

# THÈSE

## **Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d'un réservoir sous impact**

Présentée devant

**I'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil**

par

**Fabien CALEYRON**

Thèse soutenue le 28 octobre 2011 devant la Commission d'examen

### **Jury**

|                  |            |                    |
|------------------|------------|--------------------|
| OLIVIER ALLIX    | Professeur | Rapporteur         |
| STÉPHANE BORDAS  | Professeur | Rapporteur         |
| ALAIN COMBESCURE | Professeur | Directeur de thèse |
| VINCENT FAUCHER  | Docteur    | Encadrant          |
| AZIZ HAMDOUNI    | Professeur |                    |
| ROGER OHAYON     | Professeur |                    |
| SERGUEI POTAPOV  | Docteur    | Encadrant          |

Université de Lyon

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon

20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex, France



INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal  
2011-2015

| SIGLE            | ECOLE DOCTORALE   | NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE  |
|------------------|---|--|
| <b>CHIMIE</b>    | <b>CHIMIE DE LYON</b><br><a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a><br><br>Insa : R. GOURDON   | <b>M. Jean Marc LANCELIN</b><br>Université de Lyon – Collège Doctoral<br>Bât ESCPE<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72.43 13 95<br><a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>  |
| <b>E.E.A.</b>    | <b>ELECTRONIQUE,<br/>ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b><br><a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a><br><br>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN<br>eea@ec-lyon.fr | <b>M. Gérard SCORLETTI</b><br>Ecole Centrale de Lyon<br>36 avenue Guy de Collongue<br>69134 ECULLY<br>Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17<br><a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>  |
| <b>E2M2</b>      | <b>EVOLUTION, ECOSYSTEME,<br/>MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b><br><a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a><br><br>Insa : H. CHARLES             | <b>Mme Gudrun BORNETTE</b><br>CNRS UMR 5023 LEHNA<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>Bât Forel<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 04.72.43.12.94<br><a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>  |
| <b>EDISS</b>     | <b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-<br/>SANTÉ</b><br><a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a><br><br>Sec : Safia AIT CHALAL<br>Insa : M. LAGARDE               | <b>M. Didier REVEL</b><br>Hôpital Louis Pradel<br>Bâtiment Central<br>28 Avenue Doyen Lépine<br>69677 BRON<br>Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16<br><a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>  |
| <b>INFOMATHS</b> | <b>INFORMATIQUE ET<br/>MATHEMATIQUES</b><br><a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>   | <b>M. Johannes KELLENDONK</b><br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>LIRIS - INFOMATHS<br>Bâtiment Nautibus<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10<br><a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a>   |
| <b>Matériaux</b> | <b>MATERIAUX DE LYON</b>  | <b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b><br>Secrétaire : Mériem LABOUNE<br><br>INSA de Lyon<br>École Doctorale Matériaux<br>Mérim LABOUNE<br>Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry<br>25bis Avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE<br>Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37<br><a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>   |
| <b>MEGA</b>      | <b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE<br/>CIVIL, ACOUSTIQUE (ED n° 162)</b>  | <b>M. Philippe BOISSE</b><br>Secrétaire : Mériem LABOUNE<br>INSA de Lyon<br>École Doctorale MEGA<br>Mérim LABOUNE<br>Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry<br>25bis Avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE<br>Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37<br><a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a><br>Site web : <a href="http://www.ed-mega.com">http://www.ed-mega.com</a> |
| <b>ScSo</b>      | <b>ScSo*</b><br><br><b>M. OBADIA Lionel</b><br><br>Sec : Viviane POLSINELLI<br>Insa : J.Y. TOUSSAINT  | <b>M. OBADIA Lionel</b><br>Université Lyon 2<br>86 rue Pasteur<br>69365 LYON Cedex 07<br>Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48<br><a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>   |

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, **Alain Combescure**. Au delà des qualités scientifiques, je retiendrai de lui l'efficacité, le pragmatisme et la jeunesse d'esprit. Je tiens également à souligner ses grandes qualités humaines. Je lui suis reconnaissant de s'être inquiété de mon bien être et de s'être montré patient, réconfortant et confiant dans les moments difficiles. Je remercie également mes encadrants **Vincent Faucher** (CEA) et **Serguei Potapov** (EDF R&D) pour m'avoir donné la possibilité de travailler sur ce sujet, l'aide sur Europlexus, leur expérience et leur sympathie.

Je remercie messieurs **Stéphane Bordas** et **Olivier Allix** pour avoir accepté la charge de rapporteur de mon travail de thèse. Je remercie tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail et le temps qu'ils me consacrent.

Je remercie mes collègues du LaMCoS pour ces trois années passées ensemble : **Pierre Simon** pour son humour et sa gentillesse, **Nicolas Tardif** mon collègue de bureau pendant 2 ans, **Fabien Casez**, **Mickaël Sansalone**, **Cédric Courbon** mon autre collègue de bureau pendant 3 ans, **Aline Brunon** et **Sylvain Bel** pour les discussions politiques enflammées et le marché, **Sébastien Gatouillat** pour les calembours, **Lucas Boucina**, **Loane Bigorgne**, **Paul Leplay**, **David Haboussa** et **Romain Pelée** pour la phrase du vendredi soir. Je n'oublie pas le bureau d'à côté : **Benoit Trollé**, **Benjamin Fulleringer**, **Caroline Bagault**, **Nans Biboulet**, **Thibault Chaise**, **Alexandre Mondelin**. Je remercie également les membres permanents pour leur accueil, **Michel Coret**, **Anthony Gravouil**, **Julien Réthoré**, **Daniel Nélias**, **Tarek Mabrouki**, **Fabrice Morestin** ... . Enfin, j'ai une pensée particulière pour **Ton Lubrecht** pour sa disponibilité et sa gentillesse envers moi.

J'ai également une grosse pensée pour la petite famille lyonnaise : **NONO**, vive le 88, pour les mémorables soirées de jump au Woods, les remarques distinguées et **Thomas** pour les bons petits plats, le waveboard et la joie de vivre. Sans oublier **Alex**, merci à tous les 3 pour le spring break inopiné à Punta Kana. Bien sûr, je n'oublie pas **Émilien** et **Cécile**, Mymile des chips, pour voir le bien de partout, les cafés en double, la gentillesse et l'organisation des repas de midi ; **Sophie** pour les critiques de mon pull-pyjama et de mes vieilleries ; **Mathilde** et **Jérôme** pour les supers vacances en Guadeloupe, les week-ends à Belmont (le cerdon...) et les stand-up improvisés sur la vie de couple ; **Émilien** et **Dada** pour leur gentillesse, leur ouverture, les révélations sur les films de jeunesse et les produits en L. Je n'oublie pas non plus **Adrien** et **Lorène** et **Matt** et **Charline**. Merci à tous pour votre gentillesse, votre générosité, votre bonne humeur et votre soutien dans les moments difficiles.

Mes pensées vont également à ma famille. Je remercie mon **père** et ma **mère** pour avoir toujours cru en moi, pour leur soutien indéfectible, leurs conseils et pour leur aide dans mes moments de doute et de difficultés. Je remercie également **Amélie** et **Cédric**,

---

félicitations pour le mariage, pour leur grande gentillesse, leur affection et leur soutien.

Enfin, mes dernières pensées sont pour **Célia**. Cela fait déjà 6 ans que nous parcourons la vie ensemble et chaque jour est un bonheur. Merci pour ton amour, ta force et ton soutien.

# Résumé

Le récent développement des menaces terroristes renforce l'effort de recherche du CEA et d'EDF pour la protection des citoyens et des installations. De nombreux scénarios doivent être envisagés comme, par exemple, la chute d'un avion de ligne sur une structure de génie civil. La dispersion du carburant dans la structure, son embrasement sous forme de boule de feu et les effets thermiques associés sont des éléments essentiels du problème. L'utilisation de modèles numériques est indispensable car des expériences seraient difficiles à mettre en œuvre, coûteuses et dangereuses.

Le problème type que l'on cherche à modéliser est donc l'impact d'un réservoir rempli de fluide, sa déchirure et la dispersion de son contenu. C'est un problème complexe qui fait intervenir une structure mince avec un comportement fortement non-linéaire allant jusqu'à rupture, un fluide dont la surface libre peut varier drastiquement et des interactions fluide-structure non permanentes. L'utilisation des méthodes numériques traditionnelles pour résoudre ce problème semble difficile, essentiellement parce qu'elles reposent sur un maillage. Cela complique la gestion des grandes déformations, la modélisation des interfaces variables et l'introduction de discontinuités telles que les fissures. Afin de s'affranchir de ces problèmes, la méthode sans maillage SPH (« Smoothed Particle Hydrodynamics ») a été utilisée pour modéliser le fluide et la structure.

Ce travail, inscrit dans la continuité de recherches précédentes, a permis d'étendre un modèle de coque SPH à la modélisation des ruptures. Un algorithme de gestion des interactions fluide-structure a également été adapté à la topologie particulière des coques. Afin de réduire les coûts de calcul importants liés à ce modèle, un couplage avec la méthode des éléments finis a également été élaboré. Il permet de n'utiliser les SPH que dans les zones d'intérêt où la rupture est attendue. Finalement, des essais réalisés par l'ONERA sont étudiés pour valider la méthode.

Ces travaux ont permis de doter le logiciel de dynamique rapide Europlexus d'un outil original et efficace pour la simulation des impacts de structures minces en interaction avec un fluide. Un calcul démonstratif montre enfin la pertinence de l'approche et sa mise en œuvre dans un cadre industriel.

**MOTS CLÉS:** sans maillage, SPH, coque, dynamique, rupture, impact, interactions fluide-structure





# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Table des matières</b>                                    | <b>i</b>  |
| <b>Table des figures</b>                                     | <b>v</b>  |
| <b>Liste des tableaux</b>                                    | <b>ix</b> |
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 La méthode SPH</b>                                      | <b>9</b>  |
| 1.1 Historique . . . . .                                     | 11        |
| 1.2 Principe . . . . .                                       | 11        |
| 1.2.1 Discrétisation . . . . .                               | 12        |
| 1.2.2 Construction des fonctions de forme . . . . .          | 12        |
| 1.2.3 Formulation d'un problème SPH . . . . .                | 15        |
| 1.3 Application à la mécanique des fluides . . . . .         | 16        |
| 1.3.1 Modèle fluide . . . . .                                | 16        |
| 1.3.2 Résolution par la méthode SPH . . . . .                | 17        |
| 1.3.3 Viscosité artificielle . . . . .                       | 17        |
| 1.3.4 Taille de voisinage variable . . . . .                 | 18        |
| 1.3.5 Conclusions . . . . .                                  | 18        |
| 1.4 Application à la mécanique des structures . . . . .      | 19        |
| 1.4.1 Consistance des méthodes sans maillage . . . . .       | 19        |
| 1.4.2 Stabilité des méthodes sans maillage . . . . .         | 22        |
| 1.5 Introduction de discontinuités . . . . .                 | 27        |
| 1.5.1 Modification de la fonction noyau . . . . .            | 27        |
| 1.5.2 Modification de la base intrinsèque . . . . .          | 27        |
| 1.5.3 Enrichissement extrinsèque des fonctions MLS . . . . . | 28        |
| 1.5.4 Méthode extrinsèque de partition de l'unité . . . . .  | 28        |
| <b>2 Coque SPH fissurante</b>                                | <b>29</b> |
| 2.1 Historique et bibliographie . . . . .                    | 31        |
| 2.2 Méthode SPHC . . . . .                                   | 32        |
| 2.2.1 Formulation SPHC . . . . .                             | 32        |
| 2.2.2 Discrétisation . . . . .                               | 36        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.2.3    | Compléments . . . . .   | 38         |
| 2.2.4    | Algorithme de plasticité . . . . .                                      | 41         |
| 2.2.5    | Estimation et contrôle du pas de temps critique . . . . .               | 42         |
| 2.2.6    | Investigations sur le verrouillage en cisaillement transverse . . . . . | 43         |
| 2.3      | Endommagement et rupture . . . . .                                      | 47         |
| 2.3.1    | Introduction . . . . .  | 47         |
| 2.3.2    | Modélisation de l'endommagement . . . . .                               | 49         |
| 2.3.3    | Le problème de localisation . . . . .                                   | 54         |
| 2.3.4    | Couplage loi de comportement - loi d'endommagement . . . . .            | 59         |
| 2.3.5    | Transition endommagement-f ssuration dans les SPHC . . . . .            | 67         |
| 2.3.6    | Introduction d'une discontinuité forte . . . . .                        | 68         |
| 2.4      | Exemples numériques . . . . .   | 72         |
| 2.4.1    | Propagation en mode mixte dans une poutre sous impact. . . . .          | 72         |
| 2.4.2    | Étude de convergence . . . . .  | 76         |
| 2.4.3    | Branchement de f ssures . . . . .                                       | 77         |
| 2.4.4    | Étude de sensibilité du modèle à effet retard . . . . .                 | 81         |
| 2.4.5    | Perforation d'une plaque par un projectile hémisphérique . . . . .      | 83         |
| 2.4.6    | Fragmentation d'un cylindre sous explosif . . . . .                     | 89         |
| 2.5      | Conclusions . . . . .   | 93         |
| <b>3</b> | <b>Interactions fluide-structure</b>                                    | <b>97</b>  |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 99         |
| 3.2      | Étude bibliographique . . . . .   | 99         |
| 3.2.1    | Méthode des EF . . . . .  | 99         |
| 3.2.2    | Méthodes sans maillage . . . . .  | 100        |
| 3.3      | La méthode des Pinballs . . . . .                                       | 102        |
| 3.3.1    | Principe . . . . .  | 102        |
| 3.3.2    | Détection du contact . . . . .  | 103        |
| 3.3.3    | Condition d'impénétrabilité . . . . .                                   | 103        |
| 3.3.4    | Calcul des forces de contact . . . . .                                  | 105        |
| 3.3.5    | Prise en compte de la topologie des coques SPH . . . . .                | 107        |
| 3.4      | Exemple numérique: perforation d'un réservoir . . . . .                 | 109        |
| 3.4.1    | Expérience . . . . .  | 109        |
| 3.4.2    | Modélisation . . . . .  | 109        |
| 3.4.3    | Résultats . . . . .   | 112        |
| 3.5      | Conclusions . . . . .   | 115        |
| <b>4</b> | <b>Couplage SPHC-EF</b>   | <b>117</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 119        |
| 4.2      | Les méthodes de couplage . . . . .                                      | 119        |
| 4.2.1    | Objectifs . . . . .   | 119        |
| 4.2.2    | Bibliographie . . . . .   | 120        |
| 4.2.3    | Choix de la méthode . . . . .   | 122        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3      | La méthode Arlequin . . . . .  | 122        |
| 4.3.1    | Principes de la méthode . . . . .  | 122        |
| 4.3.2    | Théorie de la méthode Arlequin . . . . .                                 | 123        |
| 4.3.3    | Résultats mathématiques et pratiques . . . . .                           | 129        |
| 4.3.4    | Problèmes spécifiques aux couplages des méthodes sans maillage . . . . . | 129        |
| 4.3.5    | Bilan . . . . .  | 131        |
| 4.4      | Discretisation du couplage Arlequin dans le formalisme SPHC-EF . . . . . | 131        |
| 4.4.1    | Définition du problème . . . . .   | 131        |
| 4.4.2    | Discretisation de la condition de couplage . . . . .                     | 132        |
| 4.4.3    | Méthode de résolution . . . . .  | 134        |
| 4.4.4    | Mise en oeuvre pratique du couplage . . . . .                            | 134        |
| 4.5      | Cas tests de validation . . . . .  | 136        |
| 4.5.1    | Propagation d'onde . . . . .   | 136        |
| 4.5.2    | Traction . . . . .   | 140        |
| 4.5.3    | Flexion . . . . .  | 143        |
| 4.6      | Exemples numériques: perforation d'un réservoir . . . . .                | 145        |
| 4.6.1    | Réservoir vide . . . . .   | 145        |
| 4.6.2    | Réservoir plein . . . . .  | 147        |
| 4.7      | Conclusions . . . . .  | 148        |
| <b>5</b> | <b>Validation expérimentale</b>  | <b>151</b> |
| 5.1      | Campagne expérimentale ONERA . . . . .                                   | 153        |
| 5.1.1    | Dispositif expérimental . . . . .  | 153        |
| 5.1.2    | Caractéristiques des éprouvettes . . . . .                               | 153        |
| 5.1.3    | Déroulement des essais et chaîne d'acquisition . . . . .                 | 156        |
| 5.2      | Analyse et simulation des essais non fissurants . . . . .                | 156        |
| 5.2.1    | Analyse des essais . . . . .   | 157        |
| 5.2.2    | Interprétation des phénomènes . . . . .                                  | 160        |
| 5.2.3    | Modèle numérique . . . . .   | 161        |
| 5.2.4    | Confrontation des résultats numériques et expérimentaux . . . . .        | 164        |
| 5.3      | Analyse et simulation des essais fissurants . . . . .                    | 174        |
| 5.3.1    | Essai TF14A5 . . . . .   | 174        |
| 5.3.2    | Essai FXA5 . . . . .   | 178        |
| 5.4      | Conclusions . . . . .  | 180        |
|          | <b>Conclusion</b>  | <b>181</b> |
|          | <b>A Approximation MLS d'un champ et de son gradient</b>                 | <b>185</b> |
|          | <b>B Algorithme de plasticité du retour radial</b>                       | <b>189</b> |
|          | <b>C Estimation du pas de temps critique SPHC</b>                        | <b>191</b> |
|          | <b>D Algorithme de couplage plasticité-endommagement</b>                 | <b>197</b> |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>E</b> | <b>Formulation forte (<math>S_i^a</math>) du problème Arlequin</b> | <b>201</b> |
| <b>F</b> | <b>Déroulement des essais ONERA</b>                                | <b>205</b> |
| <b>G</b> | <b>Chaine d'acquisition utilisée pour les essais ONERA</b>         | <b>207</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>209</b> |

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1    | Schématisme de la localisation des réservoirs d'un 747-400. . . . .                  | 2  |
| 2    | Crash expérimental d'un Boeing 720 [STE 11]. . . . .                                 | 3  |
| 1.1  | Voisinage d'un nœud SPH. . . . .   | 12 |
| 1.2  | Génération de la discrétisation. . . . .   | 13 |
| 1.3  | Fonction spline B3. . . . .  | 14 |
| 1.4  | Modes à énergie nulle [MAU 08a]. . . . .   | 23 |
| 1.5  | Positionnement des Stress Points. . . . .  | 26 |
| 2.1  | Repères locaux et configurations de la coque. . . . .                                | 33 |
| 2.2  | Un nœud SPHC. . . . .  | 36 |
| 2.3  | Discrétisation SPHC basée sur des quadrilatères. . . . .                             | 37 |
| 2.4  | Verrouillage en CT pour le modèle SPHC. . . . .                                      | 44 |
| 2.5  | Effet de la stabilisation sur la déformée SPHC ( $\times 2000$ ). . . . .            | 46 |
| 2.6  | Performances du modèle de collocation sélective stabilisée. . . . .                  | 47 |
| 2.7  | Schématisme d'un VER: présence de microfissures et cavités. . . . .                  | 50 |
| 2.8  | Influence des paramètres $A_L$ et $B_L$ [CHU 09]. . . . .                            | 52 |
| 2.9  | Illustration du problème de localisation de l'endommagement. . . . .                 | 55 |
| 2.10 | Loi de comportement de la poutre test. . . . .                                       | 55 |
| 2.11 | Influence des paramètres $a$ et $\tau_c$ sur l'évolution de l'endommagement. . . . . | 58 |
| 2.12 | Représentation d'une fissure par le modèle SPHC. . . . .                             | 67 |
| 2.13 | Discontinuités fortes dans le modèle SPHC. . . . .                                   | 69 |
| 2.14 | Méthode de visibilité: éventuelles fractures artificielles. . . . .                  | 70 |
| 2.15 | Schéma de l'expérience [JOH 90] . . . . .  | 73 |
| 2.16 | Influence du paramètre $X$ sur la fissuration [JOH 90]. . . . .                      | 73 |
| 2.17 | Simulation de la poutre sous impact: endommagement. . . . .                          | 75 |
| 2.18 | Simulation de la poutre sous impact: trajet des fissures. . . . .                    | 75 |
| 2.19 | Étude de convergence: endommagement et fissuration à $t = 800 \mu s$ . . . . .       | 78 |
| 2.20 | Traction d'une plaque rectangulaire pré-fissurée [ZI 07]. . . . .                    | 79 |
| 2.21 | Comparaison des trajets de fissuration. . . . .                                      | 80 |
| 2.22 | Comparaison des vitesses de propagation. . . . .                                     | 81 |
| 2.23 | Étude de sensibilité: endommagement à $t = 65 \mu s$ . . . . .                       | 82 |
| 2.24 | Schéma du dispositif expérimental [RUS 09]. . . . .                                  | 83 |
| 2.25 | État final de la plaque [RUS 09]. . . . .  | 84 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 2.26 | Matériau de la plaque perforée [RUS 09]. . . . .                                    | 85  |
| 2.27 | Comparaison des simulations SPHC et EF [RUS 09](1). . . . .                         | 87  |
| 2.28 | Comparaison des simulations SPHC et EF [RUS 09] (2). . . . .                        | 88  |
| 2.29 | Temps à rupture en fonction de la vitesse d'impact. . . . .                         | 88  |
| 2.30 | Énergie cinétique perdue par le projectile. . . . .                                 | 89  |
| 2.31 | Effort exercé sur le projectile. . . . .  | 90  |
| 2.32 | Fragmentation d'un cylindre sous explosif. . . . .                                  | 91  |
| 2.33 | Dépendance non linéaire du matériau à $\log(\dot{\epsilon})$ . . . . .              | 92  |
| 2.34 | Fragmentation du cylindre. . . . .  | 94  |
| 2.35 | Vitesse d'expansion du cylindre et pression dans l'explosif. . . . .                | 95  |
| 2.36 | Comparaison des résultats numériques et expérimentaux. . . . .                      | 95  |
| 2.37 | Fragmentation du cylindre ramenée sur la géométrie initiale. . . . .                | 95  |
| 2.38 | Vitesse de rupture des SP au cours du calcul. . . . .                               | 96  |
|      |   |     |
| 3.1  | Détection du contact par la méthode des Pinballs [CAS 02]. . . . .                  | 100 |
| 3.2  | Illustration de l'effet « coussin d'air » [MAU 08a]. . . . .                        | 101 |
| 3.3  | IFS par la méthode des particules immergées [RAB 09]. . . . .                       | 102 |
| 3.4  | Grandeurs intervenant dans le contact. . . . .                                      | 103 |
| 3.5  | Normale au contact dans le cas d'une coque SPH [MAU 08a]. . . . .                   | 104 |
| 3.6  | Cas pathologique du contact coque SPH - fluide SPH. . . . .                         | 105 |
| 3.7  | Pinballs hiérarchiques pour les coques. . . . .                                     | 108 |
| 3.8  | Pinballs cylindriques pour les SPH coque. . . . .                                   | 108 |
| 3.9  | Paramètres du contact coque SPH - fluide SPH. . . . .                               | 108 |
| 3.10 | Dispositif expérimental [TIM 03]. . . . .   | 110 |
| 3.11 | État initial et final d'un projectile [TIM 03]. . . . .                             | 110 |
| 3.12 | État final du réservoir pour $V_{imp} = 730 \text{ m.s}^{-1}$ [TIM 03]. . . . .     | 111 |
| 3.13 | Faciès de rupture du cylindre vide [TIM 03]. . . . .                                | 112 |
| 3.14 | Simulation du cylindre vide avec le modèle SPHC. . . . .                            | 114 |
| 3.15 | Simulation du cylindre plein avec le modèle SPHC. . . . .                           | 114 |
|      |   |     |
| 4.1  | Différents objectifs des couplages de formulations. . . . .                         | 120 |
| 4.2  | Définition d'une interface $\Gamma_c$ ou d'un recouvrement $\Omega_c$ . . . . .     | 120 |
| 4.3  | Définition du couplage Arlequin. . . . .  | 125 |
| 4.4  | Voisinage d'un point de Gauss. . . . .  | 135 |
| 4.5  | Utilisation de SP additionnels. . . . .   | 135 |
| 4.6  | Vitesse initiale et maillage de la plaque. . . . .                                  | 137 |
| 4.7  | Influence de la fonction de mélange: vitesse au centre de la plaque. . . . .        | 138 |
| 4.8  | Influence de la fonction de mélange: vitesse au centre de la plaque (zoom). . . . . | 138 |
| 4.9  | Influence du raffinement SPHC: vitesse au centre de la plaque. . . . .              | 139 |
| 4.10 | Influence du raffinement SPHC: vitesse au centre de la plaque (zoom). . . . .       | 139 |
| 4.11 | Influence de $r_g$ : vitesse au centre de la plaque (zoom). . . . .                 | 140 |
| 4.12 | Traction: déplacement à l'extrémité de la plaque. . . . .                           | 141 |
| 4.13 | Traction: déplacement à l'extrémité de la plaque (zoom). . . . .                    | 142 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.14 | Traction: vitesse à l'extrémité de la plaque. . . . .                           | 142 |
| 4.15 | Traction: vitesse à l'extrémité de la plaque (zoom). . . . .                    | 142 |
| 4.16 | Flexion: déplacement à l'extrémité de la plaque. . . . .                        | 144 |
| 4.17 | Flexion: vitesse à l'extrémité de la plaque. . . . .                            | 144 |
| 4.18 | Maillage du réservoir vide. . . . .   | 145 |
| 4.19 | Réservoir vide: propagation des ondes sur la face arrière. . . . .              | 146 |
| 4.20 | Réservoir vide: comparaison des contraintes de von-Mises. . . . .               | 146 |
| 4.21 | Maillage du réservoir plein. . . . .  | 147 |
| 4.22 | État du réservoir plein à $t_f = 1.8 \text{ ms}$ . . . . .                      | 148 |
| 4.23 | État final du réservoir plein à $t_f = 20 \text{ ms}$ . . . . .                 | 149 |
|      |   |     |
| 5.1  | Dispositif expérimental. . . . .  | 154 |
| 5.2  | Tour de chute de l'ONERA de Lille. . . . .                                      | 154 |
| 5.3  | Exemples d'éprouvettes avant impact: préférences en X et en U. . . . .          | 155 |
| 5.4  | Vue d'ensemble du dispositif expérimental. . . . .                              | 156 |
| 5.5  | Pression dans le cylindre (essais E14A-B-C-D5). . . . .                         | 157 |
| 5.6  | Pression dans le cylindre (essais E14A-B-C2). . . . .                           | 157 |
| 5.7  | Jet à $t = 2.5 \text{ ms}$ (essai E20A2). . . . .                               | 158 |
| 5.8  | Forme du jet (essai E20A2). . . . .   | 158 |
| 5.9  | Pression dans le cylindre et déformation de l'éprouvette (essai F14A2). . . . . | 159 |
| 5.10 | Ouverture de la préférence (essais FUA2 et FUA5). . . . .                       | 159 |
| 5.11 | Jet à $t = 1.75 \text{ ms}$ (essai FUA5). . . . .                               | 160 |
| 5.12 | Pression dans le cylindre et déformation de l'éprouvette (essai FUA2). . . . .  | 160 |
| 5.13 | Calcul du premier mode du piston rempli d'eau (Castem). . . . .                 | 162 |
| 5.14 | Modèle numérique du dispositif expérimental. . . . .                            | 162 |
| 5.15 | Courbe de traction AU4G 2024. . . . .   | 163 |
| 5.16 | Décomposition de domaine avec 4 processeurs. . . . .                            | 164 |
| 5.17 | Modélisation de l'encastrement de l'échantillon. . . . .                        | 165 |
| 5.18 | Pression dans le cylindre (essai E20A5). . . . .                                | 166 |
| 5.19 | Pression dans le cylindre: zoom (essai E20A5). . . . .                          | 166 |
| 5.20 | Déplacement du chariot (essai E20A5). . . . .                                   | 167 |
| 5.21 | Vitesse de sortie du jet (essai E20A5, calcul 2). . . . .                       | 167 |
| 5.22 | Simulation de l'essai E20A5 à $t = 3 \text{ ms}$ (calcul 2). . . . .            | 168 |
| 5.23 | Pression dans le cylindre (essai E20A2). . . . .                                | 168 |
| 5.24 | Pression dans le cylindre: zoom (essai E20A2). . . . .                          | 168 |
| 5.25 | Déplacement du chariot (essai E20A2). . . . .                                   | 169 |
| 5.26 | Vitesse de sortie du jet (essai E20A2). . . . .                                 | 169 |
| 5.27 | Pression dans le cylindre (essai FUA5). . . . .                                 | 170 |
| 5.28 | Pression dans le cylindre: zoom (essai FUA5). . . . .                           | 171 |
| 5.29 | Simulation de l'essai FUA5 à $t = 3.5 \text{ ms}$ . . . . .                     | 172 |
| 5.30 | Comparaison des déformées (essai FUA5). . . . .                                 | 172 |
| 5.31 | Comparaison des déformations (essai FUA5). . . . .                              | 173 |
| 5.32 | Pression dans le cylindre (essai FUA2). . . . .                                 | 173 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.33 | Pression dans le cylindre: zoom (essai FUA2).                       | 173 |
| 5.34 | Comparaison des déformée (essai FUA2).                              | 174 |
| 5.35 | Rupture totale du fond (essais TF14A5 et TFA5).                     | 175 |
| 5.36 | Simulation de l'essai TF14A5 à $t = 2.5 \text{ ms}$ .               | 176 |
| 5.37 | Pression dans le cylindre (essai TF14A5).                           | 177 |
| 5.38 | Déformation de l'éprouvette (essai TF14A5).                         | 177 |
| 5.39 | Propagation de f ssures (essai FXA5).                               | 178 |
| 5.40 | Maillage de l'éprouvette (essai FXA5).                              | 178 |
| 5.41 | Trajet et longueur des f ssures (essai FXA5).                       | 179 |
| 5.42 | Comparaison des trajets et longueurs des f ssures (essai FXA5).     | 180 |
| 5.43 | Impact d'une aile d'avion simplif iée.                              | 183 |
| C.1  | Estimation de $(\Delta t)_{crit}$ en fonction de $e$ .              | 192 |
| C.2  | Comparaison des expériences numériques et des formules analytiques. | 195 |



# Liste des tableaux

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 1    | Capacités en carburant des principaux avions de ligne [MAU 08a]. . . . .                     | 1   |
| 1.1  | Consistance de la méthode SPH [BEL 96a] [LIU 10]. . . . .                                    | 20  |
| 2.1  | Coefficients d'endommagement plastique ductile à 20°C. . . . .                               | 53  |
| 2.2  | Paramètres matériau: béton de la poutre sous impact. . . . .                                 | 74  |
| 2.3  | Stabilité du calcul: poutre sous impact . . . . .  | 75  |
| 2.4  | Étude de convergence: définition des maillages. . . . .                                      | 77  |
| 2.5  | Étude de convergence: bilan énergétique et largeur de fissure à $t = 800 \mu s$ . . . . .    | 77  |
| 2.6  | Paramètres matériau: béton de la plaque en traction. . . . .                                 | 80  |
| 2.7  | Paramètres de l'étude de sensibilité. . . . .  | 82  |
| 2.8  | Paramètres matériau: acier de la plaque perforée. . . . .                                    | 85  |
| 2.9  | Diamètre du disque arraché $D_{plug}$ en fonction de la vitesse d'impact $V_{imp}$ . . . . . | 86  |
| 2.10 | Stabilité du calcul: plaque perforée. . . . .  | 86  |
| 2.11 | Paramètres matériau: acier AISI 1018. . . . .  | 92  |
| 2.12 | Paramètres matériau: explosif LX-17. . . . .   | 92  |
| 3.1  | Paramètres matériau: acier du cylindre perforé. . . . .                                      | 113 |
| 3.2  | Paramètres matériau: eau contenue dans le cylindre perforé. . . . .                          | 113 |
| 3.3  | Cylindre vide: vitesses du projectile. . . . .   | 113 |
| 3.4  | Stabilité du calcul: cylindre perforé. . . . .   | 115 |
| 5.1  | Nomenclature et caractéristiques des tests. . . . .  | 155 |
| 5.2  | Fréquences observées expérimentalement. . . . .  | 161 |
| 5.3  | Paramètres matériau AU4G 2024. . . . .   | 163 |
| 5.4  | Paramètres matériau APX. . . . .   | 163 |
| 5.5  | Paramètres matériau eau. . . . .   | 163 |
| 5.6  | Paramètres de la loi d'endommagement AU4G 2024. . . . .                                      | 175 |



# Introduction

## Contexte

Le récent développement des menaces terroristes renforce l'effort de recherche du CEA et d'EDF pour la protection des citoyens et des installations. De nombreux scénarios doivent être envisagés comme, par exemple, la chute d'un avion de ligne sur une structure de génie civil, à l'instar des attentats du 11 septembre 2001.

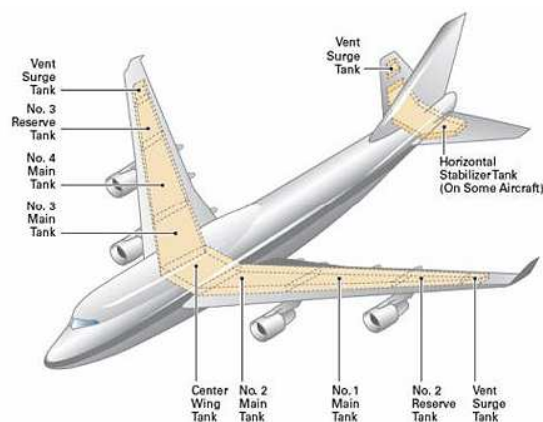
Suite au crash accidentel, pour cause de mauvaise visibilité, d'un bombardier B-25 sur l'Empire State Building à New York en 1945, les tours du World Trade Center avaient été dimensionnées pour résister à l'impact du plus gros avion de ligne de l'époque, le Boeing 707. Lors des attentats du 11 septembre 2001, les structures ont effectivement résisté au choc provoqué par les Boeing 767 qui les ont percutées. Cependant, la dispersion de carburant dans les structures et son embrasement sous forme de boules de feu n'avaient pas été pris en compte lors du dimensionnement. Ainsi, les effets thermiques associés aux incendies ont probablement affaibli les structures métalliques et provoqués l'effondrement des tours.

La présence de carburant dans les avions est donc un paramètre important des problématiques de crash. Le tableau 1 montre que celui-ci représente généralement entre 40 et 50 % de la masse totale de l'appareil au décollage, soit plusieurs centaines de milliers de litres pour les plus gros avions. De plus, la figure 1 montre que ce carburant est situé essentiellement dans les ailes, ce qui facilite sa dispersion et son écoulement en cas de crash.

Ces exemples montrent qu'il est indispensable d'étudier les éventuels effets du carburant pour prévoir correctement les conséquences d'un crash. Une approche expérimentale

| Appareil | Volume (l) | Masse (t) | Part dans la masse au décollage (%) |
|----------|------------|-----------|-------------------------------------|
| A380     | 325000     | 260       | 48                                  |
| 747-400  | 216000     | 173       | 43                                  |
| 777-200  | 202000     | 161       | 47                                  |
| A340-300 | 140000     | 116       | 41                                  |
| 757-200  | 43000      | 35        | 30                                  |

**TABLE 1:** Capacités en carburant des principaux avions de ligne [MAU 08a].



**FIGURE 1:** Schématisation de la localisation des réservoirs d'un 747-400.

a été menée dans ce sens en 1984 par la NASA et l'Aviation Civile Américaine. L'expérience, connue sous le sigle CID (« Controlled Impact Demonstration »), consistait à télécommander le crash d'un Boeing 720 afin d'étudier l'influence d'un additif de carburant, baptisé FM-9, sur la formation de la boule de feu. L'objectif était également de tester de nouveaux dispositifs de sécurité (sièges, ceintures, vitres anti feu) tout en mesurant divers paramètres (efforts durant le crash, données du vol). Il s'agissait de faire atterrir l'avion avec les trains d'atterrissage rentrés afin que les ailes percutent des plots fixés sur la piste. L'expérience n'a pas été couronnée de succès suite au manque de contrôle de l'avion qui s'est posé de biais, comme on peut le voir sur les figures 2(a) et 2(b). L'ajout de FM-9 dans le carburant n'a pas empêché la formation d'une boule de feu, visible sur les figures 2(c) et 2(d). Cet exemple montre que de telles expérimentations sont :

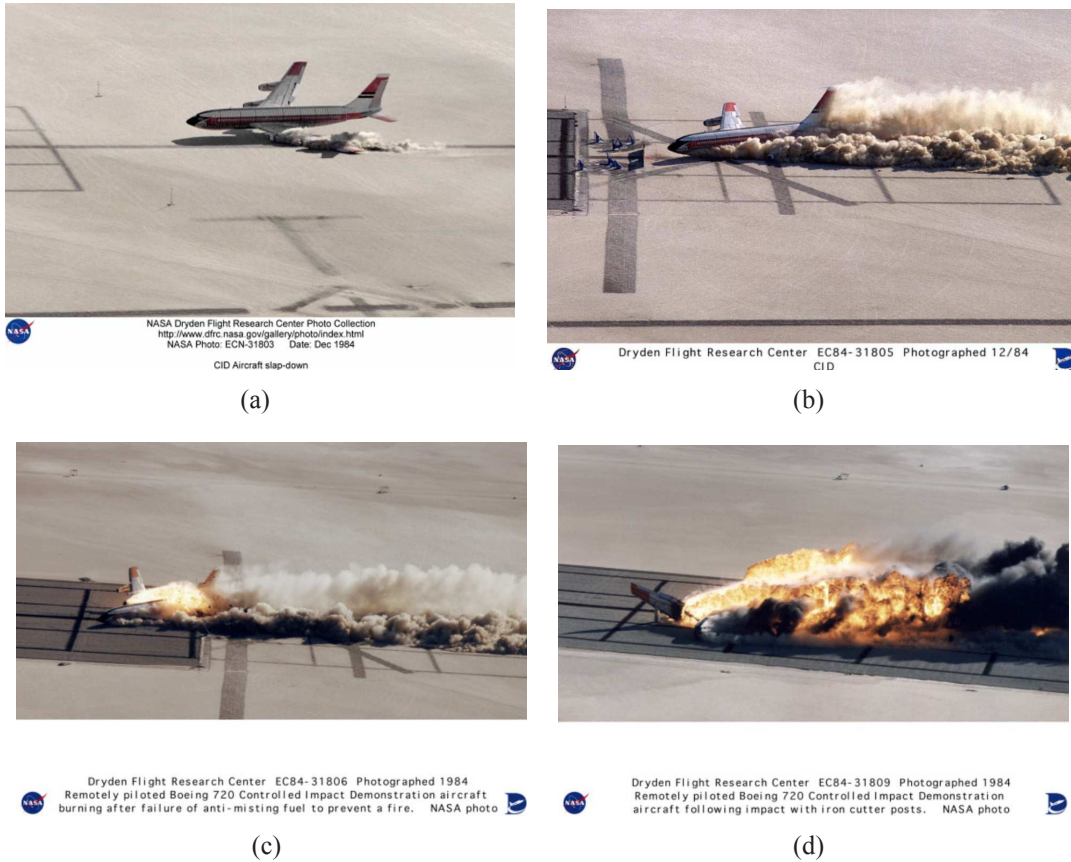
- difficiles à mettre en œuvre (échec partiel du projet CID),
- longues à réaliser (1 an de préparation),
- coûteuses (équivalent à 1000 crashes tests automobiles [NOU 09]),
- potentiellement dangereuses (incendies).

Pour toutes ces raisons, l'approche expérimentale est souvent exclue dans ce type de problématique. L'utilisation de modèles numériques est donc indispensable.

## État de l'art

Les méthodes basées sur l'utilisation d'une grille ou d'un maillage sont aujourd'hui les approches dominantes en simulation numérique.

Dans le cadre des formulations lagrangiennes, comme la méthode des éléments finis (MEF), le maillage est attaché à la matière et se déforme en conséquence. Cette approche est attractive, notamment en mécanique des structures, pour plusieurs raisons : les équations à résoudre ne présentent pas de termes convectifs, l'historique des champs de variables en un point matériel est facile à obtenir, les géométries compliquées sont traitées simplement en utilisant des maillages irréguliers et seul le domaine étudié doit être maillé.



**FIGURE 2:** Crash expérimental d'un Boeing 720 [STE 11].

Cependant, la génération du maillage est généralement un processus long et complexe. De plus, ces méthodes deviennent inefficaces lorsque le maillage subit des distorsions importantes : la précision de la simulation peut être rapidement dégradée, de même que son efficacité, notamment en dynamique explicite où le pas de temps est directement lié à la taille des éléments. Dans ce cas, le calcul peut éventuellement ne pas aboutir. La solution parfois choisie consiste à remailler le domaine d'étude afin de remplacer le maillage distordu par un maillage sain. L'opération est souvent coûteuse et complexe et la projection des données entre les maillages conduit à des imprécisions (perte ou apparition d'énergie). Enfin, la connectivité des maillages étant fixe, il est généralement difficile de représenter des discontinuités, comme des fissures. Le récent développement de la méthode X-FEM [MOE 99] ouvre de nouvelles possibilités pour ce type de problèmes. Cependant, la méthode est difficilement applicable lorsque le nombre de discontinuités devient important.

Une approche alternative réside dans les formulations eulériennes, comme la méthode des différences finies, pour lesquelles le maillage est fixe en temps et voit la matière s'écouler. Dans ce cas, les grandes déformations n'influencent pas le maillage qui reste ainsi valide. C'est pourquoi cette approche est populaire en mécanique des fluides. Cependant, ces méthodes présentent également des inconvénients : il est difficile d'obtenir l'historique d'un champ de variables en un point fixe de la matière, il n'est pas aisé de traiter des géométries complexes et la position des surfaces libres, des bords, des interfaces et des discontinuités est difficile à déterminer précisément. De plus, les calculs sont parfois coûteux car il est nécessaire de mailler l'ensemble du domaine dans lequel la matière évolue.

Des méthodes combinant les deux approches ont également vu le jour, comme par exemple la méthode ALE (« Arbitrary Lagrangian Eulerian ») [HIR 74]. Elle consiste à réaliser des calculs lagrangiens tout en se donnant la possibilité de faire évoluer le maillage indépendamment de la matière pour éviter, par exemple, des distorsions importantes. La méthode n'est pas très éloignée du remaillage parfois utilisé en EF. Cette approche a été appliquée avec succès dans de nombreux domaines et codes de calcul, notamment pour les problèmes d'interactions fluide-structure. Cependant, elle peut encore introduire des erreurs conséquentes dans les simulations en cas de distorsion importante du maillage.

Les méthodes basées sur un maillage ou une grille possèdent donc toutes un certain nombre de limitations, résumées ci-dessus. Ces problèmes sont particulièrement importants pour les simulations d'impacts et d'explosions pour lesquelles on doit modéliser de grandes déformations, des interfaces variables et des discontinuités. Face à ce constat, des méthodes numériques sans maillage ont fait leur apparition. L'idée est d'étudier un domaine à l'aide d'un ensemble de nœuds dont la connectivité peut évoluer au cours du temps. Ces approches ont été développées dans l'espoir de rendre naturel le traitement des grandes déformations et l'introduction de discontinuités telles que les fissures. D'autres avantages sont également attendus : une plus grande souplesse dans l'élaboration de la discrétisation, de meilleures propriétés de continuité des fonctions de forme et une indépendance des résultats vis à vis de la discrétisation.

## Historique des méthodes sans maillage

La première tentative pour élaborer une méthode numérique sans maillage est attribuée à Daly [DAL 65] qui a imaginé en 1965 la Méthode des Particules et des Forces (MPEF) pour simuler des impacts de corps fluides. Gingold et Monaghan [GIN 77] et Lucy [LUC 77] ont ensuite développé la méthode « Smoothed Particle Hydrodynamics » (SPH) dans le domaine de l'astrophysique. Dès lors, l'intérêt pour ces approches n'a cessé de croître, si bien qu'aujourd'hui de nombreuses méthodes existent. Il est possible de les classer selon leur formulation forte ou faible et selon la nature de leurs fonctions de forme.

Les méthodes basées sur une formulation forte sont les plus anciennes. La plus connue et utilisée est probablement la méthode SPH, dont l'approximation est basée sur une fonction noyau spline cubique. Afin d'en améliorer les performances, des fonctions de forme plus élaborées ont été développées [LIU 95] et la méthode baptisée « Reproducing Kernel Particle Method » (RKPM). Dans cette catégorie, on peut également citer la méthode des différences finies généralisées [LIS 80], la méthode « vortex » [CHO 73] et certaines formes de la méthode « Particle-In-Cell » (PIC) [CUS 00].

Plus récemment, au début des années 1990, des méthodes basées sur des formulations faibles ont été développées. La plus ancienne est la méthode des éléments diffus (DEM) [NAY 92]. Elle est basée sur une formulation faible globale et des fonctions de forme dites intrinsèques construites sur une approximation moindres carrés mobiles. Elle a ensuite été améliorée et renommée « Element Free Galerkin » (EFG) [BEL 94b]. On peut citer ici la méthode RKPM qui existe également sous une forme faible globale. Ces approches ont ensuite été généralisées par l'introduction de fonctions de forme dites extrinsèques et du concept de partition de l'unité, donnant naissance aux méthodes « Partition of Unity Finite Element Method » (PUFEM) [MEL 96] et « hp-clouds » [DUA 95]. Toutes ces méthodes utilisent généralement un maillage de fond pour réaliser les intégrations numériques, si bien qu'on considère parfois qu'elles ne sont pas réellement sans maillage. Des solutions basées sur une formulation faible locale n'utilisant pas de maillage de fond ont donc vues le jour. Il s'agit par exemple de la méthode « Meshless Local Petrov-Galerkin » (MLPG) [ATL 02] et de la méthode du point mobile [ONA 96].

Les formulations faibles sont généralement plus stables et précises que les formulations fortes. Cependant, la nécessité de réaliser des intégrations numériques les rend plus coûteuses en temps de calcul et complexifie la gestion des ruptures. C'est pourquoi, les formulations fortes sont parfois privilégiées pour simuler les problèmes d'impact, de perforation et de fragmentation. Dans ce travail, le choix a donc été fait d'utiliser la méthode SPH et ses évolutions successives. Il faut cependant noter que les méthodes basées sur une formulation forte présentent d'autres inconvénients, notamment concernant la gestion des bords libres du domaine.

## Cadre et objectifs de la thèse

Le problème type que l'on cherche à modéliser est l'impact d'un réservoir rempli de fluide, sa déchirure et la dispersion de son contenu. On peut distinguer trois composantes dans ce problème :

- une structure mince soumise à de fortes non-linéarités géométriques et matérielles aboutissant à sa rupture,
- un fluide présentant également un comportement non-linéaire, notamment des phénomènes de « sloshing » et d'éclaboussures,
- une interaction fluide-structure non-permanente, c'est à dire dont la topologie varie au cours du temps.

Pour une situation d'étude donnée, le modèle devra apporter des éléments de réponse pour les deux questions simples suivantes :

- le réservoir est-il rompu ?
- si oui, quel est le débit de fuite de son contenu ?

Comme décrit précédemment, les approches sans maillage semblent particulièrement adaptées pour simuler ce type de problèmes. Un premier travail de thèse, soutenu en 2008, a été mené par Bertrand Maurel [MAU 08a] dans ce sens. Au cours de ce travail, un modèle SPH coque (SPHC) a été implémenté au sein du logiciel de dynamique rapide Europlexus, ainsi qu'un algorithme de traitement des interactions fluide-structure. Il s'agit de la première application de la méthode SPH à la théorie des coques.

Le présent travail s'inscrit dans la continuité des recherches présentées dans [MAU 08a]. Il s'agit d'améliorer les performances de la coque SPH développée précédemment, d'étendre la méthode à la simulation des phénomènes de rupture et rendre possible son utilisation dans un cadre industriel. La thèse est réalisée dans le cadre d'une coopération entre le CEA, EDF R&D et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures. Les développements sont de nouveaux réalisés dans le logiciel Europlexus.

## Plan du mémoire

Le mémoire est organisé en cinq chapitres. Le premier est consacré à la présentation de la méthode SPH. Après un bref historique, la méthode et son application en dynamique des fluides sont exposées. L'extension de la méthode à la dynamique des structures, les verrous scientifiques associés et les solutions fournies par la communauté, sont ensuite détaillés. Finalement, la modélisation des discontinuités est rapidement abordée.

Dans le deuxième chapitre, le modèle SPH de coque de Mindlin-Reissner développé par Maurel et Combescure [MAU 08a] est tout d'abord exposé. Le pas de temps critique du schéma d'intégration en temps et le problème de verrouillage en cisaillement transverse sont étudiés. La méthode est ensuite étendue pour modéliser la rupture des structures minces : pour cela, une transition endommagement-fissuration a été élaborée et des discontinuités fortes introduites dans le modèle. La dernière section est consacrée à des exemples numériques de fissuration, multi-fissuration, perforation et fragmentation.



Le troisième chapitre présente la modélisation des interactions fluide-structure non permanentes par la méthode des Pinballs. La méthode est modifiée pour une meilleure prise en compte de la topologie des coques et appliquée au cas de l'impact d'un réservoir.

Le quatrième chapitre présente un couplage SPHC-EF de coque élaboré dans le formalisme Arlequin. L'objectif est de réduire les temps de calculs, prohibitifs pour un modèle purement SPH, en utilisant les SPHC uniquement dans les zones d'intérêt. Après un exposé de la théorie de couplage, des cas élémentaires de validation sont présentés, puis l'exemple de l'impact d'un réservoir est de nouveau étudié.

Le dernier chapitre est consacré à la validation expérimentale du modèle. Les essais, réalisés en 2006 par l'ONERA de Lille, sont représentatifs de la rupture d'un réservoir consécutive à un impact. Le cadre expérimental est présenté et les essais sont ensuite simulés.

Finalement, les conclusions de ce travail sont exposées, ainsi que les perspectives et les développements futurs à envisager.



# Chapitre 1

## La méthode SPH

*Ce chapitre est dédié à la présentation de la méthode SPH. Après un bref historique, les principes de la méthode sont exposés, ainsi que leur application dans le cadre d'un modèle de fluide qui sera celui utilisé dans la suite de ce travail. Les notions nécessaires à l'extension de la méthode à la mécanique des structures sont ensuite présentées. Des éléments pour la modélisation des discontinuités, telles que les fissures, sont finalement abordés.*

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Historique</b>                             | <b>11</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Principe</b>                               | <b>11</b> |
| 1.2.1      | Discrétisation                                | 12        |
| 1.2.2      | Construction des fonctions de forme           | 12        |
| 1.2.3      | Formulation d'un problème SPH                 | 15        |
| <b>1.3</b> | <b>Application à la mécanique des fluides</b> | <b>16</b> |
| 1.3.1      | Modèle fluide                                 | 16        |
| 1.3.2      | Résolution par la méthode SPH                 | 17        |
| 1.3.3      | Viscosité artificielle                        | 17        |
| 1.3.4      | Taille de voisinage variable                  | 18        |
| 1.3.5      | Conclusions                                   | 18        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1.4</b> | <b>Application à la mécanique des structures . . . . .</b> | <b>19</b> |
| 1.4.1      | Consistance des méthodes sans maillage . . . . .           | 19        |
| 1.4.2      | Stabilité des méthodes sans maillage . . . . .             | 22        |
| <b>1.5</b> | <b>Introduction de discontinuités . . . . .</b>            | <b>27</b> |
| 1.5.1      | Modif cation de la fonction noyau . . . . .                | 27        |
| 1.5.2      | Modif cation de la base intrinsèque . . . . .              | 27        |
| 1.5.3      | Enrichissement extrinsèque des fonctions MLS . . . . .     | 28        |
| 1.5.4      | Méthode extrinsèque de partition de l'unité . . . . .      | 28        |

---

## 1.1 Historique

La méthode SPH est l'une des plus anciennes méthodes sans maillage pour la simulation numérique en mécanique. Elle a été inventée en 1977 simultanément, semble-t-il, par Lucy [LUC 77] et Gingold et Monaghan [GIN 77] dans le cadre de l'astrophysique : il s'agissait de simuler des phénomènes tels que la formation et l'évolution d'étoiles et de galaxies. Le mouvement collectif de ces corps est, en effet, proche de celui d'un liquide ou d'un gaz et peut donc être modélisé par les équations traditionnelles de la mécanique des fluides. La méthode était initialement de type probabiliste car il est possible d'interpréter la fonction « cloche » qu'elle utilise comme une probabilité concernant la position d'un corps. Cependant, elle est rapidement devenue une méthode déterministe et est maintenant appliquée majoritairement dans ce cadre. La méthode SPH est, encore aujourd'hui, utilisée pour la simulation de collisions d'étoiles, de supernovas ou de galaxies ou bien encore la coalescence de trous noirs.

La méthode a ensuite connu un essor important à travers son application en dynamique des fluides. Elle a notamment été appliquée à la simulation de fluides compressibles, incompressibles et multi-phasiques. C'est encore aujourd'hui son principal champ d'application. La méthode a même été utilisée pour des problèmes de thermique et d'électromagnétisme par exemple.

L'extension de la méthode à la mécanique des structures est plus récente, notamment parce qu'elle s'est heurtée à des verrous scientifiques qui seront décrits dans la section 1.4. Il semble que Libersky et al. [LIB 91], [LIB 93] soient les premiers à avoir utilisé les SPH en mécanique des structures, pour la modélisation des impacts hautes vitesses et des phénomènes de rupture, perforation et fragmentation. Ils ont été suivis par Benz et Asphaug [BEN 93], [BEN 95] qui ont utilisé les SPH pour modéliser la rupture des matériaux fragiles. Johnson [JOH 96a], [JOH 96b] a également modélisé des impacts et des perforations avec des SPH. La méthode est aujourd'hui essentiellement appliquée dans les domaines des impacts, impacts hautes vitesses, explosions et fragmentations. L'extension de la méthode SPH à la mécanique des structures a donné lieu à de nombreuses et indispensables améliorations, dont les majeures seront décrites dans la section 1.4.

La méthode SPH a donc été appliquée à de nombreux domaines, si bien que le terme « Hydrodynamics » du sigle n'est plus adapté. Certains auteurs ont ainsi essayé de rebaptiser la méthode « Smoothed Particle Mechanics », mais le terme « Hydrodynamics » est souvent conservé pour les raisons historiques décrites dans cette section. Les références [LIU 03] et [LIU 10] constituent de bonnes introductions à la méthode, le lecteur pourra s'y référer.

## 1.2 Principe

Cette section décrit rapidement les principes de la méthode SPH, depuis la discrétisation du problème jusqu'à l'établissement des équations, en passant par

l'élaboration des fonctions de forme.

### 1.2.1 Discrétisation

Comme décrit précédemment, les méthodes numériques traditionnelles reposent sur un maillage dont la topologie fixe entraîne un certain nombre de limitations. Considérant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , les méthodes sans maillage proposent de discrétiser le problème par un ensemble de nœuds dont la connectivité pourra évoluer au cours des calculs, voir la figure 1.1.

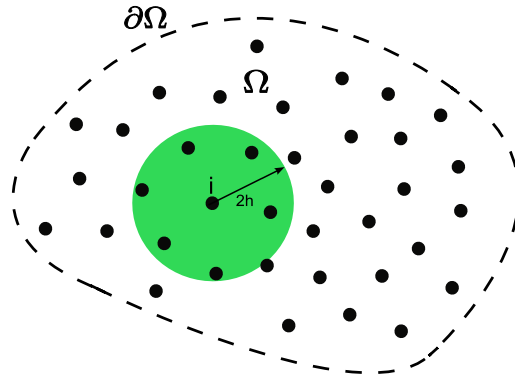


FIGURE 1.1: Voisinage d'un nœud SPH.

Contrairement à d'autres méthodes sans maillage dans lesquelles les nœuds sont utilisés comme de simples points d'approximation, la méthode SPH attache directement aux nœuds un sous domaine dont ils transportent les attributs (masse, position, etc) : on parle de méthode sans maillage particulière.

La génération d'une telle discrétisation peut être complexe lorsqu'elle n'est pas régulière. Certains auteurs réalisent des maillage EF triangulaires et placent les nœuds SPH au centre de gravité des EF ainsi formés, voir la figure 1.2(a). D'autres utilisent un diagramme de Voronoï qui permet de discrétiser au mieux et de façon automatique un domaine avec un ensemble de nœuds, voir la figure 1.2(b).

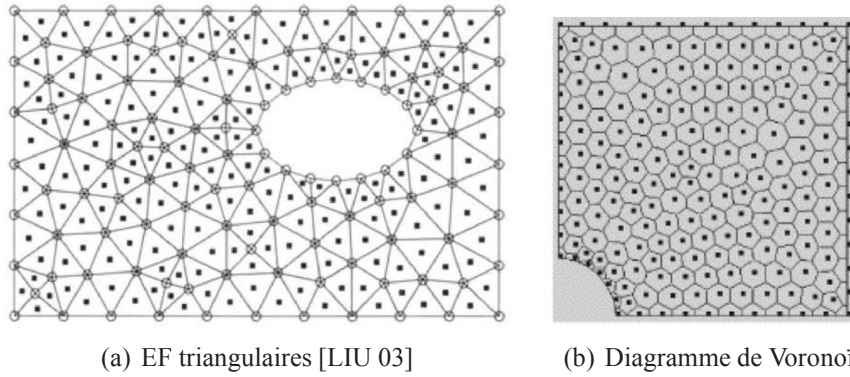
### 1.2.2 Construction des fonctions de forme

#### 1.2.2.1 Approximation d'une fonction

Les fonctions de forme de la méthode SPH sont basées sur une représentation dite intégrale des fonctions. La valeur d'une fonction  $f$  en un point  $\vec{x}$  peut en effet s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (1.1)$$

où  $\delta$  est la fonction Dirac. Cette expression peut être approchée en remplaçant la fonction Dirac par une fonction « cloche » ou fonction noyau, notée  $W$ . Celle-ci doit être à support



**FIGURE 1.2:** Génération de la discrétisation.

compact ce qui signifie que ses valeurs doivent être non nulles à l'intérieur d'un domaine et nulles à l'extérieur. En notant  $h$  le paramètre de la fonction noyau qui contrôle la taille du support, on peut écrire l'approximation suivante :

$$f(\vec{x}) \sim \langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' \quad (1.2)$$

La fonction noyau doit satisfaire les conditions suivantes :

- partition de l'unité

$$\int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' = 1 \quad (1.3)$$

- support compact

$$W(\vec{x} - \vec{x}', h) \neq 0 \text{ quand } \|\vec{x} - \vec{x}'\| < 2h \text{ et nulle ailleurs} \quad (1.4)$$

- monotonie

$$W(\vec{x} - \vec{x}', h) \text{ doit décroître de manière monotone} \quad (1.5)$$

- propriété du Dirac

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{x}', h) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.6)$$

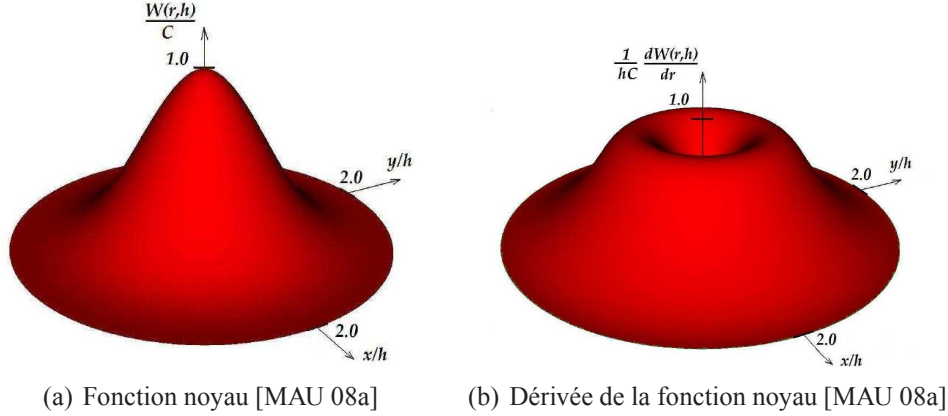
qui permet d'assurer la convergence de la méthode.

*Remarque : selon les notations SPH classiques, le paramètre contrôlant la taille du support est  $h$  mais la taille de ce support est  $2h$ .*

Diverses fonctions noyau ont été testées, splines, gaussiennes et exponentielles. Une fonction spline cubique, notée  $W3$  ou  $B3$ , est aujourd'hui communément admise comme la plus performante, voir la figure 1.3(a) :

$$W(\vec{x} - \vec{x}', h) = C \begin{cases} \frac{3}{2} \left[ \frac{2}{3} - \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^3 \right] & \text{si } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left[ 2 - \frac{r}{h} \right]^3 & \text{si } 1 < \frac{r}{h} < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $r = \|\vec{x} - \vec{x}'\|$  et  $C = 10/7\pi h^2$  en dimension 2. Il s'agit d'un facteur de normalisation qui permet d'assurer la condition de partition de l'unité. On remarque que le support est un disque en dimension 2 et une boule en dimension 3 de rayon  $2h$ . D'autres formes de supports sont mentionnés dans la littérature : rectangulaires ou elliptiques par exemple.



**FIGURE 1.3:** Fonction spline B3.

Les fonctions de forme SPH sont finalement obtenues en discrétisant l'approximation intégrale continue 1.2. Pour cela, on réalise une intégration nodale qui permet d'écrire :

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \sum_{j=1}^{N_v} f(\vec{x}_j) W(\vec{x} - \vec{x}_j, h) \Delta V_j \quad (1.8)$$

où  $\Delta V_j$  est le volume associé au nœud  $j$  et  $N_v$  est le nombre de nœuds voisins du point  $\vec{x}$ . Le voisinage du point  $\vec{x}$  est donc constitué de tous les nœuds inclus dans son support, comme représenté sur la figure 1.1.

En notant  $N_j = W(\vec{x} - \vec{x}_j, h) \Delta V_j$ , on peut mettre l'approximation sous une forme similaire à l'écriture classique en EF :

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \sum_{j=1}^{N_v} f(\vec{x}_j) N_j \quad (1.9)$$

La différence avec la MEF réside dans le fait que l'approximation fait intervenir tous les nœuds présents dans le support du point  $\vec{x}$  et pas seulement les nœuds d'un élément. On peut également remarquer que ces fonctions de forme sont des fonctions d'approximation et pas d'interpolation comme en EF. En effet, en appliquant l'équation 1.8 à un nœud  $i$  portant une donnée  $f_i$ , on obtient généralement :

$$\langle f(\vec{x}_i) \rangle \neq f_i \quad (1.10)$$

Cette propriété est importante car on verra par la suite qu'elle est un obstacle à l'application de conditions aux limites essentielles quelconques pour la méthode SPH comme pour toutes les méthodes sans maillage.



### 1.2.2.2 Approximation du gradient d'une fonction

L'approximation du gradient d'une fonction est basée sur le même principe. On peut en effet écrire :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) \sim \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right\rangle = \int_{\Omega} \vec{\nabla} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' \quad (1.11)$$

En réalisant une intégration par partie et en appliquant ensuite le théorème de la divergence, on peut écrire :

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right\rangle = \int_{\partial\Omega} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' \quad (1.12)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\partial\Omega$ . Dans le cas où le support de la fonction noyau n'intersecte pas le bords  $\partial\Omega$  du domaine, on a alors :

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right\rangle = - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' \quad (1.13)$$

et donc en réalisant une intégration nodale :

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right\rangle = - \sum_{j=1}^{N_v} f(\vec{x}_j) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{x}_j, h) \Delta V_j \quad (1.14)$$

Cette expression permet de transférer l'opération de dérivation d'une fonction sur la fonction noyau, voir la figure 1.3(b). On peut déjà remarquer que pour les nœuds SPH au bord du domaine, cette approximation n'est pas exacte car l'intégrale de surface présente dans l'équation 1.12 n'est alors pas nulle. On prévoit donc que l'approximation sur les bords du domaine sera mauvaise.

### 1.2.3 Formulation d'un problème SPH

La méthode SPH est basée sur la forme forte des équations de la mécanique. Différentes approches existent pour obtenir les équations du modèle discret. Certains auteurs écrivent les équations du modèle en chaque nœud du domaine et remplacent la valeur d'un champ ou de son gradient au nœud par les approximations 1.8 et 1.14. D'autres auteurs multiplient les équations fortes par la fonction noyau et intègrent les différents membres via une intégration nodale combinée à des intégrations par partie, comme dans le paragraphe 1.2.2.2. Ces différentes approches peuvent aboutir à des modèles légèrement différents avec des propriétés spécifiques.

Un point intéressant, souligné par de nombreux auteurs, concerne l'équivalence entre la méthode SPH et les méthodes basées sur une forme faible et une intégration nodale. L'opération d'intégration classiquement réalisée pour les formes faibles est introduite par l'intermédiaire des fonctions de forme SPH car celles-ci sont basées sur une représentation intégrale des champs, comme décrit dans le paragraphe 1.2.2.1. Ce n'est plus vrai pour les bords du domaine puisque la forme faible introduit automatiquement des conditions aux limites naturelles, ce qui n'est pas le cas de la formulation SPH.

## 1.3 Application à la mécanique des fluides

Cette section présente l'utilisation de la méthode SPH pour la résolution d'un problème de mécanique des fluides. Cela permet d'introduire les bases de la méthode tout en présentant le modèle fluide que nous utiliserons par la suite.

### 1.3.1 Modèle fluide

Le mouvement d'un fluide est régi par les équations de Navier-Stokes. On suppose que le fluide est :

- faiblement compressible. L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1.15)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $t$  le temps et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse. L'hypothèse de faible compressibilité consiste à négliger le terme  $\partial \rho / \partial \vec{x} \cdot \vec{v}$  de sorte que les variations de la masse volumique sont orthogonales au vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Cela permet d'éviter l'hypothèse d'incompressibilité qui aboutit à un système d'équations dans lequel la pression doit être calculée de manière implicite, ce qui est coûteux.

- newtonien, ce qui signifie que les termes visqueux sont proportionnels à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation, noté  $\underline{\underline{D}}$ . La conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (1.16)$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}} \quad (1.17)$$

où  $p$  est la pression et  $\mu$  le coefficient de viscosité dynamique.  $\underline{\underline{D}}$  s'écrit :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.18)$$

- acoustique, ce qui signifie que le fluide vérifie l'équation d'état suivante :

$$dp = c^2 d\rho \quad (1.19)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans l'eau. Cette équation d'état n'est valable que si les effets de la compressibilité restent faibles, ce qui est l'hypothèse de base du modèle utilisé. C'est souvent le cas pour l'eau lorsque les vitesses d'impacts restent faibles par rapport à la vitesse du son dans l'eau.

### 1.3.2 Résolution par la méthode SPH

Les équations 1.15 et 1.16 sont discrétisées à l'aide des approximations 1.8 et 1.14 de façon à obtenir les équations discrètes du modèle :

- l'équation de continuité pour un nœud  $i$  s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i - \rho_i \sum_{j=1}^{N_v} \Delta V_j \vec{v}_j \vec{\nabla} W_{ij} = 0 \quad (1.20)$$

où  $W_{ij} = W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$  On remarque que l'équation précédente peut aboutir à une variation de masse volumique dans le cas d'un champ de vitesse uniforme, ce qui n'est pas physique. Dans la littérature SPH, on trouve plutôt la forme suivante qui corrige ce problème :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i - \rho_i \sum_{j=1}^{N_v} \Delta V_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \vec{\nabla} W_{ij} = 0 \quad (1.21)$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un nœud  $i$  s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^{N_v} \Delta V_j \underline{\underline{\sigma}}_j \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.22)$$

De la même manière, cette équation pose problème car elle ne respecte pas le principe d'action-réaction de Newton : l'effort exercé par un nœud  $i$  sur un nœud  $j$  n'est pas égal à l'effort exercé par  $j$  sur  $i$ . Une forme symétrisée de l'équation précédente est donc souvent utilisée :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = -\sum_{j=1}^{N_v} m_j \left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}_i}{\rho_i^2} + \frac{\underline{\underline{\sigma}}_j}{\rho_j^2}\right) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.23)$$

où  $m_j$  est la masse portée par le nœud  $j$ .

Les équations précédentes pointent du doigt l'un des problèmes majeurs de la méthode SPH : elle est incapable de représenter exactement un champ constant, d'où la nécessité de modifier les équations 1.20 et 1.22. On dit alors que la méthode n'est pas consistante à l'ordre 0. Les équations 1.21 et 1.23 ne sont que des manières de rétablir la consistance à l'ordre 0, minimum requis pour obtenir des résultats convenables. Ce problème de consistance, plus gênant dans le cadre de la mécanique des structures, est décrit plus précisément dans la section 1.4.1.

### 1.3.3 Viscosité artificielle

Dès l'invention de la méthode, des problèmes d'instabilités numériques ont été observés par Gingold et Monaghan, notamment en présence de chocs et d'impacts [GIN 83]. Pour essayer de contrôler ces instabilités, les auteurs ont introduit dans le modèle une

pression visqueuse artificielle. Associée à chaque couple de nœuds  $i - j$ , elle peut s'écrire :

$$\Pi_{ij} = \rho_{ij} \begin{cases} -\alpha c h \mu_{ij} + \beta h^2 \mu_{ij}^2 & \text{si } \mu_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

avec  $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les coefficients de viscosité linéaire et quadratique,  $h$  est le paramètre du support de la fonction noyau et  $c$  est la vitesse du son dans le matériau. En dimension 3, on a :

$$\mu_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 + \varepsilon^2} \quad (1.25)$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre permettant d'éviter les divisions par 0, pris petit, de l'ordre de  $0.1h$ . L'influence de cette viscosité artificielle peut être importante, d'où la nécessité d'un choix précautionneux des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans Europlexus, les valeurs conseillées pour l'eau sont  $0.8 \leq \alpha \leq 1.5$  et  $1 \leq \beta \leq 3$ .

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc désormais :

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = - \sum_{j=1}^{N_v} m_j \left( \frac{\underline{\underline{\sigma}}_i}{\rho_i^2} + \frac{\underline{\underline{\sigma}}_j}{\rho_j^2} + \frac{\Pi_{ij} \underline{\underline{I}}}{\rho_{ij}^2} \right) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.26)$$

### 1.3.4 Taille de voisinage variable

Comme on peut le voir sur la figure 1.3(b), la dérivée de la fonction noyau diminue avec  $r/h$  si ce rapport devient inférieur à 0.7. Cela signifie que deux nœuds se rapprochant trop voient leur interaction diminuer ce qui n'est pas physique. Il faut donc s'assurer que le rapport  $r/h$  soit toujours supérieur à 0.7. De plus, il faut également garantir que le support de la fonction noyau contienne toujours un nombre suffisant de nœuds. Pour ces deux raisons, il est nécessaire de faire évoluer le paramètre  $h$  au cours des calculs. Une valeur de ce paramètre est souvent attribuée à chaque couple de nœuds  $i - j$ , calculée par :

$$h_{ij} = \phi \frac{D_i + D_j}{2} \quad (1.27)$$

où  $\phi$  est la longueur de lissage adimensionnée, avec  $0.8 \leq \phi \leq 1.5$  dans Europlexus.  $D_i$  et  $D_j$  sont les diamètres des sphères associées aux nœuds  $i$  et  $j$  et calculés à partir de la variation de masse volumique 1.21 et en se rappelant que la masse associée à un nœud est constante, d'où :

$$\left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_i = - \frac{1}{3} \frac{D_i}{\rho_i} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i \quad (1.28)$$

### 1.3.5 Conclusions

Le modèle fluide présenté est simple et il en existe aujourd'hui de plus élaborés, précis et efficaces. Cependant, il constitue une bonne introduction à la méthode SPH et aux

problèmes numériques qui lui sont associés. Il apparaît en effet que les fonctions de forme SPH ne permettent pas une représentation précise des champs, même constants. Cela signifie que la consistance de la méthode est mauvaise, ce qui a été corrigé grossièrement en symétrisant les équations. Des problèmes d'instabilités numériques ont également été touchés du doigt et maîtrisés par l'introduction d'une viscosité artificielle. Ces problèmes, typiques des modèles SPH, sont plus gênants lorsqu'on cherche à modéliser des structures, ils sont donc abordés plus précisément dans la section suivante.

## 1.4 Application à la mécanique des structures

L'application de la méthode SPH à la mécanique des structures s'est historiquement heurtée à trois difficultés majeures, aujourd'hui assez bien maîtrisées par la communauté : ses mauvaises propriétés de consistance, une instabilité numérique dite de tension et la présence de modes à énergie nulle. Ces deux derniers points ont parfois été confondus, si bien qu'un bref historique sera fait pour résumer les tentatives de stabilisation de la méthode, indépendamment du fait qu'il s'agisse de l'instabilité en tension ou de modes à énergie nulle. Ces aspects ont été clarifiés par une publication de Belytschko [BEL 00] qui fait référence sur les problèmes de stabilité des méthodes sans maillage.

### 1.4.1 Consistance des méthodes sans maillage

#### 1.4.1.1 Problème de consistance

On peut aisément vérifier que les expressions 1.8 et 1.14 sont en réalité de mauvaises approximations car elles ne sont pas consistantes. Une approximation est dite consistante d'ordre  $n$  si elle est capable de représenter exactement un polynôme de degré  $n$ . L'ordre de consistance requis dépend des équations que l'on cherche à résoudre [BEL 96a] : une équation différentielle d'ordre  $2k$  nécessite une consistance d'ordre  $k$  (soit  $k = 1$  pour le problème qui nous intéresse). Le non respect de la condition de consistance affecte de manière importante la précision de la méthode et pose également des problèmes de convergence en espace, comme décrit par Belytschko et Rabczuk dans [RAB 04b]. Il est facile de vérifier que les approximations SPH 1.8 et 1.14 ne permettent pas de représenter exactement un champ simplement constant, notamment sur les bords du domaine et dans le cas d'une discrétisation non uniforme. Le tableau 1.1 résume les propriétés de consistance de la méthode SPH.

