

# THÈSE

## DEFINITION ANALYTIQUE DES SURFACES DE DENTURE ET COMPORTEMENT SOUS CHARGE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

Présentée devant  
**L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

Pour obtenir  
**Le grade de Docteur**

École doctorale  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par  
**Joël TEIXEIRA ALVES**  
Ingénieur INSA de Lyon

Thèse soutenue le 30 mai 2012 devant la Commission d'examen

### Jury

---

R. BIGOT	Professeur (LCFC – Arts et Métiers ParisTech de Metz) – Rapporteur
A. DAIDIE	Professeur (ICA – INSA de Toulouse) – Rapporteur
M. GUINGAND	MCF HdR (LAMCOS – INSA de Lyon)
P. RAY	Professeur (IFMA - Clermont-Ferrand)
J. RECH	MCF HdR (ENISE – Saint-Etienne)
J. F. RIGAL	Professeur (LAMCOS – INSA de Lyon)
J. P. de VAUJANY	MCF (LAMCOS – INSA de Lyon)

---

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



## INSA Direction de la Recherche – Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<u>CHIMIE DE LYON</u> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
<b>E.E.A.</b>	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
<b>E2M2</b>	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
<b>EDISS</b>	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a> Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
<b>INFOMATHS</b>	<u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	M. Johannes KELLENDONK Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
<b>Matériaux</b>	<u>MATERIAUX DE LYON</u> Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
<b>MEGA</b>	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
<b>ScSo</b>	<u>ScSo*</u> M. OBADIA Lionel Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



## Remerciements

---

---

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon. Le laboratoire est sous la direction de Monsieur le Professeur Alain COMBESURE, que je tiens à remercier pour m'avoir accueilli.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Michèle GUINGAND et Jean-Pierre de VAUJANY, Maîtres de conférences à l'INSA de Lyon, qui m'ont encadré, guidé, soutenu et fait confiance pour mener à bien ces travaux de recherche. J'ai tout particulièrement apprécié leur bonne humeur, leur disponibilité, ainsi que la grande liberté qu'ils m'ont laissé.

Je souhaite remercier vivement Alexandre ZELEZ, Technicien au LaMCoS, pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour m'avoir aidé et conseillé sur la partie usinage de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Jérôme CAVORET, Vincent BAUDIN et Georges ROCHE, tous trois Techniciens au LaMCoS, pour leur aide et leurs conseils sur l'élaboration et l'utilisation du banc d'essai.

Je remercie également Stéphane RAYNAUD, Professeur Agrégé à l'INSA de Lyon, ainsi que Pascal ROUX et Adrien CHOUVIER, Techniciens, sans qui les études métrologiques n'auraient pas pu être réalisées.

Je suis honoré de l'attention que Messieurs les Professeurs Alain DAIDIE, de l'INSA de Toulouse, et Régis BIGOT, de l'ENSAM de Metz, ont portée à mon travail en tant que rapporteurs et membres du jury.

Je remercie également Messieurs Pascal RAY, Professeur à l'IFMA de Clermont-Ferrand, Joël RECH, Maître de conférence à l'ENISE de Saint-Etienne, et Jean-François RIGAL, Professeur à l'INSA de Lyon, d'avoir accepté d'être membres du jury.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui, de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, les membres du LaMCoS pour leur sympathie, leur aide, leur soutien et leur amitié, avec une pensée toute particulière aux informaticiens, à la plateforme CMAO, et aux doctorants « du bout du couloir ».



## Résumé

---

---

### **Définition analytique des surfaces de denture et comportement sous charge des engrenages spiro-coniques**

La conception des engrenages spiro-coniques reste encore très complexe de nos jours car la géométrie des dentures, et donc les performances cinématiques, découle du mode de fabrication de ce type d'engrenage. Le taillage est lié à deux constructeurs principaux : Gleason et Klingelnberg. De nombreux paramètres de réglage des machines influencent directement les surfaces de denture, leur optimisation n'est donc pas intuitive.

Avec les progrès réalisés cette dernière décennie par les machines d'usinage à commande numérique et la FAO (Fabrication Assistée par Ordinateur), il devient possible de fabriquer des engrenages spiro-coniques de bonne qualité sur une machine 5 axes. Un modèle numérique a été développé pour générer une géométrie simplifiée de type Gleason, usinée par la suite avec une machine 5 axes. Une étude de métrologie, permettant de comparer les dents usinées avec les modèles CAO, a ensuite été réalisée pour prouver que l'usinage par une machine 5 axes peut être une alternative aux méthodes de taillage classiques.

De nouveaux types de géométrie peuvent donc être proposés, qui ne pouvaient pas être envisagés par les moyens de fabrication classiques. Une géométrie basée sur la théorie des développantes sphériques, combinée à une spirale logarithmique a été développée, puis usinée. De plus, des corrections de bombé ou de profil peuvent être définies afin d'éviter les contacts en bords de denture. Ce type de géométrie analytique offre des possibilités plus simples d'optimisation de l'engrènement.

L'optimisation des surfaces peut être réalisée à l'aide du modèle d'engrènement quasi-statique sous charge développé dans le cadre de cette thèse. L'environnement de l'engrenage est pris en compte dans la simulation : déformation des arbres, des dentures et de leurs supports (jantes et voiles) ainsi que les déformations locales de contact. La méthode des coefficients d'influence est utilisée pour résoudre le partage des charges entre toutes les dents instantanément en contact. Une méthode originale, utilisant sur un seul calcul élément finis et la définition de bases de fonctions, permet de calculer rapidement les flexions de denture dans leur environnement. Les déformations de contacts sont, quant à elles, obtenues par une méthode analytique, basée sur les théories de Boussinesq. De plus, des défauts d'assemblage peuvent être intégrés entre le pignon et la roue spiro-conique.

Afin de valider les modèles numériques développés, un banc d'essai a été mis en place, permettant la mesure de l'erreur de transmission et la visualisation des portées. Le banc d'essai est intégré dans une fraiseuse numérique 3 axes : le pignon est monté dans la broche de la fraiseuse, le reste du banc étant bridé sur son plateau. Ainsi, des défauts de montage peuvent être appliqués facilement et précisément.

#### Mots clés :

Engrenage spiro-conique, développante de sphère, spirale logarithmique, usinage 5-axes, métrologie, mesure, erreur de transmission.





# Abstract

---

---

## **Analytical definition of tooth surfaces and loaded behavior of spiral bevel gears**

The design of spiral bevel gears is still very complex nowadays because the tooth geometry, and thus the kinematic performance, come from the manufacturing process of this type of gear. The cutting is related to two major manufacturers: Gleason and Klingelnberg. Many machine settings drive directly the shape of teeth surfaces, their optimization is therefore not intuitive.

Due to the progress made during the last decade by the CNC machines and the CAM (Computer Aided Manufacturing) softwares, it becomes possible to manufacture spiral bevel gears of quite correct quality on a 5-axis milling machine. A numerical model was developed in order to generate a simplified type Gleason geometry. This last was then manufactured with a 5-axis milling machine. A metrological study, comparing the teeth obtained with the CAD models, was then carried out to prove that the manufacturing by 5-axis milling machine can be an alternative to conventional cutting methods.

New types of geometry can be then proposed, which could not be considered by the conventional methods of manufacturing. Geometry based on the theory of spherical involutes, combined with a logarithmic spiral was developed and then manufactured. In addition, profile and crowning modifications can be defined to avoid the tooth edge contacts. This type of analytical geometry offers simpler possibilities for optimizing the meshing.

The surface optimization can be achieved using the quasi-static meshing model under load developed in the context of this thesis. The surroundings of the gear are taken into account in the simulation: deformation of the shafts, of the gears and their supports (rims for example) as well as the local contact deformations. The influence coefficient method is used to solve the load sharing between all the teeth instantaneously in contact. An original method, using only one finite element computation and the definition of a set of functions, can quickly calculate the teeth bending, taking into account their surroundings. The contact deformations are obtained with an analytical method, based on Boussinesq theories. In addition, meshing defects can be integrated between the spiral bevel pinion and gear.

To validate the numerical model, a test bench was achieved, allowing the measurement of the loaded transmission error and the visualization of the contact patterns. The test bench is integrated inside a numerical 3-axis milling machine: the pinion is mounted in the spindle of the milling machine, when the base of the bench is clamped on its plate. Thus, assembly errors can be imposed easily and accurately.

### Keywords:

Spiral bevel gears, spherical involute, logarithmic spiral, 5-axis machining, metrology, measure, loaded transmission error.



---



---

# Table des matières

---



---

<b>Remerciements.....</b>	<b>5</b>
<b>Résumé.....</b>	<b>7</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>9</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>11</b>
<b>Liste des Figures.....</b>	<b>15</b>
<b>Liste des Tableaux.....</b>	<b>21</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>23</b>
<b>Chapitre I Etude bibliographique.....</b>	<b>25</b>
1. Introduction.....	25
2. Généralités .....	26
3. Méthodes de fabrication.....	31
3.1.1 Gleason.....	31
3.1.2 Oerlikon.....	32
3.1.3 Klingelnberg.....	33
3.3.1 Taillage avec génération.....	34
3.3.2 Taillage sans génération.....	35
4. Méthodes de définition des surfaces d'engrènement.....	36
4.2.1 Profils de dentures.....	37
4.2.2 Types de spirales.....	38
5. Modélisation du comportement sous charge des engrenages.....	40
5.1.1 Méthode des Eléments Frontières.....	41
5.1.2 Méthode des Prismes Finis.....	41
5.1.3 Méthode des Eléments Quasi-Prismes.....	41
5.1.4 Méthode des Bandes Finies.....	41
5.1.5 Méthode des Transformations de Domaines.....	42
5.1.6 Méthode des Fonctions de déformations.....	42
5.2.1 Rappel sur les hypothèses de la théorie de Hertz.....	43
5.2.2 Modèles analytiques.....	44
5.2.3 Algorithmes de contact de Kalker.....	44
5.2.4 Autres méthodes de résolution.....	44
5.3.1 Modélisation complète par Eléments Finis.....	45
5.3.2 Modélisation par Eléments Finis Polynomiaux.....	46
5.3.3 Modélisation Mixte par Eléments Finis.....	47
5.3.4 Modélisations mixtes utilisant des fonctions d'approximation.....	48
6. Optimisation des engrenages spiro-coniques.....	51
6.2.1 Déviation des surfaces des dentures réelles.....	52
6.2.2 Modification de la portée.....	54
6.2.3 Erreur cinématique.....	55
6.3.1 Sorties optimales.....	58
6.3.2 Influence des paramètres de la machine.....	58
6.3.3 Influence des paramètres des outils.....	60
6.3.4 Influence des paramètres de l'engrenage.....	62
7. Travaux expérimentaux.....	63
8. Conclusion.....	68
<b>Chapitre II Nouvelle géométrie et modèle de partage de charge.....</b>	<b>69</b>
1. Introduction.....	69
2. Définitions géométriques.....	70
2.1.1 Outils.....	71
2.1.2 Mouvement de génération.....	71

## Table des matières

2.1.3	Calcul de l'enveloppe .....	74
2.1.4	Définition du point dans un repère sphérique .....	76
2.2.1	Contraintes de conception.....	79
2.2.2	Définitions géométriques.....	79
3.	Partage de charge .....	89
3.1.1	Hypothèses sur la zone de contact.....	89
3.1.2	Description du problème.....	90
3.1.3	Propriétés élastiques .....	91
3.1.4	Résolution du problème .....	92
3.2.1	Définition des coefficients d'influence.....	93
3.2.2	Calcul des écarts initiaux .....	106
3.3.1	Répartition des charges.....	107
3.3.2	Pressions instantanées.....	108
3.3.3	Portée sous charge .....	109
3.3.4	Erreur de transmission .....	109
3.3.5	Temps de calcul .....	110
4.	Etudes de validation .....	111
5.	Conclusion .....	116
<b>Chapitre III Etudes expérimentales et comparaisons.....</b>		<b>117</b>
1.	Introduction.....	117
2.	Engrenages usinés.....	118
3.	Usinage .....	121
3.2.1	Définition des surfaces usinées.....	122
3.2.2	Outils .....	123
3.2.3	Différentes opérations.....	123
3.3.1	Opérations d'usinage .....	124
3.3.2	Outils utilisés .....	125
3.3.3	Temps d'usinage.....	125
4.	Métrologie.....	127
4.2.1	Définition du repère de travail.....	128
4.2.2	Dents à mesurer .....	128
4.2.3	Distribution des points à mesurer .....	130
4.2.4	Contrôle automatique des points.....	130
5.	Banc d'essai .....	134
5.1.1	Eléments principaux du banc.....	134
5.3.1	Informations de sortie .....	137
5.3.2	Erreur de transmission .....	138
6.	Exploitation des mesures .....	143
6.2.1	Engrenage Gleason .....	146
6.2.2	Engrenage analytique.....	147
6.3.1	Raideurs aux liaisons.....	148
6.3.2	Comparaisons pour l'engrenage de type Gleason.....	150
6.3.3	Comparaisons pour l'engrenage analytique.....	154
7.	Comparaison avec un cas industriel.....	158
7.1.1	Caractéristiques de l'engrenage.....	158
7.1.2	Modèle numérique utilisé par l'entreprise.....	158
8.	Conclusion .....	164
<b>Conclusion générale.....</b>		<b>167</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>		<b>169</b>
<b>Annexes.....</b>		<b>183</b>
1.	Calcul des coordonnées de la développante de sphère.....	183
2.	Relation de trigonométrie sphérique .....	190
3.	Développement mathématique du partage de charges .....	191
4.	Calcul des coefficients d'influence de contact.....	194
5.	Caractéristiques du centre UGV 5-axes .....	198
6.	Description de différents types d'outils .....	199
7.	Description des opérations d'usinage.....	200
8.	Mise en position du brut sur le centre d'usinage.....	205
9.	Recensement des outils consommés .....	206
10.	Durées d'usinage.....	208

## Table des matières

---

11.	Résultats métrologiques des contrôles de surface .....	211
11.1.1	Cas du pignon .....	211
11.1.2	Cas de la roue.....	212
11.2.1	Cas du pignon .....	213
11.2.2	Cas de la roue.....	214
12.	Caractéristiques des éléments du banc .....	215
13.	Description du matériel d'acquisition .....	219
14.	Mise en position du banc d'essai.....	221



## Liste des Figures

Figure 1.1 : Géométrie d'un engrenage conique [1] .....	26
Figure 1.2 : Roue plate génératrice de taillage des roues coniques [1] .....	27
Figure 1.3 : Différents types d'engrenages spiro-coniques [2] .....	27
Figure 1.4 : Différents types de hauteur de denture [2] .....	28
Figure 1.5 : Courbes directrices [1].....	29
Figure 1.6 : Système Cyclo-Palloïde Klingelnberg [1] .....	29
Figure 1.7 : Schématisation de la jante et du voile.....	30
Figure 1.8 : Taillage d'un pignon à denture spirale de type Gleason [2].....	31
Figure 1.9 : Différents types de fraise de taillage Gleason [2].....	32
Figure 1.10 : Taillage d'un pignon de type Oerlikon [2] .....	32
Figure 1.11 : Fraise mère conique [2] .....	33
Figure 1.12 : Taillage d'une roue de type Klingelnberg [2].....	33
Figure 1.13 : Différents types de rectifieuse meule « Boisseau » [2] .....	34
Figure 1.14 : Cycle de taillage avec génération [3].....	35
Figure 1.15 : Cycle de taillage sans génération [3] .....	35
Figure 1.16 : Modèle géométrique et CAO .....	37
Figure 1.17 : Profils de denture .....	38
Figure 1.18 : Différents types de spirale [29].....	39
Figure 1.19 : Processus du calcul de comportement sous charge [32].....	40
Figure 1.20 : Définition d'un contact conforme et non-conforme .....	43
Figure 1.21 : Contact d'un couple d'engrenages spiro-coniques [68] .....	43
Figure 1.22 : Calcul des coefficients de surface.....	45
Figure 1.23 : Modèle EF pour un engrenage conique [85] .....	46
Figure 1.24 : Maillage EF distordu pour une orientation correcte des « GAP ELEMENT » [88] .....	46
Figure 1.25 : Exemple de modélisation par Eléments Finis Polynomiaux .....	46
Figure 1.26 : Maillage de la zone de contact potentiel dans le plan tangent [36].....	48
Figure 1.27 : Modèle de partage de charge entre deux dents en prise [104].....	49
Figure 1.28 : Repère de montage du pignon et de la roue, avec les degrés de liberté [122]....	51
Figure 1.29 : Mesure de surfaces [141].....	53
Figure 1.30 : Déviation des surfaces [128] .....	53
Figure 1.31 : Correction en longueur [135].....	54
Figure 1.32 : Correction en hauteur [135].....	54
Figure 1.33 : Correction en torsion [135].....	54
Figure 1.34 : Influence des défauts de montage sur la position du contact [122].....	55
Figure 1.35 : Influence de l'erreur de montage axiale du pignon [148].....	55
Figure 1.36 : Surface bombée suivant la ligne de contact [135].....	56
Figure 1.37 : Erreur cinématique et portée basée sur les réglages initiaux de la machine [26]	56
Figure 1.38 : Surface des courbes d'erreur cinématique fonction de inclinaison de l'outil [20] .....	57
Figure 1.39 : Graphiques de mouvements relatifs, de vitesse et d'accélération [135].....	57
Figure 1.40 : Graphiques de « Ultimate Motion Graph » [135].....	57
Figure 1.41 : Modification de l'erreur cinématique grâce au rodage [149] .....	57
Figure 1.42 : Définition de la portée idéale [152] .....	58
Figure 1.43 : Modified Radial Motion [122].....	59
Figure 1.44 : Comparaisons d'erreurs de transmission [19] .....	60

## Liste des Figures

Figure 1.45 : Influence des défauts de montage [19] .....	60
Figure 1.46 : Machine Gleason 6 axes Phoenix [24] .....	60
Figure 1.47 : Différents types de profils [14] .....	61
Figure 1.48 : Profil de meule bi-circulaire [18] .....	61
Figure 1.49 : Influence des rayons sur les pressions maximales [18] .....	62
Figure 1.50 : Etude d'influence sur les paramètres géométriques [44] .....	62
Figure 1.51 : Instrumentation pour la mesure de surface d'engrenages spiro-conique [29] ....	63
Figure 1.52 : Mesure de flanc de denture sur une CMM [22] .....	63
Figure 1.53 : Comparaisons entre mesures par Speckel Video et modèle numérique [159] ...	64
Figure 1.54 : Acquisition thermo graphique de la zone de contact [69] .....	65
Figure 1.55 : Portée obtenue expérimentalement [14] .....	65
Figure 1.56 : Portée obtenue par le modèle numérique [14] .....	65
Figure 1.57 : Schéma du banc d'essai [60] .....	66
Figure 1.58 : Erreur de transmission [60] .....	67
Figure 2.1 : Processus de calcul de la répartition des charges [32] .....	69
Figure 2.2 : Machine de taillage Gleason [22] .....	70
Figure 2.3 : Fraise de taillage des engrenages spiro-coniques Gleason [2] .....	71
Figure 2.4 : Définition de l'enveloppe de l'outil de taillage .....	71
Figure 2.5 : Repères liés aux différents éléments, lors du taillage .....	72
Figure 2.6 : Position de la roue par rapport au repère machine .....	72
Figure 2.7 : Position de l'outil taillant la roue, dans le repère machine .....	73
Figure 2.8 : Position du pignon par rapport au repère machine .....	73
Figure 2.9 : Définition des deux paramètres $\Delta E$ et $\Delta L$ .....	74
Figure 2.10 : Géométrie du cône de l'outil .....	75
Figure 2.11 : Géométrie du tore de l'outil .....	76
Figure 2.12 : Paramètres pour définir un point sur la denture .....	77
Figure 2.13 : Détermination du point $P_m$ sur le cercle solution .....	78
Figure 2.14 : Détermination du point $P_e$ sur le cône .....	78
Figure 2.15 : Génération de la surface en développante de sphère [31] .....	80
Figure 2.16 : Paramétrage géométrique .....	81
Figure 2.17 : Développante sphérique .....	81
Figure 2.18 : Géométrie générique des spirales .....	82
Figure 2.19 : Spirale logarithmique 2D .....	82
Figure 2.20 : Influence du paramètre $\alpha$ sur la spirale .....	83
Figure 2.21 : Spirale logarithmique sur un cône .....	83
Figure 2.22 : Développante sphérique à spirale logarithmique .....	83
Figure 2.23 : Différents types de hauteur de denture [2] .....	84
Figure 2.24 : Types de corrections utilisés .....	84
Figure 2.25 : Description des deux types de forme de correction dans le plan radial .....	85
Figure 2.26 : Présentation du plan de projection .....	85
Figure 2.27 : Principe d'application de la correction .....	86
Figure 2.28 : Correction de bombé sur le pignon .....	86
Figure 2.29 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur toute la largeur .....	87
Figure 2.30 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur le petit bout seulement ..	87
Figure 2.31 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur le gros bout seulement ..	88
Figure 2.32 : Zone de contact à vide et sous charge .....	89
Figure 2.33 : Positionnement de la zone maillée .....	90
Figure 2.34 : Définition des écarts et déplacements .....	90
Figure 2.35 : Répartition des points pour les calculs Eléments Finis .....	95
Figure 2.36 : Deux types de conditions aux limites .....	95



## Liste des Figures

Figure 2.37 : Corrélation entre la dent et une poutre .....	98
Figure 2.38 : Points pris en compte sur la roue .....	102
Figure 2.39 : Nombre de fonctions inférieur au nombre de points .....	103
Figure 2.40 : Nombre de fonctions supérieur au nombre de points .....	103
Figure 2.41 : Comparaisons entre les deux méthodes .....	105
Figure 2.42 : Projection des points du maillage sur le pignon et sur la roue .....	107
Figure 2.43 : Représentation de la répartition des charges sur 3 pas de dents .....	108
Figure 2.44: Lignes de contact sous charge et pressions instantanées pour une position donnée .....	108
Figure 2.45 : Portée sous charge .....	109
Figure 2.46 : Erreur de transmission sur 3 pas de dent .....	110
Figure 2.47 : Comparaison des raideurs d'engrènement .....	111
Figure 2.48 : Comparaison des erreurs de transmission .....	112
Figure 2.49 : Deux types de direction d'efforts .....	112
Figure 2.50 : Comparaison des contraintes de traction .....	113
Figure 2.51 : Comparaison des contraintes de compression .....	113
Figure 2.52 : Comparaison des portées et des pressions maximales .....	115
Figure 2.53 : Comparaison des erreurs de transmission .....	115
Figure 2.54 : Comparaison du partage de charge .....	115
Figure 3.1 : Contraintes imposées .....	118
Figure 3.2 : Modification de la géométrie extérieure .....	119
Figure 3.3 : Définition des axes du centre d'usinage .....	121
Figure 3.4 : Définition des surfaces générées lors de la 1 <sup>ère</sup> étape .....	122
Figure 3.5 : Définition des surfaces générées lors de la 2 <sup>ème</sup> étape .....	122
Figure 3.6 : Définition des surfaces générées lors de la 3 <sup>ème</sup> étape .....	123
Figure 3.7 : Exemple d'opérations d'usinage sur le pignon .....	124
Figure 3.8 : Pignon et roue usinés .....	125
Figure 3.9 : Machine MMT 3D ZEISS .....	127
Figure 3.10 : Définition du système d'axes du repère sur le pignon usiné .....	128
Figure 3.11 : Dents à mesurer sur le pignon .....	129
Figure 3.12 : Dents à mesurer sur la roue .....	129
Figure 3.13 : Distribution des points sur la projection des dentures .....	130
Figure 3.14 : Contrôle d'un point .....	131
Figure 3.15 : Signe de l'écart mesuré .....	131
Figure 3.16 : Présentation du plan de projection .....	132
Figure 3.17 : Ecarts entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue Gleason .....	133
Figure 3.18 : Présentation du banc de la fraiseuse .....	135
Figure 3.19 : Eléments principaux du banc d'essai .....	135
Figure 3.20 : Signaux des codeurs et de l'horloge interne .....	137
Figure 3.21 : Courbe position/temps du pignon et de la roue .....	137
Figure 3.22 : Calcul de l'erreur de transmission .....	138
Figure 3.23 : Erreur de transmission « brute » .....	138
Figure 3.24 : Mise en parallèle de l'erreur de transmission et du couple .....	139
Figure 3.25 : Superposition des courbes correspondant à chaque passage de dent .....	140
Figure 3.26 : Erreur de transmission « filtrée » .....	140
Figure 3.27 : Défauts de montage .....	141
Figure 3.28 : Couple non stabilisé .....	142
Figure 3.29 : Couple stabilisée .....	142
Figure 3.30 : Reproductibilité des mesures – Cas sans défaut de montage .....	144

## Liste des Figures

Figure 3.31 : Reproductibilité des mesures – Cas avec le défaut E = -0.1mm .....	144
Figure 3.32 : Reproductibilité des mesures – Cas avec le défaut G = 0.1mm .....	145
Figure 3.33 : Influence des défauts de montage sur l’erreur de transmission – engrenage Gleason.....	146
Figure 3.34 : Influence des défauts de montage sur l’erreur de transmission – engrenage analytique .....	147
Figure 3.35 : Définition des raideurs pour les liaisons de l’axe de la roue .....	148
Figure 3.36 : Définition de la raideur pour la liaison de l’axe du pignon .....	150
Figure 3.37 : Comparaison entre la portée mesurée et simulée sur le pignon Gleason .....	151
Figure 3.38 : Comparaison entre la portée mesurée et simulée sur la roue Gleason .....	152
Figure 3.39 : Comparaison entre l’erreur de transmission mesurée et simulée .....	152
Figure 3.40 : Comparaison de l’erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage Gleason.....	153
Figure 3.41 : Comparaison entre l’erreur de transmission mesurée et simulée .....	154
Figure 3.42 : Comparaison de l’erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage analytique .....	155
Figure 3.43 : Endommagement dans les flancs convexes du pignon.....	156
Figure 3.44 : Comparaison entre l’erreur de transmission mesurée et simulée .....	156
Figure 3.45 : Comparaison de l’erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage analytique .....	157
Figure 3.46 : Modélisation du pignon et de la roue .....	159
Figure 3.47 : Différence entre deux méthodes de calculs .....	163
Figure A.1 : Paramétrage géométrique [31].....	183
Figure A.2 : Paramétrage géométrique permettant de formuler la propriété des développantes de sphère.....	184
Figure A.3 : Paramétrage géométrique permettant de calculer X.....	185
Figure A.4 : Paramétrage géométrique permettant de calculer Z.....	186
Figure A.5 : Paramétrage géométrique permettant de calculer Z .....	187
Figure A.6 : Paramétrage géométrique permettant de calculs Y.....	188
Figure A.7 : Paramétrage géométrique permettant de calculer Y .....	189
Figure A.8 : Triangle sphérique .....	190
Figure A.9 : Algorithme de calcul de la répartition des charges.....	193
Figure A.10 : Centre d’usinage Huron K2X 8 Five .....	198
Figure A.11 : Résultat obtenu après l’opération OP2 .....	200
Figure A.12 : Résultat obtenu après l’opération OP3 .....	200
Figure A.13 : Résultat obtenu après l’opération OP4 .....	201
Figure A.14 : Résultat obtenu après les opérations OP5 et OP6.....	201
Figure A.15 : Résultat obtenu après l’opération OP7 .....	202
Figure A.16 : Résultat obtenu après les opérations OP8, OP9 et OP10.....	202
Figure A.17 : Résultat obtenu après les opérations OP11 et OP12.....	203
Figure A.18 : Résultat obtenu après l’opération OP13 .....	203
Figure A.19 : Résultat obtenu après les opérations OP14 et OP15.....	203
Figure A.20 : Résultat obtenu après les opérations OP16, OP17 et OP18.....	204
Figure A.21 : Support pour l’usinage de l’engrenage .....	205
Figure A.22 : Bridage du support.....	205
Figure A.23 : Ecart entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas du pignon Gleason.....	211
Figure A.24 : Ecart entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue Gleason.....	212

## Liste des Figures

---

Figure A.25 : Ecart entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas du pignon analytique .....	213
Figure A.26 : Ecart entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue analytique .....	214
Figure A.27 : Emplacement des roulements .....	216
Figure A.28 : Pions de dégauchissement sur la plaque .....	218
Figure A.29 : Eléments du système d'acquisition.....	219
Figure A.30 : Branchements des éléments du système d'acquisition .....	220
Figure A.31 : Référence $Y_{R0}$ .....	221
Figure A.32 : Référence $Z_{R0}$ .....	221
Figure A.33 : Référence $X_{R0}$ .....	222
Figure A.34 : Référence $Z_{P0}$ .....	222
Figure A.35 : Mise en position du pignon par rapport à la roue .....	223



## Liste des Tableaux

---

---

Tableau 1.1 : Carte d'identité géométrique.....	26
Tableau 2.1 : Correspondance entre les paramètres du taillage du pignon et ceux de la roue.	74
Tableau 2.2 : Comparaison des temps de calculs.....	112
Tableau 2.3 : Paramètres de l'engrenage .....	114
Tableau 3.1 : Paramètres du pignon et de la roue .....	120
Tableau 3.2 : Outils utilisés pour chaque opération.....	125
Tableau 3.3 : Temps d'usinage du pignon .....	125
Tableau 3.4 : Temps d'usinage de la roue.....	125
Tableau 3.5 : Raideurs des liaisons de la roue .....	149
Tableau 3.6 : Raideurs des liaisons du pignon.....	150
Tableau 3.7 : Données générale de l'engrenage.....	158
Tableau A.1 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP1 à OP6 du pignon .....	208
Tableau A.2 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP7 à OP12 du pignon .....	208
Tableau A.3 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP13 à OP18 du pignon.....	208
Tableau A.4 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP1 à OP6 de la roue .....	209
Tableau A.5 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP7 à OP12 de la roue .....	209
Tableau A.6 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP13 à OP17 de la roue.....	210



## Introduction générale

---

---

Le comportement des engrenages est un sujet d'intérêt depuis longtemps dans différents domaines d'applications comme l'aéronautique, l'automobile ou encore le ferroviaire. Bien que différentes normes existent afin d'aider à leur conception et que leurs procédés de fabrication sont définis, de nombreux modèles numériques sont encore nécessaires pour prévoir leur comportement dans leur environnement de fonctionnement. Les engrenages spiro-coniques, dont la méthode de taillage est spécifique et les conditions de fonctionnement sévères, par exemple au niveau des puissances transmises, font appel à de tels modèles pour prédire leur comportement mécanique. C'est ainsi que le laboratoire LaMCoS a déjà travaillé sur la simulation d'engrènement sous charge d'engrenages spiro-coniques appliquée au domaine aéronautique, mais aussi pour d'autres types d'engrenages : cylindrique, face, pignon-crémaillère, roue et vis. Les modèles développés dans le cadre de ces travaux permettent de prédire des résultats essentiels à la conception des engrenages :

- Partage des charges,
- Pressions de contact instantanées sur les flancs de denture,
- Contraintes en pied de dent,
- Raideur d'engrènement,
- Erreur de transmission sous charge.

Jusqu'à présent, dans le domaine industriel, les surfaces des dents des engrenages spiro-coniques sont liées au type de taillage réalisé par les machines des constructeurs comme Gleason, Oerlikon et Klingelberg. Leurs optimisations sont donc tributaires des mouvements possibles de la machine et des outils utilisés. La définition de ces surfaces ne peut donc être que paramétrique. Suite aux évolutions récentes des moyens de production en usinage, il est maintenant possible d'envisager l'utilisation de nouveaux procédés comme des centres d'usinage à 5 ou 6 axes et de s'affranchir de la méthode de taillage pour définir de nouvelles géométries des flancs actifs des dents.

L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une géométrie analytique des surfaces de flanc de denture optimale pour répondre aux exigences de montage des engrenages (erreurs d'assemblage du pignon et de la roue...) et aux couples importants supportés par ce type d'engrenages. Afin d'étudier les capacités de ces nouvelles dentures, un modèle numérique de simulation de l'engrènement sous charge en quasi-statique a été réalisé. Pour cela, le développement s'est appuyé en partie sur l'expérience du laboratoire acquise sur les différents types d'engrenages (cylindriques, crémaillère, face...). Le processus de calcul est divisé en trois parties concernant respectivement la définition de la géométrie des dents, l'étude cinématique à vide afin d'obtenir les zones potentielles de contact et l'étude du comportement sous charge qui correspond au calcul du partage des charges entre les différentes dents simultanément en contact. La définition de nouvelles géométries de denture a été associée à une étude de faisabilité d'usinage sur un centre d'usinage 5 axes à l'INSA de Lyon. De même, le modèle développé a été validé à partir de mesures expérimentales d'erreurs de transmission sous charge à l'aide d'un banc d'essai conçu et réalisé dans le cadre des travaux de cette thèse.

Le mémoire de thèse est décomposé en trois chapitres :

Le chapitre I synthétise l'état de l'art dans le domaine. Dans un premier temps, après des généralités sur les engrenages spiro-coniques, les différentes méthodes de fabrication sont analysées. Ensuite, une synthèse des travaux concernant le comportement sous charge des engrenages est présentée. Les modélisations du comportement élastique et du contact entre les dents sont détaillées. Les méthodes d'optimisation des engrenages spiro-coniques sont aussi exposées. Enfin, différents travaux expérimentaux sont décrits pour valider les démarches numériques ou pour aider à la conception.

Le chapitre II concerne la modélisation du comportement sous charge. Le modèle développé intègre le cas de la géométrie des engrenages à denture spirale Gleason simplifiée. Une nouvelle géométrie analytique est aussi définie dans ce chapitre. Elle est associée à des corrections de denture (de type profil et bombé) afin de compenser d'éventuelles erreurs de montages et d'optimiser la portée sous charge. A partir de ces deux types de surface de denture, la simulation cinématique est présentée afin de calculer les zones potentielles de contact à vide. Ensuite, le modèle sous charge est exposé et permet d'obtenir le partage des charges sur les dents, les pressions de contact ou encore l'erreur de transmission. Différentes validations numériques sont aussi présentées à la fin de ce chapitre ainsi que des résultats mettant en évidence quelques avantages de la nouvelle géométrie.

Le chapitre III porte dans une première partie sur la fabrication des dentures spirales de l'engrenage effectuée sur un centre d'usinage 5 axes. L'ensemble du processus est montré ainsi que des mesures métrologiques effectuées sur les pignons et les roues usinés. Le banc d'essai conçu afin de mesurer l'erreur de transmission sous charge est aussi présenté. La campagne d'essais réalisée pour différentes charges et à faible vitesse de rotation afin de se situer dans les conditions de quasi-statique, est décrite par la suite. Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux obtenus numériquement. Dans une seconde partie, afin de montrer les avantages de la nouvelle géométrie analytique optimale, différentes études sont présentées ainsi que des comparaisons par rapport à un engrenage spiro-conique standard de type Gleason.

La conclusion générale termine par un bilan des travaux réalisés. Les perspectives à ce travail de thèse sont aussi présentées.



# Chapitre I

## Etude bibliographique

---

---

### 1. Introduction

Ce premier chapitre présente l'état de l'art de l'obtention et de la modélisation des engrenages spiro-coniques.

Des généralités seront tout d'abord abordées dans la première partie de ce chapitre.

La deuxième partie sera consacrée à l'étude des méthodes de fabrication classique de ce type d'engrenage. Complexes à réaliser, peu de constructeurs les fabriquent. Les phases de taillage et de rectifications seront distinguées dans cette partie. De plus, différents types de cycles de taillage seront abordés.

Dans la troisième partie, les définitions mathématiques des profils de dentures sont exposées. Ceux-ci dépendent de la modélisation de la cinématique des machines de fabrication, afin d'obtenir les modèles les plus précis possibles. Des profils de dentures totalement théoriques et analytiques seront présentés. Ils ne peuvent cependant pas être fabriqués sur les machines de taillage classiques.

Les modélisations des surfaces de dentures permettent par la suite de pouvoir étudier le comportement sous charge de ces engrenages, qui sera largement développé dans la quatrième partie de ce chapitre bibliographique. De nombreuses méthodes existent, allant des formulations analytiques complètes aux modèles Eléments Finis, en passant par des modèles mixtes.

Une part importante de la littérature sur ces engrenages concerne leur optimisation et est présentée dans la cinquième partie. Les optimisations sont réalisées sur des études à vide ou sous charge. Dans la majorité des travaux, les études consistent à rechercher les paramètres machines permettant d'optimiser l'engrenage, selon le critère voulu (portée à vide, erreur cinématique, portée sous charge, erreur de transmission, pression de contact, ...).

Enfin, la sixième et dernière partie de ce chapitre est relative aux mesures expérimentales. Celles-ci permettent de contrôler les surfaces de dentures taillées, ou encore de valider les modèles numériques développés.

## 2. Généralités

Les engrenages spiro-coniques sont un cas particulier des engrenages coniques. Ils sont donc définis par un ensemble de paramètres communs à tous les engrenages coniques qui définit leur « carte d'identité géométrique » (Tableau 1.1), faisant référence à la Figure 1.1.

Angle des axes	$\Sigma$	
Angle primitif	$\delta$	
Diamètre primitif	$D$	
Angle de tête	$\delta_a$	
Diamètre de tête	$d_a$	
Angle de pied	$\delta_f$	
Diamètre de pied	$d_f$	
Largeur de denture	$B$	
Saillie	$h_a$	
Angle de saillie	$v_a$	
Creux	$h_f$	
Angle de creux	$v_f$	
Hauteur	$H$	
Angle de hauteur	$v$	
Génératrice primitive	$R$	
Génératrice moyenne	$R_m$	
<b>Tableau 1.1 : Carte d'identité géométrique</b>		<b>Figure 1.1 : Géométrie d'un engrenage conique [1]</b>

La génération de la denture conique s'effectue à partir d'une « roue plate génératrice ». La Figure 1.2 fournit une représentation du cône primitif d'une roue taillée, d'axe  $X_1$ , tangent suivant  $SI$  au plan primitif  $P$  de la « roue plate génératrice » tournant autour de  $X_0$ .

La forme de denture de la « roue plate génératrice » permet de définir trois principaux types de dentures :

- Denture droite (Figure 1.2\_a) : dent prismatique passant par le sommet  $S$  du cône primitif de la pièce.
- Denture hélicoïdale (Figure 1.2\_b) : dent prismatique passant par le sommet  $S'$ , décalé par rapport au sommet  $S$  d'un angle  $\beta$ .
- Denture spirale (Figure 1.2\_c) : surface d'égale pente, formée par des segments également inclinés par rapport au plan primitif  $P$ , s'appuyant sur une courbe directrice  $v$  caractérisant le type de denture.

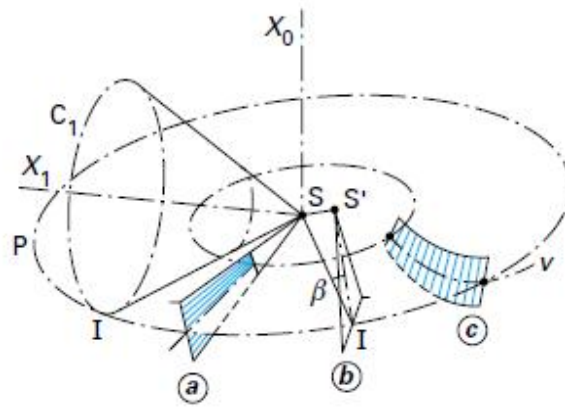


Figure 1.2 : Roue plate génératrice de taillage des roues coniques [1]

Afin de compléter la définition des engrenages spiro-coniques, trois principales dispositions de denture peuvent être définies, toutes comportant une spirale :

- la denture « Zerol » (Figure 1.3\_a), cas particulier de la denture « Spirale », avec angle de spirale nul,
- la denture « Spirale » (Figure 1.3\_b), pignon et roue d'un engrenage à axes concourants,
- la denture « Hypoïde » (Figure 1.3\_c), pignon et roue d'un engrenage à axes décalés.

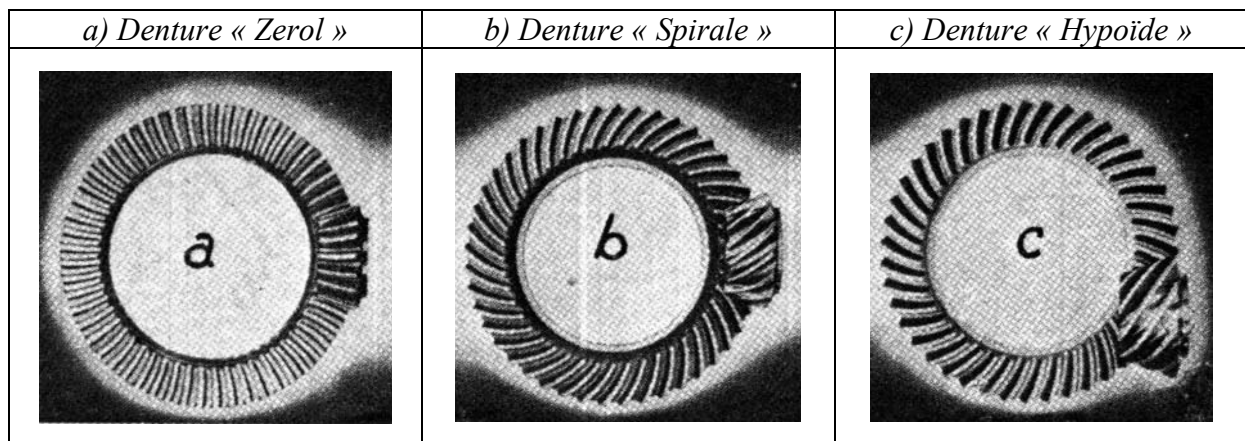


Figure 1.3 : Différents types d'engrenages spiro-coniques [2]

Les engrenages spiro-coniques sont réalisés avec des méthodes de taillage parmi les plus complexes. Les formes de dentures sont directement liées au développement des machines et des outils de fabrication.

La conception des différents types d'engrenages spiro-coniques dépend de la méthode de fabrication utilisée. On peut diviser fondamentalement ces engrenages en deux classes majeures, dont la première différence concerne la variation (ou non) de la hauteur de la denture, et la seconde est le type de courbe directrice  $v$  sur la « roue plate génératrice » (Figure 1.2\_c).

## 2.1 Hauteur de dent

La section axiale de la denture caractérise la hauteur de denture. Deux cas existent :

- Denture à hauteur variable (Figure 1.4\_a) : les génératrices des cônes de pied et de tête ne sont pas parallèles avec la génératrice du cône primitif.
- Denture à hauteur constante (Figure 1.4\_b) : les génératrices des cônes primitifs, de pied et de tête sont parallèles.

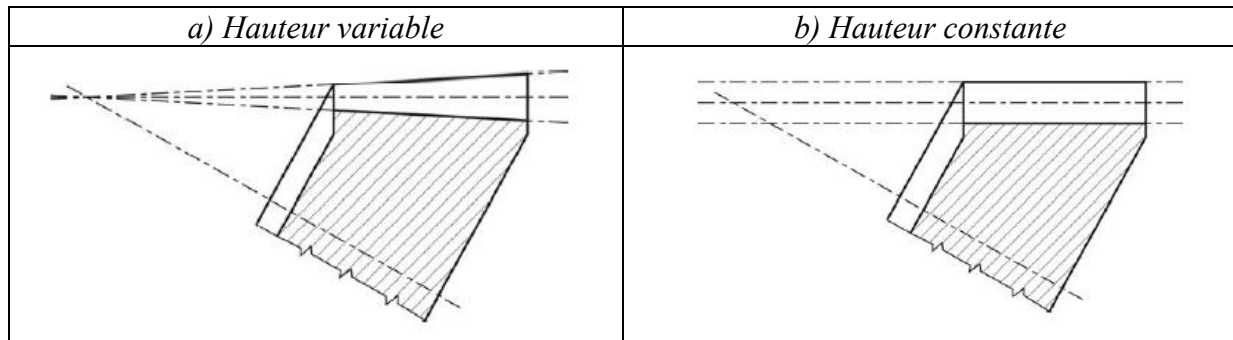


Figure 1.4 : Différents types de hauteur de denture [2]

## 2.2 Forme de la courbe directrice

La direction des dents est déterminée par une courbe directrice. Selon les mouvements de taillage on trouve un arc de cercle ou un arc d'épicycloïde.

Pour un arc de cercle (Figure 1.5\_a), la génération d'une dent se réalise par trois rotations simultanées. La fraise (rayon  $r_f$ ) pivote sur elle-même, son axe tourne autour de l'axe de la « roue plate génératrice » (rayon  $R_m$ ). La pièce a aussi un mouvement de rotation sur elle-même. La fraise porte des outils qui imposent une forme de profil de denture. La vitesse de rotation propre de la fraise est indépendante des autres mouvements de génération.

Pour une génératrice selon un arc d'épicycloïde (Figure 1.5\_b), l'axe de la fraise est entraîné par un mouvement provoqué par un cercle de rayon  $pc$ . La fraise, de rayon  $r_f$ , tourne sur elle-même tandis que ce cercle de rayon  $rc$  roule sans glisser sur un cercle de base de rayon  $rb$ . La pièce tourne autour de son axe. Les rotations de la fraise et de la « roue plate génératrice » sont en relation.

## 2.3 Les engrenages spiro-coniques les plus utilisés

Trois systèmes majeurs sont distingués dans la fabrication des engrenages spiro-coniques :

- Le système **Gleason** : la hauteur de denture est généralement variable (Figure 1.4\_a), et la forme de la courbe directrice est un arc de cercle (Figure 1.5\_a). Ce choix conduit à un développement de denture qui se réalise par étapes, chacun des creux de dents étant réalisé l'un après l'autre. Les flancs de denture convexes et concaves sont taillés par des outils différents.
- Le système **Oerlikon** : la hauteur de denture est constante (Figure 1.4\_b), et la forme de la courbe directrice est un arc d'épicycloïde (Figure 1.5\_b). Le développement de la dent est continu. Une fraise porte tous les outils coupants pour la réalisation des deux flancs d'une dent.

- Le système **Klingelberg** : cette méthode est issue du système Oerlikon. Deux cercles sont présents (Figure 1.6), chacun roulant sur son propre cercle de base. Ainsi, une fraise double est utilisée dans le développement, deux groupes d'outils coupants étant fixés à cette fraise pour le taillage des flancs convexes et concaves du creux. Ce système est appelé le système Cyclo-Palloïde.

Les fraises de taillage sont présentées dans la prochaine partie de ce chapitre.

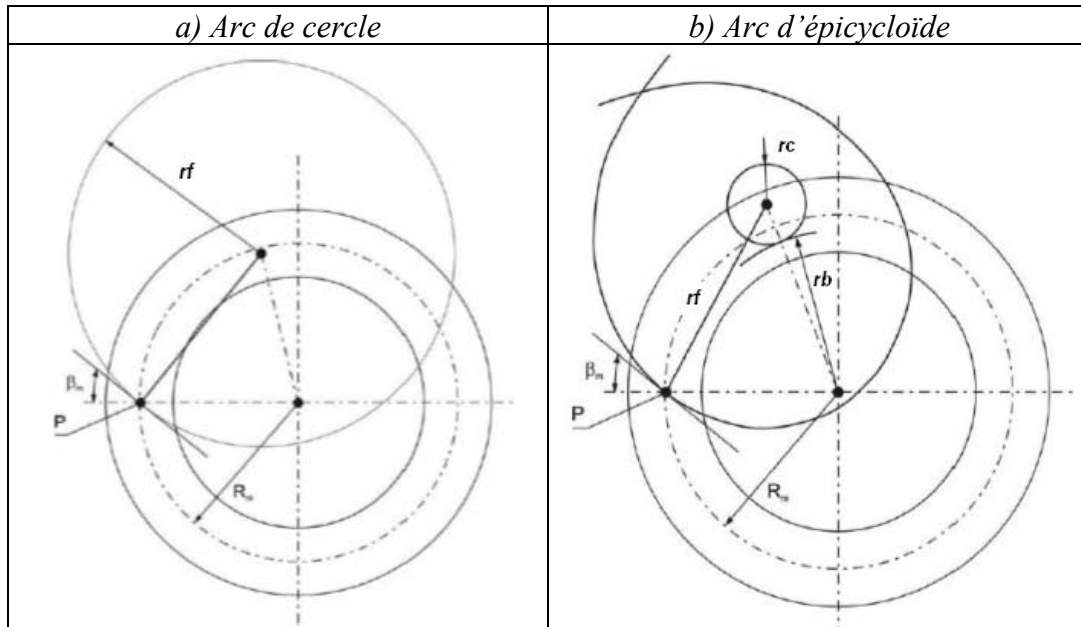


Figure 1.5 : Courbes directrices [1]

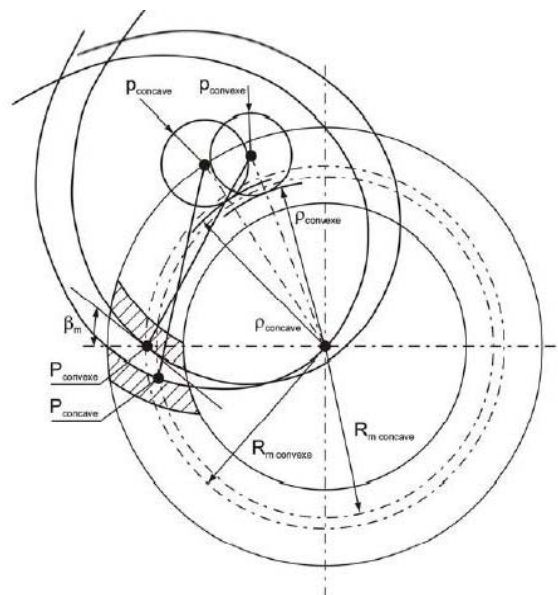


Figure 1.6 : Système Cyclo-Palloïde Klingelberg [1]

## 2.4 Supports des dentures

Les dentures, qu'elles soient de type Gleason, Oerlikon ou Klingelnberg, sont reliées à l'environnement (carter, arbres, etc.) par une jante et/ou un voile (Figure 1.7). Il est à noter que dans le domaine de l'aéronautique, l'objectif étant principalement de réduire les masses, on cherchera à avoir les jantes et les voiles les plus minces possibles, ce qui induit des déformations plus importantes de ces supports.

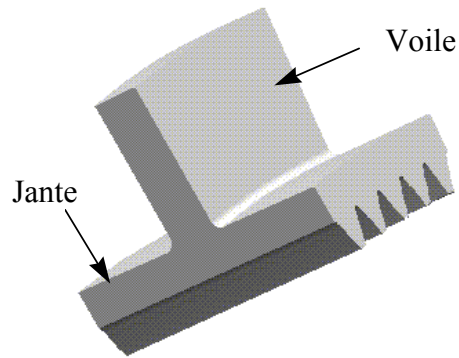


Figure 1.7 : Schématisation de la jante et du voile

### 3. Méthodes de fabrication

Les méthodes de fabrication des engrenages spiro-coniques sont parmi les plus complexes, étant donné que ces engrenages ont une géométrie qui n'est constante dans aucune direction. En effet, l'épaisseur de la dent évolue d'un bout à l'autre de la denture, tout comme la spirale, ou encore la hauteur.

Dans un premier temps, les engrenages spiro-coniques sont taillés sur des machines spéciales. Selon les constructeurs (Gleason, Klingelnberg, ou Oerlikon), ces machines de taillages sont différentes, et ne fonctionnent pas de la même manière. Le traitement thermique des engrenages provoque des déformations superficielles des surfaces de denture. Afin de corriger ces déformations, une nouvelle phase de fabrication est opérée : la rectification. Les rectifieuses sont des machines différentes de celles réalisant le taillage, tout comme les outils.

Enfin, différents types de cycles de taillages existent, et seront présentés dans cette partie.

#### 3.1 Taillage

##### 3.1.1 Gleason

Les fraises de taillage sont constituées d'un tourteau cylindrique à la périphérie duquel sont fixées des lames à tranchants inclinés, généralement rectilignes, c'est-à-dire engendrant une surface latérale de cône de révolution.

Les machines Gleason sont à « génération discontinue », c'est-à-dire que les creux de dents sont taillés les uns après les autres. La Figure 1.8 représente une fraise Gleason taillant un pignon à denture spirale.

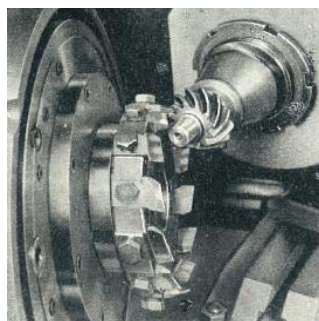


Figure 1.8 : Taillage d'un pignon à denture spirale de type Gleason [2]

Les différents types de fraises Gleason sont donnés sur la Figure 1.9,  $R_F$  représentant le rayon de la fraise :

- Fraise à tranchants extérieurs (a), taillant le flanc concave d'une dent,
- Fraise à tranchants intérieurs (b), taillant le flanc convexe d'une dent,
- Fraise à tranchants alternés (c), taillant simultanément les flancs convexes et concaves d'une dent.

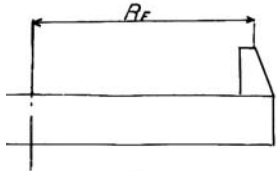
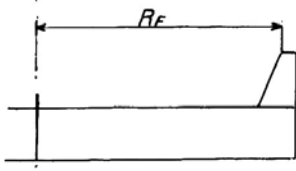
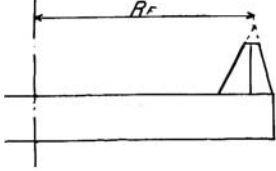
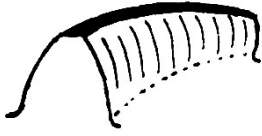

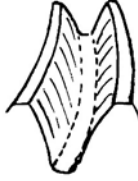
<i>a) Tranchants extérieurs</i>	<i>b) Tranchants intérieurs</i>	<i>c) Tranchants alternés</i>
		
 <p data-bbox="271 595 488 622">Flanc concave taillé</p>	 <p data-bbox="679 595 900 622">Flanc convexe taillé</p>	 <p data-bbox="1098 609 1305 636">Deux flancs taillés</p>

Figure 1.9 : Différents types de fraise de taillage Gleason [2]

### 3.1.2 Oerlikon

Les dentures taillées selon le procédé Oerlikon possèdent apparemment la même allure que celles taillées selon le procédé Gleason. Les deux procédés présentent pourtant des différences essentielles, dont voici les principales :

- Le taillage est effectué suivant le principe de « génération continue », ce qui signifie que toutes les dents sont taillées en même temps, et se trouvent à chaque instant dans le même état d'usinage. La Figure 1.10 montre un exemple de taillage d'un pignon au tout début (a), pendant (b) et à la fin (c) du processus de génération.
- Les outils Oerlikon sont également constitués d'un tourteau cylindrique, mais la répartition des lames à la périphérie est quelque peu différente de celles des Gleason. En effet, la fraise est composée d'un certain nombre de groupes identiques d'outils. La rotation étant uniforme, un groupe d'outils pénètre dans un flanc de denture taillée, tandis que le groupe suivant doit pénétrer dans le flanc suivant.

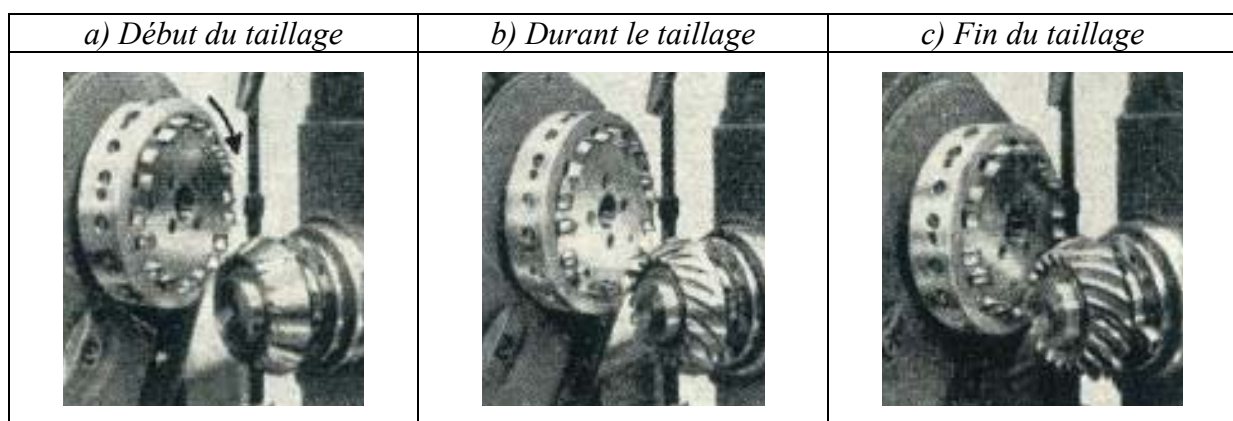


Figure 1.10 : Taillage d'un pignon de type Oerlikon [2]



### 3.1.3 Klingelberg

D'un point de vue géométrie, les dentures Klingelberg sont très proches de celles des engrenages Oerlikon. Cependant, elles s'écartent radicalement des dentures Gleason et Oerlikon pour ce qui est de l'outil de taillage. En effet celui-ci est une fraise mère conique (Figure 1.11).

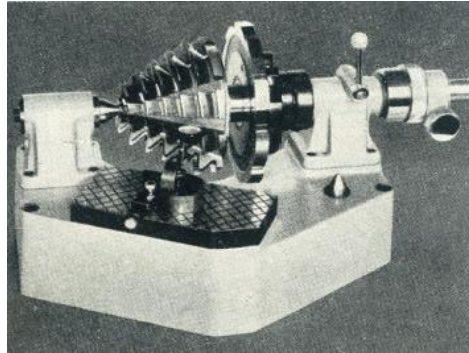


Figure 1.11 : Fraise mère conique [2]

Tout comme les engrenages de type Oerlikon, la méthode de taillage est à « génération continue ». La Figure 1.12 montre un exemple de taillage d'une roue au tout début (a), pendant (b) et à la fin (c) du processus de génération.

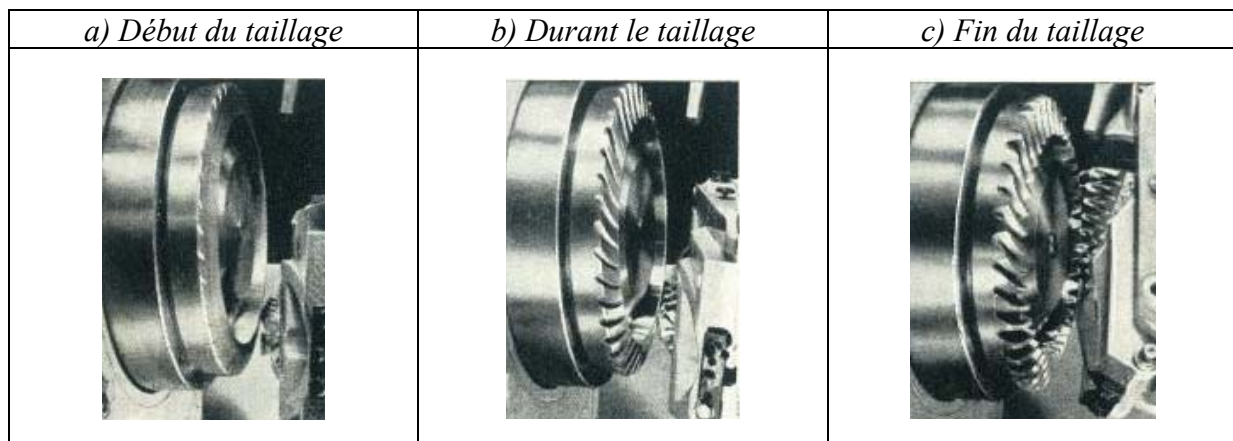


Figure 1.12 : Taillage d'une roue de type Klingelberg [2]

### 3.2 Rectification

Une fois les dentures taillées, elles sont la plupart du temps traitées thermiquement, ce qui induit de légères déformations des flancs de dentures. Afin d'obtenir la géométrie finale précise des dentures d'engrenages spiro-coniques, il est nécessaire d'utiliser des rectifieuses, qui ont la particularité d'utiliser des meules abrasives plutôt que des fraises à tailler.

La Figure 1.13 présente des rectifieuses, commercialisées par Gleason (a) ou Klingelberg (b). La particularité de la rectifieuse WNC 80 (Figure 1.13\_b) de la société Klingelberg est qu'elle permet de rectifier différents types de dentures : Klingelberg, Gleason ou Oerlikon.

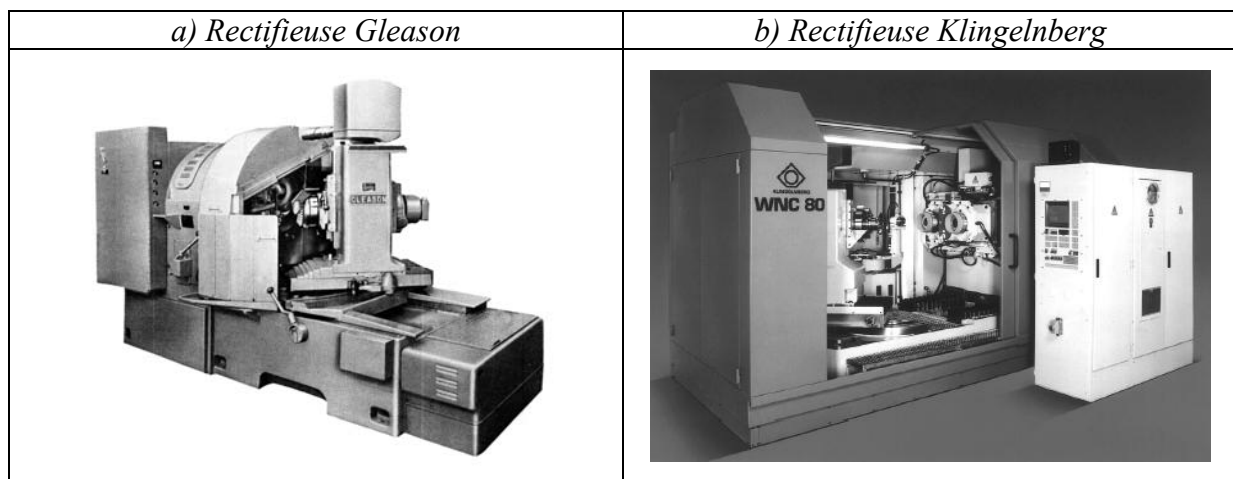


Figure 1.13 : Différents types de rectifieuse meule « Boisseau » [2]

### 3.3 Cycles de taillage

Deux méthodes de taillage sont habituellement utilisées :

- Le taillage avec génération,
- Le taillage sans génération.

Pour chacune de ces méthodes, deux catégories peuvent être dissociées :

- Le « Face Milling », ou « génération discontinue », lorsqu'un seul creux de dent est réalisé à la fois,
- Le « Face Hobbing », ou « génération continue », lorsque tous les creux sont taillés en même temps.

#### 3.3.1 Taillage avec génération

La Figure 1.14 schématise un exemple de cycle de taillage avec génération, dans lequel les deux flancs d'un creux sont usinés en même temps à l'aide d'une fraise à tranchants alternés (génération pour le taillage d'une roue). Pour le taillage du pignon, les deux flancs sont généralement taillés séparément.

Le cycle de taillage est défini en 5 étapes :

- a) La roue est avancée sur la fraise jusqu'à la profondeur souhaitée,
- b) Un mouvement de génération permet de réaliser l'ébauche (la roue tourne en même temps que la fraise se déplace),
- c) Avance de plongée de la roue jusqu'à la profondeur de finition,
- d) Inversion du sens de mouvement de génération pour la finition complète du creux,
- e) Dégagement de la roue pour l'exécution du mouvement de division (rotation de la roue seule pour usiner un nouveau creux).

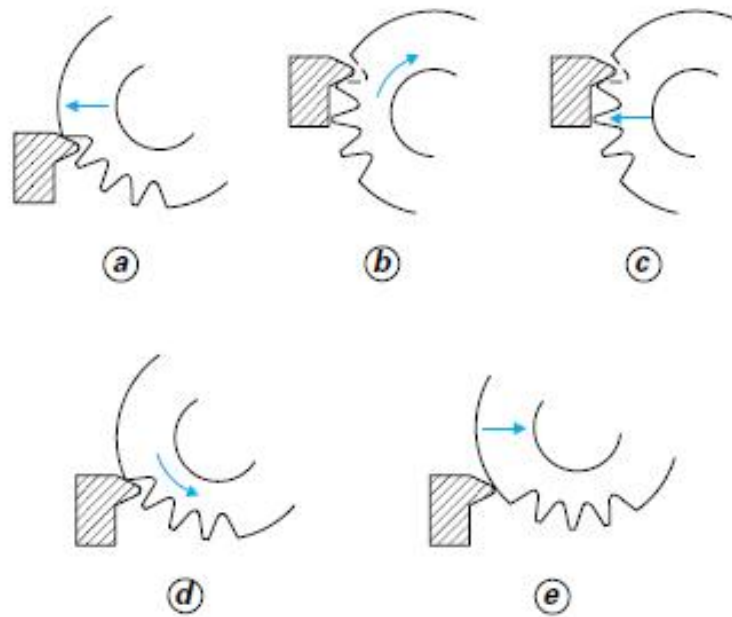


Figure 1.14 : Cycle de taillage avec génération [3]

### 3.3.2 Taillage sans génération

La Figure 1.15 présente les trois phases du taillage d'un creux sans génération, par simple plongée de la fraise dans la roue. C'est une méthode de taillage très rapide généralement utilisée pour les très grandes séries, et utilisant une fraise de forme.

Les 3 étapes du cycle sont les suivantes :

- a) Mise en position de la fraise,
- b) Plongée de la fraise dans la roue,
- c) Dégagement rapide de la fraise, pour exécuter le mouvement de division.

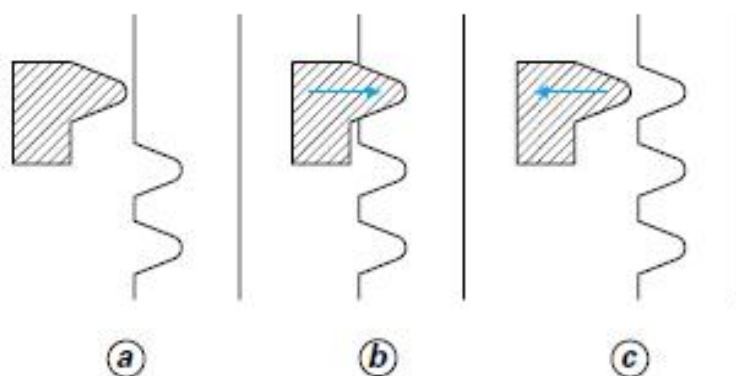


Figure 1.15 : Cycle de taillage sans génération [3]

## 4. Méthodes de définition des surfaces d'engrènement

Afin de pouvoir réaliser un modèle numérique permettant de simuler le comportement d'un engrènement spiro-conique, il est primordial de définir précisément les profils de denture. Pour cela, la plupart des travaux existants proposent de définir ces profils en se basant sur la cinématique des machines qui les ont taillées.

D'autres profils de denture, totalement théorique et analytique, peuvent cependant être développés. Il n'est par contre pas possible de les tailler sur les machines de fabrication d'engrenages spiro-coniques standards.

### 4.1 Gleason/ Klingelnberg/Oerlikon

Les flancs de denture générés par Gleason, Klingelnberg, ou Oerlikon ne peuvent pas être obtenus par une définition mathématique directe. Il est nécessaire de simuler les mouvements des machines de taillage, et de prendre en compte tous les outils et les lois de déplacements.

Les travaux de Lin et Fong [4], [5] et [6], de Chang et Huston [7] et [8], de Al-Dafccak [9], de Colbourne [10], de Shunmugam [11], de Wang [12] et [13], de Litvin [14] et [15], de Handschuh [16] et [17], de Simon [18] et [19], et de Gosselin [20] proposent des modèles mathématiques pour simuler le taillage par génération des couples d'engrenages spiro-coniques. Les travaux de Vimercati [21], de Fan [22] et [23], de Shih [24], et de Fong [25] et [26] concernent quant à eux la définition mathématique des engrenages hypoïdes.

Afin d'obtenir la géométrie simulée, les auteurs utilisent des modèles géométriques variés. Cependant, tous ces travaux se basent sur la méthode des enveloppes, c'est-à-dire que la géométrie est définie par l'enveloppe obtenue lors de la trajectoire des outils. Un des modèles employés dans ces travaux est présenté sur la Figure 1.16 (a et b).

Ces modèles permettent d'obtenir les coordonnées des surfaces de dentures, à partir de la définition géométrique des outils et de la cinématique des machines de taillage. Ainsi, l'utilisation de ces coordonnées permet l'obtention d'un solide dans un logiciel de CAO (Figure 1.16 c). Il est alors simple d'obtenir les caractéristiques volumiques des éléments de l'engrenage (volume, masse, centre de gravité, moments d'inertie, etc.).

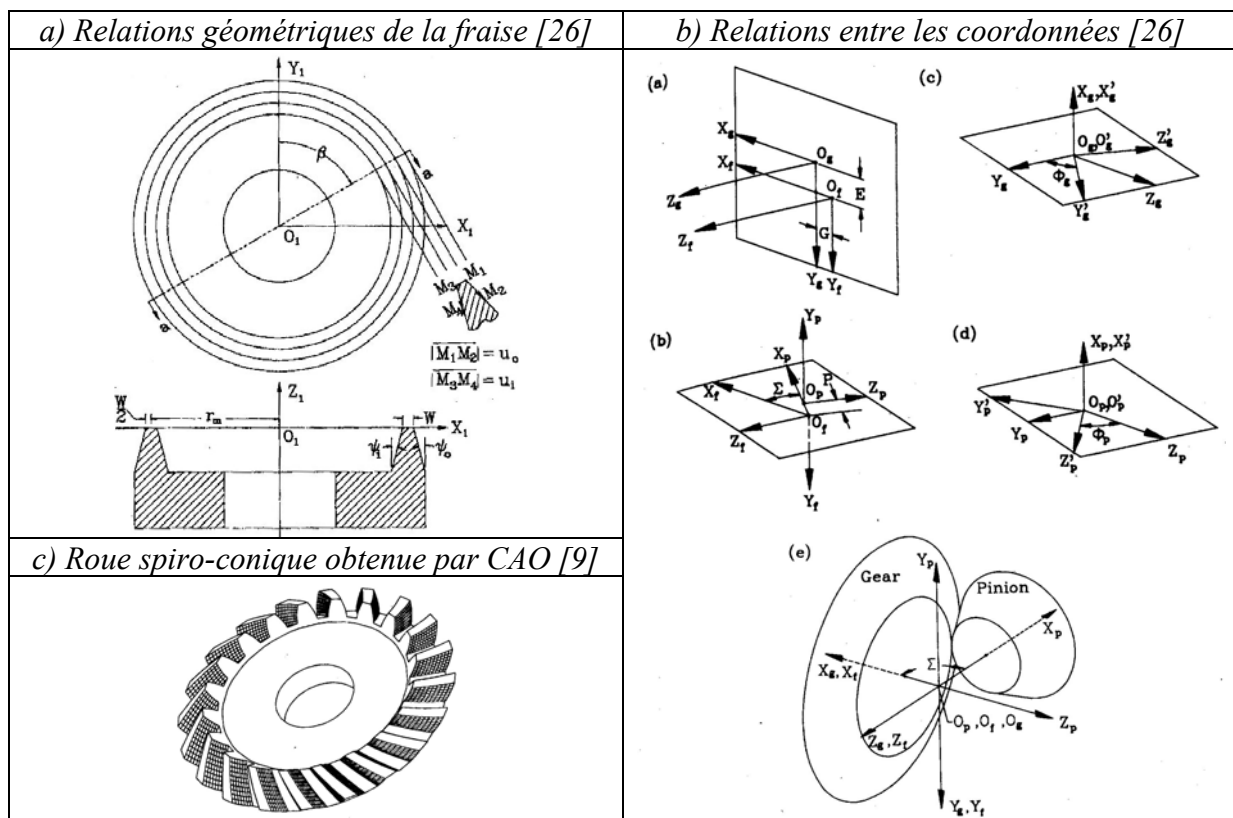


Figure 1.16 : Modèle géométrique et CAO

## 4.2 Autres géométries d'engrenages spiro-coniques

D'autres formes de dentures existent, mais ne sont pas utilisées, faute de machines capables de les générer. Les géométries ne sont pas basées sur des méthodes de fabrication, mais consistent en des développements purement analytiques.

### 4.2.1 Profils de dentures

La notion de profils conjugués est essentielle dans l'étude des engrenages. Deux profils sont dits conjugués lorsqu'ils restent tangents dans leur zone de contact (ce contact se réalise sur une courbe et non un point), et que l'erreur de transmission suive une fonction prédéterminée. Généralement, l'erreur de transmission est considérée comme étant nulle. Cette propriété de conjugaison des profils, pour un engrenage, est synonyme d'une transmission optimale.

Deux formes de dents sont généralement utilisées en mécanique dans la conception d'engrenages : soit en épicycloïde, soit en développante. Elles permettent d'obtenir un rapport entre la puissance transmise et la résistance de denture pratiquement constant. La développante de cercle (Figure 1.17\_a) correspond à la trajectoire réalisée par un point fixe d'une droite, qui roule sans glisser sur un cercle. L'épicycloïde (Figure 1.17\_b) correspond quant à elle à la trajectoire d'un point fixe d'un cercle, qui roule sans glisser sur un autre cercle.

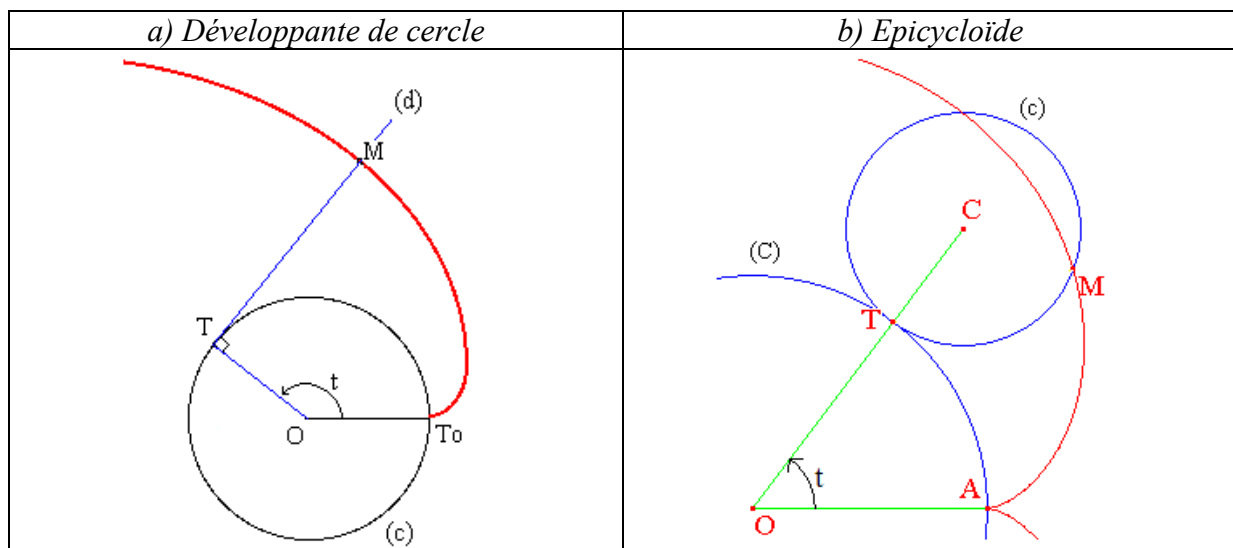


Figure 1.17 : Profils de denture

On préfère utiliser les engrenages à développantes pour certaines de leurs propriétés. Parmi celles-ci, leurs profils sont systématiquement conjugués, une particularité très intéressante démontrée mathématiquement par Olivier [27]. Grâce à des méthodes de géométrie descriptive, il démontre également d'autres propriétés des profils en développante. Ainsi, il ressort de ses travaux que :

- L'emploi des épicycloïdes pour les engrenages intérieurs et extérieurs impose de placer rigoureusement les axes dans la position déterminée, alors que les engrenages extérieurs en développante offrent plus de souplesse en permettant d'éloigner ou de rapprocher les axes. C'est-à-dire que les roues restent conjuguées, même après une variation d'entraxe, en laissant les axes de rotation parallèles dans le cas des engrenages cylindriques, ou en les faisant se couper toujours au même point pour les engrenages coniques.
- Le tracé de l'engrenage conique à partir des épicycloïdes se révèle particulièrement difficile pour un résultat assez approximatif tandis que le tracé rigoureux de l'engrenage conique avec des développantes de cercle reste simple et accessible.

Huston [28], Tsai [29] et Pan [30] dans leurs travaux, abordent eux aussi la théorie des développantes de sphère pour le profil de denture, et proposent une définition mathématique pour les flancs du pignon et de la roue. Dans ses travaux sur les engrenages coniques forgés, Bruyère [31] a également utilisé des flancs de denture en développante de sphère.

## 4.2.2 Types de spirales

La courbe directrice de la spirale est primordiale pour les engrenages spiro-coniques, car elle va définir le rapport de conduite (nombre de dents moyen en prise), et la continuité de l'engrènement. L'angle de spirale est quant à lui défini comme l'angle que fait la courbe directrice de la spirale avec une génératrice du cône primitif.

De nombreux types de spirale existent : spirale d'Archimède, spirale hyperbolique, spirale logarithmique, ... chacune d'elles ayant des propriétés différentes. Dans ses travaux, Huston [28] a analysé la spirale logarithmique, et donné une formulation mathématique permettant d'obtenir les différentes coordonnées d'un flanc de denture. Tsai [29] a également

décrit la spirale logarithmique (Figure 1.18\_a), mais également les spirales en cercle (Figure 1.18\_b), ainsi que les spirales en involute (Figure 1.18\_c).

Dans ses travaux, Huston [28] n'a pas recherché à comparer ces différents types de spirales (avantages/inconvénients), mais a seulement défini les formules mathématiques de chacune d'elles.

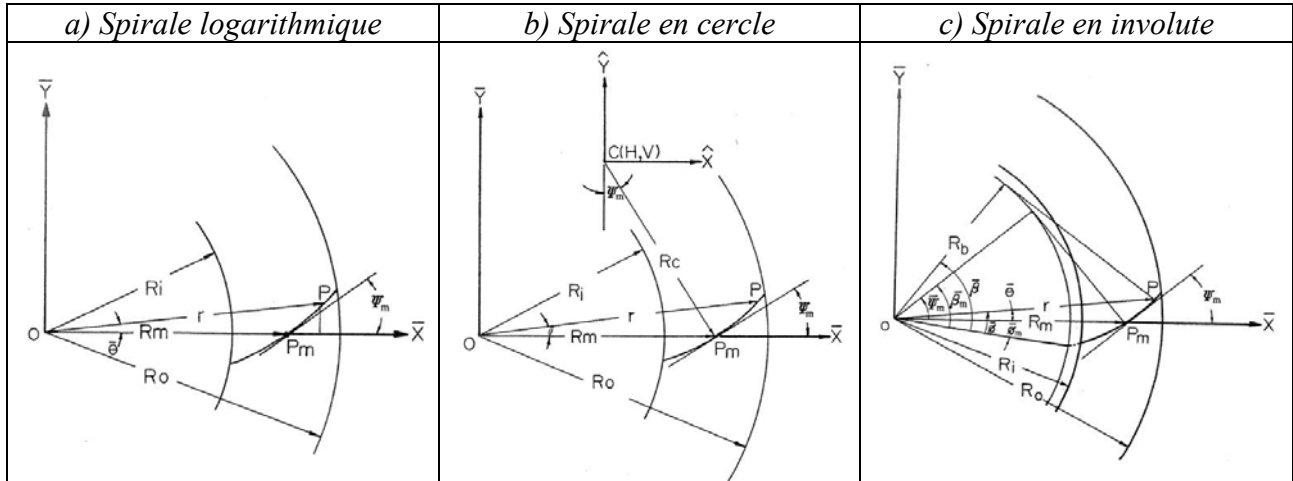


Figure 1.18 : Différents types de spirale [29]

## 5. Modélisation du comportement sous charge des engrenages

L'étude du comportement sous charge suit généralement un processus en trois étapes (Figure 1.19), comme par exemple dans les travaux de Guingand [32] et de Letzelter [33] pour les engrenages cylindriques, ceux de Hiltcher [34] et de Simon [35] pour les engrenages roue et vis, ceux de Jacquin [36], de Guingand [37] et [38] pour les engrenages face, ceux de Bruyère [31] pour les engrenages coniques, ceux de Icard [39], de Lelkes [40], de Madrosky [41] et de Simon [42] pour les spiro-coniques, ou encore ceux de Simon [43] à [45] pour les hypoïdes :

- 1 – Définition de la géométrie des flancs de denture,
- 2 – Calcul de la cinématique à vide (prise en compte d'éventuels défauts de montage),
- 3 – Calcul du partage de charge à partir des lignes de contact potentiel.

