associés respectivement au balourd, à la force d'inertie due aux différents mouvements (trois rotations et trois translations) du support et à celle due au couplage entre ces deux phénomènes. Les exposants « c_1 » et « s_1 » signifient les composantes de la force due au balourd exprimées en termes de fonctions trigonométriques variables dans le temps $\cos \Omega t$ et $\sin \Omega t$. Les exposants u , w , ψ et θ désignent la direction des composantes de la force d'action associée aux mouvements du support.

III.4 Configurations rencontrées

La complexité des équations non linéaires du mouvement en flexion d'un rotor embarqué (III.88) correspond non seulement à la non linéarité des paliers hydrodynamiques mais aussi à la dissymétrie géométrique des composants du rotor et à la nature du mouvement du support (mouvements en translation et/ou rotation, mouvements déterministes ou aléatoires).

Dans le cadre des travaux de recherche réalisés au cours de cette thèse, trois types de systèmes d'équations du mouvement sont étudiés lors des mouvements de rotation et/ou de translation déterministes du support :

- ⇒ Un système d'équations différentielles linéaires du mouvement à coefficients constants est obtenu lorsque le rotor est monté sur des paliers rigides, le disque et l'arbre sont symétriques et le support du rotor est animé d'une rotation constante avec une translation sinusoïdale.
- ⇒ Un système d'équations différentielles linéaires du mouvement à coefficients périodiques est établi lorsque le rotor est monté sur des paliers rigides, la section du disque et/ou de l'arbre est dissymétrique et le support est soumis à une vitesse angulaire constante combinée avec des mouvements de translation sinusoïdale.
- ⇒ Un système d'équations différentielles linéarisées/non linéaires du mouvement à coefficients périodiques est trouvé lorsque le rotor est monté sur des paliers hydrodynamiques, ses composants sont symétriques et le support est en mouvements de rotation sinusoïdale et/ou de translation sinusoïdale.

CHAPITRE IV

OUTILS ET METHODES NUMERIQUES POUR L'ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE

Sommaire

IV.1	Introduction.....	82
IV.2	Analyse dynamique linéaire	82
IV.2.1	Système d'équations différentielles à coefficients constants.....	83
IV.2.1.1	Stabilité et fréquences naturelles	83
IV.2.1.2	Réponses aux forces d'excitation extérieure.....	85
IV.2.2	Système d'équations différentielles à coefficients paramétriques	86
IV.2.2.1	Analyse de stabilité dynamique	86
IV.2.2.2	Réponses forcées et orbites.....	89
IV.3	Analyse dynamique non linéaire.....	90
IV.3.1	Régime transitoire.....	91
IV.3.2	Calcul direct de la solution périodique.....	97
IV.3.2.1	Méthode de tir (de shooting).....	97
IV.3.2.2	Méthode de la balance harmonique	101
IV.3.3	Section de POINCARÉ.....	110
IV.3.4	Diagramme de bifurcation.....	110
IV.3.5	Stratégies de continuation	111
IV.3.5.1	Continuation séquentielle	111
IV.3.5.2	Continuation par longueur d'arc	112

IV.1 Introduction

Au **Chapitre II**, le calcul des énergies cinétique et de déformation ainsi que du travail virtuel est présenté en vue de modéliser les composants d'un rotor embarqué et de déterminer leurs caractéristiques. De plus, dans l'**Annexe C**, les caractéristiques statiques et dynamiques des paliers hydrodynamiques sont définies et le calcul des forces hydrodynamiques linéaires et non linéaires est effectué. Le **Chapitre III** a permis d'explicitier les équations du mouvement de l'ensemble rotor embarqué-palier non linéaire ainsi que les excitations dues au balourd et aux mouvements de rotation et de translation du support. A présent, il reste à définir des outils d'analyse pour prévoir le comportement dynamique de différentes configurations de rotor embarqué dont le support est soumis à divers mouvements.

Comme on l'a vu dans le **Chapitre III**, les équations du mouvement du rotor embarqué contiennent des termes paramétriques périodiques dus à la dissymétrie géométrique de certains composants du rotor (disque et arbre) et des termes paramétriques variables dans le temps dus aux mouvements de rotation du support. Ces termes paramétriques sont considérés comme des sources d'excitation intérieure et peuvent conduire à une instabilité dynamique latérale. Pour cette raison, la stabilité du mouvement du rotor doit être observée avant tout calcul de réponses forcées et d'orbites.

Les méthodes de l'analyse de stabilité dépendent des types des termes paramétriques dans les équations du mouvement du rotor. Dans le cadre de ce travail, seules les excitations, qui créent des termes paramétriques périodiques, sont considérées. La stabilité des équations différentielles à coefficients périodiques a été extrêmement étudiée dans la littérature. Il est, bien sûr, difficile de citer tous les travaux sur ce sujet et de présenter une description détaillée des méthodes de l'analyse de stabilité trouvées dans la bibliographie. En résumé, la méthode du déterminant de HILL, la méthode de perturbation et la théorie de FLOQUET sont actuellement les approches les plus couramment employées. C'est la théorie de FLOQUET qui est incontestablement la plus utilisée dans le domaine de la dynamique des rotors. Elle est donc appliquée dans le cadre de cette thèse.

Une fois la stabilité linéarisée du rotor garantie, il faut résoudre le système d'équations différentielles du mouvement afin d'obtenir les réponses forcées et les orbites en régime dynamique sous les effets de balourd et de mouvements de rotation et de translation du support. Dans le cadre de cette étude, le rotor est soumis à des mouvements déterministes de son support. Les méthodes du calcul de réponses dynamiques sont choisies en fonction de la nature des équations du mouvement qui change selon la géométrie des composants tournants (disque et arbre) du rotor, le type d'analyse de palier (analyse linéaire ou non linéaire) et les types de mouvements du support (rotation et/ou translation).

Ainsi les équations différentielles linéaires du mouvement à coefficients constants sont résolues avec des méthodes quasi-analytiques, tandis que les équations linéaires à coefficients paramétriques ou non linéaires sont résolues avec des méthodes numériques.

IV.2 Analyse dynamique linéaire

Les équations du mouvement du rotor embarqué sont linéaires si l'hypothèse du modèle linéarisé de palier hydrodynamique est supposée être validée, c'est-à-dire que le vecteur $\{\delta_r\}$ des déplacements dynamiques du rotor reste petit au voisinage de la position d'équilibre statique $\{\delta_r^0\}$.

Dans ce cas, l'analyse dynamique linéaire permet de calculer les matrices d'amortissement et de raideur d'un palier fluide pour un point de fonctionnement, c'est-à-dire qu'un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 des forces dynamiques $\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}$ du film d'huile au voisinage des forces hydrodynamiques statiques est construit par l'expression suivante :

$$\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\} = \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} - [C_p] \{\Delta \dot{\delta}_r\} - [K_p] \{\Delta \delta_r\} \quad (IV.1)$$

avec :

$$\{\Delta \delta_r\} = \{\delta_r\} - \{\delta_r^0\} \quad (IV.2)$$

$$\{\Delta \dot{\delta}_r\} = \{\dot{\delta}_r\} \quad (IV.3)$$

Le vecteur $\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}$ des forces hydrodynamiques contient donc une partie statique $\{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\}$, qui équilibre le poids du rotor (voir le **Paragraphe C.2.2** de l'**Annexe C**), et des matrices globales d'amortissement $[C_p]$ et de raideur $[K_p]$ obtenues par l'assemblage des matrices élémentaires détaillées dans le **Paragraphe C.3.3** de l'**Annexe C**. Ces deux matrices sont conservées constantes tout au long de la simulation dynamique linéaire.

En substituant l'équation (IV.1) dans (III.88), les équations différentielles du second ordre décrivant le mouvement du système rotor embarqué-palier à n_g degrés de liberté deviennent linéaires comme suit :

$$[M_r(t)]\{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r(t)] + [C_p])\{\dot{\delta}_r\} + ([K_r(t)] + [K_p])\{\delta_r\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\} \quad (IV.4)$$

IV.2.1 Système d'équations différentielles à coefficients constants

Lorsque le rotor est symétrique et soumis à des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale (mouvements de **type A**) du support, les termes paramétriques disparaissent des équations du mouvement dans lesquelles toutes les matrices deviennent constantes, c'est-à-dire :

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r] + [C_p])\{\dot{\delta}_r\} + ([K_r] + [K_p])\{\delta_r\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\} \quad (IV.5)$$

Des solutions quasi-analytiques pour les équations précédentes sont présentées et le comportement dynamique du rotor embarqué est analysé grâce à des diagrammes de CAMPBELL et à des réponses aux forces d'excitation extérieure.

IV.2.1.1 Stabilité et fréquences naturelles

Tout d'abord, le rotor est étudié en mouvement libre. Il s'agit alors de traiter le système différentiel homogène (sans second membre) du mouvement d'un rotor embarqué qui tourne à une vitesse de rotation constante Ω , soit :

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r] + [C_p])\{\dot{\delta}_r\} + ([K_r] + [K_p])\{\delta_r\} = \{0\} \quad (IV.6)$$

Pour ajuster la taille du système à celle du vecteur d'état, l'expression suivante est associée à l'équation (IV.6) :

$$-[M_r]\{\dot{\delta}_r\} + [M_r]\{\delta_r\} = \{0\} \quad (IV.7)$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} -[M_r] & [0] \\ [C_r] + [C_p] & [M_r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}_r\} \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [M_r] \\ [K_r] + [K_p] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_r\} \\ \{\dot{\delta}_r\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (IV.8)$$

En posant les notations suivantes :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -[M_r] & [0] \\ [C_r] + [C_p] & [M_r] \end{bmatrix} \quad (IV.9)$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} [0] & [M_r] \\ [K_r] + [K_p] & [0] \end{bmatrix} \quad (IV.10)$$

$$\{X_r\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r\} \\ \{\dot{\delta}_r\} \end{Bmatrix} \quad (IV.11)$$

On obtient un système différentiel linéaire du premier ordre à $2n_g$ degrés de liberté :

$$[A_1]\{\dot{X}_r\} + [A_2]\{X_r\} = \{0\} \quad (IV.12)$$

soit :

$$\{\dot{X}_r\} = -[A_1]^{-1}[A_2]\{X_r\} = [A_r]\{X_r\} \quad (IV.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} [A_r] &= -[A_1]^{-1}[A_2] \\ &= - \begin{bmatrix} -[M_r]^{-1} & [0] \\ [M_r]^{-2}([C_r] + [C_p]) & [M_r]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [M_r] \\ [K_r] + [K_p] & [0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV.14)$$

alors :

$$[A_r] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_r]^{-1}([K_r] + [K_p]) & -[M_r]^{-1}([C_r] + [C_p]) \end{bmatrix} \quad (IV.15)$$

où :

- $[I]$ représente la matrice identité de dimensions $n_g \times n_g$.

La solution représentée par le vecteur d'état $\{X_r\}$ de dimension $2n_g \times 1$ est cherchée sous la forme classique suivante :

$$\{X_r\} = \{X_r^a\} e^{\lambda_r t} \quad (IV.16)$$

et sa dérivée par rapport au temps est :

$$\{\dot{X}_r\} = \lambda_r \{X_r^a\} e^{\lambda_r t} \quad (IV.17)$$

En remplaçant les vecteurs $\{X_r\}$ et $\{\dot{X}_r\}$ par leurs expressions dans (IV.13), il vient :

$$\lambda_r \{X_r^a\} e^{\lambda_r t} = [A_r] \{X_r^a\} e^{\lambda_r t} \quad (IV.18)$$

Enfin, le système (IV.18) devient :

$$\lambda_r \{X_r^a\} = [A_r] \{X_r^a\} \quad (IV.19)$$

D'après l'équation (IV.19), λ_r et $\{X_r^a\}$ sont les solutions d'un problème de recherche de valeurs propres. $[A_r]$ est la matrice d'état de dimensions $2n_g \times 2n_g$, ce qui conduit à trouver $2n_g$ valeurs propres λ_r^i et vecteurs propres $\{X_r^{a,i}\}$ qui sont des paires de quantités complexes deux à deux conjuguées.

La stabilité du rotor peut être examinée à l'aide des valeurs propres λ_r du système homogène d'équations différentielles du mouvement (IV.13). Le critère stipule que si le signe de la partie réelle d'une de ces valeurs propres est positif, les déplacements dynamiques sont amplifiés de manière continue avec le temps et le rotor est alors instable.

Les valeurs absolues des parties imaginaires des valeurs propres λ_r de l'équation (IV.13) représentent les pulsations ω_r du système, donc il y a n_g pulsations. Elles dépendent de la vitesse de rotation Ω du rotor en raison de la présence des paliers hydrodynamiques (étant aussi fonction de Ω) et/ou des effets gyroscopiques. L'évolution de ω_r en fonction de la vitesse de rotation Ω (telle que $\omega_r = \omega_r(\Omega)$) est appelée « diagramme de CAMPBELL ». En général, ce dernier représente aussi l'évolution des fréquences naturelles $f_r = \omega_r/2\pi$ en fonction de la vitesse de rotation. Dans ce qui suit, les quantités ω_r et f_r sont indifféremment appelées « fréquences ». Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit.

La vitesse de rotation du rotor devient une vitesse critique s'il y a une intersection des courbes du diagramme de CAMPBELL avec les droites des fréquences d'excitation extérieure et si l'amortissement est assez faible. En général, le diagramme de CAMPBELL permet de montrer de façon approchée les vitesses critiques potentielles, c'est-à-dire prédire les possibles résonances des réponses dynamiques. Cependant, dans la plupart des cas, les vitesses critiques réelles ne sont déterminées qu'à partir des réponses au balourd ou à une force asynchrone en régime permanent.

IV.2.1.2 Réponses aux forces d'excitation extérieure

En présence du balourd et des mouvements de **type A** du support, le second membre des équations du mouvement du rotor comprend seulement des forces fonctions de cosinus et de sinus ainsi que des forces constantes. L'excitation due au balourd a une fréquence égale à la vitesse de rotation Ω du rotor, tandis que celle due à la translation du support a une fréquence Ω_{su} .

Puisque les réponses en régime permanent sont recherchées, seule la solution particulière des équations complètes du mouvement est considérée. En raison de la forme des vecteurs des forces extérieures dans le second membre et par principe de superposition, cette solution adopte la forme suivante :

$$\{\delta_r\} = \{\delta_b^c\} \cos \Omega t + \{\delta_b^s\} \sin \Omega t + \{\delta_{su}^c\} \cos \Omega_{su} t + \{\delta_{su}^s\} \sin \Omega_{su} t + \{\delta_{su}^0\} \quad (IV.20)$$

$\{\delta_b^c\}$, $\{\delta_b^s\}$, $\{\delta_{su}^c\}$, $\{\delta_{su}^s\}$ et $\{\delta_{su}^0\}$ sont des vecteurs des amplitudes inconnues des déplacements du rotor dus au balourd (indice b) et au mouvement du support (indice su). Le calcul de ces vecteurs est détaillé ci-après.

▪ **Réponse au balourd**

Si le rotor est excité par le balourd combiné à une rotation constante de son support, les équations différentielles du mouvement de flexion s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} [M_r] \{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r] + [C_p]) \{\dot{\delta}_r\} + ([K_r] + [K_p]) \{\delta_r\} = & (\{F_b^c\} + \{F_{b,su}^c\}) \cos \Omega t \\ & + (\{F_b^s\} + \{F_{b,su}^s\}) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Les solutions particulières des équations du mouvement avec second membre sont de la forme :

$$\{\delta_r\} = \{\delta_b^c\} \cos \Omega t + \{\delta_b^s\} \sin \Omega t \quad (IV.22)$$

Les dérivées du premier ordre et du second ordre du vecteur $\{\delta_r\}$ des déplacements dynamiques du rotor par rapport au temps représentent les vecteurs vitesse et accélération et s'écrivent comme suit :

$$\{\dot{\delta}_r\} = -\Omega \{\delta_b^c\} \sin \Omega t + \Omega \{\delta_b^s\} \cos \Omega t \quad (IV.23)$$

$$\{\ddot{\delta}_r\} = -\Omega^2 \{\delta_b^c\} \cos \Omega t - \Omega^2 \{\delta_b^s\} \sin \Omega t \quad (IV.24)$$

En remplaçant les vecteurs $\{\delta_r\}$, $\{\dot{\delta}_r\}$ et $\{\ddot{\delta}_r\}$ par leurs expressions dans (IV.21), il vient :

$$\begin{aligned} [M_r] (-\Omega^2 \{\delta_b^c\} \cos \Omega t - \Omega^2 \{\delta_b^s\} \sin \Omega t) + ([C_r] + [C_p]) (-\Omega \{\delta_b^c\} \sin \Omega t + \Omega \{\delta_b^s\} \cos \Omega t) \\ + ([K_r] + [K_p]) (\{\delta_b^c\} \cos \Omega t + \{\delta_b^s\} \sin \Omega t) = (\{F_b^c\} + \{F_{b,su}^c\}) \cos \Omega t + (\{F_b^s\} + \{F_{b,su}^s\}) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (IV.25)$$

soit :

$$\begin{aligned} (-[M_r] \Omega^2 \{\delta_b^c\} + ([C_r] + [C_p]) \Omega \{\delta_b^s\} + ([K_r] + [K_p]) \{\delta_b^c\}) \cos \Omega t \\ + (-[M_r] \Omega^2 \{\delta_b^s\} - ([C_r] + [C_p]) \Omega \{\delta_b^c\} + ([K_r] + [K_p]) \{\delta_b^s\}) \sin \Omega t \\ = (\{F_b^c\} + \{F_{b,su}^c\}) \cos \Omega t + (\{F_b^s\} + \{F_{b,su}^s\}) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (IV.26)$$

Après regroupement et identification des termes en cosinus et sinus des deux membres, on obtient :

$$([K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega^2) \{\delta_b^c\} + ([C_r] + [C_p]) \Omega \{\delta_b^s\} = \{F_b^c\} + \{F_{b,su}^c\} \quad (IV.27)$$

$$-([C_r] + [C_p]) \Omega \{\delta_b^c\} + ([K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega^2) \{\delta_b^s\} = \{F_b^s\} + \{F_{b,su}^s\} \quad (IV.28)$$

Le système d'équations (IV.27) et (IV.28) peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega^2 & ([C_r] + [C_p]) \Omega \\ -([C_r] + [C_p]) \Omega & [K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_b^c\} \\ \{\delta_b^s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_b^c\} + \{F_{b,su}^c\} \\ \{F_b^s\} + \{F_{b,su}^s\} \end{Bmatrix} \quad (IV.29)$$

CHAPITRE IV : Outils et méthodes numériques pour l'analyse du comportement dynamique

Les vecteurs $\{\delta_b^c\}$ et $\{\delta_b^s\}$ sont obtenus en résolvant le système de $2n_g$ équations algébriques linéaires à $2n_g$ inconnues (IV.29). Enfin, cette procédure de résolution peut être appelée « version linéaire de la méthode de la balance harmonique ».

■ Réponse aux forces harmoniques

Si le rotor est excité par des mouvements de **type A** de son support, les équations du mouvement sont définies par :

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r] + [C_p])\{\dot{\delta}_r\} + ([K_r] + [K_p])\{\delta_r\} = \{F_{d,a,su}^c\} \cos \Omega_{su} t + \{F_{d,a,su}^s\} \sin \Omega_{su} t \quad (IV.30)$$

Comme montré dans le paragraphe précédent, la solution de ces équations différentielles peut prendre la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega_{su}^2 & ([C_r] + [C_p]) \Omega_{su} \\ -([C_r] + [C_p]) \Omega_{su} & [K_r] + [K_p] - [M_r] \Omega_{su}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{su}^c\} \\ \{\delta_{su}^s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{d,a,su}^c\} \\ \{F_{d,a,su}^s\} \end{Bmatrix} \quad (IV.31)$$

■ Réponse aux forces constantes

La rotation constante du support peut engendrer des forces constantes dans les équations du mouvement par rapport au repère lié au support R . Dans ce cas, les équations du mouvement sont exprimées par :

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + ([C_r] + [C_p])\{\dot{\delta}_r\} + ([K_r] + [K_p])\{\delta_r\} = \{F_{d,a,su}^0\} \quad (IV.32)$$

Comme le vecteur $\{F_{d,a,su}^0\}$ est constant, la solution particulière de l'équation (IV.32) est de la forme :

$$\{\delta_{su}^0\} = ([K_r] + [K_p])^{-1} \{F_{d,a,su}^0\} \quad (IV.33)$$

Remarque : il est conclu que l'équation (IV.29) est utilisée pour calculer la réponse du rotor au balourd, que l'équation (IV.31) est employée pour observer la réponse fréquentielle du rotor à la translation du support et que l'équation (IV.20) permet d'illustrer les orbites en régime stationnaire des points situés le long de la ligne moyenne de l'arbre.

IV.2.2 Système d'équations différentielles à coefficients paramétriques

Lorsque le rotor est dissymétrique et soumis à des mouvements de **type A** du support ou symétrique et soumis à des mouvements de rotation sinusoïdale du support, les équations du mouvement comprennent des termes paramétriques périodiques (dans le temps) et sont présentées par l'équation (IV.4).

Le comportement dynamique du rotor est examiné par la théorie de FLOQUET pour évaluer sa stabilité dynamique latérale et par des méthodes d'intégration numérique pas à pas dans le temps pour prédire ses réponses forcées dans le domaine temporel et ses orbites en régime permanent.

IV.2.2.1 Analyse de stabilité dynamique

La majorité des études et des recherches, qui portent sur l'analyse de stabilité des rotors décrits par des équations différentielles à coefficients périodiques, est basée sur l'utilisation de la théorie de FLOQUET. Plus précisément, la détermination de la matrice dite « de monodromie » (ou « de transition d'état ») durant une seule période τ_{ep} de l'excitation paramétrique et l'analyse de ses valeurs propres permettent d'identifier les zones d'instabilité, voir **EVAN-IWANOWSKI [55]**, **FRIEDMANN [61]**, **DUFOUR et BERLIOZ [50]**, **BERLIOZ et al. [17]**, **JEDRZEJEWSKI [84]**, **BACHELET [6]** ainsi que **DAKEL et al. [41]**. Une description détaillée de cette approche et toutes les clefs pour sa mise en œuvre sont présentées ci-après.

Tout d'abord, l'application de la théorie de FLOQUET requiert un système différentiel homogène représenté sous forme d'état, c'est-à-dire que les équations différentielles linéaires (IV.4) du rotor deviennent sans second membre et doivent être transformées en un système du premier ordre défini par :

$$\{\dot{X}_r\} = [A_r]\{X_r\} \quad (IV.34)$$

Le vecteur d'état $\{X_r\}$ et la matrice d'état $[A_r]$ sont similaires à ceux présentés dans les équations (IV.11) et (IV.15). Cependant, les matrices constituant la matrice d'état $[A_r]$ sont périodiques de période τ_{ep} , c'est-à-dire que $[A_r]$ est aussi τ_{ep} -périodique :

$$[A_r(t)] = [A_r(t + \tau_{ep})] \quad (IV.35)$$

Le système différentiel (IV.34) a un maximum de $2n_g$ solutions linéaires indépendantes. Une matrice carrée $[\varphi_r]$ de dimensions $2n_g \times 2n_g$ appelée « matrice fondamentale », dont les colonnes représentent des solutions indépendantes de ce système, peut alors être définie par :

$$[\dot{\varphi}_r] = [A_r][\varphi_r] \quad (IV.36)$$

Elle est reliée au vecteur d'état du rotor et aux conditions initiales $\{X_r(0)\}$ du système (IV.34) par :

$$\{X_r\} = [\varphi_r]\{X_r(0)\} \quad (IV.37)$$

Puisque le système (IV.34) est linéaire, deux matrices fondamentales $[\varphi_r^1] = [\varphi_r(t)]$ et $[\varphi_r^2] = [\varphi_r(t + \tau_{ep})]$ peuvent être reliées entre elles par l'intermédiaire d'une matrice non singulière constante $[\Theta_r]$ comme suit :

$$[\varphi_r^2] = [\varphi_r^1][\Theta_r] \quad (IV.38)$$

alors :

$$[\varphi_r(t + \tau_{ep})] = [\varphi_r(t)][\Theta_r] \quad (IV.39)$$

Ensuite, la théorie de FLOQUET précise que si $[\varphi_r(t)]$ est une matrice fondamentale du système différentiel (IV.34), la matrice $[\varphi_r(t + \tau_{ep})]$ l'est aussi. De plus, elle indique que pour la matrice $[\varphi_r(t)]$, il existe une matrice non singulière τ_{ep} -périodique $[\Gamma_r(t)]$ et une matrice constante $[\Psi_r]$ telles que :

$$[\varphi_r(t)] = [\Gamma_r(t)]e^{[\Psi_r]t} \quad (IV.40)$$

avec :

$$[\Gamma_r(t)] = [\Gamma_r(t + \tau_{ep})] \quad (IV.41)$$

En notant la périodicité des matrices $[\varphi_r(t)]$ et $[\Gamma_r(t)]$, l'équation (IV.40) est réécrite :

$$[\varphi_r(t + \tau_{ep})] = [\Gamma_r(t + \tau_{ep})]e^{[\Psi_r](t + \tau_{ep})} = [\Gamma_r(t)]e^{[\Psi_r](t + \tau_{ep})} = [\varphi_r(t)]e^{[\Psi_r]\tau_{ep}} \quad (IV.42)$$

En combinant les équations (IV.39) et (IV.42), la matrice $[\Theta_r]$ est reliée à $[\Psi_r]$ comme suit :

$$[\Theta_r] = e^{[\Psi_r]\tau_{ep}} = [\varphi_r(t)]^{-1}[\varphi_r(t + \tau_{ep})] \quad (IV.43)$$

En appliquant l'équation (IV.43) à l'instant $t = 0$ et en considérant les conditions initiales $[\varphi_r(0)] = [I]$ (où $[I]$ est la matrice identité) déduites de l'équation (IV.37), la matrice $[\Theta_r]$ devient la matrice fondamentale du système (IV.34) résolu sur une seule période τ_{ep} de l'excitation paramétrique :

$$[\Theta_r] = e^{[\Psi_r]\tau_{ep}} = [\varphi_r(\tau_{ep})] \quad (IV.44)$$

La matrice $[\varphi_r(\tau_{ep})]$ est appelée « matrice de monodromie » et peut être déduite de la dérivation de l'équation (IV.37) par rapport au vecteur $\{X_r(0)\}$ des conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{\partial \{X_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right|_{t=\tau_{ep}} = [\varphi_r(\tau_{ep})] = \begin{bmatrix} [\Phi_r(\tau_{ep})] \\ [\dot{\Phi}_r(\tau_{ep})] \end{bmatrix} \quad (IV.45)$$

où :

$$[\Phi_r] = \frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \quad (IV.46)$$

La stabilité du système (IV.34) est évaluée par les valeurs propres ρ_r^i (dites « exposants de FLOQUET ») de la matrice $[\Psi_r]$. Ces dernières sont reliées aux valeurs propres λ_r^i (dites « multiplicateurs caractéristiques de FLOQUET) de la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_{ep})]$ par :

$$\lambda_r^i = e^{\rho_r^i \tau_{ep}} \quad (IV.47)$$

Les valeurs propres ρ_r^i sont habituellement des quantités complexes données par :

$$\rho_r^i = \frac{1}{\tau_{ep}} \left(\ln \|\lambda_r^i\| + j \arg \lambda_r^i \right) \quad \text{avec} \quad j = \sqrt{-1} \quad (IV.48)$$

Enfin, la stabilité du rotor est discutée en fonction du signe de la partie réelle de ρ_r^i et la théorie de FLOQUET affirme que :

- si toutes les parties réelles des exposants de FLOQUET sont négatives et donc tous les modules des multiplicateurs caractéristiques de FLOQUET à l'instant $t = \tau_{ep}$ sont inférieurs à 1, le système est asymptotiquement stable,
- si au moins un des modules des multiplicateurs de FLOQUET est plus grand que 1, le système est instable.

Ainsi pour déterminer si le rotor est stable ou non, il suffit de chercher les valeurs propres de la matrice de monodromie produite par des conditions initiales $[\varphi_r(0)] = [I]$ comme annoncé précédemment.

Pour calculer cette matrice, le système d'équations (IV.34) du rotor est intégré sur une seule période τ_{ep} de l'excitation paramétrique en utilisant une méthode d'intégration temporelle pas à pas (soit la méthode de RUNGE-KUTTA, soit celle de NEWMARK présentées dans les **Annexes F** et **G**).

Lorsque le schéma de RUNGE-KUTTA est considéré, les conditions initiales suivantes au temps $t = 0$ sont données :

$$\{X_r^i(0)\} = \langle 0, 0, \dots, 1, \dots, 0 \rangle^T \quad (IV.49)$$

où :

- seule la $i^{\text{ème}}$ composante n'est pas nulle et est égale à 1.

Pour chaque intégration, le vecteur $\{X_r^i(\tau_{ep})\}$ est obtenu. Il représente la solution de l'équation (IV.34) à la fin d'une période τ_{ep} et la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_{ep})]$. $2n_g$ intégrations sont nécessaires afin de fournir la matrice de monodromie au temps $t = \tau_{ep}$ (où n_g est le nombre total de degrés de liberté des équations du mouvement (IV.4)), c'est-à-dire :

$$[\varphi_r(\tau_{ep})] = \left[\{X_r^1(\tau_{ep})\}, \{X_r^2(\tau_{ep})\}, \dots, \{X_r^i(\tau_{ep})\}, \dots, \{X_r^{2n_g}(\tau_{ep})\} \right] \quad (IV.50)$$

Lorsque le schéma de NEWMARK est considéré, les conditions initiales suivantes sont choisies :

$$[\varphi_r(0)] = \begin{bmatrix} [\Phi_r(0)] \\ [\dot{\Phi}_r(0)] \end{bmatrix} \quad (IV.51)$$

avec :

$$[\Phi_r(0)] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \end{bmatrix} ; \quad [\dot{\Phi}_r(0)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (IV.52)$$

Les matrices $[\Phi_r]$, $[\dot{\Phi}_r]$ et $[\ddot{\Phi}_r]$ de dimensions $n_g \times 2n_g$ sont calculées respectivement de la même manière que pour les vecteurs $\{\delta_r\}$, $\{\dot{\delta}_r\}$ et $\{\ddot{\delta}_r\}$ dans l'algorithme de NEWMARK (voir l'Annexe G). Donc une seule résolution sur une période τ_{ep} est nécessaire pour construire la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_{ep})]$.

Remarque : le schéma explicite de RUNGE-KUTTA est plus sensible à la discrétisation temporelle que le schéma implicite de NEWMARK qui est inconditionnellement stable grâce aux valeurs des paramètres $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/4$. Donc la méthode explicite nécessite des pas de temps plus petits afin d'assurer sa stabilité numérique, ce qui peut augmenter de manière importante le temps de calcul même si cela présente l'avantage d'une meilleure précision. Comme indiqué par PELETAN [126] et PELETAN et al. [127], la matrice de monodromie peut être calculée de manière très efficace en utilisant la version linéaire de l'algorithme de NEWMARK qui est considérée comme le meilleur compromis entre temps de calcul, précision des résultats et simplicité de mise en œuvre, surtout pour des systèmes de grande taille.

IV.2.2.2 Réponses forcées et orbites

Le mouvement dynamique transitoire des nœuds du rotor est obtenu en résolvant les équations linéaires du mouvement (IV.4) à l'aide de l'algorithme implicite d'intégration temporelle de NEWMARK basé sur l'accélération moyenne (correspondant au jeu de paramètres $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/4$) et présenté dans l'Annexe G.

Le vecteur $\{\delta_r^0\}$ des déplacements de la position d'équilibre statique C_p^0 est utilisé pour initialiser le problème dynamique transitoire. Le temps d'intégration final est sélectionné de telle sorte que les effets transitoires ont disparu et le régime permanent est atteint.

Enfin, dans le cas d'un palier hydrodynamique linéarisé, il est nécessaire d'établir précisément sa limite de validité en confrontant les résultats obtenus à ceux du modèle non linéaire de palier.

IV.3 Analyse dynamique non linéaire

Les équations différentielles non linéaires du mouvement de l'ensemble rotor embarqué-palier hydrodynamique sont établies au **Chapitre III** et rappelées ici comme suit :

$$[M_r(t)]\{\ddot{\delta}_r\} + [C_r(t)]\{\dot{\delta}_r\} + [K_r(t)]\{\delta_r\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\} \quad (IV.53)$$

Ces équations sont non linéaires à cause des paliers hydrodynamiques (composants locaux) même si ces derniers ne concernent pas tous les degrés de liberté du rotor. Dans ce qui suit, le traitement des équations est bien détaillé.

Les problèmes dynamiques non linéaires sont lourds à traiter parce qu'il n'y a pas de méthode universelle capable de les résoudre. Les méthodes utilisées sont fonction de nombreux paramètres, comme par exemple la nature du problème et le type de solution recherchée (transitoire, périodique, aléatoire, etc.). Le type de non linéarité rencontrée est aussi un élément important. Certaines méthodes sont employées pour pouvoir traiter des non linéarités dites « faibles » (par exemple, la non linéarité géométrique), c'est-à-dire la non linéarité dans laquelle il n'existe pas de variation accidentelle dans la dérivée première de sa fonction caractéristique. Par ailleurs, d'autres méthodes peuvent fonctionner plus facilement avec des non linéarités dites « fortes » (par exemple, celle associée au contact en présence de jeu radial de roulement). Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse aux paliers fluides non linéaires qui appartiennent à cette seconde catégorie.

Les méthodes temporelles sont classiquement utilisées afin d'intégrer le système d'équations différentielles non linéaires du second ordre dépendant du temps. Elles consistent à construire une solution approximée pas à pas dans le temps et leurs grands avantages sont leur capacité à traiter tous les types de problèmes non linéaires et leur simplicité de mise en œuvre.

Parmi les méthodes temporelles, le chercheur peut distinguer les schémas explicites d'intégration (comme par exemple la méthode de RUNGE-KUTTA) et ceux implicites (comme par exemple la méthode de NEWMARK). Pour la méthode explicite de RUNGE-KUTTA, les équations différentielles du second ordre, qui décrivent le mouvement du système, doivent d'abord être transformées en équations du premier ordre, c'est-à-dire qu'elles sont mises sous forme d'état. Par contre, les vecteurs déplacement et vitesse à l'instant actuel sont simplement déterminés en fonction de ceux calculés à l'instant précédent. Pour la méthode implicite de NEWMARK, les vecteurs déplacement et vitesse à l'instant actuel sont obtenus en fonction des quantités aux instants actuel et précédent. La méthode de RUNGE-KUTTA présente les inconvénients de requérir un système différentiel sous forme d'état, qui double la taille des matrices ainsi que le nombre d'inconnues à calculer, et des pas de temps assez faibles pour des questions de stabilité numérique. C'est pourquoi, on préfère résoudre les équations non linéaires du mouvement du rotor en combinant une procédure itérative de NEWTON-RAPHSON et le schéma implicite d'intégration pas à pas dans le temps de type NEWMARK.

Si un système linéaire subit une excitation extérieure harmonique, sa réponse est aussi harmonique et de même période que l'excitation une fois le régime permanent établi. Cette constatation fondée sur la théorie des équations différentielles linéaires n'est pas toujours vérifiée pour des systèmes non linéaires, c'est-à-dire que dans certains cas, des réponses quasi-périodiques ou encore chaotiques sont également observées. Cependant, il est légitime de supposer que les réponses de tels systèmes sont périodiques de périodes multiples de la période de l'excitation. L'utilisation de l'intégration temporelle pour la recherche de la solution périodique est toujours réalisable. Mais le calcul à mener, qui nécessite une phase transitoire particulièrement longue jusqu'au régime permanent périodique pour des systèmes peu amortis, peut être très coûteux en temps d'exécution.

Pour cela, dans le cas où les solutions recherchées sont de type périodique, les méthodes de shooting et de la balance harmonique peuvent être utilisées en vue de diminuer le temps de calcul même si elles sont habituellement employées pour des problèmes où la non linéarité est faible et ont tendance à moins bien converger. La méthode de shooting utilisée pour la résolution de problèmes de valeurs aux limites (boundary-value problems) consiste à rechercher directement une condition initiale qui correspond à une solution périodique. L'intégration temporelle sur une seule période de la réponse à partir de cette condition initiale conduit directement au régime permanent. Dans le cas de la méthode de la balance harmonique, la solution périodique des équations du mouvement peut être correctement approximée en la décomposant en série de FOURIER tronquée. La validation de cette hypothèse dépend fortement de l'ordre de troncature. Autrement dit, plus le nombre de termes dans la série de FOURIER est important, plus la solution approximée est exacte.

L'analyse de stabilité des solutions périodiques est une étape supplémentaire indispensable, qui doit suivre le calcul des orbites stationnaires, afin de ne prendre en compte que les solutions stables (c'est-à-dire celles physiquement observables). Il convient d'indiquer que cette étape n'est pas habituellement requise lors des simulations par intégration temporelle puisque les orbites périodiques déterminées sont intrinsèquement stables. Pour l'analyse de stabilité des solutions, la théorie de FLOQUET est employée.

Les problèmes non linéaires, quant à eux, montrent fréquemment des phénomènes particuliers tels que des sauts de réponse et des doublements de période des solutions. Donc il est intéressant d'utiliser des stratégies de continuation couplées aux méthodes de calcul d'orbites stationnaires. Pour suivre la solution lorsqu'elle varie en fonction d'un paramètre (comme par exemple la fréquence de l'excitation), les techniques de continuation séquentielle et de continuation par longueur d'arc seront expliquées à la suite de la présentation des méthodes de calcul citées ci-dessus.

IV.3.1 Régime transitoire

Pour des grandes forces du palier hydrodynamique et ainsi des grands déplacements du rotor, l'analyse dynamique linéaire n'est plus valide. Dans ce cas, l'analyse non linéaire est considérée pour les paliers. Résoudre le problème dynamique non linéaire complet fournit la réponse dynamique du rotor et nécessite la résolution simultanée des équations du mouvement (IV.53) de l'ensemble rotor-palier et des équations (II.160)-(II.167) calculant les forces hydrodynamiques non linéaires des paliers obtenues par l'équation de REYNOLDS en régime dynamique. En conséquence, l'analyse utilise un algorithme complexe de résolution combinant la procédure incrémentale itérative de NEWTON-RAPHSON avec le schéma d'intégration temporelle de NEWMARK, voir, par exemple, **BAGUET et VELEX [12]**, **BAGUET et JACQUENOT [13]** ainsi que **DAKEL et al. [38]**.

Les équations du mouvement (IV.53) sont discrétisées de telle sorte qu'à l'instant t_{i+1} ($1 \leq i \leq n_{pt} + 1$ où n_{pt} est le nombre de pas de temps) elles s'expriment comme suit :

$$[M_r(t_{i+1})]\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\} + [C_r(t_{i+1})]\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} + [K_r(t_{i+1})]\{\delta_r^{i+1}\} = \{F_r(t_{i+1})\} + \{F_p(\{\delta_r^{i+1}\}, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\})\} \quad (IV.54)$$

L'équation précédente est non linéaire en raison des forces hydrodynamiques $\{F_p\}$ qui dépendent du déplacement et de la vitesse du rotor. Elle peut donner la forme résiduelle suivante :

$$\begin{aligned} \{G_r(\{\delta_r^{i+1}\})\} &= [M_r(t_{i+1})]\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\} + [C_r(t_{i+1})]\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} + [K_r(t_{i+1})]\{\delta_r^{i+1}\} \\ &\quad - \{F_r(t_{i+1})\} - \{F_p(\{\delta_r^{i+1}\}, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\})\} = \{0\} \end{aligned} \quad (IV.55)$$

Afin de résoudre l'équation (IV.55) du vecteur résiduel $\{G_r(\{\delta_r^{i+1}\})\}$ qui est fonction des déplacements dynamiques, les vecteurs vitesse et déplacement des nœuds du rotor entre les instants t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (où Δt est le pas de temps) sont approximés par les formules générales suivantes du schéma implicite de NEWMARK :

$$\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} = \{\dot{\delta}_r^i\} + \Delta t (\xi_1 \{\ddot{\delta}_r^{i+1}\} + (1 - \xi_1) \{\ddot{\delta}_r^i\}) \quad (IV.56)$$

$$\{\delta_r^{i+1}\} = \{\delta_r^i\} + \Delta t \{\dot{\delta}_r^i\} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (2\xi_2 \{\ddot{\delta}_r^{i+1}\} + (1 - 2\xi_2) \{\ddot{\delta}_r^i\}) \quad (IV.57)$$

où :

- les paramètres $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/4$ définissent un schéma correspondant à une accélération moyenne constante sans toutefois assurer une stabilité numérique inconditionnelle comme c'était le cas pour le problème linéaire.

Remarque : il faut effectuer une intégration temporelle avec un pas de temps suffisamment faible pour que l'indépendance entre les résultats obtenus et la valeur du pas de temps utilisé soit vérifiée et que le calcul n'explose pas.

Puisque l'équation (IV.55) est non linéaire, une stratégie itérative basée sur la méthode de NEWTON-RAPHSON est utilisée pour traiter la non linéarité due au problème de lubrification hydrodynamique des paliers, c'est-à-dire que le vecteur déplacement $\{\delta_r^{i+1}\}$ est cherché comme limite d'une suite de vecteurs dont les éléments $\{\delta_r^{i+1}\}^1, \dots, \{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\delta_r^{i+1}\}^{k+1}, \dots$ sont consécutivement corrigés, tandis que les vecteurs vitesse et accélération sont concernés par la prédiction.

CHAPITRE IV : Outils et méthodes numériques pour l'analyse du comportement dynamique

En effectuant ainsi un développement en série de TAYLOR de l'équation (IV.55) au voisinage du dernier vecteur calculé $\{\delta_r^{i+1}\}^k$, il vient :

$$\begin{aligned} \{G_r(\{\delta_r^{i+1}\}^{k+1})\} &= \{G_r(\{\delta_r^{i+1}\}^k)\} + \frac{1}{1!} \frac{d\{G_r\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k} \{\Delta\delta_r^{NL}\} \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \{\Delta\delta_r^{NL}\}^T & \{0\}^T & \dots & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\Delta\delta_r^{NL}\}^T & \dots & \{0\}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{0\}^T & \dots & \{\Delta\delta_r^{NL}\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \dots & \{0\}^T & \{\Delta\delta_r^{NL}\}^T \end{bmatrix} \frac{d}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \left(\frac{d\{G_r\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \right) \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k} \{\Delta\delta_r^{NL}\} + \dots \end{aligned} \quad (IV.58)$$

La linéarisation cohérente de l'équation (IV.55) est appliquée en limitant la série de TAYLOR à l'ordre 1 comme suit :

$$\{G_r(\{\delta_r^{i+1}\}^{k+1})\} \simeq \{G_r(\{\delta_r^{i+1}\}^k)\} + \frac{d\{G_r\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k} \{\Delta\delta_r^{NL}\} = \{0\} \quad (IV.59)$$

d'où l'algorithme itératif de NEWTON-RAPHSON :

$$[J_r^{NL}(\{\delta_r^{i+1}\}^k)] \{\Delta\delta_r^{NL}\} = -\{G_r(\{\delta_r^{i+1}\}^k)\} \quad (IV.60)$$

avec :

$$\{\Delta\delta_r^{NL}\} = \{\delta_r^{i+1}\}^{k+1} - \{\delta_r^{i+1}\}^k \quad (IV.61)$$

où :

- $\{\Delta\delta_r^{NL}\}$ est l'incrément itératif du vecteur déplacement,
- k est l'itération de NEWTON-RAPHSON.

La matrice jacobienne $[J_r^{NL}]$ est fonction du vecteur $\{\delta_r^{i+1}\}$ des déplacements dynamiques du rotor à l'itération k . Compte tenu des dépendances des différents termes, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} [J_r^{NL}(\{\delta_r^{i+1}\}^k)] &= \frac{d\{G_r\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k} \\ &= [M_r(t_{i+1})] \frac{d\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} + [C_r(t_{i+1})] \frac{d\{\dot{\delta}_r^{i+1}\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} + [K_r(t_{i+1})] - \frac{d\{F_p\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\}^k} \end{aligned} \quad (IV.62)$$

En utilisant les approximations (IV.56) et (IV.57) du schéma de NEWMARK, les dérivées des vecteurs accélération et vitesse par rapport au vecteur déplacement sont déduites :

$$\frac{d\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} = \frac{1}{\xi_2 (\Delta t)^2} [I] \quad ; \quad \frac{d\{\dot{\delta}_r^{i+1}\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} = \frac{\xi_1}{\xi_2 \Delta t} [I] \quad (IV.63)$$

La dérivée des forces hydrodynamiques non linéaires dans la matrice jacobienne de l'équation (IV.62) dépend à la fois des vecteurs déplacement et vitesse $(\{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\}^k)$. Elle est aussi mise à jour à chaque itération k et exprimée dans ce qui suit :

$$\frac{d\{F_p\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\}^k} = \frac{\partial\{F_p\}}{\partial\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\}^k} + \frac{\partial\{F_p\}}{\partial\{\dot{\delta}_r^{i+1}\}} \Big|_{\{\delta_r^{i+1}\}^k, \{\dot{\delta}_r^{i+1}\}^k} \frac{d\{\dot{\delta}_r^{i+1}\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \quad (IV.64)$$

avec :

$$\frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} = \begin{bmatrix} [0]_4 \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_1^{p_1}-2) \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{p_1}^u}{\partial u_{p_1}} & \frac{\partial F_{p_1}^u}{\partial w_{p_1}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{p_1}^w}{\partial u_{p_1}} & \frac{\partial F_{p_1}^w}{\partial w_{p_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_j^{p_j}-n_j^{p_j}-1) \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial u_{p_j}} & \frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial w_{p_j}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial u_{p_j}} & \frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial w_{p_j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_m-n_m^{p_j}) \\ [0]_4 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (IV.65)$$

$$\frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} = \begin{bmatrix} [0]_4 \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_1^{p_1}-2) \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{p_1}^u}{\partial \dot{u}_{p_1}} & \frac{\partial F_{p_1}^u}{\partial \dot{w}_{p_1}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{p_1}^w}{\partial \dot{u}_{p_1}} & \frac{\partial F_{p_1}^w}{\partial \dot{w}_{p_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_j^{p_j}-n_j^{p_j}-1) \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial \dot{u}_{p_j}} & \frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial \dot{w}_{p_j}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial \dot{u}_{p_j}} & \frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial \dot{w}_{p_j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix} 4(n_m-n_m^{p_j}) \\ [0]_4 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (IV.66)$$

Les dérivées partielles des forces hydrodynamiques non linéaires $\{F_p\}$ par rapport au vecteur déplacement dynamique $\{\delta_r\}$ et au vecteur vitesse $\{\dot{\delta}_r\}$ sont calculées de manière numérique par différences finies. De plus, il est suffisant de ne perturber que les déplacements transversaux u_{p_j} et w_{p_j} du rotor ainsi que les vitesses correspondantes \dot{u}_{p_j} et \dot{w}_{p_j} aux nœuds $n_1^{p_1}, \dots, n_l^{p_j}$ des paliers hydrodynamiques, c'est-à-dire les degrés de liberté vraiment utiles pour réaliser les différentiations numériques.

Pour le palier situé au nœud $n_i^{P_j}$, les dérivées des composantes $F_{p_j}^u$ et $F_{p_j}^w$ du vecteur des forces fluides dynamiques par rapport à u_{p_j} et w_{p_j} sont données par :

$$\frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial u_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^u(u_{p_j} + \delta u_p, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta u_p} \quad (IV.67)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial u_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^w(u_{p_j} + \delta u_p, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta u_p} \quad (IV.68)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial w_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j} + \delta w_p, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta w_p} \quad (IV.69)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial w_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j} + \delta w_p, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta w_p} \quad (IV.70)$$

Les dérivées des composantes $F_{p_j}^u$ et $F_{p_j}^w$ du vecteur des forces fluides dynamiques par rapport à \dot{u}_{p_j} et \dot{w}_{p_j} peuvent s'exprimer par :

$$\frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial \dot{u}_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j} + \delta \dot{u}_p, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta \dot{u}_p} \quad (IV.71)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial \dot{u}_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j} + \delta \dot{u}_p, \dot{w}_{p_j}) - F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta \dot{u}_p} \quad (IV.72)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^u}{\partial \dot{w}_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j} + \delta \dot{w}_p) - F_{p_j}^u(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta \dot{w}_p} \quad (IV.73)$$

$$\frac{\partial F_{p_j}^w}{\partial \dot{w}_{p_j}} = \frac{F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j} + \delta \dot{w}_p) - F_{p_j}^w(u_{p_j}, w_{p_j}, \dot{u}_{p_j}, \dot{w}_{p_j})}{\delta \dot{w}_p} \quad (IV.74)$$

Afin d'obtenir des résultats satisfaisants, les incréments δu_p , δw_p , $\delta \dot{u}_p$ et $\delta \dot{w}_p$ traduisant la perturbation doivent être les plus petits possible et faibles devant l'unité mais suffisamment grands pour que les variations des forces fluides dépassent la précision numérique de l'algorithme. Après certains essais, les perturbations δu_p et δw_p des déplacements sont choisies égales à 1×10^{-8} m (quasiment égales à 1×10^{-4} en valeur relative par rapport au jeu radial du palier hydrodynamique), tandis que celles $\delta \dot{u}_p$ et $\delta \dot{w}_p$ des vitesses sont choisies égales à 1×10^{-5} m/s.

En substituant les équations (IV.63) et (IV.64) dans (IV.62), l'expression finale de la matrice jacobienne $[J_r^{NL}]$ devient alors :

$$\begin{aligned} [J_r^{NL}(\{^k \delta_r^{i+1}\})] &= \frac{d\{G_r\}}{d\{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{^k \delta_r^{i+1}\}} \\ &= \frac{1}{\xi_2 (\Delta t)^2} [M_r(t_{i+1})] + \frac{\xi_1}{\xi_2 \Delta t} [C_r(t_{i+1})] + [K_r(t_{i+1})] \\ &\quad - \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{^k \delta_r^{i+1}\}, \{^k \delta_r^{i+1}\}} - \frac{\xi_1}{\xi_2 \Delta t} \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r^{i+1}\}} \Big|_{\{^k \delta_r^{i+1}\}, \{^k \delta_r^{i+1}\}} \end{aligned} \quad (IV.75)$$

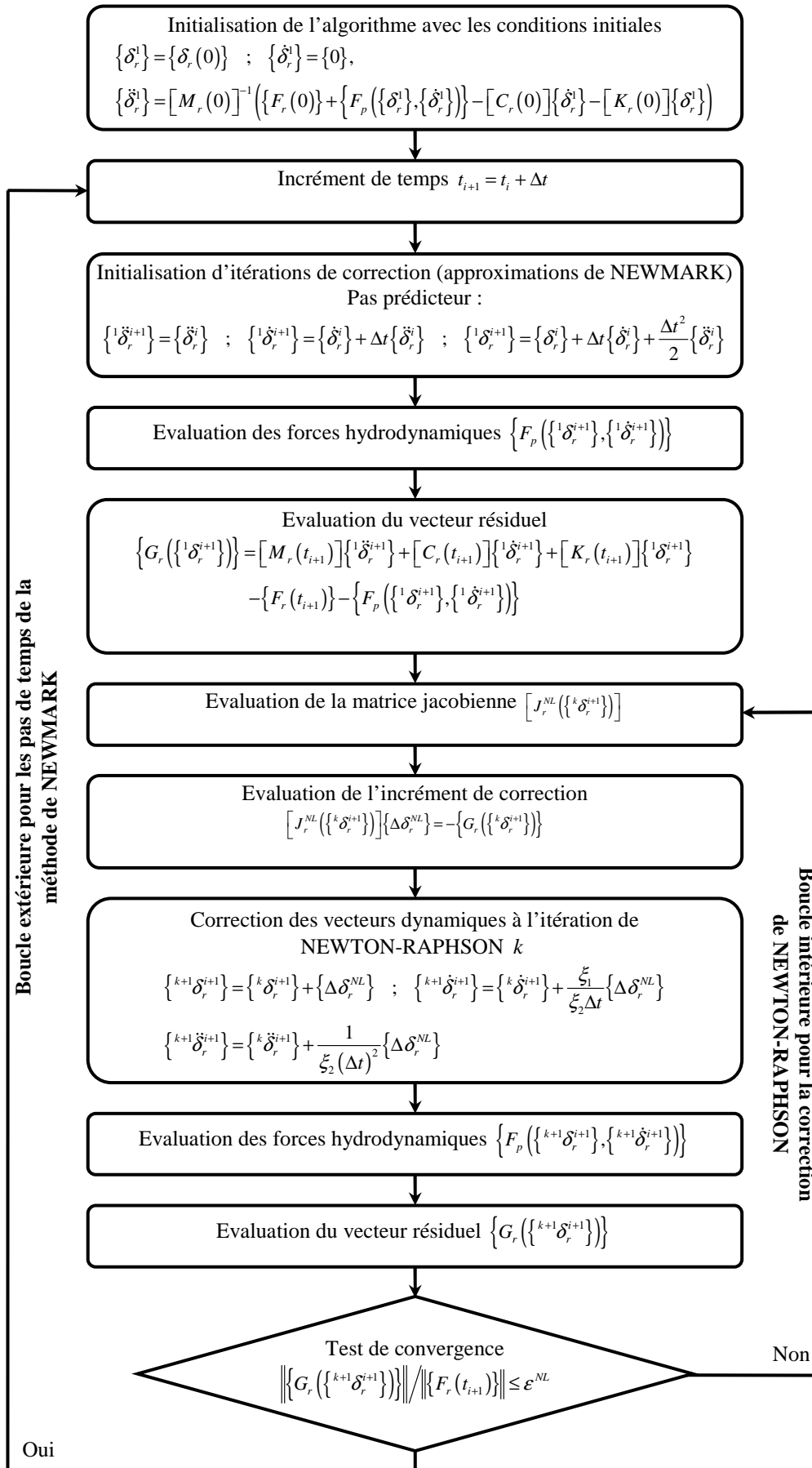


FIG. IV.1 : Algorithme utilisé pour l'analyse transitoire non linéaire d'un rotor embarqué monté sur des paliers hydrodynamiques

CHAPITRE IV : Outils et méthodes numériques pour l'analyse du comportement dynamique

L'algorithme de la procédure itérative de NEWTON-RAPHSON combinée au schéma d'intégration temporelle de NEWMARK est présenté sur la figure **FIG. IV.1**. Comme noté, deux boucles sont placées à l'intérieur de cet algorithme pour intégrer les équations différentielles du mouvement du rotor et pour assurer la convergence des déplacements aux paliers hydrodynamiques.

Le vecteur des déplacements dynamiques initiaux est pris égal aux coordonnées de la position d'équilibre statique $\{\delta_r^0\}$ (ou égal à d'autres vecteurs définis par l'utilisateur) et le vecteur vitesse initiale est fixé à zéro. Lorsque le vecteur résiduel $\{G_r(\{\delta_r^{i+1}\})\}$ est calculé par l'équation (IV.55), un nouvel incrément de déplacement $\{\Delta\delta_r^{NL}\}$ est produit par l'équation (IV.60) et donc les vecteurs déplacement, vitesse et accélération sont mis à jour comme montré en figure **FIG. IV.1**.

Si le résidu relatif $\|G_r(\{\delta_r^{i+1}\})\|/\|F_r(t_{i+1})\|$ est inférieur à un critère de convergence ε^{NL} fixé à 1×10^{-6} , une solution convergée est atteinte et l'algorithme passe au pas de temps suivant pour le schéma de NEWMARK. Sinon, les forces non linéaires du palier hydrodynamique sont réévaluées et une nouvelle itération de NEWTON-RAPHSON débute.

Cet algorithme proposé est programmé dans l'environnement MATLAB afin de pouvoir effectuer la résolution multi-itérative comme présentée sur la figure **FIG. IV.1**.

Remarque : afin d'atteindre la réponse dynamique stabilisée en régime périodique, le schéma d'intégration numérique de NEWMARK doit être utilisé sur un grand nombre de périodes temporelles dans le cas d'une excitation extérieure harmonique du système. Cela nécessite un énorme temps de calcul surtout lorsque le schéma évoqué est répété pour un grand nombre de fréquences fondamentales d'excitations extérieures (voir la figure **FIG. IV.2**). Le temps de calcul peut être réduit en cherchant directement la solution périodique grâce aux méthodes de shooting et de la balance harmonique qui sont discutées dans le paragraphe suivant.

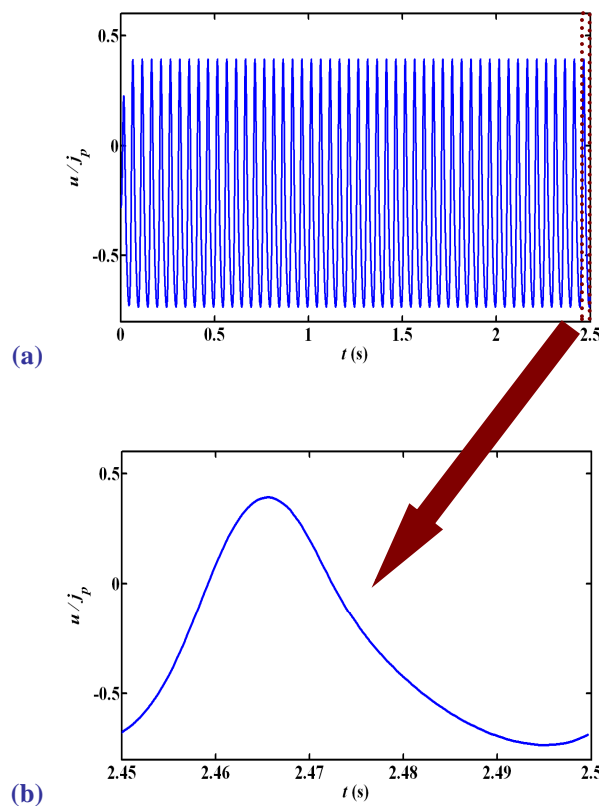


FIG. IV.2 : (a) Calcul du mouvement dynamique transitoire, (b) Réponse stabilisée en régime périodique

IV.3.2 Calcul direct de la solution périodique

IV.3.2.1 Méthode de tir (de shooting)

Puisque le régime stationnaire périodique est ciblé dans l'analyse dynamique, la méthode de shooting peut être employée, voir, par exemple, **ZHENG et HASEBE [163]**, **DEMAILLY [43]**, **ASSIS RODRIGUES [5]**, **LI et XU [108]**, **PEETERS et al. [125]** ainsi que **IBRAHIM et al. [81]**. Le principe de cette méthode consiste à corriger une solution initiale de façon à ce qu'elle corresponde à une solution périodique. Pour cela, le problème de valeurs aux limites en deux points suivant défini par la condition de périodicité est considéré :

$$\{H_r(\{X_r(0)\}, \tau_r)\} = \{X_r(\{X_r(0)\}, t = \tau_r)\} - \{X_r(0)\} = \{0\} \quad (IV.76)$$

avec :

$$\{X_r\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r\} \\ \{\dot{\delta}_r\} \end{Bmatrix} \quad (IV.77)$$

où :

- τ_r est la période minimale de la réponse dynamique du rotor.

La dépendance de la réponse du système à la période fondamentale τ_{ex} des forces d'excitation harmonique est supposée, c'est-à-dire $\tau_r = j\tau_{ex}$ (avec $j = 1, 2, 3, \dots$). Des multiples entiers de la période fondamentale τ_{ex} sont utilisés pour calculer des réponses sous-harmoniques du rotor qui surviennent, par exemple, après une bifurcation de type doublement de période. En pratique, afin de trouver la période minimale τ_r de la réponse du rotor, l'algorithme de shooting est tout d'abord exécuté avec $\tau_r = \tau_{ex}$ (réponse harmonique) et s'il n'y a pas de convergence obtenue selon un test d'arrêt des itérations, il est alors exécuté avec $\tau_r = 2\tau_{ex}$, $\tau_r = 3\tau_{ex}$, ... successivement (réponse sous-harmonique).

Le vecteur d'état $\{X_r\}$ dans l'équation (IV.77) représente la solution de l'équation (IV.53) à la fin d'une période τ_r pour une solution initiale approximée $\{X_r(0)\}$. Ce vecteur est obtenu avec la version non linéaire du schéma d'intégration temporelle de NEWMARK sur une seule période τ_r (voir le **Paragraphe IV.3.1** et la figure **FIG. IV.1**). Une linéarisation appropriée de l'équation (IV.76) est appliquée en construisant un développement en série de TAYLOR du premier ordre de cette équation, puis des corrections itératives sont réalisées par la méthode de NEWTON-RAPHSON. Il vient :

$$\{H_r(\{^{k+1}X_r(0)\}, \tau_r)\} \simeq \{H_r(\{^kX_r(0)\}, \tau_r)\} + \left. \frac{\partial \{H_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right|_{(\{^kX_r(0)\}, \tau_r)} \{\Delta X_r^{SH}\} = \{0\} \quad (IV.78)$$

alors :

$$\left[J_r^{SH}(\{^kX_r(0)\}, \tau_r) \right] \{\Delta X_r^{SH}\} = -\{H_r(\{^kX_r(0)\}, \tau_r)\} \quad (IV.79)$$

avec :

$$\{\Delta X_r^{SH}\} = \{^{k+1}X_r(0)\} - \{^kX_r(0)\} \quad (IV.80)$$

où :

- $\{\Delta X_r^{SH}\}$ est l'incrément itératif du vecteur d'état du rotor,
- k est l'itération de NEWTON-RAPHSON.

La matrice jacobienne $\left[J_r^{SH} \right]$ est fonction du vecteur d'état initial $\{X_r(0)\}$ à l'itération k . Elle est donnée en dérivant l'équation (IV.76) par rapport à $\{X_r(0)\}$:

$$\left[J_r^{SH}(\{^kX_r(0)\}, \tau_r) \right] = \left. \frac{\partial \{H_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right|_{(\{^kX_r(0)\}, \tau_r)} = \left. \frac{\partial \{X_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right|_{(\{^kX_r(0)\}, \tau_r)} - [I] \quad (IV.81)$$

En utilisant l'équation (IV.45) du **Paragraphe IV.2.2.1**, il vient :

$$\left. \frac{\partial \{X_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right|_{\{X_r(0), \tau_r\}} = [\varphi_r(\tau_r)] = \begin{bmatrix} [\Phi_r(\tau_r)] \\ [\dot{\Phi}_r(\tau_r)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.82})$$

où :

$$\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} = [\Phi_r] \quad (\text{IV.83})$$

Ainsi lorsque les équations du mouvement du rotor sont traitées par la méthode de shooting, la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_r)]$ est un sous-produit de procédure de résolution.

