

THÈSE

Simulation numérique multi-échelle de la propagation de fissures expérimentales tridimensionnelles sous chargement de fretting fatigue par la méthode des éléments finis étendus

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE

par

Emilien PIERRES

Thèse soutenue le 27 septembre 2010 devant la Commission d'examen

Jury

LADEVEZE PIERRE	Professeur ENS Cachan	Président du jury
CAILLETAUD GEORGES	Professeur Mines-ParisTech	Rapporteur
GINER MARAVILLA EUGENIO	Professeur UPV	Rapporteur
NOWELL DAVID	Professeur	Examineur
MORALES ESPEJEL GUILLERMO	Professeur INSA-Lyon	Examineur
FOUVRY SIEGFRIED	Directeur de recherche	Invité
BAIETTO MARIE-CHRISTINE	Directrice de recherche	Directrice de thèse
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon	Examineur

INSA, direction de la recherche - Écoles doctorales - Quadriennal 2007-2010

Sigle	École doctorale	Nom et coordonnées du responsable
CHIMIE	Chimie de Lyon M. Jean Marc Lancelin Insa : R. Gourdon http://sakura.cpe.fr/ED206	M. Jean Marc Lancelin Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment CPE 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.43.13.95 lancelin@hikari.cpe.fr
EEA	Électronique, Électrotechnique, Automatique M. Alain Nicolas Insa : C. Plossu ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. Laboune AM. 64.43 – Fax : 64.54 http://www.insa-lyon.fr/eea	M. Alain Nicolas Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 Écully Tél : 04.72.18.60.97, Fax : 04.78.43.37.17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. Havgoudoukian
E2M2	Évolution, Écosystème, Microbiologie, Modélisation M. Jean-Pierre Flandrois Insa : H. Charles http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2	M. Jean-Pierre Flandrois CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment G. Mendel 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.26.23.59.50, Fax : 04.26.23.59.49 Port : 06.07.53.89.13 E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	Interdisciplinaire sciences-santé M. Didier Revel Insa : M. Lagarde Secrétariat : S. Boudjema	M. Didier Revel Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 avenue Doyen Lépine 69500 Bron Tél : 04.72.68.49.09, Fax : 04.72.35.49.16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	Informatique et mathématiques M. Alain Mille Secrétariat : C. Dayeyan http://infomaths.univ-lyon1.fr	M. Alain Mille Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.44.82.94, Fax : 04.72.43.13.10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr alain.mille@liris.cnrs.fr
MATÉRIAUX	Matériaux de Lyon M. Jean Marc Pelletier Secrétariat : C. Bernavon 83.85	M. Jean Marc Pelletier INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.43.83.18, Fax : 04.72.43.85.28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique M. Jean Louis Guyader Secrétariat : M. Laboune PM : 71.70 – Fax : 87.12	M. Jean Louis Guyader INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.18.71.70, Fax : 04.72.43.72.37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* M. Lionel Obadia Insa : J.Y. Toussaint	M. Lionel Obadia Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 Lyon cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76, Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

...

Résumé

La prévision du comportement et de la propagation de fissures de fatigue est un domaine de recherche complexe, dont les objectifs peuvent se résumer simplement par "augmenter la durée de vie des structures, tout en évitant leur surdimensionnement". Le fretting est attribué à l'interaction de deux composants en contact soumis à des déplacements relatifs cycliques de faible amplitude. Les sollicitations tribologiques à l'interface des composants des structures mettent en jeu des amplitudes de contraintes très élevées dans des volumes de matière très localisés. Le régime de glissement local, i.e. l'évolution des conditions de glissement et d'adhérence, détermine la nature de l'endommagement initial : fissuration ou usure. Le travail présenté dans ce mémoire est focalisé sur la prédiction de l'amorçage et du comportement des fissures de fretting fatigue. Ces fissures tridimensionnelles sont sollicitées en mode mixte selon des cycles complexes et leur propagation en fatigue est conditionnée par les phénomènes non-linéaires tels que la plasticité localisée en front de fissure et le contact avec frottement entre les lèvres. Ainsi, la maîtrise des mécanismes de fissuration sous chargement de fretting fatigue requiert une analyse pluridisciplinaire des différents phénomènes physiques couplés afin de prendre en compte les effets globaux et locaux, les sollicitations multi-axiales non proportionnelles, les lois de comportement et les conditions de contact avec frottement interfacial.

Un modèle tridimensionnel éléments finis étendus multi-échelle dédié au contact avec frottement entre les faces de la fissure est proposé. Une formulation faible mixte à trois champs permet une définition intrinsèque de la fissure avec sa propre discrétisation indépendante du maillage de la structure. Un solveur stabilisé adapté de la méthode LATIN est implémenté. Les propriétés de stabilité et les performances du modèle sont illustrées dans plusieurs exemples bidimensionnels et tridimensionnels. Le modèle est validé par comparaison avec un code éléments finis industriel.

Une stratégie multi-modèle globale basée sur l'analyse expérimentale et la simulation numérique de la propagation des fissures est développée afin de prédire la durée de vie de composants en fretting fatigue. Des essais de fretting fatigue sont réalisés afin d'analyser l'amorçage et la propagation de fissures. Les sollicitations tribologiques au cours du cycle sont déterminées par la résolution du contact deux-corps. La prédiction du risque d'amorçage des fissures est conduite. Ces résultats sont utilisés comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM des essais de fretting bidimensionnels et tridimensionnels. La simulation de la propagation des fissures est réalisée à l'aide de critères de fatigue multi-axiale non proportionnels et d'une loi de propagation expérimentale.

MOTS CLÉS: Fretting, fatigue, rupture, éléments finis étendus, contact frottement, propagation des fissures, étude expérimentale, contact deux corps

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Synthèse bibliographique	7
1.1 Problèmes de rupture sous chargement de fretting fatigue	10
1.1.1 Caractérisation des problèmes de fretting	10
1.1.2 Amorçage des fissures sous chargement de fretting-fatigue	14
1.1.3 Propagation des fissures de fretting	15
1.2 Mécanique de la rupture en présence de non linéarités de contact avec frottement	17
1.2.1 Problème de référence	17
1.2.2 Modes de fissuration	18
1.2.3 Analyse asymptotique du problème de fissuration	18
1.2.4 Approches énergétiques	21
1.2.5 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	26
1.2.6 Critères de propagation en fatigue	29
1.3 Simulation de la propagation des fissures en fatigue par la méthode des éléments finis étendus	35
1.3.1 La méthode des éléments finis étendus X-FEM	36
1.3.2 Représentation géométrique des fissures par fonctions de niveau dans le cadre de la X-FEM	38
1.4 État de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus	41
2 Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure	47
2.1 Formulation faible mixte du problème de structure avec interface interne en présence de contact et frottement	49

2.2	Discrétisation X-FEM multi-échelle dédiée aux problèmes de contact et frottement interfacial	52
2.3	Solution non linéaire du problème de rupture avec contact et frottement interfacial	55
2.3.1	La méthode du Lagrangien Augmenté	56
2.3.2	Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN	60
2.3.3	Stabilisation de la méthode LATIN	65
2.4	Exemples tridimensionnels et validation du modèle	71
2.4.1	Problème tridimensionnel de contact avec frottement : stabilité de la méthode numérique	71
2.4.2	Problème de contact unilatéral : intérêt de l'approche multi-échelle	80
2.4.3	Problème de contact avec frottement : comparaison avec une solution numérique de référence	85
2.5	Modélisation quasi-statique et simulation multi-échelle en temps de la propagation des fissures	88
3	Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue	91
3.1	Stratégie de prédiction de durée de vie dédiée aux problèmes de fretting fatigue	93
3.1.1	Problème expérimental de fretting fatigue de référence	95
3.1.2	Résolution du problème de contact deux-corps	96
3.1.3	Prédiction du risque d'amorçage de fissures de fretting	100
3.1.4	Modélisation X-FEM avec contact et frottement interfacial et validation du calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 2D .	101
3.1.5	Étude paramétrique de la propagation des fissures sous chargement de fretting	109
3.2	Étude expérimentale de la propagation des fissures de fretting en configuration cylindre/plan	119
3.3	Simulation numérique X-FEM 2D de la propagation de fissures expérimentale sous chargement de fretting	124
3.3.1	Analyse du problème expérimental : Résolution du contact cylindre/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures	124
3.3.2	Construction d'une loi de propagation expérimentale dédiée aux problèmes de fretting fatigue	125
3.3.3	Simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue	127
4	Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue	133
4.1	Simulation X-FEM 3D d'un essai de fretting fatigue	135
4.1.1	Essais de fretting fatigue sphère/plan	135

4.1.2	Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures	137
4.1.3	Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue	140
4.1.4	Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	147
4.2	Étude expérimentale et numérique X-FEM de la propagation tridimensionnelle des fissures sous chargement de fretting fatigue	149
4.2.1	Essais de fretting fatigue sphère/plan précontraints : étude expérimentale de la propagation des fissures	149
4.2.2	Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures.	153
4.2.3	Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue	154
	Conclusions et perspectives	159
	Bibliographie	165

Table des figures

1.1	Représentation schématique de la courbe de Wöhler (Contrainte / Nombre de cycles à rupture).	9
1.2	Exemples d'endommagement par fretting : (a) Assemblage aube-disque fissuré [NOW 06]; (b) bague de roulement fissurée à la limite d'une région de fretting; (c) trace de fretting sur une dent d'un pignon d'engrenage [NASA]; (d) cannelures d'un rotor d'hélicoptère détruites en fretting [BEEA,2005].	11
1.3	Configurations de contact expérimentales simplifiées pour l'étude du contact entre deux corps.	11
1.4	Problème de contact sphère/plan : Aire de contact et contraintes tangentielles à l'interface : (a) $Q \ll \mu.P$; (b) $Q < \mu.P$; (c) $Q = \mu.P$	12
1.5	Boucles de fretting ou d'hystérésis entre la force de frottement et le débattement : (a) adhérence; (b) glissement partiel; (c) glissement total [VIN 92b].	13
1.6	(a) Carte de régimes de glissement (Running Conditions Fretting Map : RCFM) et (b) carte de réponse au fretting du matériau (Material Response Fretting Map : MRFM).	14
1.7	Résultats expérimentaux d'un essai de fretting cylindre/plan [MUñ 06] :(a) Trace de fretting; (b) Coupe transversale de l'éprouvette fissurée.	15
1.8	Représentation schématique des différents stades de propagation des fissures de fretting [CHA 06b].	17
1.9	Problème de référence.	18
1.10	Repère local associé au front de fissure.	19
1.11	Représentation schématique des trois modes de rupture.	19
1.12	Schéma de l'extention d'une fissure.	21
1.13	Paramétrage et contour de la fissure.	23
1.14	Définition des contours C_1 et C_2 pour le calcul de l'intégrale \tilde{J} en pointe de fissure.	24
1.15	Champ d'extension virtuel et base locale conformes à la géométrie de la fissure au voisinage du front de fissure [MOë 02, RAN 08a].	27
1.16	Volume d'intégration pour le calcul des quantités \tilde{J} et I	27

1.17	Allure générale du taux d'accroissement d'une fissure sollicitée en mode I en fonction de l'écart de variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK lors d'un cycle de chargement.	30
1.18	Paramétrage de l'extension virtuelle de la fissure.	32
1.19	Exemple de variation du critère direction $k_1^*(\theta)_{max}$ au cours d'un cycle de chargement proportionnel et non proportionnel.	34
1.20	Stratégie pour la simulation numérique de la propagation de fissures.	35
1.21	Paramétrage de la fissure pour le calcul des fonctions d'enrichissement X-FEM en 2D.	37
1.22	Représentation graphique 2D de l'enrichissement local X-FEM. Les carrés et les cercles représentent respectivement les enrichissements singuliers et discontinus.	38
1.23	Représentation graphique d'un champ de distance signé bidimensionnel.	39
1.24	Définition de la géométrie d'une fissure tridimensionnelle à l'aide de deux fonctions de niveau. Les surfaces ϕ_0 et ψ_0 correspondent aux iso-0 de ces fonctions.	40
1.25	Raffinement local du maillage de la structure proposé par Ribeaucourt [RIB 07a] afin d'adapter la discrétisation de l'interface à l'échelle du problème de contact avec frottement.	42
1.26	Illustration des oscillations numériques de la solution local de contact proposée par Moës <i>et al.</i> [MOë 06].	43
1.27	Représentation schématique des différentes méthodes de décomposition de domaine.	44
2.1	Séparation du problème global à l'échelle de la structure et du problème local de contact avec frottement à l'échelle de la fissure.	49
2.2	Méthodes de discrétisation du problème de contact interfacial en 2D proposées par : (a)-Dolbow <i>et al.</i> [DOL 01] ; (b)-Pierres <i>et al.</i> [PIE 10a].	53
2.3	Algorithme de la méthode de raffinement automatique de la discrétisation de l'interface en 3D.	54
2.4	Géométrie du domaine (en mm) et de la fissure définie par deux fonctions de niveau ϕ et ψ	54
2.5	Maillage structuré de 3072 tétraèdres du domaine parallélépipédique.	55
2.6	Représentation de la discrétisation de l'interface (éléments d'interface et points d'intégration) : (a)-sans raffinement [DOL 01] ; (b)-avec raffinement : $l_c = 5\text{mm}$; (c)-avec raffinement : $l_c = 3\text{mm}$ [PIE 10a].	55
2.7	Nombre d'itérations à convergence en fonction de la valeur du coefficient de pénalité α : (a)-avec le maillage de triangles ; (b)-avec le maillage de quadrangles.	59
2.8	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.	59
2.9	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de quadrangles.	60

2.10	Représentation graphique de l'approximation itérative par la méthode LATIN de la solution d'un problème non linéaire sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$: $\mathbf{X}^{(0)}$ est le vecteur d'état initial, $\mathbf{X}^{(i)}$ est le vecteur d'état à l'itération i et $\mathbf{X}^{(\infty)}$ est le vecteur d'état solution du problème.	61
2.11	Représentation schématique du processus itératif de la méthode LATIN au temps t_{n+1}	62
2.12	Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k : (a)-avec le maillage de triangles ; (b)-avec le maillage de quadrangles.	64
2.13	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.	64
2.14	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de quadrangles.	65
2.15	Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k et du coefficient de stabilisation ε avec le maillage de triangles.	69
2.16	Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k et du coefficient de stabilisation ε avec le maillage de quadrangles.	69
2.17	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10^4$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.	70
2.18	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10^4$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de quadrangles.	70
2.19	Évolution de l'erreur η au cours des itérations de la résolution linéaire, pour chaque configuration dans le cas le plus favorable, pour les modèles SLA-X-FEM, NLLA-X-FEM et LA-X-FEM.	72
2.20	Geométrie, conditions aux limites et chargement du problème.	72
2.21	Maillage en volume et discrétisation raffinée de l'interface ($l_c = 1.8$ mm).	73
2.22	Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_\Gamma = 1$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.	74
2.23	Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_\Gamma = 0.5$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.	75
2.24	Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_\Gamma = 0$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.	76
2.25	Évolution de l'erreur local η au cours des itérations de la résolution non linéaire pour les trois cas considérés avec les modèles SLA-X-FEM et NLLA-X-FEM.	76
2.26	Représentation du domaine d'intégration D pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes à un point P_i du front de fissure.	77
2.27	Représentation de l'extension virtuelle δl dans le domaine d'intégration D : (a) section du front interne à la structure ; (b) section du front proche de la frontière de la structure.	78

2.28	Facteurs d'intensité des contraintes en mode II et III calculés le long des deux fronts de fissures pour $\mu\Gamma = 1, 0.5$ et 0	78
2.29	Géométrie, conditions aux limites et chargement du problème.	80
2.30	Maillages de la structure : (a)-pour la configuration A ; (b)-pour les configurations B et C.	81
2.31	Discrétisations de la fissure : (a)-pour la configuration A ; (b)-pour la configuration B ; (c)-pour la configuration C (modèle multi-échelle).	81
2.32	(a) Représentation amplifiée de la solution du problème en déplacement global \mathbf{u} et (b) représentation du champ des efforts locaux \mathbf{T} à l'interface de la fissure pour le cas de référence A.	82
2.33	Représentation des efforts d'interface sur le plan de fissure et tracé de la frontière entre la zone de contact et la zone d'ouverture pour chaque configuration.	84
2.34	Géométrie, chargement et conditions aux limites du problème.	85
2.35	(a) Maillage X-FEM en volume (3072 tétraèdres) et (b) discrétisation raffinée de l'interface (832 points d'intégration).	85
2.36	Résultats X-FEM : (a)-Représentation amplifiée du champ de déplacement $\mathbf{U}(\times 120)$; (b) Efforts d'interface \mathbf{T}	86
2.37	Résultats ANSYS : (a)-Représentation amplifiée du champ de déplacement $\mathbf{U}(\times 120)$; (b) Efforts d'interface \mathbf{T}	86
2.38	Exemple de de chargement sinusoïdal P de valeur moyenne σ_m . Chaque cycle $[T_m; T_{m+1}]$ est discrétisé en n piquets de temps t_n	88
2.39	LEGEND.	89
3.1	Organigramme de la stratégie de prédiction de vie en fatigue des composants de structure soumis à un chargement de fretting.	94
3.2	Essai de fretting fatigue réalisé par Dubourg et al. [DUB 00] : sites d'amorçage et profile des fissures observées.	96
3.3	Zone d'intérêt potentielle pour la résolution du contact deux-corps discrétisée en N cellules de longueur Δx et de coordonnée x_j	97
3.4	Variations cycliques de l'effort tangentiel Q appliqué au poinçon.	98
3.5	Représentation des distributions des contraintes normales $p(x)$ et de cisaillement $q(x, t_n)$ (MPa) sur l'interface de contact cylindre/plan pour une cycle de fretting complet (9 pas de temps sur 80 sont représentés).	99
3.6	Répartitions des zones de micro-glissement et d'adhérence en surface au cours du cycle de fretting.	99
3.7	Distribution du risque d'amorçage d et de l'angle d'amorçage θ selon le critère de Dang Van dans le domaine sous la zone de contact.	101
3.8	Données géométriques et chargement pour la modélisation simplifiée de l'essai.	102
3.9	Représentation amplifiée ($\times 50\ 000$) du champ de déplacement global \mathbf{U} calculé au pas de temps 1 ($Q = Q_{max}$) au voisinage de la fissure 1.	103

3.10	Champ des efforts \mathbf{T} entre les faces de la fissure 2 au pas de temps 1 ($Q = Q_{max}$	103
3.11	Maillage X-FEM localement raffiné au voisinage du front de la fissure 2 et domaine d'intégration D pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes : Le champ d'extension virtuel \mathbf{q} vaut 1 en pointe de fissure et 0 aux bord du domaine D (cf. section 1.2.5).	104
3.12	Variations du facteur d'intensité de contraintes en mode I au cours du cycle de fretting calculées avec le modèle X-FEM et le modèle de référence pour chaque fissure.	106
3.13	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM et le modèle de référence.	107
3.14	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 2 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM et le modèle de référence.	108
3.15	Variation de l'angle de phase $\Psi_M = \left \arctan \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \right $ au cours du cycle de fretting.	109
3.16	Notations pour la simulation numérique de la propagation des fissures en 2D.	110
3.17	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM pour 6 valeurs différentes de μ_Γ : 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1 et 1.2.	111
3.18	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 2 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM pour 6 valeurs différentes de μ_Γ : 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1 et 1.2.	112
3.19	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode I en pointe de fissure 1 calculé avec le modèle X-FEM au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.	113
3.20	Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 calculé avec le modèle X-FEM au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.	113
3.21	Variation de l'angle de phase Ψ_M des sollicitations en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.	114
3.22	Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration A : $\mu_\Gamma = 0.2$ et $\sigma_t = -115$ MPa (10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).	116
3.23	Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration B : $\mu_\Gamma = 1.2$ et $\sigma_t = -115$ MPa (10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).	116
3.24	Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration C : $\mu_\Gamma = 1.2$ et $\sigma_t = 0$ (20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).	117
3.25	Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration D : $\mu_\Gamma = 1.2$ et $\sigma_t = +115$ MPa (20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).	118
3.26	Représentation schématique du dispositif d'essai de fretting à deux vérins.	119

3.27	Géométrie et dimensions des éprouvettes en acier 35NCD16.	120
3.28	Trace de fretting obtenue après un essai de 200 000 cycles avec une contrainte de traction statique $\sigma_t = 180$ MPa. La zone d'adhérence ($c \cong 0.62$ mm) se distingue de la zone de micro-glissement caractéristique du régime de glissement partiel. L'usure de la surface de contact est très faible et la taille de la zone de contact ($a \cong 1.02$ mm) est quasi constante quels que soient la contrainte de traction appliquée et le nombre de cycles de l'essai.	121
3.29	Coupe transversale de l'éprouvette fissurée post-mortem permettant l'observation de la géométrie des fissures en volume pour un essai de 500 000 cycles avec une contrainte de traction statique nulle. Ici, la fissure 2 (de droite) est représentée. Sa position en surface est $x = 0.95$ mm. Elle se propage en volume avec un angle de 77.96° par rapport à la surface. . . .	122
3.30	Évolution de la longueur a des fissures de fretting observées en fonction du nombre de cycles de charge N des essais et de la contrainte de traction volumique $\sigma_t = 0; 70; 140, 180; 210$ et 280 MPa.	122
3.31	Observation métallographique en coupe de l'éprouvette fissurée pour un essai de fretting de 350 000 cycles avec une contrainte de traction $\sigma_t = 280$ MPa. Deux fissures s'amorcent et se propagent symétriquement par rapport au centre du contact, avec un angle d'environ 65° par rapport à la surface (stade II). Puis une fissure stoppe à 1.9 mm de profondeur. L'autre bifurque perpendiculairement à la surface et atteint une profondeur de 4.5 mm (stade III).	123
3.32	Distribution du risque d'amorçage d et de l'angle d'amorçage θ selon le critère de Dang Van dans le domaine sous la zone de contact.	124
3.33	Taux d'accroissement expérimental des fissures da/dN en fonction de la valeur de $\Delta K = \sqrt{\Delta K_I^2 + b \cdot \Delta K_{II}^2}$ calculée numériquement pour différentes valeurs de σ_t ; Courbe de la loi de propagation en mode mixte (3.10) construite à partir des résultats des essais de fretting et de la simulation numérique X-FEM de ces essais ($C = 1.3 \cdot 10^{12}$, $m = 3.4$ et $b = 0.79$); Courbe de la loi de propagation en fatigue conventionnelle en mode I ($R = 0.1$) pour l'acier 35NCD16 (échelles logarithmiques).	126
3.34	Coupes métallographiques des éprouvettes des essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles pour une contrainte de traction $\sigma_t = 70$ MPa. La fissure 2 (de droite) est représentée.	129
3.35	Trajet de la fissure 2 calculé à partir de la simulation numérique X-FEM de l'essai cylindre/plan avec $\sigma_t = 70$ MPa et trajet expérimental moyen observé par coupes métallographiques des échantillons.	130
4.1	Géométrie, chargement et conditions aux limites des essais de fretting sphère/plan ERC-SKF.	135
4.2	Boucle d'hystérésis ($Q-\delta$) de fretting obtenue à partir de la mesure expérimentale de l'effort tangent et du déplacement relatif cyclique.	136

4.3	Traces de fretting pour les essais sphère/plan conduits à (a) N = 30 000 cycles, (b) N = 50 000 cycles et (c) N = 70 000 cycles.	137
4.4	Coupes transversales post-mortem de l'éprouvette fissurée et reconstruction de la géométrie tridimensionnelle des fissures pour un essai conduit à 70 000 cycles.	138
4.5	Géométries reconstruites des fissures tridimensionnelles pour les essais conduits à (a) N = 30 000 cycles, (b) N = 50 000 cycles et (c) N = 70 000 cycles.	138
4.6	Boucle d'hystérésis de fretting en glissement partiel : L'énergie dissipée W_d par glissement correspond à l'aire de la boucle et l'énergie totale $W_t = W_d + W_l$ correspond à l'aire du rectangle qui la contient [FOU 95].	139
4.7	Évolution du rapport f aux cours des cycles des essais de fretting permettant de calculer le coefficient de frottement local μ , le rapport de glissement c/a et la quantité u	140
4.8	Évolution de l'effort tangentiel Q mesurée au cours d'un cycle de fretting et discrétisée en 25 pas de temps t_n	140
4.9	(a) Distributions des pressions normales $p(x,y)$ et (b) des contraintes tangentielles $q(x,y,t_n = 1)$ sur la surface de contact sphère/plan interpolées sur le maillage surfacique X-FEM de 30×30 éléments carrés de $12\mu\text{m}$ de côté.	141
4.10	Distribution du risque d'amorçage d calculé à partir du critère de Dang Van en volume au voisinage de la surface de contact sphère/plan.	141
4.11	Maillage de l'éprouvette (46 266 tétraèdres) raffiné au voisinage de la surface de contact.	142
4.12	(a) Définition des fonctions de niveaux pour la modélisation des fissures de fretting et (b) discrétisation de l'interface de ces fissures : 902 paires de points d'intégration.	142
4.13	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{U} , des efforts de contact \mathbf{T} , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 1, 4 et 7 du cycle de fretting.	144
4.14	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{U} , des efforts de contact \mathbf{T} , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 10, 13 et 16 du cycle de fretting.	145
4.15	Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{U} , des efforts de contact \mathbf{T} , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 19, 22 et 25 du cycle de fretting.	146
4.16	Facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} calculés aux pas de temps t_1 ($Q = -Q_{max}$) et t_{13} ($Q = Q_{max}$) le long des fronts des fissures à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D (les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).	148
4.17	Traces de fretting pour des essais sphère/plan conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles.	150

4.18	Section de l'éprouvette fissurée dans le plan médian du contact pour l'essai à 250 000 cycles (représentation inversée).	151
4.19	Reconstitution tridimensionnelle de la géométrie des fissures à partir de coupes métallographiques pour les essais de fretting sphère/plan conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles avec $\sigma_t = 140$ MPa (représentations inversées : surface vers le bas).	152
4.20	(a) Distributions des pressions normales $p(x,y)$ et (b) des contraintes tangentielles $q(x,y,t_n = 1)$ sur la surface de contact sphère/plan. La zone d'intérêt est discrétisée en 256×256 cellules carrées de $20\mu\text{m}$ de côté.	153
4.21	Distribution du risque d'amorçage d calculé à partir du critère de Dang Van : a) en volume et b) sur la surface de contact sphère/plan.	154
4.22	K_I : facteurs d'intensité des contraintes en mode I calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).	155
4.23	K_{II} : facteurs d'intensité des contraintes en mode II calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).	156
4.24	K_{III} : facteurs d'intensité des contraintes en mode III calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).	157
4.25	Évolution du facteur d'intensité des contraintes K_I en fonction de la taille de fissure 2 (longueur dans le plan médian : l_{fiss}) pour le problème considéré. 158	

Liste des tableaux

2.1	Nombre d'itérations à convergence et gain de temps CPU procuré par le méthode NLLA par rapport à la méthode SLA.	74
3.1	Propriétés mécaniques de l'alliage d'aluminium AL7075.	95
3.2	Paramètres des essais de fretting fatigue [DUB 00].	98
3.3	Direction de bifurcation $\delta\theta$ des fissures de fretting par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction du critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle utilisé.	110
3.4	Direction de bifurcation $\delta\theta$ de la fissure 2 par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction de la valeur du coefficient de frottement interfacial μ_Γ pour le critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle de Hourlier 2 ($\Delta k_1^*(\theta)_{max}$).	112
3.5	Direction de bifurcation $\delta\theta$ de la fissure 2 par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction de la valeur de la contrainte statique σ_t avec le critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle de Hourlier 2.	114
3.6	Propriétés mécaniques de l'acier 35NCD16 constituant l'éprouvette.	120
3.7	Propriétés mécaniques de l'acier 100C6 constituant le poinçon cylindrique.	120
3.8	Paramètres des essais de fretting fatigue.	121
3.9	Longueurs a des fissures mesurées expérimentalement en fonction du nombre de cycles de charge avec $\sigma_t = 70$ MPa.	128
4.1	Propriétés mécaniques de l'acier de roulement étudié et paramètres des essais de fretting précontraints.	136

Introduction

La prédiction de la durée de vie des structures représente un enjeu industriel et économique majeur. Les outils numériques et les méthodes de développement actuels ont permis d'améliorer considérablement le dimensionnement et la résistance des composants des structures tout en réduisant leur masse. La conception de ces pièces mécaniques doit cependant prendre en compte les risques de ruine. La fissuration par fatigue est un problème fréquent qui impose des contrôles à intervalles réguliers et des étapes de maintenance coûteuses. Elle peut néanmoins conduire à la rupture catastrophique des structures. Elle est induite par des sollicitations cycliques dont l'amplitude est inférieure à la limite élastique du matériau. La propagation des fissures est alors liée aux mouvements de dislocations et aux déformations plastiques très localisées en avant du front. L'importance de cette problématique industrielle a favorisé le développement de méthodes innovantes afin de prédire le comportement des fissures et le risque de rupture en fatigue, notamment dans les secteurs de l'automobile, de l'aéronautique et du nucléaire.

Dans ce contexte, les problèmes de fretting fatigue sont à l'origine de nombreux sujets de recherche actuels. Le fretting est attribué à l'interaction de deux composants en contact soumis à des déplacements relatifs cycliques de faible amplitude par rapport à la taille de la zone de contact. Ces mouvements cycliques peuvent être induits par vibrations ou par un chargement de fatigue sur l'un ou les deux composants en contact de la structure. Ces sollicitations tribologiques mettent en jeu des amplitudes de contraintes très élevées dans des volumes de matière très localisés (variations de quelques GPa sur quelques dizaines de microns). Le régime des sollicitations locales, i.e. l'évolution des conditions de glissement et d'adhérence à l'interface, détermine la nature de l'endommagement initial : fissuration et/ou usure. Il dépend du chargement, des propriétés mécaniques des matériaux et de l'état des surfaces. Il résulte d'une synergie complexe entre géométrie du contact, frottement local et son évolution temporelle liée à la présence de particules d'usure dans le contact. Face à l'importance des problèmes de grippage, de perte de côtes fonctionnelles et de fissuration observés à l'interfaces des assemblages mécaniques tels que les fixations par rivets, les assemblages disque-aubes des turbo-réacteurs ou les montages de roulements à billes, des travaux considérables couplant les études expérimentales et numériques sont consacrés à la compréhension de ces mécanismes d'endommagement. De même, au sein de l'entreprise SKF, partenaire industriel de la thèse CIFRE présentée dans ce mémoire, différentes études expérimentales et numériques sont réalisées actuellement afin de caractériser la tenue en service, notamment en fissuration, des roulements à billes, des paliers, des rotules et d'autres assemblages mécaniques soumis au fretting.

Le travail présenté dans ce mémoire est focalisé sur la prédiction de l'amorçage et du comportement des fissures de fretting. Les forts gradients de contraintes dans les zones de micro-glissement à l'interface des deux solides en contact favorisent l'amorçage précoce de fissures. La propagation en mode mixte de ces fissures tridimensionnelles est fortement conditionnée par les phénomènes non-linéaires tels que la plasticité confinée au voisinage du front et le contact avec frottement éventuel entre les faces des fissures. Les séquences complexes d'ouverture, de fermeture, de glissement et d'adhérence engendrées par le chargement de fretting ont une influence directe sur la mixité de la sollicitation au front, l'arrêt ou la propagation des fissures et les directions de branchement. C'est pourquoi la maîtrise des mécanismes de rupture sous chargement de fretting requiert une analyse pluri-disciplinaire des différents phénomènes physiques couplés afin de prendre en compte les effets globaux et locaux, les sollicitations multiaxiales non proportionnelles, les lois de comportement et les conditions de contact interfacial avec frottement. Par ailleurs, une modélisation multi-échelle en espace est requise. En effet, les phénomènes mis en jeu font intervenir des dimensions de l'ordre du mètre (taille de la structure), du millimètre (taille de la surface de contact entre les composants) jusqu'au micron (zones de contact, glissement et ouverture entre les fissures).

La prédiction de la durée de vie en fatigue sous chargement de fretting peut être divisée en 3 étapes : (1) le calcul des champs de contraintes et de déformations multiaxiales au voisinage de l'interface entre les composants en contact au cours du cycle de chargement ; (2) la prédiction du risque d'amorçage, des sites et de l'orientation initiale des fissures de fretting ; (3) la modélisation du problème de fissuration et la simulation de la propagation des fissures en fatigue.

La résolution de chaque étape peut être basée sur une technique différente. L'étape 1 est facilement réalisable à l'aide de la méthode des éléments finis en 2D ou en 3D. Cependant, la précision élevée requise pour le calcul de l'étape 2 implique d'importants coûts de calculs. Les méthodes semi-analytiques sont plus largement utilisées. La méthode employée ici a comme point de départ les travaux de Kalker [KAL 90]. L'hypothèse de massif semi infini est adoptée, hypothèse classique pour la modélisation du contact sphère/plan ou cylindre/plan et par extension pour les configurations pour lesquelles les dimensions de l'aire de contact sont faibles par rapport aux dimensions des corps et aux rayons de courbure des surfaces en contact. Les résolutions des problèmes normal et tangentiel sont découplées. Cette hypothèse est justifiée tant que les propriétés élastiques des matériaux en contact sont peu différentes. Elle est exacte quand les matériaux sont identiques. Les temps de calcul sont très courts et une solution précise du cycle de charge à l'interface des deux corps est obtenue à l'échelle de ce contact.

L'étape 2 est basée sur des critères de fatigue multiaxiale basés sur le concept de plan critique tels que les critères de Ruiz [RUI 84] ou de Dang Van [DAN 93] ou sur les concepts de contrainte, de déformation, ou d'énergie équivalente.

L'analyse du problème de fatigue (étape 3) est généralement basée sur la mécanique élastique linéaire de la rupture. De nombreuses lois de propagation sont fondées sur des

critères énergétiques globaux tels que les facteurs d'intensité des contraintes. Des critères de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle permettent également de déterminer la direction de propagation des fissures.

Les modèles basés sur la méthode des distributions continues de dislocations permettent une résolution très précise du problème de contact avec frottement entre les faces de la fissure sous sollicitations cycliques. Celui proposé par Dudoug [DUB 89, DUB 92a] est parfaitement adapté à la problématique de la fatigue tribologique – pour laquelle l'hypothèse de massif semi-infini, comme nous l'avons vu, est justifiée – qui demande une description très fine des cycles de charge complexes et des gradients sévères de contrainte et de déformation générés dans des zones confinées sous le contact, et permet de déterminer précisément l'évolution des non linéarités de contact avec frottement à l'interface des fissures. L'état de contact avec frottement interfacial est calculé à l'échelle locale. Une formulation incrémentale permet de prendre en compte les effets d'hystérésis liés à l'histoire des conditions de contact avec frottement interfacial. Les temps de calcul très réduits. La méthode permet de modéliser des problèmes cycliques complexes (i.e. de fretting, de roulement, des séquences d'ouverture-fermeture-adhérence-glissement) sous chargement multiaxial non proportionnel et l'interaction de plusieurs fissures [DUB 92b]. Ce modèle semi-analytique développé dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture en deux dimensions est cependant difficilement extensibles aux problèmes tridimensionnels. Toutefois, comme nous le verrons, il peut être utilisé pour valider les résultats en 2D issus d'autres modèles.

La méthode des éléments finis (MEF) est largement utilisée en mécanique de la rupture. Sa robustesse, son aptitude à représenter des géométries complexes en 3D et la possibilité de pouvoir y intégrer des lois de comportement matériaux complexes en font un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes. Elle est cependant difficilement applicable aux problèmes de discontinuités mobiles : interface fluide-structure, changement de phase ou fissuration. En effet, un maillage conforme à la géométrie de la surface de discontinuité est requis. Dans le cas des fissures, il est donc nécessaire de reconstruire un nouveau maillage à chaque pas de propagation. Malgré les améliorations apportées aux maillages automatiques, le coût de cette opération peut rapidement devenir rédhibitoire en 3D pour des géométries de fissures complexes. Au-delà de ces aspects topologiques, le transfert d'informations lors de la procédure de remaillage fait appel à des techniques de projection de champs qui soulèvent encore aujourd'hui de nombreuses questions liées notamment à la vérification des équations de conservation.

De nouvelles techniques numériques autorisant une description des discontinuités indépendante de la discrétisation en volume ont été récemment développées. Dans ce travail, nous nous intéresserons tout particulièrement à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [MOë 99] qui repose sur le principe de partition de l'unité développé par Melenk et Babuska [MEL 96]. Cette méthode permet de modéliser les discontinuités géométriques telles que les fissures de façon implicite, c'est-à-dire indépendamment du maillage éléments finis. Elle est donc bien adaptée à la simulation de la propagation des fissures. En effet, une simple mise à jour des fonctions d'enrichissement sans remaillage du domaine ni projection de champs est requise lorsque la fissure progresse. De plus, cette méthode

possède la plupart des avantages de la MEF tels que la possibilité de modéliser des structures complexes tridimensionnelles et d'intégrer des lois de comportement non linéaires. La méthode X-FEM associée à la technique des fonctions de niveau [MOë 02] permet en outre de modéliser précisément des géométries de fissures complexes éventuellement issues d'observations expérimentales, i.e. imagerie 3D par microtomographie, imagerie par laser confocal, coupes métallographiques.

Le développement de modèles X-FEM avec contact et frottement entre les faces de la fissure posent toutefois quelques difficultés. La discrétisation de l'interface des fissures étant dépendante du maillage éléments finis, une description précise du problème de contact requiert un raffinement local du maillage en volume. Le rapport des échelles mises en jeu dans les problèmes de fretting fatigue est très élevé. L'opération de maillage du domaine peut alors s'avérer très délicate pour les problèmes tridimensionnels. De plus, au regard du problème de la structure, le maillage n'est pas optimal et entraîne un surcoût numérique. Ce procédé est en contradiction avec le concept d'indépendance entre le maillage et les fissures inhérent à X-FEM. Par ailleurs, plusieurs travaux ont mis en évidence des problèmes d'instabilité faisant apparaître des oscillations numériques dans la solution de contact. La stabilité des modèles proposés dans la littérature dépend fortement de la formulation du problème de contact et de la méthode de discrétisation du problème utilisée.

L'objectif principal de ce travail est d'établir un formalisme satisfaisant aux exigences de la simulation tridimensionnelle de la propagation des fissures sous chargement de fatigue multi-axiale non proportionnelle, avec une application au cas du fretting fatigue. Un modèle X-FEM multi-échelle dédié au contact et au frottement interfacial et basé sur une formulation mixte à trois champs est proposé dans ce mémoire. L'interface est considérée comme une structure autonome avec ses propres variables primales et duales, sa propre discrétisation et sa propre loi de comportement. La discrétisation de l'interface est adaptée à l'échelle du problème de contact par subdivision des éléments d'interface indépendamment du maillage éléments finis sous-jacent. Cette considération permet une description multi-échelle précise et optimale du problème de fissuration avec contact et frottement interfacial. Cette méthode permet de capturer les différentes échelles du problème (structure, fissure, zones contact avec frottement) dans un cadre unique. Elle répond aux exigences listées ci-dessus.

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante. Le chapitre 1 présente une synthèse bibliographique des résultats expérimentaux et théoriques concernant les problèmes de fretting. Les aspects de l'amorçage et de la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue sont détaillés. Puis la théorie de la mécanique de la rupture en présence de contact avec frottement est également présentée. Les différentes approches existantes pour la simulation de la propagation des fissures en fatigue multiaxiale non proportionnelle sont passées en revue. Ensuite, la méthode des éléments finis étendus couplée à la technique de représentation des fissures en trois dimensions par fonctions de niveau est décrite. Enfin, l'état de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la X-FEM est présenté afin de faire un bilan des avantages et inconvénients des différentes

formulations de ce problème et des différentes méthodes de résolution utilisées.

Le modèle X-FEM multi-échelle dédié à la simulation de la propagation des fissures avec contact et au frottement interfacial est présenté dans le chapitre 2. Les techniques de résolution non linéaires du Lagrangien Augmenté et de la méthode LATIN sont appliquées au problème. Les problèmes d'instabilités numériques évoqués précédemment sont mis en évidence. En conséquence, une méthode de stabilisation de la formulation est proposée. Les performances du modèle stabilisé sont ensuite démontrées à partir d'exemples bidimensionnels et tridimensionnels, tant au niveau de la précision des résultats, notamment grâce à une description multi-échelle du problème, que du point de vue de la stabilité de la solution de contact et de la convergence de la méthode. Les résultats issus de ce modèle sont ensuite validés par comparaison avec ceux d'un modèle de référence éléments finis.

Une stratégie multi-modèle de prédiction de durée de vie dédiée aux problèmes de fretting fatigue est présentée dans le chapitre 3. Elle intègre une méthode de résolution du problème de contact deux corps à l'aide d'un modèle semi-analytique pour le calcul de l'évolution des distributions de contraintes normales et tangentielles dans la zone de contact au cours du cycle, la prédiction de l'amorçage, des sites et de l'orientation initiale des fissures de fretting à l'aide du critère de Dang Van et la simulation X-FEM multi-échelle de la propagation des fissures en fatigue avec contact et frottement interfacial. Cette stratégie est tout d'abord appliquée à un problème de fretting expérimental issu de la littérature. L'objectif est de valider le calcul X-FEM des facteurs d'intensité de contraintes en 2D par comparaison avec un modèle semi-analytique de référence basé sur la méthode des distributions continues de dislocations. Des études paramétriques sont présentées afin de caractériser la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue.

Des essais de fretting cylindre/plan réalisés au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon sont présentés. L'influence d'une contrainte de traction volumique supplémentaire sur la propagation des fissures est étudiée. Les fissures de fretting sont expertisées par coupes métallographiques post-mortem des éprouvettes à différents stades de propagation. Une carte de l'évolution de la longueur des fissures en fonction des paramètres de charge est obtenue. La stratégie de prédiction de durée de vie proposée est appliquée à ce problème 2D. Une loi de propagation identifiée expérimentalement et dédiée aux problèmes de fretting fatigue est proposée. Puis la simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous chargement de fretting est conduite en utilisant cette loi et en appliquant les critères en fatigue multiaxiale non proportionnelle pour la détermination de la direction de propagation.

Dans le chapitre 4, la stratégie de prédiction de durée de vie X-FEM proposée est étendue aux problèmes tridimensionnels. Deux séries d'essais de fretting fatigue en configuration sphère/plan avec différents paramètres de charge et différents matériaux ont été réalisés au Centre d'Ingénierie et de Recherche SKF et à l'école Centrale de Lyon. Les géométries tridimensionnelles spécifiques des fissures de fretting à différents stades de propagation sont extraites par reconstitution des faciès à partir de coupes métallographiques des éprouvettes post-mortem. À partir des données d'essais enregistrées, l'évolution du frottement local est quantifiée. L'aire de contact, les distributions de pression

normale et de cisaillement cyclique ainsi que la répartition glissement-adhérence sont déterminées. Le risque d'amorçage des fissures en surface est analysé à partir des champs des contraintes et des déformations calculés. Ces conditions de chargement sont utilisés comme données d'entrée pour la simulation numérique X-FEM multi-échelle de ces essais. Les géométries expérimentales 3D des fissures sont modélisées précisément par la méthode des fonctions de niveau. L'objectif est de démontrer les performances du modèle et sa capacité à capturer précisément la solution du problème de contact entre les faces des fissures en trois dimensions. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés le long des fronts des fissures au cours du cycle afin d'étudier numériquement la propagation des fissures de fatigue sous chargement de fretting.

Ce mémoire se termine par les conclusions et les perspectives de ce travail de thèse.

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA Lyon) dans le cadre d'un projet de recherche en collaboration avec l'entreprise SKF (thèse CIFRE). Les développements du modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial ont été réalisés au sein du code de calcul prototype ELFE_3D du laboratoire LaMCoS.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Après une brève introduction sur le phénomène de fissuration par fatigue, on s'intéresse dans la première partie de ce chapitre aux problèmes de rupture sous chargement de fretting fatigue. Le problème de contact entre deux corps et les principaux résultats expérimentaux et théoriques sur l'amorçage et le propagation des fissures de fretting sont présentés. Puis, les différentes approches de la mécanique de la rupture en présence de non-linéarité de contact avec frottement sont décrites. Les principaux critères de propagations en fatigue sont donnés. Ensuite, la simulation numérique de la propagation des fissures par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) couplée à la méthode des fonctions de niveau est présentée. Enfin, la dernière section de ce chapitre est consacrée à l'état de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la X-FEM.

Sommaire

1.1 Problèmes de rupture sous chargement de fretting fatigue	10
1.1.1 Caractérisation des problèmes de fretting	10
1.1.2 Amorçage des fissures sous chargement de fretting-fatigue	14
1.1.3 Propagation des fissures de fretting	15
1.2 Mécanique de la rupture en présence de non linéarités de contact avec frottement	17
1.2.1 Problème de référence	17
1.2.2 Modes de fissuration	18
1.2.3 Analyse asymptotique du problème de fissuration	18
1.2.4 Approches énergétiques	21
1.2.5 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	26
1.2.6 Critères de propagation en fatigue	29
1.3 Simulation de la propagation des fissures en fatigue par la méthode des éléments finis étendus	35
1.3.1 La méthode des éléments finis étendus X-FEM	36
1.3.2 Représentation géométrique des fissures par fonctions de niveau dans le cadre de la X-FEM	38

**1.4 État de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre
de la méthode des éléments finis étendus 41**

Introduction :

On observe expérimentalement plusieurs mécanismes de rupture des pièces mécaniques.

La *rupture fragile* est caractérisée par la quasi-absence de déformation plastique macroscopique et par la propagation très rapide des fissures avec une faible consommation d'énergie. La rupture suit alors des plans cristallographiques. On parle de rupture par clivage. On l'observe généralement dans le cas des céramiques, de certains métaux et polymères à basse température.

À l'inverse, dans le cas de la *rupture ductile*, la déformation plastique macroscopique est importante. On observe généralement une grande déformation plastique avant que la fissure ne se propage, liée généralement à la présence d'inclusions ou de précipités. La majeure partie de l'énergie est alors dissipée par plasticité.

La *rupture par fatigue* se distingue des autres types d'endommagement car elle se produit pour des variations de contraintes répétitives dans le temps et généralement inférieures à la limite d'élasticité du matériau. Elle se caractérise par la propagation relativement lente des fissures sous l'influence des sollicitations cycliques, en présence de plasticité confinée en pointe de fissure.

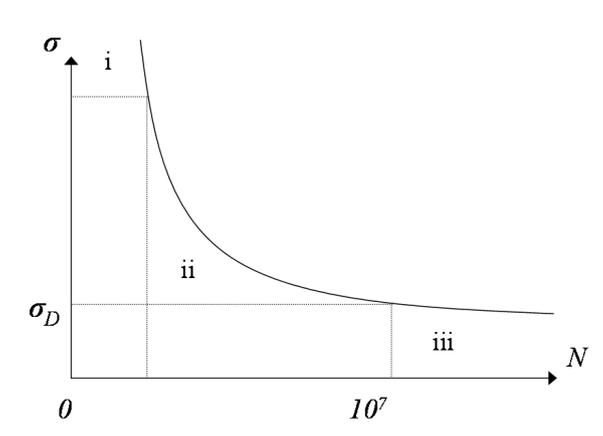


FIGURE 1.1: Représentation schématique de la courbe de Wöhler (Contrainte / Nombre de cycles à rupture).

On constate que la rupture des composants de structure en fonctionnement normal est le plus souvent due à la fatigue. La durée de vie des pièces sollicitées en fatigue est généralement mesurée en nombre de cycles N . On appelle *endurance* la capacité de résistance à la fatigue de ces pièces. Expérimentalement, on caractérise généralement l'endurance d'une pièce mécanique ou d'un matériau en construisant sa courbe de Wöhler (Contrainte σ - Nombre de cycles N), par une série d'essais de fatigue d'amplitude de chargement variable. On trace alors le nombre de cycles à rupture en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée pour chaque cas. La figure 1.1 représente schématiquement l'allure de la courbe obtenue. On distingue trois domaines :

- i. une zone de fatigue *oligocyclique* où la rupture sous forte contrainte survient après un petit nombre de cycles ($< 10^4$), précédée d'une déformation plastique locale importante ;
- ii. une zone de fatigue limitée pour laquelle le nombre de cycles à rupture N_f croît lorsque la contrainte σ décroît ;
- iii. une zone d'endurance illimitée sous faible contrainte, inférieure à la *limite d'endurance* σ_D , pour laquelle la rupture ne survient pas avant 10^7 cycles.

Remarque 1 : Dans certains cas comme la fatigue en milieu corrosif, il n'existe pas d'asymptote horizontale.

Dans le cas des problèmes d'endurance limitée (zone ii), le phénomène de fatigue inclut plusieurs étapes allant de la modification microstructurale du matériau à la propagation de fissures, conduisant après un grand nombre de cycles à la rupture de la structure. L'importance relative de chaque étape du phénomène de rupture dépend de la géométrie, du chargement et des propriétés du matériau [LEM 04, GER 80]. La présence de défauts dans la matière ou de concentrations de contraintes localisées en surface favorise l'amorçage précoce de fissures. La propagation de macrofissures est alors le stade critique et la prédiction de la durée de vie de la structure passe par l'étude du comportement de ces fissures. Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement aux problèmes de rupture sous chargement de fretting fatigue.

1.1 Problèmes de rupture sous chargement de fretting fatigue

1.1.1 Caractérisation des problèmes de fretting

Le *fretting* est attribué à l'interaction de deux surfaces en contact soumises à des déplacements relatifs cycliques de faible amplitude par rapport à la taille de la zone de contact. Il apparaît à l'interface entre les pièces des assemblages mécaniques tels que les fixations par rivet ou boulonnage, les assemblages disque-aubes des turbo-réacteurs, les mécanismes de transmission de puissance, les câbles, ou les montages de roulements à billes. Il est induit par vibrations ou par l'application d'un chargement de fatigue sur l'un des composants en contact de la structure.

Le fretting est à l'origine de nombreuses avaries, de pertes de fonctionnalité et éventuellement de la rupture catastrophique des structures. C'est aujourd'hui une préoccupation majeure dans de nombreux secteurs industriels, tels que le transport, la biomécanique ou l'énergie. Le type de dégradation observé à l'interface est fortement lié à la nature des conditions de contact deux-corps, elles-même dépendantes du chargement, des propriétés des matériaux en volume et de l'état de surface (frottement) :

- le *grippage* ou blocage du mécanisme par adhésion des surfaces en contact.
- la *fissuration* induite par fatigue de contact. Elle peut entraîner la rupture brutale d'un composant de la structure (cf. figure 1.2.a et b).
- l'*usure* des surfaces conduisant à une perte de côte ou au blocage des liaisons mécaniques par accumulation débris (cf. figure 1.2.c et d).

Le contact réel entre les composants d'une structure industrielle est généralement mal défini et difficilement reproductible. Les études expérimentales et la modélisation des problèmes de fretting sont basées sur des géométries simplifiées : contact plan/plan, contact cylindre/plan ou contact sphère/plan. Les configurations plan/plan présentent cependant une discontinuité dans la distribution des pressions de contact qu'il est difficile d'évaluer. Les configurations cylindre/plan ou sphère/plan sont donc souvent préférées.

Considérons un contact statique sphère/plan chargé sous l'effet d'une force normale P . La théorie de Hertz [HER 81] permet de déterminer la taille de la zone de contact (disque de diamètre

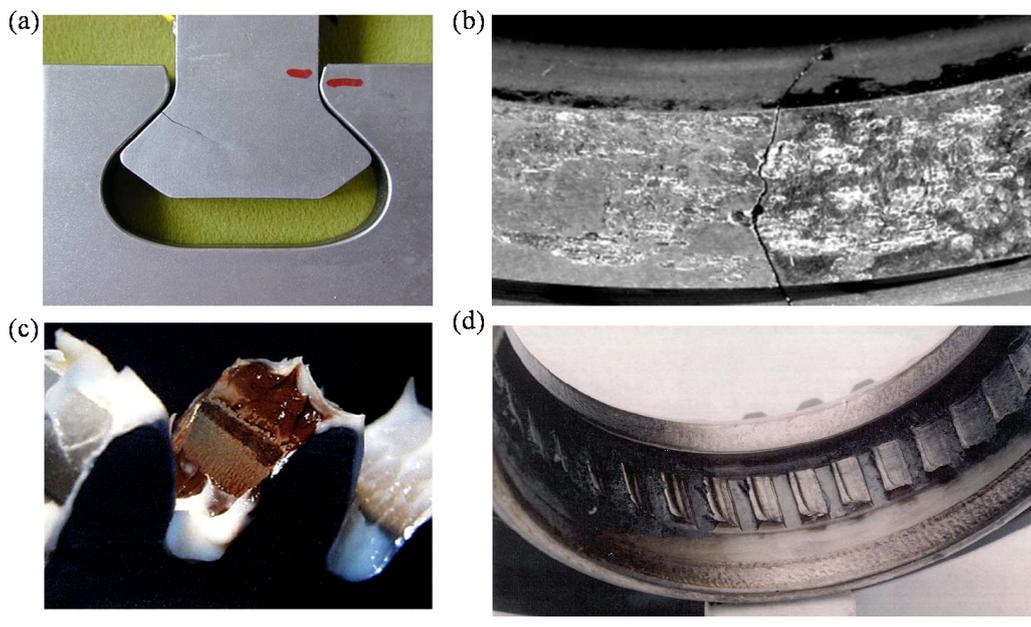


FIGURE 1.2: Exemples d'endommagement par fretting : (a) Assemblage aube-disque fissuré [NOW 06] ; (b) bague de roulement fissurée à la limite d'une région de fretting ; (c) trace de fretting sur une dent d'un pignon d'engrenage [NASA] ; (d) cannelures d'un rotor d'hélicoptère détruites en fretting [BEEA,2005].

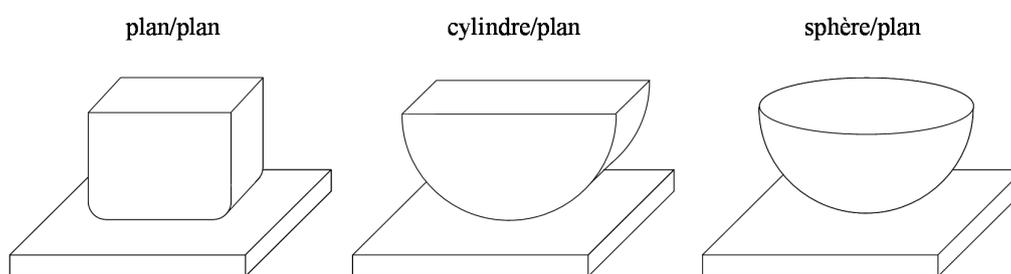


FIGURE 1.3: Configurations de contact expérimentales simplifiées pour l'étude du contact entre deux corps.

2a), la distribution de pressions normales $p(x, y)$ en surface et le mouvement de corps rigide relatif. Hertz introduit la simplification selon laquelle les corps en contact se comportent comme des massifs semi infinis. Cette hypothèse est justifiée lorsque les dimensions de la zone de contact sont faibles par rapport aux dimensions de chaque corps (l'influence des conditions aux limites est négligeable) et aux rayons de courbures des surfaces en contact.

Expérimentalement, on distingue deux types de comportement en fonction de valeur de la force tangentielle Q . Le coefficient de frottement local à l'interface des corps en contact est noté μ . L'application d'une force tangentielle $Q < \mu.P$ va se traduire par un glissement annulaire en

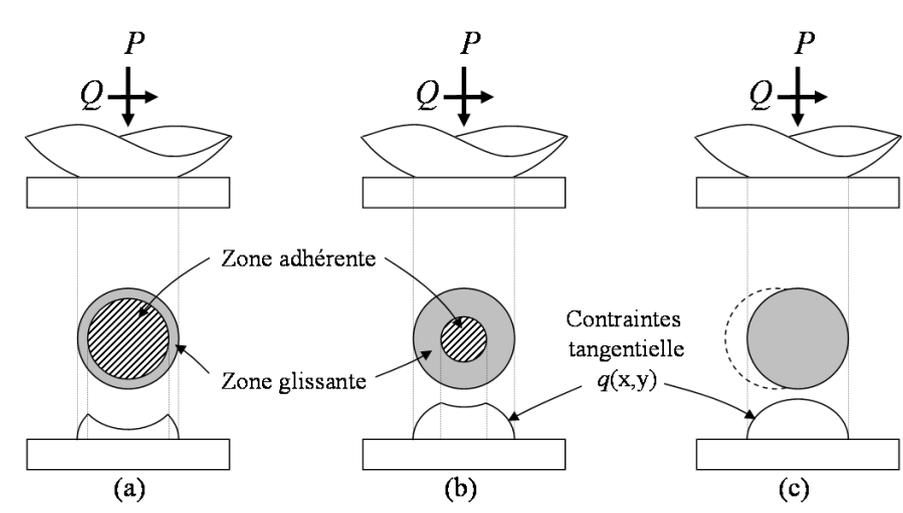


FIGURE 1.4: Problème de contact sphère/plan : Aire de contact et contraintes tangentielles à l'interface : (a) $Q \ll \mu.P$; (b) $Q < \mu.P$; (c) $Q = \mu.P$

périphérie du contact, alors que l'aire de contact centrale est adhérente (cf. figure 1.4.a). Cattaneo [CAT 38] puis Mindlin [MIN 49] sont les premiers à interpréter ce comportement. Ils développent un formalisme analytique afin d'obtenir la solution en cisaillement et la répartition de zones de glissement et d'adhérence (a et c). Le problème est résolu sans frottement par la théorie de Hertz puis les contraintes tangentielles $q(x,y)$ obtenues à l'aide de la loi de Coulomb sont superposées à la solution. Ce modèle est basé sur les équations de Boussinesq-Cerruti qui fournissent une relation intégrale entre les déplacements et les contraintes en surface. Ils négligent ainsi l'interaction des problèmes normal et tangentiel dans l'hypothèse des matériaux élastiques aux propriétés semblables définies par le constante de Dundurs β . Ils mettent ainsi en avant la différence entre le coefficient de frottement μ et l'évolution du rapport Q/P . L'accroissement de la force tangentielle favorise l'expansion de la zone de glissement et réduit la zone d'adhérence (cf. figure 1.4.b). Lorsque la valeur de la force tangentielle est supérieure à $\mu.P$, la zone collée disparaît et conduit à un déplacement relatif entre les deux massifs (cf. figure 1.4.c).

L'analyse du contact deux corps basée sur les méthodes analytiques est difficile dans la configuration sphère/plan car elle implique une description tridimensionnelle. Elle est largement détaillée dans les ouvrages de Hills et al. [HIL 94] et de Johnson [JOH 85].

En fretting, trois conditions de contact sont rencontrées en fonction de l'effort de contact normal P et du déplacement relatif δ entre les deux surfaces. On peut tracer les cycles de fretting entre l'effort tangentiel Q et le débattement δ dans chaque cas [VIN 92b] (cf. figure 1.5) :

- la condition de *grippage* pour laquelle le cycle est fermé (cf. figure 1.5.a). Le déplacement tangentiel est accommodé par les déformations de la structure. Cette condition est non dissipative et peut engendrer une destruction du matériau lors de l'ouverture du contact.
- la condition de *glissement partiel* pour lequel le cycle a une forme elliptique (cf. figure 1.5.b). Il se caractérise par la présence d'une zone adhérente centrale et d'une zone de micro-glissement en périphérie.

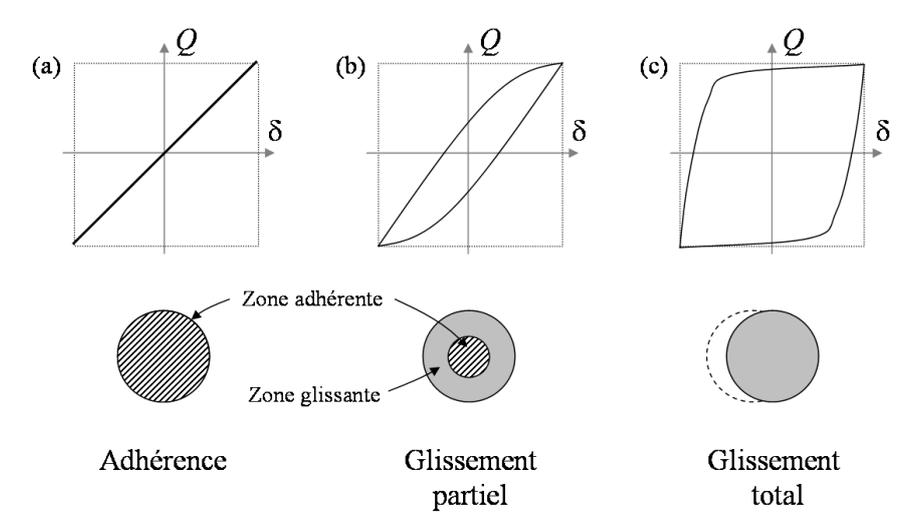


FIGURE 1.5: Boucles de fretting ou d'hystérésis entre la force de frottement et le débattement : (a) adhérence ; (b) glissement partiel ; (c) glissement total [VIN 92b].

- la condition de *glissement total* pour laquelle le cycle est très ouvert et présente des paliers car la force tangentielle Q est constante et égale à $\mu.P$ lors du glissement (cf. figure 1.5.c). L'énergie dissipée lors du glissement est représentée par l'aire du cycle. La trace de fretting est assimilée à une zone de glissement marquée par une zone de recouvrement.

Le type d'endommagement dû au fretting dépend de la nature de ces conditions de contact. Colombié [COL 86] a introduit le concept de *régime de glissement* afin de prendre en compte l'évolution de la condition de contact au cours du temps. Il a alors proposé le concept de *bûche de fretting* (cf. figure 1.6.a). Les trois régimes de glissement sont :

- le *régime de glissement partiel* (RGP) pour lequel les amplitudes de glissement sont toujours faibles pour un chargement normal important. Ce régime provoque l'apparition de fissures qui peuvent se propager sous l'effet du chargement local et éventuellement sous l'effet d'une contrainte d'ensemble supplémentaire. Ce régime est à l'origine des problèmes de *fretting fatigue*.
- le *régime de glissement total* (RGT) pour lequel la condition de glissement total est toujours respecté. Les amplitudes de glissement sont beaucoup plus importantes et le chargement normal est généralement faible. Ce régime est caractéristique des problèmes de *fretting wear*. Il donne lieu à l'usure de la surface de contact avec la formation de débris consécutifs à l'enlèvement de matière [BLA 91].
- le *régime de glissement mixte* (RGM) pour lequel la condition de glissement alterne entre une condition de glissement partiel et une condition de glissement total. La dégradation observée est alors une combinaison entre la fissuration et l'usure de la surface de contact [VIN 92a, ZHO 95].

À partir de l'analyse des bûches de fretting et par extension des travaux de Vingsbo et Soderberg [VIN 88], Vincent et al. [VIN 92b] proposent une carte de régime de glissement (Running Conditions Fretting Map : RCFM) (cf. figure 1.6.a). Elles permettent une représentation rapide

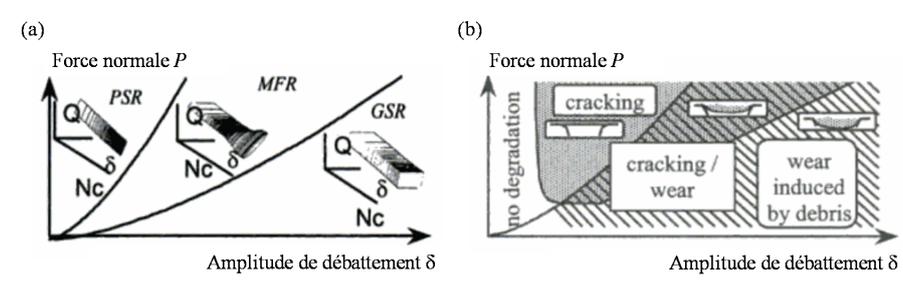


FIGURE 1.6: (a) Carte de régimes de glissement (Running Conditions Fretting Map : RCFM) et (b) carte de réponse au fretting du matériau (Material Response Fretting Map : MRFM).

du type d'endommagement prédominant. Dans le même but, les cartes de réponse au fretting du matériau (Material Response Fretting Maps : MRFM) pour les problèmes de fretting ont aussi été proposées (cf. figure 1.6.b). Celles-ci sont construites à partir des traces de fretting expérimentales [FOU 96].

On distingue donc deux types principaux de problèmes de fretting. Les problèmes de *fretting wear* pour lesquels l'usure est l'endommagement prédominant et les problèmes de *fretting fatigue* auxquels nous nous intéressons ici et pour lesquels la condition de glissement partiel à l'interface des corps en contact provoque l'amorçage et la propagation de fissures.

1.1.2 Amorçage des fissures sous chargement de fretting-fatigue

Le phénomène de fretting fatigue est responsable de la rupture prématurée des composants mécaniques. Le chargement fortement localisé et les valeurs importantes des pressions mises en jeu donnent naissance à des gradients de contraintes très élevés en surface et dans une zone confinée sous le contact de l'ordre de grandeur du MPa au GPa. Ils provoquent l'amorçage et la propagation de la fissure. De plus, pour l'une et/ou l'autre des pièces mécaniques mises en jeu, les contraintes surfaciques sont souvent couplées à une contrainte volumique statique ou cyclique favorisant la croissance des fissures.

L'expérience montre que les fissures de fretting s'amorcent dans la zone de micro glissement du contact où les contraintes de traction sont les plus élevées [WAT 65, WAT 71, ALI 79, FEL 97] (cf. figure 1.7.a). La présence d'un défaut matériel macroscopique en volume ou en surface est favorable à l'amorçage des fissures mais elle n'est pas nécessaire.

Le régime de glissement a une forte influence sur l'amorçage des fissures. Une zone de glissement partiel restreinte en périphérie de la zone de contact engendre la formation de quelques fissures. La propagation de la majorité de ces fissures stoppe et seules une ou deux fissures principales se propagent en profondeur. Une zone de glissement partiel étendue génère un réseau de nombreuses fissures. L'intersection de fissures entraîne le détachement de particules pouvant perturber le régime de glissement [DUB 03]. Les particules générées par coalescence des fissures sont expulsées en dehors de la zone de contact. En régime de glissement mixte, les micro-fissures peuvent disparaître avec l'usure importante de la surface et empêcher la propagation de macro-fissures.

L'orientation des fissures lors de l'amorçage dépend de la distribution des contraintes vo-

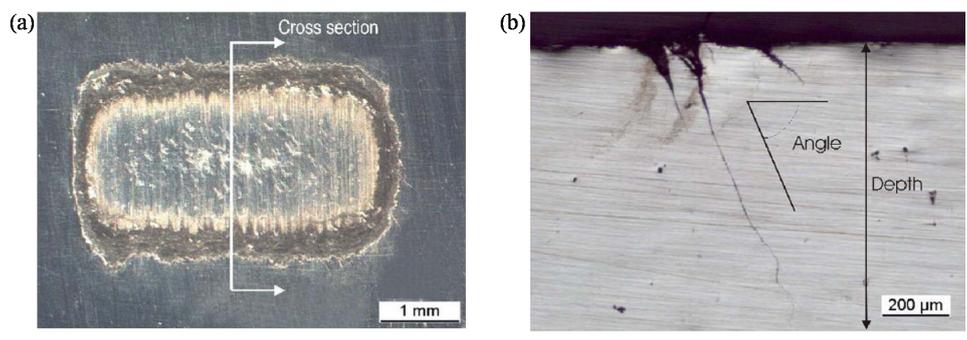


FIGURE 1.7: Résultats expérimentaux d'un essai de fretting cylindre/plan [MUñ 06] : (a) Trace de fretting ; (b) Coupe transversale de l'éprouvette fissurée.

lumiques. Au voisinage de la frontière interne de la zone de micro-glissement, la contrainte de cisaillement est maximum, entraînant l'amorçage de fissures de type I (en mode de cisaillement) avec un angle inférieur à 45° par rapport à la surface vers l'intérieur du contact [DUB 03]. Des fissures de type II (en mode de traction) apparaissent en périphérie externe de la zone de micro-glissement avec un angle compris entre 70° et 90° par rapport à la surface de contact (cf. figure 1.7.b).

L'analyse de l'amorçage des fissures de fretting est basée sur les cartes de réponse au fretting du matériau construites expérimentalement et les critères d'amorçages analytiques. Ces derniers sont basés sur les critères en fatigue multiaxiale et sont adaptés aux problèmes de fatigue de contact tels que les problèmes de fretting. On trouve notamment les critères de plan critique suivants :

- le critère de McDiarmid [MCD 91] pour lequel l'amorçage des fissures a lieu dans le plan critique où les contraintes de cisaillement sont maximales.
- le critère de Dang Van [DAN 93, FOU 96, FOU 02, BAI 10, PIE 10b] qui établit une condition d'amorçage à grand nombre de cycles. Il permet de prédire le site et la direction d'amorçage des fissures à partir du champ mésoscopique des contraintes sous le contact (partie alternée du cisaillement et pression hydrostatique) et des propriétés en fatigue du matériau. Ce critère a notamment été utilisé dans [PIE 10c, LAM 97b].
- Le critère de Liu [LIU 05] pour lequel l'amorçage des fissures a lieu dans le plan formant un angle α (dépendant du matériau) avec le plan critique où l'amplitude des contraintes normales est maximale.
- le critère SWT (Smith-Watson-Topper) [SMI 70] a été développé pour des nombres de cycles compris entre $2 \cdot 10^4$ et 10^6 . Ce critère de fatigue stipule que l'amorçage des fissures se produit dans le plan qui maximise le produit de l'amplitude de déformation normale par la contrainte normale maximale au cours d'un cycle. Ces critères ont notamment permis de prédire précisément l'amorçage de fissures de fretting dans [SZO 98, FRI 05, PRO 06].

1.1.3 Propagation des fissures de fretting

Le phénomène de fatigue induit par les sollicitations cycliques surfaciques sont responsables de la propagation en mode mixte (I+II+III) des fissures de fretting. Le chargement est multiaxial,

1. Synthèse bibliographique

non proportionnel et d'amplitude variable. Des essais de fretting permettent d'établir la courbe de Wöhler du matériau et de déterminer l'abatement de la limite d'endurance σ_D en présence de fretting [SZO 98, SHI 06]. Cette courbe passe par un minimum. En effet, des contraintes de fretting très importantes conduisent à un état de glissement total et l'usure de la surface de contact empêche les fissures de se développer [WAT 81, NAI 05].

De plus, les déformations locales induisent un état compressif variable le long des fissures, ce qui génère des séquences d'ouverture-fermeture-glissement-adhérence [LAM 96, LAM 97a]. L'état de contact entre les faces de la fissure influence l'état de mixité et conditionne le branchement et la vitesse de propagation des fissures. La modélisation numérique des problèmes de fretting fatigue requiert donc une modélisation fine du contact et la prise en compte du frottement entre les lèvres de la fissure. Cependant, la valeur du coefficient de frottement est difficile à évaluer expérimentalement.

Endo et Goto (1976) [END 76], puis Alic et Hawley (1979) [ALI 79] observent expérimentalement l'apparition d'un réseau de micro fissures obliques ($\approx 45^\circ$) sous la zone de micro glissement de la surface de contact. Au cours des essais, une fissure principale se propage alors que les autres fissures s'arrêtent et disparaissent avec l'usure de la surface. Ils étudient expérimentalement la propagation en 2D de fissures planes perpendiculaires à la surface, soumises à un chargement de fretting fatigue couplé à un chargement de fatigue conventionnelle. Il ont ainsi relié les vitesses de propagation de ces fissures aux valeurs du facteur d'intensité des contraintes KI calculées analytiquement (cf. section 1.2.3). La comparaison de ces résultats avec ceux d'une fissure soumise à un chargement de fatigue uniaxial a montré que les vitesses de fissuration sous chargement de fretting fatigue dans la zone proche de la surface de contact sont très supérieures à celles observées sous chargement de fatigue pure. Ces vitesses sont équivalentes à partir d'une certaine profondeur variable en fonction des paramètres de chargement surfacique. Par ailleurs, ces essais ont montré que la fissure branche perpendiculairement à la surface au delà de cette profondeur. L'influence du chargement de fretting fatigue est alors négligeable.