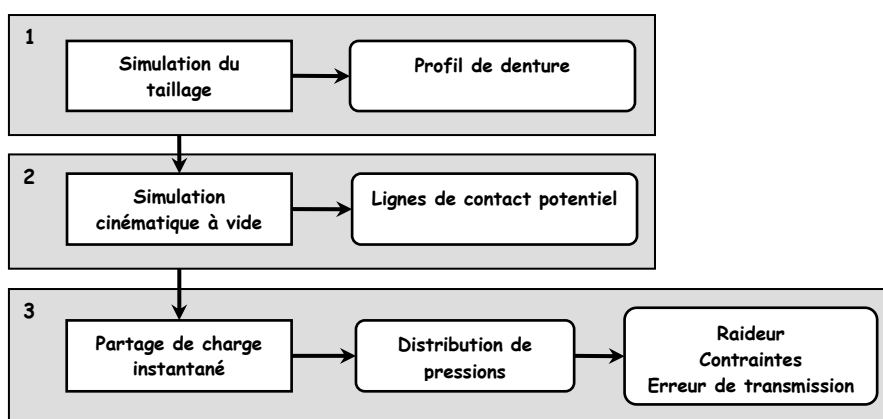


Figure 1.19 : Processus du calcul de comportement sous charge [32]

L'étude de la modélisation du comportement des engrenages fait apparaître quatre aspects complémentaires : les modèles doivent prendre en compte à la fois le comportement élastique des couples d'engrenages, le contact entre le pignon et la roue, parfois la déformation des supports, et le partage de charge entre les différentes dents en prise simultanément.

Les études effectuées dans ce domaine montrent une grande diversité de méthodes utilisées pour modéliser ces comportements. Certaines modélisations découplent notamment les différents effets, alors que d'autres modélisent le comportement dans sa globalité. Dans un premier temps, les méthodes s'intéressant à un seul effet sont étudiées, puis les méthodes globales seront présentées. Ces différentes approches souvent complexes ne seront décrites que brièvement.

### 5.1 Modélisation du comportement élastique

Ce paragraphe met en avant les différentes méthodes permettant de calculer les déformations élastiques des dentures. Les déformations du support et de l'environnement (jantes fines, voiles, arbres...) peuvent parfois être pris en compte.



### **5.1.1 Méthode des Eléments Frontières**

Dans son travail, Celik [46] utilise la méthode des Eléments Frontières pour étudier le comportement élastique d'engrenages cylindriques droits. Deux modèles ont été utilisés pour l'analyse élastique des engrenages : un modèle à trois dents et un modèle complet de l'engrenage.

Cette méthode, permettant la résolution numérique des équations et issues des méthodes intégrales, offre une simplicité de maillage par rapport à une méthode Eléments Finis. Cette modélisation est très précise, mais elle demande cependant beaucoup de temps de calcul pour converger. De plus, la méthode est très lourde car il faut faire autant de calculs que de positions cinématiques voulues.

### **5.1.2 Méthode des Prismes Finis**

Les travaux de Olakorédé [47] à [49], de de Vaujany [50] et [51], de Guingand [32], et de Kim [52] à [55] utilisent la méthode des Prismes Finis pour étudier le comportement élastique d'engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. La fonction de déplacement est obtenue à partir de deux fonctions polynomiales dans deux directions et de fonctions séries dans la troisième direction (hélice), selon laquelle il n'y a pas de variation géométrique ni de matériau.

Cette méthode est très intéressante car elle offre des temps de calculs beaucoup plus faibles que ceux d'une méthode classique par Eléments Finis, la mémoire nécessaire pour ce type de calcul étant plus faible (respectivement 80 fois plus rapide et 6 fois moins de mémoire nécessaire).

Cependant, cette méthode est limitée aux cas dont la géométrie n'évolue pas, ou peu, selon la largeur de denture.

### **5.1.3 Méthode des Eléments Quasi-Prismes**

Dans son travail, Vijayakar [56] utilise la méthode des Eléments Quasi-Prismes pour étudier le comportement élastique de structures dont la section reste constante ou quasi-constante selon une direction.

Cette méthode est très intéressante car, suivant la direction où la structure a une section quasi-constante, elle permet de réduire le nombre total d'éléments nécessaires pour obtenir une bonne précision. Cela se traduit donc par une diminution du temps de calcul.

Par contre, cette méthode est limitée à des géométries quasi-prismatiques et la précision finale du résultat dépend du degré d'interpolation des fonctions de formes (polynômes de Chebyshev) suivant la direction de la section quasi-constante.

### **5.1.4 Méthode des Bandes Finies**

Les travaux de Gagnon [57] et de Gosselin [58] à [60] utilisent la méthode des Bandes Finies pour étudier le comportement élastique des couples d'engrenages spiro-coniques. La

matrice de rigidité utilisée dans cette méthode est variable pour tenir compte de la largeur variable des dents d'engrenages spiro-coniques. Les déplacements d'une bande finie sont calculés en utilisant la théorie des plaques en flexion.

L'avantage de cette méthode est qu'elle offre des temps de calcul très inférieurs à ceux d'une méthode classique par Eléments Finis. Par contre, cette méthode est approximative en ce qui concerne le calcul du comportement élastique car elle ne prend en compte que la flexion des dents (les supports tels que les jantes et les voiles ne sont pas pris en compte) et car la théorie utilisée (théorie des plaques) modélise difficilement les encastresments.

### **5.1.5 Méthode des Transformations de Domaines**

Dans son travail, Baronet [61] utilise la méthode des Transformations de Domaines pour calculer la répartition de contraintes pour une dent d'un engrenage cylindrique droit soumis à une charge ponctuelle de direction et de norme connues.

Il apparaît que cette méthode est très intéressante car la résolution du problème s'effectue dans le domaine transformé, c'est-à-dire dans un domaine géométrique plus simple, mais la grosse difficulté de cette méthode est la mise en place de la transformation biunivoque permettant de passer du domaine physique au domaine transformé et réciproquement. Dans le cadre de ce travail, il est presque impossible de mettre en place une transformation permettant de prendre en compte les voiles et les jantes des engrenages spiro-coniques.

### **5.1.6 Méthode des Fonctions de déformations**

Afin de simuler le comportement élastique dû à la flexion des dents, certains auteurs ont adapté des fonctions pour différents types d'engrenage. C'est par exemple le cas de Guingand [32] et Umezawa [62] pour les engrenages hélicoïdaux, de Sudoh [63] pour les engrenages roue et vis sans fin de type I et N, ou encore de Simon [64] et [65] pour les engrenages roue et vis sans fin de type K.

L'utilisation de ces fonctions de déformations permet d'effectuer des calculs très rapides. Cependant, les fonctions restent limitées à des cas d'engrenages standards. En effet, il n'est pas possible de généraliser les fonctions pour des cas particuliers de denture présentant par exemple des jantes ou des voiles.

## **5.2 Modélisation du contact entre les dents**

Lors de la mise en contact des dents d'engrenages, une déformation locale existe. Celle-ci dépend de la taille de la zone de contact et de la valeur des pressions sur celle-ci.

Les modèles généraux de contact entre les dents d'engrenages se décomposent en trois types : des modèles analytiques de contact, les algorithmes de contact de Kalker, et des méthodes originales de résolution du problème de contact.

Avant de regarder en détail les différents modèles utilisés, un rappel sur les conditions d'utilisation du modèle de contact de Hertz est nécessaire. En effet, il est préférable de mieux vérifier la validité de ce type de modèle dans le cas des couples d'engrenages spiro-coniques.

## 5.2.1 Rappel sur les hypothèses de la théorie de Hertz

Les principales conditions d'application de la théorie de Hertz (Johnson [66] et Kalker [67]) sont au nombre de trois :

- les deux corps en contacts sont considérés comme deux massifs semi-infinis,
- le contact doit être non-conforme (cf. Figure 1.20) entre les deux solides, et sans friction,
- la longueur du contact entre les deux solides doit être très petite devant les autres dimensions.

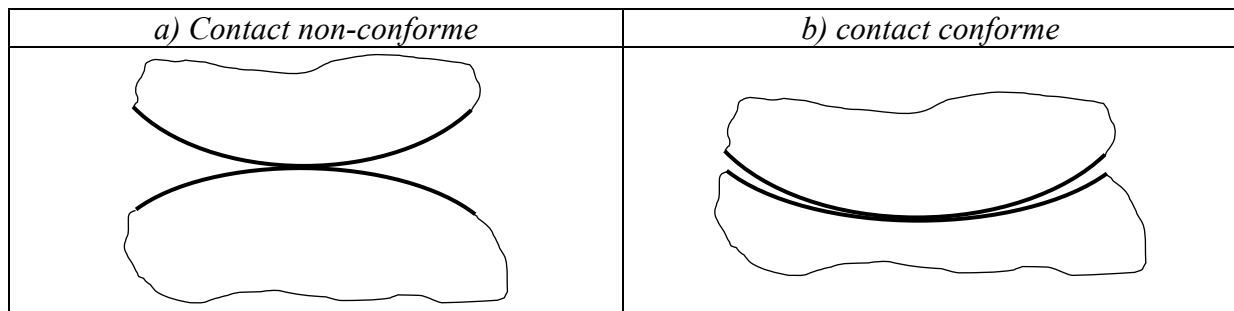


Figure 1.20 : Définition d'un contact conforme et non-conforme

Le fabricant GLEASON [68] fournit une représentation du contact d'un couple d'engrenages spiro-coniques (Figure 1.21). Cette figure met en évidence le fait que le contact pour ce type d'engrenages est conforme et que sa longueur est du même ordre de grandeur que l'un des rayons principaux de courbure des dents de la roue et du pignon au niveau du contact. De plus, les résultats expérimentaux de Grabscheid [69] mettent en évidence l'existence de la friction au niveau du contact des couples d'engrenages spiro-coniques.

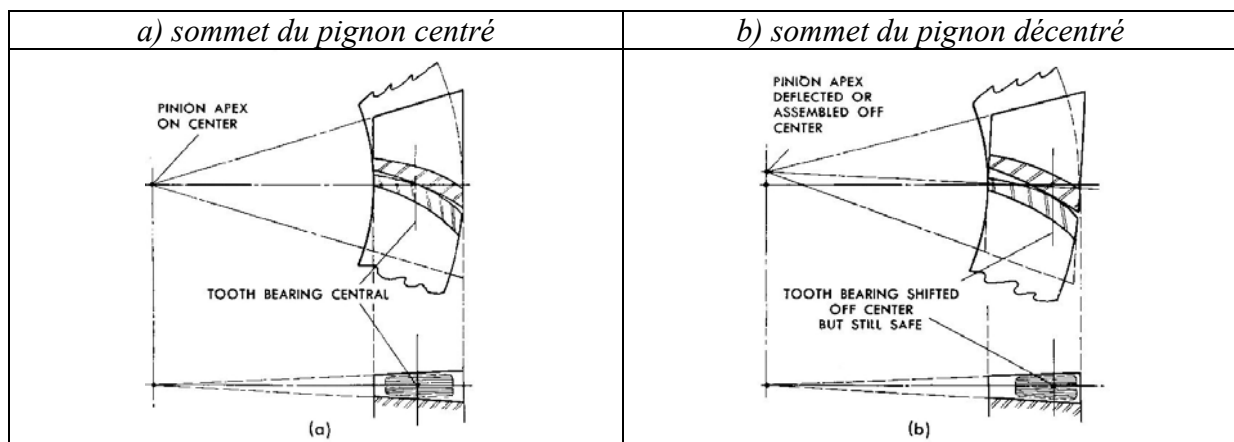


Figure 1.21 : Contact d'un couple d'engrenages spiro-coniques [68]

Ainsi, suite aux rappels des conditions d'utilisation de la théorie de Hertz et aux remarques concernant le type de contact d'un couple d'engrenages spiro-coniques, l'impossibilité d'utilisation du modèle de contact de Hertz apparaît évidente car la modélisation désirée du comportement sous charge doit être précise et fiable. Il est donc nécessaire de trouver et d'utiliser d'autres modèles prenant en compte la conformité du contact ainsi qu'éventuellement la friction existant dans le contact.

## 5.2.2 Modèles analytiques

Dans les travaux de Altidis et Savage [70] et [71], de Simon [72] pour les engrenages spiro-coniques et hypoïdes, et de Zhang [73] pour les engrenages à double arc circulaire, les points potentiels de contact sont déterminés de façon analytique à partir de la géométrie des engrenages et des forces appliquées.

Tous ces modèles analytiques de contact sont très simplifiés et ne permettent d'obtenir qu'une estimation plus ou moins précise des zones de contact. Comme ces modèles ne fournissent ni la distribution de pression, ni le rapprochement des surfaces, il ne sera pas donné plus de détails sur ces méthodes.

## 5.2.3 Algorithmes de contact de Kalker

Depuis de nombreuses années, les travaux de Kalker sont une référence pour la résolution des problèmes de contact tridimensionnel, élastique, plastique, roulant et glissant. Il a publié de nombreux travaux [74] à [78], dont un livre [67] à ce propos.

Kalker a développé des modèles bidimensionnels et tridimensionnels de contact pour des chargements normaux, tangentiels et mixtes, avec possibilité de dépendance entre le chargement normal et tangential. Des études statiques et dynamiques peuvent être réalisées, aussi bien dans le domaine élastique que plastique. A partir de la théorie des milieux continus, Kalker utilise une formulation variationnelle du problème de contact, le principe des travaux virtuels et son complémentaire pour définir la résolution du problème. Cette méthode est applicable à des solides en contact avec la possibilité d'avoir de la friction.

Tous les modèles de Kalker utilisent les équations et les définitions suivantes :

- Les équations d'équilibre,
- Les relations de l'élasticité, de la viscoélasticité, ou de la plasticité,
- Les équations de compatibilité,
- Les conditions de non-pénétration,
- La définition du glissement,
- La définition des zones d'adhérence et de glissement.

Kalker propose quatre algorithmes pour résoudre les différents problèmes de contact énoncés précédemment :

- « NORM » : résolution du problème de contact pour un chargement normal,
- « TANG » : résolution du problème de contact pour un chargement tangential,
- « KOMBI » et « PANA » : résolution du problème de contact mixte avec friction.

Les principaux avantages des algorithmes de contact de Kalker sont la rapidité de convergence et une intégration facile avec d'autres modèles comme des modèles de comportement élastique, par exemple avec un modèle Eléments Finis.

## 5.2.4 Autres méthodes de résolution

Les travaux de Conry [79], Marshek [80] et de Wriggers [81] utilisent la méthode « PENALTY » ou « SIMPLEX ». Il ne sera pas donné plus de détails à propos de ces méthodes car des problèmes importants de convergence existent.

Dans son travail, Krishna [82] utilise deux méthodes pour la résolution d'un contact non hertzien, appelées RFP (Redundant Field Points) et FR (Functional Regularization). Ces méthodes sont très efficaces et donnent de bons résultats mais peu de détails sont fournis par l'auteur à propos de ces méthodes.

Dans ses travaux, Boussinesq [83] utilise une formulation analytique pour calculer les déplacements de contact. A partir de la zone de contact discrétisée avec des rectangles et les efforts appliqués aux nœuds du maillage (cf. Figure 1.22), il obtient facilement les déplacements à chaque nœud en utilisant les dimensions des éléments du maillage, les caractéristiques des matériaux en contact, et des coefficients d'influence  $C_{kj}^s$  obtenus analytiquement. Ces coefficients d'influence de surface représentent le déplacement  $w_j$  au point  $j$  pour une charge unitaire  $p_k$  appliquée au point  $k$  (cf. Figure 1.22).

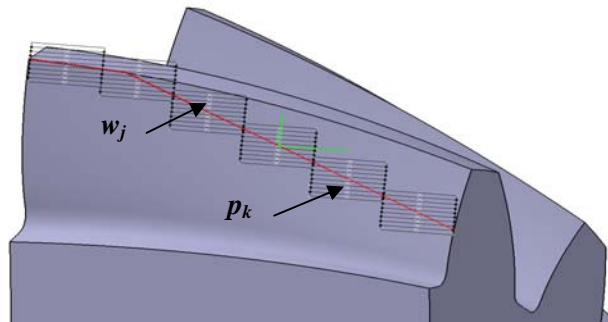


Figure 1.22 : Calcul des coefficients de surface

### 5.3 Modélisation complète

Les modélisations complètes permettent d'obtenir à la fois les déformations dues aux flexions des dentures ou de l'environnement (arbres, voiles, ...), et celles dues au contact. Certaines approches appliquent les Eléments Finis pour les deux types de déformation, alors que d'autres utilisent les Eléments Finis pour obtenir les déformations de flexion seulement, les déformations de contact étant obtenues d'une autre manière.

Par ailleurs, le calcul du partage de charge peut être réalisé par l'utilisation de ces modélisations complètes. Le calcul du partage de charge consiste à déterminer la façon dont les efforts sont distribués instantanément sur les flancs de dentures, en prenant en compte toutes les dents potentiellement en contact.

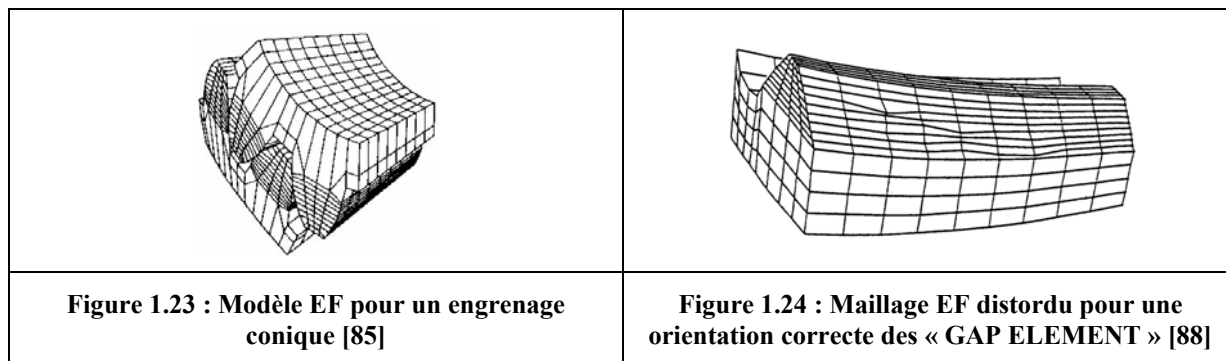
#### 5.3.1 Modélisation complète par Eléments Finis

Deux types de modélisation complète par Eléments Finis sont présentés dans ce paragraphe. Pour les deux cas, le modèle de comportement élastique et le modèle de contact utilisent la méthode des Eléments Finis pour résoudre le comportement sous charge de différents types d'engrenages.

La première modélisation est basée sur le calcul de la matrice de rigidité instantanée globale, ainsi que sur celui des matrices de rigidité et de flexibilité normale localisées tout au long du contact. Ces matrices sont ensuite utilisées pour modifier les matrices du modèle Eléments Finis pour le comportement élastique des couples d'engrenages et ainsi prendre en compte l'effet du contact. Cette modélisation est utilisée pour l'étude du comportement sous

charge des engrenages cylindriques droits, des engrenages coniques (Li [84] et [85]) et des engrenages roue et vis (Qin [86]). La Figure 1.23 donne une représentation du modèle Eléments Finis de deux dents en contact dans le cas d'un engrenage conique.

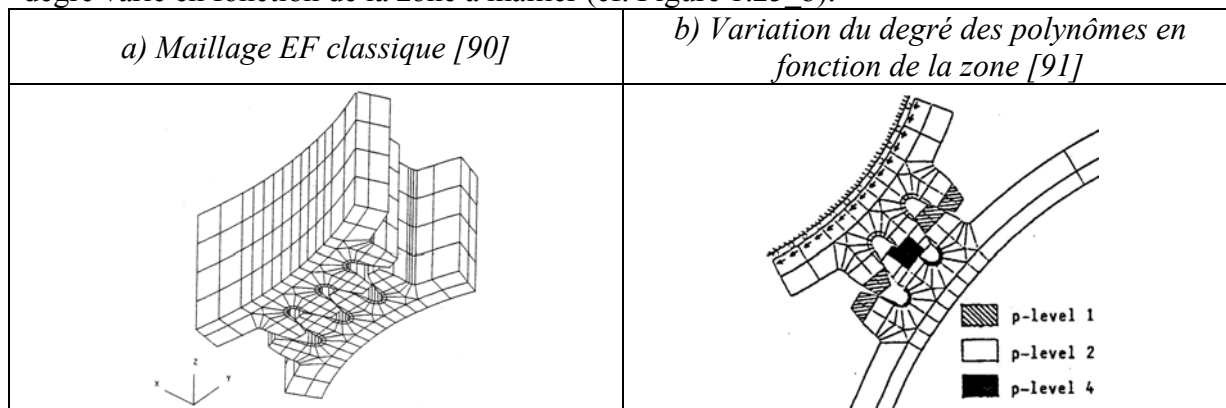
La deuxième modélisation est basée sur un maillage Eléments Finis classique du pignon et de la roue ainsi que sur l'utilisation d'éléments de contact (« GAP ELEMENT »). Cette modélisation est utilisée pour l'étude du comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux (Ambruosi [87]) et des engrenages spiro-coniques (Bibel [88] et [89]). Les éléments de contact modifient la surface du maillage EF du pignon et de la roue afin de garantir la même normale extérieure pour les Eléments Finis dans la zone de contact (cf. Figure 1.24).



Ces modélisations complètes sont très intéressantes : le calcul est automatique à partir de la géométrie, par exemple à partir d'un solide dans une CAO. Les résultats sont très précis et en accord avec les résultats expérimentaux. Les inconvénients majeurs de ces modélisations sont la nécessité d'avoir des ordinateurs puissants car le temps de calcul est important (de l'ordre de plusieurs jours) et fonction de la précision et du nombre de positions cinématiques voulues.

### 5.3.2 Modélisation par Eléments Finis Polynomiaux

Les travaux de Baret [90], de Curti [91] et de Piazza [92] utilisent une modélisation par Eléments Finis Polynomiaux pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Cette modélisation utilise un maillage classique (cf. Figure 1.25\_a) mais les fonctions de forme des Eléments Finis utilisés sont des polynômes dont le degré varie en fonction de la zone à mailler (cf. Figure 1.25\_b).



**Figure 1.25 : Exemple de modélisation par Eléments Finis Polynomiaux**

Cette modélisation par Eléments Finis Polynomiaux est très intéressante car le maillage Eléments Finis est effectué une seule fois et la précision du calcul peut être augmentée avec le degré des polynômes d'interpolation. Les inconvénients majeurs de cette modélisation sont la nécessité d'avoir des ordinateurs puissants car le temps de calcul est important et dépend également du nombre de positions cinématiques. Par contre, cette modélisation est plus rapide que les modélisations complètes par Eléments Finis, mais moins que les modélisations mixtes par Eléments Finis présentées dans le paragraphe suivant.

### 5.3.3 Modélisation Mixte par Eléments Finis

Deux types de modélisation mixte par Eléments Finis sont utilisés. Le modèle de contact est basé soit sur la méthode TCA/LTCA développée par GLEASON et Litvin [93], soit sur la méthode de Boussinesq [83] présentée précédemment. Pour ces deux modélisations mixtes, le modèle de comportement élastique est un modèle classique par Eléments Finis. Le chargement et les conditions limites en déplacement de ce modèle sont déterminés par les différents modèles de contact en fonction des positions cinématiques.

Ces modélisations mixtes par Eléments Finis sont très intéressantes car le maillage peut être automatisé à partir de la géométrie et il est effectué une seule fois afin de calculer les coefficients de flexion pour toutes les positions cinématiques. Ces modélisations mixtes sont les plus rapides de toutes les modélisations globales et l'utilisation des Eléments Finis permet de modéliser des structures ayant quasiment n'importe quelle géométrie (prise en compte d'arbres ou de voiles, par exemple).

#### 5.3.3.1 Méthodes basées sur la méthode TCA/LTCA

Les travaux de Fang [94] et [95], de Yongping [96] et de Zhang [97] utilisent le modèle de contact basé sur la méthode TCA/LTCA développée par GLEASON et Litvin [93] pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux, coniques et hypoïdes. Cette méthode intègre la friction s'opposant au glissement relatif entre les dents d'engrenages.

La première étape de la méthode TCA/LTCA est le calcul des matrices de flexibilité dans la direction normale, dans la direction tangentielle et dans les directions croisées pour les  $N$  points de contact. Les flexibilités  $f_{ij}^{(pq)}$  expriment le déplacement au point  $i$  dans la direction  $\vec{p}$  dû au chargement unitaire au point  $j$  dans la direction  $\vec{q}$ . Le problème de contact élastique avec friction entre les dents d'engrenage peut ensuite être linéarisé et sa résolution correspond à un problème de minimisation, qui peut être résolu.

La résolution de ce système est effectuée de façon conventionnelle par l'algorithme du « SIMPLEX Modifié ». Etant donné que la déformation du contact avec friction est non linéaire, une méthode itérative est utilisée. L'inconvénient majeur de cette méthode est le problème de convergence de l'algorithme « SIMPLEX Modifié », qui dépend essentiellement des valeurs initiales données aux variables.

### 5.3.3.2 Méthodes basées sur la théorie de Boussinesq

Les travaux de Vijayakar [98] et [99], de Cheng [100], de Guingand [32], de Jacquin [36], et de Letzelter [33] utilisent le modèle de contact basé sur la méthode de Boussinesq [83] pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Jacquin [36] et Guingand [37] et [38] ont également utilisé cette méthode dans le cas des engrenages face. Dans les cas des roues et vis sans fin, Hiltcher [34] s'est aussi inspiré de ce modèle, tout comme Bruyère [31] pour les engrenages coniques, ou Icard [39] pour les spiro-coniques.

Cette méthode repose sur la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements, dit problème aux conditions de Signorini (Kalker [67]). L'équation de compatibilité des déplacements est une condition géométrique de non-pénétration des deux corps en contact, dans laquelle interviennent des termes liés aux déformations de flexion des deux corps et des termes liés aux déformations de surface au niveau de la zone de contact. Ces termes peuvent être exprimés sous forme de coefficients d'influence. La théorie de Boussinesq [83] permet de calculer les coefficients de surface (ou de contact)  $C_{kj}^s$  et les coefficients d'influence de flexion  $C_{kj}^f$  sont calculés par Eléments Finis. Ces derniers sont calculés grâce à un calcul par Eléments Finis à partir de chargements unitaires en chaque point du maillage.

A partir de la simulation cinématique à vide, les différents points de contact sont déterminés. Ensuite, la largeur de contact potentiel est estimée en utilisant la théorie de Hertz puis maillée dans le plan tangent aux deux dents (cf. Figure 1.26).

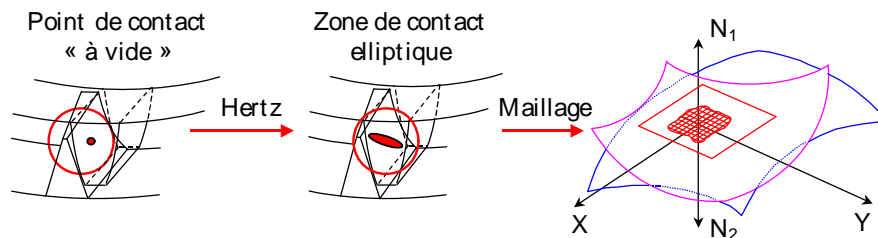


Figure 1.26 : Maillage de la zone de contact potentiel dans le plan tangent [36]

Une fois ces coefficients calculés, il faut résoudre l'équation de compatibilité des déplacements, afin d'obtenir la répartition de charge, pour enfin effectuer le calcul final du comportement sous charge des couples d'engrenages.

### 5.3.4 Modélisations mixtes utilisant des fonctions d'approximation

Dans leurs travaux, Börner [101], Conry [102] et Savage [103] calculent le partage de charge entre les dents pour des couples d'engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux ; ceux de Elkholy [104] et de Sentoku [105] s'appliquent aux engrenages coniques ; Gosselin [106], Kolivand [107] et Simon [45] s'intéressent aux engrenages spiro-coniques et hypoïdes ; et Simon [65], [108] et Sudoh [63] aux engrenages roue et vis.

Dans tous ces travaux, les auteurs utilisent des équations basées sur des coefficients issus d'essais ou d'approximations (par exemple, la flexion d'une dent est calculée par la



flexion d'une poutre), pour modéliser le comportement en flexion et le partage de charge. La théorie de Hertz est utilisée pour calculer la pression de contact entre les dents. La Figure 1.27 présente un exemple de modèle utilisé pour calculer le partage de charge entre les différents points de contact dans le cas de deux dents en prise.

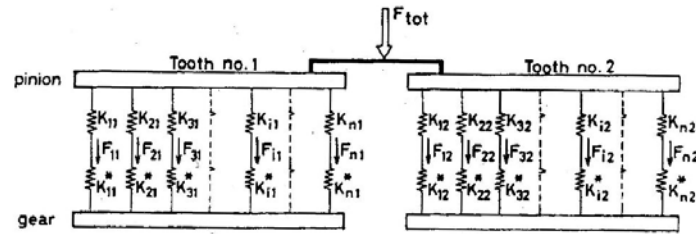


Figure 1.27 : Modèle de partage de charge entre deux dents en prise [104]

L'avantage de tous ces modèles est la rapidité d'obtention des résultats. Les inconvénients sont la précision des résultats, fonction des modèles d'approximation, ainsi que l'utilisation de la théorie de Hertz qui n'est pas toujours adaptée (cf. remarques du paragraphe §5.2.1).

#### 5.4 Equations de compatibilité des déplacements

La plupart des méthodes précédentes se basent sur les équations de compatibilité des déplacements initialement mis en place par Conry et Seireg [79], pour calculer le partage de charge.

Dans un premier temps, une étude cinématique à vide est réalisée, afin d'obtenir la zone de contact potentiel, qui est par la suite discrétisée. Sur chaque point  $i$  de la zone de contact, la somme des déformations élastiques et des écarts initiaux doit être supérieur ou égal au rapprochement global des corps :

$$y^i = U_1^i + U_2^i + e^i - \alpha \geq 0$$

où  $U_1^i$  et  $U_2^i$  sont les déformations élastiques aux points  $i$  sur le pignon et sur la roue respectivement,  $e^i$  et  $y^i$  sont les écarts initiaux et finaux entre les surfaces, et  $\alpha$  est le rapprochement global des corps.

Le critère de contact est le suivant :

- Si on est dans le contact,  $y^i = 0$  et  $p^i \geq 0$
- Si on est hors du contact,  $y^i \geq 0$  et  $p^i = 0$

Avec  $p^i$  les pressions aux différents points  $i$ .

Les déplacements élastiques sont obtenus dans cette méthode par l'utilisation de coefficients d'influences  $C_i^j$  tels que  $U_1^i + U_2^i = \sum_j C_i^j . p^j$ . Ces coefficients correspondent à l'influence d'un effort unitaire appliqué au point  $j$  sur les déplacements du point  $i$ .

Ces coefficients prennent en compte à la fois les effets de flexion et de contact. Pour une modélisation optimale, les effets sont séparés (Vijayakar [98] et [99], Olakorede [47], de

Vaujany [50], Kim [52], Icard [39] ou Jacquin [36]). Les coefficients d'influence de flexion sont en général calculés par Eléments Finis, et les coefficients de contact sont obtenus soit par une approximation de Hertz, soit par la théorie de Boussinesq présentée précédemment.

La résolution de l'équation de compatibilité peut-être effectuée par un processus itératif, pour calculer les pressions permettant d'équilibrer le couple appliqué. Par exemple, la méthode du point fixe qui ne pose aucun problème de convergence peut être utilisée. L'inconvénient de cette méthode est l'approximation provenant du fait que le contact après déformation est supposé se trouver dans un plan. Ce processus de calcul du partage de charge a été utilisé au cours de la thèse et sera présenté plus en détail dans le Chapitre II.

## **5.5 Modélisation de la répartition des contraintes**

Afin de calculer la répartition de contraintes pour des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux, les travaux de Bibel [109], de Chang [110], de Gulliot [111], de Oda et Sayama [112] à [115], de Rao [116], de Somprakit [117] et de Von Eiff [118] utilisent la méthode des Eléments Finis alors que les travaux de Umezawa [62], de de Vaujany [51], de Kim [52] à [55], et de Olakorédé [47], [48] et [49] utilisent la méthode des Prismes Finis. Pour calculer la répartition de contraintes pour des engrenages coniques Nalluveettil [119] utilise la méthode des Eléments Finis et Vaidyanathan [120] la méthode de la flexion d'une plaque à rigidité variable.

Dans tous ces travaux, les résultats de répartition de contraintes sont donnés pour des cas de chargement très précis (direction, norme et point d'application connus). L'influence des dimensions des voiles et des jantes sur la répartition des contraintes est aussi mise en évidence. Comme le chargement est fixé dès le départ, les résultats permettront seulement de corroborer et de vérifier la tendance en ce qui concerne la répartition des contraintes pour la modélisation des engrenages spiro-coniques.

## 6. Optimisation des engrenages spiro-coniques

La conception préliminaire des engrenages demande une définition très fine de la surface de denture afin d'assurer des performances cinématiques et dynamiques satisfaisantes. Le comportement de ces engrenages est particulièrement sensible à la définition initiale des surfaces de denture, car l'aire de contact est conforme sur une très grande surface (cf. Figure 1.20). Ainsi, une erreur de définition sur une petite zone de la denture peut perturber les résultats sur l'ensemble du contact. Dans la pratique, l'aire de contact doit être située au centre du flanc de denture pour présenter des conditions de contacts satisfaisantes et une amplitude d'erreur cinématique la plus faible possible. Ainsi, des modifications de denture peuvent être réalisées, selon la largeur de denture, ou suivant sa hauteur (ou encore une combinaison des deux), comme l'indique Litvin [121]. Afin de réaliser ces corrections de denture, les paramètres de taillage sont modifiés. Cependant, le changement de la géométrie de la surface de denture n'est pas facilement estimé, après modification des paramètres de taillage.

Les études d'optimisation des engrenages sont réparties en deux groupes : les études à vide et sous charge.

### 6.1 Montage du pignon et de la roue

L'un des gros inconvénients des engrenages spiro-coniques est la précision de montage que l'on doit respecter. En théorie, les sommets des cônes primitifs du pignon et de la roue doivent être coïncidents, contrainte très difficile à mettre en place et à conserver. Afin de prendre en compte l'influence des défauts de montage, les modèles numériques simulent le « testeur universel EPG » depuis des décennies. Le pignon et la roue sont assemblés dans leur position théorique, tout en laissant 4 degrés de liberté : l'offset ( $E$ ), qui est un mouvement perpendiculaire aux axes du pignon et de la roue, le mouvement axial du pignon ( $P$ ), celui de la roue ( $G$ ), et l'angle de renvoi ( $\Sigma$ ). Dans ses travaux, Wang [122] et [13] a représenté ces degrés de liberté dans le repère présenté dans la Figure 1.28. De nombreux auteurs ont regardé l'influence de ces défauts de montage sur des résultats cinématiques ou sous charge.

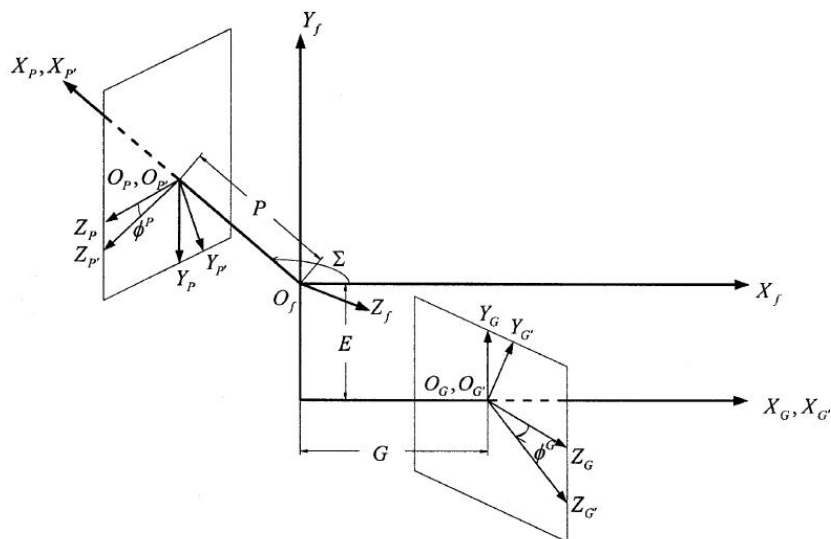


Figure 1.28 : Repère de montage du pignon et de la roue, avec les degrés de liberté [122]

## **6.2 Optimisation à vide**

Les études à vide concernent principalement la définition des surfaces de dentures. Pour les engrenages spiro-coniques et hypoïdes, plusieurs auteurs ont essayé d'avoir une définition formalisée de la géométrie en tenant compte des paramètres de taillage, comme par exemple les travaux de Fong [25], [123] et [124], de Lin [5] et [6], de Litvin [125] à [129], de Marialigeti [130] et [131], de Zhang [132] et [133], de Tamura [134], de Gosselin [20], de Handschuh [17], ou encore ceux de Stadtfelt [135]. Les études concernent également les outils de taillage. Huston [136], par exemple, a étudié des outils ayant différents types de profil.

Honda [137] a également défini des conditions cinématiques de contact pour les engrenages cylindriques, Fong [26], Gosselin [20], Lelkes [138], Litvin [127] ou Mark [139] et [140] pour les engrenages spiro-coniques, ou encore Gosselin [141], Kawasaki [142] et Zhang [133] pour les hypoïdes.

Les travaux de Fong et Tsay [26], de Bar [143], de Dareing [144], de Kohaupt [145] et de Madrosky [41] proposent des méthodes d'optimisation au niveau du taillage et de la cinématique à vide en fonction des valeurs des différents paramètres de la machine de taillage et de rectification. Ainsi, il est possible d'obtenir les paramètres optimaux de taillage et de rectification permettant la minimisation de l'erreur cinématique à vide, ou alors la zone de contact à vide prévue.

### **6.2.1 Déviation des surfaces des dentures réelles**

#### **6.2.1.1 Méthode directe**

Dans la pratique, une bonne surface n'est pas obtenue dès le premier taillage des engrenages spiro-coniques en raison des erreurs de paramétrage de la machine et de la pièce, comme des erreurs liées aux paramètres d'outils. Pour obtenir une surface satisfaisante, il est donc nécessaire d'effectuer un nouveau taillage à partir de l'observation du flanc de denture obtenu qui ne fournit que des informations qualitatives. De plus, un nouveau taillage dépend largement du savoir-faire des opérateurs et est basé sur la méthode essai/erreur.

Dans certains cas, comme le montre Madrosky [41] dans ses travaux de thèse, une pièce étalon est utilisée et la mesure des coordonnées fournit des informations sur les déviations de la surface. La comparaison se fait en relatif entre cette pièce étalon et une pièce à valider. Les réglages de la pièce à tester sont donnés par rapport aux réglages de la pièce étalon. La mesure est effectuée par une machine à mesurer en 3 dimensions. Litvin [127] a jugé cette méthode moins efficace que la détermination numérique des déviations surfaciques.

#### **6.2.1.2 Méthode numérique**

Afin d'avoir une pièce précise sans avoir à la faire retailler, une méthode d'inspection assistée par ordinateur en utilisant une méthode CMM (Mesure de Coordonnées par Machine à mesurer) a été développée par Gosselin [60] et [141]. La mesure est réalisée par un palpeur sphérique (Figure 1.29\_a) avec des relevés de valeurs selon une grille sur la surface de la pièce à mesurer. La densité de la grille de mesure affectera la résolution et les facteurs

d'erreur qui seront détectés. Gosselin estime cependant qu'une grille de 5x9 (Figure 1.29\_b), 5 mesures selon la hauteur de la dent, 9 selon sa largeur, est suffisante pour détecter des erreurs du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre. Il est toutefois difficile de mesurer près du pied de dent à cause du diamètre du palpeur. De la même manière, en tête de dent, sur le petit bout et sur le gros bout, les mesures ne peuvent pas être réalisées à cause d'un éventuel chanfrein.

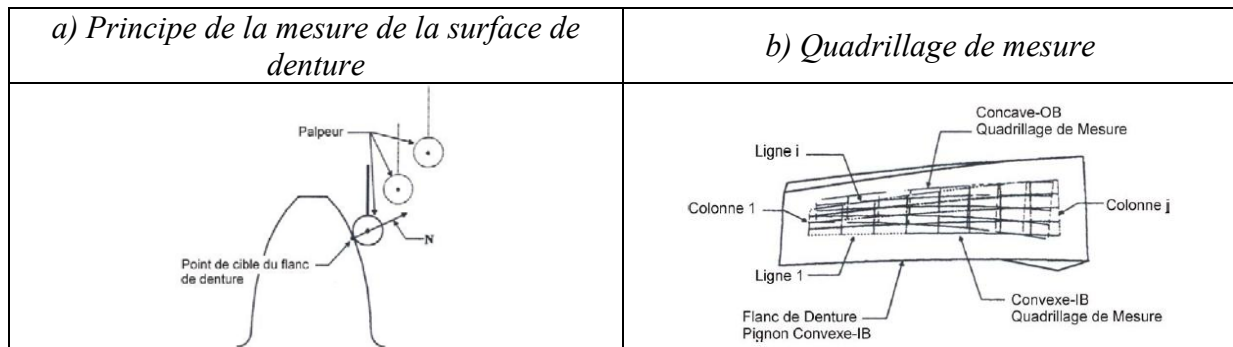


Figure 1.29 : Mesure de surfaces [141]

Comme il faut maximiser les informations obtenues par les mesures de surface, Litvin [128] conseille d'utiliser une grille de 9x15. La détermination des réglages de la surface réelle est donnée sous forme numérique. Les erreurs liées aux réglages de machine sont prises en compte en supposant que la procédure de fabrication produit des déviations de surfaces répétables. Cette méthode, également utilisée par Fan [22] et Lin [146] permet de réduire les défauts par une correction adéquate des réglages de machine et d'outil. Son processus est le suivant :

- Les coordonnées de la surface réelle sont mesurées avec la machine CMM (Figure 1.30\_a),
- La surface de denture théorique est estimée par la méthode des moindres carrés, pour s'approcher au mieux de la surface réelle,
- Les déviations des réglages de machine, estimées par rapport aux réglages de la pièce réelle, sont considérées comme des erreurs de réglage de machine dues à la procédure de taillage,
- Ces erreurs sont corrigées pour obtenir la fabrication d'une nouvelle pièce plus précise (Figure 1.30\_b).

Le traitement numérique de la surface théorique se réalise plus facilement que celui de la surface réelle. De cette manière, on peut évaluer des performances cinématiques ou dynamiques calculées et les comparer à des résultats expérimentaux.

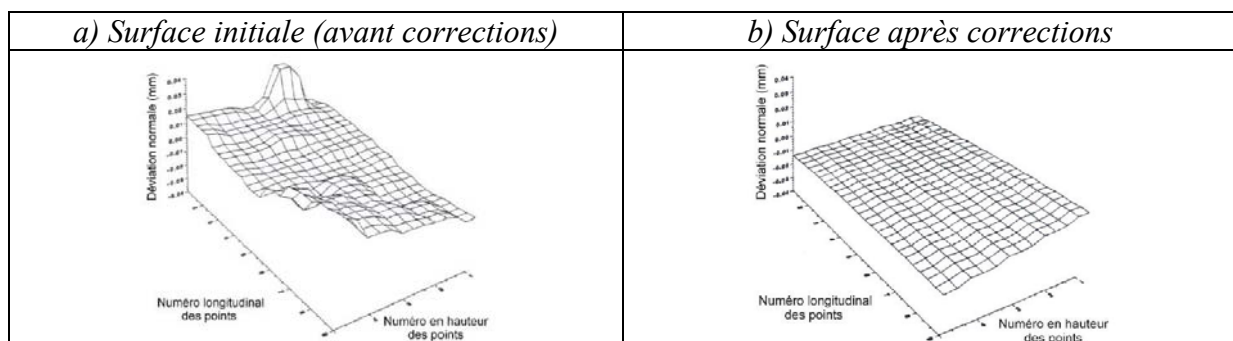
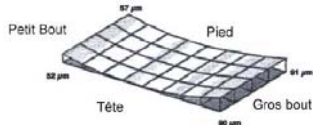
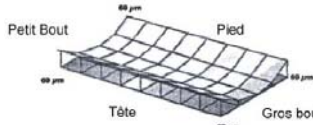
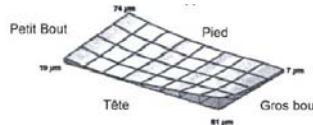
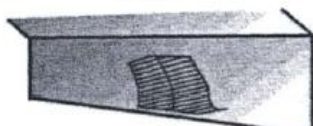
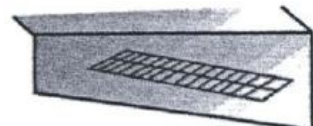

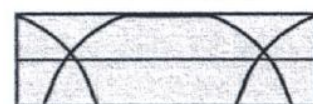
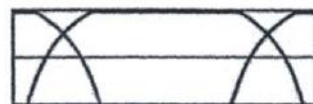
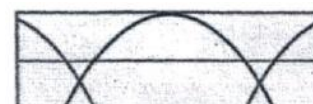


Figure 1.30 : Déviation des surfaces [128]

## 6.2.2 Modification de la portée

Les engrenages présentent divers types de portée, chacune d'elles dépendant des modifications possibles de la surface de denture par rapport à la surface de denture conjuguée. Dans un premier temps, le but de ces modifications est d'assurer une portée à vide limitée. Les corrections maintiennent la portée entre les bords de dentures, et évitent également les contacts en tête de dent. Pour les engrenages spiro-coniques, il existe trois types de modifications permettant de localiser la portée, présentés par Stadtfeld [135] :

- La modification en longueur de denture (Figure 1.31), en réduisant la longueur de d'outil sur la surface convexe. La modification en longueur peut également être obtenue par l'inclinaison de l'outil. Les modifications sont présentées sur la surface de denture entière par une présentation du rapprochement des surfaces. Généralement, après les modifications, il n'y a qu'un point où le rapprochement est nul. C'est un point conjugué.
- La seconde modification est en hauteur (Figure 1.32). Une courbure concave sur l'outil coupant (contrairement à un outil coupant droit) est utilisée dans la procédure de fabrication. La modification de profil entraînera un contact en biais, si c'est la seule correction dominante.
- La troisième modification consiste en une torsion du flanc de denture (Figure 1.33). Cela se traduit par une rotation de l'outil autour de l'axe de l'angle de pied.

<p>a) <i>Correction apportée</i></p>			
<p>b) <i>Portée</i></p>			
<p>c) <i>Erreur cinématique</i></p>			
	<p><b>Figure 1.31 : Correction en longueur [135]</b></p>	<p><b>Figure 1.32 : Correction en hauteur [135]</b></p>	<p><b>Figure 1.33 : Correction en torsion [135]</b></p>

Modifier la portée à vide afin d'obtenir celle que l'on souhaite est primordial. Il faut toutefois veiller à ce que cette portée reste identique lors de l'assemblage de l'engrenage. La mise en position du pignon et de la roue doit être très précise. En effet, la moindre erreur de positionnement peut provoquer un déplacement de la portée, comme le montre Wang [122] et [13] dans ses travaux. Des défauts de type EPG sont intégrés dans son modèle numérique (pour rappel, ces 3 paramètres E, P et G ont été définis plus tôt sur la Figure 1.28). On voit clairement que la portée peut être déplacée sur le petit bout (Figure 1.34\_c) ou sur le gros bout (Figure 1.34\_b) avec la présence de petites erreurs de montage (de l'ordre du dixième de millimètre), alors que sans défaut, la portée est centrée sur la denture (Figure 1.34\_a). Pour chacun des cas présentés sur la Figure 1.34, la portée du haut correspond au flanc concave et celle du bas au flanc convexe de l'engrenage utilisé.

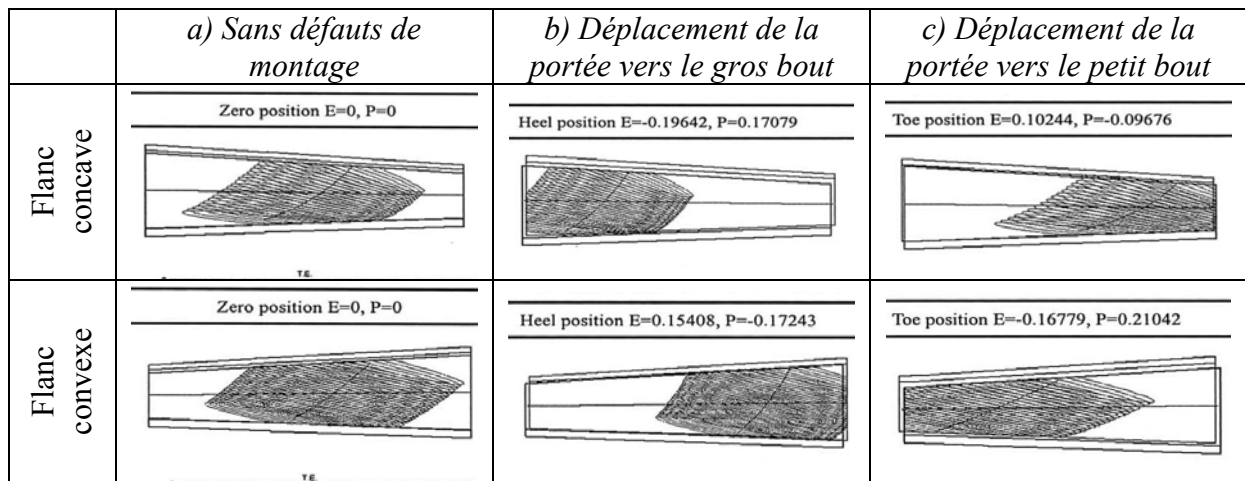


Figure 1.34 : Influence des défauts de montage sur la position du contact [122]

### 6.2.3 Erreur cinématique

Quand un engrenage est en fonctionnement sans aucune charge, une différence entre les positions angulaires théorique et réelle de la roue par rapport à celle du pignon peut apparaître. C'est l'erreur cinématique, qui est un indice de la qualité de l'engrenage. L'influence directe des erreurs cinématiques sur les comportements dynamiques des engrenages est très largement admise (Fong [26], Gosselin [20], Kawasaki [142], Stadtfeld [135]). Ainsi, les développements dans ce domaine tendent à réduire ou éliminer le bruit d'engrènement et permettent d'accroître la puissance transmise par les engrenages.

Les surfaces de dentures sont très sensibles aux erreurs de montage ou de fabrication. Simon [147] et [148] montre, dans ses travaux, que le moindre changement peut provoquer des comportements cinématiques complètement différents, comme on peut le voir sur la Figure 1.35. En faisant varier un paramètre de montage, le contact se déplace sur la largeur de denture, et les écarts entre surfaces évoluent (Figure 1.35\_a). Il en ressort une influence directe sur l'erreur cinématique (Figure 1.35\_b).

Les paramètres de taillage doivent être choisis attentivement pour produire une erreur cinématique appropriée à vide qui annulera les déflexions et les déformations de contact sous charge, tout en gardant une certaine aptitude à absorber les erreurs de montage.

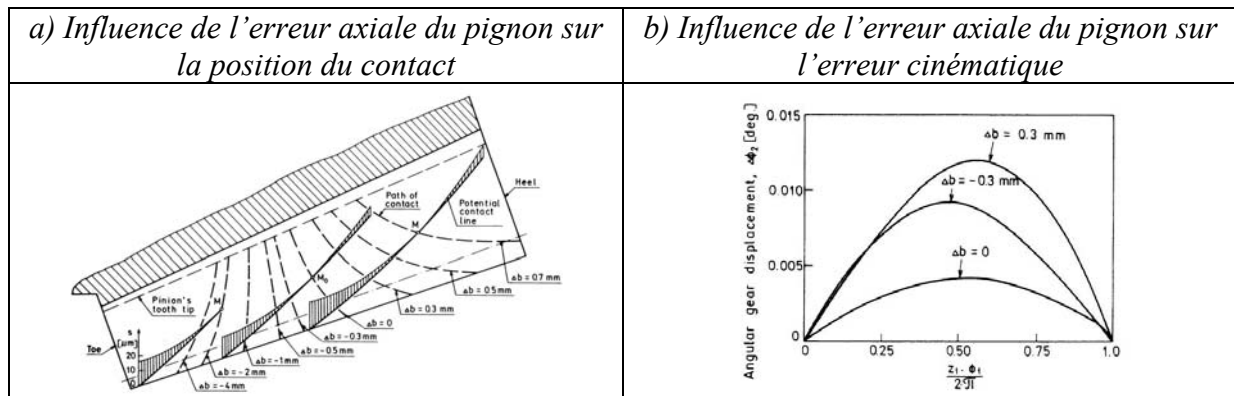


Figure 1.35 : Influence de l'erreur de montage axiale du pignon [148]

Le couple d'engrenage idéal devrait présenter une erreur cinématique négligeable, mais pas forcément nulle. Stadtfeld [135] explique que dans l'hypothèse d'une erreur cinématique toujours nulle l'engrenage serait extrêmement silencieux dans sa position de référence. Cependant, l'engrenage ne supporterait aucun défaut de montage.

Concrètement, l'erreur cinématique devient généralement parabolique à cause de l'interaction des corrections de dentures appliquées dans la génération de la dent (Figure 1.36). Fong [26] montre que les contraintes de l'optimisation conduisent à certaines considérations spéciales. Un saut cinématique (Figure 1.37) informe qu'une fois que le premier couple de dents d'engrenage a terminé son engrènement, le second couple de dents n'est pas encore entré en contact. Cela va induire un impact entre les surfaces de denture, engendrant plus de bruit en fonctionnement, et réduisant ainsi la longévité de l'engrenage.

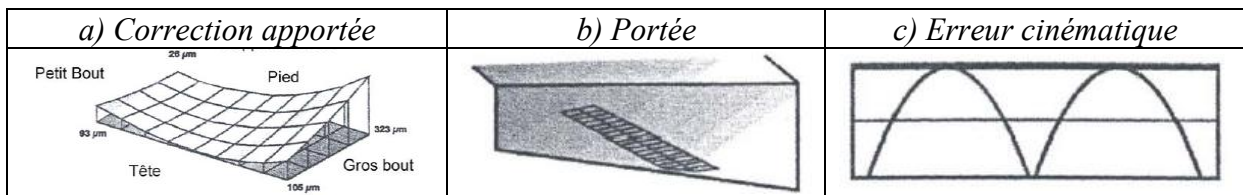


Figure 1.36 : Surface bombée suivant la ligne de contact [135]

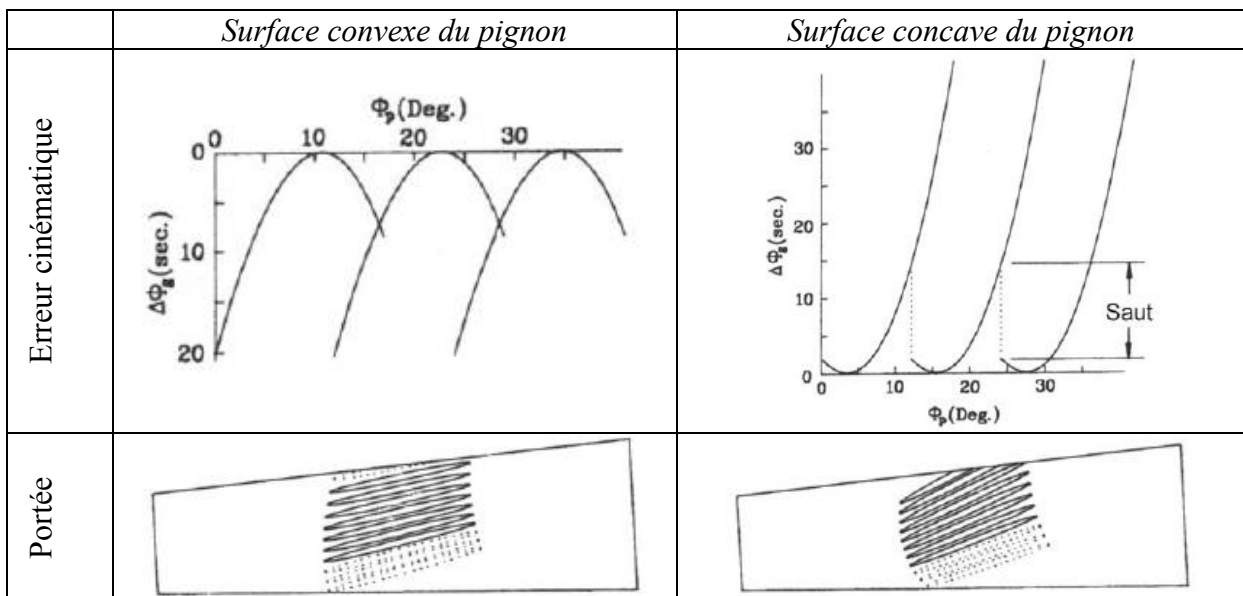


Figure 1.37 : Erreur cinématique et portée basée sur les réglages initiaux de la machine [26]

Dans ses travaux, Gosselin [20] démontre que la modification simultanée de plus d'un réglage de machine est non linéaire et les résultats ne sont pas estimés parfaitement. Les effets des réglages de machine (inclinaison de l'outil, décalage hypoïde appliqué à la fabrication, déplacement du centre de la machine) sur l'erreur cinématique sont traités en surface 3D pour présenter un espace de génération (Figure 1.38). Les interactions directes sont détectées entre le biais de la portée et de l'erreur cinématique. Il existe un nombre infini de modifications permettant d'obtenir le même résultat au niveau de l'erreur cinématique. Ainsi, l'optimisation consiste à trouver des réglages de machine appropriés au niveau désiré d'erreur cinématique. Une large courbure longitudinale de la roue et du pignon est utilisée pour réduire la sensibilité aux changements des réglages de la machine.

La vitesse angulaire est la première dérivée de l'erreur cinématique qui donne une fonction linéaire et non continue (Figure 1.39) bien que la vitesse du pignon (élément menant)



reste constante, explique Stadtfeld [135]. La dérivée seconde est l'accélération angulaire qui a une valeur constante. Le saut dans la fonction de vitesse est défini comme une accélération infinie sur une période très courte, donnant ainsi un pic dans la courbe d'accélération. Physiquement, cette courbe d'accélération est une impulsion qui renvoie à l'impact de tous les couples de dents au moment de leur premier contact.

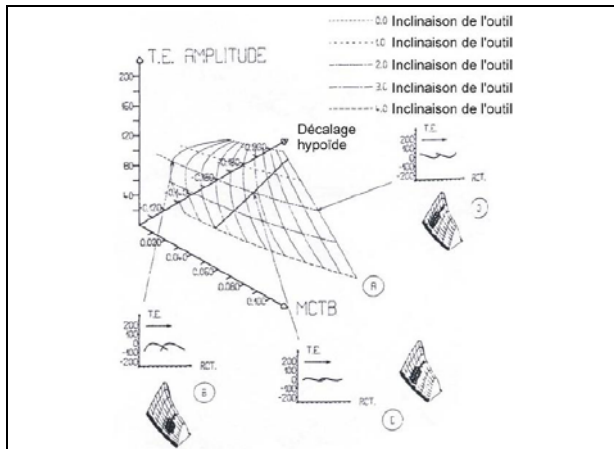


Figure 1.38 : Surface des courbes d'erreur cinématique fonction de l'inclinaison de l'outil [20]

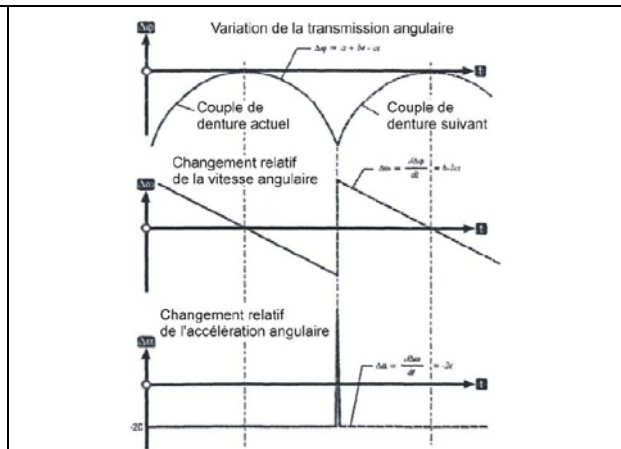


Figure 1.39 : Graphiques de mouvements relatifs, de vitesse et d'accélération [135]

Cet impact est réduit par les corrections de denture multiples qui donnent une erreur cinématique différente de la fonction parabolique, appelée « Ultimate Motion Graph ». Par cette méthode présentée par Stadtfeld [135], cinq petits impacts sont obtenus au lieu d'un seul (Figure 1.40). La stratégie ici consiste à dire qu'à défaut d'éliminer complètement un impact d'engrènement, il est possible que plusieurs petits impacts sur trois dents différentes réduisent ou même dissipent le bruit. Cette théorie est appuyée par le fait que le temps écoulé entre les impacts est différent dans les 5 cas.

Pour éviter aussi les chocs lors de l'engrènement, Wei [149] a mis en place une technique de rodage sur des engrenages hypoïdes, permettant de déformer légèrement les surfaces de denture, afin d'avoir une continuité d'engrènement. Durant le rodage, la mise en position du pignon et de la roue évolue selon une trajectoire bien définie, permettant de supprimer les effets indésirables, comme indiqué sur la Figure 1.41. Avant le rodage, l'impulsion due à l'accélération instantanée existe au point d'entrée d'une nouvelle dent. Ainsi, les forces d'abrasion sont plus importantes à cet endroit là, menant ainsi à une courbe d'erreur de transmission qui s'aplatit.

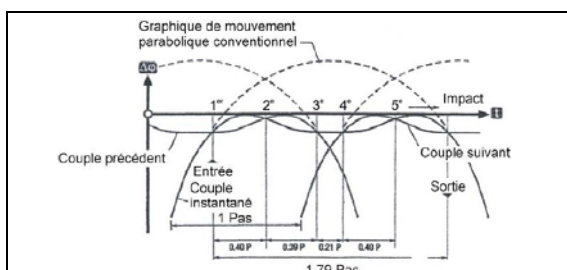


Figure 1.40 : Graphiques de « Ultimate Motion Graph » [135]

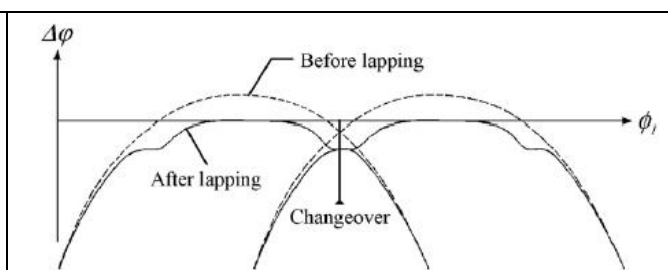


Figure 1.41 : Modification de l'erreur cinématique grâce au rodage [149]

## 6.3 Optimisation sous charge

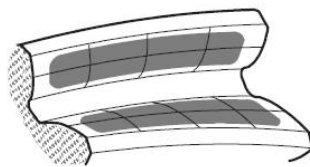
L'optimisation sous charge des engrenages spiro-coniques en général dépend principalement de la définition géométrique des surfaces des flancs de dentures. Les travaux de Handschuh [150] et de Wang [151] récapitulent les récentes avancées dans la fabrication des couples d'engrenages spiro-coniques et présentent un processus d'optimisation pour obtenir les paramètres géométriques des surfaces de dentures. Ainsi, de nombreux auteurs réalisent l'optimisation en modifiant soit les paramètres des machines de taillage (par exemple afin de réaliser des corrections de denture), soit les paramètres des fraises et des meules. D'autres auteurs regardent l'influence des paramètres géométriques de l'engrenage tels que le nombre de dents du pignon, de la roue, ou l'angle de spirale. Les optimisations peuvent porter sur différents résultats, tels que l'erreur de transmission, les déformations, les contraintes en pied de dent. Certains auteurs, comme par exemple Icard [39], Lelkes [40] ou Madrosky [41], ont étudié l'influence des défauts de montage.

### 6.3.1 Sorties optimales

Lors du processus d'optimisation sous charge, il est important de définir quelles doivent être les résultats optimisés, et vers quelles valeurs ils doivent tendre pour être considérés comme optimaux.

Par exemple, il est courant d'estimer qu'une erreur de transmission est optimale lorsque son amplitude est minimale. Concernant la portée idéale, Artoni [152] indique qu'elle doit se situer sur l'ensemble de la denture, excepté sur les bords (Figure 1.42). La largeur et la hauteur de la portée doivent faire environ 80-85% des dimensions de la denture.

Par ailleurs, les pressions de contact et les contraintes en pied de dents doivent être minimisées en fonction des caractéristiques du matériau utilisé.



Idealized 80-85% coverage of lengthwise tooth surface - relief at top and edges, no concentrations

Figure 1.42 : Définition de la portée idéale [152]

### 6.3.2 Influence des paramètres de la machine

De nombreux auteurs ont travaillé sur les paramètres des machines : Fong [26] a développé un algorithme permettant de minimiser l'erreur de transmission et de centrer la portée. Pour cela, il modifie les paramètres de la machine afin d'optimiser la géométrie de la dent. Plus récemment, Artoni [153] a également développé un processus d'optimisation des paramètres machine permettant de s'approcher de la portée idéale et de minimiser l'erreur de transmission. Simon [42] et [154] a, quant à lui, minimisé les déformations, les pressions de contact et les contraintes en creux de dent, ainsi que les erreurs dues à des défauts de montage.

Dans ses travaux, Wang [122] a introduit de nouveaux déplacements à certains paramètres machine, en appliquant le « Modified Radial Motion » (cf. Figure 1.43) : la rotation du centre de l'outil (point A sur la figure) donne un cercle si le paramètre radial  $S_R$  est constant ( $\Delta S_R = 0$ ). En appliquant le « Modified Radial Motion », il permet au paramètre  $S_R$  d'évoluer ( $\Delta S_R \neq 0$ ), modifiant alors les flancs de dentures.

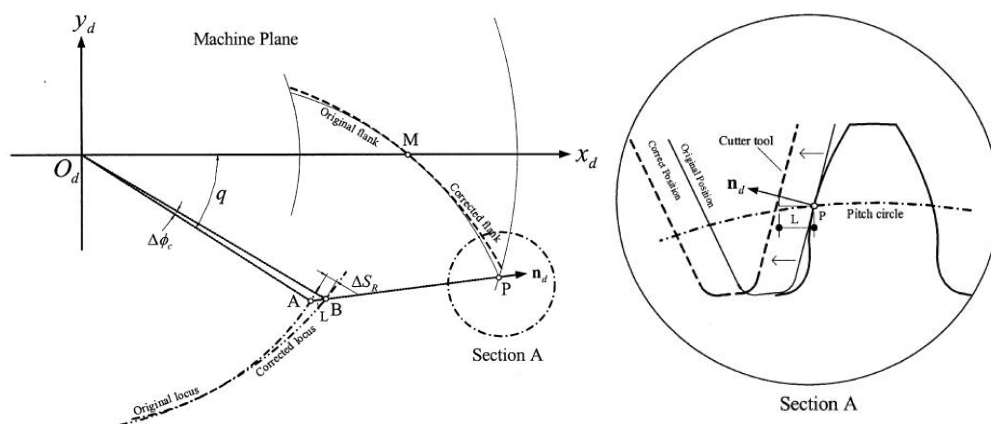


Figure 1.43 : Modified Radial Motion [122]

Litvin [15] et Simon [19], en plus d'exploiter ce paramètre radial, ont également utilisé le « Modified Roll Motion » : initialement, le rapport entre la vitesse de rotation de la pièce usinée et celle de l'outil est constant. En complexifiant le « Modified Roll Motion », par exemple en lui appliquant une loi polynomiale, il est possible d'augmenter les possibilités d'optimisation des engrenages spiro-coniques. Achtmann [155] a également optimisé ce genre de mouvements supplémentaires afin, par exemple, de recentrer la portée.

Simon [19] montre ainsi dans ses travaux que l'erreur de transmission, la distribution des pressions de contact ou encore la répartition des charges peuvent être améliorées. Il estime optimal le cas où des fonctions polynomiales différentes sont utilisées dans le « Modified Roll Motion » pour tailler de part et d'autre du point milieu de la denture. La Figure 1.44 compare des erreurs de transmission pour différentes fonctions polynomiales de différents degrés, appliquées au « Modified Roll Motion ». L'influence des défauts de montage peut également être minimisé par ces types mouvements particuliers. On peut voir par exemple sur la Figure 1.45 les comparaisons de l'influence d'un désalignement angulaire du pignon sur l'erreur de transmission, dans le cas d'un taillage sans correction, avec le « Modified Radial Motion » (ep) ou avec le « Modified Roll Motion » (igp).

Avec l'apparition des machines à commande numérique, cette méthode d'intégration de fonctions polynomiales de degré élevé pour les mouvements de machine peut être généralisé à l'ensemble des paramètres. C'est par exemple ce qu'a fait Shih [24] en utilisant des polynômes de degré 6 sur la plupart des mouvements d'un générateur hypoïde numérique à 6 axes (Figure 1.46).

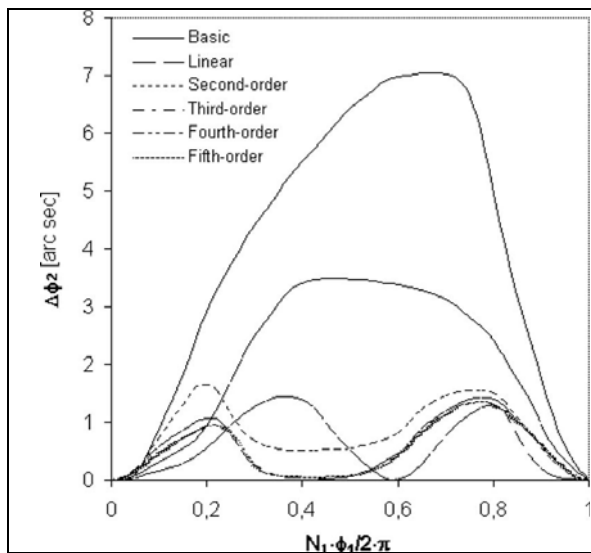


Figure 1.44 : Comparaisons d'erreurs de transmission [19]

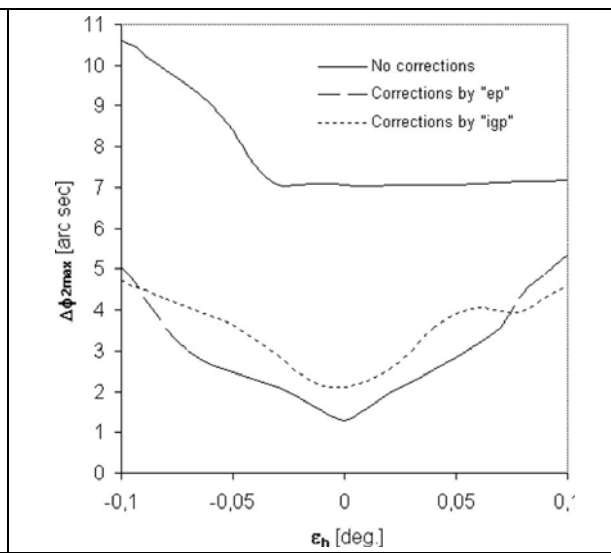


Figure 1.45 : Influence des défauts de montage [19]

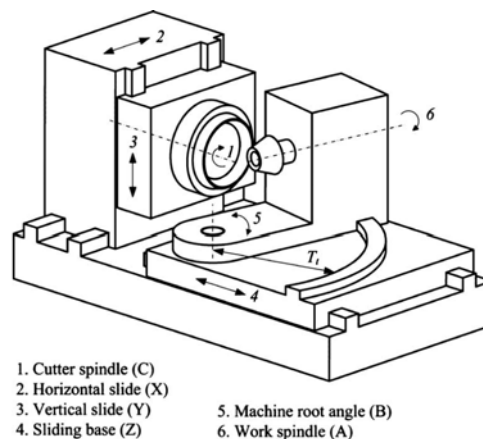


Figure 1.46 : Machine Gleason 6 axes Phoenix [24]

### 6.3.3 Influence des paramètres des outils

Plutôt que de modifier les mouvements des machines, il est également possible d'intervenir sur les outils de taillage. Dans ses travaux, Litvin [14] a calculé les contraintes de contact et en pied de dent pour différents cas de profils de meule de taillage : profil droit (Figure 1.47\_a), parabolique (Figure 1.47\_b), ou Top-Rem (Figure 1.47\_c). Les meules de type Top-Rem sont constituées de deux profils droits successifs.

Litvin montre une réduction significative des contraintes et de l'erreur de transmission avec l'utilisation de meules Top-Rem pour le taillage du pignon et de la roue spiro-coniques.

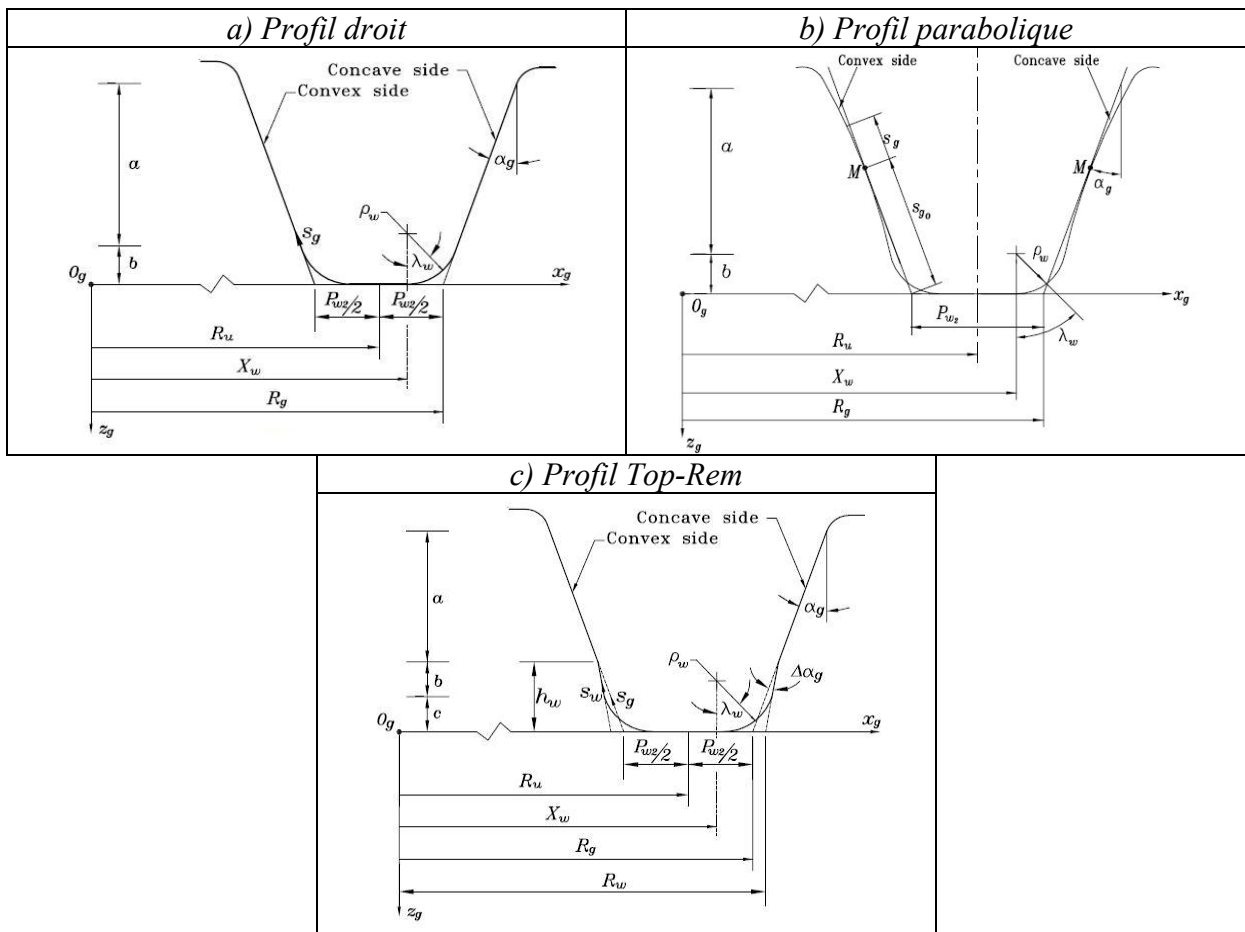


Figure 1.47 : Différents types de profils [14]

Simon [18], a réalisé des études d'influences sur un type de géométrie en particulier : un profil de meule bi-circulaire, détaillé sur la Figure 1.48. Dans ses travaux, il recherche à optimiser les deux rayons de la meule ( $r_{\text{profil}}$  et  $r_{\text{profil}2}$ ). Il montre qu'il est possible de minimiser l'erreur de transmission, ou les pressions de contact, même en présence de défauts de montage. C'est le cas par exemple des résultats présentés sur la Figure 1.49.

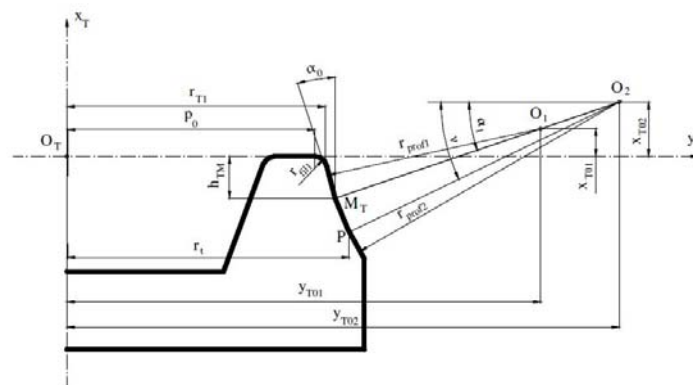


Figure 1.48 : Profil de meule bi-circulaire [18]

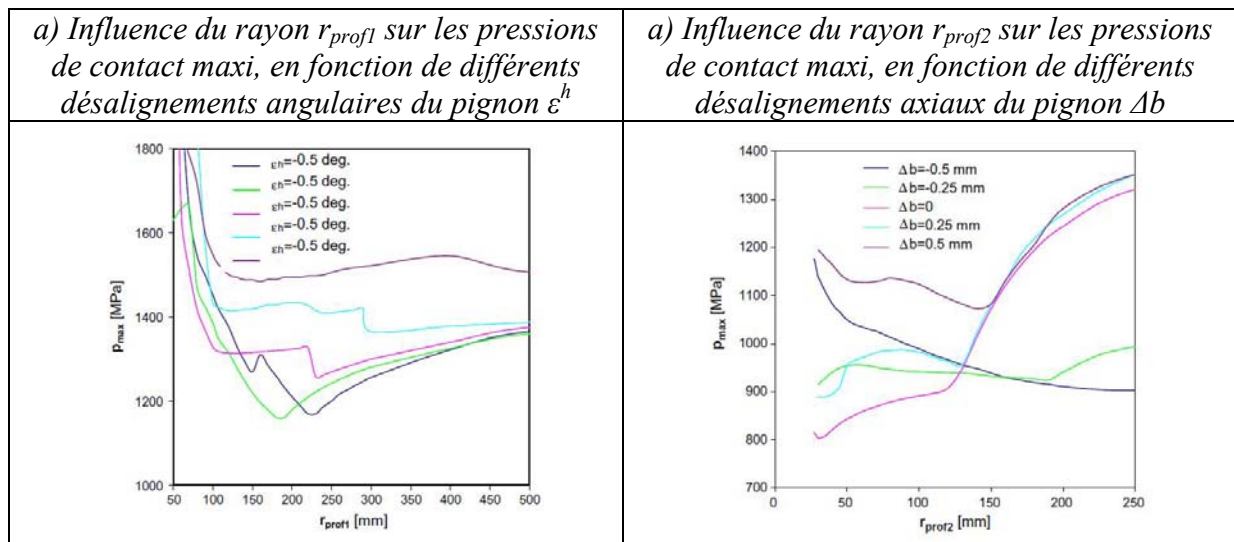


Figure 1.49 : Influence des rayons sur les pressions maximales [18]

### 6.3.4 Influence des paramètres de l'engrenage

Avant toute fabrication, il est primordial de déterminer les paramètres géométriques principaux de l'engrenage (nombre de dents, largeur de denture, angle de spirale, ...). Simon [44] a étudié l'influence de ces paramètres sur les pressions maximales, les contraintes, ou encore les erreurs de transmission. On retrouve par exemple les résultats de l'influence du nombre de dents du pignon sur la Figure 1.50\_a, et ceux de l'angle de spirale moyen sur la Figure 1.50\_b.