Pour faire apparaître les matrices $[\Phi_r(\tau_r)]$ et $[\dot{\Phi}_r(\tau_r)]$ nécessaires au calcul de la matrice de monodromie, l'équation (IV.53) est dérivée par rapport au vecteur $\{X_r(0)\}$ des conditions initiales :

$$\begin{aligned} & [M_r(t)] \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right) + [C_r(t)] \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right) + [K_r(t)] \left(\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right) \\ &= \frac{\partial \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}}{\partial \{\delta_r\}} \left(\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right) + \frac{\partial \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{X_r(0)\}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

soit :

$$[M_r(t)] [\ddot{\Phi}_r] + \left([C_r(t)] - \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} \right) [\dot{\Phi}_r] + \left([K_r(t)] - \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \right) [\Phi_r] = [0] \quad (\text{IV.85})$$

avec :

$$\frac{d^2 [\Phi_r]}{dt^2} = [\ddot{\Phi}_r] ; \quad \frac{d [\Phi_r]}{dt} = [\dot{\Phi}_r] \quad (\text{IV.86})$$

L'équation (IV.85) est un système d'équations différentielles linéaires. Son intégration temporelle pas à pas de $t=0$ à $t=\tau_r$ fournit les matrices $[\Phi_r(\tau_r)]$ et $[\dot{\Phi}_r(\tau_r)]$ de dimensions $n_g \times 2n_g$, qui composent la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_r)]$. Pour cela, la version linéaire de l'algorithme de NEWMARK (voir l'**Annexe G**) est utilisée sur une seule période τ_r de la réponse du rotor, avec comme conditions initiales :

$$[\Phi_r(0)] = \frac{\partial \{\delta_r(0)\}}{\partial \{X_r(0)\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\delta_r(0)\}}{\partial \{\delta_r(0)\}} & \frac{\partial \{\delta_r(0)\}}{\partial \{\dot{\delta}_r(0)\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.87})$$

$$[\dot{\Phi}_r(0)] = \frac{\partial \{\dot{\delta}_r(0)\}}{\partial \{X_r(0)\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\dot{\delta}_r(0)\}}{\partial \{\delta_r(0)\}} & \frac{\partial \{\dot{\delta}_r(0)\}}{\partial \{\dot{\delta}_r(0)\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.88})$$

Il faut citer le fait que les matrices $[\Phi_r]$ et $[\dot{\Phi}_r]$ et le vecteur $\{X_r\}$ sont calculés simultanément.

L'algorithme de la méthode de shooting résolvant simultanément les équations (IV.53) et (IV.76) est résumé sur la figure **FIG. IV.3**. La solution initiale approximée $\{X_r(0)\}$ est prise égale à un vecteur d'état défini par l'utilisateur. Lorsque le vecteur résiduel $\{H_r(\{X_r(0)\}, \tau_r)\}$ est calculé par l'équation (IV.76), un nouvel incrément $\{\Delta X_r^{SH}\}$ du vecteur d'état est produit par l'équation (IV.79) et ainsi la solution initiale approximée $\{X_r(0)\}$ est corrigée et mise à jour.

Une tolérance de convergence du calcul ε^{SH} , à laquelle la valeur 1×10^{-8} est attribuée, porte sur la norme du vecteur résiduel et sur celle du vecteur d'état à l'instant $t = \tau_r$, c'est-à-dire si le rapport

$\|H_r(\{X_r(0)\}, \tau_r)\| / \|X_r(\{X_r(0)\}, t = \tau_r)\|$ est inférieur à la tolérance ε^{SH} , une solution convergée est obtenue et l'algorithme est terminé. Sinon, le vecteur d'état $\{X_r(\{X_r(0)\}, t = \tau_r)\}$ est recalculé grâce au schéma d'intégration de NEWMARK sur une seule période τ_r et une nouvelle correction itérative de NEWTON-RAPHSON commence.

Enfin, la solution périodique en utilisant la méthode de shooting est généralement obtenue en quelques itérations de NEWTON-RAPHSON seulement, illustrées sur la figure **FIG. IV.4**.

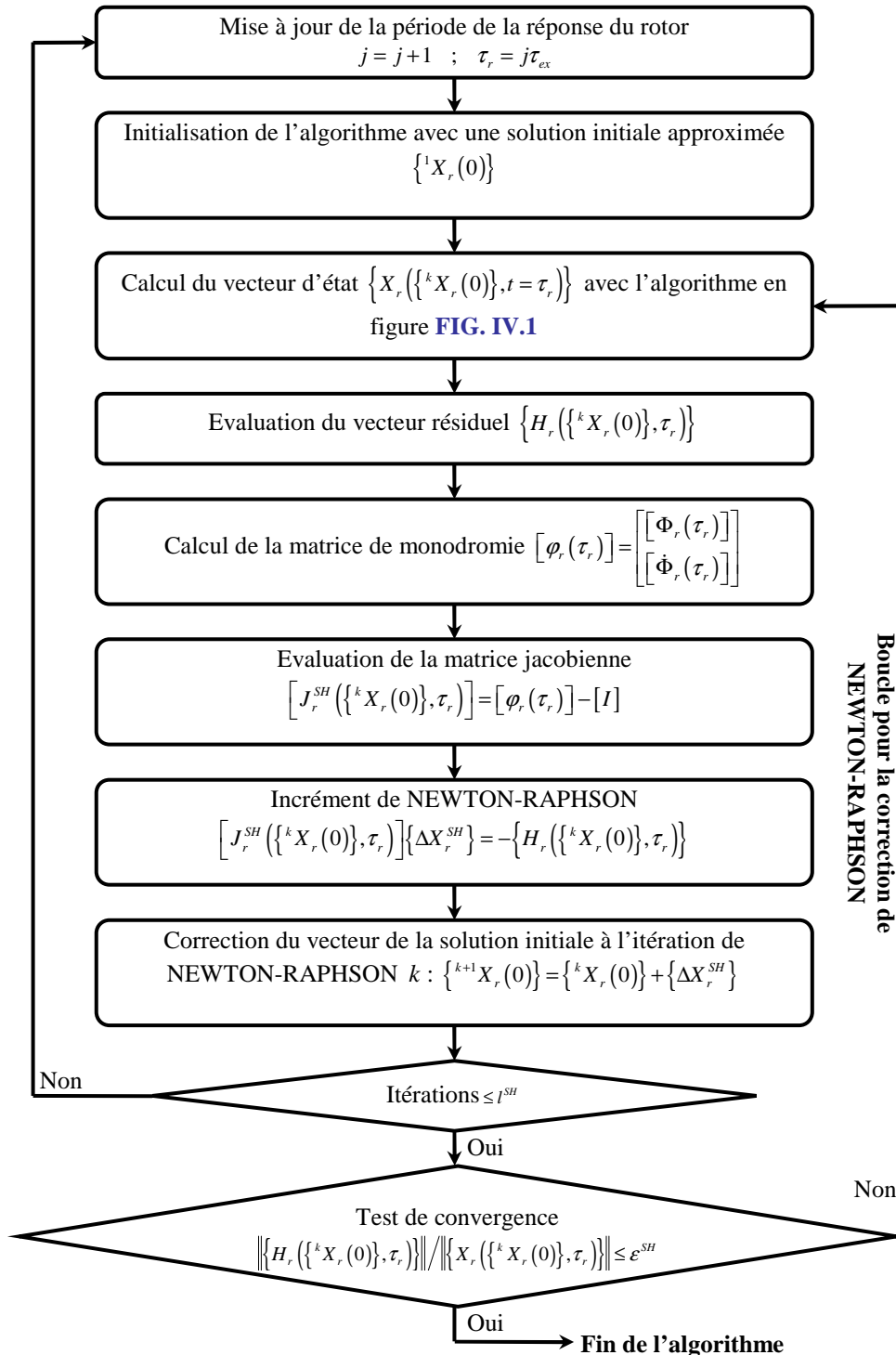


FIG. IV.3 : Algorithme de la méthode de shooting utilisé pour l'analyse dynamique non linéaire d'un rotor embarqué

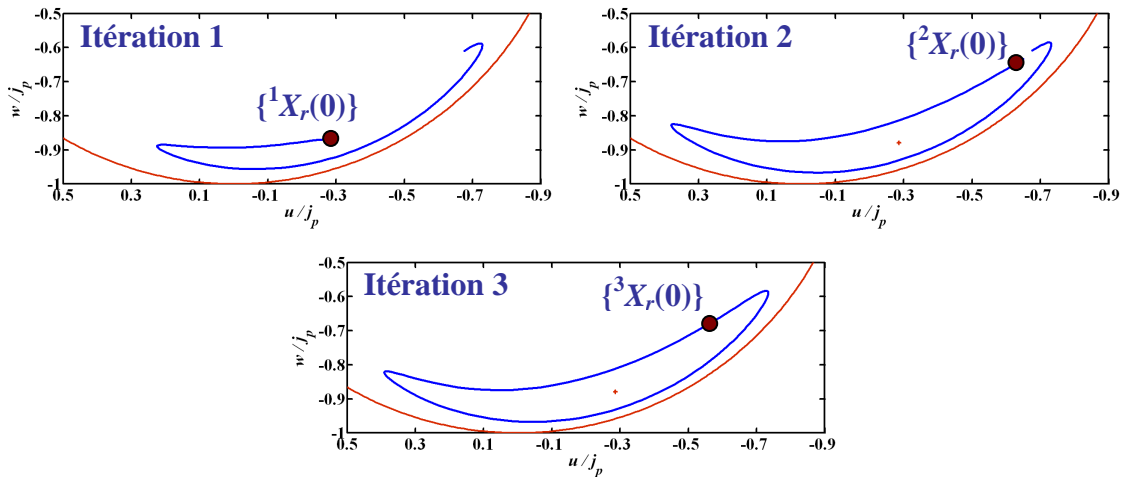


FIG. IV.4 : Principe de fonctionnement de la méthode de shooting

La méthode de shooting converge non seulement vers des solutions stables mais aussi vers celles instables. Cependant, seules les solutions stables peuvent être expérimentalement obtenues. La solution instable vérifie les équations du mouvement mais n'est pas physiquement observable parce qu'elle n'est associée à aucun bassin d'attraction. Autrement dit, tout mouvement initialisé avec des conditions initiales arbitraires s'éloigne de cet état périodique instable afin de se stabiliser sur un autre état d'équilibre stable qui n'est pas forcément périodique. C'est pourquoi, après avoir obtenu la solution périodique, sa stabilité peut être vérifiée en appliquant la théorie de FLOQUET, c'est-à-dire en calculant les valeurs propres (multiplicateurs caractéristiques de FLOQUET) de la matrice de monodromie $[\varphi_r(\tau_r)]$.

La solution est asymptotiquement stable si chaque multiplicateur de FLOQUET reste à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. Lorsqu'au moins un des multiplicateurs quitte le cercle, la solution périodique perd sa stabilité et une bifurcation apparaît, voir la figure FIG. IV.5. Pratiquement, les bifurcations de type point selle (qui cause un phénomène de saut dans la réponse forcée périodique) ou doublement de période surviennent si un multiplicateur part à travers +1 ou -1 respectivement, tandis que la bifurcation de type HOPF secondaire (qui conduit à une solution quasi-périodique et fait disparaître celle périodique) survient si deux multiplicateurs conjugués quittent transversalement le cercle comme montré sur la figure FIG. IV.5, voir, par exemple, ZHENG et HASEBE [163], DEMAILLY [43] et ASSIS RODRIGUES [5].

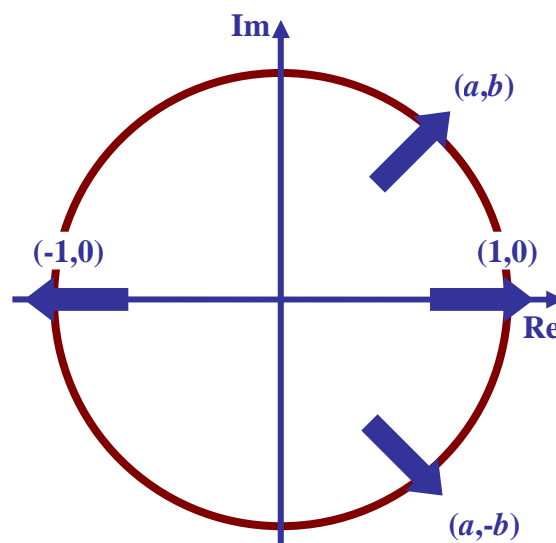


FIG. IV.5 : Types de sortie des multiplicateurs de FLOQUET à travers le cercle unité

IV.3.2.2 Méthode de la balance harmonique

Conformément aux types d'excitations appliquées au rotor embarqué dans le cadre de cette étude, les équations du mouvement (IV.53) contiennent des termes paramétriques périodiques dans le temps et peuvent alors s'écrire par :

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + [C_r]\{\dot{\delta}_r\} + ([K_{r,1}] + [K_{r,2}]\cos n\omega_{ex}t)\{\delta_r\} = \{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\} \quad (IV.89)$$

où :

- ω_{ex} est la fréquence fondamentale de l'excitation extérieure $\{F_r(t)\}$ du rotor,
- n est un nombre entier positif connu reliant la fréquence du coefficient paramétrique périodique à celle fondamentale ω_{ex} .

Les équations du mouvement (IV.89) peuvent s'exprimer sous la forme résiduelle suivante :

$$\{R_r(\{\delta_r\}, t)\} = [M_r]\{\ddot{\delta}_r\} + [C_r]\{\dot{\delta}_r\} + ([K_{r,1}] + [K_{r,2}]\cos n\omega_{ex}t)\{\delta_r\} - \{F_r(t)\} - \{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\} = \{0\} \quad (IV.90)$$

Il s'agit alors de traiter l'équation (IV.90) du vecteur résiduel d'équilibre $\{R_r(\{\delta_r\}, t)\}$. Si le vecteur $\{F_r(t)\}$ des forces extérieures du rotor est harmonique de période $\tau_{ex} = 2\pi/\omega_{ex}$, alors la réponse du rotor en régime stationnaire est supposée être périodique de période $\tau_r = 2\pi/\omega_r$ (où ω_r est la fréquence minimale du contenu fréquentiel de la réponse du rotor) et la dépendance du rotor à la fréquence fondamentale ω_{ex} est supposée telle que $\omega_{ex} = j\omega_r$ (avec $j = 1, 2, 3, \dots$). Comme précédemment, des multiples entiers de ω_r sont utilisés afin de chercher des réponses sous-harmoniques. La méthode de la balance harmonique est d'abord mise en œuvre avec $\omega_{ex} = \omega_r$ (réponse harmonique) et s'il n'existe pas de convergence vers la solution de l'équation (IV.90), elle est alors mise en œuvre avec $\omega_{ex} = 2\omega_r$, $\omega_{ex} = 3\omega_r, \dots$ consécutivement (réponse sous-harmonique). Ces hypothèses permettent l'écriture des déplacements dynamiques inconnus du rotor sous forme d'une série de FOURIER tronquée (voir **DEMAILLY [43]**, **ASSIS RODRIGUES [5]**, **SARROUY et SINOU [134]** et **PELETAN [126]**) :

$$\{\delta_r\} = \{a_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \quad (IV.91)$$

et permettent également l'écriture de $\{F_r\}$ sous la forme suivante de décomposition de fonctions sinusoïdales :

$$\{F_r\} = \{F_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \quad (IV.92)$$

où :

- n_h est le nombre d'harmoniques retenu dans la décomposition, qui doit être suffisamment élevé pour approcher correctement la solution cherchée,
- $\{a_r^{h_0}\}$, $\{a_r^{c_m}\}$ et $\{a_r^{s_m}\}$ sont les coefficients de FOURIER inconnus des déplacements du rotor,
- $\{F_r^{h_0}\}$, $\{F_r^{c_m}\}$ et $\{F_r^{s_m}\}$ sont les coefficients de FOURIER connus des forces extérieures.

Les dérivées temporelles du premier ordre et du second ordre du vecteur $\{\delta_r\}$ des déplacements dynamiques conduisent aux vecteurs vitesse et accélération comme suit :

$$\{\dot{\delta}_r\} = -\sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{c_m}\} \sin m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{s_m}\} \cos m\omega_r t \quad (IV.93)$$

$$\{\ddot{\delta}_r\} = -\sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t - \sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \quad (IV.94)$$

Puisque la réponse du système est considérée comme périodique, il est raisonnable de supposer que les forces non linéaires $\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}$ des paliers hydrodynamiques en régime stationnaire sont également périodiques et peuvent s'écrire sous forme d'une série de FOURIER :

$$\{F_p\} = \{F_p^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{s_m}\} \sin m\omega_r t \quad (IV.95)$$

où :

- $\{F_p^{h_0}\}$, $\{F_p^{c_m}\}$ et $\{F_p^{s_m}\}$ sont les coefficients de FOURIER inconnus des forces non linéaires des paliers.

En introduisant les équations (IV.91)-(IV.95) dans l'expression (IV.90) du résidu d'équilibre $\{R_r\}$, il vient alors :

$$\begin{aligned} \{R_r\} = & [M_r] \left(-\sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t - \sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & + [C_r] \left(-\sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{c_m}\} \sin m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{s_m}\} \cos m\omega_r t \right) \\ & + \left([K_{r,1}] + [K_{r,2}] \cos n(j\omega_r t) \right) \left(\{a_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & - \left(\{F_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & - \left(\{F_p^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) = \{0\} \end{aligned} \quad (IV.96)$$

ce qui, après calculs trigonométriques sur les termes paramétriques, peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \{R_r\} = & [M_r] \left(-\sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t - \sum_{m=1}^{n_h} (m\omega_r)^2 \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & + [C_r] \left(-\sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{c_m}\} \sin m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} m\omega_r \{a_r^{s_m}\} \cos m\omega_r t \right) \\ & + [K_{r,1}] \left(\{a_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & + [K_{r,2}] \left(\{a_r^{h_0}\} \cos n(j\omega_r t) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{c_m}\} (\cos(m+nj)\omega_r t + \cos(m-nj)\omega_r t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n_h} \{a_r^{s_m}\} (\sin(m+nj)\omega_r t + \sin(m-nj)\omega_r t) \right) \\ & - \left(\{F_r^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_r^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) \\ & - \left(\{F_p^{h_0}\} + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{c_m}\} \cos m\omega_r t + \sum_{m=1}^{n_h} \{F_p^{s_m}\} \sin m\omega_r t \right) = \{0\} \end{aligned} \quad (IV.97)$$

La procédure dite « de GALERKIN » supprime la dépendance en temps en annulant l'équation (IV.97) en moyenne temporelle pondérée et permet de chercher une solution approchée de cette équation dans la base des fonctions trigonométriques de FOURIER $1, \cos \omega_r t, \sin \omega_r t, \dots, \cos n_h \omega_r t, \sin n_h \omega_r t$. La propriété essentielle de cette procédure est que les fonctions de FOURIER $\cos m\omega_r t$ et $\sin m\omega_r t$ (m allant de 1 à n_h) sont orthogonales entre elles selon le produit scalaire suivant :

$$\langle \cos k\omega_r t, \cos l\omega_r t \rangle = \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos k\omega_r t \cdot \cos l\omega_r t dt = \delta_{k,l} \quad (IV.98)$$

$$\langle \sin k\omega_r t, \sin l\omega_r t \rangle = \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \sin k\omega_r t \cdot \sin l\omega_r t dt = \delta_{k,l} \quad (IV.99)$$

$$\langle \cos k\omega_r t, \sin l\omega_r t \rangle = \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos k\omega_r t \cdot \sin l\omega_r t dt = 0 \quad (IV.100)$$

d'où :

$$\delta_{k,l} = 1 \text{ si } k = l ; 0 \text{ sinon} \quad (\text{IV.101})$$

Le vecteur résiduel d'équilibre $\{R_r\}$ est projeté sur chaque fonction trigonométrique de FOURIER afin d'obtenir les coefficients de FOURIER $\{a_r^{h_0}\}$, $\{a_r^{c_m}\}$ et $\{a_r^{s_m}\}$. De plus, ce vecteur résiduel doit être orthogonal à chacune des fonctions de FOURIER. Tous calculs effectués, il vient :

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{R_r\} \cdot 1 dt = \{0\} \Rightarrow [K_{r,1}] \{a_r^{h_0}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{c_{nj}}\} - \{F_r^{h_0}\} - \{F_p^{h_0}\} = \{0\} \quad (\text{IV.102})$$

$$\frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{R_r\} \cdot \cos \omega_r t dt = \{0\} \Rightarrow ([K_{r,1}] - [M_r] \omega_r^2) \{a_r^{c_1}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{c_{1+n_j}}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{c_{1-n_j}}\} + [C_r] \omega_r \{a_r^{s_1}\} - \{F_r^{c_1}\} - \{F_p^{c_1}\} = \{0\} \quad (\text{IV.103})$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{R_r\} \cdot \sin \omega_r t dt = \{0\} \Rightarrow -[C_r] \omega_r \{a_r^{c_1}\} + ([K_{r,1}] - [M_r] \omega_r^2) \{a_r^{s_1}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{s_{1+n_j}}\} \\ - \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{s_{1-n_j}}\} - \{F_r^{s_1}\} - \{F_p^{s_1}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{IV.104})$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{R_r\} \cdot \cos m \omega_r t dt = \{0\} \Rightarrow ([K_{r,1}] - [M_r] (m \omega_r)^2) \{a_r^{c_m}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{c_{m+n_j}}\} \\ + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{c_{m-n_j}}\} + [C_r] m \omega_r \{a_r^{s_m}\} - \{F_r^{c_m}\} - \{F_p^{c_m}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{IV.105})$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{R_r\} \cdot \sin m \omega_r t dt = \{0\} \Rightarrow -[C_r] m \omega_r \{a_r^{c_m}\} + ([K_{r,1}] - [M_r] (m \omega_r)^2) \{a_r^{s_m}\} + \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{s_{m+n_j}}\} \\ + \text{sign}(m - n_j) \frac{1}{2} [K_{r,2}] \{a_r^{s_{m-n_j}}\} - \{F_r^{s_m}\} - \{F_p^{s_m}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

Cette procédure de GALERKIN appelée également « balance harmonique » ou encore « équilibrage des termes harmoniques » conduit à l'écriture du système d'équations algébriques (IV.102)-(IV.106) sous la forme matricielle suivante :

$$\{\tilde{R}_r(\{\tilde{\delta}_r\}, \omega_r)\} = ([\tilde{Z}_{r,1}(\omega_r)] + [\tilde{Z}_{r,2}(\omega_r)]) \{\tilde{\delta}_r\} - \{\tilde{F}_r(\omega_r)\} - \{\tilde{F}_p(\{\tilde{\delta}_r\})\} = \{0\} \quad (\text{IV.107})$$

avec :

$$[\tilde{Z}_{r,1}(\omega_r)] = \begin{bmatrix} [Z_{r,1}^{h_0}] & & & & & & \\ & [Z_{r,1}^{h_1}] & & & & & \\ & & [Z_{r,1}^{h_2}] & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & [Z_{r,1}^{h_m}] & & \\ & [0] & & & & \ddots & \\ & & & & & & [Z_{r,1}^{h_h}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.108})$$

$$[\tilde{Z}_{r,2}(\omega_r)] = \begin{bmatrix} [0] & & & [Z_{r,2}^{h_{nj}}] \\ & \ddots & & [Z_{r,2}^{h_{1-nj}}] & [Z_{r,2}^{h_{+nj}}] \\ & & \dots & & \\ [Z_{r,2}^{h_0}] & & & \ddots & \\ & & & & \dots \\ & [Z_{r,2}^{h_{m-nj}}] & & [Z_{r,2}^{h_{m+nj}}] & \ddots \\ & & & & [0] \end{bmatrix} \quad (IV.109)$$

$$\{\tilde{\delta}_r\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r^{h_0}\} \\ \{\delta_r^{h_1}\} \\ \{\delta_r^{h_2}\} \\ \vdots \\ \{\delta_r^{h_m}\} \\ \vdots \\ \{\delta_r^{h_h}\} \end{Bmatrix} ; \{\tilde{F}_r(\omega_r)\} = \begin{Bmatrix} \{F_r^{h_0}\} \\ \{F_r^{h_1}\} \\ \{F_r^{h_2}\} \\ \vdots \\ \{F_r^{h_m}\} \\ \vdots \\ \{F_r^{h_h}\} \end{Bmatrix} ; \{\tilde{F}_p(\{\tilde{\delta}_r\})\} = \begin{Bmatrix} \{F_p^{h_0}\} \\ \{F_p^{h_1}\} \\ \{F_p^{h_2}\} \\ \vdots \\ \{F_p^{h_m}\} \\ \vdots \\ \{F_p^{h_h}\} \end{Bmatrix} \quad (IV.110)$$

et :

$$[Z_{r,1}^{h_0}] = [K_{r,1}] ; [Z_{r,2}^{h_0}] = \begin{bmatrix} [K_{r,2}] \\ [0] \end{bmatrix} ; [Z_{r,2}^{h_{nj}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[K_{r,2}] & [0] \end{bmatrix} \quad (IV.111)$$

$$[Z_{r,1}^{h_m}] = \begin{bmatrix} [K_{r,1}] - [M_r](m\omega_r)^2 & [C_r]m\omega_r \\ -[C_r]m\omega_r & [K_{r,1}] - [M_r](m\omega_r)^2 \end{bmatrix}, \quad (IV.112)$$

$$[Z_{r,2}^{h_{m-nj}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[K_{r,2}] & [0] \\ [0] & \text{sign}(m-nj)\frac{1}{2}[K_{r,2}] \end{bmatrix} ; [Z_{r,2}^{h_{m+nj}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[K_{r,2}] & [0] \\ [0] & \frac{1}{2}[K_{r,2}] \end{bmatrix}$$

$$\{\delta_r^{h_0}\} = \{a_r^{h_0}\} ; \{\delta_r^{h_m}\} = \begin{Bmatrix} \{a_r^{c_m}\} \\ \{a_r^{s_m}\} \end{Bmatrix} ; \{F_r^{h_m}\} = \begin{Bmatrix} \{F_r^{c_m}\} \\ \{F_r^{s_m}\} \end{Bmatrix} ; \{F_p^{h_m}\} = \begin{Bmatrix} \{F_p^{c_m}\} \\ \{F_p^{s_m}\} \end{Bmatrix} \quad (IV.113)$$

où :

- $\{\tilde{\delta}_r\}$ représente le vecteur des coefficients de FOURIER inconnus des déplacements du rotor,
- $\{\tilde{F}_r\}$ et $\{\tilde{F}_p\}$ sont respectivement le vecteur des coefficients de FOURIER des forces extérieures linéaires du rotor et celui des forces hydrodynamiques non linéaires des paliers.

Le système algébrique (IV.107) de dimension $(2n_r + 1)n_g$ représente les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel et remplace le système d'équations différentielles non linéaires (IV.90) du comportement dynamique du rotor. Même si ce système algébrique est de taille plus importante que le système différentiel du mouvement, le temps d'exécution d'un calcul peut être considérablement réduit par rapport aux méthodes dans le domaine temporel car la dépendance en temps et donc la boucle sur les pas de temps ont disparu.

Puisque le vecteur $\{\tilde{F}_p\}$ des coefficients de FOURIER des forces hydrodynamiques dépend de manière non linéaire du vecteur $\{\tilde{\delta}_r\}$ des coefficients de FOURIER des déplacements dynamiques du rotor, les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel sont aussi non linéaires. Afin de traiter cette non linéarité, une technique itérative basée sur l'algorithme de NEWTON-RAPHSON est employée, c'est-à-dire que l'équation (IV.107) est linéarisée à l'aide d'un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 de façon à obtenir l'équation de correction itérative :

$$\{\tilde{R}_r(\{\delta_r^{k+1}\}, \omega_r)\} \simeq \{\tilde{R}_r(\{\delta_r^k\}, \omega_r)\} + \frac{\partial \{\tilde{R}_r\}}{\partial \{\delta_r\}} \Big|_{(\{\delta_r^k\}, \omega_r)} \{\Delta \delta_r\} = \{0\} \quad (IV.114)$$

alors :

$$\left[J_r^{BH}(\{\delta_r^k\}, \omega_r) \right] \{\Delta \delta_r\} = -\{\tilde{R}_r(\{\delta_r^k\}, \omega_r)\} \quad (IV.115)$$

avec :

$$\{\Delta \delta_r\} = \{\delta_r^{k+1}\} - \{\delta_r^k\} \quad (IV.116)$$

où :

- $\{\Delta \delta_r\}$ est l'incrément itératif du vecteur des coefficients de FOURIER des déplacements du rotor,
- k est l'itération de NEWTON-RAPHSON.

Suivant les équation (IV.107) et (IV.115), il faut calculer les coefficients de FOURIER des forces non linéaires en fonction des coefficients de FOURIER des déplacements pour être capable d'évaluer le vecteur résiduel $\{\tilde{R}_r\}$ à chaque itération de NEWTON-RAPHSON. Le calcul de $\{\tilde{F}_p\}$ peut être effectué de façon analytique lorsque la relation entre les deux grandeurs $\{\tilde{\delta}_r\}$ et $\{\tilde{F}_p\}$ est connue. Toutefois, la formule analytique, qui relie les forces non linéaires aux déplacements, est bien connue dans l'espace temporel alors qu'elle reste inconnue dans l'espace fréquentiel. Des développements mathématiques dans cet espace sont donc nécessaires. Ces développements peuvent être très lourds et pénibles si le type de non linéarité est complexe ou peuvent être compliqués si le nombre d'harmoniques retenues est élevé. C'est, par exemple, déjà le cas pour l'oscillateur de type DUFFING dans lequel la non linéarité est une force proportionnelle au cube du déplacement de la masse du système.

Dans cette étude, les forces non linéaires sont dues aux paliers hydrodynamiques et obtenues en résolvant l'équation de REYNOLDS définie dans le domaine temporel. Habituellement, elles dépendent de manière non analytique des déplacements et des vitesses du rotor et il est donc impossible d'obtenir leur expression analytique dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas de figure, on utilise la méthode d'AFT (alternating frequency/time) qui exploite la facilité de calcul des forces non linéaires $\{F_p(\{\delta_r\}, \{\dot{\delta}_r\})\}$ dans le domaine temporel, voir CAMERON et GRIFFIN [20]. A chaque itération de l'algorithme de NEWTON-RAPHSON, la grandeur utile $\{\tilde{\delta}_r\}$ est basculée dans l'espace temporel par transformée de FOURIER discrète inverse (IDFT) pour obtenir les déplacements $\{\delta_r\}$ et les vitesses $\{\dot{\delta}_r\}$ du rotor en plusieurs instants et donc les forces non linéaires $\{F_p\}$ en ces mêmes instants. Ensuite, ces forces échantillonnées sont rebasculées dans l'espace fréquentiel par transformée de FOURIER discrète directe (DFT) pour obtenir les éléments du vecteur $\{\tilde{F}_p\}$ (figure FIG. IV.6). La méthode d'AFT est beaucoup plus générique que le calcul analytique parce qu'elle permet de traiter n'importe quelle nature de non linéarité. Cependant, elle est plus coûteuse en temps de calcul qu'une formule analytique à cause des nombreux allers-retours entre les domaines temporel et fréquentiel. D'autre part, le coût en termes de temps de calcul peut être réduit en utilisant les commandes existantes dans l'environnement MATLAB qui calculent les transformées de FOURIER rapides (FFTs). La période τ_r est alors discrétisée avec un nombre de pas de temps égal à une puissance de 2. La valeur de pas de discrétisation temporelle dépend principalement de l'harmonique la plus élevée retenue dans le développement en série de FOURIER, c'est-à-dire plus le nombre d'harmoniques est important, plus le pas d'échantillonnage temporel est petit. En général, un nombre de pas de temps par période égal à environ $25n_h$ (avec n_h le nombre maximal d'harmoniques dans la solution) donne de bons résultats et assure d'éviter une distorsion de repliement créée lorsque le signal à étudier comprend des fréquences supérieures à la fréquence de NYQUIST (à la moitié de la fréquence d'échantillonnage).

La matrice jacobienne $[J_r^{BH}]$ est fonction du vecteur $\{\tilde{\delta}_r\}$ des coefficients de FOURIER des déplacements à l'itération de NEWTON-RAPHSON k . Elle est exprimée par :

$$\left[J_r^{BH} \left(\{ \delta_r \}, \omega_r \right) \right] = \frac{\partial \{ \tilde{R}_r \}}{\partial \{ \tilde{\delta}_r \}} \Bigg|_{\left(\{ \delta_r \}, \omega_r \right)} = [\tilde{Z}_{r,1}] + [\tilde{Z}_{r,2}] - \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \tilde{\delta}_r \}} \Bigg|_{\left(\{ \delta_r \}, \omega_r \right)} \quad (IV.117)$$

La matrice $\frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \tilde{\delta}_r \}}$, qui définit les variations des coefficients de FOURIER des forces hydrodynamiques non linéaires sous l'influence des coefficients de FOURIER des déplacements, est donnée par :

$$\frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \tilde{\delta}_r \}} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \delta_r^{h_0} \}} & \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \delta_r^{h_1} \}} & \dots & \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \delta_r^{h_n} \}} \end{array} \right] \quad (IV.118)$$

avec :

$$\frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \delta_r^{h_0} \}} = \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} ; \quad \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ \delta_r^{h_i} \}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ a_r^{c_i} \}} & \frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ a_r^{s_i} \}} \end{array} \right] \quad (IV.119)$$

et :

$$\frac{\partial \{ \tilde{F}_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} = \frac{\partial}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{ F_p \} \cdot 1 dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{ F_p \} \cdot \cos \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{ F_p \} \cdot \sin \omega_r t dt \\ \vdots \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{ F_p \} \cdot \cos k \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{ F_p \} \cdot \sin k \omega_r t dt \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \cdot 1 dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \cdot \cos \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \cdot \sin \omega_r t dt \\ \vdots \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \cdot \cos k \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \cdot \sin k \omega_r t dt \\ \vdots \end{array} \right] = \text{FFT} \left(\frac{\partial \{ F_p \}}{\partial \{ a_r^{h_0} \}} \right) \quad (IV.120)$$

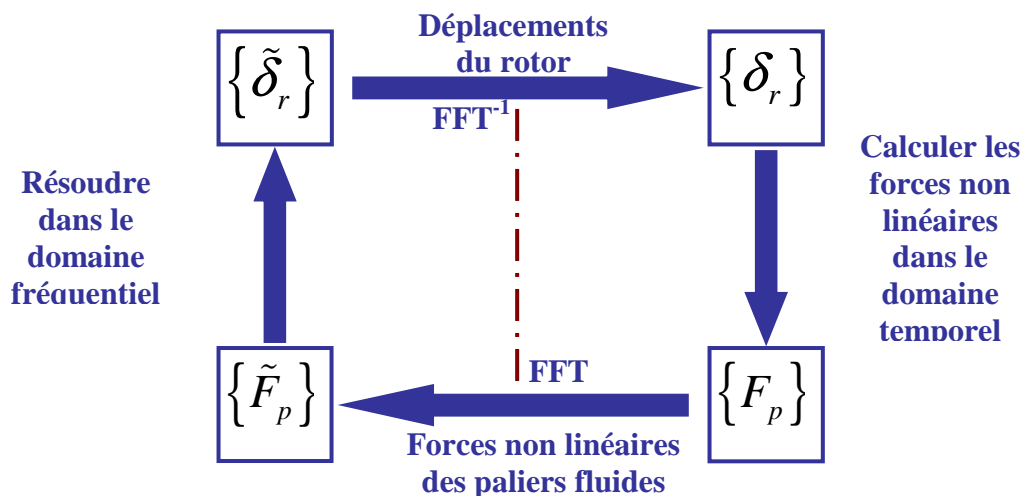


FIG. IV.6 : Schéma de fonctionnement de la méthode d'AFT

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{\tilde{F}_p\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \{F_p^{h_0}\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \\ \frac{\partial \{F_p^{h_k}\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \{F_p^{h_n}\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot 1 dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \cos \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \sin \omega_r t dt \\ \vdots \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \cos k \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \sin k \omega_r t dt \\ \vdots \end{array} \right\} = \text{FFT} \left(\frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \right) \\
 \\
 \frac{\partial \{\tilde{F}_p\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \{F_p^{h_0}\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \\ \frac{\partial \{F_p^{h_k}\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \{F_p^{h_n}\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot 1 dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \cos \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \sin \omega_r t dt \\ \vdots \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \cos k \omega_r t dt \\ \frac{2}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \{F_p\} \cdot \sin k \omega_r t dt \\ \vdots \end{array} \right\} = \text{FFT} \left(\frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \right) \quad (\text{IV.121})
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{a_r^{h_0}\}} &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{a_r^{h_0}\}} + \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} \frac{\partial \{\dot{\delta}_r\}}{\partial \{a_r^{h_0}\}} \\
 &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \quad (\text{IV.122})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} + \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} \frac{\partial \{\dot{\delta}_r\}}{\partial \{a_r^{c_i}\}} \\
 &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \cos \omega_r t - \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} l \omega_r \sin \omega_r t \quad (\text{IV.123})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \frac{\partial \{\delta_r\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} + \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} \frac{\partial \{\dot{\delta}_r\}}{\partial \{a_r^{s_i}\}} \\
 &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\delta_r\}} \sin \omega_r t + \frac{\partial \{F_p\}}{\partial \{\dot{\delta}_r\}} l \omega_r \cos \omega_r t
 \end{aligned}$$

où :

- $\frac{\partial\{F_p\}}{\partial\{\delta_r\}}$ et $\frac{\partial\{\tilde{F}_p\}}{\partial\{\tilde{\delta}_r\}}$ sont les dérivées, dans le domaine temporel, des forces hydrodynamiques par rapport au déplacement et à la vitesse.

D'après les équations (IV.118)-(IV.123), les composantes de la matrice $\frac{\partial\{\tilde{F}_p\}}{\partial\{\tilde{\delta}_r\}}$ peuvent être calculées de

façon quasi-analytique de telle sorte que les dérivées des forces non linéaires par rapport aux déplacements sont évaluées dans l'espace temporel puis elles sont ramenées dans l'espace fréquentiel par transformée de FOURIER rapide. Cette technique est toujours valable. Cependant, elle requiert des efforts considérables de développement théorique et de programmation.

L'algorithme de la méthode de la balance harmonique, qui résout dans le domaine fréquentiel l'équation (IV.107), est récapitulé dans la figure **FIG. IV.7**. La solution initiale approchée $\{^1\tilde{\delta}_r\}$ est choisie égale à un vecteur défini par l'utilisateur. Lorsque le vecteur résiduel $\{\tilde{R}_r(\{^k\tilde{\delta}_r\}, \omega_r)\}$ est calculé par l'équation (IV.107), un nouvel incrément $\{\Delta\tilde{\delta}_r\}$ du vecteur des coefficients de FOURIER des déplacements est produit par l'équation (IV.115) et ainsi la solution initiale approchée $\{^{k+1}\tilde{\delta}_r\}$ est mise à jour.

Une tolérance de convergence du calcul ε^{BH} égale à la valeur 1×10^{-8} est associée à la norme de la variation des inconnues entre deux itérations et à celle de la solution initiale approchée. Autrement dit, si le rapport $\|\{\Delta\tilde{\delta}_r\}\|/\|\{^{k+1}\tilde{\delta}_r\}\|$ est inférieur à la tolérance ε^{BH} , une solution convergée est atteinte et l'algorithme est terminé. Sinon, les forces non linéaires du palier hydrodynamique et leurs dérivées par rapport aux déplacements du rotor dans le domaine fréquentiel sont réévaluées et une nouvelle itération de NEWTON-RAPHSON commence.

En raison de la nature de non linéarité du problème traité dans ce travail, la procédure de NEWTON-RAPHSON n'a aucune garantie de convergence. Si la solution initiale approchée est très éloignée de la solution correcte de l'équation (IV.90), les itérations de NEWTON-RAPHSON ne peuvent pas converger et un contact entre le rotor et le palier survient. Dans ce cas, l'algorithme de la méthode de la balance harmonique est arrêté.

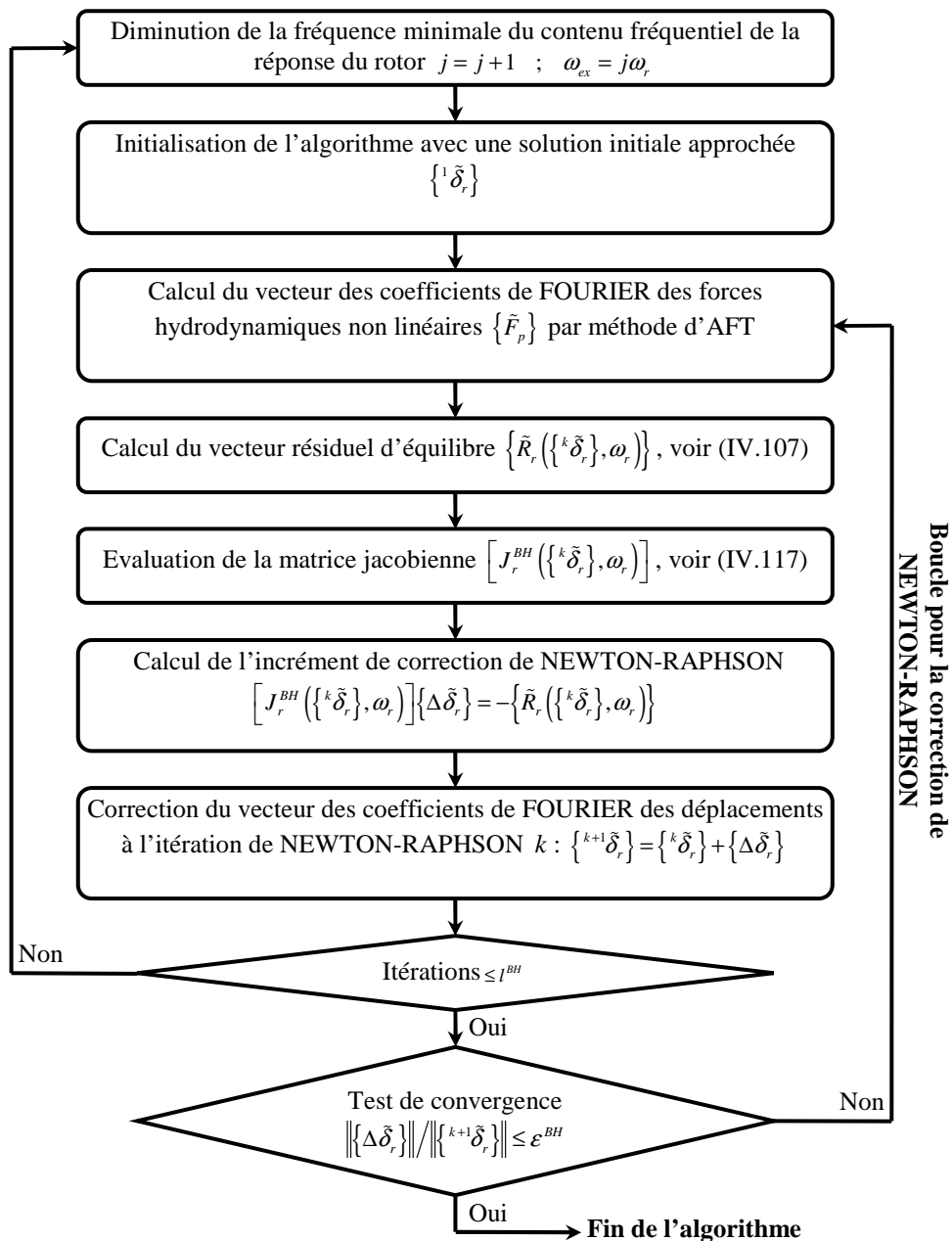


FIG. IV.7 : Algorithme de la méthode de la balance harmonique pour l'analyse dynamique non linéaire d'un rotor embarqué

IV.3.3 Section de POINCARÉ

Un système dynamique est dit « non autonome » lorsqu'il existe une dépendance explicite au temps dans ses équations différentielles caractéristiques.

Vers l'année 1900, POINCARÉ a introduit une nouvelle façon d'étudier le mouvement des systèmes dynamiques non autonomes (plus précisément le problème de trois corps). Il a considéré une étude qualitative au lieu d'une étude quantitative classique, c'est-à-dire que la position du corps mobile est cherchée à certains instants au lieu de chaque instant.

Un espace de deux dimensions perpendiculaire (transversal) au flot du système dynamique donné est défini et appelé « section de POINCARÉ ». En fait, un point sur la section de POINCARÉ est désigné comme le point de retour de la trajectoire à intervalle de temps constant égal à la période τ_{ex} de l'excitation extérieure harmonique du système. La section de POINCARÉ est semblable à l'espace des phases, à la différence que l'espace des phases est continu dans le temps alors que la section de POINCARÉ relève un point toutes les périodes.

Pour une réponse périodique d'un système forcé non linéaire de période τ_r égale à $j\tau_{ex}$ (avec $j = 1, 2, 3, \dots$), les sections de POINCARÉ sont un groupe de points égaux à j . La figure FIG. IV.8 présente les sections pour des mouvements périodiques de type harmonique ($1\tau_{ex}$ -périodique) et sous-harmonique ($2\tau_{ex}$ -périodique). Les sections de POINCARÉ d'une réponse quasi-périodique montrent une courbe fermée. Enfin, l'apparition de la quasi-périodicité laisse augurer d'un régime chaotique possible lors d'un changement de paramètres du système non linéaire et les sections de POINCARÉ pour un mouvement chaotique du système exposent une courbe fractale.

IV.3.4 Diagramme de bifurcation

Pour les systèmes dynamiques non linéaires, il existe plusieurs types de solutions des équations du mouvement. En général, le comportement dynamique de ces systèmes dépend d'un jeu de paramètres dits « de bifurcation ou de contrôle ».

Une bifurcation se produit si un petit changement quantitatif des paramètres de contrôle peut induire un changement qualitatif de la solution et donc du comportement. Ainsi les diagrammes de bifurcation sont étudiés dans un espace solution-paramètre de contrôle et générés avec un pas constant de paramètre. Les solutions représentées sur ces diagrammes sont habituellement les sections de POINCARÉ.

Par exemple, pour un rotor classique non linéaire, la vitesse de rotation du rotor est souvent le paramètre de contrôle le plus employé dans le diagramme de bifurcation.

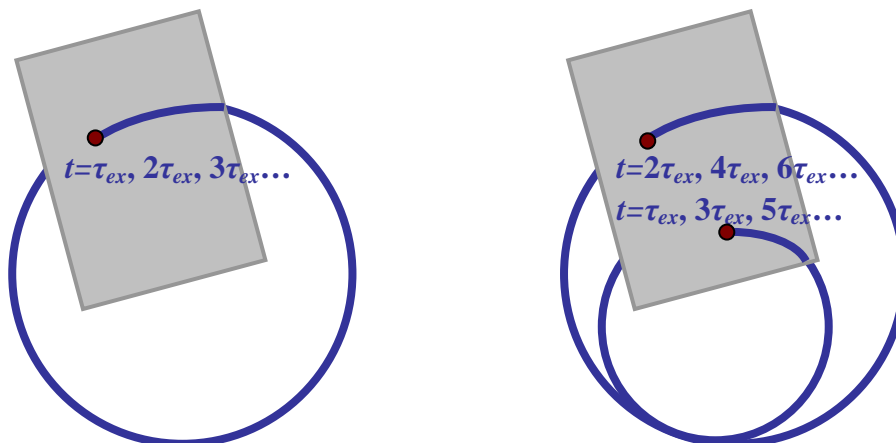


FIG. IV.8 : Sections de POINCARÉ pour des mouvements périodiques

IV.3.5 Stratégies de continuation

Les méthodes présentées dans le **Paragraphe IV.3.2** permettent de calculer les solutions non linéaires périodiques du système pour un jeu de paramètres fixé. Mais une étude dynamique ne se limite pas nécessairement à un seul calcul. En dynamique des rotors, il est souvent intéressant d'étudier l'évolution de la réponse non linéaire en régime périodique en fonction d'un des paramètres du système. Afin d'effectuer cette étude paramétrique, il convient de coupler une méthode de calcul direct de la solution périodique à une stratégie de continuation dont le but est le tracé des courbes de réponse.

IV.3.5.1 Continuation séquentielle

L'opération la plus simple afin d'évaluer la réponse d'un système dynamique à des forces d'excitation extérieure en fonction d'un paramètre de continuation p_{bi} consiste à exécuter une continuation séquentielle de telle sorte que la valeur du paramètre p_{bi} augmente ou diminue de manière graduelle. Dès que la réponse du système converge vers une solution périodique pour une certaine valeur du paramètre p_{bi} , ce paramètre change légèrement et une nouvelle recherche d'une solution périodique à l'aide de la procédure itérative de NEWTON-RAPHSON est entreprise avec comme conditions initiales la solution correspondant au pas précédent. Il vient alors :

$${}_{i+1}p_{bi} = {}_i p_{bi} + \Delta p_{bi} \quad (IV.124)$$

$$\{{}_{i+1}X_r(0)\} = \{{}_i X_r\} \quad (IV.125)$$

où :

- $\{{}_i X_r\}$ est la solution convergée obtenue pour la valeur ${}_i p_{bi}$.

Une représentation schématique de la technique de continuation séquentielle est montrée sur la figure **FIG. IV.9**. L'avantage essentiel de cette procédure de continuation est sa simplicité de mise en œuvre et de programmation dans l'environnement MATLAB. Toutefois, cette technique ne permet pas de continuer la courbe de réponse au passage des points limites. En d'autres termes, des phénomènes de saut de réponse peuvent se produire et il manque ainsi une partie de la courbe complète de réponse (voir la figure **FIG. IV.9**).

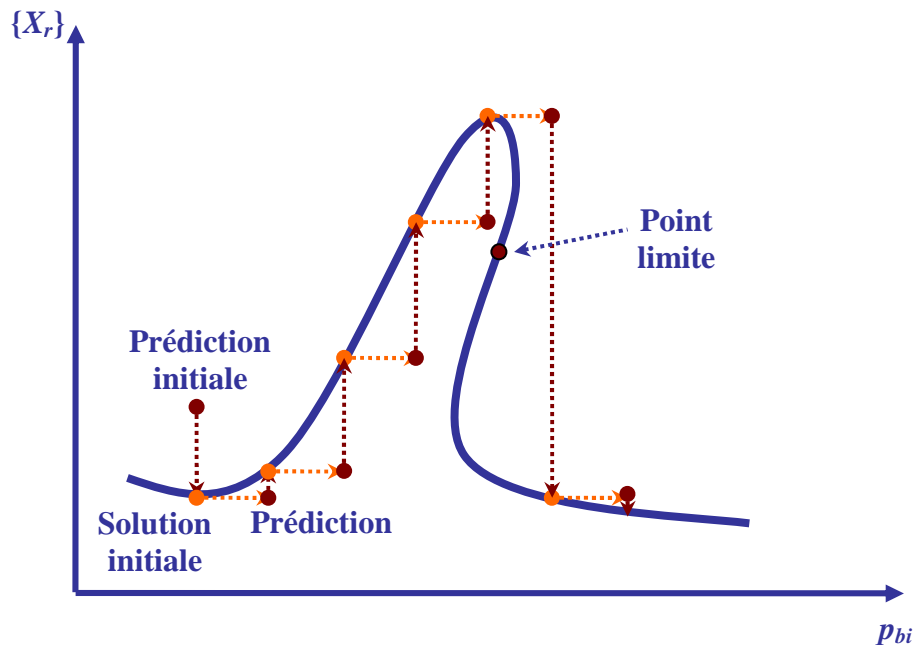


FIG. IV.9 : Procédure de continuation séquentielle

IV.3.5.2 Continuation par longueur d'arc

Le système dynamique non linéaire a couramment la possibilité de produire plus d'une réponse (solutions coexistantes) pour la valeur considérée du paramètre de continuation p_{bi} . Comme annoncé dans le paragraphe précédent, la technique de continuation séquentielle ne peut présenter qu'une seule solution périodique par valeur de paramètre p_{bi} . Pour remédier au problème de passage des points limites et ainsi obtenir la totalité de la courbe de réponse, il est préférable d'utiliser une autre technique plus robuste appelée « continuation par longueur d'arc ». La figure **FIG. IV.10** donne une vue générale de cette technique et montre deux étapes principales :

- pas prédicteur tangent,
- corrections itératives orthogonales à la direction tangente.

Une illustration détaillée de ces étapes est présentée sur la figure **FIG. IV.11**. Soit un point ${}_i P$ sur la courbe de réponse de coordonnées connues $\left\{ \left\{ {}_i X_r(0) \right\}^T, {}_i p_{bi} \right\}^T$, voir la figure **FIG. IV.11**. Le prochain point ${}_{i+1} P$ situé sur cette courbe est de coordonnées inconnues $\left\{ \left\{ {}_{i+1} X_r(0) \right\}^T, {}_{i+1} p_{bi} \right\}^T$ et cherché à l'aide des deux étapes de la continuation par longueur d'arc.

Le pas prédicteur consiste à estimer une solution approchée pour la valeur suivante du paramètre ${}_{i+1} p_{bi}$. Il est de longueur fixée Δs_r^{ta} et effectué selon la direction tangente à la courbe de réponse. Afin de calculer le vecteur tangent ${}_{i+1} \overrightarrow{VT_r^{LA}}$ tel que :

$${}_{i+1} \overrightarrow{VT_r^{LA}} = \begin{Bmatrix} \left\{ {}_{i+1} \Delta X_r^{ta} \right\} \\ \left\{ {}_{i+1} \Delta p_{bi}^{ta} \right\} \end{Bmatrix} \quad (IV.126)$$

une approximation linéaire est faite (conformément à l'hypothèse des petites variations) en construisant un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 de l'équation de périodicité (IV.76), dans le cas de la méthode de shooting, au voisinage de la solution précédente (connue) $\left\{ \left\{ {}_i X_r(0) \right\}^T, {}_i p_{bi} \right\}^T$ comme suit :

$$\begin{aligned} \left\{ H_r \left(\left\{ {}_{i+1} X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_{i+1} p_{bi} \right) \right\} &\simeq \left\{ H_r \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right\} + \frac{\partial \{ H_r \}}{\partial \{ X_r(0) \}} \Bigg|_{\left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right)} \left\{ {}_{i+1} \Delta X_r^{ta} \right\} \\ &+ \frac{\partial \{ H_r \}}{\partial p_{bi}} \Bigg|_{\left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right)} \left({}_{i+1} \Delta p_{bi}^{ta} \right) = \{ 0 \} \end{aligned} \quad (IV.127)$$

Le vecteur résiduel $\left\{ H_r \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right\}$ est annulé car il vérifie l'équation (IV.76), qui traduit le problème de valeurs aux limites en deux points, pour la valeur précédente du paramètre ${}_i p_{bi}$. Il vient :

$$\left[J_r^{ta} \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right] \left\{ {}_{i+1} \Delta X_r^{ta} \right\} = - \left\{ J_{p_{bi}}^{ta} \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right\} \left({}_{i+1} \Delta p_{bi}^{ta} \right) \quad (IV.128)$$

avec :

$$\left[J_r^{ta} \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right] = \frac{\partial \{ H_r \}}{\partial \{ X_r(0) \}} \Bigg|_{\left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right)} \quad (IV.129)$$

$$\left\{ J_{p_{bi}}^{ta} \left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right) \right\} = \frac{\partial \{ H_r \}}{\partial p_{bi}} \Bigg|_{\left(\left\{ {}_i X_r(0) \right\}, \tau_r, {}_i p_{bi} \right)} \quad (IV.130)$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution, le vecteur tangent est normé :

$$\left\| {}_{i+1} \overrightarrow{VT_r^{LA}} \right\|^2 = \left\{ {}_{i+1} \Delta X_r^{ta} \right\}^T \left\{ {}_{i+1} \Delta X_r^{ta} \right\} + \left({}_{i+1} \Delta p_{bi}^{ta} \right)^2 = 1 \quad (IV.131)$$

L'équation (IV.131) n'étant pas linéaire, la solution du système d'équations (IV.128) et (IV.131) est cherchée de la manière suivante :

En posant les notations suivantes :

$${}_{i+1}\Delta p_{bi}^{ta} = a_r^{ta} \quad ; \quad \{ {}_{i+1}\Delta X_r^{ta} \} = \{ {}_{i+1}\Delta \hat{X}_r^{ta} \} a_r^{ta} \quad (IV.132)$$

En introduisant l'équation (IV.132) dans (IV.131), il vient alors :

$$\{ {}_{i+1}\Delta \hat{X}_r^{ta} \}^T \{ {}_{i+1}\Delta \hat{X}_r^{ta} \} (a_r^{ta})^2 + (a_r^{ta})^2 = 1 \quad (IV.133)$$

soit :

$$a_r^{ta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\{ {}_{i+1}\Delta \hat{X}_r^{ta} \}^T \{ {}_{i+1}\Delta \hat{X}_r^{ta} \} + 1}} \quad (IV.134)$$

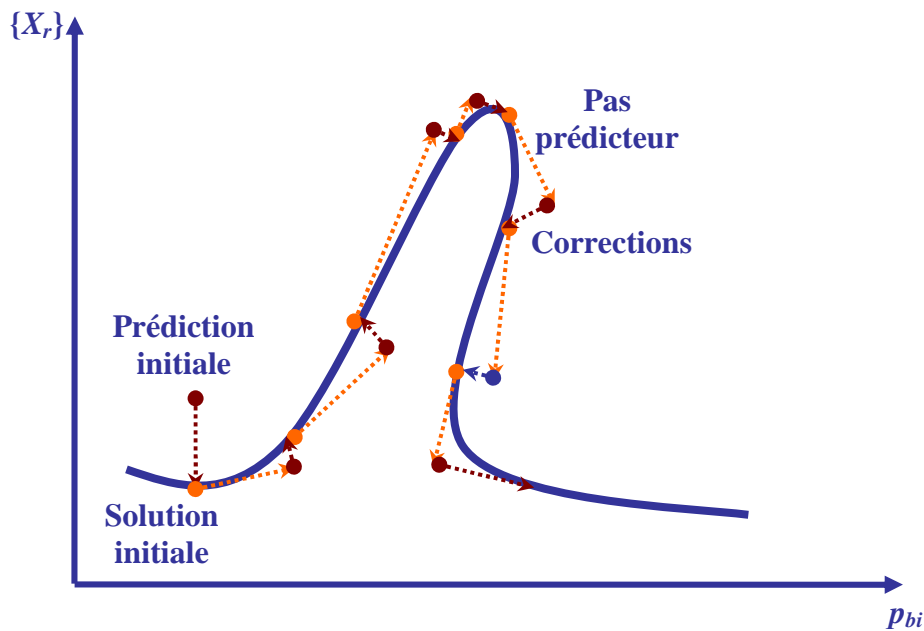


FIG. IV.10 : Procédure de continuation par longueur d'arc

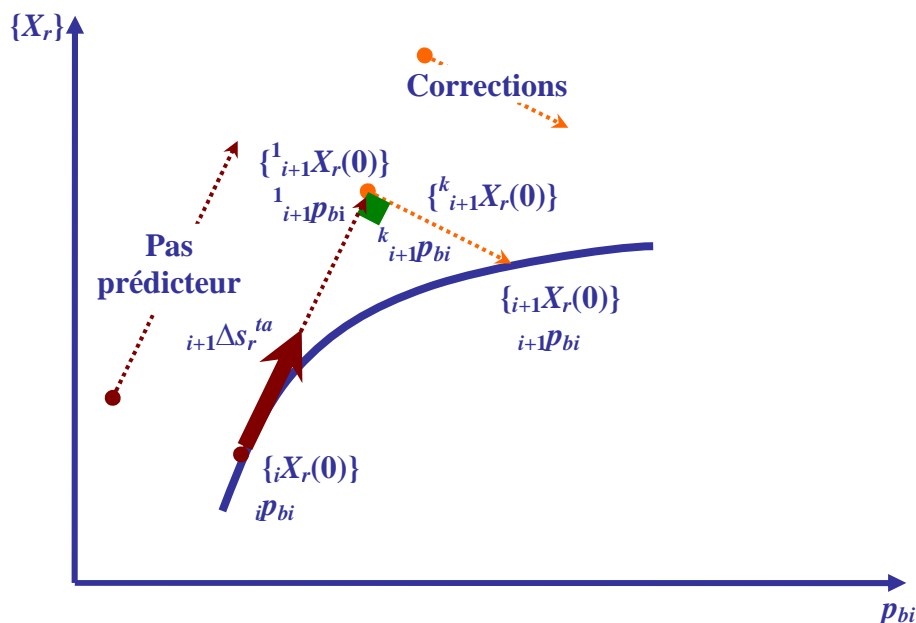


FIG. IV.11 : Graphique détaillé pour un couple d'étapes principales de la procédure de continuation par longueur d'arc

CHAPITRE IV : Outils et méthodes numériques pour l'analyse du comportement dynamique

Le signe de la variable a_r^{ta} est choisi de façon à conserver le même sens de parcours. Pour cela, on impose que deux vecteurs tangentiels consécutifs aient un produit scalaire positif :

$$\left(\overrightarrow{VT_r^{LA}} \right)^T \bullet_{i+1} \overrightarrow{VT_r^{LA}} > 0 \quad (IV.135)$$

soit :

$$\left\langle \left\{ \Delta X_r^{ta} \right\}^T, \Delta p_{bi}^{ta} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \Delta X_r^{ta} \\ \Delta p_{bi}^{ta} \end{matrix} \right\} > 0 \quad (IV.136)$$

Compte tenu de (IV.132), l'équation précédente devient :

$$\left\{ \Delta X_r^{ta} \right\}^T \left\{ \Delta \hat{X}_r^{ta} \right\} a_r^{ta} + \Delta p_{bi}^{ta} a_r^{ta} > 0 \quad (IV.137)$$

ce qui conduit à la relation suivante :

$$\text{sign}(a_r^{ta}) = \text{sign} \left(\left\{ \Delta X_r^{ta} \right\}^T \left\{ \Delta \hat{X}_r^{ta} \right\} + \Delta p_{bi}^{ta} \right) \quad (IV.138)$$

En substituant (IV.132) dans l'équation (IV.128), cette dernière devient :

$$\left[J_r^{ta} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right] \left\{ \Delta \hat{X}_r^{ta} \right\} = - \left[J_{p_{bi}}^{ta} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right] \quad (IV.139)$$

Dès que le vecteur tangentiel normé est évalué avec les équations (IV.139), (IV.134) et (IV.132), la solution approchée grâce au pas prédicteur est obtenue à partir de la solution convergée précédente correspondant à la valeur de paramètre de continuation p_{bi} , c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{matrix} X_r(0) \\ p_{bi} \end{matrix} \right\}_{i+1} = \left\{ \begin{matrix} X_r(0) \\ p_{bi} \end{matrix} \right\}_i + \left(\Delta s_r^{ta} \right)_{i+1} \overrightarrow{VT_r^{LA}} = \left\{ \begin{matrix} X_r(0) \\ p_{bi} \end{matrix} \right\}_i + \left(\Delta s_r^{ta} \right)_{i+1} \left\{ \begin{matrix} \Delta X_r^{ta} \\ \Delta p_{bi}^{ta} \end{matrix} \right\} \quad (IV.140)$$

où :

- Δs_r^{ta} est la longueur du pas tangent.