*Remarque : on parle également souvent de « completeness » ou bien « reproductibility », bien que ces notions soient légèrement différentes. Les auteurs de [BEL 96a] donnent des définitions précises de ces conditions et montrent qu'une approximation consistante implique généralement la « completeness » et la « reproductibility ».*

Les tentatives pour améliorer les propriétés de consistance de la méthode SPH sont nombreuses. La première est la méthode de symétrisation proposée par Monaghan et Gin-

|                                    | nœuds intérieurs                     | nœuds de bord |
|------------------------------------|--------------------------------------|---------------|
| Approximation continue 1.2 et 1.11 | 1                                    | < 0           |
| Approximation discrète 1.8 et 1.14 | 1 si uniforme<br>< 0 si non uniforme | < 0<br>< 0    |

**TABLE 1.1:** Consistance de la méthode SPH [BEL 96a] [LIU 10].

*Remarque : la consistance des approximations continues ne garantit pas la consistance des approximations discrètes.*

gold [GRA 01] et présentée dans le paragraphe 1.3.1. Ce procédé permet de rétablir une consistance d'ordre 0 puisque le gradient d'un champ constant devient nul. Par la suite, Johnson et Beissel [JOH 96a] ont proposé une correction permettant d'assurer la consistance à l'ordre 1. La méthode a été étendue aux dimensions 2 et 3 par Randles et Libersky [RAN 96] et permet d'écrire le gradient d'une fonction sous la forme suivante :

$$\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_i) \rangle = -\underline{\underline{B}} \sum_{j=1}^{N_p} \Delta V_j (f(\vec{x}_j) - f(\vec{x}_i)) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.29)$$

où  $\underline{\underline{B}}$  est la matrice de correction, définie par :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \quad (1.30)$$

avec :

$$\underline{\underline{H}} = - \sum_{j=1}^{N_p} \Delta V_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \otimes \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.31)$$

Il existe de nombreuses techniques similaires telles que les corrections Krongauz-Belytschko [BEL 98], Chen-Beraun [CHE 99a] et Bonet-Kulasegaram [BON 00] par exemple. Une correction de l'approximation SPH baptisée « Reproducing Kernel Particle Method » a même donné naissance à une nouvelle méthode, connue sous le sigle RKPM [LIU 95].

Aujourd'hui, les méthodes pour restaurer la consistance des approximations dans les méthodes sans maillage sont nombreuses. Les auteurs de [NGU 08] et [BEL 96a] donnent une vision d'ensemble de la situation en les classant selon deux catégories :

- les méthodes dites intrinsèques, qui cherchent à augmenter directement la consistance des fonctions de forme,
- les méthodes dites extrinsèques, qui modifient l'approximation traditionnelle en utilisant le concept de partition de l'unité.

#### 1.4.1.2 Méthodes intrinsèques

Les méthodes présentées dans le paragraphe précédent (corrections diverses et RKPM) appartiennent à cette classe d'approximation. Cependant, la méthode la plus

connue aujourd'hui dans cette catégorie est probablement la méthode des moindres carrés mobiles, notée MLS pour « Moving Least Approximation ». Elle a été élaborée dans les années 60 pour approximer un champ de points irrégulièrement distribués [SHE 68] et appliquée pour la première fois dans le cadre de la méthode des éléments diffus (DEM) par Nayroles et al. [NAY 92]. Belytschko et al. ont modifié la méthode et l'on appliquée avec succès dans le cadre des EFG [BEL 94b], [BEL 95b]. Dils a ensuite proposé une formulation SPH volumique basée sur les MLS, baptisée MLSPH [DIL 99], [DIL 00]. L'avantage principal de la méthode est qu'elle permet de choisir l'ordre de consistance  $n$  voulu en construisant les fonctions de forme à partir d'une base polynomiale  $\vec{p}$  d'ordre  $n$ . Ainsi, l'approximation en un point  $\vec{x}$ , construite autour de  $\vec{x}^*$ , s'écrit :

$$\langle u \rangle(\vec{x}, \vec{x}^*) = \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}^*) \quad (1.32)$$

où  $\vec{a}$  est un vecteur de coefficients, variable en fonction du point où est réalisée l'approximation. L'élaboration des fonctions de forme MLS pour un champ et son gradient est présentée en détails dans l'annexe A. La méthode présente les caractéristiques suivantes :

- les fonctions MLS sont des fonctions d'approximation et non pas d'interpolation. Cela signifie que généralement  $\langle u \rangle(\vec{x}_i) \neq u_i$ , ce qui est le cas dans la plupart des méthodes sans maillage. Cela vient du fait que les fonctions de forme  $\phi_i$  ne vérifient pas la propriété de Kronecker, ce qui signifie que la fonction de forme d'un nœud  $i$  ne vaut pas 1 en  $\vec{x}_i$  et n'est pas non plus nulle aux autres nœuds  $\vec{x}_j$ . Cette propriété rend difficile l'application des conditions aux limites essentielles.
- les fonctions de forme  $\phi_i$  vérifient la propriété de partition de l'unité, c'est dire :

$$\sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) = 1 \quad (1.33)$$

- la méthode est consistante à l'ordre  $n$  si on utilise une base polynomiale d'ordre  $n$  car l'approximation peut reproduire exactement toutes les fonctions de sa base.
- la continuité des fonctions de forme est directement liée à celle de la fonction poids utilisée. Il s'agit ici de la fonction spline cubique B3 qui est  $C^2$ , ce qui implique une continuité  $C^2$  pour les fonctions de forme.

Comme décrit dans l'annexe A, l'élaboration des fonctions MLS nécessite l'inversion d'une (si on approxime un champ) ou plusieurs (si on approxime un gradient) matrices en chaque nœud de la discrétisation. C'est donc une procédure coûteuse et qui peut poser des problèmes en cas de mauvais conditionnement des matrices.

Enfin, les auteurs de [NGU 08] et [BEL 96a] montrent que l'approximation MLS est en réalité strictement équivalente aux méthodes de correction vues au paragraphe précédent. Cependant, elle fournit un cadre général pour élaborer des fonctions consistantes d'ordre  $n$ . Ils soulignent également que la variation spatiale de l'ordre de la base polynomiale peut créer des discontinuités dans le modèle.

### 1.4.1.3 Méthodes extrinsèques

Les méthodes extrinsèques sont basées sur le concept de partition de l'unité, résumé par l'équation 1.33. Partant d'une approximation d'ordre faible :

$$\langle u \rangle(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) u_i \quad (1.34)$$

qui vérifie la condition de partition de l'unité, il est possible de l'enrichir de sorte à augmenter, par exemple, son ordre de consistance.

*Remarque : la condition de partition de l'unité est équivalente à la condition de consistance à l'ordre 0.*

Par exemple, les auteurs de [MEL 96] ont élaboré une méthode intitulée « partition of finite element method » (PUFEM) dans laquelle l'approximation s'écrit :

$$\langle u \rangle(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{v}_i \quad (1.35)$$

où les fonctions de forme  $\phi_i$  sont basées sur des polynômes de Lagrange,  $\vec{v}_i$  est un vecteur d'inconnues au nœud  $i$  et  $\vec{p}$  la base d'enrichissement utilisée. L'ordre de consistance dépend du nombre de termes présents dans cette base : en dimension 1, pour une consistance d'ordre 1,  $\vec{p}^T(x) = [1, x]$  et  $\vec{v}_i^T = [v_{i1}, v_{i2}]$ , ce qui nécessite donc deux inconnues par nœud.

De manière similaire, Duarte et Oden [DUA 95] ont construit la méthode « hp-clouds » sur l'approximation suivante :

$$\langle u \rangle(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) (u_i + \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{v}_i) \quad (1.36)$$

L'avantage de cette dernière formulation est qu'elle permet de faire varier le contenu de la base extrinsèque en espace sans provoquer de discontinuité. Cela permet une adaptativité de l'ordre de consistance, dite « p-adaptativité », d'où le nom « hp-clouds » de la méthode associée.

## 1.4.2 Stabilité des méthodes sans maillage

### 1.4.2.1 Historique

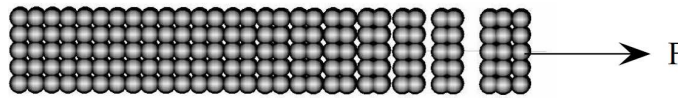
La première étude de stabilité de la méthode SPH est attribuée à Swegle et al. [SWE 95]. Ces auteurs ont mis en évidence l'existence d'une instabilité numérique due à la présence de contraintes de traction dans le modèle combinée à un signe négatif de la dérivée seconde de la fonction noyau. Cette instabilité, dite de tension, a également été étudiée par Balsara [BAL 95].



*Remarque : l'instabilité de tension existe également dans le cas d'un modèle fluide. Elle est cependant moins problématique que pour les modèles de structure où elle se traduit par des ruptures artificiellement précoces.*

Afin de résoudre ce problème, Moris [MOR 96] a suggéré l'utilisation de fonctions noyaux d'ordre plus élevé puisque l'instabilité est liée à la dérivée seconde de la fonction spline cubique B3. La solution n'est cependant pas efficace dans le cas général. Dilts montre dans [DIL 99] que l'utilisation de fonctions de forme MLS permet d'alléger l'instabilité de tension. De manière similaire, Chen [CHE 99b] a proposé une méthode SPH corrigée, baptisée CSPM, dans laquelle il essaye de supprimer l'instabilité en tension en améliorant les propriétés de consistance des fonctions de forme SPH.

Les auteurs de [SWE 95] ont également mis en évidence la présence de modes à énergie nulle dans les modèles SPH. Par une analogie avec la méthode des différences finies, ils ont montré que le problème provenait du fait que toutes les grandeurs du modèle sont stockées sur les nœuds SPH. Le mode libre associé correspond généralement à des déplacements longitudinaux valant alternativement +1 et -1, ce qui entraîne la formation d'agrégats formés de deux nœuds, comme on peut le voir sur la figure 1.4.



**FIGURE 1.4:** Modes à énergie nulle [MAU 08a].

Dans l'espoir de supprimer à la fois les modes à énergie nulle et l'instabilité de tension, les auteurs de [WEN 94] et [SWE 94] ont proposé un filtrage spatial des vitesses, nommé « conservative smoothing scheme », afin d'éliminer les oscillations de longueur d'onde proche de la distance entre les particules. Ce filtre a été étendu par Randles et Libersky [RAN 96] en dimension 3 :

$$\widehat{\vec{v}}_i = \vec{v}_i + \alpha \left[ \frac{\sum_{j=1}^{N_v} m_j W_{ij} \vec{v}_j}{\sum_{j=1}^{N_v} m_j W_{ij}} - \vec{v}_i \right] \quad (1.37)$$

où  $0 < \alpha < 0.5$  est un paramètre réglant l'intensité du filtrage. Efficace pour certains problèmes, la méthode entraîne souvent une dissipation importante d'énergie qui la rend inutilisable en pratique. De plus, elle n'est efficace que pour une discrétisation fine et, même dans ce cas, ne fait que retarder l'apparition des instabilités. Ce procédé est également connu sous le nom de filtre de Balsara.

Dans une approche similaire, Monaghan et al. [MON 00] ont proposé l'introduction d'efforts artificiels sur chaque nœud SPH, à l'image de la pression visqueuse présentée dans le paragraphe 1.3.3. L'idée était également de retarder l'apparition des instabilités numériques, modes libres et instabilité de tension. Cependant, l'approche ne semble pas fonctionner pour des discrétisations grossières puisque dans ce cas, les efforts artificiels

perturbent le comportement d'ensemble de la structure. De plus, elle introduit dans le modèle des paramètres supplémentaires qu'il est difficile de choisir.

Finalement, l'une des méthodes les plus abouties est probablement celle proposée par Dyka [DYK 95], [DYK 97]. Afin de supprimer l'instabilité en tension, l'auteur a proposé l'introduction dans le modèle d'un second type de point, intitulé « stress point » (SP). Contrairement aux nœuds SPH qui transportent une quantité de matière, ce sont uniquement des points de calcul des déformations et des contraintes. Ils sont donc similaires aux points de Gauss en EF. Ainsi, un calcul utilisant la méthode des SP peut être schématisé de la façon suivante : à partir des grandeurs cinématiques connues aux nœuds SPH, les déformations et les contraintes sont calculées sur les SP et, finalement, les équations d'équilibre sont résolues de nouveau sur les nœuds SPH. La méthode a été étendue aux dimensions 2 et 3 par Randles et Libersky [RAN 96]. Certains auteurs ont remarqué que la méthode des SP permettait également de supprimer les modes à énergie nulle [VIG 00].

### 1.4.2.2 Stabilité des méthodes sans maillage [BEL 00]

Le travail présenté dans [BEL 00] constitue l'étude la plus approfondie réalisée sur la stabilité des méthodes sans maillage. Elle a permis d'identifier clairement les différentes instabilités et de vérifier l'efficacité des solutions proposées dans la littérature. Notamment, l'utilisation des SP a été étudiée avec soin afin d'établir clairement si la méthode permettait de supprimer à la fois les modes libres et l'instabilité de tension. Jusqu'à la publication de ce travail, ce point n'était pas clairement établi.

L'étude proposée dans [BEL 00] est menée aussi bien pour les formulations fortes que pour les formulations faibles. En effet, les auteurs montrent, comme décrit dans le paragraphe 1.2.3, que la méthode SPH est équivalente à une méthode faible utilisant une intégration nodale, mis à part sur les bords du domaine. La conclusion est la même en cas d'utilisation de SP. Cela permet aux auteurs de proposer une étude de stabilité « unifiée » des méthodes sans maillage.

Leur travail a confirmé l'existence de deux instabilités numériques distinctes dues à la discrétisation des équations par une méthode sans maillage :

- la présence de modes à énergie nulle équivalents aux modes de Hourglass en EF. Ils sont dus à une sous-intégration des équations de la forme faible (nombre de points de Gauss insuffisant en EF, intégration nodale en EFG) et de l'approximation intégrale 1.11 en SPH.
  - l'instabilité de tension décrite par [SWE 95].
- Dans cette référence, 4 configurations ont été étudiées en détails :
- une formulation lagrangienne réactualisée :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N_v} \phi(\vec{x} - \vec{x}_j, h) \vec{v}_j \quad (1.38)$$

où  $\vec{x}$  est le vecteur position dans la configuration courante (coordonnées spatiales) et  $\phi$  la fonction de forme dite « eulérienne ». Dans ce cas l'analyse de stabilité de

von Neumann montre à la fois une instabilité en présence de contraintes de tension et la présence de modes libres. L'instabilité en tension est d'autant plus importante que la taille du support de la fonction noyau est faible.

- une formulation lagrangienne totale :

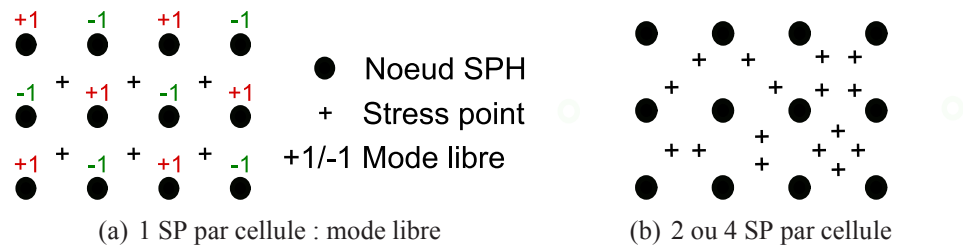
$$\vec{v}(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{N_v} \Phi(\vec{X} - \vec{X}_j, h) \vec{v}_j \quad (1.39)$$

où  $\vec{X}$  est le vecteur position dans la configuration initiale (coordonnées matérielles) et  $\Phi$  la fonction de forme dite « lagrangienne ». Dans ce cas, l'étude ne révèle plus d'instabilité en tension car, contrairement au cas eulérien, la stabilité du système ne dépend plus des contraintes qui lui sont appliquées. Cependant, les modes à énergie nulle existent toujours mais sont fortement réduits. Cela s'explique par le fait que la configuration de référence, qui est la configuration initiale, n'évolue pas au cours du calcul. Ainsi, les modes à énergie nulle ne peuvent plus affecter le calcul des fonctions de forme, ce qui limite leur développement.

*Remarque : dans le cas d'une formulation lagrangienne totale, la forme du support de la fonction noyau change au cours du temps dans la configuration courante. Un support sphérique peut ainsi être fortement déformé. Cela rappelle la méthode ASPH (Adaptative SPH) [OWE 98] qui repose sur une forme lagrangienne réactualisée dans laquelle le support se déforme en suivant la matière. Bien plus stable que la méthode SPH classique, cette méthode n'est pas sans rappeler la déformation de la fonction support obtenue avec la formulation lagrangienne totale.*

- une formulation lagrangienne réactualisée avec SP. Dans ce cas, les modes à énergie nulle sont supprimés et l'instabilité en tension dépend de la taille du support de la fonction noyau. Pour des supports de petite taille, le système est stable ce qui n'est plus le cas pour des supports plus grand.
- une formulation lagrangienne totale avec SP. Le système n'exhibe alors plus aucune instabilité numérique.

Les auteurs montrent donc que l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale permet de s'affranchir de l'instabilité en tension. De plus, l'ajout de SP permet de contenir les modes à énergie nulle. Cependant, en dimensions 2 et 3, les auteurs montrent que l'efficacité de cette stabilisation dépend de la position des SP. Pour un maillage régulier basé sur des quadrilatères, le plus simple est de positionner les SP au centre de chaque cellule comme sur la figure 1.5(a). Les auteurs de [BEL 00] ont cependant montré qu'il existait alors toujours un mode à énergie nulle pouvant se développer. Ils préconisent l'utilisation de deux SP par cellule ou plus, voir la figure 1.5(b). L'influence du nombre et de la position des SP sur la précision de la méthode n'est pas encore bien maîtrisée. Dans le cas d'une discrétisation non régulière, il est nécessaire d'utiliser un diagramme de Voronoï et de placer les SP au centre des triangles de Delaunay associés.



**FIGURE 1.5:** Positionnement des Stress Points.

*Remarque : en pratique le mode à énergie nulle présenté sur la figure 1.5(a) ne peut se développer que dans certaines configurations particulières, si bien qu'un seul SP par cellule est souvent suffisant. Ce sera la configuration par défaut dans la suite de notre travail.*

*Remarque : dans les problèmes de dynamique, les SP doivent suivre la matière. Il est donc nécessaire d'approximer leur position à chaque pas de temps à partir des positions des nœuds SPH voisins.*

### 1.4.2.3 Bilan

L'élaboration d'un modèle SPH stable nécessite donc l'utilisation judicieuse de SP, combinée à une formulation lagrangienne totale. Ce dernier point remet en cause l'un des principaux avantages des méthodes sans maillage, qui est la possibilité d'avoir une connectivité variable au cours des calculs. Il est clair que cela n'est pas envisageable pour un modèle fluide. Cependant, pour les solides, les voisinages restent inchangés même en présence de grandes déformations. Cette formulation pourra donc être utilisée dans ce cas mais pose tout de même deux questions :

- en présence de contacts, on peut penser que de nouvelles liaisons feront leur apparition. Nous verrons cependant dans le chapitre 3 que ce problème peut être contourné.
- en présence de ruptures, les liaisons peuvent également évoluer. Cependant, nous devons alors traiter uniquement des suppressions de liaisons, ce qui n'est pas problématique.

*Remarque : en présence de très grandes déformations, la formulation lagrangienne totale peut conduire à des imprécisions. Il est donc nécessaire de réactualiser régulièrement la configuration de référence, ce qui pose des difficultés supplémentaires [VID 07]. Dans ce travail, on considère que la rupture apparaîtra suffisamment tôt pour que de telles déformations ne soient pas atteintes.*

## 1.5 Introduction de discontinuités

La modélisation de la fissuration implique souvent l'introduction de discontinuités dans le modèle. Les auteurs de [NGU 08] fournissent une bonne vision d'ensemble des principales méthodes existantes.

### 1.5.1 Modification de la fonction noyau

La méthode de visibilité [BEL 94a], [BEL 95a] a été, historiquement, la première approche pour introduire des discontinuités fortes dans les méthodes sans maillage. La fonction noyau est modifiée de sorte que des nœuds situés sur des faces opposées de la discontinuité s'excluent mutuellement de l'approximation des champs. Pour cela, la discontinuité est considérée opaque, de sorte que les points en question sont exclus de leur voisinage. C'est une méthode rustique dont l'application peut présenter des difficultés en pointe de fissure où des fractures artificielles peuvent se développer. Le même problème peut apparaître dans le cas de fissures non convexes.

Pour pallier ces inconvénients, la méthode de diffraction a été développée [ORG 96] : elle supprime les fractures artificielles et permet de traiter les fissures non convexes. La méthode s'inspire de la manière dont la lumière diffracte autour d'un obstacle bien que la construction du domaine d'influence et des fonctions poids n'aient aucun lien avec les équations de diffraction. La méthode consiste à traiter la fissure de manière opaque tout en évaluant la longueur de raie qui passe autour de la discontinuité. La méthode est seulement applicable dans le cas de domaines d'influence circulaires. Dans cette méthode, les fonctions de forme sont donc complexes avec des zones de fortes variations qui peuvent compliquer la convergence de la méthode. Enfin, la généralisation au cas de dimension 3 est complexe.

La méthode de transparence [ORG 96] est une autre alternative à la méthode de visibilité. Dans cette méthode, la pointe de fissure est considérée comme transparente afin de supprimer les fractures artificielles. L'angle entre la fissure et les raies issues des points proches de la pointe étant faible, de fortes variations apparaissent dans les fonctions poids ce qui nécessite d'imposer que les points soient à une distance minimale de la fissure. Cette méthode peut facilement être étendue aux cas de dimension 3.

### 1.5.2 Modification de la base intrinsèque

Dans les méthodes utilisant une approximation intrinsèque, comme la méthode MLS par exemple, voir le paragraphe 1.4.1.2, la base peut être modifiée afin d'introduire la cinématique d'une discontinuité. Dans le cas d'une fissure, il est par exemple possible d'introduire les champs de déplacements asymptotiques de Westergaard en pointe de fissure [FLE 97] :

$$\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y, \sqrt{r}\sin(\theta/2), \sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sin(\theta/2)\sin(\theta), \sqrt{r}\cos(\theta/2)\sin(\theta)] \quad (1.40)$$

où  $r$  est la distance à la pointe de fissure et  $\theta$  l'angle de la fissure. Comme décrit dans le paragraphe 1.4.1.2, un des problèmes de cette approche est que l'enrichissement doit être utilisé sur tout le domaine sous peine d'introduire une discontinuité. Pour résoudre le problème, une zone de transition est souvent utilisée dans laquelle l'ordre de la base est progressivement abaissé.

Les auteurs de [DUF 04] ont proposé un enrichissement intrinsèque alternatif, directement appliqué sur la fonction noyau. L'avantage est qu'une zone de transition n'est pas nécessaire dans ce cas.

### 1.5.3 Enrichissement extrinsèque des fonctions MLS

Les fonctions MLS peuvent également être modifiées de manière extrinsèque, sous la forme suivante [FLE 97] :

$$\langle \vec{u} \rangle(\vec{x}) = \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{n_c} \left( K_1^k \vec{Q}_1^k(\vec{x}) + K_2^k \vec{Q}_2^k(\vec{x}) \right) \quad (1.41)$$

où  $n_c$  est le nombre de fissures. Pour la fissure  $k$ ,  $K_1^k$  et  $K_2^k$  sont des degrés de liberté supplémentaires et les vecteurs  $\vec{Q}_1^k$  et  $\vec{Q}_2^k$  contiennent les champs de déplacements asymptotiques en pointe de fissure, respectivement pour les modes *I* et *II*. Comme précédemment, ces enrichissements doivent être utilisés sur tout le domaine sous peine d'introduire une discontinuité.

### 1.5.4 Méthode extrinsèque de partition de l'unité

Inspiré de la méthode X-FEM [MOE 99], un enrichissement extrinsèque de la partition de l'unité a été proposé dans [VEN 02] :

$$\langle \vec{u} \rangle(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N_v} \phi_j(\vec{x}) \vec{u}_j + \sum_{k \in S_c} \phi_k(\vec{x}) H(\vec{x}) \vec{a}_k + \sum_{l \in S_f} \phi_l(\vec{x}) \sum_{\alpha=1}^4 \vec{b}_l^\alpha B_\alpha(\vec{x}) \quad (1.42)$$

où  $S_c$  est l'ensemble des nœuds du voisinage du point  $\vec{x}$  dont le support est coupé par la fissure et  $S_f$  l'ensemble des nœuds du voisinage dont le support contient la pointe de fissure. Les  $\phi_j$  sont des fonctions de forme MLS,  $\vec{a}_k$  et  $\vec{b}_l^\alpha$  des vecteurs d'inconnues supplémentaires.  $H$  est la fonction Heavyside permettant de prendre en compte le saut de déplacement et  $B$  est l'enrichissement en pointe de fissure :

$$\vec{B} = [\sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)] \quad (1.43)$$

où  $r$  est la distance à la pointe de fissure et  $\theta$  l'angle de la fissure.

# Chapitre 2

## Coque SPH fissurante

*Ce chapitre traite du développement d'un modèle de rupture dans le cadre de la théorie des coques SPH. Le modèle SPH coque (SPHC), issu de la thèse de B. Maurel [MAU 08a], est dans un premier temps rappelé. Le traitement de la rupture, via un modèle de transition endommagement-fissuration et l'introduction de discontinuités fortes, est ensuite présenté. La dernière partie est consacrée à des applications numériques.*

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Historique et bibliographie</b>                            | <b>31</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Méthode SPHC</b>   | <b>32</b> |
| 2.2.1      | Formulation SPHC  | 32        |
| 2.2.2      | Discrétisation  | 36        |
| 2.2.3      | Compléments   | 38        |
| 2.2.4      | Algorithme de plasticité                                      | 41        |
| 2.2.5      | Estimation et contrôle du pas de temps critique               | 42        |
| 2.2.6      | Investigations sur le verrouillage en cisaillement transverse | 43        |
| <b>2.3</b> | <b>Endommagement et rupture</b>                               | <b>47</b> |
| 2.3.1      | Introduction  | 47        |
| 2.3.2      | Modélisation de l'endommagement                               | 49        |
| 2.3.3      | Le problème de localisation                                   | 54        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| 2.3.4      | Couplage loi de comportement - loi d'endommagement . . . . .       | 59        |
| 2.3.5      | Transition endommagement-f ssuration dans les SPHC . . . . .       | 67        |
| 2.3.6      | Introduction d'une discontinuité forte . . . . .                   | 68        |
| <b>2.4</b> | <b>Exemples numériques . . . . .</b>                               | <b>72</b> |
| 2.4.1      | Propagation en mode mixte dans une poutre sous impact. . . . .     | 72        |
| 2.4.2      | Étude de convergence . . . . .                                     | 76        |
| 2.4.3      | Branchement de f ssures . . . . .                                  | 77        |
| 2.4.4      | Étude de sensibilité du modèle à effet retard . . . . .            | 81        |
| 2.4.5      | Perforation d'une plaque par un projectile hémisphérique . . . . . | 83        |
| 2.4.6      | Fragmentation d'un cylindre sous explosif . . . . .                | 89        |
| <b>2.5</b> | <b>Conclusions . . . . .</b>                                       | <b>93</b> |

---



## 2.1 Historique et bibliographie

La nécessité d'utiliser des méthodes de simulation efficaces conduit souvent à ne discrétiser que le plan médian des structures fines. Pour cela, deux types de théories sont classiquement utilisées. La théorie de Kirchhoff ne permet de modéliser que des structures fines (typiquement  $e/L \leq 1/15$  où  $e$  est l'épaisseur de la coque et  $L$  sa longueur) et est parfois compliquée à mettre en œuvre. En effet, les fonctions d'interpolation/approximation utilisées doivent avoir une continuité  $C^1$ . La théorie de Mindlin-Reissner permet, quant à elle, de modéliser toutes les coques sans restriction d'épaisseur car elle prend en compte le cisaillement transverse (CT). Sa mise en œuvre est souvent plus simple car elle requiert une continuité  $C^0$  facile à obtenir. Cependant, elle présente l'inconvénient d'être souvent associée à un problème numérique dit de verrouillage en CT.

Il faut attribuer à Hein [HEI 93] la première application d'une méthode sans maillage, la méthode des éléments diffus (DEM), à la théorie des plaques de Kirchhoff. Krysl et Belytschko ont ensuite appliqué la méthode EFG aux plaques [KRY 95] puis aux coques [KRY 96], de nouveau dans le cadre de la théorie de Kirchhoff. Ces auteurs soulignent que les fonctions de forme de type MLS présentent, dans ce cadre, un double avantage. Tout d'abord, la continuité  $C^1$  requise pour la théorie de Kirchhoff est facilement vérifiée puisqu'il suffit que la fonction poids  $W$  soit elle-même  $C^1$ . C'est un avantage important par rapport à la MEF pour laquelle on préfère parfois se tourner vers des théories de continuité  $C^0$  plus simples à mettre en œuvre (théorie de Mindlin-Reissner, modèles mixtes et hybrides). De plus, les fonctions de forme MLS permettent l'utilisation d'une base polynomiale d'ordre élevé,  $n \geq 2$  par exemple, ce qui aide à s'affranchir des verrouillages parfois observés. La méthode proposée par Krysl et Belytschko dans [KRY 96] nécessite cependant l'utilisation d'un maillage de fond. Noguchi et al. ont ensuite étendu ces travaux à la théorie de Mindlin-Reissner pour les plaques [NOG 97] et les coques [NOG 00], tout en continuant à utiliser un maillage de fond. Ils ont étudié l'existence d'un verrouillage en CT associé à ce modèle. Donning et Liu [DON 98] ont également modélisé des plaques de Mindlin-Reissner en utilisant des fonctions splines dites cardinales, dans le cadre d'une formulation faible. Selon les auteurs, leur modèle ne présente de verrouillage ni en CT ni en membrane. Garcia et al. [GAR 00] ont appliqué la méthode « hp-cloud » aux plaques de type Mindlin-Reissner. La méthode permet la construction d'approximations d'ordre élevé sans inversion coûteuse de matrices, ce qui permet d'alléger les verrouillages tout en conservant l'efficacité de la méthode. On peut également citer Sladek et al. [SLA 06], [SOR 04] et Alturi et al. [LON 02] qui ont utilisé la méthode MLPG (« Meshless Local Petrov-Galerkin ») pour modéliser des coques épaisses de Mindlin-Reissner.

L'extension de ces méthodes aux coques fissurées a notamment été effectué par Belytschko et Rabczuk. Dans [RAB 07a], les auteurs modélisent la rupture des coques minces de Kirchhoff en utilisant la méthode des « cracking particles » [RAB 04a]. Dans cette méthode, les fissures sont portées par les nœuds de la discrétisation et représentées par des segments ou des disques orientés dans la direction de fissuration. Le champ des déplacements associé est enrichi avec une fonction saut et une loi cohésive permet de contrôler l'ouverture de la fissure. Afin d'améliorer la prédiction du trajet des fissures, les

auteurs ont ensuite introduit un enrichissement extrinsèque basé sur la partition de l'unité [RAB 06a], [RAB 07b]. Les applications associées à ces modèles sont très proches de celles recherchées dans ce travail, à savoir, des impacts sur des structures fines remplies de fluide. On peut également citer Qian et al. [QIA 08] qui ont proposé un modèle RKPM pour modéliser la rupture d'une coque sous pression interne et chargement thermique.

Les travaux présentés ci-dessus sont tous basés sur une formulation faible et la plupart d'entre eux utilisent un maillage de fond. Maurel et Combescure ont proposé dans [MAU 08b] une modélisation originale des coques de Mindlin-Reissner, basée sur la méthode SPH. Il s'agit de la première application d'une formulation forte à la théorie des coques. Le travail présenté dans ce mémoire est l'extension de [MAU 08b], notamment à la modélisation de la rupture. Dans un premier temps, le modèle SPHC de [MAU 08b] est rappelé. Les problèmes typiques de la formulation de Mindlin-Reissner (verrouillage en CT et pas de temps critique) seront ensuite abordés. Ces deux points sont des aspects nouveaux par rapport au modèle initial [MAU 08b]. Enfin, la modélisation de la rupture de la coque sera présentée ainsi que les applications numériques associées.

## 2.2 Méthode SPHC

Cette section rappelle les principales caractéristiques du modèle SPHC élaboré par Maurel et Combescure [MAU 08a]. Il permet l'étude des coques de Mindlin-Reissner à l'aide d'une seule couche de nœuds SPH qui discrétisent sa surface moyenne. Les problèmes classiques de verrouillage en CT et de pas de temps critique du schéma explicite sont également abordés et constituent des améliorations du modèle initial.

### 2.2.1 Formulation SPHC

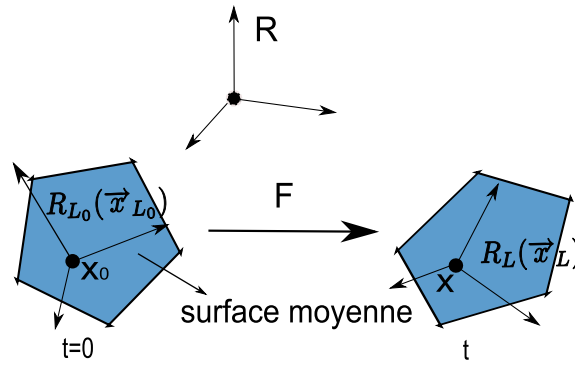
La théorie des coques repose sur l'hypothèse qu'une dimension de la structure, son épaisseur notée  $e$ , est petite devant les autres de sorte que les coordonnées d'un point dans le repère global d'étude  $R(x, y, z)$  peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_m(t) + \xi \vec{n}(t) \quad \xi \in \left[-\frac{e}{2}; +\frac{e}{2}\right] \quad (2.1)$$

où  $\vec{x}_m$  sont les coordonnées d'un point de la surface moyenne et  $\vec{n}$  la pseudo-normale qui matérialise l'orientation de la matière. Nous verrons plus loin que la théorie de Mindlin-Reissner prend en compte les effets du cisaillement transverse, de sorte que la pseudo-normale  $\vec{n}$  ne reste pas toujours normale au plan médian.

Le formalisme lagrangien total est ensuite utilisé afin de s'affranchir de l'instabilité en tension, comme justifié au paragraphe 1.4.2.2. Le modèle est donc étudié en choisissant la configuration initiale comme configuration de référence. Un point de cette configuration initiale est repéré grâce à un repère local, noté  $R_{L_0}(x_{L_0}, y_{L_0}, z_{L_0})$ , dont la direction  $z_{L_0}$  est normale à la coque, voir la figure 2.1. Ce repère local est défini par sa matrice de passage  $\underline{\underline{G}}_{L_0}$  telle que :

$$\vec{x}_{L_0} = \underline{\underline{G}}_{L_0} \vec{x}_0 \quad (2.2)$$



**FIGURE 2.1:** Repères locaux et configurations de la coque.

où  $\vec{x}_0$  sont les coordonnées du point  $\vec{x}$  dans la configuration initiale et exprimées dans le repère global  $R(x, y, z)$ .

*Remarque :* en pratique, le repère  $R_{L_0}(x_{L_0}, y_{L_0}, z_{L_0})$  est important car, s'agissant de la configuration de référence, on y calcule les fonctions de forme MLS.

Ainsi, la position et le déplacement d'un point dans le repère global  $R(x, y, z)$  sont donnés respectivement par :

$$\vec{x}(\vec{x}_{L_0}, t) = \vec{x}_m(x_{L_0}, y_{L_0}, t) + z_{L_0} \vec{n}(x_{L_0}, y_{L_0}, t) \quad (2.3)$$

et

$$\vec{u}(\vec{x}_{L_0}, t) = \vec{u}_m(x_{L_0}, y_{L_0}, t) + z_{L_0} \Delta \vec{n}(x_{L_0}, y_{L_0}, t) \quad (2.4)$$

avec  $\Delta \vec{n} = \vec{n} - \vec{n}_0$  où  $\vec{n}_0$  est la pseudo-normale initiale à la coque, confondue avec la normale initiale à la coque, de sorte que  $z_{L_0} = \xi$ .

Le tenseur gradient de la transformation entre la configuration initiale et la configuration actuelle exprimées dans  $R(x, y, z)$  est donné, pour un point du plan médian ( $z_{L_0} = 0$ ), par :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_L \underline{\underline{G}}_{L_0} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{F}}_L = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_{L_0}} = \begin{bmatrix} x_{m,x_{L_0}} & x_{m,y_{L_0}} & n_x \\ y_{m,x_{L_0}} & y_{m,y_{L_0}} & n_y \\ z_{m,x_{L_0}} & z_{m,y_{L_0}} & n_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est ensuite donné dans  $R_{L_0}(x_{L_0}, y_{L_0}, z_{L_0})$  par :

$$(\underline{\underline{E}})_{R_{L_0}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \vec{u}_{L_0}}{\partial \vec{x}_{L_0}} + \frac{\partial \vec{u}_{L_0}}{\partial \vec{x}_{L_0}}^T + \frac{\partial \vec{u}_{L_0}}{\partial \vec{x}_{L_0}}^T \frac{\partial \vec{u}_{L_0}}{\partial \vec{x}_{L_0}} \right] = (\underline{\underline{E}}^m)_{R_{L_0}} + z_{L_0} (\underline{\underline{E}}^b)_{R_{L_0}} \quad (2.6)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}^m$  contient les termes de membrane et de cisaillement transverse constants dans l'épaisseur et  $\underline{\underline{E}}^b$  contient les termes associés à la flexion et au couplage des termes

non-linéaires de flexion et de membrane qui varient linéairement dans l'épaisseur. Les termes en  $z_{L0}^2$  sont classiquement négligés.

L'hypothèse des contraintes planes nécessite d'appliquer la loi de comportement dans un plan tangent à la coque au point considéré. On définit pour cela le repère tangent  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  dont la direction  $z_L$  est normale à la coque. La loi de comportement est appliquée en terme de déformations d'Euler-Almansi et de contraintes de Cauchy. Le tenseur des déformations d'Euler-Almansi est donc calculé dans  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  avec :

$$\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_{R_L} = \underline{\underline{G}}_L \underline{\underline{F}}_L^{-T} \left(\underline{\underline{E}}\right)_{R_{L0}} \underline{\underline{F}}_L^{-1} \underline{\underline{G}}_L^T \quad (2.7)$$

avec  $\vec{x}_L = \underline{\underline{G}}_L \vec{x}$

On définit ensuite un vecteur associé aux déformations de membrane et de flexion  $(\vec{\varepsilon}_g)_{R_L}$  et un vecteur associé aux déformations de cisaillement transverse  $(\vec{\varepsilon}_s)_{R_L}$  :

$$\left(\vec{\varepsilon}_g\right)_{R_L} = \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}_g^m \\ \vec{\varepsilon}_g^b \end{pmatrix}_{R_L} \quad \text{et} \quad \left(\vec{\varepsilon}_s\right)_{R_L} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xz}^s \\ \varepsilon_{yz}^s \\ 0 \end{pmatrix}_{R_L} \quad (2.8)$$

avec

$$\left(\vec{\varepsilon}_g^m\right)_{R_L} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \varepsilon_{xy}^m \end{pmatrix}_{R_L} \quad \text{et} \quad \left(\vec{\varepsilon}_g^b\right)_{R_L} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \varepsilon_{xy}^b \end{pmatrix}_{R_L} \quad (2.9)$$

Les déformations de membrane  $\vec{\varepsilon}_g^m$  et de cisaillement transverse  $\vec{\varepsilon}_s$  sont constantes tandis que les déformations associées à la flexion  $\vec{\varepsilon}_g^b$  varient linéairement dans l'épaisseur de la coque. Les vecteurs des contraintes de Cauchy associés sont issus de l'application d'une loi de comportement en contraintes planes. L'exemple de l'élasticité linéaire de Hooke donne :

$$\left(\vec{\sigma}_g\right)_{R_L} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C'}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C'}} \end{bmatrix} \left(\vec{\varepsilon}_g\right)_{R_L} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{C'}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\left(\vec{\sigma}_s\right)_{R_L} = G \left(\vec{\varepsilon}_s\right)_{R_L} \quad \text{avec} \quad G = \frac{5}{6} \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

Les efforts de membrane  $N_{ij}$  et de cisaillement transverse  $T_i$  ainsi que les moments de flexions  $m_{ij}$  sont obtenus par l'intégration dans  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  des contraintes de Cauchy à travers l'épaisseur de la coque :

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{ij}^m d\xi = e \sigma_{ij}^m \\ T_i &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{iz}^s d\xi = e \sigma_{iz}^s \\ m_{ij} &= \int_{-e/2}^{e/2} \xi \sigma_{ij}^b(\xi) d\xi = \frac{e^3}{12} \sigma_{ij}^b \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalement, dans le formalisme lagrangien total, les équations d'équilibre sont écrites dans  $R(x, y, z)$  à l'aide du premier tenseur de Piola-Kirchoff. Pour cela, les efforts généralisés de Cauchy sont écrits sous une forme matricielle dans  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  :

$$(\underline{\underline{\Sigma}})_{R_L} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} & T_x \\ N_{xy} & N_{yy} & T_y \\ T_x & T_y & 0 \end{bmatrix}_{R_L} \quad \text{et} \quad (\underline{\underline{m}})_{R_L} = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & 0 \\ m_{xy} & m_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_L} \quad (2.13)$$

Les équations d'équilibre pour les translations et les rotations dans  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  sont, respectivement, en terme d'efforts généralisés de Cauchy :

$$\begin{aligned} N_{xx,x_L} + N_{xy,y_L} &= \rho \ddot{u}_{x_L} \\ N_{xy,x_L} + N_{yy,y_L} &= \rho \ddot{u}_{y_L} \\ T_{xz,x_L} + T_{yz,y_L} &= \rho \ddot{u}_{z_L} \end{aligned} \quad (2.14)$$

et

$$\begin{aligned} m_{yy,y_L} + m_{yx,x_L} + e \sigma_{yz} &= I \ddot{\theta}_{x_L} \\ m_{xx,x_L} + m_{xy,y_L} - e \sigma_{xz} &= I \ddot{\theta}_{y_L} \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $I = \rho e^3 / 12$  est l'inertie de rotation. Ces équations peuvent alors être réécrites sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{div}}_{R_L} (\underline{\underline{\Sigma}})_{R_L} = \rho \overrightarrow{\ddot{u}}_{R_L} \quad (2.16)$$

$$(\underline{\underline{L}})_{R_L} \overrightarrow{\text{div}}_{R_L} (\underline{\underline{m}})_{R_L} + \overrightarrow{T}_{R_L} = I \overrightarrow{\ddot{\theta}}_{R_L} \quad (2.17)$$

avec

$$(\underline{\underline{L}})_{R_L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_L} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{T}_{R_L} = \begin{pmatrix} e \sigma_{yz} \\ -e \sigma_{xz} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_L} \quad (2.18)$$

Finalement, les équations précédentes sont ramenées dans le repère global d'étude  $R(x, y, z)$  et sont écrites sur la configuration non déformée. Ainsi, les équations d'équilibre dans le formalisme lagrangien total s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{Div}}_R (\underline{\underline{P}})_R = \rho_0 \overrightarrow{\ddot{u}}_R \quad (2.19)$$

$$\overrightarrow{\text{Div}}_R (\underline{\underline{M}})_R + \overrightarrow{T}_{0R} = I_0 \overrightarrow{\ddot{\theta}}_R \quad (2.20)$$

avec

$$\underline{\underline{P}}_R = J \underline{\underline{G}}_L^T \underline{\underline{\Sigma}}_{R_L} \underline{\underline{G}}_L \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (2.21)$$

$$\underline{\underline{M}}_R = J \underline{\underline{G}}_L^T \underline{\underline{L}}_{R_L} \underline{\underline{m}}_{R_L} \underline{\underline{G}}_L \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (2.22)$$

$$\overrightarrow{T}_{0R} = J \underline{\underline{G}}_L^T \overrightarrow{T}_{R_L} \quad (2.23)$$

et  $J = \det(\underline{\underline{F}})$ .

*Remarque : les notations  $\overrightarrow{\text{div}}$  et  $\overrightarrow{\text{Div}}$  permettent de souligner que les opérations de dérivation sont faites respectivement par rapport à la configuration actuelle et de référence.*

## 2.2.2 Discrétisation

La discrétisation spatiale du modèle précédent est effectuée dans le cadre de la méthode SPH tandis que la discrétisation temporelle fait intervenir le schéma de Newmark explicite aux différences centrées.

### 2.2.2.1 Discrétisation en espace

La réponse de l'ensemble de la structure est décrite dans son plan moyen que l'on discrétise par une seule couche de nœuds SPH. Chaque nœud peut être vu comme un cylindre d'axe la normale à la coque, de hauteur  $e$  et dont le rayon est choisi en fonction de la finesse de maillage voulue. Les nœuds possèdent cinq degrés de liberté, la « drilling rotation » n'étant pas prise en compte, voir la figure 2.2

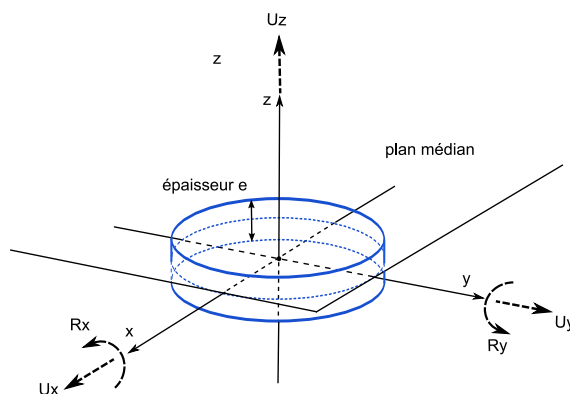
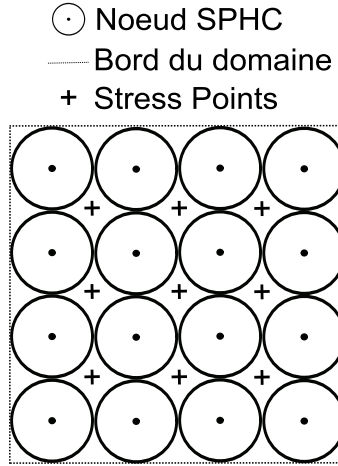


FIGURE 2.2: Un nœud SPHC.

Dans le cas d'une coque, les problèmes de modes libres sont particulièrement gênants car ils affectent le positionnement des nœuds SPH et perturbent ainsi fortement la courbure locale de la surface moyenne. Comme décrit dans le paragraphe 1.4.2.2, il est donc nécessaire de faire intervenir des SP dans la discrétisation. L'utilisation d'un SP par cellule étant bien souvent suffisante, ce sera la configuration par défaut dans ce travail. Comme on peut le voir sur la figure 2.3, les bords du domaine sont discrétisés avec des nœuds SPH tandis que les SP sont placés à l'intérieur du domaine. Finalement, un pas de calcul de l'élément SPHC consiste en le calcul des déformations et des contraintes sur les SP à partir des grandeurs cinématiques connues aux nœuds puis la résolution des équations d'équilibre, de nouveau sur les nœuds.

Les fonctions de forme utilisées sont des fonctions MLS, voir le paragraphe 1.4.1.2. Des fonctions d'ordre 1 sont utilisées pour le calcul des déformations sur les SP, voir l'équation 2.6 et la résolution des équations d'équilibre sur les nœuds, voir les équations 2.19 et 2.20. De plus, des fonctions MLS d'ordre 2 sont utilisées pour actualiser la position des SP au cours du calcul et approximer les grandeurs nécessaires au calcul des déformations (vitesses, pseudo-normales, etc). Un ordre de consistance élevé est nécessaire dans ce cas pour obtenir une bonne représentation de la courbure de la



**FIGURE 2.3:** Discrétisation SPHC basée sur des quadrilatères.

coque. En pratique, les fonctions MLS sont construites dans le repère  $R_{L_0}(x_{L_0}, y_{L_0}, z_{L_0})$  dans le formalisme lagrangien total et en dimension 2. Ainsi, pour une fonction  $f$  des coordonnées  $(x_{L_0}, y_{L_0})$ , approximée en  $(x_{L_0}^*, y_{L_0}^*)$  on a :

$$\langle f(x_{L_0}^*, y_{L_0}^*) \rangle = \sum_{j=1}^{N_v} \Phi_{R_{L_0}}^j f_j \quad (2.24)$$

$$\langle (\vec{\nabla}_{R_{L_0}} f)(x_{L_0}^*, y_{L_0}^*) \rangle = \sum_{j=1}^{N_v} \vec{\nabla}_{R_{L_0}} \Phi_{R_{L_0}}^j f_j \quad (2.25)$$

L'expression 2.25 est utilisée pour calculer les déformations de l'équation 2.6. L'équilibre 2.19 et 2.20 est écrit aux nœuds dans le repère global  $R(x, y, z)$  en utilisant :

$$\langle (\vec{\nabla}_{R_0} f)(x_0^*, y_0^*, z_0^*) \rangle = \sum_{j=1}^{N_v} \vec{\nabla} \Phi_{R_0}^j f_j \quad (2.26)$$

où  $\Phi_{R_0}^j$  sont les fonctions de forme  $\Phi_{R_0}^j$  ramenées dans le repère global d'étude  $R(x, y, z)$ . Finalement, les équations d'équilibre 2.19 et 2.20 s'écrivent :

$$\rho_0 \left( \vec{u}_R \right)_i = \sum_j^{N_s} \left( \underline{P}_j \right)_R \vec{\nabla} \Phi_{R_0}^j \quad (2.27)$$

$$I_0 \left( \vec{\theta}_R \right)_i = \sum_j^{N_s} \left( \underline{M}_j \right)_R \vec{\nabla} \Phi_{R_0}^j + \vec{T}_{0R} \quad (2.28)$$

où  $N_s$  est le nombre de SP voisins du nœud  $i$ .

### 2.2.2.2 Discrétisation en temps

La discrétisation en temps est réalisée via le schéma de Newmark aux différences centrées, voir [HUG 00], dont le principe est rappelé rapidement ci dessous. Supposons

que la solution complète du système est connue à l'instant  $t_n$  : les vecteurs déplacement  $\vec{U}^n$ , vitesse  $\vec{V}^n$  et accélération  $\vec{A}^n$  correspondant aux degrés de liberté du problème sont donc connus au pas de temps  $n$ . L'équilibre à satisfaire au pas de temps  $t_{n+1}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{M}}^{n+1} \vec{A}^{n+1} = \vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{int}^{n+1} \quad (2.29)$$

Au début du pas  $t_{n+1}$ , le schéma fournit directement la nouvelle configuration car :

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \vec{V}^{n+1/2} \quad (2.30)$$

$$\text{avec } \vec{V}^{n+1/2} = \vec{V}^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{A}^n \text{ la vitesse au demi pas de temps.} \quad (2.31)$$

La connaissance de la configuration à  $t_{n+1}$  permet le calcul de  $\vec{F}_{ext}^{n+1}$  et  $\vec{F}_{int}^{n+1}$ . Finalement  $\vec{A}^{n+1}$  est obtenu à partir de 2.29, puis :

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \vec{A}^{n+1} \quad (2.32)$$

C'est un schéma conditionnellement stable dont l'application nécessite la définition d'un pas de temps critique. Ce point, méconnu pour les SPHC, est abordé dans la section 2.2.5.

La variation des pseudo-normales  $\vec{n}$  au cours du calcul est déduite des degrés de liberté en rotation via la formule multiplicative de Rodrigue [BET 98] :

$$\vec{n}^{n+1} = \underline{\underline{G}}^{n+1} \vec{n}_0 \quad (2.33)$$

où  $\vec{n}^{n+1}$  est la pseudo-normale au pas de temps  $n+1$  et  $\underline{\underline{G}}^{n+1}$  est la matrice qui traduit la rotation de la pseudo-normale par rapport à sa position initiale  $\vec{n}_0$ . Elle est obtenue de manière incrémentale par :

$$\underline{\underline{G}}^{n+1} = \Delta \underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^n \quad (2.34)$$

où  $\Delta \underline{\underline{G}}$  est l'incrément de rotation au cours du pas de temps  $n$  calculé à partir de l'incrément des degrés de liberté de rotation.

## 2.2.3 Compléments

Cette section présente l'ajout de viscosités artificielles dans le modèle ainsi qu'un filtre appliqué aux vitesses de rotation. De plus, le traitement des conditions aux limites pour le modèle SPHC est abordé.

### 2.2.3.1 Viscosités artificielles et filtre de Balsara

Le concept de viscosité artificielle, présenté au paragraphe 1.4.2.1, a été adapté à la méthode SPHC par Maurel et Combescure [MAU 08a] afin d'améliorer la stabilité de la méthode. Deux termes visqueux ont été ajoutés, l'un pour les composantes de membrane



et l'autre pour les composantes de cisaillement transverse. La pression visqueuse de membrane est identique à celle donnée par Monaghan et al. dans [MON 00] et vaut pour un couple de nœuds  $i - j$  :

$$\Pi_{ij} = \rho_{ij} \begin{cases} -\alpha c h \mu_{ij} + \beta h^2 \mu_{ij}^2 & \text{si } \mu_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

avec  $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les coefficients de viscosité linéaire et quadratique,  $h$  est le paramètre du support de la fonction noyau et  $c$  est la vitesse du son dans le matériau. En dimension 3, on a :

$$\mu_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{r}_{ij}}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| + \varepsilon} \quad (2.36)$$

où  $\vec{r}_{ij}$  est un vecteur unitaire orienté selon la direction de la liaison  $i - j$ . De la même manière, une pression visqueuse en cisaillement transverse est introduite :

$$\tau_{ij} = \rho_{ij} \begin{cases} -\gamma c h \psi_{ij} & \text{si } \psi_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \psi_{ij} > 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

où  $\gamma$  est le coefficient de viscosité linéaire en cisaillement transverse. En dimension 3, on a :

$$\psi_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{s}_{ij}}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| + \varepsilon} \quad (2.38)$$

où  $\vec{s}_{ij}$  est un vecteur unitaire orienté dans la direction normale à la coque. Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont choisis de sorte à ne pas perturber le comportement d'ensemble de la structure ni dissiper une quantité importante d'énergie. Dans la suite, ces valeurs sont fixées à  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 0.05$ .

De plus, une dissipation d'énergie est ajoutée sur les vitesses de rotation de la coque. Pour cela, la pseudo-normale  $\vec{n}$  est filtrée en appliquant la formule proposée dans [WEN 94] et [SWE 94] :

$$\hat{\vec{n}}_i = \vec{n}_i + \eta \left[ \frac{\sum_{j=1}^{N_v} m_j W_{ij} \vec{n}_j}{\sum_{j=1}^{N_v} m_j W_{ij}} - \vec{n}_i \right] \quad (2.39)$$

L'énergie cinétique associée aux degrés de liberté en rotation est généralement très faible dans les coques, ce qui limite le risque de dissipation excessive d'énergie. De plus, le coefficient  $\eta$  est pris petit,  $\eta = 0.1$ .

### 2.2.3.2 Traitement des conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites dans la méthode SPHC n'est pas aisé.

En ce qui concerne les conditions aux limites essentielles, le problème est commun à l'ensemble des méthodes sans maillage et provient du fait que les fonctions de forme utilisées ne satisfont généralement pas la condition de Kronecker, de sorte que  $\langle u \rangle(\vec{x}_i) \neq u_i$ .

Dans le cas d'un encastrement, Combescure et Maurel [MAU 08a] ont résolu ce problème en prolongeant simplement la coque sur plusieurs rangées de nœuds, typiquement trois, dont les déplacements sont bloqués.

En ce qui concerne les conditions aux limites naturelles, le problème est spécifique que aux formulations fortes. Dans ce cas, la condition de bord libre doit, en effet, être appliquée explicitement, contrairement aux formulations faibles pour lesquelles elle est automatiquement vérifiée. Dans la littérature, l'application de cette condition de bord libre est encore un problème ouvert. Pour la méthode SPH utilisant des fonctions de forme splines cubiques, le voisinage incomplet des nœuds de bord crée naturellement une condition approximative de bord libre. L'introduction des fonctions MLS permet d'améliorer la consistance près des bords du domaine en compensant justement le voisinage incomplet des nœuds. Le prix de cette amélioration est la nécessité d'appliquer désormais explicitement la condition de bord libre. Pour cela, Maurel et Combescure ont élaboré la stratégie suivante :

- les bords du domaine sont discrétisés avec des nœuds SPH, comme proposé dans [VIG 00] et représenté sur la figure 2.3. De cette manière, il n'est pas nécessaire de calculer les contraintes sur les bords.
- les nœuds de bord sont ensuite identifiés. Pour cela, on définit en chaque particule, l'approximation SPH classique du champ unité :

$$\beta_i = \sum_j^{N_V} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \Delta S_j \quad (2.40)$$

Cette approximation n'étant pas consistante à l'ordre 0 sur les bords du domaine comme décrit dans le tableau 1.1,  $\beta_i$  sera inférieur à 1 pour les points proches du bord. On identifie donc comme nœud de bord, les particules pour lesquelles  $\beta_i < \beta_c$  où  $\beta_c$  est une valeur fixée par l'expérience. Dans notre cas,  $\beta_c \sim 0.6$ .

- les nœuds de bord sont ensuite inclus dans leur propre voisinage. En effet, les fonctions MLS calculées sur les particules de bord sont distordues parce qu'elles doivent vérifier la condition de consistance à l'ordre 1. Cela peut entraîner une rigidité artificielle des bords du domaine et un blocage en flexion, comme décrit dans [MAU 08a]. La solution trouvée par Maurel et Combescure consiste donc à inclure les nœuds du bord dans leur propre voisinage de SP, de sorte à réduire la distorsion des fonctions de forme MLS.
- finalement, la condition de bord libre est appliquée sur les nœuds de bord. En toute rigueur, la condition devrait être la suivante :

$$\underline{\underline{M}}_i \vec{n}_{b_0} = \underline{\underline{P}}_i \vec{n}_{b_0} = \vec{0} \quad (2.41)$$

où  $\vec{n}_{b_0}$  est la normale initiale au bord du domaine, qu'il est possible de calculer en utilisant le gradient du paramètre  $\beta_i$ . Maurel et Combescure ont choisi de simplifier la méthode en imposant la condition suivante :

$$\underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{P}}_i = \underline{\underline{0}} \quad (2.42)$$

qui donne des résultats équivalents à la précédente, voir [MAU 08a].

## 2.2.4 Algorithme de plasticité

La prise en compte de la plasticité du matériau ne permet plus de faire l'hypothèse que les contraintes varient linéairement dans l'épaisseur de la coque. Dans le cadre de la MEF, la solution consiste généralement à intégrer les contraintes dans l'épaisseur en utilisant plusieurs points de Gauss, typiquement 5 ou plus, répartis entre les enveloppes inférieures et supérieures de la coque. Cette méthode pourrait être appliquée pour les SPHC en utilisant plusieurs SP dans l'épaisseur. Cependant, Maurel et Combescure ont opté pour une solution moins coûteuse en temps de calcul, qui consiste à approximer les effets de la plasticité directement à partir des éléments de réduction de la coque.

Ilyushin [ILY 56] a, le premier, élaboré cette approche pour les matériaux plastiques parfaits. Elle repose sur l'hypothèse que toute la section de la coque plastifie en même temps, ce qui n'est réaliste qu'en présence d'efforts de membrane. Crisfeld [CRI 74] a ensuite amélioré la méthode en incorporant l'effet de pseudo-écrouissage, c'est à dire la plastification progressive de la section de la coque, en présence de flexion. Enfin, Chapuliot et Combescure [CHA 93] ont étendu la méthode aux matériaux à écrouissage isotrope.

La méthode consiste à approximer la contrainte équivalente de von-Mises de la manière suivante :

$$\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{eq}^m)^2 + \alpha^2 (\sigma_{eq}^b)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sigma_{eq}^b \sigma_{eq}^m + \kappa (\sigma_{eq}^s)^2 \quad (2.43)$$

où  $\alpha$  et  $\kappa$  sont les coefficients de participation de la flexion et du cisaillement transverse. La valeur de  $\alpha$  permet de régler l'apparition de la rotule plastique dans l'épaisseur de la coque :  $\alpha = 1$  signifie que la rotule plastique apparaît quand la peau plastifie et  $\alpha = 2/3$  signifie que la rotule plastique apparaît quand toute l'épaisseur de la coque est plastique. Dans la suite, le paramètre  $\kappa$  est pris nul, de sorte que les composantes de cisaillement transverse restent élastiques.

Les éléments de réduction en membrane, flexion et cisaillement transverse sont également définis au sens de von-Mises :

$$\begin{cases} (\sigma_{eq}^m)^2 = (\sigma_{xx}^m)^2 + (\sigma_{yy}^m)^2 + 3(\sigma_{xy}^m)^2 - \sigma_{xx}^m \sigma_{yy}^m \\ (\sigma_{eq}^b)^2 = (\sigma_{xx}^b)^2 + (\sigma_{yy}^b)^2 + 3(\sigma_{xy}^b)^2 - \sigma_{xx}^b \sigma_{yy}^b \\ \sigma_{eq}^m \sigma_{eq}^b = \sigma_{xx}^m \sigma_{xx}^b + \sigma_{yy}^m \sigma_{yy}^b + 3\sigma_{xy}^m \sigma_{xy}^b - \frac{1}{2} (\sigma_{xx}^m \sigma_{yy}^b + \sigma_{yy}^m \sigma_{xx}^b) \\ (\sigma_{eq}^s)^2 = 3(\sigma_{xz}^s)^2 + 3(\sigma_{yz}^s)^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

L'équation 2.43 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{eq}^2 = \vec{\sigma}_g^T \underline{\underline{F}} \vec{\sigma}_g \quad (2.45)$$

où  $\vec{\sigma}_g$  est défini par :

$$\vec{\sigma}_g^T = [\sigma_{xx}^m \quad \sigma_{yy}^m \quad \sigma_{xy}^m \quad \sigma_{xx}^f \quad \sigma_{yy}^f \quad \sigma_{xy}^f] \quad (2.46)$$

et  $\underline{\underline{F}}$  par :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \underline{\underline{A}} \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \underline{\underline{A}} & \alpha^2 \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

avec

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Finalement, le fonction seuil de plasticité de von-Mises s'écrit :

$$f_p = \underline{\underline{\sigma}}_g^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\sigma}}_g - (\sigma_y(\lambda))^2 = 0 \quad (2.49)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique.

L'algorithme de plasticité utilisé est basé sur la méthode du retour radial, proposée par Zeng et Combescure dans [ZEN 01]. Il est décrit dans l'annexe B.

### 2.2.5 Estimation et contrôle du pas de temps critique

Le contexte de la dynamique explicite nécessite l'estimation du pas de temps critique associé aux SPHC. C'est un aspect qui n'avait pas été abordé dans le travail initial de Maurel et Combescure [MAU 08a]. Pour déterminer le pas de temps critique, on s'appuie sur les deux considérations suivantes [HUG 00] :

- $(\Delta t)_{crit} = 2/\omega^{max}$  où  $\omega^{max}$  est la plus grande pulsation propre de la structure discrétisée,
- $\omega^{max}$  est majorée par la pulsation de l'élément du maillage qui a la plus grande pulsation propre.

Cela permet de réduire l'étude des pulsations propres d'un maillage entier à celle d'un élément type. La pulsation propre d'un nœud SPH entouré de son voisinage a donc été étudiée analytiquement en dimension 1, dans un contexte linéaire, en remplaçant les fonctions MLS par les fonctions SPH classiques et en négligeant les termes de membrane. Les détails sont donnés dans l'annexe C. On obtient l'estimation suivante du pas de temps critique :

$$(\Delta t)_{crit} = D_{sph} \sqrt{\frac{(1 - \nu^2)/E}{\alpha_1 \frac{e^3}{12I} + \alpha_2 \frac{D_{sph}^2 e(1 - \nu)}{12I}}} \quad (2.50)$$

où  $I = \rho e^3/12$  est l'inertie de rotation de la coque. Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont été déterminés par des expériences numériques :  $\alpha_1 = 0.4$  et  $\alpha_2 = 2.0$ . En remplaçant  $I$  par son expression, l'équation 2.50 se réécrit :

$$(\Delta t)_{crit} = D_{sph} \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{\frac{E}{\rho}(\alpha_1 + \alpha_2(1 - \nu)) \frac{D_{sph}^2}{e^2}}} \quad (2.51)$$

L'équation 2.51 comporte un terme associé aux effets de flexion  $\alpha_1$  et un terme associé au cisaillement transverse  $\alpha_2(1 - \nu)D_{sph}^2/e^2$ . Ce dernier terme fait tendre  $(\Delta t)_{crit}$  vers 0 pour

des rapports  $D_{sph}/e$  très grands. Ainsi, le cisaillement transverse contribue à faire tendre le pas de temps critique vers 0 pour les coques très fines quand bien même sa contribution dans la solution est alors très faible. Il en découle que l'étude de coques de faible épaisseur avec la théorie Mindlin-Reissner est très coûteuse en temps de calcul.

Dans le cadre des coques EF de Mindlin-Reissner, le pas de temps critique est contrôlé en modifiant la matrice de masse des éléments, voir [HUG 78] et [HUG 00]. L'inertie de rotation des éléments est modifiée de manière à faire disparaître la dépendance du pas de temps critique à l'épaisseur de la coque, notamment pour les faibles épaisseurs. Cette approche repose sur l'hypothèse que l'énergie associée aux seuls degrés de liberté en rotation dans les coques est très faible. De plus, ces degrés de liberté sont associés à des vibrations très hautes fréquences dont la longueur d'onde est proche de l'épaisseur de la coque. L'inertie de rotation peut donc être modifiée sans pour autant altérer la précision des résultats dans le domaine des basses et moyennes fréquences.

Cette méthode a été adaptée au cas des SPHC. La dépendance linéaire du pas de temps critique à l'épaisseur de la coque disparaît si l'on choisit de prendre  $I$  non plus proportionnelle à  $e^3$  mais à  $eD_{sph}^2$  dans le cas des faibles épaisseurs. Pour cela, l'inertie  $I$  est remplacée dans l'équation 2.50 par  $I_{opt}$  donnée par :

$$I_{opt} = \max\left(\rho \frac{e^3}{12}, \rho \frac{eD_{sph}^2}{12}\right) \quad (2.52)$$

L'inertie est ainsi modifiée dans le cas des faibles épaisseurs de manière à contrôler le pas de temps critique et reste inchangée pour les fortes épaisseurs.

Il faut noter que cette étude est réalisée pour un matériau élastique linéaire en l'absence de rupture. Dans ce cas, un coefficient de sécurité  $c_{stab}$  est appliqué à  $(\Delta t)_{crit}$ . On choisit souvent  $c_{stab} \sim 0.2$ .

## 2.2.6 Investigations sur le verrouillage en cisaillement transverse

Le modèle SPHC est basé sur la théorie de Mindlin-Reissner qui permet, en théorie, de traiter tous types de coques sans restriction d'épaisseur. En pratique, il s'avère que les modèles basés sur cette théorie présentent le défaut d'être artificiellement rigide dans le cas des coques très minces. Ce problème, connu sous le nom de verrouillage en CT, est d'autant plus prononcé que la coque est fine et peut conduire à des erreurs importantes si aucune attention n'y est portée.

Cet aspect n'avait pas été abordé dans le travail de Maurel et Combescure [MAU 08a]. Ce paragraphe présente donc des investigations effectuées sur ce problème pour le modèle SPHC. Cependant, le problème est complexe et mériterait une étude plus poussée. Les conclusions sont donc temporaires et les méthodes développées ne sont pas incluses dans la suite du travail.

### 2.2.6.1 Mise en évidence et origine du problème

Le problème est mis en évidence sur la figure 2.4, qui représente la flèche d'une plaque carrée encastrée sur ses bords et soumise à une pression uniforme. Les résultats sont

normés par rapport à ceux obtenus avec un modèle EF de coque de Kirchoff (COQ4 dans Europlexus). Il est clair que le verrouillage en CT se manifeste très rapidement puisque le modèle SPHC exhibe une raideur excessive.

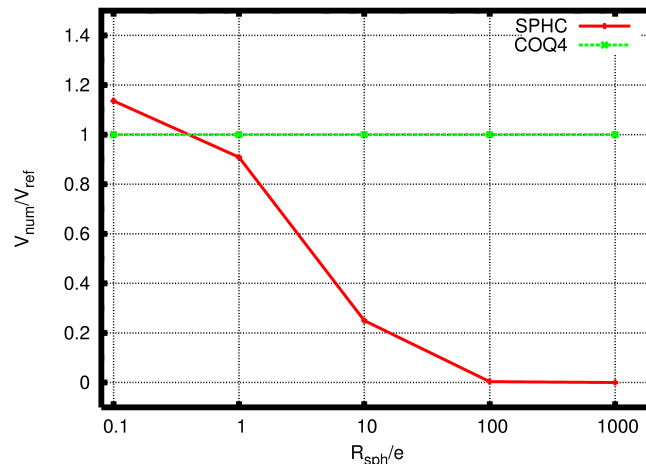


FIGURE 2.4: Verrouillage en CT pour le modèle SPHC.

Le verrouillage en CT est un problème purement numérique qui intervient dans les modèles qui ne sont pas capables de représenter un état de contrainte nul pour le CT dans la limite des coques minces. L'origine du problème peut être comprise schématiquement en ayant à l'esprit que les contraintes en CT sont proportionnelles à  $\partial w/\partial x - \theta$ , où  $w$  est le déplacement normal à la coque et  $\theta$  sa rotation. Pour une coque infiniment mince, ce terme devrait tendre vers 0. En pratique, les méthodes d'approximation/interpolation utilisées dans les modèles numériques sont souvent trop grossières pour rendre possible cette condition. Ainsi, le terme  $\partial w/\partial x - \theta$  n'est jamais parfaitement nul. Or, l'énergie de CT est proportionnelle à  $e(\partial w/\partial x - \theta)$  tandis que l'énergie de flexion est proportionnelle à  $e^3\partial\theta/\partial x$  où  $e$  est l'épaisseur de la coque. En conséquence, si le terme  $\partial w/\partial x - \theta$  n'est pas parfaitement nul, l'énergie de CT prend rapidement le pas sur l'énergie de flexion, sous l'effet des coefficients  $e$  et  $e^3$ . Le comportement du modèle est alors dominé artificiellement par le CT provoquant une rigidité excessive de la structure.

### 2.2.6.2 Bibliographie

Le problème de verrouillage en CT a été très largement étudié dans le cadre de la MEF et est désormais assez bien maîtrisé. Pour les méthodes sans maillage, les principales tentatives pour résoudre le problème sont, par exemple, décrites dans [TIA 07] :

- la solution la plus courante consiste en l'utilisation de fonctions d'approximation de consistance élevée, combinée à de larges supports pour les fonctions poids. Krysl et Belytschko ont les premiers utilisé cette méthode pour le verrouillage en membrane des coques de Kirchoff dans [KRY 95] et [KRY 96]. Elle a ensuite été utilisée dans [GAR 00]. En réalité, la solution ne fait qu'alléger le verrouillage, mais cela est parfois suffisant. De plus, elle conduit à des coûts CPU importants.

- comme l'intégration réduite en EF, l'utilisation d'une intégration nodale pour les formulations faibles ou d'une méthode de collocation pour les formulations fortes permet également d'alléger le verrouillage. Le contrôle des modes à énergie nulle qui peuvent alors se développer nécessite l'utilisation d'une stabilisation. C'est par exemple l'approche choisie dans [WAN 04]. Cependant, l'intégration pauvre de fonctions de forme complexes conduit souvent à des imprécisions.
- Donning et Liu [DON 98] ont proposé une méthode connue sous le nom de « matching approximation fields concept » ou bien « field-consistency paradigm » qui reprend l'idée que le terme  $\partial w / \partial x - \theta$  dans l'expression des contraintes de CT doit pouvoir tendre vers 0. L'idée consiste à construire les approximations de sorte que le champ des rotations  $\theta$  ait la capacité de correspondre exactement au champ de la dérivée première des déplacements  $\partial w / \partial x$ . Pour cela, il est proposé d'utiliser une approximation classique pour le champ de déplacement :

$$w(x) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(x) w_i \quad (2.53)$$

et de construire les fonctions de forme pour le champ de rotations à partir de la dérivée première des fonctions de forme utilisées pour le déplacement :

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{N_v} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \theta_i \quad (2.54)$$

Cette idée a été reprise par Kanok-Nukulchai et al. dans [KAN 01] et semblait prometteuse, mais Tiago et Leitao [TIA 07] ont montré que la matrice de raideur résultante était singulière et donc le système instable.

- d'autres pistes ont également été étudiées mais n'ont pas encore clairement prouvé leur efficacité. On peut notamment citer Cho et Alturi [CHO 01] qui ont réalisé un simple changement de variable pour obtenir une formulation Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) sans verrouillage dans le cas d'une poutre de Timoshenko.

### 2.2.6.3 Investigations pour le modèle SPHC

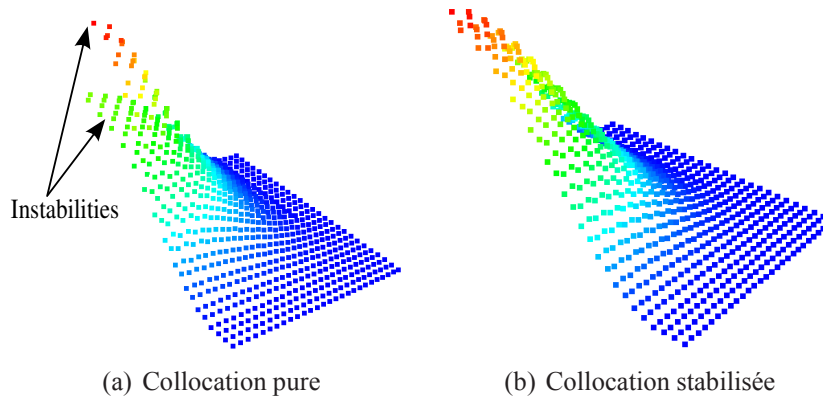
L'augmentation de l'ordre de consistance des fonctions MLS ne s'est pas révélée efficace dans le cas du modèle SPHC. Les tests effectués ont, par contre, montré que la suppression des SP permettait d'alléger considérablement le verrouillage. C'est une solution équivalente à l'intégration réduite dans la MEF et à l'intégration nodale des formulations faibles sans maillage telle qu'utilisée dans [WAN 04]. Elle présente cependant l'inconvénient d'introduire dans le modèle des modes à énergie nulle, qu'il faut maîtriser avec une stabilisation.

Par similitude avec la méthode d'intégration sélective en EF, il a été choisi de calculer uniquement les composantes de CT sans utiliser de SP et d'ajouter une stabilisation

sur ces termes. On pourrait parler alors de « collocation sélective stabilisée ». La stabilisation des termes en CT a été construite très simplement : au lieu d'utiliser une simple méthode de collocation ne faisant intervenir que les nœuds du domaine, les efforts en CT sont également calculés à partir des contraintes portées par les SP. Cependant, la contribution de ces SP dans l'approximation MLS utilisée pour le calcul des efforts est rendue faible en leur attribuant un poids  $f_c \times w_i$ , où  $w_i$  est le poids calculé classiquement.  $f_c$  est donc un coefficient de stabilisation à choisir suffisamment petit pour éviter le verrouillage et suffisamment grand pour éviter le développement de modes instables. Le cas  $f_c = 0$  correspond à une collocation pure. Finalement, le coefficient  $f_c$  est choisi empiriquement sous la forme suivante :

$$f_c = k \left( \frac{e}{R_{sph}} \right)^n \quad (2.55)$$

où  $k$  et  $n$  sont obtenus par des expériences numériques :  $k = 1e - 2$  et  $n = 2$ . La figure 2.5 montre l'effet de cette stabilisation par comparaison avec le cas d'une collocation pure, c'est à dire  $f_c = 0$ .



