

THÈSE

COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET STABILITE DES ROTORS : APPLICATION AUX ROTORS COMPOSITES

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Rim SINO

Ingénieur en mécanique

Thèse soutenue le 4 octobre 2007 devant la Commission d'examen

Jury

ALAIN BERLIOZ	Professeur	Président
PASCAL SWIDER	Professeur	Rapporteur
CHRISTIAN HOCHARD	Directeur de Recherche	Rapporteur
GEORGES JACQUET	Professeur	Directeur de thèse
THOURAYA N. BARANGER	Maître de Conférence HDR	Examinateur
ERIC CHATELET	Maître de Conférence	Examinateur

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 - Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment M9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 72 18 33 83 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2m2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât C. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIÉTÉ http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.42 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@iris.cnrs.fr - alain.mille@iris.cnrs.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	MATÉRIAUX DE LYON M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M. Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.80 - Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.62.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSSD	SCIENCES DES SOCIÉTÉS, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

Remerciements

Résumé

Ce travail a pour objet l'étude de la stabilité des ensembles tournants lorsque des termes d'amortissement interne (dus aux matériaux) et d'amortissement externe (paliers) sont introduits dans le modèle. La majorité des études identifiées dans la littérature sont fondées sur des développements numériques. La principale difficulté réside dans l'évaluation des paramètres physiques de l'amortissement interne qui permettent une prédiction des instabilités potentielles avec une précision suffisante.

Afin de considérer des propriétés mécaniques réelles en terme d'amortissement interne, un modèle rhéologique de solide viscoélastique associé à une approche générale éléments finis de type poutre est développée, incluant les effets de cisaillement transverse. Après une description théorique (choix du modèle d'amortissement interne et équations du mouvement), une première application valide la méthode proposée. L'influence de l'amortissement sur les fréquences et les seuils d'instabilité est analysée via une étude paramétrique. Les résultats sont comparés à ceux obtenus à partir d'une approche analytique et à partir des expérimentations en rotation.

Une seconde application s'intéresse à la stabilité dynamique d'un rotor composite avec prise en compte de l'amortissement interne et du cisaillement transverse. Une théorie simplifiée d'homogénéisation de poutre (SHBT : Simplified Homogenized Beam Theory), associée à une formulation éléments finis est introduite et utilisée pour évaluer les fréquences naturelles et les seuils d'instabilité. Cette théorie est comparée avec d'autres théories issues de la littérature (EMBT : Equivalent Modulus Beam Theory), EMBT modifié et (LBT : Layerwise Beam Theory). Une étude qualitative montre l'influence de différents paramètres (orientations, séquences d'empilement, etc...) ainsi que les effets du cisaillement transverse lorsque ce dernier est introduit dans le modèle. Les effets associés sont traduits directement en terme de fréquences et de seuils d'instabilité de la structure tournante lorsque des empilements symétriques aussi bien qu'asymétriques sont considérés.

MOTS CLÉS: Dynamique des Rotors, Amortissement Interne et Externe, Critère de Stabilité, Rotor Composite, Amortissement, Stabilité, Seuil d'Instabilité, Cisaillement Transverse, Élément Finis, Théorie de Poutre

Abstract

This work deals with the study of dynamic instabilities within rotating assemblies due to internal damping effects. In order to consider realistic mechanical properties, in terms of internal damping, a rheological model is associated to a general finite element beam approach, including transversal shear. After a description of the theoretical background (choice of internal damping model and equations of motion), a first application illustrates the ability of the proposed model. The influence of damping on frequencies and on instability thresholds is investigated using a parametric study. Results are compared to those obtained from an analytical approach as well as from experiments.

A second application is concerned with the dynamic instability of an internally damped rotating composite shaft. A Simplified Homogenized Beam Theory (SHBT), which takes into account internal damping, is introduced and then used to evaluate natural frequencies and instability thresholds. The results are compared to those obtained by using an Equivalent Modulus Beam Theory (EMBT) widely used in the literature, a Modified Equivalent Modulus Beam Theory and a Layer-wise Beam Theory (LBT). The influence of laminate parameters : stacking sequences, fiber orientation and transversal shear effect on natural frequencies and instability thresholds of the shaft is studied via a parametrical study. This parametric study shows that shaft instability thresholds can be very sensitive to all these parameters.

MOTS CLÉS: Rotordynamics, Internal and External Damping, Stability Criterion, Composite Shaft, Damping, Stability, Instability Threshold, Transversal Shear, Finite Element, Beam Theory

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Position du problème	5
1.1 Etat de l'art	5
2 Analyse dynamique des systèmes en rotation	15
2.1 Modélisation du rotor et équations du mouvement [LF98]	15
2.1.1 Le disque	16
2.1.2 L'arbre	18
2.1.3 Paliers	21
2.1.4 Le balourd	22
2.1.5 Modèle analytique : modèle de 4 amortisseurs tournants	23
2.1.6 Influence de l'amortissement interne sur l'amplitude de la réponse	35
2.1.7 Modèle Éléments Finis	45
3 Conception d'un banc d'essai : instabilité expérimentale	55
3.1 Stabilité des tubes en rotation (LMA)	55
3.1.1 Conclusion	65
3.2 Stabilité des tubes en rotation (LaMCoS)	66
3.2.1 Description du dispositif d'essai	66
3.2.2 Caractérisation de l'amortissement externe (Paliers) et interne (Rotor)	67
3.2.3 Modélisation et estimation des vitesses critiques des tubes	74
3.2.4 Essai en rotation : Instabilités expérimentales	77

4 Matériaux composites (rotors composites)	83
4.1 Rotor Composite	83
4.1.1 Plan du pli	83
4.1.2 Poutre composite	88
4.1.3 Flexion d'une poutre composite	91
4.2 Expressions des énergies	98
4.3 Application : rotor composite	100
4.3.1 Comparaison sans amortissement interne	100
4.3.2 Comparaison avec amortissement interne	102
Conclusions et perspectives	111
Bibliographie	113
Annexe A	125
Annexe B	131
Annexe C	133
Annexe D	137
Annexe E	145
Annexe F	151
Annexe G	155
Annexe H	157

Table des figures

1.1	Schéma d'amortissement	6
1.2	Précession directe [Ada01]	8
1.3	Critère de stabilité	8
1.4	Système arbre-disque supporté par des paliers viscoélastiques	9
1.5	Fréquences et paramètres vicoélastiques du système amorti [SZ00]	10
1.6	La consommation des composites par application [BMN02]	12
1.7	Arbre de transmission arrière d'un hélicoptère	13
2.1	Exemple de rotor	15
2.2	Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible	17
2.3	Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B du rotor	19
2.4	Amortissement et raideur des paliers	21
2.5	Balourd	22
2.6	Système Arbre-Disque avec 4 amortisseurs tournants	24
2.7	Déplacements et rotations	25
2.8	Schéma d'une extrémité déformée	25
2.9	Diagramme de Campbell : repère fixe	29
2.10	Évolution de la partie réelle des solutions propres complexes	30
2.11	Superposition des réponses transitoires en montée en vitesse linéaire	31
2.12	Diagramme de Campbell dans le repère fixe : rotor asymétrique	34
2.13	Évolution de la partie réelle des solutions propres complexes	35
2.14	Arbre appuyé-appuyé	36
2.15	Diagramme de Campbell : Repère fixe	36
2.16	Diagramme de Campbell : Repère mobile	37
2.17	Réponse au balourd : repère fixe et mobile avec et sans amortissement interne	39
2.18	Réponse à une force harmonique : repère fixe sans amortissement	40
2.19	Réponse transitoire au balourd : repère fixe sans amortissement interne	41
2.20	Réponse transitoire au balourd : repère fixe avec amortissement interne	42
2.21	Réponse transitoire au balourd : repère mobile sans amortissement interne	43

2.22	Réponse transitoire au balourd : repère mobile avec amortissement interne	44
2.23	Élément fini de poutre	45
2.24	Modèle de Kelvin-Voigt	46
2.25	Résolution du problème dynamique	52
3.1	Banc d'essai (LMA)	56
3.2	Paliers et élastomères	56
3.3	Mesure des modes des paliers	57
3.4	Tube mince sur paliers rigides et suspension viscoélastique.	57
3.5	Fréquences et seuils d'instabilité : tube en Aluminium	59
3.6	Fréquences et seuils d'instabilité : tube en PVC	60
3.7	Déformées modales du système	61
3.8	Zone de couplage : tube en Aluminium	62
3.9	Zone de couplage : tube PVC	63
3.10	Fréquences propres du système découplé	63
3.11	Influence des paliers sur la zone de couplage : tube en Aluminium	64
3.12	Influence des paliers sur la zone de couplage : tube PVC	65
3.13	Banc d'essai : tube en PVC	66
3.14	Banc d'essai : tube en PVC	67
3.15	Banc d'essai : tube en PVC	68
3.16	Manchon d'adaptation	68
3.17	Palier avec épaulement et détail sur la bague démontable	69
3.18	Validation numérique des raideurs et amortissements paliers	69
3.19	Caractéristiques expérimentale : arbre Aluminium	70
3.20	Réponses fréquentielles d'un arbre Aluminium en Libre-Libre	71
3.21	Réponses fréquentielles d'un arbre PVC en Libre Libre	72
3.22	Réponses fréquentielles d'un arbre Alu à l'arrêt sur banc	73
3.23	Réponses fréquentielles d'un arbre PVC à l'arrêt sur banc	74
3.24	Modèle géométrique	75
3.25	Diagramme de Campbell : tube Aluminium	76
3.26	Diagramme de Campbell : tube PVC	76
3.27	Diagramme de Campbell expérimental : tube Aluminium	78
3.28	Spectre de suivi d'ordre 1 : tube Aluminium	79
3.29	Déplacement pendant une montée en vitesse	80
3.30	Déplacement pendant une montée en vitesse	81
3.31	Détérioration de l'accouplement	82
4.1	Rotor Composite	84
4.2	Plan de pli	84

4.3	Plan de la section	89
4.4	Les efforts d'équilibre de la poutre	90
4.5	Plan de la section en flexion	92
4.6	Interface entre deux matériaux	96
4.7	Cisaillement transverse	97
4.8	Rotor composite avec deux disques.	102
4.9	Diagramme de Campbell et seuil d'instabilité	104
4.10	Diagramme de Campbell et seuil d'instabilité : 2ème cas	105
4.11	Diagramme de Campbell et seuils d'instabilité : 5ème cas	105
4.12	Fréquences propres en fonction de L/R_o	106
4.13	Seuils d'instabilité pour différentes valeurs de L/R_o	107
4.14	Système à 1 ddl avec un amortisseur visqueux	125
4.15	Système à 1 ddl avec un amortisseur hystérétique	126
4.16	Effet de la fréquence et de la température sur les caractéristiques mécaniques	128
4.17	Réponse fréquentielle : comparaison visqueux/hystérétique	128
4.18	Évaluation de la partie dissipative (comparaison visqueux/hystérétique)	129
4.19	Évaluation de la phase pour le système à 1 ddl	130
4.20	Système à 1 ddl avec un amortisseur hystérétique	131
4.21	Force due au balourd : repère fixe et repère mobile	138
4.22	Force fixée dans l'espace : repère fixe et repère mobile	140
4.23	Système masse-raideur-amortisseur	157
4.24	L'équilibre des forces au seuil d'instabilité	160
4.25	Précession directe en régime sub-critique $\Omega < \omega$	161
4.26	Précession directe en régime super-critique $\Omega > \omega$	162
4.27	Précession inverse $\Omega > 0$	162

Liste des tableaux

2.1	Seuil d'instabilité en fonction de α : rotor symétrique	33
2.2	Seuil d'instabilité en fonction de β : rotor asymétrique	34
2.3	Seuil d'instabilité en fonction α : rotor asymétrique	35
3.1	Caractéristiques de l'arbre en aluminium et des supports	58
3.2	Caractéristiques de l'arbre en PVC et des supports	58
3.3	Caractéristiques Paliers	70
3.4	Caractéristiques du tube en Aluminium	72
3.5	Caractéristiques du tube en PVC	73
3.6	Fréquences propres de tubes à l'arrêt	74
3.7	Fréquences mesurées et calculées : tube Aluminium	75
3.8	Fréquences mesurées et calculées : tube en PVC	75
3.9	Vitesses critiques	77
4.1	Comparaison des vitesses critiques obtenues par différents investigateurs	101
4.2	Matériau de l'arbre	103
4.3	Les caractéristiques des paliers : rigidité et amortissement	103
4.4	Caractéristiques mécaniques de l'arbre.	103
4.5	Fréquences naturelles en fonction de θ : stratifié symétrique	107
4.6	Caractéristiques mécaniques des rotors et seuil d'instabilité	108
4.7	Comparaison entre <i>SHBT</i> et <i>EMBT</i>	109
4.8	Comparaison amortissement visqueux et hystérétique	127

Introduction

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenues depuis nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

L'arrivée des matériaux composites a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des machines industrielles (secteurs automobile, aéronautique et spatial) grâce à leurs qualités intrinsèques telles que la légèreté (associée à des caractéristiques de résistance élevée) et la bonne tenue à la corrosion. Le spectre d'utilisation de ces machines s'est élargi grâce au développement de matériaux nouveaux, élaborés à partir de nouvelles philosophies de conception et de fabrication.

La maîtrise de comportements vibratoires nécessite une prévision des caractéristiques d'amortissement des rotors, en particulier l'amortissement dû aux parties tournantes (amortissement intrinsèque du matériau) qui peut engendrer une instabilité en régimes super-critiques. Cette prédiction est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages " sécurisées " en terme de vitesses de rotation.

La thématique de recherche abordée dans le cadre de ce doctorat concerne l'étude du comportement dynamique de rotors, et plus précisément, leur stabilité en rotation à partir de la prise en compte de l'amortissement interne tournant, et ce, quelque soit leur nature en matériaux conventionnels métalliques ou encore en matériaux composites. Ce travail de doctorat s'inscrit dans la continuité des travaux initiés par Hochard C. et Montagnier O. (Laboratoire de mécanique et d'acoustique (LMA), Marseille). Un partenariat a été engagé suite aux études analytiques et

expérimentale menées au LMA. Ainsi un modèle Éléments Finis à même de prendre en compte l'amortissement interne a été développé au sein de l'équipe Dynamique et Contrôle des Structures du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon. Des applications réalisées sur des arbres métalliques et composites valident ces modèles numériques.

Le présent mémoire s'organise autour de quatre chapitres.

A partir d'une recherche bibliographique, le premier chapitre présente une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la stabilité des machines tournantes. L'état d'avancement des recherches scientifiques y est résumé de manière non exhaustive. Après une description sommaire des modèles d'amortissement, les connaissances acquises soit à partir de modèles analytique et/ou Éléments Finis sont récapitulées, que celles-ci concernent des matériaux conventionnels ou des matériaux de nouvelles technologie (composites). Le chapitre se termine par un recensement succinct de l'influence des paramètres de paliers selon leurs natures diverses, cette voie de prospection sortant du cadre de cette étude envisagée.

Afin de mieux appréhender les phénomènes qui régissent le comportement dynamique des structures tournantes, notamment la prise en compte de l'amortissement interne, le deuxième chapitre présente en premier lieu une modélisation analytique qui, contrairement à la plupart des travaux issus de la littérature, inclut les effets gyroscopiques. Il est alors possible d'effectuer des études paramétriques en fonction du rapport d'amortissement externe et interne pour évaluer les seuils d'instabilité de façon plus précise. Toutefois au regard des problèmes réels industriels de dimensionnement, ces modèles analytiques trouvent leurs limites. Les modélisations par Éléments Finis deviennent alors indispensables. Cependant, à l'heure actuelle, il n'existe pas sur le marché de code Éléments Finis à même d'inclure, de manière simple et réaliste, l'amortissement interne du matériau, identifié expérimentalement. La seconde partie de ce chapitre décrit un modèle Éléments Finis de type unidimensionnel fondé sur des EF du type poutre. L'ensemble des matrices incluant en particulier l'amortissement interne est exposé ; une méthode de résolution spécifique accompagne ces développements.

Le troisième chapitre, décrivant brièvement la conception d'un banc d'essai développé au sein du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de L'INSA de Lyon, démontre les aspects physiques de l'instabilité des systèmes en rotation. Les phénomènes d'instabilité au passage des vitesses critiques sont illustrés expérimentalement à partir d'essais en rotation sur des tubes de différentes longueurs, à partir d'essais de montée en vitesse. Puis la méthode Éléments Finis proposée est validée par comparaison à un modèle analytique et des essais expérimentaux issus de la littérature.

Le quatrième chapitre étend ces développements EF aux cas des arbres composites amortis. Une théorie d'homogénéisation simplifiée de poutre, prenant en compte l'amortissement interne de chaque pli constituant l'empilement est décrite. Cette théorie est comparée avec d'autres théories issues de la littérature. Une application réalisée sur un système Arbre-Disque illustre, via une

étude paramétrique, l'influence de l'angle d'orientation des fibres et de l'ordre de la séquence d'empilement sur les fréquences propres du système en rotation et les seuils d'instabilité associés. Finalement l'influence des effets de cisaillement transverse est abordée.

Le présent mémoire se termine par une conclusion recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les développements théoriques et expérimentaux futurs.

Chapitre 1

Position du problème

1.1 Etat de l'art

Pour les machines industrielles, dont la complexité s'est sans cesse accrue, la compréhension et le diagnostic des phénomènes vibratoires mis en jeu nécessitent des simulations de plus en plus fines de leur comportement.

Dans ce contexte, la prévision des caractéristiques d'amortissement et de leurs effets est fondamentale pour la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages de rotation "sécurisées". Pour cela, au cours des dernières années, beaucoup d'études dynamiques se sont concentrées sur la modélisation des effets dissipatifs, la prévision des vitesses critiques, des réponses au balourd et enfin sur la prévision des seuils d'instabilité.

D'une manière générale, l'amortissement traduit la dissipation d'énergie du système vibratoire. Il est l'un des facteurs les plus difficiles à quantifier en dynamique des structures et en raison de ses origines diverses, sa prise en compte dans un modèle élément fini n'est pas aisée. L'amortissement est présent naturellement et est souvent introduit pour contrôler les vibrations. Les concepteurs ont donc besoin de méthodes robustes de prédiction pour optimiser le choix des dispositifs ou des matériaux qui améliorent le comportement de la structure.

L'amortissement se traduit par différents mécanismes de rayonnement ou de dissipation interne au système. Crandall [Cra70] et Gibson [GA93] ont écrit des synthèses sur les propriétés des mécanismes d'amortissement connus et les modèles mathématiques employés pour les modéliser. La figure (1.1) permet de distinguer 4 mécanismes différents d'amortissement [Osi98] :

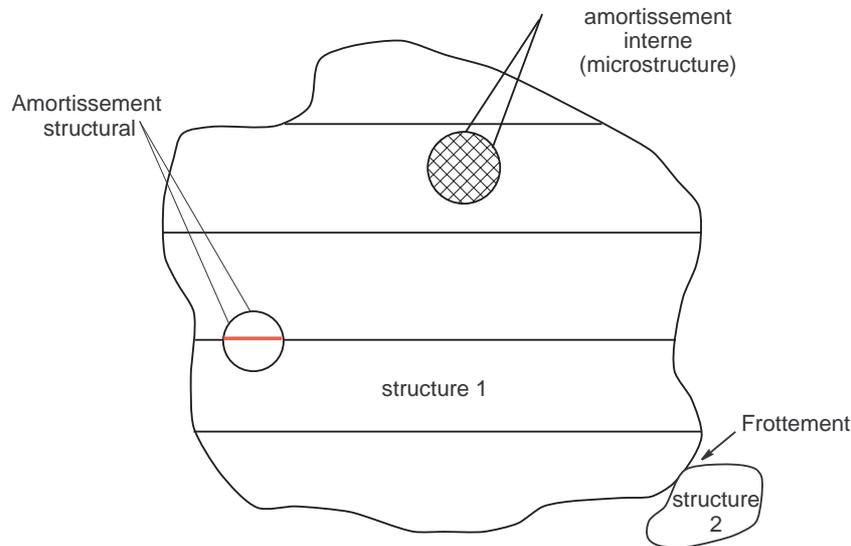


FIG. 1.1: Schéma d'amortissement

- Amortissement interne (amortissement dû au matériau) : Ce type d'amortissement inclut toutes les manières possibles de dissipation d'énergie liée seulement à la structure interne du système vibratoire. Ces mécanismes d'amortissement apparaissent dans les matériaux sous contrainte et déformation variables avec des caractéristiques irréversibles. L'amortissement est introduit ici à partir des lois de comportement de ce matériau [NGP85].

$$\sigma + \alpha \frac{d\sigma}{dt} = E \left(\varepsilon + \beta \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (1.1)$$

où : σ est la contrainte, ε est la déformation, E est le module élastique d'Young et α et β sont les paramètres d'amortissement dus au matériau.

- Amortissement structural : Cette désignation traduit l'énergie dissipée produite aux surfaces de contact des éléments avec des interfaces permanentes (ex : accouplement-arbre).
- Amortissement par friction dans les interfaces glissantes (sliding joints) présent lors d'un mouvement relatif entre les surfaces en contact (paliers glissants)
- Amortissement hydrodynamique et aérodynamique : Le mouvement d'un système dans un liquide ou gaz est amorti par ces milieux.

Ces amortissements sont généralement modélisés à partir de deux modèles de comportement : visqueux et hystérétique. La différence principale entre ces deux modèles réside essentiellement

dans le fait suivant : l'énergie dissipée par cycle pour un amortissement visqueux dépend de la fréquence (vitesse de rotation) tandis que l'énergie dissipée pour un amortissement de type hystérique ne dépend pas de la fréquence (Nashif [NGP85]) (voir Annexe A). L'amortissement visqueux est fréquemment utilisé pour modéliser l'amortissement interne. L'amortissement hystérique est souvent traité comme un amortissement visqueux équivalent dans le cas d'une excitation harmonique, suivant l'équation 1.2 dans le repère tournant (Wettergren [Wet94]).

$$C_{eq} = \eta k / |\omega - \Omega| \quad (1.2)$$

avec η facteur de perte, ω fréquence naturelle, Ω est la vitesse de rotation, k la raideur et C_{eq} l'amortissement visqueux équivalent.

Tout type d'amortissement associé à des parties non-tournantes de la machine joue un rôle stabilisant sur la dynamique. En revanche l'amortissement intervenant dans les éléments en rotation peut déclencher une instabilité en régime supercritique.

La première étude des rotors en rotation avec prise en compte de l'amortissement interne a été présentée par Newkirk [New24]. Il a observé expérimentalement que des ensembles disques-rotors subissent de fortes amplitudes de vibration lorsque la vitesse de rotation se situe au-dessus de la première vitesse critique. Kimball [Kim24] a montré que l'amortissement interne déstabilise le mouvement du rotor au passage de la vitesse critique.

Depuis, de nombreux travaux de recherche ont eu pour objet l'étude de l'influence de l'amortissement interne (matériaux, frottement sec [WM93], contact Rotor/Stator [JU00]) ainsi que celle de l'amortissement externe (nature des différents types de paliers, paliers hydrodynamiques, ...) sur la stabilité des machines tournantes.

Mazzei [MS03] et Montagnier [MH05b] ont utilisé une méthode analytique pour étudier les effets combinés de l'amortissement interne et de l'amortissement externe.

Chen ([CG05]) a analysé l'aspect phénoménologique de l'instabilité du rotor due à l'amortissement tournant via une méthode analytique sans prise en compte de l'effet gyroscopique (voir Annexe H). Une explication imagée illustrée par la figure (1.2) [Ada01] démontre que les mécanismes d'amortissement interne déstabilisent les systèmes tournants à des vitesses de rotation au dessus de la première vitesse critique (précession directe seulement) en influençant l'orbite de vibration.

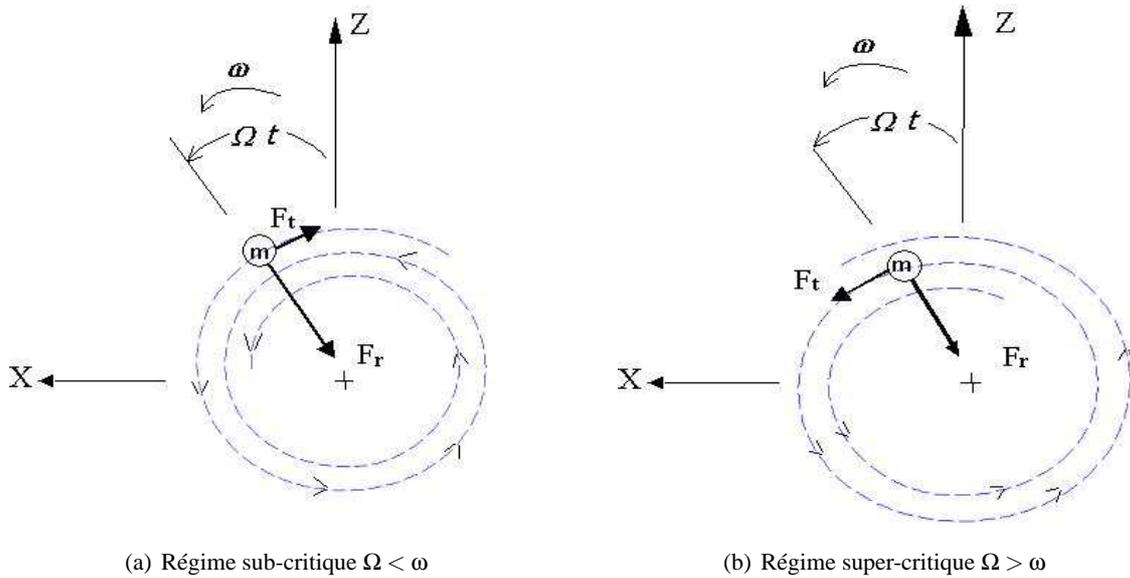


FIG. 1.2: Précession directe [Ada01]

Ehrich [Ehr64], Zorzi [ZN77], Forrai [For96], Cerminaro et Nelson [CN00] et Sino [SCBJ06b] par une analyse de sensibilité et une simulation par la méthode des éléments finis, montrent que le seuil d'instabilité coïncide avec la première vitesse critique en précession directe indépendamment de l'importance de l'amortissement interne. Ils notent que la vitesse de rotation à laquelle le rotor devient instable est conditionnée par le rapport d'amortissement interne et externe. L'augmentation de l'amortissement externe peut repousser le seuil d'instabilité à partir duquel le mouvement devient instable (équation 1.3 et figure 1.3).

$$\Omega_{SI} = \Omega_{cr,1} \left(1 + \frac{c_s}{c_r}\right) \quad (1.3)$$

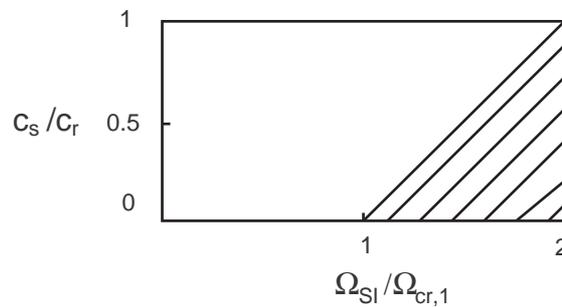


FIG. 1.3: Critère de stabilité

où c_s est l'amortissement stationnaire ou externe, c_r est l'amortissement interne ou tournant, Ω_{SI} est le seuil d'instabilité et $\Omega_{cr,1}$ la première vitesse critique.

Wettergren [WO96]) démontre également à partir d'une étude paramétrique liée à un modèle éléments finis simplifié que les instabilités se produisent pour certaines combinaisons des paramètres associés à l'amortissement interne, à l'amortissement externe, aux raideurs d'arbres dissymétriques et aux paliers anisotropes/dissymétriques.

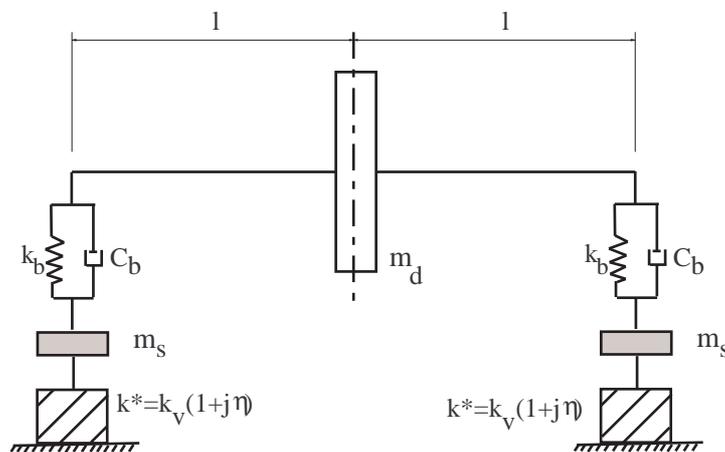


FIG. 1.4: Système arbre-disque supporté par des paliers viscoélastiques

Grau [Gra04] a étudié le comportement dynamique d'un rotor monté sur paliers aérodynamiques radiaux à structure à feuille via une loi analytique. Dutt et Nakra ([DN92] et [DN95]) montrent qu'un choix approprié de la valeur des paramètres de support peut augmenter de manière significative la zone de stabilité. Ces supports peuvent être de nature élastique, visqueux ou viscoélastique. Le décrétement logarithmique diminue au seuil d'instabilité en fonction de la diminution du rapport (c_r/c_s) pour les deux cas de supports visqueux et viscoélastique alors qu'il n'y a bien entendu pas d'effet significatif pour le cas de support purement élastique (c_s coefficient d'amortissement fixe ou stationnaire) et c_r coefficient d'amortissement interne ou tournant).

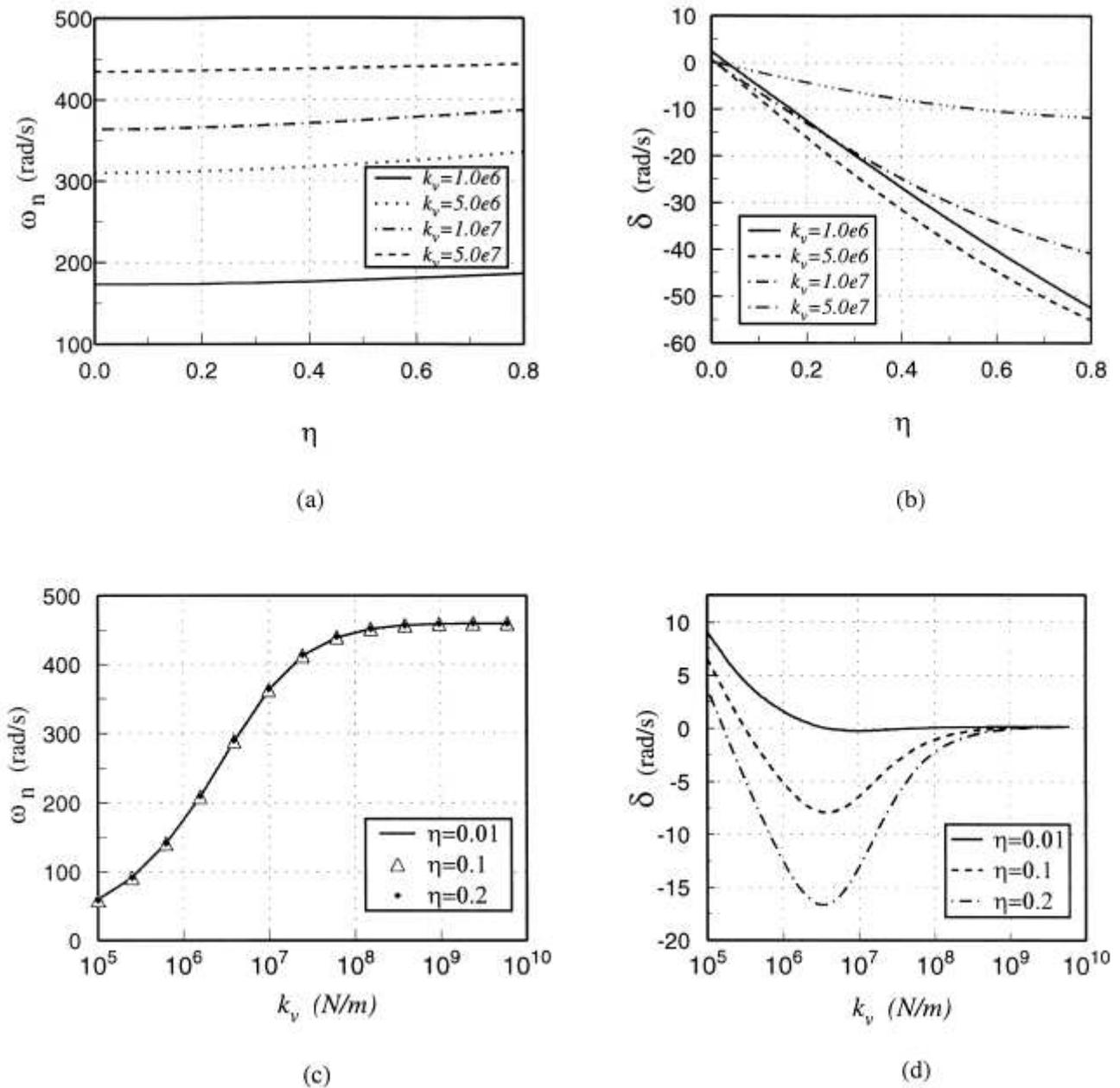


FIG. 1.5: Fréquences et paramètres viscoélastiques du système amorti [SZ00]

Un étude similaire est effectuée par [SZ00] sur un système arbre-rotor typique avec des supports viscoélastiques (figure 1.4). Via une étude paramétrique pour un système amorti et non amorti, les effets du facteur de perte η et de rigidité viscoélastique k_v sont présentés en figure (1.5). L'augmentation du facteur de perte η du support viscoélastique augmente les fréquences

naturelles ω_n et diminue le décrément logarithmique δ (figure 1.5,(a) et (b)). En revanche l'augmentation de la rigidité k_v des supports implique une augmentation de la fréquence fondamentale ω_n du système jusqu'à ce qu'elle approche de la valeur de la rigidité du support $k_v = k_b = 1e^9$ (figure 1.5, (c)). Le décrément δ (figure 1.5, (d)) est élevé dans une zone limitée de rigidité de support (valeur optimale de rigidité de palier $k_v = 5.16e^6$). En conséquence on peut remarquer que le décrément logarithmique diminue avec l'augmentation du facteur de perte, donc son effet est stabilisant et un support viscoélastique augmente le seuil d'instabilité en comparaison avec les supports élastique et visqueux.

Chen [CK90] et Ku [Ku98] ont présenté une analyse par la méthode des Éléments Finis avec prise en compte des effets combinés de l'amortissement interne visqueux et hystérétique, incluant le cisaillement transverse. Ils ont conclu à partir d'un exemple numérique que l'amortissement interne de type hystérétique déstabilise les modes en précession directe sur toute la plage de vitesses de rotation tandis que l'amortissement interne de type visqueux déstabilise la précession directe pour des vitesses de rotation situées au-dessus de la vitesse critique. Les modes en précession inverse sont toujours stables quelque soit la valeur de l'amortissement interne. La même conclusion est donnée également par Melanson [MZ98].

Genta [Gen04] démontre qu'une erreur est commise lorsque l'on prouve, comme Dimentberg [Dim61] et Lund [Lun74], que l'amortissement tournant de type hystérétique déstabilise le système pour toute vitesse de rotation (même en régime sous-critique). Quelle que soit la modélisation choisie (ici hystérétique), Genta [Gen04] montre qu'il est physiquement impossible que l'amortissement tournant déstabilise le système sur toute la plage fréquentielle. Quand la vitesse de rotation tend vers zéro, le rotor devient une structure stationnaire et, en conséquence, l'amortissement ne peut déclencher aucune forme d'instabilité dynamique. Autrement dit, à basse vitesse, il n'y a pas assez d'énergie pour entretenir la vibration, et ce, même en présence de dissipation d'énergie due à l'amortissement interne (voir Annexe B).

Pour les rotors fabriqués en matériaux métalliques, les résultats en terme d'instabilité sont maintenant bien établis : la stabilité est améliorée en augmentant l'amortissement externe tandis que l'augmentation de l'amortissement interne tend à abaisser le seuil d'instabilité. Concernant les applications pratiques, la majeure partie des recherches présentées demeurent purement numériques ([For01]) sans évaluation très fine de l'amortissement interne. Actuellement, de part leur potentialité, l'utilisation de matériaux composites est de plus en plus courante dans des domaines variés. Ces matériaux seront considérés dans le cadre de cette étude et des campagnes de caractérisation de leur facteur amortissant sont envisagées afin d'obtenir des caractéristiques et des modèles d'évolution réalistes ([MCH⁺07]).

En raison entre autre de la rigidité spécifique élevée des matériaux composites à fibres ren-

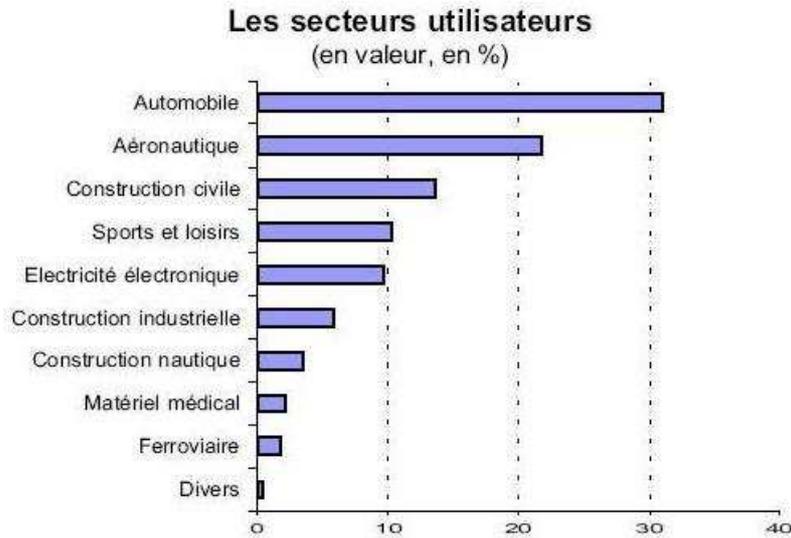


FIG. 1.6: La consommation des composites par application [BMN02]

forcées, il est de plus en plus souvent envisagé de remplacer les arbres métalliques par des arbres composites (figure 1.6) : arbres d'entraînement pour hélicoptères, séparateurs centrifuges, arbres de transmission pour l'industrie automobile (Zorzi et Giordano[ZG85], Creonte et Darlow [CD92], Singh et Gupta ([SG94b] [SG96a],[SG96b]), Chatelet [CLJR00]). Ces matériaux fournissent de grands avantages en terme de réduction de poids. Ils donnent également aux concepteurs la possibilité d'obtenir un comportement dynamique prédéterminé en terme de positionnement de vitesses critiques de part l'arrangement des différentes couches composites : orientation et nombre de plis (Bauchau [Bau83], Singh et Gupta ([SG96b] et [SG96a]), et Pereira[PS02b]).

Pour les rotors conventionnels, l'influence de l'amortissement interne peut être généralement négligée. En revanche, pour les rotors composites, l'amortissement interne peut être beaucoup plus important (jusqu'à deux fois supérieur [Wet94]) de part la capacité d'amortissement de la matrice. Un tel amortissement peut alors donner naissance à une ou plusieurs instabilités.

Plusieurs formulations éléments finis ont été mises en oeuvre pour l'analyse des rotors composites. Ces formulations sont basées sur des théories homogénéisées basées sur les hypothèses de poutre ou de coque. La théorie de module équivalent de poutre (EMBT = Equivalent Modulus Beam Theory) fondée sur la théorie de Tsai est couramment employée ([Tsa88] et [GS98]). Avec cette approche, le module d'Young longitudinal équivalent et le module de cisaillement plan sont déterminés en utilisant une théorie en stratifié classique pour des empilements symétriques

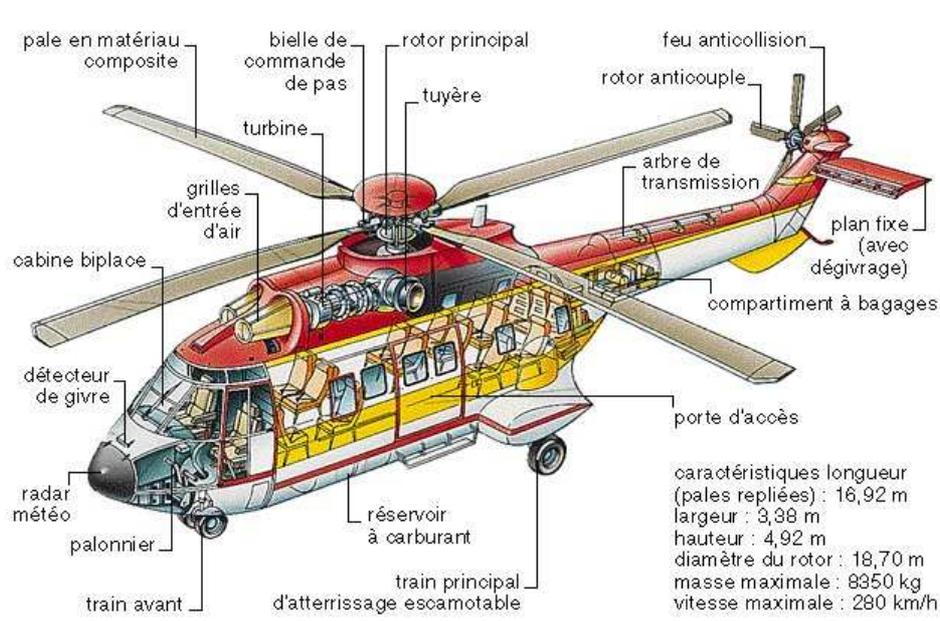


FIG. 1.7: Arbre de transmission arrière d'un hélicoptère

(Pereira [PS01a] et [SG96b]). Cette méthode est simple de mise en oeuvre mais présente beaucoup de limitations, récapitulées par Gupta et Singh [SG94b], et demeure rigoureuse uniquement pour des stratifiés symétriques. Gupta et Singh ont étudié les fréquences naturelles et le coefficient d'amortissement obtenus pour des tubes cylindriques stratifiés. Ils ont comparé des méthodes coque et EMBT pour un stratifié d'empilement symétrique. Ils ont vérifié que, dans ce cas et pour des configurations classiques, les différences en comportement de flexion donnés par les deux modèles sont petites. En employant la théorie de coque [SG94a], ils prouvent que les facteurs de perte modaux sont plus sensibles aux changements des paramètres (séquence d'empilement, angle d'orientations...) que les fréquences. Pour les stratifiés symétrique comme non-symétrique ils présentent une comparaison entre la théorie EMBT et la théorie LBT (Layerwise Beam Theory) [SG96a] et prouvent que la méthode LBT est nécessaire pour tenir compte de l'effet de l'empilement, du cisaillement dans l'épaisseur et du couplage flexion-extension. Cependant, la méthode LBT rend nécessaire le développement d'un élément complexe de poutre avec un nombre élevé des degrés de liberté qui dépend du nombre de couches, la rendant très coûteuse en temps de calcul. Récemment, Gubran et Gupta ont présenté [GG05] une méthode EMBT modifiée qui prend en compte l'ordre d'empilement et les différents mécanismes de couplage. Considérant un rotor en Graphite/Epoxy supporté par des paliers rigides, ils ont comparé les trois premières fréquences à celles obtenues par la méthode LBT. Malgré sa simplicité, les fréquences naturelles obtenues en utilisant la méthode EMBT modifiée (ne tenant pas compte des effets de couplage) sont en bon accord avec celles obtenues en utilisant la méthode de LBT et celles reportées dans la littérature.