Des essais sur les polymères ont permis d'observer les géométries complexes des fissures tridimensionnelles de fretting fatigue [BAI 03, CHA 06c]. L'expérience montre que la durée de vie des pièces mécaniques sollicitées en fretting est divisée en quatre stades [LAM 97b, CHA 06b, DUB 00] (cf. figure 1.8). Le stade I correspond à l'amorçage de fissures sous l'influence du contact. Le stade II est la croissance de certains de ces défauts en fissures macroscopiques dans une zone confinée sous le contact par l'action combinée du chargement local de fretting et de la contrainte volumique. Le stade III correspond à la propagation en volume d'une fissure principale sous l'influence majoritaire d'une contrainte volumique statique ou cyclique. Enfin, le stade IV correspond à la rupture de la pièce.

L'amorçage des fissures fretting peut se produire pour un faible nombre de cycles. La majeure partie de la vie des pièces industrielles est donc dépendante de la propagation de ces fissures. Le comportement de ces fissures est encore mal maîtrisé. Malgré l'importance des enjeux industriels liés aux problèmes de rupture par fretting, les techniques de développement actuelles ne permettent pas de prendre en compte la complexité du phénomène. Il est donc nécessaire développer des méthodes de prédiction de durée de vie globales adaptées aux spécificités de ces problèmes, permettant de prendre en compte les phénomènes d'amorçage et d'usure des surfaces et de simuler la propagation des fissures de fretting. La modélisation de leur comportement requiert une description multi-échelle des phénomènes locaux tels que la plasticité en pointe ou le contact avec

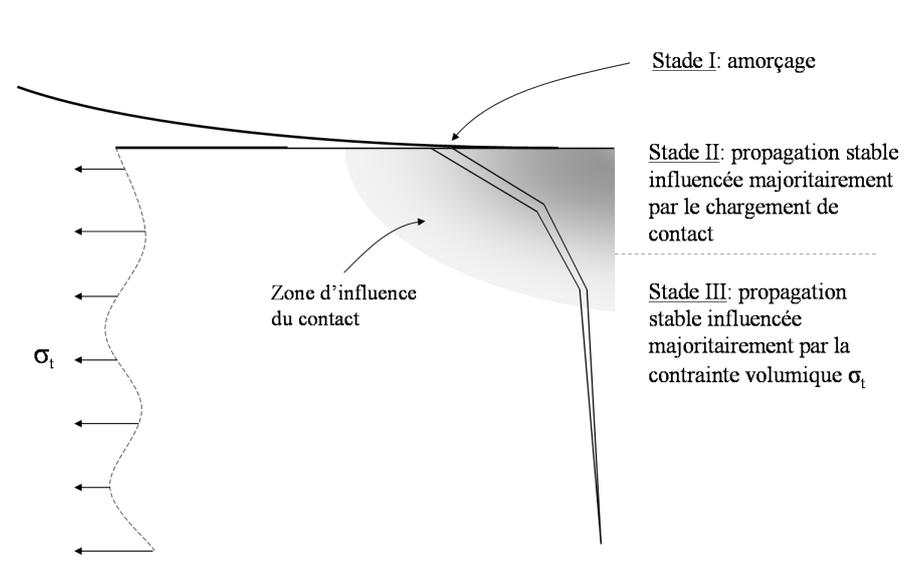


FIGURE 1.8: Représentation schématique des différents stades de propagation des fissures de fretting [CHA 06b].

frottement entre les faces de la fissure. Elle passe par l'étude des mécanismes de propagation en fatigue en mode mixte et l'utilisation de critères de propagation multiaxiale dédiés aux chargement non proportionnels. Dans la section suivante, les outils de la mécanique de la rupture permettant cette analyse sont présentés.

1.2 Mécanique de la rupture en présence de non linéarités de contact avec frottement

Dans cette partie, nous définissons tout d'abord le problème de rupture en présence de non linéarités comportementales de contact et frottement. Nous présentons ensuite les différentes approches énergétiques et asymptotiques du problème de rupture, les points clés de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR) et les aspects non linéaires associés sont présentés. Ces outils théoriques s'appliquent à une plage étendue de matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, tels que les métaux. Ils permettent de définir les variables de la mécanique de la rupture à partir desquelles il est possible de modéliser le comportement des fissures. Nous présenterons alors les différents critères et lois de propagation en fatigue adaptés aux problèmes de fissuration en fatigue et notamment aux problèmes de fretting.

1.2.1 Problème de référence : Problème de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

On considère un corps homogène et isotrope à l'instant t soumis à des petits déplacements et des petites déformations élastiques linéaires (cf. figure 1.9). Soit $\partial\Omega$ la frontière du domaine occupé par Ω et $\mathbf{n}(t)$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$. Les déplacements $\mathbf{u}_d(t)$ et les efforts $\mathbf{F}(t)$

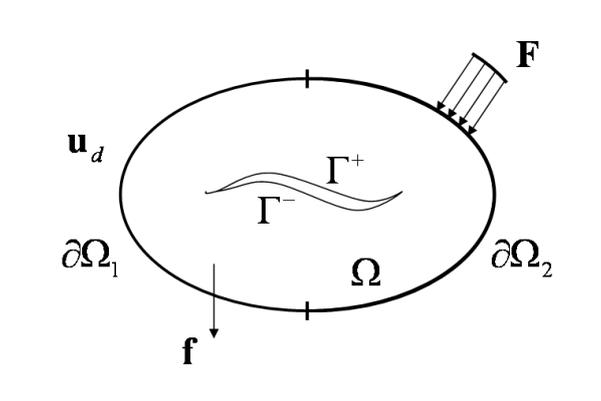


FIGURE 1.9: Problème de référence.

sont imposés sur $\partial_1\Omega \subset \partial\Omega$ et sur $\partial_2\Omega \subset \partial\Omega$ respectivement. Le solide est également soumis à des forces volumiques $\mathbf{f}(t)$ sur tout le domaine Ω . Soient Γ^+ et Γ^- les surfaces des deux lèvres d'une fissure interne à Ω ou débouchante, et $\mathbf{n}_\Gamma(t)$ le vecteur unitaire normal à Γ^+ orienté vers l'extérieur. Le front de cette fissure est défini par l'entité $\mathcal{F} = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$.

Notations :
$$\left(\begin{array}{l} \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \\ \partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \cup \Gamma \end{array} \right.$$

Remarque 2 : Une des particularités du problème de rupture est que la frontière du domaine peut évoluer dans le temps lorsque la fissure se propage. Toutes les variables dépendent donc du temps ainsi que Ω , $\partial\Omega$, $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$, Γ^+ , Γ^- et \mathcal{F} .

Les inconnues de ce problème sont le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$, le tenseur des contraintes volumiques $\boldsymbol{\sigma}(t)$, et le vecteur des efforts surfaciques de contact $\mathbf{t}(t)$ sur les lèvres de la fissure. Dans la suite de ce chapitre, différentes approches sont présentées afin d'analyser le comportement des fissures et de prédire leur propagation à partir de la solution de ce problème.

1.2.2 Modes de fissuration

On considère un repère dont l'origine se situe sur le front de fissure avec les systèmes de coordonnées cartésiennes $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et cylindriques $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3)$ associés (cf. figure 1.10).

La rupture d'un milieu continu est définie par la séparation irréversible d'une partie de celui-ci. Ainsi, une fissure est une surface de discontinuité Γ du champ de déplacement : $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ où i représente une direction de l'espace dans la base locale le long des lèvres de la fissure. D'un point de vue cinématique, on distingue trois modes de sollicitation d'une fissure (cf. figure 1.11).

Remarque 3 : La discontinuité normale $[u_2]$ n'est jamais négative car les faces de la fissure ne peuvent pas s'interpénétrer.

1.2.3 Analyse asymptotique du problème de fissuration

En 1957, à partir des travaux de Griffith et de Westergaard, Irwin [IRW 57] donne la forme du premier terme singulier du développement limité des contraintes au voisinage du front de fissure

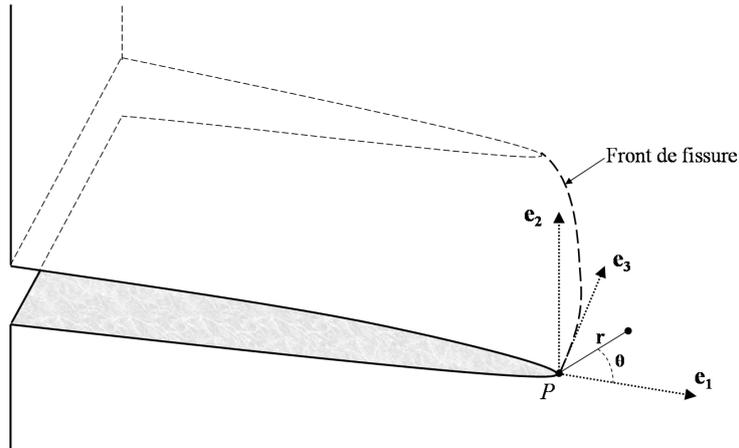


FIGURE 1.10: Repère local associé au front de fissure.

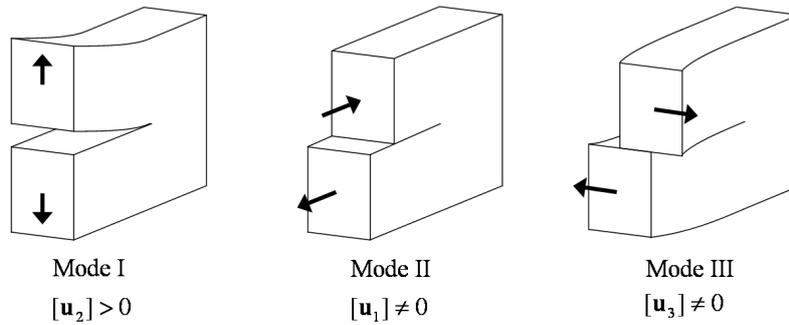


FIGURE 1.11: Représentation schématique des trois modes de rupture.

(1.1) pour les milieux bidimensionnels relativement simples et sans considérer les phénomènes plastiques en pointe de fissure :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + o(\sqrt{r}) \quad (1.1)$$

où les fonctions f_{ij} sont les fonctions de Westergaard [WES 39]. Il définit ainsi les *facteurs d'intensité des contraintes* K_I , K_{II} et K_{III} associés à chacun des modes de sollicitation, qui quantifient l'intensité de la singularité des contraintes. Ils s'expriment en $MPa\sqrt{m}$.

Au voisinage immédiat du front de fissure, les contraintes présentent une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Elles sont infinies en pointe de fissure. On peut donc difficilement établir des lois de propagation précises basées sur leur valeur. C'est pourquoi on utilise généralement les Facteurs d'Intensités des Contraintes (FIC). Deux écritures des FIC sont alors définies [BUI 78] :

- les facteurs d'intensité des contraintes statiques. Ils s'expriment en fonction du champ des

1. Synthèse bibliographique

contraintes au voisinage du front de fissure :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{21}(\theta = 0) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

- les facteurs d'intensité des contraintes cinématiques, qui sont proportionnels à la discontinuité du champ de déplacement au voisinage du front de fissure :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2(\theta = \pi)] \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1(\theta = \pi)] \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3(\theta = \pi)]
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

où (r, θ) sont les coordonnées cylindriques du repère centré sur le front de fissure (cf. figure 1.10), $[u_i(\theta = \pi)] = u_i(\theta = +\pi) - u_i(\theta = -\pi)$ est le saut de déplacement lié à la discontinuité, $\mu = E/2(1 + \nu)$ et k est la constante de Kolosov :

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

On peut alors introduire ces facteurs dans les solutions analytiques de Westergaard :

$$\begin{aligned}
 u_1(r, \theta) &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_I \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (k + 2 + \cos \theta)) \\
 u_2(r, \theta) &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_I \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (k - 2 + \cos \theta)) \\
 u_3(r, \theta) &= \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III} \sin \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

A partir de ces résultats, Irwin établit une relation entre le taux de restitution d'énergie G (sous la forme d'une intégrale de contour) et les facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure non débouchante tridimensionnelle :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} (K_{III}^2) \tag{1.5}$$

Remarque 4 : Dans le cas d'une fissure débouchante, la nature de la singularité en pointe peut dépendre de l'angle de la fissure avec la surface libre ainsi que du matériau. De même, en présence de contact avec frottement entre les faces de la fissure, cette singularité évolue. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Remarque 5 : Les valeurs des contraintes tendent vers l'infini au front de fissure, indépendamment de la charge, de la géométrie de la fissure ou du matériau. Une zone plastique existe donc

autour du front et le problème ne satisfait pas l'hypothèse d'élasticité linéaire. En particulier dans le cadre des problèmes de fissuration par fretting, on peut faire l'hypothèse de plasticité confinée. On suppose alors que la redistribution des contraintes liée à la plasticité ne modifie pas les champs élastiques. Les équations (1.2) et (1.3) sont alors valides lorsque la taille de la zone plastique r_p est suffisamment petite par rapport à la taille de la zone de dominance de la singularité élastique (zone de K -dominance), liée à la taille de la fissure a . On admet généralement cette hypothèse pour $r_p/a < 3\%$.

En théorie, on peut donc obtenir les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes à partir des champs de contrainte ou de déplacement à partir des expressions (1.2) ou (1.3). Cependant, dans la majorité des cas, les différentes méthodes numériques ou expérimentales ne permettent pas d'obtenir une approximation précise de ces champs suffisamment proche du front de fissure. L'identification des facteurs d'intensité des contraintes par cette approche peut alors s'avérer difficile. En revanche, les approches énergétiques sont basées sur les champs plus lointains du front pour lesquels on a une meilleure estimation ou sur la variation d'énergie globale du problème. Les critères de propagation énergétiques sont beaucoup plus précis et faciles à calculer. Ils sont présentées dans la section suivante.

1.2.4 Approches énergétiques

1.2.4.1 Théorie de Griffith

Les premiers travaux quantitatifs en mécanique de la rupture sont attribués à l'ingénieur aéronautique AA. Griffith [GRI 20]. En 1920, il étudie la rupture des matériaux fragiles et propose de relier la variation d'énergie nécessaire à l'accroissement coplanaire d'une fissure dW_{fiss} à la variation d'aire ainsi créée dA (cf. figure 1.12) et à une énergie superficielle caractéristique du matériau γ_S :

$$dW_{fiss} = 2\gamma_S dA \quad (1.6)$$

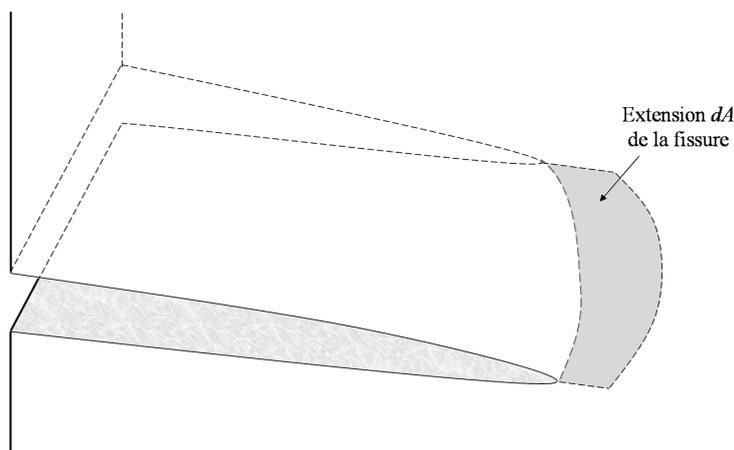


FIGURE 1.12: Schéma de l'extention d'une fissure.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au problème de référence illustré par la

1. Synthèse bibliographique

figure 1.9 s'écrit alors :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t} = P_{ext} + Q - 2\gamma_S \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.7)$$

où E_i est l'énergie interne au domaine Ω , K l'énergie cinétique, P_{ext} la puissance des efforts extérieurs, et Q le taux de chaleur reçu. La variation d'énergie interne du domaine considéré s'écrit aussi :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = Q + \frac{\partial W_l}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial W_{elast}}{\partial t} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (1.8)$$

où W_l représente l'énergie élastique. Par ailleurs, la puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_{ext} = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV \quad (1.9)$$

On obtient alors le premier principe de la thermodynamique sous la forme :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV - \frac{\partial W_{elast}}{\partial t} - 2\gamma_S \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.10)$$

On considère la vitesse d'accroissement de la fissure comme la seule variable de ce bilan énergétique et on écrit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left(\int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dV - \frac{\partial W_{elast}}{\partial A} - 2\gamma_S \right) \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.11)$$

La stabilité de ce processus dépend du signe de la variation de l'énergie cinétique. Si K augmente, alors le processus est instable et la fissure se propage. Le processus de fissuration est irréversible donc $\frac{\partial A}{\partial t}$ est nécessairement positif. On définit alors le *taux de restitution d'énergie* G :

$$G = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dV - \frac{\partial W_{elast}}{\partial A} \quad (1.12)$$

G correspond au taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans le domaine Ω . La stabilité du problème de rupture est dépendante de la valeur de G . On identifie alors les trois cas suivants qui composent le critère de propagation de Griffith :

$$\begin{aligned} G < 2\gamma_S & \text{ pas de propagation} \\ G = 2\gamma_S & \text{ propagation stable} \\ G > 2\gamma_S & \text{ propagation instable} \end{aligned}$$

La théorie de Griffith constitue à elle seule un critère de propagation de fissure. Elle peut être utilisée notamment pour étudier le risque de propagation en mode I de fissures dans les matériaux fragiles. Cependant, cette approche globale ne permet pas de prendre en compte les effets locaux et de déterminer la direction de propagation des fissures dans les problèmes tridimensionnels en mode mixte. En revanche, les intégrales de contour sont calculées à l'aide de champs locaux au voisinage étendu du front de fissure et permettent de découpler les modes de sollicitation.

1.2.4.2 Intégrales indépendantes du contour

L'essor des méthodes numériques élément finis en mécanique des solides et la difficulté d'obtenir des solutions précises au voisinage du front de fissure ont conduit au concept d'intégrales indépendantes du contour. Celles-ci permettent de calculer les variables pertinentes de la mécanique élastique linéaire de la rupture tels que les facteurs d'intensité des contraintes à partir des champs relativement éloignés du front de fissure. Les deux quantités les plus fréquemment utilisées, l'intégrale J et l'intégrale d'interaction I , sont présentées ci-après.

Intégrale J :

En 1968, à partir des travaux d'Eshelby (1956), Rice [RIC 68] et Cherepanov [CHE 67] introduisent indépendamment le concept d'intégrales indépendantes du contour. Rice définit l'intégrale J comme le taux de diminution d'énergie potentielle stockée dans un domaine fermé autour de la pointe de la fissure lorsque cette dernière se propage :

$$J = \int_C \left(W_l \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds \quad \text{avec} \quad W_l = \frac{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}{2} \quad (1.13)$$

où C est un contour orienté autour de la pointe de la fissure, \mathbf{n} sa normale unitaire sortante (cf. figure 1.13) et W_l l'énergie de déformation pour un matériau élastique linéaire.

Dans [RIC 68, BUI 78], on montre que cette intégrale est indépendante du contour C si :

- i. les faces de la fissure sont libres d'effort et les forces volumiques sont nulles ;
- ii. la fissure est rectiligne (en 2D) ou plane (en 3D) et dans le prolongement de l'axe e_2 entre les points A et la pointe P .

L'intégrale J est la première composante J_1 du vecteur des forces configurationnelles [MAU 92]. En prenant le contour C comme étant un cercle centré sur la pointe de fissure et dont le rayon tend vers 0, on peut montrer que J est identique au taux de restitution de l'énergie : $J \equiv G$. On peut ainsi relier l'intégrale J aux facteurs d'intensité des contraintes par l'intermédiaire de la formule d'Irwin (1.5) [RIC 68].

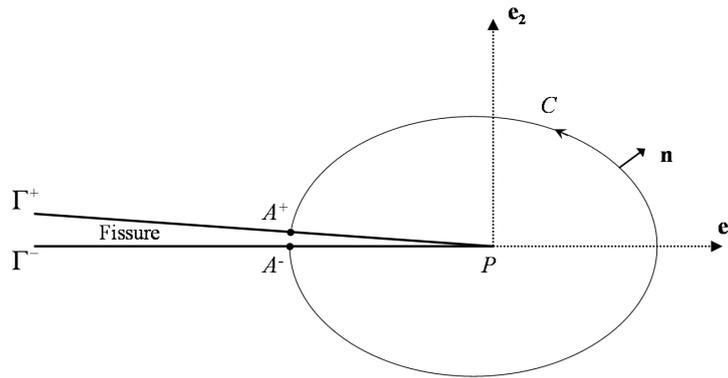


FIGURE 1.13: Paramétrage et contour de la fissure.

La présence de contact avec frottement est à l'origine d'une dissipation d'énergie entre les faces de la fissure. L'hypothèse i n'est plus valide et l'intégrale J n'est plus indépendante du

1. Synthèse bibliographique

contour [PAL 73]. À partir de la formule (1.13), si l'on considère le contour fermé $C_1 \cup [A^+B^+] \cup C_2 \cup [B^-A^-]$ (cf. figure 1.14), on peut écrire [GOS 02, DOL 01, RIB 07a] :

$$J_{C_1} + \int_{A^+B^+} \left(W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) (-n_j) ds - J_{C_2} + \int_{B^-A^-} \left(W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds = 0 \quad (1.14)$$

Sur les faces de la fissure $[A^+B^+]$ et $[B^-A^-]$, on a $n_1 = 0$ donc $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{i2}$ et $W_I \delta_{1j}n_j = 0$. On obtient alors :

$$J_{C_1} = J_{C_2} + \int_{AB} \sigma_{i2} \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.15)$$

Si la fissure est fermée, les composantes des déplacements selon l'axe \mathbf{e}_2 sur $[AB]$ sont égales sur les deux faces. On obtient alors :

$$J_{C_1} = J_{C_2} + \int_{AB} \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.16)$$

équivalent à :

$$J_{C_1} - \sigma_{12}(A) [u_1^-(A) - u_1^+(A)] = J_{C_2} - \sigma_{12}(B) [u_1^-(B) - u_1^+(B)] \quad (1.17)$$

où σ_{12} est la contrainte de cisaillement due au frottement entre les faces de la fissure. On peut alors écrire une intégrale indépendante du contour C (cf. figure 1.13) en présence de contact avec frottement entre les faces de la fissure :

$$\tilde{J} = \int_C \left(W_I \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds - \sigma_{12}(A) [u_1^-(A) - u_1^+(A)] \quad (1.18)$$

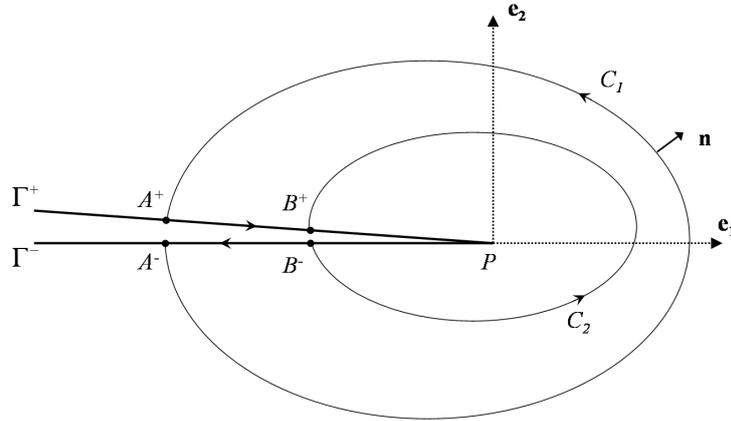


FIGURE 1.14: Définition des contours C_1 et C_2 pour le calcul de l'intégrale \tilde{J} en pointe de fissure.

Cependant, les intégrales J et \tilde{J} ne permettent pas d'identifier l'importance de chaque mode de sollicitation. En revanche, l'intégrale d'interaction présentée ci-après permet de découpler les trois facteurs d'intensité des contraintes en cas de sollicitation en mode mixte.

Intégrale d'interaction :

Le concept d'intégrale d'interaction pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est introduit par Yau *et al.* en 1980 [YAU 80]. Il est fréquemment utilisé dans la littérature en élasticité linéaire 2D [MOË 99], en 3D [NAK 92, GOS 98, RAJ 00, GRA 02, GOS 02, RAN 08b] et en dynamique [RÉT 05].

Deux états d'équilibre indépendants d'un corps élastique homogène et isotrope sont considérés : un état réel (\mathfrak{R}) qui satisfait les conditions aux limites et un état auxiliaire fictif (*aux*) pour lequel les lèvres de la fissure sont libres de tout effort. La superposition de ces deux états d'équilibre conduit à un nouvel état d'équilibre pour lequel est écrite l'intégrale \tilde{J} pour un contour C :

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{\mathfrak{R}+aux} &= \int_C \left(W_I^{\mathfrak{R}+aux} \delta_{1j} - \left(\sigma_{ij}^{\mathfrak{R}} + \sigma_{ij}^{aux} \right) \frac{\partial (u_i^{\mathfrak{R}} + u_i^{aux})}{\partial x_1} \right) n_j ds \\ &\quad - \left(\sigma_{12}^{\mathfrak{R}}(A) + \sigma_{12}^{aux}(A) \right) \left[\left(u_1^{-,\mathfrak{R}}(A) + u_1^{-,aux}(A) \right) - \left(u_1^{+,\mathfrak{R}}(A) + u_1^{+,aux}(A) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

où

$$W_I^{\mathfrak{R}+aux} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{\mathfrak{R}} + \sigma_{ij}^{aux} \right) \left(\varepsilon_{ij}^{\mathfrak{R}} + \varepsilon_{ij}^{aux} \right)$$

Le champ des contraintes auxiliaires est nul sur les lèvres de la fissure : $\sigma_{12}^{aux}(A) = 0$. En réorganisant les termes (1.19) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{\mathfrak{R}+aux} &= \tilde{J}^{\mathfrak{R}} + \tilde{J}^{aux} \\ &\quad + \int_C \left(W_I^{\mathfrak{R},aux} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{\mathfrak{R}} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^{\mathfrak{R}}}{\partial x_1} \right) n_j ds + \sigma_{12}^{\mathfrak{R}}(A) \left[u_1^{-,aux}(A) - u_1^{+,aux}(A) \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

où

$$W_I^{\mathfrak{R},aux} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{\mathfrak{R}} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{\mathfrak{R}} \right)$$

L'intégrale d'interaction est alors définie par :

$$I^{\mathfrak{R},aux} = \int_C \left(W_I^{\mathfrak{R},aux} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{\mathfrak{R}} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^{\mathfrak{R}}}{\partial x_1} \right) n_j ds + \sigma_{12}^{\mathfrak{R}}(A) \left[u_1^{aux}(A) \right] \quad (1.21)$$

De plus, en appliquant le même raisonnement à partir de l'équation (1.5), il vient :

$$I^{\mathfrak{R},aux} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \left(K_I^{\mathfrak{R}} K_I^{aux} + K_{II}^{\mathfrak{R}} K_{II}^{aux} \right) + \frac{2(1+\nu)}{E} \left(K_{III}^{\mathfrak{R}} K_{III}^{aux} \right) \quad (1.22)$$

À partir des équations (1.21) et (1.22) et en choisissant l'état auxiliaire (*aux*) comme étant l'état d'un des trois modes purs, la valeur des FIC de l'état réel (\mathfrak{R}) est extraite :

$$\begin{aligned} K_I^{aux} = 1, \quad K_{II}^{aux} = 0, \quad K_{III}^{aux} = 0 &\implies K_I^{\mathfrak{R}} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} I^{\mathfrak{R},model} \\ K_I^{aux} = 0, \quad K_{II}^{aux} = 1, \quad K_{III}^{aux} = 0 &\implies K_{II}^{\mathfrak{R}} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} E I^{\mathfrak{R},modelII} \\ K_I^{aux} = 0, \quad K_{II}^{aux} = 0, \quad K_{III}^{aux} = 1 &\implies K_{III}^{\mathfrak{R}} = \frac{E}{2(1+\nu)} I^{\mathfrak{R},modelIII} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Les méthodes énergétiques présentées dans cette section permettent de calculer les grandeurs caractéristiques de la mécanique élastique linéaire de la rupture en prenant en compte les non linéarités de contact avec frottement entre les faces de la fissure. L'intégrale d'interaction permet de

découpler mes modes de rupture I, II et III. Dans le cadre des méthodes éléments finis, il est difficile de calculer avec suffisamment de précision les intégrales de contour. Elles sont généralement transformées en intégrales de domaine, i.e. de surface en 2D ou de volume en 3D, afin d'obtenir une précision maximale. Le calcul numérique des intégrales de domaine est présenté dans la section suivante.

1.2.5 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Cette section est consacrée au calcul numérique des grandeurs caractéristiques de la mécanique de la rupture et plus particulièrement aux Facteurs d'Intensité des Contraintes (FIC) à partir de l'approximation de la solution en contraintes et en déplacement du problème et à l'aide des intégrales de contour présentées dans la section 1.2.4.

On considère une fissure tridimensionnelle Γ . Au point du front P d'abscisse curviligne s , la forme générale des intégrales de contours, i.e. intégrale \tilde{J} et intégrale d'interaction I , est :

$$L(s) = \lim_{C \rightarrow 0} a_l(s) \int_C A_{lj} n_j ds \quad (1.24)$$

où le contour C du plan ($P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) contient le front de fissure (cf. figure 1.13). \mathbf{n} sa normale extérieure. Le vecteur $\delta \mathbf{a}(s) = \delta l(s) \mathbf{e}_1$ est appelé l'extension virtuelle de la fissure. Si $\delta l(s) = 1$ et si la fissure est rectiligne dans le plan considéré, on retrouve les expressions de l'intégrale \tilde{J} et de l'intégrale d'interaction en fonction du choix du tenseur \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= W \delta_{ij} - \sigma_{lj} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} & \Rightarrow L(s) &= \tilde{J}(s) \\ A_{ij} &= \frac{1}{2} (\sigma_{kl}^{\mathfrak{R}} \epsilon_{kl}^{aux} + \sigma_{kl}^{aux} \epsilon_{kl}^{\mathfrak{R}}) \delta_{ij} - \sigma_{lj}^{\mathfrak{R}} \frac{\partial u_l^{aux}}{\partial x_i} - \sigma_{lj}^{aux} \frac{\partial u_l^{\mathfrak{R}}}{\partial x_i} & \Rightarrow L(s) &= I(s) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Lorsque la fissure est non plane près du front, on fera tendre le contour d'intégration vers le point P afin de se rapprocher des conditions de fissure rectiligne pour lesquelles ces formules intégrales ont été développées.

Dans le cadre des méthodes éléments finis, les intégrales de contour sont difficiles à calculer avec suffisamment de précision. Il est alors possible de les transformer en intégrales de domaine (de surface en 2D ou de volume en 3D) [MOR 87, SUO 92, MOë 02]. Celles-ci lissent les éventuelles oscillations numériques de la solution discrétisée et permettent d'obtenir à moindre coût une précision beaucoup plus élevée. Dans le cas tridimensionnel, une nouvelle intégrale curviligne \bar{L} est définie sur une partie du front $F(s)$:

$$\bar{L}(s) = \int_{F(s)} L(s) ds \quad (1.26)$$

On définit la surface S_i en balayant orthogonalement le contour C (cf. figure 1.14) le long de la courbe $F(s)$. On peut alors écrire :

$$\bar{L}(s) = \lim_{S_i \rightarrow 0} \int_{S_i(s)} A_{lj} n_j a_l(s) dS \quad (1.27)$$

On définit ensuite le domaine tubulaire D en balayant orthogonalement le contour fermé de la figure 1.14 le long de la partie du front $F(s)$. Ce domaine est limité par les surfaces S_i à l'intérieur

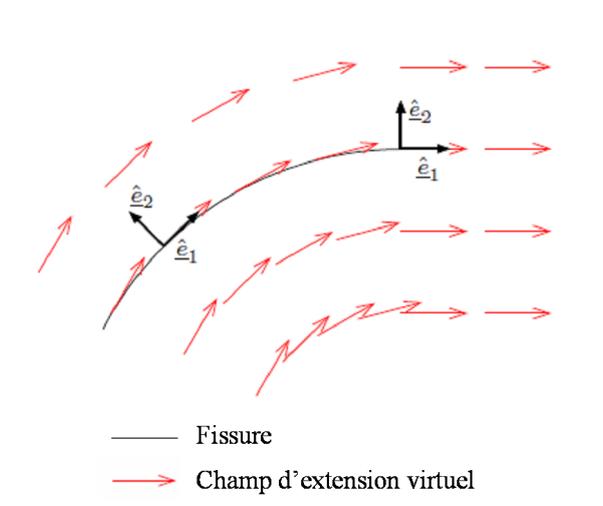


FIGURE 1.15: Champ d'extension virtuel et base locale conformes à la géométrie de la fissure au voisinage du front de fissure [MOë 02, RAN 08a].

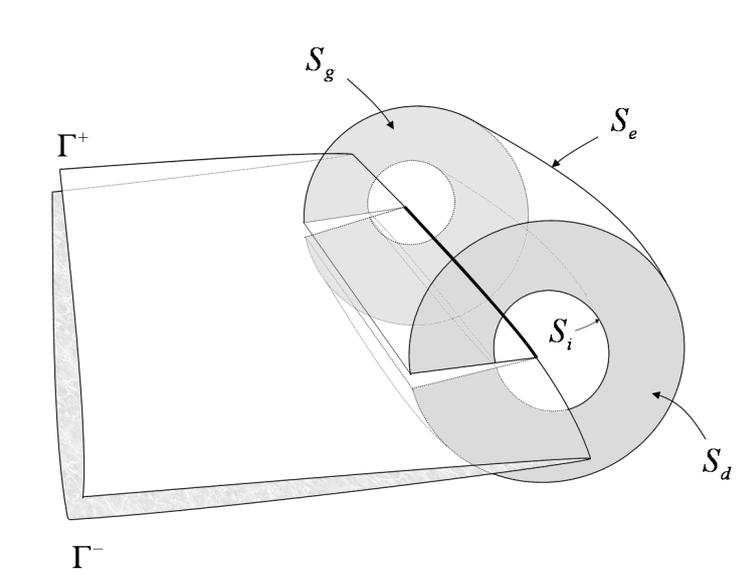


FIGURE 1.16: Volume d'intégration pour le calcul des quantités \tilde{J} et I .

et S_e à l'extérieur, par S_g et S_d aux extrémités et par les lèvres de la fissure Γ^+ et Γ^- (cf. figure 1.16). Une nouvelle intégrale est définie sur ce domaine D :

$$H = \int_D A_{l,j,j} q_l dV \quad (1.28)$$

1. Synthèse bibliographique

où le champ vectoriel d'extension virtuelle \mathbf{q} est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{a}(s) = \delta l(s) \mathbf{e}_1(s) & \text{sur } S_i \\ \mathbf{q} = 0 & \text{sur } S_e \\ \mathbf{q} = 0 & \text{sur } S_g \cup S_d \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma^+ \cup \Gamma^- \end{cases} \quad (1.29)$$

En intégrant H par parties et en utilisant le théorème de la divergence, nous obtenons la relation suivante :

$$H = \int_{\partial D} A_{lj} q_l n_j dS - \int_D A_{lj} q_{l,j} dV \quad (1.30)$$

où $\partial D = S_i \cup S_e \cup S_g \cup S_d \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ est la frontière du domaine D et \mathbf{n} est sa normale extérieure. Le champ d'extension virtuel \mathbf{q} est nul sur $S_e \cup S_g \cup S_d$. De plus, le vecteur normal aux faces de la fissure \mathbf{n}_Γ est orienté selon \mathbf{e}_2 . On a donc :

$$\int_{\partial D} A_{lj} q_l n_j dS = \int_{S_i} A_{lj} q_l n_j dS + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} A_{l2} q_l n_\Gamma dS = 0 \quad (1.31)$$

où le vecteur normal \mathbf{n} à la surface S_i est orienté vers le front de fissure. À partir de 1.28 et 1.30 on écrit :

$$\int_D A_{lj,j} q_l dV = \int_{S_i} A_{lj} q_l n_j dS + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} A_{l2} q_l n_\Gamma dS - \int_D A_{lj} q_{l,j} dV \quad (1.32)$$

Lorsque S_i tend vers ce front, le volume D est appelé D_0 et une nouvelle expression de l'intégrale \bar{L} est obtenue :

$$\bar{L} = \int_{D_0} A_{lj,j} q_l dV + \int_{D_0} A_{lj} q_{l,j} dV - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} A_{l2} q_l n_\Gamma dS \quad (1.33)$$

De plus, en suivant les préconisations de [MOë 02] pour le calcul de l'intégrale d'interaction, la construction du champ d'extension virtuel s'appuie sur une base locale conforme à la géométrie de la fissure au voisinage du front de fissure : $\mathbf{q} = q_1 \cdot \mathbf{e}_1$ (cf. figure 1.15). Ce choix conduit à :

$$\bar{L} = \int_{D_0} A_{1j,j} q_1 dV + \int_{D_0} A_{1j} q_{1,j} dV - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} A_{12} q_1 n_\Gamma dS \quad (1.34)$$

Dans [SUO 92], on montre en 2D que cette intégrale de domaine est exactement égale à l'expression sur le contour donnée par l'équation (1.24) et qu'elle est indépendante de ce contour. En 3D, l'hypothèse d'invariance de $L(s)$ le long de la partie du front $F(s)$ est faite. La qualité de l'approximation numérique de la solution au voisinage du front à une forte influence sur le résultat. Il existe donc une taille du domaine d'intégration optimale dépendante du rayon de courbure du front de fissure (en 3D) et de la finesse locale du maillage des éléments finis [RAN 08a].

Les différentes méthodes présentées permettent de calculer les variables de la mécanique de la rupture. L'intégrale d'interaction permet notamment de découpler les facteurs d'intensité des contraintes des modes I, II et III. Cette technique fréquemment utilisée dans les travaux de simulation de la propagation de fissures en mode mixte et sera utilisée dans ce mémoire. Les calculs numériques des intégrales d'interaction bidimensionnelle et tridimensionnelle sont détaillés dans les chapitres 3 et 4 respectivement. À partir des facteurs d'intensité des contraintes, différents critères et lois ont été proposés afin de simuler la propagation des fissures en fatigue en fonction de la nature des sollicitations (uniaxiales, multiaxiales, chargement proportionnel ou non). Ils sont présentés dans la section suivante.

1.2.6 Critères de propagation en fatigue

Cette partie est consacrée à la description des critères de propagation en fatigue des fissures *microstructurellement longues* [FER 06] sollicitées en mode I pur, en mode mixte proportionnel et en mode mixte non proportionnel. Ces critères sont basés sur les variables de la mécanique de la rupture définies dans la section 1.2. Ils sont intrinsèques au matériau et au type de sollicitation. Ils permettent de déterminer à un instant donné t si la fissure se propage et dans ce cas, sa direction θ (cf. figure 1.10) et sa vitesse de propagation (ou taux d'accroissement par cycle) $\frac{da}{dN}$.

1.2.6.1 Propagation des fissures en fatigue en mode I

Le modèle le plus couramment utilisé afin de calculer la vitesse de propagation d'une fissure est celui de Paris et Erdogan [PAR 63]. Une fissure sollicitée en mode I pur se propage lorsque l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes pour un cycle de chargement $\Delta K = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$ dépasse une valeur seuil K_S dépendante du matériau. Elle se propage dans son prolongement : $\theta = 0$ et sa vitesse de propagation par cycle $\frac{da}{dN}$ est liée à la valeur de ΔK . Une étude expérimentale permet de tracer la courbe de cette loi empirique. Elle fait apparaître trois régimes (cf. figure 1.17) :

- le **régime A** pour lequel la valeur de ΔK est supérieure à une valeur seuil K_S . On observe la coalescence des microfissures et la formation d'une ou plusieurs macrofissures. Ce stade est très dépendant des propriétés cristallographiques du matériau. Les vitesses de fissuration sont très faibles ;
- le **régime B** de propagation stable, dit de Paris, pour lequel la vitesse de fissuration est une fonction puissance de la variation du facteur d'intensité des contraintes :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1.35)$$

où C et m sont des constantes intrinsèques au matériau déterminées expérimentalement.

- le **régime C** de propagation instable pour lequel la vitesse de propagation est supérieure à celle prévue dans le régime de Paris. ΔK tend alors vers la ténacité du matériau K_{1C} pour laquelle on observe expérimentalement la rupture de la pièce.

La loi de Paris rend compte uniquement du régime de propagation stable B. Forman *et al.* [FOR 67] ont alors proposé une relation plus complète permettant de tenir compte des deux parties asymptotiques qui définissent la rupture (régime C : $\Delta K \geq K_{1C}$ propagation instable) et le seuil de non fissuration (régime A : $\Delta K \simeq K_S$). On trouve aussi dans la littérature un certain nombre de lois de propagations purement phénoménologiques et dérivées de la loi de Paris prenant en compte l'influence du rapport de charge $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$, de la sollicitation moyenne et de la fréquence du cycle de chargement.

En outre, la propagation en fatigue est très fortement liée aux phénomènes non-linéaires tels que la plasticité confinée en pointe de fissure ou le contact avec frottement entre les lèvres de la fissure. Elber [ELB 70] a constaté que, même avec des rapports de charge positifs, la fissure est fermée pendant une partie du cycle. Elle ne commence à s'ouvrir qu'à partir d'une valeur de contrainte $\sigma_{ouv} > \sigma_{min}$ appelée contrainte d'ouverture. Ainsi, l'expérience montre que la vitesse de propagation d'une fissure n'est pas toujours proportionnelle à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes appliqué ΔK mais plutôt à un facteur d'intensité des contraintes effectif $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ouv}$ permettant de prendre en compte les effets de refermeture en pointe de fissure liés la

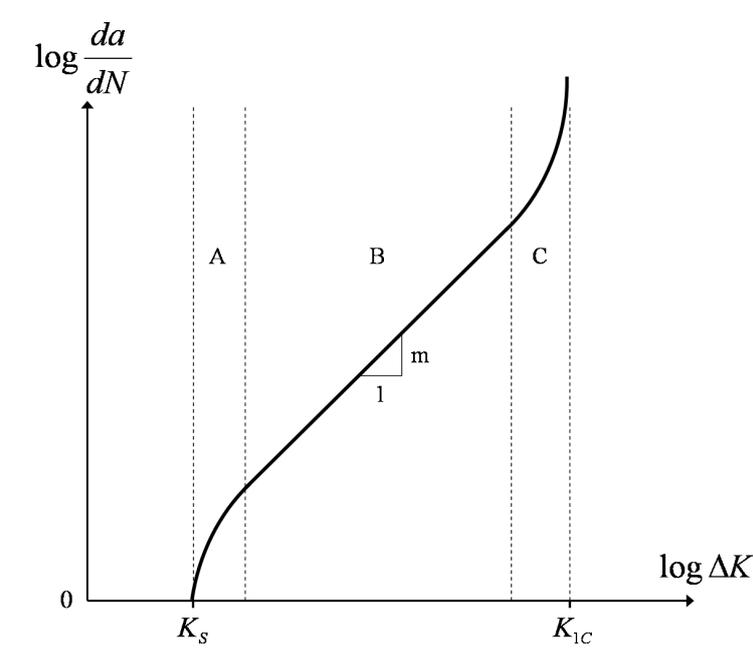


FIGURE 1.17: Allure générale du taux d'accroissement d'une fissure sollicitée en mode I en fonction de l'écart de variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK lors d'un cycle de chargement.

plasticité confinée, la rugosité des faces, l'oxydation ou une transformation de phase induite par le champ mécanique [ELB 71, SUR 98]. La propagation de la fissure dépend également des effets d'histoire tels que les phénomènes de surcharge. Par exemple, une augmentation ponctuelle de la contrainte maximum σ_{max} provoque une diminution temporaire de la vitesse de propagation.

1.2.6.2 Propagation des fissures en fatigue en mode mixte : chargement multiaxial proportionnel

Lorsque la fissure est sollicitée selon plusieurs modes, le calcul de la vitesse de propagation et la définition d'une loi de propagation sont plus complexes. On utilise généralement une loi de type Paris étendue au mode mixte. La valeur de ΔK est alors définie comme une combinaison des facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} :

$$\Delta K = (\Delta K_I^m + C_1 \Delta K_{II}^n + C_2 \Delta K_{III}^p)^q \quad (1.36)$$

où C_1 , C_2 , m , n , p et q sont des constantes intrinsèques au matériau et au type de chargement déterminées expérimentalement [SUR 98].

De même, la direction de propagation n'est plus triviale. Lorsque la direction du chargement varie dans le temps ou lorsque la direction initiale de la fissure n'est pas compatible avec le chargement, on constate expérimentalement que la fissure tend à bifurquer dans la direction conduisant à une sollicitation en mode I.

On distingue alors le cas d'un chargement multiaxial proportionnel pour lequel les rapports des contraintes principales $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}$, $\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_3(t)}$ et $\frac{\sigma_3(t)}{\sigma_1(t)}$ sont constants lors du cycle de chargement, et le cas

d'un chargement multiaxial non proportionnel pour lequel ces rapports varient. Premièrement, on s'intéresse aux différents critères de direction de propagation en mode mixte proportionnel utilisés dans la littérature :

Critère MTS (Maximum Tangential Stress) : Erdogan et Sih proposent en 1963 le critère de rupture en mode mixte selon lequel, dans le cas d'un problème plan, la rupture d'un matériau fragile se produit dans la direction θ pour laquelle la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale et la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ est nulle [ERD 63]. Ce qui revient à résoudre :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (1.37)$$

À partir des expressions asymptotiques des contraintes en pointe de fissure [WES 39], l'angle de propagation en mode mixte proportionnel pour les problèmes 2D est :

$$\theta_0 = 2 \cdot \text{atan} \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \cdot \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (1.38)$$

Ce critère a permis de restituer le comportement de la fissure dans de nombreux essais expérimentaux sur éprouvettes de plexiglas à fente inclinée. Cependant, il repose sur l'hypothèse que la fissure se propage dans la direction correspondant à un mode I pur. Il ne peut donc être appliqué à un problème de propagation en fatigue comportant une sollicitation en mode II uniquement lors du cycle ; un problème de fatigue sous contact roulant par exemple.

Critère MSS (Maximum Shear Stress) : Ce critère en cisaillement a été proposé par Otsuka *et al.* [OTS 75] en complément du critère d'Erdogan et Sih pour les problèmes de propagation de fissures en mode II pur :

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.39)$$

Des essais bidimensionnels en mode mixte (I+II) sur des éprouvettes en aluminium ont validé ces critères.

Critère de Sih de densité minimale d'énergie de déformation : En 1974, Sih propose ce critère pour lequel la fissure se propage dans la direction où la densité d'énergie de déformation ou d'énergie élastique $W(\varepsilon_{ij})$ est minimale [SIH 74]. Il définit alors le facteur de densité d'énergie de déformation S tel que :

$$S = r \frac{dW}{dV} \quad (1.40)$$

avec

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \quad (1.41)$$

où r est la distance depuis le front de fissure. Sih exprime ensuite le facteur de densité d'énergie de déformation S en fonction des facteurs d'intensité des contraintes :

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2 \quad (1.42)$$

1. Synthèse bibliographique

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= (k - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \\ a_{12} &= (2\cos\theta - k + 1)\sin\theta \\ a_{22} &= (k + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1) \\ a_{33} &= 4 \end{aligned}$$

où $k = 3 - 4\nu$ en déformation plane et $\frac{3-4\nu}{1+\nu}$ en contrainte plane.

Selon ce critère, la fissure se propage dans la direction θ pour laquelle le facteur de densité d'énergie de déformation est minimal :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (1.43)$$

Sih propose aussi le critère d'instabilité pour lequel la fissure croît lorsque ce facteur de densité d'énergie de déformation minimal atteint une valeur critique [SIH 91, BAL 80, SIH 80] :

$$S_C = \frac{(1 + \nu)(1 - \nu)}{2\pi E} K_{IC}^2 \quad (1.44)$$

Ce critère est relativement simple à mettre en oeuvre en 2D et en 3D. Cependant, il ne rend pas compte du rapport de charge R et donne des résultats peu satisfaisants en présence de mode III important.

En comparaison avec les critères dits *explicités* présentés ci-dessus, les critères suivants sont qualifiés d'*implicités* car ils sont basés sur des quantités calculées à l'extrémité d'une extension virtuelle de la fissure de longueur s et de direction θ (cf. figure 1.18) :

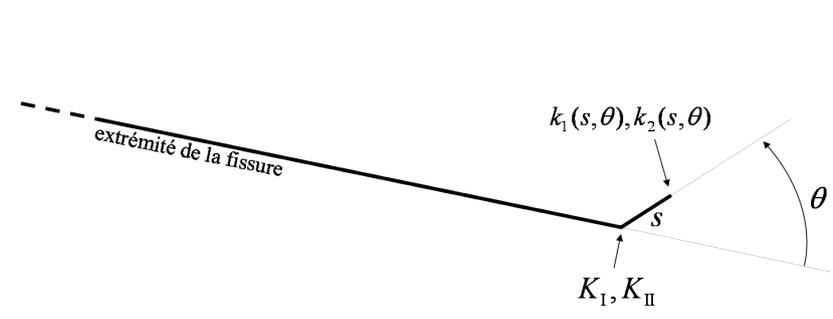


FIGURE 1.18: Paramétrage de l'extension virtuelle de la fissure.

Critère de taux de restitution d'énergie maximale $G\theta_{max}$: C'est une extension du critère de Griffith [LEM 76]. La fissure se propage suivant la direction θ pour laquelle, à l'extrémité de l'extension de longueur donnée s et orientée par θ , le taux de restitution d'énergie $G(s)$ est maximal. Ce critère donne des résultats similaires à ceux du critère MTS [LEM 04].

Critères d'Amestoy : En 1979, Amestoy *et al.* proposent un critère de propagation bidimensionnel basé sur la valeur des facteurs d'intensité des contraintes $k_1(s, \theta)$ et $k_2(s, \theta)$ à l'extrémité de

l'extension virtuelle de la fissure [AME 79]. Les premiers termes des développements limités de ces facteurs d'intensité des contraintes sont obtenus grâce aux potentiels complexes de Muskhelishvili et des techniques de représentation conformes [RIC 68, BUI 78]. Ils s'expriment en fonction des facteurs d'intensité des contraintes calculés en pointe de fissure :

$$\begin{pmatrix} k_1^0(s, \theta) \\ k_2^0(s, \theta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(\theta) & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

On note $k_1^*(s, \theta)$ et $k_2^*(s, \theta)$ les valeurs de ces FIC pour une longueur de segment infinitésimale :

$$\begin{aligned} k_1^*(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} k_1^0(s, \theta) \\ k_2^*(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} k_2^0(s, \theta) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Amestoy définit alors deux critères selon lesquels :

- i. la fissure croît dans la direction θ pour laquelle $k_1^*(\theta)$ est maximal ;
- ii. la fissure croît dans la direction θ pour laquelle $k_2^*(\theta)$ est nul.

Ces critères donnent des résultats très proches. Ils sont cependant moins précis que le critère MTS [TRU 81].

De nombreux essais ont été nécessaires pour prendre en compte la diversité des mécanismes de propagation mis en jeu en mode mixte et pour proposer des critères de propagation fiables. Ils permettent d'obtenir des prévisions en accord avec les essais sous chargement uniaxial et multiaxial proportionnel dans la plupart des cas. Les critères principaux de direction de propagation en mode mixte non proportionnel utilisés dans la littérature sont présentés dans la section suivante.

1.2.6.3 Propagation des fissures en fatigue en mode mixte : chargement multiaxial non proportionnel

Dans le cas d'un chargement non proportionnel (i.e. le chargement de fretting), c'est-à-dire lorsque le rapport des contraintes principales est variable au cours du cycle de chargement, les critères de direction de propagation précédents ne sont plus adaptés. En effet, les directions correspondant à la valeur extrême (ou l'amplitude maximum) de ces critères varient au cours du cycle (cf. figure 1.19).

Critères de Hourlier : À partir des travaux d'Amestoy [AME 79, TRU 81, AME 87], Hourlier *et al.* [HOU 82] proposent trois critères en espace et en temps basés sur la valeur des FIC à l'extrémité d'une extension infinitésimale de la fissure ($s \rightarrow 0$) :

- i. Critère 1 : $k_1^*(\theta, t)_{max}$. La fissure se propage dans la direction θ pour laquelle k_1^* atteint son maximum absolu en espace et en temps ;
- ii. Critère 2 : $\Delta k_1^*(\theta)_{max}$. La fissure se propage dans la direction θ pour laquelle l'écart de variation de $k_1^*(\theta)$ est maximal pendant le cycle ;
- iii. Critère 3 : $\frac{da}{dN}(\theta)_{max}$. La fissure se propage dans la direction θ pour laquelle le taux d'accroissement de la fissure $\frac{da}{dN}(\theta) = f(k_1^*(\theta, t), k_2^*(\theta, t))$ est maximal.

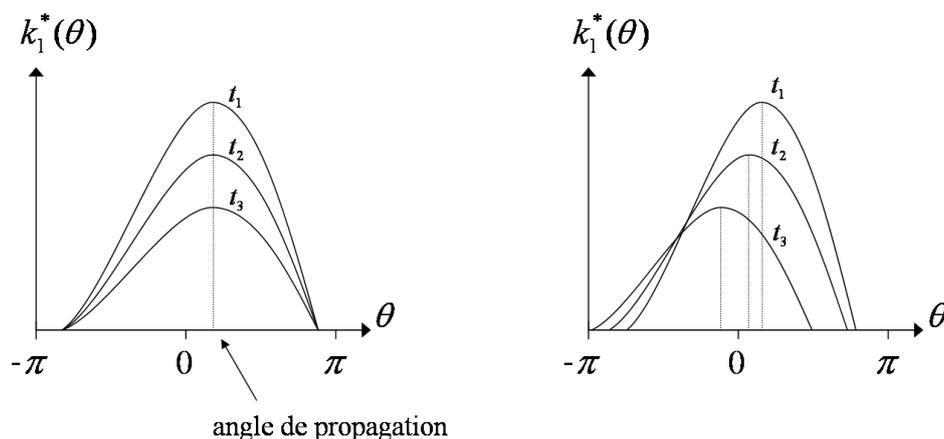


FIGURE 1.19: Exemple de variation du critère direction $k_1^*(\theta)_{max}$ au cours d'un cycle de chargement proportionnel et non proportionnel.

Les directions obtenues à partir de ces critères ont été comparées à des résultats expérimentaux [DHO 82]. Le critère 2 a fourni une estimation en accord avec les essais sous chargement non proportionnel (mode I cyclique et mode II statique). Le critère 3 a donné des résultats acceptables. Par contre, le critère 1 n'a pas permis de rendre compte du comportement de la fissure dans ce cas. D'après [DHO 82], ce critère est sensible au phénomène de refermeture. Il donne cependant de bons résultats pour un rapport de charge R élevé.

Pour des essais sous chargement de fatigue tribologique, ces critères donnent une bonne approximation de la direction de branchement [LAM 96, LAM 97a, BAI 03, CHA 06c, RIB 07a]. On pourra donc les utiliser pour la simulation de problèmes de rupture sous chargement multiaxial non proportionnel tels que les problèmes de fretting fatigue.

Remarque 6 : *L'effet de refermeture et le contact avec frottement entre les faces de la fissure ont une influence importante sur la direction de propagation [DHO 82]. La modélisation de ces phénomènes est donc indispensable afin de simuler précisément la propagation des fissures.*

Des critères de propagation en fatigue multiaxiale sous chargement non proportionnels adaptés aux problèmes de fretting ont été proposés. Ils permettent de calculer la direction de propagation à partir des variables de la mécanique de la rupture présentées dans la section 1.2. Les lois de propagation en vitesse dépendent du mode de sollicitation et du matériau du problème. Elles sont généralement déterminées empiriquement en couplant l'observation expérimentale de la propagation des fissures et le calcul des facteurs d'intensité de contraintes. Cette analyse puis la simulation numérique de la propagation des fissures requiert une méthode numérique permettant de modéliser les problèmes de rupture bidimensionnels et tridimensionnels, les géométries des fissures de fretting relativement complexes en 3D et les phénomènes multi-échelles tels que le contact et le frottement entre les faces des fissures. Dans la section suivante, la méthode des éléments finis est présentée. Elle s'inscrit comme la méthode la plus adaptée à la simulation de problèmes d'interfaces mobiles dans le temps.

1.3 Simulation de la propagation des fissures en fatigue par la méthode des éléments finis étendus

La simulation numérique de la propagation de fissures est généralement réalisée en deux étapes :

- i. Dans un premier temps, on résout le problème de structure, c'est-à-dire les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en respectant les conditions aux limites. On obtient alors une approximation des champs de déplacement et de contrainte constituant la solution du problème.
- ii. Dans une seconde étape de post-traitement, on calcule les grandeurs caractéristiques de la mécanique de la rupture au front de fissure (G, J, K_i, \dots , cf. section 1.2.4). Lors que les conditions de propagation sont satisfaites, il faut déterminer la direction de propagation et calculer l'avancée de la fissure via un critère et une loi de propagation. On procède à nouveau à l'étape (i) avec la nouvelle géométrie de la fissure (cf. figure 1.20). On applique ce procédé jusqu'à la rupture de la structure (propagation instable) ou l'arrêt de la fissure.

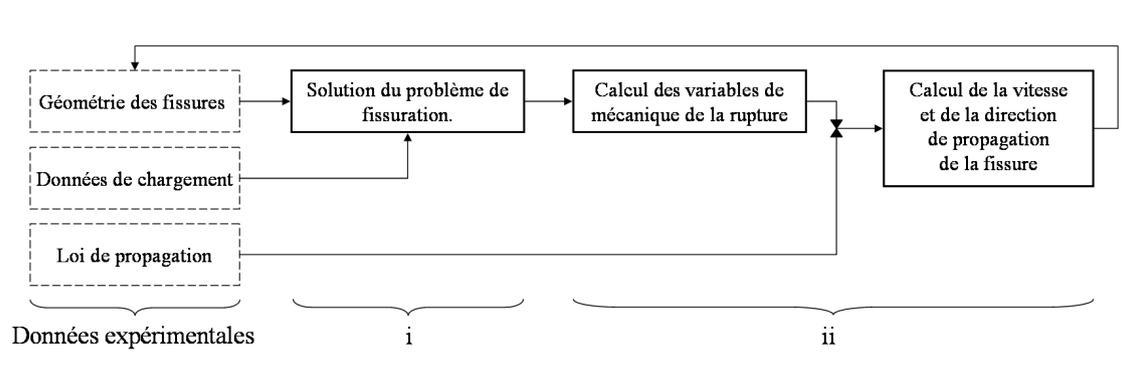


FIGURE 1.20: Stratégie pour la simulation numérique de la propagation de fissures.

Dans la littérature, on trouve un certain nombre de méthodes numériques utilisées pour la modélisation des problèmes de rupture (étape (i)). La méthode la plus répandue est la *méthode des éléments finis* (MEF) [DHO 98, CAR 00]. Sa robustesse, son aptitude à représenter des géométries complexes en 3D et la possibilité de prendre en compte des lois de comportement matériaux complexes en font un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes. Cependant, la modélisation de problèmes de rupture par la MEF présente deux difficultés majeures. D'une part, le maillage des éléments finis doit être conforme à la géométrie de la fissure. De plus, l'utilisation d'éléments finis standards ne permet pas de capturer précisément la singularité du champ de contrainte en pointe de fissure. On utilise généralement un maillage très fin d'éléments singuliers dits de Barsoum (taille des éléments en pointe de fissure de l'ordre d'un centième de la taille de la fissure) [BAR 74], ce qui accroît les temps de calcul. De plus, le maillage de la structure doit être reconstruit lorsque la fissure évolue. Malgré les améliorations apportées aux maillages automatiques, le coût de cette opération peut rapidement devenir rédhibitoire en 3D pour des géométries de fissures complexes. Il est aussi nécessaire de projeter des champs de l'ancien vers le nouveau maillage pour les problèmes d'évolution [RÉT 05]. Cette opération est non seulement très coûteuse

numériquement mais aussi très délicate car il faut respecter les équations de conservation. Des développements récents tels que les techniques de morphing de maillage couplées à des méthodes de réduction de modèle permettent d'éviter ces opérations dans certains cas encore relativement simples [GAL 10].

D'autres méthodes comme la *méthode des éléments de frontière* (BEM) [POT 92, MI 94, BON 95, TUH 97, LEI 00, NIK 01, KOL 05] ou les *méthodes sans maillage* [BEL 94, DUF 04, KRY 99, FLE 97, RAO 04] ont été appliquées aux problèmes de fissuration.

En particulier, les développements de modèles semi-analytiques à partir de la *méthode des distributions continues de dislocations* permettent une résolution très précise des problèmes de rupture avec contact et frottement et mettent en jeu des coûts numériques et des temps de calcul très faibles [COM 77, DUB 92a, DUB 92b, DUB 92c, HIL 96, KAL 90]. Ils ont notamment été validés pour des chargements de fatigue de contact (fretting, roulement) [BAI 02b, BAI 02a, LAM 97a]. Cependant, ils ne sont valides que pour des géométries simples et des matériaux homogènes supposés élastiques isotropes et sont difficilement applicables aux problèmes tridimensionnels. Dans la suite de ce travail, cette méthode sera utilisée comme référence pour la validation du calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 2D dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

La *méthode des éléments finis étendus* (X-FEM) est une extension de la MEF. Elle est particulièrement adaptée à la modélisation de problèmes de rupture et à la simulation de propagation de fissures. En effet, elle possède les principaux avantages de la MEF mais il n'est pas nécessaire de prendre en compte les fissures lors du maillage de la structure. Cette méthode connaît un essor important dans de nombreux secteurs de recherche industriels. Elle est présentée en détails dans la section suivante.

1.3.1 La méthode des éléments finis étendus X-FEM

La méthode des éléments finis étendue X-FEM proposée en 1999 par Moës *et al.* [MOË 99] est l'alternative à la MEF la plus répandue pour la simulation de la propagation de fissure. Elle repose sur le principe de partition de l'unité développé par Melenk et Babuska [MEL 96]. Cette méthode permet de modéliser une discontinuité géométrique telle qu'une fissure de façon implicite, c'est-à-dire indépendamment du maillage élément finis. Elle est donc très adaptée à la simulation de la propagation de fissures. En effet, ni le remaillage du domaine, ni la projection des champs ne sont requis lorsque la fissure progresse (étape ii). De plus, cette méthode possède la plupart des avantages de la MEF tels que la possibilité de modéliser des structures complexes tridimensionnelles et d'intégrer des lois de comportement non linéaires [ELG 07b].

Afin de modéliser la présence de la fissure, les fonctions de formes continues des éléments finis sont enrichies à l'aide de fonctions discontinues et singulières. La fonction discontinue (ou fonction saut) de Heaviside H permet de représenter la discontinuité du champ de déplacement entre les faces de la fissure. Pour un point donné \mathbf{x} , $H(\mathbf{x}) = \text{sign}((\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}_\Gamma)$ prend pour valeur $+1$ ou -1 en fonction de la position de ce point d'un côté ou de l'autre de l'interface (cf. figure 1.21). \mathbf{x}^* est le projeté orthogonal de \mathbf{x} sur la surface fissure et \mathbf{n}_Γ est le vecteur normal unitaire orienté de la fissure.

L'utilisation de fonctions d'enrichissement singulier permet de localiser géométriquement le front de fissure indépendamment du maillage d'élément finis et de représenter le comportement asymptotique au voisinage de ce front. Les quatre fonctions suivantes forment une très bonne base

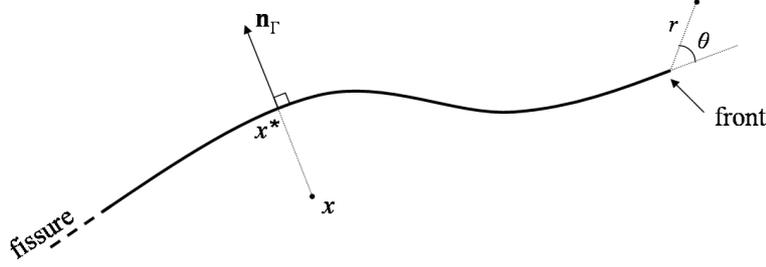


FIGURE 1.21: Paramétrage de la fissure pour le calcul des fonctions d'enrichissement X-FEM en 2D.

d'enrichissement en élasticité linéaire en 2D et en 3D [MOë 99, SUK 00, MOë 02] :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) \\ B_2(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2) \\ B_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta) \\ B_4(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta) \end{array} \right. \quad (1.47)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires dans le repère centré sur le front de fissure (cf. figure 1.21). Le terme \sqrt{r} permet d'introduire la singularité dans l'approximation du champ de déplacement. Ces fonctions forment une base de la solution asymptotique en pointe de fissure (1.4). La discontinuité en arrière du front de fissure est assurée par la fonction B_2 discontinue lorsque $\theta = \pm\pi$. De nombreux travaux portant sur ces fonctions singulières ont permis d'améliorer la précision de la méthode [BOR 07, WYA 08, BOR 06, XIA 06, CHA 06a], notamment en 3D [SUK 00, MOë 02, GRA 02, ARE 05]

L'approximation du champ de déplacement enrichi s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i \in N} \mathbf{u}_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x}) \sum_{j \in N_{fiss}} \mathbf{a}_j(t) \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^4 B_l \sum_{k \in N_{front}} \mathbf{b}_{lk}(t) \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (1.48)$$

où \mathbf{u}_i sont les degrés de liberté standards éléments finis, Φ_i sont les fonctions de forme des éléments finis et \mathbf{a}_j et \mathbf{b}_{lk} sont les degrés de liberté supplémentaires liés à la fonction saut H et aux fonctions d'enrichissements singuliers B_l respectivement [MOë 99]. Grâce aux enrichissements asymptotiques en pointe de fissure, la solution du problème à précision donnée est obtenue pour des maillages environ 10 fois plus grossiers que ceux utilisées avec la MEF [MOë 02, GRA 02].

Afin de réduire le nombre de degrés de liberté pour des raisons de coûts numériques, tous les noeuds du maillage d'éléments finis ne sont pas enrichis. Les noeuds des éléments traversés par la

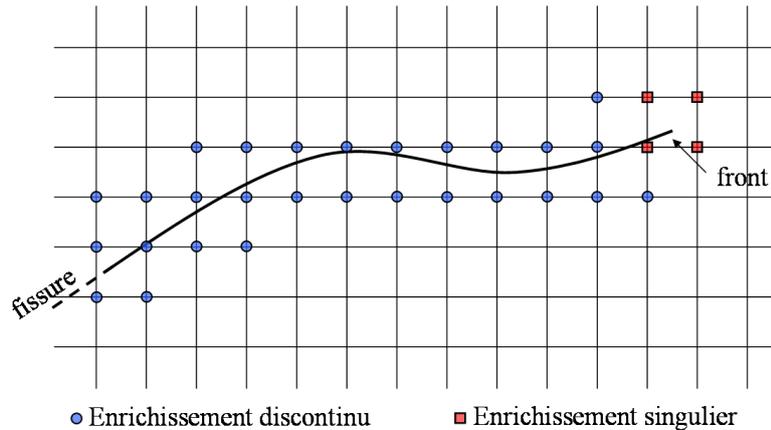


FIGURE 1.22: Représentation graphique 2D de l'enrichissement local X-FEM. Les carrés et les cercles représentent respectivement les enrichissements singuliers et discontinus.

fissure sont enrichis avec la fonction saut et les éléments contenant le front de fissure sont enrichis avec les fonctions singulières. On parle d'enrichissement topologique local (cf. figure 1.22).

Une autre stratégie, dite d'enrichissement géométrique, propose d'étendre la zone d'enrichissement singulière à une région de taille fixée indépendamment de la discrétisation. La zone d'enrichissement discontinue reste identique. Cette technique permet d'améliorer l'ordre de convergence de la méthode et la qualité de la solution au voisinage du front de fissure [LAB 05, BÉC 05, CHA 06a, NIC 09]. Cependant, le conditionnement de la matrice de raideur est fortement détérioré. Un pré-conditionneur numériquement coûteux est alors requis. Par ailleurs, d'autres développements de la méthode ont été proposés pour améliorer la qualité de la solution : traitement des *blending éléments* (éléments qui ne vérifient pas la partition de l'unité), nouveaux enrichissement discontinus [HAN 04, MOë 06].

Dans le cadre de ce travail, une version standard (enrichissement topologique) de la X-FEM est utilisée. Cette technique permet de limiter au maximum le nombre de degrés de liberté introduits par les enrichissements. En effet, la précision obtenue localement est suffisante pour les applications traitées dans ce mémoire.

1.3.2 Représentation géométrique des fissures par fonctions de niveau dans le cadre de la X-FEM

La représentation numérique de la géométrie des fissures et son évolution dans le temps est un point clé dans la simulation de problèmes mécaniques de rupture. En effet, il est indispensable de décrire et de localiser précisément la surface et le front de la fissure. Dans le cadre de la X-FEM, les fissures sont modélisées implicitement à l'aide d'enrichissements, en opposition avec la MEF pour laquelle la fissure est représentée géométriquement par le maillage, comme le reste de la frontière du domaine. Les enrichissements X-FEM contiennent donc l'information sur le lieu de la discontinuité géométrique ou du front de fissure.

Dans les problèmes bi-dimensionnels, la fissure est généralement représentée explicitement par une ensemble de segments. Les enrichissements X-FEM sont alors définis en fonction de cette

information géométrique. À chaque pas de propagation un nouveau segment est ajouté [BEL 99]. Il est possible d'étendre cette technique aux problèmes tri-dimensionnels. On effectue alors un triangulation de la surface de la fissure. L'étape de propagation peut toutefois s'avérer complexe.

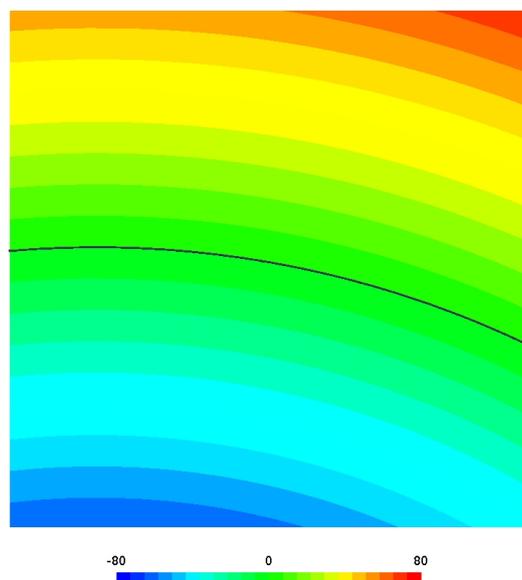


FIGURE 1.23: Représentation graphique d'un champ de distance signé bidimensionnel.

La modélisation précise des fissures en trois dimensions reste délicate, notamment dans le cas de fissures non planes. Les techniques de représentation implicites telles que la Fast Marching Method (FMM) [CHO 03, SUK 03] ou la méthode des fonctions de niveau (Level Set Method : LSM) fournissent une représentation précise des fissures en 3D et sont très bien adaptées à la représentation de surfaces mobiles au cours du temps. Ces méthodes ont été développées initialement pour la mécanique des fluides, l'imagerie ou la CAO. C'est la méthode des fonctions de niveau qui est adoptée dans ce travail. Cette méthode, initialement proposée par Sethian et Osher [OSH 88], consiste en une représentation implicite d'une interface par un champ scalaire de distances signées défini sur l'ensemble du domaine (cf. figure 1.23).