**FIGURE 2.5:** Effet de la stabilisation sur la déformée SPHC ( $\times 2000$ ).

En reprenant l'exemple de la section 2.2.6.1, on constate sur la courbe 2.6 une nette amélioration des performances du modèle SPHC. Il fournit des résultats satisfaisant jusqu'à des rapports de l'ordre de 100 voir 1000. On remarque cependant que le comportement n'est pas encore parfait car un verrouillage subsiste et apparaît progressivement. Les performances sont comparés à un modèle de coque EF de Mindlin-Reissner à intégration sélective (Q4GS dans Europlexus).

#### 2.2.6.4 Conclusions partielles

Ces investigations sur le problème de verrouillage en CT ont permis d'esquisser une solution efficace, que l'on pourrait nommer « collocation sélective stabilisée ». Cependant, une étude plus poussée du problème serait nécessaire pour obtenir complète satisfaction, notamment à propos de la stabilisation. Pour cette raison, la méthode testée n'est pas intégrée dans la suite des développements.



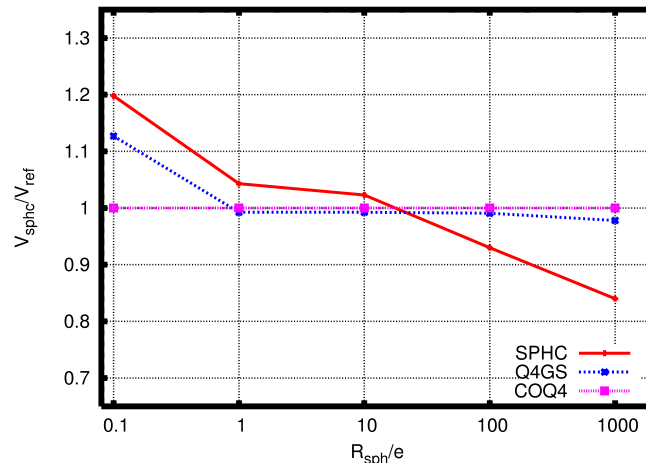


FIGURE 2.6: Performances du modèle de collocation sélective stabilisée.

## 2.3 Endommagement et rupture

Cette section présente le modèle de rupture élaboré pour les SPHC. Il est basé sur une transition endommagement-f ssuration et l'introduction de discontinuités fortes dans le modèle.

### 2.3.1 Introduction

#### 2.3.1.1 Échelles, mécanismes et approches de la rupture

La rupture est un mécanisme qui fait intervenir différentes échelles du matériau. On distingue généralement [LEM 85] l'échelle microscopique (de l'ordre du  $\mu m$  au centième de  $mm$ ), l'échelle macroscopique ou du volume élémentaire représentatif (VER) (0.1 à 1  $mm$  pour les métaux, 10  $cm$  pour le béton) et l'échelle de la structure. On parle alors respectivement de microf ssures, macrof ssures et f ssures.

**Échelle microscopique** A l'échelle microscopique, on distingue deux principaux mécanismes de rupture : la rupture fragile qui concerne aussi bien les métaux que les bétons et la rupture ductile plus spécifique aux métaux. Pour les métaux, la rupture fragile consiste en la rupture des liaisons entre les atomes lorsque l'énergie de sollicitation devient supérieure à leur énergie de cohésion. La rupture de ces liaisons inter-atomiques conduit au clivage, c'est à dire à une séparation des plans cristallographiques. Pour le béton, la rupture fragile provient de la décohésion entre la pâte et les grains. Des microf ssures apparaissent aux interfaces entre la pâte et les grains, progressent à la périphérie des grains, gagnent la pâte puis se rejoignent conduisant à la formation d'une f ssure macroscopique. Dans les deux cas, c'est un mécanisme qui n'implique pas de déformations plastiques significatives.

La rupture ductile provient, elle, des grandes déformations plastiques qui apparaissent aux voisinages des défauts du matériau métallique. La matrice voit des déformations importantes, plastique et perd ainsi sa cohésion avec le défaut qui est souvent moins ductile. La perte de cohésion entraîne la création de microfissures et de cavités. Les microfissures et cavités croissent au fur et à mesure que la matrice plastique. Cette dernière rompt alors localement une fois la striction atteinte, ce qui provoque la coalescence des cavités et la rupture macroscopique finale.

L'étude des densités de microfissures et cavités conduit à des modèles microscopiques, qui une fois homogénéisés au niveau d'un VER, peuvent être utilisés pour décrire le comportement macroscopique du matériau.

**Échelle macroscopique** A l'échelle macroscopique, les phénomènes décrits précédemment sont représentés par la notion d'endommagement. Un VER est dit vierge de tout endommagement s'il est dépourvu de fissures et de cavités au niveau microscopique et totalement endommagé lorsque une macrofissure apparaît. L'évolution de l'endommagement entre ces deux stades est décrit par des modèles d'endommagement. Les phénomènes microscopiques fragiles et ductiles décrits précédemment se traduisent au niveau macroscopique respectivement par un endommagement macro-fragile et un endommagement plastique ductile. Le premier est un endommagement de décohesion qui survient en l'absence de déformations irréversibles macroscopiques. Le second est l'endommagement associé aux grandes déformations plastiques conduisant à la striction.

**Échelle de la structure** Les macrofissures de l'ordre de grandeur du VER peuvent croître au niveau de la structure et provoquer sa rupture. On distingue de nouveau une fissuration par rupture fragile ou par rupture ductile. Le premier type de fissure se propage rapidement sans dissipation plastique importante, tandis que le second type de fissure est stable et progresse à une vitesse qui ne dépend que la sollicitation de la structure en dissipant de l'énergie par plasticité. La théorie de la fissuration est souvent utilisée pour prévoir l'évolution de ces fissures jusqu'à la ruine de la structure. Cette théorie se base sur des variables définies au niveau global (taux de restitution d'énergie, intégrales de Rice ou facteur d'intensité des contraintes par exemple) pour prévoir le comportement des fissures. On parle aussi d'approche globale voir semi-locale lorsqu'on s'intéresse plus précisément aux phénomènes en pointe de fissure (plasticité notamment). Ces approches sont applicables lorsqu'il n'est pas indispensable de connaître précisément l'état du matériau vers le front de fissure et dans des cas simples (matériaux élastique fragile, prise en compte limitée de la plasticité). Une autre approche, dite locale, consiste à s'intéresser précisément aux contraintes, déformations plastiques et endommagement représentatif de la détérioration du matériau en amont de la fissure. Il est alors possible de réutiliser la notion d'endommagement, la fissure étant alors vue comme un ensemble de VER totalement endommagés.

### 2.3.1.2 Philosophie de la méthode

La méthode développée dans le cadre de l'élément SPHC utilise largement la notion d'endommagement macroscopique. Les phénomènes microscopiques, à l'origine de la rupture, sont homogénéisés et leurs effets sont traduits au niveau macroscopique directement par la notion d'endommagement. Son évolution n'est pas basée sur des considérations microscopiques (densité de fissures et de cavités par exemple), mais sur des grandeurs mécaniques globales (déformations, contraintes). L'endommagement critique d'un VER conduit à l'apparition d'une macrofissure qui se propage au niveau de la structure par endommagement de VER supplémentaires. Une fois la fissure apparue, elle est traitée comme une discontinuité forte. La philosophie décrite ici fait clairement référence aux méthodes dites locales.

### 2.3.2 Modélisation de l'endommagement

La théorie de l'endommagement, qui décrit la détérioration des caractéristiques d'un matériau depuis son état initial jusqu'à l'apparition d'une fissure macroscopique, est récente. En 1958, Kachanov publie les premiers travaux utilisant une variable d'endommagement [KAC 86]. La notion a ensuite été développée dans les années 1970, entre autres par Lemaitre et Chaboche [LEM 85], et généralisée au cas isotrope en dimension 3 avec un cadre thermodynamique clair. La théorie de l'endommagement anisotrope est plus récente, citons ici les travaux de Desmorat [LEM 00], [DES 07].

#### 2.3.2.1 Notions sur la théorie de l'endommagement

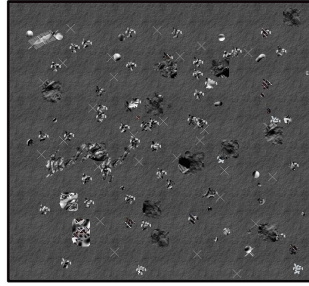
**Variable d'endommagement** Considérons une section  $S_n$  d'un VER définie par sa normale  $\vec{n}$ . Cette section, schématisée sur la figure 2.7, présente un certain nombre de fissures et de cavités qui réduisent la résistance du matériau :

- la surface des défauts réduit d'autant la surface effective du VER,
- les défauts créent des concentrations de contraintes dans leur voisinage,
- les interactions entre les défauts créent également des concentrations de contraintes.

Si l'on note  $S_D$  la surface totale des défauts, corrigée en tenant compte des effets de concentrations de contraintes et d'interactions entre les défauts, la surface résistant effectivement aux sollicitations est  $S_U = S_n - S_D$ . Une variable interne  $D_n$  d'endommagement peut être introduite sous la forme :

$$D_n = \frac{S_D}{S_n} \quad (2.56)$$

$D_n$  représente l'endommagement du VER dans la direction définie par la normale  $\vec{n}$ . Si on fait l'hypothèse d'un endommagement isotrope, la variable  $D_n$  ne dépend pas de la direction  $\vec{n}$  et le scalaire  $D$  est suffisant pour décrire l'endommagement de l'ensemble du VER. Cela suppose que l'orientation des fissures et cavités est distribuée uniformément dans toutes les directions. Par simplicité, nous travaillerons dans la suite sous cette hypothèse. Il faut cependant noter un intérêt grandissant de la communauté pour l'endommagement anisotrope, par exemple pour la modélisation des bétons



**FIGURE 2.7:** Schématisation d'un VER : présence de microfissures et cavités.

[DES 07], [CHA 09].  $D$  peut donc être vu comme la fraction corrigée de discontinuités dans la matière.  $D$  varie entre 0 pour un matériau vierge de tout défaut et  $D_c \leq 1$  pour un matériau présentant une microfissure.  $D$  ne peut que croître puisque l'apparition de défauts est un processus irréversible.

*Remarque : initialement,  $D = D_0 \neq 0$  puisque le matériau possède des défauts dus à son histoire (élaboration).  $D_0$  est une valeur difficile à obtenir, c'est pourquoi très souvent la simplification  $D_0 = 0$  est faite.*

**Contrainte effective** La définition de la surface effective  $S_U$  conduit à la notion de contrainte effective. Dans le cas d'un problème de dimension 1, on utilise habituellement la contrainte usuelle  $\sigma$  définie comme le rapport de l'effort  $F$  sur la section  $S$  sur laquelle il s'exerce. De la même manière, on peut définir la contrainte effective  $\sigma_U$  en remplaçant  $S$  par  $S_U$ , la surface résistant effectivement à la sollicitation. On obtient :

$$\sigma_U = \frac{F}{S_U} \quad (2.57)$$

Nous avons évidemment  $\sigma_U = \sigma$  pour un matériau vierge,  $\sigma_U > \sigma$  pour un matériau endommagé. Il vient alors :

$$\sigma_U = \sigma \frac{S}{S_U} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.58)$$

Dans le cas d'un problème en dimension 3 et d'un endommagement isotrope, celui-ci s'applique à toutes les composantes du tenseur de contraintes, d'où :

$$\underline{\underline{\sigma}}_U = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1 - D} \quad (2.59)$$

**Principe d'équivalence en déformation** Il s'agit d'une hypothèse importante de la théorie [LEM 85] : « tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective ». Cela signifie qu'un matériau voyant un endommagement  $D$  et soumis à une traction unidimensionnelle  $\sigma$  se déforme de la même manière qu'un matériau fictif équivalent qui serait

vierge et soumis à une traction  $\sigma_U$ . Cela signifie également, que loi d'élasticité linéaire d'un matériau endommagé en dimension 1 est :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_U}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (2.60)$$

$E$  étant le module d'Young et  $\varepsilon_e$  la déformation élastique. Il s'agit d'une hypothèse simpliste qui suppose que l'endommagement influence de la même manière tous les mécanismes de déformation de la matière (élasticité, plasticité, viscoplasticité). Cela permet cependant d'établir une théorie simple et efficace.

### 2.3.2.2 Critères et lois d'évolution de l'endommagement

La description du comportement d'un matériau à l'endommagement nécessite l'utilisation d'un critère qui détermine s'il est effectivement en train de s'endommager ou non et, une fois celui-ci vérifié, une loi d'évolution de la variable endommagement. Nous appellerons surface seuil d'endommagement la fonction qui décrit ce critère et nous la noterons  $f_D$ .

**Critère pour les bétons** Le critère que nous utiliserons pour les béton permet de prendre en compte son comportement non symétrique. Le béton est en effet beaucoup plus résistant à l'endommagement en compression qu'en traction, d'où son utilisation sous forme précontrainte. Les observations à l'échelle microscopique montrent une orientation préférentielle des microfissures dans la direction normale aux directions principales d'extensions. Un critère basé sur les déformations principales positives  $\langle \varepsilon_1 \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_2 \rangle$  et  $\langle \varepsilon_3 \rangle$  a donc été proposé par Mazars [MAZ 84] :

$$f_D(\vec{\varepsilon}, D) = [\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2]^{1/2} - \varepsilon_D = \varepsilon^* - \varepsilon_D \leq 0 \quad (2.61)$$

$\varepsilon^*$  est la déformation équivalente associée au critère et  $\varepsilon_D$  est la déformation équivalente seuil au delà de laquelle le matériau s'endommage. Ce critère présente l'inconvénient d'interdire tout endommagement en compression, ce que certains auteurs ont corrigé par l'introduction d'une partie représentative des déformations négatives [CHU 09]. Nous l'utiliserons cependant sous la forme présentée dans l'équation 2.61.

**Critère pour les métaux** L'endommagement provient dans ce cas du cisaillement qui favorise la plasticité et de la déformation volumique qui favorise la croissance des cavités et des fissures. En écrivant que l'endommagement est gouverné par l'énergie de distorsion et de déformation volumique [LEM 85], on obtient :

$$f_D(\vec{\varepsilon}, D) = \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] p - \varepsilon_p^s \leq 0 \quad (2.62)$$

$\sigma_H$  est la contrainte hydrostatique,  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente au sens de von-Mises,  $\sigma_H/\sigma_{eq}$  le taux de triaxialité des contraintes et  $\varepsilon_p^s$  la déformation plastique équivalente

seuil. Ce critère est connu sous le nom de critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique. Il est simple et très utilisé mais ne permet pas de représenter précisément tous les phénomènes comme par exemple le f uage.

**Loi d'endommagement Mazars pour les bétons** La principale hypothèse associée à la loi de comportement élaborée par J. Mazars [MAZ 84] est que le comportement du matériau est purement élastique endommageable. Sous cette hypothèse, la loi de comportement du matériau s'écrit simplement :

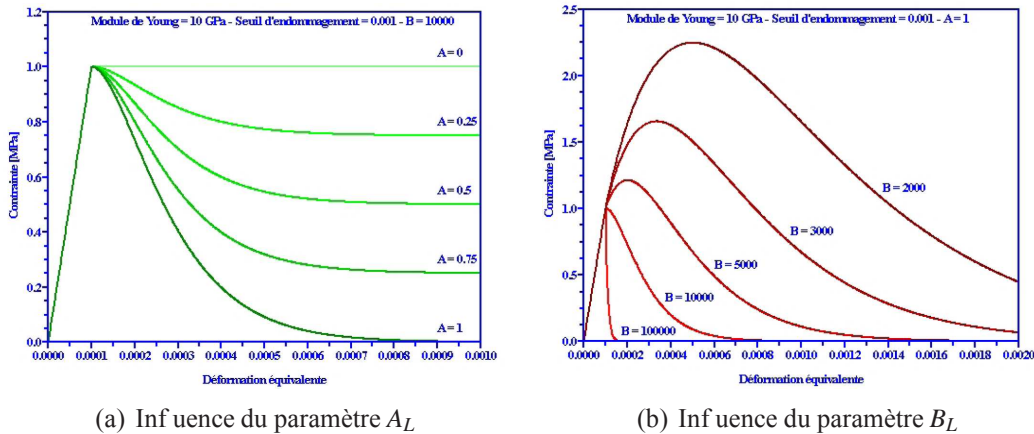
$$\vec{\sigma} = (1 - D)\underline{H}\vec{\varepsilon} \quad (2.63)$$

La loi d'évolution de l'endommagement élaborée par Mazars s'écrit :

$$\dot{D} = \left[ \frac{\varepsilon_D(1 - A_L)}{(\varepsilon^*)^2} - \frac{A_L B_L}{e^{B_L(\varepsilon^* - \varepsilon_D)}} \right] \dot{\varepsilon}^* \quad (2.64)$$

Trois paramètres interviennent donc dans l'évolution de l'endommagement :

- $\varepsilon_D$  est le seuil au delà duquel le matériau s'endommage,
- $A_L$  qui impose l'asymptote horizontale de la courbe contrainte-déformation, voir figure 2.8(a),
- $B_L$  qui impose la forme de la décroissance par rapport à la contrainte maximale, voir figure 2.8(b).



**FIGURE 2.8:** Influence des paramètres  $A_L$  et  $B_L$  [CHU 09].

Pour tenir compte de la dissymétrie du comportement en traction et en compression, il est possible de combiner deux lois d'évolution différentes, l'une pour la traction donnant  $D_t = f(A_t, B_t)$  et l'autre pour la compression donnant  $D_c = f(A_c, B_c)$ . L'endommagement est alors  $D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t$ , avec les coefficients de mélange  $\alpha_c$  et  $\alpha_t$  tels que  $\alpha_c + \alpha_t = 1$  et calculés en séparant les parties positives et négatives du tenseur des déformations. L'interprétation physique de cet endommagement à deux vitesses n'est pas aisée puisqu'en réalité l'endommagement est un phénomène unique. Nous choisissons de ne tenir compte que du phénomène de traction en prenant  $\alpha_c = 0$  et  $\alpha_t = 1$ .

| Matériau       | $\varepsilon_p^s$ | $\varepsilon_p^c$ | $D_c$ |
|----------------|-------------------|-------------------|-------|
| * Cuivre 99.9% | 0.35              | 1.04              | 0.85  |
| * AU4G1        | 0.03              | 0.25              | 0.23  |
| * Acier E24    | 0.5               | 0.88              | 0.17  |
| § Acier 1015   | 0.259             | 1.4               | 0.065 |
| § Acier 1045   | 0.223             | 0.95              | 0.065 |
| § Acier 1090   | 0.129             | 0.64              | 0.065 |
| § Acier A3     | 0.202             | 1                 | 0.1   |
| * Acier XC38   | 0                 | 0.56              | 0.22  |
| * Acier 30CD4  | 0.02              | 0.37              | 0.24  |
| * INCO 718     | 0.02              | 0.29              | 0.24  |

**TABLE 2.1:** Coefficients d'endommagement plastique ductile à 20°C.

*Remarque : les déformations données dans ce tableau sont des déformations vraies Les données sont issues de [LEM 85](\*) et [BON 97] (§).*

**Loi d'endommagement plastique ductile pour les métaux** L'endommagement plastique ductile accompagne les grandes déformations plastiques et vient donc s'ajouter à la théorie de plasticité de von-Mises présentée dans la section 2.2.4. La fonction charge représentant la limite d'élasticité s'écrit désormais [LEM 85] :

$$f_p(\vec{\sigma}, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_y^0 - R(\lambda) \quad (2.65)$$

où  $\sigma_y^0$  est la limite d'élasticité initiale,  $\sigma_y^0 + R(\lambda)$  la limite d'élasticité écrouie,  $\lambda$  le multiplicateur plastique et  $\sigma_{eq}$  la contrainte de von-Mises.

L'évolution de l'endommagement est donnée par la loi de Lemaitre et Chaboche [LEM 85] :

$$\dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \dot{p} \quad (2.66)$$

Trois paramètres matériau interviennent dans l'évolution de l'endommagement :

- la déformation plastique équivalente seuil  $\varepsilon_p^s$  au delà de laquelle l'endommagement intervient, c'est à dire la croissance des cavités et microfissures débute,
- la déformation plastique équivalente critique  $\varepsilon_p^c$  au delà de laquelle le matériau rompt,
- l'endommagement critique  $D_c$  atteint lorsque  $\varepsilon_p = \varepsilon_p^c$ . Physiquement,  $D_c$  représente la fraction volumique de défauts à la rupture.

On remarque que l'endommagement évolue linéairement de 0 à  $D_c$  lorsque le taux de triaxialité est constant. Plus particulièrement, si  $\sigma_H/\sigma_{eq} = 1/3$ , taux que l'on obtient par exemple lors de la traction d'une éprouvette cylindrique, l'endommagement débute pour  $\varepsilon_p = \varepsilon_p^s$  et atteint sa valeur critique pour  $\varepsilon_p = \varepsilon_p^c$ . La littérature montre que les valeurs de ces coefficients ont été identifiées pour différents matériaux, voir tableau 2.1.

*Remarque : l'équation 2.66 suppose une proportionnalité entre le taux d'endommagement et le taux de déformations plastiques, ce qui n'est pas adapté à certains matériaux, comme étudié dans [BON 97]. Dans cette référence, les auteurs introduisent un paramètre supplémentaire permettant de prendre en compte une éventuelle évolution non-linéaire de l'endommagement. Nous nous contenterons cependant ici de l'équation 2.66.*

### 2.3.3 Le problème de localisation

Les simulations numériques effectuées pour un matériau dont la courbe contrainte-déformation présente une pente négative (matériau adoucissant ou endommageable) ne sont pas satisfaisantes car elles donnent des résultats qui dépendent du maillage. C'est un problème bien connu dans le cadre de la MEF et traité abondamment dans la littérature [BAZ 76] [BEN 88]. Dans [SUF 04], l'auteur présente une étude approfondie du problème dont nous pouvons réutiliser les résultats. Dans [CAZ 10], l'auteur effectue une revue complète des solutions disponibles dans la littérature. Cette partie s'inspire de ces études et le lecteur peut s'y référer pour plus de précisions.

#### 2.3.3.1 Constat

Les simulations utilisant un matériau avec une courbe contrainte-déformation de pente négative ne donnent pas des résultats satisfaisants dans la mesure où bien souvent les déformations et l'endommagement sont localisés artificiellement sur un seul élément du maillage à l'approche de la rupture. La figure 2.9(a) est le résultat d'un calcul EF présenté dans [AND 04] correspondant à l'endommagement d'une plaque trouée sous sollicitation verticale. C'est une bonne illustration du problème de localisation puisqu'on voit clairement que l'endommagement est concentré sur une bande d'un élément de largeur. Le trajet de ce que l'on pourrait appeler la fissure dépend donc de la position des éléments du maillage. De plus, si l'on raffine le maillage, la zone endommagée restera large d'un élément et l'endommagement critique sera plus vite atteint ( $D_c$  est atteint en un nombre constant de pas de temps). Ainsi, l'énergie dissipée dans la rupture et le temps à rupture tendent vers 0 pour un maillage infiniment fin. Ce n'est pas physiquement acceptable puisque cela suppose une vitesse infinie de croissance des microfissures et des cavités.

Le problème de localisation est donc clairement identifié dans le cadre de la MEF. En ce qui concerne les méthodes sans maillage, il est parfois mis en avant que leur caractère non local permet d'éviter ce problème. Cependant, la figure 2.9(b) montre que la méthode SPH souffre également du problème de localisation. Le calcul correspond à l'endommagement d'une plaque pré-fissurée sur la moitié de sa longueur et soumise à de la traction. Il est clair que l'endommagement est artificiellement localisé dans une bande d'une particule SPH de largeur.



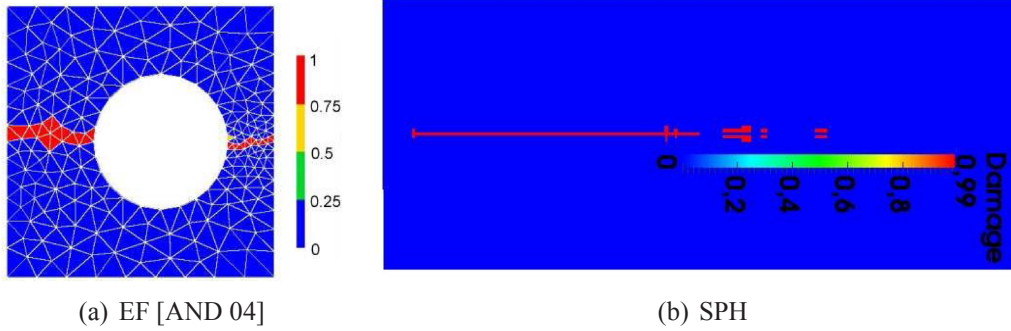


FIGURE 2.9: Illustration du problème de localisation de l'endommagement.

### 2.3.3.2 Étude mathématique du problème

Afin de trouver la source du problème, un modèle de poutre a été étudié analytiquement en dimension 1 dans [BAZ 85] et [NEE 88]. La loi de comportement suivie par le matériau est schématisée figure 2.10 : le matériau est durcissant de module  $E_1 > 0$  jusqu'à une déformation seuil  $\epsilon_{lim}$  puis adoucissant de module  $E_2 < 0$ . L'équilibre de la poutre au cours du temps s'écrit :

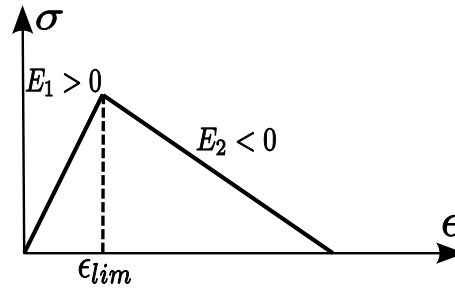


FIGURE 2.10: Loi de comportement de la poutre test.

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.67)$$

Les contraintes sont obtenues par l'intermédiaire des déformations :

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.68)$$

et de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= E_1 \epsilon(x, t) \quad \text{si } \epsilon(x, t) \leq \epsilon_{lim} \\ \sigma(x, t) &= \sigma_{max} + E_2 (\epsilon(x, t) - \epsilon_{lim}) \quad \text{si } \epsilon(x, t) \geq \epsilon_{lim} \end{aligned} \quad (2.69)$$

avec  $\sigma_{max} = E_1 \epsilon_{lim}$ . Les équations 2.67, 2.68 et 2.69 peuvent se réécrire :

$$\frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.70)$$

avec  $\kappa = E_1$  si  $\varepsilon \leq \varepsilon_{lim}$  et  $\kappa = E_2$  sinon. Dans le premier cas, nous avons une équation hyperbolique : le problème est alors bien posé et admet une solution réelle. Il s'agit de l'équation de propagation d'une onde sans atténuation, la vitesse de l'onde étant  $\sqrt{\kappa/\rho}$ . Dans le deuxième cas, l'équation différentielle 2.70 est elliptique. Le problème est mal posé car il n'admet pas de solution réelle. La vitesse de propagation de l'onde devient alors complexe. Le premier élément du maillage qui adopte un comportement adoucissant ne transmet donc pas les déformations aux éléments voisins ce qui provoque les problèmes énumérés dans la section 2.3.3.1. Les solutions apportées par la communauté pour résoudre le problème consistent à préserver le caractère hyperbolique des équations du problème.

### 2.3.3.3 Limiteurs de localisation

La majorité des solutions consistent à traiter de manière non locale l'endommagement en introduisant une longueur ou un temps caractéristique qui traduit l'interaction d'une entité du maillage avec les autres. On parle alors de modèle régularisé et l'outil mathématique permettant la régularisation est appelé un limiteur de localisation.

**Régularisation en espace** Ce type de solution introduit une longueur caractéristique  $l_c$  qui définit le voisinage d'une entité du maillage à partir duquel une grandeur du modèle est régularisée. Notant  $a$  la grandeur non régularisée, l'objectif est d'obtenir à partir des valeurs des éléments voisins, une valeur régularisée, c'est à dire moyennée, notée  $a_r$ . On écrit alors :

$$a_r(\vec{x}) = \frac{\int_{\Omega} a(\vec{y}) w(\vec{y} - \vec{x}) d\Omega}{\int_{\Omega} w(\vec{y} - \vec{x}) d\Omega} \quad (2.71)$$

La longueur caractéristique  $l_c$  est alors introduite dans la fonction poids  $w$  : les points situés à une distance supérieure à une valeur de l'ordre de grandeur de  $l_c$  se voient attribués un poids nul. Cette famille de méthode est attractive dans le cas des SPH puisque la fonction poids  $w$  est déjà un élément important du modèle. Les différentes méthodes proposées dans la littérature se distinguent par la manière de calculer l'intégrale 2.71 :

- les modèles non locaux [BAZ 88] évaluent l'intégrale numériquement, ce qui conduit à un calcul souvent coûteux,
- les modèles à second gradient [AIF 84], [DEB 92] évaluent l'intégrale 2.71 analytiquement. L'intégrale est approchée pour un milieu infini par l'intermédiaire d'un développement limité d'ordre 2 de  $a(\vec{y})$  autour de  $\vec{x}$ . On aboutit à une relation faisant intervenir le second gradient de la variable  $a$  :

$$a_r(\vec{x}) = a(\vec{x}) + c_r \nabla^2(a(\vec{x})) \quad (2.72)$$

avec  $c_r$  un paramètre qui a la dimension d'une longueur au carré, la longueur étant de l'ordre de grandeur de  $l_c$ . On parle de modèle à second gradient explicite. La formule 2.72 nécessite le calcul de la dérivée seconde de la grandeur  $a$ , ce qui parfois n'est pas possible si les fonctions d'approximation utilisées dans le modèle

ne sont pas assez régulières. Pour contourner le problème, il est possible d'utiliser une version implicite de l'équation 2.72, en remplaçant  $\nabla^2(a(\vec{x}))$  par  $\nabla^2(a_r(\vec{x}))$ , ce qui est juste dans le cas d'un développement limité d'ordre 2. Le calcul du second gradient n'est plus nécessaire, mais il faut maintenant imposer des conditions aux limites sur le champ  $a_r$  pour résoudre l'équation.

Différentes grandeurs peuvent être choisies pour  $a$  : déformation équivalente, déformation plastique cumulée, ... Dans le cas de la plasticité, si  $a$  est la déformation plastique cumulée, cela implique que les contraintes dépendent du second gradient des déformations plastiques, ce que certains auteurs justifient par des considérations microscopiques.

**Régularisation en temps** C'est une alternative à la régularisation en espace décrite précédemment. Généralement la grandeur  $a$  est alors directement l'endommagement. Nous avons vu au paragraphe 2.3.3.1 que le problème de localisation suppose que le taux de croissance de l'endommagement tend vers l'infini lorsque la discrétisation en temps et/ou espace tend vers 0, ce qui n'est pas physique. La régularisation en temps consiste à limiter le taux de croissance de l'endommagement par une valeur finie et physique en introduisant un temps caractéristique  $\tau_c$  dans le modèle [LAD 91], [LAD 92]. L'une des manières les plus courantes d'imposer cette limitation est l'utilisation de l'équation suivante [ALL 97] :

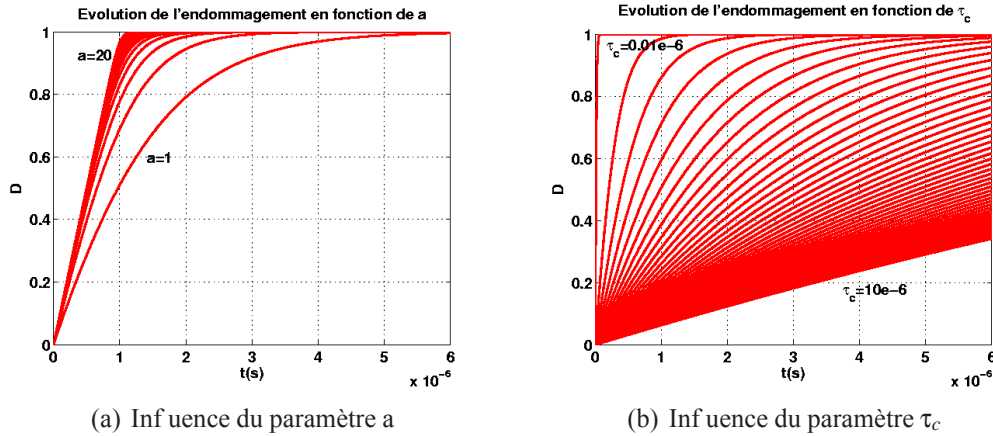
$$\begin{aligned} & \text{si } D \leq D_c \\ & \quad \dot{D}_r = \frac{1}{\tau_c} \left( 1 - e^{-a(D-D_r)} \right) \\ & \text{sinon} \\ & \quad \dot{D}_r = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$D$  est l'endommagement fourni par la loi d'évolution de l'endommagement et  $D_r$  est l'endommagement régularisé. En plus du temps caractéristique  $\tau_c$ , un paramètre  $a$  fait son apparition. L'équation 2.73 montre que :

- $\dot{D}_r$  est borné par  $1/\tau_c$ , qui est représentatif de la vitesse maximale de croissance des défauts du matériau,
- le temps à rupture est borné par la valeur  $D_c \tau_c$  qui est indépendante du maillage,
- pour des chargements très lents, nous avons bien  $D_r = D$ .

La figure 2.11 montre l'influence des paramètres  $a$  et  $\tau_c$  sur l'évolution de l'endommagement. Pour cela, on étudie un cas très simple pour lequel l'endommagement évolue brutalement de 0 à 1 à  $t = 0$  s. Sur la figure 2.11(a),  $a$  varie avec  $\tau_c = 1e - 6$  s. On remarque que le taux d'endommagement augmente avec  $a$ . On vérifie que le temps minimum à rupture est bien  $D_c \tau_c = 1e - 6$  s dans cet exemple. Sur la figure 2.11(b),  $\tau_c$  varie alors que  $a = 1$ . Lorsque  $\tau_c$  tend vers 0, le modèle à endommagement retardé tend vers le modèle initial sans régularisation.

**Lien entre les deux approches** Dans [SUF 04], l'auteur établit une relation entre la régularisation en espace et en temps. En se plaçant dans le cas simple d'une poutre



**FIGURE 2.11:** Influence des paramètres  $a$  et  $\tau_c$  sur l'évolution de l'endommagement.

élastique endommageable en dimension 1 et en utilisant un modèle de régularisation en temps simplifié, l'auteur aboutit à la relation analytique suivante :

$$l_c = c\tau_c \ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{lim}}\right) \quad (2.74)$$

avec

$$E\varepsilon_s < \sigma_{lim} < E\left(\varepsilon_s^e + 3\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{a}\right) \quad (2.75)$$

$l_c$  est la longueur caractéristique de la zone endommagée,  $\Delta\sigma$  le saut de contrainte vu par le matériau et  $c$  la vitesse du son dans celui-ci.  $\sigma_{lim}$  est un paramètre matériau représentant sa capacité à résister à l'endommagement,  $\varepsilon_s$  et  $\varepsilon_c$  sont les déformations équivalentes seuil et critique. Il est donc possible d'obtenir un encadrement  $l_c^{min} < l_c < l_c^{max}$  de la longueur caractéristique obtenue avec la régularisation en temps. On remarque que  $l_c$  dépend du problème traité via le saut de contrainte  $\Delta\sigma$ . Ce dernier peut être estimé par une étude préalable du problème via un modèle analytique simple ou un calcul élastique permettant d'obtenir un ordre de grandeur de la sollicitation. On peut ainsi choisir les valeurs de  $a$  et  $\tau_c$ .

*Remarque : l'utilisation de l'équation 2.74 n'est pas aisée. Elle a été obtenue pour un modèle élastique linéaire endommageable et son extension à la plasticité ou viscoplasticité n'est pas directe. Dans ces conditions, il arrive d'obtenir des valeurs de longueur caractéristique négatives : cela peut indiquer que la sollicitation n'est pas suffisante pour provoquer la ruine de la structure. Si la rupture a lieu, elle sera alors due aux allers et retours de l'onde de choc dans la structure. L'auteur de [SUF 04] fournit des conseils quant à l'utilisation de cette formule : il estime que l'on peut se conformer aux valeurs  $l_c^{min}$  et  $l_c^{max}$  si  $\Delta l_c = l_c^{max} - l_c^{min}$  n'est pas grand devant les autres dimensions du problème et si  $l_c^{min}$  n'est pas négatif.*

### 2.3.3.4 Démarche d'utilisation et choix

La longueur caractéristique  $l_c$  d'une zone endommagée est une grandeur physique qui ne dépend que du matériau utilisé : elle correspond classiquement à trois fois la taille des entités caractéristiques du matériau (agrégats d'un béton, cristaux d'un métal). Il faut alors utiliser une discrétisation de taille  $\Delta x < l_c$ , de sorte que la zone endommagée soit constituée de plusieurs entités. L'utilisation d'une régularisation en espace est directe, tandis que pour la régularisation en temps, la détermination des paramètres  $a$  et  $\tau_c$  passe nécessairement par l'utilisation de l'équation 2.74 et donc l'approximation du saut de contrainte  $\Delta\sigma$ . En pratique, cette démarche conduit souvent à des maillages très fins et donc inopérants. On peut alors augmenter la longueur  $l_c$  artificiellement, de sorte que  $l_c > \Delta x$ ,  $\Delta x$  étant fixé par la puissance des moyens de calculs disponibles. Cette démarche est une approximation couramment utilisée qui introduit une erreur dans la taille des zones endommagées mais en contre-partie permet d'éviter le phénomène de localisation numérique.

Le choix d'une régularisation en espace semble préférable du point de vue de la simplicité. Cependant, d'un point de vue numérique, il n'est pas optimal puisqu'il suppose la connaissance de la grandeur  $a$  à régulariser simultanément sur l'ensemble de la discrétisation. Cette condition remet alors en cause l'architecture de nombreux codes de calculs qui fonctionnent en utilisant une seule boucle principale sur les éléments au cours de laquelle l'ensemble des calculs est réalisé. Connaître la grandeur  $a$  simultanément sur l'ensemble de la discrétisation nécessiterait de parcourir deux fois tous les éléments, avec des conséquences négatives sur les performances de calcul. C'est pourquoi la régularisation en temps est souvent préférée dans le cadre des éléments fins. C'est également celle que nous allons utiliser ici.

### 2.3.4 Couplage loi de comportement - loi d'endommagement

Le comportement d'un matériau résulte désormais du couplage entre sa loi de comportement et de sa loi d'endommagement. Trois couplages ont été implémentés dans Europlexus pour l'élément SPHC :

- comportement fragile linéaire élastique : la loi d'endommagement Mazars pour les matériaux fragiles présentée dans le paragraphe 2.3.2.2 est associée à la surface seuil du même nom ainsi qu'à une loi de comportement linéaire élastique isotrope. La discrétisation de ce couplage est directe et n'est pas présentée ici.
- comportement plastique ductile : la loi d'endommagement du paragraphe 2.3.2.2 pour les matériaux ductiles est couplée à une loi de comportement plastique de von-Mises isotrope à écrouissage isotrope. Une implémentation de ce couplage est proposée dans [SUF 04], entre autres pour des coques pour lesquelles l'intégration est effectuée dans l'épaisseur. Cette implémentation est reprise ici et adaptée au cas des coques avec un modèle global. Le détail de cette implémentation est donnée dans la suite.
- comportement plastique ductile dépendant de la vitesse de déformation : il s'agit

du couplage précédent dans lequel la dépendance à la vitesse de déformation est introduite en remplaçant la loi de von-Mises par la loi de plasticité de Johnson-Cook dont la formulation sera rappelée à cette occasion.

### 2.3.4.1 Loi d'endommagement ductile couplée à la plasticité de von-Mises

Dans un premier temps, nous rappelons l'ensemble des équations qui interviennent dans la modélisation du comportement du matériau, puis nous présentons leur discrétisation dans le cadre de la méthode SPHC et leur résolution.

**Rappel des équations du modèle** Nous rappelons ici les équations de la plasticité de von-Mises isotrope à écrouissage isotrope, les équations de l'endommagement plastique ductile et les modifications dues au couplage des deux modèles. Pour une description précise de la plasticité de von-Mises, on pourra se reporter au paragraphe 2.2.4.

La fonction seuil de la plasticité de von-Mises en présence d'un endommagement régularisé  $D_r$  s'écrit :

$$f_p(\vec{\sigma}, D_r, \lambda) = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D_r} - \sigma_y^0 - R(\lambda) = 0 \quad (2.76)$$

où  $\sigma_y^0$  est la limite d'élasticité initiale,  $\sigma_y = \sigma_y^0 + R(\lambda)$  la limite d'élasticité écrouie,  $\lambda$  le multiplicateur plastique,  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente au sens de von-Mises et  $D_r$  l'endommagement régularisé. La loi d'écoulement permet de définir le taux de déformation plastique  $\dot{\vec{\epsilon}}_p$  et le taux de déformation plastique cumulé  $\dot{p}$  :

$$\dot{\vec{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\sigma}} \quad (2.77)$$

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D_r} \quad (2.78)$$

A ces équations s'ajoutent celle issue de l'hypothèse de décomposition additive du tenseur des déformations en une partie élastique et une partie plastique et celle donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_e + \vec{\epsilon}_p \quad (2.79)$$

$$\vec{\sigma} = (1 - D_r) \underline{\underline{H}} \vec{\epsilon}_e \quad (2.80)$$

Enfin, les équations de la loi d'endommagement associée à l'effet retard sont :

$$\begin{aligned} & \text{si } \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] p \geq \varepsilon_p^s \\ & \dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \dot{p} \\ & \text{sinon} \\ & \dot{D} = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} & \text{si } D \leq D_c \\ & \dot{D}_r = \frac{1}{\tau_c} \left[ 1 - e^{-a(D-D_r)} \right] \\ & \text{sinon} \\ & \dot{D}_r = 0 \end{aligned}$$

**Discrétisation temporelle et spatiale** Les équations précédentes, qui font intervenir des grandeurs variables dans l'espace et le temps, sont discrétisées dans le cadre des SPHC et de la dynamique explicite. Considérant la discrétisation de la coque par un ensemble de points, nous traitons désormais les grandeurs en un point donné de l'espace correspondant à un nœud du maillage. La distinction entre la variable et sa valeur en un point n'est pas faite dans la notation pour ne pas alourdir les écritures.

Comme vu au paragraphe 2.2.4, nous traitons les non-linéarités dues à la plasticité via un modèle global dans l'épaisseur. Nous reprenons ici les mêmes équations et notations. Rappelons simplement que l'on écrit :

$$\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{eq}^m)^2 + \alpha^2 (\sigma_{eq}^b)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sigma_{eq}^b \sigma_{eq}^m = \underline{\underline{\sigma}}_g^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\sigma}}_g \quad (2.82)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de participation des termes de flexion. Les termes de cisaillement transverse n'interviennent pas dans cette expression.  $\underline{\underline{F}}$  un tenseur d'ordre 2 dont l'expression a été donnée paragraphe 2.2.4. La fonction seuil de la plasticité s'écrit donc :

$$f_p(\underline{\underline{\sigma}}, D_r, \lambda) = \frac{\sqrt{\underline{\underline{\sigma}}_g^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\sigma}}_g}}{1 - D_r} - \sigma_y^0 - R(\lambda) = 0 \quad (2.83)$$

Les équations du problème sont ensuite utilisées sous une forme incrémentale :

- décomposition additive des déformations :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_g = \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_g^e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_g^p \quad (2.84)$$

- loi de Hooke :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}_g = (1 - D_r) \underline{\underline{H}} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_g^e - \Delta D_r \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\varepsilon}}_g^e = (1 - D_r) \underline{\underline{H}} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_g^e - \Delta D_r \frac{\underline{\underline{\sigma}}_g}{1 - D_r} \quad (2.85)$$

car

$$\underline{\underline{\sigma}}_g = (1 - D_r) \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\varepsilon}}_g^e \quad (2.86)$$

- écoulement plastique :

$$\Delta \vec{\varepsilon}_p = \Delta \lambda \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\sigma}_g} = \Delta \lambda \frac{\underline{\underline{F}} \vec{\sigma}_g}{(1 - D_r) \sigma_{eq}} \quad (2.87)$$

car, pour un vecteur  $\vec{a}$  quelconque, nous avons

$$\frac{\partial \vec{a}^T \underline{\underline{F}} \vec{a}}{\partial \vec{a}} = 2 \underline{\underline{F}} \vec{a}$$

si  $\underline{\underline{F}}$  est symétrique, ce qui est le cas ici. De plus :

$$\Delta p = \frac{\Delta \lambda}{1 - D_r} \quad (2.88)$$

- loi d'endommagement :

$$\begin{aligned} &\text{si } \left[ \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} p \geq \varepsilon_p^s \\ &\Delta D = \frac{D_c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta p \\ &\text{sinon} \\ &\Delta D = 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

- effet retard :

$$\begin{aligned} &\text{si } D \leq D_c \\ &\Delta D_r = \Delta t \frac{1}{\tau_c} \left[ 1 - e^{-a(D - D_r)} \right] \\ &\text{sinon} \\ &\Delta D_r = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

Par commodité pour la suite, nous allons noter :

$$\Delta D_r = -\Delta \lambda \frac{\partial \hat{\varphi}_D^*}{\partial Y} \quad (2.91)$$

$\hat{\varphi}_D^*$  est le potentiel de dissipation par endommagement dont dérive  $D_r$ . Contrairement à  $\varphi_D^*$  le potentiel associé à  $D$ , l'expression de  $\hat{\varphi}_D^*$  n'est pas directe. Nous nous contentons ici de supposer son existence et ne donnons pas son expression.

**Résolution** Le problème est désormais le suivant : connaissant les grandeurs à un instant  $t_n$  en un nœud de la discrétisation, il faut déterminer les grandeurs à l'instant  $t_n + \Delta t$  au même nœud connaissant l'incrément des déformations totale  $\Delta \vec{\varepsilon}$  entre  $t_n$  et  $t_n + \Delta t$  fourni par le schéma explicite. La majeure partie du problème consiste en la détermination de la part des déformations plastiques contenues dans  $\Delta \vec{\varepsilon}$ , c'est à dire la détermination du multiplicateur plastique  $\lambda$ .  $\lambda$  est approché par une méthode itérative prenant pour solution



initiale les grandeurs obtenues en faisant l'hypothèse que seules les variables élastiques évoluent. C'est l'estimation élastique, dont les grandeurs associées seront marquée d'un asterix \*. Les grandeurs à un instant  $t_n$  seront notées avec un exposant  $(n)$ . L'estimation élastique de l'incrément de contraintes est :

$$\Delta \vec{\sigma}_g^{*} = (1 - D_r^n) \underline{H} \Delta \vec{\varepsilon}_g \quad (2.92)$$

car

$$\Delta \vec{\varepsilon}_g^{e*} = \Delta \vec{\varepsilon}_g \text{ et } \Delta D_r = 0 \quad (2.93)$$

Si  $f_p^{*(n+1)}(\vec{\sigma}^{*(n+1)}, D_r^{*(n+1)}, \lambda^{*(n+1)}) \leq 0$ , la plasticité n'a effectivement pas évolué au point considéré entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Dans ce cas, les grandeurs réelles sont égales aux grandeurs de l'estimation élastique :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} = \vec{\sigma}_g^{n} + \Delta \vec{\sigma}_g^{*} \quad (2.94)$$

Dans le cas contraire, il faut déterminer l'état plastique :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} + \Delta \vec{\sigma}_g \quad (2.95)$$

Pour cela, nous devons déterminer  $\Delta \lambda$  de sorte que la fonction seuil de la plasticité soit vérifiée : s'agissant d'un processus itératif, elle ne sera vérifiée qu'à une précision près notée  $e$ . L'algorithme choisi est l'algorithme regula falsi (ou de la corde) avec pour conditions initiales les grandeurs données par l'estimation élastique. Pour accélérer la convergence, nous effectuons auparavant une unique itération de Newton-Raphson qui fournit la valeur  $\Delta \lambda_{(1)}$  qui sera une bonne approximation de  $\Delta \lambda$ . Pour cela, nous linéarisons au premier ordre  $f_p^{n+1}$  autour des valeurs connues à l'itération 0. L'équation à vérifier étant  $f_p^{n+1} = 0$ , nous cherchons ensuite la valeur  $\Delta \lambda_{(1)}$  de  $\Delta \lambda$  qui annule ce développement au premier ordre, soit :

$$\begin{aligned} f_p(\vec{\sigma}_{(1)}^{n+1}, D_{r(1)}^{n+1}, \lambda_{(1)}^{n+1}) &= f_p(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\sigma}}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) \cdot \Delta \vec{\sigma}_g \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial \lambda}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) \Delta \lambda \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial D_r}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) \Delta D_r = 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\sigma}}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) &= \frac{\underline{F} \vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}}{[1 - D_{r(0)}^{n+1}] \sigma_{eq(0)}^{n+1}} \\ \frac{\partial f_p}{\partial \lambda}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) &= - \frac{\partial R(\lambda_{(0)}^{n+1})}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_p}{\partial D_r}(\vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) &= \frac{\sigma_{eq(0)}^{n+1}}{[1 - D_{r(0)}^{n+1}]^2} \end{aligned} \right. \quad (2.97)$$

Afin d'avoir une équation qui ne fasse intervenir que  $\Delta\lambda$ , exprimons  $\Delta\vec{\sigma}$  et  $\Delta D_r$  en fonction de  $\Delta\lambda$  :

$$\Delta\vec{\sigma} = -(1 - D_{r(0)}^{n+1})\underline{\underline{H}}\Delta\varepsilon_g^{\vec{p}(n+1)} - \Delta D_{r(0)} \frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}}{1 - D_{r(0)}^{n+1}} \quad (2.98)$$

car

$$\Delta\vec{\varepsilon}_g = \Delta\varepsilon_g^e + \Delta\varepsilon_g^p = 0 \quad (2.99)$$

puisque l'incrément de déformation du système plastique doit être nul, la totalité des déformations ayant déjà été prises en compte dans l'estimation élastique. Nous remplaçons respectivement  $\Delta\varepsilon_g^p$  et  $\Delta D_r$  dans l'équation 2.98 par leurs expressions 2.87 et 2.91. Nous obtenons :

$$\Delta\vec{\sigma}_g = \Delta\lambda \left[ \frac{\partial\varphi_D^*}{\partial Y} \frac{\vec{\sigma}_g^{\vec{n}+1}}{1 - D_r^{n+1}} - \underline{\underline{H}} \frac{F\vec{\sigma}_g^{\vec{n}+1}}{\sigma_{eq}^{n+1}} \right] \quad (2.100)$$

Finalement, en introduisant les équations 2.100 et 2.91 dans 2.96 :

$$f_p(\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) = \Delta\lambda \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\sigma_{eq(0)}^{n+1}}{[1 - D_{r(0)}^{n+1}]^2} \frac{\partial\varphi_D^*}{\partial Y} \right) - \Delta\lambda \frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{(n+1)T}} \underline{\underline{F}}^T}{[1 - D_{r(0)}^{n+1}] \sigma_{eq(0)}^{n+1}} \left( \frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}}{1 - D_{r(0)}^{n+1}} \frac{\partial\varphi_D^*}{\partial Y} - \frac{\underline{\underline{H}}F\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}}{\sigma_{eq(0)}^{n+1}} \right) \quad (2.101)$$

soit, en remarquant que  $\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{(n+1)T}} \underline{\underline{F}}^T \vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1} = (\sigma_{eq(0)}^{n+1})^2$  :

$$f_p(\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1}) = \Delta\lambda \left( \frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{(n+1)T}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{H}}F\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}}{(1 - D_{r(0)}^{n+1}) (\sigma_{eq(0)}^{n+1})^2} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \quad (2.102)$$

*Remarque : il est intéressant de noter que la loi d'endommagement n'intervient pas, puisque les termes en  $\partial\varphi_D^* / \partial Y$  se simplifient.*

Ainsi, l'itération de Newton-Raphson permet de déterminer  $\Delta\lambda_{(1)}$  :

$$\Delta\lambda_{(1)} = \frac{f_p(\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1})}{\frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{(n+1)T}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{H}}F\vec{\sigma}_{g(0)}^{\vec{n}+1}}{(1 - D_{r(0)}^{n+1}) (\sigma_{eq(0)}^{n+1})^2} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}} \quad (2.103)$$

L'algorithme de la corde est ensuite appliqué jusqu'à convergence. Les détails de cet algorithme sont donnés dans l'annexe D qui résume les différentes étapes de la résolution.

*Remarque : l'épaisseur  $e$  de la coque est autorisée à varier pour prendre en compte l'incompressibilité plastique en contraintes planes.*

### 2.3.4.2 Loi d'endommagement ductile couplée à la plasticité de Johnson-Cook : influence de la vitesse de déformation

L'influence de la vitesse de déformation sur le comportement d'un matériau est parfois non négligeable, en particulier pour les problèmes d'impact :  $\dot{\epsilon}$  peut alors atteindre  $10e4$  voir  $10e5 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement de Johnson-Cook est un outil simple et répandu pour modéliser de tels comportements visco-plastiques [JOH 83] tout en incluant des effets thermiques. Elle suppose que le taux de déformation n'influence que la limite d'élasticité du matériau et que tous les autres paramètres (module d'Young, coefficient de Poisson, etc) sont constants. Cette est une hypothèse discutable mais simple. L'utilisation de cette loi est motivée par le fait qu'elle est déjà identifiée pour de nombreux matériaux. Son expression est rapidement rappelée, puis son intégration dans l'algorithme de plasticité décrite.

**Rappel sur la loi de Johnson-Cook** La limite d'élasticité du matériau est décrite par :

$$\begin{cases} \sigma_y(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T) = (A_{JC} + B_{JC}(\epsilon_p)^{n_{JC}}) \left( 1 + C_{JC} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) (1 - \Theta^{m_{JC}}) \\ \Theta^{m_{JC}} = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \end{cases} \quad (2.104)$$

où  $\epsilon_p$  et  $\dot{\epsilon}_p$  sont respectivement une mesure des déformations plastiques et du taux de déformations plastiques.  $A_{JC}$ ,  $B_{JC}$  et  $n_{JC}$  sont trois paramètres qui décrivent l'influence de la plasticité,  $C_{JC}$  décrit l'influence du taux de déformation plastique et  $\dot{\epsilon}_0$  est le taux de déformation en dessous duquel le matériau n'est pas influencé par  $\dot{\epsilon}_p$ . La partie thermique comprend  $T_0$ , la température initiale du matériau,  $T_m$  sa température de fusion et  $m_{JC}$  une constante. Nous supposons ici les effets thermiques.

Il est intéressant de noter que cette équation suppose une dépendance linéaire du comportement à  $\ln(\dot{\epsilon}_p)$ , ce qui n'est pas le cas de tous les matériaux. Des auteurs ont modifié cette loi afin de pouvoir traiter facilement le cas d'un matériau présentant une dépendance non linéaire à  $\ln(\dot{\epsilon}_p)$ . On trouve par exemple [JOH 06] :

$$\begin{cases} \sigma_y(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T) = (A_{JC} + B_{JC}(\epsilon_p)^{n_{JC}}) \left( 1 + C_{1JC} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right) + C_{2JC} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{C_{3JC}} \right) (1 - \Theta^{m_{JC}}) \\ \Theta^{m_{JC}} = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \end{cases} \quad (2.105)$$

où  $C_{1JC}$ ,  $C_{2JC}$  et  $C_{3JC}$  sont des paramètres matériau supplémentaires.

Cependant, on préfère souvent la solution simple qui consiste à linéariser le comportement sur une plage de taux de déformations : on identifie alors plusieurs jeux de paramètres ( $A_{JC}, B_{JC}, n_{JC}, C_{JC}, \dot{\epsilon}_0$ ) que l'on choisit suivant l'ordre de grandeur du taux de déformation associé à la sollicitation qui nous intéresse.

**Modification de l'algorithme de plasticité** Les modifications de l'algorithme de l'annexe D sont mineures car la différence réside uniquement dans l'expression de la limite d'élasticité. Au début du pas la vitesse de déformation est approchée par :

$$\widehat{v} = (1 - \alpha)v^n + \alpha v^{n+1} \quad (2.106)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de mélange. Nous choisissons de prendre  $\alpha = 0.5$ , ce qui signifie que la valeur du taux de déformation est lissée sur deux pas de temps : cela permet d'éviter un écrouissage excessif et artificiel à un pas de temps donné, lors de contacts par exemple. Ce choix n'influence cependant pas beaucoup les résultats.  $v_n$  est défini par :

$$v^n = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\dot{\epsilon}_{xx}^n)^2 + (\dot{\epsilon}_{yy}^n)^2 + \frac{1}{2} ((\dot{\epsilon}_{xy}^n)^2 + (\dot{\epsilon}_{xz}^n)^2 + (\dot{\epsilon}_{yz}^n)^2) \right]} \quad (2.107)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^n = \Delta \epsilon_{ij}^n / \Delta t$  sont les composantes du tenseur taux de déformation,  $\Delta \vec{\epsilon}^n$  étant l'incrément total de déformation entre les pas  $n - 1$  et  $n$ . Une erreur est donc commise ici, puisque l'on approxime le taux de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  de l'équation 2.104 par le taux de déformation totale. Cela permet cependant de simplifier l'introduction du taux de déformation dans la théorie de l'endommagement.

*Remarque : en toute rigueur,  $\Delta \epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij}^m \pm |z| \Delta \epsilon_{ij}^f$  pour un point de la coque de coordonnées  $z$  dans la direction de la surface moyenne et pour  $i=1,2$  et  $j=1,2$ . Nous pouvons choisir de prendre les valeurs des incréments de déformation de flexion sur la peau de la coque :  $\Delta \epsilon_{ij} = \max(\Delta \epsilon_{ij}^m \pm e/2 \Delta \epsilon_{ij}^f)$ , ou bien trouver une manière de réutiliser le coefficient de participation de la flexion  $\psi_f$  défini dans F, voir l'équation 2.83. Par simplicité, nous définissons  $\Delta \epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij}^m$ , ce qui signifie que seules les parties membranes et cisaillements transverses interviennent dans le calcul du taux de déformation. C'est un choix discutable, dont les conséquences n'ont pas été évaluées.*

La limite élastique est donc donnée par l'équation :

$$\sigma_y = (A_{JC} + B_{JC} \lambda^{n_{JC}}) \left( 1 + C_{JC} \ln \left( \frac{\widehat{v}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (2.108)$$

et on prend :

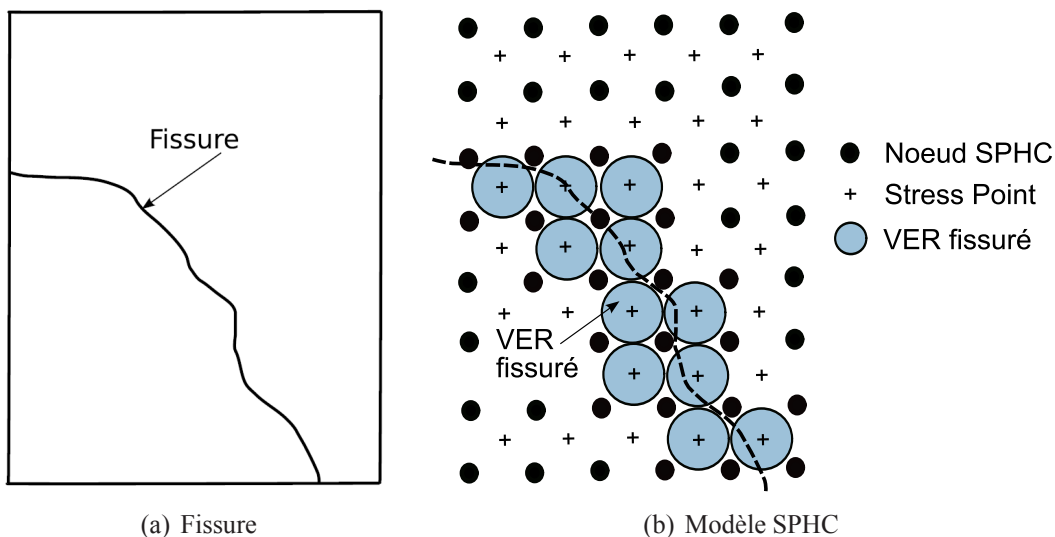
$$\frac{\sigma_y}{\partial \lambda} = n_{JC} B_{JC} \lambda^{n_{JC}-1} \left( 1 + C_{JC} \ln \left( \frac{\widehat{v}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (2.109)$$

Les modifications de l'algorithme de plasticité/endommagement interviennent à chaque fois que l'on fait un test sur la fonction seuil de plasticité, c'est à dire après l'estimation élastique (étape 3) et lors de l'actualisation des variables après une itération de l'incrément de multiplicateur plastique (étape 6). L'épaisseur de la coque est également autorisée à varier pour prendre en compte l'incompressibilité plastique en contraintes planes.

### 2.3.5 Transition endommagement-fissuration dans les SPHC

Les éléments de la section précédente permettent de modéliser le passage d'un matériau sain à un matériau fissuré, en utilisant une variable d'endommagement  $D$ . Cette variable est calculée sur les SP de l'élément SPHC par l'application d'un critère et d'une loi d'endommagement couplés à la loi de comportement du matériau. La rupture du VER porté par le SP se produit lorsque l'endommagement atteint une valeur critique  $D_c$ . Nous définissons donc dans cette approche une fissure comme l'ensemble continu des VER complètement endommagés, comme représenté sur la figure 2.12.

Cette représentation des fissures est proche de celle adoptée dans la méthode des « cracking particles » [BEL 03], [RAB 07d] : les fissures sont représentées par une succession de segments ou de surfaces portées par les SP qui ont atteint un critère de rupture. La différence avec notre méthode réside dans la prise en compte de l'anisotropie puisque les segments sont orientés dans la direction de la fissure. Cela pourrait être fait dans le présent modèle en utilisant des lois d'endommagement anisotropes.



**FIGURE 2.12:** Représentation d'une fissure par le modèle SPHC.

*Remarque : dans la suite, la méthode est illustrée en représentant un maillage régulier basé sur des quadrilatères. Elle est bien sûr applicable à un maillage quelconque qui serait construit via un diagramme de Voronoï.*

La méthode choisie, comme celle des « cracking particles », est avantageuse car elle ne fait pas intervenir de méthode de suivi de front de fissure, contrairement à la méthode des X-FEM [MOE 99] par exemple. Cette dernière utilise des levels sets, ce qui s'avère coûteux et complexe dans les cas de multi-fissuration, branchements de fissures ou fragmentation. En comparaison, ces phénomènes ne requièrent pas de traitement particuliers avec la présente méthode. Le prix à payer pour cette simplicité est une description moins précise des phénomènes de fissuration, qui pourra cependant être compensée par l'utili-

sation de discrétisations fines.

### 2.3.6 Introduction d'une discontinuité forte

Une fois qu'un VER est totalement endommagé, c'est à dire qu'une macrofissure apparaît, deux choix sont possibles que l'on retrouve traditionnellement dans la littérature. On peut estimer que la fissure se traduit simplement par une rigidité nulle dans la zone totalement endommagée. La fissure est alors définie comme étant la zone où l'endommagement critique est atteint et la rigidité du matériau nulle. Cette approche est avantageuse car elle ne nécessite aucun traitement des fissures et conserve l'aspect continu du modèle. Elle soulève cependant un certain nombre de problèmes numériques liés à la présence d'entités de rigidité nulle dans le maillage. L'autre possibilité est de considérer les fissures comme des discontinuités fortes, c'est à dire constituées de deux bords libres entre lesquels les interactions de la matière sont nulles. Cela nécessite un traitement plus complexe mais permet d'aborder efficacement les cas où les bords de la fissure s'éloignent l'un de l'autre de façon importante. Cependant, ce choix implique l'apparition de nombreux bords libres au cours du calcul alors que l'application des conditions associées est l'une des difficultés de la méthode MLSPH (voir paragraphe 2.2.3.2). Il s'agit donc de développer une méthode permettant l'apparition de discontinuités fortes au cours du calcul tout en préservant la stabilité du schéma, ce qui est une condition indispensable pour obtenir des simulations stables et efficaces. La méthode mise en place comporte quatre étapes :

- application des conditions de bords libres,
- suppression des liaisons coupant le VER fissuré,
- gestion des fragments,
- mise à jour des fonctions MLS.

#### 2.3.6.1 Identification des bords

Nous avons vu au paragraphe 2.2.3.2 que les bords doivent être identifiés avant d'être traités explicitement. Pour cela, on peut imaginer réutiliser la méthode décrite au paragraphe 2.2.3.2 qui est basée sur la mauvaise approximation par le noyau SPH classique du champ unité sur les nœuds de bord.  $\beta_i$  étant l'approximation du champ unité sur un nœud  $i$ , celui-ci est un bord si  $\beta_i < \beta_c$  où  $\beta_c$  une valeur seuil. Pour la détection des nœuds de bords à l'initialisation du calcul, l'expérience nous a permis de fixer  $\beta_c \sim 0.6$ . Cette méthode fonctionne bien dans ce contexte car le maillage est régulier. Testée sur le problème de fissuration, cette méthode s'est révélée inefficace car la valeur  $\beta_c$  ne peut plus être fixée correctement : elle varie selon la disposition des nœuds du maillage. La méthode conduit régulièrement à des faux négatifs ou positifs qui déstabilisent le calcul.

L'alternative trouvée à ce problème est simple. Rappelons que le maillage est construit sur un ensemble de nœuds placés au centre des cellules de Voronoï. Les SP sont eux placés au centre des triangles de Delaunay associés. La solution choisie est d'identifier automatiquement en tant que bord libre les sommets d'un triangle de Delaunay dont le SP

atteint l'endommagement critique, voir figure 2.13(b). Cela revient à discrétiser la fissure par les cellules de Voronoï, ce qui conduit automatiquement à l'obtention de bords libres conformes au maillage.

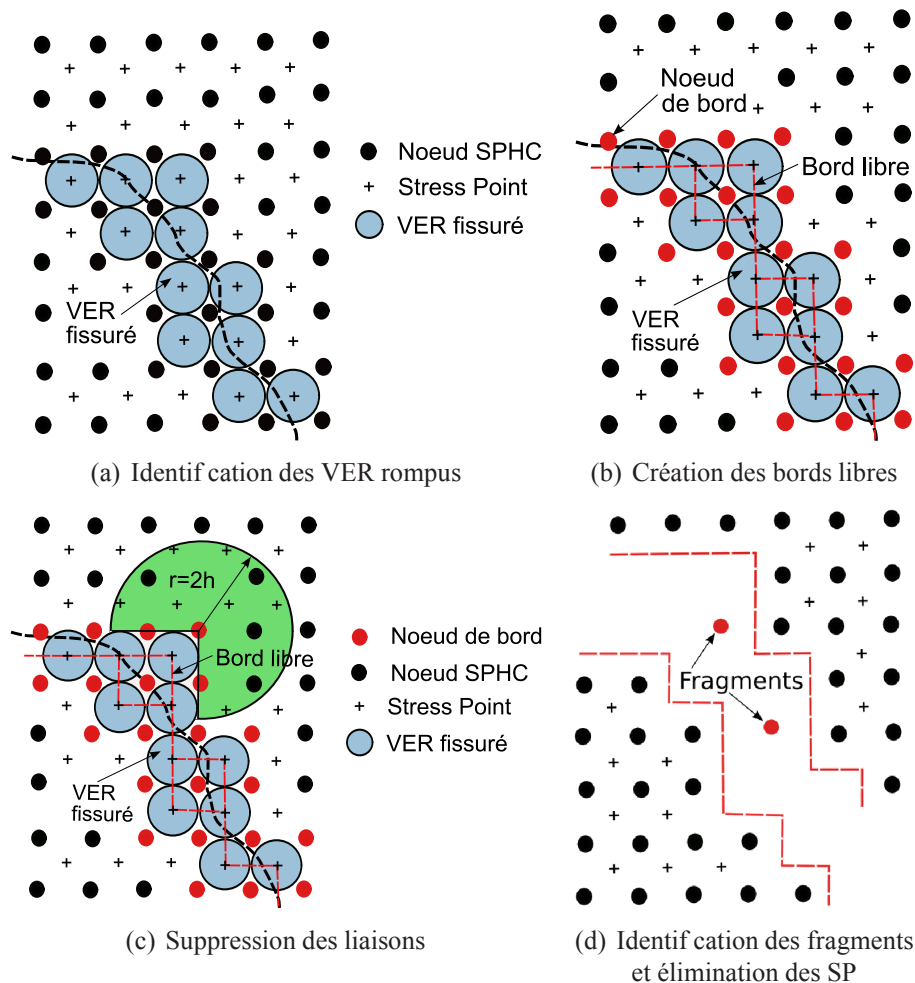


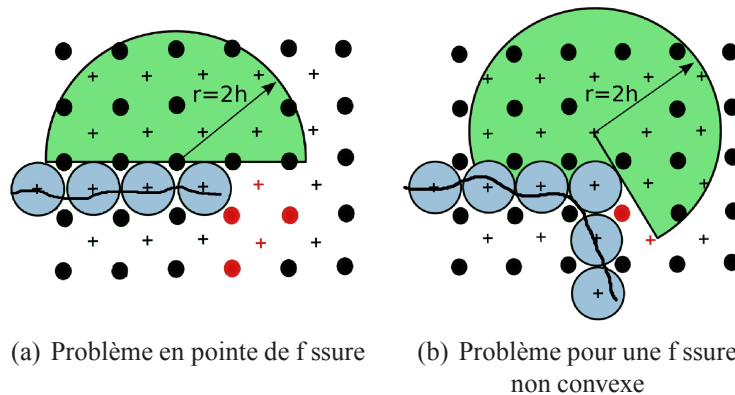
FIGURE 2.13: Discontinuités fortes dans le modèle SPHC.

### 2.3.6.2 Suppression des liaisons

Les interactions entre les particules SPH, nœuds ou SP, de part et d'autre d'une fissure sont supprimées par la méthode de visibilité décrite au paragraphe 1.5.1. La figure 2.13(c) donne alors la forme du support des fonctions poids. C'est une méthode rustique dont l'application présente des difficultés en pointe de fissure où des fractures artificielles peuvent se développer ainsi que dans le cas de fissures non convexes, voir la figure 2.14. Dans cette figure, les nœuds en rouge sont exclus artificiellement du voisinage de la particule courante, provoquant ainsi les difficultés évoquées.

Cependant, la méthode de visibilité semble suffisante pour les SPHC car nous n'avons

pas observé de fractures artificielles : l'utilisation des méthodes de diffraction ou de transparence [ORG 96] semble donc inutile dans notre cas.



**FIGURE 2.14:** Méthode de visibilité : éventuelles fractures artificielles.

### 2.3.6.3 Gestion des fragments

La figure 2.13(d) met en évidence la possibilité que certains points SPH se retrouvent avec un voisinage nul. Si le point est un SP, on choisit d'imposer  $D = D_c$ , ce qui revient à l'éliminer du calcul. Si le point est un nœud, il est transformé en ce qu'on appellera un fragment. En effet, contrairement aux SP, les nœuds représentent une certaine quantité de matière : ceux-ci ne peuvent donc pas être supprimés du calcul, sous peine de changer la masse de la structure au cours du calcul. Ils sont donc conservés dans le calcul mais n'interagissent plus avec les autres : leur mouvement est uniquement déterminé par l'énergie cinétique qu'ils possédaient au pas de temps où ils sont devenus des fragments et éventuellement les contacts qu'ils entretiennent avec d'autres parties du modèle. De cette manière, on conserve deux avantages principaux de la méthode SPH :

- les ruptures sont traitées sans perte de masse et donc d'énergie (contrairement aux méthodes d'érosion par exemple),
- les fragments peuvent éventuellement interagir avec d'autres éléments via le modèle de contact utilisé.

*Remarque : ce processus est en réalité itératif puisque la création de fragments peut modifier les voisinages de certains points et créer ainsi de nouveaux fragments. La possibilité de réduire l'ensemble du maillage SPHC à l'état de fragments existe. Cependant, cela n'a jamais été observé tant que l'on met en œuvre le processus avec précaution et que le schéma reste stable.*

### 2.3.6.4 Mise à jour et dégradation des fonctions MLS

Une fois les voisinages modifiés par l'introduction de discontinuités fortes, il est nécessaire de recalculer les fonction MLS. En dimension 2, un minimum de 6 nœuds



est nécessaire pour calculer des fonctions d'ordre 2 et de 3 nœuds pour des fonctions d'ordre 1. Pour assurer le bon déroulement des calculs, il est donc nécessaire de rendre possible une dégradation de l'ordre des fonctions MLS lorsque :

- le nombre de voisins est insuffisant,
- la matrice des moments  $\underline{\underline{A}}$ , définie en annexe A, n'est pas inversible. Cette condition n'est pas redondante avec la première car le nombre de points peut être suffisant alors que ceux-ci sont placés selon une configuration qui conduit à un système singulier (notamment lorsque les points sont alignés),
- la consistance des fonctions MLS n'est pas bonne. Dans certains cas, la matrice des moments est inversible, mais les fonctions obtenues ne sont pas consistantes pour autant. Cela arrive lorsque le conditionnement de  $\underline{\underline{A}}$  est mauvais mais pas suffisamment pour que la matrice soit singulière.

Si l'une des trois conditions précédentes n'est pas vérifiée, l'ordre des fonctions MLS est dégradé de  $n$  à  $n - 1$ .

Cela signifie que des fonctions MLS d'ordres différents cohabitent sur un même maillage, ce qui peut introduire une discontinuité dans le modèle comme souligné dans [DIL 99], [NGU 08]. En toute rigueur, il faudrait utiliser des fonctions de forme basées sur une méthode extrinsèque, voir le paragraphe 1.4.1.3, pour lesquelles il est possible de faire varier les fonctions de base sans introduire de discontinuité. Les fonctions MLS ont été conservées car la dégradation consiste seulement à passer de l'ordre 1 à l'ordre 0, ce qui en réalité ne pose pas de problème. En effet, comme souligné dans [NGU 08], certains auteurs utilisent des ordres différents pour les fonctions MLS avec des zones de transition dans lesquelles l'ordre est progressivement abaissé. Il faut également noter que la dégradation des fonction MLS conduit irrémédiablement à un modèle moins précis.

### 2.3.6.5 Complément : filtre de Balsara

L'application des conditions de bords libres et de la méthode de visibilité est effectuée en un seul pas de temps au moment de la rupture. C'est un processus assez brusque du point de vue numérique qui peut perturber le schéma de résolution en temps : cela peut se traduire par l'apparition d'oscillations hautes fréquences artificielles dans le maillage. C'est un phénomène comparable à ce qui est observé en EF lors de l'utilisation de la méthode de relâchement de nœuds [KOB 80], [BOU 99] pour simuler la propagation de fissures. Des améliorations ont été apportées à ces méthodes en relâchant les nœuds progressivement sur plusieurs pas de temps.