1. Position du problème

Dans ces derniers travaux cités, l'amortissement interne, n'est pas souvent pris en compte, excepté dans [SG94b] qui considère un amortissement viscoélastique matériau. Des techniques d'optimisation permettent de réduire au maximum la réponse au balourd et de maximiser la vitesse limite de stabilité (Pereira [PS01a], Darlow [DC95], Grapis [GTa95]).

Chapitre 2

Analyse dynamique des systèmes en rotation

2.1 Modélisation du rotor et équations du mouvement [LF98]

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle Éléments Finis à usage plus général.

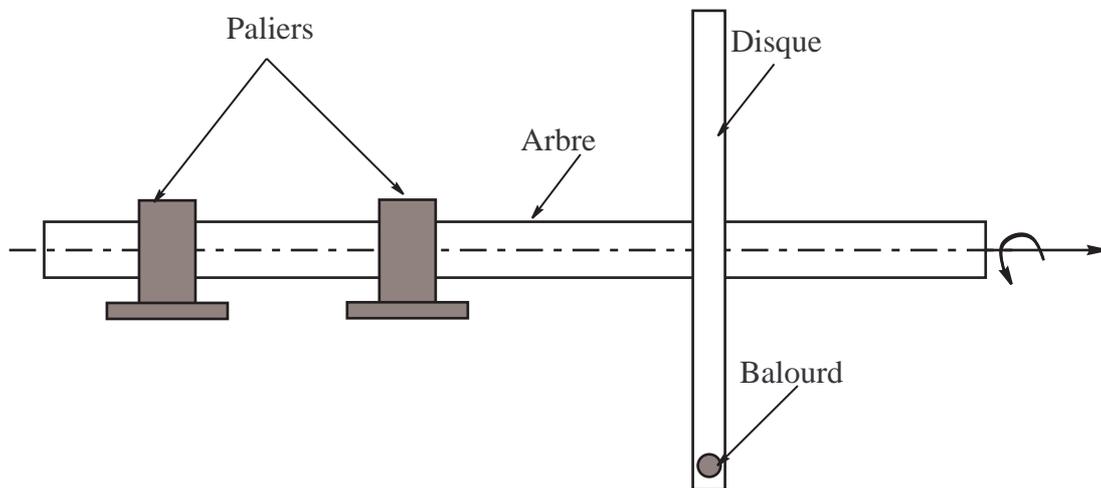


FIG. 2.1: Exemple de rotor

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (figure 2.1).

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre. Le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et le travail virtuel δW sont calculés pour tous les éléments du système.
- Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée aux systèmes simple et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.
- Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement, soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial d_i} + \frac{\partial U}{\partial d_i} = F d_i \quad (2.1)$$

$N(1 \leq i \leq N)$ représente le nombre de degrés de liberté. d_i sont les coordonnées généralisées indépendantes, $F d_i$ est le vecteur force généralisée.

2.1.1 Le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient $R_0(X, Y, Z)$ un repère fixe et $R(x, y, z)$ un repère tournant lié au disque (figure 2.2). Le système de coordonnées x, y et z est relié au système de coordonnées X, Y et Z par l'intermédiaire des angles θ_z, θ_x et θ_y . Pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle θ_z autour de l'axe Z , puis d'un angle θ_x autour du nouvel axe x , noté x_1 , enfin d'un angle θ_y autour de l'axe de rotation propre du disque y .

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère R s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (2.2)$$

où \vec{Z}, \vec{x}_1 et \vec{y} sont les vecteurs unitaires suivant les axes $0Z, 0x_1$ et $0y$.

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse O est calculée dans le repère tournant R . Le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (2.3)$$

ω_x, ω_y et ω_z étant les composants du vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z . Soient u et w les coordonnées du centre du disque O suivant OX, OZ dans R_0 ; la coordonnée suivant OY

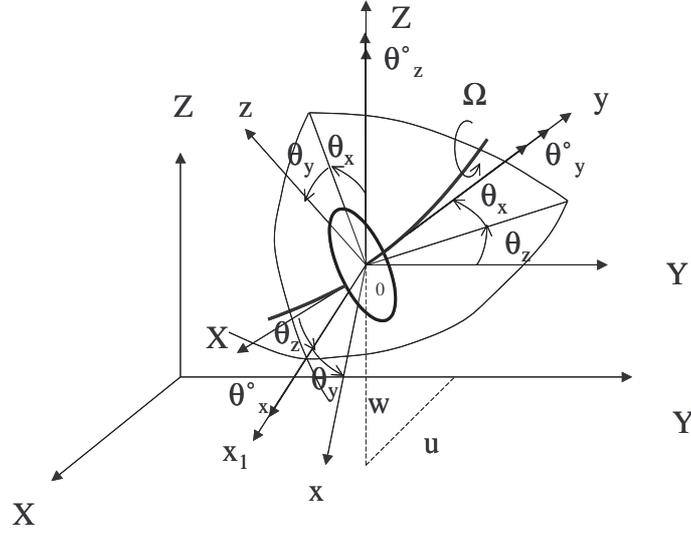


FIG. 2.2: Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

restant constante. La masse de disque est m_d . Le tenseur d'inertie est noté :

$$I/O = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (2.4)$$

I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} sont les moments d'inertie du disque suivant x , y et z . L'expression générale de l'énergie cinétique du disque T_d s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(I_{dx}\omega_x^2 + I_{dy}\omega_y^2 + I_{dz}\omega_z^2) \quad (2.5)$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique $I_{dx} = I_{dz}$. Lorsque les angles θ_x et θ_z sont petits et la vitesse angulaire constante ($\dot{\theta}_y = \Omega$), l'équation 2.5 devient :

$$T_d = \frac{1}{2}m_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{dx}(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2}I_{dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}_x\theta_x) \quad (2.6)$$

Le terme $\frac{1}{2}I_{dy}\Omega^2$, qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme $I_{dy}\Omega\dot{\theta}_x\theta_x$ représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

2.1.2 L'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique et potentielle.

2.1.2.1 L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation 2.6). Pour un élément de longueur L , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega J_a \left[\theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (2.7)$$

ρ est la masse volumique, S_a est la section, I_a est le moment d'inertie transverse, J_a est le moment d'inertie polaire.

La première intégrale de l'équation 2.7 correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

2.1.2.2 L'énergie potentielle

Les notations suivantes sont utilisées (figure 2.3) : C est le centre géométrique de l'arbre, $B(x,z)$ est un point typique de section, E est le module d'Young du matériau, ε et σ représentent la déformation et la contrainte, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes x et z (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant le cisaillement dans le repère mobile sous la forme :

$$\{u(x, y, z)\} = \begin{cases} u_x(x, y, z) = u^* \\ u_y(x, y, z) = -z\theta_x + x\theta_z \\ u_z(x, y, z) = w^* \end{cases} \quad (2.8)$$

Le champ de déformation associé est alors :

$$\{\varepsilon\} = \begin{cases} \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = -\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ \gamma_{yx} = \theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \end{cases} \quad (2.9)$$

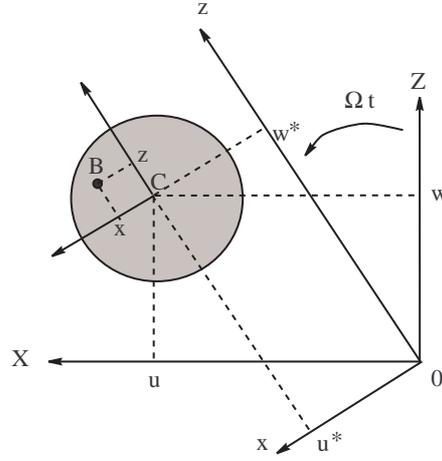


FIG. 2.3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

D'après la théorie des poutre on suppose que $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$. Selon cette hypothèse la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{yy} = E_y \varepsilon_{yy} \\ \tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz} \\ \tau_{yx} = G_{yx} \gamma_{yx} \end{cases} \quad (2.10)$$

où σ_{yy} est la contrainte normale de section, τ_{yz} et τ_{yx} sont les contraintes dues au cisaillement transverse. Les quantités E_y , G_{yz} et G_{yx} sont respectivement le module d'Young suivant l'axe du rotor y et les modules de cisaillement transverse.

En utilisant l'équation 2.9, l'équation 2.10 devient :

$$\{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{yy} = E_y \left(-z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = G_{yz} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \\ \tau_{yx} = G_{yx} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [\sigma] dV \quad (2.12)$$

soit :

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S (\sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{yx} \gamma_{yx}) dS dy \quad (2.13)$$

En prenant en compte les relations (2.9) et (2.11) l'équation (2.13) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_S E_y \left[z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + x \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \right]^2 dS dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left[G_{yz} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 + G_{yx} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right] dS dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left[z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + x^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 + xz \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right] dS dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left[G_{yz} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 + G_{yx} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right] dS dy \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les inerties de la section droite de l'arbre par rapport à x et z sont données par :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S z^2 dS \\ I_z &= \int_S x^2 dS \\ \int_S xz dS &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Finalement l'énergie de déformation a pour expression :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L E_y \left(I_x \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 \right) dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \kappa S \left[G_{yz} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 + G_{yx} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (2.17)$$

où κ est le facteur correcteur de cisaillement (voir chapitre 4). Pour une section circulaire, $I_x = I_z = I_a$.

2.1.3 Paliers

Le travail virtuel δW_p des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zx}u\delta w - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zx}\dot{u}\delta w - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (2.18)$$

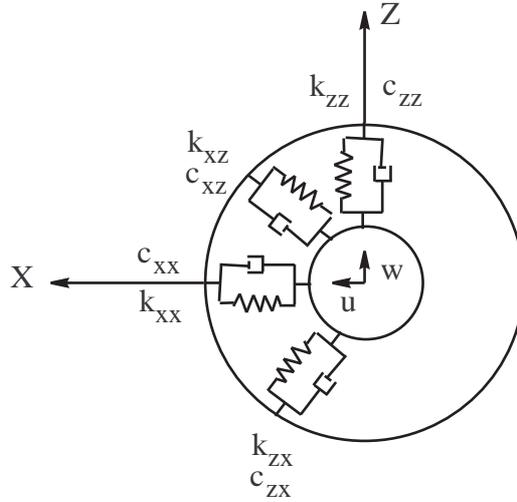


FIG. 2.4: Amortissement et raideur des paliers

ou

$$\delta W_p = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (2.19)$$

où F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure 2.4). En utilisant les deux équations (2.18) et (2.19) il vient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Remarque : ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère R . Ces dernières ne font intervenir que k_{xx} et k_{zz} et sont obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

$$\begin{aligned} \delta W_p = & -k_{xx}(u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t)(\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) \\ & -k_{zz}(-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t)(-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou :

$$\begin{aligned} \delta W_p = & - \left[(k_{xx} \cos^2 \Omega t + k_{zz} \sin^2 \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) w^* \right] \delta u^* \\ & - \left[(k_{xx} \sin^2 \Omega t + k_{zz} \cos^2 \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) u^* \right] \delta w^* \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'équation 2.22 montre que, si $k_{xx} \neq k_{zz}$, la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

2.1.4 Le balourd

Le balourd dont une représentation géométrique est donnée (figure 2.5) peut être assimilé à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.

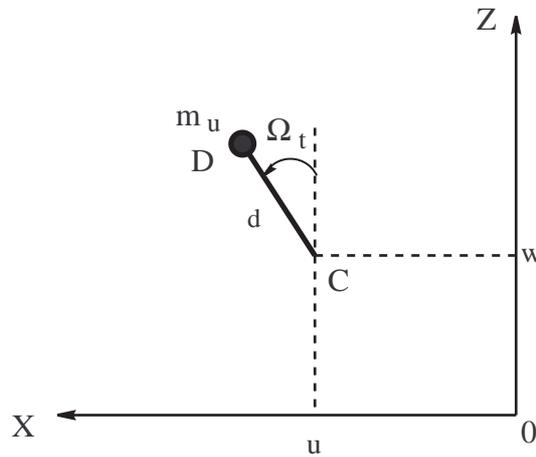


FIG. 2.5: Balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y , sa coordonnée selon cet axe dans le repère R_0 est donc constante :

$$\vec{OD} = \left. \begin{array}{c} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{array} \right|_{R_0} \quad (2.23)$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OD}}{dt} = \left. \begin{array}{c} \dot{u} + d \Omega \cos \Omega t \\ \text{constante} \\ \dot{w} - d \Omega \sin \Omega t \end{array} \right|_{R_0} \quad (2.24)$$

L'expression de l'énergie cinétique T_b du balourd devient :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (2.25)$$

Le terme $\Omega^2 d^2/2$ est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2.26)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et du travail virtuel étant établies, la dissipation due à l'amortissement interne peut être développée via des modèles analytiques ou éléments finis.

2.1.5 Modèle analytique : modèle de 4 amortisseurs tournants

Afin de bien comprendre et illustrer les phénomènes mis en jeu, une modélisation la plus simple possible a tout d'abord été envisagée. La structure présentée figure (2.6) se compose d'un arbre symétrique de longueur L et d'un disque symétrique balourdé situé à une distance $L_d = 2L/3$. Un palier est positionné en $L_p = L/3$ et est caractérisé par des raideurs et des amortisseurs dans les seules directions OX et OZ .

Les déplacements du système dépendant du temps t et de la variable d'espace y peuvent être exprimés à l'aide de la technique de Rayleigh-Ritz, par séparation des variables, sous la forme :

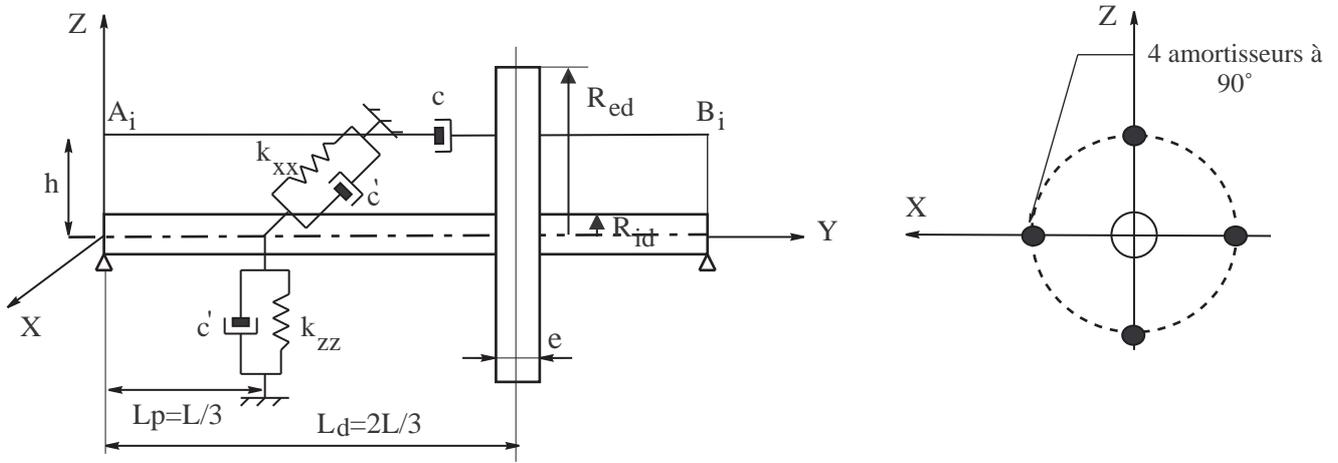


FIG. 2.6: Système Arbre-Disque avec 4 amortisseurs tournants : modélisation de l'amortissement interne

$$\begin{aligned}
 u &= f(y)Q_1(t) \\
 w &= f(y)Q_2(t) \\
 f(y) &= \sin \frac{\pi y}{L}
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

où Q_1 et Q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes dans le repère fixe. Les coordonnées généralisées q_1 et q_2 seront notées quand elles seront associées au repère mobile.

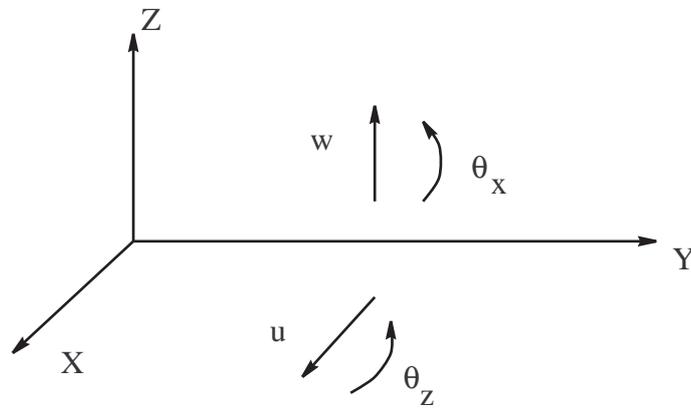
Compte tenu de l'hypothèse selon laquelle les angles θ_x et θ_z (figure 2.7) sont petits, ils peuvent être approximés par :

$$\begin{aligned}
 \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} Q_2(t) \\
 \theta_z &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f(y)}{\partial y} Q_1(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

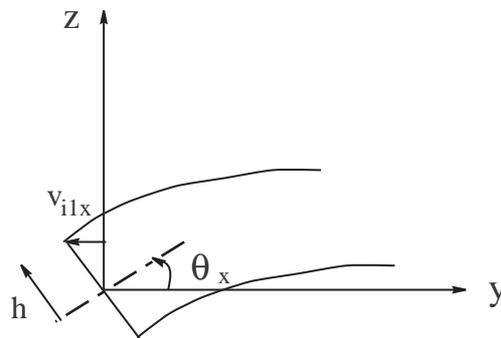
L'amortissement tournant est introduit par 4 amortisseurs positionnés à 90° entre les deux extrémités (figure 2.6). Ces amortisseurs symbolisent l'amortissement visqueux longitudinal des fibres lorsque le rotor est sollicité en flexion. Ils sont positionnés à une distance h de la fibre neutre.

En notant v_{i1} et v_{i2} , les déplacements des points A_i et B_i auxquels sont attachés les amortisseurs visqueux dans la direction longitudinale du rotor \vec{y} , l'énergie dissipée par un seul amortisseur s'écrit :

$$R_{diss} = \frac{1}{2}c (\dot{v}_{i2} - \dot{v}_{i1})^2
 \tag{2.29}$$


FIG. 2.7: Déplacements et rotations

où c est le coefficient d'amortissement visqueux de l'amortisseur.


FIG. 2.8: Schéma d'une extrémité déformée

Dans les plans respectifs (xOy) et (zOy) , les vitesses des points A_i et B_i \dot{v}_{i1} et \dot{v}_{i2} sont exprimées en fonction de u^* et w^* par les équations suivantes (figure 2.8).

Dans le plan (xOy) :

$$\dot{v}_{i1z} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} \Big|_{(y=0)} h \quad (2.30)$$

$$\dot{v}_{i2z} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} \Big|_{(y=L)} h$$

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

Dans le plan (zOy) :

$$\dot{v}_{i1x} = -\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} \Big|_{(y=0)} h \quad (2.31)$$

$$\dot{v}_{i2x} = -\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} \Big|_{(y=L)} h$$

L'énergie dissipée par les 4 amortisseurs tournants (2 amortisseurs dans chaque plan) s'écrit alors :

$$R_{diss} = c \left[(\dot{v}_{i2z} - \dot{v}_{i1z})^2 + (\dot{v}_{i2x} - \dot{v}_{i1x})^2 \right] \quad (2.32)$$

En reportant les équations 2.30 et 2.31 dans l'équation 2.32 l'énergie dissipée par l'amortissement tournant s'écrit :

$$R_{diss} = ch^2 \left[\left(-\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} \Big|_{(y=L)} + \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} \Big|_{(y=0)} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y} \Big|_{(y=L)} + \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y} \Big|_{(y=0)} \right)^2 \right] \quad (2.33)$$

avec la matrice de passage du repère mobile R vers le repère fixe R_0 .

$$[p] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Les relations 2.27 et 2.34 permettent d'écrire l'expression 2.33 sous la forme finale dans le repère fixe comme suit (voir Annexe C) :

$$R_{diss} = \frac{4ch^2\pi^2}{L^2} \left[\dot{Q}_1^2 + \Omega^2 Q_1^2 + \dot{Q}_2^2 + \Omega^2 Q_2^2 - 2\Omega \dot{Q}_1 Q_2 + 2\Omega Q_1 \dot{Q}_2 \right] \quad (2.35)$$

L'amortissement tournant est noté :

$$c_r = \frac{4ch^2\pi^2}{L^2} \quad (2.36)$$

L'application des équations de Lagrange sur les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail virtuel développées au début du chapitre permet d'obtenir les équations du mouvement dans le repère fixe :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_a + m_d & 0 \\ 0 & m_a + m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega(a_a + a_d) \\ \Omega(a_a + a_d) & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_a + k_{p_{xx}} & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & k_a + k_{p_{zz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_b) \\ m_b d \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_b) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.37)$$

où m_a , a_a et k_a sont respectivement les termes de masse, gyroscopique et de raideur de l'arbre, α_b est la position angulaire du balourd, Ω est la vitesse de rotation du rotor. L'expression analytique de ces quantités est donnée par :

$$\begin{aligned}
 m_a &= \frac{\rho S_a L}{2} + \rho I_a \frac{\pi^2}{2L} \\
 a_a &= \rho I_a \frac{\pi^2}{L}
 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$k_a = EI_a \frac{\pi^4}{2L^3}$$

m_d et a_d représentent les termes de masse et gyroscopique du disque, $k_{p_{xx}}$ et $k_{p_{zz}}$ les raideurs liées au palier. Ces quantités sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 m_d &= \frac{3m_d}{4} + \frac{I_{dx}}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \\
 a_a &= \frac{I_{dy}}{4} \frac{\pi^2}{L^2}
 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$k_{p_{xx}} = k_{xx} \sin^2\left(\frac{\pi L_p}{L}\right)$$

$$k_{p_{zz}} = k_{zz} \sin^2\left(\frac{\pi L_p}{L}\right)$$

De plus, c_s représente le terme d'amortissement dit fixe (stationnaire) lié au palier défini par :

$$c_s = \acute{c} \sin^2\left(\frac{\pi L_p}{L}\right) \quad (2.40)$$

où \acute{c} est le coefficient d'amortissement visqueux.

Si l'amortissement fixe ne se traduit que par un terme d'amortissement c_s (équation 2.37), l'amortissement tournant se traduit non seulement par un terme d'amortissement c_r mais également par un terme de raideur Ωc_r , antisymétrique. La mise en place de l'équation du mouvement permet alors d'étudier l'influence de l'amortissement externe c_s et interne c_r sur la stabilité du rotor symétrique et asymétrique.

2.1.5.1 Rotor symétrique amorti

Lorsqu'un rotor n'est soumis à aucune force externe et est uniquement en mouvement libre du fait des conditions initiales, l'amplitude de son mouvement peut croître de façon infinie avec le temps. Le rotor est alors dit instable. La première configuration étudiée est constituée d'un ensemble Arbre-Disque appuyé-appuyé. Seule la raideur de l'arbre est considérée dans le modèle (aucune raideur due au palier). Cette étude sur la valeur relative des deux types d'amortissement permet d'analyser l'influence respective ou combinée des termes d'amortissement fixe (palier) et tournant lié à l'arbre tout en intégrant l'effet gyroscopique, généralement négligé dans ce type d'étude. L'arbre plein est de longueur $L = 0.4m$, de rayon extérieur $R_{ea} = 0.01 m$. Le disque est de rayon intérieur $R_{id} = 0.01 m$, de rayon extérieur $R_{ed} = 0.15 m$ et d'épaisseur $e = 0.03 m$. Ce disque est balourdé par une masse $m_b = 10^{-4} kg$ située à $d = R_{ed}$ et à un angle $\alpha_b = 0$. Arbre et disque sont en acier. Le système d'équations issue de (2.37) peut s'écrire sous forme condensée :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r + c_s & -\Omega a \\ \Omega a & c_r + c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_b) \\ m_b d \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_b) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

où k , m et a sont les termes généralisés de raideur, de masse et gyroscopique, avec $m = 14,29 (kg)$, $a = 2.871$, $k = 1.195e^6 (N/m)$, $m_b d = 1.299e^{-5} (kgm)$, $\alpha_b = 0$.

L'étude du système en mouvement libre (second membre=0) donne l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation par l'intermédiaire d'un diagramme de Campbell (figure 2.9). On peut prédire la stabilité de système numériquement à partir de deux techniques :

1. Signe de la partie réelle des valeurs propres complexes du système d'équations en mouvement libre. Si la fréquence propre est donnée par $S_v = -a_v \pm j b_v$, le seuil d'instabilité est déterminé quand a_v devient négatif (partie réelle positive) (figure 2.10). Avec ce critère on peut estimer la fréquence ainsi que le mode pour lequel le système deviendra instable.
2. Critère de Routh-Hurwitz. Ce critère est très bien adapté aux systèmes à faible nombre de degrés de liberté et ne permet pas d'obtenir de manière analytique la vitesse pour laquelle

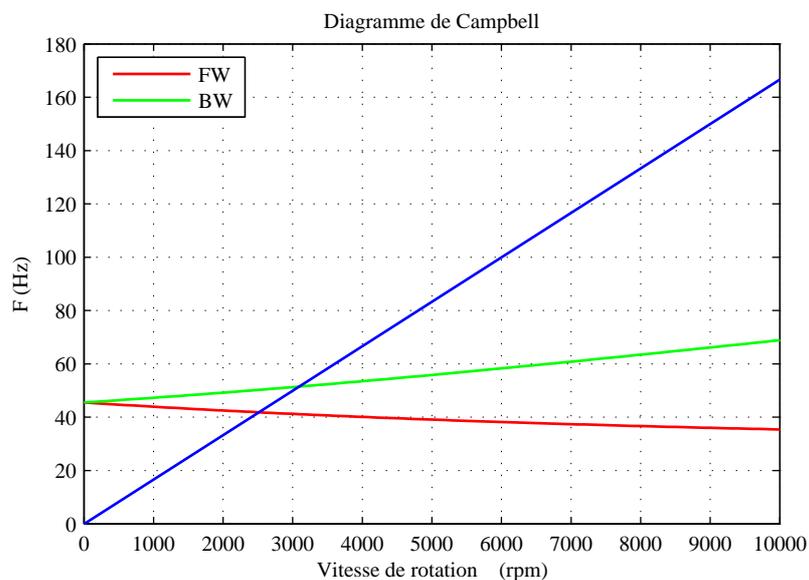


FIG. 2.9: Diagramme de Campbell : repère fixe

l'instabilité apparaît. Les fréquences du système sont les racines de l'équation caractéristique :

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (2.42)$$

La matrice suivante H est construite :

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdot \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

où les n coefficients H_1, \dots, H_n sont donnés par les expressions :

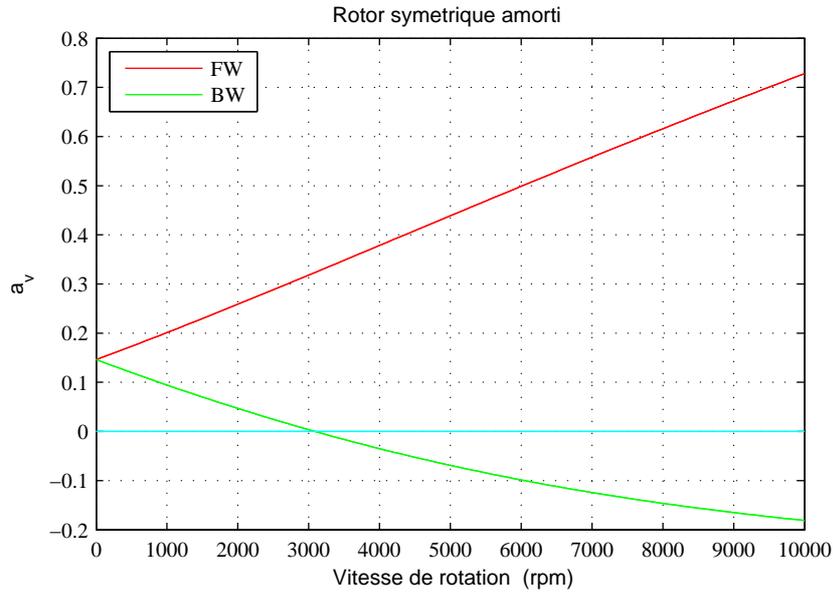


FIG. 2.10: Évolution de la partie réelle des solutions propres complexes

$$H_1 = \det[H_1] = a_1$$

$$H_2 = \det[H_2] = \det \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

$$H_n = \det[H_n]$$

Si toutes ces quantités H_i sont positives, le système est stable. L'application du critère de stabilité de Routh-Hurwitz donne dans le cas présent comme coefficients H_i :

$$H_1 = \frac{2c_r}{m} > 0$$

$$H_2 = \frac{2c_r}{m^3} [a\Omega^2(a-m) + c_r^2 + mk] \quad (2.45)$$

$$H_3 = \frac{4c_r^2}{m^5} [a^2\Omega^4(a-m) + c_r^2k + (a^2k + (a-m)c_r^2)\Omega^2]$$

$$H_4 = \frac{k^2 + c_r^2\Omega^2}{m^2} H_3$$

1. Influence de l'amortissement fixe (palier) c_s :

Généralement l'amortissement appliqué à la structure est l'amortissement de type visqueux c_s apporté par les paliers. Par exemple, Forraï [For00] et Lalanne [LF98] démontrent que cet amortissement fixe a toujours un effet stabilisant quel que soit le type d'excitation envisagée (balourd, harmonique,...).

2. Influence de l'amortissement tournant c_r :

On considère maintenant le rotor symétrique amorti par le seul terme d'amortissement tournant c_r introduit dans le modèle. Cet amortissement est pris proportionnel au terme de raideur k sous la forme $c_r = \beta k$. L'analyse de coefficient du critère de Routh-Hurwitz amène dans ce cas aux conclusions suivantes :

- Si $a > m$, le système est toujours stable.
- Si $a < m$, le système est instable si la vitesse de rotation est supérieure à la vitesse critique Ω_{cr} (précession directe uniquement) du rotor, donnée par $\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m-a}}$ ($\Omega_{cr} = 3089 \text{ rpm}$) (figures (2.9) et (2.10)).

L'étude du mouvement forcé sous excitation balourd est réalisée par intégration numérique pas à pas fondée sur un algorithme de Newmark. L'instabilité apparaît lors d'une montée en vitesse selon une loi linéaire de 0 à 7000 (tr/mn) en 10 secondes (figure 2.11). Sur cette figure sont superposés les modules des réponses temporelles pour différentes valeurs de c_r ($c_r = 0$, $c_r = 0.00001 k$, $c_r = 0.0001 k$, $c_r = 0.001 k$).

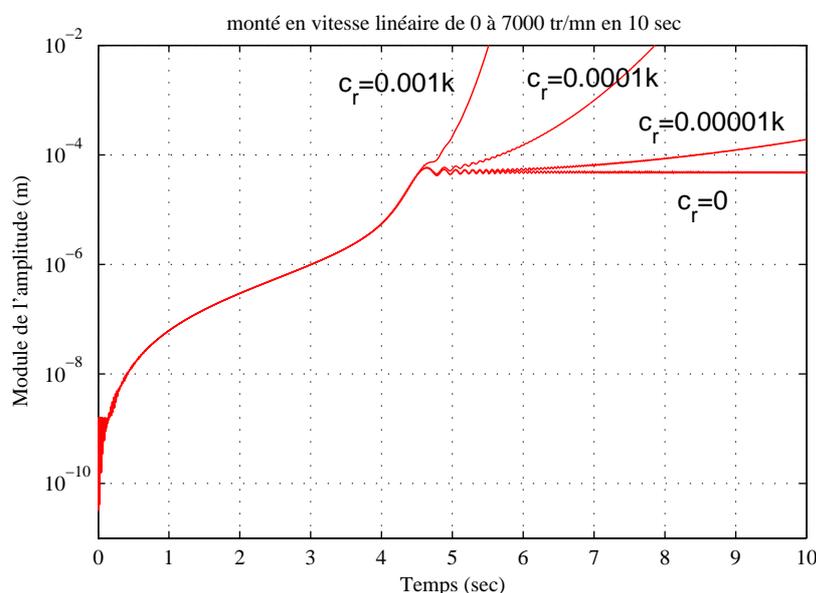


FIG. 2.11: Superposition des réponses transitoires en montée en vitesse linéaire

En l'absence d'amortissement palier, la moindre présence d'amortissement tournant lié à la

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

structure engendre une instabilité dès le passage de la première vitesse critique. Au dessous de cette vitesse critique, l'augmentation d'amortissement tournant c_r n'influe pas sur la réponse au balourd mais en régime super-critique, plus l'amortissement tournant est élevé, plus l'accroissement des déplacements et l'instabilité sont rapides.

3. Influence de l'amortissement tournant c_r et de l'amortissement fixe c_s :

L'amortissement tournant est fixé maintenant à une valeur importante ($c_r = 1.10^{-4}k$) afin de mettre en valeur les phénomènes d'instabilité et de mieux visualiser la stabilisation par l'introduction d'amortissement fixe c_s lié au palier. Ce dernier type d'amortissement est considéré comme variable. L'application du critère de stabilité permet l'identification des coefficients H_i .

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{2(c_r+c_s)}{m} \\
 H_2 &= \frac{2(c_r+c_s)}{m^3} [a\Omega^2(a - \frac{m}{1+\frac{c_s}{c_r}}) + (c_r + c_s)^2 + mk] \\
 H_3 &= \frac{4}{m^5} [a^2[a(c_r + c_s) - mc_r]c_r\Omega^4 + \dots \\
 &+ [a^2k + c_r[a(c_r + c_s) - mc_r]](c_r + c_s)^2\Omega^2 + \dots \\
 &k(c_r + c_s)^4]
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

H_4 est de même signe que H_3

Compte tenu des expressions des amortissements fixe et tournant (équations 2.36 et 2.40), il est légitime de poser $c_s = \alpha c_r$ où α est une constante positive. Compte tenu des relations :

$$c_s + c_r = c_r(1 + \alpha) \tag{2.47}$$

$$(1 + \frac{c_s}{c_r}) = 1 + \alpha$$

L'analyse du signe de H_2 et H_3 permet d'aboutir aux conclusions suivantes :

– Le système est toujours stable si :

$$a - \frac{m}{1 + \alpha} > 0 \text{ donc } (\alpha > \frac{m}{a} - 1) \tag{2.48}$$

- En considérant les conditions à imposer à Ω d'après les calculs portant sur H_2 et H_3 et si :

$$a - \frac{m}{1 + \alpha} < 0 \text{ donc } (\alpha < \frac{m}{a} - 1) \quad (2.49)$$

Le système est conditionnellement stable et il devient instable pour toute vitesse de rotation $\Omega > \Omega_{SI}$.

$$\Omega > \Omega_{SI} = \sqrt{k(1 + \alpha) / (\frac{m}{1 + \alpha} - a)} = \sqrt{k(1 + \frac{c_s}{c_r}) / (\frac{m}{1 + \frac{c_s}{c_r}} - a)} \quad (2.50)$$

L'équation 2.50 donne le seuil d'instabilité en fonction du rapport des deux amortissements interne et externe et met en évidence l'influence de plusieurs paramètres sur la stabilité dont la masse, la rigidité et l'effet gyroscopique. Toutefois ce critère ne permet pas d'estimer le mode pour lequel le système se déstabilise.

L'application numérique montre que le système est inconditionnellement stable pour toute valeur de $\alpha > 3.98$. Si $\alpha < 3.98$, le système est stable pour toute vitesse de rotation telle que $\Omega < \Omega_{SI}$ et instable si $\Omega > \Omega_{SI}$. Le tableau (2.1) regroupe les résultats en fonction du coefficient de proportionnalité α . Le seuil d'instabilité Ω_{SI} est déterminé par la formule ci-dessus (équation 2.50).

α	0.25	1.27	2.54	3.81	3.99
$\Omega_{SI}(tr/mn)$	3989	8499	18200	72444	STABLE

TAB. 2.1: Évolution du seuil d'instabilité en fonction de α avec amortissement fixe et tournant et effet gyroscopique

L'examen du tableau (2.1) montre que l'accroissement de l'amortissement fixe lié au palier repousse le seuil d'instabilité vers l'infini. Plus l'amortissement fixe est élevé, plus les déplacements du rotor tendent rapidement vers une valeur minimale.

2.1.5.2 Rotor asymétrique amorti

Une étude similaire peut être conduite dans le cas d'un rotor asymétrique. Considérons un arbre monté sur un palier dissymétrique ($K_{xx} = 5.10^5 \text{ N/m}$, $K_{zz} = 0$). Le système possède dans ce cas deux vitesses critiques correspondant aux précessions directe et inverse (respectivement $\Omega_{cr1} = 2642 \text{ rpm}$ et $\Omega_{cr2} = 3377 \text{ rpm}$) (figure 2.12).

1. Influence de l'amortissement fixe (palier) c_s :

Les résultats sont identiques à ceux obtenus pour un rotor symétrique.

2. Influence de l'amortissement tournant (matériau) c_r :

L'application de critère de Routh-Hurwitz permet d'aboutir aux conclusions suivantes :

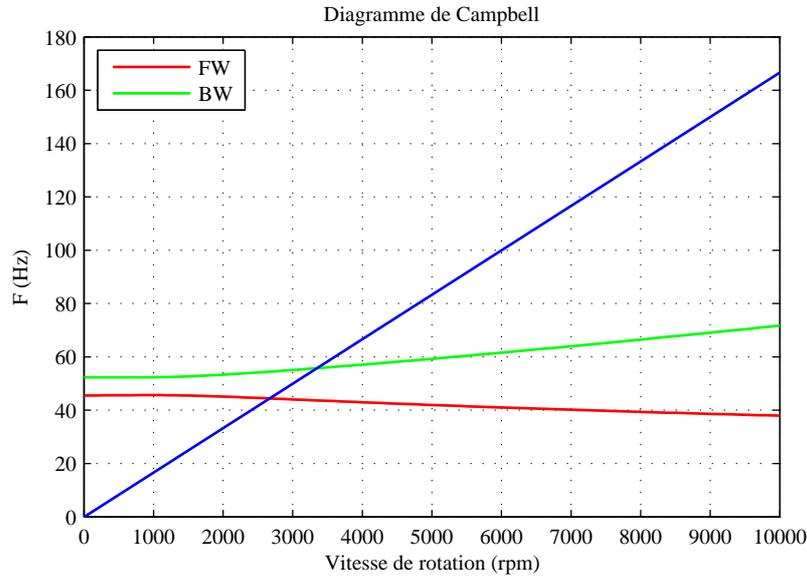


FIG. 2.12: Diagramme de Campbell dans le repère fixe : rotor asymétrique

- Si $a > m$, le système est toujours stable.
- Si $a < m$, le système est instable et le seuil d’instabilité Ω_{SI} dépend de la valeur de l’amortissement tournant c_r (figure 2.13 avec $\beta = 0.001$).

β	$1e^{-6}$	$1e^{-5}$	$1e^{-4}$	$1e^{-3}$	$1e^{-2}$	$1e^{-1}$	1
$\Omega_{SI}(tr/mn)$	3772	3772	3769	3566	3381	3355	3354

TAB. 2.2: Évolution du seuil d’instabilité en fonction de β avec amortissement tournant

On constate que le système reste stable au passage des deux vitesses critiques mais se déstabilise à une vitesse de rotation supérieure à la deuxième vitesse critique dont la valeur diminue avec l’augmentation de l’amortissement interne.

3. Influence de l’amortissement tournant c_r et de l’amortissement fixe (palier) c_s :
 Une démarche semblable à celle menée pour un rotor symétrique aboutit aux mêmes conclusions. L’accroissement de la valeur de l’amortissement fixe (l’amortissement tournant étant constant) repousse le seuil d’instabilité vers l’infini. A partir d’une certaine valeur le système est inconditionnellement stable (tableau 2.3).

Les conclusions à tirer de cette première application sont :

- Sans amortissement fixe, le rotor est instable dès le passage de la vitesse critique lorsqu’il comporte un amortissement tournant.