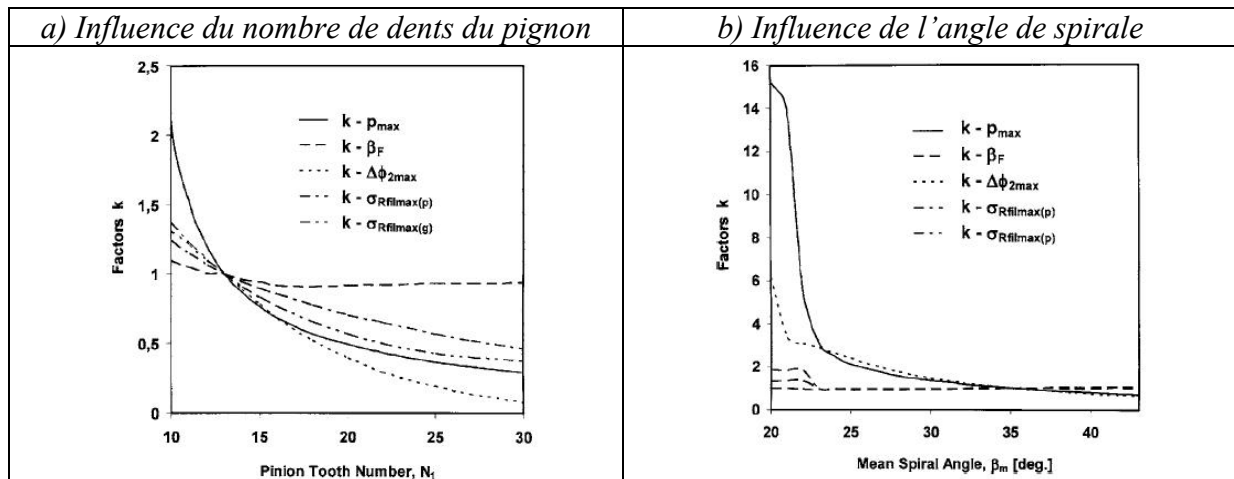


Figure 1.50 : Etude d'influence sur les paramètres géométriques [44]

## 7. Travaux expérimentaux

Afin de pouvoir vérifier la qualité des engrenages spiro-coniques après leur taillage, il est nécessaire de réaliser des mesures de surfaces. Ces mesures permettent de comparer les surfaces de dentures réelles aux modèles CAO. De même, afin de valider les modèles numériques développés, des mesures expérimentales peuvent être mises en place. De nombreux types de tests peuvent être réalisés, selon les informations qui doivent être validées : contraintes en pied de dent, portée sous charge, erreur de transmission, ...

### 7.1 Mesures de surfaces

Dans ses travaux déjà présentés précédemment, Tsai [29] a défini des profils de dentures théoriques. Dans le but de valider le modèle mathématique de la géométrie de denture présentée dans ses travaux, les coordonnées d'un engrenage spiro-conique de type Gleason ont été mesurées. Il a également comparé ses résultats avec ceux obtenus par Huston [28]. L'instrumentation utilisée pour mesurer les profils de denture des engrenages de type Gleason correspond à la Figure 1.51.

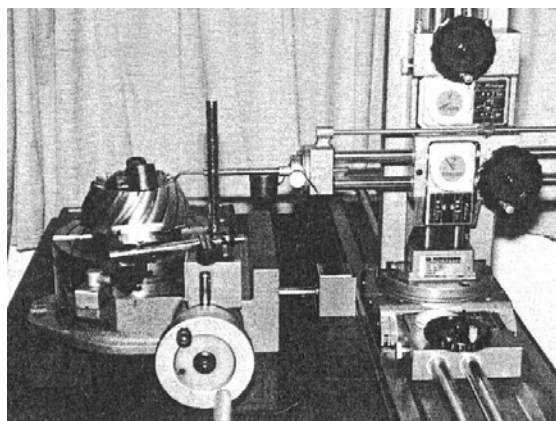


Figure 1.51 : Instrumentation pour la mesure de surface d'engrenages spiro-conique [29]

Le moyen de mesure de surface utilisé par Fan [22] est quant à lui présenté sur la Figure 1.52. On voit la configuration de mesure du pignon et de la roue sur une CMM (Coordinate Measuring Machine). Pour des facilités d'accessibilité, on voit clairement que les flancs du pignon sont mesurés par le côté, alors que les mesures sur les flancs de la roue sont accessibles par le dessus.

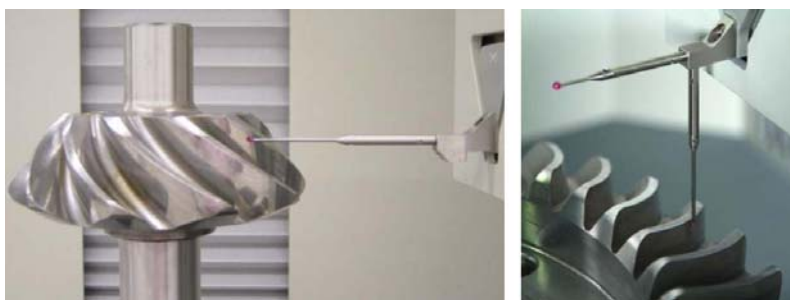


Figure 1.52 : Mesure de flanc de denture sur une CMM [22]

La même méthode de mesure a été utilisée par Gosselin [60]. Un palpeur se déplace dans différentes directions, et détecte les obstacles tels que les flancs de denture. Le palpeur est une petite sphère de diamètre très précis et connu.

Une fois les différents points mesurés, Zik [156] propose une méthode de transformation des coordonnées géométriques permettant de comparer les profils de dents palpés avec ceux simulés pour un engrenage spiro-conique.

## 7.2 Mesures expérimentales

Les travaux de Glodez [157] et de Houser [158] fournissent des résultats expérimentaux sur le partage de charge, sur l'erreur de transmission ainsi que sur la durée de vie et la propagation des fissures dans les engrenages cylindriques droits.

De Vaujany [159] a mesuré les iso-déformations de surfaces d'engrenages cylindriques par la méthode ESPI (Electronic Speckel Pattern Interferometry), également appelée méthode Speckel Video. Des exemples de comparaisons de courbes d'iso-déplacements sont montrés sur la Figure 1.53.

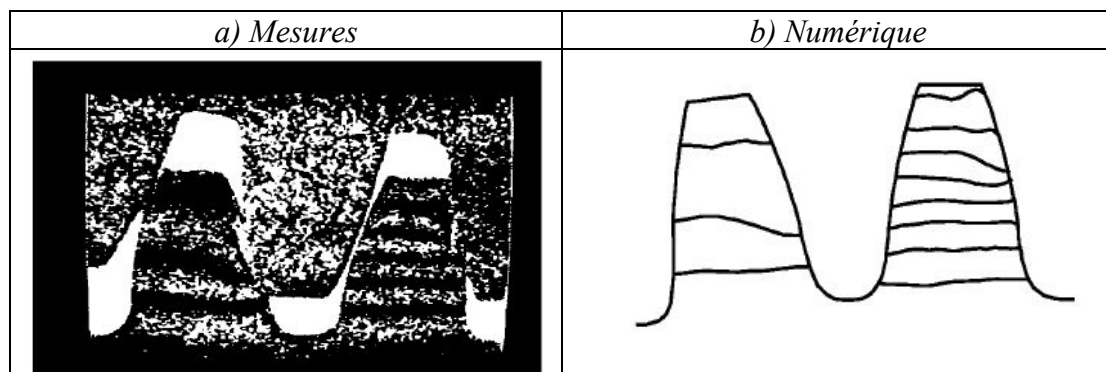


Figure 1.53 : Comparaisons entre mesures par Speckel Video et modèle numérique [159]

Grabscheid [69] propose une méthode originale afin de mesurer les différentes zones de contact en effectuant une acquisition thermo graphique avec une caméra infrarouge. Le pignon et la roue spiro-coniques ayant une vitesse relative non nulle, il existe de la friction qui génère une dissipation thermique facilement quantifiable (cf. Figure 1.54\_a). L'influence de l'offset sur la zone de contact est présenté (cf. Figure 1.54\_b).



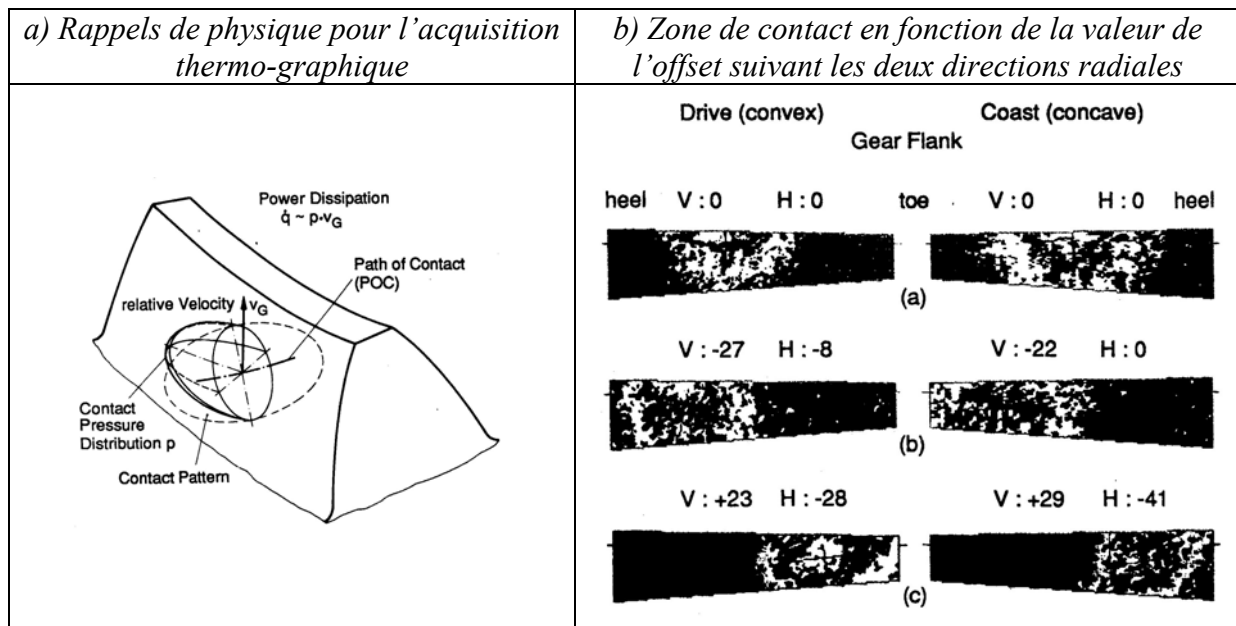


Figure 1.54 : Acquisition thermo graphique de la zone de contact [69]

Afin de déterminer la portée sous charge, Litvin [14] utilise la méthode du film coloré. La méthode consiste à appliquer une épaisseur précise de ce film sur les flancs de dentures. Lors du contact entre le pignon et la roue, la couleur est enlevée, il en résulte donc une trace qui correspond à la portée (Figure 1.55).

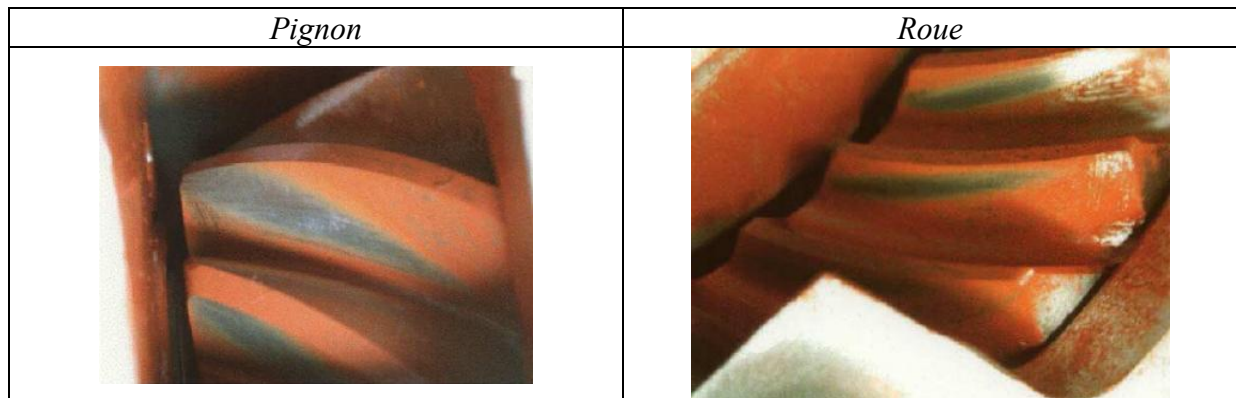


Figure 1.55 : Portée obtenue expérimentalement [14]

Ces tests expérimentaux permettent ainsi à Litvin de valider son modèle numérique (Figure 1.56), ainsi que les optimisations qu'il réalise. Zhang [160] utilise la même méthode afin de valider lui aussi son modèle d'optimisation.

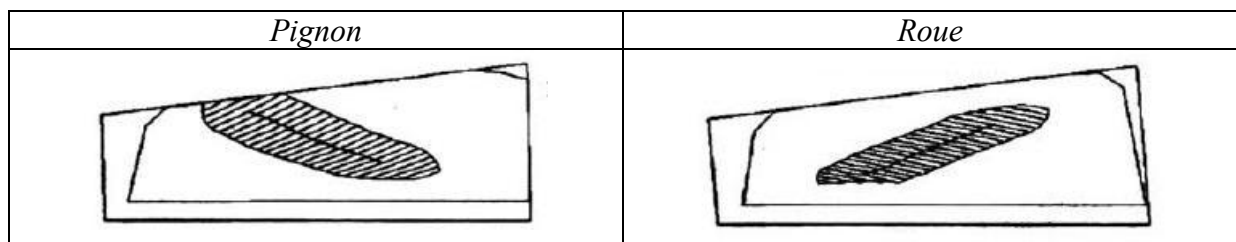


Figure 1.56 : Portée obtenue par le modèle numérique [14]

Gosselin [60] a présenté dans ses travaux un banc de mesure d'erreur de transmission, dont le schéma détaillé est présenté sur la Figure 1.57. Le pignon est mis en rotation par un moteur électrique, alors que la roue est reliée à un frein afin d'appliquer un couple. Ce banc prend en compte les défauts de montage de type EPG (cf. Figure 1.28).

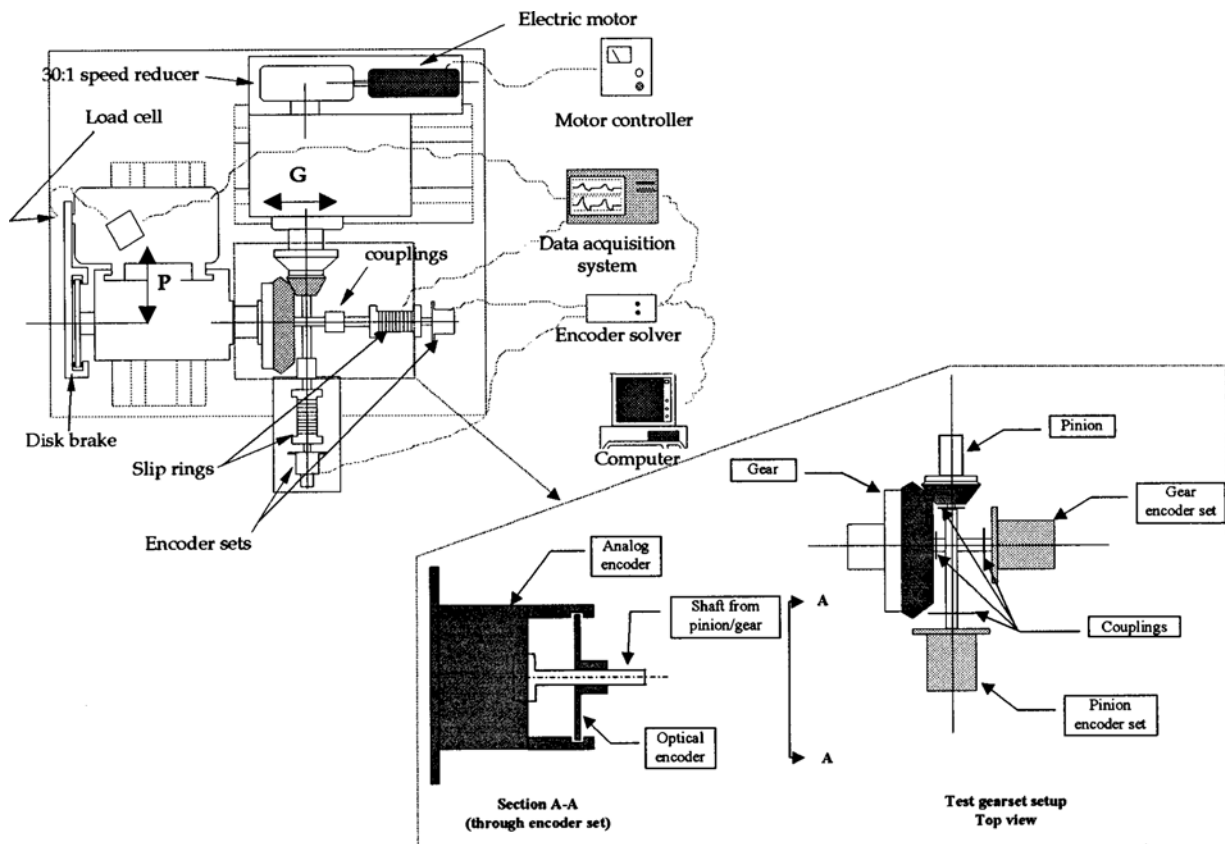


Figure 1.57 : Schéma du banc d'essai [60]

Le système de mesure d'erreur de transmission consiste en deux jeux de deux codeurs en série, un jeu étant relié au pignon, l'autre à la roue. Les jeux de codeurs sont utilisés pour mesurer simultanément l'erreur de transmission en vue de comparer les résultats par deux méthodes différentes :

- Codeur analogique – dispositif de mesure de position,
- Codeur optique – dispositif de mesure de différence de phase.

La Figure 1.58\_a montre les mesures directes (non filtrées) d'erreur de transmission utilisant les systèmes de mesures analogiques et optiques, sur deux tours de pignon. Les erreurs de transmission sur cette figure montrent d'importantes différences entre les deux méthodes. Elles sont dues au fait que les codeurs ne sont pas directement montés sur le pignon et la roue, mais par l'intermédiaire d'accouplements, qui créent un effet d'excentricité, et affectent les résultats différemment selon le codeur utilisé, même s'ils sont installés en série.

Cependant, une fois les courbes filtrées (Figure 1.58\_b), il est clair que les deux systèmes de mesure mènent à des résultats presque identiques. Une étude similaire a été réalisée par de Vaujany [161] et Icard [39] sur une boîte d'hélicoptère réelle.

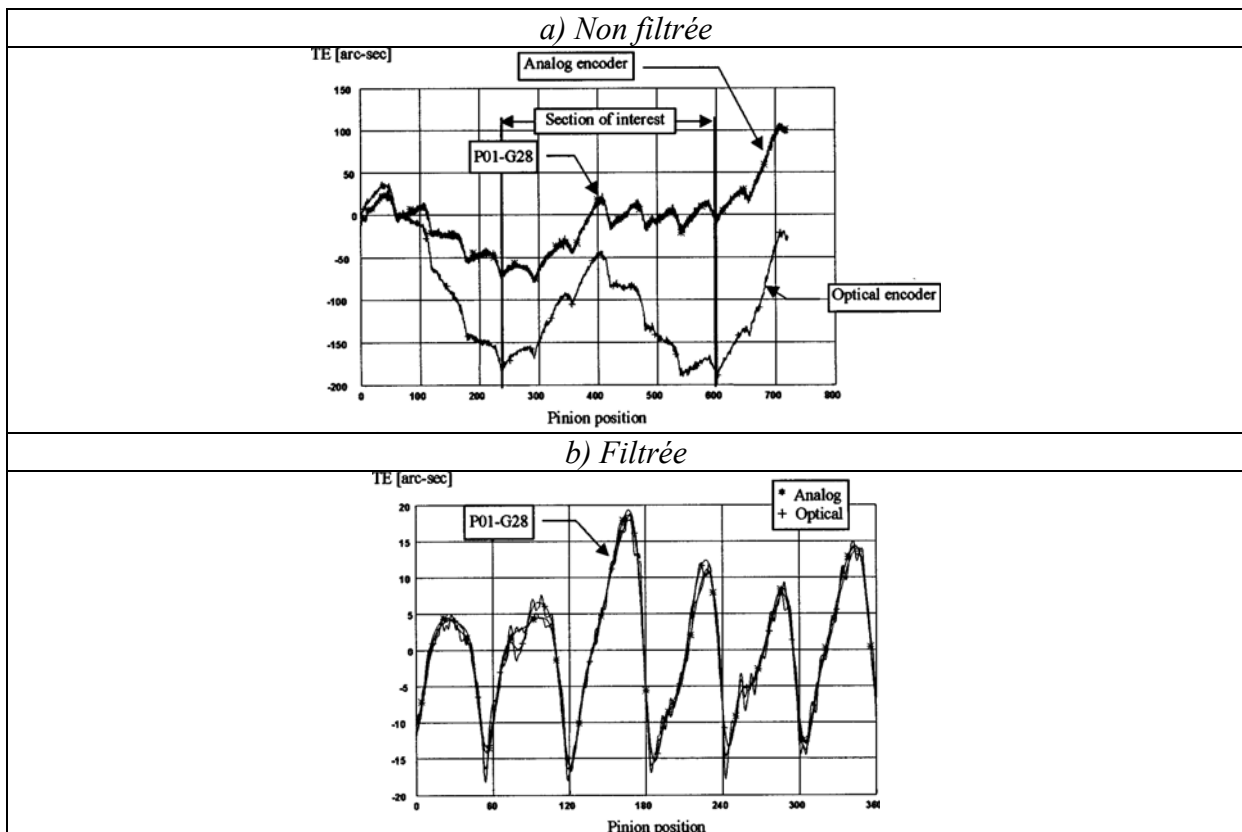


Figure 1.58 : Erreur de transmission [60]

De nombreux travaux expérimentaux existent, mais ne seront pas développés en détail. Ceux de Falah [162] et [163] par exemple fournissent des résultats expérimentaux sur l'évolution des déformations en pied (pour une ou trois dents en prise), ainsi que sur l'erreur de transmission, les zones de contact, et le rapport de conduite sous charge en fonction de la position d'engrènement.

Les travaux de Handschuh [17], [164] et Höhn [165] fournissent des résultats expérimentaux sur les contraintes en pied de dents en quasi-statique obtenues à l'aide de jauges disposés sur différents creux de dents. Cette méthode est également utilisée par Guingand [32] et [38] pour les engrenages cylindriques et face. L'influence de l'offset sur la durée de vie sont également présentés dans les travaux de Handschuh et Höhn, ainsi que la distribution de la contrainte tangentielle le long des flancs actifs (flancs en contact) et des flancs rétros (flanc n'étant pas en contact) en fonction de la position d'engrènement pour un couple d'engrenages spiro-coniques.

## 8. Conclusion

Au cours de cette étude bibliographique, nous avons essayé de balayer tous les aspects liés aux engrenages spiro-coniques. Ce sujet est vaste, mais la majorité des informations trouvées est relative à l'optimisation des engrenages. On ne recherche cependant pas à optimiser l'engrenage en lui-même, mais plutôt les nombreux paramètres des machines de fabrication des constructeurs actuels : Gleason, Klingelnberg et Oerlikon. En effet, il n'est pas possible d'obtenir une formulation analytique directe des flancs de dentures : ceux-ci doivent être obtenus par la simulation complète du processus de taillage. Cette optimisation amène souvent à considérer une complexification des mouvements des machines, avec parfois la nécessité de faire évoluer selon des lois polynomiales du 6<sup>ème</sup> degré des paramètres qui sont initialement constants. De même, les outils de taillage sont modifiés, par exemple par l'ajout de sections tranchantes supplémentaires.

Ainsi, les mouvements des machines de taillage étant de plus en plus complexes, ils ont tendance à se généraliser. Il peut alors être envisagé de réaliser des engrenages spiro-coniques sur des centres d'usinage plus conventionnels, tels que des machines 5-axes permettant d'usiner des surfaces complexes. Ainsi, la fabrication de ces engrenages deviendrait indépendante des constructeurs actuels.

Pour pouvoir réaliser l'usinage par machine 5 axes, il est nécessaire d'avoir un modèle CAO des profils de denture. Ainsi, un modèle numérique doit être développé. Ce modèle numérique sera dans un premier temps basé sur une simulation du processus de taillage des machines Gleason. Ne s'agissant que d'une première approche permettant de montrer que les engrenages spiro-coniques peuvent être usinés sur une machine 5-axes, le processus de taillage est simplifié : seulement les mouvements principaux seront pris en compte.

Une seconde approche consistera à fabriquer des engrenages ayant des profils de dentures théoriques et purement analytiques, différents de Gleason ou Klingelnberg, qui seront plus simples à optimiser. Il ressort de la bibliographie qu'il est plus pertinent de modéliser des profils de dentures en développantes sphériques. La spirale pourra aussi être définie analytiquement.

Les engrenages usinés seront par ailleurs contrôlés par des mesures de surfaces, permettant de valider l'usinage par machine 5-axes, en comparant les surfaces réelles aux surfaces de la CAO.

Un modèle de partage de charge pourra également être développé. Les méthodes totalement analytiques sont peu précises, car elles ne permettent pas de prendre en compte des géométries complexes, par exemple avec des arbres ou des voiles. Une étude complète par Eléments Finis est quant à elle très précise, mais demande des temps de calculs très élevés. Il semble donc que la meilleure approche consiste à utiliser une modélisation mixte par Eléments Finis basée sur la théorie de Boussinesq.

Dans le but de valider le modèle numérique, un banc d'essai sera développé. N'ayant pas à disposition de dentures instrumentées (jauges en creux de dent, par exemple), les mesures de l'erreur de transmission et de la portée ont été choisies afin de valider l'ensemble de l'engrènement sous charge (déformations élastiques et de contact).

# Chapitre II

## Nouvelle géométrie et modèle de partage de charge

---

---

### 1. Introduction

L'objectif de la détermination du partage de charge des engrenages spiro-coniques est d'étudier leur capacité de charge, en prenant en compte à la fois les effets de flexion globale des deux corps et de leurs supports, et les déformations de surface au niveau du contact. Dans le but d'être le plus précis possible, le calcul du partage de charge est totalement dépendant de la géométrie de l'engrenage. Les différentes étapes du modèle numérique développé sont indiquées sur la Figure 2.1. Ce processus a été utilisé par de nombreux auteurs, référencés dans le chapitre bibliographique.

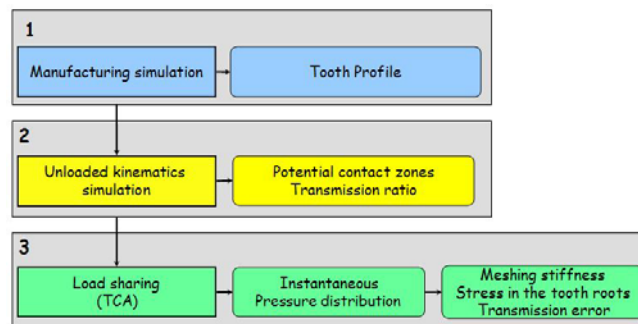


Figure 2.1 : Processus de calcul de la répartition des charges [32]

Dans un premier temps, la géométrie précise des dents est obtenue en simulant au mieux la réalité de la fabrication des engrenages. Des erreurs de géométrie dues au taillage peuvent donc être prises en compte. La définition de ces profils de denture spécifiques, ainsi que celle de dentures analytiques sera le sujet de la première partie de ce chapitre.

La deuxième étape du processus est la simulation de la cinématique à vide. Celle-ci fournit les zones de contact potentiel, même en présence de défauts. En effet, des erreurs de montage peuvent être prises en compte : défauts d'entraxe, décalages, désalignements d'axes, etc... De plus, les dentures peuvent comporter des corrections de profil et de bombé.

La dernière phase du processus, qui sera largement détaillée dans la seconde partie du chapitre, est le calcul des répartitions de charges instantanées. L'objectif est de prévoir, lorsqu'un couple est appliqué à l'organe moteur et pour chaque position cinémato-statique, les pressions de contact instantanées le long des flancs de toutes les dents en contact simultanément. Une fois cette distribution des charges connue, les modèles devront fournir les contraintes en pied de dent, les raideurs équivalentes instantanées ou encore l'erreur de transmission sous charge. Ces résultats peuvent alimenter des modèles dynamiques de la transmission.

## 2. Définitions géométriques

Afin de pouvoir établir un partage des charges correct, une définition précise des profils de denture est primordiale.

Deux types de géométries seront traités dans ce travail :

- La première est basée sur les engrenages standards de type Gleason. Pour obtenir cette géométrie, il est nécessaire de se baser sur le processus de taillage, car il n'existe aucune définition mathématique directe.
- La seconde géométrie proposée est basée sur des considérations purement théoriques et analytiques. Elle est donc générée en faisant abstraction des mouvements des machines des constructeurs actuels. Avec l'utilisation de ces profils analytiques, on essaiera de diminuer les principaux défauts des engrenages spiro-coniques standards.

### 2.1 Engrenages GLEASON

La méthode proposée est basée sur les travaux de Litvin [93], et permet de retrouver les coordonnées d'un point appartenant à la surface de la dent d'une roue de type Gleason usinée par « Face-Milling », selon des mouvements machines qui seront détaillés par la suite. Ces mouvements sont par ailleurs ramenés à un cas simple, tous les mouvements de génération du cas de l'UMC (Universal Motion Concept, cf. Figure 2.2) n'étant pas pris en compte. Le but de ce travail étant de permettre une étude d'engrenages spiro-coniques à partir de données simples, il a été décidé de se référer à la norme NF ISO 23509 [166] pour en détailler la géométrie.

Les paragraphes qui vont suivre seront consacrés principalement au taillage d'une roue. Dans le cas du pignon, le principe est quasiment identique.

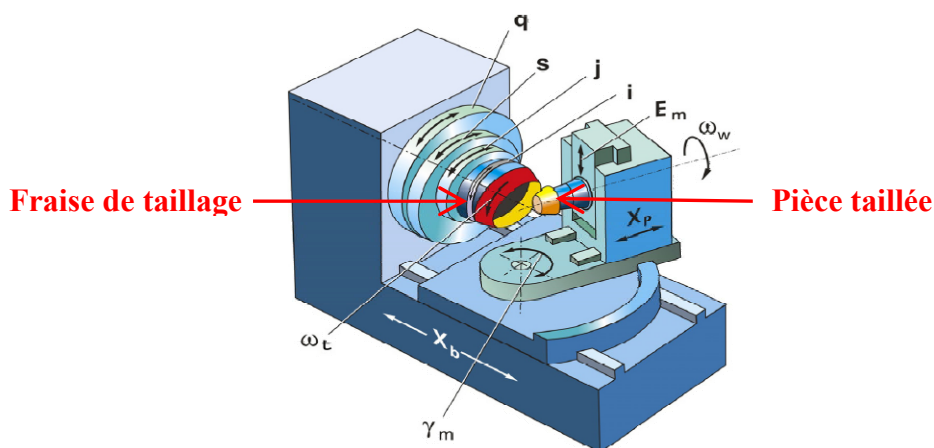


Figure 2.2 : Machine de taillage Gleason [22]

### 2.1.1 Outils

L'outil réel (Figure 2.3) est formé de couteaux fixés sur un support en rotation indépendant du mouvement de coupe. Les couteaux extérieurs permettent le taillage des flancs concaves des creux de l'engrenage, alors que les couteaux intérieurs taillent les flancs convexes.

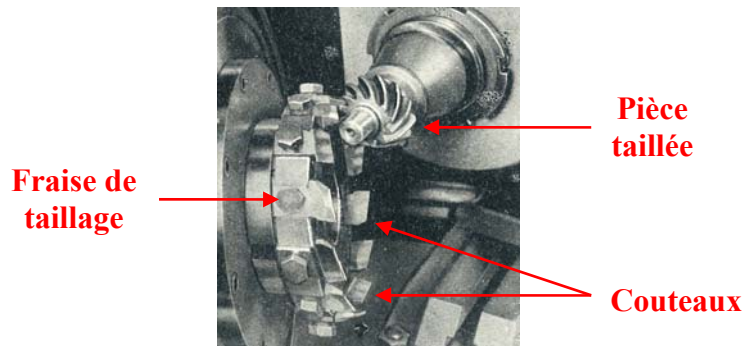


Figure 2.3 : Fraise de taillage des engrenages spiro-coniques Gleason [2]

On considère ici que l'enveloppe des couteaux de l'outil est formée de deux surfaces : une surface conique générant la surface active des dents, et une surface torique générant le raccord en pied de dent (respectivement les profils bleus et rouges de la Figure 2.4).

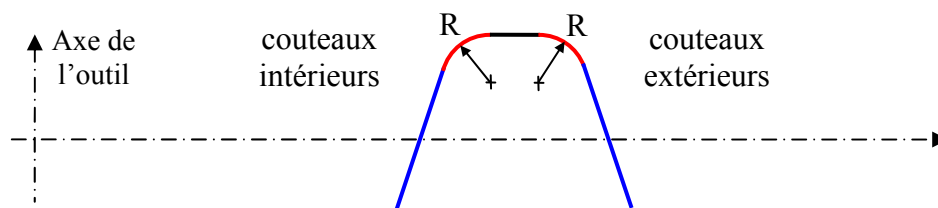


Figure 2.4 : Définition de l'enveloppe de l'outil de taillage

### 2.1.2 Mouvement de génération

Le mouvement de génération sera ici limité à deux mouvements dans le repère de la machine : un mouvement de rotation du berceau (support de l'outil) autour de l'axe  $x_{m2}$ , et un mouvement de rotation de la roue taillée autour de l'axe  $z_2$  (Figure 2.5). Ces deux rotations sont liées par un rapport constant :  $m_{P2}$ . L'outil, ayant un rayon moyen  $r_{c0}$ , tourne sur lui-même autour de son axe  $x_s$ .

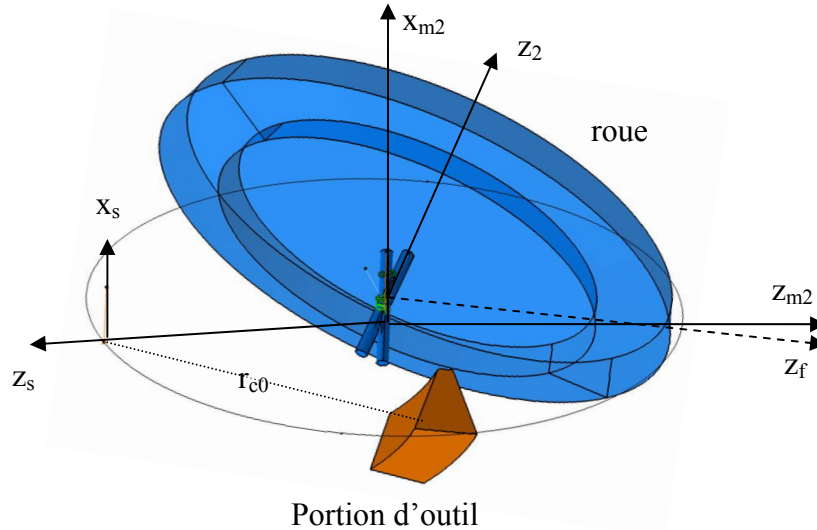


Figure 2.5 : Repères liés aux différents éléments, lors du taillage

Les différents repères sont définis comme suit :

- $R_{m2}(x_{m2}, y_{m2}, z_{m2})$  : lié à la machine,  $x_{m2}$  étant l'axe de rotation du berceau,
- $R_f(x_f, y_f, z_f)$  : lié à la machine,  $z_f$  étant orienté suivant la génératrice primitive de la roue,
- $R_s(x_s, y_s, z_s)$  : lié à la fraise,  $x_s$  étant l'axe de la fraise,
- $R_2(x_2, y_2, z_2)$  : lié à la roue,  $z_2$  étant l'axe de la roue.

Les différentes grandeurs caractérisant la position de la roue sur la machine de taillage sont précisées sur la Figure 2.6.

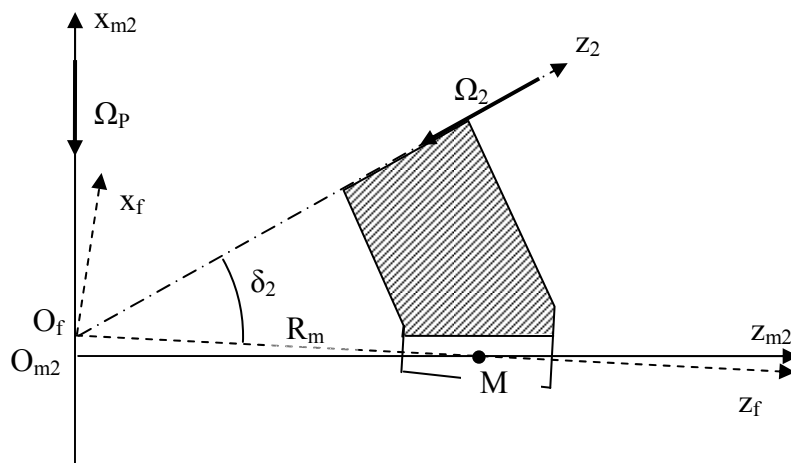


Figure 2.6 : Position de la roue par rapport au repère machine

Sur cette figure, le point M correspond au point milieu des flancs de denture, sur le primitif. La roue est positionnée de telle manière que le sommet de son cône primitif soit sur l'axe  $x_{m2}$ . De plus, le point M appartient à l'axe  $z_{m2}$ , et la ligne de fond de dent est parallèle à  $z_{m2}$ . La rotation  $\Omega_P$  pilote l'angle  $\varphi_P$  (déplacement de l'outil, défini sur la Figure 2.7) tandis que la rotation  $\Omega_2$  pilote la rotation  $\varphi_2$  (déplacement de la roue). Au cours du taillage, on vérifie la relation suivante :  $\Omega_P = m_{p2} \cdot \Omega_2$ .

Les grandeurs caractérisant la position de l'outil sur la machine de taillage sont présentées sur la Figure 2.7.



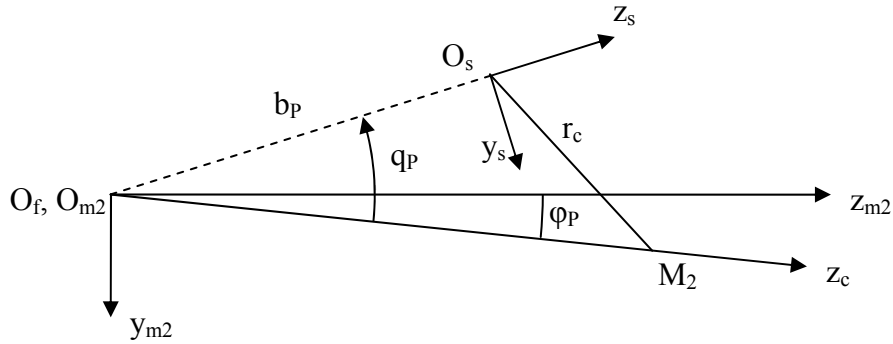


Figure 2.7 : Position de l'outil taillant la roue, dans le repère machine

Ici, le point  $M_2$  correspond à un point de référence sur l'outil se situant à une distance  $r_c$  de son axe de rotation  $x_s$ . Les paramètres  $b_p$  et  $q_p$  sont deux données qui permettent de définir la position de l'outil par rapport au repère machine  $R_{m2}$ . En position initiale, il y a taillage du point milieu et les points  $M$  et  $M_2$  sont confondus :  $\varphi_p(t=0) = 0$  et  $\varphi_2(t=0)=0$ . Le paramètre  $q_p$  sera considéré différent entre le flanc concave et le flanc convexe d'une même denture (pour traduire l'épaisseur qui sépare les points  $M$  de chaque flanc).

Les hypothèses simplificatrices par rapport au modèle UMC sont les suivantes :

- Les deux flancs sont taillés au cours du même mouvement (cas de la roue),
- L'axe  $x_s$  de l'outil reste parallèle à l'axe  $x_{m2}$  de la machine,
- Le rapport  $m_{p2}$  est constant (pas de « Modified Roll Motion »),
- Le point  $O_f$  se trouve sur l'axe  $x_{m2}$  (pas de décalage radial ou axial).

**Remarque : Cas particulier pour le pignon**

Le taillage d'une face du pignon reste relativement proche du taillage d'une face de la roue. Les repères utilisés sont décrits sur la Figure 2.8 et la Figure 2.9. La différence principale est l'existence de deux réglages supplémentaires :  $\Delta E$  et  $\Delta L$ . Ces deux paramètres, qui caractérisent un offset radial et axial de la position du pignon par rapport à la machine de taillage, sont calculés par la méthode du « Local Synthesis » détaillé par Litvin [93], et qui permettent de définir un engrènement conjugué au point milieu de la denture (point de référence  $N$  sur la Figure 2.8).

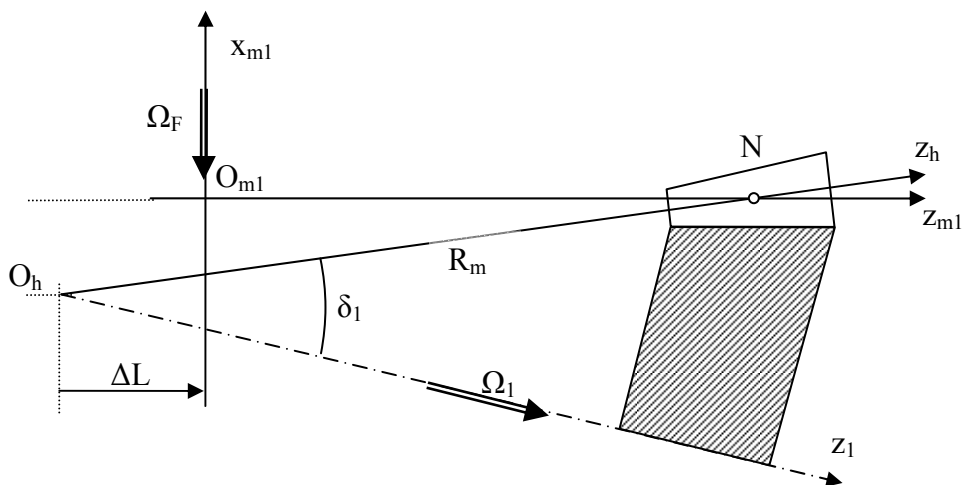
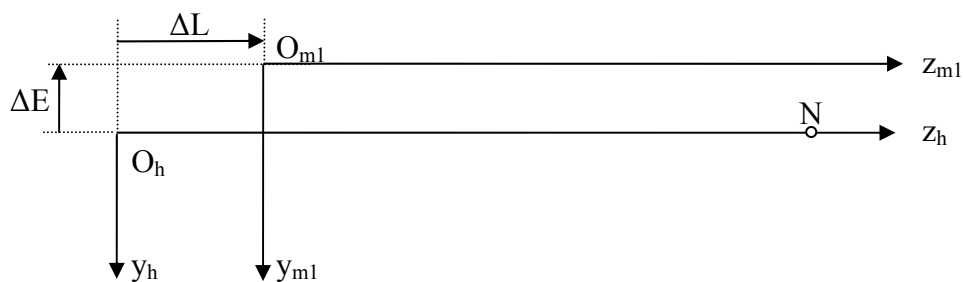


Figure 2.8 : Position du pignon par rapport au repère machine


 Figure 2.9 : Définition des deux paramètres  $\Delta E$  et  $\Delta L$ 

Les différents repères mis en place pour le taillage du pignon peuvent être mis en parallèle avec ceux définis pour le taillage de la roue, comme indiqué dans le Tableau 2.1.

Repères et paramètres pour le taillage du pignon	Repères et paramètres pour le taillage de la roue
Repère $R_h$	Repère $R_f$
Repère $R_{m1}$	Repère $R_{m2}$
Repère $R_1$	Repère $R_2$
Point N	Point M
Angle $\varphi_F$	Angle $\varphi_P$
Angle $\Omega_1$	Angle $\Omega_2$
Angle $\Omega_F$	Angle $\Omega_P$

Tableau 2.1 : Correspondance entre les paramètres du taillage du pignon et ceux de la roue

### 2.1.3 Calcul de l'enveloppe

A partir des différents mouvements de la machine de taillage, il est possible d'obtenir les profils de denture par la méthode des enveloppes. L'équation d'une enveloppe est généralement obtenue mathématiquement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_e} = \overrightarrow{OM_e}(\alpha, \beta, \gamma) \\ f_e(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

Où l'on a :

- $M_e$  : un point de l'enveloppe,
- $\alpha$  et  $\beta$  : deux paramètres décrivant la position du point sur l'outil dont on recherche l'enveloppe,
- $\gamma$  : un paramètre de position de l'outil,
- $f_e$  : l'équation de l'enveloppe liant ces paramètres et obtenue de part la considération suivante :

$$\overrightarrow{V_m^o} \cdot \overrightarrow{n_o} = \overrightarrow{V_m^e} \cdot \overrightarrow{n_o}$$

où :

- $\overrightarrow{V}$  : vecteur vitesse en un point,
- $\overrightarrow{n}$  : la normale en ce même point,
- e : repère lié à l'enveloppe,
- m : repère lié à la machine,
- o : repère lié à l'outil.

Ces différentes vitesses et normales peuvent être obtenues assez facilement, à partir des mouvements de la machine de taillage. Il sera cependant nécessaire de dissocier les deux parties de l'outil (partie conique et partie torique), ce qui nous mène à la définition de deux équations d'enveloppes.

### 2.1.3.1 Partie conique

Les flancs actifs de dentures sont taillés par la partie conique de l'outil. Le cône est défini par les deux paramètres :

- $r_{CP}$  : distance du point de référence du cône par rapport à son axe,
- $\alpha_P$  : angle du cône, qui définira l'angle de pression du flanc de denture.

Tout point P de ce cône est défini par deux paramètres supplémentaires :

- $u_P$  : distance du point par rapport au sommet du cône,
- $\theta_P$  : angle caractérisant la position du point par rapport à l'axe  $z_s$ .

Tous ces paramètres sont représentés sur la Figure 2.10.

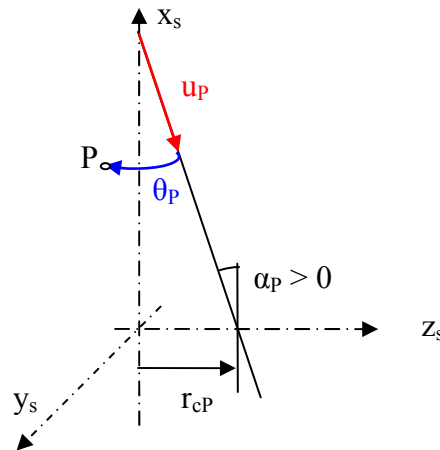


Figure 2.10 : Géométrie du cône de l'outil

Dans notre cas, la définition de l'enveloppe pour la partie conique de l'outil sera la suivante :

$$f_e(u_P, \theta_P, \varphi_P) = \left\{ -u_P + \left[ r_{CP} \cdot \cot \alpha_P - R_m \cdot \sin \theta_{f2} \right] \cos \alpha_P \right\} \sin(\theta_P - q_P + \varphi_P) + b_P \left[ \sin \alpha_P \cdot \sin(q_P - \varphi_P) + \cos \alpha_P \cdot \sin \theta_P \frac{m_{P2} - \sin(\delta_2 - \theta_{f2})}{\cos(\delta_2 - \theta_{f2})} \right] = 0$$

Cette formule est obtenue conformément aux calculs menés par Litvin [93]. On trouve dans son ouvrage l'ensemble de la théorie permettant de parvenir à ce résultat.

### 2.1.3.2 Partie torique

Le schéma de la Figure 2.11 présente les paramètres permettant de caractériser un point de la surface du tore. Afin de définir un tore, trois paramètres sont nécessaires :

- $dz$  : rayon du cercle principal du tore,
- $R$  : rayon du petit cercle générant le profil du tore,
- $dx$  : position du tore dans le repère de l'outil, selon l'axe  $x_s$ .

Deux paramètres supplémentaires sont nécessaires pour définir un point P sur le tore :

- $\gamma_t$  : angle définissant la position du point sur le petit cercle, par rapport à  $z_s$ ,
- $\theta_t$  : angle définissant la position du point sur le grand cercle, par rapport à  $z_s$ .

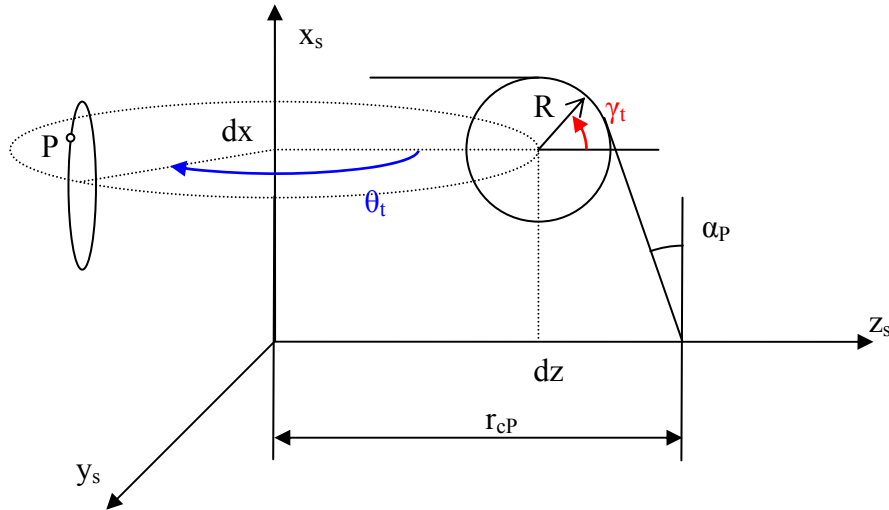


Figure 2.11 : Géométrie du tore de l'outil

Dans ce cas, en utilisant la même procédure que pour le cône mais appliquée à la partie torique, on arrive à :

$$f_e(\gamma_t, \theta_t, \varphi_p) = \left[ \begin{array}{l} \cos \gamma_t \cdot \left( (R_m \cdot \sin \theta_{f2} - dx) \cdot \cos(\delta_2 - \theta_{f2}) \cdot \sin \tau_p + b_p \cdot \sin(\theta_t) (\sin(\delta_2 - \theta_{f2}) - m_{p2}) \right) \\ + \sin \gamma_t \cdot \left( (-b_p \cdot \sin(q_p - \varphi_p) + dz \cdot \sin \tau_p) \cos(\delta_2 - \theta_{f2}) \right) \end{array} \right] = 0$$

avec :

- $\tau_p = \theta_t - q_p - \varphi_p$ ,
- $R_m$  : rayon de la génératrice primitive de la roue,
- $\delta_2$  : demi angle au sommet du cône primitif de la roue,
- $\theta_{f2}$  : angle du cône de tête de la roue.

### 2.1.4 Définition du point dans un repère sphérique

Les définitions des enveloppes sont maintenant obtenues pour les deux parties de l'outil. Cependant, celles-ci ne peuvent pas être utilisées directement pour obtenir de façon pratique les coordonnées d'un point sur un flanc de denture, puisqu'elles dépendent principalement de la position d'un point sur l'outil, et non sur la denture.

Le but de cette partie est donc de passer d'une définition de type :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_e} = \overrightarrow{OM_e}(\alpha, \beta, \gamma) \\ f_e(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

où les paramètres définissent une position sur l'outil, à une définition utilisant des paramètres sphériques d'un point sur la denture, dans un repère lié à la roue :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_e} = \overrightarrow{OM_e}(\rho_2, \gamma_2, \theta_2) \\ \theta_2 = \theta_2(\rho_2, \gamma_2) \end{cases}$$

Le schéma de la Figure 2.12 précise la définition de la denture souhaitée, dans le repère de la roue.

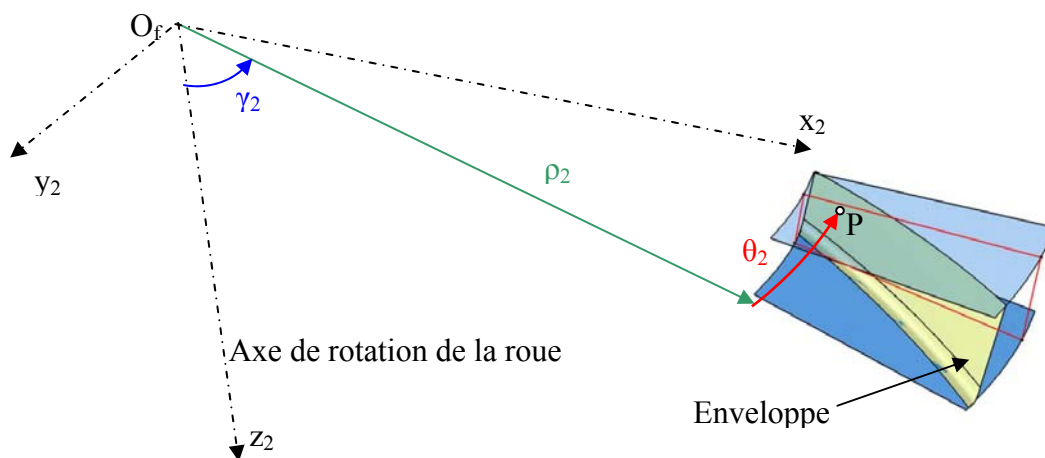


Figure 2.12 : Paramètres pour définir un point sur la denture

Il n'existe pas de formule analytique simple pour exprimer  $\theta_2$  en fonction de  $\rho_2$  et  $\gamma_2$  (qui seront les deux paramètres permettant de balayer l'ensemble de la surface). Il convient donc d'utiliser un schéma numérique convergeant vers la solution souhaitée.

La solution  $\theta_2$  est recherchée en faisant varier  $\varphi_p$ , l'angle de position de l'outil. La distance entre les deux points suivants est alors étudiée :

- le point  $P_m$  (Figure 2.13) : intersection de l'outil avec le cercle  $C_2$  (solutions vérifiant que  $\rho_2$  et  $\gamma_2$  sont les valeurs fixées),
- le point  $P_e$  (Figure 2.14) ayant le même angle  $\theta_p$  (ou  $\theta_t$  pour le tore) que  $P_m$  et se trouvant sur l'enveloppe (condition  $f_e = 0$  vérifiée).

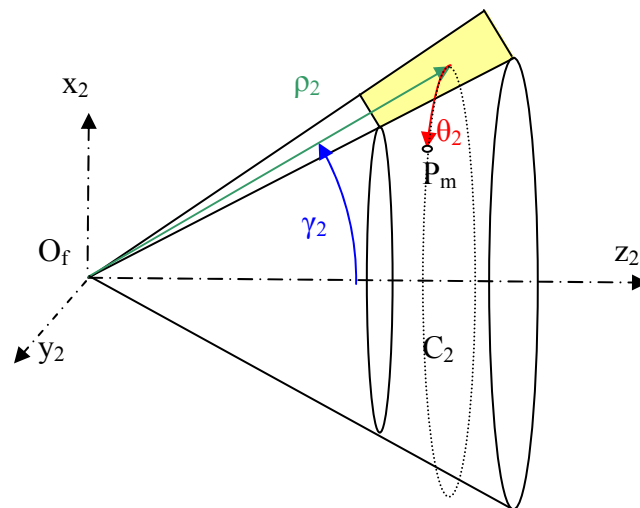


Figure 2.13 : Détermination du point  $P_m$  sur le cercle solution

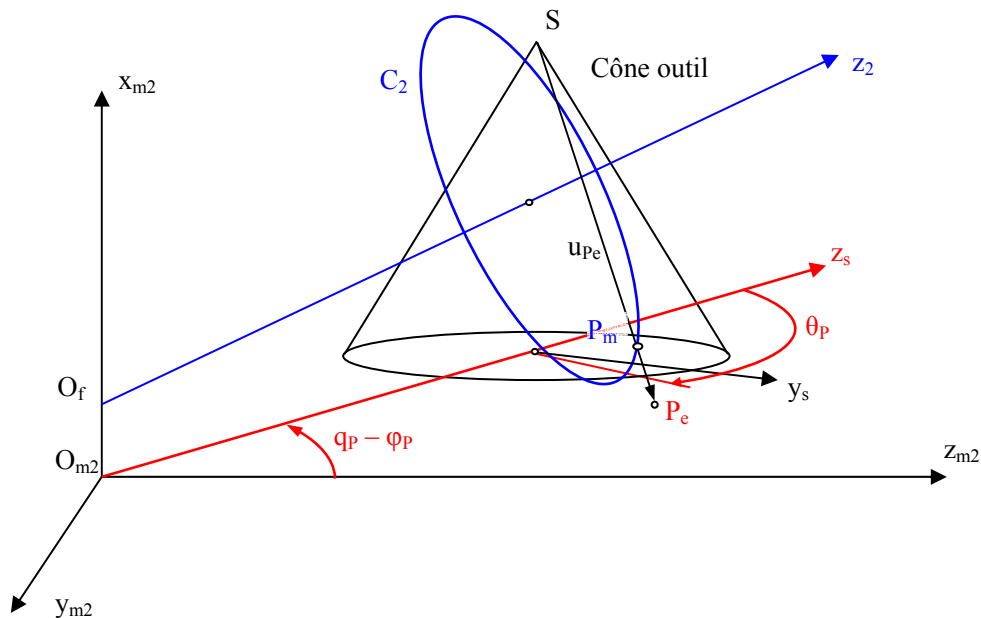


Figure 2.14 : Détermination du point  $P_e$  sur le cône

Afin de converger vers la valeur correcte de  $\varphi_P$ , un schéma de Lagrange est utilisé, cherchant à annuler la distance  $P_m P_e$ . Le schéma de Lagrange est complété avec une méthode par dichotomie, dans le cas où le point  $P_m$  n'existe pas à un  $\varphi_P$  donné.

## 2.2 Engrenages analytiques

L'engrenage spiro-conique a de nombreux avantages : il est relativement silencieux, il supporte de fortes charges et comporte un renvoi d'angle, ... Il souffre cependant d'un certain nombre de défauts.

Tout d'abord, une mise en position très précise est nécessaire pour fonctionner correctement. En effet, ce type d'engrenage manifeste une grande sensibilité aux moindres erreurs de positionnement des axes du pignon et de la roue lors du montage. Les perturbations ainsi occasionnées ayant une incidence directe sur la localisation de la zone de contact.

Ensuite, les flancs de dentures des engrenages spiro-coniques standards ne sont pas conjugués, excepté au point central de la denture (voir définition §2.2.2.1 de ce chapitre). Combiné à cela, l'angle de la spirale n'est pas constant, la direction des efforts principaux lors de l'engrènement est donc variable, ce qui favorise l'apparition de vibrations.

Enfin, le défaut principal de ces engrenages est qu'ils sont très difficiles à concevoir et à optimiser. Leur fabrication est complexe, puisqu'elle est liée à trois constructeurs principaux, et dépend de nombreux paramètres de machine. De plus, quelles valeurs donner aux nombreux paramètres pour avoir un engrènement sous charge correct ? Il est très difficile de répondre à cette question, étant donné la difficulté d'obtenir une formulation analytique des engrenages spiro-coniques standards.

### 2.2.1 Contraintes de conception

L'objectif de nos travaux est de définir un nouveau profil de denture d'engrenage spiro-conique qui répond à un double besoin :

- d'une part, celui de corriger les défauts présentés précédemment,
- d'autre part, celui de parvenir à une vulgarisation de la fabrication de ce type d'engrenage encore très exclusif, en le rendant concevable à partir d'un matériel plus classique et conventionnel, comme par exemple des fraiseuses numériques 5-axes. Ces machines permettent de faire abstraction des fabricants actuels, et, lorsqu'elles ne sont pas en activité pour usiner des engrenages spiro-coniques, peuvent être utilisées pour fabriquer d'autres types de pièces.

Afin de corriger les défauts des engrenages spiro-coniques présentés précédemment, les contraintes suivantes sont imposées à la nouvelle géométrie :

- 1 – Les profils sont conjugués sur l'ensemble des flancs de denture,
- 2 – L'angle de spirale est constant suivant la largeur de denture,
- 3 – La hauteur de denture pourra être constante ou variable.

Dans l'optique de faciliter l'optimisation, et afin de s'affranchir des moyens de fabrications classiques de ce type d'engrenage, des développements de profils totalement théoriques et analytiques sont réalisés.

### 2.2.2 Définitions géométriques

#### 2.2.2.1 Profils conjugués

La première contrainte imposée concerne la notion de profils conjugués, qui est essentielle dans l'étude des engrenages. Deux profils sont dits conjugués lorsqu'ils restent tangents dans leur zone de contact, que ce contact se réalise sur une courbe (et non un point), et que l'erreur de transmission suive une fonction prédéterminée. Généralement, l'erreur de transmission est prédéfinie comme étant nulle. Cette propriété, pour un engrenage, est synonyme d'une transmission optimale de la puissance. La recherche d'une géométrie possédant cette caractéristique emmène à s'intéresser à un type de surface pouvant être utilisée pour les engrenages spiro-coniques : la développante de sphère.

Une telle surface peut être obtenue par la méthode des roulettes, dont le principe de construction est le suivant (cf. Figure 2.15) :

Un cône de sommet  $S$  et d'axe  $(S, X)$ , correspondant au cône primitif du pignon (ou de la roue), roule sans glisser sur le plan  $P'$ . L'intersection du cône et du plan avec une sphère centrée en  $S$  sont respectivement le petit cercle ( $C_b$ ) appelé cercle de base, et le grand cercle ( $P'$ ). Ces deux cercles roulent sans glisser l'un sur l'autre en  $T$ . Le plan  $N'$ , passant par  $S$  et perpendiculaire à  $P'$  est invariablement lié à ce dernier. L'intersection de  $N'$  et  $P'$  est la droite ( $SM$ ).

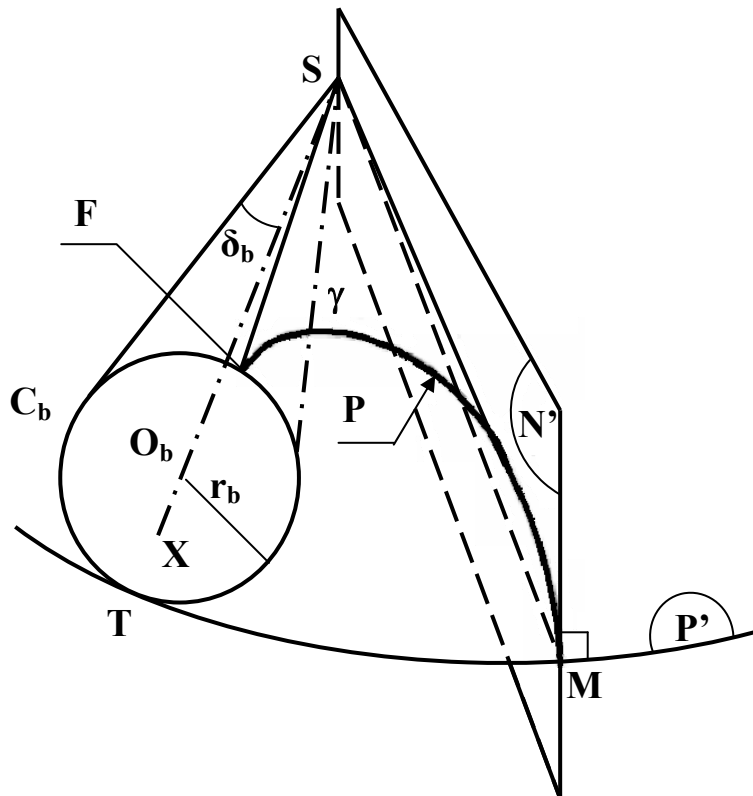


Figure 2.15 : Génération de la surface en développante de sphère [31]

Lors du mouvement du plan  $P'$  roulant sans glisser sur le cône de base  $(S, C_b)$ , l'enveloppe des positions du plan  $N'$  dans son mouvement par rapport au cône de base est une surface conique  $\gamma$ . Le plan  $P'$  étant normal au plan générateur  $N'$  suivant  $(SM)$ , il l'est également à la surface enveloppe  $\gamma$ . Celle-ci est balayée par la droite  $(SM)$  du plan  $P'$  lorsque celui-ci roule sans glisser sur le cône. L'un des profils directeurs de cette surface est la courbe  $P$ , intersection de la sphère de centre  $S$  avec  $\gamma$ .

$P$  peut également être vue comme la courbe décrite par le point  $M$  lorsque l'arc du grand cercle  $\widehat{TM}$  roule sans glisser sur  $C_b$ . Cette courbe, tracée sur la sphère de centre  $S$ , est similaire à la développante de cercle plane : il s'agit d'une développante de sphère du cercle  $C_b$ . Elle a les mêmes propriétés que les développantes de cercle :

- l'arc  $\widehat{TM}$  est normal en  $M$  au profil  $P$ ,
- le point  $F$  étant le point où  $P$  rencontre  $C_b$ , nous avons à chaque instant la relation  $\widehat{TM} = \widehat{TF}$ ,
- la développante de sphère décrite par un autre point  $M^*$  de la droite  $(SM)$  est une courbe homothétique de  $P$  dans le rapport des distances  $SM^*$  et  $SM$ .



Les surfaces en développante de sphère présentent les avantages suivants pour l'engrenage :

- les surfaces restent conjuguées si l'angle entre les axes de rotation varie,
- les vecteurs normaux aux surfaces aux points de contact sont toujours contenus dans le même plan  $P'$ ,
- une définition analytique existe pour la surface en développante sphérique  $\gamma$ .

A partir des coordonnées paramétriques  $u$  et  $v$  d'un point  $M$  de la développante sphérique (cf. Figure 2.16), il est possible d'obtenir ses coordonnées cartésiennes  $X, Y, Z$  dans le repère lié à la roue :

$$\begin{cases} X = vb \cos(au) \\ Y = v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au)) \\ Z = v(a \sin u \cos(au) - \cos u \sin(au)) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} a = \sin(\delta_b) \\ b = \cos(\delta_b) \end{cases}$$

où  $\delta_b$  est le demi angle au sommet du cône de base.

Les calculs ayant permis d'arriver à ce résultat sont présentés dans l'Annexe 1.

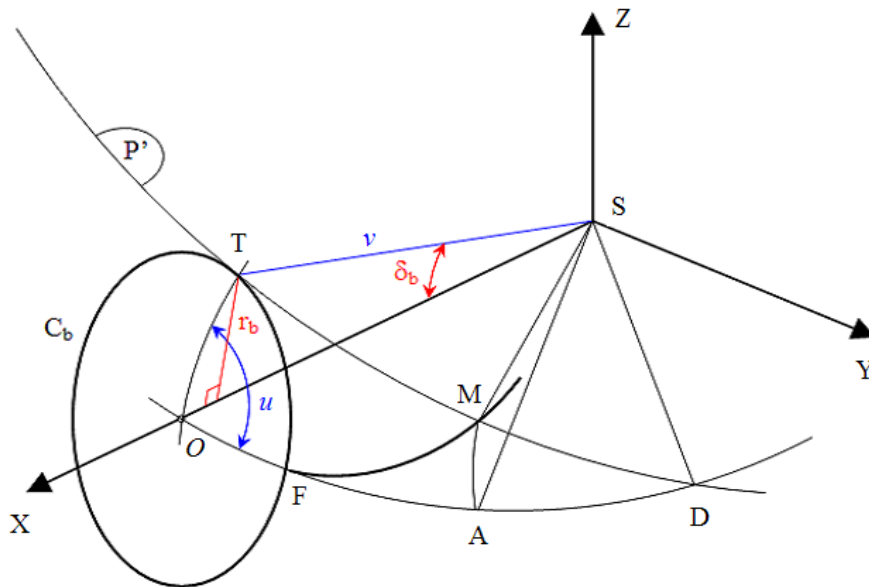


Figure 2.16 : Paramétrage géométrique

A partir de ces coordonnées, un profil de denture analytique est établi, et permet d'obtenir les profils de denture en développante sphérique droite en tout point (Figure 2.17).

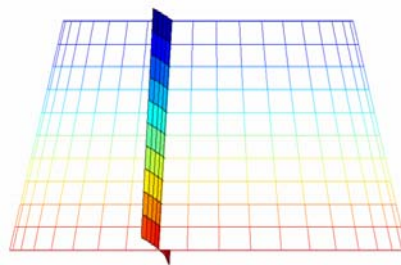


Figure 2.17 : Développante sphérique

### 2.2.2.2 Spirale

La deuxième contrainte est relative à l'angle de spirale. Il est défini comme l'angle que fait la courbe directrice d'une dent avec une génératrice du corps de la roue dentée. Fixer cet angle à une valeur constante apparaît comme un moyen d'assurer un engrenement uniforme [28], puisque les efforts sont globalement toujours dirigés dans la même direction. Les vibrations générées lors de l'engrenement des engrenages spiro-coniques seront réduites, et par conséquent le bruit émis par le réducteur.

Afin d'atteindre cet objectif, l'analyse des caractéristiques mathématiques de différents types de spirale est nécessaire. Il en existe en effet plusieurs sortes, telles que la spirale d'Archimède, la spirale hyperbolique, la spirale logarithmique, la spirale de Galilée, et encore beaucoup d'autres.

Chacune d'elle étant représentée par une fonction de la forme  $\varphi=f(\theta)$ . Ces deux paramètres présentés sur la Figure 2.18 sont définis comme suit :

- $\varphi$  : rayon, égal à la distance entre le point central et le point d'étude de la spirale,
- $\theta$  : angle polaire au point de la spirale.

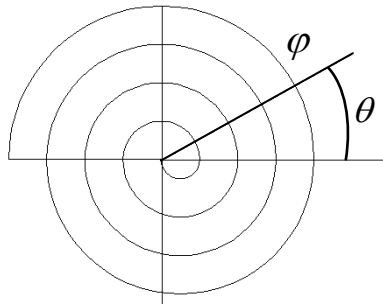


Figure 2.18 : Géométrie générique des spirales

Parmi l'ensemble de ces spirales, la spirale logarithmique a été retenue. Elle possède un angle constant entre le rayon et la tangente en chaque point de la spirale (Figure 2.19). Une spécificité intéressante qui reflète en 2D une propriété recherchée en 3D, et qui correspond à la deuxième contrainte imposée décrite au §2.2.1.

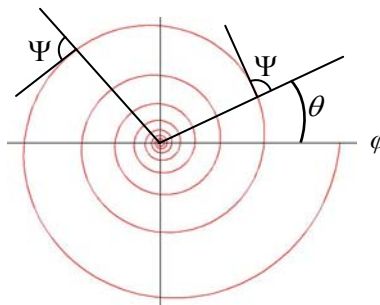


Figure 2.19 : Spirale logarithmique 2D

Huston [28] définit la spirale logarithmique par la relation  $\varphi = \alpha \cdot e^{\theta \cdot \cot \Psi}$ , avec :

- $\Psi$  : angle constant entre le rayon et la tangente en tout point de la spirale,
- $\theta$  : angle polaire aux points de la spirale,
- $\alpha$  : facteur de calage, qui permet d'appliquer une rotation globale de la spirale.

La position angulaire du point de départ de la spirale peut donc être choisie. Les configurations de la spirale pour deux facteurs de calage différents sont montrées sur la Figure 2.20.

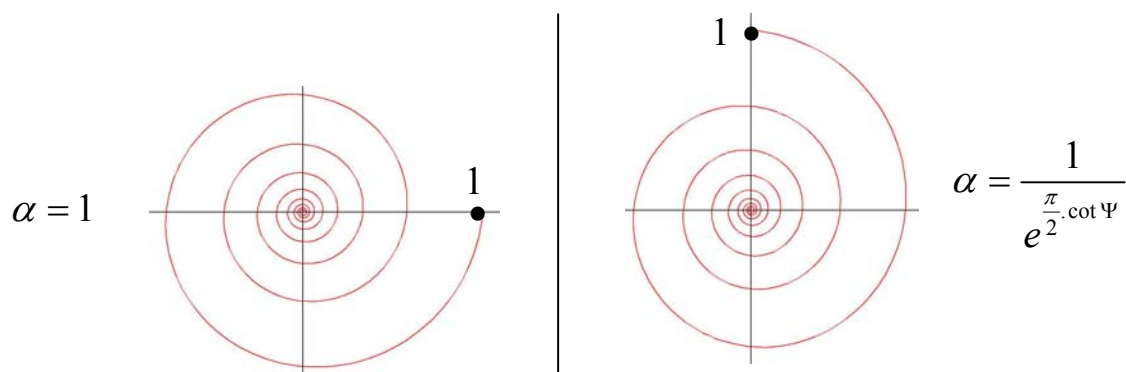


Figure 2.20 : Influence du paramètre  $\alpha$  sur la spirale

Les équations régissant cette spirale étant définies dans le plan, il est nécessaire de procéder à la projection de cette courbe sur le cône primitif de la roue. La courbe résultant de cette transformation sera alors une spirale conique (Figure 2.21).

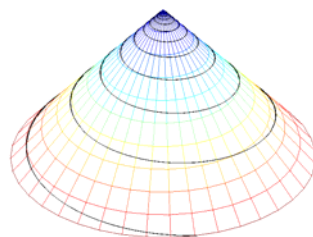


Figure 2.21 : Spirale logarithmique sur un cône

Une fois projetée, la nouvelle courbe est régie par :  $\varphi = \frac{\alpha}{\sin \delta} e^{\theta \cot \Psi \sin \delta}$ , où un paramètre supplémentaire apparaît,  $\delta$ , qui correspond au demi angle au sommet du cône primitif.

Le profil de denture recherché est défini en combinant les équations de la spirale logarithmique et celles de la développante sphérique, pour obtenir une développante de sphère à spirale logarithmique, comme présenté sur la Figure 2.22.

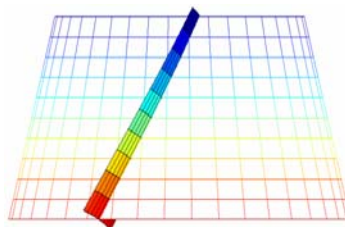


Figure 2.22 : Développante sphérique à spirale logarithmique

### 2.2.2.3 Hauteur de denture

La définition d'un engrenage analytique n'étant pas dépendante des moyens de fabrication, les dentures peuvent être définies soit à hauteur variable (Figure 2.23\_a), soit à hauteur constante (Figure 2.23\_b).

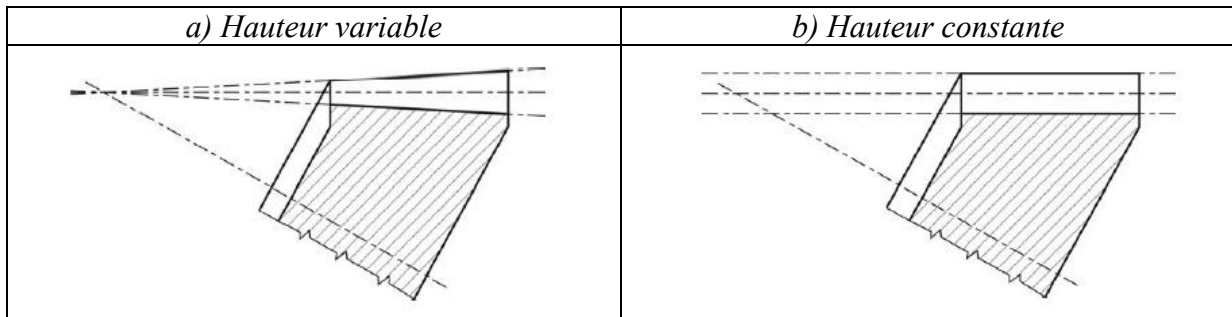


Figure 2.23 : Différents types de hauteur de denture [2]

Dans le modèle numérique développé, il suffit d'appliquer une valeur nulle aux angles de tête et de pied, pour définir une hauteur de denture constante. Une étude a été réalisée en comparant deux engrenages présentant les mêmes caractéristiques. La seule différence concerne la hauteur de denture.

Les résultats de cette comparaison sont présentés en fin de chapitre, après que toutes les grandeurs analysées aient été définies. Pour le cas traité, l'utilisation d'une denture à hauteur constante est avantageuse par rapport à la hauteur variable.

### 2.2.2.4 Corrections de denture

L'ensemble des conditions définies au paragraphe 2.2.1 a été appliqué. Les flancs de dentures ne peuvent cependant pas être utilisés tels quel. En effet, l'une des particularités obtenue avec l'utilisation de la développante sphérique est que le contact existant entre le pignon et la roue s'étale sur toute la largeur de denture. De plus, aucun défaut de montage ne peut être toléré, les contacts pouvant dans ce cas être concentrés en tête ou en bord de dent et dégrader très vite la denture en fonctionnement.

Afin d'éviter ces problèmes, des corrections de dentures similaires à celles utilisées pour les engrenages cylindriques peuvent alors être appliquées. Des corrections de profils sont utilisées pour réduire les contacts en tête de denture, ainsi que des corrections de bombés pour éviter les contacts sur les bords. Les deux types de corrections sont présentés sur la Figure 2.24.

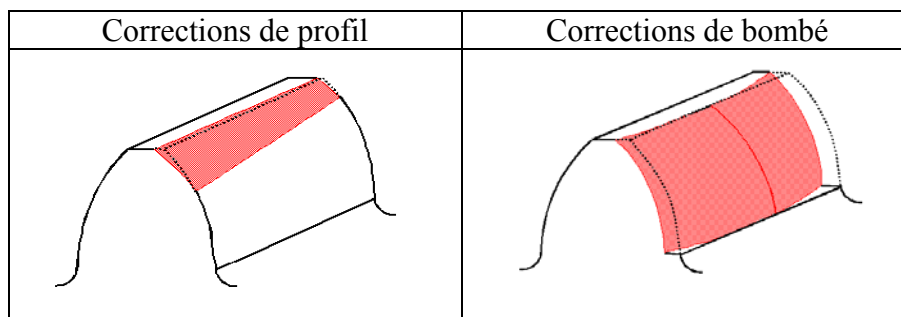


Figure 2.24 : Types de corrections utilisés

L'application des corrections de denture va légèrement modifier les flancs de denture, tout en conservant les propriétés recherchées :

- Dans le cas de la correction de profil, le but est clairement d'éviter complètement les contacts en tête. Cette modification n'a donc pas d'influence sur les zones qui restent en contact sur les flancs.
- Concernant l'intégration du bombé, la forme de la spirale est légèrement modifiée, mais celle-ci n'a pas d'influence sur la conjugaison des profils. En effet, le profil est simplement décalé par une rotation autour de l'axe de la roue (ou du pignon). Pour une section donnée, le profil reste donc identique. Il y aura toujours deux profils en développante en contact, la propriété de conjugaison des profils est donc conservée.