Les fonctions de niveau présentent l'intérêt d'être régies par des lois d'évolution de type eulérien qui sont tout à fait adaptées aux problèmes d'interface mobile. On peut décrire mathématiquement une fonction de niveau $\phi(\mathbf{x})$ associée à une surface Γ par :

$$\phi(\mathbf{x}) = \text{signe}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}_\Gamma |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| \quad (1.49)$$

où \mathbf{x} désigne le point courant de l'espace, \mathbf{x}^* est le point de Γ le plus proche de \mathbf{x} et \mathbf{n}_Γ est le vecteur normal unitaire à la surface (suivant l'application, son orientation peut être arbitraire). La surface Γ est localisée par l'iso-0 de ϕ . La fonction de niveau doit alors respecter les deux conditions suivantes :

$$\mathbf{x}(t) \in \Gamma(t) \Rightarrow \phi(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad (1.50)$$

$$\|\nabla\phi\| = 1 \quad (1.51)$$

1. Synthèse bibliographique

L'expression (1.51) signifie que la fonction de niveau est un champ de distances, on dit alors qu'elle est initialisée à la distance signée. On obtient la loi d'évolution en temps de la fonction de niveau en dérivant la relation (1.50) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_\phi \|\nabla \phi\| = 0 \quad (1.52)$$

où V_ϕ est un champ de vitesse défini sur tout le volume.

Dans le cadre de la mécanique de la rupture, Moës et Gravouil [MOë 02, GRA 02] ont proposé d'utiliser un jeu de deux fonctions de niveau pour modéliser la fissure. Une première, notée ϕ , est utilisée pour représenter la surface de discontinuité. La seconde, notée ψ , permet de modéliser le front de fissure localisé à l'intersection des surfaces iso-0 de ces fonctions de niveaux (cf. figure 1.24).

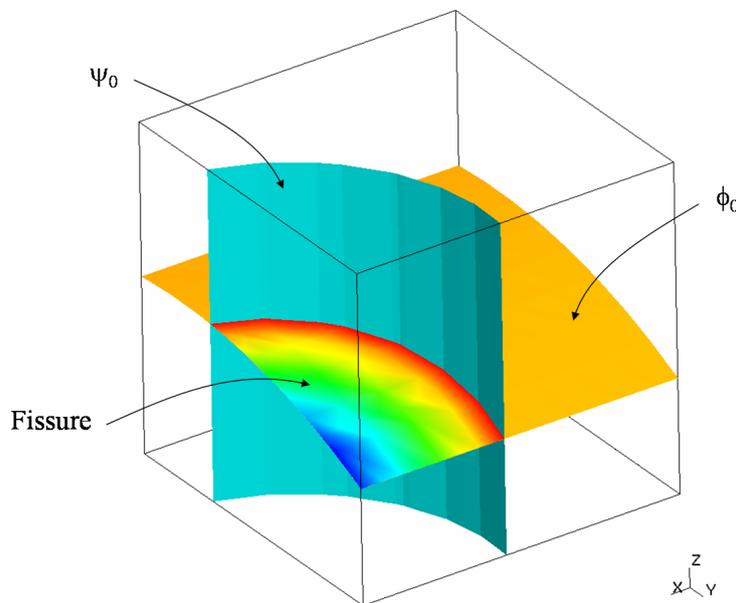


FIGURE 1.24: Définition de la géométrie d'une fissure tridimensionnelle à l'aide de deux fonctions de niveau. Les surfaces ϕ_0 et ψ_0 correspondent aux iso-0 de ces fonctions.

La réactualisation des fonctions de niveau au cours de leur éventuelle propagation consiste alors à discrétiser spatialement et temporellement l'équation (1.52) [DUF 04]. Le moyen le plus direct est d'utiliser le maillage de la structure. Des maillages structurés externes sont aussi couramment utilisés. Ils sont basés sur la méthode des différences finies pour faire propager les fonctions de niveau [RAN 08a, DUF 07]. Par ailleurs, l'utilisation de maillages structurés améliore la qualité de la représentation de la fissure et la convergence du problème de propagation [PRA 08]. Il est ensuite très facile de projeter des champs de distances signées d'un maillage à un autre pour les étapes de post-traitement par exemple.

On peut également exploiter ces deux fonctions de niveau pour définir le repère local associé au front de fissure. Il est alors nécessaire qu'elles soient localement orthogonales. On obtient

aisément les coordonnées d'un point \mathbf{x} dans la base locale en fonction des valeurs des fonctions de niveaux $\varphi(\mathbf{x})$ et $\psi(\mathbf{x})$ en ce point. De plus, ce formalisme permet de construire facilement les fonctions d'enrichissement X-FEM au front de fissure. La définition des fonctions de niveau a donc une incidence importante sur la qualité du calcul des facteurs d'intensité des contraintes. Les aspects numériques de ce calcul sont décrits dans la section suivante.

La méthode des éléments finis étendus est une méthode tout à fait adaptée à la simulation numérique de la propagation des fissures. Elle permet de modéliser des interfaces mobiles dans le temps et d'économiser les coûts numérique associés aux étapes de remaillages et de projection de champs normalement requises avec la MEF. De plus, la technique des fonctions de niveau permet de modéliser des géométries de fissures complexes en 3D et facilite les étapes de propagation géométrique et numérique (mise à jour des enrichissements X-FEM) des fissures [GRA 02, DUF 07]. Depuis une dizaine d'années, de nombreux travaux autour de la méthode des éléments finis étendus ont été publiés, notamment en mécanique de la rupture. Des applications ayant trait à la rupture par fatigue [DUF 04, ELG 07b, RIB 07b, ARE 05, RAN 08b, WYA 08, GIN 09a, RAN 10], à la rupture fragile élasto-dynamique [RÉT 05, MEN 06, MEN 08, COM 08, GRÉ 07, PRA 08, ELG 09, GRA 09, ROZ 08] ou encore à la déchirure ductile [BOR 06] ont clairement montré l'intérêt de la méthode X-FEM. Des développements récents ont été proposés afin d'améliorer la qualité de la solution dans la zone enrichie et d'atteindre des précisions élevées [DRÉ 10, LEG 08, LAB 05, BÉC 05, CHA 06a, NIC 09]. La X-FEM a atteint un niveau de maturité qui lui vaut désormais d'être implantée dans un nombre croissant de codes commerciaux et industriels. L'atout principal de cette technique est qu'elle peut s'intégrer relativement facilement dans des codes éléments finis existants.

Cependant, la méthode standard ne prévoit pas la modélisation du contact avec frottement entre les faces de la fissure. De nombreux travaux sur les problèmes de contact dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus ont mis en évidence un certain nombre de difficultés. L'objectif de la section suivante est d'identifier les problèmes associées à la modélisation du contact avec frottement à l'interface avec X-FEM et d'évaluer la robustesse des différentes méthodes employées afin de proposer un modèle optimal pour la simulation des problèmes de fissuration sous chargement de fretting.

1.4 État de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus

Le phénomène non linéaire local de contact avec frottement interfacial a une incidence importante sur le comportement global des structures dans de nombreuses applications comme les matériaux multi-couches ou la fissuration par fatigue. En particulier en mécanique de la rupture, le comportement global des fissures et le calcul des facteurs d'intensité des contraintes aux fronts dépendent de l'état de contact entre les faces de la fissure (cf. section 1.2). La modélisation précise du contact avec frottement interfacial dans le cadre de la X-FEM est donc un point clé du travail présenté dans ce mémoire.

Le contact avec ou sans frottement interfacial a été implémenté dans de nombreux modèles

1. Synthèse bibliographique

X-FEM en 2D [DOL 01, VIT 08, GIN 08, BÉC 09, GUI 08] et en 3D [GÉN 06, GÉN 07, SIA 10, PIE 10a, LIU 10]. Plusieurs modèles 2D quasi-statiques ont notamment été proposés pour simuler la propagation de fissures en fatigue avec contact et frottement interfacial sous chargement multiaxial non proportionnel [RIB 07b, LIU 08, GIN 09b, GIN 09a, BAI 10] et avec contact unilatéral et plasticité confinée en pointe de fissure [ELG 07b]. La modélisation du contact avec/sans frottement interfacial pose toutefois deux difficultés majeures.

Premièrement, les problèmes de rupture avec contact et frottement font intervenir plusieurs phénomènes à différentes échelles : celle de la structure, celle de la fissure et celle des non-linéarités à l'interface. Ces échelles peuvent différer les unes des autres de plusieurs ordres de grandeur. Dans le cadre de la X-FEM, des modèles multi-échelles basés sur des techniques multi-grilles [PAS 10, RAN 08b, FIS 05] ou de décomposition de domaine [GUI 08] ont été proposés afin de pallier cette difficulté.

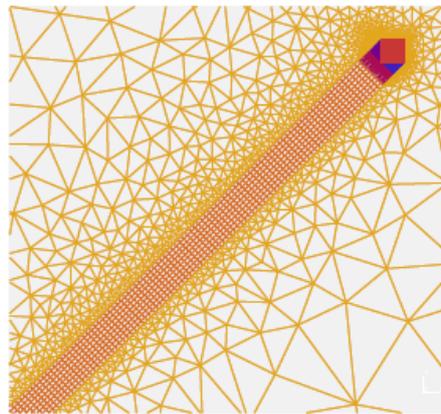


FIGURE 1.25: Raffinement local du maillage de la structure proposé par Ribeaucourt [RIB 07a] afin d'adapter la discrétisation de l'interface à l'échelle du problème de contact avec frottement.

Une solution de contact précise requiert une discrétisation spatiale de l'interface adaptée à la dimension caractéristique du problème local [RIB 07b]. La plupart des modèles présentés ci-dessus ne permettent pas une description multi-échelle du problème de contact avec frottement. En effet, la discrétisation du problème d'interface est liée au maillage de la structure. On procède alors à un raffinement local du maillage de la structure dans la zone d'intérêt afin d'adapter la discrétisation de l'interface (cf. figure 1.25). Dans le cas des problèmes de fretting fatigue par exemple, le rapport des échelles mises en jeu est très élevé. On observe expérimentalement des variations de la taille de la zone de contact adhérent ou glissant entre les faces des fissures de l'ordre du micron alors que les dimensions de la structure peuvent être de l'ordre du mètre. L'opération de maillage du domaine peut alors s'avérer délicate, voire impossible pour les problèmes tridimensionnels. De plus, au regard du problème de la structure, le maillage n'est pas optimal et entraîne un surcoût numérique. Par ailleurs, dans le cadre de ce travail, ce procédé est en contradiction avec le concept de la méthode des éléments finis étendus. En effet, on cherche à modéliser une interface (telle qu'une fissure) indépendamment du maillage en volume.

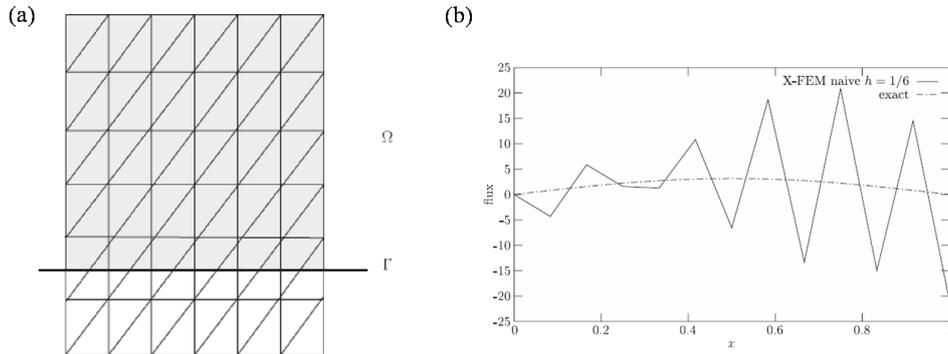


FIGURE 1.26: Illustration des oscillations numériques de la solution local de contact proposée par Moës *et al.* [MOë 06].

Deuxièmement, plusieurs travaux ont mis en évidence des problèmes d'instabilité venant perturber la solution de contact (avec ou sans frottement). Les méthodes concernées font apparaître des oscillations numériques (cf. figure 1.26) dans le champ discrétisé des efforts d'interface. Ce problème est lié à un non respect de la condition inf-sup LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi). Il dépend fortement de la discrétisation du problème et de la formulation utilisée. On distingue alors trois types de formulation du problème de rupture avec contact et/sans frottement entre les faces de la fissure induisant des comportements différents.

- i. Les *formulations primales* [LIU 08] pour lesquelles le problème de contact est formulé en déplacement (cf. figure 1.27.a). Une méthode d'enrichissement X-FEM spécifique permet de modéliser la discontinuité géométrique liée à la présence de la fissure et d'intégrer la loi de comportement d'interface (contact avec frottement). Le champ des efforts d'interface \mathbf{t} est considéré comme une composante des efforts externes. Au cours de la résolution itérative du problème global, il est re-calculé à partir de la solution en déplacement \mathbf{u} . Le modèle proposé par Liu *et al.* [LIU 08] est stable. Il ne présente pas de problèmes d'oscillations. Par ailleurs, il est montré que la convergence de la méthode de résolution non linéaire utilisée est très élevée en comparaison avec les modèles proposés dans la littérature.

Note : Dans ce modèle, la discrétisation du problème de contact avec frottement d'interface est fortement dépendante du maillage de la structure. Une solution de contact fine requiert un raffinement local du maillage en volume de la structure.

- ii. Les *formulation duales* (cf. figure 1.27.b) sont généralement basées sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le problème de contact est formulé entre le champ discrétisé des déplacements \mathbf{u} et le champ discrétisé des multiplicateurs de Lagrange λ équivalent aux efforts de contact. La majorité de ces modèles sont concernés par les problèmes d'instabilité numériques : oscillations, pics de contraintes et convergence faible). L'expérience montre que le choix des espaces de multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes normal et tangentiel à l'interface influence fortement la stabilité de la solution. Cette question est largement détaillée dans les références [HAN 04, BEC 09, NIS 08, LAD 02]. Moës *et al.* ont proposé une méthode de réduction de cet espace [MOë 06, BÉC 09, GÉN 07, SIA 10] dans le but de stabiliser la solution de contact. Pour ce modèle, la discrétisation du problème d'interface est également fortement dépendante du maillage de la structure. Une description

1. Synthèse bibliographique

multi-échelle du problème requiert un raffinement local du maillage de la structure.

Note : Les problèmes d'instabilité entraînent une forte diminution du taux de convergence des solveurs non linéaires utilisés pour le problème de contact avec frottement.

- iii. les *formulation mixtes*, pour lesquelles l'interface est considérée comme une structure autonome avec ses propres variables primales et duales (\mathbf{w}, λ) et sa propre discrétisation [LAD 85] (cf. figure 1.27.c). [ELG 07b, RIB 07b, PIE 10a, GUI 10]. Le problème de contact local est formulé entre les champs locaux \mathbf{w} et λ . Il est couplé avec le problème global (\mathbf{u}, σ) au sens faible. On constate que les modèles basés sur des formulation faibles mixtes proposés par Ribeaucourt *et al.* [RIB 07b] et par Elguedj *et al.* [ELG 07b] possèdent de bonnes propriétés de stabilité, notamment pour les problèmes de contact unilatéral sans glissement.

Note : Le problème de contact étant séparé du problème de structure, la discrétisation de l'interface peut être choisie indépendamment du maillage en volume.

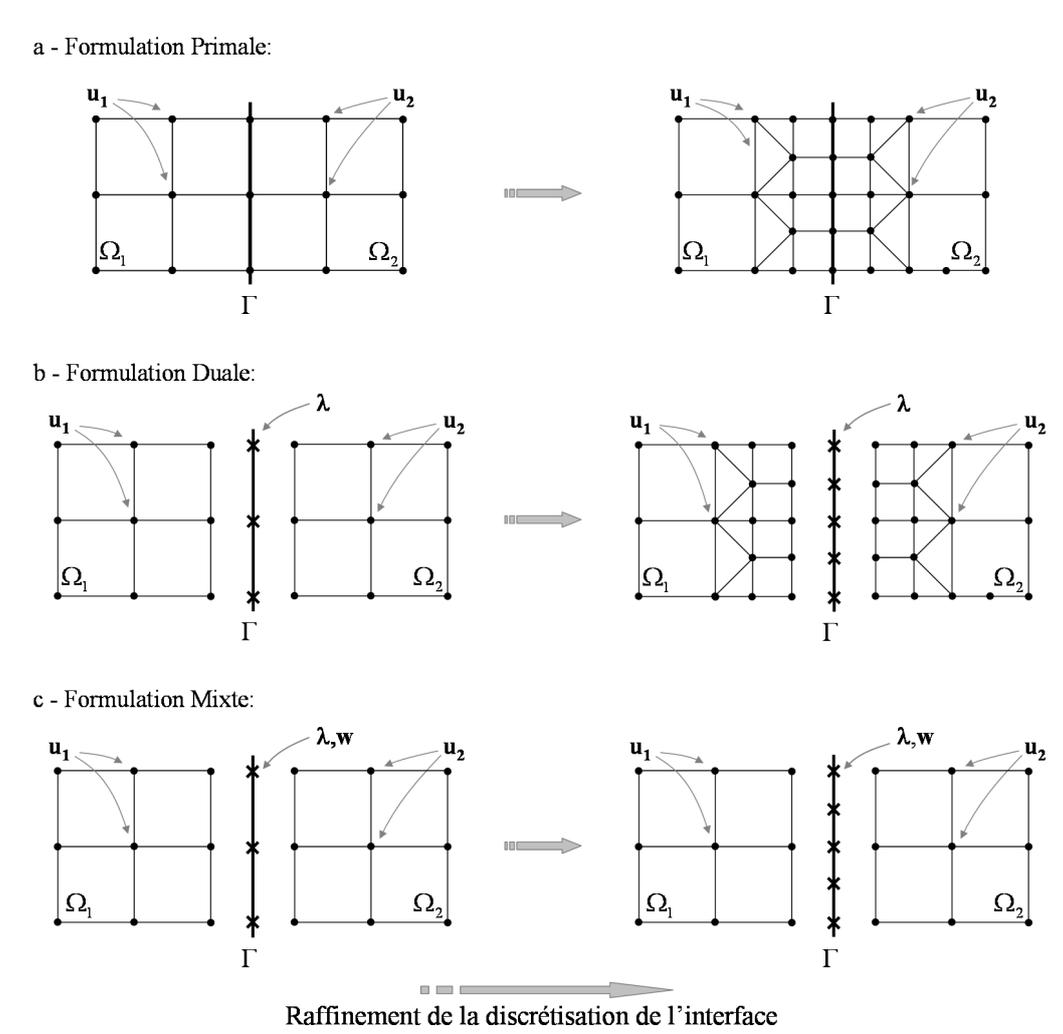


FIGURE 1.27: Représentation schématique des différentes méthodes de décomposition de domaine.

Les formulations primales et duales impliquent l'utilisation de discrétisation de l'interface dépendante du maillage en volume. En revanche, les modèles basés sur des formulations mixtes considèrent l'interface comme une structure autonome et permettent une discrétisation de l'interface indépendante du maillage en volume. Il est alors possible d'adapter chaque discrétisation (fissure/structure) à l'échelle du problème associé. À partir des besoins évoqués dans ce chapitre, il est choisi dans ce mémoire de construire un modèle X-FEM multi-échelle dédié au contact et au frottement interfacial à partir d'une formulation mixte. Les objectifs sont :

- 1- modéliser les fissures indépendamment du maillage de la structure par la méthode des éléments finis étendus X-FEM ;
- 2- obtenir une solution locale de contact stable sans oscillations numériques et, en conséquence, un taux de convergence optimal du solveur non linéaire ;
- 3- proposer une description multi-échelle du problème de rupture avec contact et frottement interfacial grâce à l'utilisation de discrétisations de l'interface et de la structure indépendantes et adaptées à chaque problème ;
- 4- "capturer" précisément la solution de contact avec frottement entre les faces de la fissure intervenant dans le calcul des facteurs d'intensité des contraintes au front de fissure ;
- 5- simuler la propagation des fissures dans le cadre d'une stratégie de prédiction de durée de vie des pièces soumises à un chargement de fretting à l'aide de lois et de critères de propagation en fatigue multiaxiale adaptés aux chargement non proportionnels ;

La construction de ce modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial est présentée dans le chapitre suivant. Les points 4 et 5 évoqués ci dessus sont présentés dans les chapitres 3 et 4 pour des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels respectivement.

Chapitre 2

Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

Dans ce deuxième chapitre, le modèle X-FEM multi-échelle avec contact et frottement interfacial est présenté. Premièrement, la formulation mécanique faible mixte dédiée aux problèmes de structure avec interface en présence de contact et frottement est définie. Cette formulation permet l'utilisation d'une discrétisation de l'interface indépendante du maillage éléments finis de la structure. Elle est donc adaptée aux problèmes multi-échelles de rupture par fatigue en présence de contact et frottement entre les faces de la fissure. Ensuite, plusieurs méthodes de résolution non linéaires adaptées à ce type de problème sont présentées. Dans le but de s'affranchir des éventuelles oscillations numériques liées à un non respect de la condition LBB, une méthode de stabilisation est proposée. Des exemples sont proposés pour illustrer les performances de cet outil numérique relatives à la stabilité de la solution de contact et au taux de convergence du solveur stabilisé. Enfin nous définirons les trois échelles de temps considérées lors de la modélisation quasi-statique du problème de rupture et la simulation de la propagation des fissures en fatigue.

Sommaire

2.1	Formulation faible mixte du problème de structure avec interface interne en présence de contact et frottement	49
2.2	Discrétisation X-FEM multi-échelle dédiée aux problèmes de contact et frottement interfacial	52
2.3	Solution non linéaire du problème de rupture avec contact et frottement interfacial	55
2.3.1	La méthode du Lagrangien Augmenté	56
2.3.2	Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN	60
2.3.3	Stabilisation de la méthode LATIN	65

2.4	Exemples tridimensionnels et validation du modèle	71
2.4.1	Problème tridimensionnel de contact avec frottement : stabilité de la méthode numérique	71
2.4.2	Problème de contact unilatéral : intérêt de l'approche multi-échelle	80
2.4.3	Problème de contact avec frottement : comparaison avec une solution numérique de référence	85
2.5	Modélisation quasi-statique et simulation multi-échelle en temps de la propagation des fissures	88

Comme nous l'avons vu, la modélisation dans le cadre de la X-FEM du contact et du frottement entre les faces d'une fissure ou entre deux corps demeure délicate. Un modèle basé sur une *formulation mixte* issue des méthodes de décomposition de domaine est proposé dans le but de s'affranchir des difficultés posées. Cette formulation présente a priori de bonnes propriétés de stabilité [ELG 07a, RIB 07b]. Elle est présentée dans la première section de ce chapitre. L'interface est considérée comme une structure autonome avec ses propres variables primales et duales et sa propre discrétisation [LAD 85]. Cette considération permet une description multi-échelle précise et optimale du problème local de contact à l'échelle de la fissure indépendamment du problème global à l'échelle de la structure [PIE 10a].

2.1 Formulation faible mixte du problème de structure avec interface interne en présence de contact et frottement

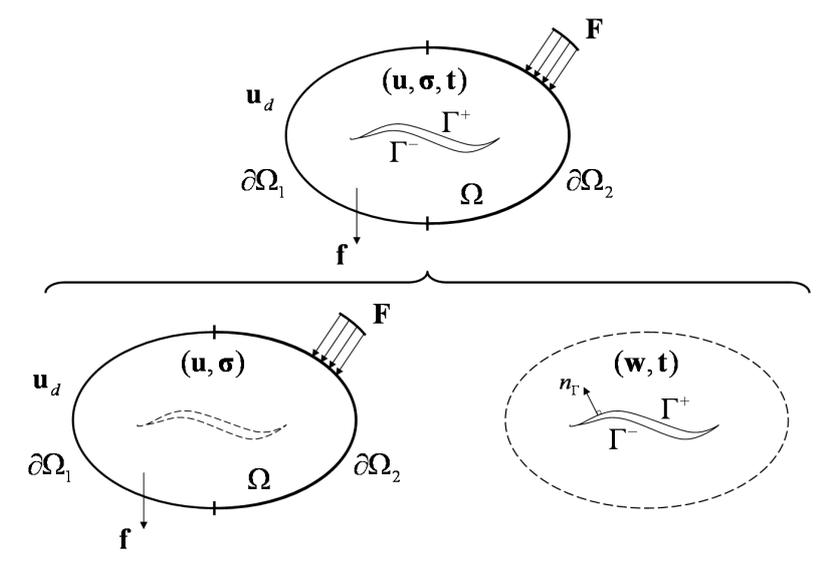


FIGURE 2.1: Séparation du problème global à l'échelle de la structure et du problème local de contact avec frottement à l'échelle de la fissure.

On considère l'interface Γ (d'une fissure, entre deux corps ou deux milieux) comme une structure autonome possédant ses propres variables primales et duales et sa propre discrétisation. Au temps t , le problème est alors divisé en deux sous problèmes [LAD 99] :

- le problème local de contact à l'échelle de la fissure. Les inconnues de ce problème sont le champ des déplacements surfaciques $\mathbf{w}(t)$ et le champ des efforts surfaciques de contact $\mathbf{t}(t)$. La solution de ce problème obéit aux lois de comportement d'interface normale et tangentielle (loi de contact unilatéral et loi de coulomb par exemple) :

$$\text{Loi de comportement à l'interface : } \mathbf{t}(t) = \mathbf{t}(\mathbf{w}(t), t + \text{variables internes}) \quad \text{sur } \Gamma : (2.1)$$

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

- le problème global à l'échelle de la structure. Les inconnues de ce problème sont le champ de déplacement $\mathbf{u}(t)$ et le tenseur des contraintes volumiques $\boldsymbol{\sigma}(t)$. La solution de ce problème satisfait les équations d'équilibre dans le domaine Ω et obéit à la loi de comportement en volume du matériau. Elle doit aussi satisfaire les conditions de Neumann et de Dirichlet sur $\partial_2\Omega$ et $\partial_1\Omega$ respectivement.

$$\text{Équilibre en volume : } \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$\text{Conditions de Neumann : } \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} = \mathbf{F}(t) \quad \text{sur } \partial_2\Omega \quad (2.3)$$

$$\text{Conditions de Dirichlet : } \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_d(t) \quad \text{sur } \partial_1\Omega \quad (2.4)$$

$$\text{Loi de comportement en volume : } \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)(\mathbf{u}(t), t + \text{variables internes}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

On peut alors écrire la formulation forte de ce problème en introduisant des conditions de couplage à l'interface entre ces deux problèmes sur les variables primales et duales :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} = \mathbf{t}(t) \quad \text{sur } \Gamma^+ \text{ et } \Gamma^- \quad (2.7)$$

L'ensemble des équations (2.1) à (2.7) constitue la formulation forte de ce problème.

Afin de construire une formulation faible de ce problème, l'idée consiste à utiliser la *méthode des multiplicateurs de Lagrange* à partir du *principe des puissances virtuelles* (PPV) [GER 80]. On définit alors les puissances virtuelles associées au problème global en volume et au problème local à l'interface :

$$P_{global}^* = \int_{\Omega} \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)] - \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}^* \, dV - \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{u}^* \, dS \quad (2.8)$$

où les espaces fonctionnels des champs de déplacement réel \mathbf{u} et virtuel \mathbf{u}^* sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \mathcal{U}_d = \{\mathbf{u}/\mathbf{u}|_{\partial_1\Omega} = \mathbf{u}_d + \text{régularité}\} \\ \mathbf{u}^* &\in \mathcal{U}_0^* = \{\mathbf{u}^*/\mathbf{u}^*|_{\partial_1\Omega} = 0 + \text{régularité}\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

et

$$P_{local}^* = - \int_{\Gamma} \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{w}^* \, dS \quad (2.10)$$

où \mathbf{w}^* est le champ de déplacement virtuel à l'interface tel que :

$$\mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^* = \{\mathbf{w}^* + \text{régularité}\} \quad (2.11)$$

De plus, on définit le champ des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ afin d'appliquer la condition de couplage (2.6) sur l'interface. La puissance virtuelle associée s'écrit :

$$P_{couplage}^* = - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)) \, dS - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}(t)(\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^*) \, dS \quad (2.12)$$

où $\boldsymbol{\lambda}^*$ est le champ des multiplicateurs de Lagrange virtuels à l'interface tel que :

$$\boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^* = \{\boldsymbol{\lambda}^* + \text{régularité}\} \quad (2.13)$$

On peut alors construire une formulation faible associée à l'ensemble du problème à partir du PPV modifié :

$$P_{global}^* + P_{local}^* + P_{couplage}^* = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0^*, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^*, \forall t \in [0; T] \quad (2.14)$$

équivalent à :

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)] dV + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}^* dV + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{u}^* dS \\ & + \int_{\Gamma} (\mathbf{t}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \mathbf{w}^* dS \\ & + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)) \cdot \boldsymbol{\lambda}^* dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0^*, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^*, \forall t \in [0; T]$$

Par un choix judicieux des champs virtuels on peut vérifier que la formulation faible mixte (2.15) est équivalente aux équations de la formulation forte définie ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \Omega & \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} = \mathbf{F}(t) & \text{sur } \partial_2\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} = \mathbf{t}(t) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \partial_2\Omega \cup \Gamma & \rightarrow \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \forall \mathbf{w}^* & \rightarrow \mathbf{t}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \forall \boldsymbol{\lambda}^* & \rightarrow \mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (2.16)$$

La formulation faible (2.15) est valable quelles que soient les lois de comportement en volume et à l'interface du problème. Dans ce travail, on se place dans le cadre des matériaux homogènes élastiques isotropes. La loi de comportement en volume s'exprime en fonction du tenseur de Hooke \mathbf{K} :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.17)$$

La solution (\mathbf{w}, \mathbf{t}) obéit aux équations définissant le contact unilatéral pour le problème normal et la loi de frottement de Coulomb pour le problème tangentiel respectivement. Les champs \mathbf{w} et \mathbf{t} sur les faces Γ^+ et Γ^- s'expriment dans le repère local $(\mathbf{n}_{\Gamma}, \mathbf{t}_{\Gamma})$ associé à l'interface :

$$\mathbf{w} = w_N \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} + w_T \cdot \mathbf{t}_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = t_N \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} + t_T \cdot \mathbf{t}_{\Gamma} \quad (2.18)$$

On définit les déplacements relatifs, ouverture et glissement, entre les deux faces en un point de l'interface de position x :

$$[w_N(x, t)] = w_N^+(x, t) - w_N^-(x, t) \quad \text{et} \quad [w_T(x, t)] = w_T^+(x, t) - w_T^-(x, t) \quad (2.19)$$

On écrit alors les équations du problème local d'interface :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ouverture} & \quad [w_N(x, t)] > 0 & \rightarrow & \quad \mathbf{t}^+(x, t) = \mathbf{t}^-(x, t) = 0 \\ \bullet \text{ contact} & \quad [w_N(x, t)] = 0 & \rightarrow & \quad \mathbf{t}^+(x, t) = -\mathbf{t}^-(x, t) \\ \bullet \text{ adhérence} & \quad \|\mathbf{t}_T(x, t)\| < \mu_{\Gamma} \|\mathbf{t}_N(x, t)\| & \rightarrow & \quad \Delta[w_T(x, t)] = 0 \\ \bullet \text{ glissement} & \quad \|\mathbf{t}_T(x, t)\| = \mu_{\Gamma} \|\mathbf{t}_N(x, t)\| & \rightarrow & \quad \exists \gamma > 0 / \Delta[w_T(x, t)] = -\gamma \mathbf{t}_T^+(x, t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\Delta[w_T(x, t)]$ correspond à l'incrément de glissement au pas de temps Δt considéré.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

Remarque 7 : *Dans ce travail, on fait l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations. En conséquence, le calcul de l'état local de contact est toujours réalisé dans la configuration non déformée.*

La formulation faible mixte à trois champs (2.15) est la base du modèle X-FEM à deux échelles développé dans ce mémoire. On considère les problèmes local et global comme deux sous-problèmes "autonomes". Ils sont reliés au sens faible par une condition de continuité des déplacements et des efforts. Cette approche permet l'utilisation de discrétisations indépendantes pour chaque sous-problème, et donc une modélisation multi-échelle du problème général. Dans la section suivante, une méthode est proposée afin d'appliquer cette stratégie dans cadre de la méthode des éléments finis étendus.

2.2 Discrétisation X-FEM multi-échelle dédiée aux problèmes de contact et frottement interfacial

Dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus, le problème de structure est discrétisé par un maillage éléments finis. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, X-FEM est très adaptée à la modélisation des problèmes de rupture ou d'interface. La surface de discontinuité est modélisée indépendamment du maillage en volume. En présence de contact (avec ou sans frottement) à l'interface Γ , il faut toutefois définir le support géométrique des champs (\mathbf{w}, \mathbf{t} et λ) afin d'intégrer numériquement le problème local défini dans la section précédente.

On se base alors sur la méthode proposée par Dolbow et al. [DOL 01]. Des éléments d'interface sont définis à l'intersection de la géométrie de l'interface (segments en 2D ou fonctions de niveau en 3D) et des éléments du maillage de la structure. De plus, des paires de points d'intégration notés G^+ et G^- sont définis sur chacun de ces éléments d'interface. L'ensemble de ces points d'intégration constitue le support des champs locaux discrétisés sur chaque face Γ^+ et Γ^- (cf. figure 2.2.a). Cette méthode est relativement simple à implémenter numériquement car les points d'intégrations sont construits à partir des éléments finis sous-jacents. De ce fait, la distribution des points d'intégration à l'interface dépend du maillage de la structure. En conséquence, une modélisation fine des conditions de contact requiert un raffinement du maillage de la structure dans la zone d'intérêt (cf. section 1.4). Cette étape est laborieuse, accroît les temps de calcul (particulièrement en 3D) et diminue grandement les avantages inhérents à la méthode des éléments finis étendus.

Une nouvelle stratégie basée sur le concept d'indépendance de la discrétisation de l'interface et du maillage en volume a été développée. L'objectif est d'optimiser la finesse de chaque discrétisation afin de capturer précisément l'état de contact local à moindre coût numérique. La méthode consiste alors à augmenter le nombre de points d'intégration par subdivision des éléments d'interface (*h-refinement*), indépendamment du maillage éléments finis sous-jacent [PIE 10a]. Cette stratégie est illustrée dans la figure 2.2.b. Elle permet de préserver les avantages de la technique X-FEM (modélisation de l'interface indépendamment du maillage en volume).

Dans le cas tridimensionnel, les éléments d'interface résultent initialement de l'intersection de la surface iso-0 de la fonction de niveau ϕ et des éléments finis du maillage. Ils peuvent être allongés et de tailles variables lorsqu'un élément du maillage est "coupé" dans un coin ou selon une diagonale par exemple. Un critère de taille est défini. Un élément d'interface est sous-découpé

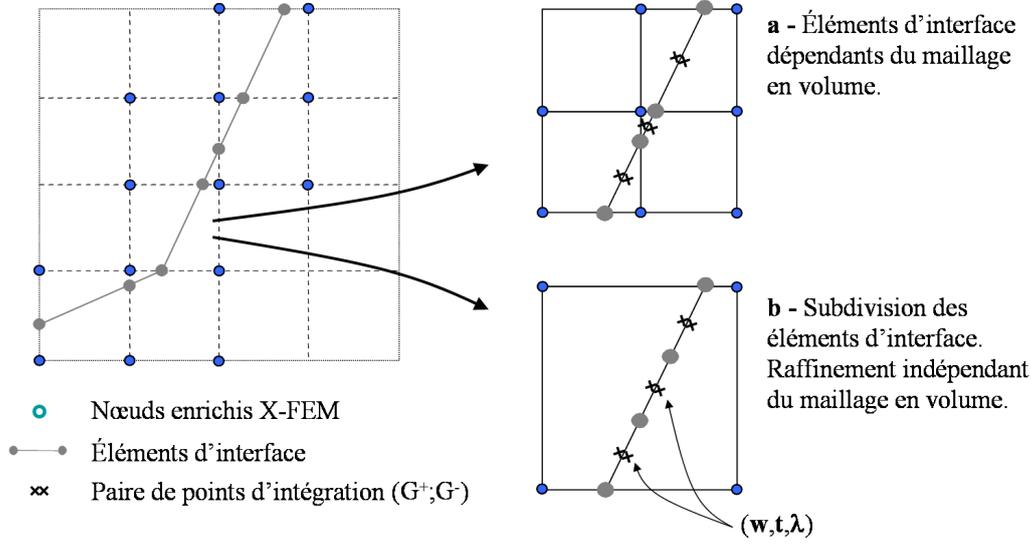


FIGURE 2.2: Méthodes de discrétisation du problème de contact interfacial en 2D proposées par : (a)-Dolbow *et al.* [DOL 01] ; (b)-Pierres *et al.* [PIE 10a].

en plusieurs triangles lorsqu'au moins une de ses arrêtes est plus longue qu'une dimension caractéristique l_c définie par l'utilisateur. Ce critère permet d'uniformiser la distribution des points d'intégration sur l'interface et de l'adapter à l'échelle caractéristique du problème de contact.

De plus, un critère de forme est utilisé afin d'optimiser le sous-découpage des triangles. Pour cela, les rapports des longueurs entre des différentes arrêtes des éléments d'interface sont calculés. Ce critère permet de détecter les éléments allongés. En fonction de leur degré de distorsion, on sélectionne le mode de subdivision optimal afin d'obtenir des triangles plus réguliers. Ce développement a pour but d'améliorer la qualité de l'intégration numérique du problème local. Chaque élément d'interface est testé puis sous-découpé si nécessaire jusqu'à l'obtention d'une distribution de points d'intégration uniforme et adaptée à l'échelle requise. Ce processus a été automatisé et est très peu coûteux numériquement. Il est illustré dans la figure 2.3.

Remarque 8 : *Il ny a pas de degrés de liberté associés aux noeuds des éléments d'interface. Le "maillage" des éléments d'interface n'est donc pas nécessairement conforme. La loi de contact locale s'applique pour chaque paire de points d'intégration en vis à vis indépendamment des autres paires.*

Un premier exemple tridimensionnel simple est proposé pour illustrer l'efficacité cette stratégie. On considère un domaine Ω parallélépipédique de dimensions $(120\text{mm} \times 120\text{mm} \times 120\text{mm})$ et une fissure débouchante Γ non plane à front courbe (cf. figure 2.4). On considère le maillage élément finis structuré relativement grossier représenté dans la figure 2.5. La figure 2.6 représente les discrétisations de l'interface de la fissure par la méthode (a) (cf. figure 2.2) et avec la méthode de raffinement (b) proposée pour des valeurs de $l_c = 5\text{mm}$ et $l_c = 3\text{mm}$.

La méthode de raffinement permet d'adapter la discrétisation de l'interface à l'échelle du problème de contact indépendamment du maillage de la structure. Cette modélisation à deux échelles est possible grâce au couplage au sens faible des problèmes local et global décrit par l'équation

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

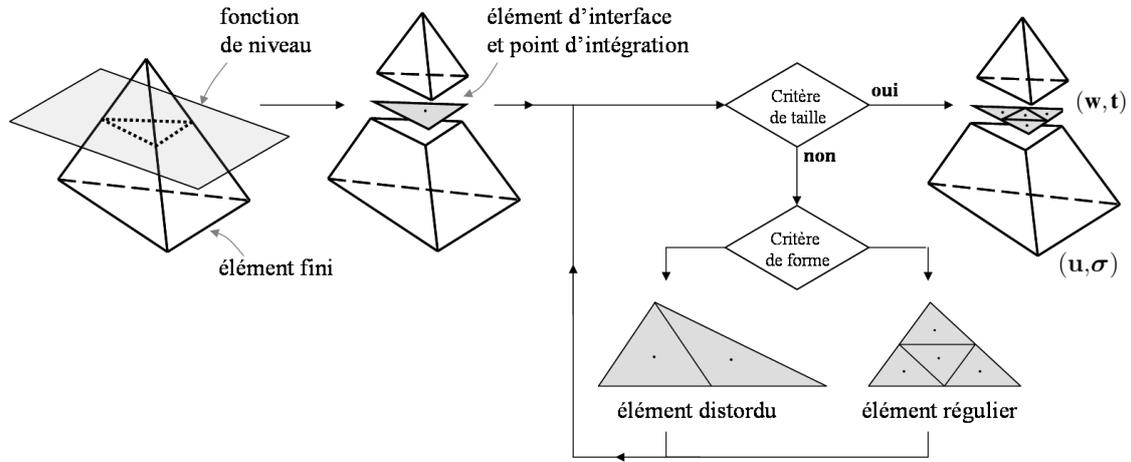


FIGURE 2.3: Algorithme de la méthode de raffinement automatique de la discrétisation de l'interface en 3D.

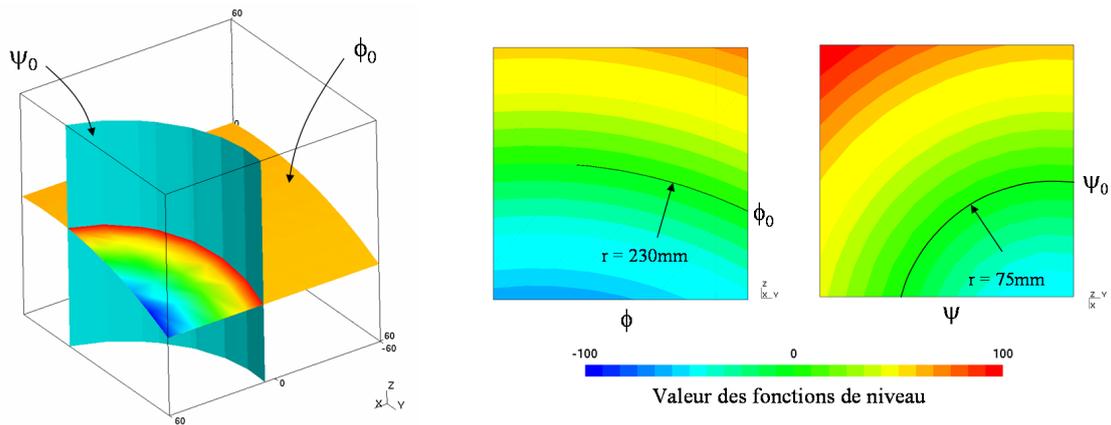


FIGURE 2.4: Géométrie du domaine (en mm) et de la fissure définie par deux fonctions de niveau ϕ et ψ .

(2.15). Les gains numériques liés à cette stratégie est illustré dans la section 2.4. Dans la section suivante, nous proposons deux méthodes de résolution non linéaires pour ce formalisme.

Remarque 9 : Dand le cadre de la X-FEM, afin de capturer le comportement singulier avec suffisamment de précision, un maillage en volume localement plus fin est requis au voisinage du front de fissure. Cette condition s'applique également dans le cadre de ce modèle à deux échelles. Cependant, grâce aux enrichissements singuliers en pointe de fissure, la X-FEM permet d'utiliser des maillages environ dix fois plus grossiers au voisinage du front de fissure par rapport à ceux utilisés dans le cadre de la MEF à précision fixée [MOë 02].

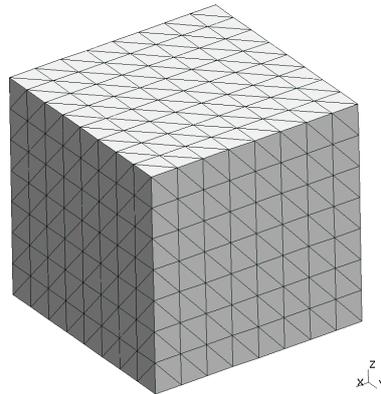


FIGURE 2.5: Maillage structuré de 3072 tétraèdres du domaine parallélépipédique.

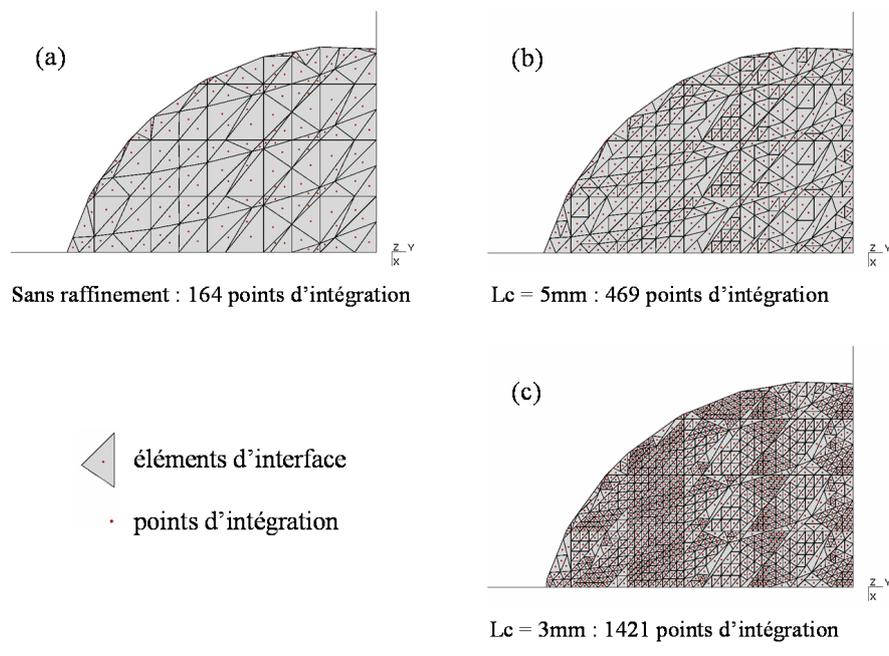


FIGURE 2.6: Représentation de la discrétisation de l'interface (éléments d'interface et points d'intégration) : (a)-sans raffinement [DOL 01] ; (b)-avec raffinement : $l_c = 5\text{mm}$; (c)-avec raffinement : $l_c = 3\text{mm}$ [PIE 10a].

2.3 Solution non linéaire du problème de rupture avec contact et frottement interfacial

On se place dans le cas des méthodes incrémentales en temps. On suppose que l'on connaît le vecteur d'état $\mathbf{X}_n = (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{t}_n)$ solution du problème à l'instant t_n . On cherche à calculer le nouveau vecteur d'état \mathbf{X}_{n+1} à l'instant t_{n+1} . Nous proposons deux méthodes de résolution du problème non linéaire de rupture avec contact et frottement à l'interface défini par (2.15), (2.17),

(2.20) et (2.4).

2.3.1 La méthode du Lagrangien Augmenté

La méthode du Lagrangien Augmenté est couramment utilisée pour la résolution de problèmes non linéaires et notamment les problèmes de contact. En 2006, Géniaut *et al.* ont proposé un modèle X-FEM tridimensionnel avec contact interfacial sur la base d'une formulation duale $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ [GÉN 06, GÉN 07]. La stabilité de la solution de contact est alors assurée par une méthode de restriction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange. Ce formalisme ne convient pas à notre problématique car il induit une dépendance entre le maillage de la structure et la discrétisation de l'interface.

En 2007, Elguedj *et al.* ont proposé un modèle X-FEM bidimensionnel pour la simulation de la propagation de fissures en présence de plasticité confinée et de contact sans frottement entre les faces de la fissure [ELG 07a, ELG 07b]. Ce modèle est basé sur une formulation mixte à trois champs analogue à (2.15). Une méthode itérative par incréments est proposée pour résoudre le problème non linéaire. On choisit d'étendre cette stratégie à la résolution à deux échelles du problème de contact avec frottement.

À partir de la formulation faible mixte (2.15), on applique une régularisation du problème de contact avec frottement par *pénalité*. Cette technique permet de maîtriser le taux de convergence du schéma itératif [SIM 92]. On obtient alors la formulation faible itérative suivante :

$$\begin{aligned}
 0 &= - \int_{\Omega} Tr \left[\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \right] dV + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} \cdot \mathbf{u}^* dS \\
 &\quad + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* dV \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \left(\mathbf{t}_{n+1}^{(i)} + \alpha \mathbf{w}_{n+1}^{(i)} \right) \mathbf{w}^* dS - \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} + \alpha \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \mathbf{w}^* dS \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \boldsymbol{\lambda}^* dS \\
 \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0^*, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^*
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

où α est l'opérateur de pénalité défini par l'utilisateur tel que :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_N & 0 \\ 0 & \alpha_T \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Cette formulation est valable quelle que soit la méthode de discrétisation en espace choisie (X-FEM, MEF, BEM,...). Dans le cadre du modèle X-FEM à deux échelles présenté dans la section précédente, on exprime le champ de déplacement global à l'aide de l'équation (1.48). Les champs locaux s'expriment en fonction des fonctions de formes primales et duales associées à la discrétisation de l'interface :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^3 \mathbf{w}_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}) \tag{2.23}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^3 \mathbf{t}_m(t) \Psi'_m(\mathbf{x}) \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^3 \boldsymbol{\lambda}_m(t) \Psi'_m(\mathbf{x}) \tag{2.25}$$

où Ψ et Ψ' sont respectivement les bases des fonctions de forme primales et duales linéaires de éléments d'interface d'ordre 0 ou 1 avec trois degrés de liberté par point d'intégration pour les déplacements locaux (w_x, w_y, w_z) et les efforts locaux (t_x, t_y, t_z) . On fait une approximation similaire pour les champs virtuels \mathbf{w}^* , \mathbf{t}^* et $\boldsymbol{\lambda}^*$.

On définit alors les champs discrétisés du problème par :

$$\mathbf{U} \equiv \begin{pmatrix} u_i \\ a_j \\ b_{lk} \end{pmatrix}_n \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} F_{u_i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_n \quad \mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix} f_{u_i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_n \quad (2.26)$$

où n est la dimension de l'espace fonctionnel discrétisé du problème global enrichi. u_j , a_j et b_{lk} sont les degrés de liberté de l'approximation X-FEM (1.48) associés à la base des fonctions de forme primale Φ . F_{u_i} et f_{u_i} sont les degrés de liberté associés à la base des fonctions de forme duale Φ' du maillage en volume.

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} w_i \end{pmatrix}_p \quad \mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} t_i \end{pmatrix}_p \quad \boldsymbol{\Lambda} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_i \end{pmatrix}_p \quad (2.27)$$

où p est la dimension de l'espace fonctionnel discrétisé du problème local. w_i , t_i et λ_i sont les degrés de liberté associés aux fonctions de forme primales Ψ et duales Ψ' des éléments d'interface.

Remarque 10 : Les discrétisations des champs \mathbf{w} , \mathbf{t} et $\boldsymbol{\lambda}$ sont nécessairement identiques afin de pouvoir appliquer localement les équations décrivant la loi de comportement d'interface.

Le problème non linéaire est résolu par un schéma itératif par incréments de Newton-Raphson. À partir de l'équation (2.21) et des expressions des champs discrétisés (2.26) et (2.27), on construit le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{u\lambda} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\lambda} \\ -\mathbf{K}_{u\lambda}^T & \mathbf{K}_{w\lambda}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{U}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{W}_{i+1} \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{K}_{u\lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_i \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \cdot (\mathbf{T}_i - \boldsymbol{\Lambda}_i) \\ \mathbf{K}_{u\lambda}^T \cdot \mathbf{U}_i - \mathbf{K}_{w\lambda}^T \cdot \mathbf{W}_i \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i+1} &= \Delta \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i \\ \mathbf{W}_{i+1} &= \Delta \mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i \\ \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} &= \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \boldsymbol{\Lambda}_i \end{cases} \quad (2.29)$$

\mathbf{K} est la matrice de raideur globale du problème de structure enrichi. \mathbf{K}_{ww} est l'opérateur associé au coefficient de pénalité α :

$$\mathbf{K}_{ww} = \alpha \int_{\Gamma} \Psi_i \Psi_j dS \quad (2.30)$$

Remarque 11 : À convergence, $\mathbf{W}_i \cong \boldsymbol{\Lambda}_i$ à précision donnée et l'énergie liée à l'opérateur de pénalité K_{ww} tend vers zéro. Le choix de la valeur de α , en Pa.m^{-1} , a une forte influence sur le taux de convergence de la méthode mais ne perturbe pas la solution du problème. Bien qu'il soit possible d'utiliser des valeurs différentes pour les problèmes normal et tangentiel, une valeur unique est considérée dans la suite de ce travail.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

$\mathbf{K}_{u\lambda}$ et $\mathbf{K}_{w\lambda}$ sont équivalents à des opérateurs *mortier* (ou *mortar*) [MCD 00, COM 03, DUR 06, KIM 07, RAN 08a]. Ils autorisent le couplage au sens faible entre les problèmes local et global et l'utilisation de discrétisations non compatibles :

$$\mathbf{K}_{u\lambda} = \left(\int_{\Gamma} \Phi_i \Psi_m dS \mid \int_{\Gamma} H \Phi_j \Psi_m dS \mid \int_{\Gamma} B_l \Phi_k \Psi_m dS \right) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K}_{w\lambda} = \int_{\Gamma} \Psi_i \Psi'_j dS \quad (2.32)$$

À chaque itération le système linéaire (2.28) est résolu, puis on calcule le champ des efforts d'interface \mathbf{T}_{i+1} à partir de \mathbf{W}_{i+1} et des équations de la loi de comportement d'interface (2.20). On considère qu'on obtient une solution convergée au sens d'un indicateur d'erreur pertinent η tel que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{X}_{n+1}^{(i)} \equiv \mathbf{X}_{n+1} \quad (2.33)$$

Un critère de convergence local spécifique aux problèmes de contact a été développé par Ri-beaucourt *et al.* [RIB 07a]. Il est défini comme la distance entre deux approximations locale et globale successives, en terme de déplacements et d'efforts à l'interface en distinguant les grandeurs relatives au problème normal et au problème tangentiel :

$$\eta = \max(\eta_N; \eta_T) \quad (2.34)$$

avec

$$\eta_N = \frac{\| \mathbf{X}_N^{(i+1)} - \mathbf{X}_N^{(i+\frac{1}{2})} \|_{\infty}^2}{\| \mathbf{X}_N^{(i+1)} \|_{\infty}^2 + \| \mathbf{X}_N^{(i+\frac{1}{2})} \|_{\infty}^2}, \quad \eta_T = \frac{\| \mathbf{X}_T^{(i+1)} - \mathbf{X}_T^{(i+\frac{1}{2})} \|_{\infty}^2}{\| \mathbf{X}_T^{(i+1)} \|_{\infty}^2 + \| \mathbf{X}_T^{(i+\frac{1}{2})} \|_{\infty}^2} \quad (2.35)$$

où la norme est définie par :

$$\| \mathbf{X} \|_{\infty}^2 = \max(\alpha \mathbf{T}^2 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{W}^2) \quad (2.36)$$

On peut également utiliser le critère d'erreur global basé sur la norme du second membre du système linéaire (2.28) [ELG 07a]. Ce dernier permet de contrôler le respect de la condition de couplage entre les problèmes local et global.

Le premier problème est proposé. Il a pour objectif de démontrer les propriétés de convergence de cette méthode, appelée AL (Augmented Lagrangian) dans la suite de ce manuscrit. On considère un domaine 2D carré Ω de dimensions (0.1m×0.1m) soumis à une contrainte de compression verticale $P=1 \text{ MPa}$. Une interface Γ , perpendiculaire à la direction du chargement, divise Ω en deux parties égales. On impose une condition de déplacement nul sur la surface inférieure ($u_X = u_Y = 0$) et une condition de déplacement horizontal nul sur la surface supérieure ($u_X=0$). Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young $E=206 \text{ GPa}$ et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Le coefficient de frottement de la loi de Coulomb à l'interface est $\mu_{\Gamma} = 0.2$.

Deux maillages structurés sont considérés. Le premier est constitué de 722 éléments finis linéaires triangulaires et le second de 361 éléments finis linéaires quadrangulaires. La solution de contact est relativement uniforme sur toute l'interface. Il n'est donc pas nécessaire de procéder à un raffinement spécifique de la discrétisation du problème de contact. Les bases des fonctions de forme primale et duale des éléments d'interface sont d'ordre 0 (un point d'intégration pour chaque face par élément d'interface).

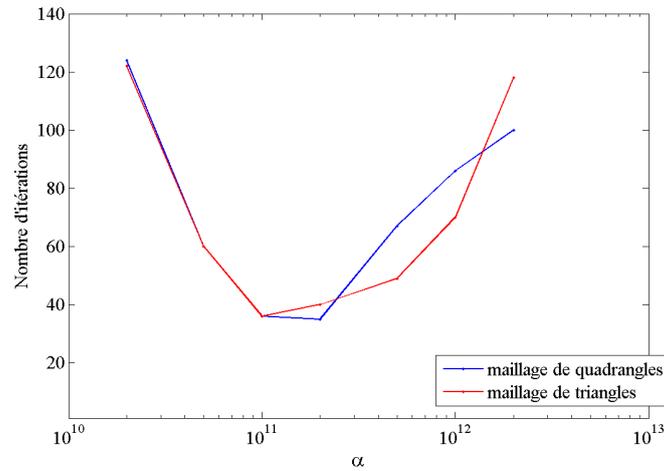


FIGURE 2.7: Nombre d'itérations à convergence en fonction de la valeur du coefficient de pénalité α : (a)-avec le maillage de triangles ; (b)-avec le maillage de quadrangles.

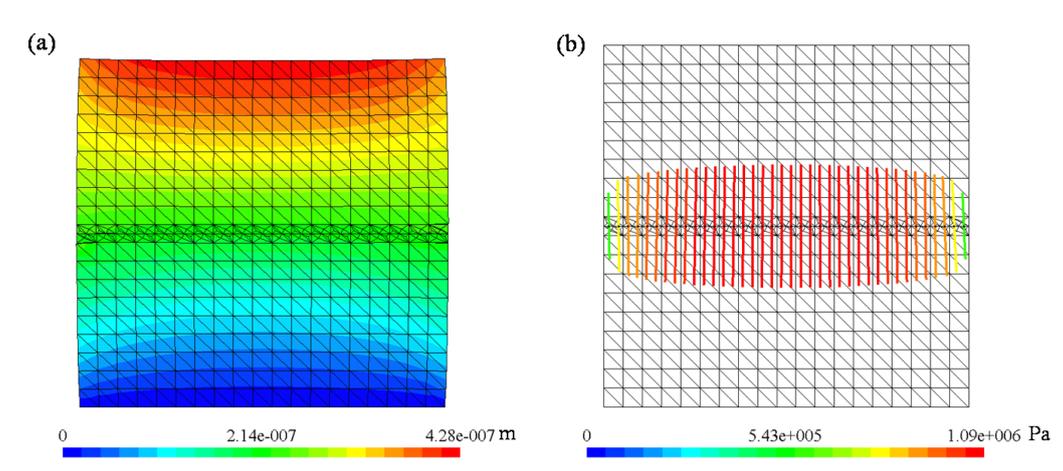


FIGURE 2.8: Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.

Le problème est résolu à une précision de 10^{-4} en considérant le critère d'erreur local η (2.34). Différentes valeurs du coefficient de pénalité α ont été testées afin d'obtenir un taux de convergence optimal dans chaque configuration.

Dans les deux cas, un taux de convergence optimal est obtenu pour une valeur du coefficient de pénalité proche de $\alpha = 2.10^{+11} \text{ Pa.m}^{-1}$. Pour cette valeur, le problème est résolu en 35 et 36 itérations avec le maillage de triangles et le maillage de quadrangles respectivement. L'expérience montre que cette valeur optimale est proche de la valeur du module de Young pour des problèmes élastiques linéaires. La méthode AL permet d'obtenir une solution globale très satisfaisante d'un point de vue qualitatif (cf. figures 2.8.a et 2.9.a). De plus, la solution de contact est parfaitement stable et régulière (cf. figures 2.8.b et 2.9.b) et ne présente pas d'oscillations numériques.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

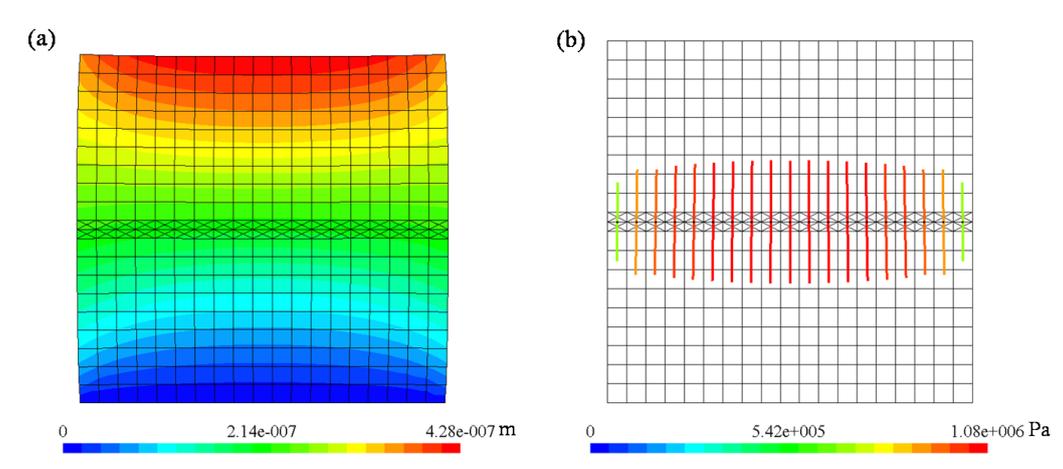


FIGURE 2.9: Représentation amplifiée du champ de déplacement global u ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface t pour le maillage de quadrangles.

Remarque 12 : *On obtient des résultats quasi-identiques avec des bases des fonctions de forme primale et duale d'ordre 1 pour les éléments d'interface (deux points d'intégration pour chaque face par élément d'interface linéaire).*

Ces résultats démontrent les performances élevées de la méthode AL pour la résolution du problème non linéaire multi-échelle de contact. Cette méthode est aussi particulièrement adaptée à la modélisation de problèmes de plasticité. Elle a notamment été utilisée par Elguedj *et al.* pour la modélisation de la plasticité confinée en pointe de fissure dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus [ELG 07b]. Dans la prochaine section, nous proposons une autre méthode de résolution non-linéaire construite à partir du même formalisme. L'objectif est de réduire les coûts numériques et de conserver les bonnes propriétés de stabilité de la formulation faible mixte.

2.3.2 Résolution non-linéaire basée sur la méthode LATIN

La méthode LATIN (LArge Time INcrement) est un solveur non linéaire d'évolution qui possède la particularité de résoudre le problème en espace et en temps [LAD 99]. Contrairement aux méthodes incrémentales couramment utilisées, cette méthode itérative permet, à partir d'une approximation initiale relativement grossière issue d'un calcul élastique linéaire, d'approcher par itérations successives la solution du problème non-linéaire en tout point et sur tout l'intervalle d'étude $[0, T]$ (cf. figure 2.10). Cette méthode a été appliquée avec succès à une grande variété de problèmes statiques, quasi-statiques, et dynamiques [BOU 03, NÉR 08, GUI 08, PAS 08, LAD 09a, LAD 09b].

Une approche incrémentale de la méthode LATIN a été développée par Champaney en 1999 [CHA 99] pour les problèmes quasi-statiques d'assemblage de structures avec contact unilatéral et frottement. Contrairement à la méthode initialement proposée, l'intervalle de temps du problème est divisé ici en incréments Δt . Cette approche a ensuite été utilisée dans le cadre de la simulation X-FEM de la propagation de fissures en 2D avec contact et frottement par Dolbow *et al.* pour des problèmes statiques [DOL 01], par Liu *et al.* pour des problèmes quasi-statiques [LIU 08] et par Ribeaucourt *et al.* pour des problèmes quasi-statiques de fatigue de roulement (chargement multi-

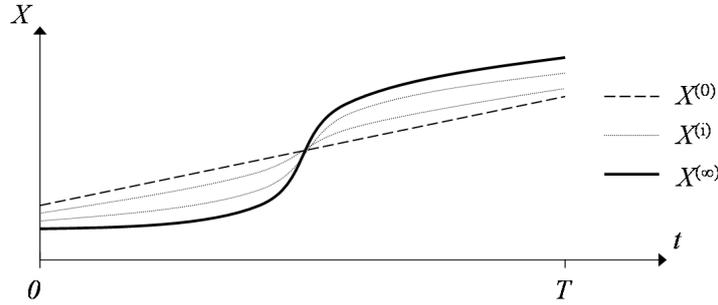


FIGURE 2.10: Représentation graphique de l'approximation itérative par la méthode LATIN de la solution d'un problème non linéaire sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$: $\mathbf{X}^{(0)}$ est le vecteur d'état initial, $\mathbf{X}^{(i)}$ est le vecteur d'état à l'itération i et $\mathbf{X}^{(\infty)}$ est le vecteur d'état solution du problème.

axial non proportionnel) [RIB 07b]. Par ailleurs, la méthode LATIN a récemment été adaptée par Guidault *et al.* dans le cadre d'un modèle multi-échelle X-FEM couplé à une technique de décomposition de domaines pour la simulation de la propagation de fissures [GUI 08]. Ce modèle a été étendu aux problèmes de contact et frottement interfacial dans [GUI 10].

Le concept de la méthode LATIN repose sur la division des équations du problème en deux sous-ensembles :

- un sous-ensemble L d'équations locales éventuellement non linéaires. Ici, cet ensemble correspond aux équations de la loi de comportement d'interface (2.20) ;
- un sous-ensemble G d'équations linéaires, généralement globales. Dans notre approche, cet ensemble est composé de l'équation établissant la formulation faible mixte (2.15), de la loi de comportement en volume (2.17) et des conditions aux limites (2.4).

À partir d'une solution initiale $\mathbf{X}_{n+1}^{(0)}$ issue d'un calcul élastique linéaire, une approximation de la solution du problème non linéaire $\mathbf{X}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{w}_{n+1}, \mathbf{t}_{n+1}) \equiv G \cap L$ à un instant t_{n+1} donné est obtenue par un processus itératif en deux étapes illustré schématiquement dans la figure 2.11. Des conditions supplémentaires sont définies entre les solutions des sous-espaces L et G , appelées *directions de recherches* locales E^+ et globales E^- . Elles s'expriment par :

$$\left(\mathbf{X}_{n+1}^{(i+\frac{1}{2})} - \mathbf{X}_{n+1}^{(i)} \right) \in E^+ \implies \mathbf{t}^{(i+\frac{1}{2})} - \mathbf{t}^{(i)} = k_l \left(\mathbf{w}^{(i+\frac{1}{2})} - \mathbf{w}^{(i)} \right) \quad (2.37)$$

$$\left(\mathbf{X}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{X}_{n+1}^{(i+\frac{1}{2})} \right) \in E^- \implies \mathbf{t}^{(i+1)} - \mathbf{t}^{(i+\frac{1}{2})} = -k_g \left(\mathbf{w}^{(i+1)} - \mathbf{w}^{(i+\frac{1}{2})} \right) \quad (2.38)$$

où k_l et k_g sont les opérateurs strictement positifs définis par l'utilisateur et exprimés en Pa.m^{-1} tels que :

$$k_l = \begin{bmatrix} k_{l,N} & 0 \\ 0 & k_{l,T} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad k_g = \begin{bmatrix} k_{g,N} & 0 \\ 0 & k_{g,T} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

À chaque itération i , on résout :

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

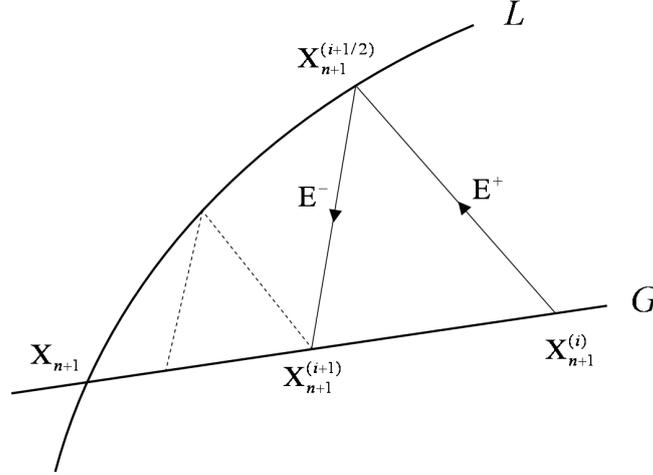


FIGURE 2.11: Représentation schématique du processus itératif de la méthode LATIN au temps t_{n+1} .

- i. l'étape locale. On calcule la solution $\mathbf{X}_{n+1}^{(i+\frac{1}{2})}$ du problème local définie par l'ensemble d'équations L (i.e. le problème de contact avec frottement entre les faces de la fissure) et l'équation 2.37. À partir de la solution précédente $(\mathbf{w}^{(i)}, \mathbf{t}^{(i)})$, on utilise un indicateur de contact local proposé par Champaney [CHA 96, CHA 99] afin de déterminer les zones de contact et d'ouverture et l'état de contact tangentiel local : glissement ou adhérence. On applique alors la loi de comportement d'interface (2.20) localement et l'équation (2.37). On obtient alors une nouvelle solution du problème local de contact $(\mathbf{w}^{(i+\frac{1}{2})}, \mathbf{t}^{(i+\frac{1}{2})})$.
- ii. l'étape globale. On cherche une solution $\mathbf{X}_{n+1}^{(i+1)}$ du problème global défini par l'ensemble d'équations G . On introduit alors l'équation (2.38) dans la formulation faible (2.15) et on obtient :

$$\begin{aligned}
 0 &= - \int_{\Omega} Tr \left[\mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}) \varepsilon(\mathbf{u}^*) \right] dV + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} \cdot \mathbf{u}^* dS \\
 &+ \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{u}^* dV \\
 &+ \int_{\Gamma} \left(\mathbf{t}_{n+1}^{(i+\frac{1}{2})} + k_g \mathbf{w}_{n+1}^{(i+\frac{1}{2})} \right) \cdot \mathbf{w}^* dS - \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} + k_g \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \cdot \mathbf{w}^* dS \\
 &+ \int_{\Gamma} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \cdot \boldsymbol{\lambda}^* dS
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0^*, \forall \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*, \forall \boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^*$$

La convergence de la méthode LATIN a été démontrée dans [LAD 99] sous certaines conditions. Si la loi de comportement est monotone et si les interfaces représentent des conditions aux limites, des liaisons parfaites ou des surfaces de contact sans frottement, il est montré que le processus converge lorsque les directions de recherche locale et globale sont conjuguées et positives, c'est-à-dire $k_l = k_g$. Afin d'assurer la convergence de la méthode pour une classe plus large de

comportements, i.e. contact avec frottement, il est classiquement introduit une étape de relaxation :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mu \mathbf{X}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{X}_n \quad (2.41)$$

où $\mu \in [0, 1]$ est le coefficient de relaxation.

Remarque 13 : *On peut faire l'analogie entre les formulations (2.21) et (2.40) construites à partir de la même formulation faible mixte (2.15). La valeur de la direction de recherche $k = k_l = k_g$ influence uniquement le taux de convergence de la méthode. Elle ne modifie pas la solution du problème. En pratique, il existe une valeur quasi optimale k_{opt} liée à la rigidité du matériau et à la taille de l'interface (longueur en 2D et aire en 3D) [PIE 10a].*

À partir des champs discrétisés définis par (2.26) et (2.27), on construit le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{u\lambda} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\lambda} \\ -\mathbf{K}_{u\lambda}^T & \mathbf{K}_{w\lambda}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{\Lambda}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

où les opérateurs $\mathbf{K}_{u\lambda}$, \mathbf{K}_{ww} et $\mathbf{K}_{w\lambda}$ sont identiques à ceux de la méthode AL.

À chaque itération, on calcule le nouveau champ des efforts de contact $\mathbf{T}_{n+1}^{(i+1)}$ à partir de la solution de (2.42) et de l'équation (2.38). Ce processus en deux étapes locale et globale est répété jusqu'à convergence de la solution. On considère le critère d'erreur locale η dédié aux problèmes de contact (2.34). On remarque alors que $\mathbf{\Lambda}_{n+1} \cong \mathbf{T}_{n+1}$ à convergence pour une précision donnée.

Remarque 14 : *La méthode LATIN, appelée SLA pour "Standard Latin" dans la suite de ce manuscrit, est particulièrement bien adaptée aux problèmes multi-échelles. En effet, elle permet de découpler la résolution du problème local et celle du problème global.*

On considère le problème d'interface 2D de la section précédente. Différentes valeurs de la direction de recherche k ont été testées afin d'obtenir un taux de convergence optimal avec le maillage de triangles et avec le maillage de quadrangles. La figure 2.12 donne le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision de 10^{-4} en fonction de ces différentes valeurs. Le taux de convergence maximum est obtenu pour une direction de recherche $k = 5 \cdot 10^{+13} \text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$ avec le maillage de quadrangles (92 itérations). Avec le maillage de triangles, la méthode ne permet pas d'atteindre des précisions élevées dans des temps de calcul raisonnables pour ce problème relativement simple. Le problème est résolu en un minimum de 1067 itérations pour une direction de recherche $k = 1 \cdot 10^{+15}$.

