

THESE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

FORMATION DOCTORALE : Mécanique

ECOLE DOCTORALE : Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

PAR :

BOURDON Adeline

Ingénieur Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques de Besançon

MODELISATION DYNAMIQUE GLOBALE DES BOITES DE VITESSES AUTOMOBILE

Soutenue le : 24 septembre 1997

devant la Commission d'Examen

Jury MM.

- **M. de Cremoux, Alain**
- **M. Frène, Jean**
- **M. Heckly, Alain**
- **M. Lallement, Gérard**
- **M. Pelle, Jean Pierre**
- **M. Play, Daniel**
- **M. Rigal, Jean François**
- **M. Villars, François**

Président

Rapporteur

Rapporteur

A mes Parents et Grands-Parents

*"It's not a lie,
it's just someone else's point of view."*

Obi Wan Kenobi

"Try not ! Do or do not ! There is no try"

Maître Yoda

Georges Lucas - Star War

AVANT PROPOS

Cette étude a été réalisée au Laboratoire de Conception et d'Analyse des Systèmes Mécaniques (C.A.S.M.) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, sous la direction de Monsieur le Professeur D. PLAY, et au service DETA/MSC/DCL de la Société PSA Peugeot Citroën sous la direction de Monsieur M. CORONA. Je tiens à les remercier tous les deux de m'avoir accueillie dans leur Laboratoire et Service, de m'avoir guidée et conseillée tout au long de ce travail, et, avant tout de m'avoir fait confiance pour mener à bien ces travaux de recherche.

Cette étude s'inscrivant en continuité de travaux préalables, je souhaite remercier Monsieur G. LENEVEU de la Société PSA Peugeot Citroën et Monsieur J. F. RIGAL du Laboratoire C.A.S.M. de l'avoir initiée, de m'avoir apporté leur soutien et leurs conseils avisés et de l'orientation concrète qu'ils ont donnée à ces travaux.

Je désire également exprimer mes plus sincères remerciements à Monsieur A. De CREMOUX de la Société PSA Peugeot Citroën, pour avoir été mon "tuteur" dans le cadre de ma convention CIFRE, et d'avoir fait preuve à mon égard de la plus grande disponibilité. Et également, pour avoir accepté d'être membre du Jury.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs les professeurs G. LALLEMENT de la Faculté des Sciences de Besançon, et J. P. PELLE de l'E.N.S. Cachan en acceptant de juger ce travail et d'en être rapporteur et membre du jury.

Je souhaite également exprimer mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur J. FRENE de la Faculté des Sciences de Poitiers et à Messieurs A. Heckly et F. Villars de la Société PSA Peugeot Citroën pour l'importance qu'ils accordent à mon travail en acceptant d'être membres du jury.

Je remercie tout particulièrement Mme C. CONTET du Laboratoire C.A.S.M. pour sa gentillesse, et son dévouement et pour son soutien dans les moments difficiles.

J'adresse enfin mes remerciements à tous les membres du Laboratoire C.A.S.M. et du Service DETA/MSC/DCL ingénieurs, chercheurs, informaticiens, secrétaires pour leur sympathie, leur aide et leur soutien constant au cours des différentes phases de ce travail. J'ai également une pensée chaleureuse à l'adresse de l'ensemble de mes enseignants, pour m'avoir, tout au long de ma scolarité, donné l'envie d'apprendre et d'acquérir de nouvelles connaissances.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le formidable essor des techniques de modélisation des objets mécaniques et des moyens informatiques conduit à considérer les activités liées au "calcul (dimensionnement, prédiction et simulation du comportement ...) comme une étape majeure du processus de conception de nouveaux produits. L'utilisation judicieuse de ces moyens et de ces méthodes par les Bureaux d'Etudes permet :

- une diminution des coûts de conception et de réalisation en limitant le nombre d'essais sur prototypes expérimentaux,
- une réduction des délais de conception grâce à une évaluation précoce et sûre de l'influence des choix technologiques, ce qui limite le nombre "d'essais-erreur" et les conséquences des itérations successives,
- une optimisation de la qualité du produit final en termes de poids, d'encombrement, de fiabilité, de confort ...

Dans le cas des mécanismes complexes, l'optimisation de la forme, du volume et de la masse de ces systèmes, conduit à l'apparition de couplages importants entre les différents composants technologiques. Le comportement de l'ensemble ne peut plus se ramener à la somme des comportements des éléments constitutifs. Ainsi des modèles globaux, véritables prototypes numériques, doivent être mis en place. La précision de ces modélisations globales doit être suffisamment fine, pour que les modèles soient numériquement "robustes" et que les résultats obtenus soient fiables. Mais dans le même temps, la modélisation globale doit être limitée à l'essentiel, pour que la taille des modèles numériques et les temps de calculs ne deviennent pas prohibitifs. Un effet "d'échelle" d'observation doit également être considéré. En effet, le comportement des liaisons par contact entre surfaces (engrenages, roulement) qui fait intervenir des grandeurs de l'ordre du micron, doit être décrit aussi précisément que le comportement de l'architecture globale du mécanisme d'ordre de grandeur du décimètre, voire du mètre. De nouvelles méthodologies de conception intégrant les comportements locaux et globaux du mécanisme, tant cinématiques, statiques que dynamiques, doivent également être définies.

Dans le cadre de la conception des mécanismes de transmission de puissance par engrenages, les études et les modélisations réalisées sont largement motivées par la volonté de

comprendre et de réduire les nuisances sonores par l'analyse du comportement vibratoire et vibro-acoustique du système. Depuis une trentaine d'années, un grand nombre de travaux relatifs au comportement des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux a été réalisé. Ces travaux ont contribué à la définition de modèles numériques de l'interface d'engrènement. Mais dans la majorité des cas, les modèles considérés se limitaient à la "simple" chaîne cinématique de bancs d'essais de laboratoire et les carters étaient considérés comme "infiniment" rigides. Les paliers à roulements représentaient alors les conditions aux limites des modèles. Plus récemment, afin de mieux comprendre la transmission des excitations et du bruit d'engrènement, le comportement vibratoire des carters a été introduit dans les modèles numériques. Mais dans la plupart des cas, les carters considérés avaient des formes simples, parallélépipédiques très éloignées des carters industriels aux formes "optimisées". D'un autre côté, des travaux de modélisation du comportement statique des systèmes mécaniques réalisés depuis une quinzaine d'années, permettent de mieux concevoir les boîtes de transmission par engrenages. Notamment, le dimensionnement des éléments est optimisé en tenant compte des interactions entre les pièces, et de la distribution des efforts à la fois dans les engrenages et dans les roulements.

La problématique de la thèse apparaissait alors clairement : la modélisation globale avec effet d'échelle, pouvait-elle être étendue au comportement dynamique de systèmes mécaniques comportant à la fois des carters, des supports aux formes complexes et une cinématique de transmission de puissance élaborée ? La motivation et le soutien industriel permettant de maintenir le cap des réalités mécaniques et technologiques ont été assurés par l'intermédiaire d'une convention C.I.F.R.E. avec le groupe PSA-DETA (Direction des Etudes et des Techniques de l'Automobile).

La mise en place de modèles globaux de comportement est un travail "transversal" périlleux, qui nécessite la synthèse de nombreux travaux de recherches "verticaux" réalisés dans des domaines très différents : modélisation de l'interface d'engrènement, des paliers à roulement, des carters, prise en compte de l'amortissement, technique de modélisation dynamiques et d'analyse numérique ... Le danger provient de la tentation de limiter les difficultés en adoptant, pour certains phénomènes et parties élémentaires du système étudié, des modèles élémentaires "simplistes" qui par la suite en considérant la globalité du système, risquent de masquer des interactions essentielles. D'un autre côté, si ce piège est évité, l'originalité du travail repose sur l'intégration et l'articulation des différentes descriptions, afin d'obtenir une modélisation globale du comportement qui soit significative, robuste et cohérente. Les modèles développés reposent sur un principe de discrétisation de la géométrie et des milieux continus. Ils utilisent la méthode des éléments finis en déplacements, afin de s'intégrer "facilement" dans les processus de conception existants pour les éléments de structure "isolés". Un certain nombre de choix et d'hypothèses ont naturellement dû être faits, en particulier de "découpler" le comportement "statique" du système soumis à des efforts nominaux, du comportement "dynamique" du système soumis à des excitations internes (engrènement) ou externes (acyclismes moteur ...), supposées petites par rapport au chargement statique. Les modèles statiques globaux intègrent le comportement non-linéaire éventuel des constituants technologiques des mécanismes de transmission de puissance. Ils permettent de définir, pour un chargement statique donné, le point de fonctionnement du mécanisme. Les modèles dynamiques sont alors réalisés en linéarisant le comportement du système autour de ce point de fonctionnement. Naturellement, les limites fixées par les hypothèses doivent être vérifiées en fin de travail afin de qualifier l'approche.

La réalisation de modèles numériques fiables et robustes passe nécessairement par des phases de qualification expérimentales et de comparaison "calculs-essais". La validité de l'approche statique globale avait été vérifiée expérimentalement lors de travaux précédents menés à la fois au Laboratoire et chez PSA. Pour ce qui est des modèles dynamiques, la complexité du système rend difficile la mise en oeuvre d'une campagne de recalage "classique". En effet, la boîte de vitesses ne peut pas être "isolée" et les essais doivent être réalisés sur des mécanismes sous charge et en fonctionnement. Cette étape, nécessaire dans le cadre général, dépassait de très loin le cadre de notre étude. Néanmoins, une campagne de qualification expérimentale des modèles dynamiques proposés dans notre travail est en cours de réalisation dans le cadre d'une autre thèse au Laboratoire. Les études numériques préalables présentées dans ce document doivent permettre de comprendre les phénomènes globaux intervenant afin de mieux cibler la campagne d'essais, et d'estimer d'un point de vue numérique l'influence des modélisations retenues et de "localiser" les sources possibles d'erreur de modélisation. Cette qualification tant numérique qu'expérimentale des modèles développés, est réalisée progressivement en "assemblant" au fur et à mesure les divers éléments de la boîte de vitesses.

La description des modèles statiques globaux permettant de définir le point de fonctionnement du mécanisme considéré, est présentée au chapitre 1. Des éléments de modélisation spécifiques ont été développés. Ils permettent une prise en compte précise du comportement non-linéaire des composants technologiques de la boîte : engrenages, paliers à roulement ... Pour ces derniers, une approche "unifiée" englobant l'ensemble des roulements a été proposée. Elle permet une extension aisée du modèle statique non-linéaire aux modèles dynamiques linéarisés. Cette étape introductive a consisté essentiellement en une reprise, une remise en forme et une généralisation de travaux déjà réalisés au Laboratoire. Les modifications apportées aux modèles initiaux se sont traduites uniquement par une amélioration de la convergence des processus de calcul et ont permis l'extension des résultats statiques à la modélisation dynamique. Cette étape a conduit à la réalisation d'un code de calcul s'intégrant à l'environnement logiciel des Bureaux d'Etudes du Groupe PSA. Mais, plus généralement et d'un point de vue scientifique, elle a permis de définir un cadre de travail.

Le chapitre 2 de ce document est une synthèse bibliographique des travaux réalisés sur la modélisation dynamiques des différents constituants d'une boîte de vitesses, et un descriptif des modèles retenus. L'intégration du comportement vibratoire des carters réels par l'intermédiaire de techniques de sous-structuration et le développement d'une modélisation plus fine du comportement dynamique des paliers à roulement constituent un apport significatif aux modèles existants. Cette étape a également débouché sur la réalisation d'un code de calcul éléments finis en dynamique orienté vers la modélisation des mécanismes de transmission de puissance et d'outil de visualisation et de post-traitement des résultats.

Les premiers travaux, présentés au chapitre 3, se sont restreints à l'étude du comportement dynamique de la chaîne cinématique à "l'arrêt". Ils ont principalement analysé l'influence de la modélisation des éléments constitutifs sur le comportement global du système. Ces études ont mis en évidence le rôle prépondérant des paliers à roulement sur le comportement dynamique global de la chaîne cinématique et, par voie de conséquence, les avantages des nouvelles modélisations proposées pour ces éléments. Ces premières études ont également permis de justifier a posteriori l'intérêt des études statiques globales préalables et de définir des limites acceptables de "linéarisation" du comportement du mécanisme, hypothèse principale de la réalisation de ces modèles dynamiques. Les études expérimentales menées en parallèle ont permis de valider cette première partie.

Au chapitre 4, l'influence dynamique du carter a été introduite dans les modèles globaux par l'intermédiaire de matrices de masse et de rigidité obtenues par sous-structuration d'un modèle initial élaboré. Les modèles initiaux et réduits ont été réalisés sous la responsabilité des Bureaux d'Etudes de PSA-DETA. Le comportement dynamique de ces modèles a été validé expérimentalement chez PSA. L'assemblage numérique de la chaîne cinématique et du carter se fait par l'intermédiaire des éléments de roulement développés dans le cadre de ce travail. Des excitations internes, liées aux phénomènes d'engrènement et modélisant le fonctionnement de la boîte de vitesses, ont également été introduites dans ce dernier chapitre par l'intermédiaire de rigidités d'engrènement variables. Ainsi, des grandeurs significatives et représentatives du bruit d'engrènement d'une boîte de vitesses, comme l'erreur de transmission dynamique, ont été simulées numériquement. Plus généralement, la réalisation d'un calcul direct et réaliste du comportement dynamique d'un système complexe à engrenages est présenté.

Chapitre 1 :

ETUDES STATIQUES DES MECANISMES

DETERMINATION DU POINT DE FONCTIONNEMENT

Le but de ce chapitre est de rappeler l'intérêt des modèles globaux dans l'étude statique des mécanismes de transmission de puissance, et de présenter les techniques d'analyse et de modélisation mises en oeuvre. Les mécanismes considérés ont un comportement fortement non-linéaire, et l'analyse statique doit être l'étape préalable à toutes études dynamiques réalisées par linéarisation du comportement autour d'un point de fonctionnement.

Les mécanismes de transmission de puissance sont formés de structures au comportement linéaire (arbres, carter ...) et d'éléments de liaison (roulements, engrenages, ...) au comportement non-linéaire. La modélisation retenue et les techniques de résolution envisagées doivent nécessairement prendre en compte ces caractéristiques. Dans ce chapitre, une première partie présente en guise d'introduction, les principes et les intérêts des modèles globaux, et les méthodes générales de modélisation et de résolution des systèmes non-linéaires. La seconde partie est une synthèse bibliographique des techniques de modélisation des éléments constitutifs de ces mécanismes. Elle décrit également les modèles retenus et leur prise en compte informatique. La troisième partie présente la mise en oeuvre de l'étude globale des mécanismes complexes en statique, dans un contexte industriel. La quatrième partie est consacrée à l'application de ces méthodes à un mécanisme réel : une boîte de vitesses automobile. Plus particulièrement, l'influence de l'environnement mécanique sur le comportement statique des roulements est examinée.

1. INTRODUCTION

1.1 Principes et intérêts des modèles globaux

En conception mécanique, les tendances actuelles consistent à intégrer les diverses fonctionnalités mécaniques dans des volumes de plus en plus réduits, et à diminuer les masses des constituants. En conséquence, les interactions et les couplages entre les différentes fonctions élémentaires deviennent importants, et la déformabilité des pièces doit nécessairement être prise en compte pour assurer un fonctionnement correct du système. Il n'est plus possible de considérer que les arbres, les carters et les pignons ont des rigidités infinies. Les modèles construits à partir de solides indéformables ne sont plus représentatifs du comportement réel du mécanisme. Des modèles globaux déformables de prédiction du comportement statique sous charge ont été développés (Rigal [1.28], Choi [1.4], Houpert [1.11]). Ces modèles permettent par exemple de déterminer les chargements précis des carters, données nécessaires à l'optimisation de leur géométrie (diminution des masses,

maîtrise des contraintes et des déformations par le positionnement judicieux des nervures). Ils permettent également de vérifier que les déformées statiques des arbres et des carters ne nuisent pas au bon fonctionnement "cinématique" de l'ensemble (*Toma [1.33]*).

Les systèmes mécaniques de transmission de puissance (boîtes de vitesses automobile ou de machines outils, boîtes de transmission de puissance d'hélicoptères ...) sont formés d'éléments de "structure" (arbres, carters ...) reliés par des éléments technologiques de "liaison" (paliers à roulement, engrenages ...). Les contraintes de fabrication, de montage, et de fonctionnement font apparaître des jeux qui contrôlent les conditions de transmission des efforts entre les constituants du mécanisme. La présence de ces éléments technologiques au comportement complexe se traduit par l'apparition de non-linéarités géométriques issues des jeux, et de non-linéarités matérielles dans les zones où le comportement du matériau n'est pas élastique linéaire comme le contact hertzien. En fonctionnement, ces mécanismes sont soumis à des chargements "statiques" et à des excitations dynamiques. A chaque chargement statique va donc correspondre un point de fonctionnement autour duquel seront réalisées les études dynamiques. Afin de déterminer, pour un chargement statique donné, ce point de fonctionnement les modèles utilisés et les méthodes de résolution mises en oeuvre doivent nécessairement prendre en compte les non-linéarités.

1.2 Modèles numériques et méthodes de résolution

Seules des techniques numériques basées sur une discrétisation du milieu continu par des méthodes d'approximation, permettent de prédire le comportement des systèmes complexes. Dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis (M.E.F.), le système mécanique est discrétisé par sous-domaines (pièce ou groupe de pièces) de forme géométrique simple, reliés aux "noeuds" de discrétisation. La géométrie du modèle est alors définie par la position de ces noeuds, et chaque sous-domaine est caractérisé par les équations du comportement. Le problème de milieu continu se ramène alors à un problème discret avec un nombre fini de paramètres inconnus : les degrés de libertés (ddl). Selon la méthode employée, ces paramètres sont soit les forces et les contraintes résultantes dans les éléments (méthode des forces), soit les déplacements et éventuellement leurs dérivés, aux noeuds du modèle (méthode des déplacements). Les principes et les techniques des méthodes par éléments finis sont largement décrits dans les ouvrages de **J.F. Imbert [3.9]**, **K.J. Bath [3.1]**, **G. Dhatt** et **G. Thouzot [3.3]**.

Aujourd'hui en calcul de structures la méthode des déplacements est généralement appliquée aux problèmes statiques de la mécanique. Les n équations régissant l'équilibre du système se mettent sous la forme :

$$[K(\{d\})] \cdot \{d\} = \{F\} \quad (1.1)$$

où $[K]$ est une matrice carrée, symétrique de dimension n représentant la rigidité du système. Elle est formée par l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires associées à chaque sous-domaine. Le vecteur $\{d\}$ est le vecteur des déplacements généralisés, et $\{F\}$ est le vecteur des efforts ponctuels généralisés appliqués aux noeuds de la structure. Les non-linéarités se traduisent par une matrice de rigidité $[K]$ dépendante des déplacements.

Les méthodes de résolution de tels systèmes sont nombreuses (*Bath [3.1]*, *Imbert [3.9]*, *Oden [3.16]*). Certaines sont très performantes pour la résolution des problèmes

spécifiques, mais présentent de faibles performances dans d'autres cas. Dans le cadre de la modélisation des systèmes de transmission de puissance, les travaux de **I.S. Choi** ([1.4], [2.3], [2.4], [2.5]) l'ont conduit à retenir la méthode "classique" de Newton-Raphson. Elle permet de déterminer d'une manière itérative la solution du problème non-linéaire (1.1). Idéalement, l'équation (1.1) doit être exactement satisfaite. Dans la réalité "numérique", les équations ne sont vérifiées qu'avec un certain degré de précision et le système à résoudre s'exprime par :

$$\{R(\{d\})\} = [K(\{d\})] \cdot \{d\} - \{F\} \approx \{0\} \quad (1.2)$$

où $\{R(d)\}$ est le vecteur des forces de déséquilibre ou des résidus. La résolution consiste à déterminer, pour un chargement extérieur $\{F\}$ donné, le vecteur $\{d^*\}$ tel que $\{R(d^*)\}$ soit égal au vecteur nul. Le vecteur $\{d^*\}$ ainsi obtenu correspond à la déformée statique du système. Sa recherche se fait de manière itérative à partir d'une valeur initiale $\{d^0\}$ des déplacements (*Dhatt et Touzot [3.3], Bourdon et al. [5.6]*) :

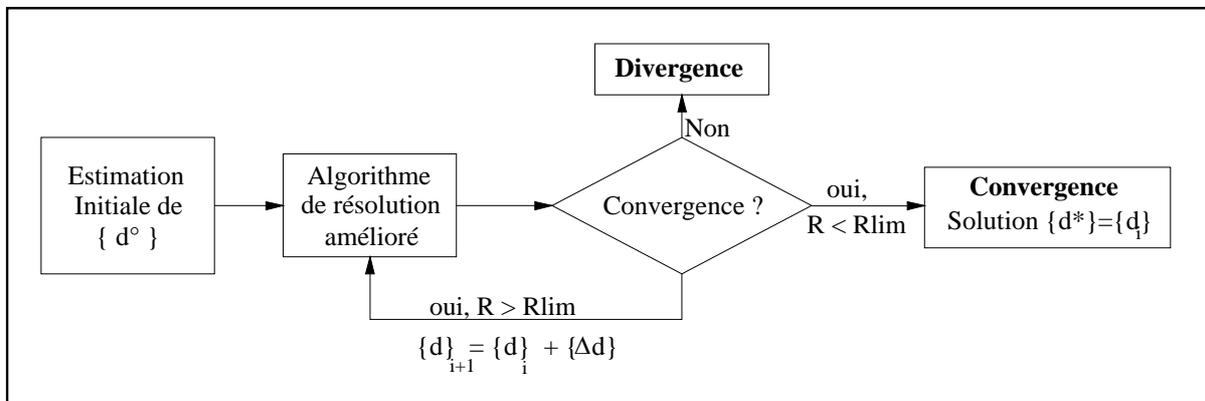


Figure 1.1 : Principe de résolution des systèmes non-linéaires

A l'itération $i+1$, la détermination de $\{\Delta d\}$ s'effectue à partir d'un développement en série de Taylor au premier ordre et au voisinage de $\{d\}_i$ de l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned} \{R(\{d\}_{i+1})\} &= \{R(\{d\}_i + \{\Delta d\})\} \\ &= \{R(\{d\}_i)\} + \underbrace{\left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{d\}} \right]_{d_i}}_{[K_t(\{d\}_i)]} \cdot \{\Delta d\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La matrice $[K_t(\{d\}_i)]$ est la matrice de rigidité tangente calculée en $\{d\}_i$ du système. Elle s'exprime en fonction des dérivés partielles de la matrice de rigidité $[K]$ et du vecteur des efforts extérieurs :

$$[K_T(\{d\}_i)] = - \left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{d\}} \right]_{\{d\}_i} + [K(\{d\}_i)] + \left[\frac{\partial [K(\{d\})]}{\partial \{d\}} \cdot \{d\} \right]_{\{d\}_i} \quad (1.4)$$

A chaque itération, le problème se ramène à la résolution d'un problème linéaire d'inconnue $\{\Delta d\}$:

$$[K_T(\{d\}_i)] \cdot \{\Delta d\} = -\{R(\{d\}_i)\} \quad (1.5)$$

Le processus itératif s'arrête lorsque, pour une tolérance ε donnée,

$$\frac{\sqrt{\{ \Delta d \}^T \cdot \{ \Delta d \}}}{\sqrt{\{ d \}_i^T \cdot \{ d \}_i}} \leq \varepsilon \quad (1.6)$$

L'algorithme détaillé de la méthode de Newton-Raphson est donné en annexe A.1.

2. MODÉLISATION STATIQUE DES SYSTÈMES DE TRANSMISSION DE PUISSANCE : APPROCHE BIBLIOGRAPHIQUE ET MISE EN OEUVRE

Les constituants des systèmes mécaniques de transmission de puissance peuvent être classés suivant deux catégories (*Rigal [1.28], [1.29], Choi [1.4]*) :

- les éléments dont le comportement est élastique linéaire dans la gamme de chargements considérée (arbres, carters ...); leur matrice de rigidité est alors indépendante des déplacements,
- les éléments "non-linéaires" qui modélisent le comportement des organes de transmission (roulements, liaisons boulonnées, engrenages ...); leur matrice de rigidité dépend des déplacements, et doit être recalculée à chaque itération.

La matrice de rigidité globale du système (1.1) peut donc s'écrire comme la somme d'une matrice constante correspondant aux éléments linéaires, et d'une matrice dépendant des déplacements pour les éléments non-linéaires.

$$[K(\{d\})] = [K_{Lin}] + [K_{NLin}(\{d\})] \quad (1.7)$$

Le modèle statique global doit prendre en compte de manière satisfaisante les éléments linéaires et non-linéaires qui interviennent.

2.1 Modélisation des éléments linéaires

Les nombreux travaux réalisés sur les Méthodes Eléments Finis depuis une cinquantaine d'années, couplés au fort développement des moyens informatiques, ont permis de mettre en place des "éléments" d'arbre, de coque et de volume, ainsi que des règles de modélisation permettant d'obtenir des modèles statiques performants. La validité de ces modèles a été vérifiée expérimentalement. La justesse générale de la méthode éléments finis et le développement de nombreux éléments permet une exploitation industrielle de cette technique. Néanmoins, comme toute méthode de modélisation, elle repose sur un certain nombre d'hypothèses qu'il est nécessaire de garder présentes à l'esprit pour réaliser des

modèles permettant d'obtenir des résultats significatifs. La validité d'un modèle de données doit être vérifié cas par cas.

Les modèles éléments finis des carters et des arbres utilisés dans la suite de ce chapitre sont par hypothèse supposés représenter correctement le comportement statique des éléments linéaires de la boîte de vitesses. Ils ne seront donc pas remis en question.

2.2 Modélisation des éléments représentant les non-linéarités géométriques

Les jeux et les liaisons par engrenages représentent des non-linéarités de type géométrique. Ce sont des "composants" technologiques importants puisqu'ils gèrent la transmission des efforts entre les différents constituants du mécanisme.

Le choix effectué a été de les modéliser par des éléments, de type éléments finis, liant deux noeuds du modèle. Le comportement de ces éléments est linéaire "discontinu".

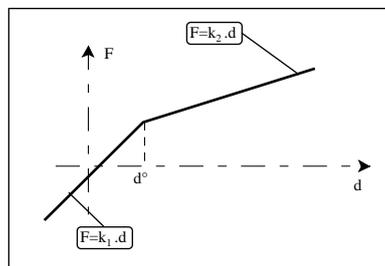


Figure 1. 2 : Comportement linéaire "discontinu" des éléments modélisant les non-linéarités géométriques

A chaque élément est donc associée une matrice de rigidité élémentaire, qui est ensuite assemblée à la matrice de rigidité globale, et dont l'expression dépend d'une valeur limite d° .

2.2.1 Les jeux

D'un point de vue mécanique, la notion de jeux est associée aux zones de liaison. Si le jeu est fermé, la liaison entre les pièces est établie. Elle ne l'est pas dans le cas contraire.

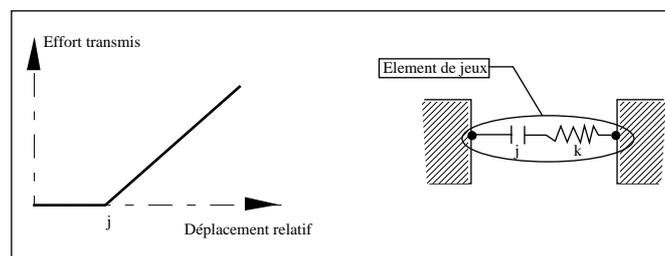


Figure 1. 3 Élément de "jeu", généralité

L'élément développé permet d'établir des liaisons, dans une base élémentaire, entre les degrés de liberté de noeuds N1 et N2 géométriquement confondus.

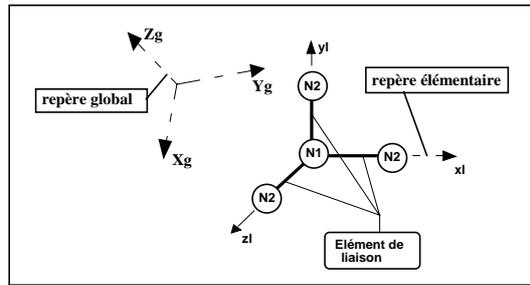


Figure 1.4 : Descriptif de l'élément de liaison

Ces liaisons concernent des ddl "identiques" et peuvent être de 3 types :

- liaison rigide,
- liberté,
- jeux de fonctionnement.

Ces liaisons sont modélisées par des ressorts de raideur k_{\max} placés suivant la direction du ddl considéré en fonction du déplacement relatif des nœuds dans cette direction. Le sens des efforts transmis est orienté du nœud 1 vers le nœud 2.

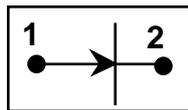


Figure 1.5 : Orientation des efforts transmis

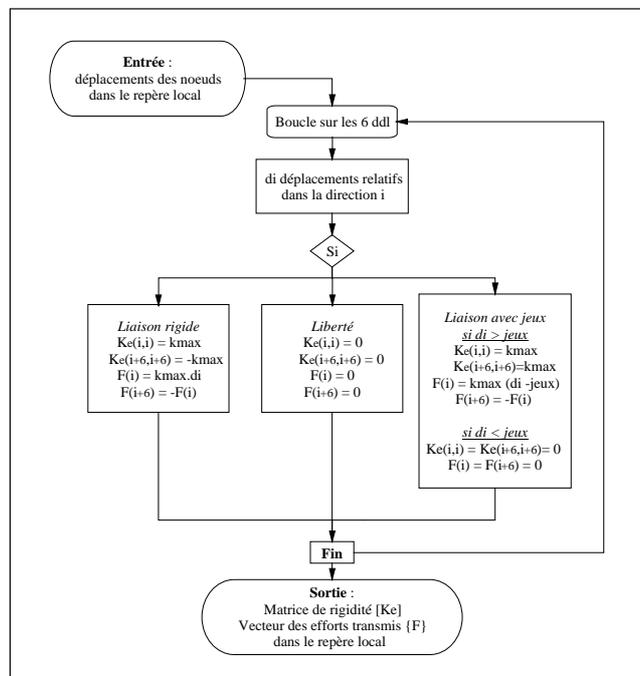


Figure 1.6 : Détermination de la matrice de rigidité et des efforts transmis

Remarque 1 : pour éviter les problèmes numériques (matrice singulière) en cours d'itération, l'absence de "contact" peut être modélisé par une rigidité k_{\min} . Cette

valeur doit être suffisamment faible pour ne pas perturber la recherche de l'équilibre, et suffisamment grande pour supprimer les singularités. Des études réalisées par **JF. Rigal** [1.28] ont montré que l'erreur générée par l'introduction de ces rigidités "numériques" était acceptable.

Remarque 2 : les "éléments de jeux" pourraient également être modélisés par des ressorts non linéaires dont la rigidité "k" dépendrait de l'écrasement des surfaces en contact et serait calculée, par exemple par les formules de Hertz, à chaque pas de temps.

2.2.2 Les engrenages

Un engrenage est un organe mécanique constitué par deux roues dentées. Il permet la transmission de puissance entre deux arbres en rotation. Cette transmission se fait avec modification du couple transmis et de la vitesse de rotation. L'élément de modélisation mis en place doit donc assurer :

- la liaison cinématique entre les deux arbres,
- la transmission des efforts.

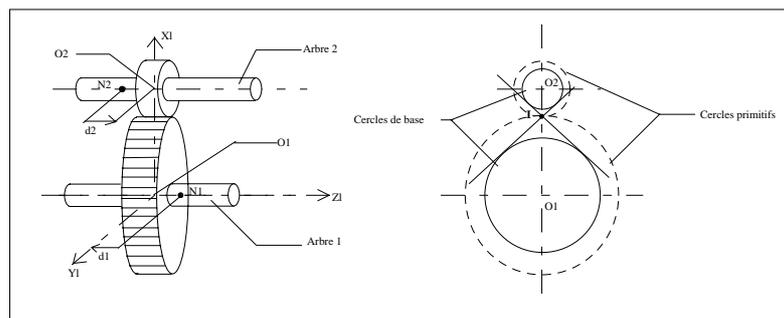


Figure 1.7 : Elément d'engrenage extérieur cylindrique

De précédents travaux (*Rigal* [1.28]) ont montré qu'en statique, la liaison par engrenage pouvait être modélisée par un ressort de rigidité k_o placé au point primitif d'engrènement, suivant la normale au contact. Pour les études réalisées sur les boîtes de vitesses automobile, les roues et les pignons des engrenages extérieurs cylindriques (droits ou hélicoïdaux), sont supposés indéformables sauf ponctuellement au niveau du contact. Dans le cadre de cette hypothèse, un élément spécifique "d'engrenage" peut être défini. Il connecte le noeud N_1 de la roue 1 au noeud N_2 de la roue 2 et liant, par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité $[K_{eng}]$, les efforts transmis $\{F_i\}$, aux déplacements $\{d_i\}$:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_{eng}] \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

La matrice de rigidité $[K_{eng}]$ s'exprime (Cf. Annexe B) comme le produit d'une matrice de géométrie $[G]$, fonction des caractéristiques géométriques de l'engrenage (rayons de base, angle d'hélice, angle de pression ...), et de la rigidité scalaire k_o représentant la rigidité moyenne d'engrènement.

$$[K_{eng}] = k_o \cdot [G] \quad (1.9)$$

Suivant le chargement appliqué à l'engrenage, deux positions de contact sont possibles (Cf. Figure 1. 8). Elles correspondent à des flancs en contact différents et à des matrices de géométrie différentes (direction différente de la normale au contact):

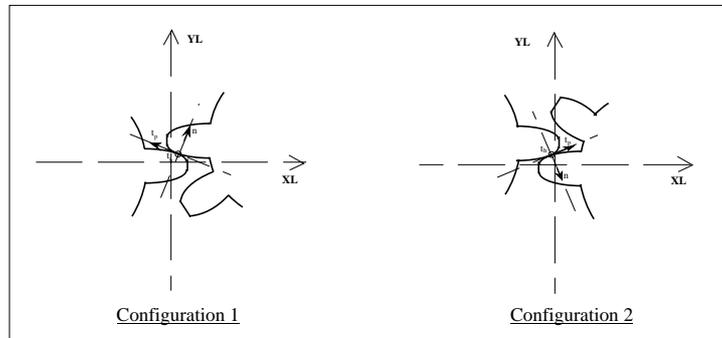


Figure 1. 8 : Définition des "positions" de contact pour un engrenage extérieur

L'élément de liaison par engrenage mis en place permet de déterminer automatiquement le flanc actif en fonction des déplacements des roues 1 et 2.

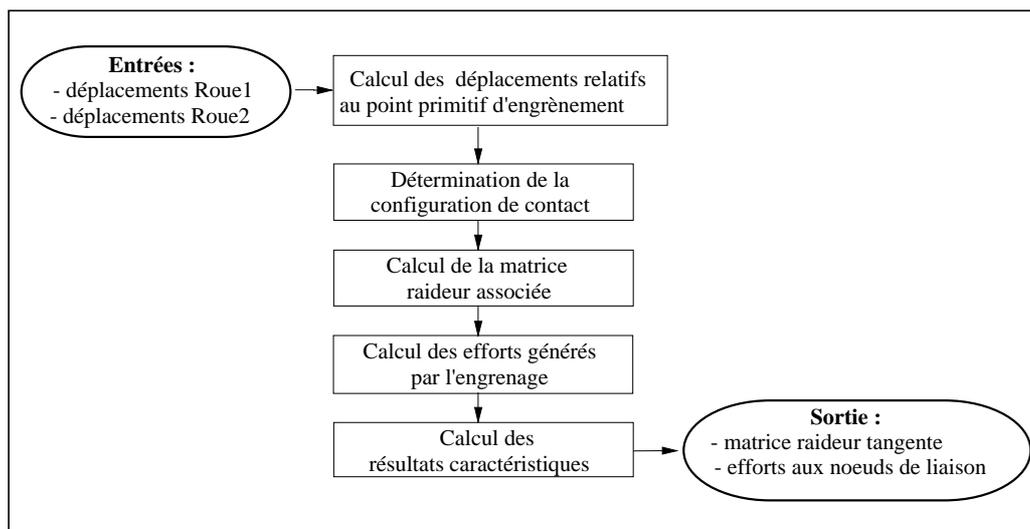


Figure 1. 9 : Détermination de la matrice de rigidité de l'élément engrenage

Cet élément permet également de déterminer, lorsque l'équilibre du système est atteint, les déplacements relatifs au point primitif d'engrènement dans la base $(n, t_{hé}, t_{pr})$ liée au contact (Cf. Figure 1. 8) :

- n : normal au contact,
- $t_{hé}$: tangente suivant l'hélice,
- t_{pr} : tangente suivant le profil.

Remarque 1 : la validité de cet élément a été confirmée en vérifiant sur un élément "engrenage" isolé et pour un couple d'entrée donné, que les efforts transmis aux

noeuds N1 et N2 étaient corrects et que la relation cinématique liant les deux arbres était vérifiée [Bourdon et al. 5.5].

Remarque 2 : lorsque le flanc actif est déterminé, la matrice de rigidité ne dépend pas des déplacements relatifs des deux roues, la matrice de rigidité tangente (1.4) est donc égale à la matrice de rigidité.

Remarque 3 : la valeur de la rigidité scalaire k_o dépend de manière non-linéaire du chargement statique et des caractéristiques de la denture. Cette valeur peut-être calculée par des logiciels extérieurs [Bard et al. 5.2, De Vaujany 1.39]. Mais, pour les mécanismes considérés (boîtes de vitesses automobile), les résultats statiques dépendent assez peu de la valeur de k_o .

2.3 Modélisation des paliers à roulements

2.3.1 Approche bibliographique

Les paliers à roulement sont des constituants mécaniques qui transmettent des efforts entre deux organes tournant l'un par rapport à l'autre. Ils sont formés de deux bagues portant les chemins de roulement, de corps roulants (billes ou rouleaux) transmettant les efforts, et éventuellement d'une cage destinée à maintenir ces derniers dans leur écartement normal et à empêcher tout frottement entre eux. La mesure principale de la performance d'un roulement est la durée de vie qui dépend, d'une part de la qualité du roulement et, d'autre part, de ses conditions d'utilisation. Ainsi, l'étude la plus précise possible des paramètres de réduction de la durée de vie, tels que la répartition des charges, les mésalignements ..., devient une nécessité. De plus, seule la connaissance précise des efforts transmis par les roulements aux carters et aux arbres permet de déterminer les répartitions de contraintes et de s'assurer, que pour la gamme de fonctionnement choisie, les éléments de "structure" restent bien dans le domaine linéaire.

De manière générale, l'analyse de la répartition des charges dans les paliers à roulement doit inclure les relations non linéaires liant les efforts et les déplacements lors des contacts entre les éléments roulants et les pistes. A la suite des travaux de **Hertz**, des recherches théoriques et systématiques ont commencé à s'effectuer au début du XXème siècle avec **Stribeck**, **Weibull** ... A partir d'hypothèses simplifiées (angles de contact ne variant pas, bagues extérieures et intérieures rigides ...) **A. Palmgren** [2.19] a établi des formules approchées des relations efforts-déplacements permettant de modéliser le comportement des roulements soumis à des chargements "simples" (purement axiaux ou radiaux).

De nombreux autres travaux ont ensuite été réalisés afin de calculer l'équilibre des roulements et la répartition des charges par une approche systématique et une prise en compte plus fine de la géométrie interne des roulements. **S. Andreason** [2.1] propose des modèles analytiques permettant de déterminer, à partir des déplacements relatifs des centres de courbure des bagues, la répartition des charges, les angles de contact et l'équilibre des corps roulants pour les roulements à billes à gorges profondes. Pour les rouleaux coniques, ses modèles prennent en compte les interactions entre le rouleau, les pistes et l'épaulement. Pour les roulements à rouleaux cylindriques, **T.A. Harris** ([2.6], [2.7]) décrit une méthode de calcul de la charge le long de la génératrice du rouleau, qui tient compte du bombé. **J.Y. Liu** ([2.16], [2.17]) a affiné les modèles de **S. Andreason** et de **T.A. Harris** pour les roulements à

rouleaux en introduisant la force centrifuge et le moment gyroscopique de chaque corps roulant. Le modèle proposé par **J.M. de Mul** [2.18] est basé sur une approche matricielle et une description vectorielle de la géométrie. Pour les roulements à billes, il permet de calculer la répartition des charges, les positions et les angles de contact. Pour les roulements à rouleaux, il rend possible l'introduction des forces centrifuges et des moments gyroscopiques, et prend en compte les interactions entre les rouleaux et les épaulements.

Pour des mécanismes de transmission de puissance tels les boîtes d'hélicoptères ou les boîtes de vitesses automobile, des études ont montré (*Harris* [2.6], [2.7], *Jones* [2.8], [2.9], [2.10], [2.11], *Rigal* [1.28], *Choi* [1.4]) que l'augmentation de la souplesse des arbres et des carters, couplée à la forte non-linéarité des paliers à roulement, interdit d'isoler simplement en terme d'efforts et de déplacements, le palier et le reste de la structure. L'influence de la flexibilité de l'environnement ne peut pas être négligée, et les bagues des roulements ne peuvent pas toujours être considérées comme indéformables. Des études réalisées par **A.B Jones** [2.8] ont montré que dans certaines conditions, la durée de vie des roulements déterminée avec la prise en compte de la déformabilité des bagues, était inférieure à celle obtenue avec l'hypothèse de bagues indéformables.

S'appuyant sur ces divers travaux, **I.S. Choi** ([1.4], [2.3], [2.4], [2.5]) a mis en place des modèles de roulements à billes ou à rouleaux cylindriques et coniques, pouvant s'introduire dans une modélisation éléments finis "classique", en vue d'une résolution d'un problème non-linéaire. Ces éléments prennent en compte la géométrie fine des paliers à roulement et permettent d'obtenir :

- les efforts exercés par les bagues et les épaulements sur le corps roulant,
- les angles de contact ou de désalignement,
- la matrice de rigidité tangente associée à chaque corps roulant.

Ces travaux permettent de simuler et d'analyser le comportement global des mécanismes au plus près de la réalité, et également d'obtenir des résultats utilisables pour des études spécifiques : optimisation des carters ou des pistes de roulement.

L'analyse vibratoire globale des mécanismes de transmission de puissance s'inscrivant à la suite de ces travaux, les éléments mis en place par **I.S. Choi** pour modéliser les paliers à roulement ont été repris et ponctuellement modifiés, afin de résoudre des problèmes de convergence. Une approche unifiée a également été proposée (*Bourdon et al.*[4.5]). Les modifications apportées permettent aussi de récupérer, à l'issue du calcul statique, les matrices de rigidité tangente associées à chaque corps roulant. La connaissance de ces matrices permet de modéliser le comportement vibratoire linéarisé des paliers à roulement autour du point de fonctionnement statique.

2.3.2 Définition d'un élément "roulement"

L'idée essentielle de ces travaux est de discrétiser le roulement en "corps roulant" (billes ou rouleaux), et d'associer à chacun d'eux un "élément" au sens des éléments finis. L'approche par la méthode des forces classiques chez les roulementiers (*Lim & Singh* [2.13], [2.14], [2.15], *Houpert* [1.11]) a été abandonnée au profit de la méthode des déplacements afin de mettre en place une approche globale permettant le lien entre les calculs de roulements et le calcul de structure.

Cet élément "corps roulant" relie un noeud de la bague intérieure à un noeud de la bague extérieure par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité de dimension 10x10. Cette matrice établit le couplage entre les 10 ddl "actifs" (2*3 ddl de translation et 2*2 ddl de rotation) et assure la transmission de 3 forces et de 2 moments. Les degrés de liberté correspondant à la rotation du roulement sont, évidemment, libres de tout couplage et aucun moment n'est transmis suivant cette direction.

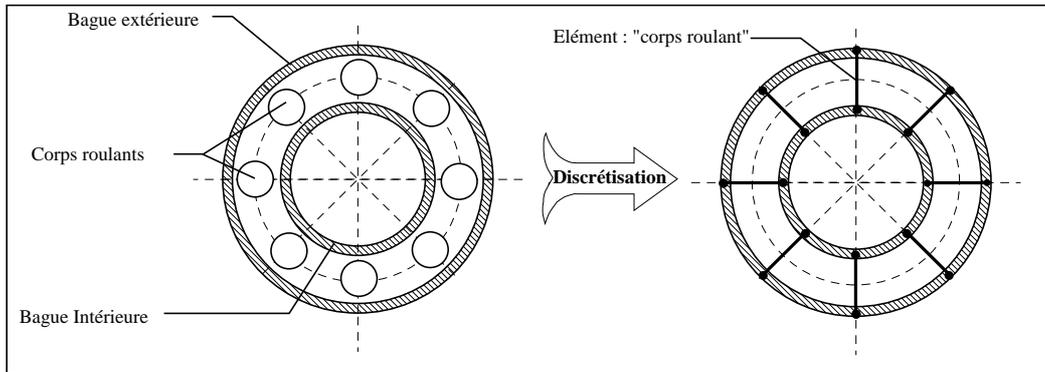


Figure 1.10 : Discretisation des roulements en corps roulants

Les bagues sont donc discrétisées, et la discrétisation vérifie les hypothèses suivantes :

- les sections transversales des bagues sont indéformables,
- à chaque corps roulant correspond un noeud de la bague extérieure et un noeud de la bague intérieure. Ces noeuds sont situés dans le plan radial contenant le centre du corps roulant.

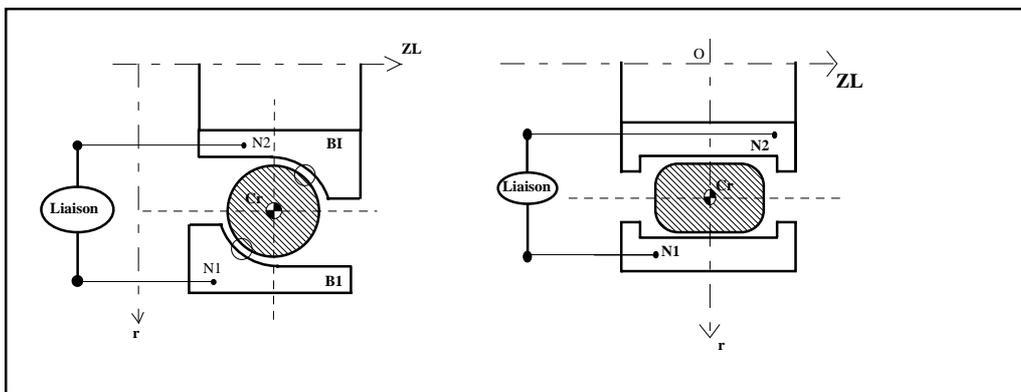


Figure 1.11 : Discretisation des bagues des "roulements" pour les paliers à billes et à rouleaux

Il s'agit alors de déterminer pour chaque corps roulant, supposé indéformable sauf ponctuellement au niveau des contacts, et pour des déplacements donnés des noeuds "d'attache" N_1 et N_2 , les déplacements élémentaires du centre du corps roulant assurant l'équilibre de ce dernier dans le plan radial (équilibre des forces et des moments). En effet, pour des déplacements relatifs des bagues connus, le corps roulant va être soumis à des efforts de contact au niveau des pistes de roulement et des épaulements. Ces efforts sont définis par la théorie de Hertz (contact étroit et tranches minces):

$$Q = C_f \cdot (\delta)^n \quad (1.10)$$

où δ représente le rapprochement des corps, n est un exposant dépendant de la nature du contact et C_f est la constante de rigidité du contact définie par **Hertz**.

La position d'équilibre du système "bagues-corps roulant" est calculée par une boucle itérative de Newton-Raphson. (Figure 1. 12). A chaque itération sont déterminés les efforts exercés sur le corps roulant par chaque bague et ses éventuels épaulements. Ce calcul se fait en tenant compte des jeux et de la géométrie précise du roulement (rayons de courbure, de dépouille, bombés ...).

Lorsque l'équilibre est atteint (vecteur des efforts résiduels égal au vecteur nul), les efforts entre le corps roulant, les bagues et les épaulements sont connus, ainsi que les matrices de rigidité tangente entre le corps roulant et les différentes bagues. Une matrice de rigidité élémentaire équivalente peut être déterminée entre les noeuds de la bague intérieure et extérieure. Cette matrice est la matrice de rigidité tangente associée à l'élément "corps roulant". La méthodologie détaillée du calcul de l'équilibre des corps roulants est donnée en annexe B.2.

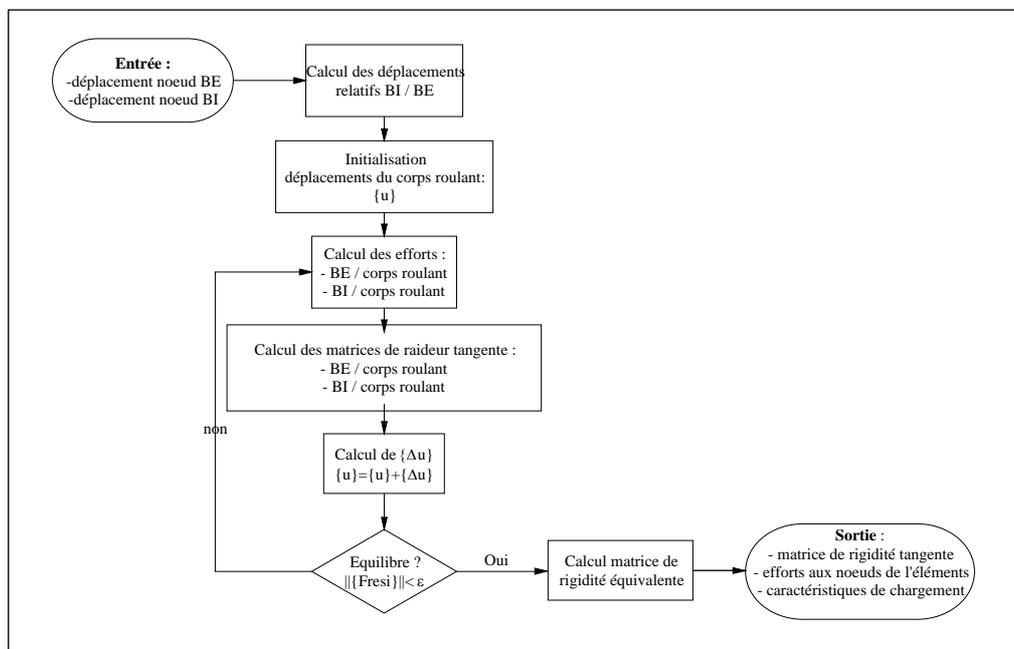


Figure 1. 12 : Détermination de la matrice de rigidité tangente associée aux corps roulants

L'avantage de cette approche est de permettre de traiter aussi bien le cas des paliers montés dans un environnement rigide avec des bagues indéformables, que celui des roulements montés dans un environnement flexible et des bagues déformables. Les différences essentielles entre les éléments proposés ici et l'approche de **J.M. de Mul** [2.18], sont que les basculements des bagues dans le plan radial sont pris en compte et qu'une matrice de rigidité tangente (10*10) est définie pour chaque corps roulant. Dans tous les cas, l'assemblage des éléments "corps roulant" conduit à un modèle élément finis non-linéaire "classique" où la matrice de rigidité dépend des déplacements. Il est résolu par la méthode itérative de Newton-Raphson, et à chaque itération les matrices de rigidité tangentes associées aux corps roulants sont réévaluées et réassemblées.

2.3.3 *Validation et résultats*

Ces éléments permettent de modéliser aussi bien un roulement isolé (en encastrant les noeuds de la bague extérieure), qu'un roulement dans un environnement flexible. Les études de validation réalisées par **I.S Choi** [1.4] ont prouvé que les résultats obtenus sont significatifs du chargement réel. Elles montrent également que la modélisation des données relatives à la géométrie interne du roulement doit être effectuée avec une grande précision. Des études plus récentes (*Chan Tien* [2.2], *Bourdon et al.* [4.5]) réalisées sur un roulement à billes "isolé" et soumis à différents chargements, ont permis de montrer que les matrices de rigidités obtenues étaient identiques à celles obtenues par **T.C. Lim** et **R. Singh** ([2.13], [2.14], [2.15]) par une approche "analytique". Pour l'ensemble des "éléments corps roulants" développés, des tests de validations ont été effectués, afin de vérifier que les résultats obtenus étaient réalistes (*Bourdon et al.* [5.5]).

Des modifications ont été effectuées dans les algorithmes de calcul des roulements développés par **I.S. Choi** : introduction de repères "élémentaires" lié aux éléments technologiques, correction des procédures de calcul des matrices de rigidité tangente équivalentes et des efforts transmis aux noeuds de discrétisation de la bague extérieure. Ces modifications permettent une plus grande souplesse d'utilisation. De plus, ces modifications ont résolu les problèmes de convergence et ont diminué considérablement les temps de calcul et les efforts résiduels à l'équilibre. Pour une boîte de vitesses automobile par exemple, les temps de calcul sont passés de plusieurs heures à une quinzaine de minutes et les efforts résiduels sont inférieurs à 1.10^{-5} N, alors que dans la version initiale ils restaient supérieurs à 2 ou 3 Newtons, même après un grand nombre d'itérations.

3. MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE

3.1 *Introduction*

Pour la majorité des mécanismes considérés, les modèles éléments finis correspondants possèdent un nombre de degrés de liberté (ddl) liés à des éléments non-linéaires très inférieur au nombre total de déplacements inconnus. Par exemple, le carter de la boîte de vitesses automobile considérée par la suite dans la partie 4 de ce chapitre, est discrétisé en plus de 30 000 noeuds (soit plus de 100 000 ddl). Seuls 150 de ces noeuds seront connectés à des éléments non-linéaires. L'utilisation de **techniques de condensation** ou de sous-structuration statique apparaît indispensable pour réduire le nombre d'inconnues du système non-linéaire (1.1) et, par conséquent pour diminuer les temps de calcul (*Imbert* [3.7], *Rigal* [1.28]). Après la **résolution du système non-linéaire** "réduit", il est important de pouvoir connaître les déplacements dans l'ensemble du modèle par des **calculs de restitution**, afin de déterminer la répartition des efforts et des contraintes. Le processus de calcul retenu est décrit par la Figure 1. 13, ci-dessous.

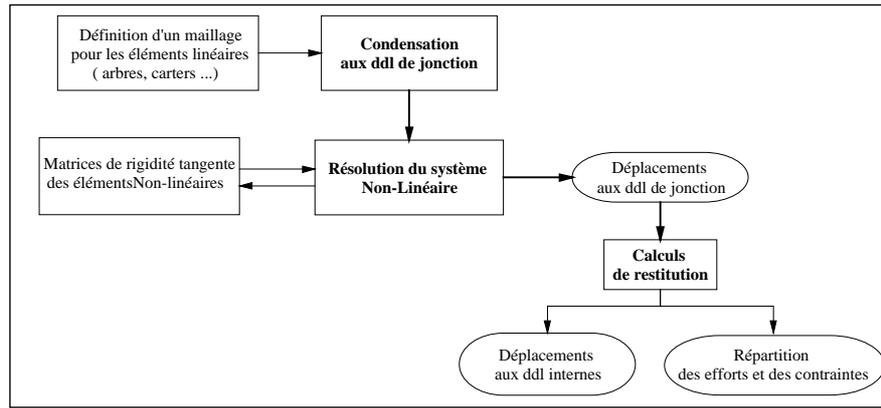


Figure 1. 13 Processus de calcul des modèles globaux

3.2 Condensation ou sous-structuration statique - Calculs de restitution

Les méthodes de condensation, ou de sous-structuration statique, sont des techniques numériques qui permettent de diminuer le nombre d'inconnues des modèles éléments finis (*Imbert [3.9]*). Elles consistent en une partition des n degrés de liberté du modèle en n_i ddl internes, et n_j ddl de jonction. Les degrés de liberté internes, éliminés par condensation, ne peuvent pas être connectés ultérieurement à d'autres éléments. Le modèle initial est alors équivalent à un **super-élément** défini aux ddl de jonction. Le principe de la condensation est d'exprimer, à une constante près, l'énergie potentielle de ce super-élément en fonction des déplacements externes. D'un point de vue numérique, cette méthode est tout à fait similaire à une méthode d'élimination de Gauss par blocs.

Pour les modèles éléments finis des systèmes mécaniques étudiés, la partition des degrés de liberté se fait de la manière suivante (*Bourdon et al. [5.6], [5.4]*) :

- les ddl de jonction (indiqués "j") sont les ddl associés aux éléments non-linéaires et aux conditions aux limites (en efforts ou en déplacements),
- les ddl internes (indiqués "i") sont les ddl complémentaires.

Le vecteur $\{d\}$ des déplacements généralisés devient donc :

$$\{d\} = \begin{cases} \{d_i\} \leftarrow \text{ddl internes} \\ \{d_j\} \leftarrow \text{ddl de jonction} \end{cases} \quad (1.11)$$

Une partition identique réalisée sur la matrice de rigidité $[K]$ et sur le vecteur des efforts extérieurs $\{F\}$, permet d'écrire le système (1.1) de la façon suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{Lin}^{ii} & K_{Lin}^{ij} \\ {}^T K_{Lin}^{ij} & K_{Lin}^{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{NLin}^{jj}(\{d_j\}) \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{cases} \{d_i\} \\ \{d_j\} \end{cases} = \begin{cases} \{0\} \\ \{F_j\} \end{cases} \quad (1.12)$$

Après condensation (Cf. annexe A.2.), le système non-linéaire (1.12) est équivalent au système (1.13) d'inconnues $\{d_j\}$:

$$\left(\left[\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Lin}} \right] + \left[\mathbf{K}_{\text{NLin}}^{\text{jj}} \left(\{d_j\} \right) \right] \right) \cdot \{d_j\} = \{F_j\} \quad (1.13)$$

La matrice $\left[\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Lin}} \right]$ est la matrice condensée aux ddl de jonction des éléments linéaires. Elle est définie par (Imbert [3.8]) :

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Lin}} \right] = \left[\mathbf{K}_{\text{Lin}}^{\text{jj}} \right] - \left[{}^T \mathbf{K}_{\text{Lin}}^{\text{ij}} \right] \cdot \left[\mathbf{K}_{\text{ii}}^{-1} \right] \cdot \left[\mathbf{K}_{\text{Lin}}^{\text{ij}} \right] \quad (1.14)$$

La connaissance des déplacements $\{d_j\}$ aux ddl de jonction permet, par **un calcul linéaire de restitution**, de déterminer les déplacements sur l'ensemble des ddl du modèle.

$$\{d_i\} = \left(- \left[\mathbf{K}_{\text{Lin}}^{\text{ii}} \right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{K}_{\text{Lin}}^{\text{ij}} \right] \right) \cdot \{d_j\} \quad (1.15)$$

Remarque : dans la formulation générale de la méthode de condensation (Cf. annexe A.2), des termes dépendants des chargements $\{F_i\}$ appliqués à des ddl internes apparaissent dans les équations 1.13 et 1.15. Ils ne sont pas indiqués ici, car, par hypothèses, les ddl de chargement sont des ddl de jonction.

3.3 Principe global de résolution du système non-linéaire

La méthode de calcul utilisée pour résoudre le problème non-linéaire est la méthode de Newton-Raphson évoquée dans l'introduction de ce chapitre et dont le détail est donné en annexe A.1. Le processus général de résolution du système non-linéaire s'organise de la façon suivante :

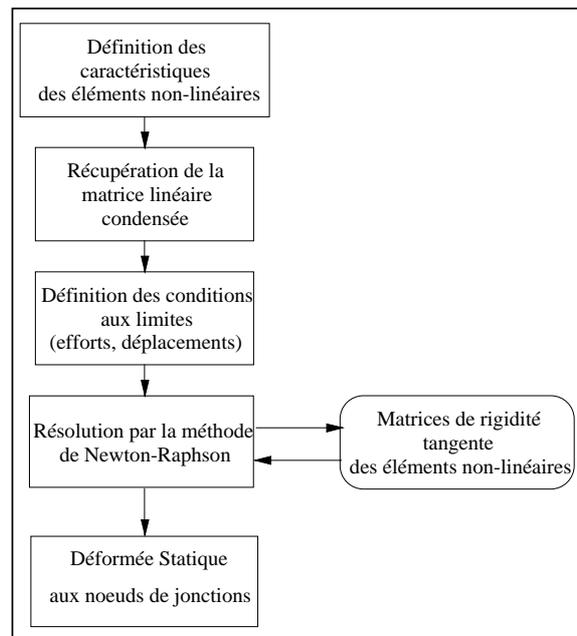


Figure 1.14 : Processus global de calcul non-linéaire

Pour valider cette approche globale, des études et des vérifications expérimentales ont été conduites de **G. Leneveu** et **J.F. Rigal** [1.30].

3.4 Mise en oeuvre dans l'environnement CAEDS-NASTRAN

Les travaux effectués en collaboration avec le groupe PSA-DETA pour la réalisation d'un logiciel de calcul du comportement statique des boîtes de vitesse, ont conduit aux choix suivants :

- le maillage des éléments linéaires est réalisé par le logiciel CAEDS-IDEAS,
- la condensation de la matrice de rigidité statique et les calculs de restitution sont effectués par le code éléments finis NASTRAN.

Deux logiciels ont été développés pour :

- préparer les fichiers de données et déterminer les caractéristiques "utiles" des éléments non-linéaires : PBVS,
- prendre en compte les éléments non-linéaires et résoudre le système : BVSIM.

Le passage des données d'un logiciel à l'autre se fait par fichiers, et l'ensemble des calculs s'organise de la manière suivante :

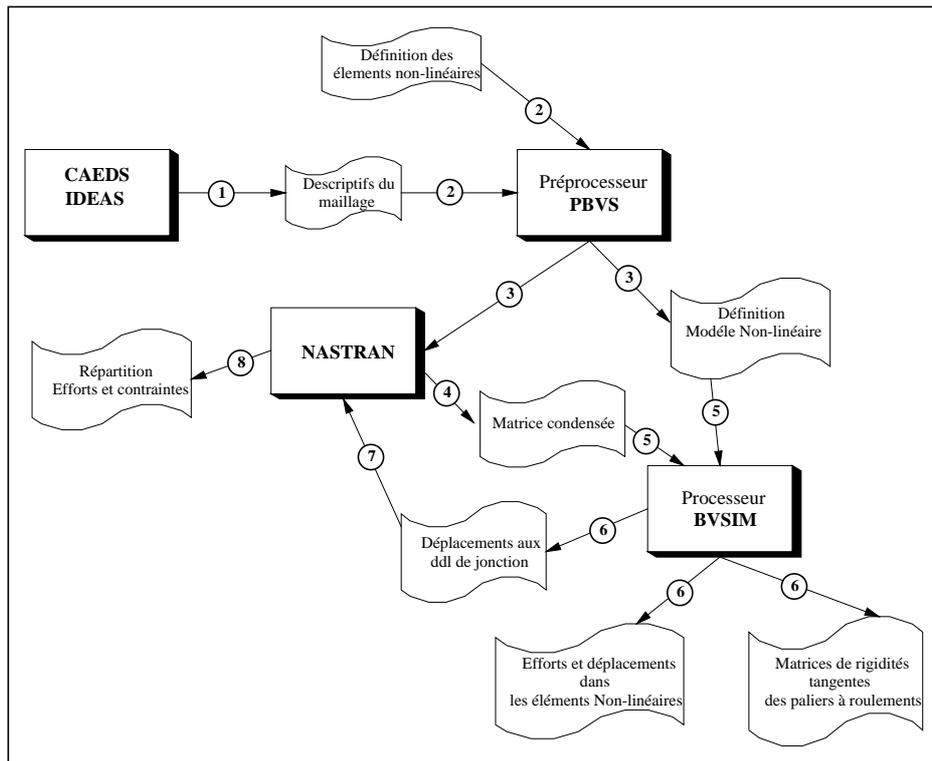


Figure 1. 15 : Organisation informatique des calculs statiques globaux dans un environnement de calcul industriel

Un post-processeur graphique, BVPOST, a également été développé sous l'environnement Matlab. Il permet de visualiser à partir des fichiers de résultats de BVSIM et pour chaque roulement, les répartitions des efforts sur les corps roulants, les angles de contact sous charge pour les roulements à billes et les angles de basculement des rouleaux.

4. APPLICATION À UNE BOÎTE DE VITESSES AUTOMOBILE : ETUDES DU COMPORTEMENT STATIQUE DES PALIERS A ROULEMENT

Le système mécanique considéré dans ce document est une boîte de vitesses automobile destinée aux véhicules de gamme moyenne.

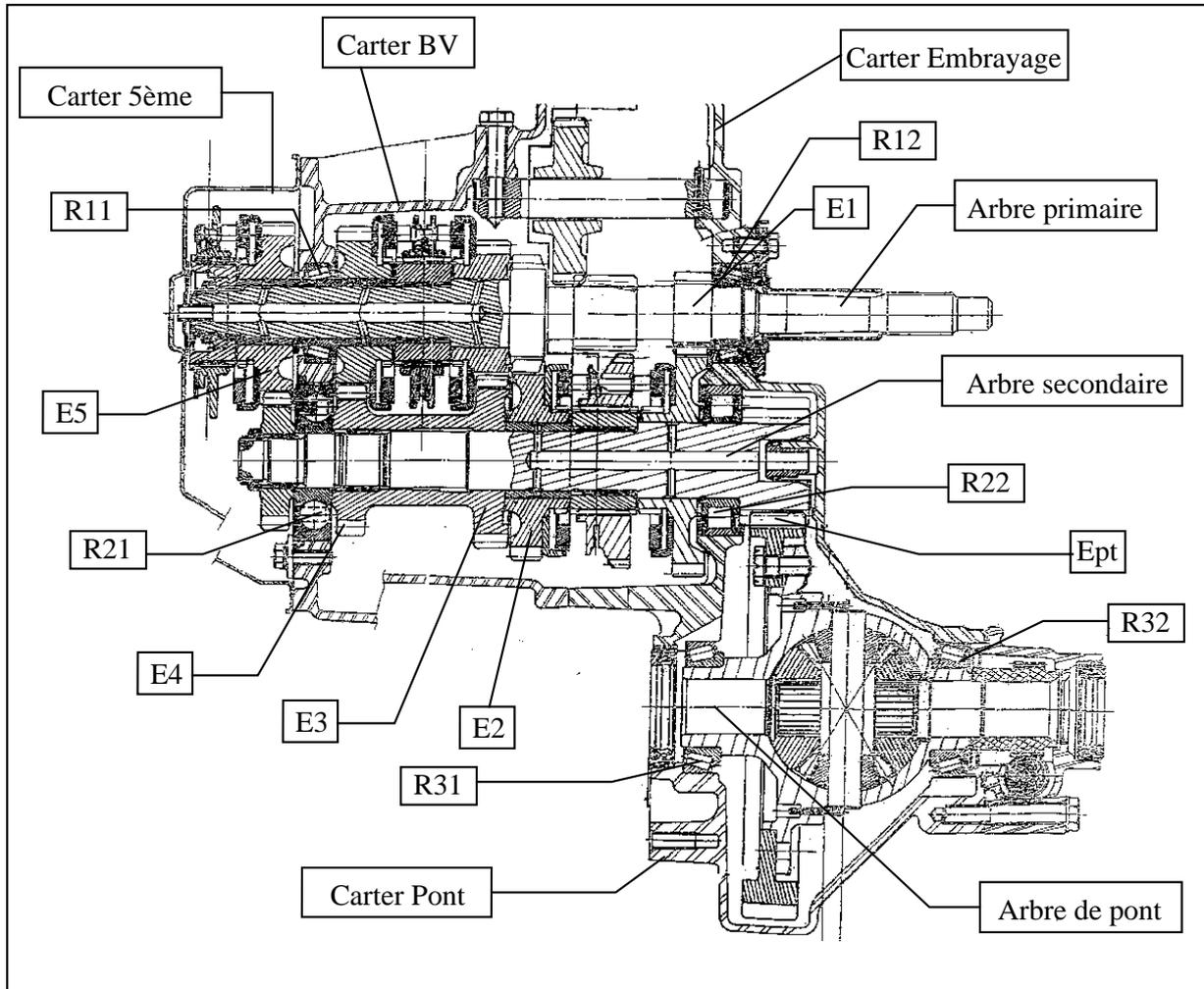


Figure 1. 16 : Coupe du plan d'ensemble de la boîte de vitesses étudiée

4.1 Descriptif du modèle

4.1.1 Eléments linéaires de structure

Le maillage de la partie "structurelle" de la boîte a été réalisé sous la responsabilité des Bureaux d'Etudes "boîtes de vitesses" de PSA, et conduit à un modèle de plus de 37000 noeuds et de 20000 éléments.

Les carters de pont, de boîte et d'embrayage sont maillés à l'aide d'éléments volumiques, ce qui permet une bonne représentativité des transitions entre les zones minces (toiles) et les zones massives (alésages des paliers, bossages, nervures ...), et donne la possibilité de calculer et de visualiser les contraintes dans les zones de raccordement. Les différentes parties sont maillées séparément puis assemblées par des éléments rigides au

niveau des bossages. Le carter de 5ème est modélisé par des éléments de coque, et est rattaché au reste de la structure au niveau des vis de fixation. Les différents "accessoires" liés à la boîte : démarreur, conjoncteur, "prolonge" sont également pris en compte par l'intermédiaire d'éléments ponctuels, ou de maillages éléments finis spécifiques. Les bagues des roulements sont modélisées par des éléments volumiques puis "collées" à l'aide d'éléments de liaison dans leur alésage. Les arbres sont modélisés par des poutres de sections différentes. L'ensemble du différentiel est assimilé à un arbre lié, par l'intermédiaire de l'engrenage de pont, à l'arbre secondaire.

4.1.2 *Eléments non-linéaires*

Les éléments non-linéaires présents dans la boîte sont :

- les 6 roulements : 4 à rouleaux coniques (notés R11, R12, R31, R32), 1 à billes (noté R21) et 1 à rouleaux cylindriques(noté R22),
- les 6 engrenages cylindriques extérieurs hélicoïdaux (notés E1 à E5 et Ept).

Les roulements sont modélisés par les éléments décrits dans la partie 2.3 de ce chapitre. Les bagues intérieures sont assimilées à un noeud de l'arbre proche du centre du roulement. Des modifications ont dû être effectuées sur le maillage des bagues extérieures existant, afin de vérifier les hypothèses d'utilisation des éléments "corps roulant" (Cf. §2.3). Des noeuds, correspondant à la position géométrique des corps roulants, ont été rajoutés sur la face intérieure des bagues, et reliés par des relations linéaires à des noeuds existants. Des éléments rigides ont été installés sur la face intérieure des bagues, afin de rendre les sections indéformables. Les noeuds supplémentaires sont générés et reliés au reste de la structure par le préprocesseur PBVS, la mise en place des éléments rigides se fait manuellement.

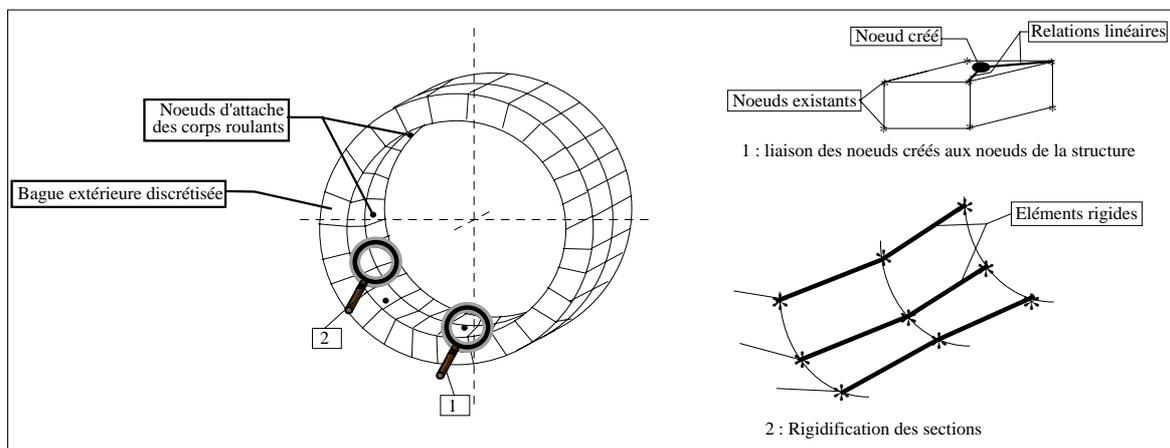


Figure 1. 17 : Modification du maillage des bagues extérieures des roulements

Les 6 engrenages hélicoïdaux sont modélisés par les éléments décrits dans la partie 2.2. Ils permettent de déterminer automatiquement les flancs actifs. Ces éléments relient les noeuds des arbres correspondant à la position des points technologiques d'application des efforts (centre du pignon pour les pignon fixes, point d'attache du crabot pour les pignons fous). Deux engrenages peuvent donc être reliés à un même noeud. Tous les engrenages de la boîte sont présents dans le modèle, ceux qui ne sont pas crabotés aux arbres ont une rigidité k_0 (Cf § 2.2.2) nulle.

4.1.3 Choix des noeuds de condensation

Les noeuds de condensation retenus pour l'étude non-linéaire sont, comme définis dans la partie 3.1, des noeuds d'attache d'éléments non linéaires, ou des noeuds d'application de conditions aux limites (en effort ou en déplacement). Ce sont :

- les noeuds d'attache des corps roulants sur les bagues extérieures (104),
- les noeuds de liaison des corps roulants sur les arbres (6),
- les points d'application des efforts transmis par les engrenages (10),
- les points de fixation de la boîte côté moteur (8),
- des noeuds d'extrémité d'arbres (3).

Les principes de modélisation et de calcul mis en oeuvre, permettent donc de déterminer les chargements réels des roulements montés dans un mécanisme complexe, à l'aide d'un modèle non-linéaire réduit à 131 noeuds.

Remarque : ce choix des noeuds de jonction permet d'effectuer les calculs non-linéaires pour toutes les configurations de fonctionnement (vitesse enclenchée) et toutes les conditions aux limites (nombre de points de fixation de la boîte), à l'aide de la même matrice réduite. Les calculs de condensation ne sont donc effectués qu'une seule fois.

Le modèle "non-linéaire" est le suivant :

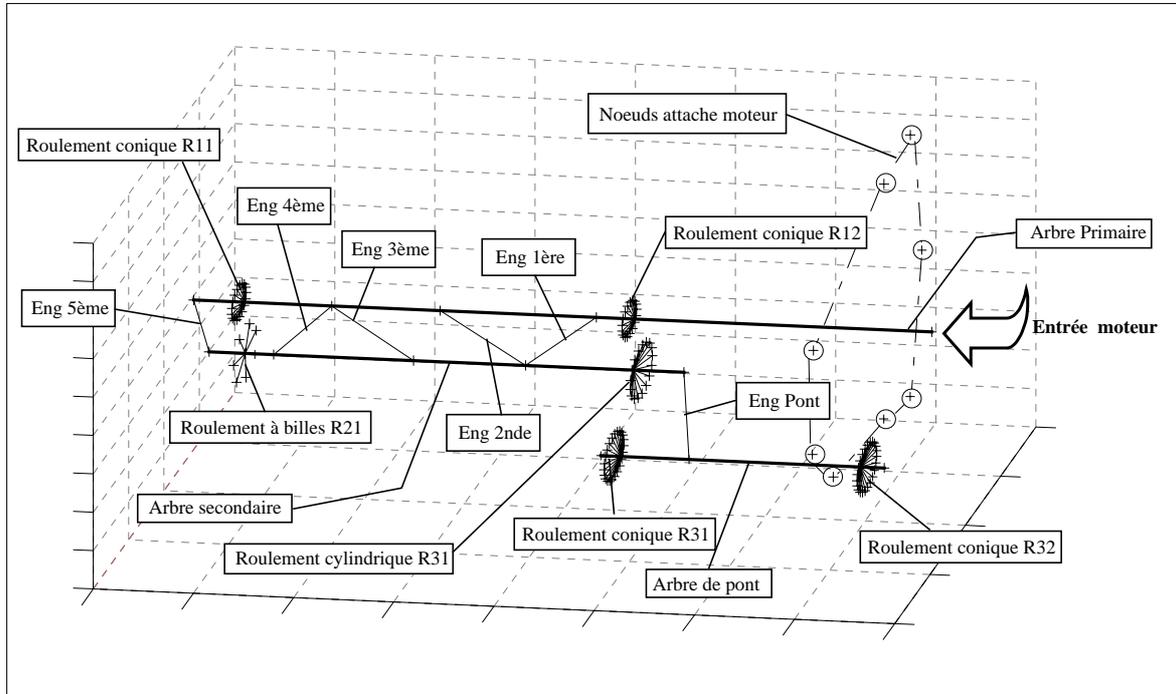


Figure 1. 18 : Modèle condensé de la boîte de vitesses

Remarque : dans la figure précédente, les arbres ne sont représentés que pour faciliter la visualisation. Dans le modèle "réel", ils sont condensés aux noeuds d'attache des éléments non-linéaires.

4.1.4 Conditions aux limites

Le chargement est un couple C_0 appliqué à l'extrémité "coté moteur" de l'arbre primaire. Les noeuds d'extrémité de l'arbre de pont sont bloqués en rotation. Le carter est fixé au niveau des noeuds d'attache moteur en 8 points.

Remarque : la boîte de vitesses considérée est développée pour fonctionner sur plusieurs modèles de véhicules, le nombre et la position de ces points d'attache peut donc varier.

4.2 Résultats : études du comportement statique des roulements

L'approche statique présentée dans ce chapitre permet d'obtenir un grand nombre de résultats. Les calculs de restitution par exemple, permettent de déterminer de manière précise les contraintes et de s'assurer de la bonne tenue sous charge du carter. Ceci est d'un grand intérêt pour le Bureau d'Etudes qui peut ainsi optimiser la géométrie des carters en développement. Ces résultats relevant de méthodes éléments finis classiques ne sont pas d'avantage détaillés dans ce document. En revanche, les résultats obtenus pour les roulements tels les répartitions des efforts et les matrices de rigidité tangente sont beaucoup moins classiques et sont plus précisément analysés. En particulier, l'influence de l'environnement sur le comportement statique des roulements est étudié. Trois cas ont été considérés :

- dans le premier (modèle 1), les roulements sont pris isolément et les bagues sont assimilées à des solides indéformables. Pour chaque roulement, sa bague extérieure est encastree et les efforts sont appliqués sur la bague intérieure. Le torseur des efforts est déterminé par la mécanique générale,
- dans le second (modèle 2), la chaîne cinématique est prise en compte mais le carter et les bagues extérieures sont supposées rigides. Les efforts sont appliqués par l'intermédiaire d'un couple en entrée de boîte,
- le troisième (modèle 3) correspond au modèle global de la boîte évoquée précédemment. La déformabilité des arbres et du carter est prise en compte.

Les différentes études réalisées tant en statique qu'en dynamique, ont montré que les roulements de la boîte de vitesses considérée peuvent se classer en 4 catégories :

- roulement à billes R21,
- roulement cylindrique R22,
- roulement conique avec chargement statique axial et radial R11 et R32,
- roulement conique avec chargement radial dominant R12 et R31.

Dans ce chapitre, seul les résultats obtenus pour le roulement à billes sont présentés.

4.2.1 *Principes des études réalisées sur les roulements*

Pour les roulements, les résultats statiques obtenus peuvent être classés en deux catégories : "technologiques" (répartition des efforts, valeurs des angles ...), ou "numériques" (matrices de rigidité tangente). Ces deux points de vue correspondent aux mêmes phénomènes physiques, contact sous charge statique des corps roulants sur des pistes de roulement, mais ils permettent des interprétations différentes du comportement du système.

Les résultats "technologiques" correspondent à une interprétation en termes de forces, de moments et de position de contact de chaque corps roulant. **J.F. Rigal [1.29]** propose que ces valeurs soient considérées comme les données de "dialogue" entre les fabricants de roulements et les Bureaux d'Etudes utilisateurs. Afin de conserver dans l'analyse des résultats la géométrie cylindrique des roulements, une représentation "pseudo-polaire" (R, θ) a été choisie. La position du corps roulant dans le repère lié au roulement est définie par l'angle θ , et la valeur algébrique (et non pas le module) de la grandeur visualisée est repérée par l'abscisse R . Dans ce type de représentation, le centre du diagramme polaire ne correspond pas obligatoirement à la valeur 0.

Les résultats "numériques", matrices de rigidité tangente $[K_t]$, permettent de linéariser le comportement du roulement autour du point de fonctionnement caractérisé par une déformée statique $\{X_s\}$ et un effort statique $\{F_s\}$. Une petite variation $\{\Delta F\}$ de l'effort appliqué va se traduire par une petite variation $\{\Delta x\}$ de la déformée. Les vecteurs $\{\Delta F\}$ et $\{\Delta x\}$ sont liés par l'intermédiaire de la matrice de rigidité tangente $[K_t]$ et la relation :

$$\{\Delta F\} = [K_t] \cdot \{\Delta x\} \quad (1.16)$$

Cette matrice de rigidité est utilisée lors des études dynamiques, pour modéliser le comportement des paliers à roulement.

