

THÈSE

DYNAMIQUE DU DÉPLOIEMENT AUTONOME D'UN HEXAPODE À RUBANS POUR APPLICATIONS SPATIALES.

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : MÉCANIQUE

par

Gwenaëlle ARIDON

Ingénieure en Mécanique, INSA Lyon

soutenue le XX octobre 2007 devant le jury composé de :

G. WIENS	Associate Professor (University of Florida, US)	Rapporteur
R. OHAYON	Professeur (CNAM Paris)	Rapporteur
J.P. MERLET	Directeur de Recherche, INRIA, Sophia Antipolis	Examineur
L. BLANCHARD	Ingénieur de Recherche (Thalès Alenia Space)	Examineur
R. DUFOUR	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de thèse
D. RÉMOND	Maître de Conférences (INSA Lyon)	Co-Directeur de thèse

LaMCoS, INSA-Lyon, UMR-CNRS 5259

18, rue des sciences, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

"Si la science ne s'intéresse pas aux choses délirantes, elle risque fort de passer à côté de choses intéressantes" (Antoine Labeyrie, astronome).

Table des matières

Resumé	7
Abstract	9
Liste des publications de l'auteur	11
1 Introduction	13
1.1 Des structures spatiales innovantes... déployables	13
1.1.1 Structures à lames souples	16
1.1.2 Structures de tensegrité	22
1.1.3 Structures gonflables	24
1.2 Architectures sérielles et parallèles	26
1.2.1 Les manipulateurs sériels	26
1.2.2 Les manipulateurs parallèles	26
1.2.3 Désignation des architectures	26
1.3 Contexte de l'étude	28
1.3.1 Hexapode déployable à rubans	29
1.3.2 Problématique	30
2 Étude des actionneurs à rubans	33
2.1 Complexité d'une structure mince à section ouverte	33
2.1.1 Non-linéarité géométrique : définitions préalables	33
2.1.2 Les modes de flambement élastiques	35
2.1.3 Couplage flexion-torsion d'un ruban	36
2.1.4 Calcul des charges et moments critiques d'un ruban	41
2.2 Modèle dynamique de force de restitution des actionneurs à ruban	42
2.2.1 Caractérisation expérimentale	43
2.2.2 Origine de la dissipation	45
2.2.3 Modèle de force de restitution	47
2.2.4 Identification des paramètres du modèle	48
2.3 Modèle éléments finis équivalent de l'actionneur	53
2.3.1 Rôle de la zone de transition	53
2.3.2 Analyse modale du ruban précontraint de l'actionneur	54

3	Analyse de l'instrument déployé	57
3.1	Architecture de l'hexapode	57
3.1.1	Description des liaisons	57
3.1.2	Modélisation de l'hexapode	58
3.2	Analyse modale de l'hexapode déployé	60
3.2.1	Configuration avec lames minces	60
3.2.2	Configuration avec lames épaisses	63
3.3	Capacités de correction de l'hexapode	64
3.3.1	Réponse de la plate-forme avec lames minces à un actionnement vertical q_1	65
3.3.2	Identification des matrices Jacobiennes	67
3.3.3	Dextérité	68
3.3.4	Méthode inverse : prévision de la commande	68
3.4	Discussion sur le choix de la liaison supérieure	70
4	Modèle dynamique direct d'une plate-forme de Gough-Stewart	71
4.1	Formulation de Lagrange	75
4.1.1	Géométrie de l'hexapode	75
4.1.2	Développement des énergies	76
4.1.3	Équations de mouvement	78
4.2	Formulation récursive de Newton-Euler	80
4.3	Comparaison des deux méthodes	81
4.4	Essais de déploiement	84
4.4.1	Mesure de répétabilité du déploiement	84
4.4.2	Expérience de déploiement en gravité compensée	85
4.4.3	Validation des modèles	89
5	Analyses du déploiement	91
5.1	Déploiement sous excitation harmonique	91
5.2	Analyse de sensibilité	94
5.2.1	Plan factoriel complet	95
5.2.2	Conditions de succès du déploiement	96
5.2.3	Modèle de régression de la réponse en Θ_z	97
5.3	Comportement modal au cours du déploiement	98
5.3.1	Étude d'un actionneur à ruban pour différentes longueurs déployées	98
5.3.2	Étude de l'hexapode à différentes longueurs déployées	100
5.4	Introduction de paramètres incertains dans la Jacobienne Inverse	103
5.4.1	Initiation à l'analyse par intervalles	103
5.4.2	Application : recherche de singularité pendant le déploiement	105
	Conclusions et perspectives	109
	Annexes	121