La méthode SLA permet d'obtenir une solution globale satisfaisante d'un point de vue qualitatif (cf. figures 2.13.a et 2.14.a) mais elle converge très lentement au sens de l'indicateur d'erreur locale η . Le temps de calcul pour ce problème simple est environ 30 fois plus long que pour la méthode du Lagrangien Augmenté. En effet, la solution de contact est perturbée par des oscillations numériques. Les efforts de contact représentés dans la figure 2.13.b oscillent entre une valeur nulle et une valeur proche de 2 MPa (deux fois trop élevée).

Ce problème d'instabilité est identique aux problèmes évoqués dans la section 1.4 liés à un non respect de la condition inf-sup LBB. Il dépend principalement de la discrétisation des champs

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

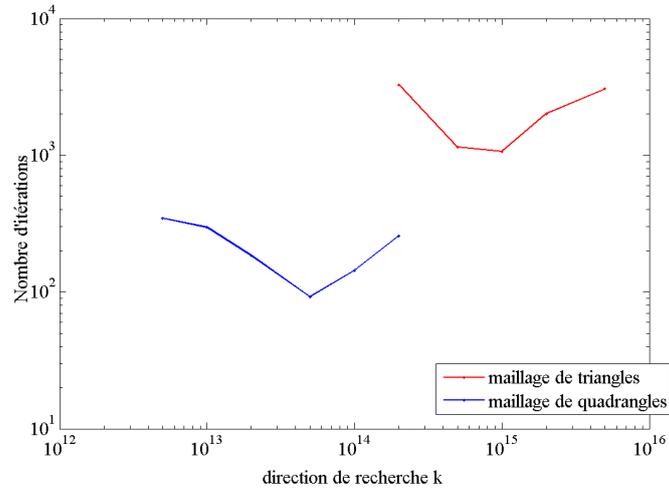


FIGURE 2.12: Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k : (a)-avec le maillage de triangles ; (b)-avec le maillage de quadrangles.

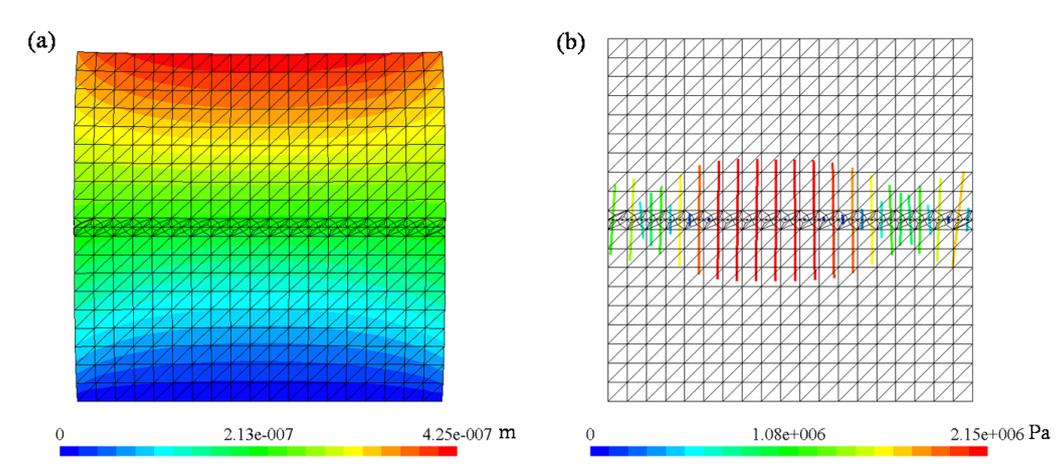


FIGURE 2.13: Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.

d'interface et de la forme du système linéaire du solveur non linéaire. En effet, pour le problème simple traité dans ce début de chapitre, la méthode du Lagrangien Augmenté ne présente pas d'oscillations numériques. Cependant, pour des problèmes de contact avec un glissement important, les expérimentations numériques montrent que des oscillations apparaissent quelle que soit la méthode utilisée : la méthode LATIN ou la méthode du Lagrangien Augmenté. Dans la section suivante, le problème de la condition LBB est étudié afin de proposer une méthode générale de stabilisation dédiée au modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce chapitre.

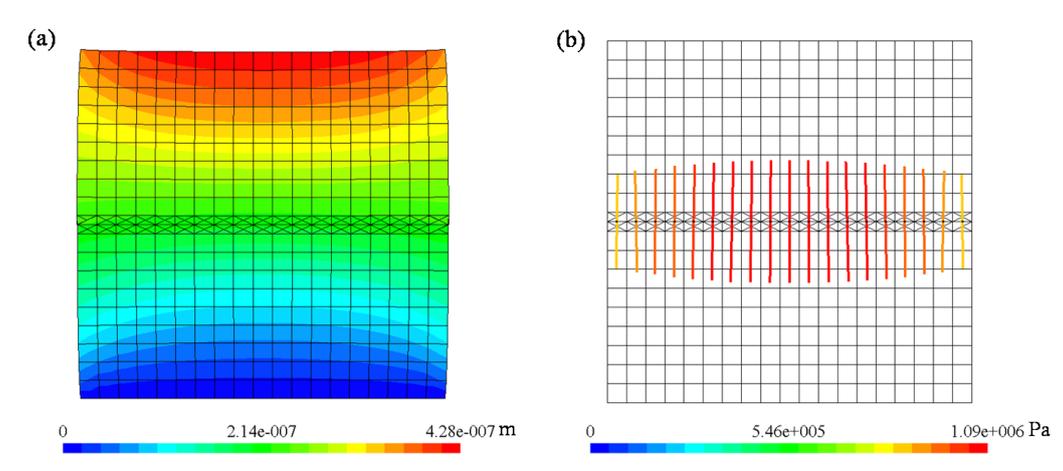


FIGURE 2.14: Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10000$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de quadrangles.

2.3.3 Stabilisation de la méthode LATIN

Dans ce paragraphe, une technique de stabilisation de la formulation mixte à trois champs (2.15) est présentée. Elle est inspirée des techniques utilisées en mécanique des fluides (formulation en pressions et vitesses), ou encore des formulations mixtes à trois champs de type Hellinger-Reissner utilisées en élasticité linéaire, traitement de l'incompressibilité,... Des exemples de choix spécifiques des fonctions d'interpolation pour différentes applications (thermique, mécanique des fluides, des solides,...) respectivement pour des formulations à deux ou trois champs peuvent être trouvées dans [HUG 87, BAT 96, BRE 91, OTT 92, ZIE 00]. Dans tous les cas, ces formulations peuvent s'écrire sous la forme du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont respectivement des matrices $n \times n$ et $m \times n$, et \mathbf{Y} et \mathbf{Z} sont respectivement des vecteurs $n \times 1$ et $m \times 1$ (ainsi que \mathbf{F} et \mathbf{G}). Les discrétisations conduisant à un tel système sont souvent appelées des méthodes éléments finis mixtes. Ici, le but est d'exprimer les conditions de *solvabilité* de tels systèmes en fonction de \mathbf{A} et \mathbf{B} . Pour solvabilité, nous voulons dire que quels que soient \mathbf{F} et \mathbf{G} , le système (2.43) a une unique solution. Tout d'abord, la matrice globale doit être non singulière (déterminant différent de 0). Cependant, la *solvabilité* n'est pas *suffisante*. Une propriété supplémentaire requiert aussi la *stabilité* de la formulation, c'est-à-dire :

$$\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Z}\| \leq C \cdot (\|\mathbf{F}\| + \|\mathbf{G}\|) \quad (2.44)$$

où C est une constante dépendant du problème. Cette propriété garantit la solvabilité, c'est-à-dire que \mathbf{Y} et \mathbf{Z} restent bornés quels que soient \mathbf{F} et \mathbf{G} . En effet, il s'agit d'un autre moyen d'écrire l'unicité de la solution [AUR 04].

Quelques détails sont donnés ici sur la condition de stabilité à respecter pour la formulation faible à trois champs présentée dans le paragraphe 2.1 afin de proposer une stratégie de stabilisation générale des systèmes linéaires associés. On se place dans le cadre de la méthode LATIN. Le

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

système linéaire discrétisé (2.42) peut être écrit sous la forme matricielle par blocs suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

avec

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ww} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^T \equiv \begin{pmatrix} -\mathbf{K}_{i\lambda} \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} \equiv (\Lambda) \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

En procédant à une élimination de Gauss par blocs, on obtient le complément de Schur associé à \mathbf{Z} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{CS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{FS} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

avec

$$\mathbf{CS} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{FS} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.48)$$

On cherche à savoir si \mathbf{CS} est *invertible*. En mécanique des solides, \mathbf{A}^{-1} est habituellement invertible si l'on prend en compte les conditions aux limites du problème, et donc, le problème revient à savoir si $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ est invertible. Pour que $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ soit invertible, il est nécessaire que :

$$\mathbf{B}^T \text{ soit une matrice de dimension } n \times m \text{ telle que } \text{noyau}(\mathbf{B}^T) = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

Cette condition implique que \mathbf{B}^T soit de rang m et correspond également à :

$$\max_{\mathbf{Y}} (\mathbf{B} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \max_{\mathbf{Y}} (\mathbf{Y}, \mathbf{B}^T \mathbf{Z}) > 0 \quad \forall \mathbf{Z} \quad (2.50)$$

La traduction de cette inégalité algébrique dans le contexte de la méthodes des éléments finis est :

$$\max_{\mathbf{Y}_h \in \mathcal{Y}_h} \frac{\mathbf{Y}_h^T \mathbf{B}_h^T \mathbf{Z}_h}{\|\mathbf{Y}_h\|_{\mathcal{Y}_h} \cdot \|\mathbf{Z}_h\|_{\mathcal{Z}_h}} > 0 \quad (2.51)$$

où h est une longueur caractéristique du maillage éléments finis, i.e. celle du plus petit élément par exemple.

A ce niveau, il est très important de remarquer que des techniques de discrétisation qui dépendent de la résolution spatiale sont considérées. Autrement dit, on considère des familles de matrices et de solutions qui dépendent de h . Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_h & \mathbf{B}_h^T \\ \mathbf{B}_h & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_h \\ \mathbf{Z}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Par conséquent, il faut étudier la condition (2.51) lorsque h tend vers 0 et vérifier si ces familles dégènèrent vers un système singulier. La condition stricte de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) assure que $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ ne dégènère pas vers 0 lorsque h décroît :

$$\inf_{\mathbf{Z}_h \in \mathcal{Z}_h} \sup_{\mathbf{Y}_h \in \mathcal{Y}_h} \frac{\mathbf{Y}_h^T \mathbf{B}_h^T \mathbf{Z}_h}{\|\mathbf{Y}_h\|_{\mathcal{Y}_h} \cdot \|\mathbf{Z}_h\|_{\mathcal{Z}_h}} \geq \beta > 0 \quad (2.53)$$

Propriété :

La condition LBB est vérifiée si et seulement si :

$$\|\mathbf{Y}_{exact} - \mathbf{Y}_h\|_1 + \|\mathbf{Z}_{exact} - \mathbf{Z}_h\|_0 \leq C_Y h^{k+1} \cdot \|\mathbf{Y}\|_{k+1} + C_Z h^{l+1} \cdot \|\mathbf{Y}\|_{l+1} \quad (2.54)$$

où k et l sont les degrés des polynômes des espaces éléments finis utilisés pour \mathbf{Y} et \mathbf{Z} respectivement. C_Y et C_Z sont des constantes qui dépendent du problèmes mais pas de h . On retrouve l'analogie de la condition générale sur la solvabilité des méthodes numériques (2.44).

Pour les formulations mixtes à trois champs, il existe dans la littérature plusieurs méthodes de stabilisation qui permettent de vérifier la condition (2.54) [AUR 04]. Ici, la méthode de stabilisation par pénalité est adoptée. On introduit un terme supplémentaire dans la matrice et le second membre du système linéaire (2.45) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\varepsilon \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ -\varepsilon \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

où \mathbf{D} est un opérateur symétrique défini positif, \mathbf{d} est homogène à \mathbf{DZ} et ε est un paramètre positif de pénalité. Le complément de Schur en \mathbf{Z} est calculé (pivot de Gauss par blocs) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ 0 & \mathbf{CS}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{FS}' \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

avec

$$\mathbf{CS}' = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T + \varepsilon \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{FS}' = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon \mathbf{d} \quad (2.57)$$

\mathbf{D} est non singulier et $\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T$ est positif. $(\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T + \varepsilon \mathbf{D})$ est donc non singulier et la matrice condensée sur \mathbf{Z} est inversible. Vérifions que la matrice condensée sur \mathbf{Y} est également inversible. Il vient :

$$\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \right) \mathbf{Y} = (\mathbf{F} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d}) \quad (2.58)$$

→ $(\mathbf{A} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})$ est non singulier car \mathbf{A} est non singulier et $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ est positif.

Remarque 15 : *Il existe de nombreux travaux dans la littérature sur le choix de \mathbf{D} . Il dépend de la formulation faible du problème (2 champs ou 3 champs) et du type de problème considéré (mécanique des solides, interaction fluide-structure, non linéarités,...) [AUR 04].*

Résultat important : [AUR 04]

On considère le système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\varepsilon \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ -\varepsilon \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

avec les hypothèses et propriétés suivantes :

- Condition d'ellipticité de \mathbf{A} :

$$\alpha \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{Y} \quad (2.60)$$

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

- Condition Inf-Sup : il existe une constante positive β indépendante du maillage (h) telle que :

$$\inf_{\mathbf{Z} \in \mathcal{Z} \setminus 0} \sup_{\mathbf{Y} \in \mathcal{Y} \setminus 0} \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Z}}{\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{Y}} \cdot \|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{Z}}} \geq \beta > 0 \quad (2.61)$$

- Conditions de continuité pour \mathbf{A} et \mathbf{B} : il existe deux constantes M_a et M_b indépendantes de h telles que :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} &\leq M_a \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{Y}} \cdot \|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{Z}} \\ \forall (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Z} &\leq M_b \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{Y}} \cdot \|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{Z}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Alors la conditions de stabilité suivante est obtenue :

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{4 M_a M_b}{M_a \varepsilon + \beta^2} \cdot \|\varepsilon \mathbf{d}\| \quad (2.63)$$

$$\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{4 M_a^{1/2} M_b}{2 M_a^{1/2} \alpha \varepsilon + \alpha^{1/2} \beta M_b} \cdot \|\mathbf{F}\| + \frac{4 M_a}{M_a \varepsilon + \beta^2} \cdot \|\varepsilon \mathbf{d}\| \quad (2.64)$$

où les quatre constantes α , β , M_a et M_b sont définies par (2.60), (2.61) et (2.62) respectivement.

Les conditions (2.63) et (2.64) garantissent que les quantités \mathbf{Y} et \mathbf{Z} restent bornées, même lorsque β tend vers 0, cf. (2.44).

Bilan :

L'étude de la stabilité du système linéaire (2.45) ($\varepsilon = 0$) se résume à étudier les conditions de stabilité (2.63) et (2.64) lorsque β tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la condition LBB (2.61) n'est plus vérifiée. Les second membres des inégalités (2.63) et (2.64) tendent alors vers $+\infty$, ce qui ne garantit plus la stabilité. En revanche, pour les systèmes linéaires (2.55) avec $\varepsilon > 0$, les propriétés (2.63) et (2.64) restent bornées, même lorsque β tend vers zéro.

Ici, on généralise cette méthode à une formulation faible à trois champs et au système linéaire associé à la méthode LATIN. On introduit un opérateur de stabilisation sur la condition de couplage faible entre les champs de déplacements global \mathbf{u} et local \mathbf{w} à la fois au premier et au second membre du système linéarisé [PIE 10b]. L'équation (2.42) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{u\lambda} \\ 0 & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\lambda} \\ -\mathbf{K}_{u\lambda}^T & \mathbf{K}_{w\lambda}^T & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{\Lambda}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{w\lambda} \cdot \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{ww} \cdot \mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_i \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

où $\mathbf{K}_{\lambda\lambda}$ est l'opérateur de stabilisation défini par :

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \Psi'_i \Psi'_j dS \quad \text{avec } \varepsilon > 0. \quad (2.66)$$

Cet opérateur supplémentaire ne modifie pas la solution du problème. En effet, à convergence $\mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_i - \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}_{i+1}$ tend alors vers 0 à précision fixée. Par contre, il aura une influence sur la vitesse de convergence du solveur non linéaire. On peut faire une analogie avec la méthode du Lagrangien Augmenté. Ainsi, la valeur de ε est choisie en pratique afin d'optimiser la convergence de la méthode LATIN.

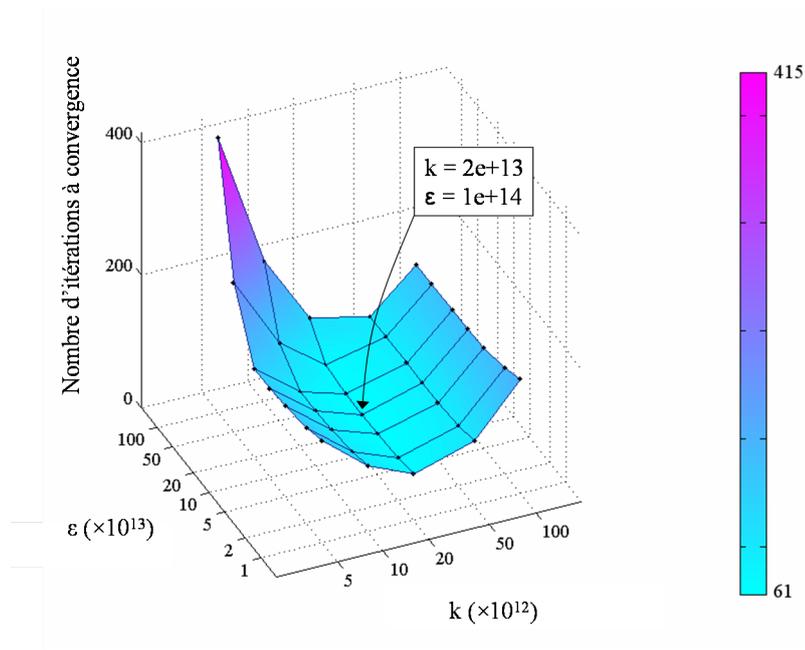


FIGURE 2.15: Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k et du coefficient de stabilisation ϵ avec le maillage de triangles.

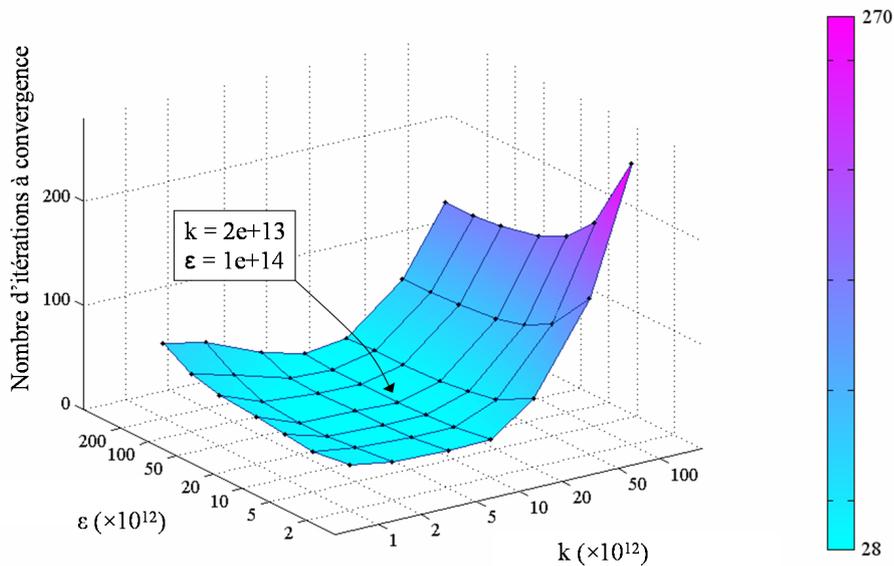


FIGURE 2.16: Nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de la direction de recherche k et du coefficient de stabilisation ϵ avec le maillage de quadrangles.

On considère à nouveau le problème d'interface 2D de la section 2.3.1. On résout le problème à une précision de 10^{-4} avec l'indicateur d'erreur locale η (2.34). Les figures 2.15 et 2.16

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

représentent la variation du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre cette précision pour différentes valeurs de la direction de recherche k et du coefficient de stabilisation ε :

- Dans le cas du maillage de triangles, une direction de recherche $k = 2.10^{+13} \text{ Pa.m}^{-1}$ et un coefficient de stabilisation $\varepsilon = 1.10^{+14} \text{ Pa.m}^{-1}$ donnent un taux de convergence optimal (61 itérations).
- Dans le cas du maillage de quadrangles, une direction de recherche $k = 1.10^{+13} \text{ Pa.m}^{-1}$ et un coefficient de stabilisation $\varepsilon = 2.10^{+14} \text{ Pa.m}^{-1}$ donnent un taux de convergence optimal (28 itérations).

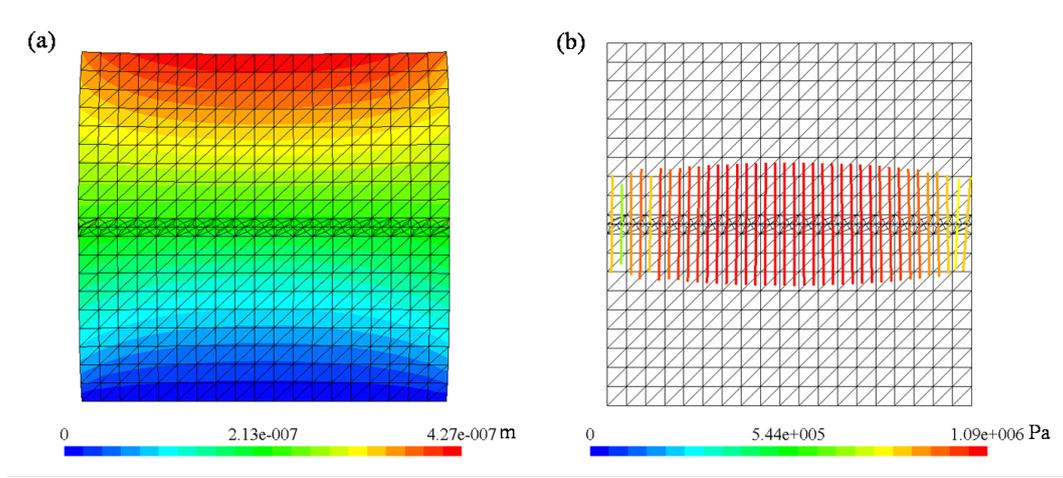


FIGURE 2.17: Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10^4$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de triangles.

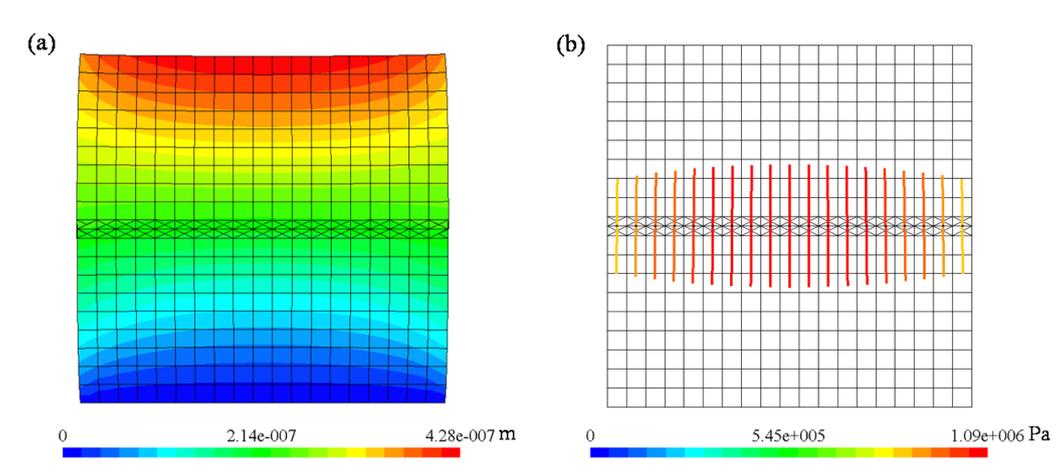


FIGURE 2.18: Représentation amplifiée du champ de déplacement global \mathbf{u} ($\times 10^4$) et du champ des efforts d'interface \mathbf{t} pour le maillage de quadrangles.

Les solutions locales et globales sont stables dans les deux cas considérés. Elles sont représentées dans les figures 2.17 et 2.18. Ce résultat montre les bonnes propriétés de stabilité de ce solveur

non linéaire appelé NLLA (Non Locking LAtin) pour les problèmes de contact adhérent en 2D. L'introduction d'un opérateur de stabilisation supplémentaire permet de supprimer les éventuelles oscillations numériques dues à un non respect de la condition LBB et d'optimiser la convergence de la méthode. La figure 2.19 représente l'évolution de l'erreur η pour chaque configuration dans le cas le plus favorable pour les trois méthodes de résolutions utilisées dans ce mémoire. La méthode NLLA permet d'améliorer les temps de calcul de 94% et de 70% par rapport à la méthode SLA pour les maillages de triangles et de quadrangles respectivement. Les performances des solveurs LA et NLLA sont semblables.

Bilan :

Une formulation faible mixte du problème de rupture avec contact et frottement interfacial a été proposée. Elle permet une description intrinsèque de la fissure dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus. Un solveur basé sur la méthode du Lagrangien Augmenté et un solveur basé sur la méthode LATIN adaptés de cette formulation sont utilisés. Des problèmes d'instabilité numériques de la solution locale de contact ont été mis en évidence pour différentes discrétisations de l'interface et du maillage en volume. Une méthode de stabilisation est alors proposée. Elle permet de s'affranchir des problèmes d'oscillations numériques et d'augmenter fortement le taux de convergence de la résolution non linéaire. On peut donc conclure que les propriétés de stabilité du modèle dépendent principalement du solveur utilisé et de la discrétisation des champs de la formulation faible. Les expérimentations numériques montrent que les instabilités numériques sont plus sévères dans le cas des problèmes de contact glissant. De plus, la modélisation multi-échelle des problèmes tridimensionnels conduit à des discrétisations en volume et à l'interface généralement plus complexes et plus favorables aux instabilités numériques. Ces configurations sont susceptibles de conduire à des problèmes de convergence. Afin de tester le modèle 3D X-FEM à deux échelles proposé et de démontrer les performances de la formulation faible mixte et du solveur non linéaire stabilisé NLLA, trois problèmes tridimensionnels sont proposés dans la section suivante.

2.4 Exemples tridimensionnels et validation du modèle

2.4.1 Problème tridimensionnel de contact avec frottement : stabilité de la méthode numérique

L'objectif de ce premier exemple tridimensionnel est de démontrer la stabilité du modèle X-FEM 3D à deux échelles combiné avec la méthode de résolution non linéaire NLLA. Un domaine Ω parallélépipédique de dimensions (0.1m \times 0.025m \times 0.12m) représenté figure 2.20 est traversé par une fissure plane Γ à front courbe inclinée de 26.56° par rapport à l'axe horizontal X. Le matériau est homogène, élastique et isotrope, de module de Young $E=206$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Une contrainte de compression $P=100$ MPa est appliquée uniformément sur la face supérieure de l'éprouvette. Une condition de déplacement nul sur la face inférieure $u_z = 0$ est imposée et les mouvements de corps rigide sont bloqués.

Un maillage en volume structuré et relativement grossier de 3456 tétraèdres est utilisé (cf. figure 2.21.a). La discrétisation de l'interface est raffinée à l'aide de la stratégie proposée dans la section 2.2. La taille minimale des arrêtes des éléments d'interface $l_c = 1.8$ mm est définie. Les

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

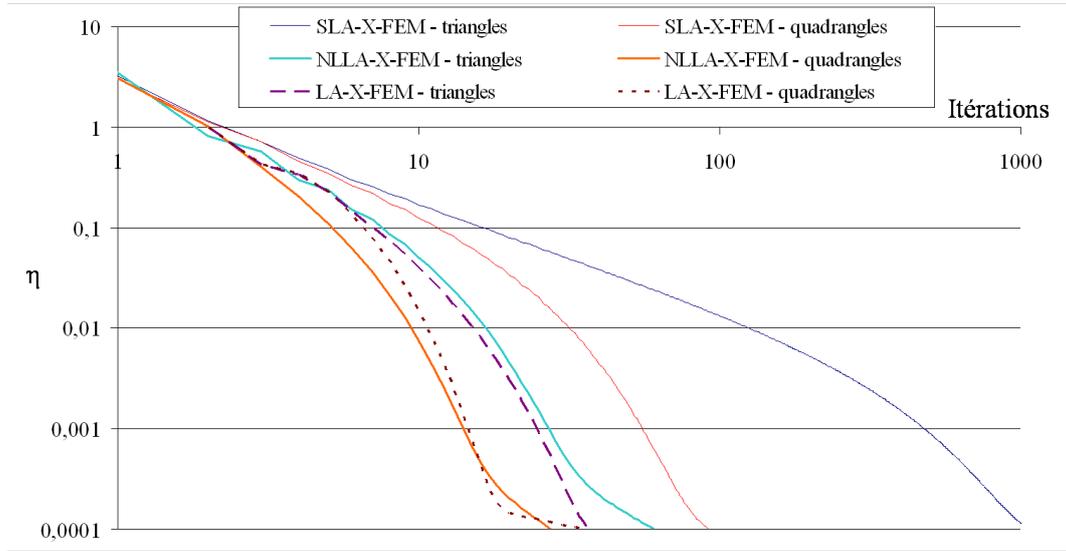


FIGURE 2.19: Évolution de l'erreur η au cours des itérations de la résolution linéaire, pour chaque configuration dans le cas le plus favorable, pour les modèles SLA-X-FEM, NLLA-X-FEM et LA-X-FEM.

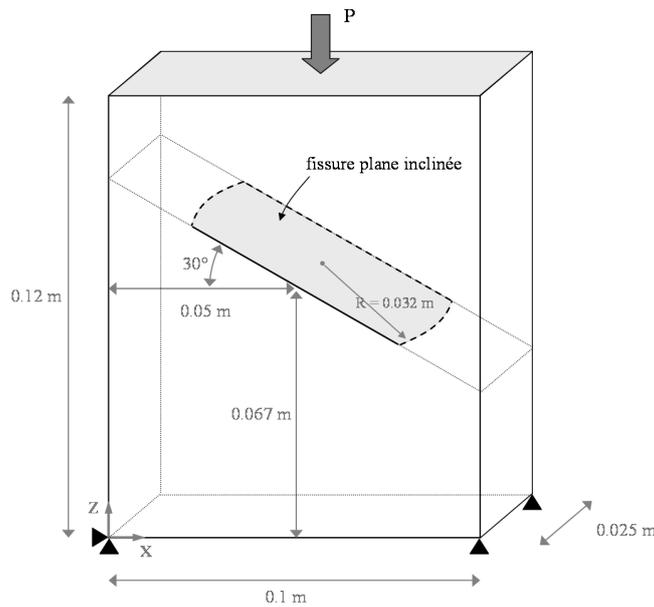


FIGURE 2.20: Géométrie, conditions aux limites et chargement du problème.

bases des fonctions de forme primale et duale des éléments d'interface sont d'ordre 0 avec un point d'intégration par élément d'interface. Ce qui conduit à une distribution de 1670 paires de points d'intégrations réparties uniformément sur les deux faces de la fissure (cf. figure 2.21.b). À l'interface, on considère la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de coulomb. Le problème est résolu pour trois différentes valeurs du coefficient de frottement local $\mu_F = 1 ; 0,5 ;$ ou $0,$

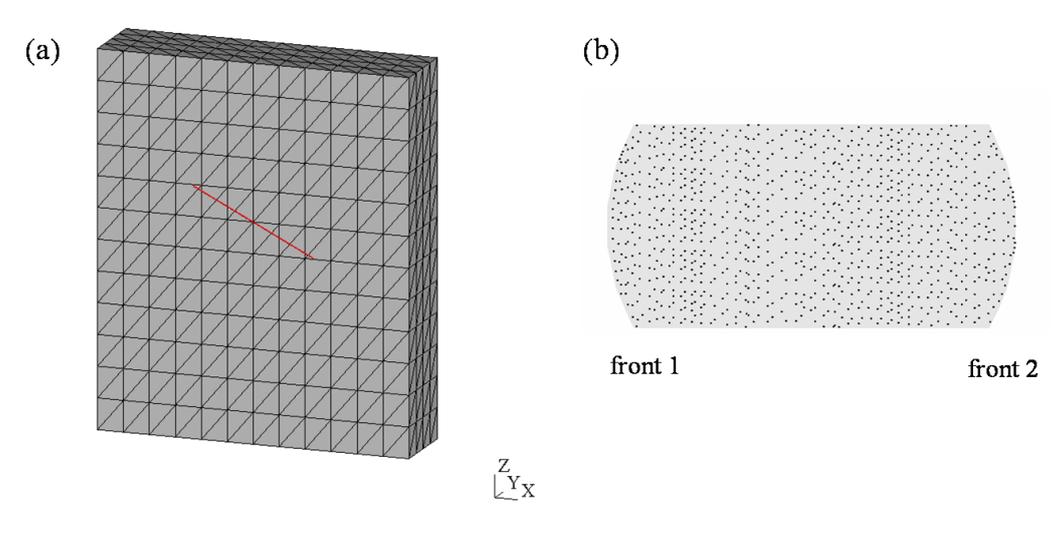


FIGURE 2.21: Maillage en volume et discrétisation raffinée de l'interface ($l_c = 1.8$ mm).

conduisant à différents états de contact : adhérence, glissement partiel ou glissement total. L'approximation de la solution est calculée à une précision de 10^{-3} avec l'indicateur d'erreur (2.34). On utilise tout d'abord le solveur SLA. L'objectif est de montrer les éventuels problèmes d'instabilité numériques associés à chaque cas. Un taux de convergence maximum est obtenu pour une direction de recherche $k = 1.10^{+13}\text{Pa.m}^{-1}$. Puis, on utilise le solveur NLLA afin d'illustrer les propriétés de stabilité et les performances de cette nouvelle approche. Un taux de convergence optimal est obtenu pour une direction de recherche $k = 1.10^{+13}\text{Pa.m}^{-1}$ et un coefficient de stabilisation $\varepsilon = 1.10^{+11}\text{Pa.m}^{-1}$. Les efforts de contact \mathbf{T} projetés dans le plan $(X;Z)$ et le glissement local $[\mathbf{W}_T] = (\mathbf{W}_T^+ - \mathbf{W}_T^-)$ sont représentés pour chaque valeur de μ_Γ dans les figures 2.22, 2.23 et 2.24.

Remarque 16 : *Pour ce problème, la valeur du coefficient de frottement interfacial n'influence pas les valeurs optimales de la direction de recherche et du coefficient de pénalité.*

Dans le cas adhérent ($\mu_\Gamma = 1$) ou le cas du glissement partiel ($\mu_\Gamma = 0.5$), les approximations de la solution du problème calculées avec les méthodes SLA et NLLA sont stables et très semblables. On n'observe pas d'oscillations numériques de la solution de contact. On remarque cependant que la solution locale SLA est perturbée dans le voisinage des fronts de la fissure alors que la solution NLLA est parfaitement régulière. Par ailleurs la méthode NLLA permet d'obtenir des temps de calcul inférieurs de 70% par rapport ceux obtenus avec la méthode SLA (cf. Table 2.1).

Dans le cas du glissement total ($\mu_\Gamma = 0$), la solution de contact SLA est fortement oscillante (cf. figure 2.24.a). Ces instabilités numériques introduisent des pics de contraintes sur les faces de la fissure et viennent perturber la solution globale du problème. En conséquence, la méthode converge très lentement vers une solution erronée du problème. Par contre, la méthode NLLA fournit une solution de contact régulière et une approximation précise de la solution du problème (cf. figure 2.24.b). Elle permet par ailleurs d'augmenter considérablement le taux de convergence (cf. tableau 2.1). L'Évolution de l'erreur local η au cours des itérations pour les trois cas considérés avec les modèles SLA-X-FEM et NLLA-X-FEM est représentée dans la figure 2.25. On remarque

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

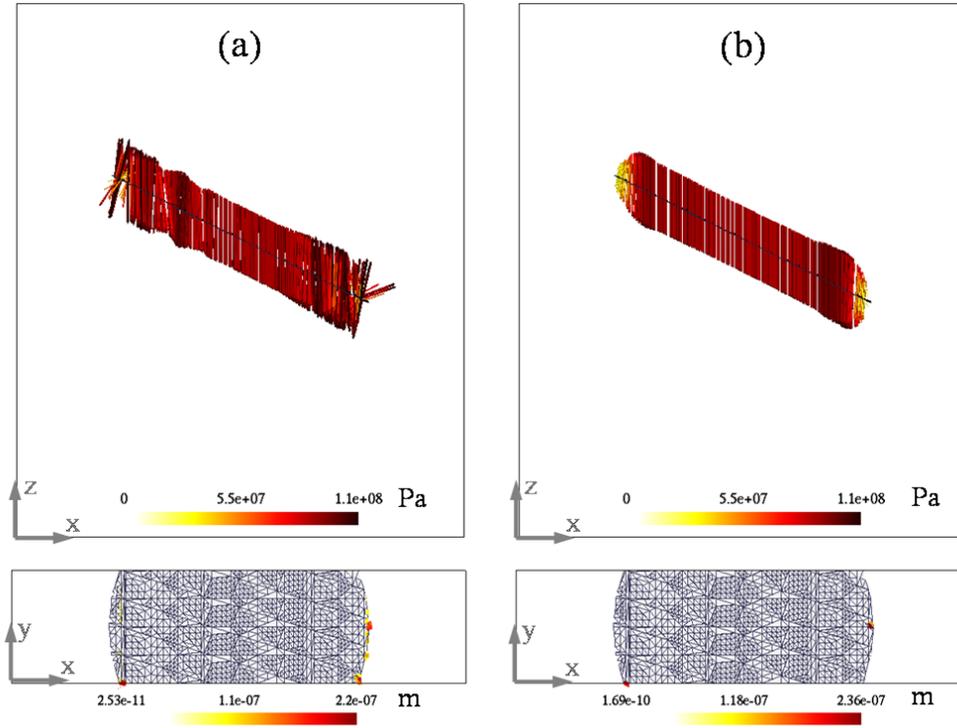


FIGURE 2.22: Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_{\Gamma} = 1$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.

Coefficient de frottement μ_{Γ}	1	0.5	0
Modèle X-FEM-SLA	294	286	150
Modèle X-FEM-NLLA	87	86	86
Réduction du temps CPU	70%	70%	43%

TABLE 2.1: Nombre d'itérations à convergence et gain de temps CPU procuré par le modèle NLLA par rapport à la méthode SLA.

clairement un palier de convergence pour le modèle SLA-X-FEM qui ne permet pas d'atteindre des précisions élevées. En revanche, la convergence du modèle NLLA-X-FEM est rapide et très régulière. Elle permet d'atteindre des précisions élevées à moindre coût numérique. Avec cette méthode stable, on remarque que le nombre d'itérations à convergence est indépendant de la valeur du coefficient de frottement, c'est-à-dire de la nature des conditions de contact à l'interface (adhérence, glissement partiel ou glissement total).

Ce premier cas-test tridimensionnel a permis de démontrer les bonnes propriétés de stabilité du modèle multi-échelle X-FEM associé au solveur NLLA et son aptitude à "capturer" précisément

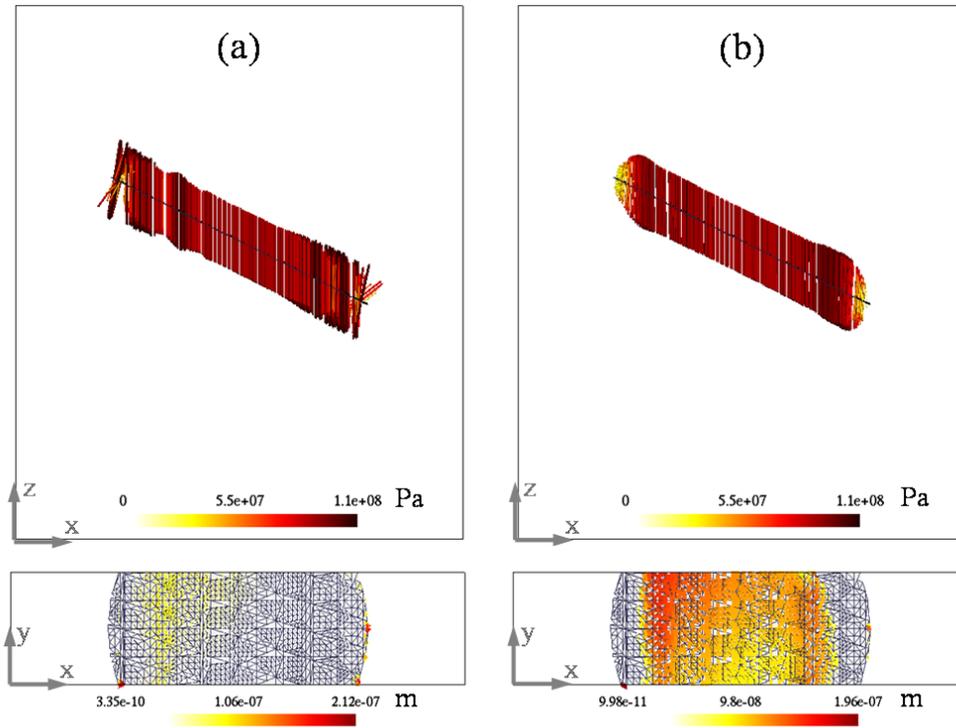


FIGURE 2.23: Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_{\Gamma} = 0.5$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.

différents types de solutions de contact avec frottement à l'interface. Ceci est possible grâce à l'utilisation d'une formulation faible mixte couplée à une description multi-échelle du problème. Une approximation précise de la solution de contact entre les faces de la fissure est un pré-requis essentiel pour le calcul précis des facteurs d'intensité des contraintes le long du front. En effet, les champs des efforts sont pris en compte dans le calcul de l'intégrale d'interaction (cf. section 1.2.4.2). La méthode d'intégration numérique en volume et sur la surface de contact utilisée dans le cadre du modèle X-FEM proposé dans ce mémoire et le calcul des FIC est présentée ci-après.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

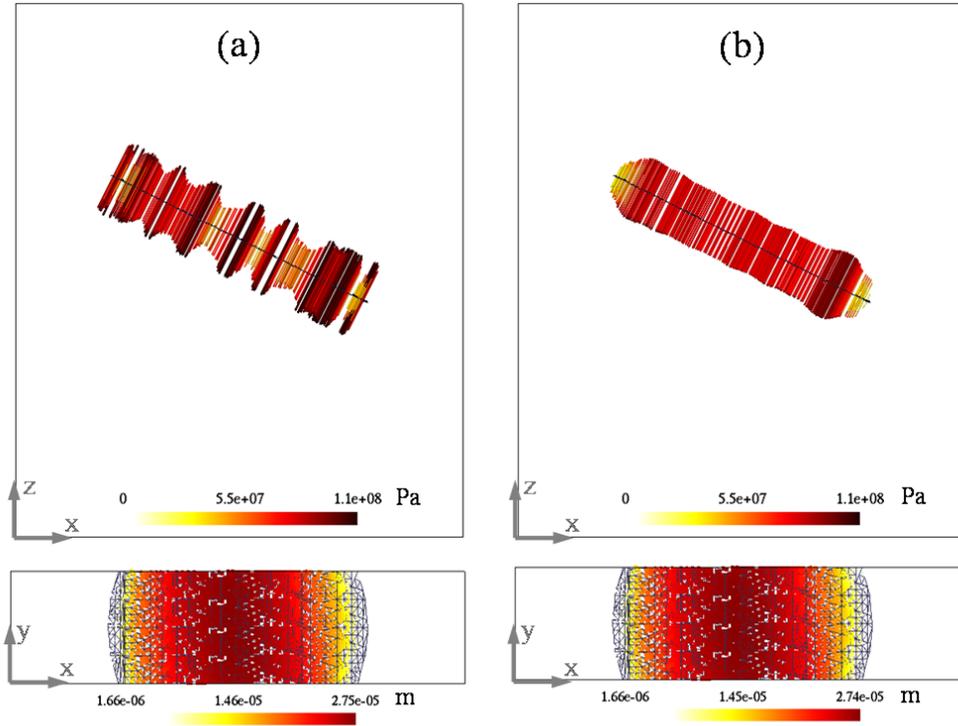


FIGURE 2.24: Solution du problème de contact : efforts et glissement à l'interface pour $\mu_{\Gamma} = 0$: (a)-méthode SLA ; (b)-méthode NLLA.

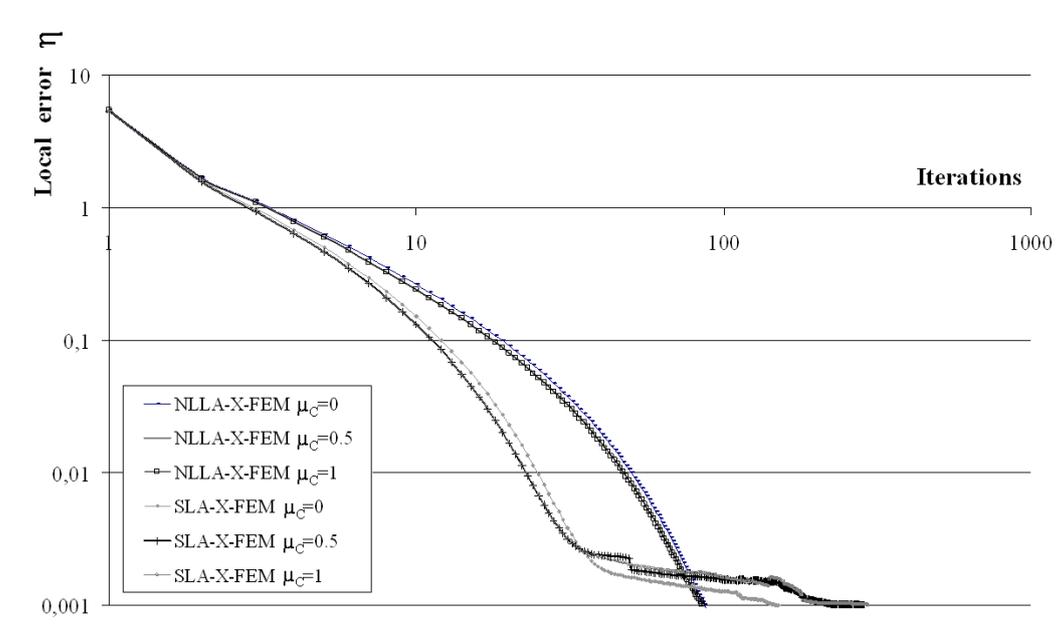


FIGURE 2.25: Évolution de l'erreur locale η au cours des itérations de la résolution non linéaire pour les trois cas considérés avec les modèles SLA-X-FEM et NLLA-X-FEM.

Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

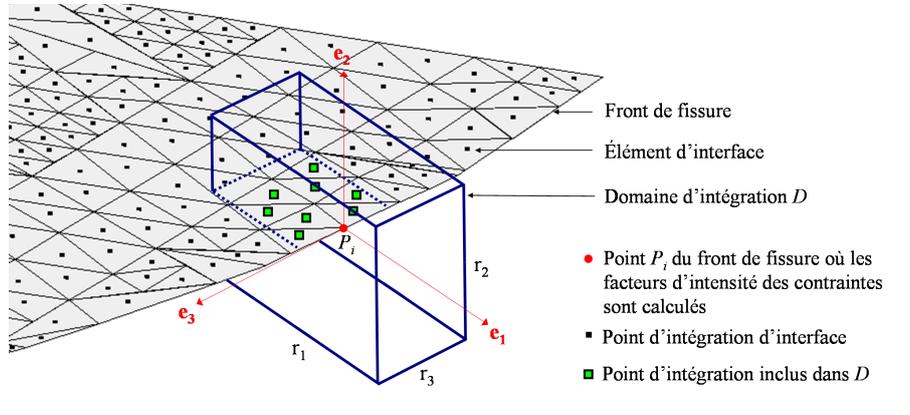


FIGURE 2.26: Représentation du domaine d'intégration D pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes à un point P_i du front de fissure.

Les facteurs d'intensité de contraintes (FIC) K_I , K_{II} et K_{III} sont calculés le long du front de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D présentée dans la section 1.2.4.2. La discrétisation du front de fissure est basée sur le maillage de la structure : 1 point de calcul P_i par élément fini traversé par le front. Le domaine d'intégration D est un parallélépipède de dimensions $r_1 \times r_2 \times r_3$ (suivant les directions \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 du repère local associé à la fissure) centré sur le point P_i et doté de 8×216 points d'intégration (cf. figure 2.26). L'intégrale d'interaction sur le volume D et sur les faces de la fissure s'écrit :

$$I^{\mathfrak{R},aux} = \int_D A_{1j,j} q_1 dV + \int_D A_{1j} q_{1,j} dV + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} t_2^{\mathfrak{R}} u_{1,1}^{aux} q_1 dS \quad (2.67)$$

avec

$$A_{1j} = \left(W_l^{\mathfrak{R},aux} \delta_{1j} - \sigma_{1j}^{\mathfrak{R}} u_{1,1}^{aux} - \sigma_{1j}^{aux} u_{1,1}^{\mathfrak{R}} \right) \quad (2.68)$$

où le champ d'extension virtuel \mathbf{q} est colinéaire à l'orientation de la fissure et vérifie les conditions (1.29). L'extension virtuelle et le champ d'extension virtuelle suivent une loi en \cos^2 (cf. figure 2.27.a) :

$$\begin{aligned} \delta l(s) &= \cos^2 \left(\frac{\pi x_3}{2 r_3} \right) \\ \mathbf{q} &= \cos^2 \left(\frac{\pi x_1}{2 r_1} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi x_2}{2 r_2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi x_3}{2 r_3} \right) \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2.69)$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont les coordonnées associées au repère local du front de fissure (cf. figure 1.10) issues du formalisme des fonctions de niveau. Les conditions (1.29) sont respectées lorsque le parallélépipède est entièrement contenu dans le volume de la structure. Lorsque D est traversé par un bord de la structure, $\delta l(s)$ et \mathbf{q} sont multipliés par une fonction rampe valant 0 hors de la structure et atteignant linéairement la valeur 1 au centre du domaine d'intégration [RAN 08a] (cf. figure 2.27.b).

À partir de la solution du problème de fissuration précédent avec contact et frottement interfacial, les FIC sont calculés le long des deux fronts de fissures pour les trois cas considérés : $\mu_\Gamma = 1$, 0.5 et 0. La fissure étant complètement fermée, K_I est nul. K_{II} et K_{III} sont représentées figure 2.28.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

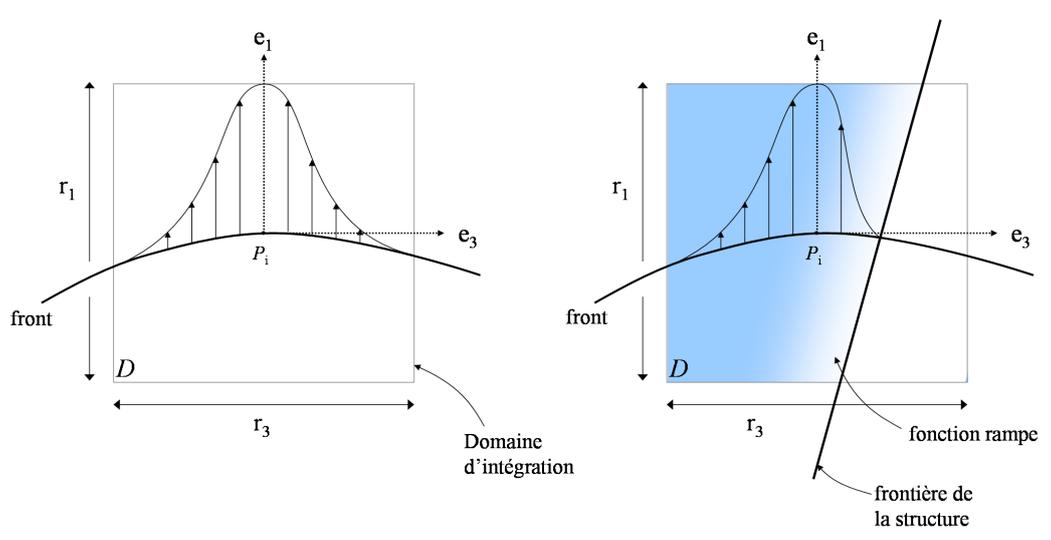


FIGURE 2.27: Représentation de l'extension virtuelle δl dans le domaine d'intégration D : (a) section du front interne à la structure ; (b) section du front proche de la frontière de la structure.

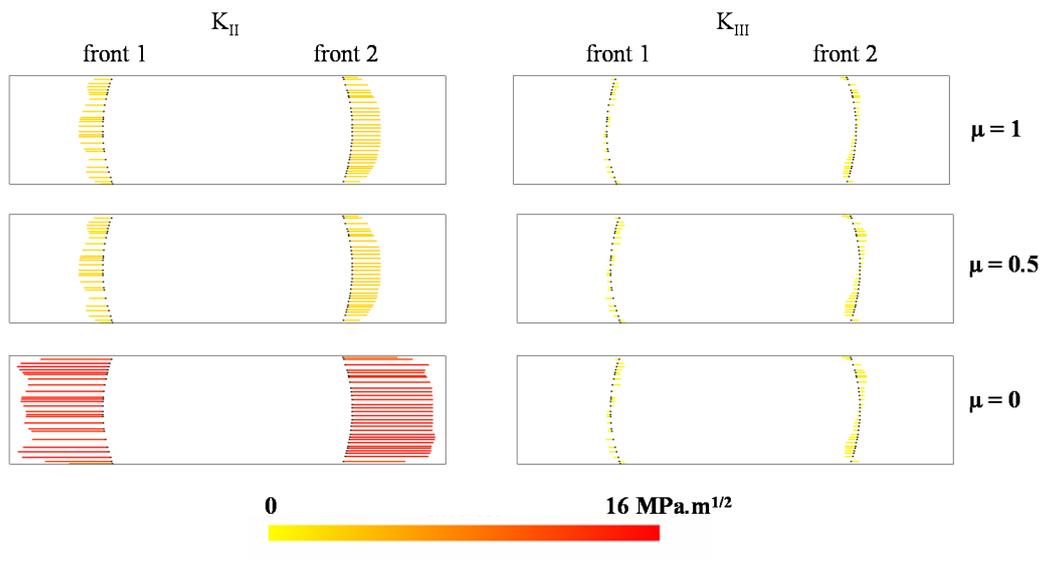


FIGURE 2.28: Facteurs d'intensité des contraintes en mode II et III calculés le long des deux fronts de fissures pour $\mu\Gamma = 1, 0.5$ et 0 .

Pour $\mu\Gamma = 1$ et 0.5 , le glissement relatif entre les faces de la fissure est nul ou très faible. Les valeurs de K_{II} sont très proches. Pour $\mu\Gamma = 0$, le glissement à l'interface est beaucoup plus élevé. Les valeurs de K_{II} sont donc beaucoup plus importantes. Pour ce problème, les valeurs de K_{III} calculés le long des fronts sont très faibles en comparaison avec les valeurs de K_{II} et indépendantes de la valeur du coefficient de frottement $\mu\Gamma$.

Le modèle X-FEM 3D multi-échelles proposé dans ce mémoire permet de capturer précisément différentes solutions de contact avec frottement entre les faces des fissures. L'intégrale d'interaction utilisée ici permet de prendre en compte l'influence de la solution de contact dans le calcul des FIC. Ceci est un point essentiel pour simulation numérique de la propagation des fissures sous chargement de fatigue multiaxiale non proportionnelle. L'influence du frottement interfacial sur le comportement de ces fissures sera étudié dans le chapitre 3. Dans la section suivante, un deuxième problème de fissuration est simulé afin de démontrer les performances du modèle X-FEM à deux échelles et sa capacité à capturer la solution de contact interfacial à une échelle pertinente, indépendamment du maillage éléments finis de la structure.

2.4.2 Problème de contact unilatéral : intérêt de l'approche multi-échelle

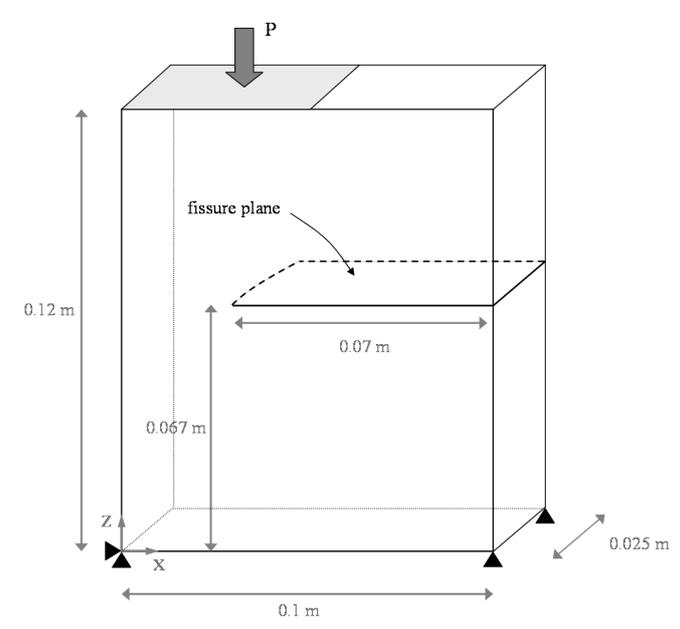


FIGURE 2.29: Géométrie, conditions aux limites et chargement du problème.

L'objectif de ce deuxième cas-test 3D est de montrer la capacité du modèle X-FEM à deux échelles à "capturer" la solution de contact entre les faces d'une fissure à une échelle beaucoup plus fine que celle du maillage de la structure.

Un domaine Ω parallélépipédique de dimensions $(0.1\text{m} \times 0.025\text{m} \times 0.12\text{m})$ comporte une fissure débouchante Γ à front courbe (cf. figure 2.29). Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young $E=206$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Une condition de déplacement nul sur la face inférieure $u_z = 0$ est imposée et les mouvements de corps rigide sont bloqués. Une contrainte de compression $P=100$ MPa est appliquée uniformément sur la demie surface du dessus afin d'ouvrir partiellement la fissure. Elle produit une discontinuité dans la solution de contact entre les faces de la fissure. La loi de comportement d'interface est une loi de contact unilatérale sans frottement.

Trois configurations appelées A, B et C sont étudiées :

- A - Un maillage très fin de 104544 tétraèdres est utilisé pour le problème de structure (cf. figure 2.30.a). Le rapport entre la taille de la fissure et la dimension caractéristique des éléments 3D dans la zone d'intérêt est $R = 14$. La fissure est discrétisée sans raffinement spécifique (cf. figure 2.2.a). On obtient une distribution fine de 2049 paires de points d'intégration dépendante du maillage de la structure (cf. figure 2.31.a).
- B - Un maillage en volume relativement grossier de 3456 tétraèdres ($R = 5.5$) est utilisé pour le problème de structure (cf. figure 2.30.b). La fissure est discrétisée sans raffinement spécifique (cf. figure 2.2.a). On obtient alors une distribution de 260 paires de points d'intégration dépendante du maillage de la structure et dix fois plus grossière que dans le cas A (cf. figure 2.31.b).

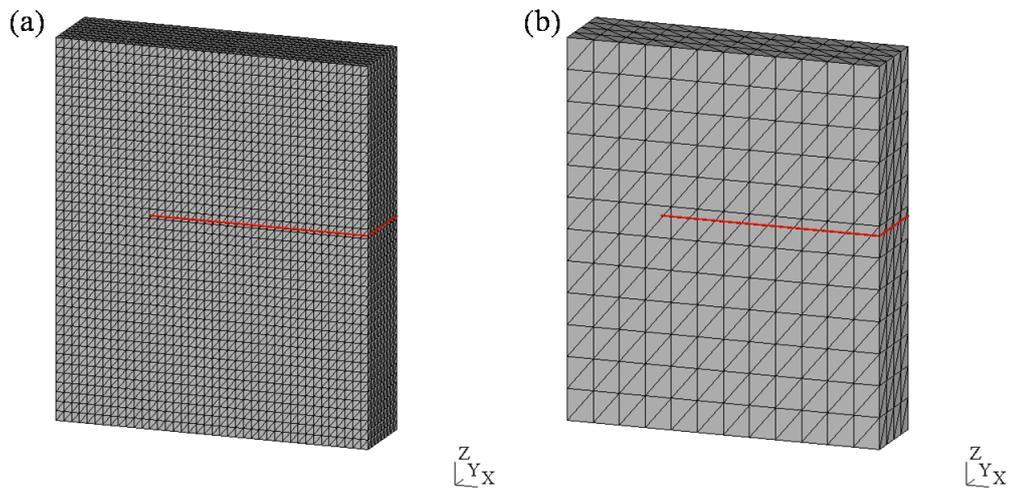


FIGURE 2.30: Maillages de la structure : (a)-pour la configuration A ; (b)-pour les configurations B et C.

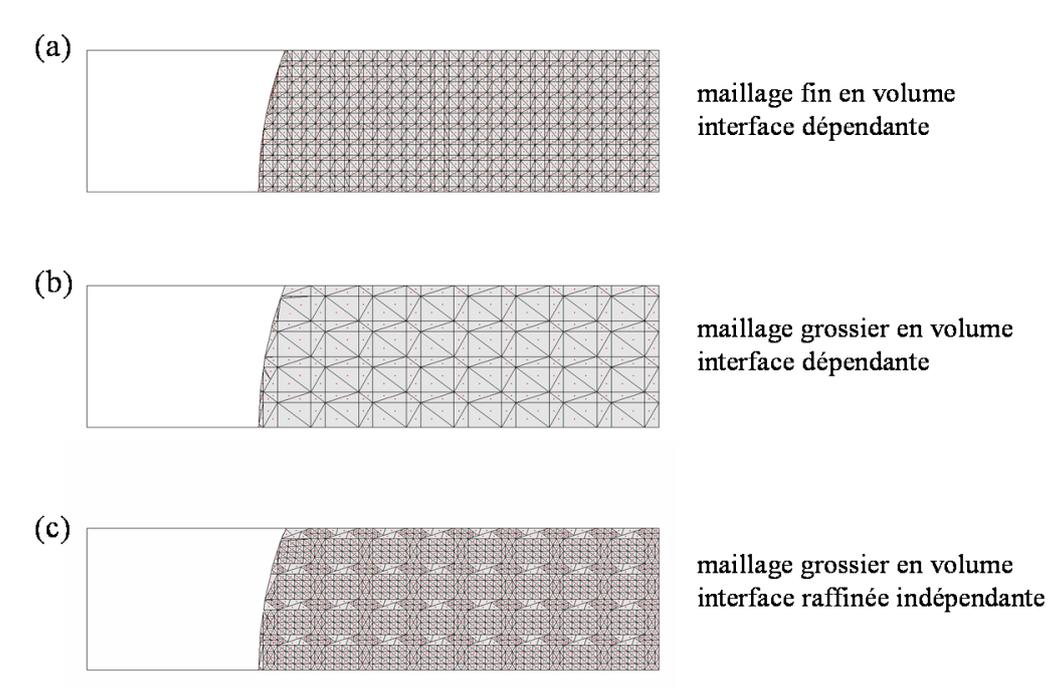


FIGURE 2.31: Discrétisations de la fissure : (a)-pour la configuration A ; (b)-pour la configuration B ; (c)-pour la configuration C (modèle multi-échelle).

C - On utilise ici le modèle X-FEM à deux échelles. Un maillage relativement grossier de 3456 tétraèdres ($R = 5.5$) identique au cas B est utilisé (cf. figure 2.30.b). La discrétisation de la fissure est raffinée indépendamment du maillage en volume (cf. figure 2.2.b). On choisit

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

une taille critique pour les arrêtes des éléments d'interface $l_c = 1.8$ mm, ce qui conduit à une distribution de 2076 paires de points de d'intégrations à l'interface (cf. figure 2.31.c).

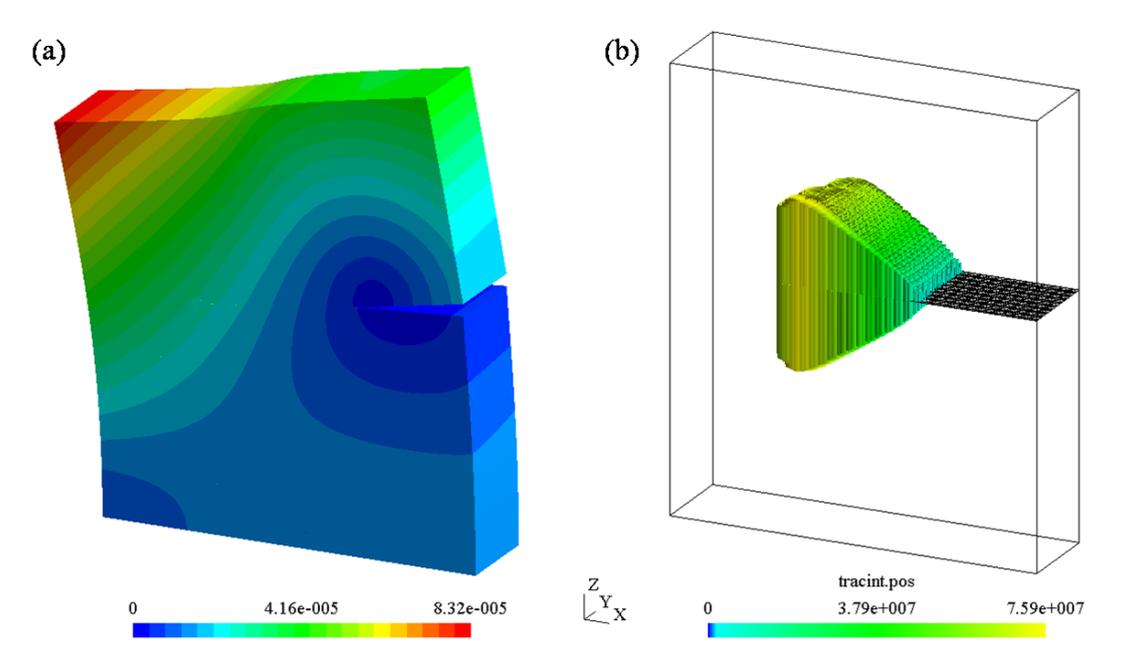


FIGURE 2.32: (a) Représentation amplifiée de la solution du problème en déplacement global \mathbf{u} et (b) représentation du champ des efforts locaux \mathbf{T} à l'interface de la fissure pour le cas de référence A.

On résout le problème à une précision de 10^{-3} en considérant l'indicateur d'erreur η (2.34). Le taux de convergence optimal est obtenu pour une direction de recherche $k = 5.10^{+13}$ Pa.m $^{-1}$ et un coefficient stabilisation $\varepsilon = 10^{+14}$ Pa.m $^{-1}$ pour les cas A, B et C. Comme souligné dans la section 2.3.3, ces valeurs optimales sont indépendantes des discrétisations utilisées avec le modèle NLLA-X-FEM, car les solutions locales sont stables et régulières. Elles ne présentent pas d'oscillations numériques (cf. figures 2.32.b). Les solutions du problèmes global sont quasi-identiques dans chaque cas (cf. figure 2.32.a).

La configuration A est considérée comme le cas de référence. Le maillage de la structure est raffiné dans le but d'obtenir une discrétisation fine de l'interface. Cette méthode de discrétisation est utilisée habituellement et fournit une approximation précise du comportement global de la structure et de la solution local de contact. Elle permet donc de capturer précisément le lieu de la discontinuité de contact, i.e. la transition entre la zone d'ouverture ($\mathbf{T} = 0$) et de contact ($\mathbf{T} > 0$) entre les lèvres de la fissure représenté par une ligne continue rouge dans la figure 2.33.a. et localisée à la position $x=0.0186$ mm.

Cependant, l'utilisation d'un maillage très fin en volume est très coûteux numériquement, en particulier pour des structures 3D de grandes dimensions. Le raffinement local de ce maillage au voisinage de la fissure peut aussi engendrer des difficultés. De plus, ce raisonnement est en contradiction avec le concept propre à X-FEM de modélisation des fissures indépendamment du maillage.

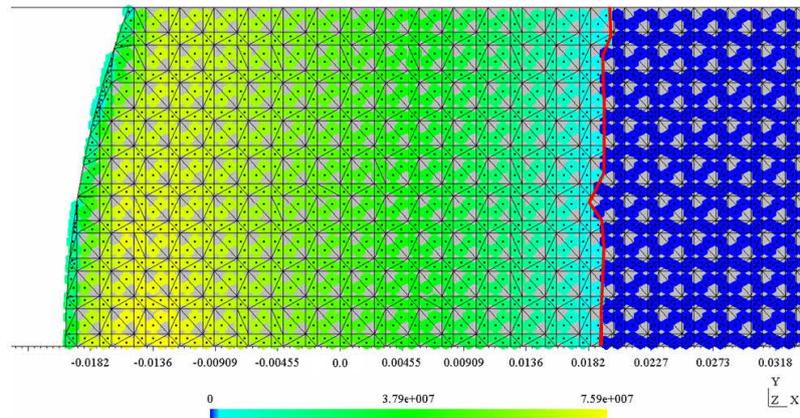
Dans le cas B, la discrétisation de l'interface est trop grossière et ne permet pas de décrire avec suffisamment de précision le problème de contact entre les faces de la fissure. En conséquence, la frontière entre la zone d'ouverture et la zone de contact n'est pas localisée précisément (cf. figure 2.33.b) : $x=0.0167$ mm (erreur $\cong 10\%$). En effet, le degré de précision est restreint par la finesse de la discrétisation d'éléments d'interface dépendante du maillage de la structure.

Dans le cas C, la discrétisation de l'interface est raffinée indépendamment du maillage en volume. Elle est adaptée à l'échelle du problème de contact entre les faces de la fissure et permet de capturer précisément la solution locale (\mathbf{w}, \mathbf{t}). L'approximation de la solution du problème est très proche de celle du cas de référence A (cf. figure 2.33.c). Le lieu de la discontinuité entre la zone d'ouverture et la zone de contact est en accord avec la solution de référence (cf. figure 2.33.c) : $x=0.0182$ mm (erreur $\cong 2\%$). De plus, l'utilisation d'un maillage en volume adapté au problème de structure réduit significativement le temps de calcul de 75% par rapport au cas A.

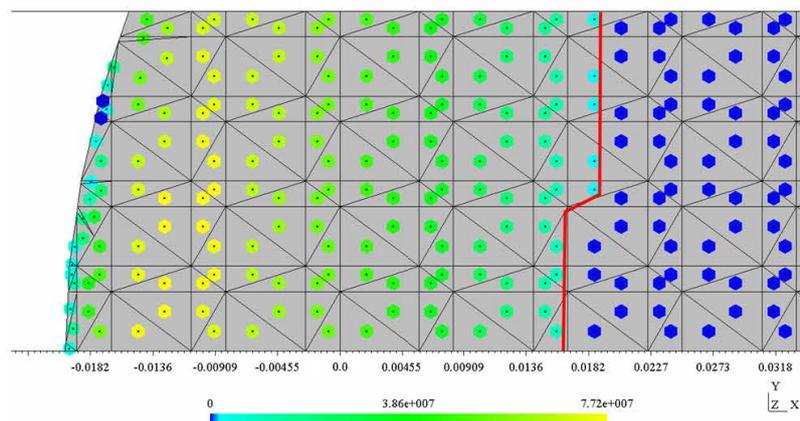
On peut donc conclure que le modèle X-FEM à deux échelles combiné au solveur NLLA permet de résoudre précisément et à moindre coût numérique les problèmes de rupture multi-échelles bidimensionnels et tridimensionnels avec contact et frottement entre les faces de la fissure. On peut noter par ailleurs que les solutions de contact ne présentent pas d'oscillations numériques quelles que soient les discrétisations en volume et à l'interface utilisées. Ceci vient confirmer les bonnes propriétés de stabilité du modèle X-FEM à deux échelles basé sur une formulation faible à trois champs et combiné au solveur NLLA. Il fournit une solution stable et permet de capturer précisément les conditions de contact indépendamment du problème de structure. Dans la section suivante, un cas-test de validation est proposé. L'objectif est de comparer les résultats du modèle X-FEM à deux échelles avec ceux d'un logiciel éléments finis industriel.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

(a) Configuration A (modèle de référence) : - maillage fin en volume
- discrétisation de l'interface fine et dépendante



(b) Configuration B: - maillage grossier en volume
- discrétisation de l'interface dépendante non raffinée



(c) Configuration C (modèle multi-échelle): - maillage grossier en volume
- discrétisation de l'interface indépendante et raffinée

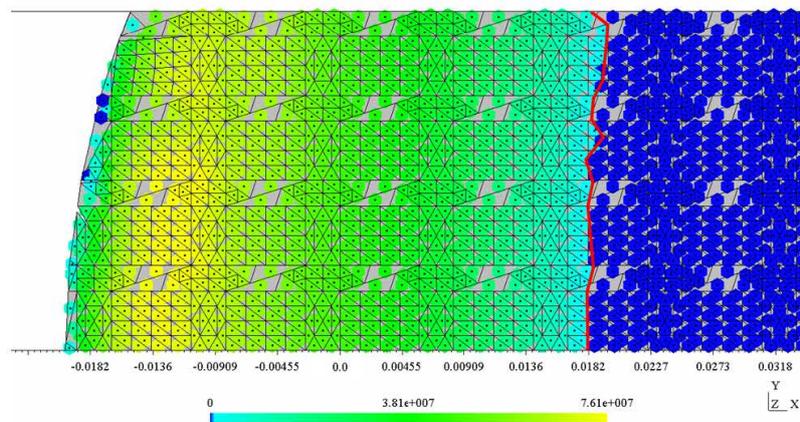


FIGURE 2.33: Représentation des efforts d'interface sur le plan de fissure et tracé de la frontière entre la zone de contact et la zone d'ouverture pour chaque configuration.