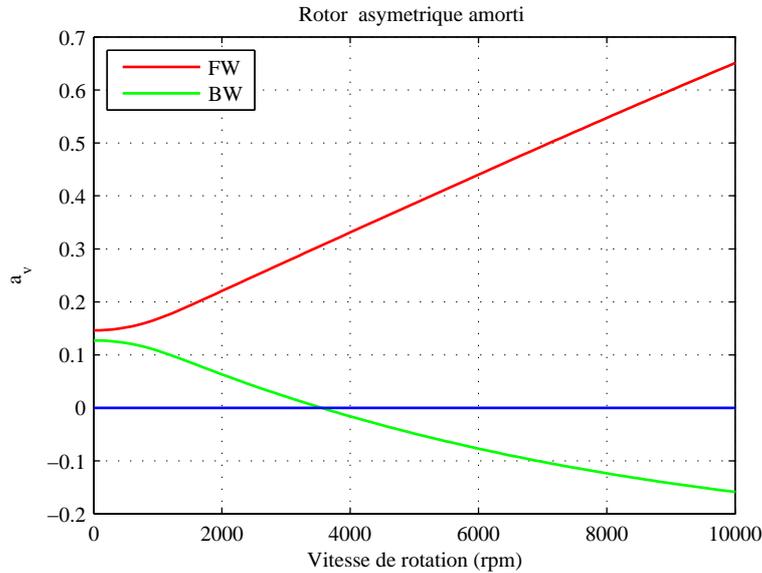


FIG. 2.13: Évolution de la partie réelle des solutions propres complexes

α	0.25	1.27	2.54	3.81	3.99
$\Omega_{SI}(tr/mn)$	4676	9359	19679	77940	STABLE

TAB. 2.3: Évolution du seuil d'instabilité en fonction de α avec amortissement fixe et tournant

- L'amortissement lié à la structure crée une plage d'instabilité que l'amortissement palier peut éventuellement éliminer.
- L'amortissement fixe lié au palier permet de stabiliser la structure jusqu'à une certaine vitesse de rotation ou bien, en augmentant la valeur d'amortissement, la stabiliser inconditionnellement.

2.1.6 Influence de l'amortissement interne sur l'amplitude de la réponse

L'étude analytique présentée ici a pour objet l'analyse de l'influence de l'amortissement interne sur l'amplitude de la réponse avant et après le passage de la première vitesse critique, exprimée aussi bien dans le repère fixe que dans le repère tournant.

2.1.6.1 Application : tube appuyé-appuyé



FIG. 2.14: Arbre appuyé-appuyé

Le cas test utilisé est issu de la bibliographie (Melanson [MZ98]) et est constitué d'un arbre plein sur appuis (figure 2.14) : Longueur $L = 1\text{ m}$, section circulaire de diamètre extérieure $D_e = 191\text{ mm}$. Matériau de l'arbre : Module d'Young $E = 207\text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.33$, facteur de perte $\eta = 0.005$ et masse volumique $\rho = 7700\text{ kg/m}^3$. La vitesse critique est située à 385 Hz comme le démontre les diagrammes de Campbell (figure 2.15 et 2.16).

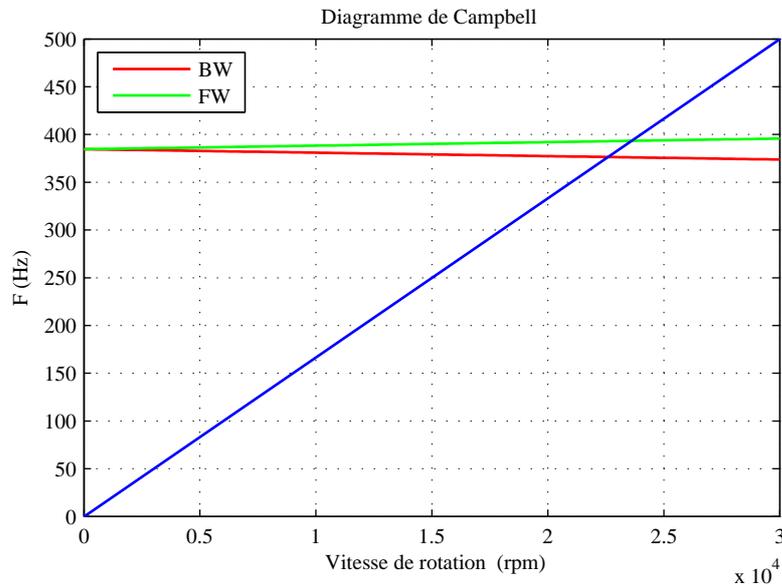


FIG. 2.15: Diagramme de Campbell : Repère fixe

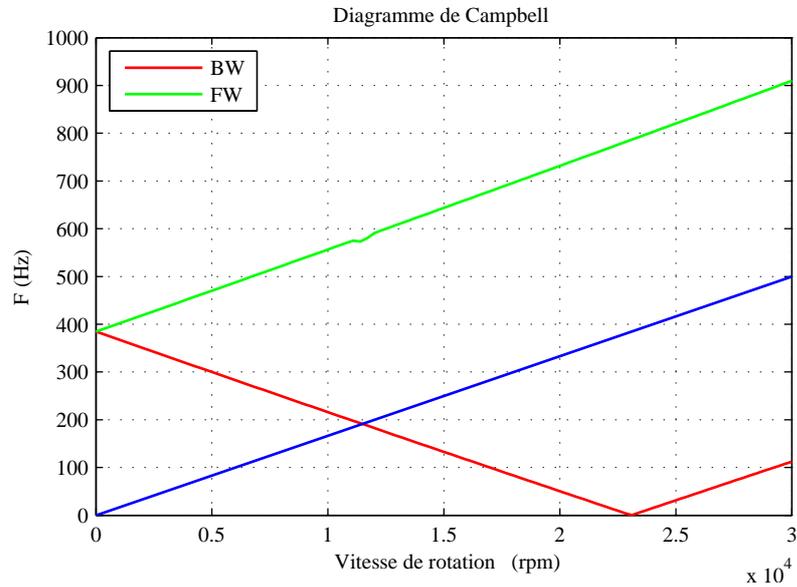


FIG. 2.16: Diagramme de Campbell : Repère mobile

Les équations du mouvement dans le repère fixe s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r + c_s & -\Omega a_a \\ \Omega a_a & c_r + c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_a & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F Q_1 \\ F Q_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Ces équations 2.51 peuvent également être exprimées dans le repère mobile à l'aide de la matrice de passage comme suit :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r + c_s & 0 \\ 0 & c_r + c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 2m_a\Omega \\ -2m_a\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega a_a \\ \Omega a_a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_a - m_a\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_a - m_a\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & \Omega c_s \\ -\Omega c_s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} a_a\Omega^2 & 0 \\ 0 & a_a\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f q_1 \\ f q_1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Les diagrammes de Campbell dans les repères fixe et mobile sont donnés par les figures (2.15) et (2.16) respectivement.

2.1.6.2 Réponse au balourd

Il s'agit ici d'examiner l'influence de l'amortissement interne sur l'amplitude de la réponse du rotor au passage de vitesse critique lors d'une excitation de type balourd dans les deux repères fixe et mobile, le balourd étant positionné à un angle α_b . La force due au balourd s'écrit dans le repère fixe et mobile comme suit :

$$F Q_1 = m_b d \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_b) \tag{2.53}$$

$$F Q_2 = m_b d \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_b)$$

$$f q_1 = m_b d \Omega^2 \sin \alpha_b \tag{2.54}$$

$$f q_2 = m_b d \Omega^2 \cos \alpha_b$$

La réponse permanente au balourd dans les deux repères donne la même solution et la solution est indépendante de l'amortissement interne (figure 2.17)(voir Annexe D).

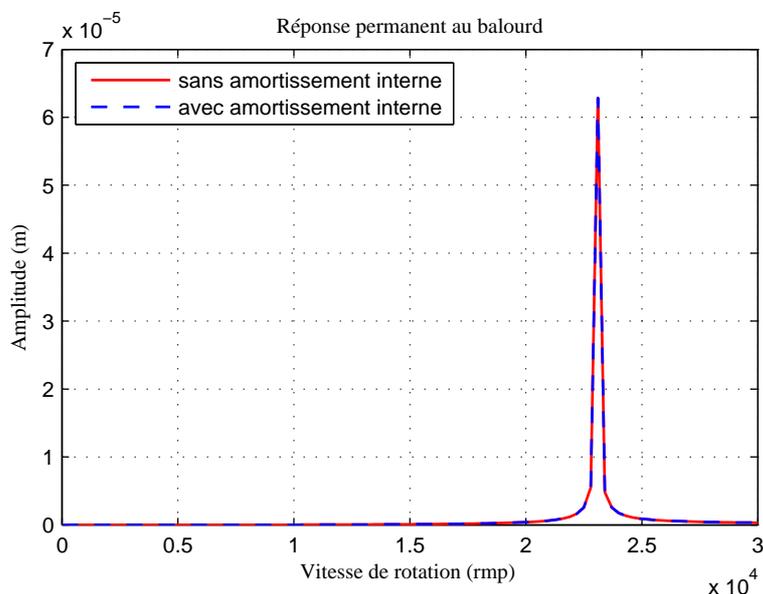


FIG. 2.17: Réponse au balourd : repère fixe et mobile avec et sans amortissement interne

2.1.6.3 Réponse à une force fixée dans l'espace

La réponse à une force harmonique dans le repère fixe de type $(F \sin(\omega t))$ suivant l'axe X, est calculée à une vitesse de rotation $\Omega = 10000 \text{ rpm}$ pour $\omega = 0 \dots 500 \text{ Hz}$.

$$FQ_1 = F \sin(\omega t) \quad (2.55)$$

$$FQ_2 = 0$$

Dans le repère mobile cette force s'exprime comme suit :

$$fq_1 = F \sin(\omega t) \cos(\Omega t) \quad (2.56)$$

$$fq_2 = F \sin(\omega t) \sin(\Omega t)$$

La figure (2.18) présente la réponse à une force fixée dans l'espace. Avec et sans prise en compte de l'amortissement interne, dans les deux repères fixe et mobile, on obtient les mêmes amplitudes de réponse. L'examen de cette figure montre bien l'influence de l'amortissement interne sur ce type de réponse, c'est à dire lorsqu'on fait travailler le matériau de l'arbre avec ce type d'excitation.

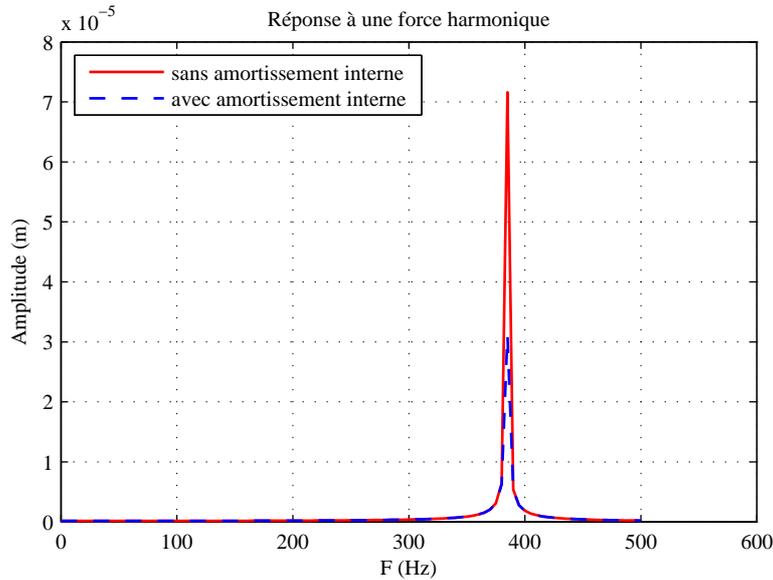


FIG. 2.18: Réponse à une force harmonique fixée dans l'espace : repère fixe avec et sans amortissement interne

2.1.6.4 Réponse transitoire au balourd

Afin de voir l'influence de l'amortissement interne sur l'amplitude de la réponse après la vitesse critique, la réponse transitoire est explorée. Quand un rotor démarre, s'arrête ou passe une vitesse critique, il subit un mouvement transitoire. La vitesse angulaire n'est plus constante et devient une fonction du temps :

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}(t) \quad (2.57)$$

La vitesse de rotation suit souvent une loi exponentielle comme dans de nombreuses applications industrielles : c'est à dire quand le rotor démarre, la vitesse de rotation augmente rapidement, et l'accélération est petite quand le rotor se rapproche de sa vitesse nominale. Ici une loi linéaire qui traduit une accélération constante sera considérée :

$$\dot{\phi} = A + Bt \quad (2.58)$$

L'énergie cinétique liée au balourd s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$T_b = m_b d \dot{\phi} (\dot{u} \cos\phi - \dot{w} \sin\phi) \quad (2.59)$$

L'application de l'équation de Lagrange sur l'équation 2.59 nous conduit à calculer le second membre de l'équation du mouvement.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial u} &= m_b d \ddot{\phi} \cos \phi - m_b d \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial w} &= -m_b d \ddot{\phi} \sin \phi - m_b d \dot{\phi}^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (2.60)$$

En utilisant les équations 2.60, les équations du mouvement s'écrivent dans le repère fixe comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\dot{\phi} a_a \\ \dot{\phi} a_a & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_a & -c_r \dot{\phi} \\ c_r \dot{\phi} & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & -a_a \ddot{\phi} \\ a_a \ddot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \dot{\phi}^2 \sin \phi - m_b d \ddot{\phi} \cos \phi \\ m_b d \dot{\phi}^2 \cos \phi + m_b d \ddot{\phi} \sin \phi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

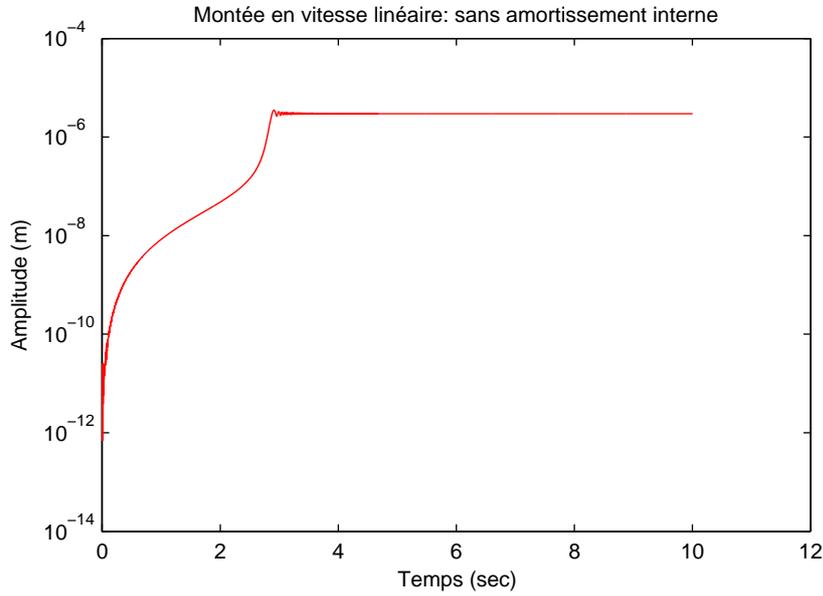


FIG. 2.19: Réponse transitoire au balourd sans amortissement interne : repère fixe

L'énergie cinétique liée au balourd s'écrit dans le repère mobile à l'aide de la matrice de passage en fonction des deux déplacements dans le repère mobile u^* et w^* :

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

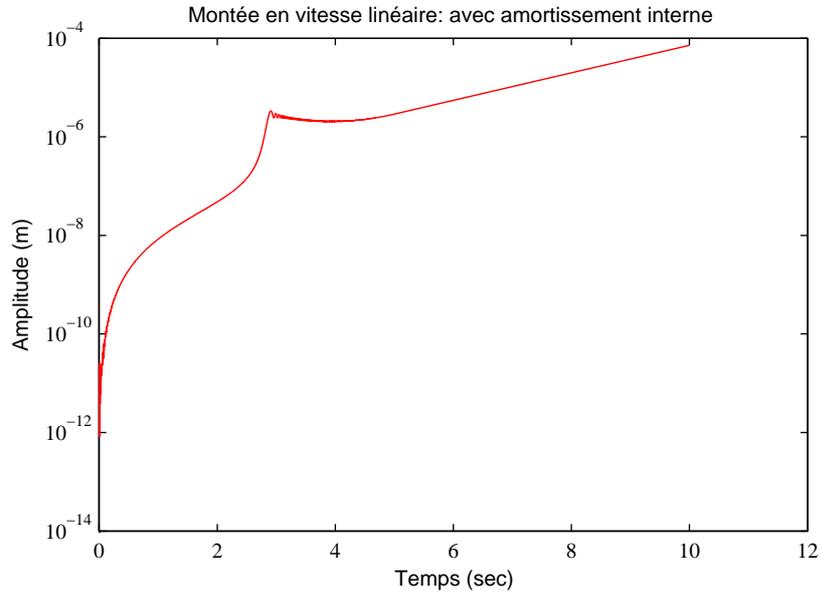


FIG. 2.20: Réponse transitoire au balourd avec amortissement interne : repère fixe

$$T_b = m_b d\dot{\phi}(u^* + w^* \dot{\phi}) \quad (2.62)$$

L'application des équations de Lagrange sur l'équation (2.62) nous amène à calculer le second membre des équations du mouvement.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial u^*} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial u^*} &= m_b d\ddot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial w^*} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial w^*} &= -m_b d\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

En utilisant l'équation (2.63), les équations de mouvement dans le repère mobile s'expriment sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\dot{\phi}(a_a - 2m_a) \\ \dot{\phi}(a_a - 2m_a) & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_a - \dot{\phi}^2(m_a - a_a) & \dot{\phi}c_s \\ -\dot{\phi}c_s & k_a - \dot{\phi}^2(m_a - a_a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & -a_a\ddot{\phi} \\ a_a\ddot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_b d\ddot{\phi} \\ m_b d\dot{\phi}^2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Une montée en vitesse linéaire de 0 à 30000 (*rpm*) en 10 (*sec*) est présentée dans les figures (2.19 et 2.20 repère fixe) et (2.21 et 2.22 repère mobile). Ces figures illustrent bien l'effet déstabilisant de l'amortissement interne lors d'une montée en vitesse linéaire. Au passage d'une vitesse critique l'amplitude du mouvement tend vers l'infini.

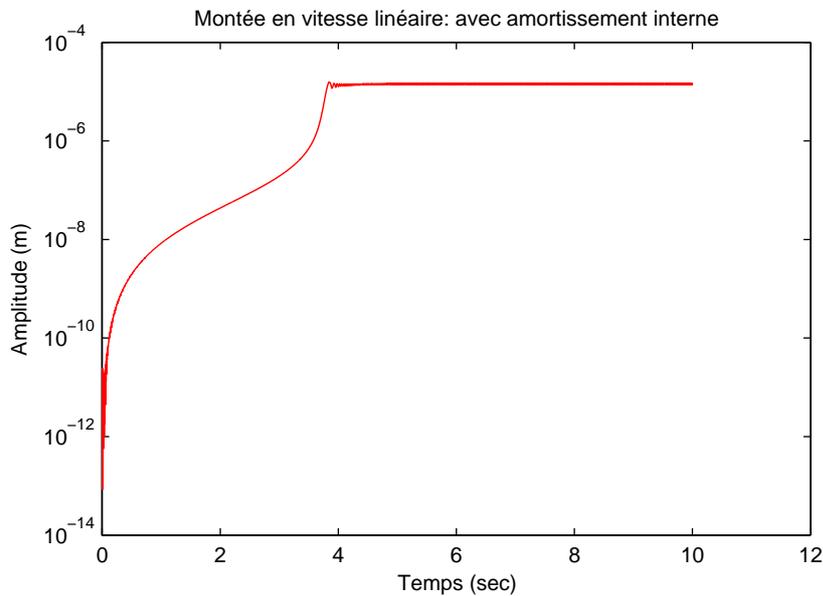


FIG. 2.21: Réponse transitoire au balourd sans amortissement interne : repère mobile

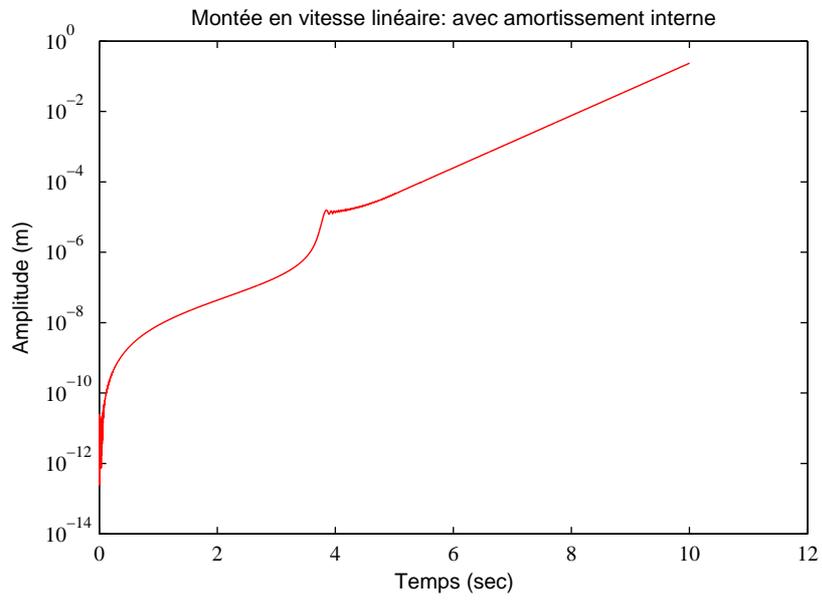


FIG. 2.22: Réponse transitoire au balourd avec amortissement interne : repère mobile

Afin d'avoir un modèle capable de traiter des applications industrielles, il est nécessaire de développer un modèle Éléments Finis apte à tenir compte de l'amortissement interne lié au matériau via un modèle plus réaliste.

2.1.7 Modèle Éléments Finis

L'amortissement interne est introduit dans un modèle élément fini unidimensionnel (1D). Les Éléments Finis utilisés sont des éléments de poutre à 4 ddl par noeud (figure 2.23). La relation contrainte-déformation est étudiée via un modèle rhéologique d'un solide viscoélastique linéaire (figure 2.24). Le modèle considéré est un modèle de Kelvin-Voigt dont la contrainte est relative à la vitesse de déformation est donnée par la relation :

$$\sigma = E\varepsilon + E\beta\dot{\varepsilon} \quad (2.65)$$

et la contrainte de cisaillement par :

$$\tau = G\gamma + G\beta\dot{\gamma} \quad (2.66)$$

où E est le module d'Young, G le module de cisaillement, τ la contrainte de cisaillement et β le temps de relaxation qui représente la caractéristique mécanique d'amortissement du matériau.

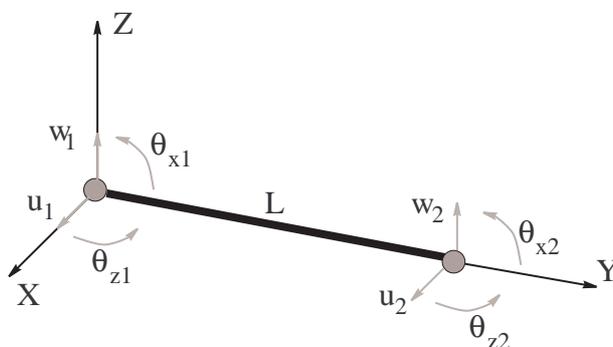


FIG. 2.23: Élément fini de poutre

En utilisant l'équation (2.65 et 2.66), le champ des contraintes s'écrit :

$$\{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{yy} = E_y\varepsilon_{yy} + E_y\beta\dot{\varepsilon}_{yy} \\ \tau_{yz} = G_{yz}\gamma_{yz} + G_{yz}\beta\dot{\gamma}_{yz} \\ \tau_{yx} = G_{yx}\gamma_{yx} + E_y\beta\dot{\gamma}_{yx} \end{cases} \quad (2.67)$$

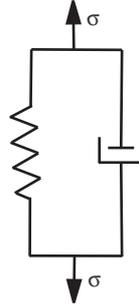


FIG. 2.24: Modèle de Kelvin-Voigt

Le vecteur des contraintes peut être séparé en contrainte élastique $\{\sigma\}_e$ utilisée pour calculer l'énergie potentielle équation (2.14) classiquement et une contrainte dissipative $\{\tilde{\sigma}\}_d$ représente l'amortissement :

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_e + \{\tilde{\sigma}\}_d \quad (2.68)$$

En utilisant l'équation (2.9), la partie dissipative de l'équation (2.68) devient :

$$\{\tilde{\sigma}\}_d = \begin{cases} \tilde{\sigma}_{yy} = E_y \beta \left(-z \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial y} + x \frac{\partial \dot{\theta}_z}{\partial y} \right) \\ \tilde{\tau}_{yz} = G_{yz} \beta \left(-\dot{\theta}_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \\ \tilde{\tau}_{yx} = G_{yx} \beta \left(\dot{\theta}_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.69)$$

où $\tilde{\sigma}_{yy}$ est la contrainte normale de la section, $\tilde{\tau}_{yz}$ et $\tilde{\tau}_{yx}$ sont les contraintes dues au cisaillement transverse.

Le travail virtuel lié au terme de dissipation interne (dans le matériau) est donné par l'équation suivante :

$$\delta W = \int_0^L \int_S (\tilde{\sigma}_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \tilde{\tau}_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tilde{\tau}_{yx} \delta \gamma_{yx}) dS dy \quad (2.70)$$

Le travail virtuel est exprimé en fonction du champ de contraintes des composants, en utilisant l'équation (2.69). L'équation (2.70) devient alors :

$$\delta W = \int_0^L \int_S E_y \beta \dot{\epsilon}_{yy} \delta \epsilon_{yy} dS dy + \int_0^L \int_S (G_{yz} \beta \dot{\gamma}_{yz} \delta \gamma_{yz} + G_{yx} \beta \dot{\gamma}_{yx} \delta \gamma_{yx}) dS dy \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_0^L \int_S E_y \beta \left(-z \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial y} + x \frac{\partial \dot{\theta}_z}{\partial y} \right) \left(-z \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + x \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) dS dy \quad (2.72) \\
 &+ \int_0^L \int_S \left[G_{yz} \beta \left(-\dot{\theta}_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \left(-\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w^*}{\partial y} \right) \right] dS dy \\
 &+ \int_0^L \int_S \left[G_{yx} \beta \left(\dot{\theta}_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \left(\delta \theta_z + \frac{\partial \delta u^*}{\partial y} \right) \right] dS dy
 \end{aligned}$$

En intégrant sur la section l'équation 2.72 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_0^L E_y \beta \left[I_x \left(\frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} \right) + I_z \left(\frac{\partial \dot{\theta}_z}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) \right] dy \quad (2.73) \\
 &+ \int_0^L G_{yz} \kappa S \beta \left[\left(-\dot{\theta}_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \left(-\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w^*}{\partial y} \right) \right] dy \\
 &+ \int_0^L G_{yx} \kappa S \beta \left[\left(\dot{\theta}_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \left(\delta \theta_z + \frac{\partial \delta u^*}{\partial y} \right) \right] dy
 \end{aligned}$$

et pour une section circulaire $I_x=I_z=I$. Le rotor est modélisé par un élément fini de type poutre (figure 2.23) avec 4 ddl par noeud. Le vecteur de déplacement nodal est :

$$d = [u_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{z1}, u_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{z2}] \quad (2.74)$$

Les déplacements d_u et d_w correspondant respectivement aux mouvements dans la direction X et Z, (repère fixe) sont définis tels que :

$$d_u = [u_1, \theta_{z1}, u_2, \theta_{z2}] \quad (2.75)$$

$$d_w = [w_1, \theta_{x1}, w_2, \theta_{x2}] \quad (2.76)$$

L'élément fini est construit à partir des fonctions d'interpolation :

$$u = N_1(y) d_u \quad (2.77)$$

$$w = N_2(y) d_w \quad (2.78)$$

où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme d'une poutre en flexion sous l'hypothèse de poutre de type Bernoulli-Euler :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.79)$$

2. Analyse dynamique des systèmes en rotation

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.80)$$

L'effet du cisaillement transverse est pris en compte à partir d'un facteur correcteur de cisaillement κ calculé en évaluant la fonction de gauchissement (voir chapitre 4).

$$a = \frac{12EI}{G\kappa SL^2} \quad (2.81)$$

où G est le module de cisaillement donné par la relation :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.82)$$

où ν est le coefficient de Poisson.

En introduisant les fonctions de forme données par les équations (2.79) et (2.80) dans les expressions de l'énergie et après application des équations de Lagrange, les matrices élémentaires de l'élément finis de poutre sont obtenues sous la forme suivante :

Matrice de masse d'après [Prz68] :

$$[M] = \frac{\rho L}{840(1+a)^2} \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_7 & M_{11} & 0 & 0 & M_{29} \\ & M_1 & -M_7 & 0 & 0 & M_{11} & -M_{29} & 0 \\ & & M_6 & 0 & 0 & M_{29} & M_{24} & 0 \\ & & & M_6 & -M_{29} & 0 & 0 & M_{24} \\ & & & & M_1 & 0 & 0 & -M_7 \\ & & & & & M_1 & M_7 & 0 \\ & & & & & & M_6 & 0 \\ sym & & & & & & & M_6 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_1 = S(312 + 588a + 280a^2) + \frac{1008I}{L^2} \\
 M_7 = -SL(44 + 77a + 35a^2) - \frac{(84-420a)I}{L} \\
 M_6 = SL^2(8 + 14a + 7a^2) + I(112 + 140a + 280a^2) \\
 M_{11} = S(108 + 252a + 140a^2) - \frac{1008I}{L^2} \\
 M_{24} = -SL^2(6 + 14a + 7a^2) - I(28 + 140a - 140a^2) \\
 M_{29} = SL(26 + 63a + 35a^2) - \frac{(84-420a)I}{L}
 \end{array} \right. \quad (2.84)$$

Matrice gyroscopique (ROTORINSA [LF98]) :

$$[C] = \frac{\rho I}{30L(1+a)^2} \begin{bmatrix}
 0 & C_2 & C_4 & 0 & 0 & -C_2 & C_4 & 0 \\
 & 0 & 0 & C_4 & C_2 & 0 & 0 & C_4 \\
 & & 0 & C_9 & C_4 & 0 & 0 & C_{31} \\
 & & & 0 & 0 & C_4 & -C_{31} & 0 \\
 & & & & 0 & C_2 & -C_4 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & -C_4 \\
 & & & & & & 0 & C_9 \\
 \textit{anti sym} & & & & & & & 0
 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = -72 \\ C_4 = -L(6 - 30a) \\ C_9 = -L^2(8 + 10a + 20a^2) \\ C_{31} = L^2(2 + 10a - 10a^2) \end{array} \right. \quad (2.86)$$

Matrice de raideur (Przemieniecki [Prz68]) :

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Les matrices dues à l'amortissement interne :

Matrice d'amortissement due à l'amortissement interne :

$$[C_i] = \frac{EI\beta}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ & & & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4+a)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

sym

Matrice de rigidité due à l'amortissement interne :

$$[K_i] = \frac{EI\beta}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 0 & -(4+a)L^2 & -6L & 0 & 0 & 0 & -(2-a)L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 0 \\ anti & & & & & & 0 & -(4+a)L^2 \\ sym & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

L'équation du mouvement dans le repère fixe pour un élément de type poutre s'écrit alors :

$$[M] \{\ddot{d}\} + [C_i + \Omega C] \{\dot{d}\} + [K + \Omega K_i] \{d\} = \{F(t)\} \quad (2.90)$$

où $[M]$ est la matrice symétrique de masse ; $[C_i]$ est la matrice d'amortissement interne ; $[C]$ est la matrice antisymétrique gyroscopique prés multipliée par la vitesse de rotation Ω ; $[K]$ est la matrice de rigidité ; $[K_i]$ est la matrice de rigidité supplémentaire (due à l'amortissement interne) prés multipliée par la vitesse de rotation Ω ; $\{F(t)\}$ est le vecteur des forces généralisées. Enfin $\{\ddot{d}\}$, $\{\dot{d}\}$ et $\{d\}$ sont respectivement l'accélération, la vitesse et le déplacement.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux étant connues, le système d'équations à résoudre est présenté par l'équation 2.90.

2.1.7.1 Résolution du problème dynamique

La figure 2.25 présente l'organigramme général de résolution du problème dynamique.

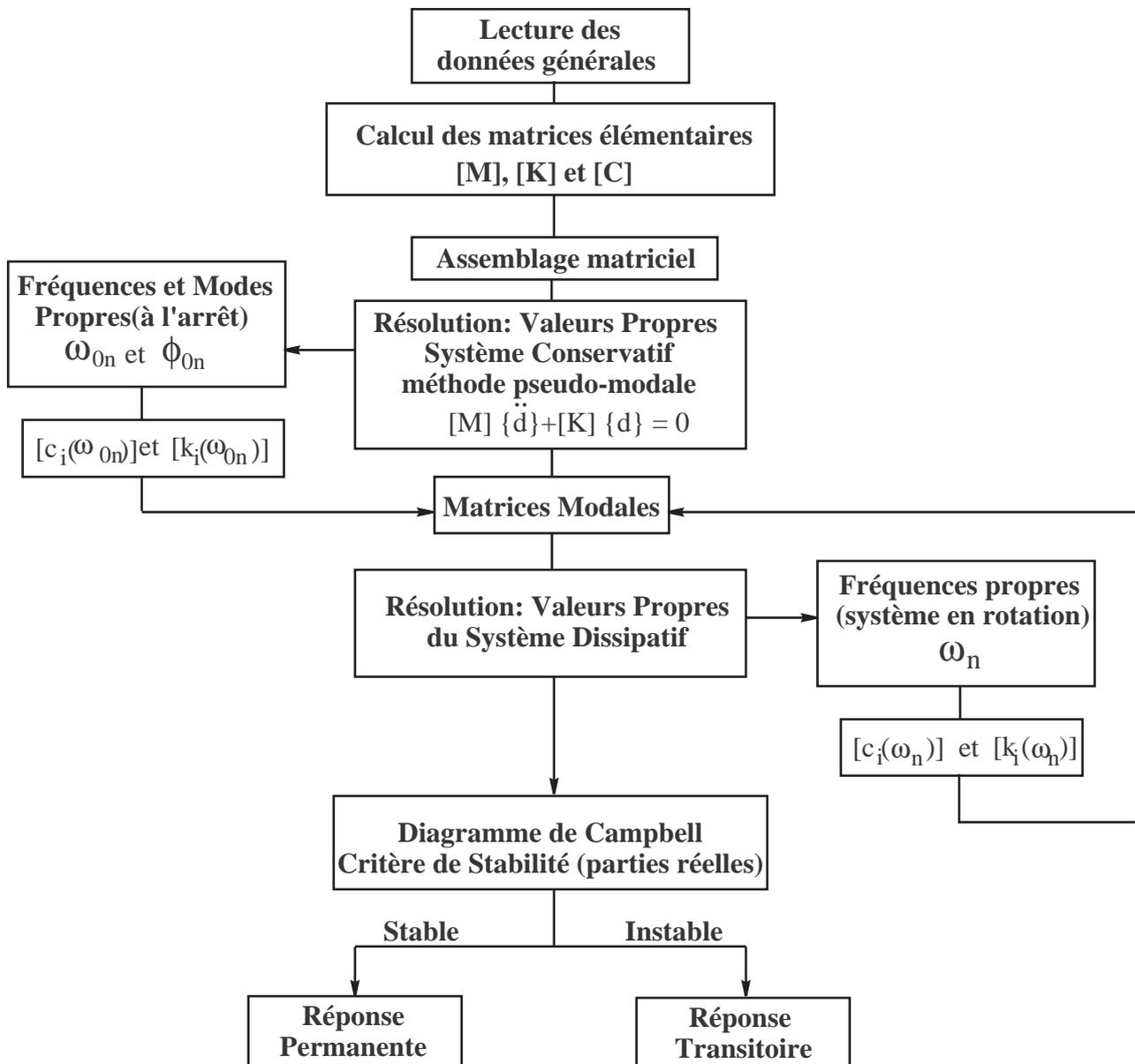


FIG. 2.25: Résolution du problème dynamique

L'étude de stabilité du système se fait en mouvement libre, c'est à dire lorsque le second membre est identifié à 0 (équation 2.91) :

$$[M] \{\ddot{d}\} + [C_i + C(\Omega)] \{\dot{d}\} + [K + K_i(\Omega)] \{d\} = 0 \quad (2.91)$$

Après avoir exprimées les matrices élémentaires (relations de 2.83 à 2.89), l'assemblage matriciel global est réalisé pour construire le système d'équations 2.90. La première étape de résolution porte sur le calcul des solutions propres du système conservatif associé :

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K] \{d\} = 0 \quad (2.92)$$

Les pulsations propres ω_{0n} et les modes propres ϕ_{0n} sont alors calculés. Par une méthode pseudo-modale les matrices modales généralisées sont identifiées, conduisant au système d'équation de taille (n.n) où n représente le nombre de mode.

$$[m] \{\ddot{Q}\} + [c_i + \Omega c] \{\dot{Q}\} + [k + \Omega k_i] \{Q\} = 0 \quad (2.93)$$

Il est alors possible de former les matrices $C_i(\omega_{0n})$ et $K_i(\omega_{0n})$ dues à l'amortissement interne à partir des fréquences propres du système à l'arrêt et de calculer leur formes généralisées.

$$[m] \{\ddot{Q}\} + [c_i(\omega_{0n}) + \Omega c] \{\dot{Q}\} + [k + \Omega k_i(\omega_{0n})] \{Q\} = 0 \quad (2.94)$$

En suite la résolution du problème généralisé amorti est alors engagé classiquement par résolution du problème aux valeurs propres dans l'espace $2n$. La seconde étape consiste à chaque pas de la vitesse de rotation à réactualiser le système dissipatif généralisé du fait de l'évolution des fréquences propres.

La procédure est réitérée pour chaque pas de vitesse de rotation. L'évolution des fréquences propres identifiées est tracée en fonction de la vitesse de rotation Ω réalisant un diagramme de Campbell ainsi que l'évolution des parties réelles des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation (critère de stabilité). Le seuil d'instabilité est identifié quand la partie réelle change de signe définissant alors la vitesse à partir de laquelle le système devient instable.

Chapitre 3

Conception d'un banc d'essai : instabilité expérimentale

Le modèle éléments finis proposé a été validé à partir de cas tests issus de la littérature (analytique/éléments finis). Le présent chapitre présente la confrontation des résultats numériques à des résultats expérimentaux disponibles.

3.1 Stabilité des tubes en rotation (LMA) : modélisation et expérimentation

Afin de valider le modèle éléments finis proposé une étude comparative est réalisée avec des résultats analytiques et expérimentaux issus de la thèse d'Olivier Montagnier [Mon05] conduite au Laboratoire LMA (Marseille). L'examen des résultats numériques et analytiques abouti à de bonnes corrélations en fréquence et en seuil d'instabilité. Le modèle proposé est également confronté avec des résultats expérimentaux issus d'un banc d'essai (figure 3.1) réalisée au LMA.

Le banc est constitué d'un moteur électrique entraînant une poulie courroie monté sur deux paliers rigides permettant d'atteindre une vitesse de 12000 tr/min . Cette poulie entraîne par l'intermédiaire d'un accouplement très souple non amortissant un tube simulant un arbre de transmission.



FIG. 3.1: Banc d'essai (LMA)

L'arbre est monté sur des paliers à roulements rotules modifiés pour obtenir les inclinaisons allant jusqu'à $\pm 9^\circ$ (figure 3.2). Ces paliers sont eux mêmes liés au bâti par l'intermédiaire de supports viscoélastiques en élastomère travaillant en cisaillement. Les mouvements sont mesurés par des capteurs lasers sans contact (positionnés radialement et orthogonalement).



FIG. 3.2: Paliers et élastomères

3.1.0.2 Identification des paramètres du système

Les modes rigides du banc d'essais sont identifiés en installant des petites masselottes sur un tube court en Aluminium (figure 3.3). Ici deux configurations sont possibles, un montage avec une masselotte centrale qui excite le mode symétrique et un montage avec 2 masselottes antisymétriques permettant de créer un couple qui excite le mode antisymétrique. L'amortissement a été estimé à $\xi_e = 3.5\%$ à partir des simulations.

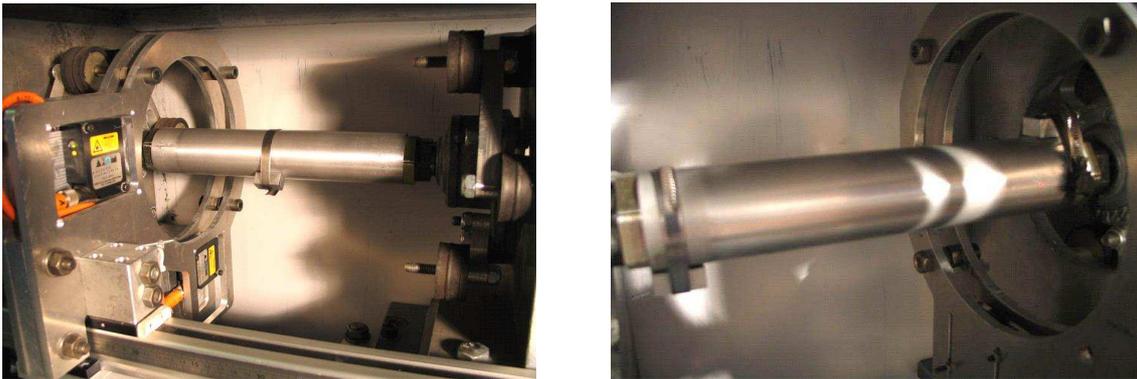


FIG. 3.3: Mesure des modes des paliers avec un tube rigide possédant : (a) une masselotte centrale, (b) deux masselottes antisymétriques

Le rotor est modélisé par un arbre élastique continu appuyé-appuyé (figure 3.4) sur fondations viscoélastiques. Les éléments viscoélastiques, parfaitement symétriques, sont représentés par une rigidité k_p et un amortissement externe c_e . Le tube en rotation peut être de différentes natures : Aluminium, PVC, composite...