En général, la solution approchée (équation (IV.140)) ne vérifie pas l'équation (IV.76) du problème de valeurs aux limites défini par la condition de périodicité. Des corrections de cette solution approchée sont ainsi effectuées dans la direction orthogonale au vecteur tangent $\overrightarrow{VT_r^{LA}}$ afin de l'améliorer et de se ramener sur la courbe de réponse. Pour cela, une linéarisation cohésive de l'équation (IV.76) est appliquée en effectuant un développement en série de TAYLOR du premier ordre de cette équation et des corrections à l'aide de la méthode itérative de NEWTON-RAPHSON peuvent être calculées :

$$\begin{aligned} \left\{ H_r \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right\}_{i+1} &\simeq \left\{ H_r \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right\}_i + \frac{\partial \left\{ H_r \right\}}{\partial \left\{ X_r(0) \right\}} \bigg|_{\left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right)} \left\{ \Delta X_r^{SH} \right\} \\ &+ \frac{\partial \left\{ H_r \right\}}{\partial p_{bi}} \bigg|_{\left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right)} \left(\Delta p_{bi} \right) = \{0\} \end{aligned} \quad (IV.141)$$

soit :

$$\begin{aligned} \left[J_r^{SH} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right] \left\{ \Delta X_r^{SH} \right\} + \left[J_{p_{bi}} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right] \left(\Delta p_{bi} \right) \\ = - \left\{ H_r \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (IV.142)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left[\left[J_r^{SH} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right], \left[J_{p_{bi}} \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right] \right] \left\{ \begin{matrix} \Delta X_r^{SH} \\ \Delta p_{bi} \end{matrix} \right\} \\ = - \left\{ H_r \left(\left\{ X_r(0) \right\}, \tau_r, p_{bi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (IV.143)$$

La solution corrigée à l'itération de NEWTON-RAPHSON k s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{matrix} \{X_r^{k+1}(0)\} \\ \{p_{bi}^{k+1}\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \{X_r^k(0)\} \\ \{p_{bi}^k\} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \{\Delta X_r^{SH}\} \\ \{\Delta p_{bi}\} \end{matrix} \right\} \quad (IV.144)$$

De plus, une condition d'orthogonalité des corrections par rapport au vecteur tangentiel $\overrightarrow{VT_r^{LA}}$ permettant d'atteindre la courbe de réponse doit être ajoutée au système (IV.143) comme suit :

$$\left(\overrightarrow{VT_r^{LA}} \right)^T \cdot \overrightarrow{VN_r^{LA}} = 0 \quad (IV.145)$$

c'est-à-dire :

$$\left\langle \left\{ \begin{matrix} \{\Delta X_r^{ta}\} \\ \{\Delta p_{bi}^{ta}\} \end{matrix} \right\}^T, \left\{ \begin{matrix} \{\Delta X_r^{SH}\} \\ \{\Delta p_{bi}\} \end{matrix} \right\} \right\rangle = 0 \quad (IV.146)$$

Le système à résoudre devient :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} \left[J_r^{SH} \left(\{X_r^k(0)\}, \tau_r, \{p_{bi}^k\} \right) \right] & \left\{ J_{p_{bi}} \left(\{X_r^k(0)\}, \tau_r, \{p_{bi}^k\} \right) \right\} \\ \left\{ \Delta X_r^{ta} \right\}^T & \{ \Delta p_{bi}^{ta} \} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{\Delta X_r^{SH}\} \\ \{\Delta p_{bi}\} \end{matrix} \right\} \\ & = \left\{ \begin{matrix} -\left[H_r \left(\{X_r^k(0)\}, \tau_r, \{p_{bi}^k\} \right) \right] \\ 0 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (IV.147)$$

D'après l'équation (IV.147), le processus de continuation par longueur d'arc possède une inconnue supplémentaire par rapport au système (IV.79) associé à la méthode de shooting (voir le **Paragraphe IV.3.2.1**). Pour chaque itération de NEWTON-RAPHSON k , la correction porte sur $\{X_r(0)\}$ et p_{bi} . De la même manière que pour la méthode de shooting sans continuation, l'itération est arrêtée lorsqu'une solution convergée est atteinte suivant un critère d'arrêt des itérations \mathcal{E}^{SH} .

Dans le but d'augmenter la robustesse du programme développé sous MATLAB, la valeur du pas de continuation Δs_r^{ta} (voir l'équation (IV.140)) est adaptée et mise à jour tout au long de l'étude paramétrique en fonction de la difficulté de convergence de la stratégie de NEWTON-RAPHSON.

Dans les zones où un plus grand nombre d'itérations est nécessaire pour converger (par exemple, dans une zone où la réponse varie significativement avec p_{bi}), la valeur de Δs_r^{ta} est réduite afin de s'assurer que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence diminue pour le pas suivant. Au contraire, le pas de continuation Δs_r^{ta} est augmenté lorsque la convergence est aisée.

D'une manière générale, pour limiter le coût de calcul, il est préférable que la procédure de NEWTON-RAPHSON converge en cinq ou six itérations maximum. Par contre, lorsque l'algorithme de NEWTON-RAPHSON converge en deux ou trois itérations seulement, il est possible d'augmenter la valeur de Δs_r^{ta} afin de décrire la courbe de réponse plus rapidement et d'éviter alors une discrétisation inutilement trop fine de cette dernière. Ainsi une fois la solution atteinte, la longueur Δs_r^{ta} du pas tangent est modifiée avec la formule suivante :

$${}_{i+1}\Delta s_r^{ta} = {}_i\Delta s_r^{ta} \times 2^{\frac{n_{iter} - n_{opt}}{n_{opt}}} \quad (IV.148)$$

où :

- n_{iter} est le nombre d'itérations de NEWTON-RAPHSON au point i ,
- n_{opt} est le nombre ciblé d'itérations de NEWTON-RAPHSON.

Typiquement, le nombre d'itérations n_{opt} est cherché tel qu'il est compris entre 2 et 3. Selon **PELETAN [126]**, la meilleure valeur de $n_{opt} = 2,7$ permet d'assurer la robustesse et l'efficacité de l'algorithme.

CHAPITRE IV : Outils et méthodes numériques pour l'analyse du comportement dynamique

Pour résumer, la procédure pour effectuer les étapes de la continuation par longueur d'arc se déroule de la manière suivante :

- (1) Résoudre l'équation (IV.139) afin d'obtenir $\{_{i+1}\Delta\hat{X}_r^{ta}\}$.
- (2) Dédire la valeur de la variable a_r^{ta} de l'équation (IV.134).
- (3) Dédire $_{i+1}\Delta p_{bi}^{ta}$ et $\{_{i+1}\Delta X_r^{ta}\}$ de l'équation (IV.132).
- (4) Construire le vecteur tangentiel $_{i+1}\overrightarrow{VT}_r^{LA}$ selon l'équation (IV.126).
- (5) Faire la prédiction de $\{_{i+1}^1 X_r(0)\}$ et de $_{i+1}^1 p_{bi}$ à partir de la dernière solution convergée (voir l'équation (IV.140)).
- (6) Calculer les incréments de correction $\{_{i+1}\Delta X_r^{SH}\}$ et $_{i+1}\Delta p_{bi}$ avec l'équation (IV.147).
- (7) Effectuer la correction de la solution à l'aide de l'équation (IV.144).
- (8) Comparer $\left\| \left\{ H_r \left(\{_{i+1}^k X_r(0)\}, \tau_r, {}_{i+1}^k p_{bi} \right) \right\} \right\| / \left\| \{_{i+1}^k X_r(0)\} \right\|$ au critère d'arrêt des calculs ε^{SH} .

CHAPITRE V

MISE EN EVIDENCE DES PHENOMENES PROPRES AUX ROTORS EMBARQUES

Sommaire

V.1	Introduction.....	118
V.2	Rotor symétrique sur paliers rigides	118
	V.2.1 Configuration et données	118
	V.2.2 Diagrammes de CAMPBELL	120
	V.2.3 Influence des excitations du support sur les courbes de réponse.....	121
	V.2.3.1 Réponses au balourd en présence de la rotation constante du support.....	121
	V.2.3.2 Réponses à l'excitation de translation du support en présence de sa rotation constante	123
	V.2.4 Influence des excitations du support sur les orbites	124
	V.2.4.1 Translation pure du support et validation par rapport à la méthode de RAYLEIGH-RITZ..	124
	V.2.4.2 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support.....	124
	V.2.4.3 Combinaison de translation $z_0=Z_0\sin\Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support.....	125
V.3	Rotor dissymétrique sur paliers rigides	128
	V.3.1 Configuration et données	128
	V.3.2 Cartes de stabilité.....	129
	V.3.3 Réponses orbitales du rotor.....	131
	V.3.3.1 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support.....	131
	V.3.3.2 Combinaison de translation $z_0=Z_0\sin\Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support.....	131
V.4	Rotor symétrique sur paliers hydrodynamiques	134
	V.4.1 Description du rotor étudié.....	134
	V.4.2 Rôle des modèles de palier hydrodynamique dans l'analyse de stabilité	135
	V.4.2.1 Modèle linéarisé	135
	V.4.2.2 Modèle non linéaire	136
	V.4.3 Comparaisons de modèles linéaire et non linéaire de palier hydrodynamique	136
	V.4.3.1 Influence du balourd.....	136
	V.4.3.2 Influence de la fréquence du mouvement du support	137
	V.4.3.3 Influence de l'amplitude du mouvement du support.....	142
	V.4.4 Route vers le chaos dans le système rotor-palier hydrodynamique non linéaire	145
	V.4.4.1 Diagrammes de bifurcation.....	145
	V.4.4.2 Réponses sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques	148
	V.4.4.3 Sensibilité aux conditions initiales	149
	V.4.5 Réponses stationnaires périodiques aux excitations sinusoïdales du support.....	151
V.5	Conclusion	152

V.1 Introduction

Les outils et les méthodes numériques exposés dans le **Chapitre IV** pour l'analyse du comportement dynamique, l'étude de stabilité et le calcul de réponses forcées sont appliqués dans ce chapitre aux équations différentielles du mouvement du rotor embarqué excité par des mouvements déterministes de rotation et/ou de translation du support.

Dans un premier temps, le modèle éléments finis de rotor basé sur la théorie des poutres de TIMOSHENKO et correspondant à un support fixe est validé par des comparaisons avec des résultats expérimentaux réalisés sur un banc d'essai lors d'un stage qui a eu lieu au LaMCoS de l'INSA de LYON (voir **PINAY [128]**). Il est de plus validé par rapport à ROTORINSA qui est un logiciel de dynamique des rotors en flexion développé au LaMCoS. Dans un deuxième temps, des cas d'application sont présentés afin de montrer les phénomènes spécifiques aux rotors embarqués. Dans les exemples d'application numériques proposés, trois configurations de rotor embarqué sont étudiées :

- ⇒ Un rotor **symétrique** monté sur des **paliers rigides** est soumis au **balourd** combiné avec des mouvements de **rotation constante et de translation sinusoïdale du support**, voir **DAKEL et al. [33,41]**. Les équations différentielles du mouvement sont **linéaires à coefficients constants**. Elles sont résolues par des méthodes quasi-analytiques afin de rechercher les fréquences naturelles du rotor et de calculer ses réponses au balourd et à la translation du support en régime permanent ainsi que ses orbites stabilisées.
- ⇒ Un rotor avec une **dissymétrie** géométrique due au disque monté sur des **paliers rigides** est excité par l'effet de **balourd** et par des mouvements de **rotation constante et de translation sinusoïdale du support**, voir **DAKEL et al. [32,41]**. Les équations du mouvement sont **linéaires à coefficients paramétriques périodiques** qui peuvent créer une instabilité dynamique latérale. Le comportement dynamique du rotor est examiné à travers la théorie de FLOQUET (pour évaluer sa stabilité dynamique) et le schéma implicite d'intégration temporelle pas à pas de type NEWMARK basé sur l'accélération moyenne (pour prédire ses orbites en régime stationnaire).
- ⇒ Un rotor **symétrique** monté sur des **paliers hydrodynamiques** est soumis au **balourd** et aux **excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support**, voir **DAKEL et al. [34-40]**. Les équations différentielles obtenues du mouvement sont **non linéaires** soit avec **des termes constants** dus à la translation du support, soit **avec des termes paramétriques périodiques dans le temps** dus à la rotation du support. En considérant le modèle linéarisé de palier, la stabilité du rotor est vérifiée par la théorie de FLOQUET. Ensuite, les équations linéarisées du mouvement sont résolues avec l'algorithme implicite d'intégration temporelle de NEWMARK pour calculer les réponses du rotor et obtenir ses orbites. Lorsque les paliers hydrodynamiques non linéaires sont considérés, il est nécessaire de combiner la procédure itérative de NEWTON-RAPHSON avec le schéma d'intégration de NEWMARK, ce qui augmente significativement le temps de calcul. Il est donc avantageux d'utiliser le modèle linéarisé, mais cela nécessite d'établir précisément sa limite de validité en confrontant les résultats à ceux du modèle non linéaire. En outre, dans le cas où les excitations sinusoïdales du support conduisent à des réponses périodiques (harmoniques et sous-harmoniques) du rotor, les méthodes efficaces de shooting et de la balance harmonique sont employées pour résoudre les équations non linéaires du mouvement. Des comparaisons entre ces deux méthodes sont effectuées pour examiner leur intérêt en dynamique des rotors embarqués. La stabilité des solutions non linéaires périodiques peut être déterminée en utilisant la théorie de FLOQUET. Enfin, une étude paramétrique est réalisée afin de calculer les réponses périodiques non linéaires en fonction des fréquences des mouvements sinusoïdaux du support.

V.2 Rotor symétrique sur paliers rigides

V.2.1 Configuration et données

La figure **FIG. V.1** et le tableau **TAB. V.1** présentent les composants et les caractéristiques du rotor embarqué symétrique. L'origine O du repère lié au support R coïncide avec l'extrémité de l'arbre positionnée au centre du palier # 1.

L'arbre symétrique est modélisé par 12 éléments finis identiques de poutre de TIMOSHENKO. Le disque symétrique est localisé au nœud 5. Les paliers courts rigides # 1 et # 2 génèrent un rotor en appui aux deux extrémités et sont localisés aux nœuds 1 et 13. Ainsi les degrés de liberté correspondants sont annulés. Le balourd est placé dans le plan du disque. La relation calculant le coefficient de réduction de section de l'arbre circulaire peut être trouvée dans le travail de **COWPER [29]** et est donnée par :

$$\kappa_a^x = \kappa_a^z = \frac{6(V_a + 1)}{6V_a + 7} \quad (V.1)$$

Le rotor fonctionne à une vitesse de rotation constante Ω (en tr/min ou rpm) et est soumis à l'excitation due au balourd ainsi qu'à des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale du support : la rotation constante autour de l'axe Ox (ou de l'axe Oy) est donnée par ω^x (ou ω^y), tandis que la translation sinusoïdale selon l'axe Oz est exprimée par $z_o = Z_o \sin \Omega^z t$. Les équations du mouvement dues à la rotation ω^x du support sont présentées dans l'équation (V.2) et celles dues à ω^y dans l'équation (V.5) :

$$\begin{aligned} & [M_{d,a}] \{\ddot{\delta}_r\} + [C_{d,a}^g] \Omega \{\dot{\delta}_r\} + \left([K_a^e] + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^2}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^2}] \right) \omega^{x2} \right) \{\delta_r\} \\ & = \{F_b^c\} \cos \Omega t + \{F_b^s\} \sin \Omega t + \{F_{b,su1}^c\} \cos \Omega t + \{F_{b,su1}^s\} \sin \Omega t \\ & + \{F_{d,a,su1}^c\} \cos \Omega^z t + \{F_{d,a,su1}^s\} \sin \Omega^z t + \{F_{d,a,su}^0\} \end{aligned} \quad (V.2)$$

où :

$$\{F_b^c\} = \{V_b^{c1}\} \Omega^2 \quad ; \quad \{F_b^s\} = \{V_b^{s1}\} \Omega^2 \quad ; \quad \{F_{b,su1}^c\} = \{V_{b,su}^{\omega^2, c1}\} \omega^{x2} \quad ; \quad \{F_{b,su1}^s\} = \{V_{b,su}^{\omega^2, s1}\} \omega^{x2} \quad (V.3)$$

$$\{F_{d,a,su1}^c\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_{d,a,su1}^s\} = \{V_{d,a,su}^w\} Z_o (\Omega^z + \omega^2) \quad ; \quad \{F_{d,a,su}^0\} = -\{V_{d,a,su}^{yw}\} \Omega \omega^y \quad (V.4)$$

$$\begin{aligned} & [M_{d,a}] \{\ddot{\delta}_r\} + \left([C_{d,a}^g] \Omega + [C_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \omega^y \right) \{\dot{\delta}_r\} + \left([K_a^e] + [K_{d,a,su}^{er,\Omega \omega^y}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^2}] \omega^{y2} \right) \{\delta_r\} \\ & = \{F_b^c\} \cos \Omega t + \{F_b^s\} \sin \Omega t + \{F_{b,su2}^c\} \cos \Omega t + \{F_{b,su2}^s\} \sin \Omega t + \{F_{d,a,su2}^c\} \cos \Omega^z t + \{F_{d,a,su2}^s\} \sin \Omega^z t \end{aligned} \quad (V.5)$$

où :

$$\{F_{b,su2}^c\} = \{V_{b,su}^{\Omega \omega^y, c1}\} \Omega \omega^y + \{V_{b,su}^{\omega^2, c1}\} \omega^{y2} \quad ; \quad \{F_{b,su2}^s\} = \{V_{b,su}^{\Omega \omega^y, s1}\} \Omega \omega^y + \{V_{b,su}^{\omega^2, s1}\} \omega^{y2} \quad (V.6)$$

$$\{F_{d,a,su2}^c\} = -2\{V_{d,a,su}^u\} Z_o \Omega^z \omega^y \quad ; \quad \{F_{d,a,su2}^s\} = \{V_{d,a,su}^w\} Z_o (\Omega^z + \omega^2) \quad (V.7)$$

Afin de montrer les phénomènes de base survenant en dynamique des rotors avec les mouvements du support et de les comparer à ceux relatifs au cas d'un support fixe, l'analyse du comportement dynamique en régime permanent est effectuée grâce à des digrammes de CAMPBELL, des réponses au balourd, des réponses à l'excitation de translation sinusoïdale du support et des orbites du rotor.

Par ailleurs, les équations du mouvement (V.2) et (V.5) du rotor embarqué sont affectées de manière paramétrique (partie gauche des équations) par les rotations du support, tandis que les translations du support ont seulement une influence sur le vecteur des forces extérieures (second membre). Le comportement dynamique est entièrement analysé en fonction de la rotation du support.

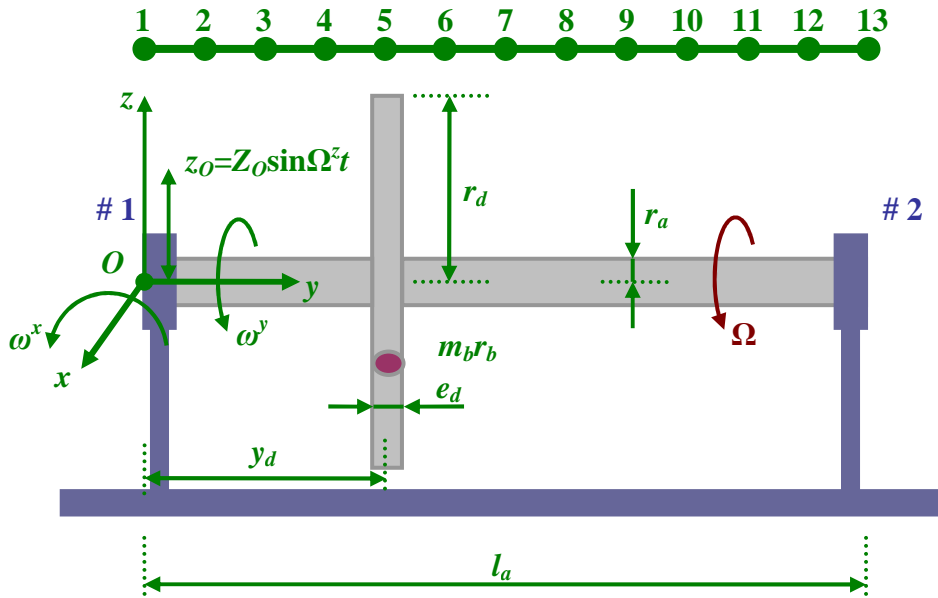


FIG. V.1 : Configuration de rotor embarqué symétrique

Masse volumique du matériau du disque	$\rho_d=7800 \text{ kg/m}^3$
Rayon du disque	$r_d=0,15 \text{ m}$
Epaisseur du disque	$e_d=0,03 \text{ m}$
Position du disque	$y_d=0,4/3 \text{ m}$
Masse volumique du matériau de l'arbre	$\rho_a=7800 \text{ kg/m}^3$
Rayon de l'arbre	$r_a=0,01 \text{ m}$
Longueur de l'arbre	$l_a=0,4 \text{ m}$
Module d'YOUNG de l'arbre	$E_a=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Coefficient de POISSON de l'arbre	$\nu_a=0,3$
Coefficient de réduction de section de l'arbre	$\kappa_a^x = \kappa_a^z = 0,8864$ [29]
Balourd et sa phase	$m_b r_b = 150 \text{ g mm}, \eta_b = 0^\circ$

TAB. V.1 : Caractéristiques essentielles du rotor symétrique

V.2.2 Diagrammes de CAMPBELL

Dans le cas d'un rotor symétrique soumis à une rotation constante du support, les équations linéaires du mouvement (V.2) et (V.5) ont toujours des coefficients constants. Il faut mentionner qu'un support fixe ou qu'un support tournant autour de l'axe Oy laissent le système isotrope, tandis que la rotation du support autour de l'axe Ox rend le système anisotrope. De plus, le signe des composantes des matrices d'amortissement et de raideur dépend de la direction de la rotation du support autour de Oy mais pas de celle de la rotation du support autour de Ox . Dans le cas d'une direction positive (sens anti-horaire) de la rotation du support autour de Oy et de n'importe quelle direction autour de Ox , les matrices symétriques de raideur peuvent perdre leur caractéristique définie positive en raison de la présence de termes diagonaux négatifs contenant la vitesse angulaire ω^x ou ω^y . Ainsi une instabilité dynamique du rotor peut survenir. Dans l'application présentée, puisque les valeurs propres du système sous forme d'état (IV.13) sans second membre sont des quantités purement imaginaires quelle que soit la vitesse angulaire constante des rotations du support dans la zone d'intérêt ω^x ou $\omega^y \in [0; 10 \text{ Hz}]$, le rotor embarqué est stable pour toutes les formes modales considérées incluses dans sa plage de vitesse de fonctionnement $\Omega \in [0; 6000 \text{ tr/min}]$.

Les fréquences naturelles f_r déduites de ces valeurs propres dépendent de la vitesse de rotation Ω du rotor et de la vitesse angulaire des rotations du support soit de Ox , soit de Oy . Elles sont représentées par des diagrammes de CAMPBELL tracés sur la figure FIG. V.2 pour le rotor soumis à la vitesse angulaire soit ω^x , soit ω^y . Lorsque le support du rotor est fixe ($\omega^x = \omega^y = 0$), le système est isotrope et donc le comportement dynamique du rotor est symétrique, c'est-à-dire que les fréquences naturelles de chaque paire des modes de précessions inverse et directe sont égales à l'arrêt ($\Omega = 0$). Même si les fréquences naturelles ne changent pas fortement, la rotation ω^x du support casse la symétrie du comportement du rotor, voir la figure FIG. V.2(a). Puisque les matrices correspondantes de raideur sont symétriques avec des termes anisotropes et qu'il n'existe pas de matrice d'amortissement associée à ω^x , le zoom montre que les fréquences naturelles de la première paire des modes de précessions inverse et directe à l'arrêt ne sont pas égales, ce qui correspond bien à un comportement non symétrique du rotor. Les effets de rotation dus à ω^x diminuent les fréquences naturelles, tandis que les effets de raidissement géométrique associés aux contraintes centrifuges relatives à ω^x les augmentent, ces derniers étant prédominants.

Contrairement au cas précédent, la sollicitation due à la rotation du support autour de Oy n'apporte pas de dissymétrie du comportement dynamique du rotor (parce que les matrices correspondantes sont symétriques et anti-symétriques avec des termes isotropes) mais décale et change les fréquences naturelles (en raison de termes additionnels dans les matrices d'amortissement et de raideur du rotor), voir la figure FIG. V.2(c). La matrice d'amortissement associée à ω^y rend les paires des modes de précessions inverse et directe à l'arrêt inégales et inversées par rapport aux cas d'un support fixe et de ω^x . Pour une certaine valeur de ω^y , l'augmentation de la vitesse de rotation Ω du rotor réduit les fréquences de précession inverse et accroît les fréquences de précession directe. Pour une certaine valeur de Ω , l'augmentation de la vitesse angulaire ω^y du support accroît les fréquences de précession inverse et diminue les fréquences de précession directe.

Le tableau TAB. V.2 introduit des comparaisons entre les quatre premières fréquences naturelles f_r du rotor relatives à la rotation du support autour soit de Ox , soit de Oy . On constate que pour n'importe quelle vitesse angulaire du support, ω^y a une influence plus grande que ω^x sur les fréquences naturelles, c'est-à-dire que les fréquences du rotor correspondant à la rotation du support autour de l'axe Oy sont plus différentes par rapport à celles obtenues quand le support est fixe.

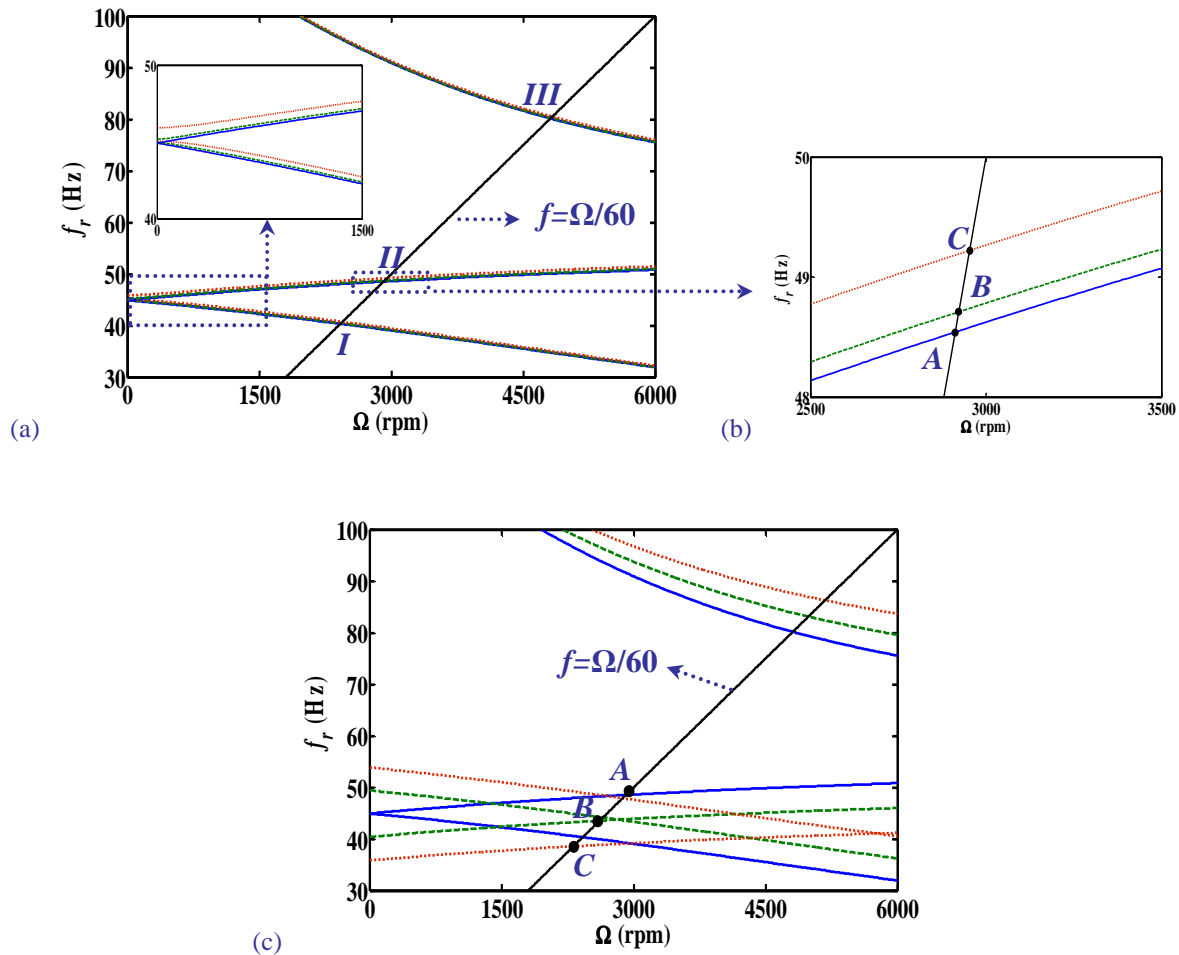


FIG. V.2 : Diagrammes de CAMPBELL pour les trois premières fréquences naturelles du rotor soumis à la vitesse angulaire du support : (a) ω^x , ou (c) ω^y , avec les valeurs 0 (courbes en trait plein), 5 Hz (trait discontinu), 10 Hz (trait pointillé), (b) Zoom sur l'intersection de la fréquence du premier mode de précession directe avec la vitesse de rotation du rotor (c'est-à-dire la droite de la fréquence du balourd)

V.2.3 Influence des excitations du support sur les courbes de réponse

V.2.3.1 Réponses au balourd en présence de la rotation constante du support

La réponse du rotor due à l'effet de balourd (amplitudes maximales des déplacements en fonction de la vitesse de rotation Ω du rotor) peut être reliée aux mouvements de rotation constante du support, voir les équations (V.2)-(V.7). La figure FIG. V.3 présente les réponses au balourd au milieu de l'arbre (c'est-à-dire le nœud 7) du rotor excité soit par ω^x , soit par ω^y .

Dans la plage de vitesse de fonctionnement $\Omega \in [0; 6000 \text{ tr/min}]$, le rotor possède une seule vitesse critique principale de rotation (un seul pic II) lorsque le support est fixe. Il possède un seul pic dans le cas de la rotation ω^y du support (en raison du système isotrope), voir la figure FIG. V.3(b), mais trois pics (I, II, III) dans le cas de ω^x (en raison du système anisotrope), voir la figure FIG. V.3(a). Ces pics correspondent à l'intersection de la droite $f = \Omega/60$ (Ω en tr/min) de la fréquence du balourd avec les fréquences naturelles du rotor (voir la figure FIG. V.2), c'est-à-dire l'intersection avec les fréquences des premier et deuxième modes de précession inverse (I, III) et du premier mode de précession directe (II) pour ω^x et l'intersection avec les fréquences du premier mode de précession directe pour ω^y . Les réponses confirment que le rotor garde un comportement dynamique symétrique dans le cas de la rotation du support autour de l'axe Oy mais a un comportement non symétrique dans le cas de la rotation du support autour de Ox comme expliqué dans le Paragraphe V.2.2 et présenté en figure FIG. V.2.

Pour des valeurs croissantes de ω^x , la vitesse critique principale (II) augmente légèrement comme montré par les points (A, B, C) sur la figure FIG. V.2(b) et les amplitudes des pics additionnels (I, III)

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

deviennent de plus en plus grandes. Comme montré par les points (A , B , C) en figure FIG. V.2(c), la position de la vitesse critique de rotation est décalée vers les basses valeurs lorsque la vitesse angulaire ω^y augmente car les modes de précessions inverse et directe à l'arrêt ($\Omega = 0$) sont inversés. Il est aussi observé que même si le rotor est à l'arrêt, les amplitudes de la réponse à l'effet de balourd ne sont pas nulles en raison de la présence de la rotation du support autour soit de Ox , soit de Oy . En outre, ces amplitudes à l'arrêt deviennent plus grandes

Ω tr/min	f_r Hz	Support fixe	ω^x Hz		ω^y Hz	
			5	10	5	10
0	f_1^I	44,93	44,96	45,04	49,42	53,88
	f_1^D	44,93	45,19	45,93	40,42	35,88
	f_2^I	123,79	123,80	123,84	124,49	125,42
	f_2^D	123,79	123,88	124,15	123,32	123,09
1500	f_1^I	42,28	42,40	42,73	46,65	50,99
	f_1^D	47,02	47,17	47,66	42,40	37,76
	f_2^I	104,64	104,70	104,90	106,48	108,54
	f_2^D	148,73	148,77	148,90	149,40	150,27
3000	f_1^I	39,07	39,18	39,48	43,36	47,63
	f_1^D	48,62	48,78	49,27	43,92	39,20
	f_2^I	90,93	91,02	91,27	93,76	96,75
	f_2^D	179,05	179,08	179,18	180,69	182,49
4500	f_1^I	35,53	35,62	35,86	39,79	44,04
	f_1^D	49,86	50,02	50,51	45,10	40,32
	f_2^I	81,66	81,76	82,07	85,22	88,89
	f_2^D	213,80	213,83	213,92	216,20	218,73
6000	f_1^I	31,96	32,03	32,23	36,26	40,56
	f_1^D	50,82	50,99	51,48	46,02	41,20
	f_2^I	75,55	75,67	76,03	79,60	83,72
	f_2^D	251,95	251,97	252,05	254,91	257,97

TAB. V.2 : Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation du rotor et des rotations constantes du support (I et D représentent les modes de précessions inverse et directe respectivement)

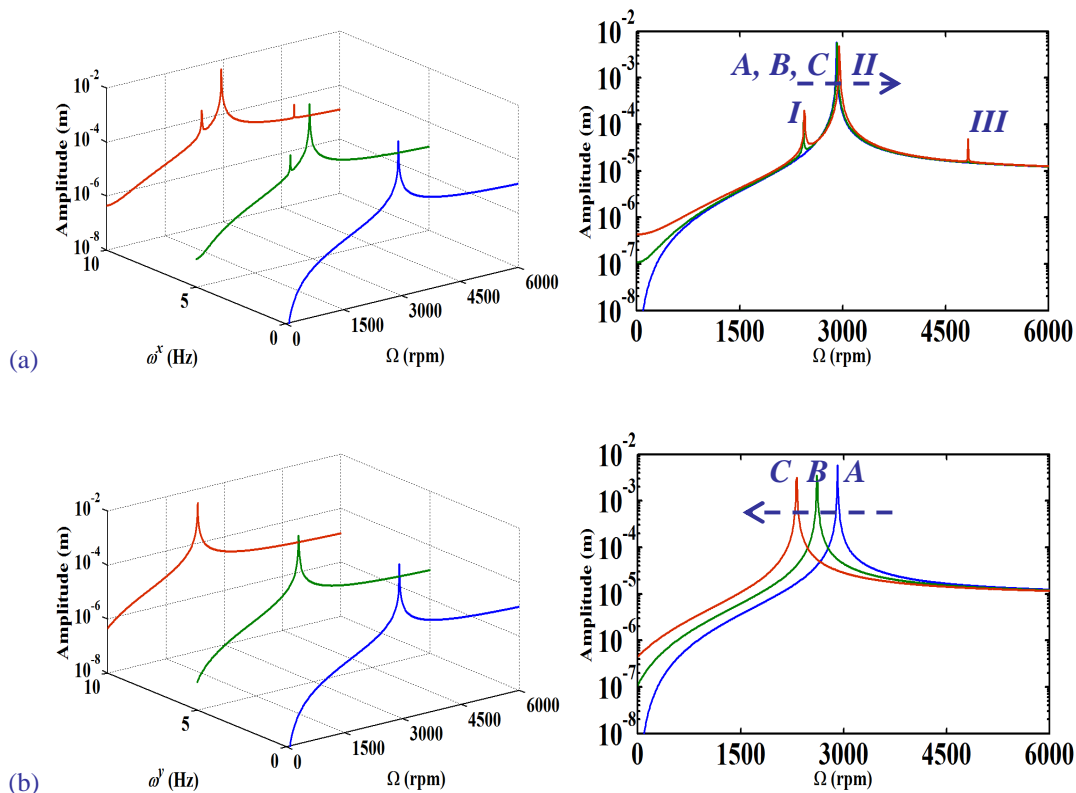


FIG. V.3 : Réponses du rotor au balourd dans le cas de la rotation constante du support autour de : (a) l'axe Ox , ou (b) l'axe Oy , pour des valeurs : 0 (courbe bleue), 5 Hz (courbe verte), 10 Hz (courbe rouge)

lorsque la vitesse angulaire de la rotation du support augmente, voir le tableau TAB. V.3. Aux vitesses de rotation les plus élevées du rotor, les amplitudes correspondantes de la réponse atteignent des valeurs limites égales à $12,431 \times 10^{-6}$ m pour ω^x et à $11,512 \times 10^{-6}$ m pour ω^y .

V.2.3.2 Réponses à l'excitation de translation du support en présence de sa rotation constante

Sous des mouvements combinés du support, la réponse du rotor aux excitations de translation sinusoïdale du support varie en fonction de la valeur de la rotation constante du support, voir les équations (V.2)-(V.7). La figure FIG. V.4 présente l'évolution des réponses en fréquence au milieu de l'arbre (nœud 7) du rotor fonctionnant à une vitesse de rotation $\Omega = 1500$ tr/min (=25 Hz) et excité par une translation sinusoïdale du support d'amplitude $Z_o = 1 \times 10^{-6}$ m dans la direction Oz . La fréquence de la translation du support est contenue dans la zone d'intérêt $\Omega^z \in [0; 200$ Hz].

En présence de la vitesse angulaire ω^x ou ω^y , les réponses présentent toujours quatre fréquences critiques (quatre pics) correspondant aux fréquences naturelles du rotor à $\Omega = 1500$ tr/min, voir aussi les diagrammes de CAMPBELL tracés sur la figure FIG. V.2 et présentés dans le tableau TAB. V.2. Dans le cas de valeurs croissantes de ω^y , le pic relatif à la troisième fréquence naturelle et produit par la translation sinusoïdale du support selon Oz devient de plus en plus petit, voir la figure FIG. V.4(b). C'est parce que l'équation (V.5) présente un terme négatif en cosinus contenant la fréquence Ω^z de la translation du support. Enfin, il est noté que les zones de fonctionnement des réponses fréquentielles le long de l'axe Ω^z ne changent généralement pas avec la vitesse angulaire ω^x , tandis qu'elles peuvent changer significativement avec ω^y .

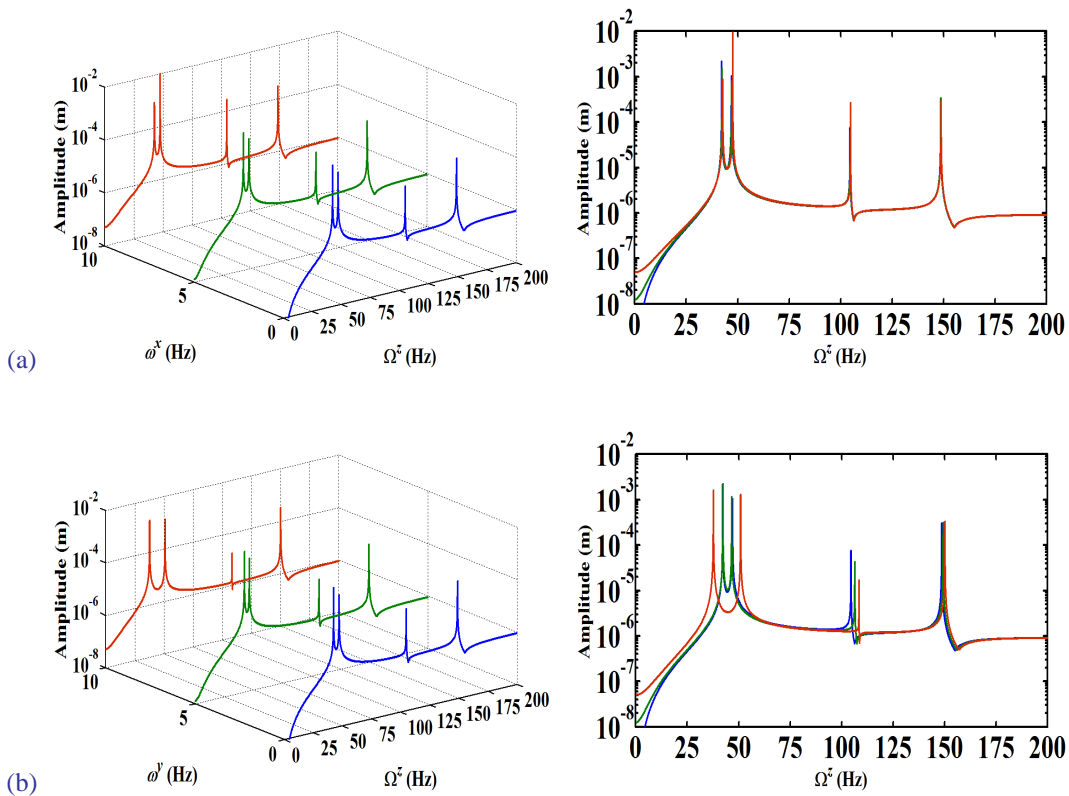


FIG. V.4 : Réponses du rotor à la translation sinusoïdale du support pour une vitesse de rotation $\Omega=1500$ tr/min et la rotation constante du support autour de : (a) l'axe Ox , ou (b) l'axe Oy , pour des valeurs : 0 (courbe bleue), 5 Hz (courbe verte), 10 Hz (courbe rouge)

ω^x Hz	Amplitude m	ω^y Hz	Amplitude m
5	$0,107 \times 10^{-6}$	5	$0,109 \times 10^{-6}$
10	$0,428 \times 10^{-6}$	10	$0,449 \times 10^{-6}$

TAB. V.3 : Amplitudes des réponses du rotor au balourd à l'arrêt ($\Omega=0$) pour la vitesse angulaire soit ω^x , soit ω^y

V.2.4 Influence des excitations du support sur les orbites

Dans ce paragraphe, les orbites du rotor symétrique soumis successivement à une translation, à une rotation et à des mouvements combinés de rotation et de translation du support sont calculées avec la méthode des éléments finis. Pour des raisons de validation, une comparaison est effectuée avec les résultats obtenus par la méthode de RAYLEIGH-RITZ décrite dans le travail de DUCHEMIN [46] (dans le cas de translation pure du support) et étendue dans cette thèse pour prendre en compte une rotation pure et des mouvements combinés du support. Le modèle de type éléments finis comporte 48 degrés de liberté, tandis que la méthode de RAYLEIGH-RITZ utilise une seule fonction trigonométrique classique comme fonction de déplacement, c'est-à-dire deux coordonnées généralisées :

$$u = \sin\left(\frac{\pi y}{l_a}\right) q^u \quad ; \quad w = \sin\left(\frac{\pi y}{l_a}\right) q^w \tag{V.8}$$

V.2.4.1 Translation pure du support et validation par rapport à la méthode de RAYLEIGH-RITZ

Les orbites représentées sur la figure FIG. V.5 sont produites au milieu du rotor présenté dans le Paragraphe V.2.1 et soumis à un balourd ($m_b r_b = 15 \text{ g mm}$ et $\eta_b = 0^\circ$) et à une translation sinusoïdale du support ($Z_o = 0,1 \text{ m}$ et $\Omega^z = 2 \text{ Hz}$) pour une vitesse de rotation constante $\Omega = 20000 \text{ tr/min}$. Les orbites obtenues par l'approche de RAYLEIGH-RITZ développée ici et celle de DUCHEMIN [46] sont tracées sur la figure FIG. V.5(a) et aucune déviation ne peut être observable, ce qui valide notre modélisation des mouvements de translation du support. Ces orbites vont également permettre de valider notre modèle éléments finis. L'orbite obtenue avec ce dernier est tracée sur la figure FIG. V.5(b). Elle est qualitativement similaire à celle de la figure FIG. V.5(a) et présente de très petits écarts d'amplitude : l'écart maximum d'amplitude selon Ox est $\varepsilon_u = 4,23\%$ et celui selon Oz est $\varepsilon_w = -0,58\%$. En conclusion, les modèles RAYLEIGH-RITZ et éléments finis développés dans cette étude sont validés par rapport au modèle RAYLEIGH-RITZ développé par DUCHEMIN [46].

V.2.4.2 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support

La figure FIG. V.6(a) montre l'orbite classique au milieu du rotor (nœud 7) due au balourd pour une vitesse de rotation constante $\Omega = 1500 \text{ tr/min}$ ($=25 \text{ Hz}$ =la fréquence du balourd) et un support fixe. Puisque les matrices du système de rotor sont soit symétriques, soit anti-symétriques avec des composantes diagonales et croisées isotropes, le comportement dynamique est symétrique et l'orbite est circulaire et harmonique de période égale à l'inverse de la fréquence Ω du balourd. Le centre de l'orbite coïncide avec le point O (centre du palier) parce que les paliers sont rigides et l'amplitude du mouvement du rotor vaut $3,628 \times 10^{-6} \text{ m}$ dans les deux directions Ox et Oz . Les figures FIG. V.6(b) et FIG. V.6(c) comparent les orbites dues au balourd en régime permanent dans le cas d'une rotation pure du support autour soit de Ox , soit de Oy , voir la solution dans l'équation (IV.20).

Pour la vitesse angulaire $\omega^x = 5 \text{ Hz}$ du support (figure FIG. V.6(b)), la trajectoire illustrée par l'orbite oscille autour d'une position statique C_{ps} due au vecteur constant $\{F_{d,a,su}^0\} = -\{V_{d,a,su}^{y\omega}\} \Omega \omega^x$ de la force de CORIOLIS agissant dans la direction Ox , voir l'équation (V.2). Le déplacement donnant la position statique C_{ps} est calculé en utilisant l'équation (IV.33) et sa coordonnée suivant Ox est approximativement égale à $3,2 \times 10^{-3} \text{ m}$. Cette coordonnée est très grande par rapport à l'amplitude de l'orbite, ce qui explique l'utilisation du point C_{ps} comme origine. Par ailleurs, l'orbite périodique est une ellipse en raison du comportement dynamique non symétrique du rotor et ses axes orthogonaux, qui définissent les amplitudes des vibrations en flexion du milieu de l'arbre suivant Ox et Oz , mesurent $3,554 \times 10^{-6} \text{ m}$ et $3,784 \times 10^{-6} \text{ m}$ respectivement et sont donc légèrement différents.

Pour la vitesse angulaire $\omega^y = 5 \text{ Hz}$ du support (figure FIG. V.6(c)), il n'y a pas de telle position statique et le centre de l'orbite reste au centre O du palier. L'orbite périodique garde une forme circulaire car le comportement dynamique symétrique du rotor n'est jamais cassé, tandis que son rayon, qui représente les amplitudes de la vibration selon Ox et Oz , devient plus grand que celui obtenu pour un support fixe (figure FIG. V.6(a)) car l'excitation due au balourd augmente de manière plus importante que la matrice de raideur du rotor. Enfin, ce rayon est égal à $6,183 \times 10^{-6} \text{ m}$ au milieu de l'arbre, c'est-à-dire que l'amplitude s'accroît d'un facteur d'environ 1,7 dans les deux directions transversales.

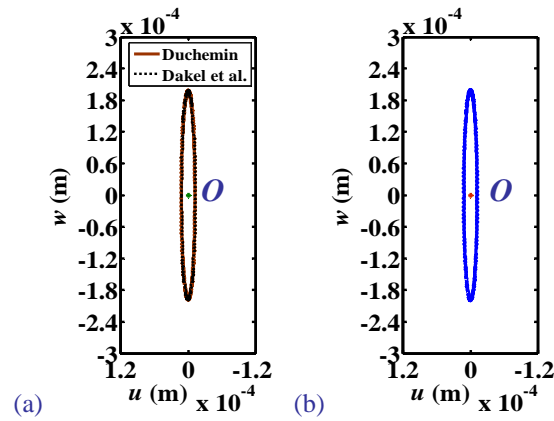


FIG. V.5 : Orbites au milieu du rotor fonctionnant à $\Omega=20000$ tr/min et soumis à une translation sinusoïdale du support avec $Z_0=0,1$ m et $\Omega^z=2$ Hz en utilisant : (a) la méthode de RAYLEIGH-RITZ, (b) la méthode des éléments finis

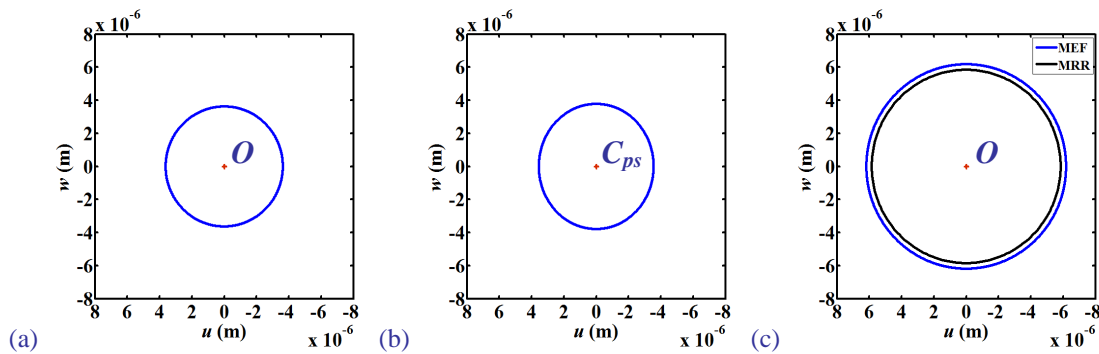


FIG. V.6 : Orbites dues au balourd au milieu du rotor fonctionnant à $\Omega=1500$ tr/min et soumis à trois valeurs de rotation du support : (a) $\omega^x=\omega^y=0$ (support fixe), (b) $\omega^x=5$ Hz, $\omega^y=0$, (c) $\omega^x=0$, $\omega^y=5$ Hz

Les orbites dues au balourd et obtenues avec les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis sont qualitativement similaires et présentent quantitativement de très faibles écarts d'amplitude selon les axes Ox et Oz : $\varepsilon_u = \varepsilon_w = -5,75\%$.

V.2.4.3 Combinaison de translation $z_0=Z_0\sin\Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support

Parce que les équations différentielles décrivant le mouvement du rotor sont linéaires (voir les équations (V.2) et (V.5)), les orbites du rotor contiennent la réponse au balourd superposée à celle due aux mouvements de rotation et de translation du support. Ainsi les caractéristiques (forme et taille) de l'orbite dépendent de ces deux types d'excitations. En outre, les orbites en régime permanent sont harmoniques car les excitations extérieures dues à la fois au balourd et à la translation du support sont sinusoïdales et commensurables. La période des orbites est égale à l'inverse du plus grand commun diviseur pour la fréquence Ω du balourd et la fréquence Ω^z de la translation du support.

Les figures FIG. V.7-FIG. V.9 présentent les orbites au milieu de l'arbre pour une vitesse de rotation constante $\Omega = 1500$ tr/min ($=25$ Hz) et différents cas de mouvements combinés de rotation et de translation du support.

Sur la figure FIG. V.7, la translation du support est maintenue constante ($Z_0 = 1 \times 10^{-6}$ m et $\Omega^z = 200$ Hz), tandis que la rotation du support varie (ω^x ou $\omega^y = 5$ Hz et 10 Hz). En raison de la translation sinusoïdale du support, des orbites plus complexes apparaissent au lieu du cercle ou de l'ellipse classiques. Comme montré précédemment lorsque le rotor est soumis à la vitesse angulaire ω^x , les orbites du rotor oscillent autour d'une position statique C_{ps} . Les coordonnées suivant Ox des déplacements correspondant à la position statique sont calculées en utilisant l'équation (IV.33) et augmentent avec ω^x . Elles sont approximativement $3,2 \times 10^{-3}$ m pour $\omega^x = 5$ Hz et $6,3 \times 10^{-3}$ m pour $\omega^x = 10$ Hz. Le tracé adopte la position statique C_{ps} comme origine. Les amplitudes des orbites restent quasiment les mêmes pour des valeurs croissantes de ω^x . Lorsque le

rotor est excité par la vitesse angulaire ω^y , le tracé adopte le centre O du palier comme origine. Les amplitudes des orbites augmentent pour des valeurs croissantes de ω^y parce que l'excitation due au balourd augmente de manière plus importante que la matrice de raideur du rotor.

Sur la figure **FIG. V.8**, la rotation du support et l'amplitude de la translation sinusoïdale du support sont maintenues constantes (ω^x ou $\omega^y = 5 \text{ Hz}$ et $Z_o = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$), tandis que la fréquence de cette dernière varie ($\Omega^z = 100 \text{ Hz}$ et 120 Hz). La fréquence de l'excitation sinusoïdale du support change beaucoup la forme des orbites, tandis qu'elle modifie légèrement leurs amplitudes (par rapport à celles montrées en figure **FIG. V.7**). Comme annoncé précédemment, la période des orbites est égale à l'inverse du plus grand commun diviseur de la fréquence $\Omega = 25 \text{ Hz}$ du balourd et de la fréquence Ω^z de la translation du support. Pour $\Omega^z = 100 \text{ Hz}$, une période de l'orbite du haut correspond à une période de l'excitation due au balourd et à quatre périodes de la translation du support, tandis que dans le cas où $\Omega^z = 120 \text{ Hz}$, une période de l'orbite du bas correspond à cinq périodes de l'excitation du balourd et à 24 périodes de la translation du support. Il faut noter que pour des fréquences de la translation du support différentes de la fréquence du balourd, les formes des orbites deviennent plus compliquées que celles obtenues lorsque le support est soumis à une rotation pure, voir les figures **FIG. V.6(b)** et **FIG. V.6(c)**.

Sur la figure **FIG. V.9**, la rotation du support et la fréquence de la translation du support sont maintenues constantes (ω^x ou $\omega^y = 5 \text{ Hz}$ et $\Omega^z = 200 \text{ Hz}$), tandis que l'amplitude de cette dernière varie ($Z_o = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$ et $10 \times 10^{-6} \text{ m}$). L'augmentation des amplitudes rend les orbites beaucoup plus larges et plus compliquées, particulièrement par rapport aux orbites dues au balourd pour un support excité par une rotation pure, voir la figure **FIG. V.6**. La translation du support a une grande influence sur les amplitudes des orbites selon Oz mais une légère influence sur les amplitudes selon Ox .

Les orbites montrées sur la figure **FIG. V.10** et obtenues avec les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis sont qualitativement similaires mais quantitativement légèrement différentes. Les écarts d'amplitude selon les axes Ox et Oz sont $\varepsilon_u = -6,27\%$ et $\varepsilon_w = 0,04\%$ pour ω^x ainsi que $\varepsilon_u = -8,18\%$ et $\varepsilon_w = -4,03\%$ pour ω^y . L'écart de coordonnée de la position statique est $\varepsilon_{ps} = -5,96\%$.

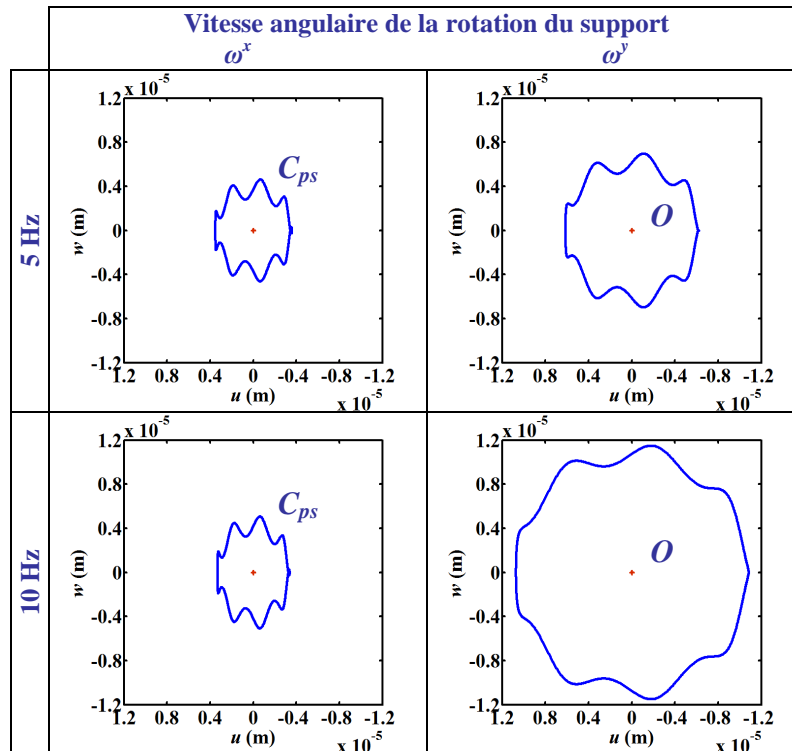


FIG. V.7 : Influence de la vitesse angulaire ω^x et ω^y du support. Orbites au milieu du rotor tournant à $\Omega = 1500 \text{ tr/min}$ ($= 25 \text{ Hz}$) et soumis à une translation du support : $z_o = Z_o \sin \Omega^z t$ avec $Z_o = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ et $\Omega^z = 200 \text{ Hz}$

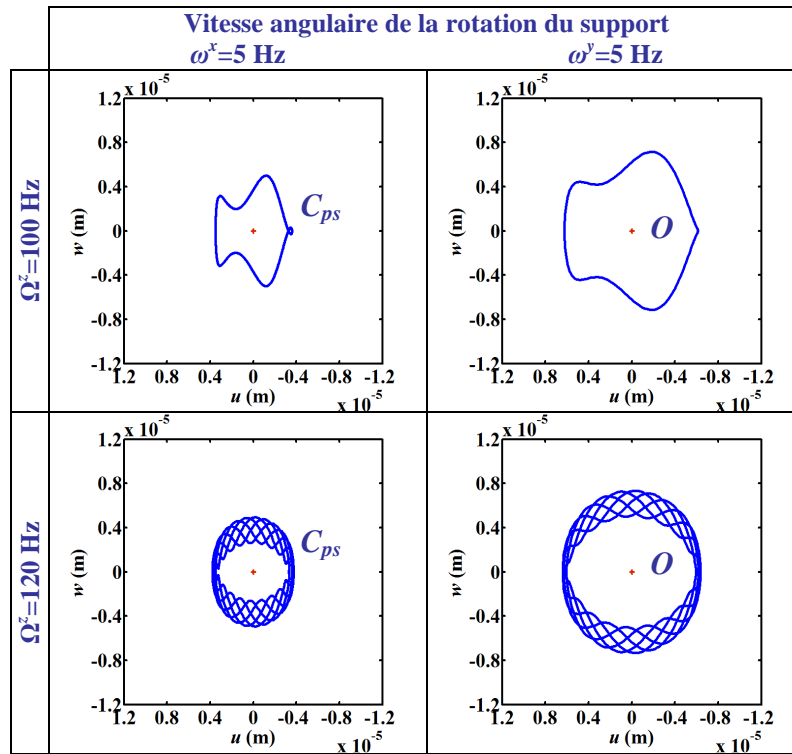


FIG. V.8 : Influence de la fréquence Ω^z de la translation du support : $z_0 = Z_0 \sin \Omega^z t$ avec $Z_0 = 1 \times 10^{-6}$ m. Orbites au milieu du rotor tournant à $\Omega = 1500$ tr/min et soumis à deux vitesses angulaires du support : $\omega^x = 5$ Hz ou $\omega^y = 5$ Hz

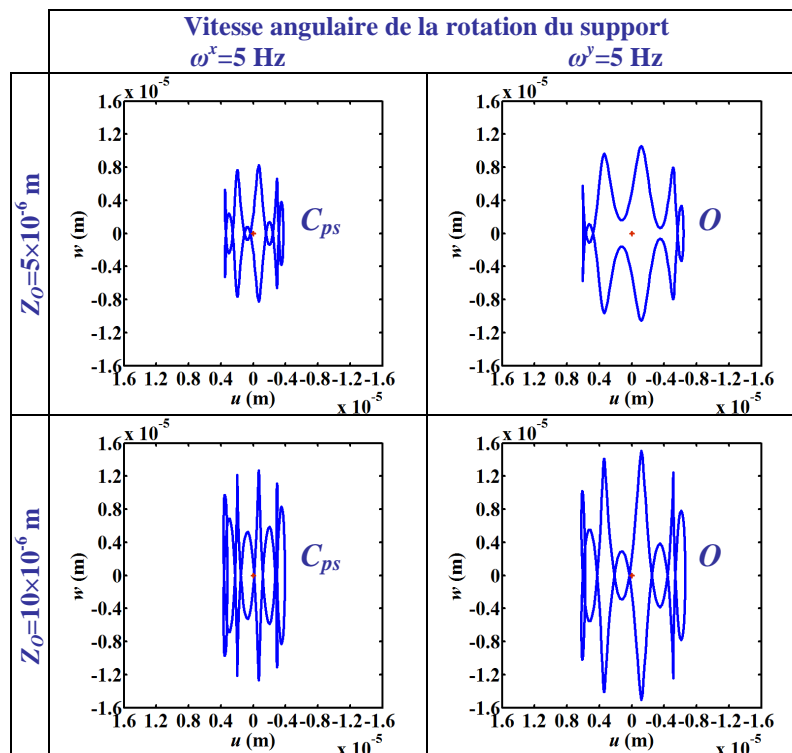


FIG. V.9 : Influence de l'amplitude Z_0 de la translation du support : $z_0 = Z_0 \sin \Omega^z t$ avec $\Omega^z = 200$ Hz. Orbites au milieu du rotor tournant à $\Omega = 1500$ tr/min et soumis à deux vitesses angulaires du support : $\omega^x = 5$ Hz ou $\omega^y = 5$ Hz

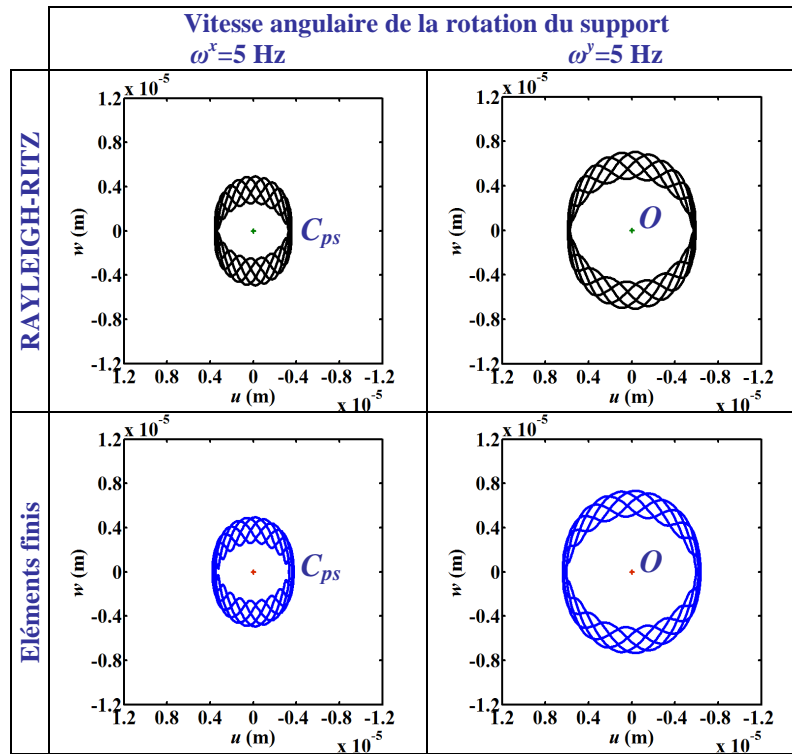


FIG. V.10 : Comparaison d'orbites obtenues par les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis au milieu du rotor tournant à $\Omega=1500$ tr/min et soumis à une translation du support : $z_0=Z_0\sin\Omega^z t$ avec $Z_0=1\times 10^{-6}$ m et $\Omega^z=120$ Hz, combinée à deux vitesses angulaires du support : $\omega^x=5$ Hz ou $\omega^y=5$ Hz

V.3 Rotor dissymétrique sur paliers rigides

V.3.1 Configuration et données

La description du rotor dissymétrique est similaire à celle dans le **Paragraphe V.2.1**. Seul le disque est modifié : il est dissymétrique et ses propriétés géométriques changent. La forme du disque présentée sur la figure **FIG. V.11** est définie en fonction de l'angle θ_d entre le méplat et l'axe $C^{init}x$ du repère R . Les données du rotor sont les mêmes que celles reportées dans le tableau **TAB. V.1**.