L'approche statique mise en oeuvre, permet de définir pour chaque corps roulant une matrice de rigidité tangente (12x12) liant un noeud de la bague extérieure à un noeud de la bague intérieure (Cf. § 2.3.2). La matrice de rigidité tangente du roulement est obtenue en assemblant les matrices de chaque corps roulant. Dans le cas le plus général d'un roulement à N corps roulants, elle est de dimension $12.N \times 12.N$. Dans le cas considéré ici, les bagues intérieures sont supposées indéformables et sont modélisées par un seul noeud. La matrice de rigidité d'un roulement est alors de dimension $12.(N-1) \times 12.(N-1)$. La grande taille de cette matrice rend les études délicates. Pour les applications considérés dans ce document, la bague intérieure des roulements est supposée indéformable et est modélisée par un noeud unique de l'arbre. Seule la sous-matrice associée aux degrés de liberté de ce noeud. Elle est formée par l'assemblage des matrices de chaque corps roulant, et est donc représentative du comportement "global" du roulement. Cette matrice (6x6) est en fait comparable à celles obtenues par des approches utilisant des roulements "isolés" et ne prenant pas en compte la déformabilité globale du système (*Lim [2.12], [2.13], [2.14], [2.15]*). Cette matrice peut se décomposer en 3 sous-matrices de dimension 3×3 :

$$\left[\begin{array}{c|c} M_T & M_{TR} \\ \hline {}^T M_{TR} & M_R \end{array} \right] \quad (1.17)$$

où :

- M_T assure le couplage entre les translations et les forces, elle est donc équivalente à une matrice de rigidité en translation, tous ses coefficients sont homogènes à des dimensions en $N.m^{-1}$,
- M_R couple les ddl de rotation et les moments, elle est donc équivalente à une matrice de rigidité en torsion, tous ses coefficients sont homogènes à des dimensions en $N.m.rad^{-1}$,
- ${}^T M_{TR}$ couple les forces et les ddl de rotations, et inversement pour sa transposée, ses coefficients sont homogènes à des dimensions en $N.rad^{-1}$, ou à des dimension en N . Les radians sont en fait des grandeurs adimensionnées, les deux unités sont donc bien identiques.

Il est donc possible de comparer entre eux les termes d'une même sous-matrice, mais pas les termes de sous-matrices différentes. Afin de pouvoir accéder à des valeurs "adimensionnées" et de mettre en évidence, au sein de chaque sous-matrice, les termes les plus grands numériquement, les coefficients de chaque sous-matrice sont divisés par le plus grand terme, en valeur absolue, de cette même sous-matrice. La matrice "étudiée" est alors la suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{M_T}{\max(|M_T|)} & \frac{M_{TR}}{\max(|M_{TR}|)} \\ \hline \frac{{}^T M_{TR}}{\max(|M_{TR}|)} & \frac{M_R}{\max(|M_R|)} \end{array} \right] \quad (1.18)$$

Cette approche permet de "visualiser" ces matrices par des matrices de "couleurs", le signe de chaque coefficient est indiqué par le symbole "+" ou "-" dans la "case" correspondante (Cf Figure 1. 19)

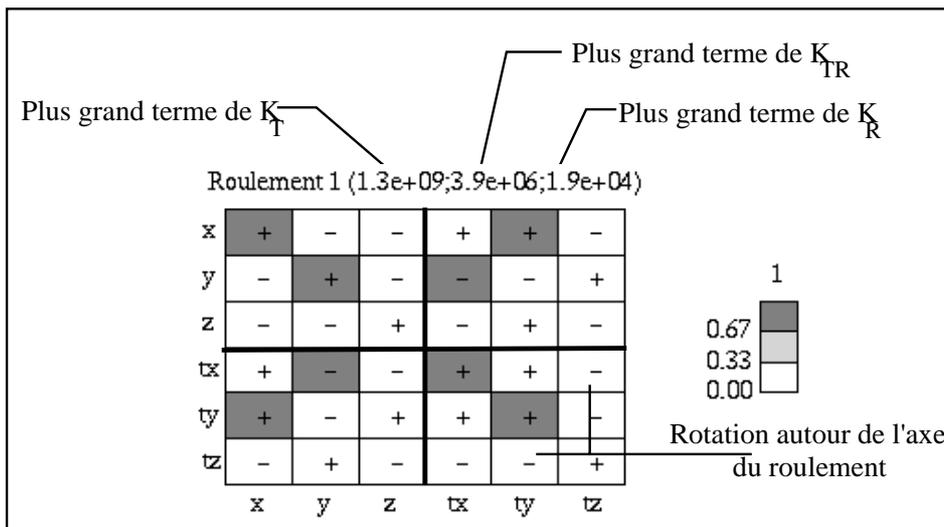


Figure 1. 19 : Principe de visualisation des matrices de rigidité

Afin d'évaluer l'influence de l'environnement statique sur ces matrices, il est possible de visualiser les variations relatives des coefficients d'une matrice en fonction de l'environnement considéré. Une "pseudo" matrice des variations relatives ΔK est alors définie :

$$\Delta K_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{K_T^2 - K_T^1}{\max(|K_T^1|)} & \frac{K_{TR}^2 - K_{TR}^1}{\max(|K_{TR}^1|)} \\ \frac{K_{TR}^2 - K_{TR}^1}{\max(|K_{TR}^1|)} & \frac{K_R^2 - K_R^1}{\max(|K_R^1|)} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Cette pseudo-matrice ΔK , peut être visualisée de la façon suivante :

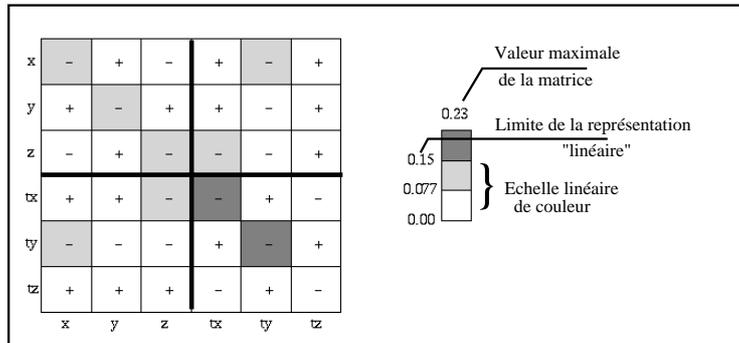


Figure 1.20 : Visualisation des variations relatives des coefficients des matrices de rigidité tangentes

Cette approche permet d'évaluer et de comparer l'évolution des coefficients de la matrice de rigidité tout en respectant les ordres de grandeurs. En effet, une variation de 200% d'un terme très petit numériquement est moins significative qu'une variation de 10% d'un terme dominant. Le fait d'utiliser le plus grand terme de chaque sous-matrice comme dénominateur ne met en évidence que les variations significatives.

4.2.2 Application aux roulements à billes

Les raisons de présenter préférentiellement les résultats statiques obtenus pour le roulement à billes R21 sont multiples. D'un point de vue technologique, ce roulement se distingue des autres par son nombre "réduit" de corps roulant (7) et par des contacts "ponctuels" entre les billes et les pistes de roulement. Pour les paliers à rouleaux le nombre de corps roulants est plus important (17 ou 23) et les contacts sont linéiques. De plus, le roulement à bille se situe dans une zone où les déformations statiques du carter sont importantes et où les interactions entre les roulements de fond de boîte ont été mises en évidence par de précédentes études (*Karam et al. [5.12]*). D'un point de vue "numérique", les études dynamiques (Cf. Chapitres 3 et 4) montrent également le rôle prépondérant de cet élément sur les modes propres de la boîte complète.

Les résultats "technologiques" obtenus pour les roulements à billes sont :

- les efforts entre la bille et les pistes de roulement des bagues extérieure Q_e et intérieure Q_i ,
- les angles de contact de la bille sous charge α_e et α_i ,

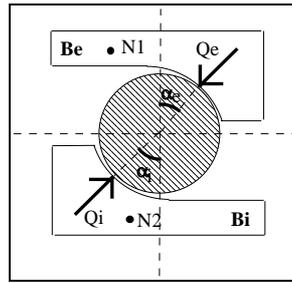


Figure 1. 21 : Résultats "technologiques" obtenus pour chaque bille du roulement R21

Remarque : puisque la bille est en équilibre, lorsque la force centrifuge n'est pas prise en compte les efforts Q_i et Q_e sont égaux en norme et les angles de contact α_i et α_e sont identiques

Les résultats présentés sont ceux obtenus pour les 3 modèles définis précédemment (Cf. Page 20) et correspondant respectivement à des roulements isolés, montés sur des arbres flexibles mais dans un carter rigide, dans leur environnement statique réel.

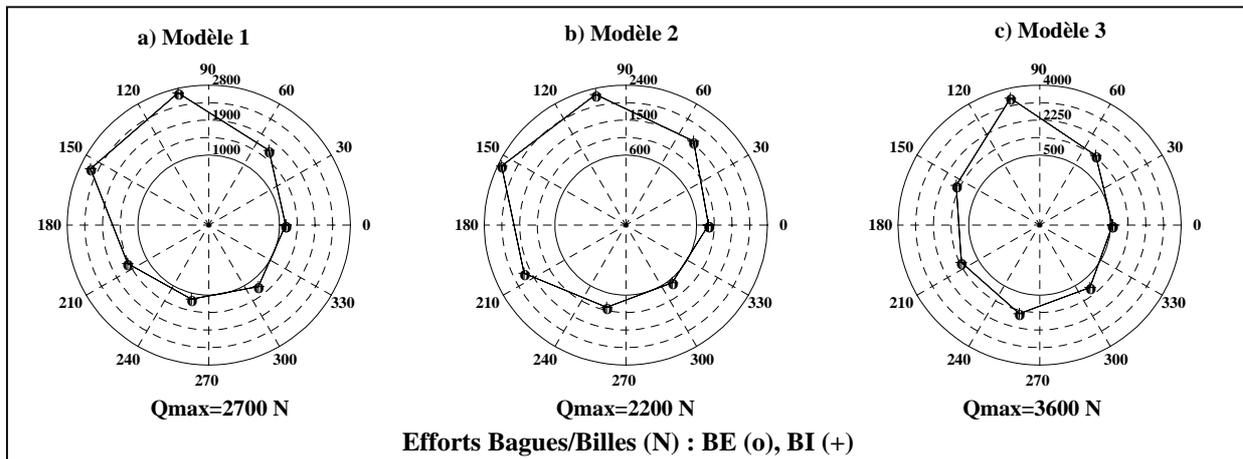


Figure 1. 22 : Efforts exercés sur les corps roulants du roulement à bille R21 par les pistes de roulement pour les 3 modèles considérés

Pour des chargements statiques équivalents, la prise en compte d'un environnement de plus en plus souple : roulements montés sur des arbres déformables (modèle 2) puis dans un carter flexible (modèle 3) s'accompagne d'une redistribution des efforts entre les corps roulants. Lorsque le roulement considéré est monté dans un environnement rigide (modèle 1), les efforts se répartissent sur l'ensemble des corps roulants de manière symétrique par rapport à la direction du chargement radial (Cf. Figure 1. 22 a)).

La prise en compte de la flexibilité des arbres et des interactions éventuelles entre les roulements (modèle 2) ne modifie que faiblement la répartition des efforts sur les corps roulants du roulement à billes (Cf. Figure 1. 22 b)). En effet, les liaisons par roulement sont très proches des modèles rotules et glissières utilisés pour calculer les torseurs des efforts à appliquer sur les roulements du modèle 1. Les efforts exercés sur le roulement à billes dans le modèle 2 sont donc très proches de ceux utilisés dans le modèle 1. En fait, les différences entre les résultats des modèles 1 et 2 sont surtout sensibles pour les roulements coniques. En effet, du fait de la conicité des rouleaux, les roulements coniques d'un même arbre interagissent et les efforts axiaux effectivement appliqués sur chacun d'eux sont supérieurs à ceux calculés avec les hypothèses classiques de conception qui ne prennent pas en compte de

manière satisfaisante la conicité des rouleaux. Cette augmentation des efforts axiaux modifie significativement les répartitions des efforts.

La prise en compte de la flexibilité statique du carter (modèle 3) modifie fortement la répartition des charges entre les corps roulants du roulement à billes. Cette répartition n'est plus symétrique, la charge maximale est beaucoup plus élevée (3400 N / 2600 N) et le nombre de corps roulants "très" chargés est plus faible (Cf. Figure 1. 22 c)).

La prise en compte d'un environnement plus ou moins souple modifie également les angles de contact des billes sur les pistes de roulement (Cf. Figure 1. 23).

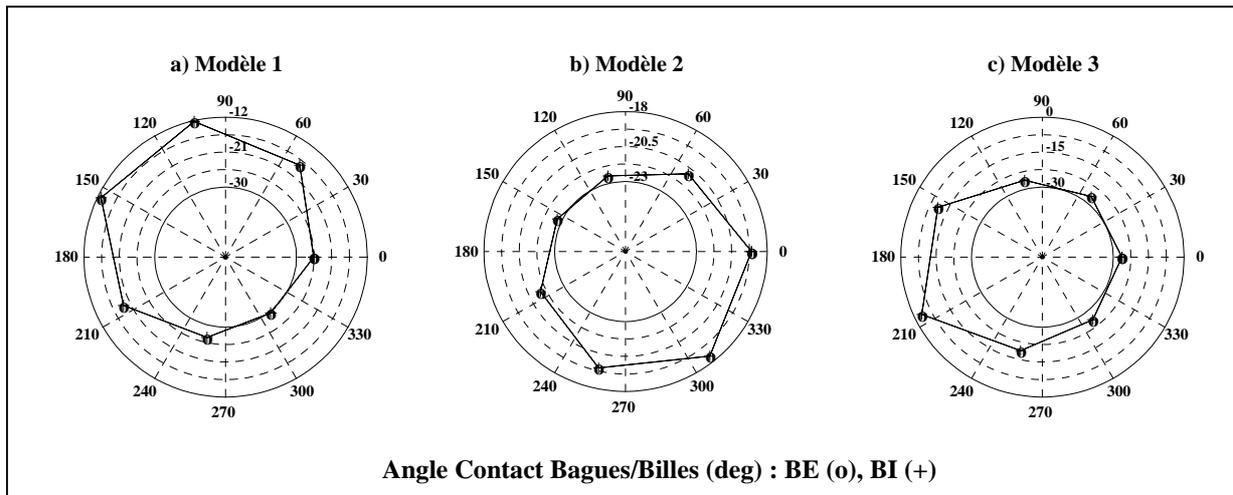


Figure 1. 23 : Angles de contact billes / bagues pistes de roulement

L'influence de l'environnement statique sur la répartition des charges dans le roulement à billes se retrouve également pour les autres roulements de la boîtes de vitesses. Ces résultats permettent de bien comprendre l'importance des modèles globaux pour les Bureaux d'Etudes et l'intérêt de la modélisation fine des roulements. En effet, un écart de 30% sur les efforts effectivement appliqués sur les corps roulants, l'évolution du nombre de corps roulants "fortement" chargés et des angles de contact sous charge vont modifier les calculs de contraintes dans les carters et également la durée de vie des roulements. Il est impossible d'optimiser efficacement la géométrie des carters et de choisir le bon roulement si les efforts transmis ne sont pas parfaitement connus en norme et en orientation.

D'un point de vue numérique, ces modifications vont se traduire par des matrices de rigidité différentes (Cf. Figure 1. 24).

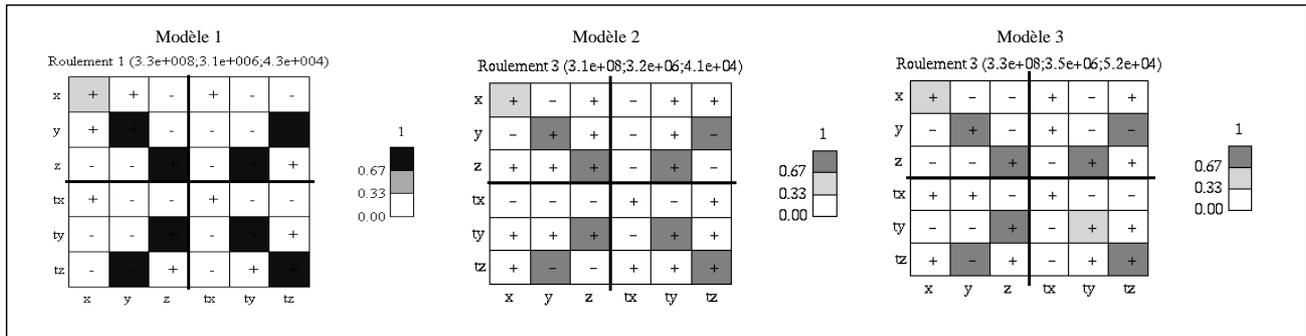


Figure 1. 24 : Matrice de rigidité tangente associée au roulement à billes pour les 3 modèles considérés

La prise en compte d'un environnement plus souple ne modifie pas la forme générale de la matrice de rigidité. Les termes "dominants" restent les mêmes : termes diagonaux et termes de couplage $K_{y\theta z}$ et $K_{z\theta y}$. Seule la valeur relative du terme $K_{\theta y\theta y}$ diminue sensiblement par rapport au terme $K_{\theta z\theta z}$ lorsque la flexibilité du carter est prise en compte (modèle 3). L'examen des plus grands termes de chaque sous matrice (Cf. Figure 1. 19 & Figure 1. 24) montre que pour la sous-matrice K_T la valeur du plus grand terme évolue peu avec l'environnement et reste pour les 3 modèles voisin de $3.2 \cdot 10^8$ N/m. Pour les deux autres sous-matrices, la valeurs des plus grands coefficients évolue avec l'environnement. Pour le plus grand terme de couplage translation-deflexion (sous-matrice $[K_{TR}]$), l'augmentation est de 3% entre les modèles 1 et 2 et de 9% entre les modèles 2 et 3. La valeur maximale des rigidités de déflexion (sous-matrice $[K_R]$) diminue de 4% entre les modèles 1 et 2 et augmente de 27% entre les modèles 2 et 3.

La figure 1.25 représente les variations relatives des termes de la matrice de rigidité comme définie par l'équation (1.19), pour le modèle 2 relativement au modèle 1, et pour le modèle 3 relativement au modèle 2.

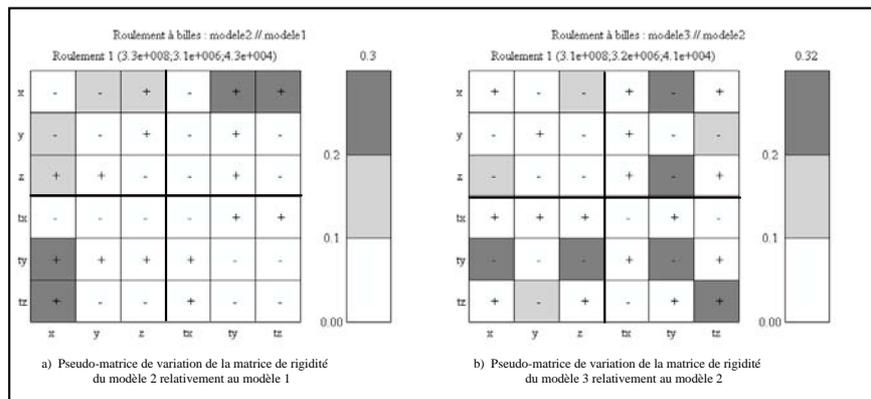


Figure 1. 25 : Variations relatives des coefficients de la matrice de rigidité tangente du roulement à billes en fonction de l'environnement.

Globalement et en considérant l'ensemble des roulements de la boîte de vitesses, la matrice de rigidité du roulement à bille est la plus influencée par la modification de l'environnement statique. La prise en compte de la flexibilité des arbres par rapport à un environnement rigide (Cf. Figure 1. 25 a)) modifie les valeurs relatives des termes de couplage avec la translation axiale, ces modifications peuvent atteindre 30% pour les termes de couplage $K_{x\theta y}$ et $K_{x\theta z}$. La prise en compte du carter (Cf. Figure 1. 25 b)) modifie de

manière importante les coefficients de la matrice de rigidité : pour 10 termes cette évolution relative est supérieure à 10% de la valeur du plus grand coefficient de la matrice initiale.

Ainsi, dans le cadre des études globales statiques et dynamiques, les matrices de rigidités diagonales "classiques" ne permettent pas d'expliquer correctement la transmission des efforts et des vibrations de la chaîne cinématique vers les carters. Afin d'améliorer ces modèles, **T.C Lim** et **R. Singh** ont proposé, pour les paliers à roulement, des matrices de rigidités pleines intégrant les couplages entre les différents effets (*Lim [2.12], [2.13], [2.14], [2.15]*). Ces matrices sont comparables à celles obtenues avec le modèle 1 et ne prennent pas en compte la flexibilité de l'environnement. Or, les résultats présentés dans cette partie introductive aux travaux dynamiques montrent que les termes les plus sensibles à cet environnement sont précisément ces termes de couplage. La flexibilité des carters et des arbres modifiant sensiblement les matrices de rigidité associées aux roulements, il semble délicat dans le cadre des modèles dynamiques globaux, de supposer à la fois que le carter est indéformable du point de vue statique mais déformable du point de vue dynamique.

5. CONCLUSION

L'utilité des modèles globaux pour décrire le comportement de systèmes mécaniques complexes a été rappelée. Pour l'étude statique des mécanismes de transmission de puissance, les modèles et les méthodes de résolution mis en place doivent intégrer les non-linéarités du système. Des éléments spécifiques ont été élaborés afin de modéliser précisément les organes de transmission tels les engrenages et les paliers à roulement. Pour ces derniers, et en s'appuyant sur les travaux de **I.S. Choi**, une approche unifiée englobant l'ensemble des roulements (roulements à billes, à rouleaux cylindriques ou coniques) a été proposée. Elle permet de modéliser aussi bien des roulements "isolés" que ceux montés dans un environnement flexible (prise en compte des arbres et des carters). Ces travaux introductifs ont conduit au développement d'un logiciel de calcul du comportement statique des boîtes de vitesses automobile, s'intégrant à un code éléments finis industriel. Ce logiciel est actuellement utilisé par les Bureaux d'Etudes du groupe PSA-DETA. Les modifications effectuées sur les algorithmes de **I.S. Choi** lors du développement de ce logiciel, ont permis de résoudre les problèmes de convergence et de diminuer notablement les temps de calcul, ce qui autorise une utilisation plus souple par les Bureaux d'Etudes.

L'objectif de ce chapitre introductif était de bien préciser un contexte d'étude du comportement dynamique de systèmes mécaniques, objet plus général de ce travail. Pour cela, et afin de décrire le comportement statique de tels systèmes, une synthèse de l'existant a été réalisée. Des adaptations et des développements ont été nécessaires. Les méthodes de calcul ainsi définies ont été appliquées à la boîte de vitesses considérée tout au long de ce document. Les résultats présentés dans ce chapitre mettent en évidence l'influence de la flexibilité de l'environnement statique sur le comportement sous charge et sur la modélisation dynamique des paliers à roulement. Deux points de vue ont été considérés :

- le point de vue "technologique" ou "objet", où les résultats sont interprétés pour chaque corps roulant en terme d'efforts et de position de contact sous charge. Ces valeurs représentent les données de dialogue entre les fabricants de roulements et les Bureaux d'Etudes utilisateurs. La prise en compte de l'environnement statique modifie la répartition des charges sur les corps roulants et donc la durée de vie des roulements. Plus généralement, une étude sérieuse du comportement mécanique d'un système complexe passe

nécessairement par la prise en compte des interactions mécaniques entre les différents éléments technologiques,

- le point de vue "numérique" centré sur les matrices de rigidité tangentes associées aux roulements. Ces matrices seront utilisées par la suite pour linéariser le comportement des roulements autour d'un point de fonctionnement lors des études dynamiques. La prise en compte de la flexibilité des arbres et des carters lors des calculs statiques préalables modifie essentiellement les coefficients de couplages des matrices de rigidité. Or, il a été montré (*Lim & Singh [2.12], [2.13], [2.14], [2.15]*) que l'intérêt d'utiliser des matrices de rigidité pleines lors des études dynamiques est lié à la présence de ces termes extradiagonaux et à la prise en compte des couplages entre les déformations de flexion, de torsion et d'extension. Plus généralement, la réalisation de modèles numériques globaux performants tant statiques que dynamiques de systèmes de transmission de puissance, nécessite l'intégration et la prise en compte de manière pertinente de phénomènes "macroscopiques" (d'ordre de grandeur géométrique le millimètre) liés à l'architecture du mécanisme, et de phénomènes "microscopiques" (d'ordre de grandeur géométrique le micromètre) liés aux redistributions de charges locales internes au système et traduisant le comportement des liaisons mécaniques.

Chapitre 2 :

MODÈLES GLOBAUX ET OUTILS D'ANALYSE

POUR L'ÉTUDE DYNAMIQUE DES MÉCANISMES

DE TRANSMISSION DE PUISSANCE.

Les études dynamiques globales constituent un prolongement logique à l'approche statique présentée au chapitre 1. La réalisation de modèles significatifs et robustes du comportement dynamique des boîtes de vitesses nécessite la synthèse de nombreux travaux de recherche "verticaux" réalisés dans différents domaines : modélisation de l'interface d'engrènement, des paliers à roulement, de l'amortissement, etc ... Ce second chapitre est principalement constitué par une synthèse bibliographique de ces divers travaux, afin d'introduire dans le modèle dynamique proposé les données nécessaires et suffisantes à l'obtention de résultats dynamiques satisfaisants.

Dans ce chapitre, la première partie définit les hypothèses retenues pour la mise en place de modèles dynamiques globaux. La seconde partie est centrée sur le principal élément de transmission de puissance des boîtes de vitesses : l'engrenage. Les problèmes liés à l'engrènement sont rappelés et une synthèse bibliographique est présentée. Elle permet de définir un élément dynamique d'engrenage, pouvant s'introduire dans un modèle global. La troisième partie décrit les modélisations retenues pour les autres éléments de la boîte de vitesses : paliers à roulement, arbres de transmission, carter ... Si la modélisation des arbres est classique, celle proposée pour les roulements apparaît comme une innovation par rapport aux modèles existants. De même l'introduction de l'influence dynamique du carter par l'intermédiaire d'un super-élément est une nouveauté. La quatrième partie fait le bilan des méthodes d'introduction des phénomènes d'amortissement. La cinquième partie présente les outils et les méthodes d'analyses dynamiques utilisés dans la suite de ce document.

1. INTRODUCTION

La réalisation de modèles dynamiques globaux permettant de décrire le comportement de boîtes de vitesses automobile, fait suite aux nombreuses études réalisées au Laboratoire C.A.S.M. sur la modélisation globale des systèmes mécaniques (*Rigal [1.28], [1.29], Choi [1.4], Satori [1.31]*). L'ensemble de ces études a montré l'intérêt de l'approche globale pour la conception des systèmes de transmission de puissance, et a également permis de proposer une méthodologie de travail. Les études dynamiques constituent un prolongement logique des études statiques globales qui ont été rappelées au chapitre 1. Les modèles dynamiques développés doivent permettre de définir les conditions de transmission dynamique des efforts et de la puissance et, à plus long terme de déterminer et d'atténuer les sources de nuisance et de bruit, afin d'optimiser le comportement du système mécanique considéré.

Comme dans la phase de modélisation du comportement statique, la mise en place de modèles dynamiques globaux de boîte de vitesses est un travail "transversal" qui nécessite la synthèse de nombreux travaux de recherche "verticaux", réalisés dans divers domaines :

- modélisation de l'interface d'engrènement,
- introduction des paliers à roulement,
- introduction de carters "réels",
- prise en compte de l'amortissement,
- techniques de résolution et de réduction des modèles numériques de grandes tailles ...

L'originalité de ce travail repose sur l'intégration et l'articulation des différentes descriptions, afin d'obtenir une modélisation globale du comportement, significative, robuste et cohérente. Ce chapitre va donc être constitué principalement par une synthèse bibliographique de ces différents travaux, afin de réaliser un modèle dynamique global des boîtes de vitesse introduisant les données "nécessaires et suffisantes" à l'obtention de résultats dynamiques satisfaisants. L'introduction, pour modéliser le comportement dynamique des roulements, des matrices de rigidité tangente associées aux corps roulants et définies dans le chapitre 1, apparaît comme une innovation par rapport aux modèles existants car cette approche permet de prendre en compte la déformabilité statique des carters. De même, l'introduction du carter réel par l'intermédiaire d'un super élément est une nouveauté par rapport aux modèles globaux, décrits dans la littérature, qui sont en général associés à des carters "élémentaires". Cette approche doit permettre d'établir une description cohérente du comportement des éléments de structure et des éléments de liaison.

Par hypothèse, les études dynamiques sont réalisées dans le cadre de l'élastodynamique linéaire et des petites perturbations. Le modèle dynamique est défini autour d'un point de fonctionnement statique et le comportement des éléments technologiques non-linéaires est linéarisé (Cf. Figure 2. 1). Cela signifie, en particulier pour les roues dentées, que le chargement statique est suffisamment important pour que l'engrènement soit réalisé sans perte de contact.

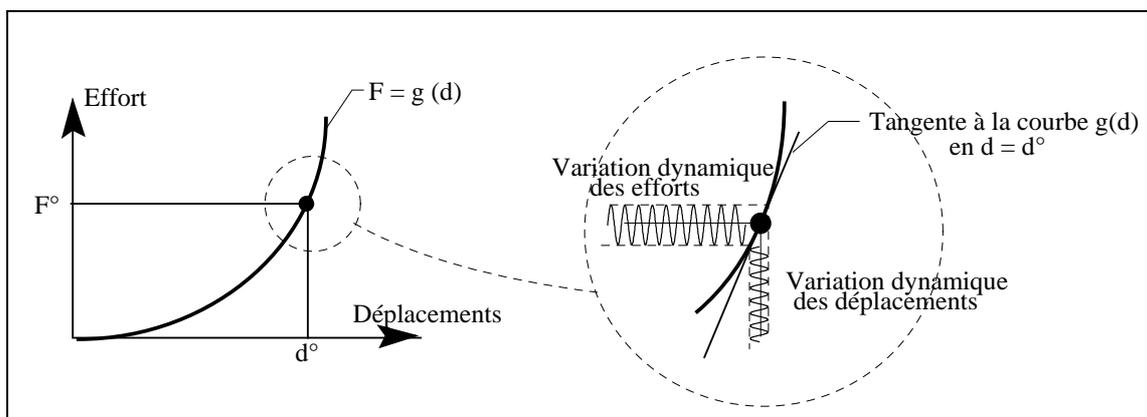


Figure 2. 1 : Linéarisation du comportement des éléments non linéaires autour du point de fonctionnement

Pratiquement, la définition des modèles dynamiques globaux s'est accompagnée de la réalisation d'un logiciel de calcul Eléments Finis, orienté vers la modélisation dynamique des systèmes de transmission de puissance et utilisé en interne au Laboratoire C.A.S.M. Mais, les

caractéristiques de ce logiciel ne seront pas développées dans ce document. Seules les méthodes de résolutions retenues sont évoquées dans ce chapitre et les algorithmes associés sont donnés en annexe A.

2. L'ENGRENAGE : L'ÉLÉMENT TECHNOLOGIQUE PRINCIPAL DES BOÎTES DE VITESSES - CARACTÉRISTIQUES ET MODÉLISATION

2.1 Au coeur du problème : l'engrènement.

La fonctionnalité des boîtes de vitesses est de transmettre la puissance fournie par un moteur aux roues du véhicule, en modifiant éventuellement le rapport entre la vitesse de rotation et le couple. Les engrenages sont les éléments principaux de ces mécanismes. La puissance est transmise par obstacle entre les pièces en mouvement relatifs. Les autres éléments : arbres, carter, paliers à roulement... ont un rôle certes nécessaire, mais d'accompagnement.

Dans le cadre des études présentées dans ce document, seuls les engrenages cylindriques extérieurs droits et hélicoïdaux à denture en développante de cercle sont considérés (*Henriot [1.9]*). Une liaison "cinématique idéale" par engrenage assurerait, une transmission continue du mouvement, ainsi qu'un rapport de réduction rigoureusement constant au cours du fonctionnement. Dans la réalité, l'engrènement des dentures a un caractère discontinu et irrégulier (*Harris [1.8]*). L'erreur de transmission du mouvement est un indicateur de ce comportement. Elle caractérise l'écart entre la position réelle de la roue menée et la position qu'elle devrait occuper si la transmission était parfaite. Elle s'exprime, soit comme un écart angulaire si elle est mesurée aux centres des pignons, soit comme un écart linéaire si elle est ramenée sur la ligne d'action. C'est un indicateur global révélant à la fois les défauts de fabrication, les phénomènes cinématiques et les effets des déformations statiques et dynamiques. **C. Bard [1.1]** rappelle que l'erreur de transmission peut se décomposer en :

- *erreur de transmission quasi statique sans charge*, ou erreur cinématique, qui représente les défauts géométriques des dentures et le fait que les profils ne sont pas exactement conjugués. Ces défauts résultent soit de la fabrication (erreur de pas, de distorsion, de profil, d'excentricité) soit de la détérioration du profil en cours d'utilisation: (usure, pitting, ...),
- *erreur de transmission quasi statique sous charge*, qui fait intervenir les effets des déformations de denture et des corrections éventuelles de profil. Cette erreur est périodique, de période égale à la période d'engrènement. Elle représente globalement l'évolution du nombre de dents chargées au cours de l'engrènement,
- *erreur de transmission dynamique*, c'est une grandeur instantannée qui caractérise le comportement d'une transmission tant du point de vue vibratoire, qu'acoustique.

L'erreur de transmission est aujourd'hui considérée comme la source principale d'excitation mécanique dans les systèmes de transmission de puissance par engrenages (*Houser [1.10]*, *Welbourn [1.42]*, *Mark [1.21]*, *Thompson [1.32]*). De plus, elle est fortement

corrélée au bruit d'engrènement, c'est-à-dire au niveau sonore émis par un engrenage ou une structure complète, aussi bien en amplitude qu'en fréquence (*Thompson [1.32], Welbourn [1.42], Favre et al [1.6], Kassai & Maresse [1.13]*).

Les engrenages sont donc à la fois des éléments de couplage entre les arbres de la boîte de vitesses, des sources principales d'excitation du système, mais également des sources de dissipation d'énergie. Les modèles numériques réalisés doivent permettre de prendre en compte tous ces aspects.

2.2 Modélisation dynamique de la liaison par engrenage

2.2.1 Hypothèses

L'idée retenue, qui permet une modélisation globalisante des réducteurs à engrenages, consiste à assimiler l'engrenage à un couple de cylindres rigides, liés par une raideur d'engrènement représentant les contributions de l'ensemble des parties déformables. Dans le cadre de l'étude des boîtes de vitesses automobile, les pignons sont suffisamment massifs pour que cette hypothèse soit tout à fait réaliste.

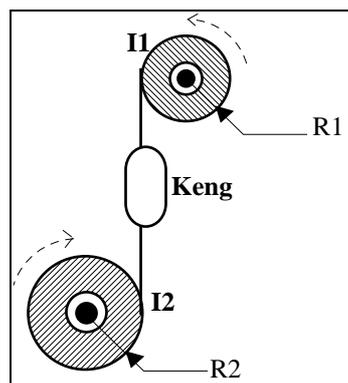


Figure 2. 2 : Modèle de base.
Pour une géométrie parfaite les rayons R_1 et R_2 sont les rayons de base et I_1I_2 est la ligne d'action

Le problème principal de la modélisation du comportement mécanique des engrenages est de prendre en compte, de façon significative, les phénomènes d'engrènement. Deux stratégies sont envisageables (*Velex [1.40], Bard [1.1]*). La première considère que l'effort statique appliqué sur une dent est une force extérieure au système. Les variations de chargement statique vues par un couple de dents simulent l'engrènement et constituent la source principale d'excitation. Les avantages de ce modèle sont, sa grande simplicité (problème différentiel à coefficients constants) et de fournir une première indication sur les vitesses critiques, ainsi que des valeurs raisonnables pour les efforts dynamiques. En revanche, ce modèle ne permet pas de prendre en compte les changements plus ou moins rapides des raideurs de liaison dus à l'engrènement successif d'un, puis de deux couples de dents. La seconde technique, considère l'effort appliqué sur une dent comme un effort intérieur au système. Les excitations sont alors dues aux variations périodiques de la raideur d'engrènement au cours du temps. Cette modélisation s'adapte bien aux systèmes plus complexes, mais elle présente la particularité de conduire à un système différentiel à coefficients périodiques. Il est important de noter que dans les deux cas, le problème de mise en oeuvre est identique : il faut déterminer, soit la variation de l'effort extérieur appliqué au

système, soit la variation de raideur d'engrènement. Ces deux quantités représentent la même chose : l'effort élastique associé à la déformation des dents aux points de contact. La différence entre ces deux techniques, réside dans la façon de prendre en compte cet effort dans les équations d'équilibre dynamique. **C. Bard [1.1]** propose un "modèle mixte" intégrant à la fois la variation de rigidité d'engrènement représentant la flexibilité des dents, l'évolution de la position du point de contact, et une excitation par des efforts extérieurs associés à l'erreur cinématique.

2.2.2 *Modélisation d'un engrenage parfait : approche bibliographique*

Cette notion d'engrenage "parfait" c'est-à-dire de profil sans écart de forme ni d'erreur de montage sous-entend que l'engrènement sous charge obéit aux mêmes règles que l'engrènement défini par la cinématique des corps rigides sans défaut. Les contacts restent dans le plan d'action théorique et les points de contact réels et théoriques coïncident. Dans la réalité, ces conditions sont approchées et les dentures sont corrigées afin de compenser à la fois les déflexions sous charge des dentures, les défauts et les déflexions de montage.

Les premiers modèles mécaniques du comportement dynamique développés (*Tuplin [1.34], [1.35], [1.36]*) privilégient les mouvements de torsion et ne possèdent qu'un seul degré de liberté par roue. Ils sont encore couramment utilisés aujourd'hui et de bonnes concordances entre les résultats numériques et expérimentaux ont été obtenues (*Lin [1.18], [1.19], [1.20]*). Ce sont des modèles de type "masses-ressorts" à paramètres concentrés, se limitant en général à l'étude des mouvements dans le plan d'action de l'engrenage et au cas des faibles rapports de conduite.

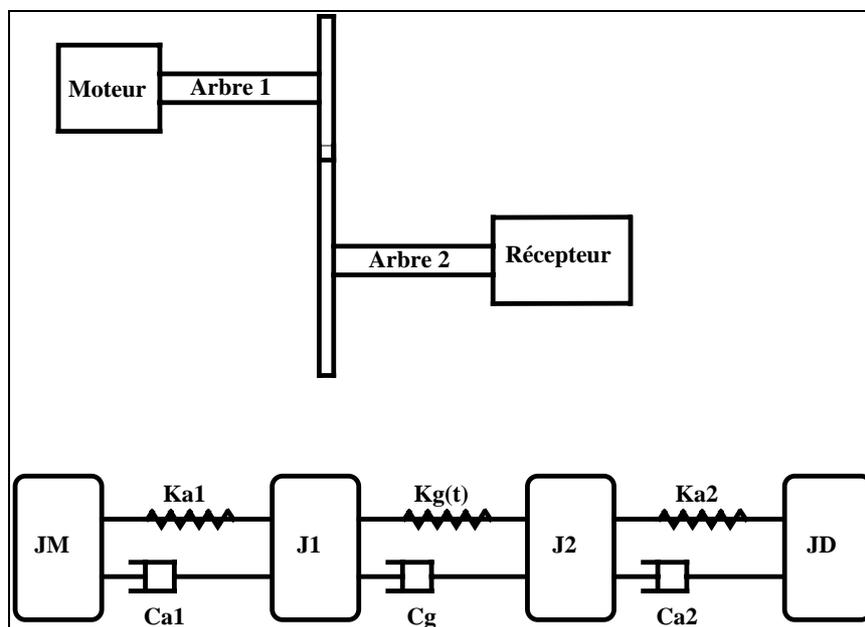


Figure 2. 3 : Modèle à paramètres concentrés proposé par Lin

Les paramètres du modèle peuvent être estimés plus ou moins facilement, ce sont :

- les inerties des roues de l'engrenage (J_1 et J_2), du moteur (J_M) et du récepteur (J_D),

- les rigidités en torsion des arbres (K_{a1} et K_{a2}) et de l'engrenage (K_g),
- les coefficients d'amortissement associés aux arbres (C_{a1} et C_{a2}) et à l'engrènement (C_g),
- les efforts extérieurs, couple d'entrée et couple résistant, efforts de frottement.

Les inconnues du modèle sont les positions angulaires du moteur, de la roue, du pignon et du récepteur.

L'écriture des équations d'équilibre dynamique permet d'obtenir le système d'équations différentielles, régissant les mouvements de rotation. La résolution de ce système permet de déterminer les fréquences propres et la charge dynamique. La limite principale de ce modèle est de ne considérer que les degrés de liberté de torsion et de négliger les mouvements de flexion, en particulier les couplages "flexion-torsion". De plus, d'un point de vue théorique cette modélisation n'est représentative que des premiers modes du système, et ne tient compte des contributions des corps d'engrenages, que d'une manière approchée. Néanmoins, ce type d'approche est utilisé pour des géométries conventionnelles où les raideurs K_{ai} et K_g sont faibles devant les autres raideurs du mécanisme. Cela est possible lorsque les pignons ne sont pas trop larges et que les arbres sont suffisamment élancés, pour que leur raideur de torsion soit faible. Ces arbres doivent être bien soutenus pour que les phénomènes de flexion puissent être effectivement négligés. Or, ce type de soutien est rarement réalisé pour des arbres élancés.

En réalité, l'engrènement lie l'ensemble des degrés de liberté et introduit des couplages entre les vibrations en torsion et en flexion des arbres et de leurs supports. Le développement des moyens informatiques et l'utilisation de plus en plus systématique des méthodes aux Eléments Finis, ont permis de définir de nouveaux modèles, permettant de palier les carences des modélisations précédentes et, prenant en compte les phénomènes de couplage "flexion - torsion". Cette approche s'intègre à des logiciels Eléments Finis existants et peut s'appliquer à différents types d'engrenages. Elle permet d'introduire les autres éléments du réducteur : arbres, paliers, carters et de réaliser des études globales du comportement. Ces éléments sont d'une extrême importance pour déterminer le transfert d'efforts du réducteur à engrenages vers l'environnement.

Dans la plupart des cas, le mécanisme est discrétisé en un certain nombre de noeuds associés à 6 degrés de liberté (3 translation et 3 rotations). C'est également la solution adoptée pour ces études. Il s'agit alors de définir un élément de connexion entre les 6 degrés de liberté des noeuds appartenant à chacune des roues, ou partie de roues, et qui soit caractéristique du comportement de l'engrenage. Par hypothèse, les roues ou parties de roues considérées sont assimilées à des solides indéformables. Cet élément se traduit numériquement par une matrice de rigidité élémentaire $[K_{eng}]$ de dimension 12×12 .

Plusieurs techniques de modélisation sont envisageables et permettent d'obtenir des résultats plus ou moins globaux. **P.Velex** [1.40] discrétise chaque ligne de contact en N_c segments et associe à chacun de ces points de contact potentiel une rigidité élémentaire. A chaque instant, il détermine les points réellement en contact (définis par la cinématique sans charge et sans erreur de l'engrènement) et prend en compte les raideurs associées à chacun d'eux. **C. Bard** [1.1] détermine à chaque instant le barycentre des points de contact réel et associe à ce barycentre une raideur moyenne. Dans le cadre des études dynamiques globales

K. Satori [1.31] choisit un point particulier, le point primitif d'engrènement, où il place une rigidité variable suivant la normale au contact.

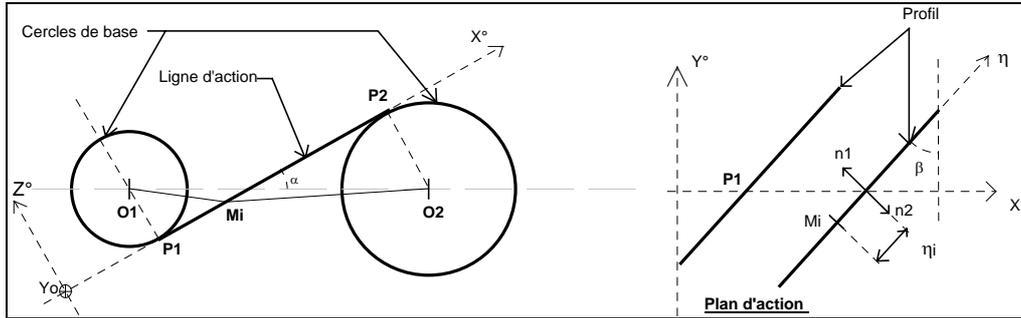


Figure 2. 4 : Modélisation de l'interface d'engrènement

Dans tous les cas, les déplacements sont calculés à partir de la situation idéale : rotation non perturbée par les déplacements sous charge. Soit M_i^1 et M_i^2 , deux points du plan d'action appartenant respectivement aux roues 1 et 2 et géométriquement confondus au point M_i de la figure précédente. Une variation infinitésimale (hypothèse des petites perturbations) de la position des centres des roues (points O_1 et O_2) va provoquer un déplacement des points M_i^1 et M_i^2 qui deviennent m_i^1 et m_i^2 . L'écrasement de la denture au point M_i est défini par :

$$\Sigma_{M_i} = M_i^1 m_i^1 \cdot \vec{n}_1 + M_i^2 m_i^2 \cdot \vec{n}_2 \quad (2.1)$$

où les vecteurs \vec{n}_j représentent les normales sortantes aux profils. Cette grandeur est couramment appelée erreur de transmission en M_i . **C. Bard [1.1]** fait remarquer qu'elle ne caractérise pas uniquement l'erreur induite par les déformations de denture sur la transmission du mouvement autour de l'axe de l'engrenage. Il la distingue, en la nommant déformation de denture suivant la normale au contact, de l'erreur de transmission définie précédemment.

Pour chaque point de contact, la matrice de rigidité $[K_{eng}^i]$ s'exprime comme le produit d'une matrice de "forme" $[G^i]$ caractéristique de la position du point considéré par un scalaire k_{eng}^i représentant la rigidité de la denture.

$$[K_{eng}^i] = k_{eng}^i \cdot [G^i] \quad (2.2)$$

Dans le cadre des hypothèses des petites perturbations autour d'un état stationnaire, la position du plan d'action après déplacement est identique à celle d'avant. Le repère $R^o(X^o, Y^o, Z^o)$ est alors fixe et est choisi comme référence. La matrice de forme $[G^i]$ est obtenue en écrivant que l'énergie de déformation associée à cette rigidité élémentaire est égale à :

$$E_p^i = \frac{1}{2} k_{eng}^i \cdot \Sigma_{M_i} \quad \text{et} \quad E_p^i = \frac{1}{2} k_{eng}^i \{Q\} \cdot [G^i] \cdot \{Q\} \quad (2.3)$$

où $\{Q\}$ est le vecteur des déplacements généralisés des points O_1 et O_2 dans le repère R^o .

2.2.3 *Mise en oeuvre effective*

Comme pour la modélisation des engrenages en statique, le choix effectué pour les études dynamiques globales des mécanismes de transmission de puissance, a été de considérer un point de contact et une direction de contact unique : le point primitif d'engrènement et la ligne d'action. Cette approche est en partie justifiée par les travaux de **C. Bard** [1.1], qui a montré que parmi les différentes modélisations de l'interface d'engrènement, le modèle linéarisé est particulièrement performant pour décrire le comportement dynamique de la transmission considérée. La matrice de forme [G] est alors unique et constante au cours du temps. Néanmoins, deux configurations d'engrènement sont possibles suivant l'orientation des profils en contact (Cf. Figure 2. 5). Deux éléments ont été développés afin de représenter chacune de ces configurations. Il faut noter que, les études dynamiques étant réalisées autour d'un point de fonctionnement en régime établi sans perte de contact, la configuration de l'engrènement ne varie pas au cours du temps et dépend seulement de la cinématique du système et du couple statique appliqué.

Les caractéristiques retenues pour modéliser l'élément d'engrenage sont :

- le type de configuration,
- les rayons de base,
- l'angle de pression apparent de fonctionnement,
- l'angle d'hélice de base. Le sens de l'hélice est celui de la roue 1, et la convention de signe utilisée (hélice à gauche $\beta > 0$, hélice à droite $\beta < 0$) permet de définir la normale sortante au contact pour la roue 1 dans le référentiel du plan d'action,
- la rigidité d'engrènement.

Les rayons de base, les angles de pression et d'hélice sont des données géométriques de définition de l'engrenage.

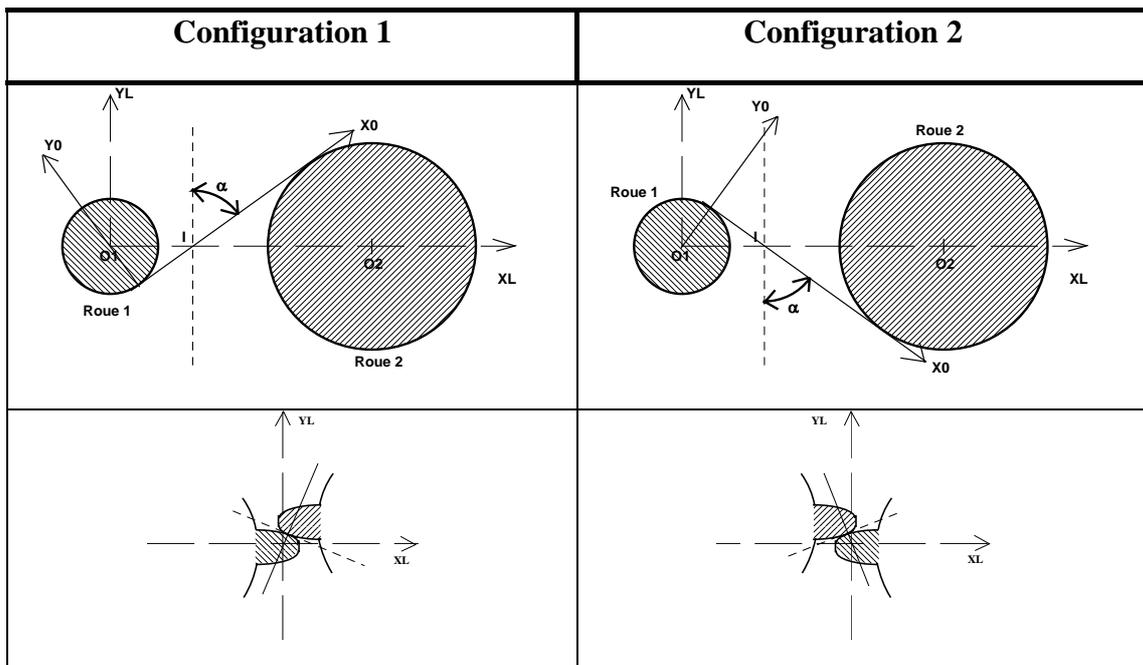


Figure 2. 5 : Les différentes positions d'engrènement

Ce type de modélisation permet une grande souplesse dans le choix de la rigidité d'engrènement. En fonction de l'objectif des études réalisées et de l'architecture du réducteur, la rigidité retenue sera estimée à partir de l'une des hypothèses suivantes :

- très supérieure aux rigidités des autres composants du système,
- constante au cours du temps et égale à la valeur moyenne de la rigidité d'engrènement au cours d'une période,
- variable au cours du temps, de période égale à la période d'engrènement et égale soit à une fonction périodique simple (sinusoïde, créneaux ...), soit à la valeur "réelle" de la rigidité d'engrènement, calculée de manière discrète le long de la ligne d'action de l'engrenage en régime quasi-statique.

La première hypothèse revient à supposer que les dentures sont indéformables. Les modèles construits avec ce type de rigidité d'engrènement, permettent d'étudier les premiers modes de flexion des arbres et de mettre en évidence les couplages. Dans la pratique, différents traitements numériques sont envisageables pour modéliser une rigidité de denture infinie. Très fréquemment, la technique utilisée consiste à remplacer la raideur infinie d'engrènement par une valeur finie comprise entre 10^4 et 10^5 fois la valeur de la plus grande rigidité du reste du système (ces valeurs sont des limites définies pour éviter d'introduire des instabilités numériques dans le cas de calculs en double précision, c'est-à-dire avec 16 chiffres significatifs). Comme il a été indiqué précédemment, l'utilisation d'une rigidité finie égale à la rigidité moyenne d'engrènement (hypothèse 2) présente l'avantage de conduire à un problème différentiel à coefficients constants.

Lorsque la flexibilité des dentures n'est pas négligée, il est nécessaire de déterminer la valeur réelle de la rigidité d'engrènement. Elle résulte de plusieurs types de déplacements associés aux contacts, aux déformées globales des dents, de la jante et du voile. Les différences d'échelles entre les aspects locaux et globaux, la complexité de certaines architectures peuvent rendre délicate la détermination des caractéristiques de ces différents déplacements. Néanmoins, des techniques de calcul existent : éléments finis, prismes finis, équations intégrales, transformations conformes... (*Velex [1.40], Bard [1.1], de Vaujany [1.39], Kim [1.16], Olakorede [1.23]*). Le principe de ces différentes méthodes est sensiblement le même et les calculs sont effectués en régime quasi-statique. Il consiste à discrétiser une partie de l'engrenage et à appliquer un effort statique concentré aux différents noeuds du profil de contact. Le calcul des déplacements résultants permet de déterminer une raideur d'engrènement pour chaque point de contact. Les difficultés de ces différentes méthodes proviennent principalement des géométries complexes à discrétiser. Les effets locaux dus aux contacts peuvent être calculés par la théorie de Hertz ou des variantes. D'un point de vue pratique, des expressions analytiques approchées peuvent être trouvées dans la littérature (*Remond et al. [1.27]*).

La masse et l'inertie des engrenages sont introduites, soit au niveau du diamètre des poutres modélisant les arbres dans le cas de pignons arbrés, soit par l'intermédiaire de masses et d'inerties ponctuelles. Les phénomènes d'amortissement et l'introduction des excitations dues aux erreurs de transmission sont considérés dans les parties 4 et 5.2.2 de ce chapitre.

3. MODÉLISATION DES AUTRES ÉLÉMENTS DE LA BOÎTE DE VITESSES

3.1 *La liaison dynamique entre la chaîne cinématique et les carters : les paliers à roulement*

Si les engrenages sont les organes de transmission de la puissance et également les sources principales d'excitation, les paliers à roulements sont les éléments de soutien de la chaîne cinématique. Dans le cadre des études localisées à l'engrènement (*Bard [1.1], Vexlex [1.40], Umezawa [1.37], [1.38]*) ils représentent les conditions aux limites du modèle. Pour les études dynamiques plus globales permettant de décrire la transmission des vibrations, les paliers sont les éléments de liaison entre la chaîne cinématique et le carter. Dans tous les cas ils doivent être modélisés. Leur prise en compte par des conditions aux limites idéales (*Ozguven [1.22], Rao [1.25]*) : appuis ponctuels pour les roulements courts, encastrement pour les roulements longs, libres lors des études en torsion est insuffisante.

En plus de leur rôle de couplage, les paliers à roulement comme l'engrènement constituent une source potentielle d'excitation due principalement (*Remond et al.[1.26]*):

- au désalignement des arbres,
- à l'état de surface des éléments roulants et des pistes de roulement,
- aux instabilités des cages, ...

Ces excitations, de fréquence directement reliée à la vitesse de rotation des arbres par des paramètres géométriques invariants, sont faibles devant celles introduites par l'engrènement, et elles sont généralement négligées.

Comme il a été vu dans le chapitre précédent, les paliers à roulement introduisent un certain nombre de non-linéarités qui peuvent marquer profondément le comportement vibratoire de la transmission. Pourtant, l'ensemble des modèles proposés est basé sur une linéarisation des termes de rigidité autour d'une position d'équilibre statique.

3.1.1 Limites des modèles "simples"

La modélisation la plus classiquement utilisée (*Vexlex [1.40], Bard [1.1]*) consiste à introduire un ensemble de ressorts susceptibles de représenter les raideurs axiales et radiales du roulement considéré. En général, ces raideurs sont évaluées par les formules de Palmgren [2.19] pour des cas de charges distincts, ce qui implique un découplage au niveau des roulements entre les mouvements radiaux (flexion des arbres) et axiaux (extension).

Ces modèles simplifiés ne permettent pas de prendre en compte de manière satisfaisante les mécanismes de transfert vibratoire entre l'excitation due à l'engrènement et la réponse des carters (*Lim [2.12], [2.13], [2.14], [2.15], Perret-Liaudet [1.24]*). **T.C Lim [2.12]** signale qu'il est paradoxal de n'introduire que des raideurs purement radiales, alors que les carters sont principalement sollicités en flexion. Il signale également que les modèles "simples" ne permettent pas de transmettre des moments et qu'ils sont inadéquats pour analyser la transmission dynamique des efforts au travers des roulements. **C. Bard [1.1]** en exploitant simultanément des modèles numériques et des données expérimentales a mis en évidence l'importance des rigidités des paliers à roulement qui conditionnent pour une grande part la localisation des vitesses critiques. Il conclut qu'un recalage correct de l'ensemble des vitesses critiques pour les dentures, passe obligatoirement par une modélisation complète des

paliers et la prise en compte de l'ensemble des degrés de liberté. Pour cela, des modélisations quasi-statiques préalables, très précises et permettant de prendre en compte aussi bien la géométrie locale que le positionnement global des éléments, sont nécessaires.

3.1.2 Introduction de modèles plus complexes

Depuis les années 1980, plusieurs auteurs ont proposé d'améliorer les modèles précédents, en introduisant les couplages entre les mouvements relatifs des bagues. En 1982, **M.D. Rajab** [2.20] propose d'introduire les couplages entre le déplacement radial et la rotation selon le plan de flexion de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. Mais **T.C Lim** [2.12] signale que son analyse était erronée et que sa matrice de raideur était incorrecte, de même pour les résultats de **W.B. Young** [2.21] qui avait étendu les résultats de **M.D Rajab** à une matrice de dimension 3. La tendance actuelle s'oriente donc, vers une définition de modèles généraux (*de Mul et al.* [2.18], *Lim* [2.12], [2.13], [2.14], [2.15]) permettant de prendre en compte les couplages entre les déplacements généralisés relatifs des bagues l'une par rapport à l'autre.

L'introduction dans les modèles dynamiques globaux des matrices de rigidité tangente associées à chaque corps roulant et présentées au chapitre 1, s'inscrit parfaitement dans cette tendance. Numériquement, cela se traduit par l'introduction pour chaque corps roulant d'une matrice de rigidité "pleine" couplant les 6 degrés de liberté d'un noeud de la bague intérieure aux 6 degrés de liberté d'un noeud de la bague extérieure. La grande souplesse de cette approche permet de considérer, aussi bien le cas des bagues déformables, que celui des bagues indéformables et, de pouvoir envisager différents environnements lors du calcul quasi-statique. Dans le chapitre 3, différentes modélisations des paliers à roulement sont envisagées et les résultats modaux sont comparés

3.2 Les arbres de transmission

L'engrènement est un élément de couplage élastique entre les différents modes de vibration des arbres, en particulier pour les modes de flexion et de torsion, et également pour les modes longitudinaux lorsque des engrenages hélicoïdaux sont utilisés. Les modèles d'arbre utilisés doivent donc être représentatifs de ces différents effets. Classiquement pour la modélisation des transmissions par engrenages, (*Velex* [1.40], *Satori* [1.31], *Bard* [1.1], *Perret-Liaudet* [1.24]) les arbres sont modélisés par des éléments finis de type poutre à deux noeuds et six degrés de libertés par noeud. Les éléments choisis sont des poutres de section constante avec une éventuelle prise en compte du raidissement dû à la compression statique de la poutre (efforts axiaux dus aux engrenages hélicoïdaux). Cet élément tient compte des effets de torsion, flexion et d'extension et des deux effets secondaires de flexion (poutre de Timoshenko). L'effet d'inertie de rotation introduit par Raleigh et l'effet de cisaillement mis en évidence par Timoshenko sont également introduits.

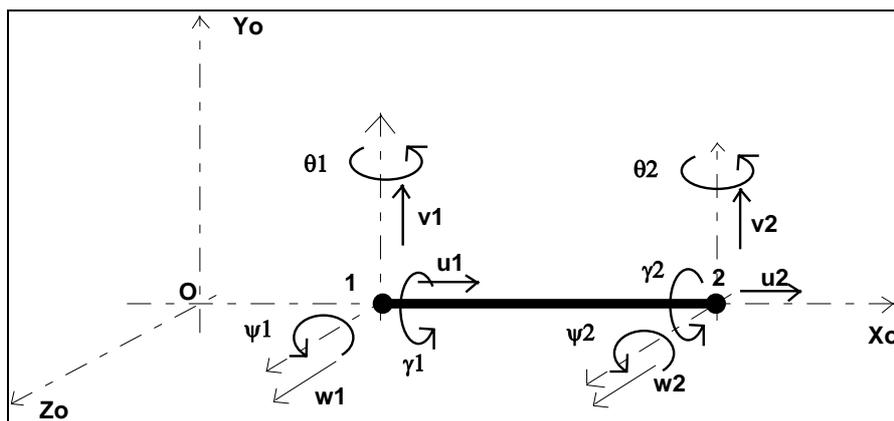


Figure 2. 6 : Elément d'arbre à 6 degrés de liberté par noeud

Les rotations ψ et θ sont couplées aux translations v et w par les relations :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \theta &= -\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les matrices de masse et de rigidité qui caractérisent cet élément sont données en annexe B.4. En accord avec les résultats de **R. Dufour** [1.5], les effets d'un couple permanent ne sont pas pris en compte. Compte tenu de la gamme de fréquence considérée par la suite, les effets gyroscopiques ont été négligés.

3.3 Les carters

Dans la majorité des études de système de transmission de puissance par engrenages, seule la partie tournante est considérée et le carter n'est pas pris en compte, ce qui revient à le considérer comme infiniment rigide [Velex [1.40], Bard [1.1]). Dans quelques cas, les carters et les supports ont été pris en compte mais, l'utilisation de modèles de roulement "simples", limitait les forces transmises à des forces purement axiales ou purement radiales. Néanmoins, **K Satori** [1.31] a montré l'influence de l'environnement sur la charge dynamique des dentures, aussi bien pour une boîte de transmission de puissance d'hélicoptère, que pour une boîte de vitesses de machines-outils. Par le développement de nouveaux éléments de modélisation des roulements, **T.C Lim** [2.12] introduit la flexibilité dynamique des supports et des carters. Mais, le carter considéré (machine essais NASA) a une forme très "simple" parallélépipédique. Néanmoins, il semble paradoxal dans les travaux de **T.C Lim**, de prendre en compte la flexibilité dynamique des carters mais de négliger leur déformabilité statique pour le calcul des matrices de rigidité associées aux paliers à roulement.

L'idée de l'approche présentée dans ce document est de prendre en compte le comportement de carters réels de boîtes de vitesses, aussi bien en statique (Cf. Chapitre 1), qu'en dynamique. Pour cela, des maillages précis des carters définis en Bureau d'Etudes ont été utilisés et introduits dans les modèles globaux après "réduction". Pour les études statiques (Cf. Chapitre 1), cette réduction se fait par condensation de la matrice de rigidité aux degrés de liberté relatifs à des éléments non linéaires. Dans le cadre des études dynamiques, elle se fait par utilisation de techniques de sous-structuration.

3.3.1 Généralité sur les techniques de sous-structuration

L'objectif général des techniques de sous-structuration (*Imbert [3.8], [3.9], d'Hennezel [3.4], Lallement¹*), formulées par **Przemieniecki** en 1963, est de calculer le comportement dynamique d'une structure complexe, à partir de la connaissance du comportement dynamique de ses sous-structures. En ce qui concerne la terminologie, **J.F Imbert** rappelle [3.8] que le terme de "sous-structure" peut être remplacé par celui de "super-élément" bien que, la notion de sous-structure ait été initialement utilisée pour des parties de structures constituant une entité physique et, que le terme de super-élément ait été initialement associé à plusieurs niveaux de sous-structuration. Comme pour les techniques de condensation évoquée au chapitre 1, les degrés de liberté des sous-structures sont scindés en degrés de liberté de "jonction" permettant de connecter d'autres éléments, et en degré de liberté "internes" qui disparaissent ensuite des équations. Soit Ω^i une sous-structure et Γ le contour de raccordement.

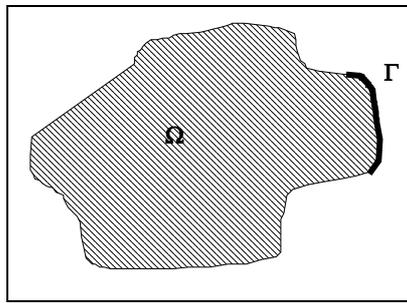


Figure 2. 7 : Sous-structure et zone de raccordement

Le vecteur des déplacements généralisés $\{y^i\}$ de cette sous-structure est décomposé de la façon suivante :

$$\{y^i\} = \begin{cases} y_{\bar{\Gamma}} & \text{ddl} \notin \Gamma, \quad \dim y_{\bar{\Gamma}} = n_{\bar{\Gamma}}^i \\ y_{\Gamma} & \text{ddl} \in \Gamma, \quad \dim y_{\Gamma} = n_{\Gamma}^i \end{cases} \quad (2.5)$$

¹ **LALLEMENT, G.** *Cours du D.E.A. Acousto-Opto-Electronique et de Mécanique des structures. Filières mécaniques des structures* - Université de Franche-Comté. Besançon, 1991, Synthèse de sous-structures, 36 p, Chapitre 7 : Méthode de Condensation, 19 p.

En accord avec la décomposition précédente, les matrices, masse et raideur, de la sous-structure s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 [M^i] = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ {}^T M_{ab} & M_{bb} \end{bmatrix}^i \quad \text{et} \quad [K^i] = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ {}^T K_{ab} & K_{bb} \end{bmatrix}^i \quad \text{avec} \quad \begin{aligned}
 \dim [K_{aa}^i] &= \dim [M_{aa}^i] = n_{\Gamma}^i \times n_{\Gamma}^i \\
 \dim [K_{bb}^i] &= \dim [M_{bb}^i] = n_{\Gamma}^i \times n_{\Gamma}^i \\
 \dim [K_{ab}^i] &= \dim [M_{ab}^i] = n_{\Gamma}^i \times n_{\Gamma}^i
 \end{aligned} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

L'idée générale des techniques de sous-structuration est d'approximer le comportement dynamique $\{y^i(t)\}$ de la sous-structure i de dimension n^i par une combinaison linéaire de p^i vecteurs caractéristiques $\{\psi_j^i\}$:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\{y^i(t)\}}_{(n^i)} &= \sum_{j=1}^{p^i} \underbrace{\{\psi_j^i\}}_{(p^i)} \cdot d_j^i(t) \\
 &= \underbrace{[\Psi^i]}_{(n^i, p^i)} \cdot \underbrace{\{d^i(t)\}}_{(p^i)} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Les différences entre les diverses méthodes résident essentiellement dans :

- le choix de la base $[\Psi^i]$ (base de Ritz) et du vecteur $\{d^i\}$,
- les techniques d'assemblage des sous-structures.

Les sources d'erreurs sont l'utilisation de bases de Ritz incomplètes et de la discrétisation des contours de raccordement, l'égalité des déplacements et l'équilibre des forces ne sont vérifiés qu'aux noeuds du modèle. Quelque soit la méthode utilisée, les étapes de calcul sont les mêmes :

- 1- Pour chaque sous-structure, choisir les vecteurs de Ritz $[\psi^i]$ et le vecteur des coordonnées généralisées $\{d^i\}$:

$$\Rightarrow \{y^i\} = [\Psi^i] \cdot \{d^i\} \quad (2.8)$$

- 2- Evaluer les matrices de masse et de raideur généralisées :

$$\Rightarrow \begin{cases} [\mu^i] = {}^T [\Psi^i] \cdot [M^i] \cdot [\Psi^i] \\ [\gamma^i] = {}^T [\Psi^i] \cdot [K^i] \cdot [\Psi^i] \end{cases} \quad (2.9)$$

- 3- Assembler les sous-structures et résoudre le problème

- 4- Pour chaque sous-structure, calculer les déplacements sur les degrés de liberté internes $\{y_{\Gamma}^i\}$, en fonction des déplacements sur les degrés de liberté de jonction.

Du point de vue de l'interprétation, les méthodes de sous-structuration peuvent être considérées comme des techniques particulières de condensation (interprétation numérique)

ou comme une méthode de "Super éléments finis" (interprétation mécanique). Une synthèse bibliographique des méthodes de sous-structuration est donnée en annexe C.

3.3.2 Mise en oeuvre pour l'étude dynamique des boîtes de vitesses

La prise en compte du comportement dynamique du carter est réalisée dans le chapitre 4.

Les matrices de masse et de rigidité généralisées du carter ont été réalisées dans les Bureaux d'Etudes de PSA à partir d'un modèle de carter élaboré. Le modèle initial, ainsi que les modèles "réduits" ont été validés expérimentalement. Ce sont des modèles réduits issus des techniques de sous-structuration de type Craig-Bampton et de synthèse modale (*Imbert [3.7], [3;8], Girard et al. [3.5], [3.6]*) introduisant les notions de paramètres modaux effectifs et de masses résiduelles. Le modèle Nastran ainsi défini est exprimé dans un espace modal par des systèmes "masses-ressorts" découplés. Des relations linéaires liant les ddl modaux, aux ddl principaux permettent de revenir à l'expression des matrices de masse et de rigidité généralisées dans l'espace physique. Le carter est alors équivalent à un super-élément et peut être assemblé aux éléments de la chaîne cinématique. Des relations linéaires permettent d'obtenir les déplacements en un certain nombre de noeuds "internes" de ce super-élément à partir des déplacements aux noeuds de jonctions.

3.4 Dispositifs de synchronisation et autres masses ajoutées

Dans le cadre de l'étude de boîtes de vitesses automobile réelles, le mécanisme ne se limite pas aux engrenages, arbres, roulements et carter. Un certain nombre d'autres éléments sont présents dans la chaîne cinématique et doivent être pris en compte. En particulier, les dispositifs de synchronisation et les pignons libre en rotation par rapport à leur axe. En revanche, les dispositifs de "tringlerie" permettant le passage des vitesses ont été négligés.

Afin de réaliser des modèles numériques utilisables pour toutes les configurations de la boîte de vitesses (vitesses enclenchées), l'ensemble des engrenages est modélisé à l'aide des éléments dynamiques "d'engrenage" décrits précédemment. Les pignons fous, correspondant aux vitesses non enclenchées, sont associés à des rigidités d'engrènement et à des inerties en rotation nulles, leur masse en revanche est prise en compte.

Les dispositifs de synchronisation sont pris en compte par l'adjonction de masses ponctuelles. La valeur de ces masses a été déterminée par le Bureau d'Etudes PSA.

4. PRISE EN COMPTE DE L'AMORTISSEMENT

4.1 Généralités

La modélisation de l'amortissement représente un réel problème. En effet, il est difficile, voire impossible de déterminer les propriétés dissipatives de l'ensemble des composantes, car les mécanismes de dissipation dans les structures sont nombreux et complexes.

Les principales sources d'amortissement sont l'amortissement :

- visqueux qui correspond à une dissipation d'énergie par écoulement laminaire d'un fluide dans un amortisseur, dans ce cas la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse,
- structural qui correspond à une dissipation d'énergie par divers mécanismes de frottement interne entre les matériaux. En régime harmonique, la force de dissipation est proportionnelle et en quadrature avec la force élastique et donc avec les déplacements relatifs,
- de Coulomb qui correspond à une dissipation de l'énergie par frottement sec entre deux surfaces et la force d'amortissement est non linéaire. Ce type d'amortissement convient pour représenter les propriétés dissipatives de certaines liaisons mais, il est impossible à prédire sur plan.

Dans la pratique, seuls les modèles visqueux et structuraux sont utilisés à cause de leur simplicité mathématique et de leur caractère linéaire. De plus, des modèles d'amortissement structuraux ou visqueux équivalents peuvent être réalisés à partir de résultats d'essais dynamiques. Malgré ces difficultés, il est important de pouvoir estimer "correctement" l'amortissement afin d'obtenir, des modèles représentant le mieux possible le comportement réel des mécanismes. En particulier, pour les mécanismes de transmission de puissance, l'amortissement détermine fortement les zones d'instabilité et les vitesses critiques.

La bibliographie propose un certain nombre de coefficients d'amortissement pour les arbres en torsion et pour les engrenages lors des modélisations de type "masse-ressort". Mais lors de modélisations tridimensionnelles, le problème est encore plus crucial, car le nombre de paramètres à identifier augmente de façon significative.

4.2 Amortissement modal

Un grand nombre de techniques numériques de résolution des équations de l'équilibre dynamique se ramènent à des méthodes de superposition modale (Cf. § 5.2). Une technique couramment employée pour modéliser l'amortissement, est de l'introduire de façon globale dans la base modale du système considéré (*Imbert [3.9], Velez [1.40], Bard[1.1], Umezawa et al. [1.37], [1.38], Kahraman [1.12]*) et de ne retenir pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modale. Si $[C]$ est la matrice d'amortissement visqueux équivalent dans l'espace physique, $[\Phi]$ la matrice des vecteurs propres du système non amorti, m_i la masse modale du mode i de pulsation ω_i :

$$\begin{aligned} {}^T[\Phi].[C].[\Phi] &= [\text{diag}(c_{ii})] \\ &= [\text{diag}(2m_i\omega_i\zeta_i)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

où ζ_i est le facteur d'amortissement du mode i .

En réalité, les vecteurs propres du système non amorti, ne diagonalisent pas la matrice d'amortissement. **J.F Imbert [3.7]** rappelle que cette pratique n'est pas basée sur la nullité ou la petitesse des termes non diagonaux mais, est justifiée par l'hypothèse du découplage

dynamique des équations modales du mouvement. Cette hypothèse, dite hypothèse de Basile, se formule de la façon suivante :

"Même en présence de couplage modal d'amortissement, les équations modales du mouvement sont dynamiquement découplées, pour les structures faiblement amorties si la séparation des modes en fréquences est satisfaisante."

Cette technique présente l'avantage de découpler les équations dynamiques dans l'espace modal et de pouvoir introduire un amortissement spécifique à chaque mode. Cet amortissement peut être estimé expérimentalement.

4.3 Amortissement visqueux équivalent dans l'espace physique

La définition d'une matrice d'amortissement visqueux équivalent dans l'espace physique est parfois nécessaire. Des techniques permettent de passer de l'espace modal à l'espace physique. **Rayleigh** exprime la matrice d'amortissement visqueux équivalent du système $[C]$ comme une combinaison linéaire des matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (2.11)$$

L'amortissement est alors dit proportionnel. Cela, revient à imposer une loi sur les facteurs d'amortissement des modes en fonction de leur fréquence, loi qui s'exprime par :

$$\zeta_i = \frac{c_{ii}}{2m_i\omega_i} = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1\omega_i}{2} \quad (2.12)$$

Elle peut donc être définie à partir des facteurs d'amortissement de deux modes et elle a l'avantage de la simplicité mais, cette approche n'est pas satisfaisante pour l'étude de structures complexes.

Caughey a présenté une condition générale sur les matrices d'amortissement pour qu'elles puissent être diagonalisées par les vecteurs propres du système non amorti :

$$[C] = [M] \cdot \sum_{j=0}^{m-1} a_j ([M]^{-1} \cdot [K])^j \quad (2.13)$$

Cette loi est définie à partir des facteurs d'amortissement modaux de m modes mais, n'a pas de fondement physique et présente surtout un intérêt académique (*Imbert [3.7]*).

D'une manière générale, dans le cas des mécanismes complexes, l'utilisation d'amortissements modaux ou proportionnels n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, elle ne permet pas de distinguer la participation des différents éléments technologiques du système. Une solution, consiste à placer un certain nombre d'amortisseurs visqueux dans le modèle. Mais, encore faut-il pouvoir évaluer leur coefficient. **T.C Lim [2.12]** évoque la possibilité de prendre en compte l'amortissement visqueux dû aux paliers à roulement, par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité élémentaire proportionnelle à la matrice de rigidité du roulement :

$$[C_{rit}] = \sigma \cdot [K_{rit}] \quad (2.14)$$

Mais il ne précise pas la valeur de σ et par la suite il utilise de l'amortissement modal.

4.4 *Le film élastohydrodynamique de l'engrenage : une source d'amortissement*

La caractérisation des dissipations associées à l'engrènement, est un problème constant dans la bibliographie, car les zones d'instabilité et les vitesses critiques dépendent fortement de l'amortissement (*Velex [1.40], Bard [1.1], Remond et al. [1.26]*). Il semble toutefois acquis (*Remond et al. [1.26]*) que :

- pour un régime de fonctionnement élastohydrodynamique avec un film de lubrifiant complet, la contribution des efforts tangentiels est négligeable, devant celle des efforts normaux aux profils en contact,
- une part importante de la dissipation provient de l'effet d'écrasement du lubrifiant et que cet effet est plus marqué en présence de chocs.

En pratique, une très large majorité des auteurs, utilise un ou plusieurs coefficients d'amortissement visqueux équivalent. Les valeurs utilisées évoluent entre 1 et 15%, les valeurs les plus courantes sont situées entre 2 à 10% (*Velex [1.40], Umezawa [1.37], [1.38]*). **C. Bard [1.1]** scinde le facteur d'amortissement en un facteur d'amortissement structural, identique pour tous les modes et compris entre 0.5 et 1% et, en un facteur d'amortissement de denture, pondéré par le niveau de déformation de la denture, et qui est compris entre 5.5% et 9.5%. Cela, le conduit à n'utiliser un amortissement fort (10%) que pour le mode de denture le plus énergétique.

Dans le cas des modèles à paramètres concentrés (Cf. § 2.2.2), un coefficient d'amortissement d'engrènement peut être défini (*Lin et al. [1.19]*) dans l'espace physique par :

$$C_{eng}(t) = \frac{2 \cdot \mu \cdot K_{eng}(t) \cdot Rb_1^2 \cdot Rb_2^2 \cdot J_1 \cdot J_2}{Rb_1^2 \cdot J_1 + Rb_2^2 \cdot J_2} \quad (2.15)$$

où μ est le taux d'amortissement, K_{eng} la rigidité d'engrènement Rb_i et J_i le rayon de base et l'inertie de la roue i .

Dans le cas des modèles plus complexes de type éléments finis (*Satori [1.31]*), une matrice d'amortissement visqueux équivalent peut être définie par :

$$[C_{eng}(t)] = c_{eng}(t) \cdot [G]$$

$$\text{avec } c_{eng}(t) = 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{K_{eng}(t)}{M_{eq}}} \quad (2.16)$$

avec $[G]$ la matrice de forme définie précédemment, μ un coefficient d'amortissement compris entre 0.03 et 0.17, K_{eng} la rigidité d'engrènement et M_{eq} la masse équivalente des pignons définie par :

$$M_{eq} = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} \quad (2.17)$$

Cette approche revient donc à modéliser l'interface d'engrènement par un ressort de translation positionné suivant la ligne d'action et de rigidité k_{eng} , monté en parallèle à un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c_{eng} .

5. LES OUTILS ET LES MÉTHODES D'ANALYSE DYNAMIQUE

Les différents éléments permettant la modélisation dynamique d'une boîte de vitesses automobile réelle, ont été décrits dans les paragraphes précédents, et sont résumés dans la figure suivante :

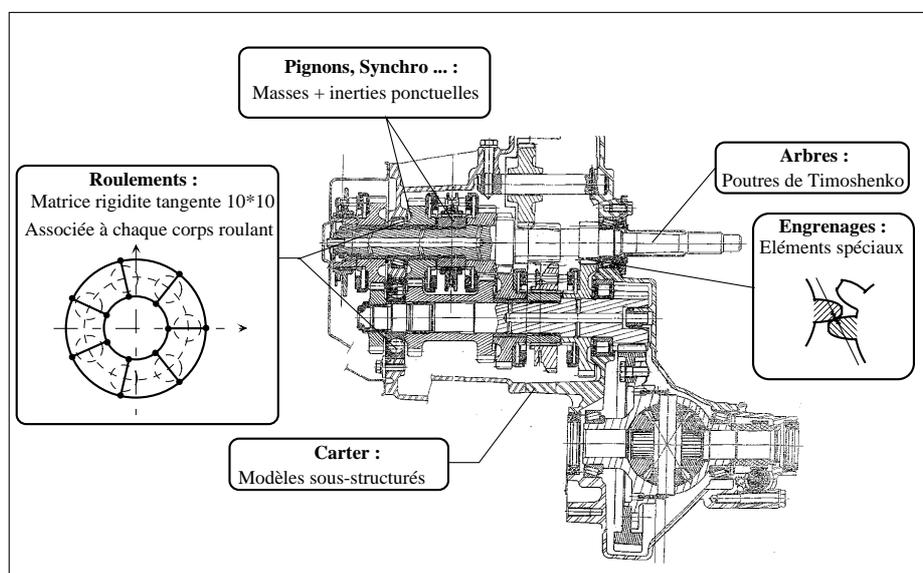


Figure 2. 8 : Les éléments de modélisation dynamique d'une boîte de vitesses automobile

L'assemblage de ces éléments conduit à la réalisation d'un modèle numérique de type Eléments Finis. Les équations du mouvement se mettent alors, sous la forme d'un système matriciel de dimension "n" égale au nombre de degrés de liberté du modèle :

$$[M].\{\ddot{X}(t)\} + [C].\{\dot{X}(t)\} + [K(t)].\{X(t)\} = \{F_{ext}(t)\} \quad (2.18)$$

où :

- [M] est la matrice de masse,
- [C] est la matrice d'amortissement visqueux équivalent,
- [K(t)] est la matrice de rigidité dépendant éventuellement du temps,
- $\{\ddot{X}\}$, $\{\dot{X}\}$, $\{X\}$ les vecteurs des accélérations, vitesses et déplacements généralisés définis aux degrés de liberté du modèle,
- $\{F_{ext}(t)\}$ le vecteur des efforts extérieurs généralisés définis aux degrés de liberté du modèle.