Dans le cas présent, l'utilisation de modèles d'endommagement permet d'abaisser progressivement la rigidité du maillage avant que la rupture ne se produise. Au moment de la rupture, la rigidité résiduelle est nulle ou quasiment nulle ce qui permet de minimiser l'introduction d'oscillations hautes fréquences. En conséquence, le risque de propagation d'instabilité dans le maillage et de divergence du calcul consécutivement à une rupture est faible. Ce risque n'est cependant pas nul et peut apparaître dans des contextes spécifiques au problème traité (faible adoucissement du matériau avant la rupture, impact violent). Il a donc été choisi d'appliquer un filtre de Balsara, tel que présenté au paragraphe 2.2.3.1, sur

les vitesses des nœuds sur les bords de la f ssure. Le paramètre  $\alpha$  est pris très petit :  $\alpha = 1\%$  de sorte à minimiser le risque de dissipation d'énergie tout en assurant une atténuation des éventuelles oscillations hautes fréquences parasites.

Le filtre est donc appliqué de manière préventive pour empêcher le développement d'instabilités sur les bords libres d'une f ssure. La solution fournie assure à l'utilisateur la stabilité de son calcul. Le prix à payer ici est une légère dissipation d'énergie qui pèse d'autant plus sur le bilan que le calcul est long, c'est à dire que le filtre a été appliqué longtemps. Une amélioration possible serait d'appliquer le filtre pour une durée fixée après la f ssuration (le risque d'instabilité est le plus grand juste après la rupture) pour ensuite ne plus l'appliquer : cela éviterait des dissipations excessives pour les calculs très longs, tout en permettant une meilleure convergence en temps du modèle. Il s'agit d'un compromis à faire : c'est, par exemple, un problème équivalent à la stabilisation des modes à énergie nulle en EF qui entraîne une légère dissipation que l'utilisateur doit contrôler à la fin de son calcul. Le contrôle des bilans d'énergie devra donc être minutieux pour s'assurer que la quantité d'énergie dissipée dans le filtre est faible.

## 2.4 Exemples numériques

Des applications de f ssuration, perforation et fragmentation sont étudiées dans cette section. Rappelons que la vérification de l'équilibre à chaque pas de temps du calcul est un point fondamental en dynamique explicite pour évaluer la stabilité du schéma de Newmark et la fiabilité des résultats. Ainsi, on donne pour chaque cas test, en pourcentage, la variation maximale d'énergie totale observée au cours du calcul :

$$B(\%) = 100 \frac{E_{tot}}{|E_{ext} + E_{inj}|} \quad (2.110)$$

avec  $E_{tot} = E_{cin} + E_{int} - E_{ext} - E_{inj}$  l'énergie totale qui devrait être strictement nulle.  $E_{cin}$ ,  $E_{int}$ ,  $E_{ext}$  et  $E_{inj}$  sont respectivement l'énergie cinétique, l'énergie interne, l'énergie des efforts extérieurs et l'énergie injectée (vitesse initiale ou énergie chimique d'un explosif par exemple). Pour que cette information ait un sens, nous indiquerons également la valeur du coefficient de sécurité appliqué sur le calcul du pas de temps, noté  $c_{stab}$ .

*Remarque : par convention,  $B(\%) < 0$  indique une disparition d'énergie,  $B(\%) > 0$  une apparition d'énergie.*

### 2.4.1 Propagation en mode mixte dans une poutre sous impact.

Ce cas test fait référence à des travaux expérimentaux présentés dans [JOH 90] et réutilisés par de nombreux auteurs pour valider leurs modèles de f ssuration [BEL 96b], [SON 06], [ZI 07] et [ZHA 09].

### 2.4.1.1 Expérience

L'expérience consiste en un test de flexion 3 points sur une poutre en béton présentant une pré-fissure, comme présenté sur la figure 2.15. Différents paramètres varient au cours de l'expérience : la vitesse de chargement (du cas quasi-statique  $\dot{\epsilon} \sim 10^{-6} s^{-1}$  au cas d'un impact  $\dot{\epsilon} \sim 0.5 s^{-1}$ ) ainsi que la position de la pré-fissure. Nous nous intéressons au cas du chargement de type impact qui est imposé à l'aide d'un marteau de Charpy sur lequel est placé un caoutchouc. La vitesse de déformation mesurée au niveau des appuis est de l'ordre de  $0.3 s^{-1}$ . La position de la pré-fissure varie comme indiqué sur la figure 2.16 et conduit à la propagation d'une ou plusieurs fissures en modes I et/ou en mode mixte suivant les cas. Les dimensions de l'expérience sont :  $L = 8 in.$ ,  $D = 3 in.$ ,  $B = 1 in.$ ,  $a = 0.75 in.$  avec  $1 in. = 25.4 mm$ .

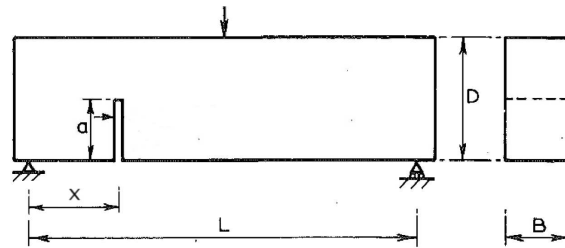


FIGURE 2.15: Schéma de l'expérience [JOH 90]

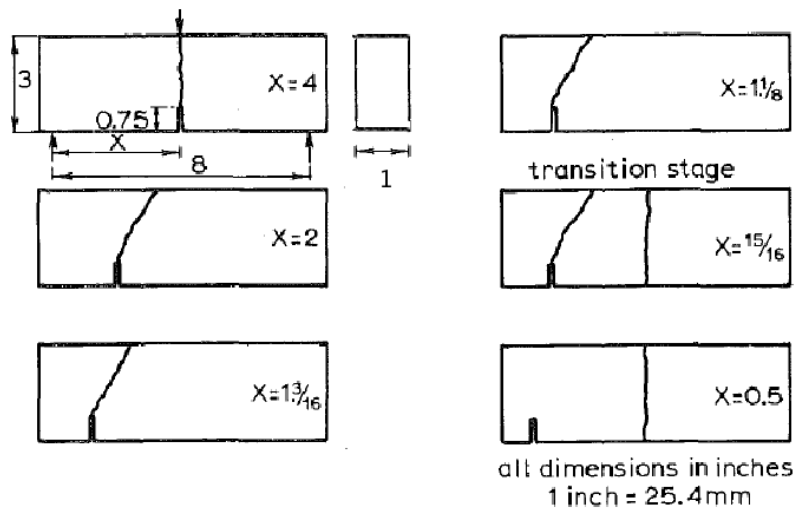


FIGURE 2.16: Influence du paramètre  $X$  sur la fissuration [JOH 90].

### 2.4.1.2 Modélisation

Le test est ramené à un problème de dimension 2 sous l'hypothèse des contraintes planes. Le domaine est discrétisé en 6663 nœuds (+6692 SP) selon un maillage régulier

| Paramètre              | Valeur   |
|------------------------|----------|
| E (GPa)                | 31.37    |
| $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | 2400     |
| $\nu$                  | 0.2      |
| $A_L$                  | 1        |
| $B_L$                  | 7300     |
| $\epsilon_D$           | $8.5e-5$ |
| $D_c$                  | 0.99     |
| $a$                    | 1        |
| $\tau_c$ (s)           | $1.5e-5$ |

**TABLE 2.2:** Paramètres matériau : béton de la poutre sous impact.

en quadrilatère. Le matériau est modélisé par une loi élastique linéaire avec un endommagement de type Mazars, voir l'équation 2.64, dont les paramètres sont fournis dans [BEL 96b]. Les paramètres de l'effet retard sont choisis empiriquement afin d'éviter le phénomène de localisation. L'ensemble des paramètres est résumé dans le tableau 2.2. Les conditions aux limites sont appliquées sur un groupe de nœuds autour des points d'application des appuis. Le chargement est suggéré dans [BEL 96b] et consiste en une vitesse  $v_0(t)$  telle que :

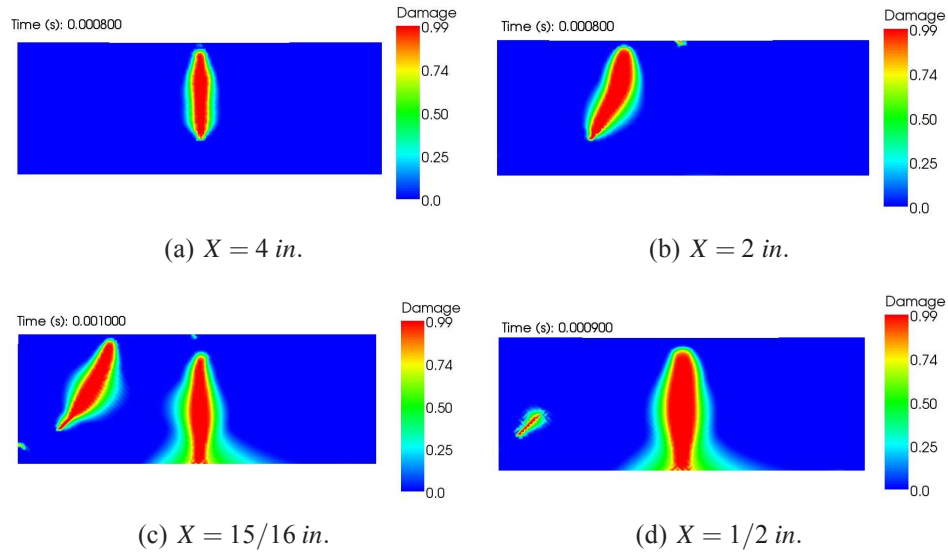
$$v_0(t) = \begin{cases} v_1 t / t_1 & \text{pour } t \leq t_1 \\ v_1 & \text{pour } t > t_1 \end{cases} \quad (2.111)$$

La rampe permet de modéliser grossièrement la présence d'un morceau de caoutchouc entre le marteau et l'éprouvette. Les valeurs suivantes sont choisies :  $t_1 = 1.96e-4$  s et  $v_1 = 0.065$  m.s<sup>-1</sup>. Elles sont issues de [BEL 96b] et correspondent à une vitesse de déformation de l'ordre de  $\dot{\epsilon} \sim 0.3$  s<sup>-1</sup> au niveau des appuis, comme mesuré lors de l'expérience. Quatre calculs sont effectués suivant la position de l'entaille : (a)  $X = 4$  in., (b)  $X = 2$  in., (c)  $X = 15/16$  in. et (d)  $X = 1/2$  in..

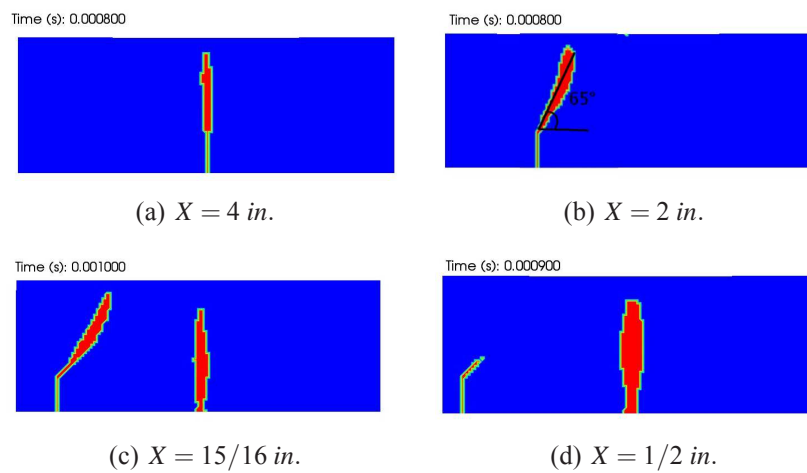
### 2.4.1.3 Résultats

Les figures 2.17 et 2.18 présentent les résultats des simulations, respectivement l'endommagement et le trajet des fissures. Le cas (a) est simple puisqu'une seule fissure se propage en mode I à partir de la pré-fissure. Pour le cas (b), une seule fissure se propage de nouveau à partir de l'entaille. Le mode de propagation est cette fois mixte, l'angle associé est à peu près constant sur tout le trajet de la fissure  $\theta_{exp} \sim 60^\circ$ , contre  $\theta_{sim} \sim 65^\circ$  pour la simulation. Le cas (c) correspond à la transition entre le cas (b) et le cas suivant (d) : deux fissures se propagent, l'une à partir de la pré-fissure et l'autre au centre du spécimen, ce que l'on retrouve par le calcul. Enfin, pour le cas (d), la pré-fissure ne se propage pas alors qu'une fissure est créée au centre du spécimen, ce que l'on retrouve également dans la simulation.

Les informations concernant la stabilité du schéma de Newmark sont données dans le tableau 2.3.



**FIGURE 2.17:** Simulation de la poutre sous impact : endommagement.



**FIGURE 2.18:** Simulation de la poutre sous impact : trajet des fissures.

*Remarque : le domaine a été reconstruit par triangulation de Delaunay dans les figures 2.17 et 2.18 pour une meilleure visualisation des résultats.*

| Calcul | B(%)  | cstab |
|--------|-------|-------|
| (a)    | -0.48 | 0.15  |
| (b)    | -0.95 | 0.15  |
| (c)    | +1.1  | 0.15  |
| (d)    | -0.33 | 0.15  |

**TABLE 2.3:** Stabilité du calcul : poutre sous impact

## 2.4.2 Étude de convergence

Idéalement, une méthode numérique devrait permettre l'obtention de résultats indépendants de la discrétisation. En réalité, les résultats dépendent toujours de la discrétisation (spatiale et temporelle) via l'erreur de discrétisation que celle-ci introduit. Il faut alors s'assurer que la méthode converge vers une solution fixe quand le maillage est raffiné.

### 2.4.2.1 Erreurs

L'erreur commise dans un calcul a différentes origines. On distingue :

- l'erreur de discrétisation. Dans le cas de la dynamique explicite, il est connu que le schéma de Newmark est d'ordre 2. L'erreur de discrétisation spatiale dépend des fonctions de forme utilisées et du problème traité. Par exemple en EF, pour des fonctions de formes linéaires  $k = 1$  ( $k$ , ordre des fonctions de forme) dans le cas de l'élasticité  $m = 1$  ( $m$ , ordre de dérivation dans l'expression de l'énergie), l'ordre de convergence en déplacement est  $2(k + 1 - m) = 2$ .

*Remarque : l'ordre de convergence peut être dégradé par une intégration trop pauvre.  $\bar{k}$  étant le monôme de plus haut degré présent dans les fonctions de forme, l'ordre de convergence n'est pas dégradé si la formule de quadrature utilisée intègre exactement l'ordre  $\bar{k} + k - 2m$ , soit  $2 + 1 - 2 = 1$  pour un problème d'élasticité en dimension 2 avec des fonctions de forme linéaires. De manière générale, se reporter à [HUG 00] pour plus de précisions à ce sujet.*

Dans le cas des SPH, les résultats précédents sont moins certains. On peut tout de même affirmer que pour la théorie des coques épaisses de Mindlin-Reissner  $m = 1$  contrairement à la théorie des coques minces de Kirchoff qui est plus complexe à traiter puisque  $m = 2$ . Les fonctions SPH utilisées étant construites à partir de polynômes de degré 1 au minimum, nous pouvons attendre une convergence d'ordre 2 en espace pour la méthode. L'influence du nombre de SP utilisé et de leur position sur l'ordre de convergence n'est pas encore bien maîtrisée. De plus, les phénomènes de rupture peuvent abaisser drastiquement l'ordre de convergence. La convergence en temps reste inchangée, d'ordre 2.

- l'erreur numérique liée à la résolution itérative de systèmes. L'algorithme de plasticité/endommagement introduit par exemple une erreur numérique puisque le système n'est résolu qu'à une précision près. On considère cependant que la précision imposée à la résolution itérative est suffisante pour avoir une erreur numérique petite devant l'erreur de discrétisation, de sorte que seule cette dernière est prépondérante.

L'ordre de convergence ne sera pas calculé ici, nous vérifierons simplement que les résultats puissent être considérés comme indépendants du maillage.

### 2.4.2.2 Paramètres de l'étude

La convergence de la méthode est étudiée sur le cas test précédent. Nous considérons le cas (b) pour lequel une seule fissure se propage en mode mixte. Cinq maillages sont étudiés, résumés dans le tableau 2.4.

| Maillage :            | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $D_{sph}$ (m)         | 5.0e-3 | 2.5e-3 | 1.5e-3 | 1.0e-3 | 5.0e-4 |
| $\Delta t_{crit}$ (s) | 3.0e-7 | 1.6e-7 | 9.6e-8 | 6.4e-8 | 3.2e-8 |

TABLE 2.4: Étude de convergence : définition des maillages.

*Remarque : en dynamique explicite, le pas de temps critique est déterminé, entre autres, par la taille des éléments du maillage. En raffinant le maillage, nous étudions donc de manière couplée la convergence en espace et en temps. Cela est suffisant ici, mais il serait également possible d'étudier séparément les effets de la convergence en espace et en temps. Pour la convergence en espace, il faudrait alors fixer le pas de temps de tous les calculs au pas de temps critique du maillage le plus fin.*

### 2.4.2.3 Résultats

La figure 2.19 résume les résultats obtenus pour les différents maillages. On observe qualitativement que l'endommagement et le trajet de la fissure semblent indépendants du maillage utilisé. Cette constatation est confirmée par l'étude de la largeur de la fissure  $L_{fiss}$  à mi hauteur de l'éprouvette, voir le tableau 2.5. Cela indique que le limiteur de localisation est efficace et limite l'influence du maillage sur la taille de la zone endommagée

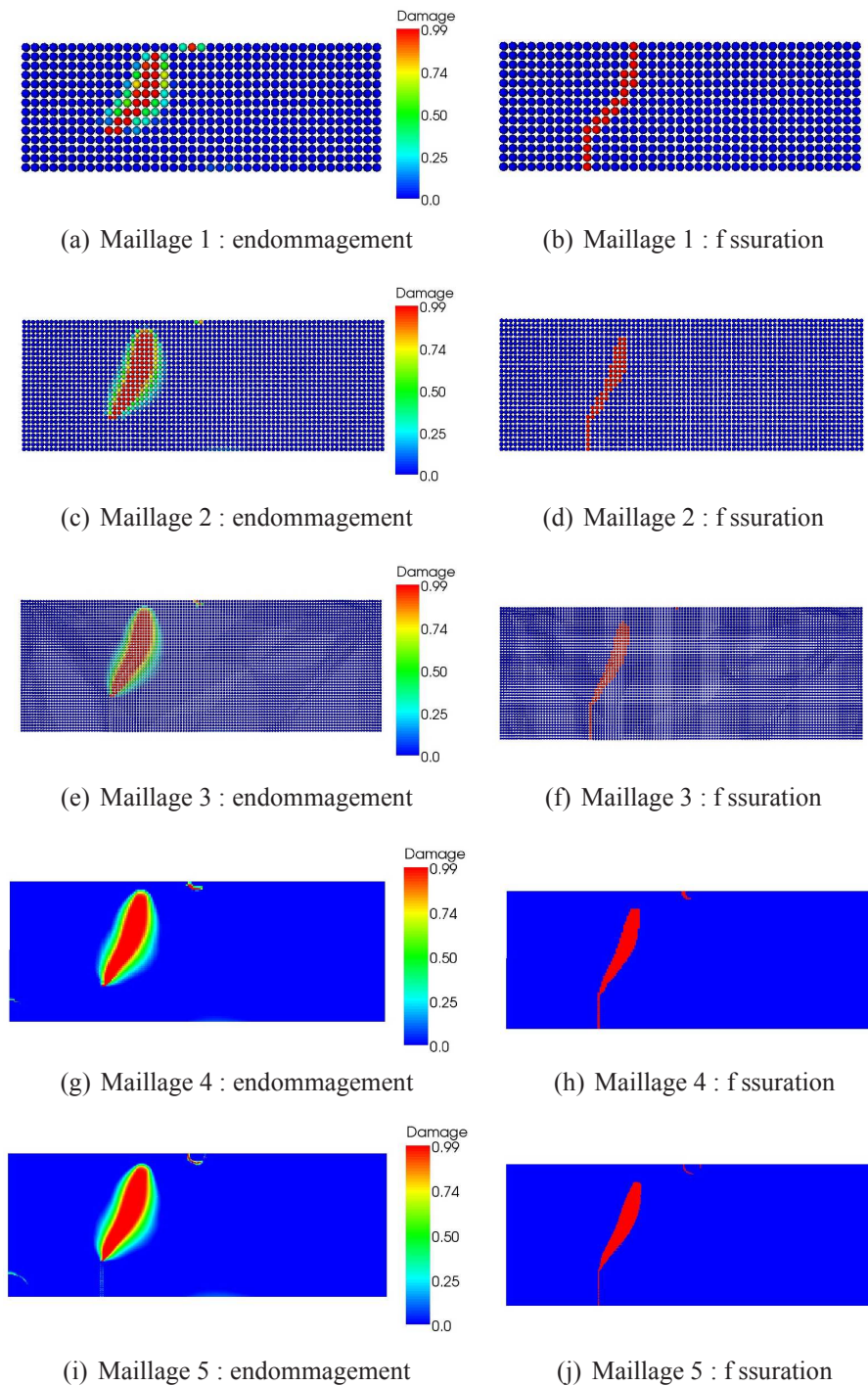
| Maillage :     | 1            | 2             | 3             | 4            | 5             |
|----------------|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|
| $B$ (%)        | +1.5         | -0.93         | -0.99         | -1.08        | -1.97         |
| $L_{fiss}$ (m) | 1e-2         | 1e-2          | 0.75e-2       | 0.8e-2       | 0.85e-2       |
| $tol$ (m)      | $\pm 0.5e-2$ | $\pm 0.25e-2$ | $\pm 0.15e-3$ | $\pm 0.1e-2$ | $\pm 0.05e-2$ |

TABLE 2.5: Étude de convergence : bilan énergétique et largeur de fissure à  $t = 800 \mu s$ .

*Remarque : la largeur des fissures doit en réalité être associée à la résolution du maillage, qui entraîne une tolérance, notée  $tol$ , dans la valeur de  $L_{fiss}$  :  $tol = \pm D_{sph}$ .*

### 2.4.3 Branchement de fissures

Ce cas test est courant dans la littérature pour évaluer la capacité d'une méthode à gérer les branchements de fissures [XU 95], [FAL 01], [BEL 03], [RAB 04a], [SON 06],



**FIGURE 2.19:** Étude de convergence : endommagement et f ssuration à  $t = 800 \mu s$ .

*Remarque : les points représentés dans ces figures sont les SP.*



[RAB 07d], [ZI 07] et [ZHA 09]. Des résultats expérimentaux correspondant à des cas similaires mais avec des dimensions différentes sont donnés dans [SHA 95], [SHA 96], [RAV 98] et [FIN 03].

### 2.4.3.1 Présentation du cas

Un spécimen rectangulaire présentant une préfissure sur la moitié de sa longueur est soumis à de la traction  $\sigma = 1\text{MPa}$ , comme présenté sur la figure 2.20. Sous l'effet de la traction, la préfissure se propage puis branche ensuite en deux fissures distinctes.

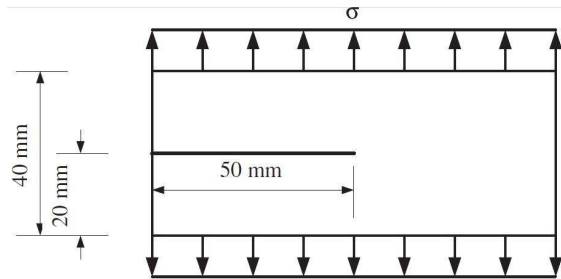


FIGURE 2.20: Traction d'une plaque rectangulaire préfissurée [ZI 07].

### 2.4.3.2 Modélisation

Comme précédemment le test peut se ramener à un problème de dimension 2. Dans la littérature, l'hypothèse des déformations planes est généralement admise pour résoudre ce problème. Cependant, dans [RAB 07d], les auteurs étudient ce problème en dimension 3 avec une épaisseur  $e = 0.004\text{ m}$ , l'hypothèse des contraintes planes est alors plus adaptée et c'est celle que nous avons retenue. Le domaine est discrétisé en 17200 nœuds (+16915 SP) selon un maillage régulier basé sur des quadrilatères. Le matériau est modélisé par une loi élastique linéaire avec un endommagement de Mazars, voir équation 2.64, dont les paramètres communément utilisés dans la littérature ([BEL 03], [RAB 04a], [SON 06], [RAB 07d], [ZI 07] et [ZHA 09]) sont donnés dans le tableau 2.6. Les paramètres de l'effet retard sont choisis pour éviter la localisation et sont donnés également dans le tableau 2.6. Le chargement est un effort appliqué en échelon sur 3 rangés de nœuds et calculé de façon à obtenir la traction voulue.

### 2.4.3.3 Résultats

La vérification du trajet de fissuration est faite sur la figure 2.21. Le résultat obtenu avec le modèle SPHC est proche des résultats expérimentaux issus de [RAM 85] et des résultats de simulation numérique issus de [SON 06].

La figure 2.22 compare la vitesse de propagation de la fissure obtenue avec le modèle SPHC à celles données dans [RAB 04a]. Une fois que la propagation commence, la vitesse de propagation augmente linéairement jusqu'à atteindre un maximum à  $t \sim 20\ \mu\text{s}$

| Paramètre              | Valeur   |
|------------------------|----------|
| $E$ (GPa)              | 32       |
| $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | 2450     |
| $\nu$                  | 0.2      |
| $A_L$                  | 1        |
| $B_L$                  | 7300     |
| $\varepsilon_D$        | $8.5e-5$ |
| $D_c$                  | 0.99     |
| $a$                    | 10       |
| $\tau_c$ (s)           | $1e-6$   |

TABLE 2.6: Paramètres matériau : béton de la plaque en traction.

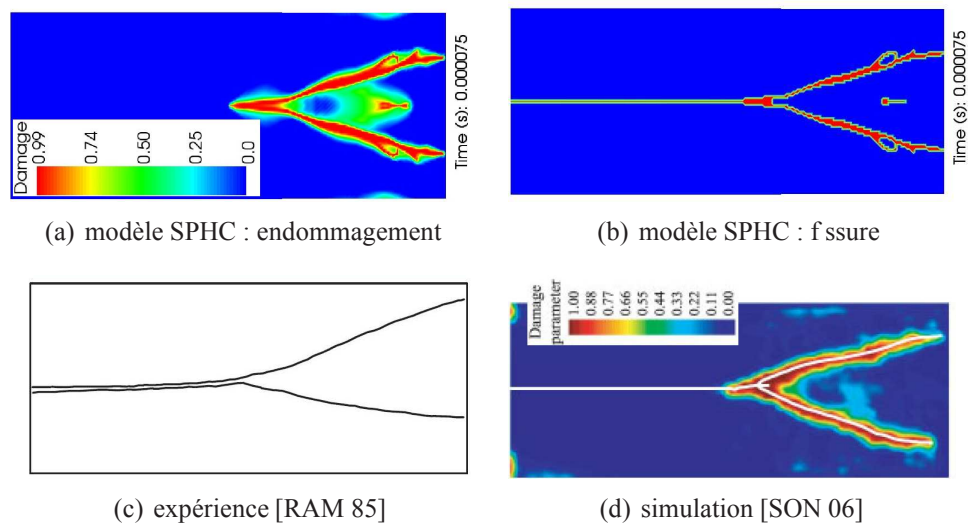
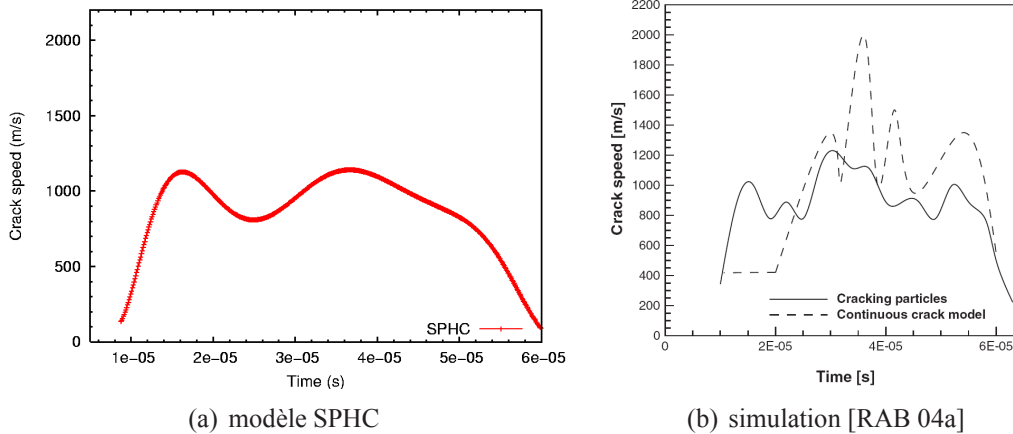


FIGURE 2.21: Comparaison des trajets de f ssuration.

Remarque : dans les figures (a) et (b), le domaine est de nouveau reconstitué par triangulation de Delaunay.

qui correspond au moment de la bifurcation. La vitesse reste ensuite constante jusqu'à ce que la fissure atteigne le bord de la plaque à  $t \sim 56 \mu\text{s}$ . On vérifie que dans tous les cas, la vitesse du front de fissure est inférieure à la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh qui est de  $2100 \text{ m.s}^{-1}$  pour ce problème. Pour ce calcul, nous avons  $B(\%) = -0.13$  et  $c_{stab} = 0.15$ .



**FIGURE 2.22:** Comparaison des vitesses de propagation.

*Remarque : la méthode ne nécessite pas de suivre explicitement le front de fissure. La mesure de vitesse de propagation est donc indirecte : la position du front de fissure est relevée tous les 20 pas de temps et interpolée avec un polynôme de degré 10 de façon à pouvoir en déduire la vitesse de propagation. La courbe (a) est donc approximative.*

*Remarque : la comparaison des figures 2.9(b) et 2.21(a) permet de mesurer l'efficacité du limiteur de localisation utilisé.*

## 2.4.4 Étude de sensibilité du modèle à effet retard

Il est intéressant de tester la stabilité de la méthode vis à vis des paramètres du modèle d'endommagement, notamment du modèle à effet retard. En effet, il n'est pas toujours facile de choisir avec précision les valeurs des paramètres  $a$  et  $\tau_c$  : il est donc important de vérifier que la méthode n'est pas extrêmement sensible à de petites variations de ces valeurs.

### 2.4.4.1 Paramètres de l'étude

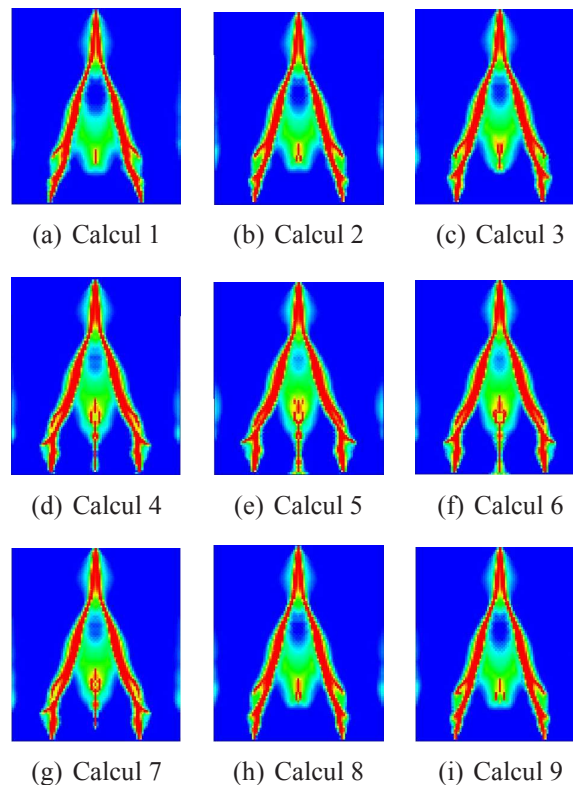
Le cas test précédent est réutilisé afin de tester l'influence des paramètres  $a$  et  $\tau_c$  sur le phénomène de bifurcation de fissure. La sensibilité à ces deux paramètres est étudiée en modifiant de manière découplée les valeurs utilisées initialement  $a = 10$  et  $\tau_c = 1 \mu\text{s}$  de  $\pm 10\%$  et  $\pm 20\%$ , voir le tableau 2.7.

| Calcul               | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$                  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 8   | 9   | 11  | 12  |
| $\tau_c$ ( $\mu s$ ) | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

TABLE 2.7: Paramètres de l'étude de sensibilité.

#### 2.4.4.2 Résultats

Les profils d'endommagement correspondants aux différents calculs sont donnés sur la figure 2.23. On observe qualitativement une faible sensibilité de la méthode aux petites variations des paramètres de l'effet retard : les phénomènes dominants de propagation et de bifurcation de fissures sont en effet inchangés. La forme des branches de la fissure n'est que très légèrement modifiée. On remarque que, de ce point de vue, l'augmentation du paramètre  $\tau_c$  a des effets similaires à la diminution de  $a$ . Cette constatation n'est pas étonnante car l'augmentation de  $\tau_c$  et la diminution de  $a$  contribuent simultanément à l'augmentation de la longueur caractéristique, voir la figure 2.11.

FIGURE 2.23: Étude de sensibilité : endommagement à  $t = 65 \mu s$ .

*Remarque : seule la moitié inférieure de l'éprouvette est représentée.*

On remarque en fait des ruptures supplémentaires entre les branches de la fissures pour

les valeurs de longueurs caractéristiques élevées. Il peut s'agir d'instabilités numériques non maîtrisées, comme il en a été rapporté dans [RAB 04a] dans le cadre de la méthode des « cracking particles ». Comme les auteurs de cette référence, nous n'avons pas réussi à déterminer l'origine de ces ruptures numériques.

## 2.4.5 Perforation d'une plaque par un projectile hémisphérique

Ce cas test est basé sur les travaux présentés dans [RUS 09] concernant l'étude expérimentale et numérique de la perforation d'une plaque en acier par un projectile hémisphérique. Il permet d'évaluer la capacité de la méthode à gérer des processus complexes de fracturation, tel que le phénomène de pétalisation.

### 2.4.5.1 Expérience

Le dispositif expérimental présenté sur la figure 2.24 permet la projection d'un corps hémisphérique en acier trempé sur une plaque en acier doux ES, à des vitesses allant jusqu'à  $V_{imp} = 100 \text{ m.s}^{-1}$ . Une description précise du dispositif est donnée dans [RUS 09]. Ce dernier permet une mesure de la vitesse du projectile, du temps à rupture et de l'effort transmis à l'éprouvette via une mesure de déformation utilisant une barre de Hopkinson. Deux configurations sont étudiées, selon que le contact entre le projectile et l'éprouvette est lubrifié ou non. Dans le cas d'un contact non lubrifié, l'adhésion entre le projectile et la plaque entraîne une rupture circonférentielle qui conduit au détachement d'un disque de métal. De petites fissures radiales apparaissent ensuite, voir la figure 2.25(a). Dans le cas d'un contact lubrifié, le glissement entre le projectile et la plaque entraîne l'apparition de fissures qui vont se propager radialement, conduisant à la pétalisation de la plaque, voir la figure 2.25(b). Le nombre de pétales dépend alors essentiellement de la vitesse d'impact. L'éjection d'un disque de métal est également observée, mais uniquement pour les vitesses d'impact élevées. Nous nous intéressons au cas du contact lubrifié car les phénomènes mis en jeu sont plus intéressants (apparition de pétales) et il est plus simple à traiter (frottement nul dans le contact). Le projectile a un diamètre  $d_{imp} = 22 \text{ mm}$  et une masse  $M_{imp} = 0.154 \text{ kg}$ . La plaque a un diamètre effectif  $d = 30 \text{ mm}$  et une épaisseur  $e = 0.8 \text{ mm}$ .

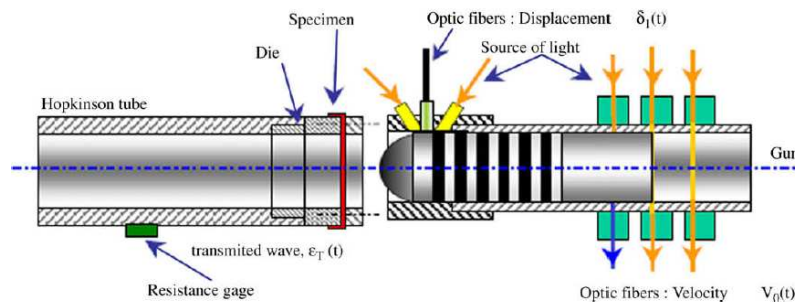
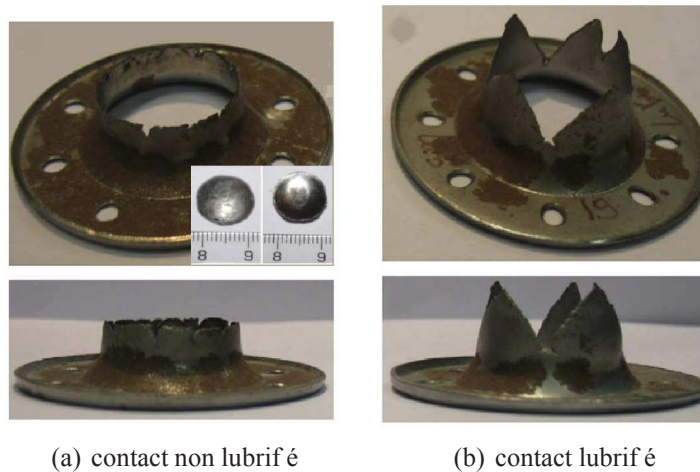


FIGURE 2.24: Schéma du dispositif expérimental [RUS 09].



**FIGURE 2.25:** État final de la plaque [RUS 09].

### 2.4.5.2 Modélisation

Seule l'éprouvette est considérée déformable, les observations rapportées dans [RUS 09] indiquant une absence d'érosion sur le projectile. Elle est discrétisée en 12892 nœuds (+12841 SP) en se basant sur un maillage en quadrilatères et est encadrée sur son contour sur 3 rangées de particules. Le matériau est modélisé par la loi de Johnson-Cook et un endommagement de Lemaitre et Chaboche associé à un effet retard, voir l'équation 2.66. Le comportement du matériau ne dépend pas linéairement de  $\log(\dot{\epsilon})$  comme on peut le voir sur la figure 2.26(a), ce qui le rend difficile à décrire avec la loi de Johnson-Cook non modifiée. Les auteurs contournent le problème en identifiant deux jeux de paramètres suivant si l'on traite de vitesses de déformation faibles ou élevées, la limite se situant autour de  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ , voir figure la 2.26(b). Notre application présente clairement des vitesses de déformations élevées ( $\dot{\epsilon} \sim 10e4 \text{ s}^{-1}$  ou plus), les paramètres donnés dans [RUS 09] sont alors ceux rappelés dans le tableau 2.8. La température n'est pas prise en compte dans notre modèle : c'est clairement un aspect qui pourrait être amélioré puisque les calculs issus de [RUS 09] montrent un gradient de température élevé (jusqu'à  $150^\circ\text{C}$ ) à proximité des fissures conduisant à un écrouissage du matériau qui favorise leur propagation. Ce phénomène est cependant très localisé au niveau des pointes de fissures.

Les paramètres liés à l'endommagement et à la rupture du matériau sont moins bien identifiés que ceux liés à la plasticité : dans le modèle numérique élaboré dans [RUS 09], la rupture intervient lorsque la déformation plastique excède  $\epsilon_f = 1$ , cette valeur étant obtenue notamment à partir du critère de Considère. Nous utilisons un modèle d'endommagement qui nécessite la détermination de 3 paramètres : nous choisissons  $\epsilon_f = 1$  comme indiqué dans [RUS 09] et complétons avec des données issues de [LEM 85] qui sont très classiques pour un acier  $\epsilon_d = 0$  et  $D_c = 0.25$ . Nous choisissons  $a$  et  $\tau_c$  pour éviter la localisation :  $a = 1$  et  $\tau_c = 0.01 \mu\text{s}$  sauf pour le cas  $V_{imp} = 300 \text{ m.s}^{-1}$  pour lequel  $\tau_c = 0.001 \mu\text{s}$ . Le projectile est modélisé par un unique Pinball sphérique et le contact entre les deux

corps est géré par la méthode des Pinballs, voir la section 3.3.

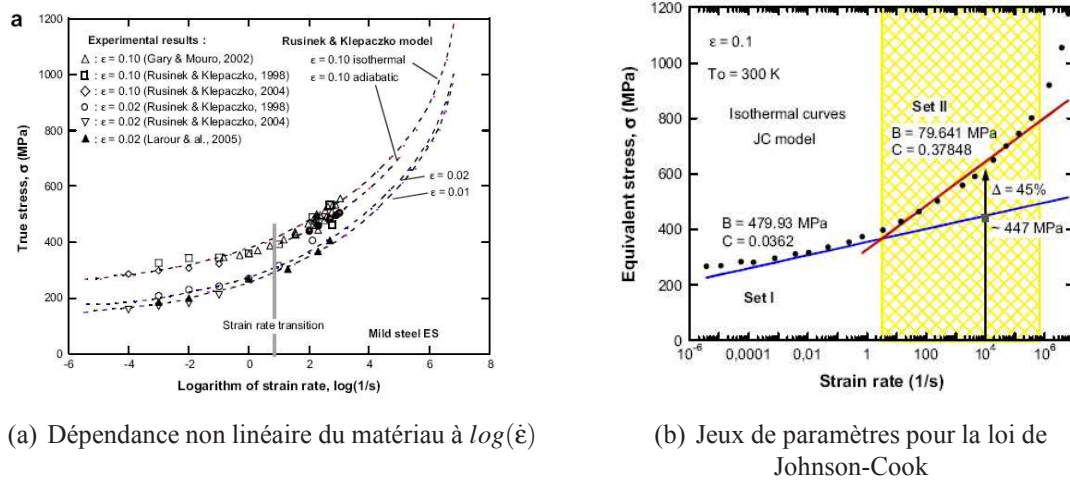


FIGURE 2.26: Matériau de la plaque perforée [RUS 09].

| Paramètre                            | Valeur              |
|--------------------------------------|---------------------|
| $A_{JC}$ (MPa)                       | 57.27               |
| $B_{JC}$ (MPa)                       | 79.64               |
| $n_{JC}$                             | 0.316               |
| $C_{JC}$                             | 0.37848             |
| $\dot{\epsilon}_0_{JC}$ ( $s^{-1}$ ) | 1e-3                |
| $\epsilon_r$                         | 1                   |
| $\epsilon_d$                         | 0                   |
| $D_c$                                | 0.25                |
| a                                    | 1                   |
| $\tau_c$ (s)                         | 0.01e-6 et 0.001e-6 |

TABLE 2.8: Paramètres matériau : acier de la plaque perforée.

### 2.4.5.3 Résultats

Différentes vitesses d'impact sont étudiées et peuvent être comparées aux données expérimentales (pour  $V_{imp} < 100 \text{ m.s}^{-1}$ ) et numériques issues de [RUS 09]. Les figures 2.27 et 2.28 montrent l'état final de la plaque calculé avec la méthode SPHC et comparé avec les calculs effectués dans [RUS 09]. Le modèle utilisé dans cette référence est un modèle EF avec érosion des éléments dont la déformation plastique cumulée dépasse un

seuil. La forme des pétales obtenue avec le modèle SPHC est très comparable à celle obtenue avec le modèle EF. Le temps à rupture en fonction de la vitesse d'impact est tracé sur la figure 2.29 pour le modèle SPHC, les expériences et les calculs issus de [RUS 09]. Là encore, les différentes sources de résultats concordent bien. Les figures 2.30 et 2.31 permettent de comparer l'énergie cinétique perdue par le projectile et l'effort appliqué sur le projectile au cours du temps entre les différentes sources de résultats. Le modèle SPHC fournit des résultats du même ordre de grandeur que le modèle EF de [RUS 09]. On remarque une dépendance importante des résultats à la loi de comportement utilisée : en effet, les résultats fournis dans [RUS 09] varient de 10% pour le même modèle EF utilisé avec deux lois de comportement différentes. Cela rend difficile l'interprétation de l'influence de l'utilisation de la méthode SPHC par rapport à la méthode EF. Enfin, le tableau 2.9 compare le diamètre du disque de métal  $D_{plug}$  arraché par l'impacteur entre les modèles SPHC et EF. Pour  $V_{imp} = 75 \text{ m.s}^{-1}$ , on remarque l'absence de disque pour la méthode SPHC. La discrétisation SPHC utilisée est probablement trop grossière pour représenter un fragment de  $5 \text{ mm}$ , les nœuds SPH le composant se sont donc rompus au cours de la simulation.

| $V_{imp} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$ | $D_{plug} \text{ (mm) SPHC}$ | $D_{plug} \text{ (mm) [RUS 09]}$ |
|-------------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| 40                                  | 0.0                          | 0.0                              |
| 50                                  | 0.0                          | 0.0                              |
| 75                                  | 0.0                          | 4.8                              |
| 150                                 | 8.5                          | 9.9                              |
| 300                                 | 13.0                         | 12.0                             |

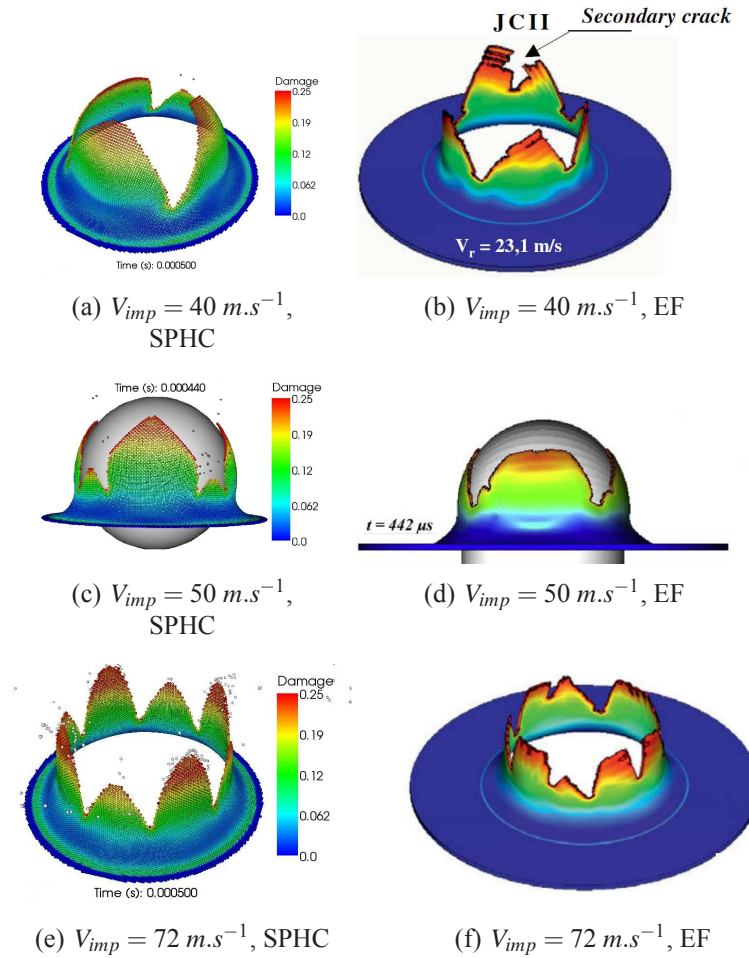
**TABLE 2.9:** Diamètre du disque arraché  $D_{plug}$  en fonction de la vitesse d'impact  $V_{imp}$ .

Les informations concernant la stabilité du schéma de Newmark sont données dans le tableau 2.10. On remarque que la dissipation numérique est d'autant plus faible que la vitesse d'impact est grande.

| Calcul                           | B(%)  | $c_{stab}$ |
|----------------------------------|-------|------------|
| $V_{imp} = 300 \text{ m.s}^{-1}$ | -0.2  | 0.2        |
| $V_{imp} = 150 \text{ m.s}^{-1}$ | -0.42 | 0.2        |
| $V_{imp} = 75 \text{ m.s}^{-1}$  | -2.6  | 0.2        |
| $V_{imp} = 50 \text{ m.s}^{-1}$  | -3.05 | 0.1        |
| $V_{imp} = 40 \text{ m.s}^{-1}$  | -3.76 | 0.1        |

**TABLE 2.10:** Stabilité du calcul : plaque perforée.





**FIGURE 2.27:** Comparaison des simulations SPHC et EF [RUS 09](1).

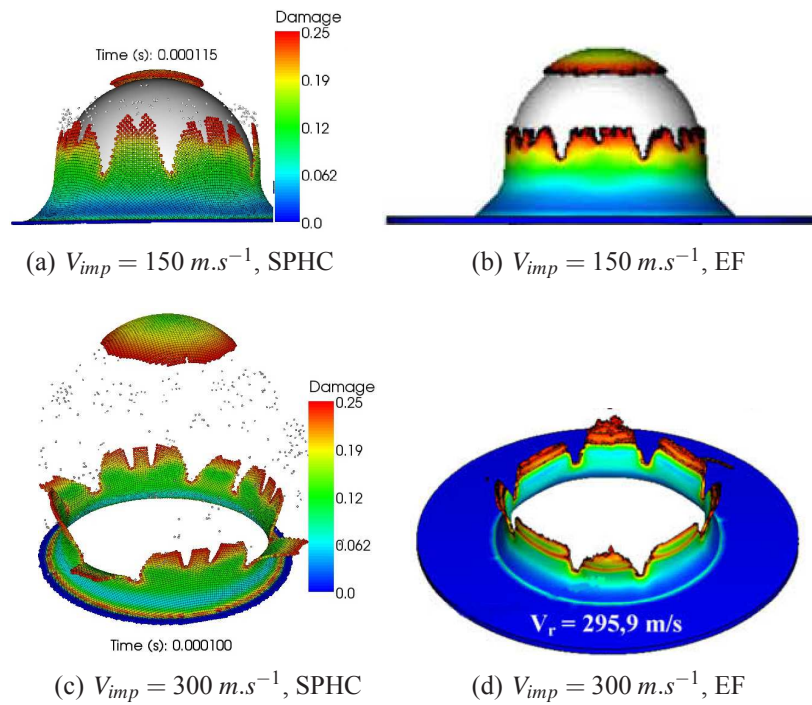


FIGURE 2.28: Comparaison des simulations SPHC et EF [RUS 09] (2).

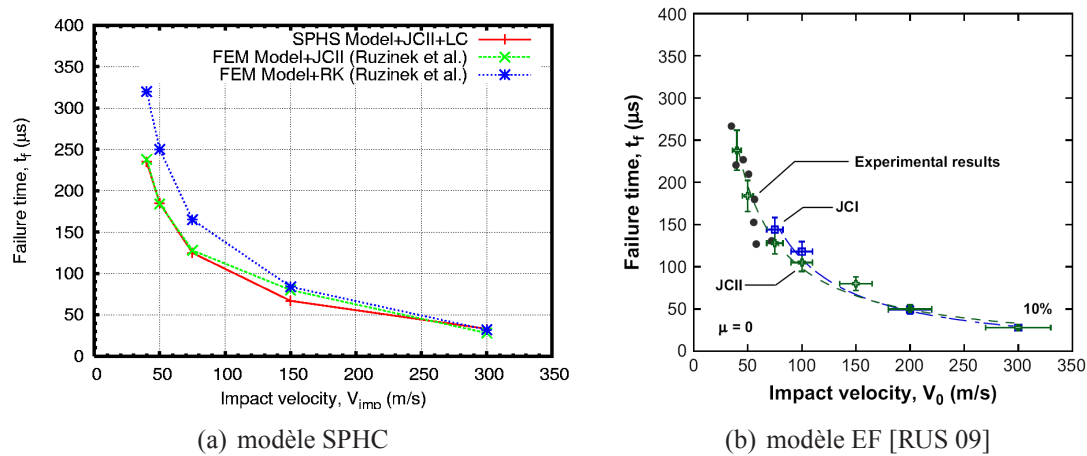


FIGURE 2.29: Temps à rupture en fonction de la vitesse d'impact.

Remarque : les temps à rupture sont choisis comme étant les temps auxquels se rompent les premiers éléments du maillage.

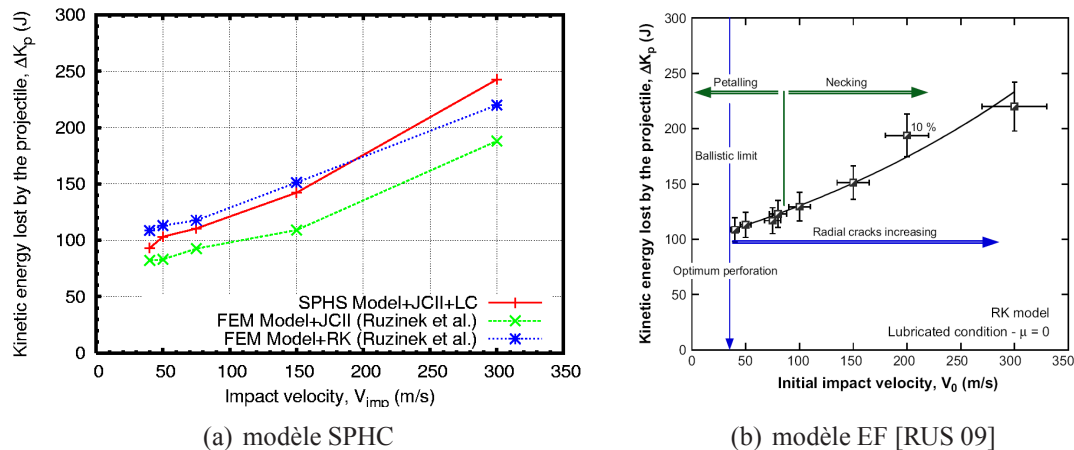


FIGURE 2.30: Énergie cinétique perdue par le projectile.

## 2.4.6 Fragmentation d'un cylindre sous explosif

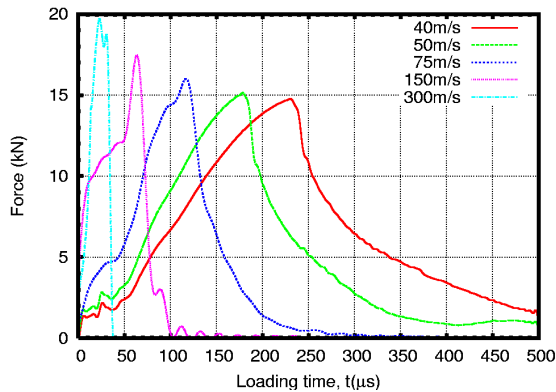
Ce cas s'inspire des expériences présentées dans [GOT 08] correspondant à la fragmentation d'un cylindre suite à la détonation d'un explosif placé en son centre. Une étude numérique correspondante a été présentée dans [OWE 10].

### 2.4.6.1 Expérience

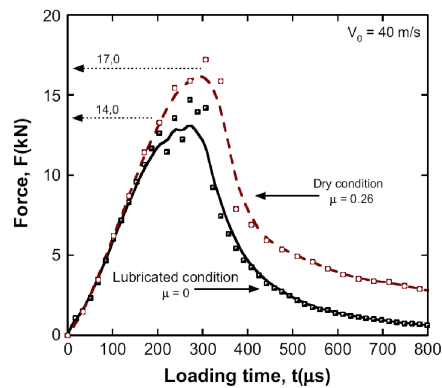
La figure 2.32(a) représente un schéma de l'expérience tiré de [GOT 08] : un cylindre en acier de hauteur  $H = 203.2 \text{ mm}$ , de diamètre extérieur  $D_{ext} = 50.8 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e = 3 \text{ mm}$  est fragmenté par la détonation d'un explosif de type LX-17. Deux nuances d'acier sont utilisées : un acier allié AerMet 100 haute résistance et un acier AISI 1018 moins résistant et plus ductile. Les vitesses de déformation atteintes sont de l'ordre de  $10^4, 10^5 \text{ s}^{-1}$ . L'explosif LX-10 permet d'amorcer la détonation de façon à obtenir une onde quasi-plane dans le cylindre. Outre la distribution des fragments, leur épaisseur et leur microstructure sont étudiées dans [GOT 08] de façon à évaluer la déformation à rupture correspondante. La vitesse d'expansion du cylindre est mesurée et les essais filmés à la caméra rapide, voir [GOT 08]. Nous allons nous concentrer sur l'étude de la nuance d'acier AISI 1018 pour laquelle nous disposons de données matériaux plus précises.

### 2.4.6.2 Modélisation

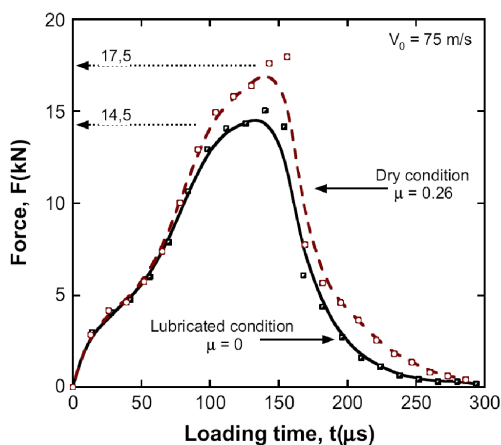
Le cylindre présente un rapport  $e/R_{ext} \sim 0.11$  qui permet de penser qu'aucun fragment ne se forme dans son épaisseur. En effet, les auteurs de [GOT 08] supposent que la variation d'épaisseur du cylindre due à l'explosion est représentative de la plasticité vue par le matériau et donc qu'aucun fragment ne se forme dans son épaisseur. Les auteurs de [SAR 10] ont étudié le cas d'une sphère de rayon  $R_s$  constante et d'épaisseur  $e_s$  variable et concluent que la prise en compte de l'épaisseur devient nécessaire pour des



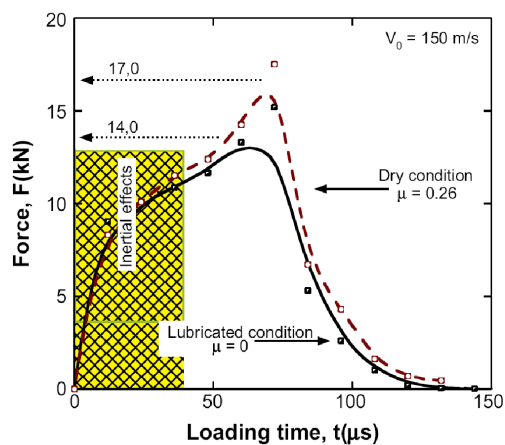
(a) modèle SPHC



(b)  $V_{imp} = 40 \text{ m.s}^{-1}$ , modèle EF [RUS 09]



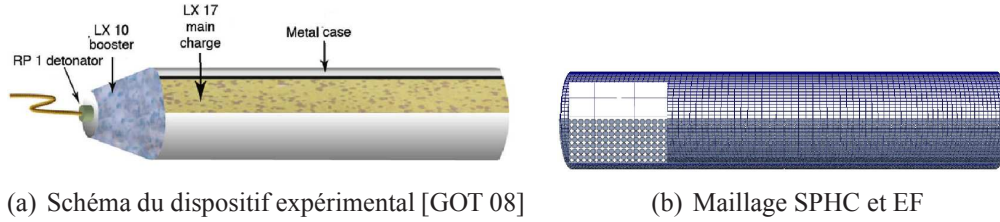
(c)  $V_{imp} = 72 \text{ m.s}^{-1}$ , modèle EF [RUS 09]



(d)  $V_{imp} = 150 \text{ m.s}^{-1}$ , modèle EF [RUS 09]

**FIGURE 2.31:** Effort exercé sur le projectile.

*Remarque : le contact est géré par la méthode des Pinballs, ce qui génère des oscillations hautes fréquences dans les forces de contact, dues aux points qui alternativement sont et ne sont plus en contact. Les courbes sont donc filtrées par transformée de Fourier avant d'être tracées.*



**FIGURE 2.32:** Fragmentation d'un cylindre sous explosif.

*Remarque : le LX-10 n'est pas modélisé car on impose directement dans Europlexus la planitude de l'onde de détonation.*

rapports  $e_s/R_s > 0.15$  environ. Il est donc possible de modéliser le cylindre par une coque épaisse. Le maillage comprend 122 100 nœuds (+ 121 800 SP) et est représenté sur la figure 2.32(b). Le matériau est modélisé par la loi de comportement de Johnson-Cook dont les paramètres sont donnés dans [VUR 03] : là encore le comportement du matériau ne dépend pas linéairement de  $\log(\dot{\epsilon})$ , voir la figure 2.33(a). Sur cette figure, on remarque que le comportement du matériau peut être grossièrement considéré indépendant de la vitesse de déformation pour  $\dot{\epsilon} < 100 \text{ s}^{-1}$ , puis la dépendance est quasiment linéaire. Les paramètres utilisés dans la loi de Johnson-Cook donnent la courbe 2.33(b). L'endommagement est de nouveau modélisé par la loi de Lemaitre et Chaboche associé à un effet retard. Les paramètres correspondants sont donnés pour les aciers de la famille AISI 1000 (AISI 1015, 1045 et 1090) dans [BON 97]. On remarque que pour cette famille de matériaux,  $D_c \sim 0.07$  et  $\epsilon_d \sim 0.2$ . Cependant, la valeur  $\epsilon_r$  varie beaucoup d'une nuance à l'autre, nous ne pouvons donc pas l'identifier de cette manière. Dans [GOT 08], la déformation à rupture de l'acier AISI 1018 est donnée par le modèle de Hancock-McKenzie :

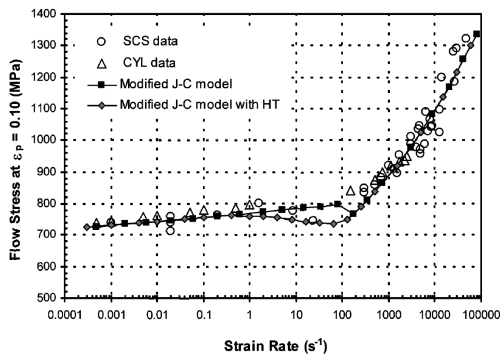
$$\epsilon_r = \left[ D_1 + D_2 e^{-D_3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}} \right] \left[ 1 + D_4 \ln \frac{\dot{\epsilon}}{s^{-1}} \right] [1 + D_5 T^*] \quad (2.112)$$

Les auteurs donnent  $D_1 = 0.24$ ,  $D_2 = 1.11$  et  $D_3 = 1.5$  alors que  $D_4$  et  $D_5$  ne sont pas identifiés. La formule 2.112 fournit :  $\epsilon_r \sim 0.71$ . Cette valeur n'est valable que pour le taux de déformation correspondant à l'expérience modélisée ici car  $D_4$  n'est pas identifié. Les paramètres de l'effet retard sont choisis en prenant  $a = 1$  et en appliquant la formule 2.74.  $\Delta\sigma \sim 5e10 \text{ Pa}$  étant évalué par un calcul élastique, on obtient  $\tau_c \sim 1.3e - 6 \text{ s}$ , la valeur est fixée à  $\tau_c = 2e - 6 \text{ s}$ . Tous les paramètres matériau sont résumés dans 2.11.

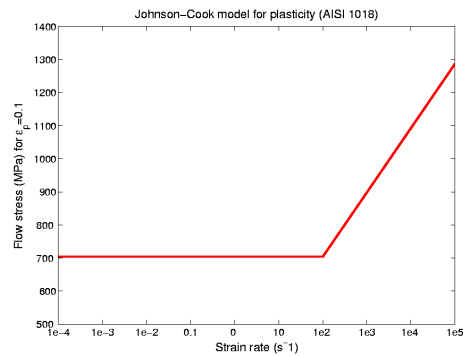
L'explosif est modélisé en EF avec l'équation d'état caractéristique de Jones-Wilkins-Lee (JWL). L'évolution de la pression P est donnée par :

$$P = A(1 - \omega R_1 V)e^{-R_1 V} + B(1 - \omega R_2 V)e^{-R_2 V} + \omega \rho E_{int} \quad (2.113)$$

Dans 2.113, A, B ont la dimension d'une pression,  $E_{int}$  d'une énergie par unité de masse et  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\omega$  sont des constantes,  $V = \rho_{sol}/\rho$  avec  $\rho_{sol}$  la densité de l'explosif sous sa forme



(a) Données expérimentales [VUR 03]



(b) Modèle de Johnson-Cook utilisé

**FIGURE 2.33:** Dépendance non linéaire du matériau à  $\log(\dot{\epsilon})$ .

| Paramètre                             | Valeur  |
|---------------------------------------|---------|
| $A_{JC}$ (MPa)                        | $560e6$ |
| $B_{JC}$ (MPa)                        | $300e6$ |
| $n_{JC}$                              | 0.32    |
| $C_{JC}$                              | 0.12    |
| $\dot{\epsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> ) | 100     |
| $\epsilon_r$                          | 0.71    |
| $\epsilon_d$                          | 0.2     |
| $D_c$                                 | 0.07    |
| $a$                                   | 1       |
| $\tau_c$ (s)                          | $2e-6$  |

**TABLE 2.11:** Paramètres matériau : acier AISI 1018.

| Paramètre                       | Valeur       |
|---------------------------------|--------------|
| $A_{JWL}$ (Pa)                  | $4.603e11$   |
| $B_{JWL}$ (Pa)                  | $0.09544e11$ |
| $R_1$                           | 4            |
| $R_2$                           | 1.7          |
| $\omega$                        | 0.48         |
| $E_{int}$ (J.kg <sup>-1</sup> ) | $3.63e6$     |
| $\rho_s$ (kg.m <sup>-3</sup> )  | 1900         |
| $D$ (m.s <sup>-1</sup> )        | 7596         |

**TABLE 2.12:** Paramètres matériau : explosif LX-17.

solide et  $\rho$  la densité courante. Les valeurs de ces coefficients sont répertoriées pour de nombreux explosifs dans [LEE 73] et les valeurs pour le LX-17 proviennent de [SOU 98], voir le tableau 2.12 pour les valeurs des différents paramètres. Afin de modéliser la propagation de la détonation à la vitesse  $D = 7596 \text{ m.s}^{-1}$ , la réaction n'est activée que si  $t > t_d$  avec  $t_d = d/D$ , où  $d$  est la distance du point considéré au point d'amorçage de la réaction.

Le contact est détecté par la méthode des sliding surfaces, voir le paragraphe 3.2.1, et les conditions sont appliquées via des multiplicateurs de Lagrange. Le maillage EF comprend 119 064 éléments cubiques à 8 nœuds, 3 ddl par nœuds et 1 point de Gauss.

### 2.4.6.3 Résultats

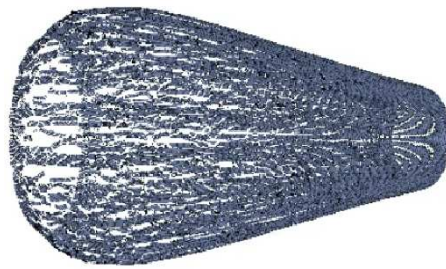
Les figures 2.34(a) et 2.34(b) représentent la disposition des fragments au cours de l'explosion, respectivement à  $t = 30 \mu\text{s}$  et  $t = 100 \mu\text{s}$  après la détonation. Les auteurs de [GOT 08] donnent des informations qui permettent de s'assurer de la qualité de notre simulation. Notamment, ils calculent que la vitesse d'expansion maximale du cylindre est de l'ordre de  $1650 \text{ m.s}^{-1}$ , pour un taux de déformation de l'ordre de  $7e4 \text{ s}^{-1}$ . Le cylindre forme un cône lors de son expansion dont l'angle se situe autour de  $11^\circ$ . La vitesse d'expansion et l'angle d'ouverture du cylindre sont plus faibles près du bord car la pression y est légèrement plus faible. Enfin, le pic de pression dans l'explosif sous forme gazeuse est la pression de Chapman-Jouguet, de valeur  $P_{cj} = 28 \text{ GPa}$  pour le LX-17. Les valeurs issues de notre simulation sont proches et sont données dans la figure 2.35.

Les fragments du modèle sont identifiés en post-traitement à partir d'un critère géométrique sur les positions relatives initiales et finales des points. Les figures 2.36(a) et 2.36(b) représentent respectivement le nombre de fragments et la masse cumulée des fragments par classe de masse. On remarque que notre modèle a tendance à produire des fragments trop petits : le biais expérimental étant corrigé (voir la remarque de la figure 2.36), l'écart constaté pourrait provenir du modèle (méconnaissance du matériau, production artificielle de fragments par la méthode SPHC par exemple). La figure 2.37(a) représente les nœuds SPH qui ont perdu tous leurs voisins (en rouge) et ceux qui sont restés sains (en bleu). La figure 2.37(b) représente les fragments ramenés sur la géométrie initiale du cylindre.

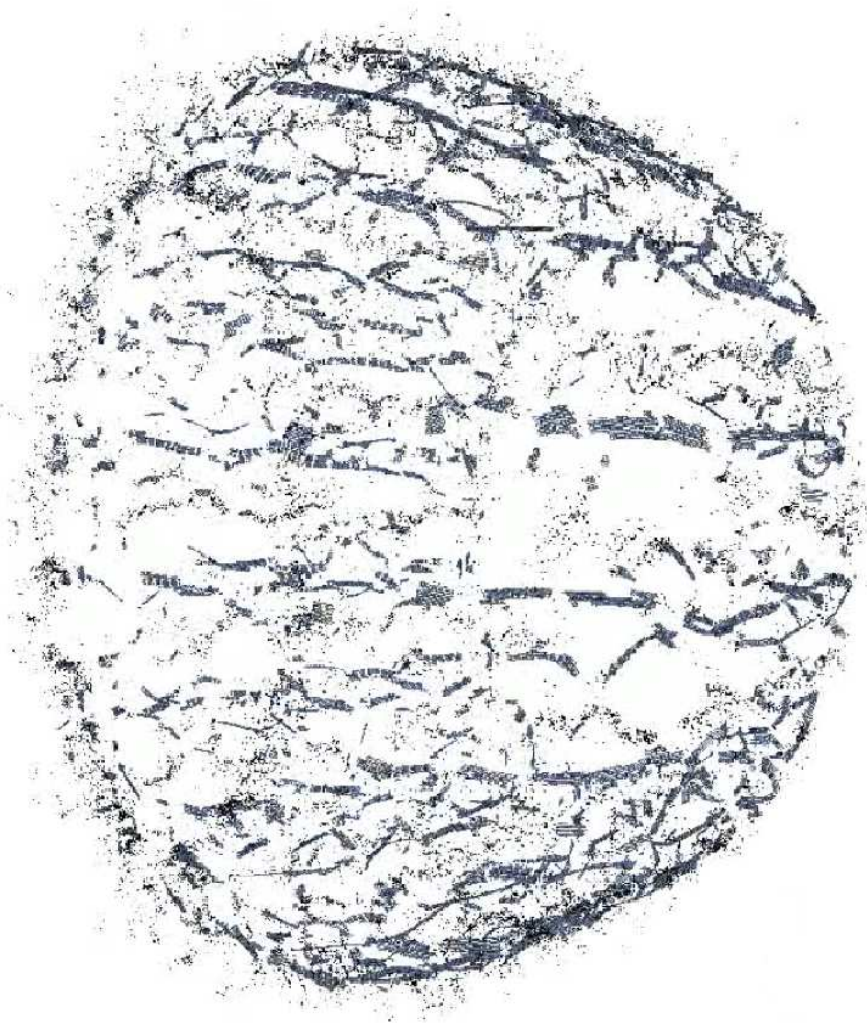
Pour ce calcul, nous obtenons  $B(\%) = +0.7$  avec  $c_{stab} = 0.1$ . La figure 2.38 représente la vitesse de rupture des VER au cours du calcul : elle confirme la stabilité du calcul puisque une fois le pic de l'explosion passé, le nombre de VER se rompant diminue pour devenir quasiment nul à  $t = 100 \mu\text{s}$  qui correspond à la fin de la simulation. Les fragments calculés sont donc stables.

## 2.5 Conclusions

La principale spécificité de la méthode SPH est de reposer sur une formulation forte. Cela lui confère un caractère plus rustique que les méthodes variationnelles mais permet une grande simplicité qui en fait une approche particulièrement pertinente pour l'étude



(a)  $t=30 \mu s$



(b)  $t=100 \mu s$

**FIGURE 2.34:** Fragmentation du cylindre.



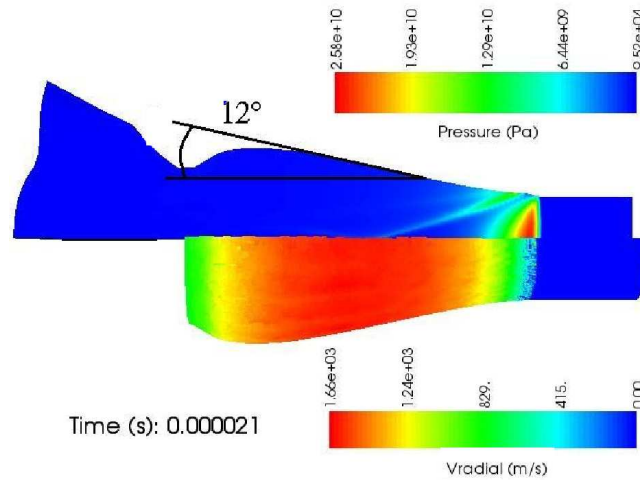
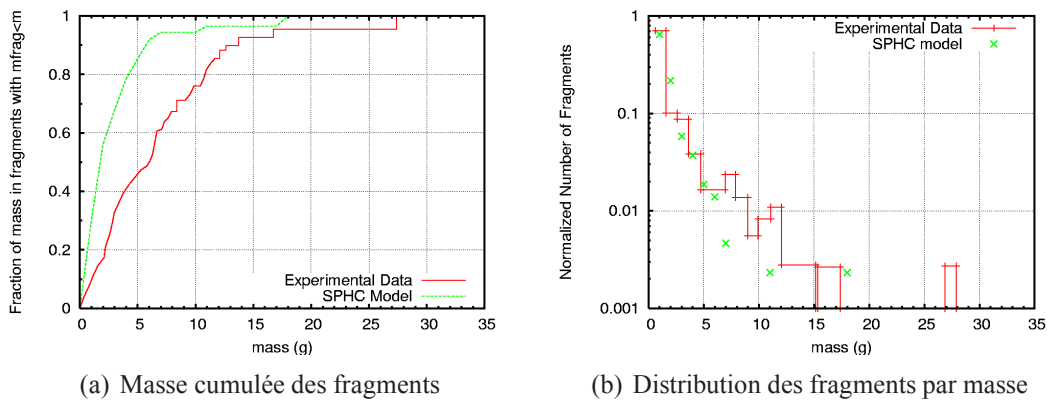


FIGURE 2.35: Vitesse d'expansion du cylindre et pression dans l'explosif.