La forme des corrections peut être de deux types (cf. Figure 2.25) :

- Linéaire : la déformation du profil par rapport au profil initial évolue de façon linéaire par rapport à la projection de la dent dans un plan radial,
- Parabolique : la déformation du profil évolue dans ce cas de façon parabolique.

Le plan radial est le plan passant par l'axe de rotation et par le point milieu (sur le cône primitif) du flanc de référence. Une représentation de ce plan est présentée sur la Figure 2.26.

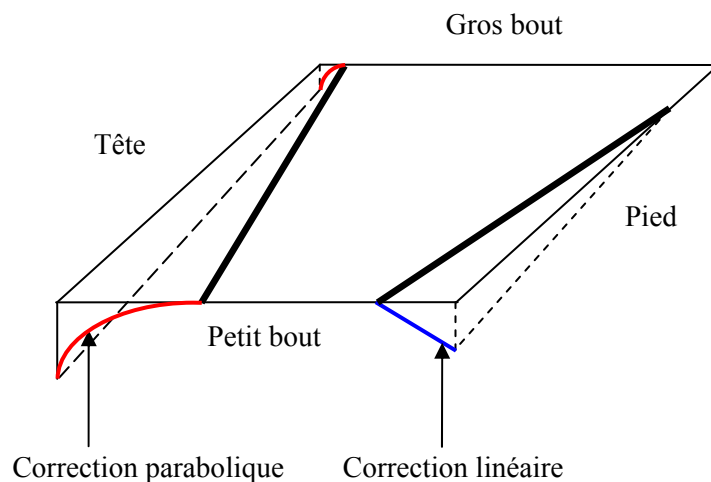


Figure 2.25 : Description des deux types de forme de correction dans le plan radial

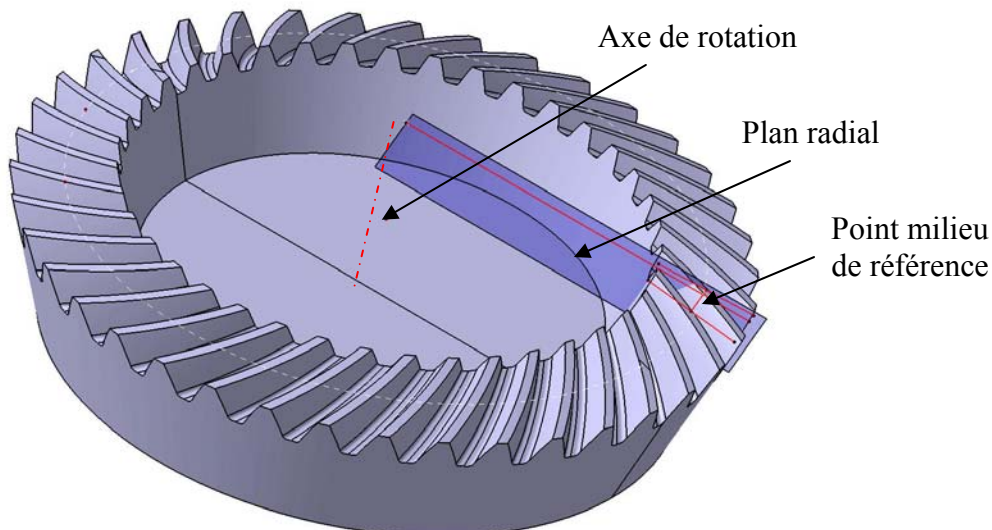


Figure 2.26 : Présentation du plan de projection

L'application de la correction se fait par simple rotation d'angle  $d\theta$  du profil initial autour de l'axe de rotation de l'élément à corriger (pignon ou roue).  $r_{point}$  correspond à la distance entre le point à corriger et l'axe de rotation de la pièce corrigée, comme présenté sur la Figure 2.27.

Les corrections étant faibles, l'approximation est faite que la valeur de la correction à appliquer correspond à la longueur de l'arc de cercle  $\widehat{P_i P_c}$ . Ainsi, la rotation  $d\theta$  est simplement définie par  $d\theta = \frac{correction}{r_{point}}$ .

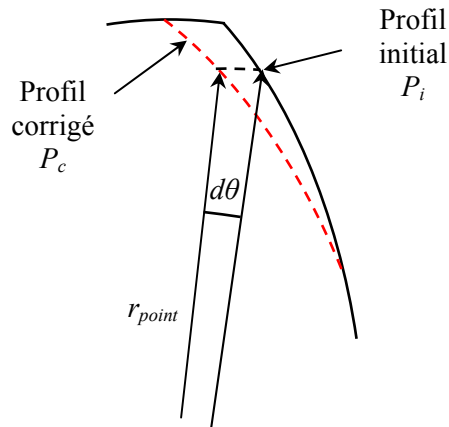


Figure 2.27 : Principe d'application de la correction

De nombreux paramètres de corrections de denture peuvent être appliqués. Il existe trois types de corrections de dentures, avec plusieurs paramètres pour chaque cas :

- La correction de bombé sur le pignon (Figure 2.28)
  - Position du bombé par rapport au gros bout : lcb,
  - Profondeur de la correction côté petit bout : cbp,
  - Profondeur de la correction côté gros bout : cbg.

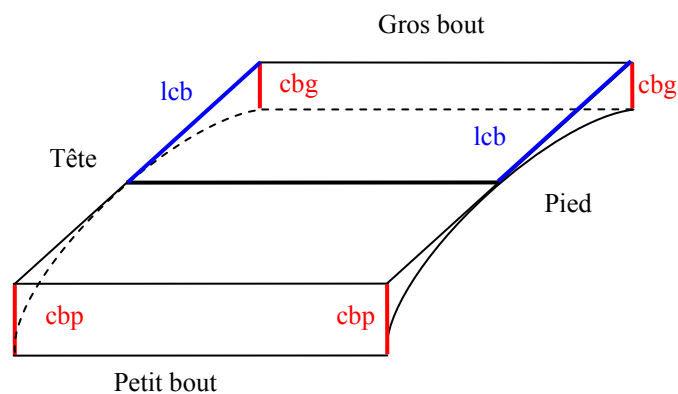


Figure 2.28 : Correction de bombé sur le pignon

- La correction de profil sur le pignon (Figure 2.29 à Figure 2.31, indices 1)
  - Hauteur de la correction côté petit bout :  $hc_{pp1}$ ,
  - Profondeur de la correction côté petit bout :  $cp_{p1}$ ,
  - Position du début de la correction côté petit bout :  $lc_{pp1}$ ,
  - Hauteur de la correction de profil côté gros bout :  $hc_{pg1}$ ,
  - Profondeur de la correction côté gros bout :  $cp_{g1}$ ,
  - Position du début de la correction côté gros bout :  $lc_{pg1}$ .
  
- La correction de profil sur la roue (Figure 2.29 à Figure 2.31, indices 2)
  - Hauteur de la correction côté petit bout :  $hc_{pp2}$ ,
  - Profondeur de la correction côté petit bout :  $cp_{p2}$ ,
  - Position du début de la correction côté petit bout :  $lc_{pp2}$ ,
  - Hauteur de la correction de profil côté gros bout :  $hc_{pg2}$ ,
  - Profondeur de la correction côté gros bout :  $cp_{g2}$ ,
  - Position du début de la correction côté gros bout :  $lc_{pg2}$ .

Dans le cas des corrections de profil, trois configurations peuvent être considérées :

- correction de profil sur toute la largeur de denture : dans ce cas là, les paramètres  $lc_{pp1}$  (ou  $lc_{pp2}$ ) et  $lc_{pg1}$  (ou  $lc_{pg2}$ ) doivent tous être définis nuls (Figure 2.29),
- correction de profil sur le petit bout seulement : dans ce cas là, les paramètres  $hc_{pg1}$  (ou  $hc_{pg2}$ ) et  $cp_{g1}$  (ou  $cp_{g2}$ ) doivent tous être définis nuls (Figure 2.30),
- Correction de profil sur le gros bout seulement : dans ce cas là, les paramètres  $hc_{pp1}$  (ou  $hc_{pp2}$ ) et  $cp_{p1}$  (ou  $cp_{p2}$ ) doivent tous être définis nuls (Figure 2.31).

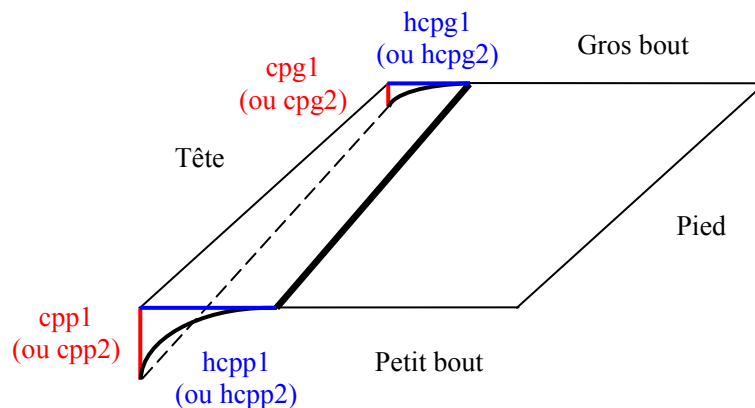


Figure 2.29 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur toute la largeur

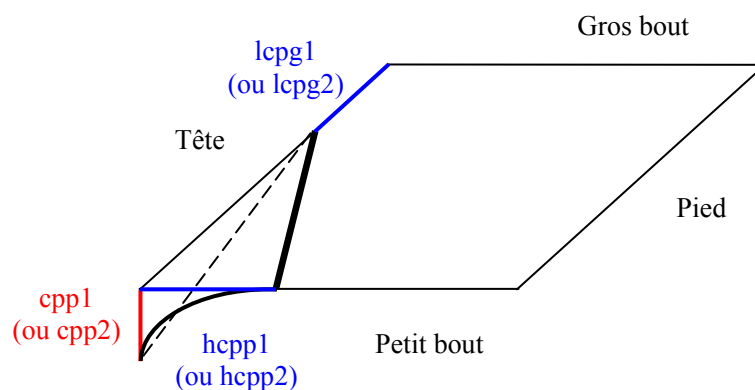


Figure 2.30 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur le petit bout seulement

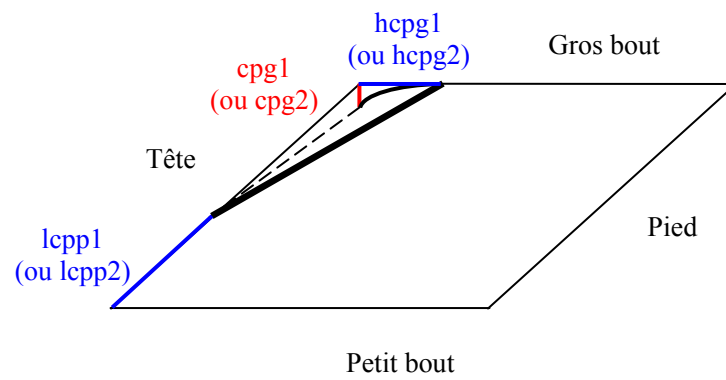


Figure 2.31 : Correction de profil sur le pignon (ou sur la roue) sur le gros bout seulement



### 3. Partage de charge

Les profils de denture étant maintenant définis, le calcul du partage de charge peut alors être réalisé. Comme montré dans le chapitre bibliographique, le partage de charge peut être réalisé de nombreuses façons. Cependant, il en est ressorti qu'une modélisation mixte par Eléments Finis combinée à la théorie de Boussinesq était la plus à même de répondre à nos attentes : pouvoir prendre en compte des géométries assez générale dans leur environnement (supports, arbres, voiles, ...), tout en ayant des temps de calculs raisonnables.

Cette modélisation est basée sur la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements, qui permettra d'obtenir le partage de charge, les pressions instantanées de contact, l'erreur de transmission sous charge ainsi que la raideur d'engrènement. L'équation de compatibilité prendra en compte à la fois les déformations globales de flexion et les déformations locales de contact, par la méthode des coefficients d'influence. Ces coefficients sont obtenus par une modélisation du comportement élastique et un modèle de contact.

Pour une modélisation optimale, les deux effets sont séparés (Icard [39], Jacquin [36]). L'effet de flexion des corps est calculé grâce à une modélisation Eléments Finis, et celui de surface est déterminée par une approche locale, basée sur une discrétisation de la zone de contact à travers les théories de Boussinesq [83].

Lors de l'engrènement à vide des engrenages spiro-coniques, plusieurs dents participent potentiellement au partage de charge. Cela implique qu'il est nécessaire de résoudre autant de fois le problème de contact entre deux corps qu'il y a de dents potentiellement dans le contact sous charge, en tenant compte du couplage entre les dents.

#### 3.1 Prérequis

##### 3.1.1 Hypothèses sur la zone de contact

Le pignon et la roue ayant les mêmes propriétés élastiques, ce sont des solides quasi-identiques en contact. De plus, le contact est lubrifié, il n'y a pas de couplage entre l'effort normal et les déplacements tangentiels et entre les efforts tangentiels et le déplacement normal. La zone de contact sous charge dépend uniquement de l'effort normal au contact (ou au plan tangent). La surface du contact potentiel est alors située dans un plan parallèle (position déformée sous charge) au plan tangent au point de contact à vide : l'aire de contact se situe dans le plan en position déformée, comme présenté sur la Figure 2.32. Dans le cas où une ligne de contact existe à vide (dans le cas de la denture analytique par exemple), le point de référence est le point situé au milieu de la ligne de contact.

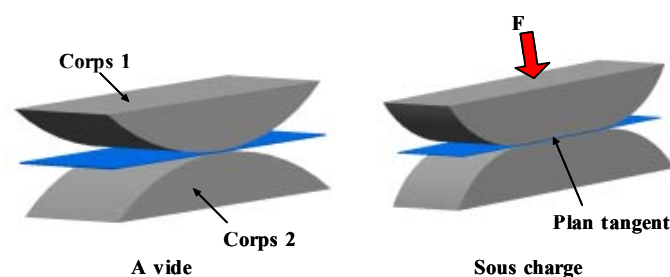


Figure 2.32 : Zone de contact à vide et sous charge

### 3.1.2 Description du problème

Le problème de la répartition des charges est avant tout un problème de contact entre deux corps. C'est un problème classique de mécanique des contacts. L'idée pour la résolution de ce problème est d'éviter l'interpénétration des deux corps en présence tout en respectant le principe de l'énergie potentielle minimum.

Le plan tangent où se situe l'aire de contact potentiel (cf. Figure 2.32) est discrétisée en  $N$  rectangles de taille constante. Sur chaque rectangle, la distribution de pression est considérée constante et uniforme. De plus, le maillage est dit « glissé », puisqu'il suit la ligne de contact potentielle (Figure 2.33).

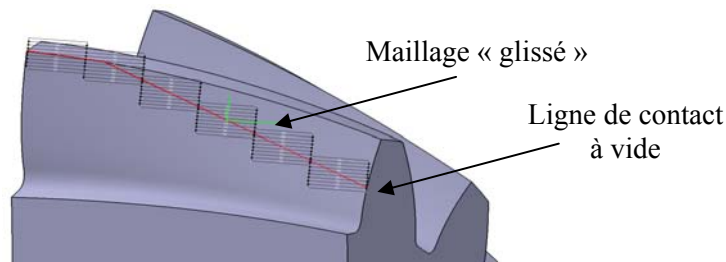


Figure 2.33 : Positionnement de la zone maillée

Sur la zone de contact potentiel ( $S$ ), la répartition des charges adéquate est recherchée de telle manière qu'elle satisfasse l'équation de compatibilité des déplacements (condition de non pénétration des corps) en tout point des deux corps solides :

$$\begin{cases} y_i^{ang} = U_{1i}^{ang} + U_{2i}^{ang} + ei_i^{ang} - \alpha^{ang} = 0 \\ p_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{dans la zone de contact } (S)$$

$$\begin{cases} y_i^{ang} = U_{1i}^{ang} + U_{2i}^{ang} + ei_i^{ang} - \alpha^{ang} \geq 0 \\ p_i = 0 \end{cases} \quad \text{hors de la zone de contact } (S)$$

où  $U_{1i}^{ang}$  et  $U_{2i}^{ang}$  sont les déplacements angulaires des corps 1 et 2 au point  $i$ ,  $ei_i^{ang}$  est l'écart initial au point  $i$ ,  $\alpha^{ang}$  le rapprochement global des surfaces en contact et  $p_i$  la pression au point  $i$ . Ces grandeurs, ainsi que l'écart final  $ef_i^{ang}$ , sont schématisées sur la Figure 2.34. L'ensemble des valeurs angulaires est défini par rapport à l'axe de rotation de la roue.

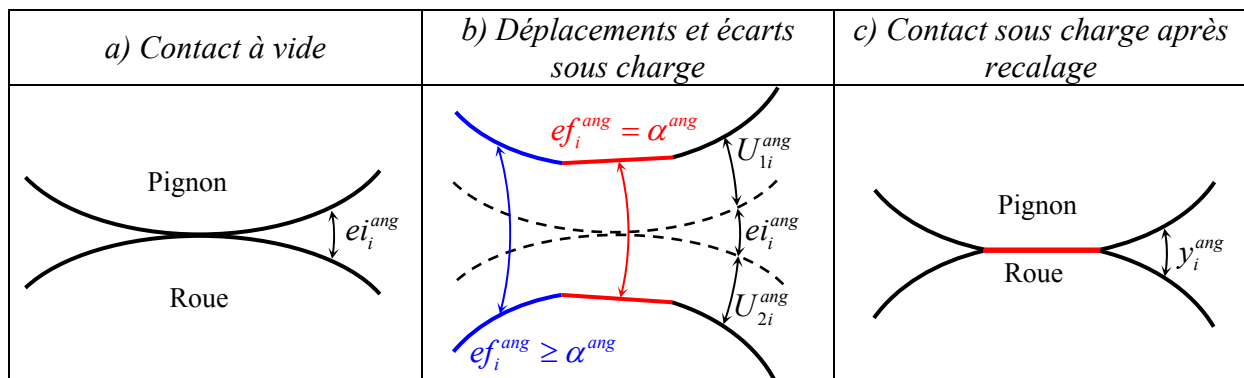


Figure 2.34 : Définition des écarts et déplacements

Les pressions calculées doivent également satisfaire :

$$\sum_{i=1}^N p_i S_i (R_i r_{proj,i}) = Couple$$

où  $N$  est le nombre de surfaces rectangulaires considérées,  $S_i$  est la petite surface rectangulaire autour du point  $i$ ,  $R_i$  le « bras de levier » de cet élément de surface, et  $r_{proj,i}$  le rapport permettant de projeter l'effort depuis la normale de référence vers la direction du bras de levier. *Couple* est le couple appliqué sur le pignon, qui est l'organe moteur.

$r_{proj,i}$  est le produit scalaire entre la normale de référence  $\vec{n}_{ref}$  et de la normale définie par le bras de levier  $\vec{n}_{rotat,i}$  au point  $i$ , d'où  $r_{proj,i} = \vec{n}_{ref} \cdot \vec{n}_{rotat,i}$ .

### 3.1.3 Propriétés élastiques

Les propriétés élastiques des deux corps permettent d'écrire le déplacement normal du corps  $k$  au point  $i$  sous la forme :

$$U_{ki} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^k p_j \quad \text{où } C_{ij}^k \text{ sont les coefficients d'influence du corps } k.$$

Pour les deux corps 1 et 2 (pignon et roue),  $C_{ij} = C_{ij}^1 + C_{ij}^2$ . Il vient alors :

$$U_{1i} + U_{2i} = \sum_{j=1}^N C_{ij} p_j$$

Si la distance entre les deux corps au point  $i$  après chargement est notée  $y_i^{ang}$  (cf. Figure 2.34 c), ce paramètre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y_i^{ang} = U_{1i}^{ang} + U_{2i}^{ang} + e_i^{ang} - \alpha^{ang} = \frac{(U_{1i} + U_{2i}) r_{proj,i}}{R_i} + e_i^{ang} - \alpha^{ang} = \frac{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j}{\left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)} + e_i^{ang} - \alpha^{ang} \quad i \in [1, N]$$

Le système peut alors s'écrire ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^{ang} = \frac{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j}{\left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)} + e_i^{ang} - \alpha^{ang} \quad i \in [1, N] \\ \sum_{i=1}^N p_i S_i (R_i r_{proj,i}) = Couple \end{array} \right.$$

Le problème exprimé ici possède  $N+1$  équations ( $N$  conditions de compatibilité des déplacements et une condition sur le couple total), avec  $2N+1$  inconnues :

- $p_i \rightarrow N$  inconnues : pressions instantanées en chaque point potentiellement en contact,
- $y_i^{ang} \rightarrow N$  inconnues : écarts sous charge en chaque point potentiellement en contact,
- $\alpha^{ang} \rightarrow 1$  inconnue : rapprochement global des surfaces en contact.

Il est toutefois possible de résoudre le problème en rajoutant les équations supplémentaires apportées par :

$$y_i^{ang} = 0 \text{ et } p_i \geq 0 \text{ dans la zone de contact } (S)$$

$$y_i^{ang} \geq 0 \text{ et } p_i = 0 \text{ hors la zone de contact } (S)$$

Dans les deux cas, les équations peuvent être ramenées à  $y_i^{ang} \cdot p_i = 0$ , ce qui rajoute les  $N$  équations manquantes pour la résolution du problème.

### 3.1.4 Résolution du problème

En posant  $ef_i^{ang} = y_i^{ang} + \alpha^{ang}$  (cf. Figure 2.34 b), le problème peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N p_i S_i (R_i, r_{proj,i}) = Couple \\ \sum_{j=1}^N C_{ij} p_j \\ \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right) + ei_i^{ang} = ef_i^{ang} & i \in [1, N] \\ p_i (ef_i^{ang} - \alpha^{ang}) = 0 & i \in [1, N] \end{cases}$$

En suivant les développements de l'Annexe 3, ce système se réduit à un système de  $N$  équations dont les inconnues sont les  $N$  pressions  $p_i$  :

$$p_i = \frac{Couple}{\sum_{i=1}^N S_i (R_i, r_{proj,i})} \frac{p_i}{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j} \frac{p_i}{\left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right) + ei_i^{ang}} \quad i \in [1, N]$$

Ou bien sous forme matricielle :  $[P] = f([P])$ , qui peut être résolu par une méthode itérative de la forme :  $[P]^{k+1} = f([P]^k)$  où  $[P]^k$  est le vecteur des pressions à l'itération  $k$ . La méthode du point fixe est ici utilisée et basée sur la convergence du rapprochement des corps  $\alpha^{ang}$ , ce qui revient à dire que les écarts finaux  $ef_i^{ang}$  sont constants dans le contact. L'organigramme de convergence de cette méthode est également présenté dans l'Annexe 3.

Après résolution du problème, le partage de charge entre les différentes dents est déterminé à partir des pressions instantanées de contact. Sur chaque dent  $k$ , l'effort  $F_k$  et le couple  $C_k$  sont données pour chaque position cinématique par :

$$F_k = \sum_{i=1}^N P_i^k S_i \quad \text{et} \quad C_k = \sum_{i=1}^N P_i^k S_i (R_i r_{proj,i})$$

où les  $P_i^k$  sont les pressions instantanées en chaque point  $i$  du plan tangent de la dent  $k$ .

$$P_i^k = \begin{cases} p_i & \text{si le point } i \text{ est sur la dent } k \\ 0 & \text{si le point } i \text{ n'est pas sur la dent } k \end{cases}$$

L'erreur de transmission sous charge, définie angulairement par rapport à l'axe de rotation de la roue, est la somme du rapprochement des corps  $\alpha^{ang}$  et de l'erreur cinématique :

$$\varepsilon_t = \alpha^{ang} + \Delta\theta_2 \quad \text{avec :} \quad \Delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2}$$

où  $\Delta\theta_2$  est l'erreur cinématique à vide,  $\theta_2$  est la rotation théorique de la roue lorsque le pignon tourne de  $\theta_1$ , et  $Z_1$  et  $Z_2$  sont les nombres de dents du pignon et de la roue. L'erreur de transmission peut également être définie linéairement. Elle est calculée au barycentre des efforts par la relation  $\varepsilon_t^{linéaire} = \varepsilon_t \left( \frac{R_{bary}}{r_{proj,bary}} \right)$ , où  $R_{bary}$  correspond au bras de levier du barycentre, et  $r_{proj,bary}$  le rapport permettant de projeter une distance depuis la direction de la normale de référence vers la normale du bras de levier au barycentre.

La rigidité d'engrènement au barycentre des efforts est également liée au rapprochement des corps par la formule approximée ci-dessous :

$$K = \frac{F}{\alpha_{ang} \left( \frac{R_{bary}}{r_{proj,bary}} \right)} \quad \text{avec } F \text{ est la charge totale appliquée.}$$

## 3.2 Calcul des données du problème

### 3.2.1 Définition des coefficients d'influence

Il a été présenté précédemment que le déplacement normal au point  $i$  s'écrit sous la forme :  $U_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \cdot p_j$  où les  $C_{ij}$  sont les coefficients d'influence (déplacement du point  $i$  quand un effort unitaire est appliqué au point  $j$ ) et  $p_j$  la pression appliquée aux différents points  $j$ . En écrivant cette relation sous forme matricielle, et en posant  $U_i = U(M_i)$  et  $p_j = P(M_j)$ , les déplacements s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} U(M_1) \\ \vdots \\ U(M_i) \\ \vdots \\ U(M_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,N} \\ \vdots & C_{ij} & \vdots \\ C_{N,1} & \cdots & C_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(M_1) \\ \vdots \\ P(M_i) \\ \vdots \\ P(M_N) \end{bmatrix}$$

Où :

- U est le vecteur des déplacements pour tous les points  $M_i$
- C est la matrice des coefficients d'influence  $C_{ij}$
- P est le vecteur des efforts appliqués aux différents points  $M_j$

De façon générale, la matrice des coefficients d'influence prend en compte à la fois les effets de flexion des corps et les effets de surface. Ces deux effets étant considérés découplés, cette matrice peut être décomposée en trois sous matrices : une pour la déformation de surfaces ( $C_{ij}^s$ ) et deux pour la flexion du pignon et de la roue ( $C_{ij}^{Pf}$  et  $C_{ij}^{Rf}$ ), comme présenté dans l'équation ci-dessous :

$$C_{ij} = C_{ij}^s + C_{ij}^{Pf} + C_{ij}^{Rf}$$

### 3.2.1.1 Coefficients d'influence de flexion

Les coefficients d'influence de flexion sont calculés grâce à une modélisation par Eléments Finis standard car il est très difficile d'avoir une expression analytique pour des formes de jante complexes, ou la présence d'arbre ou de palier, par exemple.

Ainsi, si un nombre moyen de points potentiels de contact  $N$  sont pris en compte, ainsi que  $P$  positions cinématiques, il y aura alors  $N \times P$  calculs Eléments Finis à réaliser. Ce nombre peut devenir rapidement important, ce qui impliquerait un temps de calcul considérable pour obtenir ces coefficients d'influence de flexion.

Afin de diminuer de façon significative le temps de calcul, la détermination des coefficients d'influence ne sera pas réalisée pour chaque position cinématique, ni sur les points potentiels de contact qui peuvent être nombreux. Le calcul est réalisé une seule fois, et sur un nombre restreint de points, bien choisis le long du flanc de denture.

A partir de ces quelques coefficients d'influence, il sera possible de déterminer par interpolation les valeurs nécessaires pour tous les points potentiels de contact et pour chacune des positions cinématiques sans avoir à refaire des calculs Eléments Finis.

#### 3.2.1.1.1 Calcul des coefficients d'influence généraux

Le calcul des coefficients d'influence ne se fera donc que sur un nombre restreint de points, répartis sur trois dents. Sur chacune des trois dents, un nombre identique de points sera affecté, régulièrement espacés selon la largeur de la denture, mais également selon la hauteur (non pas du pied à la tête, mais de la limite de la trochoïde à la tête), comme le montre la Figure 2.35 (L10 correspond à la distance entre le sommet du cône primitif et le projeté du

point sur le cône primitif.  $L_{20}$  correspond à la distance entre le point considéré et son projeté sur le cône primitif) :

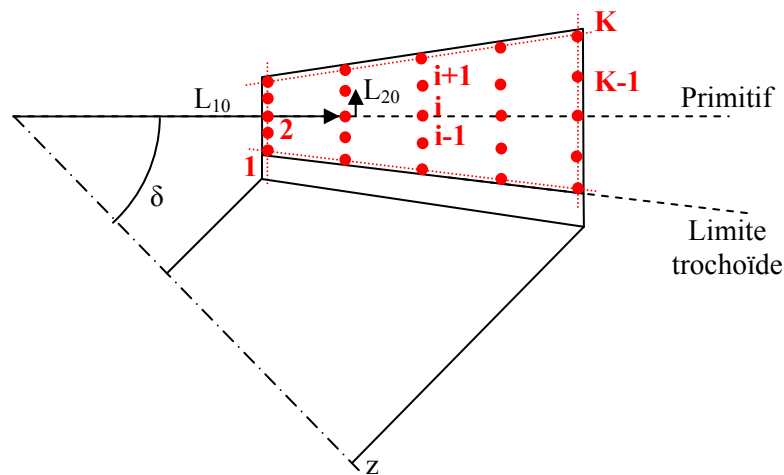


Figure 2.35 : Répartition des points pour les calculs Eléments Finis

### a) Calcul des déplacements aux points considérés

Des efforts unitaires seront successivement appliqués sur les points de la dent centrale, et pour chaque effort appliqué, les déplacements seront mesurés sur chacun des points des trois dents.

Le maillage des dents se fera de telle manière que des nœuds du maillage Eléments Finis correspondent aux points définis ci-dessus. Les efforts unitaires sont donc appliqués sur ces nœuds. Lors d'un calcul Elément Finis classique, les déplacements calculés prennent en compte à la fois les effets de flexion, les déformations de surface ainsi que les effets dus au maillage qui se déforme autour du point d'application de la charge.

Afin d'obtenir les effets dus à la flexion uniquement (les effets du contact sont pris en compte séparément), Sainot [167] propose d'effectuer le calcul en deux étapes successives avec des conditions aux limites différentes :

- calcul avec flanc anti-homologue au contact libre (Figure 2.36\_a) : permet d'obtenir le déplacement dû à la conjugaison de tous les effets cités précédemment,
- calcul avec flanc anti-homologue au contact bloqué (Figure 2.36\_b) : permet d'obtenir le déplacement dû à la conjugaison de tous les effets cités précédemment sauf celui de flexion

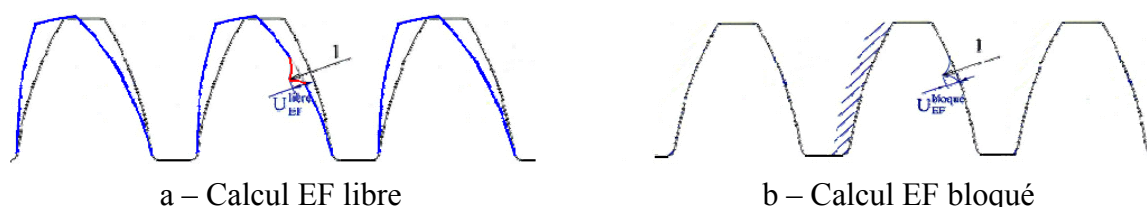


Figure 2.36 : Deux types de conditions aux limites

En notant  $u_{ij}^l$  et  $u_{ij}^b$  les déplacements du point  $i$  quand un effort est appliqué sur le point  $j$  dans le cas d'un calcul avec flanc anti-homologue au contact respectivement libre et bloqué, alors le déplacement de ce point correspondant à la flexion seulement sera  $u_{ij} = u_{ij}^l - u_{ij}^b$ .

Le déplacement recherché dans cette étude est celui selon la direction d'application de l'effort. Le déplacement suivant sera alors considéré :

$$U_{ij} = \vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_j$$

avec  $\vec{u}_{ij}$  le vecteur déplacement du point  $i$  lorsqu'un effort est appliqué au point  $j$ , et  $\vec{n}_j$  le vecteur normal au point  $j$ .

Si  $N$  points sont répartis sur une dent, trois matrices de déplacements de taille  $N \times N$  seront obtenues (une matrice pour les déplacements des points de chacune des dents). Ces matrices seront appelées par la suite  $[U^k]$ ,  $k$  valant 1, 2 ou 3.

### **Remarque :**

La relation ci-dessus n'est qu'une approximation. En effet, pour le calcul des matrices de coefficients d'influence, les déplacements  $U_{ij}$  sont calculés selon la direction  $\vec{n}_j$  alors que pour le calcul de la répartition des charges, les déplacements seront calculés dans une direction particulière (direction donnée par le point de contact potentiel), différente pour chaque position cinématique. Cependant, l'erreur réalisée est plutôt faible, comme il sera montré en fin de chapitre.

### **b) Construction des matrices de coefficients généraux**

Les déplacements de volume seront exprimés en les décomposant dans une base de fonctions (Teixeira Alves [168] et [169]). En disposant de  $K$  fonctions  $f_k(M)$  indépendantes et génératrices, il est possible de créer une base  $B(f_k)$ . Dans cette base, le déplacement d'un point  $M$  lorsque la structure est soumise à un effort normal et unitaire appliqué au point  $M'$ , s'écrit :

$$u(M, M') = \sum_{k=1}^K c_k(M') \cdot f_k(M) = [c_1(M') \quad \dots \quad c_K(M')] \cdot \begin{bmatrix} f_1(M) \\ \vdots \\ f_K(M) \end{bmatrix}$$

Où  $c_k(M')$  sont les coefficients vectoriels définissant les coordonnées du déplacement dans la base de fonctions  $B(f_k)$ .



Comme pour le déplacement, il est possible de décomposer les coefficients  $c_k(M')$  dans la base de fonctions  $B(f_k)$  :

$$c_k(M') = \sum_{l=1}^K c_{kl} \cdot f_l(M') = [f_1(M') \quad \dots \quad f_K(M')] \cdot \begin{bmatrix} c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kK} \end{bmatrix}$$

Finalement, en combinant les deux équations précédentes, le déplacement  $u(M, M')$  s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$u(M, M') = [f_1(M') \quad \dots \quad f_K(M')] \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{K1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1K} & \dots & c_{KK} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(M) \\ \vdots \\ f_K(M) \end{bmatrix}$$

Cette matrice de définition  $[C]$  est donc une matrice spécifique à la structure. Elle permet de connaître le déplacement de volume d'un point quelconque  $M$ , lorsque la structure est soumise à des efforts normaux. Pour obtenir une fonction de déformation propre à la structure étudiée, il suffit donc de définir la matrice de définition  $[C]$ .

Si la base de fonctions  $B(f_k)$  comporte  $K$  fonctions, il est possible de déterminer la matrice  $[C]$  en calculant le déplacement de  $K$  points  $M_1$  à  $M_K$  pour  $K$  cas de chargement appliqués aux points  $M'_1$  à  $M'_K$ . Pour un cas de charge quelconque, les déplacements aux points  $M_1$  à  $M_K$  s'écrivent :

$$[u(M_1, M') \quad \dots \quad u(M_K, M')] = [f_1(M') \quad \dots \quad f_K(M')] \cdot [C] \cdot \begin{bmatrix} f_1(M_1) & \dots & f_1(M_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_K(M_1) & \dots & f_K(M_K) \end{bmatrix}$$

Si la relation précédente est utilisée lorsque la charge est appliquée aux  $K$  points  $M'_1$  à  $M'_K$ , elle devient :

$$\begin{bmatrix} u(M_1, M'_1) & \dots & u(M_K, M'_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(M_1, M'_K) & \dots & u(M_K, M'_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(M'_1) & \dots & f_K(M'_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(M'_K) & \dots & f_K(M'_K) \end{bmatrix} \cdot [C] \cdot \begin{bmatrix} f_1(M_1) & \dots & f_1(M_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_K(M_1) & \dots & f_K(M_K) \end{bmatrix}$$

De plus, lorsque les déplacements sont mesurés aux points d'application des efforts, les points  $M$  et  $M'$  sont confondus. Il est alors possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} u(M_1, M_1) & \dots & u(M_K, M_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(M_1, M_K) & \dots & u(M_K, M_K) \end{bmatrix} = [f]^T \cdot [C] \cdot [f] \quad \text{Avec } [f] = \begin{bmatrix} f_1(M_1) & \dots & f_1(M_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_K(M_1) & \dots & f_K(M_K) \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice des déplacements  $[U]$  peut être représentée sous la forme suivante :

$$[U] = [f]^T \cdot [C] \cdot [f]$$

Pour rappel, il y a trois matrices de déplacement :  $[U^k]$ . Ainsi, trois matrices de coefficients d'influence  $[C^k]$  sont obtenues et définies par :

$$[U^k] = [f]^T \cdot [C^k] \cdot [f], \quad k \text{ valant ici } 1, 2 \text{ ou } 3.$$

Dans l'équation ci-dessus, les matrices  $C^k$  sont celles recherchées, correspondant aux coefficients d'influence généraux.

Les efforts s'appliquent sur la surface de denture. De même, les déplacements de flexion sont déterminés sur cette même surface, il est donc possible de se contenter de fonction à deux variables  $L10$  et  $L20$ , qui sont la position du point respectivement selon la largeur et la hauteur de denture. Chaque fonction est alors décomposée en un produit de deux fonctions à un seul paramètre :

$$f_k(L10, L20) = h_j(L10) \cdot g_i(L20)$$

A partir de  $I$  fonctions selon la hauteur de denture,  $g_i(L20)$  et de  $J$  fonctions selon sa largeur  $h_j(L10)$ , il est possible de créer une base de  $K=I \cdot J$  fonctions.

Sur sa hauteur, la dent a un comportement similaire à une poutre encastree-libre (cf. Figure 2.37). Des fonctions polynomiales, solutions des déformées d'une telle poutre, ont donc été choisies.

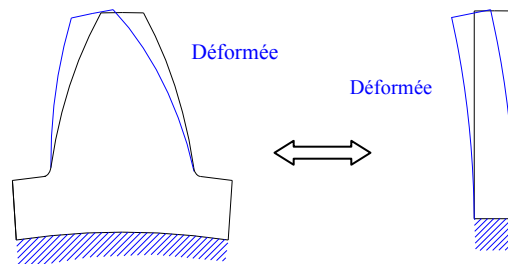


Figure 2.37 : Corrélation entre la dent et une poutre

La  $i^{\text{ième}}$  fonction  $g$  sera notée  $g_i(\lambda_2) = \lambda_2^{i-1}$  avec  $i \geq 1$ . Ici,  $\lambda_2 = \frac{L20 - L20_{\min}}{L20_{\max} - L20_{\min}}$

est une valeur comprise entre 0 et 1 qui a pour objectif de normer la fonction  $g_i(\lambda_2)$  afin d'obtenir une matrice de fonctions de forme correctement conditionnée.

Selon sa largeur de denture, le comportement de la dent est proche du comportement d'une poutre libre-libre. Les fonctions de résonance d'une telle poutre sont donc utilisées.

Ainsi, la  $j^{\text{ème}}$  fonction  $h$  est notée comme suit :

$$\text{Si } j = 1 \rightarrow h_j(\lambda_1) = 1$$

$$\text{Si } j = 2 \rightarrow h_j(\lambda_1) = 1 - 2 \cdot \lambda_1$$

$$\text{Si } j > 2 \rightarrow h_j(\lambda_1) = \sin(\mu_j \cdot \lambda_1) + \sinh(\mu_j \cdot \lambda_1) - \alpha_j \cdot (\cos(\mu_j \cdot \lambda_1) + \cosh(\mu_j \cdot \lambda_1))$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j = \frac{\sin \mu_j - \sinh \mu_j}{\cos \mu_j - \cosh \mu_j} \\ \mu_j = \left( j - \frac{3}{2} \right) \cdot \pi \end{array} \right. \text{ et } \lambda_1 = \frac{L10 - L10_{\min}}{L10_{\max} - L10_{\min}} \text{ (mêmes raisons que précédemment pour } \lambda_2)$$

Les fonctions de formes étant maintenant connues, les matrices de coefficients d'influence de flexion peuvent facilement être déduites :  $[C^k] = [f^T]^{-1} \cdot [U^k] \cdot [f]^{-1}$ .

En utilisant successivement les matrices de déplacement  $[U^1]$ ,  $[U^2]$ , et  $[U^3]$  obtenues pour chacune des trois dents, il est aisé de déterminer les 3 matrices de coefficients d'influence de flexion correspondantes :  $[C^1]$ ,  $[C^2]$  et  $[C^3]$ .

### 3.2.1.1.2 Interpolation des coefficients en tout points de contact

Afin d'obtenir les coefficients d'influence de flexion des points potentiellement en contact d'une position cinématique donnée, les fonctions de formes décrites précédemment sont utilisées à nouveau, afin de réaliser les calculs dans la même base de fonctions. En supposant qu'il y ait  $N$  points potentiellement en contact pour la position cinématique donnée, alors il faudra calculer  $N \times N$  coefficients d'influence. En effet, pour chaque point potentiellement en contact, il faut calculer les  $N$  coefficients correspondant à l'effet des  $N$  points sur le point considéré.

Soit le coefficient d'influence  $C(M_i/M_j)$ , correspondant à l'influence du point  $M_j$  (si un effort unitaire est appliqué à ce point) sur le déplacement du point  $M_i$ . Alors ce coefficient peut se calculer de la façon suivante :

$$C(M_i/M_j) = \begin{bmatrix} f_1(M_i) \\ \dots \\ f_k(M_i) \\ \dots \\ f_K(M_i) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,K} \\ \dots & c_{k,l} & \dots \\ c_{K,1} & \dots & c_{K,K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(M_j) \\ \dots \\ f_l(M_j) \\ \dots \\ f_K(M_j) \end{bmatrix}$$

↓
↓
↓

Fonctions de forme au point de mesure de déplacement  $M_i$ 
Matrice  $C^k$  calculée précédemment
Fonctions de forme au point d'application de l'effort  $M_j$

Finalement, après avoir calculé tous les coefficients, ces derniers peuvent être organisés de façon à obtenir la matrice ci-dessous, de taille  $N \times N$  :

$$\begin{bmatrix} C(M_1/M_1) & \dots & C(M_1/M_N) \\ \dots & C(M_i/M_j) & \dots \\ C(M_N/M_1) & \dots & C(M_N/M_N) \end{bmatrix}$$

**Important :**

Lors du calcul permettant d'obtenir les différents coefficients de la matrice ci-dessus, la matrice  $C^k$  a été utilisée. Pour rappel, la matrice  $C^k$  a été obtenue de la manière suivante :  $[C^k] = [f^T]^{-1} \cdot [U^k] \cdot [f]^{-1}$ , où les matrices  $f$  sont des matrices de fonctions de forme, et la matrice  $U^k$  est la matrice de déplacements obtenus par la méthode des Eléments Finis.

Lors de calculs Eléments Finis, des points avaient été répartis sur 3 dents, mais des efforts étaient appliqués sur la dent centrale seulement. Trois matrices  $U^k$  sont alors obtenues :

- $U^1$  : matrice des déplacements des points de la dent précédant celle où sont appliqués les efforts,
- $U^2$  : matrice des déplacements des points de la dent où sont appliqués les efforts,
- $U^3$  : matrice des déplacements des points de la dent suivant celle où sont appliqués les efforts.

A partir de ces 3 matrices  $U^k$ , 3 matrices  $C^k$  ont donc été créées. Il faudra alors utiliser la bonne matrice dans le calcul des différents coefficients d'influence de flexion. Le calcul de  $C(M_i/M_j)$  se fera avec :

- $C^1$  si le point  $M_i$  est sur une dent précédant la dent contenant le point  $M_j$ ,
- $C^2$  si les points  $M_i$  et  $M_j$  sont sur la même dent,
- $C^3$  si le point  $M_i$  est sur une dent suivant la dent contenant le point  $M_j$ .

Si deux points sur des dents différentes ne sont pas sur deux dents qui se suivent (par exemple pour un contact sur 3 dents), le principe est le même, il suffit simplement de vérifier si la dent contenant le point  $M_i$  précède, suit, ou est la même que la dent contenant le point  $M_j$ . En effet, l'hypothèse sera faite que toutes les dents précédant la dent où est appliqué l'effort donnent le même résultat (déplacement rigide des corps). De même pour toutes les dents suivant cette dent où est appliqué l'effort.

**3.2.1.1.3 Calcul des déplacements à partir des coefficients**

En début de cette partie, il a été indiqué que les déplacements aux différents points de contact s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} U(M_1) \\ \vdots \\ U(M_i) \\ \vdots \\ U(M_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,N} \\ \vdots & C_{ij} & \vdots \\ C_{N,1} & \dots & C_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(M_1) \\ \vdots \\ P(M_i) \\ \vdots \\ P(M_N) \end{bmatrix}$$

En connaissant les efforts  $P(M_i)$  appliqués aux différents points  $M_i$ , il est alors aisé de calculer leurs déplacements  $U(M_i)$ .

**Remarque :**

Les déplacements à ce stade ne sont dus qu'aux flexions de dents. Les effets dus à l'écrasement des surfaces ne sont pas encore pris en compte.

En prenant en compte tous les effets (flexion + écrasements de surface), le système est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U(M_1) \\ \dots \\ U(M_i) \\ \dots \\ U(M_N) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1}^{Pf} & \dots & C_{1,N}^{Pf} \\ \dots & C_{ij}^{fp} & \dots \\ C_{N,1}^{Pf} & \dots & C_{N,N}^{Pf} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(M_1) \\ \dots \\ P(M_j) \\ \dots \\ P(M_N) \end{bmatrix}}_{\text{Déplacements dus à la flexion du pignon}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1}^{Rf} & \dots & C_{1,N}^{Rf} \\ \dots & C_{ij}^{Rf} & \dots \\ C_{N,1}^{Rf} & \dots & C_{N,N}^{Rf} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(M_1) \\ \dots \\ P(M_j) \\ \dots \\ P(M_N) \end{bmatrix}}_{\text{Déplacements dus à la flexion de la roue}} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1}^s & \dots & C_{1,N}^s \\ \dots & C_{ij}^s & \dots \\ C_{N,1}^s & \dots & C_{N,N}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(M_1)/dS \\ \dots \\ P(M_j)/dS \\ \dots \\ P(M_N)/dS \end{bmatrix}}_{\text{Déplacements dus à l'écrasement des surfaces (ici des pressions sont utilisées, et non des efforts)}}
 \end{aligned}$$

Les coefficients  $C_{ij}^{Pf}$  correspondent aux coefficients d'influence de flexion du pignon, les coefficients  $C_{ij}^{Rf}$  aux coefficients d'influence de flexion de la roue, et les coefficients  $C_{ij}^s$  aux coefficients d'influence de surface.

Les différents coefficients  $C_{ij}^{Pf}$  et  $C_{ij}^{Rf}$  sont déterminés avec la méthode présentée précédemment, en faisant l'étude successivement sur le pignon et sur la roue.

Les coefficients  $C_{ij}^s$  sont quant à eux déterminés par la théorie de Boussinesq, présentée plus loin. Ces coefficients ont des valeurs non nulles seulement si les points  $M_i$  et  $M_j$  sont sur la même dent.

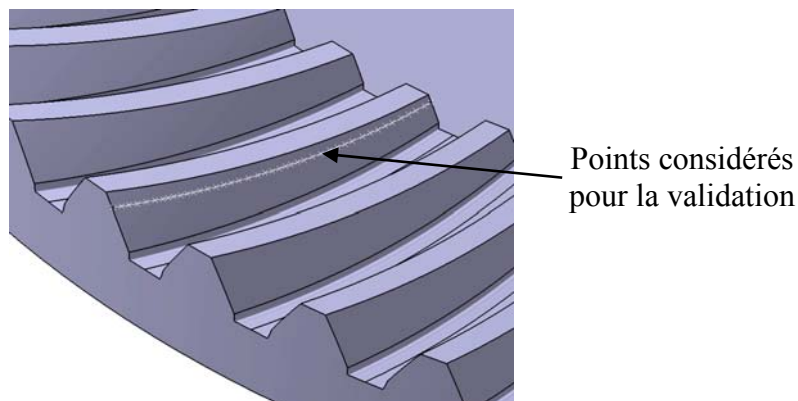
**3.2.1.1.4 Validation de la méthode**

Afin de valider les fonctions de forme, des comparaisons ont été réalisées entre les déplacements de différents points sur une dent d'engrenage par un calcul Eléments Finis, et

les déplacements de ces mêmes points calculés avec les fonctions. Le calcul Eléments Finis est réalisé dans le logiciel de CAO Catia V5. Les éléments utilisés sont des éléments tétraédriques de type parabolique. L'élément est composé de 10 nœuds, chacun ayant 3 degrés de liberté.

Ces déplacements sont dus à un effort appliqué sur l'un des points définis dans la CAO (Figure 2.38). Des comparaisons seront effectuées en appliquant l'effort unitaire successivement sur différents points. Les calculs ont été réalisés à la fois sur une roue et sur un pignon d'engrenage spiro-conique.

La Figure 2.38 ci-dessous montre les différents points pris en compte afin de réaliser les comparaisons. Cette figure correspond aux points de la roue. Les différents points ont tous le même paramètre L20. Seul le paramètre L10 est différent d'un point à un autre. Le principe est le même pour le calcul effectué sur le pignon.



**Figure 2.38 : Points pris en compte sur la roue**

Afin de caractériser correctement tous les points, autant de fonctions  $H_i$  que de points selon la hauteur de la denture, et autant de fonctions  $L_i$  que de points selon la largeur de denture doivent être considérés. Pour les exemples suivants, 7 points sur la largeur de denture et 5 points sur la hauteur de denture sont pris en compte pour le calcul des coefficients d'influence principaux.

S'il y a moins de fonctions qu'il n'y a de points, la convergence ne sera pas totale vers le résultat attendu, comme le montre sur la Figure 2.39, où la courbe définie par des cercles bleus correspond à des déplacements calculés par Eléments Finis alors que la courbe définie par des croix rouges correspond à l'approximation obtenue par les fonctions de forme. Dans cet exemple, seules 6 fonctions  $L_i$  ont été utilisées selon la largeur denture, alors que 7 points ont été pris en compte pour le calcul des coefficients d'influence généraux.

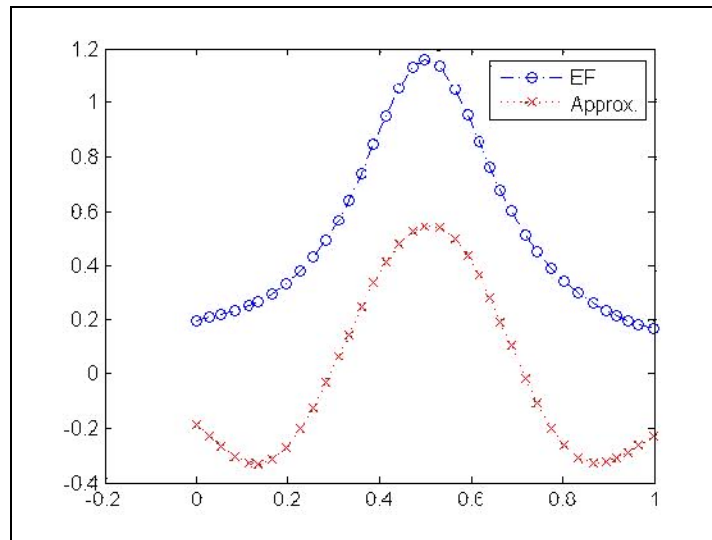


Figure 2.39 : Nombre de fonctions inférieur au nombre de points

Dans le cas où il y a plus de fonctions de forme que de points, il y a divergence des résultats, avec de fortes oscillations (Figure 2.40). Cet exemple a été réalisé en utilisant 8 fonctions  $L_i$ .

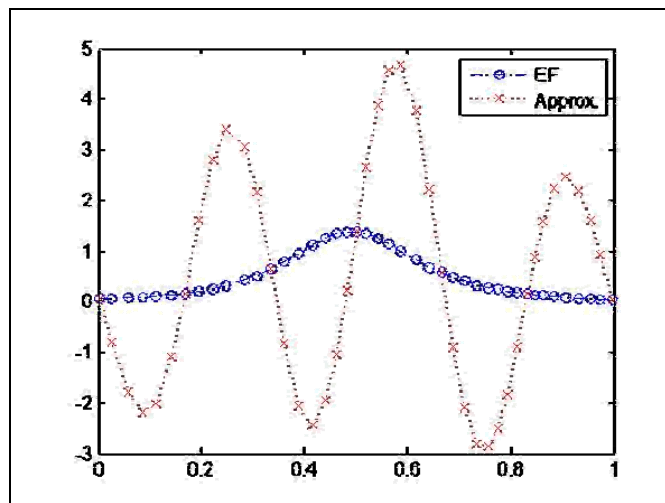


Figure 2.40 : Nombre de fonctions supérieur au nombre de points

La condition idéale est donc de prendre autant de fonctions de forme que de points. Les interpolations sont très satisfaisantes dans cette configuration : en effet, les déplacements approximatifs sont quasiment superposés aux déplacements calculés par Eléments Finis (Figure 2.41).

Les déplacements des différents points pour différents cas de charge sont mis en évidence sur ces courbes. La valeur normée (entre 0 et 1) de la position de ces points selon la largeur de denture est représentée en abscisse.

Les résultats sont très satisfaisants : les cercles bleus représentent les déplacements calculés par Eléments Finis, tandis que les croix rouges correspondent aux déplacements calculés par les fonctions. Il est tout de même important de noter que de légères oscillations persistent avec l'utilisation de cette méthode.

Les chiffres ci-après donnent une idée des erreurs réalisées en utilisant l'interpolation par fonctions de formes. Ces chiffres sont des moyennes par rapport aux différents cas de charges présentés sur la Figure 2.41 :

Pour le pignon :

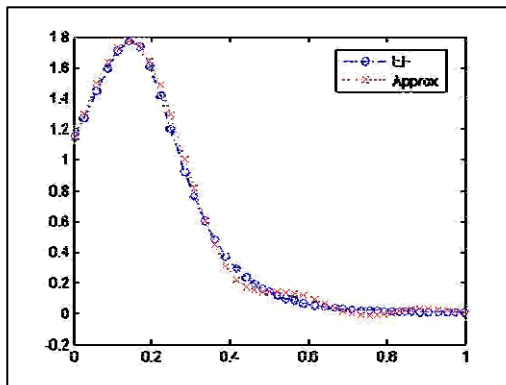
- La différence maximale entre les deux courbes est d'environ à 2.7% du déplacement maximal.
- La différence moyenne entre les deux courbes est de l'ordre de 1.1% du déplacement maximal.

Pour la roue :

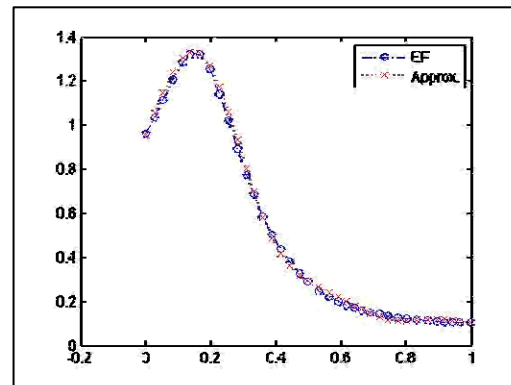
- La différence maximale entre les deux courbes est d'environ 5.5% du déplacement maximal.
- La différence moyenne entre les deux courbes est de l'ordre de 1.8% du déplacement maximal.



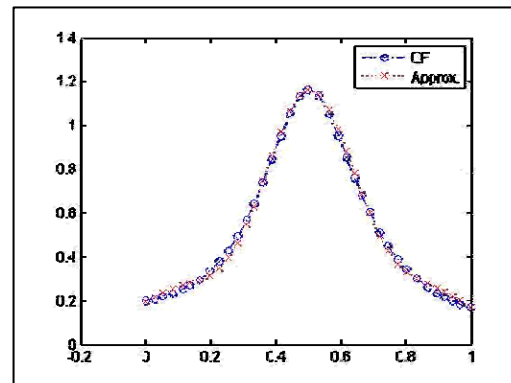
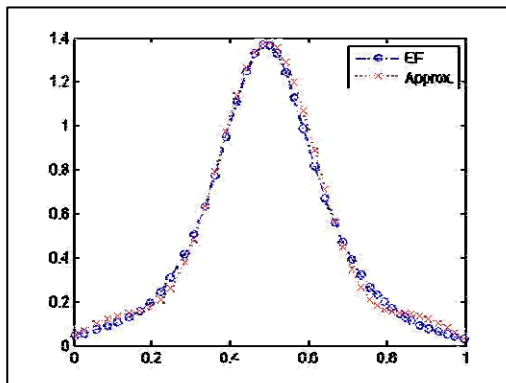
Déplacements ( $\mu\text{m}$ ) des points sur la dent de la roue



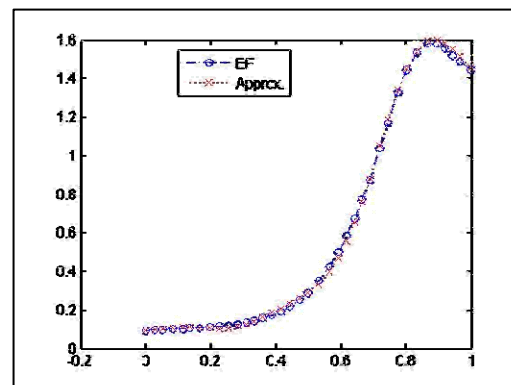
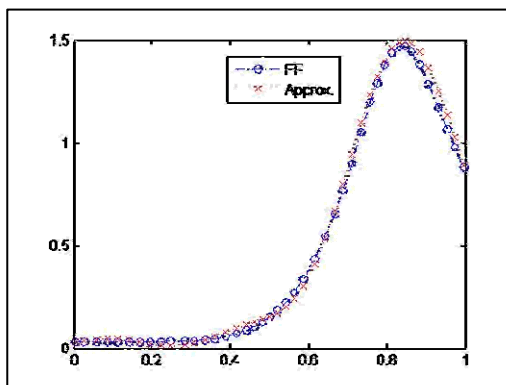
Déplacements ( $\mu\text{m}$ ) des points sur la dent du pignon



a) L'effort est appliqué à environ 1/5 de la largeur de la dent



b) L'effort est appliqué à la moitié de la largeur de la dent



c) L'effort est appliqué à environ 4/5 de la largeur de la dent

Figure 2.41 : Comparaisons entre les deux méthodes

### 3.2.1.2 Coefficients d'influence de contact

Les coefficients d'influence de flexion ayant été déterminés, il reste à calculer les coefficients d'influence de contact.

Les deux solides (dent du pignon et de la roue) étant approximés par deux demi-espaces élastiques, l'expression des déplacements est connue. En utilisant les fonctions potentielles de Boussinesq et Cerruti [83], l'expression générale suivante pour le déplacement est obtenue :

$$u_i(x, y) = \iint_{A_c} A_{ij}(x - x', y - y') \cdot p_j(x', y') \cdot dx' dy' \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3$$

$A_c$  correspond à l'aire totale de contact potentiel.

$(x, y)$  et  $(x', y')$  sont les coordonnées dans le plan tangent des deux points considérés.

La matrice  $[A_{ij}]$  des coefficients d'influence de contact est connue explicitement en fonction des trois constantes combinées  $K$ ,  $G_c$ ,  $\nu_c$  des deux demi-espaces élastiques et des fonctions potentielles de Boussinesq et Cerruti.

En partant de cette expression, et grâce aux hypothèses posées en début de cette partie, nous arrivons à l'expression des coefficients d'influence de surface suivante :

$$C_{ij}^s = \frac{1 - \nu_c}{\pi G_c} \cdot \left\{ (Y + b) \cdot \ln \left( \frac{(X + a) + \sqrt{(X + a)^2 + (Y + b)^2}}{(X - a) + \sqrt{(X - a)^2 + (Y + b)^2}} \right) + (Y - b) \cdot \ln \left( \frac{(X - a) + \sqrt{(X - a)^2 + (Y - b)^2}}{(X + a) + \sqrt{(X + a)^2 + (Y - b)^2}} \right) \right. \\ \left. + (X + a) \cdot \ln \left( \frac{(Y + b) + \sqrt{(X + a)^2 + (Y + b)^2}}{(Y - b) + \sqrt{(X + a)^2 + (Y - b)^2}} \right) + (X - a) \cdot \ln \left( \frac{(Y - b) + \sqrt{(X - a)^2 + (Y - b)^2}}{(Y + b) + \sqrt{(X - a)^2 + (Y + b)^2}} \right) \right\}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} X = x_i - x_j \\ Y = y_i - y_j \end{cases}$$

$a$  et  $b$  sont les dimensions des éléments du maillage.

L'intégralité des développements permettant d'obtenir cette définition des coefficients d'influence de contact est présentée dans l'Annexe 4.

Il est à noter que ce coefficient n'a de sens que si les deux points  $M_i$  et  $M_j$  sont sur la même dent. Ainsi, si ces points sont sur des dents différentes, alors les coefficients d'influence de surface correspondant à ces deux points auront des valeurs nulles.

### 3.2.2 Calcul des écarts initiaux

Les derniers éléments nécessaires à la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements sont les écarts initiaux  $ei_i$  (Figure 2.34) entre les deux surfaces pour chaque point du maillage.

Les points du maillage sont projetés orthogonalement au plan tangent sur la dent du pignon et sur la dent de la roue. L'écart initial est alors simplement défini par :

$$ei_i = \begin{bmatrix} x_P - x_{Pltg} \\ y_P - y_{Pltg} \\ z_P - z_{Pltg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} nx_{Pltg} \\ ny_{Pltg} \\ nz_{Pltg} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_R - x_{Pltg} \\ y_R - y_{Pltg} \\ z_R - z_{Pltg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} nx_{Pltg} \\ ny_{Pltg} \\ nz_{Pltg} \end{bmatrix}$$

où  $(x_{Pltg}, y_{Pltg}, z_{Pltg})$  est un point du plan tangent,  $(x_P, y_P, z_P)$  et  $(x_R, y_R, z_R)$  ses projections orthogonales sur les surfaces du pignon et de la roue (points  $P$  et  $R$  sur la Figure 2.42), et  $(nx_{Pltg}, ny_{Pltg}, nz_{Pltg})$  les coordonnées de la normale au plan tangent. L'écart initial correspond donc à la distance  $PR$ .

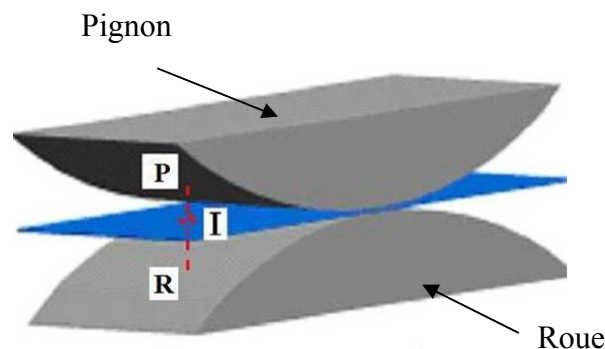


Figure 2.42 : Projection des points du maillage sur le pignon et sur la roue

### 3.3 Exemple de résultats

Une fois toutes les valeurs des différents paramètres du problème calculées, le partage de charge peut être réalisé.

Voici quelques résultats obtenus avec le modèle numérique développé. Pour cet exemple la géométrie utilisée est de type Gleason dont les données sont celles de la norme NF ISO 23509 [166]. Cette géométrie servira également de base pour les travaux présentés au Chapitre III. Les données générales de cet engrenage sont les suivantes :

- Nombre de dents :  $Z1 = 14, Z2 = 39$
- Module réel :  $m = 3.2\text{mm}$
- Angle de spirale :  $\beta = 35^\circ$
- Angle de renvoi :  $\Sigma : 90^\circ$

#### 3.3.1 Répartition des charges

Le premier type de résultat obtenu est la répartition des efforts sur chaque dent en contact (Figure 2.43). On peut donc suivre, pour une zone angulaire particulière, le nombre de dents en contact et l'effort que supporte chacune de ces dents.

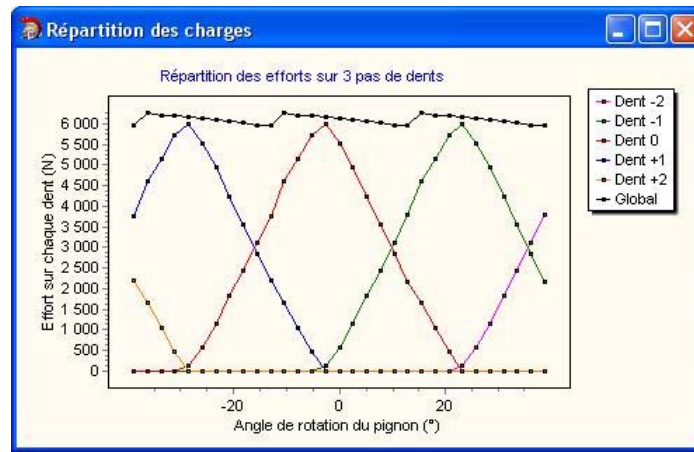


Figure 2.43 : Représentation de la répartition des charges sur 3 pas de dents

L'effort global, sur ce résultat, n'est pas constant. En effet, nous avons défini le couple d'entrée comme constant. Ainsi, le barycentre des efforts évoluant au cours de l'engrènement, l'effort global varie lui aussi légèrement, afin de garder le couple constant.

### 3.3.2 Pressions instantanées

La Figure 2.44 représente, pour une position cinématique donnée, les contacts sur chaque dent chargée. Les zones de contact sont représentées à la fois sur les flancs de denture du pignon et de la roue. Les pressions sur la ligne moyenne du contact de toutes les dents sont également indiquées sur le même graphe.

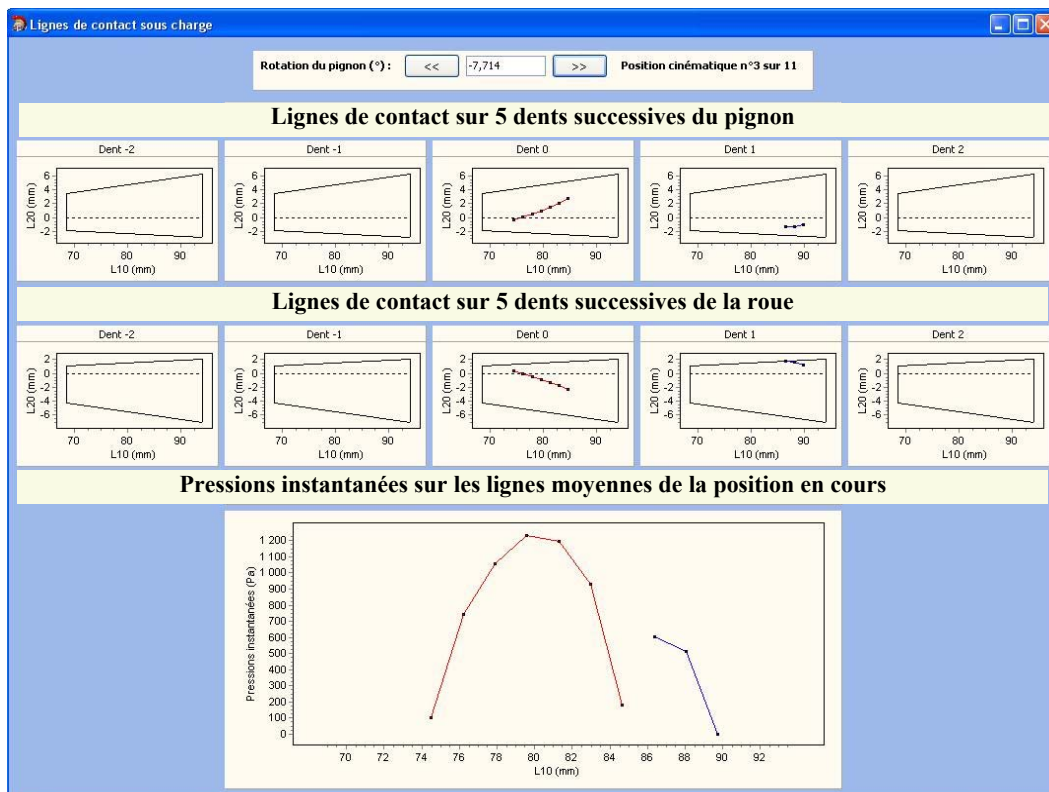


Figure 2.44: Lignes de contact sous charge et pressions instantanées pour une position donnée

### 3.3.3 Portée sous charge

La portée sous charge représente la zone de la dent où s'est établi un contact lors de tout l'engrènement. Cependant, les valeurs des pressions exercées ne sont pas identiques sur toute la zone. Afin de mieux évaluer la répartition des efforts lors de l'engrènement, on affiche alors la portée sous charge selon le code couleur suivant :

- rouge :  $2/3 P_{max} < P < P_{max}$
- jaune :  $1/3 P_{max} < P < 2/3 P_{max}$
- bleu :  $P < 1/3 P_{max}$

Avec :  $P_{max}$  : Pression maximale obtenue lors de l'engrènement

$P$  : Pression maximale lors de l'engrènement au point considéré

La portée sous charge est représentée à la fois sur un flanc de denture du pignon et de la roue (Figure 2.45 :

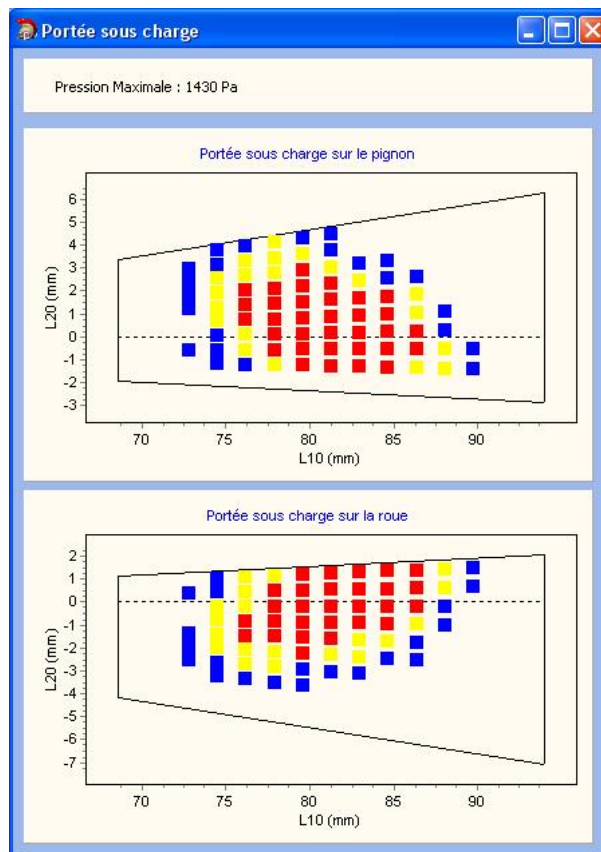


Figure 2.45 : Portée sous charge

### 3.3.4 Erreur de transmission

L'erreur de transmission sous charge, dont le principe de calcul a été présenté dans le §3.1.4, correspond à l'erreur cinématique à vide auquel sont ajoutées les erreurs dues à la flexion des dents et de leurs supports, et à l'écrasement des surfaces au niveau du contact.

Cette erreur correspond à l'angle entre la position théorique (c'est-à-dire s'il n'y avait pas de déformation ni due au contact, ni à la flexion des dents, ni d'erreur de positionnement

...) et la position réelle de la dent pour une position cinématique donnée. Le calcul étant fait sur différentes positions cinématiques, on peut alors représenter l'erreur de transmission comme sur la Figure 2.46, où cette erreur peut être représentée soit en angulaire sur la roue (en milliradians), soit en distance linéaire (en micromètres), comme expliqué au §3.1.4.

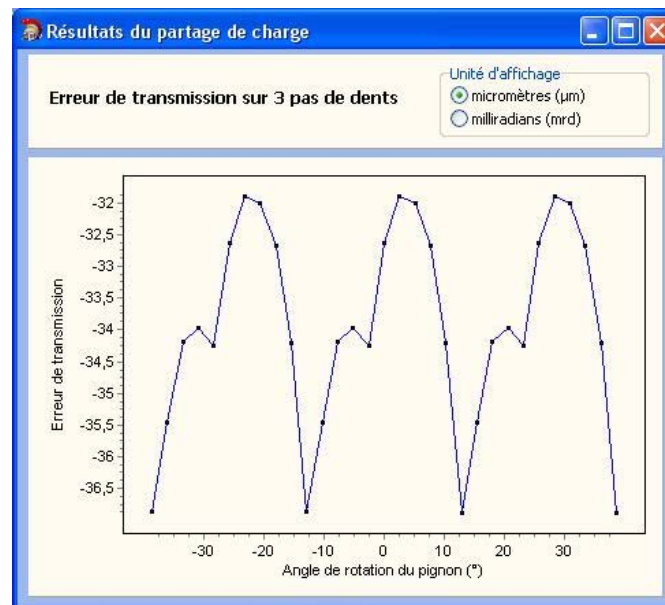


Figure 2.46 : Erreur de transmission sur 3 pas de dent

### 3.3.5 Temps de calcul

Pour obtenir ces résultats, une trentaine de minutes a été nécessaire sur un ordinateur portable (Windows XP 32bits, Processeur Dual Core à 2.00GHz, 2.00Go de RAM) pour calculer les coefficients d'influence généraux (calculs sur le pignon et sur la roue), puis environ 5 minutes par position cinématique pour le calcul de la répartition des charges.

Un peu plus d'une heure aura donc été nécessaire pour obtenir ces résultats, en considérant une vingtaine de positions cinématiques. Ces calculs ont été réalisés avec la méthode des fonctions de formes développée dans cette partie. En utilisant une méthode directe, sans interpolation par fonctions de forme, environ 45 minutes seraient nécessaires pour le calcul d'une seule position cinématique. Ainsi, pour une vingtaine de positions cinématiques, environ 16 heures sont estimées pour aboutir aux mêmes résultats.

## 4. Etudes de validation

### 4.1 Influence du nombre de points pris en compte pour le calcul des coefficients d'influence généraux

Les calculs Eléments Finis permettant d'obtenir les coefficients d'influence généraux sont réalisés en prenant en compte des points régulièrement répartis sur les flancs actifs de trois dents successives. Des efforts sont appliqués sur chacun des points de la dent centrale, et les déplacements correspondant sont calculés sur l'ensemble des points des trois dents.

Si le nombre de points utilisés est élevé, les résultats seront précis, mais les temps de calculs très longs puisque de nombreux calculs Eléments Finis seront à réaliser. Il convient donc de connaître une estimation du nombre de points à prendre en compte pour avoir des résultats convenables en un minimum de temps. Pour cela, une étude a été réalisée en considérant les trois cas suivants :

- 1<sup>er</sup> cas : 15 points selon la largeur de denture,
- 2<sup>ème</sup> cas : 10 points selon la largeur de denture,
- 3<sup>ème</sup> cas : 7 points selon la largeur de denture.

Dans ces études, les comparaisons portent sur la raideur d'engrènement instantanée (Figure 2.47) et sur l'erreur de transmission sous charge (Figure 2.48). Parallèlement, les temps de calculs sont relevés et indiqués dans le Tableau 2.2.

Les deux jeux de courbes montrent que les résultats sont quasiment identiques pour tous les cas considérés. L'erreur entre 15 points et 7 points est de l'ordre de 1%. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un nombre de points excessivement important pour obtenir des résultats précis, avec la méthode utilisée. Pour cette faible erreur, les temps de calculs ont quant à eux été considérablement réduits, passant de plus de six heures à moins d'une heure, ce qui est non négligeable.

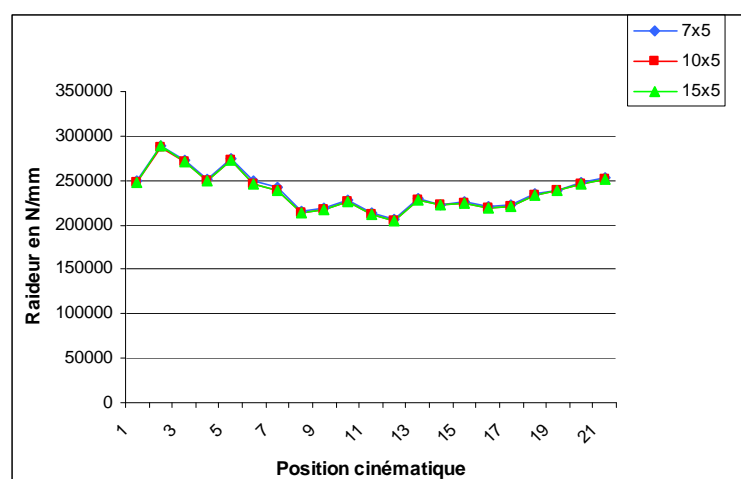


Figure 2.47 : Comparaison des raideurs d'engrènement

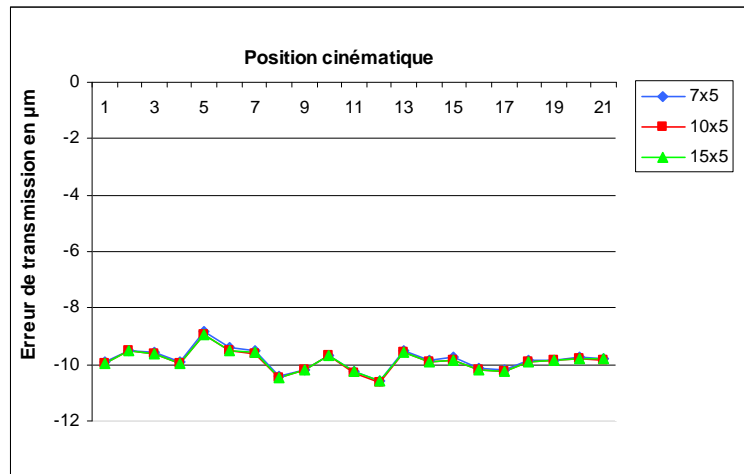


Figure 2.48 : Comparaison des erreurs de transmission

	Nombres de points		
	7x5	10x5	15x5
Temps de calcul pour le pignon	25min	2h45min	3h10min
Temps de calcul pour la roue	15min	1h40min	3h10min
Temps total	40min	4h25min	6h20min

Tableau 2.2 : Comparaison des temps de calculs

## 4.2 Influence de la direction d'application des efforts

Lors du calcul du partage de charge, une hypothèse importante a été introduite, afin de simplifier les calculs : les efforts sont appliquées selon une normale commune (normale définissant le plan tangent au contact principal à vide). Afin de vérifier si cette hypothèse peut être conservée, une comparaison entre deux cas a été réalisée :

- les efforts sont appliqués selon la normale de référence (Figure 2.49\_a),
- les efforts sont appliqués pour chaque point selon la normale à la surface initiale (Figure 2.49\_b).