Résumé

Les programmes spatiaux de grandes envergures ont des exigences de résolution de plus en plus importantes que les télescopes monolithiques ne peuvent atteindre sans dépasser les limites de taille de la coiffe des lanceurs. Ainsi, Thalès Alénia Space a le projet de concevoir un télescope déployable dont la position du miroir secondaire serait corrigée selon six degrés de liberté. Le principe repose sur un hexapode utilisant successivement deux architectures différentes et complémentaires : une plate-forme de Gough-Stewart pour le déploiement et une structure "Poignet actif" pour la correction de l'assiette finale de la plate-forme supérieure supportant le miroir secondaire.

L'innovation réside dans l'utilisation de six actionneurs originaux pour le déploiement des jambes de l'hexapode. Une lame métallique incurvée, appelée lame de Carpentier ou ruban, est enroulée autour d'une bobine. La libération de l'énergie de déformation ainsi emmagasinée provoque le déroulement des actionneurs à rubans et le déploiement autonome de la plate-forme.

Un premier modèle de l'hexapode déployé a été élaboré afin d'évaluer sa raideur structurelle dans sa configuration opérationnelle. La flexibilité des actionneurs à rubans repose sur un modèle éléments finis condensé et prend en compte leur géométrie déformée et pré-contrainte. Validé par une analyse modale expérimentale, le modèle est considéré comme élastique et linéaire pour analyser les capacités de correction de la plate-forme supérieure grâce au concept de "Poignet actif". L'influence de la raideur de la liaison supérieure rubans/plate-forme est évaluée.

Prévoir le déploiement de l'hexapode nécessite de modéliser les actionneurs à ruban et de résoudre le modèle dynamique direct d'une structure parallèle. La caractérisation expérimentale de l'actionneur à ruban fait apparaître un comportement hystérétique qui peut être approché par un modèle de force de restitution. Celui-ci est utilisé dans les deux modèles de déploiement proposés confrontés aux mesures issues du déploiement en gravité compensée du prototype.

La recherche effectuée et les outils développés aboutissent à des analyses et recommandations sur le déploiement. Cerner l'influence des micro-vibrations générées par les équipements du satellite sur le déploiement, évaluer les tolérances acceptables sur les actionneurs à rubans via une analyse de sensibilité du déploiement, déterminer la gamme de fréquences naturelles balayée au cours du déploiement, détecter d'éventuelles singularités au cours du déploiement avec des paramètres incertains, sont l'objet du dernier chapitre.

Mots clefs : Ruban flexible, Hexapode, Flambage, Excitation harmonique, Modèles de force de restitution, Condensation dynamique, Jacobienne, Photogrammétrie, Caméra

rapide, Corrélation d'image, Plans d'expérience, Analyse par intervalles.

Abstract

Large space-borne programs have resolution requirements more and more important that monolithic telescopes can't achieve in the size limits of the launchers. Thus, Thalès Alenia Space wants to design a deployable telescope whose secondary mirror position would be corrected along six degrees of freedom. The principle lies on a hexapod using successively two architectures : a Gough-Stewart platform to achieve the deployment and a "active wrist" concept to correct the final position of the platform supporting the secondary mirror. Second order errors will be corrected by using adaptive optics.

Innovation lies in the fact that six tape-spring actuators are used to deploy the hexapod legs. They are based on the principle of carpenter's tape measures. A tape-spring actuator is composed of a thin curved strip coiled on a rotating drum and guided by spiral grooves. The release of the tape-spring strain energies allows the autonomous deployment of the platform.