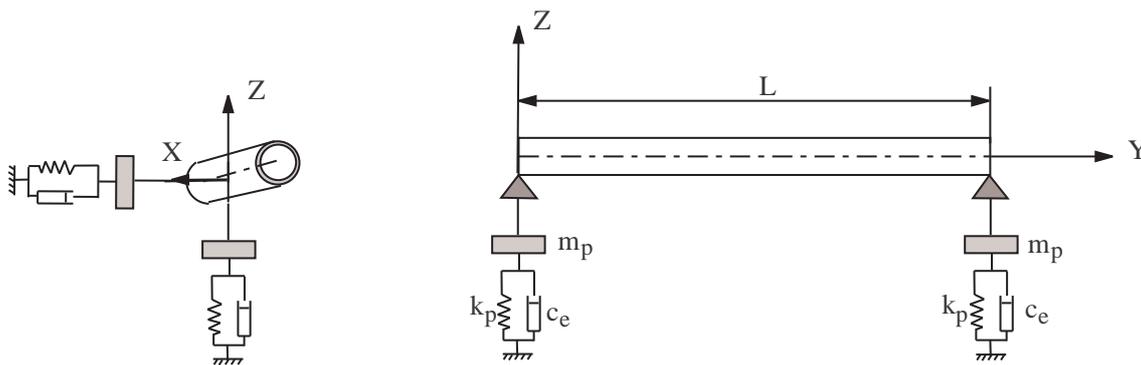


FIG. 3.4: Tube mince sur paliers rigides et suspension viscoélastique.

Un modèle éléments finis de l'ensemble a été établi (voir Chapitre 2). Il a été envisagé pour les deux configurations de tubes en Aluminium et en PVC considérés au LMA (tableaux 3.1 et 3.2)

Module d'Young	E	Gpa	69
Masse volumique de l'arbre	ρ	Kgm^3	2700
Longueur réelle de l'arbre	L	m	1.64
Rayon extérieure de l'arbre	R_e	m	0.025
Rayon intérieure de l'arbre	R_i	m	0.02298
Facteur d'amortissement interne	ξ_i	%	0.2
Facteur d'amortissement externe	ξ_e	%	3.5
Masse d'un palier	m_p	kg	2.817
Rigidité d'un support	k_p	N/m	94×10^3
Nombre de support	N_p		6

TAB. 3.1: Caractéristiques de l'arbre en aluminium et des supports

Module d'Young	E	Gpa	2.2
Masse volumique de l'arbre	ρ	Kgm^3	1350
Rayon extérieure de l'arbre	R_e	m	0.025
Rayon intérieure de l'arbre	R_i	m	0.0215
Facteur d'amortissement interne	ξ_i	%	1.25
Facteur d'amortissement externe	ξ_e	%	3.5
Masse d'un palier	m_p	kg	2.608
Rigidité de 3 supports	k_p	N/m	258×10^3
Rigidité de 6 supports	k_p	N/m	576×10^3

TAB. 3.2: Caractéristiques de l'arbre en PVC et des supports

La stabilité est étudiée pour les deux tubes en Aluminium et en PVC via une étude paramétrique du système arbre-paliers. La longueur considérée varie de 0.5 m à 3 m pour le tube en Aluminium et de 0.4 m à 1.4 m pour le tube en PVC. Ces tubes se caractérisent par une rigidité faible et un facteur d'amortissement de 0.2% pour l'aluminium et de 1.25% pour le PVC. La valeur de l'amortissement externe (amortissement externe visqueux $c_e = 100\text{ N/m/s}$) est donnée par un facteur d'amortissement $\xi_e = 3.5\%$ et l'amortissement interne est introduit dans le modèle à partir de la relation $\eta_i = 2\xi_i$. La solution de l'équation (2.41) en mouvement libre donne les fréquences du système couplé et les seuils d'instabilité associés aux modes.

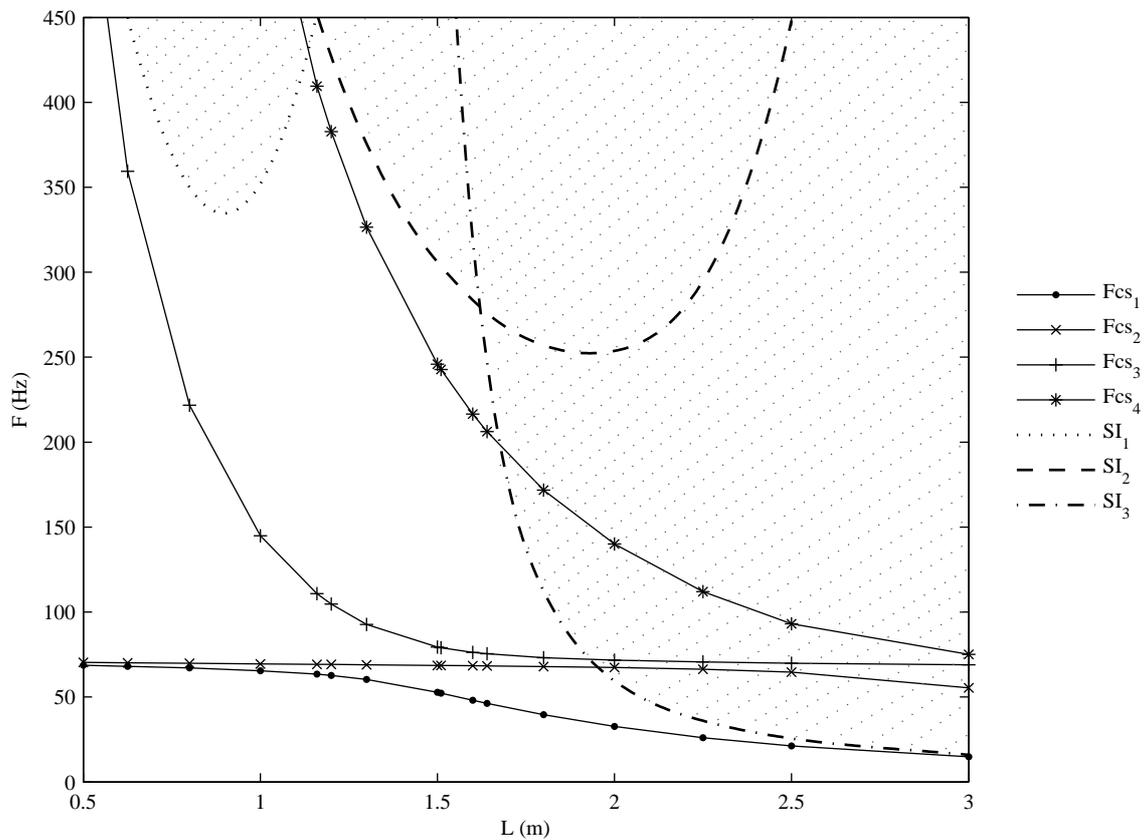


FIG. 3.5: Fréquences et seuils d'instabilité "tube en Aluminium sur supports viscoélastiques" en fonction de la longueur de tube.

L'étude paramétrique réalisée concerne les tubes Aluminium et PVC. Les figures (3.5 et 3.6) illustrent respectivement l'évolution des fréquences propres du système ainsi que les seuils d'instabilité en fonction de la longueur du rotor L . L'amortissement interne induit une instabilité des

modes en précession directe, seulement quand la vitesse de rotation devient plus grande que la vitesse critique. Les modes en précession inverse sont toujours stables. L'examen de ces deux figures montre que les fréquences ainsi que les seuils d'instabilité diminuent avec l'augmentation de la longueur de rotor.

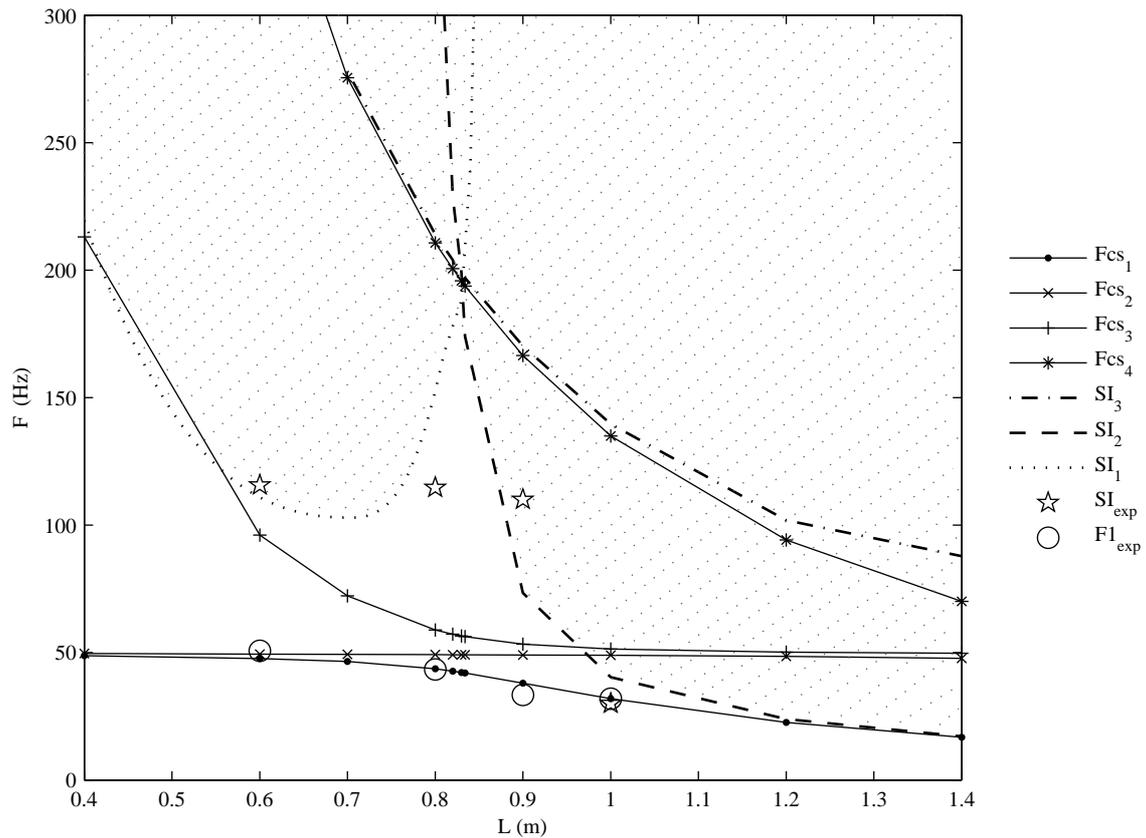


FIG. 3.6: Fréquences et seuils d'instabilité "tube en PVC sur supports viscoélastiques" en fonction de la longueur de tube.

Signification des légendes : F_{csi} représente la $i^{ème}$ fréquence de système couplé ; SI_i représente le $i^{ème}$ seuil d'instabilité associé. Pour une longueur particulière du rotor les déformées modales pour les 4 premiers modes sont présentées sur les figures (3.7). Elles représentent les modes de flexion d'arbre (modes de paliers rigides) couplés avec les modes de palier (modes de rotor rigide).

En comparant ces cartes d'instabilité données figures 3.5 et 3.6, il s'avère que la zone d'instabilité (zone grise) du rotor en Aluminium est plus petite que la zone d'instabilité du rotor en PVC. La différence est due à l'amortissement interne ξ_i de matériau de l'arbre qui est plus impor-

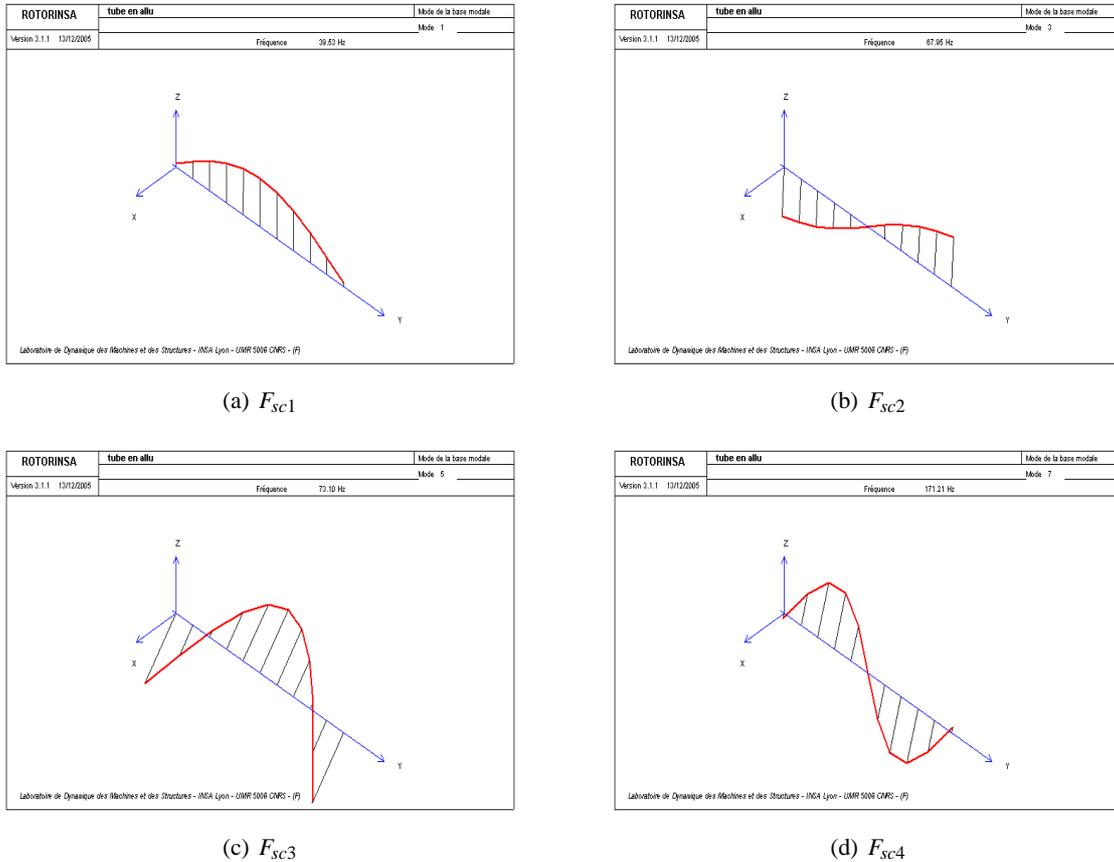


FIG. 3.7: Déformées modales du système

tant pour le PVC que pour l'Aluminium (Tableaux 3.1 et 3.2). Les fréquences ainsi que les seuils d'instabilité diminuent quand l'amortissement interne lié au matériau augmente. Enfin une grande zone de stabilité, qui sera analysée plus tard, est observée.

Les résultats expérimentaux obtenus au LMA sont reportés figure (3.6). Ces derniers sont symbolisés par un cercle pour les premières fréquences expérimentales et une étoile pour les seuils d'instabilité associés. Quatre essais expérimentaux ont été réalisés pour des tubes en PVC de longueurs $0.6m$, $0.8m$, $0.9m$ et $1m$. L'instabilité expérimentale est détectée à la première vitesse critique. Les premières fréquences expérimentales sont en bon accord avec les résultats numériques. Les seuils d'instabilité expérimentaux sont aussi en bonne corrélation pour trois cas tests ($0.6m$, $0.9m$ et $1m$) et pour un seul cas test le résultat expérimental est assez loin de la prédiction numérique. Ce point est situé dans la zone mentionnée ci-dessus que nous allons examiner.

Les figures (3.8 et 3.9) reprennent, en zoom sur la zone concernée, les évolutions des 3 premières fréquences calculées. Sont également reportées les fréquences du rotor rigide F_{rr} et la première fréquence de palier rigide F_{rb} . L'observation de ces deux figures montre deux zones correspondant à une longueur $L = 1,44 m$ pour le tube en Aluminium et $L = 0.83 m$ pour le tube en

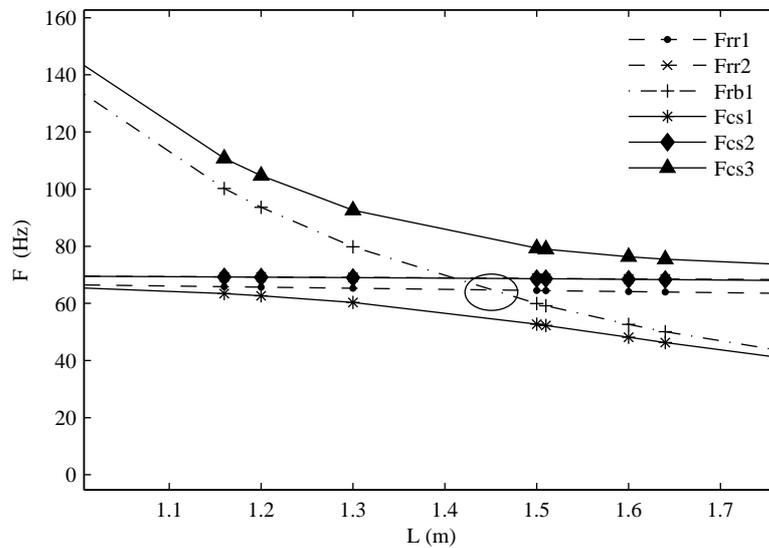


FIG. 3.8: Zoom de la zone de couplage : tube en Aluminium.

PVC. Sur ces zones, caractérisées en comparant la fréquence du rotor flexible monté sur paliers rigides (notée F_{rb1}) à la fréquence du rotor rigide monté sur palier flexibles (notée F_{rr1}), on observe une augmentation de stabilité du système (figure 3.10). Comme cela avait mis en évidence par Montagnier, l'augmentation de la stabilité correspond bien au couplage entre ces deux types de déformées modales : rotor rigide, paliers rigides.

L'évolution des seuils d'instabilité associés au système couplé est expliquée comme suit. Pour par exemple la longueur particulière du rotor, qui correspond à l'égalité des deux fréquences (F_{1rb} et F_{1rr}), les paliers sont fortement sollicités et fournissent donc plus d'amortissement externe au système et en conséquence augmentent la stabilité. Un tel comportement est aussi mis en évidence par Dutt [DN92] qui prouve qu'un choix approprié de la valeur des paramètres du support peut augmenter de manière significative le seuil de stabilité pour un système sur paliers viscoélastiques. Le support viscoelastique amorti offre en ce sens le plus grand intérêt par rapport aux supports visqueux ou élastique.

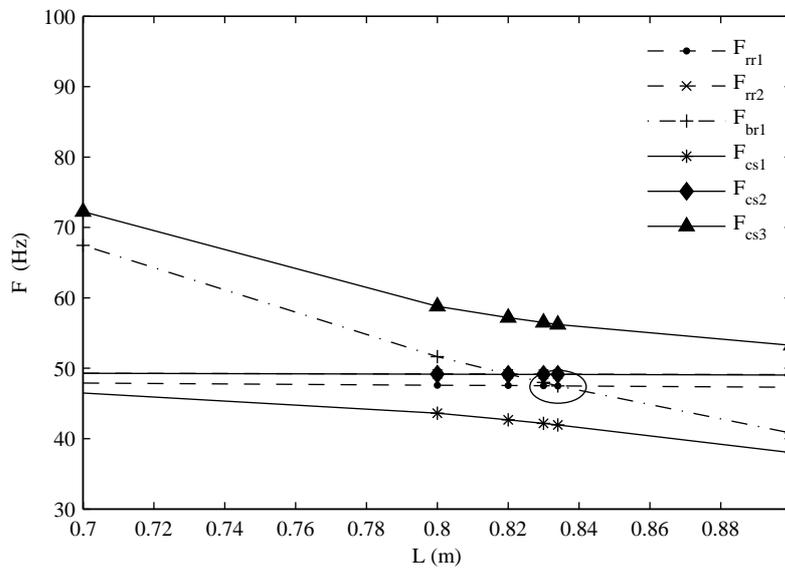
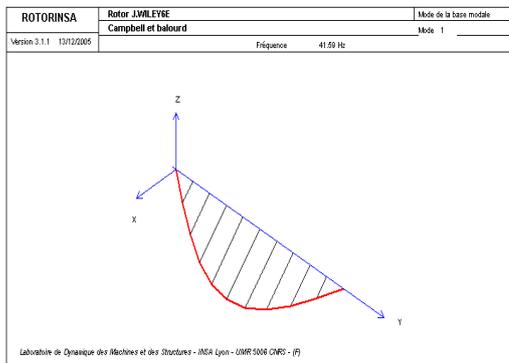
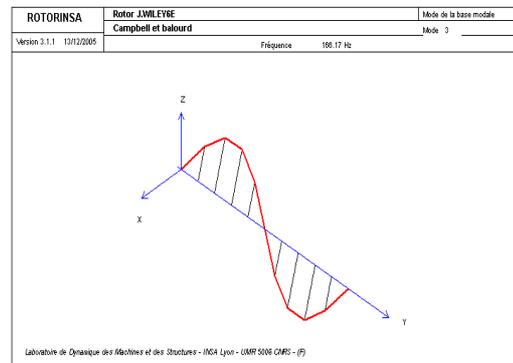


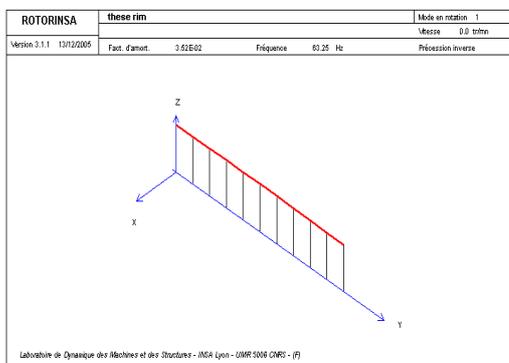
FIG. 3.9: Zoom de la zone de couplage entre les systèmes couplé et découplé : tube en PVC.



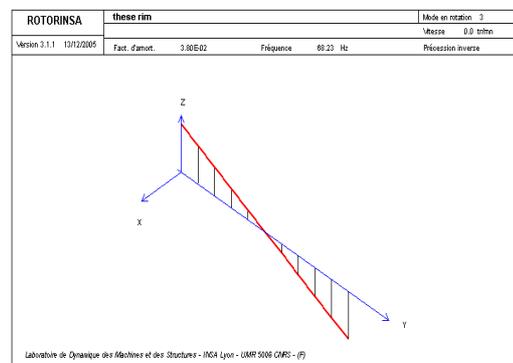
(a) F_{rb1}



(b) F_{rb2}



(c) F_{rr1}



(d) F_{rr2}

FIG. 3.10: Fréquences propres du système découplé

3.1.0.3 Influence de la raideur des paliers sur la zone de couplage

Les figures (3.11 et 3.12) montrent l'influence de la raideur de palier sur la zone de couplage (la longueur pour laquelle le système est le plus couplé). On peut remarquer que l'augmentation de la raideur des paliers déplace la zone de couplage en augmentant la longueur du rotor pour laquelle le système est plus couplé.

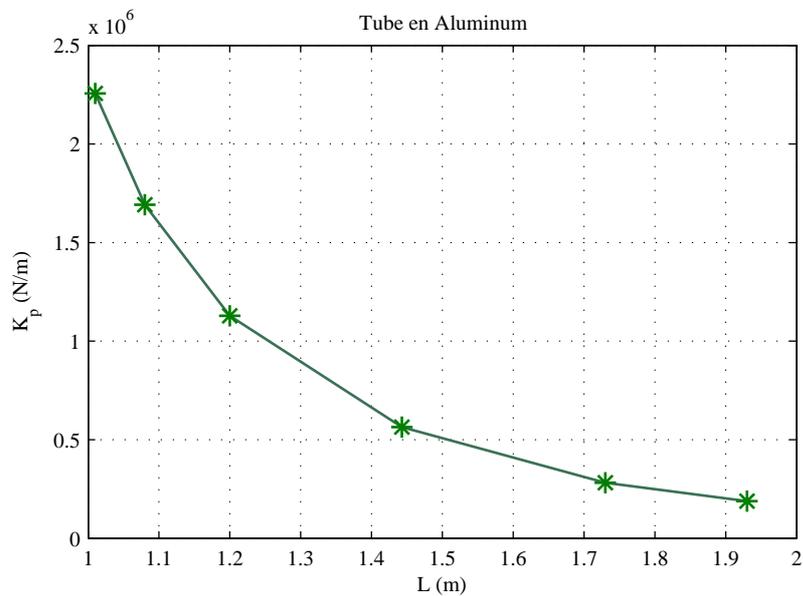


FIG. 3.11: Influence de la raideur des paliers sur la zone de couplage entre les systèmes couplé et découplé : tube en Aluminium

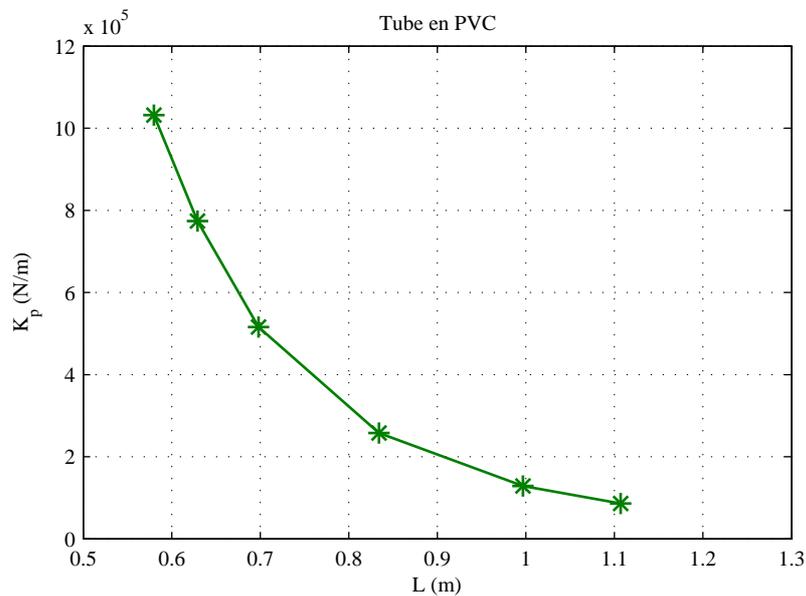


FIG. 3.12: Influence de la raideur des paliers sur la zone de couplage entre les systèmes couplé et découplé : tube en PVC.

3.1.1 Conclusion

Le travail analytique et expérimental réalisé dans le cadre du LMA et présenté dans la thèse de Montagnier a pu fournir une base de donnée précieuse pour la validation du modèle proposé. Une analyse paramétrique a pu montrer l'influence des amortissements interne et externe sur les fréquences et les seuils d'instabilité d'un système couplé. Afin de pouvoir maîtriser l'ensemble du processus expérimental, il a été décidé de concevoir et mettre en oeuvre un banc d'essai représentatif mais de taille réduite.

3.2 Stabilité des tubes en rotation (LaMCoS) : modélisation et expérimentale

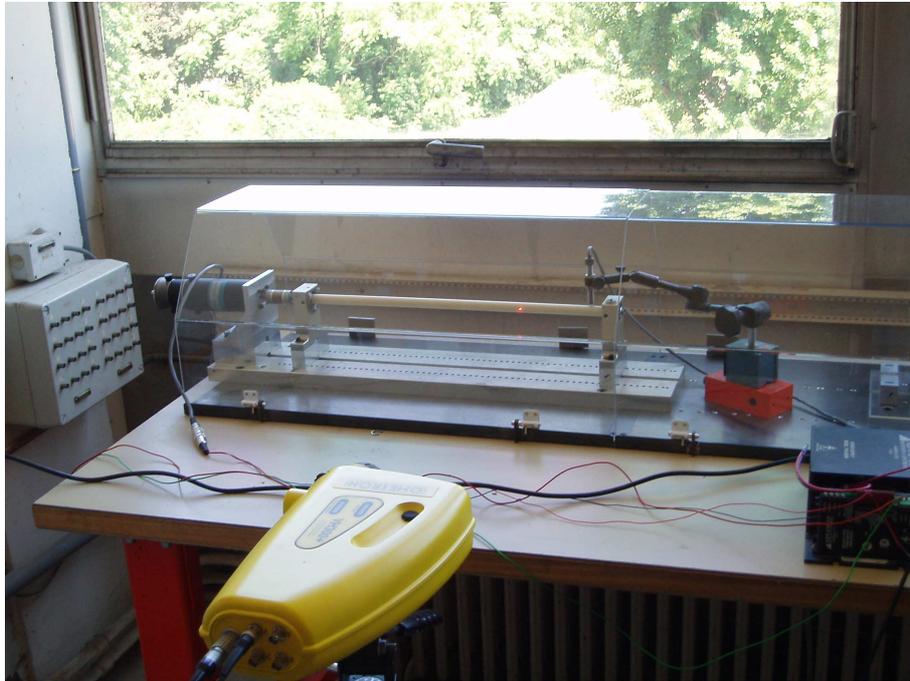


FIG. 3.13: Banc d'essai : tube en PVC

Dans l'objectif d'observer expérimentalement les phénomènes d'instabilité de rotors et de pouvoir disposer de modèles expérimentaux de référence, un banc d'essai en rotation a été élaboré au sein du laboratoire LaMCoS (3.13) et (3.14). La conception autorise des tests d'arbres et/ou d'ensembles arbres-disques de longueur variant de 0.4 mètre à 2 mètres avec des diamètres de section compris entre 10 et 40 millimètres. Dans un premier temps le banc ne sera utilisé que dans le cadre d'approches qualitatives : il s'agit de mettre en évidence le phénomène d'instabilité en suivant l'évolution de l'amplitude avant et après le passage de la première vitesse critique.

3.2.1 Description du dispositif d'essai

L'entraînement est assuré par un moteur asservi en vitesse (marque Socitec), piloté manuellement par une alimentation continue ou par un logiciel développé sous Labview via un ordinateur. Le programme de commande du moteur permet de générer une rampe de vitesse linéaire suivie d'un palier (vitesse de rotation constante). Ainsi asservi, le moteur permet d'atteindre des vitesses de rotation maximales de 4500 (*tr/mn*). Il est fixé au support par l'intermédiaire d'une équerre (figure 3.15). La liaison moteur-arbre est réalisée par un accouplement homocinétique.



FIG. 3.14: Banc d'essai : tube en PVC

L'accouplement est destiné à compenser les éventuels désalignements et différences angulaires dus à la déformée de l'arbre. Un capteur électromagnétique mesure la vitesse de rotation instantanée. Cette voie tachymétrique est utilisée pour la synchronisation des signaux lors des acquisitions de mesures. Un capteur laser de marque Ométron (figure 3.13) mesure les vitesses de déplacement latéral de l'arbre.

Dans l'optique de conserver toujours le même accouplement et afin de pouvoir tester différents tubes, des manchons spécifiques ont été fabriqués (figure 3.16). Coté accouplement, ils possèdent le même diamètre que le rotor original, et ont aussi un diamètre permettant de récupérer les roulements rotules disponibles. Enfin ils possèdent un épaulement et un diamètre ajusté au diamètre intérieur des tubes à tester. Les manchons sont montés en force dans les tubes.

L'acquisition et le traitement des mesures sont effectués à l'aide d'un système d'acquisition Scada's III à 16 voies de mesure commercialisé par la société LMS (Louvain Measurement System). Les mesures principales correspondent à des acquisitions par marteau de choc, des balayages sinusoïdaux et des analyses en suivi d'ordre (Order Tracking)

3.2.2 Caractérisation de l'amortissement externe (Paliers) et interne (Rotor)

Afin d'être capable d'observer les phénomènes d'instabilités dans les meilleures conditions, il est important de choisir des paliers présentant un amortissement le plus faible possible de manière

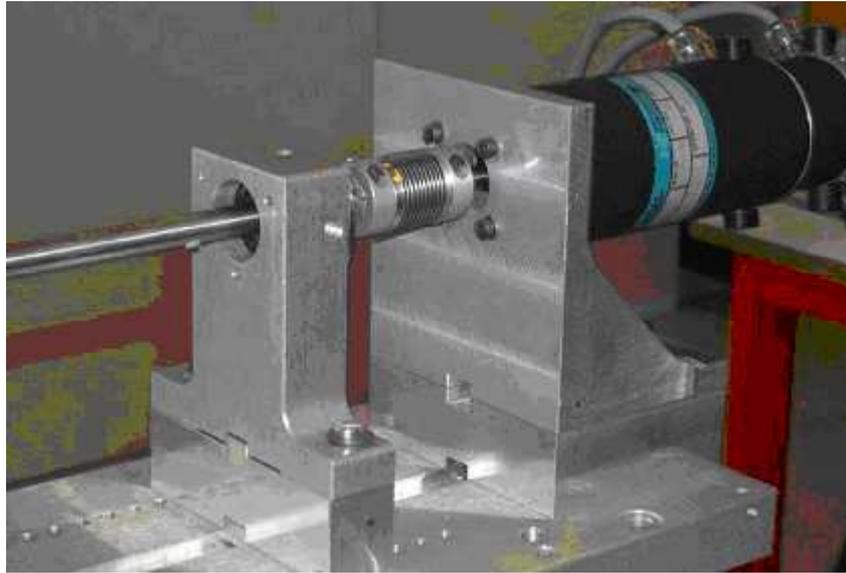


FIG. 3.15: Équerre, accouplement homocinétique et 1er palier

à ce que l'amortissement interne soit prédominant.

3.2.2.1 Conception et choix du guidage en rotation : Amortissement externe

Le banc a été conçu de manière à respecter autant que possible des conditions limites appuyé-appuyé. Pour ce faire, un roulement avec rotulage est monté du côté de l'accouplement. Ce dernier est bloqué en translation dans le palier via un épaulement et une bague de serrage démontable. Les efforts de traction engendrés par les déformations du rotor ne s'exerceront donc pas sur l'accouplement. A l'autre extrémité de l'arbre, le second roulement avec rotulage est laissé libre en translation (montage avec jeu) afin de ne pas contraindre les déformations du rotor.



FIG. 3.16: Manchon d'adaptation

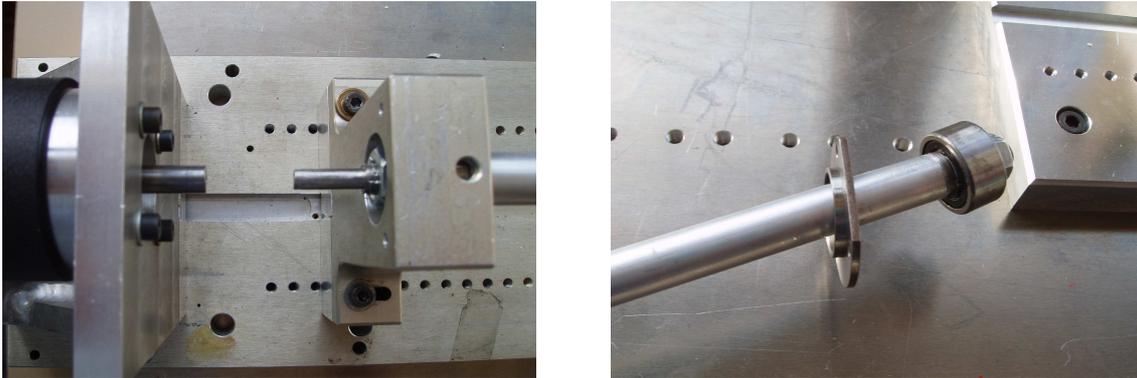


FIG. 3.17: Palier avec épaulement et détail sur la bague démontable

Cette conception approche relativement bien des conditions limites appuyé-appuyé. Le choix technologique envisagé pour le guidage en rotation a été confirmé à l'aide de prévisions numériques réalisées sur un système arbre /disque en acier (figure 2.18) développé par [LF98]. Les fréquences à l'arrêt et les vitesses critiques mesurées expérimentalement sont en très bon accord avec les prévisions numériques appuyé-appuyé.

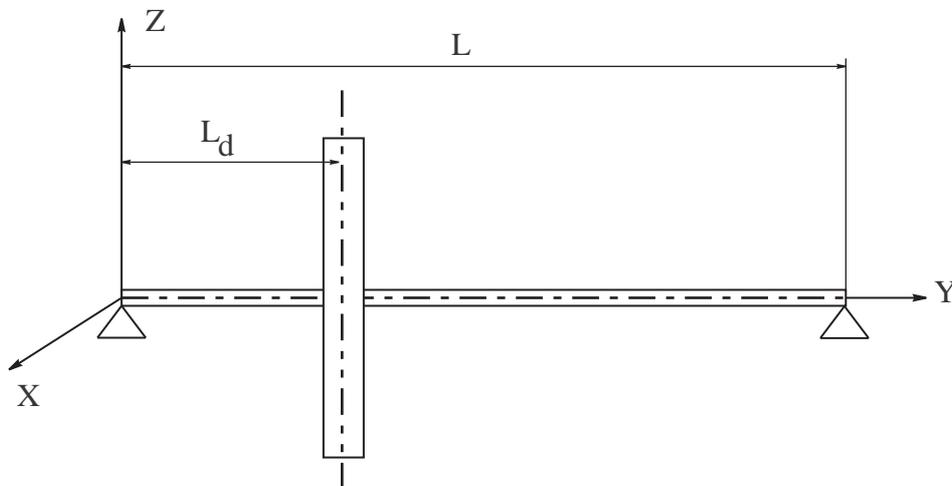


FIG. 3.18: Validation numérique des raideurs et amortissements paliers

Les roulements à bille choisis, de marque FAG, de caractéristiques 2200.2RS.TV sont des ensembles à deux rangées de billes composés de bagues extérieures massives avec chemin de roulement sphérique. Ils compensent les défauts d'alignement, les flexions de l'arbre et les déformations du logement. L'angle de rotulage est de 1.5° maximum des deux côtés et ils se prêtent aux vitesses élevées.

Le tableau suivant reprend les caractéristiques palier en raideur et en amortissement retenues pour le banc d'essai développé.

Paliers	Valeurs
Raideurs $k_{xx} = k_{zz}$	Infinie (N/m)
Amortissements Paliers $C_{xx} = C_{zz}$	0

TAB. 3.3: Caractéristiques Paliers

3.2.2.2 Caractérisation du système - Amortissement interne

Afin d'évaluer les caractéristiques d'amortissement interne des tubes considérés en Aluminium et en PVC, des essais en vibrations en conditions limites Libre-Libre ont été conduites (figure 3.19). Les différents tubes sont suspendus par des sandows dont la raideur (de l'ordre de $k = 0.003 \text{ N/m}$) reste négligeable au regard de la raideur de la structure.



FIG. 3.19: Caractérisation expérimentale de l'amortissement interne d'un arbre Aluminium

L'acquisition des fonctions de réponses fréquentielles est réalisée soit par l'intermédiaire d'un choc (excitation marteau) soit par balayage sinus. Un excitateur électromagnétique standard, ajoutant une masse ponctuelle trop importante au regard des structures testées, un capteur électro-

magnétique (utilisé seulement dans le cas du PVC) est utilisé pour réaliser une excitation sans contact.

Les figures (3.20) et (3.21) présentent des fonctions de transfert mesurées respectivement pour les tubes Aluminium et PVC.