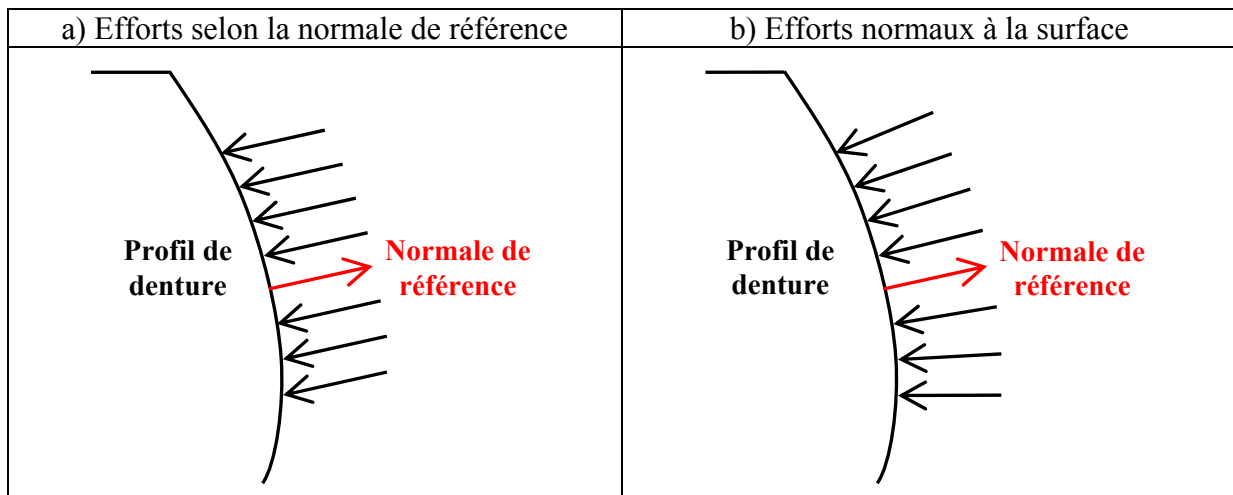


Figure 2.49 : Deux types de direction d'efforts



Les résultats ayant été comparés sont les contraintes maximales en pied de dent. En effet, les contraintes dépendent directement des résultats du partage de charge. On dissociera les contraintes maximales de traction en pied de dent du flanc actif (Figure 2.50) et les contraintes maximales de compression en pied de dent du flanc opposé (Figure 2.51). Quatre courbes sont représentées sur ces figures :

- Pignon\_A : contrainte maximale en pied de dent du pignon dans le cas où les efforts sont appliqués normalement au plan tangent,
- Pignon\_B : contrainte maximale en pied de dent du pignon dans le cas où les efforts sont appliqués normalement aux surfaces,
- Roue\_A : contrainte maximale en pied de dent de la roue dans le cas où les efforts sont appliqués normalement au plan tangent,
- Roue\_B : contrainte maximale en pied de dent de la roue dans le cas où les efforts sont appliqués normalement aux surfaces,

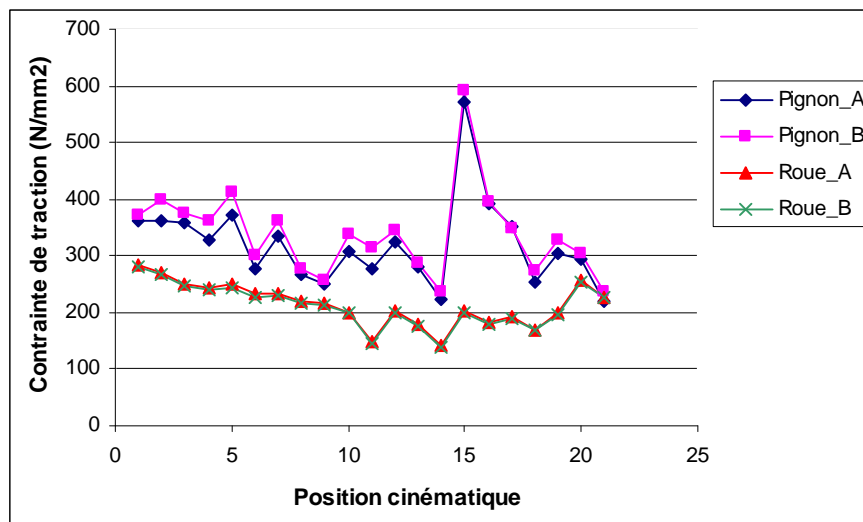


Figure 2.50 : Comparaison des contraintes de traction

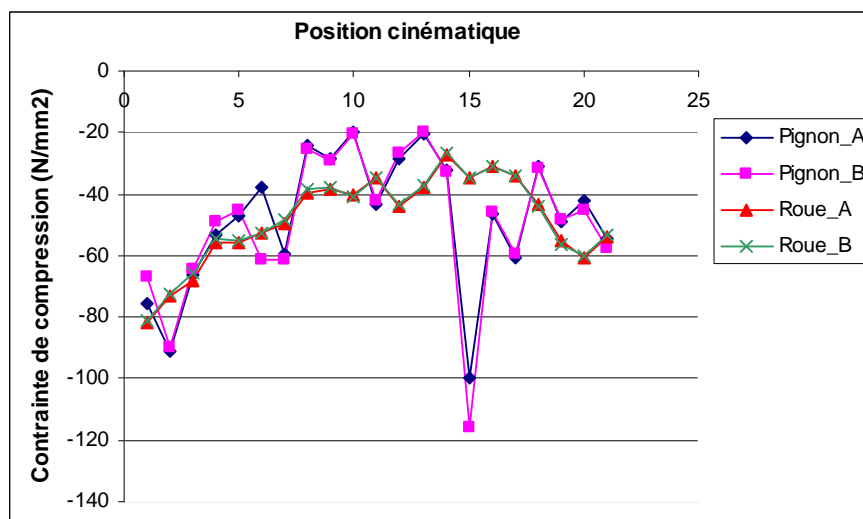


Figure 2.51 : Comparaison des contraintes de compression

Dans les deux figures présentées, l'erreur maximale est de l'ordre de 12% dans le cas du pignon, et inférieures à 4% pour la roue. L'erreur plus importante dans le cas du pignon est due au fait que ses dents sont beaucoup plus vrillées que celles de la roue. Ainsi, les normales aux surfaces sont beaucoup plus dispersées que dans le cas de la roue. Il est cependant

possible de considérer que l'approximation peut être faite, étant donné que les différences les plus importantes sont pour des positions isolées présentant un contact proche des creux de dent. Si les courbes sont considérées en faisant abstraction de la position présentant une grande différence, les erreurs sont très inférieures.

### 4.3 Influence de la hauteur de denture

Cette étude a été réalisée dans le but d'analyser l'influence de la variation de la hauteur de denture sur différentes sorties. Deux cas sont comparés :

- Denture à hauteur variable,
- Denture à hauteur constante.

Dans les deux cas, l'engrenage utilisé est à développante de sphère, dont les données principales sont celles indiquées dans le Tableau 2.3, et données par la norme NF ISO 23509 [166]. Entre les deux cas, les seuls paramètres principaux étant différents sont l'angle de tête et l'angle de pied, qui sont fixés à une valeur nulle dans le cas de la denture à hauteur constante.

Les paramètres de corrections de dentures sont choisis de façon à obtenir une portée centrée sur la denture, et dont les formes sont semblables dans les deux cas (comparativement à la forme du contour de la dent). La pression maximale (Figure 2.52), l'erreur de transmission (Figure 2.53), ainsi que le rapport de conduite obtenu par le biais du partage de charge (Figure 2.54) sont ensuite comparés.

Il ressort de ces analyses les informations suivantes :

- Pour des portées semblables, et d'environ même surface, la pression maximale dans le cas de la denture à hauteur constante est proche de celle du cas de la denture à hauteur variable (seulement 1.3% de différence seulement),
- Les erreurs de transmissions ont une valeur moyenne presque identique. Une forte différence existe cependant entre les amplitudes. Celle dans le cas de la denture à hauteur constante est 30% inférieure à celle de la denture à hauteur variable.
- De même, il ressort des courbes de partage de charge une augmentation de 20% du rapport de conduite en faveur de la hauteur constante, entre les deux cas analysés.

Symbole et désignation	Valeurs	Symbole et désignation	Valeurs
Z1 : Nombre de dents du pignon	14	khap : Coefficient de saillie	1.00
Z2 : Nombre de dents de la roue	39	khfp : Coefficient de creux	1.25
$\beta$ : Angle de spirale (degrés)	35	jn : Jeu entre dentures (mm)	0.127
Sens de la spirale du pignon	LH	xhm1 : Coefficient de déport	0.2
$\Sigma$ : Angle de renvoi (degrés)	90	xsmn : Coefficient d'épaisseur de creux	-0.2
$\alpha$ : Angle de pressions (degrés)	20	$\theta a2$ : Angle de tête de la roue (degrés)	2.134
de2 : Diamètre extérieur de la roue (mm)	176.893	$\theta f2$ : Angle de pied de la roue (degrés)	6.493
b : Largeur de denture (mm)	25.4		

Tableau 2.3 : Paramètres de l'engrenage

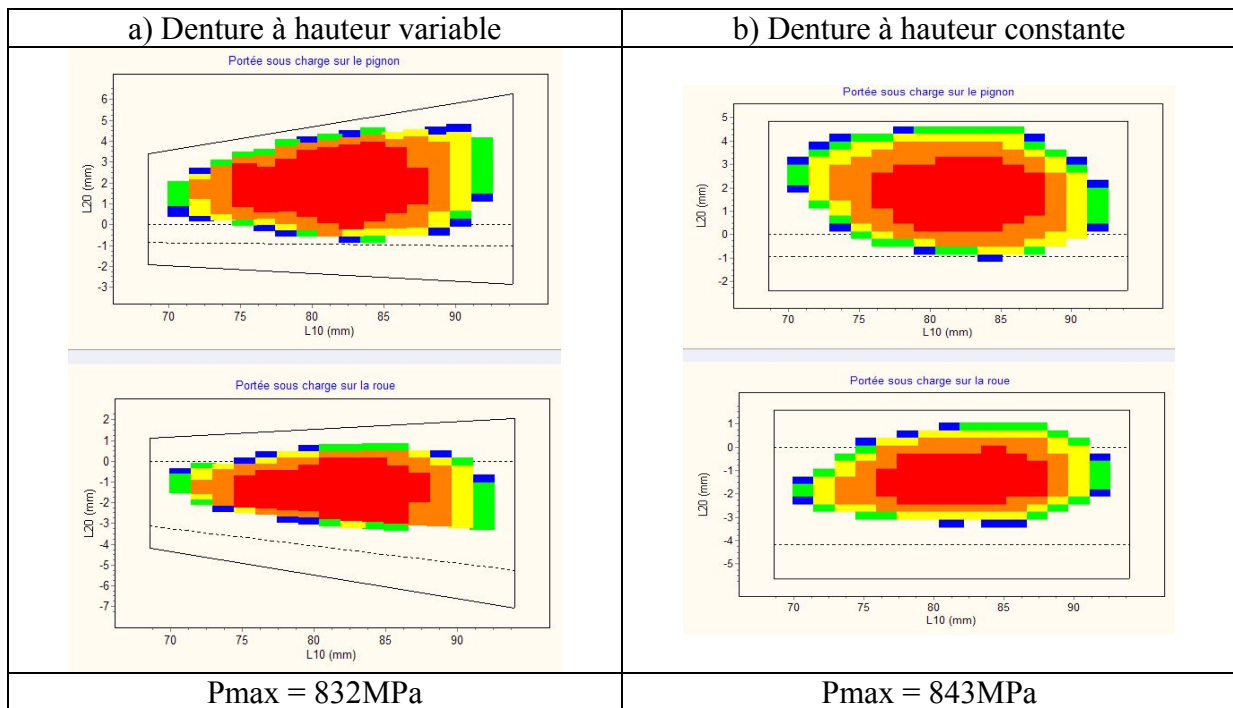


Figure 2.52 : Comparaison des portées et des pressions maximales

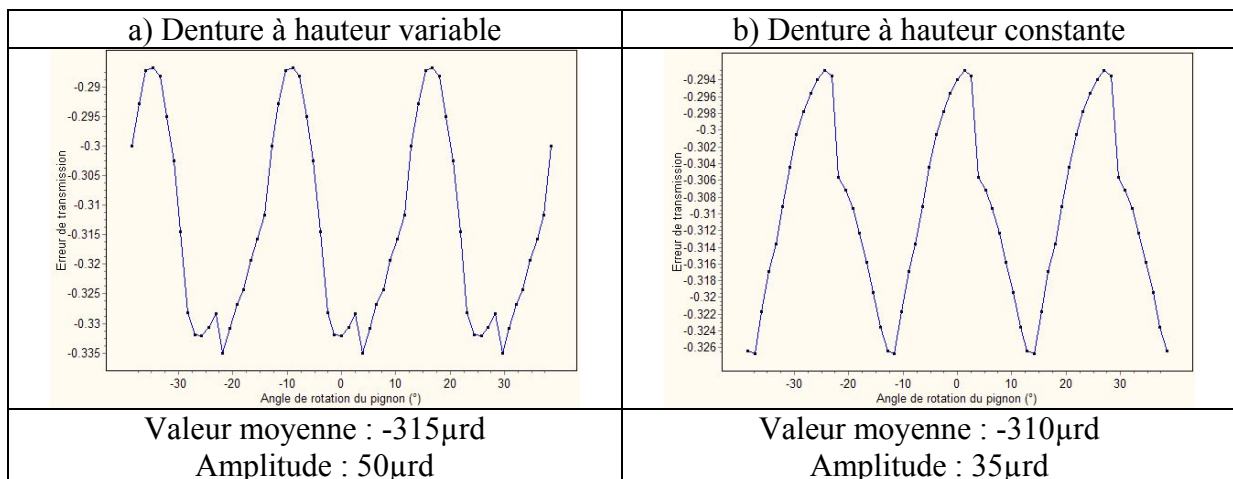


Figure 2.53 : Comparaison des erreurs de transmission

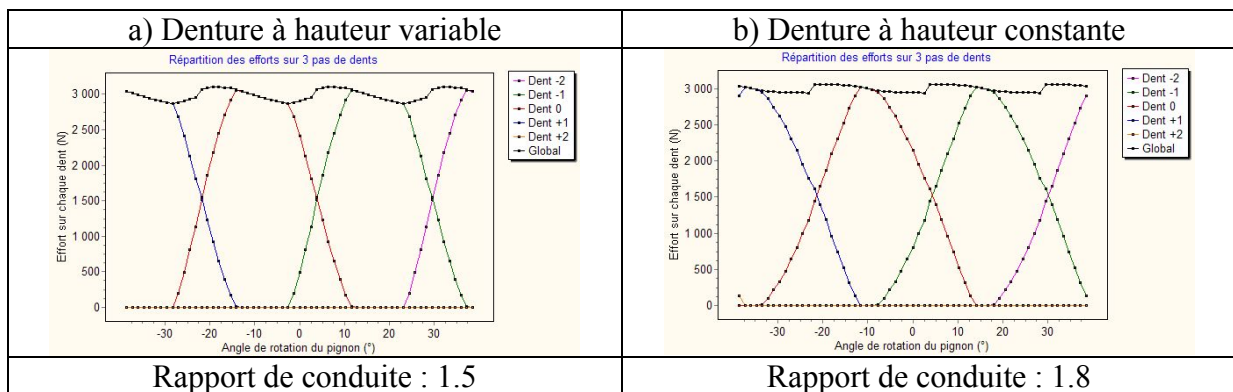


Figure 2.54 : Comparaison du partage de charge

Pour ces différentes raisons, l'engrenage présentant une denture à hauteur constante est à privilégier à celui ayant une denture à hauteur variable.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre les profils de denture précis ont pu être définis numériquement, soit en se basant sur des géométries standards, soit en développant des profils de dentures théoriques et analytiques.

Les profils de dentures standards ont été obtenus par la méthode des enveloppes, en se basant sur les mouvements de machines de taillages Gleason. Ceux-ci ont été simplifiés par rapport au cas de l'UMC (Universal Motion Control), le but étant ici d'obtenir une géométrie simplifiée des profils de denture.

Les flancs de dentures analytiques ont quant à eux été définis de manière purement théorique, afin d'être totalement indépendant des moyens de fabrication standards :

- Les profils de dentures ont été obtenus à partir de développantes sphériques. Le but était d'obtenir des engrenages spiro-coniques conjugués sur l'ensemble de la largeur de denture.
- La spirale utilisée est de type logarithmique, ce qui permet d'avoir un angle constant entre le rayon en un point et sa tangente. Ainsi, les efforts restent globalement toujours dans la même direction.
- La hauteur de denture peut être définie constante, ce qui permet d'avoir une longueur de contact plus importante. Les efforts sur les dentures se voient donc réduits.
- De plus, afin d'éviter les contacts en bords de denture, des corrections de bombé peuvent être ajoutées, ainsi que des corrections de profils pour s'affranchir des contacts en tête, qui peuvent générer des surpressions indésirables.

La combinaison de l'ensemble de ces implémentations permet théoriquement d'obtenir des engrenages qui ont un engrènement plus régulier, moins bruyant, et générant donc moins de vibrations.

Enfin, un modèle de partage de charge a été présenté, s'appuyant sur les profils de denture définis précédemment (profils standards ou analytiques). Ce modèle se base sur les équations de compatibilité des déplacements ainsi que sur la méthode des coefficients d'influence. Dans un esprit de simplicité, les effets dus à la flexion et au contact ont été séparés :

- Les effets de flexion sont estimés par la combinaison d'un calcul Eléments Finis permettant de prendre en compte tout type de géométrie (arbres, voiles, paliers, ...) et de fonctions d'interpolations qui ont permis de réduire considérablement les temps de calculs.
- Les effets de contact ont quant à eux été obtenus par la théorie de Boussinesq.

Des résultats issus du partage de charge ont été présentés, tels que les pressions de contact et l'erreur de transmission. Ces derniers permettent de nombreuses exploitations, notamment réaliser des études paramétriques qui peuvent aboutir à des lois de comportement, ou encore servir à des études dynamiques.

# Chapitre III

## Etudes expérimentales et comparaisons

---

---

### 1. Introduction

Ce chapitre présente l'ensemble des essais expérimentaux et des comparaisons réalisés. Il est composé de cinq parties principales.

L'ensemble des études expérimentales est basé sur deux géométries d'engrenages spiro-coniques différentes :

- La première correspond à un engrenage de type Gleason simplifié,
- La seconde est celle d'un engrenage à développante de sphère avec spirale logarithmique, présentée dans le Chapitre II.

Les données principales des deux cas sont présentées dans la première partie de ce chapitre.

Une seconde partie est relative à la fabrication de ces engrenages sur un centre d'usinage 5-axes. A partir de la CAO des deux géométries générées par notre modèle numérique, un logiciel de FAO a simulé les opérations d'usinage à réaliser.

La troisième partie est consacrée au contrôle des engrenages usinés. Des flancs de dents sont mesurés à l'aide d'un palpeur 3D, puis les résultats sont comparés à la CAO. Les écarts de surfaces ainsi obtenus nous permettent de quantifier la qualité de l'usinage des engrenages spiro-coniques par des machines 5-axes et ainsi de valider cette alternative par rapport aux méthodes de fabrication classiques.

Un banc d'essai a également été développé. Il est présenté dans la quatrième partie de ce chapitre. Il a pour but de réaliser des mesures d'erreurs de transmission, à vide ou sous charge, ainsi que la visualisation des portées. Des erreurs de positionnement sont également prises en compte.

A l'aide de ce banc d'essai, plusieurs séries de mesure ont été réalisées, dans différentes configurations. Le couple d'entrée, les vitesses de rotation, ainsi que les défauts de positionnement sont autant d'entrées qui peuvent être modifiées. L'exploitation de l'ensemble de ces résultats est regroupée dans la dernière partie. Les résultats expérimentaux ont été comparés au modèle numérique de l'engrènement sous charge afin de juger de sa pertinence.

## 2. Engrenages usinés

Les engrenages doivent respecter un certain nombre de contraintes. En effet, afin de pouvoir être usinés avec facilité (dimensions de l'outillage, trajectoire des outils, ...), et dans le but de pouvoir réaliser les études métrologiques par la suite (dimension des outils de mesure), certains paramètres sont imposés (Figure 3.1) :

- Diamètre extérieur de la roue  $D_{ext} < 200$  mm,
- Diamètre extérieur du pignon  $D_{ext} < 100$  mm,
- Hauteur totale du pignon ou de la roue  $H_{tot} < 50$  mm,
- Hauteur des dents  $H_{dent} < 16$  mm,
- Rayons de courbures  $R_{courb} > 0.65$  mm (notamment dans le raccordement du creux de la denture).

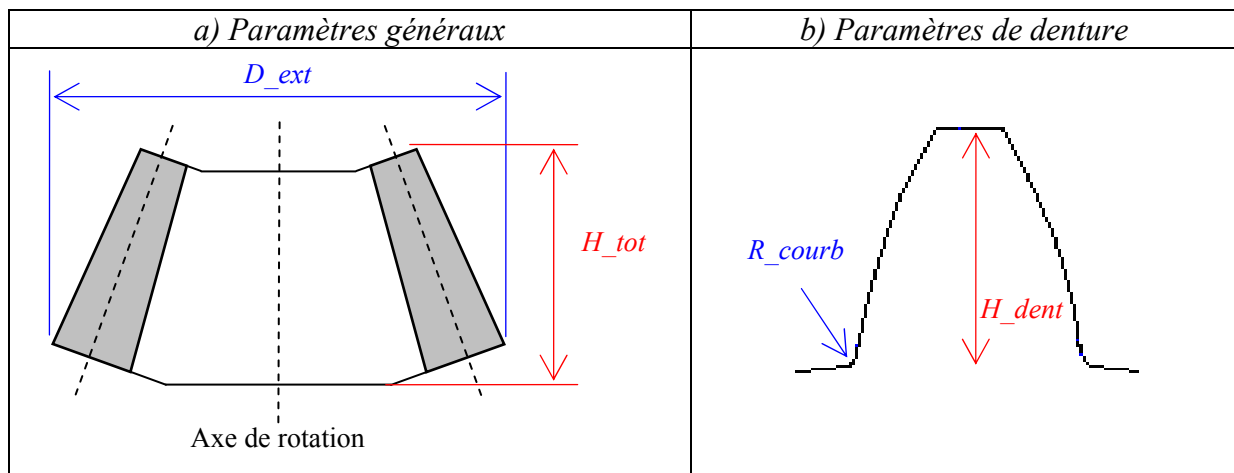


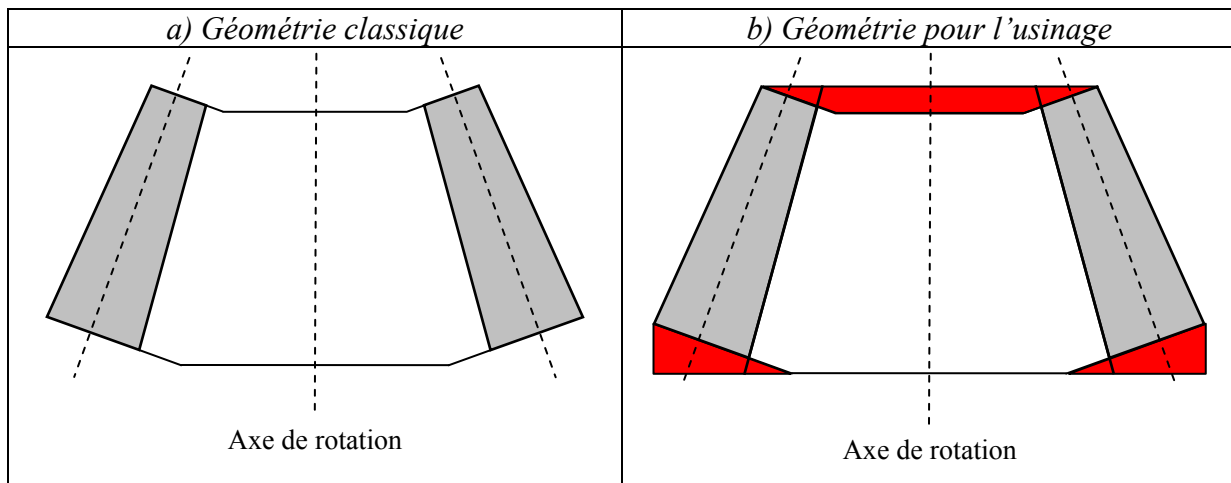
Figure 3.1 : Contraintes imposées

Les géométries sont initialement basées sur les données de la norme NF ISO 23509 [166], et sont rappelées dans le Tableau 3.1. Certains paramètres ont cependant dû être modifiés afin de pouvoir respecter toutes les conditions exposées précédemment.

Par rapport à cette norme, les nombres de dents sont réduits, afin d'augmenter le module de l'engrenage et ainsi augmenter la taille des dents. Dans le même but, le diamètre extérieur de la roue a légèrement été augmenté. Il faut cependant veiller à ne pas trop diminuer le nombre de dents afin de ne pas dépasser la hauteur limite.

De plus, les rayons de tête des outils définis par la norme ont été majorés afin d'augmenter les rayons de courbure en pied de dent, qui étaient initialement trop faibles.

Enfin, les géométries extérieures du pignon et de la roue ont été modifiées par rapport aux géométries classiques (Figure 3.2\_a). En effet, pour faciliter les processus d'usinage, les zones rouges (Figure 3.2\_b) ne sont pas usinées, puisque peu accessibles. Les creux de dents sont donc prolongés dans cette zone par rapport à la géométrie classique.



**Figure 3.2 : Modification de la géométrie extérieure**

Les paramètres principaux du pignon et de la roue de type Gleason simplifié sont regroupés dans le Tableau 3.1. Dans ce tableau, les valeurs en rouge sont celles qui ont été modifiées par rapport à la norme NF ISO 23509 [166].

Pour l'engrenage analytique, les données sont également tirées de cette norme. Certains paramètres ont cependant été modifiés par rapport à l'engrenage Gleason. En effet, les caractéristiques de l'engrenage Gleason ont été définies alors que le module de partage de charge n'était pas encore réalisé, afin de tester en parallèle la qualité de la fabrication. Il s'est avéré par la suite que les portées simulées étaient trop près de la tête de la roue. Ainsi, afin de redescendre la portée pour l'engrenage analytique, le coefficient de déport a été modifié. Par ailleurs, le coefficient d'épaisseur de creux a lui aussi été changé afin d'obtenir des épaisseurs de dentures correctes. Les données principales de l'engrenage analytique sont également présentées dans le Tableau 3.1. De plus, afin de tester la nouvelle géométrie, les angles de tête et de pied pour l'engrenage analytique ont été diminués. L'angle de tête de la roue est maintenant passé à une valeur nulle. Une valeur trop petite ne peut pas être appliquée pour l'angle de pied de la roue, sinon la largeur du creux de dent est trop faible côté petit bout, et l'usinage est impossible.

On remarquera également que les données concernant la fraise ne sont pas indiquées dans le cas de l'engrenage analytique. En effet, dans ce cas, nous faisons totalement abstraction du moyen de fabrication, il n'y a donc pas d'outil qui entre en jeu pour la définition de la géométrie.

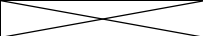
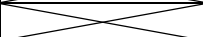
Désignation	Valeurs tirées de la Norme [166]	Valeurs pour l'engrenage Gleason	Valeur pour l'engrenage analytique
Nombre de dents du pignon	14	14	14
Nombre de dents de la roue	39	<b>37</b>	<b>37</b>
Angle de spirale (degrés)	35	35	35
Sens de la spirale du pignon	LH	LH	LH
Angle de renvoi (degrés)	90	90	90
Angles de pression (degrés)	20	20	20
Diamètre extérieur de la roue (mm)	176.863	<b>195</b>	<b>195</b>
Largeur de denture (mm)	25.4	25.4	25.4
Coefficient de saillie	1.00	1.00	1.00
Coefficient de creux	1.25	1.25	1.25
Jeu entre dentures (mm)	0.127	0.127	0.127
Coefficient de déport	0.505	0.505	<b>0.2</b>
Coefficient d'épaisseur de creux	0.046	0.046	<b>-0.2</b>
Angle de tête de la roue (degrés)	2.1342	2.1342	<b>0.000</b>
Angle de pied de la roue (degrés)	6.4934	6.4934	<b>3.000</b>
Rayon moyen de la fraise (mm)	114.3	114.3	
Rayon en tête de la fraise (mm)	0.78	0.78	

Tableau 3.1 : Paramètres du pignon et de la roue



### 3. Usinage

De façon générale, l'usinage de l'engrenage Gleason et de l'engrenage analytique sont très similaires, autant du point de vue de la simulation que de la réalisation (nombre d'outils utilisés, temps d'usinage, etc...). Ainsi, tous les résultats présentés dans cette partie sont généraux aux deux engrenages.

#### 3.1 Machine d'usinage

La machine utilisée pour la réalisation de l'usinage des engrenages spiro-coniques est une fraiseuse 5-axes de marque « Huron K2X 8 Five ». Elle est mise à disposition par le pôle AIP-PRIMECA RAO présent sur le campus. Une photo de la fraiseuse ainsi que ses caractéristiques principales sont indiquées en Annexe 5. Les cinq axes du centre d'usinage sont notés X, Y, Z, A et C et sont présentés sur la Figure 3.3.

Bien que le centre d'usinage soit de type « 5 axes », l'usinage réalisé est de type « 5 axes positionnés ». Cela signifie que la pièce est mise en position selon une certaine orientation en bloquant les 2 axes A et C (axes permettant les déplacements en rotation). Les 3 autres axes (X, Y et Z, qui sont des axes permettant des mouvements de translation), sont laissés libres afin de réaliser l'usinage.

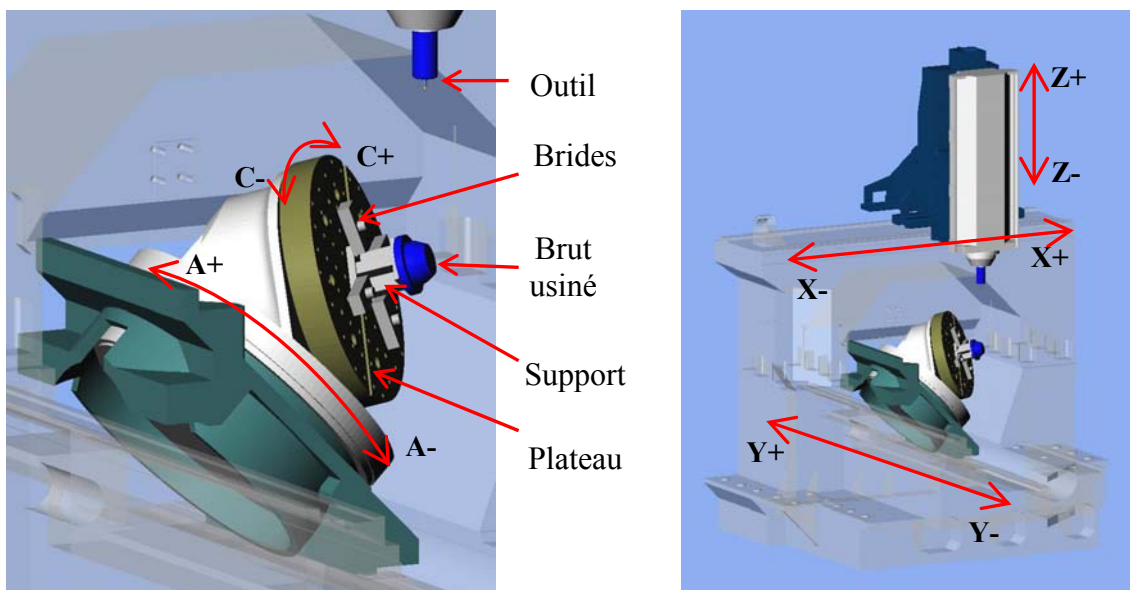


Figure 3.3 : Définition des axes du centre d'usinage

#### 3.2 Simulation d'usinage

Dans un premier temps, les modèles CAO des engrenages à usiner sont obtenus à l'aide du modèle numérique automatique développé dans Catia V5 dans le cadre de cette thèse. Ces fichiers sont ensuite importés dans le logiciel de FAO « ESPRIT » afin de pouvoir simuler l'usinage. La fraiseuse est elle aussi intégralement modélisée et intégrée dans ESPRIT, ainsi que les outils qui seront utilisés pour la fabrication.

### 3.2.1 Définition des surfaces usinées

La fabrication du pignon et de la roue est réalisée en trois étapes principales. Il convient donc de définir les surfaces usinées pour chacune d'elles. Les exemples seront donnés ici pour le cas du pignon, le principe étant similaire pour la roue :

- Tout d'abord, il faut obtenir la forme générale du pignon (forme principale conique) : les différentes surfaces correspondant à cette étape sont présentées sur la Figure 3.4, et définies comme suit :
  - La face avant (surface bleue),
  - Le cône (surface verte),
  - Le cylindre (surface rouge).

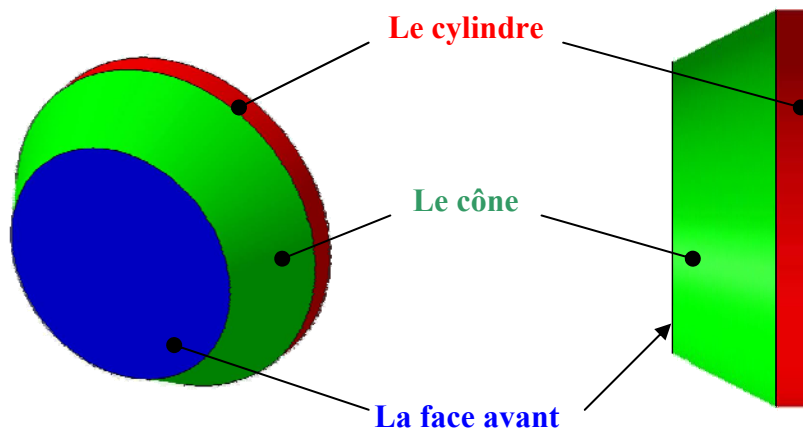


Figure 3.4 : Définition des surfaces générées lors de la 1<sup>ère</sup> étape

- Ensuite, les différents creux de denture sont réalisés. Chacun d'eux est défini par trois surfaces principales présentées sur la Figure 3.5 :
  - Le flanc droit (surface rouge),
  - Le fond de dent (surface verte),
  - Le flanc gauche (surface bleue).

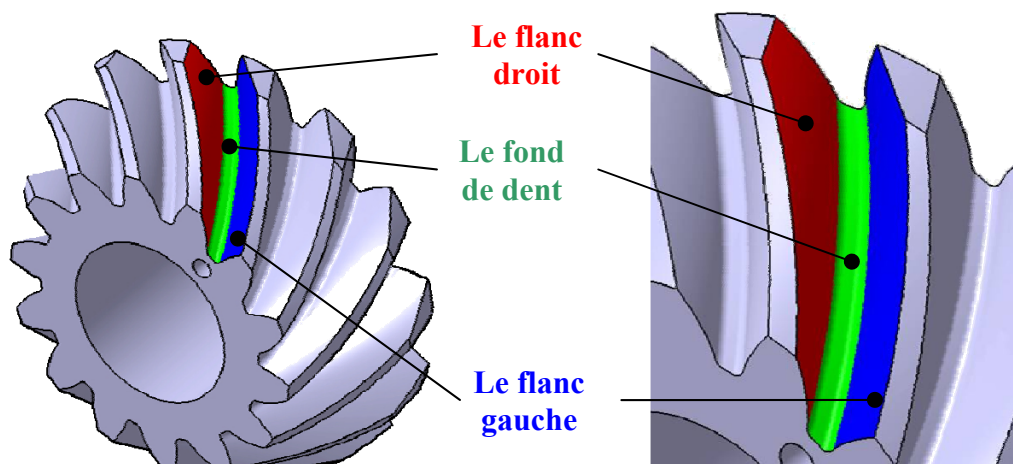


Figure 3.5 : Définition des surfaces générées lors de la 2<sup>ème</sup> étape

- Enfin, les surfaces de montage et de repérage sont réalisées. On les retrouve sur la Figure 3.6 :
  - L'alésage central (surface bleue), permettant la fixation sur l'arbre de rotation,
  - Le trou de repérage (surface rouge), dont l'utilité sera présentée ultérieurement pour le contrôle.

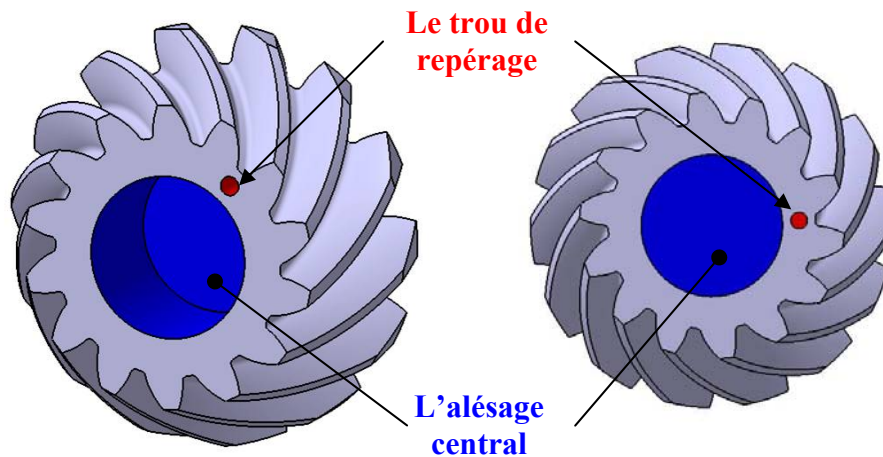


Figure 3.6 : Définition des surfaces générées lors de la 3<sup>ème</sup> étape

### 3.2.2 Outils

Les outils utilisés sont des outils standards aux procédés d'ébauche et de finition classiques. Différents types d'outils sont nécessaires à la réalisation complète de l'engrenage. Ils peuvent être regroupés en 3 catégories différentes, et seront par la suite intégrés dans le logiciel de FAO :

- Les fraises 2 tailles à plaquettes,
- Les fraises 2 tailles monobloc,
- Les fraises hémisphériques monobloc.

Ces outils ainsi que leur utilité sont décrits dans l'Annexe 6.

### 3.2.3 Différentes opérations

Les opérations d'usinage sont réparties en deux groupes distincts :

- 6 **opérations générales**, réalisées une seule fois, permettant d'obtenir la forme générale conique du pignon (ou de la roue).
- 12 **opérations de denture** pour réaliser les creux de dents.

Ces 18 opérations sont simulées à l'aide du logiciel de FAO ESPRIT, qui génère le code ISO ensuite transféré à la machine UGV 5axes. Le détail de ces opérations se trouve en Annexe 7.

Deux opérations supplémentaires, qui ne sont réalisées qu'une seule fois, sont obtenues en travaillant directement sur la machine 5 axes. Il s'agit de la réalisation de l'alésage central et du trou de repérage permettant de recaler le pignon pour les opérations de contrôle.

### 3.3 Usinage sur machine 5 axes

#### 3.3.1 Opérations d'usinage

Afin de faciliter l'usinage de l'engrenage, il est nécessaire de l'éloigner du plateau du centre d'usinage (pour éviter les risques de collision entre le porte-outil et le plateau). Un support a donc été réalisé, adapté pour l'usinage du pignon et celui de la roue. La mise en position du brut est décrite en Annexe 8.

Une fois le brut de l'engrenage fixé sur le support, l'engrenage est usiné selon le processus détaillé précédemment. La Figure 3.7 présente la réalisation des opérations d'usinage OP3 et OP9 du pignon (voir Annexe 7). La première image (Figure 3.7\_a) correspond à une opération de préparation de la forme conique du pignon. La seconde image (Figure 3.7\_b) présente une opération réalisant le creux de dent.

a) Réalisation de l'opération OP3



b) Réalisation de l'opération OP9

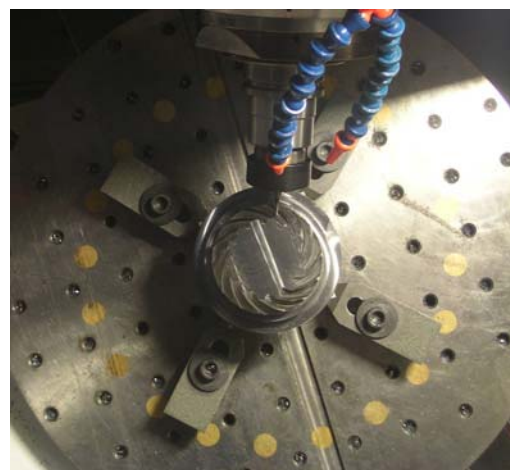


Figure 3.7 : Exemple d'opérations d'usinage sur le pignon

La roue et le pignon étant destinés à être montés sur un arbre à l'aide d'un moyeu expansible, un alésage précis doit être réalisé au centre. De plus, afin d'être parfaitement centré par rapport aux dents, les alésages sont réalisés sans démontage de la roue.

Ensuite, en vue de réaliser une métrologie des surfaces des dentures du pignon et de la roue, un repère est défini, permettant de recalibrer les mesures sur le pignon réel par rapport au modèle CAO. Ce repère est un trou positionné en face du premier creux usiné (cf. Figure 3.8).

La dernière étape est l'usinage de la partie arrière, afin d'obtenir la hauteur souhaitée.

La Figure 3.8 présente des photos du pignon et de la roue une fois terminés. L'engrenage peut maintenant être utilisé : soit pour être mesuré, soit pour être monté sur banc d'essai.

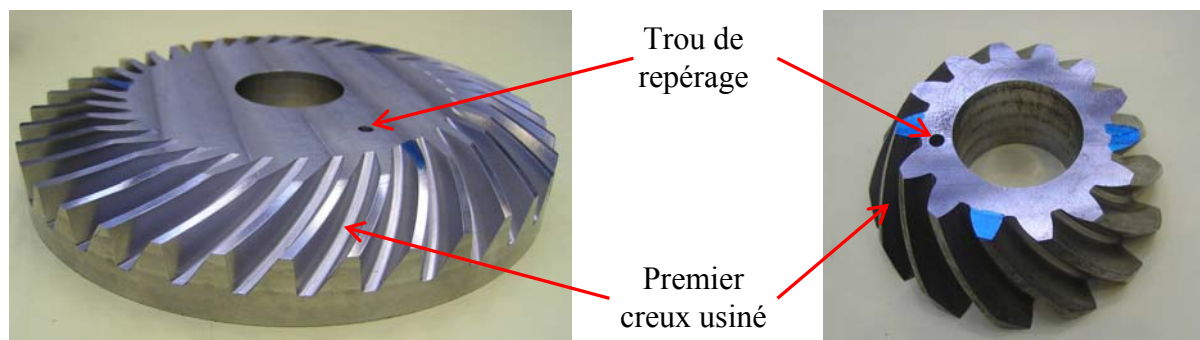


Figure 3.8 : Pignon et roue usinés

### 3.3.2 Outils utilisés

L'usinage des creux de dent du pignon aura nécessité des outils de différents diamètres, notamment des fraises deux tailles (noté « Fraise 2T » dans les tableaux suivants) de diamètres 4, 3 et 2mm, ainsi que des fraises hémisphériques de diamètre 1.5mm. Pour rappel, le Tableau 3.2 précise, pour chaque opération, quel outil est nécessaire. A cause de l'usure normale des outils, il n'est parfois pas possible de faire toutes les opérations avec la même fraise. L'usure est vérifiée manuellement, en regardant l'état des dents des fraises. L'Annexe 9 fait un recensement du nombre d'outils utilisés pour chaque opération.

Opération	OP7/8	OP9	OP10	OP11/12	OP13/14/15	OP16/17/18
Outil	Fraise 2T 4mm	Fraise 2T 3mm	Fraise 2T 2mm	Fraise 2T 3mm	Fraise 2T 2mm	Fraise hémi. 1.5mm

Tableau 3.2 : Outils utilisés pour chaque opération

### 3.3.3 Temps d'usinage

Lors des simulations d'usinage réalisées avec le logiciel de FAO ESPRIT, une estimation de la durée d'usinage est donnée pour chaque opération. Ces estimations sont rassemblées de façon générale dans les tableaux suivants, et comparées avec les durées réelles d'usinage. Le détail de chaque opération est donné à titre indicatif dans l'Annexe 10.

Le Tableau 3.3 résume les durées d'usinage des différentes étapes du pignon, et le Tableau 3.4 celles la roue.

Opération	OP1 à OP6	OP7 à OP18	Total
Estimation ESPRIT	20min	6h50	≈7h
Temps réel	20min	9h30min	≈10h

Tableau 3.3 : Temps d'usinage du pignon

Opération	OP1 à OP6	OP7 à OP17	Total
Estimation ESPRIT	1h	16h	17h
Temps réel	1h	24h	25h

Tableau 3.4 : Temps d'usinage de la roue

Les différences entre les estimations ESPRIT et la réalité proviennent principalement du fait que le logiciel ne gère pas les accélérations. En effet, lors d'un déplacement réel, le passage d'une vitesse nulle à une vitesse de déplacement imposée se fait progressivement, alors qu'ESPRIT passe instantanément d'une vitesse à l'autre. Ainsi, pour les opérations nécessitant de nombreux changements de vitesses, le temps estimé par ESPRIT sera très inférieur à la durée d'usinage réelle. C'est le cas pour les opérations OP13 à OP18, qui sont principalement des opérations où l'outil usine suivant une trajectoire unidirectionnelle. L'outil fait donc de nombreux allers-retours, dont la moitié des déplacements sans usiner (l'aller en déplacement d'usinage lent, et le retour en déplacement rapide pour changer de position).

Les durées présentées précédemment correspondent seulement au temps d'usinage propre, et ne prennent pas en compte le temps pris pour réaliser les taraudages de départ (permettant de fixer le brut sur le montage), ni pour la mise en place de l'ensemble sur le centre d'usinage. Le temps pris pour monter et mesurer les différents outils ne sont pas non plus intégrés.

Les temps d'usinages sont très longs. Cependant, l'objectif ici n'était pas d'optimiser les durées de fabrication. Le but des travaux était de montrer que ce type de fabrication est possible pour des couples d'engrenages spiro-coniques. Avec l'utilisation de fraises de formes, les temps pourraient être considérablement réduits.

Enfin, lors de cette étude de faisabilité, aucun traitement thermique de surface n'est prévu. Les flancs de dentures ne seront donc pas rectifiés dans ces travaux, mais cette opération est envisageable avec l'utilisation de petites meules.

## 4. Métrologie

Certains flancs de dentures ont été mesurés afin de juger de la qualité de l'usinage. Les mesures ont été réalisées au service Unité Métrologie Qualité (UMQ) installée à l'INSA de Lyon.

### 4.1 Machine de mesure

L'UMQ est en possession d'un palpeur MMT 3D ZEISS (Figure 3.9). Cette machine permet de réaliser des mesures par contact, par l'intermédiaire d'un bras principal possédant à son extrémité une ou plusieurs sondes (palpeurs à bille). La précision des mesures est le micromètre.

Les palpeurs permettent un déplacement en translation tridimensionnel :

- Le support du bras se déplace sur le bâti selon la largeur de la machine (A),
- Le bâti se déplace sur le marbre, selon la profondeur de la machine (B),
- Le bras se déplace dans son support verticalement (C).

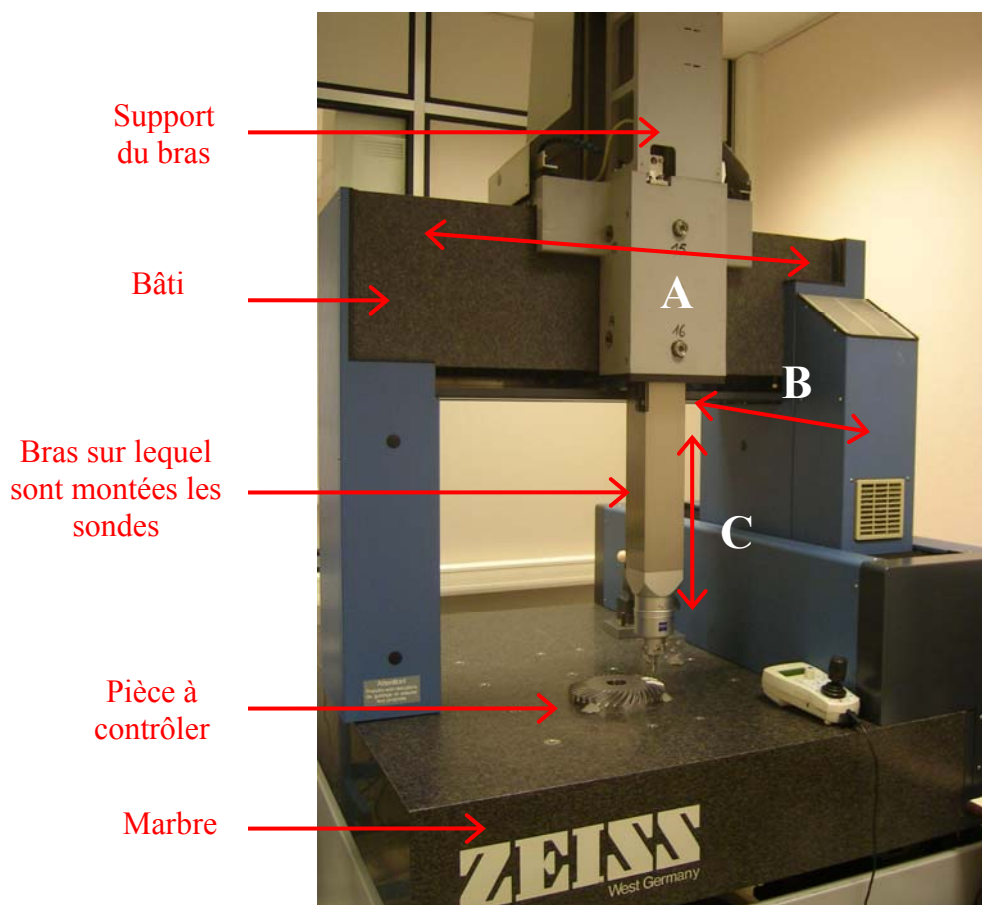


Figure 3.9 : Machine MMT 3D ZEISS

## 4.2 Principe de mesure

### 4.2.1 Définition du repère de travail

Afin de pouvoir effectuer correctement les mesures sur le pignon et la roue, il convient de définir un repère de travail. Ce repère est défini comme suit sur le pignon (Figure 3.10). Il est établi de la même manière pour le cas de la roue :

- La face avant du pignon sert de plan de référence. La normale à ce plan correspond à l'axe Z, dirigé vers le haut,
- Le centre de l'alésage central permet de définir, au niveau du plan de référence, l'origine du repère,
- La direction de l'axe X est donnée par le centre du trou de repérage,
- Enfin, l'axe Y correspond à la troisième direction formant un trièdre direct.

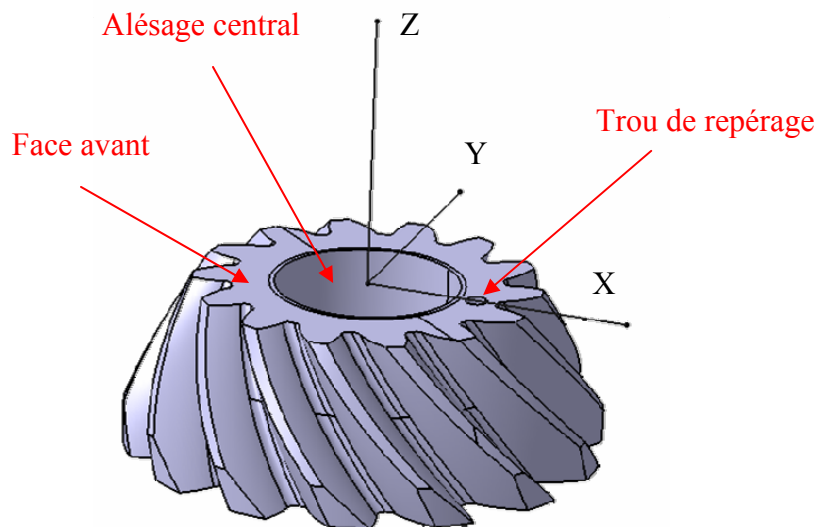


Figure 3.10 : Définition du système d'axes du repère sur le pignon usiné

### 4.2.2 Dents à mesurer

Trois dents du pignon seront mesurées sur leur flanc concave et convexe. La première dent à mesurer est celle qui est alignée avec le trou de référence. Les deux autres dents sont décalées de 90 degrés environ (Figure 3.11). Dans le cas de la roue (Figure 3.12), les dents sont espacées d'environ 120 degrés.



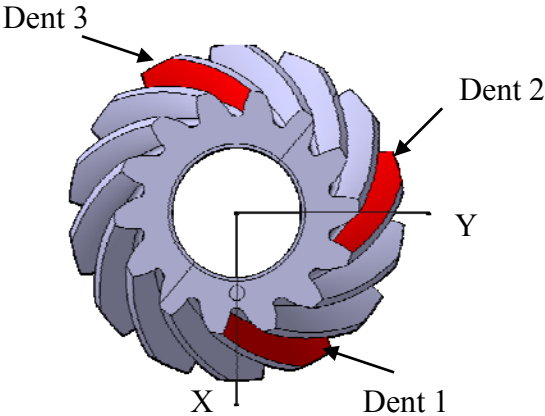


Figure 3.11 : Dents à mesurer sur le pignon

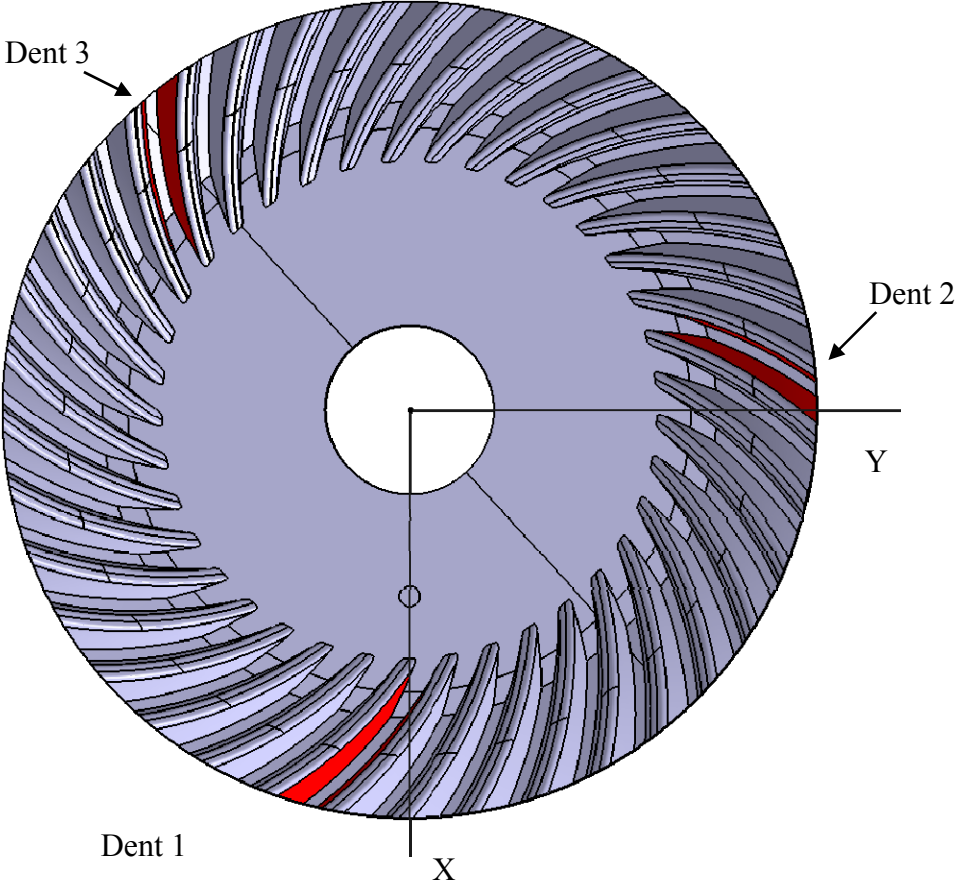


Figure 3.12 : Dents à mesurer sur la roue

### 4.2.3 Distribution des points à mesurer

Sur chacun des 6 flancs de denture considérés, 35 points de mesure sont régulièrement répartis, comme indiqué sur la Figure 3.13 :

- 7 points selon la largeur de denture,
- 5 points selon la hauteur de denture.

Une marge de sécurité est gardée pour que les points ne soient pas directement situés sur les bords de denture :

- Selon la largeur, les valeurs minimales et maximales seront respectées. En effet, les points sont répartis dans la zone classique de définition de la denture (zone grisée), alors que pour des raisons de facilité d'usinage, la forme du creux de denture est prolongée jusqu'aux bords du cône de définition (contour en rouge),
- Au niveau de la tête, une distance de 0.5mm est respectée.
- Une distance de 2mm par rapport au pied de dent est définie, afin que le palpeur utilisé pour les mesures ne vienne pas en contact avec le fond de dent.

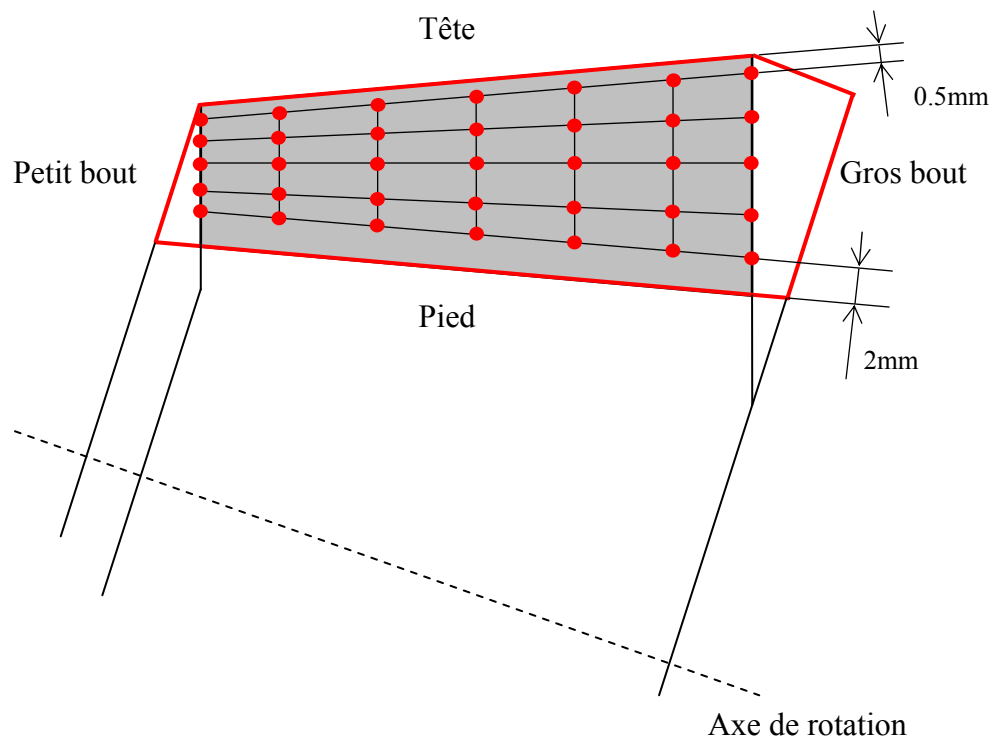


Figure 3.13 : Distribution des points sur la projection des dentures

### 4.2.4 Contrôle automatique des points

Une fois le repère défini, chaque point de chaque flanc est successivement palpé automatiquement (Figure 3.14) de la façon suivante, après une programmation définie à partir de la CAO :

- Approche et mise en position de la sonde en face du point à mesurer, à une certaine distance de sécurité (afin d'éviter d'être en contact direct avec le flanc),
- Déplacement de la sonde suivant la normale définie pour le point courant de la CAO,
- Lorsqu'il y a contact, obtention des coordonnées du point mesuré.

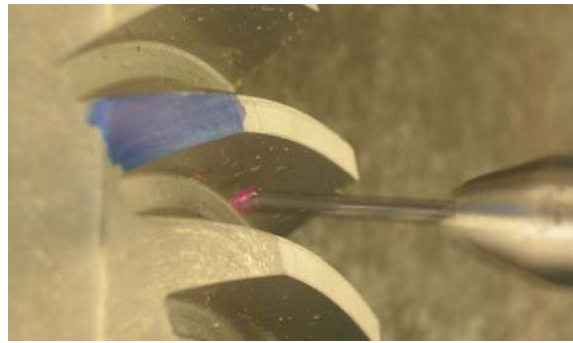


Figure 3.14 : Contrôle d'un point

Ainsi, connaissant les coordonnées données par la CAO pour le point analysé et celles du point mesuré, l'écart d'usinage est simplement la distance entre ces deux points, mesurée suivant la normale sortante de la surface CAO. De plus, la valeur définissant l'écart entre les deux points aura un signe (Figure 3.15) : si trop de matière a été enlevé en un point (cas a), l'écart obtenu sera négatif ; dans le cas inverse (cas b), l'écart sera positif.

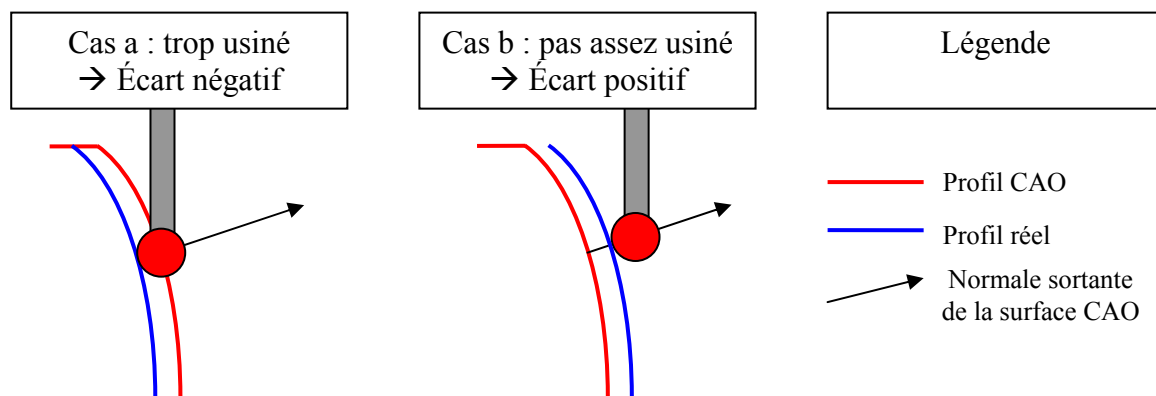


Figure 3.15 : Signe de l'écart mesuré

### 4.3 Résultats

Dans cette partie les résultats du cas de la roue de l'engrenage Gleason sont présentés (Figure 3.17). Les autres résultats (pignon et roue des engrenages Gleason et analytiques) sont regroupés dans l'Annexe 11).

Une fois les mesures réalisées, une cartographie des écarts de surface peut être obtenue. Les résultats seront représentés sur une zone centrale trapézoïdale correspondant à la projection de la surface de référence définie par la CAO sur un plan radial passant par l'axe de l'élément contrôlé (zone grisée de la Figure 3.13, par exemple).

La définition du plan radial a été présentée au Chapitre II et est rappelée ici. Il s'agit du plan passant par l'axe de rotation et par le point milieu (sur le cône primitif) du flanc de référence. Une représentation de ce plan est présentée sur la Figure 3.16.

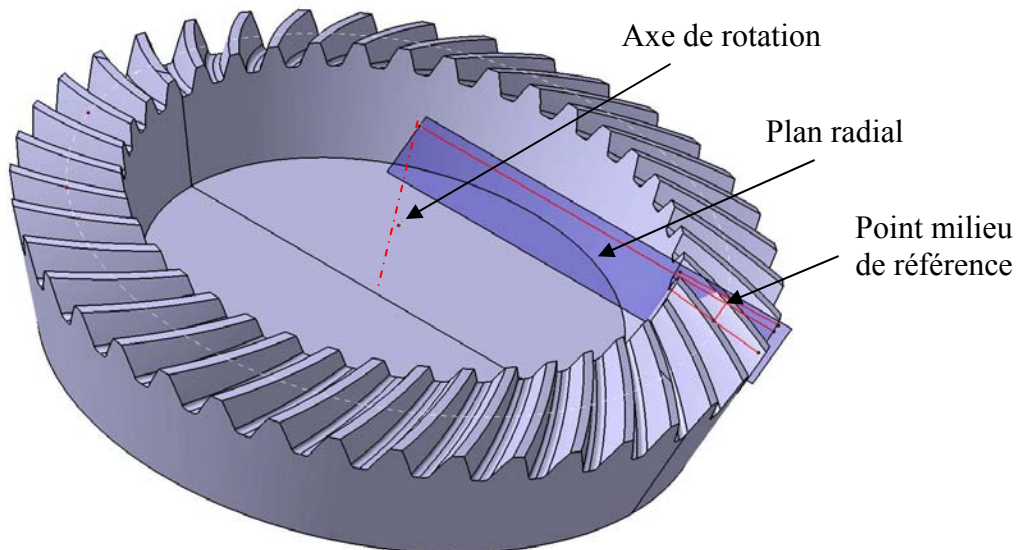


Figure 3.16 : Présentation du plan de projection

Dans tous les cas analysés, que ce soit pour l'engrenage Gleason ou analytique, les erreurs ont une amplitude de l'ordre de 10 à 20 $\mu\text{m}$ . Les erreurs les plus importantes sont situées principalement sur les bords de dentures, et non pas sur les parties actives des flancs. Elles sont probablement dues aux bavures qui ont été éliminées simplement avec une lime. Ainsi, pour notre étude de faisabilité, ces valeurs répondent à notre attente, d'autant plus que les surfaces ont été mesurées directement après usinage, sans aucun rodage ou aucune rectification.

Ainsi, dans notre contexte de travail, l'usinage est un succès étant donné les bonnes précisions sur les cotes des flancs. L'usinage des engrenages spiro-coniques par fraiseuse 5-axes est donc validé comme méthode de fabrication alternative aux méthodes classiques de type Gleason ou Klingelnberg.

Par ailleurs, une étude de rugosité a été réalisée sur une dent de la roue. Pour cela, une zone carrée de 2 à 3 mm de côté a été scannée au centre des deux flancs de la dent de référence de la roue. Trois types de rugosité ont été mesurés :

- la rugosité longitudinale (selon la largeur de denture) :  $Ra_{long}$ ,
- La rugosité transversale (selon la hauteur de denture) :  $Ra_{trans}$ ,
- La rugosité de surface :  $Sa$ .

Des mesures de  $Ra_{long}$  ont été réalisées pour différentes hauteurs dans la zone de mesure. Il est de même pour  $Ra_{trans}$ , où les flancs ont été mesurés à différentes positions selon la largeur de denture, dans la zone de traitement.

Les valeurs de rugosités mesurées sont indiquées ci-dessous :

- Flanc concave de la roue
  - o  $0.750\mu\text{m} < Ra_{long} < 1\mu\text{m}$
  - o  $0.650\mu\text{m} < Ra_{trans} < 0.850\mu\text{m}$
  - o  $Sa = 1.050 \mu\text{m}$
- Flanc convexe de la roue
  - o  $0.580\mu\text{m} < Ra_{long} < 1\mu\text{m}$
  - o  $0.500\mu\text{m} < Ra_{trans} < 0.650\mu\text{m}$
  - o  $Sa = 0.800 \mu\text{m}$

En faisant le parallèle avec les engrenages cylindriques, cela pourrait correspondre à une classe de qualité DIN 6, ce qui est correct pour une denture non rectifiée.

Cependant, les temps d'usinage prohibitifs rendent l'utilisation des machines 5 axes peu adaptée, notamment pour la réalisation de grandes séries. Des perspectives de travaux consisteraient à optimiser la fabrication, notamment en se focalisant sur des outils spéciaux, par exemple des fraises de formes ou des outils à plaquettes.

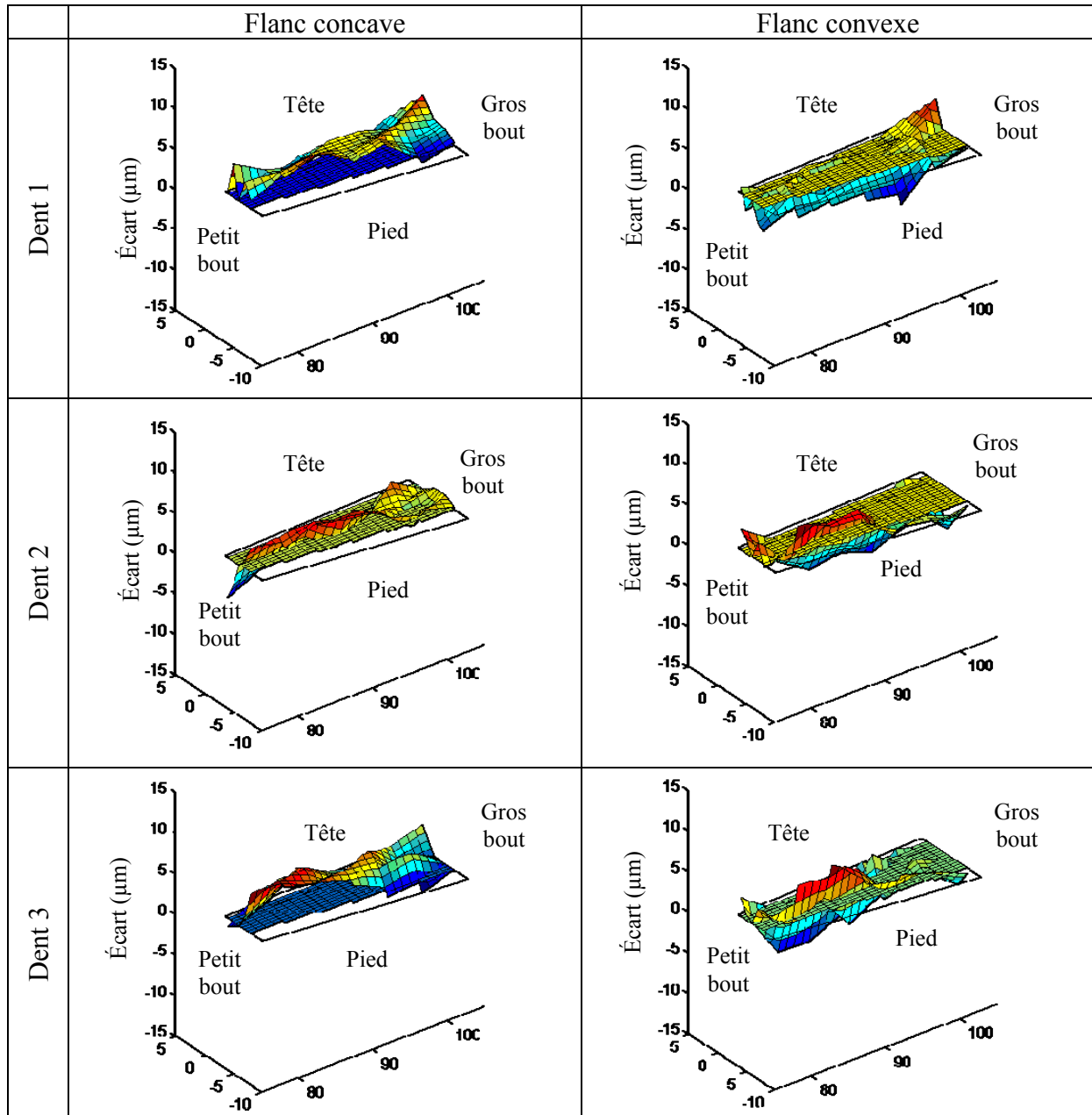


Figure 3.17 : Ecart entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue Gleason

## 5. Banc d'essai

Afin de valider les modèles numériques, un banc d'essai a été développé dans le cadre de cette thèse. Ce dernier permet de mesurer l'erreur de transmission et de visualiser la portée.

L'erreur de transmission correspond au déphasage de la roue menée par rapport à sa position théorique. Cette dernière est donnée par le rapport des nombres de dents, en fonction de la position du pignon moteur. La roue peut être en avance ou en retard par rapport à cette position théorique. Ce déphasage peut être dû à la combinaison de différents phénomènes :

- défauts sur les profils de dentures,
- corrections de dentures,
- défauts d'usinage,
- erreurs de montages,
- déformations des dents ou de leurs supports sous l'effet de la charge,
- etc.

Les positions précises du pignon et de la roue sont mesurées sur le banc d'essai à l'aide de codeurs optiques rotatifs placés sur leur arbre respectif. Un traitement numérique des signaux mesurés permet ensuite d'obtenir l'erreur de transmission.

### 5.1 Conception du banc

#### 5.1.1 Eléments principaux du banc

Le modèle numérique développé dans cette thèse pour étudier le comportement sous charge prend en compte différentes erreurs de positionnement. Il nous a semblé intéressant de pouvoir les reproduire sur le banc, d'autant plus que l'engrènement de ce type d'engrenage y est très sensible.

Afin de pouvoir générer facilement et précisément des défauts de positionnement entre le pignon et la roue, le banc d'essai est monté sur une fraiseuse numérique 3 axes. En effet, une fois le banc positionné sur la fraiseuse (le pignon sur la broche et la roue sur le plateau), les défauts axiaux pourront être appliqués directement avec l'utilisation du panneau de commande de la machine (Figure 3.18).

Cependant, avec l'utilisation de la fraiseuse, tous les défauts de montage ne pourront pas être appliqués. Seuls les trois défauts classiques suivants pourront être appliqués :

- erreur axiale du pignon,
- erreur axiale de la roue,
- offset.



Figure 3.18 : Présentation du banc de la fraiseuse

L'ensemble des éléments du banc d'essai (Figure 3.19) peut être décomposé en deux parties principales :

- l'arbre moteur, vertical, qui comprendra le pignon et un codeur optique,
- l'arbre récepteur, composé de la roue, d'un couplème, d'un frein magnétique, de deux accouplements et d'un codeur optique.

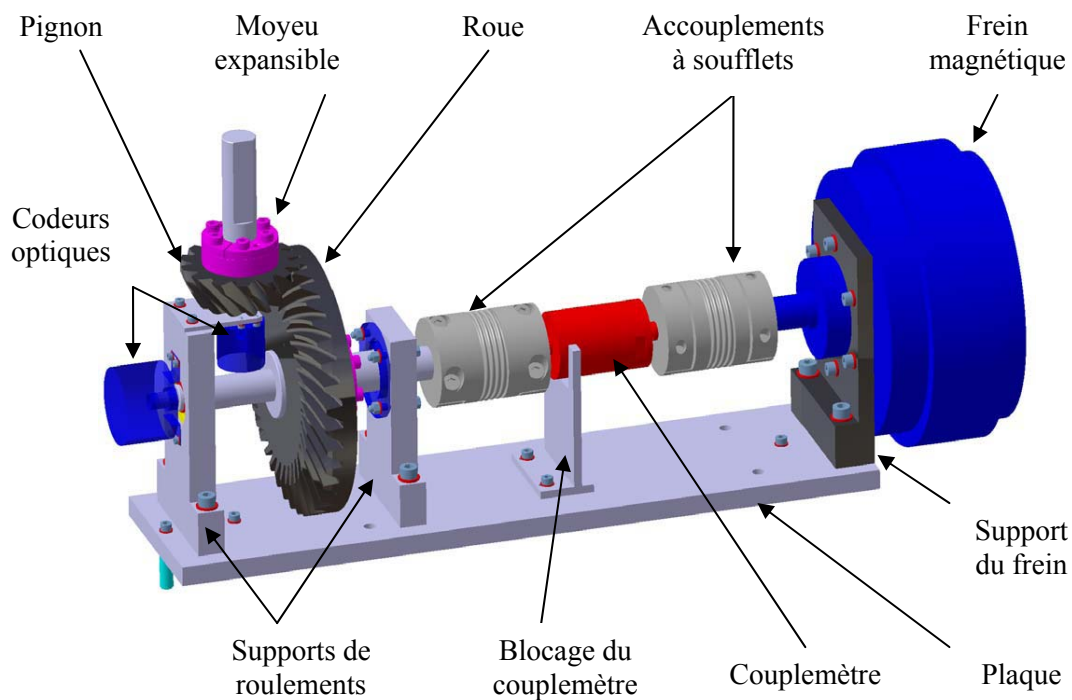


Figure 3.19 : Eléments principaux du banc d'essai

Le pignon est monté sur un arbre par l'intermédiaire d'un moyeu expansible. Cet arbre est fixé à la broche de la fraiseuse par l'intermédiaire d'un porte-outil. L'ensemble sera donc mis en rotation par le moteur de la fraiseuse numérique.

L'arbre récepteur supporte également la roue avec un moyeu expansible. Il sera guidé en rotation à l'aide de deux roulements à billes montés dans des supports. Dans le prolongement de l'arbre récepteur se trouvent un couplemètre et le frein à poudre magnétique pour mettre une charge dans le système. Suite aux recommandations du fournisseur du couplemètre, les deux accouplements permettant de le relier avec l'arbre récepteur et le frein sont réalisés par des accouplements à soufflets semi-rigides clavetés. De plus, il faut veiller à bloquer le couplemètre en rotation afin d'éviter que les fils ne s'enroulent lors du fonctionnement du banc.

Les deux supports contenant les roulements, le support du frein et la pièce permettant de bloquer la rotation du couplemètre sont fixés sur une plaque qui est maintenue sur la table de la fraiseuse par 4 brides de serrage.

Le montage global comporte par ailleurs les deux codeurs permettant la mesure de la position angulaire du pignon et de la roue. Ces codeurs sont placés au plus près de ces derniers et à des endroits où les arbres ne sont pas sollicités en torsion, afin de réduire les erreurs de mesure.

L'objectif étant de monter le banc d'essai directement sur la table la machine CNC, il est nécessaire de réduire au maximum l'encombrement du banc et sa masse afin de faciliter sa mise en place. La plaque portant tous les supports étant destinée à être maintenue à la table de la fraiseuse par 4 brides, elle se déformera très peu. Elle a donc été fabriquée en aluminium pour réduire le poids de l'ensemble. Les différents supports sont en acier afin d'être suffisamment rigides.

Les caractéristiques des éléments mécaniques du banc sont détaillées en Annexe 12.

### **5.2 Mise en position du banc d'essai**

Afin de pouvoir définir des erreurs de montage précises en déplaçant la broche de la fraiseuse, il faut dans un premier temps que le banc d'essai soit précisément positionné sans défaut. Toutes les erreurs de montage ne peuvent cependant pas être contrôlés parfaitement, c'est par exemple le cas de l'angle de renvoi.

Afin de définir les repères de travail permettant la mise en position correcte du pignon par rapport à la roue, une procédure détaillée en Annexe 14 a été établie. Elle consiste à venir détecter plusieurs éléments du banc à l'aide d'un palpeur afin de recalibrer les différents axes par rapport à une position théorique.

### **5.3 Système d'acquisition**

Le système d'acquisition est composé de différents éléments principaux, présentés en Annexe 13. On retrouve notamment :

- Un boîtier codeur,
- Un boîtier couplemètre,
- Un rack d'acquisition.



### 5.3.1 Informations de sortie

Les codeurs optiques ont une résolution de 1024 raies, c'est-à-dire qu'une mesure est réalisée toutes les  $1/1024$  tours (environ 0.352 degrés). Le rack d'acquisition possède une horloge interne calibrée à  $F_{horloge} = 80\text{MHz}$ .

Il est alors possible, pour chacun des deux codeurs, de connaître le nombre d'impulsions  $N_i$  entre deux fronts montants de codeurs successifs  $F_i$  et  $F_{i+1}$ ,  $i$  allant de 1 à  $N$ ,  $N$  étant le nombre de points successifs mesurés, défini par l'utilisateur. Ce sont toutes ces valeurs  $N_i$  qui sont enregistrées dans les fichiers de sorties. Ces notations, ainsi que la mise en parallèle des signaux d'un codeur et de l'horloge interne, sont représentées sur la Figure 3.20.