A model of the deployed hexapod has been first performed in order to investigate the structural stiffness in its working configuration. The tape-spring flexibility is modelled by using a condensed finite element model and take into account the deformed and pre-stressed geometry. Validated by an experimental modal analysis, the model is considered as linear and elastic to investigate the platform correction capabilities with the active wrist concept. The influence of the upper joint stiffness is highlighted.

The deployment prediction needs to model the tape-spring actuators and to solve the direct dynamic model of a parallel structure. The experimental identification of the tape-spring actuator highlights a hysteretic behaviour that can be described by a restoring force model. This model is useful for the elaborating two deployment models which are compared to the experimental results of a gravity compensated deployment.

Developed tools allow several analyses. The influence of the micro-vibrations made by the satellite equipments in orbit is observed on the deployment. A sensitivity analysis of the deployment evaluates acceptable tolerances on the tape-spring actuators. The modal evolution of the hexapod during the deployment indicates the swept natural frequency range. The detection of possible singularities during the deployment is carried on with uncertain parameters.

Key words : Tape-spring, Hexapod, buckling, Harmonic excitation, Restoring force model, Dynamic condensation, Jacobian, Photogrammetry, auto-parametric system, High speed camera, Digital image correlation, Design of experiments, Interval analysis.

Liste des publications de l'auteur

Publications dans des revues internationales :

- G. Aridon, D. Rémond, Blanchard L., Dufour R., "On the correction capability of a deployed tape-spring hexapod", Mechanism and Machine theory, acceptée le 04 juillet 07.
- G. Aridon, D. Rémond, L. Blanchard, R. Dufour, "A six-restoring force model for the sensitivity analysis of a space deployable hexapod", Journal of vibration and Control, soumise le 18 décembre 2006.
- D. Rémond, J.Neyrand, G. Aridon, R.Dufour, "On the optimised use of Chebyshev expansion for mechanical system identification", Mechanical Systems and Signal Processing, soumise le 30 avril 2007.
- G. Aridon, A. Al Majid, D. Rémond, Blanchard L., R. Dufour, A direct dynamic model for a space hexapod deployment, ASME Computational and Non linear Dynamics, soumise le 19 juillet 2007.

Actes de congrès

- G. Aridon, A. Al Majid, D. Rémond, Blanchard L., R. Dufour, A direct dynamic model for a space hexapod deployment, ASME 2007 IDETC/CIE 2007, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7, 2007.
- G. Aridon, D. Rémond, Blanchard L., Dufour R., "A model to predict the deployment of a space hexapod", 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21, 2007.
- G. Aridon, A. Al Majid, D. Rémond, R. Dufour, "Formulation analytique de la dynamique de déploiement d'un hexapode spatial", 8ème colloque national en calcul des structures, Giens (France), 21-25 Mai 2007.
- Blanchard L., Aridon G., Rémond D., Dufour R., Falzon F., "A tape-spring telescope structure : deployment modelling", 57th International Astronautical Congress, Valencia, Spain, October 2-6, 2006.
- G. Aridon, D. Rémond, A. Al Majid, L. Blanchard, R. Dufour. "Hysteretic behaviour of tape-spring actuators : Influence on the deployment of a hexapod", ISMA2006 Int. Conf. on Noise and Vibration Engineering, Leuven (Belgium), September 18-20, 2006.
- Blanchard L., G. Aridon, F. Falzon, D. Rémond, R. Dufour, "A Tape-spring hexapod for deployable telescopes : dynamics ", 6th Internat. Conf. on Space Optics, ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, June 2006.
- G. Aridon, L. Blanchard, D. Rémond, R. Dufour, "Modal identification for modeling a deployed tape-spring hexapod", 45th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conf., Newport (US), May 1-5 2006.