Par construction, les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont réelles symétriques de dimension n . La matrice de masse $[M]$ est définie positive (ses valeurs propres sont strictement positives), la matrice de raideur $[K]$ est non négative (ses valeurs propres sont positives ou nulles). Les valeurs propres nulles de $[K]$ correspondent aux modes de corps rigides du mécanisme.

L'analyse dynamique va s'attacher à déterminer :

- les modes propres (fréquences et vecteurs propres) du système non dissipatif,
- la réponse du système à une sollicitation extérieure ou intérieure.

5.1 Analyse modale

5.1.1 Généralités

Dans le cadre de l'étude des mécanismes de transmission de puissance, lorsque la rigidité d'engrènement est considérée comme variable au cours du temps, la notion de modes propres n'existe pas au sens strict; il y a des modes critiques. Néanmoins, de nombreux auteurs (*Velex [1.40]*, *Bard [1.1]*, *Perret-Liaudet [1.24]*) utilisent les modes "à l'arrêt" du système, définis pour une valeur de rigidité moyenne. Ce sont les couples $(\omega_i, \{\phi_i\})$ solution de l'équation aux valeurs propres :

$$[K_{\text{moy}}] \cdot \{\phi_i\} = \omega_i^2 [M] \cdot \{\phi_i\} \quad (2.19)$$

Ils permettent de définir une base de vecteurs propres caractéristiques du modèle. Cette base est souvent utilisée pour réduire la taille du système d'équations (Cf. § 5.2).

Le problème aux valeurs propres (2.19) est, d'après les propriétés des matrices $[M]$ et $[K]$, un problème hermitien. Donc :

- les n valeurs propres $\lambda = \omega^2$ sont réelles non négatives (les valeurs propres nulles représentent les modes de corps solides),
- les n vecteurs propres associés sont réels.

Soit :

- $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}]$ la matrice modale associée,
- $[\Lambda] = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ la matrice spectrale,

les valeurs propres étant rangées par ordre croissant. Les relations d'orthogonalités et de normes liant les matrices $[K]$, $[M]$, $[\Phi]$, $[\Lambda]$ et la matrice identité d'ordre n $[I_n]$ sont :

$$\begin{aligned} {}^T[\Phi] \cdot [K] \cdot [\Phi] &= [\Lambda] \\ {}^T[\Phi] \cdot [M] \cdot [\Phi] &= [I_n] \end{aligned} \quad (2.20)$$

5.1.2 Méthodes numériques d'obtention des modes propres

La majorité des méthodes développées, pour résoudre les problèmes aux valeurs propres, dans le cas de l'étude dynamique des structures mécaniques, nécessite des matrices de masse et de rigidité définies positives, c'est-à-dire des modèles sans mode de corps rigides. Néanmoins, il est intéressant, en particulier lors de l'étude des mécanismes complexes, de pouvoir étudier des structures présentant des modes de corps rigides. En effet, l'utilisation ultérieure des résultats, pour des calculs par la méthode des sous-structures, peut nécessiter l'étude d'une sous-structure en "libre-libre". De plus, la présence de modes de corps rigides peut indiquer une erreur de modélisation ou de conception. Il est alors nécessaire de modifier le problème afin de le rendre compatible avec les méthodes de résolution classiques.

La méthode la plus couramment utilisée (*Bath [3.1]*) est celle du décalage des valeurs propres (shifting en anglais). Elle consiste à résoudre le problème aux valeurs propres "modifié" :

$$[\tilde{K}]\{y_i\} = \mu_i[M]\{y_i\} \quad (2.21)$$

avec
$$[\tilde{K}] = [K] + \alpha[M] \quad (2.22)$$

où α est un paramètre positif.

La résolution du problème aux valeurs propres (2.21) permet d'accéder aux modes propres du système réel représenté par l'équation (2.19) :

- les vecteurs propres sont les mêmes,
- les valeurs propres sont décalées de α .

Les valeurs propres λ_i du système réel étant toutes positives ou nulles, le choix d'un α positif assure que :

$$\forall i \in [1, n] \quad \mu_i = \lambda_i + \alpha > 0 \quad (2.23)$$

et que les matrices $[\tilde{K}]$ et $[M]$ sont définies positives, ce qui permet d'utiliser des méthodes classiques de résolution.

Le but de ces méthodes de résolution est de déterminer tous les modes propres du système ou seulement les p premiers (*Bath [3.1], Imbert [3.7]*). Ces méthodes peuvent être divisées en 4 groupes :

- les méthodes d'itération sur les vecteurs,
- les méthodes de transformations,
- les méthodes d'itérations polynomiales,
- les méthodes utilisant les propriétés des séquences de Sturm.

Ce sont toutes des méthodes itératives, et l'efficacité d'un algorithme dépend du problème et est définie par sa fiabilité et son coût d'utilisation.

Dans le cadre de l'étude des mécanismes de transmission de puissance, la méthode de Jacobi généralisée a été retenue. Elle présente l'avantage de diagonaliser simultanément les matrices [K] et [M] sans transformation préalable. De plus, la convergence est rapide lorsque les termes extra-diagonaux sont petits. C'est une méthode de transformation, elle donne donc accès à tous les modes du système. Cela, peut être un inconvénient lorsque les matrices [K] et [M] sont d'ordre important. Dans ce dernier cas, la méthode de Jacobi généralisée a été couplée à la méthode des sous-espaces, qui est une des méthodes les plus utilisées dans le cas des problèmes de grandes dimensions. Les algorithmes de la méthode de Jacobi généralisée, ainsi que de la méthode des sous-espaces sont rappelés en annexe A.3 et A.4.

5.1.3 *Les outils de l'analyse modale*

Les modes propres du système à l'arrêt sont souvent utilisés (*Lalanne & Ferraris [1.17], Velex [1.40], Perret-Liaudet [1.24], Bard [1.1]*) pour calculer la réponse du système à l'aide de méthodes pseudo-modales (Cf. § 5.2.1). Mais, les modes propres sont également caractéristiques du modèle numérique et, sont largement utilisés dans la suite de ce document, pour comparer les différentes modélisations en particulier dans le chapitre 3.

Dans ce contexte, le seul examen des déformées modales et des fréquences propres est insuffisant pour analyser précisément l'influence de la modélisation sur le comportement modal du système. Un certain nombre "d'outils" numériques a été utilisé, afin de permettre une étude plus fine des résultats :

- les matrices de "MAC",
- l'analyse énergétique,
- l'analyse de sensibilité.

La matrice de MAC (Modal Assurance Criterion), aussi appelée matrice de corrélation modale, est souvent utilisée pour la comparaison entre deux ensembles de modes propres $[Y^1]$ et $[Y^2]$, en particulier pour le recalage "calcul - essais".

Soit :

$[Y^1] = [\{y_1^1\} \dots \{y_k^1\} \dots \{y_{N_1}^1\}]$ la matrice modale associée à la première série de modes

$[Y^2] = [\{y_1^2\} \dots \{y_k^2\} \dots \{y_{N_2}^2\}]$ la matrice modale associée à la seconde série de modes

Le nombre de modes déterminés dans chaque série peut être différent ($N_1 \neq N_2$), mais la dimension de chaque vecteur (nombre de degré de liberté) doit être la même.

La matrice de MAC associée à ces deux séries de vecteurs est définie par :

$$(\text{MAC})_{i,j} = \frac{\left| \{y_i^1\} \cdot \{y_j^2\} \right|^2}{\left\| \{y_i^1\} \right\|^2 \left\| \{y_j^2\} \right\|^2} \quad (2.24)$$

$i=1 \text{ à } N_1$
 $j=1 \text{ à } N_2$

Cette matrice permet de quantifier le degré de corrélation entre deux vecteurs par un seul nombre compris entre 0 et 1.

- $(\text{MAC})_{i,j} = 1$ indique que le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la première série est colinéaire au $j^{\text{ème}}$ vecteur de la seconde série, c'est-à-dire que les déformées propres sont identiques, il y a une corrélation parfaite,
- $(\text{MAC})_{i,j} = 0$ indique que les deux vecteurs sont orthogonaux, les déformées propres sont très différentes.

Dans la pratique, les coefficients de corrélation se situent entre ces 2 valeurs et il est nécessaire de définir des intervalles de proximité. La notion de correspondance doit évidemment inclure la proximité des fréquences propres. Deux modes ne peuvent être "appariés" que si leurs fréquences propres sont voisines.

Pour obtenir une plus grande lisibilité et une meilleure interprétation de ces matrices de MAC, elles sont par la suite, données sous la forme d'une représentation 2D où une échelle de couleur ou de niveau de gris permet de visualiser les valeurs des coefficients de corrélation (Cf. Figure 2. 9).

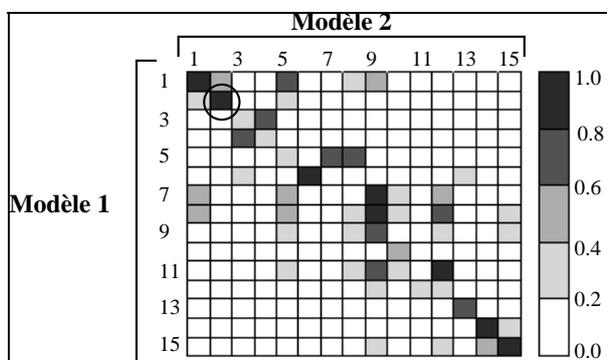


Figure 2. 9 : Exemple de visualisation des matrices de MAC

Cette figure indique par exemple que le mode 2 du modèle 1 est très bien corrélé (coefficient de corrélation supérieur à 0.8) au mode 2 du modèle 2.

L'analyse énergétique (Girard et al. [3.5], [3.6], Bourdon et al. [4.2]) consiste à décomposer les énergies de la structure en énergies élémentaires de flexion, de torsion et d'extension. Cette décomposition permet de visualiser le couplage des effets, et ultérieurement, de choisir des modes propres représentatifs du système à étudier.

Pour un mode de pulsation propre ω_i et de vecteur propre $\{\phi_i\}$, il est sans intérêt de calculer l'énergie de déformation globale W^g ou l'énergie cinétique globale T^g qui sont toutes les deux égales à $\frac{1}{2}\omega_i^2$. En effet, à cause des relations d'orthonormalité définies en (2.15) :

$$\begin{aligned} W^g &= \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T \cdot [K_g] \cdot \{\phi_i\} = \frac{1}{2} \omega_i^2 \\ T^g &= \frac{1}{2} \omega_i^2 \{\phi_i\}^T \cdot [M_g] \cdot \{\phi_i\} = \frac{1}{2} \omega_i^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Il est en revanche beaucoup plus intéressant de calculer l'énergie globale du système comme la somme des énergies élémentaires de chaque élément ou macro-élément du modèle :

$$\begin{aligned} [K_{g_g}] &= \sum_e [K_{g_g}^e] \Rightarrow W_i^g = \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T \cdot \sum_e [K_{g_g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T \cdot [K_{g_g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e W_i^e \\ [M_{g_g}] &= \sum_e [M_{g_g}^e] \Rightarrow T_i^g = \frac{1}{2} \omega_i^2 \{\phi_i\}^T \cdot \sum_e [M_{g_g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e \frac{1}{2} \omega_i^2 \{\phi_i\}^T \cdot [M_{g_g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e T_i^e \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cette décomposition permet de déterminer la contribution de chaque élément technologique aux déformées modales. Afin de pouvoir comparer, les décompositions énergétiques de plusieurs modes, les énergies élémentaires T^e et W^e doivent être "adimensionnées" : elles sont divisées par l'énergie globale du mode correspondant, soit $\frac{1}{2}\omega_i^2$.

Cette analyse peut être affinée en décomposant les énergies élémentaires en énergie de torsion, flexion et extension. Pour chaque élément, il est facile d'écrire dans sa base locale, que :

$$\begin{aligned} K_l^e &= K_{T,l}^e + K_{F,l}^e + K_{E,l}^e = \sum_s K_{s,l}^e \\ M_l^e &= M_{T,l}^e + M_{F,l}^e + M_{E,l}^e = \sum_s M_{s,l}^e \end{aligned} \quad \text{avec : } \begin{cases} -T : \text{torsion} \\ -F : \text{flexion} \\ -E : \text{extension} \end{cases} \quad (2.27)$$

La connaissance de ces matrices découplées exprimées dans les bases locales permet de calculer les matrices découplées dans la base globale. Les énergies globales peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} W^g &= \sum_e \sum_s \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T \cdot [K_{s,g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e \sum_s W_s^e & \text{(a)} \\ &= \sum_s \sum_e \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T \cdot [K_{s,g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_s W_s^g & \text{(b)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} T^g &= \sum_e \sum_s \frac{1}{2} \omega_i^2 \{\phi_i\}^T \cdot [M_{s,g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_e \sum_s T_s^e & \text{(a)} \\ &= \sum_s \sum_e \frac{1}{2} \omega_i^2 \{\phi_i\}^T \cdot [M_{s,g}^e] \cdot \{\phi_i\} = \sum_s T_s^g & \text{(b)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Deux sortes d'études énergétiques peuvent alors être réalisées :

- pour un mode, en utilisant les équations (2.23.a) et (2.24.a), il est possible d'examiner la répartition élémentaire des énergies découplées,
- pour plusieurs modes, en utilisant les équations (2.23.b) et (2.24.b), il est possible d'examiner la répartition globale des énergies découplées.

Ces différentes études sont résumées dans le diagramme de la Figure 2. 10.

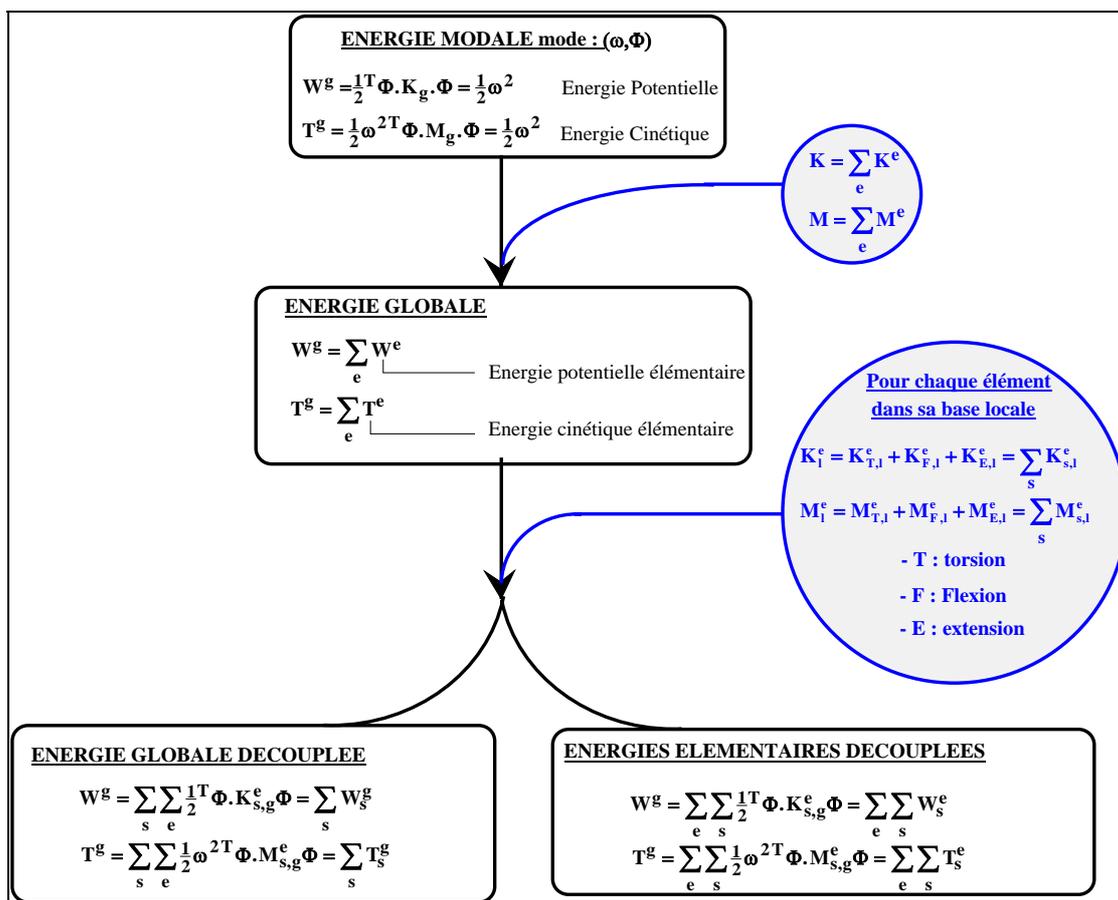


Figure 2. 10 : Synthèse des études énergétiques

Afin d'appliquer cette méthode, à l'étude des modes propres d'une boîte de vitesses automobile, il est nécessaire de définir pour chaque type d'éléments utilisés, les matrices élémentaires découplées exprimées dans les bases locales. Pour les éléments de poutre, cette décomposition est standard et est obtenue sans difficulté. Pour les autres éléments, cette décomposition est plus arbitraire et a été réalisée en analogie avec les systèmes "masses-ressorts" :

- pour les éléments de type masse et inertie ponctuelle, l'effet de masse est comptabilisé en extension et, l'effet de l'inertie en torsion,
- pour les éléments d'engrenage et de roulement les effets sont comptabilisés en extension.

Dans le cas de l'introduction de la contribution du carter par l'intermédiaire d'un super élément (Cf. § 3.3), l'énergie de déformation W_{carter} et l'énergie cinétique T_{carter} dissipées dans le carter sont obtenues par :

$$\begin{aligned} W_{\text{carter}} &= \frac{1}{2} \omega_i^2 - \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{chaîne cinématique}}} W^e \\ T_{\text{carter}} &= \frac{1}{2} \omega_i^2 - \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{chaîne cinématique}}} T^e \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les analyses de sensibilité (*Lallement¹, Girard et al; [3.5], [3.6], Bourdon et al. [4.3]*) permettent d'évaluer l'influence d'un paramètre de conception ou de modélisation sur le comportement dynamique global du système, en calculant les dérivées partielles des modes propres par rapport à ce paramètre.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- p vecteurs propres sont calculés,
- la multiplicité de chaque fréquence propre est un,
- les dérivées partielles des vecteurs propres analysés peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des p vecteurs propres calculés,

alors, les dérivées partielles du $i^{\text{ème}}$ vecteurs propres $\{\phi_i\}$ et de la $i^{\text{ème}}$ valeur propre λ_i par rapport au paramètre x s'expriment par (*Lallement, Girard et al. [3.6]*):

$$\begin{aligned} (\phi_i)_{,x} &= \underbrace{[\Phi]}_{(n,p)} \cdot \underbrace{\{A\}}_{(p,1)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (A)_i = -\frac{1}{2} \{ \phi_i \} \cdot [M]_{,x} \cdot \{ \phi_i \} \\ (A)_j = \frac{-\frac{1}{2} \{ \phi_i \} \cdot ([K]_{,x} - \lambda_j [M]_{,x}) \cdot \{ \phi_j \}}{\lambda_j - \lambda_i} \end{cases} \quad (2.31) \\ (\lambda_i)_{,x} &= \{ \phi_i \} \cdot ([K]_{,x} - \lambda_i [M]_{,x}) \cdot \{ \phi_i \} \end{aligned}$$

Les équations précédentes montrent que le calcul des dérivées partielles des modes propres revient à calculer les dérivées partielles des matrices de masse et de raideur relativement au paramètre x. Deux sortes de techniques peuvent être envisagées (*Bourdon et al. [4.3]*). La méthode "implicite" évalue l'influence globale de la masse ou de la rigidité d'un macro élément du modèle. La méthode explicite permet de déterminer l'influence d'un paramètre technologique précis (module d'Young, masse volumique ...) en calculant explicitement les dérivées partielles des matrices de masse et de rigidité par rapport à ce paramètre. Dans les deux méthodes, le paramètre étudié x doit être sans dimension.

Globalement, les études de sensibilité correspondent à une décomposition en série de Taylor au premier ordre autour des valeurs initiales des paramètres analysés des modes propres.

¹ **LALLEMENT, G.** *Cours du D.E.A. Acousto-Opto-Electronique et de Mécanique des structures. Filières mécaniques des structures* - Université de Franche-Comté. Besançon, 1991, Chapitre 5 : Sensibilité paramétrique des systèmes dynamiques. Problèmes directs et inverses, 19 p

Soit :

$$\frac{\{\tilde{\phi}_i\}_{p_o+\Delta p} - \{\phi_i\}_{p_o}}{\|\{\phi_i\}_{p_o}\|} = [S_i^\phi]_{p_o} \cdot \{\Delta p\}$$

$$\frac{(\tilde{\lambda}_i)_{p_o+\Delta p} - (\lambda_i)_{p_o}}{(\lambda_i)_{p_o}} = [S_i^\lambda]_{p_o} \cdot \{\Delta p\}$$
(2. 32)

5.2 Réponse du système à une excitation

Les équations les plus générales régissant le comportement dynamique linéaire d'un train d'engrenages sont connues sous le nom d'équations de Mathieu-Hill (*Remond et al. [1.26]*) et s'écrivent :

$$[M] \cdot \{\ddot{X}(t)\} + [C(t)] \cdot \{\dot{X}(t)\} + [K(t)] \cdot \{X(t)\} = \{F_{\text{ext}}(t)\}$$
(2. 33)

Leurs caractéristiques essentielles proviennent des matrices d'amortissement et de raideur qui sont périodiques et qui modélisent les sources d'excitation internes (engrènement). Dans le cas général, ces équations n'admettent pas de solutions analytiques et peuvent présenter des mouvements transitoires instables, pour certaines gammes de fréquences. La recherche de ces instabilités peut se faire numériquement, en calculant de manière approchée le déterminant infini de Hill ou les valeurs propres de la matrice fondamentale. D'un point de vue concret, il faut souligner qu'un éventuel mouvement instable est physiquement limité par un cycle de pertes de contact, suivi de chocs en reprise, pouvant être dangereux pour la tenue du mécanisme et/ou source de nuisances sonores. Il est également intéressant de noter que la présence d'amortissement rejette les domaines d'instabilités, vers les valeurs plus élevées de variations relatives de raideur d'engrènement (au moins pour les réducteurs à simple étage).

5.2.1 Méthodes numériques de calcul de la réponse à une excitation

Plusieurs techniques de résolutions de ces équations sont envisageables :

- les méthodes directes,
- les méthodes de perturbation,
- les méthodes de transformées intégrales,
- les méthodes de Ritz,
- les méthodes pseudo-modales.

Seules les méthodes utilisées par la suite sont détaillées.

L'idée essentielle **des méthodes directes** (*Imbert [3.7], Bath [3.1]*), le terme "directe" signifiant que les équations sont intégrées directement sans transformation préalable à l'aide de procédures numériques pas à pas, est de satisfaire l'équation d'équilibre dynamique pour des temps t_i discrets, c'est-à-dire de considérer à chaque t_i l'équilibre statique incluant les effets d'inertie et d'amortissements. Entre chaque itération, il est nécessaire de prendre en

compte une variation de $\{X\}$, $\{X'\}$ et $\{X''\}$. C'est cette prise en compte qui détermine la précision, la stabilité, et le coût de calcul de la procédure. Parmi ces méthodes, dans le cadre de l'étude des mécanismes de transmission de puissance, la méthode implicite de Newmark est la plus couramment utilisée (*Bard [1.1]*, *Satori [1.31]*, *Velex [1.40]*) car elle assure une stabilité inconditionnelle et permet de résoudre aussi bien le problème à coefficients périodiques (rigidité d'engrènement variable) que celui à coefficients constants (erreur de transmission assimilée à un effort extérieur). L'algorithme de la méthode de Newmark est donné en annexe A.5. Un des problèmes qui apparaît lors de l'utilisation de la méthode de Newmark est le choix de l'incrément de temps : il doit être suffisamment petit pour donner des résultats acceptables et, suffisamment grand, pour que les temps de calcul restent raisonnables. En pratique, le choix de l'incrément de temps Δt est imposé par la bande de fréquence à étudier. L'hypothèse "classique" est alors de considérer a priori que, seuls les modes propres de fréquences inférieures à une fréquence f_0 , sont excités par le chargement et que les modes de fréquence plus élevée ont des effets négligeables, Δt peut alors être défini par :

$$\Delta t \leq \frac{1}{20.f_0} \quad (2.34)$$

En pratique, lors de l'utilisation de la méthode de Newmark la valeur de f_0 et la durée minimale d'intégration, sont des paramètres du calcul. La fréquence d'échantillonnage f_e est alors égale à $20.f_0$ et le nombre de points d'intégration est déterminé pour être une puissance de 2, afin d'optimiser les calculs ultérieurs des transformées de Fourier rapides (FFT). Cela signifie, que lors de l'examen fréquentiel des réponses forcées, seules les fréquences comprises entre 0 et f_0 seront numériquement significatives, c'est-à-dire bien localisées.

Une vérification numérique permettant de valider à la fois le choix, de cet incrément de temps et les procédures utilisées (essentiellement la méthode de Newmark et le post-traitement des résultats sous Matlab), a été mise en oeuvre. Elle repose sur le fait que, l'application d'un effort de type "Dirac" à un système conservatif va exciter l'ensemble des modes propres de ce système. Donc, si les procédures et le pas de temps sont corrects, la transformée de Fourier de la réponse temporelle du système à cette excitation, doit mettre en évidence des pics correspondant aux fréquences propres de la structure. Pratiquement, une telle excitation a été appliquée en un noeud (extrémité située du côté moteur de l'arbre primaire) d'un modèle de chaîne cinématique non amorti, semblable aux modèles utilisés au chapitre 3. La réponse temporelle de ce système (déplacements au noeud excité) a été calculée par la méthode de Newmark, et la réponse fréquentielle par les procédures de calculs des FFT de Matlab. La fréquence maximale d'étude considérée était $f^\circ=2500$ Hz et le temps d'intégration était $T=0.16$ s, soit une fréquence d'échantillonnage δf des FFT correspondantes de 6 Hz. Le tableau 2.1 regroupe les valeurs des fréquences "localisées" sur les diagrammes en fréquences, et celles "calculées" obtenues par la méthode de Jacobi ou des sous-espaces (Cf. § 5.1).

Les fréquences propres calculées et les fréquences propres localisées se correspondent bien et sont situées dans l'intervalle de précision de ± 6 Hz. L'étude des différents modes montre que le mode 11, qui n'apparaît pas dans les fréquences localisées, correspond à un mode de déformation de l'arbre de pont seul et, ne peut donc pas être détecté sur l'arbre primaire.

	Modes calculés	Modes localisés
1	291	289
2	684	685
3	831	830
4	840	839
5	987	985
6	1057	1056
7	1134	1132
8	1220	1217
9	1352	1348
10	1470	1465
11	1551	-
12	1684	1678
13	1738	1734
14	1931	1922
15	2055	2044

Table 2. 1 : Comparaison des modes propres calculés et localisés

La méthode pseudo-modale (Lalanne & Ferraris [1.17]) est couramment utilisée dans le contexte des réducteurs à engrenages (Velex [1.40], Perret-Liaudet [1.24], Bard [1.1]). Elle consiste à utiliser les vecteurs propres du système à l'arrêt (Cf. § 5.1) pour réduire la taille du système (2.33). Comme dans la méthode de superposition modale "classique" [Imbert], le principe est d'exprimer les inconnues $\{X(t)\}$ comme une combinaison linéaire de q vecteurs propres du système à l'arrêt. Soit :

$$\{X(t)\} = [\Phi]_q \cdot \{Q(t)\} \quad (2.35)$$

Le système matriciel (2.33) devient donc :

$$[M] \cdot [\Phi]_q \cdot \{\ddot{Q}(t)\} + [C(t)] \cdot [\Phi]_q \cdot \{\dot{Q}(t)\} + [K] \cdot [\Phi]_q \cdot \{Q(t)\} = \{F_{\text{ext}}(t)\} \quad (2.36)$$

Soit en multipliant à gauche par $^T[\Phi]_q$:

$$^T[\Phi]_q \cdot [M] \cdot [\Phi]_q \cdot \{\ddot{Q}(t)\} + ^T[\Phi]_q \cdot [C(t)] \cdot [\Phi]_q \cdot \{\dot{Q}(t)\} + ^T[\Phi]_q \cdot [K(t)] \cdot [\Phi]_q \cdot \{Q(t)\} = ^T[\Phi]_q \cdot \{F_{\text{ext}}(t)\} \quad (2.37)$$

Ce système n'est en général pas diagonal mais sa taille est réduite, et il peut être résolu par la méthode de Newmark. En introduisant les équations d'orthonormalité définies en (2.20) et en écrivant que la matrice de rigidité globale du système $[K(t)]$ peut s'exprimer comme la somme d'une matrice de rigidité moyenne $[K_{\text{moy}}]$ et des contributions des engrenages, soit :

$$[K(t)] = [K_{\text{moy}}] + \sum_{\text{nb engrenages}} k_{\text{eng}}^i(t) [G^i] \quad (2.38)$$

le système précédent devient :

$$[I_q] \cdot \{\ddot{Q}(t)\} + [\tilde{C}(t)] \cdot \{\dot{Q}(t)\} + \left([\Lambda]_q + \sum_{\text{nb engrenage}} k_{\text{eng}}^i(t) ^T[\Phi]_q \cdot [G] \cdot [\Phi]_q \right) \cdot \{Q(t)\} = ^T[\Phi]_q \cdot \{F_{\text{ext}}(t)\} \quad (2.39)$$

Lors de l'étude des phénomènes d'engrènement et de l'analyse de l'erreur de transmission (*Velex [1.40], Bard [1.1]*), l'amortissement est en général introduit sous forme d'amortissement modal (Cf. § 4.2 et § 4.4) la matrice $[\tilde{C}]$ est alors diagonale, et les modes propres retenus pour former la base $[\Phi]_p$ sont les modes possédant une énergie de déformation élastique importante au niveau de la denture (Cf. § 5.1.3)

L'utilisation de la méthode de superposition modale dans le cas d'un système à coefficients constants, d'amortissements modaux et d'une excitation harmonique est particulièrement intéressante car, elle permet d'obtenir directement la réponse de la structure en régime établi en fonction de la pulsation d'excitation (*Imbert [3.7]*). Soit :

$$\{F_{\text{ext}}\} = e^{j\omega t} \cdot \{F^o\} \quad (2.40)$$

le vecteur des efforts extérieurs. La solution en régime établi et dans l'espace des coordonnées physiques, est également harmonique. Elle s'exprime par :

$$\{X\} = e^{j\omega t} \cdot \{X^o\} \quad (2.41)$$

soit dans l'espace des coordonnées modales

$$\{X\} = e^{j\omega t} [\Phi]_q \cdot \{Q^o\} \quad (2.42)$$

Et $\{Q^o\}$ s'exprime par :

$$\{Q^o(\omega)\}_i = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}) + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_i}} \cdot \frac{1}{\omega_i^2 m_i} \cdot \{\phi_i\}^T \cdot \{F^o\} \quad (2.43)$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$\{Q^o(\omega)\}_i = H_i(\omega) \cdot q_{i0} \quad (2.44)$$

où :

- $H_i(\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}) + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_i}}$ est le facteur d'amplification dynamique,
- $q_{i0} = \frac{1}{\omega_i^2 m_i} \cdot \{\phi_i\}^T \cdot \{F^o\}$ est le facteur de participation statique ou réponse statique du mode i

5.2.2 Prise en compte des excitations dues à l'engrènement : introduction de l'erreur de transmission

Comme il a été indiqué précédemment (Cf. § 2), la source principale d'excitation des mécanismes de transmission de puissance est l'erreur de transmission. D'un point de vue

numérique, cette excitation peut se traduire, soit comme une rigidité d'engrènement variable, soit comme un effort extérieur. Dans les modèles développés, les deux approches peuvent être prises en compte.

Dans le cas de la rigidité d'engrènement variable, puisque cette dernière est périodique de période la période d'engrènement. Elle est donc décomposable en série de Fourier. La rigidité d'engrènement d'un engrenage est alors définie par :

$$k_{eng}(t) = k_{moy} + \sum_{i=1}^{N_F} (a_i \cos(i\omega_{eng} t) + b_i \sin(i\omega_{eng} t)) \quad (2.45)$$

où N_F est le nombre de termes retenus pour l'approximation de la rigidité d'engrènement. Lorsque cette dernière est obtenue de manière discrète pour différentes positions des roues (Cf. § 2.2.3), le nombre maximum de termes utilisables, dans la décomposition en série de Fourier, est directement lié au pas de discrétisation (théorème de Shannon).

L'introduction de l'excitation due l'erreur de transmission sous à l'aide d'un effort extérieur, consiste à la modéliser par les efforts aux dentures qu'elle produit. Dans le cadre du modèle global présenté précédemment, l'interface d'engrènement peut être schématisée par un ressort et un excitateur en déplacement montés en parallèles entre le point I_1 (primitif d'engrènement de la roue 1) et le point I_2 (primitif d'engrènement de la roue 2) comme indiquée sur la figure suivante. En réalité, les points I_1 et I_2 sont géométriquement confondus au point I primitif d'engrènement.

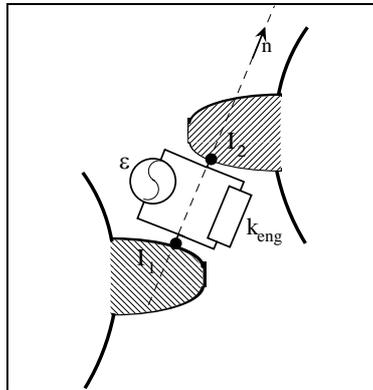


Figure 2. 11 : Schématisation de l'interface d'engrènement

La grandeur ε peut être déterminée par les études quasi statiques et traduit le rapprochement des corps. Elle va conduire à la génération d'un effort "extérieur" $\{F_1\}$ sur la roue 1 et $\{F_2\}$ sur la roue 2 appliqué aux points I_1 et I_2 suivant la normale au contact :

$$\begin{aligned} \{F_1(t)\} &= \varepsilon(t) \cdot \bar{n} \\ \{F_2(t)\} &= -\varepsilon(t) \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Les roues étant supposées indéformables (Cf. § 2.2), la mécanique générale des corps rigides permet de calculer le torseur des efforts équivalents appliqués aux centres des engrenages qui sont des noeuds du maillage. L'expression de ces torseurs, dans le repère de l'élément d'engrenage défini précédemment, est donnée en annexe B.3

C. Bard [1.1] a montré que parmi les différentes modélisations de l'engrènement, la modélisation linéarisée correspondant à une rigidité de denture constante et une excitation par l'erreur de transmission quasi-statique est bien adaptée à l'analyse du comportement dynamique des transmissions par engrenages. Parmi les différentes configurations testées, incluant les configurations désalignées, la seule limitation observée, concerne la présence de correction de denture qui, nécessitent la prise en compte des fluctuations de la rigidité de denture.

6. CONCLUSION

La mise en place de modèles dynamiques globaux de boîte de vitesses, est un travail "transversal" qui nécessite la synthèse des nombreux travaux de recherche "verticaux" réalisés dans divers domaines :

- modélisation de l'interface d'engrènement,
- introduction des paliers à roulements,
- introduction de carters "réels",
- prise en compte de l'amortissement,
- techniques de résolution et de réduction des modèles numériques de grandes tailles ...

Ce chapitre est une synthèse bibliographique de ces différents travaux afin de réaliser un modèle dynamique global des boîtes de vitesses introduisant les données "nécessaires et suffisantes" à l'obtention de résultats satisfaisants.

La modélisation de l'interface d'engrènement est une préoccupation relativement ancienne qui a conduit à la définition de modèles fiables (Cf. § 2), et à la reconnaissance de l'engrenage (par l'intermédiaire de l'erreur de transmission) comme la source principale d'excitation des mécanismes de transmission de puissance. En revanche, l'importance de la modélisation des paliers à roulement est une préoccupation récente (Cf. § 3.1). L'introduction dans les modèles dynamiques globaux des matrices de rigidité, obtenues pour chaque corps roulant et décrites dans le chapitre 1, est une innovation par rapport aux modèles existants. En effet, cette approche permet de prendre en compte la déformabilité statique des carters. L'influence de cette déformabilité, sur les matrices de rigidité et sur le comportement dynamique de l'ensemble, sera mis en évidence dans le chapitre suivant. L'autre apport novateur des modèles globaux proposés, est l'introduction de l'influence dynamique d'un carter réel par l'intermédiaire d'un super élément (Cf. § 3.3).

Les nombreux travaux réalisés sur les mécanismes de transmission de puissance ont mis en évidence le rôle prépondérant de l'amortissement sur les vitesses critiques et sur les résultats dynamiques obtenus. Néanmoins, comme le rappelle **P. Velez** (*Remond et al. [1.26]*), **Gregory et Col.** concluaient déjà il y a 30 ans que :

"L'amortissement est extrêmement important et des prédictions précises du chargement dynamique des dentures sont impossibles, sans connaître son amplitude. Des recherches sur les mécanismes d'amortissement dans les machines tournantes, sont un besoin urgent !"

Les travaux expérimentaux réalisés sur des transmissions "simples" ont permis d'estimer un ordre de grandeur pour l'amortissement modal des modes énergétiques à la denture. Mais, dans le cas des mécanismes globaux d'autres sources d'amortissement apparaissent, en particulier au niveau des paliers à roulement, et très peu d'informations existent.

D'un point de vue numérique, la prise en compte des carters par des supers éléments et les méthodes de résolution du système d'équation de l'équilibre dynamique, s'appuie sur des techniques classiques des méthodes aux Eléments Finis. La "nouveau" réside d'avantage sur l'introduction de méthodes numériques, habituellement utilisées pour le recalage des modèles numériques à l'aide de résultats d'essais, pour comparer et évaluer l'influence de la modélisation des divers éléments technologiques.

Chapitre 3 :

ETUDES DYNAMIQUES D'UNE CHAÎNE CINÉMATIQUE DE BOÎTE DE VITESSES AUTOMOBILE : INFLUENCE DES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS.

Les chapitres précédents ont permis de définir des modèles globaux statiques et dynamiques de mécanismes de transmission de puissance. L'objet de ce troisième chapitre est d'utiliser ces modèles pour étudier le comportement modal d'une chaîne cinématique de boîte de vitesses automobile afin d'évaluer l'influence des éléments constitutifs.

En guise d'introduction, la première partie justifie l'intérêt de ces études modales, et définit les caractéristiques du modèle considéré. La seconde partie s'attache à définir les limites des hypothèses de linéarisation du comportement des organes de liaison : engrenages extérieurs et paliers à roulement. La troisième partie examine l'influence de la modélisation des paliers à roulement sur le comportement modal de l'ensemble de la chaîne cinématique et met en évidence l'importance de prendre en compte l'environnement statique lors des études quasi statique préalables. Cette série d'études a également permis de définir des diagrammes énergétiques caractéristiques du comportement dynamique des différents roulements de la boîte. La dernière partie compare les principaux résultats obtenus avec ceux obtenus pour des conditions aux limites différentes.

1. PRÉSENTATION DES ÉTUDES

1.1 Contexte général

La réalisation de modèles numériques globaux de boîtes de vitesses automobile nécessite de prendre en compte l'ensemble des constituants du mécanisme arbres, engrenages, roulements, carter et également, les éléments technologiques de synchronisation, les pignons fous, le disque d'embrayage, etc ... Le nombre de sources d'erreurs possibles et d'imprécisions de modélisation augmente fortement. La comparaison avec des résultats d'essais permet d'estimer globalement la validité ou non du modèle mais, la complexité du système, rend difficile la mise en oeuvre d'une campagne de recalage "classique" . En effet, les essais doivent être réalisés sur des mécanismes sous charge et éventuellement en fonctionnement. Cela nécessite l'utilisation de moteurs et de freins qui introduisent des inconnues supplémentaires, et de lubrifiant qui risque de perturber le comportement des capteurs tout en introduisant de l'amortissement. De plus, les chaînes cinématiques sont formées d'un grand nombre d'éléments technologiques assemblés par des dispositifs plus ou moins complexes rainures, crabots ... qui limitent la place disponible pour le positionnement des capteurs. Les mesures des accélérations ne peuvent donc se faire que sur un nombre limité de points, ce qui rend délicat les étapes d'appariage des modes mesurés aux modes calculés. De plus, de

manière générale, le recalage des modèles numériques à l'aide de résultats d'essais se ramène à des procédures d'optimisation dont la solution n'est pas unique. En d'autres termes, il est possible de recalculer un modèle afin que, les résultats numériques soient identiques aux résultats expérimentaux sans que, les modifications apportées au modèle initial aient de significations technologiques claires. Cela rend difficile une définition ultérieure de règles de modélisation.

Dans ce chapitre, afin d'estimer d'un point de vue numérique les causes possibles d'erreurs de modélisation de la chaîne cinématique et d'évaluer le degré de précision à apporter lors de la prise en compte des divers constituants, leurs influences sur les modes propres du système "à l'arrêt" sont évaluées. Les raisons du choix des modes propres comme critère de comparaison sont multiples. D'un point de vue numérique et mathématique, ils sont caractéristiques des matrices de masse et de rigidité du modèle et dépendent donc directement des critères et des hypothèses de modélisation. De plus, comme cela a été rappelé au chapitre 2, ils sont couramment utilisés pour calculer la réponse du mécanisme à une excitation telle l'erreur de transmission sous charge (*Bard [1.1], Vexlex [1.40]*). La précision de cette réponse dépend donc, fortement de la précision des modes propres. D'un point de vue plus technologique et pratique, il est reconnu que la réponse à une excitation d'un système de transmission par engrenages, dépend fortement de l'amortissement. Or, l'amortissement est un paramètre très difficile à estimer. L'utilisation des modes propres comme critère de comparaison, évite d'avoir à introduire et réduit ainsi, le nombre des paramètres inconnus ou mal connus. C'est d'ailleurs, une des raisons pour lesquelles la plupart des campagnes de recalage calcul-essais se font sur les modes propres de la structure non amortie.

1.2 Etudes réalisées

Les engrenages sont les organes "centraux" des mécanismes de transmission de puissance. Ce sont également les principales sources d'excitation du système par l'intermédiaire de l'erreur de transmission (Cf. Chapitre 2). Dans le cadre des modèles dynamiques globaux et des engrenages cylindriques extérieurs, leur modélisation par une rigidité unidirectionnelle placée au point primitif d'engrènement suivant la normale au contact, n'est pas remise en cause. En dehors des paramètres technologiques de géométrie (rayons de base, angle d'hélice et de pression ...), qui sont parfaitement connus et, qui permettent de positionner la normale au contact, le paramètre de modélisation le plus important est la rigidité d'engrènement. Elle fluctue pendant l'engrènement et dépend du chargement statique et des caractéristiques de la denture. Les calculs de modes propres à "l'arrêt" sont effectués en utilisant la rigidité moyenne d'engrènement. La première étude présentée dans ce chapitre (partie 2.1) a pour objet d'évaluer l'influence de cette valeur sur les modes propres du système. Cette étude permet donc, d'estimer l'erreur commise en calculant les modes propres pour une position d'engrènement particulière, plutôt qu'une autre et, également, d'évaluer le degré de précision à apporter lors du calcul de la rigidité moyenne.

Dès les premiers travaux réalisés sur une partie de chaînes cinématiques de boîtes de vitesses (arbre secondaire et pont) et, malgré une description simple du comportement dynamique des paliers (rigidités scalaires), le rôle prépondérant des roulements sur le comportement dynamique global a été mis en évidence (*Bourdon et al. [4.2], [4.3], [5.7]*). Les décompositions énergétiques et les analyses de sensibilité permettent de quantifier cette influence. D'un point de vue énergétique et pour les fréquences propres inférieures à 3 000 Hz (soit 15 modes dans l'étude considérée) près de la moitié de l'énergie de déformation se situe

dans les roulements (*Bourdon et al. [4.2]*). Les analyses de sensibilité "implicite" et "explicite" (Cf. chapitre 2) montrent que pour les premiers modes propres de la chaîne cinématique évoquée précédemment, les rigidités des roulements à billes R21 et à rouleaux coniques R31 sont des paramètres aussi influents que la rigidité de l'arbre secondaire voire plus importants (*Bourdon et al.[4.3]*). Les études expérimentales réalisées par **C. Bard [1.1]** confirment l'importance des paliers à roulement, dans le comportement dynamique des chaînes cinématiques. La réalisation de modèles numériques réalistes nécessite donc, de prendre en compte de manière satisfaisante le comportement dynamique des paliers à roulement. Comme il a été vu dans les chapitres 1 et 2, les roulements ont un comportement non-linéaire qui, lors des études dynamiques, est linéarisé autour du point de fonctionnement. L'objet de la seconde étude présentée dans ce chapitre (partie 2.2) est de vérifier la validité de cette hypothèse pour la modélisation d'une boîte de vitesses réelle et de définir des limites acceptables de variation du chargement. Différents modèles dynamiques de roulements sont utilisés dans la littérature, l'objet de la troisième étude (partie 3) est de comparer ces différents modèles et de mettre en évidence l'intérêt de l'approche statique globale préalable.

Les boîtes de vitesses comme tous les mécanismes de transmission de puissance sont montés dans un environnement technologique complexe, qu'il est impossible de modéliser complètement. D'un point de vue numérique, l'influence de cet environnement (moteur, chaîne de transmission de sortie ...) va être introduit au niveau des conditions aux limites imposées au modèle. La dernière étude de ce chapitre (partie 4) positionne les résultats obtenus précédemment avec un type de conditions aux limites, par rapport à d'autres conditions envisageables.

1.3 Description des modèles considérés

Dans le chapitre précédent, les hypothèses et les éléments permettant de modéliser le comportement dynamique des boîtes de vitesses ont été présentés. Les modèles dynamiques considérés dans cette partie, correspondent à la chaîne cinématique de la boîte de vitesses présentée au chapitre 1 (partie 4). Elle est formée des arbres primaire et secondaire, du différentiel assimilé à un arbre, de 6 paliers à roulement, des engrenages de pont, de première, jusqu'à la cinquième et des éléments technologiques (dispositifs de synchronisation, disque d'embrayage ...) assimilés à des solides indéformables et modélisés par des masses ponctuelles.

Dans la majorité des modèles dynamiques utilisés par la suite, les matrices de rigidité représentant le comportement des paliers à roulement, sont issues de calculs statiques non-linéaires prenant en compte la flexibilité des carters. L'examen du comportement dynamique de la chaîne cinématique "seule", revient donc à supposer, qu'en dynamique, le carter est indéformable. Mais l'influence de sa flexibilité statique est intégrée dans le calcul des rigidités de roulement.

Pour l'ensemble des études réalisées, les conditions de modélisation sont les mêmes. Le point de fonctionnement statique est évalué en imposant un couple en entrée de boîte et en bloquant en rotation les extrémités de l'arbre de pont. Les couples introduits représentent un fonctionnement de la boîte en "tirage" (l'entrée est "moteur"). Les engrenages hélicoïdaux induisent des efforts radiaux et axiaux. Les efforts axiaux sont supportés par les roulements à rouleaux coniques R11 et R32 et par le roulement à billes R21. Lors des études dynamiques, les sorties restent bloquées et l'entrée est libre.

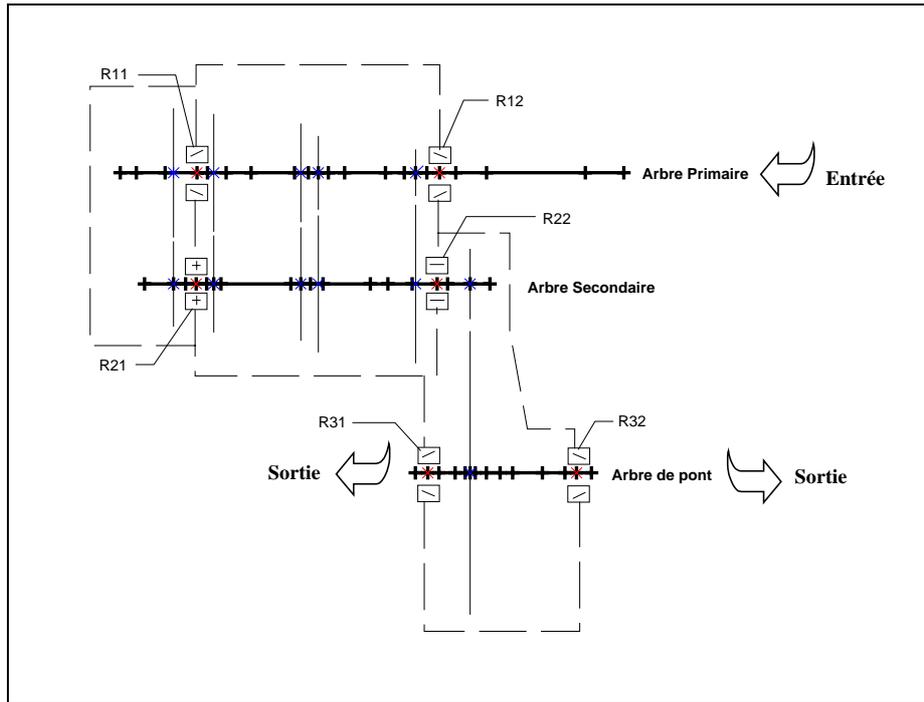


Figure 3. 1 : Modélisation dynamique de la chaîne cinématique considérée

2. LIMITES DES HYPOTHÈSES DE LINÉARISATION DU COMPORTEMENT DES ÉLÉMENTS DE LIAISON

Par hypothèse dans le cadre des études dynamiques globales, le comportement non-linéaire des organes de transmission : paliers à roulement, engrenages... est linéarisé autour du point de fonctionnement statique. Les valeurs des rigidités scalaires ou matricielles les représentant sont évaluées par des calculs statiques préalables (Cf. Chapitres 1 et 2).

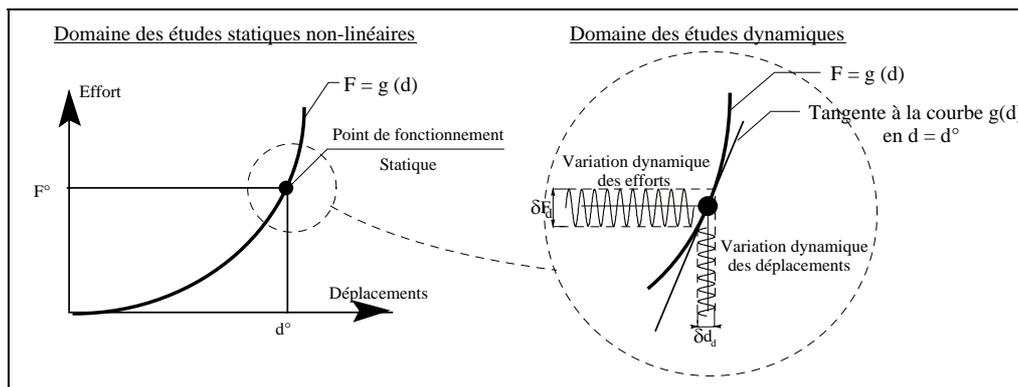


Figure 3. 2: Linéarisation du comportement des organes de transmission : La courbe $F = g(d)$ est assimilée à sa tangente autour du point de fonctionnement statique.

Afin de valider cette hypothèse et d'en préciser les limites, deux séries d'études ont été réalisées sur les modes propres de la chaîne cinématique. La première série évalue le degré de précision à apporter à la détermination de la rigidité moyenne d'engrènement. La seconde série estime des limites de linéarisation acceptables pour les paliers, c'est-à-dire qu'elle définit la zone où la courbe $F = g(d)$ est assimilable à sa tangente.

2.1 Influence de la valeur de rigidité moyenne d'engrènement

2.1.1 Principe de l'étude

Comme il a été indiqué précédemment (Cf. Chapitre 2), dans le cadre des études dynamiques globales, les liaisons par engrenage peuvent être modélisées par un ressort équivalent placé au point primitif d'engrènement, suivant la normale au contact. La raideur de ce ressort correspond à la rigidité moyenne d'engrènement sous charge, qui peut être estimée de manière précise à l'aide de calculs éléments finis (*Bard [1.1]*). Elle dépend de manière non linéaire du chargement statique et des caractéristiques de la denture. Les études présentées dans cette partie ont pour objet d'estimer l'influence de cette valeur moyenne sur les modes propres de la chaîne cinématique, afin, d'évaluer le degré de précision à apporter lors du calcul de cette grandeur. Pour cela, les résultats modaux, correspondant à plusieurs valeurs de rigidité moyenne, ont été calculés et, comparés à ceux obtenus avec des dentures indéformables, c'est-à-dire de rigidité d'engrènement "infinie" (en pratique 1.10^{13} N/m). Ces études ont été réalisées sur les fréquences inférieures à 2 000.Hz en faisant varier la rigidité de l'engrenage de première, celle de l'engrenage de pont restant "infinie" et inversement. Les valeurs des rigidités utilisées sont regroupées dans le tableau suivant :

Réf.	Kref	K2	K3	K4	K5	K6
K_{mov} (N / m)	1.10^{13}	1.10^{10}	1.10^9	5.10^8	1.10^8	5.10^7

Table 3. 1 : Valeurs des rigidités moyennes d'engrènement considérées.

Remarque : la plage de variation considérée pour les rigidités moyennes d'engrènement est trop importante, pour que des études de sensibilité "classique" (Cf. Chapitre 2) soient suffisantes pour estimer l'influence de ce paramètre sur les modes propres.

2.1.2 Caractéristiques des modes propres considérés

Les caractéristiques modales des modes propres de "référence" obtenus pour des rigidités de dentures de 1.10^{13} N/ m sont regroupées dans le tableau suivant :

N° mode	Fréquences (Hz)	Caractéristiques du mode
1	291,05	Mode global de déformation, les phénomènes dominants correspondent à des déplacements rigides
2	684,43	Mode global de déformation avec prédominance de la déformation en flexion de l'arbre secondaire
3	830,57	Mode de flexion de l'arbre primaire seul
4	840,32	Idem mode 3 mais dans un plan de flexion différent
5	987,38	Mode global de déformation, couplage des déformations de torsion de l'arbre primaire et des phénomènes de flexion et de déplacements rigides axiaux des arbres secondaire et de pont.
6	1057,05	Mode de flexion de l'arbre primaire sans phénomène de torsion
7	1134,27	Mode de flexion de l'arbre primaire correspondant à "l'échappement" suivant la normale au contact dans l'engrenage
8	1220,12	Mode de torsion des 3 arbres couplé à de la flexion et à des déplacements rigides des arbres primaire et secondaire
9	1351,77	Mode de déformation couplé (flexion-torsion) des arbres primaire et secondaire
10	1469,58	Mode de flexion de l'arbre secondaire et légère déformation de l'arbre primaire
11	1551,06	Mode de flexion de l'arbre de pont

12	1683,72	Mode de flexion, torsion, rotations rigides des arbres primaire et secondaire
13	1738,75	Mode de flexion-torsion de l'arbre primaire et de flexion (plus faible) de l'arbre secondaire.
14	1930,17	Mode global de déformation des 3 arbres
15	2054,97	Mode global de déformation des 3 arbres avec des amplitudes de déformation comparables

Table 3. 2 : Caractéristiques "modales" des modes propres de "référence".

La décomposition des énergies de déformation et des énergies cinétiques en énergies élémentaires de flexion, torsion extension (Cf. Chapitre 2) permet de quantifier les couplages entre les déformations et d'estimer les phénomènes dominants de chaque mode.

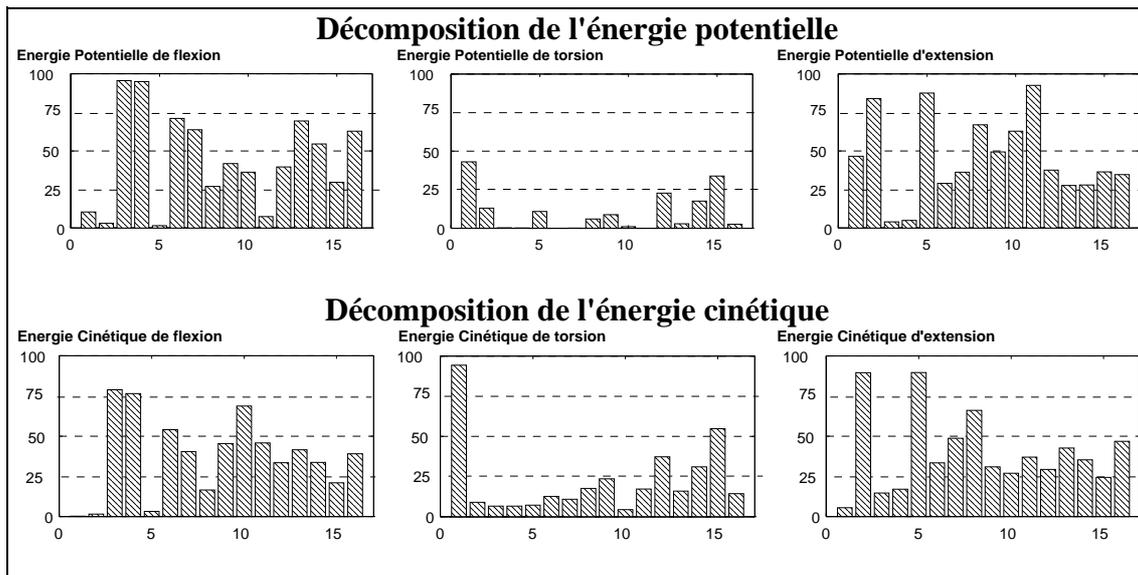


Figure 3. 3: Décomposition en énergies élémentaires des modes propres de références

Les histogrammes de la figure précédente, mettent en évidence le couplage des différents types de déformations (énergies potentielles) et des différents types de déplacements (énergies cinétiques). Pour les modes considérés, il n'y a pas de mode "pur" de flexion, de torsion ou d'extension mais, des modes "mixtes" avec néanmoins des phénomènes dominants. Le mode 1 par exemple, est un mode où les déformations en extension (déformations des paliers à roulement) sont majoritaires ($\approx 48\%$). Elles sont couplées à des déformations en torsion ($\approx 40\%$) et en flexion ($\approx 12\%$).

2.1.3 Influence de la rigidité moyenne d'engrènement sur les fréquences propres

Afin d'estimer l'influence de la rigidité moyenne sur les fréquences propres du modèle, les variations de fréquences propres relativement aux fréquences de référence, ont été tracées pour les 5 valeurs de rigidité.

Soit :

$$\Delta f_r^i = 100 * \frac{f^i - f^{ref}}{f^{ref}} \quad \text{pour } i = 2 \dots 6 \quad (3.1)$$

Les résultats sont regroupés dans la figure suivante :

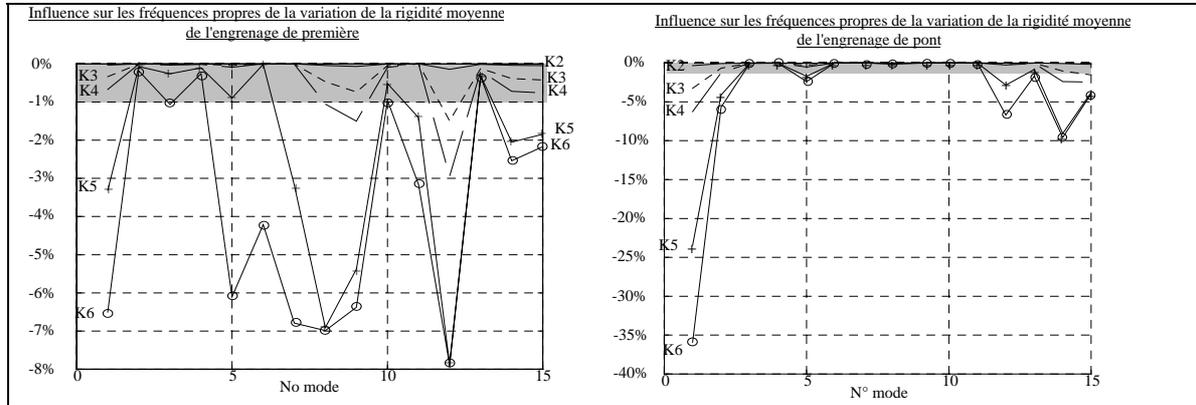


Figure 3. 4: Variations relatives des fréquences propres en fonction de la rigidité moyenne d'engrènement par rapport à une rigidité de denture "infinie"

Dans les deux cas, la réduction de la rigidité d'engrènement se traduit par une diminution des fréquences propres (Δf négatifs) plus ou moins importante. Pour les modèles K2 et K3 de rigidités supérieures à 5.10^8 N/m (Cf. Table 3. 1), les fréquences propres sont quasi identiques, à celles obtenues avec des dentures rigides (écarts relatifs inférieurs à 1%). Pour des rigidités plus faibles, les fréquences propres, en particulier celles du mode 1, sont plus sensibles à la valeur de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de pont, qu'à celle de l'engrenage de première, l'écart relatif pouvant atteindre 36% pour le mode 1. Ce dernier est un mode global (Cf. Figure 3. 5), avec des déformations en torsion et des rotations rigides des arbres importantes (41% de l'énergie potentielle totale et 91% de l'énergie cinétique correspondent à de la torsion). L'arbre de pont étant bloqué en rotation, ces déformations globales de torsion, vont faire intervenir de manière importante, la rigidité modélisant l'engrènement de l'engrenage de pont. Cela explique, la sensibilité plus importante de la première fréquence propre aux variations de la rigidité de cet engrenage, qu'à celles de l'engrenage de première.

Pour les autres modes, les écarts en fréquences restent inférieurs à 10% même pour des variations de rigidité moyenne importantes.

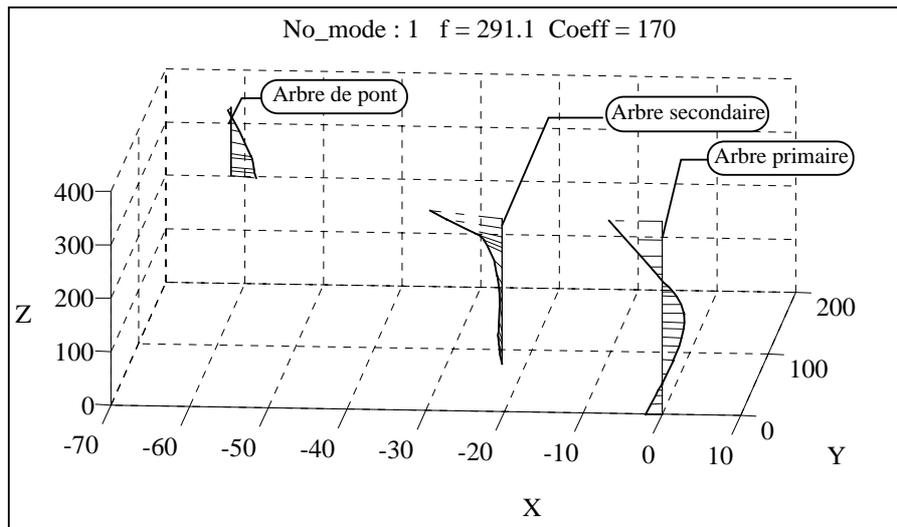


Figure 3. 5: Déformations modales du mode 1 de référence

2.1.4 Influence de la rigidité moyenne d'engrènement sur les vecteurs propres

Afin d'évaluer globalement, l'influence de la valeur de la rigidité moyenne d'engrènement sur les vecteurs propres, le critère suivant a été défini :

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \text{MAC}(i, i)}{N} \quad (3.2)$$

avec :

- N le nombre de modes calculés,
- MAC la matrice de MAC calculée entre les vecteurs propres du modèle de référence et ceux du modèle considéré.

Ce critère correspond donc à la valeur moyenne de la diagonale de la matrice de MAC, et est compris entre 0 et 1. Il a été calculé pour une quinzaine de valeurs de rigidité et pour 15 modes propres. Les résultats sont présentés dans les graphes suivants avec : en abscisse en échelle logarithmique, la valeur de la rigidité moyenne d'engrènement, et en ordonnée la valeur du critère calculé.

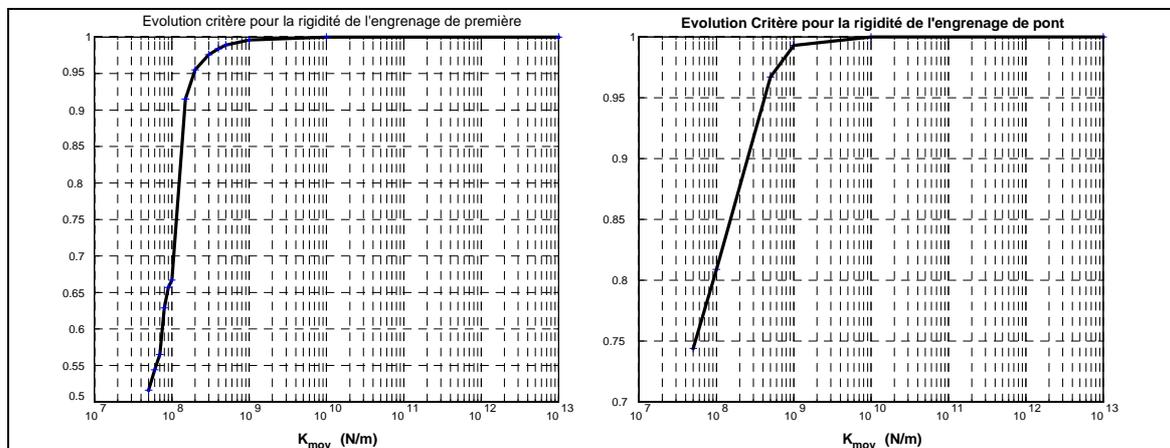


Figure 3. 6 : Evolution de l'indice global de corrélation des vecteurs propres

Pour des rigidités d'engrènement des engrenages, de pont et de première, supérieures à 3.10^8 N/m, les vecteurs propres obtenus sont fortement colinéaires (indice global de corrélation supérieur à 0.97) à ceux obtenus avec des dentures infiniment rigides. Pour des rigidités plus faibles, l'indice global de corrélation chute rapidement à partir de 1.10^8 N/m, traduisant, soit l'apparition de nouveaux modes, soit la modification en forme des vecteurs existants. Ces modifications sont plus importantes pour l'engrenage de première que, pour celui de pont. En effet, pour une rigidité de 5.10^7 N/m, l'indice global de corrélation est de 0.52 pour l'engrenage de première et de 0.75 pour l'engrenage de pont.

L'examen des matrices de MAC permet de confirmer ces valeurs limites. Pour des rigidités de denture supérieures ou égales à 5.10^8 N/m, les matrices de MAC sont à diagonales dominantes et "quasi" identiques à la matrice "d'auto-MAC" obtenue à l'aide des vecteurs de références :

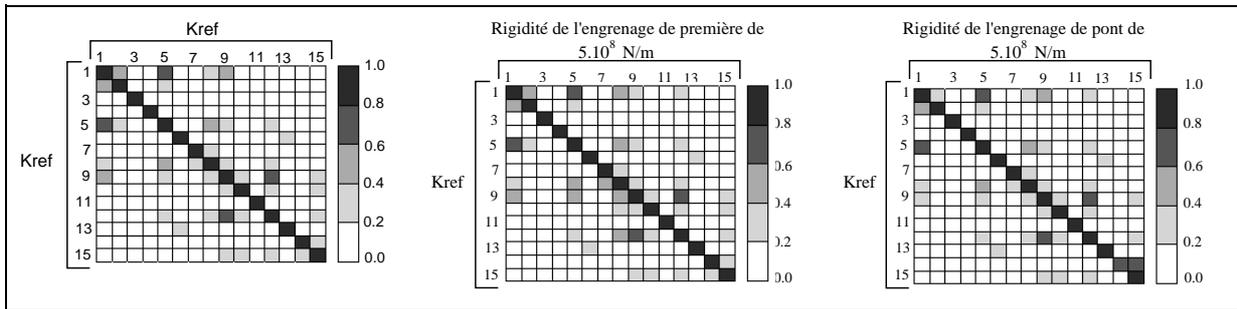


Figure 3. 7: Matrices de MAC pour des rigidités de 5.10^8 N/m

Dans le cas de l'engrenage de première et pour une rigidité d'engrènement de 5.10^8 N/m, l'indice global de corrélation est supérieur à 0.99. Le vecteur propre le "moins bien corrélé" est celui du mode 13 mais le coefficient de corrélation reste élevé et supérieur à 0.9. Pour l'engrenage de pont, seul le mode 14 n'est pas corrélé à un vecteur de référence, il est seulement "semblable" aux modes 14 et 15 de référence (critère de corrélation de 0.665 et 0.607) mais n'est colinéaire à aucun d'eux. Néanmoins, l'indice global de corrélation reste élevé et supérieur à 0.96.

Pour des rigidités moyennes de l'engrenage de première plus faibles, les vecteurs propres obtenus ne sont plus colinéaires aux vecteurs de référence et les matrices de MAC ne sont plus à diagonales dominantes.

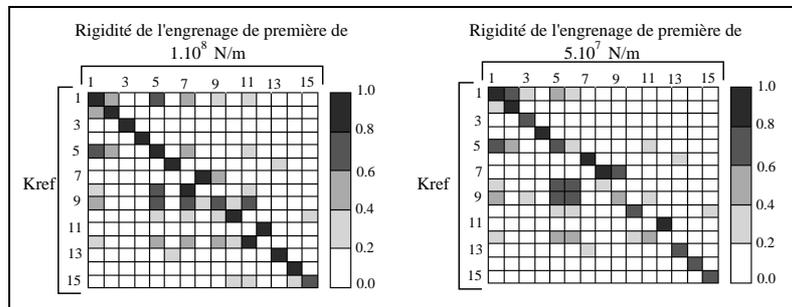


Figure 3. 8 : Matrices de MAC pour des rigidités de l'engrenage de première de 1.10^8 N/m et 5.10^7 N/m

Lorsque la rigidité d'engrènement de l'engrenage de première diminue, le nombre de modes appariables à un mode de référence décroît. Dans le cas d'une rigidité moyenne de 5.10^7 N/m, seuls 5 modes restent appariables avec un coefficient de corrélation supérieur à

0.8. Cela traduit, une modification importante de la forme ou de l'orientation des vecteurs propres et, également, l'apparition de nouveaux modes (mode 6 par exemple).

De manière identique, la diminution de la rigidité de l'engrenage de pont s'accompagne d'une modification des vecteurs propres, mais moins importante que dans le cas précédent. En effet, même dans le cas d'une rigidité moyenne de 5.10^7 N/m, 13 des 15 modes propres obtenus sont appariables à un mode de référence. La diminution du critère global de corrélation provient de l'apparition d'un nouveau mode (le 12), lorsque la rigidité diminue, ce qui entraîne un décalage de l'ordre des modes suivants.

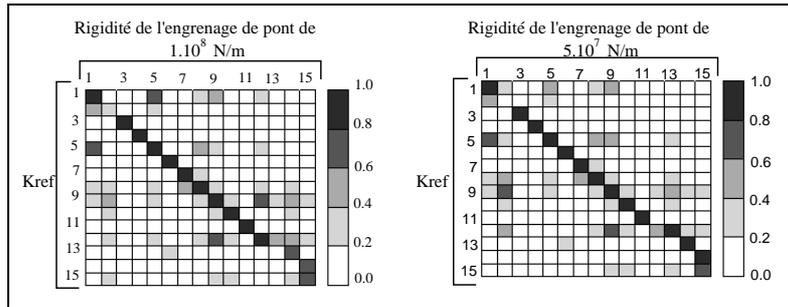


Figure 3. 9: Matrices de MAC pour des rigidités de l'engrenage de première de 1.10^8 N/m et 5.10^7 N/m

Le mode 2 n'est plus corrélé au mode 2 de référence (coefficient de corrélation inférieur à 0.4). Les différences entre ces modes correspondent essentiellement à une diminution très importante des phénomènes de torsion. En revanche, le mode 1, dont la fréquence propre est très sensible à la valeur de rigidité de pont; reste colinéaire au mode de référence.

2.1.5 Etudes énergétiques

Dans le cas de rigidités d'engrènement supérieures à 5.10^8 N/m et, pour la gamme de fréquence étudiée, le pourcentage d'énergie de déformation dans la denture est inférieur à 0.001% de l'énergie de déformation totale, ce qui revient bien à considérer que les dentures sont pratiquement indéformables. En revanche, l'introduction dans le modèle dynamique de rigidités d'engrènement plus faibles, se traduit par l'apparition de modes énergétiques pour la denture, c'est-à-dire de mode de fréquence ω où le rapport suivant est "significatif" :

$$E_{p_{eng}} = 100 * \frac{\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}^T \cdot [K_{eng}] \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}}{\frac{1}{2} \omega_i} \quad (3.3)$$

avec $\{y_i\}$ le vecteur des déplacements modaux du centre du pignon i et $[K_{eng}]$ la matrice de rigidité modélisant l'engrenage définie au chapitre 2.

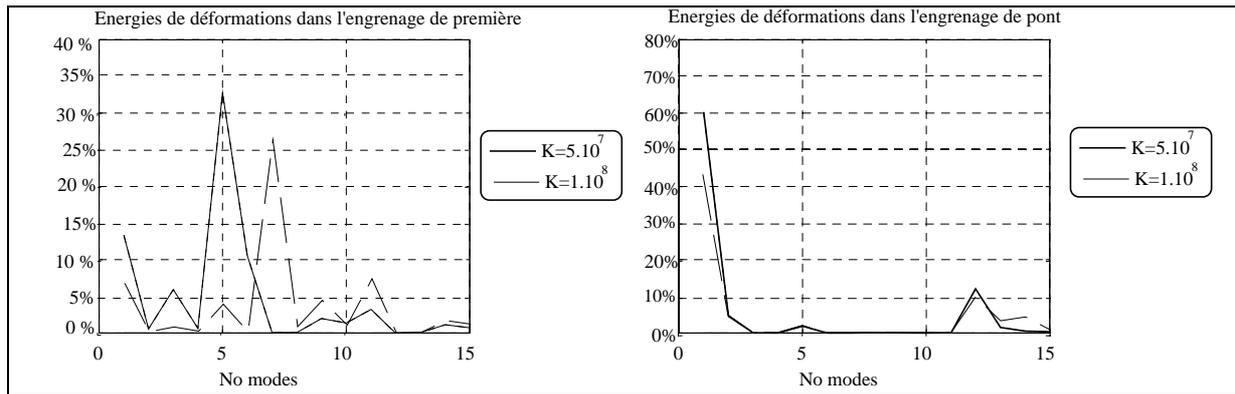


Figure 3. 10: Energies de déformation dans les engrenages de première et de pont

Pour les engrenages considérés, plusieurs modes énergétiques pour la denture apparaissent entre 0 et 2 000 Hz. La plupart de ces modes restent néanmoins bien appariés avec des modes de référence, mais possèdent des fréquences propres plus basses. Cela est particulièrement évident pour le mode 1. En effet, lorsque la rigidité de l'engrenage de pont est inférieure à 1.10^8 N/m, ce mode devient très énergétique pour la denture (plus de 40% de l'énergie de déformation). Il voit sa fréquence diminuer notablement mais, reste colinéaire au vecteur de référence (coefficient de corrélation de 0.999). L'augmentation de l'énergie de déformation de denture (0% pour le modèle de référence, 41% pour une rigidité de 1.10^8 N/m, 60% pour une rigidité de 5.10^7 N/m) s'accompagne d'un transfert d'énergie entre les différents éléments constitutifs de la chaîne cinématique (Cf. Figure 3. 11). Ce transfert correspond essentiellement, à une diminution des énergies :

- de torsion des arbres, en particulier de l'arbre de pont (35% pour le modèle de référence, 21% pour une rigidité de 1.10^8 N/m, 15% pour une rigidité de 5.10^7 N/m),
- de flexion des arbres, en particulier de l'arbre secondaire (8% pour le modèle de référence, 5% pour une rigidité de 1.10^8 N/m, 3.5% pour une rigidité de 5.10^7 N/m),
- de déformation globale des roulements, en particulier pour le roulement à billes R21 (23% pour le modèle de référence, 11% pour une rigidité de 1.10^8 N/m, 5% pour une rigidité de 5.10^7 N/m) et le roulement à rouleaux cylindriques R22 (12% pour le modèle de référence, 8% pour une rigidité de 1.10^8 N/m, 4% pour une rigidité de 5.10^7 N/m).

Lorsque la rigidité moyenne de l'engrenage de première diminue, des modes énergétiques pour cette denture apparaissent. Comme pour la denture de pont, ils s'accompagnent d'une modification de la participation énergétique des autres éléments constitutifs, en particulier des paliers à roulement. Ces "redistributions" des énergies peuvent s'expliquer, physiquement, en considérant un arbre isolé monté sur des roulements déformables et, lié à l'extérieur au niveau du point primitif d'engrènement par un élément "ressort" représentant la rigidité d'engrènement. Si cette rigidité est "infinie", le système est isostatique et les conditions aux limites appliquées au point primitif d'engrènement sont purement cinématiques. Dans le cas contraire, le système n'est plus isostatique.

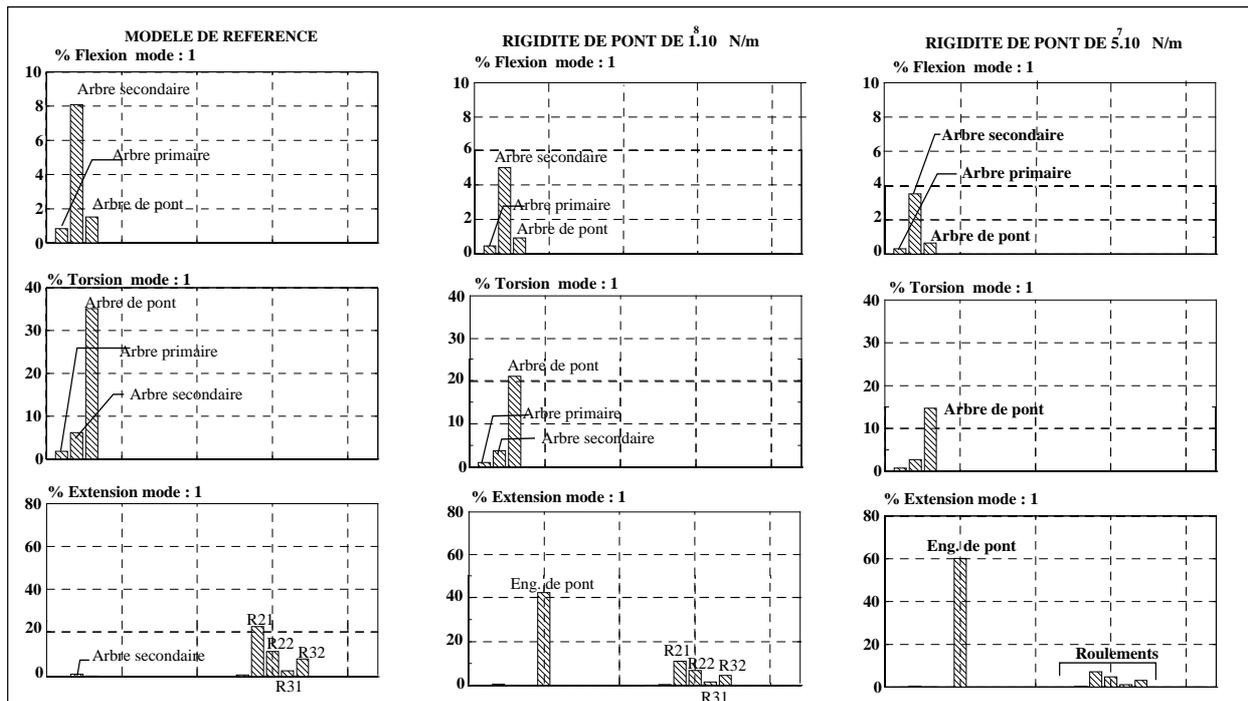


Figure 3. 11: Energies de déformation dans les éléments constitutifs de la chaîne cinématique en fonction de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de pont pour le mode 1

En comparant les matrices de MAC précédentes et les diagrammes énergétiques présentés dans cette partie, il apparaît que les modes non appariés ne sont pas forcément des modes énergétiques pour la denture. La diminution des rigidités de denture peut donc, induire des modifications "géométriques" importantes de modes peu ou pas énergétique à son égard.

2.1.6 Cas où les deux engrenages ont une rigidité d'engrènement "finie"

Les études précédentes ont montré que la valeur moyenne de rigidité d'engrènement de 1.10^8 N/m représente une "valeur critique" du modèle, à partir de laquelle le comportement modal du système évolue notablement. Les études réalisées dans cette partie, comparent les résultats modaux obtenus pour le modèle de référence à ceux obtenus pour un modèle où les rigidités des engrenages de première et de pont sont égales à la valeur "critique" de 1.10^8 N/m. Par la suite, ce second modèle est nommé "modèle 2".