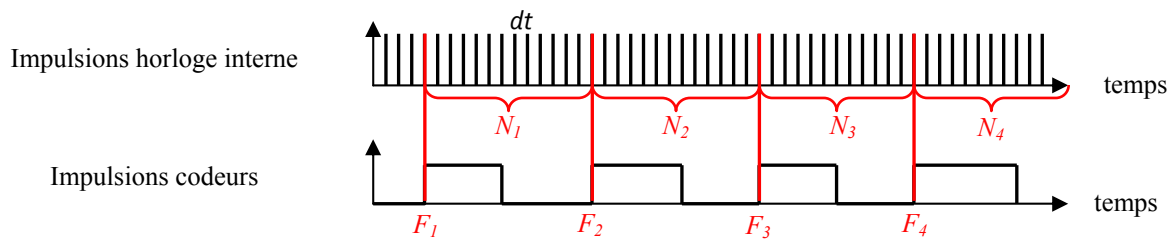


Figure 3.20 : Signaux des codeurs et de l'horloge interne

Connaissant la fréquence de l'horloge interne du rack d'acquisition, le temps entre deux impulsions de cette horloge interne est également connu, et défini par :  $dt = 1/F_{horloge}$ . Le temps entre deux fronts montants de codeurs peut également être déduit par la relation :  $dt_i = N_i \cdot dt$ . Ainsi, nous définissons la courbe discrète position/temps pour le pignon et la roue (cf. Figure 3.21).

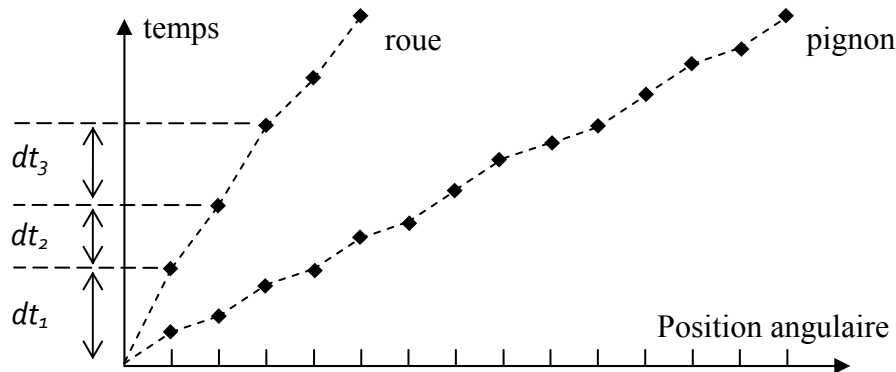


Figure 3.21 : Courbe position/temps du pignon et de la roue

Il est à noter qu'au bout d'une même durée, plus de points sont présents sur la courbe du pignon que sur celle de la roue. En effet, lors de l'engrènement, le pignon tourne plus vite que la roue, les fronts montants de codeurs sont donc plus nombreux.

### 5.3.2 Erreur de transmission

#### 5.3.2.1 Calcul de l'erreur de transmission

L'erreur de transmission, calculée sur la roue, est obtenue en quatre étapes à partir des deux courbes discrètes position/temps précédentes :

- 1 : interpolation des données discrètes par des splines,
- 2 : pour les positions du pignon  $\theta_{\text{pig}}$  voulus, détermination du temps approximé  $t_{\text{pig\_approx}}$  (chemin bleu sur la Figure 3.23),
- 3 : au même instant, pour  $t_{\text{roue}} = t_{\text{pig\_approx}}$ , détermination de la position approximée de la roue  $\theta_{\text{roue\_approx}}$  (chemin rouge sur la Figure 3.22),
- 4 : calcul de l'erreur de transmission  $\Delta\theta_{\text{roue}}$  par la relation :

$$\Delta\theta_{\text{roue}} = \theta_{\text{roue\_approx}} - \theta_{\text{roue\_théorique}} = \theta_{\text{roue\_approx}} - \frac{Z_1}{Z_2}\theta_{\text{pig}}$$

où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont les nombres de dents du pignon et de la roue.

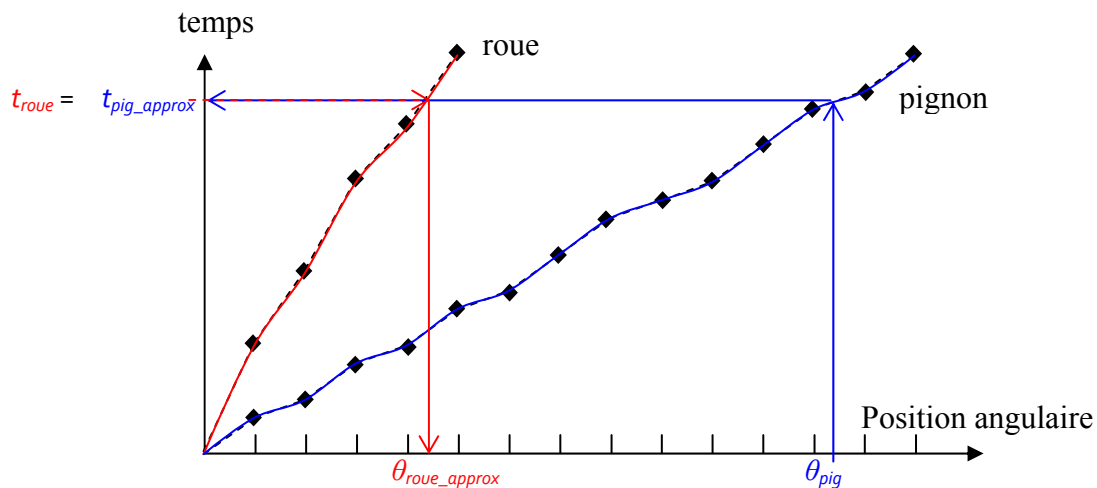


Figure 3.22 : Calcul de l'erreur de transmission

Après avoir réalisé ce processus, un « signal » d'erreur de transmission « brute » est obtenu, tel que l'exemple présenté sur la Figure 3.23.

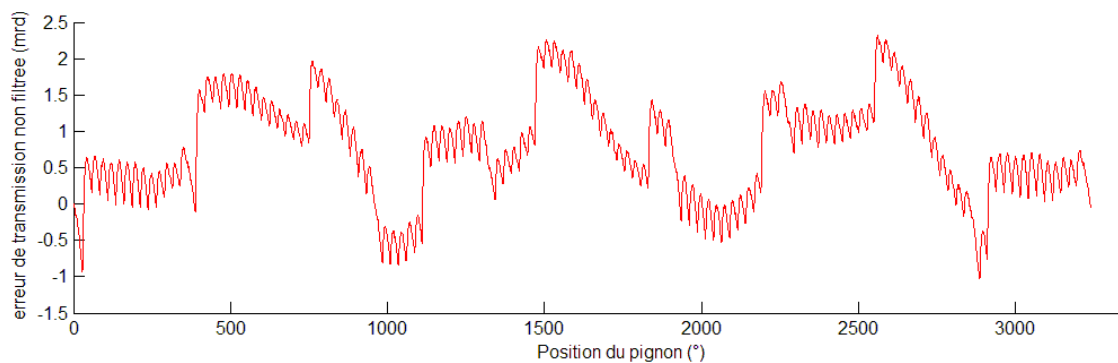


Figure 3.23 : Erreur de transmission « brute »

Cette courbe « brute » est assez chaotique. On peut toutefois en tirer quelques renseignements (cf. Figure 3.24) :

- On retrouve par exemple un motif qui se répète à faible fréquence. La répétition a une période correspondant à un tour de roue.
- De plus, si l'on met en parallèle les courbes de l'erreur de transmission et celle correspondant à l'évolution du couple, on observe qu'elles sont en phase.

Un certain faux rond existe, qui fait évoluer l'erreur de transmission ainsi que le couple. Ce faux rond peut être dû à la fixation de la roue sur son arbre par l'intermédiaire du moyeu expansible. Si la fixation n'est pas réalisée correctement, alors l'axe de la roue peut ne pas être tout à fait confondu avec son arbre. Ce défaut peut également exister si l'arbre supportant la roue n'est pas parfaitement rectiligne, ou légèrement fléchi.

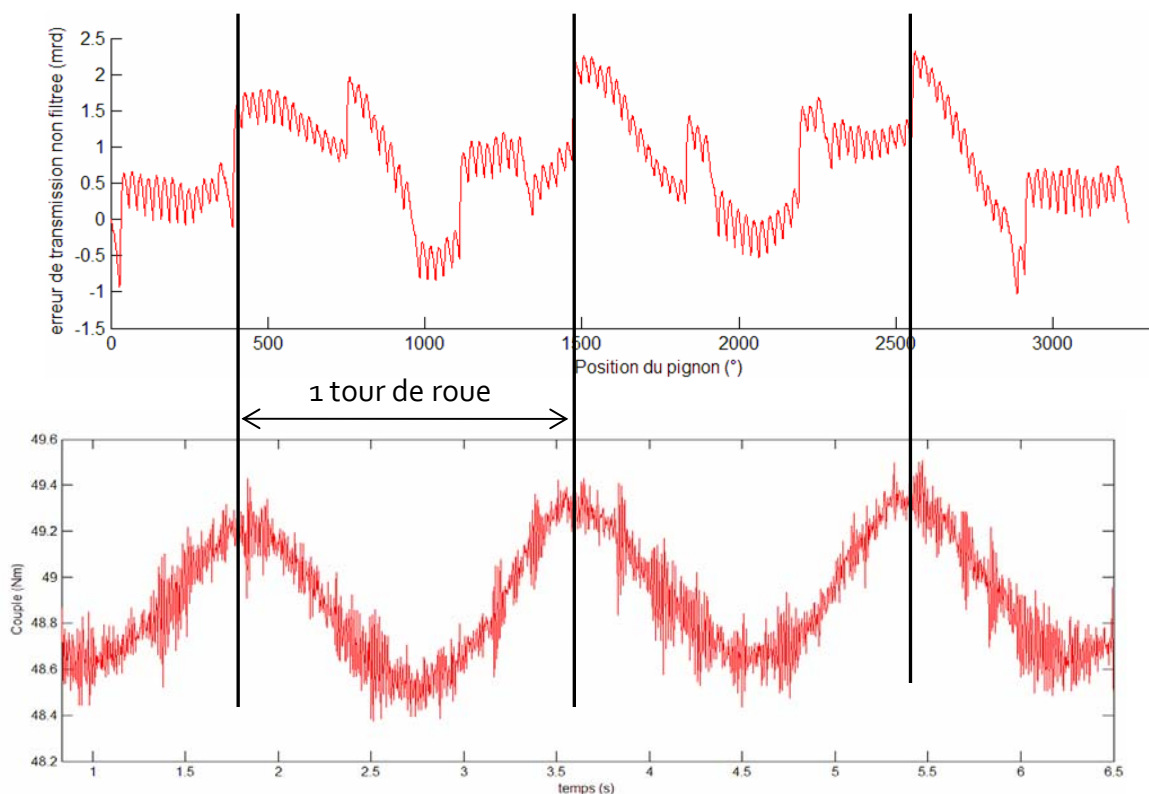


Figure 3.24 : Mise en parallèle de l'erreur de transmission et du couple

### 5.3.2.2 Filtrage de l'erreur de transmission

Afin d'obtenir une erreur de transmission moins perturbée, un filtrage simple est réalisé, afin de comparer les mesures avec le modèle numérique d'ASLAN. Dans un premier temps, la courbe principale est découpée en différentes parties qui correspondent à chaque passage de dent (petite oscillation). Ces courbes sont ensuite superposées (exemple Figure 3.25). On pourra d'ailleurs noter qu'elles sont généralement très similaires, ce qui nous autorise à réaliser le filtrage par une simple moyenne.

Après avoir recalé la courbe moyennée sur l'axe des abscisses, la Figure 3.26\_a est obtenue. L'erreur de transmission peut également être représentée sur plusieurs pas de dent, dans le but d'avoir une vision plus globale de la courbe (Figure 3.26\_b).

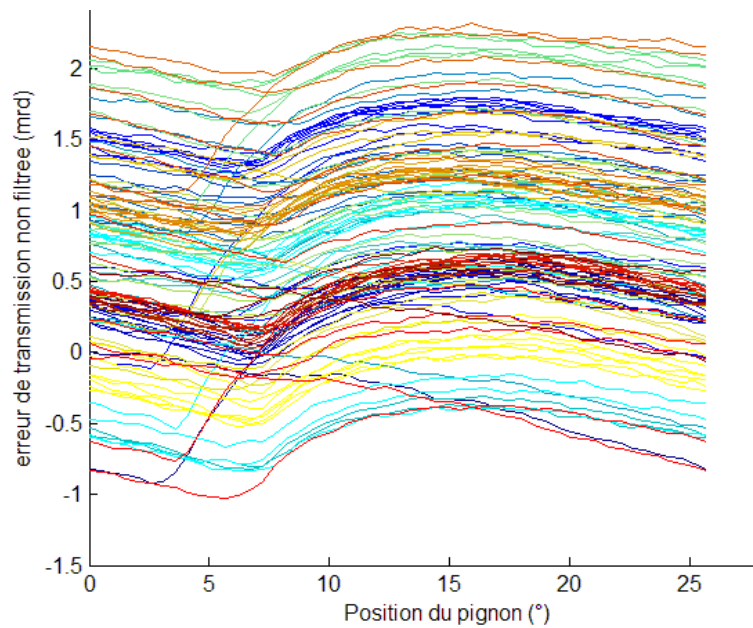


Figure 3.25 : Superposition des courbes correspondant à chaque passage de dent

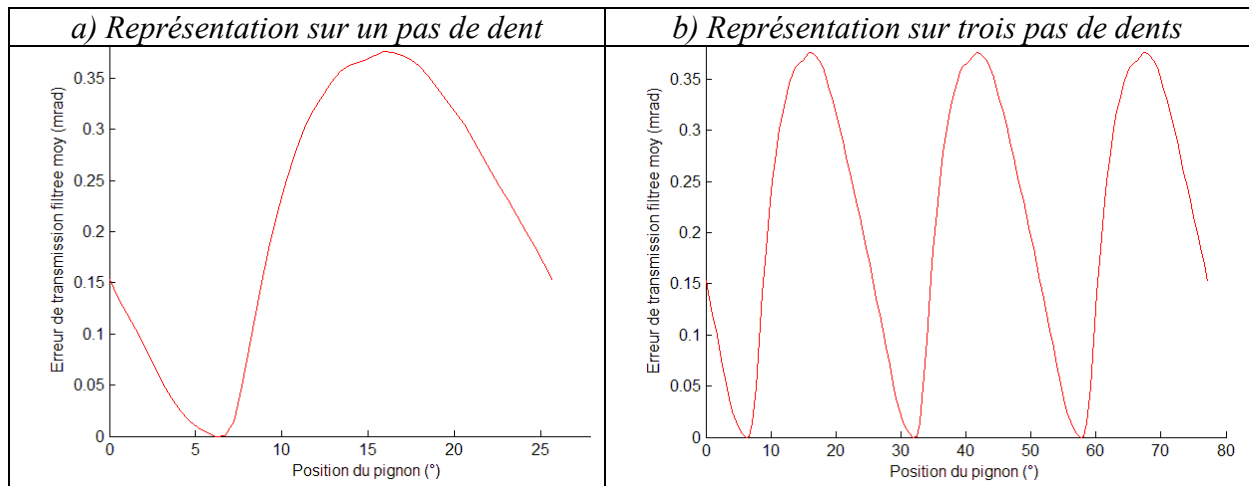


Figure 3.26 : Erreur de transmission « filtrée »

## 5.4 Essais réalisés

Le banc étant précisément positionné, différents types d'essais ont été entrepris permettant de mesurer l'erreur de transmission. Quatre séries sont définies, pour chacun des deux types d'engrenages (Gleason et analytique) :

- Série 1 :
  - Les défauts d'alignement classiques E, P et G (cf. Figure 3.27) prendront les trois valeurs [-0.1, 0, 0.1mm]. Des couplages sont réalisés entre ces défauts,
  - Le couple appliqué sur le pignon est de 20Nm,
  - La vitesse de rotation de la broche est de 30tr/min.

- Série 2 :
  - Les défauts d'alignement seront fixés à  $[-0.2, 0, 0.2\text{mm}]$ . Aucun couplage n'est réalisé entre les défauts,
  - Le couple appliqué sur le pignon reste égal à  $20\text{Nm}$ ,
  - La vitesse de rotation de la broche reste à  $30\text{tr/min}$ .
  
- Série 3 :
  - Les défauts d'alignement prendront pour cette série les trois valeurs  $[-0.1, 0, 0.1\text{mm}]$ . Aucun couplage n'est réalisé entre les défauts.
  - Le couple appliqué sur le pignon reste égal à  $20\text{Nm}$ ,
  - La vitesse de rotation de la broche est augmentée à  $90\text{tr/min}$ .
  
- Série 4 :
  - Les défauts d'alignement garderont les trois valeurs  $[-0.1, 0, 0.1\text{mm}]$ . Aucun couplage ne sera réalisé entre les défauts.
  - Le couple appliqué sur le pignon est diminué à  $10\text{Nm}$ ,
  - La vitesse de rotation de la broche reprend sa vitesse initiale de  $30\text{tr/min}$ .

Pour chacune des configurations, quatre mesures sont réalisées :

- couple nul, avec une mise en rotation de la broche dans le sens trigonométrique,
- couple non nul, avec une rotation de la broche dans le sens trigonométrique,
- couple nul, avec une mise en rotation de la broche dans le sens horaire,
- couple non nul, avec une rotation de la broche dans le sens horaire

Pour la réalisation de ces essais, le couple appliqué est limité sur la roue à  $50\text{Nm}$  (soit environ  $20\text{Nm}$  sur le pignon) par la capacité du frein magnétique.

La vitesse de rotation est la plus lente possible afin de s'approcher du modèle quasi-statique. Cependant, pour obtenir une rotation stable de la broche, la vitesse ne peut pas être inférieure à  $20\text{tr/min}$ .

Tous les essais sont effectués en lubrifiant les flancs de denture avec de la graisse.

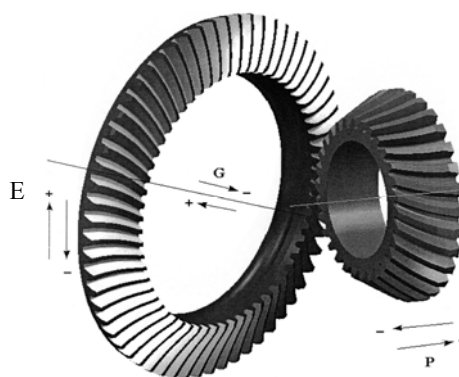
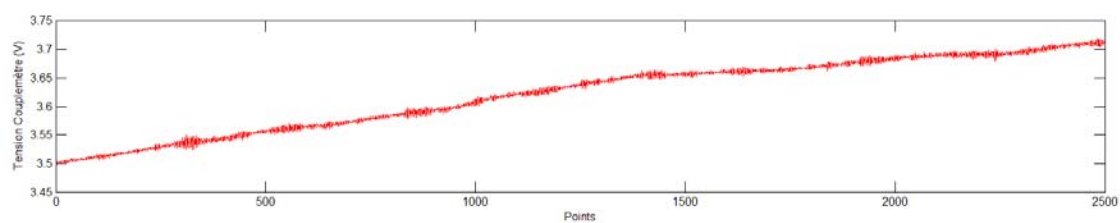
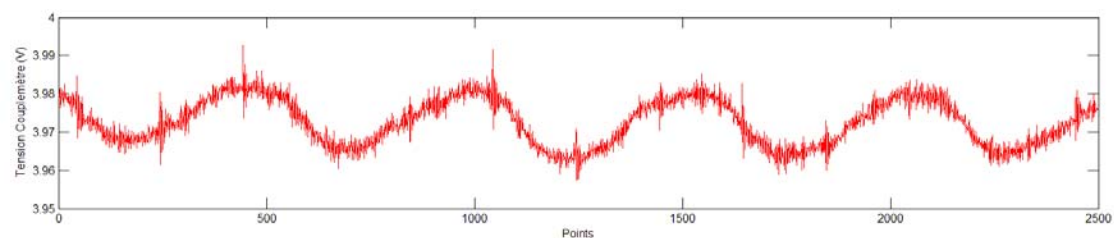


Figure 3.27 : Défauts de montage

Pour effectuer une mesure correspondant à un couple non nul, il a été nécessaire de vérifier la stabilité du frein magnétique. La courbe de sortie du couplemètre sur la Figure 3.28 est obtenue pour un couple non stabilisé, et la Figure 3.29 lorsque le couple est stabilisé.



**Figure 3.28 : Couple non stabilisé**



**Figure 3.29 : Couple stabilisée**

## 6. Exploitation des mesures

Cette partie concerne le traitement des résultats obtenus lors des différentes séries d'essais. Les deux premiers paragraphes présentent l'exploitation de ces résultats. Les modèles numériques développés seront comparés avec les essais dans la dernière partie.

### 6.1 *Reproductibilité des mesures*

Une fois tous les essais réalisés, il s'avère que certains cas identiques ont été volontairement présents dans différentes séries. Les erreurs de transmission de ces cas identiques sont comparées afin de vérifier la reproductibilité des mesures.

Trois configurations sont présentées :

- Sans aucun défaut de montage (Figure 3.30) : quatre courbes sont comparées, puisque cette configuration apparaît dans chacune des séries.
- Avec un défaut  $E = -0.1$  (Figure 3.31) : pour ce cas seulement trois courbes seront mises en parallèle, étant donné que cette configuration n'existe pas dans la deuxième série de mesures,
- Avec un défaut  $G = -0.1$  (Figure 3.32). Tout comme pour le cas précédent, seules trois courbes sont comparées.

Les courbes d'erreur de transmission à vide et sous charge sont données pour chacune des trois configurations, ainsi que dans les deux sens de rotation. Seul le cas de l'engrenage Gleason est donné pour ces comparaisons.

On peut tout de suite constater que pour chacun des cas présentés, les erreurs de transmission obtenues dans le sens de rotation horaire de la broche ont des amplitudes très inférieures à celles du sens de rotation trigonométrique. Ceci est principalement dû au fait que les géométries des flancs gauches et droits sont différentes.

Concernant la comparaison en elle-même, les courbes sont très proches les unes des autres, lorsqu'un couple est appliqué, quelle que soit la configuration. On peut donc considérer une certaine reproductibilité des essais sous charge.

Ce n'est pas tout à fait le cas à vide. Les courbes sont proches, mais pas autant que lorsqu'un couple est appliqué. Ceci vient du fait que la roue est « libre » lors des essais à vide, ce qui l'autorise à avoir des petits mouvements supplémentaires non contrôlés, qui sont forcément différents d'un essai à l'autre. De plus, comme il n'y a pas d'effort, toute la graisse appliquée sur les dentures n'est pas évacuée lors de contact, il restera donc des résidus plus ou moins importants entre les surfaces de contact selon la quantité de graisse appliquée entre chaque essai.

a) cas sans défaut de positionnement

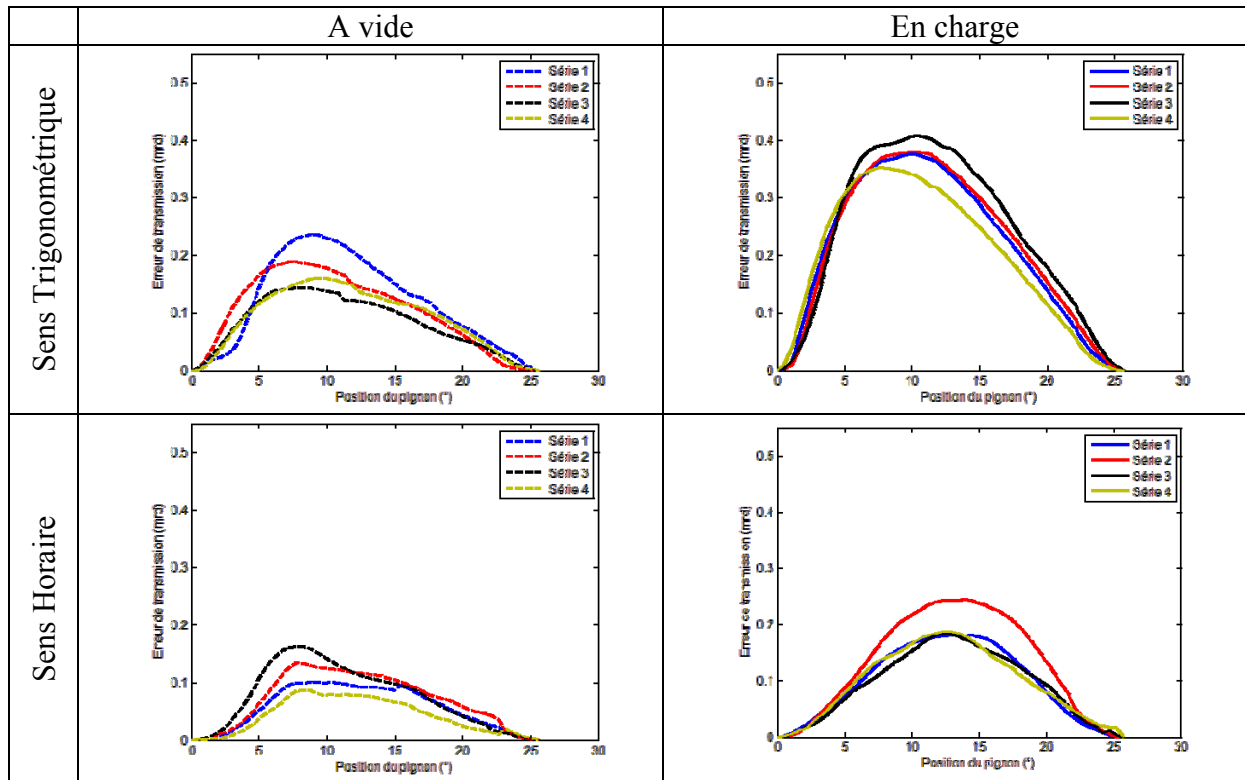


Figure 3.30 : Reproductibilité des mesures – Cas sans défaut de montage

b) cas avec le défaut  $E = -0.1\text{mm}$

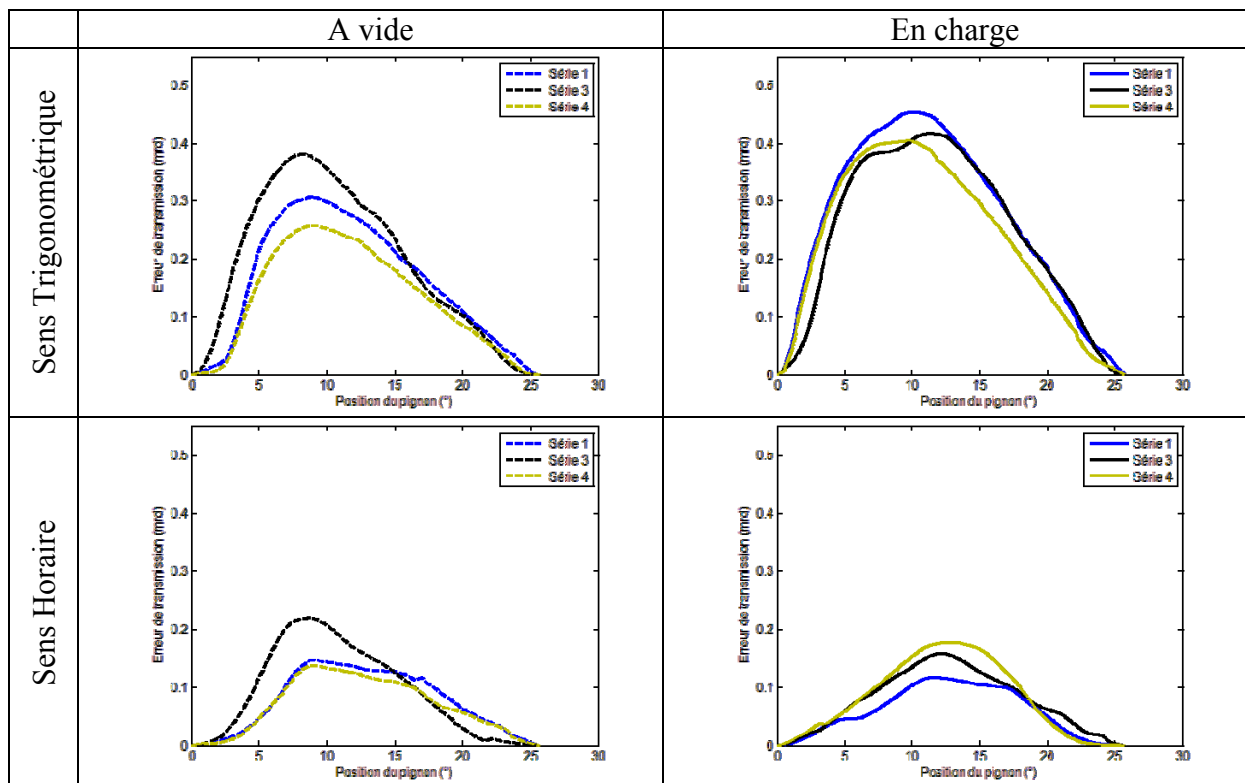


Figure 3.31 : Reproductibilité des mesures – Cas avec le défaut  $E = -0.1\text{mm}$



c) cas avec le défaut  $G = -0.1\text{mm}$

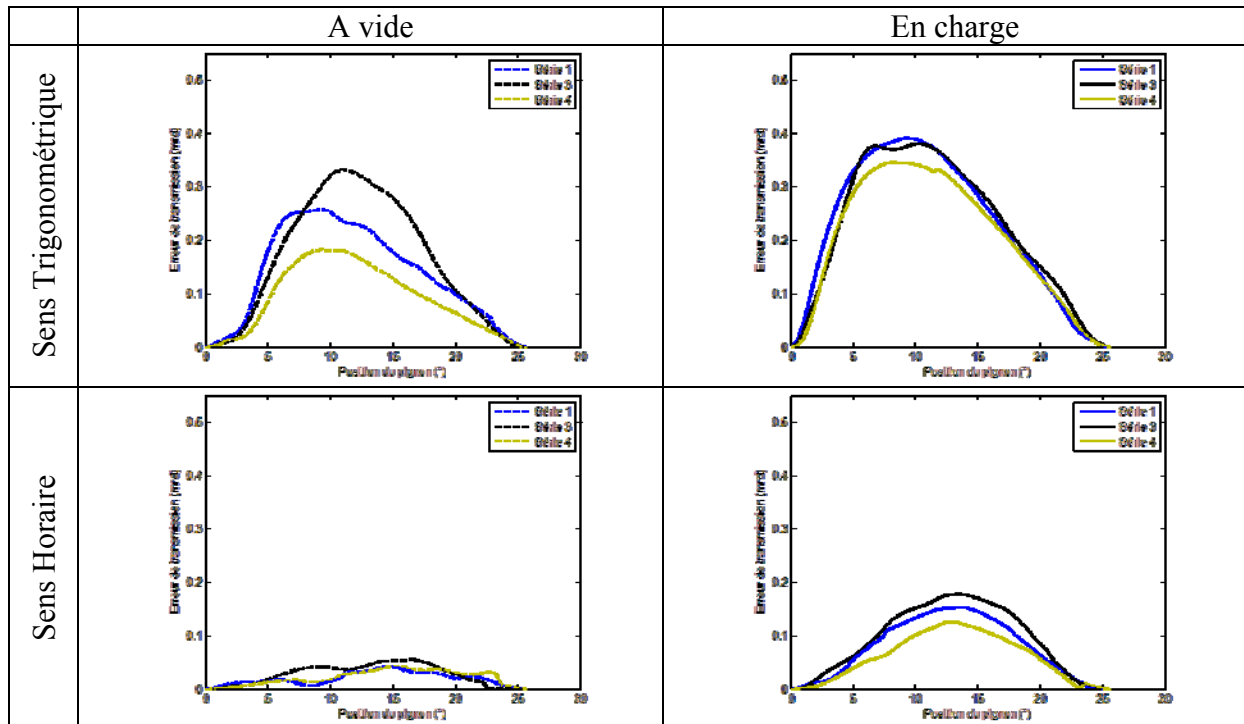


Figure 3.32 : Reproductibilité des mesures – Cas avec le défaut  $G = -0.1\text{mm}$

## 6.2 Influence des défauts de montage

Afin d'évaluer l'influence des erreurs de positionnement sur les courbes d'erreur de transmission, des défauts de montages sont appliqués lors de la réalisation des essais. Les comparaisons sont réalisées dans le cas où la vitesse de rotation est de  $30\text{tr/min}$ , pour un couple de  $20\text{Nm}$ . Les paramètres prennent successivement les valeurs  $[-0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 0.2\text{mm}]$ , sans prendre en compte de couplage entre les défauts.

Les résultats sont donnés pour les deux sens de rotation, et pour les deux engrenages usinés : Gleason (cf. Figure 3.33) et analytique (cf. Figure 3.34). De plus, sur ces courbes, chaque comparaison correspond à un défaut particulier (voir Figure 3.27). Les géométries de dentures étant différentes entre les deux engrenages, les défauts n'ont pas la même influence sur les erreurs de transmission. Il est donc important de signaler que les remarques faites ne sont valables que pour ces cas de géométries particulières, et ne sont pas à généraliser. Ainsi, les tendances pouvant être observées dans la littérature ne vont pas forcément dans le même sens que ce qui est analysé ici.

Il est tout de même intéressant de noter que l'engrenage analytique défini ici est beaucoup moins sensible à la plupart des défauts de montage que l'engrenage de type Gleason. On observera également, dans le cas du sens trigonométrique pour l'engrenage analytique, une très forte diminution de l'amplitude de l'erreur de transmission, comparé à l'engrenage Gleason. Cette diminution est d'environ 70%. Dans le cas du sens horaire, l'effet est différent, l'erreur dans le cas de l'engrenage analytique est supérieure à celle de l'engrenage Gleason de l'ordre de 25%. Cela montre l'importance des corrections de dentures à appliquer à l'engrenage analytique. Ces corrections doivent être choisies avec soin afin d'avoir les meilleurs résultats possibles.

### 6.2.1 Engrenage Gleason

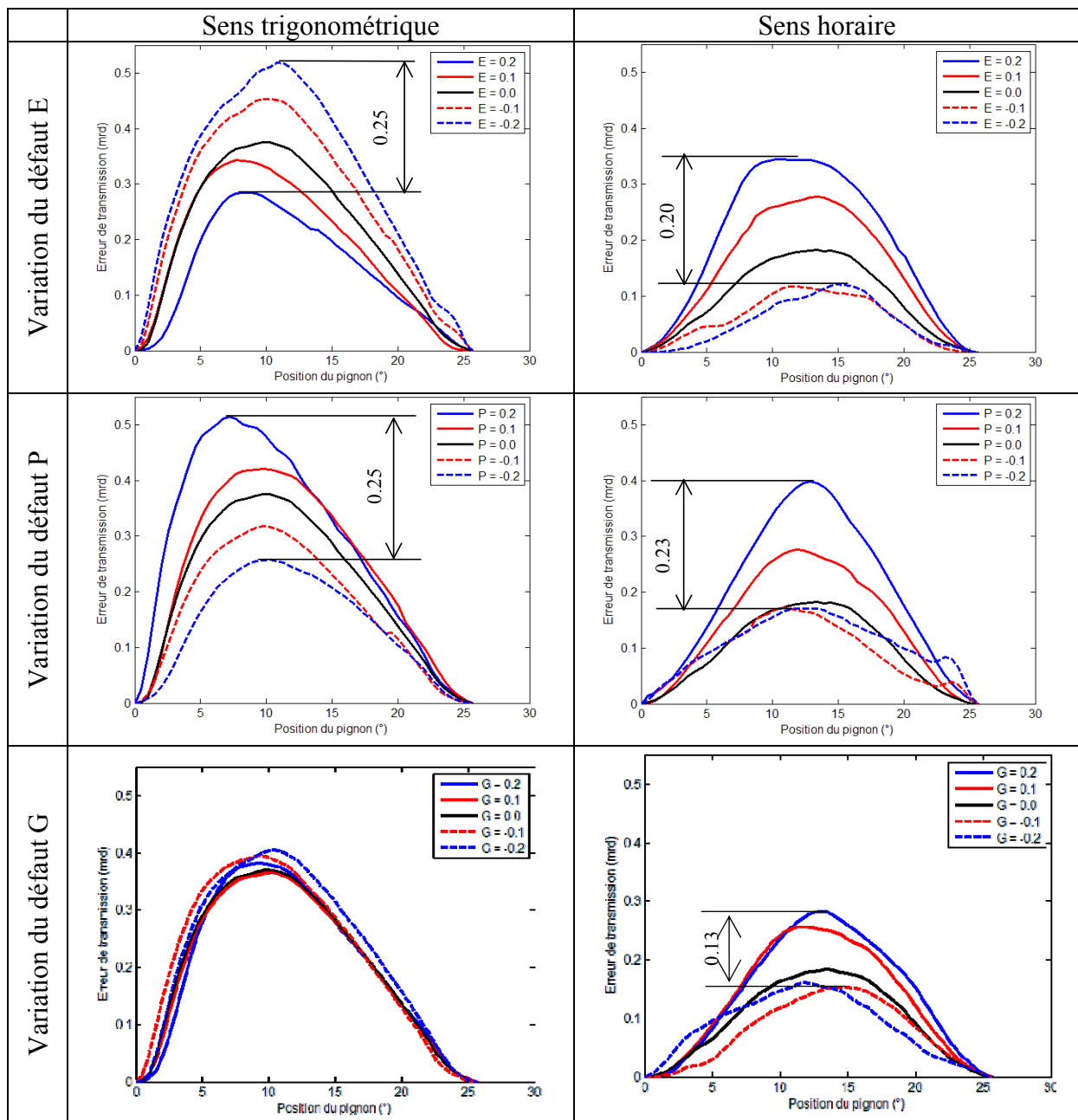


Figure 3.33 : Influence des défauts de montage sur l'erreur de transmission – engrenage Gleason

**Défaut E :** On observe une augmentation de l'amplitude de l'erreur de transmission lorsque ce défaut diminue, dans le cas du sens de rotation trigonométrique. L'amplitude est presque doublée en passant de  $E=0.2\text{mm}$  à  $E=-0.2\text{mm}$  avec une augmentation de  $0.25\text{mrd}$ . Cette tendance est similaire pour le sens de rotation horaire, mais inversée, c'est-à-dire que l'amplitude de l'erreur de transmission augmente avec le défaut.

**Défaut P :** Pour ce défaut, on constate des observations semblables à celles du défaut E, mais dans ce cas l'amplitude augmente avec le défaut, quel que soit le sens de rotation.

**Défaut G :** Ce défaut est celui qui a le moins d'influence sur les erreurs de transmission. Dans le sens trigonométrique, il n'a aucun effet sur les résultats. Ce n'est pas tout à fait le cas pour le sens de rotation horaire, où l'amplitude augmente avec le défaut, mais l'effet est beaucoup moins marqué que dans le cas des autres défauts, puisque l'évolution n'est que de 0.13mrd environ.

### 6.2.2 Engrenage analytique

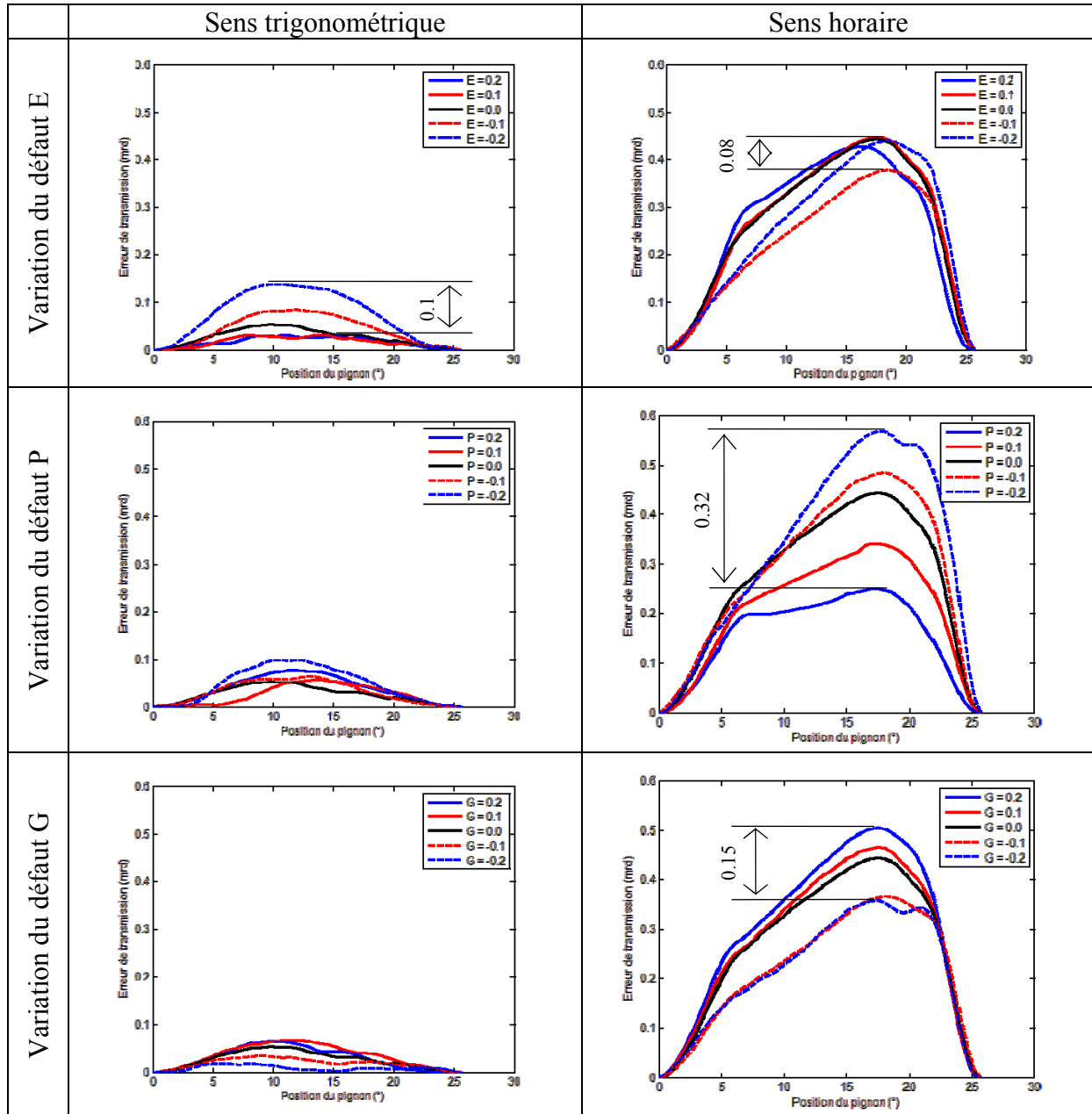


Figure 3.34 : Influence des défauts de montage sur l'erreur de transmission – engrenage analytique

**Défaut E :** On observe une augmentation de l'amplitude de l'erreur de transmission lorsque ce défaut diminue, dans le cas du sens de rotation trigonométrique. L'amplitude est presque triplée en passant de  $E=0.2\text{mm}$  à  $E=-0.2\text{mm}$ . Cette augmentation reste cependant faible puisqu'elle est de 0.1mrd. Cette tendance n'est pas retrouvée pour le sens de rotation horaire. Lorsque le défaut augmente,

l'amplitude de l'erreur de transmission augmente également, mais une convergence apparaît pour les valeurs positives.

**Défaut P :** Pour ce défaut, une influence minimale dans le sens trigonométrique est constatée. Elle est beaucoup plus importante dans le sens de rotation horaire, où l'amplitude de l'erreur de transmission est plus que doublée en passant de  $P = 0.2\text{mm}$  à  $P = -0.2\text{mm}$ , avec une augmentation de  $0.32\text{mrd}$ .

**Défaut G :** Pour cet engrenage, ce défaut se comporte de façon opposée à celle du défaut P. Dans le sens trigonométrique, l'amplitude de l'erreur de transmission a plus que triplée en passant G de  $-0.2\text{mm}$  à  $0.2\text{mm}$ , mais tout est restant relativement faible avec une augmentation de moins de  $0.1\text{mrd}$ . Dans le sens horaire, lorsque le défaut diminue, l'amplitude de l'erreur de transmission diminue aussi, mais une convergence apparaît pour les valeurs négatives du défaut.

### 6.3 Validation du modèle numérique

#### 6.3.1 Raideurs aux liaisons

Une comparaison entre numérique et expérimental requiert une modélisation la plus proche possible de la réalité. Il faudra notamment intégrer les différentes liaisons (supports de roulement, accouplement, ...) sur les axes du pignon et de la roue. Ces éléments peuvent être pris en compte lors des calculs Eléments Finis, qui permettent d'obtenir les coefficients d'influence de flexion du pignon et de la roue. Ainsi, des raideurs seront appliquées aux emplacements des liaisons.

##### 6.3.1.1 Cas de la roue

Trois raideurs sont appliquées à la roue (Figure 3.35) :

- Le support de roulement gauche,
- Le support de roulement droit,
- L'accouplement à soufflet.

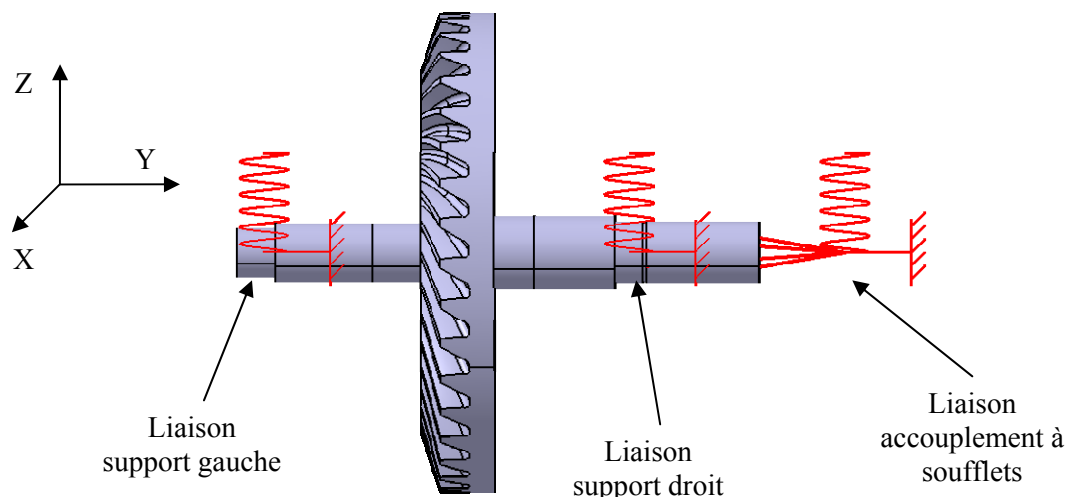


Figure 3.35 : Définition des raideurs pour les liaisons de l'axe de la roue

Les supports de roulement ont été modélisés par éléments finis 3D afin de déterminer leurs raideurs. Des efforts sont appliqués selon les différentes directions, et les déplacements correspondants sont calculés. Ainsi, la raideur a été approximée par le rapport effort/déplacement.

Le support gauche contiendra un roulement qui sera libre de se déplacer en translation selon son axe (Y sur la Figure 3.35). La raideur en translation selon cet axe est donc nulle pour cette liaison. Il en est de même pour toutes les raideurs angulaires étant donné qu'il n'y a aucune résistance dans la rotation du roulement, et qu'un jeu angulaire existe selon les autres directions.

Dans le cas du support droit, le roulement ne peut pas se déplacer en translation selon son axe. Ainsi seules les raideurs angulaires sont fixées à une valeur nulle.

Les valeurs des raideurs de l'accouplement à soufflet sont indiquées sur les documents du fournisseur. Etant donné qu'il y a deux accouplements en série, on veillera à diviser par deux ces données.

Les raideurs appliquées sont répertoriées dans le Tableau 3.5 :

		Support gauche	Support droit	Accouplements à soufflets
Raideurs linéaires (N/m)	X	$1.4 \cdot 10^8$	$1.0 \cdot 10^8$	$6.0 \cdot 10^5$
	Y	0	$1.7 \cdot 10^7$	$3.6 \cdot 10^4$
	Z	$2.5 \cdot 10^9$	$1.0 \cdot 10^9$	$6.0 \cdot 10^5$
Raideurs angulaires (Nm/rad)	X	0	0	0
	Y	0	0	$3.8 \cdot 10^4$
	Z	0	0	0

Tableau 3.5 : Raideurs des liaisons de la roue

### 6.3.1.2 Cas du pignon

Dans le cas du pignon, une seule liaison est à appliquer : celle qui permet de fixer le porte-outil contenant le pignon à la broche. La raideur appliquée sur l'axe du pignon (Figure 3.36) correspond en fait à la rigidité de la broche. Cette rigidité est inconnue, il n'est donc pas possible de définir une valeur précise. Elle sera donc fixée à des valeurs arbitraires supérieures aux valeurs des liaisons de l'axe de la roue, la broche étant plus rigide. Ces valeurs sont indiquées dans le Tableau 3.6. Contrairement à la roue, toutes les raideurs angulaires sont définies dans le cas du pignon, celui-ci étant monté en porte-à-faux.

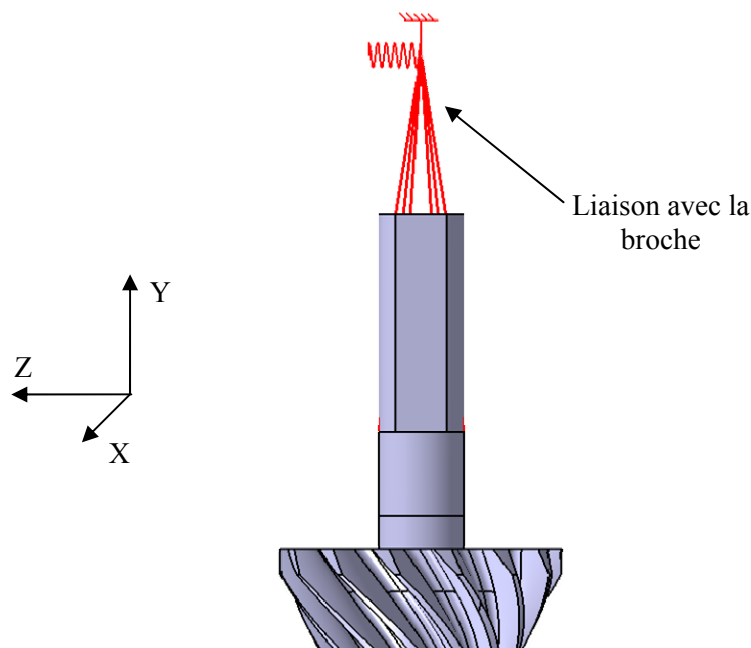


Figure 3.36 : Définition de la raideur pour la liaison de l'axe du pignon

		Accouplement avec la broche
Raideurs linéaires (N/m)	X	$1.0 \cdot 10^9$
	Y	$1.0 \cdot 10^{10}$
	Z	$1.0 \cdot 10^9$
Raideurs angulaires (Nm/rad)	X	$1.0 \cdot 10^6$
	Y	$1.0 \cdot 10^6$
	Z	$1.0 \cdot 10^6$

Tableau 3.6 : Raideurs des liaisons du pignon

### 6.3.2 Comparaisons pour l'engrenage de type Gleason

Quelques résultats du cas de l'engrenage Gleason sont donnés pour le sens de rotation principal : le sens trigonométrique. On retrouve notamment la comparaison des portées sous charges ainsi que de l'erreur de transmission pour la position sans défaut de montage. Les comparaisons en prenant en compte des défauts de positionnement sont également présentées.

#### 6.3.2.1 Portées

Pour rappel, les portées correspondent aux endroits entrés en contact sur les flancs de denture durant l'engrènement. Les portées présentées ne sont pas celles d'un essai en particulier. Sur les photos, elles correspondent aux zones sombres, qui ont été « lustrées » lors des contacts.

En parallèle des photos est indiqué le résultat de simulation d'un cas particulier correspondant à la position sans défaut de montage. Le couple appliqué est de 50Nm sur la roue (environ 20Nm sur le pignon) et la vitesse de rotation du pignon est de 30tr/min. La Figure 3.37 montre la comparaison des portées sur le pignon, tandis que celles de la roue sont sur la Figure 3.38.

On observe une très bonne corrélation entre les portées simulées et réelles, que ce soit dans le cas du pignon ou de la roue. On remarquera cependant que les portées réelles sont légèrement plus grandes.

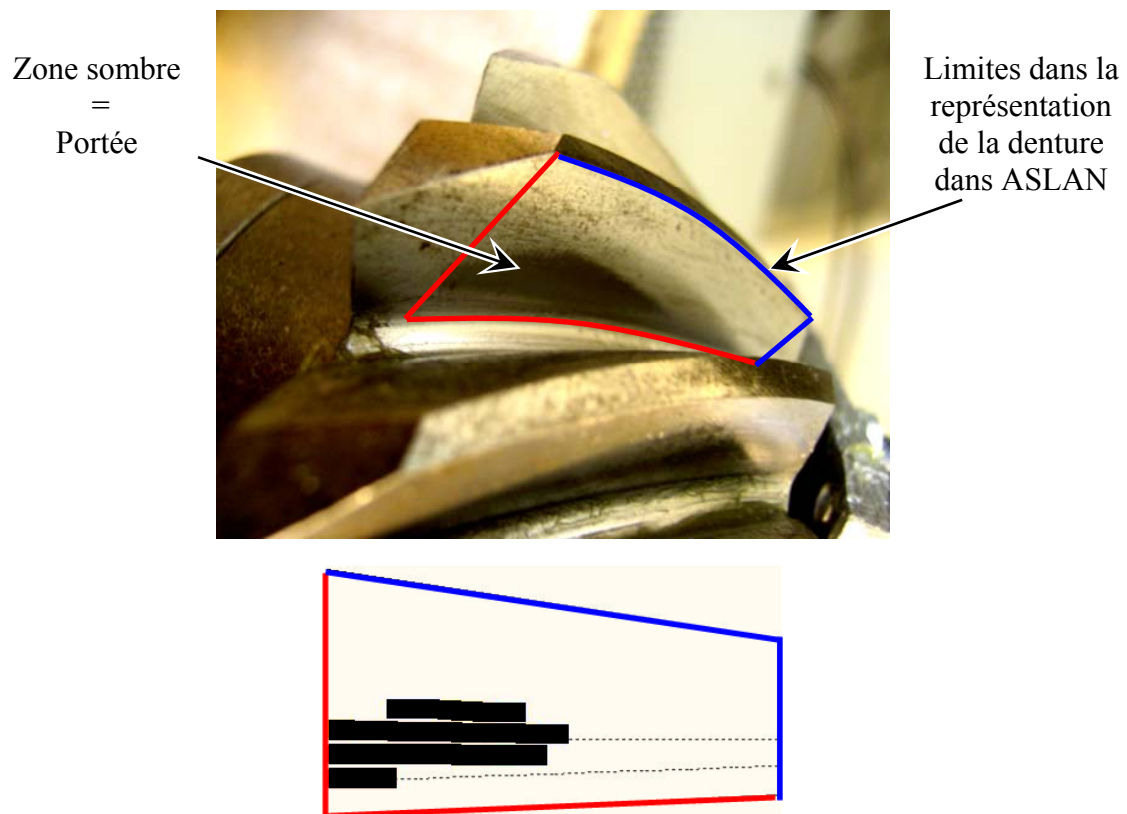


Figure 3.37 : Comparaison entre la portée mesurée et simulée sur le pignon Gleason

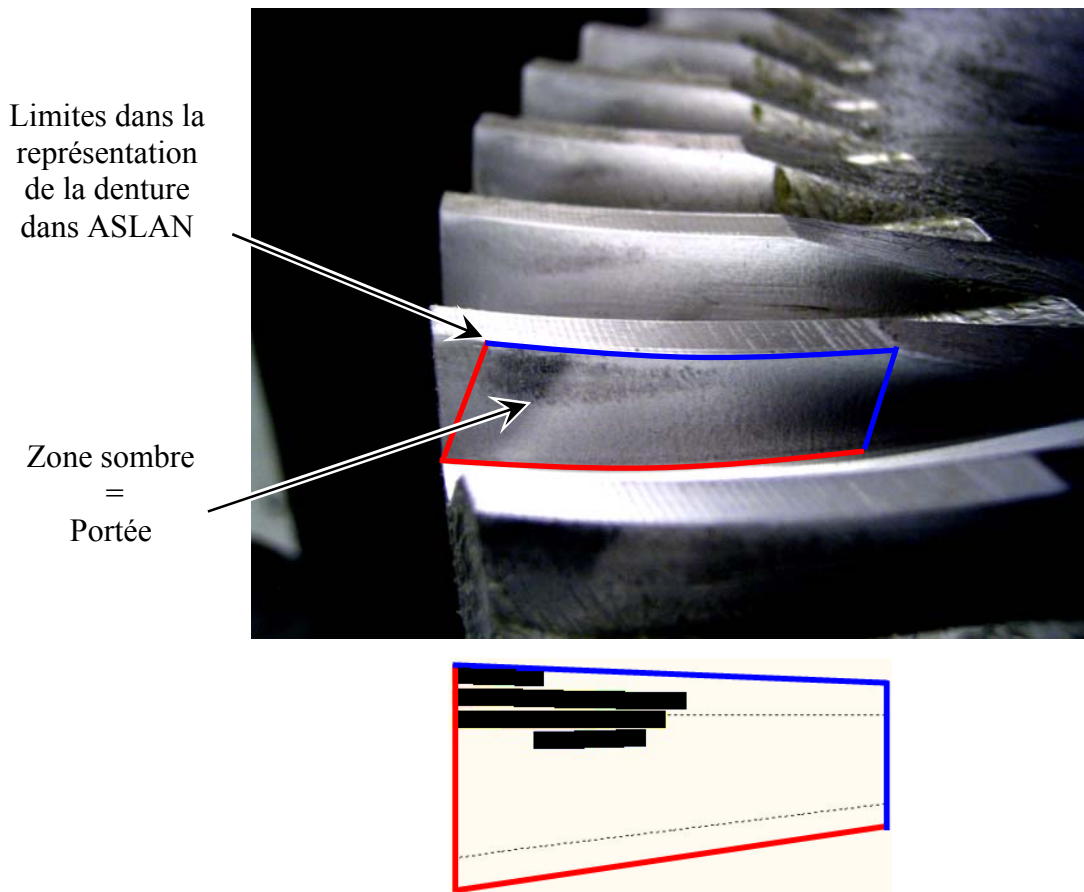


Figure 3.38 : Comparaison entre la portée mesurée et simulée sur la roue Gleason

### 6.3.2.2 Erreur de transmission

Les courbes de la Figure 3.39 correspondent à l'erreur de transmission pour la position ne présentant aucun défaut de positionnement. La courbe de la simulation est bleue et celle des essais expérimentaux est rouge.

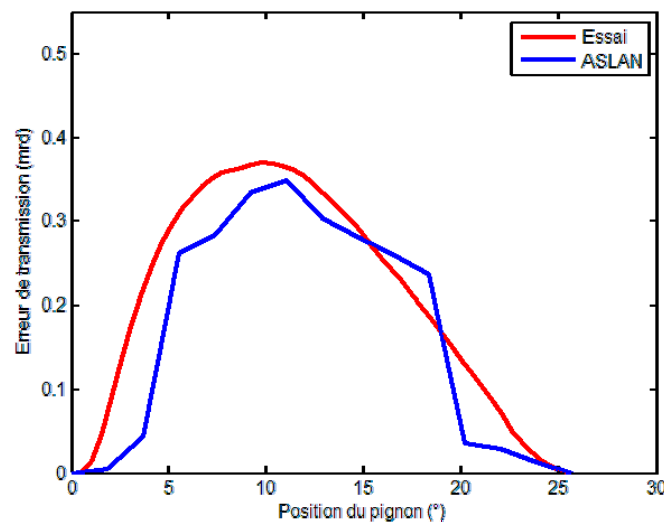


Figure 3.39 : Comparaison entre l'erreur de transmission mesurée et simulée



Ces courbes donnent les mêmes ordres de grandeurs, que ce soit la forme des courbes ou l'amplitude de l'erreur de transmission. On observe cependant que la courbe expérimentale est beaucoup plus lisse que la courbe donnée par la simulation. Ce phénomène peut provenir des raideurs appliquées pour le support du pignon. En effet, ces raideurs ont été appliquées arbitrairement, car de nombreuses données ne sont pas connues. Par ailleurs, le modèle numérique a été réalisé en tenant compte d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Les différences entre les deux courbes de la la Figure 3.39 peuvent donc également provenir de ces simplifications.

Le même type de corrélation est observé pour les différentes séries d'essais et de simulation, en fonction des défauts. Par exemple la Figure 3.40 présente les comparaisons entre l'erreur de transmission simulée et mesurée pour différents cas de défauts de positionnement. Les défauts E, P et G prendront successivement les valeurs  $-0.1\text{mm}$  et  $+0.1\text{mm}$ , sans considérer les couplages. Ces courbes correspondent toujours au cas de l'engrenage Gleason en rotation dans le sens trigonométrique.

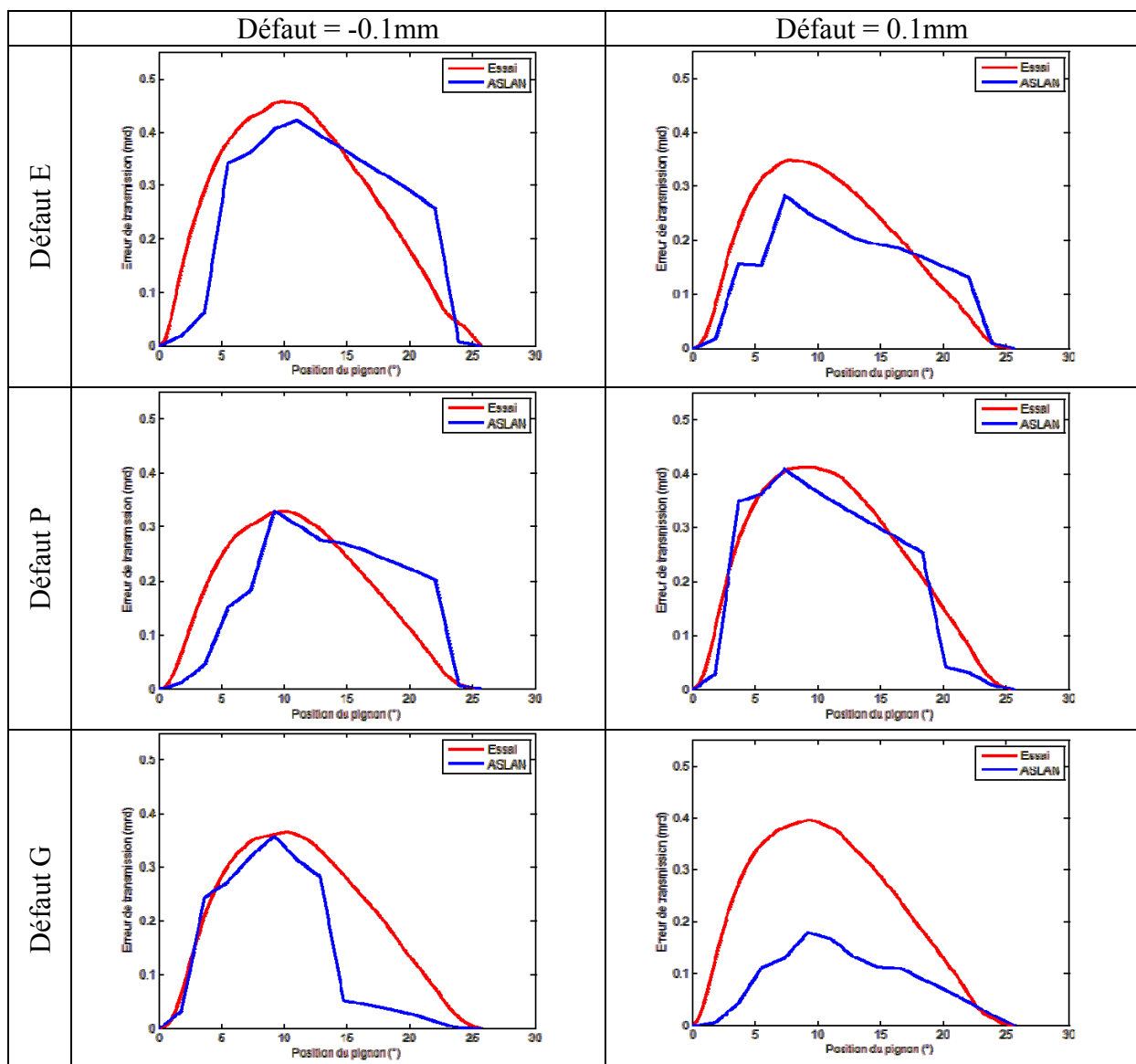


Figure 3.40 : Comparaison de l'erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage Gleason

Les mêmes conclusions que dans le cas de la comparaison sans défaut de positionnement peuvent être faites pour les défauts E et P. Dans le cas du défaut G les courbes sont beaucoup moins similaires. Pour un défaut  $G = 0.1\text{mm}$ , l'amplitude de l'erreur de transmission simulée est 50% plus faible que celle mesurée. Si le défaut prend une valeur négative ( $G = -0.1\text{mm}$ ), un décrochement beaucoup plus prononcé que dans les autres cas existe. Il conviendrait donc par exemple de modifier les raideurs agissant dans cette direction pour recalibrer les courbes. Ceci n'a pas été réalisé par manque de temps, étant donné qu'une étude approfondie est nécessaire.

### 6.3.3 Comparaisons pour l'engrenage analytique

Cette partie regroupe les comparaisons des erreurs de transmission pour le cas de l'engrenage analytique. Les deux sens de rotation sont présentés ici, avec ou sans prise de défauts de positionnement.

#### 6.3.3.1 Sens de rotation horaire

Les courbes de la Figure 3.41 correspondent à l'erreur de transmission pour la position ne présentant aucun défaut de positionnement. La courbe de la simulation est bleue et celle des essais expérimentaux est rouge.

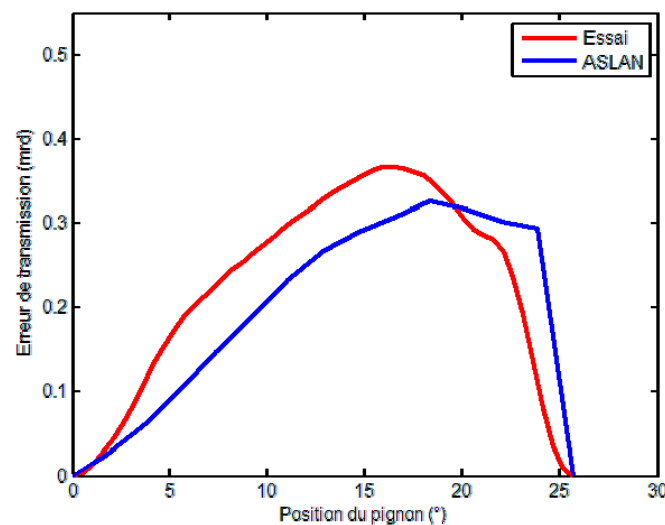


Figure 3.41 : Comparaison entre l'erreur de transmission mesurée et simulée

Ces courbes semblables donnent les mêmes ordres de grandeurs. En effet, l'amplitude de l'erreur de transmission simulée est très proche de celle de mesurée. La différence est de  $0.04\text{mrd}$ , ce qui correspond à environ 10% de l'amplitude mesurée. La forme générale est très similaire.

La Figure 3.42 présente les comparaisons entre l'erreur de transmission simulée et mesurée pour différents cas de défauts de positionnement. Les défauts E, P et G prendront successivement les valeurs  $-0.1\text{mm}$  et  $+0.1\text{mm}$ , sans prise en compte de couplages. Ces courbes correspondent toujours au cas de l'engrenage analytique en rotation dans le sens horaire.

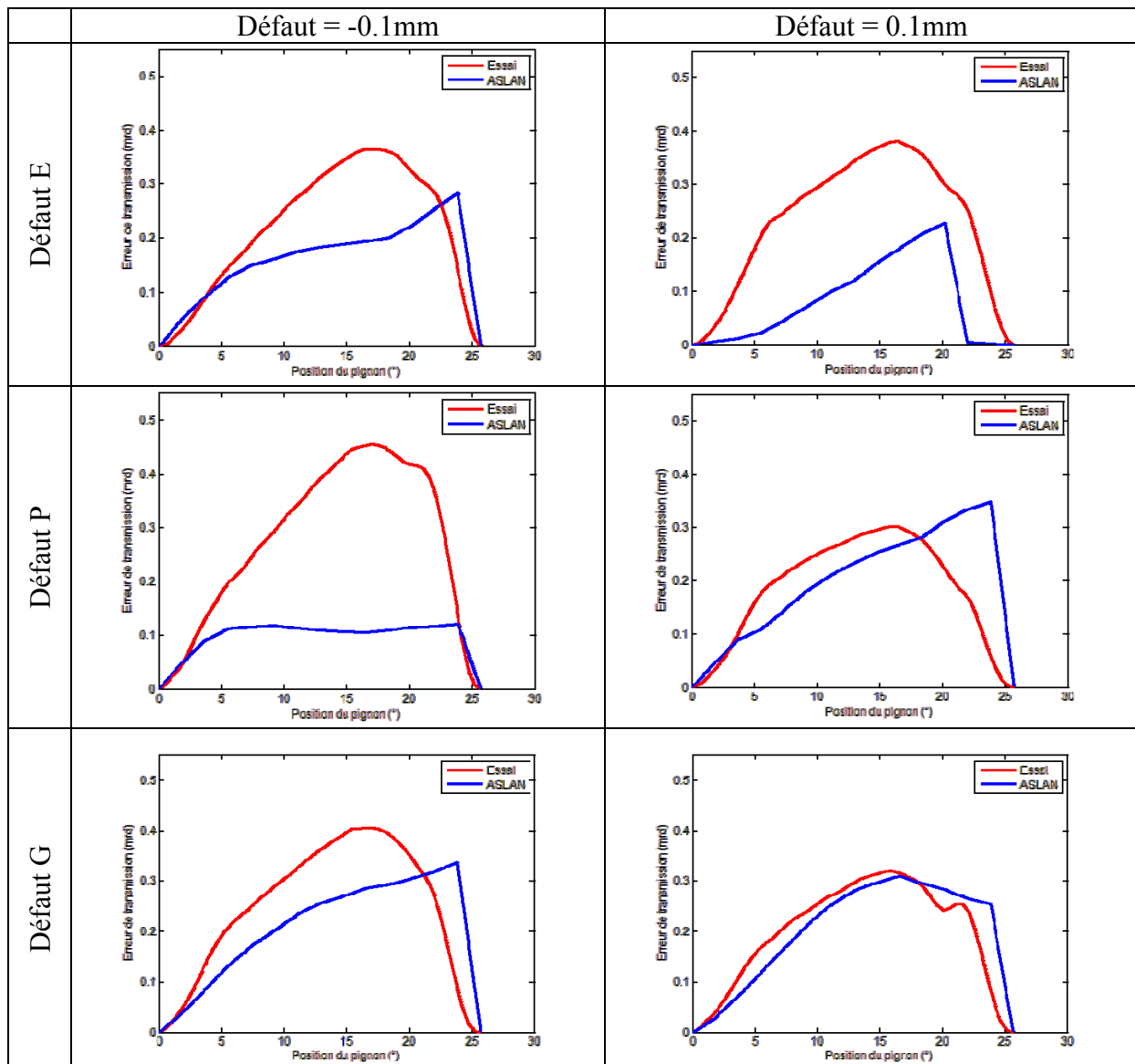


Figure 3.42 : Comparaison de l'erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage analytique

Contrairement au cas Gleason, les courbes obtenues avec le modèle numérique sont beaucoup moins comparables aux courbes mesurées. Elles sont cependant similaires, exceptées certaines comparaisons, notamment le défaut P = -0.1mm où l'amplitude de l'erreur de transmission simulée est environ 4 fois inférieure à celle obtenue par les essais expérimentaux.

Il faut noter tout de même que le banc d'essai a complètement été démonté puis remonté entre ces essais et ceux de l'engrenage Gleason. Les raideurs appliquées aux différentes liaisons pour les simulations n'ont pas été modifiées.

### 6.3.3.2 Sens de rotation trigonométrique

Ce cas est légèrement différent des précédents. En effet, pour ce sens de rotation, le pignon présente une anomalie : un trou est présent sur ses flancs concaves (Figure 3.43). L'engrenage ayant servi pour ces essais est différent de celui utilisé pour les études d'influence des défauts de positionnement du paragraphe 6.2.2.



Figure 3.43 : Endommagement dans les flancs convexes du pignon

Les courbes de la Figure 3.44 correspondent à l'erreur de transmission pour la position ne présentant aucun défaut de positionnement. La courbe de la simulation est bleue et celle des essais expérimentaux est rouge. On note une chute brutale de l'erreur de transmission expérimentale. Ce saut correspond au passage dans le trou présent sur le flanc du pignon.

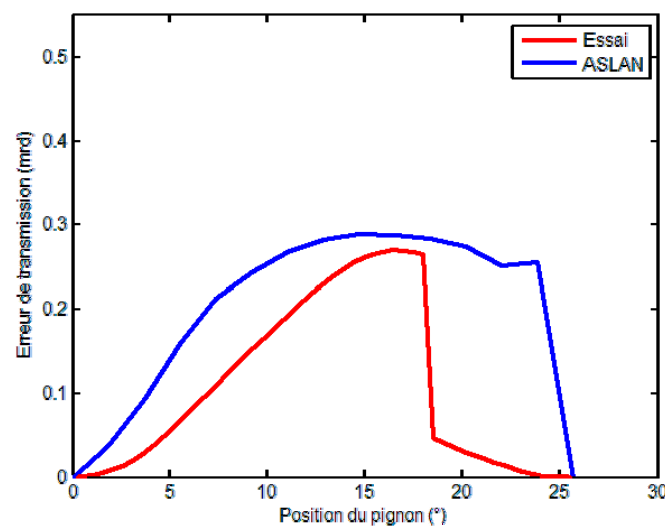


Figure 3.44 : Comparaison entre l'erreur de transmission mesurée et simulée

Ces courbes restent néanmoins comparables, leurs amplitudes n'étant différentes que de 6% environ.

La Figure 3.45 présente les comparaisons entre l'erreur de transmission simulée et mesurée pour différents cas de défauts de positionnement. Tout comme pour les cas précédents, les défauts E, P et G prendront successivement les valeurs -0.1mm et +0.1mm, sans prise en compte de couplage. Ces courbes correspondent toujours au cas de l'engrenage analytique en rotation dans le sens trigonométrique.

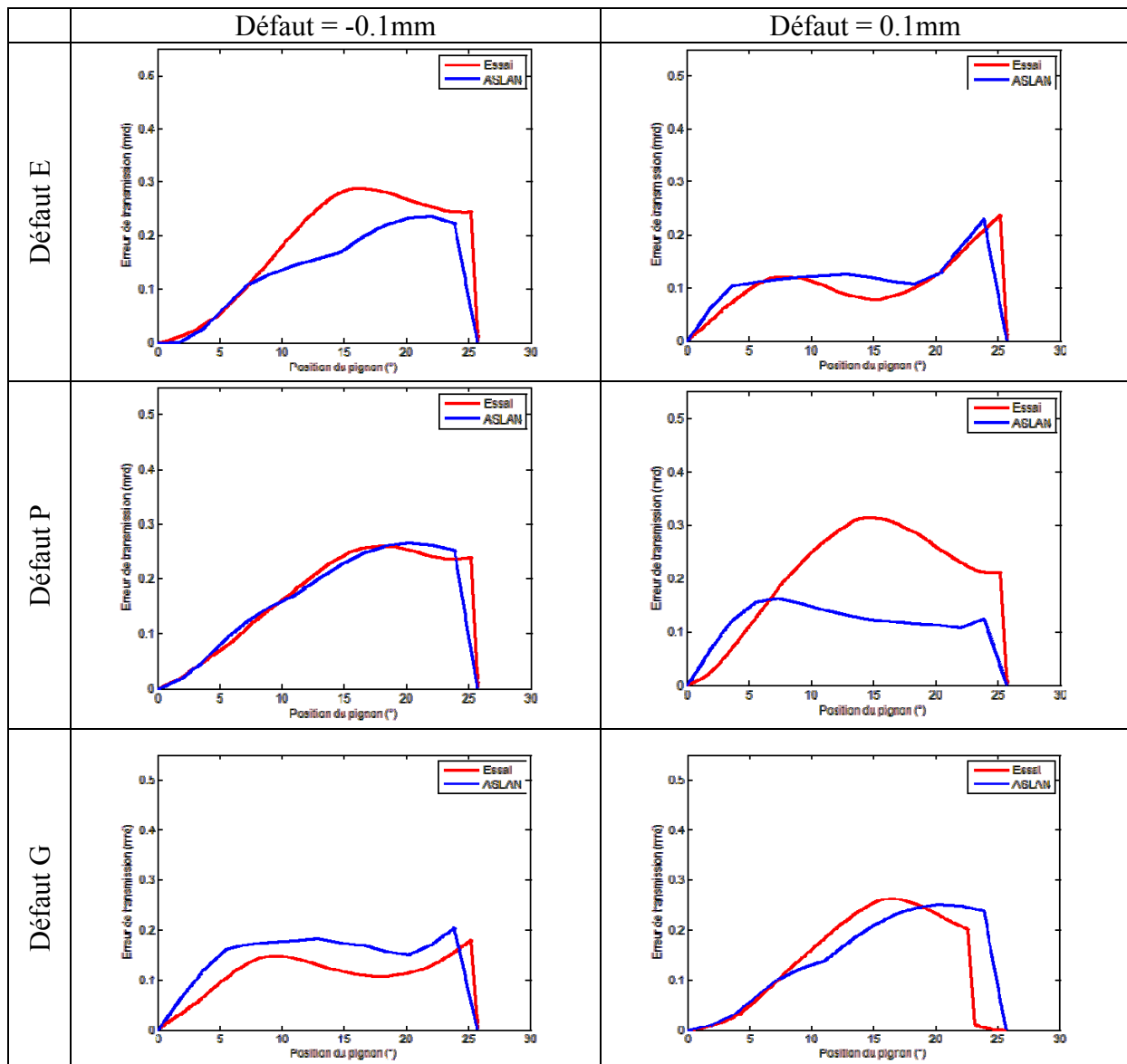


Figure 3.45 : Comparaison de l'erreur de transmission avec défauts de montage – engrenage analytique

Le saut dû au trou est moins visible dans ces courbes que dans le cas sans défaut de positionnement. Il est encore visible pour le défaut G = 0.1mm par exemple. Les courbes sont presque superposées pour la plupart des cas. Cependant, pour P = 0.1mm par exemple, les courbes sont plus éloignées, où l'amplitude de l'erreur de transmission simulée est presque moitié plus faible que celle mesurée.

Les conclusions similaires aux cas précédents peuvent être proposées : il est difficile de recalculer parfaitement tous les résultats car de nombreuses données sont manquantes.

## 7. Comparaison avec un cas industriel

Afin de pouvoir juger de la qualité de l'engrenage analytique face à une géométrie Gleason réelle, une comparaison est réalisée grâce à un partenariat industriel. L'entreprise TEXELIS a fourni les données d'un engrenage qu'il utilise ainsi que les sorties suivantes, pour différentes configurations :

- Les portées sur le pignon et la roue,
- La pression maximale,
- L'amplitude de l'erreur de transmission.

Les données fournies sont obtenues à l'aide d'un modèle numérique qui a été développé en interne par l'entreprise, et dont la méthode de résolution ne nous a pas été transmise de manière précise.

### 7.1 Données du problème

#### 7.1.1 Caractéristiques de l'engrenage

Les données générales de l'engrenage utilisé sont regroupées dans le Tableau 3.7. Pour des raisons de confidentialité, les données plus précises (coefficients de déport, de saillie, de creux, etc...) ne sont pas indiquées.

Désignation	Symbole	Valeur
Nombre de dents du pignon	Z1	21
Nombre de dents de la roue	Z2	44
Largeur de denture	B	47mm
Angle de renvoi	$\Sigma$	90°
Angle de pression	$\alpha$	22.5°
Diamètre extérieur de la roue	de2	255mm
Angle de spirale moyen	$\beta_m$	36°
Sens de la spirale sur le pignon		LH
Couple appliqué sur le pignon	C	2300Nm

Tableau 3.7 : Données générale de l'engrenage

#### 7.1.2 Modèle numérique utilisé par l'entreprise

Le principe général de résolution du modèle numérique développé par l'entreprise est très similaire à celui développé dans le cadre de cette thèse. Il existe cependant des différences plus ou moins importante. La plupart d'entre elles ont été prises en compte pour réaliser les comparaisons.