Chapitre 1

Introduction

Où les structures déployables apparaissent comme une solution d'avenir dans les futurs projets spatiaux et l'intérêt des architectures parallèles est présenté. Ceci afin de mieux appréhender le contexte de l'étude et la problématique du déploiement

Sommaire

1.1 Des structures spatiales innovantes... déployables	13
1.1.1 Structures à lames souples	16
1.1.2 Structures de tensegrité	22
1.1.3 Structures gonflables	24
1.2 Architectures sérielles et parallèles	26
1.2.1 Les manipulateurs sériels	26
1.2.2 Les manipulateurs parallèles	26
1.2.3 Désignation des architectures	26
1.3 Contexte de l'étude	28
1.3.1 Hexapode déployable à rubans	29
1.3.2 Problématique	30

1.1 Des structures spatiales innovantes... déployables

A environ 150 km d'altitude au-dessus de la surface de la Terre, l'Espace offre une situation avantageuse pour l'observation de la Terre et du reste de l'Univers. La conception des structures spatiales pose d'énormes difficultés à cause de leur complexité, des limites de poids, des contraintes de lancement et de l'environnement opérationnel et des possibilités de maintenance virtuellement égales à zéro. Les instruments placés en orbite sont soumis à des variations de température extrêmes et rapides, à des niveaux très élevés de radiation, et doivent fonctionner avec des niveaux de précision et de fiabilité très sévères dans le vide. De plus, les éléments et les sous-systèmes spatiaux ont nettement avantage à être aussi légers que possible et à être très économes en énergie pour diminuer les coûts de mise en orbite et assurer leur durée de vie.

La taille actuelle des systèmes spatiaux est limitée par le volume sous coiffe des lanceurs. Le compartiment de la cargaison du lanceur d'Ariane-5 d'Arianespace et de l'ESA (European Space Agency) a un diamètre de 4.56 m pour une hauteur d'environ 11 m alors

que la navette spatiale de la NASA (National Aeronautics and Space Administration) a un diamètre de 4.6 m et une hauteur de 18.3 m. La capacité des lanceurs n'évolue pas aussi vite que la taille des instruments spatiaux. Ainsi, l'utilisation de structures déployables dans le domaine spatial apparaît comme prometteuse par la réduction de volume et le gain de masse qu'elle offre pendant le lancement, et, de ce fait, par l'agilité accrue de la structure dans l'Espace. Une structure déployable peut être définie comme un assemblage d'éléments qui lui confèrent la capacité d'évoluer de manière autonome d'une configuration gerbée à une forme expansée stable.

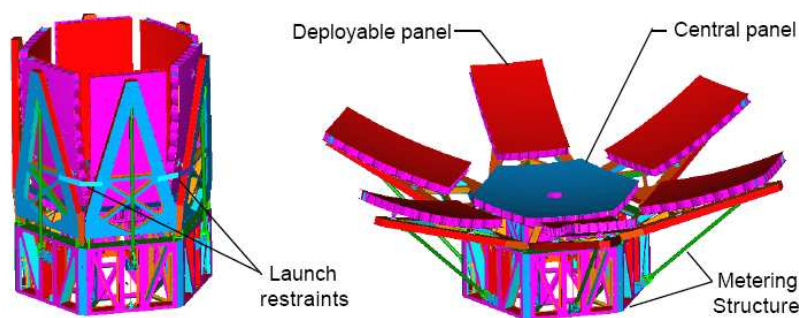


FIG. 1.1 – Concept de déploiement d'un miroir pour un télescope LIDAR

En 1999, le télescope LIDAR, acronyme de *Light Detection And Ranging*, avec miroir déployable développé conjointement par la NASA et la société *Composite Optics, Inc.* marque un saut dans l'état de l'art des télescopes spatiaux. Le LIDAR est une technologie permettant d'étudier les constituants de l'atmosphère reposant sur le même principe qu'un radar ou qu'un sonar à la seule différence qu'il utilise un faisceau laser pour sonder l'atmosphère. En balayant l'atmosphère, le faisceau laser est dispersé par les molécules et les particules en suspension. La lumière réfléchiée est collectée par un télescope de 3 m de diamètre léger car réalisé avec des panneaux en composite [LPD⁺99]. Le but est de multiplier par quatre la quantité de données qui auraient été collectées avec un miroir monolithique (non-déployable) pour un même volume de stockage. La cinématique de déploiement est très simple et consiste à déployer le miroir périphérique de 75° (Fig. 1.1). Ce télescope non-destiné à l'imagerie est un prémisses vers les grands télescopes spatiaux.