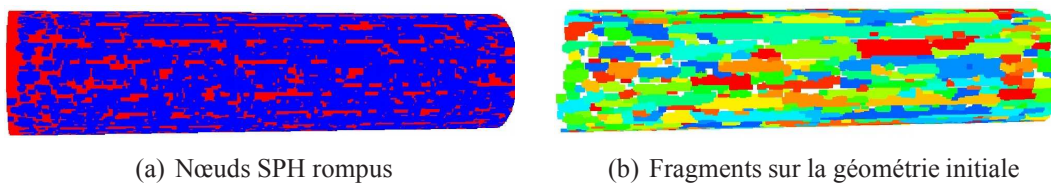


(a) Masse cumulée des fragments

(b) Distribution des fragments par masse

FIGURE 2.36: Comparaison des résultats numériques et expérimentaux.

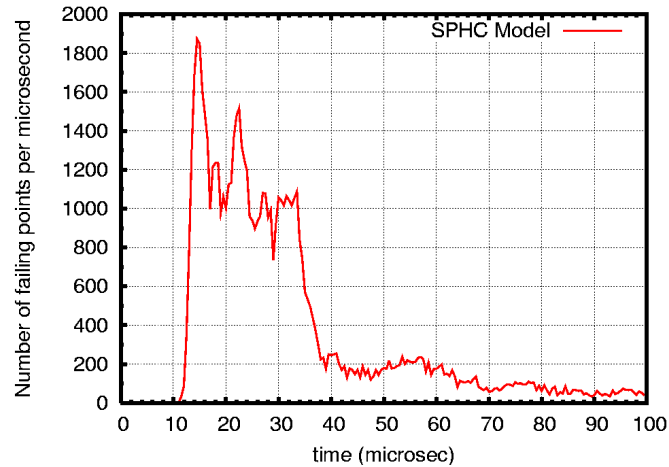
Remarque : Les auteurs de [GOT 08] indiquent avoir retrouvé environ 70% de la masse du cylindre. Pour essayer de corriger ce biais, les graphes ci-dessus ont été tracés en enlevant 30% de fragments en masse, correspondant aux plus petits d'entre eux.



(a) Nœuds SPH rompus

(b) Fragments sur la géométrie initiale

FIGURE 2.37: Fragmentation du cylindre ramenée sur la géométrie initiale.



**FIGURE 2.38:** Vitesse de rupture des SP au cours du calcul.

des impacts. Cette propriété de la méthode est conservée dans l'approche choisie pour la modélisation de la rupture. En effet, la prévision de l'apparition des fissures repose sur les ingrédients classiques de la théorie de l'endommagement tandis que la transition endommagement-fissuration ainsi que la rupture sont traités très simplement. La méthode ainsi mise en place constitue la première application de la méthode SPH à la théorie des coques fissurantes et représente une approche particulièrement attractive pour l'étude des impacts de structures minces. Notamment, les problèmes naturels de la formulation SPH (manque de stabilité, méconnaissance du problème de bord libre) ont été surmontés pour aboutir à une méthode simple, efficace et précise. Celle-ci ne nécessite pas de description explicite des fissures ce qui la rend particulièrement adaptée au type d'application visé, à savoir des cas de perforations et de fragmentations. La description fine de quelques fissures est également possible par l'utilisation de discrétisations fines. Les cas tests démontrent la possibilité de traiter efficacement des cas de fissuration, multi-fissuration, perforation et fragmentation. La méthode peut être étendue facilement au traitement des interactions fluide-structure, ce qui est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Interactions fluide-structure

*Les deux premiers chapitres de ce document décrivent respectivement un modèle SPH fluide et un modèle SPH de coque fissurante. Le dernier ingrédient nécessaire à la réalisation de simulations d'impacts sur des structures fines remplies de fluide est donc une méthode de traitement des interactions fluide-structure (IFS).*

### Sommaire

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction</b>                                  | <b>99</b>  |
| <b>3.2</b> | <b>Étude bibliographique</b>                         | <b>99</b>  |
| 3.2.1      | Méthode des EF                                       | 99         |
| 3.2.2      | Méthodes sans maillage                               | 100        |
| <b>3.3</b> | <b>La méthode des Pinballs</b>                       | <b>102</b> |
| 3.3.1      | Principe   | 102        |
| 3.3.2      | Détection du contact                                 | 103        |
| 3.3.3      | Condition d'impénétrabilité                          | 103        |
| 3.3.4      | Calcul des forces de contact                         | 105        |
| 3.3.5      | Prise en compte de la topologie des coques SPH       | 107        |
| <b>3.4</b> | <b>Exemple numérique: perforation d'un réservoir</b> | <b>109</b> |
| 3.4.1      | Expérience   | 109        |
| 3.4.2      | Modélisation   | 109        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 3.4.3 Résultats . . . . .        | 112        |
| <b>3.5 Conclusions . . . . .</b> | <b>115</b> |

---

## 3.1 Introduction

Les caractéristiques des IFS que l'on cherche à modéliser sont liées aux spécificités de l'application visée, à savoir, un impact entraînant la rupture d'une structure fine remplie de fluide et suivi d'une fuite de fluide à un débit qu'il est important d'estimer. Dans le même temps, le fluide pourra exhiber des phénomènes de « sloshing » ou bien encore produire des éclaboussures. Il est donc clair que l'interface de contact entre la structure et le fluide pourra évoluer drastiquement au cours des calculs, définissant ainsi un contact non-permanent ou bien unilatéral (par opposition aux IFS permanentes ou bilatérales).

Durant la thèse de B. Maurel [MAU 08a], la méthode des Pinballs a été choisie pour répondre à cette problématique. Après un court rappel bibliographique, les principes de la méthode sont rappelés ainsi que son adaptation aux IFS de modèles purement SPH, [MAU 08a]. Le présent travail se limite à l'adaptation de la méthode à la topologie des structures minces et son application au problème type de rupture de réservoir.

## 3.2 Étude bibliographique

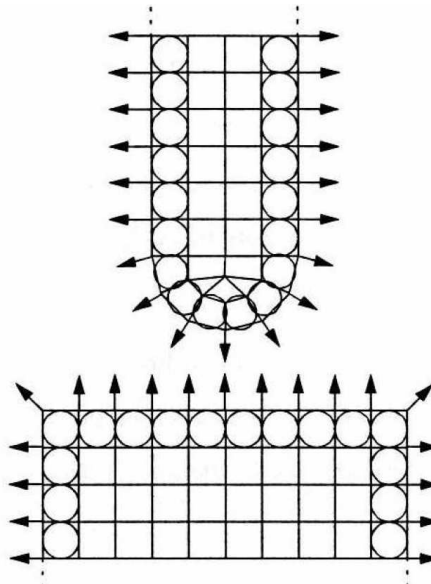
La gestion des IFS permanentes est un problème aujourd'hui assez bien maîtrisé, par exemple à travers le développement de la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). La gestion des IFS non-permanents est un problème plus difficile. Il existe cependant des solutions viables dans le cadre des EF, qui seront présentées rapidement. À l'heure actuelle, les solutions sont moins nombreuses et moins éprouvées dans le cadre des méthodes sans maillage.

### 3.2.1 Méthode des EF

Dans le cadre de la MEF, les contacts non-permanents sont la plupart du temps gérés selon une logique maître-esclave. Cette classe de méthodes repose sur la détection de la pénétration des nœuds EF esclaves sur les surfaces des EF maîtres. Les premiers à avoir suggéré cette approche sont Hallquist [HAL 85] et Benson [BEN 87]. Ces méthodes sont efficaces mais présentent également un certain nombre d'inconvénients. Par exemple, la détection du contact repose sur des calculs géométriques complexes mais inefficaces devant certains cas dits pathologiques (contacts nœud-nœud, surface-surface ou bien encore de nombreux cas en présence de coques). De plus, la méthode n'est pas symétrique car elle produit des résultats qui dépendent du choix, artificiel, des corps maîtres et esclaves. On note cependant que cette approche est attrayante, car naturelle, pour les contacts entre un corps modélisé avec une méthode sans maillage (esclave) et un corps modélisé en EF (maître). Dans Europlexus, l'algorithme des « surfaces glissantes » appartient à cette classe de méthode.

En réponse à ces inconvénients, une nouvelle approche a vu le jour sous le nom de méthode des Pinballs [BEL 91]. Dans sa forme la plus basique, la méthode consiste à placer une sphère au sein de chaque EF situé au bord de la structure, voir la figure 3.1. La

détection du contact est alors faite en testant l'interpénétration des sphères appartenant à des corps différents. La méthode repose ainsi sur des calculs géométriques simples qui sont à l'origine de son attrait. Une forme hiérarchique de la méthode permet ensuite de raffiner la détection du contact et de traiter correctement le cas des EF de coque et poutre. Par rapport aux approches maître-esclave, la méthode des Pinballs a donc l'avantage d'être symétrique et de ne pas souffrir de cas pathologiques. Il faut noter qu'elle présente également certains inconvénients indéniables : les phénomènes de glissement/frottement sont très mal représentés du fait de l'oscillation de la normale au contact provenant de la forme sphérique des Pinballs. De plus, des « trous » peuvent apparaître dans la détection du contact dans le cas de Pinballs de tailles différentes. On note cependant que la méthode est attrayante pour traiter le contact de deux corps modélisés par une méthode sans maillage puisque les Pinballs sont alors directement les particules composant les modèles. Partant de cette idée, la méthode a été adaptée au cas des contacts SPH-SPH dans [MAU 08a], après avoir été implémentée dans Europlexus [CAS 02] et adaptée aux contacts SPH-EF dans [LET 96].



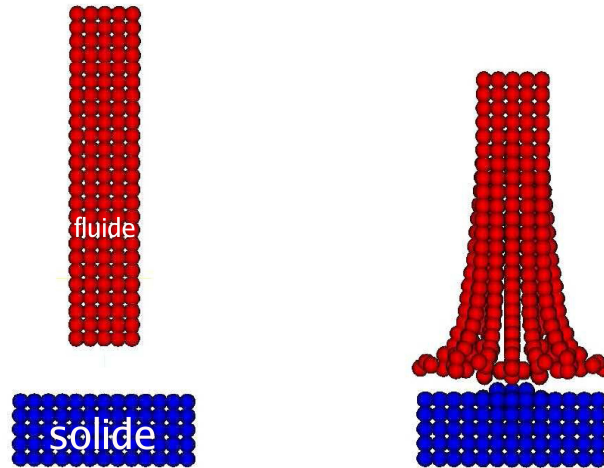
**FIGURE 3.1:** Détection du contact par la méthode des Pinballs [CAS 02].

*Remarque : « pinball » ou « pin ball » signifie « boule de flipper » en anglais.*

### 3.2.2 Méthodes sans maillage

L'une des rares solutions dans ce domaine a longtemps été la méthode dite « naturelle » dans laquelle les corps en contact interagissent librement via leurs fonctions de forme. La méthode a tout d'abord été utilisée pour simuler les interactions entre plusieurs phases fluides [MON 95]. Il s'agit de laisser les nœuds de bord d'un des corps devenir voisins de ceux de l'autre corps et inversement. La gestion du contact ne nécessite

alors pas de traitement particuliers. Si la méthode est attrayante pour sa simplicité, elle présente cependant des limitations qui la rendent inopérante dans notre cas. En effet, lorsque les deux corps en contact ont des tailles de voisinage et des masses volumiques éloignées, la méthode souffre de l'effet appelé « coussin d'air » qui est illustré sur la figure 3.2. On remarque en effet sur cette figure que les nœuds SPH fluides et solides entrent en contact trop tôt, laissant ainsi un vide artificiel entre les deux corps. Un autre



**FIGURE 3.2:** Illustration de l'effet « coussin d'air » [MAU 08a].

inconvenient de la méthode est son incompatibilité avec les formulations lagrangiennes totales qui sont utilisées pour modéliser les solides, voir le paragraphe 1.4.2.2. En effet, alors que la détection du contact nécessite de calculer régulièrement les voisinages, les formulations lagrangiennes totales ne le font qu'une fois pour toutes au début du calcul. Il faut alors utiliser une formulation lagrangienne réactualisée qui pose des problèmes de mise en œuvre. En effet, son utilisation pour le modèle solide crée des instabilités numériques qui se traduisent par la présence de nœuds solides parmi les nœuds fluides, comme on peut le voir sur la figure 3.2. Certains auteurs ont apporté des améliorations à la méthode [RAN 96], [VIG 02] et [ANT 07] par exemple, mais son application dans le cadre visé semble toujours problématique.

Les méthodes alternatives à cette approche consistent donc à considérer les particules de chaque corps en contact comme des ensembles distincts. Le contact doit alors être détecté et une condition d'imperméabilité doit être appliquée afin de calculer les efforts de contact. On peut citer [JOH 01] qui traite le contact entre deux corps particuliers en utilisant une méthode de pénalisation. La méthode des Pinballs, dans sa forme adaptée aux SPH [MAU 08a], appartient également à cette classe de méthode. Dans ce cas, la condition d'imperméabilité entre les nœuds appartenant à des corps distincts est imposée via des multiplicateurs de Lagrange. L'avantage par rapport à la méthode présentée dans [JOH 01] est qu'il n'existe alors plus de paramètres utilisateur dont dépendent les résultats. La méthode des Pinballs issue de [MAU 08a] sera, bien entendu, utilisée dans la suite. Les détails de la méthode seront rappelés avant d'exposer une modification permet-

tant la prise en compte de l'épaisseur des coques. Une application de rupture de réservoir sera également présentée.

Plus récemment, les auteurs de [RAB 09] ont présenté une approche inédite dans le domaine des méthodes sans maillage, intitulée « méthode des particules immergées ». La coque mince, modélisée avec une méthode sans maillage, est immergée dans le fluide, lui aussi discret, voir figure 3.3. Le contact est géré en imposant que les champs de déplacement du fluide et de la coque soient identiques en tout point de la coque. Pour cela, une méthode maître-esclave est appliquée dans laquelle les particules solides sont esclaves des particules fluides. La méthode est attrayante par sa simplicité puisque l'apparition de fissures au cours des calculs ne nécessite pas de traitement particuliers. Les auteurs présentent des applications convaincantes, dont l'une est traitée avec succès par notre approche, voir paragraphe 3.4.

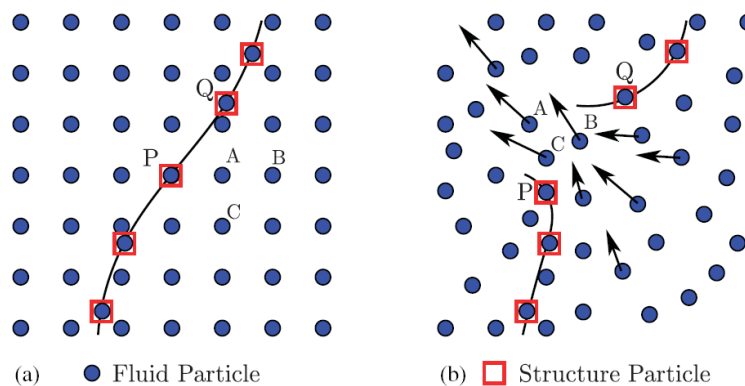


FIGURE 3.3: IFS par la méthode des particules immergées [RAB 09].

### 3.3 La méthode des Pinballs

Cette section présente l'application de la méthode des Pinballs aux contacts de corps modélisés par la méthode SPH. La méthode a été introduite dans Europlexus par Casadei [CAS 02], adaptée aux contacts SPH-EF par Letellier [LET 96] et aux contacts SPH-SPH par Maurel [MAU 08a]. L'apport du présent travail à la méthode est mineur, voir le paragraphe 3.3.5.

#### 3.3.1 Principe

L'adaptation de la méthode des Pinballs décrite dans [BEL 91] et [CAS 02] à la méthode SPH est naturelle. En effet, au lieu de remplir les EF de bords d'une ou plusieurs sphères, il suffit d'attribuer une sphère à chaque nœud SPH intervenant potentiellement dans le contact. La méthode se réduit alors classiquement à la détection du contact,



l'écriture d'une condition d'impenétrabilité et le calcul des forces de contact correspondantes. La méthode est même simplifiée par rapport au cas des EF : le centre et le rayon du Pinball sont directement ceux du nœud SPH et il n'est plus nécessaire de distribuer les efforts de contacts sur les différents nœuds de l'EF.

### 3.3.2 Détection du contact

L'attrait majeur de la méthode réside dans la simplicité des tests géométriques de détection des contacts. Cette simplicité provient de la forme sphérique des Pinballs et permet de s'affranchir de l'existence de cas pathologiques. Les grandeurs utilisées dans la suite de l'exposé étant décrites sur la figure 3.4, l'apparition d'un contact entre deux Pinballs, notés 1 et 2, correspond simplement à l'interpénétration des sphères correspondantes :

$$d_{12} < R_1 + R_2 \quad (3.1)$$

On remarque que la procédure est symétrique puisque les deux corps en contact jouent le même rôle. Il n'est plus nécessaire de choisir un corps esclave et un corps maître.

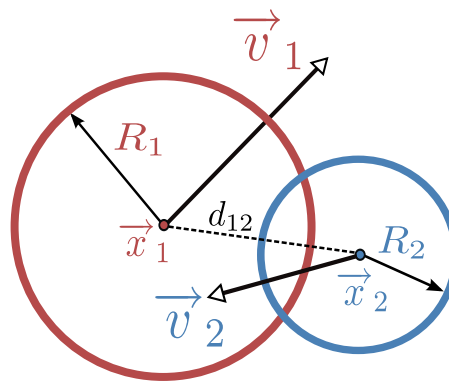


FIGURE 3.4: Grandeurs intervenant dans le contact.

*Remarque : les contacts sont recherchés, dans le cas général, uniquement entre les Pinballs appartenant à des corps différents. Il est cependant également possible de gérer des cas d'auto-contact.*

*Remarque : le rayon des Pinballs est généralement constant au cours du calcul, ce qui suppose que la déformation du corps n'est pas trop importante.*

### 3.3.3 Condition d'impenétrabilité

Une fois le contact détecté, une condition d'impenétrabilité est choisie et va permettre le calcul des forces qui vont empêcher une pénétration supplémentaire des corps en présence. En l'absence de frottement, la condition s'écrit classiquement :

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{n}_{12} \leq 0 \quad (3.2)$$

où  $\vec{n}_{12}$  est la normale au contact orientée de 1 vers 2 et  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont les vitesses des nœuds associés aux Pinballs 1 et 2.

La méthode doit permettre de gérer l'aspect non-permanent du contact, c'est à dire doit permettre de prendre en compte les éventuels rebonds consécutifs au contact. Cet aspect n'est pas encore traité précisément à ce stade, mais il est symbolisé par la présence du signe  $\leq$  plutôt que  $=$  dans l'équation 3.2.

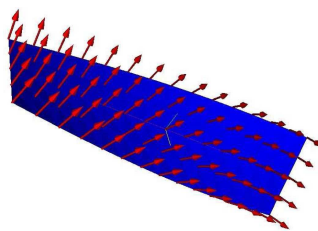
Finalement, un paramètre important de la méthode réside dans la définition de la normale au contact  $\vec{n}_{12}$ . Différentes solutions existent, plus ou moins efficaces en fonction des éléments en contact et des situations envisagées. Dans le cadre des EF, [BEL 91] utilise un algorithme qui permet de calculer les normales approchées des faces externes des solides. Dans le cas d'un contact entre deux corps EF traités de cette manière, la normale au contact est alors la moyenne des normales de deux corps :

$$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{n}_2 - \vec{n}_1}{\|\vec{n}_2 - \vec{n}_1\|} \quad (3.3)$$

où  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont les normales des faces EF associées aux Pinballs 1 et 2. Une approche plus simple est souvent utilisée avec :

$$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} \quad (3.4)$$

La force de contact est donc toujours exercée suivant la direction définie par les centres des deux Pinballs. Cette approche est efficace mais assez rustique et peut prédire des directions de contact très différentes de la direction réelle. Dans le cas du contact coque SPH - fluide SPH qui nous intéresse, le choix a été fait dans [MAU 08a] d'améliorer la prédiction de cette normale. Dans le cas d'IFS, on peut en effet considérer que la direction de contact est donnée par le corps le moins déformable, soit la coque dans notre cas. Ainsi,  $\vec{n}_{12}$  est la normale au plan moyen de la coque définie dans la section 2.2.1. L'introduction de cette normale améliore le traitement du contact dans la plupart des cas,



**FIGURE 3.5:** Normale au contact dans le cas d'une coque SPH [MAU 08a].

comme démontré dans [MAU 08a] à travers divers cas tests. Cependant, la méthode perd également en généralité puisque certains contacts deviennent pathologiques : il s'agit notamment des contacts apparaissant dans une direction perpendiculaire à la normale à la coque, voir la figure 3.6. Dans ce cas, le contact est bien détecté mais la condition sur les vitesses est inefficace.

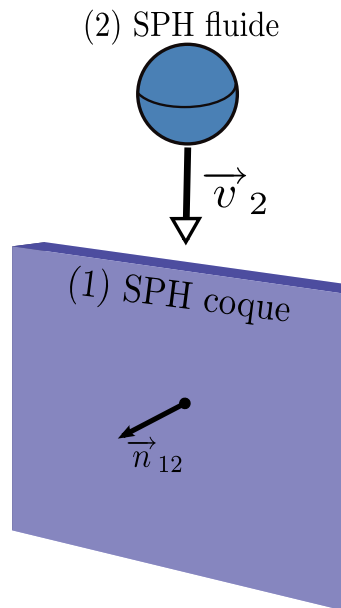


FIGURE 3.6: Cas pathologique du contact coque SPH - fluide SPH.

### 3.3.4 Calcul des forces de contact

La condition d'impénétrabilité 3.2 se traduit dans le modèle par l'introduction de forces de contacts. Différentes approches sont disponibles : la méthode de pénalisation, utilisée dans [BEL 91], la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou du Lagrangien augmenté. La première requiert le choix (difficile) d'un paramètre de calage dont dépendent les résultats. Ce n'est pas satisfaisant, notamment du point de vue de l'utilisateur, la deuxième solution a donc été privilégiée dans Europlexus où elle est implémentée de manière générique.

#### 3.3.4.1 Résolution par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Rappelons qu'Europlexus est un code de dynamique explicite basé sur le schéma de Newmark aux différences centrées. Les équations du schéma ont été rappelées brièvement dans le paragraphe 2.2.2.2 en l'absence de contacts. En présence de contacts, l'équilibre 2.29 doit être résolu tout en satisfaisant la condition 3.2 pour les nœuds intervenant dans le contact. Traitant le cas bilatéral pour simplifier l'exposé, l'équilibre des degrés de liberté intervenant dans le contact s'écrit désormais :

$$\underline{m}^{n+1} \underline{a}^{n+1} = \underline{f}_{ext}^{n+1} - \underline{f}_{int}^{n+1} + \underline{r}^{n+1} \quad (3.5)$$

$$(\underline{v}_2^{n+1} - \underline{v}_1^{n+1}) \cdot \underline{n}_{12}^{n+1} = \underline{c}^{n+1} \underline{v}^{n+1} = \underline{0} \quad (3.6)$$

où  $\underline{r}$  est le vecteur, inconnu, des efforts de contact. Des lettres minuscules sont utilisées dans ce cas, par opposition aux majuscules du paragraphe 2.2.2.2, pour bien signifier que ces équations ne concernent que les degrés de liberté impliqués dans le contact

(généralement une petite partie de l'ensemble des degrés de liberté du système).

Il semble naturel d'écrire la condition 3.2 au pas de temps  $t_{n+1}$  comme dans l'équation 3.6. Cependant, cette écriture conduit généralement à l'introduction d'oscillations hautes fréquences dans la zone où la condition est appliquée, comme démontré dans [CAS 02]. Une alternative consiste à écrire la même condition mais sur les vitesses au demi pas de temps  $n + 3/2$  :

$$\underline{\underline{m}}^{n+1} \vec{a}^{n+1} = \vec{f}_{ext}^{n+1} - \vec{f}_{int}^{n+1} + \vec{r}^{n+1} \quad (3.7)$$

$$\left( \vec{v}_2^{n+3/2} - \vec{v}_1^{n+3/2} \right) \cdot \vec{n}_{12}^{n+1} = \underline{\underline{c}}^{n+1} \vec{v}^{n+3/2} = \vec{0} \quad (3.8)$$

Cette écriture est désormais celle par défaut dans Europlexus car elle fournit de meilleurs résultats que l'équation 3.6. De fait, elle introduit une petite erreur dans le modèle puisque les vitesses au demi pas de temps  $n + 3/2$  sont contraintes selon des conditions calculées au pas  $n + 1$ . L'erreur est cependant jugée négligeable. Pour simplifier les écritures, toutes les quantités à  $t_{n+1}$  ne porteront plus l'exposant  $n + 1$  dans la suite de l'exposé.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange cherche les forces de contact  $\vec{r}$  sous la forme suivante :

$$\vec{r} = \underline{\underline{c}}^t \vec{\lambda} \quad (3.9)$$

où  $\vec{\lambda}$  est le vecteur inconnu des multiplicateurs de Lagrange. Multipliant 3.7 par  $\underline{\underline{cm}}^{-1}$ , on obtient le système :

$$\underline{\underline{b}} \vec{\lambda} = \vec{w} \quad (3.10)$$

avec :

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{cm}}^{-1} \underline{\underline{c}}^t \quad (3.11)$$

$$\vec{w} = \underline{\underline{c}} \vec{a} - \underline{\underline{cm}}^{-1} \left( \vec{f}_{ext} - \vec{f}_{int} \right) \quad (3.12)$$

Le terme  $\underline{\underline{c}} \vec{a}$  est obtenu à partir de la condition de contact 3.8 en utilisant :

$$\vec{v}^{n+3/2} = \vec{v}^{n+1/2} + \left( \frac{\Delta t_n}{2} + \frac{\Delta t_{n+1}}{2} \right) \vec{a}^{n+1} \quad (3.13)$$

On obtient ainsi :

$$\underline{\underline{c}} \vec{a} = - \frac{2}{\Delta t_n + \Delta t_{n+1}} \underline{\underline{c}} \vec{v}^{n+1/2} \quad (3.14)$$

Finalement, les multiplicateurs de Lagrange et les forces de contact sont obtenues en résolvant le système 3.10 avec :

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{cm}}^{-1} \underline{\underline{c}}^t \quad (3.15)$$

$$\vec{w} = - \frac{2}{\Delta t_n + \Delta t_{n+1}} \underline{\underline{c}} \vec{v}^{n+1/2} - \underline{\underline{cm}}^{-1} \left( \vec{f}_{ext} - \vec{f}_{int} \right) \quad (3.16)$$

*Remarque : cette méthode est implémentée de manière générique dans Europlexus pour imposer tout type de condition cinématique pouvant s'exprimer sous la forme  $c \vec{v} = \vec{b}$ . Elle sera utilisée dans le chapitre suivant pour imposer une condition permettant de coupler des EF et des SPH.*

### 3.3.4.2 Traitement du rebond

Les équations du paragraphe précédent traitent le cas d'un contact bilatéral puisque l'égalité des vitesses est imposée, voir l'équation 3.8. Pour prendre en compte le cas unilatéral et ainsi respecter la condition de départ 3.2, il faut introduire dans le modèle la possibilité d'un rebond. La détection du rebond signale que les forces de contact ne doivent plus être appliquées. Deux méthodes, intitulées « à priori » et « à posteriori » sont classiquement utilisées. La méthode « à posteriori » se base sur l'apparition d'un multiplicateur de Lagrange positif, qui indique que les forces de contact ne sont plus répulsives mais attractives. Pour cela, il est évident que le problème de contact doit être résolu auparavant, d'où le nom de l'algorithme. Cette méthode n'est pas celle utilisée par défaut dans Europlexus car elle pose problème dans le cas des Pinballs hiérarchiques parfois utilisés en EF. Dans ce cas, des contacts redondants sont parfois créés et le signe des multiplicateurs de Lagrange n'est alors plus un bon indicateur de rebond. La méthode « à priori » est plus utilisée. Étant de nouveau au début du pas de temps  $n + 1$ , il s'agit de calculer pour les nœuds impliqués dans un contact, une configuration virtuelle dans laquelle il n'y aurait pas de forces de contact, soit :

$$m \vec{a}^* = \vec{f}_{ext} - \vec{f}_{int} \quad (3.17)$$

où l'exposant \* indique les grandeurs virtuelles. En appliquant le schéma classique d'intégration en temps, on peut en déduire l'état virtuel  $\vec{x}^*$  qui serait celui du système en l'absence de contact. La distance  $d_{12}^*$  entre les Pinballs dans cette configuration comparée à leur distance actuelle  $d_{12}$  permet alors de prédire le rebond. Ainsi, les forces de contact ne sont plus appliquées si :

$$d_{12}^* > d_{12} \quad (3.18)$$

### 3.3.5 Prise en compte de la topologie des coques SPH

L'un des inconvénients de la méthode des Pinballs, pour les EF comme pour les SPH, est sa difficulté à respecter la topologie particulière des éléments coque ou poutre. Pour les EF, l'utilisation de Pinballs hiérarchiques permet de contourner le problème. Un contact potentiel étant détecté par la pénétration des Pinballs initiaux (dits parents), il s'agit de subdiviser ceux-ci afin de raffiner et confirmer ou infirmer la détection du contact. Dans le cas des EF coque, les subdivisions successives s'arrêtent lorsque la taille des Pinballs dits descendants atteint l'épaisseur de la coque, voir la figure 3.7. Cette méthode n'est clairement pas naturelle pour le cas des SPHC. Il a donc été choisi dans ce travail de modifier la forme des Pinballs afin de tenir compte de l'épaisseur de la coque. Les Pinballs

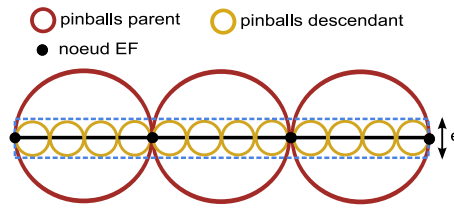


FIGURE 3.7: Pinballs hiérarchiques pour les coques.

ne sont donc plus sphériques mais cylindriques, voir la figure 3.8 (on aurait aussi pu choisir une forme ellipsoïdale, de rayon  $R_a = R_{sph}$  dans le plan de la coque et  $R_b = e/2$  dans la direction de son épaisseur). Les paramètres du contact étant définis sur la figure

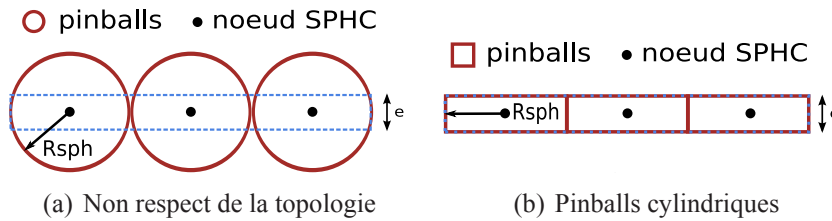


FIGURE 3.8: Pinballs cylindriques pour les SPH coque.

3.9, la condition de détection du contact 3.1 devient double et s'écrit :

$$d_n < \frac{e}{2} + R_2 \quad (3.19)$$

$$d_t < a + R_1 \quad (3.20)$$

avec  $d_n$  et  $d_t$  les distances normales et tangentielle au contact telles que  $d_n = \vec{n}_{12} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1)$ ,  $d_t^2 + d_n^2 = d_{12}^2$ ,  $a = \sqrt{R_2^2 - (R_2 - g)^2}$  et  $g$  le gap tel que  $g = R_2 + e/2 - d_n$ .

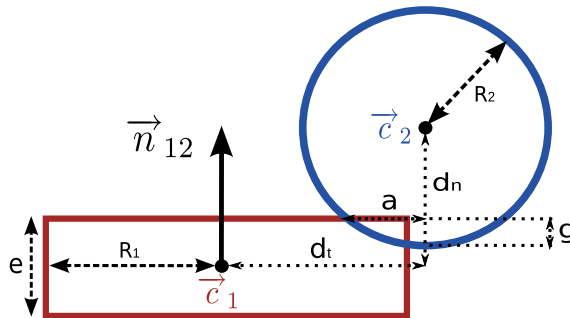


FIGURE 3.9: Paramètres du contact coque SPH - fluide SPH.

*Remarque : la prise en compte de l'épaisseur des coques renforce le cas pathologique*

décrit au paragraphe 3.3.3 et fait perdre en généralité la méthode des Pinballs qui se rapproche ainsi d'une méthode de type maître-esclave. Cependant, cette modification permet d'améliorer la précision de la détection du contact.

## 3.4 Exemple numérique : perforation d'un réservoir

L'auteur de [MAU 08a] présente une validation de la méthode à travers différents cas tests académiques (indentation d'un massif, oscillateur acoustique, impact d'une colonne d'eau). Il s'agit désormais de démontrer les capacités de la méthode sur un cas plus complexe et plus représentatif de notre problème type, à savoir la déchirure d'un réservoir.

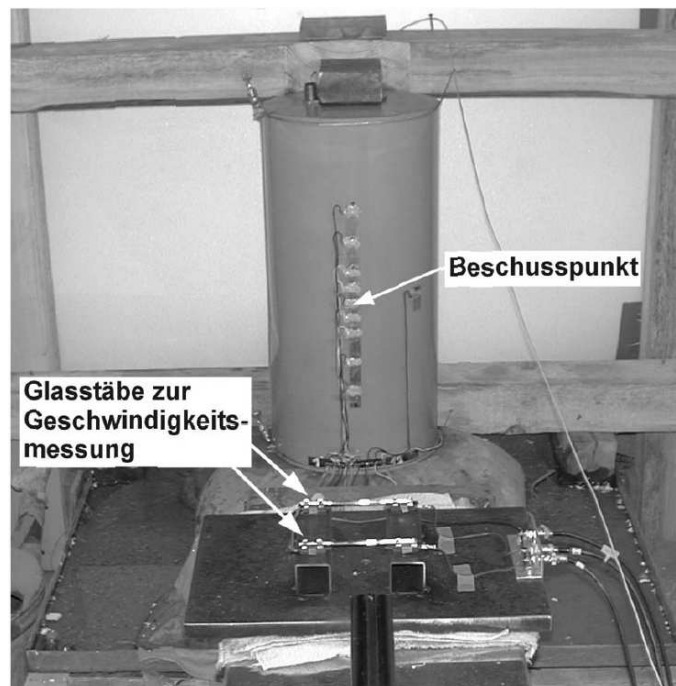
Le cas traité provient d'une étude expérimentale présentée dans [TIM 03] concernant l'impact d'une balle sur un réservoir cylindrique vide ou rempli d'eau. Ce cas a été utilisé notamment par Rabczuk pour valider des méthodes numériques dans le domaine des IFS [RAB 07c], [RAB 09].

### 3.4.1 Expérience

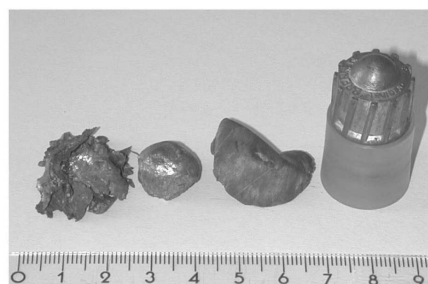
Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 3.10 tirée de [TIM 03]. Il comprend un canon permettant de tirer une balle, visualisée sur la figure 3.11, sur une éprouvette cylindrique en acier en appui sur un cadre. Le dispositif permet une mesure de la vitesse d'impact ainsi qu'un suivi de la pression en certains points où sont collées des jauges. L'auteur présente des résultats pour différentes conditions expérimentales : les vitesses d'impact varient de 300 à 750  $m.s^{-1}$ , l'épaisseur du réservoir de 0.6 à 1 mm, différents rapports hauteur/diamètre du cylindre sont utilisés et le cylindre peut être vide ou rempli d'eau. Dans le cas d'un cylindre vide, l'impact se traduit par une simple perforation d'un diamètre proche de celui de l'impacteur, comme représenté sur la figure 3.12(a). La même chose est observée pour un réservoir rempli d'eau si la vitesse d'impact est faible. Pour les vitesses d'impact élevées, par exemple 730  $m.s^{-1}$  sur la figure 3.12(b), le mode de rupture est différent : une fissure se propage sur toute la hauteur de la face entrante du réservoir, sous l'effet de la réflexion du choc de pression créé dans le fluide. Les cas d'un réservoir vide et d'un réservoir plein sont étudiés ici, pour une vitesse d'impact  $V_{imp} = 730 m.s^{-1}$ . Les dimensions du problème sont les suivantes : hauteur du cylindre  $H = 600 mm$ , diamètre  $D = 300 mm$ , épaisseur  $e = 1 mm$  et impacteur de diamètre  $d_{imp} = 18 mm$  et de masse  $m_{imp} = 31 g$ .

### 3.4.2 Modélisation

L'ensemble du réservoir est modélisé, c'est à dire le cylindre ainsi que les disques le fermant aux extrémités. Bien qu'il a été observé une déformation très importante du projectile, voir la figure 3.11, il est représenté comme un corps rigide, par simplicité et parce qu'on s'intéresse à la rupture du cylindre plus qu'au comportement de l'impacteur

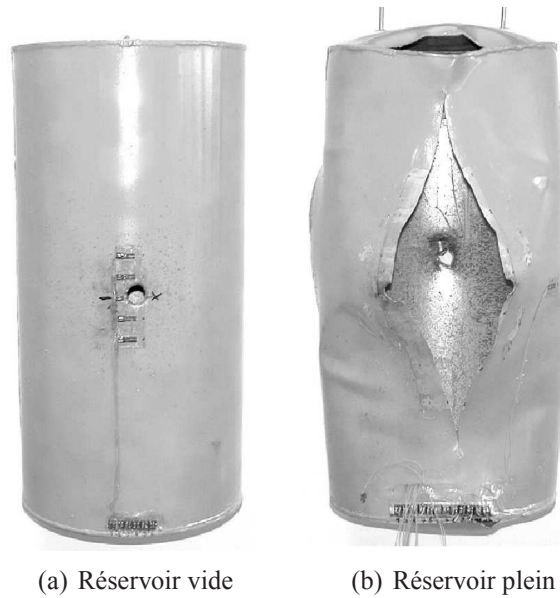


**FIGURE 3.10:** Dispositif expérimental [TIM 03].



**FIGURE 3.11:** État initial et final d'un projectile [TIM 03].





**FIGURE 3.12:** État final du réservoir pour  $V_{imp} = 730 \text{ m.s}^{-1}$  [TIM 03].

lui-même. Le projectile est donc modélisé à l'aide de quatre Pinballs, liés par des multiplicateurs de Lagrange. Le cylindre et le fluide sont tous les deux modélisés avec la méthode SPH. Les contacts fluide-coque, fluide-impacteur et impacteur-coque sont gérés par la méthode des Pinballs, telle qu'exposée dans la section 3.3. Le matériau du réservoir est un acier pour lequel une courbe de traction est donnée dans [TIM 03] ainsi que les paramètres de la loi de Johnson-Cook, voir le tableau 3.1. La loi identifiée ne présente pas de dépendance à la vitesse de déformation, ce qui peut éventuellement provenir d'une méconnaissance du matériau. L'endommagement est modélisé par la loi de Lemaitre et Chaboche associé à un effet retard, voir le paragraphe 2.3.2.2. En l'absence d'informations précises sur le matériau du réservoir, les paramètres d'un acier de construction standard sont choisis et résumés dans le tableau 3.1. Dans le cas du cylindre vide, le faciès de rupture présenté figure 3.13 laisse penser que le cisaillement transverse joue un rôle important dans l'endommagement du matériau et sa rupture. Il a donc été introduit dans les lois de plasticité et d'endommagement alors qu'il était traité élastiquement jusque là, voir le paragraphe 2.2.4. L'équation donnant la contrainte équivalente de von-Mises s'écrit donc :

$$\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{eq}^m)^2 + \alpha^2 (\sigma_{eq}^f)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sigma_{eq}^f \sigma_{eq}^m + \kappa (\sigma_{eq}^{ct})^2 \quad (3.21)$$

avec

$$(\sigma_{eq}^{ct})^2 = 3\sigma_{xz}^2 + 3\sigma_{yz}^2 \quad (3.22)$$

Dans le paragraphe 2.2.4, nous avons présenté le modèle global dans le cas particuliers où  $\kappa = 0$ , ce qui est suffisant pour la majorité des applications. Cela signifie que les composantes de cisaillement transverse restent élastiques au cours du calcul. Nous prenons pour

ce cas test  $\kappa = 1$ . La convergence de l'algorithme de plasticité/endommagement est plus difficile, ce qui confirme que le traitement du cisaillement transverse pose généralement problème dans les modèles numériques.



**FIGURE 3.13:** Faciès de rupture du cylindre vide [TIM 03].

*Remarque : le choix de la valeur de  $\kappa$  est laissé comme une option de la loi de comportement, car très souvent  $\kappa = 0$  (valeur par défaut) est suffisant et évite des difficultés de convergence de l'algorithme de plasticité/endommagement.*

Enfin, l'eau est considérée parfaite, faiblement compressible et acoustique dont les paramètres sont donnés dans le tableau 3.2. Le modèle associé est celui du paragraphe 1.3.1.

Les conditions aux limites à appliquer au cylindre ne sont pas évidentes : le réservoir est appuyé sur un cadre en bois et son extension verticale est bloquée, voir la figure 3.10. Deux groupes de nœuds situés à l'arrière en bas et en haut du cylindre sont donc bloqués et les disques inférieurs et supérieurs fermant le cylindre sont encastrés.

Dans le cas du cylindre vide, le maillage comprend 43006 nœuds (+43236 SP). Le maillage de la coque doit être fin pour que le contact impacteur-coque soit correctement traité et que l'on obtienne des valeurs de vitesse résiduelle réalistes. Dans le cas du cylindre plein, les limitations informatiques imposent de déraffiner la discrétisation SPHC afin d'avoir une taille de SPH comparable dans les parties solide et fluide du modèle. L'expérience montre en effet que les Pinballs doivent avoir des tailles voisines pour éviter un certain nombre de problèmes (« trous », ruptures artificielles). Nous avons donc 19346 nœuds SPHC (+19500 SP) et 103402 nœuds SPH fluide.

### 3.4.3 Résultats

Dans le cas du cylindre vide, la simulation prévoit une simple perforation de la coque d'un diamètre équivalent à celui du projectile, voir la figure 3.14(a), ce qui est conforme à l'expérience. Dans [TIM 03], en mesurant le temps que met le projectile pour parcourir un diamètre à l'intérieur du cylindre, l'auteur déduit que sa vitesse est approximativement  $V \sim 688 \text{ m.s}^{-1}$  après avoir perforé la face avant du réservoir. Il considère ensuite que

| Paramètre                            | Valeur  |
|--------------------------------------|---------|
| $A_{JC}$ (MPa)                       | 175     |
| $B_{JC}$ (MPa)                       | 380     |
| $n_{JC}$                             | 0.32    |
| $C_{JC}$                             | 0       |
| $\dot{\epsilon}_{0 JC}$ ( $s^{-1}$ ) | 1e-3    |
| $\epsilon_r$                         | 1       |
| $\epsilon_d$                         | 0       |
| $D_c$                                | 0.25    |
| a                                    | 1       |
| $\tau_c$ (s)                         | 0.01e-6 |

**TABLE 3.1:** Paramètres matériau : acier du cylindre perforé.

| Paramètre              | Valeur |
|------------------------|--------|
| $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | 1000   |
| c ( $m.s^{-1}$ )       | 1450   |

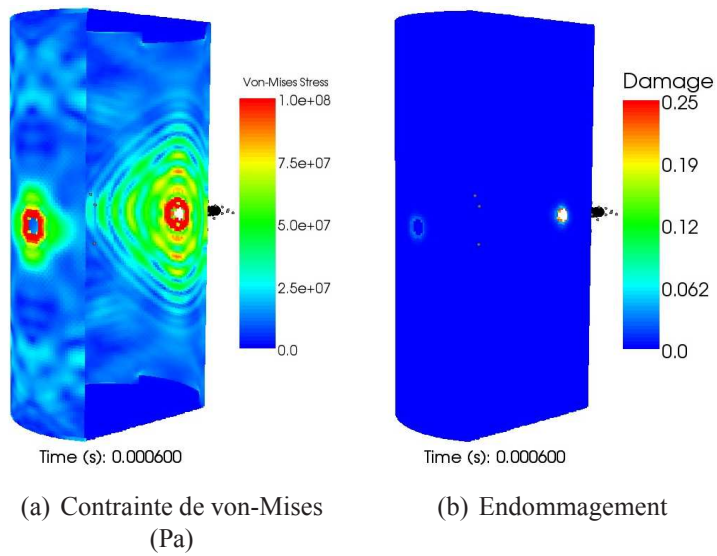
**TABLE 3.2:** Paramètres matériau : eau contenue dans le cylindre perforé.

l'énergie cinétique perdue par le projectile est la même sur les faces avant et arrière, ce qui conduit à la valeur  $V \sim 640 m.s^{-1}$  à la sortie de la face arrière. Cette dernière supposition n'est pas exacte car elle ne prend pas en compte l'effet de la vitesse d'impact sur la réponse du matériau par exemple. Cependant, il n'y a pas d'autre évaluation disponible de la vitesse de sortie du projectile. La simulation donne les vitesses  $V = 673 m.s^{-1}$  et  $V = 621 m.s^{-1}$  après le passage de la face d'entrée et de sortie du cylindre, voir le tableau 3.3. Les vitesses obtenues par la simulation sont légèrement inférieures à celles de l'expérience, ce qui peut avoir de multiples origines : lacunes dans le modèle (finesse du maillage, méconnaissance du matériau, en particuliers de l'influence du taux de déformation) ou imprécisions expérimentales (en particuliers le raisonnement pour obtenir la valeur  $V \sim 640 m.s^{-1}$ ). Les valeurs sont cependant comparables.

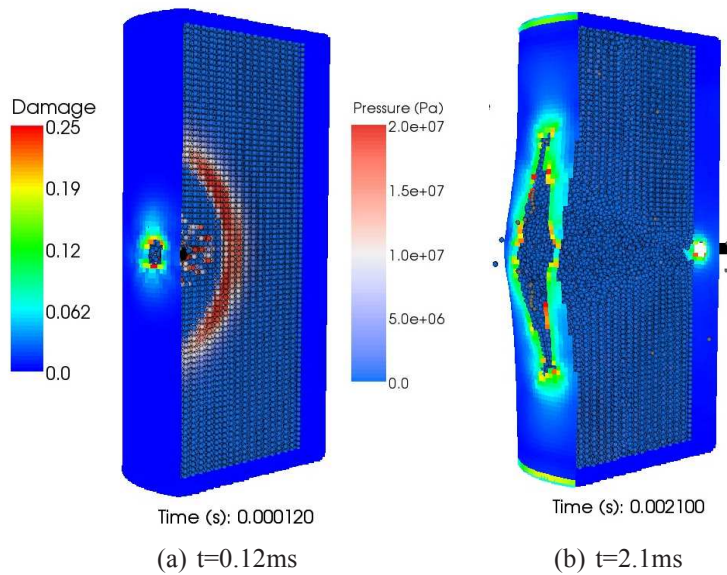
|                     | Face d'entrée       | Face de sortie      |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| Expérience [TIM 03] | $\sim 688 m.s^{-1}$ | $\sim 640 m.s^{-1}$ |
| Modèle SPHC         | $673 m.s^{-1}$      | $621 m.s^{-1}$      |

**TABLE 3.3:** Cylindre vide : vitesses du projectile.

Dans le cas du réservoir plein, la simulation prévoit un faciès de rupture comparable aux résultats expérimentaux, voir les figures 3.12(a) et 3.15(b). L'onde de pression qui se propage présente un pic de l'ordre de 200 bars, voir la figure 3.15(a), du même ordre de grandeur que les valeurs données dans [TIM 03]. La vitesse de sortie du projectile n'est pas mesurée dans l'expérience, la simulation donne  $V \sim 88 m.s^{-1}$ .



**FIGURE 3.14:** Simulation du cylindre vide avec le modèle SPHC.



**FIGURE 3.15:** Simulation du cylindre plein avec le modèle SPHC.

| Calcul | B(%)  | cstab |
|--------|-------|-------|
| vide   | -6.1  | 0.15  |
| plein  | +3.94 | 0.2   |

**TABLE 3.4:** Stabilité du calcul : cylindre perforé.

*Remarque : l'énergie dissipée est assez importante dans le cas du cylindre vide. Une partie de la dissipation provient du filtre appliqué aux particules du bord de la fissure (voir le paragraphe 2.3.6.5), une autre partie provient peut être de la prise en compte du cisaillement transverse dans l'endommagement. C'est un point délicat et méconnu qui nécessiterait un approfondissement, mais que l'on ne retrouve pas dans le calcul du cylindre plein.*

Les informations concernant la stabilité du schéma de Newmark sont données dans le tableau 3.4.

## 3.5 Conclusions

La méthode des Pinballs, initialement élaborée dans le cadre des EF [BEL 91] [CAS 02], s'adapte naturellement à la méthode SPH comme démontré dans la thèse de B. Maurel [MAU 08a]. Le présent travail ne fait que reprendre l'existant et le modifier légèrement dans le cas des coques SPH pour respecter leur topologie. On remarque que la méthode permet de simuler, sans aucun traitement supplémentaire, l'apparition au cours du calcul d'ouvertures dans la structure ainsi que les fuites de fluide associées. Il faut cependant noter que les Pinballs des différents corps doivent avoir des tailles voisines pour que la méthode soit efficace. Finalement, la pertinence de cette approche est démontrée sur un cas réel de perforation de réservoir. Cette application est très proche de l'objectif fixé au début du travail. L'approche choisie est cependant très coûteuse en ressource de calculs ce qui est un frein à son utilisation dans un cadre industriel. Ce problème est abordé dans le chapitre suivant.



# Chapitre 4

## Couplage SPHC-EF

*Les chapitres précédents ont démontré la possibilité de réaliser des calculs d'impacts sur des structures minces remplies de fluide en utilisant un modèle purement SPH. Cependant, les temps de calculs associés à de telles simulations sont élevés. Ce chapitre présente un couplage qui permet de n'utiliser le modèle SPHC que dans les zones d'intérêt et donc de diminuer les temps de calculs associés à ce modèle.*

### Sommaire

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>119</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Les méthodes de couplage</b>                                | <b>119</b> |
| 4.2.1      | Objectifs  | 119        |
| 4.2.2      | Bibliographie  | 120        |
| 4.2.3      | Choix de la méthode  | 122        |
| <b>4.3</b> | <b>La méthode Arlequin</b>                                     | <b>122</b> |
| 4.3.1      | Principes de la méthode  | 122        |
| 4.3.2      | Théorie de la méthode Arlequin                                 | 123        |
| 4.3.3      | Résultats mathématiques et pratiques                           | 129        |
| 4.3.4      | Problèmes spécifiques aux couplages des méthodes sans maillage | 129        |
| 4.3.5      | Bilan  | 131        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>4.4</b> | <b>Discrétisation du couplage Arlequin dans le formalisme SPHC-EF . . .</b> | <b>131</b> |
| 4.4.1      | Définition du problème . . . . .  | 131        |
| 4.4.2      | Discrétisation de la condition de couplage . . . . .                        | 132        |
| 4.4.3      | Méthode de résolution . . . . .   | 134        |
| 4.4.4      | Mise en oeuvre pratique du couplage . . . . .                               | 134        |
| <b>4.5</b> | <b>Cas tests de validation . . . . .</b>                                    | <b>136</b> |
| 4.5.1      | Propagation d'onde . . . . .  | 136        |
| 4.5.2      | Traction . . . . .  | 140        |
| 4.5.3      | Flexion . . . . .   | 143        |
| <b>4.6</b> | <b>Exemples numériques: perforation d'un réservoir . . . . .</b>            | <b>145</b> |
| 4.6.1      | Réservoir vide . . . . .  | 145        |
| 4.6.2      | Réservoir plein . . . . .   | 147        |
| <b>4.7</b> | <b>Conclusions . . . . .</b>  | <b>148</b> |

---



## 4.1 Introduction

Les temps de calculs associés à des simulations faisant intervenir le modèle SPHC sont souvent élevés. A titre d'exemple, on peut s'intéresser aux calculs présentés dans la section 3.4 concernant les impacts sur des réservoirs cylindriques. Dans le cas du réservoir vide, le calcul nécessite  $t_{CPU} = 2.9 h$  pour  $t_f = 600 \mu s$  de simulation ( $\sim 86000$  points,  $c_{stab} = 0.15$ , 1 CPU). Le cas du cylindre rempli d'eau requiert  $t_{CPU} = 55.1h$  pour  $t_f = 2100 \mu s$  ( $\sim 143000$  points,  $c_{stab} = 0.2$ , 1 CPU). Ces ordres de grandeur sont prohibitifs pour un usage de la méthode dans un cadre industriel et des calculs de grande envergure.

Ces observations s'inscrivent dans un constat plus général sur les méthodes sans maillage : à discrétisations de finesse équivalentes, les méthodes sans maillage représentent un coût CPU supérieur à la méthode des EF pour une précision des résultats moindre. Ce constat limite pour l'instant l'utilisation des méthodes sans maillage aux domaines où la méthode des EF n'est pas efficace ou opérante, c'est à dire au traitement des cas de fissurations, perforation et fragmentation.

L'idée développée par certaines équipes de recherche consiste donc à combiner les avantages des méthodes sans maillage et de la MEF en couplant les deux formulations. Cela permet de n'utiliser les méthodes sans maillage que dans les zones du modèle où la rupture intervient. Le reste de la structure est discrétisée par la méthode des EF qui est plus efficace et précise lorsque la solution est régulière. Cette idée est reprise ici, essentiellement pour gagner en efficacité, et donc permettre l'utilisation de la méthode SPHC dans un cadre industriel.

*Remarque : comme décrit au paragraphe 2.2.3.2, l'application des conditions aux limites essentielles n'est pas aisée dans le cadre des méthodes sans maillage. Un avantage supplémentaire du couplage de formulation est qu'il implique, bien souvent, l'application des conditions aux limites essentielles sur le modèle EF. La mise œuvre est alors simple et on peut facilement envisager des conditions aux limites quelconques.*

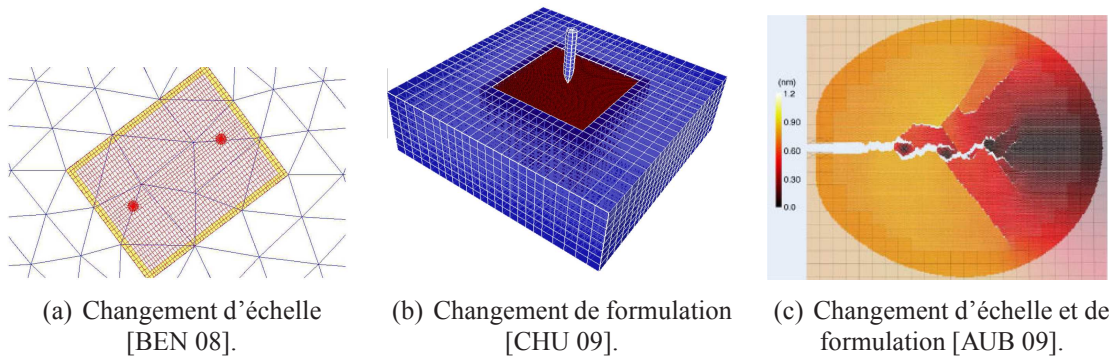
Le chapitre est organisé en 4 parties : une étude bibliographique des différentes méthodes de couplage existantes est tout d'abord présentée. La seconde partie est dédiée à la présentation de la méthode Arlequin. La troisième partie est consacrée à sa mise en œuvre dans le cadre du couplage SPHC-EF coque qui nous intéresse. Enfin, des cas tests de validation et des exemples numériques sont présentés.

## 4.2 Les méthodes de couplage

### 4.2.1 Objectifs

La littérature recèle de nombreuses méthodes de couplage dont l'objectif est un changement d'échelle et/ou de formulation. En effet, l'objectif recherché peut être le raffinement local de la formulation utilisée pour descendre d'un ou plusieurs ordres de grandeur dans l'échelle de modélisation. Par exemple, l'objectif recherché dans le cas présenté sur

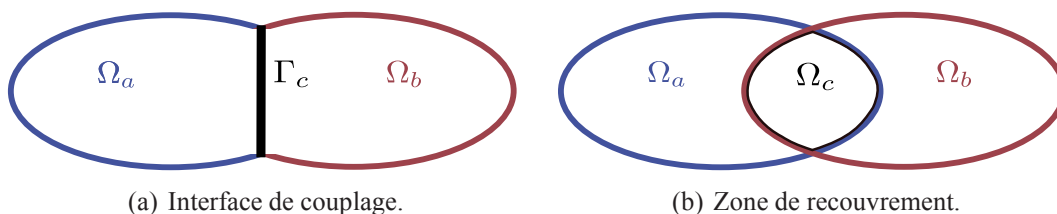
la figure 4.1(a) est le raffinement d'une même modélisation EF pour obtenir une description précise de la fissuration. L'objectif peut également être un changement de formulation sans modification de l'échelle de modélisation. C'est le cas de l'exemple présenté sur la figure 4.1(b) : le couplage permet d'introduire localement une formulation sans maillage adaptée à la description de la rupture du béton sans pour autant changer l'échelle du modèle. Enfin, l'objectif peut être la combinaison de ces deux avantages : dans le cas présenté sur la figure 4.1(c), le couplage permet de descendre à l'échelle atomique tout en introduisant une formulation sans maillage adaptée à la description des ruptures entre les atomes.



**FIGURE 4.1:** Différents objectifs des couplages de formulations.

## 4.2.2 Bibliographie

La diversité des approches et leur nombre rendent difficile la classification des méthodes de couplage. On peut cependant essayer de les distinguer selon que le couplage est effectué via une interface commune  $\Gamma_c$ , voir la figure 4.2(a), ou bien par l'intermédiaire d'une zone de recouvrement  $\Omega_c$  où les deux formulations cohabitent, voir la figure 4.2(b). La référence [RAB 06c] donne une vision d'ensemble des méthodes disponibles pour coupler la méthode des EF avec les méthodes sans maillage.



**FIGURE 4.2:** Définition d'une interface  $\Gamma_c$  ou d'un recouvrement  $\Omega_c$ .

### 4.2.2.1 Couplages par interface

Les couplages utilisant une interface commune sont peut être les plus anciens et les plus éprouvés. Cependant, la transition entre les deux formulations est brutale et rend parfois difficile la maîtrise des réflexions d'onde sur l'interface  $\Gamma_c$ .

L'une des plus anciennes méthodes de cette classe est la méthode maître-esclave. Elle a d'abord été utilisée pour gérer les interactions entre un fluide modélisé par une méthode sans maillage et une structure modélisée par la méthode des EF [ATT 94]. La méthode a ensuite été étendue au couplage de formulations EF et sans maillage au sein d'une même structure. Des particules de la formulation sans maillage sont fixées sur les nœuds EF d'interface et leur mouvement est géré par une méthode maître-esclave classique. Une extension de ce couplage est présentée dans [RAB 06c] pour permettre l'utilisation de discrétisations non-conformes.

Hegen [HEG 96] a développé un couplage EFG-EF par interface en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Rabczuk et Belytschko [RAB 06b] ont étendu la méthode pour la modélisation des renforts de béton armé dans un cadre non-linéaire et dans le cas d'une interface déformable. Karutz [KAR 00] a démontré le bien fondé de cette classe de méthode pour la modélisation des problèmes de fissuration. L'auteur présente également la mise en œuvre d'un couplage adaptatif permettant la génération d'un domaine EFG au cours des calculs. Xiao [XIA 02] a élaboré une méthode similaire intitulée « edge-to-edge coupling ». Cette méthode est parfois vue comme une restriction de la « bridging domain method » décrite plus bas, qui utilise une interface de couplage à la place d'une zone de recouvrement. Les méthodes de « three-field formulation » [BRE 01] et « mortar element method » [BEL 99] utilisent également des multiplicateurs de Lagrange sur une interface de couplage. On peut également citer ici la « quasi-continuum method » [TAD 96].

### 4.2.2.2 Couplages par zones de recouvrement

Les couplages utilisant une zone de recouvrement sont de plus en plus utilisés car ils permettent une plus grande flexibilité dans la génération des maillages et surtout assurent une transition progressive d'une formulation à l'autre. De ce fait, ils conviennent bien aux cas où les formulations couplées sont dissemblables et également lorsque la propagation des ondes est importante et ne doit pas subir de réflexion dans la zone de recouvrement. Les différentes méthodes se distinguent ensuite suivant la manière dont est gérée la transition d'une formulation à l'autre.

On peut citer ici les travaux de Liu et al. [LIU 97] qui ont permis de coupler la « Reproducing Kernel Particle Method » (RKPM) avec la méthode des EF en modifiant les fonctions de forme de sorte à obtenir une interpolation mixte RKPM-EF dans la zone de transition. De manière similaire, Belytschko et al. [BEL 95c] ont utilisé une interpolation mixte afin de réaliser un collage EFG-EF. Cette méthode a ensuite été améliorée par Huerta et al. dans [HUE 00] afin de rétablir la continuité des dérivées dans la zone de transition.

La méthode Arlequin [BEN 04] et la « bridging domain method » [BEL 04] constituent une autre classe de méthode utilisant une zone de recouvrement. Une condition de

couplage faible est introduite dans la zone de recouvrement par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange tandis qu'une partition de l'unité permet de répartir les énergies de la zone commune entre les deux formulations. D'autres formulations sont proches de cette classe de méthode, telle que la « bridging scale decomposition » [WAG 03]. Certaines références comme [KAD 04] sont consacrées spécifiquement à l'amélioration du problème de réflexion d'onde pour cette classe de méthode. [PRU 09] présente également la mise en place d'un couplage Arlequin adaptatif.

Enfin, on peut également citer Sauer [SAU 00] qui a proposé un couplage SPH-EF en étendant le domaine SPH sur le maillage EF. La principale différence avec les méthodes citées jusqu'ici est l'utilisation d'une condition de couplage non plus faible mais forte. De plus, l'auteur présente également un couplage adaptatif qui permet la conversion au cours du calcul de zones du maillage EF en SPH.

### 4.2.3 Choix de la méthode

L'objectif recherché dans l'élaboration d'un couplage SPHC-EF de coque n'est pas un changement d'échelle de modélisation puisque les deux formulations étudient la structure à l'échelle macroscopique. Il s'agit d'introduire localement la formulation SPHC qui permet de modéliser l'endommagement et la rupture des coques. Nous avons énuméré précédemment de nombreuses méthodes de couplage, le choix de l'une parmi les autres dépend essentiellement des caractéristiques du problème étudié. Dans le cadre de la dynamique, il semble préférable de se tourner vers une méthode utilisant une zone de recouvrement. Cela va permettre de minimiser les problèmes de réflexions d'onde lors du changement de formulation. De plus, les formulations couplées sont assez dissemblables, la transition progressive de l'une vers l'autre sera donc bénéfique. Notre choix se porte plus spécifiquement sur la méthode Arlequin, notamment parce que son efficacité a été prouvée par de nombreux travaux et ses bases mathématiques largement étudiées. De plus, les travaux présentés dans [CHU 09] ont montré la pertinence de cette approche pour les couplages SPH-EF volumiques en dynamique rapide.

## 4.3 La méthode Arlequin

L'objectif de cette section est de rappeler les bases de la méthode Arlequin telles que présentées dans [BEN 04] et [BAU 08] ainsi que les principaux résultats mathématiques et pratiques issus de la littérature.

### 4.3.1 Principes de la méthode

La méthode Arlequin doit permettre le couplage de deux modèles initialement distincts en utilisant une zone de recouvrement. Les différentes étapes de la méthode peuvent être résumées comme suit :

- définition d'une zone de recouvrement au sein de laquelle les deux modèles cohabitent. Il s'agit ici de faire le choix de la géométrie et des dimensions de cette zone.
- choix d'une condition de couplage entre les deux modèles. Cette étape comporte une grande liberté de choix : la condition peut être forte ou faible, les variables mécaniques utilisées peuvent être diverses (déplacements, vitesses, efforts, ...). Classiquement, la méthode Arlequin repose sur un couplage faible des vitesses et/ou des déformations.
- choix d'une méthode pour imposer la condition de couplage. La méthode Arlequin utilise classiquement la méthode des multiplicateurs de Lagrange mais on pourrait imaginer l'utilisation de la méthode de pénalité ou du lagrangien augmenté.
- définition de l'état mécanique de la zone de recouvrement comme une combinaison des états mécaniques des modèles qui cohabitent. Les champs associés à cet état mécanique sont dits Arlequins car ils proviennent des deux modèles en présence. Cette étape requiert l'utilisation d'une partition de l'unité dont les caractéristiques peuvent influencer les performances du couplage. La combinaison des états mécaniques est réalisée en distribuant les énergies des deux modèles sur la zone de recouvrement.

Le paragraphe suivant présente les détails de la méthode Arlequin. Certains choix, classiques dans le cadre de cette méthode, sont d'ores et déjà arrêtés : la condition de couplage sera faible et elle sera appliquée par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

## 4.3.2 Théorie de la méthode Arlequin

### 4.3.2.1 Problème de référence

Notons  $\Omega$  le domaine d'étude ouvert (i.e., sans sa frontière) et  $\partial\Omega$  sa frontière qui se décompose en deux parties  $\partial_U\Omega$  et  $\partial_F\Omega$  sur lesquelles sont appliquées respectivement les conditions aux limites essentielles (déplacements imposés  $\vec{U}$ ) et naturelles (efforts imposés  $\vec{F}$ ). La formulation forte ( $S_i$ ) du problème ainsi posé s'écrit, pour la composante  $i$  du champ de déplacement  $\vec{u}$  :

( $S_i$ ) : Trouver  $u_i(\vec{x}, t)$ , connaissant  $u_i(\vec{x}, 0)$  et  $\dot{u}_i(\vec{x}, 0)$ , telle que :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} + f_i &= \rho \ddot{u}_i && \text{sur } \Omega \\
 u_i &= U_i && \text{sur } \partial_U\Omega \\
 \sigma_{ij}n_j &= F_i && \text{sur } \partial_F\Omega
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $n_i$  et  $f_i$  sont respectivement les  $i^{\text{ème}}$  composantes de la normale sortante à  $\Omega$  et des efforts volumiques. De plus,  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$  où  $C_{ijkl}$  sont, par exemple, les coefficients de l'élasticité de Hooke et  $\epsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2 = u_{(k,l)}$ , où  $u_{(k,l)}$  représente la partie symétrique du tenseur  $u_{k,l}$ .

L'écriture de la forme variationnelle de ce problème nécessite la définition de l'espace des fonctions admissibles, noté  $\mathcal{U}_i^{ad}$  et des fonctions admissibles à 0, noté,  $\mathcal{U}_i^{ad,0}$ , définis

par :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_i^{ad} &= \{u_i \mid u_i \in H^1; u_i = U_i \text{ sur } \partial_U \Omega\} \\ \mathcal{U}_i^{ad,0} &= \{u_i \mid u_i \in H^1; u_i = 0 \text{ sur } \partial_U \Omega\}\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $u_i$  est solution du problème  $(S_i)$  (donc  $u_i \in \mathcal{U}_i^{ad}$ ) et multiplions  $(S_i)$  par une fonction quelconque  $v_i^* \in \dot{\mathcal{U}}_i^{ad,0}$ . Après intégration sur  $\Omega$  de l'expression obtenue, l'utilisation d'une intégration par partie et du théorème de Green-Ostrogradski, on obtient la forme variationnelle  $(W_i)$  suivante :

$(W_i)$  : Connaissant  $u_i(\vec{x}, 0)$  et  $\dot{u}_i(\vec{x}, 0)$ , trouver  $u_i \in \mathcal{U}_i^{ad}$ , telle que,  $\forall v_i^* \in \dot{\mathcal{U}}_i^{ad,0}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u_i) \dot{\varepsilon}_{ij}^*(v_i^*) d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F_i v_i^* dS \quad (4.2)$$

en se souvenant que  $v_i^* = 0$  sur  $\partial_U \Omega$  et en remarquant que  $v_{i,j}^* \sigma_{ij}(u_i) = v_{(i,j)}^* \sigma_{ij}(u_i) = \dot{\varepsilon}_{ij}^*(v_i^*) \sigma_{ij}(u_i)$  car  $\sigma_{ij}(u_i)$  est symétrique. On en déduit les expressions des énergies intervenant dans le problème :

$$\begin{aligned}E_{cin} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{\ddot{u}}^T \vec{\ddot{u}} d\Omega \\ E_{int} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{\dot{u}}) : \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}) d\Omega \\ E_{ext} &= \int_{\Omega} \vec{\dot{u}}^T \vec{f} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \vec{\dot{u}}^T \vec{F} dS\end{aligned} \quad (4.3)$$

L'énergie totale du problème s'écrit donc :

$$E_{tot}(\vec{u}) = E_{cin}(\vec{u}) + E_{int}(\vec{u}) - E_{ext}(\vec{u}) \quad (4.4)$$

et la solution  $\vec{u} = \{u_i\}$  est le champ qui minimise  $E_{tot}$ .

*Remarque : l'exposé de la méthode Arlequin est ici fait dans un cadre purement linéaire, ce qui simplifie les équations. La justification vient du fait que le couplage est, dans la grande majorité des cas, placé dans une zone où la linéarité de la solution est assurée. Cela permet des performances optimales de la méthode. Le traitement du cas non linéaire nécessiterait des développements supplémentaires, notamment en ce qui concerne la partition des énergies, comme souligné dans [GUI 07].*

#### 4.3.2.2 Problème Arlequin : définition

Dans le cadre de la méthode Arlequin, il faut considérer que  $\Omega$  est partitionné en deux sous domaines, notés  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$ , et présentant une zone commune notée  $\Omega_c = \Omega_a \cap \Omega_b$ .  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  correspondent à la même réalité physique mais sont modélisés avec des formulations

indépendantes l'une de l'autre.  $\Omega_c$  est la zone de recouvrement qui va permettre de les coupler. Notons les restrictions de  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  à  $\Omega_c$  respectivement  $\Omega_{ac}$  et  $\Omega_{bc}$  de sorte que  $\Omega_{ac} = \Omega_a \cap \Omega_c$  et  $\Omega_{bc} = \Omega_b \cap \Omega_c$ . Enfin, notons  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  les frontières respectives de  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  ainsi que  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  les parties respectives de  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  qui n'appartiennent pas à  $\partial\Omega$ . La définition du problème Arlequin nécessite le choix d'une condition de couplage

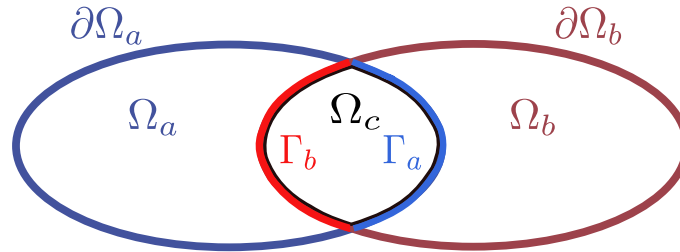


FIGURE 4.3: Définition du couplage Arlequin.

et d'une partition des énergies sur  $\Omega_c$ . Ces choix sont détaillés dans les paragraphes qui suivent.

#### 4.3.2.3 Problème Arlequin : condition de couplage

Le couplage est assuré par l'application d'une condition permettant de lier les deux formulations sur  $\Omega_c$ . Le choix de cette condition et surtout des variables qu'elle fait intervenir est important et peut faire l'objet de discussions. Dans la majorité des cas, la condition consiste à imposer l'« égalité », selon une mesure donnée, des champs cinématiques de  $\Omega_{ac}$  et  $\Omega_{bc}$  : champs de déplacements ou de vitesses (couplages de types  $L^2$ , du nom du produit scalaire qu'il définit sur l'espace de Lebesgue  $L^2$ ). Certains auteurs utilisent plutôt les dérivées spatiales de ces mêmes champs cinématiques dans la condition de couplage (couplages de type semi- $H^1$ ) ou bien même un mélange des champs cinématiques et de leurs dérivées (couplage de type  $H^1$  du nom du produit scalaire qu'il définit sur l'espace de Sobolev  $H^1$ ).

La référence [GUI 07] compare par exemple les couplages de types  $L^2$  et  $H^1$ , de même que [BAU 08] étudie les propriétés mathématiques des couplages  $L^2$ ,  $H^1$  et semi- $H^1$ . Bien que les auteurs de [BAU 08] n'aient pas réussi à prouver que l'utilisation d'une condition de type  $L^2$  conduit à un problème bien posé et donc remettent en cause son utilisation, les auteurs de [GUI 07] nuancent leur propos. Il leur semble que l'utilisation d'une condition de type  $L^2$  nécessite plus de soin dans le choix des ingrédients de la méthode (continuité de la partition de l'unité, espace des multiplicateurs de Lagrange) mais conduit à des résultats souvent plus précis que la condition de type  $H^1$ . Cette dernière semble en effet conduire à un couplage plus souple pouvant porter préjudice à la précision des résultats, notamment dans le cas de la flexion, voir [BAU 08]. En l'absence d'arguments nets, il a été choisi d'imposer une condition faible uniquement sur les champs de vitesses. La condition de couplage peut être introduite en écrivant la puissance  $P_c$  qui serait produite

par les multiplicateurs de Lagrange si la condition cinématique voulue n'était pas vérifiée :

$$P_c = \int_{\Omega_c} \vec{\lambda}^T \cdot (\vec{u}_a - \vec{u}_b) d\Omega \quad (4.5)$$

où  $\vec{\lambda}$  est le champ des multiplicateurs de Lagrange défini sur  $\Omega_c$ .

*Remarque : les couplages  $L_2$  conduisent parfois à un mauvais conditionnement de la matrice de raideur du système car les termes associés au couplage n'ont pas le même ordre de grandeur que la raideur de la structure. C'est probablement pourquoi certains auteurs se tournent vers des couplages  $H_1$  qui, eux, ne posent pas de problèmes de conditionnement. Cette question n'intervient pas ici puisque le problème de couplage est résolu par multiplicateurs de Lagrange dans un système indépendant, voir le paragraphe 4.4.3. Cette remarque conforte le choix d'un couplage  $L_2$  dans ce travail.*

#### 4.3.2.4 Problème Arlequin : partition des énergies

L'état mécanique dans la zone de recouvrement  $\Omega_c$  provient de la partition des énergies issues de  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$ . Il est donc nécessaire de définir des fonctions de mélange formant une partition de l'unité. Ainsi,  $\alpha_a$  et  $\alpha_b$  sont les fonctions de mélange définies sur  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$ , telles que :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= 1 \text{ sur } \Omega_a \setminus \Omega_c \\ \alpha_b &= 1 \text{ sur } \Omega_b \setminus \Omega_c \\ \alpha_a + \alpha_b &= 1 \text{ sur } \Omega_c \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si l'on suppose que  $\alpha_a$  et  $\alpha_b$  sont continues par morceaux sur  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  et continues sur  $\Omega_c$ , nous devons prendre en compte une éventuelle discontinuité de  $\alpha_a$  et  $\alpha_b$  respectivement en  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_a$ .