Du point de vue des fréquences, la diminution des rigidités moyennes d'engrènement, provoque une baisse des fréquences propres du système. Avec un écart relatif de 25% (Cf. Figure 3. 12), la première fréquence propre est la plus modifiée. Pour les autres modes, la diminution relative des fréquences n'excède pas 10%, et elle est en moyenne de -5.3% sur l'ensemble des 15 modes considérés.

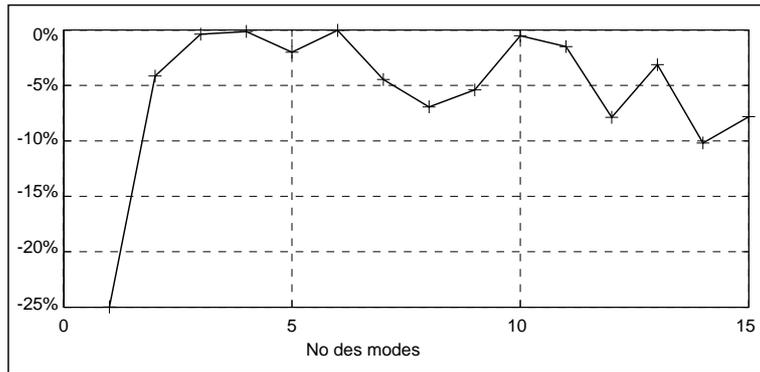


Figure 3. 12 : Écarts relatifs entre les fréquences propres du modèle de référence et celles du modèle 2

Néanmoins, l'étude plus fine des fréquences propres, permet de moduler un peu ces résultats (Cf. Table 3. 3). La modification de la rigidité d'engrènement modifie la répartition des fréquences propres du système, dans le modèle 2 de "nouvelles" fréquences apparaissent (mode 7 ...), d'autre semblent "disparaître" (mode 9 modèle de référence), d'autres enfin restent stables pour les deux modèles (modes 4, 6 ...).

Modèle de référence		Modèle 2		$\Delta f / f$
1	291.1	1	218.4	-25 %
2	684.4	2	656.0	-4 %
3	830.6	3	827.4	-0.4 %
4	840.3	4	839.2	-0.1 %
5	987.4	5	967.5	-2 %
6	1057.1	6	1056.6	0 %
		7	1083.6	
7	1134.3	8	1135.6	0.1 %
8	1220.1	9	1278.8	4.8 %
9	1351.8			
10	1469.6	10	1462.0	-0.5 %
		11	1527.8	
11	1551.1	12	1551.1	0 %
12	1683.7	13	1684.4	0 %
13	1738.7	14	1733.6	- 0.3 %
14	1930.2	15	1894.6	-2 %
15	2055.0			

Table 3. 3 : Fréquences propres du modèle de référence et du modèle 2

Les vecteurs propres vont également évoluer, l'indice global de corrélation entre ces deux séries de vecteurs est faible : 0.48 et la matrice de MAC n'est pas à diagonale dominante.

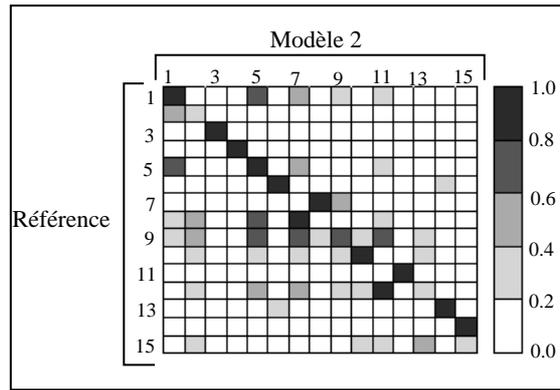


Figure 3. 13: Matrice de MAC entre le modèle de référence et le modèle 2

Seuls 6 modes peuvent être appariés avec un critère de corrélation supérieur à 0.9 et un écart en fréquence raisonnable (sauf pour le mode 1). Ces modes sont regroupés dans le tableau suivant :

N° mode modèle de référence	N° mode modèle 2	MAC	Δf (Hz)
1	1	1	73
3	3	0.94	3
4	4	0.97	1
6	6	0.94	0.5
10	10	0.92	8
11	12	0.99	0

Table 3. 4 : Modes "appariables" entre les deux modèles

Six autres modes du modèle 2 sont bien corrélés à ceux du modèle de référence (MAC > 0.8) mais, pas réellement colinéaires. En revanche, certains modes ne sont absolument pas corrélés d'un modèle à l'autre (mode 2 dont le critère de corrélation est inférieur à 0.13), ou mal corrélé (mode 9).

La modification de la rigidité moyenne d'engrènement des engrenages de première et de pont, peut donc changer la fréquence propre d'un mode (baisse de 25% pour le mode 1) sans changer la "forme" du vecteur propre associé (MAC =1 pour les modes 1). Et inversement, des modes peuvent conserver des fréquences propres voisines et ne plus être colinéaires. De plus, de nouveaux modes (mode 13) peuvent apparaître dans la gamme de fréquences considérées, lorsque les dentures ne sont plus supposées infiniment rigides. Néanmoins, 12 des 15 modes considérés restent corrélés à plus de 80% aux modes de référence. La faible valeur de l'indice global de corrélation est due à l'inversion de l'ordre des modes entre les deux modèles.

Pour le modèle de référence, les dentures sont supposées indéformables et leurs rigidités sont "numériquement infinies". Il n'y a donc pas d'énergie de déformation dans l'élément d'engrènement. En revanche, les rigidités de denture du modèle 2 sont "faibles" et des modes énergétiques pour la denture de chaque engrenage apparaissent (Cf. Figure 3. 14). Ces modes peuvent, soit être colinéaires à un mode de référence (mode 1) mais, avec une fréquence plus basse, soit complètement différents (mode 13) et ne s'apparier à aucun mode du modèle initial.

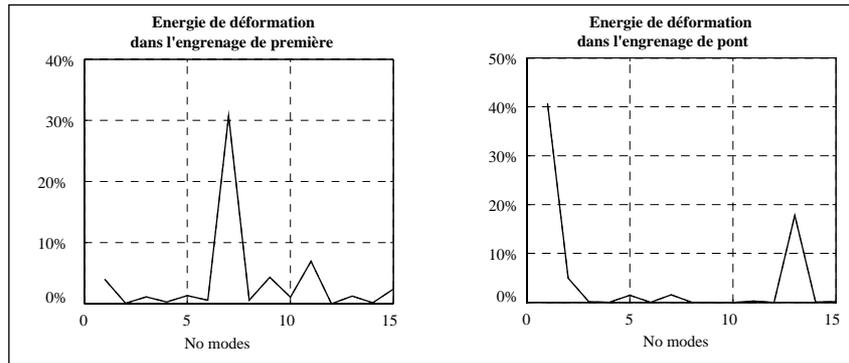


Figure 3. 14: Energies de déformation dans les engrenages de première et de pont en fonction des modes

L'émergence de modes énergétiques pour les dentures, s'accompagne d'une diminution de la participation énergétique des autres éléments de la chaîne cinématique, en particulier des paliers à roulement. Les diagrammes suivants permettent de visualiser, en fonction des modes, le pourcentage d'énergie de déformation localisée dans l'ensemble des 6 roulements.

Pour les deux modèles, les diagrammes énergétiques sont très proches et la forte participation des roulements à la déformation de la chaîne cinématique reste importante même dans le cas de dentures déformables. Mais, les modes énergétiques de denture du modèle 2 (modes 1, 7, 13) s'accompagnent d'une diminution notable de l'énergie de déformation des roulements (de 45 % à 22 % pour le mode 1, de 35 % à 21 % pour le mode 7 et de 30 % à 15 % pour le mode 13).

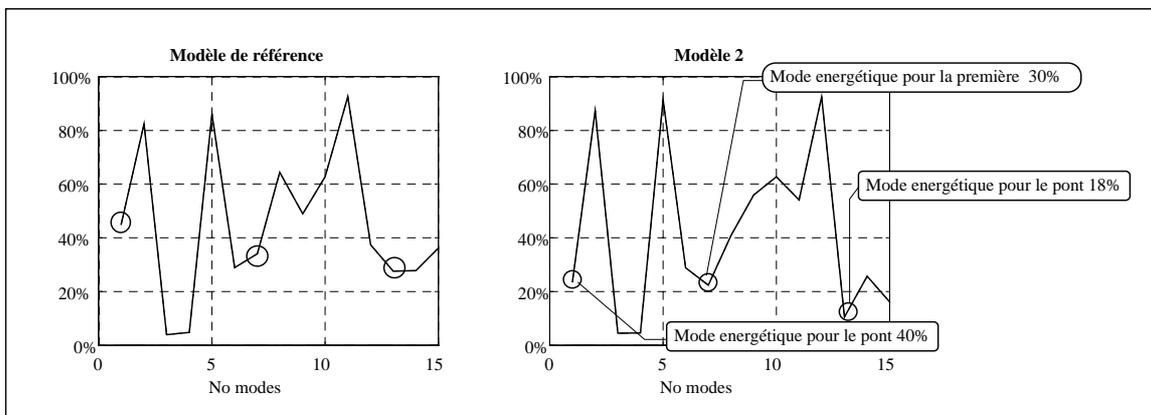


Figure 3. 15: Evolution de l'énergie de déformation dans les roulements

L'introduction de dentures déformables, ne modifie pas le fort couplage existant entre les différents effets (flexion, torsion extension). Les modes du modèle 2 énergétiques pour les engrenages (modes 1, 7, 13 et 11) s'accompagnent de phénomènes de torsion des arbres importants, en particulier, pour le mode 13 où plus de 50% de l'énergie de déformation correspond à de la torsion (Cf. Figure 3. 16). Pour mémoire (Cf. Chapitre 2), lors des calculs de décompositions élémentaires des énergies modales, les déformations de denture sont comptabilisées en énergie d'extension.

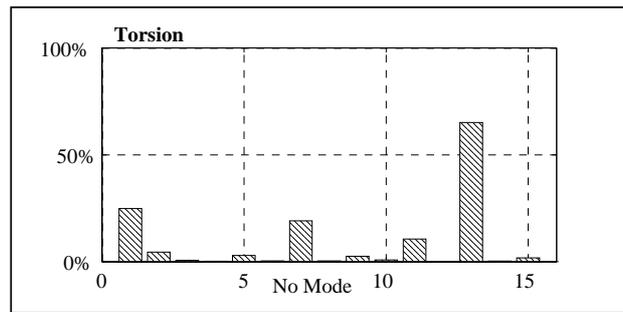


Figure 3.16: Evolution des déformations en torsion dans le modèle 2

Les études comparatives des 15 premiers modes propres de la chaîne cinématique, obtenus pour des rigidités de dentures "infinies" (10^{13} N/m) et, pour des rigidités de dentures "faibles" (10^8 N/m), ont montré que la modification de la rigidité d'engrènement peut modifier sensiblement certaines fréquences propres sans modifier les vecteurs propres associés (mode 1). Mais, globalement pour les autres modes, les écarts fréquentiels sont faibles (5.3 % sur l'ensemble des 14 autres modes). Les vecteurs propres restent globalement bien colinéaires entre les deux modèles (6 modes sur 15 peuvent être appariés avec un MAC supérieur à 0.92, 11 sur 15 avec un MAC supérieur à 0.8). Cela correspond au fait, que les directions des efforts ne sont pas modifiées d'un modèle à l'autre. Néanmoins, il apparaît également, pour chacun des modèles, des modes non appariables. L'utilisation de rigidités de denture finies, s'accompagne de l'apparition de modes énergétiques pour la denture. Pour ces derniers, l'augmentation de l'énergie de denture est associée à une diminution de l'énergie de déformation des roulements. Mais, pour l'ensemble des deux modèles et la bande de fréquences considérées (0-2 000Hz), les déformations des roulements représentent les déformations les plus importantes de la chaîne cinématique. Il est apparu également, que les modes les plus énergétiques pour les engrenages, ne correspondent pas obligatoirement aux modes non appariés, qui sont des modes de déformation globaux de l'ensemble de la chaîne cinématique, mais sont les modes où les déformations des arbres en torsion sont les plus importantes.

2.2 Domaine de "linéarité" des paliers à roulement

2.2.1 Principe de l'étude

Il est couramment admis que, lors des études dynamiques globales, le comportement des paliers à roulement peut être linéarisé autour du point de fonctionnement statique. Les roulements sont alors modélisés par des matrices de rigidité tangente déterminées, pour un chargement nominal, par un calcul statique non-linéaire. L'objet de cette partie est de valider cette hypothèse "classique" et, d'estimer pour une boîte de vitesses automobile, les limites de linéarité des paliers à roulement sous charge.

Pour les mécanismes de transmission de puissance, l'excitation dynamique prépondérante est liée aux engrenages et en particulier à la variation de rigidité de denture et aux erreurs de transmission (*Remond et al. [1.26]*). Il a également été vérifié que, dans le cadre des études dynamiques "globales", les engrenages peuvent être modélisés par des ressorts unidirectionnels, de rigidité variable, placés au point primitif d'engrènement suivant la normale au contact. La direction de l'effort d'engrènement est donc "fixe", seul son module évolue autour d'un chargement moyen. Afin de quantifier, lorsque ce module varie, l'évolution

des matrices de rigidité tangente associées aux roulements, les études suivantes ont été réalisées :

1. Calcul statique des matrices de rigidité tangente des roulements pour un couple d'entrée nominal C^0 , l'arbre de sortie étant bloqué en rotation.
2. Introduction des matrices de rigidité précédentes dans un modèle dynamique. Détermination des modes propres et calculs des répartitions énergétiques.
3. Calcul des matrices de rigidité tangente des roulements pour un couple d'entré $C^0 + \Delta C$. Comparaison avec les résultats de 1.
4. Introduction dans le modèle dynamique, des matrices de rigidité des roulements obtenues en 3. Calcul des nouveaux modes propres et comparaison avec les résultats modaux de 2.

La procédure de calcul peut donc se résumer par le schéma de la Figure 3. 17.

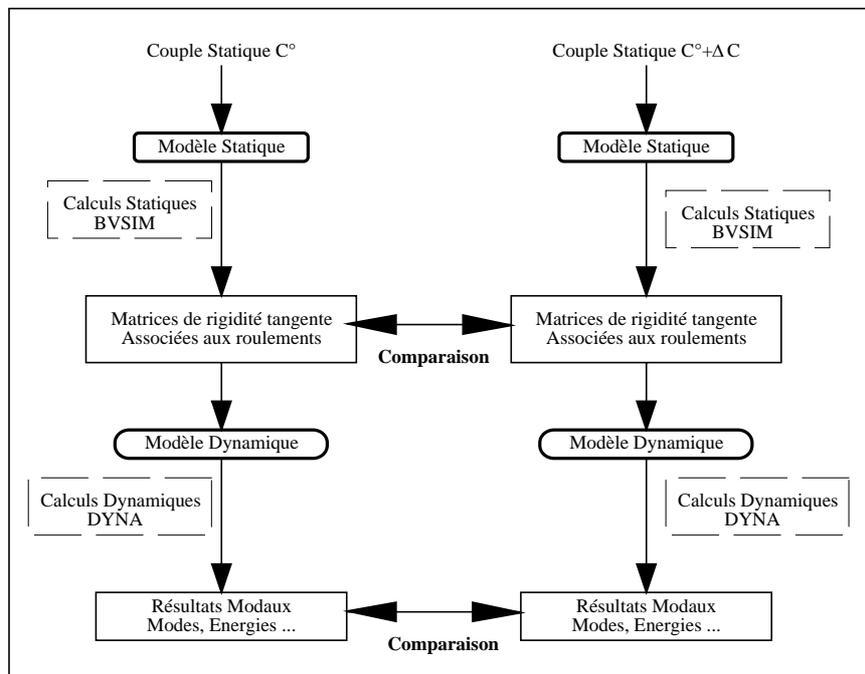


Figure 3. 17 : Schéma de principe des études réalisées

Pour l'analyse de l'évolution des matrices de rigidité ainsi que pour l'étude des modes propres, les résultats obtenus avec le chargement statique nominal sont pris comme référence. L'apparition de différences notables entre les modes propres obtenus pour le chargement nominal et ceux obtenus pour un chargement $C^0 + \Delta C$ permet de déterminer les limites de linéarité du modèle.

Les calculs statiques et dynamiques sont réalisés en première, les sorties étant bloquées en rotation. Les résultats modaux obtenus pour le couple nominal considéré (modèle a) sont très proches de ceux nommés "de référence" dans la partie précédente (modèle b): les écarts fréquentiels sont faibles et 14 des 15 modes considérés peuvent être appariés.

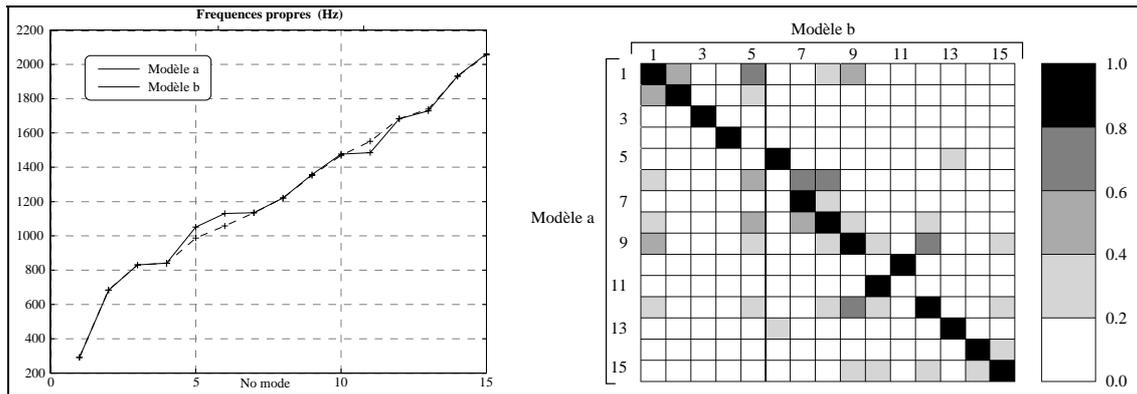


Figure 3. 18 : Comparaison entre les fréquences propres et les vecteurs propres des modèles a et b

Pour les études dynamiques réalisées dans cette partie, les dentures des engrenages sont considérées comme indéformables et modélisées par un ressort de rigidité 1.10^{13} N/m. Les variations considérées du chargement statique évoluent entre 0.7 fois et 1.21 fois le chargement nominal.

2.2.2 Influence sur les fréquences et les vecteurs propres

Afin de quantifier l'influence du chargement statique sur les fréquences propres du modèle dynamique, les variations relatives des fréquences propres sont visualisées. Soit :

$$\frac{f_{C^i} - f_{C^o}}{f_{C^o}} * 100 \tag{3.4}$$

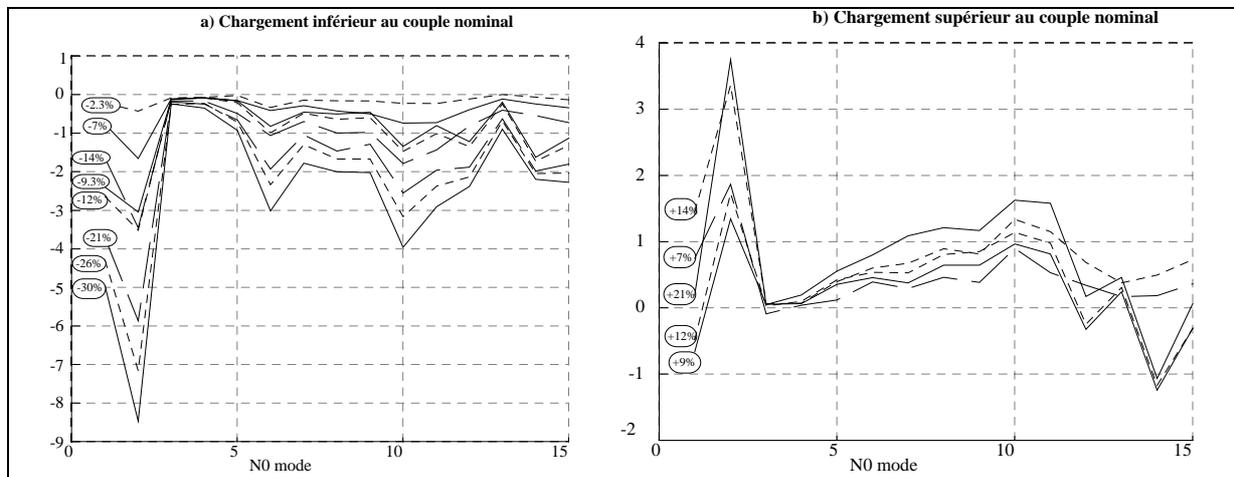


Figure 3. 19 : Variations relatives des fréquences propres

Pour l'ensemble des chargements statiques inférieurs au chargement de référence (Figure 3. 19 a)), la diminution du couple s'accompagne d'une diminution des fréquences propres. En effet, plus le chargement statique est "petit" et plus la rigidité tangente des roulements, c'est-à-dire la pente de la courbe $Q=f(\delta)$, est faible. Dans le modèle dynamique, les valeurs des rigidités des paliers vont donc diminuer, entraînant la baisse de certaines fréquences propres. Mais, pour les couples statiques considérés, cette diminution fréquentielle est nettement plus faible, que celle des chargements. En effet, pour les 15 premiers modes de la chaîne cinématique, elle ne dépasse pas les 9 % et, mis à part le mode 2, elle reste

inférieure à 5 %, alors que la diminution du chargement est supérieure à 30 %. Une première limite inférieure de variation acceptable du chargement peut être définie, elle correspond à une diminution relative de 21 % du couple d'entrée. Pour des chargements supérieurs à 80 % du couple nominal, les variations fréquentielles sont faibles, et mis à part le mode 2, elles ne dépassent pas 3 %.

Une augmentation du chargement statique (Figure 3. 19 b)) modifie beaucoup moins les fréquences propres, qu'une diminution de même amplitude. Pour l'ensemble des chargements considérés, les variations fréquentielles observées sont très faibles (inférieures à 4%). L'examen des fréquences propres, ne permet pas de définir une limite supérieure acceptable pour les variations de chargements. Mais, il apparaît que l'augmentation du chargement statique ne conduit pas nécessairement à une augmentation des fréquences propres. En effet, pour certains modes (modes 1 et 14) et, certains chargements, les fréquences propres diminuent alors que le couple et la rigidité des paliers augmentent. Mais, ces "baisses" sont très faibles et peuvent être associées aux imprécisions numériques. Pour les modes concernés, la diminution fréquentielle est d'environ 1 ou 2 Hz.

Dans les études précédentes, un critère global de corrélation a été défini. Il correspond à la valeur moyenne de la diagonale de la matrice de MAC. Ce critère a été calculé pour les différents cas de chargement et son évolution en fonction du chargement statique, a été représentée dans la figure suivante :

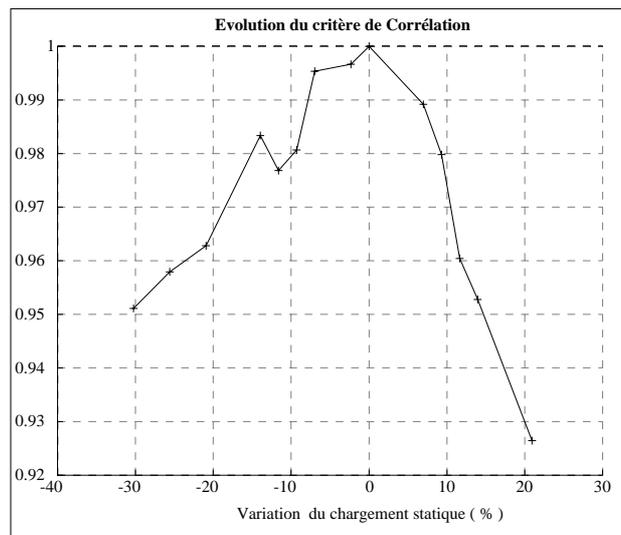


Figure 3. 20 : Evolution du critère global de corrélation

La courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe "0 %", une augmentation du chargement statique modifie d'avantage les vecteurs propres qu'une diminution de même amplitude. En effet, une augmentation de 10 % du couple statique conduit à un critère de corrélation identique, à celui obtenu pour une diminution de 20% de ce même couple. Néanmoins, et pour l'ensemble des chargements étudiés, ce critère de corrélation reste très élevé. Il est même supérieur à 0.95 dans 12 des 13 cas de chargements considérés, ce qui indique que les modifications des matrices de rigidité dues aux variations du chargement statique, ne perturbent que faiblement les vecteurs propres considérés.

L'étude plus détaillée des matrices de MAC permet de définir des chargements statiques "limites" à partir desquels le comportement modal du système évolue. Du point de

vue des vecteurs propres, la limite inférieure de variation acceptable correspond à une diminution de plus de 21 % du chargement statique. Pour des chargements supérieurs à 80 % du couple nominal, les vecteurs propres restent très bien corrélés à ceux obtenus pour un couple nominal. Pour des chargements plus faibles, la matrice de MAC n'est plus à diagonale dominante, ce qui indique que les vecteurs propres ne sont plus corrélés. Ce chargement "limite" est identique à celui obtenu lors de l'analyse des fréquences propres.

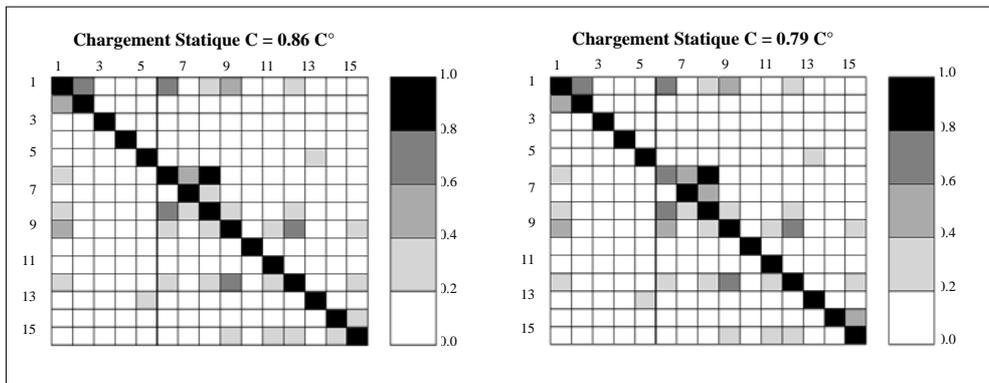


Figure 3. 21: Détermination du chargement inférieur limite à partir duquel les matrices de MAC ne sont plus à diagonale dominante. Les lignes représentent les vecteurs propres associés au chargement de référence (couple nominal C°) les colonnes correspondent aux vecteurs propres du chargement courant

De la même manière, il est possible de définir un chargement "supérieur limite" à partir duquel les vecteurs propres ne sont plus corrélés. Ce chargement correspond à 1.12 fois le couple statique, soit une augmentation de 12%.

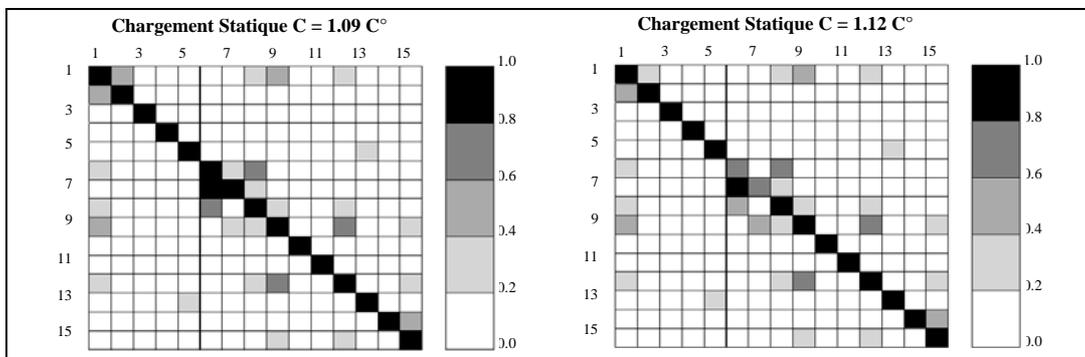


Figure 3. 22: Détermination du chargement supérieur limite à partir duquel les matrices de MAC ne sont plus à diagonale dominante. Les lignes représentent les vecteurs propres associés au chargement de référence (couple nominal) les colonnes correspondent aux vecteurs propres du chargement courant

L'étude des fréquences propres et des matrices de MAC en fonction du chargement statique a permis de définir, autour d'un chargement statique nominal C° , une plage de variation de chargement ΔC dans laquelle les résultats modaux obtenus sont "quasi" identiques (fréquences propres égales et vecteurs propres de même forme). Les valeurs limites pour les couples statiques sont, dans le cas de la première de :

- $0.79 C^\circ$ pour la limite inférieure, soit une baisse de 21 % ,
- $1.12 C^\circ$ pour la limite supérieure, soit une hausse de 12 %.

Ces valeurs limites assurent que les écarts relatifs en fréquences sont inférieurs à 3 % et, que tous les vecteurs propres peuvent être corrélés avec leurs homologues du modèle de

référence avec un critère de corrélation supérieur à 0.8. En fait, pour les limites choisies, le critère global de corrélation est supérieur à 0.96. Néanmoins même en dehors de ces limites, les modifications modales restent faibles et consistent uniquement en l'évolution d'un ou deux modes. Les variations fréquentielles relatives entre les deux chargements "extrêmes" (0.7 C° et 1.21 C°) ne dépassent pas les 4 %, sauf pour les modes 2 (13 %) et 6 (6 %), alors que la variation du chargement est de 73 %. Un vecteur propre (mode 6 ou 7) très sensible aux variations de chargement apparaît, alors que tous les autres vecteurs restent bien corrélés. Les valeurs limites ainsi définies, permettent de s'assurer que pour des problèmes de dynamiques "classiques" où par hypothèses les variations dynamiques des efforts restent inférieures à 10 % de l'effort statique, le comportement des paliers à roulement est assimilable à sa matrice de rigidité tangente issue des calculs statiques.

2.2.3 Etudes énergétiques

Les études énergétiques permettent d'affiner les résultats précédents et de montrer que les variations du couple statique autour du point de fonctionnement, ne modifie sensiblement que quelques modes propres, ceux mis en évidence par les matrices de MAC. Les variations des diagrammes énergétiques indiquent que ces vecteurs propres évoluent en forme et en orientation. En effet, si seule l'orientation des déformées évoluait, les termes de corrélation des matrices de MAC ne seraient pas égaux à un, mais les diagrammes énergétiques seraient identiques.

L'analyse de la participation énergétique des roulements aux déformations globales montre que leur contribution moyenne sur les 15 premiers modes est importante, voisine de 46 %, et peu sensible aux variations du couple statique. Cela signifie que pour les 15 premiers modes de la chaîne cinématique sous charge, près de la moitié des déformations a lieu dans les roulements. Il apparaît également que le mode 6 est le plus "perturbé" par des variations du chargement statique.

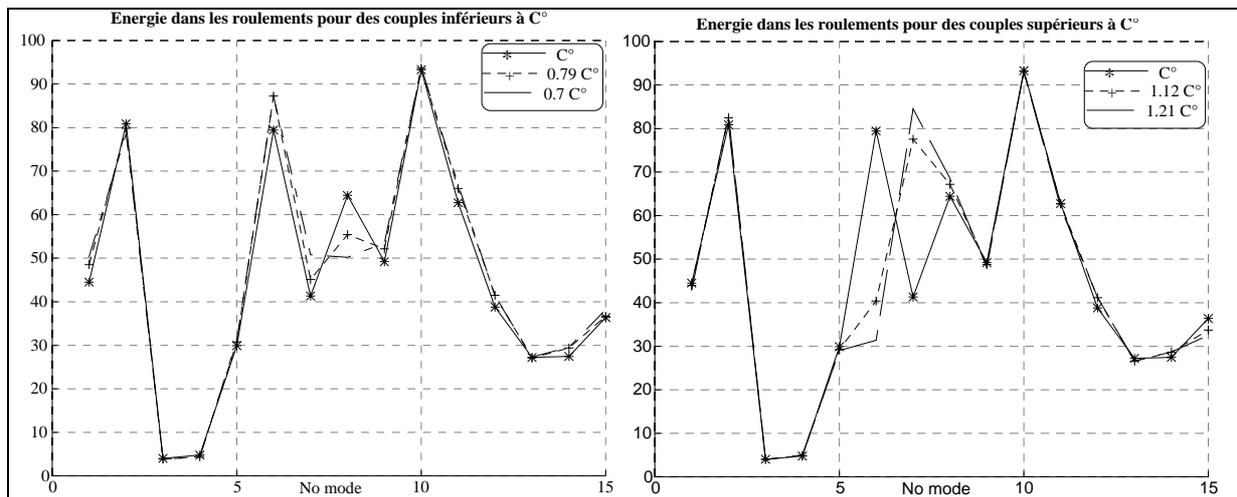


Figure 3. 23 : Pourcentage d'énergie de déformation dans les roulements pour divers chargements

L'examen des diagrammes de participation énergétique de chaque roulement en fonction des modes, permet de préciser ces résultats. Le pourcentage d'énergie de déformation dans les roulements R12, R21, R22, et R31 ne varie pas, lorsque le chargement statique évolue. En revanche, pour les autres roulements, c'est-à-dire les roulements à rouleaux coniques chargés axialement, les modifications sont plus importantes, en particulier lorsque le

couple statique augmente. De manière générale, les modes dont les vecteurs propres sont influencés par le chargement statique, sont fortement énergétiques pour les roulements, en particulier pour les roulements à rouleaux coniques chargés axialement. Les modes dont les fréquences propres sont les plus sensibles aux évolutions du chargement (modes 1 et 2), sont des modes énergétiques pour le roulement à billes R21.

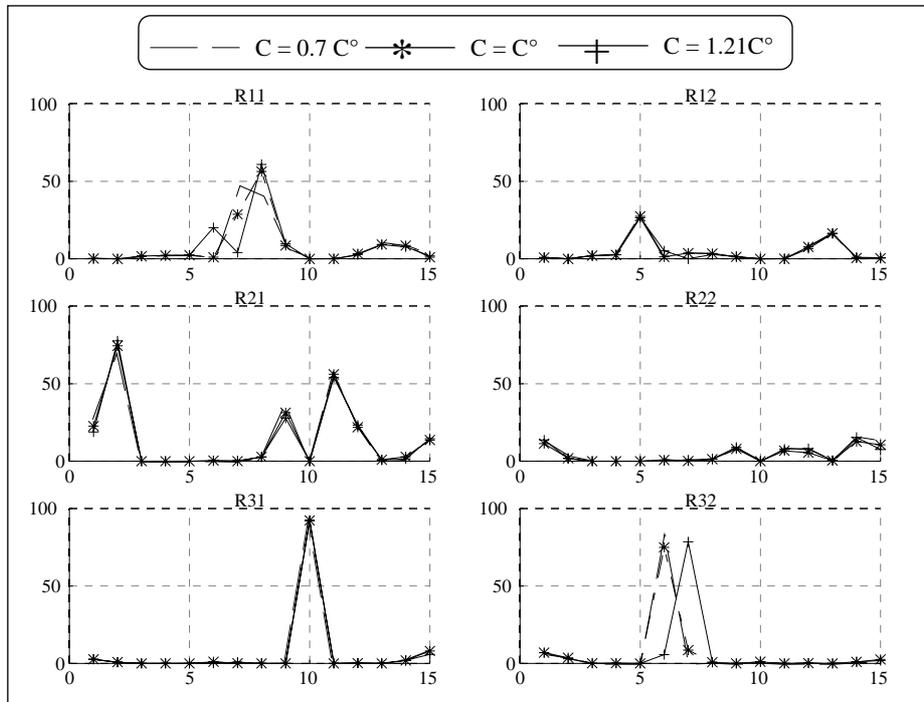


Figure 3. 24 : Pourcentage d'énergie de déformation dans chaque roulement et pour trois chargements

Les variations du chargement statique vont modifier, par l'intermédiaire des matrices de rigidité des roulements, les conditions aux limites du système et les déformées dynamiques des arbres de la chaîne cinématique.

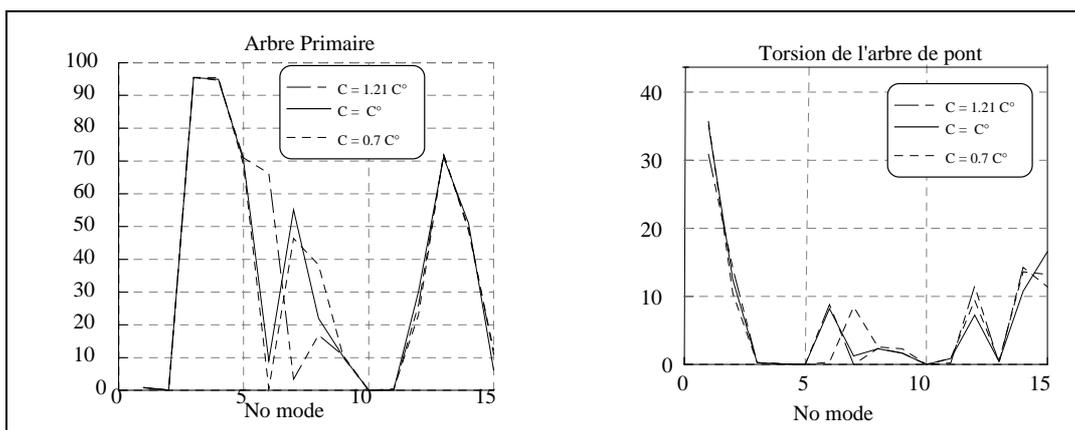


Figure 3. 25 : Energie de flexion dans l'arbre primaire et de torsion dans l'arbre de pont

Energétiquement, la modification des déformées dynamiques, se traduit par une évolution de la participation des arbres aux déformées globales. Les modes concernés sont des modes de déformation des arbres primaire et / ou de pont qui ont été mis en évidence par les matrices de MAC et pour lesquels la participation énergétique des roulements à rouleaux

coniques R11 et R32 évolue également. Lorsque l'énergie de déformation dans ces roulements diminue, l'énergie de flexion (primaire) ou de torsion (pont) de l'arbre associé augmente et inversement (Cf. Figure 3. 25). En revanche, la participation énergétique de l'arbre secondaire monté sur un roulement à billes et un roulement à rouleaux cylindriques, n'évolue pas avec le chargement statique.

2.2.4 *Etudes des modes sensibles aux variations de chargement*

L'examen plus détaillé des modes propres sensibles en fréquence, en forme ou en énergie de déformation aux variations de chargement permet : de s'assurer que ces modifications restent faibles et d'en estimer le "type".

Pour les modes propres dont les fréquences sont sensibles aux variations de chargement (modes 1, 2, 10 et, mais à un degré moindre, le mode 6), l'examen des déformées modales et, plus exactement des déplacements modaux généralisés dans le plan "radial", a montré que pour ces modes plusieurs roulements ne correspondent pas à des noeuds de vibration, dans certains cas (mode 2), ils peuvent même être sur des ventres de vibration.

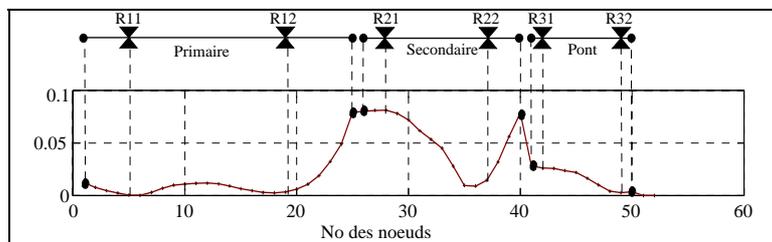


Figure 3. 26 : Déplacements modaux généralisés dans le "plan radial" pour le mode 2

Les matrices de rigidité n'assurent donc pas de "blocage complet" des arbres suivant cette direction. L'existence, pour certains modes de cette "pseudo-liberté" de l'arbre, ou des arbres permet d'expliquer la plus grande sensibilité des fréquences propres correspondantes. En effet, le système peut alors être "grossièrement" considéré comme un système "masses-ressorts" où les arbres jouent le rôle des masses, et les ressorts correspondent à la rigidité des roulements suivant cette "pseudo liberté". La modification du chargement conduit à une modification des valeurs de ces rigidités et perturbe ainsi les fréquences propres sans modifier la forme des modes (les vecteurs propres de ces modes restant, en général, bien corrélés aux vecteurs de référence). Cette hypothèse est en accord avec les résultats numériques : plus le nombre de roulements n'assurant pas le positionnement des arbres est grand et plus l'amplitude des "battements" au niveau des roulements est importante, plus le mode est sensible en fréquence (le mode 2 est en effet plus sensible que le mode 10). Et, à contrario, lorsque les éléments de roulement sont sur des noeuds de vibration, la fréquence propre est peu sensible aux variations de chargement.

Pour les vecteurs propres, seul un vecteur est "réellement" sensible aux modifications du chargement et s'éloigne "rapidement" de tous les vecteurs propres de référence. Compte tenu de la grande proximité fréquentielle des modes 6 et 7, à peine 4Hz d'écart pour le chargement de référence, le numéro d'ordre de ce mode peut évoluer avec le chargement, les deux modes permutant. Pour l'ensemble des chargements considérés, ce mode reste un mode de déformation globale des 3 arbres couplant tous les effets. Lorsque le chargement évolue, ce sont essentiellement les flexions de l'arbre primaire qui se modifient.

2.2.5 *Etudes des matrices de rigidité*

Les matrices de rigidité tangente associées aux roulements sont au coeur de la présente étude. Elles sont déterminées par un calcul statique non-linéaire, qui prend en compte l'ensemble de la boîte de vitesses : chaîne cinématique et carter (Cf. Chapitre 1). Dans le cas présent de l'étude dynamique de la seule chaîne cinématique, ces matrices se réduisent, pour chaque roulement, à des matrices pleines 6*6 où les termes se rapportant aux ddl de rotation axiale sont nuls. Ces matrices sont complexes et formées de 3 sous-matrices représentant des grandeurs physiques différentes, dans le chapitre 1 une méthode d'analyse de ces matrices a été décrite. Cette approche permet de comparer des termes appartenant à des sous-matrices différentes, et également de mettre en évidence les termes "dominants" et les variations significatives. Ces méthodes ont été appliquées aux matrices de rigidité obtenues pour le chargement de référence et pour des chargements "voisins".

Pour tous les chargements considérés [0.7C° - 1.21C°], les coefficients dominants des matrices de rigidité restent les mêmes. Ce sont les termes diagonaux associés aux "déplacements" radiaux, et les termes de couplage croisés associés $x\Theta_y$ et $y\Theta_x$. En revanche, les termes de "moyenne importance" (entre 33 % et 66 % de la valeur maximale) dépendent d'avantage du chargement.

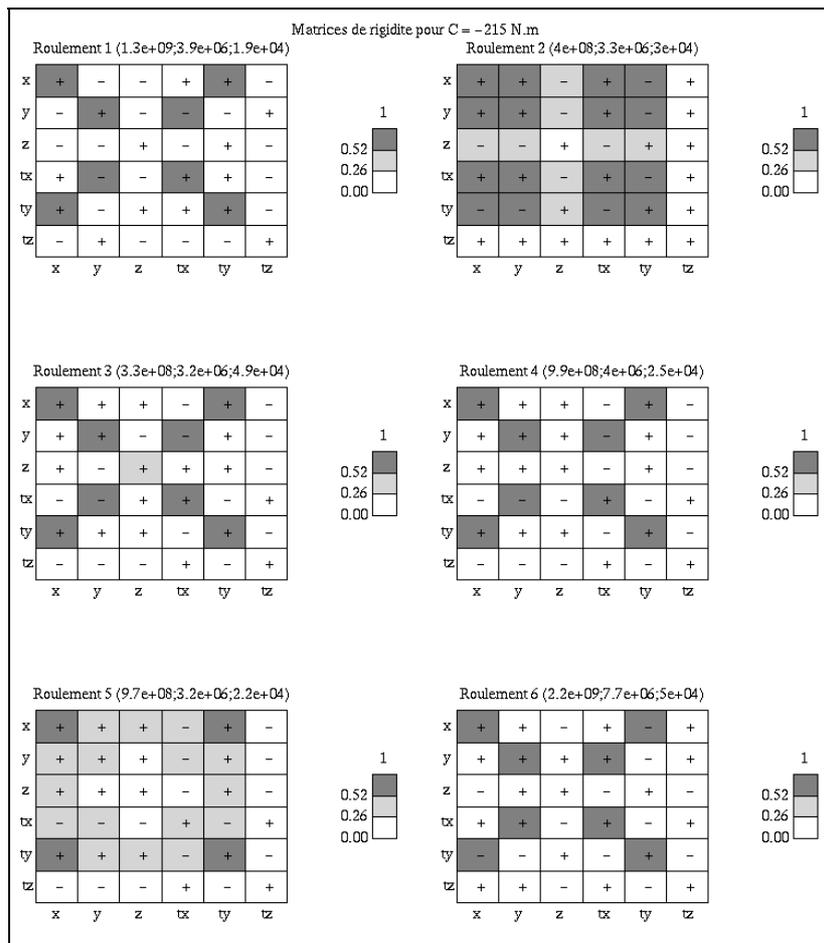


Figure 3. 27 : Matrices de rigidité des 6 roulements pour le chargement de référence (attention la gamme de couleurs n'est pas linéaire ...)

Les rigidités axiales K_{zz} sont faibles. Dans la majorité des cas, elles sont inférieures à 33 % de la rigidité radiale. Seul le roulement à billes possède pour des chargements supérieurs à $0.93C^\circ$, une rigidité axiale supérieure à 33 % de la valeur radiale. Cela signifie que le système est peu rigide en translation, ce qui explique les "déplacements axiaux rigides" relativement importants constatés lors des études modales. Pour les roulements à rouleaux coniques chargés "radialement" (R11 et R32), les termes de couplages sont plus importants que pour les autres roulements. Ils peuvent atteindre 26 % de la valeur maximale de rigidité.

Afin de visualiser, pour chaque roulement, les variations relatives des coefficients de sa matrice de rigidité tangente par rapport aux coefficients de la matrice de référence obtenue pour le couple de référence C° , il est possible (Cf. chapitre 1) de définir une matrice de variation relative ΔK^c :

$$\Delta K^c = \begin{bmatrix} \frac{K_T^c - K_T^{c^\circ}}{\max(|K_T^{c^\circ}|)} & \frac{K_{TR}^c - K_{TR}^{c^\circ}}{\max(|K_{TR}^{c^\circ}|)} \\ \frac{{}^T K_{TR}^c - {}^T K_{TR}^{c^\circ}}{\max(|K_{TR}^{c^\circ}|)} & \frac{K_R^c - K_R^{c^\circ}}{\max(|K_R^{c^\circ}|)} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Afin de quantifier globalement l'évolution des termes des matrices de rigidité, pour chaque roulement la valeur du plus grand terme de ΔK^c a été tracée sur la figure suivante en fonction du chargement :

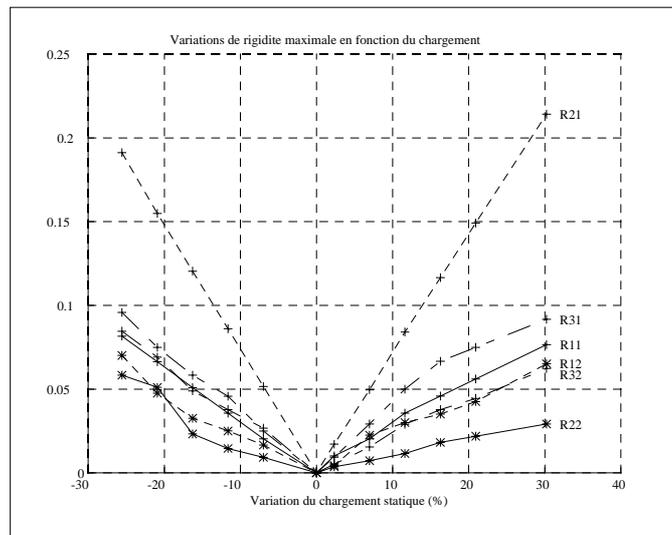


Figure 3. 28 : Evolution maximale en fonction du chargement des coefficients des matrices de rigidité des roulements

Pour toute la gamme de chargement considérée, les termes de la matrice de rigidité du roulement à billes sont ceux qui évoluent le plus. Néanmoins, dans la zone de "linéarisation" définie précédemment [$0.8C^\circ$ $1.12C^\circ$], ces variations restent inférieures à 15 % de la valeur du plus grand coefficient de la matrice de référence. L'évolution de cette "limite supérieure de variation" en fonction du chargement est fortement linéaire. Pour les autres roulements, l'évolution est plus faible (inférieure à 10 %) notamment pour le roulement à rouleaux cylindriques R22 où pour la majorité des cas, le plus grand terme de ΔK^c n'excède pas 4 %.

2.3 Conclusion

Lors des études dynamiques, le comportement des organes de transmission est linéarisé autour du point de fonctionnement statique. Les études réalisées dans cette partie ont permis de vérifier la validité de cette approche et d'en définir des limites pour l'étude du comportement d'une boîte de vitesses automobile.

Pour les engrenages, la rigidité introduite dans les modèles dynamiques correspond à la rigidité moyenne d'engrènement sous charge. Les études réalisées ont permis de montrer que dans le cas des boîtes de vitesses automobile, l'introduction de rigidités "numériques" comprises entre 5.10^8 et 1.10^{13} N/m conduit à des résultats modaux identiques en fréquences et en forme. D'un point de vue "dynamique" et pour la gamme de fréquences considérées (0-2000 Hz) cela signifie que pour des rigidités d'engrènement supérieures à 5.10^8 N/m les engrenages sont indéformables. Il n'y a donc pas de mode énergétique pour la denture. Des rigidités plus faibles modifient les résultats modaux : baisse de certaines fréquences, apparition de nouveaux modes et de modes énergétiques pour les dentures. Mais, pour des rigidités d'engrènement supérieures à 1.10^8 N/m, les modifications restent faibles et ne concernent que quelques modes. Afin de situer ces valeurs relativement aux rigidités des autres constituants, il est intéressant de noter que les rigidités principales des roulements sous charge dans ce modèle, sont 4 à 5 fois supérieures à 5.10^8 N/m. Les rigidités moyennes d'engrènement des engrenages de boîte de vitesses sont de l'ordre de 4.10^8 N/m. Et les engrenages "aéronautiques" utilisés par **C. Bard** dans sa thèse [1.1] avaient des rigidités moyennes d'engrènement supérieures à 1.10^8 N/m. Dans le cadre des études dynamiques globales des boîtes de vitesses automobile, il apparaît donc clairement que la rigidité moyenne d'engrènement n'est pas un paramètre très influent.

L'ensemble des études dynamiques globales réalisées a mis en évidence la forte participation des roulements aux déformations modales. Les études présentées dans cette partie, ont permis de définir une plage de variation du chargement, dans laquelle les résultats modaux obtenus sont quasi identiques à ceux obtenus pour le couple de référence. Ces valeurs limites assurent que les écarts relatifs en fréquence sont inférieurs à 3 %, et que tous les vecteurs propres peuvent être corrélés, avec un degré de corrélation supérieur à 0.96, à leur homologue du modèle de référence. Cette plage de variation est, dans le cas considéré, comprise entre 0.8 et 1.12 fois le couple de référence. Ces limites sont donc supérieures ou égales aux variations de chargements dynamiques, ± 10 %, couramment admises. Cela signifie que malgré le comportement non linéaire des paliers à roulement, l'erreur commise en assimilant la courbe $F=g(d)$ à sa tangente lors des études dynamiques est négligeable. De plus, même en dehors de ces limites, les modifications modales restent faibles et consistent uniquement à l'évolution d'un ou deux modes. Les variations fréquentielles relatives entre les deux chargements "extrêmes" considérés [$0.7C^\circ$ $1.21C^\circ$], dépassent rarement les 4 %, et n'excèdent jamais 13 % alors que, la variation du chargement est de 73 %. Pour les vecteurs propres, un seul vecteur est très sensible aux variations de chargement alors que, tous les autres, restent bien corrélés. Ces études ont également montré, qu'il n'existe pas de relation directe entre les modifications statiques des termes des matrices de rigidité et les conséquences sur les réponses modales. En effet, les matrices de rigidité tangentes des roulements à rouleaux coniques évoluent moins que les autres et, ce sont pourtant les seules, dont les diagrammes énergétiques évoluent lors des études modales. Ce sont également des modes de déformation des arbres primaire et de pont, c'est-à-dire des arbres montés sur des roulements à rouleaux coniques, qui sont les plus sensibles aux variations de chargement. Inversement, les matrices de rigidité des roulements à billes, évoluent d'avantage avec le

chargement alors, que les diagrammes énergétiques restent les mêmes et que les déformées modales de l'arbre secondaire n'évoluent pas.

3. INFLUENCE DE LA MODÉLISATION DES ROULEMENTS

Les études précédentes ont montré le rôle prépondérant des roulements sur le comportement dynamique des chaînes cinématiques, et en particulier leur forte participation aux déformées modales. Or, lors de ses études numériques et expérimentales réalisées sur une transmission par engrenage "simple" (2 arbres, 4 roulements, 1 engrenage cylindrique) **C. Bard** [1.1] a montré que la description et la modélisation des paliers sont très importantes pour obtenir des résultats fiables aux niveaux de la denture. L'évaluation de l'influence de ces paramètres lui a permis de recalibrer le modèle numérique et d'obtenir pour trois configurations de montages de bonnes corrélations expérimentales. De même, dans leurs travaux **T.C Lim** et **R. Singh** [2.12], [2.13], [2.14], [2.15]) ont indiqué que, dans le cas des études dynamiques globales, les modèles "simples" de paliers (rigidités scalaires équivalentes) ne permettent pas d'expliquer la transmission des efforts dynamiques. Ils ont alors proposé un modèle dynamique plus élaboré prenant en compte les couplages entre les différents effets.

Les études présentées dans cette partie ont pour objet d'estimer l'influence de la modélisation des roulements sur les modes propres de la chaîne cinématique d'une boîte de vitesses automobile en comparant les résultats modaux obtenus pour 4 modèles de paliers. Ces études sont réalisées sur la chaîne cinématique de la boîte de vitesses présentée précédemment dans les mêmes conditions de fonctionnement (couple d'entrée C° en tirage et sorties bloquées), pour les 5 positions d'engrènement.

3.1 Définition des modèles considérés

Quatre modèles dynamiques de roulement sont envisagés. Pour chacun d'eux, les rigidités tangentielles (scalaires ou matricielles) sont déterminées pour un chargement statique équivalent à un couple C° appliqué en entrée de boîte. Ces modèles, du plus "simple" au plus "complexe", sont formés par :

- **des rigidités tangente scalaires** calculées par les formules de Palmgren [2.19], le torseur des efforts appliqués à chaque roulement est déterminé en calculant l'équilibre des arbres soumis aux efforts des engrenages,
- **des matrices de rigidité tangente** obtenues, par un calcul statique non linéaire (Cf. Chapitre 1), pour des **roulements isolés** (bagues extérieures encastrées) et soumis aux torseurs des efforts déterminés précédemment et, ramenés aux noeuds de modélisation de la bague intérieure,
- **des matrices de rigidité tangente** obtenues par des calculs statiques non-linéaires pour l'ensemble **roulements et arbres mais sans les carters** (bagues extérieures encastrées) soumis à un couple d'entrée C°
- **des matrices de rigidité tangente** obtenues par des calculs statiques non-linéaires pour l'**ensemble de la boîte de vitesses** (roulements + arbres + carters).

Les évolutions entre les différents modèles dynamiques peuvent être schématisées, du plus "simple" au plus "complexe", de la manière suivante :

Modèle 4 :

Prise en compte du chargement global des roulements



Modèle 3 :

Prise en compte de la géométrie interne des roulements et de la répartition des charges pour des roulements isolés



Modèle 2 :

Prise en compte de l'influence couplée des roulements par des calculs statiques sur la chaîne cinématique



Modèle 1 :

Prise en compte de l'influence de l'environnement statique réel par l'intermédiaire du carter

3.1.1 Modèle 4 : Rigidités tangentes de Palmgren

Ce modèle correspond à une modélisation "classique" des roulements. Ces derniers sont modélisés par des rigidités élémentaires placées suivant les axes principaux du roulement.

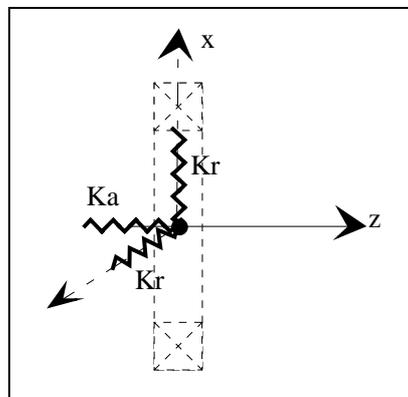


Figure 3. 29 :Schématisation du modèle 4

A partir d'hypothèses simplifiées (angles de contact ne variant pas, bagues intérieures et extérieures rigides...) et dans le cas de chargements simples (purement axiaux ou purement radiaux), **A. Palmgren** [2.19] établit des formules approchées des relations efforts-déplacements permettant de modéliser le comportement des roulements. Ces relations s'expriment par :

$$\delta = f(F, D, \alpha, \dots) \quad (3.6)$$

où δ représente l'écrasement élastique et F les efforts extérieurs appliqués au roulement. Les formules de Palmgren pour différents types de roulements soumis à des efforts uniaxiaux sont rappelées en annexe B.5.

Les études dynamiques consistent à étudier les petites perturbations qui apparaissent autour d'un point de fonctionnement statique. Pour la modélisation dynamique des roulements, il est donc nécessaire de connaître **les rigidités tangentés équivalentes** associées à chaque roulement. C'est-à-dire, pour chaque direction, le scalaire k_t tel qu'autour d'un chargement statique Q^o correspondant à une déformation δ^o , la relation effort-déplacement puisse être linéarisée et les efforts dynamiques Q_d puissent s'exprimer par :

$$Q_d = Q^o + k_t(\delta - \delta^o) \quad (3.7)$$

Ce qui correspond géométriquement à assimiler la fonction $Q=g(\delta)$ à sa tangente au voisinage de Q^o . Pour calculer ces rigidités tangentés, il est donc nécessaire de connaître le torseur des efforts statiques appliqués sur chaque roulement. Ceux-ci sont déterminés avec les hypothèses "classiques" de calcul des efforts aux roulements. A savoir que :

1. ces torseurs sont déterminés en écrivant l'équilibre statique de chaque arbre pris isolément,
2. les efforts sont appliqués au centre instantané de rotation du roulement,
3. les roulements sont assimilés à des contacts ponctuels et ne transmettent donc pas de moment,
4. un seul roulement par arbre est chargé axialement. Dans le cas de l'arbre secondaire, c'est le roulement à billes, pour les autres arbres, c'est celui vers lequel est dirigé l'effort axial.

Le problème de détermination des efforts statiques appliqués sur les roulements se ramène donc, au calcul des torseurs T_1 et T_2 (efforts appliqués par les arbres sur les roulements) permettant d'équilibrer le système suivant :

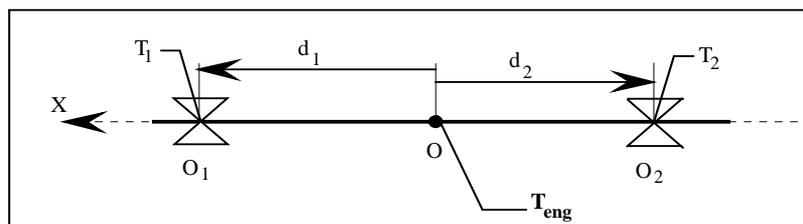


Figure 3. 30 : Equilibre statique d'un arbre isolé

Avec :

- T_{eng} le torseur des efforts extérieurs générés par les engrenages et appliqués à l'arbre en O,
- T_i le torseur des efforts appliqués par le système sur le roulement "i" au point d'application O_i . Ce sont les inconnus du problème et, d'après le principe "d'actions et de réactions" ils sont égaux à l'opposé du torseur des efforts de réaction appliqués à l'arbre par les roulements.

L'équilibre de l'arbre s'écrit donc :

$$T_1^0 + T_2^0 = T_{eng}^0 \quad (3.8)$$

Le développement de cette équation d'équilibre conduit à la résolution d'un système à 4 inconnues et 4 équations (les composantes axiales sont connues d'après l'hypothèse 4).

3.1.2 Modèle 3 : matrices de rigidités déterminées sur des roulements isolés

Cette modélisation correspond (*Chan Tien [2.2], Bourdon et al. [4.5]*) aux modèles dynamiques de roulement proposés par **T.C Lim et R Singh** ([2.13], [2.14], [2.15]). Dans ces modèles, les bagues sont considérées comme indéformables et les roulements sont modélisés par des matrices de rigidité tangente (5*5) couplant les 5 degrés de liberté d'un noeud de la bague intérieure (la rotation suivant l'axe du roulement étant évidemment libre). Pratiquement, les matrices de rigidité tangente de ce modèle sont obtenues en prenant chaque roulement isolément et en le discrétisant en corps roulants de manière identique à ce qui a été présenté dans le chapitre 1. Les bagues extérieures sont encastrées et les efforts sont appliqués sur les bagues intérieures ramenées en un noeud de l'axe. Les efforts appliqués sont ceux déterminés dans le modèle 4 mais calculés aux points de modélisation de la bague intérieure. Ces noeuds peuvent être distincts des "centres de rotation" des roulements, et des moments peuvent alors être appliqués.

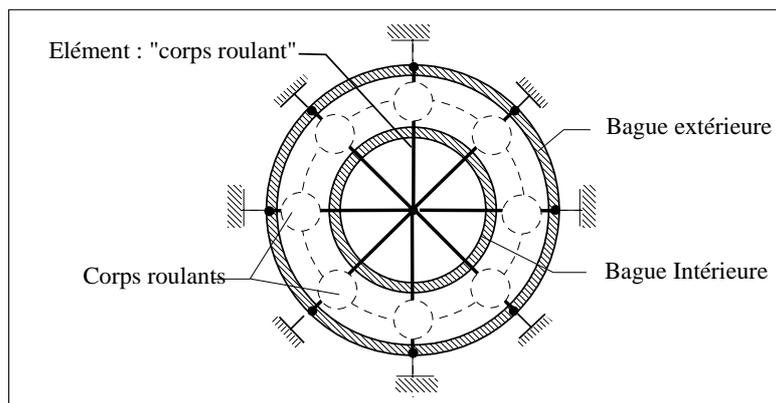


Figure 3. 31 :Schématisation du modèle "statique" pour le modèle dynamique 3

A l'issue des calculs statiques, une matrice de rigidité tangente est obtenue pour chacun des Z corps roulants. Après assemblage de ces Z matrices et élimination des lignes et des colonnes associées aux ddl bloqués, une matrice de rigidité tangente (5*5) est obtenue. Cette matrice est équivalente à celle obtenue par **T.C. Lim et R. Singh**, et est introduite dans le modèle dynamique. Concrètement, cela revient à associer à chaque corps roulant un

élément "rigidité" liant un noeud de la bague extérieure à un noeud de la bague intérieure puis à encastrer la bague extérieure.

*Remarque : l'approche proposée par Lim et Singh permet de déterminer une matrice de rigidité globale (5*5) associée au roulement mais pas, contrairement à l'approche statique décrite dans le chapitre 1, une matrice par corps roulant. Dans le cadre d'une approche dynamique avec prise en compte des carters, cette matrice "globale" est alors "répartie uniformément" entre les différents noeuds du maillage des bagues.*

3.1.3 Modèle 2 : matrices de rigidité déterminées à l'aide de la chaîne cinématique

Les études statiques ont montré que les roulements d'un même arbre, en particulier les roulements à rouleaux coniques, interfèrent entre eux et que le torseur des efforts "réellement" appliqués aux roulements est différent de celui calculé par l'approche "classique". L'objectif du modèle 2 est de dissocier l'influence de ces couplages, de celle du carter. Dans ce cas, les matrices de rigidité tangente sont déterminées à l'aide d'un modèle statique formé des arbres et des roulements. Le carter et les bagues extérieures sont supposés indéformables. En pratique, afin de pouvoir réutiliser le modèle condensé décrit dans le chapitre 1, les calculs ont été réalisés en encastrant les noeuds associés aux bagues extérieures des différents roulements.

3.1.4 Modèle 1 : Modèle complet

Dans ce modèle, les roulements sont modélisés par des matrices de rigidités issues d'un calcul statique global, prenant en compte l'ensemble de la boîte de vitesses (Chaînes cinématique et carter) comme décrit dans le chapitre 1. Ce modèle est le plus proche de la réalité technologique du roulement et sa validité "statique" a été vérifiée (Rigal et al. [1.30], Bourdon et al. [4.1]). De plus, les études dynamiques expérimentales réalisées sur une chaîne cinématique "réduite" ont montré que l'utilisation de ce modèle de roulement conduit à des résultats numériques correctement corrélés aux résultats expérimentaux.

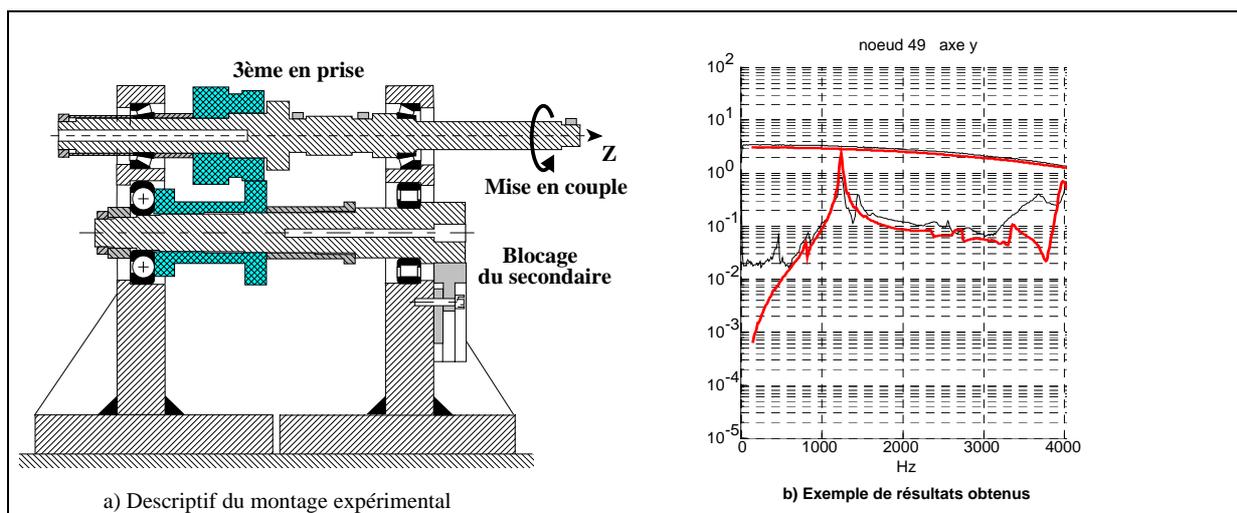


Figure 3. 32 : Etudes expérimentales sur une chaîne cinématique "réduite" : dispositif expérimental et comparaison des Fonctions de transferts, numérique (en gras) et expérimentale (trait fin)

Ces études expérimentales consistaient à monter les arbres primaire et secondaire de la boîte et leurs roulements dans un carter "rigide" et, à bloquer la "sortie" au niveau de la couronne de pont, puis, à appliquer un couple statique en "entrée" de l'arbre primaire, par l'intermédiaire d'un levier et d'un cousin gonflable. Le montage précédent étant alors excité à l'aide d'un marteau d'excitation et les accélérations mesurés en plusieurs noeuds de l'arbre. Les fonctions de transfert ainsi obtenues, sont comparés aux fonctions de transfert obtenues à l'aide de modèles numériques. L'ensemble des résultats obtenus montre une très bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux. L'ensemble de ces travaux faisant actuellement l'objet d'une thèse au Laboratoire C.A.S.M..

Dans la suite de cette partie, les résultats modaux obtenus pour le modèle 1 sont pris comme référence.

3.1.5 *Remarques sur la modélisation dynamiques des engrenages*

Dans le modèle statique, les éléments "engrenage" développés permettent de transmettre les efforts générés par les engrenages aux points de liaison effectifs des pignons sur les arbres (Chapitre 1). Les éléments d'engrenages "dynamiques" eux, ne permettent de relier que les centres des pignons. Afin que, les modèles statiques et dynamiques soient équivalents, des noeuds supplémentaires, correspondant aux centres des pignons fous, ont été ajoutés. Ils sont reliés aux noeuds des arbres correspondant aux centres des crabots par des barres rigides.

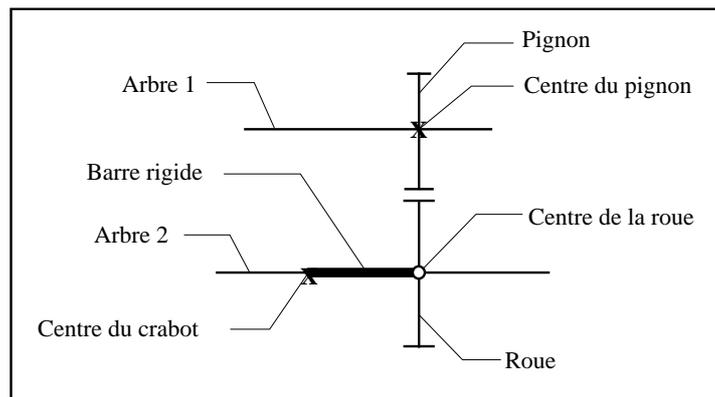


Figure 3. 33 : Mise en place des éléments d'engrenage en dynamique

En pratique, les barres rigides ont été modélisées par des éléments d'arbre de masse faible (masse volumique égale à 10 Kg.m^{-3}) et de grande rigidité (module d'Young $1.10^{20} \text{ N.m}^{-2}$ et diamètre de 4 cm). Il a été vérifié que ces éléments :

- ne créent pas de problèmes numériques lors des calculs effectués,
- assurent des déplacements de corps solides entre les deux noeuds.

Les 6 engrenages considérés sont présents dans ce modèle. Pour les engrenages en prise, la rigidité moyenne d'engrènement a été fixée à 3.10^8 N/m . Cette valeur se situe dans la zone "critique" définie lors des études sur l'influence de la rigidité moyenne de denture (Cf. §2.1). De plus, cette valeur correspond à la rigidité moyenne de l'engrenage de 4^{ème} (sans correction de denture) soumis à un couple de C° . Pour les autres engrenages, présents dans le

modèle, mais possédant un pignon fou, la rigidité moyenne est nulle, ce qui empêche toute transmission d'efforts.

3.2 Influence globale de la modélisation des roulements sur les modes propres

3.2.1 Influence sur les fréquences propres

Afin d'évaluer l'influence de la modélisation des roulements, sur les fréquences propres de la chaîne cinématique, les fréquences obtenues pour les différents modèles peuvent être représentées sur un même diagramme. Pour les 5 vitesses considérées, les 4 modèles de roulements conduisent à des résultats différents, les répartitions des fréquences propres ne sont pas identiques. Il est possible de définir des fréquences "caractéristiques" qui n'apparaissent que dans un seul des 4 modèles. Les résultats obtenus, pour le cas de la première vitesse, sont présentés dans la figure suivante et les fréquences "caractéristiques" sont mises en évidence.

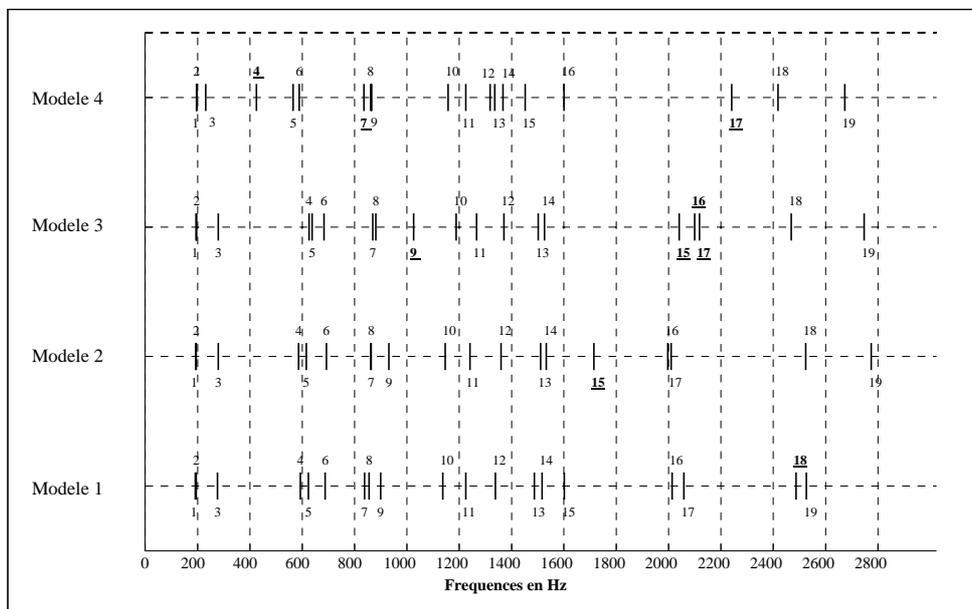


Figure 3. 34 : Comparaison des fréquences propres de chaque modèle en Première

Pour l'ensemble des positions d'engrènement, la répartition des fréquences propres du modèle 4 (rigidités scalaires) se distingue nettement des autres : nombre de fréquences propres "caractéristiques" supérieures aux autres modèles et correspondant à des fréquences "basses" (pour toutes les "vitesses", il y a au moins un mode du modèle 4 de fréquence inférieure à 800 Hz, qui ne se retrouve pas dans les autres modèles). Dans sa thèse, **T.C. Lim** [2.12] compare les résultats modaux obtenus avec des modèles "simples" et ceux obtenus avec son propre modèle (comparable au modèle 3 de cette étude). Il indique que les modèles simples conduisent à des fréquences propres inférieures à celles de son modèle. Les calculs effectués pour les différentes positions d'engrènement, et donc pour des efforts statiques différents, montrent que cela n'est vérifié que dans le cas de la première et de la seconde, c'est-à-dire les cas où les roulements sont les plus chargés, et pour des fréquences propres inférieures à 2 000 Hz. Pour les autres positions, les écarts entre les fréquences propres des modèles 3 et 4 sont plus complexes. Ces différences entre les conclusions de **T.C. Lim** et, les résultats observés ici, peuvent s'expliquer par la présence dans le modèle 3 de jeux "réalistes"

dans les roulements, alors que les valeurs de jeux internes utilisées par **T.C. Lim** sont très faibles ($5 \cdot 10^{-5}$ mm). Ces jeux ont, évidemment, un rôle plus important dans la répartition des charges et donc sur les matrices de rigidité, lorsque les chargements sont faibles.

La prise en compte de la déformabilité statique des arbres et des interactions entre les différents roulements, en particulier les roulements à rouleaux coniques (modèles 1 et 2) conduit à des fréquences propres plus basses, que celles obtenues en déterminant les matrices de rigidités des paliers isolés (modèle 3). Il semble donc délicat, d'utiliser des résultats statiques obtenus sur des roulements isolés, pour étudier le comportement dynamique global d'un mécanisme. La prise en compte de la rigidité statique du carter (modèle 1), n'influence sensiblement que les fréquences propres élevées. La valeur de cette fréquence "limite" dépend de l'engrenage considéré. En première, elle est de 1 600Hz, et de 1 200 Hz en cinquième. Au-dessous de cette "limite", les fréquences propres obtenues avec un carter souple (modèle 1) ou un carter rigide (modèle 2) sont très voisines. Néanmoins, pour des chargements statiques importants (première, seconde troisième), la prise en compte de la rigidité statique du carter conduit à des fréquences propres légèrement plus basses. Cela signifie que dans le cas de chargements statiques importants, la prise en compte de l'environnement statique complet (arbres et carters) diminue la rigidité globale de l'ensemble des roulements.

3.2.2 *Influence globale sur les vecteurs propres*

Pour les différentes "vitesses", la colinéarité entre les vecteurs propres obtenus avec les modèles 2, 3, 4 et du modèle de référence (modèle 1) a été évaluée à l'aide des matrices de MAC. Seules les matrices de MAC les plus significatives sont représentées par la suite.

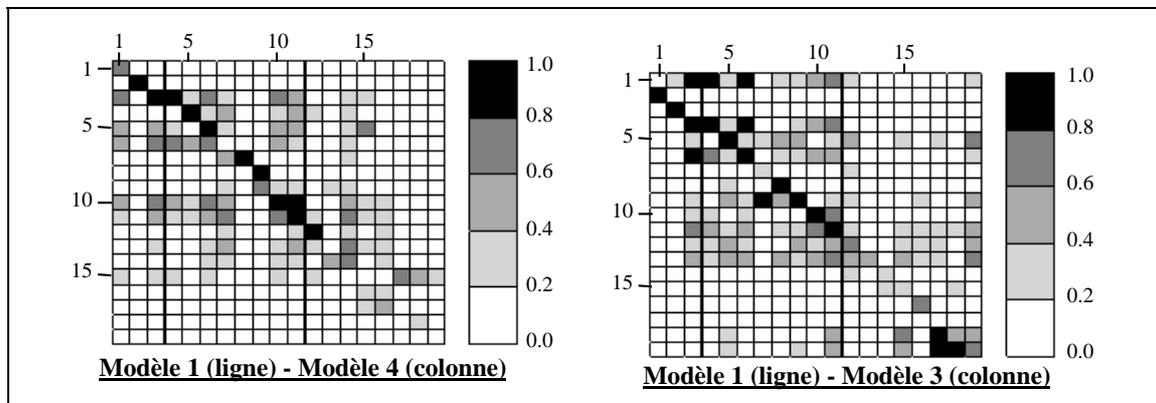


Figure 3. 35 : Matrices de MAC pour les modèles 4 et 3 (en première)

Les modèles 3 et 4 (Cf. Figure 3. 35) apparaissent comme insuffisants pour décrire correctement les vecteurs propres de la chaîne cinématique puisque, seuls 50 % des modes environ peuvent être appariés en forme. De plus, le modèle 4 ne permet pas de déterminer correctement les premiers modes propres de la chaîne cinématique. En effet, pour l'ensemble des vitesses considérées, le modèle 1 possède 2 ou 3 modes de fréquences inférieures à 200 Hz, qui sont plus ou moins représentés en fréquences dans le modèle 4, mais très mal en forme propre. Pour les modes "appariables", les fréquences propres du modèle 3 sont supérieures à celles du modèle 1. Des modes considérés dans la partie précédente comme caractéristiques de ce modèle, peuvent néanmoins s'apparier. Cela correspond alors, à des variations importantes des fréquences propres. En revanche, d'autres modes voisins fréquemment ne sont pas corrélés. Lors de la détermination des matrices de rigidité associées aux roulements, le choix de l'environnement (rigide ou flexible) va modifier de

manière "découplée" les fréquences propres et les vecteurs propres. Pour certains modes, la prise en compte d'un environnement flexible va modifier la forme ou l'orientation des vecteurs propres mais, sans changer les fréquences propres. Inversement, pour d'autres modes, la prise en compte de l'environnement va se traduire par la diminution des fréquences propres mais, sans modification sensible des vecteurs propres. D'autres modes enfin, ne sont présents que dans un seul des deux modèles.

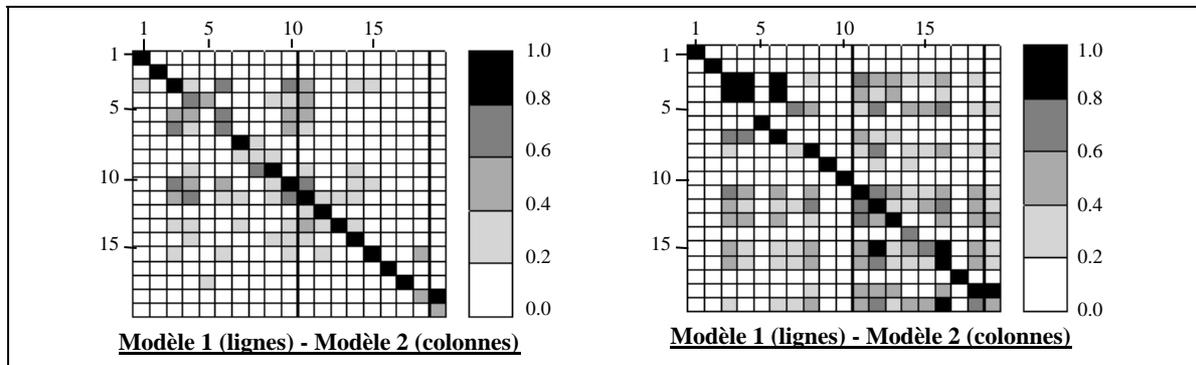


Figure 3. 36 : Matrices de MAC pour le modèle 2 en première et cinquième

L'introduction de la flexibilité des arbres et des couplages entre les roulements à rouleaux coniques, permet une bien meilleure représentation des vecteurs propres : 79 % des vecteurs sont appariables entre le modèle 2 et le modèle 1 en forme et, en fréquences. L'influence statique du carter apparaît pour des fréquences propres relativement "basses" et est surtout sensible en première où seule la moitié des modes de fréquence inférieure à 1 000 Hz sont appariables en forme propre.