Les structures déployables permettraient de construire des télescopes d'une ouverture de 30 mètres d'ici 20 ans. La NASA et la DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) travaillent actuellement sur cette technologie avec le successeur de Hubble, le *James Webb Space Telescope* (JWST [NAB⁺04]). L'architecture de son miroir primaire de 6.5 m est semi-rigide. Elle utilise des miroirs segmentés en beryllium de grande qualité optique montés sur une structure plane en composite stable et rigide. Le rayon de courbure du miroir peut être compensé en modifiant la position des segments les uns par rapport aux autres (optique active). Le déploiement de la structure tripode s'effectue au moyen d'un seul actionneur (voir Fig. 1.2).

Les applications spatiales des structures déployables sont multiples. L'agence de reconnaissance américaine (NRO : National Reconnaissance Office) s'y intéresse activement

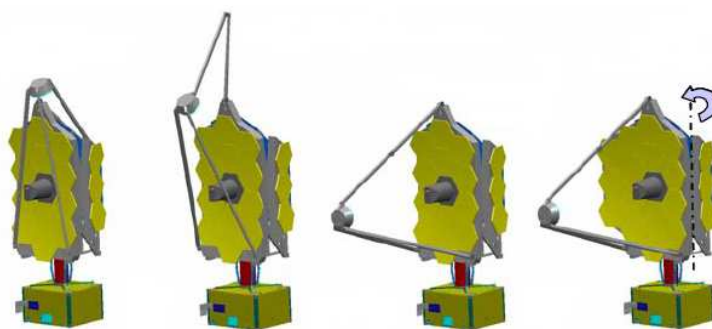
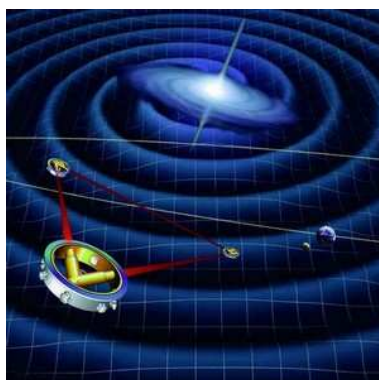


FIG. 1.2 – Séquences de déploiement du JWST

pour développer des télescopes optiques pouvant se déployer dans l'espace en orbite géostationnaire. L'utilisation de ce type de satellites très agiles est une priorité pour les agences de reconnaissance. Les structures déployables pourraient également combler les lacunes de la couverture satellite actuelle et s'avérer moins coûteuses en utilisant des constellations de microsatsellites. Le futur spatial reposera incontestablement sur le développement d'architectures volant en formation. Dans ce cadre, les structures déployables présenteront un intérêt majeur en terme de réduction de coûts de lancement. De tailles réduites et dotés d'une grande agilité, les deux satellites du programme PLEIADES Haute Résolution seront mis successivement en orbite en 2009 et 2010 pour un vol en formation assurant une résolution des images au sol de 70 cm pour un champ de 20km. De nouvelles architectures de systèmes spatiaux sont également basées sur l'interférométrie à longue base. LISA (*Laser Interferometry Satellite Antenna*) est un projet d'observatoire d'ondes gravitationnelles, prévu pour 2009 et développé conjointement par l'ESA et la NASA. Cette mission se compose d'une constellation de trois vaisseaux spatiaux volant en formation autour d'une orbite héliocentrique et formant un triangle équilatéral de 5 millions de kilomètres de côté reliés par liens optiques (Fig. 1.3).

FIG. 1.3 – Vue d'artiste de LISA (*Laser Interferometry Satellite Antenna*)

Les mâts, les panneaux solaires, les antennes et les télescopes sont les quatre principaux types de structures spatiales déployables.

Les mâts sont typiquement utilisés pour éloigner des instruments électroniques afin

de réduire les interférences ou supporter d'autres structures comme les panneaux solaires. Les panneaux solaires doivent être les plus grands possible pour produire la puissance d'alimentation nécessaire aux instruments embarqués [Pel95]. A titre d'exemple, quatre panneaux solaires de $2.39 \times 6.06 m^2$ fournissent les 4.7 kW requis pour le fonctionnement du HST (*Hubble Space Telescope*) [Kwa91]. Pour communiquer avec la Terre ou mener à bien leur mission de télécommunication, les satellites sont munis d'antennes. A l'instar des télescopes, les antennes peuvent également être utilisées pour des observations astronomique ou terrestre. Un état de l'art des différentes technologies de déploiement est présenté ci-après afin de cerner l'étendue des concepts élaborés.