Les énergies des sous domaines  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} E_{cin}^a &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_a} \alpha_a \rho \vec{u}_a^T \vec{u}_a d\Omega \\ E_{int}^a &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_a} \alpha_a \underline{\underline{\epsilon}}_a(\vec{u}_a) : \underline{\underline{\sigma}}_a(\vec{u}_a) d\Omega \\ E_{ext}^a &= \int_{\Omega_a} \alpha_a \vec{u}_a^T \vec{f}_a d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_a} \alpha_a \vec{u}_a^T \vec{F}_a dS \\ E_{cin}^b &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_b} \alpha_b \rho \vec{u}_b^T \vec{u}_b d\Omega \\ E_{int}^b &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_b} \alpha_b \underline{\underline{\epsilon}}_b(\vec{u}_b) : \underline{\underline{\sigma}}_b(\vec{u}_b) d\Omega \\ E_{ext}^b &= \int_{\Omega_b} \alpha_b \vec{u}_b^T \vec{f}_b d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_b} \alpha_b \vec{u}_b^T \vec{F}_b dS \end{aligned} \quad (4.7)$$



*Remarque : il est possible d'utiliser des partitions différentes pour les énergies internes, cinétiques et le travail des efforts extérieurs. Dans ce travail, nous allons cependant utiliser les mêmes fonctions de mélange car il n'y a pas, a priori, de raisons de faire un autre choix.*

La minimisation de l'énergie totale

$$\begin{aligned}
 E_{tot}(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{\lambda}) = & E_{cin}^a(\vec{u}_a) + E_{int}^a(\vec{u}_a) - E_{ext}^a(\vec{u}_a) \\
 & + E_{cin}^b(\vec{u}_b) + E_{int}^b(\vec{u}_b) - E_{ext}^b(\vec{u}_b) \\
 & + E_c(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{\lambda})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

par rapport à  $\vec{u}_a$ ,  $\vec{u}_b$  et  $\vec{\lambda}$  conduit à la définition de trois problèmes faibles ( $W^a$ ), ( $W^b$ ) et ( $W^c$ ) :

Connaissant  $u_i^a(\vec{x}, 0)$ ,  $\dot{u}_i^a(\vec{x}, 0)$ ,  $u_i^b(\vec{x}, 0)$  et  $\dot{u}_i^b(\vec{x}, 0)$ , trouver  $(u_i^a, u_i^b, \lambda) \in \mathcal{U}_i^{a,ad} \times \mathcal{U}_i^{b,ad} \times \mathcal{M}$  telles que :

$$(W_i^a) : \quad \forall v_i^{*a} \in \dot{\mathcal{U}}_i^{a,ad,0}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_a} \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a v_i^{a*} d\Omega + \int_{\Omega_a} \alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a) \dot{\epsilon}_{ij}^{a*}(v_i^{a*}) d\Omega + \int_{\Omega_{ac}} \lambda_i v_i^{a*} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega_a} \alpha_a f_i^a v_i^{a*} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_a} \alpha_a F_i^a v_i^{a*} dS
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$(W_i^b) : \quad \forall v_i^{*b} \in \dot{\mathcal{U}}_i^{b,ad,0}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_b} \rho \alpha_b \ddot{u}_i^b v_i^{b*} d\Omega + \int_{\Omega_b} \alpha_b \sigma_{ij}^b(u_i^b) \dot{\epsilon}_{ij}^{b*}(v_i^{b*}) d\Omega - \int_{\Omega_{bc}} \lambda_i v_i^{b*} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega_b} \alpha_b f_i^b v_i^{b*} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_b} \alpha_b F_i^b v_i^{b*} dS
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$(W_i^c) : \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{M}$$

$$\int_{\Omega_c} \lambda_i^* (\dot{u}_i^a - \dot{u}_i^b) d\Omega \tag{4.11}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_i^{a,ad} &= \{u_i^a \mid u_i^a \in H^1; u_i^a = U_i^a \text{ sur } \partial_U \Omega_a\} \\
 \mathcal{U}_i^{a,ad,0} &= \{u_i^a \mid u_i^a \in H^1; u_i^a = 0 \text{ sur } \partial_U \Omega_a\} \\
 \mathcal{U}_i^{b,ad} &= \{u_i^b \mid u_i^b \in H^1; u_i^b = U_i^b \text{ sur } \partial_U \Omega_b\} \\
 \mathcal{U}_i^{b,ad,0} &= \{u_i^b \mid u_i^b \in H^1; u_i^b = 0 \text{ sur } \partial_U \Omega_b\} \\
 \mathcal{M} &\text{ l'espace des multiplicateurs de Lagrange}
 \end{aligned}$$

Il est intéressant d'établir les nouvelles formulations fortes du problème à partir des formes faibles ( $W_i^a$ ) et ( $W_i^b$ ). Il s'agit notamment d'étudier les conséquences de l'introduction des fonctions  $\alpha_a$  et  $\alpha_b$  et de leurs propriétés sur la formulation forte ainsi établie. Les calculs correspondant au sous domaine  $\Omega_a$  sont donnés en exemple dans l'annexe E. Dans le cas où  $\alpha_a$  est continue sur  $\Omega_a$ , on voit alors que le problème fort ( $S_i^a$ ) correspondant, écrit sous forme vectorielle, est :

( $S_i^a$ ) : Trouver  $\vec{u}_a$  tel que :

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{div}}(\alpha_a \underline{\underline{\sigma}}_a) + \alpha_a \vec{f}_a - \vec{\lambda} &= \alpha_a \rho \vec{u}_a && \text{sur } \Omega_a \\
 \vec{u}_a &= \vec{U}_a && \text{sur } \partial_U \Omega_a \\
 \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{F}_a && \text{sur } \partial_F \Omega_a
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

*Remarque :* pour simplifier les écritures nous n'avons pas différencié  $\Omega_{ac}$  où  $\vec{\lambda} = 0$  et  $\Omega_c$  où  $\vec{\lambda} \neq 0$ .

Dans le cas où  $\alpha_a$  est constante sur  $\Omega_c$  de valeur  $\alpha_a^0$ , les auteurs de [GUI 07] montrent que la formulation forte associée s'écrit alors :

( $S_i^a$ ) : Trouver  $\vec{u}_a$  tel que :

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{div}}(\alpha_a \underline{\underline{\sigma}}_a) + \alpha_a \vec{f}_a - \vec{\lambda} &= \alpha_a \rho \vec{u}_a && \text{sur } \Omega_a \\
 \vec{u}_a &= \vec{U}_a && \text{sur } \partial_U \Omega_a \\
 \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{F}_a && \text{sur } \partial_F \Omega_a \\
 (\alpha_a^0 - 1) \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_b &= \vec{0} && \text{sur } \Gamma_b \\
 \alpha_a^0 \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{0} && \text{sur } \Gamma_a
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dans le cas d'une fonction  $\alpha_a$  constante sur  $\Omega_c$ ,  $\alpha_a^0 - 1$  et  $\alpha_a^0$  sont non nuls sur  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_a$ , ce qui implique  $\underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Ainsi, des conditions de bords libres artificielles sont créées à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Les auteurs de [GUI 07] soulignent que le champ

des multiplicateurs de Lagrange est alors singulier en  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Il est donc recommandé d'utiliser des fonctions de mélange linéaires ou cubiques. Dans ce cas, le problème fort à résoudre est celui de l'équation 4.12. Il n'est pas éloigné du problème initial et nécessite seulement de pondérer le tenseur des contraintes avant d'appliquer l'opérateur divergence.

### 4.3.3 Résultats mathématiques et pratiques

La méthode Arlequin fait intervenir des paramètres qu'il est parfois difficile de choisir. La littérature est cependant riche en travaux théoriques et en applications pratiques à partir desquels il est possible de dégager des indications quant aux choix à effectuer.

La taille et la forme de la zone de recouvrement  $\Omega_c$  est le premier paramètre à choisir. Les auteurs de [GUI 07] recommandent l'utilisation d'une zone la plus étroite possible afin de minimiser les éventuels effets liés à la cohabitation des formulations (verrouillage par exemple). Dans de nombreuses applications, on constate en effet que  $\Omega_c$  occupe une zone large d'un EF, ce que nous appliquerons également dans nos calculs.

La définition et la discrétisation de la condition de couplage sont sujets à discussion. Le choix d'une condition de type  $L^2$  sur les champs de vitesses a été justifié dans le paragraphe 4.3.2. Restent alors les choix numériques liés à la discrétisation de la condition 4.5. Classiquement, l'interpolation et l'approximation des champs de vitesse EF et SPHC sont réalisées respectivement par des fonctions de forme linéaires et des fonctions MLS d'ordre 1. L'intégration numérique est réalisée par une quadrature de Gauss classique sur les EF de  $\Omega_c$ . L'interpolation/approximation du champ des multiplicateurs de Lagrange fait l'objet d'un choix plus déterminant, spécialement en présence de discrétisations de finesse différentes pour  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$ . Les auteurs de [GUI 07] et [BAU 08] soulignent, en effet, la présence d'un verrouillage potentiel lorsque le champ  $\vec{\lambda}$  est interpolé/approximé à partir des nœuds de la discrétisation fine. Dans ce cas, le couplage se traduit par un nombre élevé de contraintes qui serait à l'origine de ce phénomène de verrouillage. Il est donc conseillé d'interpoler/approximer le champ  $\vec{\lambda}$  à partir de la discrétisation grossière, qui est généralement la discrétisation EF dans le cas d'un couplage EF-SPH.

Finalement, la répartition des énergies entre les deux formulations de  $\Omega_c$  nécessite la définition d'une partition de l'unité. Les auteurs de [GUI 07] soulignent la nécessité d'utiliser une fonction de mélange au minimum linéaire dans le cas d'un couplage de type  $L^2$ . Dans le cas d'une fonction constante sur  $\Omega_c$  et donc discontinue sur  $\Omega$ , les auteurs ont démontré que le modèle comporte une condition artificielle de bords libres sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , voir le paragraphe 4.3.2.4. Ils ont observé simultanément l'apparition de singularités dans le champ des multiplicateurs de Lagrange sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ .

### 4.3.4 Problèmes spécifiques aux couplages des méthodes sans maillage

L'utilisation de la méthode Arlequin pour coupler des modélisations continues et discrètes présente des difficultés spécifiques qui ont été étudiées en détail dans [CHA 10].

Les auteurs ont identifiés quatre sources potentielles d'instabilités numériques dans la zone de recouvrement.

### 4.3.4.1 Modes libres

L'utilisation simultanée d'une fonction de mélange constante et de discrétisations de finesse différentes (par exemple, le cas où  $\Omega_c$  présente un grand nombre de particules par EF collé) semblent conduire à des oscillations du champ de déplacements particulière autour de la solution EF. Ces « modes libres » n'ont pas été rapportés dans le cas d'une fonction de mélange linéaire ou cubique.

### 4.3.4.2 Perte locale de coercivité

Les auteurs de [CHA 10] ont montré que le problème défini par le couplage Arlequin devient mal posé quand l'énergie des particules est pondérée par un coefficient proche de 0. Le problème apparaît donc pour des maillages particuliers très raffinés par rapport au maillage EF et dans les cas où la fonction de mélange tend rapidement vers 0 au bord de la zone de couplage. Ainsi, une fonction de mélange cubique favorise le développement de ce genre de problème. [BEN 08] fait également référence à ce problème pour un couplage EF-EF et conseille simplement de ne pas utiliser des discrétisations de finesse trop éloignées. Ce problème est également mentionné dans [CHU 09] pour un couplage EF-SPH. L'auteur borne la fonction de mélange de sorte que les particules SPH ne puissent pas être pondérées par un coefficient inférieur à 0.25.

### 4.3.4.3 Effets de bord

Les particules du bord de la zone de recouvrement souffrent de l'absence de voisins qui ont été remplacés par des EF. C'est le même problème qui est posé classiquement dans le traitement des bords libres dans les méthodes sans maillage : les voisinages incomplets dégradent la précision de l'approximation sur les bords, ce qui peut entraîner le développement d'instabilités numériques. Les auteurs de [CHA 10] ont cependant remarqué que ces instabilités diminuent quand les particules de bord sont pondérées par un poids faible qui diminue d'autant l'énergie qu'elles portent. C'est par exemple le cas pour une fonction de mélange linéaire ou cubique. La méthode SPHC utilise des fonctions MLS qui permettent d'atténuer ces effets, ils ne devraient pas être prépondérant dans notre cas.

### 4.3.4.4 Forces fantômes

Les auteurs de [CHA 10] observent également des instabilités vers le bord EF de la zone de recouvrement qui sont attribuées à la présence de forces fantômes. Le problème a été soulevé dans le cadre de la « quasi-continuum method », voir [CUR 03]. Ces forces fantômes sont attribuées au fait que les méthodes sans maillage ont un caractère non local contrairement à la méthode des EF. Il existe ainsi des interactions entre des particules

pondérées faisant partie du couplage et d'autres n'en faisant pas partie. Ce phénomène crée des contributions non symétriques dans la matrice de rigidité qui peuvent conduire à des instabilités numériques. [CHA 10] propose une méthode permettant de corriger ces forces fantômes, ce qui semble améliorer les performances du couplage.

### 4.3.5 Bilan

La bibliographie permet de dégager des pistes pour le choix des divers paramètres de la méthode :

- la zone de recouvrement doit être large d'un EF dans une zone purement linéaire,
- l'interpolation du champ des multiplicateurs de Lagrange doit être effectuée via le maillage EF afin d'éviter l'apparition d'un verrouillage (en supposant les particules SPH plus petites que les EF),
- il faut utiliser une fonction de mélange linéaire plutôt que constante (bords libres artificiels, modes libres) ou cubique (perte de coercivité),
- le raffinement SPHC-EF doit être raisonnable pour éviter l'apparition de modes libres ou d'une perte de coercivité.
- les voisinages SPHC doivent être de taille raisonnable pour éviter l'apparition de forces fantômes.

## 4.4 Discrétisation du couplage Arlequin dans le formalisme SPHC-EF

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème Arlequin défini précédemment dans le cadre spécifique que du couplage EF-SPHC envisagé.

### 4.4.1 Définition du problème

Les sous domaines  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  sont discrétisés par la méthode des EF et la méthode SPHC. Les deux discrétisations sont associées à un modèle de coque épaisse de type Mindlin-Reissner. Les champs de vitesses EF et SPHC sont composés d'une partie membrane et d'une partie rotation que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{EF}^h(\vec{x}) &= \vec{v}_{EF}^m(\vec{x}) + z \vec{v}_{EF}^r(\vec{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{N_{EF}} N_i(\vec{x}) \vec{V}_{iEF}^m + z \sum_{i=1}^{N_{EF}} N_i(\vec{x}) \vec{V}_{iEF}^r\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{SPH}^h(\vec{x}) &= \vec{v}_{SPH}^m(\vec{x}) + z \vec{v}_{SPH}^r(\vec{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) \vec{V}_{iSPH}^m + z \sum_{i=1}^{N_v} \phi_i(\vec{x}) \vec{V}_{iSPH}^r\end{aligned}\quad (4.15)$$

où  $N_i$  et  $\phi_i$  sont respectivement les fonctions d'interpolation EF et d'approximation MLS et  $z$  la direction de la normale à la coque.  $\vec{V}_{iEF}$  et  $\vec{V}_{iSPH}$  sont les vecteurs contenant les vitesses des degrés de liberté du nœud  $i$  en membrane (indice « m ») et en rotation (indice « r »).  $N_{EF}$  est le nombre de nœuds de l'EF et  $N_v$  est le nombre de voisins SPHC du point  $\vec{x}$ .

#### 4.4.2 Discrétisation de la condition de couplage

La résolution du problème Arlequin nécessite de discrétiser la formulation faible EF ( $W^{ef}$ ), la formulation forte SPHC ( $S^{sphc}$ ) et la condition de couplage faible ( $W^c$ ). Commençons par discrétiser la condition de couplage :

( $W^c$ ) : Trouver  $(\vec{u}_{EF}^h, \vec{u}_{SPH}^h, \lambda^h) \in \mathcal{U}_h^{EF,ad} \times \mathcal{U}_h^{SPH,ad} \times \mathcal{M}_h$  tels que :

$$\forall \lambda^{h*} \in \mathcal{M}_h \quad \int_{\Omega_c} \vec{\lambda}^{h*T}(\vec{x}) \left[ \vec{v}_{EF}^h(\vec{x}) - \vec{v}_{SPH}^h(\vec{x}) \right] d\Omega = I_{EF} - I_{SPH} \quad (4.16)$$

où  $\vec{v} = \vec{u}$ . Les calculs sont détaillés pour l'exemple de l'intégrale  $I_{EF}$ , pour laquelle nous utilisons une quadrature de Gauss classique basée sur le maillage EF. Ainsi, l'intégrale est décomposée sur chaque EF de  $\Omega_c$  :

$$\begin{aligned} I_{EF} &= \sum_{i=1}^{NEL_{EF}} \int_{\Omega_{EF_i}} \vec{\lambda}^{h*T}(\vec{x}) \vec{v}_{EF}^h(\vec{x}) d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{NEL_{EF}} I_{EF_i} \end{aligned} \quad (4.17)$$

où  $NEL_{EF}$  est le nombre d'EF finis présents dans  $\Omega_c$ . En remplaçant les champs de vitesse par leur expression et en remarquant que les termes linéaires en  $z$  disparaissent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{EF_i} &= \int_{\Omega_{EF_i}^0} \vec{\lambda}^{h*T}(\vec{\xi}) \vec{v}_{EF}^h(\vec{\xi}) J(\vec{\xi}) d\Omega \\ &= \int_{S_{EF_i}^0} e \vec{\lambda}^{h*mT}(\vec{\xi}) \vec{v}_{EF}^{mh}(\vec{\xi}) J(\vec{\xi}) dS \\ &\quad + \int_{S_{EF_i}^0} \frac{e^3}{12} \vec{\lambda}^{h*rT}(\vec{\xi}) \vec{v}_{EF}^{rh}(\vec{\xi}) J(\vec{\xi}) dS \\ &= I_{EF_i}^m + I_{EF_i}^r \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $J$  est le Jacobien de la transformation. L'interpolation du champ des multiplicateurs de Lagrange étant basée sur la discrétisation EF, comme justifié au paragraphe 4.3.3, l'intégrale  $I_{EF_i}^m$  devient ainsi :

$$I_{EF_i}^m = \int_{S_{EF_i}^0} e \left( \sum_{l=1}^{N_{EF}} \vec{\Lambda}_l^{*mT} N_l(\vec{\xi}) \right) \left( \sum_{k=1}^{N_{EF}} \vec{v}_{kEF}^m N_k(\vec{\xi}) \right) J(\vec{\xi}) dS \quad (4.19)$$

où  $N_{EF}$  est le nombre de nœuds de l'EF  $i$ ,  $\vec{\Lambda}_l^{*mT}$  le vecteur contenant les degrés de liberté en membrane des multiplicateurs de Lagrange du nœud EF  $l$  et  $\vec{V}_{kEF}^m$  le vecteur contenant les vitesses des degrés de liberté en membrane du nœud EF  $k$ . En réorganisant la double somme et en déplaçant le signe intégrale, on peut écrire :

$$I_{EFi}^m = \vec{\Lambda}^{*mT} \underline{\underline{C}}_{EF}^m \vec{V}_{EF}^m \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{EF}^m(k, l) &= \int_{S_{EFi}^0} e N_l(\vec{\xi}) N_k(\vec{\xi}) J(\vec{\xi}) dS \\ &= \sum_{j=1}^{NGP} e N_l(\vec{\xi}_{g_j}) N_k(\vec{\xi}_{g_j}) J(\vec{\xi}_{g_j}) w_{g_j} \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $NGP$ ,  $w_{g_j}$  et  $\xi_{g_j}$  sont respectivement le nombre de points de Gauss, le poids et les coordonnées du  $j^{\text{ème}}$  point de Gauss de l'EF  $i$ .

*Remarque :*  $\underline{\underline{C}}_{EF}^T$  a la même expression que  $\underline{\underline{C}}_{EF}^m$  en remplaçant  $e$  par  $e^3/12$ .

De manière similaire,  $I_{SPHi}^m$  s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{SPHi}^m &= \int_{S_{EFi}^0} e \left( \sum_{l=1}^{N_{EFi}} \vec{\Lambda}_l^{*mT} N_l(\vec{\xi}) \right) \left( \sum_{k=1}^{NV_{SPHj}} \vec{V}_{kSPH}^m \phi_k(\vec{\xi}) \right) J(\vec{\xi}) dS \\ &= \vec{\Lambda}^{*mT} \underline{\underline{C}}_{SPH}^m \vec{V}_{SPH}^m \end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $NV_{SPHj}$  est le nombre de voisins SPHC du point de Gauss  $j$  pris en compte dans l'approximation du champ de vitesse.

Ainsi, la discrétisation de la condition de couplage ( $W^c$ ) conduit à la définition de deux matrices de couplage  $\underline{\underline{C}}_{EF}$  et  $\underline{\underline{C}}_{SPH}$ , telles que :

$$\vec{\Lambda}^{*T} \left( \underline{\underline{C}}_{EF} \vec{V}_{EF} - \underline{\underline{C}}_{SPH} \vec{V}_{SPH} \right) = 0 \quad \forall \vec{\Lambda}^* \quad (4.23)$$

La discrétisation des problèmes EF et SPH fournissent les équations habituelles :

$$\forall \vec{V}_{EF}^* \quad \vec{V}_{EF}^{*T} \left[ \underline{\underline{M}}_{EF}^\alpha \vec{U}_{EF} + \underline{\underline{K}}_{EF}^\alpha \vec{U}_{EF} + \underline{\underline{C}}_{EF}^T \vec{\Lambda} \right] = \vec{V}_{EF}^{*T} \vec{F}_{EF}^{ext\alpha} \quad (4.24)$$

$$\forall \vec{V}_{SPH}^* \quad \vec{V}_{SPH}^{*T} \left[ \underline{\underline{M}}_{SPH}^\alpha \vec{U}_{SPH} + \vec{F}_{SPH}^{int\alpha} - \underline{\underline{C}}_{SPH}^T \vec{\Lambda} \right] = \vec{V}_{SPH}^{*T} \vec{F}_{SPH}^{ext\alpha} \quad (4.25)$$

Les équations 4.23, 4.24 et 4.25 étant valable  $\forall \vec{V}_{EF}^*$ ,  $\forall \vec{V}_{SPH}^*$ ,  $\forall \vec{\Lambda}^*$ , on a finalement :

$$\underline{\underline{M}}_{EF}^\alpha \vec{U}_{EF} + \underline{\underline{K}}_{EF}^\alpha \vec{U}_{EF} + \underline{\underline{C}}_{EF}^T \vec{\Lambda} = \vec{F}_{EF}^{ext\alpha} \quad (4.26)$$

$$\underline{\underline{M}}_{SPH}^\alpha \vec{U}_{SPH} + \vec{F}_{SPH}^{int\alpha} - \underline{\underline{C}}_{SPH}^T \vec{\Lambda} = \vec{F}_{SPH}^{ext\alpha} \quad (4.27)$$

$$\underline{\underline{C}}_{EF} \vec{V}_{EF} - \underline{\underline{C}}_{SPH} \vec{V}_{SPH} = \vec{0} \quad (4.28)$$

### 4.4.3 Méthode de résolution

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est implémentée de manière générique dans Europlexus et a déjà été décrite dans le paragraphe 3.3.4.1 concernant le traitement des contacts par la méthode des Pinballs. La méthode dans Europlexus requiert la définition d'une matrice de couplage de la forme :

$$\underline{\underline{C}} \vec{V} = \vec{b} \quad (4.29)$$

où  $\vec{V}$  est le vecteur vitesse contenant les degrés de liberté du modèle. Dans le cas du couplage Arlequin, nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{C}}_{EF} - \underline{\underline{C}}_{SPH} \right] \vec{V} = \vec{0} \quad (4.30)$$

avec  $\vec{V}^T = \{ \vec{V}_{EF}^T ; \vec{V}_{SPH}^T \}$  et  $\underline{\underline{C}}$  de dimensions  $(N_{EF} \times N_{DDL}) \times (N_{EF} \times N_{DDL} + N_v \times N_{DDL})$ . Cette relation introduit  $N_{EF} \times N_{DDL}$  liaisons dans le modèle où  $N_{EF}$  est le nombre de nœuds EF dans la zone de recouvrement et  $N_{DDL}$  le nombre de degrés de liberté par nœud impliqué dans le couplage.

### 4.4.4 Mise en oeuvre pratique du couplage

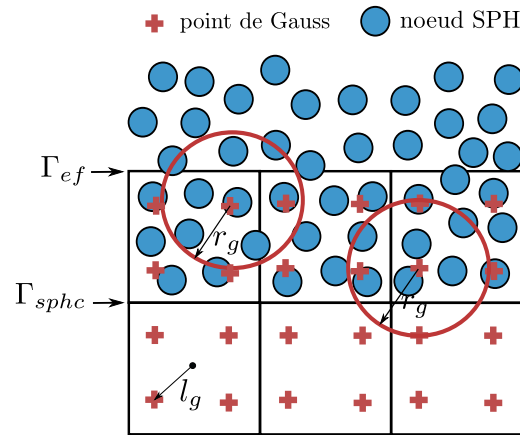
La mise en oeuvre du couplage EF-SPHC requiert quelques précisions d'ordre pratique.

**Voisinage des points de Gauss EF** L'élaboration de la matrice de couplage nécessite le calcul des fonctions de forme MLS aux points de Gauss des EF de  $\Omega_c$ , voir l'équation 4.22. La définition du voisinage SPH de ces points peut être discutée. On peut en effet choisir de ne prendre en compte que les nœuds SPHC appartenant à la zone de recouvrement. Cependant, cette approche va créer des voisinages incomplets pour les points de Gauss proches de  $\Gamma_{ef}$ . Les fonctions de forme MLS calculées seront de piètre qualité alors que des nœuds SPHC en dehors de  $\Omega_c$  permettraient d'obtenir des voisinages complets. Ainsi, la prise en compte de l'ensemble des nœuds SPHC, même s'ils sont en dehors  $\Omega_c$ , permet d'améliorer le comportement du couplage au niveau de  $\Gamma_{ef}$ . Le voisinage d'un point de Gauss est donc défini par l'ensemble des SPHC contenus dans une sphère de rayon  $r_g$ , voir figure 4.4. Nous définissons  $r_g = kl_g$  où  $k$  est un facteur à choisir et  $l_g$  est la distance maximale du centre de l'EF à ses points de Gauss. Cette définition permet de garder une taille de voisinage constante lors du raffinement du maillage SPHC.

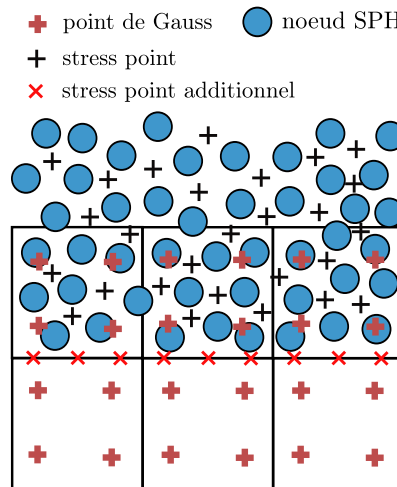
*Remarque : on note sur la figure 4.4 que les points de Gauss proches de  $\Gamma_{sphc}$  ont des voisinages incomplets.*

**Traitement du bord SPHC de la zone de recouvrement** Le modèle SPHC initial traite la condition de bords libres selon une méthodologie précise, décrite au paragraphe




**FIGURE 4.4:** Voisinage d'un point de Gauss.

2.2.3.2. Le bord SPHC de la zone de recouvrement  $\Gamma_{sphc}$ , ne doit pas être traité selon cette méthodologie sous peine d'introduire artificiellement un bord libre à l'intérieur du modèle Arlequin, ce qui entraverait la propagation des ondes. L'ajout de SP sur  $\Gamma_{sphc}$  permet de palier ce problème et de traiter correctement le bord SPHC de la zone de recouvrement. En effet, ces SP additionnels sont associés à une valeur nulle de la fonction de mélange  $\alpha_{sphc}$  mais permettent de calculer correctement les efforts sur les nœuds SPHC proches du bord. La figure 4.5 indique le positionnement de ces SP additionnels, leur nombre dépendant de la finesse du maillage SPHC utilisé. L'efficacité de cette approche par rapport au traitement initial de  $\Gamma_{sphc}$  est démontrée sur un cas test au paragraphe 4.5.1.2.


**FIGURE 4.5:** Utilisation de SP additionnels.

**Condition de couplage pour les degrés de liberté en rotation** La condition s'écrit, en toute rigueur, de la manière suivante :

$$\underline{\underline{C}}_{EF}^m \vec{V}_{EF}^m + \frac{e^2}{12} \underline{\underline{C}}_{EF}^r \vec{V}_{EF}^r - \underline{\underline{C}}_{SPH}^m \vec{V}_{SPH}^m - \frac{e^2}{12} \underline{\underline{C}}_{SPH}^r \vec{V}_{SPH}^r = \vec{0} \quad (4.31)$$

Cependant, cette expression conduit à un problème de conditionnement de la matrice de couplage global puisque le facteur  $e^2/12$  peut être petit. Ainsi, le couplage des termes de rotation est souvent négligeable devant le couplage des termes de membrane, si bien qu'il est finalement négligé. Cela ne pose pas problèmes puisque la continuité des rotations est assurée naturellement par une courbure commune des deux modèles dans la zone de recouvrement.

*Remarque : les champs de rotation EF et SPHC ne sont exactement semblables, ce qui pose parfois des difficultés dans le couplage. Le filtrage des degrés de liberté SPHC en rotation, quasiment sans conséquence du point de vue énergétique, est augmenté en cas de couplage. Le coefficient de mélange du filtre de Balsara (voir le paragraphe 2.2.3.1) passe dans ce cas de  $\alpha = 0.1$  à  $\alpha = 0.25$ .*

## 4.5 Cas tests de validation

Cette section présente trois cas tests simples permettant d'évaluer les capacités du couplage Arlequin présenté précédemment.

### 4.5.1 Propagation d'onde

Il est essentiel de vérifier que le couplage ne provoque pas de réflexion d'onde excessive au niveau de la zone de recouvrement. Les auteurs de [RAB 06c] et [CHU 09] utilisent à ce titre un test présenté dans [RAB 03] qui permet d'évaluer la capacité d'une méthode à modéliser la propagation d'une onde.

#### 4.5.1.1 Présentation du cas test

En dimension 2, la structure est un rectangle de largeur  $H = 5e - 3 \text{ m}$  et de longueur  $L = 60e - 3 \text{ m}$ . Le matériau est élastique avec  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\nu = 0$  afin d'éviter la propagation d'ondes parasites dans les directions transverses. La structure est soumise à un champ initial de vitesse  $v_x = e^{-\alpha(x-L/2)}$  dans la direction de sa longueur et n'est soumise à aucune condition aux limites essentielle. L'onde se propage à partir du centre de plaque, se réfléchit aux extrémités avant de revenir au centre provoquant ainsi le déplacement de la structure. On choisit  $\alpha = 10000$  (avec les dimensions exprimées en mètre), le champ de vitesse a alors la forme présentée sur la figure 4.6.

### 4.5.1.2 Modèle

La structure est décomposée en deux sous-domaines EF et SPHC, voir la figure 4.6. Le maillage EF est invariant et présente  $33 \times 4$  éléments Q4GS. Le maillage SPHC peut, lui, être raffiné afin d'étudier les propriétés de convergence de la méthode. La loi de comportement est élastique linéaire et les deux sous-domaines sont couplés par la méthode Arlequin présentée précédemment. Certains paramètres de la méthode peuvent également varier (continuité des fonctions de mélange, taille  $r_g$  du voisinage des points de Gauss, traitement du bord  $\Gamma_{sphc}$ ) afin d'étudier leur influence sur les performances du couplage. La zone de recouvrement est, dans tous les cas, large d'un EF, soit  $L_c = 1.25e - 3 m$ .

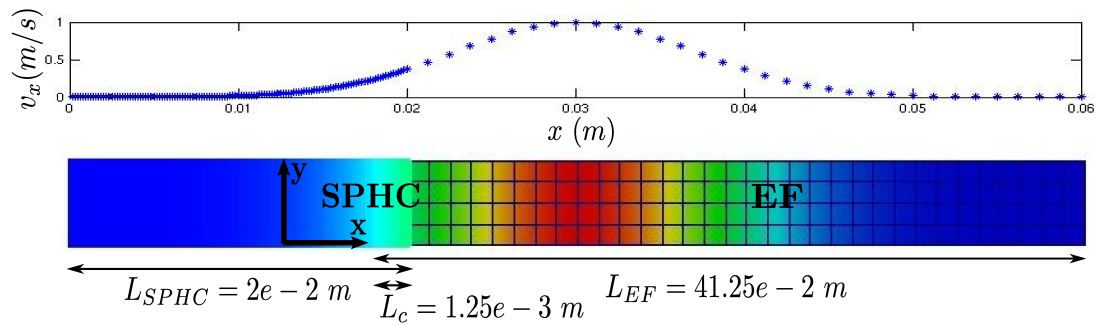


FIGURE 4.6: Vitesse initiale et maillage de la plaque.

### 4.5.1.3 Résultats

Les résultats obtenus avec la méthode Arlequin sont comparés à ceux obtenus avec un modèle purement EF et un modèle purement SPHC. L'influence de la continuité des fonctions de mélange, du traitement du bord  $\Gamma_{sphc}$ , du raffinement SPH dans la zone de recouvrement et de la taille  $r_g$  du voisinage des points de Gauss sont successivement étudiés.

**Influence de la fonction de mélange** Dans un premier temps, l'influence des caractéristiques de la fonction de mélange est étudiée. Le raffinement du maillage SPH est fixé à  $5 \times 5$  nœuds SPHC par EF collé, soit  $R_{sph} = 1.25e - 4 m$ . La taille du voisinage des points de Gauss est fixée à  $r_g = l_g$ . Des fonctions de mélanges constantes ( $\alpha = 0.5$ ), linéaires et cubiques sont étudiées pour deux traitements différents du bord SPHC de la zone de recouvrement :

- le bord SPHC de la zone de recouvrement est traité avec une condition de bord libre classique, ce qui signifie qu'aucun traitement particuliers n'est effectué par rapport au modèle SPHC présenté au chapitre 2. La légende des courbes correspondant à ce modèle est marquée par un asterisk (\*).
- le bord SPHC de la zone de recouvrement est traité de manière particulière avec la méthodologie décrite dans le paragraphe 4.4.4 qui consiste à utiliser une rangée

de SP supplémentaire. La légende des courbes correspondant à ce modèle ne comporte pas d'asterix.

Les résultats sont présentés figures 4.7 et 4.8. Il est clair que le traitement classique de  $\Gamma_{sphc}$  par une condition de bord libre donne, comme attendu, de mauvais résultats. Les courbes comportant la mention (\*) présentent en effet d'importantes réflexions d'ondes. Le traitement exposé au paragraphe 4.4.4 pour pallier ce problème est efficace puisque les courbes correspondantes présentent de très faibles réflexions d'ondes. Dans la suite, seul le modèle incluant le traitement particuliers du bord  $\Gamma_{sphc}$  est donc utilisé. On remarque également qu'il y a très peu de différences entre les résultats suivant les caractéristiques de la fonction de mélange. On peut même souligner qu'il n'est pas observé d'altération des résultats avec l'utilisation d'une fonction constante, contrairement à ce qui a été observé par exemple dans [GUI 07].

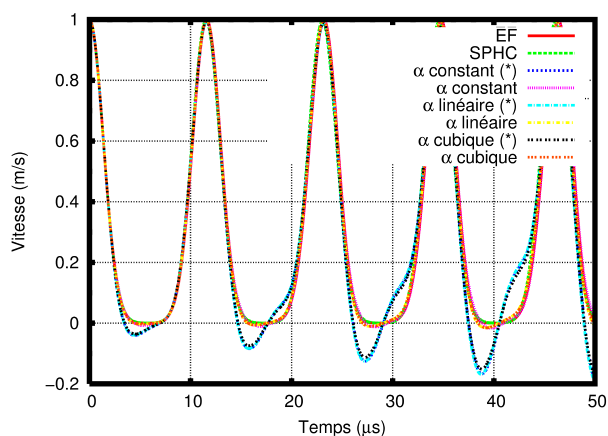


FIGURE 4.7: Influence de la fonction de mélange : vitesse au centre de la plaque.

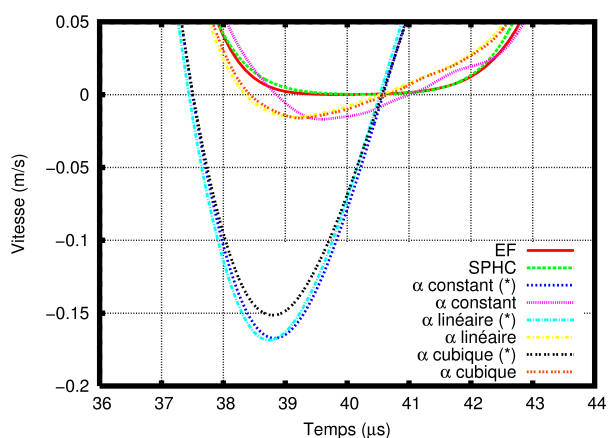
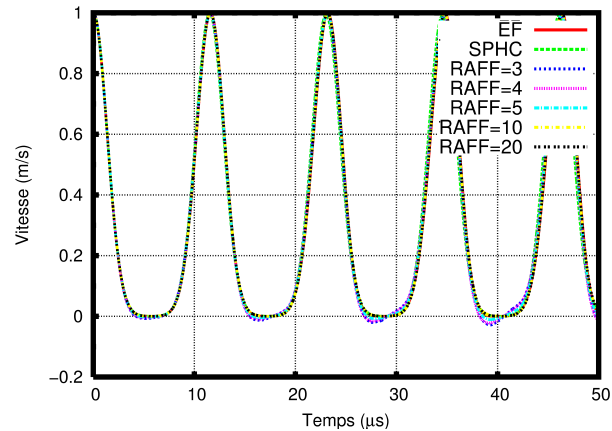
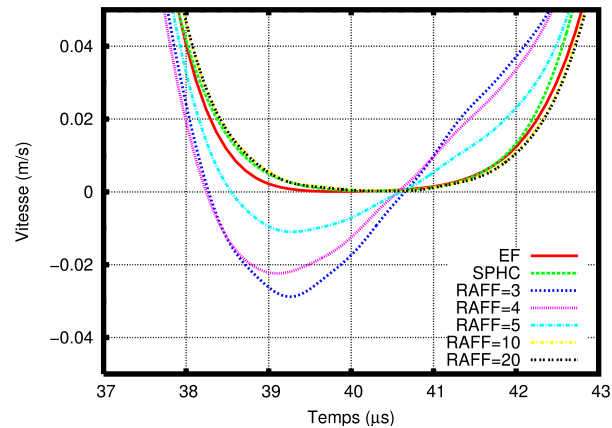


FIGURE 4.8: Influence de la fonction de mélange : vitesse au centre de la plaque (zoom).

**Influence du raffinement SPHC** L'influence du raffinement SPHC dans la zone de recouvrement est maintenant étudiée. La fonction de mélange est linéaire et la taille du voisinage des points de Gauss EF fixée à  $r_g = l_g$ . Cinq maillages SPHC sont testés :  $3 \times 3$  SPHC ( $R_{sph} = 2.08e - 4 m$ ),  $4 \times 4$  SPHC ( $R_{sph} = 1.56e - 4 m$ ),  $5 \times 5$  SPHC ( $R_{sph} = 1.25e - 4 m$ ),  $10 \times 10$  SPHC ( $R_{sph} = 6.25e - 5 m$ ) et  $20 \times 20$  SPHC ( $R_{sph} = 3.125e - 5 m$ ) par EF.



**FIGURE 4.9:** Influence du raffinement SPHC : vitesse au centre de la plaque.

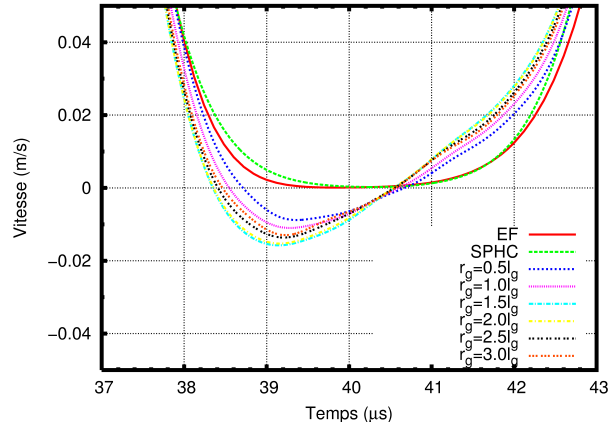


**FIGURE 4.10:** Influence du raffinement SPHC : vitesse au centre de la plaque (zoom).

Les résultats sont présentés sur les figures 4.9 et 4.10. On remarque une bonne convergence de la méthode avec le raffinement du maillage SPHC : pour  $10 \times 10$  et  $20 \times 20$  nœuds SPHC par EF, les résultats du couplage Arlequin sont très proches de ceux obtenus avec un modèle purement EF ou purement SPHC. Il faut souligner que l'utilisation d'un maillage SPHC fin ne fait pas apparaître, pour ce cas test, d'instabilités numériques (pertes de coercivité notamment, voir le paragraphe 4.3.4). Cela est due au fait que la sollicitation de la structure est faible dans ce cas puisque aucune énergie n'est introduite dans

le modèle au cours du calcul. Ces instabilités ont été observés sur des cas plus critiques décrits dans les sections suivantes (paragraphe 4.5.2.3).

**Influence du voisinage des points de Gauss EF** Finalement, l'influence de la taille du voisinage des points de Gauss EF est étudiée. La fonction de mélange est linéaire et le raffinement est fixé à  $5 \times 5$  SPHC par EF. La taille du voisinage des points de Gauss EF prend les valeurs suivantes :  $r_g = 0.5l_g$ ,  $r_g = 1l_g$ ,  $r_g = 1.5l_g$ ,  $r_g = 2l_g$ ,  $r_g = 2.5l_g$ ,  $r_g = 3l_g$ . Le paramètre  $l_g$  est défini sur la figure 4.4. Les résultats sont présentés sur la figure 4.11.



**FIGURE 4.11:** Influence de  $r_g$  : vitesse au centre de la plaque (zoom).

Les résultats semblent peu sensibles au paramètre  $r_g$ . On choisit de fixer  $r_g = 2l_g$  de sorte à assurer un nombre suffisant de SPHC dans le voisinage des points de Gauss tout en conservant un caractère relativement local à l'approximation MLS.

**Bilan** L'étude démontre, tout d'abord, que l'ajout de SP sur le bord  $\Gamma_{sphc}$  permet de traiter correctement la transition du modèle SPHC au modèle EF. Les réflexions d'onde à l'interface sont en effet minimales dans ce cas. La continuité de la fonction de mélange  $\alpha$  ne semble pas avoir d'incidence majeure sur la qualité des résultats pour ce cas test. Finalement, on observe une bonne convergence de la méthode lorsque le maillage SPHC est raffiné.

## 4.5.2 Traction

Le comportement de la méthode est étudié pour le cas académique d'une plaque en traction.

### 4.5.2.1 Présentation du cas test

Une plaque de dimension  $L = 3 \text{ m}$  et  $H = 1 \text{ m}$  est soumise à un effort de traction  $F = 1e5 \text{ N}$  à l'une de ses extrémités et encastrée à l'autre extrémité. La plaque présente

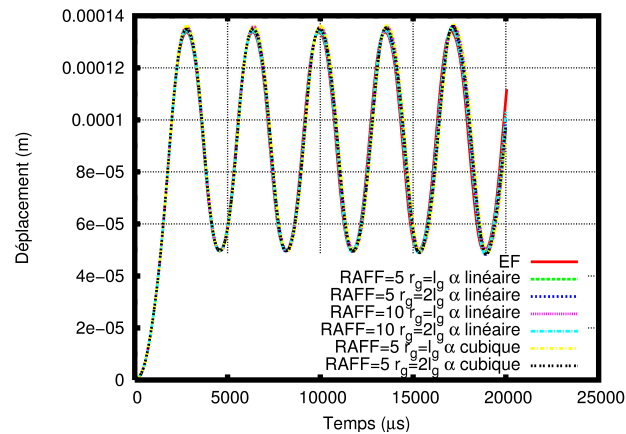
un comportement purement élastique avec  $E = 31.37 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 0.2$ . L'effort est appliqué via une rampe entre  $t = 0 \text{ ms}$  et  $t = 2 \text{ ms}$  puis est maintenu constant.

#### 4.5.2.2 Modèle

La plaque est divisée en deux sous-domaines : le domaine EF de longueur  $L_{EF} = 1.75 \text{ m}$  sur lequel est appliqué l'effort de traction et le domaine SPHC de longueur  $L_{SPHC} = 1.5 \text{ m}$ . La zone de recouvrement est large d'un EF, soit  $L_c = 0.25 \text{ m}$ . Le maillage EF est constitué de  $4 \times 7$  EF Q4GS quadrangulaires et la zone SPHC pourra présenter deux raffinements :  $5 \times 5$  et  $10 \times 10$  SPHC par EF dans la zone de recouvrement, soit respectivement  $R_{sph} = 2.5e - 2 \text{ m}$  et  $R_{sph} = 1.25e - 2 \text{ m}$ . Les deux formulations sont couplées par la méthode Arlequin.

#### 4.5.2.3 Résultats

Le déplacement et la vitesse de l'extrémité de la plaque sont comparés à un modèle purement EF de même finesse que le sous-domaine EF de la méthode Arlequin. Les résultats sont présentés sur les figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 pour différentes configurations des paramètres du couplage.



**FIGURE 4.12:** Traction : déplacement à l'extrémité de la plaque.

Sur les courbes 4.12 et 4.14, on observe un comportement global satisfaisant pour l'ensemble du jeu de paramètres étudié. Les figures 4.13 et 4.15 permettent d'observer plus finement l'influence des paramètres sur la qualité des résultats. Il est assez difficile de dégager des conclusions claires et absolues mais il semble que le maillage fin SPH et le paramètre  $r_g = 2l_g$  fournissent des résultats plus proches du modèle EF. Il faut également souligner que les calculs utilisant  $10 \times 10$  SPHC par EF et une fonction de mélange cubique n'ont pas abouti. En effet, le calcul diverge suite au développement d'instabilités numériques dans la zone de collage, au niveau de  $\Gamma_{sphc}$ . C'est une manifestation de la perte de coercivité soulignée au paragraphe 4.3.4 qui est effectivement favorisée par l'utilisation de fonctions de mélanges cubiques et d'une discrétisation SPH fine.

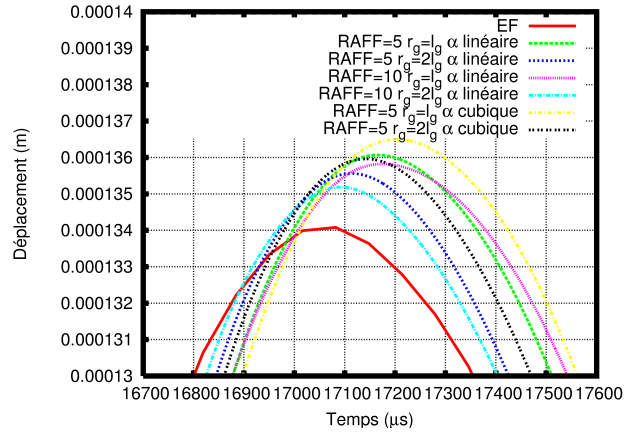


FIGURE 4.13: Traction : déplacement à l'extrémité de la plaque (zoom).

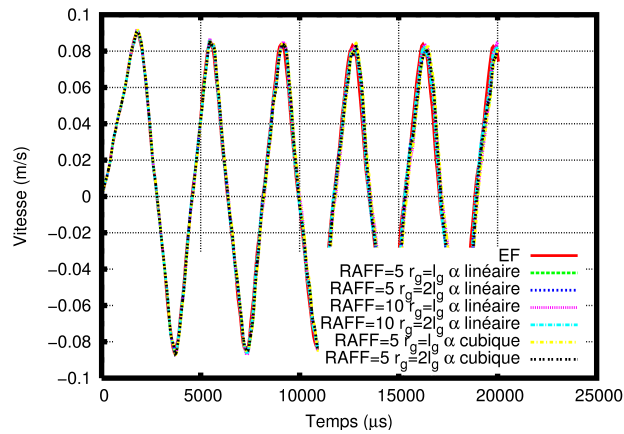


FIGURE 4.14: Traction : vitesse à l'extrémité de la plaque.

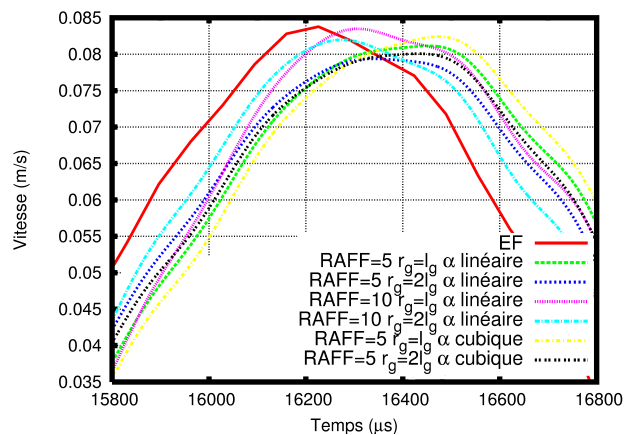


FIGURE 4.15: Traction : vitesse à l'extrémité de la plaque (zoom).



### 4.5.3 Flexion

Le comportement de la méthode est étudié pour le cas académique d'une plaque en flexion.

#### 4.5.3.1 Présentation du cas test

Une plaque de dimension  $L = 10e - 2 \text{ m}$  et  $H = 5e - 2 \text{ m}$  est soumise à un effort de flexion  $F = 1.25 \text{ N}$  à l'une de ses extrémité et encastrée à l'autre extrémité. La plaque présente un comportement purement élastique avec  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 0.3$ . L'effort est appliqué via une rampe entre  $t = 0 \text{ ms}$  et  $t = 2 \text{ ms}$  puis est maintenu constant.

#### 4.5.3.2 Modèle

La plaque est divisée en deux sous-domaines : le domaine EF de longueur  $L_{EF} = 6.25e - 2 \text{ m}$  sur lequel est appliqué l'effort de flexion et le domaine SPHC de longueur  $L_{SPHC} = 5e - 2 \text{ m}$ . La zone de recouvrement est large d'un EF, soit  $L_c = 1.25e - 2 \text{ m}$ . Le maillage EF est constitué de  $4 \times 5$  EF Q4GS quadrangulaires et la zone SPHC présente  $5 \times 5$  SPHC par EF dans la zone de recouvrement, soit  $R_{sph} = 1.25e - 3 \text{ m}$ . Les deux formulations sont couplées par la méthode Arlequin.

#### 4.5.3.3 Résultats

Le déplacement et la vitesse de l'extrémité de la plaque sont comparés à un modèle purement EF de même finesse que le sous-domaine EF de la méthode Arlequin. Les résultats sont présentés sur les figures 4.16 et 4.17. On remarque sur la courbe 4.16 (courbe verte) que la méthode semble prédire une flèche légèrement trop faible. Ce comportement fait penser à un verrouillage peu intense mais tout de même présent. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les énergies sont partitionnées par une fonction de mélange qui tend vers 0 vers  $\Gamma_{sphc}$ . Cela peut revenir grossièrement à faire tendre l'épaisseur de la plaque SPHC vers 0, provoquant ainsi son verrouillage. Ce phénomène n'est effectivement pas traité pour les SPHC, voir le paragraphe 2.2.6. Un second calcul est présenté en modifiant la fonction de mélange SPHC appliquée sur les termes de CT et flexion, de sorte qu'elle ne puisse pas être inférieure à 1/3. On reprend ici une idée développée dans [CHU 09]. On remarque alors que les résultats sont meilleurs (courbe bleue) car le verrouillage est quasiment inexistant. Cette modification de la fonction de mélange pour les termes de flexion et CT est donc pérennisée.

*Remarque : pour éviter ce phénomène, une fonction de mélange constante pourrait être utilisée mais les expériences numériques ont montrées qu'elle conduisait au développement d'instabilité numériques et à la divergence du calcul.*

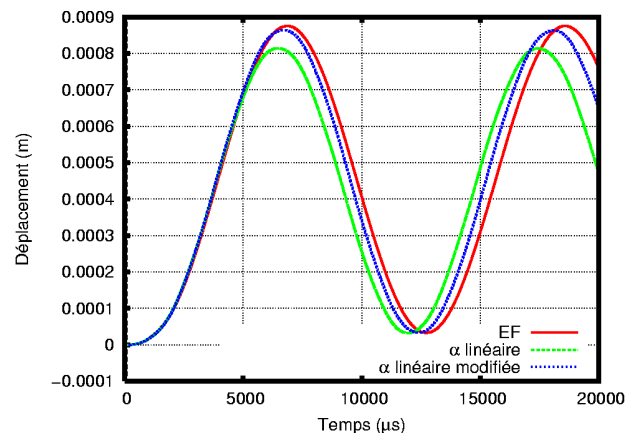


FIGURE 4.16: Flexion : déplacement à l'extrémité de la plaque.

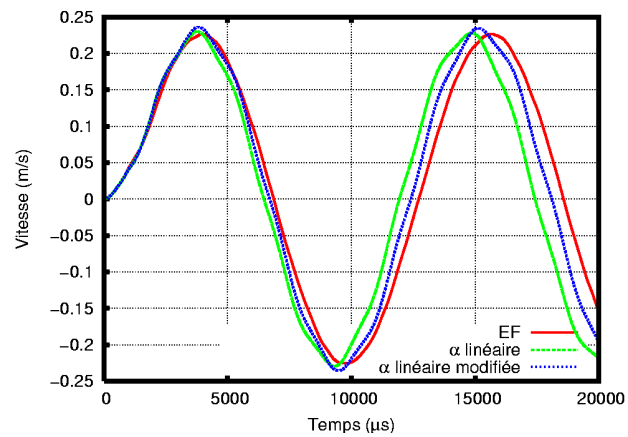


FIGURE 4.17: Flexion : vitesse à l'extrémité de la plaque.

## 4.6 Exemples numériques : perforation d'un réservoir

Dans cette section, les calculs d'impacts sur un réservoir cylindrique, présentés au paragraphe 3.4, sont réutilisés. Il s'agit d'utiliser la méthode SPHC dans les zones où la rupture est attendue et la MEF dans le reste de la structure. Le cas du réservoir vide est repris avec une finesse SPHC équivalente au calcul initial afin d'évaluer le gain de temps CPU obtenu. Le cas du réservoir plein est de nouveau traité en raffinant le maillage SPHC utilisé auparavant.

### 4.6.1 Réservoir vide

Ce cas est traité avec une discrétisation SPHC équivalente à celle du calcul présenté au paragraphe 3.4. Cependant les nœuds SPHC ne sont placés que dans les zones d'entrée et de sortie de l'impacteur, le reste de la structure est modélisée en EF de coque Q4GS et DST3, voir la figure 4.18. Le maillage comprend donc 18416 particules SPHC (SP compris) contre plus de 86000 auparavant et 4920 EF. Le maillage EF est choisi assez fin pour pouvoir représenter les ondes qui se propagent suite à l'impact du projectile. La zone de collage est large d'un EF et comprend  $3 \times 3$  nœuds SPH par EF. Cette configuration a été choisie pour conserver la finesse du modèle SPHC initial ( $R_{sph} = 2e - 3 m$ ) tout en utilisant un maillage EF fin. La simulation de  $t_f = 600 \mu s$  nécessite  $t_{CPU} = 37 min$  sur un

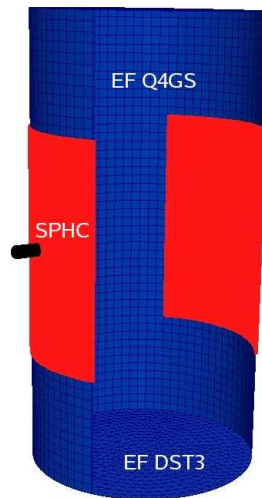
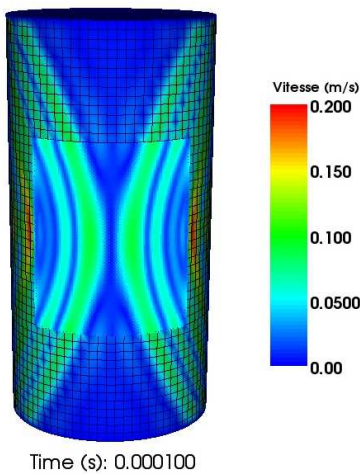


FIGURE 4.18: Maillage du réservoir vide.

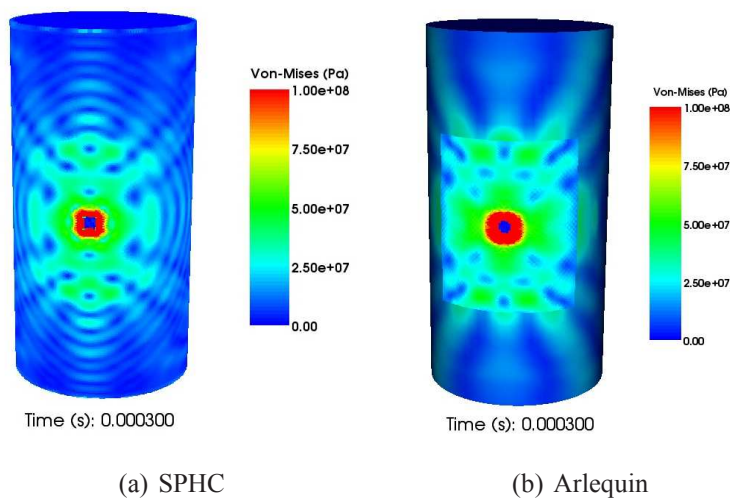
CPU contre  $t_{CPU} = 172 min$  auparavant pour le modèle entièrement SPHC. Le gain en temps de calcul est donc de l'ordre d'un facteur 5.

La figure 4.19 représente la propagation d'ondes sur la face arrière du cylindre suite à l'impact. On vérifie ainsi que les ondes se propagent de manière satisfaisante au niveau des zones de recouvrement. La comparaison des distributions des contraintes de von-Mises est faite sur la figure 4.20 à  $t = 300 \mu s$ . On remarque que les distributions des contraintes



**FIGURE 4.19:** Réservoir vide : propagation des ondes sur la face arrière.

sont proches mais également que la partie EF du modèle Arlequin contient moins d'informations que le modèle purement SPHC. En effet, on observe dans le modèle purement SPHC des variations de faible longueur d'onde qu'on ne retrouve pas dans le modèle Arlequin. Cela provient du fait que le maillage EF est plus grossier que le maillage SPHC et ne peut donc pas représenter tous les phénomènes captés par ce dernier. Le remplacement du modèle SPHC par un modèle EF conduit donc inexorablement à une description moins fine des phénomènes. C'est le prix à payer pour le gain obtenu en temps de calcul.



**FIGURE 4.20:** Réservoir vide : comparaison des contraintes de von-Mises.

Finalement, les vitesses de sortie du projectile sont comparées : le modèle Arlequin

fournit  $V_{arl} = 584 \text{ m/s}$  contre  $V_{sphc} = 621 \text{ m/s}$  pour le modèle SPHC. Il semble donc que le modèle Arlequin absorbe plus d'énergie que le modèle purement SPHC. Cependant, l'explication peut également provenir du fait que le maillage SPHC utilisé est assez grossier. Ainsi les Pinballs SPHC sont de taille importante devant les Pinballs représentant le projectile. En conséquence, les conditions de contact ont une grande influence sur la vitesse résiduelle de la balle. La différence peut également provenir du fait que les vitesses de rotation sont un peu plus filtrées dans le cas du couplage Arlequin (voir paragraphe 4.4.4), d'où une dissipation d'énergie légèrement plus importante. Cela est confirmé par le bilan énergétique puisque  $B(\%) = -8.1$  pour le collage Arlequin contre  $B(\%) = -6.1$  auparavant. Rappelons que ce bilan n'est pas très bon suite à l'inclusion des composantes en cisaillement transverse dans la loi d'endommagement pour ce cas test précis (voir paragraphe 3.4.2).

## 4.6.2 Réservoir plein

Le cas du réservoir plein est de nouveau traité mais cette fois-ci avec un maillage plus fin qu'auparavant, représenté sur la figure 4.21. Cette finesse de maillage n'était pas atteignable avec un modèle purement SPHC compte tenu des limitations en ressource de calculs. Le maillage comporte 31862 SPHC (SP compris) de rayon  $R_{sph} = 1.8e - 3 \text{ m}$ , 2198 EF Q4GS et DST3 ainsi que 102141 nœuds SPH fluides. La zone de recouvrement est large d'un EF avec  $5 \times 5$  nœuds SPHC. La simulation de  $t_f = 20 \text{ ms}$  sur un CPU nécessite  $t_{CPU} \sim 260 \text{ h}$  de calcul. L'état du réservoir à  $t = 1.8 \text{ ms}$  est représenté sur la figure 4.22

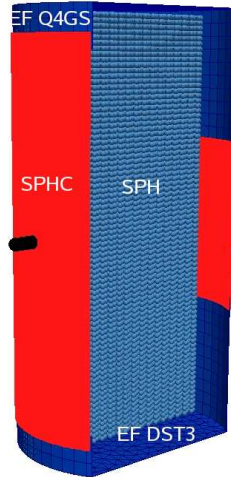


FIGURE 4.21: Maillage du réservoir plein.

et comparé au calcul purement SPHC et aux résultats expérimentaux de [TIM 03]. On remarque que le modèle Arlequin présente une bifurcation de la fissure principale à ses deux extrémités, ce qui n'est pas observé expérimentalement. Le calcul purement SPHC présentait déjà cette tendance, mais il semble que la grossièreté du maillage limitait alors la bifurcation de la fissure. Cette tendance à la bifurcation dans les modèles numériques

présentés peut s'expliquer par la difficulté de choisir des conditions aux limites réalistes pour le modèle. En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.10 du paragraphe 3.4.1, les conditions aux limites expérimentales ne sont pas parfaitement maîtrisées : le cylindre est bloqué localement en extension et sa face arrière est appuyée sur un cadre. Ces conditions sont difficilement traductibles dans la simulation à moins de modéliser l'ensemble du dispositif expérimental. De fait, lorsque la fissure s'approche des bords du modèle, les conditions aux limites ne correspondent pas exactement à la réalité de l'expérience, ce qui peut modifier son comportement. Cependant, l'essentiel de la simulation est conforme à l'expérience puisqu'on observe bien une fissure longitudinale sur la face avant du cylindre. L'utilisation du couplage Arlequin permet de simuler  $t_f = 20 \text{ ms}$  du phénomène

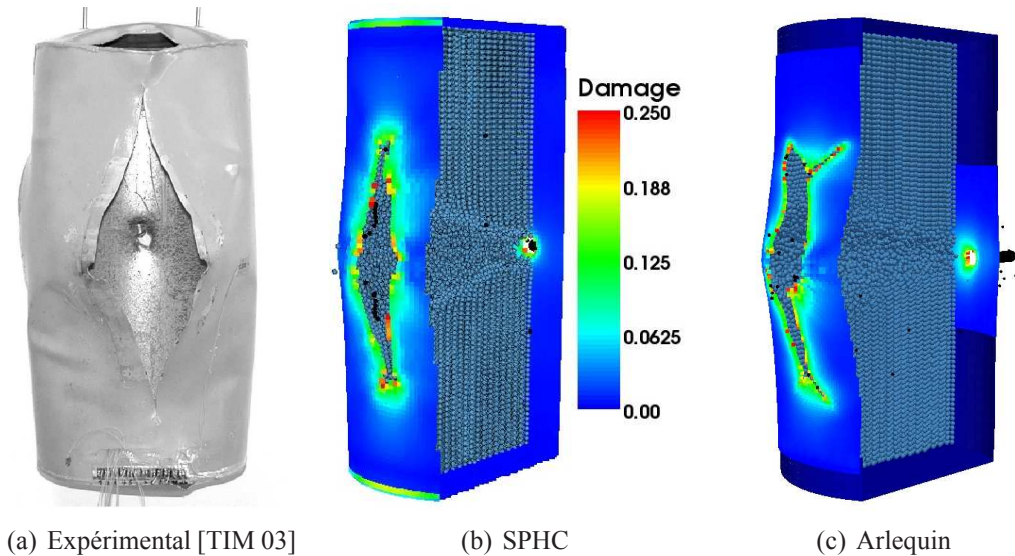


FIGURE 4.22: État du réservoir plein à  $t_f = 1.8 \text{ ms}$ .

physique ce qui n'était pas possible auparavant ( $t_{CPU} \sim 55.1 \text{ h}$  pour  $t_f = 2.1 \text{ ms}$  sans couplage). Le calcul est donc maintenant mené assez loin pour pouvoir estimer le débit de fuite du fluide, comme on peut le voir sur la figure 4.23. Pour ce calcul, nous obtenons  $B(\%) = -3.3$  avec  $c_{stab} = 0.25$ .

## 4.7 Conclusions

La méthode Arlequin a été adaptée avec succès au couplage d'un modèle SPHC avec des EF de coque. Un certain nombre de difficultés techniques ont été levées grâce à une bibliographie fournie (perte de coercivité, verrouillage) ainsi qu'à la mise en œuvre de solutions spécifiques (ajout de SP sur la frontière de couplage, gestion des rotations). Après avoir été validée sur des cas simples, la méthode est appliquée au cas d'un calcul d'impact sur un réservoir pour lequel elle permet un gain important en temps de calcul.

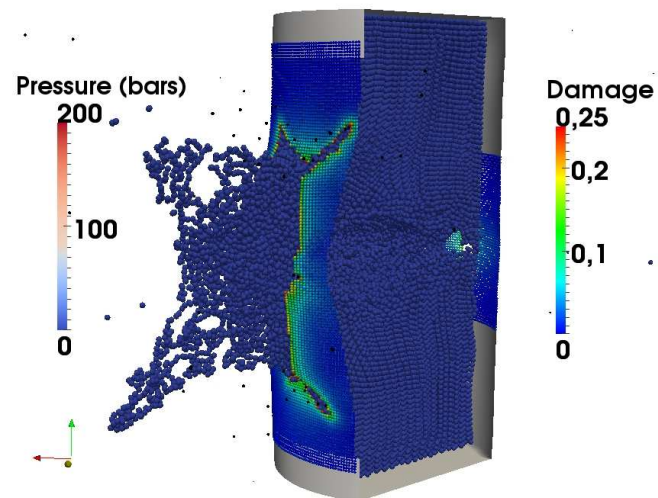


FIGURE 4.23: État final du réservoir plein à  $t_f = 20$  ms.





# Chapitre 5

## Validation expérimentale

*Les chapitres précédents ont exposé les ingrédients numériques qui rendent désormais envisageables les simulations d'impacts sur des structures fines en présence d'IFS. Ce chapitre présente la confrontation du modèle ainsi établi à des données issues d'une expérience simple mais représentative de l'application visée. La campagne expérimentale, réalisée à l'ONERA de Lille en 2006 par J. Fabis, et les résultats associés sont tout d'abord présentés. Un modèle numérique de l'expérience est ensuite élaboré et validé sur des essais simples qui ne font pas intervenir de fissuration. Finalement, le modèle SPHC est confronté aux essais présentant des propagations de fissures.*

### Sommaire

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Campagne expérimentale ONERA . . . . .</b>                    | <b>153</b> |
| 5.1.1      | Dispositif expérimental . . . . .                                | 153        |
| 5.1.2      | Caractéristiques des éprouvettes . . . . .                       | 153        |
| 5.1.3      | Déroulement des essais et chaîne d'acquisition . . . . .         | 156        |
| <b>5.2</b> | <b>Analyse et simulation des essais non fissurants . . . . .</b> | <b>156</b> |
| 5.2.1      | Analyse des essais . . . . .                                     | 157        |
| 5.2.2      | Interprétation des phénomènes . . . . .                          | 160        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 5.2.3      | Modèle numérique . . . . .  | 161        |
| 5.2.4      | Confrontation des résultats numériques et expérimentaux . . . . . | 164        |
| <b>5.3</b> | <b>Analyse et simulation des essais fissurants . . . . .</b>      | <b>174</b> |
| 5.3.1      | Essai TF14A5 . . . . .  | 174        |
| 5.3.2      | Essai FXA5 . . . . .  | 178        |
| <b>5.4</b> | <b>Conclusions . . . . .</b>                                      | <b>180</b> |

---

## 5.1 Campagne expérimentale ONERA

L'objectif de la campagne était de fournir un cadre expérimental simple mais représentatif d'un impact sur un réservoir rempli de fluide. Le principe de l'expérience est donc simple : un piston, fermé par une plaque métallique qui est notre zone d'intérêt, est rempli d'eau puis impacté par une masse. L'impact crée un choc de pression dans l'eau qui entraîne une déformation de l'éprouvette, éventuellement la propagation d'une fissure, puis la fuite de l'eau contenue dans le piston.

### 5.1.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 5.1. Il est essentiellement constitué d'un cylindre ( $e_{cyl} = 15 \text{ mm}$ ,  $D_{cyl} = 80 \text{ mm}$ ) associé à un piston. Ces deux éléments sont en acier (APX Z15 CN 17.03). Le piston est fermé à sa base par une plaque qui est la zone d'intérêt de l'expérience. Ses caractéristiques peuvent varier suivant les essais : différentes épaisseurs, la présence d'un trou ou de pré-fissures permettent d'observer différents types de comportement. Ces éprouvettes sont en aluminium (AU4G 2024 T351) de sorte qu'elles se déforment plus facilement que le cylindre. Celui-ci est rempli d'eau formant une colonne de hauteur  $H = (205 - e_p) \text{ mm}$  où  $e_p$  est l'épaisseur de l'éprouvette. Le choc de pression dans l'eau est créé par la chute d'une masse  $M = 245 \text{ kg}$  sur le piston. Pour cela, la tour de chute de l'ONERA de Lille a été utilisée, la masse étant portée par un chariot guidé par un système de rails visible sur la 5.2. Deux vitesses d'impact ont été considérées  $V_1 = 2 \text{ m/s}$  et  $V_2 = 5 \text{ m/s}$ . Elles sont obtenues en choisissant la bonne hauteur de largage  $H_l$  du chariot en utilisant la formule  $H_l = V^2/2g$ . La tour de chute est installée sur une fondation de  $80 \text{ t}$  qui permet de découpler la zone de crash du reste de la structure. Le dispositif expérimental permet une bonne maîtrise de l'ensemble des conditions de l'expérience : masse, vitesse d'impact, angle d'incidence, fréquences de résonances, etc. De plus, un soin particulier a été apporté à la maîtrise des conditions aux limites de l'éprouvette d'aluminium, comme expliqué dans le paragraphe suivant.

*Remarque : la nuance d'aluminium AU4G 2024 T351 a été choisie car son comportement est peu sensible à l'influence du taux de déformation, ce qui permet d'utiliser une loi de comportement simple dans les simulations.*

### 5.1.2 Caractéristiques des éprouvettes

Les éprouvettes en aluminium présentent différentes caractéristiques qui permettent de contrôler les phénomènes intervenant dans l'expérience (écoulement d'eau, déformation du fond, fissuration ou bien encore rupture). Les configurations suivantes ont été testées :

- un trou circulaire de diamètre  $d = 14 \text{ mm}$  ou  $d = 20 \text{ mm}$  ;
- une pré-fissure en forme de U de longueur  $3 \times 20 \text{ mm} = 60 \text{ mm}$  ;
- deux pré-fissures de  $30 \text{ mm}$  chacune formant un X ;

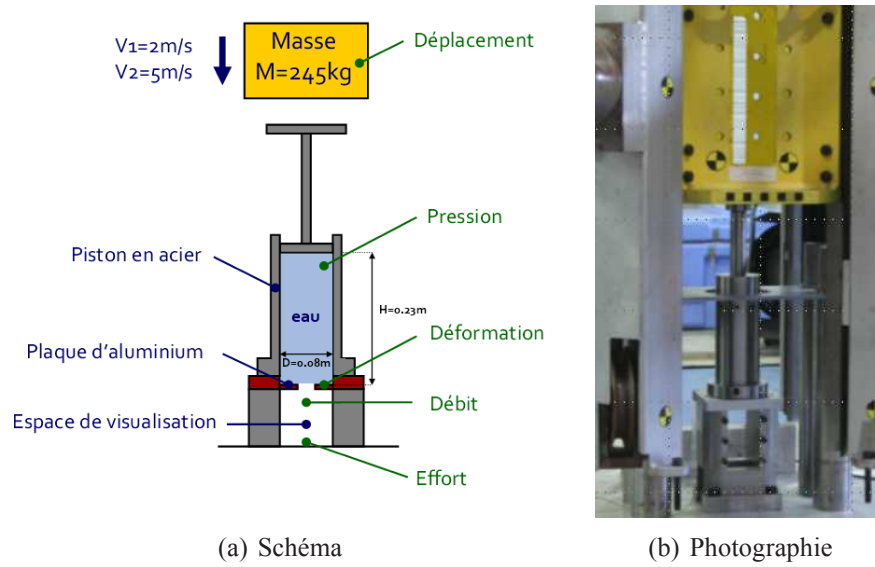


FIGURE 5.1: Dispositif expérimental.



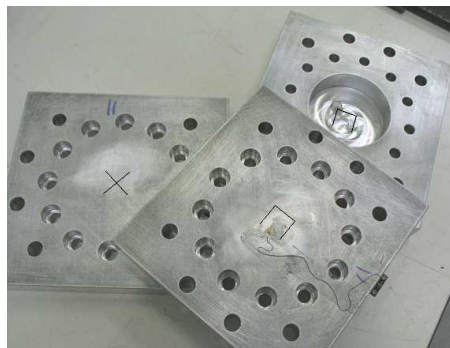
FIGURE 5.2: Tour de chute de l'ONERA de Lille.

- ni trou ni préf ssure ;
- un trou circulaire de diamètre  $d = 14 \text{ mm}$  avec deux préf ssures de  $3 \text{ mm}$  diamétralement opposées ;
- une pref ssure en forme de I de longueur  $20 \text{ mm}$ .