Le rotor est soumis aux mêmes excitations que celles indiquées dans le **Paragraphe V.2**. Les équations du mouvement (III.88) sont réécrites dans l'équation (V.9) pour le rotor dissymétrique soumis à la rotation ω^x du support, et dans l'équation (V.11) pour le rotor soumis à la rotation ω^y :

$$\begin{aligned}
 & \left([M_{d,a}] + [M_{d,a}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{d,a}^{s_2}] \sin 2\Omega t \right) \{ \ddot{\delta}_r \} + \left([C_{d,a}^{ai}] + [C_{d,a}^g] \Omega + [C_{d,a}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t \right. \\
 & + [C_{d,a}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t \left. \right) \{ \dot{\delta}_r \} + \left([K_a^e] + \left([K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2}}] + [K_{d,a,su}^{erg,\omega^{x^2}}] \right) \omega^{x^2} + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},c_2}] \omega^{x^2} \cos 2\Omega t \right. \\
 & + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{x^2},s_2}] \omega^{x^2} \sin 2\Omega t \left. \right) \{ \delta_r \} = \{ F_b^c \} \cos \Omega t + \{ F_b^s \} \sin \Omega t + \{ F_{b,su1}^c \} \cos \Omega t + \{ F_{b,su1}^s \} \sin \Omega t \\
 & + \{ F_{d,a,su1}^c \} \cos \Omega^z t + \{ F_{d,a,su1}^s \} \sin \Omega^z t + \{ F_{d,a,su3}^0 \} + \{ F_{d,a,su3}^c \} \cos 2\Omega t + \{ F_{d,a,su3}^s \} \sin 2\Omega t
 \end{aligned} \quad (V.9)$$

où :

$$\{ F_{d,a,su3}^c \} = 2 \{ V_{d,a,su}^{\psi,c_2} \} \Omega \omega^x \quad ; \quad \{ F_{d,a,su3}^s \} = 2 \{ V_{d,a,su}^{\theta,s_2} \} \Omega \omega^x \quad (V.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \left([M_{d,a}] + [M_{d,a}^{c_2}] \cos 2\Omega t + [M_{d,a}^{s_2}] \sin 2\Omega t \right) \{ \ddot{\delta}_r \} + \left([C_{d,a}^{ai}] + [C_{d,a}^g] \Omega + [C_{d,a}^{g,c_2}] \Omega \cos 2\Omega t \right. \\
 & + [C_{d,a}^{g,s_2}] \Omega \sin 2\Omega t + [C_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \omega^y \left. \right) \{ \dot{\delta}_r \} + \left([K_a^e] + [K_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^y}] \omega^{y^2} \right. \\
 & + \left([K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,c_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},c_2}] \omega^{y^2} \right) \cos 2\Omega t + \left([K_{d,a,su}^{er,\Omega\omega^y,s_2}] \Omega \omega^y + [K_{d,a,su}^{er,\omega^{y^2},s_2}] \omega^{y^2} \right) \sin 2\Omega t \left. \right) \{ \delta_r \} \\
 & = \{ F_b^c \} \cos \Omega t + \{ F_b^s \} \sin \Omega t + \{ F_{b,su2}^c \} \cos \Omega t + \{ F_{b,su2}^s \} \sin \Omega t + \{ F_{d,a,su2}^c \} \cos \Omega^z t + \{ F_{d,a,su2}^s \} \sin \Omega^z t
 \end{aligned} \quad (V.11)$$

L'arbre est discrétisé en 12 éléments finis identique de poutre de TIMOSHENKO. Le disque ainsi que les paliers courts rigides # 1 et # 2 sont localisés aux nœuds 5, 1 et 13 respectivement, voir la figure **FIG. V.1**. Ainsi les degrés de liberté des nœuds des paliers sont éliminés.

A cause de la dissymétrie, les équations différentielles linéaires du mouvement (V.9) et (V.11) contiennent des termes paramétriques périodiques dans le temps, de période $\tau_{ep} = \pi/\Omega$. Elles sont résolues numériquement par les méthodes d'intégration temporelle de RUNGE-KUTTA et de NEWMARK afin de prévoir le comportement dynamique en régime permanent. Pour les méthodes temporelles, il est nécessaire d'introduire de l'amortissement (qui peut être de type structurel) pour surmonter le régime transitoire lors du calcul des réponses dynamiques. L'amortissement proportionnel de RAYLEIGH $[C_{d,a}^{ai}] = \alpha^{ar} [M_{d,a}] + \beta^{ar} [K_a^e]$ des parties tournantes (disque et arbre) est alors pris en compte (voir **SPEARS et JENSEN [143]**) et ses coefficients correspondants estimés pour un facteur d'amortissement modal $\xi^{am} = 0,03$ sont donnés par $\alpha^{ar} = 12,43$ et $\beta^{ar} = 5,66 \times 10^{-5}$.

L'analyse dynamique est effectuée grâce à des cartes de stabilité, des orbites du rotor et des transformées de FOURIER rapides (FFTs).

De plus, les équations du mouvement du rotor dissymétrique embarqué montrent que les rotations du support ont une influence paramétrique sur ces équations, tandis que les translations du support ont seulement une influence sur le vecteur des forces extérieures. C'est pourquoi, dans ce qui suit, le comportement est complètement évalué en fonction de la rotation du support.

V.3.2 Cartes de stabilité

L'instabilité provenant de l'excitation paramétrique causée par la dissymétrie géométrique du rotor peut être reliée aux rotations du support, voir les équations (V.9) et (V.11). Pour une certaine vitesse angulaire du support, deux facteurs affectent les excitations paramétriques générées dans le rotor : la vitesse de rotation Ω du rotor et le moment d'inertie $I_{m_d}^{di}$. Ce dernier dépend de l'angle θ_d décrivant la dissymétrie géométrique du disque (figure **FIG. V.11**). L'analyse de stabilité du rotor couvre alors les deux paramètres Ω ainsi que $I_{m_d}^{di}$ et utilise $\tau_{ep} = \pi/\Omega$ comme période de l'excitation paramétrique intérieure du système en vue d'appliquer la théorie de FLOQUET. Les cartes de stabilité du rotor montrées sur les figures **FIG. V.12** et **FIG. V.13** sont établies pour l'instabilité principale (résonance primaire) avec $\Delta\theta_d = 5^\circ$ et $\Delta\Omega = 5$ tr/min. Les zones d'instabilité sont délimitées par des courbes de transition.

L'augmentation de la vitesse angulaire ω^x du support ne change quasiment pas la taille des zones d'instabilité et les décale légèrement vers les basses vitesses de rotation Ω (voir la figure **FIG. V.12**). Pour les valeurs considérées de l'angle θ_d , le rotor embarqué peut devenir instable pour $\Omega \in [2980; 3715$ tr/min] dans le cas où $\omega^x = 5$ Hz et pour $\Omega \in [2965; 3700$ tr/min] dans le cas où $\omega^x = 10$ Hz. De la même manière, l'augmentation de ω^y ne change pas la taille des zones d'instabilité mais cette fois, leurs limites sont plus

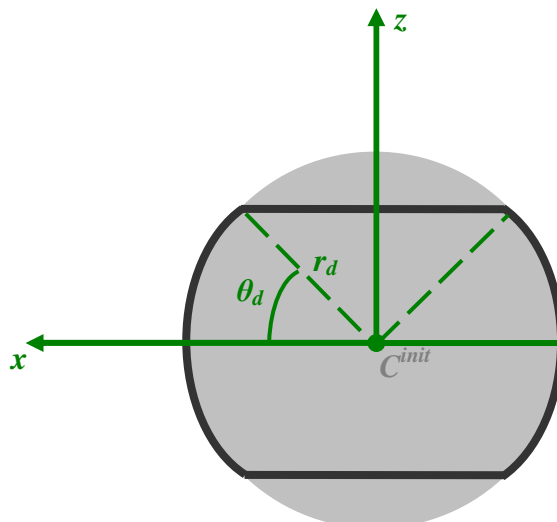


FIG. V.11 : Géométrie du disque dissymétrique

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

nettement décalées vers les basses vitesses de rotation Ω (voir la figure FIG. V.13). Pour les valeurs considérées de θ_d , le rotor embarqué peut être instable pour $\Omega \in [2690; 3420 \text{ tr/min}]$ dans le cas où $\omega^y = 5 \text{ Hz}$ et pour $\Omega \in [2390; 3120 \text{ tr/min}]$ dans le cas où $\omega^y = 10 \text{ Hz}$.

La carte de stabilité tracée sur la figure FIG. V.14(a) est prédite avec la méthode de RAYLEIGH-RITZ. La figure FIG. V.14(b) compare les frontières des régions d'instabilité primaire calculées par les approches de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis. Comme le montre cette figure, les frontières prévues par la méthode de RAYLEIGH-RITZ sont décalées de 4% à 7% vers les hautes vitesses de rotation du rotor par rapport à celles obtenues par la méthode des éléments finis et la région d'instabilité correspondante est légèrement plus large.

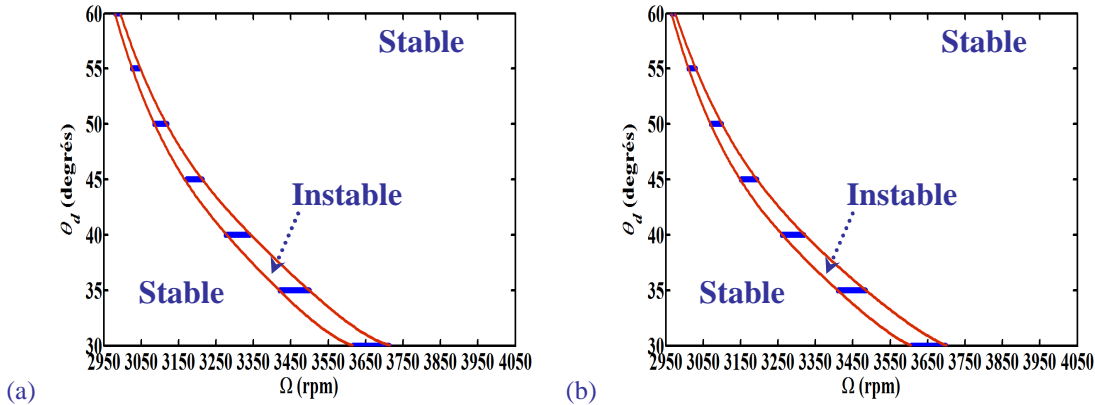


FIG. V.12 : Cartes de stabilité du rotor dues à deux vitesses angulaires de la rotation du support : (a) $\omega^x=5 \text{ Hz}$, (b) $\omega^x=10 \text{ Hz}$

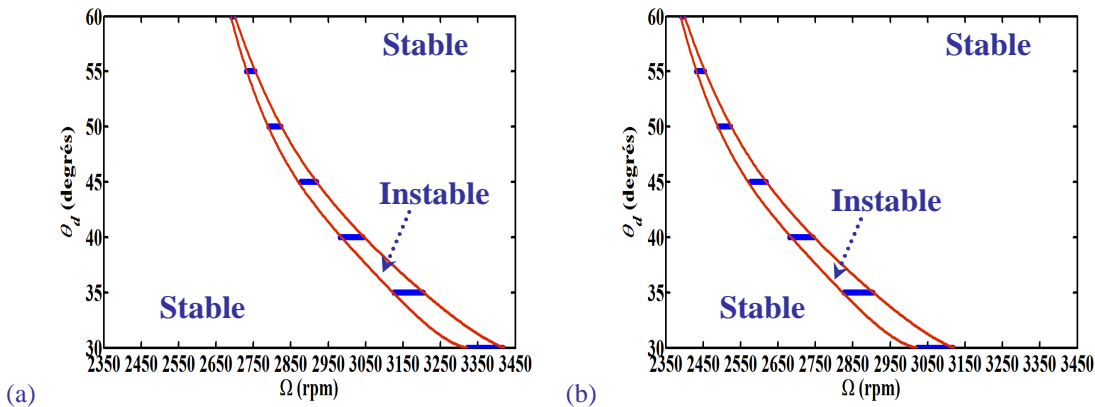


FIG. V.13 : Cartes de stabilité du rotor dues à deux vitesses angulaires de la rotation du support : (a) $\omega^y=5 \text{ Hz}$, (b) $\omega^y=10 \text{ Hz}$

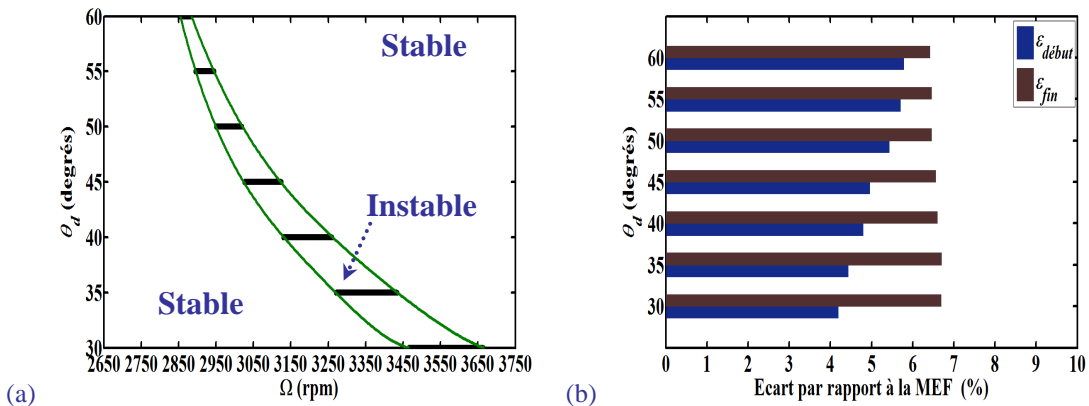


FIG. V.14 : (a) Carte de stabilité du rotor dues à une vitesse angulaire $\omega^y=5 \text{ Hz}$ du support en utilisant la méthode de RAYLEIGH-RITZ, (b) Ecart de débuts et de fins des zones d'instabilité

V.3.3 Réponses orbitales du rotor

V.3.3.1 Rotation pure ω^x (ou ω^y) du support

La figure FIG. V.15(a) représente l'orbite due au balourd au milieu du rotor (nœud 7) pour un angle de dissymétrie $\theta_d = 45^\circ$ du disque, $\Omega = 1500$ tr/min (=25 Hz) et un support fixe (c'est-à-dire $\omega^x = \omega^y = 0$). L'orbite prédite est circulaire mais légèrement plus petite que celle du rotor symétrique parce que la masse et les moments d'inertie du rotor sont réduits.

L'orbite prédite correspondant à la vitesse angulaire $\omega^y = 5$ Hz du support est aussi légèrement plus petite, voir la figure FIG. V.15(c). Inversement, l'orbite prévue correspondant à $\omega^x = 5$ Hz est beaucoup plus grande que celle du rotor symétrique en raison de forces extérieures élevées comme expliqué dans le paragraphe suivant, voir la figure FIG. V.15(b).

V.3.3.2 Combinaison de translation $z_0 = Z_0 \sin \Omega^z t$ et de rotation ω^x (ou ω^y) du support

Puisque les équations du mouvement du rotor dissymétrique sont linéaires avec des coefficients paramétriques périodiques (voir les équations (V.9) et (V.11)), la réponse stationnaire au balourd est superposée à la réponse stationnaire aux excitations du support. Donc les caractéristiques des orbites sont reliées aux deux excitations à la fois.

La figure FIG. V.16 présente les orbites et leurs FFTs au milieu du rotor dissymétrique (nœud 7) pour $\theta_d = 45^\circ$, $\Omega = 1500$ tr/min (=25 Hz) et des excitations combinées de rotation et de translation du support. Sur cette figure, la rotation du support et l'amplitude de la translation sinusoïdale du support sont maintenues constantes (ω^x ou $\omega^y = 5$ Hz et $Z_0 = 1 \times 10^{-6}$ m), tandis que la fréquence de cette dernière varie ($\Omega^z = 100$ Hz, 120 Hz et 200 Hz).

Lorsque le rotor est excité par la vitesse angulaire $\omega^x = 5$ Hz du support, les orbites stabilisées au milieu de l'arbre sont elliptiques et les amplitudes des déplacements sont globalement les mêmes que celles montrées dans le **Paragraphe V.3.3.1** (rotation pure du support) quelle que soit la valeur de la fréquence Ω^z de la translation du support. Les FFTs comportent une seule composante fréquentielle égale à 50 Hz = 2Ω en raison de la présence de ω^x dans les termes en $\cos 2\Omega t$ et $\sin 2\Omega t$ produits par la dissymétrie géométrique du rotor, qui sont dominants par rapport aux autres termes des forces extérieures, voir l'équation (V.9).

Lorsque le rotor est excité par la vitesse angulaire $\omega^y = 5$ Hz du support, la fréquence de la translation sinusoïdale du support a une influence limitée sur les amplitudes des orbites. Par ailleurs, les orbites stabilisées ont des formes plus complexes que celles obtenues pour le rotor symétrique (voir la figure FIG. V.8) puisqu'elles impliquent des composantes fréquentielles dues à l'excitation du balourd (25 Hz), à la translation sinusoïdale du support (100 Hz, 120 Hz et 200 Hz) et à des combinaisons de fréquences des deux excitations comme montré dans les FFTs de la figure FIG. V.16.

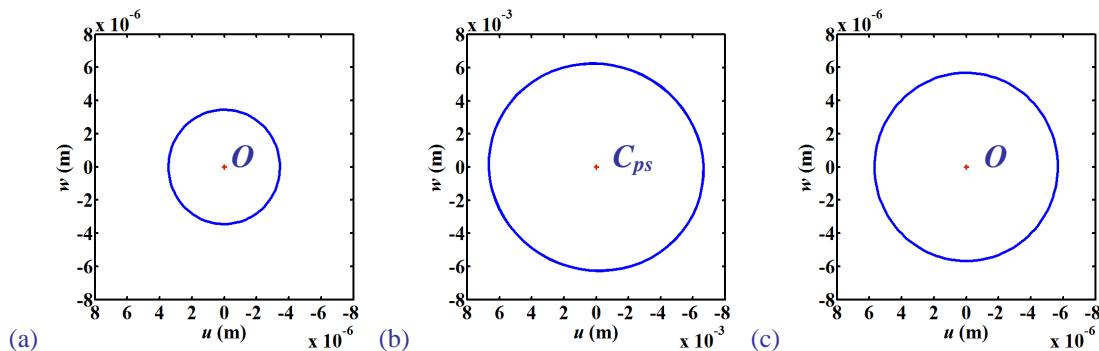


FIG. V.15 : Orbites du rotor dissymétrique tournant à $\Omega=1500$ tr/min et soumis au balourd et à trois valeurs de rotation du support : (a) $\omega^x=\omega^y=0$ (support fixe), (b) $\omega^x=5$ Hz, $\omega^y=0$, (c) $\omega^x=0$, $\omega^y=5$ Hz

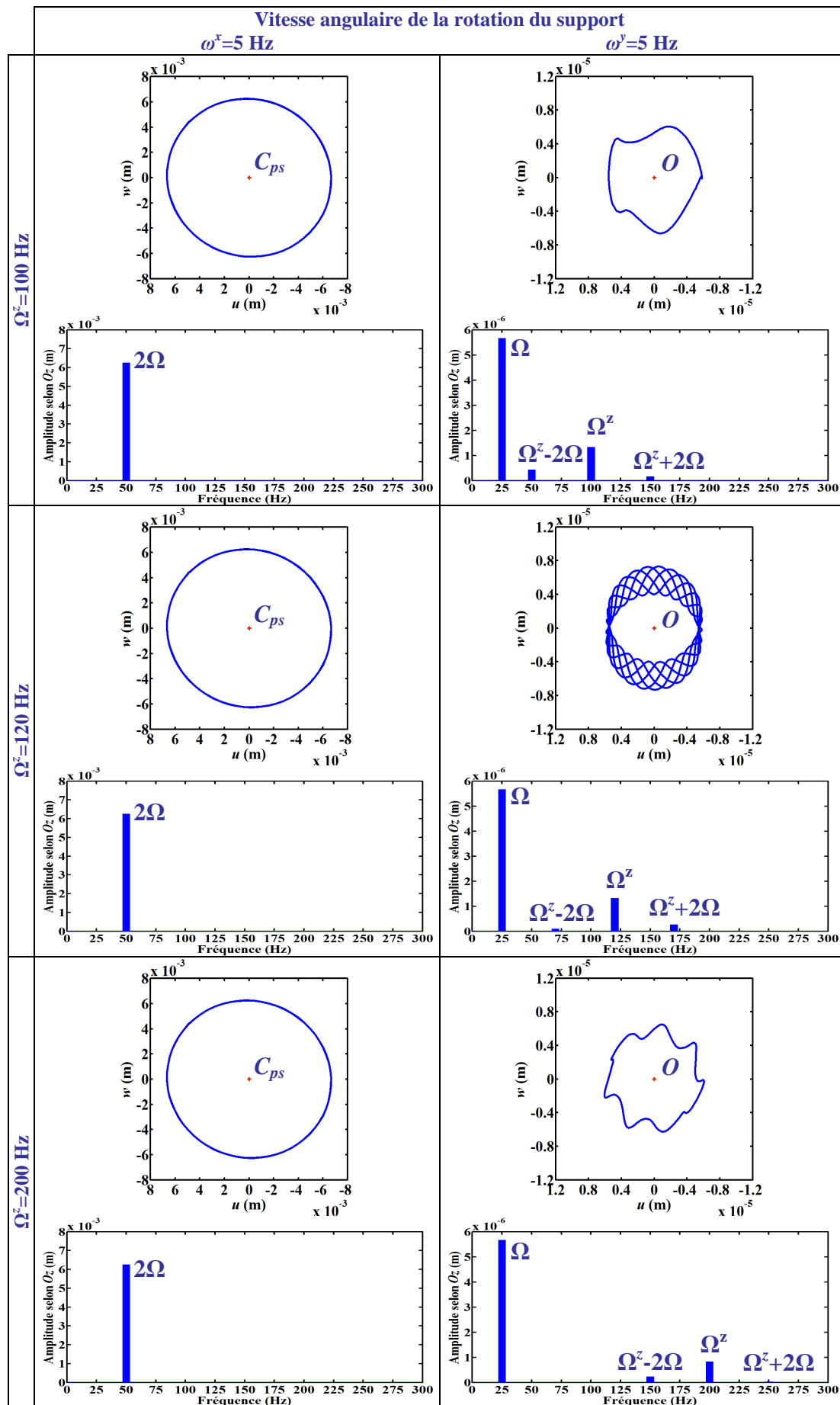


FIG. V.16 : Influence de la fréquence Ω^z de la translation du support : $z_0 = Z_0 \sin \Omega^z t$ avec $Z_0 = 1 \times 10^{-6}\text{ m}$. Orbits du rotor dissymétrique tournant à $\Omega = 1500\text{ tr/min}$ et soumis à deux vitesses angulaires du support : $\omega^x = 5\text{ Hz}$ ou $\omega^y = 5\text{ Hz}$

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

Les orbites illustrées sur la figure **FIG. V.17** et obtenues par les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis ont la même forme mais sont quantitativement différentes. Les écarts d'amplitude selon les axes Ox et Oz sont $\varepsilon_u = -36,74\%$ et $\varepsilon_w = -36,96\%$ pour ω^x ainsi que $\varepsilon_u = -5,26\%$ et $\varepsilon_w = 3,36\%$ pour ω^y . L'écart de coordonnée de la position statique est $\varepsilon_{ps} = -6,98\%$. Les écarts observés sont dus au fait que l'expansion de RAYLEIGH-RITZ est uniquement basée sur deux coordonnées généralisées, tandis que l'implémentation des éléments finis est construite à l'aide de 48 degrés de liberté, c'est-à-dire que le modèle éléments finis est plus flexible car il utilise plus de degrés de liberté que celui de RAYLEIGH-RITZ.

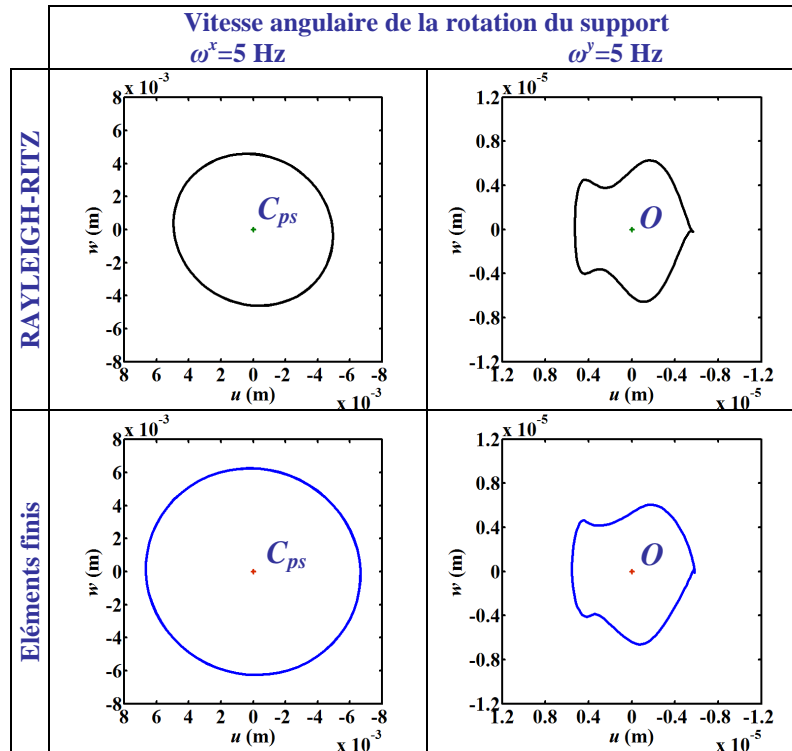


FIG. V.17 : Comparaison d'orbites obtenues par les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et des éléments finis au milieu du rotor dissymétrique tournant à $\Omega=1500$ tr/min et soumis à une translation du support : $z_0=Z_0\sin\Omega^z t$ avec $Z_0=1\times 10^{-6}$ m et $\Omega^z=100$ Hz, combinée à deux vitesses angulaires du support : $\omega^x=5$ Hz ou $\omega^y=5$ Hz

V.4 Rotor symétrique sur paliers hydrodynamiques

V.4.1 Description du rotor étudié

Le système rotor embarqué symétrique-palier court hydrodynamique est représenté sur la figure **FIG. V.18**. L'origine O du repère attaché au support R coïncide avec l'extrémité de l'arbre positionnée au centre du palier # 1.

L'arbre symétrique est modélisé avec huit éléments finis identiques de poutre de TIMOSHENKO, c'est-à-dire que le nombre total de degrés de liberté est $n_g = 36$. Le disque symétrique, sur lequel est placé le balourd, est localisé au nœud 5. Les paliers courts hydrodynamiques # 1 et # 2 sont localisés aux nœuds 1 et 9 respectivement, c'est-à-dire que les degrés de liberté non linéaires localisés correspondants sont 1-4 et 33-36. Les caractéristiques des matériaux et les propriétés géométriques du rotor et des paliers sont énumérées dans les tableaux **TAB. V.4** et **TAB. V.5**.

Le rotor est soumis à une excitation de type balourd tournant combinée à des mouvements de rotation sinusoïdale ou de translation sinusoïdale du support : la rotation autour de l'axe Ox est donnée par $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ en rad/s, tandis que la translation suivant l'axe Oz est exprimée par $z_o = Z_o \cos \Omega^z t$ en m. Ce rotor fonctionne à une vitesse de rotation constante $\Omega = 1200$ tr/min (=20 Hz=la fréquence du balourd) et ses quatre premières fréquences naturelles pour la vitesse de rotation considérée et un support fixe dans le cas de paliers linéarisés sont 33,6 Hz, 52,7 Hz, 524,8 Hz et 1573 Hz. Les coordonnées relatives de la position d'équilibre statique C_p^0 du centre géométrique de l'arbre dans les paliers à film d'huile sont données par $\{\delta_p^0\}/j_p = \langle -0,29, -0,88 \rangle^T$ ou de manière équivalente par $e_p^0/j_p = 0,93$. Les matrices d'amortissement et de raideur du modèle linéarisé de palier obtenues avec les données du tableau **TAB. V.5** sont exprimées comme suit :

$$[c_p] = \begin{bmatrix} 3,50 \times 10^3 & 1,08 \times 10^4 \\ 1,08 \times 10^4 & 7,57 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ N s/m} ; [k_p] = \begin{bmatrix} 1,30 \times 10^6 & 1,32 \times 10^6 \\ 6,30 \times 10^6 & 1,94 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ N/m} \quad (\text{V.12})$$

Les équations du mouvement du rotor (voir les équations (III.88)-(III.98)) montrent que les mouvements de rotation du support ont une influence paramétrique sur les matrices du système, tandis que les mouvements de translation du support ont une influence sur les forces extérieures uniquement. En raison de la complexité du mouvement du rotor, l'analyse dynamique complète est effectuée grâce à des cartes de stabilité, des orbites, des

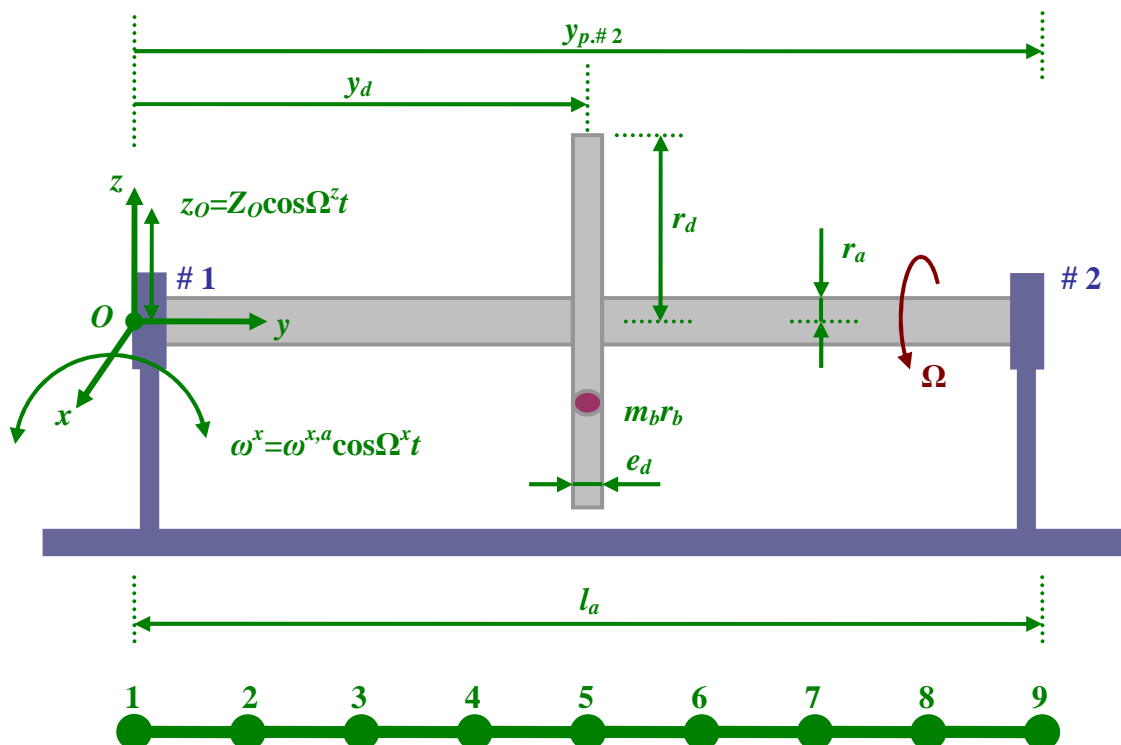


FIG. V.18 : Représentation schématique du rotor embarqué sur paliers hydrodynamiques

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

Densité des matériaux du disque et de l'arbre	$\rho_d = \rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$
Rayon, épaisseur et position du disque	$r_d = 0,15 \text{ m}$, $e_d = 0,03 \text{ m}$, $y_d = 0,2 \text{ m}$
Rayon et longueur de l'arbre	$r_a = 0,04 \text{ m}$, $l_a = 0,4 \text{ m}$
Module d'YOUNG et coefficient de POISSON de l'arbre	$E_a = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu_a = 0,3$
Coefficient de réduction de section de l'arbre	$\kappa_a^x = \kappa_a^z = 0,8864$ [29]
Phase du balourd	$\eta_b = 0^\circ$

TAB. V.4 : Caractéristiques principales du rotor embarqué

Rayon et longueur des paliers	$r_p = 0,04 \text{ m}$, $l_p = 0,01 \text{ m}$
Positions des paliers	$y_{p,\#1} = 0 \text{ m}$, $y_{p,\#2} = 0,4 \text{ m}$
Jeu radial des paliers	$j_p = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$
Viscosité dynamique du film d'huile	$\mu_p = 288 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$

TAB. V.5 : Caractéristiques principales des paliers courts hydrodynamiques

réponses temporelles, des transformées de FOURIER rapides (FFTs), des diagrammes de bifurcation et des sections de POINCARÉ.

V.4.2 Rôle des modèles de palier hydrodynamique dans l'analyse de stabilité

V.4.2.1 Modèle linéarisé

Dans ce paragraphe, les forces hydrodynamiques sont linéarisées à l'aide des matrices d'amortissement et de raideur, voir l'équation (V.12). Par conséquent, les équations du mouvement sont linéaires (voir l'équation (IV.4)) et la stabilité dynamique du rotor embarqué est examinée à l'aide de la théorie de FLOQUET. L'instabilité du rotor provient des excitations paramétriques dues à la rotation sinusoïdale du support, voir les équations (III.89)-(III.91). Pour une certaine vitesse de rotation Ω du rotor, deux facteurs ont un effet sur les excitations paramétriques engendrées dans le rotor symétrique : l'amplitude $\omega^{x,a}$ du support et sa fréquence Ω^x . L'analyse de stabilité porte donc sur ces deux paramètres et utilise $\tau_{ep} = \pi/\Omega^x$ comme la période de l'excitation paramétrique intérieure du système.

Les figures FIG. V.19(a) et FIG. V.19(b) comparent les cartes de stabilité obtenues dans le cas des paliers courts rigides (pour lesquels les quatre premières fréquences naturelles du rotor à $\Omega = 1200 \text{ tr/min}$ sont 552,8 Hz, 553,1 Hz, 1608 Hz et 1642,7 Hz) et des paliers courts hydrodynamiques respectivement. La fréquence de la rotation du support est contenue dans la zone d'intérêt $\Omega^x \in [0; 2000 \text{ Hz}]$ et les calculs sont effectués avec $\Delta\Omega^x = 1 \text{ Hz}$ et $\Delta(\omega^{x,a}/\Omega^x) = 0,05 \text{ rad}$. On remarque que la taille des zones d'instabilité augmente pour des valeurs croissantes de $\omega^{x,a}/\Omega^x$. Par exemple, dans le cas où $\omega^{x,a}/\Omega^x = 0,5 \text{ rad}$, le rotor embarqué monté sur des paliers rigides peut être instable pour $\Omega^x \in [508; 536 \text{ Hz}]$ et $\Omega^x \in [1507; 2000 \text{ Hz}]$ (figure FIG. V.19(a)), tandis que le rotor monté sur des paliers flexibles peut être instable pour $\Omega^x \in [370; 2000 \text{ Hz}]$ (figure FIG. V.19(b)). C'est-à-dire que la région d'instabilité due aux paliers hydrodynamiques linéarisés est plus grande que celle due aux paliers rigides à cause de la présence de l'amortissement et de la raideur dans les paliers fluides.

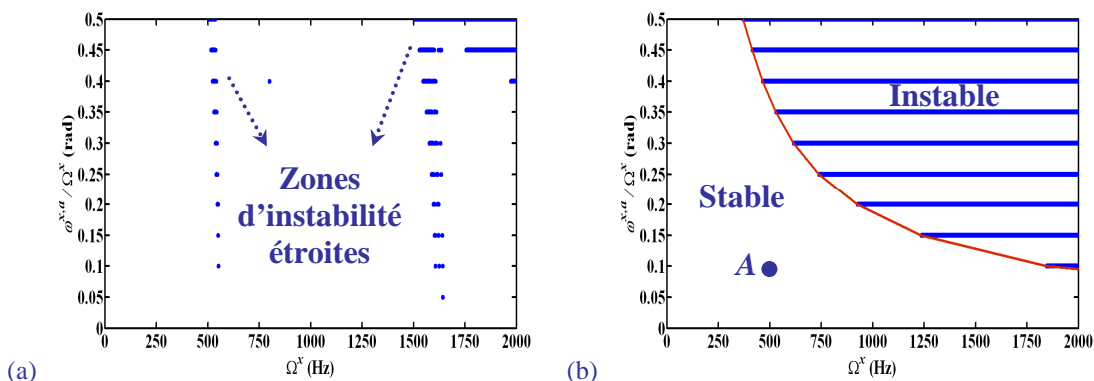


FIG. V.19 : Cartes de stabilité du rotor tournant à $\Omega=1200 \text{ tr/min}$, soumis à des rotations sinusoïdales du support et monté sur : (a) paliers rigides, (b) paliers hydrodynamiques

V.4.2.2 Modèle non linéaire

Conformément à l'analyse de stabilité dans le cas de paliers hydrodynamiques linéarisés, n'importe quel point de fonctionnement en dessous de la courbe de transition entre les zones stable et instable est considéré comme stable. C'est-à-dire que l'analyse dynamique transitoire des équations linéaires du mouvement du rotor (voir l'équation (IV.4)) sans des forces extérieures sauf le poids du rotor doit conduire à la position d'équilibre statique C_p^0 du centre de l'arbre dans les paliers pour n'importe quelles conditions initiales.

Contrairement au cas précédent, en raison des paliers non linéaires, les conditions initiales choisies pour l'analyse transitoire des équations non linéaires du mouvement (III.88) avec seulement le poids du rotor comme forces extérieures peuvent conduire à une réponse instable au lieu de la position statique. Ce phénomène est une forme d'instabilité survenant dans les paliers hydrodynamiques et appelé « self-excited vibrations », voir **KHONSARI et CHANG [93]**.

La figure **FIG. V.20** présente le déplacement radial dynamique relatif au palier # 2 (c'est-à-dire le nœud 9) en présence d'un modèle non linéaire de palier hydrodynamique et d'une rotation sinusoïdale du support de fréquence $\Omega^x = 500$ Hz. Le déplacement dynamique dans le domaine temporel correspondant au point A (figure **FIG. V.19(b)**) avec les conditions initiales $\{\delta_p^0\}/2j_p$ (voir la figure **FIG. V.20(a)**) converge progressivement vers un point stable correspondant à la position statique C_p^0 , mais devient instable avec les conditions initiales $-\{\delta_p^0\}/2j_p$ (voir la figure **FIG. V.20(b)**). Dans le second cas de conditions initiales, le phénomène « self-excited vibrations » apparaît. De plus, un contact entre le rotor et le coussinet du palier survient à l'instant $t = 0,012$ s et le calcul dynamique transitoire est arrêté.

V.4.3 Comparaisons de modèles linéaire et non linéaire de palier hydrodynamique

V.4.3.1 Influence du balourd

Toutes les orbites présentées par la suite sont adimensionnées par rapport au jeu radial j_p des paliers et sont ainsi tracées à l'intérieur du cercle unité (courbes rouges).

Dans ce paragraphe, la simulation dynamique est effectuée afin de présenter une comparaison entre les orbites du rotor obtenues avec des modèles linéarisé et non linéaire de palier hydrodynamique et dues à trois valeurs différentes de balourd. Puisque les paliers sont identiques et que le disque est positionné au milieu de l'arbre (c'est-à-dire le nœud 5), les orbites aux deux paliers (nœuds 1 et 9) sont identiques dans le cas d'un support fixe. Ces orbites illustrées sur la figure **FIG. V.21** montrent le mouvement transitoire (calculé par le schéma de NEWMARK) du centre géométrique de l'arbre dans les paliers à partir de la position statique C_p^0 (courbes vertes) jusqu'à la solution harmonique stationnaire (courbes bleues) de période τ_r égale à l'inverse de la fréquence Ω du balourd. Les orbites non linéaires périodiques tracées sur la figure **FIG. V.21** sont, quant à elles, obtenues par la méthode de shooting. Comme prévu, elles coïncident parfaitement avec le mouvement périodique stationnaire obtenu par l'intégration temporelle transitoire et valident ainsi l'implémentation de shooting.

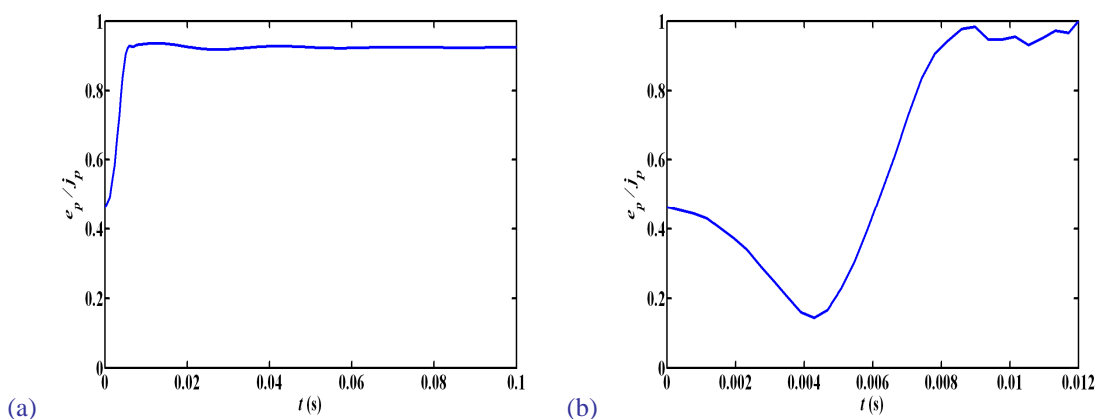


FIG. V.20 : Réponses temporelles non linéaires relatives du rotor au palier # 2 correspondant au point A en figure FIG. V.19 avec deux conditions initiales différentes

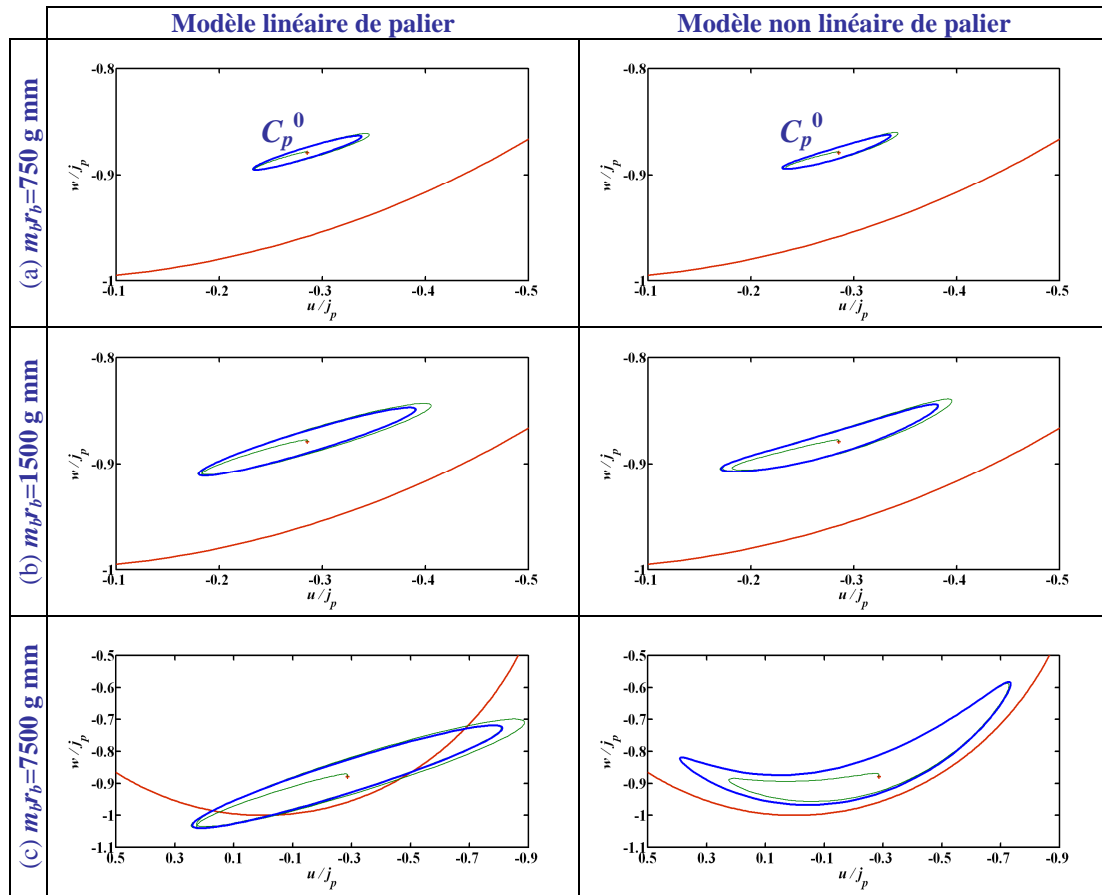


FIG. V.21 : Comparaison d'orbites linéaires et non linéaires du rotor aux deux paliers pour trois valeurs différentes de balourd : $m_b r_b =$ (a) 750 g mm, (b) 1500 g mm, (c) 7500 g mm

Pour un balourd faible ($m_b r_b = 750$ g mm), les orbites linéaire et non linéaire du rotor ont des évolutions très similaires, voir la figure FIG. V.21(a). Par contre, plus le balourd augmente, plus le modèle linéaire de palier est proche de sa limite de validité. Selon la figure FIG. V.21(b), le balourd choisi ($m_b r_b = 1500$ g mm) correspond à la limite de validité du modèle linéaire et est ainsi utilisé dans les paragraphes suivants. Pour un balourd plus important ($m_b r_b = 7500$ g mm), le déplacement dynamique du rotor devient beaucoup plus grand et ne reste plus au voisinage de la position statique et les orbites linéaire et non linéaire montrées sur la figure FIG. V.21(c) sont alors très différentes. En conséquence, l'hypothèse de coefficients constants d'amortissement et de raideur des paliers hydrodynamiques n'est plus validée et le modèle linéarisé de palier donne des résultats incorrects.

La figure FIG. V.22 compare les méthodes de shooting et de la balance harmonique à travers l'écart relatif moyen de déplacement radial du rotor et le temps de calcul relatif, dont les évolutions sont présentées en fonction du nombre d'harmoniques n_h retenues dans la méthode de la balance harmonique. Les résultats de la méthode de shooting servent de référence. Comme prévu, la méthode de la balance harmonique fournit de bons résultats : les écarts de déplacement sont très petits (moins de 0,05%) lorsque le nombre d'harmoniques n_h est supérieur à 4 et un gain en temps de calcul est important (environ 85%).

V.4.3.2 Influence de la fréquence du mouvement du support

Les figures FIG. V.23 et FIG. V.24 montrent une comparaison entre des orbites linéaires et non linéaires (obtenues par l'intégration temporelle transitoire de NEWMARK avec les conditions initiales $\{\delta_p^0\}/j_p$ et par l'algorithme de shooting) du rotor au palier # 2 (nœud 9) en présence de l'excitation due au balourd ($m_b r_b = 1500$ g mm) et des mouvements de rotation sinusoïdale ou de translation sinusoïdale du support. Sur la figure FIG. V.23, l'amplitude de la rotation du support est maintenue constante ($\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s), tandis que sa fréquence varie ($\Omega^x = 80$ Hz, 120 Hz et 200 Hz). Sur la figure FIG. V.24, l'amplitude de la translation du

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

support est maintenue constante ($Z_o = 1 \times 10^{-5}$ m), tandis que sa fréquence varie ($\Omega^z = 80$ Hz, 120 Hz et 200 Hz).

Contrairement au **Paragraphe V.4.3.1**, en raison des accélérations normale et tangentielle de la rotation sinusoïdale du support, les orbites au niveau des paliers # 1 et # 2 ne sont plus identiques. On se focalise sur le palier # 2 qui est le plus affecté par la rotation du support. Puisque les excitations dues au balourd et aux mouvements du support sont sinusoïdales et commensurables, l'excitation extérieure du rotor étudié est harmonique de période τ_{ex} égale à l'inverse du plus grand commun diviseur pour la fréquence Ω du balourd et la fréquence Ω^x ou Ω^z du mouvement du support.

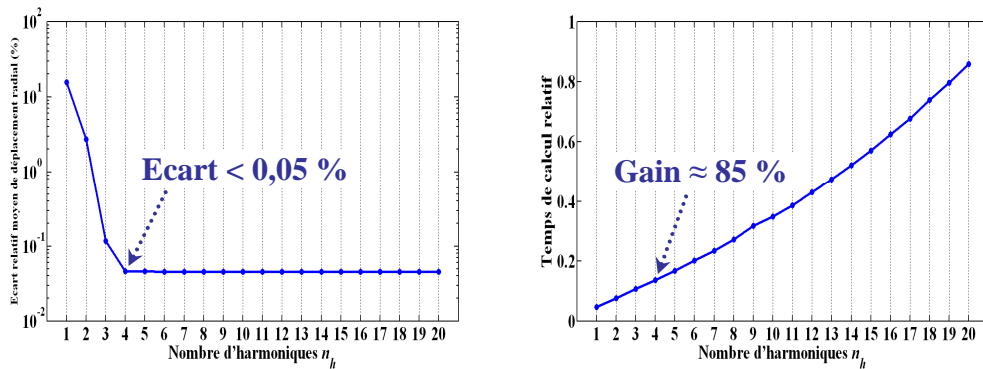


FIG. V.22 : Performance de la méthode de la balance harmonique par rapport à la méthode de shooting pour le calcul des réponses non linéaires du rotor au balourd $m_b r_b = 1500$ g mm

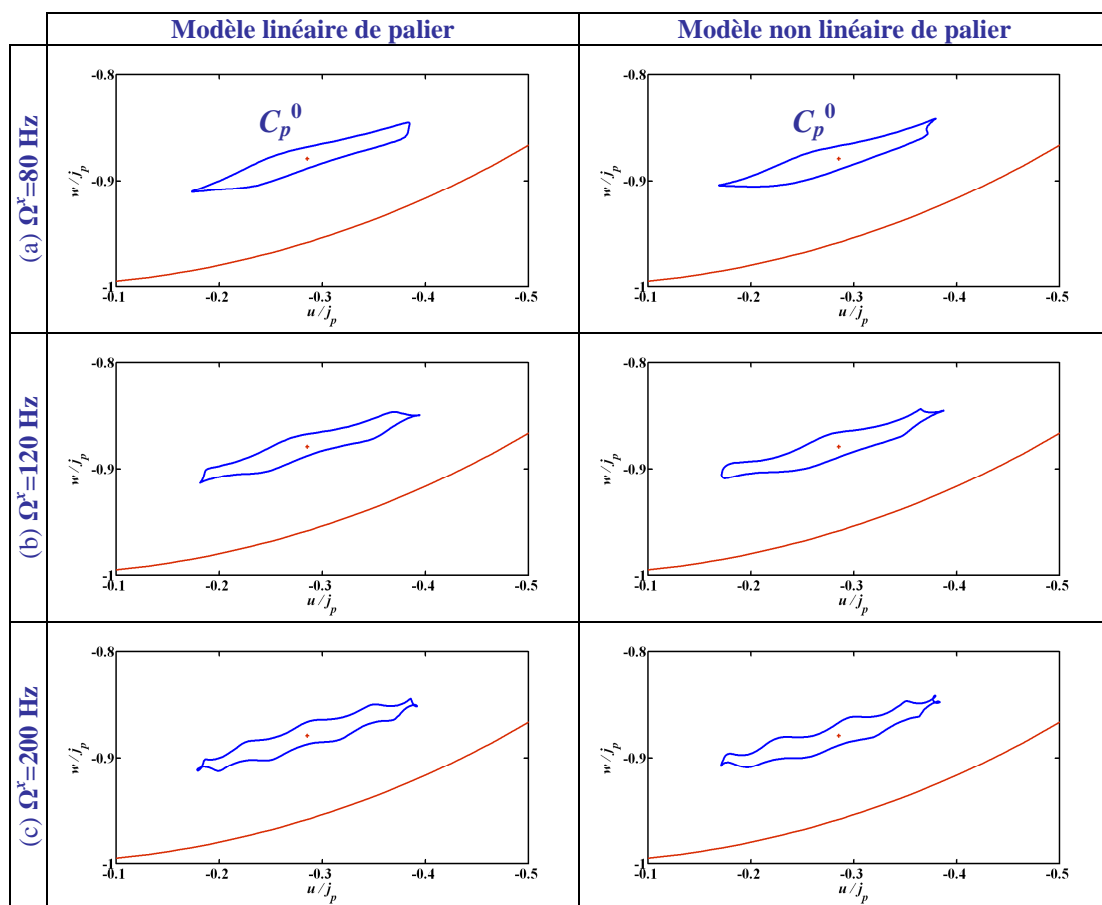


FIG. V.23 : Comparaison d'orbites linéaires et non linéaires du rotor au palier # 2 pour trois fréquences différentes de rotations sinusoïdales du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x =$ (a) 80 Hz, (b) 120 Hz, (c) 200 Hz

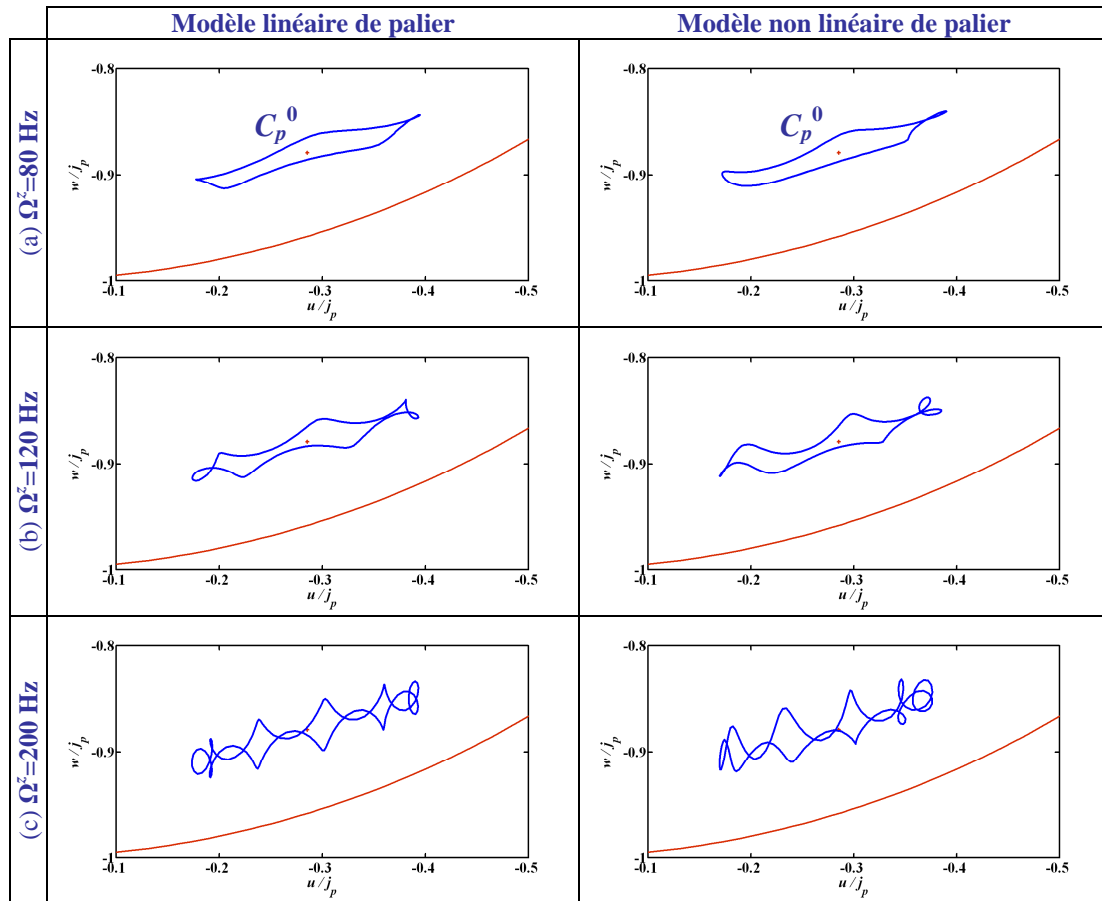


FIG. V.24 : Comparaison d'orbites linéaires et non linéaires du rotor au palier # 2 pour trois fréquences différentes de translations sinusoidales du support : $z_o = Z_o \cos \Omega^z t$ avec $Z_o = 1 \times 10^{-5}$ m et $\Omega^z =$ (a) 80 Hz, (b) 120 Hz, (c) 200 Hz

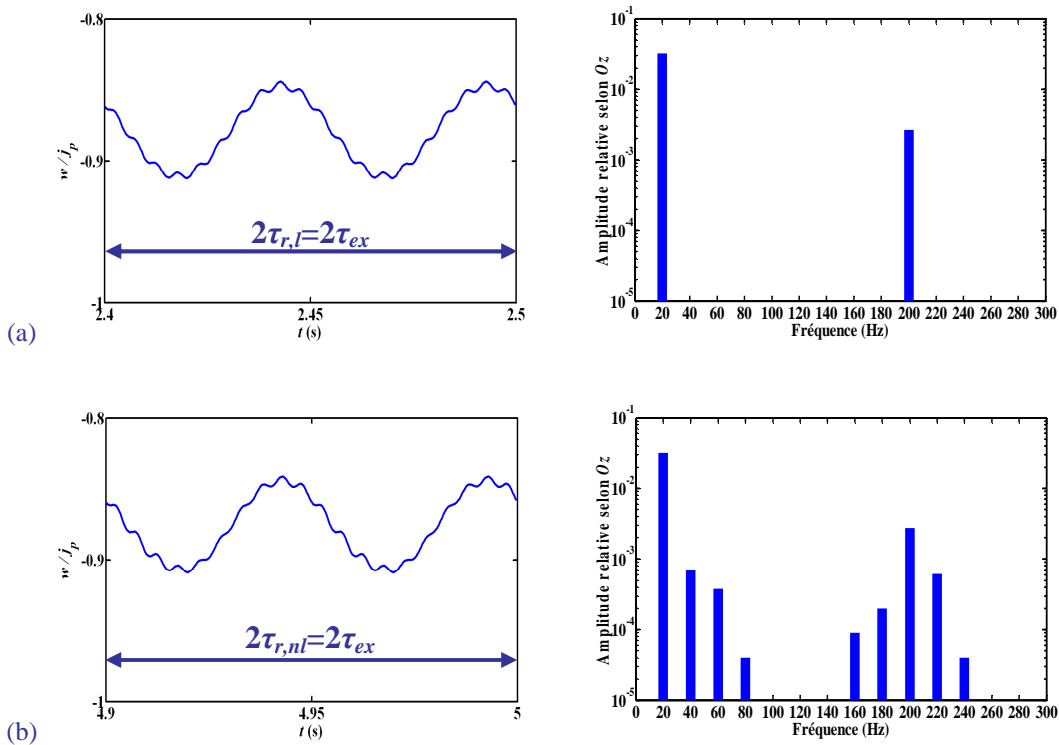


FIG. V.25 : Réponses (a) linéaire et (b) non linéaire du rotor et leurs FFTs au palier # 2 dans le cas d'une rotation sinusoidale du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x = 200$ Hz

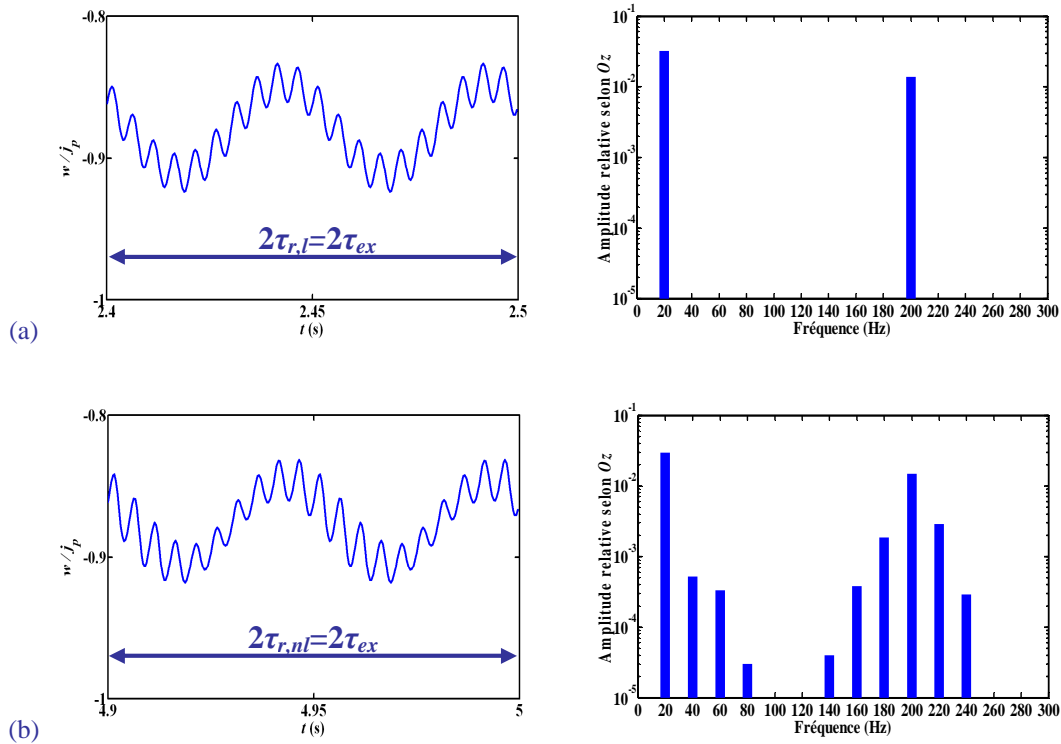


FIG. V.26 : Réponses (a) linéaire et (b) non linéaire du rotor et leurs FFTs au palier # 2 dans le cas d'une translation sinusoïdale du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^z t$ avec $Z_0 = 1 \times 10^{-5}$ m et $\Omega^z = 200$ Hz

Par exemple, une période de la première excitation extérieure du rotor embarqué correspond à une seule période de l'excitation du balourd ($\Omega = 20$ Hz) et à quatre périodes du mouvement du support pour Ω^x ou $\Omega^z = 80$ Hz. En outre, les orbites linéaires et non linéaires du rotor en figures FIG. V.23 et FIG. V.24 sont harmoniques de périodes $\tau_{r,l}$ et $\tau_{r,nl}$ égales à τ_{ex} . Comme prévu lorsque l'amplitude des mouvements du support est petite, la forme des orbites linéaires et non linéaires en figures FIG. V.23 et FIG. V.24 change beaucoup avec la fréquence et devient plus compliquée, tandis que leurs amplitudes sont légèrement modifiées par rapport aux orbites vues sur la figure FIG. V.21(b) correspondant au support fixe. Enfin, les orbites linéaires et non linéaires sont assez similaires, c'est-à-dire que le mouvement dynamique du rotor reste proche de la position d'équilibre statique C_p^0 et le modèle linéaire de palier hydrodynamique peut encore être considéré comme acceptable.