Deux différences principales existent et sont les suivantes :

- Tout d'abord, pour le calcul des coefficients d'influence de flexion généraux, trois dents sont prises en compte dans notre modèle numérique. Pour rappel, des efforts sont appliqués sur une dent centrale et les déplacements sont mesurés sur les trois dents (la dent sur laquelle les efforts sont appliqués et sur les dents avoisinantes). Le modèle numérique utilisé dans l'entreprise ne prend en compte que la dent centrale, et les calculs Eléments Finis ne sont réalisés qu'avec cette seule dent. Pour palier cette différence, les calculs Eléments Finis sont réalisés en laissant libre la dent centrale (dents vertes sur la Figure 3.46\_a pour le pignon et sur Figure 3.46\_b pour la roue), et les dents avoisinantes sont bloquées (dents rouges sur ces même figures).
- La seconde différence réside dans la façon dont sont calculées les déformations de contact. Le modèle numérique utilisé par l'entreprise utilise une méthode basée sur la théorie de Hertz, tandis que notre modèle de contact est basé sur celle de Boussinesq. Une telle modification n'a pas pu être réalisée dans notre modèle numérique pour prendre en compte cette différence.

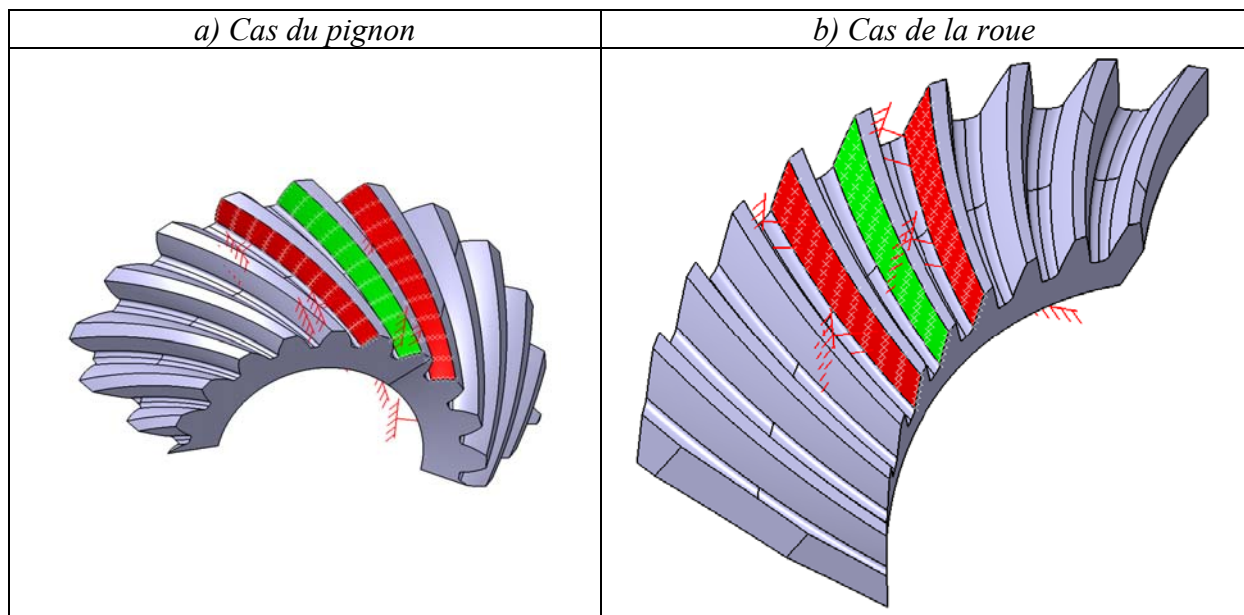


Figure 3.46 : Modélisation du pignon et de la roue

## 7.2 Résultats

TEXELIS nous a fourni des résultats pour différentes configurations, en prenant en compte des défauts de positionnement. Les données fournies par l'industriel sont indiquées dans les colonnes nommée « Géométrie Gleason », tandis que celles obtenues par l'utilisation de notre modèle numérique sont dans les colonnes « Géométrie Analytique ».

Il est à noter que la représentation des portées est inversée. Le gros bout est représenté à gauche dans le cas des résultats fournis par l'industriel, tandis que notre modèle présente le gros bout à droite.

a)  $E = 0\text{mm}$ ,  $P = 0\text{mm}$ ,  $G = 0\text{mm}$ ,  $\Sigma = 90^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	1932.2	1721
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	16.7	50

b)  $E = -0.19\text{mm}$ ,  $P = 0\text{mm}$ ,  $G = 0\text{mm}$ ,  $\Sigma = 90^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	1638.6	1631
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	9.6	45



c)  $E = 0\text{mm}$ ,  $P = 0.14\text{mm}$ ,  $G = 0\text{mm}$ ,  $\Sigma = 90^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	1792.8	1672
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	14.1	48

d)  $E = 0\text{mm}$ ,  $P = 0\text{mm}$ ,  $G = -0.08\text{mm}$ ,  $\Sigma = 90^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	2101.5	1736
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	16.4	52

e)  $E = 0\text{mm}$ ,  $P = 0\text{mm}$ ,  $G = 0\text{mm}$ ,  $\Sigma = 89.97^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	1980.0	1726
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	19.8	50

f)  $E = -0.19\text{mm}$ ,  $P = 0.14\text{mm}$ ,  $G = -0.08\text{mm}$ ,  $\Sigma = 89.97^\circ$

	Géométrie Gleason	Géométrie Analytique
Portée		
Pression maximale (Mpa)	1661.5	1623
Amplitude ET ( $\mu\text{rd}$ )	12.4	38

### 7.3 Exploitation

D'un point de vue général, les portées sont assez similaires pour chacune des configurations, et l'application des défauts montre la même influence entre les deux géométries analysées. Concernant les pressions maximales, celles fournies par l'industriel sont toujours supérieures à celles obtenues avec notre modèle quelle que soit la configuration comparée, les différences pouvant atteindre 15%. A contrario, les amplitudes de l'erreur de transmission sous charge sont entre 2.5 et 5 fois plus élevées en utilisant notre modèle numérique que celui utilisé par l'industriel. Cependant, il est à noter que les valeurs des pressions maximales ou des amplitudes d'erreur de transmission sont beaucoup plus stables avec notre modèle numérique. La géométrie analytique développée est donc moins sensible aux défauts de positionnement.

Deux raisons principales peuvent expliquer ces différences :

- Les fortes différences de l'erreur de transmission peuvent provenir de la méthode de résolution utilisée. Nous ne connaissons pas la façon dont est calculé le partage de charge dans le cas de l'engrenage Gleason. En effet, équilibrer un effort global (par exemple le couple ramené au centre de la denture) donnera des amplitudes d'erreur de transmission qui sont inférieures à celles obtenues en équilibrant le couple d'entrée (diminution de 20% sur la Figure 3.47), tout en conservant l'allure des portées, les pressions maximales ou encore le partage de charge (effort supporté par chaque dent à tout instant) assez similaires.
- Les différences de pressions maximales peuvent quant à elle provenir de la méthode de calcul de déformation de contact évoquée plus tôt.

Le couplage de ces deux différences peut accentuer les effets sur les résultats de sorties, mais n'a cependant pas pu être testé, la modélisation du contact n'ayant pas été modifiée dans notre modèle numérique.

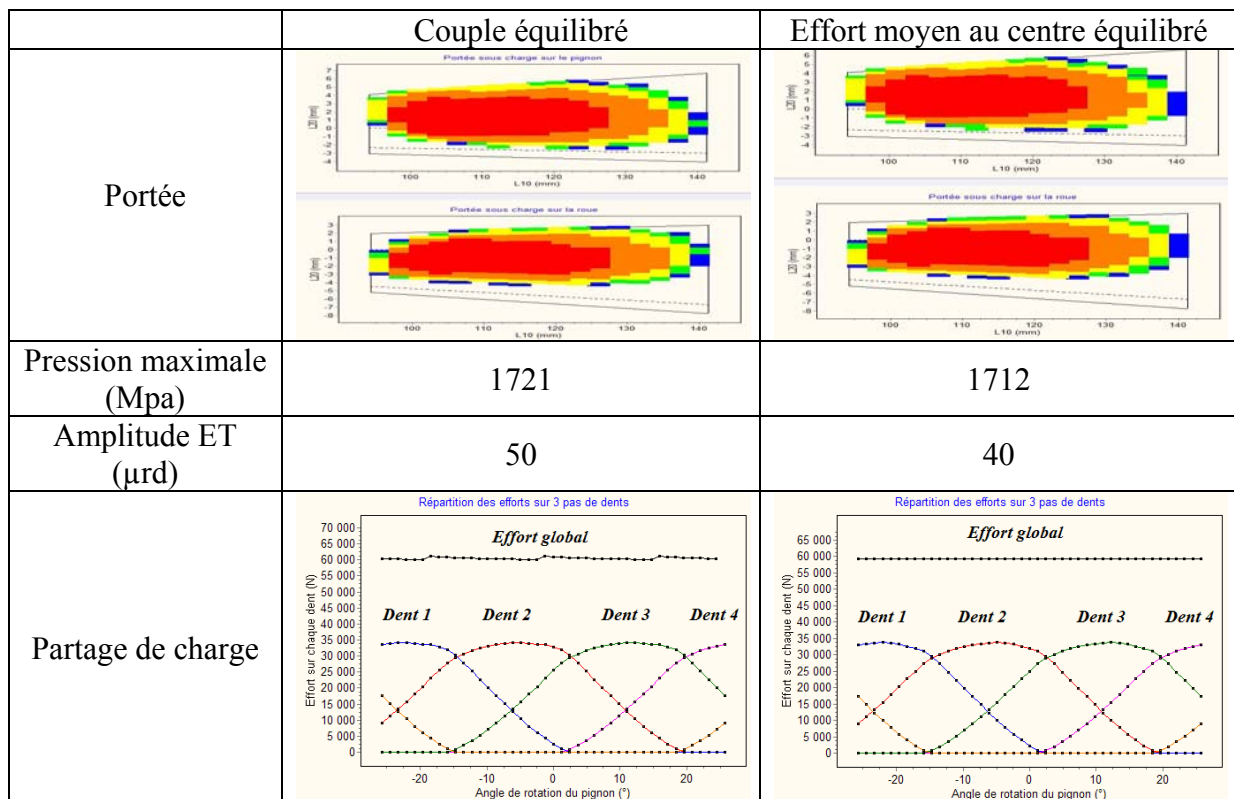


Figure 3.47 : Différence entre deux méthodes de calculs

## 8. Conclusion

Deux engrenages ayant des géométries différentes ont été usinés sur une machine cinq axes, à l'aide d'un logiciel de FAO s'appuyant sur la CAO générée par notre modèle numérique ASLAN. Les temps d'usinage sont très longs, de l'ordre de la journée, contrairement aux techniques de taillage classique pour ce genre d'engrenage (Gleason par exemple), qui est plutôt de l'ordre de l'heure. Cependant, l'objectif n'est pas ici d'optimiser les temps d'usinage, mais principalement de montrer l'« usinabilité » des engrenages spiro-coniques par ces machines. Les durées d'usinages pourront être réduites en utilisant par exemple des fraises de formes, ou en optimisant les stratégies d'usinage.

Une fois les engrenages usinés, certains flancs de denture ont été contrôlés à l'aide d'une machine de contrôle 3D. Ces comparaisons ont montré que les écarts de surfaces sont très faibles, puisque de l'ordre de  $10\mu\text{m}$  sur les flancs actifs. Les erreurs les plus importantes ont été mesurées principalement sur les bords de dentures, et non sur les flancs actifs des engrenages. Par ailleurs, une étude de rugosité a montré des résultats très satisfaisants. L'ensemble de ces résultats tend donc à montrer que l'usinage d'engrenages spiro-coniques sur des centres d'usinages cinq axes est possible et peut donc être une alternative aux moyens de taillage classique, notamment pour la réalisation de petites séries.

Parallèlement, un banc d'essai a été développé, permettant la mesure de l'erreur de transmission ainsi que la portée (à vide ou sous charge). Le banc d'essai, constitué de deux parties principales, est fixé sur une fraiseuse numérique trois axes. Des séries d'essais ont été réalisées pour différentes configurations de couples et de vitesses, avec ou sans présence de défauts de montage. Les vitesses de rotation de la broche sont faibles (30tr/min) afin de pouvoir comparer les résultats expérimentaux à notre modèle quasi-statique. Après avoir vérifié que les mesures expérimentales étaient reproductibles, l'influence des défauts de montage sur les erreurs de transmission a été étudiée. Selon les défauts, les amplitudes des erreurs de transmission peuvent diminuer. Le fonctionnement de l'engrenage peut donc être amélioré en appliquant volontairement certains défauts de positionnement. Il est important de noter que selon l'engrenage utilisé les effets des défauts sont différents. Les conclusions obtenues ne sont donc pas à généraliser à tous les engrenages spiro-coniques.

Les modèles numériques ont ensuite été comparés aux résultats d'essais. Les erreurs de transmission ainsi que les portées obtenues lors des essais expérimentaux sont très proches de celles obtenues avec les modèles numériques, permettant ainsi de les valider. Il est cependant important de noter qu'il est difficile de recalibrer parfaitement les courbes étant donné que de nombreuses données sont inconnues, notamment les raideurs des liaisons du banc d'essai.

Enfin, une comparaison est réalisée entre notre modèle numérique pour le cas d'un engrenage analytique, avec les résultats fournis par un industriel pour une denture Gleason non simplifiée. Les comparaisons ont montré que les pressions maximales obtenues avec notre modèle numérique sont inférieures à celles obtenues avec le modèle de l'industriel. La tendance est inversée avec les amplitudes des erreurs de transmission. Celles obtenues avec notre modèle numérique sont largement supérieures à celles obtenues avec le modèle numérique utilisé par l'industriel. Cependant, une stabilité est observée avec l'utilisation de l'engrenage analytique face à des défauts de positionnement, comparé à l'engrenage Gleason. Les différences peuvent être expliquées par les hypothèses faites dans les deux modèles numériques, qui n'utilisent pas les mêmes théories.

De plus il a été montré dans l'étude expérimentale, que l'amplitude de l'erreur de transmission est très sensible à l'environnement (raideurs des paliers, ...). Les résultats des modèles numériques doivent donc être pris avec précaution. Il serait sans doute plus judicieux de considérer l'amplitude de l'erreur de transmission « en relatif », d'une simulation à une autre, de manière à mettre en évidence l'influence d'un paramètre pour une conception optimale.



## Conclusion générale

---

---

La conception et le comportement mécanique sous charge des engrenages spiro-coniques sont étudiés dans ce travail de thèse. La forme des dentures de ce type d'engrenages est dépendante des mouvements et des outils de différents constructeurs. Au niveau universitaire et industriel, plusieurs études expérimentales et numériques ont été réalisées afin d'optimiser les surfaces des flancs de dent, mais toujours en fonction de la définition des trajectoires d'outils de taillage, et par conséquent des réglages des machines. Les surfaces ont donc une définition paramétrique. Il est important d'optimiser ces surfaces car, contraintes à de fortes charges, les dentures spirales sont très sensibles aux défauts de positionnement du pignon et de la roue, engendrant des surpressions sur les flancs et des contraintes élevées en creux de dents. L'originalité de ce travail de thèse est de définir une nouvelle surface des dentures, analytique, sans être tributaire du moyen de taillage. En effet, l'existence des centres d'usinage cinq axes permet la fabrication de formes complexes, comme celle des dentures des engrenages spiro-coniques. L'objectif a donc été de définir cette nouvelle géométrie et de l'introduire dans un modèle numérique du comportement sous charges des engrenages spiro-coniques.

Le chapitre I présente un état de l'art de la modélisation du comportement mécanique des engrenages. Les différents procédés de fabrication telle que la méthode Gleason, Oerlikon et Klingelberg sont rappelés dans la première partie. Les différentes optimisations de surface de denture sont abordées, ainsi que les modèles mécaniques existants. Certaines études expérimentales sont aussi présentées, concernant les mesures d'erreur de transmission, de portées ou encore de contraintes en creux de dent. Ces analyses ont permis de définir les conditions de notre modèle.

Le chapitre II décrit la modélisation du comportement mécanique sous charge, qui prend en compte des flancs des dentures obtenus à partir d'un modèle standard simplifié ou de la nouvelle géométrie analytique. Dans ce dernier cas, les engrenages sont conjugués sur l'ensemble de la largeur de denture. La spirale utilisée est de type logarithmique, ce qui permet d'avoir un angle constant entre le rayon en un point et sa tangente. Les efforts restent ainsi globalement toujours dans la même direction. La hauteur de denture peut être définie constante, ce qui peut permettre d'avoir une longueur de contact plus importante. Afin d'éviter les contacts en bords de denture, des corrections de bombé ont été ajoutées, ainsi que des corrections de profils pour éviter les contacts en tête, qui génèrent des surpressions. Une simulation à vide fournit les zones potentiellement en contact entre les dents du pignon et de la roue. Ensuite, un modèle du calcul du partage de charge a été réalisé, en se basant sur la résolution des équations de compatibilité des déplacements et sur la méthode des coefficients d'influence. Les effets dus à la flexion et au contact ont été séparés afin de limiter les temps de calculs. Les effets de flexion sont estimés par la combinaison de calculs Eléments Finis et de bases de fonctions d'interpolations originales, permettant de prendre en compte tout type de géométrie, ainsi que l'environnement de l'engrenage. Les effets de contact ont été obtenus par la théorie de Boussinesq. Le modèle permet d'obtenir, dans un temps de calcul raisonnable, le partage de charge entre les dents simultanément en contact, les pressions de contact, la rigidité d'engrènement, l'erreur de transmission sous charge et les contraintes en pied de dent.

Le chapitre III aborde en première partie la faisabilité de l'usinage de ces profils de denture. La fabrication a été effectuée sur une machine cinq axes, associée à des mesures métrologiques des flancs de denture. Ces mesures, à partir d'une machine tridimensionnelle, ont montré que le procédé d'usinage était tout à fait opérationnel pour obtenir des dentures de qualité. Cependant, il est nécessaire de travailler sur l'optimisation du temps d'usinage, ce qui n'était pas l'objectif du travail de cette thèse. Les engrenages ainsi usinés ont pu être testés sur un banc d'essai, réalisé spécifiquement pour ce travail. Ce dernier permet la mesure de l'erreur de transmission sous charge à partir de codeurs optiques. Afin de simplifier le montage et obtenir un bon niveau de précision de positionnement des différents éléments, le banc a été monté dans une fraiseuse trois axes. Les essais expérimentaux ont permis de mettre en évidence l'influence des erreurs de montage sur l'amplitude de l'erreur de transmission, tel que l'offset par exemple. D'autre part, des comparaisons entre les résultats numériques et les simulations ont été menées et ont permis de valider le modèle. Ce travail a mis en évidence les effets primordiaux des conditions aux limites imposées sur les arbres du pignon et la roue. En effet, les rigidités interviennent directement sur les variations de l'amplitude de l'erreur de transmission. En dernière partie de ce chapitre, une comparaison est présentée entre les résultats des simulations obtenus par la géométrie analytique et ceux d'un cas de denture spirale Gleason. L'intérêt de la nouvelle géométrie est montré, en particulier la possibilité de garder une portée centrée sur le flanc de la denture avec des pressions limitées.

En conclusion, l'objectif fixé de proposer un modèle du comportement sous charge des engrenages spiro-coniques avec l'intégration d'une nouvelle géométrie de denture analytique a été atteint. Les comparaisons des résultats numériques et expérimentaux ont confirmé la validité des simulations basées sur des modèles scientifiques développés. Cette thèse permet de proposer un modèle numérique robuste et des nouvelles surfaces analytiques utilisables dans le domaine industriel.

Ce modèle peut servir de base et d'ouverture à différentes réflexions et futurs développements :

- Au niveau de l'usinage, il est primordial d'approfondir les procédés d'usinage afin de réduire les temps de fabrication. L'utilisation d'outils de forme permettra de réaliser des ébauches plus rapides,
- De même, il serait intéressant de travailler sur l'optimisation des surfaces des dentures. Une étude d'influence, par exemple à partir de plans d'expériences, permettrait de définir des paramètres géométriques des flancs de denture pour améliorer certains critères comme l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge ou les pressions de contact maximales,
- Cette thèse permet également la définition de nouvelles géométries. En effet il a été montré la faisabilité de la fabrication de surfaces complexes. Il est donc envisageable de définir d'autres géométries, par exemple lié à des optimisations directes des surfaces 3D des flancs des dents,
- Le modèle sous charge en quasi-statique est une base à des études dynamiques. La détermination des rigidités d'engrènement, l'erreur de transmission, la localisation des zones de contact sont des paramètres nécessaires aux modèles 3D dynamiques. Au sein du laboratoire LaMCoS, déjà plusieurs exploitations du modèle quasi-statique ont permis le développement de modèles dynamiques originaux.



## Références bibliographiques

---

---

- [1] **HENRIOT G.** Engrenages : conception, fabrication, mise en oeuvre. 7<sup>ième</sup> édition. Paris : Dunod, 1999. 875 p.
- [2] **HENRIOT G.** Traité théorique et pratique des engrenages : étude complète du matériel. Tome 2, 5<sup>ième</sup> édition. Paris : Bordas, 1983. 662 p.
- [3] **KALETA J.** Taillage et rectification des engrenages : procédés. *Techniques de l'Ingénieur, Traité Génie Mécanique*, 1998, BM7155, 23p.
- [4] **FONG Z. H., TSAY C-B.** A mathematical model for the tooth geometry of circular-cut spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1991, Vol. 113, n° 2, p. 174-181.
- [5] **LIN C. Y., TSAY C. B., FONG Z. H.** Computer aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface deviation. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, Vol. 33, n° 6, p. 785-803.
- [6] **LIN C. Y., TSAY C. B., FONG Z. H.** Mathematical model of spiral bevel and hypoid gears manufactured by the modified roll method. *Mechanism and Machine Theory*, 1997, Vol. 32, n° 2, p. 121-136.
- [7] **CHANG S. H., HUSTON R. L., COY J. J.** Computer aided design of bevel gear tooth surfaces. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 585-591.
- [8] **HUSTON R. L., MAVRIPLIS D., OSWALD F. B. et al.** A basis for solid modelling of gear teeth with application in design and manufacture. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, Vol. 29, n° 5, p. 713-723.
- [9] **AL DAFCCAK M. J., ANGELES J., GONZALEZ PALACIOS M. A.** The modelling of bevel gears using the exact spherical involute. *Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME*, 1994, Vol. 116, n° 2, p. 364-368.
- [10] **COLBOURNE J. R.** Compensating for spindle tilt in the cutting of spiral bevel gears. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 727-743.
- [11] **SHUNMUGAM M. S., SUBBA RAO B., JAYAPRAKASH V.** Establishing gear tooth surface geometry and normal deviation. Part II - Bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, Vol. 33, n° 5, p. 525-534.
- [12] **WANG P. Y., FONG Z. H.** Fourth-Order Kinematic Synthesis for Face-Milling Spiral Bevel Gears with Modified Radial Motion (MRM) Correction. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2006, Vol. 128, p. 457-467.
- [13] **WANG P. Y., FONG Z. H.** Mathematical Model of Face-Milling Spiral Bevel Gear with Modified Radial Motion (MRM) Correction. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, Vol. 41, N°11-12, p. 1307-1323.

- [14] **LITVIN F. L., FUENTES A., HAYASAKA K.** Design, Manufacture, Stress Analysis, and Experimental Tests of Low-Noise High Endurance Spiral Bevel Gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, Vol. 41, N°18, p. 83-118.
- [15] **LITVIN F. L., FUENTES A., DEMENEGO A., VECCHIATO D., FAN Q.** New Developments on the Design and Generation of Gear Drives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, 2001, Vol. 215, n°7 p.747-757.
- [16] **HANDSCHUH R. F.** Recent Advances in the Analysis of Spiral Bevel Gears. *NASA Technical Memorandum 107391*, 1997, 10p.
- [17] **HANDSCHUH R. F., BIBEL G. D.** Experimental and analytical study of aerospace spiral bevel gear tooth fillet stresses. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1999, Vol. 121, n° 4, p. 565-572.
- [18] **SIMON V. V.** Head-Cutter for Optimal Tooth Modifications in Spiral Bevel Gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, Vol. 44, N°7, p. 1420-1435.
- [19] **SIMON V. V.** Design and Manufacture of Spiral Bevel Gears with Reduced Transmission Errors. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2009, Vol. 131, p. 041007, 11p.
- [20] **GOSSELIN C., CLOUTIER L.** The generating space for parabolic motion error spiral bevel gears cut by the Gleason method. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1993, Vol. 115, p. 483-486.
- [21] **VIMERCATI M.** Mathematical Model for Tooth Surfaces Representation of Face-Hobbed Hypoid Gears and its Application to Contact Analysis and Stress Calculation. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, Vol. 42, N°6, p. 669-690.
- [22] **FAN Q., DAFOE R. S., SWANGER J. W.** Higher-Order Tooth Flank Form Error Correction for Face-Milled Spiral Bevel and Hypoid Gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2008, Vol. 130, p. 072601, 7p.
- [23] **FAN Q.** Enhanced algorithms of contact simulation for hypoid gear drives produces by face-milling and face-hobbing processes. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2007, Vol. 129, pp. 31-37.
- [24] **SHIH Y. P., FONG Z. H.** Flank Correction for Spiral Bevel and hypoid Gears on a Six-Axis CNC Hypoid Generator. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2008, Vol. 130, p. 062604, 11p.
- [25] **FONG Z. H.** Mathematical model of universal hypoid generator with supplemental kinematic flank correction motion. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2000, Vol. 122, p. 136-142.
- [26] **FONG Z. H., TSAY C. B.** Kinematical optimization of spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1992, Vol. 114, n 3, p. 498-506.
- [27] **OLIVIER T.** Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non situés dans un même plan. Paris : *Bachelier, Imprimeur - Librairie*, 1842, 118p.

- [28] **HUSTON R. L., COY J. J.** Ideal Spiral Bevel Gears - A new Approach to Surface Geometry. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1981, Vol. 103, p.127-133.
- [29]  **TSAI Y. C., CHIN P. C.** Surface Geometry of Straight and Spiral Bevel Gears. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1987, Vol. 109, p. 443-449.
- [30] **PAN C. Y., WEN X. S.** Profile Formule Derivation of the Involute Spherical Gears. *Journal of National University of Defense Technology*, 2004, Vol. 24, N° 4, p. 93-98.
- [31] **BRUYERE J.** Contribution à l'optimisation de la conception des engrenages coniques à denture droite. Analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances. *Thèse Génie Mécanique. Metz : Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Metz*, n° 2006ENAM40, 2006, 232p.
- [32] **GUINGAND M., DE VAUJANY J. P., ICARD Y.** Fast Three-Dimensional Quasi-Static Analysis of Helical Gears Using the Finite Prism Method. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2004, Vol. 126, p. 1082-1088.
- [33] **LETZELTER E., DE VAUJANY J. P., CHAZEAU L., GUINGAND M.** Quasi-static load sharing model in the case of Nylon 6/6 cylindrical gears. *Materials and Design*, 2009, Vol. 30, p. 4360-4368.
- [34] **HILTCHER Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J. P.** Load Sharing of worm gear with a plastic wheel. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2007, Vol. 129, p. 23-30.
- [35] **SIMON V. V.** Load distribution in cylindrical worm gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2003, Vol. 125, p. 356-364.
- [36] **JACQUIN C.Y.**, Modélisation et optimisation du comportement sous charge des engrenages face. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n°2001ISAL0045, 2001, 262 p.
- [37] **GUINGAND M., DE VAUJANY J. P., ICARD Y.** Analysis and Optimization of the Loaded Meshing of Face Gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2005, Vol. 127, p. 135-143.
- [38] **GUINGAND M., DE VAUJANY J. P., JACQUIN C. Y.** Quasi-static analysis of a face gear under torque. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2005, Vol. 194, p. 4301-4318.
- [39] **ICARD Y.** Engrenage spiro-conique : modélisation sous charge appliquée au domaine aéronautique. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n° 2005ISAL0007, 2005, 369p.
- [40] **LELKES M.** Définition des engrenages Klingelnberg. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n° 2002ISAL00112, 2002, 146p.
- [41] **MADROSKY D.** Conception des engrenages spiro-coniques : géométrie et simulation du comportement. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n° 87ISAL0018, 1987, 229 p.

- [42] **SIMON V. V.** Machine-Tool Settings to Reduce the Sensitivity of Spiral Bevel Gears to Tooth Errors and Misalignments. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2008, Vol. 130, p. 082603, 9p.
- [43] **SIMON V. V.** Load Distribution in Hypoid Gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2000, Vol. 122, p. 529-535.
- [44] **SIMON V. V.** Load Distribution in Spiral Bevel Gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2007, Vol. 129, p. 201-209.
- [45] **SIMON V. V.** Optimal machine tool setting for hypoid gears improving load distribution. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14392, 8 p.
- [46] **CELIK M.** Comparison of three teeth and whole body models in spur gear analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, Vol. 34, n° 8, p. 1227-1235.
- [47] **OLAKOREDE A. A.** Répartition de charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques, application de la méthode des Prismes Finis en CAO. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n°90ISAL0049, 1990, 157 p.
- [48] **OLAKOREDE A. A., PLAY D.** Development of the finite prism method in computer aided design of spur gear. *Proceedings of the fourth SAS World Conference, FEMCAD, Paris, October 17-19 1988*. IITT-International, Vol. 1, p. 384-391.
- [49] **OLAKOREDE A. A., PLAY D.** Load sharing, load distribution and stress analysis of cylindrical gears by finite prism method in a CAD environment. *Proceedings of Design Productivity International Conference, Honolulu, Hawaii, February 3-9 1991*. Vol. 2, p. 921-927.
- [50] **DE VAUJANY J. P.** Comportement d'engrenage cylindrique intérieur. Effets de jante et de voile. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n°96ISAL0128, 1996, 178 p.
- [51] **DE VAUJANY J. P., KIM H. C., GUINGAND M. et al.** Effects of rim and web on stresses of internal cylindrical gears. *Proceedings of the 1996, 7<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1996, Vol. 88, p. 73-80.
- [52] **KIM H. C.** Etude des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des Prismes Finis. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n° 96ISAL0045, 1996, 152 p.
- [53] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M. et al.** Effects of rim, web and constraint conditions on stresses of external and internal cylindrical gears. *Proceedings of the International Congress, Gear Transmission'95, Sofia, Bulgaria, September 26-28 1995*. Vol. 2, p. 164-171.
- [54] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M. et al.** Stress analysis of cylindrical webbed spur gears: Parametric study. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1998, Vol. 120, n° 2, p. 349-357.

- [55] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M. et al.** Stresses of external and internal cylindrical gears. Effects of rim, web and mechanical constraint conditions. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Milan, Italy, August 29-September 2 1995*. Vol. 1, p. 565-569.
- [56] **VIJAYAKAR M., BUSBY H. R., HOUSER D. R.** Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebyshev polynomials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, Vol. 24, n° 8, p. 1461-1477.
- [57] **GAGNON P.** Développement d'une méthode de calcul et d'une approche expérimentale pour l'obtention des déplacements en flexion des dents d'engrenages coniques à denture spirale. *Thèse Génie Mécanique. Québec : Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec, 1995, 254 p.*
- [58] **GOSSELIN C., DE VAUJANY J. P.** Loaded tooth contact analysis of spur, helical and hypoid gears based on the finite strips and finite prisms models. *Proceeding of 4<sup>th</sup> World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18 1999*. Paris. MCI, 1999, Vol. 1, p. 29-41.
- [59] **GOSSELIN C., GAGNON P., CLOUTIER L.** Accurate tooth stiffness of spiral bevel gear teeth by the finite strip method. *Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME*, 1998, Vol. 120, n° 4, p. 599-605.
- [60] **GOSSELIN C., GUERTIN T., REMOND D., JEAN Y.** Simulation and experimental measurement of the transmission error of real hypoid gears under load. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2000, Vol. 122, p.109-122.
- [61] **BARONET C. N., TORDION G. V.** Exact stress distribution in standard gear teeth and geometry factors. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, 1973, Vol.95, n°4, p.1159-1163.
- [62] **UMEZAWA K.** The meshing test on helical gears under load transmission. *Bulletin of JSME*, 1972, Vol. 15, n°91, p. 1632-1369.
- [63] **SUDOH K., TANAKA Y., MATSUMOTO S., TOZAKI Y.** Load distribution analysis method for cylindrical worm gear teeth. *International Journal of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1996, series C, Vol. 39, n° 3, p. 606-613.
- [64] **SIMON V. V.** Displacements in worm gears with ground concave worm profile. *Mechanism and Machine Theory*, 1996, Vol. 31, n° 8, p. 1131-1140.
- [65] **SIMON V. V.** Load distribution in cylindrical worm gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2003, Vol. 125, p. 356-364.
- [66] **JOHNSON K. L.** Contact mechanics. *New York : Cambridge University Press*, 1985. 452 p.
- [67] **KALKER J. J.** Three dimensional elastic bodies in rolling contact. *Solid Mechanics and its Applications, volume 2. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers*, 1990. 314 p.
- [68] **GLEASON.** Documentation technique GLEASON. *Rochester : Gleason Works*, 1967. 363 p.

- [69] **GRABSCHEID J., HIRSCHMANN K. H., KLEINBACH K. et al.** A new integrated bevel and hypoid gear tester. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 511-518.
- [70] **ALTIDIS P. C., SAVAGE M., LEWICKI D. G. et al.** On contact analysis in spiral bevel gear transmission. *Proceeding of the Spring National Design Engineering Show and Conference, Chicago, March 2-5 1987*. Stamford. Cahners Exposition Group, 1987, p. 153-187.
- [71] **SAVAGE M., ALTIDIS P. C., LEWICKI D. G. et al.** Tooth contact shift in loaded spiral bevel gears. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 203-212.
- [72] **SIMON V. V.** Tooth contact analysis of mismatched hypoid gears. *Proceedings of the 1996, 7<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1996, Vol. 88, p. 789-798.
- [73] **ZHANG T.** The calculation of contact deformation for double circular-arc gears. *Proceedings of the 1992 International Power Transmission and Gearing Conference, Scottsdale, September 13-16 1992*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1992, Vol. 43, n° 1, p. 147-151.
- [74] **DE MUL J. M., KALKER J. J., FREDRIKSSON B.** The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions. *Journal of Tribology, Transactions of the ASME*, 1986, Vol. 108, n° 1, p. 140-148.
- [75] **KALKER J. J.** Contact mechanical algorithms. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1988, Vol. 4, n° 1, p. 25-32.
- [76] **KALKER J. J.** Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. *Wear*, 1986, Vol. 113, n° 1, p. 61-77.
- [77] **KALKER J. J.** Numerical calculation of the elastic field in a half-space. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1986, Vol. 2, n° 4, p. 401-410.
- [78] **KALKER J. J.** Two algorithms for the contact problem in elastostatics. *Proceedings of the International Symposium, Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Vancouver, July 6-9 1982*. Waterloo : University of Waterloo Press, 1982, p. 103-120.
- [79] **CONRY T. F., SEIREG A.** A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, 1971, Vol. 38, p. 387-392.
- [80] **MARSHEK K. M., CHEN H. H.** Discretization Pressure-wear theory for bodies in sliding contact. *Journal of Tribology, Transaction of the ASME*, 1989, Vol. 111, n° 1, p 95-100.
- [81] **WRIGGERS P., SIMO J. C., TAYLOR R. L.** Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems. *Proceedings of the NUMETA'85 Conference, Swansea, January 7-11 1985*. Rotterdam : A. A. Balkema, 1985, p. 97-106.

- [82] **KRISHNA P. S., BURTON P.** Numerical solution of non-Hertzian elastic Contact Problems. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, 1974, p. 1-8.
- [83] **BOUSSINESQ J.** Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris : Albert BLANCHARD, 1959, 564p.
- [84] **LI J., WANG Z., XU M., WANG S.** Finite element analysis of instantaneous mesh stiffness of cylindrical gears (with and without flexible gear body). *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1999, Vol. 15, n° 8, p. 579-587.
- [85] **LI J., WANG Z., ZHANG G. et al.** Static analysis of bevel gears using finite element method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1998, Vol. 14, n° 4, p. 367-380.
- [86] **QIN D., YANG Y., HU J. et al.** Tooth contact analysis of double enveloping hourglass worm gearing on the condition that errors mixed with deformation. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14401, 7 p.
- [87] **AMBRUOSI G., BIANCO G., DELLA CORTE O. et al.** FEM model for the tooth root bending stress analysis of mating helical gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14359, 9 p.
- [88] **BIBEL G. D., HANDSCHUH R.** Meshing of a spiral bevel gear set with 3D finite element analysis. *Proceedings of the 1996, 7<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1996, Vol. 88, p. 703-708.
- [89] **BIBEL G. D., KUMAR A., REDDY S., HANDSCHUH R. F.** Contact stress analysis of spiral bevel gears using finite element analysis. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1995, Vol. 117(A), n° 2, p. 235-240.
- [90] **BARET C., PIDELO A., RAFFA F. A. et al.** Stress path along the face width in spur gears fillet by 3D P-FEM models. *Proceedings of International Power Transmission and Gearing Conference*, ASME, Chicago, 1989, p. 173-179.
- [91] **CURTI G., RAFFA F. A., GARAVELLI D. et al.** Three-dimensional stress analysis of thin-rimmed gears by the p-FEM approach. *Proceedings of International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, Japan, November 23-26 1991*. JSME, 1991, p. 787-794.
- [92] **PIAZZA A., UBERTI M.** The combined influence of helix angle and total contact ratio on the p-FEM calculated tooth root stress in cylindrical gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14369, 10 p.
- [93] **LITVIN F. L.** Theory of gearing. *Washington : NASA*, 1989. 470 p. RP-1212.
- [94] **FANG Z., YANG H.** Loaded tooth contact analysis with friction on hypoid gears. *Proceeding of 4<sup>th</sup> World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18 1999*. Paris. MCI, 1999, Vol. 1, p. 703-709.

- [95] **FANG Z., YANG H., ZHOU Y. et al.** Optimization for the dynamic behaviour of high speed spiral bevel gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14395, 7 p.
- [96] **YONGPING H., ZHONGKAI E.** Elastic contact finite element analysis of spiral bevel gear meshing. *Proceedings of Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, March 08 1993*. Rotterdam : A.A. Balkema, 1993, Vol. 1, p. 107-111.
- [97] **ZHANG Y., FANG Z.** Analysis of tooth contact and load distribution of helical gears with crossed axes. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, Vol. 34, n 1, p. 41-57.
- [98] **VIJAYAKAR M.** Edge effects in gear tooth contact. *Proceedings of the 1996, 7<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1996, Vol. 88, p. 205-212
- [99] **VIJAYAKAR M., HOUSER D. R.** Contact analysis of gears using a combined finite element and surface integral method. *Gear Technology*, 1993, Vol. 10, n°4, p. 26-33.
- [100] **CHENG Y., LIM T. C.** Dynamics of hypoid gear transmission with non-linear time-varying mesh. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*. [CD-ROM] DETC2000/PTG-14432, 7 p.
- [101] **BORNER J.** Very efficient calculation of the load distribution on external gear sets - the method and applications of the program LVR. *Proceedings of the 1996, 7<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1996, Vol. 88, p. 219-225.
- [102] **CONRY T. F., SEIREG A.** A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. *Journal of Engineering for Industry, Transactions Of the ASME*, 1973, p. 1115-1122.
- [103] **SAVAGE M., CALDWELL R. J., WISOR G. D. et al.** Gear mesh compliance modelling. *NASA Technical Memorandum 88843*, 1986, 16 p.
- [104] **ELKHOLY A. H., ELSHARKAWY A. A., YIGIT A. S.** Effect of meshing tooth stiffness and manufacturing error on the analysis of straight bevel gears. *Mechanics of Structures and Machines*, 1998, Vol. 26, n° 1, p. 41-61.
- [105] **SENTOKU H.** Load distribution and tooth root stress of bevel gears. *International Journal of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1999, series C, Vol. 42, n° 2, p. 404-409.
- [106] **GOSSELIN C., CLOUTIER L., NGUYEN Q. D.** A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, Vol. 30, n° 3, p. 433-450.
- [107] **KOLIVAND M., KAHRAMAN A.** A load distribution model for hypoid gears using ease-off topography and shell theory. *Mechanism and Machine Theory*, 2099, Vol. 44, p. 1848-1865.



- [108] **SIMON V. V.** Load distribution in double enveloping worm gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1993, Vol. 115, n° 3, p. 496-501.
- [109] **BIBEL G. D., REDDY S. K., SAVAGE M. et al.** Effects of rim thickness on spur gear bending stress. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1994, Vol. 116, n° 4, p. 1157-1162.
- [110] **CHANG S. H., HUSTON R. L., COY J. J.** A finite element stress analysis of spur gears including fillet radii and rim thickness effects. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1983, Vol. 105, p. 327-330.
- [111] **GULLIOT M., TORDION G. V.** Stress analysis of thin-rim spur gears by finite element method. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 167-172.
- [112] **ODA S., NAGAMURA K., AOKI K.** Stress analysis of thin rim spur gears by finite element method. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1981, Vol. 24, n° 193, p. 1273-1280.
- [113] **ODA S., SAYAMA T., SHIMATOMI Y.** Study on welded structure gears (1<sup>st</sup> report, effect of rim thickness on root stresses and bending fatigue strength). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1980, Vol. 23, n° 175, p. 132-139.
- [114] **SAYAMA T., ODA S., UMEZAWA K.** Study on welded structure gears (11<sup>th</sup> report, optimum structure for thin-rimmed spur gear). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1986, Vol. 29, n° 256, p. 3582-3586.
- [115] **SAYAMA T., ODA S., UMEZAWA K.** Study on welded structure gears (6<sup>th</sup> report, effects of web arrangements on root stresses and tooth deflection). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1984, Vol. 27, n° 230, p. 1773-1779.
- [116] **RAO M., RAMA C., MUTHUVEERAPPAN G.** Finite element modelling and stress analysis of helical gear teeth. *Computers and Structures*, 1993, Vol. 49, n° 6, p. 1095-1106.
- [117] **SOMPRAKIT P., POURAZADY M., HUSTON R. L.** Effect of fitting parameters on spur gear stresses. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*. New York : ASME, 1989, p. 815-822.
- [118] **VON EIFF H., HIRSCHMANN K. H., LECHNER G.** Influence of gear tooth geometry on tooth stress of external and internal gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1990, Vol. 112, n° 4, p. 575-583.
- [119] **NALLUVEETIL S. J., MUTHUVEERAPPAN G.** Finite element modelling and analysis of a straight bevel gear tooth. *Computers and Structures*, 1993, Vol. 48, n° 4, p. 739-744.

- [120] **VAIDYANATHAN S., BUSBY H. R., HOUSER D. R.** Numerical approach to the static analysis of an annular sector mindlin plate with applications to bevel gear design. *Computers and Structures*, 1994, Vol. 51, n° 3, p. 255-266.
- [121] **LITVIN F. L., CHEN J. S., LU J., HANDSCHUH R. F.** Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1996, Vol. 118, p. 561-567.
- [122] **WANG P. Y., FONG Z. H.** Adjustability Improvement of face-Milling Spiral Bevel Gears by Modified radial Motion (MRM) Method. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, Vol. 44, N°1, p. 69-89.
- [123] **FONG Z. H., TSAY C. B.** The undercutting of circular-cut spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1992, Vol. 114, p. 317-325.
- [124] **FONG Z. H., TSAY C. B.** A study on the tooth geometry and cutting machine mechanisms of spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1991, Vol. 113, p. 346-351.
- [125] **LITVIN F. L., KUAN C., WANG J. C. et al.** Minimization of deviations of gear real tooth surfaces determined by coordinates measurements. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1993, Vol. 115, p. 995-1001.
- [126] **LITVIN F. L., TSUNG W. J., COY J. J., HEINE C.** Method for generation of spiral bevel gears with conjugated gear tooth surfaces. *Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1987, Vol. 109, p. 163-170.
- [127] **LITVIN F. L., WANG J. C., HANDSCHUH R. F.** Computerized design and analysis of face-milled uniform tooth height spiral bevel gears drives. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1996, Vol. 118, p. 573-579.
- [128] **LITVIN F. L., ZANG Y., KIEFFER J., HANDSCHUH R. F.** Identification and minimization of deviations of real gear tooth surfaces. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1991, Vol. 113, p. 55-61.
- [129] **LITVIN F. L., ZANG Y., LUNDY M., HEINE C.** Determination of settings of a tilted head cutter for generation of hypoid and spiral bevel gears. *Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1998, Vol. 110, p. 495-500.
- [130] **MARIALIGETI J., CSEKE J., LELKES M.** Connection of some cutting parameters with tooth surface modification in case of epicycloidal spiral bevel gears. Vol2. *Proceedings of Second Conference on Mechanical Engineering*, Budapest, 2000, p. 587-591.
- [131] **MARIALIGETI J., CSEKE J., LELKES M.** Methods for obtaining localised contact pattern in case of spiral bevel gears. *The International Meeting of the Carpathian Region Specialists in the Field Gear*, Baia Mare, 2000, p. 186-191
- [132] **ZHANG Y., LITVIN F. L., HANDSCHUH R. F.** Computerized design of low-noise face-milled spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, Vol. 30, n°8, p. 1171-1178.

- [133] **ZHANG Y., LITVIN F. L., MARUYAMA N. et al.** Computerized analysis of meshing and contact of real gear tooth surfaces. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1994, Vol. 116, p. 677-682.
- [134] **TAMURA H., KAVASAKI K., NAKANO Y.** Method for inspection of spiral bevel gears in Klingelnberg cyclo-paloid system. *Newcastle upon Tyne : Proceedings of the 1994 International Gearing Conference*, 1994, p. 305-310.
- [135] **STADTFELD H. J., GAISER U.** The ultimate motion graph. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2000, Vol. 122, p. 317-322.
- [136] **HUSTON R. L., COY J. J.** Surface Geometry of Circular Cut Spiral Bevel Gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1982, Vol. 104, p. 743-748.
- [137] **HONDA S.** Rotation vibration of helical gear pair with modified tooth surfaces. *JSME International Journal*, 1993, Vol. 36, n°1, p.125-134.
- [138] **LELKES M., PLAY D., MARIALIGETI J.** Cutting parameters definition for Klingelnberg spiral bevel gears optimization. *The JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*. MPT2001 – Fukuoka, 2001, p. 375-380.
- [139] **MARK W. D.** An extremum principle for computation of the zone of tooth contact and generalized transmission error of spiral bevel gears. *Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1988, Vol. 110, p. 211-220.
- [140] **MARK W. D.** The generalized transmission error of spiral bevel gears. *Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1987, Vol. 109, p.275-282.
- [141] **GOSELIN C., NONAKA T., SHIONO Y et al.** Identification of the machine settings of real hypoid gear tooth surface. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1998, Vol. 120, p. 429-440.
- [142] **KAVASAKI K., TAMURA H.** Duplex spread blade method for cutting hypoid gears with modified tooth surface. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1998, Vol. 120, p. 441-447.
- [143] **BAR G., IOTCHEV V.** Accurate tooth contact determination and optimisation for hypoid bevel gears using automatic differentiation. *Proceeding of 4<sup>th</sup> World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18, 1999*. Paris : MCI, 1999, Vol. 1, pp. 519-529.
- [144] **DAREING D. W., CHEN C. M.** Kinematics and evaluation of flat-toothed hypoid gears. *Journal of Engineering for Industry, Transaction of the ASME*, 1973, Vol.95, n°4, p. 1171-1177.
- [145] **KOHAUPT L.** Application of mathematical optimization in designing spiral bevel and hypoid gear blanks. *Methods and Models of Operations Research*, 1992, Vol. 36, n° 6, p. 565-576.
- [146] **LIN C. Y., TSAY C. B., FONG Z. H.** Computer-Aided Manufacturing of the Spiral Bevel and Hypoid Gears by Applying Optimization techniques. *Journal of Materials processing Technology*, 2001, Vol. 114, N°1, p. 22-35.

- [147] **SIMON V. V.** Computer Simulation of Tooth Contact Analysis of Mismatched Spiral Bevel Gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, Vol. 42, N°3, p. 365-381.
- [148] **SIMON V. V.** The influence of Misalignments on Mesh Performances of Hypoid Gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, Vol. 33, N°7, p. 1277-1291.
- [149] **WEI B. Y., DENG X. Z., FANG Z. D.** The Lapping Mechanism of Hypoid Gears. *Journal of Materials Processing Technologies*, 2009, Vol. 209, N°6, p. 3001-3008.
- [150] **HANDSCHUH R. F., BILL R. C.** Recent manufacturing advances for spiral bevel gears. *Proceeding of the Aerospace Technology Conference and Exposition, Long Beach, September 23-26 1991*. Warrendale. SAE Technical Paper Series, 1991, p. 1-12.
- [151] **WANG X. C., GHOSH S. K., WU X. T.** An optimal synthesis of spiral bevel and hypoid gears. *European Journal of Mechanical Engineering*, 1992, Vol. 39, n° 1, p. 3-8.
- [152] **ARTONI A., BRACCI A., GABICCINI M., GUIGGIANI M.** Optimization of the loaded contact pattern in hypoid gears by automatic topography modifications. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2009, Vol. 131, p. 011008, 9p.
- [153] **ARTONI A., KOLIVAND M., KAHRAMAN A.** An ease-off based optimization of the loaded transmission error of hypoid gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2010, Vol. 132, pp. 011010-9p.
- [154] **SIMON V. V.** FEM Stress Analysis in Hypoid Gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, Vol. 35, N°9, p. 1197-1220.
- [155] **ACHTMANN J., BAR G.** Optimized bearing ellipses of hypoid gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2003, Vol. 125, pp. 739-745.
- [156] **ZIK J. J., UICKER J. J.** Co-ordinate transformations used to dynamically scan a spiral bevel gear tooth. *Proceeding of the Computer-Integrated Manufacturing and Robotics Conference, New Orleans, December 9-14 1984*. New York. ASME, Production Engineering Division, 1984, Vol. 13, p. 153-160.
- [157] **GLODEZ S., PEHAN S., FLASKER J.** Experimental results of the fatigue crack growth in a gear tooth root. *International Journal of Fatigue*, 1998, Vol. 20, n° 9, p. 669-675.
- [158] **HOUSER D. R., SMIGEL R.** Gear load distribution and transmission error modelling. *Proceedings of the Fall Technical Meeting, Montréal, October 17-19 1983*. Arlington : AGMA, 1983, p. 1-10.
- [159] **DE VAUJANY J. P., GUINGAND M.** EPSI validation for cylindrical gears. *Optics and Lasers in Engineering*, 2004, Vol. 42, p. 447-459.
- [160] **ZHANG J., FANG Z., CAO X., DENG X.** The Modified Pitch Cone Design of the Hypoid Gear: Manufacture, Stress Analysis and Experimental Tests. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, Vol. 42, N°2, p. 147-158.

- [161] **DE VAUJANY J.P., GUINGAND M., REMOND D., ICARD Y.** Numerical and experimental study of the loaded transmission error of a spiral bevel gear. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2007, Vol. 129, p. 195-200.
- [162] **FALAH B.** Etude expérimentale de la répartition de la charge et du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques. *Thèse Génie Mécanique. Québec : Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval*, 1994, 228 p.
- [163] **FALAH B., GOSSELIN C., CLOUTIER L.** Experimental and numerical investigation of the meshing cycle and contact ratio in spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, Vol. 33, n° ½, p. 21-37.
- [164] **HANDSCHUH R. R., BIBEL G. D.** Comparison of Experimental and Analytical Tooth Bending Stress of Aerospace Spiral Bevel Gears. *NASA Technical Memorandum 1999-208903*, 1999, 19p.
- [165] **HOHN B. R., WINTER H., MICHAELIS K. et al.** Pitting resistance and bending strength of bevel and hypoid gear teeth. *Proceedings of the 1992 International Power Transmission and Gearing Conference, Scottsdale, September 13-16 1992*. New York : ASME, Design Engineering Division, 1992, Vol. 43, n° 1, p. 201-208.
- [166] **Association française de normalisation**, Géométrie des engrenages coniques et hypoïdes : NF ISO 23509, La Plaine Saint-Denis : AFNOR, 2006, 139p.
- [167] **SAINSOT P.**, Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteur. *Thèse Génie Mécanique. Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, n°89ISAL0091, 1989, 205 p.
- [168] **TEIXEIRA ALVES J., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P.** Set of functions for the calculation of bending displacements for spiral bevel gear teeth, *Mechanism and Machine Theory*, 2010, Vol. 45, N°2, p. 349-363.
- [169] **TEIXEIRA ALVES J., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P.** Fonctions pour le calcul des déplacements de flexion de dents d'engrenages spiro-coniques. *AIP-PRIMECA 11<sup>ème</sup> Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée*, France, La Plagne, 22-24 avril 2009, 12p.



# Annexes

## 1. Calcul des coordonnées de la développante de sphère

La développante de sphère est la trajectoire d'un point  $M$ , appartenant au plan  $P'$ , dans son mouvement par rapport au cône de base, lorsqu'il y a roulement sans glissement entre ces deux éléments. Le point  $F$  est le pied de la développante de sphère sur le cercle de base. Les différents angles utilisés sont définis sur la Figure A.1.

Dans un esprit de simplification, les notations suivantes seront utilisées : 
$$\begin{cases} a = \sin(\delta_b) \\ b = \cos(\delta_b) \end{cases}$$

où  $\delta_b$  est le demi angle au sommet du cône de base.

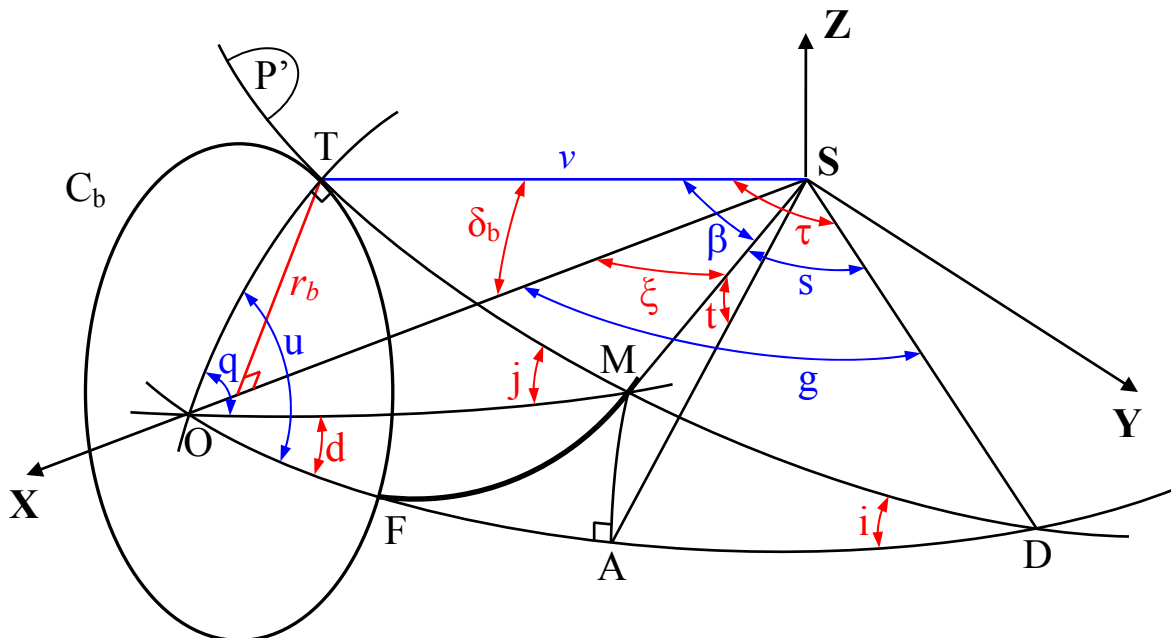


Figure A.1 : Paramétrage géométrique [31]

Les coordonnées du point  $M$  sont notées  $X, Y, Z$  dans le repère de la Figure A.1.

## 1. Propriété des développantes de sphère

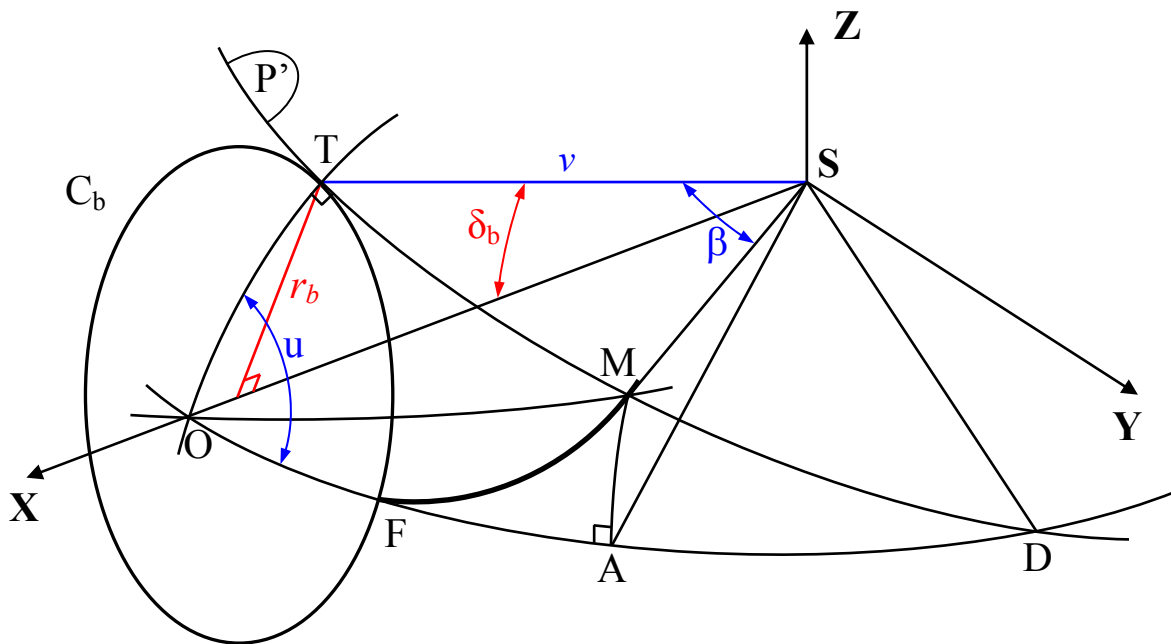


Figure A.2 : Paramétrage géométrique permettant de formuler la propriété des développantes de sphère

Il y a roulement sans glissement du grand cercle ( $P'$ ) sur le cercle de base. La longueur de l'arc  $\widehat{TF}$  est donc égale à celle de l'arc  $\widehat{TM}$ , d'où :

$$u.r_b = \beta.v \Leftrightarrow \beta = u \frac{r_b}{v} = u.\sin(\delta_b) = u.a$$



## 2. Calcul de la valeur de X

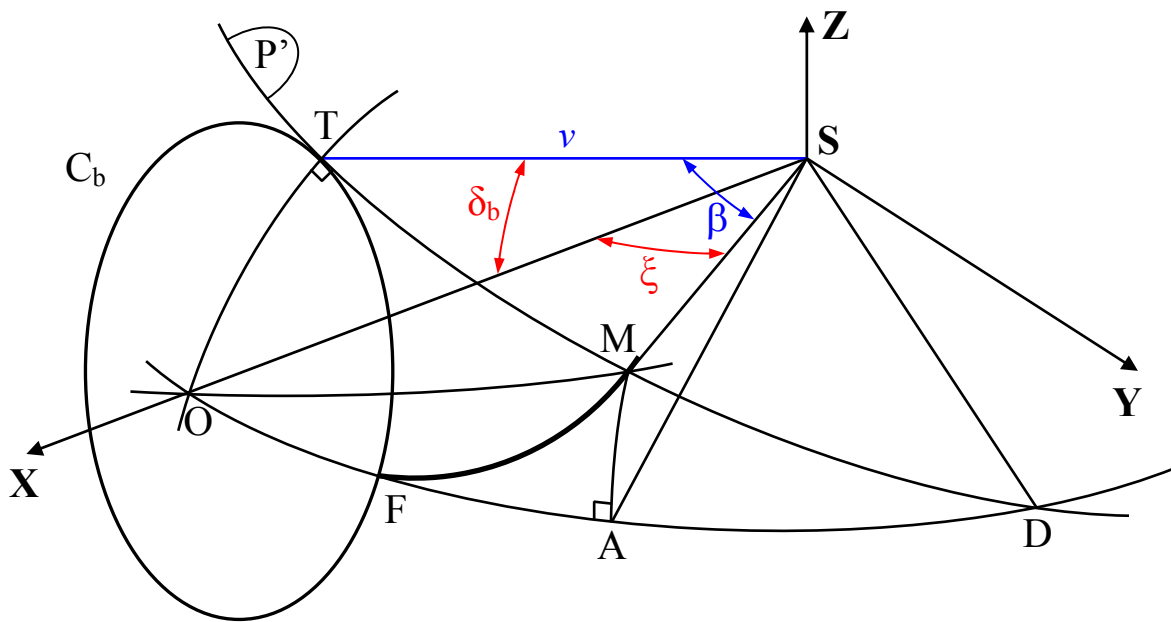


Figure A.3 : Paramétrage géométrique permettant de calculer X

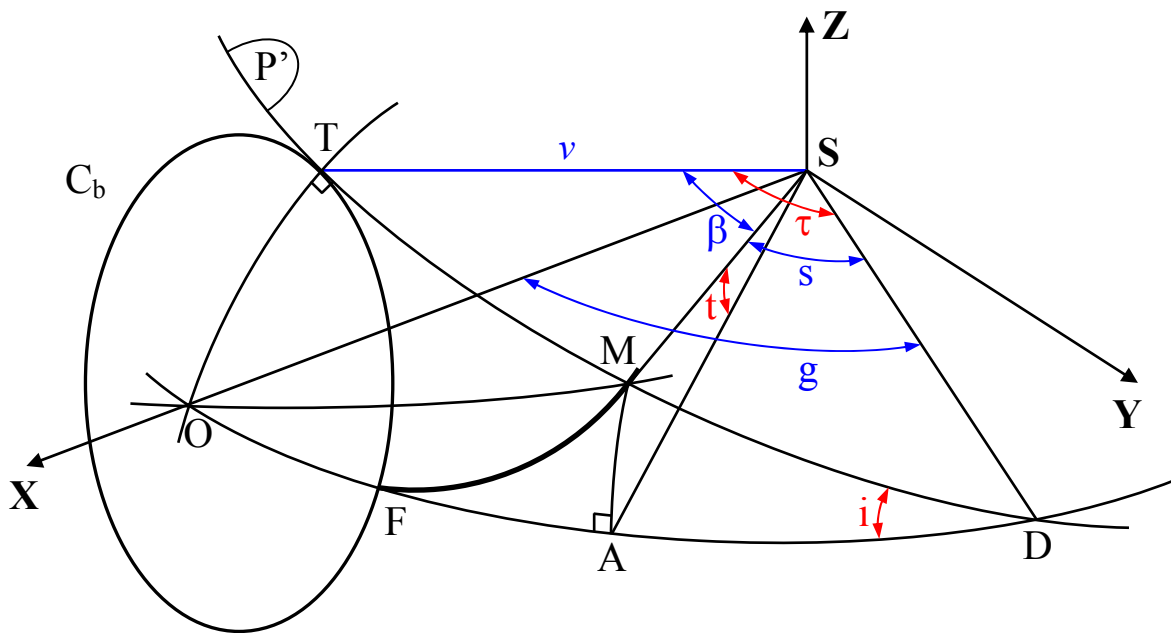
$$X = v \cos(\xi)$$

Dans le triangle rectangle  $\langle O, M, T \rangle$ , la relation 9 de trigonométrie sphérique présentée en Annexe 2 permet d'obtenir l'équation :

$$\cos(\xi) = \cos(\delta_b) \cos(\beta)$$

D'où :

$$X = v \cos(\delta_b) \cos(\beta) = vb \cos(au)$$

3. Calcul de la valeur de  $Z$ Figure A.4 : Paramétrage géométrique permettant de calculer  $Z$ 

$$Z = v \sin(t)$$

Dans le triangle rectangle  $\langle A, D, M \rangle$ , la relation 3 de trigonométrie sphérique présentée en Annexe 2 permet d'écrire :

$$\sin(t) = \sin(s) \sin(i) = \sin(\tau - \beta) \sin(i)$$

D'où :

$$Z = v \sin(\tau - \beta) \sin(i) = v(\sin \tau \cos \beta \sin i - \sin \beta \cos \tau \sin i)$$

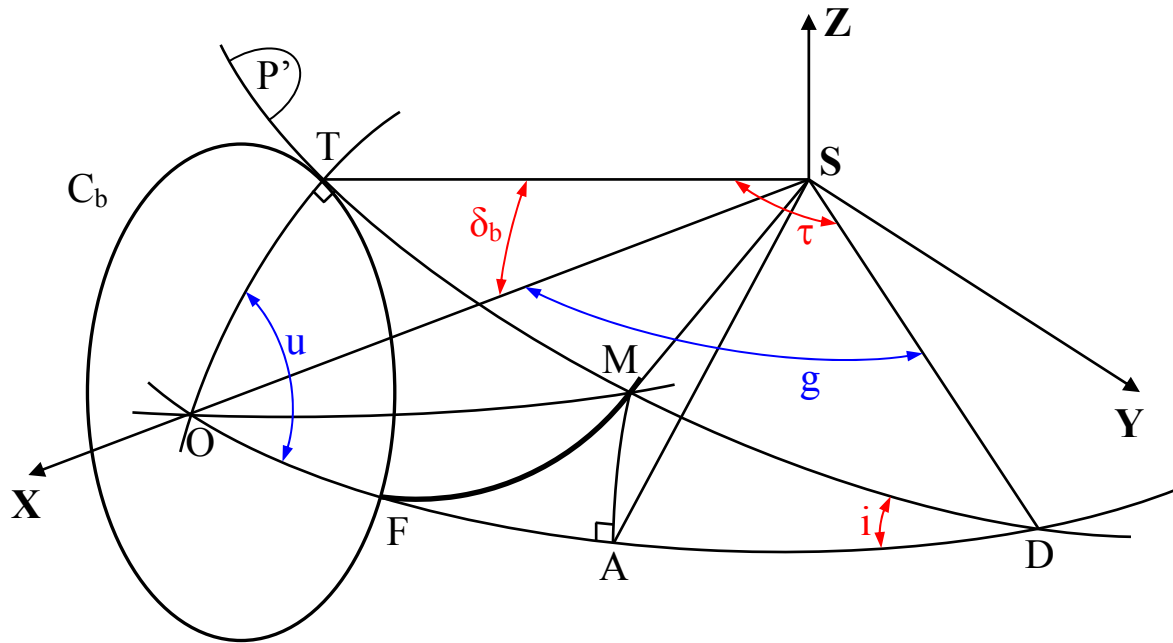


Figure A.5 : Paramétrage géométrique permettant de calculer Z

En utilisant maintenant le triangle rectangle  $\langle O, T, D \rangle$ , il ressort des relations 3, 4 et 5 de trigonométrie sphérique présentée en Annexe 2 les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sin \tau = \sin g \sin u \\ \sin \delta_b = \sin g \sin i \\ \cos u = \cos \tau \sin i \end{cases}$$

Il peut donc être déduit :

$$Z = v(\sin g \sin u \cos \beta \sin i - \sin \beta \cos \tau \sin i)$$

$$Z = v(\sin \delta_b \sin u \cos \beta - \sin \beta \cos u)$$

D'où :

$$Z = v(a \sin u \cos(au) - \sin(au) \cos u)$$

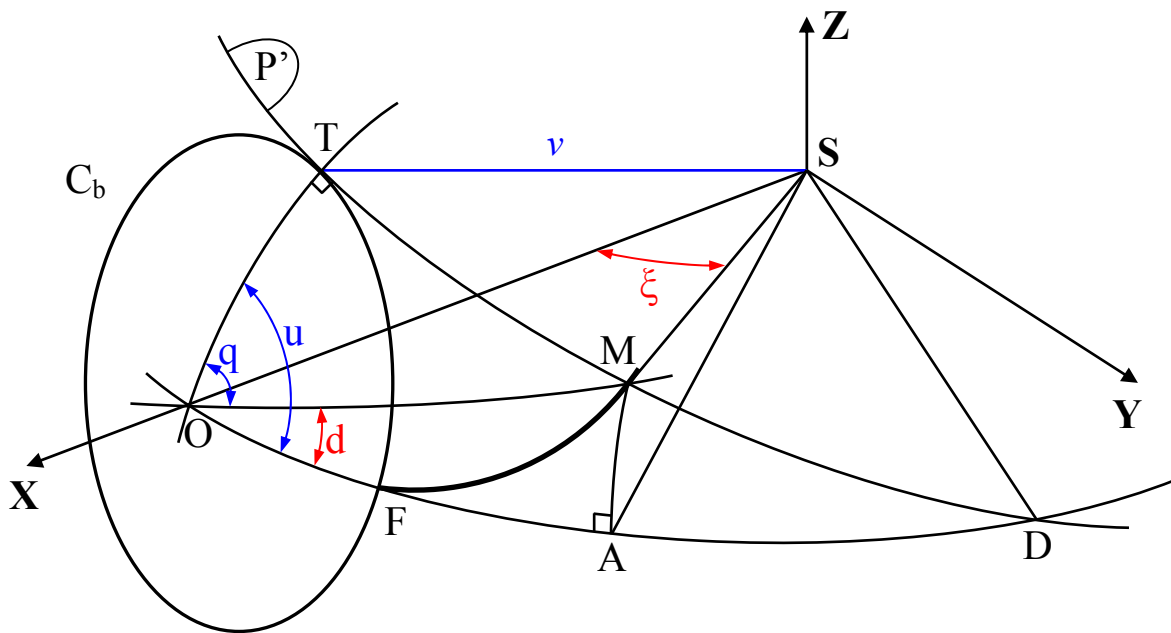
4. Calcul de la valeur de Y

Figure A.6 : Paramétrage géométrique permettant de calculs Y

$$Y = v \sin \xi \cos d$$

$$Y = v \sin \xi \cos(u - q)$$

$$Y = v \sin \xi (\cos u \cos q + \sin u \sin q)$$

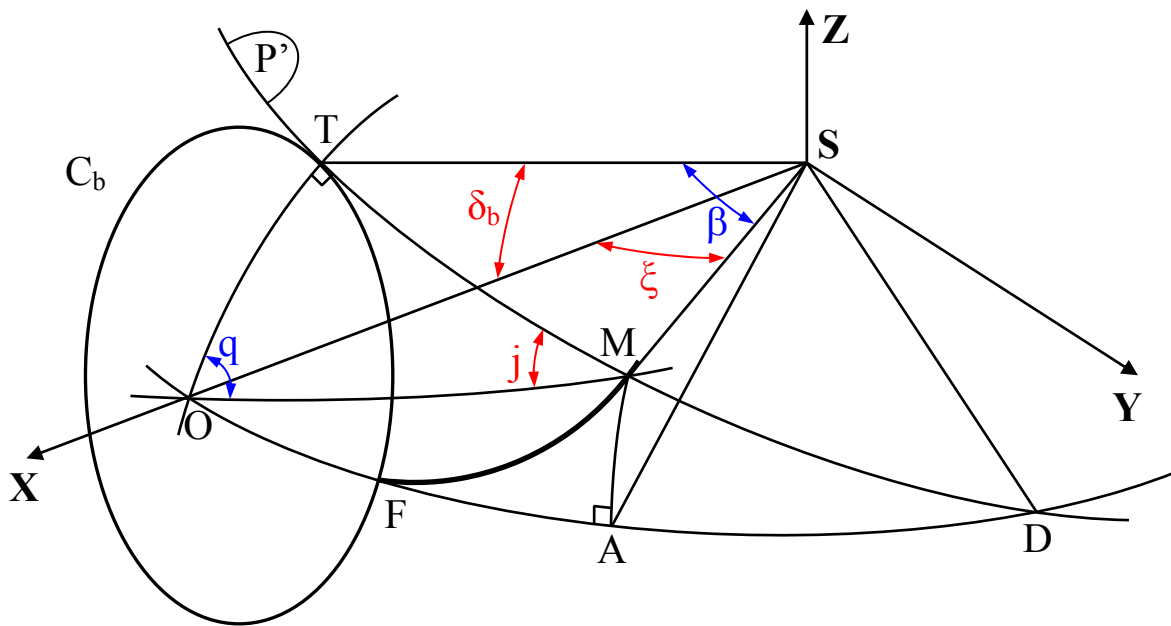


Figure A.7 : Paramétrage géométrique permettant de calculer Y

Dans le triangle rectangle  $\langle O, M, T \rangle$ , les relations 5, 4 et 3 de trigonométrie sphérique présentée en Annexe 2 permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \cos q = \cos \beta \sin j \\ \sin \delta_b = \sin j \sin \xi \\ \sin \beta = \sin \xi \sin q \end{cases}$$

Il peut alors être déduit :

$$Y = v(\sin \xi \cos u \cos \beta \sin j + \sin \xi \sin u \sin q)$$

$$Y = v(\cos u \cos \beta \sin \delta_b + \sin u \sin \beta)$$

D'où :

$$Y = v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au))$$

Finalement, les équations paramétrées d'une développante de sphère sont :

$$\begin{cases} X = vb \cos(au) \\ Y = v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au)) \\ Z = v(a \sin u \cos(au) - \cos u \sin(au)) \end{cases}$$

## 2. Relation de traigonométrie sphérique

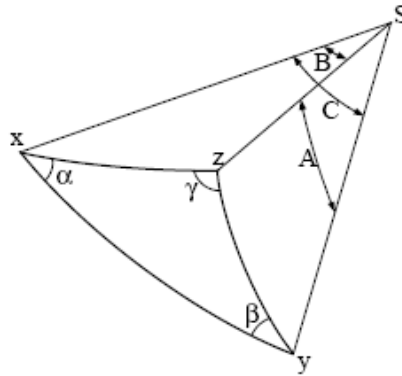


Figure A.8 : Triangle sphérique

Dans le cas d'un triangle sphérique  $(x, y, z)$  rectangle en  $z$  (Figure A.8), les relations trigonométriques usuelles sont les suivantes :

$$\text{Relation 1 : } \cos(A) = \cos(B) \cos(C) + \sin(B) \sin(C) \cos(\alpha)$$

$$\text{Relation 2 : } \frac{\sin(A)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(B)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(C)}{\sin(\gamma)}$$

$$\text{Relation 3 : } \sin(A) = \sin(C) \sin(\alpha)$$

$$\text{Relation 4 : } \sin(B) = \sin(C) \sin(\beta)$$

$$\text{Relation 5 : } \cos(\alpha) = \cos(A) \sin(\beta)$$

$$\text{Relation 6 : } \cos(\beta) = \cos(B) \sin(\alpha)$$

$$\text{Relation 7 : } \tan(A) = \sin(B) \tan(\alpha)$$

$$\text{Relation 8 : } \tan(B) = \sin(A) \tan(\beta)$$

$$\text{Relation 9 : } \cos(C) = \cos(A) \cos(B)$$

$$\text{Relation 10 : } \tan(A) = \tan(C) \cos(\beta)$$

$$\text{Relation 11 : } \tan(B) = \tan(C) \cos(\alpha)$$

$$\text{Relation 12 : } \cos(C) = \cot(\alpha) \cot(\beta)$$

### 3. Développement mathématique du partage de charges

Il a été montré dans le chapitre 2 que le problème de partage de charge pouvait se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N p_i S_i (R_i r_{proj,i}) = Couple \\ \sum_{j=1}^N C_{ij} p_j \\ \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right) + e i_i^{ang} = e f_i^{ang} \quad i \in [1, N] \\ p_i (e f_i^{ang} - \alpha^{ang}) = 0 \quad i \in [1, N] \end{array} \right.$$

Les inconnues de ce système d'équations sont les paramètres  $p_i$ ,  $e f_i^{ang}$  et  $\alpha^{ang}$ . Le problème défini possède maintenant  $2N+1$  équations avec  $2N+1$  inconnues.

On modifiant la troisième équation de ce nouveau système, celui-ci devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N p_i S_i (R_i r_{proj,i}) = Couple \\ \sum_{j=1}^N C_{ij} p_j \\ \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right) + e i_i^{ang} = e f_i^{ang} \\ p_i = \alpha^{ang} \left( \frac{p_i}{e f_i^{ang}} \right) \end{array} \right.$$

Après intégration de cette nouvelle définition de  $p_i$  dans la première équation, et puisque le paramètre  $\alpha^{ang}$  est constant, le système suivant est obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{ang} \sum_{i=1}^N S_i (R_i r_{proj,i}) \left( \frac{p_i}{e f_i^{ang}} \right) = Couple \\ \sum_{j=1}^N C_{ij} p_j \\ \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right) + e i_i^{ang} = e f_i^{ang} \\ p_i = \alpha^{ang} \left( \frac{p_i}{e f_i^{ang}} \right) \end{array} \right.$$

Dans la première équation du système, le paramètre  $\alpha^{ang}$  peut maintenant être isolé, pour obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{ang} = \frac{Couple}{\sum_{i=1}^N S_i (R_i r_{proj,i}) \left( \frac{p_i}{ef_i^{ang}} \right)} \\ \frac{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j}{\left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)} + e_i^{ang} = ef_i^{ang} \\ p_i = \alpha^{ang} \left( \frac{p_i}{ef_i^{ang}} \right) \end{array} \right.$$

L'intégration de cette définition de  $\alpha^{ang}$  dans la troisième équation permet d'obtenir un nouveau système, à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j}{\left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)} + e_i^{ang} = ef_i^{ang} \\ p_i = \frac{Couple}{\sum_{i=1}^N S_i (R_i r_{proj,i}) \left( \frac{p_i}{ef_i^{ang}} \right)} \left( \frac{p_i}{ef_i^{ang}} \right) \end{array} \right.$$

Enfin, en intégrant la définition de  $ef_i^{ang}$  de la première équation dans la seconde, c'est finalement un système de  $N$  équations non linéaires à  $N$  inconnues qu'il faut résoudre, dont les seules inconnues sont les pressions  $p_i$  :

$$p_i = \frac{Couple}{\sum_{i=1}^N S_i (R_i r_{proj,i}) \frac{p_i}{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j + e_i^{ang} \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)}} \frac{p_i}{\sum_{j=1}^N C_{ij} p_j + e_i^{ang} \left( \frac{R_i}{r_{proj,i}} \right)} \quad i \in [1, N]$$

Ou bien sous forme matricielle :  $[P] = f([P])$ , qui peut être résolu par une méthode itérative de la forme :  $[P]^{k+1} = f([P]^k)$  où  $[P]^k$  est le vecteur des pressions à l'itération  $k$ . La méthode du point fixe est ici utilisées, et est basée sur la convergence du rapprochement des corps  $\alpha^{ang}$ , ce qui revient à dire que les écarts finaux  $ef_i^{ang}$  sont constants dans le contact. L'organigramme de convergence de cette méthode est présenté sur Figure A.9.