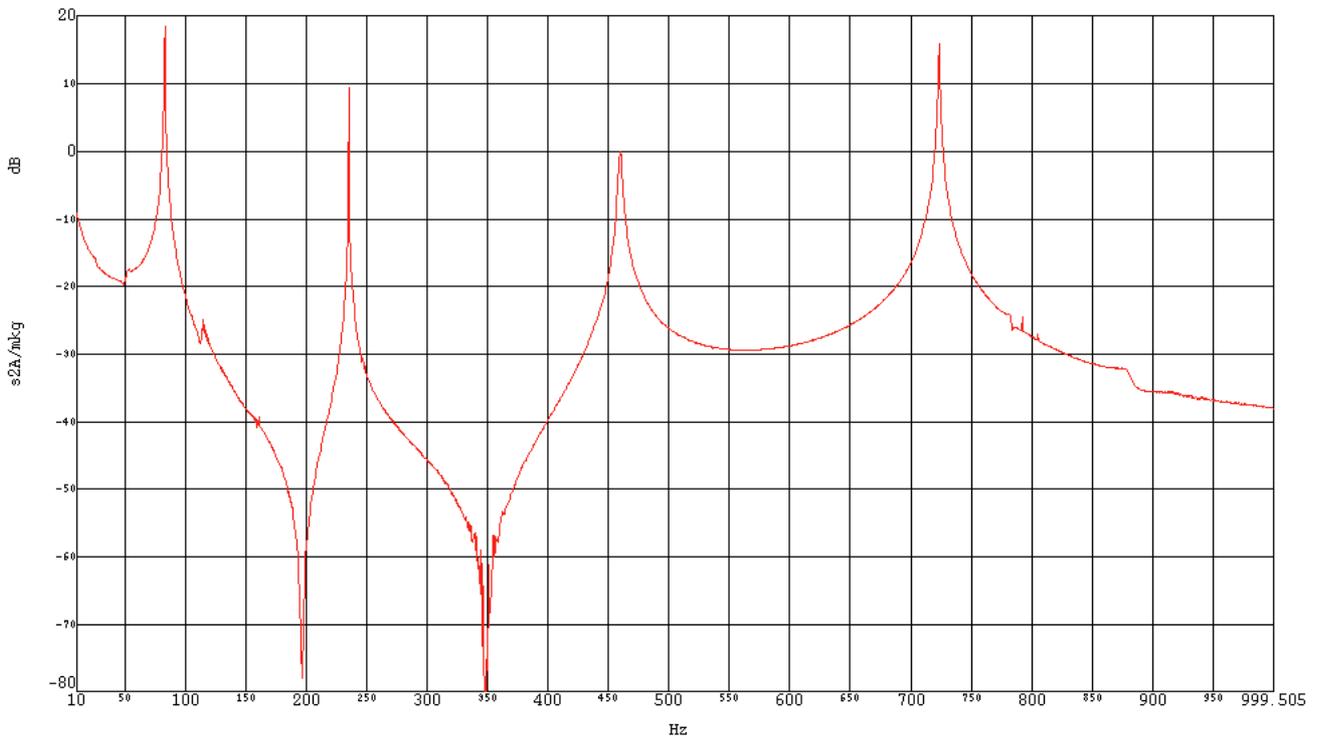


FIG. 3.20: Réponses fréquentielles d'un arbre Aluminium en Libre-Libre

3. Conception d'un banc d'essai : instabilité expérimentale

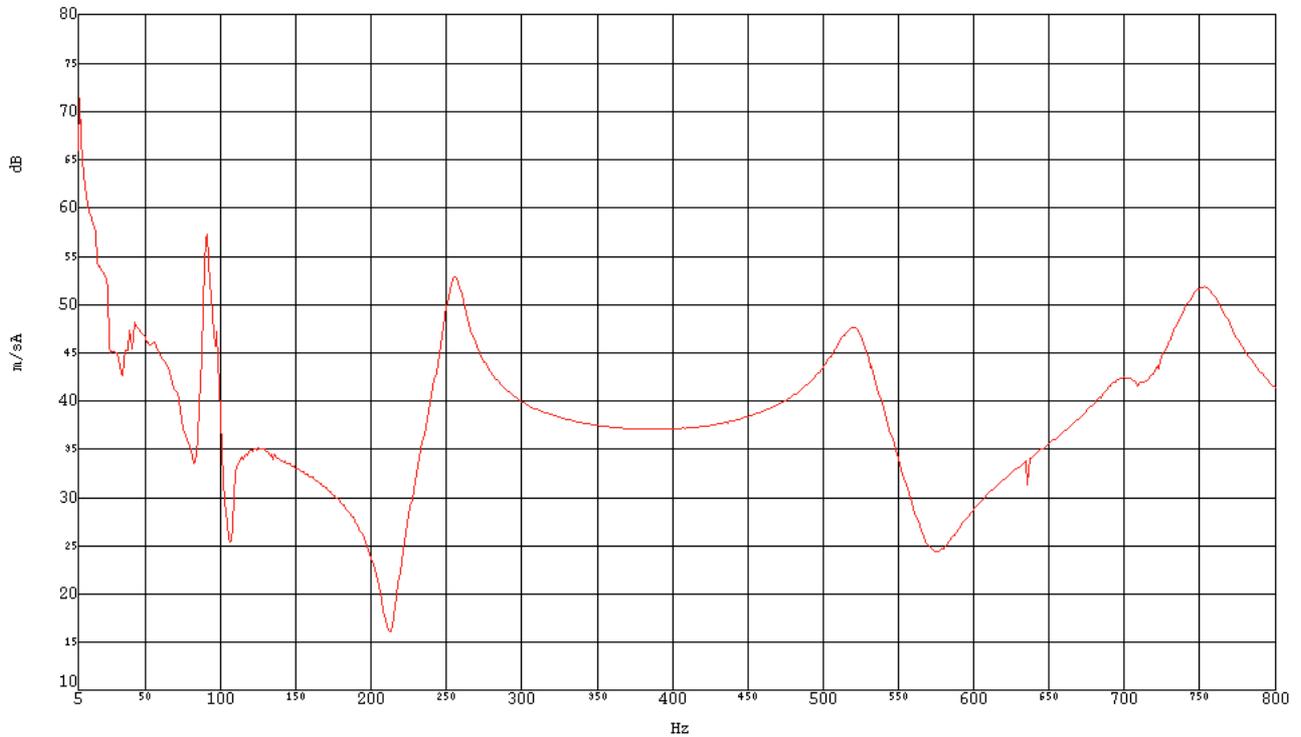


FIG. 3.21: Réponses fréquentielles d'un arbre PVC en Libre Libre

La mesure de l'amortissement est faite par la méthode de largeur de bande à $-3dB$. Les caractéristiques mesurées des tubes sont données dans les tableaux (3.4) et (3.5).

Module d'Young	E	Gpa	63.5
Masse volumique de l'arbre	ρ	Kgm^3	2740
Longueur réelle de l'arbre	L	m	1
Rayon extérieur de l'arbre	R_e	m	0.008
Rayon intérieur de l'arbre	R_i	m	0.006
Facteur d'amortissement interne	ξ_i	%	1.3

TAB. 3.4: Caractéristiques du tube en Aluminium

Les valeurs de l'amortissement interne indiquées dans ces tableaux représentent une moyenne sur les 3 ou 4 premiers modes de résonance identifiés.

Des essais dynamiques sur banc à l'arrêt, sans accouplement, ont été effectués pour chacun

Module d'Young	E	Gpa	3.02
Masse volumique de l'arbre	ρ	Kgm^3	1668
Longueur réelle de l'arbre	L	m	0.5
Rayon extérieur de l'arbre	R_e	m	0.008
Rayon intérieur de l'arbre	R_i	m	0.006
Facteur d'amortissement interne	ξ_i	%	2

TAB. 3.5: Caractéristiques du tube en PVC

des tubes. Les figures suivantes présentent respectivement les fonctions de réponses fréquentielles mesurées dans cette configuration pour le tube Aluminium et le tube PVC.

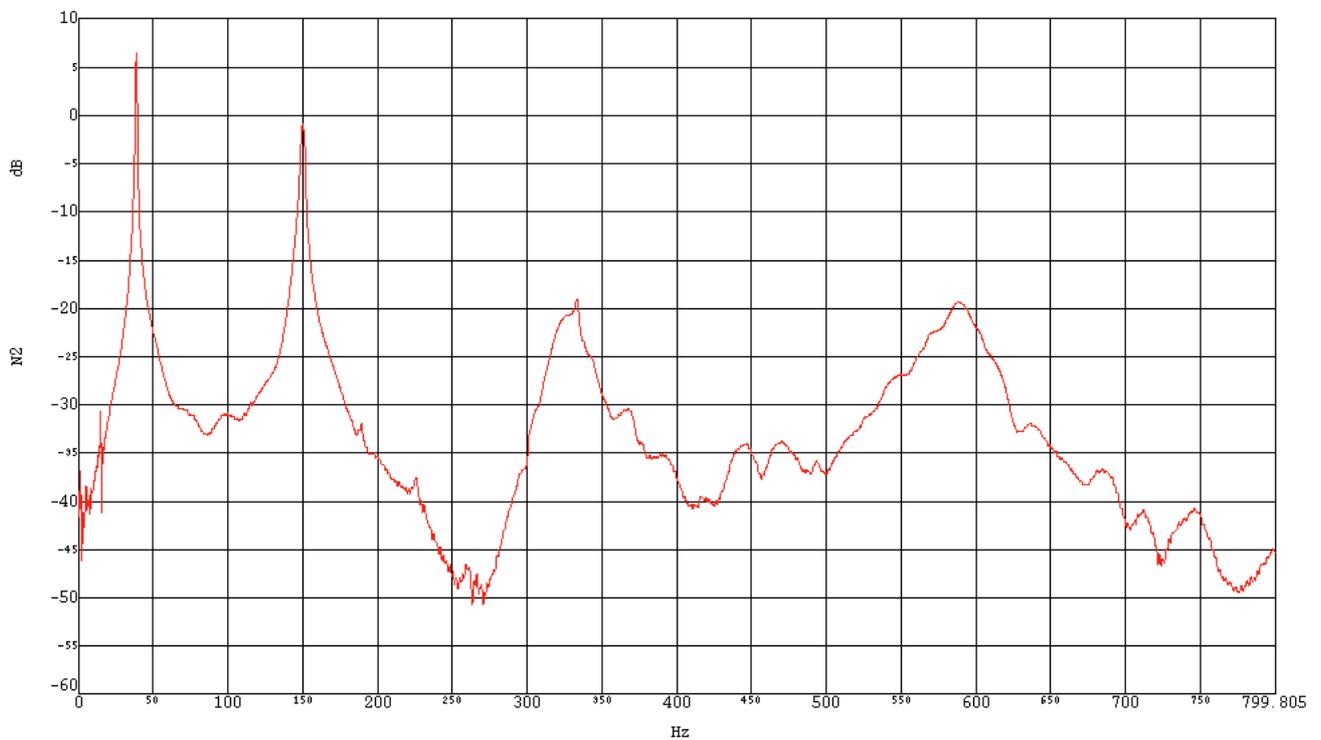


FIG. 3.22: Réponses fréquentielles d'un arbre Alu à l'arrêt sur banc

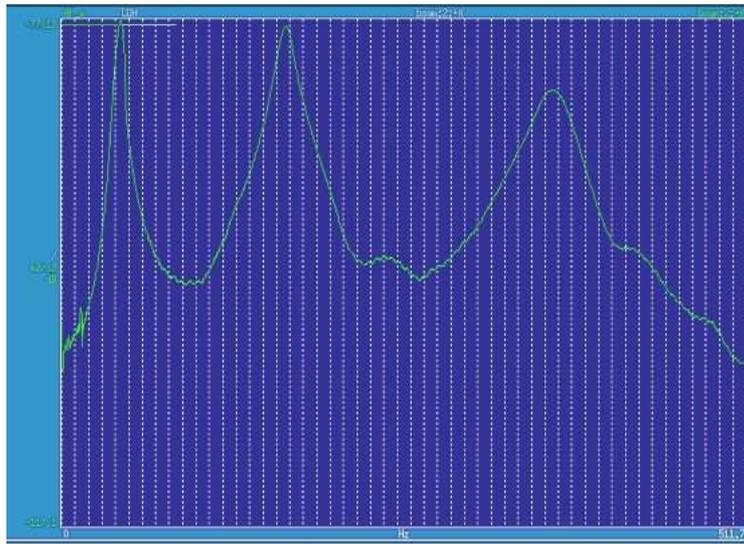


FIG. 3.23: Réponses fréquentielles d'un arbre PVC à l'arrêt sur banc

Le tableau (3.6) synthétise les valeurs de fréquences mesurées sur les tubes à l'arrêt.

Fréquences	Impact sur tube Alu avec manchons et sans accouplement	Impact sur tube pvc avec manchons et sans accouplement
F_1 (Hz)	38.9	44.3
F_2 (Hz)	150	167
F_3 (Hz)	333.2	366.8

TAB. 3.6: Fréquences propres de tubes à l'arrêt

3.2.3 Modélisation et estimation des vitesses critiques des tubes

3.2.3.1 Modélisation

Ces tests réalisés sous excitation par marteau de choc en conditions limites appuyé-appuyé servent à la définition d'un modèle éléments finis intégrant les manchons.

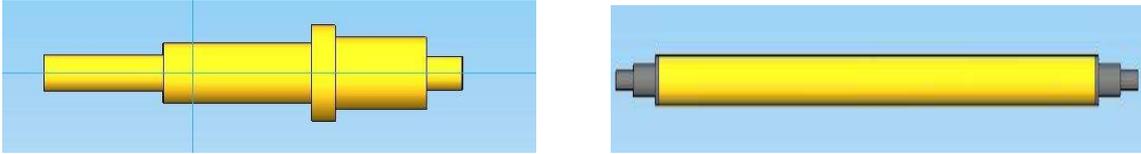


FIG. 3.24: Modèle géométrique

Le modèle numérique considère des masses volumiques estimées après pesée des tubes (tableaux (3.4) et (3.5)). Les valeurs des modules d'Young introduits correspondent à la moyenne identifiée sur les 3 premières fréquences. Une modélisation éléments finis intégrant les manchons (figure 3.16) est utilisée pour calculer les fréquences propres de l'ensemble tube manchons. Les fréquences ainsi calculées sont comparées avec celles trouvées expérimentalement tableaux (3.7 et 3.8).

Fréquences	Mesurées	Modélisées (E.F.)	Écart (%)
F_1 (Hz)	38.87	37.1	4.55
F_2 (Hz)	150	151.29	0.86
F_3 (Hz)	333.2	341.25	2.41

TAB. 3.7: Fréquences mesurées et calculées : tube Aluminium

Fréquences	Mesurées	Modélisées (E.F.)	Écart (%)
F_1 (Hz)	44.25	44.81	1.26
F_2 (Hz)	167	167.834	0.50
F_3 (Hz)	366.8	360.399	1.75

TAB. 3.8: Fréquences mesurées et calculées : tube en PVC

On constate une première corrélation numérique/expérimental satisfaisante.

3.2.3.2 Estimation des vitesses critiques

Le modèle numérique permet de tracer les diagrammes de Campbell : figure (3.25) et (3.26). Ces derniers permettent d'identifier les vitesses critiques du système.

3. Conception d'un banc d'essai : instabilité expérimentale

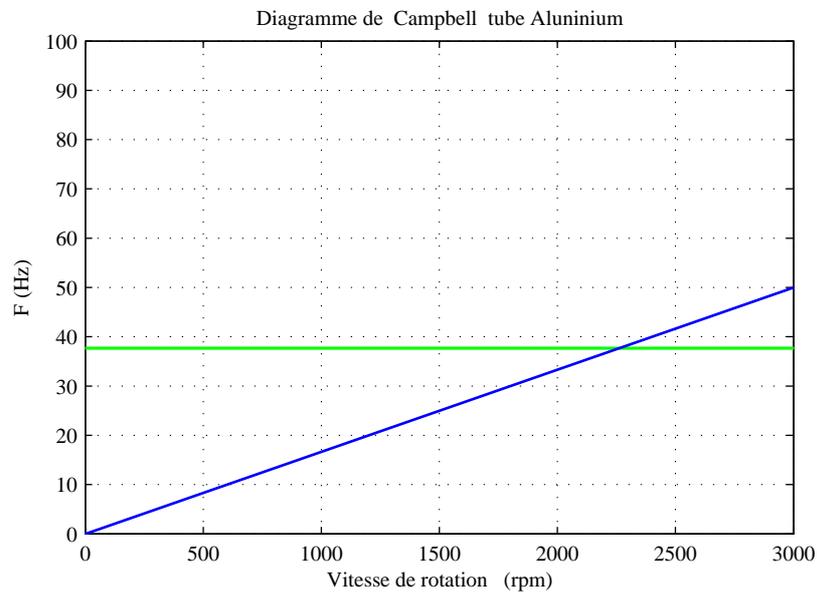


FIG. 3.25: Diagramme de Campbell : tube Aluminium

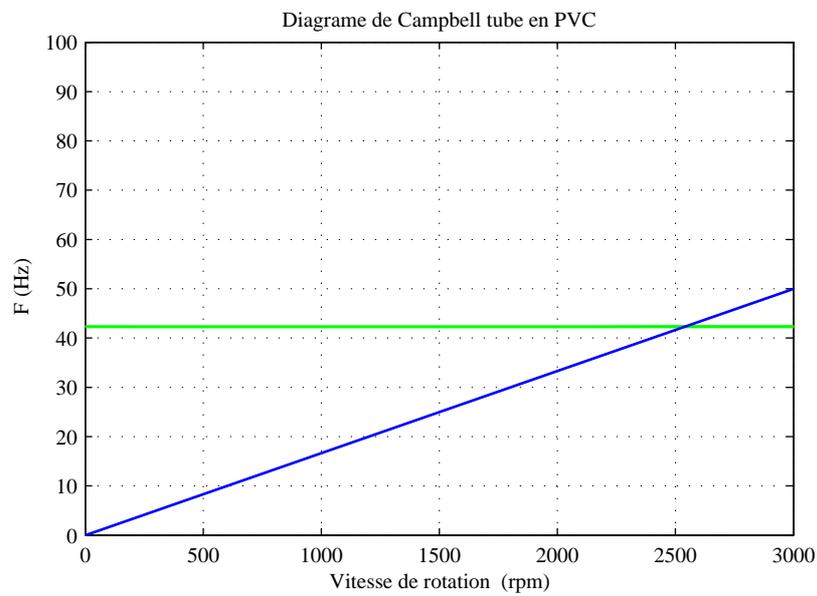


FIG. 3.26: Diagramme de Campbell : tube PVC

Le tableau 3.9 liste les valeurs des premières vitesses critiques identifiées :

Prédiction numérique	Tube Aluminium	Tube PVC
Première vitesse critique (tr/mn)	2261	2535

TAB. 3.9: Vitesses critiques

En présence du seul amortissement interne, le seuil d'instabilité correspondra à la première vitesse critique dans le cas de rotor symétrique.

3.2.4 Essai en rotation : Instabilités expérimentales

3.2.4.1 Essais en rotation et instabilités du tube Aluminium

L'acquisition des spectres de fréquences a été réalisée lors d'une montée en vitesse de 0 à 2500 tr/mn . Synchronisées sur la voie tachymétrique, les mesures ont été acquises entre 1500 et 2500 tr/mn . La figure (3.27) présente le diagramme cascade (Waterfall) obtenu. Ce diagramme présente l'évolution en amplitude des spectres d'ordre en fonction de la vitesse de rotation. L'examen montre que le système est bien principalement excité par l'ordre 1 correspondant à l'excitation balourd.

3. Conception d'un banc d'essai : instabilité expérimentale

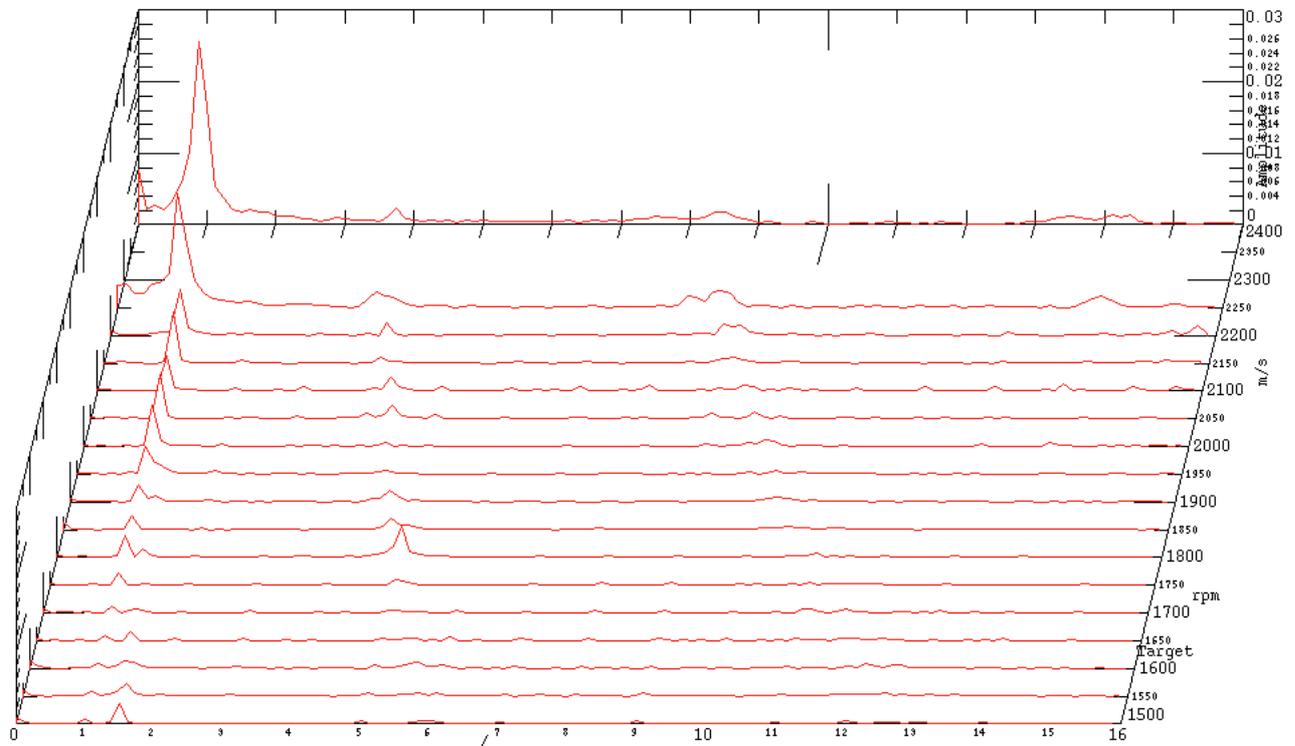


FIG. 3.27: Diagramme de Campbell expérimental : tube Aluminium

L'amplitude des réponses montre une augmentation croissante de la réponse au moment de la vitesse critique, amplitude qui ne s'affaiblit pas après passage de cette première vitesse critique située pour mémoire à 2261 (tr/mn). Une coupe à l'ordre 1 présentée figure (3.28) illustre cette croissance exponentielle de l'amplitude et illustre qualitativement le phénomène d'instabilité lié à l'amortissement interne.

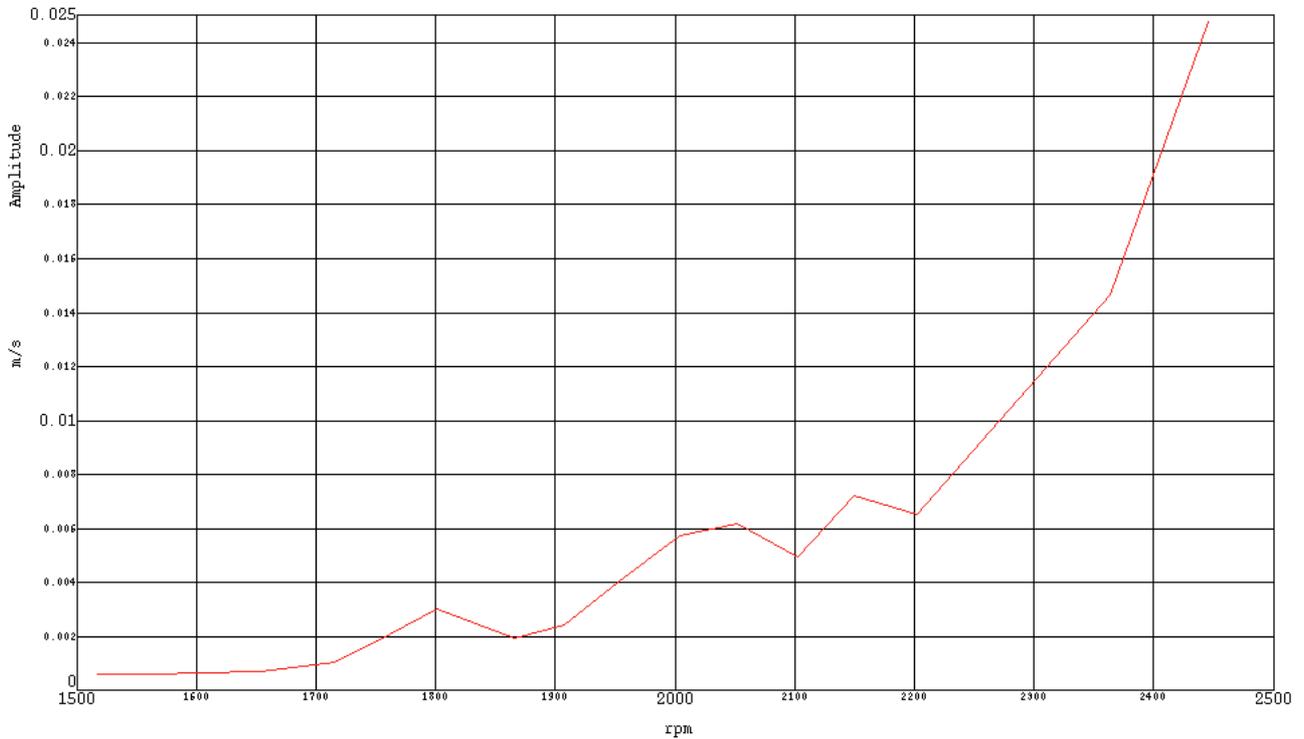


FIG. 3.28: Spectre de suivi d'ordre 1 : tube Aluminium

Il n'a pas été possible de faire croître plus avant la vitesse de rotation du tube aluminium car, lors du passage de la vitesse critique, le tube s'est fortement plastifié.

3.2.4.2 Essais en rotation et instabilités Tube en PVC

Des essais similaires ont été conduits sur un tube PVC d'une longueur de 0,5 m. La photo suivante illustre les amplitudes de vibrations (supérieures à 0,1 m) observées au passage de la vitesse critique (figure 3.29).



FIG. 3.29: Déplacement pendant une montée en vitesse

L'évolution des amplitudes à l'ordre 1 est illustrée figure (3.30).

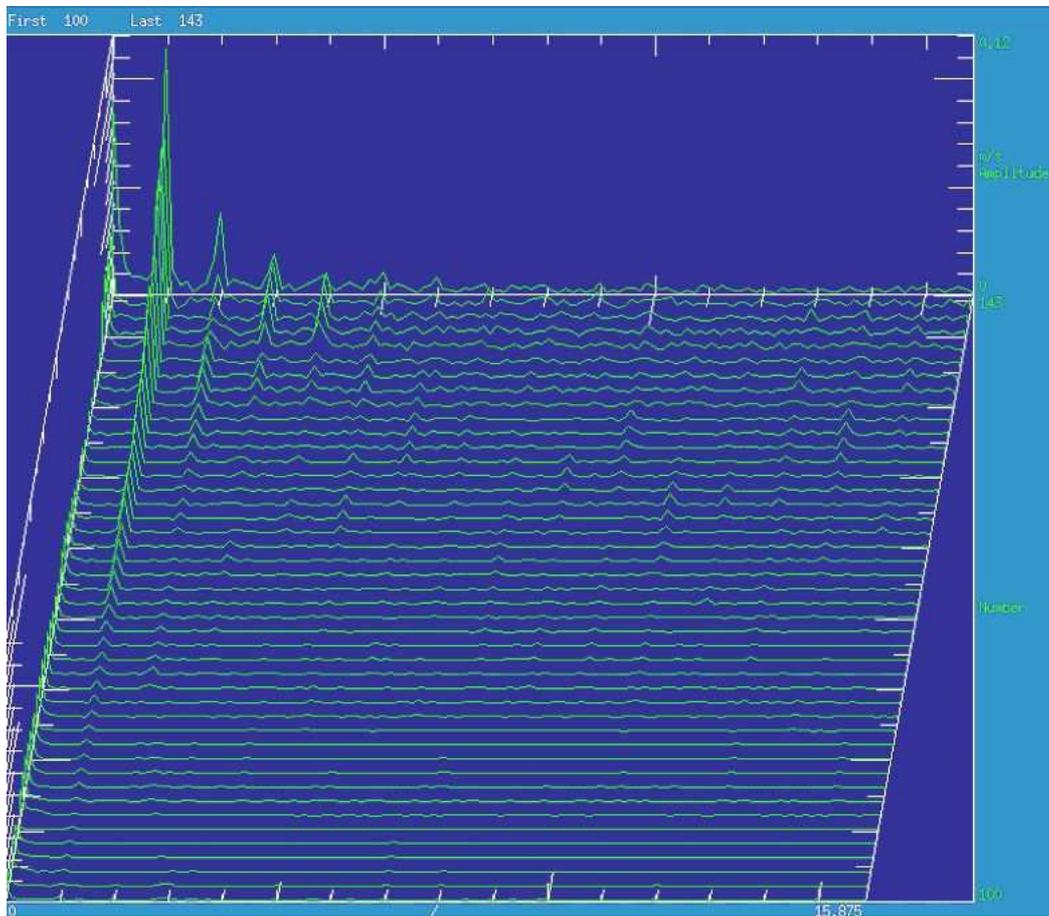


FIG. 3.30: Déplacement pendant une montée en vitesse

La vitesse critique a été atteinte plusieurs fois. Même après passage de la valeur de la vitesse critique théorique, il n'a pas été observé de stabilisation de l'amplitude.

Il est donc fort probable que les déplacements observés au passage de la vitesse critique avec le tube PVC correspondent à une croissance exponentielle des réponses, mettant en exergue le phénomène d'instabilité. Malheureusement ces essais ont été accompagnés d'une dégradation irréversible de l'accouplement comme cela est visible sur la photo (figure 3.31) puisque du fait des choix technologiques réalisés, ce dernier " encaisse " directement les déformations des tubes.

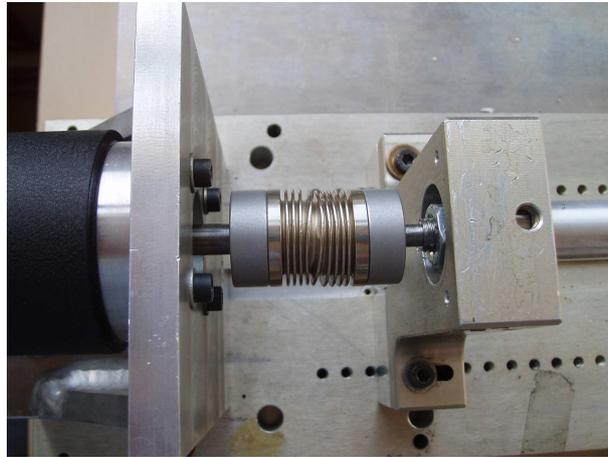


FIG. 3.31: Détérioration de l'accouplement

Ces premiers essais ont mis en évidence de manière qualitative le phénomène d'instabilité. Ils démontrent encore une fois l'importance de l'identification des amortissements pour les modèles numériques afin d'être capable de prédire avec précision les instabilités potentielles des structures en rotation. Dans la suite de cette étude, il s'agit maintenant de s'intéresser plus particulièrement à la manière de modéliser le comportement particulier des rotors composites.

Chapitre 4

Matériaux composites (rotors composites)

Grâce à leurs performances mécaniques alliées à leur légèreté, les matériaux composites peuvent remplacer avantageusement les matériaux conventionnels pour la fabrication des composants aéronautiques, aérospatiaux (avion de tourisme, réservoirs, tuyères, centrifugeuse, arbre de transmission, etc). Ce chapitre a pour l'objet de présenter une théorie d'homogénéisation simplifiée de poutre appelée SHBT (Simplified Homogenized Beam Theory) qui intègre les caractéristiques d'amortissement de chacun des plis constitutifs de l'assemblage. Pour cette approche, les caractéristiques mécaniques équivalentes d'un élément de poutre telles que la rigidité en flexion et en cisaillement sont évaluées à partir d'une formulation énergétique, qui considère le module d'Young, le module de cisaillement, la capacité d'amortissement spécifique et la distance à la fibre neutre de chaque pli. Comme démontré au chapitre 1, les théories détaillées dans la littérature présentent de nombreuses limitations ou restrictions. Dans la suite, la méthode proposée est comparée et validée à partir des travaux issus de la bibliographie [GG05].

4.1 Rotor Composite

Afin d'intégrer dans le modèle élément finis décrit chapitre 2 les caractéristiques composites, il convient de calculer les caractéristiques mécaniques homogénéisées, incluant l'amortissement interne et le cisaillement transverse. Les paragraphes suivants présentent successivement les caractéristiques du pli et ceux de la poutre composite.

4.1.1 Plan du pli

Les rotors composites sont généralement obtenus par enroulement filamentaire sur un mandrin, figure 4.1. Chaque couche de fibre peut être considérée comme un pli unidirectionnel dont la loi de comportement est orthotrope.

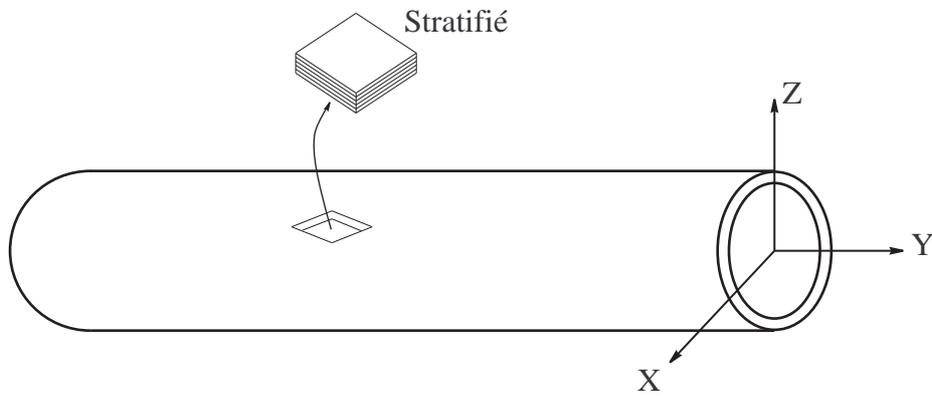


FIG. 4.1: Rotor Composite

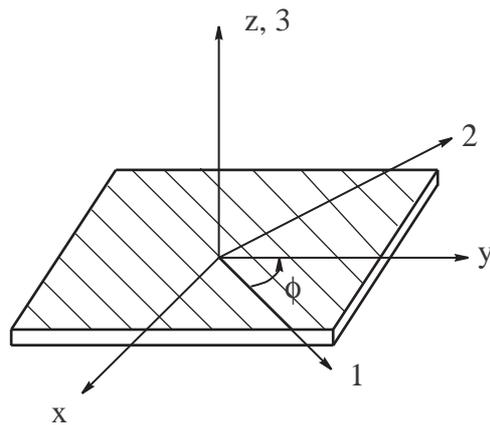


FIG. 4.2: Plan de pli

La loi de Hooke généralisée pour un matériau orthotrope s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\} \text{ ou } \{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (4.1)$$

où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont respectivement le champ de contrainte et de déformation, $[Q]$ et $[S]$ représentent les matrices de rigidité et de souplesse. Seule l'expression de la matrice de souplesse est développée ici, la matrice de rigidité étant obtenue par $[Q] = [S]^{-1}$. Dans le repère défini par les axes d'orthotropie, la loi de Hooke s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{31}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où (1, 2, 3) sont les axes d'orthotropie. 1 est la direction des fibres, 2 est la direction transversale dans le plan du pli, 3 est la direction perpendiculaire au plan du pli et ϕ est l'angle d'orientation des fibres par rapport à l'axe principal du rotor Y . Dans le cadre des plis, on considère l'hypothèse des contraintes planes ($\sigma_{33} = 0$). La relation précédente devient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

L'équation (4.3) représente les effets de membrane et l'équation (4.4) représente les effets de cisaillement transverse.

Pour chaque pli le matériau est donc défini par 6 paramètres indépendants :

- E_1 et E_2 sont les modules d'Young suivant les axes 1 et 2.
- G_{23}, G_{13} et G_{12} sont les modules de cisaillement transverse.
- ν_{12} est le coefficient de Poisson.

4. Matériaux composites (rotors composites)

Quand les effets de cisaillement transverse sont considérés, il est souvent très difficile d'obtenir une estimation des modules de cisaillement G_{23} et G_{13} , souvent ils sont approximés par la valeur de G_{12} .

Le comportement d'un matériau composite viscoélastique lors d'une excitation harmonique peut être décrit par une relation constitutive complexe :

$$\{\sigma\} = \left([Q] + j [\tilde{Q}] \right) \{\varepsilon\} \quad (4.5)$$

où j est l'unité imaginaire et $[\tilde{Q}] = [Q][\eta]$ où $[\eta]$ est la matrice des facteurs de perte du pli. Cette matrice a la forme suivante dans le cas d'un pli orthotrope :

$$[\eta]_m = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{12} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[\eta]_c = \begin{bmatrix} \eta_{23} & 0 \\ 0 & \eta_{13} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où $[\eta]_m$ et $[\eta]_c$ sont respectivement les matrices d'amortissement de membrane et en cisaillement ; η_1 , η_2 et η_{12} étant les facteurs de perte associés aux effets de membrane suivant les directions 1 et 2 et dans le plan 12 et η_{13} et η_{23} les facteurs de perte en cisaillement dans les plans 13 et 23.

Dans le cas d'un matériau composite, les propriétés dissipatives sont exprimées par la matrice de Capacité d'Amortissement Spécifique (CAS) $[\Psi]$. Le CAS est défini comme le rapport de l'énergie dissipée par unité de volume ΔW par l'énergie élastique W sous un état de contrainte et déformation donné (Zinoviev [ZE94] et [MH91]) :

$$\Psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\int_0^{\pi/2\omega} \{\varepsilon\}^t [\tilde{S}] \{\varepsilon\} dt}{\int_0^{\pi/2\omega} \{\varepsilon\}^t [S] \{\varepsilon\} dt} \quad (4.8)$$

$[\tilde{S}]$ est la matrice de souplesse amortie. Dans le repère associé aux axes d'orthotropie, la matrice de CAS s'écrit pour les effets de membrane comme suit :

$$[\Psi]_m = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

où ψ_1 , ψ_2 et ψ_{12} sont les capacités d'amortissement spécifique associées aux effets de membrane suivant les directions 1, 2 et dans le plan. Ces trois coefficients peuvent être identifiés expérimentalement. L'effet de cisaillement transverse se caractérise pour une capacité d'amortissement spécifique suivante :

$$[\Psi]_c = \begin{bmatrix} \psi_{23} & 0 \\ 0 & \psi_{13} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ψ_{13} et ψ_{23} représentent les capacités d'amortissement spécifique en cisaillement. La matrice des facteurs de perte $[\eta]$ s'écrit en fonction de celle de la capacité d'amortissement spécifique :

$$[\Psi]_m = 2\pi[\eta]_m \quad (4.11)$$

$$[\Psi]_c = 2\pi[\eta]_c \quad (4.12)$$

En conséquence, la matrice de rigidité amortie d'un matériau $[\tilde{Q}]$ s'écrit en fonction de la matrice de capacité d'amortissement spécifique :

$$[\tilde{Q}] = \frac{1}{2\pi} [Q][\Psi] \quad (4.13)$$

Toutes les équations précédentes sont écrites dans les axes d'orthotropie. Chaque pli p est positionné par un angle ϕ_p entre l'axe Y du rotor et l'axe 1 des fibres. La loi de comportement s'écrit dans le repère tournant comme suit :

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_{1,2} &= [T] \{\sigma\}_{x,y} \\ \{\varepsilon\}_{1,2} &= [T]^{-t} \{\varepsilon\}_{x,y} \\ [S]_{x,y} &= [T]^t [S]_{1,2} [T] \\ [Q]_{x,y} &= [T]^{-t} [Q]_{1,2} [T]^{-1} \\ [\tilde{Q}]_{x,y} &= [T]^{-t} [\tilde{Q}]_{1,2} [T]^{-1} \end{aligned}$$

où la matrice de transfert du repère orthotrope au repère de l'arbre $[T]$ est donnée par [Gay91] :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

avec $c = \cos(\phi_p)$ et $s = \sin(\phi_p)$. On voit alors apparaître des termes de couplage entre les effets de membrane dans les matrices $[S]_{xy}$, $[\tilde{S}]_{xy}$, $[Q]_{xy}$ et $[\tilde{Q}]_{xy}$ en conséquence dans :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & \eta_{xy}/G_{xy} \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & \mu_{xy}/G_{xy} \\ \eta_x/E_x & \mu_y/E_y & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Les effets de couplage du couplage sont identifiés dans l'expression 4.15 par les quantités η_{xy} , μ_{xy} , μ_y et η_x .

les termes de cisaillement sont liés par la relation :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Pour la suite, on écrira les expressions 4.15 et 4.16 sous la forme suivante :

$\{\varepsilon\}_m = [S]_m \{\sigma\}_m$ est la déformation de membrane et $\{\varepsilon\}_c = [S]_c \{\sigma\}_c$ est la déformation en cisaillement, où $[S]_m$, $[S]_c$ sont les matrices de souplesse de membrane et en cisaillement, et $\{\sigma\}_m$, $\{\sigma\}_c$ sont les contraintes de membrane et en cisaillement respectivement. Les expressions des termes de ces matrices sont données en Annexe G.

4.1.2 Poutre composite

Soit une poutre composite cylindriques de section circulaire constituée de n phases cylindriques de matériaux distincts, de longueur L parallèle à l'axe y (Figure 4.3).

On suppose que la poutre est soumise à un champ de forces extérieures engendrant en tout point B de la section un champ de déplacement \vec{U} avec :

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

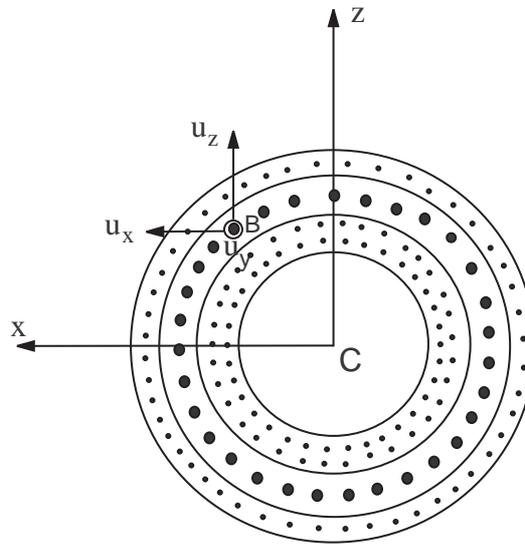


FIG. 4.3: Plan de la section

4.1.2.1 Paramètres intégraux et efforts intérieurs

Six paramètres cinématiques sont associés au centre géométrique de la poutre C : 3 translations et 3 rotations. Ces paramètres expriment des translations et des rotations de la section sous forme de moyennes pondérées.

– Paramètre de translation :

$u^*(y, t)$ est la translation "moyenne" de la section droite suivant la direction x telle que :

$$u^*(y, t) = \frac{1}{\langle G_{yx}S \rangle} \int_S G_{yx} u_x dS \quad (4.18)$$

$v^*(y, t)$ est la translation "moyenne" de la section droite suivant la direction y :

$$v^*(y, t) = \frac{1}{\langle E_y S \rangle} \int_S E_y u_y dS \quad (4.19)$$

$w^*(y, t)$ est la translation "moyenne" de la section droite suivant la direction z :

$$w^*(y, t) = \frac{1}{\langle G_{yz} S \rangle} \int_S G_{yz} u_z dS \quad (4.20)$$

– Paramètre de rotation :

4. Matériaux composites (rotors composites)

$\theta_x(y,t)$ est la rotation "moyenne" de la section droite par rapport à l'axe x :

$$\theta_x(y,t) = \frac{1}{\langle E_y I_x \rangle} \int_S E_y z u_y dS \quad (4.21)$$

$\theta_z(y,t)$ est la rotation "moyenne" de la section droite par rapport à l'axe z :

$$\theta_z(y,t) = \frac{1}{\langle E_y I_z \rangle} \int_S -E_y x u_y dS \quad (4.22)$$

– Efforts intérieurs

La poutre étudiée est en équilibre sous l'action d'un champ de forces extérieures. Si on considère une section arbitraire divisant la poutre P en deux parties, chacune de ces parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action de l'autre partie.