Les réponses temporelles linéaires et non linéaires relatives dans la direction Oz du rotor au palier # 2 dues à l'effet de balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support sont montrées sur les figures FIG. V.25 et FIG. V.26. Elles confirment les résultats observés sur les figures FIG. V.23(c) et FIG. V.24(c), c'est-à-dire que ces réponses présentent des évolutions similaires et leurs périodes $\tau_{r,l}$ et $\tau_{r,nl}$ sont égales à la période τ_{ex} de l'excitation extérieure du rotor. Par contre, les FFTs de la réponse linéaire (voir les figures FIG. V.25(a) et FIG. V.26(a)) comportent deux composantes fréquentielles dues au balourd (20 Hz) et aux mouvements du support (200 Hz), tandis que les FFTs de la réponse non linéaire (voir les figures FIG. V.25(b) et FIG. V.26(b)) comportent des composantes fréquentielles additionnelles (sur-harmoniques). Les pics de ces fréquences additionnelles sont relativement petits par rapport à ceux de 20 Hz et de 200 Hz, ce qui valide l'hypothèse de petits déplacements du rotor au voisinage de la position statique C_p^0 .

Les figures FIG. V.27 et FIG. V.28 montrent des comparaisons entre les méthodes de shooting et de la balance harmonique lorsque le support est excité par des mouvements de rotation et de translation d'amplitudes faibles ($\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s et $Z_0 = 1 \times 10^{-5}$ m) et de fréquences (Ω^x ou $\Omega^z = 80$ Hz et 200 Hz). Comme annoncé précédemment, les résultats de la méthode de shooting servent de référence. La méthode de la balance harmonique prouve son efficacité pour les excitations du support de faibles amplitudes car elle présente des petits écarts de déplacement (moins de 0,2% (figures FIG. V.27(a) et FIG. V.28(a)) et 2% (figures FIG. V.27(b) et FIG. V.28(b)) pour des nombres d'harmoniques n_h supérieurs à 9 et 12 respectivement) et permet un gain en temps de calcul correspondant à environ 40%-65%.

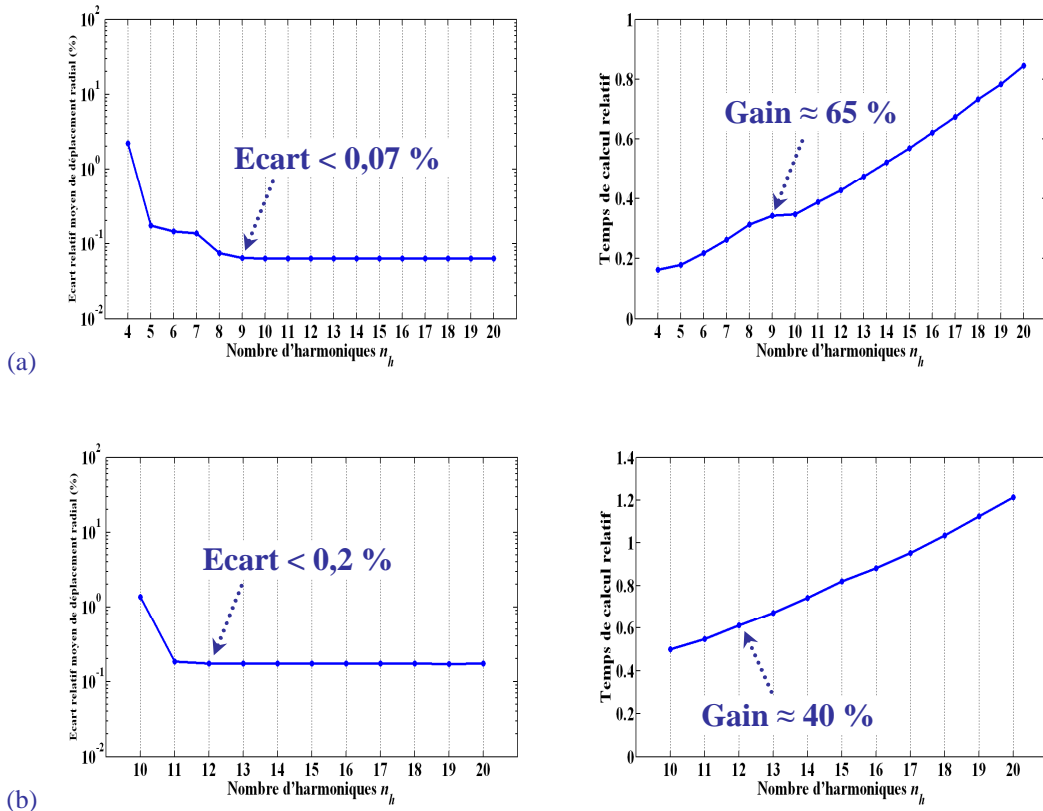


FIG. V.27 : Performance de la méthode de la balance harmonique par rapport à la méthode de shooting pour le calcul des réponses non linéaires du rotor au palier # 2 en présence de deux fréquences différentes de rotations sinusoidales du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x =$ (a) 80 Hz, (b) 200 Hz

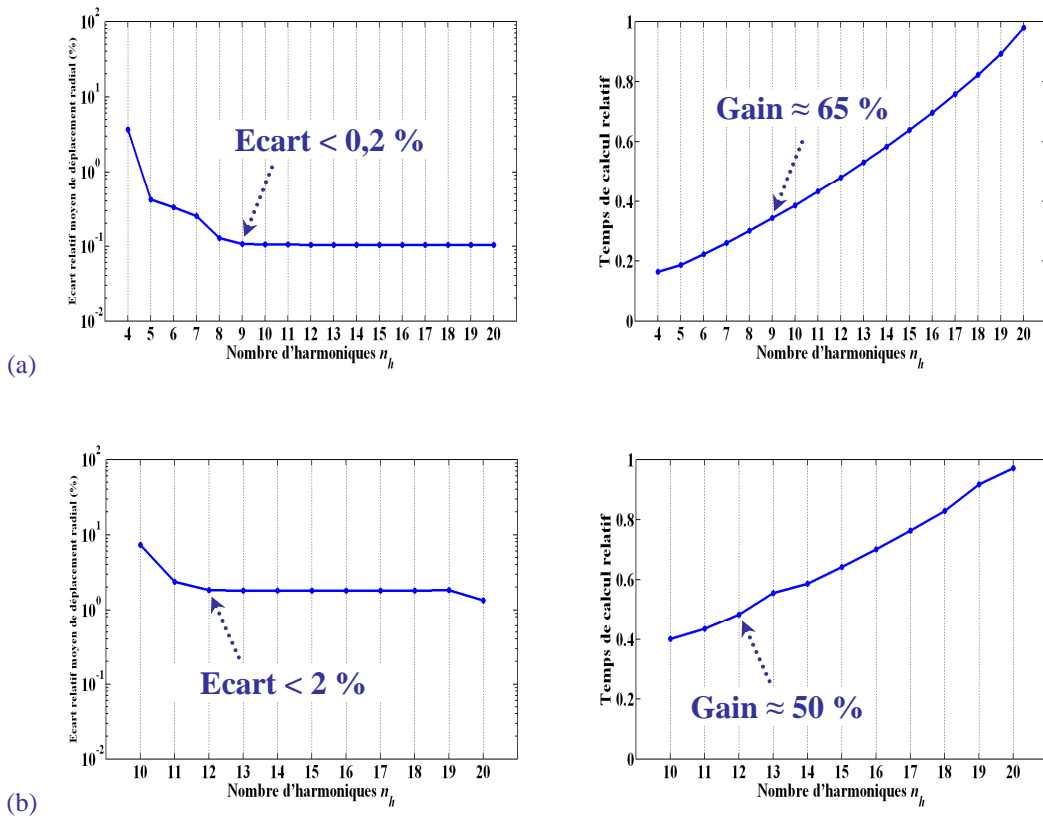


FIG. V.28 : Performance de la méthode de la balance harmonique par rapport à la méthode de shooting pour le calcul des réponses non linéaires du rotor au palier # 2 en présence de deux fréquences différentes de translations sinusoidales du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^z t$ avec $Z_0 = 1 \times 10^{-5}$ m et $\Omega^z =$ (a) 80 Hz, (b) 200 Hz

V.4.3.3 Influence de l'amplitude du mouvement du support

Les figures **FIG. V.29** et **FIG. V.30** permettent une comparaison entre des orbites linéaires et non linéaires (obtenues par le schéma transitoire de NEWMARK avec les conditions initiales $\{\delta_p^0\}/j_p$ et par l'algorithme de shooting) du rotor au palier # 2 localisé au nœud 9 pour l'excitation du balourd ($m_b r_b = 1500 \text{ g mm}$) et les mouvements de rotation sinusoïdale ou de translation sinusoïdale du support. Sur la figure **FIG. V.29**, la fréquence de la rotation du support est maintenue constante ($\Omega^x = 80 \text{ Hz}$), tandis que son amplitude varie ($\omega^{x,a} = 8 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ et $12 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$). Sur la figure **FIG. V.30**, la fréquence de la translation du support est maintenue constante ($\Omega^z = 80 \text{ Hz}$), tandis que son amplitude varie ($Z_o = 3 \times 10^{-5} \text{ m}$ et $5 \times 10^{-5} \text{ m}$).

Comme expliqué précédemment, les excitations dues au balourd et aux mouvements du support sont sinusoïdales et commensurables. Ainsi l'excitation extérieure du rotor est harmonique de période τ_{ex} égale à l'inverse du plus grand commun diviseur de la fréquence Ω du balourd et de la fréquence Ω^x ou Ω^z du mouvement du support. Dans le cas où $\omega^{x,a} = 8 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ et $Z_o = 3 \times 10^{-5} \text{ m}$ (voir les figures **FIG. V.29(a)** et **FIG. V.30(a)**), les orbites linéaires et non linéaires sont harmoniques de périodes $\tau_{r,l}$ et $\tau_{r,nl}$ égales à la période τ_{ex} mais elles ne sont pas similaires. Cela implique que l'hypothèse de faibles déplacements du rotor au voisinage de la position d'équilibre statique C_p^0 n'est plus vérifiée et que le domaine de validité du modèle linéarisé de palier est plus affecté par l'amplitude que par la fréquence du mouvement du support. Pour des amplitudes plus larges des mouvements du support $\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ et $Z_o = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$, le modèle non linéaire de palier hydrodynamique présente une orbite très complexe avec un changement de régime dynamique, c'est-à-dire qu'il y a apparition d'une bifurcation qui correspond à un doublement de période de l'orbite avec $\tau_{r,nl} = 2\tau_{ex}$ (voir les figures **FIG. V.29(b)** et **FIG. V.30(b)**). Il peut être noté que ce doublement de période de l'orbite est également obtenu lorsque l'algorithme d'intégration temporelle transitoire est utilisé comme procédure de vérification. Enfin, comme prévu, le modèle linéaire de palier n'est pas capable de reproduire ce doublement de période, c'est-à-dire que le mouvement linéaire du rotor reste $1\tau_{ex}$ -périodique.

Les figures **FIG. V.31** et **FIG. V.32** illustrent les réponses temporelles linéaires et non linéaires adimensionnées suivant l'axe Oz du centre géométrique de l'arbre dans le palier # 2 pour l'effet de balourd et les excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support. Elles vérifient les résultats observés sur les figures **FIG. V.29(b)** et **FIG. V.30(b)**, c'est-à-dire que la réponse non linéaire est $2\tau_{ex}$ -périodique parce que sa période $\tau_{r,nl}$ est deux fois plus grande que celle $\tau_{r,l}$ de la réponse linéaire. En outre, les FFTs de la réponse linéaire (figures **FIG. V.31(a)** et **FIG. V.32(a)**) montrent deux composantes fréquentielles seulement, dues au balourd (20 Hz) et aux mouvements du support (80 Hz), tandis que les FFTs de la réponse non linéaire (figures **FIG. V.31(b)** et **FIG. V.32(b)**) mettent en évidence beaucoup plus de composantes fréquentielles et contiennent

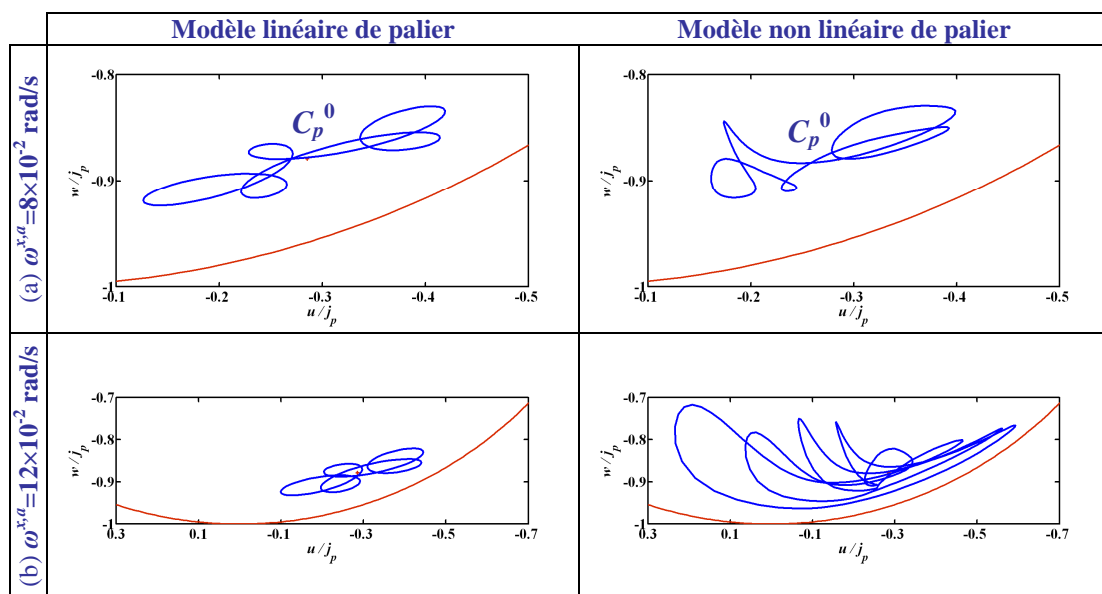


FIG. V.29 : Comparaison d'orbites linéaires et non linéaires du rotor au palier # 2 pour deux amplitudes différentes de rotations sinusoïdales du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\Omega^x = 80 \text{ Hz}$ et $\omega^{x,a} =$ (a) $8 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$, (b) $12 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$

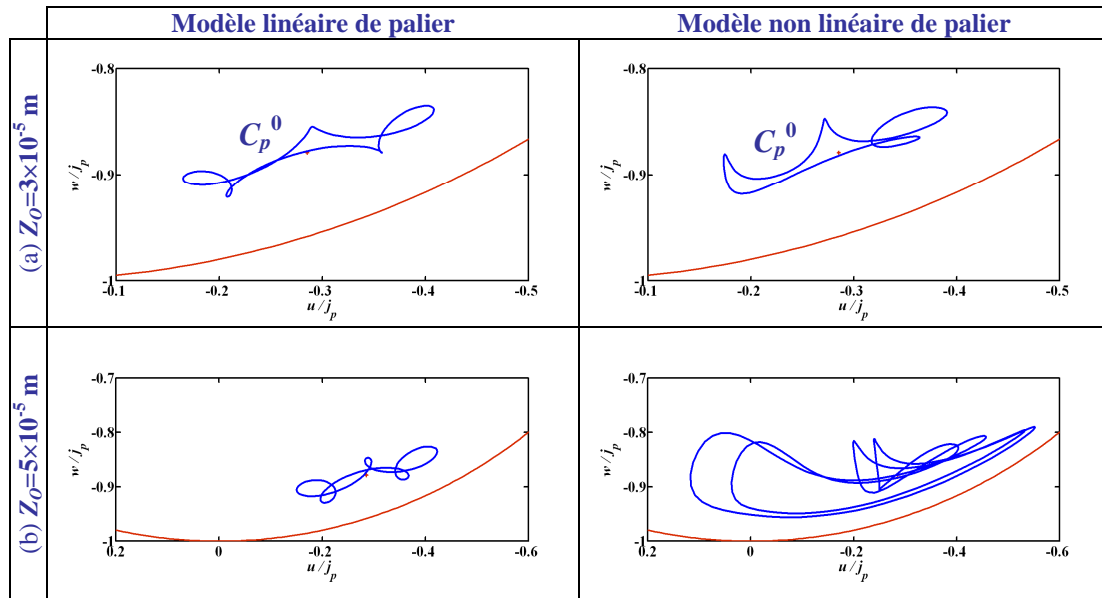


FIG. V.30 : Comparaison d'orbites linéaires et non linéaires du rotor au palier # 2 pour deux amplitudes différentes de translations sinusoïdales du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^x t$ avec $\Omega^x = 80$ Hz et $Z_0 =$ (a) 3×10^{-5} m, (b) 5×10^{-5} m

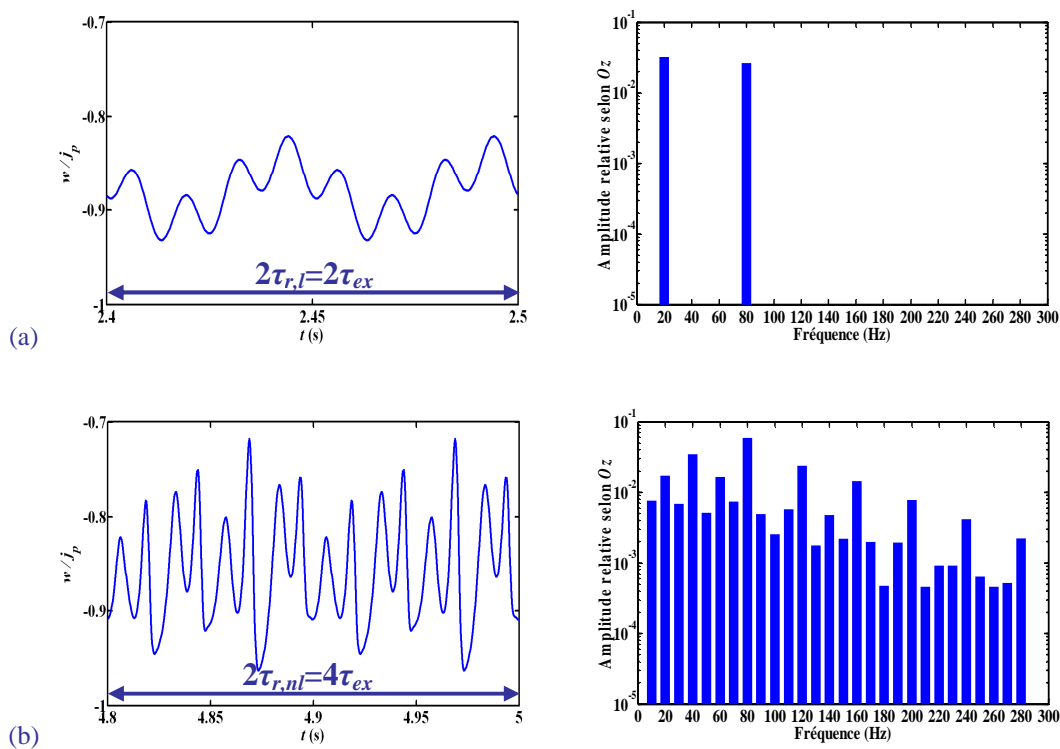


FIG. V.31 : Réponses (a) linéaire et (b) non linéaire du rotor et leurs FFTs au palier # 2 dans le cas d'une rotation sinusoïdale du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x = 80$ Hz

des harmoniques, sous-harmoniques et sur-harmoniques relatives au doublement de période du mouvement du rotor.

La figure FIG. V.33 présente les orbites linéaire et non linéaire du rotor dans le palier # 1 (nœud 1) dues au balourd ($m_b r_b = 1500$ g mm) combiné à la rotation sinusoïdale ($\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x = 80$ Hz) du support. Cette figure confirme que les orbites aux deux paliers hydrodynamiques sont très différentes (voir la figure FIG. V.29(b)) dans le cas de la rotation du support en raison de ses accélérations normale et tangentielle. Sur la figure FIG. V.33(b), il peut être noté que l'orbite non linéaire dans le palier # 1 est aussi $2\tau_{ex}$ -périodique. Ce qui démontre les couplages non linéaires entre les degrés de liberté localisés des paliers hydrodynamiques à travers l'arbre.

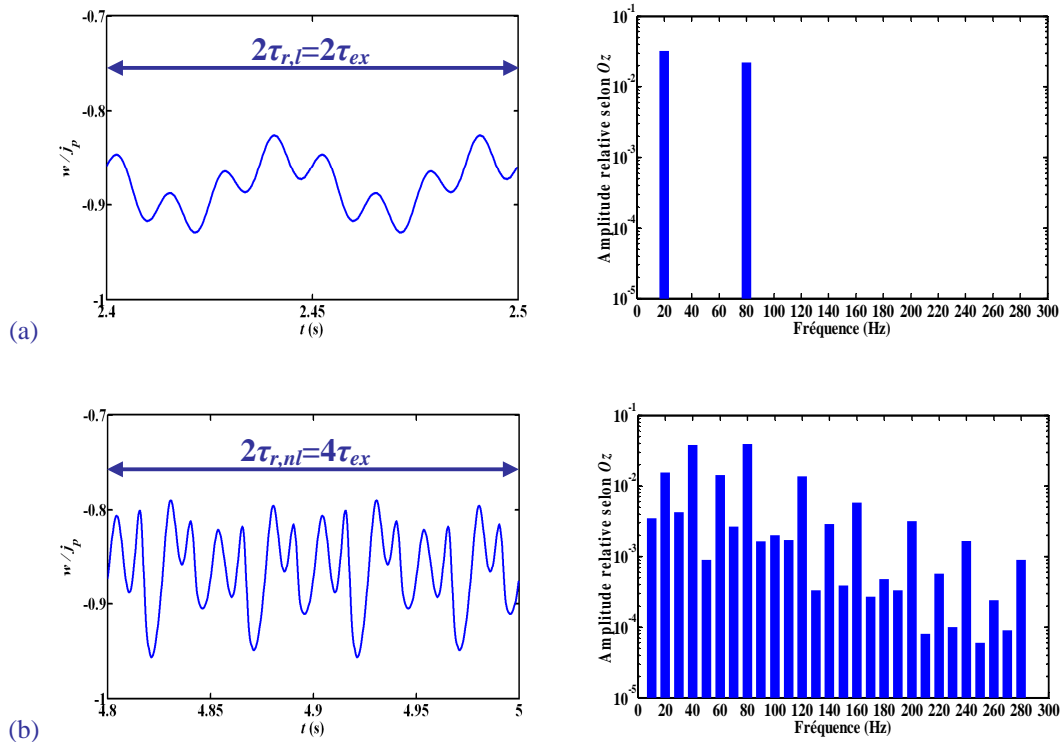


FIG. V.32 : Réponses (a) linéaire et (b) non linéaire du rotor et leurs FFTs au palier # 2 dans le cas d'une translation sinusoïdale du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^z t$ avec $Z_0 = 5 \times 10^{-5}$ m et $\Omega^z = 80$ Hz

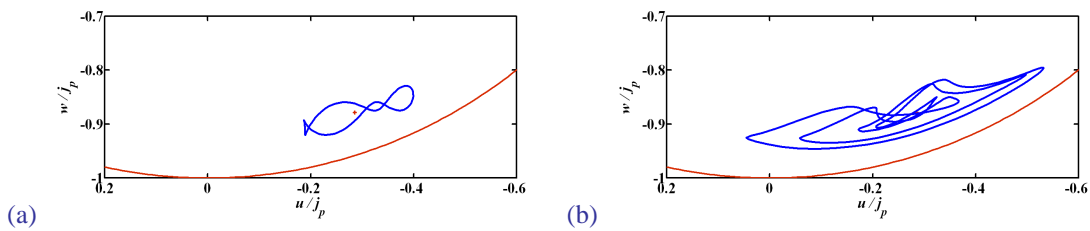


FIG. V.33 : Orbits (a) linéaire et (b) non linéaire du rotor au palier # 1 en présence d'une rotation sinusoïdale du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x = 80$ Hz

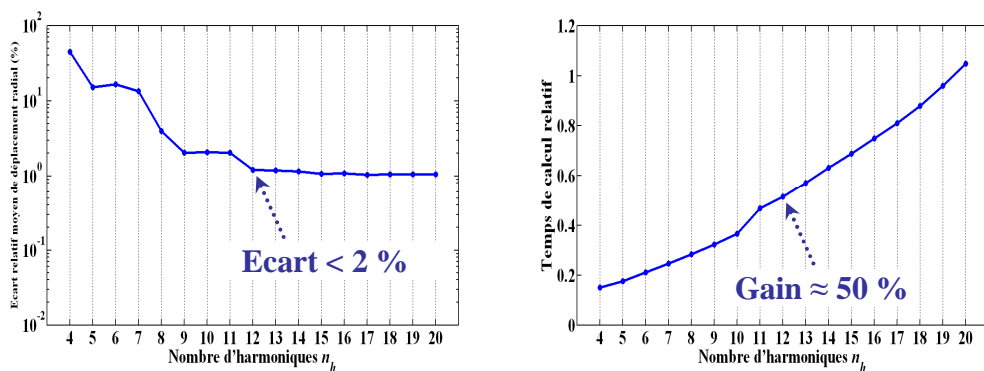


FIG. V.34 : Performance de la méthode de la balance harmonique par rapport à la méthode de shooting pour le calcul des réponses non linéaires du rotor au palier # 2 en présence d'une rotation sinusoïdale du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\Omega^x = 80$ Hz et $\omega^{x,a} = 8 \times 10^{-2}$ rad/s

Les comparaisons des méthodes de shooting et de la balance harmonique présentées sur les figures FIG. V.34 et FIG. V.35 correspondent à des mouvements de rotation et de translation du support d'amplitudes ($\omega^{x,a} = 8 \times 10^{-2}$ rad/s et $Z_0 = 3 \times 10^{-5}$ m) et de fréquences (Ω^x ou $\Omega^z = 80$ Hz). L'écart de déplacement devient de plus en plus petit et se stabilise autour des valeurs de moins de 2% lorsque le nombre d'harmoniques est supérieur à 12. Le gain en temps de calcul reste bon (environ 30%-50%). Pour des amplitudes plus grandes

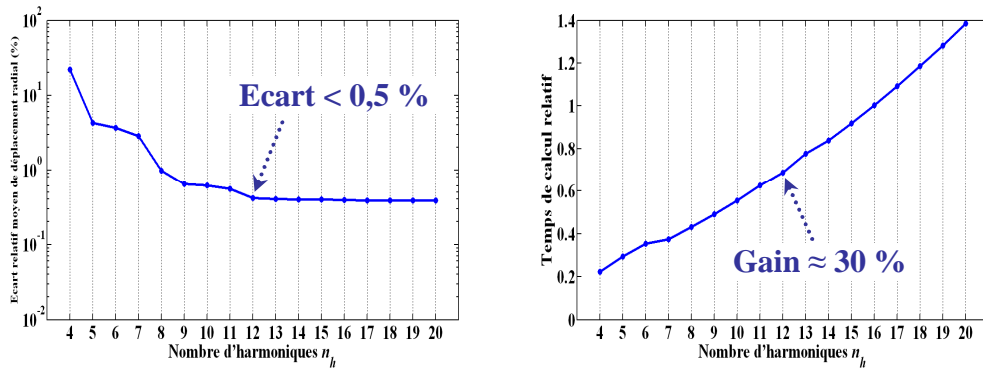


FIG. V.35 : Performance de la méthode de la balance harmonique par rapport à la méthode de shooting pour le calcul des réponses non linéaires du rotor au palier # 2 en présence d’une translation sinusoïdale du support : $z_0=Z_0\cos\Omega^z t$ avec $\Omega^z=80$ Hz et $Z_0=3\times 10^{-5}$ m

des mouvements du support, la méthode de la balance harmonique n’est pas capable de reproduire les réponses correspondantes à cause du contact entre le coussinet du palier et l’arbre (excentricité dynamique relative du centre de l’arbre dans le palier : $\varepsilon_p = e_p/j_p \geq 1$). Les formules analytiques des forces hydrodynamiques présentent une singularité et ne sont plus valides et le calcul est alors arrêté. Une solution pourrait consister à imposer une condition de non contact ($\varepsilon_p < 1$). Toutefois, cela engendrerait beaucoup de développements supplémentaires et très certainement un accroissement du coût de calcul qui rendraient la méthode de la balance harmonique beaucoup moins intéressante. C’est pourquoi, on lui préférera la méthode de shooting pour le calcul d’orbites non linéaires périodiques correspondant aux mouvements du support de grande amplitude.

V.4.4 Route vers le chaos dans le système rotor-palier hydrodynamique non linéaire

V.4.4.1 Diagrammes de bifurcation

La réponse d’un système linéaire de rotor à une excitation extérieure harmonique de période τ_{ex} est harmonique de même période, c’est-à-dire $\tau_r = \tau_{ex}$, tandis que la réponse correspondante d’un système non linéaire de rotor peut être non périodique ou peut avoir une période différente en raison de bifurcations comme on l’a vu dans le **Paragraphe V.4.3.3**. De tels changements de régime dynamique non linéaire du système peuvent être prévus grâce à des diagrammes de bifurcation de réponse.

Les figures **FIG. V.36** et **FIG. V.37** présentent les diagrammes de bifurcation du rotor au palier # 2 (nœud 9) pour l’effet de balourd ($m_b r_b = 1500$ g mm) et les mouvements de rotation sinusoïdale ou de translation sinusoïdale du support de fréquence Ω^x ou $\Omega^z = 80$ Hz. Pour chaque diagramme, les amplitudes $\omega^{x,a}$ ou Z_0 des mouvements du support sont utilisées comme paramètres de bifurcation (paramètres de contrôle) pour fournir des informations essentielles sur les sections de POINCARÉ. Les pas utilisés pour les paramètres de contrôle $\omega^{x,a}$ et Z_0 sont $\Delta\omega^{x,a} = 0,05 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Delta Z_0 = 0,05 \times 10^{-5}$ m respectivement. La période de l’excitation extérieure harmonique du rotor est $\tau_{ex} = 1/20$ s = 0,05 s qui correspond à l’inverse du plus grand commun diviseur de la fréquence $\Omega = 20$ Hz du balourd et de la fréquence Ω^x ou $\Omega^z = 80$ Hz du mouvement du support. L’algorithme de shooting est d’abord exécuté avec $\tau_r = \tau_{ex}$ puis avec $\tau_r = 2\tau_{ex}, \tau_r = 3\tau_{ex}, \dots$ consécutivement et limité avec $\tau_r = 16\tau_{ex}$. Si la méthode de shooting n’arrive pas à trouver une solution périodique, alors l’algorithme bascule vers une méthode d’intégration temporelle transitoire complète qui permet le calcul des mouvements quasi-périodiques et chaotiques. La combinaison de la méthode de shooting et de l’intégration temporelle complète permet d’accélérer significativement le calcul des diagrammes de bifurcation. Les simulations numériques transitoires sont effectuées avec 1000 tours du rotor (c’est-à-dire $1000\tau_{ex}$) et 512 pas de temps par période τ_{ex} . Les informations des 500 premiers tours ne sont pas utilisées sur les diagrammes de bifurcation afin d’exclure le régime transitoire. Les conditions initiales pour les simulations dynamiques transitoires non linéaires sont choisies égales à $\{\delta_p^0\}/j_p$. Pour chaque valeur de $\omega^{x,a}$ ou de Z_0 , une section de POINCARÉ est obtenue en relevant les déplacements pour les instants correspondant aux multiples de la période τ_{ex} , c’est-à-dire $t = k\tau_{ex}$ et $k \in [501; 1000]$. Les amplitudes des déplacements u/j_p selon Ox de ces sections de POINCARÉ sont ensuite reportées sur les diagrammes de bifurcation. Les tableaux **TAB. V.6** et **TAB. V.7**

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

présentent un récapitulatif des différents régimes dynamiques observés sur les diagrammes de bifurcation du système rotor embarqué-palier excité par les mouvements de rotation sinusoïdale ou de translation sinusoïdale de son support en fonction des paramètres de contrôle.

Afin de visualiser des bifurcations de type doublement de période qui conduisent à des réponses quasi-périodiques et au chaos, un zoom du diagramme de bifurcation de la figure **FIG. V.37** est reproduit sur la figure **FIG. V.38** pour la zone d'intérêt $Z_o \in [4,5 \times 10^{-5}; 5,5 \times 10^{-5} \text{ m}]$. Cette fois, le pas utilisé pour le paramètre de bifurcation Z_o est $0,01 \times 10^{-5} \text{ m}$. Cette grille plus fine permet une meilleure observation des changements de régime dynamique non linéaire par rapport à la figure **FIG. V.37** pour la même zone d'intérêt. Par exemple, le mouvement du rotor montre des orbites $4\tau_{ex}$ -périodique et $5\tau_{ex}$ -périodique (sous-harmoniques) pour $Z_o = 5,17 \times 10^{-5} \text{ m}$ et $5,26 \times 10^{-5} \text{ m}$ respectivement.

La stabilité de certaines solutions non linéaires périodiques obtenues en figure **FIG. V.38** est prévue en utilisant la théorie de FLOQUET. La matrice de monodromie est calculée à la fin d'une seule période τ_r de la réponse du rotor et ses multiplicateurs de FLOQUET correspondants sont présentés sur la figure **FIG. V.39** à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. La solution est stable au point *A* de la figure **FIG. V.38** où $Z_o = 4,95 \times 10^{-5} \text{ m}$ avec $\tau_r = \tau_{ex}$ (voir la figure **FIG. V.39(a)**) et aussi au point *C* où $Z_o = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$ avec $\tau_r = 2\tau_{ex}$ (voir la figure **FIG. V.39(c)**), tandis qu'elle est instable et une bifurcation de doublement de période survient au point *B* où $Z_o = 4,96 \times 10^{-5} \text{ m}$ avec $\tau_r = \tau_{ex}$ (voir la figure **FIG. V.39(b)**) car un des multiplicateurs de FLOQUET traverse le cercle par la partie négative de l'axe réel à -1. Ce résultat peut être vérifié avec l'orbite du rotor au palier # 2 qui est $1\tau_{ex}$ -périodique (voir la figure **FIG. V.40(a)**) pour le point *A* et devient $2\tau_{ex}$ -périodique (voir la figure **FIG. V.40(b)**) pour le point *C*.

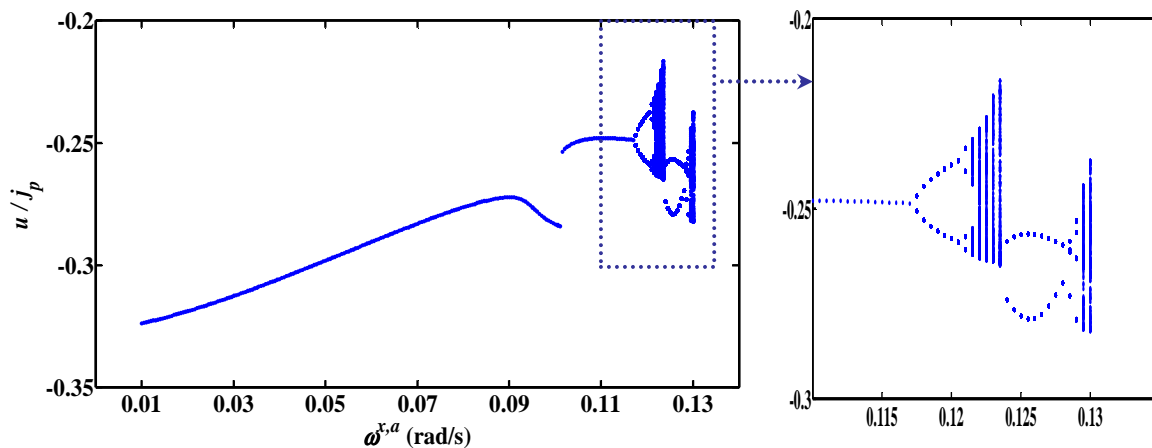


FIG. V.36 : Diagramme de bifurcation du rotor au palier # 2 pour une rotation sinusoïdale du support :
 $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\Omega^x = 80 \text{ Hz}$

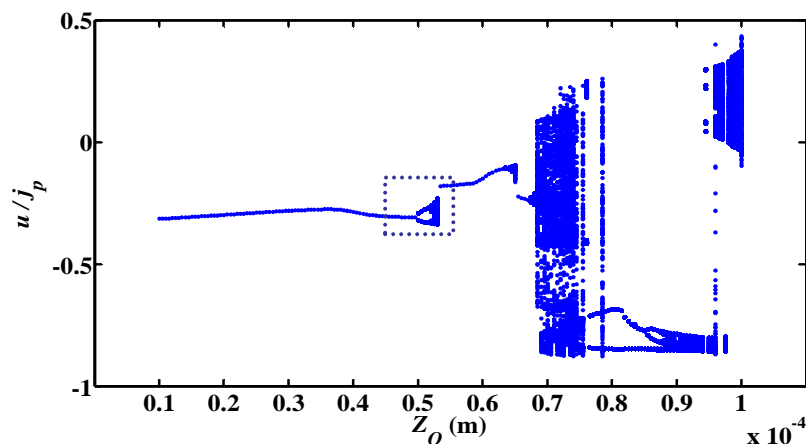


FIG. V.37 : Diagramme de bifurcation du rotor au palier # 2 pour une translation sinusoïdale du support :
 $z_o = Z_o \cos \Omega^z t$ avec $\Omega^z = 80 \text{ Hz}$

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

Type du mouvement du rotor	Amplitude de la rotation du support $\omega^{s,a}$ (10^{-2} rad/s)
$1\tau_{ex}$ -périodique	[1 - 11,7]
$2\tau_{ex}$ -périodique	[11,75 - 12,05], [12,4 - 12,8]
$4\tau_{ex}$ -périodique	[12,1], [12,85]
Quasi-périodique	[12,15 - 12,35], [12,9 - 13]

TAB. V.6 : Types de mouvement identifiés sur le diagramme de bifurcation dû à la rotation sinusoïdale du support

Type du mouvement du rotor	Amplitude de la translation du support Z_o (10^{-5} m)
$1\tau_{ex}$ -périodique	[1 - 4,95], [5,35 - 6,3], [6,55 - 6,7]
$2\tau_{ex}$ -périodique	[5 - 5,1], [6,35 - 6,4], [6,75], [7,65 - 7,8], [7,9 - 8,3], [8,4 - 8,5]
$4\tau_{ex}$ -périodique	[8,55 - 8,7]
$8\tau_{ex}$ -périodique	[8,75], [9,45]
$16\tau_{ex}$ -périodique	[8,8]
Quasi-périodique	[5,15 - 5,3], [6,45 - 6,5], [6,8], [7,5], [7,6], [8,35], [8,85 - 9,4], [9,5 - 9,55], [9,65 - 9,95]
Chaotique	[6,85 - 7,45], [7,55], [7,85], [9,6], [10]

TAB. V.7 : Types de mouvement identifiés sur le diagramme de bifurcation dû à la translation sinusoïdale du support

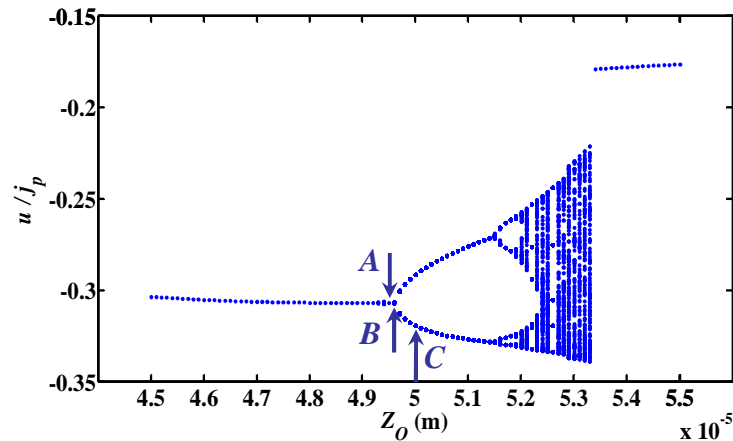


FIG. V.38 : Zoom sur le diagramme de bifurcation en figure FIG. V.37 pour la zone d'intérêt $Z_o \in [4,5 \times 10^{-5}; 5,5 \times 10^{-5} \text{ m}]$

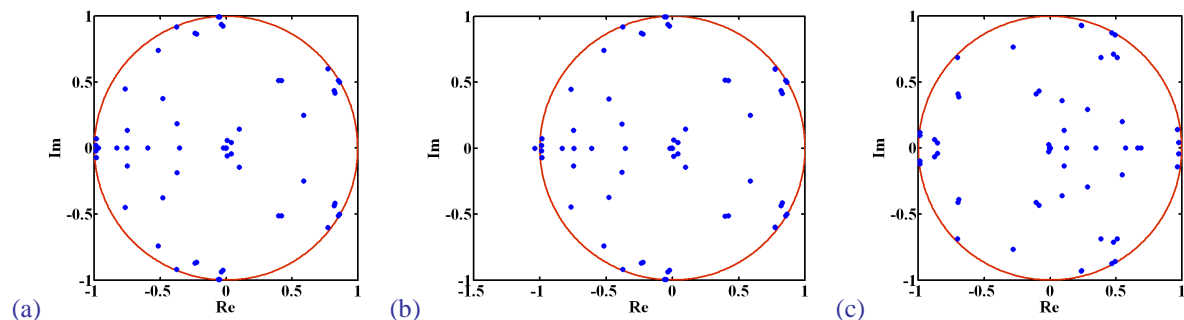


FIG. V.39 : Valeurs propres de la matrice de monodromie correspondant aux points A , B et C en figure FIG. V.38 associés à : $Z_o =$ (a) $4,95 \times 10^{-5} \text{ m}$, (b) $4,96 \times 10^{-5} \text{ m}$, (c) $5 \times 10^{-5} \text{ m}$, respectivement

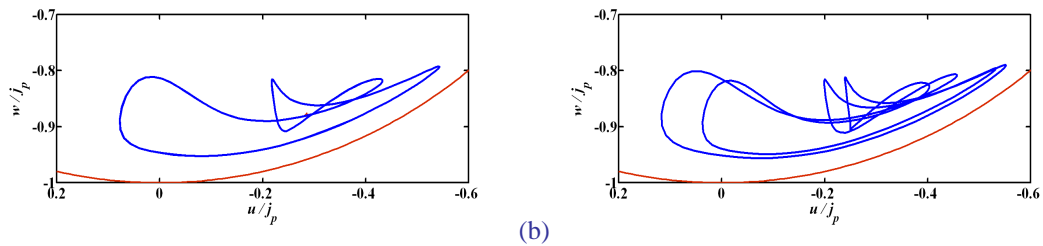


FIG. V.40 : Orbites non linéaires du rotor au palier # 2 obtenues avec la méthode de shooting pour les points : (a) A, et (b) C de la figure FIG. V.38

V.4.4.2 Réponses sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques

Dans ce paragraphe, quelques orbites du rotor et leurs sections projetées de POINCARÉ au palier # 2 (nœud 9) correspondant à des valeurs d'intérêt des paramètres de contrôle $\omega^{x,a}$ ou Z_0 des diagrammes de bifurcation en figures FIG. V.36 et FIG. V.37 sont présentées. Les coordonnées relatives $\{\delta_p^0\}/j_p$ de la position statique du centre de l'arbre dans les paliers sont utilisées comme des conditions initiales pour les calculs dynamiques transitoires. Les sections de POINCARÉ sont produites en considérant des intersections

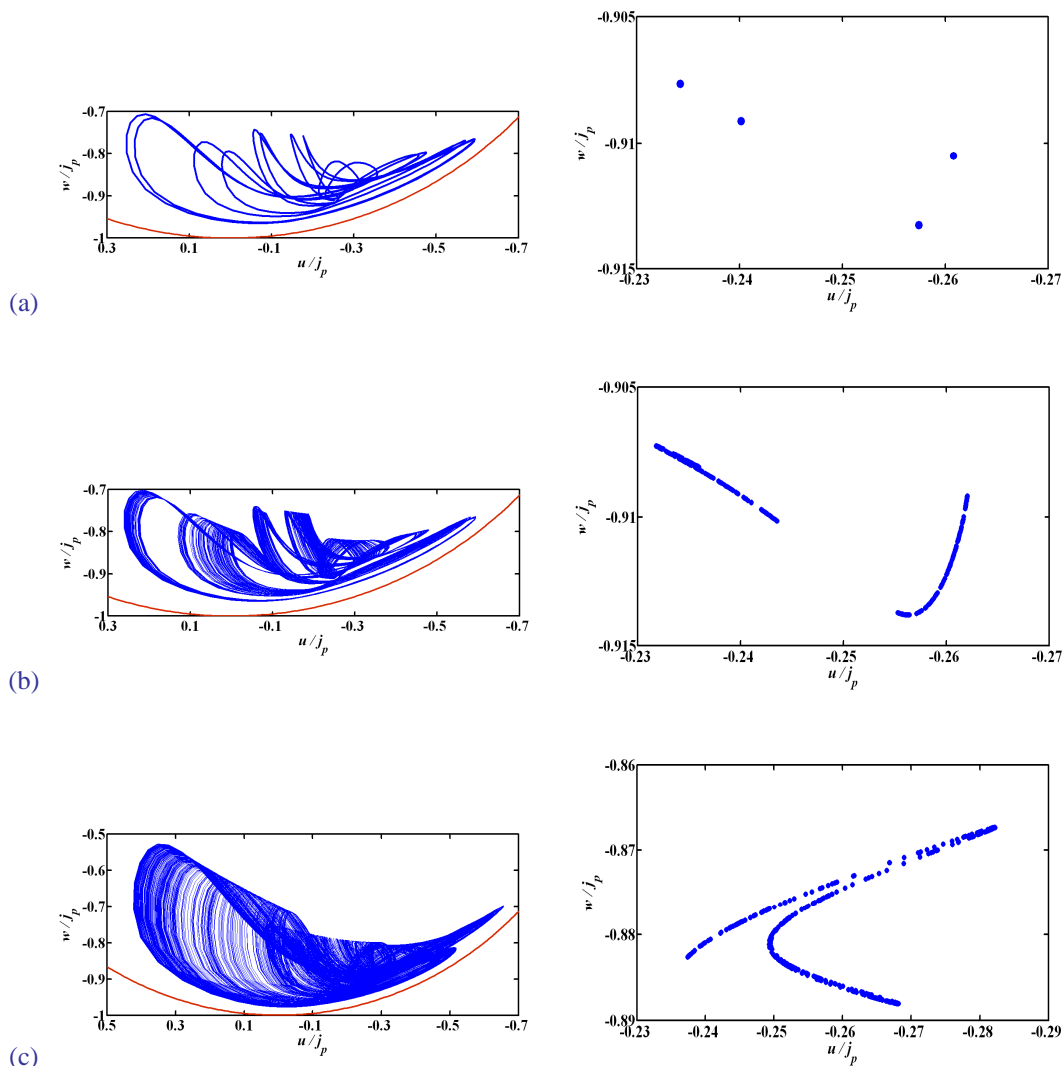


FIG. V.41 : Orbites et sections de POINCARÉ du rotor au palier # 2 dues à des rotations sinusoïdales du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\Omega^x = 80$ Hz et $\omega^{x,a} =$ (a) $12,1 \times 10^{-2}$ rad/s, (b) $12,15 \times 10^{-2}$ rad/s, (c) 13×10^{-2} rad/s

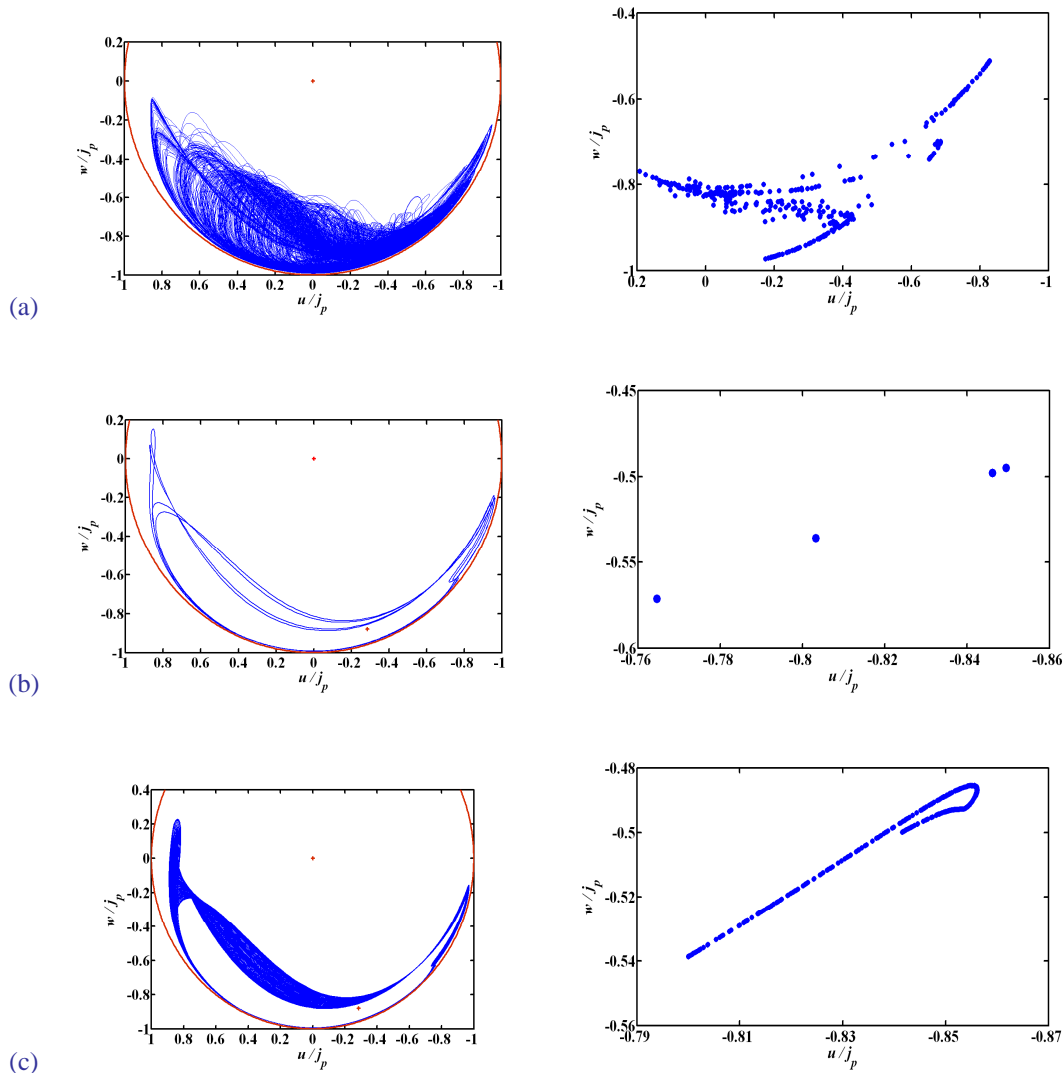


FIG. V.42 : Orbites et sections de POINCARÉ du rotor au palier # 2 dues à des translations sinusoïdales du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^z t$ avec $\Omega^z = 80$ Hz et $Z_0 =$ (a) $7,3 \times 10^{-5}$ m, (b) $8,6 \times 10^{-5}$ m, (c) $9,5 \times 10^{-5}$ m

successives des déplacements dynamiques relatifs du rotor avec les instants associés aux multiples de la période $\tau_{ex} = 0,05$ s de l'excitation extérieure harmonique du rotor en débutant à $t = 501\tau_{ex}$ pour s'affranchir du régime transitoire.

Lorsque les amplitudes $\omega^{x,a}$ de la rotation du support sont successivement égales à $12,1 \times 10^{-2}$ rad/s (figure FIG. V.41(a)), $12,15 \times 10^{-2}$ rad/s (figure FIG. V.41(b)) et 13×10^{-2} rad/s (figure FIG. V.41(c)), les orbites du rotor et les sections de POINCARÉ associées mettent en évidence un mouvement sous-harmonique ($4\tau_{ex}$ -périodique) et des mouvements quasi-périodiques respectivement.

Lorsque les amplitudes Z_0 de la translation du support sont successivement égales à $7,3 \times 10^{-5}$ m (figure FIG. V.42(a)), $8,6 \times 10^{-5}$ m (figure FIG. V.42(b)) et $9,5 \times 10^{-5}$ m (figure FIG. V.42(c)), les orbites du rotor montrent un mouvement chaotique (les points des sections de POINCARÉ sont irrégulièrement distribués), un mouvement sous-harmonique ($4\tau_{ex}$ -périodique) et un mouvement quasi-périodique (les points des sections de POINCARÉ forment une courbe fermée) respectivement.

V.4.4.3 Sensibilité aux conditions initiales

Un très petit changement dans les conditions initiales pour un système non linéaire de rotor peut produire un changement important dans sa trajectoire dynamique. Ce phénomène est appelé « sensibilité aux conditions initiales » et représente une des caractéristiques principales par lesquelles un système non linéaire peut être défini. Il est démontré sur les figures FIG. V.43 et FIG. V.44 qui fournissent les orbites du rotor et leurs sections de POINCARÉ au palier # 2 (nœud 9) produites grâce à différentes conditions initiales pour le mouvement dynamique transitoire.

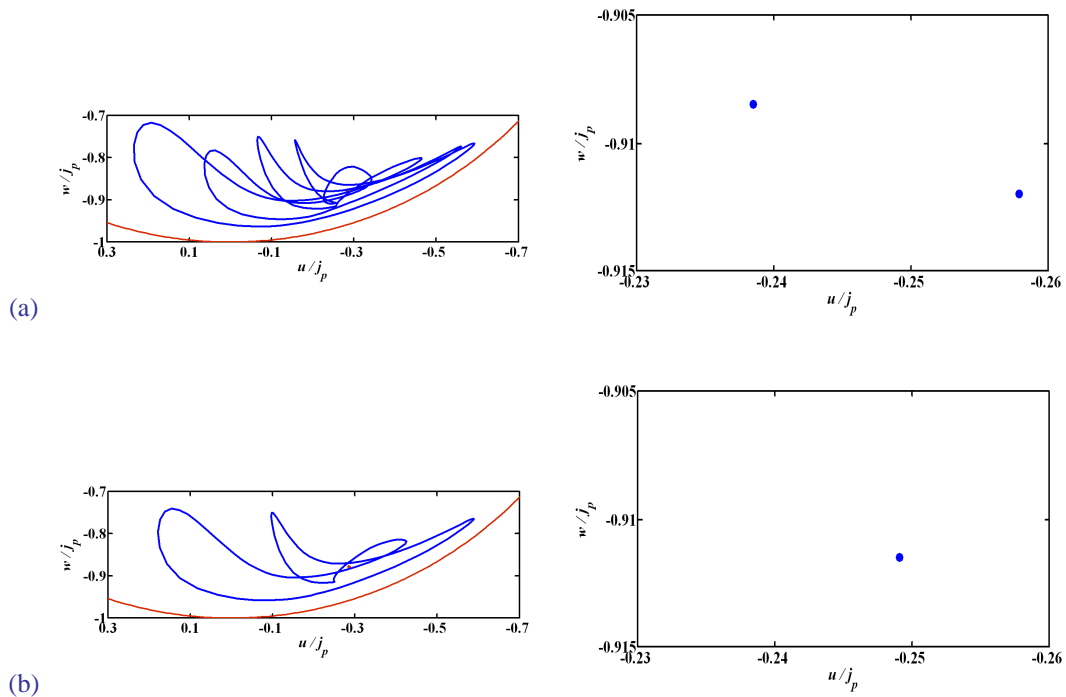


FIG. V.43 : Influence des conditions initiales sur les orbites du rotor en présence d'un balourd ($m_b r_b = 1500$ g mm) et de rotations sinusoïdales du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2}$ rad/s et $\Omega^x = 80$ Hz

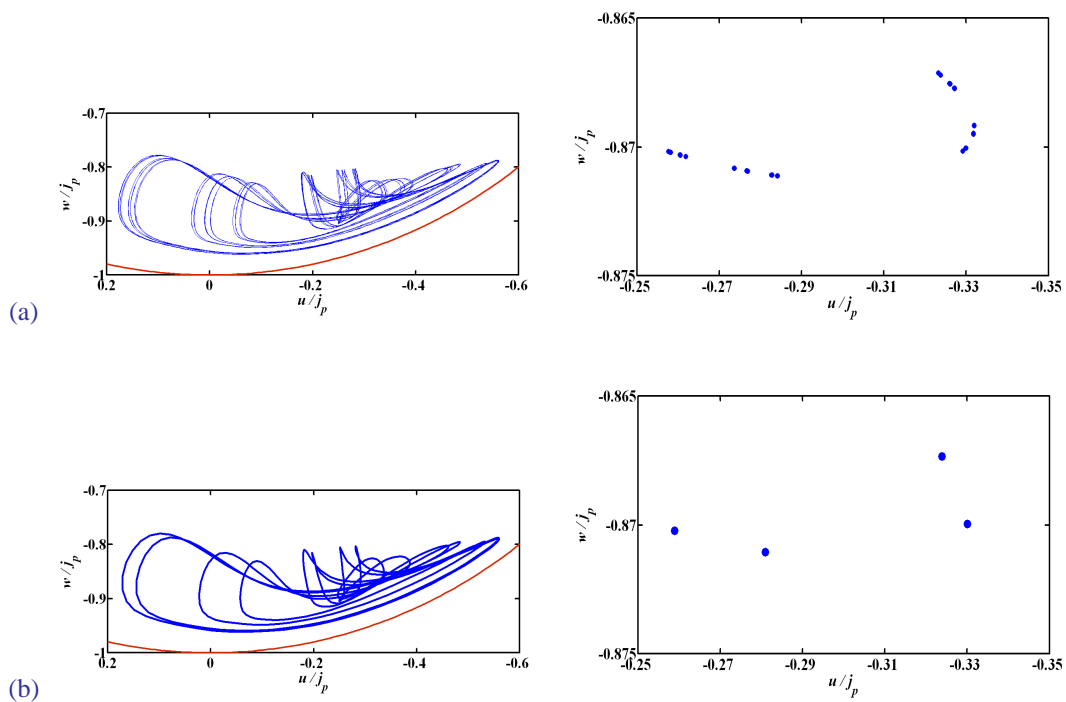


FIG. V.44 : Influence des conditions initiales sur les orbites du rotor en présence d'un balourd ($m_b r_b = 1500$ g mm) et de translations sinusoïdales du support : $z_0 = Z_0 \cos \Omega^z t$ avec $Z_0 = 5,2 \times 10^{-5}$ m et $\Omega^z = 80$ Hz

Sur la figure FIG. V.43, le support du rotor est excité par une rotation sinusoïdale d'amplitude $\omega^{x,a} = 12 \times 10^{-2}$ rad/s et de fréquence $\Omega^x = 80$ Hz. L'orbite du rotor correspond à un mouvement sous-harmonique ($2\tau_{ex}$ -périodique), voir la figure FIG. V.43(a), quand les conditions initiales sont égales aux coordonnées adimensionnées de la position d'équilibre statique $\{\delta_p^0\}/j_p = \langle -0,29, -0,88 \rangle_R^T$, tandis qu'elle correspond à un mouvement harmonique ($1\tau_{ex}$ -périodique), voir la figure FIG. V.43(b), quand les conditions initiales sont légèrement modifiées et choisies égales aux coordonnées adimensionnées $\langle -0,25, -0,91 \rangle_R^T$.

Sur la figure FIG. V.44, le support du rotor est excité par une translation sinusoïdale d'amplitude $Z_o = 5,2 \times 10^{-5}$ m et de fréquence $\Omega^z = 80$ Hz. L'orbite du rotor représente un mouvement quasi-périodique, voir la figure FIG. V.44(a), quand les conditions initiales sont égales aux coordonnées adimensionnées $\{\delta_p^0\}/j_p = \langle -0,29, -0,88 \rangle_R^T$, tandis qu'elle représente un mouvement sous-harmonique ($4\tau_{ex}$ -périodique), voir la figure FIG. V.44(b), quand les conditions initiales sont choisies égales aux coordonnées adimensionnées $\langle -0,26, -0,87 \rangle_R^T$.