1.1.1 Structures à lames souples

L'exemple le plus connu de structure déployable à lame souple est celui d'un mètre de mesure à ruban. Celui-ci est constitué d'une lame flexible en métal (Cuivre-Beryllium, par exemple), appelée **lame de Carpentier ou ruban**, à section circulaire ouverte d'épaisseur constante. Les rubans utilisés dans les mètres de mesure ont habituellement un rayon de courbure R de 14 à 16 mm ouvert sur un angle de 60 à 70° pour une épaisseur de 0,1 à 0,2 mm. Déformés, les rubans présentent une tendance naturelle à recouvrir une courbure longitudinale nulle en libérant l'énergie de déformation élastique emmagasinée. Ainsi, les rubans ont pour avantage d'être légers, simples, relativement stables en position déployée, et avec une bonne répétabilité de position. Ces propriétés sont exploitées pour réaliser des liaisons flexibles.

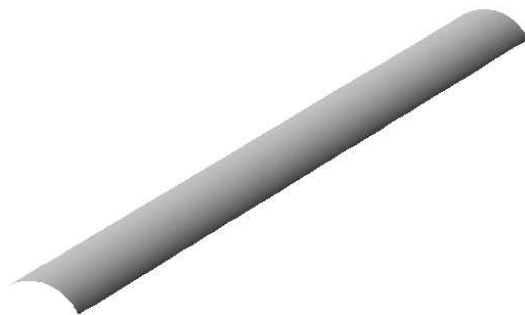


FIG. 1.4 – Lame de Carpentier ou ruban

Liaison Adèle

En montant deux rubans en parallèle avec leurs faces convexes alternativement opposées, il est possible de réaliser une liaison 'auto-bloquante' très efficace. Ce principe (Fig. 1.5) a été breveté par l'Aerospatiale en 1992 pour développer la liaison Adèle [Aa92]. Les deux surfaces en roulement permettent de guider le déploiement et de rigidifier la liaison lorsqu'elle est fermée. Les rubans déployés permettent de bloquer la liaison en position ouverte. Initialement développée pour déployer des panneaux solaires, cette liaison se révèle assez complexe, encombrante et lourde (1,1 kg) pour être envisagée dans d'autres applications.

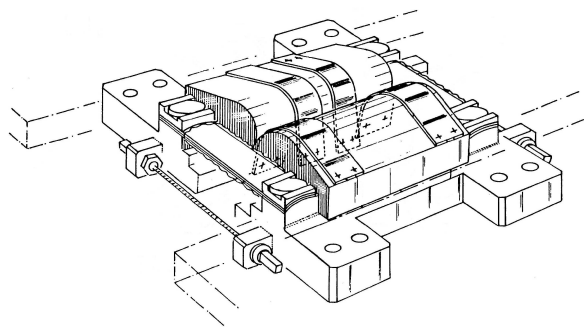
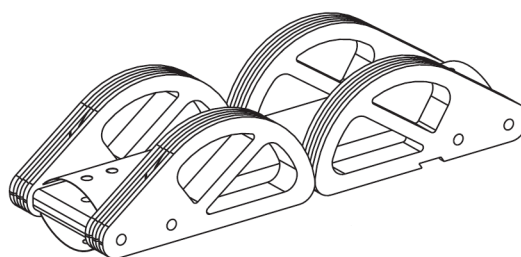


FIG. 1.5 – Liaison Adèle (Aerospatiale)

Liaison TSR (*Tape-Spring Rolling Hinge*)

Une liaison comparable, développée par le *Deployable Structure Laboratory (University of Cambridge, UK)*, agence deux rubans face à face (Fig. 1.6) afin d'augmenter les moments de flexion et de blocage (ces deux paramètres étant ajustables selon l'écartement des rubans). La faible friction générée par deux surfaces en roulement est exploitée ; des câbles guidés par des gorges permettent de maintenir ces deux surfaces en contact. Une liaison de 135 mm de long, 30 mm de hauteur and 45 mm de largeur pèse 0.11kg et fournit un moment de déploiement variant entre 0.1 et 0.3 Nm et un moment de blocage de 13 Nm [PGGA00] [PKLW02].