2.4.3 Problème de contact avec frottement : comparaison avec une solution numérique de référence

Nous avons montré l'intérêt du modèle à deux échelles proposé, tant du point de vue de la précision et de stabilité de la solution du problème de contact que de celui du gain numérique. L'étape suivante est une validation par comparaison des résultats obtenus avec ceux issus du logiciel éléments finis ANSYS.

Un cube Ω de dimensions (50mm×50mm×50mm) représenté dans la figure 2.34 est traversé par une fissure Γ plane, débouchante, à front droit et inclinée de 20° par rapport à l'axe vertical. Le matériau est homogène, élastique et isotrope de module de Young $E=200$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Une contrainte de compression $P=50$ MPa est appliquée uniformément sur la face supérieure de l'éprouvette. Une condition de déplacement nul sur la face inférieure $u_z = 0$ est imposée et les mouvements de corps rigide sont bloqués. À l'interface, on considère la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de coulomb avec un coefficient de frottement de 0.2.

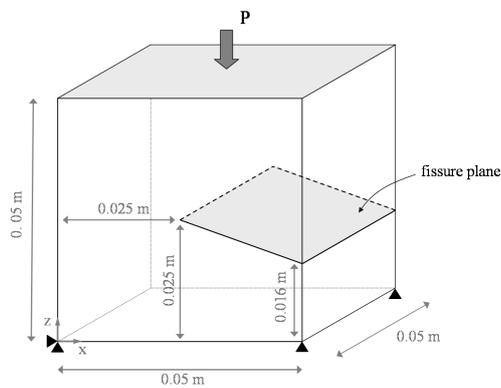


FIGURE 2.34: Géométrie, chargement et conditions aux limites du problème.

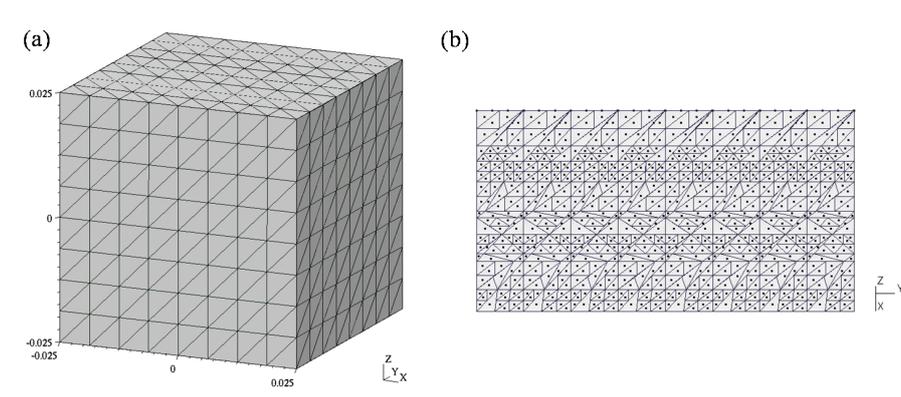


FIGURE 2.35: (a) Maillage X-FEM en volume (3072 tétraèdres) et (b) discrétisation raffinée de l'interface (832 points d'intégration).

Premièrement, le modèle X-FEM à deux échelles est utilisé pour modéliser ce problème. Un maillage en volume structuré et relativement grossier de 3072 tétraèdres est utilisé (cf. figure

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

2.21.a). La taille caractéristique des tétraèdres est de 5 mm. La discrétisation de l'interface est raffinée à l'aide de la stratégie proposée dans la section 2.2. Une distribution de 832 points d'intégration est obtenue (cf. figure 2.21.b).

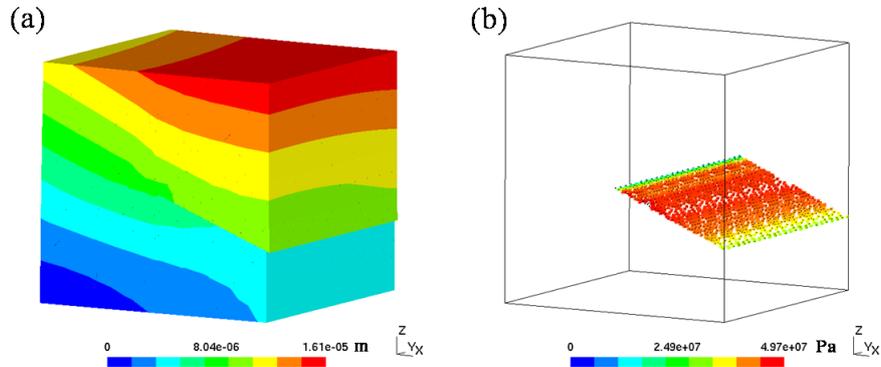


FIGURE 2.36: Résultats X-FEM : (a)-Représentation amplifiée du champ de déplacement $U(\times 120)$; (b) Efforts d'interface T .

Le problème est résolu à une précision de $\eta = 10^{-4}$ en considérant le critère d'erreur locale η (2.34). Le champ de déplacement global U amplifié ($\times 120$) et le champ des efforts d'interface sont représentés figure 2.36. La fissure est complètement fermée. La solution locale de contact est régulière et stable. On n'observe pas d'oscillations numériques.

Le problème est ensuite modélisé avec le logiciel éléments finis ANSYS. Ce modèle est pris comme référence. Il faut noter l'importante différence entre les maillages utilisés. Le maillage ANSYS est composé de 41 000 éléments finis. Un raffinement conséquent est appliqué le long de la fissure et plus particulièrement au voisinage du front (cf. figures 2.37). La taille caractéristique des éléments finis varie du millimètre au micron.

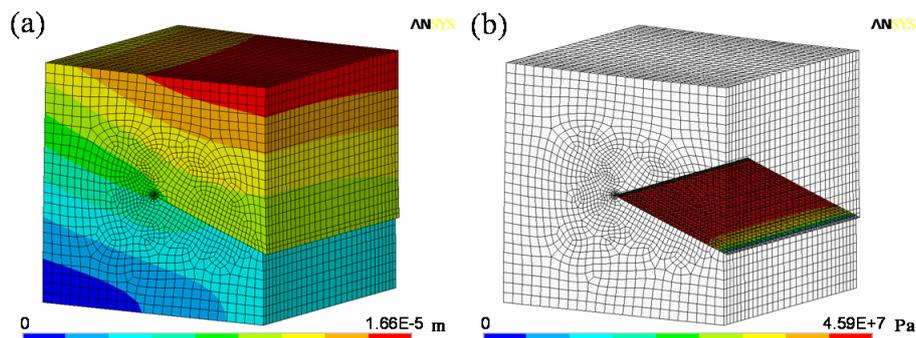


FIGURE 2.37: Résultats ANSYS : (a)-Représentation amplifiée du champ de déplacement $U(\times 120)$; (b) Efforts d'interface T .

Les résultats en terme de déplacements globaux U et d'efforts d'interface T pour le modèle multi-échelle X-FEM et pour le modèle de référence ANSYS sont représentées dans les figures

2.36 et 2.37 respectivement. Ces deux résultats sont très proches : X-FEM : $\|\mathbf{U}\|_{max} = 16.1 \mu m$ et $\|\mathbf{U}\|_{max} = 49.7 \text{ MPa}$; ANSYS : $\|\mathbf{U}\|_{max} = 16.6 \mu m$ et $\|\mathbf{U}\|_{max} = 45.9 \text{ MPa}$. Les surfaces des iso-valeurs de la norme du déplacement global sont quasi-identiques (cf. figures 2.36.a et 2.37.a). Cette comparaison démontre la précision élevée de la solution obtenue avec le modèle X-FEM à deux échelles pour un maillage de la structure relativement grossier et une description fine et intrinsèque de l'interface. En effet, à précision donnée, la solution du problème requiert un maillage en volume environ dix fois plus fin avec la MEF. Le modèle proposé permet de capturer les non linéarités locales de contact avec frottement à une échelle pertinente et de réduire significativement les temps de calcul.

Dans la section suivante, la stratégie en temps qui sera employée pour la simulation de la propagation des fissures sous chargement cyclique est présentée.

2.5 Modélisation quasi-statique et simulation multi-échelle en temps de la propagation des fissures

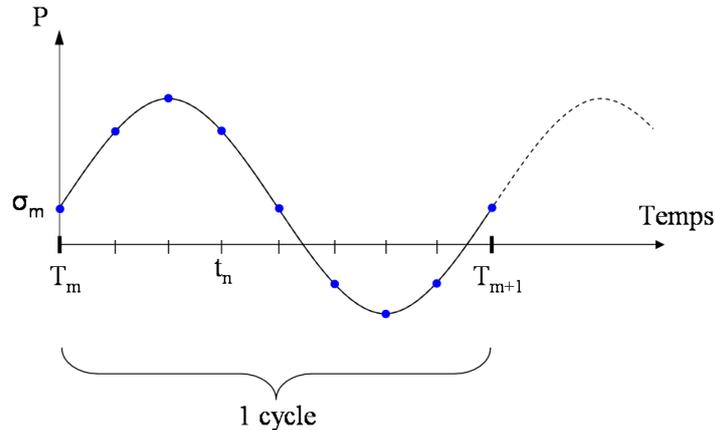


FIGURE 2.38: Exemple de de chargement sinusoïdal P de valeur moyenne σ_m . Chaque cycle $[T_m; T_{m+1}]$ est discrétisé en n piquets de temps t_n .

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, la méthode de résolution non linéaire NLLA est basée sur une version incrémentale en temps de méthode LATIN initialement proposée par Champaney [CHA 99]. Le cycle de chargement borné par les piquets de temps T_m et T_{m+1} est discrétisé en n piquets de temps t_n et autant de pas de chargement (cf. figure 2.38). On définit ainsi l'échelle temporelle fine, appelée échelle $n\check{1}$, et l'échelle temporelle grossière, appelée échelle $n\check{2}$.

L'histoire des conditions de contact entre les faces de la fissure à une influence très importante sur le comportement de la fissure. En effet, les problèmes non linéaires dépendent du temps. Une modélisation rigoureuse des problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure requiert donc une formulation quasi-statique. En conséquence, au pas de temps t_{n+1} , les champs locaux de contact \mathbf{W} et \mathbf{T} sont initialisés avec les valeurs calculées au pas de temps t_n . Au premier pas de temps, on considère que ces champs sont nuls.

Pour chaque pas de chargement, on calcule la solution X_n et on calcule les facteurs d'intensité des contraintes $K_i(t_n)$. À la fin de chaque cycle, c'est-à-dire au pas de temps T_{m+1} de l'échelle temporelle $n\check{2}$, on calcule alors l'accroissement par cycle $\frac{da}{dN}$ et la direction de propagation θ de chaque fissure à l'aide de la loi et du critère de propagation adaptés au matériau et à la nature de la sollicitation du problème. On définit alors la nouvelle géométrie des fissures pour un nombre de cycle donné. Les différents pas de propagation de la fissure constituent la troisième échelle de temps du problème, appelée échelle $n\check{3}$.

Remarque 17 : On fait l'hypothèse que la "vitesse" de la fissure et sa direction de propagation sont constantes pendant les N cycles de chaque pas de propagation de la fissure.

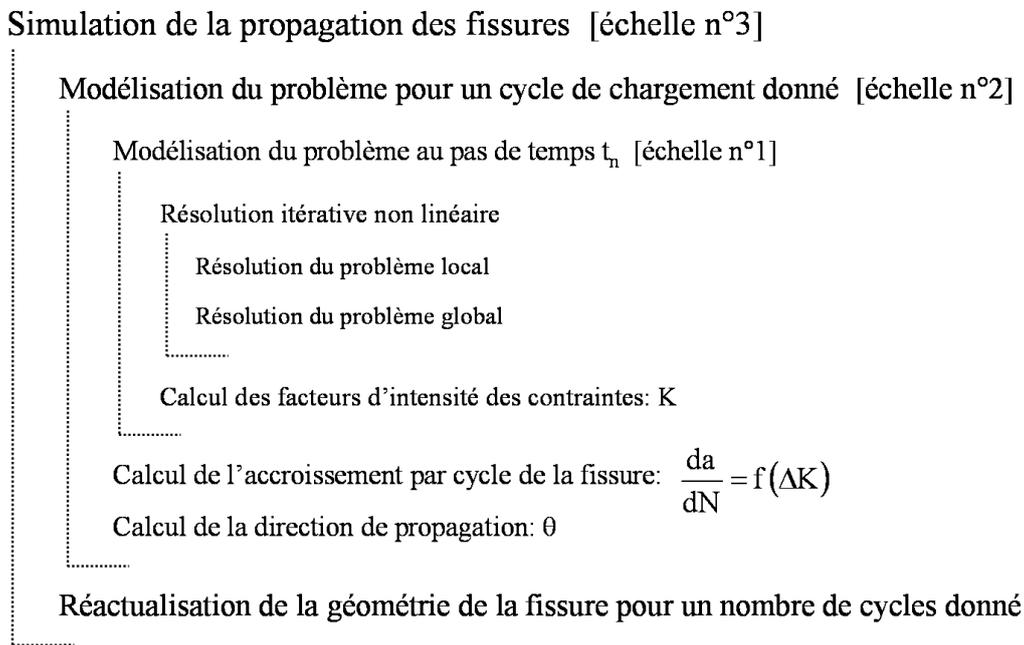


FIGURE 2.39: LEGEND.

Bilan :

Le modèle X-FEM multi-échelle avec contact et frottement interfacial proposé dans ce chapitre satisfait les pré-requis énoncés dans le chapitre 1. Le problème de rupture est modélisé par la méthode des éléments finis étendus. L'utilisation d'une formulation faible mixte permet une description multi-échelle du problème de contact avec frottement entre les faces de la fissure. En effet, la discrétisation de l'interface est indépendante du maillage de la structure et adaptée à l'échelle des non linéarités locales. Plusieurs méthodes de résolution du problème non linéaire ont été proposées. Des exemples ont mis en évidence les problèmes d'instabilité de la solution de contact. La méthode de stabilisation du solveur basé sur la méthode LATIN permet de s'affranchir des éventuelles oscillations numériques de la solution de contact et améliore grandement le taux de convergence de la méthode itérative. Plusieurs exemples bidimensionnels et tridimensionnels ont montré les performances du modèle proposé en ce qui concerne la finesse et la stabilité de la solution de contact. La comparaison avec un modèle de référence a permis de valider quantitativement les résultats obtenus.

L'étape suivante consiste à intégrer ce modèle dans une stratégie expérimentale et numérique multi-modèle de prédiction de durée de vie des composants de structures mécaniques soumis aux problèmes de fretting fatigue.

2. Modèle multi-échelle dédié aux problèmes de rupture avec contact et frottement entre les faces de la fissure

Chapitre 3

Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

Dans ce chapitre, une stratégie multi-modèle couplant l'étude expérimentale et la simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous sollicitations de fretting est présentée. Elle est appliquée en premier lieu à un problème expérimental issu de la littérature. Le problème de contact cylindre/plan est résolu afin de déterminer les contraintes cycliques sur la surface de contact. Le risque d'amorçage de fissure est calculé à l'aide du critère de Dang Van. Il permet de prédire la géométrie initiale des fissures de fretting. Le modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial présenté dans le chapitre 2 permet de simuler numériquement le problème expérimental de fissuration sous chargement de fretting. Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est validé par comparaison avec un modèle de référence semi-analytique basé sur la méthode des distributions continues de dislocations et une étude paramétrique de la propagation des fissures est présentée.

Puis, des essais de fretting fatigue cylindre/plan réalisés dans le cadre de ce travail sont présentés. Les fissures de fretting sont expertisées par coupes métallographiques post-mortem des éprouvettes à différents stades de propagation. Ces résultats permettent de tracer une carte de l'évolution des fissures en fonction des paramètres d'essais et du nombre de cycles de charge. Une loi de propagation en vitesse dédiée au problèmes de fretting et au matériau étudié est construite à partir des résultats de la modélisation X-FEM du problème de fissuration. Enfin, la simulation numérique des essais est conduite à l'aide de cette loi et des critères de propagation en fatigue multiaxiale dédiés aux chargements non proportionnels.

Sommaire

3.1	Stratégie de prédiction de durée de vie dédiée aux problèmes de fretting fatigue	93
3.1.1	Problème expérimental de fretting fatigue de référence	95
3.1.2	Résolution du problème de contact deux-corps	96
3.1.3	Prédiction du risque d'amorçage de fissures de fretting	100
3.1.4	Modélisation X-FEM avec contact et frottement interfacial et validation du calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 2D . . .	101
3.1.5	Étude paramétrique de la propagation des fissures sous chargement de fretting	109
3.2	Étude expérimentale de la propagation des fissures de fretting en configuration cylindre/plan	119
3.3	Simulation numérique X-FEM 2D de la propagation de fissures expérimentale sous chargement de fretting	124
3.3.1	Analyse du problème expérimental : Résolution du contact cylindre/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures	124
3.3.2	Construction d'une loi de propagation expérimentale dédiée aux problèmes de fretting fatigue	125
3.3.3	Simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue	127

Les problèmes de fretting sont généralement observés à la jonction entre les composants de structures soumis à des vibrations ou à un chargement cyclique. Les déplacements relatifs résultants localisés à l'interface provoquent un endommagement par usure des surfaces ou par fissuration. La nature de cet endommagement et sa sévérité dépendent d'un très grand nombre de paramètres (géométries macroscopiques, rugosité des surfaces, matériaux, chargement, physico-chimie,...) qui conditionnent les sollicitations locales cycliques et leur évolution temporelle. La simulation des problèmes de fretting requiert donc une connaissance précise des conditions de contact entre les deux solides et par conséquent, une estimation du coefficient de frottement à l'interface et de ses variations.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une stratégie globale intégrant les avantages de plusieurs modèles afin de prédire la durée de vie d'éprouvettes d'essais soumises à un chargement de fretting fatigue. Une stratégie a été mise en place, combinant les avantages de trois modèles, chacun étant dédié à l'un de ces objectifs :

- i. La modélisation du contact deux-corps et le calcul des conditions de contact à l'interface.
- ii. La prédiction du risque d'amorçage de fissures à partir du critère de Dang Van.
- iii. La simulation X-FEM de la propagation des fissures de fatigue sous chargement de fretting.

Cette stratégie et les modèles qui la composent sont présentés dans la première partie de ce chapitre. On s'intéressera en premier lieu à un cas expérimental issu de la littérature. La modélisation X-FEM du problème de fissuration est validée en comparant les résultats obtenus avec ceux d'un modèle de référence basé sur la méthode des distributions continues des dislocations. Puis, une étude paramétrique est réalisée dans le but de caractériser la propagation des fissures de fretting et d'évaluer l'influence du coefficient de frottement entre les faces de la fissure (difficilement mesurable expérimentalement) et d'une contrainte statique appliquée à l'éprouvette. Cette stratégie complète est ensuite appliquée à la simulation et à l'analyse d'essais cylindre/plan réalisés dans le cadre de ce travail.

3.1 Stratégie de prédiction de durée de vie dédiée aux problèmes de fretting fatigue

Le mode de dégradation principal en fretting (usure et/ou fissuration) dépend de la nature et de l'évolution des conditions de contact qui définissent les régimes de glissement : régime de glissement partiel, régime de glissement mixte ou régime de glissement total, auxquels correspondent les cartes de dégradation (cf. paragraphe 1.1.1). Expérimentalement, l'analyse des boucles de fretting fournit ces données. Pour de faibles amplitudes de débattement, i.e régime de glissement partiel ou mixte, l'amorçage de fissures est l'endommagement principal.

La simulation numérique d'un problème de fretting fatigue requiert la connaissance précise de ces sollicitations au cours du temps. En effet, ce sont les données d'entrée pour la prédiction du risque d'amorçage et pour la modélisation du problème de fissuration. La complexité et la finesse de chaque problème (le problème de la structure, le problème de contact deux corps et le problème de contact avec frottement entre les faces des fissures) requiert une approche multi-échelle globale/locale. La démarche adoptée ici consiste à utiliser les avantages de différents modèles, chacun étant adapté aux différentes difficultés.

Une stratégie en 6 étapes est proposée (cf. figure 3.1) :

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

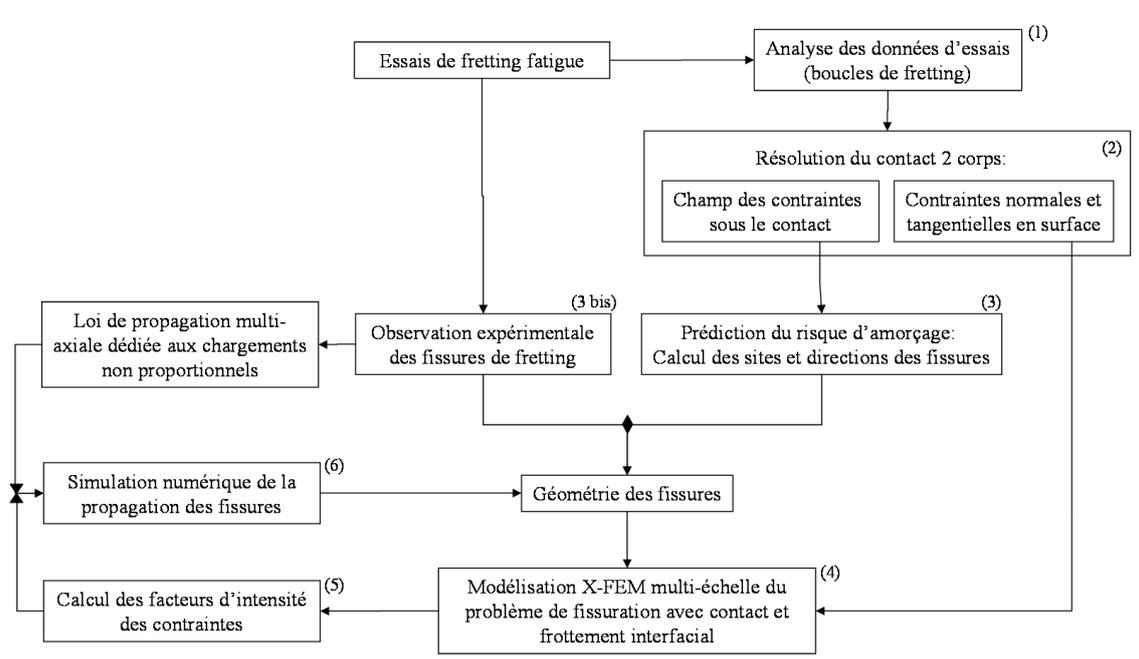


FIGURE 3.1: Organigramme de la stratégie de prédiction de vie en fatigue des composants de structure soumis à un chargement de fretting.

1. Les données des essais (boucles de fretting) sont analysées afin de déterminer les paramètres de chargement expérimentaux. Cette première étape permet de déterminer le mode d'endommagement à partir du régime de glissement observé.
2. Le problème contact normal et tangentiel quasi-statique à l'interface des deux solides est résolu afin de quantifier l'aire de contact, les zones d'adhérence et de glissement et de calculer les distributions des pressions normales et des contraintes de cisaillement surfaciques.
3. Le risque d'amorçage des fissures est ensuite calculé à l'aide du critère de fatigue multiaxial de Dang Van [DAN 93]. Ce critère de plan critique est basé sur le champ des contraintes dans la zone sous le contact calculé à partir du résultat de l'étape 2. Il permet également de déterminer les sites et les directions d'amorçage des fissures de fretting [ROB 06]. La géométrie des fissures peut éventuellement être extraite à partir d'observations expérimentales (étape 3bis).
4. À partir des données de chargement en surface (étape 2) et de la géométrie initiale des fissures (étape 3), le problème de fatigue sous chargement de fretting fatigue est modélisé à l'aide du modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial proposé dans ce mémoire.
5. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés en pointe de fissure au cours du cycle de chargement à partir de la solution du problème de rupture.
6. La propagation des fissures de fretting est simulée à l'aide des critères de propagation en fatigue multiaxiale dédiés aux chargement non proportionnels adaptés au problème de fretting.

Dans les paragraphes suivants, un essai issu de la littérature est considéré. L'objectif est de présenter les différents modèles et techniques utilisées pour accomplir les différentes étapes de la

simulation de cet essai, puis de valider la stratégie proposée. Cette démarche est conduite en 2D.

3.1.1 Problème expérimental de fretting fatigue de référence

Les essais de fretting fatigue sur un alliage d'aluminium AL7075 réalisés par Dubourg *et al.* [DUB 00] sont analysés. Un poinçon sphérique de rayon R_S en contact avec une éprouvette plane est soumis à une force normale P et un déplacement relatif δ à une fréquence constante $F = 5$ Hz. Une contrainte statique de traction σ_t est appliquée à l'éprouvette. Le poinçon et l'éprouvette sont réalisées dans le même matériau dont les propriétés sont données dans le tableau 3.1 [DUB 00, WIT 00].

Module Young E	73 GPa
Coefficient de Poisson ν	0.3
Contrainte maximale	540 MPa
Limite de fatigue	230 MPa
Dureté H_v	160
Limite de fatigue en flexion plane ($R = -1$) f_{-1}	175 MPa
Limite de fatigue en torsion alternée ($R = -1$) t_{-1}	101 MPa

TABLE 3.1: Propriétés mécaniques de l'alliage d'aluminium AL7075.

L'amplitude du débattement δ est asservie afin que l'amplitude de l'effort tangentiel Q dû au frottement soit constante au cours de l'essai. Les paramètres de charge (Q, P) choisis induisent un régime de glissement partiel. La fissuration est donc le mode d'endommagement prédominant et l'état des deux surfaces peut être considéré comme lisse et non évolutif (l'usure est négligeable). Les variations du coefficient de frottement local μ sont alors négligeables et l'amplitude des contraintes surfaciques cycliques est supposée constante au cours de l'essai (hypothèse de chargement cyclique monotone).

Expérimentalement, on observe l'amorçage d'un réseau de fissures courtes dans la zone annulaire de micro-glissement en périphérie de la zone d'adhérence. Ces fissures forment un angle variable de 15° à 35° en volume avec la surface de contact en fonction de leur position par rapport au centre du contact (cf. figure 3.2). La propagation de la majorité des fissures stoppe et seules deux fissures principales se propagent selon une trajectoire semi elliptique en surface et avec un angle de 29° par rapport à la surface de contact. Elles bifurquent ensuite progressivement pour former un angle de 67° avec la surface.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

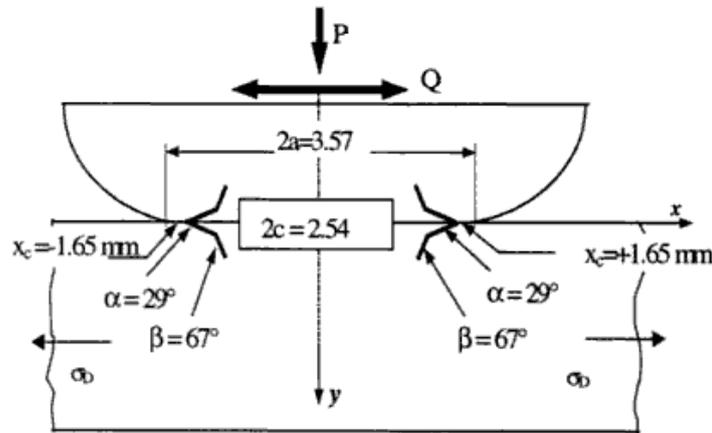


FIGURE 3.2: Essai de fretting fatigue réalisé par Dubourg et al. [DUB 00] : sites d'amorçage et profile des fissures observées.

Cet essai est modélisé par une approche 2D. Son analyse est donc conduite dans le plan médian ($y=0$).

3.1.2 Résolution du problème de contact deux-corps

La méthode employée a comme point de départ les travaux de Kalker [KAL 90]. L'hypothèse de massif semi infini est adoptée, hypothèse classique pour la modélisation du contact sphère/plan ou cylindre/plan et par extension pour les configurations pour lesquelles les dimensions de l'aire de contact sont faibles par rapport aux dimensions des corps et aux rayons de courbure des surfaces en contact. Cette hypothèse à laquelle s'ajoute celle d'élasticité linéaire autorise l'emploi des équations de Boussinesq-Cerruti, lesquelles fournissent une relation intégrale ente les déplacements et les contraintes en surface.

Dans le cas bidimensionnel, le domaine d'étude est une droite qui sépare les deux corps en contact. Cette droite est discrétisée en segments élémentaires. Sur chaque segment, les grandeurs telles que la contrainte, le déplacement et la distance sont constantes (cf. figure 3.3). Une intégration analytique des relations de Boussinesq-Cerruti est alors possible :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{z,i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot p_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j \\ u_{x,i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot q_j + \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot p_j \end{array} \right. \implies \text{simplification} \implies \left\{ \begin{array}{l} u_{z,i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot p_j \\ u_{x,i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot q_j \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où a_{ij} et b_{ij} (respectivement d_{ij} et c_{ij}) sont les coefficients d'influence permettant d'exprimer le déplacement selon l'axe Z (respectivement l'axe X) du point x_i dû à une contrainte normale et tangentielle unitaire au point x_j [HIL 94].

Les conditions aux limites et les équations du problème s'écrivent :

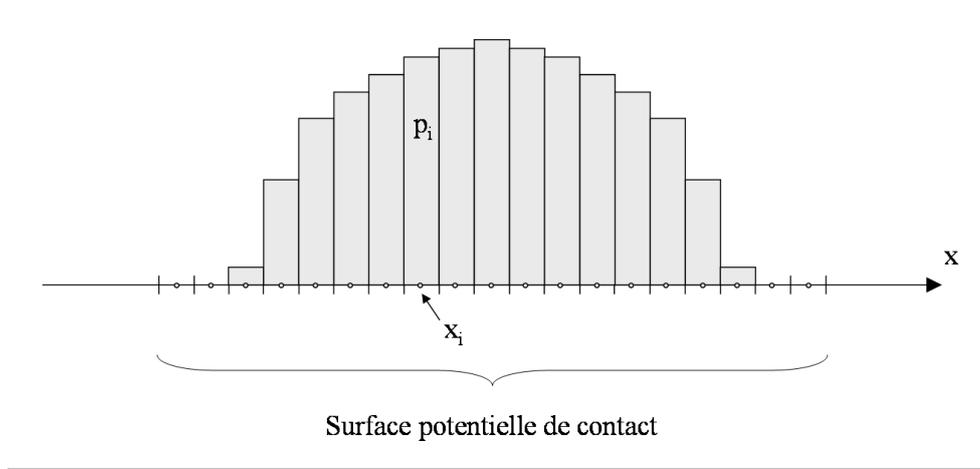


FIGURE 3.3: Zone d'intérêt potentielle pour la résolution du contact deux-corps discrétisée en N cellules de longueur Δx et de coordonnée x_i .

- Problème normal de contact unilatéral :

$$\begin{aligned}
 \text{Dans la zone de contact :} & \quad d_i = 0 \quad , \quad p_i < 0 \\
 \text{En dehors de la zone de contact :} & \quad d_i > 0 \quad , \quad p_i = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^N p_i \cdot \Delta x_i = P$$

- Problème tangentiel de frottement :

$$\begin{aligned}
 \text{Adhérence :} & \quad s_t = 0 \quad , \quad |q_i| < \mu |p_i| \\
 \text{Glissement :} & \quad s_t = u_x - \delta_X \quad , \quad |q_i| = \mu |p_i|
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot \Delta x_i = Q$$

où d_i , s_t et δ_X sont respectivement le saut normal et la composante de glissement et le déplacement de corps rigide selon l'axe X. Le saut normal d_i entre deux points en vis à vis de coordonnée x_i est défini par : $d_i = d_{ZI} + u_z - \delta_Z$, où δ_{ZI} est le saut initial entre les deux corps non déformés, u_z est le déplacement normal dû aux déformations et δ_Z est le déplacement de corps rigide selon l'axe Z.

Les déplacements dus aux contraintes tangentielles sont négligés devant ceux dus aux pressions normales dans l'expression du déplacement normal u_z . De même pour le déplacement tangentiel u_x , la contribution des pressions est négligée devant celle du cisaillement. Cette hypothèse est justifiée tant que les propriétés élastiques des matériaux en contact sont peu différentes. Elle est exacte quand les matériaux sont identiques. Cette hypothèse permet de découpler les problèmes normal et tangentiel. L'algorithme KOMBI [KAL 90] est employé. Les équations relatives au contact normal et tangentiel sont résolues simultanément.

Une analyse 2D des essais sphère/plan est conduite en première approche. Un problème équivalent cylindre/plan est défini. Les travaux [NOW 90, HIL 94] ont montré que l'amorçage et la propagation des fissures sont étroitement liés à la dimension du contact. La pression maximum de Hertz $P_0 = 150$ MPa et la dimension de l'aire de contact $a = 1.785$ mm sont identiques en 2D et en

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

3D. Les paramètres de charge linéiques (P et Q) et le rayon du cylindre R_C sont alors déterminés à partir cette contrainte. Le rapport c/a entre les rayons des zones circulaires d'adhérence et de contact est égal à 0.408. Les nouveaux paramètres 2D pour la simulation de l'essai de fretting fatigue sont donnés dans le tableau 3.2.

R_C	P	Q_{max}	F	μ	a	c/a
239 mm	420 N/mm	420 N/mm	5 Hz	1.2	1.785	0.408

TABLE 3.2: Paramètres des essais de fretting fatigue [DUB 00].

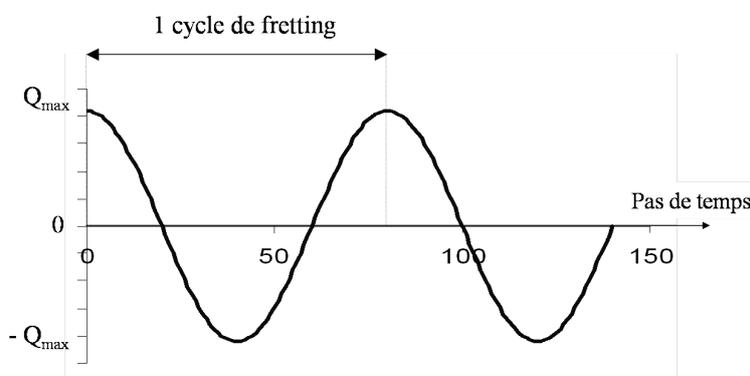


FIGURE 3.4: Variations cycliques de l'effort tangentiel Q appliqué au poinçon.

La précision de la solution est dépendante de la discrétisation de l'interface de contact, i.e. la taille et le nombre des cellules. Les temps de calcul sont très courts et cette méthode numérique permet d'atteindre une précision très élevée pour un grand nombre de cellules. En considérant 301 cellules, l'erreur est de 0.5% pour le calcul du rayon de contact a et de 0.002% pour le calcul de la pression de Hertz [BAI 10].

Le cycle de fretting est divisé ici en 80 pas de temps (cf. figure 3.4). Les distributions de pressions normales $p(x)$ et des contraintes de cisaillement $q(x, t_n)$ sur la surface de contact sont déterminées à chaque pas de temps t_n . La figure 3.5 représente la distribution des pressions normales $p(x)$ et l'évolution de la distribution des contraintes et tangentielles $q(x, t_n)$ calculées au cours du cycle de fretting.

Le cycle de fretting peut être décrit en 2 périodes distinctes (cf. figures 3.5 et 3.6). Au premier pas de temps ($t_0 : Q = Q_{max}$), une zone de micro-glissement symétrique située en périphérie de la surface de contact est observée. La zone centrale est adhérente. Lorsque l'effort tangentiel Q diminue (étape de décharge), une zone de glissement de signe opposé se forme en bordure de la surface de contact et progresse vers le centre jusqu'à ce qu'elle rejoigne la zone d'adhérence fixe ($t_{40} : Q = -Q_{max}$). L'étape de charge (t_{40} à t_{80}) est caractérisée par le processus inverse.

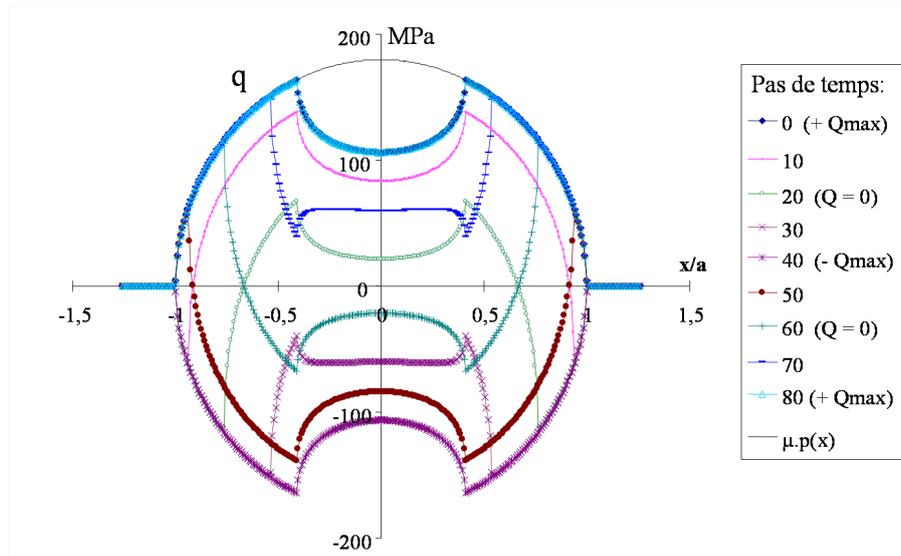


FIGURE 3.5: Représentation des distributions des contraintes normales $p(x)$ et de cisaillement $q(x, t_n)$ (MPa) sur l'interface de contact cylindre/plan pour une cycle de fretting complet (9 pas de temps sur 80 sont représentés).

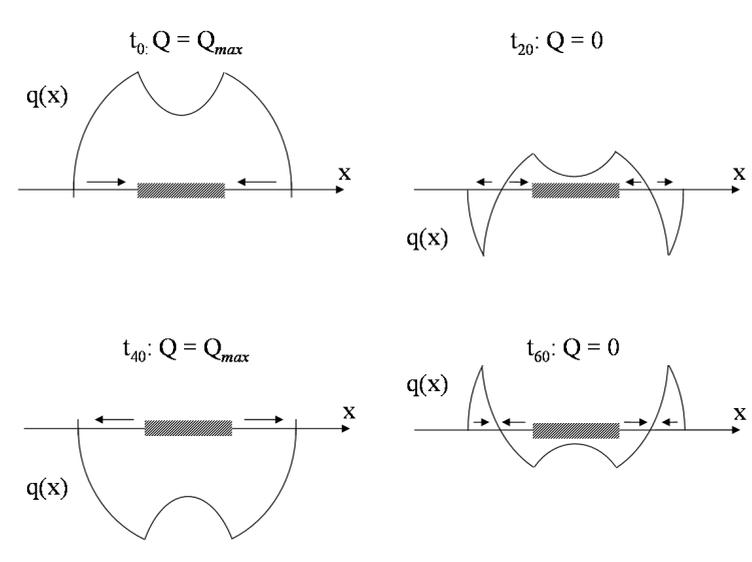


FIGURE 3.6: Répartitions des zones de micro-glissement et d'adhérence en surface au cours du cycle de fretting.

Le chargement est considéré ici comme monotone. On fait l'hypothèse que le régime de glissement partiel engendre une usure de surface très faible ne venant pas perturber la géométrie du contact, ni la valeur du coefficient de frottement, ni le champ des contraintes normales et tangentielles. Une solution précise du cycle de charge à l'interface des deux corps est obtenue à l'échelle de ce contact. C'est un des points clé de la stratégie de prédiction de durée de vie proposée. En

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

effet, ce chargement conditionne la prédiction du risque d'amorçage des fissures et la modélisation du problème de rupture présentés dans les sections suivantes.

3.1.3 Prédiction du risque d'amorçage de fissures de fretting

Les critères de fatigue multiaxiale de Ruiz [RUI 84], de Dang Van [DAN 93] ou les critères de déformation ou de contrainte équivalente permettent de prédire le risque d'amorçage des fissures en fatigue multiaxiale. Le critère de Dang Van permet également de déterminer le lieu d'amorçage et la direction initiale des fissures [DAN 93]. Ce critère de type plan critique est formulé à partir du champ mésoscopique des contraintes sous le contact pendant un cycle complet, mettant en jeu une combinaison des contraintes de cisaillement $\tau(t)$ sur un plan de normale \mathbf{n} et de pression hydrostatique locale $\sigma_H(t)$. En supposant la loi de Tresca valide, ce critère s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\max_{(n)}(\max_{(t)}(\tau(\mathbf{n}, t) + \alpha\sigma_H(t))) = \beta \quad (3.4)$$

avec

$$\max_{(n)}(\tau(\mathbf{n}, t)) = Tresca(t) \quad (3.5)$$

Le critère de risque d'amorçage d s'écrit alors :

$$d = \max_{(t)} \left(\frac{\sup_{(i,j)} \left(\frac{\sigma_i(t) - \sigma_j(t)}{2} \right)}{\beta - \alpha\sigma_H(t)} \right) \quad (3.6)$$

avec

$$\alpha = \frac{6t_{-1} - 3f_{-1}}{f_{-1}} \quad \beta = 2t_{-1} \quad (3.7)$$

où σ_i et σ_j sont les contraintes principales et f_{-1} et t_{-1} sont respectivement les limites de fatigue en traction et en torsion alternée pour un rapport $R = -1$.

Il est possible de tracer la distribution du risque d'amorçage en volume. L'amorçage de fissures de fatigue a lieu pour les couples $(\tau(t), \sigma(t))$ tels que $d > 1$. Le plan correspondant indique le lieu et la direction initiales des fissures. Ce critère a été appliqué avec succès pour prédire le risque d'amorçage de fissures sous sollicitations cycliques multiaxiales [DAN 93], notamment dans le cas du fretting [FOU 96, FOU 02, BAI 10].

À partir du champ des contraintes en volume sous le contact calculé dans la section 3.1.2, le risque d'amorçage de fissures est déterminé à l'aide du critère de Dang Van. La figure 3.7 représente la distribution du risque d'amorçage d et l'angle d'amorçage θ dans le domaine d'intérêt en fonction de la position $(x/a, z/a)$. $x/a = \pm 1$ correspond aux extrémités de la zone de contact. Le risque d est supérieur à 1 au voisinage des deux zones de micro-glissement située de $x/a = -1.12$ à -0.7 et $x/a = 0.7$ to 1.12 . Il diminue progressivement vers la frontière de la zone d'adhérence. Les valeurs maximales sont situées aux positions $x_1/a = -0.92$ et $x_2/a = 0.92$ pour un angle $\theta = \pm 29^\circ$ avec la surface. Ce résultat est en bon accord avec les observations expérimentales [DUB 00].

Remarque 18 : *La distribution de l'angle θ en profondeur donne une idée du parcours des fissures en fatigue. Cette indication est cependant limitée à une faible profondeur. En effet, la présence des fissures après l'amorçage vient modifier le champ des contraintes cycliques et le parcours initialement prédit.*

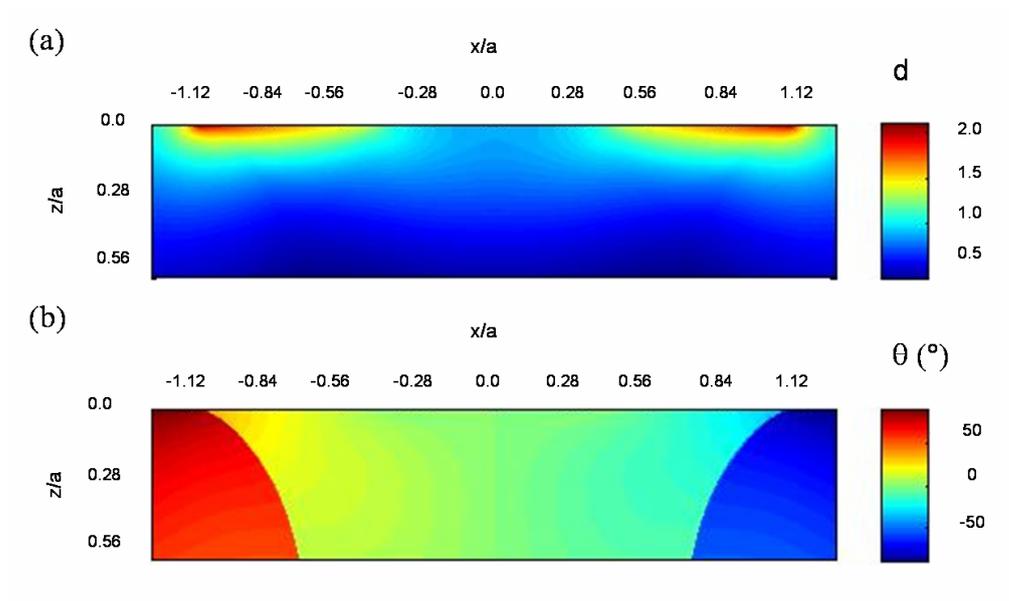


FIGURE 3.7: Distribution du risque d'amorçage d et de l'angle d'amorçage θ selon le critère de Dang Van dans le domaine sous la zone de contact.

Dans le cadre de la stratégie proposée, le critère de Dang Van permet de déterminer la géométrie initiale des fissures de fretting. Ce résultat ainsi que les distributions des contraintes en surface déterminées dans le section 3.1.2 sont utilisés dans la section suivante comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM du problème de fissuration avec contact et frottement.

3.1.4 Modélisation X-FEM avec contact et frottement interfacial et validation du calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 2D

Le problème expérimental de fissuration sous chargement de fretting fatigue est résolu à l'aide du modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce mémoire. Les objectifs ici sont de montrer les performances du modèle X-FEM, i.e. sa capacité à capturer les séquences complexes des conditions de contact entre les faces des fissures, et de le comparer avec un modèle de référence afin de valider la solution de contact interfacial avec frottement et le calcul des facteurs d'intensité des contraintes.

Modélisation X-FEM du problème de rupture sous chargement de fretting :

Une éprouvette rectangulaire de dimensions $100\text{mm} \times 50\text{mm}$ est considérée. Les propriétés du matériau élastique linéaire sont celles de l'alliage d'aluminium AL7075 des éprouvettes d'essai (cf. tableau 3.1). Les fissures 1 et 2 situées respectivement à $x_1 = -1.65\text{ mm}$ (i.e. $x_1/a = -0.92$) et $x_2 = 1.65\text{ mm}$ (i.e. $x_2/a = 0.92$) sont définies à partir des résultats de l'étape 3 sur la prédiction d'amorçage des fissures. Elles sont inclinées avec un angle respectif $\theta_1 = -29^\circ$ et $\theta_2 = +29^\circ$ avec la surface (cf. figure 3.8). Leur longueur initiale $l = 88\ \mu\text{m}$ est de l'ordre de plusieurs grains,

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

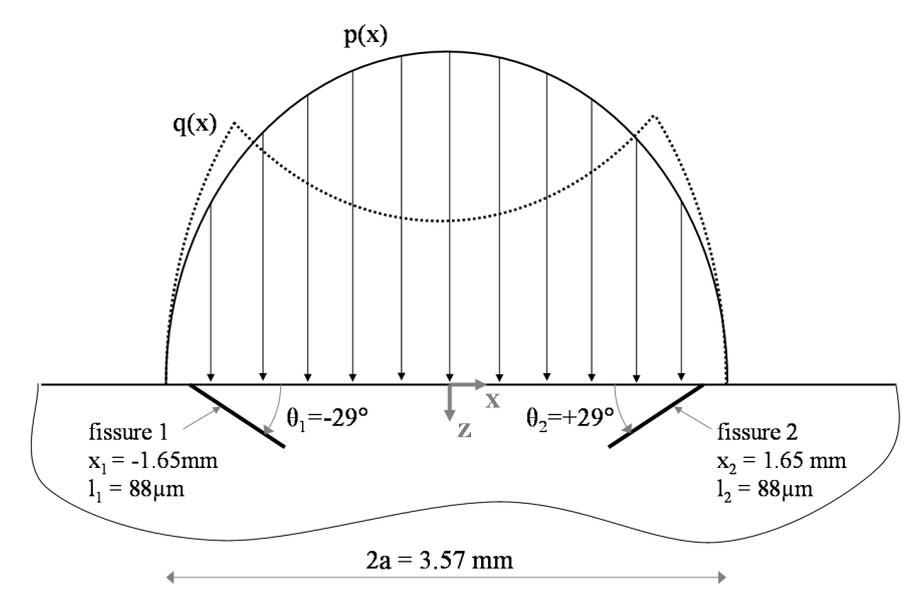


FIGURE 3.8: Données géométriques et chargement pour la modélisation simplifiée de l'essai.

satisfaisant les hypothèses de la MELR.

Une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb μ_{Γ} est considérée entre les faces des fissures. Dans un premier temps, μ_{Γ} est égal à 0.2. Dans le cadre de ce travail, il permet prendre en compte le frottement et certains effets liés à la rugosité des faces des fissures. Il est cependant très difficile de connaître sa valeur exacte. Nous verrons dans la suite de chapitre quelle est son influence sur le résultat de la simulation numérique de la propagation des fissures.

Le chargement surfacique issue de la résolution du problème de contact deux-corps (étape 2) est appliqué au centre de la surface supérieure. La discrétisation issue de la méthode semi-analytique de résolution du contact deux-corps est beaucoup plus fine que le maillage de l'éprouvette employé dans la méthode des éléments finis étendus. Néanmoins, afin de conserver la précision élevée du chargement, le maillage de l'éprouvette est localement raffiné au voisinage de la zone d'intérêt. Les distributions des contraintes normales $p(x)$ et tangentielles $q(x, t_n)$ sont interpolées sur ce maillage. Ce procédé a été automatisé et est très peu coûteux numériquement.

On procède également au raffinement local du maillage au voisinage du front de fissure afin de capturer précisément la singularité de comportement et de calculer les facteurs d'intensité des contraintes avec précision. La taille minimale des éléments est $0.5 \mu\text{m}$ au voisinage du front (cf. figure 3.11). Le maillage est constitué de 7898 éléments triangulaires. Chaque fissure est discrétisée avec 122 éléments d'interface afin de capturer précisément la solution locale de contact avec frottement entre les faces des fissures. Le problème est résolu pour chacune des 80 étapes de chargement avec la méthode NLLA présentée dans la section 2.3.3 avec une précision de 10^{-4} en considérant l'indicateur d'erreur η (2.34). Les champs locaux d'interface $\mathbf{W}(t_n)$ et $\mathbf{T}(t_n)$ sont initialisés à chaque pas de temps t_n avec les champs solution au pas de temps précédent t_{n-1} selon la stratégie en temps proposée dans la section 2.5. Les figures 3.9 et 3.10 représentent le champ de déplacement global \mathbf{U} et le champ des efforts d'interface \mathbf{T} calculés au pas de temps 1 ($Q = Q_{max}$).

Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} sont calculés à chaque pas de temps t_n à l'aide

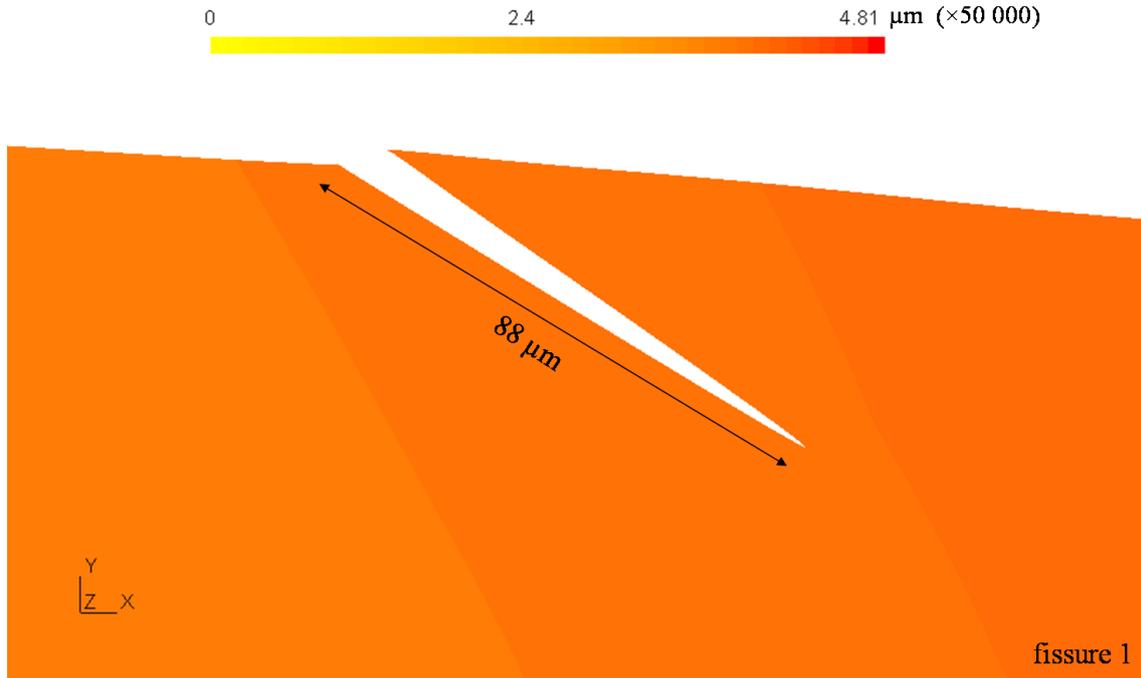


FIGURE 3.9: Représentation amplifiée ($\times 50\,000$) du champ de déplacement global U calculé au pas de temps 1 ($Q = Q_{max}$) au voisinage de la fissure 1.

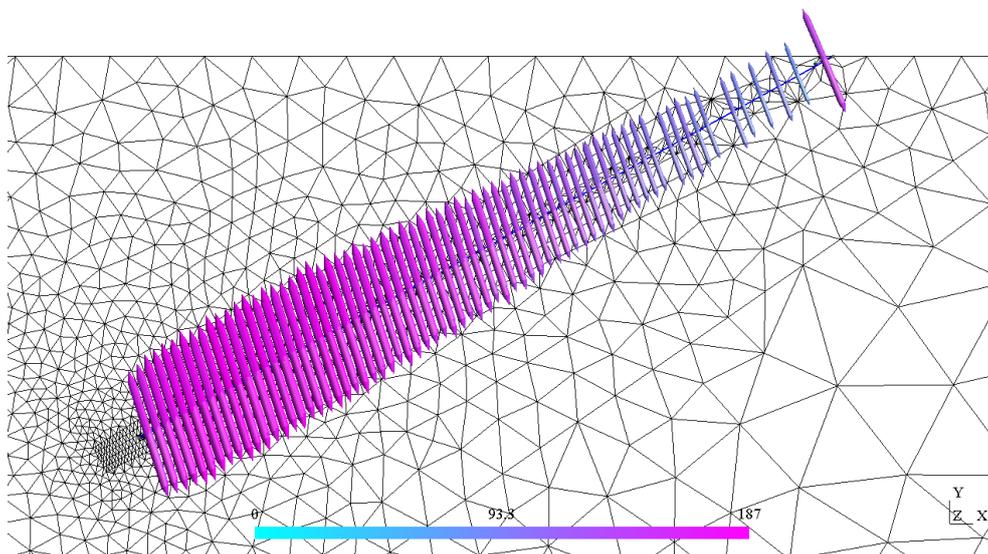


FIGURE 3.10: Champ des efforts T entre les faces de la fissure 2 au pas de temps 1 ($Q = Q_{max}$).

de l'intégrale d'interaction I présentée dans la section 1.2.4.2. Le domaine D utilisé est un carré de coté $5\ \mu\text{m}$ indépendant du maillage et centré sur la pointe de la fissure (cf. figure 3.11).

L'objectif ici est de valider le calcul des FIC Les résultats obtenus avec le modèle X-FEM sont

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

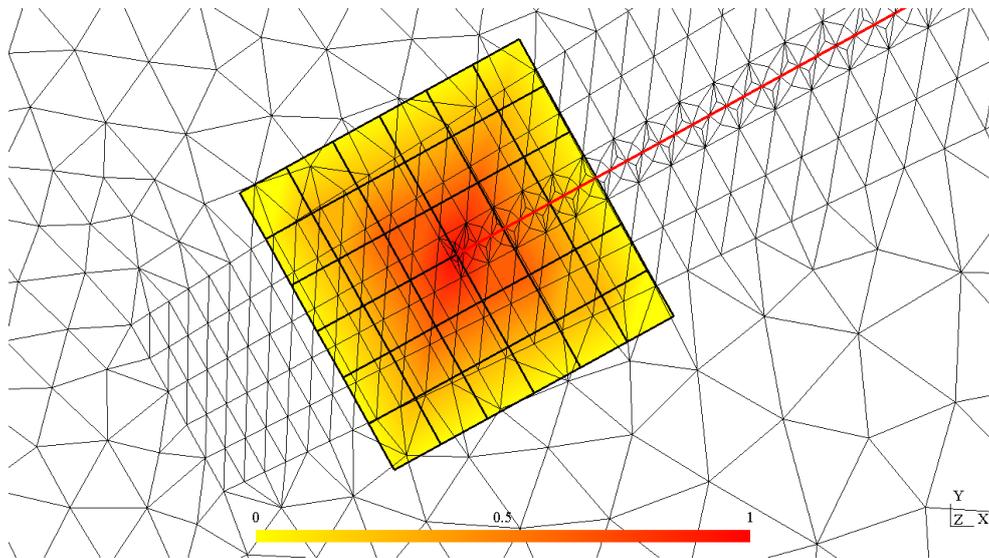


FIGURE 3.11: Maillage X-FEM localement raffiné au voisinage du front de la fissure 2 et domaine d'intégration D pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes : Le champ d'extension virtuel q vaut 1 en pointe de fissure et 0 aux bord du domaine D (cf. section 1.2.5).

comparés avec ceux d'un modèle de référence semi-analytique présenté ci-après.

Modèle de référence :

Il s'agit du modèle développé par Dubourg [DUB 89] basé sur la méthode des distributions continues de dislocations pour la modélisation des zones de discontinuités de déplacement à l'interface d'une fissure et la résolution du contact unilatéral avec frottement. La formulation initiale [DUN 64] utilisée par Comninou [COM 77] et de Hills *et al.* [HIL 85] a été modifiée et généralisée pour être intégrée dans un algorithme de résolution du contact unilatéral avec frottement [DUB 89, DUB 92a]. L'état de contact avec frottement interfacial est calculé à l'échelle locale. Une formulation incrémentale permet de prendre en compte les effets d'hystérésis liés à l'histoire des conditions de contact avec frottement interfacial.

Ce modèle est très précis pour des temps de calcul très réduits. Il est parfaitement adapté à la problématique de la fatigue tribologique – pour laquelle l'hypothèse de massif semi-infini, comme nous l'avons vu, est justifiée – qui demande une description très fine des cycles de charge complexes et des gradients sévères de contrainte et de déformation générés dans des zones confinées sous le contact, et permet de déterminer précisément l'évolution des non linéarités de contact avec frottement à l'interface des fissures. La méthode permet de modéliser des problèmes cycliques complexes (i.e. de fretting, de roulement, des séquences d'ouverture-fermeture-adhérence-glissement) sous chargement multiaxial non proportionnel et l'interaction de plusieurs fissures [DUB 92b]. Ce modèle a été validé par comparaison avec des simulations expérimentales pour des problèmes de fretting [LAM 96, BAI 02a] et de roulement [BAI 02b]. Il permet donc de valider la modélisation X-FEM d'un essai de fretting fatigue.

Chaque fissure du problème est discrétisée ici avec 77 points d'intégration. Le cycle de fretting est discrétisé en 201 pas de temps. Les FIC K_I et K_{II} sont calculés à chaque pas de temps t_n directement à partir du champ de déplacement, i.e. ouverture et glissement entre les faces de la fissure [KRE 75] (cf. équation 1.3). Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 représentent l'évolution des FIC K_I et K_{II} au cours du cycle de fretting en fonction de l'effort tangentiel Q calculés à la pointe des fissures 1 et 2 avec le modèle X-FEM et le modèle de référence.

Les résultats obtenus avec le modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial concordent très bien avec ceux du modèle de référence. Bien que la solution du problème de contact pour chaque modèle soit identique, les résultats du calcul des FIC est légèrement différent aux pas de temps pour lesquels on observe l'adhérence des faces des fissures, i.e. au début des phase de décharge ($Q = +Q_{max}$) et de charge ($Q = -Q_{max}$). En effet, le calcul des FIC avec le modèle de référence repose sur une approche en déplacements. Lorsqu'il y a adhérence, l'évolution du glissement relatif entre les faces de la fissure est nulle et les variations de K_{II} et ΔK_{II} sont nulles. En revanche, le calcul des FIC avec le modèle X-FEM repose sur une approche énergétique en contraintes et en déplacements (intégrale d'interaction) qui capture les variations des contraintes lorsque le déplacement relatif est nul.

Bilan :

Le modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce mémoire et le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte à l'aide de l'intégrale d'interaction en 2D sont validés. Le solveur stabilisé NLLA et le critère d'erreur local (2.34) permettent d'optimiser la convergence des problèmes normal et tangentiel en déplacements (\mathbf{w}) et en contraintes (\mathbf{t}) sur l'intégralité de l'interface de la fissure. L'évolution des non linéarités de contact avec frottement à l'interface des fissures et les FIC sont calculés précisément.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

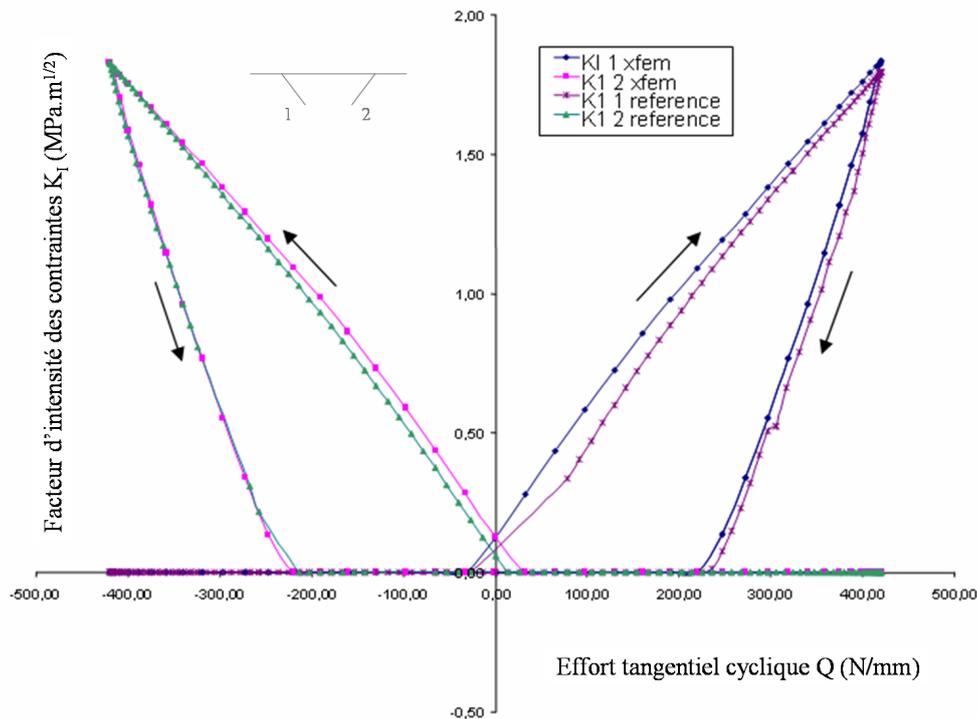


FIGURE 3.12: Variations du facteur d'intensité de contraintes en mode I au cours du cycle de fretting calculées avec le modèle X-FEM et le modèle de référence pour chaque fissure.

Ce modèle s'insère dans la stratégie multi-modèles pour la simulation numérique des problèmes de fretting fatigue proposée. Les avantages des différents modèles sont couplés dans une approche expérimentale et numérique. À partir de résultats d'essais de fretting, le problème de contact entre les corps en contact a été résolu à l'aide d'un modèle semi-analytique pour le calcul de l'évolution des distributions de contraintes normales et tangentielles dans la zone de contact au cours du cycle. Le risque d'amorçage, les sites et l'orientation initiale des fissures de fretting ont été déterminés en utilisant le critère de Dang Van Ces résultats sont ensuite utilisés comme données d'entrée la modélisation X-FEM du problème de fissuration. Le modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce mémoire et le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte à l'aide de l'intégrale d'interaction en 2D ont été validés par comparaison avec un modèle de référence basé sur la méthode des distributions continues de dislocations.

La simulation de la propagation des fissures requiert une loi de propagation en vitesse et l'utilisation d'un critère de direction de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle adapté au problèmes de fretting. Dans la section suivante, les directions de propagation calculées avec différents critères sont comparés avec celles mesurées expérimentalement. Nous étudierons ensuite l'influence du coefficient de frottement interfacial et d'une contrainte de traction volumique additionnelle sur le comportement des fissures.

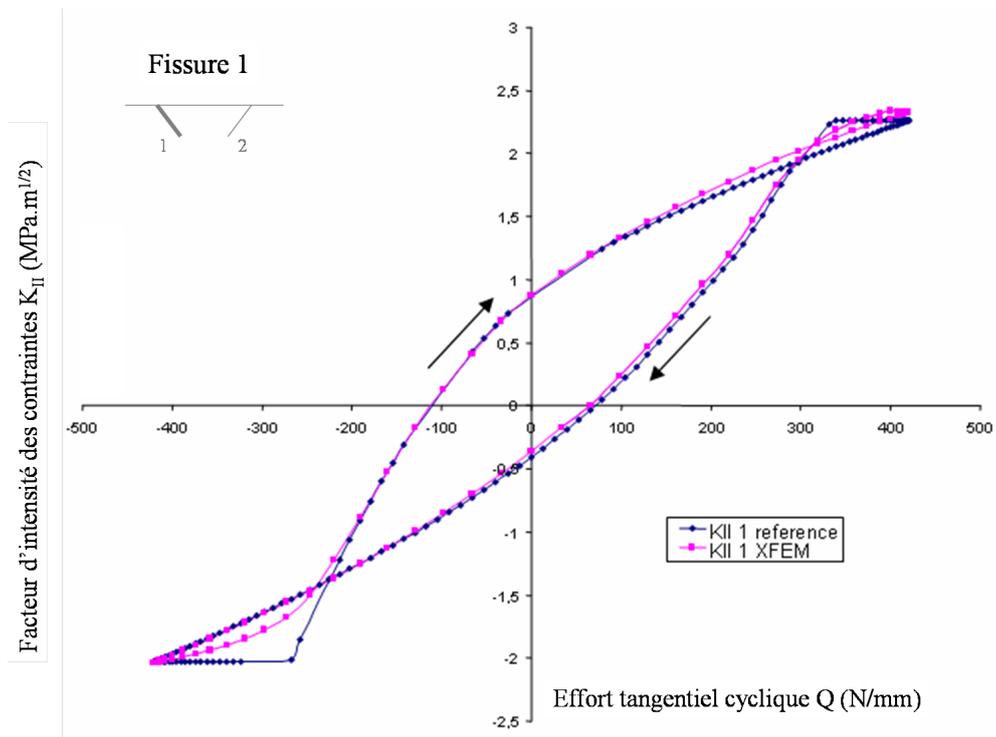


FIGURE 3.13: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM et le modèle de référence.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

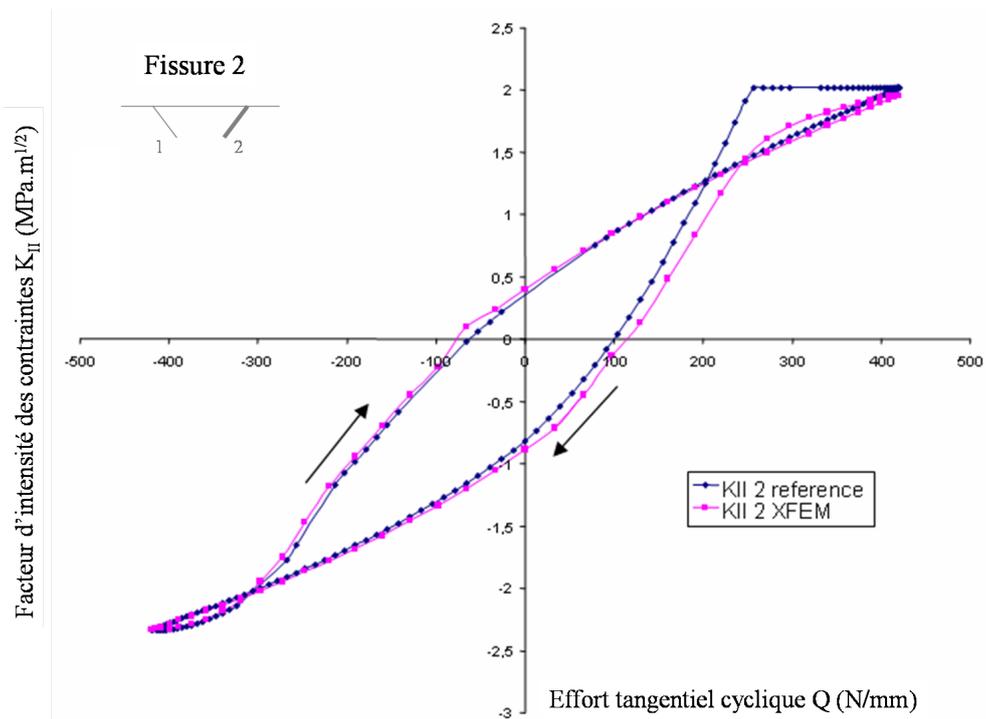


FIGURE 3.14: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 2 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM et le modèle de référence.