L'épaisseur de la partie de l'éprouvette en contact avec le fluide peut également varier. Les plaques sont obtenues à partir d'un bloc d'aluminium de dimensions  $200 \times 200 \times 25 \text{ mm}$  dont la partie centrale de diamètre  $D_{cyl} = 80 \text{ mm}$  est lamée afin d'obtenir trois épaisseur différentes :  $e_p = 25 \text{ mm}$  (pas de lamage, éprouvette épaisse),  $e_p = 2 \text{ mm}$  (éprouvette fine) et  $e_p = 1 \text{ mm}$  (éprouvette très fine). Les différents essais sont énumérés dans le tableau 5.1 avec les caractéristiques de l'éprouvette utilisée. Des exemples d'éprouvettes dans leur état initial sont donnés sur la figure 5.3.

| Numéro de l'essai | Caractéristiques de l'éprouvette |                    |                                       |                   |
|-------------------|----------------------------------|--------------------|---------------------------------------|-------------------|
|                   | spécimen                         | $e_p \text{ (mm)}$ | Préf ssure                            | $V \text{ (m/s)}$ |
| 1-7               | E14A-B-C2 & E14A-B-C-D5          | 25                 | trou (d=14mm)                         | 2 & 5             |
| 8-9               | E20A2 & E20A5                    | 25                 | trou (d=20mm)                         | 2 & 5             |
| 10-11             | F14A2 & F14A2-5 <sup>1</sup>     | 2                  | trou (d=14mm)                         | 2 & 5             |
| 12-13             | FUA2 & FUA5                      | 2                  | préf ssure en U                       | 2 & 5             |
| 14-15             | FXA2 & FXA5                      | 2                  | préf ssure en X                       | 2 & 5             |
| 16                | TF14A5                           | 1                  | trou (d=14mm)                         | 5                 |
| 17                | TFA5                             | 1                  | sans trou                             | 5                 |
| 18                | F14E3A5                          | 2                  | trou (d=14mm)+<br>2 préf ssures (3mm) | 5                 |
| 19                | FE20A5                           | 2                  | préf ssure (20mm)                     | 5                 |

**TABLE 5.1:** Nomenclature et caractéristiques des tests.



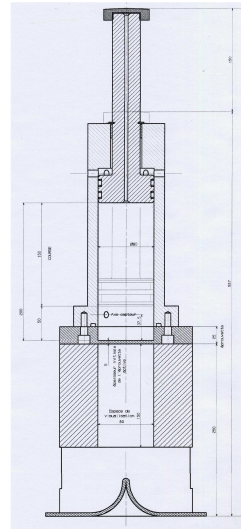
**FIGURE 5.3:** Exemples d'éprouvettes avant impact : préf ssures en X et en U.

1. La même éprouvette a été utilisée pour les essais 10 et 11.

Comme on peut le voir sur la figure 5.3, les éprouvettes sont munies de 12 trous répartis circulairement pour assurer la liaison avec le cylindre. De plus, elles sont fixées sur l'espace de visualisation par l'intermédiaires de 8 vis supplémentaires. La figure 5.4(a) représente une éprouvette fixée sur le dispositif expérimental selon le principe visible sur la figure 5.4(b).



(a) Eprouvette en situation



(b) Plan d'ensemble du montage

**FIGURE 5.4:** Vue d'ensemble du dispositif expérimental.

### 5.1.3 Déroulement des essais et chaîne d'acquisition

L'annexe F décrit la procédure qui a été strictement suivie pour tous les essais. L'annexe G décrit la chaîne d'acquisition qui permet le suivi de différentes grandeurs durant l'expérience : course du chariot, déformation en un point de la plaque, pression en un point du fluide, effort exercé par le jet. Une caméra rapide permet également de suivre la déformée de la plaque ainsi que la forme du jet et sa vitesse.

## 5.2 Analyse et simulation des essais non fissurants

Dans cette section, les essais non fissurants 1 à 13 sont analysés afin de comprendre les phénomènes mis en jeu durant l'expérience. Un modèle numérique de ces essais est ensuite élaboré et validé. C'est une première étape vers la simulation des essais plus complexes faisant intervenir une rupture ou une fissuration.

### 5.2.1 Analyse des essais

Les essais 1 à 4 et 5 à 7 sont les plus simples puisque le fond est épais avec un simple trou. Ainsi, il se déforme peu et l'impact se traduit uniquement par la création d'un jet d'eau s'échappant du cylindre. Les courbes données par le capteur de pression à l'intérieur du cylindre sont données sur les figures 5.5 et 5.6. On peut décomposer ces signaux en

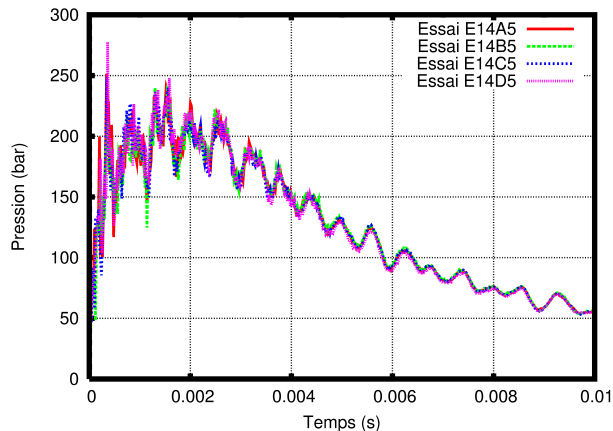


FIGURE 5.5: Pression dans le cylindre (essais E14A-B-C-D5).

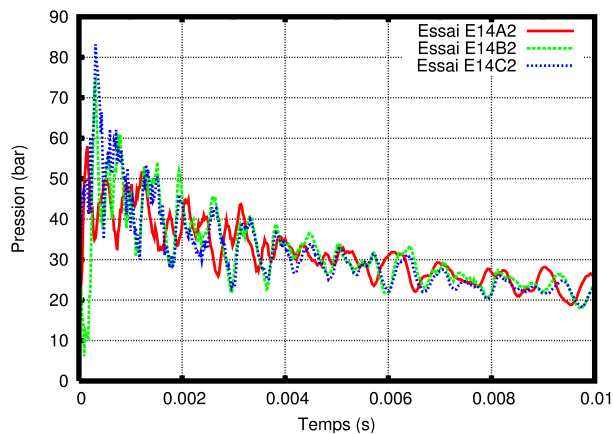


FIGURE 5.6: Pression dans le cylindre (essais E14A-B-C2).

deux parties :

- juste après l'impact, on observe un pic de pression pour lequel la mesure est un peu perturbée. En effet, ce pic varie entre 210 et 277 bars pour les essais E14A-B-C-D5 et entre 58 et 83 bars pour les essais E14A-B-C-D2. Cette dispersion est probablement due au fait que l'impact déclenche la vibration de tous les composants du dispositif, ce qui perturbe les mesures.
- après l'impact, l'écoulement à travers le trou est établi. On obtient alors une très bonne reproductibilité des résultats, notamment pour les essais E14A-B-C-D5, ce

qui atteste de la qualité du montage et de la chaîne de mesure. On observe une décroissance de la pression au cours de l'écoulement associée à des variations périodiques. Ces variations sont observées pour tous les essais avec une très reproductibilité, on en déduit donc qu'ils sont l'image d'un phénomène physique et non pas d'un bruit de mesure. Cette conclusion est renforcée par le fait que les jauges ont été choisies avec soin (fréquence de résonance à  $150\text{ kHz}$ , filtre passe-bas à  $75\text{ kHz}$ ) afin de s'affranchir des problèmes de mesure.

Ces variations périodiques de pression pour les essais E14A-B-C-D5, E14A-B-C-D2, E20A2 et E20A5 sont liées à l'observation d'un motif de même fréquence dans le jet d'eau associé, voir la figure 5.8(a). Le jet d'eau est extrêmement turbulent puisque  $Re \sim 1e6$ . Il se présente sous la forme d'un « champignon » au moment où l'eau est expulsée du cylindre, comme représenté sur la figure 5.7. Une fois l'écoulement établi, le jet a un diamètre légèrement inférieur à celui du trou et on observe l'apparition d'un motif en forme de bulbe, comme sur la figure 5.8(a). Ces bulbes apparaissent à une fréquence constante au cours de l'écoulement et proche de celle observée dans le signal de pression. A la fin de l'écoulement, les bulbes disparaissent et on observe pendant un court moment un jet parfaitement cylindrique, comme sur la figure 5.8(d).

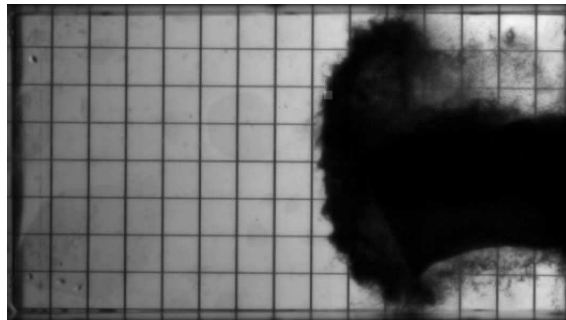


FIGURE 5.7: Jet à  $t = 2.5\text{ ms}$  (essai E20A2).

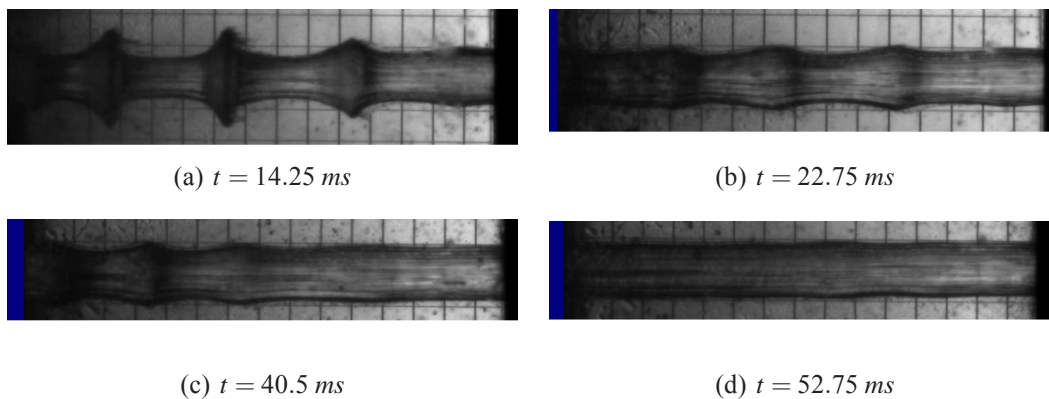
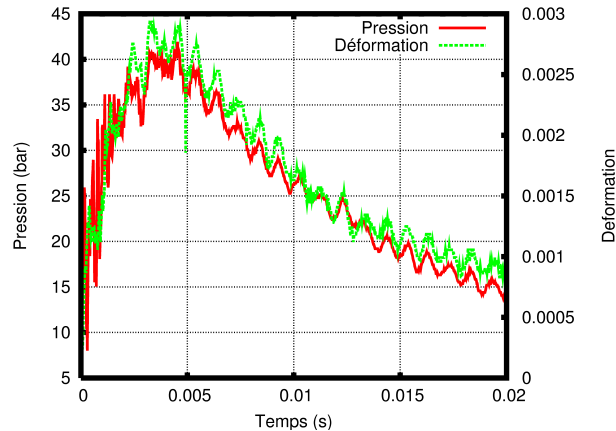


FIGURE 5.8: Forme du jet (essai E20A2).

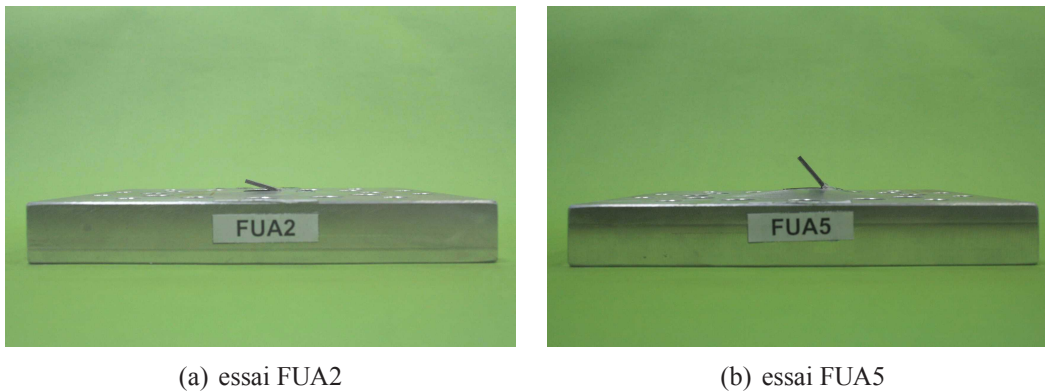


Dans le cas d'une éprouvette déformable (essais F14A2, FUA5 et FUA2 par exemple) un signal périodique de même fréquence est également mesuré par la jauge de déformation. La figure 5.9 compare en effet les signaux de pression et de déformation pour l'essai F14A2, pour lequel la jauge est placée à une distance  $(D_{ext} + d)/4$  du centre de la plaque.



**FIGURE 5.9:** Pression dans le cylindre et déformation de l'éprouvette (essai F14A2).

Enfin, les essais FUA2 et FUA5 ne présentent pas non plus de rupture ou de fissuration. En effet, la préssure en forme de U fêchit sous l'action de la pression et s'ouvre pour laisser s'échapper le fluide. L'angle d'ouverture de la languette ainsi créée dépend alors de la vitesse d'impact comme on le voit sur la figure 5.10. Le jet d'eau ne



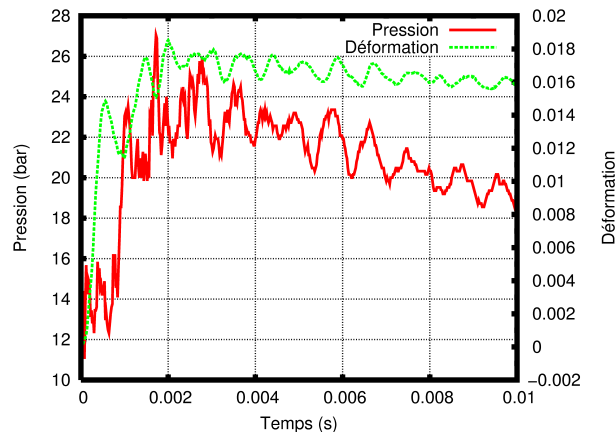
**FIGURE 5.10:** Ouverture de la préssure (essais FUA2 et FUA5).

présente pas de bulbes car il est perturbé par la languette qui n'est pas totalement ouverte, voir la figure 5.11. Cependant, les courbes des jauges de pression et de déformation présentent les mêmes caractéristiques que les essais précédents. En effet, la figure 5.12 montre également des variations périodiques en phase pour les signaux de pression et de déformation (la jauge de pression est placée sur la zone de flexion de la languette, voir la



**FIGURE 5.11:** Jet à  $t = 1.75 \text{ ms}$  (essai FUA5).

figure 5.3). On remarque que les déformations atteignent pour ces deux essais des niveaux importants, 1.8 % pour FUA2 et 2.0 % pour FUA5, signifiant que l'état plastique est atteint au point de mesure. Cela est confirmé par l'observation d'une ouverture résiduelle des languettes sur la figure 5.10.



**FIGURE 5.12:** Pression dans le cylindre et déformation de l'éprouvette (essai FUA2).

L'analyse des signaux par décomposition en série de Fourier montre que la fréquence observée est de l'ordre de  $f \sim 1600 \text{ Hz}$  pour les essais 1 à 9, de l'ordre de  $f \sim 1000$  à  $1200 \text{ Hz}$  pour l'essai 10 et de l'ordre de  $f \sim 1300 \text{ Hz}$  pour les essais 12 et 13.

## 5.2.2 Interprétation des phénomènes

Malgré l'apparente simplicité des essais 1 à 13, les données expérimentales montrent que des phénomènes complexes apparaissent. En effet, les signaux de pression et de déformation présentent des variations périodiques en phase qui peuvent être rapprochées de l'apparition, à la même fréquence, de bulbes dans le jet d'eau. La fréquence observée varie légèrement avec la géométrie des éprouvettes, voir le tableau 5.2. On constate une fréquence plus élevée pour les essais utilisant un fond épais.

| Essai | Fréquence (Hz)     |
|-------|--------------------|
| 1-9   | $\sim 1600$        |
| 10    | $\sim 1000 - 1200$ |
| 12-13 | 1300               |

**TABLE 5.2:** Fréquences observées expérimentalement.

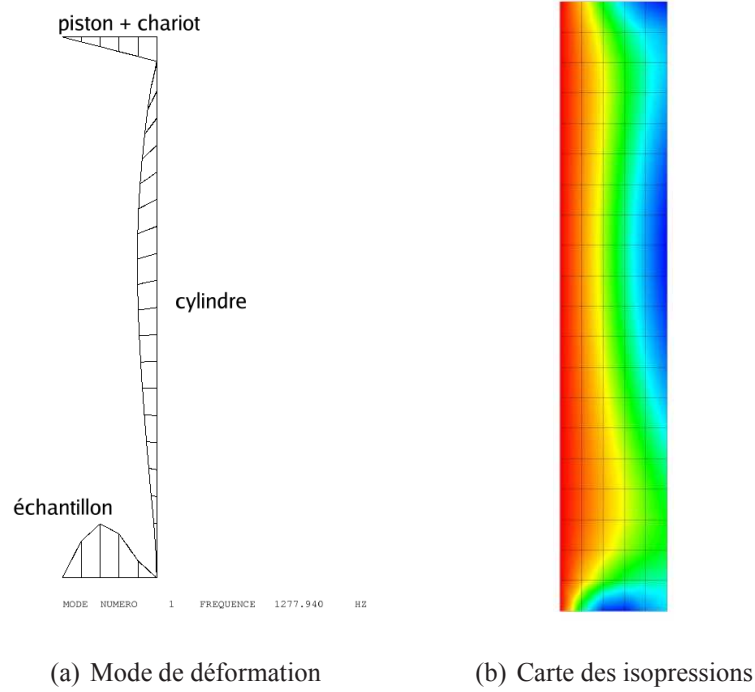
L'interprétation de ces phénomènes n'est pas aisée. L'explication la plus simple consisterait à attribuer les variations périodiques aux allers et retours de l'onde de choc dans le colonne de fluide. Cependant deux arguments invalident cette explication. Tout d'abord, la fréquence observée est constante au cours de l'écoulement alors qu'elle devrait croître selon cette explication suite à la diminution du niveau d'eau dans le cylindre. Ensuite, la fréquence mesurée serait plus élevée de l'ordre de  $f = c/(2H) \sim 4000 \text{ Hz}$  avec  $c = 1450 \text{ m/s}$  la vitesse du son dans l'eau.

Le motif apparaissant sur la figure 5.8(a) est en réalité une instabilité telle qu'il s'en développe classiquement dans les jets très turbulents. Elle est connue sous le nom d'instabilité de Plateau-Rayleigh. Pour qu'elle puisse se développer, le jet doit être initialement excité. La fréquence d'excitation donne alors la fréquence d'apparition des motifs dans le jet. Dans notre cas, il est donc probable que le choc excite les modes propres de l'oscillateur fluide-structure constitué par le dispositif expérimental, permettant ensuite le développement d'instabilités en forme de bulbes dans le jet. Les fréquences observées correspondent donc probablement à un mode propre du montage. Cela concorde avec la diminution de la fréquence observée lorsque des éprouvettes fines sont utilisées. Un modèle simplifié de cylindre rempli d'eau a été étudié grâce au logiciel Castem. La fréquence du premier mode propre du modèle est proche de  $f \sim 1300 \text{ Hz}$  ce qui vient confirmer le raisonnement précédent. La figure 5.13 représente le mode de déformation associé et le champ des isopressions dans le fluide pour  $e_p = 1 \text{ mm}$ .

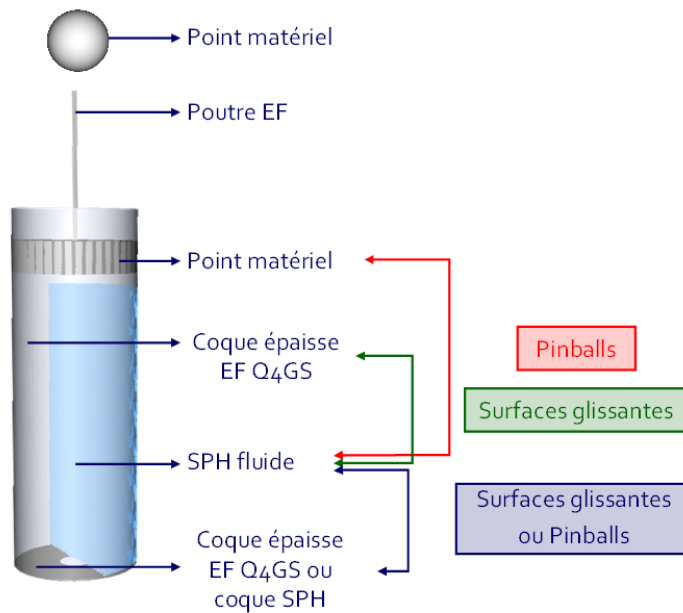
### 5.2.3 Modèle numérique

Cette section présente le modèle numérique associé aux essais décrits précédemment. La fréquence propre du dispositif semblant être importante pour obtenir une bonne description du problème, on choisit de représenter explicitement les principaux éléments du montage. Le modèle est présenté sur la figure 5.14. Le cylindre est modélisé par l'intermédiaire d'EF de coque épaisse Q4GS (5 points d'intégration dans l'épaisseur, intégration sélective) et le piston par l'intermédiaire d'un point matériel lié à des EF de poutre. La chariot est représenté par un point matériel concentrant toute sa masse  $M = 245 \text{ kg}$ . Le fluide est étudié avec la méthode SPH. Le choix de la modélisation de l'éprouvette s'effectue en fonction de l'essai simulé. Pour les essais non f ssurants, un maillage EF Q4GS est suffisant tandis que la coque SPH décrite dans le chapitre 2 sera utilisée en cas de propagation de f ssures.

L'éprouvette est encastrée de même que la partie basse du cylindre. On choisit également de bloquer radialement la partie haute du cylindre afin de modéliser la culasse



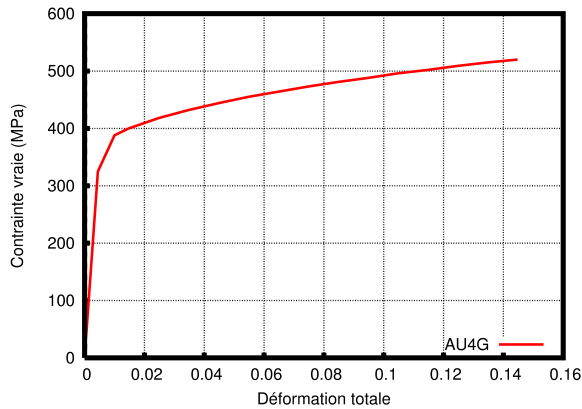
**FIGURE 5.13:** Calcul du premier mode du piston rempli d'eau (Castem).



**FIGURE 5.14:** Modèle numérique du dispositif expérimental.

du piston qui est massive, voir figure 5.4(b).

Dans le cas des essais non f ssurants, les lois de comportement utilisées sont simples, d'autant que le comportement du matériau AU4G peut être considéré indépendant de la vitesse de déformation. Des lois de comportements élasto-plastiques de von-Mises sont donc utilisées pour les matériaux AU4G et APX, la description des paramètres est donnée sur la figure 5.15 et les tableaux 5.3 et 5.4. L'eau est considérée faiblement compressible, parfaite et acoustique, les paramètres correspondants sont donnés dans le tableau 5.5. Le modèle SPH fluide est celui présenté dans la section 1.3.



**FIGURE 5.15:** Courbe de traction AU4G 2024.

| Paramètre           | Valeur |
|---------------------|--------|
| E (GPa)             | 73.1   |
| $\rho$ ( $kg/m^3$ ) | 2780   |
| $\nu$               | 0.33   |
| $\sigma_y$ (MPa)    | 325    |

**TABLE 5.3:** Paramètres matériau AU4G 2024.

| Paramètre           | Valeur |
|---------------------|--------|
| E (GPa)             | 211    |
| $\rho$ ( $kg/m^3$ ) | 7700   |
| $\nu$               | 0.3    |
| $\sigma_y$ (MPa)    | 900    |

**TABLE 5.4:** Paramètres matériau APX.

| Paramètre           | Valeur |
|---------------------|--------|
| $\rho$ ( $kg/m^3$ ) | 1000   |
| c (m/s)             | 1450   |

**TABLE 5.5:** Paramètres matériau eau.

Le modèle fait intervenir de nombreux contacts traités soit par la méthode des Pinballs soit par la méthode des surfaces glissantes, voir le paragraphe 3.2.1 pour un rapide comparatif de ces deux approches. La méthode des surfaces glissantes est privilégiée pour le contact eau-cylindre car elle est efficace pour les contacts avec glissement, contrairement à la méthode des Pinballs qui peut introduire un frottement artificiel important. Le contact entre l'éprouvette et le fluide est également géré par la méthode des surfaces glissantes si le fond est modélisé en EF et par la méthode des Pinballs s'il est modélisé en SPHC. Le piston est modélisé par un Pinball de rayon très important de façon à obtenir un contact quasiment plan sur la colonne de fluide.

Finalement, le modèle comprend environ 1700 EF Q4GS et 112000 nœuds SPH fluide pour un modèle d'essai non f ssurant. Les particules SPH fluide, de rayon  $R_{sph} = 1.025e - 3$  m, sont assez grossières au regard du diamètre du trou : la discrétisation comprend respectivement 7 et 10 particules SPH sur les diamètres  $d = 14$  mm et  $d = 20$  mm.

Cela est dû aux limitations en ressources informatiques et plus particulièrement à la vitesse de calcul des processeurs utilisés. Afin d'accélérer les calculs, la version parallèle d'Europlexus, développée par V. Faucher, a été utilisée. La décomposition de domaine associée est donnée sur la figure 5.16. La réalisation d'une simulation  $t_f = 10 \text{ ms}$  sur 4 processeurs nécessite tout de même  $t_{CPU} = 184 \text{ h}$  de calcul. En effet, une étude des performances montre que le calcul n'est pas équilibré de manière optimale. Le processeur 4 qui calcule le contact entre la plaque d'aluminium et le fluide travaille en effet beaucoup plus que les autres. Cela provient du fait que la décomposition de domaine n'est pas faite en prenant en compte le coût de l'algorithme de contact. Il serait ainsi nécessaire de pouvoir la modifier au cours du calcul en fonction des coûts des différents algorithmes (éléments, contacts,...) qui varient, eux-mêmes, au cours du temps. Cela devrait être possible dans les futures versions d'Europlexus.

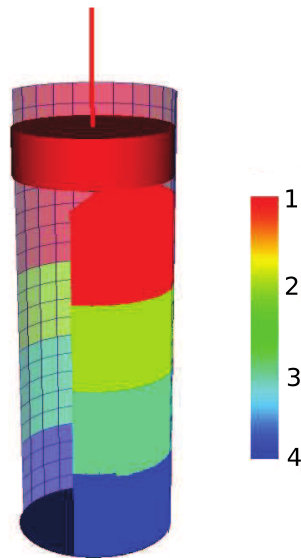


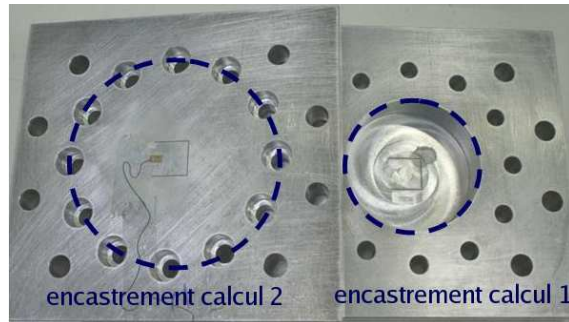
FIGURE 5.16: Décomposition de domaine avec 4 processeurs.

### 5.2.4 Confrontation des résultats numériques et expérimentaux

Les essais 1 à 10 étant similaires, seuls les cas E20A2 et E20A5 sont simulés. Ils sont choisis car les éprouvettes présentent un trou plus grand, ce qui va permettre de minimiser la grossièreté de la discrétisation SPH fluide. Les essais FUA2 et FUA5 sont également simulés car le fond est alors fin et l'ouverture de la languette à un angle précis permet de vérifier la validité du modèle.

### 5.2.4.1 Essais E20A2 et E20A5

Les essais ont été simulés en utilisant deux conditions aux limites différentes pour l'éprouvette, qui sont représentées sur la figure 5.17. On peut en effet considérer que seule la partie de l'éprouvette en contact avec l'eau est importante (calcul 1) ou bien essayer de positionner l'encastrement de manière plus réaliste (calcul 2). La comparaison des deux calculs permettra d'évaluer l'influence des conditions aux limites sur les résultats.



**FIGURE 5.17:** Modélisation de l'encastrement de l'échantillon.

Les courbes de pression obtenues pour les deux calculs sont données sur les figures 5.18 et 5.19 (zoom). On remarque que le pic et les variations de pression juste après l'impact sont bien estimés. C'est un point positif car ces données sont importantes pour prédire une éventuelle rupture de la structure. Cependant, après  $t = 2 \text{ ms}$ , l'écoulement est établi et la pression calculée ainsi que sa fréquence de variation sont trop élevés d'un facteur 2 environ pour le calcul 2. L'estimation est encore plus mauvaise pour le calcul 1. La comparaison des résultats des calculs 1 et 2 permet de comprendre qu'une petite variation dans les conditions aux limites du modèle peut créer des écarts importants dans le signal de pression. Ce problème est typique du modèle faiblement compressible utilisé pour lequel une petite variation de volume peut entraîner une grosse variation de pression, à travers l'utilisation d'une équation d'état du type :

$$\delta p = c^2 \delta \rho \quad (5.1)$$

où  $p$  est la pression,  $c$  la vitesse du son dans l'eau et  $\rho$  la masse volumique. On rappelle que la variation de masse volumique est obtenue via l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \vec{v} \quad (5.2)$$

On note bien qu'une petite erreur dans l'estimation de la masse volumique, due par exemple à des imprécisions géométriques dans le modèle ou bien à un opérateur divergence de faible consistance, entraîne de fortes variations de pression par l'intermédiaire de l'équation d'état 5.1. L'exemple de l'eau donne  $\delta p \sim 20e5 \delta \rho$  car  $c = 1450 \text{ m/s}$ , soit pour  $\delta \rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\delta p \sim 20 \text{ bars}$ . Cet aspect est souligné dans la littérature sur la méthode SPH hydrodynamique, dans la référence [LEE 10] par exemple. Certains auteurs tentent

d'améliorer l'estimation de la pression en utilisant des fonctions MLS (voir annexe A) [COL 03], en appliquant des filtres sur diverses grandeurs [DAL 06] ou bien en utilisant une approche incompressible [LEE 06].

Ainsi, il est probable que notre modèle idéalisé soit un peu trop rigide, ce qui conduit à une surestimation de la pression. De plus, la grossièreté du modèle SPH fluide contribue probablement à sous estimer le débit de fuite, ce qui favorise également une surpression dans le modèle. Ces tendances sont décuplées par l'utilisation d'un modèle faiblement compressible, comme expliqué précédemment. Un maillage plus précis (modélisation de l'espace de visualisation, des vis de fixation, voir de l'ensemble de la tour de chute), plus fin (discrétisation SPH fluide) et un modèle fluide plus élaboré donneraient probablement de meilleurs résultats

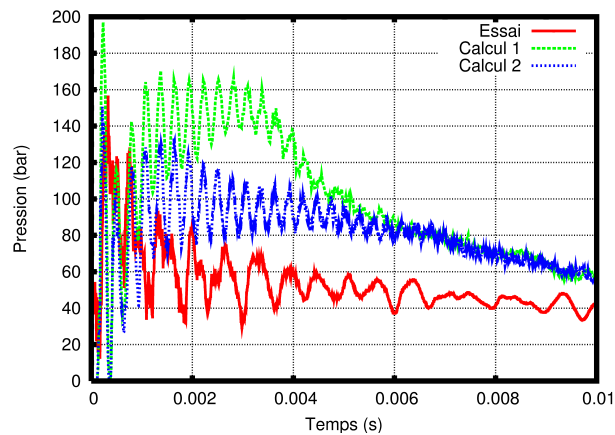


FIGURE 5.18: Pression dans le cylindre (essai E20A5).

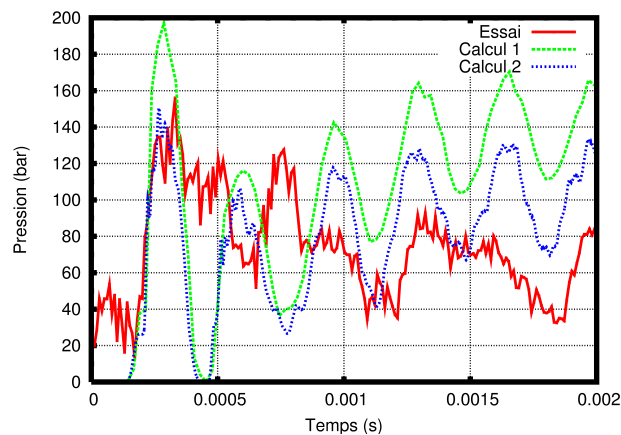


FIGURE 5.19: Pression dans le cylindre : zoom (essai E20A5).

*Remarque : le capteur de pression est modélisé par un simple nœud EF. La pression est obtenue en divisant l'effort exercé par le fluide sur le nœud par la surface d'un EF.*



Les autres grandeurs obtenues par la simulation concordent bien avec les données expérimentales. La figure 5.20 donne la course du chariot. La figure 5.21 donne la vitesse de sortie du jet d'eau, calculée à  $97 \text{ m/s}$ , proche de l'estimation  $92 \text{ m/s}$  obtenue à partir du film fourni par la caméra rapide. Finalement, la figure 5.22(b) donne la forme du jet à  $t = 3 \text{ ms}$ . On remarque la présence de bulbes comparables à ceux observés expérimentalement sur la figure 5.8(a), bien que moins marqués. La simulation révèle que ces bulbes sont associés à des variations locales du champ de vitesse dans le jet, ces variations étant directement causées par les variations périodiques de pression dans le cylindre.

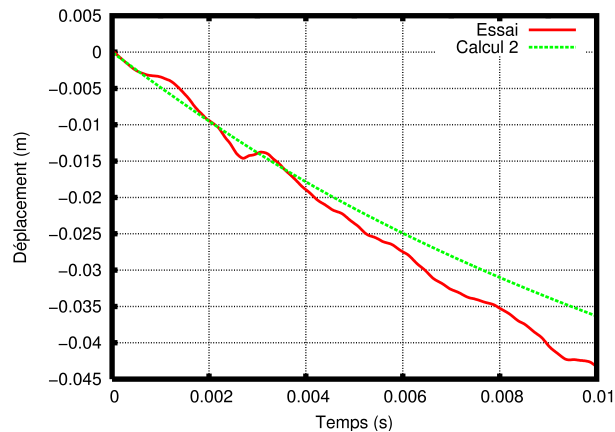


FIGURE 5.20: Déplacement du chariot (essai E20A5).

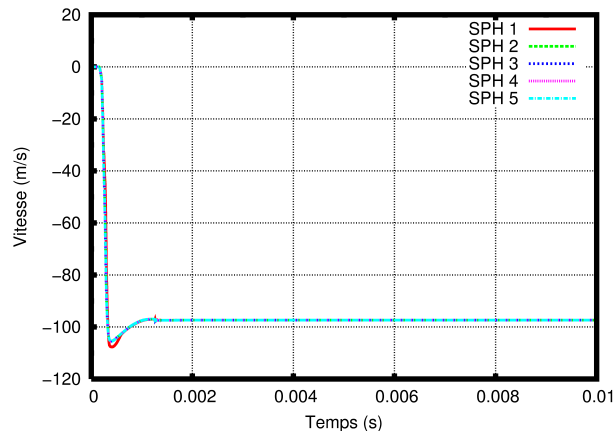


FIGURE 5.21: Vitesse de sortie du jet (essai E20A5, calcul 2).

Les résultats pour l'essai E20A2 sont similaires et donc présentés rapidement. Seule la condition aux limites correspondant au calcul 2 est utilisée ici, comme dans toutes les simulations suivantes. Les courbes de pression, similaires aux précédentes, sont données sur les figures 5.23 et 5.24 (zoom). Le déplacement du chariot est représenté sur la figure 5.25. La vitesse d'éjection de l'eau obtenue par la simulation est de l'ordre de  $44 \text{ m/s}$ , ce qui est similaire à la valeur expérimentale proche de  $45 \text{ m/s}$ , voir figure 5.26.

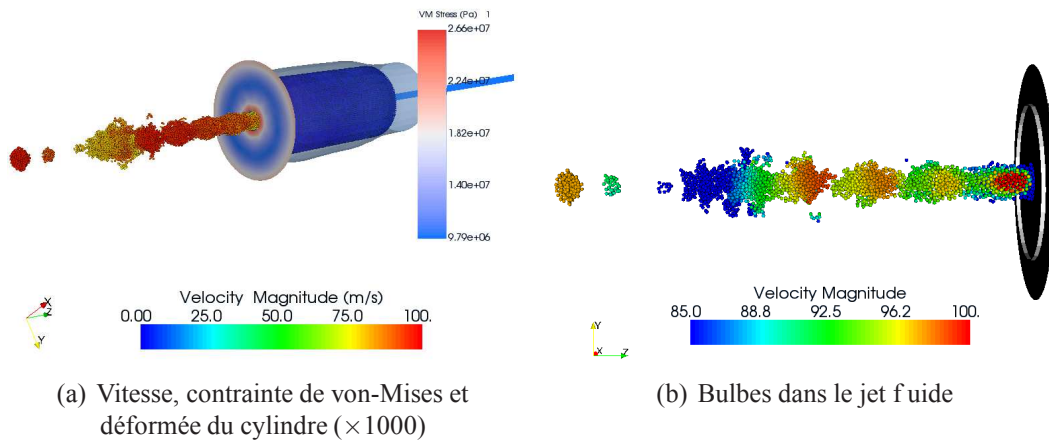


FIGURE 5.22: Simulation de l'essai E20A5 à  $t = 3 \text{ ms}$  (calcul 2).

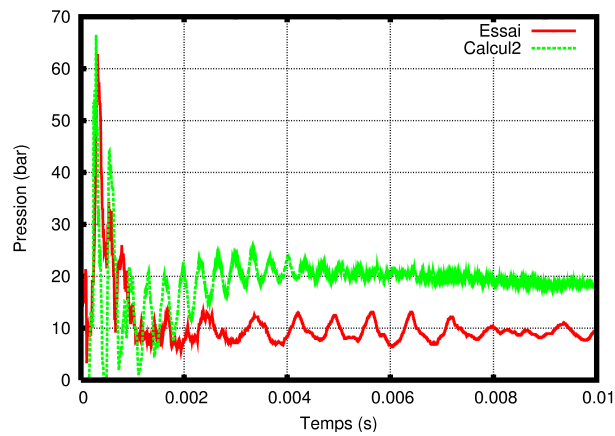


FIGURE 5.23: Pression dans le cylindre (essai E20A2).

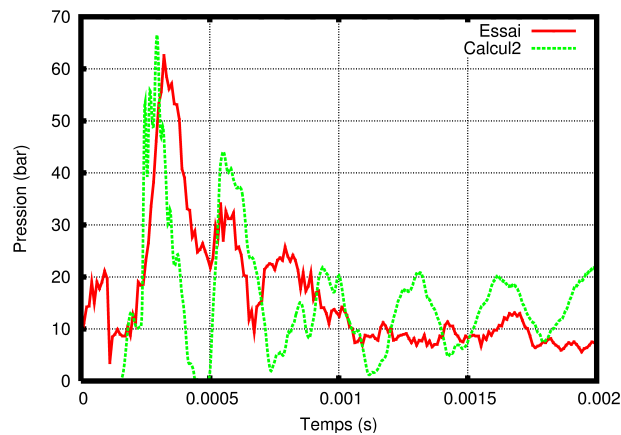


FIGURE 5.24: Pression dans le cylindre : zoom (essai E20A2).

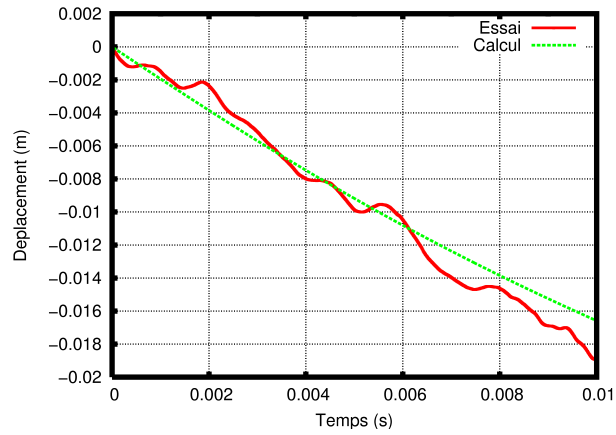


FIGURE 5.25: Déplacement du chariot (essai E20A2).

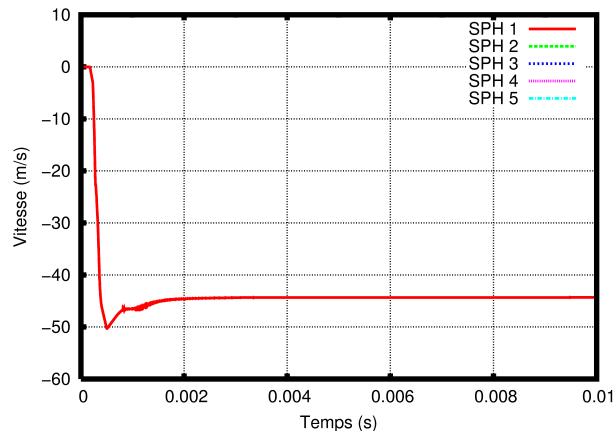


FIGURE 5.26: Vitesse de sortie du jet (essai E20A2).

Les bilans énergétiques de ces calculs sont bons puisque  $|B(\%)| < 0.1$  (se reporter au paragraphe 2.4 pour une définition de ce paramètre).

#### 5.2.4.2 Essais FUA2 et FUA5

Les résultats pour les essais FUA2 et FUA5 sont maintenant présentés et analysés. Ces calculs sont similaires aux précédents puisqu'aucune fissuration ne se produit. L'éprouvette est maintenant fine,  $e_p = 2 \text{ mm}$ , et présente une entaille en forme de U de  $20 \text{ mm}$  de côté. Sous l'effet de la pression, la languette ainsi formée s'échappe et s'ouvre à un angle précis qui est fonction de la vitesse d'impact. L'aspect intéressant de cet essai consiste à vérifier si le modèle est capable de prédire le bon angle d'ouverture, c'est à dire de traiter correctement les IFS au niveau de l'entaille. Le fond est de nouveau maillé en EF G4GS puisque aucune fissure ne se propage. L'entaille est simplement modélisée par des nœuds doubles sur la ligne de découpe.

La courbe de pression obtenue par le calcul pour l'essai FUA5 et comparée aux données expérimentales est donnée sur la figure 5.27, avec un zoom autour de l'impact sur la figure 5.28. Les observations sont les mêmes que pour les essais précédents : l'estimation de la pression est bonne juste après l'impact et se dégrade ensuite une fois l'écoulement établi. Après  $t = 2 \text{ ms}$ , on note un facteur 2 sur la valeur de la pression et on remarque également qu'on n'observe plus de variations périodiques dans le signal calculé.

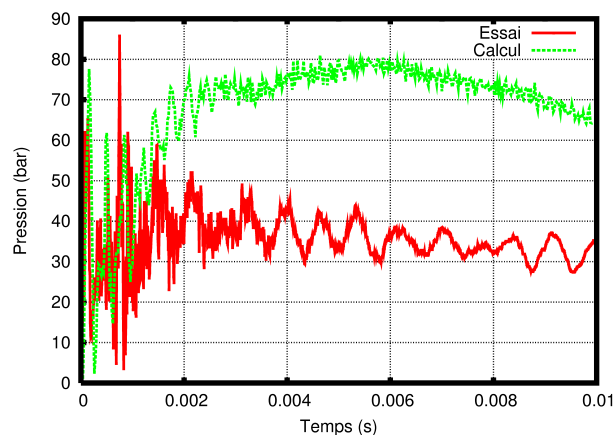
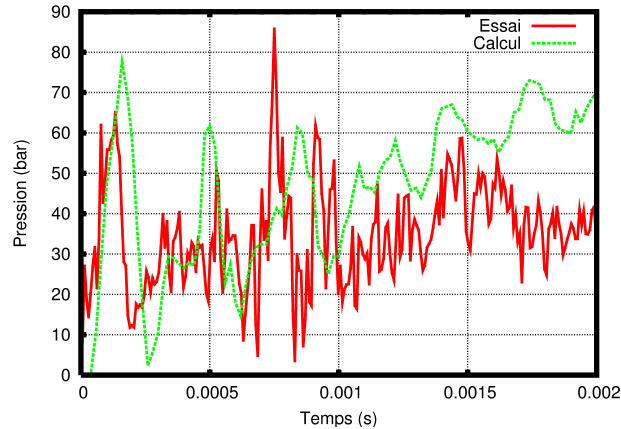


FIGURE 5.27: Pression dans le cylindre (essai FUA5).

La figure 5.29 fournit une vue globale du modèle à  $t = 3.5 \text{ ms}$  tandis que la figure 5.30 compare les déformées expérimentales et numériques de l'éprouvette. On commet ici une erreur puisqu'on compare la déformée numérique contenant encore des déformations élastiques (le calcul a été arrêté avant l'écoulement de la totalité de l'eau) à la déformée expérimentale qui ne contient plus que des déformations plastiques. Cependant, on peut légitimement considérer que ces déformations élastiques sont négligeables puisque les déformations totales sont très grandes, de l'ordre de 2 % pour l'essai FUA5 et



**FIGURE 5.28:** Pression dans le cylindre : zoom (essai FUA5).

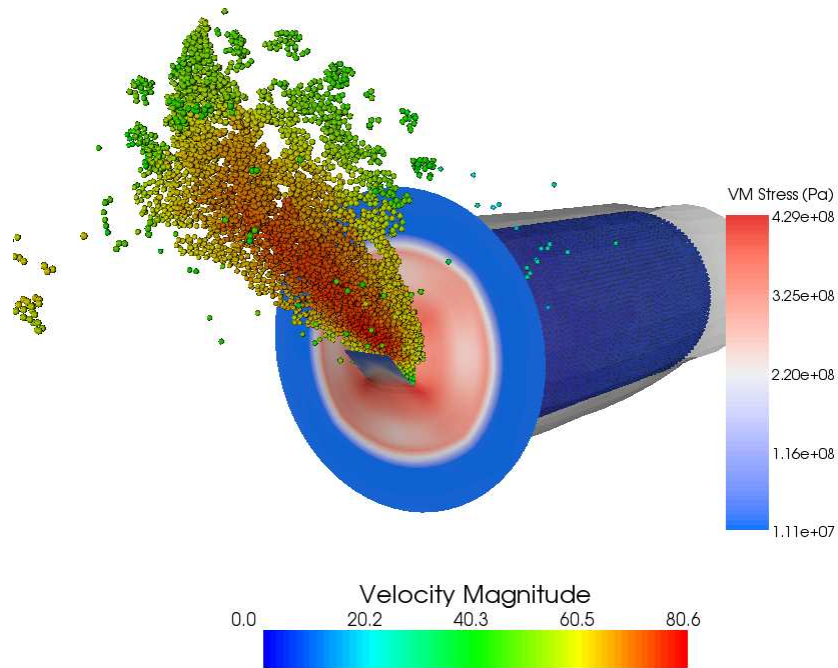
1.8 % pour l'essai FUA2. L'angle d'ouverture  $\alpha$  obtenu par la simulation est très proche de celui observé expérimentalement, de l'ordre de  $\alpha \sim 50^\circ$ . Cela atteste que les IFS sont correctement traités au niveau de l'éprouvette. Ceci est confirmé par l'étude des déformations à l'endroit où se situe la languette : la figure 5.31 montre également des données expérimentales et numériques concordantes.

Les résultats numériques pour l'essai FUA2 sont un peu moins bons mais similaires, ils sont donc présentés rapidement. Les courbes de pression sont données sur les figures 5.32 et 5.33 (zoom) et montrent les mêmes caractéristiques que précédemment. Les angles d'ouverture de la languette sont comparés sur la figure 5.34. On remarque que la concordance est moins bonne que pour l'essai FUA5 puisque l'ouverture prédite par le modèle semble un peu excessive. L'explication est probablement dans l'utilisation d'un maillage SPH fluide grossier : un rapide calcul montre en effet que pour  $\alpha \sim 20^\circ$ , l'ouverture créée est de la taille de 3 particules SPH, ce qui est très grossier. De meilleurs résultats pourraient donc être envisagés en utilisant une discrétisation SPH plus fine.

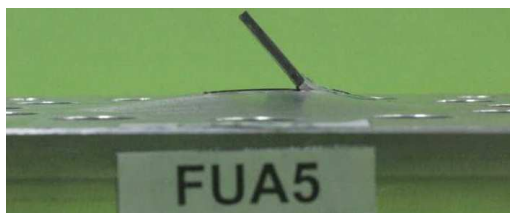
Les bilans énergétiques associés à ces calculs sont  $B(\%) = -0.25$  pour FUA5 et  $B(\%) = +0.32$  pour FUA2.

### 5.2.4.3 Bilan

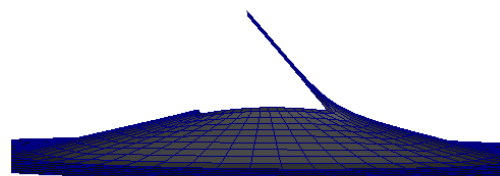
L'étude des essais E20A5, E20A2, FUA5 et FUA2 a permis d'évaluer les performances de notre modèle sur des cas ne présentant pas de rupture ou de propagation de fissures. Simples en apparence, ces essais sont tout de même le siège de phénomènes complexes liés à la vibration de l'oscillateur fluide-structure constitué par le dispositif expérimental. Afin de prendre en compte cet aspect, les éléments importants du dispositif ont été modélisés (cylindre, piston et échantillon). Les résultats sont globalement bons, notamment dans la prédiction des grandeurs juste après l'impact. La vitesse d'éjection du fluide, le déplacement du chariot, les déformées dans le cas des échantillons fins sont correctement prédits par le modèle. Le pic de pression juste après l'impact est lui aussi



**FIGURE 5.29:** Simulation de l'essai FUA5 à  $t = 3.5 \text{ ms}$ .



(a) Déformée expérimentale,  $\alpha \sim 50^\circ$



(b) Déformée numérique à  $t = 10 \text{ ms}$ ,  $\alpha \sim 50^\circ$

**FIGURE 5.30:** Comparaison des déformée (essai FUA5).

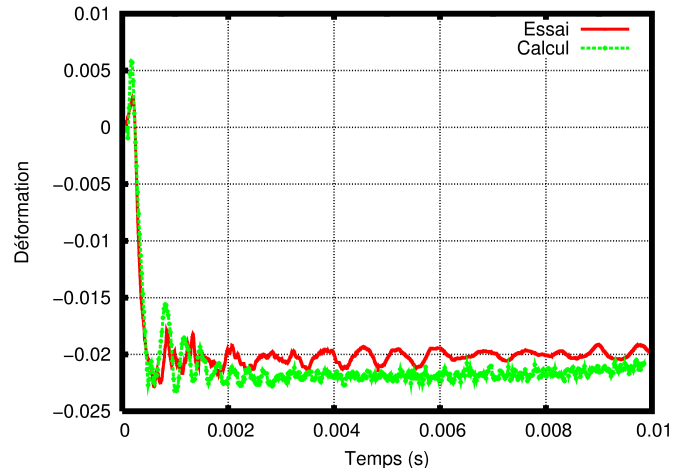


FIGURE 5.31: Comparaison des déformations (essai FUA5).

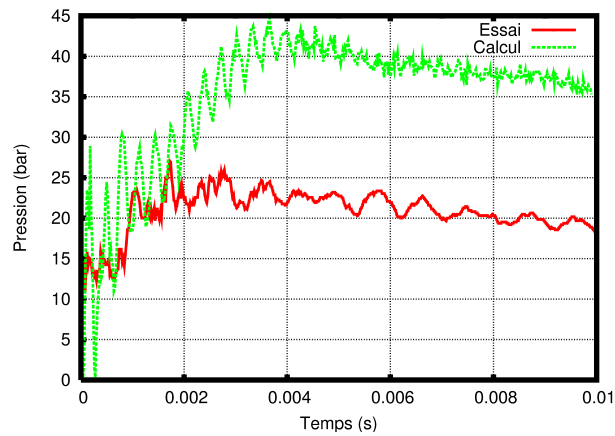


FIGURE 5.32: Pression dans le cylindre (essai FUA2).

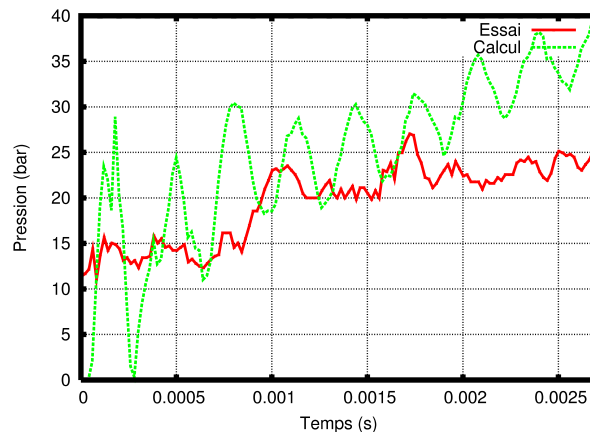
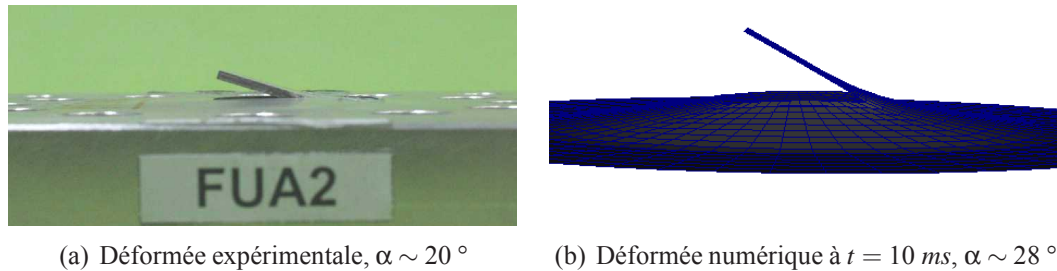


FIGURE 5.33: Pression dans le cylindre : zoom (essai FUA2).



**FIGURE 5.34:** Comparaison des déformées (essai FUA2).

correctement estimé, ce qui permet de penser que le modèle sera efficace pour prédire les ruptures après impact. Cependant, la pression dans le cylindre n'est pas bien prédite une fois l'écoulement établi, puisqu'on calcule des valeurs jusqu'à deux fois supérieures à l'expérience. Ce problème provient probablement du modèle fluide faiblement compressible qui introduit des erreurs importantes dans l'estimation de pression comme décrit dans la littérature. Associé à une discrétisation SPH fluide grossière qui sous estime le débit de fuite et à une trop grande rigidité du maillage dû à l'idéalisation du dispositif, il est probable que cet aspect conduise à des erreurs importantes dans le signal de pression. Notons encore que l'estimation du pic de pression après l'impact est, elle, correcte ce qui permet tout de même d'évaluer les risques de rupture de la structure.

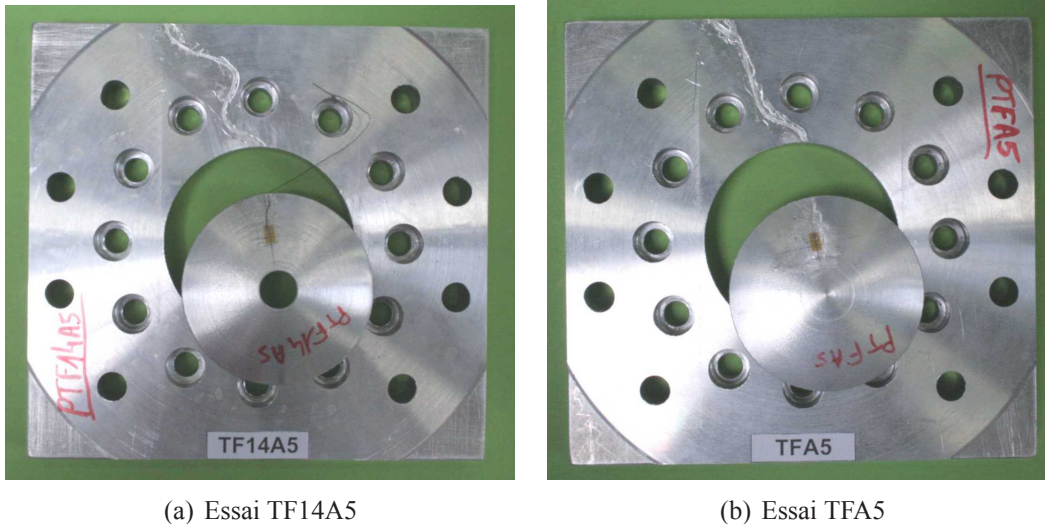
## 5.3 Analyse et simulation des essais fissurants

Cette section s'intéresse aux essais présentant une rupture ou bien une propagation de fissure. Tout d'abord, l'essai TF14A5 est traité. C'est un cas assez simple pour lequel le fond de l'éprouvette est rompu sur sa circonférence sous l'effet du choc de pression. On s'intéresse ensuite à l'essai FXA5 dans lequel des propagations de fissures interviennent. La coque SPHC présentée au chapitre 2 est alors utilisée.

### 5.3.1 Essai TF14A5

L'essai TF14A5, comme les essais F14A2-5 et TFA5, présente une rupture du fond sur la circonférence du lamage. L'état final des éprouvettes est donné sur la figure 5.35. Ce phénomène, non prévu lors de la conception des éprouvettes, est dû à la présence de concentrations de contraintes, notamment de cisaillement, au niveau de la zone de raccord entre la partie fine et la partie épaisse du fond. Le trajet de fissure est connu et simple, de sorte que la rupture peut être modélisée en utilisant la méthode des EF. Pour cela, le fond est de nouveau maillé en utilisant des EF Q4GS. La loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche est couplée à la théorie de plasticité de von-Mises car le comportement du matériau AU4G 2024 T351 peut être considéré indépendant du taux de déformation. Les équations constitutives du modèle utilisé sont donc similaires à celles présentées au paragraphe 2.3.2.2. Dans [SUF 04], l'auteur étudie en détail cette loi de comportement pour





**FIGURE 5.35:** Rupture totale du fond (essais TF14A5 et TFA5).

| $\varepsilon_p^s$ | $\varepsilon_p^c$ | $D_c$ | $\tau_c (\mu s)$ | a |
|-------------------|-------------------|-------|------------------|---|
| 0.03              | 0.25              | 0.23  | 0.1              | 2 |

**TABLE 5.6:** Paramètres de la loi d'endommagement AU4G 2024.

le matériau AU4G 2024 T4 proche de celui utilisé dans les essais de l'ONERA (T4 correspond à un traitement thermique en solution et une maturation, T351 correspond à un traitement thermique en solution avec relâchement de contraintes par élongation). Les caractéristiques choisies pour le matériau AU4G 2024 T351 sont donc issues de [SUF 04] et présentées dans le tableau 5.6.

Pour résoudre le problème de localisation artificielle de l'endommagement décrit au paragraphe 2.3.3, un temps caractéristique  $\tau_c$  est de nouveau introduit dans le modèle, voir le paragraphe 2.3.3.3. Rappelons que ce paramètre permet de borner le taux de croissance de l'endommagement d'un élément, de sorte que celui-ci ait le temps de se propager aux éléments voisins. Les paramètres du modèle à effet retard sont de nouveau issus de [SUF 04] et donnés dans le tableau 5.6.

Finalement,  $l_c$  et  $\Delta x$  étant respectivement la taille caractéristique de la zone entièrement endommagée et des EF, la condition  $\Delta x < l_c$  permet de supprimer le phénomène de localisation artificielle et donc garantit l'indépendance des résultats au maillage. Suivant la méthodologie décrite au paragraphe 2.3.3.4,  $l_c$  peut être approximé par :

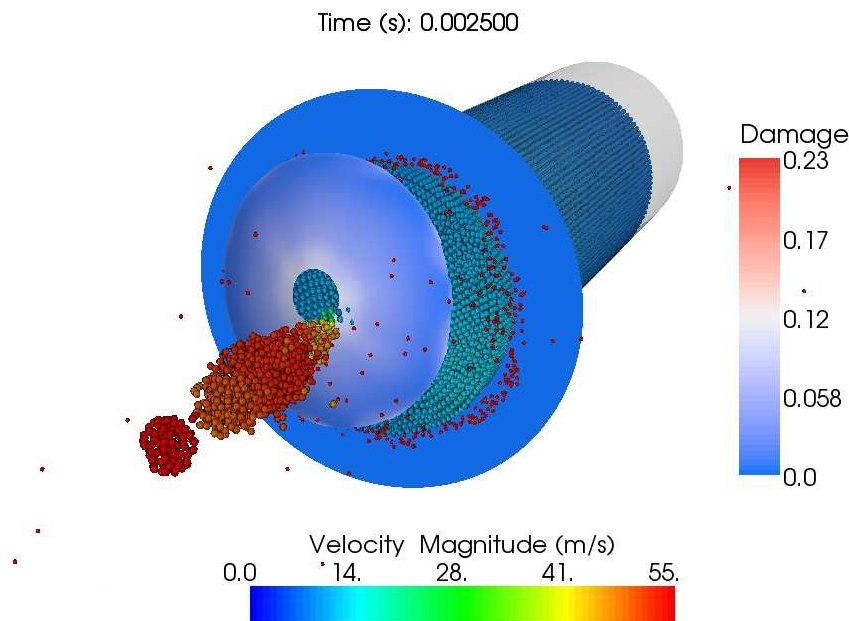
$$l_c \sim c\tau_c \ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{lim}}\right) \quad (5.3)$$

où  $\Delta\sigma$  est le saut de contraintes durant l'impact.  $c$  est la vitesse du son dans le matériau et  $\sigma_{lim}$  est un paramètre matériau représentant sa capacité à résister à l'endommagement.  $\Delta\sigma$  est une information difficile à obtenir. Dans le cas présent, la valeur du saut de contrainte a été estimée à partir du modèle analytique d'une plaque circulaire sans trou. La condition

sur la taille des EF est alors :  $\Delta x < 1.5 \text{ mm}$ . Afin que la zone endommagée soit répartie sur plusieurs EF, on choisit  $\Delta x \sim 0.5 \text{ mm}$ .

Une fois qu'un élément est complètement endommagé, c'est à dire lorsque  $D = D_c$ , il est supprimé du calcul. Afin d'éviter une perte de masse suite à l'érosion des EF rompus, ceux-ci sont remplacés par des débris représentés par des sphères dont la masse et la vitesse sont calculées pour conserver au mieux l'énergie du calcul. Ces débris sont représentés en rouge dans le calcul. Ce modèle de débris est développé par F. Casadei au Joint Research Center à Ispra (Italie) et est encore en cours de validation.

La figure 5.36 présente le modèle numérique de l'essai TF14A5 à  $t = 2.5 \text{ ms}$ . Le temps à rupture est déterminé expérimentalement à  $t \sim 1.5 \text{ ms}$  grâce à la courbe de pression où elle se traduit par une chute brutale du signal, voir la figure 5.37. La courbe de pression obtenue avec le modèle, représentée sur la figure 5.37, concorde bien avec les données expérimentales, tant du point de vue des amplitudes et des variations que du temps à rupture, lui aussi estimé autour de  $t \sim 1.5 \text{ ms}$ . La courbe 5.38 confirme la qualité de la simulation puisque l'on observe une bonne concordance des déformations expérimentales et numériques de l'éprouvette à la distance  $(D_{ext} + d)/4$  du centre du trou. Ces résultats



**FIGURE 5.36:** Simulation de l'essai TF14A5 à  $t = 2.5 \text{ ms}$ .

confirment que le modèle numérique est capable de prédire avec précision les phénomènes intervenant après le choc et donc l'éventuelle rupture de l'éprouvette.

Le bilan énergétique de ce calcul est  $|B(\%)| < 0.1$ .

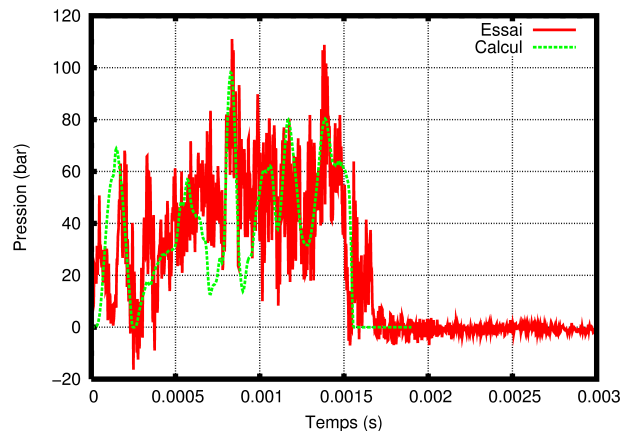


FIGURE 5.37: Pression dans le cylindre (essai TF14A5).

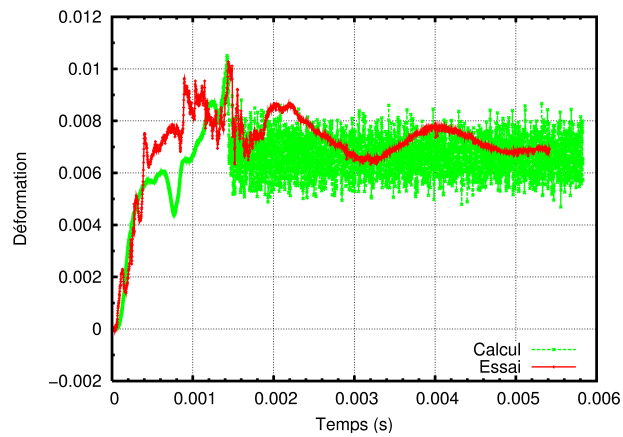


FIGURE 5.38: Déformation de l'éprouvette (essai TF14A5).

### 5.3.2 Essai FXA5

Finalement, l'essai FXA5 est étudié. L'éprouvette est fine ( $e_p = 2 \text{ mm}$ ) et présente deux pré-fissures de  $30 \text{ mm}$  en forme de croix. Sous l'effet du choc de pression, des fissures se propagent puis les pétales ainsi formés s'ouvrent pour laisser s'échapper le fluide. L'état de l'éprouvette à la fin de l'essai est présenté sur la figure 5.39, sur laquelle les trajets de fissures sont marqués en rouge. Cet essai est particulièrement intéressant car il permet de tester si le modèle est capable de reproduire la fissuration (trajet, longueur) et l'ouverture des pétales qui en découle.



FIGURE 5.39: Propagation de fissures (essai FXA5).

La propagation de fissures au cours de l'essai rend indispensable l'utilisation du modèle SPHC présenté au chapitre 2. Celui-ci est introduit localement sur le maillage de l'éprouvette via le couplage présenté au chapitre 4, comme on peut le voir sur la figure 5.40. Les modèles EF et SPHC ont la même loi de comportement, qui est celle utilisée

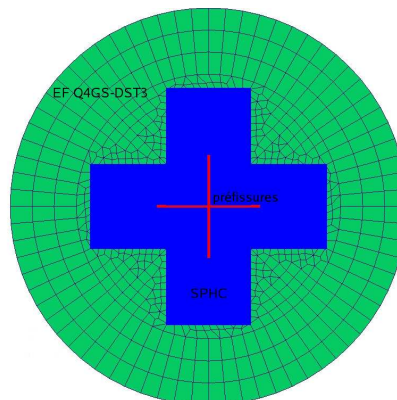
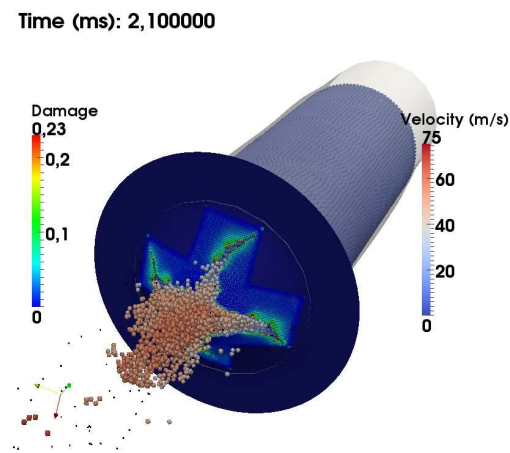


FIGURE 5.40: Maillage de l'éprouvette (essai FXA5).

pour l'essai TF14A5, voir le paragraphe 5.3.1. Il s'agit d'une loi de plasticité de von-Mises couplée à l'endommagement de Lemaitre et Chaboche : le modèle est global pour les SPHC et intégré dans l'épaisseur avec 5 points de Gauss pour les EF. Le contact entre la coque SPH et le modèle SPH fluide est géré par la méthode des Pinballs, telle que

présentée au chapitre 3. Les autres contacts sont gérés en utilisant des surfaces glissantes. La discrétisation SPHC comprend environ 15000 nœuds et SP de rayon  $R_{sph} = 3.5e - 4 m$ .

La figure 5.41 présente l'état du modèle à  $t = 2.1 ms$ . Le comportement est globalement satisfaisant puisqu'on observe bien une propagation des fissures et l'ouverture des pétales associés. On remarque cependant des ruptures artificielles sur les bords des pétales, dues au fait que la discrétisation SPH fluide est grossière. En effet, les SPH fluides ont un rayon plus important que les SPHC ( $R_f = 1.07e - 3 m$  contre  $R_{sphc} = 3.5e - 4 m$ ), ce qui provoque des surcontraintes dans la coque lors du contact et finalement un endommagement et des ruptures artificielles. Un maillage fluide plus fin permettrait de régler ce problème. Les trajets et tailles de fissures expérimentales et numériques sont comparées



**FIGURE 5.41:** Trajet et longueur des fissures (essai FXA5).

sur la figure 5.42. On remarque une légère surestimation de la longueur des fissures, probablement due à la discrétisation fluide grossière qui maximise l'ouverture de la coque. Cependant, les trajets simulés sont compatibles avec ceux observés expérimentalement puisque les fissures tournent. Cette incurvation provoque l'ouverture de deux pétales parmi les quatre, marqués d'un signe « + » sur la figure. On note également la bifurcation de deux fissures ce qui n'est pas observée expérimentalement. Comme dans l'exemple de la section 4.6.2, la bifurcation semble apparaître à l'approche de la zone de recouvrement du couplage Arlequin. Cela suggère que le domaine SPHC utilisé est légèrement trop petit, si bien que la zone de recouvrement voit des phénomènes non-linéaires qui peuvent créer des erreurs dans la propagation de la fissure.

Bien que l'utilisation d'une discrétisation fluide plus fine permettrait d'obtenir de meilleurs résultats, la comparaison des résultats numériques et expérimentaux est globalement satisfaisante. C'est la démonstration que le modèle SPHC est capable de prévoir la rupture d'un réservoir sous impact et le débit de fuite associé.

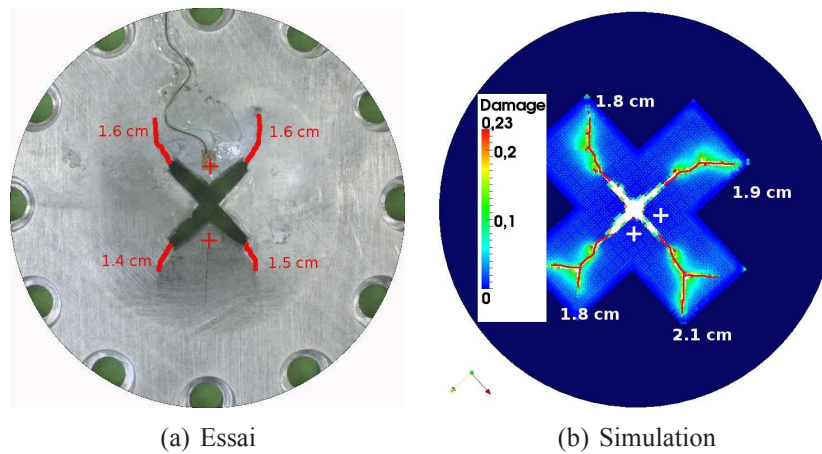


FIGURE 5.42: Comparaison des trajets et longueurs des fissures (essai FXA5).

## 5.4 Conclusions

Les essais présentés dans cette section offrent un cadre simplifié pour la validation du modèle SPHC sur les problèmes d'impacts de réservoirs. Les essais ne faisant pas intervenir de fissuration sont tout d'abord étudiés afin de valider le modèle numérique de l'expérience. Les essais fissurants sont finalement abordés et montrent les capacités de la méthode à prévoir de manière satisfaisante la rupture d'un réservoir et son débit de fuite.

# Conclusion

## Rappel du contexte

La simulation de la déchirure d'un réservoir impacté et de la fuite de son contenu est un problème complexe. Il fait intervenir une structure mince avec un comportement fortement non-linéaire allant jusqu'à rupture, un fluide dont la surface libre peut varier drastiquement et des interactions fluide-structure non permanentes.

L'utilisation des méthodes numériques traditionnelles pour résoudre ce problème semble difficile, essentiellement parce qu'elles reposent sur une grille ou un maillage. Cela complique la gestion des grandes déformations, la modélisation d'interfaces variables et l'introduction de discontinuités telles que les fissures. L'objectif du travail était donc de rendre possible la simulation de la déchirure d'un réservoir en utilisant une approche originale ne nécessitant pas de maillage. Il s'agit de discrétiser le problème par un ensemble de nœuds dont la connectivité peut évoluer au cours du temps. Dans ce cadre, la méthode « Smoothed Particle Hydrodynamics » (SPH) a été utilisée. Sa principale spécificité est de reposer sur une formulation forte. Cela lui confère un caractère plus rustique que les méthodes variationnelles mais permet une grande simplicité qui en fait une approche particulièrement pertinente pour l'étude des multi-fissurations, perforations et fragmentations.

Le travail de Maurel et Combescure [MAU 08a] a permis des avancées importantes sur le sujet. Ils ont notamment mis au point un modèle de coque SPH (SPHC) de Mindlin-Reissner permettant l'étude des structures minces à l'aide d'une seule couche de nœuds. Il s'agit de la première application d'une formulation forte sans maillage à la théorie des coques. Un algorithme de gestion des interactions fluide-structure a également été élaboré à partir du formalisme des Pinballs. Le présent travail s'inscrit dans la continuité de celui présenté dans [MAU 08a].

## Travail réalisé

Les performances de la coque SPH ont tout d'abord été étudiées. Notamment, une formule d'estimation du pas de temps critique du schéma explicite a été élaborée. Une procédure d'optimisation de ce pas de temps critique a également été mise en place, notamment pour le cas problématique des coques de faible épaisseur. Des investigations ont

été menées sur le problème de verrouillage en cisaillement transverse et une solution, baptisée « collocation sélective stabilisée », a été esquissée.