3.3 Etudes énergétiques

3.3.1 Etudes globales des énergies de déformation

L'examen des diagrammes de répartition, en fonction des modes, de l'énergie potentielle totale en flexion, torsion et extension met en évidence les phénomènes de couplages entre les déformées (Cf. Figure 3. 37). Néanmoins, des modes où les effets d'extension sont majoritaires (supérieur à 90 %), apparaissent dans tous les modèles, lorsque le chargement statique des roulements diminue (troisième, quatrième, cinquième). Lors de l'examen de la répartition des énergies dans les roulements (Cf. § 3.3.3), il apparaît que ces modes correspondent à des modes très énergétiques pour les roulements. Ce sont donc, des modes "pseudo rigides", assimilables à des systèmes masses ressorts, les arbres jouant le rôle de masses indéformables et les roulements jouant celui des ressorts. Les rigidités de ces "ressorts" dépendant du chargement statique appliqué aux roulements, il est donc normal que, pour une bande de fréquences considérée, ces modes "pseudo rigides" n'apparaissent que pour certains cas de chargement.

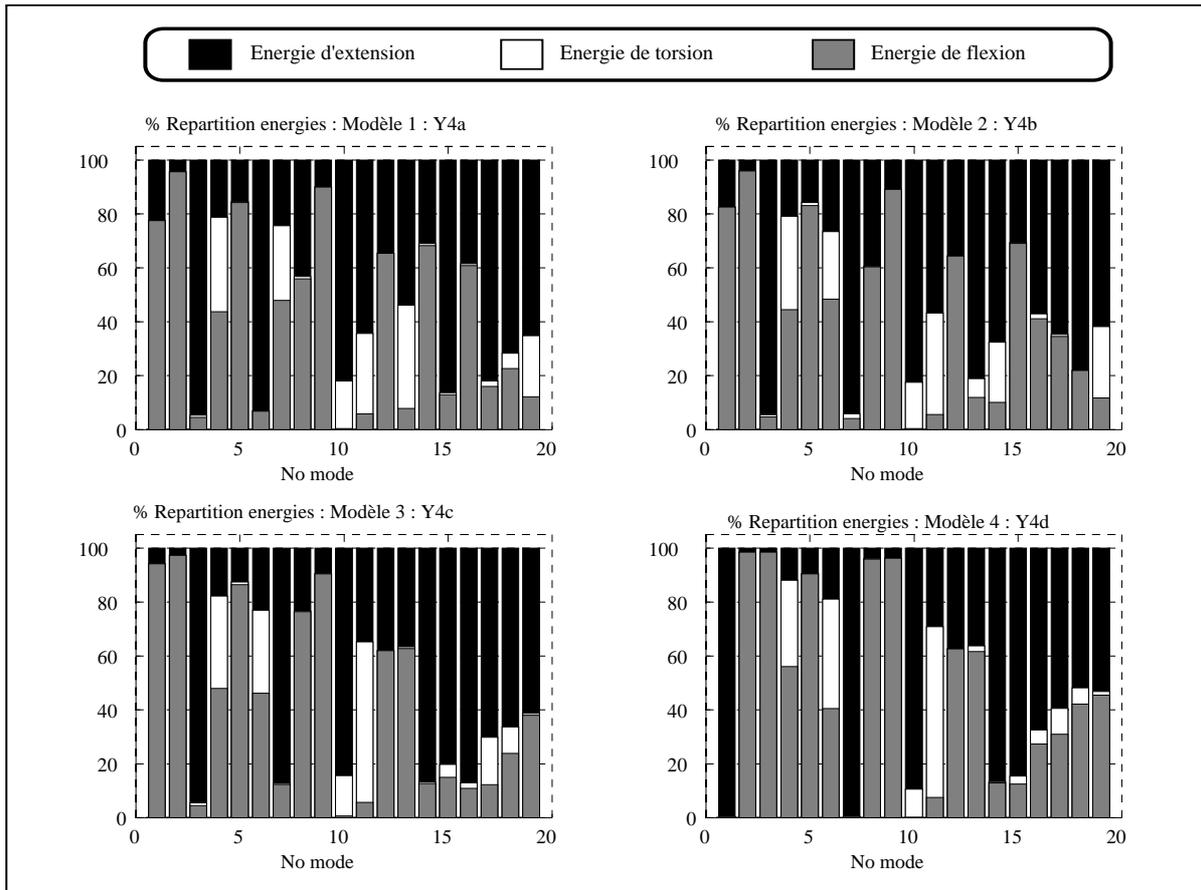


Figure 3.37 : Participation des énergies de déformations élémentaires en fonction des modes, pour les 4 modèles de roulements en quatrième.

Pour l'ensemble des 5 vitesses considérées, le diagramme énergétique du modèle 4 se distingue des autres, en particulier des diagrammes des modèles 1 et 2. En quatrième, ce modèle possède des modes d'extension pure, sans aucun couplage, (modes 1 et 7) qui n'existent dans aucun des autres modèles. Ceci provient des matrices de rigidité associées aux roulements qui, dans le cas du modèle 4 sont diagonales et, n'assurent donc aucun couplage entre les degrés de liberté. Les directions propres de ces matrices sont également les directions propres des arbres de la chaîne cinématique. Pour les autres modèles, les matrices de rigidité étant "pleines", leurs directions principales ne sont plus colinéaires à celles des arbres, et les déformations associées doivent nécessairement s'accompagner de flexion ou de torsion, même faible, des arbres. Ces différences entre les diagrammes énergétiques, indiquent que les vecteurs propres du modèle 4 se distinguent des vecteurs des autres modèles, par leur forme générale et, pas seulement par leur orientation. Ces différences notables peuvent remettre en question, les méthodes modales ou pseudo-modales utilisées ultérieurement. Les autres modèles, formés par des matrices de rigidité pleines qui assurent ces couplages, possèdent des diagrammes énergétiques globalement plus ressemblants.

Les diagrammes énergétiques du modèle 3 sont plus semblables à ceux des modèles 1 et 2 que, les diagrammes du modèle précédent. Néanmoins, des différences apparaissent. L'influence du couplage entre les roulements et de la prise en compte de la déformabilité statique des arbres, se traduisent essentiellement par l'apparition ou la disparition de modes où l'énergie d'extension est majoritaire.

Il existe une bonne ressemblance, entre les diagrammes énergétiques des modèles 1 et 2 qui doit être mis en relation avec la bonne ressemblance des matrices de MAC correspondantes. Pour les modes "appariables" avec un MAC supérieur à 0.8, des différences peuvent apparaître lorsque, le MAC est plus proche de 0.8 que de 1. L'analyse plus détaillée de la répartition énergétique, pour les modes appariés, montre que les différences sont "faibles". Cela confirme le choix de 0.8 comme critère d'appariage. Pour les modes non appariables (MAC inférieur à 0.8) deux cas peuvent apparaître :

- les diagrammes énergétiques sont identiques, les vecteurs propres ont alors la même "forme" mais une orientation différente,
- les diagrammes énergétiques sont différents ce qui traduit un comportement différent : les vecteurs propres ont des formes différentes.

Dans le cas des modèles 1 et 2, l'étude de ces vecteurs non appariés par les matrices de MAC, ne fait pas apparaître la dominante d'un phénomène sur l'autre : 50% de ces vecteurs pourrait être appariés en forme mais, avec une orientation différente, les autres possèdent des diagrammes énergétiques, notablement différents. L'influence statique du carter se traduit donc par des orientations différentes de certains vecteurs ou par l'apparition de vecteurs de forme différente, bien qu'associés à des fréquences propres voisines.

3.3.2 *Etudes globales des énergies cinétiques*

Les 4 modèles considérés possèdent des matrices de masse identiques. Les différences entre les diagrammes des énergies cinétiques proviennent donc uniquement de différences de forme entre les vecteurs propres.

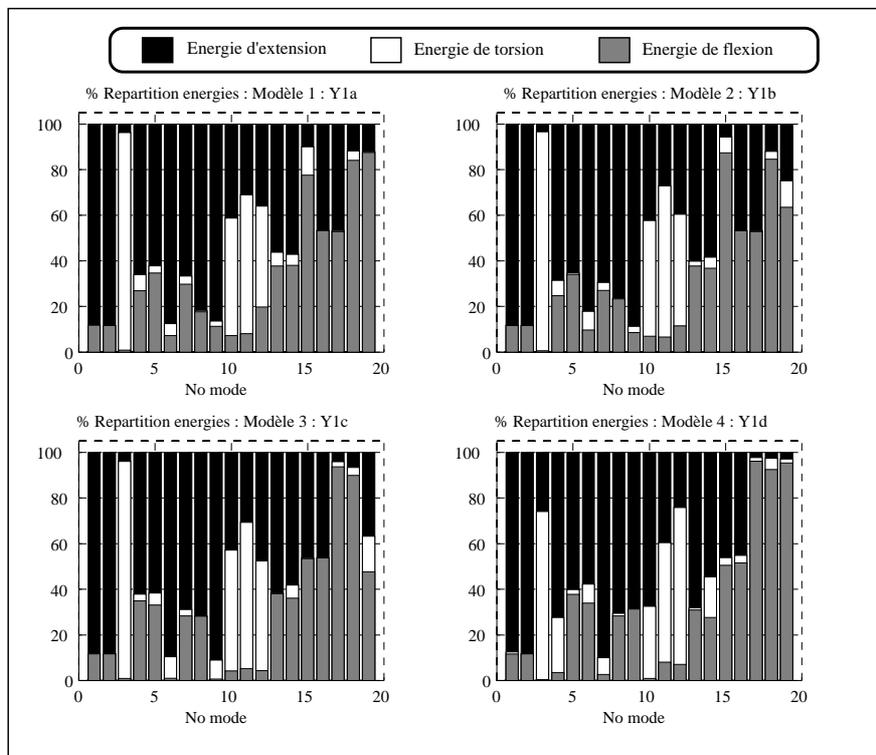


Figure 3. 38 : Participation des énergies cinétiques élémentaire en fonction des modes pour les 4 modèles de roulement en première.

Il est difficile de quantifier globalement l'évolution du partage des énergies entre les modèles. En effet, puisque la somme des énergies reste égale à 100%, si un type d'énergie augmente, les autres doivent nécessairement diminuer. Néanmoins, l'étude plus spécifique des énergies de torsion est intéressante ici. En effet, les modèles utilisés ne comportent pas d'inerties additionnelles, les déformations de torsion, proviennent uniquement des déformations des arbres.

Pour les chargements statiques importants (première, seconde) des différences entre le modèle 4 et les autres modèles apparaissent dès les basses fréquences (Cf. Figure 3. 38). Pour les modèles 1, 2 et 3, l'énergie cinétique du mode 3 est, pour plus de 60% de l'énergie de torsion, ce mode ne se retrouve pas dans le modèle 4 ou bien avec une part d'énergie de torsion beaucoup plus faible. Pour les chargements statiques plus faibles (troisième, quatrième, cinquième), les différences entre le modèle 4 et les autres modèles, en particulier les modèles 1 et 2, apparaissent plus nettement pour des fréquences plus élevées mais, là aussi la participation des énergies cinétiques de torsion est modifiée (Cf. Figure 3. 39). Des modes très énergétiques en torsion apparaissent dans le modèle 4 (mode 11 en quatrième) et ne se retrouvent pas dans les modèles 1 et 2 mais, éventuellement, dans le modèle 3.

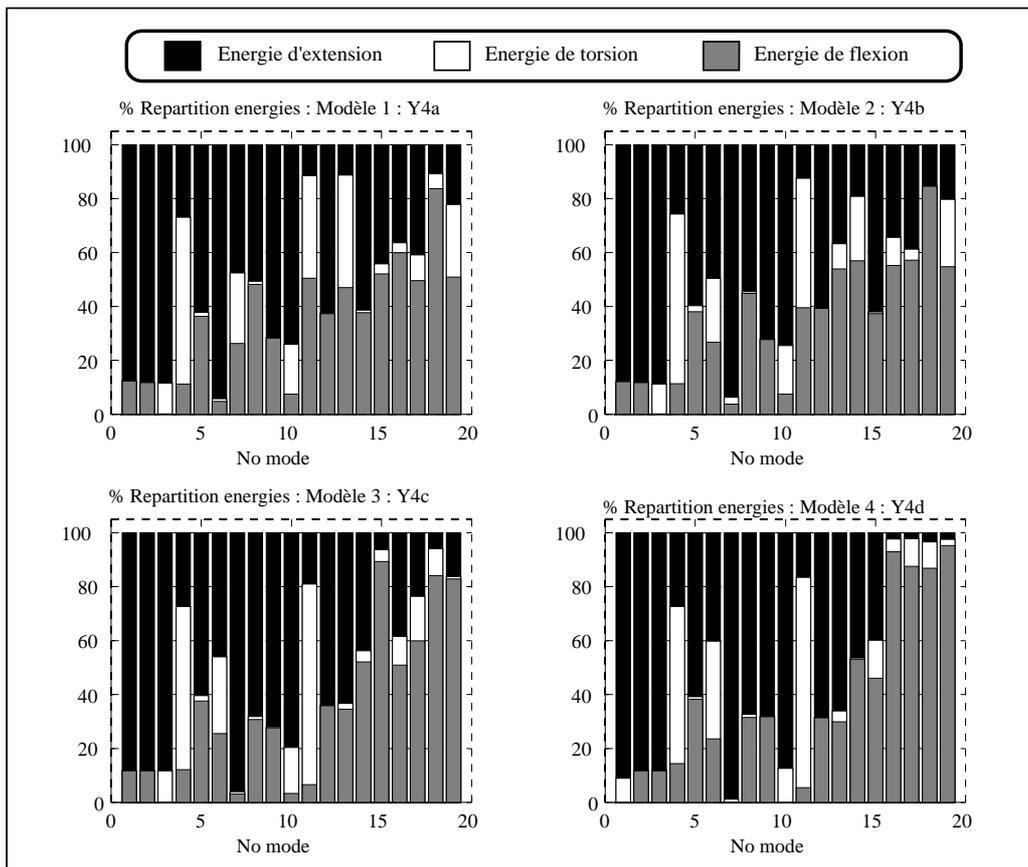


Figure 3. 39 : Participation des énergies cinétiques élémentaire en fonction des modes pour les 4 modèles de roulement en quatrième.

En première et en seconde, pour les basses fréquences, le modèle 3 possède des diagrammes énergétiques très semblables à ceux des modèles 1 et 2. Néanmoins, il apparaît en première des modes, 5 et 9, où l'énergie d'extension (arbres et masses ponctuelles) est largement majoritaire (90 %) mais, où l'énergie de flexion est quasiment nulle. Ce type de mode, ne se retrouve pas dans les modèles 1 et 2 lorsque le chargement statique est élevé.

Pour les autres vitesses, les diagrammes énergétiques du modèle 3 sont souvent plus proches de ceux du modèle 4 que de ceux des modèles 1 et 2. Les modèles 1 et 2 possèdent des diagrammes énergétiques très voisins. Il apparaît néanmoins une légère augmentation des énergies cinétiques de torsion pour le modèle 1 surtout sensible pour les fréquences plus élevées.

Pour une même "vitesse", les différences apparaissant entre les modèles, confirment donc, que la modélisation des roulements influence fortement la forme des vecteurs propres. La modification de la répartition des énergies cinétiques de torsion prouve, que la modélisation statique des roulements influence le comportement en torsion des arbres de la chaîne cinématique alors que, paradoxalement, les roulements ne modifient pas les rigidités de rotation axiale du système. Ce phénomène peut s'expliquer par la présence de dentures hélicoïdales et l'introduction de matrices de rigidité "pleines" pour modéliser les roulements. En effet, les dentures hélicoïdales couplent les déformations de torsion à des déplacements "rigides" axiaux des arbres. Or, à cause des matrices de rigidité "pleines", les directions principales des roulements ne sont plus les directions principales des arbres et ces déplacements axiaux vont être couplés aux autres déformations.

3.3.3 *Energies potentielles dans les roulements*

Pour la gamme de fréquences considérée [0-2 800 Hz] et, pour l'ensemble des modèles de roulements envisagés, les paliers apparaissent comme des organes contrôlant en moyenne, plus de 40 % des énergies de déformations modales. La modélisation des roulements, par des matrices de rigidité tangente couplant les 5 degrés de libertés et, déterminées dans un environnement statique flexible, tend à augmenter l'influence des paliers sur le comportement modal de l'ensemble de la chaîne cinématique. Chaque modèle possède entre 2 et 6 modes où plus de 75 % des déformations ont lieu dans les roulements. Le tableau suivant regroupe, pour chaque vitesse et chaque modèle de roulement, le nombre de modes où plus de, respectivement, 50 % ou 75 % des déformations se situent dans les roulements. En première par exemple, le modèle 1 possède 7 modes propres où plus de 50 % des énergies de déformation se trouvent dans les roulements et, deux modes où ce pourcentage dépasse les 75 %.

	Première	Seconde	Troisième	Quatrième	Cinquième
Modèle 1	7 / 2	9 / 3	10 / 3	8 / 5	7 / 3
Modèle 2	7 / 3	9 / 3	8 / 4	10 / 5	8 / 3
Modèle 3	7 / 4	7 / 4	8 / 6	8 / 6	8 / 5
Modèle 4	9 / 3	7 / 3	8 / 4	8 / 5	8 / 3

Table 3. 5 : Nombre de modes où plus de 50 % / 75 % des déformations se situent dans les roulements

L'analyse plus détaillée des résultats, montre que ces modes sont d'autant plus énergétiques, que le chargement statique est faible. Ils correspondent alors à des fréquences propres plus basses. Même en tenant compte des éventuels décalages de modes, les modèles 3 et 4 se distinguent des autres : les pics énergétiques ne correspondent pas à ceux des autres modèles ni en fréquence ni en amplitude. Le modèle 4 se particularise en première et seconde, par l'existence de modes énergétiques pour les roulements, dès les basses fréquences.

Le comportement énergétique des différents modèles dépend fortement de la catégorie de roulement considéré (billes, rouleaux cylindriques, rouleaux coniques chargés axialement, rouleaux coniques chargés radialement) et, du chargement statique appliqué (vitesse considérée). Néanmoins, les études réalisées sur les 5 vitesses et les 4 modèles de roulements, ont permis d'associer à chaque catégorie de roulements un diagramme énergétique "caractéristique". Ce diagramme donne une vue générale de l'influence des roulements. Mais, évidemment, des modulations sont à apporter en fonction des modèles et des chargements.

• **Diagramme énergétique associé au roulement à rouleaux cylindriques**

Le roulement à rouleaux cylindriques R22 ne possède que des modes faiblement énergétiques pour les basses fréquences (modes 1 à 14), et ce, quelque soit le modèle. En quatrième et cinquième, lorsque les chargements statiques diminuent, cette participation énergétique augmente légèrement mais, reste inférieure à 20 % de l'énergie de déformation totale. Néanmoins, pour cet ensemble de modes, le modèle 4 est toujours moins énergétique que les autres modèles et, contrairement aux modèles 1, 2 et 3, il ne possède aucun mode énergétique, même pour les fréquences plus élevées. Pour les autres modes (modes 15 à 19), le modèle 3 possède, pour toutes les "vitesses", 1 ou 2 modes énergétiques, pour ce roulement et la fréquence et l'ordre de ce mode diminuent avec le chargement statique : en première, mode 19 de fréquence 2 675 Hz, en cinquième, mode 16 de fréquence 2 050 Hz). Pour les modèles 1 et 2, le 10^{ème} mode peut être énergétique. A cause des décalages éventuels des modes, cela rend impossible la comparaison des deux modèles. Les diagrammes énergétiques obtenus pour ce roulement sont de la forme suivante :

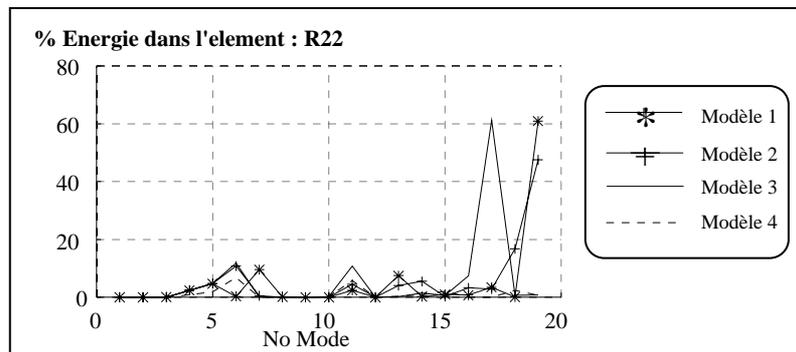


Figure 3. 40 : Pourcentage d'énergie de déformation dans le roulement à rouleaux cylindriques en quatrième

Ce diagramme énergétique se retrouve pour les autres vitesses et peut être schématisé de la façon suivante :

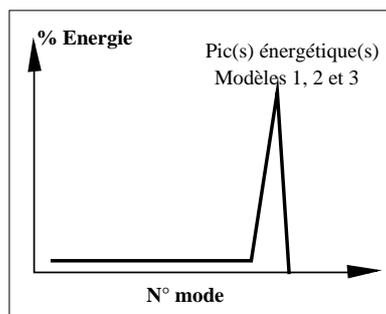


Figure 3. 41 : Diagramme énergétique caractéristique du roulement à rouleaux cylindriques

Pour les autres types de roulements évoqués par la suite, seuls les diagrammes énergétiques schématiques sont donnés.

- **Diagramme énergétique associé au roulement à billes**

Globalement et pour l'ensemble des 5 "vitesses", les modes énergétiques du roulement à billes R21 peuvent se répartir en :

- modes "basse fréquence", c'est-à-dire entre 0 et 690 Hz en première, et 0 et 560 Hz en cinquième,
- modes "haute fréquence", supérieures à 1 500 Hz,

Pour les modes "basse fréquence", les modèles 1 et 2 donnent des résultats identiques, même amplitude et même position. Pour les forts chargements statiques, première et seconde, ces modèles possèdent deux modes énergétiques d'amplitude "moyenne", entre 25 % et 60 %. Pour les chargements plus "faibles" (quatrième et cinquième) il n'y a plus qu'un mode énergétique mais d'amplitude plus grande : 90% de l'énergie totale et les modèles 1, 2 et 3 sont identiques. Pour les autres "vitesses", la position des "pics" énergétiques ainsi que leur amplitude sont différentes : mode 3 en troisième par exemple. Pour les forts chargements statiques, le modèle 4 possède des modes beaucoup plus énergétiques que ceux des autres modèles.

Pour les modes "haute fréquence", les écarts sont d'autant plus importants que le chargement statique est faible.

En première, à un décalage de mode près, les 4 modèles sont identiques et correspondent à des fréquences voisines. Chaque modèle possède, pour ce roulement, deux modes consécutifs énergétiques, 75 % de l'énergie de déformation.

En seconde, les modèles 1, 2 et 4 restent voisins et les diagrammes énergétiques sont comparables à ceux obtenus en première. Mais, pour le modèle 3, les modes énergétiques "se séparent" et l'amplitude diminue.

En troisième, les modèles 1 et 2 se différencient : nombre de modes énergétiques différents et amplitudes différentes. Le modèle 2 se distingue par l'apparition d'un mode énergétique vers 1 350 Hz, qui n'existe pas dans les autres modèles. Le modèle 1 possède trois modes énergétiques identiques à ceux des modèles 2 et 3, deux entre 40 % et 50 % des énergies de déformation, l'autre correspondant à 80 % des déformations. Pour les modèles 3 et 4, les diagrammes énergétiques sont identiques, à ceux obtenus en seconde mais, avec un décalage en mode pour le modèle 3.

En quatrième, il existe de plus grandes différences entre les modèles en particulier les modèles 1 et 2. Les modes énergétiques du modèle 1 sont moins nombreux, mais de fréquence et d'amplitude supérieures à ceux du modèle 2. Pour les modèles 3 et 4, les résultats énergétiques sont identiques, à ceux obtenus en seconde et troisième.

En cinquième, les modes sont globalement moins énergétiques et les différences entre les modèles 1 et 2 sont moins marquées que dans le cas précédent : amplitude légèrement différente. Pour le modèle 4, les premiers modes énergétiques se décalent vers les fréquences moyennes et leurs amplitudes diminuent, environs 40%.

En tenant compte des modulations à apporter évoquées ci-dessus, la répartition des modes énergétiques du roulement à billes peut être schématisée par :

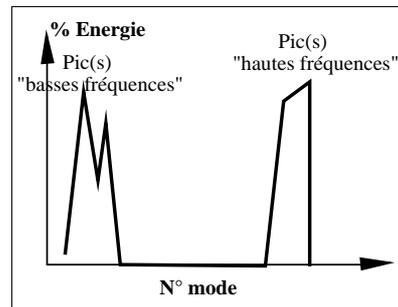


Figure 3. 42 : Diagramme énergétique caractéristique du roulement à billes

• **Diagramme énergétique associé aux roulements à rouleaux coniques chargés axialement**

Pour les roulements à rouleaux coniques chargés axialement R11 et R32, et pour la bande de fréquences considérée, les modes énergétiques sont groupés :

- entre les modes 7 et 14 pour le roulement R11,
- au-dessus du dixième mode pour le roulement R32.

Cette différence s'explique par le fait que les roulements de l'arbre de pont sont plus chargés et plus rigides que ceux de l'arbre primaire, et que l'arbre de pont est également plus massif que l'arbre primaire. Ces modes se caractérisent par la présence d'un premier mode très énergétique, correspondant à plus de 40 % de l'énergie de déformation, suivie de plusieurs modes non énergétiques et éventuellement de nouveaux modes énergétiques mais, d'amplitude plus "faible". Globalement et pour l'ensemble des modèles, les diagrammes énergétiques peuvent être schématisés de la façon suivante :

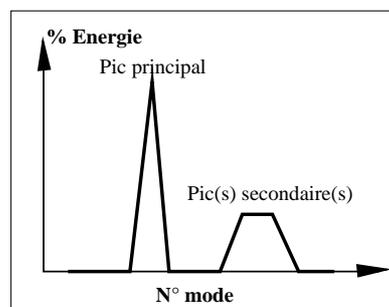


Figure 3. 43 : Diagramme énergétique caractéristique des roulements à rouleaux coniques chargés "axialement"

L'amplitude du pic principal augmente avec la diminution des chargements statiques : en première pour le roulement R32, ce pic à une amplitude de 60 %, en cinquième pour le roulement R11, cette amplitude est de 90 %. Pour le roulement R32, seuls des modes du modèle 4 apparaissent comme pics secondaires mais pour des ordres élevés (18 ou 19). La limite des modes considérés étant atteinte, il est difficile de conclure pour les autres modèles. Pour les chargements importants le modèle 4 est plus énergétique que les autres, en première 80 % des énergies de déformation sont dans le roulement R11 contre 45 % pour le modèle 1. Pour les chargements intermédiaires, le pic principal du modèle 4 est identique à ceux des modèles 1 et 2. Pour les chargements plus faibles, ce pic a une amplitude inférieure à celles des modèles 1 et 2. Le modèle 3 se distingue des autres par l'amplitude du pic principal, qui

est globalement plus faible que pour les autres modèles. En quatrième par exemple et pour le roulement R11, ce pic a une amplitude de 80 % dans les modèles 1 et 2 contre moins de 60 % pour le modèle 3. En troisième, ce pic se "sépare" en deux pics d'amplitudes voisines, environs 30 % contre un seul pic d'amplitude 90 % pour les modèles 1 et 2. Les différences entre le modèle 2 et le modèle 1 sont minimales et apparaissent essentiellement sur l'amplitude des deux premiers modes énergétiques du roulement R11 en première. Dans les autres cas, mis à part des décalages éventuels de modes, les deux modèles conduisent à des résultats identiques.

- **Diagramme énergétique associé aux roulements à rouleaux coniques chargés radialement**

Pour les roulements à rouleaux coniques chargés radialement R12 et R31, les modes énergétiques sont répartis plus uniformément. Les amplitudes de ces modes sont plus faibles et, globalement, les modèles sont plus différents que dans le cas précédent. Pour le roulement R12 en quatrième et cinquième les premiers modes et les derniers sont plus ou moins énergétiques. Pour des raisons analogues à celles des roulements R11 et R32, les premiers modes énergétiques pour le roulement R31, apparaissent pour des fréquences plus élevées que pour le roulement R12. Globalement, le diagramme énergétique associé à ces roulements peut être schématisé par la figure suivante :

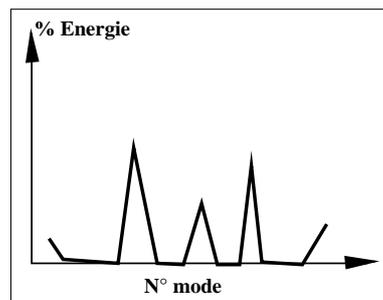


Figure 3.44 : Diagramme énergétique caractéristique des roulements à rouleaux coniques chargés "radialement"

Le modèle 4 ne possède pas de modes énergétiques pour le roulement R12 alors que, les modèles 1 et 2 ont un ou plusieurs modes correspondant à plus de 20 % d'énergie de déformation. Pour ce modèle en revanche, il existe deux modes (16 et 17) où plus de 60 % des déformations ont lieu dans le roulement R31. Mais, ces modes ne correspondent pas aux modes énergétiques des modèles 1 et 2 qui possèdent entre 1 et 4 modes où plus de 20 % des déformations sont dans R31. Le modèle 4 ne permet donc pas de représenter les modes énergétiques associés à des fréquences "basses".

Le modèle 3 est très différent des modèles 1 et 2. Pour les chargements importants, le diagramme énergétique correspondant possède des "pics" d'amplitude élevée qui n'existent pas dans les modèles 1 et 2. C'est le cas par exemple, du mode 9 en première pour le roulement R12 ou, pour le roulement R32, du mode 17 en seconde. Pour les chargements plus faibles, il apparaît des décalages en mode et une modification des amplitudes.

Les différences entre les modèles 1 et 2 sont essentiellement des différences d'amplitude de certains "pics". Ces différences augmentent lorsque le chargement diminue. Pour le roulement R12 en cinquième par exemple, le mode 17 correspond à une amplitude de 22 % pour le modèle 1 et de 37 % pour le modèle 2.

3.3.4 *Energies de déformation dans les engrenages*

Lors des études dynamiques des systèmes à engrenages, centrées sur l'examen du comportement de la denture, les modes énergétiques de dentures sont souvent utilisés pour définir les bases modales (*Bard [1.1], Velex [1.40]*). L'étude de l'influence de la modélisation des paliers à roulement sur ces modes est donc intéressante.

Globalement, pour les 19 premiers modes considérés et, des rigidités de denture de même ordre de grandeur voire, plus faible, que les rigidités des roulements, les engrenages sont beaucoup moins énergétiques que les paliers. Pour l'ensemble des engrenages examinés et quelque soit la modélisation des roulements, le mode de "denture" le plus énergétique n'est associé qu'à moins de 11 % des énergies de déformation (Engrenage de pont en première). Le tableau suivant indique, pour chaque modèle et chaque "vitesse", le numéro du mode le plus énergétique pour chacun des deux engrenages en prise et, le pourcentage d'énergie de déformation associée.

	Vitesses considérées									
	Première		Seconde		Troisième		Quatrième		Cinquième	
	Mode	%	Mode	%	Mode	%	Mode	%	Mode	%
Modèle 1	11	5.4%	17	8.0%	19	1.0%	17	0.8%	19	3.5%
Modèle 2	11	6.0%	17	7.8%	13	0.5%	16	0.9%	16	2.5%
Modèle 3	11	5.6%	16	3.8%	19	3.0%	16	0.9%	14	2.5%
Modèle 4	11	5.0%	16	8.2%	11	0.5%	15	0.9	16	5%
Pont										
Modèle 1	3	10.8%	3	4.8%	4	6.5%	4	5.2%	4-13	5%
Modèle 2	3	11%	3	5.2%	4	6.5%	4	5.2%	4	4.8%
Modèle 3	3	11%	3-11	7.1%	4	5.0%	4-11	5.2%	4	4.0%
Modèle 4	12	6.5%	12	7%	4	5.8%	11	6%	12	7%

Table 3. 6 : Modes énergétiques dans les engrenages

Pour l'ensemble des modèles et des vitesses considérées, les modes énergétiques pour l'engrenage de pont, apparaissent pour des fréquences plus basses que pour les engrenages "d'entrée" et, correspondent à une participation énergétique supérieure, alors que, les rigidités moyennes de dentures sont égales. Cela provient des conditions aux limites choisies : arbre de pont bloqué en rotation, les phénomènes de torsion sont donc, supérieurs pour l'arbre de différentiel, que pour les arbres primaire et secondaire.

La comparaison entre les modes énergétiques pour les engrenages, et les modes énergétiques pour les roulements, montre un certain découplage. Les modes les plus énergétiques pour les engrenages ne sont pas associés aux modes les plus énergétiques des roulements. Et, complémentirement, lorsque pour un engrenage, un mode est énergétique pour tous les modèles, plus le modèle est énergétique pour l'engrenage et moins il l'est pour les roulements. En première par exemple et pour l'engrenage de pont, le mode 3 est "énergétique" : modèles 1, 2 et 3 plus de 10 % et environs 6 % pour le modèle 4. Pour les roulements, ce même mode correspond à 50 % d'énergie de déformation pour les modèles 1 et 2, 40 % pour le modèle 3 et, plus de 75 % pour le modèle 4.

Les 4 modèles possèdent des diagrammes énergétiques différents mais, compte tenu du faible niveau énergétique de ces modes, il est difficile de conclure et de comparer efficacement ces modèles. Pour le cas de la première, des calculs ont été effectués pour une plage de modes propres plus importante, et l'énergie potentielle associée aux engrenages a été déterminée pour les 39 premiers modes.

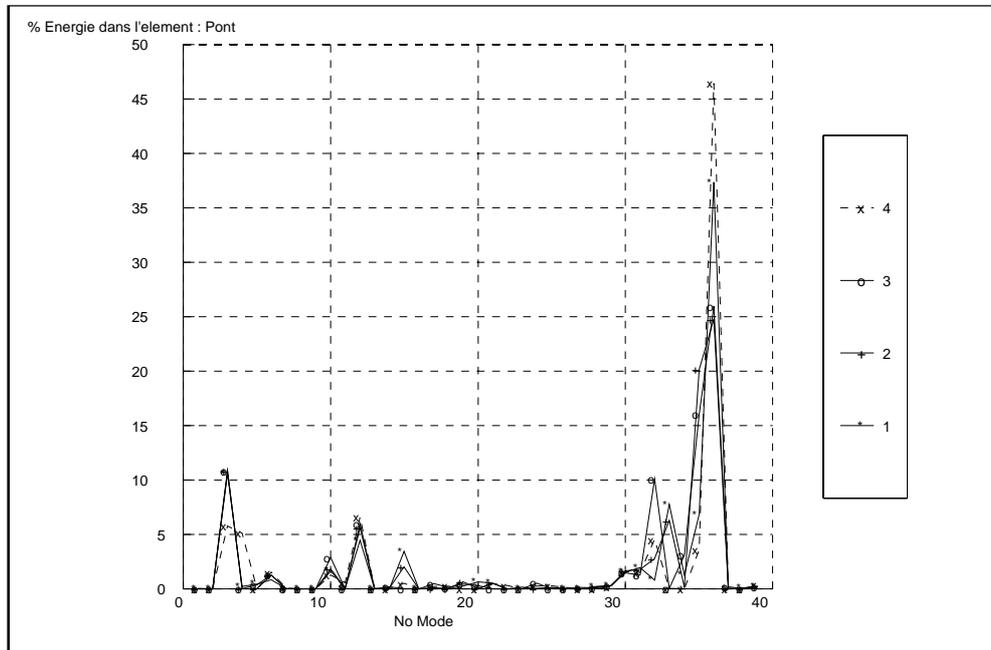


Figure 3.45 :Energie dans l'engrenage de pont en première

Il apparaît donc, un mode très énergétique pour l'engrenage de pont mais, il est associé à une fréquence supérieure à 6 000 Hz. Ce mode est présent dans tous les modèles, mais la participation énergétique varie en fonction du modèle :

- modèle 1 : 37 %
- modèle 2 : 25 %
- modèle 3 : 26 %
- modèle 4 : 46 %

Cet exemple, permet de montrer que le choix de la modélisation des paliers à roulement peut modifier le taux de participation des éléments "engrenages" à l'énergie totale de déformation et, donc les bases modales utilisées lors des calculs du comportement dynamique de la denture.

3.4 Conclusion

La comparaison des résultats modaux globaux, fréquences propres et matrices de MAC, obtenus pour les 4 modèles et les 5 positions d'engrènement, ont permis de montrer que les modèles dynamiques de roulements formés de rigidités scalaires équivalentes (modèle 4) ou par des matrices obtenues en supposant, que l'environnement statique est infiniment rigide et que les roulements sont découplés (modèle 3), sont insuffisants pour décrire le comportement dynamique de la chaîne cinématique :

- les fréquences propres sont différentes,
- les vecteurs propres ne sont pas colinéaires.

Globalement, l'introduction d'un environnement statique flexible arbres ou arbres et carter, par rapport à l'utilisation d'un environnement complètement rigide (modèle 3) peut modifier de manière indépendante, les fréquences propres et les vecteurs propres ou conduire à l'apparition ou à la disparition de certains modes. Les fréquences propres, des modèles dynamiques obtenus en prenant en compte l'environnement statique réel des roulements, sont plus faibles, que celles obtenues avec les hypothèses d'environnement statique rigide.

Les analyses énergétiques permettent de quantifier les différences observées sur les fréquences et les vecteurs propres associés aux 4 modèles de roulement considéré. L'étude globale des énergies potentielles a montré, l'intérêt de modéliser les roulements par des matrices de rigidité complètes plutôt que, par matrices diagonales, qui n'assurent pas le couplage des ddl et permettent donc, l'apparition de modes de déformation "purs". La prise en compte de l'environnement statique des roulements, lors de la détermination des matrices de rigidité, va se traduire par l'apparition ou la disparition de modes où l'énergie d'extension est majoritaire. La prise en compte statique du carter conduit, soit à une modification de l'orientation de certains vecteurs, soit à l'apparition de modes de forme très différente. L'étude globale des énergies cinétiques permet de confirmer que, pour une même "vitesse", la modélisation des roulements, va modifier la forme des vecteurs propres. Pour tous les modèles, les matrices de masse étant identiques, les variations constatées entre les diagrammes des différents modèles, ne proviennent que de la modification de la forme des vecteurs propres. Cette étude a également montré que, la modélisation des roulements par des matrices pleines, couplée à l'utilisation d'engrenages cylindriques hélicoïdaux, va influencer le comportement en torsion des arbres.

Les roulements assurent la transmission des vibrations des arbres vers le carter. Il est donc intéressant d'étudier leur influence sur les modes propres, par l'analyse de l'évolution des énergies de déformation, dans ces organes, en fonction des modes et des modèles. L'analyse du taux global d'énergie de déformation dans les roulements, a confirmé leur rôle prépondérant dans les déformations de la chaîne cinématique. Ce rôle est d'autant plus important que, le chargement statique appliqué est "faible". Les modes énergétiques sont nombreux, et relativement bien répartis le long de la bande de fréquences considérée. Les modèles 3 et 4 se distinguent des modèles 1 et 2, par des modes énergétiques différents en fréquence et en amplitude. L'analyse détaillée de l'évolution des énergies de déformation dans chaque roulement a permis de mettre en évidence 4 types de roulements et, de dresser, pour chacun d'eux, un diagramme énergétique sommaire. Ces diagrammes sont à moduler en fonction des modèles et des chargements statiques appliqués.

Malgré, des rigidités équivalentes du même ordre de grandeur que, celles des roulements, les engrenages participent beaucoup moins, à la déformation de la chaîne cinématique. Ils possèdent très peu de modes énergétiques sur la bande de fréquences considérée, mais lorsque ces modes existent le pourcentage d'énergie de déformation dans les engrenages, dépend de la modélisation retenue pour les roulements.

4. ESTIMATION DE L'INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Une des difficultés rencontrée lors de la modélisation des structures et des systèmes mécaniques, est le choix des conditions aux limites. En effet, les systèmes modélisés sont prévus pour fonctionner dans un environnement mécanique complexe. Une boîte de vitesses automobile par exemple est liée, en entrée au moteur et par son intermédiaire à la carrosserie, et en sortie, aux roues et, donc à la route. La prise en compte de l'ensemble de l'environnement est impossible. Il est alors nécessaire de définir "où" et "comment" s'arrête la modélisation. Ces choix doivent être fait de manière judicieuse afin, que les résultats obtenus soient représentatifs du comportement réel du système et, que le modèle numérique considéré soit réalisable et de taille acceptable.

Le but de cette partie n'est pas de définir des conditions aux limites optimales pour l'étude dynamique globale des boîtes de vitesses : il faudrait pour cela d'avantage de données expérimentales, mais de positionner les résultats précédents, obtenus pour des conditions aux limites spécifiques (entrée libre et sorties bloquées en rotation), par rapport à un comportement général du système. Dans cet objectif, les résultats (modes propres et les diagrammes énergétiques caractéristiques des roulements) obtenus pour les conditions aux limites précédentes (modèle 1) sont comparés à ceux obtenus lorsqu'une inertie est ajoutée en entrée (modèle 2). Cette inertie, est du même ordre de grandeur, que l'inertie du volant d'embrayage.

4.1 Influence sur les modes propres du système

L'introduction dans le modèle d'une inertie supplémentaire relativement importante en entrée, modifie les fréquences et les vecteurs propres du système (Figure 3. 46). Un certain nombre de fréquences évoluent et seuls 5 modes peuvent être corrélés en forme propre avec un critère de corrélation supérieur à 0.8.

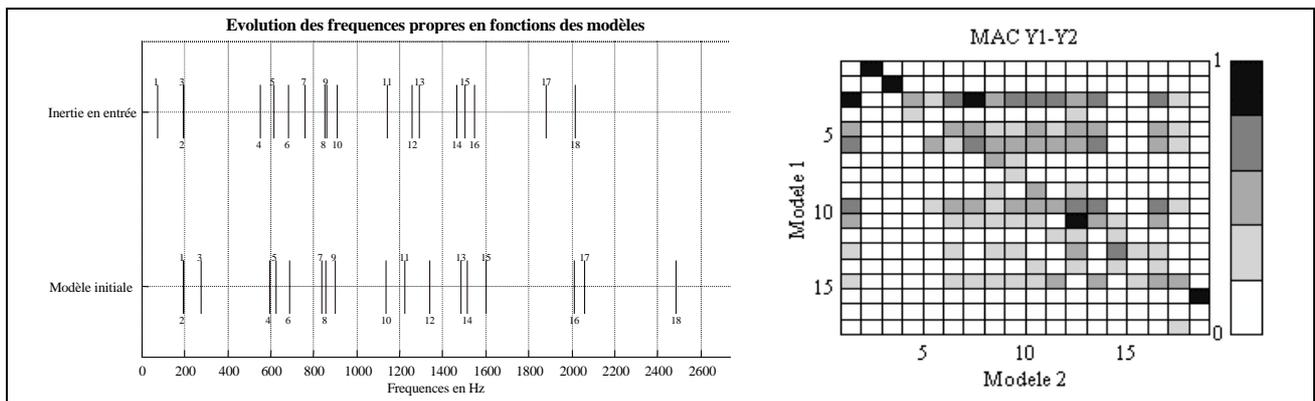


Figure 3. 46 : Comparaison des fréquences propres et des vecteurs propres des modèles 1 et 2

Ces modifications se traduisent également par l'émergence d'une fréquence propre très basse (72 Hz). L'analyse de la matrice de MAC montre, que ce mode correspond en forme (MAC=0.998) au 3^{ème} mode du modèle sans inertie, de fréquence de 276 Hz. C'est un mode global de déformation, avec des déplacements "rigides" importants en rotation et en translation.

4.2 Répartition des énergies dans les roulements

Les études réalisées sur le modèle 1, ont mis en évidence le rôle prépondérant des paliers à roulement, sur le comportement modal du système et, ont permis de définir des diagrammes énergétiques, caractéristiques du comportement des différents roulements de la boîte de vitesses.

Les figures suivantes montrent que, même si les modes propres évoluent en forme et en fréquence lorsque les conditions aux limites en entrée changent, les résultats obtenus pour les roulements restent vrais. La participation des paliers aux déformations propres de l'ensemble est importante et les diagrammes énergétiques caractéristiques définis précédemment se retrouvent

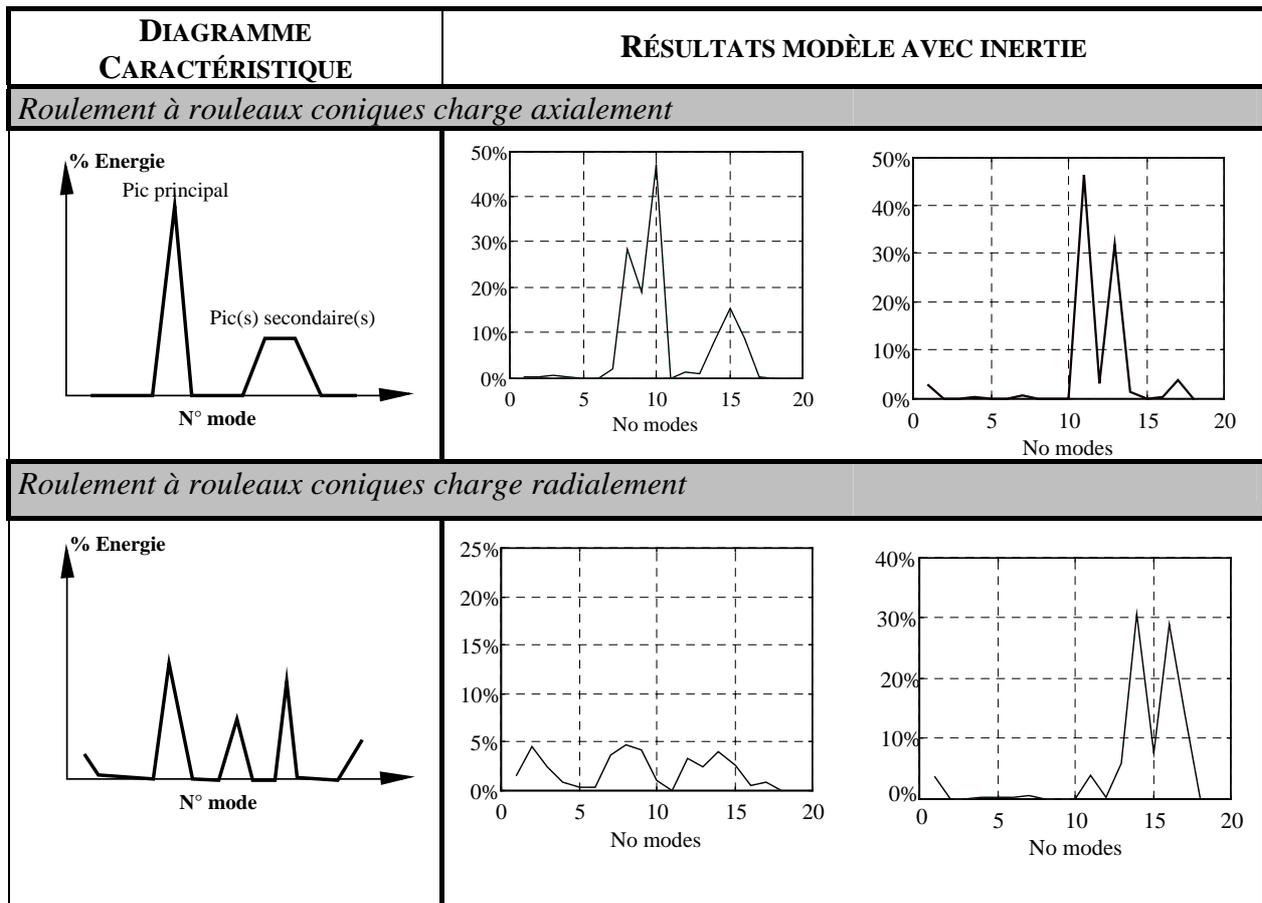


Figure 3. 47 : Comparaison des diagrammes énergétiques des roulements à rouleaux coniques définis pour le modèle 1 avec ceux obtenus pour le modèle 2

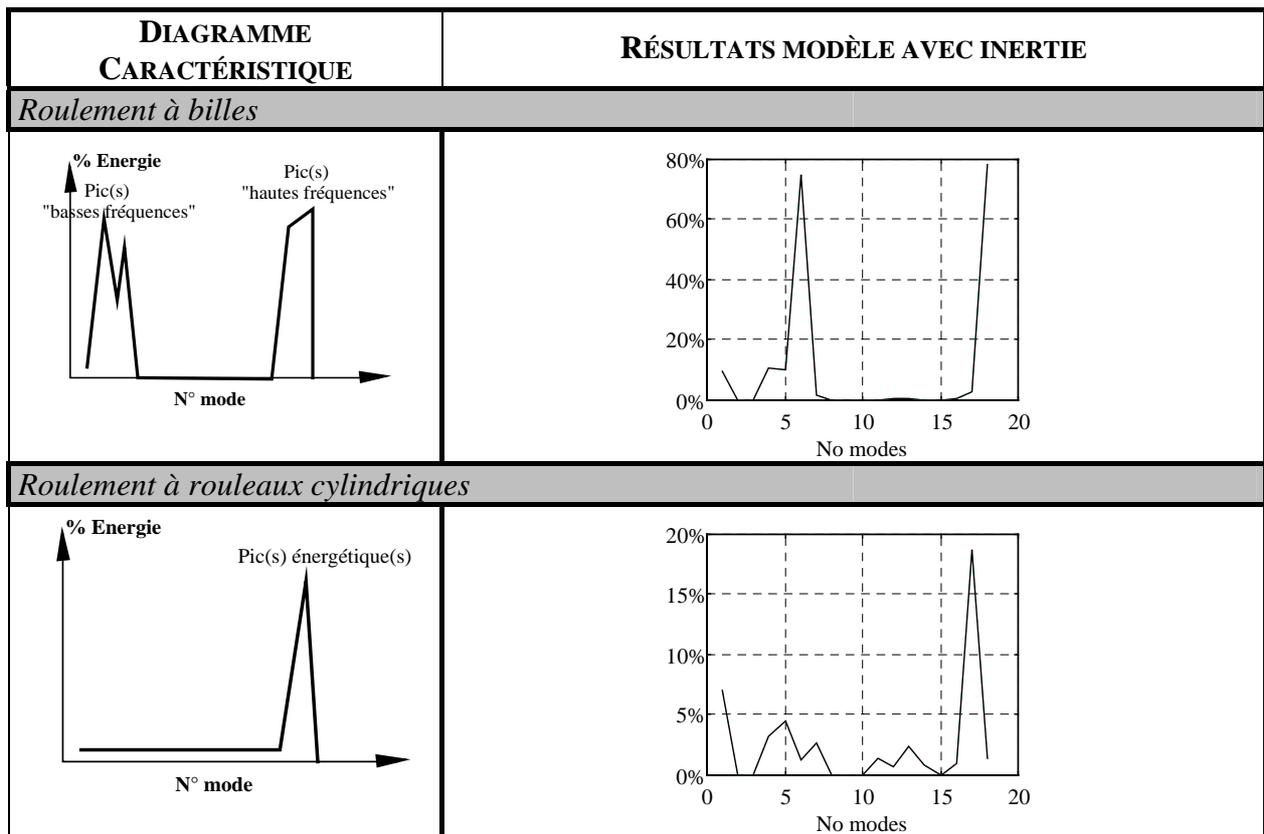


Figure 3. 48 : Comparaison des diagrammes énergétiques des roulements à billes et à rouleaux cylindriques définis pour le modèle 1 avec ceux obtenus pour le modèle 2

4.3 Conclusion

Comme dans tous systèmes ou structures mécaniques, les fréquences propres et les vecteurs propres de la chaîne cinématique considérée, dépendent fortement du choix des conditions aux limites. Mais, seule la comparaison des études numériques et des résultats expérimentaux permettront de définir des conditions aux limites adéquates.

Néanmoins, la modification, par l'introduction d'une inertie importante, des conditions aux limites en entrée de boîte, ne modifie pas les résultats obtenus pour les paliers à roulement : leur participation aux déformations modales est importante et des diagrammes énergétiques caractéristiques peuvent être établis.

5. CONCLUSION

Les études dynamiques globales présentées dans ce chapitre, ont été réalisées sur la chaîne cinématique d'une boîte de vitesses. Dans cette première approche, l'influence dynamique des carters était négligée. L'objet de ces études était d'estimer, d'un point de vue numérique, les causes possibles d'erreurs de modélisation et, d'évaluer l'influence relative des différents constituants, sur les modes propres du mécanisme, afin de déterminer le degré de précision à apporter lors de leur introduction dans des modèles globaux. Les modes propres du système à "l'arrêt" ont été retenus comme critère de comparaison, car ils sont caractéristiques des matrices de masse et de rigidité du modèle et dépendent donc directement des hypothèses de modélisation, et, ne nécessitent pas l'introduction, toujours délicate, des phénomènes d'amortissement. De plus, ils sont couramment utilisés pour déterminer la réponse du système à une excitation, par l'intermédiaire de méthodes pseudo-modales. La qualité et la précision de cette réponse dépendent donc fortement; des modes propres utilisés.

L'ensemble des études dynamiques réalisées, a mis en évidence la forte participation des paliers à roulement aux déformations modales. Le choix et la précision de la modélisation de ces éléments technologiques, va donc influencer grandement, les résultats dynamiques obtenus. Une hypothèse classique permettant d'introduire les paliers à roulement dans des modèles dynamiques, plus ou moins globaux, consiste à linéariser leur comportement autour du point de fonctionnement, comme cela a été rappelé dans les chapitres précédents. Une première série d'études (§ 2.2) a permis de valider cette hypothèse et de définir autour d'un chargement nominal, des limites acceptables de "linéarisation". Pour des chargements statiques compris entre ces valeurs limites, les résultats modaux obtenus avec les matrices de rigidités correspondant, soit au chargement réel, soit au chargement nominal, sont quasi identiques (écarts fréquentiels inférieurs à 3 % et critère de corrélation supérieur à 0.96). Dans le cas considéré (engrenage de première et couple statique relativement important), ces limites sont supérieures aux variations de chargement dynamiques couramment admises ($\pm 10\%$). Cela signifie que, malgré le comportement non linéaire des paliers à roulement, l'erreur commise en assimilant la courbe $F=g(d)$ à sa tangente, lors des études dynamiques, est négligeable. Ces études ont également montré qu'il n'existe pas de relation directe entre, les modifications des termes des matrices de rigidité dues aux variations du chargement statique et, l'évolution des réponses modales.

Si, l'introduction du comportement dynamique des roulements dans les modèles globaux à l'aide de rigidités tangentes, est classique dans la littérature, en revanche la précision de ces valeurs et le degré de finesse apporté à leur obtention, varie fortement d'une approche à l'autre. Les résultats modaux obtenus pour 4 types de modélisation dynamique des paliers à roulement, ont été comparés (§ 3.) pour différents rapports d'engrènement. Ces études ont permis de montrer que, dans le cas des boîtes de vitesses automobile aux carters déformables, la modélisation des paliers à roulement par des rigidités scalaires ou des matrices de rigidité tangente déterminées pour des roulements isolés dans un environnement statique infiniment rigide, est insuffisante pour décrire correctement le comportement dynamique de la chaîne cinématique. Les études quasi-statiques globales préalables présentées au chapitre 1, sont donc nécessaires pour obtenir des résultats dynamiques globaux significatifs. Néanmoins, pour l'ensemble des modèles de roulements considérés, l'analyse du taux global d'énergie de déformation dans les paliers, a confirmé leur rôle prépondérant dans le comportement modal de l'ensemble de la chaîne cinématique. Ce rôle est d'autant plus important, que le chargement statique appliqué est "faible". L'analyse détaillée de l'évolution

des énergies de déformation dans les 6 roulements de la boîte de vitesses, a permis de définir 4 types de comportements et, de dresser, pour chacun d'eux, un diagramme énergétique caractéristique. Ces diagrammes énergétiques se retrouvent lorsque, les conditions aux limites en entrée de boîte sont modifiées (§ 4.).

Les engrenages sont les organes principaux des boîtes de vitesses et sont également les principales sources d'excitation du système. Dans le cadre des études dynamiques globales et des engrenages cylindriques extérieurs, leur modélisation par une rigidité unidirectionnelle placée au point primitif d'engrènement suivant la normale au contact, n'est pas remise en cause. Le paramètre de modélisation le plus important est alors la valeur de la rigidité d'engrènement et, plus particulièrement, sa valeur moyenne qui permet de définir les modes propres à "l'arrêt". Les études réalisées (§ 2.1) ont permis de montrer que, dans le cas des boîtes de vitesses, cette valeur moyenne n'est pas un paramètre très influent et, qu'une bonne estimation de son ordre de grandeur est suffisante, pour obtenir des résultats dynamiques significatifs. De plus, malgré des rigidités équivalentes du même ordre de grandeur que celles des paliers à roulement, les engrenages participent beaucoup moins à la déformation de la chaîne cinématique, que les roulements. L'énergie de déformation dans les dentures reste relativement faible, pour la gamme de fréquences considérées. Néanmoins, les modes de déformation de denture sont sensibles, à la modélisation retenue pour les paliers à roulement. Cela signifie que, mêmes pour des études "locales" des phénomènes dynamiques d'engrènement, le comportement dynamique des paliers à roulement doit être introduit de manière suffisamment précise. Cette influence de la modélisation des paliers à roulement, sur le comportement dynamique de l'ensemble de la chaîne cinématique, est à mettre en relation avec les résultats expérimentaux de **C. Bard [1.1]** qui a mis en évidence, la limite des modèles simples et la nécessité de prendre en compte les couplages entre les degrés de libertés.

Chapitre 4

COMPORTEMENT DYNAMIQUE GLOBAL D'UNE BOÎTE DE VITESSES AUTOMOBILE : *Influence du carter - Excitation par l'erreur de transmission*

Les chapitres précédents ont permis de définir un modèle dynamique global de mécanismes de transmission de puissance par engrenages et, de quantifier l'influence des différents éléments de modélisation de la chaîne cinématique, sur les modes propres du système à l'arrêt. L'objet de ce dernier chapitre est d'introduire le comportement dynamique des carters et, de simuler le comportement dynamique global du système en fonctionnement, excité par l'erreur de transmission dynamique.

En guise d'introduction, la première partie présente les études réalisées et définit, les caractéristiques et les limites des modèles utilisés ainsi, que les paramètres observés. La seconde partie met en évidence l'influence dynamique du carter sur les modes propres du système à "l'arrêt" et, également, sur les réponses dynamiques de la boîte en fonctionnement. La troisième partie adopte une vision "expérimentale" et étudie l'influence, du lieu et du paramètre d'observation du comportement de la boîte en fonctionnement, dans le cas d'excitations "simples" mais réalistes. La dernière partie présente, en guise d'application "technologique" et, de validation de la sensibilité et de l'intérêt du modèle proposé, une brève étude de l'influence d'un paramètre de conception.

1. PRÉSENTATION DES ÉTUDES

Les études dynamiques présentées dans le chapitre précédent ont permis, de quantifier l'influence des différents éléments de modélisation de la chaîne cinématique, sur les modes propres du système à l'arrêt et, de mettre en évidence le rôle prépondérant des paliers à roulement. Elles ont également permis de justifier, a posteriori, l'intérêt des études statiques globales préalables et, de définir des limites acceptables de "linéarisation" du comportement du mécanisme, hypothèse principale de la réalisation des modèles dynamiques proposés. Ces études, couplées aux premiers résultats expérimentaux, permettent de s'assurer que la chaîne cinématique à l'arrêt est correctement modélisée. Dans ce dernier chapitre, des excitations internes modélisant le fonctionnement de la boîte de vitesses et, le carter, sont introduits dans les modèles dynamiques globaux.

1.1 Principes de la modélisation

Comme cela a été indiqué dans le chapitre 2, le comportement dynamique du carter est introduit dans le modèle global, par l'intermédiaire de matrices réduites, obtenues par sous-structuration. Le maillage initial du carter a été réalisé sous la responsabilité des Bureaux

d'Etudes de PSA, et le comportement dynamique du modèle correspondant a été validé expérimentalement. Le modèle réduit a été réalisé avec les outils de "sous-structuration" existant dans le groupe PSA-DETA. L'utilisation, dans l'approche globale proposée, de ces modèles sous-structurés a été retenue car, elle s'inscrit dans la politique de modélisation du comportement de l'ensemble du bloc "moteur-transmission", actuellement mise en oeuvre dans le groupe PSA-DETA.

Les études présentées dans ce chapitre avaient, pour premier objectif, la vérification de la "faisabilité" de l'approche. Pour cela, un premier modèle réduit de carter a été défini en gardant, comme noeuds de jonction, les noeuds d'attache des corps roulants dans les alésages et, les noeuds de fixation de la boîte sur le bloc moteur, soit 672 degrés de libertés. Ce premier modèle a été réalisé en ne conservant que les 19 premiers modes propres du carter à jonction fixe, soit les modes de fréquences inférieures à 1 800 Hz. Cette valeur correspond donc à la limite de "représentativité fréquentielle" du modèle global considéré dans ce chapitre.

Les phénomènes d'engrènement, représentent la principale source d'excitation des mécanismes de transmission de puissance par engrenages. Numériquement, cette excitation peut être introduite par l'intermédiaire d'une variation périodique de la rigidité d'engrènement. Cette variation est représentative de l'évolution, avec la rotation des arbres, du nombre de dents en prise, de la flexibilité des dents, des erreurs de profils, etc ... Des méthodes de calcul quasi-statiques permettent de déterminer précisément cette grandeur, en fonction des caractéristiques de l'engrenage. Dans ce chapitre et, dans le cadre de l'objectif évoqué plus haut de "vérification de la faisabilité" de l'approche, ces excitations ont été considérées comme sinusoïdales, de fréquence : la fréquence d'engrènement.

1.2 Etudes réalisées

Tout au long de ce chapitre, seul le rapport d'engrènement de 3^{ème} et, un chargement statique unique (couple en entrée de boîte de 110 N.m.) ont été considérés. Ces valeurs correspondent à des conditions d'essais, définies dans le cadre des travaux, réalisés par ailleurs, de qualification des modèles numériques et de mesures expérimentales de l'erreur de transmission dynamique. L'ensemble de ces travaux est également réalisé au Laboratoire, en collaboration avec le Groupe PSA-DETA, sur des boîtes de vitesses en fonctionnement.

Les premiers travaux présentés dans ce chapitre, ont pour objectif de quantifier l'influence du carter sur le comportement dynamique global du système, à l'arrêt, ou en fonctionnement. Dans un premier temps, les résultats modaux, obtenus pour une chaîne cinématique montée dans un carter "rigide", ont été comparés aux modes propres obtenus avec le modèle complet. Puis, dans un second temps, l'influence du carter sur le comportement de la chaîne cinématique soumise à une excitation simple, variation sinusoïdale de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème}, a été étudié.

Pour cela, et en fonction de la fréquence d'engrènement, deux paramètres d'observation ont été retenus, les amplitudes :

- de l'erreur de transmission dynamique,
- des efforts dynamiques appliqués sur les bagues intérieures des roulements,

L'analyse des efforts dynamiques transmis aux roulements, permet également de vérifier les hypothèses émises lors de la linéarisation du comportement des paliers, à savoir que, les efforts dynamiques restent inférieurs à 10% des efforts statiques.

Lors des campagnes d'essais, il est impossible de mesurer directement les phénomènes discontinus liés à l'engrènement. Seules, leurs conséquences sur le système peuvent être observées : erreur de transmission dynamique, efforts transmis par les paliers ... Dans les modèles numériques, l'excitation introduite est "parfaitement" connue. Les études présentées dans la partie 3 de ce chapitre, ont pour objectif l'évaluation des relations existant entre l'excitation d'engrènement et, les paramètres observés, afin de quantifier les conséquences éventuelles des contraintes expérimentales. Pour cela, deux situations d'excitation ont été envisagées :

- une source d'excitation unique au niveau de l'engrenage de 3^{ème},
- deux sources d'excitation, une à la denture de 3^{ème} l'autre à la denture de pont.

Les paramètres "observés" dans cette partie, correspondent aux grandeurs accessibles expérimentalement :

- l'erreur de transmission dynamique calculée entre différents points de la chaîne cinématique,
- les efforts radiaux transmis par le roulement à billes au carter.

Enfin, en guise d'application "technologique" et de démonstration de l'intérêt des modèles dynamiques globaux, l'influence de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} sur le comportement dynamique global de la boîte de vitesses, est analysé dans la partie 4 de ce chapitre. Pour cela, les résultats, modes propres et erreur de transmission, obtenus pour deux valeurs de l'angle d'hélice sont comparés.

2. INFLUENCE DYNAMIQUE DU CARTER

2.1 Etudes des modes propres

2.1.1 Mise en évidence du couplage entre les déformations du carter et celles de la chaîne cinématique

La prise en compte de la déformabilité du carter lors des études dynamiques globales, se traduit par une augmentation de la densité modale. En effet, le modèle "complet" considéré possède 40 modes propres de fréquence inférieure à 1 800 Hz. Ces modes, comme le montre la figure suivante représentant le pourcentage d'énergie de déformation dans le carter, sont des modes globaux, faisant intervenir à la fois la chaîne cinématique, les roulements et le carter.

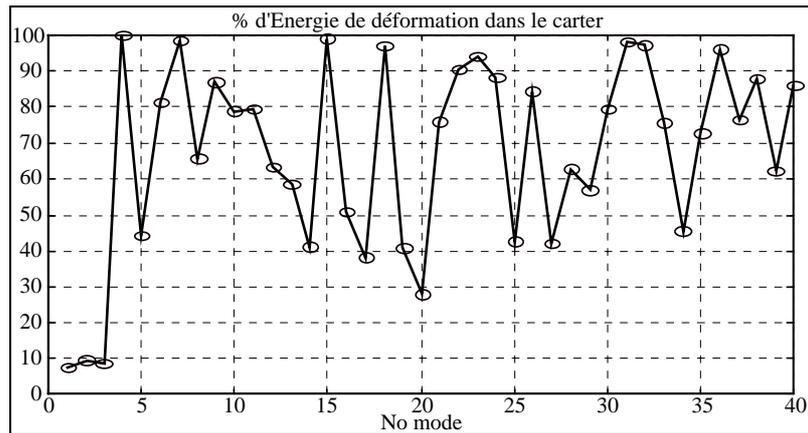


Figure 4. 1: Energie de déformation dans le carter

Pour l'ensemble de ces modes, il y a au moins 7 % de l'énergie de déformation localisée dans le carter. Il n'y a donc pas de mode de déformation de la chaîne cinématique seule. Inversement, il n'existe que deux modes de déformation du carter où, moins de 1 % de l'énergie de déformation, est localisée dans la chaîne cinématique et les roulements : ce sont le mode 4 de fréquence 280 Hz et, le mode 15 de fréquence 625 Hz. Globalement et mis à part les 3 premiers modes propres, pour l'ensemble des modes considérés, plus de 30 % de l'énergie de déformation se trouve dans les carters. Cela signifie, qu'il existe de forts couplages entre les deux structures et, que le comportement dynamique de l'ensemble diffère notablement du comportement dynamique de la chaîne cinématique seule. Ces différences de "comportement" se traduisent par des fréquences propres, des vecteurs propres et des répartitions énergétiques différentes.

2.1.2 Influence du carter sur les fréquences propres et les formes propres

Pour les études réalisées sur la chaîne cinématique dans un carter rigide, le nombre de modes propres de fréquences, comprises entre 0 et 1 800 Hz, est plus faible que dans le cas du modèle complet (16 modes contre 40). La figure suivante permet de visualiser la répartition de ces fréquences dans les deux cas. L'amplitude des traits représentant les fréquences, est proportionnelle à l'énergie de déformation localisée, pour le mode correspondant, dans la chaîne cinématique et les roulements.

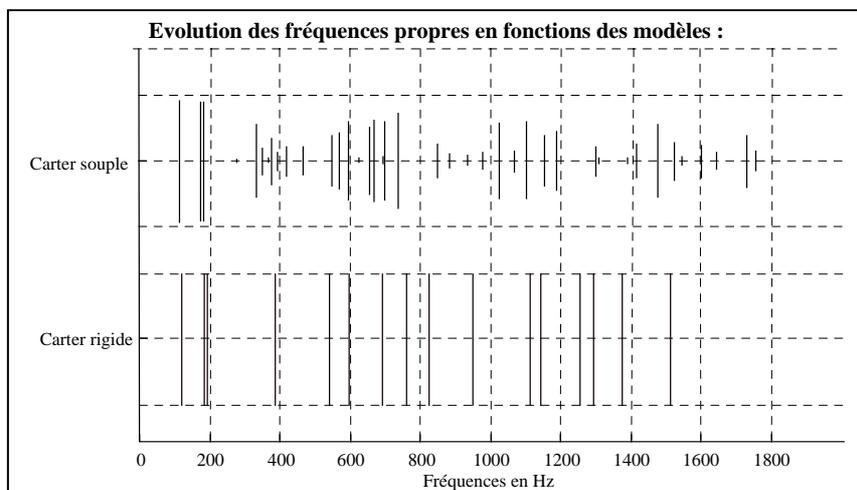


Figure 4. 2 : Influence du carter sur les fréquences propres du modèle global

Mis à part les trois premiers modes propres, qui sont des modes d'ensemble de la chaîne cinématique, le spectre fréquentiel obtenu lorsque l'influence dynamique du carter est intégrée est sensiblement différent de celui obtenu avec les hypothèses de carter rigide.

Afin d'étudier le degré de corrélation entre, les vecteurs propres obtenus avec un carter rigide et ceux obtenus avec un carter souple, la matrice de MAC a été calculée en ne conservant, dans les deux cas, que les seuls degrés de liberté de la chaîne cinématique.

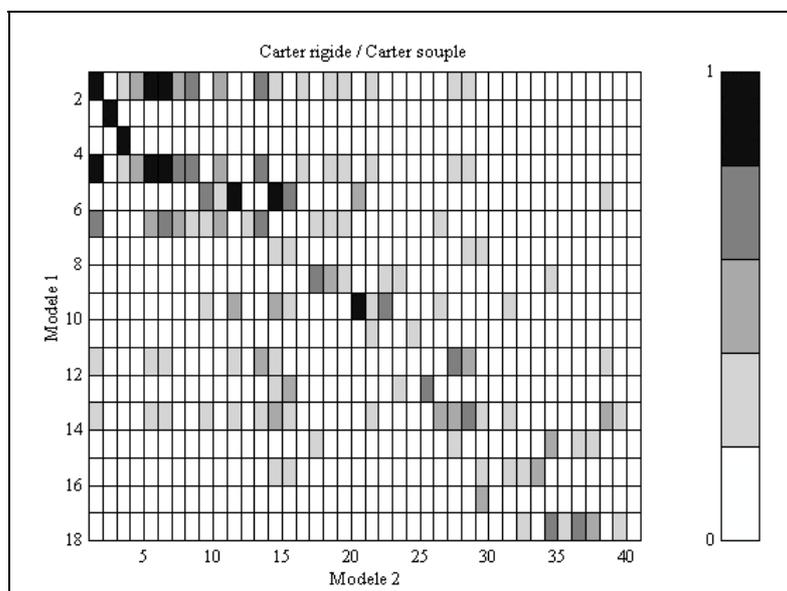


Figure 4. 3 : Matrice de MAC calculée sur les degrés de liberté de la chaîne cinématique

Seuls 7 modes peuvent être corrélés à plus de 80 % en forme entre les deux modèles (Cf. Table 4. 1). Mais, mis à part les 3 premiers modes, les écarts fréquentiels sont supérieurs à 10 %, ce qui signifie que ces modes ne peuvent pas réellement être appariés.

Carter rigide : N° mode et fréquence		Carter flexible : N° mode et fréquence		Ecart fréquentiel relatif	Critère de corrélation
1	115 Hz	1	111 Hz	- 4%	1
2	183 Hz	2	174 Hz	- 5%	0.99
3	192 Hz	3	183 Hz	- 4%	0.97
4	388 Hz	5	331 Hz	- 15%	0.99
		6	348 Hz	- 10%	0.99
5	540 Hz	11	466 Hz	- 14%	0.90
		14	594 Hz	+ 10%	0.89
9	822 Hz	20	739 Hz	- 10%	0.95

Table 4. 1 : Modes corrélés en forme pour les modèles avec carter rigide ou flexible

2.1.3 Influence du carter sur les énergies de déformation

La prise en compte de la déformabilité dynamique des carters, conduit à une diminution de l'énergie de déformation dans les roulements (Cf. Figure 4. 4). Ce phénomène s'explique par une augmentation de la flexibilité de l'ensemble du système.

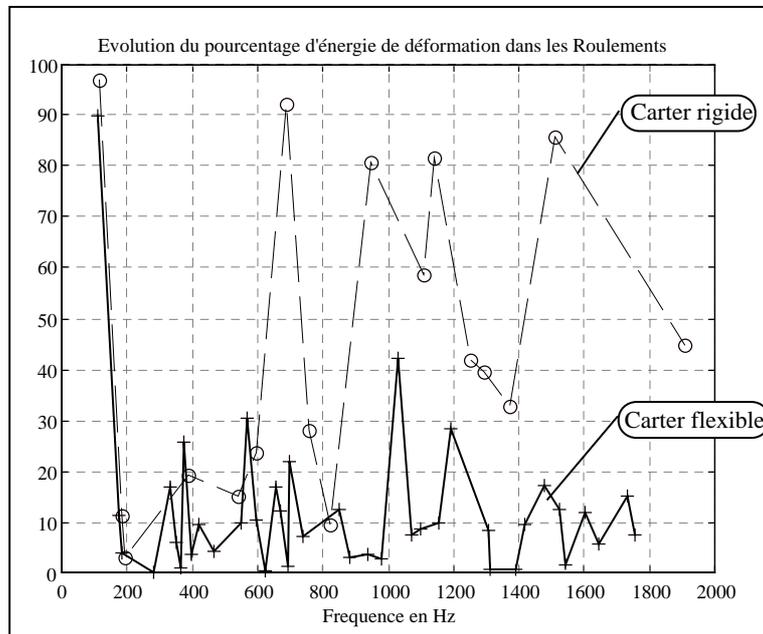


Figure 4. 4 : Pourcentage d'énergie de déformation dans l'ensemble des 6 roulements de la boîte

Néanmoins, les diagrammes énergétiques caractéristiques du comportement modal des paliers à roulement, définis au chapitre précédent pour des carters rigides, restent représentatifs mais, les pics caractéristiques, ont des amplitudes plus faibles et sont associés à des fréquences plus basses.

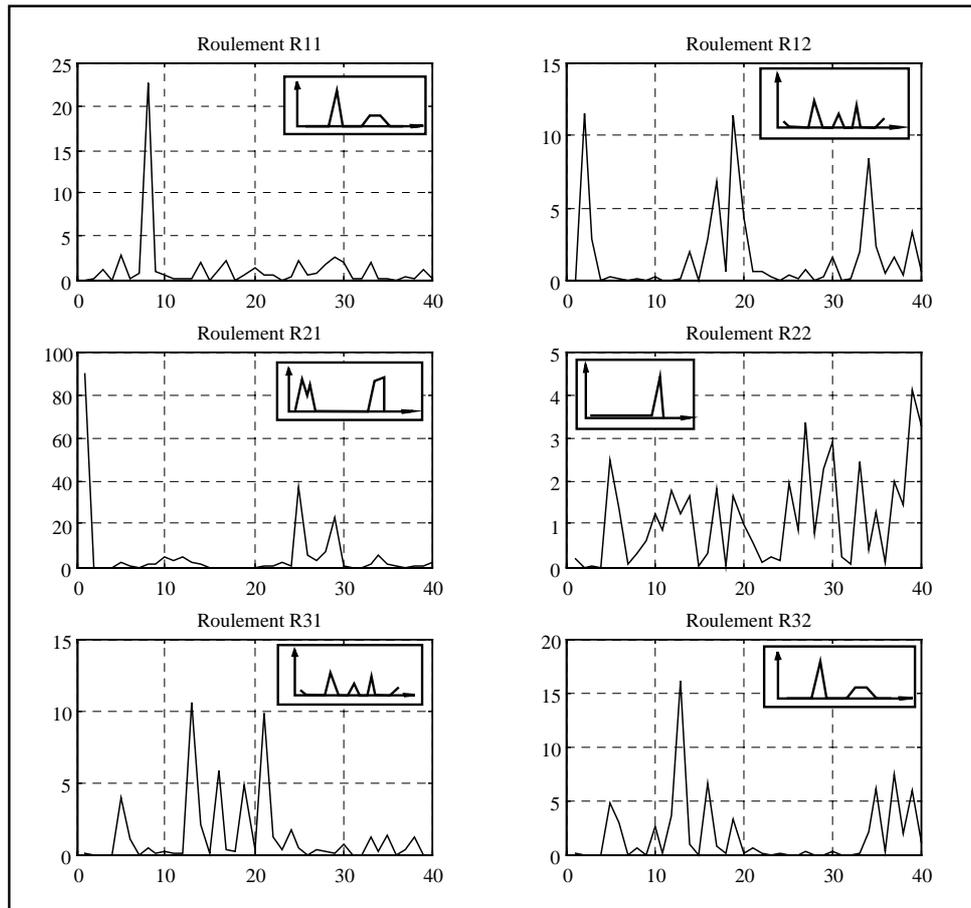


Figure 4. 5 : Diagrammes énergétiques associés aux 6 roulements de la boîte de vitesses

Du point de vue des engrenages, l'introduction du carter dans le modèle global, s'accompagne d'une diminution de l'énergie de déformation des dentures (Cf. Figure 4. 6).

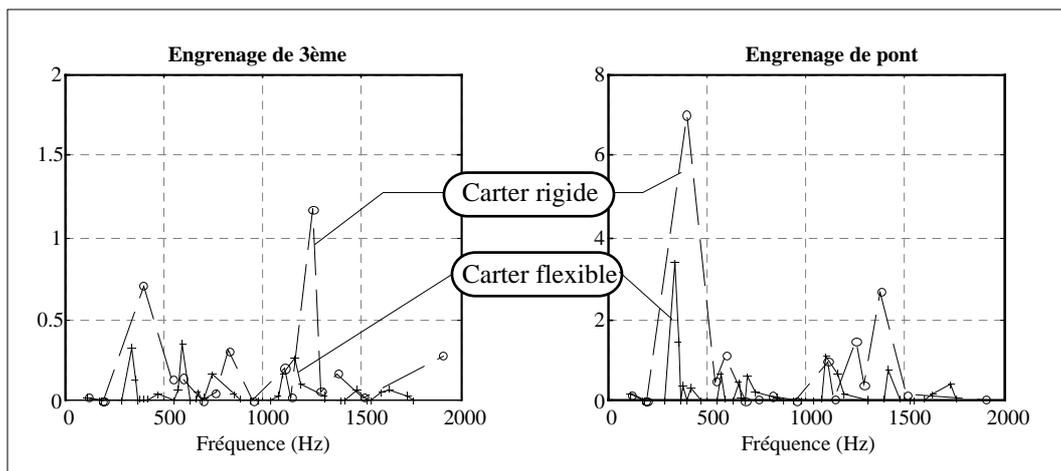


Figure 4. 6 : Diagrammes énergétiques associés aux 6 roulements de la boîte de vitesses

2.1.4 Etude d'un mode "atypique" : le mode 1

Le mode 1 se distingue des autres modes, par une fréquence basse (111 Hz dans le cas d'un carter flexible, 115 Hz dans le cas du carter rigide), et une participation énergétique très importante du roulement à billes R21. En effet, 90 % de l'énergie de déformation se trouve

dans ce palier. L'approche proposée pour modéliser les paliers à roulement permet une étude plus détaillée de la répartition des énergies de déformation entre les corps roulants. Il apparaît (Cf. Figure 4. 7.a)) que, seules deux billes de ce roulement sont chargées et, que l'énergie de déformation du premier mode, est localisée au niveau des contacts de ces deux billes sur les pistes de roulement (Cf. Figure 4. 7b).

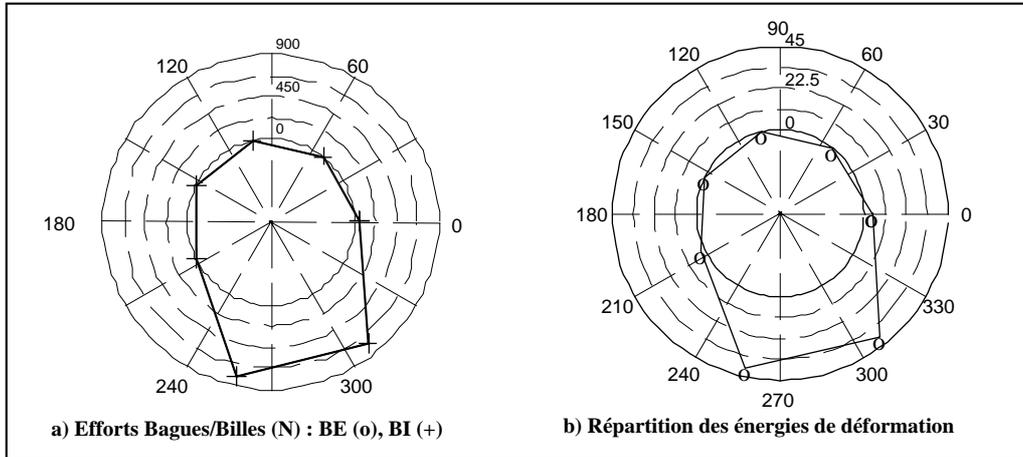


Figure 4. 7 :Répartition du chargement statique et de l'énergie de déformation du mode 1 sur les corps roulant du roulement à billes R21

C'est un mode "pseudo-rigide" de la chaîne cinématique, correspondant à des déplacements axiaux de l'arbre secondaire (Cf. Figure 4. 8) couplés, par l'intermédiaire des hélices des engrenages, à des rotations rigides des arbres primaire et secondaire. Ce mode s'accompagne également de déformation élastique en flexion de l'arbre secondaire mais de seconde importance (environ 3% de l'énergie de déformation totale).