3.1.5 Étude paramétrique de la propagation des fissures sous chargement de fretting

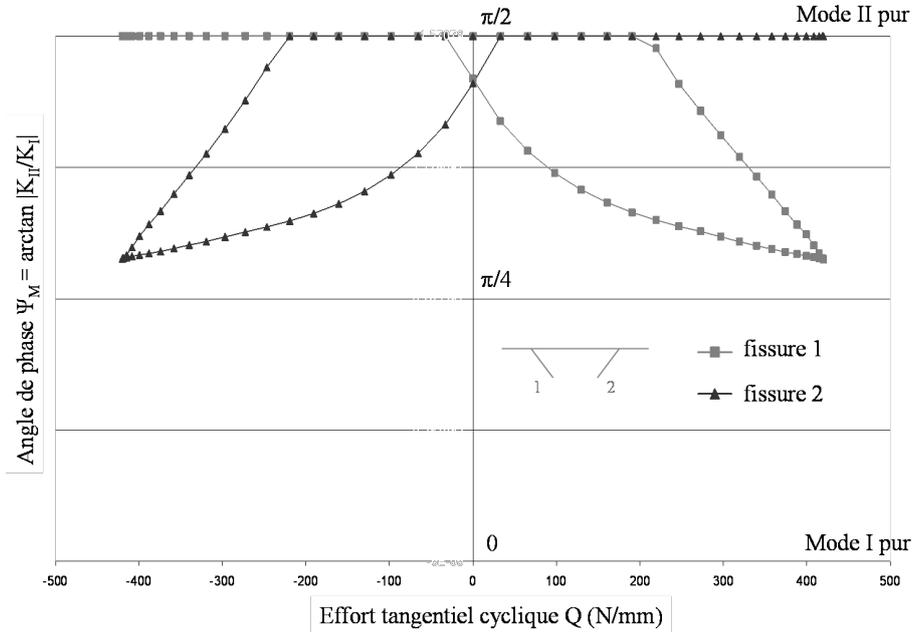


FIGURE 3.15: Variation de l'angle de phase $\Psi_M = \left| \arctan \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \right|$ au cours du cycle de fretting.

Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 montrent que la fissure 1 est sollicitée en mode mixte I et II, puis en mode II pur et de nouveau en mode mixte. La fissure 2 est sollicitée en mode II pur, puis en mode mixte et de nouveau en mode II pur. Il est possible de calculer l'angle de phase Ψ_M (3.8) qui caractérise la mixité de la sollicitation au front [SUR 98] et de tracer son évolution au cours du cycle (cf. figure 3.15).

$$\Psi_M = \arctan \left| \frac{K_{II}}{K_I} \right| \quad (3.8)$$

$\Psi_M = 0$ indique une sollicitation en mode I pur et $\Psi_M = \pi/2$ caractérise une sollicitation en mode II pur. La variation de Ψ_M au cours du cycle de fretting indique que les deux fissures sont sollicitées en mode mixte non proportionnel. Les critères de direction de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle présentés dans la section 1.2.6.3 sont donc utilisés dans le cadre de la stratégie de simulation numérique proposée dans ce mémoire de thèse. Ces critères sont basés sur l'évolution de l'amplitude des facteurs d'intensité des contraintes et de la mixité des sollicitations au cours du cycle. L'objectif du paragraphe suivant est de montrer l'influence du choix de ce critère sur le trajet de propagation calculé.

3.1.5.1 Critères de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle

La simulation de la propagation des fissures de fretting est réalisée selon la stratégie présentée dans la section 2.5 à partir des valeurs des FIC calculées dans la section 3.1.4. La taille des fissures

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

1 et 2 est de $88 \mu\text{m}$. D'après [BRO 89], une extension de 1% est préconisée. Un saut de $2 \mu\text{m}$ est considéré ici, soit légèrement plus de 2%. L'angle de propagation $\delta\theta$ entre la fissure initiale et l'extension calculée (positif dans le sens trigonométrique) après trois pas de propagation de $2 \mu\text{m}$ est répertorié dans le tableau 3.3 en fonction du critère utilisé.

	Critère 1 : $k_1^*(\theta, t)_{max}$	Critère 2 : $\Delta k_1^*(\theta)_{max}$
$\delta\theta_1$	-60°	-49°
$\delta\theta_2$	$+55^\circ$	$+45^\circ$

TABLE 3.3: Direction de bifurcation $\delta\theta$ des fissures de fretting par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction du critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle utilisé.

Des résultats différents sont obtenus en fonction du critère utilisé. Le critère de Hourlier 2 ($\Delta k_1^*(\theta)_{max}$) fournit les résultats les plus proches des observations expérimentales [BAI 02a]. En effet, il est adapté aux problèmes de fatigue multiaxiale avec un fort rapport de mixité.

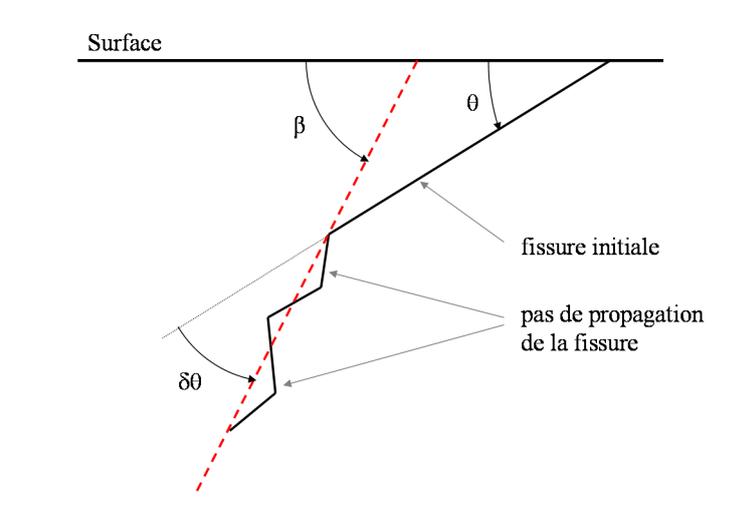


FIGURE 3.16: Notations pour la simulation numérique de la propagation des fissures en 2D.

3.1.5.2 Influence du coefficient de frottement entre les faces de la fissure

La valeur du coefficient de frottement μ_f est un paramètre inconnu a priori. Numériquement, ce paramètre permet de prendre en compte une "résistance moyenne" au glissement dépendant de l'état de surface (rugosité) et de la présence de débris d'usure entre les faces de la fissure. L'objectif ici est de montrer l'influence de ce paramètre sur la solution du problème et sur la propagation des fissures. Pour cela, le problème de fretting précédent est résolu pour des valeurs du coefficient de

frottement μ_{Γ} allant de 0.2 à 1.2. Les figures 3.17 et 3.18 représentent les variations de K_{II} au cours du cycles de fretting pour 6 valeurs différentes de μ_{Γ} .

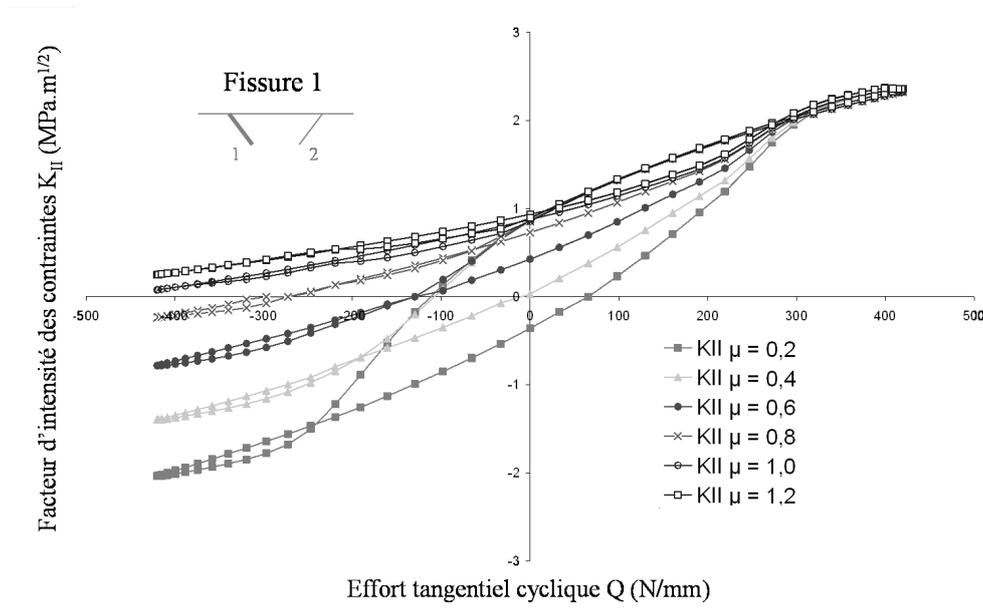


FIGURE 3.17: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM pour 6 valeurs différentes de μ_{Γ} : 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1 et 1.2.

Les variations des facteurs d'intensité des contraintes en mode I (K_I) sont indépendantes de la valeur de μ_{Γ} . En revanche, il influence fortement les valeurs des FIC en mode II. Plus le coefficient de frottement est élevé, plus l'amplitude $\Delta K_{II} = K_{IImax} - K_{IImin}$ est faible. En effet, le frottement réduit le glissement entre les faces de la fissure. Pour la fissure 1, K_{IImax} est indépendant de la valeur de μ_{Γ} alors que K_{IImin} augmente lorsque μ_{Γ} augmente. En effet, au début du cycle : $Q = +Q_{max}$, la fissure 1 est complètement ouverte et le frottement n'a aucune influence sur la sollicitation en mode II et la valeur de K_{II} . Pendant la phase de décharge (t_0 à t_{40}), les faces de la fissure 1 sont en contact et le frottement restreint le glissement. Les mêmes tendances sont observées pendant la phase de charge (t_{40} à t_{80}). Pour la fissure 2, K_{IImin} est constant et K_{IImax} diminue lorsque le frottement augmente.

La mixité des sollicitations est indépendante du coefficient de frottement. En effet, les valeurs de K_{II} sont quasi constantes lorsque K_I est non nul. Cependant, la prédominance du mode II décroît. Le rapport $\Delta K_I / \Delta K_{II}$ varie de 0.42 à 0.89 lorsque μ_{Γ} varie de 0.2 à 1.2. Les critères de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle tels que le critère $\Delta k_1^*(\theta)_{max}$ dépendent fortement de ce rapport. En conséquence, l'augmentation du coefficient de frottement entre les faces de la fissure accroît l'angle de bifurcation de la fissure 2 de 45° à 55° par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) (cf. tableau 3.4).

Remarque 19 : La convergence de la méthode NLLA-X-FEM est indépendante de la valeur du coefficient de frottement μ_{Γ} utilisée (cf. figure 2.25).

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

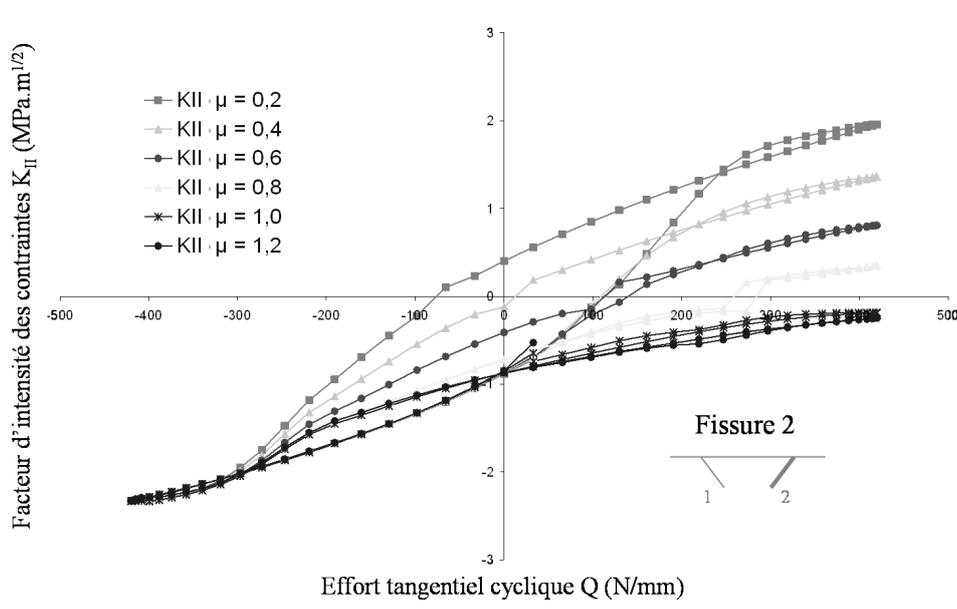


FIGURE 3.18: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 2 au cours du cycle de fretting calculée avec le modèle X-FEM pour 6 valeurs différentes de μ_{Γ} : 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1 et 1.2.

μ_{Γ}	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$\delta\theta_2$	45°	47°	49°	50°	52°	55°

TABLE 3.4: Direction de bifurcation $\delta\theta$ de la fissure 2 par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction de la valeur du coefficient de frottement interfacial μ_{Γ} pour le critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle de Hourlier 2 ($\Delta k_1^*(\theta)_{max}$).

3.1.5.3 Influence d'un chargement uniaxial additionnel

Dans cette section, une contrainte statique additionnelle de traction ($\sigma_t > 0$) ou de compression ($\sigma_t < 0$) est appliquée à l'éprouvette selon l'axe X. L'objectif est d'étudier son influence sur le comportement des fissures de fretting. Le coefficient entre les faces de la fissure est $\mu_{\Gamma} = 1.2$. Le problème de fatigue sous chargement de fretting est résolu pour des valeurs différentes de σ_t allant de $-D/2$ à $+D/2$, où $D = 230$ MPa est la limite de fatigue du matériau AL7075 étudié.

Les variations de K_I , de K_{II} en pointe de fissure 1 et de l'angle de phase $\Psi_M = \left| \arctan \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \right|$ au cours du cycle de charge sont tracées pour quatre valeurs de la contrainte volumique σ_t figures 3.19, 3.20 et 3.21 respectivement. Les résultats obtenus en pointe de fissure 2 sont similaires. Il ne sont pas tracés ici par mesure de clarté. L'angle de bifurcation $\delta\theta$ calculé avec les critère de Hourlier 2 ($\Delta k_1^*(\theta)_{max}$) en fonction de la valeur de σ_t est reporté dans le tableau 3.5.

Pour les fissures 1 et 2, l'amplitude de variation $\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$ du facteur d'intensité des

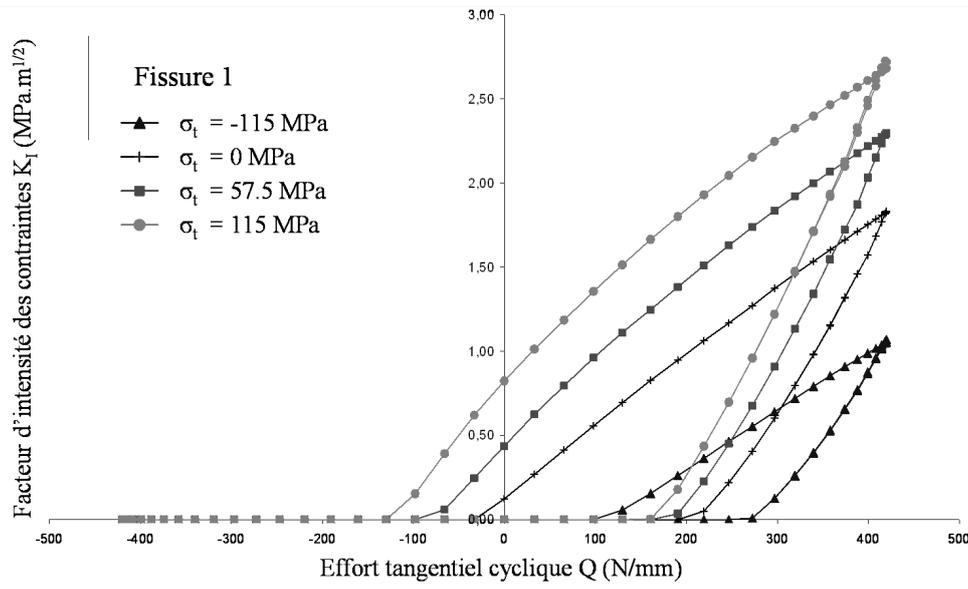


FIGURE 3.19: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode I en pointe de fissure 1 calculé avec le modèle X-FEM au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.

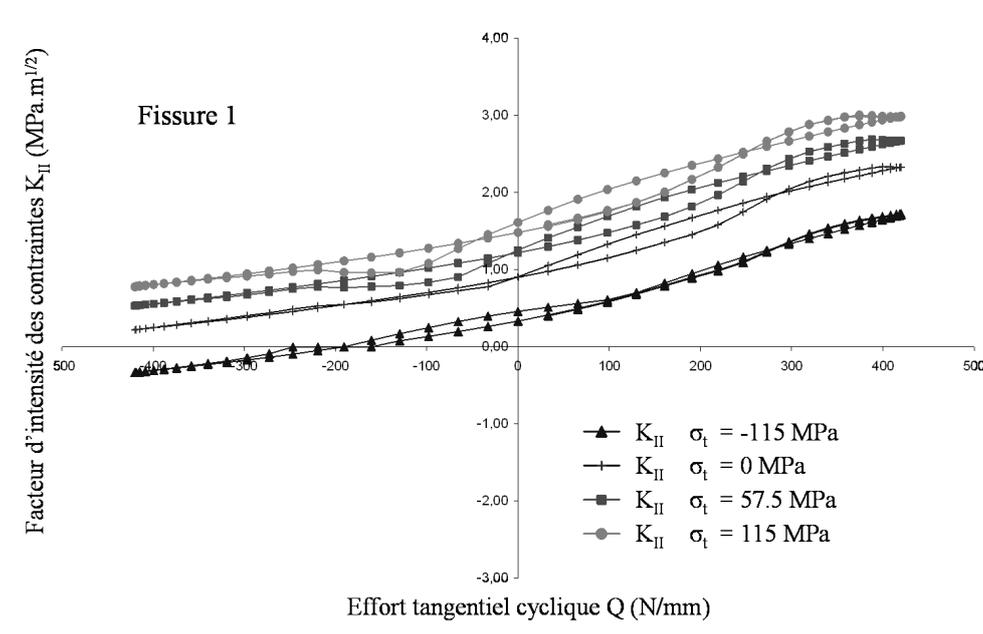


FIGURE 3.20: Variation du facteur d'intensité de contraintes en mode II en pointe de fissure 1 calculé avec le modèle X-FEM au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.

contraintes en mode I augmente lorsque σ_t augmente (cf. figure 3.19). Les valeurs de K_{II} au cours

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

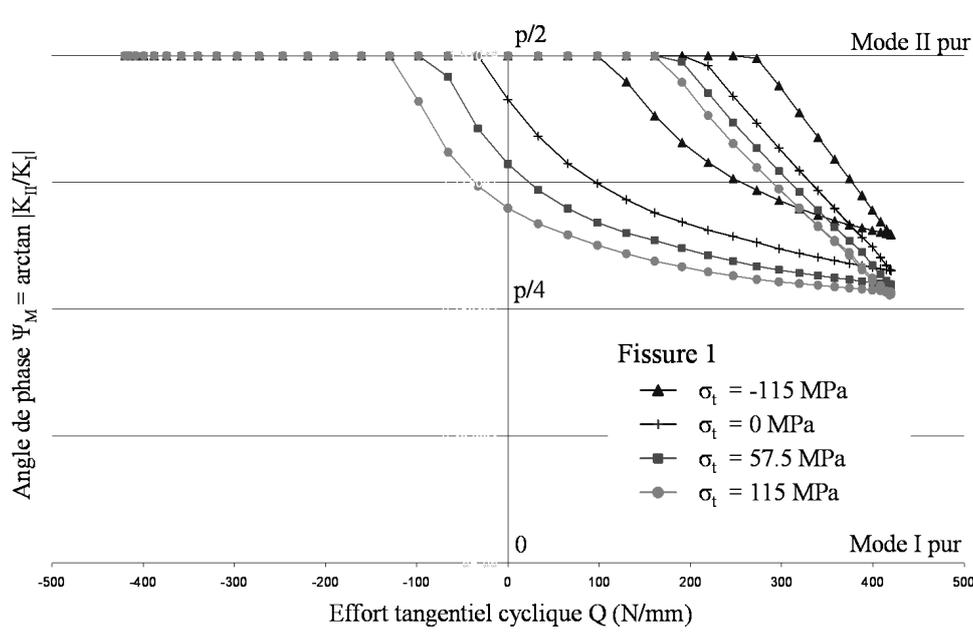


FIGURE 3.21: Variation de l'angle de phase Ψ_M des sollicitations en pointe de fissure 1 au cours du cycle de fretting pour 4 valeurs différentes de σ_t : -115 MPa ; 0 MPa ; 57.5 MPa et 115 MPa.

du cycle augmentent lorsque σ_t augmente (cf. figure 3.20). En effet, une contrainte de traction ($\sigma_t > 0$) favorise l'ouverture des fissures et réduit le frottement à l'interface. Le glissement local est donc plus élevé. En revanche, l'amplitude $\Delta K_{II} = K_{IImax} - K_{IImin}$ est indépendante de la valeur de σ_t . En conséquence, le rapport de mixité $\Delta K_I / \Delta K_{II}$ varie de 0,52 à 1,22 lorsque σ_t varie de -115 MPa (-D/2) à 115 MPa (+D/2). La prédominance du mode II décroît lorsque σ_t augmente (cf. figure 3.21). Cependant, cette contrainte de traction accroît l'angle de bifurcation de la fissure 2 : $\delta\theta$ varie de 49° pour $\sigma_t = -115$ MPa à 60° pour $\sigma_t = +115$ MPa (cf. figure 3.5). En effet, elle favorise la propagation des fissures dans la direction perpendiculaire à la direction de la charge.

σ_t	-115 MPa	0 MPa	115 MPa
$\delta\theta_2$	49°	55°	60°

TABLE 3.5: Direction de bifurcation $\delta\theta$ de la fissure 2 par rapport à la direction initiale ($\theta = 29^\circ$) en fonction de la valeur de la contrainte statique σ_t avec le critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle de Hourlier 2.

Le chargement en surface et la contrainte volumique ont une influence différente sur le comportement des fissures :

- Le chargement de fretting constitue la sollicitation en fatigue responsable de l'amorçage et de la propagation des fissures dans une zone confinée sous le contact. Son action décroît avec la profondeur. La croissance de la fissure peut éventuellement stopper.

- La contrainte volumique statique intensifie les sollicitations en fatigue en pointe de fissure dues au chargement tribologique. Elle permet la propagation des fissures au delà de la zone d'influence initiale du contact. Cette contrainte modifie également la mixité des sollicitations en pointe de fissure et le trajet de propagation.

Afin d'illustrer ces différents mécanismes de propagation, quatre exemples sont présentés. Le problème de fatigue sous chargement de fretting proposé ici est résolu pour différentes valeurs du coefficient de frottement interfacial μ_{Γ} et de la contrainte volumique σ_t . La direction de propagation est déterminée à l'aide du critère de direction de propagation de Hourlier 2 ($\Delta k_1^*(\theta)_{max}$). Les comportements des deux fissures étant symétriques, seuls les résultats pour la fissure 2 sont présentés.

- A - Le coefficient de frottement interfacial μ_{Γ} est égal à 0.2 et une contrainte de compression $\sigma_t = -115$ MPa est appliquée à l'éprouvette. 10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$ sont calculés (cf. figure 3.22). L'angle de bifurcation de la fissure 2 est $\delta\theta \cong 42^\circ$ par rapport à la direction initiale $\theta = 29^\circ$. L'angle β formé entre la fissure au voisinage du front et la surface est donc égal à 71° . Le parcours de propagation est ici majoritairement influencé par le chargement de fretting. La contrainte de compression statique appliquée restreint l'ouverture des fissures, ce qui diminue l'amplitude de K_I (cf. figure 3.19). La contrainte de compression réduit également le glissement relatif à l'interface et provoque une diminution des valeurs de K_{II} calculées en pointe de fissures.
- B - Une contrainte de compression $\sigma_t = -115$ MPa est appliquée à l'éprouvette. Le coefficient de frottement entre les faces de la fissures $\mu_{\Gamma} = 1.2$ est supérieur à celui de la configuration A. 10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$ sont calculés. Le frottement entre les faces de la fissure est important, ce qui diminue l'amplitude de K_{II} (cf. figure 3.18). La fissure 2 bifurque avec un angle $\delta\theta \cong 49^\circ$ par rapport à la direction initiale de la fissure, et $\beta = 78^\circ$ (cf. figure 3.23).
- C - Le coefficient de frottement interfacial μ_{Γ} est égal à 1.2. Aucune contrainte volumique n'est appliquée en dehors du chargement de fretting ($\sigma_t = 0$). 20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$ sont calculés. L'amplitude des facteurs d'intensité des contraintes est plus élevée que pour la configuration B et le rapport de mixité $\Delta K_I/\Delta K_{II}$ est supérieur. L'angle de bifurcation de la fissure 2 est $\delta\theta \cong 55^\circ$. La pointe de fissure forme un angle $\beta = 84^\circ$ avec la surface (cf. figure 3.24).
- D - Le coefficient de frottement interfacial μ_{Γ} est égal à 1.2. Une contrainte de traction $\sigma_t = +115$ MPa est appliquée à l'éprouvette. 20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$ sont calculés. La propagation des fissures est largement influencée par la contrainte de traction. Elles bifurquent perpendiculairement à la surface de contact : $\delta\theta \cong 60^\circ$ et $\beta \cong 90^\circ$ (cf. figure 3.25).

Les résultats présentés ci-dessus mettent en évidence deux zones de propagation des fissures de fatigue sous un chargement de fretting couplé avec une contrainte statique uniaxiale. La première correspond au stade II pour lequel le comportement des fissures est influencé majoritairement par le chargement de contact (cf. figure 1.8). Les fissures sont initialement inclinées avec un angle de 29° par rapport à la surface de contact. En fonction des paramètres de charge et du coefficient de frottement entre les faces des fissures, l'angle de propagation β est ensuite compris entre 70° et 90° par rapport à la surface, correspondant au stade III de la propagation des fissures de fretting.

Dans la suite de ce chapitre, des essais de fretting cylindre/plan réalisés dans le cadre de ce travail sont présentés. L'objectif est d'observer l'évolution des fissures (longueur, orientation) en

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

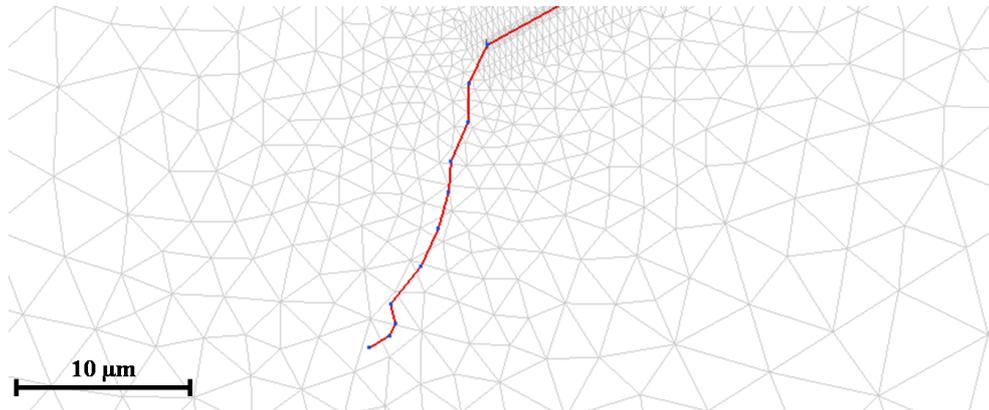


FIGURE 3.22: Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration A : $\mu_{\Gamma} = 0.2$ et $\sigma_t = -115$ MPa (10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).

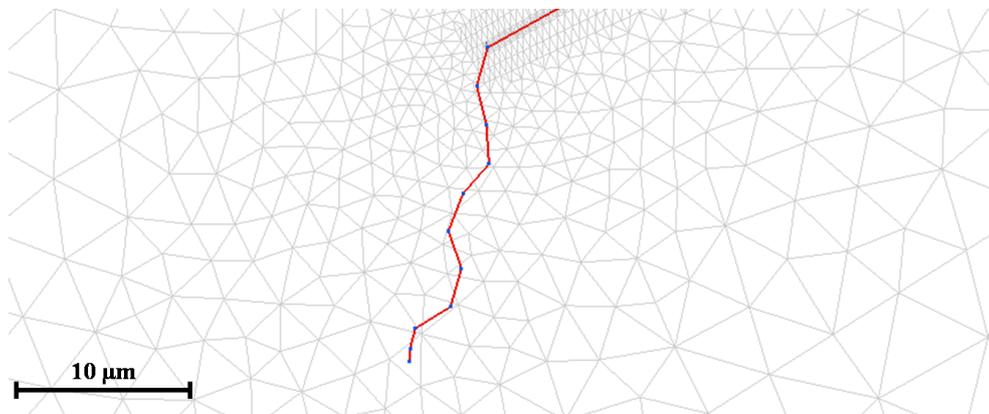


FIGURE 3.23: Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration B : $\mu_{\Gamma} = 1.2$ et $\sigma_t = -115$ MPa (10 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).

fonction des paramètres de chargement et d'extraire leur géométrie. La stratégie de prédiction de vie est alors appliquée à ce problème. L'objectif est ensuite de construire une loi de propagation en vitesse dédiée aux problèmes de fretting fatigue afin de simuler numériquement la propagation des fissures de fatigue pour ces essais.

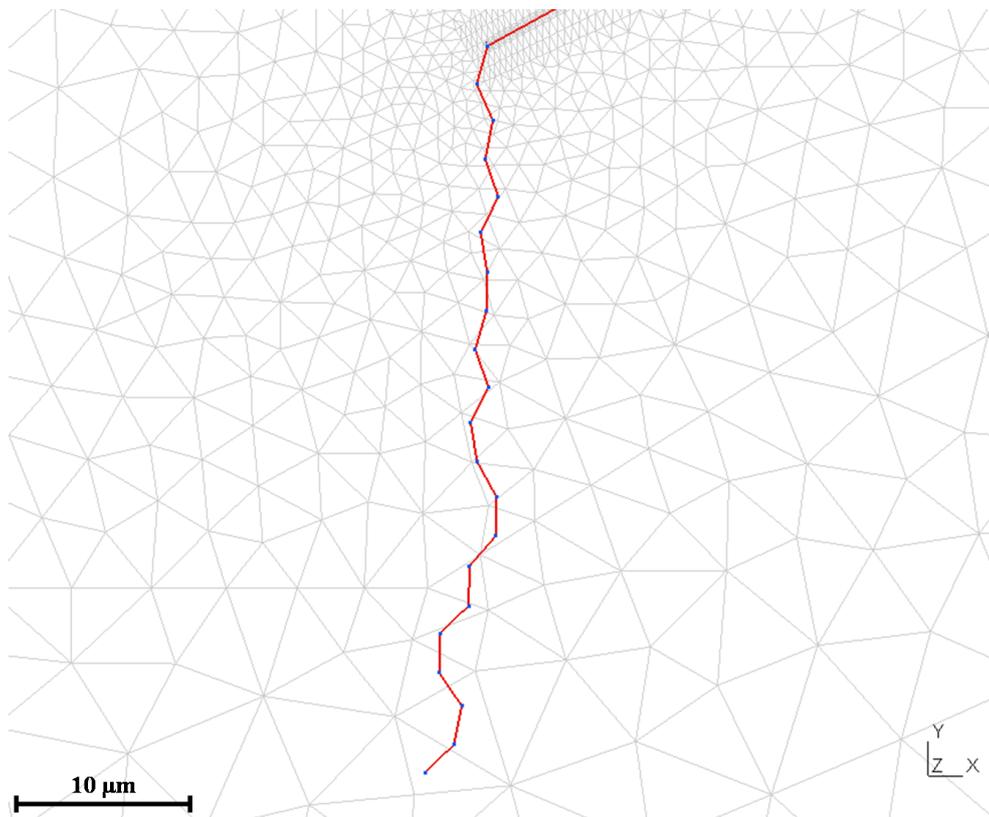


FIGURE 3.24: Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration C : $\mu_{\Gamma} = 1.2$ et $\sigma_t = 0$ (20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

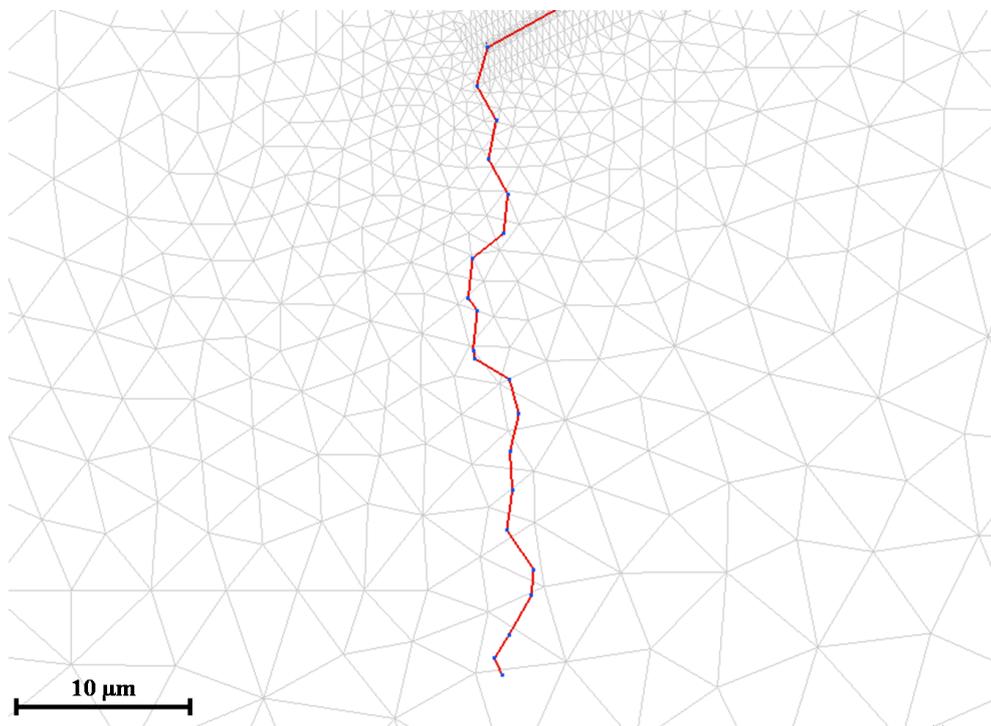


FIGURE 3.25: Parcours de propagation de la fissure 2 pour la configuration D : $\mu_{\Gamma} = 1.2$ et $\sigma_t = +115$ MPa (20 pas de propagation de $2 \mu\text{m}$).

3.2 Étude expérimentale de la propagation des fissures de fretting en configuration cylindre/plan

Une série d'essais de fretting précontraints a été réalisée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon [Con10]. L'objectif ici est d'obtenir précisément le trajet des fissures au cours des cycles de charge afin de construire ultérieurement une loi de propagation dédiée aux problèmes de fretting fatigue.

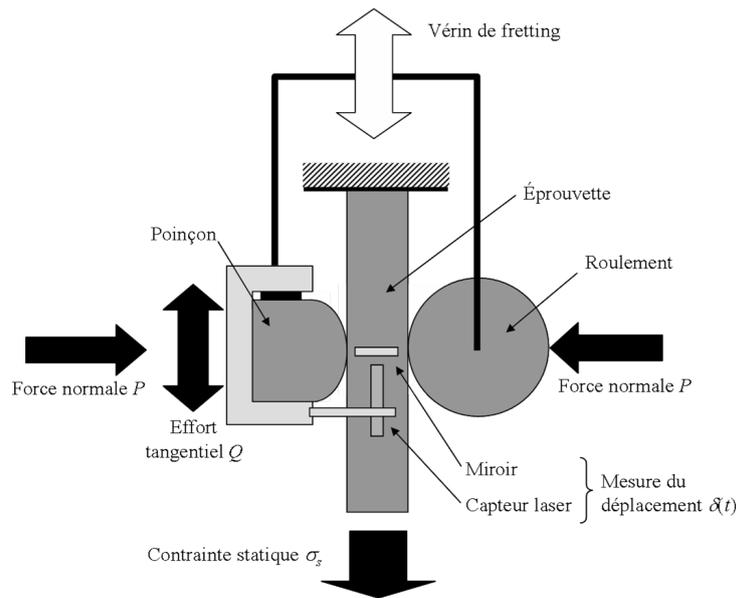


FIGURE 3.26: Représentation schématique du dispositif d'essai de fretting à deux vérins.

Le dispositif d'essai utilisé est schématisé dans la figure 3.26. Il comporte une machine de traction servo-hydraulique MTS à deux vérins. Une contrainte statique de traction σ_t est appliquée à l'éprouvette à l'aide du premier vérin. La section de l'éprouvette dans la zone d'intérêt est $8 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ (cf. figure 3.27). Un poinçon cylindrique de rayon $R = 80 \text{ mm}$ et de largeur $l = 8 \text{ mm}$ est mis en contact avec le plan rectifié de l'éprouvette par une force $P = 8\,000 \text{ N}$. Un roulement est mis en opposition du poinçon afin de limiter les sollicitations de flexion sur l'éprouvette. L'état des surfaces en contact est rectifié ($R_a = 0.4$). Le matériau étudié qui constitue l'éprouvette plane est un acier 35NCD16 traité thermiquement pour atteindre une limite à rupture $\sigma_R = 1270 \text{ MPa}$. Le matériau du poinçon est un acier 100C6 durci par traitement thermique pour atteindre une limite élastique $\sigma_{e0.2} = 1500 \text{ MPa}$. Les propriétés mécaniques de ces deux matériaux sont données dans les tableaux 3.6 et 3.7 respectivement.

L'ensemble poinçon-roulement est mis en mouvement cyclique par le second vérin à une fréquence $F = 13 \text{ Hz}$. L'amplitude du déplacement relatif δ entre l'éprouvette et le poinçon est mesuré à l'aide d'un capteur laser. L'effort tangentiel Q est déterminé au cours de l'essai par une mesure différentielle entre deux cellules de force liées à chaque extrémité de l'éprouvette. Les paramètres de charge sont choisis afin de se placer en régime de glissement partiel. La valeur de δ est asservie telle que $Q = 4000 \text{ N}$ pendant toute la durée de l'essai. Les paramètres d'essais sont répertoriés dans le tableau 3.8.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

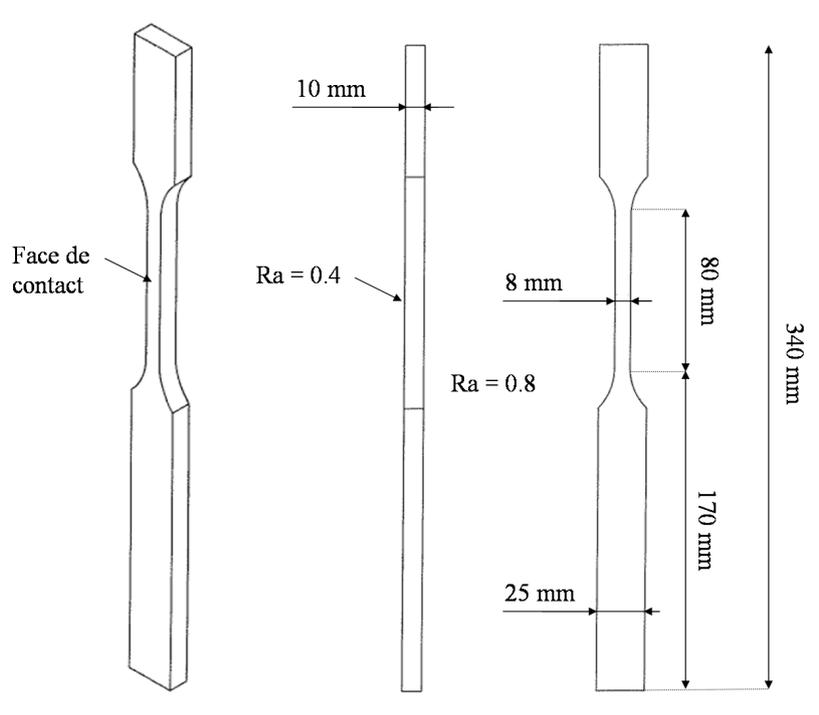


FIGURE 3.27: Géométrie et dimensions des éprouvettes en acier 35NCD16.

E	ν	σ_R	$\sigma_{e0.2}$	Dureté Hv	σ^{-1}	f^{-1}	t^{-1}
200 GPa	0.3	1270 MPa	1127 MPa	400	460 MPa	590 MPa	400 MPa

TABLE 3.6: Propriétés mécaniques de l'acier 35NCD16 constituant l'éprouvette.

E	ν	$\sigma_{e0.2}$	Dureté Hv
195 GPa	0.3	1500 MPa	813

TABLE 3.7: Propriétés mécaniques de l'acier 100C6 constituant le poinçon cylindrique.

Le mode d'endommagement principal est la fissuration avec une usure très faible de la surface de contact. Les traces de fretting observées sont composées d'une zone d'adhérence centrale de largeur $2c$ et d'une zone de micro-glissement en périphérie de la zone de contact de largeur $2a$ (cf. figure 3.28). Les valeurs de $a = 1.02$ mm et de $c = 0.62$ mm sont quasi constantes quelle que soit la contrainte de traction σ_t appliquée à l'éprouvette. Deux fissures principales s'amorcent en périphérie symétriquement par rapport au centre de la surface de contact.

R_C	P	Q_{max}	δ	F
80 mm	1000 N/mm	500 N/mm	$\approx 24 \mu\text{m}$	13 Hz

TABLE 3.8: Paramètres des essais de fretting fatigue.

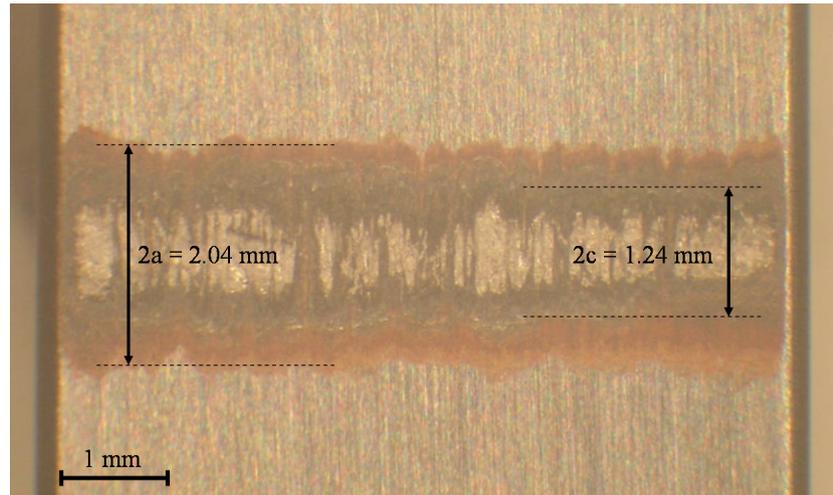


FIGURE 3.28: Trace de fretting obtenue après un essai de 200 000 cycles avec une contrainte de traction statique $\sigma_t = 180$ MPa. La zone d'adhérence ($c \cong 0.62$ mm) se distingue de la zone de micro-glissement caractéristique du régime de glissement partiel. L'usure de la surface de contact est très faible et la taille de la zone de contact ($a \cong 1.02$ mm) est quasi constante quels que soient la contrainte de traction appliquée et le nombre de cycles de l'essai.

L'observation in-situ de la propagation de ces fissures dans les matériaux métalliques par une technique non destructive telle que la micro-tomographie demeure complexe. En effet, cette technique requiert notamment de réaliser les essais à l'intérieur du dispositif d'observation et d'effectuer des rotations complètes de l'échantillon [BUF 05]. De plus, elle n'est pas applicable à tous les matériaux. En effet, la présence de précipités ou d'inclusions dans la matière permet, par une technique de corrélation d'images, de capturer les champs de déplacement des configurations initiale et déformée et de reconstituer la géométrie précise des fissures en 3D [RAN 10]. En l'absence de tels marqueurs, il est difficile d'observer les fissures de reconstituer précisément le scénario. Il est donc choisi ici d'analyser les essais conduits à différents nombres de cycles afin de reconstruire l'évolution des fissures au cours du temps. Après chaque essai, l'éprouvette post-mortem est découpée suivant un plan perpendiculaire à la trace de fretting (cf. figure 3.29). L'observation de plusieurs coupes d'un même échantillon donne des résultats similaires et permet de valider cette analyse. Une technique de numérisation d'image permet d'identifier précisément la géométrie de la fissure, i.e. longueur et angle de propagation.

Des essais ont été réalisés pour six valeurs de la contrainte de traction statique σ_t allant de 0 à 280 MPa. Les autres paramètres d'essais (R, P, Q et F) sont constants. On obtient alors six courbes

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

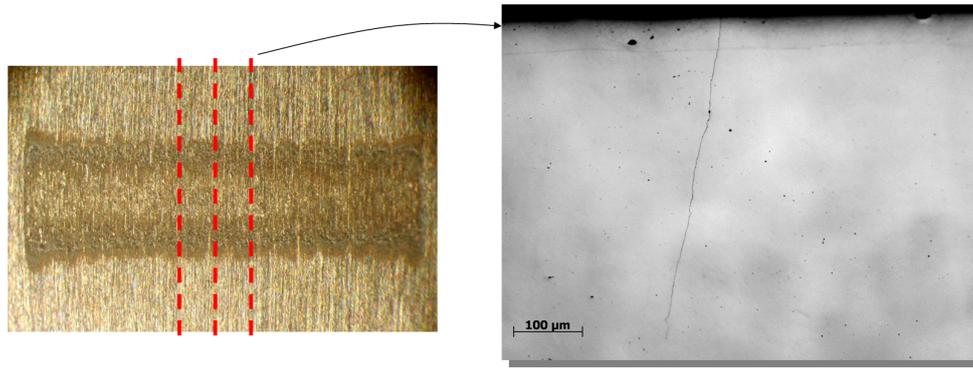


FIGURE 3.29: Coupe transversale de l'éprouvette fissurée post-mortem permettant l'observation de la géométrie des fissures en volume pour un essai de 500 000 cycles avec une contrainte de traction statique nulle. Ici, la fissure 2 (de droite) est représentée. Sa position en surface est $x = 0.95$ mm. Elle se propage en volume avec un angle de 77.96° par rapport à la surface.

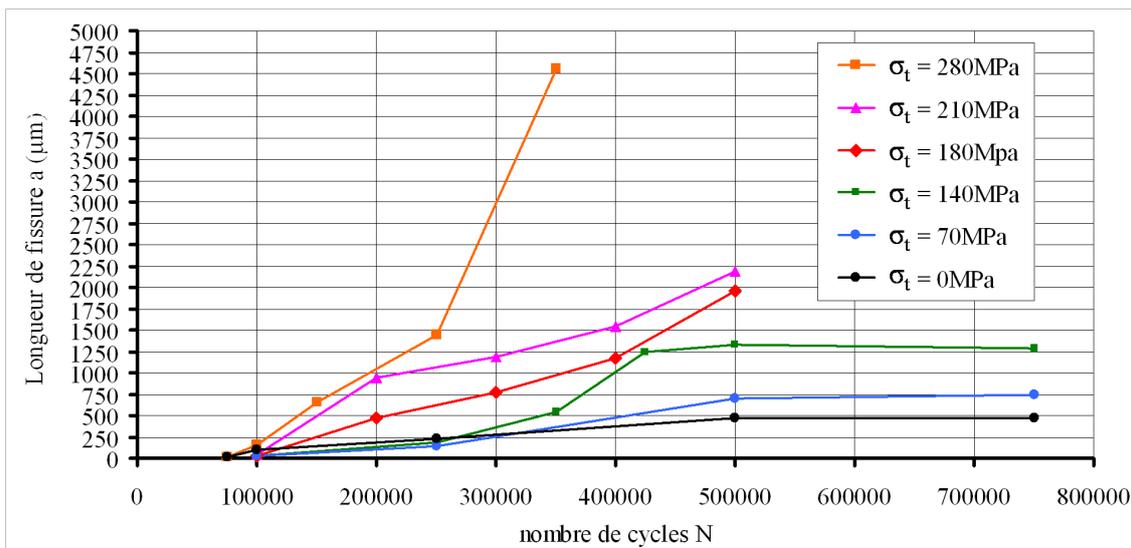


FIGURE 3.30: Évolution de la longueur a des fissures de fretting observées en fonction du nombre de cycles de charge N des essais et de la contrainte de traction volumique $\sigma_t = 0$; 70 ; 140, 180 ; 210 et 280 MPa.

de propagation, i.e. longueur des fissures a en fonction du nombre de cycles N , représentées figure 3.30. Ces résultats permettent d'étudier le taux de croissance des fissures en fonction des paramètres de charge et de la profondeur sous la surface. Pour des longueurs de fissure a inférieures à 1.5 mm, plus la contrainte de traction statique est importante, plus le taux de croissance des fissures da/dN est élevé. Il varie de $8.5e-03 \mu\text{m}/\text{cycle}$ pour $\sigma_t = 0$ MPa à $9.8e-03 \mu\text{m}/\text{cycle}$ pour $\sigma_t = 280$ MPa. Le comportement des fissures est principalement influencé par le chargement de fretting en surface. Il correspond au stade II de la propagation des fissures (cf. figure 1.8 et section 3.1.5.3). La contrainte de traction additionnelle intensifie les sollicitations de fatigue.

On observe alors deux comportements distincts :

- Pour une contrainte de traction σ_t inférieure à 180 MPa, la sollicitation en fatigue due au chargement de fretting décroît avec la profondeur et la propagation des fissures stoppe.
- Une contrainte de traction σ_t supérieure à 180 MPa permet aux fissures de se propager au delà de la zone d'influence initiale du contact, correspondant au stade III de la propagation des fissures sous chargement de fretting. Cette contrainte modifie également la mixité des sollicitations en pointe de fissure et le chemin de propagation (cf. section 3.1.5.3). Pour $\sigma_t = 280$ MPa, la fissure se propage avec un taux de croissance supérieur à $3e-02 \mu\text{m}/\text{cycle}$ perpendiculairement à la surface de contact (cf. figure 3.31).

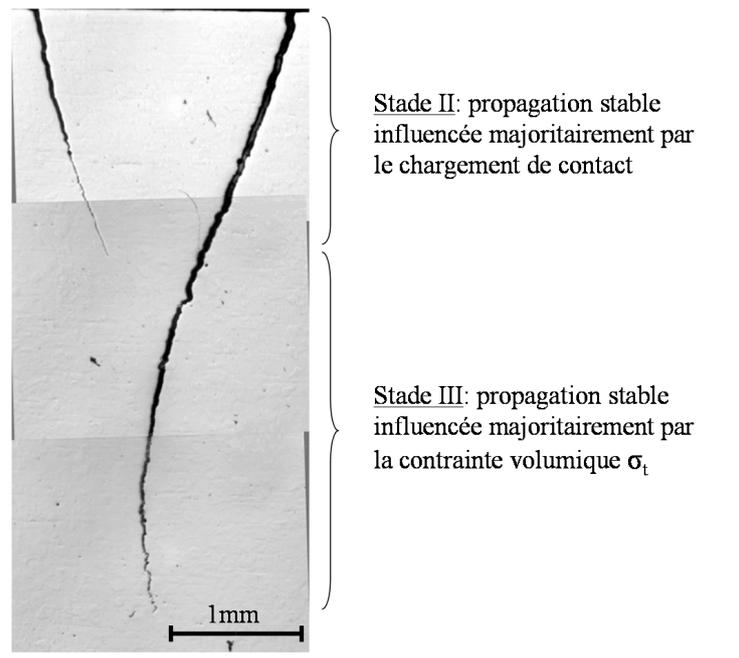


FIGURE 3.31: Observation métallographique en coupe de l'éprouvette fissurée pour un essai de fretting de 350 000 cycles avec une contrainte de traction $\sigma_t = 280$ MPa. Deux fissures s'amorcent et se propagent symétriquement par rapport au centre du contact, avec un angle d'environ 65° par rapport à la surface (stade II). Puis une fissure stoppe à 1.9 mm de profondeur. L'autre bifurque perpendiculairement à la surface et atteint une profondeur de 4.5 mm (stade III).

Cette étude expérimentale a permis d'observer les géométries des fissures de fretting à différents stades de leur propagation. Elle fournit une estimation de la longueur et de l'orientation des fissures en fonction du nombre de cycles de charge et de la contrainte de traction statique appliquée à l'éprouvette. Ces résultats peuvent donc être mis en relation avec les résultats de simulation numérique de ces essais afin de construire une loi de propagation.

Dans le cadre de la stratégie de prédiction de durée de vie proposée dans ce mémoire, ces résultats fournissent également la géométrie des fissures utilisée comme donnée d'entrée pour la simulation X-FEM. Les données de chargement du problème sont déterminées dans la section suivante par la résolution du problème de contact deux-corps.

3.3 Simulation numérique X-FEM 2D de la propagation de fissures expérimentale sous chargement de fretting

La stratégie de simulation numérique proposée dans ce mémoire est utilisée ici dans le but de construire une loi de propagation en fatigue multiaxiale à partir des résultats expérimentaux obtenus dans la section précédente, puis de simuler la propagation des fissures de fatigue.

3.3.1 Analyse du problème expérimental : Résolution du contact cylindre/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures

La méthode résolution du contact deux-corps présentée dans la section 3.1.2 est appliquée ici aux essais de fretting cylindre/plan décrits dans la section 3.2. Le cycle de fretting est discrétisé ici en 40 pas de temps t_n . À chaque pas de temps, les distributions de pressions normales $p(x)$ et des contraintes de cisaillement $q(x, t_n)$ sur la surface de contact sont calculées numériquement par la méthode présentée dans la section 3.1.2. Ici, la surface d'intérêt $x = [-1.208\text{mm}; +1.208\text{mm}]$ est divisée en 302 cellules de $8 \mu\text{m}$.

Le rayon de l'aire de contact est $a = 0.968 \text{ mm}$. La répartition des zones de glissement et d'adhérence ($c = 0.648 \text{ mm}$) déterminée numériquement est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Le coefficient de frottement local μ est égal à 0.9. On fait l'hypothèse que l'usure de surface est très faible et ne vient pas perturber la géométrie du contact ni faire varier la valeur du coefficient de frottement local μ . Le chargement cyclique est donc considéré comme monotone. Les distributions des contraintes normales $p(x)$ et tangentielles $q(x, t_n)$ sur la surface de contact ne varient pas au cours de l'essai.

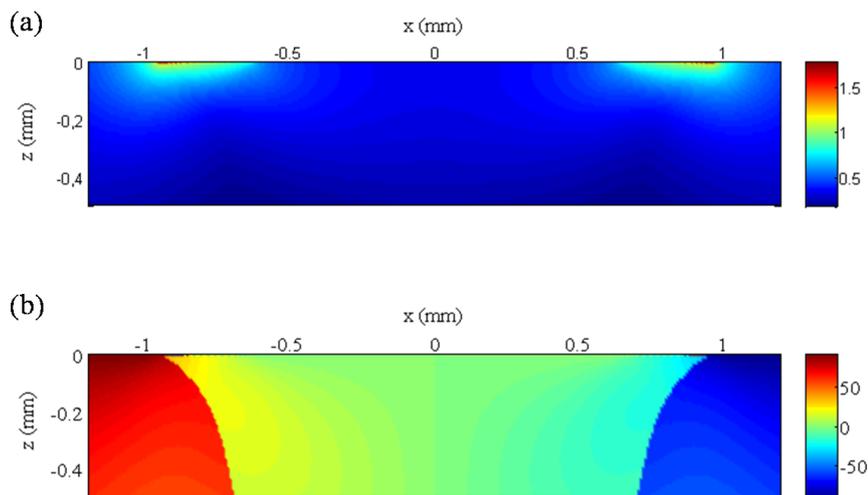


FIGURE 3.32: Distribution du risque d'amorçage d et de l'angle d'amorçage θ selon le critère de Dang Van dans le domaine sous la zone de contact.

Les champs de contrainte et de déformation sont calculés dans la zone d'intérêt sous le contact à partir du chargement des contraintes cycliques surfaciques. Le risque d'amorçage des fissures est déterminé en utilisant le critère de Dan Van (cf. section 3.1.3). Le risque d'amorçage d et l'angle d'amorçage θ dans le domaine d'intérêt pour une contrainte statique $\sigma_t = 0$ sont présentés figure 3.32. Le risque d obtenu est supérieur à 1 au voisinage des deux zones de micro-glissement situées de $x/a = -0.98$ à -0.72 et $x/a = 0.72$ à 0.98 . Les deux fissures principales s'amorcent en périphérie de la zone de micro-glissement aux positions $x_1 = -0.95$ mm et $x_2 = +0.95$ pour lesquelles la valeur du critère est maximale. L'angle d'amorçage calculé à ces positions est de $\pm 76^\circ$ par rapport à la surface de contact. Ce résultat est en bon accord avec les observations expérimentales.

Remarque 20 : *La contrainte de traction σ_t étant statique et appliquée avant le chargement de contact, elle ne modifie pas les champs des contraintes en surface. Elle a une influence négligeable sur la taille de la zone de contact a , sur la rapport de glissement c/a , et donc sur le lieu d'amorçage des fissures dans la zone de micro-glissement. Cela est vérifié expérimentalement. En revanche, plus σ_t est élevée, plus le risque d'amorçage d est élevé.*

3.3.2 Construction d'une loi de propagation expérimentale dédiée aux problèmes de fretting fatigue

L'objectif ici est de construire une loi de propagation en vitesse dédiée au problème de fissuration sous chargement de fretting pour l'acier 35NCD16 étudié.

À partir des résultats des essais cylindre/plan présentés dans la section 3.2, i.e. longueur des fissures en fonction du nombre de cycles de charge et de la contrainte de traction statique σ_t appliquée à l'éprouvette (cf. figure 3.30), le taux de croissance des fissures da/dN est déterminé pour chaque essai. On fait ici l'hypothèse que le taux d'accroissement des fissures est constant entre deux points expérimentaux des courbes tracées figure 3.30. Le nombre de point expérimentaux de cette première approche est limité. Il donne cependant une approximation convenable de l'évolution du taux de croissance des fissures au cours des essais.

Par exemple, on considère l'essai conduit à 250 000 cycles avec $\sigma_t = 140$ MPa. La longueur de la fissure mesurée expérimentalement est $a_{250K} = 181$ μ m. Le taux d'accroissement est :

$$\frac{da}{dN} = \frac{a_{350K} - a_{250K}}{350000 - 250000} = 3.65 \cdot 10^{-09} \text{ m/cycle} \quad (3.9)$$

En se basant sur la forme des lois de propagation en fatigue de type Paris (cf. section 1.2.6.1), et plus particulièrement sur les lois de propagation en fatigue tribologique utilisées dans de la littérature [RIB 07a], nous proposons de déterminer les coefficients C , m et b de la loi de propagation en mode mixte (I+II) de la forme suivante :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \text{avec} \quad \Delta K = \sqrt{\Delta K_I^2 + b \cdot \Delta K_{II}^2} \quad (3.10)$$

où C et m sont des constantes intrinsèques au matériau et au type de sollicitations et b est généralement lié à la mixité des sollicitations.

Les essais sont modélisés en 2D (cf. section 3.1.4) en appliquant la stratégie de simulation numérique proposée dans ce mémoire. Le chargement de fretting (i.e. les distributions de pressions normales $p(x)$ et de contraintes de cisaillement $q(x, t_n)$ sur la surface de contact) déterminé dans

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

la section précédente est utilisé comme donnée d'entrée du modèle X-FEM à deux échelles avec contact et frottement interfacial. Les géométries des fissures expérimentales obtenues par observation métallographique des coupes transversales des échantillons sont considérées. Le cycle de fretting est discrétisé ici en 40 pas de temps. On considère la loi de contact unilatéral et un frottement de Coulomb $\mu_{\Gamma} = 0.3$ entre les faces des fissures. Les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} sont calculés pour un cycle de chargement complet.

Remarque 21 : Ici, la valeur du coefficient de frottement μ_{Γ} entre les faces des fissures est inconnue a priori. Elle est définie arbitrairement. Il est effectivement très difficile de l'évaluer expérimentalement car les fissures se situent à l'interface de contact cylindre/plan et l'amplitude du glissement interfacial ne peut être mesurée in-situ. Néanmoins, il a été montré dans la section 3.1.5.2 que la valeur de μ_{Γ} n'a pas d'influence sur ΔK_I et ne fait varier que ΔK_{II} pour un problème de fissuration sous chargement de fretting donné. La valeur du coefficient b de la loi de propagation en vitesse a donc un effet correctif sur l'approximation de μ_{Γ} .

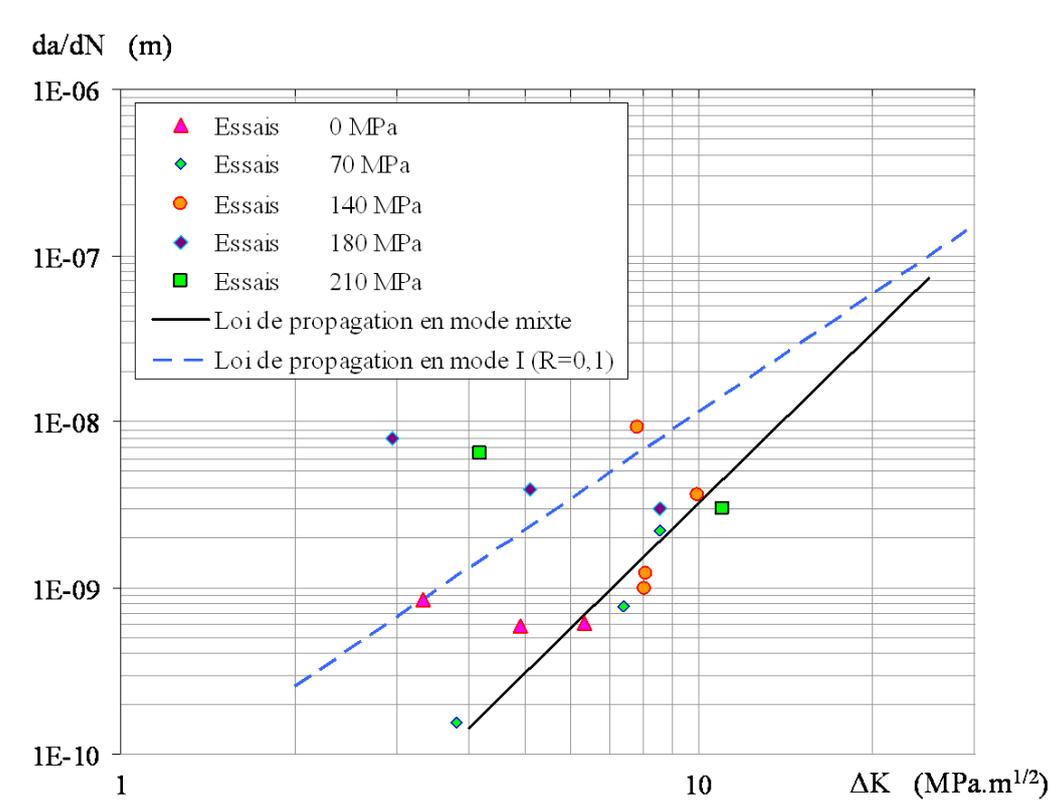


FIGURE 3.33: Taux d'accroissement expérimental des fissures da/dN en fonction de la valeur de $\Delta K = \sqrt{\Delta K_I^2 + b \cdot \Delta K_{II}^2}$ calculée numériquement pour différentes valeurs de σ_t ; Courbe de la loi de propagation en mode mixte (3.10) construite à partir des résultats des essais de fretting et de la simulation numérique X-FEM de ces essais ($C = 1.3 \cdot 10^{12}$, $m = 3.4$ et $b = 0.79$) ; Courbe de la loi de propagation en fatigue conventionnelle en mode I ($R = 0.1$) pour l'acier 35NCD16 (échelles logarithmiques).

Les coefficients $C = 1.3 \cdot 10^{12}$, $m = 3.4$ et $b = 0.79$ fournissent une bonne approximation numérique du taux d'accroissement expérimental des fissures da/dN quelle que soit la contrainte de traction statique σ_t appliquée à l'éprouvette. La figure 3.33 représente d'une part les points expérimentaux obtenus à partir de la valeur numérique de $\Delta K = \sqrt{\Delta K_I^2 + b \cdot \Delta K_{II}^2}$ et du taux d'accroissement da/dN calculé à partir des résultats des essais, et d'autre part la courbe de la loi de propagation (3.10) construite à partir des résultats de la simulation numérique X-FEM des essais. La courbe de la loi de Paris expérimentale de l'acier 35NCD16 pour un chargement de fatigue conventionnelle en mode I pur ($R = 0.1$) en milieu ambiant [BOU 89] est également tracée.

La loi de propagation en mode mixte proposée est en accord avec la majorité des points expérimentaux. Cependant, pour les fissures dont la taille est supérieure à $1\,500\ \mu\text{m}$, les points expérimentaux sont plus proches de la courbe de la loi de propagation en fatigue conventionnelle en mode I. Comme nous l'avons vu, l'influence du chargement de fatigue de contact décroît avec la profondeur. Au delà d'une certaine profondeur, les fissures se propagent en mode I perpendiculairement à la surface de contact sous l'influence majoritaire de la contrainte de traction σ_t , correspondant au stade III de la propagation des fissures sous chargement de fretting (cf. figure 1.8). Le chargement cyclique en surface influence peu la mixité des sollicitations en pointe de fissures à ce stade. Le comportement des fissures se rapproche alors de celui en fatigue conventionnelle en mode I.

Une loi expérimentale de propagation en vitesse des fissures sous chargement de fretting a été construite à partir des résultats de la modélisation X-FEM 2D avec contact et frottement des essais de fretting fatigue. Elle est en accord avec les lois issues de la littérature pour la fatigue conventionnelle (uniaxiale). Deux comportements différents ont été identifiés en fonction de la longueur des fissures. Le comportement des fissures de petite taille sous la zone de contact (stade II, cf. figure 1.8) peut être décrit à l'aide de la loi de propagation en mode mixte sous chargement de fretting proposée (3.10). Au delà de la zone d'influence des sollicitations tribologiques (stade III), la fissure se propage selon une loi en fatigue uniaxiale perpendiculairement à la surface. Ces données essentielles pour la simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures de fatigue sous chargement de fretting. Un exemple est présenté dans la section suivante. L'objectif est de retrouver numériquement le trajet de propagation expérimental des fissures obtenu dans la section 3.2.

3.3.3 Simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue

Un exemple de simulation de la propagation des fissures expérimentales est présenté ici. On considère l'essai pour lequel la contrainte de traction est $\sigma_t = 70\ \text{MPa}$. Les fissures observées expérimentalement pour des essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles sont présentées figure 3.34. Les longueurs a de ces fissures en fonction du nombre de cycles de charge sont données dans le tableau 3.9 (cf. figure 3.30). Les fissures ne se propagent pas au delà d'une longueur de $750\ \mu\text{m}$ pour cet essai. Elles restent donc dans le domaine de validité de la loi expérimentale de propagation en mode mixte (3.10) déterminée dans la section précédente. La géométrie des fissures déterminée dans la section 3.2 pour l'essai conduit à 100 000 cycles ($a = 30\ \mu\text{m}$, $\theta = 67.7^\circ$) est utilisée comme donnée d'entrée initiale (cf. figure 3.34.a) pour la simulation X-FEM

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

numérique des essais. L'objectif ici est de comparer les résultats de la simulation numérique de la propagation des fissures sous chargement de fretting fatigue et ceux des essais correspondants.

Nombre de cycles	Longueur de la fissure a
100 000	30 μm
250 000	146 μm
500 000	700 μm
750 000	739 μm

TABLE 3.9: Longueurs a des fissures mesurées expérimentalement en fonction du nombre de cycles de charge avec $\sigma_t = 70$ MPa.

Le problème est résolu pour chacune des 40 étapes de chargement avec une précision de 10^{-4} en considérant l'indicateur d'erreur η (2.34). On considère la loi de contact unilatéral et un frottement de Coulomb $\mu_f = 0.3$ entre les faces des fissures. Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en pointe de fissure indique que le mode I est prédominant pour ce problème. On choisit ici d'utiliser le critère de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle de Hourlier 1 ($k_1^*(\theta, t)_{max}$) (cf. paragraphe 1.2.6.3). La simulation de la propagation des fissures est conduite en plusieurs étapes. Pour réduire les temps de calcul, le pas de propagation da varie en fonction de la longueur de la fissure. On réalise 12 pas de 5 μm , 10 pas de 8 μm , 7 pas de 18 μm et 15 pas de 20 μm . La figure 3.35 représente les trajets de la fissure 2 (de droite) issus de la simulation numérique de la propagation des fissures et des mesures expérimentales entre 100 000 et 500 000 cycles.

De 100 000 à 250 000 cycles, la longueur de la fissure calculée numériquement ($a_{250Knum} = 242 \mu\text{m}$) est supérieure celle mesurée expérimentalement ($a_{250Kexp} = 146 \mu\text{m}$). En revanche, la longueur de la fissure calculée numériquement ($a_{500Knum} = 647 \mu\text{m}$) entre 250 000 et 500 000 cycles est légèrement inférieur à la longueur mesurée ($a_{250Kexp} = 700 \mu\text{m}$). L'erreur commise par l'approximation linéaire par morceaux de l'évolution du taux de croissance expérimental (3.9) et l'utilisation de pas de propagation supérieurs à 1% de la longueur de la fissure sont à l'origine de cet écart. Le critère ($k_1^*(\theta, t)_{max}$) utilisé donne une approximation correcte de la direction de propagation des fissures. Globalement, la simulation de la propagation des fissures est en bon accord avec les mesures expérimentales. Ces résultats démontrent la validité de la stratégie numérique proposée dans ce mémoire pour simuler la propagation des fissures sous chargement de fretting.