V.4.5 Réponses stationnaires périodiques aux excitations sinusoïdales du support

Il s'agit de quantifier l'effet des mouvements sinusoïdaux du support sur les réponses latérales du rotor et en particulier au niveau du palier # 2. Comme seules les solutions périodiques sont recherchées, il convient d'éviter la combinaison des sollicitations du balourd et du support de fréquences différentes et non commensurables. Ainsi seuls les mouvements du support sont pris en compte : soit rotation autour de l'axe Ox , soit translation selon Oz . La méthode de shooting est ici utilisée.

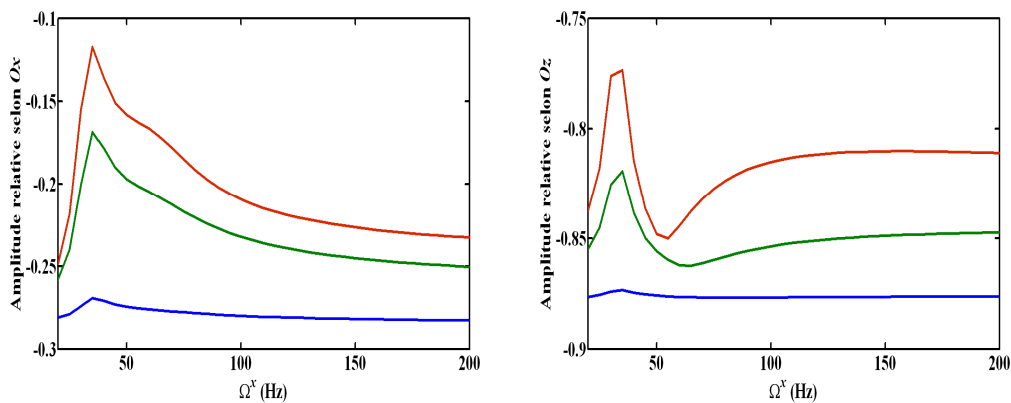


FIG. V.45 : Réponses adimensionnées du rotor au palier # 2 pour la rotation sinusoïdale du support : $\omega^x = \omega^{x,a} \cos \Omega^x t$ avec $\omega^{x,a} = 1 \times 10^{-2}$ rad/s (courbe bleue), 8×10^{-2} rad/s (courbe verte) et 12×10^{-2} rad/s (courbe rouge)

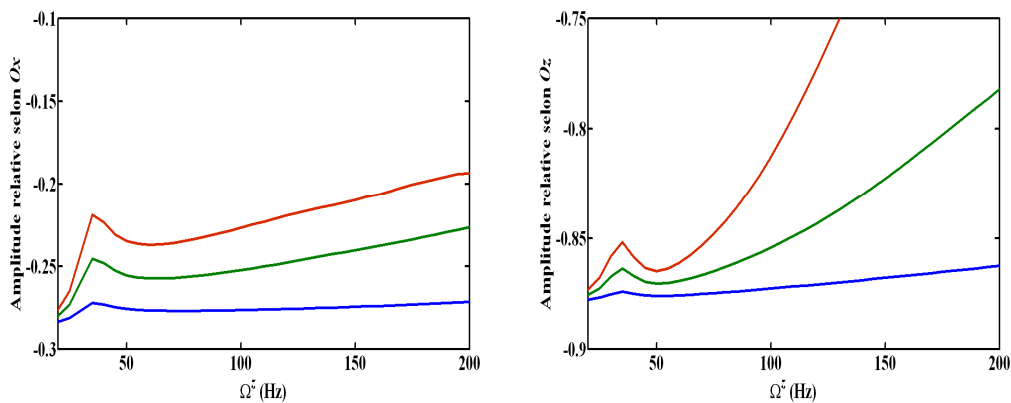


FIG. V.46 : Réponses adimensionnées du rotor au palier # 2 pour la translation sinusoïdale du support : $z_o = Z_o \cos \Omega^z t$ avec $Z_o = 1 \times 10^{-5}$ m (courbe bleue), 3×10^{-5} m (courbe verte) et 5×10^{-5} m (courbe rouge)

Les figures **FIG. V.45** et **FIG. V.46** montrent les réponses périodiques non linéaires du rotor tournant à $\Omega = 1200$ tr/min en présence d'excitations sinusoïdales du support seulement. Les évolutions des réponses sont présentées en fonction des fréquences pour trois amplitudes des mouvements de rotation et de translation du support.

Malgré une excitation dans le plan yOz , le rotor répond aussi dans le plan xOy . Les paliers hydrodynamiques et l'effet de CORIOLIS en sont la cause.

Comme prévu, pour une valeur donnée de la fréquence du mouvement du support, les amplitudes des réponses du rotor augmentent pour des valeurs croissantes des amplitudes du mouvement du support.

Pour une valeur donnée de l'amplitude du mouvement du support, la rotation du support donne une forme classique de réponse, tandis que sa translation augmente les amplitudes des réponses pour les fréquences les plus élevées.

V.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois configurations différentes de rotor embarqué sont étudiées. Elles dépendent de la géométrie du rotor, du type de paliers considérés et de la nature des excitations du support. Elles ont permis de mettre en œuvre les outils et les méthodes numériques présentés au **Chapitre IV**.

Dans le cas où le rotor symétrique est monté sur paliers rigides et soumis au balourd et aux excitations combinées de rotation constante et de translation sinusoïdale du support, les équations du mouvement sont toujours des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Une instabilité dynamique latérale peut survenir à cause de la présence de termes diagonaux négatifs incluant les vitesses angulaires du support dans les matrices de raideur symétriques du rotor qui peuvent perdre leur caractéristique définie positive. Il est montré que les rotations du support changent non seulement les fréquences naturelles du rotor mais aussi peuvent casser la symétrie du comportement dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe transversal. La translation sinusoïdale du support n'affecte pas les fréquences naturelles du rotor. Elle a seulement un effet sur les amplitudes des réponses correspondantes ainsi que sur les caractéristiques des orbites du rotor.

Dans le cas où le rotor dissymétrique est monté sur paliers rigides et soumis au balourd et aux mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale du support, les équations linéaires du mouvement font apparaître des termes paramétriques périodiques (dans le temps) en raison de la dissymétrie géométrique du rotor. Des régions d'instabilité peuvent survenir à cause de ces coefficients paramétriques et leurs tailles ne peuvent pas être associées aux rotations du support. D'autre part, les rotations du support décalent les régions d'instabilité vers les vitesses de rotation plus faibles du rotor. La translation sinusoïdale du support n'a pas d'effet sur les régions d'instabilité du rotor, mais elle affecte seulement les caractéristiques des orbites du rotor.

Les calculs relatifs à la méthode des éléments finis pour les deux configurations précédentes de rotor sont validés par rapport à l'expansion de RAYLEIGH-RITZ. L'emploi de la méthode des éléments finis est judicieux car cette méthode est plus précise et plus efficace. Elle peut donc être utilisée pour la modélisation de machines tournantes industrielles en présence d'excitations du support.

Dans le cas où le rotor symétrique est monté sur paliers hydrodynamiques linéarisés/non linéaires et soumis au balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support, les équations différentielles obtenues du mouvement sont linéaires/non linéaires avec des termes paramétriques périodiques dans le temps dus à la rotation du support. Quand le rotor est excité par une rotation sinusoïdale du support, il est montré qu'une instabilité dynamique du rotor survient à cause des coefficients paramétriques variables dans le temps inclus dans les équations linéarisées du mouvement et que les paliers hydrodynamiques linéarisés ont une influence plus grande que les paliers rigides sur la taille des régions d'instabilité du rotor. Il est noté que les caractéristiques des orbites du rotor sont significativement affectées par la fréquence et l'amplitude des mouvements du support. Comme prévu, le modèle linéarisé de palier conduit à des résultats relativement précis uniquement pour de petites amplitudes des mouvements du support. Aussi, ce modèle simplifié de palier ne peut pas produire des phénomènes non linéaires et ne permet pas de prévoir le changement de régime dynamique tel que le doublement de période du mouvement et la transition vers le chaos. Par contre, ces phénomènes sont observés grâce à des diagrammes de bifurcation de réponses dynamiques du rotor quand le modèle non linéaire de palier est pris en considération. Il est observé que suivant les amplitudes des mouvements sinusoïdaux du support, le système de rotor non linéaire peut présenter des mouvements sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques. De plus, il est démontré que des conditions initiales différentes pour le mouvement dynamique transitoire non linéaire peuvent aboutir à des réponses différentes du rotor en présence de mouvements du support. Enfin, l'étude paramétrique effectuée pour calculer les réponses périodiques non linéaires du rotor en fonction des fréquences des excitations sinusoïdales du support montre que la translation du support a une

CHAPITRE V : Mise en évidence des phénomènes propres aux rotors embarqués

influence supérieure à celle de la rotation sur les amplitudes des réponses notamment aux fréquences d'excitation les plus élevées.

Le tableau **TAB. V.8** présente un récapitulatif des différents résultats obtenus grâce aux trois configurations de rotor embarqué proposées dans cette thèse.

	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
Rotor	Symétrique	Dissymétrique	Symétrique
Paliers	Rigides	Rigides	Hydrodynamiques linéarisés ou non linéaires
Rotation du support	Constante	Constante	Sinusoïdale
Translation du support	Sinusoïdale	Sinusoïdale	Sinusoïdale
Type d'équations du mouvement	Linéaires à coefficients constants	Linéaires à coefficients périodiques dans le temps	Non linéaires à coefficients constants ou périodiques
Effet de la rotation	<p>1- Instabilité latérale possible</p> <p>2- Change les fréquences naturelles du rotor</p>	<p>1- Instabilité latérale possible</p> <p>2- Ne change pas la taille des zones d'instabilité</p> <p>3- Décale ces zones vers les vitesses de rotation plus faibles du rotor</p>	<p>1- Instabilité latérale possible</p> <p>2- Les zones d'instabilité correspondantes sont plus grandes que celles dues aux paliers rigides</p> <p>3- Sa fréquence et son amplitude affectent les caractéristiques des orbites non linéaires</p> <p>4- Des valeurs croissantes de son amplitude conduisent à un changement de régime dynamique non linéaire (bifurcation) correspondant à des réponses sous-harmoniques et quasi-périodiques</p>
Effet de la translation	<p>1- N'affecte pas les fréquences naturelles</p> <p>2- Affecte les amplitudes des réponses et les caractéristiques des orbites</p>	<p>1- N'a pas d'effet sur les zones d'instabilité</p> <p>2- Affecte les caractéristiques des orbites</p>	<p>1- N'affecte pas la stabilité latérale</p> <p>2- Sa fréquence et son amplitude affectent les caractéristiques des orbites non linéaires</p> <p>3- Des valeurs croissantes de son amplitude conduisent à un changement de régime dynamique non linéaire (bifurcation) correspondant à des réponses sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques</p>

TAB. V.8 : Description des configurations étudiées de rotor embarqué et phénomènes observés dus aux mouvements de rotation et de translation du support

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Bilan des travaux de recherche

Le calcul des énergies cinétique et de déformation ainsi que du travail virtuel pour les différents composants mécaniques d'un système rotor flexible embarqué-palier hydrodynamique non linéaire est effectué.

Afin de prévoir et d'analyser analytiquement et numériquement le rôle des mouvements de rotation constante ou sinusoïdale et/ou de translation sinusoïdale du support dans le comportement dynamique du rotor embarqué, un modèle basé sur des éléments finis de poutre de TIMOSHENKO est présenté dans le cadre de cette thèse. Ce modèle contient les effets correspondant à l'inertie de rotation des sections droites, à l'inertie gyroscopique, à la déformation de cisaillement d'arbre et à la dissymétrie géométrique de l'arbre et/ou du disque rigide ainsi que six types d'excitations déterministes connues (trois rotations et trois translations) du support rigide. De plus, les effets de rotation et les effets de raidissement géométrique associés aux contraintes centrifuges causées par les rotations du support sont pris en considération.

La dérivation des équations du mouvement montre que les mouvements de rotation du support apportent non seulement une contribution paramétrique aux matrices d'amortissement et de raideur du rotor mais aussi des vecteurs supplémentaires des forces extérieures, tandis que les mouvements de translation du support modifient seulement les vecteurs des forces extérieures.

L'écriture des équations différentielles du mouvement d'un rotor embarqué soumis à des mouvements déterministes de rotation et de translation du support rigide permet de définir trois configurations de rotor embarqué et donc de distinguer trois catégories d'équations différentielles linéaires et non linéaires à coefficients constants et périodiques dans le temps.

La première configuration concerne un rotor géométriquement symétrique monté sur des paliers rigides et excité par le balourd et par des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Dans ce cas, les équations du mouvement sont toujours des équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Elles sont résolues à l'aide de méthodes quasi-analytiques pour déterminer les fréquences naturelles du rotor en fonction de sa vitesse de rotation et obtenir ses réponses au balourd et à la translation du support en régime permanent ainsi que ses orbites stabilisées.

Une instabilité dynamique peut survenir dans le rotor en raison de la présence de termes diagonaux négatifs contenant les vitesses angulaires du support dans les matrices de raideur symétriques du rotor qui peuvent perdre leur caractéristique définie positive. Il est montré que

les rotations du support changent non seulement les fréquences naturelles du rotor mais aussi peuvent casser la symétrie du comportement dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe transversal. La translation sinusoïdale du support ne change pas les fréquences naturelles du rotor. Elle a seulement une influence sur les amplitudes des réponses correspondantes ainsi que sur la taille et la forme des orbites du rotor.

La deuxième configuration correspond à un rotor sur paliers rigides avec une dissymétrie géométrique due au disque, soumis à l'effet de balourd et à une vitesse angulaire constante et une translation sinusoïdale combinées du support. Dans ce cas, la dissymétrie du rotor introduit des termes paramétriques périodiques (dans le temps) dans les équations linéaires du mouvement. L'analyse dynamique du rotor est effectuée grâce à la théorie de FLOQUET (afin d'étudier sa stabilité dynamique) et au schéma implicite d'intégration temporelle pas à pas de type NEWMARK basé sur l'accélération moyenne (afin de prévoir ses orbites en régime stationnaire).

Des régions d'instabilité peuvent survenir à cause des coefficients paramétriques et leurs tailles ne peuvent pas être reliées aux rotations du support. D'autre part, les rotations du support décalent les régions d'instabilité vers les vitesses de rotation plus faibles du rotor. La translation sinusoïdale du support n'a pas d'influence sur les régions d'instabilité du rotor, mais seulement une influence sur la taille et la forme des orbites du rotor.

Les calculs associés à la méthode des éléments finis pour les deux configurations précédentes de rotor sont validés par rapport à la formulation de type RAYLEIGH-RITZ. L'utilisation de la méthode des éléments finis est raisonnable et utile parce que cette méthode est plus précise et plus fiable. Elle peut alors être employée pour la modélisation de machines tournantes industrielles en présence de mouvements du support.

La troisième configuration représente un rotor géométriquement symétrique monté sur des paliers hydrodynamiques et excité par le balourd et par les mouvements sinusoïdaux de rotation ou de translation du support. Les équations différentielles obtenues du mouvement sont non linéaires avec des termes paramétriques périodiques dans le temps dus à la rotation du support. En considérant le modèle linéarisé de palier, la stabilité dynamique du rotor est évaluée à travers la théorie de FLOQUET. Ensuite, les équations linéarisées du mouvement sont résolues par l'algorithme implicite d'intégration temporelle de NEWMARK afin d'approximer les réponses forcées du rotor et de décrire ses orbites stabilisées. Lorsque les paliers hydrodynamiques non linéaires sont considérés, un algorithme robuste combinant la procédure incrémentale itérative de NEWTON-RAPHSON avec le schéma d'intégration temporelle de NEWMARK est utilisé pour obtenir le mouvement dynamique transitoire non linéaire du rotor embarqué, ce qui augmente considérablement le temps d'exécution d'un calcul. Il est alors avantageux d'utiliser le modèle linéarisé, mais cela nécessite d'établir précisément sa limite de validité. Ainsi une comparaison entre les systèmes linéaire et non linéaire est effectuée pour évaluer la gamme de validité du modèle linéarisé de palier. Par ailleurs, dans le cas où les excitations sinusoïdales du support conduisent à des réponses non linéaires périodiques (harmoniques et sous-harmoniques) du rotor, des méthodes optimisées de shooting et de la balance harmonique sont utilisées afin de résoudre les équations non linéaires du mouvement. Ces deux méthodes sont comparées afin d'examiner leur intérêt en dynamique des rotors embarqués.

Lorsque le rotor est excité par une rotation sinusoïdale du support, il est montré qu'une instabilité dynamique du rotor peut survenir en raison des coefficients paramétriques variables dans le temps inclus dans les équations linéarisées du mouvement et que les paliers hydrodynamiques linéarisés ont une influence plus grande que les paliers rigides sur la taille des régions d'instabilité du rotor.

Il est noté que la forme et l'amplitude des orbites du rotor peuvent être significativement affectées par la fréquence et l'amplitude des mouvements du support. Comme prévu, le modèle linéarisé de palier donne des résultats relativement précis uniquement pour de petites amplitudes des mouvements du support. Aussi, ce modèle simplifié de palier ne peut pas produire des phénomènes non linéaires et ne permet pas de prévoir le changement de régime dynamique tel que le doublement de période du mouvement et la transition vers le chaos. Inversement, ces phénomènes sont observés grâce à des diagrammes de bifurcation de réponses dynamiques du rotor lorsque le modèle non linéaire de palier est considéré.

La robustesse de l'algorithme de shooting est validée par rapport à l'algorithme d'intégration temporelle transitoire de NEWMARK. Les solutions non linéaires périodiques stables et instables sont bien discriminées en employant la théorie de FLOQUET. Pour les excitations du support de faibles amplitudes, la méthode de la balance harmonique prouve son efficacité par rapport à la méthode de shooting car elle présente des petits écarts de déplacement et permet un gain important en temps de calcul. Pour des grandes amplitudes des mouvements du support, la méthode de la balance harmonique n'est pas capable de reproduire les réponses correspondantes à cause du contact entre le coussinet du palier et l'arbre. Les formules analytiques des forces hydrodynamiques présentent une singularité et ne sont plus valides et le calcul est alors arrêté.

Il est observé que selon les amplitudes des mouvements sinusoïdaux du support, le système de rotor non linéaire peut montrer des mouvements sous-harmoniques, quasi-périodiques et chaotiques. Il est démontré que des conditions initiales différentes pour le mouvement dynamique transitoire non linéaire conduisent à des réponses différentes du rotor en présence de mouvements du support.

Enfin, l'étude paramétrique effectuée pour obtenir les réponses périodiques non linéaires du rotor en fonction des fréquences des mouvements sinusoïdaux du support montre que l'influence de la translation est plus importante que celle de la rotation sur les amplitudes des réponses notamment pour les fréquences les plus élevées.

Les travaux de recherche réalisés durant cette thèse ont donné lieu à deux articles publiés dans *Journal of Sound and Vibration* [38] et *Journal of Vibration and Control* [41] ainsi qu'à des conférences nationales [32,34,37,39] et internationales [33,35,36,40].

Perspectives

A la lumière de ces travaux de recherche, plusieurs perspectives peuvent être proposées.

Les résultats numériques obtenus dans le cadre de cette thèse doivent être validés grâce au projet lyonnais Equipex PHARE (Plate-forme machines tournantes pour la maîtrise des Risques Environnementaux) qui sera bientôt installé au sein du LaMCoS de l'INSA de LYON. Grâce au projet PHARE, les projets de recherche originaux visent des applications dans :

- l'avionique (réacteurs d'avion),
- la conception et l'équipement de centrales électriques,
- la compréhension des phénomènes d'instabilité d'interaction (couplage fluide-structure ou structure-structure) et d'excitation (sismique par exemple).

Pour les rotors montés sur des paliers hydrodynamiques, la charge est considérée comme constante même si le support est mobile. Cette charge est créée non seulement par le poids du rotor mais aussi par l'accélération du mouvement du support. Dans le futur, il serait

intéressant de travailler avec une charge variable dans le temps et de faire les modifications nécessaires à l'équation de REYNOLDS et aux équations du mouvement du système rotor embarqué-palier hydrodynamique.

Les paliers courts hydrodynamiques sont considérés dans cette étude. En effet, des modèles de paliers courts ou longs sont communément utilisés en dynamique non linéaire des rotors pour atteindre analytiquement des forces hydrodynamiques approchées des paliers. Néanmoins, afin de traiter des rotors avec des paliers de longueur finie, la résolution de l'équation de REYNOLDS, qui conduit aux forces fluides non linéaires, nécessite l'emploi de méthodes numériques, comme par exemple les méthodes des éléments finis, des différences finies, multigrille ou hybride. Cependant, le temps de calcul pourrait considérablement augmenter.

Les paliers magnétiques actifs fournissent des forces de restitution calées sur les fréquences du rotor. Il conviendrait d'analyser, en détail, leur comportement en présence de source d'excitation multi-fréquentielle due au balourd et aux mouvements du support.

L'effet de balourd sur les vibrations transversales d'un rotor est minimisé avec l'équilibrage dynamique utilisant, par exemple, la méthode des coefficients d'influence. Cependant, en présence d'un mouvement du support, les vibrations peuvent aussi être réduites. Pour cela, dans le futur, il s'agirait de tester des rotations et des translations du support, qui ont la même fréquence que le balourd, et de vérifier si le rotor est bien équilibré sans faire appel à une méthode d'équilibrage.

Le problème traité dans cette thèse est de type déterministe. Une méthodologie prenant en compte des incertitudes sur les paramètres du système rotor embarqué-palier hydrodynamique non linéaire peut être développée pour une conception plus robuste d'un tel système. Il s'agirait, par exemple, de traiter des équations différentielles avec coefficients stochastiques (aléatoires) contenant les paramètres incertains et d'utiliser des méthodes d'expansion en chaos polynomial. Les résultats de l'analyse aléatoire du comportement dynamique obtenus par ladite expansion peuvent être validés par comparaison avec ceux de la simulation de MONTE CARLO qui est considérée comme méthode de référence parce qu'elle permet une analyse numérique directe sans complexification et fournit des résultats précis même si elle est coûteuse en temps de calcul par rapport à un problème déterministe.

La thèse traite l'influence de la mobilité du support infiniment rigide. Dans la pratique, comme le socle de la machine tournante peut être flexible, il conviendrait de le coupler à la dynamique du rotor.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ADILETTA G., GUIDO A.R., ROSSI C. Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part I: Theoretical analysis. *Nonlinear Dynamics*, 1997, vol. 14, n° 1, pp. 57-87.
- [2] ADILETTA G., GUIDO A.R., ROSSI C. Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part II: Experimental analysis. *Nonlinear Dynamics*, 1997, vol. 14, n° 2, pp. 157-189.
- [3] ALAM M., NELSON H.D. A blade loss response spectrum for flexible rotor systems. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1985, vol. 107, n° 1, pp. 197-204.
- [4] ANAND V.B. *Computer graphics and geometric modeling for engineers*. New York : Wiley, 1993.
- [5] ASSIS RODRIGUES F. Etude de la dynamique non linéaire d'amortisseurs du type squeeze film. Thèse LTDS. Lyon : Ecole Centrale de Lyon, 2003, 248 p.
- [6] BACHELET L. Comportement dynamique d'un rotor embarqué sous sollicitations aléatoires. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2008, 167 p.
- [7] BACHELET L., DRIOT N., FERRARIS G. Comportement dynamique des rotors embarqués sous sollicitations aléatoires. Actes du XV^{ème} Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, 14-16 juin 2006, Ecully, France.
- [8] BACHELET L., DRIOT N., FERRARIS G. Rotors under seismic excitation: A spectral approach. Proceedings of IFToMM 7th International Conference on Rotor Dynamics, 25-28 September 2006, Vienna, Austria.
- [9] BACHELET L., DRIOT N., FERRARIS G. Comportement dynamique d'un rotor embarqué par un mouvement de translation aléatoire. Actes du 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, 27-31 août 2007, Grenoble, France.
- [10] BACHELET L., DRIOT N., FERRARIS G., POIRION F. Dynamical behavior of a rotor under rotational random base excitation. Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 4-7 September 2007, Las Vegas, Nevada, USA.
- [11] BACHSCHMID N., PENNACCHI P., TANZI E. *Cracked Rotors*. Berlin : Springer, 2010.
- [12] BAGUET S., VELEX P. Influence of the nonlinear dynamic behavior of journal bearings on gear-bearing assemblies. Proceedings of the ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 24-28 September 2005, Long Beach, California, USA.
- [13] BAGUET S., JACQUENOT G. Nonlinear couplings in a gear-shaft-bearing system. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, vol. 45, n° 12, pp. 1777-1796.
- [14] BAUCHAU O.A., NIKISHKOV Y.G. An implicit Floquet analysis for rotorcraft stability evaluation. *Journal of the American Helicopter Society*, 2001, vol. 46, n° 3, pp. 200-209.
- [15] BELEY-SAYETTAT A. Effet des dissymétries et effet sismique en dynamique des rotors. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1994, 159 p.
- [16] BERLIOZ A., DER HAGOPIAN J., DUFOUR R., DRAOUI E. Dynamic behavior of a drill-string: experimental investigation of lateral instabilities. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, vol. 118, n° 3, pp. 292-298.

- [17] BERLIOZ A., DUFOUR R., SINHA S.C. Bifurcation in a nonlinear autoparametric system using experimental and numerical investigations. *Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 23, n° 2, pp. 175-187.
- [18] BONELLO P., BRENNAN M.J. Modelling the dynamic behaviour of a supercritical rotor on a flexible foundation using the mechanical impedance technique. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 239, n° 3, pp. 445-466.
- [19] BROWN R.D., ADDISON P., CHAN A.H.C. Chaos in the unbalance response of journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, 1994, vol. 5, n° 4, pp. 421-432.
- [20] CAMERON T.M., GRIFFIN J.H. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1989, vol. 56, n° 1, pp. 149-154.
- [21] CAVALCA K.L., CAVALCANTE P.F., OKABE E.P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005, vol. 19, n° 1, pp. 157-174.
- [22] CHATELET E., DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G. Etude de la stabilité des rotors par une approche d'échelles multiples. Actes du XIV^{ème} Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, 16-18 Juin 2004, Ecully, France.
- [23] CHEN L.-W., KU D.-M. Dynamic stability of a cantilever shaft-disk system. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1992, vol. 114, n° 3, pp. 326-329.
- [24] CHEN C.-L., YAU H.-T. Chaos in the imbalance response of a flexible rotor supported by oil film bearings with non-linear suspension. *Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 16, n° 1, pp. 71-90.
- [25] CHEN C.-K., YAU H.-T. Bifurcation in a flexible rotor supported by short journal bearings with nonlinear suspension. *Journal of Vibration and Control*, 2001, vol. 7, n° 5, pp. 653-673.
- [26] CHEN Y., ZHU C. Active vibration control based on linear matrix inequality for rotor system under seismic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 314, n° 1-2, pp. 53-69.
- [27] CHOI Y.-S., NOAH S.T. Nonlinear steady-state response of a rotor-support system. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1987, vol. 109, n° 3, pp. 255-261.
- [28] CHU F., ZHANG Z. Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol. 210, n° 1, pp. 1-18.
- [29] COWPER G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, n° 2, pp. 335-340.
- [30] CRESPO DA SILVA M.R.M. Intermediate dynamics complemented with simulations and animations. New York : McGraw-Hill, 2004.
- [31] DA SILVA TUCKMANTEL F.W., CAVALCA K.L., DE CASTRO H.F., FELSCHER P., MARKERT R. An analysis on the supporting structure representative model in rotating systems. Proceedings of the Tenth International Conference on Vibration Problems, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic.
- [32] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Dynamique d'un rotor embarqué soumis à des excitations combinées de la base. Actes du 20^{ème} Congrès Français de Mécanique, 29 août au 2 septembre 2011, Besançon, France.
- [33] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Steady-state response of a rotor excited by combined rotational and translational base motions. Proceedings of the Tenth International Conference on Vibration Problems, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic.
- [34] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Effect of support sinusoidal motions on the vibration of an on-board rotor-bearing system. Actes du XVIII^{ème} Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, 3-5 juillet 2012, Clamart, France.
- [35] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Investigation on the dynamics of an on-board rotor-bearing system. Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 12-15 August 2012, Chicago, Illinois, USA.
- [36] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Dynamic analysis of a harmonically excited on-board rotor-bearing system. Proceedings of the Tenth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 11-13 September 2012, London, United Kingdom.
- [37] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Vibrations non linéaires d'un rotor embarqué monté sur paliers hydrodynamiques. Actes du 21^{ème} Congrès Français de Mécanique, 26-30 août 2013, Bordeaux, France.
- [38] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333, n° 10, pp. 2774-2799.

- [39] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Chaotic motion of an on-board rotor mounted on fluid film bearings. Actes du XIX^{ème} Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, 17-19 juin 2014, Aix en Provence, France.
- [40] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Bifurcation analysis of a non-linear on-board rotor-bearing system. Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 17-20 August 2014, Buffalo, New York, USA.
- [41] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Steady-state dynamic behavior of an on-board rotor under combined base motions. Journal of Vibration and Control, 2014, vol. 20, n° 15, pp. 2254-2287.
- [42] DAS A.S., DUTT J.K., RAY K. Active vibration control of unbalanced flexible rotor-shaft systems parametrically excited due to base motion. Applied Mathematical Modelling, 2010, vol. 34, n° 9, pp. 2353-2369.
- [43] DEMAILLY D. Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel : application à la dynamique rotor. Thèse LTDS. Lyon : Ecole Centrale de Lyon, 2003, 213 p.
- [44] DIDIER J., SINOUE J.-J., FAVERJON B. Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties. Journal of Sound and Vibration, 2012, vol. 331, n° 3, pp. 671-703.
- [45] DRIOT N., LAMARQUE C.H., BERLIOZ A. Theoretical and experimental analysis of a base-excited rotor. ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2006, vol. 1, n° 3, pp. 257-263.
- [46] DUCHEMIN M. Contribution à l'étude du comportement dynamique d'un rotor embarqué. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 2003, 128 p.
- [47] DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G. Modélisation du comportement dynamique d'un rotor embarqué. Actes du colloque de Giens, 2001.
- [48] DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G. Comportement dynamique d'un rotor soumis à un choc : simulation - expérimentation. Actes du 15^{ème} Congrès Français de Mécanique, 3 au 5 septembre 2001, Nancy, France.
- [49] DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2006, vol. 128, n° 5, pp. 576-585.
- [50] DUFOUR R., BERLIOZ A. Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1998, vol. 120, n° 2, pp. 461-467.
- [51] EDWARDS S., LEES A.W., FRISWELL M.I. Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down. Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 232, n° 5, pp. 963-992.
- [52] EHRICH F.F. High order subharmonic response of high speed rotors in bearing clearance. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1988, vol. 110, n° 1, pp. 9-16.
- [53] EHRICH F.F. Some observations of chaotic vibration phenomena in high-speed rotordynamics. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1991, vol. 113, n° 1, pp. 50-57.
- [54] EL-SAEIDY F.M.A., STICHER F. Dynamics of a rigid rotor linear/nonlinear bearings system subject to rotating unbalance and base excitations. Journal of Vibration and Control, 2010, vol. 16, n° 3, pp. 403-438.
- [55] EVAN-IWANOWSKI R.M. Resonance oscillations in mechanical systems. New York : Elsevier, 1976.
- [56] FENG N., HAHN E. Identification of the modal parameters of a flexibly supported rigid casing. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2003, vol. 125, n° 1, pp. 184-192.
- [57] FENG N., HAHN E. Rotor-model-based identification of foundations in rotating machinery using modal parameters. Proceedings of the Tenth International Conference on Vibration Problems, 5-8 September 2011, Prague, Czech Republic.
- [58] FERREIRA J.V., SERPA A.L. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. Journal of Sound and Vibration, 2005, vol. 284, n° 1-2, pp. 133-149.
- [59] FLOWERS G.T., MARGITHU D.B., SZASZ G. The application of Floquet methods in the analyses of rotordynamic systems. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 218, n° 2, pp. 350-360.
- [60] FRÊNE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M. Hydrodynamic lubrication bearings and thrust bearings. Amsterdam : Elsevier Science, 1997.
- [61] FRIEDMANN P.P. Numerical methods for the treatment of periodic systems with applications to structural dynamics and helicopter rotor dynamics. Computers and Structures, 1990, vol. 35, n° 4, pp. 329-347.

- [62] FRIEDMANN P.P., HAMMOND C.E., WOO T.-H. Efficient numerical treatment of periodic systems with applications to stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, vol. 11, n° 7, pp. 1117-1136.
- [63] FRULLA G. Rigid rotor dynamic stability using Floquet theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2000, vol. 19, n° 1, pp. 139-150.
- [64] GAGANIS B.J., ZISIMOPOULOS A.K., NIKOLAKOPOULOS P.G., PAPADOPOULOS C.A. Modal analysis of rotor on piecewise linear journal bearings under seismic excitation. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, vol. 121, n° 2, pp. 190-196.
- [65] GENTA G. Whirling of unsymmetrical rotors - a finite-element approach based on complex coordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol. 124, n° 1, pp. 27-53.
- [66] GENTA G. *Vibration of structures and machines*. New York : Springer, 1995.
- [67] GENTA G. *Dynamics of rotating systems*. New York : Springer, 2005.
- [68] GJIKA K., SAN ANDRÉS L., LARUE G.D. Nonlinear dynamic behavior of turbocharger rotor-bearing systems with hydrodynamic oil film and squeeze film damper in series: Prediction and experiment. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 5, n° 4, pp. 041006-1 - 041006-8.
- [69] GNIELKA P. Modal balancing of flexible rotors without test runs: an experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, vol. 90, n° 2, pp. 157-172.
- [70] GRISIN S. Comportement dynamique de rotors parallèles non symétriques liés par engrenage. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1997, 112 p.
- [71] GUILHEN P.M. Prédiction du comportement dynamique des rotors dans le cas d'équations à coefficients périodiques. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1988, 144 p.
- [72] GUILHEN P.M., BERTHIER P., FERRARIS G., LALANNE M. Instability and unbalance response of dissymmetric rotor-bearing systems. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1988, vol. 110, n° 3, pp. 288-294.
- [73] GÜMBEL L.K.R. Vergleich der ergebnisse der rechnerischen behandlung der legerschmierangproblem mit neueren versuchsresultaten. *Monatsbl. Berliner Berz Ver. Dtsch. Ing.*, 1921.
- [74] HAN Q., CHU F. Dynamic response of cracked rotor-bearing system under time-dependent base movements. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, vol. 332, n° 25, pp. 6847-6870.
- [75] HAN Q., CHU F. Dynamic behaviors of a geared rotor system under time-periodic base angular motions. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, vol. 78, n° 1, pp. 1-14.
- [76] HAN Q., DONG X., WEN B. Resonance capture of rotor system mounted on an elastically supported base. *Proceedings of IFToMM 8th International Conference on Rotor Dynamics*, 12-15 September 2010, Seoul, Korea.
- [77] HIBBELER R.C. *Engineering mechanics (Dynamics)*. New Jersey : Prentice Hall, 1997.
- [78] HIBBELER R.C. *Engineering mechanics (Statics)*. New Jersey : Prentice Hall, 2004.
- [79] HOLMES A.G., ETTLES C.M.M., MAYES I.W. The aperiodic behaviour of a rigid shaft in short journal bearings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, vol. 12, n° 4, pp. 695-702.
- [80] HORI Y., KATO T. Earthquake-induced instability of a rotor supported by oil film bearings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1990, vol. 112, n° 2, pp. 160-165.
- [81] IBRAHIM S.M., PATEL B.P., NATH Y. Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, vol. 44, n° 10, pp. 1073-1084.
- [82] IMBERT J.-F. *Analyse des structures par éléments finis*. Toulouse : Cépaduès-Éditions, 1995.
- [83] ISHIDA Y., LIU J., INOUE T., SUZUKI A. Vibrations of an asymmetrical shaft with gravity and nonlinear spring characteristics (isolated resonances and internal resonances). *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2008, vol. 130, n° 4, pp. 041004-1 - 041004-8.
- [84] JEDRZEJEWSKI F. *Introduction aux méthodes numériques*. Paris : Springer, 2005.
- [85] KANG Y., SHIH Y.-P., LEE A.-C. Investigation on the steady-state responses of asymmetric rotors. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1992, vol. 114, n° 2, pp. 194-208.
- [86] KANG Y., LIU C.-P., SHEEN G.-J. A modified influence coefficient method for balancing unsymmetrical rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 194, n° 2, pp. 199-218.

- [87] KANG Y., SHEEN G.-J., WANG S.-M. Development and modification of a unified balancing method for unsymmetrical rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 199, n° 3, pp. 349-368.
- [88] KANG Y., LEE Y.-G., CHEN S.-C. Instability analysis of unsymmetrical rotor-bearing systems using the transfer matrix method. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 199, n° 3, pp. 381-400.
- [89] KANG Y., CHANG Y.-P., TSAI J.-W., MU L.-H., CHANG Y.-F. An investigation in stiffness effects on dynamics of rotor-bearing-foundation systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 231, n° 2, pp. 343-374.
- [90] KANG Y., TSENG M.-H., WANG S.-M., CHIANG C.-P., WANG C.-C. An accuracy improvement for balancing crankshafts. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, vol. 38, n° 12, pp. 1449-1467.
- [91] KANG Y., LIN T.-W., CHANG Y.-J., CHANG Y.-P., WANG C.-C. Optimal balancing of flexible rotors by minimizing the condition number of influence coefficients. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, vol. 43, n° 7, pp. 891-908.
- [92] KHADER N. Stability analysis for the dynamic design of rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 207, n° 3, pp. 287-299.
- [93] KHONSARI M.M., CHANG Y.J. Stability boundary of non-linear orbits within clearance circle of journal bearings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, vol. 115, n° 3, pp. 303-307.
- [94] KIM Y.B., NOAH S.T. Bifurcation analysis for a modified Jeffcott rotor with bearing clearances. *Nonlinear Dynamics*, 1990, vol. 1, n° 3, pp. 221-241.
- [95] KIM Y.B., NOAH S.T. Response and bifurcation analysis of a MDOF rotor system with a strong nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 1991, vol. 2, n° 3, pp. 215-234.
- [96] KIM Y.B., NOAH S.T. Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear Jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 190, n° 2, pp. 239-253.
- [97] KIM Y.B., CHOI S.K. A multiple harmonic balance method for the internal resonant vibration of a non-linear Jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 208, n° 5, pp. 745-761.
- [98] KISHOR B., GUPTA S.K. On the dynamic analysis of a rigid rotor-gear pair-hydrodynamic bearing system. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1989, vol. 111, n° 3, pp. 234-240.
- [99] LALANNE M., FERRARIS G. *Rotordynamics prediction in engineering*. Chichester : Wiley, 1998.
- [100] LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J. *Mechanical vibrations for engineers*. Chichester : Wiley, 1984.
- [101] LAU S.L., CHEUNG Y.K. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1981, vol. 48, n° 4, pp. 959-964.
- [102] LAU S.L., CHEUNG Y.K., WU S.Y. A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1982, vol. 49, n° 4, pp. 849-853.
- [103] LAU S.L., CHEUNG Y.K., WU S.Y. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, vol. 50, n° 4a, pp. 871-876.
- [104] LEE C.-W., LEE S.-K. An efficient complex modal testing theory for asymmetric rotor systems: use of unidirectional excitation method. *Journal of Sound and Vibrations*, 1997, vol. 206, n° 3, pp. 327-338.
- [105] LEE A.S., KIM B.O., KIM Y.-C. A finite element transient response analysis method of a rotor-bearing system to base shock excitations using the state-space Newmark scheme and comparisons with experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 297, n° 3-5, pp. 595-615.
- [106] LEES A.W., SINHA J.K., FRISWELL M.I. Model-based identification of rotating machines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, n° 6, pp. 1884-1893.
- [107] LEVECQUE N., MAHFOUD J., VIOLETTE D., FERRARIS G., DUFOUR R. Vibration reduction of a single cylinder reciprocating compressor based on multi-stage balancing. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46, n° 1, pp. 1-9.
- [108] LI D., XU J. A method to determine the periodic solution of the non-linear dynamics system. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 275, n° 1-2, pp. 1-16.
- [109] LIN F., MENG G. Study on the dynamics of a rotor in a maneuvering aircraft. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2003, vol. 125, n° 3, pp. 324-327.

- [110] LU Y.J., JI L.F., ZHANG Y.F., WU Y., LIU Y.Y., YU L. Dynamic behaviours of the rotor non-linear system with fixed-tilting-pad journal bearings support. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2010, vol. 224, n° 10, pp. 1037-1047.
- [111] LU Y.J., ZHANG Y.F., DAI R., LIU H., YU L., HEI D., WANG Y. Non-linear analysis of a flexible rotor system with multi-span bearing supports. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2008, vol. 222, n° 2, pp. 87-95.
- [112] MAHFOUDH J. Contribution à l'équilibrage des machines tournantes. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1990, 139 p.
- [113] MICHELL A.G. Progress in fluid film lubrication. Trans. ASME, 51, M.S.P. 51. 21., 1929, pp. 153-163.
- [114] MOGENIER G. Identification et prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés en flexion. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2011, 347 p.
- [115] NANDI A., NEOGY S. An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame. Finite Elements in Analysis and Design, 2005, vol. 41, n° 14, pp. 1343-1364.
- [116] NATARAJ C., NELSON H.D. Periodic solutions in rotor dynamic systems with nonlinear supports: A general approach. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1989, vol. 111, n° 2, pp. 187-193.
- [117] NAYFEH A.H. Perturbation methods. New York : Wiley Interscience, 1973.
- [118] NAYFEH A.H., MOOK D.T. Nonlinear oscillations. New York : Wiley Interscience, 1979.
- [119] NELSON H.D. A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory. ASME Journal of Mechanical Design, 1980, vol. 102, n° 4, pp. 793-803.
- [120] NELSON H.D., McVAUGH J.M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. ASME Journal of Engineering for Industry, 1976, vol. 98, n° 2, pp. 593-600.
- [121] NOLAN V.J., SRI NAMACHCHIVAYA N. Almost-sure stability of linear gyroscopic systems. Journal of Sound and Vibration, 1999, vol. 227, n° 1, pp. 105-130.
- [122] OCVIRK F.W., DUBOIS G.B. Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximations of full journal bearing. NACA, Tech. rep.1157, 1953.
- [123] ONCESCU F., LAKIS A.A., OSTIGUY G. Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 245, n° 2, pp. 303-328.
- [124] NEVZAT ÖZGÜVEN H., LEVENT ÖZKAN Z., Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1984, vol. 106, n° 1, pp. 72-79.
- [125] PEETERS M., VIGUIÉ R., SÉRANDOUR G., KERSCHEN G., GOLINVAL J.-C. Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, vol. 23, n° 1, pp. 195-216.
- [126] PELETAN L. Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes-Application au contact rotor-stator. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2012, 163 p.
- [127] PELETAN L., BAGUET S., TORKHANI M., JACQUET-RICHARDET G. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. Nonlinear Dynamics, 2013, vol. 72, n° 3, pp. 671-682.
- [128] PINAY J. Essais embarqués en dynamique des rotors. Rapport Bachelorarbeit LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2014, 51 p.
- [129] PRZEMIENIECKI J.-S. Theory of matrix structural analysis. New York : Dover Publications, 1985.
- [130] RAFFA F.A., VATTA F. Equations of motion of an asymmetric Timoshenko shaft. Meccanica, 2001, vol. 36, n° 2, pp. 201-211.
- [131] RAO J.S. Rotordynamics. New York : Wiley, 1992.
- [132] SABUNCU M., EVRAN K. The dynamic stability of a rotating asymmetric cross-section Timoshenko beam subjected to lateral parametric excitation. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, vol. 42, n° 5, pp. 454-469.
- [133] SAMALI B., KIM K.B., YANG J.N. Random vibration of rotating machines under earthquake excitations. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1986, vol. 112, n° 6, pp. 550-565.

- [134] SARROUY E., SINOUE J.-J. Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - On the use of the harmonic balance methods. *Advances in Vibration analysis Research*, Rijeka : InTech, 2011.
- [135] SHEN G., XIAO Z., ZHANG W., ZHENG T. Nonlinear behavior analysis of a rotor supported on fluid-film bearings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2006, vol. 128, n° 1, pp. 35-40.
- [136] SHI M., WANG D., ZHANG J. Nonlinear dynamic analysis of a vertical rotor-bearing system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, vol. 27, n° 1, pp. 9-19.
- [137] SHIAU T.N., HWANG J.L. A new approach to the dynamic characteristic of undamped rotor-bearing systems. *ASME journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in design*, 1989, vol. 111, n° 4, pp. 379-385.
- [138] SHIAU T.N., HWANG J.L. Generalized polynomial expansion method for the dynamic analysis of rotor-bearing systems. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1993, vol. 115, n° 2, pp. 209-217.
- [139] SHIAU T.N., HWANG J.L., CHANG Y.B. A study on stability and response analysis of a nonlinear rotor system with mass unbalance and side load. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1993, vol. 115, n° 2, pp. 218-226.
- [140] SINOUE J.-J., Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, vol. 44, n° 9, pp. 1713-1732.
- [141] SOMMERFELD A. Zur hydrodynamischen theorie des schiermittelreibung. *Z. Angew. Lath. Phys.*, 1904, vol. 50, pp. 97-155.
- [142] SONI A.H., SRINIVASAN V. Seismic analysis of a gyroscopic mechanical system. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1983, vol. 105, n° 4, pp. 449-455.
- [143] SPEARS R.E., JENSEN S.R. Approach for selection of Rayleigh damping parameters used for time history analysis. *Proceedings of the ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Division Conference*, 26-30 July 2009, Prague, Czech Republic.
- [144] SRINIVASAN V., SONI A.H. Seismic analysis of a rotor-bearing system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1984, vol. 12, n° 3, pp. 287-311.
- [145] STIEBER W. *Das schwimmlager*. VDI, Berlin, 1933.
- [146] SUAREZ L.E., SINGH M.P., ROHANIMANESH M.S. Seismic response of rotating machines. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, vol. 21, n° 1, pp. 21-36.
- [147] SUBBIAH R., BHAT R.B., SANKAR T.S. Response of rotors subjected to random support excitations. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1985, vol. 107, n° 4, pp. 453-459.
- [148] SUBRAMANIAN S., NARAYANAN S. Stochastic stability of gyroscopic systems under random parametric excitations. *ASCE Engineering Mechanics*, 1995, pp. 946-949.
- [149] SUNDARARAJAN P., NOAH S.T. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method-Application to rotor systems. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, vol. 119, n° 1, pp. 9-20.
- [150] SUNDARARAJAN P., NOAH S.T. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems-Application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol. 214, n° 4, pp. 695-723.
- [151] SWIFT H.W. The stability of lubricating films in journal bearings. *Proc. Inst. Civil Eng.*, 1931, vol. 233, Part 1, pp. 267-322.
- [152] TAN T.H., LEE H.P., LENG G.S.B. Dynamic stability of a radially rotating beam subjected to base excitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 146, n° 3-4, pp. 265-279.
- [153] THOMAS M., LAVILLE F. *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys*. Presse de l'université du Québec, 2007.
- [154] TRAN D.M. *Etude du comportement dynamique des rotors flexibles*. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1981.
- [155] XU B., QU L., SUN R. The optimization technique-based balancing of flexible rotors without test runs. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 238, n° 5, pp. 877-892.

Références bibliographiques

- [156] VAN DE VORST E.L.B., FEY R.H.B., DE KRAKER A., VAN CAMPEN D.H. Steady-state behavior of flexible rotordynamic systems with oil journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, 1996, vol. 11, n° 3, pp. 295-313.
- [157] VILLA C., SINOUE J.-J., THOUVEREZ F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, vol. 13, n° 4, pp. 804-821.
- [158] VON GROLL G., EWINS D.J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 241, n° 2, pp. 223-233.
- [159] YAMAMOTO T., ISHIDA Y. *Linear and nonlinear rotordynamics: A modern treatment with applications*. New York : Wiley, 2001.
- [160] YAU H.-T., CHEN C.-K., CHEN C.-L. Chaos and bifurcation analysis of a flexible rotor supported by short journal bearings with non-linear suspension. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2000, vol. 214, n° 7, pp. 931-947.
- [161] ZHAO J.Y., LINNETT I.W., McLEAN L.J. Subharmonic and quasi-periodic motions of an eccentric squeeze film damper-mounted rigid rotor. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, vol. 116, n° 3, pp. 357-363.
- [162] ZHAO S., XU H., MENG G., ZHU J. Stability and response analysis of symmetrical single-disk flexible rotor-bearing system. *Tribology International*, 2005, vol. 38, n° 8, pp. 749-756.
- [163] ZHENG T., HASEBE N. An efficient analysis of high-order dynamical system with local nonlinearity. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, vol. 121, n° 3, pp. 408-416.
- [164] ZHENG T., HASEBE N. Nonlinear dynamic behaviors of a complex rotor-bearing system. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2000, vol. 67, n° 3, pp. 485-495.

CALCUL DES FONCTIONS t_1, t_2, t_3 ET t_4 DU CHAPITRE II

A.1 Calcul de la fonction $t_1=t_1(y,t)$

$$t_1 = \dot{u}_{o'}^2 + \dot{v}_{o'}^2 + \dot{w}_{o'}^2 \quad (\text{A.1})$$

$$t_1 = \left(\dot{u} + \dot{x}_o + (w + z_o)\omega^y - (y + y_o)\omega^z \right)^2 + \left(\dot{y}_o - (w + z_o)\omega^x + (u + x_o)\omega^z \right)^2 + \left(\dot{w} + \dot{z}_o + (y + y_o)\omega^x - (u + x_o)\omega^y \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

$$t_1 = \left((\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z) + \dot{u} + w\omega^y \right)^2 + \left((\dot{y}_o - z_o\omega^x + x_o\omega^z) - w\omega^x + u\omega^z \right)^2 + \left((\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y) + \dot{w} - u\omega^y \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

$$t_1 = \left(\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z \right)^2 + \dot{u}^2 + w^2\omega^{y2} + 2\left(\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z \right)\dot{u} + 2\left(\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z \right)w\omega^y + 2\dot{u}w\omega^y + \left(\dot{y}_o - z_o\omega^x + x_o\omega^z \right)^2 + w^2\omega^{x2} + u^2\omega^{z2} - 2\left(\dot{y}_o - z_o\omega^x + x_o\omega^z \right)w\omega^x + 2\left(\dot{y}_o - z_o\omega^x + x_o\omega^z \right)u\omega^z - 2uw\omega^x\omega^z + \left(\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y \right)^2 + \dot{w}^2 + u^2\omega^{y2} + 2\left(\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y \right)\dot{w} - 2\left(\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y \right)u\omega^y - 2\dot{w}u\omega^y \quad (\text{A.4})$$

$$t_1 = \left(\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z \right)^2 + \left(\dot{y}_o - z_o\omega^x + (x_o)\omega^z \right)^2 + \left(\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y \right)^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\left(\dot{x}_o + z_o\omega^y - (y_o + y)\omega^z \right)\left(\dot{u} + w\omega^y \right) + 2\left(\dot{z}_o + (y_o + y)\omega^x - x_o\omega^y \right)\left(\dot{w} - u\omega^y \right) - 2\left(\dot{y}_o - z_o\omega^x + x_o\omega^z \right)\left(w\omega^x - u\omega^z \right) + 2\left(\dot{u}w - \dot{w}u \right)\omega^y + w^2\omega^{x2} + \left(u^2 + w^2 \right)\omega^{y2} + u^2\omega^{z2} - 2uw\omega^x\omega^z \quad (\text{A.5})$$

A.2 Calcul de la fonction $t_2=t_2(y,t)$

$$t_2 = \omega^{x'2} + \omega^{y'2} \quad (\text{A.6})$$

$$t_2 = \left(\left(\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi \right) \cos \phi - \left(\left(\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi \right) \sin \theta + \left(\dot{\psi} + \omega^z \right) \cos \theta \right) \sin \phi \right)^2 + \left(\left(\left(\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi \right) \sin \theta + \left(\dot{\psi} + \omega^z \right) \cos \theta \right) \cos \phi + \left(\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi \right) \sin \phi \right)^2 \quad (\text{A.7})$$

$$t_2 = \left(\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi \right)^2 - \left(\left(\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi \right) \sin \theta + \left(\dot{\psi} + \omega^z \right) \cos \theta \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

Les angles de précession ψ et de nutation θ ainsi que leurs dérivées temporelles sont infiniment petits. Les fonctions trigonométriques des petits angles ψ et θ sont remplacées par leur développement en série de TAYLOR et les expressions obtenues sont limitées à l'ordre 2, c'est-à-dire :

$$\cos \psi \simeq 1 - \frac{\psi^2}{2} \quad (\text{A.9})$$

$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{A.10})$$

$$\sin \psi = \psi + o(\psi^3) \simeq \psi \quad (\text{A.11})$$

$$\sin \theta \simeq \theta \quad (\text{A.12})$$

Il vient :

$$t_2 = \left(\dot{\theta} + \omega^x \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \omega^y \psi \right)^2 + \left(\left(\omega^x \psi - \omega^y \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \right) \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)^2 \quad (\text{A.13})$$

$$t_2 = \left(\dot{\theta} + \omega^x - \frac{\psi^2}{2} \omega^x + \psi \omega^y \right)^2 + \left(\psi \theta \omega^x - \theta \omega^y + \frac{\psi^2 \theta}{2} \omega^y + \dot{\psi} + \omega^z - \frac{\dot{\psi} \theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} \omega^z \right)^2 \quad (\text{A.14})$$

En supprimant les termes comprenant des infiniment petits supérieurs à 2, il vient :

$$t_2 = \left(\dot{\theta} + \omega^x - \frac{\psi^2}{2} \omega^x + \psi \omega^y \right)^2 + \left(\psi \theta \omega^x - \theta \omega^y + \omega^z + \dot{\psi} - \frac{\theta^2}{2} \omega^z \right)^2 \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} t_2 = & \dot{\theta}^2 + \omega^{x2} + \frac{\psi^4}{4} \omega^{x2} + \psi^2 \omega^{y2} - \psi^2 \omega^{x2} + 2\psi \omega^x \omega^y + 2\dot{\theta} \omega^x - \psi^3 \omega^x \omega^y - \psi^2 \dot{\theta} \omega^x + 2\psi \dot{\theta} \omega^y + \psi^2 \theta^2 \omega^{x2} \\ & + \theta^2 \omega^{y2} + \omega^{z2} + \dot{\psi}^2 + \frac{\theta^4}{4} \omega^{z2} - 2\psi \theta^2 \omega^x \omega^y + 2\psi \theta \omega^x \omega^z + 2\dot{\psi} \psi \theta \omega^x - \psi \theta^3 \omega^x \omega^z - 2\theta \omega^y \omega^z - 2\dot{\psi} \theta \omega^y \\ & + \theta^3 \omega^y \omega^z + 2\dot{\psi} \omega^z - \theta^2 \omega^{x2} - \dot{\psi} \theta^2 \omega^z \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

En ne conservant que les termes contenant des infiniment petits d'ordres 0, 1 et 2, il vient :

$$\begin{aligned} t_2 = & \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta} \omega^x - 2(\dot{\psi} \theta - \dot{\theta} \psi) \omega^y + 2\dot{\psi} \omega^z - (\psi^2 - 1) \omega^{x2} + (\psi^2 + \theta^2) \omega^{y2} - (\theta^2 - 1) \omega^{z2} \\ & + 2\psi \theta \omega^x \omega^z + 2(\psi \omega^x - \theta \omega^z) \omega^y \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A.3 Calcul de la fonction $t_3=t_3(y,t)$

$$t_3 = \omega^{y^2} \quad (\text{A.18})$$

$$t_3 = \left(\dot{\phi} - (\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \sin \theta \right)^2 \quad (\text{A.19})$$

La dérivée temporelle de la rotation propre $\dot{\phi}$ est remplacée par la constante Ω . Les fonctions trigonométriques des petits angles ψ et θ sont remplacées par leur développement en série de TAYLOR en limitant les expressions obtenues à l'ordre 2 :

$$t_3 = \left(\Omega - \left(\omega^x \psi - \omega^y \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + (\dot{\psi} + \omega^z) \theta \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

$$t_3 = \left(\Omega - \psi \omega^x + \omega^y - \frac{\psi^2}{2} \omega^y + \frac{\psi \theta^2}{2} \omega^x - \frac{\theta^2}{2} \omega^y + \frac{\psi^2 \theta^2}{4} \omega^y + \dot{\psi} \theta + \theta \omega^z \right)^2 \quad (\text{A.21})$$

En négligeant les termes comportant des infiniment petits supérieurs à 2, il vient :

$$t_3 = \left((\Omega + \omega^y) - (\psi \omega^x - \theta \omega^z) + \left(\dot{\psi} \theta - \frac{\psi^2}{2} \omega^y - \frac{\theta^2}{2} \omega^y \right) \right)^2 \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}
t_3 = & (\Omega + \omega^y)^2 + (\psi\omega^x - \theta\omega^z)^2 + \left(\dot{\psi}\theta - \frac{\psi^2}{2}\omega^y - \frac{\theta^2}{2}\omega^y \right)^2 - 2(\Omega + \omega^y)(\psi\omega^x - \theta\omega^z) \\
& + 2(\Omega + \omega^y) \left(\dot{\psi}\theta - \frac{\psi^2}{2}\omega^y - \frac{\theta^2}{2}\omega^y \right) - 2(\psi\omega^x - \theta\omega^z) \left(\dot{\psi}\theta - \frac{\psi^2}{2}\omega^y - \frac{\theta^2}{2}\omega^y \right)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Les termes contenant des infiniment petits supérieurs à 2 sont supprimés :

$$t_3 = (\Omega + \omega^y)^2 + \psi^2\omega^{x2} + \theta^2\omega^{z2} + (\Omega + \omega^y)(2\dot{\psi}\theta - (\psi^2 + \theta^2)\omega^y - 2(\psi\omega^x - \theta\omega^z)) - 2\psi\theta\omega^x\omega^z \tag{A.24}$$

A.4 Calcul de la fonction $t_4=t_4(y,t)$

$$t_4 = \omega^{x'2} - \omega^{z'2} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left((\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \cos \phi - \left((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta \right) \sin \phi \right)^2 \\
& - \left((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta \right) \cos \phi + (\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \sin \phi \right)^2
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left((\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi)^2 - \left((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta \right)^2 \right) \cos 2\phi \\
& - 2(\dot{\theta} + \omega^x \cos \psi + \omega^y \sin \psi) \left((\omega^x \sin \psi - \omega^y \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \cos \theta \right) \sin 2\phi
\end{aligned} \tag{A.27}$$

La rotation propre ϕ est remplacée par Ωt . Les fonctions trigonométriques des petits angles ψ et θ sont remplacées par leur développement en série de TAYLOR en limitant les expressions obtenues à l'ordre 2, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left(\left(\dot{\theta} + \omega^x \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \omega^y \psi \right)^2 - \left(\left(\omega^x \psi - \omega^y \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \right) \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)^2 \right) \cos 2\Omega t \\
& - 2 \left(\dot{\theta} + \omega^x \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \omega^y \psi \right) \left(\left(\omega^x \psi - \omega^y \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \right) \theta + (\dot{\psi} + \omega^z) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \sin 2\Omega t
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left(\left(\dot{\theta} + \omega^x - \omega^x \frac{\psi^2}{2} + \omega^y \psi \right)^2 - \left(\omega^x \psi \theta - \omega^y \theta - \omega^y \frac{\psi^2 \theta}{2} + \omega^z + \dot{\psi} - \omega^z \frac{\theta^2}{2} - \frac{\dot{\psi} \theta^2}{2} \right)^2 \right) \cos 2\Omega t \\
& - 2 \left(\dot{\theta} + \omega^x - \omega^x \frac{\psi^2}{2} + \omega^y \psi \right) \left(\omega^x \psi \theta - \omega^y \theta - \omega^y \frac{\psi^2 \theta}{2} + \omega^z + \dot{\psi} - \omega^z \frac{\theta^2}{2} - \frac{\dot{\psi} \theta^2}{2} \right) \sin 2\Omega t
\end{aligned} \tag{A.29}$$

En supprimant les termes comprenant des infiniment petits supérieurs à 2, il vient :

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left(\left(\dot{\theta} + \omega^x - \frac{\psi^2}{2} \omega^x + \psi \omega^y \right)^2 - \left(\psi \theta \omega^x - \theta \omega^y + \omega^z + \dot{\psi} - \frac{\theta^2}{2} \omega^z \right)^2 \right) \cos 2\Omega t \\
& - 2 \left(\dot{\theta} + \omega^x - \frac{\psi^2}{2} \omega^x + \psi \omega^y \right) \left(\psi \theta \omega^x - \theta \omega^y + \omega^z + \dot{\psi} - \frac{\theta^2}{2} \omega^z \right) \sin 2\Omega t
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left(\dot{\theta}^2 + \omega^{x^2} + \frac{\psi^4}{4} \omega^{x^2} + \psi^2 \omega^{y^2} - \psi^2 \omega^{x^2} + 2\psi \omega^x \omega^y + 2\dot{\theta} \omega^x - \psi^3 \omega^x \omega^y - \psi^2 \dot{\theta} \omega^x + 2\psi \dot{\theta} \omega^y - \psi^2 \theta^2 \omega^{x^2} \right. \\
& - \theta^2 \omega^{y^2} - \omega^{z^2} - \dot{\psi}^2 + 2\psi \theta^2 \omega^x \omega^y - 2\psi \theta \omega^x \omega^z - 2\dot{\psi} \psi \theta \omega^x + \psi \theta^3 \omega^x \omega^z + 2\theta \omega^y \omega^z + 2\dot{\psi} \theta \omega^y - \theta^3 \omega^y \omega^z \\
& \left. - \frac{\theta^4}{4} \omega^{z^2} - 2\dot{\psi} \omega^z + \theta^2 \omega^{z^2} + \dot{\psi} \theta^2 \omega^z \right) \cos 2\Omega t \\
& - 2 \left(\psi \theta \omega^{x^2} - \theta \omega^x \omega^y + \omega^x \omega^z + \dot{\psi} \omega^x - \frac{\theta^2}{2} \omega^x \omega^z - \frac{\psi^3 \theta}{2} \omega^{x^2} + \frac{\psi^2 \theta}{2} \omega^x \omega^y - \frac{\psi^2}{2} \omega^x \omega^z - \frac{\dot{\psi} \psi^2}{2} \omega^x \right. \\
& + \frac{\psi^2 \theta^2}{4} \omega^x \omega^z + \psi^2 \theta \omega^x \omega^y - \psi \theta \omega^{y^2} + \psi \omega^y \omega^z + \dot{\psi} \psi \omega^y - \frac{\psi \theta^2}{2} \omega^y \omega^z + \dot{\theta} \psi \theta \omega^x - \dot{\theta} \theta \omega^y + \dot{\theta} \omega^z \\
& \left. + \dot{\psi} \dot{\theta} - \frac{\dot{\theta} \theta^2}{2} \omega^z \right) \sin 2\Omega t
\end{aligned} \tag{A.31}$$

En ne gardant que les termes comportant des infiniment petits d'ordres 0, 1 et 2, il vient :

$$\begin{aligned}
t_4 = & - \left(\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} \omega^x - 2(\dot{\psi} \theta + \dot{\theta} \psi) \omega^y + 2\omega^z \dot{\psi} + (\psi^2 - 1) \omega^{x^2} - (\psi^2 - \theta^2) \omega^{y^2} - (\theta^2 - 1) \omega^{z^2} \right. \\
& \left. + 2\psi \theta \omega^x \omega^z - 2(\psi \omega^x + \theta \omega^z) \omega^y \right) \cos 2\Omega t \\
& - \left(2\dot{\psi} \dot{\theta} + 2\dot{\psi} \omega^x + 2(\dot{\psi} \psi - \dot{\theta} \theta) \omega^y + 2\dot{\theta} \omega^z + 2\psi \theta (\omega^{x^2} - \omega^{y^2}) - (\psi^2 + \theta^2 - 2) \omega^x \omega^z \right. \\
& \left. - 2(\theta \omega^x - \psi \omega^z) \omega^y \right) \sin 2\Omega t
\end{aligned} \tag{A.32}$$

ANNEXE B

EFFETS CENTRIFUGES DUS A LA ROTATION

Lorsqu'une structure tourne autour d'un axe, des forces centrifuges (réactions centripètes) sont créées en raison de l'accélération normale et causent des contraintes dans le matériau soumis à la traction.