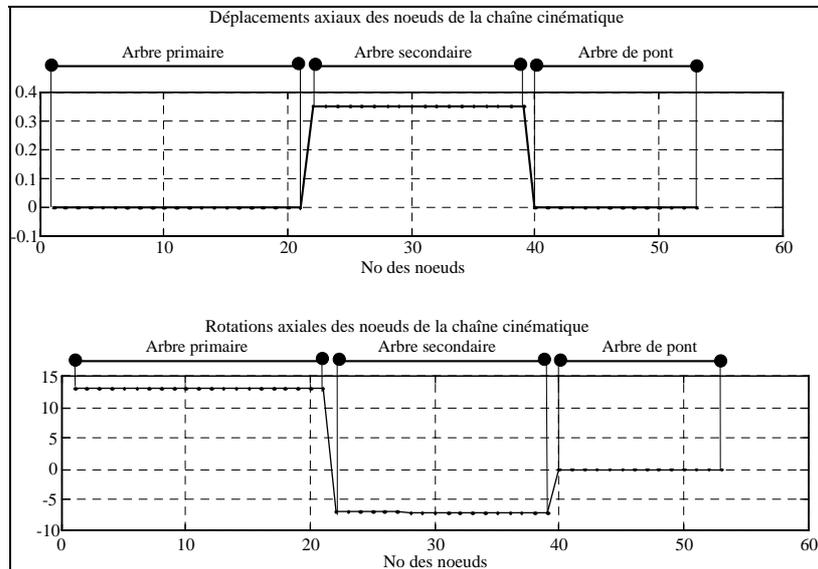


Figure 4. 8 : Déplacements "rigides" des arbres de la chaîne cinématique pour le mode 1

2.2 Réponse à une excitation

2.2.1 Caractéristiques de l'excitation et des calculs réalisés

Dans cette partie, le système formé de la chaîne cinématique et éventuellement du carter, est excité par une variation sinusoidale de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de troisième :

$$k_{eng}(t) = 3.0 \cdot 10^8 + 0.2 \cdot 10^8 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{eng} \cdot t) \text{ N.m}^{-1} \quad (4.1)$$

Le problème dynamique se ramène alors à la résolution du système à coefficients périodiques :

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K(t)] \cdot \{x\} = \{C\} \quad (4.2)$$

où $\{C\}$ correspond au couple statique appliqué à la boîte de vitesses. La résolution de cette équation se fait par une méthode pseudo-modale. Tous les modes propres de fréquence inférieure à 1 800 Hz sont utilisés et, l'amortissement est introduit sous la forme d'amortissement modal de 3 % pour les 40 modes propres retenus.

Afin de déterminer les vitesses critiques de rotation de l'arbre primaire, pour lesquelles les paramètres observés (erreur de transmission dynamique, efforts dynamiques dans les roulements ...) passent par un maximum, des calculs ont été réalisés pour des fréquences d'engrènement comprises entre 100 et 1 700 Hz avec un pas de 5 Hz. Dans le cas de l'engrenage de troisième, ce domaine d'études correspond à des vitesses de rotation de l'arbre primaire, comprises entre 200 et 3700 tr/mn et un pas d'étude de 11 tr/mn. Pour chaque valeur de la fréquence d'engrènement, la durée d'intégration est suffisante pour dépasser le régime transitoire. Pour la première itération, le régime est stabilisé pour un temps d'intégration supérieur à 0.5 s (Cf. Figure 4. 9).

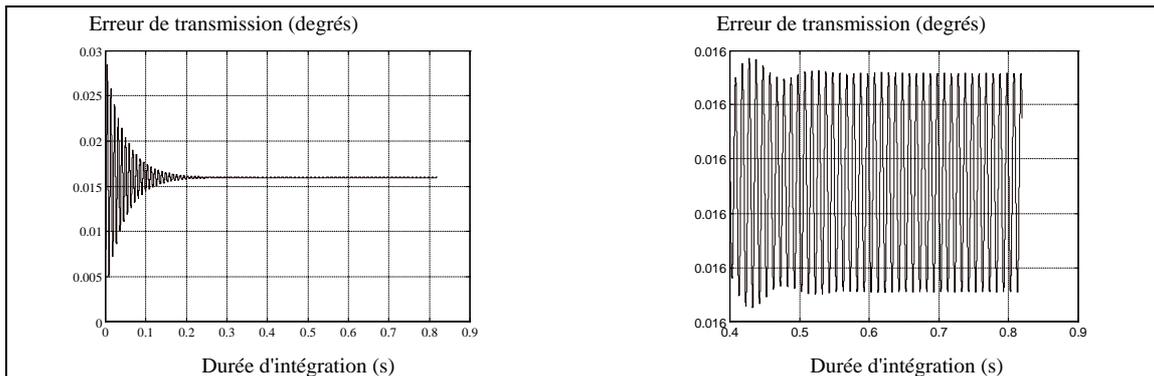


Figure 4. 9 : Durée du régime transitoire pour la première itération

Pour les itérations suivantes, le régime se stabilise pour après 0.25 s (Cf. Figure 4. 11)

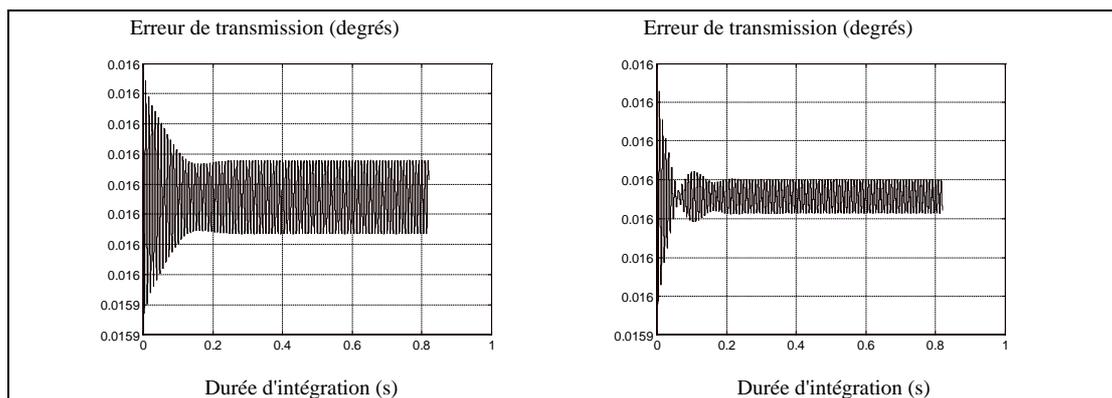


Figure 4. 10 : Durée du régime transitoire pour $f_{eng} = 115 \text{ Hz}$ et $f_{eng} = 120 \text{ Hz}$

2.2.2 Influence du carter sur l'erreur de transmission dynamique

Le paramètre observé dans cette partie est l'amplitude de l'Erreur de Transmission Dynamique, mesurée aux centres des pignons de l'engrenage de troisième, lorsque le régime transitoire est dépassé. La prise en compte ou non du carter va modifier sensiblement les résultats obtenus (Cf. Figure 4. 11). Le nombre, la position fréquentielle, l'amplitude des pics de résonance diffèrent d'une configuration à l'autre.

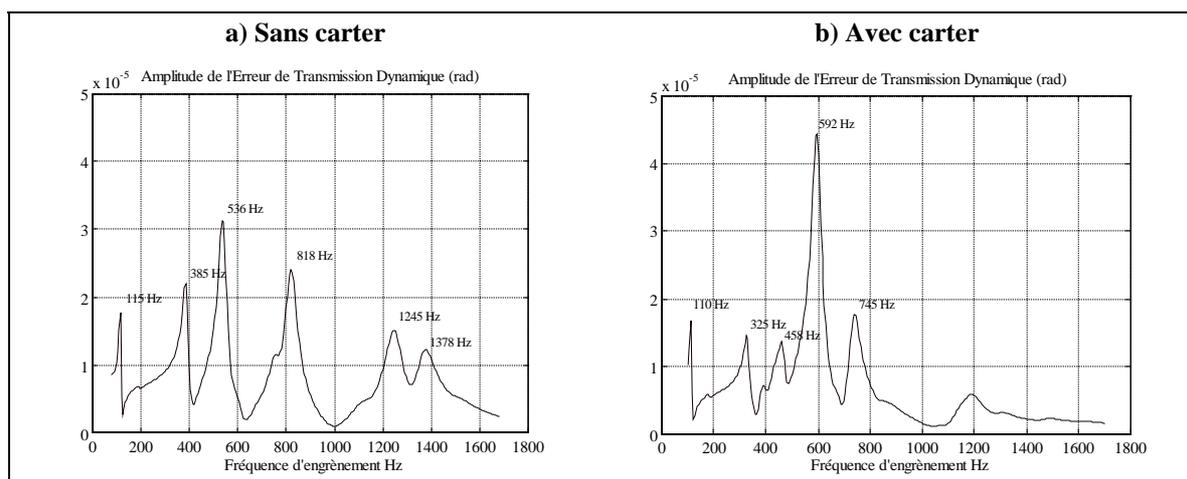


Figure 4. 11 : Erreur de transmission dynamique calculée aux centres des pignons excitateurs

Lorsque l'influence dynamique du carter n'est pas intégrée et, pour la gamme de fréquences considérées (Cf. Figure 4. 11 a)), l'Erreur de Transmission Dynamique passe par 6 pics de "résonance" d'amplitude voisine et pouvant être associés à des fréquences propres du système :

Fréquence critique (vitesse arbre primaire)	Amplitude	No mode associé	Fréquence propre
115 Hz (255 tr/mn)	$1.8 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	1	115 Hz
385 Hz (855 tr/mn)	$2.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	4	388 Hz
536 Hz (1190 tr/mn)	$3.1 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	5	540 Hz
818 Hz (1815 tr/mn)	$2.4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	9	822 Hz
1245 Hz (2765 tr/mn)	$1.5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	13	1251 Hz
1378 Hz (3060 tr/mn)	$1.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	15	1373 Hz

Table 4. 2 : Vitesses critiques pour l'erreur de transmission dynamique lorsque l'influence dynamique du carter est négligée

Lorsque le carter est introduit dans le modèle dynamique (Cf. Figure 4. 11 b)), il apparaît un pic principal vers 592 Hz et, quatre pics secondaires d'amplitude voisine de ceux du modèle sans carter.

Fréquence critique (vitesse arbre primaire)	Amplitude	No mode associé	Fréquence propre
110 Hz (245 tr/mn)	$1.7 \cdot 10^{-5}$ rad	1	111 Hz
325 Hz (720 tr/mn)	$1.5 \cdot 10^{-5}$ rad	5	331 Hz
458 Hz (1015 tr/mn)	$1.4 \cdot 10^{-5}$ rad	11	466 Hz
592 Hz (1315 tr/mn)	$4.5 \cdot 10^{-5}$ rad	14	595 Hz
740 Hz (1645 tr/mn)	$1.8 \cdot 10^{-5}$ rad	20	738 Hz

Table 4. 3 : Vitesses critiques pour l'erreur de transmission dynamique lorsque l'influence dynamique du carter est introduite

Le mode propre correspondant au pic principal est un mode global de déformation de l'ensemble du système. L'énergie de déformation associée à ce mode se répartit de la manière suivante :

- 41 % dans le carter,
- 48 % dans les arbres, ces déformations sont des déformations en flexion des arbres primaire (7 %) et secondaire (41 %),
- 10 % dans les roulements, en particulier les roulements coniques,
- moins de 1 % dans les dentures.

Ces déformations modales s'accompagnent de déplacements "rigides" en translation de l'arbre de pont et, en rotation des arbres primaire et secondaire.

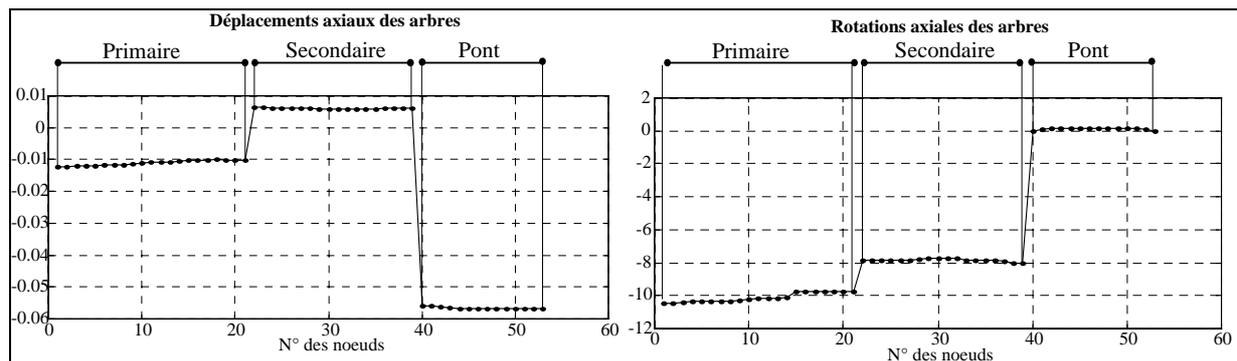


Figure 4. 12 : Déplacements rigides du mode 14

2.2.3 Efforts dynamiques sur les paliers à roulement

L'excitation, liée à la variation de la rigidité d'engrènement, est transmise au carter par l'intermédiaire des paliers à roulement. Les paramètres examinés dans cette partie sont les amplitudes, des efforts dynamiques appliqués sur les bagues intérieures des différents roulements, par rapport aux efforts statiques. Comme cela a été indiqué dans les chapitres 1 et 2, la modélisation retenue pour les paliers à roulement, permet la transmission des efforts et

des moments. Pour chaque roulement, cinq types d'efforts dynamiques peuvent donc être analysés.

Le premier point à vérifier est de s'assurer que les résultats numériques obtenus restent conformes aux hypothèses de modélisation. En effet, au chapitre 2, il a été montré que pour des variations quasi-statiques des efforts appliqués aux roulements comprises entre $\pm 12\%$ d'une valeur nominale, le comportement dynamique des paliers peut être modélisé par les matrices de rigidité tangente calculées pour le chargement nominal. Lorsque l'influence dynamique du carter est introduite, pour tous les efforts considérés (5 par roulements) l'amplitude des efforts dynamiques appliqués aux bagues intérieures reste inférieure à 5.5% de l'effort statique, le maximum étant atteint pour le roulement conique R31. Les hypothèses de modélisation sont donc respectées. En revanche, lorsque le carter n'est pas pris en compte, l'amplitude des efforts dynamiques dans les paliers reste en général inférieure 10% de l'effort statique, sauf pour le roulement conique R31 (Cf. Figure 4. 13). Pour ce roulement, les efforts dynamiques radiaux suivant l'axe z et, les moments dynamiques suivant l'axe y peuvent, pour certaines vitesses, atteindre 25 % de leur valeur statique. Mais, dans le cas de ce roulement, les chargements statiques suivant ces directions sont relativement faibles par rapport aux autres directions ($F_y = 3847 \text{ N}$, $F_z = 500 \text{ N}$, $M_y = 1.6 \text{ N/m}$, $M_z = 12 \text{ N/m}$) pour lesquelles les hypothèses de modélisation restent vérifiées. Ces variations ne sont donc pas très significatives. Néanmoins, dans le cas du carter rigide, pour certains roulements et certaines directions, l'amplitude des efforts dynamiques est comprise entre 8 % et 10 % de l'effort statique.

Les deux pics principaux (1 120 Hz et 1 245 Hz) correspondent, en fréquences, aux deux modes les plus énergétiques pour le roulement conique R31 (respectivement 43 % et 23 % de l'énergie de déformation).

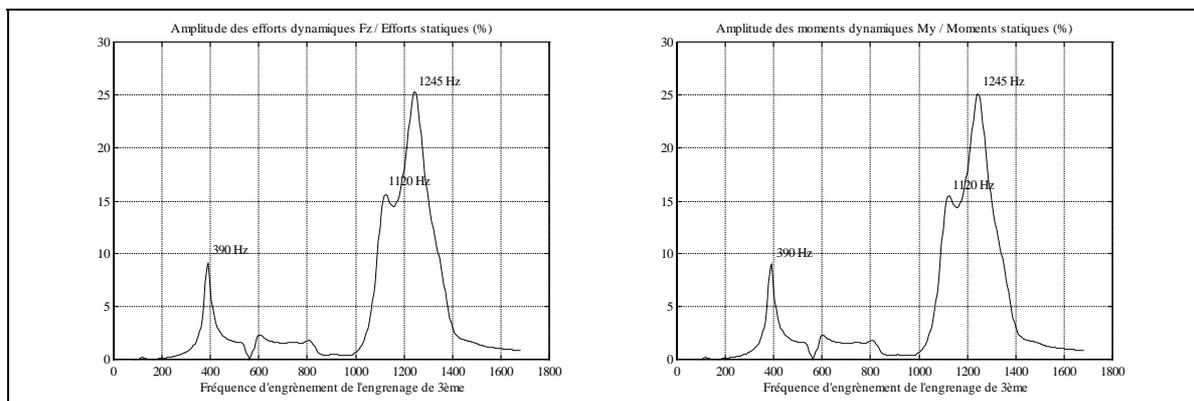


Figure 4. 13 : Amplitudes des efforts dynamiques F_z et des moments dynamiques M_y dans le roulement conique R31 lorsque l'influence dynamique du carter est négligée

L'introduction ou non de l'influence dynamique du carter va modifier, de manière significative, l'allure générale des courbes d'évolution de l'amplitude des efforts dynamiques en fonction de la fréquence d'excitation (proportionnelle à la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée). Néanmoins, il n'est pas possible de tirer de loi générale sur l'évolution de ces réponses. Dans le cas du roulement à billes R21 et de l'effort axial, les résultats obtenus avec ou sans carter sont notablement différents (Cf. Figure 4. 14). Il apparaît, en particulier lorsque le carter est intégré, une vitesse critique au voisinage de 1 170 Hz (soit 2 600 tr/mn) pour

laquelle les efforts statiques dans le roulement à billes passent par un maximum. Cette fréquence ne correspond pas exactement à une fréquence propre du système à l'arrêt (les fréquences propres voisines sont celles de modes 28 : 1155 Hz et 29 : 1190 Hz). Néanmoins, le mode 29, est le 3^{ème} mode le plus énergétique pour le roulement à billes (plus de 20 % de l'énergie totale de déformation) et, est également énergétique, mais de façon moins significative, pour les autres roulements (au total 29 % de l'énergie de déformation est dans les roulements).

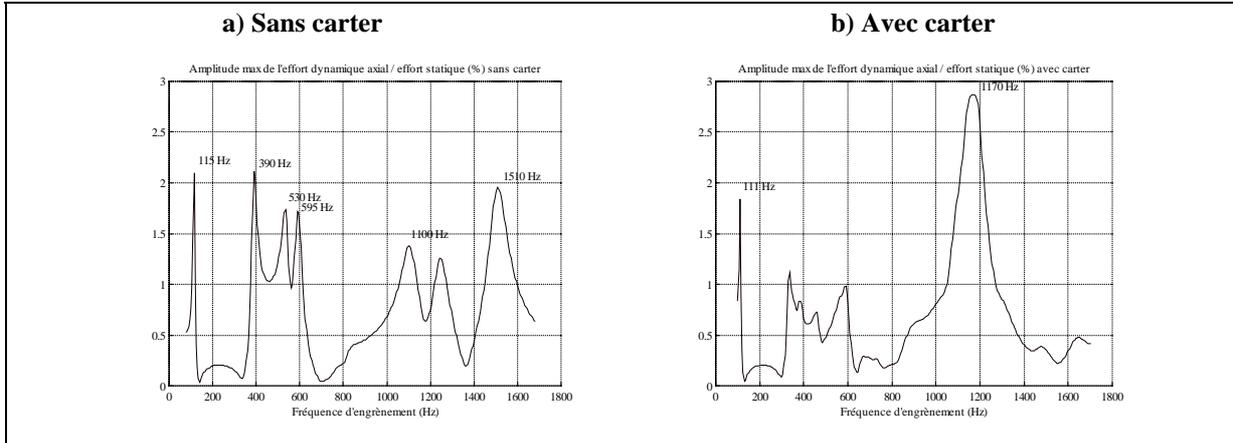


Figure 4. 14 : Amplitudes des efforts dynamiques axiaux dans le roulement à billes R21

Inversement, pour d'autres roulements et d'autres directions d'efforts, l'introduction du carter peut conduire à une diminution de l'amplitude des efforts dynamiques. C'est le cas par exemple pour le chargement radial F_y du roulement conique de l'arbre primaire R11.

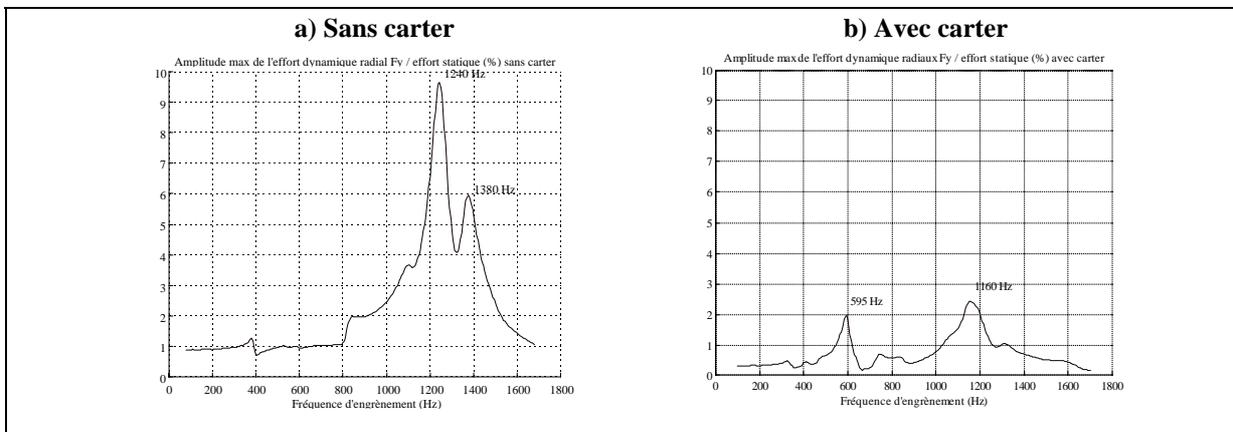


Figure 4. 15 : Amplitudes des efforts dynamiques radiaux F_y dans le roulement conique R11

Les deux vitesses critiques, obtenues lorsque le carter est négligé, sont également des vitesses critiques pour l'erreur de transmission dynamique (Cf. Table 4. 2 & Figure 4. 11 a)).

2.3 Conclusion

La prise en compte du carter dans le modèle dynamique global d'une boîte de vitesses automobile, modifie considérablement le comportement vibratoire de ce système.

L'introduction du carter, se traduit par une augmentation importante du nombre des modes propres à "l'arrêt". Ce sont majoritairement des modes globaux de la chaîne cinématique et du carter. Ce fort couplage (Cf. Figure 4. 16) entre les deux "structures" met en évidence, une nouvelle fois, la nécessité de modéliser de manière satisfaisante le comportement vibratoire des paliers à roulement. Par rapport aux résultats obtenus avec un carter rigide (Cf. Chap 3), la participation énergétique des roulements aux déformations modales est moins importante. Néanmoins, les diagrammes énergétiques caractéristiques du comportement modal des roulements de la boîte de vitesses, définis au chapitre précédent pour un carter rigide, restent valides lorsque l'influence dynamique du carter est introduite. Ces "signatures" énergétiques sont donc représentatives du comportement modal général des paliers à roulement de la boîte de vitesses.

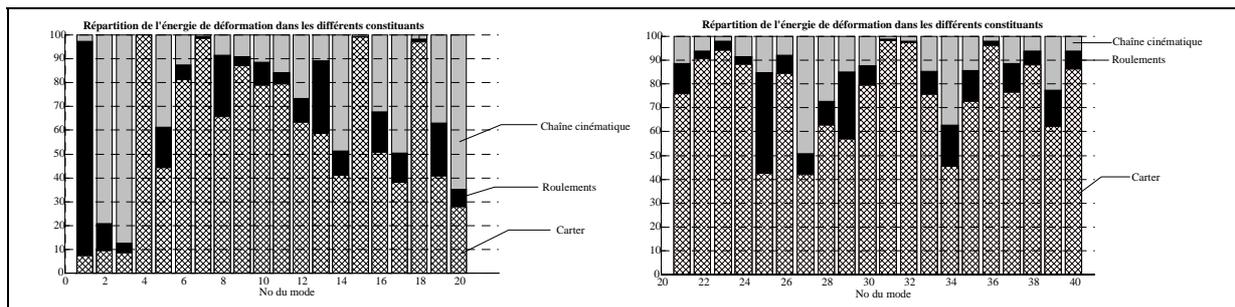


Figure 4. 16 : Répartition des énergies de déformation modale entre le carter, les roulements et la chaîne cinématique pour les 40 premiers modes propres

Lors de l'étude des "sous-vecteurs" propres associés aux degrés de liberté de la chaîne cinématique, les résultats obtenus avec un carter rigide (hypothèse classique pour les études des phénomènes d'engrènement (*Velex [1.40], Bard [1.1], Umezawa [1.37], [1.38]*) et ceux obtenus avec un carter flexible sont nettement différents. Très peu de modes peuvent être appariés entre les deux configurations et, les écarts fréquentiels sont relativement importants. Les modes propres à l'arrêt sont utilisés pour déterminer les vitesses critiques de fonctionnement, du système excité par l'erreur de transmission. Il semble donc délicat, voire impossible dans le cadre de l'étude des boîtes de vitesses automobile, de négliger l'influence dynamique du carter, lors de la modélisation "prédictive" des phénomènes d'engrènement.

La comparaison de la réponse du système, avec ou sans carter, à une excitation "simple" mais réaliste (variation sinusoïdale de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de 3ème), permet de confirmer cette première analyse. Lorsque le phénomène observé est, l'erreur de transmission dynamique mesurée aux centres des pignons (c'est-à-dire l'écart angulaire entre la position réelle de la roue de sortie par rapport à sa position théorique si la cinématique de l'engrènement était parfaite), le nombre, la position fréquentielle et l'amplitude de l'erreur de transmission des vitesses critiques dépend fortement, de la prise en compte ou non du carter. Le calcul de l'amplitude des efforts dynamiques transmis par les paliers à roulements, a permis de vérifier que, dans le cas du modèle complet intégrant l'influence du carter, les hypothèses de modélisation des paliers à roulement sont respectées : les efforts dynamiques n'excèdent pas 6 % de l'effort statique. Dans le cas du carter rigide, pour un roulement (le conique de pont R31) et deux directions d'efforts (radiales F_z et M_y), l'amplitude des efforts dynamiques dépassent les 20 % des efforts statiques. Mais, la "faible" valeur des efforts statiques associés permet de relativiser ces résultats qui sont, sommes toutes, peu significatifs. Globalement, l'introduction de l'influence dynamique du carter va modifier notablement, les vitesses "critiques" et les amplitudes des efforts transmis par les

roulements. Mais, il est impossible de définir des lois générales de l'influence du carter : pour certains roulements l'amplitude des efforts dynamiques va augmenter (effort axial roulement à billes) et, pour d'autre, cette amplitude va diminuer (effort radial roulement à rouleaux coniques R11).

3. ETUDES DE L'INFLUENCE DU LIEU ET DU PARAMÈTRE D'OBSERVATION DANS L'OBJECTIF DE MESURES EXPÉRIMENTALES.

3.1 Introduction

Comme cela a été indiqué au chapitre 2, le caractère discontinu de l'engrènement est la principale source d'excitation des systèmes de transmission de puissance par engrenages. Expérimentalement, il est impossible de mesurer directement cette excitation, seules ses conséquences sur le comportement dynamique du système, peuvent être observées (erreur de transmission, efforts dynamiques, accélérations ...). Dans les modèles numériques, cette excitation est introduite par l'intermédiaire d'une variation de rigidité d'engrènement et est, parfaitement connue. Le but de cette partie est d'évaluer les relations existant entre les différents paramètres observables et, l'excitation introduite par les engrenages, dans le cadre de l'étude d'une boîte de vitesses complète et de modèles globaux intégrant l'ensemble des composants technologiques, afin de quantifier les conséquences des contraintes expérimentales sur les grandeurs mesurées. Deux cas ont été envisagés, dans le premier, l'excitation est introduite sous la forme d'une variation sinusoïdale de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de troisième. Dans le deuxième, une seconde source d'excitation est introduite au niveau de l'engrenage de pont.

Expérimentalement, des techniques de mesure de l'erreur de transmission dynamique ont été élaborées au Laboratoire C.A.S.M. (*Bard et al. [1.2], Remond et al. [1.26], [1.27]*). Elles reposent sur l'utilisation de codeurs optiques. Le détail de ces techniques ne sera pas d'avantage développé ici. Néanmoins, des études expérimentales de mesures de l'erreur de transmission dynamique sont actuellement réalisées au Laboratoire, en collaboration avec le Groupe PSA-DETA, sur des boîtes de vitesses en fonctionnement comparables à celles considérées dans ce document. L'objectif de ces études est de définir une relation entre "la géométrie interne et les mesures externes". Mais, pour des raisons techniques et d'encombrement, les codeurs ne peuvent pas être montés aux centres des pignons et doivent être montés en bout d'arbres (Cf. Figure 4. 17). Les études présentées dans cette partie ont pour objet d'estimer l'erreur commise en mesurant l'erreur de transmission en bout d'arbre, plutôt qu'aux centres des pignons, dans le cas d'excitations "simples".

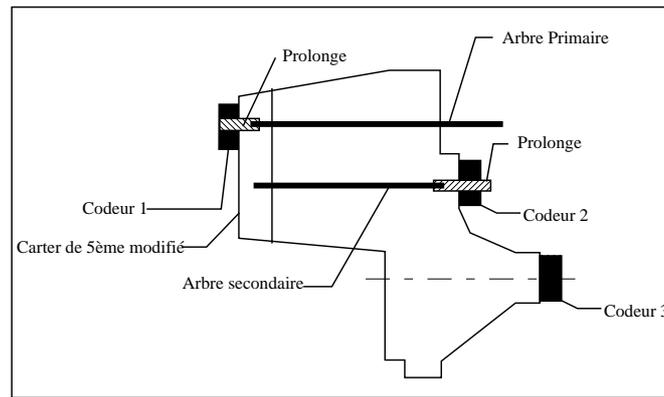


Figure 4. 17 : Description schématique de la position des codeurs lors de la campagne d'essais de mesure expérimentale de l'erreur de transmission dynamique sur une boîte en fonctionnement

Les excitations générées par les engrenages, se transmettent aux carters par l'intermédiaire des paliers à roulements et, peuvent être la source de nuisances sonores. Lors d'une seconde campagne d'essais, en cours de réalisation, ayant pour objectif la qualification et le recalage des modèles numériques présentés dans ce document, il a semblé judicieux de choisir les efforts dynamiques transitant par les paliers à roulements, comme paramètre d'observation et de comparaison "calculs-essais". Des capteurs piézo-électriques, spécialement conçus à cet usage, seront placés sur le pourtour du roulement à billes R21 comme indiqué dans la figure suivante (Cf. Figure 4. 18). Ils permettront de mesurer les efforts dynamiques radiaux qui apparaissent entre la bague extérieure et son alésage, lorsque la boîte est en fonctionnement.

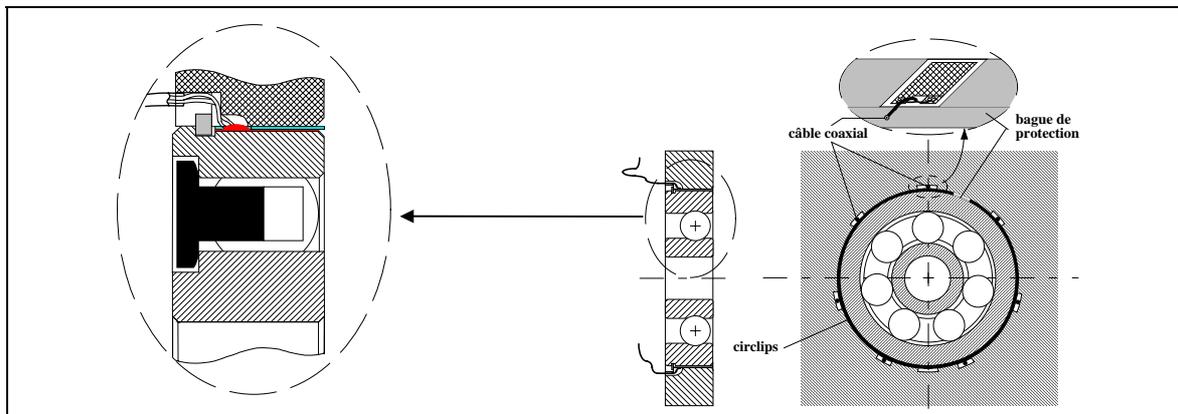


Figure 4. 18 : Description schématique des capteurs piézo-électriques développés pour mesurer les efforts dynamiques entre la bague extérieure du roulement à billes et son alésage.

Le choix du roulement à billes a été dicté par des raisons expérimentales (facilités de montage, place disponible ...) et des raisons "numériques" : les calculs de simulation ayant montré la grande influence de ce palier sur le comportement vibratoire de l'ensemble. Si les résultats expérimentaux sont concluants, ces mesures pourront être étendues aux autres roulements de la boîte. Les études présentées dans cette partie sont, le complément numérique de ces études expérimentales, lorsque l'excitation est parfaitement connue.

Les matrices de rigidité tangentes, modélisant le comportement dynamique des paliers à roulements, sont calculées pour une position précise des corps roulants. Les 7 noeuds du maillage des bagues extérieures conservés dans le modèle dynamique correspondent à cette discrétisation (Cf. Figure 4. 19 a)). C'est sur ces noeuds, que sont calculés les efforts dynamiques "numériques" transmis au carter par le roulement.

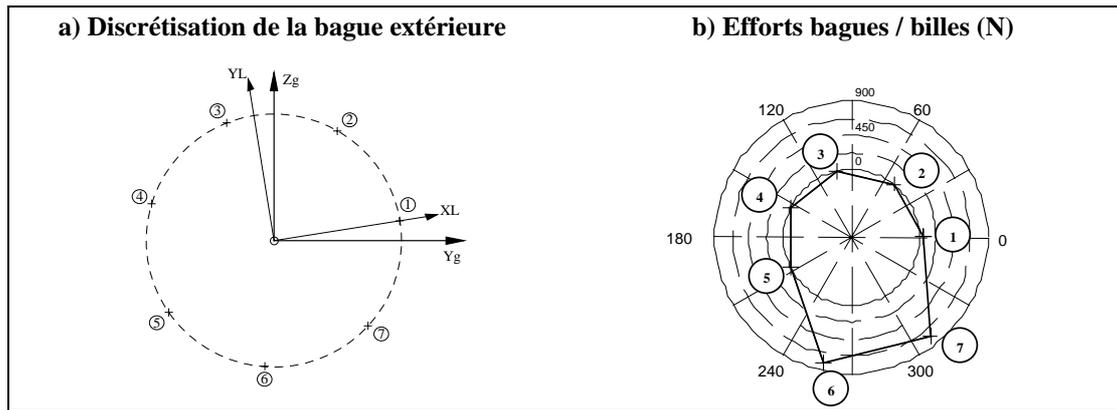


Figure 4. 19 : a) Position des noeuds de discrétisation de la bague extérieure du roulement à billes R21 dans le repère global, et définition de la position du repère élémentaire lié au roulement.
 b) Chargement statique des corps roulants

Les matrices de rigidité non nulles sont associées à des corps roulants transmettant un effort statique (Cf. Figure 4. 19 b)), c'est-à-dire les corps roulants 1, 5, 6 et 7. Elles seules peuvent transmettre un effort dynamique.

3.2 Source d'excitation unique : l'engrenage de 3ème

Comme lors de l'étude précédente, le modèle considéré dans cette partie est formé de la chaîne cinématique et du carter. Ce système est excité par une variation sinusoïdale de la rigidité d'engrènement de l'engrenage de troisième :

$$k_{\text{eng}}(t) = 3.0 \cdot 10^8 + 0.2 \cdot 10^8 * \sin(2. \pi. f_{\text{eng}} \cdot t) \text{ N.m}^{-1} \quad (4. 3)$$

La résolution du système d'équations de l'équilibre dynamique est réalisée par la méthode pseudo-modale en conservant les 40 premiers modes du système à l'arrêt, soit ceux de fréquence inférieure à 1 800 Hz, et en introduisant un amortissement modal de 3% sur chacun d'eux.

3.2.1 Mesures de l'erreur de transmission dynamique

La source d'excitation du système dans cette première étude étant liée à l'engrenage de 3^{ème}, la mesure principale de cette excitation est l'erreur de transmission entre les arbres primaire et secondaire. La figure suivante (Figure 4. 20) représente, en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée, l'amplitude de l'erreur de transmission dynamique calculée, soit aux centres des pignons de l'engrenage de 3^{ème}, soit aux extrémités des arbres conformément au dispositif expérimental (Cf. Figure 4. 17).

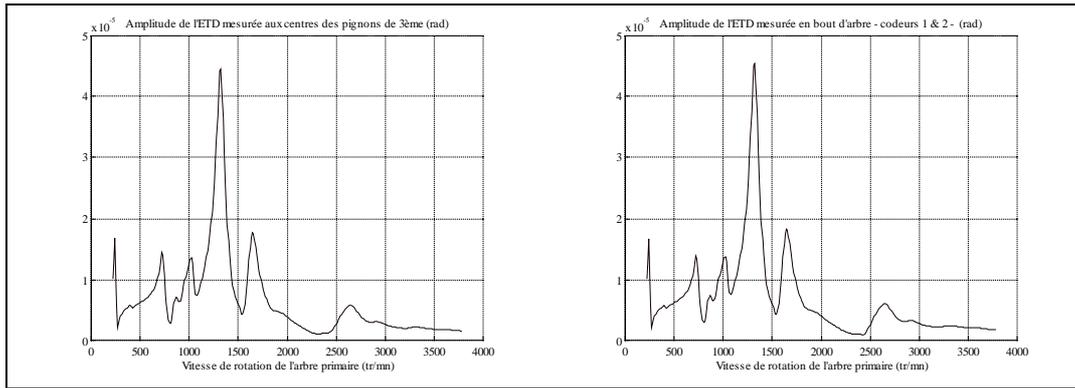


Figure 4. 20 : Amplitude de l'erreur de transmission dynamique (ETD) entre l'arbre primaire et secondaire calculée aux centres des pignons de 3^{ème} et en extrémité d'arbre conformément au dispositif expérimental.

Les résultats obtenus sont quasi-identiques, les vitesses critiques sont les mêmes et l'amplitude de l'erreur de transmission dynamique correspondante est également identique. Néanmoins, afin d'affiner ces résultats, la variation relative ΔETD de l'amplitude de l'erreur de transmission dynamique entre les deux configurations de "mesure" est calculée. Soit :

$$\Delta ETD = \frac{(ETD_{\text{en bout d'arbre}}) - (ETD_{\text{aux centres des pignons de 3}^{\text{ème}}})}{(ETD_{\text{aux centres des pignons de 3}^{\text{ème}}})} * 100 \quad (4. 4)$$

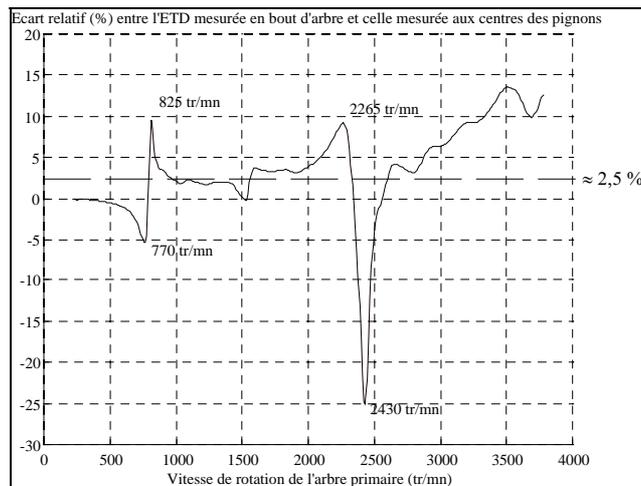


Figure 4. 21 : Ecart relatif entre l' Erreurs.de Transmission Dynamique calculée en bout d'arbre et celle calculée aux centres des pignons de 3^{ème}

Les écarts les plus importants entre les deux positions de calcul de l'erreur de transmission dynamique (Cf. Figure 4. 21) correspondent à des vitesses de rotation de l'arbre primaire, pour lesquelles l'amplitude de l'erreur de transmission dynamique est la plus faible (Cf. Figure 4. 20). Ces écarts ne sont donc pas significatifs et ne correspondent pas aux vitesses critiques de fonctionnement. Néanmoins, pour la majorité des vitesses considérées, la variation relative est positive, c'est-à-dire que l'amplitude de l'erreur de transmission mesurée en bout d'arbre, est légèrement supérieure à celle calculée aux centres des pignons ($\approx 2,5 \%$).

L'examen de la boucle de puissance dans la boîte de vitesses (Cf. Figure 4. 22) permet d'expliquer l'ensemble de ces résultats : faible influence du lieu d'observation et amplitude

légèrement plus élevée de l'erreur de transmission dynamique, lorsqu'elle est mesurée en bout d'arbre.

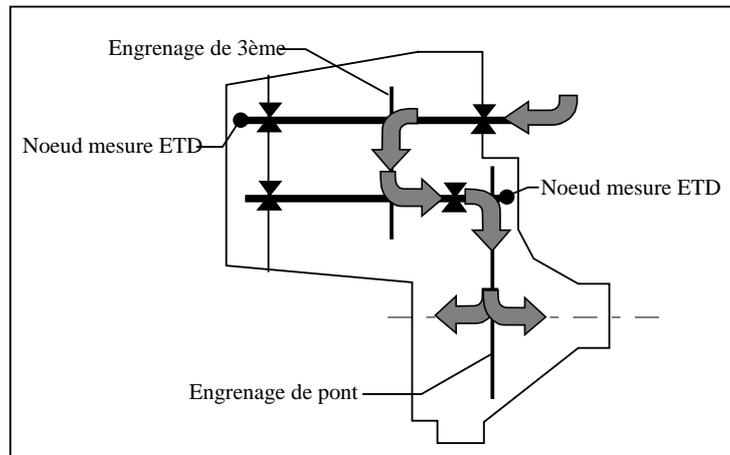


Figure 4. 22 : Définition de la boucle de puissance dans la boîte de vitesses en fonctionnement.

En effet, les points de mesure étant placés à l'extérieur de la boucle de puissance, les différences observées entre les deux mesures, proviennent des déformations en torsion de la zone de l'arbre secondaire comprise entre le centre des pignons de 3^{ème} et de pont. Cette zone étant relativement courte (136 mm) et les diamètres des arbres "importants" (entre 25 mm et 80 mm), la rigidité en torsion équivalente est grande ($\approx 4.2 \cdot 10^4 \text{ N.m.rad}^{-1}$). Les déformations induites sont donc petites ce qui explique le faible écart entre les deux mesures.

L'excitation introduite au niveau de la denture de l'engrenage de 3^{ème} va également générer une erreur de transmission entre l'arbre secondaire et l'arbre de pont (Cf. Figure 4. 23), mais l'amplitude de cette erreur est beaucoup plus faible.

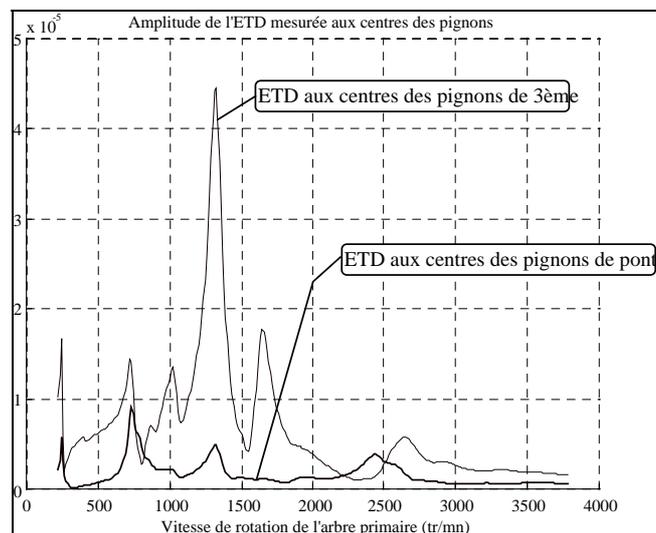


Figure 4. 23 : Erreur de transmission aux centres des pignons des engrenages de 3^{ème} et de pont

3.2.2 Efforts dynamiques : bague extérieure roulement à billes - alésage carter.

Le paramètre observé dans cette partie est, l'amplitude de l'effort radial transmis par le roulement à billes R21 au carter, au niveau des 7 noeuds de discrétisation de la bague extérieure. Comme cela a été indiqué en début de paragraphe (Cf. § 3.1), les efforts

dynamiques ne sont transmis que pour des directions radiales voisines de la direction du chargement statique, soit pour le modèle considéré 4 noeuds de discrétisation. La figure suivante indique, pour ces noeuds (Cf. Figure 4. 19), l'amplitude des efforts dynamiques transmis, en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre primaire.

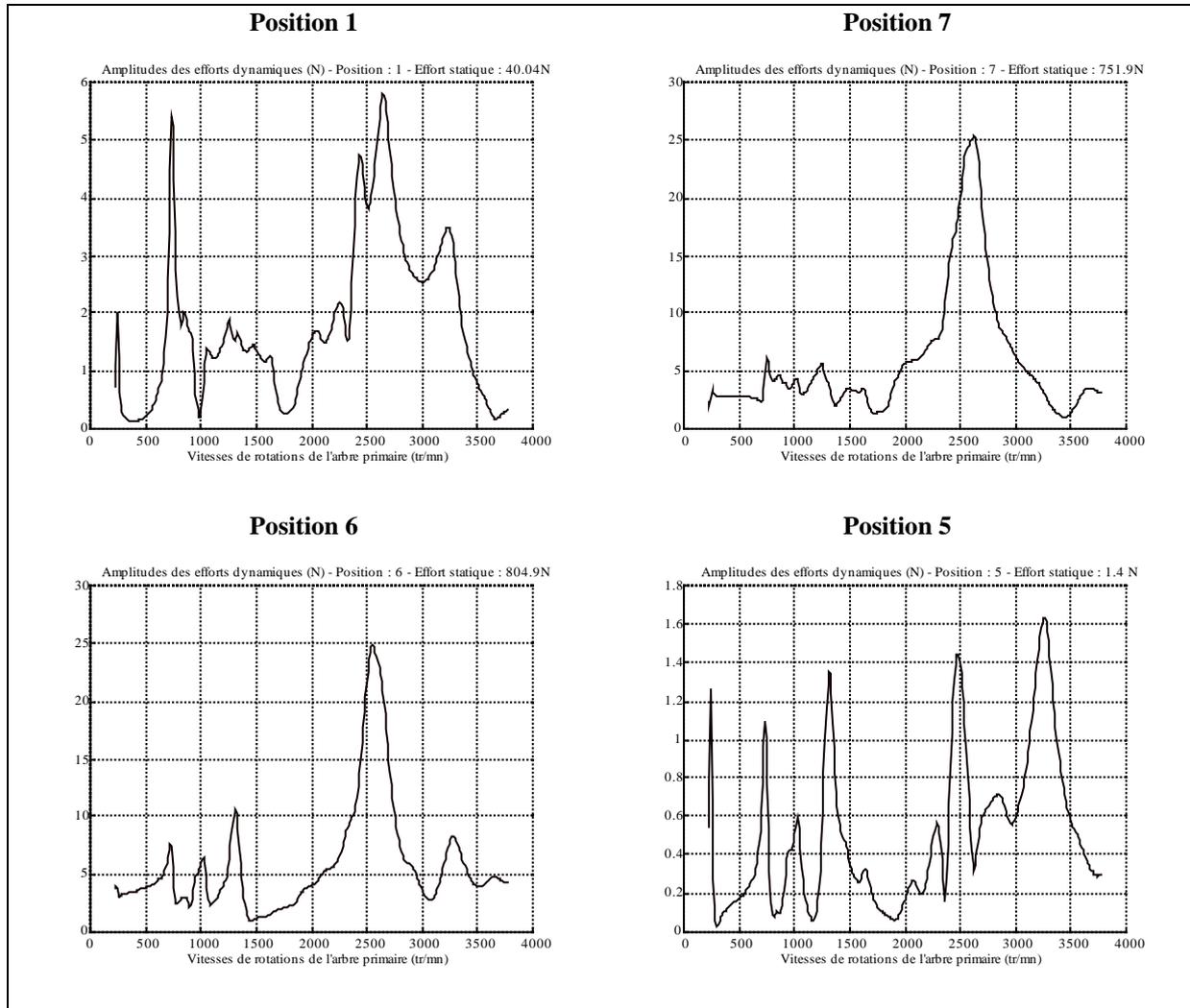


Figure 4. 24 : Amplitude de l'effort dynamique radial transmis par le roulement à billes R21 au carter. Pour la définition des différentes "positions" se reporter à la Figure 4. 19

Pour une excitation due à une variation de rigidité d'engrènement "simple" mais réaliste, l'amplitude des efforts dynamiques transmis par le roulement à billes au carter, semble être suffisamment importante pour que des mesures expérimentales puissent être réalisées à l'aide de film piézo-électrique. Les courbes précédentes permettent de vérifier que l'amplitude des efforts dynamiques radiaux transmis est d'autant plus élevée, que le chargement statique du corps roulant correspondant à la direction considérée est important (directions 6 et 7). Pour ces deux directions, les efforts dynamiques restent inférieurs à 10 % de l'effort statique radial. Les hypothèses de linéarisation du comportement dynamique des paliers à roulement sont donc vérifiées. Néanmoins, pour ces directions, il apparaît une vitesse "critique" (2 550 tr/mm, soit une fréquence d'engrènement de 1 150 Hz), pour laquelle les efforts dynamiques radiaux passent par un maximum de 25 N, soit 3% de l'effort statique. Cette fréquence d'engrènement correspond en fréquence au 28^{ème} mode propre du système à l'arrêt (1 155 Hz). C'est un mode moyennement énergétique pour les roulements : 10% de l'énergie de déformation est localisée dans les paliers dont 7 % dans le roulement à billes.

3.3 Source d'excitation multiple : engrenages de 3^{ème} et de pont

3.3.1 Objectifs et mise en oeuvre

La chaîne cinématique considérée dans ce chapitre (Cf. Figure 4. 25) est constituée de deux engrenages en prise, susceptibles d'exciter simultanément le système. Il s'agit de l'engrenage de 3^{ème} (de nombre de dents Z_1 et Z_2) et de celui de pont (de nombre de dents Z_3 et Z_4).

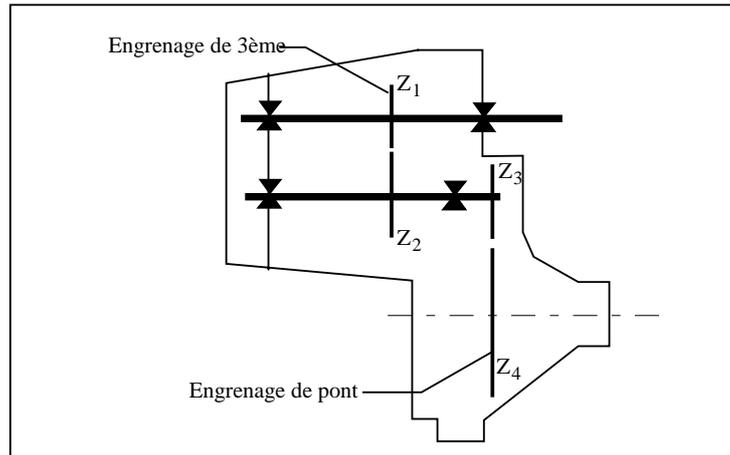


Figure 4. 25 : Rapports de réduction le la chaîne cinématique considérée

L'objectif de cette partie est d'estimer les interférences éventuelles entre ces deux excitations. Pour cela, des variations sinusoïdales "identiques" (mais de fréquences différentes) des rigidités des engrenages de 3^{ème} et de pont ont été introduites (4.5). Les résultats obtenus avec cette double excitation ont été comparés à ceux obtenus précédemment, pour une excitation unique au niveau de l'engrenage de 3^{ème}.

$$k_{eng}(t) = 3.0 \cdot 10^8 + 0.2 \cdot 10^8 * \sin(2. \pi. f_{eng} \cdot t) \text{ N.m}^{-1} \quad (4. 5)$$

La fréquence d'engrènement f_{eng} de chacun des engrenages s'exprime en fonction, de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée ω_1 (en tours par minute) et du nombre de dents Z_i des engrenages considérés :

$$\begin{aligned} f_{3^{ème}} &= \frac{Z_1}{60} \omega_1 \\ f_{pont} &= \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{60} \omega_1 \end{aligned} \quad (4. 6)$$

Un "balayage en vitesse" a été réalisé entre 170 tr/mn et 3 780 tr/mn avec un pas de 10 tr/mn. Dans cette plage d'études, les fréquences des excitations sont inférieures à 1 800 Hz, limite de validité du modèle dynamique considéré. Comme précédemment, la résolution numérique a été réalisée par superposition modale, avec un amortissement modal identique sur tous les modes. Les résultats analysés correspondent au régime stationnaire.

La combinaison des deux excitations sinusoïdales va moduler les réponses temporelles. L'observation de l'amplitude dynamique du signal temporel (paramètre étudié

dans la partie précédente) n'est plus ici un paramètre d'analyse efficace. Le paramètre "global" retenu dans cette partie, qui permet d'observer l'évolution de la réponse en fonction de la vitesse de rotation, est l'amplitude (exprimée en dB) du premier harmonique d'engrènement de chacun des engrenages. Pour une vitesse de rotation ω_i et une réponse temporelle $r(t)$ données, l'amplitude $H_1(\omega_i)$ du premier harmonique de la fréquence d'engrènement f_{eng} est donnée par :

$$H_1(\omega_i) = R_{dB_{\omega_i}}(f_{eng}) \quad (4.7)$$

avec :

$$R_{dB_{\omega_i}}(f) = 20 \log \left(\frac{|R(f)|}{réf} \right) \quad (4.8)$$

où "R(f)" est la transformée de Fourier du signal "r(t)", et "réf" une valeur de référence.

Dans le cas de signaux discrets, la transformée de Fourier du signal est également discrète et, le pas de discrétisation δf dépend de la durée d'observation T du signal r(t) (théorème de Shannon) :

$$\delta f = \frac{1}{T} \quad (4.9)$$

Lors d'un balayage en vitesse, les fréquences d'engrènement ne vont donc pas correspondre exactement aux pas de discrétisation du signal fréquentiel et, la valeur de l'amplitude des premiers harmoniques sera estimée par l'amplitude du signal associée à la fréquence la plus proche. L'écart fréquentiel Δf_{ω_i} entre la fréquence d'engrènement réelle et la valeur observée varie avec la vitesse ω_i considérée :

$$\begin{aligned} \Delta f_{\omega_i} &= f_{eng} - E \left(\frac{f_{eng}}{\delta f} \right) \cdot \delta f \\ &= \frac{n_1}{n_2} \omega_i - E \left(\frac{n_1 \omega_i}{n_2 \delta f} \right) \cdot \delta f \end{aligned} \quad (4.10)$$

où E représente la fonction partie entière.

Cette variation avec la vitesse de la précision de la valeur de l'amplitude relevée, va provoquer des fluctuations, autour de la courbe "réelle", de la réponse numérique observée (Cf. Figure 4. 26a)). Pour éviter ces fluctuations numériques, il faudrait, soit augmenter la durée d'acquisition T du signal temporel, afin de diminuer l'écart fréquentiel δf , mais cela revient à augmenter d'autant les temps de calcul, soit, lorsque le paramètre suivi est l'amplitude d'un seul harmonique, ajuster pour chaque vitesse considérée, le pas de discrétisation temporel dt de manière à ce que la fréquence d'engrènement soit un multiple exacte de δf . Cette seconde technique ne peut, en général, pas s'adapter au cas de fréquences d'excitations multiples. Il est également intéressant de noter que, dans le cas de traitement de résultats expérimentaux, le pas de variation de la vitesse de rotation étant en général plus grand, ces phénomènes d'oscillation n'apparaissent pas. La courbe b) de la figure ci-dessous (Cf. Figure 4. 26) a été obtenue à partir de la courbe a), mais en ne traçant qu'un point sur 5,

sca qui correspond à un pas en vitesse de rotation de 50 tr/mn, voisin des valeurs expérimentales.

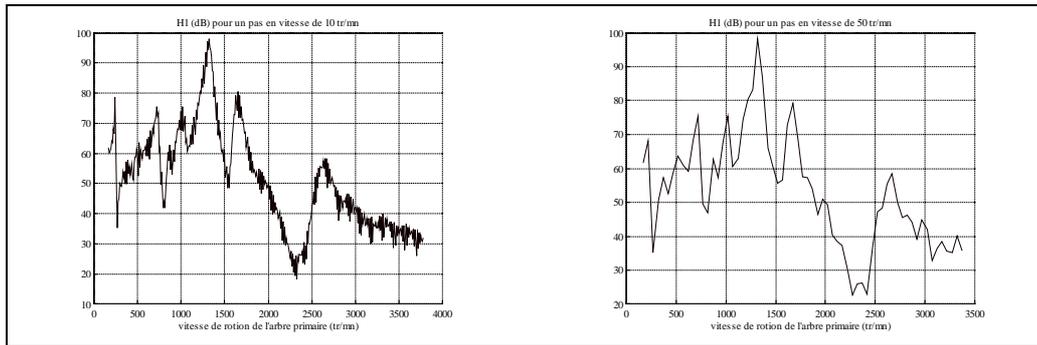


Figure 4. 26 : Influence du pas de discrétisation en vitesse

Par la suite, les courbes étudiées seront "lissées" en ne représentant qu'un certain nombre de points de calcul afin de permettre une meilleure lisibilité des résultats.

3.3.2 Etudes de l'erreur de transmission dynamique

Les courbes d'évolution de l'amplitude du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème}, déterminée à partir de l'erreur de transmission dynamique calculée au centre des pignons de 3^{ème}, obtenues dans le cas d'une excitation "unique" (Cf. Figure 4. 27 a)) et dans le cas d'une excitation "multiple" (Cf. Figure 4. 27b)) sont quasi identiques. Les vitesses critiques sont les mêmes et, les écarts en amplitude proviennent d'une discrétisation en vitesse légèrement différente entre les deux études. Ces bonnes concordances des résultats se retrouvent lorsque l'erreur de transmission dynamique est calculée en d'autres points (extrémités des arbres primaire et secondaire, centres des pignons de pont ...).

Les vitesses critiques localisées sur ces courbes correspondent bien (aux erreurs de localisation près) à celles déterminées dans la partie 2.2.2 de ce chapitre (Cf. Table 4. 2) en analysant l'amplitude du signal temporel.

Dans le cadre des hypothèses : de variations sinusoïdales "identiques" des rigidités d'engrènement des engrenages de 3^{ème} et de pont, et du choix de l'amplitude des premiers harmoniques d'engrènement comme paramètre d'analyse de l'erreur de transmission dynamique, il apparaît que les résultats obtenus sont indépendants du nombre de sources d'excitation présentes dans le modèle. Cela signifie que l'évolution en fonction de la vitesse, du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème} ne dépend que de cet engrenage et est indépendant des excitations liées aux autres dentures. Ce résultat devra être affiné dans le cas d'excitations plus complexes et vérifiés pour d'autres engrenages.

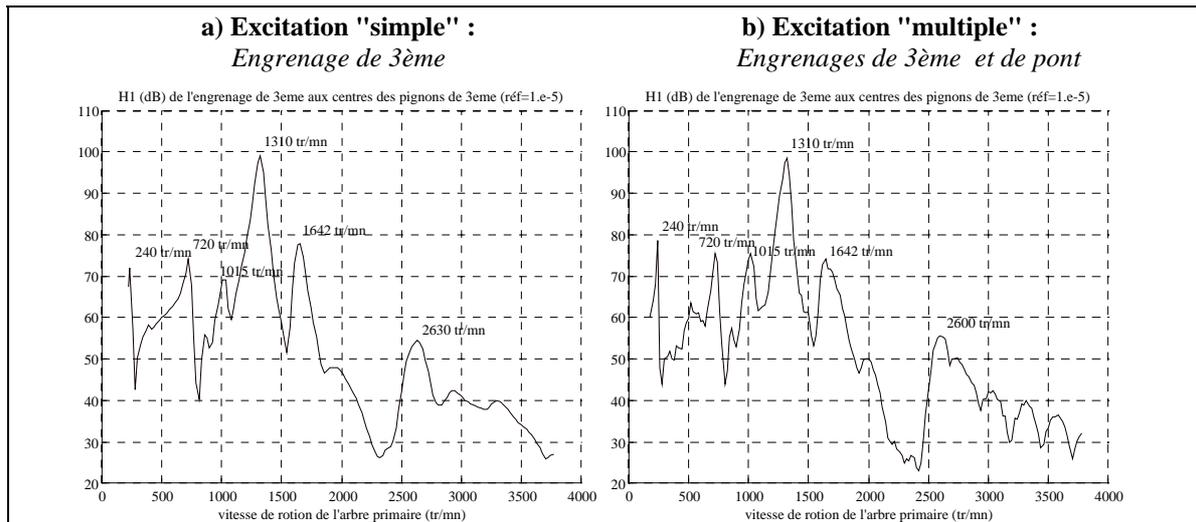


Figure 4. 27 : Influence du couplage des excitations sur l'erreur de transmission dynamique

Pour l'analyse de l'évolution du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de pont, les résultats obtenus à partir de l'erreur de transmission calculée en bout d'arbre primaire et secondaire, ou aux centres de pignons de pont, sont différents (Cf. Figure 4. 28). Globalement, l'amplitude du premier harmonique de l'engrenage de pont est plus élevée lorsqu'elle est déterminée à partir de l'erreur de transmission en bout d'arbre.

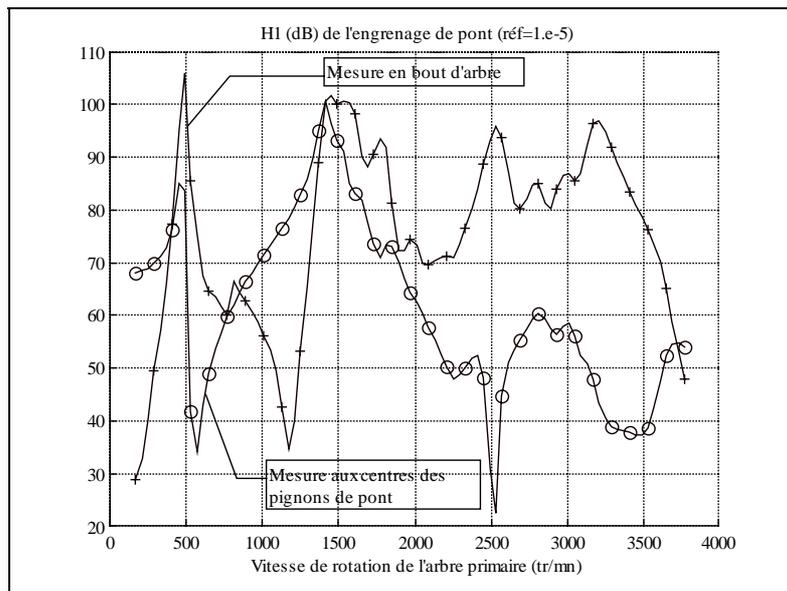


Figure 4. 28 : Comparaison de l'évolution du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de pont calculée à partir de l'erreur de transmission dynamique aux centres des pignons de pont ou en extrémité d'arbre.

La comparaison des résultats obtenus pour le premier harmonique d'engrènement de chaque engrenage, calculé à partir de l'erreur de transmission dynamique en bout d'arbre (Cf. Figure 4. 29), montre que l'amplitude du premier harmonique de l'engrenage de pont est globalement plus élevée que celui de l'engrenage de 3^{ème} et que les vitesses critiques associées à chaque engrenage sont distinctes.

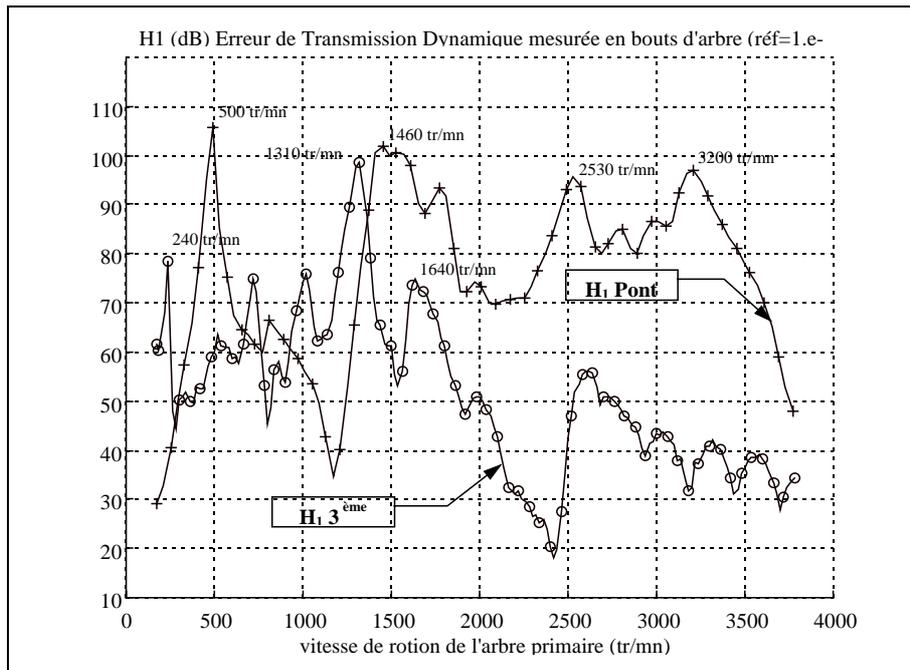


Figure 4. 29 : Evolution du premier harmonique d'engrènement des engrenages de 3^{ème} et de pont calculé à partir de l'erreur de transmission dynamique en extrémités d'arbre.

Pour le premier harmonique d'engrènement de chacun des engrenages considérés, la première vitesse "critique" qui apparaît (≈ 240 tr/mn et 500 tr/mn) correspond à une fréquence d'excitation voisine de la première fréquence du système (111 Hz). Ce mode est contrôlé par le roulement à billes R21 (Cf. § 2.1.4).

3.3.3 Efforts transmis par le roulement à billes au carter

Les paramètres analysés dans cette partie sont les amplitudes du premier harmonique des fréquences d'engrènement (en dB) calculées, en chacun des points de discrétisation de bague extérieure du roulement à billes (Cf. Figure 4. 19), à partir des fonctions de transfert $FT(f)$ entre les efforts radiaux transmis par le roulement au carter et l'erreur de transmission dynamique mesurée en bout d'arbre. Soit, pour un noeud de la bague extérieure et une vitesse de rotation ω_i donnés :

$$FT_{\omega_i}(f) = \frac{\left| \text{FFT}(F_r^{\omega_i}(t)) \right|}{\left| \text{FFT}(ETD^{\omega_i}(t)) \right|} \quad (4.11)$$

où $F_r^{\omega_i}(t)$ est l'effort radial temporel transmis par le roulement à billes au carter durant la durée T d'observation, et $ETD^{\omega_i}(t)$ est l'erreur de transmission dynamique temporelle mesurée en extrémité des arbres primaire et secondaire.

Pour le premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème}, les résultats obtenus lorsqu'une ou deux sources d'excitation sont introduites dans le modèle, sont très proches (Cf. Figure 4. 30), les vitesses "critiques" et les amplitudes correspondantes sont identiques, à la précision de la résolution près. Néanmoins, lorsque l'excitation liée à l'engrenage de pont est introduite (Cf. Figure 4. 30 b)), la réponse numérique du système est

plus perturbée, alors que les pas de discrétisation en vitesse utilisés sont très proches (11.1 tr/mn dans le cas a), 10 tr/mn dans le cas b)).

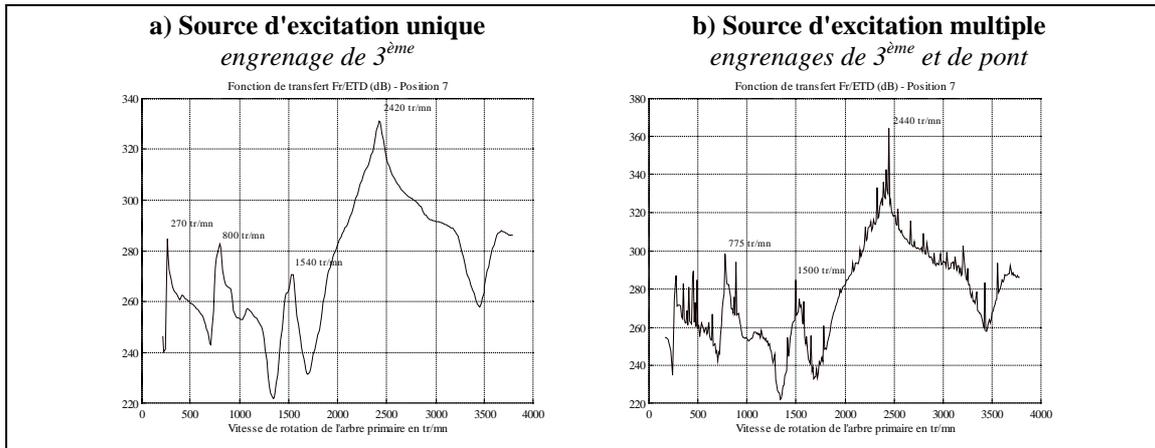


Figure 4. 30 : Evolution du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème} calculé à partir de la fonction de transfert entre les efforts radiaux transmis par le roulement à billes au carter et l'erreur de transmission dynamique mesurée en bout d'arbre

Dans le cas d'une excitation simultanée, par l'engrenage de 3^{ème} et de pont, et de l'analyse de la fonction de transfert "efforts radiaux - erreur de transmission dynamique", l'amplitude de l'harmonique de 3^{ème} est plus grande que celle de pont (Cf. Figure 4. 31)

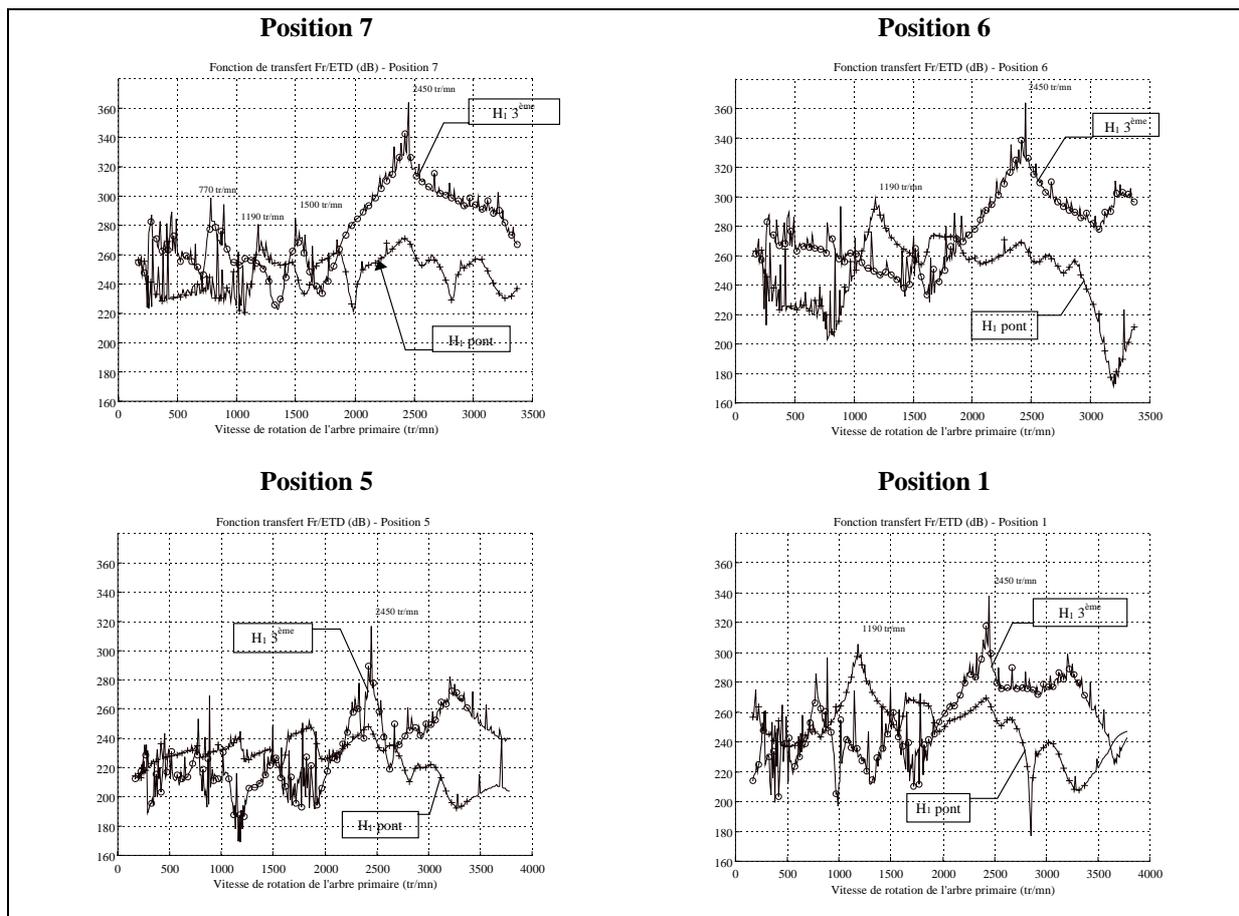


Figure 4. 31 : Evolution du premier harmonique d'engrènement des engrenages de 3^{ème} et de pont calculé à partir de la fonction de transfert entre les efforts radiaux transmis par le roulement à billes au carter et l'erreur de transmission dynamique mesurée en bout d'arbre pour les 4 noeuds chargés en statique

3.4 Conclusion

L'objectif de cette partie était d'analyser les résultats "d'un point de vue expérimental", afin d'évaluer l'incidence d'une excitation connue, sur des grandeurs accessibles par les moyens d'essais : erreur de transmission dynamique, efforts transmis par le roulement à billes au carter.

Pour l'erreur de transmission dynamique, objet actuellement d'une campagne de mesures expérimentales ayant pour objectif la définition d'une relation entre la "géométrie interne et les mesures externes", les études réalisées dans cette partie ont montré que, dans le cas d'excitations "simples" mais réalistes, l'erreur commise en la mesurant en extrémité d'arbres, comme l'impose le dispositif expérimental, plutôt qu'au centre des pignons concernés n'est pas significative. Il est également apparu que, les résultats obtenus sont indépendants du nombre de sources d'excitation présentes dans le modèle. Cela signifie, que l'évolution, en fonction de la vitesse, du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème} ne dépend que de cet engrenage et est indépendant des excitations liées aux autres dentures. Ce résultat devra être affiné dans le cas d'excitations plus complexes et vérifié pour d'autres engrenages.

L'examen des efforts dynamiques transmis par le roulement à billes au carter a permis de s'assurer que les hypothèses de modélisation étaient respectées : les efforts dynamiques dans les roulements n'excèdent pas les 10% de l'effort statique. Ces premiers résultats ouvrent la voix aux études numériques plus précises, nécessaires pour l'élaboration d'un capteur piézo-électrique permettant de mesurer expérimentalement les efforts transmis par les roulements, afin de qualifier le modèle numérique.

4. APPLICATION TECHNOLOGIQUE : INFLUENCE DE L'ANGLE D'HÉLICE

4.1 Introduction

La conception de nouvelles boîtes de vitesses et, les modifications réalisées sur des boîtes existantes pour les faire évoluer, nécessitent de choisir un grand nombre de "paramètres", tant architecturaux (dimensions globales du système et positions relatives des différents éléments), que technologiques (type de roulements ou d'engrenages utilisés ...), ou géométriques (caractéristiques des composants ...). De ces choix va dépendre le comportement global du système final. Les modèles numériques globaux présentés dans ce document permettent de prédire ce comportement. Dans cette partie, en guise d'application "technologique", l'influence de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} sur le comportement dynamique global de la boîte de vitesses a été analysé. Pour cela, les résultats dynamiques obtenus pour deux valeurs de l'angle d'hélice ont été comparés. Il est à noter que, d'un point de vue "industriel", le choix des angles d'hélice des différents engrenages, n'est pas forcément le choix le plus critique. Mais, d'un point de vue "scientifique" et démonstratif de l'utilité des modèles proposés, la modification de l'angle d'hélice, permet d'utiliser les modèles précédents sans autres modifications. Les écarts constatés entre les résultats proviendront donc uniquement, de la variation de ce paramètre. Il est à noter, que dans les études précédentes présentées dans ce chapitre, l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} est de 26.8°

D'un point de vue statique, la diminution de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} modifie l'orientation des efforts générés et, conduit en particulier à une diminution des efforts axiaux exercés par cet engrenage, sur les arbres primaire et secondaire. Au niveau des roulements coniques de l'arbre primaire, la variation résultante des efforts statiques ne modifie que faiblement la répartition des charges sur les corps roulants. Pour l'arbre secondaire en revanche, les efforts statiques exercés sur les roulements et, en particulier sur le roulement à billes R21, sont la combinaison des efforts générés par les engrenages de 3^{ème} et de pont. Ces engrenages ont des hélices de sens opposé. Les efforts axiaux générés par ces engrenages sont donc de directions opposées. La diminution de l'effort axial dû à l'engrenage de 3^{ème} conduit donc à l'augmentation en norme de l'effort axial statique globalement appliqué au roulement à billes. Ceci se traduit par une augmentation du nombre de billes chargées (Cf. Figure 4. 32).

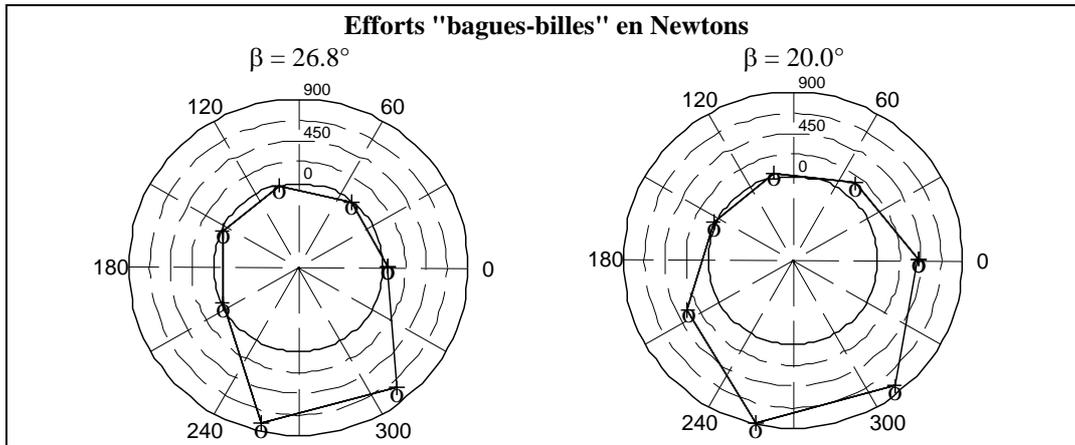


Figure 4. 32 : Evolution du chargement des billes du roulement R21 en fonction de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3ème

4.2 Influence de l'angle d'hélice sur les modes propres

La modification des efforts statiques générés par l'engrenage de 3^{ème} entraîne une modification des matrices de rigidité tangente associées aux paliers à roulements et, par conséquent, une évolution des modes propres du système global. Cette évolution est perceptible à la fois au niveau des fréquences propres (Cf. Table 4. 4) et, de la forme et de l'orientation des vecteurs propres (Cf. Figure 4. 34).