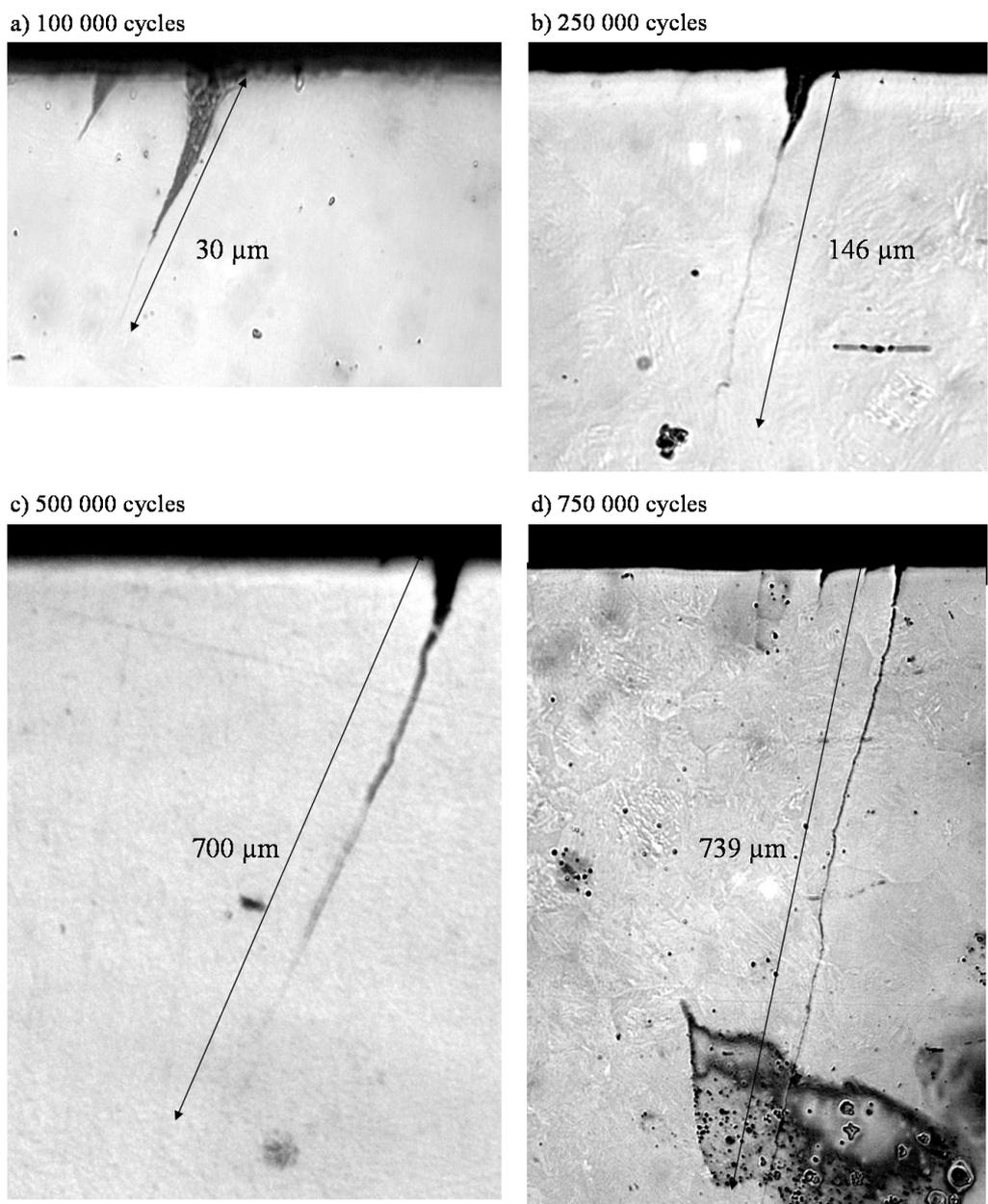


FIGURE 3.34: Coupes métallographiques des éprouvettes des essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles pour une contrainte de traction $\sigma_t = 70$ MPa. La fissure 2 (de droite) est représentée.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

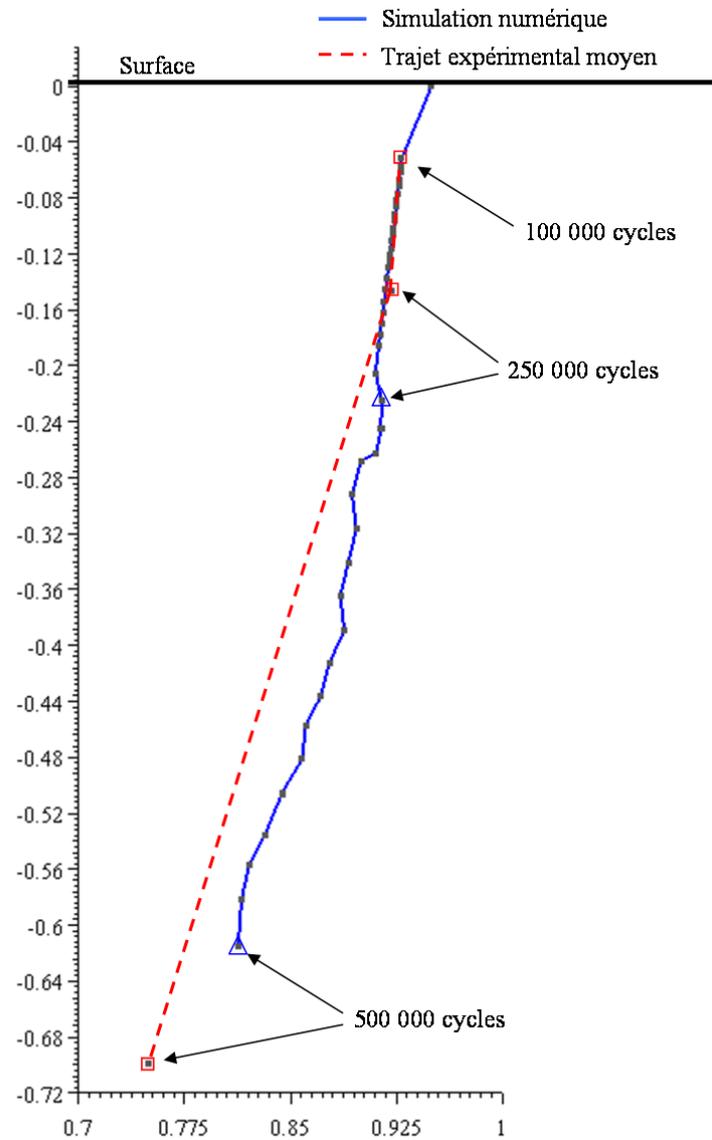


FIGURE 3.35: Trajet de la fissure 2 calculé à partir de la simulation numérique X-FEM de l'essai cylindre/plan avec $\sigma_t = 70$ MPa et trajet expérimental moyen observé par coupes métallographiques des échantillons.

Bilan :

La stratégie multi-modèles proposée dans ce mémoire a été appliquée à la simulation de la propagation de fissures en fatigue sous chargement de fretting. Des essais de fretting réalisés dans le cadre de ce travail ont permis de caractériser l'évolution de la géométrie de fissures (longueur et orientation) en fonction des paramètres de charge, notamment grâce à une expertise par coupes métallographiques. L'analyse des données expérimentales des essais a permis de déterminer les contraintes cycliques en surface. Ces résultats ont été utilisés comme données d'entrée pour la modélisation élément finis étendus de ces problèmes de fissuration en fatigue.

Le modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce mémoire permet de capturer précisément l'évolution des non linéarités de contact avec frottement à l'interface des fissures. La convergence du modèle est optimisée par l'utilisation du solveur stabilisé NLLA et du critère d'erreur local (2.34). Les facteurs d'intensité des contraintes ont été calculés précisément à l'aide d'une intégrale d'interaction en 2D. Une loi de propagation dédiée aux problèmes de fretting fatigue et adaptée à l'acier 35NCD16 étudié ici, a été construite en couplant les résultats des mesures expérimentales et ceux de la modélisation numérique des essais. La simulation de la propagation des fissures sous chargement de fretting a ensuite été conduite en 2D. Les résultats montre une bonne adéquation entre les résultats des essais et ceux la simulation X-FEM de la propagation des fissures (cf. figure 3.35).

La stratégie proposé constitue un outil numérique efficace pour la prédiction de la durée de vie des composants de structure soumis aux problèmes de fissuration par fretting fatigue. Le travail de ce chapitre 3 a été conduit en 2D. Toutefois, les problèmes de fretting requierent généralement une modélisation tridimensionnelle. En effet, la mixité des sollicitations et les phénomènes non linéaires couplés tels que le contact avec frottement interfacial génèrent des fissures non planes aux géométries 3D complexes. L'objectif du chapitre 4 de ce manuscrit est de montrer les performances de la stratégie développée pour la modélisation numérique tridimensionnelle des problèmes de fissuration sous chargement de fretting.

3. Études expérimentale et numérique bidimensionnelles couplées de la propagation des fissures sous chargement de fretting-fatigue

Chapitre 4

Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

Deux séries d'essais de fretting fatigue en configuration sphère/plan avec différents paramètres de charge et différents matériaux ont été réalisés dans le cadre de ce projet. Les géométries tridimensionnelles spécifiques des fissures de fretting à différents stades de propagation sont reconstituées à partir des coupes métallographiques post-mortem des éprouvettes. La stratégie de simulation numérique dédiée aux problèmes de fretting proposée dans le chapitre 3 est étendue ici aux problèmes tridimensionnels. À partir des données d'essais enregistrées (Q - δ) et en quantifiant l'énergie dissipée à l'interface dans l'anneau de glissement [FOU 95], l'évolution du frottement local μ est déterminée. L'aire de contact, les distributions de pression normale et de cisaillement cyclique ainsi que la répartition glissement-adhérence sont déterminées. Le risque d'amorçage des fissures en surface et en volume est analysé à partir des champs des contraintes et des déformations calculés. Ces conditions de chargement et les faciès de fissuration expérimentaux 3D sont utilisés comme données d'entrée pour la simulation numérique X-FEM multi-échelle de ces essais. Les géométries 3D complexes des fissures expérimentales sont décrites précisément par la méthode des fonctions de niveau. L'objectif est de démontrer les performances du modèle et sa capacité à capturer précisément la solution du problème de contact entre les faces des fissures en trois dimensions. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés le long des fronts des fissures au cours du cycle afin d'étudier numériquement la propagation des fissures de fatigue sous chargement multiaxial non proportionnel.

Sommaire

4.1 Simulation X-FEM 3D d'un essai de fretting fatigue	135
--	-----

4.1.1	Essais de fretting fatigue sphère/plan	135
4.1.2	Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures	137
4.1.3	Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue	140
4.1.4	Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	147
4.2	Étude expérimentale et numérique X-FEM de la propagation tridi- mensionnelle des fissures sous chargement de fretting fatigue	149
4.2.1	Essais de fretting fatigue sphère/plan précontraints : étude expéri- mentale de la propagation des fissures	149
4.2.2	Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures.	153
4.2.3	Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue	154

La stratégie de simulation numérique de la propagation des fissures sous chargement de fretting proposée dans le chapitre 3 est étendue ici aux problèmes tridimensionnels.

Deux séries d'essais de fretting fatigue ont été conduites dans le cadre de ce travail. La première a pour but d'extraire les géométries tridimensionnelles des fissures de fretting. La simulation numérique en trois dimensions de ces essais est ensuite réalisée. La seconde est ciblée sur l'analyse de la propagation des fissures en trois dimensions sous chargement de fretting fatigue.

4.1 Simulation X-FEM 3D d'un essai de fretting fatigue

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la première série d'essais réalisée au Centre de Recherche et d'Ingénierie SKF (Engineering and Research Center, ERC) à Nieuwegein aux Pays-Bas,

4.1.1 Essais de fretting fatigue sphère/plan

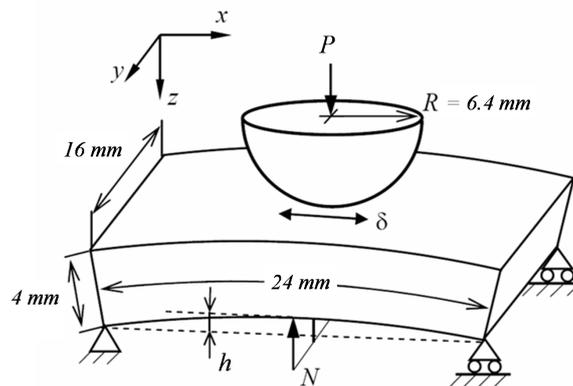


FIGURE 4.1: Géométrie, chargement et conditions aux limites des essais de fretting sphère/plan ERC-SKF.

Ces essais ont été réalisés sur un banc expérimental dédié à l'analyse des problèmes de fretting au Centre de Recherche et d'Ingénierie SKF. Une bille de rayon $R = 6.4 \text{ mm}$ est mise en contact avec une éprouvette parallélépipédique de dimensions $(24 \text{ mm} \times 16 \text{ mm} \times 4 \text{ mm})$ avec une force $P = 120 \text{ N}$ (cf. figure 4.1). Un déplacement cyclique sinusoïdal d'amplitude $\delta = 9 \text{ }\mu\text{m}$ et de fréquence $F = 20 \text{ Hz}$ est imposé à la bille. Dans le but d'accélérer le phénomène d'amorçage des fissures, une contrainte de flexion statique $\sigma_f = 440 \text{ MPa}$ est également imposée à l'éprouvette plane. Le matériau étudié est un acier de roulement de module de Young $E = 210 \text{ GPa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Les surfaces en contact sont polies et nettoyées.

La force tangentielle Q générée par le déplacement relatif des deux corps en contact est mesurée pendant la durée des essais à l'aide d'une cellule de force liée à l'éprouvette. Cette mesure permet de calculer le rapport entre les charges tangentielle et normale : $f = Q/P$. f est égal au coefficient de frottement local μ en condition de glissement total et inférieur à μ en condition de glissement partiel (en présence d'une zone d'adhérence). Les paramètres d'essais (P et δ) ont été sélectionnés afin de se placer en élasticité linéaire et en régime de glissement partiel à l'interface

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

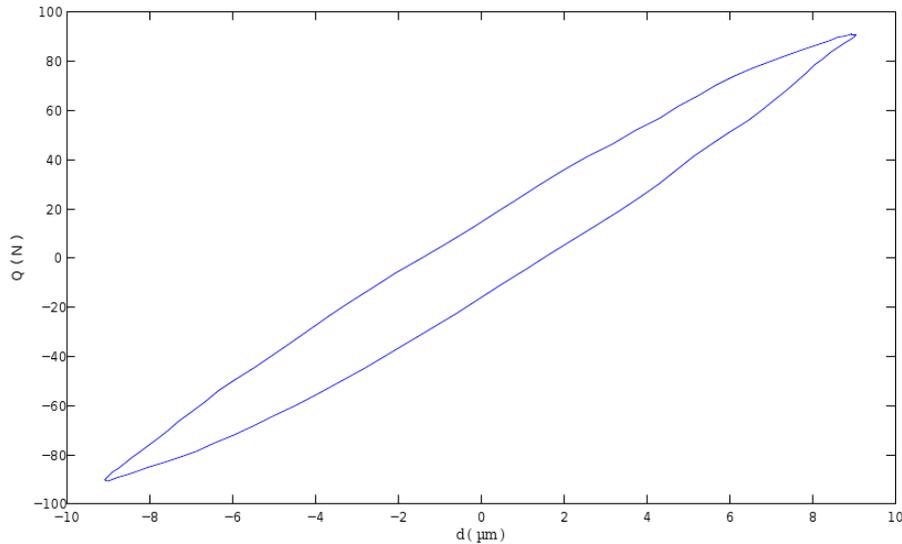


FIGURE 4.2: Boucle d'hystérésis (Q - δ) de fretting obtenue à partir de la mesure expérimentale de l'effort tangent et du déplacement relatif cyclique.

entre les deux corps pendant toute la durée des essais. En effet, la forme allongée des boucles d'hystérésis (Q - δ) tracées à partir des données expérimentales est représentative d'une condition de glissement partiel (cf. figure 4.2). L'amorçage des fissures est effectivement l'endommagement majoritaire. L'usure de la surface de contact est très faible. L'effort tangentiel maximum enregistré est $Q_{max} = 95$ N. Les données de ces essais sont répertoriées dans le tableau 4.1.

E	ν	P	Q_{max}	σ_f	F	δ
210 GPa	0.3	120 N	95 N	440MPa	20 Hz	$9 \mu\text{m}$

TABLE 4.1: Propriétés mécaniques de l'acier de roulement étudié et paramètres des essais de fretting précontraints.

Les traces des essais de fretting conduits à 30 000 cycles, 50 000 cycles et 70 000 cycles sont présentées dans la figure 4.3. La zone d'adhérence au centre se distingue de la zone de micro-glissement annulaire. Deux fissures principales s'amorcent en périphérie de la zone de contact symétriquement par rapport au centre de la trace. Elles se propagent en surface selon une trajectoire semi-elliptique conformément aux résultats observés lors d'essais similaires [CAD 05, DUB 03].

Les géométries des fissures tridimensionnelles en volume sont extraites par une technique de reconstitution 3D à partir de coupes métallographiques. Des essais sont conduits pour différents nombres de cycles. Les éprouvettes post-mortem sont ensuite découpées selon des plans parallèles au plan médian (X,Z) de coordonnée y_i . Puis les géométries des fissures en 3D sont reconstituées à partir des images métallographiques de ces coupes transversales (cf. figure 4.4). Contrairement aux essais cylindre/plan pour lesquels la géométrie des fissures est quasi constante le long de la

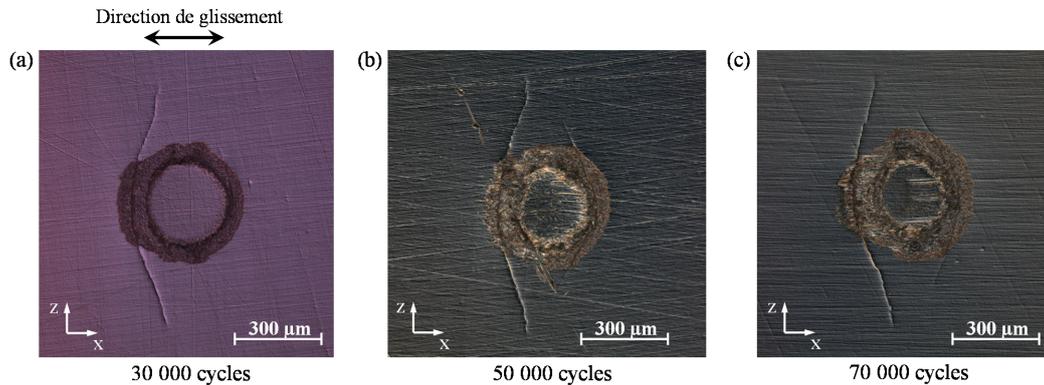


FIGURE 4.3: Traces de fretting pour les essais sphère/plan conduits à (a) $N = 30\,000$ cycles, (b) $N = 50\,000$ cycles et (c) $N = 70\,000$ cycles.

trace de fretting, la géométrie de la fissure (longueur et orientation) dépend ici de la position y_i du plan de coupe. Une attention particulière est donc portée à la réalisation de ce procédé afin d'obtenir une expertise précise de la géométrie expérimentale des fissures tridimensionnelles en volume.

Les essais réalisés sont conduits pour un nombre de cycles variant de 2 000 à 200 000. Les résultats des essais pour lesquels les fissures sont suffisamment longues et observables et pour lesquels l'éprouvette n'a pas rompu ($N = 30\,000$, $50\,000$ et $70\,000$ cycles) sont présentés figure 4.5. Ces résultats permettent de suivre la progression des fissures au cours du temps pour les paramètres de chargement donnés. Les premières macro-fissures sont visibles en surface à partir de 2500 cycles environ, puis elles se propagent rapidement en volume jusqu'à 30 000 cycles sous l'influence couplée du chargement de fretting et de la contrainte volumique. Les vitesses de propagation sont moins importantes de 30 000 à 70 000 cycles. Au delà, la propagation d'une des deux fissures devient instable et conduit à la rupture de l'éprouvette.

Note : Des essais supplémentaires en conditions identiques ont permis de démontrer le fort taux de reproductibilité et la bonne précision de ces résultats d'essais.

Les géométries tridimensionnelles des fissures sont donc extraites précisément à différents stades de propagation à partir de l'observation de coupes métallographique transversales. Ces géométries seront utilisées dans la section 4.1.3 comme données d'entrée pour le modèle X-FEM via la technique de représentation par fonctions de niveau. Dans le cadre de la stratégie de prédiction de durée de vie proposée, la première étape est la détermination du chargement surfacique en trois dimensions associé au contact sphère/plan à partir des données des essais.

4.1.2 Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures

Dans cette section, la méthode de résolution du contact deux-corps présentée dans la section 3.1.2 est appliquée au problème tridimensionnel sphère/plan afin de déterminer les champs de contraintes en surface et en volume dans la zone d'intérêt et de calculer le risque d'amorçage des fissures de fretting.

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

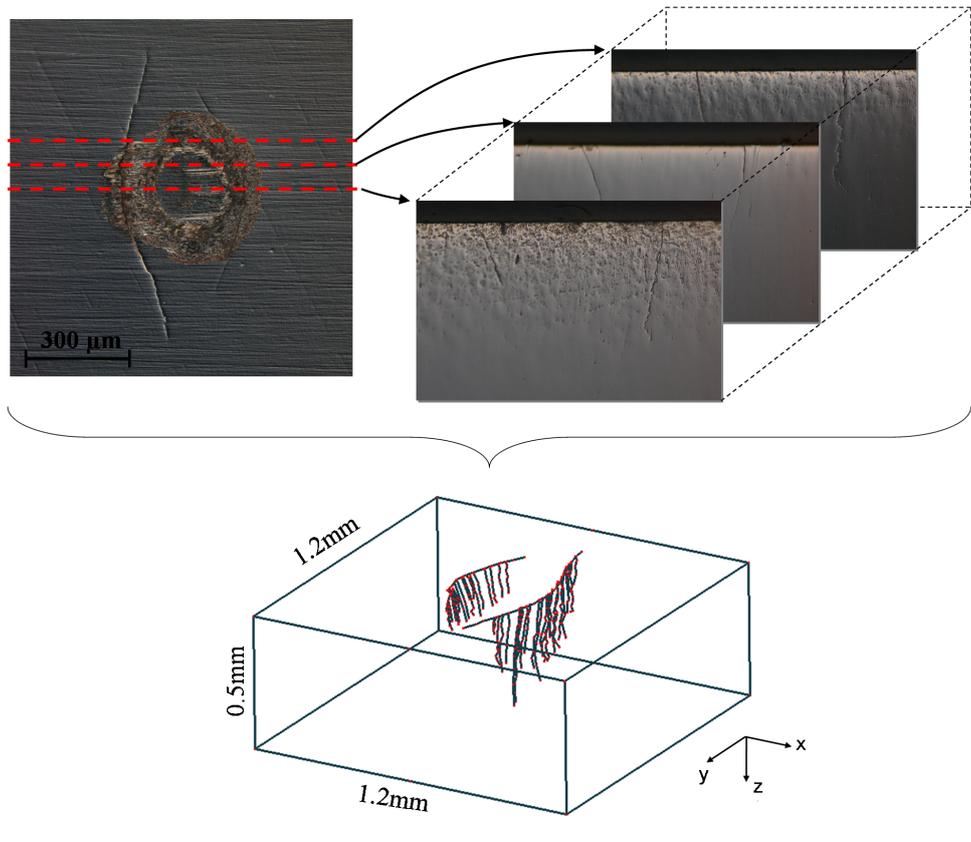


FIGURE 4.4: Coupes transversales post-mortem de l'éprouvette fissurée et reconstruction de la géométrie tridimensionnelle des fissures pour un essai conduit à 70 000 cycles.

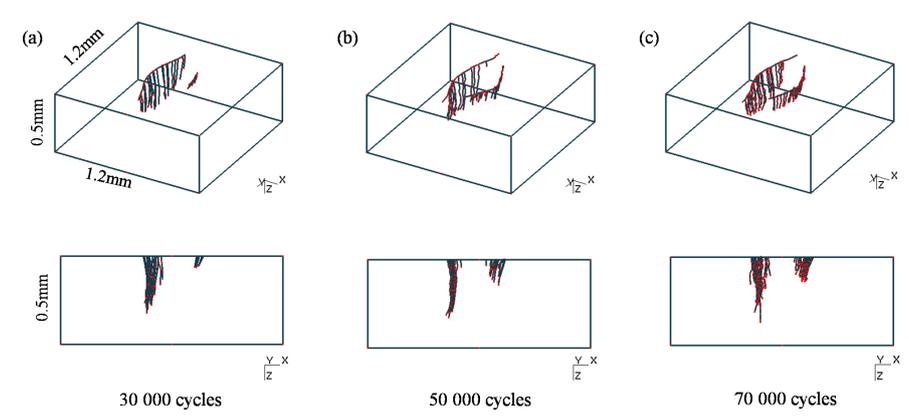


FIGURE 4.5: Géométries reconstruites des fissures tridimensionnelles pour les essais conduits à (a) $N = 30\,000$ cycles, (b) $N = 50\,000$ cycles et (c) $N = 70\,000$ cycles.

Le rayon de l'aire de contact et la pression maximum en surface sont respectivement $a = 171 \mu\text{m}$ et $P_0 = 2.05 \text{ GPa}$. La quantité d'énergie dissipée W_d au cours du cycle, représentée par l'aire de la boucle de fretting, correspond au travail de cisaillement à l'interface. Cette énergie est quantifiée

à partir des boucles d'hystérésis (Q- δ) enregistrées au cours de l'essai. Les relations liant P, Q, δ , c et a et un critère de glissement énergétique développé par Fouvry *et al.* [FOU 95], basé sur la quantité W_d , permet de déduire le coefficient de frottement local μ dans la zone de glissement annulaire à l'aide des équations (4.1) et (4.2) (cf. figure 4.7).

$$A = \frac{6}{5} \cdot \frac{(1 + (1 - u)^{5/3}) - \frac{5}{6}u(1 + (1 - u)^{2/3})}{u(1 + (1 - u)^{2/3})} \quad (4.1)$$

$$u = \frac{Q}{\mu P} = \frac{f}{\mu} \quad (4.2)$$

où $f = Q/P$ et A est le rapport de l'énergie de glissement calculée par intégration de la boucle de fretting sur l'énergie totale (cf. figure 4.6). Après environ 2 500 cycles, les premières macro-fissures expérimentales apparaissent en surface et le régime de glissement est stable. Le coefficient de frottement local μ est alors égal à 0.92 (cf. figure 4.7).

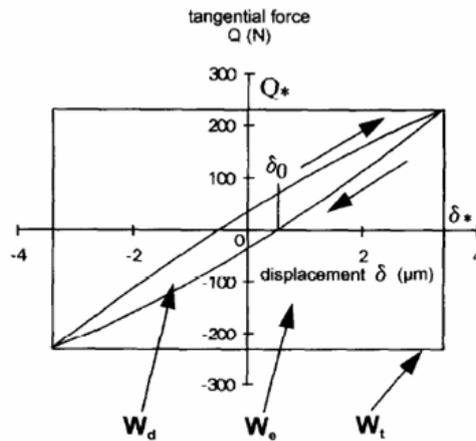


FIGURE 4.6: Boucle d'hystérésis de fretting en glissement partiel : L'énergie dissipée W_d par glissement correspond à l'aire de la boucle et l'énergie totale $W_t = W_d + W_l$ correspond à l'aire du rectangle qui la contient [FOU 95].

L'évolution sinusoïdale de l'effort tangentiel Q au cours du cycle est discrétisée en 25 pas de temps t_n (cf. figure 4.8). Les distributions des pressions normales $p(x,y)$ (figure 4.9.a) et des contraintes tangentielles cycliques $q(x,y,t_n)$ en surface (figure 4.9.b) sont déterminées incrémentalement pour chaque pas de temps. Le rapport de glissement c/a est égal à 0.52, en bon accord avec les observations des traces de fretting expérimentales.

Les champs des contraintes et des déformations correspondants sont calculés dans le volume et le risque d'amorçage des fissures de fretting en 3D est déterminé à l'aide du critère de Dang Van (cf. 3.1.3). Deux zones sont identifiées à la frontière de la zone de contact pour lesquelles $d > 1$. Les surfaces iso-valeur $d = 0.943$ et $d = 0.715$ sont présentées figure 4.10. Ce résultat est en bon accord avec la géométrie observée des fissures à la fois en surface et en volume. Ce résultat peut être utilisé pour définir la géométrie d'un défaut initial pour la simulation numérique. Dans la section suivante, on choisit cependant de modéliser les géométries des fissures issues des résultats expérimentaux présentés dans la section 4.1.1. Les distributions des contraintes normales et tangentielles cycliques calculées en surface sont également utilisées comme données d'entrée du modèle.

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

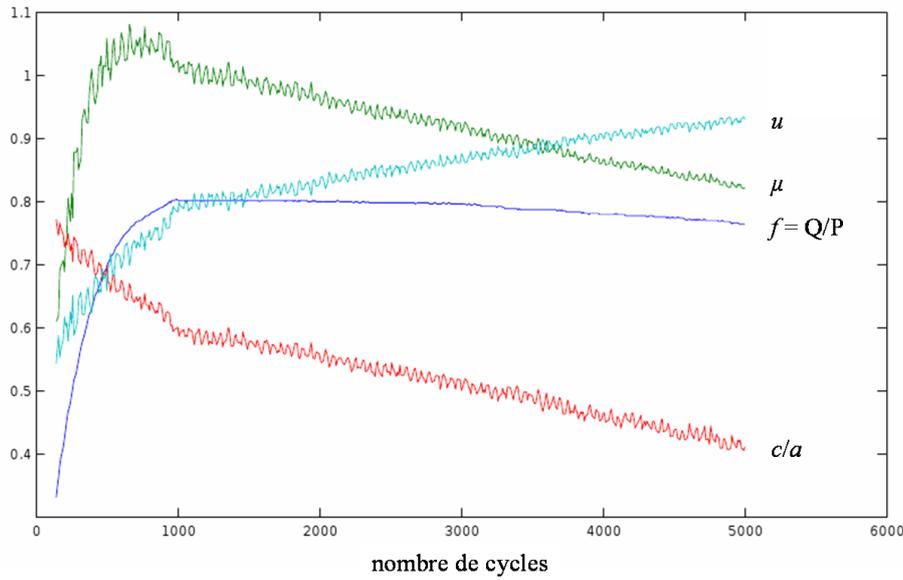


FIGURE 4.7: Évolution du rapport f aux cours des cycles des essais de fretting permettant de calculer le coefficient de frottement local μ , le rapport de glissement c/a et la quantité u .

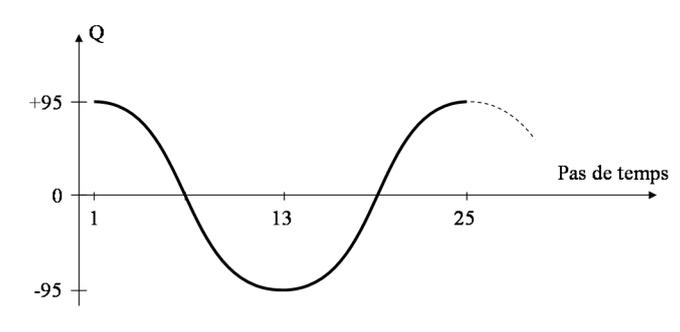


FIGURE 4.8: Évolution de l'effort tangentiel Q mesurée au cours d'un cycle de fretting et discrétisée en 25 pas de temps t_n .

4.1.3 Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue

Une modélisation numérique précise du problème expérimental de fretting tridimensionnel requiert une définition rigoureuse du chargement, des conditions aux limites et de la géométrie des fissures. Cela est possible grâce à l'analyse des données et des résultats d'essais présentés ci-dessus.

Le cycle de fretting est discrétisé en 25 pas de temps t_n (cf. figure 4.8). L'effort tangentiel Q s'exerce dans le sens des x négatifs. Le chargement de fretting, i.e. les distributions de pressions $p(x,y)$ et des contraintes tangentielles $q(x,y,t_n)$ en surface calculées dans la section 4.1.2, est interpolé sur le maillage de la structure (30×30 carrés de $12 \mu\text{m}$ de coté, cf. figure 4.9). Ce maillage

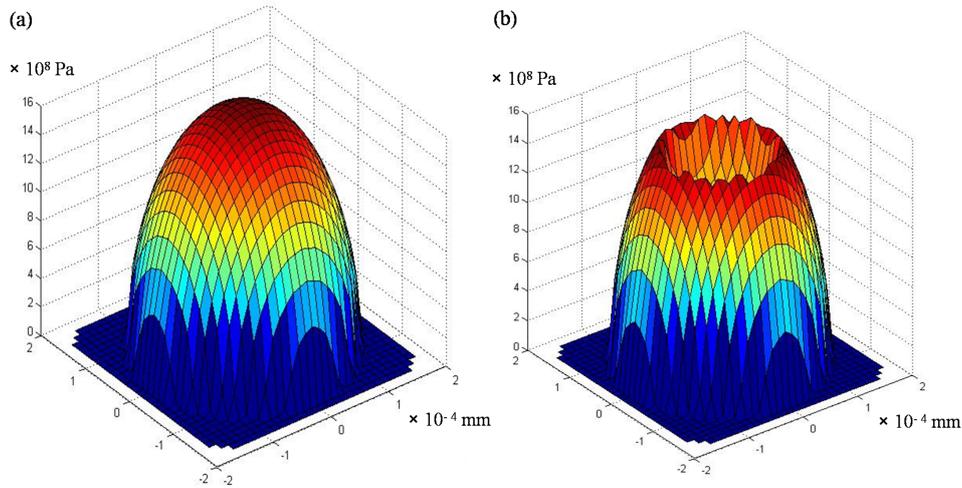


FIGURE 4.9: (a) Distributions des pressions normales $p(x,y)$ et (b) des contraintes tangentielles $q(x,y,t_n = 1)$ sur la surface de contact sphère/plan interpolées sur le maillage surfacique X-FEM de 30×30 éléments carrés de $12\mu\text{m}$ de côté.

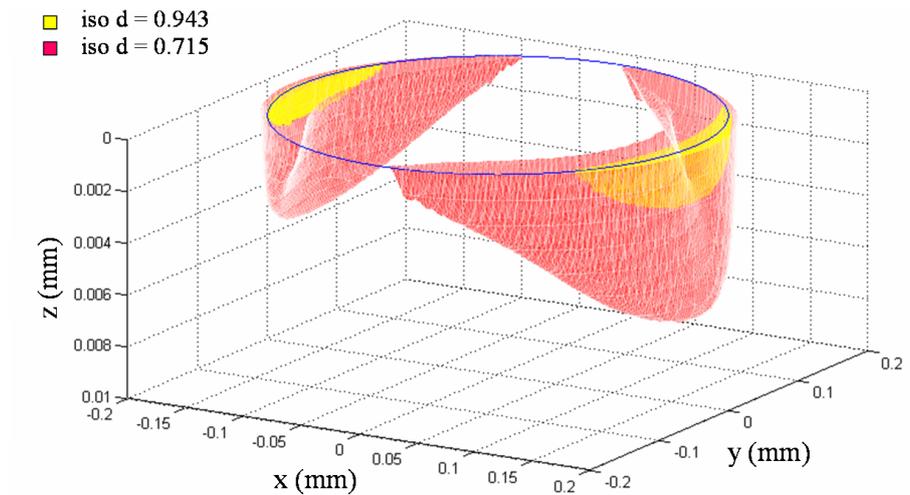


FIGURE 4.10: Distribution du risque d'amorçage d calculé à partir du critère de Dang Van en volume au voisinage de la surface de contact sphère/plan.

est constitué de 46 266 tétraèdres. Il est localement structuré et raffiné au voisinage de la zone d'intérêt afin de conserver la finesse de la solution de contact sphère/plan (cf. figure 4.11). La taille caractéristique des éléments fins dans cette zone est $12\mu\text{m}$.

Les fissures extraites de l'essai de fretting conduit à 70 000 cycles sont considérées. Les géométries complexes de ces fissures sont décrites à l'aide de fonctions de niveau dans le cadre du modèle X-FEM à deux échelles (cf. figure 4.12.b). Le front de fissure est défini par l'intersection des surfaces iso-0 des fonctions de niveau ϕ et ψ (cf. figure 1.24). Une seule paire de fonction de niveau est utilisée pour décrire les deux fissures. Le signe de la fonction de niveau ϕ est donc né-

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

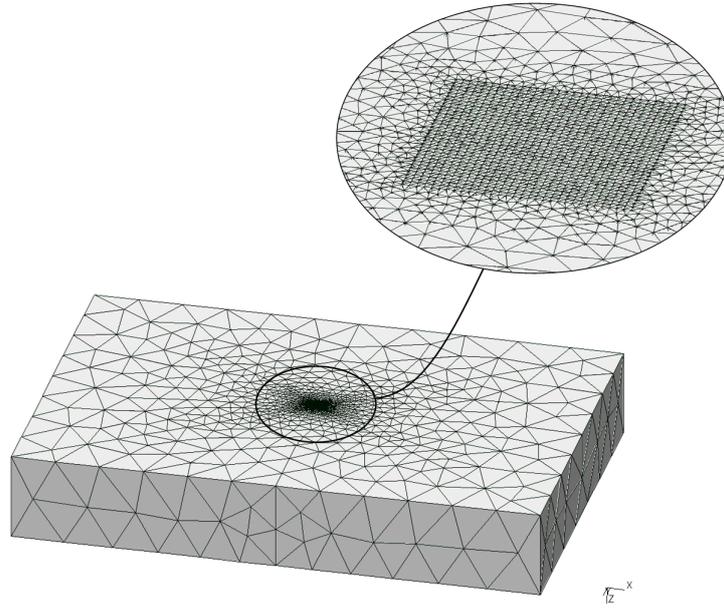


FIGURE 4.11: Maillage de l'éprouvette (46 266 tétraèdres) raffiné au voisinage de la surface de contact.

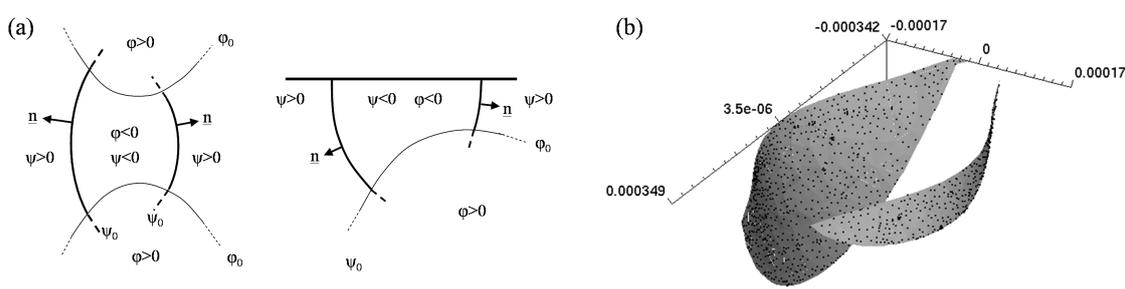


FIGURE 4.12: (a) Définition des fonctions de niveaux pour la modélisation des fissures de fretting et (b) discrétisation de l'interface de ces fissures : 902 paires de points d'intégration.

gatif entre les deux fissures et positif en dehors (cf. figure 4.12.a). Le vecteur normal n_{Γ} du repère local associé à la fissure est orienté automatiquement vers l'extérieur en accord avec le signe de la fonction de niveau. La fissure 1 est située à la position $x = -170 \mu\text{m}$ dans le plan médian ($y=0$). Sa longueur en surface est $691 \mu\text{m}$ et sa profondeur maximale de $246 \mu\text{m}$ (≈ 25 éléments finis). La fissure 2 est en $x = +170 \mu\text{m}$ dans le plan médian ($y=0$). Sa longueur en surface est $603 \mu\text{m}$ et sa profondeur maximale de $96 \mu\text{m}$ (≈ 10 éléments finis). La discrétisation de l'interface des fissures est raffinée par subdivision indépendamment du maillage éléments finis (cf. section 2.2). Une taille critique $l_c = 7 \mu\text{m}$ pour les arrêtes des éléments d'interface est définie. Une distribution de 902 paires de points d'intégration répartie sur les deux fissures représentée dans la figure 4.12.b est obtenue.

Les propriétés mécaniques sont celles du matériau 100C6 des essais. Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau valent respectivement $E = 210 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$. L'hypothèse

de comportement élastique linéaire en volume est retenue. La loi de contact unilatérale et la loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement $\mu_\Gamma = 0.5$ sont considérées à l'interface.

Le problème est résolu à une précision de 10^{-4} avec l'indicateur d'erreur locale η (2.34). Le solveur stabilisé NLLA est utilisé. Les valeurs de la direction de recherche et du coefficient de stabilisation sont respectivement $k = 1^{+14}\text{Pa.m}^{-1}$ et $\varepsilon = 1^{+12}\text{Pa.m}^{-1}$. Les solutions locale et globale du problème, i.e. le champ de déplacement global \mathbf{U} , les efforts de contact \mathbf{T} , le glissement $-\mathbf{[W_T]} = \mathbf{W_T}^- - \mathbf{W_T}^+$ et l'ouverture $\mathbf{[W_N]} = \mathbf{W_N}^+ - \mathbf{W_N}^-$ entre les faces de la fissure, sont représentées figures 4.13, 4.14 et 4.14 pour 9 pas de temps parmi les 25 considérés.

Note : La partie centrale de l'aire de contact est enfoncée dans la matière sous l'influence du chargement normal P. Étant donnée le signe de la fonction de niveau ϕ , les vecteurs $\mathbf{[W_T]} = \mathbf{W_T}^+ - \mathbf{W_T}^-$ sont dirigés vers le haut. Par souci de clarté, les vecteurs $-\mathbf{[W_T]}$ sont tracés.

Les fissures sont soumises à des séquences de conditions de contact avec frottement complexes pendant le cycle de fretting. Au temps t_1 , l'effort tangentiel est maximal : $Q = +95$ N. La fissure 2 est ouverte et la fissure 1 est fermée. Les solutions en déplacement global \mathbf{U} et local \mathbf{W} sont concordantes. La pression normale de contact P induit un glissement maximal $\|\mathbf{[W_T]}\| = 1.4 \mu\text{m}$ entre les faces de la fissure 2 et un glissement quasi nul entre les faces de la fissure 1 en contact avec frottement. Les efforts de contact entre les faces de la fissures 1 sont réguliers et de valeur maximale $\|\mathbf{T}\| = 0.87$ GPa.

L'effort tangentiel Q diminue jusqu'au pas de temps t_7 pour lequel il est nul. Les deux fissures sont alors fermées ($\mathbf{[W_N]} \cong 0$). Les efforts de contact entre leurs faces sont très faibles et le glissement maximal est égal à $2 \mu\text{m}$ et $1.6 \mu\text{m}$ pour les fissures 1 et 2 respectivement. Puis Q augmente ensuite progressivement jusqu'à atteindre une valeur $Q = -95$ N au pas de temps t_{13} . La fissure 1 est alors ouverte : $\|\mathbf{[W_N]}\| \cong 1.15 \mu\text{m}$. Les faces de la fissure 2 sont adhérentes : $\mathbf{[W_T]} = 0$. Elles le restent jusqu'au pas de temps t_{18} : $\Delta\mathbf{[W_T]} = 0$. Les efforts de contact entre les faces de la fissures 2 sont réguliers et atteignent une valeur maximale $\|\mathbf{T}\| = 1.47$ GPa.

Au pas de temps t_{19} , l'effort tangentiel Q est de nouveau nul, le glissement entre les faces de la fissure 1 atteint une valeur maximale stable $\|\mathbf{[W_T]}\| = 3.12 \mu\text{m}$.

Au pas de temps t_{25} , le chargement est identique à celui du temps t_1 . Cependant, les solutions de contact sont différentes. En effet, la formulation quasi statique du modèle X-FEM à deux échelles prend en compte les effets d'histoire. Les conditions de contact avec frottement pendant le cycle complet ont une forte influence sur la solution du problème. De plus, l'hypothèse initiale pour laquelle les champs locaux d'interface \mathbf{W} et \mathbf{T} sont nuls au temps t_0 peut influencer la solution de contact. Cette influence diminue au cours du cycle. En effet, les effets d'hystérésis se limitent aux portions de cycles pour lesquels une fissure reste fermée, l'ouverture "réinitialisant" l'état de contact. sont négligeables à partir du moment où les fissures sont ouvertes. Un deuxième cycle est alors simulé afin de se placer en régime stabilisé.

Le modèle X-FEM à deux échelles permet de capturer les conditions non linéaires de contact entre les faces des fissures 3D non planes à une échelle pertinente. De très petits déplacements relatifs : $\|\mathbf{[W]}\| \leq 3.12 \mu\text{m}$, i.e. 200 fois plus petit que la longueur de la fissure ($691 \mu\text{m}$) et 7700 fois plus petit que la longueur de la structure (24 mm) sont capturés. Les solutions au cours du cycle sont stables (pas d'oscillations) et les effets d'hystérésis sont pris en compte. Ceci est un point clé de la modélisation des problèmes de rupture avec contact et frottement tels que les problèmes de fretting. En effet, le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 3D présenté dans la section suivante en dépend (cf. section 1.2.4.2).

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

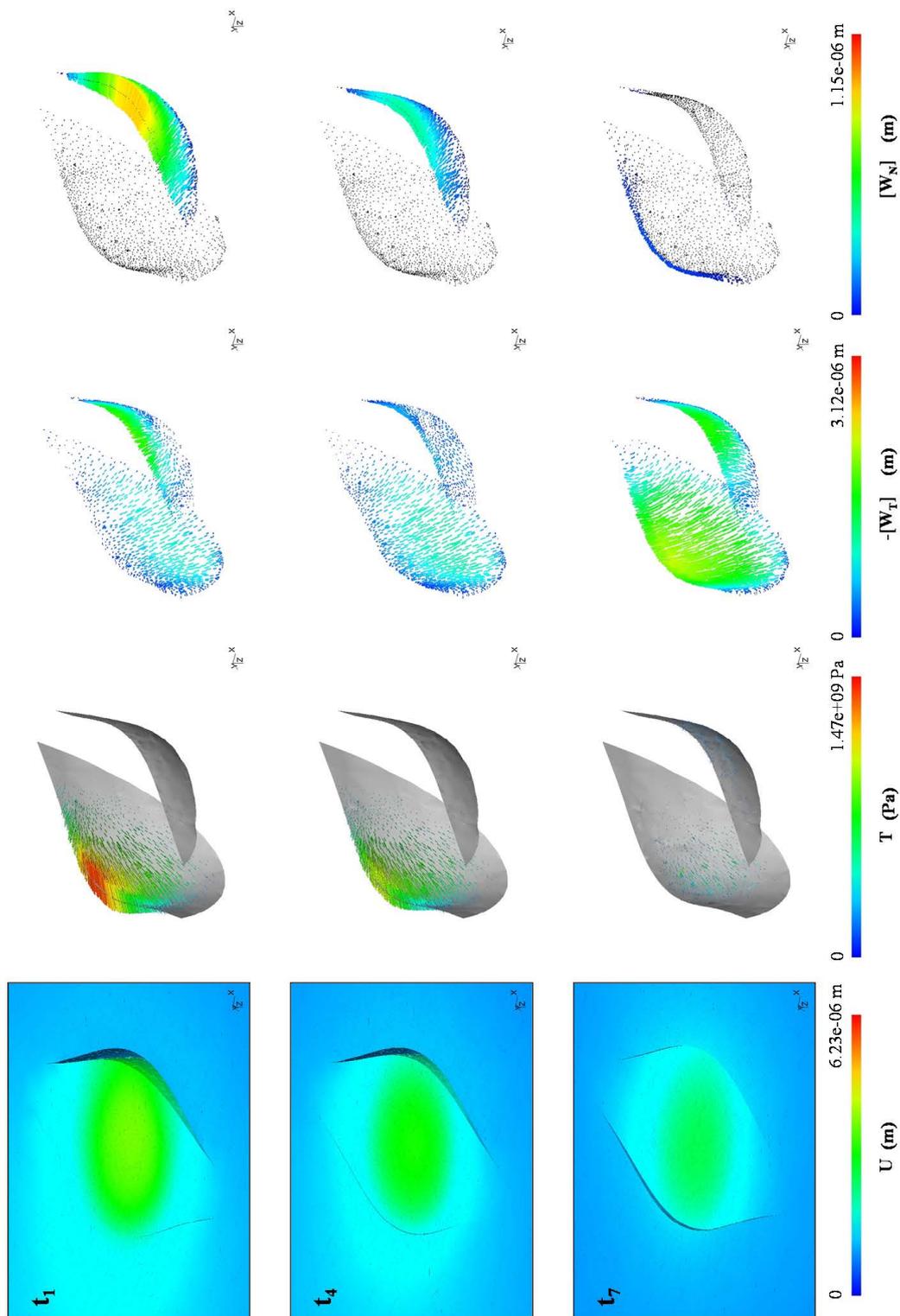


FIGURE 4.13: Représentation amplifiée du champ de déplacement global U , des efforts de contact T , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 1, 4 et 7 du cycle de fretting.

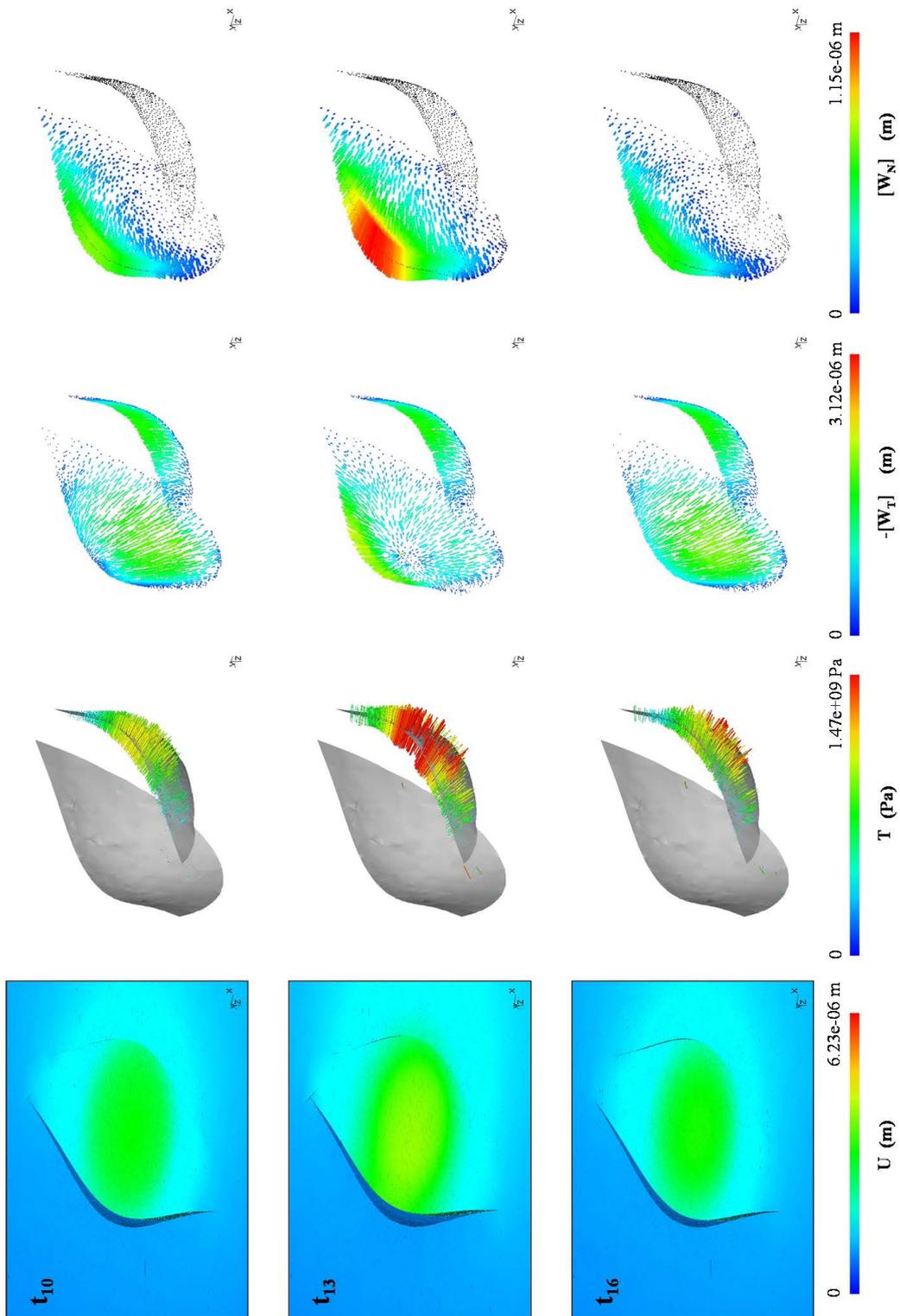


FIGURE 4.14: Représentation amplifiée du champ de déplacement global U , des efforts de contact T , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 10, 13 et 16 du cycle de fretting.

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

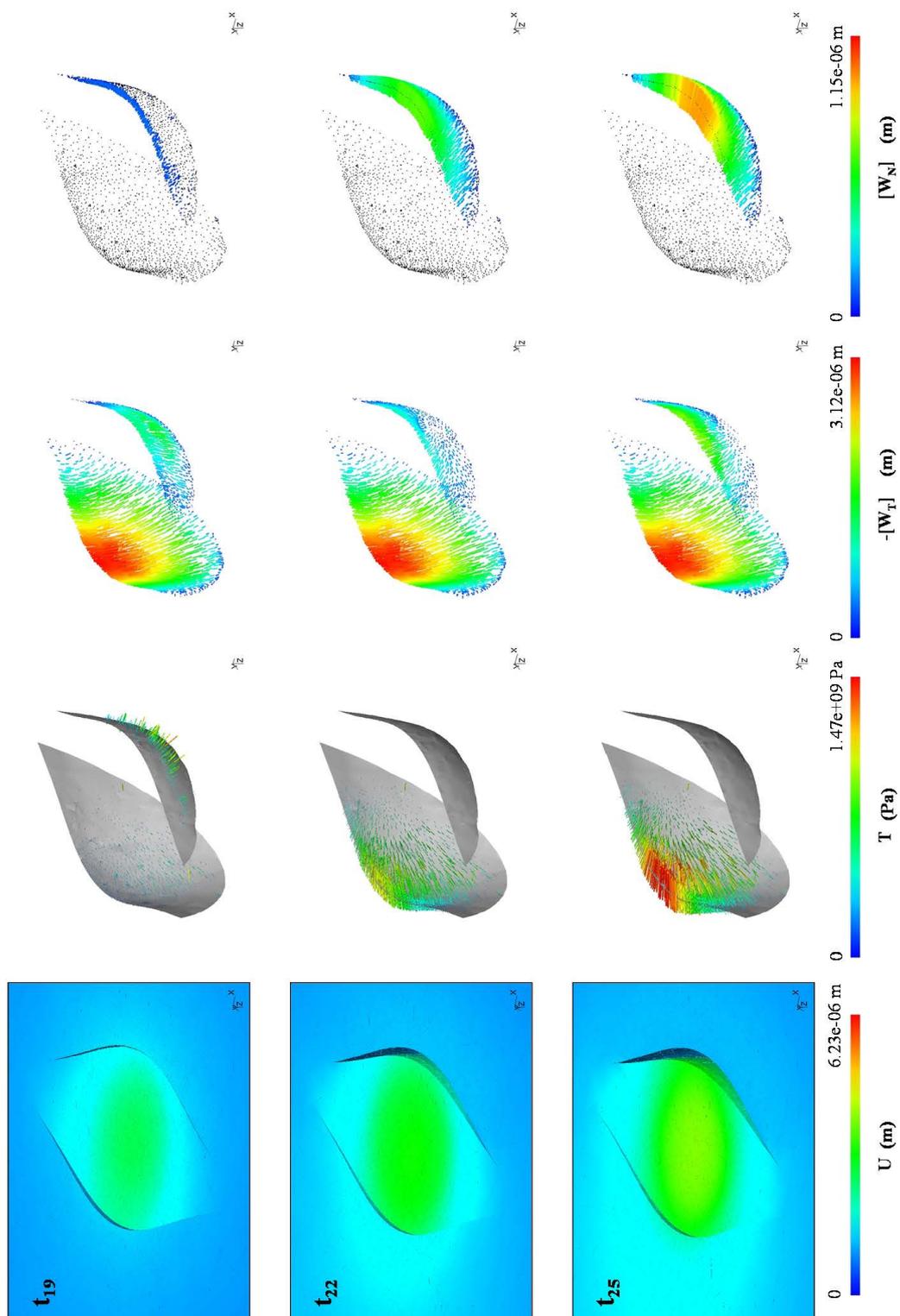


FIGURE 4.15: Représentation amplifiée du champ de déplacement global U , des efforts de contact T , du glissement $-[W_T]$ et de l'ouverture $[W_N]$ entre les faces de la fissure pour les étapes 19, 22 et 25 du cycle de fretting.

4.1.4 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

À chaque pas de temps t_n , les facteurs d'intensité de contraintes K_I , K_{II} et K_{III} sont calculés le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D et de la méthode d'intégration numérique présentées dans les sections 2.4.1 et 2.4.1 respectivement. Les FIC calculés au pas de temps t_1 ($Q = -Q_{max}$) et t_{13} ($Q = Q_{max}$) sont présentés figure 4.16.

Les fissures sont sollicitées en mode mixte (I + II + III). Au pas de temps t_1 ($Q = -Q_{max}$), la fissure 1 est fermée sous l'influence de la contrainte tangentielle, K_I est donc nul, et ses faces sont adhérentes (cf. figure 4.13). Néanmoins, K_{II} étant également dépendant du champ des contraintes en pointe de fissure, il n'est pas nul. En revanche, la fissure 2 est ouverte. K_I atteint une valeur maximum de $12.7MPa.\sqrt{m}$ dans le plan médian ($y = 0$). Le glissement entre les faces de la fissure 2 est important. K_{II} atteint une valeur de $10.2MPa.\sqrt{m}$ au milieu du front de la fissure 2. Le mode I est légèrement prédominant par rapport au mode II. K_{III} est relativement faible (2 à 3 fois plus petit que K_I ou K_{II}). Son signe varie le long des fronts en accord avec la forme tridimensionnelle des fissures. Au pas de temps t_{13} ($Q = Q_{max}$), la fissure 1 est ouverte. K_I atteint une valeur de $7.5MPa.\sqrt{m}$ dans le plan médian ($y = 0$). La valeur maximum de K_{II} est $6.4MPa.\sqrt{m}$. La fissure 2 est complètement fermée (cf. figure 4.14). K_I est nul au front 2. Cependant, le déplacement relatif entre ses faces est important. Il est dû à la première phase du cycle et à l'influence du chargement normal P. K_{II} atteint une valeur maximale de $17MPa.\sqrt{m}$. Le mode de sollicitation prédominant pour la fissure 2 est le mode II.

Bilan :

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré les performances du modèle X-FEM à deux échelles. Il permet de capturer précisément les conditions de contact avec frottement entre les faces de la fissure. Il s'insère dans la stratégie multi-modèles proposée pour la simulation de la propagation des fissures sous chargement de fretting en trois dimensions. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés le long des fronts de fissures non plans à l'aide de l'intégrale d'interaction en 3D. Il est donc possible d'étudier numériquement la propagation des fissures en reliant ces grandeurs caractéristiques de la mécanique de la rupture au taux de croissance des fissures. Dans ce but, une deuxième série d'essais a été réalisée dans le cadre de ce travail afin d'évaluer précisément l'évolution des fissures, i.e. longueur, orientation, et géométrie 3D, au cours des cycles de charge.

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

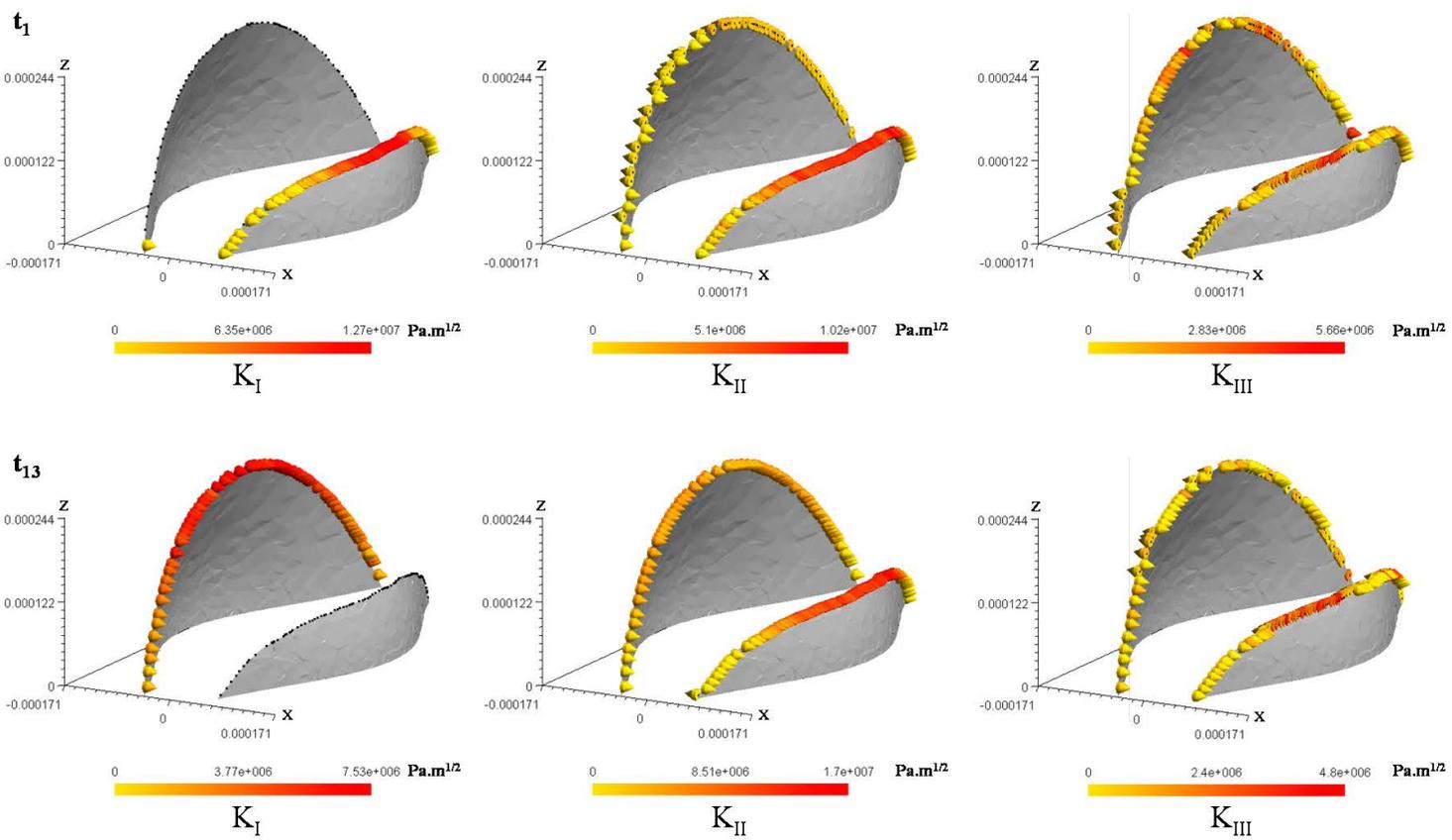


FIGURE 4.16: Facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} calculés aux pas de temps t_1 ($Q = -Q_{max}$) et t_{13} ($Q = Q_{max}$) le long des fronts des fissures à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D (les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).

4.2 Étude expérimentale et numérique X-FEM de la propagation tridimensionnelle des fissures sous chargement de fretting fatigue

Des essais de fretting précontraints ont été réalisés sur la machine de traction servo-hydraulique MTS à deux vérins schématisée dans la figure 3.26 du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon. L'objectif de cette série d'essais est l'étude de la propagation tridimensionnelle des fissures en fretting fatigue.

4.2.1 Essais de fretting fatigue sphère/plan précontraints : étude expérimentale de la propagation des fissures

Le dispositif d'essai est identique à celui des essais de fretting précontraints cylindre plan présentés dans la section 3.2. Les éprouvettes en acier 35NCD16 sont également identiques. Le poinçon cylindrique est remplacé par une poinçon en acier 100C6 dont l'extrémité est sphérique de rayon $R = 200$ mm. L'état des surfaces en contact est rectifié $Ra = 0.4$.

Une contrainte statique de tension $\sigma_t = 140$ MPa est appliquée à l'éprouvette à l'aide du premier vérin. Le poinçon est mis en contact sur la face polie de l'éprouvette par une force $P = 5\ 000$ N. Un roulement est mis en opposition du poinçon pour limiter les sollicitations de flexion sur l'éprouvette (cf. figure 3.27). L'ensemble poinçon-roulement est mis en mouvement par le second vérin. Le déplacement relatif δ entre l'éprouvette et le poinçon est mesuré grâce à un capteur laser lié au poinçon et d'un miroir placé sur l'éprouvette au niveau du contact. L'effort tangentiel Q est mesuré pendant toute la durée de l'essai grâce à deux cellules de force liées à chaque extrémité de l'éprouvette. L'amplitude du déplacement cyclique δ est asservie afin d'obtenir un effort tangentiel maximum $Q_{max} = 1\ 300$ N constant. Ces paramètres de chargement conduisent à un régime de glissement partiel pendant toute la durée de l'essai. La fissuration est donc l'endommagement prédominant et les modifications de l'état de la surface de contact par usure sont négligeable. La figure 4.17 montre les traces de fretting obtenues pour des essais de 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles. La zone collée centrale et la zone de micro-glissement annulaire se distinguent facilement. Deux fissures principales s'amorcent dans la zone de micro-glissement et se propagent symétriquement par rapport au centre du contact avec une trajectoire elliptique.

Une expertise des fissures en volume est réalisée par reconstitution des images métallographiques des coupes transversales des éprouvettes fissurées. Le protocole est similaire à celui présenté dans la section 4.1.1. Les étapes de polissage et de digitalisation des fissures ont toutefois été automatisées pour augmenter la précision des résultats. La section de l'éprouvette dans le plan médian du contact pour l'essai à 250 000 cycles est présentée dans la figure 4.18. Les deux fissures sont parfaitement symétriques en volume. Ce résultat révèle la précision élevée du protocole des essais et des techniques de découpe et de polissage des échantillons. Les géométries 3D reconstruites pour les essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles sont représentés dans la figure 4.19.

Note : la représentation des fissures est inversée (surface en bas) par souci de clarté.

Ces essais de fretting sphère/plan fournissent une représentation précise de l'évolution de la géométrie des fissures en volume et en surface au cours Ils sont modélisés en trois dimensions en

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

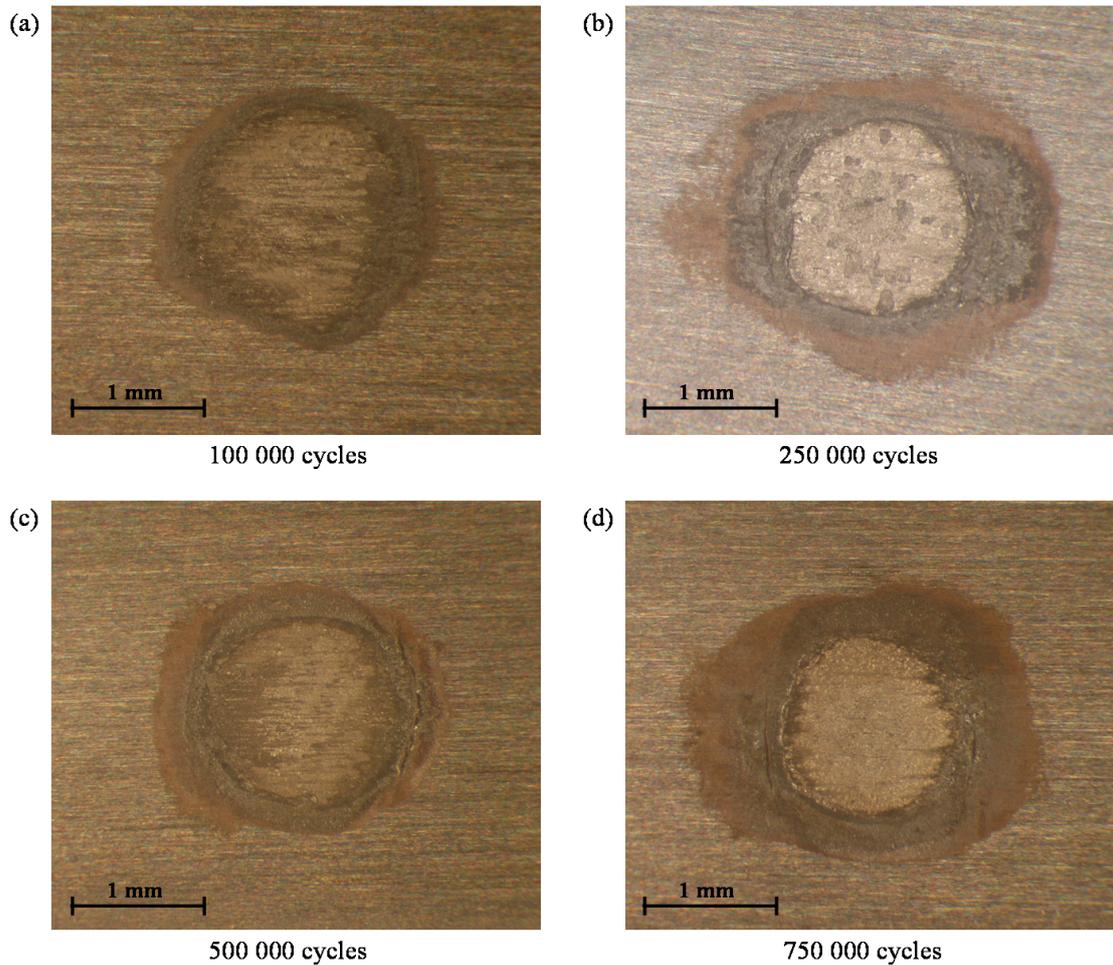


FIGURE 4.17: Traces de fretting pour des essais sphère/plan conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles.

appliquant la stratégie de simulation numérique proposée dans ce mémoire. Premièrement, les résultats expérimentaux sont analysés. Le contact sphère/plan est résolu dans la section suivante afin de déterminer le chargement cyclique en surface. L'objectif est ensuite de modéliser précisément ces essais afin de caractériser numériquement la propagation des fissures en 3D sous chargement de fretting.

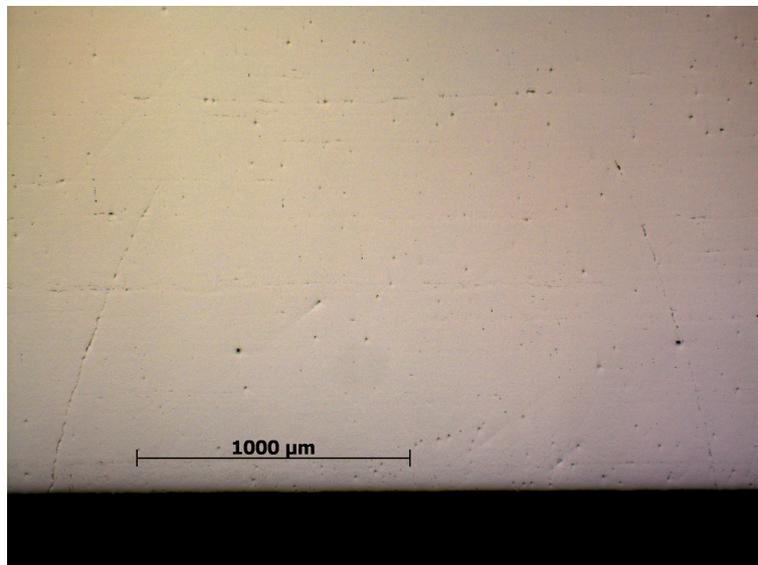


FIGURE 4.18: Section de l'éprouvette fissurée dans le plan médian du contact pour l'essai à 250 000 cycles (représentation inversée).

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

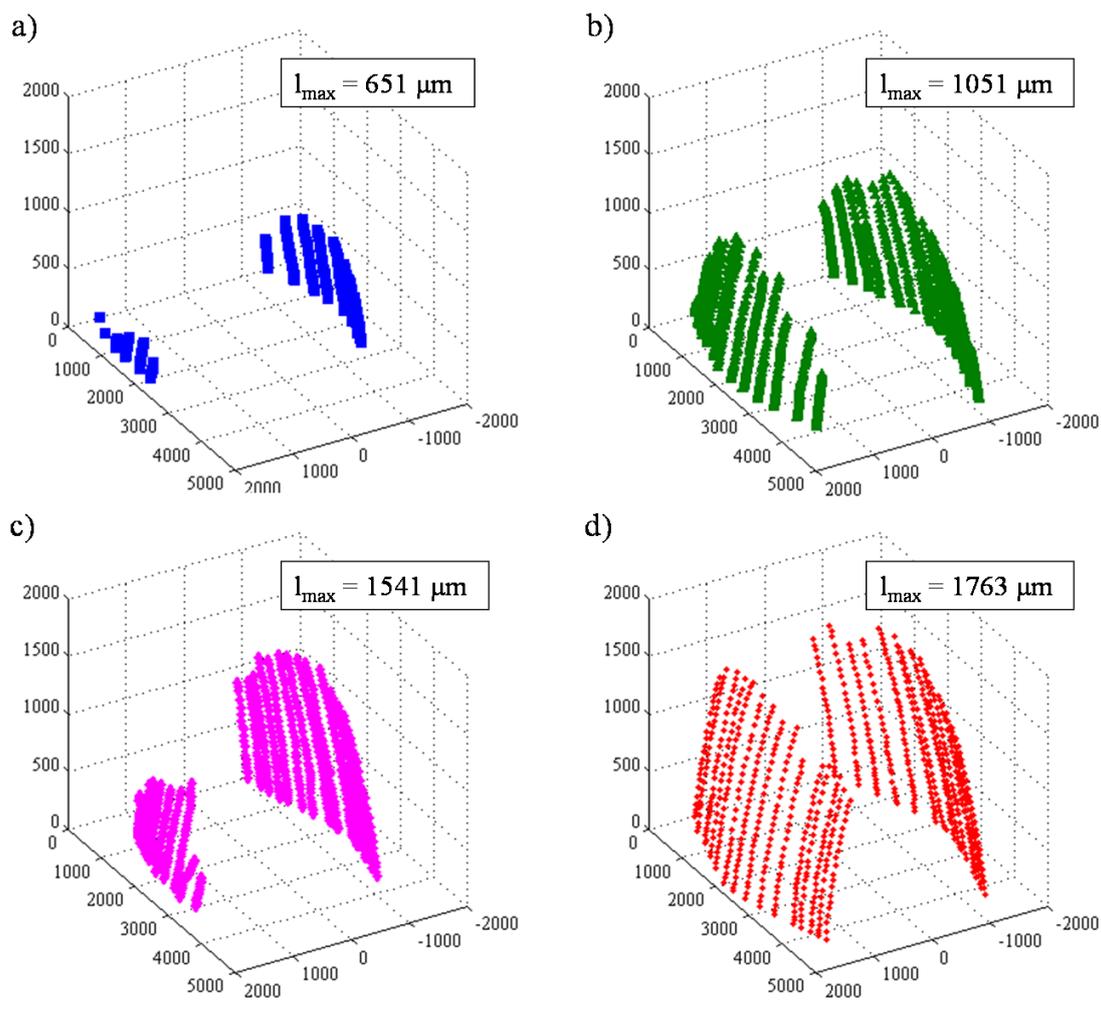


FIGURE 4.19: Reconstitution tridimensionnelle de la géométrie des fissures à partir de coupes métallographiques pour les essais de fretting sphère/plan conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles avec $\sigma_t = 140$ MPa (représentations inversées : surface vers le bas).