Le modèle a ensuite été étendu à la modélisation des ruptures. La simplicité de la méthode SPH a été conservée dans l'approche choisie. En effet, la prévision de l'apparition des fissures repose sur les ingrédients classiques de la théorie de l'endommagement tandis que la transition endommagement-fissuration et la rupture sont traitées simplement par l'introduction de discontinuités fortes. Le modèle ainsi mis en place constitue la première application de la méthode SPH à la théorie des coques fissurantes et représente une approche attractive pour l'étude des impacts de structures minces. L'un des principaux avantages de la méthode est qu'elle ne nécessite pas la description explicite ou le suivi des fissures, ce qui la rend particulièrement adaptée au type d'application visé. De plus, les phénomènes de rupture sont traités sans perte d'énergie ou de masse dans le modèle. Les divers cas tests étudiés ont permis de démontrer les capacités de la méthode.

Les interactions fluide-structure sont gérées par la méthode des Pinballs qui s'adapte naturellement aux modèles SPH, comme démontré par Maurel et Combescure [MAU 08a]. Dans le présent travail, l'algorithme a été modifié pour prendre en compte la topologie particulière des coques. La déchirure d'un réservoir a finalement été simulée en utilisant un modèle purement SPH. Ce calcul démontre pour la première fois, sur un cas proche de la problématique industrielle, la pertinence de l'approche choisie.

Le coût de calcul associé à un modèle purement SPH est généralement élevé. C'est un obstacle à l'utilisation de la méthode dans un cadre industriel. Pour minimiser ce problème, un couplage de coque SPH-EF a été élaboré dans le formalisme Arlequin. Il permet de n'utiliser le modèle SPHC que dans les zones d'intérêt, c'est à dire où la rupture est attendue. Les coûts de calcul sont alors fortement diminués sans remettre en cause l'intérêt de la méthode.

Enfin, le modèle a été validé par comparaison avec des données expérimentales. Les essais ont été réalisés en 2006 par l'ONERA de Lille. Ils consistent à étudier la déchirure d'une plaque soumise à un choc de pression ainsi que la fuite de fluide associée. Un modèle numérique de l'expérience a été élaboré et le modèle SPHC a été appliqué sur un cas faisant intervenir des propagations de fissures.

## Bilan

Le présent travail, inscrit dans la continuité des recherches de Maurel et Combescure [MAU 08a], a permis de doter le logiciel Europlexus d'un outil original et efficace pour la simulation des impacts de structures minces, éventuellement en interaction avec un fluide. Les principaux avantages du modèle par rapport aux approches traditionnelles sont les suivants :

- pas de problèmes de distorsion d'éléments,
- traitement naturel des ruptures sans description ou suivi des fissures,
- conservation de la masse et de l'énergie au cours des ruptures,
- traitement naturel des interactions fluide-structure non permanentes.



Les inconvénients liés à la méthode SPH sont surmontés ou minimisés. Les problèmes de stabilité sont résolus par l'utilisation d'une formulation Lagrangienne totale et de Stress Points. Une procédure simple et efficace permet d'appliquer la condition de bord libre, problématique pour les formulations fortes. Enfin, le couplage SPH-EF simplifie l'application des conditions aux limites et, combiné à la version parallèle d'Europlexus, permet des réductions importantes des temps de calculs.

La simulation du problème industriel d'impact de réservoir d'avion est désormais envisageable. La figure 5.43 présente un calcul démonstratif dans lequel une aile idéalisée impacte une structure en béton. Ce calcul démontre la pertinence de l'approche élaborée et montre qu'il est possible de la mettre en œuvre dans un cadre industriel.

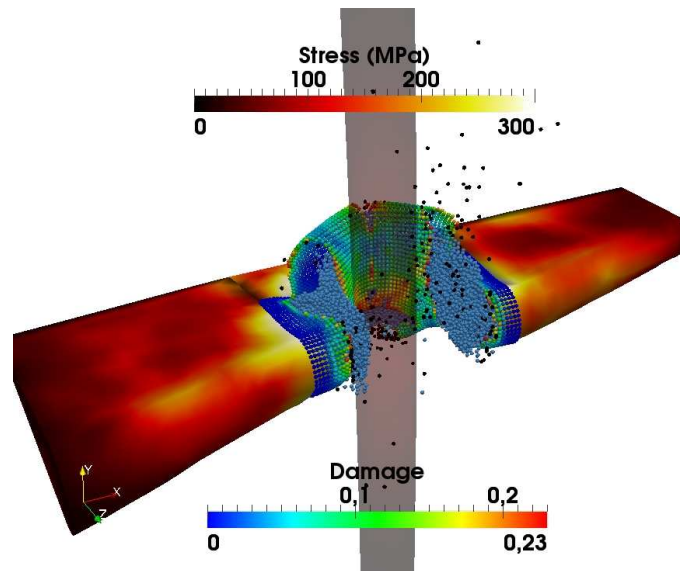


FIGURE 5.43: Impact d'une aile d'avion simplifiée.

## Perspectives

Le modèle SPH décrit précédemment est désormais abouti. Cependant, plusieurs pistes d'améliorations peuvent encore être envisagées pour le rendre pleinement utilisable dans un cadre industriel.

Tout d'abord, le problème de verrouillage en cisaillement transverse de la coque n'a pas été complètement résolu en dépit des efforts fournis dans ce sens. Un travail supplémentaire, notamment sur le processus de stabilisation des modes libres du modèle de « collocation sélective stabilisée », doit être envisagé. De plus, la coque n'est utilisable à ce jour que dans le cadre d'une discrétisation régulière, ce qui limite son application à des formes géométriques simples. Un travail doit être fourni pour envisager des discrétisations non régulières, notamment par l'utilisation de diagrammes de Voronoï.

De plus, les modèles SPH nécessitent généralement une discrétisation fine, ce qui requiert des ressources de calcul importantes. L'utilisation d'un nombre trop faible de nœuds, notamment pour les domaines fluides, a parfois conduit à des résultats imprécis (mauvaise estimation de la pression, ruptures artificielles en cas de contact). La version parallèle d'Europlexus apporte une réponse à ce problème et devrait prochainement être pleinement opérationnelle pour les modèles SPH. Une solution complémentaire serait de rendre le couplage SPH-EF adaptatif afin de n'utiliser le modèle SPHC qu'au moment de la rupture.

Finalement, la simulation de la totalité du problème industriel nécessite de traiter l'embrassement du fluide contenu dans le réservoir et le phénomène de boule de feu. Ce point peut être facilement incorporé sous la forme d'une équation d'état du modèle fluide.

## Annexe A

# Approximation MLS d'un champ et de son gradient

En dimension 2, la donnée initiale est un champ de valeurs  $\vec{u} = [u_i]$  ( $i = 1 \dots n$ ) connues en  $n$  points discrets de coordonnées  $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$  auxquels on associe un poids  $w_i$ . Le problème est de trouver une fonction  $\langle u \rangle$  qui approxime « au mieux » l'ensemble des valeurs  $u_i$  connues afin d'obtenir une bonne approximation du champ en un point  $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ . Définir ce que signifie « au mieux » revient à choisir une norme mathématique de  $R^n$  à minimiser. Dans la méthode des moindres carrés discrets classiques, les poids  $w_i$  sont des constantes tandis que dans la méthode MLS leur valeur dépend du point où l'on réalise l'approximation  $w_i = w_i(x^*, y^*)$ . C'est de là que vient la partie « mobile » de la méthode MLS. La fonction poids choisie est la spline cubique utilisée classiquement dans la méthode SPH, voir le paragraphe 1.2.2.1.

La fonction  $\langle u \rangle$  est cherchée sous la forme d'un polynôme dont il faut alors trouver les coefficients, qui varient selon le point  $\vec{x}^*$  où l'on réalise l'approximation. L'approximation en un point  $\vec{x}$ , construite autour de  $\vec{x}^*$  s'écrit donc :

$$\langle u \rangle(\vec{x}, \vec{x}^*) = \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}^*) \quad (\text{A.1})$$

où  $\vec{p}$  est la base polynomiale utilisée :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= [1 \ x \ y] \text{ pour des MLS d'ordre 1} \\ \vec{p} &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \text{ pour des MLS d'ordre 2} \\ &\text{etc...} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La dépendance des coefficients  $\vec{a}$  à  $\vec{x}^*$  provient de la dépendance de  $w_i$  à  $\vec{x}^*$ . Les coefficients  $\vec{a}$  s'obtiennent par la minimisation d'une distance  $J(\vec{x}^*)$  que l'on choisit classiquement comme étant la norme  $L_2$  pondérée par les poids  $w_i(\vec{x}^*)$  :

$$J(\vec{x}^*) = \sum_{j=1}^n (\vec{p}^T(\vec{x}_j) \vec{a}(\vec{x}^*) - u_j)^2 w_j(\vec{x}^*) \quad (\text{A.3})$$

Un extremum de  $J(\vec{x}^*)$  est obtenu en résolvant le système de  $n$  équations :

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{a}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Le système peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{A}}(\vec{x}^*) \vec{a}(\vec{x}^*) = \underline{\underline{B}}(\vec{x}^*) \vec{u} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\underline{\underline{A}}(\vec{x}^*) = \sum_{i=1}^n w_i(\vec{x}^*) \vec{p}(\vec{x}_i) \vec{p}^T(\vec{x}_i) \quad (\text{A.6})$$

et :

$$\underline{\underline{B}}(\vec{x}^*) = [w_1(\vec{x}^*) \vec{p}(\vec{x}_1) \dots w_n(\vec{x}^*) \vec{p}(\vec{x}_n)] \quad (\text{A.7})$$

La résolution fournit les coefficients sous la forme :

$$\vec{a}(\vec{x}^*) = \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}^*) \underline{\underline{B}}(\vec{x}^*) \vec{u} \quad (\text{A.8})$$

Finalement, il est possible de réécrire cette approximation sous une forme classique faisant apparaître des fonctions de forme  $\vec{\phi}(\vec{x}^*)$  :

$$\langle u \rangle(\vec{x}^*) = \vec{\phi}^T(\vec{x}^*) \vec{u} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\vec{\phi}^T(\vec{x}^*) = \vec{p}^T(\vec{x}^*) \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}^*) \underline{\underline{B}}(\vec{x}^*) \quad (\text{A.10})$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}$  est souvent appelée matrice des moments. Elle est de taille  $m \times m$  où  $m$  est le nombre de coefficients inconnus ( $m = 3$  pour des MLS d'ordre 1,  $m = 6$  pour des MLS d'ordre 2, etc). Cette matrice doit être inversée en tout point  $\vec{x}^*$  où l'on veut réaliser une approximation. Il s'agit d'un inconvénient de la méthode car cela est coûteux en temps de calcul et des problèmes numériques peuvent apparaître lorsque  $\underline{\underline{A}}$  devient singulière. Pour s'assurer que le problème d'approximation est bien posé et que la matrice  $\underline{\underline{A}}$  est symétrique définie positive, il faut vérifier la condition  $n \geq m$  ( $n < m$  le problème est mal posé,  $n = m$  le problème d'approximation est transformé en problème d'interpolation). Les problèmes de conditionnement peuvent être évités en réalisant un décalage d'origine  $\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^*$  et en sortant le terme  $1/h$  de la matrice des moments, où  $h$  est le paramètre réglant la taille du support de la fonction noyau.

Les fonctions MLS permettent également une approximation de la dérivée d'un champ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}^*) \right\rangle &= \frac{\partial \vec{\phi}^T}{\partial x}(\vec{x}^*) \vec{u} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}^*) \right\rangle &= \frac{\partial \vec{\phi}^T}{\partial y}(\vec{x}^*) \vec{u} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

---

avec par exemple :

$$\frac{\partial \vec{\phi}^T}{\partial x} = (\vec{p}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}})_{,x} = \vec{p}_{,x}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} + \vec{p}^T \underline{\underline{A}}_{,x}^{-1} \underline{\underline{B}} + \vec{p}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}_{,x} \quad (\text{A.12})$$

La notation  $\partial/\partial x =_{,x}$  a été adoptée pour plus de clarté. L'équation A.12 présente trois termes, parfois seul le premier est utilisé, on parle alors de dérivée diffuse. Il est généralement conseillé de considérer l'expression complète pour avoir une évaluation précise des dérivées. On remarque que le calcul des dérivées premières des fonctions MLS requiert l'inversion de deux matrices supplémentaires  $\underline{\underline{A}}_{,x}$  et  $\underline{\underline{A}}_{,y}$ . Il est communément admis que l'on peut économiser du temps de calcul en remplaçant ces dérivées par  $\underline{\underline{A}}_{,i}^{-1} = -\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}_{,i} \underline{\underline{A}}^{-1}$ . Cette opération évite également d'avoir à traiter l'éventuel mauvais conditionnement des matrices  $\underline{\underline{A}}_{,i}$ .



## Annexe B

# Algorithme de plasticité du retour radial

On suppose que l'on connaît au pas de temps  $n$ , le vecteur des contraintes  $\vec{\sigma}_g^n$  et la limite élastique  $\sigma_y^n$ . Connaissant l'incrément de déformation total  $\Delta\vec{\varepsilon}_g$  entre  $n$  et  $n+1$ , on cherche à déterminer les grandeurs  $\vec{\sigma}_g^{n+1}$  et  $\sigma_y^{n+1}$ .

On réalise dans un premier temps une prédiction élastique, notée  $*$ , pour laquelle on suppose que l'ensemble des déformations sont élastiques :

$$\vec{\sigma}_g^{*(n+1)} = \vec{\sigma}_g^n + \underline{\underline{C}}\Delta\vec{\varepsilon}_g \quad (\text{B.1})$$

où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur de Hook. Si le seuil de plasticité n'est pas atteint, c'est à dire  $f_p^{n+1} < 0$ , l'état réel du système est égal à la prédiction élastique :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas contraire, il faut déterminer l'état de plasticité du système. Les contraintes au pas de temps  $n+1$  s'écrivent alors :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^n + \underline{\underline{C}}\Delta\vec{\varepsilon}_g^e \quad (\text{B.3})$$

$$= \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} - \underline{\underline{C}}\Delta\vec{\varepsilon}_g^p \quad (\text{B.4})$$

où  $\vec{\varepsilon}_g^e$  et  $\vec{\varepsilon}_g^p$  sont respectivement les incréments des déformations élastiques et plastiques. L'incrément des déformations plastiques est donné par :

$$\Delta\vec{\varepsilon}_g^p = \frac{\partial f_p}{\partial \vec{\sigma}_g^{n+1}} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\Delta p F \vec{\sigma}_g^{n+1}}{\sigma_y^{n+1}} \quad (\text{B.6})$$

car  $\Delta\lambda = \Delta p / \sigma_y^{n+1}$ .

L'utilisation de l'équation précédente conduit à la définition d'une équation implicite d'inconnue  $\Delta p$ , qu'il faut résoudre de façon itérative. C'est, par exemple, l'approche choisie par Zeng et Combescure dans [ZEN 01] où l'algorithme de Newton-Raphson est utilisé. Dans le but d'économiser le temps de calcul, il est possible de construire un problème explicite, moyennant l'approximation suivante :

$$\vec{\Delta \varepsilon}_g^p = \frac{\Delta p \underline{\underline{F}} \vec{\sigma}_g^{n+1}}{\sigma_y^{n+1}} \quad (\text{B.7})$$

$$\approx \frac{\Delta p \underline{\underline{F}} \vec{\sigma}_g^{*(n+1)}}{\sigma_{eq}^{*(n+1)}} \quad (\text{B.8})$$

où  $\sigma_{eq}^{*(n+1)}$  est la contrainte équivalente de Von-Mises associé à l'estimation élastique. Ainsi, on obtient :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = (\underline{\underline{I}} - \Delta p \underline{\underline{M}}) \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} \quad (\text{B.9})$$

avec  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{CF}} / \sigma_{eq}^{*(n+1)}$ . L'équation de la fonction seuil de plasticité  $f_p^{n+1} = 0$  fournit alors :

$$\left( \sigma_{eq}^{*(n+1)} - \gamma \Delta p \right)^2 = (\sigma_y^{n+1})^2 \quad (\text{B.10})$$

avec  $\gamma = \left( \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} \right)^T \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{F}} \left( \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} \right) / \sigma_{eq}^{*(n+1)}$ . En écrivant le limite d'élasticité sous la forme :

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + h \Delta p \quad (\text{B.11})$$

où  $h$  est le module plastique, l'incrément des déformations plastiques cumulées est donné directement par :

$$\Delta p = \frac{\sigma_{eq}^{*(n+1)} - \sigma_y^n}{\gamma + h} \quad (\text{B.12})$$

On peut alors déterminer, grâce à l'équation B.9, le vecteur des contraintes  $\vec{\sigma}_g^{n+1}$  ainsi que la contrainte équivalente de Von-Mises associée  $\sigma_{eq}^{n+1}$ . Cette contrainte est ensuite corrigée afin d'imposer qu'elle se trouve exactement sur la surface de charge :

$$\vec{\sigma}_g^{c(n+1)} = \frac{\sigma_y^{n+1}}{\sigma_{eq}^{n+1}} \vec{\sigma}_g^{n+1} \quad (\text{B.13})$$



## Annexe C

# Estimation du pas de temps critique SPHC

Des expériences numériques fournissent la courbe C.1 qui met en évidence la dépendance du pas de temps critique au rapport  $e/D_{sph}$ . Celui-ci semble, en effet, tendre vers une valeur limite pour les fortes épaisseurs et à l'inverse tendre vers 0 pour les faibles épaisseurs.

Dans le cas du schéma de Newmark aux différences centrées, deux résultats sont importants pour la détermination du pas de temps critique :

- $(\Delta t)_{crit} = \frac{2}{\omega^{max}}$ ,
- $\omega^{max}$  est majorée par la pulsation de l'élément du maillage qui a la plus grande pulsation propre.

Cela permet de réduire l'étude des pulsations propres d'un maillage entier à celle d'un élément type. Pour cela, il faut déterminer les valeurs propres du système  $\underline{\underline{M}}_e^{-1}\underline{\underline{K}}_e$  où  $\underline{\underline{M}}_e$  et  $\underline{\underline{K}}_e$  sont respectivement les matrices de masse et de raideur de l'élément. C'est une procédure simple en théorie, mais qui sous-entend des calculs analytiques qui peuvent vite devenir insolubles. Il faut alors parfois se tourner vers une approximation grossière combinée à des expériences numériques.

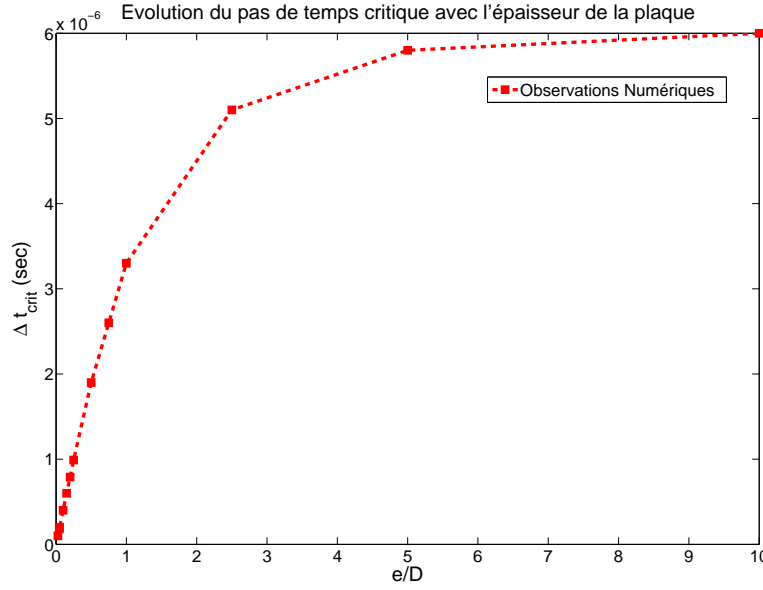
Dans le cadre des SPHC, la pulsation propre d'un nœud entouré de son voisinage est donc étudiée. Des simplifications sont nécessaires pour définir un problème abordable :

- toutes les non-linéarités sont mises de côté,
- les effets de membrane ne posant pas de problèmes, seuls les termes de CT et de flexion sont pris en compte.

Dans ces conditions, les équations d'équilibre de la coque sont données par :

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta}_x &= m_{yy,y} + m_{yx,x} - q_y \\ I\ddot{\theta}_y &= m_{xy,y} + m_{xx,x} - q_x \\ \rho\ddot{w} &= q_{x,x} + q_{y,y} \end{aligned} \quad (C.1)$$

où  $I$  est l'inertie rotation de la coque,  $\rho$  la masse volumique et  $e$  son épaisseur.  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations suivant  $x$  et  $y$  et  $w$  est le déplacement normal à la coque i.e. suivant  $z$ .



**FIGURE C.1:** Estimation de  $(\Delta t)_{crit}$  en fonction de  $e$ .

Les efforts généralisés sont définis classiquement par :

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{\alpha\beta} z dz = \frac{-e^3}{12} (\bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \theta_{,\gamma,\gamma} + 2\mu \theta_{\alpha,\beta}) \\ q_\alpha &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{\alpha 3} dz = e\mu(-\theta_\alpha + w_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (C.2)$$

où  $\bar{\lambda}$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

Le système C.1 comporte donc 3 degrés de liberté, ce conduit à la résolution analytique d'un système de taille  $3n^2$  si l'on prend en compte  $n$  points SPH. Cela n'est pas envisageable même pour des valeurs de  $n$  faibles. Il est donc nécessaire de considérer un système à 2 degrés de liberté ( $\theta$  et  $w$ ) qui se résume à :

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= m_{yy,y} - q_y \\ \rho\ddot{w} &= q_{y,y} \end{aligned} \quad (C.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{yy} &= -\frac{e^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \theta_{,y} \\ q_y &= \mu e(-\theta + w_{,y}) \end{aligned} \quad (C.4)$$

On remarque que les deux degrés de libertés  $\theta$  et  $w$  sont couplés ce qui rend complexe la résolution du système. Il a été choisi de découpler ces termes, c'est à dire de faire dépendre l'équation d'équilibre en rotation uniquement de  $\theta$  et l'équation d'équilibre en translation de  $w$ . Cela permet d'obtenir deux systèmes distincts que l'on pourra résoudre

séparément de manière très simple. Les équations sont donc :

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= -\frac{e^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \theta_{,y,y} - \mu e(-\theta + F_1) \\ \rho\ddot{w} &= \mu e(-F_2 + w_{,y,y}) \end{aligned} \quad (C.5)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont considérées comme des constantes.

*Remarque : le découplage des équations C.3 est une hypothèse très forte qui met potentiellement en danger la qualité des résultats obtenus. En effet, le couplage des degrés de liberté  $\theta$  et  $w$  représente peut-être des modes importants pour le système étudié. Les deux systèmes C.3 et C.5 ont cependant été résolus numériquement et les différences en terme de pulsation propre ne s'est pas avérée fondamentale. Enfin, la qualité des résultats obtenus sera confronté par la suite aux expériences numériques et à d'autres travaux.*

L'étude de l'équation d'équilibre en rotation est privilégiée car elle fait à la fois intervenir des termes de flexion et de CT et semble ainsi avoir plus de sens. Un certain nombre d'hypothèses supplémentaires sont formulées :

- on considère 3 nœuds SPH uniformément répartis et de même caractéristiques,
- les fonctions MLS sont remplacées par les fonctions SPH classiques.

Le système à résoudre est donc un système 3x3 simple dont les valeurs propres possèdent toutes la même forme :

$$(\Delta t)_{crit} = h \sqrt{\frac{(1-\nu^2)/E}{\alpha_1 \frac{e^3}{12I} + \alpha_2 \frac{h^2 e(1-\nu)}{12I}}} = h \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)/E}{\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{h}{e}\right)^2 (1-\nu)}} \quad (C.6)$$

où  $h$  est la taille des fonctions support (dépend directement du diamètre des particules SPH) et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes numériques. On remarque que la formule C.6 fait intervenir deux termes :

- un terme associé aux phénomènes de flexion qui ne dépend pas de  $e$  et qui est prépondérant pour les fortes épaisseurs. Cela correspond à l'asymptote horizontale observée dans la courbe C.1.
- un terme associé aux phénomènes de CT qui dépend linéairement de  $e$  et qui est prépondérant pour les faibles épaisseurs. Cela correspond à l'asymptote linéaire observée dans la courbe C.1.

Malgré les simplifications faites, la formule analytique trouvée semble reproduire les tendances observées dans les expériences numériques. Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont déterminés à partir des asymptotes observées sur la courbe C.1. On obtient  $\alpha_1 = 0.4$  et  $\alpha_2 = 2.0$ .

Une autre approche a été trouvée dans littérature. En effet, dans [TSU 71], Tsui et Tsong dérivent une formule de pas de temps critique en appliquant la méthode des différences finies à l'équation d'équilibre de Mindlin-Reissner. Les effets des inerties de

rotation ainsi que du CT sont pris en compte dans leur travail. L'équation de Mindlin est discrétisée en temps par un schéma explicite. En approximant l'erreur par des séries de Fourier, les auteurs dérivent une formule analytique du pas de temps critique dans le cadre des coques épaisses. L'équation obtenue est la suivante :

$$(\Delta t)_{crit} = \frac{2l}{\sqrt{4\frac{a}{b} + \frac{c}{2b}l^2 + \sqrt{(4\frac{a}{b} + \frac{c}{2b}l^2)^2 - 64\frac{D}{b}}} \quad (C.7)$$

où  $a = I + D\rho/G'$ ,  $b = \rho I/G'$ ,  $c = \rho e$  et  $G' = (\pi^2/12)G$ .  $G = E/(2(1 + \nu))$  est le module de cisaillement et  $D = (Ee^3)/(12(1 - \nu^2))$  la rigidité de flexion.  $l$  est une dimension caractéristique du maillage et  $e$  l'épaisseur de la coque. La formule C.7 étant complexe, les auteurs en proposent une version plus simple mais plus restrictive sous la forme suivante :

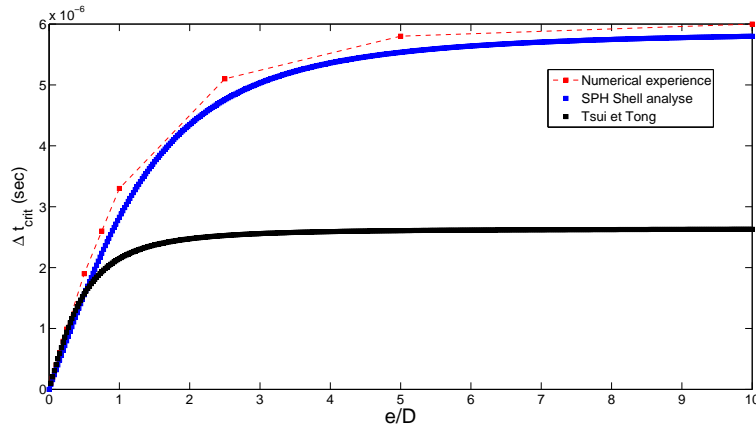
$$(\Delta t)_{crit} = l \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)/E}{2 + (1 - \nu)\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2(1 - \nu)}{8}\left(\frac{l}{e}\right)^2}} \quad (C.8)$$

Le premier terme sous la racine du dénominateur provient des effets de flexion associés à l'inertie de rotation, le second terme provient des effets de CT et le dernier terme provient des effets de CT associés aux effets de l'inertie de rotation.

L'analogie entre la méthode SPH et la méthode des différences finies pouvant être faite facilement, la formule C.7 ou C.8 est directement applicable à l'élément SPHC. La dimension caractéristique du maillage  $l$  peut, par exemple, être choisie comme la distance entre les points SPH, soit  $l = D_{sph}$  dans le cas d'un maillage structuré. On remarque que l'équation C.8 a une forme très proche de l'équation C.6. On retrouve là encore une asymptote horizontale due à des effets de flexion prédominants pour les fortes épaisseurs et une asymptote linéaire due aux effets de CT pour les faibles épaisseurs.

Les pas de temps critiques donnés respectivement par l'expérience numérique et les formules C.6 et C.7 sont représentés sur la figure C.2 à propos de laquelle on peut faire plusieurs remarques :

- les formules analytiques reproduisent bien les tendances observées numériquement. Le pas de temps tend vers une valeur limite pour les fortes épaisseurs, ce qui correspond à des termes de flexion dans les formules C.7 et C.6. Le pas de temps critique tend vers 0 pour les faibles épaisseurs, ce qui correspond à des termes de CT dans les formules C.7 et C.6. Ceci peut paraître surprenant puisque le CT joue un rôle mineur dans la solution d'une coque très mince. De plus, pour la théorie des coques minces, le pas de temps critique augmente au fur et à mesure que l'épaisseur de la coque diminue. Les auteurs de [TSU 71] expliquent ces résultats par la prise en compte du CT qui introduit dans le système discrétisé des fréquences supplémentaires, qui tendent vers l'infini lorsque l'épaisseur de la coque tend vers 0. Ils soulignent que, en conséquence, une formule du pas de temps critique pour la théorie des coques minces ne peut pas être déduite de celle des coques épaisses en faisant tendre  $e$  vers 0.



**FIGURE C.2:** Comparaison des expériences numériques et des formules analytiques.

- pour les fortes épaisseurs, les formules prédisent des pas de temps assez différents : C.7 est basée sur des considérations purement mathématiques et est probablement un peu trop restrictive tandis que C.6 est basée sur des considérations pratiques. La formule C.6 est finalement choisie et est utilisée avec un coefficient de sécurité  $c_{stab} = 0.75$ .



## Annexe D

# Algorithme de couplage plasticité-endommagement

### 1-Début du pas n+1

$$\vec{\varepsilon}_g^{n+1} = \vec{\varepsilon}_g^n + \Delta \vec{\varepsilon}_g$$

### 2-Estimation élastique

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_g^{p*(n+1)} &= \vec{\varepsilon}_g^{pn} \\ \vec{\varepsilon}_g^{e*(n+1)} &= \vec{\varepsilon}_g^{n+1} - \vec{\varepsilon}_g^{pn} \\ D_r^{*(n+1)} &= D_r^n \\ \lambda^{*(n+1)} &= \lambda^n \\ \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} &= \vec{\sigma}_g^n + (1 - D_r^n) \underline{\underline{H}} \Delta \vec{\varepsilon}_g\end{aligned}$$

### 3-Test de plasticité

$$\begin{aligned}\text{si } f_p^{*(n+1)} &\leq 0 \\ \vec{\varepsilon}_g^{pn+1} &= \vec{\varepsilon}_g^{p*(n+1)} \\ \vec{\varepsilon}_g^{en+1} &= \vec{\varepsilon}_g^{n+1} - \vec{\varepsilon}_g^{pn+1} \\ \lambda^{n+1} &= \lambda^{*(n+1)} \\ D_r^{n+1} &= D_r^{*(n+1)} \\ \vec{\sigma}_g^{n+1} &= \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} \\ \text{sinon} \\ i &= 0\end{aligned}$$

#### 4-Calcul du multiplicateur plastique

si  $i=0$ , itération de Newton-Raphson

$$\Delta\lambda_{(1)} = \frac{f_p(\vec{\sigma}_{(0)}^{n+1}, D_{r(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1})}{\frac{\vec{\sigma}_{g(0)}^{(n+1)T} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{F}} \vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}}{(1 - D_{r(0)}^{n+1}) (\sigma_{eq(0)}^{n+1})^2} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}}$$

puis initialisation de l'algorithme de la corde

$$\Delta\lambda^{sup} = \Delta\lambda_{(1)}, \Delta\lambda^{inf} = 0, f^{inf} = f_p(\vec{\sigma}_{(0)}^{n+1}, D_{(0)}^{n+1}, \lambda_{(0)}^{n+1})$$

sinon, itération de l'algorithme de la corde

$$\Delta\lambda_{(i)} = \frac{\Delta\lambda^{sup} f^{inf} - \Delta\lambda^{inf} f^{sup}}{f^{inf} - f^{sup}}$$

#### 5-Calcul de l'endommagement

$$\text{si } f_D(\vec{\varepsilon}, D) = \left[ \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} p \geq \varepsilon_p^s$$

$$\Delta D_{(i)} = \frac{D_c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta p_{(i)}$$

$$\text{si } D_{(i)} \leq D_c$$

$$\Delta D_{r(i)} = \Delta t \frac{1}{\tau_c} (1 - e^{-a(D_{(i)} - D_{r(i)})})$$

sinon

$$\Delta D_{r(i)} = 0$$

sinon

$$\Delta D_{(i)} = 0$$

$$D_{r(i)}^{n+1} = D_r^n + \Delta D_{r(i)}$$



## 6-Actualisation des variables

$$\lambda_{(i)}^{n+1} = \lambda^n + \Delta\lambda_{(i)}$$

$$\vec{\sigma}_{g(i)}^{n+1} = \vec{\sigma}_g^{*(n+1)} - \Delta\lambda_{(i)} \frac{HF \vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}}{\sigma_{eq(0)}^{n+1}} - \frac{\Delta D_{r(i)}}{1 - D_{r(0)}^{n+1}} \vec{\sigma}_{g(0)}^{(n+1)}$$

$$\vec{\varepsilon}_{p(i)}^{n+1} = \vec{\varepsilon}_p^n + \Delta\lambda_{(i)} \frac{F \vec{\sigma}_{g(0)}^{n+1}}{(1 - D_{r(0)}^{n+1}) \sigma_{eq(0)}^{n+1}}$$

## 7-Test de convergence

$$\text{si } \frac{|f_{p(i)}^{n+1}|}{\sigma_{y(i)}^{n+1}} \leq e, \text{ fin du pas } n+1$$
$$\vec{\varepsilon}_g^{p_{n+1}} = \vec{\varepsilon}_g^{p_{n+1}}, \lambda^{n+1} = \lambda_{(i)}^{n+1}$$
$$D_r^{n+1} = D_{r(i)}^{n+1}, \vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_{g(i)}^{n+1}$$
$$\vec{\varepsilon}_g^{e_{n+1}} = \vec{\varepsilon}_g^{n+1} - \vec{\varepsilon}_g^{p_{n+1}}$$

sinon, nouvelle itération de l'algorithme de la corde

si  $i=0$

$$f_{sup} = f_{p(1)}^{n+1}$$

si  $i \geq 1$

si  $\Delta\lambda_{(i)} \geq \Delta\lambda^{sup}$

$$\Delta\lambda^{inf} = \Delta\lambda^{sup}, \Delta\lambda^{sup} = \Delta\lambda_{(i)}$$

$$f_{inf} = f_{sup}, f_{sup} = f_{p(i)}^{n+1}$$

$i=i+1$  et retour à 4-

si  $\Delta\lambda^{inf} \leq \Delta\lambda_{(i)} \leq \Delta\lambda^{sup}$

$$\Delta\lambda^{inf} = \Delta\lambda_{(i)}, f_{inf} = f_{p(i)}^{n+1}$$

$i=i+1$  et retour à 4-



## Annexe E

# Formulation forte ( $S_i^a$ ) du problème Arlequin

Supposons que  $u_i^a$  est solution du problème ( $W_i^a$ ) et déduisons les équations fortes vérifiées par ce champs de déplacement. En se souvenant que  $\varepsilon_{ij}^{a*}(v_i^{a*})\sigma_{ij}^a(u_i^a) = v_{i,j}^{a*}\sigma_{ij}^a(u_i^a)$  car  $\sigma_{ij}^a(u_i^a)$  est symétrique, intégrons par partie le terme correspondant à l'énergie interne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_a} \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a v_i^{a*} d\Omega - \int_{\Omega_a} [\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a)]_{,j} v_i^{a*} d\Omega + \int_{\Omega_a} [\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a) v_i^{a*}]_{,j} d\Omega + \int_{\Omega_{ac}} \lambda_i v_i^{a*} d\Omega \\ & = \int_{\Omega_a} \alpha_a f_i^a v_i^{a*} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_a} \alpha_a F_i^a v_i^{a*} dS \end{aligned} \quad (E.1)$$

On remarque que l'application du théorème de Green-Ostrogradski au troisième terme du premier membre de l'équation peut poser des difficultés selon les propriétés de continuité de  $\alpha_a$ . Dans le cas où  $\alpha_a$  est continue sur  $\Omega_a$ , le théorème s'applique et fournit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_a} v_i^{a*} \left( \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a - [\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a)]_{,j} + \lambda_i - \alpha_a f_i^a \right) d\Omega \\ & = \int_{\partial_F \Omega_a} v_i^{a*} (\alpha_a F_i^a - \alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a) n_j^a) dS \end{aligned} \quad (E.2)$$

en se souvenant que  $v_i^{a*} = 0$  sur  $\partial_U \Omega_a$ . Pour retrouver les équations de la formulation forte associée, prenons classiquement une fonction  $v_i^{a*}$  particulière sous la forme  $v_i^{a*} = \phi \left( \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a - [\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a)]_{,j} + \lambda_i - \alpha_a f_i^a \right)$  avec :

$$\begin{aligned} & \phi \quad \text{régulière} \\ & \phi > 0 \quad \text{sur } \Omega_a \\ & \phi = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_a \end{aligned} \quad (E.3)$$

Ces conditions assurent bien que  $v_i^{a*} \in \dot{U}_i^{a,ad,0}$ . Par conséquent, on obtient :

$$\int_{\Omega_a} \phi \left( \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a - [\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a)]_{,j} + \lambda_i - \alpha_a f_i^a \right)^2 d\Omega = 0 \quad (E.4)$$

et comme  $\phi > 0$  sur  $\Omega_a$ , l'équation forte vérifiée par  $u_i^a$  est :

$$[\alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a)]_{,j} - \lambda_i + \alpha_a f_i^a = \rho \alpha_a \ddot{u}_i^a \quad (\text{E.5})$$

Finalement, choisissons,  $v_i^{a*} = \psi [F_i^a \alpha_a - \alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a) n_j^a]$  avec :

$$\begin{aligned} \psi & \text{ régulière} \\ \psi & > 0 & \text{ sur } \partial_F \Omega_a \\ \psi & = 0 & \text{ sur } \partial_U \Omega_a \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Ces conditions assurent bien que  $v_i^{a*} \in \dot{U}_i^{a,ad,0}$ . L'équation E.5 étant vérifiée sur  $\Omega_a$  et comme  $v_i^{a*} = 0$  sur  $\partial_U \Omega_a$ , on obtient :

$$\int_{\partial_F \Omega_a} \psi (\alpha_a F_i^a - \alpha_a \sigma_{ij}^a(u_i^a) n_j^a)^2 dS \quad (\text{E.7})$$

et comme  $\psi > 0$  sur  $\partial_F \Omega_a$ , l'équation vérifiée par  $u_i^a$  sur  $\partial_F \Omega_a$  est :

$$\sigma_{ij}^a n_j^a = F_i^a \quad (\text{E.8})$$

Finalement, le problème fort ( $S_i^a$ ) correspondant au problème faible ( $W_i^a$ ), écrit sous forme vectorielle, est :

( $S_i^a$ ) : Trouver  $\vec{u}_a$  tel que :

$$\begin{aligned} \vec{\text{div}}(\alpha_a \underline{\underline{\sigma}}_a) + \alpha_a \vec{f}_a - \vec{\lambda} &= \alpha_a \rho \vec{u}_a & \text{sur } \Omega_a \\ \vec{u}_a &= \vec{U}_a & \text{sur } \partial_U \Omega_a \\ \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{F}_a & \text{sur } \partial_F \Omega_a \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

*Remarque* : pour simplifier les écritures nous n'avons pas différencié  $\Omega_{ac}$  où  $\vec{\lambda} = 0$  et  $\Omega_c$  où  $\vec{\lambda} \neq 0$ .

Dans le cas où  $\alpha_a$  est constante sur  $\Omega_c$  de valeur  $\alpha_a^0$ , elle est alors discontinue en  $\Gamma_b$ , ce qui pose problème dans l'application du théorème de Green-Ostrogradski. Les auteurs de [GUI 07] montrent que la formulation forte associée s'écrit alors :

( $S_i^a$ ) : Trouver  $\vec{u}_a$  tel que :

$$\begin{aligned} \vec{\text{div}}(\alpha_a \underline{\underline{\sigma}}_a) + \alpha_a \vec{f}_a - \vec{\lambda} &= \alpha_a \rho \vec{u}_a & \text{sur } \Omega_a \\ \vec{u}_a &= \vec{U}_a & \text{sur } \partial_U \Omega_a \\ \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{F}_a & \text{sur } \partial_F \Omega_a \\ (\alpha_a^0 - 1) \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_b &= \vec{0} & \text{sur } \Gamma_b \\ \alpha_a^0 \underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n}_a &= \vec{0} & \text{sur } \Gamma_a \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

---

Dans le cas d'une fonction  $\alpha_a$  constante sur  $\Omega_c$ ,  $\alpha_a^0 - 1$  et  $\alpha_a^0$  sont non nuls sur  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_a$ , ce qui implique  $\underline{\underline{\sigma}}_a \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Ainsi, des conditions de bords libres artificielles sont créées à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Les auteurs de [GUI 07] soulignent que le champs des multiplicateurs de Lagrange est alors singulier en  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Il est donc recommandé d'utiliser des fonctions de mélange linéaires ou cubiques. Dans ce cas, le problème fort à résoudre est celui de l'équation E.9. Il n'est pas éloigné du problème initial et nécessite seulement de pondérer le tenseur de contrainte avant d'appliquer l'opérateur divergence.



## Annexe F

# Déroulement des essais ONERA

La même procédure a été strictement suivie pour tous les essais :

- encastrement de l'éprouvette à l'extrémité du cylindre ;
- occultation des orifices avec du ruban adhésif ;
- remplissage du cylindre avec de l'eau sans bulles résiduelles ;
- mise en contact du chariot sur le piston et remise à zéro de la mesure de hauteur ;
- vérification du bon fonctionnement du capteur de déplacement ;
- élévation du chariot à la hauteur de largage voulue ;
- éclairage des projecteurs devant un détecteur noir servant à éviter l'échauffement du montage ;
- équilibrage automatique du pont de jauge, remise à zéro de la mesure de pression et armement de l'acquisition et de la caméra rapide ;
- retrait du détecteur noir, évacuation de l'aire de crash et déclenchement du largage.





## Annexe G

# Chaîne d'acquisition utilisée pour les essais ONERA

Une chaîne de d'acquisition permet de relever précisément diverses grandeurs durant les expériences :

- un capteur de déplacement optique permet de suivre la course du chariot ;
- une jauge de déformation à grand allongement ( $\sim 15\%$ ) est fixée sur chaque éprouvette dans une zone sollicitée par le choc de pression. Elles sont associées à un filtre passe-bas à  $75\text{ kHz}$ . L'objectif est de recueillir l'état de déformation et de plasticité résiduelle à l'emplacement de la jauge ;
- un capteur de pression piézo électrique (étendue de mesure de 1000 bars, fréquence propre  $150\text{ kHz}$ ) est fixé sur la partie inférieure du cylindre afin de mesurer l'évolution de la pression en un point du réservoir ;
- une caméra rapide haute définition (4000 images par seconde pour une définition de  $768 \times 512$  pixels) permet de suivre le comportement de l'éprouvette et de l'écoulement. Cela permet également d'estimer la vitesse d'expulsion de l'eau hors du cylindre. Des projecteurs à lumière froide de forte puissance ( $2 \times 4000\text{ W}$ ) permettent de réduire le temps de pose à  $15\ \mu\text{s}$  sans échauffer les éprouvettes.
- un capteur d'effort piézo électrique est placé sous l'éprouvette, dans l'espace de visualisation, afin de mesurer l'effort exercé par le jet d'eau ;
- pour acquérir toutes ces données de manière synchrone, un analyseur multi-voies a été utilisé. Il est équipé de cartes d'acquisition permettant 1 millions d'échantillons par seconde.



# Bibliographie

- [AIF 84] AIFANTIS E.  
On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 106, 1984, page 326.
- [ALL 97] ALLIX O., DEU J.  
Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions/Rozprawy Inzynierskie*, vol. 45, n° 1, 1997, p. 29–46.
- [AND 04] ANDRIEUX  
Analyse de modèle non-locaux d'endommagement. *Colloque National MECAMAT*, , 2004, p. 199-206.
- [ANT 07] ANTOCI C., GALLATIA M., SIBILLAA S.  
Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH. *Computers and Structures*, vol. 85, 2007, p. 879-890.
- [ATL 02] ATLURI S., SHEN S.  
The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method : A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *CMES : Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 3, n° 1, 2002, p. 11–52.
- [ATT 94] ATTAWAY S., HEINSTEIN M., SWEGLE J.  
Coupling of smoothed particle hydrodynamics with the finite element method. *Post-SMIRT Impact IV Seminar, Berlin, Nuclear Engineering and Design*, vol. 2150, 1994.
- [AUB 09] AUBERTIN P., RÉTHORÉ J., R. D. B.  
A coupled molecular dynamics and extended finite element method for dynamic crack propagation. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, 2009, p. 72-88.
- [BAL 95] BALSARA D.  
Von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics—suggestions for optimal algorithms. *Journal of Computational Physics*, vol. 121, n° 2, 1995, p. 357–372, Elsevier.
- [BAU 08] BAUMAN P., BEN DHIA H., ELKHODJA N., ODEN J., S. P.  
On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Computational Mechanics*, vol. 42, 2008, p. 511-530.

- [BAZ 76] BAZANT Z.  
Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 102, n° 2, 1976, p. 331–344, ASCE.
- [BAZ 85] BAZOANT Z., BELYTSCHKO T.  
Wave propagation in a strain-softening bar : exact solution. *Journal of engineering mechanics*, vol. 111, n° 3, 1985, p. 381–389.
- [BAZ 88] BAZANT Z., PIAUDIER-CABOT G.  
Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, n° 2, 1988, p. 287–293.
- [BEL 91] BELYTSCHKO T., NEAL M.  
Contact-impact by the pinball method with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, 1991, p. 547-572.
- [BEL 94a] BELYTSCHKO T., GU L., LU Y.  
Fracture and crack growth by element free Galerkin methods. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 2, 1994, page 519, IOP Publishing.
- [BEL 94b] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L.  
Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 1994, p. 229–256, Springer.
- [BEL 95a] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L.  
Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, n° 2, 1995, p. 295–315, Elsevier.
- [BEL 95b] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L., TABBARA M.  
Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, n° 17-18, 1995, p. 2547–2570, Elsevier.
- [BEL 95c] BELYTSCHKO T., ORGAN D., KRONGAUZ Y.  
A coupled finite element-element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, vol. 17, 1995, p. 186-195.
- [BEL 96a] BELYTSCHKO T., KRONGAUZ Y., ORGAN D., FLEMING M., KRYSL P.  
Meshless methods : an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n° 1-4, 1996, p. 3–47, Elsevier.
- [BEL 96b] BELYTSCHKO T., TABBARA M.  
Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 6, 1996, p. 923-938, Wiley Online Library.
- [BEL 98] BELYTSCHKO T., KRONGAUZ Y., DOLBOW J., GERLACH C.  
On the completeness of meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, n° 5, 1998, p. 785–819, Citeseer.
- [BEL 99] BELGACEM F.  
The Mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, vol. 84, 1999, p. 173-197.

- [BEL 00] BELYTSCHKO T., GUO Y., LIU W., S.P. X.  
A unified stability analysis of meshless particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1359–1400, Wiley Online Library.
- [BEL 03] BELYTSCHKO T., CHEN H., XU J., ZI G.  
Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, n° 12, 2003, p. 1873–1905, Wiley Online Library.
- [BEL 04] BELYTSCHKO T., XIAO S.  
A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 2004, p. 1645-1669.
- [BEN 87] BENSON D., HALLQUIST J.  
A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures. *Report to the University of California*, , 1987.
- [BEN 88] BENALLAL A., BILLARDON R., GEYMONAT G.  
Some mathematical aspects of the damage softening problem. *Elsevier Applied Sciences Eds., Cracking and Damage, Cachan, France*, , 1988, p. 247-258.
- [BEN 93] BENZ W., ASPHAUG E.  
Explicit 3D continuum fracture modeling with smooth particle hydrodynamics. *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, vol. 24, 1993, p. 99–100.
- [BEN 95] BENZ W., ASPHAUG E.  
Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer physics communications*, vol. 87, n° 1-2, 1995, p. 253–265, Elsevier.
- [BEN 04] BEN DHIA H., RATEAU G.  
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2004, p. 1442-1462.
- [BEN 08] BEN DHIA H.  
Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal For Multiscale Computational Engineering*, vol. 6, 2008, p. 215-232.
- [BET 98] BETSCH P., MENZEL A., STEIN E.  
On the parametrization of finite rotations in computational mechanics : : A classification of concepts with application to smooth shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, n° 3-4, 1998, p. 273–305, Elsevier.
- [BON 97] BONORA N.  
A nonlinear CMD model for ductile failure. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 58, 1997, p. 11-28.
- [BON 00] BONET J., KULASEGARAM S.  
Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 6, 2000, p. 1189–1214, Wiley Online Library.

- [BOU 99] BOUYNE E.  
Propagation et arrêt de fissure de clivage dans l'acier 2 1/4 Cr-1 Mo. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 1999.
- [BRE 01] BREZZI F., MARINI L.  
Error estimates for the three-field formulation with bubble stabilization. *Mathematics of Computation*, vol. 70, 2001, p. 911-934.
- [CAS 02] CASADEI F.  
A hierarchic pinball method for contact-impact in fast transient dynamics. *SIMAI conference*, , 2002.
- [CAZ 10] CAZES F.  
Construction et Implémentation de lois cohésives extrinsèques. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2010.
- [CHA 93] CHAPULIOT S., A. C.  
Flambage plastique des coques cylindriques raidies axialement. *Revue européenne des éléments finis*, vol. 2, 1993, p. 49-64.
- [CHA 09] CHAMBART M.  
Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [CHA 10] CHAMOIN L., PRUDHOMME S., BEN DHIA H., ODEN T.  
Ghost forces and spurious effects in atomic-to-continuum coupling methods by the Arlequin approach. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, 2010, p. 1081-1113.
- [CHE 99a] CHEN J., BERAUN J., CARNEY T.  
A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, n° 2, 1999, p. 231-252, Wiley Online Library.
- [CHE 99b] CHEN J., BERAUN J., JIH C.  
An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. *Computational Mechanics*, vol. 23, n° 4, 1999, p. 279-287, Springer.
- [CHO 73] CHORIN A., BERNARD P.  
Discretization of a vortex sheet, with an example of roll-up. *Journal of Computational Physics*, vol. 13, n° 3, 1973, p. 423-429, Elsevier.
- [CHO 01] CHO J., ATLURI S.  
Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, based on a locking-free formulation. *Engineering computations*, vol. 18, n° 1/2, 2001, p. 215-240, MCB UP Ltd.
- [CHU 09] CHUZEL-MARMOT Y.  
Caractérisation expérimentale et simulation numérique d'impact de glace à haute vitesse. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2009.

- 
- [COL 03] COLAGROSSI A., LANDRINI M.  
Numerical simulation of interfacial flows by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, vol. 191, 2003, p. 448-475.
- [CRI 74] CRISFIELD M.  
On an approximate yield criterion for thin shell shells. rapport, 1974.
- [CUR 03] CURTIN W., MILLER R.  
Atomistic/continuum coupling in computational materials science. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 11, 2003, p. 33-68.
- [CUS 00] CUSHMAN-ROISIN B., ESENKOV O., MATHIAS B.  
A particle-in-cell method for the solution of two-layer shallow-water equations. *International journal for numerical methods in fluids*, vol. 32, n° 5, 2000, p. 515–543.
- [DAL 65] DALY B., H. H., J. W.  
Numerical fluid dynamics using the particle and force method : part I- The method and its applications. rapport, 1965, Report LA-3144, Los Alamos Scientific Laboratory.
- [DAL 06] DALRYMPLE R., ROGERS B.  
Numerical modelling of water waves with the SPH method. *Coastal Engineering*, vol. 53, 2006, p. 141-147.
- [DEB 92] DE BORST R., MUHLHAUS H.  
Gradient-dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, n° 3, 1992, p. 521–539, Wiley Online Library.
- [DES 07] DESMORAT R., GATUINGT F., RAGUENEAU F.  
Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering fracture mechanics*, vol. 74, n° 10, 2007, p. 1539–1560, Elsevier.
- [DIL 99] DILTS G.  
Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, n° 8, 1999, p. 1115–1155, Wiley Online Library.
- [DIL 00] DILTS G.  
Moving least-squares particle hydrodynamics II : conservation and boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, n° 10, 2000, p. 1503–1524, Wiley Online Library.
- [DON 98] DONNING B., LIU W.  
Meshless methods for shear-deformable beams and plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 152, n° 1-2, 1998, p. 47–71, Elsevier.
- [DUA 95] DUARTE C., ODEN J.  
Hp clouds-a meshless method to solve boundary-value problems. *TICAM report*, vol. 95, n° 05, 1995.
-

- [DUF 04] DUFLOT M., NGUYEN-DANG H.  
A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n° 14, 2004, p. 1945–1961, Wiley Online Library.
- [DYK 95] DYKA C., INGEL R.  
An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics (SPH). *Computers & structures*, vol. 57, n° 4, 1995, p. 573–580, Elsevier.
- [DYK 97] DYKA C., RANDLES P., INGEL R.  
Stress points for tension instability in SPH. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, n° 13, 1997, p. 2325–2341, Wiley Online Library.
- [FAL 01] FALK M., NEEDLEMAN A., RICE J.  
A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture. *Proceedings of the 5th European mechanics of materials conference on scale transitions from atomistics to continuum plasticity, March, 2001*, p. 5-8.
- [FIN 03] FINEBERG J., SHARON E., COHEN G.  
Crack Front Waves in Dynamic Fracture. *International journal of fracture*, vol. 121, n° 1, 2003, p. 55-69, Springer.
- [FLE 97] FLEMING M., CHU Y., MORAN B., BELYTSCHKO T.  
Enriched Element-Free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 8, 1997, p. 1483–1504, Wiley Online Library.
- [GAR 00] GARCIA O., FANCELLO E., DE BARCELLOS C., DUARTE C.  
hp-Clouds in Mindlin’s thick plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 8, 2000, p. 1381–1400, Wiley Online Library.
- [GIN 77] GINGOLD R., MONAGHAN J.  
Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, 1977, p. 375–389.
- [GIN 83] GINGOLD R., MONAGHAN J.  
Shock simulation by the particle method SPH. *Journal of Computational Physics*, vol. 52, 1983, p. 374–389.
- [GOT 08] GOTO D., BECKER R., ORZECOWSKI T., SPRINGER H., SUNWOO A., SYN C.  
Investigation of the fracture and fragmentation of explosively driven rings and cylinders. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 35, n° 12, 2008, p. 1547-1556, Elsevier.
- [GRA 01] GRAY J., MONAGHAN J., SWIFT R.  
SPH elastic dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, n° 49-50, 2001, p. 6641–6662, Elsevier.
- [GUI 07] GUIDAULT P.-A., BELYTSCHKO T.  
On the  $L^2$  and the  $H^1$  couplings for an overlapping domain decomposition method



- using Lagrange multipliers. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, 2007, p. 322-350.
- [HAL 85] HALLQUIST J., GOUDREAU G., BENSON D.  
Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computation. *CMAME*, vol. 51, 1985, p. 107-137.
- [HEG 96] HEGEN D.  
Element free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 135, 1996, p. 143-166.
- [HEI 93] HEIN P.  
Diffuse element method applied to Kirchoff plates. rapport, 1993, Department of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston.
- [HIR 74] HIRT C., AMSDEN A., COOK J.  
An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of computational physics*, vol. 14, n° 3, 1974, p. 227-253, Elsevier.
- [HUE 00] HUERTA A., FERNANDEZ-MENDEZ S.  
Enrichment and coupling of the finite element and meshless method. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1615-1636.
- [HUG 78] HUGHES T., COHEN M., HAROUN M.  
Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 46, n° 1, 1978, p. 203-222, Elsevier.
- [HUG 00] HUGHES T.  
*The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, 2000.
- [ILY 56] ILYUSHIN A.  
*Plasticité*. Eyrolles, 1956.
- [JOH 83] JOHNSON G., COOK W.  
A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics the Hague, Netherlands*, 1983, p. 541-547.
- [JOH 90] JOHN R.  
Mixed-Mode Fracture of Concrete Subjected to Impact Loading. *Journal of Structural Engineering*, vol. 116, 1990, page 585.
- [JOH 96a] JOHNSON G., BEISSEL S.  
Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 16, 1996, p. 2725-2741, Wiley Online Library.
- [JOH 96b] JOHNSON G., STRYK R., BEISSEL S.  
SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n° 1-4, 1996, p. 347-373, Elsevier.

- [JOH 01] JOHNSON G., BEISSEL S., STRYK R.  
An improved generalized particle algorithm that includes boundaries and interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4FAUX, 2001, p. 875-904.
- [JOH 06] JOHNSON G., HOLMQUIST T., ANDERSON JR. C., NICHOLLS A.  
Some mathematical aspects of the damage softening problem. *Journal de Physique IV France*, vol. 6, 2006, p. 134-391.
- [KAC 86] KACHANOV L.  
*Introduction to continuum damage mechanics*, vol. 10. Springer, 1986.
- [KAD 04] KADOWAKI H., LIU W.  
Bridging multi-scale method for localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 2004, p. 3267-3302.
- [KAN 01] KANOK-NUKULCHAI W., BARRY W., SARAN-YASOONTORN K., BOUILLARD P.  
On elimination of shear locking in the element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, n° 7, 2001, p. 705–725, Wiley Online Library.
- [KAR 00] KARUTZ H.  
Adaptive Kopplung der Elementfreien Galerkin methode mit der Finiten Elemente bei Rissfortschrittsproblem. *Dissertation, Institut fuer Statik und Dynamik der Ruhr Universitaet Bochum*, , 2000.
- [KOB 80] KOBAYASHI A., SEO K., JOU J., URABE Y.  
A dynamic analysis of modified compact-tension specimens using homalite-100 and polycarbonate plates. *Experimental Mechanics*, vol. 20, n° 3, 1980, p. 73–79, Springer.
- [KRY 95] KRYSL P., BELYTSCHKO T.  
Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, vol. 17, n° 1, 1995, p. 26–35, Springer.
- [KRY 96] KRYSL P., BELYTSCHKO T.  
Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n° 20-22, 1996, p. 3057–3080, Elsevier.
- [LAD 91] LADEVEZE P.  
About a damage mechanics approach. *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-materials*, vol. 35, 1991, p. 119-141.
- [LAD 92] LADEVÈZE P.  
A damage computational method for composite structures. *Computers & structures*, vol. 44, n° 1-2, 1992, p. 79–87, Elsevier.
- [LEE 73] LEE E., FINGER M., COLLINS W.  
JWL equation of state coefficients for high explosives. rapport, 1973.

- [LEE 06] LEE E.-S., MOULINEC C., XU R., VIOLEAU D., LAURENCE D., STANSBY P.  
Comparisons of weakly compressible and truly incompressible SPH algorithms for 2D flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 227, 2006, p. 8417-8436.
- [LEE 10] LEE E.-S., VIOLEAU D., ISSA R., PLOIX S.  
Application of weakly compressible and truly incompressible SPH to 3-D water collapse in waterworks. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 48, 2010, p. 50-60.
- [LEM 85] LEMAITRE J., CHABOCHE J., GERMAIN P.  
*Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [LEM 00] LEMAITRE J., DESMORAT R., SAUZAY M.  
Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 19, n° 2, 2000, p. 187-208, Elsevier.
- [LET 96] LETELLIER A.  
Contribution à la modélisation d'impacts d'oiseaux sur les aubes des réacteurs d'avions. Thèse de doctorat, Université d'Evry, 1996.
- [LIB 91] LIBERSKY L., PETSCHKEK A.  
Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. *Advances in the Free-Lagrange Method Including Contributions on Adaptive Gridding and the Smooth Particle Hydrodynamics Method*, , 1991, p. 248-257, Springer.
- [LIB 93] LIBERSKY L., PETSCHKEK A., CARNEY T., HIPPEL J., ALLAHDADI F.  
High strain Lagrangian hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, vol. 109, n° 1, 1993, p. 67-73.
- [LIS 80] LISZKA T., ORKISZ J.  
The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, vol. 11, n° 1-2, 1980, p. 83-95, Elsevier.
- [LIU 95] LIU W., JUN S., ZHANG Y.  
Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, n° 8-9, 1995, p. 1081-1106, Wiley Online Library.
- [LIU 97] LIU W., URAS R., CHEN Y.  
Enrichment of the finite element method with reproducing kernel particle method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, 1997, p. 861-870.
- [LIU 03] LIU G., LIU M.  
*Smoothed particle hydrodynamics : a meshfree particle method*. World Scientific Pub Co Inc, 2003.
- [LIU 10] LIU M., LIU G.  
Smoothed particle hydrodynamics (sph) : an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, n° 1, 2010, p. 25-76, Springer.
- [LON 02] LONG S., ATLURI S.  
A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin

- plate. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 3, n° 1, 2002, p. 53–64, TECH SCIENCE PRESS.
- [LUC 77] LUCY L.  
A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, vol. 82, 1977, p. 1013–1024.
- [MAU 08a] MAUREL B.  
Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2008.
- [MAU 08b] MAUREL B., COMBESCURE A.  
An SPH shell formulation for plasticity and fracture analysis in explicit dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, n° 7, 2008, p. 949–971, Wiley Online Library.
- [MAZ 84] MAZARS J.  
Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 1984.
- [MEL 96] MELENK J., BABUSKA I.  
The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n° 1-4, 1996, p. 289–314, Elsevier.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.  
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 1, 1999, p. 131–150, Wiley Online Library.
- [MON 95] MONAGHAN J., KOCHARYAN A.  
SPH simulation of multi-phase flow. *Computer Physics Communications*, vol. 87, 1995, p. 225-235.
- [MON 00] MONAGHAN J.  
SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, vol. 159, n° 2, 2000, p. 290–311, Elsevier.
- [MOR 96] MORIS J.  
A study of the stability properties of smoothed particle hydrodynamics. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 13, 1996.
- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P.  
Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, vol. 10, n° 5, 1992, p. 307–318, Springer.
- [NEE 88] NEEDLEMAN A.  
Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 67, n° 1, 1988, p. 69–85, Elsevier.

- 
- [NGU 08] NGUYEN V., RABCZUK T., BORDAS S., DUFLOT M.  
Meshless methods : a review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, n° 3, 2008, p. 763–813, Elsevier.
- [NOG 97] NOGUCHI H.  
Application of element free Galerkin method to analysis of Mindlin type plate/shell problems. *Proc of ICE97*, , 1997, p. 918–923.
- [NOG 00] NOGUCHI H., KAWASHIMA T., MIYAMURA T.  
Element free analyses of shell and spatial structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 6, 2000, p. 1215–1240, Wiley Online Library.
- [NOU 09] NOUYRIGAT V.  
Améliorer la survie au crash. *Science et vie*, vol. 1099, 2009, p. 67–73.
- [ONA 96] ONATE E., IDELSOHN S., ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R.  
A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 22, 1996, p. 3839–3866, Wiley Online Library.
- [ORG 96] ORGAN D., FLEMING M., TERRY T., BELYTSCHKO T.  
Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, vol. 18, n° 3, 1996, p. 225–235, Springer.
- [OWE 98] OWEN J., VILLUMSEN J., SHAPIRO P., MARTEL H.  
Adaptive Smoothed Particle Hydrodynamics : Methodology. II. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 116, n° 2, 1998, p. 155–209.
- [OWE 10] OWEN J.  
ASPH modeling of material damage and failure. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International SPHERIC Workshop*, 2010, p. 297-304.
- [PRU 09] PRUDHOMME S., CHAMOIN L., BEN DHIA H., BAUMAN P.  
An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, 2009, p. 1887-1901.
- [QIA 08] QIAN D., EASON T., LI S., LIU W.  
Meshfree simulation of failure modes in thin cylinders subjected to combined loads of internal pressure and localized heat. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, n° 8, 2008, p. 1159–1184, Wiley Online Library.
- [RAB 03] RABCZUK T., BELYTSCHKO T., XIAO S.  
Stable particle methods based on Lagrangian kernels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 2003, p. 1035-1063.
- [RAB 04a] RABCZUK T., BELYTSCHKO T.  
Cracking particles : a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n° 13, 2004, p. 2316-2343, Wiley Online Library.
-

- [RAB 04b] RABCZUK T., BELYTSCHKO T., XIAO S.  
Stable particle methods based on Lagrangian kernels. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, n° 12-14, 2004, p. 1035–1063, Elsevier.
- [RAB 06a] RABCZUK T., AREIAS P.  
A meshfree thin shell for arbitrary evolving cracks based on an extrinsic basis. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 16, n° 2, 2006, p. 115–130.
- [RAB 06b] RABCZUK T., BELYTSCHKO T.  
Application of mesh free methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, vol. 137, 2006, p. 19-49.
- [RAB 06c] RABCZUK T., S.P. X., M. S.  
Coupling of mesh-free methods with finite-elements : basic concepts and test results. *Communications In Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, 2006, p. 1031-1065.
- [RAB 07a] RABCZUK T., AREIAS P., BELYTSCHKO T.  
A meshfree thin shell for large deformation, finite strain and arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, n° 5, 2007, p. 524–548.
- [RAB 07b] RABCZUK T., AREIAS P., BELYTSCHKO T.  
A meshfree thin shell method for non-linear dynamic fracture. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 72, n° 5, 2007, p. 524–548, Wiley Online Library.
- [RAB 07c] RABCZUK T., AREIAS P., BELYTSCHKO T.  
A meshfree thin shell method for non-linear dynamic fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, 2007, p. 524-548.
- [RAB 07d] RABCZUK T., BELYTSCHKO T.  
A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 29-30, 2007, p. 2777–2799, Elsevier.
- [RAB 09] RABCZUK T., GRACIE R., SONG J., BELYTSCHKO T.  
Immersed particle method for fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, 2009, p. 48-71.
- [RAM 85] RAMULU M., KOBAYASHI A.  
Mechanics of crack curving and branching—a dynamic fracture analysis. *International journal of fracture*, vol. 27, n° 3, 1985, p. 187-201, Springer.
- [RAN 96] RANDES P., LIBERSKY L.  
Smoothed particle hydrodynamics : some recent improvements and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n° 1-4, 1996, p. 375–408, Elsevier.
- [RAV 98] RAVI-CHANDAR K.  
Dynamic fracture of nominally brittle materials. *International Journal of Fracture*, vol. 90, n° 1, 1998, p. 83-102, Springer.

- [RUS 09] RUSINEK A., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ J., ZAERA R., KLEPACZKO J., ARIAS A., SAUVELET C.  
Experimental and numerical study on the perforation process of mild steel sheets subjected to perpendicular impact by hemispherical projectiles. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 36, n° 4, 2009, p. 565-587, Elsevier.
- [SAR 10] SARAH L.  
Exploring the Physics behind Dynamic Fragmentation through Parallel Simulations. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2010.
- [SAU 00] SAUER M.  
Adaptive Koppling des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung, von Impaktvorgaengen. *Dissertation, Universitaet der Bundeswher Muenchen, Institut fuer Mechanik und Statik*, , 2000.
- [SHA 95] SHARON E., GROSS S., FINEBERG J.  
Local crack branching as a mechanism for instability in dynamic fracture. *Physical review letters*, vol. 74, n° 25, 1995, p. 5096-5099, APS.
- [SHA 96] SHARON E., FINEBERG J.  
Microbranching instability and the dynamic fracture of brittle materials. *Physical Review B*, vol. 54, n° 10, 1996, page 7128, APS.
- [SHE 68] SHEPARD D.  
A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference ACM*, 1968, p. 517-524.
- [SLA 06] SLADEK J., SLADEK V., WEN P., ALIABADI M.  
Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for shear deformable shells analysis. *CMES : Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 13, n° 2, 2006, p. 103-118.
- [SON 06] SONG J., AREIAS P., BELYTSCHKO T.  
A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, n° 6, 2006, p. 868-893, Wiley Online Library.
- [SOR 04] SORIC J., LI Q., JARAK T., ATLURI S.  
Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for analysis of thick plates. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 6, 2004, p. 349-358, TECH SCIENCE PRESS.
- [SOU 98] SOUERS P., ANDERSON S., HAYES B., LYLE J., LEE E., MCGUIRE S., TARVER C.  
Corner Turning Rib Tests on LX-17. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, vol. 23, n° 4, 1998, p. 200-207, Wiley Online Library.
- [STE 11] STEEMAN G.  
. « NASA Center for AeroSpace Information ». <http://ntrs.nasa.gov/>, consulté le 28 juin 2011.

- [SUF 04] SUFFIS A.  
Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2004.
- [SWE 94] SWEGLE J., ATTAWAY S., HEINSTEIN M., MELLO F., HICKS D.  
An analysis of smoothed particle hydrodynamics. rapport, 1994, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States).
- [SWE 95] SWEGLE J., HICKS D., ATTAWAY S.  
Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, vol. 116, 1995, p. 123-134.
- [TAD 96] TADMOR E., ORTIZ M., PHILLIPS R.  
Quasicontinuum analysis of defects in solids. *Philosophical Magazine A*, vol. 73, n° 6, 1996, p. 1529–1563, Taylor & Francis.
- [TIA 07] TIAGO C., LEITÃO V.  
Eliminating shear-locking in meshless methods : a critical overview and a new framework for structural theories. *Advances in Meshfree Techniques*, , 2007, p. 123–145, Springer.
- [TIM 03] TIMM T.  
Beschuss von flüssigkeitsgefüllten Behältern. Thèse de doctorat, Karlsruhe University, Germany, 2003.
- [TSU 71] TSUI T., TONG P.  
Stability of Transient Solution of Moderately Thick Plate by Finite-Difference Method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 9, 1971, p. 2062–2063.
- [VEN 02] VENTURA G., XU J., BELYTSCHKO T.  
A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, n° 6, 2002, p. 923–944, Wiley Online Library.
- [VID 07] VIDAL Y., BONET J., HUERTA A.  
Stabilized updated Lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 69, n° 13, 2007, p. 2687–2710, Wiley Online Library.
- [VIG 00] VIGNJEVIC R., CAMPBELL J., LIBERSKY L.  
A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method. *Computer methods in Applied mechanics and Engineering*, vol. 184, n° 1, 2000, p. 67–85, Elsevier.
- [VIG 02] VIGNJEVIC R., DE VUYST T., CAMPBELL J.  
The use of an homogeneous repulsive force for contact treatment in SPH. *Fifth World Congress of Computational Mechanics*, , 2002.
- [VUR 03] VURAL M., RAVICHANDRAN G., RITTEL D.  
Large strain mechanical behavior of 1018 cold-rolled steel over a wide range of strain



- 
- rates. *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 34, n° 12, 2003, p. 2873-2885, Springer.
- [WAG 03] WAGNER G., LIU W.  
Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *Journal Of Computational Physics*, vol. 190, 2003, p. 249-274.
- [WAN 04] WANG D., CHEN J.  
Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n° 12-14, 2004, p. 1065–1083, Elsevier.
- [WEN 94] WEN Y., HICKS D., SWEGLE J.  
Stabilizing SPH with conservative smoothing. rapport, 1994, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States).
- [XIA 02] XIAO S.  
Atomistic simulations of nanotube fracture and stability analysis of particle methods. Thèse de doctorat, Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, 2002.
- [XU 95] XU X., NEEDLEMAN A.  
Numerical simulations of dynamic crack growth along an interface. *International Journal of Fracture*, vol. 74, n° 4, 1995, p. 289-324, Springer.
- [ZEN 01] ZENG Q., COMBESCURE A., ARNAUDEAU F.  
An efficient plasticity algorithm for shell elements application to metal forming simulation. *Computers & Structures*, vol. 79, n° 16, 2001, p. 1525–1540, Elsevier.
- [ZHA 09] ZHANG Y., CHEN L.  
Impact simulation using simplified meshless method. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 36, n° 12, 2009, p. 651-658.
- [ZI 07] ZI G., RABCUK T., WALL W.  
Extended meshfree methods without branch enrichment for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, vol. 40, n° 2, 2007, p. 367-382, Springer.



NOM : CALEYRON

DATE de SOUTENANCE : XX septembre 2011

Prénom : Fabien

TITRE : Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d'un réservoir sous impact

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2011-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Le récent développement des menaces terroristes renforce l'effort de recherche du CEA et d'EDF pour la protection des citoyens et des installations. De nombreux scénarios doivent être envisagés comme, par exemple, la chute d'un avion de ligne sur une structure de génie civil. La dispersion du carburant dans la structure, son embrasement sous forme de boule de feu et les effets thermiques associés sont des éléments essentiels du problème. L'utilisation de modèles numériques est indispensable car des expériences seraient difficiles à mettre en œuvre, coûteuses et dangereuses.

Le problème type que l'on cherche à modéliser est donc l'impact d'un réservoir rempli de fluide, sa déchirure et la dispersion de son contenu. C'est un problème complexe qui fait intervenir une structure mince avec un comportement fortement non-linéaire allant jusqu'à rupture, un fluide dont la surface libre peut varier drastiquement et des interactions fluide-structure non permanentes. L'utilisation des méthodes numériques traditionnelles pour résoudre ce problème semble difficile, essentiellement parce qu'elles reposent sur un maillage. Cela complique la gestion des grandes déformations, la modélisation des interfaces variables et l'introduction de discontinuités telles que les fissures. Afin de s'affranchir de ces problèmes, la méthode sans maillage SPH (« Smoothed Particle Hydrodynamics ») a été utilisée pour modéliser le fluide et la structure.

Ce travail, inscrit dans la continuité de recherches précédentes, a permis d'étendre un modèle de coque SPH à la modélisation des ruptures. Un algorithme de gestion des interactions fluide-structure a également été adapté à la topologie particulière des coques. Afin de réduire les coûts de calcul importants liés à ce modèle, un couplage avec la méthode des éléments finis a également été élaboré. Il permet de n'utiliser les SPH que dans les zones d'intérêt où la rupture est attendue. Finalement, des essais réalisés par l'ONERA sont étudiés pour valider la méthode.

Ces travaux ont permis de doter le logiciel de dynamique rapide Europlexus d'un outil original et efficace pour la simulation des impacts de structures minces en interaction avec un fluide. Un calcul démonstratif montre enfin la pertinence de l'approche et sa mise en œuvre dans un cadre industriel.

MOTS-CLÉS : sans maillage, SPH, coque, dynamique, rupture, impact, interactions fluide-structure

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Alain COMBESURE

Président du jury :

|                                     |                 |
|-------------------------------------|-----------------|
| Composition du jury : ALLIX Olivier | BORDAS Stéphane |
| COMBESURE Alain                     | FAUCHER Vincent |
| HAMDOUNI Aziz                       | OHAYON Roger    |
| POTAPOV Serguei                     |                 |