Soit une poutre de masse par unité de volume ρ_a , de section constante S_a , de longueur l_a et d'abscisses y_1 et y_2 tournant à la vitesse angulaire ω^x autour de l'axe Ox , voir la figure **FIG. B.1**. Un élément d'abscisses y et y_2 est isolé pour faire apparaître les réactions centripètes internes égales et opposées aux forces centrifuges. Sa masse s'exprime par :

$$m_{el} = \rho_a S_a (l_a - (y - y_1)) = \rho_a S_a (l_a + y_1 - y) \quad (\text{B.1})$$

L'abscisse de son centre de masse C selon l'axe longitudinal Oy est :

$$y_c = y + \frac{(l_a - (y - y_1))}{2} = \frac{(l_a + y_1 + y)}{2} \quad (\text{B.2})$$

La deuxième loi de NEWTON est appliquée à l'élément isolé selon la direction Oy , voir la figure **FIG. B.1** :

$$F^y = m_{el} a_C^y \quad (\text{B.3})$$

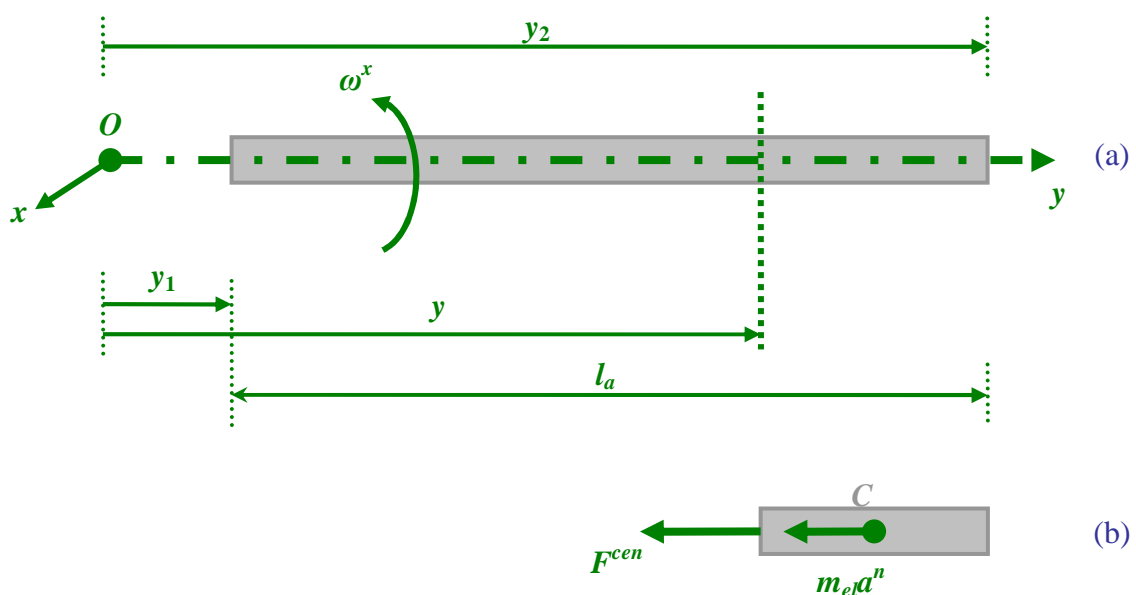


FIG. B.1 : (a) Poutre tournant autour de l'axe Ox , (b) Diagramme du corps libre

L'accélération selon l'axe Oy est normale, ce qui donne :

$$\begin{aligned} F^{cen} &= m_{el} a^n = m_{el} \times \omega^{x2} y_c \\ &= \rho_a S_a (l_a + y_1 - y) \times \omega^{x2} \frac{(l_a + y_1 + y)}{2} \end{aligned} \quad (B.4)$$

soit :

$$F^{cen} = \frac{\rho_a S_a}{2} \left((l_a + y_1)^2 - y^2 \right) \omega^{x2} \quad (B.5)$$

Les contraintes normales longitudinales engendrées dans le matériau sont calculées par :

$$\sigma^{yy} = \frac{F^{cen}}{S_a} = \frac{\rho_a}{2} \left((l_a + y_1)^2 - y^2 \right) \omega^{x2} \quad (B.6)$$

Les déformations longitudinales sont alors données par :

$$\varepsilon^{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma^{yy}}{E_a} = \frac{F^{cen}}{E_a S_a} \quad (B.7)$$

alors :

$$F^{cen} = E_a S_a \frac{\partial v}{\partial y} \quad (B.8)$$

où :

- E_a est le module d'YOUNG de la poutre,
- v est le déplacement longitudinal suivant l'axe Oy .

CARACTERISTIQUES STATIQUES ET DYNAMIQUES DES PALIERS HYDRODYNAMIQUES

La présente annexe a pour objectif d'exposer les équations de base qui gouvernent les comportements statique et dynamique des paliers circulaires hydrodynamiques. Les autres géométries de paliers fluides peuvent être traitées de manière très similaire. Le calcul du champ de pression dans le film hydrodynamique passe par la résolution de l'équation de REYNOLDS et demande le plus fréquemment l'emploi des méthodes numériques (éléments finis ou différences finies). Cependant, les paliers courts considérés ici rendent possible l'intégration analytique de l'équation de REYNOLDS. Ce traitement analytique, qui conduit aux forces hydrodynamiques du palier, sert à minimiser de manière importante le temps de calcul pour la simulation des rotors embarqués exigeant normalement des temps de calcul longs.

C.1 Palier en régime laminaire

C.1.1 Description de base, principes et hypothèses

La figure **FIG. C.1** montre une représentation simple d'un palier circulaire hydrodynamique. Ce dernier également connu sous le nom « palier lisse » est constitué d'un coussinet fixe (en bronze ou en acier) contenant un arbre tournant (généralement en acier) et un film d'huile séparant ces deux composants. Les points O et O' représentent respectivement le centre du palier et le centre géométrique de l'arbre. Le rayon et la longueur du palier sont respectivement r_p et l_p . En général, un palier lisse est schématisé par deux cercles de rayons voisins et la connaissance des caractéristiques précédentes permet de définir trois grandeurs :

- le jeu radial du palier $j_p = r_p - r_a$ (où r_a est le rayon de l'arbre),
- le rapport j_p/r_p dit « jeu relatif » (de l'ordre de 10^{-3}),
- le rapport l_p/d_p de la longueur au diamètre du palier (où $d_p = 2r_p$).

La figure **FIG. C.1** présente aussi les trois phases observées lors de la mise en route d'un palier hydrodynamique sous une charge statique W_r créée par le poids du rotor (ensemble disque/arbre).

A l'arrêt, voir la figure **FIG. C.1(a)**, le coussinet et l'arbre sont en contact. La génératrice commune entre eux est opposée à la charge W_r appliquée par le rotor et la distance OO' entre les centres du palier et de l'arbre est égale au jeu radial j_p .

Au démarrage (figure **FIG. C.1(b)**), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet. Dans ce cas, le régime de lubrification est dit « mixte » parce que le film lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent constitué à la fois par le coussinet et par l'arbre.

Dès que la vitesse de rotation du rotor devient stabilisée et suffisante, un champ de pression de fluide dans le palier hydrodynamique est généré et opposé à la charge W_r (figure **FIG. C.1(c)**). Le régime de lubrification correspondant à cette configuration est appelé « régime hydrodynamique établi ».

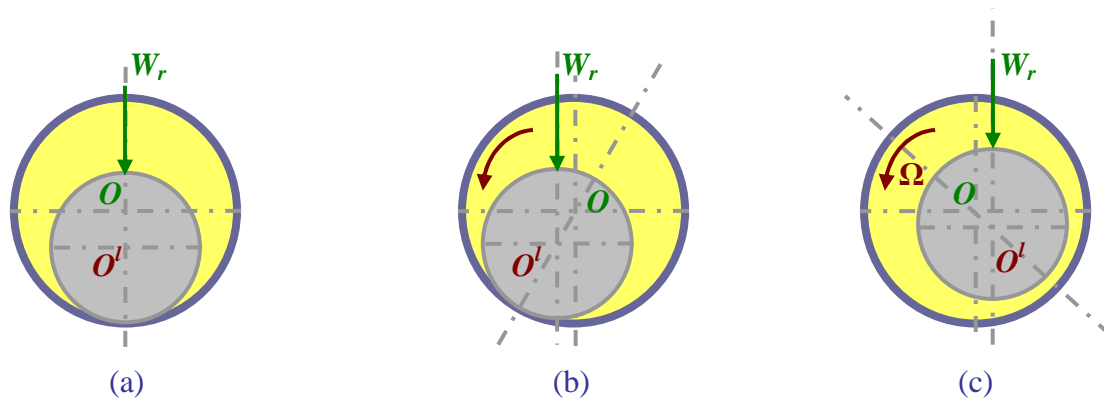


FIG. C.1 : Vue schématique d'un palier hydrodynamique et phases rencontrées lors de sa mise en route

Alors à une vitesse de rotation constante Ω du rotor et pour une charge statique constante W_r (voir la figure FIG. C.2), le centre de l'arbre O' dans le palier ne coïncide pas avec le centre O du palier et occupe une position d'équilibre statique C_p^0 définie par le vecteur des déplacements $\{\delta_p^0\} = \langle u_p^0, w_p^0 \rangle_R^T$ exprimé dans le repère lié au support R (Chapitre II) ou de manière équivalente par l'intermédiaire du repère polaire attaché au palier R^{po} (ta, ra), c'est-à-dire à la fois par l'excentricité statique $e_p^0 = \|\{\delta_p^0\}\|$ du centre géométrique de l'arbre dans le palier et par l'angle de calage statique φ_p^0 entre la direction de la charge W_r et la ligne des centres OO' .

Lorsque le rotor est soumis à des efforts extérieurs dynamiques dépendant du temps, le centre géométrique de l'arbre décrit une trajectoire orbitale située à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est égal au jeu radial j_p du palier.

Le comportement du fluide, qui sépare l'arbre tournant du coussinet fixe, est maîtrisé par les équations de NAVIER-STOKES. La résolution de ces équations est un problème assez lourd. Compte tenu d'un certain nombre d'hypothèses, elles peuvent être réduites à une équation appelée « équation de REYNOLDS » qui lie le champ de pression de fluide lubrifiant aux caractéristiques du palier ainsi qu'aux déplacements et vitesses du centre de l'arbre dans le palier.

Dans le cadre de cette étude, le régime hydrodynamique établi est pris en compte et les hypothèses suivantes sont retenues :

- le milieu est continu et la zone de rupture est considérée comme un mélange homogène de fluide et de gaz,
- le fluide est newtonien, isovisqueux (viscosité ne varie pas suivant l'épaisseur du film de fluide) et incompressible,
- l'écoulement du fluide à travers le palier est isotherme, laminaire et permanent,
- la courbure du contact (du film de fluide) est négligée,
- il n'existe pas de glissement entre le fluide et les parois (surfaces) du contact,
- l'épaisseur du film d'huile mesurée dans la direction radiale est toujours très faible devant les autres dimensions du contact,
- les forces massiques extérieures sont négligeables,
- les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité et ne varient pas selon l'épaisseur du contact.

La procédure de calcul des performances statique et dynamique d'un palier à film de fluide peut se dérouler en six étapes :

- l'écriture de l'équation donnant l'épaisseur du film lubrifiant,
- l'écriture de l'équation de REYNOLDS correspondant à la configuration considérée de palier fluide,
- la définition des conditions aux limites sur la distribution de pression du film d'huile,
- l'obtention de cette dernière en intégrant l'équation de REYNOLDS,

- la définition des conditions aux limites liées aux forces hydrodynamiques,
- l'établissement des forces du palier par l'intégration de la distribution de pression et le calcul de la performance.

C.1.2 Transformation des repères

Comme indiqué précédemment, la position du centre géométrique de l'arbre dans le palier hydrodynamique peut être déterminée soit dans le repère cartésien lié au support R , soit dans le repère polaire R^{po} . Il s'agit alors de trouver la relation entre ces deux repères pour pouvoir passer d'un système de coordonnées à un autre (voir la figure FIG. C.3) :

$$\vec{ta} = -\cos \varphi_p \vec{x} + \sin \varphi_p \vec{z} \quad (C.1)$$

$$\vec{ra} = -\sin \varphi_p \vec{x} - \cos \varphi_p \vec{z} \quad (C.2)$$

Les deux équations précédentes s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{ta} \\ \vec{ra} \end{Bmatrix}_{R^{po}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p \\ \sin \varphi_p & \cos \varphi_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_R \quad (C.3)$$

avec :

$$\left[\mathfrak{R}_{R^{po}}^R \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p \\ \sin \varphi_p & \cos \varphi_p \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

où :

- $\left[\mathfrak{R}_{R^{po}}^R \right]$ est la matrice de rotation du repère polaire R^{po} par rapport au repère R .

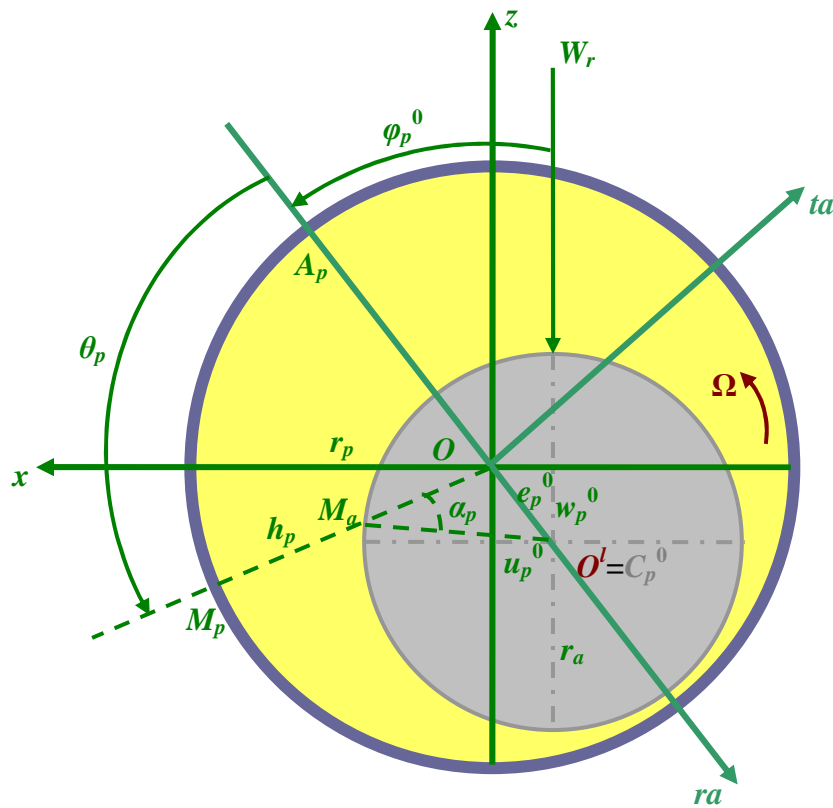


FIG. C.2 : Palier en régime hydrodynamique établi et épaisseur du film lubrifiant

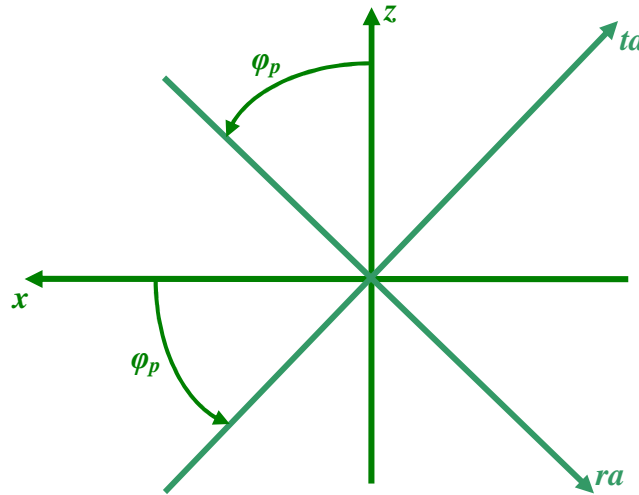


FIG. C.3 : Transformation entre le repère lié au support R et le repère polaire attaché au palier R^{po}

C.1.3 Épaisseur du film d'huile lubrifiante

L'équation de REYNOLDS fait intervenir l'épaisseur du film de fluide qui est habituellement calculée à l'aide d'un développement limité de l'espacement entre les surfaces du contact, c'est-à-dire entre le coussinet et l'arbre. Une hypothèse fréquemment utilisée consiste à ne pas prendre en considération les variations axiales de l'épaisseur du film et donc à négliger le désalignement de l'arbre par rapport au coussinet.

Soit une section droite du palier circulaire montrée sur la figure FIG. C.2. Le point M_p appartient à la surface intérieure du coussinet (surface 1 du contact) et est repéré par la coordonnée angulaire $\theta_p = (\overline{OA_p}, \overline{OM_p})$ et M_a appartient à la surface extérieure de l'arbre (surface 2). L'épaisseur du film d'huile est quantifiée dans la direction radiale, fonction des variations dans la direction circonférentielle et donnée par :

$$h_p = OM_p - OM_a = r_p - OM_a \quad (C.5)$$

c'est-à-dire :

$$h_p = r_a + j_p - OM_a \quad (C.6)$$

En appliquant la loi des sinus au triangle $O^l M_a O$, il vient :

$$\frac{OM_a}{\sin(\widehat{OO^l M_a})} = \frac{O^l M_a}{\sin(\widehat{M_a O O^l})} = \frac{OO^l}{\sin(\widehat{O^l M_a O})} \quad (C.7)$$

En utilisant les notations suivantes : $O^l M_a = r_a$, $OO^l = e_p$, $\sin(\widehat{M_a O O^l}) = \sin(\pi - \theta_p) = \sin \theta_p$ et $\sin(\widehat{O^l M_a O}) = \sin \alpha_p$, l'équation (C.7) devient :

$$\frac{OM_a}{\sin(\widehat{OO^l M_a})} = \frac{r_a}{\sin \theta_p} = \frac{e_p}{\sin \alpha_p} \quad (C.8)$$

donc :

$$\sin \alpha_p = \frac{e_p}{r_a} \sin \theta_p \quad (C.9)$$

et :

$$OM_a = r_a \frac{\sin(\widehat{OO^l M_a})}{\sin \theta_p} \quad (C.10)$$

D'autre part, l'angle $\widehat{OO^l M_a}$ est calculé de la manière suivante :

$$\widehat{OO^l M_a} = \pi - M_a \widehat{OO^l} - O^l \widehat{M_a O} = \pi - (\pi - \theta_p) - \alpha_p \quad (C.11)$$

soit :

$$\widehat{OO^l M_a} = \theta_p - \alpha_p \quad (C.12)$$

A présent, il est possible de trouver la valeur de $\sin(\widehat{OO^l M_a})$ comme suit :

$$\sin(\widehat{OO^l M_a}) = \sin(\theta_p - \alpha_p) = \sin \theta_p \cos \alpha_p - \cos \theta_p \sin \alpha_p \quad (C.13)$$

d'où :

$$\sin(\widehat{OO^l M_a}) = \sin \theta_p \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_p} - \cos \theta_p \sin \alpha_p \quad (C.14)$$

En introduisant l'équation (C.9) dans (C.14), l'expression finale est obtenue :

$$\sin(\widehat{OO^l M_a}) = \sin \theta_p \sqrt{1 - \left(\frac{e_p}{r_a} \sin \theta_p\right)^2} - \frac{e_p}{r_a} \cos \theta_p \sin \theta_p \quad (C.15)$$

En insérant l'équation (C.15) dans (C.10), il vient :

$$OM_a = r_a \sqrt{1 - \left(\frac{e_p}{r_a} \sin \theta_p\right)^2} - e_p \cos \theta_p \quad (C.16)$$

La quantité e_p/r_p (où $r_p \simeq r_a$) est très petite devant l'unité (d'habitude, de l'ordre de 10^{-3}). Donc le terme $\left(\frac{e_p}{r_a} \sin \theta_p\right)^2$ peut être négligé.

Enfin, l'expression de l'épaisseur du film d'huile dans le palier est donnée par :

$$h_p = j_p + e_p \cos \theta_p \quad (C.17)$$

ou par :

$$h_p = j_p (1 + \varepsilon_p \cos \theta_p) \quad (C.18)$$

où :

- $\varepsilon_p = e_p/j_p$ est l'excentricité relative (adimensionnée) et varie entre 0 et 1.

C.1.4 Equation de REYNOLDS pour un palier circulaire

L'équation de REYNOLDS est déduite à partir des trois équations fondamentales de la mécanique des milieux continus appliquées à un écoulement en film mince d'un fluide newtonien :

- la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_p u^{p_i})}{\partial s^{p_i}} = 0 \quad (C.19)$$

- la loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho_p \left(\frac{\partial u^{p_i}}{\partial t} + u^{p_j} \frac{\partial u^{p_i}}{\partial s^{p_j}} \right) = \rho_p f_{p_i} + \frac{\partial \sigma_{p_{ij}}}{\partial s^{p_j}} \quad (C.20)$$

- la loi de comportement rhéologique d'un fluide newtonien :

$$\sigma_{p_{ij}} = (-p_p + \lambda_p \vartheta_p) \delta_{p_{ij}} + 2\mu_p \varepsilon_{p_{ij}} \quad (C.21)$$

où :

- t et s^{p_i} sont respectivement les variables de temps et d'espace,
- u^{p_i} sont les composantes de la vitesse du fluide,
- ρ_p et μ_p sont la masse volumique et la viscosité du fluide,
- p_p et f_{p_i} sont la pression de fluide et les forces massiques extérieures,
- $\sigma_{p_{ij}}$ et $\varepsilon_{p_{ij}}$ sont les composantes des tenseurs des contraintes et des taux de déformations,
- λ_p , ϑ_p et $\delta_{p_{ij}}$ sont le coefficient de NAVIER, le taux de dilatation cubique et le symbole de KRONECKER.

L'équation de REYNOLDS peut être écrite en coordonnées cartésiennes s^{p_1} , s^{p_2} et s^{p_3} (relatives aux surfaces du contact) sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s^{p_1}} \left(\frac{\rho_p h_p^3}{\mu_p} \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_1}} \right) + \frac{\partial}{\partial s^{p_3}} \left(\frac{\rho_p h_p^3}{\mu_p} \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right) &= 6\rho_p (u_1^{p_1} - u_2^{p_1}) \frac{\partial h_p}{\partial s^{p_1}} + 6\rho_p (u_1^{p_3} - u_2^{p_3}) \frac{\partial h_p}{\partial s^{p_3}} \\ &+ 6h_p \frac{\partial}{\partial s^{p_1}} (\rho_p (u_1^{p_1} + u_2^{p_1})) + 6h_p \frac{\partial}{\partial s^{p_3}} (\rho_p (u_1^{p_3} + u_2^{p_3})) \quad (C.22) \\ &+ 12\rho_p u_2^{p_2} + 12h_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} \end{aligned}$$

où :

- $u_1^{p_1}$, $u_2^{p_1}$, $u_1^{p_2}$, $u_1^{p_3}$ et $u_2^{p_3}$ sont respectivement les composantes des vitesses (conditions cinématiques) du fluide aux surfaces 1 et 2 du contact dans les directions s^{p_1} , s^{p_2} et s^{p_3} comme vu en figure **FIG. C.4**.

Les coordonnées du centre O^I de l'arbre dans le palier circulaire (figure **FIG. C.5**) par rapport au support s'expriment dans le repère R par :

$$\overrightarrow{OO^I} = u_p \vec{x} + w_p \vec{z} \quad (C.23)$$

La position du point M_a par rapport au centre de l'arbre est définie dans le repère tournant R^I (voir le **Chapitre II**) par :

$$\overrightarrow{O^I M_a} = r_a \vec{x}^I \quad (C.24)$$

Alors la position du point M_a par rapport au support est donnée par :

$$\overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OO^I} + \overrightarrow{O^I M_a} = u_p \vec{x} + w_p \vec{z} + r_a \vec{x}^I \quad (C.25)$$

En calculant le vecteur vitesse du point M_a par rapport au support, il vient :

$$\vec{v}_{M_a} = \dot{u}_p \vec{x} + \dot{w}_p \vec{z} + r_a \dot{\vec{x}}^I \quad (C.26)$$

Les vecteurs unitaires \vec{x} et \vec{z} du repère R sont décrits en fonction des vecteurs unitaires \vec{x}^I et \vec{z}^I du repère R^I de la manière suivante (figure **FIG. C.5**) :

$$\vec{x} = \cos \Omega t \vec{x}^I + \sin \Omega t \vec{z}^I = \sin \beta_p \vec{x}^I - \cos \beta_p \vec{z}^I \quad (C.27)$$

$$\vec{z} = -\sin \Omega t \vec{x}^I + \cos \Omega t \vec{z}^I = \cos \beta_p \vec{x}^I + \sin \beta_p \vec{z}^I \quad (C.28)$$

avec :

$$\beta_p = \Omega t + \frac{\pi}{2} \quad (C.29)$$

En dérivant les équations (C.27) et (C.28) par rapport au temps et en identifiant les termes en $\sin \Omega t$ et $\cos \Omega t$, soit :

$$\dot{\vec{x}}^I = -\Omega \vec{z}^I \quad (C.30)$$

En substituant les équations (C.27), (C.28) et (C.30) dans (C.26), l'expression du vecteur vitesse du point M_a devient :

$$\vec{v}_{M_a} = (\dot{u}_p \sin \beta_p + \dot{w}_p \cos \beta_p) \vec{x}' + (-r_a \Omega - \dot{u}_p \cos \beta_p + \dot{w}_p \sin \beta_p) \vec{z}' \quad (C.31)$$

Puisque les rayons r_p et r_a sont très voisins, la courbure du film d'huile peut être négligée (d'après les hypothèses présentées au **Paragraphe C.1.1**). De plus, le coussinet du palier fluide est développé et approché par une surface plane fixe comme illustré en figure **FIG. C.6**. Les conditions cinématiques relatives aux surfaces du coussinet et de l'arbre dans les directions circonférentielle s^{p1} , radiale s^{p2} et axiale s^{p3} s'expriment alors par :

$$u_1^{p1} = 0 \quad ; \quad u_2^{p1} = (\dot{u}_p \sin \beta_p + \dot{w}_p \cos \beta_p) \sin \gamma_p - (-r_a \Omega - \dot{u}_p \cos \beta_p + \dot{w}_p \sin \beta_p) \cos \gamma_p \quad (C.32)$$

$$u_1^{p2} = 0 \quad ; \quad u_2^{p2} = -(\dot{u}_p \sin \beta_p + \dot{w}_p \cos \beta_p) \cos \gamma_p - (-r_a \Omega - \dot{u}_p \cos \beta_p + \dot{w}_p \sin \beta_p) \sin \gamma_p \quad (C.33)$$

$$u_1^{p3} = 0 \quad ; \quad u_2^{p3} = 0 \quad (C.34)$$

où :

- γ_p est la pente de la courbe représentant l'épaisseur radiale $h_p(s^{p1})$ du film fonction de la coordonnée circonférentielle s^{p1} .

L'utilisation de l'équation (C.17) et de la relation entre l'angle θ_p et la coordonnée s^{p1} conduit à :

$$\begin{aligned} \tan \gamma_p &= \frac{\partial h_p}{\partial s^{p1}} = \frac{1}{r_p} \frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} = -\frac{e_p}{r_p} \sin \theta_p \\ &= \frac{1}{r_p} \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p} \end{aligned} \quad (C.35)$$

avec (figures **FIG. C.5** et **FIG. C.6**) :

$$s^{p1} = r_p \theta_p \quad (C.36)$$

$$\beta_p \simeq \theta_p + \varphi_p \quad (C.37)$$

alors :

$$\partial s^{p1} = r_p \partial \theta_p \quad (C.38)$$

$$\partial \beta_p = \partial \theta_p \quad (C.39)$$

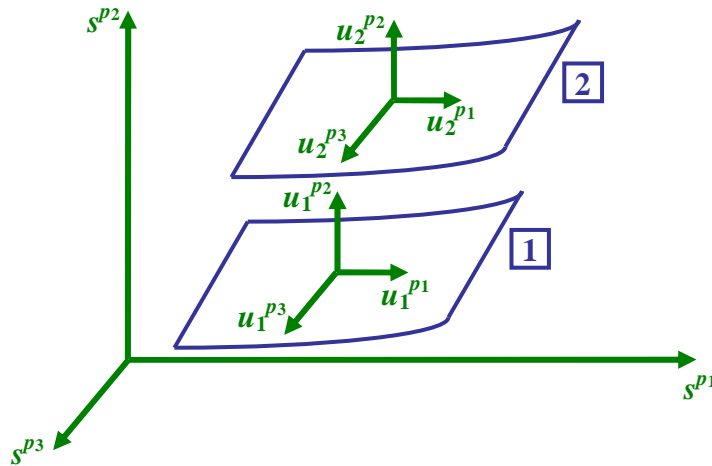


FIG. C.4 : Composantes cartésiennes des vitesses du fluide aux surfaces 1 et 2 du contact dans les directions s^{p1} , s^{p2} et s^{p3}

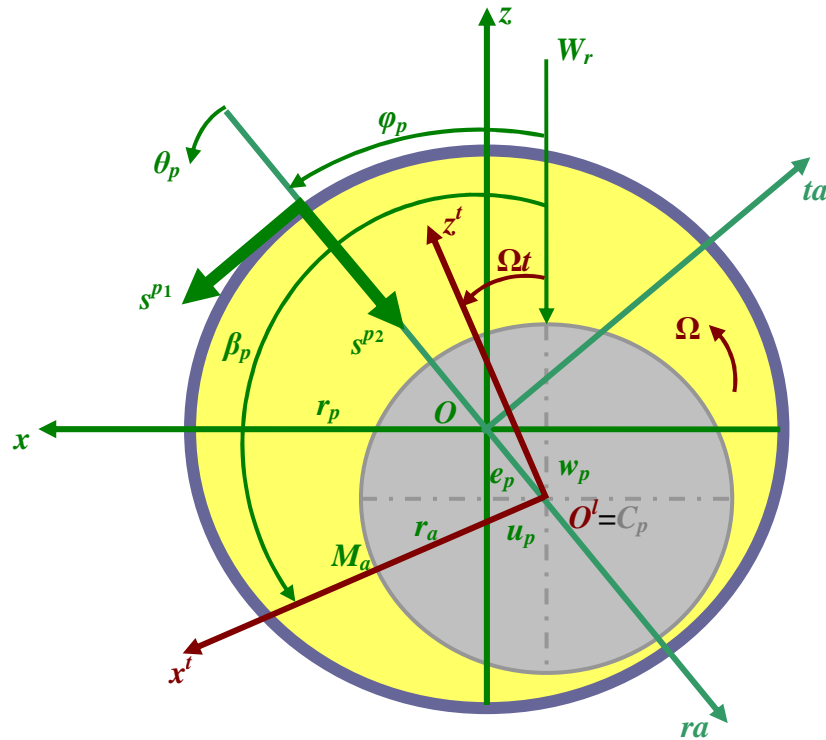


FIG. C.5 : Coordonnées du centre de l'arbre dans le palier par rapport au repère tournant R^t

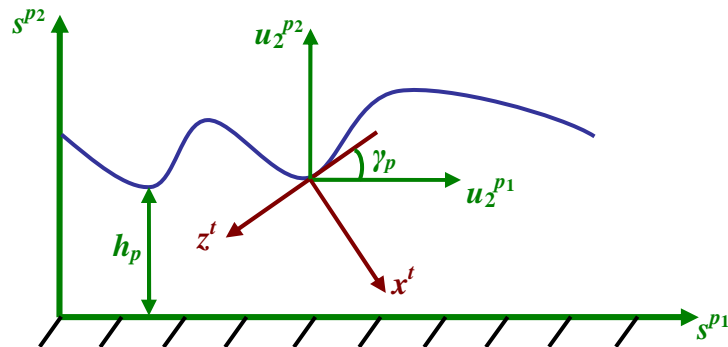


FIG. C.6 : Composantes circonférentielle et radiale des vitesses du fluide aux surfaces du contact dans un palier développé

La quantité e_p/r_p est très petite devant l'unité et un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 peut être effectué d'après l'équation (C.35) comme suit :

$$\cos \gamma_p \simeq 1 \quad ; \quad \sin \gamma_p \simeq \gamma_p = \frac{1}{r_p} \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p} \quad (C.40)$$

Alors certaines conditions cinématiques (C.32) et (C.33) sont réécrites :

$$u_2^{p1} = \frac{1}{r_p} (\dot{u}_p \sin \beta_p + \dot{w}_p \cos \beta_p) \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p} - (-r_a \Omega - \dot{u}_p \cos \beta_p + \dot{w}_p \sin \beta_p) \quad (C.41)$$

$$u_2^{p2} = -(\dot{u}_p \sin \beta_p + \dot{w}_p \cos \beta_p) - \frac{1}{r_p} (-r_a \Omega - \dot{u}_p \cos \beta_p + \dot{w}_p \sin \beta_p) \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p} \quad (C.42)$$

En remplaçant les conditions cinématiques par leurs valeurs dans l'équation (C.22), en utilisant les équations (C.38) ainsi que (C.39), en négligeant les termes en $\left(\frac{1}{r_p} \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p}\right)^2$ et en posant $r_p = r_a$, l'expression finale de l'équation de REYNOLDS en fonction de la coordonnée β_p est obtenue :

$$\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial}{\partial \beta_p} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial \beta_p} \right) + \frac{\partial}{\partial s^{p_3}} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right) = 6\mu_p \left(\Omega \frac{\partial h_p}{\partial \beta_p} - 2\dot{u}_p \sin \beta_p - 2\dot{w}_p \cos \beta_p \right) \quad (\text{C.43})$$

L'écriture de l'équation de REYNOLDS en utilisant les coordonnées polaires e_p et φ_p nécessite les changements de variable suivants :

$$u_p = -e_p \sin \varphi_p \quad (\text{C.44})$$

$$w_p = -e_p \cos \varphi_p \quad (\text{C.45})$$

En introduisant les équations (C.37), (C.44) et (C.45) dans (C.43), l'équation de REYNOLDS pour un palier circulaire hydrodynamique s'exprime en fonction de la coordonnée angulaire θ_p et prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial \theta_p} \right) + \frac{\partial}{\partial s^{p_3}} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right) = 6\mu_p \left((\Omega - 2\dot{\varphi}_p) \frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} + 2\dot{e}_p \cos \theta_p \right) \quad (\text{C.46})$$

Afin de calculer le champ de pression dans l'épaisseur du film lubrifiant, l'équation de REYNOLDS (C.46) doit être résolue sur tout le domaine représenté sur la figure **FIG. C.6** après avoir pris en compte les conditions aux limites suivantes associées à la pression de fluide hydrodynamique :

➤ selon s^{p_3} :

$$p_p \left(\theta_p, s^{p_3} = -\frac{l_p}{2} \right) = P_1 \quad ; \quad p_p \left(\theta_p, s^{p_3} = \frac{l_p}{2} \right) = P_2 \quad ; \quad \forall \theta_p \quad (\text{C.47})$$

➤ selon θ_p :

$$p_p \left(\theta_p = 0, s^{p_3} \right) = p_p \left(\theta_p = 2\pi, s^{p_3} \right) \quad ; \quad \forall s^{p_3} \quad (\text{C.48})$$

où :

- P_1 et P_2 représentent les pressions extérieures aux extrémités du palier.

C.1.5 Conditions aux limites relatives aux forces hydrodynamiques

Puisque la géométrie du film d'huile pour un palier en fonctionnement stationnaire est convergente puis divergente en fonction de l'angle θ_p , une rupture du film lubrifiant peut survenir dans le divergent et un phénomène de cavitation est produit lorsque la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante du fluide. Les conditions aux limites associées à cette situation sont restreintes dans trois types présentés ci-après dans le but de calculer les forces fluides dans le palier.

C.1.5.1 Conditions de SOMMERFELD

SOMMERFELD [141] considère que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ce cas, le champ de pression de fluide hydrodynamique est antisymétrique par rapport à l'angle $\theta_p = \pi$ (c'est-à-dire qu'une partie du champ de pression peut prendre des valeurs négatives) et la ligne des centres OO' est une droite perpendiculaire à la direction de la charge W_r (voir la figure **FIG. C.7**).

Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers hydrodynamiques qui fonctionnent sous de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées parce que sans quoi, des pressions négatives sont produites dans le film de fluide, ce qui est physiquement inacceptable.

C.1.5.2 Conditions de GÜMBEL

A la suite des travaux de SOMMERFELD, GÜMBEL [73] propose les conditions aux limites suivantes :

$$p_p(\theta_p = 0, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \forall s^{p_3} \tag{C.49}$$

$$p_p(\theta_p = \pi, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \forall s^{p_3} \tag{C.50}$$

$$p_p(\theta_p, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \text{si } \pi < \theta_p < 2\pi \quad \text{et } \forall s^{p_3} \tag{C.51}$$

En d'autres termes, les pressions de fluide négatives dans la solution de SOMMERFELD sont éliminées (voir la figure FIG. C.8). Ces conditions signifient qu'une discontinuité apparaît dans l'écoulement à l'angle $\theta_p = \pi$. Elles ne sont physiquement pas acceptables mais sont couramment employées dans le cas du palier court car elles permettent d'obtenir des résultats très proches de ceux expérimentaux.

C.1.5.3 Conditions de REYNOLDS

Quelques années après la publication de l'hypothèse de GÜMBEL, SWIFT [151] et STIEBER [145] proposent indépendamment des conditions aux limites qui respectent la continuité du débit. Ils assument que la cavitation se déroule à partir d'un angle inconnu θ_p^{RE} auquel la pression de fluide et le gradient de pression sont nuls :

$$p_p(\theta_p = 0, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \forall s^{p_3} \tag{C.52}$$

$$p_p(\theta_p = \theta_p^{RE}, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \forall s^{p_3} \tag{C.53}$$

$$\left. \frac{\partial p_p}{\partial \theta_p} \right|_{(\theta_p = \theta_p^{RE}, s^{p_3})} = \left. \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right|_{(\theta_p = \theta_p^{RE}, s^{p_3})} = 0 \quad ; \quad \forall s^{p_3} \tag{C.54}$$

$$p_p(\theta_p, s^{p_3}) = 0 \quad ; \quad \text{si } \theta_p^{RE} < \theta_p < 2\pi \quad \text{et } \forall s^{p_3} \tag{C.55}$$

Deux zones peuvent être distinguées dans le palier hydrodynamique (voir la figure FIG. C.9) :

- une zone active dans laquelle le champ de pression hydrodynamique est positif et le film d'huile est complet pour des valeurs de θ_p comprises entre 0 et θ_p^{RE} ,
- une zone inactive avec une pression nulle et dans laquelle la cavitation peut apparaître en régime dynamique pour des valeurs de θ_p comprises entre θ_p^{RE} et 2π .

Ces conditions aux limites sont celles qui donnent les solutions les plus précises. Elles ont été vérifiées dans de nombreux travaux expérimentaux.

Remarque : dans ce qui suit, le palier court est considéré en raison de la possibilité de chercher analytiquement ses caractéristiques statiques et dynamiques en utilisant les conditions aux limites de GÜMBEL (ce qui réduit considérablement le temps de calcul pour la simulation numérique) ainsi que de la validation de ses résultats par rapport aux études expérimentales comme évoqué ci-dessus (ce qui justifie le choix de ces conditions).

C.2 Palier en régime statique

C.2.1 Résolution de l'équation de REYNOLDS et forces du film de fluide

Par définition, l'équation de REYNOLDS est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. La résolution de sa forme générale est relativement longue lorsque celle-ci est réalisée en utilisant une procédure numérique multi-itérative. De plus, l'équation de REYNOLDS n'accepte habituellement pas de solutions analytiques. Cependant, dans certains cas, des études la simplifient et lui ajoutent des hypothèses qui restreignent sa gamme d'application mais rendent sa solution analytique et divisent le temps de calcul.

Une solution analytique unidimensionnelle moins satisfaisante d'un point de vue analytique mais plus représentative d'un point de vue physique a été émise pour la première fois par MICHELL [113] et été reprise

et développée par **OCVIRK et DUBOIS [122]** lorsque la longueur du palier est très faible devant son diamètre (palier court). Dans ce cas, le gradient de pression circonférentiel $\frac{1}{r_p} \frac{\partial p_p}{\partial \theta_p}$ est très faible devant le gradient de pression axial $\frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}}$ et peut être négligé. Cette hypothèse est tout à fait justifiée pour les paliers dont le rapport l_p/d_p de la longueur au diamètre est inférieur ou égal à 1/8. En pratique, cette hypothèse est encore utilisée pour des rapports l_p/d_p allant jusqu'à 0,5 car l'écart perpétré reste faible sur le débit et il est d'un ordre de grandeur acceptable sur la charge mais très important sur la valeur maximale de pression du film. Ces écarts sont minimisés lorsque l'excentricité est diminuée.

En suivant l'hypothèse indiquée précédemment et en annulant les termes \dot{e}_p et $\dot{\phi}_p$ dépendant du temps dans le membre de droite, l'équation de REYNOLDS (C.46) devient dans le cas statique de la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s^{p_3}} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right) = 6\mu_p \Omega \frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} \quad (\text{C.56})$$

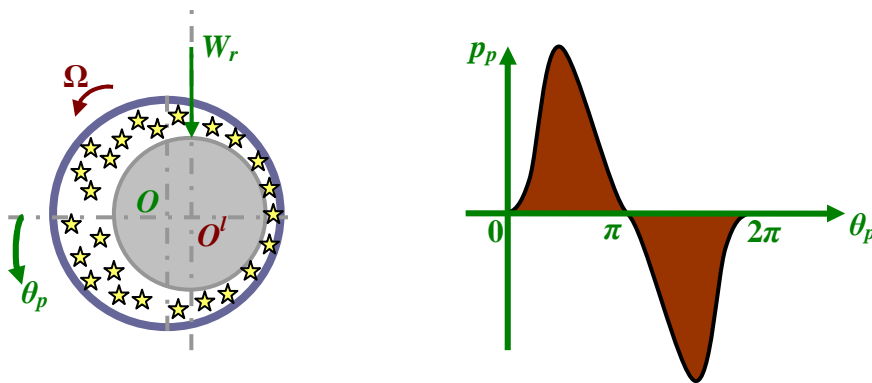


FIG. C.7 : Conditions aux limites de SOMMERFELD

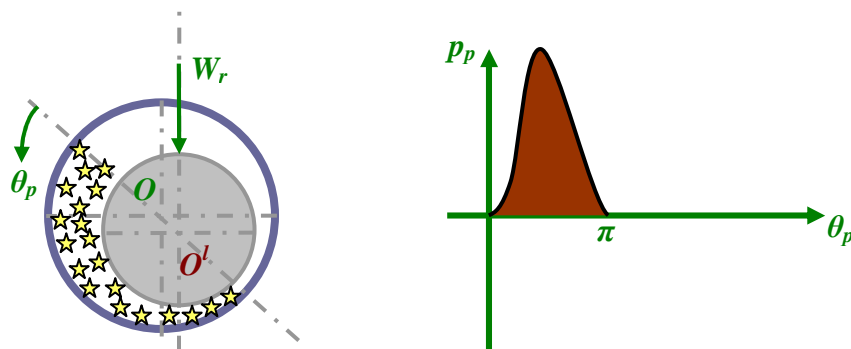


FIG. C.8 : Conditions aux limites de GÜMBEL

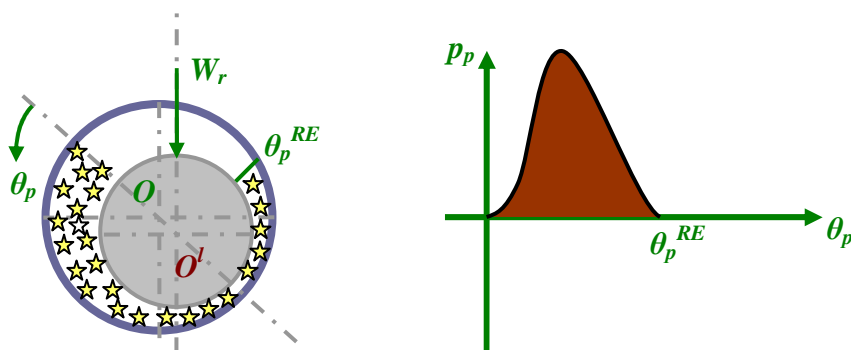


FIG. C.9 : Conditions aux limites de REYNOLDS

La dérivation de la relation (C.18) de l'épaisseur du film par rapport à l'angle θ_p conduit à :

$$\frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} = -j_p \varepsilon_p \sin \theta_p \quad (C.57)$$

En prenant en compte les conditions aux limites suivantes associées à la distribution de pression de fluide, il vient alors :

$$p_p \left(\theta_p, s^{p_3} = -\frac{l_p}{2} \right) = 0 \quad ; \quad p_p \left(\theta_p, s^{p_3} = \frac{l_p}{2} \right) = 0 \quad (C.58)$$

En insérant les équations (C.57) et (C.58) dans l'équation de REYNOLDS (C.56) et son intégration, l'expression analytique du champ de pression du film d'huile dans le cas statique est finalement obtenue par :

$$p_p \left(\theta_p, s^{p_3} \right) = -\frac{3\mu_p \Omega}{j_p^2} \left(s^{p_3} - \frac{l_p}{4} \right) \frac{\varepsilon_p^0 \sin \theta_p}{(1 + \varepsilon_p^0 \cos \theta_p)^3} \quad (C.59)$$

Il est évident que la pression varie comme la fonction $\sin \theta_p$ et donc elle est positive pour des valeurs de θ_p comprises entre 0 et π . Les composantes tangentielle et radiale de la force statique exprimées dans le repère polaire attaché au palier hydrodynamique $R^{po} (ta, ra)$ sont obtenues en intégrant le champ de pression de fluide (C.59) comme suit :

$$F_p^{ta\ 0} = \int_{-\frac{l_p}{2}}^{\frac{l_p}{2}} \int_0^{2\pi} p_p \left(\theta_p, s^{p_3} \right) \sin \theta_p r_p d\theta_p ds^{p_3} \quad (C.60)$$

$$F_p^{ra\ 0} = \int_{-\frac{l_p}{2}}^{\frac{l_p}{2}} \int_0^{2\pi} p_p \left(\theta_p, s^{p_3} \right) \cos \theta_p r_p d\theta_p ds^{p_3} \quad (C.61)$$

Après avoir utilisé les conditions aux limites de GÜMBEL prenant en considération l'apparition de la cavitation, l'intégration du champ de pression est seulement effectuée sur l'intervalle correspondant à une pression positive, c'est-à-dire $\theta_p \in [0; \pi]$. Les deux composantes polaires de la force hydrodynamique statique pour un palier court s'écrivent alors :

$$F_p^{ta\ 0} = \frac{\pi \mu_p r_p l_p^3 \Omega}{4 j_p^2} \frac{\varepsilon_p^0}{(1 - \varepsilon_p^{0.2})^{\frac{3}{2}}} \quad (C.62)$$

$$F_p^{ra\ 0} = -\frac{\mu_p r_p l_p^3 \Omega}{j_p^2} \frac{\varepsilon_p^{0.2}}{(1 - \varepsilon_p^{0.2})^2} \quad (C.63)$$

La magnitude de la somme vectorielle pour les composantes $F_p^{ta\ 0}$ et $F_p^{ra\ 0}$ est égale à la charge statique W_r telle que :

$$W_r = \sqrt{(F_p^{ta\ 0})^2 + (F_p^{ra\ 0})^2} \quad (C.64)$$

Alors l'expression de la charge W_r pour un palier court hydrodynamique est de la forme (voir **FRÉNE et al. [60]**) :

$$W_r = \frac{\mu_p r_p l_p^3 \Omega}{4 j_p^2} \frac{\varepsilon_p^0 \left(16 \varepsilon_p^{0.2} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{0.2}) \right)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon_p^{0.2})^2} \quad (C.65)$$

L'angle de calage peut être trouvé par :

$$\tan \varphi_p^0 = \frac{F_p^{ta\ 0}}{F_p^{ra\ 0}} \quad (C.66)$$

soit :

$$\tan \varphi_p^0 = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_p^{02}}}{4 \varepsilon_p^0} \quad (\text{C.67})$$

Les composantes du vecteur position d'équilibre statique $\{\delta_p^0\}$ exprimé dans le repère R sont obtenues par un changement de système de référence classique donné par :

$$\{\delta_p^0\} = -[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T \left\{ \begin{matrix} 0 \\ e_p^0 \end{matrix} \right\}_{R^{p0}} \quad (\text{C.68})$$

avec la matrice de rotation $[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]$ du repère polaire R^{p0} par rapport au repère R dans le cas statique :

$$[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p^0 & -\sin \varphi_p^0 \\ \sin \varphi_p^0 & \cos \varphi_p^0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.69})$$

C.2.2 Calcul de la position d'équilibre statique dans le palier

L'équation (C.65) est réécrite de la manière suivante :

$$g_p(\varepsilon_p^0) = \frac{\mu_p r_p l_p^3 \Omega \varepsilon_p^0 (16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))^{\frac{1}{2}}}{4j_p^2 (1 - \varepsilon_p^{02})^2} - W_r = 0 \quad (\text{C.70})$$

La fonction $g_p(\varepsilon_p^0)$ est appelée « résidu ». De plus, l'équation (C.70) est non linéaire et résolue par un processus itératif basé sur la méthode de NEWTON-RAPHSON. Donc un développement de TAYLOR de cette équation limité à l'ordre 1 est trouvé afin de la linéariser de la manière suivante :

$$g_p({}^{k+1}\varepsilon_p^0) \simeq g_p({}^k\varepsilon_p^0) + \left. \frac{dg_p}{d\varepsilon_p^0} \right|_{({}^k\varepsilon_p^0)} \Delta\varepsilon_p^0 = 0 \quad (\text{C.71})$$

alors :

$$J_p({}^k\varepsilon_p^0) \Delta\varepsilon_p^0 = -g_p({}^k\varepsilon_p^0) \quad (\text{C.72})$$

où :

- $\Delta\varepsilon_p^0$ est l'incrément itératif de l'excentricité statique relative.

La jacobienne est fonction de l'excentricité ε_p^0 à l'itération de NEWTON-RAPHSON k et déduite de manière analytique comme suit :

$$J_p({}^k\varepsilon_p^0) = \left. \frac{dg_p}{d\varepsilon_p^0} \right|_{({}^k\varepsilon_p^0)} = \frac{\mu_p r_p l_p^3 \Omega}{4j_p^2} \frac{(32\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02}))}{(1 - \varepsilon_p^{02})^2 \sqrt{16\varepsilon_p^{02} + \pi^2 (1 - \varepsilon_p^{02})}} \Bigg|_{({}^k\varepsilon_p^0)} \quad (\text{C.73})$$

Elle peut être aussi calculée de manière numérique en perturbant l'excentricité statique ε_p^0 à l'aide d'une variation très petite $\delta\varepsilon_p^0$, c'est-à-dire :

$$\frac{dg_p}{d\varepsilon_p^0} = \frac{g_p(\varepsilon_p^0 + \delta\varepsilon_p^0) - g_p(\varepsilon_p^0)}{\delta\varepsilon_p^0} \quad (\text{C.74})$$

Enfin, l'algorithme de la méthode incrémentale itérative de NEWTON-RAPHSON est montré sur la figure **FIG. C.10**.

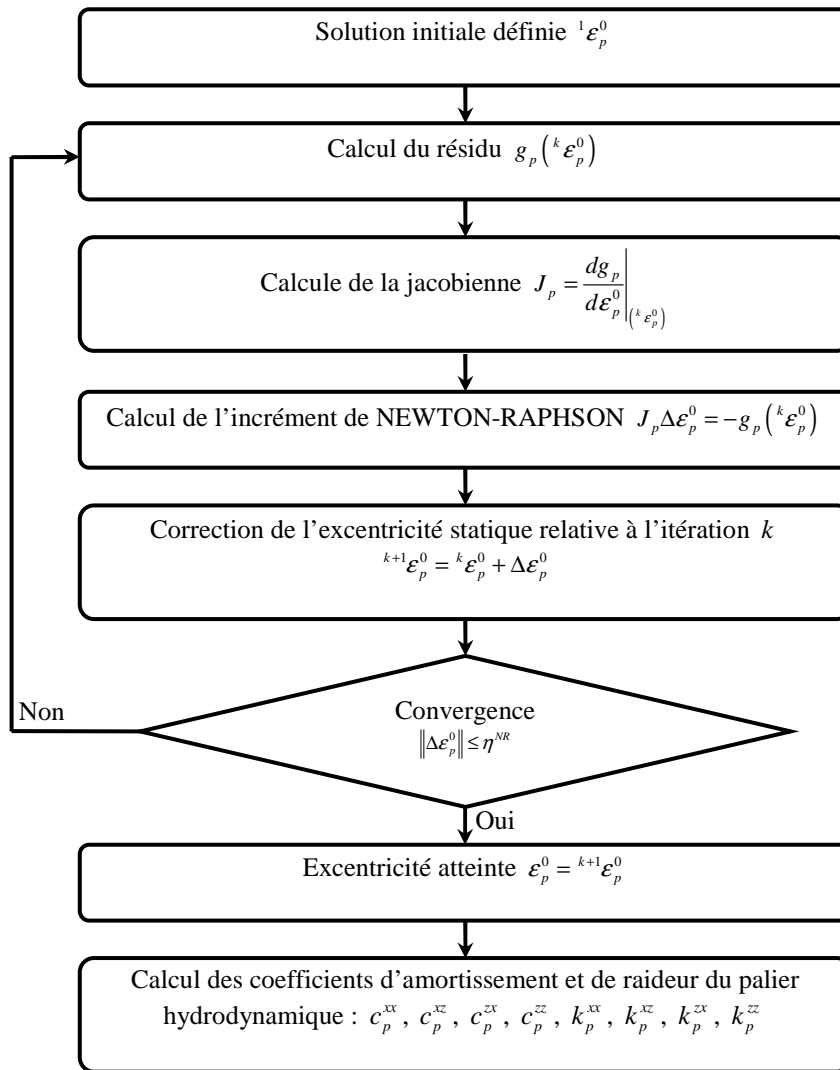


FIG. C.10 : Algorithme utilisé pour trouver la position d'équilibre statique du centre de l'arbre dans le palier hydrodynamique

C.3 Palier en régime dynamique

C.3.1 Coordonnées dynamiques dans les différents repères

En régime dynamique, la distribution de pression du film de fluide dans le palier est gouvernée par l'équation de REYNOLDS et son intégration sur le palier donne les forces hydrodynamiques extérieures $\{F_p\} = \langle F_p^u, F_p^w \rangle_R^T$ qui agissent sur l'arbre et qui sont projetées dans le repère cartésien lié au support R . En désignant la variation dynamique de la position du centre géométrique de l'arbre dans le palier en raison de la variation dynamique des forces appliquées au rotor (c'est-à-dire le balourd, les forces du film d'huile et les excitations du support), le vecteur des déplacements transversaux dynamiques du centre de l'arbre est défini par $\{\delta_p\} = \langle u_p, w_p \rangle_R^T$. Les coordonnées polaires dynamiques du centre de l'arbre dans le palier exprimées dans le repère $R^{po}(ta, ra)$ sont l'excentricité dynamique relative ε_p (déplacement radial dynamique relatif) et l'angle de calage dynamique φ_p (voir la figure FIG. C.11). Ces coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont exprimées ci-après :

$$\varepsilon_p = \frac{e_p}{j_p} = \frac{\sqrt{u_p^2 + w_p^2}}{j_p} \quad (C.75)$$

$$\tan \varphi_p = \frac{u_p}{w_p} \quad (\text{C.76})$$

En dérivant l'équation (C.75), il vient :

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial u_p} \frac{du_p}{dt} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial w_p} \frac{dw_p}{dt} = \frac{\dot{u}_p u_p + \dot{w}_p w_p}{j_p \sqrt{u_p^2 + w_p^2}} \quad (\text{C.77})$$

En substituant l'expression (C.75) dans (C.77), la dérivée temporelle de l'excentricité relative ε_p est :

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\dot{u}_p u_p + \dot{w}_p w_p}{j_p^2 \varepsilon_p} \quad (\text{C.78})$$

En dérivant l'équation (C.76), il vient :

$$\frac{d(\tan \varphi_p)}{dt} = \frac{\dot{\varphi}_p}{\cos^2 \varphi_p} = \dot{\varphi}_p (1 + \tan^2 \varphi_p) = \frac{\dot{u}_p w_p - \dot{w}_p u_p}{w_p^2} \quad (\text{C.79})$$

En insérant les équations (C.76) puis (C.75) dans (C.79), la dérivée temporelle de l'angle de calage φ_p est donnée par :

$$\dot{\varphi}_p = \frac{\dot{u}_p w_p - \dot{w}_p u_p}{j_p^2 \varepsilon_p^2} \quad (\text{C.80})$$

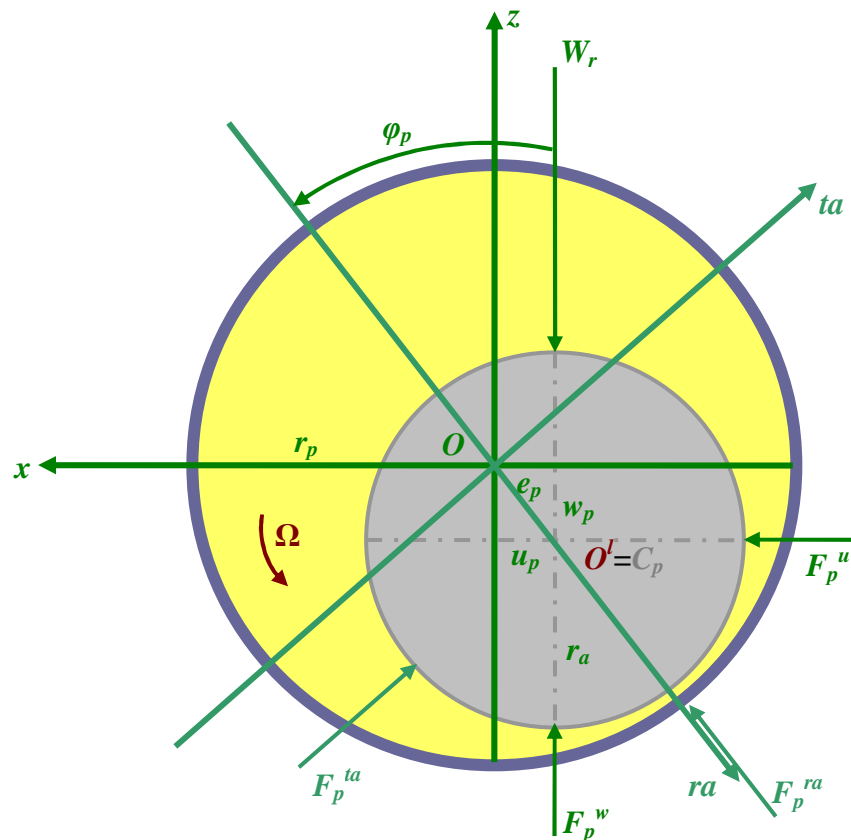


FIG. C.11 : Différentes coordonnées dynamiques du centre de l'arbre et différentes composantes dynamiques des forces hydrodynamiques dans le palier

C.3.2 Equation de REYNOLDS et modèle non linéaire de palier

Comme annoncé précédemment, pour un palier court hydrodynamique, le gradient de pression circonférentiel $\frac{1}{r_p} \frac{\partial p_p}{\partial \theta_p}$ est très petit devant le gradient de pression axial $\frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}}$ et peut être négligé. Ce qui conduit à réécrire l'équation de REYNOLDS (C.46) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial s^{p_3}} \left(h_p^3 \frac{\partial p_p}{\partial s^{p_3}} \right) = 6\mu_p \left((\Omega - 2\dot{\phi}_p) \frac{\partial h_p}{\partial \theta_p} + 2\dot{\varepsilon}_p \cos \theta_p \right) \quad (C.81)$$

L'intégration de l'équation de REYNOLDS en régime dynamique (après la prise en compte de l'équation (C.57)) et l'application des pressions nulles aux extrémités du palier conduisent à l'expression analytique du champ de pression de fluide hydrodynamique :

$$p_p(\theta_p, s^{p_3}) = -\frac{3\mu_p}{j_p^2} \left(s^{p_3 2} - \frac{l_p^2}{4} \right) \left(\frac{\varepsilon_p (\Omega - 2\dot{\phi}_p) \sin \theta_p - 2\dot{\varepsilon}_p \cos \theta_p}{(1 + \varepsilon_p \cos \theta_p)^3} \right) \quad (C.82)$$

En appliquant les conditions aux limites de GÜMBEL qui écartent la pression négative, l'intégration du champ de pression donne les composantes dynamiques tangentielle et radiale des efforts hydrodynamiques dans le repère polaire attaché au palier $R^{po}(ta, ra)$:

$$F_p^{ta} = \int_{-\frac{l_p}{2}}^{\frac{l_p}{2}} \int_0^\pi p_p(\theta_p, s^{p_3}) \sin \theta_p r_p d\theta_p ds^{p_3} \quad (C.83)$$

$$F_p^{ra} = \int_{-\frac{l_p}{2}}^{\frac{l_p}{2}} \int_0^\pi p_p(\theta_p, s^{p_3}) \cos \theta_p r_p d\theta_p ds^{p_3} \quad (C.84)$$

alors :

$$F_p^{ta} = \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \left(I_p^1 (\Omega - 2\dot{\phi}_p) - 2\dot{\varepsilon}_p I_p^2 \right) \quad (C.85)$$

$$F_p^{ra} = \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \left(I_p^3 (\Omega - 2\dot{\phi}_p) - 2\dot{\varepsilon}_p I_p^4 \right) \quad (C.86)$$

avec :

$$I_p^1 = \int_0^\pi \frac{\varepsilon_p \sin^2 \theta_p}{(1 + \varepsilon_p \cos \theta_p)^3} d\theta_p = \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon_p}{(1 - \varepsilon_p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (C.87)$$

$$I_p^2 = \int_0^\pi \frac{\sin \theta_p \cos \theta_p}{(1 + \varepsilon_p \cos \theta_p)^3} d\theta_p = -\frac{2\varepsilon_p}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \quad (C.88)$$

$$I_p^3 = \int_0^\pi \frac{\varepsilon_p \sin \theta_p \cos \theta_p}{(1 + \varepsilon_p \cos \theta_p)^3} d\theta_p = -\frac{2\varepsilon_p^2}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \quad (C.89)$$

$$I_p^4 = \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta_p}{(1 + \varepsilon_p \cos \theta_p)^3} d\theta_p = \frac{\pi}{2} \frac{(1 + 2\varepsilon_p^2)}{(1 - \varepsilon_p^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (C.90)$$

Les expressions finales des deux composantes polaires dynamiques des forces fluides sont :

$$F_p^{ta} = \frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \frac{\varepsilon_p}{(1 - \varepsilon_p^2)^2} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \varepsilon_p^2} (\Omega - 2\dot{\phi}_p) + 4\dot{\varepsilon}_p \right) \quad (C.91)$$

$$F_p^{ra} = -\frac{\mu_p r_p l_p^3}{2j_p^2} \frac{1}{(1-\varepsilon_p^2)^2} \left(2\varepsilon_p^2 (\Omega - 2\dot{\varphi}_p) + \frac{\pi \dot{\varepsilon}_p (1+2\varepsilon_p^2)}{\sqrt{1-\varepsilon_p^2}} \right) \quad (C.92)$$

Les composantes du vecteur des forces fluides dynamiques $\{F_p\}$ exprimées dans R sont obtenues par une transformation entre deux repères effectuée par l'intermédiaire de la matrice de rotation $[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]$ du repère polaire R^{p0} par rapport au repère R dans le cas dynamique comme suit :

$$\{F_p\} = -[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T \begin{Bmatrix} F_p^{ra} \\ F_p^{rd} \end{Bmatrix}_{R^{p0}} \quad (C.93)$$

Selon les équations (C.75, .76, .78, .80, .91, .92 et .93), les composantes du vecteur des forces fluides dynamiques dépendent de manière non linéaire des coordonnées polaires dynamiques $(\varepsilon_p, \varphi_p)$ et de leurs dérivées temporelles. Donc elles sont des fonctions non linéaires du vecteur $\{\delta_p\}$ des déplacements dynamiques en flexion et du vecteur vitesse $\{\dot{\delta}_p\}$ du centre de l'arbre, c'est-à-dire $\{F_p\} = \{F_p(\{\delta_p\}, \{\dot{\delta}_p\})\}$.