4.2.2 Analyse des essais : Résolution du contact sphère/plan et prédiction du risque d'amorçage des fissures.

Dans cette section, le problème tridimensionnel sphère/plan est résolu afin de déterminer les champs de contraintes cycliques en surface. Le risque d'amorçage des fissures en trois dimensions est ensuite prédit en utilisant le critère de Dan Van (cf. section 4.1.2).

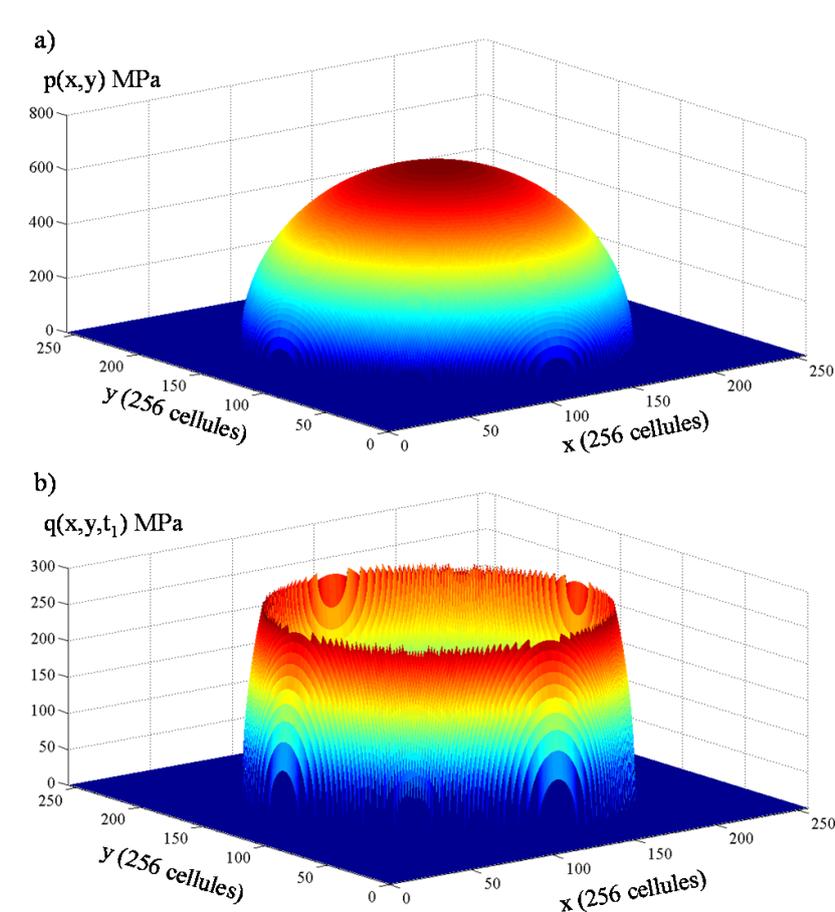


FIGURE 4.20: (a) Distributions des pressions normales $p(x,y)$ et (b) des contraintes tangentielles $q(x,y,t_n = 1)$ sur la surface de contact sphère/plan. La zone d'intérêt est discrétisée en 256×256 cellules carrées de $20\mu\text{m}$ de côté.

L'évolution sinusoïdale de l'effort tangentiel Q au cours du cycle est discrétisée en 25 pas de temps t_n . Les distributions des pressions normales $p(x,y)$ et des contraintes tangentielles cycliques $q(x,y,t_n)$ en surface (figure 4.20) sont déterminées incrémentalement à chaque pas de temps. Le rayon de l'aire de contact et la pression maximum en surface sont respectivement $a = 1.9$ mm et $P_0 = 657$ MPa. Le coefficient de frottement local μ est égal à 0.9. Le rapport entre les rayons des zones de glissement et de contact est $c/a = 0.889$. On fait l'hypothèse que l'usure de surface est très faible et ne vient pas perturber la géométrie du contact ni faire varier la valeur du coefficient de frottement local μ . Le chargement cyclique est donc considéré comme monotone.

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

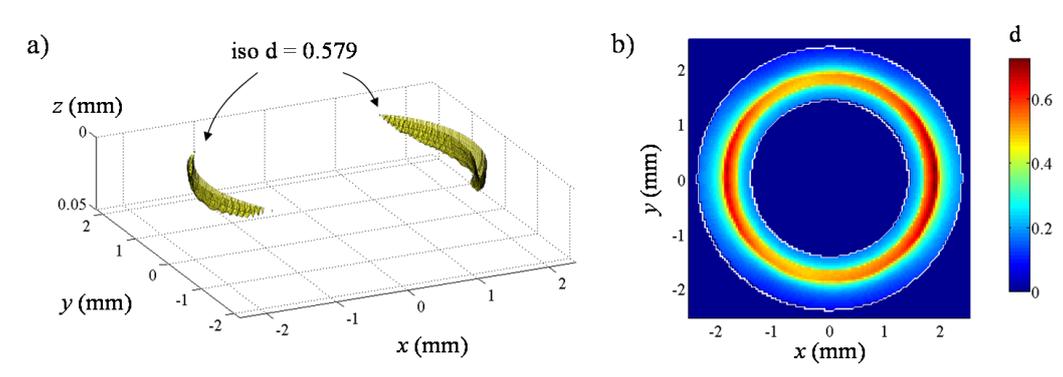


FIGURE 4.21: Distribution du risque d'amorçage d calculé à partir du critère de Dang Van : a) en volume et b) sur la surface de contact sphère/plan.

Les champs des contraintes et des déformations en volume sont calculés à partir du chargement cyclique en surface. 64 cellules sont considérées en profondeur avec un pas de $5 \mu\text{m}$. Le risque d'amorçage des fissures de fretting en 3D est déterminé en utilisant le critère de Dang Van (cf. section 3.1.3). Les figures 4.21.a et 4.21.b représentent le risque d'amorçage d en volume (surface iso-valeur $d = 0.579$) et sur la surface de contact respectivement. Deux zones opposées sont identifiées au voisinage du bord de la zone de contact. d atteint une valeur maximum de 0.724 pour les positions $x = 1.86 \text{ mm}$ et $x = -1.86 \text{ mm}$ sur le plan médian ($y=0$). Ces résultats sont en bon accord avec les géométries des fissures expérimentales observées à la fois en surface et en volume.

Dans la section suivante, les distributions des contraintes cycliques en surface déterminées ici et les géométries des fissures issues des résultats expérimentaux présentées dans la section 4.2.1 sont utilisées comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM du problème de fissuration avec contact et frottement.

4.2.3 Modélisation 3D X-FEM multi-échelle du problème expérimental de fretting fatigue

La simulation X-FEM des essais est réalisée. Les distributions de pressions normales et des contraintes tangentielles cycliques en surface calculées dans la section précédente sont interpolées sur le maillage de la structure. Ce maillage constitué de 58642 tétraèdres est localement structuré et raffiné au voisinage de la zone d'intérêt afin de ne pas détériorer la qualité de la solution de contact sphère/plan. La taille caractéristique des éléments finis dans cette zone est $150 \mu\text{m}$.

Les géométries des fissures expérimentales des essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles sont décrites à l'aide de fonctions de niveau. On fait l'hypothèse que le problème, ainsi que la géométrie des fissures, sont parfaitement symétriques. La discrétisation de l'interface des fissures est raffinée par subdivision indépendamment du maillage éléments finis. La longueur maximale des arrêtes des éléments d'interface est $l_c = 100 \mu\text{m}$. Le nombre de points d'intégration sur chaque fissure varie de 1107 à 1936 en fonction de la taille des fissures. Une loi de contact unilatérale et un frottement de Coulomb $\mu_F = 0.5$ sont considérées à l'interface.

Le problème est résolu pour chacun des 25 pas de temps t_n à une précision de 10^{-4} avec l'indicateur d'erreur locale η (2.34). Le solveur stabilisé NLLA est utilisé. Les valeurs de la direction de

recherche et du coefficient de stabilisation sont respectivement $k = 1+13\text{Pa}\cdot\text{m}^{-1}$ et $\varepsilon = 1+12\text{Pa}\cdot\text{m}^{-1}$. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés au front de fissure à l'aide d'une intégrale d'interaction en volume./ Le domaine d'intégration est une "boîte" de dimensions $120 \times 120 \times 60 \mu\text{m}$. Pour les essais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles, K_I , K_{II} et K_{III} aux pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) sont présentés figures 4.22, 4.23 et 4.24 respectivement.

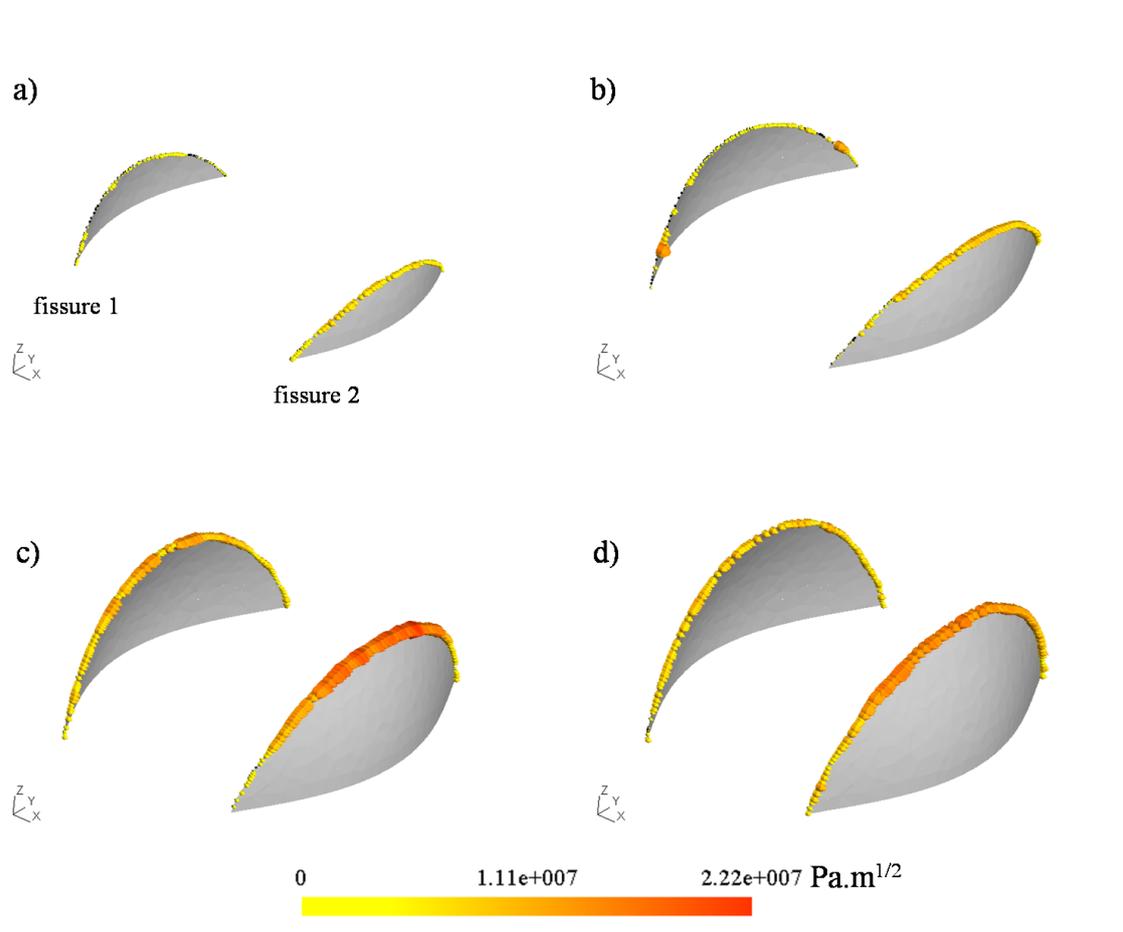


FIGURE 4.22: K_I : facteurs d'intensité des contraintes en mode I calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).

Les valeurs de K varient le long des fronts. Les valeurs maximum sont obtenues au point le plus bas de ces fronts pour K_I et K_{II} . Pour K_{III} , le comportement est différent. Les valeurs maximum de K_I pour la fissure 2 (des valeurs similaires sont obtenues pour la fissure 1) augmentent avec le nombre de cycles et la taille de la fissure, puis diminuent. Ainsi (cf. figure 4.25), K_I passe de 9.6 à 15.2, 22.2 puis 17.1 $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Le comportement est caractéristique d'un chargement de fatigue tribologique, différent de celui obtenu en fatigue conventionnelle où K augmente avec la taille de la fissure. En effet, lors de l'amorçage et du début de la propagation, les fissures sont situées dans

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

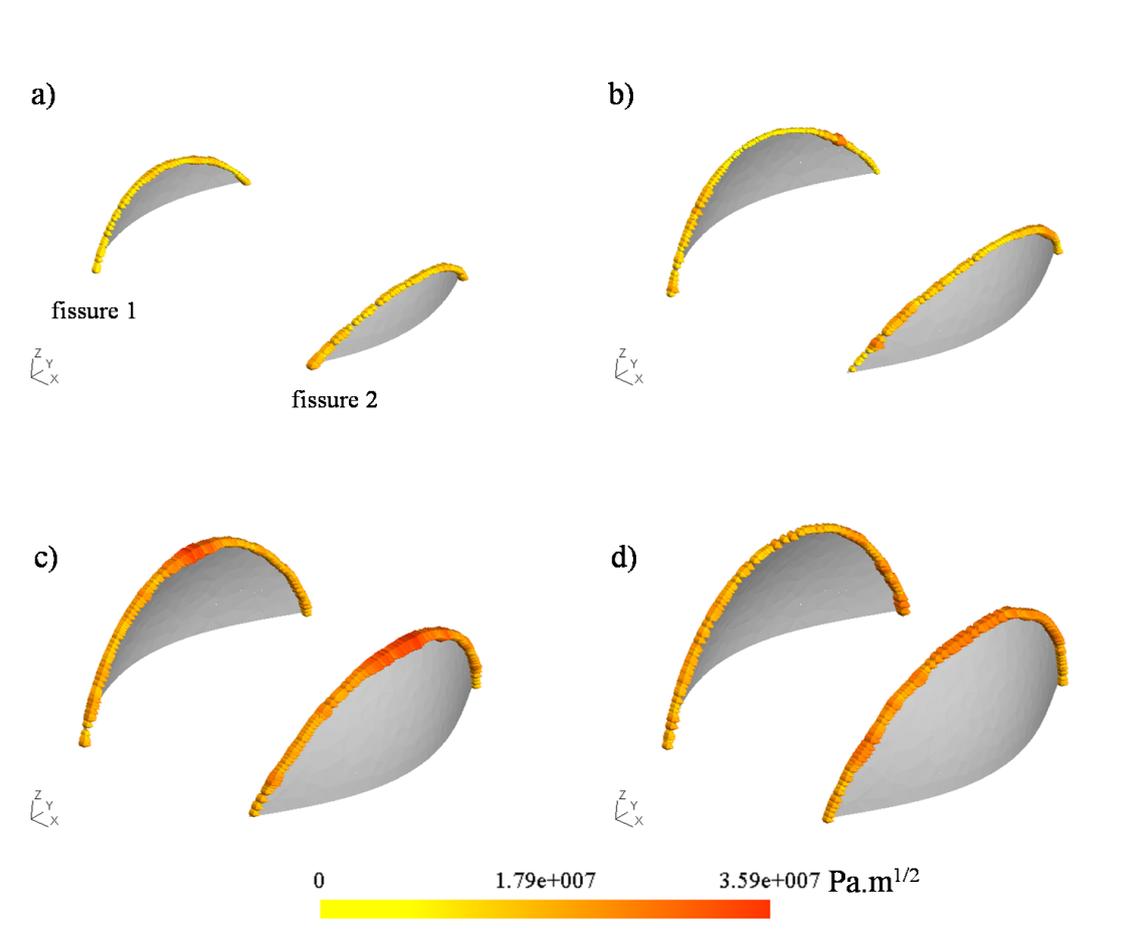


FIGURE 4.23: K_{II} : facteurs d'intensité des contraintes en mode II calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).

la zone en proche surface du contact deux-corps. Les contraintes dans cette zone confinée sont très élevées et activent les mécanismes moteurs de la propagation des fissures. Lors de l'extension, les fronts de fissures s'enfoncent en profondeur et s'éloignent de cette zone. Les valeurs de K_I (ainsi que celle de K_{II}) diminuent et la propagation ralentit. L'arrêt de ces fissures est possible. Cette transition stade II/stade III (cf. figure 1.8) se situe ici à une profondeur d'environ $1\ 500\ \mu\text{m}$.

Bilan :

Des essais de fretting sphère/plan précontraints ont été réalisées au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon avec pour objectif d'étudier la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting fatigue. Les géométries des fissures en 3D ont été reconstituées à partir de coupes métallographiques des éprouvettes d'es-

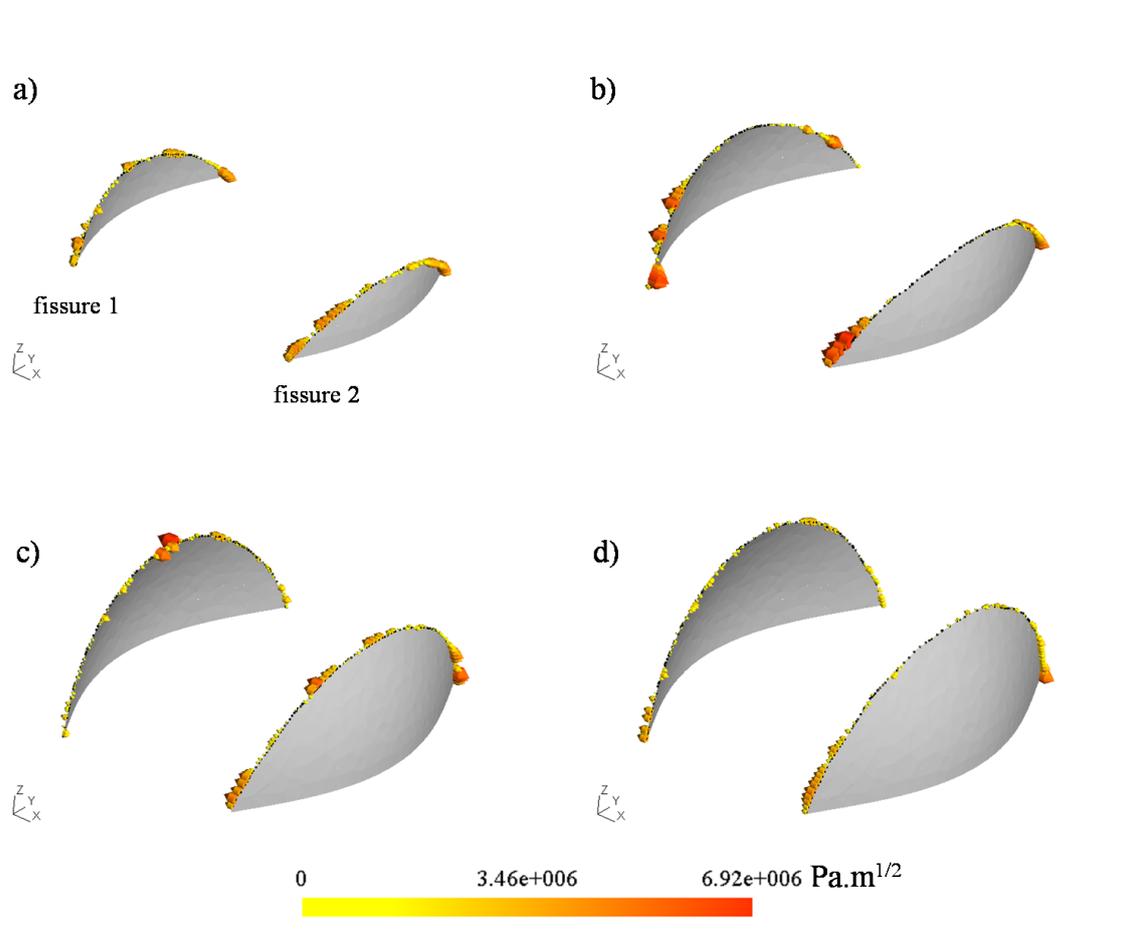


FIGURE 4.24: K_{III} : facteurs d'intensité des contraintes en mode III calculés au pas de temps t_1 ($Q = Q_{max}$) le long des fronts de fissure à l'aide de l'intégrale d'interaction I en 3D pour les essais conduits à : a) 100 000, b) 250 000, c) 500 000 et d) 750 000 cycles (Représentation inversée ; les valeurs positives sont orientées dans le sens des x positifs).

sais conduits à 100 000, 250 000, 500 000 et 750 000 cycles. Dans le cadre de la stratégie de simulation en trois dimensions de la propagation des fissures en fatigue multiaxiale non proportionnelle, le problème de contact sphère/plan a été résolu incrémentalement pour un cycle complet par une méthode semi-analytique visant à déterminer les distributions des contraintes normales et tangentielles cycliques en surface. Le risque d'amorçage des fissures a été déterminé en utilisant le critère de Dang Van. Ces résultats sont utilisés comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM 3D à deux échelles avec contact et frottement interfacial du problème de fissuration. Les géométries 3D des fissures sont décrites à l'aide de fonctions de niveau. Les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} ont été calculés le long des fronts de fissures à l'aide d'une intégrale d'interaction en volume (2.67) pour les quatre géométries de fissures correspondant à des nombres de cycles de charges différents. L'étude des variations des FIC a permis d'identifier la transition entre les stades II et III de la propagation des fissures en fretting (cf. figure 1.8). Cette première approche qualitative de la propagation des fissures en trois dimensions permet d'analyser

4. Couplage expérimental et numérique pour l'analyse de la propagation des fissures tridimensionnelles sous chargement de fretting-fatigue

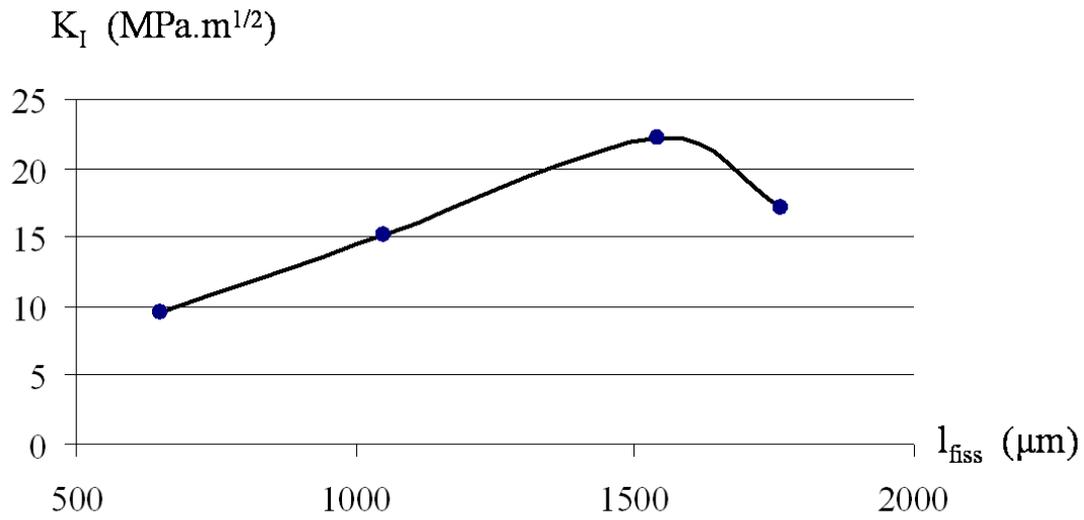


FIGURE 4.25: Évolution du facteur d'intensité des contraintes K_I en fonction de la taille de fissure 2 (longueur dans le plan médian : l_{fiss}) pour le problème considéré.

numériquement le comportement des fissures en fatigue multiaxiale non proportionnelle.

Conclusions et perspectives

La prédiction de la durée de vie des structures représente un enjeu industriel et économique majeur. Les outils numériques et les méthodes de développement actuels ont permis d'améliorer considérablement le dimensionnement et la résistance des composants des structures tout en réduisant leur masse. L'étude de l'intégrité des structures dans les phases de conception des produits contribue également à réduire les coûts de maintenance. Les outils de simulation numérique occupent par conséquent une place grandissante dans l'industrie. Dans ce contexte, la prédiction de la durée de vie en fatigue des structures est à l'origine de nombreux travaux de recherche. La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée en mécanique de la rupture. Toutefois, elle pose un certain nombre de difficultés associées à la construction d'un maillage très fin d'éléments singuliers en pointe de fissure [BAR 74] et aux étapes de remaillage et d'interpolation des champs lorsque la fissure se propage. La prise en compte de fissures tridimensionnelles non planes, et la modélisation des problèmes de grandes tailles sont longtemps restées invisibles. En effet, l'échelle de la fissure et celle de la structure peuvent différer de plusieurs ordres de grandeur. Une modélisation précise du comportement local conduit à des coûts numériques rédhibitoires. De plus, la prise en compte de multi-fissures et des non linéarités comportementales telles que la plasticité confinée en pointe ou le contact avec frottement entre les faces des fissures demeurent délicates.

Ce n'est que récemment que des méthodes innovantes ont permis de lever certains verrous de la simulation numérique de la propagation des fissures. Comme nous l'avons vu, la méthode des éléments finis étendus X-FEM s'impose comme une des alternatives à la MEF les plus adaptées pour la simulation des problèmes à discontinuités mobiles [MOë 99]. En effet, cette méthode permet de modéliser les fissures de façon implicite, c'est-à-dire indépendamment du maillage éléments finis et ainsi de lever les difficultés liées au remaillage et à la projection de champs lors de la propagation des fissures. De plus, grâce aux enrichissements asymptotiques en pointe de fissure, la solution du problème à précision donnée est obtenue pour des maillages environ 10 fois plus grossiers que ceux utilisés pour la MEF [MOë 02, GRA 02, ELG 07b].

Dans le cadre de la X-FEM, des modèles multi-échelles basés sur des techniques multi-grilles [PAS 10, RAN 08b, FIS 05] ou de décomposition de domaine [GUI 08] ont également été proposés afin prendre en compte les différentes échelles mis en jeu, i.e. structure/fissure, de façon optimale. L'aptitude de la X-FEM à représenter des géométries complexes en 3D à l'aide de fonctions de niveau [GRA 02, DUF 07] et la possibilité de pouvoir y intégrer des lois de comportement matériaux complexes [ELG 07b] en font un outil privilégié pour la simulation de la propagation des fissures. Son degré de maturité lui permet désormais d'être implantée dans un nombre croissant de codes de calcul industriels (Code_Aster, SAMCEF, Abaqus, Cast3M,...).

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans un projet de recherche au Laboratoire de

Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) en collaboration avec l'entreprise SKF. Il est focalisé sur la prédiction de l'amorçage et du comportement des fissures sous chargement de fatigue multiaxiale non proportionnelle avec comme application l'analyse de la fissuration des roulements à billes sollicités en fretting fatigue. Dans le chapitre 1, une synthèse bibliographique des résultats théoriques et expérimentaux portant sur les problèmes de fretting et notamment sur la fissuration sous sollicitations de fretting fatigue a été présentée. La maîtrise des mécanismes de rupture requiert une analyse pluri-disciplinaire des différents phénomènes physiques couplés. Les besoins mis en évidence pour la simulation numérique de ces problèmes sont :

- i la prise en compte du chargement cyclique multiaxial non proportionnel à l'interface entre les composants de structures en contact.
- ii la détermination du risque d'amorçage et de la géométrie initiale des fissure.
- iii la prise en compte de plusieurs fissures et de leurs interactions.
- iv la prise en compte du contact avec frottement entre les faces des fissures.
- v la modélisation de fissures non planes en trois dimensions. En effet, la mixité des sollicitations et les phénomènes non linéaires couplés tels que le contact avec frottement interfacial génèrent des géométries de fissures complexes en 3D.
- vi la simulation de la propagation des fissures en utilisant une loi de fatigue adaptée au matériau étudié et aux sollicitations, et des critères de direction de propagation en fatigue multiaxiale non proportionnelle.

Les points iii, v et vi sont aujourd'hui assez bien maîtrisés dans le cadre de la X-FEM. Cependant la modélisation du contact avec frottement entre les faces des fissures pose un certain nombre de difficultés. Un bref état de l'art de la modélisation des problèmes de contact dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus a été établi. Un certain nombre de travaux ont mis en évidence deux difficultés majeures liées principalement au type de la formulation du problème de contact : primale, duale ou mixte.

D'une part, les différents phénomènes physiques mis en jeu font intervenir différentes échelles spatiales, celle de la structure, celle de la fissure et celle des non-linéarités à l'interface, pouvant différer les unes des autres de plusieurs ordres de grandeur. Une solution de contact précise requiert une discrétisation spatiale de l'interface adaptée à la dimension caractéristique du problème local [RIB 07b]. La discrétisation de l'interface des fissures étant généralement dépendante du maillage éléments finis sous-jacent, une description précise du problème de contact requiert un raffinement local du maillage en volume. Cette étape peut s'avérer délicate, voire prohibitive pour les problèmes tridimensionnels. De plus, au regard du problème de la structure, le maillage n'est pas optimal et entraîne un surcoût numérique.

D'autre part, plusieurs travaux ont mis en évidence des problèmes d'instabilité de la solution de contact liés à un non respect de la condition inf-sup LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi). La solution locale de contact (avec ou sans frottement) est perturbée par des oscillations numériques. Ces instabilités ont un impact sur la solution locale du problème (notamment sur les efforts d'interface) et sur le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en pointe de fissure.

À partir de l'étude des différentes formulations utilisées, un modèle X-FEM multi-échelle avec contact et frottement interfacial a été proposé dans le chapitre 2 afin de répondre aux exigences listées ci-dessus. Il est basé sur une formulation faible mixte à trois champs permettant une description multi-échelle du problème de contact avec frottement entre les faces de la fissure

[PIE 10a]. L'interface est considérée comme une structure autonome avec ses propres variables et sa propre discrétisation indépendante du maillage de la structure et adaptée à l'échelle des non linéarités locales. Les solveurs non linéaires du Lagrangien Augmenté et de la méthode LATIN ont été implémentés. De plus, une méthode de stabilisation de la formulation du problème a été proposée [PIE 10b]. L'étude de la condition LBB et les expérimentations numériques ont montré que cette méthode est stable. Le solveur stabilisé NLLA permet de s'affranchir des éventuelles oscillations numériques de la solution de contact et améliore grandement le taux de convergence de la méthode itérative. Plusieurs exemples bidimensionnels et tridimensionnels ont mis en évidence les bonnes propriétés de convergence et la précision élevée du modèle proposé. Le gain en temps CPU peut atteindre 75%. L'ensemble de ces outils numériques a été mis en oeuvre au sein du code de calcul ELFE_3D développé au LaMCoS. La comparaison avec le code industriel ANSYS a permis de valider quantitativement les résultats en 3D.

Dans le chapitre 3, une stratégie multi-modèles pour la simulation numérique X-FEM de la propagation des fissures sous sollicitations de fatigue multiaxiale non proportionnelle a été proposée. Elle couple la résolution du problème de contact deux corps à l'aide d'un modèle semi-analytique pour le calcul de l'évolution des distributions de contraintes normales et tangentielles dans la zone de contact au cours du cycle, la prédiction de l'amorçage, des sites et de l'orientation initiale des fissures en utilisant le critère de Dang Van [DAN 93] et la simulation X-FEM multi-échelle de la propagation des fissures en fatigue avec contact et frottement interfacial. Cette stratégie a premièrement été utilisée en 2D pour simuler un essai de fissuration sous chargement de fretting issu de la littérature [DUB 00, BAI 10]. Le modèle X-FEM avec contact et frottement proposé dans ce mémoire et le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte à l'aide de l'intégrale d'interaction en 2D ont été validés par comparaison avec un modèle de référence basé sur la méthode des distributions continues de dislocations [DUB 89]. L'influence du coefficient de frottement interfacial et d'une contrainte de traction volumique additionnelle sur le comportement des fissures (amplitude et mixité des sollicitations en pointe de fissure, direction de propagation) a ensuite été étudiée.

Des essais de fretting fatigue cylindre/plan réalisés au LTDS de l'École Centrale de Lyon dans le cadre de ce travail de thèse ont permis de caractériser expérimentalement la propagation des fissures sous chargement de fretting. Les géométries des fissures ont été expertisées par coupes métallographiques post-mortem des éprouvettes à différents stades de propagation. Ces résultats ont permis de tracer une carte de l'évolution des fissures en fonction des paramètres d'essais et du nombre de cycles de charge. Le modèle X-FEM avec contact et frottement interfacial proposé dans ce mémoire permet de simuler numériquement les essais de fissuration sous chargement de fretting. Une loi de propagation en vitesse dédiée aux problèmes de fretting et au matériau étudié (acier 35NCD16) a été déterminée à partir des résultats de la modélisation X-FEM du problème de fissuration et de l'analyse expérimentale des vitesses de propagation. Puis, la simulation numérique des essais a été conduite en 2D à l'aide de cette loi et un critère de propagation en fatigue multiaxiale dédiés aux chargements non proportionnels. Les comparaisons des résultats numériques avec les mesures expérimentales montrent une bonne adéquation. Une quantité plus importante de données expérimentales permettrait toutefois d'améliorer la précision des résultats. La stratégie proposée constitue un outil efficace pour la prédiction de la durée de vie des composants de structures sous sollicitations de fatigue multiaxiale non proportionnelle. Elle permet de répondre aux besoins i, ii, iii, iv, et vi listés ci-dessus.

Dans le chapitre 4, la stratégie de simulation numérique multi-modèles a été étendue en trois dimensions afin de prendre en compte les aspects tridimensionnels des problèmes de fretting fatigue et les géométries de fissures complexes. Deux séries d'essais de fretting fatigue en configuration sphère/plan avec différents paramètres de charge et différents matériaux ont été réalisés dans le cadre de ce projet. La première série a été réalisée au Centre de Recherche et d'Ingénierie SKF. Les géométries tridimensionnelles spécifiques des fissures en fretting à différents stades de propagation ont été reconstituées à partir des coupes métallographiques post-mortem des éprouvettes. À partir des données d'essais enregistrées ($Q-\delta$) et en quantifiant l'énergie dissipée à l'interface dans l'anneau de glissement [FOU 95], l'évolution du frottement local μ est déterminée. L'aire de contact, les distributions de pression normale et de cisaillement cyclique ainsi que la répartition glissement-adhérence ont été déterminées. Le risque d'amorçage des fissures en surface et en volume a été analysé. Ces conditions de chargement et les faciès de fissuration expérimentaux 3D ont été utilisés comme données d'entrée pour la simulation numérique X-FEM multi-échelle de ces essais. Les géométries 3D complexes des fissures expérimentales ont été décrites précisément à l'aide de fonctions de niveau. Les performances du modèle et sa capacité à capturer précisément la solution du problème de contact entre les faces des fissures en trois dimensions a été démontrée [PIE 10c]. Puis, les facteurs d'intensité des contraintes ont été calculés le long des fronts des fissures à l'aide d'une intégrale d'interaction en 3D.

La deuxième série d'essais de fretting sphère/plan a été réalisée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon avec pour objectif l'étude de la propagation tridimensionnelle des fissures en fretting fatigue. Les géométries tridimensionnelles des fissures pour des essais conduits à différents nombres de cycles sont expertisées et reconstituées à partir de coupes métallographiques des éprouvettes fissurées. La stratégie de simulation numérique en trois dimensions de la propagation des fissures en fatigue multiaxiale non proportionnelle a été appliquée à ces essais. Ces résultats de la résolution du contact sphère plan ont été utilisés comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM du problème de fissuration en 3D. Les géométries 3D des fissures ont été décrites à l'aide de fonctions de niveau. L'étude des FIC en fonction de la taille des fissures a permis d'identifier la transition entre les stades II et III de la propagation des fissures en fretting (cf. figure 1.8).

Néanmoins, la détermination d'une loi de propagation en volume dédiée aux problèmes de fretting fatigue nécessite encore de disposer d'informations expérimentales plus nombreuses et plus précises : d'une part une représentation plus fine des fronts successifs expérimentaux associée à une meilleure connaissance des efforts expérimentaux. Par exemple, les techniques d'imagerie 3D par microtomographie X couplées à la mesure de champs de déplacement 3D (en présence de fissure) par corrélation d'image offrent de très intéressantes perspectives dans ce domaine. Ceci pourrait permettre notamment d'obtenir les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} issus des essais en appliquant les méthodes numériques d'extraction des FIC (intégrale d'interaction) directement aux champs de déplacements expérimentaux [RAN 10].

D'un point de vue numérique, la méthode proposée du traitement du contact entre les faces de la fissure est maintenant robuste et autorise un maillage relativement grossier en volume. Cependant, le modèle numérique doit être capable de capturer à la fois l'échelle de l'éprouvette (ou de la structure), l'échelle de la zone de contact deux-corps (à forts gradients), ainsi que l'échelle de la fissure. Même si ce maillage est défini une fois pour toute (pas de remaillage avec X-FEM), la taille des éléments finis en volume entre le bord de la structure et les éléments coupés par la fissure peuvent varier de 2 à 3 ordres de grandeur. Une extension intéressante serait d'automatiser

et d'optimiser la construction du maillage 3D à l'aide d'une stratégie multigrille localisée couplée avec X-FEM et la prise en compte du contact interfacial [PAS 10, RAN 08b, FIS 05, GUI 10].

D'autre part, dans le cas de la fissuration sous sollicitations de fretting, nous avons supposé négligeables les effets de la plasticité éventuelle sous le contact deux-corps et en pointe de fissure. Cette dernière pourrait notamment être prise en compte directement dans la loi de fatigue avec les modèles à variables internes sur le front de fissure proposés par Pommier [POM 05, GAL 10] afin d'éviter les calculs élastoplastiques en volume prohibitifs.

Enfin, nous avons supposé dans notre stratégie multi-modèles qu'il y a un découplage entre le problème du contact deux-corps et le problème de fissuration. Ainsi, la définition du chargement du chargement normal et tangentiel en surface est déterminé sans la présence des fissures. L'outil numérique X-FEM développé permet aujourd'hui des calculs précis pour le contact interfacial. On pourra imaginer à moyen terme de prendre en compte dans un même modèle le contact entre les faces de la fissure et le contact deux-corps avec un traitement similaire.

Bibliographie

- [ALI 79] ALIC J., HAWLEY A.
On the early growth of fretting fatigue cracks. *Wear*, vol. 56(2), 1979, p. 377-389.
- [AME 79] AMESTOY M., BUI H., DANG-VAN K.
Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 289, 1979, p. 99-102.
- [AME 87] AMESTOY M.
Propagation des fissures en élasticité plane. *Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France*, 1987, p. 169.
- [ARE 05] AREIAS P., BELYTSCHKO T.
Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, 2005, p. 760-788.
- [AUR 04] AURICCHIO F., BREZZI F., LOVADINA C.
Mixed Finite Element Methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics, Edts E. Stein, R. deBorst and T.J.R. Hugues. Volume 1 : Fundamentals*, 2004, p. 237-277.
- [BAI 02a] BAIETTO-DUBOURG M., BERTHIER Y., VINCENT L.
Cracking under fretting fatigue : damage prediction under multiaxial fatigue. *Journal of Strain Analysis*, vol. 37(6), 2002, p. 519-533.
- [BAI 02b] BAIETTO-DUBOURG M., LAMACQ V.
A predictive rolling contact fatigue crack growth model : onset of branching, direction, and growth- role of dry and lubricated conditions on crack patterns. *ASME Journal of Tribology*, vol. 124, 2002, p. 680-688.
- [BAI 03] BAIETTO-DUBOURG M., CHATEAUMINOIS A., VILLECHAISE B.
In situ analysis and modeling of crack initiation and propagation within fretting contacts using polymer materials. *Tribology International*, vol. 36, 2003, p. 109-119.
- [BAI 10] BAIETTO M., PIERRES E., GRAVOUIL A.
A multi-model X-FEM strategy dedicated to frictional crack growth under cyclic fretting fatigue loadings. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47(10), 2010, p. 1405-1423.
- [BAL 80] BALADIANCE R.
Application of strain energy density factor to fatigue crack growth analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 13, 1980, p. 657-666.
- [BAR 74] BARSOUM R.
On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1, 1974, p. 25-37.

- [BAT 96] BATHE K.
Finite Element Procedures. *Prentice Hall : Englewood Cliffs, NJ*, 1996.
- [BÉC 05] BÉCHET E., MINNEBO H., MOËS N., BURGARDT B.
Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 1033-1056.
- [BÉC 09] BÉCHET E., MOËS N., WOHLMUTH B.
A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, 2009, p. 931-954.
- [BEC 09] BECKER R., BURMAN E., HANSBO P.
A Nitsche extended finite element method for incompressible elasticity with discontinuous modulus of elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, 2009, p. 3352-3360.
- [BEL 94] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L.
Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 1994, p. 229-256.
- [BEL 99] BELYTSCHKO T., BLACK T.
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, 1999, p. 601-620.
- [BLA 91] BLANCHARD P., COLOMBIE C., PELLERIN V., FAYEULLE S., VINCENT L.
Material effect in fretting wear : application to iron, titanium and aluminium alloys. *Metall. Trans. A*, vol. 22A, 1991, p. 1535-1544.
- [BON 95] BONNET M., XIAO H.
Computation of energy release rate using material differentiation of elastic BIE for 3-D elastic fracture. *Engineering analysis with boundary elements - Elsevier*, vol. 15(2), 1995, p. 137-149.
- [BOR 06] BORDAS S., MORAN B.
Enriched Finite Elements and Level Sets for Damage Tolerance Assessment of Complex Structures. *Engng. Fract. Mech.*, vol. 73, 2006, p. 1176-1201.
- [BOR 07] BORDAS S., NGUYEN V., DUNANT C., NGUYEN-DANG H., GUIDOUM A.
An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71(6), 2007, p. 703-732.
- [BOU 89] BOUHELIER C.
Mécanique de la rupture - seuil de propagation - propagation des fissures par fatigue. *Centre Technique des Industries Mécaniques CETIM*, 1989, p. 121 p.
- [BOU 03] BOUCARD P., CHAMPANEY L.
A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, 2003, p. 1259-1282.
- [BRE 91] BREZZI F., FORTIN M.
Mixed and Hybrid Finite Element Methods. *Springer-Verlag : New York*, 1991.
- [BRO 89] BROEK D.
The Practical Use of Fracture Mechanics. *Kluwer Academic Publishers, London*, 1989, p. 522 p.

-
- [BUF 05] BUFFIÈRE J., PROUDHON H., FERRIE E., LUDWIG W., MAIRE E., CLOETENS P.
Three dimensional imaging of damage in structural materials using high resolution microtomography. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*, vol. 238, 2005, p. 75-82.
- [BUI 78] BUI H.
Mécanique de la rupture fragile. *Masson, Paris, France*, 1978, p. 215.
- [CAD 05] CADARIO A., ALFREDSSON B.
Fretting fatigue crack growth for a spherical indenter with constant and cyclic bulk load. *Engineering fracture mechanics*, vol. 72(11), 2005, p. 1664-1690.
- [CAR 00] CARTER B., WAWRZYNEK P., INGRAFFEA A.
Automated 3-d crack growth simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, p. 229-253.
- [CAT 38] CATTANÉO C.
Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. *Accademia dei Lincei, Rendicotti*, vol. 27(6), 1938, p. 342-384 ; 434-436 ; 474-478.
- [CHA 96] CHAMPANEY L.
Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, France*, 1996, p. 138 p.
- [CHA 99] CHAMPANEY L.
Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers and Structures*, vol. 73, 1999, p. 249-266.
- [CHA 06a] CHAHINE E., LABORDE P., RENARD Y.
Crack tip enrichment in the XFEM method using a cut-off function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 342(7), 2006, p. 527-532.
- [CHA 06b] CHAMBON L., JOURNET B.
Modelling of fretting fatigue in a fracture-mechanics framework. *Tribology International*, vol. 39, 2006, p. 1220-1226.
- [CHA 06c] CHATEAUMINOIS A., BAIETTO-DUBOURG M., GAUTHIER C., SCHIRRER R.
In situ analysis of the fragmentation of polystyrene films within sliding contacts. *Tribology International*, vol. 38, 2006, p. 931-942.
- [CHE 67] CHEREPANOV G.
The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 31(3), 1967, p. 503-512.
- [CHO 03] CHOPP D., SUKUMAR N.
Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method. *International Journal of Engineering Science*, vol. 41(8), 2003, p. 845-869.
- [COL 86] COLOMBIÉ C.
Usure induite par petits débattements. *Thèse Ecole Centrale de Lyon, France*, 1986.
- [COM 77] COMNINOU M.
The interface crack with friction in the contact zone. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, p. 780-781.
-

- [COM 03] COMBESURE A., GRAVOUIL A., HERRY B.
An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers and Structures*, vol. 81, 2003, p. 1211-1222.
- [COM 08] COMBESURE A., GRAVOUIL A., GRÉGOIRE D., RÉTHORÉ J.
X-FEM a good candidate for energy conservation in simulation of brittle dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(5), 2008, p. 309 - 318.
- [Con10] Étude de la propagation de fissuration sous chargement de fretting sur éprouvette pré-contrainte. *Contrat INSAVALOR - CENTRALE LYON INNOVATION dans le cadre du contrat SKF*, 2010.
- [DAN 93] DANG-VAN K.
Macro-approach in high-cycle multiaxial fatigue. In *Advances in Multiaxial Fatigue. ASTM STP 1191*, 1993, p. 120-130.
- [DHO 82] DHONDT H., TRUCHON M., PINEAU A.
Fatigue crack path behavior under polymodal fatigue. *Rapports de l'Institut de recherche de la sidérurgie française IRSID*, 1982.
- [DHO 98] DHONDT G.
Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41(4), 1998, p. 739-757.
- [DOL 01] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.
An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 53, 2001, p. 6825-6846.
- [DRÉ 10] DRÉAU K., CHEVAUGEON N., MOËS N.
Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(29-32), 2010, p. 1922-1936.
- [DUB 89] DUBOURG M.
Le contact unilatéral avec frottement le long de fissures de fatigue dans les liaisons mécaniques. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France*, 1989.
- [DUB 92a] DUBOURG M., VILLECHAISE B.
Analysis of multiple cracks, part I : theory. *ASME Journal of Tribology*, vol. 114, 1992, p. 455-461.
- [DUB 92b] DUBOURG M., VILLECHAISE B.
Analysis of multiple cracks, part II : results. *ASME Journal of Tribology*, vol. 114, 1992, p. 462-468.
- [DUB 92c] DUBOURG M., VILLECHAISE B.
Stress intensity factors in a bent crack : a model. *European Journal of Mechanics and Solids*, vol. 11(2), 1992, p. 169-179.
- [DUB 00] DUBOURG M., LAMACQ V.
Stage 2 crack propagation direction determination under fretting fatigue loading : a new approach in accordance with experimental observation. *ASTM STP 1367*, 2000, p. p. 436.
- [DUB 03] DUBOURG M.
Local fretting regime influences on crack initiation and early growth. *Fretting fatigue : Advances in the Basic Understanding and Applications, ASTM STP 1425*, 2003, p. p. 450.

-
- [DUF 04] DUFLOT M., NGUYEN-DANG H.
Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 168, 2004, p. 155-164.
- [DUF 07] DUFLOT M.
A study on the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, 2007, p. 1261-1302.
- [DUN 64] DUNDURS J., MURA T.
Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 12, 1964, p. 177-189.
- [DUR 06] DUREISSEIX D., BAVESTRELLO H.
Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 6523-6541.
- [ELB 70] ELBER W.
Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, 1970, p. 37-45.
- [ELB 71] ELBER W.
The significance of fatigue crack closure. *Dammage Tolerant Aircraft Structures, ASTM STP*, vol. 486, 1971, p. 230-242.
- [ELG 07a] ELGUEDJ T.
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France, 2007*, p. 168.
- [ELG 07b] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, 2007, p. 1569-1597.
- [ELG 09] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., MAIGRE H.
An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(30-32), 2009, p. 2297-2317.
- [END 76] ENDO K., GOTO H.
Initiation and propagation of fretting fatigue cracks. *Wear*, vol. 38(2), 1976, p. 311-324.
- [ERD 63] ERDOGAN F., SIH G.
On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Transaction of ASME, Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 519-527.
- [FEL 97] FELLOWS L., NOWELL D., HILLS D.
On the initiation of fretting fatigue cracks. *Wear*, 1997, p. 120-129.
- [FER 06] FERRIÉ E.
Caractérisation et modélisation tridimensionnelles de la propagation des fissures de fatigue dans des alliages d'aluminium modèles. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France, 2006*, p. 225.
-

- [FIS 05] FISH J., YUAN Z.
Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2005, p. 1341-1359.
- [FLE 97] FLEMING M., CHU Y., B B. M., BELYTSCHKO T.
Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 1483-1504.
- [FOR 67] FORMAN R., KEARNEY V., ENGLE R.
Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of Basic Engineering*, vol. 89, 1967, p. 459-464.
- [FOU 95] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L.
Analysis of sliding behaviour for fretting loadings ; determination of transition criteria. *Wear*, vol. 185, 1995, p. 35-46.
- [FOU 96] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L., DANG-VAN K.
Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions. *Wear*, vol. 195, 1996, p. 21-34.
- [FOU 02] FOUVRY S., K.ELLEUCH, SIMEON G.
Prediction of crack nucleation under partial slip fretting conditions. *Journal of Strain Analysis*, vol. 37(6), 2002, p. 549-564.
- [FRI 05] FRIDRICI V., FOUVRY S., KAPSA P., PERRUCHAUT P.
Prediction of cracking in Ti-6Al-4V alloy under fretting-wear : use of the SWT criterion. *Wear*, vol. 259, 2005, p. 300-308.
- [GAL 10] GALLAND F., GRAVOUIL A., MALVESIN E., ROCHETTE M.
A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. *Computational Methodes in Applied Mechanics and Engineering*, Submitted 2010.
- [GER 80] GERMAIN P., MULLER P.
Mécanique des milieux continus. *Masson, Paris, France*, 1980, p. 344.
- [GIN 08] GINER E., SUKUMAR N., DENIA F., FUENMAYOR F. J.
Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45(22-23), 2008, p. 5675-5687.
- [GIN 09a] GINER E., TUR M., TARANCÓN J. E., FUENMAYOR F.
Crack face contact in X-FEM using a segment-to-segment approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82(11), 2009, p. 1424-1449.
- [GIN 09b] GINER E., TUR M., VERCHER A., FUENMAYOR F.
Numerical modelling of crack-contact interaction in 2D incomplete fretting contacts using X-FEM. *Tribology international*, vol. 42, 2009, p. 1269-1275.
- [GÉN 06] GÉNIAUT S.
Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles. *Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, France*, 2006, p. 183 p.
- [GÉN 07] GÉNIAUT S., MASSIN P., MOËS N.
A stable 3D contact formulation for cracks using X-FEM. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16(1), 2007, p. 259-276.

- [GOS 98] GOSZ M., DOLBOW J., MORAN B.
Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, 1998, p. 1763-1783.
- [GOS 02] GOSZ M., MORAN B.
An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69(3), 2002, p. 299-319.
- [GRÉ 07] GRÉGOIRE D., MAIGRE H., RÉTHORÉ J., COMBESURE A.
Dynamic crack propagation under mixed-mode loading - Comparison between experiments and X-FEM simulations. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44(20), 2007, p. 6517-6534.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part 2 : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2569-2586.
- [GRA 09] GRAVOUIL A., ELGUEDJ T., MAIGRE H.
An explicit dynamics extended finite element method. Part 2 : Element-by-element stable-explicit/explicit dynamic scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(30-32), 2009, p. 2318-2328.
- [GRI 20] GRIFFITH A.
The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transaction of royal society of London*, vol. 221, 1920, p. 163-197.
- [GUI 08] GUIDAULT P., ALLIX O., CHAMPANEY L., CORNUAULT C.
A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 381-399.
- [GUI 10] GUIDAULT P., CHAMPANEY L.
A micro-macro mixed DDM for frictional contact problem : choice of the macroproblem and improvement of the convergence rate by a local-global iterative scheme. *European Congress on Computational Mechanics (ECCM IV)*, 2010.
- [HAN 04] HANSBO A., HANSBO P.
A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, 2004, p. 3523-3540.
- [HER 81] HERTZ H.
Über die Berührung fester elastischer Körper (Sur le contact entre corps élastiques). *J. für reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, 1981, p. 156-171.
- [HIL 85] HILLS D., COMNINOU M.
An analysis of fretting fatigue cracks during loading phase. *International Journal of Solids Structures*, vol. 21(4), 1985, p. 399-410.
- [HIL 94] HILLS D., NOWELL D.
Mechanics of fretting fatigue - Solid mechanics and its applications. *Kluwer Academic Publishers, Series Editor G.M.L. Gladwell, ISBN 0792328663*, vol. 30, 1994, p. 236.

- [HIL 96] HILLS D., KELLY P., DAI D., KORSUNSKY A.
Solution of crack problems - the distributed dislocation technique. *Kluwer Academic press*, 1996, p. 297.
- [HOU 82] HOURLIER F., DHONDT H., TRUCHON M., PINEAU A.
Etude du branchement des fissures de fatigue sous sollicitations bimodales non proportionnelles. Influence de la cinétique de propagation du matériau. *Rapports de l'Institut de recherche de la sidérurgie française IRSID*, 1982, p. 192.
- [HUG 87] HUGUES T.
The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. *Prentice Hall : Englewood Cliffs, NJ*, 1987.
- [IRW 57] IRWIN G.
Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics Transactions*, vol. 24, 1957, p. 361-364.
- [JOH 85] JOHNSON K.
Contact mechanics. *Cambridge University Press, UK, Ninth printing*, 1985, p. 452.
- [KAL 90] KALKER J.
Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London*, 1990.
- [KIM 07] KIM T., DOLBOW J., LAURSEN T.
A mortared finite element method for frictional contact on arbitrary interfaces. *Computational Mechanics*, vol. 39(3), 2007, p. 223-235.
- [KOL 05] KOLK K., WEBER W., KUHN G.
Investigation of 3D crack propagation problems via fast BEM formulations. *Computational Mechanics*, vol. 37(1), 2005, p. 32-40.
- [KRE 75] KRENK S.
On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 32, 1975, p. 479-484.
- [KRY 99] KRYSL P., BELYTSCHKO T.
The Element Free Galerkin Method for Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, 1999, p. 767-800.
- [LAB 05] LABORDE P., POMMIER J., RENARD Y., SALAÜN M.
High order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 354-381.
- [LAD 85] LADEVÈZE P.
Local Effects in the Analysis of Structures. *Elsevier Science Publishers*, 1985, p. 342 p.
- [LAD 99] LADEVÈZE P.
Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. *Springer-Verlag*, 1999, p. 220 p.
- [LAD 02] LADEVÈZE P., NOUY A., LOISEAU O.
A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, 2002, p. 4869-4891.

-
- [LAD 09a] LADEVÈZE P., NÉRON D., PASSIEUX J.-C.
On multiscale computational mechanics with time-space homogenization. *Multiscale methods Bridging the scales in Science and Engineering*. Oxford University Press. Ed. J. Fish, 2009, p. 247-282.
- [LAD 09b] LADEVÈZE P., PASSIEUX J., NÉRON D.
The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(21), 2009, p. 1287-1296.
- [LAM 96] LAMACQ V., DUBOURG M., VILLECHAISE B.
Fretting fatigue crack growth analysis : experimental photoelastic method combined with numerical model. *11th Biennial European Conference on Fracture - ECF 11, Poitiers, France*, 1996.
- [LAM 97a] LAMACQ V.
Amorçage et propagation de fissures de fatigue sous conditions de fretting. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France*, 1997, p. 252.
- [LAM 97b] LAMACQ V., DUBOURG M., VINCENT L.
A theoretical model for the prediction of initial growth angles and sites of fretting fatigue cracks. *Tribology International*, vol. 124(6), 1997, p. 391-400.
- [LEG 08] LEGRAIN G., MOËS N., HUERTA A.
Stability of incompressible formulations enriched with X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(21-24), 2008, p. 1835-1849.
- [LEI 00] LEITAO V., ALIABADI M.
Boundary element methods for the analysis of crack growth in non-linear fracture. *International Journal of Materials and Product Technology*, vol. 16, 2000, p. 104-116.
- [LEM 76] LEMAITRE J.
Extension de la notion de taux d'énergie de fissuration aux problèmes tridimensionnels et non linéaires. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 282, 1976, p. 157.
- [LEM 04] LEMAITRE J., CHABOCHE J.
Mécanique des matériaux solides. *Dunod, Paris, France*, 2004, p. 544.
- [LIU 05] LIU Y., MAHADEVAN S.
Multiaxial high-cycle fatigue criterion and life prediction for metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 790-800.
- [LIU 08] LIU F., BORJA R.
A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76(10), 2008, p. 1489-1512.
- [LIU 10] LIU F., BORJA R.
Stabilized low-order finite elements for frictional contact with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(37-40), 2010, p. 2456-2471.
- [MAU 92] MAUGIN G., TRIMARCO C.
Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity : variational formulations and application to brittle fracture. *Acta mechanica*, vol. 94, 1992, p. 1-28.
- [MCD 91] MCDIARMID D.
A general criterion for high-cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 14, 1991, p. 429-453.
-

- [MCD 00] MCDEVITT T., LAURSEN T.
A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48(10), 2000, p. 1525-1547.
- [MEL 96] MELENK J., BABUŠKA I.
The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 39, 1996, p. 289-314.
- [MEN 06] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., COMBESURE A., BUNG H.
Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (XFEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 68, 2006, p. 911-939.
- [MEN 08] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., MOËS N., COMBESURE A., BUNG H.
Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics : application to crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74(3), 2008, p. 447-474.
- [MI 94] MI Y., ALIABADI M.
Three-dimensional crack growth simulation using BEM. *Computers and structures*, vol. 52(5), 1994, p. 871-878.
- [MIN 49] MINDLIN R.
Compliance of elastic bodies in contact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, 1949, p. p. 259.
- [MOë 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.
A Finite Element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [MOë 02] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.
Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2549-2568.
- [MOë 06] MOËS N., BÉCHET E., TOURBIER M.
Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, 2006, p. 1641-1669.
- [MOR 87] MORAN B., SHIH C.
Crack tip and associated domain integral from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 27, 1987, p. 615-642.
- [MUñ 06] MUÑOZ S., PROUDHON H., DOMÍNGUEZ J., FOUVRY S.
Prediction of the crack extension under fretting wear loading conditions. *International Journal of Fatigue*, vol. 28(12), 2006, p. 1769-1779.
- [NAI 05] NAIDU N. R., RAMAN S. S.
Effect of shot blasting on plain fatigue and fretting fatigue behaviour of Al-Mg-Si alloy AA6061. *International Journal of Fatigue*, vol. 27(3), 2005, p. 323-331.
- [NAK 92] NAKAMURA T., PARKS D.
Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29(13), 1992, p. 1597-1611.
- [NIC 09] NICAISE S., RENARD Y., CHAHINE E.
Optimal convergence analysis for the eXtended Finite Element Method. *Unpublished Work*, 2009.

- [NIK 01] NIKISHKOV G., ATLURI S.
SGBEM-FEM alternating method for analyzing 3D non-planar cracks and their growth in structural components. *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 2(3), 2001, p. 401-422.
- [NIS 08] NISTOR I., GUITON M., MASSIN P., MOËS N., GÉLIAUT S.
An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78(12), 2008, p. 1407-1435.
- [NOW 90] NOWELL D., HILLS D.
Crack initiation criteria in fretting fatigue. *Wear*, vol. 30, 1990, p. 329-343.
- [NOW 06] NOWELL D., DINI D., HILLS D.
Recent developments in the understanding of fretting fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, 2006, p. 207-222.
- [NÉR 08] NÉRON D., DUREISSEIX D.
A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75(9), 2008, p. 1053-1084.
- [OSH 88] OSHER S., SETHIAN J.
Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, vol. 79, 1988, p. 12-49.
- [OTS 75] OTSUKA A., MORI K., MIYATA T.
The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 7, 1975, p. 429-439.
- [OTT 92] OTTOSEN N., PETERSSON H.
Introduction to the Finite Element Method. *Prentice Hall : New York*, 1992.
- [PAL 73] PALMER A., RICE J.
The growth of slip surfaces in the progressive failure of over consolidated clay. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Mathem*, vol. 332, 1973, p. 527-548.
- [PAR 63] PARIS P., ERDOGAN F.
A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 528-534.
- [PAS 08] PASSIEUX J.
Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace. *Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, France*, 2008, p. 162 p.
- [PAS 10] PASSIEUX J., GRAVOUIL A., RÉTHORÉ J., BAIETTO M.
Direct estimation of generalized SIF using a three-scale concurrent multigrid X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted 2010.
- [PIE 10a] PIERRES E., BAIETTO M., GRAVOUIL A.
A two-scale eXtended Finite Element Method for modeling 3D crack growth with interfacial contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(17-20), 2010, p. 1165-1177.
- [PIE 10b] PIERRES E., BAIETTO M., GRAVOUIL A.
3D experimental and X-FEM frictional contact fatigue crack model. Prediction of fretting problems. *Comptes Rendus Mécaniques*, Submitted 2010.

- [PIE 10c] PIERRES E., BAIETTO M., GRAVOUIL A., ESPEJEL G. M.
3D two scale X-FEM crack model with interfacial frictional contact : application to fretting-fatigue. *Tribology International*, vol. 43(10), 2010, p. 1831-1841.
- [POM 05] POMMIER S., RISBET M.
Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 1297-1306.
- [POT 92] POTELO A., ALIABADI M., D.ROOKE
The dual boundary element method - Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33(6), 1992, p. 1269-1287.
- [PRA 08] PRABEL B., MARIE S., COMBESCURE A.
Using the X-FEM method to model the dynamic propagation and arrest of cleavage cracks in ferritic steel. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75(10), 2008, p. 2984-3009.
- [PRO 06] PROUDHON H., FOUVRY S., YANTIO G.
Determination and prediction of the fretting crack initiation : introduction of the (P, Q, N) representation and determination of a variable process volume. *International Journal of Fatigue*, vol. 28, 2006, p. 707-713.
- [RAJ 00] RAJARAM H., SOCRATE S., PARKS D.
Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 66(5), 2000, p. 455-482.
- [RAN 08a] RANNOU J.
Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France*, 2008, p. 174.
- [RAN 08b] RANNOU J., GRAVOUIL A., BAIETTO-DUBOURG M.
A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 77, 2008, p. 1641-1669.
- [RAN 10] RANNOU J., LIMODIN N., RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., LUDWIG W., BAIETTO-DUBOURG M.-C., BUFFIÈRE J.-Y., COMBESCURE A., HILD F., ROUX S.
Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 1307-1325.
- [RAO 04] RAO B., RAHMAN S.
An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2004, p. 197-223.
- [RIB 07a] RIBEAUCOURT R.
Gestion du contact avec frottement le long des faces de fissures dans le cadre de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France*, 2007, p. 213.
- [RIB 07b] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG M., GRAVOUIL A.
A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled XFEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196(33-34), 2007, p. 3230-3247.
- [RIC 68] RICE J.
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, 1968, p. 379-386.

- [ROB 06] ROBIN X.
Crack initiation study under fretting fatigue conditions. *Master Recherche MEGA - INSA de Lyon*, 2006, p. 42 p.
- [ROZ 08] ROZYCKI P., MOES N., BECHET E., DUBOIS C.
X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(5), 2008, p. 349-363.
- [RÉT 05] RÉTHORÉ J.
Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique de fissures. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, France*, 2005, p. 143.
- [RUI 84] RUIZ C., BODDINGTON P., CHEN K.
An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint. *Experimental Mechanics*, vol. 24(3), 1984, p. 208-217.
- [SHI 06] SHINDE S., HOEPPNER D.
Fretting fatigue behavior in 7075-T6 aluminum alloy. *Wear*, vol. 261(3-4), 2006, p. 426-434.
- [SIA 10] SIAVELIS M., MASSIN P., GUITON M., MOËS S. M. N.
Robust implementation of contact under friction and large sliding with the eXtended Finite Element Method. *European Journal of Computational Mechanics*, 2010.
- [SIH 74] SIH G.
Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, vol. 10, 1974, p. 305-321.
- [SIH 80] SIH G.
Mixed mode fatigue crack growth predictions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 13, 1980, p. 439-451.
- [SIH 91] SIH G.
Mechanics of fracture initiation and propagation. *Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands*, 1991, p. 410.
- [SIM 92] SIMO J., LAURSEN T.
An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, vol. 42(1), 1992, p. 97-116.
- [SMI 70] SMITH K., WATSON P., TOPPER T.
A stress-train function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, vol. 5(4), 1970, p. 767-778.
- [SUK 00] SUKUMAR N., MÖES N., MORAN B., BELYTSCHKO T.
Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1549-1570.
- [SUK 03] SUKUMAR N., CHOPP D., MORAN B.
Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, 2003, p. 29-48.
- [SUO 92] SUO X., COMBESURE A.
On the application of G(q) method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nuclear engineering and design*, vol. 135, 1992, p. 207-224.

- [SUR 98] SURESH S.
Fatigue of Materials, 2nd Edition. *Massachusetts Institute of Technology*, 1998, p. 610 p.
- [SZO 98] SZOLWINSKI M., FARRIS T.
Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminium alloy. *Wear*, vol. 221, 1998, p. 24-36.
- [TRU 81] TRUCHON M., AMESTOY M.
Etude théorique et expérimentale de la fissuration par fatigue sous sollicitations bi axiales. *Rapports de l'Institut de recherche de la sidérurgie française IRSID*, 1981, p. 63.
- [TUH 97] TUHKURI J.
Dual boundary element analysis of closed cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 2995-3014.
- [VIN 88] VINGSBO O., SODERBERG S.
On fretting maps. *Wear*, vol. 126, 1988, p. 131-147.
- [VIN 92a] VINCENT L., BERTHIER Y., DUBOURG M., GODET M.
Mechanics and materials in fretting. *Wear*, vol. 153, 1992, p. 135-148.
- [VIN 92b] VINCENT L., BERTHIER Y., GODET M.
Testing methods in fretting fatigue : a critical appraisal. *ASTM STP 1159*, 1992, p. 33-48.
- [VIT 08] VITALI E., BENSON D.
Contact with friction in multi-material arbitrary Lagrangian-Eulerian formulations using XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76(6), 2008, p. 893-921.
- [WAT 65] WATERHOUSE R., ALLERY M.
The effect of non-metallic coatings on the fretting corrosion of mild steel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 8(2), 1965, p. 112-120.
- [WAT 71] WATERHOUSE R., TAYLOR D.
The initiation of fatigue cracks in A 0.7% carbon steel by fretting. *Wear*, vol. 17(2), 1971, p. 139-147.
- [WAT 81] WATERHOUSE R.
Fretting fatigue. *Eds Waterhouse, Applied Science Publishers, UK*, 1981.
- [WES 39] WESTERGAARD H.
Bearing pressures and cracks. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, 1939, p. 49-53.
- [WIT 00] WITKOWSKY B., BIRCH P., DOMINGUEZ J., SURESH S.
An experimental investigation of fretting fatigue with spherical contact in 7075-T6 aluminium alloy. *Fretting Fatigue : Current technology and Practices, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran and C.B. Elliott, Eds., American Society for testing and materials, West Conshohocken, PA*, 2000, p. pp.213-227.
- [WYA 08] WYART E., DUFLLOT M., COULON D., MARTINY P., PARDOEN T., REMACLE J., LANI F.
Substructuring FE-XFE approaches applied to three-dimensional crack propagation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 215(2), 2008, p. 626-638.
- [XIA 06] XIAO Q., KARIHALOO B.
Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, 2006, p. 1378-1410.

[YAU 80] YAU J., WANG S., CORTEN H.

A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, 1980, p. 335-341.

[ZHO 95] ZHOU Z., VINCENT L.

Mixed fretting regime. *Wear*, vol. 181-183, 1995, p. 531-536.

[ZIE 00] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R.

The Finite Element Method (5th edn), Vol.1 - The Basis. *Butterworth-Heinemann :Oxford*, 2000.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : PIERRES

DATE de SOUTENANCE : 27 septembre 2010

Prénoms : Emilien, Etienne, Camille

TITRE : Simulation numérique multi-échelle de la propagation de fissures expérimentales tridimensionnelles sous chargement de fretting fatigue par la méthode des éléments finis étendus

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2006-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

RÉSUMÉ :

La prévision du comportement et de la propagation de fissures de fatigue est un domaine de recherche complexe, dont les objectifs peuvent se résumer simplement par "augmenter la durée de vie des structures, tout en évitant leur surdimensionnement". Le fretting est attribué à l'interaction de deux composants en contact soumis à des déplacements relatifs cycliques de faible amplitude. Les sollicitations tribologiques à l'interface des composants des structures mettent en jeu des amplitudes de contraintes très élevées dans des volumes de matière très localisés. Le régime de glissement locale, i.e. l'évolution des conditions de glissement et d'adhérence, détermine la nature de l'endommagement initial : fissuration ou usure. Le travail présenté dans ce mémoire est focalisé sur la prédiction de l'amorçage et du comportement des fissures de fretting fatigue. Ces fissures tridimensionnelles sont sollicitées en mode mixte selon des cycles complexes et leur propagation en fatigue est conditionnée par les phénomènes non-linéaires tels que la plasticité localisée en front de fissure et le contact avec frottement entre les lèvres. Ainsi, la maîtrise des mécanismes de fissuration sous chargement de fretting fatigue requiert une analyse pluri-disciplinaire des différents phénomènes physiques couplés afin de prendre en compte les effets globaux et locaux, les sollicitations multiaxiales non proportionnelles, les lois de comportement et les conditions de contact avec frottement interfacial.

Un modèle tridimensionnel éléments finis étendus multi-échelles dédié au contact avec frottement entre les faces de la fissure est proposé. Une formulation faible mixte à trois champs permet une définition intrinsèque de la fissure avec sa propre discrétisation indépendante du maillage de la structure. Un solveur stabilisé adapté de la méthode LATIN est implémenté. Les propriétés de stabilité et les performances du modèle sont illustrées dans plusieurs exemples bidimensionnels et tridimensionnels. Le modèle est validé par comparaison avec un code éléments finis industriel.

Une stratégie multi-modèle globale basée sur l'analyse expérimentale et la simulation numérique de la propagation des fissures est développée afin de prédire la durée de vie de composants en fretting fatigue. Des essais de fretting fatigue sont réalisés afin d'analyser l'amorçage et la propagation de fissures. Les sollicitations tribologiques au cours du cycle sont déterminées par la résolution du contact deux-corps. La prédiction du risque d'amorçage des fissures est conduite. Ces résultats sont utilisés comme données d'entrée pour la modélisation X-FEM des essais de fretting bidimensionnels et tridimensionnels. La simulation de la propagation des fissures est réalisée à l'aide de critères de fatigue multiaxiale non proportionnels et d'une loi de propagation expérimentale.

MOTS-CLÉS : : Fretting, fatigue, rupture, éléments finis étendus, contact frottement, propagation des fissures, étude expérimentale, contact deux corps.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides
LaMCoS - INSA de Lyon - UMR CNRS 5259
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directrice de thèse : BAIETTO Marie-Christine

Co-encadrants : GRAVOUIL Anthony et MORALES ESPEJEL Guillermo

Président du jury : LADEVÈZE Pierre

Composition du jury : CAILLETAUD Georges
GINER MARAVILA Eugenio
NOWELL David
MORALES ESPEJEL Guillermo

FOUVRY Siegfried
BAIETTO Marie-Christine
GRAVOUIL Anthony