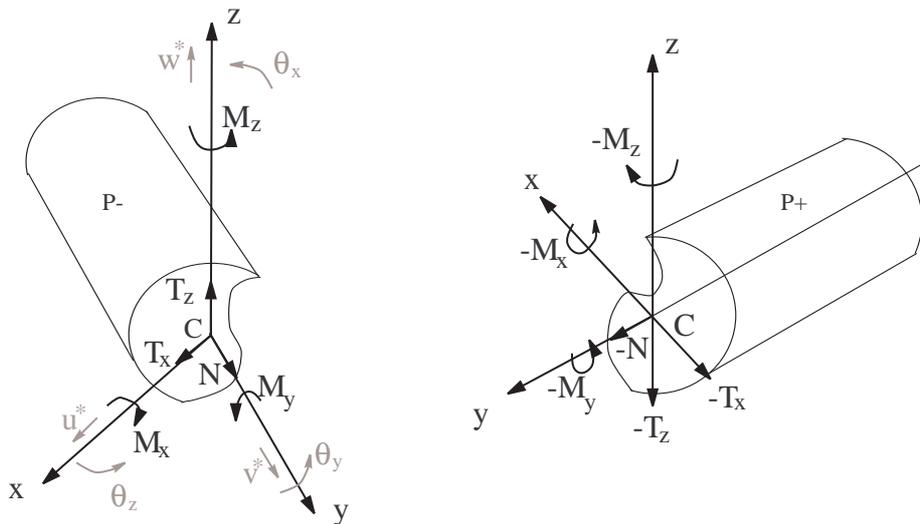


FIG. 4.4: Les efforts d'équilibre de la poutre

Le tenseur des efforts intérieurs créé au centre élastique C de la poutre P représente l'action de la partie $P+$ sur la partie $P-$. Il équilibre chaque partie de poutre sous l'action des efforts extérieurs. Le tenseur classique $f(C, \vec{F}, \vec{M})$ est donné par :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} T_x \\ N \\ T_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

avec :

- N effort normal
- M_x moment de flexion par rapport à l'axe x ,
- M_y moment de torsion par rapport à l'axe y ,
- M_z moment de flexion par rapport à l'axe z ,
- T_x effort tranchant suivant la direction x ,
- T_z effort tranchant suivant la direction z ,

4.1.3 Flexion d'une poutre composite

Dans cette partie nous considérons un cas de charge n'engendrant que des sollicitations de flexion pure au niveau de la section (figure 4.5). En se basant sur la même formulation des paramètres intégraux que précédemment définis et en tenant compte du gauchissement de la section droite dû à la flexion, le champ de déplacement engendré par des sollicitations de flexion sera écrit en détaillant le rôle de chacune de ces composantes. Nous écrirons ensuite les tenseurs des contraintes et des déformations résultants. On se base ici sur les travaux présentés par Gay et Nouri dans ([Gay91], [NG94] et [Nou93]).

4.1.3.1 Champ de déplacements

Soit le champ de déplacements tridimensionnels comme la superposition d'un champ unidirectionnel de corps rigide construit sur les paramètres intégraux, complété par des écarts tridimensionnels qui présentent les gauchissements de la section droite initialement plane. La démarche est utilisée pour la flexion simple pour une poutre appuyée-appuyée (déplacement axial nul). Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\vec{U}_B = \begin{cases} u_x(x, y, z, t) = u^* + \eta_x \\ u_y(x, y, z, t) = x\theta_z - z\theta_x + \eta_y \\ u_z(x, y, z, t) = w^* + \eta_z \end{cases} \quad (4.24)$$

Le gauchissement de la section droite engendré par la flexion se décompose en trois termes :

- $\eta_x(x, y, z, t)$ est le gauchissement de la section droite exprimant un déplacement dans son plan initial suivant la direction x .
- $\eta_y(x, y, z, t)$ est le gauchissement supplémentaire dû aux effets des efforts tranchants, traduisant un déplacement suivant la direction y .
- $\eta_z(x, y, z, t)$ est le gauchissement de la section droite exprimant un déplacement dans son plan initial suivant la direction z .

En supposant les hypothèses suivantes :

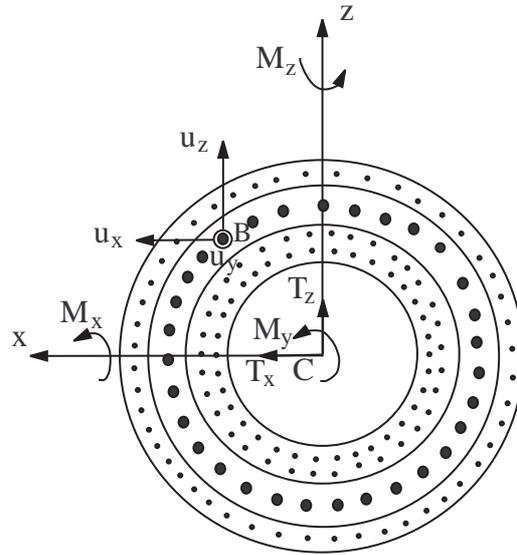


FIG. 4.5: Plan de la section en flexion

- La définition des paramètres intégraux implique des conditions d'orthogonalité et d'unicité sur le gauchissement, celles-ci s'écrivent :

$$\begin{cases} \int_D E_y \eta_y ds = 0 \\ \int_D E_y z \eta_y ds = 0 \\ \int_D E_y x \eta_y ds = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

- Le gauchissement hors axe longitudinal est négligé donc $\eta_x = 0, \eta_z = 0$ donc l'équation (4.25) devient :

$$\vec{U}_B = \begin{cases} u_x(x, y, z, t) = u^* \\ u_y(x, y, z, t) = x\theta_z - z\theta_x + \eta_y \\ u_z(x, y, z, t) = w^* \end{cases} \quad (4.26)$$

4.1.3.2 Tenseur de déformation

Le tenseur de déformation résultant du champ de déplacement \vec{U}_B s'écrit :

$$[\varepsilon] = \begin{cases} \varepsilon_{yy} = x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x + \frac{\partial \eta_y}{\partial z} + \frac{\partial \eta_z}{\partial y} \\ \gamma_{yx} = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z + \frac{\partial \eta_y}{\partial x} + \frac{\partial \eta_x}{\partial y} \end{cases} \quad (4.27)$$

On néglige la variation du gauchissement entre deux sections infiniment voisines pour calculer les contraintes normales et le cisaillement transverse, donc cette hypothèse implique de négliger les termes en $\frac{\partial \eta_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta_z}{\partial y}$ et $\frac{\partial \eta_x}{\partial y}$ dans les expressions des contraintes.

4.1.3.3 Tenseur de contrainte

La loi de Hooke généralisée permet d'écrire les contraintes en fonction des composantes du tenseur des déformations, soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= E_y \left(x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} &= G_{yz} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x + \frac{\partial \eta_y}{\partial z} \right) \\ \tau_{yx} &= G_{yx} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z + \frac{\partial \eta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans cette expression on néglige les effets de couplage induits par l'angle d'orientation des axes d'orthotropie par rapport à l'axe du rotor y.

4.1.3.4 Relation de comportement

Les éléments de réduction du tenseur des efforts internes associés au centre élastique de la section sont définis par les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} T_x &= \int_S \tau_{yx} ds \\ T_z &= \int_S \tau_{yz} ds \\ M_x &= \int_S z \sigma_{yy} ds \\ M_z &= \int_S -x \sigma_{yy} ds \end{aligned} \quad (4.29)$$

En remplaçant les contraintes par leurs expressions données dans l'équation (4.28) :

$$\begin{cases} T_x = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z\right) \langle G_{yx} \mathcal{S} \rangle + \int_S \left[G_{yx} \frac{\partial \eta_y}{\partial x} \right] dS \\ T_z = \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x\right) \langle G_{yz} \mathcal{S} \rangle + \int_S \left[G_{yz} \frac{\partial \eta_y}{\partial z} \right] dS \\ M_x = \langle E_y I_x \rangle \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ M_z = \langle E_y I_z \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{cases} \quad (4.30)$$

le problème élastique tridimensionnel est ramené à un problème unidimensionnel gouverné par le tenseur des déplacements et le tenseur des efforts internes.

Le gauchissement η_y est exprimé en fonction des efforts tranchants et de deux fonctions $g(x, z)$ et $h(x, z)$ caractérisant le gauchissement dans le plan (y, x) et (y, z) , soit :

$$\eta_y = g(x, z) \frac{T_x}{\langle GS \rangle} + h(x, z) \frac{T_z}{\langle GS \rangle} \quad (4.31)$$

En remplaçant η_y par sa nouvelle expression dans les relations précédentes (équation 4.30), nous obtenons alors une formulation fonction des éléments de réduction du tenseur des déplacements et des caractéristiques mécaniques homogénéisées de la section :

$$\begin{cases} T_x = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z\right) \langle G_{yx} \mathcal{S} \rangle + \int_S G_{yx} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{T_x}{GS} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{T_z}{GS} \right) \\ T_z = \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x\right) \langle G_{yz} \mathcal{S} \rangle + \int_S G_{yz} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \frac{T_x}{GS} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{T_z}{GS} \right) \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} T_x = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z\right) \langle G_{yx} \mathcal{S} \rangle + \frac{G_{yx}}{GS} T_x \int_D \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{G_{yx}}{GS} T_z \int_S \frac{\partial h}{\partial x} \\ T_z = \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x\right) \langle G_{yz} \mathcal{S} \rangle + \frac{G_{yz}}{GS} T_x \int_D \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{G_{yz}}{GS} T_z \int_S \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\begin{cases} K_{c_{xx}} T_x + K_{c_{zx}} T_z = \langle G_{yx} \mathcal{S} \rangle \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z \right) \\ K_{c_{xz}} T_x + K_{c_{zz}} T_z = \langle G_{yz} \mathcal{S} \rangle \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x \right) \\ M_x = \langle E_y I_x \rangle \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ M_z = \langle E_y I_z \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{cases} \quad (4.34)$$

avec : $\langle GS \rangle = \sqrt{\langle GS_{yx} \rangle \langle GS_{yz} \rangle}$, $G_{yz} = G_{yx} = G_{lt}$ donc : $\langle GS \rangle = G_{lt} S$. Par hypothèse : $K_{c_{xz}} = 0$ et $K_{c_{zx}} = 0$. Pour plus de détail voir [Nou93] et [Gay91].

4.1.3.5 Équilibre global

Ce sont les relations d'équilibre obtenues par intégration des relations d'équilibre local sur le domaine de la section droite. Elles se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial y} - T_z = 0 \\ \frac{\partial M_z}{\partial y} + T_x = 0 \end{array} \right. \quad (4.35)$$

4.1.3.6 Équilibre local

La contrainte normale σ_{yy} , équation (4.28), s'exprime alors comme suit, en tenant compte des relations (4.34) :

$$\sigma_{yy} = -\frac{E_y M_z}{\langle E_y I_z \rangle} x + \frac{E_y M_x}{\langle E_y I_x \rangle} z \quad (4.36)$$

L'équilibre local en tout point B de la section s'écrit en l'absence de forces de volume :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.37)$$

En remplaçant les contraintes par leurs expressions (4.28) et tenant compte de l'équation (4.31), cette quantité permet après calcul d'écrire les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^t [G] \nabla g + \frac{E_y \langle GS \rangle}{\langle E_y I_z \rangle} x + x K_{c_{xx}} G_{yx} = 0 \\ \nabla^t [G] \nabla h + \frac{E_y \langle GS \rangle}{\langle E_y I_x \rangle} z + z K_{c_{zz}} G_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Ces équations se simplifient en prenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0 = g + K_{c_{xx}} x \\ h_0 = h + K_{c_{zz}} z \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Nous définissons ainsi de nouvelles fonctions de gauchissement g_0 et h_0 , qui sont solutions des deux problèmes d'équations aux dérivées partielles de type Laplace-Poisson avec des conditions aux limites mixtes.

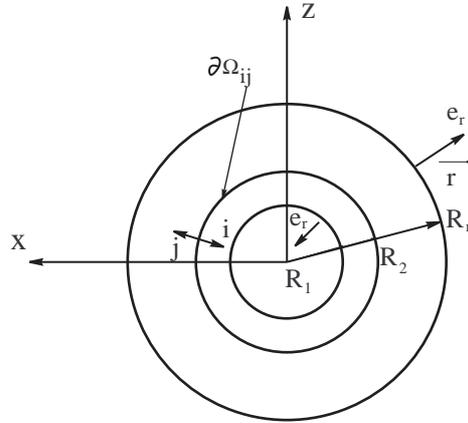


FIG. 4.6: Interface entre deux matériaux

Les conditions d'unicité du gauchissement η_y , liées à la définition des paramètres intégraux, impliquent des conditions d'unicité sur les fonctions de gauchissement de flexion h_0 et g_0 (voir Nouri [NG94]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^t ([G] \nabla g_0) = -\frac{E_y \langle GS \rangle}{\langle E_y I_z \rangle} x \\ [G] \nabla g_0 n = 0 \text{ sur } r = R_1 \text{ et } r = R_n \\ g_{0_p} = g_{0_{p+1}} \text{ sur } \partial\Omega_{ij} \\ [[G]_p \nabla g_p - [G]_{p+1} \nabla g_{p+1}] \vec{n} = 0 \\ \int_S E_y g_0 dS = 0 \text{ sur } S \end{array} \right. \quad (4.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^t ([G] \nabla h_0) = -\frac{E_y \langle GS \rangle}{\langle E_y I_x \rangle} z \\ [G] \nabla h_0 n = 0 \text{ sur } r = R_1 \text{ et } r = R_n \\ h_{0_p} = h_{0_{p+1}} \text{ sur } \partial\Omega_{ij} \\ [[G]_p \nabla h_p - [G]_{p+1} \nabla h_{p+1}] \vec{n} = 0 \\ \int_S E_y h_0 dS = 0 \text{ sur } S \end{array} \right. \quad (4.41)$$

4.1.3.7 Coefficients de cisaillement

Ces coefficients apparaissent dans les relations de comportement : équation (4.34). Ils s'expriment au moyen des fonctions de gauchissement g_0 et h_0 donnés équation (4.39). Leurs expressions sont obtenues à partir des conditions d'orthogonalités (équation (4.25)) sur le gauchissement longitudinal η_y écrit suivant l'équation (4.31). On obtient après calcul :

$$\begin{cases} K_{c_{xx}} = \frac{1}{E_y I_z} \int_S E_y g_0 x dS \\ K_{c_{zz}} = \frac{1}{E_y I_x} \int_S E_y h_0 z dS \end{cases} \quad (4.42)$$

Ces coefficients caractérisent les relations de comportement liées à l'effort tranchant. Ils sont adimensionnels et dépendent de la géométrie de la section des matériaux constitutifs.

Les problèmes aux limites précédents sont résolus par la méthode des éléments finis avec le logiciel Comsol (figure 4.7).

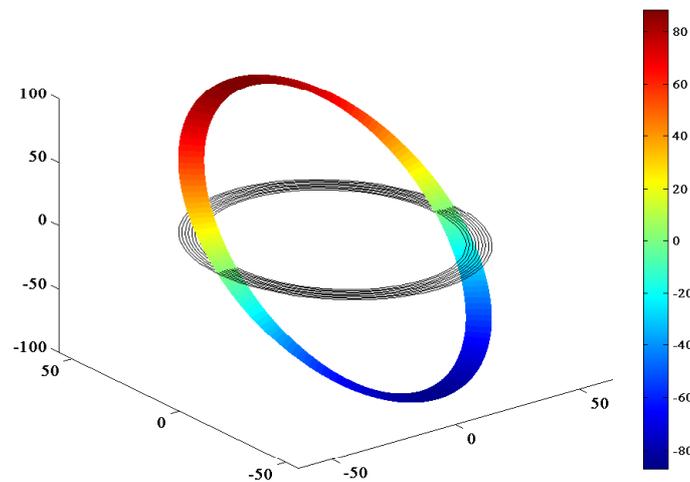


FIG. 4.7: Cisaillement transverse

Les propriétés élastiques et d'amortissement du pli sont maintenant établies. Le paragraphe suivant présente la formulation employée pour déterminer les énergies de déformation et le travail virtuel dû aux effets dissipatifs.

4.2 Expressions des énergies

On considère un rotor composite constitué de N couches de matériau orthotrope. Si la séquence d'empilement est symétrique le rotor présente un comportement typique de poutre et il peut être modélisé par la théorie classique associée aux paramètres d'amortissement homogénéisés. Si l'empilement est non-symétrique, les effets de couplage mécaniques tels que flexion-extension, torsion-extension et cisaillement-extension apparaissent. Dans cette étude, on négligera ces effets de couplage.

Soit un élément poutre représentant le rotor (figure 2.23), dont les champs de déplacement et de déformation sont donnés par les équations (2.8 et 2.9, chapitre 2). D'après la théorie des poutres, pour chaque pli p de la section, la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\{\sigma\}^p = \begin{cases} \sigma_{yy}^p = E_y^p \varepsilon_{yy} + \tilde{E}_y^p \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \tau_{yz}^p = G_{yz}^p \gamma_{yz} + \tilde{G}_{yz}^p \dot{\gamma}_{yz} \\ \tau_{yx}^p = G_{yx}^p \gamma_{yx} + \tilde{G}_{yx}^p \dot{\gamma}_{yx} \end{cases} \quad (4.43)$$

E_y^p , G_{yz}^p et G_{yx}^p sont respectivement le module d'Young et les modules de cisaillement transverses, et \tilde{E}_y^p , \tilde{G}_{yz}^p et \tilde{G}_{yx}^p sont les modules liés à l'amortissement, pour une couche p , suivant l'axe du rotor y . σ_{yy}^p et $\tilde{\sigma}_{yy}^p$ représentent les contraintes dans la section normale, τ_{yz}^p , $\tilde{\tau}_{yz}^p$ et τ_{yx}^p , $\tilde{\tau}_{yx}^p$ sont les contraintes dues au cisaillement transverse. On rappelle que les effets de couplage induits par une séquence d'empilement non-symétrique ont été négligés.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S (\sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{yx} \gamma_{yx}) dS dy \quad (4.44)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_S (\tilde{\sigma}_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tilde{\tau}_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tilde{\tau}_{yx} \delta \gamma_{yx}) dS dy \quad (4.45)$$

Les expressions de l'énergie potentielle et du travail virtuel (équations 4.44 et 4.45) peuvent s'écrire en fonction des efforts tranchants et des moments de flexion ([Gay91] et [NG94]) après avoir intégré sur la section comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{M_x^2}{\langle EI_x \rangle} + \frac{M_z^2}{\langle EI_z \rangle} + K_{c_{xx}} \frac{T_x^2}{\langle GS \rangle} + K_{c_{zz}} \frac{T_z^2}{\langle GS \rangle} \right] dy \quad (4.46)$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{\tilde{M}_x \delta \tilde{M}_x}{\langle \tilde{EI}_x \rangle} + \frac{\tilde{M}_z \delta \tilde{M}_z}{\langle \tilde{EI}_z \rangle} + K_{c_{xx}} \frac{\tilde{T}_x \delta \tilde{T}_x}{\langle \tilde{GS} \rangle} + K_{c_{zz}} \frac{\tilde{T}_z \delta \tilde{T}_z}{\langle \tilde{GS} \rangle} \right] dy \quad (4.47)$$

Les caractéristiques mécaniques homogénéisées qui apparaissent dans les équations 4.46 et

4.47 sont données par :

$$\begin{aligned}
 \langle EI_x \rangle &= \int_S E_y^p z^2 dS = \sum_{p=1}^N E_y^p I_x^p \quad \text{avec } I_x^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \\
 \langle EI_z \rangle &= \int_S E_y^p x^2 dS = \sum_{p=1}^N E_y^p I_z^p \quad \text{avec } I_z^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \\
 \langle GS \rangle &= G_{yz} \int_S dS = G_{yx} \int_S dS = \sum_{p=1}^N G_{12}^p S^p
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Les caractéristiques mécaniques homogénéisées amorties s'écrivent quant à elles :

$$\begin{aligned}
 \langle \widetilde{EI}_x \rangle &= \int_S \widetilde{E}_y^p z^2 dS = \sum_{p=1}^N \widetilde{E}_y^p I_x^p \quad \text{avec } I_x^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \\
 \langle \widetilde{EI}_z \rangle &= \int_S \widetilde{E}_y^p x^2 dS = \sum_{p=1}^N \widetilde{E}_y^p I_z^p \quad \text{avec } I_z^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \\
 \langle \widetilde{GS} \rangle &= \widetilde{G}_{yz} \int_S dS = \widetilde{G}_{yx} \int_S dS = \sum_{p=1}^N \widetilde{G}_{12}^p S^p
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

où I^p est la contribution du pli p à l'inertie de la section et R_p, R_{p-1} est le rayon externe et interne du pli p .

Les efforts tranchants et les moments de flexion amortis s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = \frac{1}{K_{c_{xx}}} \langle GS \rangle \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z \right) \\ T_z = \frac{1}{K_{c_{zz}}} \langle GS \rangle \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x \right) \\ M_x = \langle EI_x \rangle \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ M_z = \langle EI_z \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{array} \right. \tag{4.50}$$

Avec les caractéristiques mécaniques homogénéisées amorties l'équation 4.50 devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{T}_x = \frac{1}{K_{c_{xx}}} \langle \widetilde{GS} \rangle \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \theta_z \right) \\ \widetilde{T}_z = \frac{1}{K_{c_{zz}}} \langle \widetilde{GS} \rangle \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \theta_x \right) \\ \widetilde{M}_x = \langle \widetilde{EI}_x \rangle \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \widetilde{M}_z = \langle \widetilde{EI}_z \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{array} \right. \tag{4.51}$$

Donc, l'énergie potentielle et le travail virtuel peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_x \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + EI_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 \right) dy \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{GS}{K_{c_{xx}}} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{GS}{K_{c_{zz}}} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_0^L \left(\widetilde{EI}_x \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \widetilde{EI}_z \frac{\partial \dot{\theta}_z}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) dy \\
 &+ \int_0^L \left[\kappa_x \widetilde{GS} \left(-\dot{\theta}_x + \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} \right) \left(-\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w^*}{\partial y} \right) \right] dy \\
 &+ \int_0^L \left[\kappa_z \widetilde{GS} \left(\dot{\theta}_z + \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y} \right) \left(\delta \theta_z + \frac{\partial \delta u^*}{\partial y} \right) \right] dy
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= \frac{1}{K_{c_{xx}}} \\
 \kappa_z &= \frac{1}{K_{c_{zz}}}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

où κ est le facteur correcteur de cisaillement.

La section du rotor est circulaire donc l'inertie homogénéisée en flexion est $EI = EI_x = EI_z$ et l'inertie homogénéisée amortie $\widetilde{EI} = \widetilde{EI}_x = \widetilde{EI}_z$.

4.3 Application : rotor composite

4.3.1 Comparaison des vitesses critiques sans amortissement interne

Dans cet exemple nous considérons un rotor étudié par Zinberg et Symmonds [ZS70] en 1970 et récemment repris par Gubran et Gupta dans le [GG05]. La fréquence naturelle fondamentale obtenue dans ce travail est comparée à la valeur expérimentale et à celles obtenues en employant les méthodes *EMBT*, *EMBT* modifiée et *LBT*. La géométrie et les propriétés du matériau du rotor sont :

- $L=2.47$ m, rayon moyen= 0.0635 m, Épaisseur de paroi= 1.321×10^{-3} m ;
- 10 couches d'une épaisseur identique présentées de l'intérieur vers l'extérieure $[90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, [0^\circ]_6, 90^\circ]$;
- $\rho = 1967 \text{ kg/m}^3$;
- $E_{11} = 210 \text{ GPa}$, $E_{22} = 24.1 \text{ GPa}$, $G_{12} = 6.9 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.36$.

Les vitesses critiques obtenues par différents investigateurs employant différentes méthodes sont présentées dans le tableau (4.1). Elles sont comparées à la vitesse critique expérimentale

Investigateur	Vitesse critique (rev/min)	Méthode
Zinberg et Symmonds [ZS70]	5500	Expérimental
	5780 (5.09 %)	EMBT (Equivalent Modulus Beam Theory)
Singh et Gupta [SG96a]	5620 (2.18 %)	LBT (Layerwise Beam Theory) avec l'effet de cisaillement
Chen et Peng [CP98]	5714 (3.89 %)	
Gubran and Gupta [GG05]	5555 (1.00 %)	LBT (Layerwise Beam Theory) sans effet de Poisson
	5552 (0.94 %)	EMBT Modifié (Modified Equivalent Modulus Beam Theory) avec effet de Poisson
Travail actuel	5767 (4.85 %)	SHBT (Simplified Homogenized Beam Theory) sans effet de cisaillement
	5435 (1.18 %)	SHBT (Simplified Homogenized Beam Theory) avec effet de cisaillement (facteur correcteur de cisaillement $k = 0.4983$)

TAB. 4.1: Comparaison des vitesses critiques obtenues par différents investigateurs en utilisant les différentes formulations avec celles obtenues dans ce travail ; L'erreur indiquée dans la table se réfère à la vitesse critique expérimentale.

obtenue par Zinberg et Symmonds dans le [ZS70]. Il s'avère que la plus grande erreur est celle obtenue par la méthode d'EMBT. Les meilleurs résultats sont ceux obtenus par le travail actuel et les méthodes EMBT modifiée et LBT présentés par Gubran et Gupta dans [GG05].

La vitesse critique obtenue par la méthode de SHBT avec prise en compte du cisaillement transverse est conforme à celle de la littérature : numérique et expérimentale.

4.3.2 Comparaison des fréquences naturelles et des seuils d'instabilité avec la prise en compte de l'amortissement interne

Dans cet exemple, nous étudions l'influence de l'amortissement interne dû au matériau sur le seuil d'instabilité. Nous considérons la structure, proposée par Pereira [PS02a] qui est un arbre composite avec deux disques rigides en acier, supportée par deux paliers à ses extrémités (figure 4.8). Il a la géométrie et les propriétés du matériau suivants :

- Rotor : $L = 1.2m$, $R_o = 0.048m$, $e = 0.008m$
- Disque : $R_{d_{int}} = 0.048m$, $R_{d_{ext}} = 0.15m$, $h = 0.05m$
- Composite : 8 couches en carbone/époxy

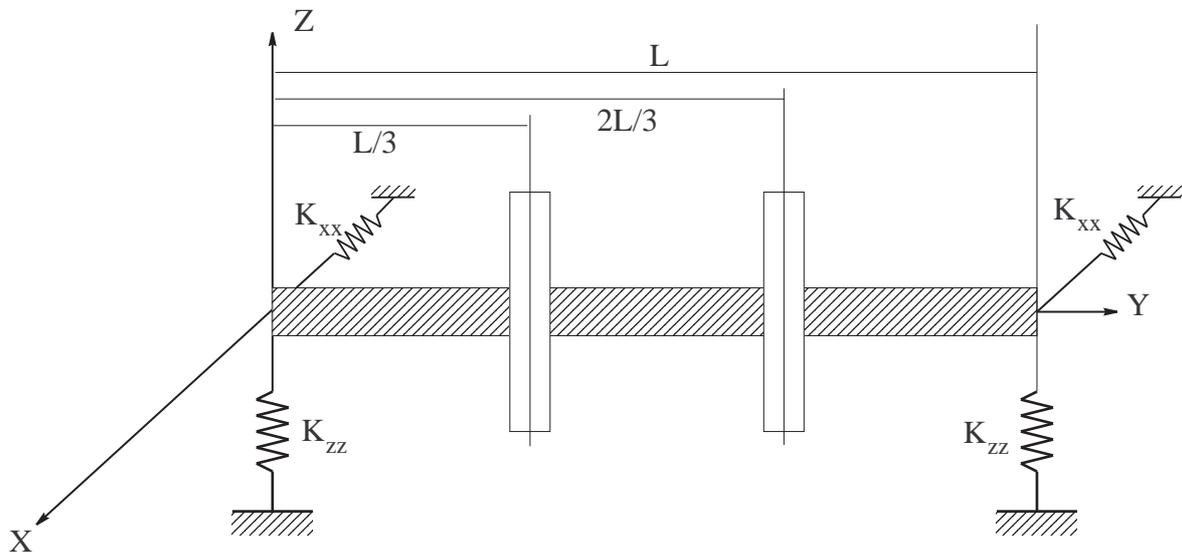


FIG. 4.8: Rotor composite avec deux disques.

Les propriétés des matériaux pour chaque couche (carbone/époxy) sont données dans le tableau (4.2) et les caractéristiques mécaniques des paliers anisotropes sont indiquées dans le tableau (4.3). Il est supposé ici que les paliers n'apportent pas d'amortissement (externe).

Matériau	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{21}	ρ (kg/m ³)	ψ_1 %	ψ_2 %	ψ_{12} %
Carbone/époxy	172.7	7.20	3.76	0.3	1446.2	0.45	4.22	7.05

TAB. 4.2: Matériau de l'arbre

	K_{xx} (N/m)	K_{zz} (N/m)	K_{xz} (N/m)	K_{zx} (N/m)
Paliers anisotropes	1.10^7	1.10^8	0	0

TAB. 4.3: Les caractéristiques des paliers : rigidité et amortissement

Afin de souligner l'influence de l'amortissement interne dans l'analyse de la dynamique des rotors, le diagramme de Campbell et le seuil d'instabilité sont déterminés. Nous analysons la sensibilité de la vitesse critique et le seuil d'instabilité en fonction des séquences d'empilement et de cisaillement transverse. Puis, ils sont comparés à ceux obtenus en employant la méthode EMBT classique.

4.3.2.1 Effet de séquences d'empilement : fréquences et seuils d'instabilité

Caractéristiques Mécaniques du composite	séquence d'empilement	F1(Hz)	Seuil d'insabilité (rpm)
1	$[90_2,45,0]_s$	39.87	5864
2	$[90,0,90,45,90,45,0,90]$	40.08	5913
3	$[90,45,0_2]_s$	50.71	10981
4	$[0_2,45_2,90_2,0_2]$	50.91	11106
5	$[0_2,90,45]_s$	50.92	11111
6	$[45,0,45,0,90,0,90,0]$	51.36	11395

TAB. 4.4: Caractéristiques mécaniques de l'arbre.

Le tableau 4.4 donne les fréquences et les seuils d'instabilité obtenues par la méthode proposée *SHBT* avec différents séquences d'empilement pour des configurations symétriques et non-symétriques. Contrairement à la méthode *EBMT* utilisée par Pereira [PS02a], la méthode *SHBT* permet de considérer une configuration d'empilement quelconque. Les séquences 1 et 2 sont constituées de 4 plis à 90°, de 2 plis à 45° et de 2 plis à 0° et les séquences 3 à 6 sont consti-

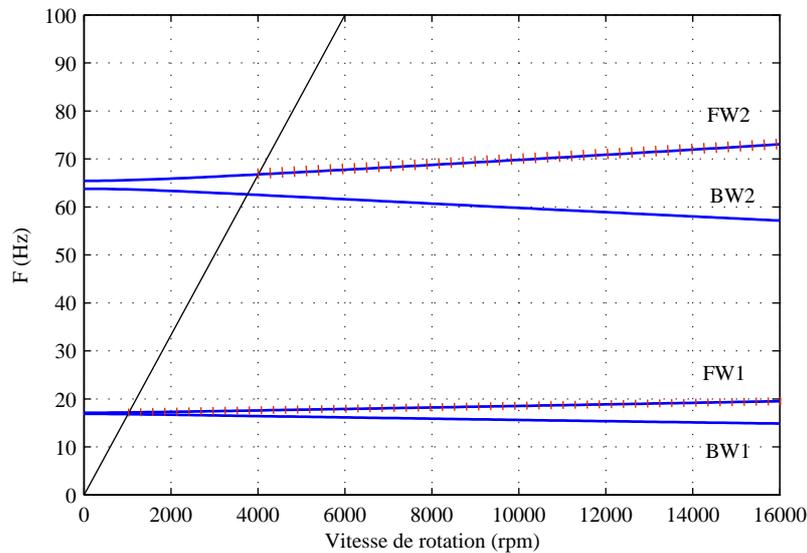


FIG. 4.9: Diagramme de Campbell et seuil d'instabilité pour un stratifié $\theta = 75^\circ$ avec paliers anisotropes.

tuées de 4 plis à 0° , de 2 plis à 45° et de 2 plis à 90° . Des différences de 22% pour la première fréquence et 48% pour le seuil d'instabilité associé sont obtenues en comparant les deux configurations 1 et 6. Il apparaît également que la contribution de chaque couche dépende de sa distance à l'axe longitudinal du tube. La capacité d'amortissement spécifique transverse (tableau 4.2) montre que, plus les fibres sont orientées à 90° plus l'amortissement interne est grand et l'instabilité est rapide.

Les diagrammes de Campbell (figures 4.9, 4.10 et 4.11), présentent l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation, illustrent une influence significative de la séquence d'empilement sur les fréquences et les seuils d'instabilité. La figure (4.9) présente le cas d'une configuration symétrique et équilibrée du rotor composite : $[\pm 75^\circ]_{85}$. Dans ce cas, l'instabilité (symbolisée par un trait pointillé) se produit juste après la deuxième vitesse critique. De tels résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par Pereira [PS02a] en utilisant la formulation de Tsai [Tsa88] (La méthode *EMBT*). Les diagrammes de Campbell associés aux seconde et cinquième configurations (table 4.4) sont présentés respectivement dans les figures (4.10 et 4.11) et ils illustrent l'intérêt d'utiliser les séquences d'empilement comme paramètre d'optimisation pour des fréquences et des seuils d'instabilité. La différence entre les deux configurations est de 21% pour des fréquences à l'arrêt en première précession direct (F_{W1}) et environ 47% au seuil d'instabilité (5913 et 11111 t/mn).

Pour le cas (5), la vitesse de rotation du rotor peut excéder la troisième vitesse critique sans produire une instabilité tandis que l'instabilité se produit à une vitesse de rotation au-dessus de la

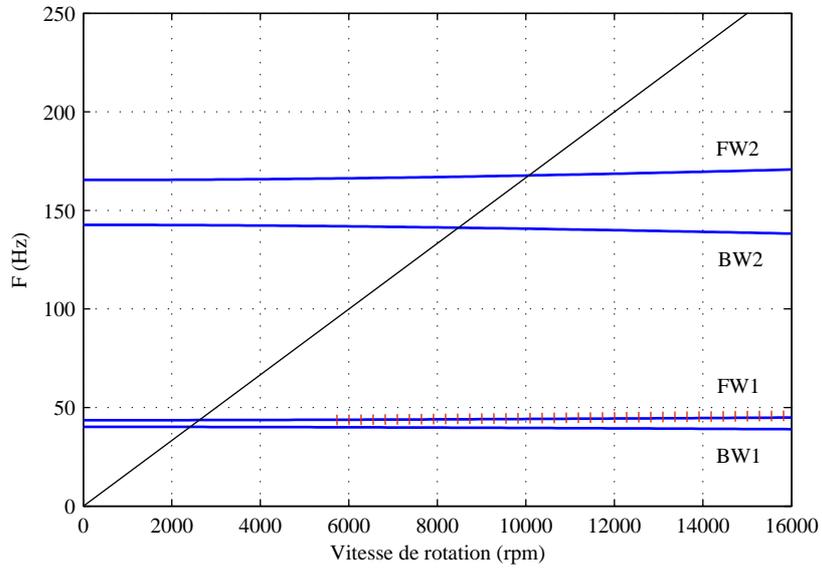


FIG. 4.10: Diagrammes de Campbell et seuils d'instabilité avec paliers anisotropes : second cas $[90, 0, 90, 45, 90, 45, 0, 90]$.

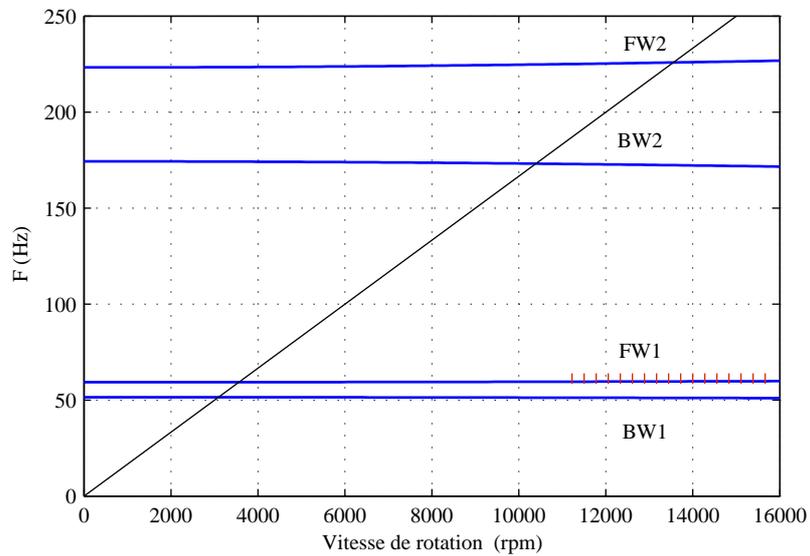


FIG. 4.11: Diagrammes de Campbell et seuils d'instabilité avec paliers anisotropes : cinquième cas $[0_2, 90, 45]_s$.

deuxième vitesse critique pour le cas (2). Un tel comportement est expliqué par le fait que plus le nombre de fibres orientées près de la direction longitudinale du tube est grand, plus la rigidité du rotor est importante et en conséquence plus les fréquences sont élevées. Parallèlement, plus l'angle d'orientation est petit, plus l'amortissement interne dû aux matériaux composites est minime (voir tableau (4.2) (ψ_l, ψ_t)) et plus l'instabilité se produit tardivement.

4.3.2.2 Effet de cisaillement transverse : fréquences et seuils d'instabilité

Un cas test similaire (composé de 8 plis d'épaisseur 0.001 m) est maintenant considéré dans un stratifié équilibrée et symétrique $[\pm 75^\circ]_s$ afin d'examiner les effets du cisaillement transverse. Les variations des fréquences propres estimées avec et sans cisaillement transverse en fonction du rapport longueur sur rayon extérieur L/R_o sont illustrées dans la figure (4.12) (S symbolisant le cas avec cisaillement transversal).

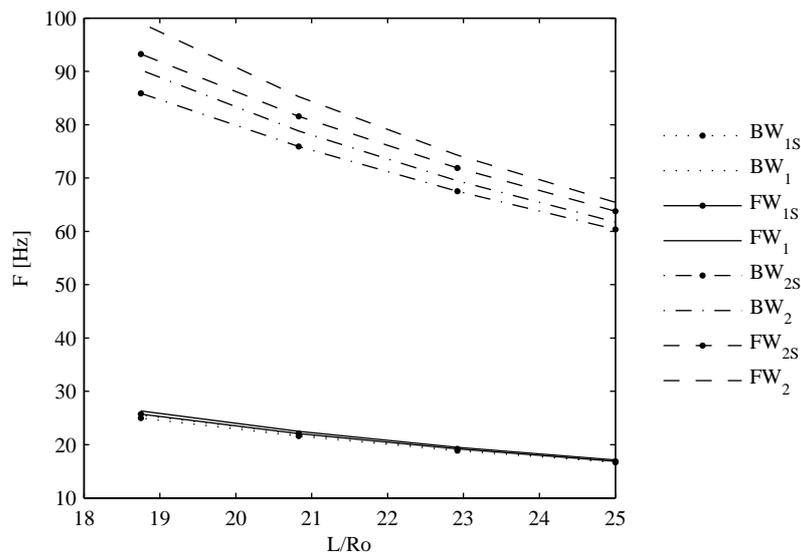


FIG. 4.12: Fréquences propres du stratifié symétrique en fonction de L/R_o pour $[\pm 75^\circ]$ avec et sans cisaillement transverse.

Les fréquences naturelles sont tracées sur la figure (4.12) en utilisant la méthode SHBT en fonction de paramètre de rotor L/R_o (rapport longueur sur rayon extérieure) une configuration symétrique et équilibrée $[\pm 75^\circ]$. Cette figure illustre les résultats avec et sans cisaillement transverse (S symbolisant le cas avec cisaillement transversal).

Classiquement, les fréquences naturelles aussi bien que les effets de cisaillement diminuent avec le rapport L/R_o . Pour le cas considéré, les effets de cisaillement sont significatifs lorsque l'on considère la deuxième fréquence. Les seuils d'instabilité, tracés pour différents rapports de L/R_o

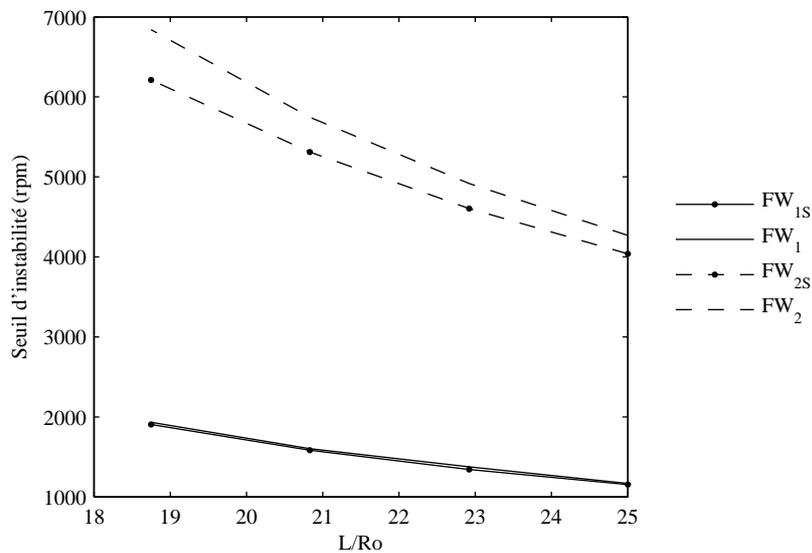


FIG. 4.13: Seuils d'instabilité en fonction de L/R_o pour $[\pm 75^\circ]$ avec et sans cisaillement transverse.