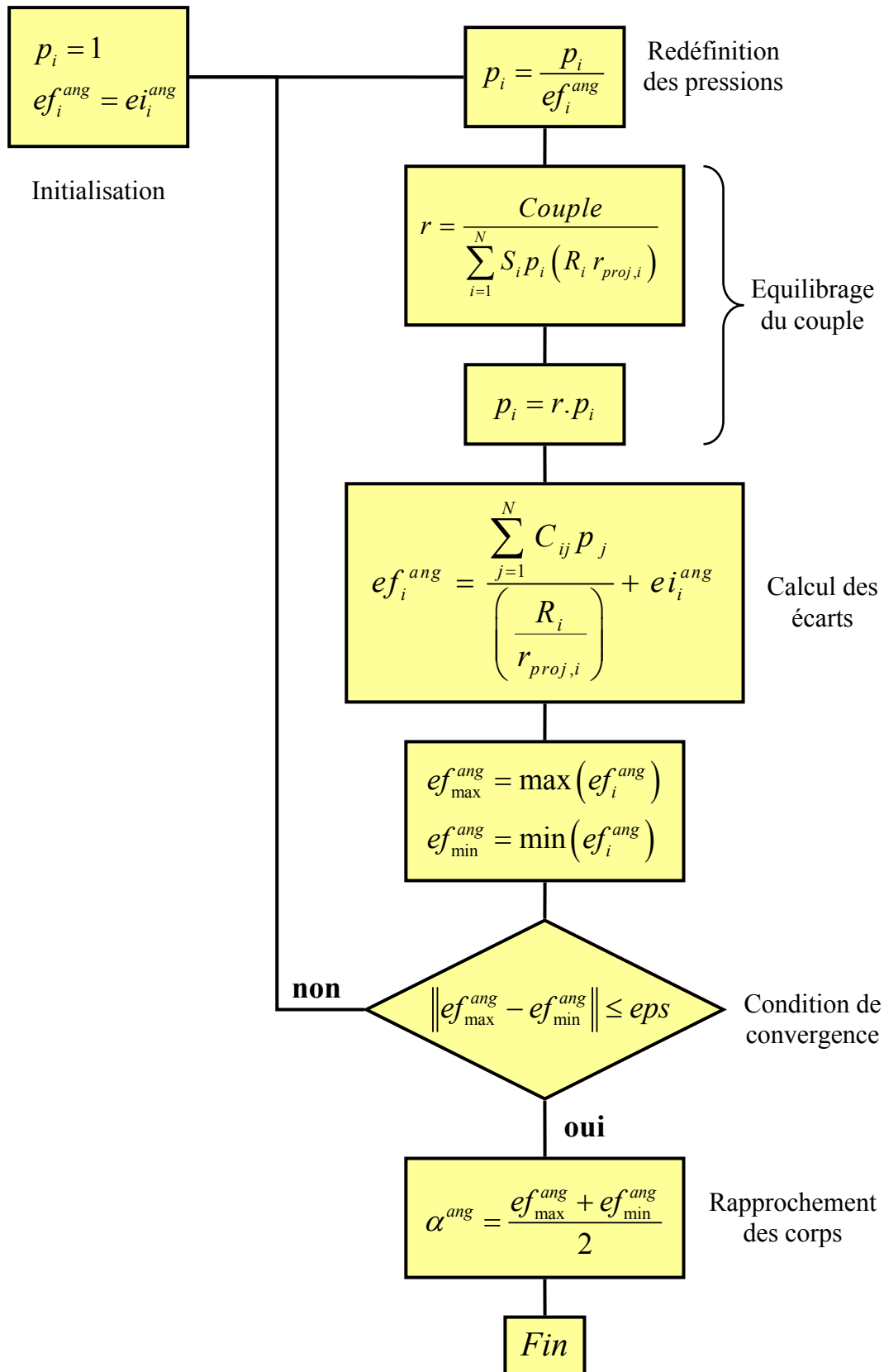


Figure A.9 : Algorithme de calcul de la répartition des charges

## 4. Calcul des coefficients d'influence de contact

Les deux solides (dent du pignon et dent de la roue) étant approximés par deux demi-espaces élastiques, l'expression des déplacements est connue. En utilisant les fonctions potentielles de Boussinesq et Cerruti [83], on obtient l'expression générale suivante pour le déplacement :

$$u_i(x, y) = \iint_{A_c} A_{ij}(x - x', y - y') \cdot p_j(x', y') \cdot dx' dy' \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3$$

$A_c$  correspond à l'aire totale de contact potentiel.

La matrice  $[A_{ij}]$  des coefficients d'influence de contact est connue explicitement en fonction des trois constantes combinées  $K$ ,  $G_c$ ,  $\nu_c$  des deux demi-espaces élastiques et des fonctions potentielles de Boussinesq et Cerruti. Son expression est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}(X, Y) = \frac{1}{\pi G_c} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{\nu_c \cdot Y^2}{(\sqrt{X^2 + Y^2})^3} \right\} \\ A_{22}(X, Y) = \frac{1}{\pi G_c} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{\nu_c \cdot X^2}{(\sqrt{X^2 + Y^2})^3} \right\} \\ A_{12}(X, Y) = A_{21}(X, Y) = \frac{\nu_c}{\pi G_c} \cdot \frac{X \cdot Y}{(\sqrt{X^2 + Y^2})^3} \\ A_{33}(X, Y) = \frac{(1 - \nu_c)}{\pi G_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ A_{13}(X, Y) = -A_{31}(X, Y) = \frac{K}{\pi G_c} \cdot \frac{X}{X^2 + Y^2} \\ A_{23}(X, Y) = -A_{32}(X, Y) = \frac{K}{\pi G_c} \cdot \frac{Y}{X^2 + Y^2} \end{array} \right. \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} X = x - x' \\ Y = y - y' \\ \frac{1}{G_c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \\ \nu_c = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu_1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2} \right) \cdot G_c \\ K = \frac{1}{4} \left( \frac{1 - 2\nu_1}{G_1} - \frac{1 - 2\nu_2}{G_2} \right) \cdot G_c \end{array} \right.$$

où  $\nu_i$  est le coefficient de Poisson de l'élément  $i$ , et où  $G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$ , avec  $E_i$  le module d'Young de l'élément  $i$ .  $i$  valant 1 ou 2.

En faisant l'hypothèse que les deux solides ont les mêmes caractéristiques élastiques, alors  $K=0$  (les solides sont donc des solides quasi-identiques).

On a donc :  $A_{13}(X, Y) = A_{31}(X, Y) = A_{23}(X, Y) = A_{32}(X, Y) = 0$

Les expressions des déplacements s'écrivent donc de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = \iint_{A_c} A_{11}(X, Y) \cdot p_1(x', y') \cdot dx' dy' + \iint_{A_c} A_{12}(X, Y) \cdot p_2(x', y') \cdot dx' dy' \\ u_2(x, y) = \iint_{A_c} A_{21}(X, Y) \cdot p_1(x', y') \cdot dx' dy' + \iint_{A_c} A_{22}(X, Y) \cdot p_2(x', y') \cdot dx' dy' \\ u_3(x, y) = \iint_{A_c} A_{33}(X, Y) \cdot p_3(x', y') \cdot dx' dy' \end{cases}$$

Ne considérant que des efforts normaux, nous prendrons  $p_1(x', y') = p_2(x', y') = 0$  et  $p_3(x', y') = p(x', y')$ . Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = 0 \\ u_2(x, y) = 0 \\ u_3(x, y) = \iint_{A_c} A_{33}(X, Y) \cdot p(x', y') \cdot dx' dy' = u(x, y) \end{cases}$$

Pour la résolution numérique du problème de contact entre les deux solides, le plan tangent où se situe l'aire potentielle de contact a été discrétisée en N rectangles de taille constante (2a\*2b) sur lesquels la distribution de pression normale est considérée constante.

La discrétisation de l'aire de contact permet d'obtenir les expressions des déplacements en tout point  $i$  sous la forme discrète suivante :

$$u_i(x, y) = \sum_{j=1}^N \left( \iint_{A_{c,j}} A_{33}(X', Y') \cdot dX' dY' \right) \cdot p_j$$

L'aire de contact  $A_{c,j}$  correspond au rectangle  $j$  sur lequel s'applique un chargement constant normal. L'intégrale sur  $A_{c,j}$  des coefficients d'influence correspond à une intégration entre les bornes suivantes :

$$A_{c,j} \Leftrightarrow \begin{cases} X - a \leq X' \leq X + a \\ Y - b \leq Y' \leq Y + b \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} X = x_i - x_j \\ Y = y_i - y_j \end{cases}$$

Nous pouvons également écrire :

$$u_i(x, y) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^s \cdot p_j \text{ avec : } C_{ij}^s = \iint_{A_{c,j}} A_{33}(X', Y') \cdot dX' dY' = \frac{1-\nu_c}{\pi G_c} \cdot J_3(X, Y), \text{ qui correspond au coefficient d'influence de surface.}$$

Le calcul de l'intégrale  $J_3(X,Y)$  est présenté ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 J_3(X,Y) &= \int_{Y-b}^{Y+b} \int_{X-a}^{X+a} \frac{dX' dY'}{\sqrt{X'^2+Y'^2}} = \int_{Y-b}^{Y+b} \int_{X-a}^{X+a} \frac{X'^2+Y'^2}{\left(\sqrt{X'^2+Y'^2}\right)^3} dX' dY' \\
 &= \int_{Y-b}^{Y+b} \int_{X-a}^{X+a} \frac{X'^2}{\left(\sqrt{X'^2+Y'^2}\right)^3} dX' dY' + \int_{Y-b}^{Y+b} \int_{X-a}^{X+a} \frac{Y'^2}{\left(\sqrt{X'^2+Y'^2}\right)^3} dX' dY' \\
 &= J_1(X,Y) + J_2(X,Y)
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer l'intégrale  $J_3(X,Y)$ , il est nécessaire de déterminer les intégrales  $J_1(X,Y)$  et  $J_2(X,Y)$ . Leur calcul se déroule comme suit :

$$\begin{aligned}
 J_1(X,Y) &= \int_{Y-b}^{Y+b} \int_{X-a}^{X+a} \frac{X'^2}{\left(\sqrt{X'^2+Y'^2}\right)^3} dX' dY' = \left[ \left[ Y' \cdot \ln\left(X'+\sqrt{X'^2+Y'^2}\right) \right]_{X-a}^{X+a} \right]_{Y-b}^{Y+b} \\
 &= (Y+b) \cdot \ln\left((X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y+b)^2}\right) - (Y+b) \cdot \ln\left((X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y+b)^2}\right) \\
 &\quad - (Y-b) \cdot \ln\left((X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y-b)^2}\right) + (Y-b) \cdot \ln\left((X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}\right) \\
 &= (Y+b) \cdot \ln\left(\frac{(X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y+b)^2}}{(X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y+b)^2}}\right) + (Y-b) \cdot \ln\left(\frac{(X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}}{(X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y-b)^2}}\right)
 \end{aligned}$$

De la même manière, on détermine  $J_2(X,Y)$ .

$$J_2(X,Y) = (X+a) \cdot \ln\left(\frac{(Y+b)+\sqrt{(X+a)^2+(Y+b)^2}}{(Y-b)+\sqrt{(X+a)^2+(Y-b)^2}}\right) + (X-a) \cdot \ln\left(\frac{(Y-b)+\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}}{(Y+b)+\sqrt{(X-a)^2+(Y+b)^2}}\right)$$

Ainsi, on peut remonter à la valeur de  $J_3(X,Y)$  :

$$\begin{aligned}
 J_3(X,Y) &= (Y+b) \cdot \ln\left(\frac{(X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y+b)^2}}{(X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y+b)^2}}\right) + (Y-b) \cdot \ln\left(\frac{(X-a)+\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}}{(X+a)+\sqrt{(X+a)^2+(Y-b)^2}}\right) \\
 &\quad + (X+a) \cdot \ln\left(\frac{(Y+b)+\sqrt{(X+a)^2+(Y+b)^2}}{(Y-b)+\sqrt{(X+a)^2+(Y-b)^2}}\right) + (X-a) \cdot \ln\left(\frac{(Y-b)+\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}}{(Y+b)+\sqrt{(X-a)^2+(Y+b)^2}}\right)
 \end{aligned}$$

$J_3(X,Y)$  étant maintenant connu, on connaît alors la valeur des différents coefficients d'influence de surface :

$$C_{ij}^s = \frac{1-\nu_c}{\pi G_c} \cdot \left\{ (Y+b) \cdot \ln \left( \frac{(X+a) + \sqrt{(X+a)^2 + (Y+b)^2}}{(X-a) + \sqrt{(X-a)^2 + (Y+b)^2}} \right) + (Y-b) \cdot \ln \left( \frac{(X-a) + \sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2}}{(X+a) + \sqrt{(X+a)^2 + (Y-b)^2}} \right) \right. \\ \left. + (X+a) \cdot \ln \left( \frac{(Y+b) + \sqrt{(X+a)^2 + (Y+b)^2}}{(Y-b) + \sqrt{(X+a)^2 + (Y-b)^2}} \right) + (X-a) \cdot \ln \left( \frac{(Y-b) + \sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2}}{(Y+b) + \sqrt{(X-a)^2 + (Y+b)^2}} \right) \right\}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} X = x_i - x_j \\ Y = y_i - y_j \end{cases}$$

## 5. Caractéristiques du centre UGV 5-axes

Les caractéristiques principales du centre d'usinage 5-axes sont les suivantes :

- Courses en translation :  $X = 650\text{mm}$ ,  $Y = 700\text{mm}$ ,  $Z = 450\text{mm}$ ,
- Courses en rotation :  $A = 90^\circ$ ,  $C = 360^\circ$
- Vitesse de rotation maximale de la broche :  $24000\text{tr/min}$ ,
- Vitesse maximale des déplacements linéaires :  $50\text{m/min}$ ,
- Vitesse maximale des déplacements angulaires :  $50\text{tr/min}$ .



Figure A.10 : Centre d'usinage Huron K2X 8 Five

## 6. Description de différents types d'outils

Trois types d'outils sont utilisés pour l'usinage du pignon et de la roue :

- Fraises d'ébauches à plaquettes carbures ( $\text{\O}32\text{mm}$ ). Ce type d'outil permet un enlèvement de matière important. Il est principalement destiné à usiner avec sa partie latérale, l'usinage avec la partie inférieure étant très limité.
- Fraises deux tailles ARS ( $\text{\O}4, 3$  et  $2\text{mm}$ ). Ces outils sont également appelés fraises cylindriques. Ce sont des fraises monobloc, c'est-à-dire que les dents de la fraise et le corps de l'outil sont une pièce unique. Les fraises 2 tailles peuvent usiner autant avec leur partie latérale qu'avec la partie inférieure des dents.
- Fraises hémisphériques ( $\text{\O}1.5\text{mm}$ ). Tout comme les fraises deux tailles précédentes, les fraises hémisphériques sont monobloc. Egalement appelés fraises boules, ces outils permettent d'usiner des surfaces courbes avec une grande précision. Toute la partie hémisphérique peut être utilisée pour usiner. Il faut cependant veiller à ne pas être complètement tangent au corps de l'outil, cette partie n'étant pas adaptée au taillage. Ces outils sont principalement utilisés pour les opérations de finition.

## 7. Description des opérations d'usinage

### 7.1 Opérations générales

#### OP1 + OP2 : Ebauche et Finition du surfaçage

Les opérations de surfaçage permettent de définir un plan de référence, correspondant ici à la face avant du pignon. OP1 correspond à l'opération d'ébauche, qui enlève beaucoup de matière, tout en laissant une surépaisseur pour l'opération suivante. OP2 correspond quant à elle à la finition, qui permet d'avoir un bon état de surface pour cette face de référence.

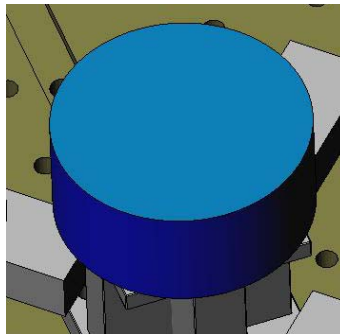


Figure A.11 : Résultat obtenu après l'opération OP2

#### OP3 : Ebauche des parties conique et cylindrique

Cette opération permet d'enlever la plus grosse partie de la matière du brut, en donnant au cylindre initial une forme globalement conique. Des surépaisseurs sont laissées sur toutes les surfaces afin de réaliser par la suite les finitions.

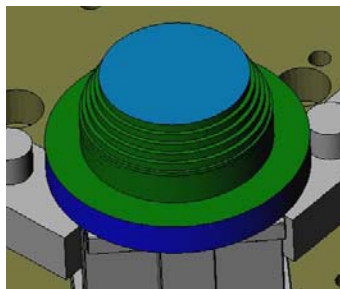
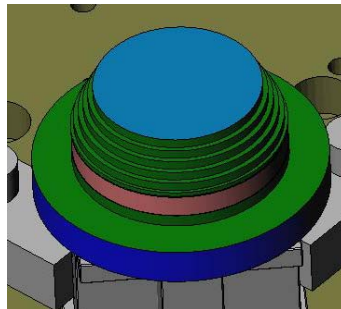


Figure A.12 : Résultat obtenu après l'opération OP3



OP4 : Finition de la partie cylindrique

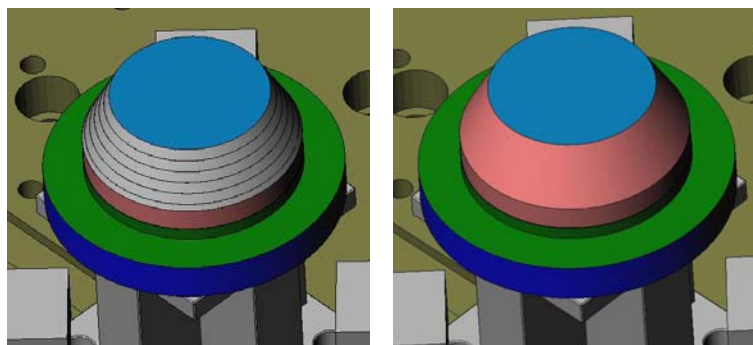
OP4 permet d'effectuer l'opération de finition sur la partie cylindrique du pignon. A la fin de cette étape, le cylindre obtenu sera la surface finale.



**Figure A.13 : Résultat obtenu après l'opération OP4**

OP5 + OP6 : Demi-finition + Finition de la partie conique

Ces deux opérations consistent à réaliser la partie conique finale. L'usinage est réalisé « en roulant », c'est-à-dire que la surface conique est usinée avec la partie latérale de l'outil (la fraise 2 tailles à plaquettes). Ainsi, l'opération OP5, la demi-finition, sert à supprimer la surface « en escalier » laissée par l'opération OP3, tout en laissant une surépaisseur suffisante afin de pouvoir effectuer l'opération OP6, qui permettra d'obtenir la surface finale conique.



**Figure A.14 : Résultat obtenu après les opérations OP5 et OP6**

## 7.2 Opérations de denture

Une fois le cône obtenu, les différents creux de dents peuvent être réalisés. Chacune des opérations OP7 à OP18 décrites dans la suite du document est réalisée pour chaque creux de dent, avant de passer à l'opération suivante.

### OP7 : Ebauche 1/4 du creux de dent

Cette première opération sur les dentures permet d'enlever la majorité de la matière du creux de dent. La profondeur de passe de cette opération est importante, dans le but d'enlever le plus de matière possible dans un minimum de temps.

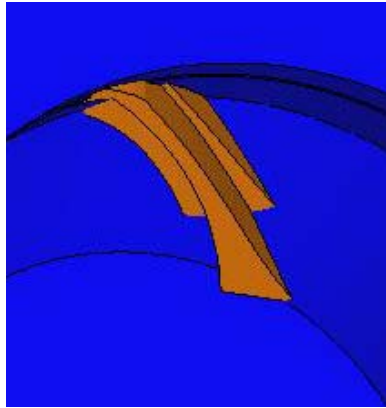


Figure A.15 : Résultat obtenu après l'opération OP7

### OP8 + OP9 + OP10 : Ebauche 2, 3 et 4/4 du creux de dent

Ces 3 opérations sont réalisées successivement avec des outils cylindriques de diamètre 4, 3 et 2mm. Tout comme l'opération OP7, ces opérations sont réalisées avec des épaisseurs de passes importantes. Celles-ci sont différentes d'une opération à l'autre, afin de rester dans les tolérances admissibles des différents outils utilisés. De plus, la largeur du creux en pied de dent étant plus faible que la largeur en tête, les 3 outils ne pourront pas aller jusqu'à la même hauteur. OP8 consiste à usiner la partie haute de la denture, puis OP9 réalise la partie centrale, et enfin OP10 permet d'usiner en fond de dent.

Une surépaisseur importante est laissée afin de pouvoir réaliser toutes les autres opérations.

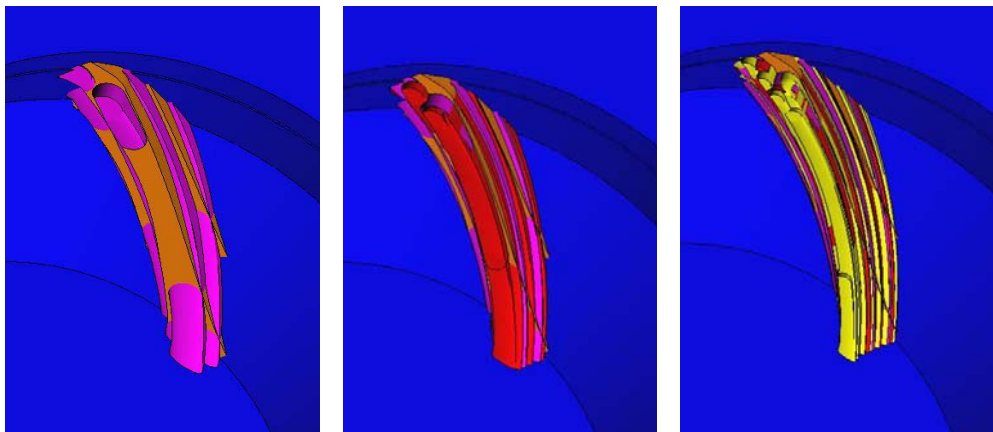
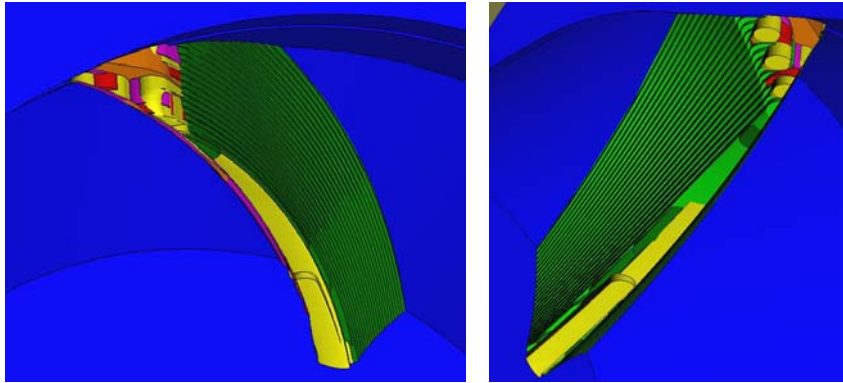


Figure A.16 : Résultat obtenu après les opérations OP8, OP9 et OP10

OP11 + OP12 : Demi-finition « Longitudinale » flanc gauche + flanc droit

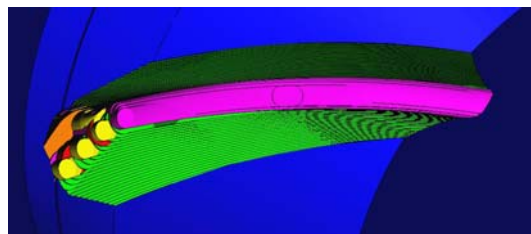
Les opérations OP8 à OP10 usinant à des hauteurs différentes, et ayant des profondeurs de passes différentes, des irrégularités existent dans les « escaliers » laissés par les différentes passes d'usinage sur les flancs (en largeur comme en profondeur). Ces deux opérations vont permettre d'uniformiser ces irrégularités, en vue de la réalisation des opérations OP14 et OP15. Pour cela, une profondeur de passe plus faible, mais constante est utilisée pour ces opérations.



**Figure A.17 : Résultat obtenu après les opérations OP11 et OP12**

OP13 : Demi-finition fond de dent

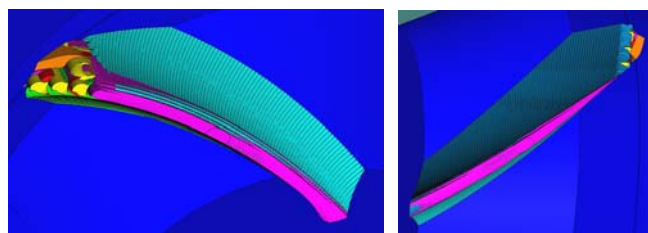
Cette opération permet d'enlever un peu plus de matière en fond de dent (l'outil étant plus petit), afin d'éviter toute casse éventuelle d'outil lors des opérations OP14 et OP15. Une surépaisseur en fond de dent est laissée afin de pouvoir réaliser par la suite la finition.



**Figure A.18 : Résultat obtenu après l'opération OP13**

OP14 + OP15 : Demi-finition « Verticale » flanc gauche + flanc droit

Ces deux opérations permettent de supprimer toutes les irrégularités laissées par les différentes opérations précédentes sur les flancs de denture. Pour cela, contrairement aux autres opérations qui sont réalisées selon la largeur de denture, l'usinage des opérations OP14 et OP15 est effectué selon la hauteur de denture. Une surépaisseur de matière suffisante est laissée afin de réaliser les opérations de finition sur les flancs de denture.



**Figure A.19 : Résultat obtenu après les opérations OP14 et OP15**

OP16 + OP17 + OP18 : Finition flanc droit + flanc gauche + fond de dent

Ces trois dernières opérations permettront d'obtenir la géométrie finale des flancs et du fond de denture. Afin de réaliser le plus précisément possible les surfaces, notamment le fond, un outil sphérique est utilisé. Le creux de dent du pignon étant fortement incurvé, 3 opérations sont nécessaires afin de réaliser correctement la finition. Pour le cas de la roue, la dernière opération (OP18) n'est pas nécessaire.



**Figure A.20 : Résultat obtenu après les opérations OP16, OP17 et OP18**

## 8. Mise en position du brut sur le centre d'usinage

Afin de faciliter l'usinage de l'engrenage, il est nécessaire de l'éloigner du plateau du centre d'usinage (pour éviter les risques de collision entre le porte-outil et le plateau). Ainsi, un support a été réalisé, qui pourra être utilisé à la fois pour l'usinage du pignon et celui de la roue.

Quatre trous sont réalisés sur la face supérieure de ce support pour la fixation du pignon, et quatre autres pour la fixation de la roue. Le brut du pignon sera fixé sur les trous situés « à l'intérieur » du support, comme sur la Figure A.21. Le brut de la roue sera quant à lui fixé sur les trous « extérieurs ».

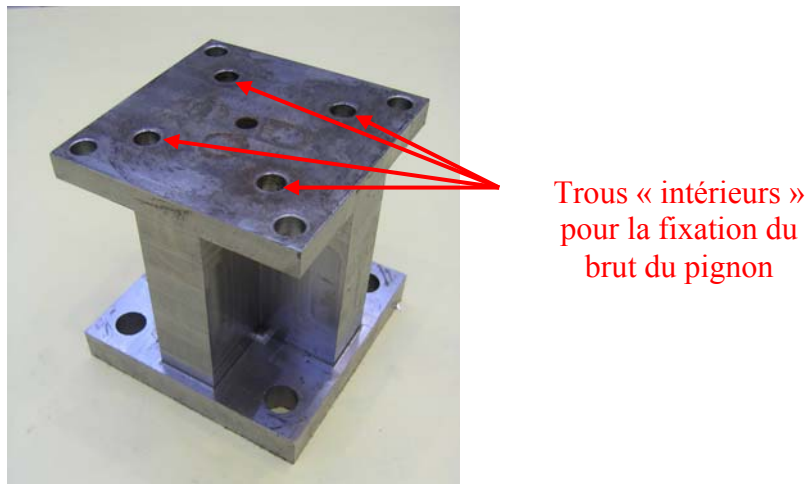


Figure A.21 : Support pour l'usinage de l'engrenage

Pour un bon maintien de l'ensemble « support + engrenage », des brides sont installées à chaque coin du support (Figure A.22). L'ensemble est fixé au centre du plateau.

a) Exemple de bride utilisée



b) Bridage complet du support



Figure A.22 : Bridage du support

## 9. Recensement des outils consommés

A cause de l'usure normale des outils, il n'est parfois pas possible d'usiner toutes les dents d'une opération avec la même fraise. L'usure est vérifiée manuellement, en regardant l'état des dents des fraises. Cette partie fait un recensement du nombre d'outils utilisés pour chaque opération.

### 9.1 Cas du pignon

Un récapitulatif des quantités de fraises utilisées pour l'usinage des creux de dents du pignon est donné ici, en fonction des opérations (OP7 à OP18) :

- Une fraise 2T de 4mm aura réalisé les opérations OP7 et OP8 pour l'ensemble des creux de dents,
- L'opération OP9 sera réalisée pour l'ensemble des creux de dents avec une seule fraise 2T de 3mm de diamètre,
- L'opération OP10 sera également réalisée sur le pignon avec une seule fraise 2T de 2mm de diamètre,
- Les opérations OP11 et OP12 sont réalisées intégralement avec la fraise 2T de 3mm de diamètre ayant déjà servi à usiner l'opération OP9,
- Pour les opérations OP13, OP14 et OP15, 2 nouvelles fraises 2T de 2mm de diamètres sont utiles. 10 creux de dents seront réalisés avec l'une des fraises, avant qu'elle ne soit trop usée. Les 4 dents restantes seront réalisées avec l'autre fraise 2T de 2mm,
- Les opérations de finition OP16, OP17 et OP18 seront toutes réalisées avec une seule fraise hémisphérique de diamètre 1.5mm.

Au total, pour la réalisation de l'ensemble des creux de dents du pignon, les quantités suivantes auront été nécessaires :

- 1 fraise 2 tailles de 4mm de diamètre,
- 1 fraise 2 tailles de 3mm de diamètre,
- 3 fraises 2 tailles de 2mm de diamètre,
- 1 fraise hémisphérique de 1.5mm de diamètre.

### 9.2 Cas de la roue

Un récapitulatif des quantités des fraises utilisées pour l'usinage des creux de dents de la roue est donné ici, en fonction des opérations (OP7 à OP17) :

- La fraise 2T de 4mm utilisée pour l'usinage du pignon a été utilisée pour faire une partie des dents de la roue. Avant d'être trop usée, cette fraise aura usinée 19 creux de dents. Une autre fraise identique permettra de réaliser les opérations OP7 et OP8 sur les 18 creux de dents restants.
- Une nouvelle fraise 2T de 3mm de diamètre est utilisée pour réaliser l'opération OP9. La fraise a réalisé l'ensemble des creux de dents.
- L'opération OP10 sera également réalisée sur l'ensemble de la roue avec une nouvelle fraise 2T de 2mm de diamètre. Cependant, elle ne sera pas utilisable par la suite,
- Les opérations OP11 et OP12 sont réalisées intégralement avec la fraise 2T de 3mm de diamètre ayant déjà servi à usiner l'opération OP9,

- Pour les opérations OP13, OP14 et OP15, une nouvelle fraise 2T de 2mm de diamètres est utile. Pour information, cette fraise a réalisé l'ensemble des creux de dents, mais est très usée à la fin... Pour un éventuel autre usinage, prévoir 2 fraises pour la réalisation de ces opérations,
- Les opérations de finition OP16 et OP17 seront réalisées avec trois fraises hémisphériques de diamètre 1.5mm. En effet, au bout de 14 dents usinées, les fraises commencent à être usées et ne permettent pas de poursuivre l'usinage, puisqu'il s'agit de la finition et qu'un bon état de surface est souhaité.

Au total, pour la réalisation de l'ensemble des creux de dents de la roue, les quantités suivantes auront été nécessaires :

- 2 fraises 2 tailles de 4mm de diamètre,
- 1 fraise 2 tailles de 3mm de diamètre,
- 2 fraises 2 tailles de 2mm de diamètre,
- 3 fraises hémisphériques de 1.5mm de diamètre.

Remarque : pour l'usinage du pignon, 3 fraises de diamètre 2mm ont été utilisées (soit une de plus que pour le pignon) alors qu'il contient moins de la moitié du nombre de dents de la roue. Ceci est dû au fait que la roue ayant été usinée après le pignon, les stratégies d'usinage de certaines opérations ont été modifiées, permettant ainsi une usure moins rapide des fraises. Par exemple, pour les opérations OP13 et OP14, l'usinage a été réalisé du haut de la dent vers le bas dans le cas de la roue, alors que pour le pignon ces opérations étaient réalisées de bas en haut.

## 10. Durées d'usinage

Lors des simulations d'usinage réalisées avec le logiciel de FAO ESPRIT, une estimation de la durée d'usinage est donnée pour chaque opération. Ces estimations sont rassemblées de façon générale dans les tableaux suivants, et comparées avec les durées réelles d'usinage.

### 10.1 Cas du pignon

#### Opérations OP1 à OP6

Opération	OP1	OP2	OP3	OP4	OP5	OP6	Total
<b>Estimation ESPRIT</b>	1min	1min	7min15s	1min	1min45s	4min15s	≈16min
<b>Temps réel</b>	1min	1min	10min	2min	1min	3min	≈18min

Tableau A.1 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP1 à OP6 du pignon

Pour la réalisation des opérations OP1 à OP6, relatives à la préparation du brut pour lui donner une forme conique, le temps d'usinage est de 18 minutes environ, ce qui est très proche de la valeur estimée par ESPRIT.

#### Opérations OP7 à OP18

Opération	OP7	OP8	OP9	OP10	OP11	OP12	Total
<b>Estimation ESPRIT pour tous les creux</b>	14min	7min	11min	28min	28min	28min	≈2h
<b>Temps réel pour tous les creux</b>	12min	9min	14min	46min	32min	27min	≈2h20min

Tableau A.2 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP7 à OP12 du pignon

Opération	OP13	OP14	OP15	OP16	OP17	OP18	Total
<b>Estimation ESPRIT pour tous les creux</b>	11min	56min	1h	1h10min	1h10min	21min	≈4h50min
<b>Temps réel pour tous les creux</b>	36min	1h12min	1h12min	1h40min	1h55min	33min	≈7h10min

Tableau A.3 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP13 à OP18 du pignon



Pour la réalisation de tous les creux de dents, le temps réel d'usinage est approximativement de dix heures, alors que l'estimation d'ESPRIT était de sept heures seulement.

La différence vient principalement du fait qu'ESPRIT ne gère pas les accélérations. En effet, lors d'un déplacement réel, le passage d'une vitesse nulle à une vitesse de déplacement imposée se fait progressivement, alors qu'ESPRIT passe instantanément d'une vitesse à l'autre. Ainsi, pour les opérations nécessitant de nombreux changements de vitesses, le temps estimé par ESPRIT sera très inférieur à la durée d'usinage réelle. C'est le cas pour les opérations OP13 à OP18, qui sont principalement des opérations où l'outil usine suivant une trajectoire unidirectionnelle. L'outil fait donc de nombreux allers-retours, dont la moitié des déplacements sans usiner (l'aller en déplacement d'usinage lent, et le retour en déplacement rapide pour changer de position).

#### Alésage central, trou de repérage, et suppression du socle arrière

La réalisation de l'alésage central et du trou de repérage a pris environ trente minutes. De même, environ trente minutes d'usinage sont nécessaires à la suppression du socle arrière.

## 10.2 Cas de la roue

### Opérations OP1 à OP6

Opération	OP1	OP2	OP3	OP4	OP5	OP6	Total
<b>Estimation ESPRIT</b>	2min30s	3min	16min30s	9min30s	14min45s	18min15s	≈1h
<b>Temps réel</b>	2min30s	3min	20min	12min	12min	15min	≈1h

Tableau A.4 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP1 à OP6 de la roue

Pour la réalisation des opérations OP1 à OP6 relatives à la préparation du brut pour lui donner une forme conique, le temps d'usinage est de une heure environ, ce qui correspond à la valeur estimée par ESPRIT.

### Opérations OP7 à OP18

Opération	OP7	OP8	OP9	OP10	OP11 + OP12	Total
<b>Estimation ESPRIT pour tous les creux</b>	47min	19min	37min	1h33min	2h10min	≈5h30min
<b>Temps réel pour tous les creux</b>	1h05min	37min	1h	2h15min	5h	≈10h

Tableau A.5 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP7 à OP12 de la roue

<b>Opération</b>	<b>OP13 + OP14 + OP15</b>	<b>OP16 + OP17</b>	<b>Total</b>
<b>Estimation ESPRIT pour tous les creux</b>	5h25min	5h07min	≈10h30min
<b>Temps réel pour tous les creux</b>	7h	7h	≈14h

Tableau A.6 : Temps d'usinage estimé par ESPRIT pour les opérations OP13 à OP17 de la roue

Pour la réalisation de tous les creux de dents, le temps réel d'usinage est de 24 heures environ, alors que l'estimation d'ESPRIT était de 16 heures seulement.

Tout comme pour le cas du pignon, la différence vient principalement du fait qu'ESPRIT ne gère pas les accélérations.

#### Alésage central, trou de repérage, et suppression du socle arrière

La réalisation de l'alésage central et du trou de repérage aura pris environ 30 minutes. Environ 1 heure d'usinage aura été nécessaire à la suppression du socle arrière.

## 11. Résultats métrologiques des contrôles de surface

### 11.1 Engrenage Gleason

#### 11.1.1 Cas du pignon

La Figure A.23 regroupe les écarts sur les différents flancs mesurés pour le cas du pignon de type Gleason.

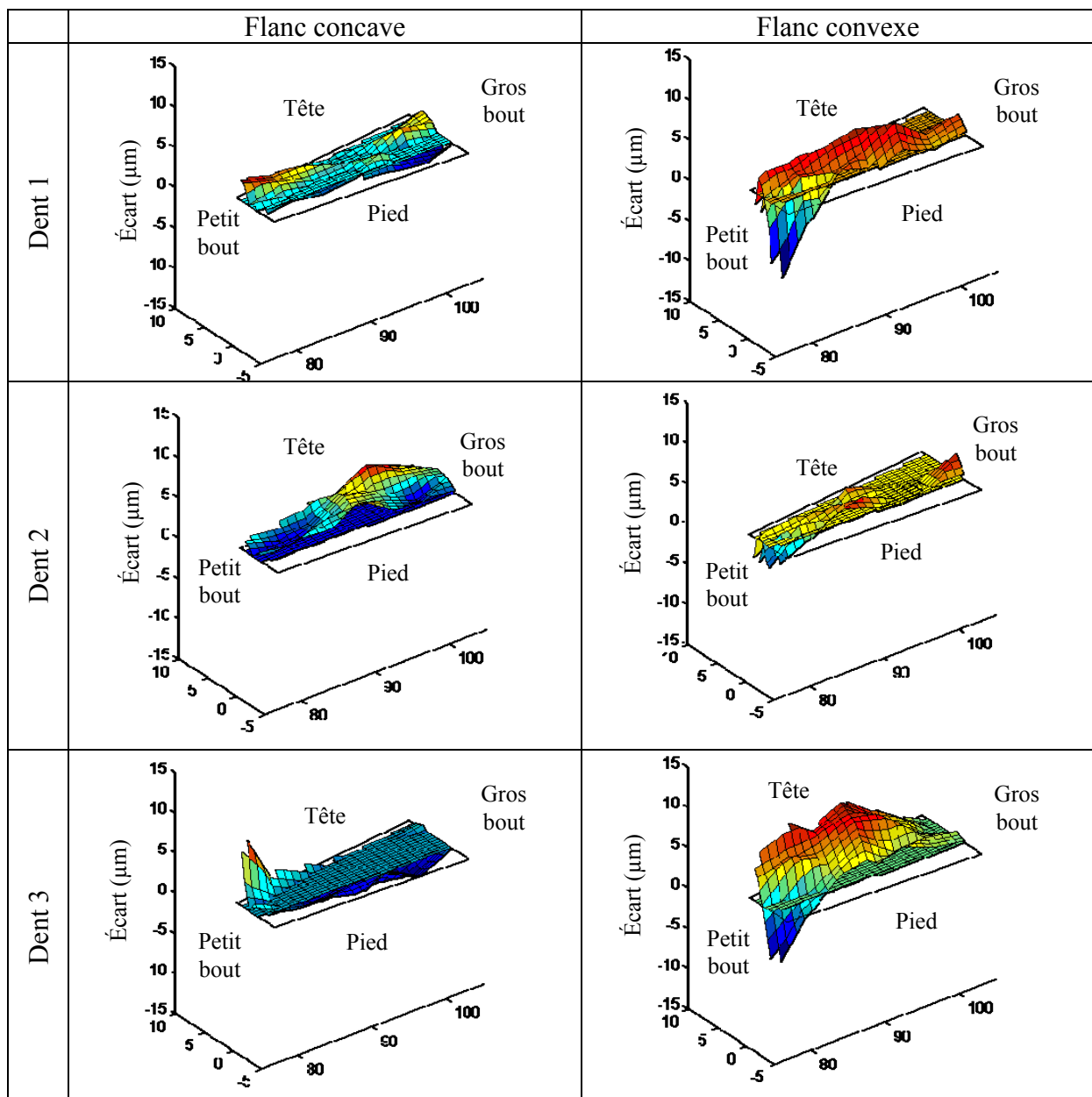


Figure A.23 : Écarts entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas du pignon Gleason

### 11.1.2 Cas de la roue

La Figure A.24 regroupe les écarts sur les différents flancs mesurés pour le cas de la roue de type Gleason.

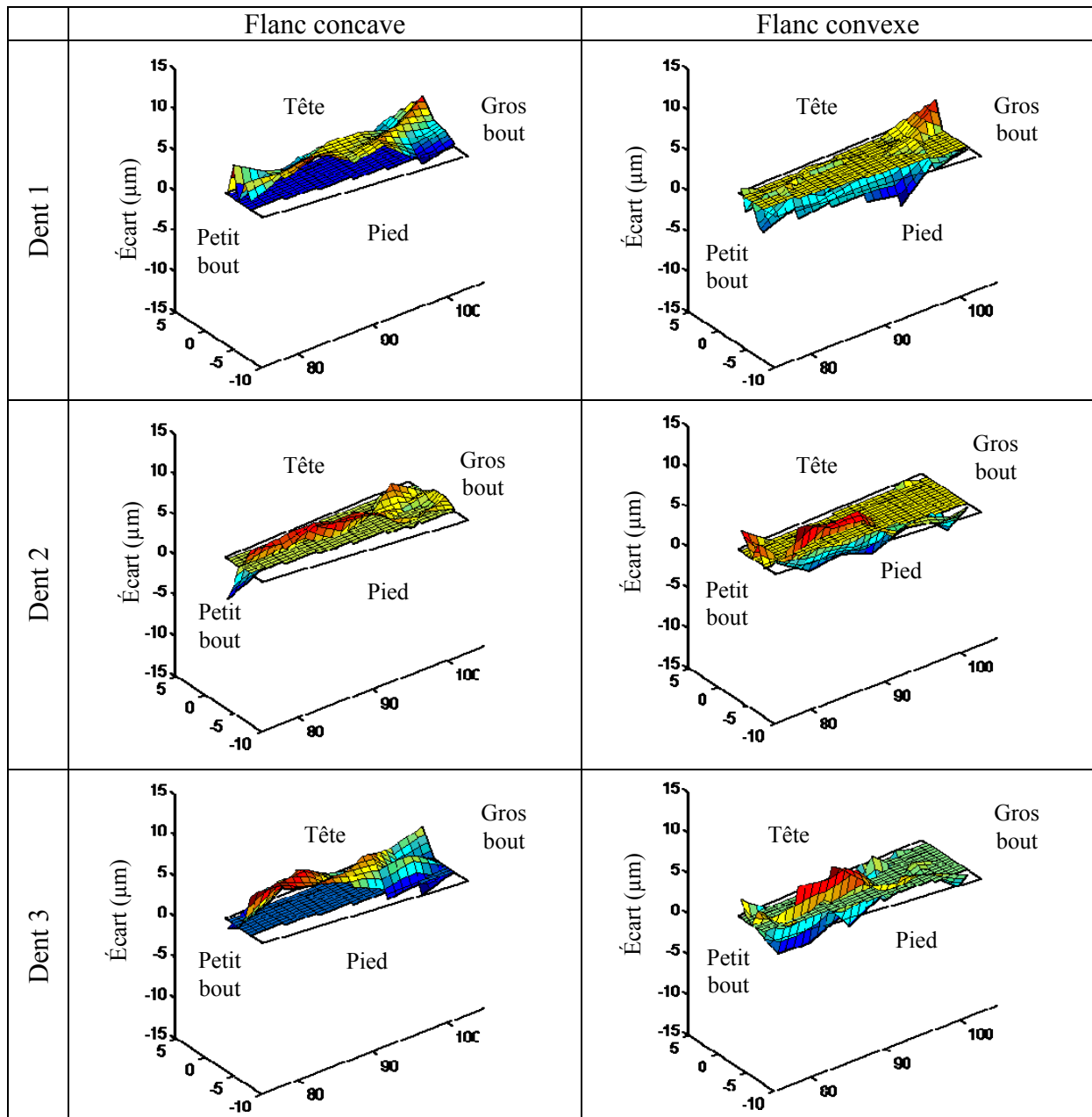


Figure A.24 : Écarts entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue Gleason

## 11.2 Engrenage analytique

### 11.2.1 Cas du pignon

La Figure A.25 regroupe les écarts sur les différents flancs mesurés pour le cas du pignon de type analytique.

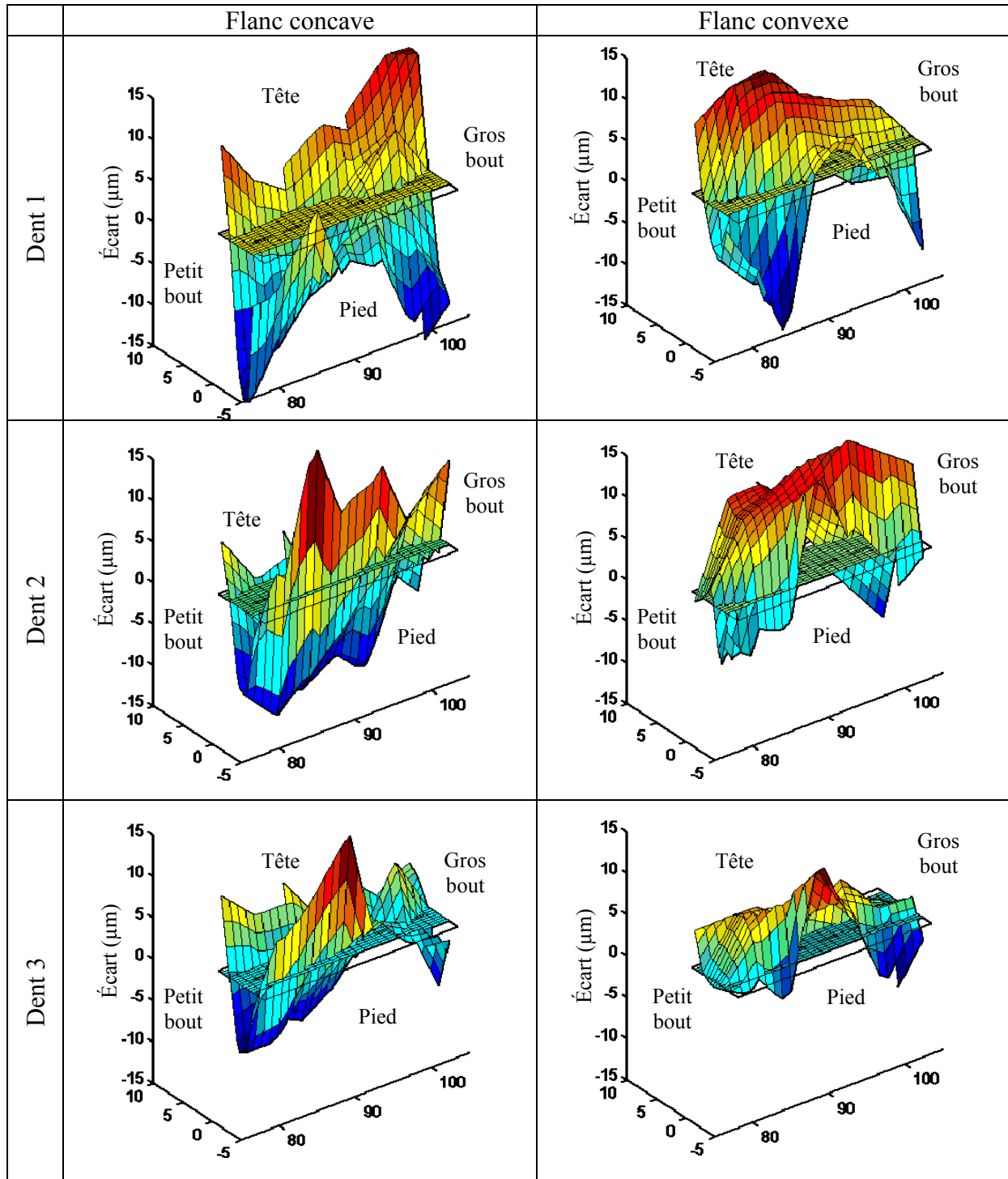


Figure A.25 : Ecarts entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas du pignon analytique

### 11.2.2 Cas de la roue

La Figure A.26 regroupe les écarts sur les différents flancs mesurés pour le cas de la roue de type analytique.

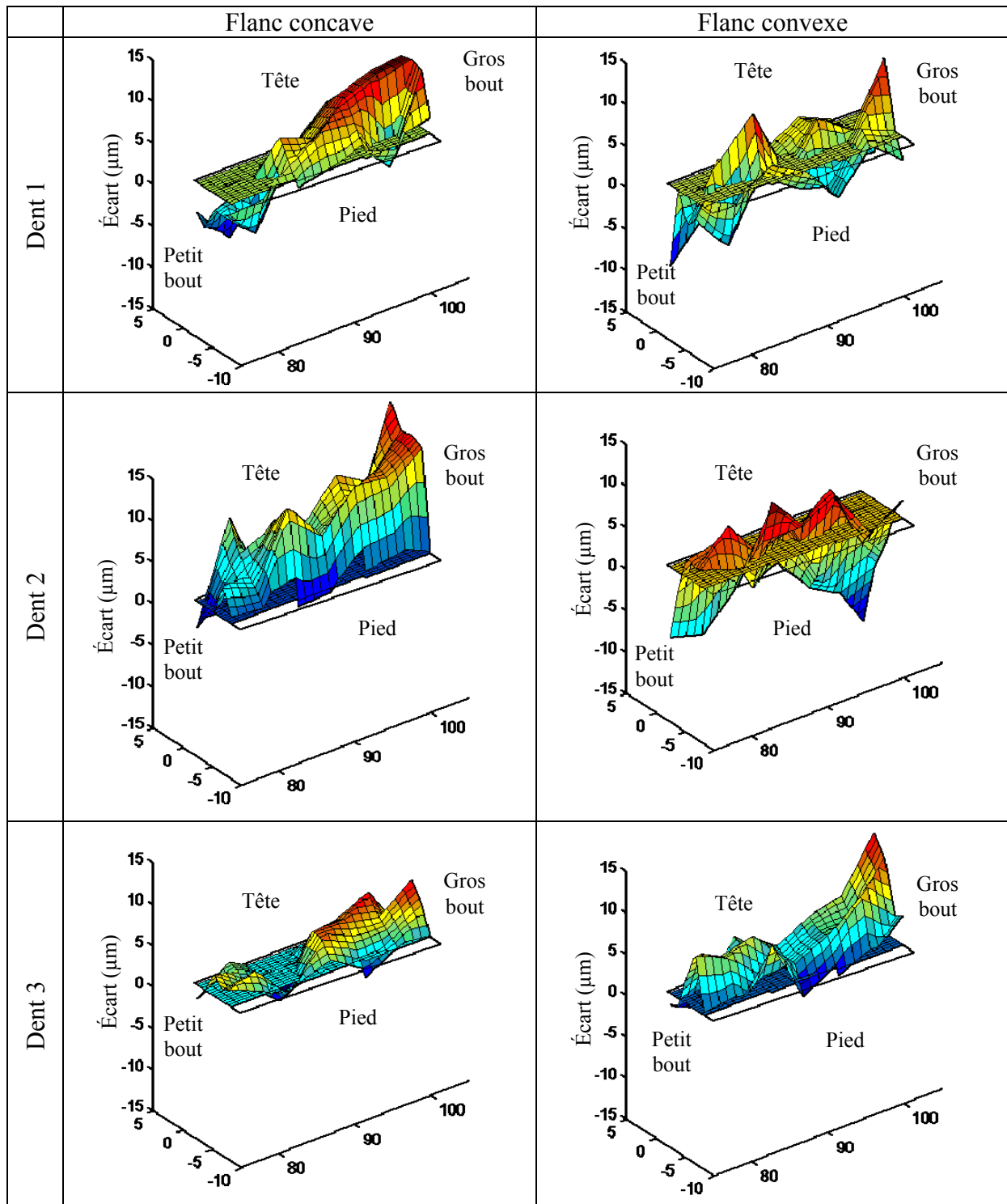


Figure A.26 : Ecarts entre les surfaces des dents usinées et de la CAO pour le cas de la roue analytique

## 12. Caractéristiques des éléments du banc

### 12.1 Fraiseuse CNC

La fraiseuse numérique servant de base au banc d'essai est présente au département GMC de l'INSA de Lyon. Ses caractéristiques principales sont les suivantes :

*Marque* : Deckel Maho

*Modèle* : DMC 635 V eco

*Vitesse de rotation de la broche* : 20 à 8000 tour/min

*Couple nominal de la broche* : 57 Nm.

*Plateau de la fraiseuse* :

- Surface de serrage : 790 x 560 mm
- Distance entre les rainures : 100 mm
- Nombre de rainures : 5
- Largeur des rainures : 14 H7 mm

### 12.2 Frein magnétique

Les caractéristiques du frein à magnétique utilisé sont les suivantes :

*Marque* : Placid Industries

*Modèle* : KB-5 ("large magnetic particle brake")

*Masse* : environ 14kg

*Arbre de sortie* : diamètre 25mm claveté

*Couple maxi* : 50Nm

*Système de fixation* par 6 vis M6 réparties sur un diamètre de 100mm

### 12.3 Couplémètre

Les caractéristiques du couplémètre sont les suivantes :

*Marque* : MEIRI

*Modèle* : 2200-75

*Couple nominal* : 75 Nm

*Arbre de sortie* : diamètre 14mm claveté

*Recommandation de montage* :

- Utilisation d'accouplements à soufflets semi-rigide clavetés,
- Bloquer le corps du couplémètre en rotation à l'aide des méplats pour éviter que les fils s'enroulent autour du couplémètre.

En fonction de la tension de sortie du couplémètre, il est possible d'obtenir facilement le couple mesuré, puisqu'une loi linéaire existe entre ces deux grandeurs. La relation liant la tension et le couple est la suivante :

$$\text{Couple} = 37.5(\text{Tension} - 2.5)$$

## 12.4 Codeurs optiques

Un codeur spécialement conçu pour les encombrements réduits a été utilisé pour le pignon. Pour les deux codeurs, l'arbre du capteur est directement relié à l'arbre à mesurer à l'aide d'un accouplement intégré.

*Marque* : Heidenhain

*Référence Pignon* : ERN 1020

- *Nombre de traits* : 1024
- *Dimensions et tolérances de l'arbre qui sera fixé dans le codeur* :
  - arbre Ø12 g7
  - ayant une longueur de dépassement comprise entre 11 et 19mm

*Référence Roue* : ERN 420

- *Nombre de traits* : 1024
- *Dimensions et tolérances de l'arbre qui sera fixé dans le codeur* :
  - arbre Ø6 g7
  - ayant une longueur de dépassement comprise entre 6 et 21mm

## 12.5 Roulements

Les roulements montés sur l'arbre de la roue sont des roulements à contact droit à une rangée de billes (en jaune sur la Figure A.27). La charge est tournante par rapport aux bagues intérieures : ces dernières sont donc montées serrées alors que les bagues extérieures sont montées glissantes.

Un des roulements (à droite sur la Figure A.27) supporte entièrement la charge axiale de l'arbre. Ses bagues intérieure et extérieure sont bloquées de chaque côté sur l'arbre et l'alésage. L'autre roulement a seulement sa bague intérieure bloquée de chaque côté sur l'arbre, et peut donc coulisser dans son support.

Le choix des roulements à billes à contact radial a été fait suivant les trois critères :

- Leur facilité de montage,
- La possibilité d'avoir un jeu de battement angulaire,
- Leur capacité à supporter la charge axiale générée lors du fonctionnement.
- 

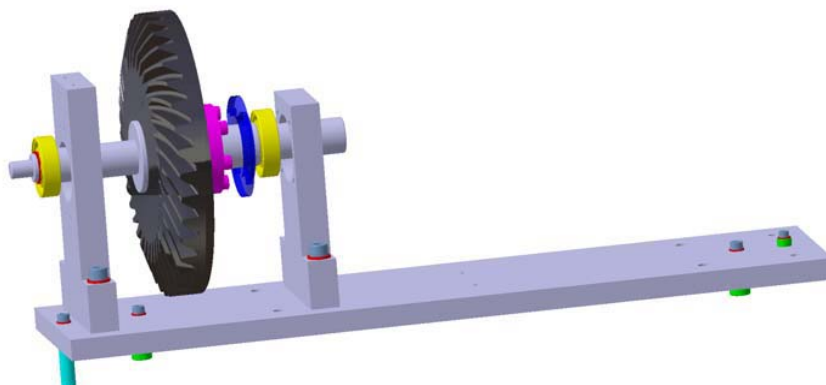


Figure A.27 : Emplacement des roulements



*Marque* : HPC

*Références* :

- Roulement situé à gauche : Q6004 – 2RS (d=20, D=42, B=12)
- Roulement situé à droite : Q6005 – 2RS (d=25, D=47, B=12)  
avec d : diamètre intérieur, D : diamètre extérieur, B : largeur du roulement.

*Tolérances de montage recommandées* :

- Alésage : H7
- Arbre : j6

## **12.6 Moyeux expansibles**

Pour assurer la transmission entre les pignon/roue et les arbres, les moyeux expansibles sont un excellent compromis. Ils se mettent en position facilement et leur fonctionnement est relativement simple : lors du serrage du moyeu expansible, les deux bagues coniques qui le composent exercent des pressions de serrage radial suffisantes pour maintenir le pignon et la roue lors des transmissions de couple.

*Marque* : HPC

*Références* :

- Pignon : RT25-25-34
- Roue : RT25-30-41

*Tolérances de montage recommandées* :

- arbre h8
- alésage H8

## **12.7 Accouplements à soufflets**

La société Meiri qui commercialise le couplemètre conseille d'utiliser des accouplements à soufflets semi-rigides clavetés. Le choix s'est porté sur un modèle à demi-moyeu amovible afin de permettre un montage et démontage relativement facile du couplemètre sans nécessiter un démontage du frein.

*Marque* : R+W

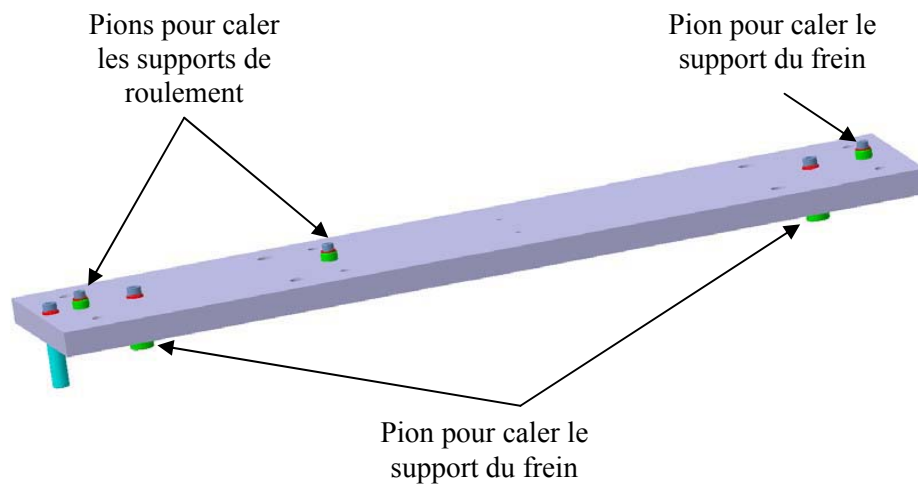
*Référence* : BKH / 60 / 25 / 14 claveté

*Tolérances des alésages des accouplements* : H7

## **12.8 Pions de dégauchissement**

Afin d'assurer un alignement précis des différents supports sur la plaque, des pions de dégauchissement seront utilisés. Pour cela, des trous seront au préalable usinés sur la ligne médiane de la plaque et au centre des supports (sur la face inférieure) afin d'assurer un positionnement simple et précis. De même, dans le but de positionner correctement la plaque sur le plateau de la fraiseuse, des pions seront utilisés puisque celle-ci est pourvue de rainures de positionnement.

La Figure A.28 montre l'emplacement des différents pions de dégauchissement sur la plaque.



**Figure A.28 : Pions de dégauchissement sur la plaque**

### 13. Description du matériel d'acquisition

Le système d'acquisition est composé de différents éléments principaux, présentés sur la Figure A.29. On retrouve notamment :

- le boîtier codeur,
- le boîtier couplemètre,
- le rack d'acquisition.

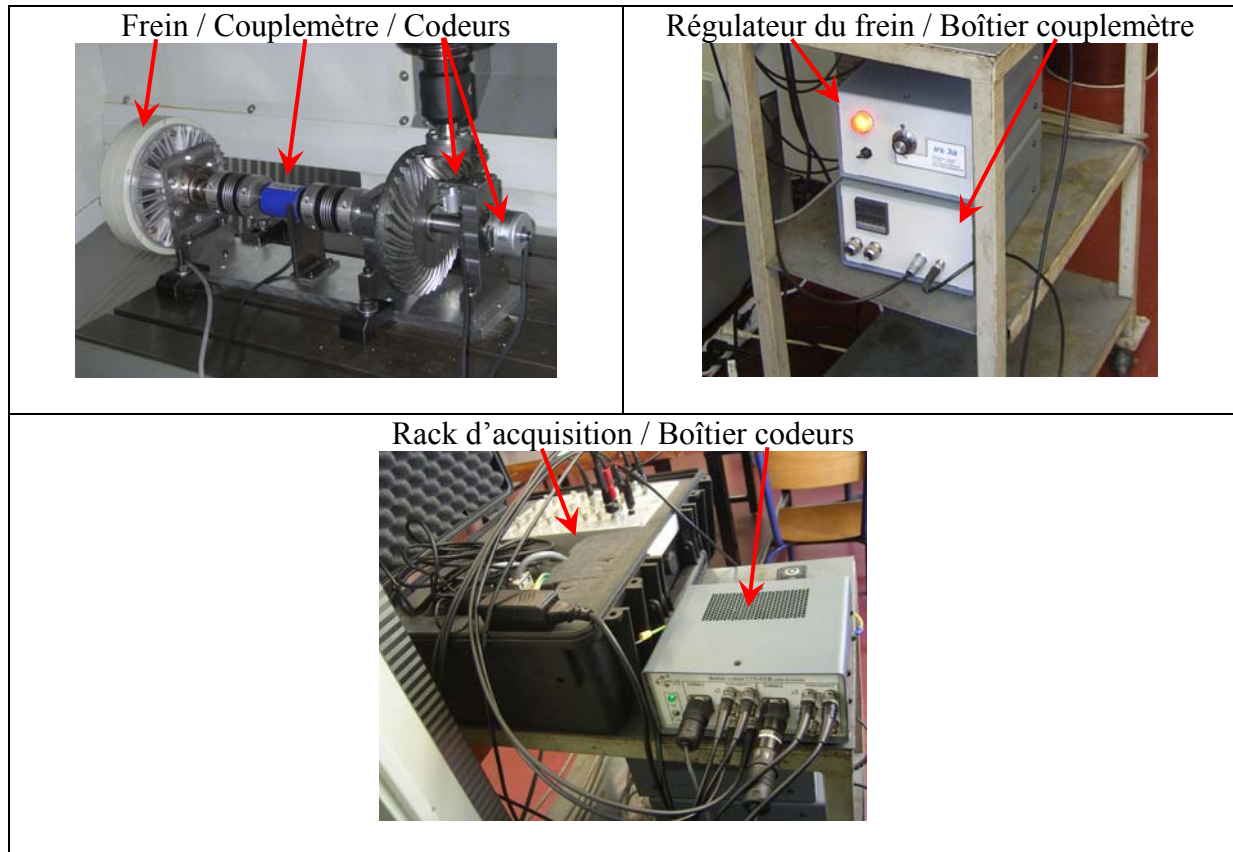
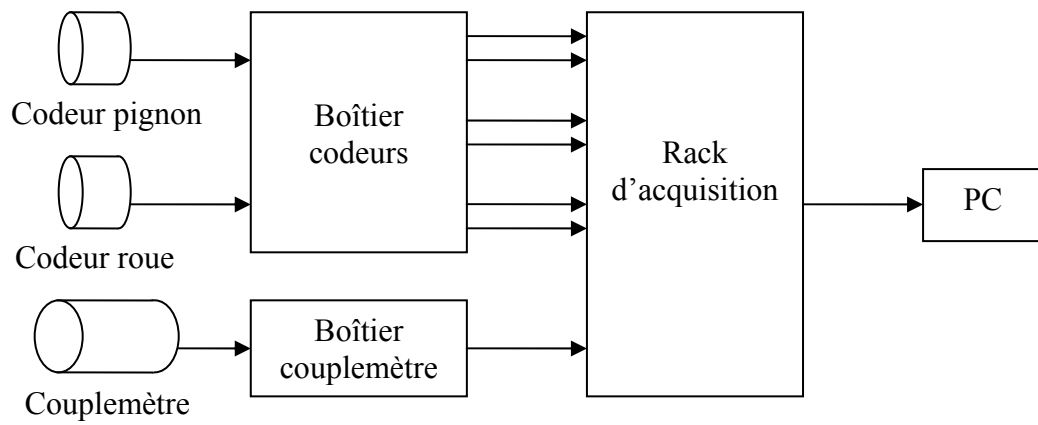


Figure A.29 : Eléments du système d'acquisition

La Figure A.30 schématise la façon dont sont reliés ces différents éléments :

- Les deux codeurs incrémentaux sont branchés en entrée du boîtier codeur. De ce boîtier sortent six câbles : quatre transmettant les informations des codeurs (deux pour chaque codeur), et deux autres pour relier les masses entre elles. Ces six câbles sont connectés aux bornes d'entrées du rack d'acquisition,
- Le couplemètre est quant à lui connecté à l'entrée du boîtier couplemètre, qui est lui aussi relié au rack d'acquisition,
- Ce rack d'acquisition traite l'ensemble des données et les transmet sur le PC par un câble USB. Un logiciel fourni permet de définir la durée de l'acquisition, le nombre de points pris en compte, et s'assure que les mesures des deux codeurs débutent au même moment, afin de pouvoir synchroniser les signaux de sortie. Une visualisation directe des courbes de résultats est également possible.



**Figure A.30 : Branchements des éléments du système d'acquisition**

## 14. Mise en position du banc d'essai

Afin de définir les repères de travail permettant la mise en position correcte du pignon par rapport à la roue, la procédure suivante a été établie :

- 1 : placer un palpeur sur la broche à la place du pignon,
- 2 : palper les côtés de l'axe de la roue, pour obtenir son diamètre précis et ainsi la référence  $Y_{R0}$  (Figure A.31),

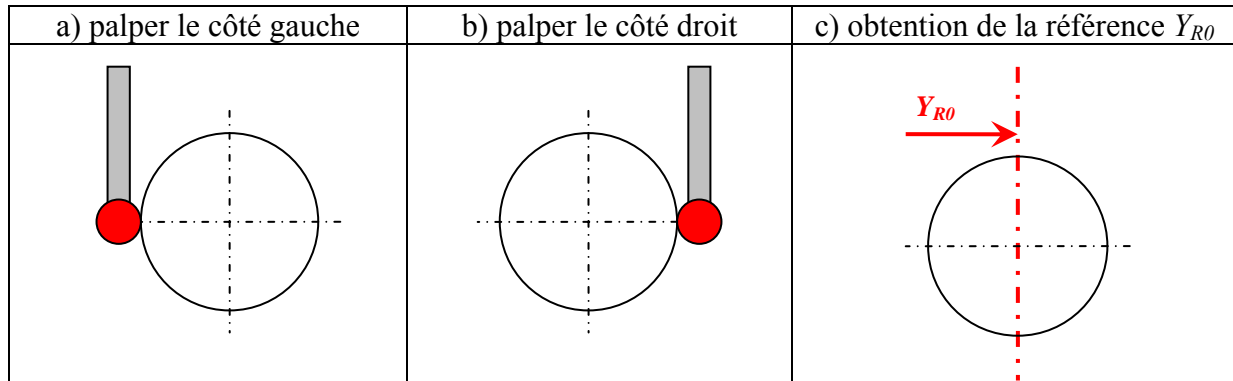


Figure A.31 : Référence  $Y_{R0}$

- 3 : connaissant le diamètre de l'arbre de la roue, le palper sur le dessus pour obtenir la référence  $Z_{R0}$  (Figure A.32),

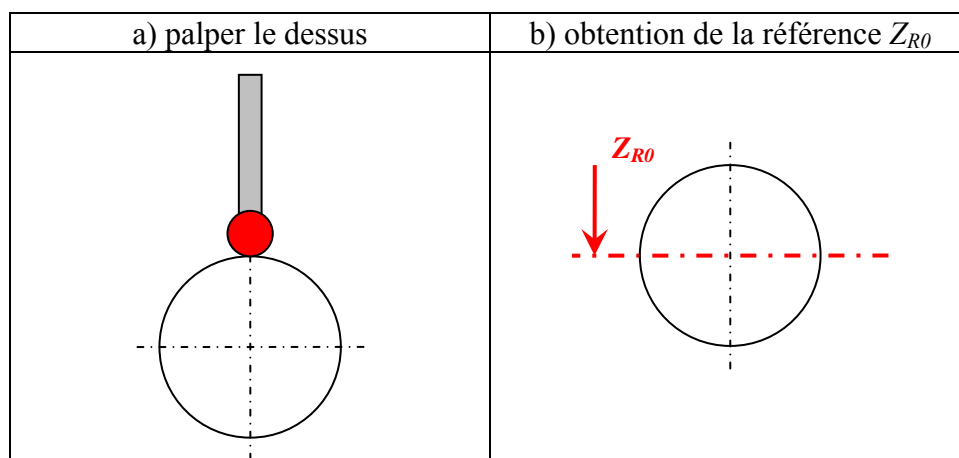
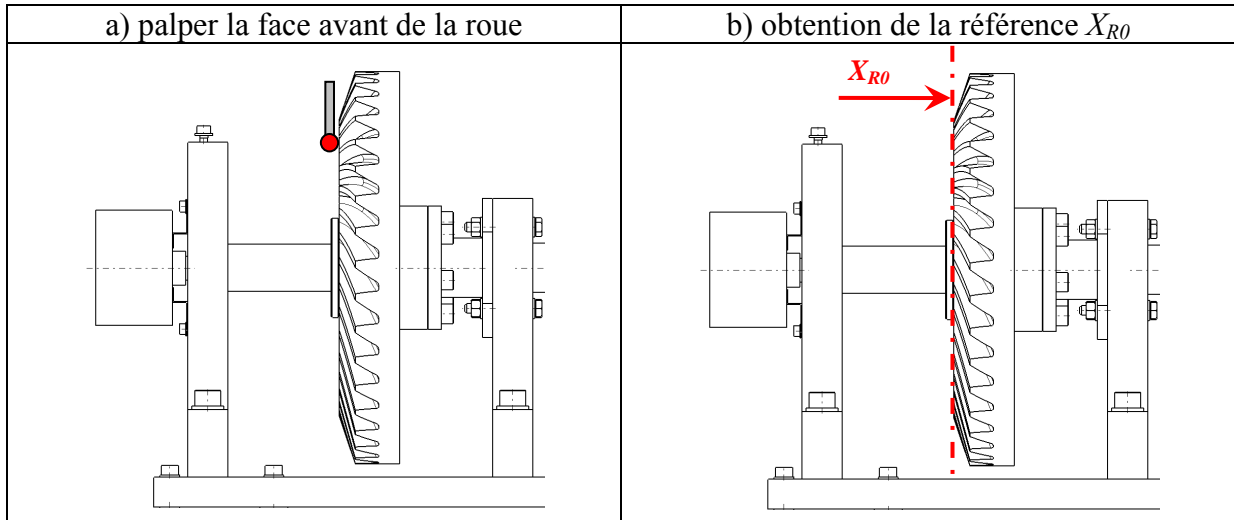
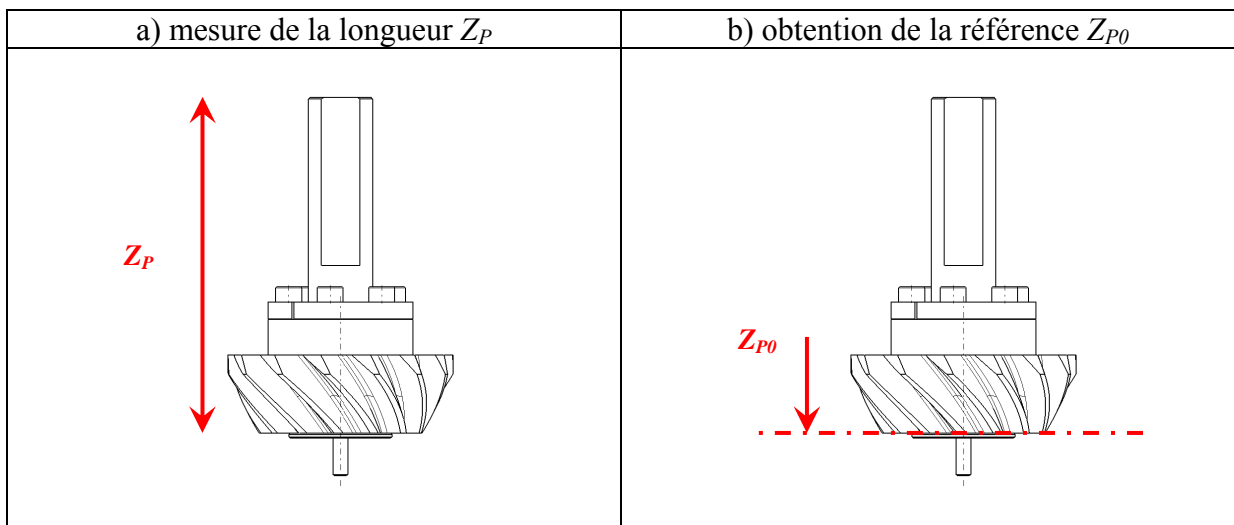


Figure A.32 : Référence  $Z_{R0}$

- 4 : palper la face avant de la roue, pour définir la référence  $X_{R0}$  (Figure A.33),

Figure A.33 : Référence  $X_{R0}$ 

- 5 : mesure de la face avant du pignon comme un outil, sur une machine dédiée (mesure des correcteurs d'outils), pour connaître la longueur de la broche  $Z_P$ , et définir la référence  $Z_{P0}$  (Figure A.34),

Figure A.34 : Référence  $Z_{P0}$

- 6 : remonter le pignon sur la broche, et le mettre en position par rapport à la roue, connaissant les décalages théoriques  $X_{dec}$  et  $Y_{dec}$ .

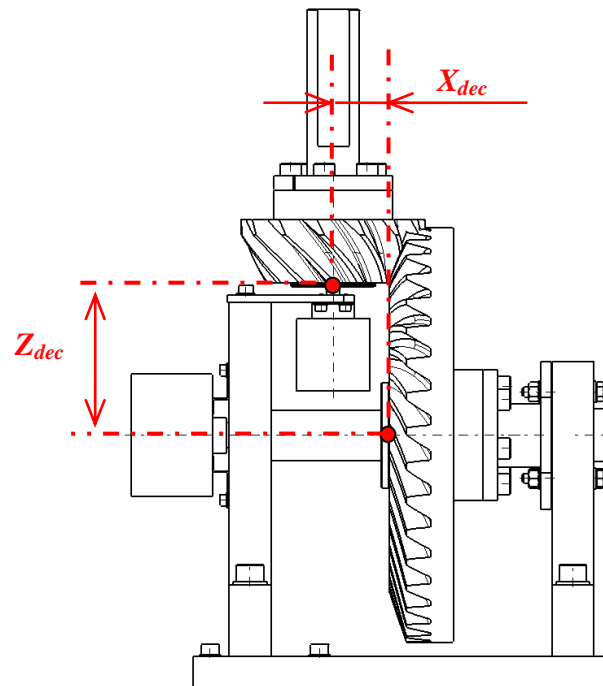


Figure A.35 : Mise en position du pignon par rapport à la roue







## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : TEIXEIRA ALVES

DATE de SOUTENANCE : 30 mai 2012

Prénoms : Joël

TITRE : Définition analytique des surfaces de denture et comportement sous charge des engrenages spiro-coniques

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2012ISAL0045

Ecole doctorale : MEGA – Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil

RESUME :

La conception des engrenages spiro-coniques reste encore très complexe de nos jours car la géométrie des dentures, et donc les performances cinématiques, découle du mode de fabrication de ce type d'engrenage. Le taillage est lié à deux constructeurs principaux : Gleason et Klingelnberg. De nombreux paramètres de réglage des machines influencent directement les surfaces de denture, leur optimisation n'est donc pas intuitive.

Avec les progrès réalisés cette dernière décennie par les machines d'usinage à commande numérique et la FAO (Fabrication Assistée par Ordinateur), il devient possible de fabriquer des engrenages spiro-coniques de bonne qualité sur une machine 5 axes. Un modèle numérique a été développé pour générer une géométrie simplifiée de type Gleason, usinée par la suite avec une machine 5 axes. Une étude de métrologie, permettant de comparer les dents usinées avec les modèles CAO, a ensuite été réalisée pour prouver que l'usinage par une machine 5 axes peut être une alternative aux méthodes de taillage classiques.

De nouveaux types de géométrie peuvent donc être proposés, qui ne pouvaient pas être envisagés par les moyens de fabrication classiques. Une géométrie basée sur la théorie des développantes sphériques, combinée à une spirale logarithmique a été développée, puis usinée. De plus, des corrections de bombé ou de profil peuvent être définies afin d'éviter les contacts en bords de denture. Ce type de géométrie analytique offre des possibilités plus simples d'optimisation de l'engrènement.

L'optimisation des surfaces peut être réalisée à l'aide du modèle d'engrènement quasi-statique sous charge développé dans le cadre de cette thèse. L'environnement de l'engrenage est pris en compte dans la simulation : déformation des arbres, des dentures et de leurs supports (jantes et voiles) ainsi que les déformations locales de contact. La méthode des coefficients d'influence est utilisée pour résoudre le partage des charges entre toutes les dents instantanément en contact. Une méthode originale, utilisant sur un seul calcul élément finis et la définition de bases de fonctions, permet de calculer rapidement les flexions de denture dans leur environnement. Les déformations de contacts sont, quant à elles, obtenues par une méthode analytique, basée sur les théories de Boussinesq. De plus, des défauts d'assemblage peuvent être intégrés entre le pignon et la roue spiro-conique.

Afin de valider les modèles numériques développés, un banc d'essai a été mis en place, permettant la mesure de l'erreur de transmission et la visualisation des portées. Le banc d'essai est intégré dans une fraiseuse numérique 3 axes : le pignon est monté dans la broche de la fraiseuse, le reste du banc étant bridé sur son plateau. Ainsi, des défauts de montage peuvent être appliqués facilement et précisément.

MOTS-CLES :

Engrenage spiro-conique, développante de sphère, spirale logarithmique, usinage 5-axes, métrologie, mesure, erreur de transmission.

Laboratoire (s) de recherche : LaMCoS – Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

Directeur de thèse: Michèle GUINGAND, Jean-Pierre de VAUJANY

Président de jury : Pascal RAY

Composition du jury :

R. BIGOT	Professeur (LCFC – Arts et Métiers ParisTech de Metz) – Rapporteur
A. DAIDIE	Professeur (ICA – INSA de Toulouse) – Rapporteur
M. GUINGAND	MCF HdR (LAMCOS – INSA de Lyon)
P. RAY	Professeur (IFMA - Clermont-Ferrand)
J. RECH	MCF HdR (ENISE – Saint-Etienne)
J. F. RIGAL	Professeur (LAMCOS – INSA de Lyon)
J. P. de VAUJANY	MCF (LAMCOS – INSA de Lyon)