$\beta = 26.8^\circ$ Fréq (Hz)	$\beta = 20.0^\circ$ Fréq (Hz)	$\Delta f / f$
111		
174	175	1%
183	183	0%
	247	
280	280	0%
331		
	340	
349	354	1%
365	366	0%
376		
396	395	0%

$\beta = 26.8^\circ$ Fréq (Hz)	$\beta = 20.0^\circ$ Fréq (Hz)	$\Delta f / f$
849	851	0%
882	883	0%
937	941	0%
977	978	0%
1030		
1072	1067	0%
1101	1094	-1%
1155	1158	0%
1190		
	1217	
	1296	

	400		<i>1305</i>	<i>1306</i>	0%
420			<i>1311</i>	<i>1314</i>	0%
	428		1390	1392	0%
466	473	1%	1419	1423	0%
<i>548</i>	<i>556</i>	<i>1%</i>	1477		
569	574	1%	<i>1523</i>	<i>1516</i>	0%
595	603	1%	<i>1543</i>	<i>1541</i>	0%
626	626	0%	<i>1601</i>	<i>1598</i>	0%
656	658	0%		1623	
668	667	0%	<i>1643</i>	<i>1648</i>	0%
695	695	0%	1734	1736	0%
698	704	1%	1757	1762	0%
739	740	0%			

Table 4. 4 : Evolution des fréquences propres en fonction de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3ème

Du point de vue des fréquences propres du système global (Cf. Table 4. 4), la modification relativement importante de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème}, ne modifie que faiblement les fréquences propres du système. En effet, 33 des 40 fréquences propres considérées sont présentes dans les deux modèles, avec un écart relatif inférieur 2 %. Pour les deux modèles considérés, les fréquences propres "caractéristiques", et mise en gras dans le tableau précédent, correspondent aux modes propres les plus énergétiques pour le roulement à billes (Cf. Figure 4. 33). La modification de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} conduit également à la "disparition" du premier mode propre du système de fréquence basse (111 Hz), et très énergétique pour le roulement à billes (90 % des énergies de déformation). Ce mode avait été examiné en détail au paragraphe § 2.1.4 de ce chapitre. Pour un angle d'hélice de 20°, ce mode est "remplacé" par un mode moins énergétique pour le roulement ($\approx 45\%$ des énergies de déformation) et de fréquence plus élevée (247 Hz).

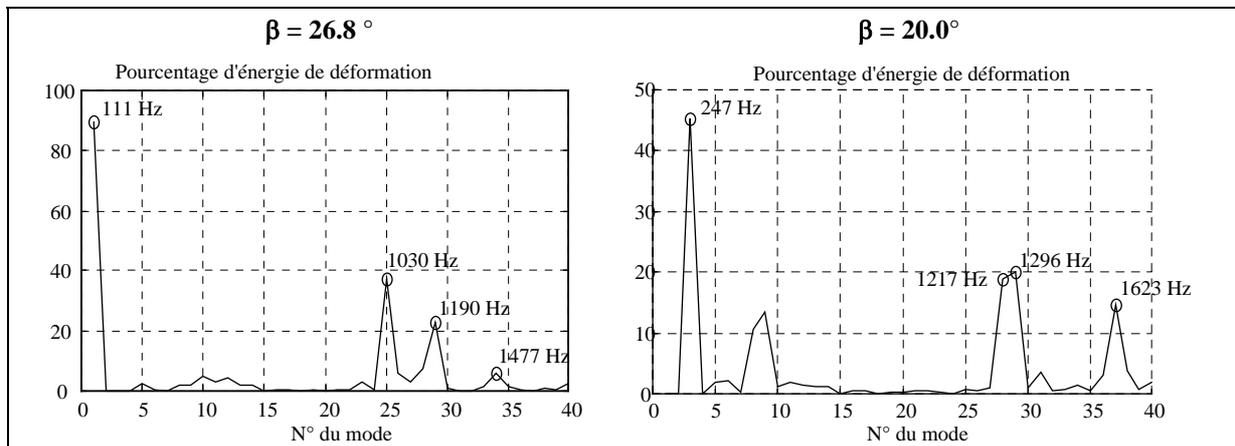


Figure 4. 33 : Evolution du pourcentage d'énergie de déformation dans le roulement à billes R21 en fonction de l'angle d'hélice β de l'engrenage de 3ème

Du point de vue des vecteurs propres, 26 modes peuvent être appariés entre les deux modèles avec un critère de corrélation supérieur à 0.8 (Cf. Figure 4. 34). Ces modes sont également appariable en fréquence, avec un écart relatif inférieur à 7%. En revanche, une dizaine modes très proche en fréquence ne sont pas, ou sont mal, corrélés au niveau des vecteurs propres. Ces modes ont été repérés par, le caractère italique dans le tableau précédent (Cf. Table 4. 4) et par, un astérisque dans la matrice de MAC (Cf. Figure 4. 34).

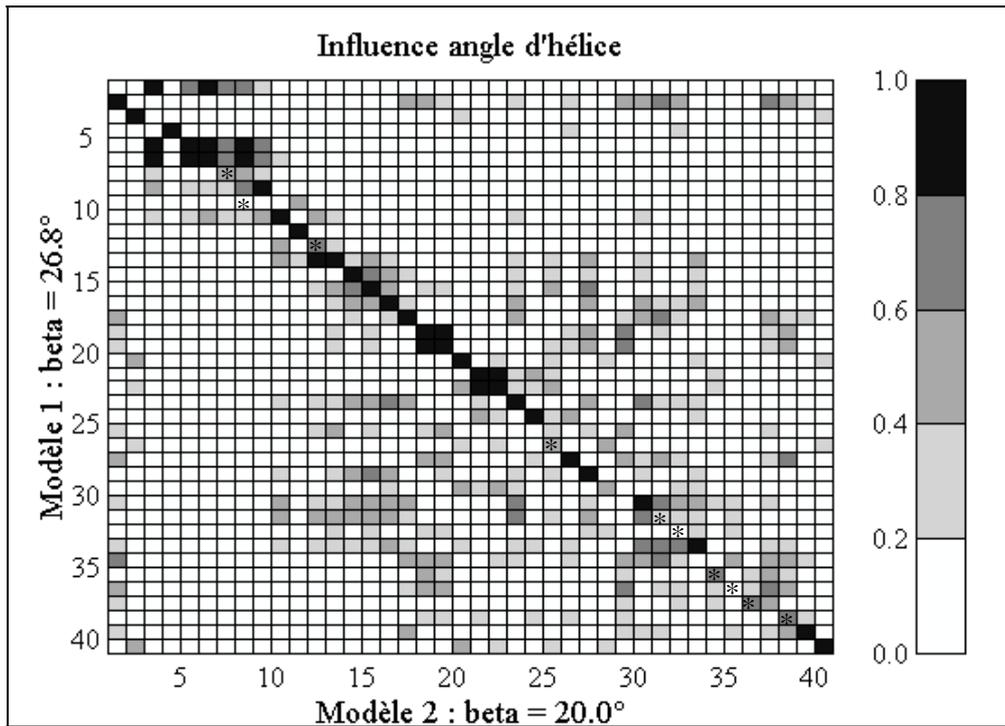


Figure 4. 34 :Matrice de MAC obtenue entre les vecteurs calculés avec un angle d'hélice de 26.8° (lignes) et ceux calculés pour un angle d'hélice de 20°0 (colonnes)

Globalement, les vecteurs propres du système global sont moins sensibles à une variation même importante de l'angle d'hélice qu'à une modification de la modélisation utilisée pour les paliers à roulement (Cf. Chapitre 3, § 3.2).

4.3 Influence de l'angle d'hélice sur le comportement en fonctionnement

Dans cette partie, l'excitation est introduite par l'intermédiaire de variations sinusoïdales des rigidités d'engrènement des engrenages de 3^{ème} et de pont. Les caractéristiques de ces excitations et les méthodes de résolution sont, identiques, à celles utilisées dans la partie 3.3 de ce chapitre.

Pour ce qui est de l'amplitude du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème} calculée à partir de l'erreur de transmission dynamique aux centres des pignons, l'influence de la valeur de l'angle d'hélice n'est pas très significative (Cf. Figure 4. 35), l'allure générale de la courbe restant identique. Les différences essentielles sont liées au décalage des vitesses critiques et s'expliquent par l'évolution des fréquences propres du modèle (Cf. Table 4. 4). Néanmoins, dans les deux modèles, le mode propre le plus énergétique pour le roulement à billes, correspond à une vitesse critique de fonctionnement de la boîte et, l'amplitude du premier harmonique est identique.

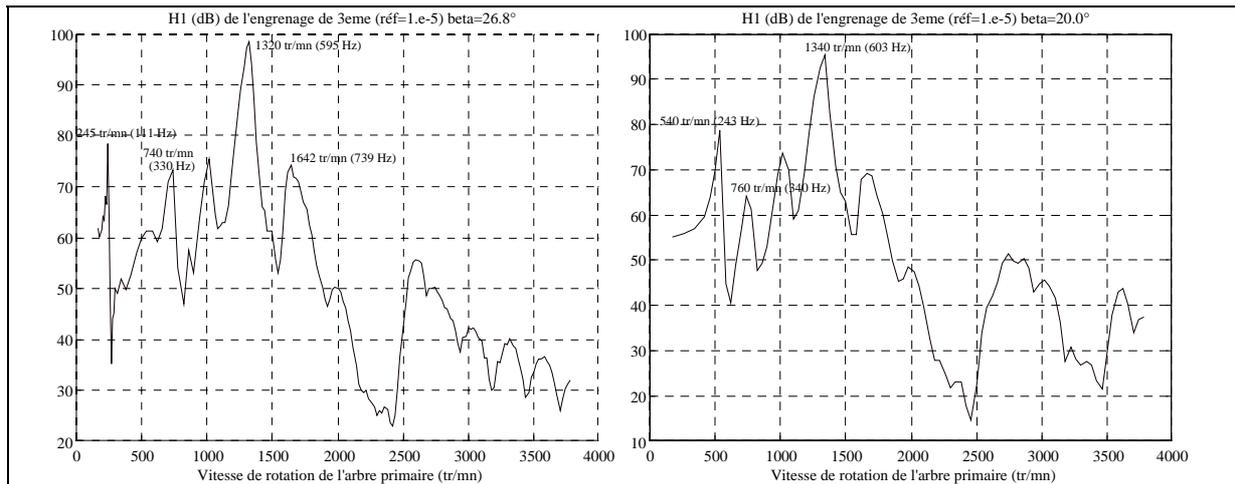


Figure 4.35 : Amplitude du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de 3^{ème} calculé à partir de l'erreur de transmission dynamique "mesurée" aux centres des pignons en fonction de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème}

A première vue (Cf. Figure 4.36), l'influence de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} semble être plus importante pour l'amplitude du premier harmonique d'engrènement de pont, calculée à partir de l'erreur de transmission dynamique aux centres des pignons, que pour l'harmonique de 3^{ème}. Mais en réalité, ces écarts correspondent uniquement, en un décalage des vitesses critiques dû à l'évolution des fréquences propres et, en particulier, à la modification importante du mode le plus énergétique pour le roulement à billes. La diminution de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} conduit à un régime critique associée à une vitesse de rotation de l'arbre primaire plus élevée (≈ 1080 tr/mn contre ≈ 480 tr/mn), et à une amplitude du paramètre observé plus grande (≈ 110 dB contre ≈ 95 dB). Pour le second régime critique en revanche, la diminution de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème} conduit également à une vitesse de rotation légèrement plus élevée (≈ 1480 tr/mn contre ≈ 1420 tr/mn) mais l'amplitude du paramètre observé est plus faible (≈ 90 dB contre ≈ 110 dB).

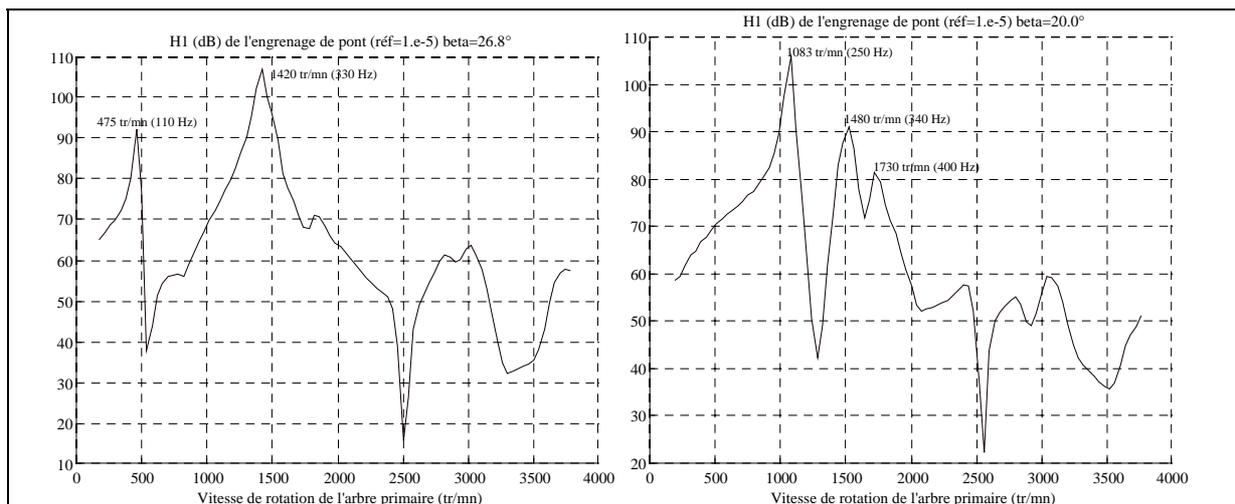


Figure 4.36 : Amplitude du premier harmonique d'engrènement de l'engrenage de pont calculé à partir de l'erreur de transmission dynamique "mesurée" aux centres des pignons en fonction de l'angle d'hélice de l'engrenage de 3^{ème}

4.4 Conclusion

D'un point de vue "scientifique", cette brève étude de l'influence d'un paramètre de conception sur le comportement dynamique global d'un système de transmission complexe, a permis de valider la sensibilité et l'intérêt du modèle proposé.

D'un point de vue "technologique", cette étude confirme une fois de plus l'existence de couplages importants entre les différents constituants de la boîte de vitesses et, la nécessité d'utiliser des modèles de comportement englobant l'ensemble des composants. En effet, pour la gamme de fréquences considérées, le comportement dynamique de la boîte n'est que faiblement influencé par la modification de l'angle d'hélice. Néanmoins, les modifications apportées au comportement dynamique global proviennent essentiellement des interactions fortes existant entre l'angle d'hélice considéré et le roulement à billes. C'est donc l'architecture globale du mécanisme et les interactions entre les éléments technologiques qui contrôlent le comportement dynamique de l'ensemble.

5. CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, des excitations internes modélisant le fonctionnement de la boîte de vitesses et le carter sont introduits dans les modèles dynamiques globaux. Les études présentées dans ce chapitre avaient pour premier objectif de vérifier la "faisabilité" de l'approche. Pour cela, un premier modèle réduit du carter a été réalisé, en ne conservant que les 19 premiers modes propres de modèle initial à jonction fixe. Par la suite, un modèle plus élaboré permettant de représenter une plus grande plage de fonctionnement pourra être introduit. De même, dans cette première approche, les excitations introduites pour modéliser les phénomènes d'engrènement ont été volontairement simplifiées et assimilées à des variations sinusoïdales de la rigidité d'engrènement.

Les études réalisées avec ces modèles "complets" ont montré que la prise en compte du carter modifie considérablement le comportement vibratoire du système. D'un point de vue "modal" et pour une gamme de fréquences donnée, l'introduction du carter se traduit par une augmentation importante du nombre des modes propres du système "à l'arrêt" et, par un couplage important entre les déformations de la chaîne cinématique et celles du carter. Les modes propres à l'arrêt étant couramment utilisés pour déterminer les vitesses critiques de fonctionnement du système excité par l'erreur de transmission, il semble délicat, voire impossible de négliger l'influence dynamique du carter. En effet, la comparaison de la réponse du système avec ou sans carter, à une excitation "simple" mais réaliste, permet de confirmer cette première analyse. Lorsque le phénomène observé est l'erreur de transmission dynamique mesurée aux centres des pignons, le nombre, la position fréquentielle et l'amplitude de l'erreur de transmission des vitesses critiques dépend fortement de la prise en compte ou non du carter. Pour cette erreur de transmission dynamique, objet actuellement d'une campagne de mesures expérimentales, les études réalisées dans cette partie ont montré que, dans le cas des excitations d'engrènement considérées, l'erreur commise en la mesurant en extrémité d'arbres, comme l'impose le dispositif expérimental, plutôt qu'au centre des pignons concernés n'est pas significative. Il est également apparu que les résultats sont indépendants du nombre de sources d'excitation présentes dans le modèle. Cela signifie que l'évolution, en fonction de la vitesse, du premier harmonique d'engrènement d'un engrenage, ne dépend que de cet engrenage et est indépendant des excitations liées aux autres dentures..

L'introduction d'excitations représentatives des phénomènes d'engrènement a permis de vérifier que les hypothèses de modélisation des paliers à roulement sont respectées : les efforts dynamiques n'excèdent pas 6% de l'effort statique. Globalement, l'introduction de l'influence dynamique du carter modifie notablement, les vitesses "critiques" et les amplitudes des efforts transmis par les roulements. Mais, il est pour l'instant impossible de définir des lois générales de l'influence du carter.

A la fin de ce chapitre et en guise d'application "technologique", une brève étude de l'influence d'un paramètre de conception sur le comportement dynamique global d'un système de transmission complexe a été réalisée. D'un point de vue "scientifique", elle a permis de valider la sensibilité et l'intérêt du modèle proposé. D'un point de vue "technologique", cette étude a confirmé le rôle prépondérant de l'architecture globale et l'existence de couplages importants entre les différents constituants de la boîte de vitesses, ainsi que la nécessité d'utiliser des modèles de comportement englobant l'ensemble des composants du mécanisme.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objet principal de ce travail était la définition et la réalisation de modèles dynamiques globaux, permettant de simuler le comportement sous charge et, en fonctionnement, des boîtes de vitesses automobile et, plus généralement, des mécanismes de transmission de puissance par engrenages. Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de modélisation du comportement statique des systèmes mécaniques, réalisés au Laboratoire depuis une quinzaine d'années. La mise en place des modèles dynamiques globaux de comportement a été un travail "transversal", de synthèse de travaux de recherches "verticaux" réalisés sur les éléments "isolés" des mécanismes considérés : carters, chaînes cinématiques, engrenages et, également, une "appropriation" des méthodes de modélisation et d'analyse numérique associées aux problèmes de la dynamique des milieux continus. Dans cette optique, une nouvelle formulation ou présentation de techniques calculatoires ainsi qu'un assemblage des éléments "isolés", pour une description du comportement global d'un système mécanique, ont conduit à des résultats nouveaux et originaux.

La réalisation de "prototypes numériques" cohérents et robustes de mécanismes de transmission de puissance nécessite une qualité de modélisation "identique", pour l'ensemble des constituants du système. Cela signifie, que pour chaque élément technologique, il est impératif de ne pas limiter les difficultés, en adoptant des modèles élémentaires "simplistes" qui par la suite, en considérant la globalité du système, risquent de masquer des interactions essentielles. Un effet "d'échelle" d'observation doit également être introduit afin, de modéliser de manière aussi précise que possible, le comportement des liaisons par contact entre surfaces, ainsi que le comportement de l'architecture globale du mécanisme. Mais, dans le même temps, la modélisation globale doit être limitée à l'essentiel pour, que la taille des modèles numériques et les temps de calculs ne deviennent pas prohibitifs. En dehors de ce contexte d'analyse générale, il s'agissait également d'étendre la démarche de modélisation statique globale, développée depuis une quinzaine d'années et dont l'utilité pour la conception des boîtes de transmission par engrenages a été validée, au comportement dynamique de systèmes mécaniques comportant à la fois des carters, des supports aux formes complexes et une cinématique de transmission de puissance élaborée.

Ces divers travaux d'analyse et de réflexion ont conduit, à la réalisation de deux logiciels de modélisation du comportement global des mécanismes de transmission de puissance, en utilisant la méthode des éléments finis en déplacements, et en intégrant

l'ensemble des éléments constitutifs de ces systèmes. Le premier permet de simuler le comportement statique non-linéaire des boîtes de vitesses sous charge. Il est actuellement utilisé dans les Bureaux d'Etudes de PSA-DETA. Le second, utilisé en interne au Laboratoire, permet d'accéder au comportement dynamique du mécanisme, linéarisé autour d'un point de fonctionnement statique préalablement défini. L'exploitation de ces moyens de calculs pour la modélisation du comportement dynamique global des boîtes de vitesses, a permis de mettre en évidence : le rôle prépondérant de l'architecture générale du système, les couplages importants qui existent entre les différents composants technologiques, et la nécessité de coupler les études dynamiques globales aux études statiques, afin de définir précisément le point de fonctionnement et les caractéristiques du système linéarisé. Par voie de conséquence, ces résultats généraux ont conforté l'idée initiale de cette thèse. Ces études ont également permis de classer l'influence des éléments constitutifs sur le comportement dynamique du mécanisme. Il est apparu que, dans le cas de simulations du comportement des boîtes de vitesses industrielles, l'influence statique et dynamique du carter ne peut pas être négligée, car il est fortement couplé au comportement de la chaîne cinématique. Parallèlement, les paliers à roulement, qui assurent la liaison entre les carters et la chaîne cinématique, doivent être introduits dans les modèles numériques de manière suffisamment fine, afin de rendre compte précisément de ces couplages. Les modèles dynamiques de roulements couramment utilisés se sont révélés insuffisants et, une nouvelle approche, associant un élément par corps roulant, a été proposée. Les engrenages cylindriques extérieurs, objets de nombreux travaux, créent des couplages importants entre les déformations en flexion et en torsion, des arbres de la chaîne cinématique. Ce sont également les sources principales d'excitation du système en fonctionnement. En revanche, dans le cadre des études dynamiques globales réalisées, il est apparu que les engrenages ne requéraient pas une modélisation très fine et, qu'une bonne estimation de leurs caractéristiques géométriques et de la rigidité d'engrènement, permettait d'obtenir des résultats satisfaisants.

L'objectif du premier chapitre introductif était de bien préciser le contexte d'études du comportement dynamique de systèmes mécaniques complexes et, de rappeler l'utilité des modèles globaux. Pour cela, et afin de décrire le comportement statique de tels systèmes, une synthèse de l'existant a été réalisée. Des adaptations et des développements ont été nécessaires. Les méthodes de calcul ainsi définies, ont été appliquées à la boîte de vitesses considérée tout au long de ce document. Les résultats présentés dans ce premier chapitre mettent en évidence l'influence de la flexibilité de l'environnement statique sur le comportement sous charge et, sur la modélisation dynamique des paliers à roulement. D'un point de vue "technologique" ou "objet" une étude sérieuse du comportement mécanique d'un système complexe passe nécessairement par la prise en compte des interactions mécaniques entre les différents éléments technologiques. D'un point de vue "numérique", la réalisation de modèles globaux performants, tant statiques que dynamiques, de systèmes de transmission de puissance, nécessite l'intégration et la prise en compte de manière pertinente de phénomènes "macroscopiques" (d'ordre de grandeur géométrique le millimètre) liés à l'architecture du mécanisme, et de phénomènes "microscopiques" (d'ordre de grandeur géométrique le micromètre) liés aux redistributions de charges locales internes au système et, traduisant le comportement des liaisons mécaniques.

Le deuxième chapitre a été l'occasion d'une synthèse bibliographique, des différents travaux réalisés sur la modélisation dynamique des éléments constitutifs des mécanismes de transmission de puissance et, des méthodes numériques utilisées, ainsi qu'un descriptif des modèles retenus et mis en oeuvre. A l'issue de cette analyse, il est apparu que la modélisation de l'interface d'engrènement est une préoccupation relativement ancienne. Elle a conduit à la

définition de modèles fiables et à la reconnaissance de l'engrenage (par l'intermédiaire de l'erreur de transmission) comme la source principale d'excitation des mécanismes de transmission de puissance. En revanche, l'importance de la modélisation des paliers à roulement est une préoccupation récente. L'introduction, dans les modèles dynamiques globaux, des matrices de rigidité obtenues pour chaque corps roulant et décrites dans le chapitre 1, est une innovation par rapport aux modèles existants car, cette approche permet de prendre en compte la déformabilité statique des carters. L'influence de cette déformabilité sur les matrices de rigidité et sur le comportement dynamique de l'ensemble a été en évidence dans le chapitre suivant. L'autre apport novateur des modèles globaux proposés est l'introduction de l'influence d'un carter réel, par l'intermédiaire d'un super-élément. Cette synthèse bibliographique a également mis en évidence à la fois, le rôle prépondérant de l'amortissement sur les vitesses critiques et sur les résultats dynamiques obtenus, et le manque d'informations précises sur ces phénomènes.

Les premières études dynamiques globales présentées dans le chapitre 3 ont été réalisées sur la chaîne cinématique d'une boîte de vitesses. Dans cette première approche, l'influence dynamique des carters était négligée. L'objet de ces études était d'estimer, d'un point de vue numérique, les causes possibles d'erreurs de modélisation et, d'évaluer l'influence relative des différents constituants sur les modes propres du mécanisme afin de, déterminer le degré de précision à apporter lors de leur introduction dans des modèles globaux. L'ensemble des études dynamiques réalisées dans ce chapitre a mis en évidence la forte participation des paliers à roulement aux déformations modales. Le choix, et la précision de la modélisation de ces éléments technologiques, va donc influencer grandement les résultats dynamiques obtenus. Une première série d'études a permis de valider l'hypothèse "classique" consistant à linéariser leur comportement autour du point de fonctionnement et également, de définir autour d'un chargement nominal, des limites acceptables de "linéarisation". Si, l'introduction du comportement dynamique des roulements dans les modèles globaux, à l'aide de rigidités tangentes, est classique dans la littérature, en revanche, la précision de ces valeurs et le degré de finesse apporté à leur obtention, varie fortement d'une approche à l'autre. Les résultats modaux obtenus pour 4 types de modélisation dynamique des paliers à roulement ont été comparés pour différents rapports d'engrènement. Ces études ont permis de montrer que, dans le cas des boîtes de vitesses automobile aux carters déformables, la modélisation des paliers à roulement par des rigidités scalaires ou des matrices de rigidité tangente, déterminées pour des roulements isolés dans un environnement statique infiniment rigide, est insuffisante pour décrire correctement le comportement dynamique de la chaîne cinématique. Les études quasi-statiques globales préalables, présentées au chapitre 1, sont donc nécessaires pour obtenir des résultats dynamiques globaux significatifs. Néanmoins, pour l'ensemble des modèles de roulements considérés, l'analyse du taux global d'énergie de déformation dans les paliers a confirmé leur rôle prépondérant dans le comportement modal de l'ensemble de la chaîne cinématique. L'analyse détaillée de l'évolution des énergies de déformation dans les 6 roulements de la boîte de vitesses, a permis de définir 4 types de comportements et de dresser pour chacun d'eux un diagramme énergétique caractéristique. Ces diagrammes se retrouvent lorsque les conditions aux limites en entrée de boîte sont modifiées et, également, lorsque le comportement dynamique du carter est introduit. Ces "signatures" énergétiques sont donc représentatives du comportement général des paliers à roulement.

Les engrenages sont les organes principaux des boîtes de vitesses et sont également, les principales sources d'excitation du système. Pour ces raisons, ils ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Néanmoins, dans le cadre des études dynamiques globales et des engrenages cylindriques extérieurs, leur modélisation, par une rigidité unidirectionnelle

placée au point primitif d'engrènement suivant la normale au contact, n'est pas remise en cause. Le paramètre de modélisation le plus important est alors la valeur de la rigidité d'engrènement et, plus particulièrement, sa valeur moyenne qui permet de définir les modes propres à "l'arrêt". Les études présentées au chapitre 3 ont permis de montrer, que dans le cas des boîtes de vitesses, cette valeur moyenne n'est pas un paramètre très influent et, qu'une bonne estimation de son ordre de grandeur est suffisante pour obtenir des résultats dynamiques significatifs. De plus, malgré des rigidités équivalentes du même ordre de grandeur que celles des paliers à roulement, les engrenages participent beaucoup moins à la déformation de la chaîne cinématique que les roulements, l'énergie de déformation dans les dentures restant relativement faible pour la gamme de fréquences considérées. Néanmoins, les modes de déformation de denture sont sensibles à la modélisation retenue pour les paliers à roulement. Cela signifie que même pour des études "locales" des phénomènes dynamiques d'engrènement, le comportement dynamique des paliers à roulement doit être introduit de manière suffisamment précise.

Dans le dernier chapitre, des excitations internes modélisant le fonctionnement de la boîte de vitesses et le carter sont introduits dans les modèles dynamiques globaux. Les études réalisées avec ces modèles "complets" ont montré que la prise en compte du carter modifie considérablement le comportement vibratoire du système. D'un point de vue "modal" et, pour une gamme de fréquences donnée, l'introduction du carter se traduit par une augmentation importante du nombre des modes propres du système "à l'arrêt" et un couplage important entre les déformations de la chaîne cinématique et celles du carter. Les modes propres à l'arrêt étant couramment utilisés pour déterminer, les vitesses critiques de fonctionnement du système excité par l'erreur de transmission, il semble donc délicat, voire impossible de négliger l'influence dynamique du carter. En effet, la comparaison de la réponse du système avec ou sans carter, à une excitation "simple" mais réaliste permet de confirmer cette première analyse. Lorsque le phénomène observé est l'erreur de transmission dynamique mesurée aux centres des pignons le nombre, la position fréquentielle et l'amplitude de l'erreur de transmission des vitesses critiques dépend fortement de la prise en compte ou non du carter. Pour cette erreur de transmission dynamique, objet actuellement d'une campagne de mesures expérimentales, les études réalisées dans cette partie ont montré que, dans le cas des excitations d'engrènement considérées, l'erreur commise en la mesurant en extrémité d'arbres comme l'impose le dispositif expérimental plutôt qu'au centre des pignons concernés n'est pas significative. Il est également apparu que les résultats sont indépendants du nombre de sources d'excitation présentes dans le modèle. Cela signifie, que l'évolution, en fonction de la vitesse, du premier harmonique d'engrènement d'un engrenage ne dépend que de cet engrenage et est indépendant des excitations liées aux autres dentures..

L'introduction d'excitations représentatives des phénomènes d'engrènement a permis de vérifier que les hypothèses de modélisation des paliers à roulement sont respectées : les efforts dynamiques n'excèdent pas 6% de l'effort statique. Globalement, l'introduction de l'influence dynamique du carter va modifier notablement les vitesses "critiques" et les amplitudes des efforts transmis par les roulements. Mais, compte tenu du temps, il n'a pas été possible de définir des lois générales de l'influence du carter. Cependant, à la fin de 4^{ème} chapitre et en guise d'application "technologiques", une brève étude de l'influence d'un paramètre de conception sur le comportement dynamique global d'un système de transmission complexe a été réalisée. D'un point de vue "scientifique", elle a permis de valider la sensibilité et l'intérêt du modèle proposé. D'un point de vue "technologique", cette étude a confirmé le rôle prépondérant de l'architecture globale et l'existence de couplages importants

entre les différents constituants de la boîte de vitesses et, la nécessité d'utiliser des modèles de comportement englobant l'ensemble des composants du mécanisme.

A l'origine de ces travaux, il existait des modèles statiques globaux des systèmes mécaniques complexes, prenant en compte les éventuelles non-linéarités de comportement. Ces modèles permettent de mieux concevoir les boîtes de transmission par engrenages. Notamment, le dimensionnement des éléments est optimisé en tenant compte des interactions entre les pièces, et de la distribution des efforts, à la fois dans les engrenages et dans les roulements. Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont permis d'améliorer les performances de convergence de ces modèles et de réduire énormément les temps de calcul. Ils ont également abouti à la réalisation de modèles globaux et à la définition d'une méthodologie de modélisation pour l'analyse du comportement dynamique.

Ces modèles et méthodologies, "testés" dans le cadre de l'étude du comportement des boîtes de vitesses automobiles peuvent être utilisés, moyennant quelques précautions, pour simuler le comportement d'autres mécanismes complexes : boîtes de vitesses de machines outils, boîtes de transmission de puissance d'hélicoptères, ... etc ... Les travaux présentés dans ce mémoire, ne sont qu'une première étape vers une meilleure compréhension et simulation, du comportement global des mécanismes complexes et les perspectives sont nombreuses. Pourtant, dans un premier temps, il sera nécessaire de poursuivre la campagne de qualification expérimentale (en cours de réalisation dans le cadre d'une autre thèse) afin de renforcer la bonne représentativité des résultats numériques obtenus. Ces travaux de comparaison des résultats numériques et expérimentaux permettront d'affiner les modèles numériques. Ils devraient permettre de mieux cerner la prise en compte des phénomènes d'amortissement. A plus long terme, mais c'était déjà une des motivations générale de ces travaux, il sera envisageable de pouvoir corréler le bruit au comportement dynamique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. MODÉLISATIONS STATIQUES ET DYNAMIQUES DES SYSTÈMES MÉCANIQUES A ENGRENAGES

- [1.1] **BARD, C.** *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages.* Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1995, N° 95 ISAL 0031, 296 p.
- [1.2] **BARD, C., REMOND, D. & PLAY, D.** *Une technique originale de mesure de l'erreur de transmission dans des conditions réelles de fonctionnement.* Journée d'information "des engrenages plus silencieux", Centre d'Etudes Techniques des Industries Mécaniques (CETIM), Senlis, 21-22 oct. 1993, 6p.
- [1.3] **BARD, C., REMOND, D. & PLAY, D.** *New transmission error measurement for heavy load gears.* International gearing conference, 7-9 septembre 1994, Newcastle, England, p. 393-401
- [1.4] **CHOI, I. S.** *Simulation des mécanismes complexes en C.M.A.O, étude des non linéarités de comportement. Application aux boîtes de transmission de puissance d'hélicoptère.* Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993, N° 93 ISAL 0034, 224 p.
- [1.5] **DUFOUR, R.** *Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles.* Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1985, N° ITC1 8508, 112 p.
- [1.6] **FAVRE, B., MAIRESSE, P., SENICOURT, J.M. et al.** *Mesure de l'erreur cinématique des engrenages et application à la caractérisation du bruit.* 4^{èmes} Journées d'Etude Transmissions Mécaniques, ECAM-IET, Lyon, Juin 1990, 7p.
- [1.7] **GERARDIN, M. & ROBERT, G.** *Vibrations de torsion et de flexion d'un train d'engrenages.* Laboratoire d'aéronautique de l'Université de Liège, Décembre 1981, 30p.
- [1.8] **HARRIS, S. L.** *Dynamic loads on the teeth of spur gears.* In : *Proceedings of the I.M.E.*, 1958, vol. 172, p. 87-100.
- [1.9] **HENRIOT, G.** *Traité théorique et pratique des engrenages.* Théorie et technologie. 6ème édition, Paris : Dunod, 1983, 662 p.
- [1.10] **HOUSER, D. R.** *Gear Noise. State of art.* In : *Proceedings Inter Noise 88.* Avignon, Aug. 1988, p. 1-6

- [1.11] **HOUPERT, L.** *Prediction of bearing, gear and housing performances.* Rolling Bearing Practice Today seminar, I. Mech. E. London, february 2, 1995, 30 p.
- [1.12] **KAHRAMAN, A.** Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME)*, septembre 1994, Vol. 116, p. 706-712
- [1.13] **KASSAI, A. & MAIRESSE, P.** *Ecart de transmission et processus de réduction du bruit d'engrènement.* Journée CETIM, Des engrenages plus silencieux, Senlis, 21-22 octobre 1993, 7 p.
- [1.14] **KASUBA, R. & FVANS, J. W.** An extended model for determining dynamic load in spur gearing. *Journal of mechanical Design*, 1981, vol. 103, N° 2, p. 398-409
- [1.15] **KATO, A., ZHOU, H., INOUE, K. et al.** Comments on gearbox housing structure for low noise. In : *International conference on gears : Tagung Dresden, 22.-24.4.1996 / VDI-Gesellschaft Entwicklung, Konstruktion, Vertrieb.* Düsseldorf : VDI Verl, 1996; ISBN 3-18-091230-8. p. 764-777
- [1.16] **KIM, I. S.** *Distribution des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des prismes finis.* Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996, N° 96 ISAL 0045, 152 p.
- [1.17] **LALANNE, M. & FERRARIS, G.** *Rotordynamics Prediction in engineering.* New-York : John Wiley and Sons, 1990, 198 p.
- [1.18] **LIN, C. & SINGH, R.** *A review of gear housing dynamics and acoustics literature.* NASA Contractor Report 185148, 1989, 82 p.
- [1.19] **LIN, H. H., HUSTON, R. L. & COY, J. J.** *On dynamic loads in parallel shaft transmissions; modeling and analysis.* NASA Technical Memorandum 100180, 1987, 15 p.
- [1.20] **LIN, H. H., OSWALD, F. B. & TOWNSEND, D. P.** Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications. In : *Proc. of 1989 International Power Transmission and Gearing Conferences*, Chicago, 1989, p. 409-519.
- [1.21] **MARK, W. D.** Gear noise origins. In : *Gear and Power transmission systems for helicopters and Turboprops., Proceedings of AGARD Conference.* Lisbon, 1984, 13 p., Preprint N° 369.
- [1.22] **OZGUVEN, H. N.** On the critical speed of continuous shaft-disk systeme. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Transaction of the ASME.* 1984, Vol. 106, p. 59-61
- [1.23] **OLAKOREDE, A. A.** *Répartition de charge et résistance en conception d'engrenages cylindriques.* Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1990, N° 90 ISAL 0049, 157 p.
- [1.24] **PERRET-LIAUDET, J.** *Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses automobiles.* Thèse de doctorat : Ecole Centrale de Lyon, 1992, 198 p.

- [1.25] **RAO, J. S.** *Rotor dynamics*. New-York : John Wiley, 1983
- [1.26] **REMOND, D., VELEX, P. & SABOT, J.** *Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages. Synthèse bibliographique*. Senlis : Publication CETIM, 1993, 189 p.
- [1.27] **REMOND, D., JEAN, Y., GOSSELIN, C.** Practical performances in high speed measurement of gear transmission error using optical encoders. In : *comptes rendus du 16ème congrès canadien de mécanique appliquée, CANCAM 97, Université de Laval, Québec, Canada; 1er au 5 juin 1997*. Edited by L. Cloutier, D. Rancourt, 1997. Vol. 1, p 141-143.
- [1.28] **RIGAL, J. F.** *Analyse et modélisation des systèmes mécaniques en conception assistée par ordinateur. Application à la simulation du comportement statique des boîtes de transmission de puissance d'hélicoptères*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989, N° 89 ISAL 0095, 243 p.
- [1.29] **RIGAL, J. F.** *Le comportement global des mécanismes en Conception Assistée par Ordinateur*. Habilitation à diriger des recherches en Sciences, spécialité mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1994, N° HDR 94 008, 143 p.
- [1.30] **RIGAL, J. F., KARAM, A., PLAY, D., LENEVEU, G.,** *Analysis of a complex mechanical system in computer aided design, application to an automobil gearbox*. International gearing conference, Newcastle upon Tyne, 1994, p. 207-211
- [1.31] **SATORI, K.** *Conception des mécanismes de transmission de puissance avec étude du comportement dynamique et vibratoire*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993, No 93 ISAL 0055, 215 p.
- [1.32] **THOMPSON, A. M.** Origin of gear noise. In : *Proceedings of the 2nd world congress on gearing*. Paris, 1977, Vol. 2, p. 1809-1817.
- [1.33] **TOMA, L. A.** *Compatibilités fonctionnelles des systèmes mécaniques déformables*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1997, N° 97 ISAL 0010, 182 p.
- [1.34] **TUPLIN, W. A.** Gear tooth stresses at high speed. In : *proceedings of I.M.E.*, 1950, N° 16, p. 162-167.
- [1.35] **TUPLIN, W. A.** Dynamic loads on gear teeth. *Machin design*, 1953, N° 25, p. 203-211
- [1.36] **TUPLIN, W. A.** Dynamic loads on gear teeth. In : *Proceedings of the International Conference on gearing I.M.E.* 1958, p. 24-30.
- [1.37] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., ICHIKAWA, N. et al.** Simulation of rotational vibration of a helical gear pair transmitting lighth loads. In : *Proceedings of the 3rd J.S.M.E. International Conference on Motion and Powertransmissions, MPT'91*. Hiroshima, Japan, p. 85-91.
- [1.38] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., ICHIKAWA, N. et al.** The influence of flank deviations on the vibration of a helical gear pair transmitting light loads. In : *Proceedings of the 6th*

A.S.M.E. International Conference Power Transmissions and gearing, Phoenix, 1992, Vol. 2, p. 681-688.

- [1.39] **de VAUJANY, J. P.** *Comportement d'engrenage cylindrique extérieur : effets de jante et voile*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996, N° 96 ISAL 0128, 179 p.
- [1.40] **VELEX, P.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1988, No 88 ISAL 0032, 188 p.
- [1.41] **WANG, K. L. & CHENG, H. S.** A numerical solution of the dynamic loads film thickness and surface temperature in spur gears. *Journal of Mechanical Design*, 1981, Vol. 103, N° 1, p. 177-187.
- [1.42] **WELBOURN, D. B.** Fundamental knowledge of gear noise - A survey. *Conf. On noise and vibrations of engines and transmissions, Cranfield, 1979*. Paper C 117/79, p. 9-29.

2. MODÉLISATION DES PALIERS À ROULEMENT

- [2.1] **ANDREASON, S.** Load distribution in a taper roller bearing arrangement considering misalignment, *Tribology*, June 1973, Vol. 6, N° 3, p. 84-92
- [2.2] **CHAN-TIEN, C.** *Détermination de la matrice de rigidité complète des paliers à roulement pour l'analyse vibratoire des machines*. Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Laboratoire de Conception et d'Analyse des Systèmes Mécaniques, 1994, 62 p.
- [2.3] **CHOI, I. S., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** *Contribution of highly deformable mechanical parts on load distribution of rolling element bearings*. International Rolling Element Bearing Symposium '91 and sponsored by the Charles Stark Draper Laboratory and DoD/Instrument Bearing Working Group, Orlando, Florida, USA, 9-12 April 1991, 18 p.
- [2.4] **CHOI, I. S., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Influence of deformable ring bearing in helicopter gearbox design. Application to cylindrical and taper roller bearings. In : *Proceedings of the international conference SRUGENG "FEMCAD-91*. Paris, Institute for industrial Technology Transfer, 10-11 Octobre, 1991, p. 115-120
- [2.5] **CHOI, I. S., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Housing effects on bearing load distributions of power transmission gearboxes. In : *Proceedings of the 3rd world congress on gearing and power transmissions "CMET'92"*. Paris, 12-13 Octobre, 1992, p. 339-350.
- [2.6] **HARRIS, T. A** *Rolling bearing analysis*. 2nde édition, New York : John Wiley and Sons, 1984, 565 p.
- [2.7] **HARRIS, T. A** The effect of misalignment on the fatigue life of a cylindrical roller bearing having crowned roller members. *Journal of Lubrication Technology, Trans ASME*, April 1969, p. 294-300

- [2.8] **JONES, A. B, Mc GREW, J. M.** *Rotor bearings dynamic technology design Guide : Part II, Ball bearings.* Wright Patterson; Ohio, USA : Air Force Aero Propulsion Laboratory, Feb 1978, 102 p., AFAPL-TR-78-6.
- [2.9] **JONES, A. B, Mc GREW, J. M.** *Rotor bearings dynamic technology design Guide : part III Tapered roller bearings.* Wright Patterson; Ohio, USA : Air Force Aero Propulsion Laboratory, Feb 1979, 80 p., AFAPL-TR-78-6.
- [2.10] **JONES, A. B, Mc GREW, J. M.** *Rotor bearings dynamic technology design Guide : part IV, cylindrical roller bearing.* Wright Patterson; Ohio, USA : Air Force Aero Propulsion Laboratory, Dec 1979, 61 p., AFAPL-TR-78-6.
- [2.11] **JONES, A. B, HARRIS, T. A.** Analysis of a rolling element idler gear bearing having a deformable outer-race structure. *Journal of Basic Engineering, Trans ASME*, June 1963, p. 273-278.
- [2.12] **LIM, T. C.** Vibration transmission through rolling element bearing in geared rotor system. Thèse de doctorat : Ohio State University, 1989, 215 p.
- [2.13] **LIM, T. C., SINGH, R.** Vibration transmission through rolling element bearings. Part I : Bearing stiffness formulation. *Journal of Sound and Vibrations*, 1990, Vol. 139, n° 2, p. 179-199.
- [2.14] **LIM, T. C., SINGH, R.** Vibration transmission through rolling element bearings. Part II : System studies. *Journal of Sound and Vibrations*, 1990, Vol. 139, n° 2, p. 201-225.
- [2.15] **LIM, T. C., SINGH, R.** Vibration transmission through rolling element bearings. Part III : Gear rotor system studies. *Journal of Sound and Vibrations*, 1990, Vol. 139, n° 2, p. 179-199.
- [2.16] **LIU, J. Y.** The effect of misalignment on the life of high speed cylindrical roller bearings. *Journal of lubrication technology, Trans. ASME*, january 1970. p129-137
- [2.17] **LIU, J. Y., CHIU, Y. P.** Analysis of a thin elastic ring under arbitrary loading. *Journal of engineering for industry, Trans. ASME*, august 1974, p. 870-876
- [2.18] **de MUL, J. M., VREE, J. M., MASS, D. A.** Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearing in five degrees of freedom while neglecting friction, Part I and II, *Journal of Tribology, Trans. ASME*, January 1989, Vol 111, p. 142-148 et p. 149-155
- [2.19] **PALMGREN, A.** *Les roulements descriptions, théorie, applications*, Paris : SKF, 1967. 120 p.
- [2.20] **RAJAB, M. D.** Modelling of the transmissibility through rolling-element bearing under radial and moment loads. Thèse de doctorat : Ohio State University, 1982, p. 267
- [2.21] **YOUNG, W. B.** *Dynamic modeling and experimental measurements of a gear shaft and housing system.* Thèse de doctorat : Ohio State University, 1988.

- [2.22] **YAKHOU, K.** *Analyse des matrices de rigidité des paliers à roulement*. Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Laboratoire de Conception et d'Analyse des Systèmes Mécaniques, 1995, 69 p.

3. MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS ET TECHNIQUES NUMÉRIQUES

- [3.1] **BATHE, K. J.** *Finite Element procedures in engineering analysis*. Englewood cliffs, New Jersey USA : Prentice Hall, 1982. 735 p.
- [3.2] **CLOUGH, R. W., PENZIEN, J.** *Dynamique des structures*. Tome 1, Paris, Pluralis, 1980. 380 p.
- [3.3] **DHATT, G., THOUZOT, G.** *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Paris: Maloines, 1984. 539 p.
- [3.4] **d'HENNEZEL, F.** *Méthodes de décomposition de domaines dans les structures et les multi-structures élastiques*. Thèse de Doctorat : Université Paris VI, 1992, 157 p.
- [3.5] **GIRARD, A.** *Modal effective mass models in structural dynamics*. Xth. International Modal Analysis Conference, San Diego USA (IMAC), February 1992
- [3.6] **GIRARD, A., CHATELAIN, J. & ROY, N.A.** *Efficient sensitivity analysis of frequency response fonctions*. Xth. International Modal Analysis Conference (IMAC), San Diego USA, February 1992
- [3.7] **IMBERT, J. F.** *Analyse des Structures par éléments finis*. 3ème édition, Toulouse : Cepadues Edition, 1991. 506 p.
- [3.8] **IMBERT, J. F.** *La dynamique des structures en contexte industriel : Techniques d'analyses*. Intespace, Edition 1, mars 94
- [3.9] **IMBERT, J. F.** *Methodologies et outils d'intégration calculs / essais en dynamique des structures*. 2ème Congrès International : Essais et mesures en développement automobile : méthodologies et moyens, Marne la Vallée, 5-6 avril 1995, 13 p.
- [3.10] **LIU, A. Q., LIM, S. P. & LIEW, K. M.** *Sensitivity analysis of complex dynamic system modelling*. *JSME International Journal, Series C*, 1993, Vol. 36, N° 2, p. 209-213
- [3.11] **MAHADEVAN, S. & MEHTA, S.** *Dynamic reliabillity of large frames*. *Computers & Structures*, 1993, Vol 47, N° 1, p. 57-67
- [3.12] **ODEN, J. T.** *Finite Elements of Nonlinear continua..* New-York : Mc Graw-Hill, 1972. 432 p.
- [3.13] **ZIENKIEWICZ, O. C.** *The finite element method*. 3ème édition, Londres : Mc Graw-Hill, 1977. 787 p.

4. PUBLICATIONS PROPRES

- [4.1] **BOURDON, A., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Préviation du comportement statique et dynamique des machines par simulations numériques dans un environnement CAO. In : *Proceedings of PRIMECA, 4ème Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée*, La Plagne, avril 1995, p. 282-288
- [4.2] **BOURDON, A., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Numerical modal result processings using CAD for analysing global vibrating behavior of gearboxes. In : *Proceedings of the International Congress of Gear Transmissions'95*, Iftom-Eurotrans, Sophia, Septembre 1995, Vol. 2, p. 104-110
- [4.3] **BOURDON, A., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Sensitivity analysis applied to automobil gearbox eigenmodes. In : *New Advances in Modal Synthesis of Large Structures - Non linear Dampted and Non-deterministic Cases. Proceedings of the International Congress MV2, Lyon Octobre 1995*. Edited by Louis Jezequel, A.A. Balkema, Rotterdam : Brookfield, 1997, p. 119 - 130.
- [4.4] **BOURDON, A., MONTERNOT, C., TOMA, C. et al.** *Analyse et Conception des systèmes mécaniques*, 2nd Colloque des Doctorants. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Avril 1996.
- [4.5] **BOURDON, A., RIGAL, J. F. & PLAY, D.** Static rolling bearing models in C.A.D. environment for the study of complex mechanisms, soumis à *Transaction of ASME Journal of Tribologie* en décembre 1996, accepté en mai 1997.
- [5.1] **BOURDON, A. & PLAY, D.** Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile, In : *Proceedings PRIMECA, 6ème Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée*, La Plagne, avril 1997.

ANNEXES :

*ANNEXE A :
PRINCIPAUX ALGORITHMES*

*ANNEXE B:
MODÉLISATION STATIQUE ET DYNAMIQUE
DES ÉLÉMENTS TECHNOLOGIQUES*

*ANNEXE C :
SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES TECHNIQUES
DE SOUS-STRUCTURATION EN DYNAMIQUE*

Annexe A :

PRINCIPAUX ALGORITHMES

Le but de cette annexe est d'indiquer les principes des méthodes numériques utilisées lors des études statiques et dynamiques. Soit les algorithmes des méthodes :

- de Newton-Raphson,
- de condensation statique,
- de Jacobi généralisée,
- des sous-espaces,
- de Newmark.

A.1. MÉTHODE DE NEWTON-RAPHSON

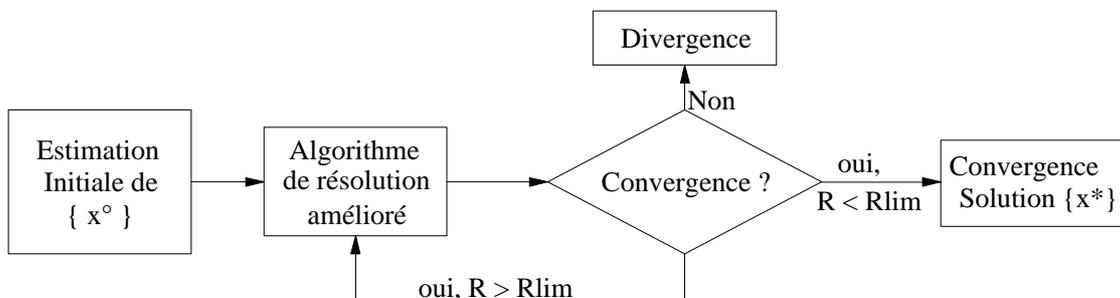
Le but de la méthode de Newton-Raphson (*Bath [3.1]*) est de déterminer de manière itérative la solution $\{x^*\}$ du problème non linéaire :

$$\{R(\{x^*\})\} = [K(\{x^*\})] \cdot \{x^*\} - \{F_{\text{ext}}\} = \{0\} \quad (\text{A. 1})$$

Où :

- $\{x^*\}$ est le vecteur des déplacements généralisés solution du problème,
- $[K(x)]$ est la matrice de rigidité du système,
- $\{F_{\text{ext}}\}$ est le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système,
- $\{R(x)\}$ est le vecteur des efforts résiduels.

Le principe général de la méthode de Newton-Raphson est indiqué dans l'organigramme suivant :



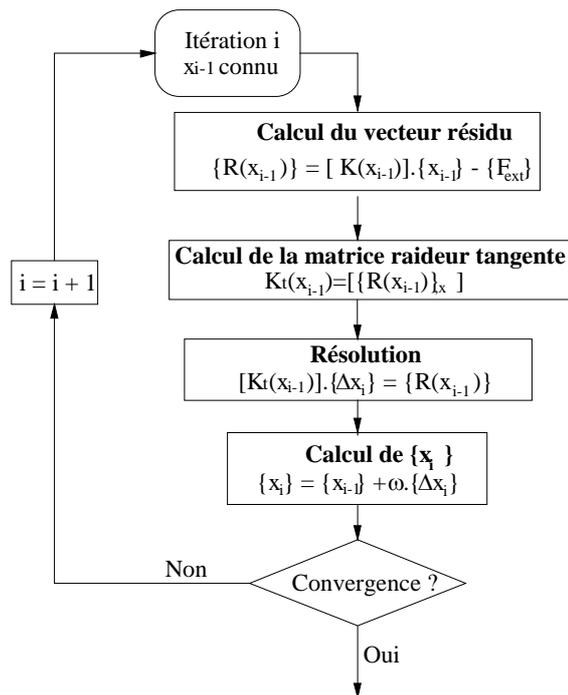
L'algorithme de résolution amélioré consiste à déterminer pour chaque itération un terme correctif $\{\Delta x_i\}$ tel que :

$$[K_i(x_{i-1})] \cdot \{\Delta x_i\} = \{R(x_{i-1})\} \quad (\text{A. 2})$$

afin d'améliorer la convergence de la méthode, un coefficient de relaxation ω est introduit et :

$$\{x_i\} = \{x_{i-1}\} + \omega \{\Delta x_i\} \quad (\text{A. 3})$$

L'organigramme de l'algorithme de résolution amélioré est donné ci-dessous.



A.2. MÉTHODE DE CONDENSATION STATIQUE

La méthode de condensation ou de sous-structuration statique (*Imbert [3.7]*), est une technique numérique, qui permet de diminuer le nombre d'inconnues des modèles éléments finis. Les degrés de liberté du modèle initial sont séparés en degrés de libertés de jonction (ou maîtres) et degrés de libertés internes (ou esclaves) qui vont être éliminés. Le système d'équations régissant l'équilibre statique du modèle s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ddl interne} \\ \leftarrow \text{ddl de jonction} \end{array} \quad (\text{A. 4})$$

La prise en compte des conditions d'équilibre au niveau des degrés de liberté internes, qui ne sont pas susceptibles d'être connectés à d'autres ddl, permet d'écrire une relation de dépendance linéaire entre les déplacements internes et externes :

$$\{q_i\} = -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ij}] \cdot \{q_j\} + [K_{ii}]^{-1} \cdot \{F_i\} \quad (\text{A. 5})$$

Cette relation permet d'exprimer l'énergie potentielle totale du modèle en fonction des seuls déplacements aux ddl de jonction. Le système (A.4) est alors équivalent au système condensé suivant :

$$[\bar{K}_{jj}] \cdot \{x_j\} = \{\bar{F}_j\} \quad (\text{A. 6})$$

avec :

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{jj}] &= -^T [K_{ij}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ij}] \\ \{\bar{F}_j\} &= \{F_j\} - ^T [K_{ij}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot \{F_i\} \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

A.3. MÉTHODE DE JACOBI GÉNÉRALISÉE

La méthode de jacobi généralisée (*Bath [3.1], Imbert [3.7]*) est une méthode de transformation qui utilise les propriétés des matrices : modale $[\Phi]$ et spectrale $[\Lambda]$, pour déterminer les modes propres du système défini par, une matrice de rigidité $[K]$ et une matrice de masse $[M]$. En effet, il existe une unique matrice $[\Phi]$ carrée d'ordre n et une unique matrice diagonale $[\Lambda]$ telles que :

$$\begin{aligned} ^T [\Phi] \cdot [K] \cdot [\Phi] &= [\Lambda] \\ ^T [\Phi] \cdot [M] \cdot [\Phi] &= [I_n] \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

Cette matrice $[\Phi]$ unique est construite par itération. A chaque itération, une matrice de rotation $[P_k]$ est construite telle que pour un élément extradiagonal choisi (i,j) les termes correspondants des matrices $[K_{k+1}]$ et $[M_{k+1}]$ soient nuls :

$$\begin{aligned} [K_{k+1}]_{i,j} &= 0 \\ [M_{k+1}]_{i,j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

avec :

$$\begin{aligned} [K_{k+1}] &= ^T [P_k] \cdot [K_k] \cdot [P_k] \\ [M_{k+1}] &= ^T [P_k] \cdot [M_k] \cdot [P_k] \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

alors, lorsque k tend vers l'infini, les matrices $[K_{k+1}]$ et $[M_{k+1}]$ tendent vers les matrices modales, diagonales, de rigidité et de masse.

Le choix des termes (i, j) est fait en fonction des termes de couplages :

$$c_m = \sqrt{\frac{(M_{ij})^2}{M_{ii} \cdot M_{jj}}} \quad \text{et} \quad c_k = \sqrt{\frac{(K_{ij})^2}{K_{ii} \cdot K_{jj}}} \quad (\text{A. 11})$$

Le processus itératif s'arrête lorsque :

- pour tous les termes extra diagonaux les termes de couplages définis précédemment, sont inférieurs à une tolérance choisie,
- la variation relative des valeurs propres, entre les itérations p et $p-1$, est inférieure à la tolérance.

A.4. MÉTHODE DES SOUS-ESPACES

La méthode des sous-espaces (*Bath [3.1], Imbert [3.7]*) est, l'une des méthodes les plus utilisées dans le cas de problèmes de grandes dimensions ($n > 300$), lorsque seules les p premières valeurs propres du système sont recherchées. Néanmoins, lorsque le nombre de modes propres souhaité est grand ($p > 40$) les temps de calcul augmentent rapidement et le taux de convergence est proche de l'unité. Il est alors souhaitable de mettre en place des procédures permettant d'accélérer la méthode de base présentée ci-dessous.

Les p vecteurs propres cherchés forment une base M -orthonormale du sous-espace de dimension p le moins dominant des opérateurs $[M]$ et $[K]$. Soit $[E_\infty]$ ce sous-espace. L'idée essentielle de la méthode est d'itérer sur les vecteurs définissant un sous-espace $[E_i]$ jusqu'à ce que $[E_i]$ soit suffisamment proche de E_∞ . Le nombre d'itérations nécessaire ne dépend que de la proximité du sous-espace $[E_i]$ initial par rapport au $[E_\infty]$ cherché et non pas de la proximité des vecteurs initiaux aux vecteurs propres cherchés.

L'avantage de cet algorithme est, qu'il est plus facile d'établir un $[E_i]$ proche du $[E_\infty]$ cherché, que de trouver p vecteurs "proches" des p vecteurs propres cherchés. En fait, il est préférable pour augmenter le taux de convergence, de choisir q vecteurs initiaux avec q supérieur à p . En effet, la convergence vers le mode i se fait avec un taux de λ_i/λ_{q+1} . Classiquement, le nombre q de vecteurs utilisé est défini par :

$$q = \min(2p, p + 8) \quad (\text{A. 12})$$

Le principe général de la méthode des sous-espaces est indiqué ci-dessous :

1- Choix des q vecteurs initiaux X° formant le sous espace E° :

En général, ces vecteurs sont construits de manière à exciter les degrés de liberté associés à la plus grande masse et la plus petite raideur. Si, des vecteurs propres sont déjà connus, il est possible de les réutiliser.



2- Pour chaque itération, calcul de "la meilleur sous-base" $[X_{k+1}]$ de $[E_{k+1}]$

- Résolution de $[K].[X_{k+1}^*]=[M].[X_k]$;
- Calcul des projection de $[K]$ et $[M]$ dans la sous base $[X_{k+1}^*]$,
 $[K_{k+1}] = {}^T[X_{k+1}^*].[K].[X_{k+1}^*]$.
 $[M_{k+1}] = {}^T[X_{k+1}^*].[M].[X_{k+1}^*]$

- Résolution du système aux valeurs propres d'ordre q ,
 $[K_{k+1}].[Q_{k+1}] = [M_{k+1}].[Q_{k+1}].[\Lambda_{k+1}] D$
- Détermination d'une approximation des vecteurs propres,
 $[X_{k+1}] = [X^*_{k+1}].[Q]_{k+1}$
- Vérifications des critères de convergence.



3- Vérification que les vecteurs obtenus sont, bien des vecteurs propres du système utilisation éventuelle des propriétés des suites de Sturm.

A.5. MÉTHODE DE NEWMARK

La méthode de Newmark (*Bath [3.1]*) est une méthode "directe" de résolution des équations de l'équilibre dynamique :

$$[M].\{\ddot{X}\} + [C].\{\dot{X}\} + [K].\{X\} = \{F_{ext}\} \quad (A. 13)$$

par intégration directe.

L'idée essentielle de cette méthode, et des méthodes directes en générale, est de satisfaire l'équation précédente pour des temps t_i discrets, c'est-à-dire de considérer à chaque t_i l'équilibre statique incluant les effets d'inertie et d'amortissement. La méthode de Newmark est implicite et les vitesses et les déplacements au temps $t+\Delta t$ sont déterminés par :

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{X}\}_t + \left[(1-\delta)\{\ddot{X}\}_t + \delta\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \\ \{X\}_{t+\Delta t} &= \{X\}_t + \{\dot{X}\}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\{\ddot{X}\}_t + \alpha\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (A. 14)$$

où les coefficients δ et α sont des paramètres choisis pour rendre la méthode convergente et stable. Dans le cas de la méthode de Newmark originelle (méthode trapézoïdale), $\delta=0.5$ et $\alpha=0.25$ ce qui assure une stabilité inconditionnelle. En introduisant les équations (A.8) dans l'équation d'équilibre à l'instant $t+\Delta t$, le problème se ramène à un problème dont la seule inconnue est le vecteur $\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t}$. L'algorithme général de résolution peut se résumer à :

1- Initialisation des vecteurs déplacements, vitesses, accélération, et pour $\alpha, \delta, \Delta t$ fixés, calcul des coefficients a_i :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t(1-\delta) & a_7 &= \delta \Delta t \end{aligned}$$



2- Calcul et triangularisation de la matrice $[\tilde{\mathbf{K}}]$

$$[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{K}] + a_0[\mathbf{M}] + a_1[\mathbf{C}]$$

$$[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}]^T[\mathbf{L}]$$



3- Pour chaque pas de temps considéré :

- Calcul du vecteur $\{\hat{\mathbf{R}}\}_{t+\Delta t}$

$$\{\hat{\mathbf{R}}\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{M}] \cdot (a_0\{\mathbf{X}\}_t + a_2\{\dot{\mathbf{X}}\}_t + a_3\{\ddot{\mathbf{X}}\}_t) + [\mathbf{C}] \cdot (a_1\{\mathbf{X}\}_t + a_4\{\dot{\mathbf{X}}\}_t + a_5\{\ddot{\mathbf{X}}\}_t)$$

- Résolution du problème linéaire :

$$([\mathbf{L}][\mathbf{D}]^T[\mathbf{L}]) \cdot \{\mathbf{X}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{\mathbf{R}}\}_{t+\Delta t}$$

- Calcul des vecteurs vitesse et déplacement en $t+\Delta t$

$$\{\ddot{\mathbf{X}}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{\mathbf{X}\}_{t+\Delta t} - \{\mathbf{X}\}_t) - a_2\{\dot{\mathbf{X}}\}_t - a_3\{\ddot{\mathbf{X}}\}_t$$

$$\{\dot{\mathbf{X}}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{\mathbf{X}}\}_t + a_6\{\ddot{\mathbf{X}}\}_t + a_7\{\ddot{\mathbf{X}}\}_{t+\Delta t}$$

Remarque : lorsque le système d'équation (A.13) est à coefficients dépendants du temps, la matrice $[\hat{\mathbf{K}}]$ doit être calculée et inversée à chaque itération.

Annexe B :

MODÉLISATION STATIQUE ET DYNAMIQUE DES ÉLÉMENTS TECHNOLOGIQUES

B.1. MODÉLISATION STATIQUE DES ÉLÉMENTS "CORPS ROULANTS" : INTÉGRATION DANS UNE APPROCHE ÉLÉMENTS FINIS

B.1.1 Idées directrices

Pour l'ensemble des paliers à roulements, dont les corps roulants, billes ou rouleaux, peuvent être assimilés à des corps solides, le principe d'intégration des éléments "corps roulants" dans une approche éléments finis classique, ainsi que sa mise en oeuvre numérique, sont identiques. L'intégration de ces éléments consiste à déterminer, pour des déplacements donnés des noeuds "d'attache" N_1 et N_2 appartenant, respectivement, à la bague extérieure et intérieure (Cf. Figure B. 1), les déplacements élémentaires du centre C_r du corps roulant, assurant l'équilibre de ce dernier dans le plan radial (équilibre des forces et des moments).

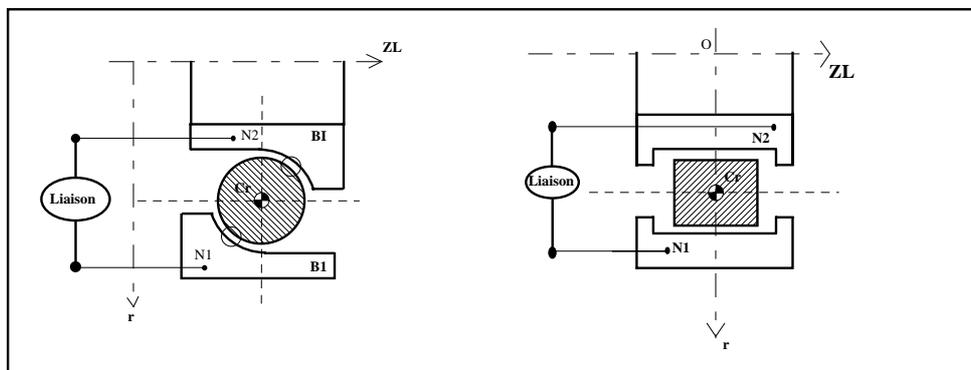


Figure B. 1 : Positions des éléments "corps roulants" pour les paliers à billes et à rouleaux

En effet, pour des déplacements connus du noeud de chaque bague, le corps roulant va être soumis à des efforts de contact au niveau des pistes de roulement et des épaulements. Ces efforts Q sont estimables par la théorie de Hertz du contact étroit étendue aux tranches minces :

$$Q = C_f \cdot (\delta)^n \quad (B. 1)$$

où δ représente l'écrasement des corps en contact, n est un exposant dépendant de la nature du contact, et C_f est la constante de rigidité du contact définie par Hertz et dépendant de la géométrie du roulement et des caractéristiques des matériaux.

La position d'équilibre du système "bagues corps-roulant" est calculée par une boucle itérative de Newton-Raphson (Cf. Annexe A.1), et à chaque itération, sont déterminés :

- les efforts et les moments exercés sur le corps roulant par les bagues, et leurs éventuels épaulements,
- les matrices de rigidité tangente entre le corps roulant et les bagues,
- le vecteur des efforts résiduels agissant sur le corps roulant.

Ces calculs se font en tenant compte des jeux et de la géométrie précise du roulement (rayons de courbures, de dépouilles, bombés, ...). C'est seulement à ce niveau qu'il est nécessaire de distinguer les différents types de roulements.

Lorsque l'équilibre est atteint, le vecteur des efforts résiduels est égal au vecteur nul, et les efforts entre le corps roulant, les bagues et les épaulements sont connus, ainsi que, les matrices de rigidité tangente entre le corps roulant et les différentes bagues. Une matrice de rigidité élémentaire équivalente peut être déterminée entre le noeud de la bague intérieure et celui de la bague extérieure. Cette matrice est, la matrice de rigidité tangente associée à l'élément "corps roulant", elle sera assemblée à la matrice de rigidité du modèle éléments finis global.

L'ensemble de la procédure de calcul de l'élément "corps roulant" peut être synthétisé dans l'organigramme suivant :

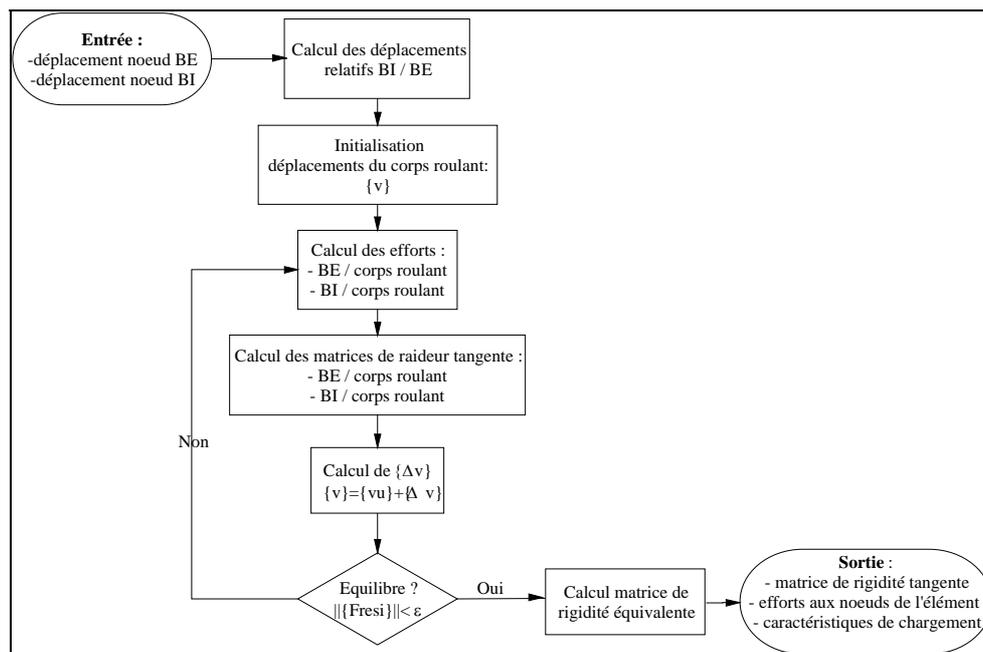


Figure B. 2 : Organigramme de la procédure globale de calcul

B.1.2 Définition des repères de calcul

A chaque roulement, est associé un repère "élémentaire" R_1 (O, x, y, z) tel que, l'axe z, soit l'axe du roulement. La position de référence du centre C_r d'un corps roulant est repérée par un angle ϕ et un repère R_2 (C_r , r, n, z), lié au corps roulant, est défini.

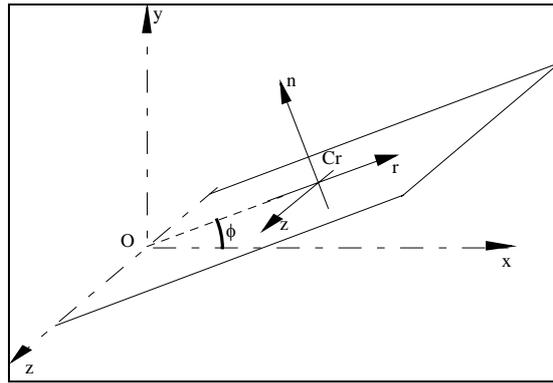


Figure B. 3 : Définition des repères R1 et R2

C'est dans le plan radial (C_r, r, z) qu'est déterminé l'équilibre du corps roulant. Le repère R_2 est le repère de référence dans lequel sont définies les caractéristiques géométriques de l'élément roulant, en particulier, les positions des noeuds N_1 et N_2 par rapport au centre C_r du corps roulant. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{array} \right\}_{R_2} = \begin{array}{c} R_1 \\ 0 \\ Z_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{array} \right\}_{R_2} = \begin{array}{c} R_2 \\ 0 \\ Z_2 \end{array} \quad (\text{B. 2})$$

ces vecteurs

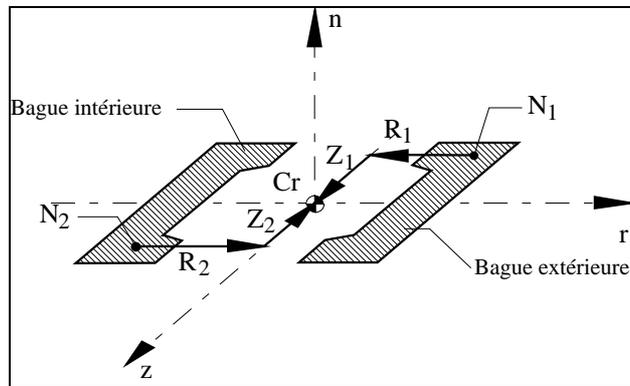


Figure B. 4 : Position des noeuds N_1 et N_2 par rapport au centre C_r du corps roulant

Lors du calcul éléments finis global, les vecteurs des déplacements généralisés des noeuds N_1 et N_2 sont calculés à chaque itération, et peuvent être exprimés dans le repère R_1 . Pour déterminer l'équilibre du système "corps roulant-bagues" seuls les déplacements relatifs des bagues doivent être pris en considération. Le choix effectué est de prendre la bague extérieure comme référence et de déterminer les déplacements relatifs du centre du corps roulant dans un repère $R_3(C_r, r', n, z')$ lié à cette bague, et qui tient compte de l'éventuel basculement de la section de la bague extérieure dans le repère R_2 .

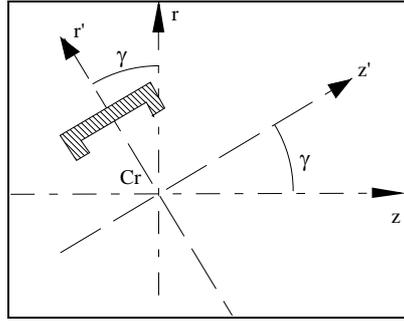


Figure B. 5 : Définition du basculement de la bague extérieure, et du repère de calcul R_3

L'angle de basculement γ de la bague extérieure dans le plan radial de calcul, s'exprime, en fonction des déplacements θ_x et θ_y du noeud N_1 dans le repère R_1 , par :

$$\gamma = -\sin \varphi . \theta_x + \cos \varphi . \theta_y \quad (\text{B. 3})$$

Dans ce repère, les positions des noeuds N_1 et N_2 s'expriment alors par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_1 \\ \vec{C}_r \end{array} \right\}_{R_3} = \begin{array}{l} R_1 \\ 0 \\ Z_1 \end{array} \quad (\text{B. 4})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_2 \\ \vec{C}_r \end{array} \right\}_{R_3} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_2 \\ \vec{C}_r \end{array} \right\}_{R_2} \quad (\text{B. 5})$$

$$\begin{array}{l} R'_2 = (-R_2 . \sin \gamma + Z_2 . \sin \gamma) \\ = 0 \\ Z'_2 = (R_2 . \cos \gamma + Z_2 . \cos \gamma) \end{array}$$

B.1.3 Définition des matrices de "géométrie"

Ces matrices $[G_1]$ et $[G_2]$ permettent de déterminer les déplacements "2D" (2 translations et 1 rotation) calculés au point C_r , des bagues extérieure et intérieure dans le repère R_3 , en fonction des déplacements "3D" des noeuds N_1 et N_2 définis dans le repère R_1 .

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(C_r \in B_e) \end{array} \right\}_{R_3} = \begin{array}{l} u_r^1 \\ u_z^1 \\ \theta_n^1 \end{array} \quad (\text{B. 6})$$

$$= [G_1] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(N_1 \in B_e) \end{array} \right\}_{R_1}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\text{dep}}(\text{C}_r \in \text{B}_i) \right\}_{\text{R}_3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r^2 \\ \mathbf{u}_z^2 \\ \theta_n^2 \end{bmatrix} \\ &= [\text{G}_2] \cdot \left\{ \vec{\text{dep}}(\text{N}_2 \in \text{B}_i) \right\}_{\text{R}_1} \end{aligned} \quad (\text{B. 7})$$

Elles s'obtiennent en calculant les déplacements des points N_i dans le repère R_3 à partir des déplacements dans le repère R_1 .

$$\left\{ \vec{\text{dep}}(\text{N}_i) \right\}_{\text{R}_3} = \begin{pmatrix} [\mathfrak{R}_{1 \rightarrow 3}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathfrak{R}_{1 \rightarrow 3}] \end{pmatrix} \cdot \left\{ \vec{\text{dep}}(\text{N}_i) \right\}_{\text{R}_1} \quad (\text{B. 8})$$

où $[\mathfrak{R}_{1 \rightarrow 3}]$ est la matrice de rotation permettant de passer du repère R_1 au repère R_3 .

$$[\mathfrak{R}_{1 \rightarrow 3}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi & \cos \gamma \sin \varphi & \sin \gamma \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \mathbf{0} \\ -\sin \gamma \cos \varphi & -\sin \gamma \sin \varphi & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B. 9})$$

puis en exprimant les déplacements (translations et rotations) de chaque bague au point C_r en assimilant les sections des bagues à des corps solides. D'où, pour chacune des bagues :

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\text{T}}(\text{C}_r) \right\}_{\text{R}_3} &= \left\{ \vec{\text{T}}(\text{N}_i) \right\}_{\text{R}_3} + \left\{ \vec{\text{C}}_r \text{N}_i \right\}_{\text{R}_3} \wedge \left\{ \vec{\text{R}}(\text{N}_i) \right\}_{\text{R}_3} \\ \left\{ \vec{\text{R}}(\text{C}_r) \right\}_{\text{R}_3} &= \left\{ \vec{\text{R}}(\text{N}_i) \right\}_{\text{R}_3} \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

où $\left\{ \vec{\text{T}} \right\}$ et $\left\{ \vec{\text{R}} \right\}$ sont respectivement les torseurs des translations et des rotations de la bague considérée.

Finalement, en ne retenant que les 3 déplacements relatifs au plan radial, la matrice de géométrie $[\text{G}_i]$ s'exprime par :

$$[\text{G}_i] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi & \cos \gamma \sin \varphi & \sin \gamma & -Z \sin \varphi & Z \cos \varphi & 0 \\ -\sin \gamma \cos \varphi & -\sin \gamma \sin \varphi & \cos \gamma & R \sin \varphi & -R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 11})$$

où R et Z représentent les coordonnées du vecteur $\left\{ \vec{\text{N}}_i \text{C}_r \right\}$ dans le repère R_3 . La dernière colonne, égale à zéro, indique que, les rotations autour de l'axe du roulement ne sont pas prises en compte.

Remarque : dans le cas des roulements à rouleaux coniques, il est nécessaire de prendre en compte l'angle de conicité k , lors du calcul des matrices de géométrie. Elles s'expriment alors par :

$$[G_i] = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi & \cos \gamma \sin \varphi & \sin \gamma & -Z \sin \varphi & Z \cos \varphi & 0 \\ -\sin \gamma \cos \varphi & -\sin \gamma \sin \varphi & \cos \gamma & R \sin \varphi & -R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 12})$$

B.1.4 Détermination de l'équilibre du corps roulant

Les calculs sont effectués dans le plan radial par rapport au repère R_3 . Dans ce repère, les déplacements de la bague extérieure sont nuls, et ceux de la bague intérieure s'expriment en C_r , en fonction des déplacements relatifs du noeud N_2 par rapport au noeud N_1 dans le repère R_1 , par :

$$\begin{aligned} \{\bar{u}\} &= \begin{vmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{vmatrix} \\ &= [G_2] \cdot \left(\left\{ \vec{\text{dep}}(N_2) \right\}_{R_1} - \left\{ \vec{\text{dep}}(N_1) \right\}_{R_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B. 13})$$

L'équilibre du corps roulant est déterminé par une boucle de Newton-Raphson itérant sur le vecteur des déplacements du centre du corps roulant. Soit :

$$\{\bar{v}\} = \begin{vmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{vmatrix}$$

ce vecteur.

Pour un vecteur $\{\bar{v}\}$ donné, et en utilisant les hypothèses de non-déformabilité du corps roulant et des sections des bagues, ainsi que les données de la géométrie fine du roulement (jeux, bombés ...), il est possible de déterminer les points de contact et le rapprochement des corps solides. Lorsque ce rapprochement est supérieur au jeu, l'effort résultant peut être calculé suivant la normale au contact, par la théorie de Hertz (B.1). Les forces et les moments résultants en C_r peuvent être déterminés. Le corps roulant est donc soumis aux efforts de contact de chacune des bagues, et les efforts résiduels s'expriment par :

$$\begin{aligned} \{\bar{R}\} &= -\sum F_{\text{ext}} \\ &= - \left\{ \begin{matrix} F_r^{\text{Be}}(v_r, v_z, v_\theta) \\ F_z^{\text{Be}}(v_r, v_z, v_\theta) \\ M_n^{\text{Be}}(v_r, v_z, v_\theta) \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} F_r^{\text{Bi}}(v_r, v_z, v_\theta) \\ F_z^{\text{Bi}}(v_r, v_z, v_\theta) \\ M_n^{\text{Bi}}(v_r, v_z, v_\theta) \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B. 14})$$

La méthode de Newton-Raphson consiste à déterminer, à chaque itération, le vecteur $\{\Delta\bar{v}\}$ tel que le vecteur des efforts résiduels calculé pour les déplacements $(\{\bar{v}\} + \{\Delta\bar{v}\})$ soit égal au vecteur nul. A chaque itération, le vecteur $\{\Delta\bar{v}\}$ est évalué en fonction de $\{\bar{v}\}$ et de $\{\bar{R}\}$ par résolution du système linéaire :

$$\left[\frac{\partial\{\bar{R}\}}{\partial\{\bar{v}\}} \right]_{\bar{v}_i} \cdot \{\Delta\bar{v}\} = [K_t] \cdot \{\Delta\bar{v}\} = \{\bar{R}\} \quad (\text{B. 15})$$

où $[K_t]$ est la matrice jacobienne, ou de rigidité tangente, associée au système "bagues corps-roulant" calculée au point C_r . Elle s'exprime comme la somme des matrices de rigidité tangente associées au contact corps roulant bague extérieure et corps roulant bague intérieure :

$$\begin{aligned} [K_t]_i &= \left[-\frac{\partial\{\bar{F}^{Be}\}}{\partial\{\bar{v}\}} \right]_{\bar{v}_i} + \left[-\frac{\partial\{\bar{F}^{Bi}\}}{\partial\{\bar{v}\}} \right]_{\bar{v}_i} \\ &= [K_t^{Be}]_{\bar{v}_i} + [K_t^{Bi}]_{\bar{v}_i} \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

L'équilibre du corps roulant est atteint, lorsque pour des tolérances ε_v et ε_r spécifiées :

$$\|\Delta\bar{v}\| \leq \varepsilon_v \quad \text{et} \quad \|\bar{R}\| \leq \varepsilon_r \quad (\text{B. 17})$$

Les données caractéristiques du chargement du corps roulant : efforts au niveau des pistes de roulement, efforts aux épaulements, angles de basculement ou de contact sont également connues.