(figure 4.13), aboutissent aux mêmes types de conclusion (les courbes en trait plein sont celles incluant l'effet du cisaillement et les courbes en trait pointillé celles sans effet du cisaillement).

θ (Degrés)	FW_1 (Hz)	FW_2 (Hz)	FW_{1s} (Hz)	FW_{2s} (Hz)
$[\pm 15]$	61.55	229.57	54.37	152.49
$[\pm 45]$	28.55	108.09	27.73	95.72
$[\pm 75]$	22.49	85.27	22.08	78.81

TAB. 4.5: Fréquences naturelles pour un stratifié symétrique en fonction de différents angles d'orientation des fibres avec et sans effets de cisaillement à $L/R_o = 20.83$

Les tableaux (4.5) et (4.6) donnent les fréquences et les seuils d'instabilité en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une valeur spécifique de $L/R_o = 20.83$. Ils démontrent l'influence de l'angle d'orientation des fibres sur les fréquences propres du système. Le tableau (4.5) montre que les fréquences augmentent quand l'angle d'orientation des fibres diminue. L'augmentation des fréquences implique une diminution d'amortissement interne et, par conséquent, une augmentation des seuils d'instabilité (la capacité d'amortissement spécifique longitudinale est plus petite que celle transversale). Donc le système est plus raide quand les fibres sont orientées vers l'axe de tube. Le tableau (4.6) confirme cette conclusion, et illustre que la rigidité équivalente

4. Matériaux composites (rotors composites)

ϕ (Degrés)	EI (Nm^2)	$EI\eta$	Seuil d'instabilité sans cisaillement (rmp)	Seuil d'instabilité avec cisaillement (rpm)
$[\pm 15]$	97811	136	10404	9937
$[\pm 45]$	21206	277	2309	2255
$[\pm 75]$	15717	338	1604	1585

TAB. 4.6: Caractéristiques mécaniques des rotors et seuil d'instabilité

diminue en fonction de l'angle d'orientation des fibres quand la rigidité équivalente amortie augmente.

En considérant les deux premières précessions directes, l'erreur obtenue en négligeant les effets de cisaillement est de 2% pour la première fréquence en flexion et de 7,5% pour la deuxième fréquence en flexion pour une orientation de $[\pm 75^\circ]_s$. Ces erreurs augmentent jusqu'à 11% et 33,5% pour la première et la deuxième fréquence respectivement dans le cas d'une orientation égale à $[\pm 15^\circ]_s$.

4.3.2.3 Méthode d'homogénéisation : comparaison SHBT/EMBT

Une étude comparative entre la méthode proposée (*SHBT*) et la méthode (*EMBT*) est effectuée. En considérant un rotor composite dans une configuration symétrique et équilibrée $[\pm 75^\circ]_{8S}$ (figure 4.9), les fréquences et les seuils d'instabilité calculés par les deux méthodes sont en bon accord. Par contre, les résultats associés à différentes configurations (des empilements différents : symétriques et non-symétriques) listés dans le tableau (4.7) montrent que la distance des couches à l'axe neutre contribue au calcul des caractéristiques mécaniques du rotor avec (*SHBT*), mais non avec (*EMBT*) comme mentionné dans Singh et Gupta ([SG96a] et [SG96b]). En utilisant la méthode (*EMBT*), des différences de 15.7% et 15 en seuil d'instabilité et de 6.7% et 6.3 sur la première fréquence sont observées pour les séquences 2 et 3. Pour les séquences de 4 à 7, cette différence est de 9% en seuil d'instabilité et de 3.2% en fréquence. En conséquence, la méthode classique *EMBT* surestime l'instabilité de rotor.

4.3.2.4 Conclusion

Ce travail aborde l'analyse de la stabilité de rotors composite avec la prise en compte de l'amortissement interne. Une théorie simplifiée d'homogénéisation de poutre (*SHBT*) est développée et comparée à la théorie classique de module équivalent *EMBT*, à la théorie de *EMBT* modifié et à la théorie de *LBT*. La méthode développée évite les inconvénients principaux liés à la formulation d'*EMBT*, qui considère seulement des stratifiés symétriques et équilibrés et ne

Séquence d'empilement	SI	SI	Erreur (%)	F1(Hz)	F1(Hz)	Erreur (%)
	(rpm)	(rpm)		SHBT	EMBT	
	SHBT	EMBT		SHBT	EMBT	
$[\pm 75^\circ]_{8S}$	1167	1167	0	16.88	16.88	0
$[90_2, 45, 0]_S$	5864	6956	15.7	39.87	42.76	6.7
$[90, 0, 90, 45, 90, 45, 0, 90]$	5913	6956	15	40.08	42.76	6.3
$[90, 45, 0_2]_S$	10981	12064	9	50.71	52.37	3.2
$[0_2, 45_2, 90_2, 0_2]$	11106	12064	8	50.91	52.37	3
$[0_2, 90, 45]_S$	11111	12064	8	50.92	52.37	3
$[45, 0, 45, 0, 90, 0, 90, 0]$	11395	12064	5.5	51.36	52.37	2

TAB. 4.7: Comparaison entre *SHBT* et *EMBT*

tient pas compte de la distance des couches à l'axe neutre. Elle tient compte également de l'amortissement interne à partir de la capacité d'amortissement spécifique de chaque pli constituant le composite, et elle considère également le cisaillement transverse. Elle permet l'utilisation de l'élément fini de poutre existant. Les vitesses critiques obtenues par la méthode développée sont en bon accord avec celles obtenues par *LBT*, *EMBT* modifié et aussi celle de l'expérimentation. L'étude montre que les simplifications de *EMBT* peuvent conduire à des erreurs significatives en terme de fréquences et seuils d'instabilité. Ces anomalies semblent être plus importantes pour les seuils d'instabilité. Une étude qualitative de divers paramètres sur les fréquences et les seuils d'instabilité a été entreprise pour un rotor en carbone/époxy supporté par deux paliers anisotropes pour différentes orientations des fibres. L'analyse paramétrique montre que le cisaillement transverse a une influence mineure sur les premières fréquences et que son effet est beaucoup plus significatif pour les fréquences suivantes, influençant alors directement les seuils d'instabilité. Cependant, cette méthode exige de quelques améliorations pour tenir compte des effets de couplage induits par l'empilement non-symétrique.

Conclusions et perspectives

Nous avons présenté dans le premier chapitre une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la stabilité des machines tournantes.

Dans le deuxième chapitre, afin de mieux interpréter les phénomènes qui régissent le comportement dynamique des structures tournantes, et notamment l'influence de l'amortissement interne, des modélisations sont proposées via des approches analytique et Éléments Finis pour modéliser les effets dissipatifs. Il s'agit d'un modèle Éléments Finis de type unidimensionnel fondée sur des éléments de type poutre avec la prise en compte de l'amortissement interne.

Le troisième chapitre, décrivant brièvement la conception d'un banc d'essai, tend à démontrer les aspects physiques de l'instabilité des systèmes en rotation. Les phénomènes d'instabilité au passage des vitesses critiques sont illustrés expérimentalement à partir d'essais en rotation sur des tubes PVC et Aluminium de différentes longueurs via des tubes. Le chapitre se clos par des applications issues de la littérature pour la validation des modèles numériques proposés. En premier lieu, un premier cas test effectué sur des tubes PVC et Aluminium via une étude expérimentale réalisée au laboratoire LaMCoS. En second lieu, une application effectuée sur des tubes PVC et Aluminium permet de tracer des cartes d'instabilité via une étude paramétrique. Ces résultats sont ensuite comparés à des résultats expérimentaux.

Le quatrième chapitre étend les développements précédents au cas des arbres composites. Une théorie d'homogénéisation simplifiée de poutre adaptée pour tenir compte de l'amortissement interne au niveau de chaque pli constituant l'empilement est présentée. Et cette théorie est comparée avec d'autres théories issues de la littérature. Le chapitre se clos par une application réalisée sur un ensemble arbre-disques (rotor composite) illustre, via une étude paramétrique, l'influence de l'angle d'orientation des fibres et de la séquences d'empilement sur les fréquences propres du système en rotation et seuils d'instabilité associés. Une étude de l'influence du cisaillement transverse termine ce travail.

Des perspectives de ce travail seront :

- Un dispositif expérimental pour vérifier la caractérisation de l'amortissement interne dans le repère fixe en mouvement forcé et identifier la fréquence associé au matériau (dans le repère fixe).

- La méthode d'homogénéisation introduite dans le quatrième chapitre autorise le traitement d'empilements non symétriques. Dans ce cas, des effets de couplages membrane-flexion peuvent apparaître et influencer le comportement dynamique du rotor. La formulation Éléments Finis utilisée dans ce travail ne permet pas la prise en compte de ces effets. Par conséquent, pour compléter l'étude, il est nécessaire de reformuler l'étude Éléments finis afin d'introduire les couplages membrane-flexion-torsion et évaluer ainsi leur influence....
- Adapter le banc pour expérimenter des rotors en matériaux composites

Bibliographie

- [Ada01] M. L. JR. Adams. Rotating machinery vibration. *Marcel Dekker*, 153(1) :354, 2001.
- [Bau83] O. Bauchau. Optimal design of high speed rotating graphite/epoxy shafts. *Journal of Composite Materials*, 17 :170–181, 1983.
- [BMN02] L. Berreur, B. Maillard, and S. Nösperger. Étude stratégique. *L'industrie française des matériaux composites*, May :129, 2002.
- [Buc82] L. L. Bucciarelli. On the instability of rotating shafts due to internal damping. *Journal of Applied Mechanics*, 49 :425–428, June 1982.
- [CD92] J. Creonte and M. S. Darlow. Optimal design of supercritical composite shafts with axially varying lay-up. *ImechE Conference Vibrations in Rotating Machinery*, September :149–154, 1992.
- [CG05] W. J. Chen and E. J. Gunter. Introduction to dynamics of rotor-bearing systems. *Eigen Technologies, Inc*, page 469, 2005.
- [CGP94] G. Chandramouli, K. Gupta, and R. K. Pandey. Delamination propagation in rotating carbon-epoxy composite shaft. *Engineering Fracture Mechanics*, 49 :121–132, 1994.
- [CK90] L. W. Chen and D. M. Ku. Dynamic stability analysis of a rotating shaft by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 143(1) :143–151, 1990.
- [CLJR00] E. Chatelet, D. Lornage, and G. Jacquet-Richardet. Dynamic behavior of thin-walled composite shafts : A three dimensional approach. *5th annual Engineering System Design and Analysis Conference, ASME, Montreux Switzerland*, July, 10–13 :5, 2000.
- [CN00] A. M. Cerminaro and F. C. Nelson. The effect of viscous and hysteretic damping rotor stability. *ASME TURBOEXPO, Munich, Germany*, May 8–10 :5, 2000.
- [CP98] L. W. Chen and W. K. Peng. Dynamic stability of rotating composite shafts under periodic axial compressive loads. *Journal of Sound and Vibration*, 212(2) :215–230, 1998.
- [Cra70] S. H. Crandall. The role of damping in vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 11(1) :3–18, 1970.

- [DC95] M. S. Darlow and J. Creonte. Optimal design of composite helicopter power transmission shafts with axially varying fiber lay-up. *Journal of the American Helicopter Society*, 40(2) :50–56, 1995.
- [Dim61] M. Dimentberg. Flextural vibration of rotating shafts. *Butterworth, London, England*, 126, 1961.
- [DN92] J. K. Dutt and B. C. Nakra. Stability of rotor systems with viscoelastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1) :89–96, 1992.
- [DN95] J. K. Dutt and B. C. Nakra. Dynamic of rotor shaft system on flexible supports with gyroscopic effects. *Mechanics Research Communications*, 22(6) :541–545, 1995.
- [Ehr64] F. F. Ehrich. Shaft whirl induced by rotor internal damping. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 31 :279–282, 1964.
- [For96] L. Forrai. Stability analysis of symmetrical rotor-bearing systems with internal damping using finite elements method. *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, UK*, June 10–13 :4, 1996.
- [For00] L. Forrai. A finite elements model for stability analysis of symmetrical rotor systems with internal damping. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(1) :37–47, 2000.
- [For01] L. Forrai. Stability analysis of isotropic rotor-bearing systems with internal damping using finite elements. *International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery, ISCORMA*, page 13, 2001.
- [For06] L. Forrai. Dynamic stability of internally damped multibearing rotors using finite elements. *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria*, September 25–28 :8, 2006.
- [GA93] W. C. Gibson and M. Austin. Analysis and design of damped structures. *Finit Elements in Analysis and Design*, 14 :337–351, 1993.
- [Gay91] D. Gay. Matériaux composites. *3ed edition, Hermès*, page 672, 1991.
- [Gen04] G. Genta. On a persistent misunderstanding of the role of hysteretic damping in rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126 :459–461, 2004.
- [GG05] H.B.H. Gubran and K. Gupta. The effect of stacking sequence and coupling mechanisms on the natural frequencies of composite shafts. *Journal of Sound and Vibration*, 282 :231–248, 2005.
- [Gra04] G. Grau. Paliers aérodynamiques radiaux à structure à feuille : contribution à l'étude statique et comportement dynamique non linéaire. *Thèse de doctorat, INSA-LYON* :183, 2004.
- [GS98] K. Gupta and S. P. Singh. Damping measurements in fiber reinforced composite rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3) :513–520, 1998.

-
- [GTa95] O. Grapis, V. Tamuzs, and al. Application of cfrp as a rotor shaft material. *Mechanics of Composite Materials*, 31(2) :163–173, 1995.
- [JU00] J. Jiang and H. Ulbrich. Dynamics and stability of rotor/stator systems with rubs. *ASME TURBOEXPO 2000*, May 8-11, Munich, Germany :7, 2000.
- [KD87] R. F. Kraus and M. S. Darlow. Design and experimental studies of composite power transmission shafting. *Journal of Sound and Vibration*, 49 :733–738, 1987.
- [Kim24] A. L. Kimball. Internal friction theory of shaft whirling. *General Electric Review*, 27 :244–251, 1924.
- [Ku98] D. M. Ku. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. *Mechanical systems and signal processing*, 12 :599–610, 1998.
- [LF98] M. Lalanne and G. Ferraris. Rotordynamics prediction in engineering, 2nd edition. *J. Wiley and Sons*, 33 :254, 1998.
- [Lun74] J. W. Lund. Stability and damped critical speeds of flexible rotor in fluid film bearings. *ASME J. IND*, 96 :509–517, 1974.
- [MCH⁺07] O. Montagnier, E. Chatelet, C. Hochard, G. Jacquet, and S. Bellizzi. Sur l'identification expérimentale de l'amortissement dans les stratifiés carbone/epoxy - effets sur la stabilité des rotors composites. *JNC 15 Marseille*, 2007.
- [MH91] R. Maaskant and J. S. Hansen. Analysis of damping in composite laminates. *AIAA Journal : Thechnical Notes*, 30(7) :1912–1915, 1991.
- [MH05a] O. Montagnier and C. Hochard. Design of supercritical composite helicopter driveshafts : Theoretical and experimental study. *européan conference for aerospace sciences (EUCASS)*, 2005.
- [MH05b] O. Montagnier and C. Hochard. Etude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission supercritiques. *17ème congrès Français de Mécanique, Troyes, 29 Août-2, Septembre 2005*.
- [Mon05] O. Montagnier. Tubes composite à grande vitesse de rotation : Analyse expérimentale et modélisation. *thèse de doctorat, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Laboratoire LMA* :230, Juin 2005.
- [MS03] A. J. Mazzei and R. A. Scott. Effects of internal damping on the stability of a rotating shaft driven through a universal joint. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :863–885, 2003.
- [MZ98] J. Melanson and J. W. Zu. Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 120 :776–783, 1998.
- [New24] B. L. Newkirk. Shaft whipping. *General Electric Review*, 27 :169–178, 1924.
-

- [NG94] T. Nouri and D. Gay. Shear stresses in orthotropic composite beams. *International Journal of Engineering Science*, 32(10) :1647–1667, 1994.
- [NGP85] A.D. Nashif, Jones David. A. G., and Henderson John P. Vibration damping. *John Wiley and Sons, New York*, page 453, 1985.
- [Nou93] T. Nouri. Homogénéisation et calcul des contraintes de cisaillement dans les poutres composites a section quelconques et a constituants orthotropes. *Université Paul Sabatier de Toulouse, Thèse de Doctorat :233*, 1993.
- [Osi98] Z. Osinski. Damping of vibrations,. *Institute of Machine Design Fundamentals, Warsaw university of technology, Warsaw, Poland. A.A.BALKEMA/ ROTTERDAM/BROOKFIELD*, page 562, 1998.
- [PD99] K. C. Panda and J. K. Dutt. Design of optimum support parameters for minimum rotor response and maximum stability limit. *Journal of Sound and Vibration*, 223(1) :1–21, 1999.
- [Per96] J. C. Pereira. Contribution à l'étude du comportement mécanique des structures en matériaux composites - caractéristiques homogénéisées de poutres composites - comportement dynamique de coques composites. *Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Laboratoire LMST*, 1996.
- [Prz68] J. S. Przemieniecki. Theory of matrix structural analysis. *New York, Wiley*, 1968.
- [PS01a] J. C. Pereira and M. E. Silveira. Optimisation of the response on the frequency domain on composite rotors. *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM. Uberlândia*, page 9, 2001.
- [PS01b] J. C. Pereira and M. E. Silveira. The response to an unbalance mass on composite rotors. *IX International Symposium on Dynamics Problems of Mechanics - DINAME. Florianópolis*, page 5, 2001.
- [PS02a] J. C. Pereira and M. E. Silveira. Evaluation and optimization of the instability regions on rotors in winding shaft. *II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. João Pessoa*, page 10, 2002.
- [PS02b] J. C. Pereira and M. E. Silveira. The influence of the winding angle on the behavior of composite rotors. *II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. João Pessoa*, page 10, 2002.
- [SBCJ06] R. Sino, T. N. Baranger, E. Chatelet, and G. Jacquet. Dynamic analysis of a rotating composite shaft. *Journal of Composites Science and Technology*, in press :21, 2006.
- [SCBJ06a] R. Sino, E. Chatelet, T. N. Baranger, and G. Jacquet. Etude de la stabilité des rotors composites avec prise en compte de l'amortissement interne, stability analysis of internally rotating composite shaft. *XVème Colloque Vibration chocs et Bruit, Lyon*, 14-16 juin :20, 2006.

-
- [SCBJ06b] R. Sino, E. Chatelet, T. N. Baranger, and G. Jacquet. Stability analysis of internally damped rotating composite shafts considering transversal shear. *Proceedings of IS-ROMAC - 11, Honolulu, Hawaii USA.*, February 26 - March 2 :12, 2006.
- [SCBJ06c] R. Sino, E. Chatelet, T. N. Baranger, and G. Jacquet. Étude de la stabilité des rotors avec prise en compte de l'amortissement interne et des effets de cisaillement transverse. *Proceedings of IFCAM01, Alep, Syrie*, 02-04 May :11, 2006.
- [SCMJ07] R. Sino, E. Chatelet, O. Montagnier, and G. Jacquet. Dynamic instability analysis of internally damped rotors. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007 Power for Land, Sea and Air, Montreal, CANADA*, May 14-17 :10, 2007.
- [SG94a] S. P. Singh and K. Gupta. Damped free vibration layered composite cylindrical shells. *Sound and Vibration*, 172(2) :191–209, 1994.
- [SG94b] S. P. Singh and K. Gupta. Free damped flexural vibration analysis of composite cylindrical tubes using beam and shell theories. *Journal of Sound and Vibration*, 172(2) :171–190, 1994.
- [SG96a] S. P. Singh and K. Gupta. Composite shaft rotodynamic analysis using a layerwise theory. *Sound and Vibration*, 191(5) :739–756, 1996.
- [SG96b] S. P. Singh and K. Gupta. Dynamic analysis of composite rotors. *International Journal of Rotating Machinery*, 2(3) :179–186, 1996.
- [SZ00] N. H. Shabaneh and J. W. Zu. Dynamic instability of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 35 :1313–1330, 2000.
- [Tsa88] S. W. Tsai. On the instability of rotating shafts due to internal damping. *Composites Design, 4th edition, Dayton, Ohio, USA*, 1988.
- [UFML93] C. Ulrich, G. Ferraris, L. Lalanne M., and J. Lacroix. Prediction of the frequency and time responses of composite structures : Application to skis. *ASME, Vibration, Shock, Damage, and Identification of Mechanical Systems Editeurs : D. Crane, R. G. Galloway, M. Forrestal, and D. Martinez Book No. G00825*, 46 :9–13, 1993.
- [Wet94] H. L. Wettergren. Damping instability of composite rotors. *IFTOMM Fourth International Conference on Rotor Dynamics, Chicago Illinois*, 7-9 September :287–292, 1994.
- [WM93] J.F. Walton and M. R. Martin. Internal rotor friction induced instability in high-speed rotating machinery. *Vibration of Rotating Systems*, 60 :297–303, 1993.
- [WO96] H. L. Wettergren and K. O. Olsson. Dynamic instability of a rotating asymmetric shaft with internal viscous damping supported in anisotropic bearings. *Journal of Sound and Vibration, Academic Press Limited*, 195(1) :75–84, 1996.
-

- [ZE94] A. Zinoviev and N. Ermakov. Energy dissipation in composite materials. *Technic publishing company, Inc., Pennsylvania U.S.A.*, page 238, 1994.
- [ZG85] E.S. Zorzi and J.C. Giordano. Composite shaft rotordynamic evaluation. *ASME The American Society of Mechanical Engineers*, September 10–13 :8, 1985.
- [ZN77] E.S. Zorzi and H. D. Nelson. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. *ASME Journal of engineering for power*, January :71–76, 1977.
- [ZS70] H. Zinberg and M.F. Symmonds. The development of advanced composite tail rotor driveshaft. *26th Annual National Forum of American Helicopter Society, Washington, DC* :1–14, 1970.

Nomenclature

- R_{id} Rayon intérieur de disque
- (1, 2, 3) Axes d'orthotropie
- $[\eta]$ Facteur de perte
- $[\eta]_m$ et $[\eta]_c$ Matrices d'amortissement de membrane et en cisaillement
- $[\psi]_m$ et $[\psi]_c$ Capacités d'amortissement spécifique de membrane et en cisaillement
- $[\tilde{Q}]$ Matrice de rigidité amorti du matériau
- $[C_i]$ Matrice d'amortissement interne
- $[K_i(\Omega)]$ Matrice de rigidité due à l'amortissement interne
- $[M]$, $[K]$ et $[C]$ Matrice élémentaire de poutre : masse, raideur et gyroscopique
- $[p]$ Matrice de passage de repère Mobile au repère fixe
- \dot{c} Coefficient d'amortissement visqueux de l'amortisseur fixe
- α Coefficient de proportionnalité ($\alpha = c_s/c_r$)
- α_b Position angulaire du balourd
- δW Travail virtuel
- ε Déformation
- η_{13} et η_{23} Facteurs de perte en cisaillement
- η_1 η_2 et η_{12} Facteurs de perte associé aux effets de membrane suivant les directions 1 et 2 et dans le plan
- $\eta_x(x, y, z, t)$ et $\eta_z(x, y, z, t)$ Gauchissements de la section droite
- $\eta_y(x, y, z, t)$ Gauchissement supplémentaire dû aux effets des efforts tranchants
- κ Facteur correcteur de cisaillement
- $[Q]$ Matrice de rigidité du matériau

$[S]$	Matrice de souplesse du matériau
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}$ et ν_{32}	Coefficients de Poisson
Ω	Vitesse de rotation
ω	Pulsation propre
ω_x, ω_y et ω_z	Vecteurs de rotation instantanée suivant x, y et z
$\Omega_{cr,1}$	Première vitesse critique
Ω_{SI}	Seuil d'instabilité
ϕ	Angle d'orientation des fibres par rapport à l'axe principale du rotor Y
ψ_{13} et ψ_{23}	Capacités d'amortissement spécifique en cisaillement
ψ_1, ψ_2 et ψ_{12}	Capacités d'amortissement spécifique associé aux effets de membrane suivant les directions 1 et 2 et dans le plan
ρ	Masse volumique
σ_{yy}	Contrainte de la section normale
σ	Contrainte
τ_{yz} et τ_{xy}	Contraintes dues au cisaillement transverse
θ_z, θ_x et θ_y	Angles de rotation
ΔW	Énergie dissipée par l'unité de volume
\widetilde{EI}	Inertie de flexion homogénéisée amortie
$\widetilde{E}_y^p, \widetilde{G}_{yz}^p$ et \widetilde{G}_{yx}^p	Module d'Young amorti et modules de cisaillement transverse amorti du pli
\widetilde{GS}	La rigidité homogénéisée en cisaillement amorti
$\{\epsilon\}_m$ et $\{\epsilon\}_c$	Déformation de membrane et en cisaillement
$\{\sigma\}_m$ et $\{\sigma\}_c$	Contrainte de membrane et en cisaillement
$\{F(t)\}$	Vecteur de force généralisé
a_a	Effet gyroscopique de l'arbre
a_d	Effet gyroscopique de disque
c	Coefficient d'amortissement visqueux d'un amortisseur tournant
c_r	Amortissement interne (tournant)
c_s	Amortissement externe (stationnaire)

- C_{eq} Amortissement visqueux équivalent
- c_{xx} , c_{zz} , c_{xz} et c_{zx} Caractéristiques d'amortissement des paliers
- CAS : Capacité d'Amortissement Spécifique
- d Distance de balourd du centre géométrique de l'arbre
- d_i Coordonnées généralisées indépendantes
- e Épaisseur de disque
- E_y Module d'Young suivant l'axe du rotor y
- E_y^p , G_{yz}^p et G_{yx}^p Module d'Young et modules de cisaillement transverse du pli
- E_1 , E_2 et E_3 Module d'Young suivant les axe 1 et 2
- EI Inertie de flexion homogénéisée
- EMBTModifié* : Modified Equivalent Modulus Beam Theory
- EMBT* : Equivalent Modulus Beam Theory
- $f(y)$ Fonction de forme
- F_{csi} Fréquences de système couplé
- F_{rb} Fréquences de palier rigide
- F_{rr} Fréquences de rotor rigide
- Fd_i Vecteur force généralisée
- $g(x,z)$ et $h(x,z)$ Fonctions qui caractérisent le gauchissement dans le plan (Y,X) et (Y,Z)
- G_{23} , G_{13} et G_{12} Module de cisaillement transverse
- G_{yz} et G_{yx} Modules de cisaillement transverse
- h Distance de l'amortisseur tournant à la fibre neutre
- I^p Contribution du pli p à l'inertie de la section
- I_a Moment d'inertie transverse de l'arbre
- I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} Moments d'inertie du disque suivant x , y et z
- J_a Moment d'inertie polaire de l'arbre
- k , m et a Termes de raideur, masse et gyroscopique totales
- k_a Raideur de l'arbre
- k_{xx} , k_{zz} , k_{xz} et k_{zx} Caractéristiques de raideur des paliers

L	Longueur du rotor
L/R_o	Rapport longueur-rayon
L_d	Position de disque
L_p	Position du palier
LBT	Layerwise Beam Theory
m_a	Masse de l'arbre
m_b	Masse de balourd
m_d	Masse de disque
m_p	Masse de palier
N	Nombre de degrés de liberté
N_1 et N_2	Fonctions de forme en Élément Finis
$Q_1(t)$ et $Q_2(t)$	Coordonnées généralisées indépendantes : repère fixe
$q_1(t)$ et $q_2(t)$	Coordonnées généralisées indépendantes : repère mobile
$R(xyz)$	Repère tournant
$R_0(XYZ)$	Repère fixe
R_p et R_{p-1}	Rayon externe et interne du pli p
R_{diss}	Énergie dissipée par un amortisseur tournant
R_{ea}	Rayon extérieur de l'arbre
R_{ed}	Rayon extérieur de disque
S_a	Section de l'arbre
$SHBT$	Simplified Homogenized Beam Theory
T	Énergie cinétique
T_b	Énergie cinétique du balourd
T_d	Énergie cinétique du disque
U	Énergie potentiel
u et w	Coordonnées du centre géométrique de disque O dans le repère fixe
u^* et w^*	Coordonnées du centre géométrique O dans le repère mobile
v_{i1} et v_{i2}	Déplacements des points A_i et B_i

W Énergie élastique

x et z Déplacement d'un point typique de la section de rotor

\ddot{d} , \dot{d} et d Vecteur accélération, vitesse et déplacement

GS La rigidité homogénéisée en cisaillement

Annexe A

Généralités sur l'amortissement

Les Modèles mathématiques pour modéliser l'amortissement

Amortissement Visqueux

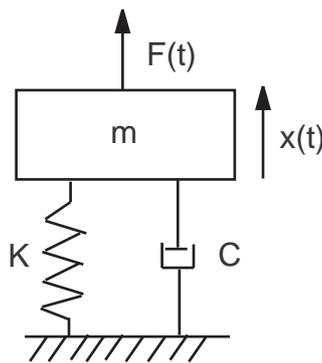


FIG. 4.14: Système à 1 ddl avec un amortisseur visqueux

C'est un modèle physique dont l'approche est d'introduire dans le système une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse. L'avantage de ce modèle est sa simplicité mathématique ; mais ce modèle présente rarement ce qui se passe dans le système réel. Le système à 1 ddl présenté se compose d'une masse m fixée à un ressort k et un amortisseur visqueux avec une force d'excitation $F(t)$ appliquée à la masse (figure 4.14). Sa dynamique est décrite par l'équation suivante :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (4.55)$$

La réponse du système est obtenue par une sommation :

- d'une réponse transitoire obtenue par la résolution de l'équation homogène sans second membre dont l'amplitude dépend des conditions initiales.

$$x_c = e^{-\alpha t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \quad (4.56)$$

- d'une réponse permanente calculée en supposant une réponse de même nature que l'excitation.

$$x_p = \frac{F \cos(\omega t - \varepsilon)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}} \quad (4.57)$$

Dans ces expressions, avec $\alpha = \frac{c}{2m}$ est le facteur d'amortissement, $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ est la fréquence propre du système dissipatif et la phase est $\varepsilon = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$.

la solution total est la somme des deux solutions précédentes ($x_c + x_p$).

Au fur et à mesure que la fréquence augmente, le terme de l'inertie $-m\omega^2 x$ augmente jusqu'à une valeur égale à la force de rigidité k_x . A la résonance, l'amplitude de la réponse est limitée seulement par l'amortissement.

Amortissement Hystérétique

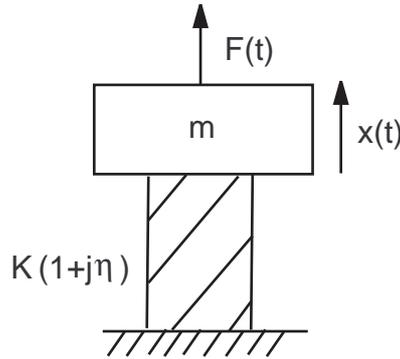


FIG. 4.15: Système à 1 ddl avec un amortisseur hystérétique

Cet amortissement est basé sur le concept de module complexe, l'amortissement étant associé à une boucle d'hystérésis. Ce modèle est utilisé dans les analyses élastiques compliquées où un nombre complexe peut remplacer la valeur réelle de module. Supposant que le coefficient d'amortissement visqueux dans l'équation (4.55) soit $c = k\eta/\omega$ (figure 4.15), en utilisant la notation complexe, $\dot{x} = i\omega x$.

$$m\ddot{x} + k^*x = Fe^{i\omega t} \quad (4.58)$$

avec $k^* = k(1 + i\eta)$, la raideur complexe de la suspension qui contient raideur et amortissement.

Comparaison entre amortissement visqueux et hystérétique : Nashif [NGP85]

La table suivante 4.8 présente une comparaison entre les deux modèle mathématiques d'amortissement visqueux et hystérétique.

	Amortissement visqueux	Amortissement hystérétique
Equation différentielle	$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = F(t)$	$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = Re([Fe^{i\omega t}])$
Solution permanente	$x = A \cos(\omega t - \varepsilon)$ $A = \frac{F_0 \cos(\omega t - \varepsilon)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}}$	$x = B \cos(\omega t - \varepsilon)$ $B = \frac{F_0 \cos(\omega t - \varepsilon)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + k^2 \eta^2}}$
Énergie dissipée par cycle	$D = \pi c \omega A^2$ dépend de la fréquence	$D = \pi k \eta B^2$ indépendant de la fréquence
La fréquence de résonance	$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} (1 - \frac{c^2}{2km})}$ diminue avec l'augmentation de c	$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$ indépendant de η
Déplacement statique à $\omega = 0$	$\frac{F}{k}$ indépendant de c	dépend de η^*
L'amplitude de la résonance	$F/\omega c$ Dépend de (k, m, c)	$F/\eta k$ Dépend de (k, η)

TAB. 4.8: Comparaison amortissement visqueux et hystérétique pour un système à 1 ddl

Les caractéristiques mécaniques des matériaux η et E dépendent notamment à la fois de la fréquence ω et de la température T , selon des lois qui peuvent être connues expérimentalement mais qui n'ont pas de formulations analytiques figure 4.16.

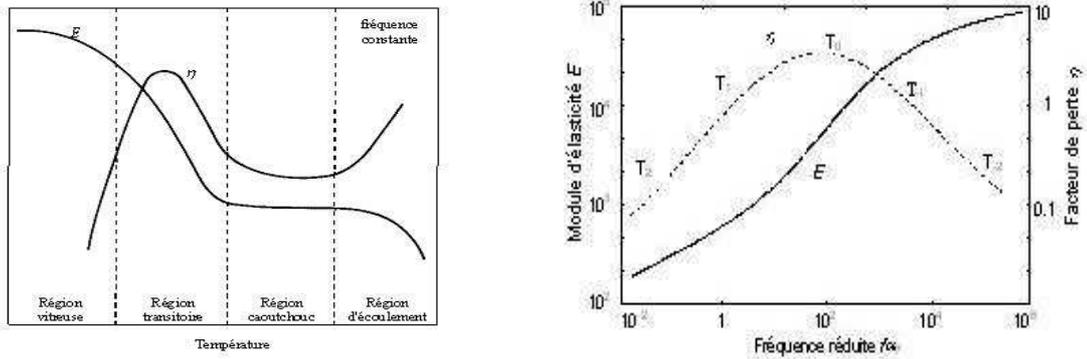


FIG. 4.16: Effet de fréquence et de température sur les caractéristiques mécaniques du matériau η et E

Exemple : système à un ddl

Le système masse ressort amortisseur à un ddl présenté dans la figure 4.14 est considéré, avec une masse de $m = 1 \text{ kg}$ raideur $k = 1e6 \text{ N/m}$, amortisseur $c = 2 \text{ N/m/s}$ et une force de $F = 0.1 \text{ N}$. La fréquence propre de ce système est $f = 1000 \text{ rad/s} = 159.15 \text{ Hz}$.

4.3.2.5 Réponse harmonique (domaine fréquentiel)

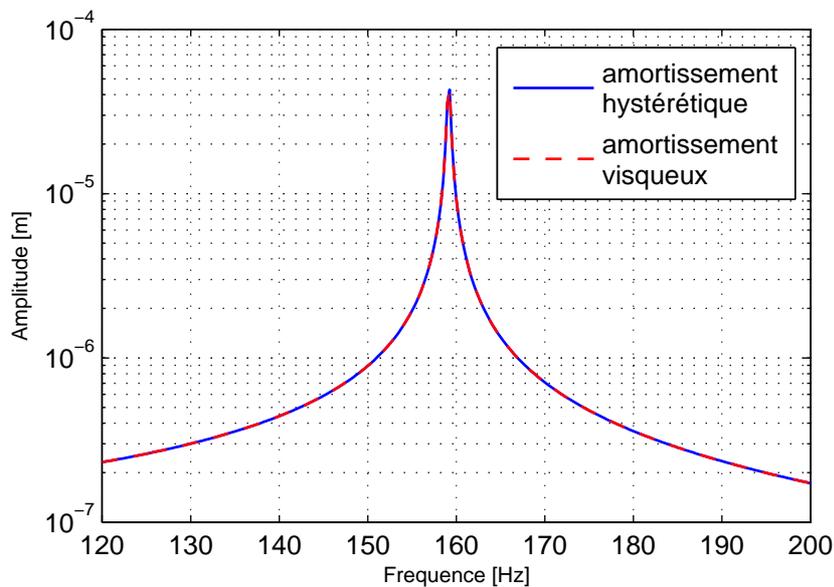


FIG. 4.17: Réponse fréquentielle pour un système à 1 ddl comparaison visqueux/hystérétique

$$\alpha = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} = 1e^{-3} \quad (4.59)$$

En excitation harmonique et seulement dans ce cas, un amortissement hystérétique équivalent à un amortissement visqueux est défini en écrivant l'équivalence de l'énergie dissipée par cycle pour les deux mécanismes :

$$\pi c\omega X^2 = \pi k\eta X^2 \quad (4.60)$$

Comme on doit satisfaire $c\omega = \eta k$, alors l'amortissement visqueux équivalent s'écrit $c_{eq} = \frac{\eta k}{\omega}$ (avec η facteur de perte). Pour évaluer la capacité d'amortissement d'un matériau, l'énergie dissipée par cycle à la résonance est comparée à l'énergie potentielle maximale. Le rapport de ces deux quantités s'appelle capacité d'amortissement spécifique (CAS) :

$$CAS = \psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c\omega X^2}{\frac{1}{2}kX^2} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{km}\sqrt{\frac{k}{m}}X^2}{\frac{1}{2}kX^2} = 4\pi\alpha \quad (4.61)$$

Donc $\eta = 2\alpha$ Et l'évolution de l'amortissement pour les deux mécanismes en fonction de la fréquence est donnée par la figure 4.17.

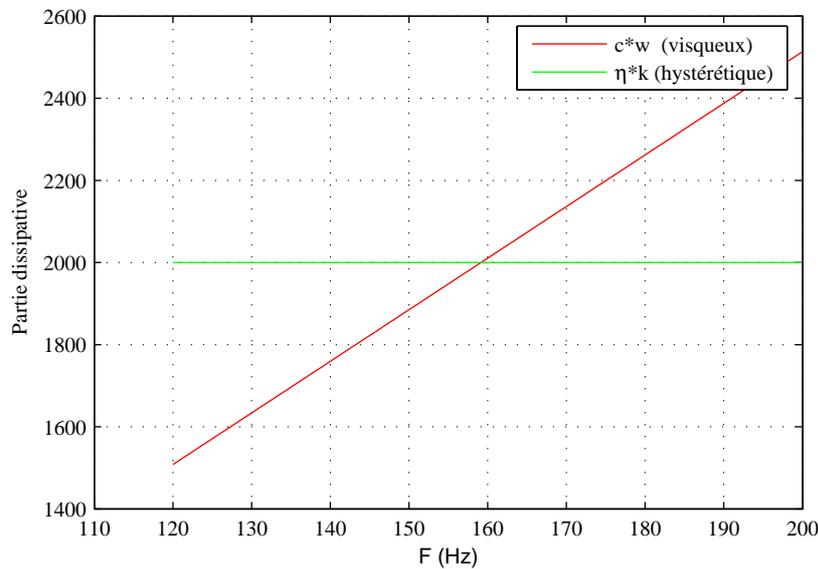


FIG. 4.18: Évaluation de la partie dissipative (comparaison visqueux/hystérétique)

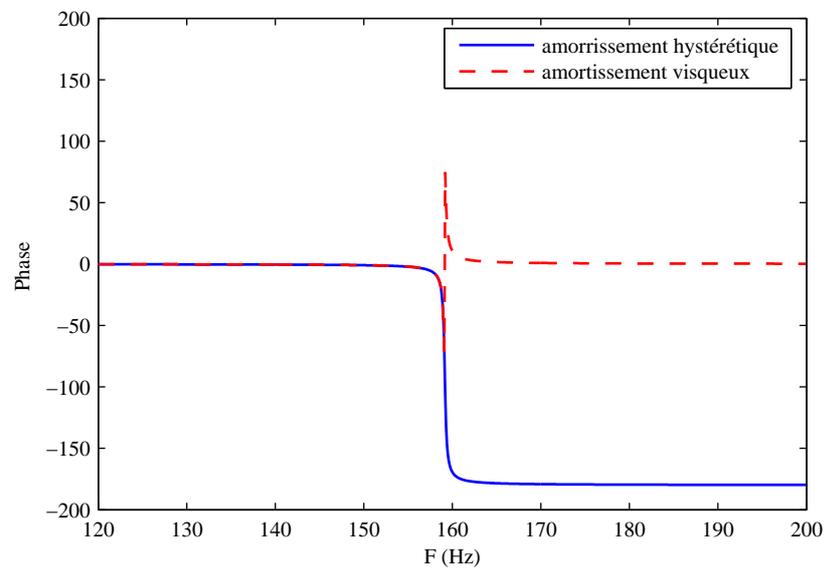


FIG. 4.19: Évaluation de la phase pour le système à 1 ddl

Annexe B

Amortissement Structural

L'équation de mouvement en mouvement libre dans le repère fixe s'écrit selon un modèle d'amortissement de type hystérétique est donnée par la relation (4.62) :

$$m\ddot{x} + k(1 + j)x = Fe^{i\omega t} \quad (4.62)$$

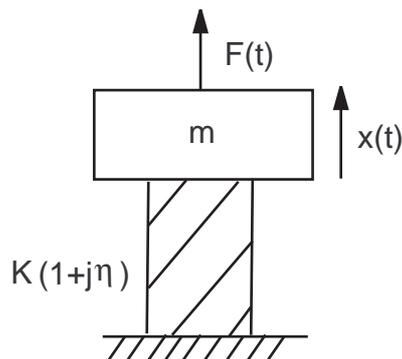


FIG. 4.20: Système à 1 ddl avec un amortisseur hystérétique

Afin de statuer sur la stabilité, on cherche à caractériser les solutions propres sans second membre (recherche des solutions transitoires)

$$m\ddot{X} + k(1 + j)X = 0 \quad (4.63)$$

La solution de l'équation de mouvement est choisie de type exponentielle :

$$X = xe^{rt} \quad (4.64)$$

En mettant la solution dans l'équation de mouvement, on obtient :

$$[mr^2 + k(1 + j\eta)]x = 0 \quad (4.65)$$

Les valeurs propres s'écrivent alors :

$$r_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}(1 + j\eta)} \quad (4.66)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(1 + j\eta)}$$

On constate que l'une des solutions propres présente une partie réelle positive, synonyme d'instabilité d'où une conclusion immédiate qui tend à prouver que l'amortissement hystérétique déstabilise le système. Cependant ce raisonnement est non valide dans la mesure où la résolution d'un tel système aux valeurs propres n'a pas de sens physique.