C.3.3 Modèle linéaire de palier et coefficients dynamiques d'amortissement et de raideur

Si les déplacements latéraux dynamiques $\{\delta_p\}$ de la ligne moyenne de l'arbre dans le palier sont supposés être très petits au voisinage de la position d'équilibre statique $\{\delta_p^0\}$, l'analyse linéaire d'un palier hydrodynamique est appliquée. Ce processus de linéarisation est basé sur un développement en série de TAYLOR limité à l'ordre 1 des forces fluides dynamiques $\{F_p\} = \{F_p(\{\delta_p\}, \{\dot{\delta}_p\})\}$ du film d'huile au voisinage des forces hydrodynamiques statiques $\{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\}$ comme suit :

$$F_p^u(u_p, w_p, \dot{u}_p, \dot{w}_p) = F_p^u(u_p^0, w_p^0, \dot{u}_p^0, \dot{w}_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (\dot{u}_p - \dot{u}_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (\dot{w}_p - \dot{w}_p^0) \\ + \left. \frac{\partial F_p^u}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (u_p - u_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^u}{\partial w_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (w_p - w_p^0) \quad (C.94)$$

$$F_p^w(u_p, w_p, \dot{u}_p, \dot{w}_p) = F_p^w(u_p^0, w_p^0, \dot{u}_p^0, \dot{w}_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (\dot{u}_p - \dot{u}_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (\dot{w}_p - \dot{w}_p^0) \\ + \left. \frac{\partial F_p^w}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (u_p - u_p^0) + \left. \frac{\partial F_p^w}{\partial w_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} (w_p - w_p^0) \quad (C.95)$$

alors :

$$\begin{Bmatrix} F_p^u(u_p, w_p, \dot{u}_p, \dot{w}_p) \\ F_p^w(u_p, w_p, \dot{u}_p, \dot{w}_p) \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} F_p^u(u_p^0, w_p^0, 0, 0) \\ F_p^w(u_p^0, w_p^0, 0, 0) \end{Bmatrix}_R - \begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \\ -\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix}_R \\ - \begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial w_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \\ -\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial w_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left\{ u_p \right\}_R - \left\{ u_p^0 \right\}_R \\ \left\{ w_p \right\}_R - \left\{ w_p^0 \right\}_R \end{pmatrix} \quad (C.96)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\{F_p(\{\delta_p\}, \{\dot{\delta}_p\})\} = \{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\} - [c_p]\{\Delta\dot{\delta}_p\} - [k_p]\{\Delta\delta_p\} \quad (C.97)$$

avec :

$$[c_p] = -\frac{\partial\{F_p\}}{\partial\{\dot{\delta}_p\}} \Big|_{(\{\delta_p^0\}, \{0\})} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{u}_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{w}_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \\ -\frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{u}_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{w}_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_p^{xx} & c_p^{xz} \\ c_p^{zx} & c_p^{zz} \end{bmatrix} \quad (C.98)$$

$$[k_p] = -\frac{\partial\{F_p\}}{\partial\{\delta_p\}} \Big|_{(\{\delta_p^0\}, \{0\})} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_p^u}{\partial u_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\frac{\partial F_p^u}{\partial w_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \\ -\frac{\partial F_p^w}{\partial u_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} & -\frac{\partial F_p^w}{\partial w_p} \Big|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p^{xx} & k_p^{xz} \\ k_p^{zx} & k_p^{zz} \end{bmatrix} \quad (C.99)$$

$$\{\Delta\delta_p\} = \{\delta_p\} - \{\delta_p^0\} \quad (C.100)$$

$$\{\Delta\dot{\delta}_p\} = \{\dot{\delta}_p\} \quad (C.101)$$

Le vecteur $\{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\}$ des forces statiques du palier hydrodynamique est relié au vecteur des déplacements statiques $\{\delta_p^0\}$ et doit équilibrer la charge constante W_r induite par le poids du rotor. Les matrices d'amortissement $[c_p]$ et de raideur $[k_p]$ du palier hydrodynamique linéarisé sont caractérisées par huit coefficients (soit quatre coefficients pour chaque matrice), voir la figure **FIG. C.12**, et dépendent seulement de la position statique $\{\delta_p^0\}$. En effet, elles sont plus faciles à obtenir dans le repère polaire R^{p0} , c'est-à-dire $[c_p^{R^{p0}}]$ et $[k_p^{R^{p0}}]$. Pour cela, il est nécessaire d'exécuter une transformation entre les repères R^{p0} et R pour produire les matrices $[c_p]$ et $[k_p]$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\} - [c_p]\{\Delta\dot{\delta}_p\} - [k_p]\{\Delta\delta_p\} &= \{F_p(\{\delta_p^0\}, \{0\})\} \\ -\left(-[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T\right)[c_p^{R^{p0}}]\{\Delta\dot{\delta}_p^{R^{p0}}\} - \left(-[\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T\right)[k_p^{R^{p0}}]\{\Delta\delta_p^{R^{p0}}\} & \end{aligned} \quad (C.102)$$

En introduisant les équations (C.68) et (C.69) dans la partie droite de (C.102), les relations entre les matrices $[c_p]$ et $[k_p]$ dans le repère R et les matrices $[c_p^{R^{p0}}]$ et $[k_p^{R^{p0}}]$ dans le repère R^{p0} sont obtenues, c'est-à-dire :

$$[c_p] = [\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T [c_p^{R^{p0}}] [\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R] \quad (C.103)$$

$$[k_p] = [\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R]^T [k_p^{R^{p0}}] [\mathfrak{R}_{R^{p0}}^R] \quad (C.104)$$

avec :

$$[c_p^{R^{p0}}] = \frac{W_r}{j_p \Omega} \begin{bmatrix} c_p^{tata} & c_p^{tara} \\ c_p^{rata} & c_p^{rara} \end{bmatrix} \quad (C.105)$$

$$[k_p^{R^{p0}}] = \frac{W_r}{j_p} \begin{bmatrix} k_p^{tata} & k_p^{tara} \\ k_p^{rata} & k_p^{rara} \end{bmatrix} \quad (C.106)$$

d'où (voir **FRÊNE et al. [60]**) :

$$c_p^{tata} = 2k_p^{rata} \quad ; \quad c_p^{tara} = -2k_p^{tata} \quad ; \quad c_p^{rata} = -2k_p^{tata} \quad ; \quad c_p^{rara} = -2k_p^{tara} \quad (C.107)$$

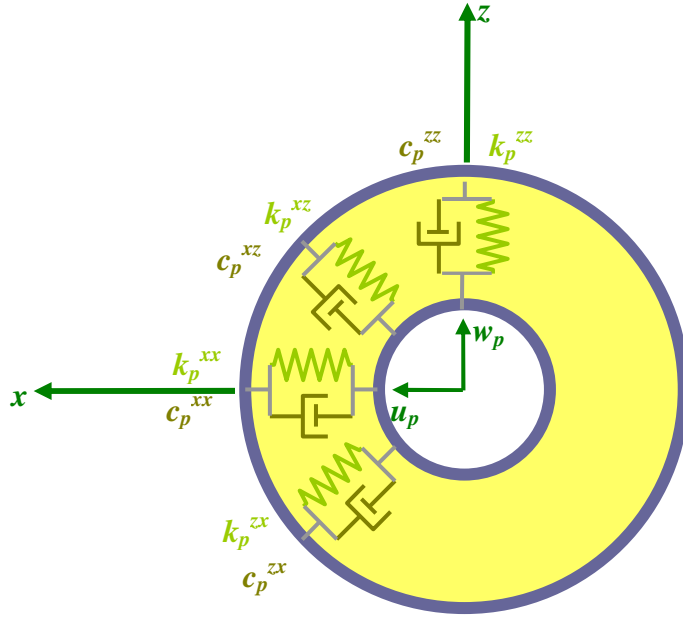


FIG. C.12 : Coefficients d'amortissement et de raideur du palier hydrodynamique linéarisé

$$k_p^{tata} = 4f_p(\varepsilon_p^0); k_p^{tara} = \frac{-\pi(1+2\varepsilon_p^{0.2})}{\varepsilon_p^0 \sqrt{1-\varepsilon_p^{0.2}}} f_p(\varepsilon_p^0); k_p^{raaa} = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon_p^{0.2}}}{\varepsilon_p^0} f_p(\varepsilon_p^0); k_p^{rara} = \frac{8(1+\varepsilon_p^{0.2})}{1-\varepsilon_p^{0.2}} f_p(\varepsilon_p^0) \quad (C.108)$$

et :

$$f_p(\varepsilon_p^0) = (16\varepsilon_p^{0.2} + \pi^2(1-\varepsilon_p^{0.2}))^{-\frac{1}{2}} \quad (C.109)$$

Remarque 1 : les coefficients d'amortissement et de raideur peuvent être interprétés comme des variations des composantes F_p^u et F_p^w des forces hydrodynamiques sous l'influence des vitesses du centre de l'arbre et celle de ses déplacements respectivement, c'est-à-dire qu'ils peuvent être obtenus numériquement en fonction des perturbations $\delta\dot{u}_p$ et $\delta\dot{w}_p$ des vitesses et de celles δu_p et δw_p des déplacements autour de la position statique du centre de l'arbre dans le palier :

$$\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^u(u_p^0, w_p^0, \delta\dot{u}_p, 0) - F_p^u(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta\dot{u}_p} \quad (C.110)$$

$$\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{u}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^w(u_p^0, w_p^0, \delta\dot{u}_p, 0) - F_p^w(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta\dot{u}_p} \quad (C.111)$$

$$\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^u(u_p^0, w_p^0, 0, \delta\dot{w}_p) - F_p^u(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta\dot{w}_p} \quad (C.112)$$

$$\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial \dot{w}_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^w(u_p^0, w_p^0, 0, \delta\dot{w}_p) - F_p^w(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta\dot{w}_p} \quad (C.113)$$

$$\left. \frac{\partial F_p^u}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^u(u_p^0 + \delta u_p, w_p^0, 0, 0) - F_p^u(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta u_p} \quad (C.114)$$

$$\left. \frac{\partial F_p^w}{\partial u_p} \right|_{(u_p^0, w_p^0, 0, 0)} = \frac{F_p^w(u_p^0 + \delta u_p, w_p^0, 0, 0) - F_p^w(u_p^0, w_p^0, 0, 0)}{\delta u_p} \quad (C.115)$$

EXPRESSIONS DES TERMES MATRICIELS SUIVANT LA METHODE DE RAYLEIGH-RITZ

$$[M_{d,a,1}] = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \langle f^d(y_{d_i}) \rangle + \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{mo} \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \langle f^d(y) \rangle^T \langle f^d(y) \rangle dy + \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.1)$$

$$[M_{d,a,2}] = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{di} \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + \rho_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.2)$$

$$[C_{d,a,1}^g] = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^y \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.3)$$

$$[C_{d,a,2}^g] = 2[M_{d,a,2}] \quad (D.4)$$

$$[C_{d,a,su,1}^{er}] = \sum_{i=1}^{n_d} 2m_{d_i} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \langle f^d(y_{d_i}) \rangle - \sum_{i=1}^{n_d} (I_{m_{d_i}}^y - 2I_{m_{d_i}}^{mo}) \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + 2\rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \langle f^d(y) \rangle^T \langle f^d(y) \rangle dy \quad (D.5)$$

$$[K_{a,1}^e] = E_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{d^2 f^d(y)}{dy^2} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 f^d(y)}{dy^2} \right\rangle dy \quad (D.6)$$

$$[K_{a,2}^e] = E_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{d^2 f^d(y)}{dy^2} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 f^d(y)}{dy^2} \right\rangle dy \quad (D.7)$$

$$[K_{d,a,su,1}^{er}] = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \langle f^d(y_{d_i}) \rangle - \sum_{i=1}^{n_d} (I_{m_{d_i}}^y - I_{m_{d_i}}^{mo}) \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \langle f^d(y) \rangle^T \langle f^d(y) \rangle dy - \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.8)$$

$$[K_{d,a,su,2}^{er}] = -[M_{d,a,1}] \quad (D.9)$$

$$[K_{d,a,su,3}^{er}] = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^y \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.10)$$

$$[K_{d,a,su,4}^{er}] = \sum_{i=1}^{n_d} (I_{m_{d_i}}^y - I_{m_{d_i}}^{mo}) \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle + \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.11)$$

$$[K_{d,a,su,5}^{er}] = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \langle f^d(y_{d_i}) \rangle + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \langle f^d(y) \rangle^T \langle f^d(y) \rangle dy \quad (D.12)$$

$$[K_{d,a,su,6}^{er}] = [M_{d,a,2}] \quad (D.13)$$

$$[K_{d,a,su,1}^{erg}] = \frac{\rho_a S_a (l_a + y_1)^2}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy - \frac{\rho_a S_a}{2} \int_{y_1}^{y_2} y^2 \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle dy \quad (D.14)$$

$$\{V_{d,a}^{W_r}\} = \sum_{i=1}^{n_p} \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \langle f^d(y_{p_i}) \rangle^T \end{array} \right\} \quad (D.15)$$

$$\{V_b^{c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin \eta_{b_i} \\ \cos \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.16)$$

$$\{V_b^{s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \cos \eta_{b_i} \\ -\sin \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.17)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^y, c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -\cos \eta_{b_i} \\ \sin \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.18)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^y, s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin \eta_{b_i} \\ \cos \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.19)$$

$$\{V_{b,su}^{\Omega \omega^y, c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} 2m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin \eta_{b_i} \\ \cos \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.20)$$

$$\{V_{b,su}^{\Omega \omega^y, s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} 2m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \cos \eta_{b_i} \\ -\sin \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.21)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{x^2}, c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \cos \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.22)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{x^2}, s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\sin \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.23)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{y^2}, c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \left[\begin{array}{cc} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sin \eta_{b_i} \\ \cos \eta_{b_i} \end{array} \right\} \quad (D.24)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{y^2},s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \begin{bmatrix} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \eta_{b_i} \\ -\sin \eta_{b_i} \end{Bmatrix} \quad (D.25)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{z^2},c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \begin{bmatrix} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \eta_{b_i} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (D.26)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^{z^2},s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \begin{bmatrix} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \eta_{b_i} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (D.27)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^x \omega^z, c_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \begin{bmatrix} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\cos \eta_{b_i} \\ -\sin \eta_{b_i} \end{Bmatrix} \quad (D.28)$$

$$\{V_{b,su}^{\omega^x \omega^z, s_1}\} = \sum_{i=1}^{n_b} m_{b_i} r_{b_i} \begin{bmatrix} \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \langle f^d(y_{b_i}) \rangle^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \eta_{b_i} \\ -\cos \eta_{b_i} \end{Bmatrix} \quad (D.29)$$

$$\{V_{d,a,su}^u\} = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} \begin{Bmatrix} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \langle f^d(y) \rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} dy \quad (D.30)$$

$$\{V_{d,a,su}^w\} = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \end{Bmatrix} + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \langle f^d(y) \rangle^T \end{Bmatrix} dy \quad (D.31)$$

$$\{V_{d,a,su}^{yw}\} = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} y_{d_i} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \end{Bmatrix} + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} y \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \langle f^d(y) \rangle^T \end{Bmatrix} dy \quad (D.32)$$

$$\{V_{d,a,su}^{yu}\} = \sum_{i=1}^{n_d} m_{d_i} y_{d_i} \begin{Bmatrix} \langle f^d(y_{d_i}) \rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \rho_a S_a \int_{y_1}^{y_2} y \begin{Bmatrix} \langle f^d(y) \rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} dy \quad (D.33)$$

$$\{V_{d,a,su}^\theta\} = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{mo} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \end{Bmatrix} + \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \end{Bmatrix} dy \quad (D.34)$$

$$\{V_{d,a,su}^\psi\} = -\sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{mo} \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} - \rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} dy \quad (D.35)$$

$$\{V_{d,a,su}^{y\psi}\} = -\sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^y \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} - 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{Bmatrix} dy \quad (D.36)$$

$$\{V_{d,a,su}^{y\theta}\} = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^y \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \end{Bmatrix} + 2\rho_a I_{S_a}^{mo} \int_{y_1}^{y_2} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \end{Bmatrix} dy \quad (D.37)$$

$$\{V_{d,a,su}^{\theta,c_2}\} = \sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{di} \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \end{array} \right\} + \rho_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \end{array} \right\} dy \quad (D.38)$$

$$\{V_{d,a,su}^{\psi,c_2}\} = -\sum_{i=1}^{n_d} I_{m_{d_i}}^{di} \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \frac{df^d(y_{d_i})}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{array} \right\} - \rho_a I_{S_a}^{di} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \frac{df^d(y)}{dy} \right\rangle^T \\ \{0\} \end{array} \right\} dy \quad (D.39)$$

$$\{V_{d,a,su}^{\theta,s_2}\} = \{V_{d,a,su}^{\theta,c_2}\} \quad (D.40)$$

$$\{V_{d,a,su}^{\psi,s_2}\} = \{V_{d,a,su}^{\psi,c_2}\} \quad (D.41)$$

$$\{F_p\} = \sum_{i=1}^{n_p} \left[\begin{array}{cc} \left\langle f^d(y_{p_i}) \right\rangle^T & \{0\} \\ \{0\} & \left\langle f^d(y_{p_i}) \right\rangle^T \end{array} \right] \begin{Bmatrix} F_p^u \\ F_p^w \end{Bmatrix} \quad (D.42)$$

où :

- n_d est le nombre de disques du rotor,
- n_p est le nombre de paliers supportant l'arbre,
- n_b est le nombre de balourds discrets localisés sur le rotor.

Remarque : toutes les expressions précédentes des matrices sont carrées de dimension n_q , tandis que les vecteurs sont de dimension $2n_q \times 1$ (où n_q est le nombre de degrés de liberté utilisés pour chaque déplacement dans les directions Ox et Oz).

MATRICES ET VECTEURS ELEMENTAIRES
DE L'ARBRE SUIVANT LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS

$$[M_{ea_i,1}] = \frac{l_{ea_i}}{420(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,1}^0] + \frac{7\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,1}^1] + \frac{7\varphi_{ea_i}^{z^2}}{2} [M_{ea_i,1}^2] \right) \quad (E.1)$$

$$[M_{ea_i,1}^0] = \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l_{ea_i} & 54 & 0 & 0 & 13l_{ea_i} \\ & 156v_{ea_i}^2 & 22l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 54v_{ea_i}^2 & -13l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 13l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 4l_{ea_i}^2 & -13l_{ea_i} & 0 & 0 & -3l_{ea_i}^2 \\ S & & & & 156 & 0 & 0 & 22l_{ea_i} \\ Y & & & & & 156v_{ea_i}^2 & -22l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

$$[M_{ea_i,1}^1] = \begin{bmatrix} 84\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -11l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & 36\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 9l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ & 84v_{ea_i}^2 & 11l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 36v_{ea_i}^2 & -9l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 9l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} & -9l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 84\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 11l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ Y & & & & & 84v_{ea_i}^2 & -11l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

$$[M_{ea_i,1}^2] = \begin{bmatrix} 40\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & 20\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ & 40v_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 20v_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \\ S & & & & 40\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ Y & & & & & 40v_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

$$[M_{ea_i,2}] = \frac{1}{30l_{ea_i}(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,2}^0] + 5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,2}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^{z,2} [M_{ea_i,2}^2] \right) \quad (E.5)$$

$$[M_{ea_i,2}^0] = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ & 36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 4l_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i} & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \\ S & & & & 36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ Y & & & & & 36v_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.6)$$

$$[M_{ea_i,2}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & 3\vartheta_{ea_i} \\ & 0 & -3v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -3v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 3v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & -3\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & -3\vartheta_{ea_i} \\ Y & & & & & 0 & 3v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.7)$$

$$[M_{ea_i,2}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_{ea_i}^2 \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & 2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ M & & & & & & & 2\vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.8)$$

$$[M_{ea_i,3}] = \frac{1}{30l_{ea_i}(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,3}^0] + 5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,3}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^{z,2} [M_{ea_i,3}^2] \right) \quad (E.9)$$

$$[M_{ea_i,3}^0] = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} & 36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ & 36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & -4l_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ S & & & & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ Y & & & & & 36v_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & -4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.10)$$

$$[M_{ea_i,3}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -15\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & -15\vartheta_{ea_i} \\ & 0 & -15v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -15v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 15v_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & 15\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 15\vartheta_{ea_i} \\ Y & & & & & 0 & 15v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.11)$$

$$[M_{ea_i,3}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & -2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -v_{ea_i}^2 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 2v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & -2v_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.12)$$

$$[M_{ea_i,4}] = \frac{1}{30l_{ea_i} (1+\varphi_{ea_i}^x)(1+\varphi_{ea_i}^z)} \left([M_{ea_i,4}^0] + \frac{5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,4}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^x\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,4}^2] \right) \quad (E.13)$$

$$[M_{ea_i,4}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3l_{ea_i} & 0 & 0 & -36 & 3l_{ea_i} & 0 \\ & 0 & 0 & -3l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ & & 0 & -4l_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ & & & 0 & 0 & 3l_{ea_i} & l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -4l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.14)$$

$$[M_{ea_i,4}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ & 0 & 0 & 6v_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & 6v_{ea_i} \\ & & 0 & -l_{ea_i}(1+v_{ea_i}) & 6 & 0 & 0 & l_{ea_i}(1+v_{ea_i}) \\ & & & 0 & 0 & -6v_{ea_i} & l_{ea_i}(1+v_{ea_i}) & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 6 & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & -6v_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -l_{ea_i}(1+v_{ea_i}) \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.15)$$

$$[M_{ea_i,4}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & -2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.16)$$

$$[M_{ea_i,5}] = \frac{1}{30l_{ea_i} (1+\varphi_{ea_i}^x)(1+\varphi_{ea_i}^z)} \left([M_{ea_i,5}^0] + \frac{5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,5}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^x\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,5}^2] \right) \quad (E.17)$$

$$[M_{ea_i,5}^0] = \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & 36 & -3l_{ea_i} & 0 \\ A & 0 & 0 & -3l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ N & & 0 & -4l_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ T & & & 0 & 0 & -3l_{ea_i} & -l_{ea_i}^2 & 0 \\ I & & & & 0 & -36 & 3l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -4l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.18)$$

$$[M^1_{ea_i,5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ A & 0 & 0 & 6\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & 6\vartheta_{ea_i} \\ N & 0 & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & 6 & 0 & 0 & 0 & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) \\ T & & 0 & 0 & 6\vartheta_{ea_i} & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 \\ I & & & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & -6\vartheta_{ea_i} & 0 \\ Y & & & & & 0 & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.19)$$

$$[M^2_{ea_i,5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ T & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ I & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & 0 & -2 & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.20)$$

$$[M_{ea_i,6}] = \frac{l_{ea_i}}{420(1+\varphi^x_{ea_i})(1+\varphi^z_{ea_i})} \left([M^0_{ea_i,6}] + \frac{7\varphi^z_{ea_i}}{2} [M^1_{ea_i,6}] + \frac{7\varphi^x_{ea_i}\varphi^z_{ea_i}}{2} [M^2_{ea_i,6}] \right) \quad (E.21)$$

$$[M^0_{ea_i,6}] = \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22l_{ea_i} & 0 & 0 & 54 & -13l_{ea_i} & 0 \\ A & 0 & 0 & 22l_{ea_i} & -54 & 0 & 0 & -13l_{ea_i} \\ N & 0 & 0 & 4l_{ea_i}^2 & -13l_{ea_i} & 0 & 0 & -3l_{ea_i}^2 \\ T & & 0 & 0 & 0 & -13l_{ea_i} & 3l_{ea_i}^2 & 0 \\ I & & & 0 & 156 & -22l_{ea_i} & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & -22l_{ea_i} & 0 \\ Y & & & & & 0 & 0 & 4l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.22)$$

$$[M^1_{ea_i,6}] = \begin{bmatrix} 0 & 42(1+\vartheta_{ea_i}) & l_{ea_i}(5+6\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & 18(1+\vartheta_{ea_i}) & -l_{ea_i}(5+4\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ A & 0 & 0 & l_{ea_i}(6+5\vartheta_{ea_i}) & 18(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & -l_{ea_i}(4+5\vartheta_{ea_i}) \\ N & 0 & 0 & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & -l_{ea_i}(5+4\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) \\ T & & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}(4+5\vartheta_{ea_i}) & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ I & & & 0 & 0 & 42(1+\vartheta_{ea_i}) & -l_{ea_i}(5+6\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}(6+5\vartheta_{ea_i}) \\ Y & & & & & 0 & 0 & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.23)$$

$$[M^2_{ea_i,6}] = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 5l_{ea_i} & 0 & 0 & 10 & -5l_{ea_i} & 0 \\ A & 0 & 0 & 5l_{ea_i} & -10 & 0 & 0 & -5l_{ea_i} \\ N & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i} & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \\ T & & 0 & 0 & 0 & -5l_{ea_i} & l_{ea_i}^2 & 0 \\ I & & & 0 & 40 & -5l_{ea_i} & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & -5l_{ea_i} & 0 \\ Y & & & & & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.24)$$

$$[M_{ea_i,7}] = \frac{1}{l_{ea_i}^3 (1 + \varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,7}^0] + \varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,7}^1] + \frac{\varphi_{ea_i}^{z^2}}{\varphi_{ea_i}^{mo}} [M_{ea_i,7}^2] \right) \quad (E.25)$$

$$[M_{ea_i,7}^0] = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} & -12 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} \\ & 12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 4l_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i} & 0 & 0 & 2l_{ea_i}^2 \\ S & & & & 12 & 0 & 0 & 6l_{ea_i} \\ Y & & & & & 12v_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.26)$$

$$[M_{ea_i,7}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & 0 & 0 & 0 \\ M & & & & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.27)$$

$$[M_{ea_i,7}^2] = \begin{bmatrix} 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & -12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ & 12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & (3 + \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & (3 - \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & (3 + \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & (3 - \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \\ S & & & & 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ Y & & & & & 12v_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & (3 + \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & (3 + \varphi_{ea_i}^{mo})l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.28)$$

$$[M_{ea_i,8}] = \frac{1}{l_{ea_i}^3 (1 + \varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,8}^0] + \varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,8}^1] + \frac{\varphi_{ea_i}^{z^2}}{\varphi_{ea_i}^{di}} [M_{ea_i,8}^2] \right) \quad (E.29)$$

$$[M_{ea_i,8}^0] = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6l_{ea_i} & 12 & 0 & 0 & 6l_{ea_i} \\ & 12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & -4l_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i} & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2 \\ S & & & & -12 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} \\ Y & & & & & 12v_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & -4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.30)$$

$$[M_{ea_i,8}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & -2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & 0 & 0 & 0 \\ M & & & & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & -2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.31)$$

$$[M_{ea_i,8}^2] = \begin{bmatrix} 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & -12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ -12\nu_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & 12\nu_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & 0 \\ & -(3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & -(3+\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ & & (3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 & (3+\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & 0 \\ S & & & & -12\nu_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ Y & & & & & -(3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ M & & & & & & (3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2\nu_{ea_i}^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.32)$$

$$[M_{ea_i,9}] = \frac{1}{l_{ea_i}^3(1+\varphi_{ea_i}^x)(1+\varphi_{ea_i}^z)} \left([M_{ea_i,9}^0] + \varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,9}^1] + \frac{\varphi_{ea_i}^x \varphi_{ea_i}^z}{\varphi_{ea_i}^{di}} [M_{ea_i,9}^2] \right) \quad (E.33)$$

$$[M_{ea_i,9}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6l_{ea_i} & 0 & 0 & -12 & 6l_{ea_i} & 0 \\ & 0 & 0 & -6l_{ea_i} & -12 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} \\ & & 0 & -4l_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i} & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2 \\ & & & 0 & 0 & 6l_{ea_i} & -2l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & 0 & 12 & -6l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 6l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -4l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.34)$$

$$[M_{ea_i,9}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -l_{ea_i}^2(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & 0 & l_{ea_i}^2(1+\vartheta_{ea_i}) \\ & & & 0 & 0 & 0 & l_{ea_i}^2(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & 0 & -l_{ea_i}^2(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.35)$$

$$[M_{ea_i,9}^2] = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6l_{ea_i} & 0 & 0 & 12 & -6l_{ea_i} & 0 \\ & 0 & 0 & 6l_{ea_i} & 12 & 0 & 0 & 6l_{ea_i} \\ & & 0 & (3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i} & 0 & 0 & (3+\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2 \\ & & & 0 & 0 & -6l_{ea_i} & (3+\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & 0 & -12 & 6l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & -6l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & (3-\varphi_{ea_i}^{di})l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.36)$$

$$[M_{ea_i,10}] = \frac{l_{ea_i}}{420(1+\varphi_{ea_i}^z)^2} \left([M_{ea_i,10}^0] + \frac{7\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,10}^1] + \frac{7\varphi_{ea_i}^{z2}}{2} [M_{ea_i,10}^2] \right) \quad (E.37)$$

$$[M_{ea_i,10}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -156 & -22l_{ea_i} & 0 & 0 & -54 & 13l_{ea_i} & 0 \\ & & -4l_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -13l_{ea_i} & 3l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & -156 & 22l_{ea_i} & 0 & 0 \\ Y & & & & & -4l_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.38)$$

$$[M_{ea_i,10}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -84 & -11l_{ea_i} & 0 & 0 & -36 & 9l_{ea_i} & 0 \\ & & -2l_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -9l_{ea_i} & 2l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & -84 & 11l_{ea_i} & 0 & \\ Y & & & & & -2l_{ea_i}^2 & 0 & \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.39)$$

$$[M_{ea_i,10}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -40 & -5l_{ea_i} & 0 & 0 & -20 & 5l_{ea_i} & 0 \\ & & -l_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -5l_{ea_i} & l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & -40 & 5l_{ea_i} & 0 & \\ Y & & & & & -l_{ea_i}^2 & 0 & \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.40)$$

$$[M_{ea_i,11}] = \frac{1}{30l_{ea_i}(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,11}^0] + 5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^x [M_{ea_i,11}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^{x^2} [M_{ea_i,11}^2] \right) \quad (E.41)$$

$$[M_{ea_i,11}^0] = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} & 36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -4l_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ & & & & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.42)$$

$$[M_{ea_i,11}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -l_{ea_i} & 3 & 0 & 0 & l_{ea_i} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -l_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.43)$$

$$[M_{ea_i,11}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -2 \end{bmatrix} \quad (E.44)$$

$$[M_{ea_i,12}] = \frac{l_{ea_i}}{420(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,12}^0] + \frac{7\varphi_{ea_i}^x}{2} [M_{ea_i,12}^1] + \frac{7\varphi_{ea_i}^{x2}}{2} [M_{ea_i,12}^2] \right) \quad (E.45)$$

$$[M_{ea_i,12}^0] = \begin{bmatrix} -156 & 0 & 0 & 22l_{ea_i} & -54 & 0 & 0 & -13l_{ea_i} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -4l_{ea_i}^2 & 13l_{ea_i} & 0 & 0 & 3l_{ea_i}^2 \\ & & & & -156 & 0 & 0 & -22l_{ea_i} \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.46)$$

$$[M_{ea_i,12}^1] = \begin{bmatrix} -84 & 0 & 0 & 11l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & -9l_{ea_i} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2l_{ea_i}^2 & 9l_{ea_i} & 0 & 0 & 2l_{ea_i}^2 \\ & & & & -84 & 0 & 0 & -11l_{ea_i} \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -2l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.47)$$

$$[M_{ea_i,12}^2] = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 & 5l_{ea_i} & -20 & 0 & 0 & -5l_{ea_i} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -l_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ & & & & -40 & 0 & 0 & -5l_{ea_i} \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 0 & 0 \\ M & & & & & & & -l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.48)$$

$$[M_{ea_i,13}] = \frac{1}{30l_{ea_i}(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,13}^0] + 5l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,13}^1] + 5l_{ea_i}^2\varphi_{ea_i}^{z2} [M_{ea_i,13}^2] \right) \quad (E.49)$$

$$[M_{ea_i,13}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -36 & -3l_{ea_i} & 0 & 0 & 36 & -3l_{ea_i} & 0 \\ & & -4l_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} & l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & -36 & 3l_{ea_i} & 0 & 0 \\ Y & & & & & -4l_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.50)$$

$$[M_{ea_i,13}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & -l_{ea_i} & 0 & 0 & -3 & l_{ea_i} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & 0 & -3 & 0 & 0 \\ Y & & & & & -l_{ea_i} & 0 & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.51)$$

$$[M_{ea_i,13}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & -2 & 0 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.52)$$

$$[M_{ea_i,14}] = \frac{l_{ea_i}}{420(1+\varphi_{ea_i}^x)(1+\varphi_{ea_i}^z)} \left([M_{ea_i,14}^0] + \frac{7\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,14}^1] + \frac{7\varphi_{ea_i}^x\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,14}^2] \right) \quad (E.53)$$

$$[M_{ea_i,14}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22l_{ea_i} & 0 & 0 & 54 & -13l_{ea_i} & 0 \\ & 0 & 0 & -22l_{ea_i} & 54 & 0 & 0 & 13l_{ea_i} \\ & & 0 & -4l_{ea_i}^2 & 13l_{ea_i} & 0 & 0 & 3l_{ea_i}^2 \\ & & & 0 & 0 & -13l_{ea_i} & 3l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 22l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -4l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.54)$$

$$[M_{ea_i,14}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 42(1+\vartheta_{ea_i}) & l_{ea_i}(5+6\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & 18(1+\vartheta_{ea_i}) & -l_{ea_i}(5+4\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ & 0 & 0 & -l_{ea_i}(6+5\vartheta_{ea_i}) & -18(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & l_{ea_i}(4+5\vartheta_{ea_i}) \\ & & 0 & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & l_{ea_i}(5+4\vartheta_{ea_i}) & 0 & 0 & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) \\ & & & 0 & 0 & -l_{ea_i}(4+5\vartheta_{ea_i}) & l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ & & & & 0 & 42(1+\vartheta_{ea_i}) & -l_{ea_i}(5+6\vartheta_{ea_i}) & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & l_{ea_i}(6+5\vartheta_{ea_i}) \\ Y & & & & & & 0 & -l_{ea_i}(1+\vartheta_{ea_i}) \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.55)$$

$$[M_{ea_i,14}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 5l_{ea_i} & 0 & 0 & 10 & -5l_{ea_i} & 0 \\ & 0 & 0 & -5l_{ea_i} & 10 & 0 & 0 & 5l_{ea_i} \\ & & 0 & -l_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i} & 0 & 0 & l_{ea_i}^2 \\ & & & 0 & 0 & -5l_{ea_i} & l_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & 0 & 40 & -5l_{ea_i} & 0 \\ S & & & & & 0 & 0 & 5l_{ea_i} \\ Y & & & & & & 0 & -l_{ea_i}^2 \\ M & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (E.56)$$

$$[M_{ea_i,15}] = \frac{1}{30l_{ea_i}(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,15}^0] + 5\varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,15}^1] + \frac{5\varphi_{ea_i}^z{}^2}{2} [M_{ea_i,15}^2] \right) \quad (E.57)$$

$$[M_{ea_i,15}^0] = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & -3l_{ea_i} \\ & 36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -36v_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 4l_{ea_i}^2 & 3l_{ea_i} & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3l_{ea_i} \\ S & & & & & 36v_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ Y & & & & & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & 4l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.58)$$

$$[M_{ea_i,15}^1] = \begin{bmatrix} 12\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & -12\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 \\ & 12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} \\ & & & & 12\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (\text{E.59})$$

$$[M_{ea_i,15}^2] = \begin{bmatrix} 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & 12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 \\ & & & & 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 12v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.60})$$

$$[M_{ea_i,16}] = \frac{1}{30(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,16}^0] + \varphi_{ea_i}^z [M_{ea_i,16}^1] + \frac{5\varphi_{ea_i}^z^2}{2} [M_{ea_i,16}^2] \right) \quad (\text{E.61})$$

$$[M_{ea_i,16}^0] = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} & -36 & 0 & 0 & 0 \\ & 36v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -36v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2l_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i} & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & & & 36v_{ea_i}^2 & 0 & 0 \\ Y & & & & & & 6l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & 6l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.62})$$

$$[M_{ea_i,16}^1] = \begin{bmatrix} 60\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -8l_{ea_i} \vartheta_{ea_i} & -60\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 8l_{ea_i} \vartheta_{ea_i} \\ & 60v_{ea_i}^2 & 8l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -60v_{ea_i}^2 & -8l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 3l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -8l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 3l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} & 8l_{ea_i} \vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -5l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} \\ & & & & 60\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -8l_{ea_i} \vartheta_{ea_i} \\ S & & & & & 60v_{ea_i}^2 & 8l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 \\ Y & & & & & & 7l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & 7l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (\text{E.63})$$

$$[M_{ea_i,16}^2] = \begin{bmatrix} 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -2l_{ea_i} \vartheta_{ea_i}^2 & -12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 2l_{ea_i} \vartheta_{ea_i}^2 \\ & 12v_{ea_i}^2 & 2l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -12v_{ea_i}^2 & -2l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -2l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & -l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 & 2l_{ea_i} \vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 \\ & & & & 12\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -2l_{ea_i} \vartheta_{ea_i}^2 \\ S & & & & & 12v_{ea_i}^2 & 2l_{ea_i} v_{ea_i}^2 & 0 \\ Y & & & & & & l_{ea_i}^2 v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & & l_{ea_i}^2 \vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.64})$$

$$[M_{ea_i,17}] = \frac{l_{ea_i}}{210(1+\varphi_{ea_i}^x)^2} \left([M_{ea_i,17}^0] + \frac{7\varphi_{ea_i}^z}{2} [M_{ea_i,17}^1] + \frac{7\varphi_{ea_i}^{z^2}}{2} [M_{ea_i,17}^2] \right) \quad (E.65)$$

$$[M_{ea_i,17}^0] = \begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 & -15l_{ea_i} & -72 & 0 & 0 & 6l_{ea_i} \\ & 72v_{ea_i}^2 & 15l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -72v_{ea_i}^2 & -6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -15l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -3l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 4l_{ea_i}^2 & 15l_{ea_i} & 0 & 0 & -3l_{ea_i}^2 \\ S & & & & 72 & 0 & 0 & -6l_{ea_i} \\ Y & & & & & 72v_{ea_i}^2 & 6l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 18l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 18l_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.66)$$

$$[M_{ea_i,17}^1] = \begin{bmatrix} 36\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -7l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & -36\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & 9l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ & 36v_{ea_i}^2 & 7l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -36v_{ea_i}^2 & -9l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -7l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -4l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} & 7l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -4l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \\ S & & & & 36\vartheta_{ea_i} & 0 & 0 & -9l_{ea_i}\vartheta_{ea_i} \\ Y & & & & & 36v_{ea_i}^2 & 9l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 6l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 6l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i} \end{bmatrix} \quad (E.67)$$

$$[M_{ea_i,17}^2] = \begin{bmatrix} 20\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & -20\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & 5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ & 20v_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -20v_{ea_i}^2 & -5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & -2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \\ S & & & & 20\vartheta_{ea_i}^2 & 0 & 0 & -5l_{ea_i}\vartheta_{ea_i}^2 \\ Y & & & & & 20v_{ea_i}^2 & 5l_{ea_i}v_{ea_i}^2 & 0 \\ M & & & & & & 2l_{ea_i}^2v_{ea_i}^2 & 0 \\ & & & & & & & 2l_{ea_i}^2\vartheta_{ea_i}^2 \end{bmatrix} \quad (E.68)$$

$$\{V_{ea_i,1}\} = \frac{l_{ea_i}}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -l_{ea_i} \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ l_{ea_i} \end{Bmatrix} ; \{V_{ea_i,2}\} = \frac{l_{ea_i}}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ l_{ea_i} \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -l_{ea_i} \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{V_{ea_i,3}\} = \frac{l_{ea_i}^2}{120(1+\varphi_{ea_i}^z)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 18+20\varphi_{ea_i}^z \\ l_{ea_i}(4+5\varphi_{ea_i}^z) \\ 0 \\ 0 \\ 42+40\varphi_{ea_i}^z \\ -l_{ea_i}(6+5\varphi_{ea_i}^z) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (E.69)$$

$$\{V_{ea_i,4}\} = \frac{l_{ea_i}^2}{120(1+\varphi_{ea_i}^x)} \begin{Bmatrix} 18+20\varphi_{ea_i}^x \\ 0 \\ 0 \\ -l_{ea_i}(4+5\varphi_{ea_i}^x) \\ 42+40\varphi_{ea_i}^x \\ 0 \\ 0 \\ l_{ea_i}(6+5\varphi_{ea_i}^x) \end{Bmatrix} ; \{V_{ea_i,5}\} = \frac{1}{2(1+\varphi_{ea_i}^z)} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^z \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{V_{ea_i,6}\} = \frac{1}{2(1+\varphi_{ea_i}^x)} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^x \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ l_{ea_i}\varphi_{ea_i}^x \end{Bmatrix} \quad (E.70)$$

avec :

$$\varphi_{ea_i}^{mo} = \frac{12E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{mo}}{l_{ea_i}^2 G_{ea_i} K_{ea_i}^{mo} S_{ea_i}} ; \quad \varphi_{ea_i}^{di} = \frac{12E_{ea_i} I_{S_{ea_i}}^{di}}{l_{ea_i}^2 G_{ea_i} K_{ea_i}^{di} S_{ea_i}} ; \quad \nu_{ea_i} = \frac{1 + \varphi_{ea_i}^x}{1 + \varphi_{ea_i}^z} ; \quad \nu_{ea_i} = \frac{\varphi_{ea_i}^x}{\varphi_{ea_i}^z} \quad (\text{E.71})$$

METHODE DE RUNGE-KUTTA

La méthode de RUNGE-KUTTA est parmi les méthodes de résolution numérique les plus populaires pour les équations différentielles ordinaires. C'est une méthode d'intégration temporelle pas à pas, qui comporte une seule étape mais avec plusieurs phases dans cette étape. Elle est donc préférée à celle d'EULER d'ordre 1 par exemple. Son avantage essentiel est d'améliorer la stabilité de l'algorithme de résolution et la précision des résultats.

Afin d'utiliser l'algorithme explicite de RUNGE-KUTTA, les équations différentielles du mouvement (IV.4) du rotor embarqué sont mises sous forme d'état, c'est-à-dire sous la forme d'un système d'équation différentielle du premier ordre de dimension $2n_g$:

$$\{\dot{X}_r\} = [A_r(t)]\{X_r\} + \{B_r(t)\} \quad (F.1)$$

Le vecteur d'état $\{X_r\}$, la matrice d'état $[A_r(t)]$ et le vecteur $\{B_r(t)\}$ des forces extérieures sont définis par :

$$\{X_r\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r\} \\ \{\dot{\delta}_r\} \end{Bmatrix} \quad (F.2)$$

$$[A_r(t)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_r(t)]^{-1}([K_r(t)] + [K_p]) & -[M_r(t)]^{-1}([C_r(t)] + [C_p]) \end{bmatrix} \quad (F.3)$$

$$\{B_r(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [M_r(t)]^{-1}(\{F_r(t)\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\}) \end{Bmatrix} \quad (F.4)$$

Les conditions initiales connues à l'instant $t_1 = 0$ sont données par :

$$\{X_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r^1\} \\ \{\dot{\delta}_r^1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_r(0)\} \\ \{\dot{\delta}_r(0)\} \end{Bmatrix} \quad (F.5)$$

Il est à noter que l'équation (F.1) peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\{\dot{X}_r\} = f(t, \{X_r\}) \quad (F.6)$$

Le développement en série de TAYLOR du vecteur d'état $\{X_r\}$ du rotor est construit pour établir une méthode d'ordre 4 donnée par les équations suivantes :

$$\{X_r^{i+1}\} = \{X_r^i\} + \Delta t \{K_{RK}^i\} \quad (F.7)$$

et :

$$\{K_{RK}^i\} = \frac{\{K_{RK,1}^i\} + 2\{K_{RK,2}^i\} + 2\{K_{RK,3}^i\} + \{K_{RK,4}^i\}}{6} \quad (F.8)$$

avec les coefficients :

$$\{K_{RK,1}^i\} = f\left(t_i, \{X_r^i\}\right) \quad (\text{F.9})$$

$$\{K_{RK,2}^i\} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \{X_r^i\} + \frac{\Delta t}{2}\{K_{RK,1}^i\}\right) \quad (\text{F.10})$$

$$\{K_{RK,3}^i\} = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \{X_r^i\} + \frac{\Delta t}{2}\{K_{RK,2}^i\}\right) \quad (\text{F.11})$$

$$\{K_{RK,4}^i\} = f\left(t_i + \Delta t, \{X_r^i\} + \Delta t\{K_{RK,3}^i\}\right) \quad (\text{F.12})$$

où :

- $\{X_r^i\}$ et $\{X_r^{i+1}\}$ sont les approximations du vecteur d'état $\{X_r\}$ aux instants t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ respectivement,
- Δt est le pas de temps.

De plus, $\{K_{RK,1}^i\}$ est l'incrément basé sur la pente au début de l'intervalle. $\{K_{RK,2}^i\}$ ainsi que $\{K_{RK,3}^i\}$ sont les incréments basés sur la pente au milieu de l'intervalle. $\{K_{RK,4}^i\}$ est l'incrément basé sur la pente à la fin de l'intervalle.

Il est important de noter que la méthode classique de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 dispose d'une erreur de troncature locale d'ordre 5 et nécessite quatre évaluations de la fonction $f(t, \{X_r\})$ pour chaque pas de temps, ce qui rend cette méthode numériquement coûteuse quand f est de taille assez grande. Ainsi la valeur suivante $\{X_r^{i+1}\}$ est déterminée par la valeur actuelle $\{X_r^i\}$ plus le produit entre la taille d'intervalle Δt et la moyenne pondérée $\{K_{RK}^i\}$ de quatre incréments. Chaque incrément est défini par la fonction f sur le second membre des équations différentielles du mouvement (F.6).

VERSION LINEAIRE DE LA METHODE DE NEWMARK

La méthode de NEWMARK permet la résolution numérique des équations différentielles du second ordre dont les termes sont éventuellement très compliqués. Elle convient non seulement pour intégrer des systèmes différentiels linéaires mais aussi pour des systèmes fortement non linéaires. Dans le second cas de systèmes, le calcul nécessite une boucle d'itération supplémentaire liée à la non linéarité à l'intérieur de chaque pas de temps.

Dans cette annexe, la version linéaire de ladite méthode est expliquée pour résoudre itérativement les équations du mouvement du rotor embarqué. Tout d'abord, le vecteur $\{\delta_r(t)\}$ des déplacements dynamiques du rotor embarqué s'écrit de manière discrétisée aux instants t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (Δt étant le pas de temps), c'est-à-dire $\{\delta_r(t_i)\} = \{\delta_r^i\}$ et $\{\delta_r(t_i + \Delta t)\} = \{\delta_r^{i+1}\}$.

Les équations linéaires semi-discrètes du mouvement (IV.4) appliquées au temps t_{i+1} ($1 \leq i \leq n_{pt} + 1$ où n_{pt} est le nombre de pas de temps) s'écrivent :

$$\begin{aligned} & [M_r(t_{i+1})]\{\delta_r^{i+1}\} + ([C_r(t_{i+1})] + [C_p])\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} + ([K_r(t_{i+1})] + [K_p])\{\delta_r^{i+1}\} \\ & = \{F_r(t_{i+1})\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\} \end{aligned} \quad (G.1)$$

A l'instant initial $t_1 = 0$, les conditions initiales correspondant aux déplacements et aux vitesses sont supposées connues, c'est-à-dire :

$$\{\delta_r^1\} = \{\delta_r(0)\} \quad ; \quad \{\dot{\delta}_r^1\} = \{\dot{\delta}_r(0)\} \quad (G.2)$$

Les vecteurs vitesse et déplacement entre t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ sont approchés par les formules générales suivantes du schéma de NEWMARK :

$$\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} = \{\dot{\delta}_r^i\} + \Delta t (\xi_1 \{\delta_r^{i+1}\} + (1 - \xi_1) \{\ddot{\delta}_r^i\}) \quad (G.3)$$

$$\{\delta_r^{i+1}\} = \{\delta_r^i\} + \Delta t \{\dot{\delta}_r^i\} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (2\xi_2 \{\delta_r^{i+1}\} + (1 - 2\xi_2) \{\ddot{\delta}_r^i\}) \quad (G.4)$$

où :

- ξ_1 et ξ_2 sont les paramètres du schéma de NEWMARK ou encore les facteurs de pondération qui contrôlent la stabilité de la procédure de résolution.

Plusieurs couples peuvent définir des variantes de l'algorithme de NEWMARK et les plus couramment employés sont distingués comme suit :

- ♣ **Accélération moyenne** ($\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/4$) : ce schéma implicite est classiquement retrouvé en dynamique des structures, inconditionnellement stable et précis au second ordre. Un de ses avantages majeurs est son absence de dissipation numérique, c'est-à-dire qu'il présente la plus faible erreur globale de troncature.

- ✦ **FOX et GOODWIN** ($\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/12$) : cet algorithme est conditionnellement stable et sa précision est du troisième ordre en périodicité.
- ✦ **Différences centrées** ($\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 0$) : la stabilité de ce schéma explicite est conditionnelle. Comme tout calcul explicite, l'utilisation du schéma nécessite un pas de temps relativement faible et également quelques précautions quant à la composition de la matrice de masse de la structure qui doit être diagonale.
- ✦ **Accélération constante** ($\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 0$) : ce schéma explicite ne présente aucun intérêt pratique parce qu'il est instable.

Dans le cadre de cette thèse, le schéma implicite de NEWMARK basé sur l'accélération moyenne est utilisé. Le vecteur accélération initiale $\{\ddot{\delta}_r^i\} = \{\ddot{\delta}_r(0)\}$ est déterminé de telle sorte qu'au moment $t_1 = 0$, les conditions initiales $\{\delta_r^i\}$ et $\{\dot{\delta}_r^i\}$ doivent satisfaire l'équation (G.1) comme suit :

$$[M_r(0)]\{\ddot{\delta}_r^i\} = \{F_r(0)\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\} - ([C_r(0)] + [C_p])\{\dot{\delta}_r^i\} - ([K_r(0)] + [K_p])\{\delta_r^i\} \quad (G.5)$$

Ensuite, la relation d'équilibre, qui définit le problème dynamique transitoire et qui donne le vecteur déplacement inconnu $\{\delta_r^{i+1}\}$ recherché à l'instant t_{i+1} , est écrite sous la forme suivante :

$$\left(\frac{4}{(\Delta t)^2} [M_r(t_{i+1})] + \frac{2}{\Delta t} ([C_r(t_{i+1})] + [C_p]) + [K_r(t_{i+1})] + [K_p] \right) \{\delta_r^{i+1}\} = \{F_r(t_{i+1})\} + \{F_p(\{\delta_r^0\}, \{0\})\} + [K_p]\{\delta_r^0\} + \left(\frac{4}{(\Delta t)^2} [M_r(t_{i+1})] + \frac{2}{\Delta t} ([C_r(t_{i+1})] + [C_p]) \right) \{\delta_r^i\} + \left(\frac{4}{\Delta t} [M_r(t_{i+1})] + [C_r(t_{i+1})] + [C_p] \right) \{\dot{\delta}_r^i\} + [M_r(t_{i+1})] \{\ddot{\delta}_r^i\} \quad (G.6)$$

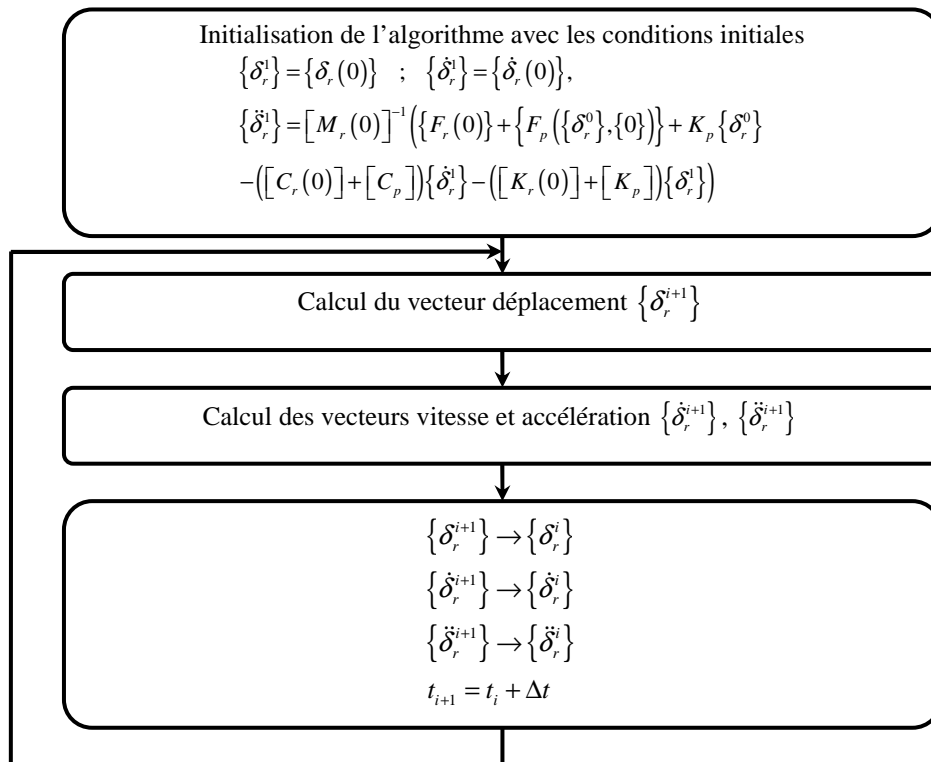


FIG. G.1 : Récapitulatif du processus d'intégration temporelle pas à pas

Les relations, qui permettent de calculer les vecteurs vitesse et accélération au même moment t_{i+1} , s'expriment sous la forme :

$$\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} = -\{\dot{\delta}_r^i\} + \frac{2}{\Delta t} (\{\delta_r^{i+1}\} - \{\delta_r^i\}) \quad (\text{G.7})$$

$$\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\} = -\{\ddot{\delta}_r^i\} + \frac{2}{\Delta t} (\{\dot{\delta}_r^{i+1}\} - \{\dot{\delta}_r^i\}) \quad (\text{G.8})$$

L'évolution au cours du temps des matrices $[M_r(t_{i+1})]$, $[C_r(t_{i+1})]$, $[K_r(t_{i+1})]$ et du vecteur $\{F_r(t_{i+1})\}$ est supposée connue. Ainsi les vecteurs $\{\delta_r^i\}$, $\{\dot{\delta}_r^i\}$ et $\{\ddot{\delta}_r^i\}$ connus à l'instant t_i permettent d'abord de calculer le vecteur déplacement $\{\delta_r^{i+1}\}$ puis les vecteurs vitesse $\{\dot{\delta}_r^{i+1}\}$ et accélération $\{\ddot{\delta}_r^{i+1}\}$ à l'aide des équations (G.6)-(G.8), c'est-à-dire que le mouvement dynamique transitoire du rotor est obtenu en résolvant ces équations pour chaque incrément de temps.

De plus, le temps d'intégration final est choisi de telle sorte que les effets transitoires ont disparu et que le régime dynamique permanent est atteint. Enfin, l'algorithme d'intégration temporelle de NEWMARK est programmé de manière itérative suivant la procédure présentée sur la figure **FIG. G.1**.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : DAKEL (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE : 12 septembre 2014
Prénoms : M. Zaki	
TITRE : Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués	
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : 2014-ISAL-0087
Ecole doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique) de Lyon	
Spécialité : Mécanique	
RESUME :	
<p>Les rotors sont excités non seulement par le balourd tournant mais aussi par les différents mouvements de leur support : turbocompresseurs de véhicules, turbomoteurs aéronautiques, pompes à vide portées en sont des exemples industriels. Ainsi la conception de rotors robustes capables de bien fonctionner sous de telles conditions (excitations extrêmes) est nécessaire pour éviter des instabilités, source de défaillance catastrophique. Le présent travail a pour objectif de prévoir le comportement dynamique d'un rotor embarqué monté sur des paliers rigides ou élastiques hydrodynamiques et soumis à des excitations du support rigide.</p> <p>Les énergies cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel des composants d'un rotor flexible tournant sont calculés. Le modèle proposé de rotor embarqué est basé sur les éléments finis de poutre de TIMOSHENKO. Il contient les effets relatifs à l'inertie de rotation des sections droites, à l'inertie gyroscopique, à la déformation de cisaillement d'arbre et à la dissymétrie géométrique de l'arbre et/ou du disque rigide et considère six types de mouvements déterministes (rotations et translations) du support. Suivant le type d'analyse utilisé pour le palier, les forces de rappel hydrodynamiques agissant sur l'arbre et calculées avec l'équation de REYNOLDS sont linéaires/non linéaires. L'utilisation des équations de LAGRANGE fournit les équations différentielles linéaires/non linéaires du mouvement du rotor embarqué en flexion par rapport au support mobile supposé rigide, qui représente un système de coordonnées non inertiel. Les équations du mouvement contiennent des termes paramétriques périodiques en raison de la dissymétrie géométrique du rotor et des termes paramétriques variables dans le temps en raison des rotations du support. Ces termes paramétriques sont considérés comme des sources d'excitation intérieure et conduisent à une instabilité dynamique latérale.</p> <p>Dans les applications numériques proposées, trois configurations de rotor embarqué sont analysées. Tout d'abord, un rotor symétrique monté sur des paliers rigides est soumis à un balourd combiné avec des mouvements de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Ensuite, un rotor avec une dissymétrie géométrique du disque monté sur des paliers rigides est excité par l'effet de balourd et par des mouvements combinés de rotation constante et de translation sinusoïdale du support. Enfin, un rotor symétrique monté sur des paliers hydrodynamiques est soumis au balourd et aux excitations sinusoïdales de rotation ou de translation du support.</p> <p>Des méthodes et des approches quasi-analytiques et numériques, telles que la théorie de FLOQUET, le schéma implicite d'intégration temporelle pas à pas de type NEWMARK, la méthode de shooting et la méthode de la balance harmonique, sont employées pour traiter les équations différentielles du mouvement des systèmes rotor embarqué-palier, analyser leur comportement dynamique, étudier leur stabilité et calculer leurs réponses forcées.</p> <p>Pour les première et deuxième configurations de rotor, le comportement dynamique est calculé en discutant l'influence des mouvements du support sur les cartes de stabilité, les diagrammes de CAMPBELL, les réponses en régime permanent et les orbites du rotor. Pour la troisième configuration de rotor, l'influence de mouvements sinusoïdaux de rotation ou de translation du support, la précision du modèle linéarisé de palier et l'intérêt du modèle non linéaire pour un palier hydrodynamique sont examinés et discutés grâce à des cartes de stabilité, des orbites du rotor, des réponses dans le domaine temporel, des transformées de FOURIER rapides (FFTs), des diagrammes de bifurcation ainsi que des sections de POINCARÉ.</p>	
MOTS-CLES :	
Dynamique des rotors, rotor dissymétrique, rotor embarqué, méthode des éléments finis, palier hydrodynamique, mouvement du support, excitation paramétrique, instabilité latérale, dynamique non linéaire, mouvement transitoire, méthode de shooting, méthode de la balance harmonique, bifurcation, chaos.	
Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon 20, avenue Albert Einstein 69621 Villeurbanne Cedex FRANCE	
Directeurs de thèse : Pr. Régis DUFOUR et Dr. Sébastien BAGUET	
Président de jury : Pr. Fabrice THOUVEREZ	
Composition du jury : Pr. Fabrice THOUVEREZ Pr. Mihai ARGHIR Pr. Régis DUFOUR	
Pr. Alain BERLIOZ Dr. Kostandin GJIKA Dr. Sébastien BAGUET	