B.1.5 Calcul, dans R_1 , de la matrice de rigidité tangente entre les points N_1 et N_2

Les matrices de rigidité tangente $[K_t^{Be}]$ et $[K_t^{Bi}]$ ont été définies lors de l'étape précédente. Elles lient respectivement les déplacements, dans le plan radial, du centre C_r du corps roulant aux points C_r de chacune des bagues. Une matrice de rigidité équivalente peut être définie entre les points C_r de chacune des bagues :

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}_{6 \times 6} \\ \text{avec } [K]_{3 \times 3} &= [K_t^{Be}] \cdot [K_t^{Be} + K_t^{Bi}]^{-1} \cdot [K_t^{Bi}] \end{aligned} \quad (\text{B. 18})$$

L'utilisation des matrices de géométrie définies précédemment, permet de transporter cette matrice $[\tilde{K}]$ dans le repère "3D" R_1 , et de définir la matrice de rigidité élémentaire associée à l'élément corps roulant entre les noeuds N_1 et N_2 :

$$\underbrace{[\mathbf{K}_t^e]}_{12 \times 12} \Big|_{R_1} = {}^T [\mathbf{G}] \cdot [\tilde{\mathbf{K}}] \cdot [\mathbf{G}]$$

$$\text{avec } [\mathbf{G}] = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}}_{6 \times 12} \quad (\text{B. 19})$$

Cette matrice est assemblée aux matrices associées aux autres corps roulants et au reste de la structure avant résolution du problème non linéaire.

B.1.6 Efforts appliqués par le corps roulant sur les noeuds N_1 et N_2

De la même manière, les efforts appliqués par le corps roulant sur les noeuds N_1 et N_2 , peuvent être calculés en fonction des efforts appliqués aux bagues, dans le plan radial et évalués au point C_r , par le corps roulant :

$$\underbrace{\{\mathbf{F}^{N_1}\}}_{6 \times 1} \Big|_{R_1} = {}^T \underbrace{[\mathbf{G}_1]}_{6 \times 3} \cdot \underbrace{\{-\mathbf{F}^{Be}\}}_{3 \times 1}$$

$$\underbrace{\{\mathbf{F}^{N_2}\}}_{6 \times 1} \Big|_{R_1} = {}^T \underbrace{[\mathbf{G}_2]}_{6 \times 3} \cdot \underbrace{\{-\mathbf{F}^{Bi}\}}_{3 \times 1} \quad (\text{B. 20})$$

Ces vecteurs des efforts élémentaires sont assemblés au vecteur des efforts résiduels du problème non linéaire général.

B.1.7 Application aux roulements à rouleaux cylindriques

La technique précédente a été appliquée à différents types de paliers, en particulier aux roulements :

- à billes à contact oblique,
- à billes à gorges profondes,
- à billes à 3 ou 4 points de contact,
- à rouleaux cylindriques avec des positions d'épaulements différentes,
- à rouleaux coniques.

Nous présenterons ici, à type d'exemple, l'application aux roulements à rouleaux cylindriques avec 2 épaulements par bague.

◆ Paramétrisation de la géométrie

La description de la géométrie interne retenue est la plus proche possible des caractéristiques utilisées par les roulementiers.

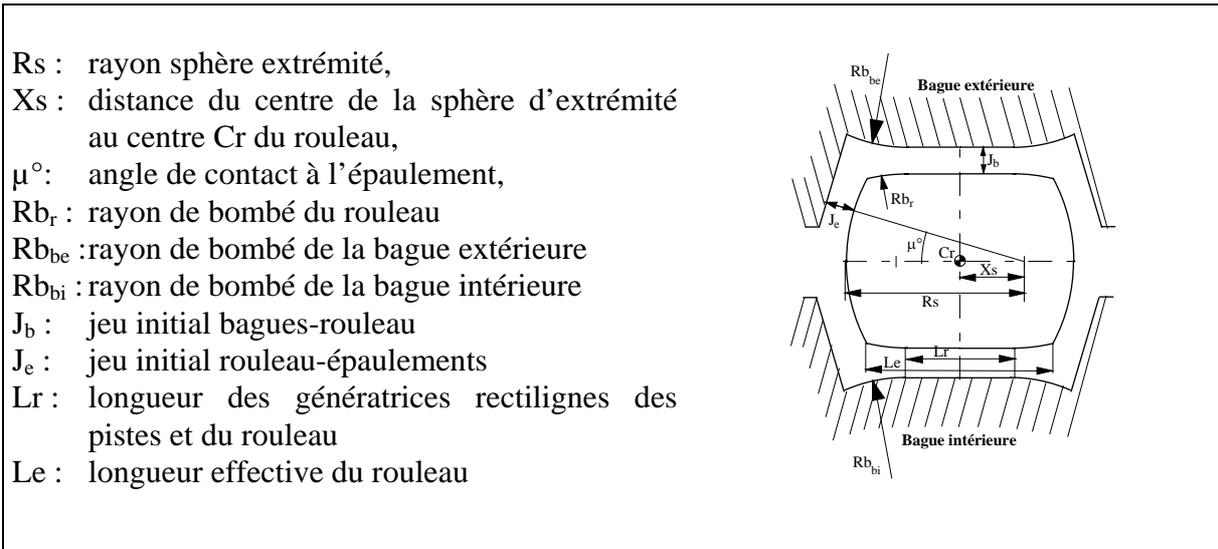


Figure B. 6 : Définition de la modélisation de la géométrie interne des roulements à rouleaux cylindriques

◆ Angles de basculement du rouleau et angles de contact aux épaulements

Dans le repère de calcul R_3 lié à la bague extérieure et pour des déplacements $\{\bar{u}\}$ et $\{\bar{v}\}$ donnés, le rouleau et la bague intérieure ont basculé. Soit A_e l'angle orienté entre l'axe de la bague extérieure et l'axe du rouleau, et A_i l'angle orienté entre l'axe de la bague intérieure et le rouleau (Cf. Figure B. 7). Ces angles sont définis en fonction des composantes de $\{\bar{u}\}$ et $\{\bar{v}\}$ par :

$$A_i = -u_\theta + v_\theta \quad \text{et} \quad A_e = v_\theta \quad (\text{B. 21})$$

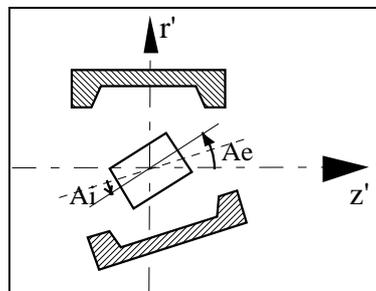


Figure B. 7 : Description des angles de basculement A_i et A_e

De la même manière, pour chacun des 4 épaulements l'angle effectif entre la normale au contact et l'axe du rouleau doit être défini. Soit μ_i l'angle associé à l'épaulement i

Bague extérieure		Bague intérieure	
<p>$\mu_1 = A_e - \mu^\circ$</p>	<p>$\mu_2 = \mu^\circ + A_e$</p>	<p>$\mu_3 = A_i + \mu^\circ$</p>	<p>$\mu_4 = A_i - \mu^\circ$</p>

Figure B. 8 : Définition des directions de contact effectives au niveau des épaulements

◆ *Calculs des efforts entre les pistes de roulement et le rouleau*

Seuls les efforts suivant la direction r' dans le repère R_3 sont calculés. Dans cette direction, les rapprochements δ_i et δ_e , du rouleau par rapport à chacune des pistes de roulement s'expriment par :

$$\begin{aligned} \delta_i &= u_r - v_r - J_b \\ \delta_e &= v_r - J_b \end{aligned} \quad (B.22)$$

Lorsque ces valeurs sont positives, il y a contact entre le rouleau et la piste de roulement. Le calcul des efforts correspondants est effectué en découpant en N "tranches", la zone de contact potentiel entre le rouleau et la piste. Cette discrétisation se fait de manière symétrique par rapport au centre C_r du corps roulant :

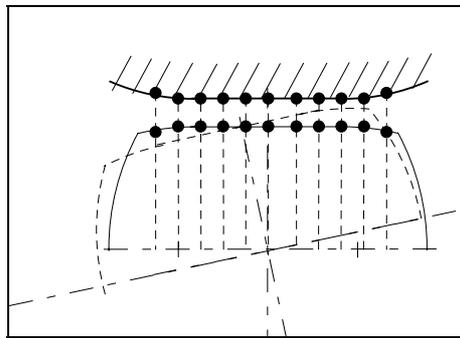


Figure B. 9 : Découpage en "tranches" du rouleau et de la piste de roulement pour calculer les efforts de contact

Pour la tranche mince d'épaisseur :

$$d_e = \frac{L_e}{N} \quad (B.23)$$

située autour du noeud k d'abscisse z_k , l'écrasement entre les deux corps s'exprime en tenant compte de l'angle α^1 de basculement relatif des deux solides (supposé petit) et des éventuels rayons de bombé, par :

$$\Delta d = \delta + \alpha \cdot z_k - h_k^1 - h_k^2 \quad (B.24)$$

où h_k^i est un terme permettant de tenir compte du bombé éventuel R_{ci} du corps i . Si le point k est en dehors de la génératrice rectiligne, c'est à dire si :

$$|z_k| \geq \frac{L_r}{2} \quad (B.25)$$

et s'il y a un bombé, h_k^i s'exprime par :

¹ Pour le contact entre la bague extérieure et le rouleau $\alpha = A_e$, pour le contact bague intérieure rouleau $\alpha = -A_i$

$$h_k^i = R_{ci} - \sqrt{R_{ci}^2 - \left(z_k - \frac{L_r}{2}\right)^2} \quad (\text{B. 26})$$

dans les autres cas, h_k^i est nul.

L'effort au contact s'exprime alors, d'après la théorie de Hertz pour les tranches minces, par

$$Q_k = C_f \cdot (\Delta d)^{10\%} \cdot d_e \quad (\text{B. 27})$$

Cet effort génère un moment au point Cr :

$$M_k = Q_k \cdot z_k \quad (\text{B. 28})$$

L'effort et le moment exercés par l'ensemble du chemin de roulement sur le rouleau, s'expriment donc par :

$$\begin{aligned} Q_b &= \sum_{k=1}^N Q_k \\ M_b &= \sum_{k=1}^N M_k \end{aligned} \quad (\text{B. 29})$$

Soit $Q_{Be}(v_r, v_z, v_\theta)$ et $M_{Be}(v_r, v_z, v_\theta)$ l'effort et le moment en C_r exercés par la bague extérieure sur le rouleau, et $Q_{Bi}(v_r, v_z, v_\theta)$ et $M_{Bi}(v_r, v_z, v_\theta)$ ceux exercés par la bague intérieure.

◆ *Calculs des efforts aux épaulements*

Les directions effectives de contact entre l'extrémité du rouleau et les épaulements ont été calculées (Cf. Figure B. 8). Suivant ces directions, le jeu entre le rouleau et l'épaulement i s'exprime en fonction du jeu initial J_e , de l'angle de contact à vide μ° , de l'angle de contact sous charge μ_i et de la distance X_s par :

$$\tilde{J}_i = J_e + X_s (\cos \mu_i - \cos \mu^\circ) \quad (\text{B. 30})$$

Les rapprochements entre les épaulements et le rouleau suivant la direction de contact s'expriment par :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= v_z \cos \mu^\circ + v_r \sin \mu^\circ - \tilde{J}_1 \\ \delta_2 &= -v_z \cos \mu^\circ + v_r \sin \mu^\circ - \tilde{J}_2 \\ \delta_3 &= -(u_z - v_z) \cos(\mu^\circ - u_\theta) + (u_r - v_r) \sin(\mu^\circ - v_\theta) - \tilde{J}_3 \\ \delta_4 &= (u_z - v_z) \cos(\mu^\circ - u_\theta) + (u_r - v_r) \sin(\mu^\circ - v_\theta) - \tilde{J}_4 \end{aligned} \quad (\text{B. 31})$$

Lorsque δ_i est positif, il y a contact entre le rouleau et l'épaulement i , l'effort résultant Q_{Ei} suivant la normale au contact s'exprime par la loi de Hertz pour un contact ponctuel par :

$$Q_{Ei}(v_r, v_z, v_\theta) = C_{ep} \cdot (\delta_i)^{3/2} \quad (\text{B. 32})$$

Et le moment résultant en C_r par :

$$M_{Ei} = -Q_{Ei} \cdot X_s \cdot \sin \mu_i \quad (1)$$

◆ Equations d'équilibre et matrices jacobiennes

Les équations d'équilibre du système rouleau-bagues s'écrivent, dans le repère de calcul R_3 en tenant compte de la force centrifuge F_c et du moment gyroscopique M_g exercés sur le rouleau, :

$$\begin{aligned} F_r(v_r, v_z, v_\theta) &= \underbrace{-Q_{Be} - Q_{E2} \sin \mu^\circ - Q_{E1} \sin \mu^\circ}_{\text{BE/rouleau}} + \underbrace{Q_{Bi} + Q_{E4} \sin(\mu^\circ + u_\theta) + Q_{E3} \sin(\mu^\circ - u_\theta)}_{\text{BI/rouleau}} + F_c \\ &= F_r^{\text{Be}}(v_r + v_z + v_\theta) + F_r^{\text{Bi}}(v_r + v_z + v_\theta) + F_c \\ F_z(v_r, v_z, v_\theta) &= \underbrace{Q_{E2} \cos \mu^\circ - Q_{E1} \cos \mu^\circ}_{\text{BE/rouleau}} + \underbrace{Q_{E4} \cos(\mu^\circ + u_\theta) - Q_{E3} \cos(\mu^\circ - u_\theta)}_{\text{BI/rouleau}} \\ &= F_z^{\text{Be}}(v_r + v_z + v_\theta) + F_z^{\text{Bi}}(v_r + v_z + v_\theta) \\ M_\theta(v_r, v_z, v_\theta) &= \underbrace{-M_{Be} - M_{E2} - M_{E1}}_{\text{BE/rouleau}} + \underbrace{M_{Bi} - M_{E4} - M_{E3}}_{\text{BI/rouleau}} + M_g \\ &= M_\theta^{\text{Be}}(v_r + v_z + v_\theta) + M_\theta^{\text{Bi}}(v_r + v_z + v_\theta) + M_g \end{aligned} \quad (\text{B. 33})$$

Les inconnues du problème sont les v_r , v_z , v_θ . Les matrices de rigidité tangente associées aux contacts "bague extérieure-rouleau" et "bague intérieure-rouleau" sont les matrices jacobiennes associées aux relations efforts-déplacements. Elles s'expriment par :

$$\left[K_t^{\text{Be}} \right] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{\text{Be}}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{\text{Be}}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_r^{\text{Be}}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial F_z^{\text{Be}}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{\text{Be}}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_z^{\text{Be}}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial M_\theta^{\text{Be}}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_\theta^{\text{Be}}}{\partial v_z} & \frac{\partial M_\theta^{\text{Be}}}{\partial v_\theta} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[K_t^{\text{Bi}} \right] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{\text{Bi}}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{\text{Bi}}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_r^{\text{Bi}}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial F_z^{\text{Bi}}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{\text{Bi}}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_z^{\text{Bi}}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial M_\theta^{\text{Bi}}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_\theta^{\text{Bi}}}{\partial v_z} & \frac{\partial M_\theta^{\text{Bi}}}{\partial v_\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B. 34})$$

B.2. MODÉLISATION STATIQUE ET DYNAMIQUE DES ÉLÉMENTS D'ENGRENAGES CYLINDRIQUES EXTÉRIEURS

B.2.1 Géométrie et configurations d'engrènement

Les éléments "engrenages cylindriques extérieurs" développés permettent de relier par une matrice de rigidité un noeud de l'arbre d'entrée à un noeud de l'arbre de sortie comme indiqué dans la figure suivante (Cf. Figure B. 10).

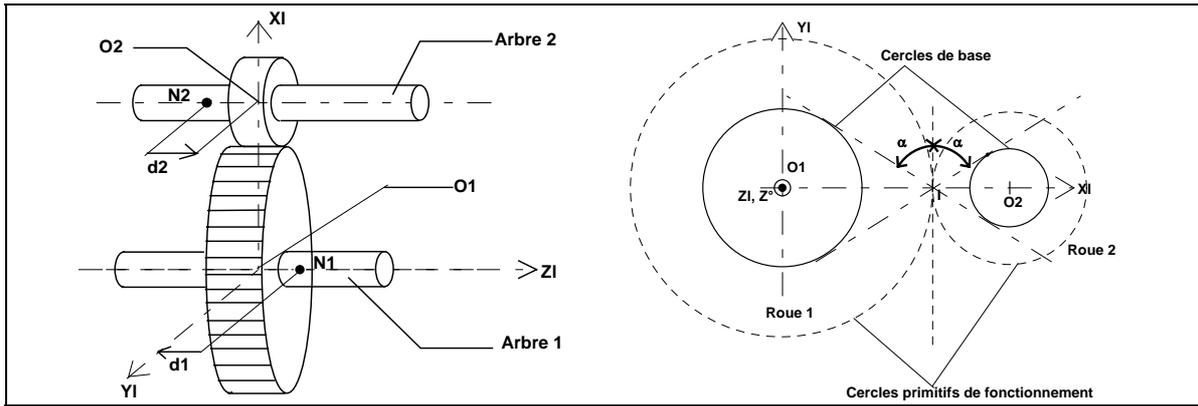


Figure B. 10 : Description de l'élément d'engrenage cylindrique extérieur

Pour les modèles dynamiques, les noeuds N_1 et N_2 correspondent aux centres des pignons ($d_1=d_2=0$). Dans la suite de cette partie, le cas le plus général correspondant aux modèles statiques seront décrits. En fonction du chargement statique appliqué, deux configurations d'engrènement sont envisageables. Elles correspondent à des profils en contact différents :

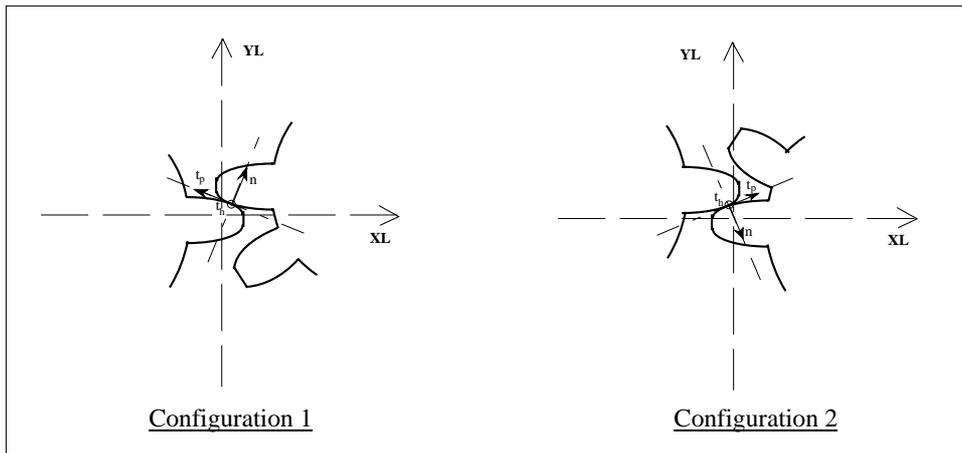


Figure B. 11 : Définition des profils de contact et des configurations d'engrènement associées

Pour chacune de ces positions d'engrènement, un repère local lié à cette configuration peut être défini :

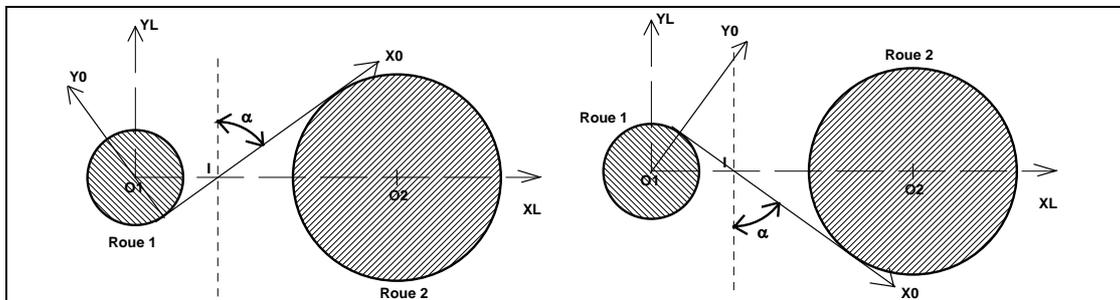


Figure B. 12 : Définition des repères locaux

B.2.2 Déplacements aux points primitifs d'engrènement

Les hypothèses de modélisation retenues en statique et en dynamique, assurent que les pignons sont assimilables à des solides indéformables, sauf ponctuellement suivant la normale au contact. La connaissance dans le repère élémentaire (X_o, Y_o, Z_o) des déplacements généralisés des noeuds d'attache de l'élément d'engrènement, permet de calculer les déplacements aux points primitifs d'engrènement.

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(\mathbf{N}_i) \\ \end{array} \right\}_{R_o} = \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{rot}}(\mathbf{N}_i) \\ \end{array} \right\}_{R_o} = \begin{array}{c} rx_i \\ ry_i \\ rz_i \end{array} \quad (\text{B. 35})$$

les vecteurs des déplacements et des rotations du noeud N_i dans le repère R_o . Il est alors possible de calculer les déplacements au point primitif d'engrènement pour chaque pignon :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S}_i) \\ \end{array} \right\}_{R_o} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(\mathbf{N}_i) \\ \end{array} \right\}_{R_o} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{I}}\mathbf{N}_i \\ \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{rot}}(\mathbf{N}_i) \\ \end{array} \right\}_{R_o} \quad (\text{B. 36})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{I}}\mathbf{N}_i \\ \end{array} \right\}_{R_o} = \begin{array}{c} \mu_i \\ \lambda_i \\ -d_i \end{array} \quad (\text{B. 37})$$

où d_i est la distance algébrique N_iO_i mesurée suivant l'axe Z_o . Les valeurs des coefficients μ_i et λ_i dépendent de la configuration d'engrènement :

$$\text{Configuration 1 : } \begin{array}{l} \mu_1 = -Rb_1 \tan(\alpha) \\ \mu_2 = +Rb_2 \tan(\alpha) \\ \lambda_1 = Rb_1 \\ \lambda_2 = -Rb_2 \end{array} \quad \text{Configuration 2 : } \begin{array}{l} \mu_1 = -Rb_1 \tan(\alpha) \\ \mu_2 = +Rb_2 \tan(\alpha) \\ \lambda_1 = -Rb_1 \\ \lambda_2 = Rb_2 \end{array} \quad (\text{B. 38})$$

Les déplacements aux points primitifs d'engrènement s'expriment donc par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\text{dep}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S}_i) \\ \end{array} \right\} = \begin{array}{c} u_i + \lambda_i + d_i \cdot ry_i \\ v_i - d_i \cdot rx_i - \mu_i \cdot rz_i \\ w_i + \mu_i \cdot ry_i - \lambda_i \cdot rx_i \end{array} \quad (\text{B. 39})$$

B.2.3 Ecrasement suivant la normale au contact

L'expression de la normale au contact dans le repère R_o , dépend de la configuration d'engrènement et de la valeur de l'angle d'hélice de base β_b . La convention retenue pour les

modèles statiques et dynamiques est lié au sens de l'hélice de la roue 1. Si l'hélice est à droite sur la roue 1 l'angle d'hélice est "négatif", il est "positif" dans le cas d'une hélice à gauche.

La normale sortante au profil en contact de la roue 1, a pour expression dans le repère R_o :

$$\text{Configuration 1 : } \{\vec{n}_1\}_{R_o} = \begin{cases} \cos(\beta) \\ 0 \\ \sin(\beta) \end{cases} \quad \text{Configuration 2 : } \{\vec{n}_1\}_{R_o} = \begin{cases} \cos(\beta) \\ 0 \\ -\sin(\beta) \end{cases} \quad (\text{B. 40})$$

L'écrasement aux dentures s'écrit alors :

$$\Sigma = \left\{ \vec{\text{dep}}(I \in S_1) \right\} \cdot \{\vec{n}_1\} - \left\{ \vec{\text{dep}}(I \in S_2) \right\} \cdot \{\vec{n}_1\} \quad (\text{B. 41})$$

Soit $\{Q\}$ le vecteur des déplacements généralisés des noeuds d'attache de l'élément "engrenage cylindrique extérieur" :

$$\{Q\}_{R_o} = {}^T \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ rx_1 \ ry_1 \ rz_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ rx_2 \ ry_2 \ rz_2\} \quad (\text{B. 42})$$

L'écrasement au denture peut alors se mettre sous la forme :

$$\Sigma = {}^T \{\sigma\} \cdot \{Q\}_{R_o} \quad (\text{B. 43})$$

avec :

$${}^T \{\sigma\} = \{c \ 0 \ s \ -\lambda_1 s \ \mu_1 s + d_1 c \ \lambda_1 c \ -c \ 0 \ -s \ \lambda_2 s \ -d_2 c - \mu_2 s \ -\lambda_2 c\} \quad (\text{B. 44})$$

où :

$$\begin{aligned} c &= \cos(\beta_b) \\ s &= \sin(\beta_b) \end{aligned} \quad (\text{B. 45})$$

B.2.4 Matrice de rigidité équivalente dans le repère R_o

L'interface d'engrènement est modélisée par un ressort de rigidité k^o , placé suivant la normale au contact. L'énergie potentielle dissipée dans cet élément s'exprime par :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} k^o \cdot \Sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} k^o \cdot ({}^T \{\sigma\} \cdot \{Q\}_{R_o})^2 \\ &= \frac{1}{2} k^o {}^T \{Q\}_{R_o} \cdot \{\sigma\} \cdot {}^T \{\sigma\} \cdot \{Q\}_{R_o} \\ &= \frac{1}{2} {}^T \{Q\}_{R_o} \cdot [K_{\text{eng}}] \cdot \{Q\}_{R_o} \end{aligned} \quad (\text{B. 46})$$

La matrice :

$$[K_{eng}]_{R_o} = k^o \{\sigma\} \cdot \{\sigma\} \quad (B. 47)$$

est la matrice de rigidité équivalente de l'élément "engrenage cylindrique extérieur" exprimé dans le repère R^o .

B.3. EFFORTS EXTÉRIEURS ÉQUIVALENTS À UNE EXCITATION DYNAMIQUE EN DEPLACEMENT AU POINT PRIMITIF D'ENGRÈNEMENT.

L'introduction de l'excitation par l'erreur de transmission, par l'intermédiaire d'un effort extérieur, consiste à la modéliser par les efforts aux dentures qu'elle produit. Dans le cadre du modèle global présenté précédemment, l'interface d'engrènement peut être schématisée par un ressort et un excitateur en déplacement montés en parallèle entre le point I_1 (primitif d'engrènement de la roue 1) et le point I_2 (primitif d'engrènement de la roue 2), comme indiqué sur la figure suivante. En réalité, les points I_1 et I_2 sont géométriquement confondus au point I primitif d'engrènement.

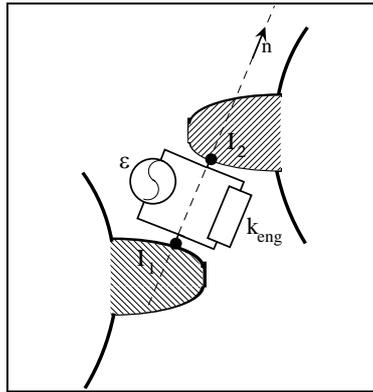


Figure B. 13 : Schématisation de l'interface d'engrènement

La grandeur ε peut être déterminée par les études quasi-statiques et traduit le rapprochement des corps. Elle va conduire à la génération d'un effort "extérieur" $\{\bar{F}(I_1)\}$ sur la roue 1 et $\{\bar{F}(I_2)\}$ sur la roue 2, appliqués aux points I_1 et I_2 suivant la normale au contact :

$$\begin{aligned} \{\bar{F}(I_1)\}_{R_o} &= \varepsilon(t) \cdot \{\bar{n}\}_{R_o} \\ \{\bar{F}(I_2)\}_{R_o} &= -\varepsilon(t) \cdot \{\bar{n}\}_{R_o} \end{aligned} \quad (B. 48)$$

Les roues étant supposées indéformables, la mécanique générale des corps rigides permet de calculer le torseur des efforts équivalents appliqués aux centres des engrenages qui sont des noeuds du maillage.

$$\begin{aligned} \{\vec{F}(O_i)\}_{R_0} &= \{\vec{F}(I_i)\}_{R_0} \\ \{\vec{M}(O_i)\}_{R_0} &= \left\{ \vec{O}_i I_i \right\}_{R_0} \wedge \{\vec{F}(O_i)\}_{R_0} \end{aligned} \quad (\text{B. 49})$$

L'expression de ces torseurs peut être exprimée dans le repère de l'élément d'engrenage défini précédemment. Les coordonnées des vecteurs $\{\vec{n}\}$ dans le repère R_0 ont été définies dans la partie précédente en fonction des configurations d'engrènement. Et les vecteurs $\left\{ \vec{O}_1 I_1 \right\}$ et $\left\{ \vec{O}_2 I_2 \right\}$ s'expriment dans le repère R_0 par :

$$\left\{ \vec{O}_1 I_1 \right\}_{R_0} = \begin{pmatrix} Rb_1 \tan(\alpha) \\ -Rb_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \vec{O}_2 I_2 \right\}_{R_0} = \begin{pmatrix} -Rb_2 \tan(\alpha) \\ Rb_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 50})$$

pour la configuration 1.

Et par :

$$\left\{ \vec{O}_1 I_1 \right\}_{R_0} = \begin{pmatrix} Rb_1 \tan(\alpha) \\ Rb_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \vec{O}_2 I_2 \right\}_{R_0} = \begin{pmatrix} -Rb_2 \tan(\alpha) \\ -Rb_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 51})$$

pour la configuration 2.

B.4. MODÉLISATIONS DYNAMIQUES DES ARBRES

B.4.1 Repère local et caractéristiques

Les arbres sont modélisés par des éléments de poutre à deux noeuds et six degrés de liberté par noeud (Cf. Figure B. 14). Les éléments choisis sont des poutres de type "Timoschenko", de section constante, avec une prise en compte éventuelle du raidissement dû à la compression statique de la poutre.

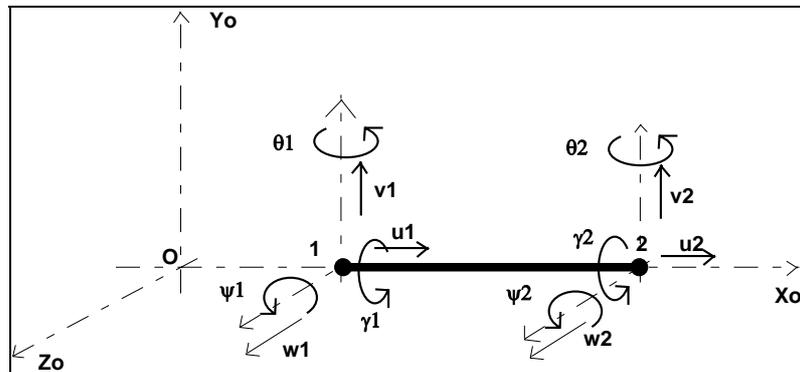


Figure B. 14 : Définition des repères locaux

Les caractéristiques de l'élément de poutre sont :

- le module d'Young E,
- le module de Coulomb G,
- la section de la poutre S,
- la longueur de la poutre L,
- les coefficients de cisaillement k_y et k_z ,
- les moments d'inertie I_x, I_y, I_z ,
- la masse volumique ρ ,
- la charge axiale statique F.

B.4.2 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de la poutre est obtenue à partir du calcul de l'énergie cinétique de la poutre en flexion, traction-compression et torsion.

Soit Φ_y et Φ_z les effets de cisaillement sur la déformée en flexion :

$$\Phi_y = \frac{12.E.I_z}{G.S.k_z L^2} \quad \text{et} \quad \Phi_z = \frac{12.E.I_y}{G.S.k_y L^2} \quad (\text{B. 52})$$

Notons :

$$b_y = \frac{E.I_z}{L^3(1+\Phi_y)} \quad b_z = \frac{E.I_y}{L^3(1+\Phi_z)} \quad c = \frac{F}{30L} \quad (\text{B. 53})$$

La matrice de rigidité [K] s'exprime par :

ES/L	0	0	0	0	0	-ES/L	0	0	0	0	0
0	$12b_y+36c$	0	0	0	$6b_yL+3Lc$	0	$-12b_y-36c$	0	0	0	$6b_yL+3Lc$
0	0	$12b_z+36c$	0	$-6b_zL-3Lc$	0	0	0	$-12b_z-36c$	0	$-6b_zL-3Lc$	0
0	0	0	GJ/L	0	0	0	0	0	-GJ/L	0	0
0	0	$-6b_yL-3Lc$	0	$(4+\Phi_z).b_zL^2 + 4L^2c$	0	0	0	$6b_zL+3Lc$	0	$(2-\Phi_z).b_zL^2 - L^2c$	0
0	$6b_yL+3Lc$	0	0	0	$(4+\Phi_y).b_yL^2 + 4L^2c$	0	$-6b_yL-3Lc$	0	0	0	$(2-\Phi_y).b_yL^2 - L^2c$
-ES/L	0	0	0	0	0	ES/L	0	0	0	0	0
0	$-12b_y-36c$	0	0	0	$-6b_yL-3Lc$	0	$12b_y+36c$	0	0	0	$6b_yL+3Lc$
0	0	$-12b_z-36c$	0	$6b_zL+3Lc$	0	0	0	$12b_z+36c$	0	$-6b_zL-3Lc$	0
0	0	0	-GJ/L	0	0	0	0	0	GJ/L	0	0
0	0	$-6b_zL-3Lc$	0	$(2-\Phi_z).b_zL^2 - L^2c$	0	0	0	$-6b_yL-3Lc$	0	$(4+\Phi_z).b_zL^2 + 4L^2c$	0
0	$6b_yL+3Lc$	0	0	0	$(2-\Phi_y).b_yL^2 - L^2c$	0	$6b_yL+3Lc$	0	0	0	$(4+\Phi_y).b_yL^2 + 4L^2c$

B.4.3 Matrice de masse

La matrice de masse est obtenue à partir du calcul de l'énergie cinétique de la poutre en flexion, traction-compression et torsion en négligeant les effets gyroscopiques:

Soit $b_y = \frac{I_y}{30SL^2}$ et $b_z = \frac{I_z}{30SL^2}$ les termes d'inertie de la section.

La matrice de masse [M] s'exprime par :

1/3	0	0	0	0	0	1/6	0	0	0	0	0
0	13/35+36b _z	0	0	0	11L/210 +3b _z L	0	9/70-36b _z	0	0	0	13L/420 -3b _z L
0	0	13/35+36b _y	0	-11L/210 +3b _y L	0	0	0	9/70-36b _y	0	-13L/420 +3b _y L	0
0	0	0	J _x /3S	0	0	0	0	0	J _x /6S	0	0
0	0	-11L/210 +3b _y L	0	L ² /105 +4b _y L ²	0	0	0	13L/420 - 3b _y L	0	-L ² /140-b _y L ²	0
0	11L/210 +3b _z L	0	0	0	L ² /105 +4b _z L ²	0	-13L/420 +3b _z L	0	0	0	-L ² /140 -b _z L ²
1/6	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0
0	9/70 -36b _z	0	0	0	13L/420 -3b _z L	0	13/35+36b _z	0	0	0	11L/210 +3b _z L
0	0	9/70-36b _y	0	-13L/420 +3b _y L	0	0	0	13/35 +36b _y	0	-11L/210 +3b _y L	0
0	0	0	J _x /6S	0	0	0	0	0	J _x /3S	0	0
0	0	13L/420- 3b _y L	0	-L ² /140 -b _y L ²	0	0	0	-11L/210 +3b _y L	0	L ² /105 +4b _y L ²	0
0	-13L/420 +3b _z L	0	0	0	-L ² /140 -b _z L ²	0	11L/210 +3b _z L	0	0	0	L ² /105 +4b _z L ²

B.5. FORMULES DE PALMGREN POUR LE CALCUL DES RIGIDITÉS ÉQUIVALENTES POUR LES ROULEMENTS

Les désignations suivantes sont utilisées dans les formules :

- δ_r : déplacement radial en mm
- δ_a : déplacement axial en mm
- F_r : charge radiale en daN
- F_a : charge axiale en daN
- D_w : diamètre des éléments roulants en mm
- D_r : diamètre nominal du roulement en mm
- l_a : longueur effective des rouleaux en mm
- Z : nombres d'éléments roulants en mm
- i : nombre de rangées d'éléments roulants
- α : angle de contact
- Q : charge maximale sur les éléments roulants

Les déformations élastiques δ_r et δ_a dans le roulement s'expriment alors par :

	Cas de charge	
	radiale : $\delta_a = 0$	axiale $\delta_r = 0$
Charge sur éléments roulants	$Q = \frac{5F_r}{i \cdot z \cdot \cos \alpha}$	$Q = \frac{5F_a}{z \cdot \sin \alpha}$
Type de roulement		
Rotule sur billes	$\delta_r = \frac{0.0032}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	-
Rigides à billes	$\delta_r = 0.002 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	-
Billes à contact oblique	$\delta_r = \frac{0.002}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$	$\delta_a = \frac{0.002}{\sin \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$
Rouleaux à contact linéaire sur les deux pistes	$\delta_r = \frac{0.0006}{\cos \alpha} \frac{Q^{0.9}}{l_a^{0.8}}$	$\delta_a = \frac{0.0006}{\sin \alpha} \frac{Q^{0.9}}{l_a^{0.8}}$
Rouleaux à contact linéaire sur une piste, ponctuel sur l'autre	$\delta_r = \frac{0.0012}{\cos \alpha} \frac{Q^{3/4}}{l_a^{1/2}}$	$\delta_a = \frac{0.0012}{\sin \alpha} \frac{Q^{3/4}}{l_a^{1/2}}$
Butées à billes	-	$\delta_a = \frac{0.024}{\sin \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{D_w}}$

Annexe C :

SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES TECHNIQUES DE SOUS-STRUCTURATION EN DYNAMIQUE

L'objectif général des méthodes de sous-structuration dynamique est de permettre de calculer le comportement dynamique d'une structure, à partir de la connaissance du comportement dynamique de ses sous-structures et, de l'utilisation de modèles numériques de taille réduite.

C.1. PRINCIPE

Le principe général des méthodes de sous-structuration consiste à approximer le comportement dynamique $y^i(t)$ de la sous-structure i , de dimension n^i , par une combinaison linéaire de p^i vecteurs caractéristiques formant une base de Ritz, notée $[\Phi^i]$. Ces techniques permettent de diminuer la taille du problème, en ne conservant que des degrés de liberté "privéligiés".

$$\underbrace{\{y^i(t)\}}_{(n^i)} = \sum_{j=1}^{p^i} \underbrace{\{\Phi_j^i\}}_{(n^i, p^i)} \cdot \underbrace{\{d_j^i(t)\}}_{(p^i)} = \underbrace{[\Phi^i]}_{(n^i, p^i)} \cdot \underbrace{\{d^i(t)\}}_{(p^i)} \quad (C. 1)$$

Les différentes méthodes diffèrent essentiellement sur :

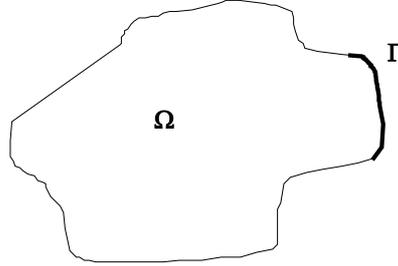
- le choix de la base $[\Phi^i]$ (base de Ritz) et du vecteur d^i ,
- les techniques d'assemblage des sous-structures entre elles.

Les principales sources d'erreur proviennent :

- de l'utilisation de bases de Ritz incomplètes (afin de diminuer la taille du problème),
- de la discrétisation du contour de raccordement, égalités des déplacements et l'équilibre des forces ne sont vérifiés qu'aux noeuds de discrétisation.

C.2. NOTATIONS

Soit Ω_i une sous-structure et Γ le contour de raccordement,



Les degrés de liberté du vecteur des déplacements généralisés $\{y_i\}$ de cette sous-structure sont décomposés en n_Γ^i degrés de liberté de raccordement $\{y_\Gamma\}$ et $n_{\bar{\Gamma}}^i$ degrés de liberté "complémentaires" $\{y_{\bar{\Gamma}}\}$

$$\{y^i\} = \begin{cases} y_{\bar{\Gamma}} & \text{ddl} \notin \Gamma, \quad \dim y_{\bar{\Gamma}} = n_{\bar{\Gamma}}^i \\ y_\Gamma & \text{ddl} \in \Gamma, \quad \dim y_\Gamma = n_\Gamma^i \end{cases} \quad (\text{C. 2})$$

En accord avec la décomposition précédente, les matrices, masse et raideur de la sous-structure, s'écrivent :

$$[M^i] = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ {}^T M_{ab} & M_{bb} \end{bmatrix}^i \quad \text{et} \quad [K^i] = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ {}^T K_{ab} & K_{bb} \end{bmatrix}^i \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dim K_{aa}^i = \dim M_{aa}^i = n_{\bar{\Gamma}}^i * n_{\bar{\Gamma}}^i \\ \dim K_{bb}^i = \dim M_{bb}^i = n_\Gamma^i * n_\Gamma^i \\ \dim K_{ab}^i = \dim M_{ab}^i = n_{\bar{\Gamma}}^i * n_\Gamma^i \end{cases} \quad (\text{C. 3})$$

C.3. DÉFINITION DES VECTEURS DE RITZ UTILISABLES

C.3.1. Vecteurs contraints

Les vecteurs contraints correspondent à la réponse statique de la sous-structure lorsqu'un déplacement unité est imposé sur l'un des ddl de Γ et, que les autres ddl de Γ sont bloqués. Ils forment la matrice $[\Phi_{sc}]$ solution de :

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ {}^T K_{ab} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{sc} \\ 1_{n_\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_b \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dim \Phi_{sc} = n_{\bar{\Gamma}} * n_\Gamma \quad (\text{C. 4})$$

d'où :

$$[\Phi_{sc}] = [K_{aa}]^{-1} \cdot [K_{ab}] \quad (\text{C. 5})$$

C.3.2. Vecteurs d'attache

Les vecteurs d'attache correspondent à la réponse statique de la sous-structure soumise à une force unité suivant un seul ddl de Γ , les autres étant libres. Ils forment la matrice $[\Phi_{sa}]$ solution de :

$$[\mathbf{K}] \cdot [\Phi_{sa}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n_\Gamma} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dim[\Phi_{sa}] = n * n_\Gamma \quad (\text{C. 6})$$

La matrice $[\mathbf{K}]$ doit être régulière, c'est-à-dire que la sous-structure ne possède pas de modes de corps rigides. Dans ce cas là :

$$[\Phi_{sa}] = [\mathbf{K}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n_\Gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{C. 7})$$

C.3.3. Vecteurs propres :

Les vecteurs propres sont les solutions propres de la sous-structure. Plusieurs types de conditions aux limites à l'interface Γ sont envisageables :

- interface fixe,
- interface libre,
- interface chargée.

Les modes propres sont les solutions du problème :

$$([\mathbf{K}] - \lambda_v [\mathbf{M}]) \{y_v\} = 0 \quad (\text{C. 8})$$

La matrice modale $[\Phi_d]$ est définie par :

$$[\Phi_D] = [\{y_1\} \dots \{y_p\}] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} {}^T[\Phi_D] \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\Phi_D] = \Lambda_D \\ {}^T[\Phi_D] \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi_D] = \mathbf{I}_D \end{cases} \quad ([\mathbf{K}] - \lambda_v [\mathbf{M}]) \{y_v\} = 0 \quad (\text{C. 9})$$

C.3.4. Vecteurs propres de l'opérateur de Poincaré - Steklov

Les vecteurs propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov, ou modes couplés sont les solutions propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov associé à l'interface Γ .

C.4. LES ETAPES DES MÉTHODES DE SOUS-STRUCTURATION

Quelle que soit la méthode de sous-structuration envisagée, les étapes principales de mise en oeuvre sont les mêmes :

✧ Pour chaque sous-structure, choix des vecteurs de Ritz $[\Phi^i]$ et du vecteur des coordonnées généralisées $\{d^i\}$:

$$\Rightarrow \{y^i\} = [\Phi^i] \cdot \{d^i\} \quad (\text{C. 10})$$

✧ Evaluation des matrices de masse et de raideur généralisées :

$$\Rightarrow \begin{cases} [\mu^i] = {}^T[\Phi^i] \cdot [M^i] \cdot [\Phi^i] \\ [\gamma^i] = {}^T[\Phi^i] \cdot [K^i] \cdot [\Phi^i] \end{cases} \quad (\text{C. 11})$$

✧ Assemblage des sous-structures et résolution du problème

✧ Restitution des $\{y^i\}$ pour chaque sous-structure.

C.5. BILAN BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES MÉTHODES DE SOUS-STRUCTURATION

C.5.1. Méthode de Hurty (1965) et Craig - Bampton (1968)

◆ *Vecteurs de Ritz utilisés :*

✧ vecteurs Statiques Contraints : $[\Phi_{sc}]$

✧ q vecteurs propres avec Γ fixée : $\underbrace{[\Phi_d]}_{n_\Gamma, q}$ avec $\begin{cases} {}^T[\Phi_d] \cdot [M_{aa}] \cdot [\Phi_d] = [I_q] \\ {}^T[\Phi_d] \cdot [K_{aa}] \cdot [\Phi_d] = [\Lambda_q] \end{cases}$

d'où la matrice de Ritz $[\Phi^i]$ et le vecteur et le vecteur des coordonnées généralisées $\{d^i\}$

$$[\Phi^i] = \begin{bmatrix} \Phi_d & \Phi_{sc} \\ 0 & I_{n_\Gamma} \end{bmatrix}^i \quad \{d^i\} = \begin{bmatrix} p_q \\ y_\Gamma \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{coordonnées généralisées} \\ \text{déplacements sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \dim p_q = q \\ \dim y_\Gamma = n_\Gamma \end{array} \quad (\text{C. 12})$$

◆ *Matrices généralisées :*

✧ matrice de masse généralisée :

$$[\mu^i] = {}^T[\Phi^i] \cdot [M^i] \cdot [\Phi^i] = \begin{bmatrix} I_q & \mu_{ab} \\ {}^T\mu_{ab} & \mu_{bb} \end{bmatrix}^i \quad (\text{C. 13})$$

avec $\begin{cases} [\mu_{ab}] = {}^T[\Phi_d] \cdot ([M_{aa}] \cdot [\Phi_{sc}] + [M_{ab}]) \\ [\mu_{bb}] = [M_{bb}] + [M_{ba}] \cdot [\Phi_{sc}] + {}^T[\Phi_{sc}] \cdot ([M_{ab}] + [M_{aa}] \cdot [\Phi_{sc}]) \end{cases}$

✧ matrice de raideur généralisée :

$$[\gamma^i] = {}^T [\Phi^i] \cdot [K^i] \cdot [\Phi^i] = \begin{bmatrix} \Lambda_q & 0 \\ 0 & \gamma_{bb} \end{bmatrix}^i \quad (C. 14)$$

avec
$$\begin{cases} [\Lambda_q] = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_q\} \\ [\gamma_{bb}] = K_{bb} + K_{ba} \cdot \Phi_{sc} \end{cases}$$

◆ *Assemblage des sous-structures :*

L'assemblage des sous-structures se fait de manière identique à l'assemblage des éléments finis " classiques ". Cela correspond, pour le contour commun Γ , à écrire l'équilibre des efforts et l'égalité des déplacements.

◆ *Avantages et inconvénients :*

- ✧ Convergence satisfaisante des modes propres (vecteurs et fréquences),
- ✧ Extension directe de la méthode des sous-structures en statique,
- ✧ Application à des structures très générales (mais les modes de frontière fixe pas toujours bien adaptés),
- ✧ Nombre de ddl d'interface pouvant rester élevé (condensation),
- ✧ Pas de possibilité d'introduction de données expérimentales.

⇒ **Efficacité pour les méthodes purement " éléments finis "**

C.5.2. Méthode mixte ou de substitution modale

La structure est décomposée en :

- une sous-structure principale,
- plusieurs sous-structures secondaires (branches).

◆ *Vecteurs de Ritz :*

✧ Pour la sous-structure principale : vecteurs propres à contour commun libre $[\Phi^1]$

$$\begin{aligned} \{y^1\} &= \begin{bmatrix} y_{\Gamma}^1 \\ y_{\Gamma} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &= [\Phi^1] \cdot \{d^1\} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{\Gamma}^1 \\ \Phi_{\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \{d^1\} \end{aligned} \quad (C. 15)$$

✧ Pour les sous-structures secondaires : idem méthode de Craig - Bampton :

$$\Rightarrow [\Phi^i] = \begin{bmatrix} \Phi_d & \Phi_{sc} \\ 0 & I_{nr} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{d^i\} = \begin{bmatrix} p_q \\ y_\Gamma \end{bmatrix}^i \quad (\text{C. 16})$$

◆ *Matrices généralisées* :

✧ Pour la sous-structure principale :

$$\begin{aligned} [\mu^1] &= {}^T[\Phi^1] \cdot [M^1] \cdot [\Phi^1] = [I_{q1}] \\ [\gamma^1] &= {}^T[\Phi^1] \cdot [K^1] \cdot [\Phi^1] = [\Lambda_{q1}] \end{aligned} \quad (\text{C. 17})$$

✧ Pour les sous-structures secondaires : idem méthode de Craig et Bampton

◆ *Assemblage des sous-structures (exemple pour 1 sous-structure secondaire)*:

✧ Compatibilité des déplacements sur le contour commun : $\{y_\Gamma^1\} = \{y_\Gamma^i\} = [\Phi_\Gamma^1] \cdot \{d^1\}$

\Rightarrow déplacements de l'ensemble

$$\begin{aligned} \{y^g\} &= \begin{Bmatrix} y^1 & y_\Gamma^1 \\ y^2 & y_\Gamma^2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_\Gamma^1 & 0 \\ \Phi_\Gamma^1 & 0 \\ \Phi_{sc}^2 \cdot \Phi_\Gamma^1 & \Phi_d^2 \\ \Phi_\Gamma^1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d^1 \\ p_q^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C. 18})$$

✧ Equilibre des efforts sur la zone de raccordement :

$$\Rightarrow \{f_\Gamma^1\} + \{f_\Gamma^2\} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \{f_\Gamma^1\} = [M^1] \cdot \{\ddot{y}^1\} + [K^1] \cdot \{y^1\} \\ \{f_\Gamma^2\} = [M^2] \cdot \{\ddot{y}^2\} + [K^2] \cdot \{y^2\} \end{cases} \quad (\text{C. 19})$$

✧ Système représentant le comportement global :

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_q^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & I_q \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} d^1 \\ p_q^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C. 20})$$

(voir l'expression des termes inconnus dans la bibliographie)

◆ *Avantages et inconvénients :*

- ✧ les ddl de contour commun n'apparaissent pas dans le vecteur des coordonnées généralisées,
- ✧ possibilité d'introduire des données expérimentales,
- ✧ la convergence peut être améliorée en utilisant, pour la sous-structure principale, les vecteurs propres obtenus en chargeant le contour commun par des masses, inerties, raideurs additionnelles, afin de rapprocher les vecteurs de Φ^1 du champ de déplacement de la structure complète.
- ✧ bien adaptée à certaines topologies (lanceur / satellite)

C.5.3. Méthode des raideurs de couplage

La structure est décomposée en un nombre quelconque de sous-structures reliées par des éléments déformables (masse M^L et raideur K^L). L'équilibre de la structure s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & [M + M^L] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + [K + K^L] \cdot \{y(t)\} = \{f(t)\} \\
 \text{avec } [M] &= \begin{bmatrix} M^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} K^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K^k \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{C. 21}$$

◆ *Vecteurs de Ritz :*

- ✧ q^i vecteurs propres à contours communs libres (calculés ou identifiés).

◆ *Matrices généralisées :*

$$\begin{aligned}
 [\mu^i] &= {}^T[\Phi^i] \cdot [M^i] \cdot [\Phi^i] = [I_{q_i}] \quad \text{avec} \quad \dim([\mu^i]) = q^i * q^i \\
 [\gamma^i] &= {}^T[\Phi^i] \cdot [K^i] \cdot [\Phi^i] = [\Lambda_{q_i}] \quad \text{avec} \quad \dim([\gamma^i]) = q^i * q^i
 \end{aligned} \tag{C. 22}$$

◆ *Equation d'équilibre modifiée*

$$\text{Soit : } [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi^k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \Lambda^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda^2 \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre de la structure devient :

$$([1_q] + [\tilde{M}^L]) \cdot \{\ddot{q}(t)\} + ([\Lambda] + [\tilde{K}^L]) \cdot \{q(t)\} = {}^T[\Phi] \cdot \{f(t)\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [\tilde{M}^L] = {}^T[\Phi] \cdot [M^L] \cdot [\Phi] \\ [\tilde{K}^L] = {}^T[\Phi] \cdot [K^L] \cdot [\Phi] \end{cases} \tag{C. 23}$$

◆ *Avantages et inconvénients*

- ◇ nombre d'informations minimum,
- ◇ mise en oeuvre claire,
- ◇ peut s'étendre au cas où : $\begin{cases} [M^L] \rightarrow 0 \\ [K^L] \rightarrow +\infty \end{cases}$ (raccordement direct)
- ◇ convergence :
 - médiocre pour les fréquences propres,
 - mauvaise pour les formes propres,
 - aléatoire pour les contraintes propres,
- ◇ amélioration de la convergence possible à l'aide de l'utilisation de modes à contours chargés (modes calculés), ou de l'introduction de la raideur équivalente des modes de rang supérieur (modes mesurés).

C.5.4. Méthode introduisant toujours une structure de liaison

Une sous-structure SS_L de liaison est introduite, afin de pouvoir considérer toutes les liaisons comme des liaisons rigides.

◆ *Vecteurs de Ritz :*

- ◇ solutions propres (calculées ou identifiées) pour des contours communs libres.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{cases} [\Phi^i]^T \cdot [M^i] \cdot [\Phi^i] = [I_{qi}] \\ [\Phi^i]^T \cdot [K^i] \cdot [\Phi^i] = [\Lambda_{qi}] \end{cases} \end{aligned} \quad (C. 24)$$

◆ *Hypothèses et notations :*

- ◇ 1 point de jonction n'appartient qu'à une seule jonction,
- ◇ la sous-structure SS_L ne possède pas de ddl intérieurs,
- ◇ les liaisons entre sous-structures peuvent être : rigides ou élastiques,
- ◇ le vecteur de déplacement $\{y^i\}$ est décomposé en :

$$\{y^i\} = \begin{bmatrix} y_{int} \\ y_{ela} \\ y_{rig} \end{bmatrix} \begin{cases} \text{ddl int erieurs} \\ \text{ddl associes aux liaisons elastiques} \\ \text{ddl associes aux liaisons rigides} \end{cases}$$

◆ ** Assemblage sous-structures :*

- ◇ Matrices globales, de masse et de raideur :

$$[M] = \begin{bmatrix} M^1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & M^k & \\ 0 & & & M_L \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} K^1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & K^k & \\ 0 & & & K_L \end{bmatrix} \quad (C. 25)$$

✧ Solution en régime harmonique : $([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} + \{\mathbf{F}_{\text{lia}}\}$

$$\text{avec : } \{\mathbf{y}\} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^k \\ y^L \end{bmatrix} ; \quad \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}^k \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \{\mathbf{F}_{\text{lia}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{lia}}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{\text{lia}}^k \\ \mathbf{F}_{\text{lia}}^L \end{bmatrix}$$

✧ Matrice modale globale Φ

Soit $[\tilde{\Phi}^i]$ les modes propres non identifiés de la sous-structure i , la matrice modale globale $[\Phi]$ se définit par :

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Phi^1 & & & 0 & \tilde{\Phi}^1 & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \Phi^k & & & \\ 0 & & & \mathbf{I} & 0 & \end{array} \right] = [\Phi_1 | \tilde{\Phi}] \quad (\text{C. 26})$$

✧ Introduction des vecteurs de Ritz : $\{\mathbf{y}\} = [\Phi_1] \cdot \{\mathbf{d}_1\} + [\tilde{\Phi}] \cdot \{\tilde{\mathbf{d}}\} = [\Phi] \cdot \{\mathbf{d}\}$

avec :

$$\{\mathbf{d}_1\} = \begin{bmatrix} d_1^1 \\ \vdots \\ d_1^k \\ d_L \end{bmatrix} \quad \{\tilde{\mathbf{d}}\} = \begin{bmatrix} \tilde{d}^1 \\ \vdots \\ \tilde{d}^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C. 27})$$

L'équation d'équilibre se met alors sous la forme d'un système de deux équations :

$$\Rightarrow \begin{cases} ([\hat{\Lambda}] - \lambda[\mathbf{U}]) \cdot \{\mathbf{d}_1\} = {}^T[\Phi_1] \cdot (\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} + \{\mathbf{F}_{\text{lia}}\}) \\ ([\tilde{\Lambda}] - \lambda[\mathbf{I}]) \cdot \{\tilde{\mathbf{d}}\} = {}^T[\tilde{\Phi}] \cdot (\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} + \{\mathbf{F}_{\text{lia}}\}) \end{cases} \quad (\text{C. 28})$$

avec :

$$[\hat{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \Lambda^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda^2 & \\ \hline & & & \mathbf{K}_L \end{bmatrix} \quad [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{I}_{pk} & \\ \hline & & & \mathbf{M}_L \end{bmatrix} \quad [\tilde{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\Lambda}^k \end{bmatrix} \quad (\text{C. 29})$$

✧ Matrice des résidus :

$$[\mathbf{R}_e] = {}^T[\tilde{\Phi}] \cdot [\tilde{\Lambda} - \lambda\mathbf{I}]^{-1} \cdot [\tilde{\Phi}] \quad (\text{C. 30})$$

Elle caractérise la contribution des solutions propres non identifiées et sera approximée à partir de la différence entre la fonction de transfert observée et les solutions propres identifiées par un développement en série, limité aux termes linéaires en λ .

$$\Rightarrow [\mathbf{R}_e] \approx [\mathbf{R}_{e1}] + \lambda[\mathbf{R}_{e2}] + (o)\lambda^2 \quad (\text{C. 31})$$

$[\mathbf{R}_{e1}]$ est la contribution statique des solutions propres non identifiées.

◆ *Equation d'équilibre de la structure assemblée :*

✧ Soit $[\mathbf{Q}]$ la matrice permettant d'exprimer les forces de liaison en fonction des seules forces de liaison indépendantes groupées dans $\{f_{L1}\}$.

$$\Rightarrow \{f_L\} = [\mathbf{Q}] \cdot \{f_{L1}\} \quad (\text{C. 32})$$

✧ Problème aux valeurs propres :

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & -^T\Phi_1 \cdot \mathbf{Q} \\ -^T\mathbf{Q} \cdot \Phi_1 & -^T\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_{e1} \cdot \mathbf{Q} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & -^T\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_{e2} \cdot \mathbf{Q} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}]} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{F}_{11} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (\text{C. 33})$$

◆ *Restitution des vecteurs propres de la structure :*

$$\{y\} = [\Phi_1] \cdot \{d_1\} + [\mathbf{R}_e] \cdot [\mathbf{Q}] \cdot \{F_{L1}\} + [\mathbf{R}_e] \cdot \{F_{ext}\} \quad (\text{C. 34})$$

◆ *Avantages et inconvénients :*

- ✧ utilisation de données expérimentales,
 - ✧ qualité des résultats liée à la précision de l'estimation de \mathbf{R}_e ,
 - ✧ les matrices A et B sont symétriques mais de signe non défini
- ⇒ algorithmes de résolution particuliers

C.5.5. Modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov

Cette méthode proposée par d'Hennezel [3.4] est une extension de la méthode de Craig et Bampton

◆ *Vecteurs de Ritz :*

- ✧ modes propres à interface Γ fixée,
- ✧ modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov.

◆ *Définition de l'opérateur de Poincaré-Steklov*

Dans le cas d'une structure formée de 2 sous-structures, soit :

- ✧ V_Γ l'espace des fonctions admissibles sur Γ ,

- ✧ $v_\Gamma \in V_\Gamma$,
- ✧ V l'espace des fonctions admissibles sur Ω ,
- ✧ $v \in V$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(v) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \text{ et } \Omega_2 \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v = v_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{C. 35})$$

L'opérateur de Poincaré-Steklov T est défini par :

$$\sum_{i=1}^2 (\sigma(v_{/\Omega_i}) \cdot n_i)_\Gamma = T \cdot v_\Gamma \quad (\text{C. 36})$$

Les modes propres de cet opérateur sont appelés **les modes couplés**.

◆ *Avantages et inconvénients :*

- ✧ méthode robuste et précise,
- ✧ lorsque l'interface est représentée par un faible nombre de ddl, la méthode classique de Craig et Bampton est préférable,
- ✧ le nombre d'itérations n'est pas sensible à la discrétisation,
- ✧ seules les inconnues de chaque sous-domaine sont stockées,
- ✧ méthode optimale d'un point de vue purement numérique mais la précision du résultat final se détériore avec la diminution du nombre de modes couplés utilisés.

TABLE DES MATIÈRES

<i>AVANT PROPOS</i>	9
<i>INTRODUCTION GÉNÉRALE</i>	11
CHAPITRE 1 : ETUDES STATIQUES DES MÉCANISMES DETERMINATION DU POINT DE FONCTIONNEMENT	15
1. INTRODUCTION	15
1.1 PRINCIPES ET INTÉRÊTS DES MODÈLES GLOBAUX.....	15
1.2 MODÈLES NUMÉRIQUES ET MÉTHODES DE RÉOLUTION.....	16
2. MODELISATION STATIQUE DES SYSTEMES DE TRANSMISSION DE PUISSANCE : APPROCHE BIBLIOGRAPHIQUE ET MISE EN OEUVRE	18
2.1 MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS LINÉAIRES	18
2.2 MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS REPRÉSENTANTS LES NON-LINÉARITÉS GÉOMÉTRIQUES.....	19
2.2.1 <i>Les jeux</i>	19
2.2.2 <i>Les engrenages</i>	21
2.3 MODÉLISATION DES PALIERS À ROULEMENTS	23
2.3.1 <i>Approche bibliographique</i>	23
2.3.2 <i>Définition d'un élément "roulement"</i>	24
2.3.3 <i>Validation et résultats</i>	27
3. MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE	27
3.1 INTRODUCTION	27
3.2 CONDENSATION OU SOUS-STRUCTURATION STATIQUE - CALCULS DE RESTITUTION	28
3.3 PRINCIPE GLOBAL DE RÉOLUTION DU SYSTÈME NON-LINÉAIRE	29
3.4 MISE EN OEUVRE DANS L'ENVIRONNEMENT CAEDS-NASTRAN	30

4. APPLICATION A UNE BOITE DE VITESSES AUTOMOBILE : ETUDES DU COMPORTEMENT STATIQUE DES PALIERS A ROULEMENT	31
4.1 DESCRIPTIF DU MODÈLE	31
4.1.1 <i>Eléments linéaires de structure</i>	31
4.1.2 <i>Eléments non-linéaires</i>	32
4.1.3 <i>Choix des noeuds de condensation</i>	33
4.1.4 <i>Conditions aux limites</i>	34
4.2 RÉSULTATS : ÉTUDES DU COMPORTEMENT STATIQUE DES ROULEMENTS	34
4.2.1 <i>Principes des études réalisées sur les roulements</i>	35
4.2.2 <i>Application aux roulements à billes</i>	37
5. CONCLUSION	41
CHAPITRE 2 : MODÈLES GLOBAUX ET OUTILS D'ANALYSE POUR L'ÉTUDE DYNAMIQUE DES MÉCANISMES DE TRANSMISSION DE PUISSANCE.....	43
1. INTRODUCTION.....	43
2. L'ENGRENAGE : L'ÉLÉMENT TECHNOLOGIQUE PRINCIPAL DES BOÎTES DE VITESSES - CARACTÉRISTIQUES ET MODÉLISATION	45
2.1 AU COEUR DU PROBLÈME : L'ENGRÈNEMENT	45
2.2 MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA LIAISON PAR ENGRENAGE.....	46
2.2.1 <i>Hypothèses</i>	46
2.2.2 <i>Modélisation d'un engrenage parfait : approche bibliographique</i>	47
2.2.3 <i>Mise en oeuvre effective</i>	50
3. MODÉLISATION DES AUTRES ÉLÉMENTS DE LA BOÎTE DE VITESSES	52
3.1 LA LIAISON DYNAMIQUE ENTRE LA CHAÎNE CINÉMATIQUE ET LES CARTERS : LES PALIERS À ROULEMENT.....	52
3.1.1 <i>Limites des modèles "simples"</i>	52
3.1.2 <i>Introduction de modèles plus complexes</i>	53
3.2 LES ARBRES DE TRANSMISSION.....	53
3.3 LES CARTERS	54
3.3.1 <i>Généralité sur les techniques de sous-structuration</i>	55
3.3.2 <i>Mise en oeuvre pour l'étude dynamique des boîtes de vitesses</i>	57
3.4 DISPOSITIFS DE SYNCHRONISATION ET AUTRES MASSES AJOUTÉES	57
4. PRISE EN COMPTE DE L'AMORTISSEMENT.....	57
4.1 GÉNÉRALITÉS	57
4.2 AMORTISSEMENT MODAL	58
4.3 AMORTISSEMENT VISQUEUX ÉQUIVALENT DANS L'ESPACE PHYSIQUE.....	59
4.4 LE FILM ÉLASTOHYDRODYNAMIQUE DE L'ENGRENAGE : UNE SOURCE D'AMORTISSEMENT.....	60

5. LES OUTILS ET LES MÉTHODES D'ANALYSE DYNAMIQUE.....	61
5.1 ANALYSE MODALE	62
5.1.1 Généralités	62
5.1.2 Méthodes numériques d'obtention des modes propres.....	63
5.1.3 Les outils de l'analyse modale.....	64
5.2 RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE EXCITATION.....	69
5.2.1 Méthodes numériques de calcul de la réponse à une excitation	69
5.2.2 Prise en compte des excitations dues à l'engrènement : introduction de l'erreur de transmission.....	73
6. CONCLUSION	74
CHAPITRE 3 : ETUDES DYNAMIQUES D'UNE CHAÎNE CINÉMATIQUE DE BOÎTE DE VITESSES AUTOMOBILE INFLUENCE DES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS	77
1. PRÉSENTATION DES ÉTUDES	77
1.1 CONTEXTE GÉNÉRAL	77
1.2 ETUDES RÉALISÉES	78
1.3 DESCRIPTION DES MODÈLES CONSIDÉRÉS	79
2. LIMITES DES HYPOTHÈSES DE LINÉARISATION DU COMPORTEMENT DES ÉLÉMENTS DE LIAISON.....	80
2.1 INFLUENCE DE LA VALEUR DE RIGIDITÉ MOYENNE D'ENGRÈNEMENT	81
2.1.1 Principe de l'étude.....	81
2.1.2 Caractéristiques des modes propres considérés	81
2.1.3 Influence de la rigidité moyenne d'engrènement sur les fréquences propres.....	82
2.1.4 Influence de la rigidité moyenne d'engrènement sur les vecteurs propres.....	84
2.1.5 Etudes énergétiques.....	86
2.1.6 Cas où les deux engrenages ont une rigidité d'engrènement "finie"	88
2.2 DOMAINE DE "LINÉARITÉ" DES PALIERS À ROULEMENT	92
2.2.1 Principe de l'étude.....	92
2.2.2 Influence sur les fréquences et les vecteurs propres	94
2.2.3 Etudes énergétiques.....	97
2.2.4 Etudes des modes sensibles aux variations de chargement.....	99
2.2.5 Etudes des matrices de rigidité.....	100
2.3 CONCLUSION	102
3. INFLUENCE DE LA MODÉLISATION DES ROULEMENTS	103
3.1 DÉFINITION DES MODÈLES CONSIDÉRÉS	103
3.1.1 Modèle 4 : Rigidités tangentes de Palmgren.....	104
3.1.2 Modèle 3 : matrices de rigidités déterminées sur des roulements isolés.....	106
3.1.3 Modèle 2 : matrices de rigidité déterminées à l'aide de la chaîne cinématique	107
3.1.4 Modèle 1 : Modèle complet.....	107
3.1.5 Remarques sur la modélisation dynamiques des engrenages	108

3.2 INFLUENCE GLOBALE DE LA MODÉLISATION DES ROULEMENTS SUR LES MODES PROPRES	109
3.2.1 Influence sur les fréquences propres	109
3.2.2 Influence globale sur les vecteurs propres	110
3.3 ETUDES ÉNERGÉTIQUES	111
3.3.1 Etudes globales des énergies de déformation	111
3.3.2 Etudes globales des énergies cinétiques	113
3.3.3 Energies potentielles dans les roulements	115
3.3.4 Energies de déformation dans les engrenages	120
3.4 CONCLUSION	121
4. ESTIMATION DE L'INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES	123
4.1 INFLUENCE SUR LES MODES PROPRES DU SYSTÈME	123
4.2 RÉPARTITION DES ÉNERGIES DANS LES ROULEMENTS	124
4.3 CONCLUSION	125
5. CONCLUSION	126

**CHAPITRE 4 : COMPORTEMENT DYNAMIQUE GLOBAL D'UNE BOÎTE
DE VITESSES AUTOMOBILE : INFLUENCE DU CARTER -
EXCITATION PAR L'ERREUR DE TRANSMISSION..... 129**

1. PRÉSENTATION DES ÉTUDES	129
1.1 PRINCIPES DE LA MODÉLISATION	130
1.2 ETUDES RÉALISÉES	130
2. INFLUENCE DYNAMIQUE DU CARTER	131
2.1 ETUDES DES MODES PROPRES	131
2.1.1 Mise en évidence du couplage entre les déformations du carter et celles de la chaîne cinématique	131
2.1.2 Influence du carter sur les fréquences propres et les formes propres	132
2.1.3 Influence du carter sur les énergies de déformation	133
2.1.4 Etude d'un mode "atypique" : le mode 1	135
2.2 RÉPONSE À UNE EXCITATION	136
2.2.1 Caractéristiques de l'excitation et des calculs réalisés	136
2.2.2 Influence du carter sur l'erreur de transmission dynamique	137
2.2.3 Efforts dynamiques sur les paliers à roulement	139
2.3 CONCLUSION	141
3. ETUDES DE L'INFLUENCE DU LIEU ET DU PARAMÈTRE D'OBSERVATION DANS L'OBJECTIF DE MESURES EXPÉRIMENTALES	142
3.1 INTRODUCTION	142
3.2 SOURCE D'EXCITATION UNIQUE : L'ENGRENAGE DE 3ÈME	144
3.2.1 Mesures de l'erreur de transmission dynamique	144
3.2.2 Efforts dynamiques : bague extérieure roulement à billes - alésage carter	147
3.3 SOURCE D'EXCITATION MULTIPLE : ENGRENAGES DE 3ÈME ET DE PONT	148
3.3.1 Objectifs et mise en oeuvre	148

3.3.2 Etudes de l'erreur de transmission dynamique.....	150
3.3.3 Efforts transmis par le roulement à billes au carter	152
3.4 CONCLUSION	154
4. APPLICATION TECHNOLOGIQUE : INFLUENCE DE L'ANGLE D'HÉLICE.....	154
4.1 INTRODUCTION	154
4.2 INFLUENCE DE L'ANGLE D'HÉLICE SUR LES MODES PROPRES	155
4.3 INFLUENCE DE L'ANGLE D'HÉLICE SUR LE COMPORTEMENT EN FONCTIONNEMENT.....	157
4.4 CONCLUSION	159
5. CONCLUSION	159
 <i>CONCLUSION GÉNÉRALE</i>	 <i>161</i>
 <i>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</i>	 <i>167</i>
 <i>ANNEXE A : PRINCIPAUX ALGORITHMES</i>	 <i>177</i>
A.1. MÉTHODE DE NEWTON-RAPHSON	177
A.2. MÉTHODE DE CONDENSATION STATIQUE	178
A.3. MÉTHODE DE JACOBI GÉNÉRALISÉE	179
A.4. MÉTHODE DES SOUS-ESPACES	180
A.5. MÉTHODE DE NEWMARK.....	181
 <i>ANNEXE B : MODELISATION STATIQUES ET DYNAMIQUES DES</i>	
<i> ELEMENTS TECHNOLOGIQUES.....</i>	<i>183</i>
 B.1. MODÉLISATION STATIQUE DES ÉLÉMENTS "CORPS ROULANTS" : INTÉGRATION DANS	
 UNE APPROCHE ÉLÉMENTS FINIS	183
B.1.1 IDÉES DIRECTRICES	183
B.1.2 DÉFINITION DES REPÈRES DE CALCUL	184
B.1.3 DÉFINITION DES MATRICES DE "GÉOMÉTRIE"	186
B.1.4 DÉTERMINATION DE L'ÉQUILIBRE DU CORPS ROULANT.....	188
B.1.5 CALCUL, DANS R1, DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ TANGENTE ENTRE LES POINTS N1 ET N2	189
B.1.6 EFFORTS APPLIQUÉS PAR LE CORPS ROULANT SUR LES NOEUDS N1 ET N2	190
B.1.7 APPLICATION AUX ROULEMENTS À ROULEAUX CYLINDRIQUES	190
" Paramétrisation de la géométrie.....	190
" Angles de basculement du rouleau et angles de contact aux épaulements	191
" Calculs des efforts entre les pistes de roulement et le rouleau	192
" Calculs des efforts aux épaulements	193
" Equations d'équilibre et matrices jacobienne	194

B.2. MODÉLISATION STATIQUE ET DYNAMIQUE DES ÉLÉMENTS D'ENGRENAGES CYLINDRIQUES EXTÉRIEURS	194
B.2.1 GÉOMÉTRIE ET CONFIGURATIONS D'ENGRÈNEMENT	194
B.2.2 DÉPLACEMENTS AUX POINTS PRIMITIFS D'ENGRÈNEMENT	196
B.2.3 ECRASEMENT SUIVANT LA NORMALE AU CONTACT	196
B.2.4 MATRICE DE RIGIDITÉ ÉQUIVALENTE DANS LE REPÈRE RO	197
B.3. EFFORTS EXTÉRIEURS ÉQUIVALENTS À UNE EXCITATION DYNAMIQUE EN DEPLACEMENT AU POINT PRIMITIF D'ENGRÈNEMENT.	198
B.4. MODÉLISATIONS DYNAMIQUES DES ARBRES	199
B.4.1 REPERE LOCALE ET CARACTÉRISTIQUES	199
B.4.2 MATRICE DE RIGIDITÉ	200
B.4.3 MATRICE DE MASSE	201
B.5. FORMULES DE PALMGREN POUR LE CALCUL DES RIGIDITÉS ÉQUIVALENTES POUR LES ROULEMENTS	202

ANNEXE C : SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES

TECHNIQUES DE SOUS-STRUCTURATION EN DYNAMIQUE..... 203

C.1. PRINCIPE	203
C.2. NOTATIONS.....	204
C.3. DÉFINITION DES VECTEURS DE RITZ UTILISABLES	204
C.3.1. VECTEURS CONTRAINTS.....	204
C.3.2. VECTEURS D'ATTACHE	205
C.3.3. VECTEURS PROPRES :	205
C.3.4. VECTEURS PROPRES DE L'OPÉRATEUR DE POINCARRÉ - STEKLOV	205
C.4. LES ETAPES DES MÉTHODES DE SOUS-STRUCTURATION.....	206
C.5. BILAN BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES MÉTHODES DE SOUS-STRUCTURATION	206
C.5.1. MÉTHODE DE HURTY (1965) ET CRAIG - BAMPTON (1968)	206
<i>Vecteurs de Ritz utilisés :</i>	206
<i>Matrices généralisées :</i>	206
<i>Assemblage des sous-structures :</i>	207
<i>Avantages et inconvénients :</i>	207
C.5.2. MÉTHODE MIXTE OU DE SUBSTITUTION MODALE	207
<i>Vecteurs de Ritz :</i>	207
<i>Matrices généralisées :</i>	208
<i>Assemblage des sous-structures (exemple pour 1 sous-structure secondaire):</i>	208
<i>Avantages et inconvénients :</i>	209
C.5.3. MÉTHODE DES RAIDEURS DE COUPLAGE	209
<i>Vecteurs de Ritz :</i>	209
<i>Matrices généralisées :</i>	209
<i>Equation d'équilibre modifiée.....</i>	209

" <i>Avantages et inconvénients</i>	210
C.5.4. MÉTHODE INTRODUISANT TOUJOURS UNE STRUCTURE DE LIAISON	210
" <i>Vecteurs de Ritz</i> :	210
" <i>Hypothèses et notations</i> :	210
" <i>Assemblage sous-structures</i> :	210
" <i>Equation d'équilibre de la structure assemblée</i> :	213
" <i>Restitution des vecteurs propres de la structure</i> :	212
" <i>Avantages et inconvénients</i> :	212
C.5.5. MODES PROPRES DE L'OPÉRATEUR DE POINCARÉ-STEKLOV	212
" <i>Vecteurs de Ritz</i> :	212
" <i>Définition de l'opérateur de Poincaré-Steklov</i>	213
" <i>Avantages et inconvénients</i> :	213
<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	215

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM: BOURDON (avec précision du nom de jeune fille le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE 24septembre 1997
Prénoms: Adeline Claudia Régine	
TITRE : MODELISATION DYNAMIQUE GLOBALE DES BOITES DE VITESSES AUTOMOBILE	
Nature: Doctorat	Numéro d'ordre: 97 ISAL 0084
Formation doctorale: Mécanique	
Cote B.I.U. - Lyon: T 50/210/19 / et bis	CLASSE:
RESUME: <p>L'objectif de ces travaux était de développer des "prototypes numériques" permettant de simuler, dans un environnement de CMAO, le comportement dynamique global des boîtes de vitesses automobile. Le principe de cette modélisation est basé sur la méthode des éléments finis. Les éléments de structure sont modélisés par des éléments "classiques". Le comportement non-linéaire des organes de transmission est "linéarisé" autour d'un point de fonctionnement statique déterminé en intégrant le comportement non-linéaire des paliers à roulement. Dans le cadre des études dynamiques des éléments "spécifiques" introduisant des matrices de rigidité représentatives du comportement des organes de transmission ont été développés. Les modèles proposés permettent de déterminer les modes propres de la boîte "complète" et également la réponse du mécanisme à une excitation. Des outils et critères numériques ont également été définis pour évaluer l'influence des différents constituants technologiques sur le comportement global du système. Dans un premier temps lors des études dynamiques, les analyses se sont restreintes à la chaîne cinématique isolée, le carter étant considéré comme rigide. Le rôle prépondérant des roulements et l'influence de la modélisation retenue sur le comportement vibratoire de l'ensemble ont été mis en évidence. La nécessité de prendre en compte l'ensemble de l'environnement statique lors des étapes préliminaires de détermination du point de fonctionnement a également été vérifiée. Dans la seconde étape, la "déformabilité" dynamique des carters a été introduite par l'intermédiaire de matrices réduites. Le couplage entre les déformations dynamiques de la chaîne cinématique et celles du carter a été mis en évidence. A l'issu de ces travaux, validés en parallèle par des études expérimentales préliminaires, le comportement dynamique des boîtes de vitesses en développement peut être prévu, et les conséquences des choix technologiques estimés.</p>	
MOTS-CLES: ELEMENT FINI – BOITE VITESSES – MODELISATION – SYSTEMES MECANQUES – CONCEPTION MECANIQUE ASSISTEE – DYNAMIQUE – PALIER ROULEMENT – ENGRENAGE CYLINDRIQUE	
Laboratoire(s) de recherches: LABORATOIRE DE CONCEPTION ET D'ANALYSE DES SYSTEMES MECANQUES	
Directeur de thèse: Daniel PLAY	
Président du Jury: Jean FRENE	
Composition du jury: MM. : De CREMOUX Alain, FRENE Jean, HECKLY Alain, LALLEMENT Gérard, PELLE Jean Pierre, PLAY Daniel, RIGAL Jean François, VILLARS François	