Partie réelle positive c'est à dire que le système est instable. La résolution aux valeurs propres et vecteurs propres des équations associées à un modèle hystérétique doit toujours être effectuée avec second membre $\neq 0$.

Annexe C

Modèle analytique : Modèle de 4 amortisseurs tournant

L'énergie dissipée par un amortisseur tournant est :

$$R_{diss} = \frac{1}{2}c(\dot{v}_{i2} - \dot{v}_{i1})^2 \quad (4.67)$$

Dans les plans respectifs (xOy) et (zOy) , v_{i1} et v_{i2} sont exprimés en fonction de u^* et w^* (déplacements dans le repère tournant) par les équations suivantes.

Dans le plan (xOy) :

$$\dot{v}_{i1z} = -\frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y}_{(y=0)} h \quad (4.68)$$

$$\dot{v}_{i2z} = -\frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y}_{(y=L)} h$$

Dans le plan (zOy) :

$$\dot{v}_{i1x} = -\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y}_{(y=0)} h \quad (4.69)$$

$$\dot{v}_{i2x} = -\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y}_{(y=L)} h$$

Ainsi, l'énergie dissipée par les 4 amortisseurs tournants (2 amortisseurs dans chaque plan) est :

$$R_{diss} = c \left[(\dot{v}_{i2z} - \dot{v}_{i1z})^2 + (\dot{v}_{i2x} - \dot{v}_{i1x})^2 \right] \quad (4.70)$$

En mettant les équations 4.68 et 4.69 dans l'équation 4.70 l'énergie dissipée par l'amortisseur tournant s'écrit :

$$R_{diss} = ch^2 \left[\left(-\frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y}_{(y=L)} + \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y}_{(y=0)} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y}_{(y=L)} + \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y}_{(y=0)} \right)^2 \right] \quad (4.71)$$

Les déplacements u^* et w^* dans le repère mobile sont alors exprimés dans le repère fixe à l'aide de la matrice de passage (équations 4.72).

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (4.72)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t$$

$$\dot{u}^* = \dot{u} \cos \Omega t - u \Omega \sin \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t - w \Omega \cos \Omega t \quad (4.73)$$

$$\dot{w}^* = \dot{u} \sin \Omega t + u \Omega \cos \Omega t + \dot{w} \cos \Omega t - w \Omega \sin \Omega t$$

et :

$$\frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \cos \Omega t - \frac{\partial u}{\partial y} \Omega \sin \Omega t - \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \sin \Omega t - \frac{\partial w}{\partial y} \Omega \cos \Omega t \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \sin \Omega t + \frac{\partial u}{\partial y} \Omega \cos \Omega t + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \cos \Omega t - \frac{\partial w}{\partial y} \Omega \sin \Omega t$$

Les conditions aux limites : les extrémités sont de type appuyé-appuyé. L'approche de type dynamique des rotors [LF98] est envisagée. Les déplacements du système (u,w) dépendent du temps t et de la variable d'espace y et peuvent s'écrire, par séparation des variables, sous la forme :

$$u = f(y)Q_1(t)$$

$$w = f(y)Q_2(t) \quad (4.75)$$

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L}$$

Q_1 et Q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes. Il vient :

$$\dot{u} = f(y)\dot{Q}_1 \quad (4.76)$$

$$\dot{w} = f(y)\dot{Q}_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} Q_1 \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} Q_2$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Q}_1 \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Q}_2$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} \cos \Omega t \dot{Q}_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \Omega \sin \Omega t Q_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \sin \Omega t \dot{Q}_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \Omega \cos \Omega t Q_2 \\ \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} \sin \Omega t \dot{Q}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \Omega \cos \Omega t Q_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \Omega t \dot{Q}_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \Omega \sin \Omega t Q_2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

avec :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi y}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \quad (4.80)$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(y=0)} = \frac{\pi}{L} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(y=L)} = -\frac{\pi}{L}$$

L'expression 4.71 devient :

$$R_{diss} = \frac{4ch^2\pi^2}{L^2} \left[(\sin \Omega t \dot{Q}_1 + \Omega \cos \Omega t Q_1 + \cos \Omega t \dot{Q}_2 - \Omega \sin \Omega t Q_2)^2 + \right. \quad (4.82)$$

$$\left. (\cos \Omega t \dot{Q}_1 - \Omega \sin \Omega t Q_1 - \sin \Omega t \dot{Q}_2 - \Omega \cos \Omega t Q_2)^2 \right] \quad (4.83)$$

soit :

$$R_{diss} = \frac{4ch^2\pi^2}{L^2} \left[\dot{Q}_1^2 + \Omega^2 Q_1^2 + \dot{Q}_2^2 + \Omega^2 Q_2^2 - 2\Omega \dot{Q}_1 Q_2 + 2\Omega Q_1 \dot{Q}_2 \right] \quad (4.84)$$

En posant $c_r = \frac{8ch^2\pi^2}{L^2}$ et en appliquant les équation de Lagrange, il devient :

$$\frac{\partial R_{diss}}{\partial Q_1} = c_r \dot{Q}_1 - c_r \Omega Q_2 \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial R_{diss}}{\partial Q_2} = c_r \dot{Q}_2 + c_r \Omega Q_1$$

Annexe D

Réponse en régime permanent : Repère Mobile et Repère Fixe

Mis en équations

1. La mise en équation dans le repère fixe R_0

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega a \\ \Omega a & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k & -c_r \Omega \\ c_r \Omega & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.86)$$

où c_s est l'amortissement stationnaire (palier) et c_r est l'amortissement tournant.

2. La mise en équation dans le repère mobile R

En utilisant la matrice de passage $[p]$ on peut exprimer les déplacements et leurs dérivées dans le repère mobile.

$$[p] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Après transformation, les équations de mouvement dans le repère mobile s'écrivent :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega(a - 2m) \\ \Omega(a - 2m) & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k - \Omega^2(m - a) & \Omega c_s \\ -\Omega c_s & k - \Omega^2(m - a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

On s'intéresse maintenant à la réponse au balourd :

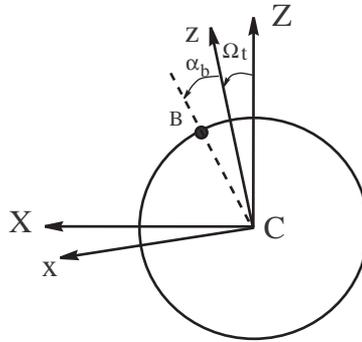


FIG. 4.21: Force due au balourd : repère fixe et repère mobile

A partir de la figure 4.21, la force due au balourd dans les deux repères a pour expression les formes suivantes :

1. Dans le repère Fixe R_0 :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega a \\ \Omega a & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k & -c_r \Omega \\ c_r \Omega & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_b) \\ m_b d \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_b) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

La solution de cette équation (en considérant $\alpha_b = 0$) est :

$$Q_1 = Q_{10} + Q_{11}\sin(\Omega t) + Q_{12}\cos(\Omega t) \quad (4.90)$$

$$Q_2 = Q_{20} + Q_{21}\sin(\Omega t) + Q_{22}\cos(\Omega t)$$

En mettant la solution (équation 4.90) dans l'équation (4.89), l'amplitude de la réponse est donnée par les coordonnées généralisées suivantes exprimées dans le repère fixe :

$$Q_{11} = \frac{(a\Omega^2 - m\Omega^2 + k)m_b d \Omega^2}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 m a + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 k a - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)}$$

$$Q_{12} = \frac{-c_s \Omega^3 m_b d}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 m a + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 k a - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)}$$

$$Q_{21} = \frac{c_s \Omega^3 m_b d}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 m a + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 k a - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)} \quad (4.91)$$

$$Q_{22} = \frac{(a\Omega^2 - m\Omega^2 + k)m_b d \Omega^2}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 m a + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 k a - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)}$$

$$Q_{10} = 0 \text{ et } Q_{20} = 0$$

2. Dans le repère Mobile R :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega(a - 2m) \\ \Omega(a - 2m) & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k - \Omega^2(m - a) & \Omega c_s \\ -\Omega c_s & k - \Omega^2(m - a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \sin(\alpha_b) \\ m_b d \Omega^2 \cos(\alpha_b) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.92)$$

La solution de cette équation avec $\alpha_b = 0$ est :

$$q_1 = q_{10} + q_{11}\sin(\Omega t) + q_{12}\cos(\Omega t) \quad (4.93)$$

$$q_2 = q_{20} + q_{21}\sin(\Omega t) + q_{22}\cos(\Omega t)$$

En mettant la solution équation (4.93) dans l'équation (4.92), l'amplitude de la réponse sont données par les coordonnées généralisées exprimées dans le repère mobile :

$$q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{21} = 0 \quad \text{et} \quad q_{22} = 0$$

$$q_{10} = \frac{(a\Omega^2 - m\Omega^2 + k)m_p d \Omega^2}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 ma + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 ka - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)} \quad (4.94)$$

$$q_{20} = \frac{-c_s \Omega^3 m_p d}{(a^2\Omega^4 - 2\Omega^4 ma + m^2\Omega^4 + 2\Omega^2 ka - 2m\Omega^2 k + c_s^2\Omega^2 + k^2)}$$

L'examen des amplitudes de mouvement d'une réponse permanente au balourd dans les deux repères intégrant l'amortissement interne, externe et effet gyroscopique prouve que ces dernière ne sont pas influencées par l'amortissement interne c_r qui n'intervient pas dans l'amplitude de vibration.

Réponse à une force fixée dans l'espace

On suppose une force fixée dans l'espace qui s'exerce ici selon la direction X comme illustré dans la figure (4.22).

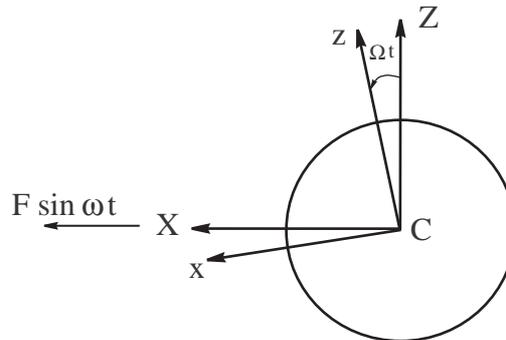


FIG. 4.22: Force fixée dans l'espace : repère fixe et repère mobile

La mise en équation de ce nouveau système soumis à cette force due au balourd dans les deux repères :

1. Dans le repère Fixe R_0 :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega a \\ \Omega a & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k & -c_r \Omega \\ c_r \Omega & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.95}$$

La solution de cette équation est :

$$Q_1 = Q_{10} + Q_{11} \sin(\omega t) + Q_{12} \cos(\omega t) \tag{4.96}$$

$$Q_2 = Q_{20} + Q_{21} \sin(\omega t) + Q_{22} \cos(\omega t)$$

En mettant la solution équation (4.96) dans l'équation (4.95) on obtient le système d'équations à résoudre sous la forme matricielle suivants :

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k & -(c_s + c_r)\omega & -\Omega c_r & a\omega\Omega \\ (c_s + c_r)\omega & -m\omega^2 + k & -a\omega\Omega & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & -a\omega\Omega & -m\omega^2 + k & -(c_s + c_r)\omega \\ a\omega\Omega & \Omega c_r & (c_s + c_r)\omega & -m\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.97}$$

2. Dans le repère Mobile R :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_r & -\Omega(a - 2m) \\ \Omega(a - 2m) & c_s + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k - \Omega^2(m - a) & \Omega c_s \\ -\Omega c_s & k - \Omega^2(m - a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \sin(\omega t) \cos(\Omega t) \\ F \sin(\omega t) \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.98}$$

La solution de cette équation est recherchée sous la forme suivante :

$$q_1 = q_{10} + q_{11}\sin(\omega - \Omega)t + q_{12}\cos(\omega - \Omega)t + q_{13}\sin(\omega + \Omega)t + q_{14}\cos(\omega + \Omega)t \quad (4.99)$$

$$q_2 = q_{20} + q_{21}\sin(\omega - \Omega)t + q_{22}\cos(\omega - \Omega)t + q_{23}\sin(\omega + \Omega)t + q_{24}\cos(\omega + \Omega)t$$

En mettant la solution équation (4.99) dans l'équation (4.98), le système d'équations à résoudre s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 & 0 & -e_4 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 & e_3 & e_7 \\ 0 & 0 & -e_6 & e_5 & 0 & 0 & -e_7 & e_3 \\ -e_3 & -e_4 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ e_4 & -e_3 & 0 & 0 & -e_2 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_3 & -e_4 & 0 & 0 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & e_4 & -e_3 & 0 & 0 & -e_6 & e_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F/2 \\ 0 \\ F/2 \\ 0 \\ 0 \\ F/2 \\ 0 \\ -F/2 \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = -m(\omega - \Omega)^2 + (k - m\Omega^2) \\ e_2 = -(c_s + c_r)(\omega - \Omega) \\ e_3 = \Omega c_s - a\Omega^2 \\ M_4 = -2m\Omega(\omega - \Omega) + a\Omega(\omega - \Omega) \\ e_5 = -m(\omega + \Omega)^2 + (k - m\Omega^2) \\ e_6 = -(c_s + c_r)(\omega + \Omega) \\ M_7 = -2m\Omega(\omega + \Omega) + a\Omega(\omega + \Omega) \end{array} \right. \quad (4.101)$$

Annexe E

Méthode d'Homogénéisation

Les matériaux utilisés pour la conception des rotors sont les matériaux classique comme l'acier et les matériaux composites.

Pour calculer les matrice élémentaires de tout les élément du rotor. Cas rotor en matériaux classiques (acier) on utilise des propriétés des matériaux équivalentes (module d'Young et de cisaillement équivalents). Pour les matériaux composite, on considère les formulations basées sur la théories de poutre et les matériaux homogénéisés, la rigidité de la structure est une fonction du produit EI (une rigidité équivalent), où E est le module d'Young et le I est l'inertie de la section. De même, la dissipation due à l'amortissement interne est une fonction de $EI\eta$ où η est le facteur de perte calculé à partir de la capacité d'amortissement spécifique ψ avec la relation $\eta = \psi/2\pi$.

Deux méthodes d'homogénéisation peuvent être employées : La plus classique utilise une approche équivalentes des matériaux homogénéisé.

Equivalent Modulus Beam Theory *EMBT*

Cette méthode est développé avec la théorie de stratifié associé aux empilements symétriques et équilibrés. Les caractéristiques des matériaux déterminés par cette méthode c'est le module de Young équivalent E_{eq} , module de cisaillement G_{eq} et le module équivalent amorti E_{eq}^{Ψ} . Le module de Young équivalent E_{eq} et le module de cisaillement G_{eq} sont donnes par les équations suivante (Chandramouli [CGP94]) :

$$E_{eq} = \frac{[4(U_1 - U_5)(U_5 - U_3\gamma) - \beta^2 U_2^2]}{U_1 - \beta U_2 + \gamma U_3} \quad (4.102)$$

$$G_{eq} = U_5 - \gamma U_3 \quad (4.103)$$

U_{1-5} sont les combinassions linaires de module de rigidité (Tsai [Tsa88]) et les termes γ et β sont donnée par :

$$\gamma = \sum_{p=1}^N \frac{t_p}{t} \cos 2\theta_p \quad (4.104)$$

$$\beta = \sum_{p=1}^N \frac{t_p}{t} \cos 4\theta_p$$

avec : t_p est l'épaisseur de la couche k , t est l'épaisseur total de rotor, θ_p représente l'angle d'orientation du fibre de la couche k et N est le nombre des couche dans l'épaisseur de l'arbre. Le module de Young amorti est évalué avec la même formule en utilisant la matrice de la capacité d'amortissent spécifique $[\psi]$ due aux matériaux pour chaque couche de la stratifié.

La marice de rigidité dans le repère d'orthotropie :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{E_y\nu_x}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \frac{E_x\nu_y}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

l'équation 4.105 peut s'écrit sous la forme :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Donc les combinassions linaires de module de rigidité sont données par :

$$U_1 = \frac{3}{8}Q_{xx} + \frac{3}{8}Q_{yy} + \frac{1}{4}Q_{xy} + \frac{1}{2}Q_{ss}$$

$$U_1 = \frac{4}{8}(Q_{xx} - Q_{yy})$$

$$U_3 = \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} - \frac{1}{4}Q_{xy} - \frac{1}{2}Q_{ss} \quad (4.107)$$

$$U_4 = \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} + \frac{3}{4}Q_{xy} - \frac{1}{2}Q_{ss}$$

$$U_5 = \frac{1}{8}Q_{xx} + \frac{1}{8}Q_{yy} - \frac{1}{4}Q_{xy} + \frac{1}{2}Q_{ss}$$

et pour les calculs de module de Young équivalent amorti E_{eq}^Ψ on multiplie la matrice de rigidité $[Q]$ par la matrice de capacité d'amortissement spécifique $[\Psi]$.

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{12} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

donc on obtient :

$$[Q]^\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11}Q_{xx} & \Psi_{11}Q_{xy} & 0 \\ \Psi_{22}Q_{xy} & \Psi_{22}Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{12}Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

donc :

$$[Q]^\Psi = \begin{bmatrix} Q_{xx}^\Psi & Q_{xy}^\Psi & 0 \\ Q_{xy}^\Psi & Q_{yy}^\Psi & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss}^\Psi \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

et donc les combinaisons linéaires de module de rigidité amorti sont calculés par :

$$U_1 = \frac{3}{8}Q_{xx}^\Psi + \frac{3}{8}Q_{yy}^\Psi + \frac{1}{4}Q_{xy}^\Psi + \frac{1}{2}Q_{ss}^\Psi$$

$$U_1 = \frac{4}{8}(Q_{xx}^\Psi - Q_{yy}^\Psi)$$

$$U_3 = \frac{1}{8}Q_{xx}^\Psi + \frac{1}{8}Q_{yy}^\Psi - \frac{1}{4}Q_{xy}^\Psi - \frac{1}{2}Q_{ss}^\Psi \quad (4.111)$$

$$U_4 = \frac{1}{8}Q_{xx}^\Psi + \frac{1}{8}Q_{yy}^\Psi + \frac{3}{4}Q_{xy}^\Psi - \frac{1}{2}Q_{ss}^\Psi$$

$$U_5 = \frac{1}{8}Q_{xx}^\Psi + \frac{1}{8}Q_{yy}^\Psi - \frac{1}{4}Q_{xy}^\Psi + \frac{1}{2}Q_{ss}^\Psi$$

General Homogenized Beam Theory *SHBT*

La méthode général d'homogénéisation est basé sur une homogénéisation directe des produits EI et $EI\eta$, GS et $GS\eta$. Et cette méthode a pour objectif d'être valide pour n'importe quelle orientation et séquence d'empilement et elle prend en compte la distance de chaque couche à l'axe neutre (l'axe de tube). Les paramètres homogénéisés de rotor sont dérivés de l'énergie de déformation :

Pour calculer une rigidité équivalente non amorti c'est comme suite :

$$EI = \sum_{p=1}^N E_y^p I^p \quad \text{avec} \quad I^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \quad (4.112)$$

avec :

$$E_y^p(\phi) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_t} + \frac{s^4}{E_t} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{tr}} - 2 \frac{\nu_{tl}}{E_t} \right)} \quad (4.113)$$

mais pour calculer une rigidité équivalente amortie, dans le plan de pli on a :

$$[Q]^\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11}Q_{11} & \Psi_{11}\nu_{21}Q_{11} & 0 \\ \Psi_{22}\nu_{12}Q_{11} & \Psi_{22}Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{12}G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$[\bar{Q}]^\Psi = [T][Q]^\Psi[T]^t \quad (4.115)$$

On inverse cette matrice : $[C] = [\bar{Q}]^\Psi^{-1}$

Donc le module équivalent amortie c'est $\tilde{E}_y = E_y^\Psi = [C(2,2)]^{-1}$ et la rigidité équivalente amor-

tie :

$$\widetilde{EI} = \sum_{p=1}^N \widetilde{E}_y^p I^p \text{ avec } I^p = \frac{R_p^4 - R_{p-1}^4}{4} \quad (4.116)$$

Annexe F

Matrices dues à l'amortissement interne

La loi de comportement dû au matériau pour un modèle de Kelvin-Voigt pour lequel la contrainte est relative à la vitesse de déformation .

$$\sigma = E\varepsilon + E\beta\dot{\varepsilon} \quad (4.117)$$

L'équation 4.117 se compose de deux parties : une partie linéaire présente la loi de Hook et une parti du à la dissipation dans le matériau. Le travail virtuel dû à la partie dissipative de la loi de comportement s'écrit :

$$\delta W = \int_0^L \int_S \sigma \delta\varepsilon dS dy \quad (4.118)$$

$$\delta W = \int_0^L \int_S E \beta \dot{\varepsilon} \delta\varepsilon dS dy \quad (4.119)$$

La déformation longitudinale d'un point de la section de rotor :

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 w^*}{\partial y} \quad (4.120)$$

La vitesse de déformation :

$$\dot{\varepsilon} = -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \quad (4.121)$$

Les déplacement dans le repère mobile sont écrits dans le repère fixe à l'aide de la matrice de transfert.

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (4.122)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t$$

$$\dot{u}^* = \dot{u} \cos \Omega t - u \Omega \sin \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t - w \Omega \cos \Omega t \quad (4.123)$$

$$\dot{w}^* = \dot{u} \sin \Omega t + u \Omega \cos \Omega t + \dot{w} \cos \Omega t - w \Omega \sin \Omega t$$

$$\delta \varepsilon = -x \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta u \cos \Omega t - \delta w \sin \Omega t) - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta u \sin \Omega t + \delta w \cos \Omega t) \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & -x \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\dot{u} \cos \Omega t - u \Omega \sin \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t - w \Omega \cos \Omega t) \\ & -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\dot{u} \sin \Omega t + u \Omega \cos \Omega t + \dot{w} \cos \Omega t - w \Omega \sin \Omega t) \end{aligned} \quad (4.125)$$

L'inertie de la section

$$I = \int_s x^2 ds = \int_s z^2 ds \quad (4.126)$$

$$\int_s xz ds = 0 \quad (4.127)$$

Donc le travail virtuel dans le repère fixe est exprimé par l'équation 4.128

$$\delta W = E\eta I \int_0^L \left[\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \Omega \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \Omega \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right] dy \quad (4.128)$$

$$u = N_1(y) d_u \quad (4.129)$$

$$w = N_2(y) d_w$$

$$\delta W = E\eta I \left[\int_0^L (N_1''^t N_1'' + N_2''^t N_2'') d + \Omega \int_0^L (N_2''^t N_1'' + N_1''^t N_2'') d \right]^t \delta \Delta dy \quad (4.130)$$

d est le vecteur de déplacement nodal.

$$\delta W = -F_i^t \delta \Delta \quad (4.131)$$

$$\vec{F}_i = -E\eta I \left[\int_0^L (N_1''^t N_1'' + N_2''^t N_2'') d + \Omega \int_0^L (N_2''^t N_1'' + N_1''^t N_2'') d \right] dy \quad (4.132)$$

La force généralisé due à l'amortissement interne est calculé dans deux cas :

- Solution de Rayleigh-Ritz pour un système à 2 ddl dont les fonctions de formes retenues sont données par :

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \left[\sin \frac{\pi y}{L}; 0 \right] \\ N_2(y) &= \left[0; \sin \frac{\pi y}{L} \right] \end{aligned} \quad (4.133)$$

En mettant les équation 4.133 dans l'équation 4.132 et après avoir intégré sur la longueur de la poutre on obtient le système matriciel suivant :

$$\vec{F}_i = - \begin{bmatrix} \beta k & 0 \\ 0 & \beta k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \beta k \\ \Omega \beta k & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.134)$$

- Solution avec la méthode des éléments finis d'une poutre en flexion. (poutre de Bernoulli-Euler) à deux noeuds avec 4 ddl par noeud dont les fonctions N_1 et N_2 de formes retenues sont données par :

Le vecteur de déplacement nodale est :

$$d = [u_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{z1}, u_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{z2}] \quad (4.135)$$

Ce qui contient le déplacement d_u et d_w correspondent respectivement aux mouvement dans la direction X et Z, Les vecteurs de déplacement sont définis tels que :

$$d_u = [u_1, \theta_{z1}, u_2, \theta_{z2}] \quad (4.136)$$

$$d_w = [w_1, \theta_{x1}, w_2, \theta_{x2}] \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\ N_2(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \end{aligned} \quad (4.138)$$

En mettant les équation 4.138 dans l'équation 4.132 et après avoir intégré sur la longueur de la poutre on obtient le système matriciel suivant :

Matrice d'amortissement due à l'amortissement interne :

$$[C_i] = \frac{EI\beta}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & sym & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

Matrice de rigidité due à l'amortissement interne :

$$[K_i] = \frac{EI\beta}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ & & & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 6L \\ & anti & & & & & 0 & -4L^2 \\ & sym & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

Annexe G

Les modules élastiques et le module de cisaillement pour une poutre

Les modules élastiques et le module de cisaillement dans le plan (X, Y) pour un pli p peut être explicitement écrits comme suite ([Gay91]) :

$$E_x^p(\phi^p) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_l} + \frac{c^4}{E_t} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)} \quad (4.141)$$

$$E_y^p(\phi^p) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)} \quad (4.142)$$

$$G_{xy}^p(\phi^p) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{lt}}} \quad (4.143)$$

Ainsi, les termes suivants illustrant les couplages de traction-compression et de cisaillement transverse sont données par :

$$\frac{\nu_{yx}^p}{E_y^p}(\phi) = \frac{\nu_{lt}}{E_t} (c^4 - s^4) - c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} - \frac{1}{G_{lt}} \right) \quad (4.144)$$

$$\frac{\eta_{xy}^p}{G_{xy}^p}(\phi) = -2cs \left\{ \frac{c^2}{E_l} - \frac{s^2}{E_t} + (c^2 - s^2) \left(\frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right\} \quad (4.145)$$

$$\frac{\mu_{xy}^p}{G_{xy}^p}(\phi) = -2cs \left\{ \frac{s^2}{E_l} - \frac{c^2}{E_t} - (c^2 - s^2) \left(\frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right\} \quad (4.146)$$

Annexe H

Amortissement interne : Aspect physique

L'amortissement est généralement envisagé comme un moyen efficace pour réduire les amplitudes de vibration au voisinage des résonances et contrôler la stabilité des mécanismes. Cependant, l'amortissement interne (tournant) dans la dynamique des machines tournantes représente une source potentielle de vibrations dues à l'auto excitation du système. Il est de nos jours parfaitement établi que les mécanismes d'amortissement interne déstabilisent les systèmes tournants à des vitesses de rotation au dessus de la première vitesse critique (cas de système symétrique).

Afin d'expliquer les aspects phénoménologiques liés à l'amortissement tournant, nous considérons un système de masse tournante supportée par des ressorts (figure 4.23) (Chen [CG05]).

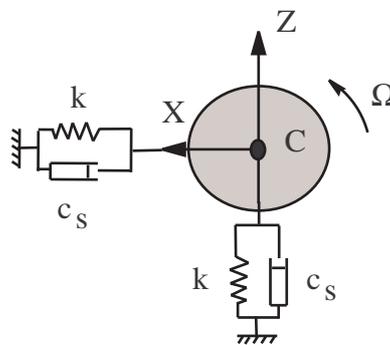


FIG. 4.23: Système masse-raideur-amortisseur

Les forces appliquées sur la masse sont la force élastique de restitution (raideur palier) et les forces dues aux amortissements externe c_s et interne c_r . La force due à l'amortissement externe est appliquée dans une direction opposée au mouvement relativement au repère fixe. Elle s'exprime de manière classique. La force due à l'amortissement interne est une force proportionnelle à la vitesse de rotation, exprimée dans le repère mobile. L'expression de cette force est donnée par la relation suivante (équation 4.147).

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & 0 \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ w^* \end{pmatrix} \quad (4.147)$$

où : u^* et w^* sont les déplacements du centre de la masse C exprimés dans le repère fixe et u et w quand ils sont exprimés dans le repère fixe.

Après changement de repère, la force due à l'amortissement interne est écrite dans le repère fixe comme suit :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & 0 \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c_r \Omega \\ c_r \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

Ces expressions permettent de remarquer que l'amortissement interne engendre non seulement une force fonction des vitesses mais également une force fonction des déplacements. Les coefficients de la matrice de rigidité, appelés termes de couplage antisymétrique, produisent une force tangentielle à l'orbite de mode. Et ce sont précisément ces termes qui contribuent à la déstabilisation du système en rotation.

En effet, l'équation de mouvement s'écrit dans le repère fixe :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_r + c_s & 0 \\ 0 & c_r + c_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.149)$$

La solution transitoire est recherchée alors sous forme exponentielle :

$$u = u_0 e^{\lambda t} \quad (4.150)$$

$$w = w_0 e^{\lambda t}$$

Après introduction de cette solution dans l'équation de mouvement, il vient :

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + (c_r + c_s)\lambda + k & -\Omega c_r \\ \Omega c_r & m\lambda^2 + (c_r + c_s)\lambda + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.151)$$

L'équation caractéristique a pour expression :

$$(m\lambda^2 + (c_r + c_s)\lambda + k)^2 + (\Omega c_r)^2 = 0 \quad (4.152)$$

La solution de cette équation est de type complexe, écrite sous la forme : $\lambda_i = a_i \mp j\omega_i$.

L'équation caractéristique 4.152 s'écrit :

$$m(a^2 - \omega^2 + 2aj\omega) + (c_r a + jc_r \omega + k)^2 + c_r^2 \Omega^2 = 0 \quad (4.153)$$

Le seuil d'instabilité est obtenu lorsque $a = 0$ donc $\lambda_i = j\omega_i$, soit encore pour l'équation 4.153 :

$$(-m\omega^2 + j(c_r + c_s)\omega + k)^2 + c_r^2 \Omega^2 = 0 \quad (4.154)$$

En développant l'équation 4.154 :

$$(k - m\omega^2)^2 - \omega^2(c_r + c_s)^2 + c_r^2 \Omega^2 + 2j\omega c_r(k - m\omega^2) = 0 \quad (4.155)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire et en les identifiant chacune à 0, il résulte :

$$(k - m\omega^2)^2 - \omega^2(c_r + c_s)^2 + c_r^2 \Omega^2 = 0 \quad (4.156)$$

$$2j\omega c_r(k - m\omega^2) = 0 \quad (4.157)$$

L'équation 4.157 fournit les fréquences propres :

$$k - m\omega^2 = 0 \quad (4.158)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.159)$$

En mettant l'équation 4.159 dans l'équation 4.156, il vient :

$$c_r^2 \Omega^2 - \omega^2(c_r + c_s)^2 = 0 \quad (4.160)$$

Donc :

$$c_r \Omega - \omega(c_r + c_s) = 0 \quad (4.161)$$

S'il n'y a pas d'amortissement externe, le système se déstabilise à une vitesse de rotation plus grande que la fréquence naturelle non amortie du système.

Les forces appliquées sur le système, qui tourne à une vitesse de rotation Ω à un rayon r [CG05], au seuil d'instabilité $\Omega = \omega_0$, peuvent être obtenues en multipliant les équations 4.158 et 4.160 par le déplacement r ($r = \sqrt{X^2 + Z^2}$). L'équilibre des forces, au seuil d'instabilité, est alors présenté figure 4.24.

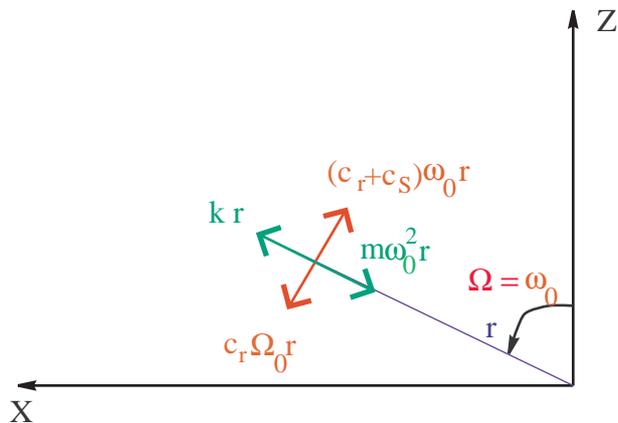


FIG. 4.24: L'équilibre des forces au seuil d'instabilité

L'accélération radiale s'équilibre toujours avec l'effort du ressort ; les efforts dus aux amortissements sont des efforts tangentiels et la force résultante de ces deux efforts dépend de $(\omega - \Omega)$ (ce qui définit le régime de fonctionnement : subcritique ou supercritique) et de l'amortissement externe.

Une explication imagée est illustrée par les figures (4.25, 4.26 et 4.27) [Ada01] en utilisant un exemple simple dans lequel on suppose que seul l'amortissement interne est pris en compte.

Précession directe

Quand le système est en précession directe la vitesse de mode est positive ($\omega > 0$) et il faut différencier deux régimes :

Régime subcritique

Le système tourne à une vitesse de rotation ($(\Omega - \omega) < 0$) au-dessous de sa vitesse critique (figure 4.25). La force tangentielle résultante (la force résultante due à l'amortissement interne) F_t

est une force négative et est de direction opposée à la vitesse de mode ; elle diminue donc l'orbite de vibration. Le système est stable, l'orbite est stable.

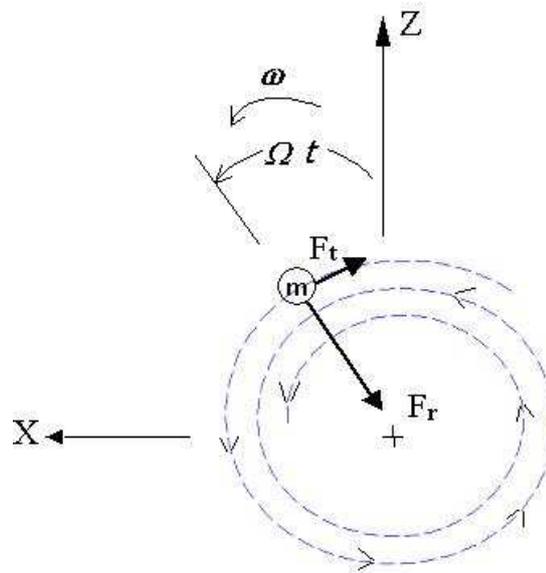


FIG. 4.25: Précession directe en régime sub-critique $\Omega < \omega$

Régime supercritique

Le système tourne à une vitesse de rotation ($\Omega - \omega > 0$) au-dessous de sa vitesse critique (figure 4.26). La force tangentielle résultante est une force positive et de même direction que la vitesse de mode. Elle rapporte de l'énergie à l'orbite du mode. Comme le mode devient auto-excité à sa fréquence naturelle, le système devient instable ; l'orbite diverge.

Précession inverse

Quand le système est en précession inverse la vitesse de mode est négative ($\omega < 0$) $\forall \Omega > 0$ le système est toujours stable (figure 4.27). L'amortissement interne génère une force tangentielle positive dans une direction opposée de la vitesse du mode. Cette force freine le mode et diminue l'orbite. Le mode est toujours stable pour n'importe quelle vitesse de rotation.

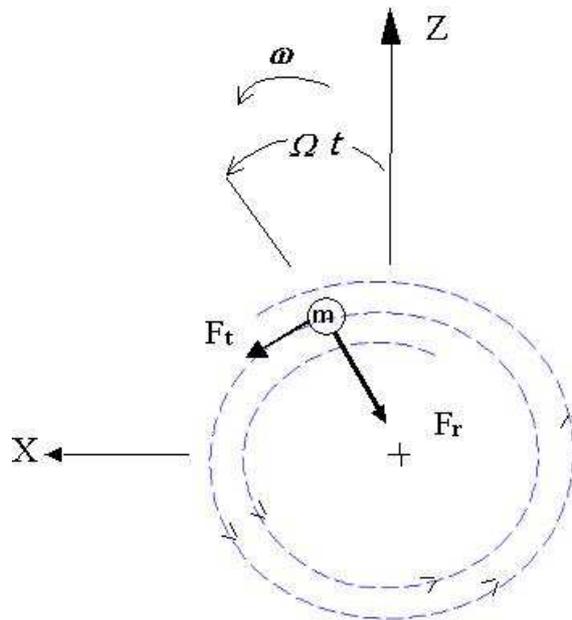


FIG. 4.26: Précession directe en régime super-critique $\Omega > \omega$

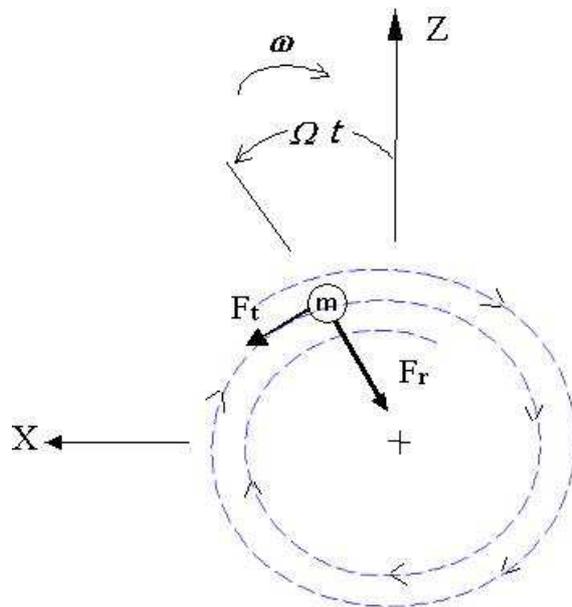


FIG. 4.27: Précession inverse $\Omega > 0$

En conclusion, il est usuellement prouvé que la force dissipative due à l'amortissement externe

a un effet stabilisant sur le système en rotation, tandis que la force de dissipation due à l'amortissement interne déstabilise le système à une vitesse plus grande que la fréquence naturelle du système.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : SINO

DATE de SOUTENANCE : 4 octobre 2007

Prénoms : Rim

TITRE : COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET STABILITE DES ROTORS : APPLICATION AUX ROTORS COMPOSITES

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2007-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ : Ce travail a pour objet l'étude de la stabilité des ensembles tournants lorsque des termes d'amortissement interne (dus aux matériaux) et d'amortissement externe (paliers) sont introduits dans le modèle. La majorité des études identifiées dans la littérature sont fondées sur des développements numériques. La principale difficulté réside dans l'évaluation des paramètres physiques de l'amortissement interne qui permettent une prédiction des instabilités potentielles avec une précision suffisante. Afin de considérer des propriétés mécaniques réelles en terme d'amortissement interne, un modèle rhéologique de solide viscoélastique associé à une approche générale éléments finis de type poutre est développée, incluant les effets de cisaillement transverse. Après une description théorique (choix du modèle d'amortissement interne et équations du mouvement), une première application valide la méthode proposée. L'influence de l'amortissement sur les fréquences et les seuils d'instabilité est analysée via une étude paramétrique. Les résultats sont comparés à ceux obtenus à partir d'une approche analytique et à partir des expérimentations en rotation. Une seconde application s'intéresse à la stabilité dynamique d'un rotor composite avec prise en compte de l'amortissement interne et du cisaillement transverse. Une théorie simplifiée d'homogénéisation de poutre (SHBT : Simplified Homogenized Beam Theory), associée à une formulation éléments finis est introduite et utilisée pour évaluer les fréquences naturelles et les seuils d'instabilité. Cette théorie est comparée avec d'autres théories issues de la littérature (EMBT : Equivalent Modulus Beam Theory), EMBT modifié et (LBT : Layerwise Beam Theory). Une étude qualitative montre l'influence de différents paramètres (orientations, séquences d'empilement, etc...) ainsi que les effets du cisaillement transverse lorsque ce dernier est introduit dans le modèle. Les effets associés sont traduits directement en terme de fréquences et de seuils d'instabilité de la structure tournante lorsque des empilements symétriques aussi bien qu'asymétriques sont considérés.

MOTS-CLÉS : Dynamique des Rotors, Amortissement Interne et Externe, Critère de Stabilité, Rotor Composite, Amortissement, Stabilité, Seuil d'Instabilité, Cisaillement Transverse, Élément Finis, Théorie de Poutre

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique Contacts et Structures (LaMCoS)

UMR 5259 CNRS - INSA de Lyon
18-20 rue des sciences
F69621 Villeurbanne cedex. FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Georges JACQUET

Président du jury : Alain BERLIOZ

Composition du jury : Alain BERLIOZ	Pascal SWIDER
Christian HOCHARD	Georges JACQUET
Thouraya N. BARANGER	Eric CHATELET