FIG. 1.6 – *Tape-Spring Rolling Hinge*

VEDLTS (*Visco-Elastically Damped Lenticular Tape Spring*)

Le déploiement autonome d'un ruban crée un mouvement spontané non contrôlé générant des vibrations lors de la stabilisation. Pour remédier à ces inconvénients, l'Université de Naples [GG04] a étudié un concept pour amortir le déploiement sans contrôle actif. Des lames appelées VEDLTS (*Visco-Elastically Damped Lenticular Tape Spring*) sont constituées de deux rubans collés l'un à l'autre par un polymère visco-élastique. Lors du pliage d'une lame VEDLTS, un glissement relatif se produit entre les deux rubans entraînant le cisaillement du polymère. Le retour à la position d'équilibre est ralenti grâce au polymère qui retrouve un état de déformation nul.

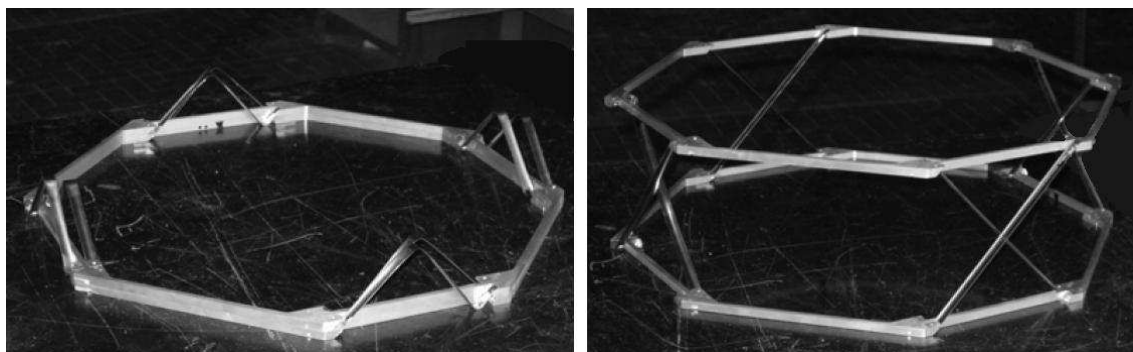


FIG. 1.7 – Positions gerbée et déployée de deux octogones

L'objectif du project MITAR (*Micro Telescope with a high Resolution*) est de réaliser un télescope doté à 400 km d'altitude d'une résolution de 1 m et compatible avec la plateforme d'un microsatellite. Le prototype [GG04] est constitué d'une empilement de cinq octogones reliés un à un par huit lames VEDLTS. Les octogones situés aux extrémités (n°1 et 5) supportent les miroirs primaires et secondaires. Un assemblage de deux octogones intermédiaires est présenté Fig. 1.7. La structure nécessite des ressorts conventionnels de torsion pour initier le déploiement. Un modèle éléments finis situe le premier mode de la structure à 25 Hz en cisaillement. La qualité de répétabilité de déploiement du prototype n'est pas connue.

Tube en composite bi-stable

Une innovation récente dans le domaine des structures déployables est la découverte d'un matériau composite [DL87], qui, lorsqu'il est pré-formé avec une section courbe transverse peut être aplati et enroulé, à l'instar des rubans présentés précédemment. Cependant, il présente la particularité d'être stable dans les deux configurations déployée et enroulée (Fig. 1.8). On parle alors d'un composite bi-stable. Contrairement aux applications usuelles des composites stratifiés, l'arrangement des fibres de celui-ci n'est pas symétrique [AG02] [IP00].



FIG. 1.8 – Lamé déployée et enroulée en composite bi-stable

Le STEM (*Storable Tubular Extendible Member*)

Développé dans les années soixante, le STEM (*Storable Tubular Extendible Member* [Rim65]) est une extension du principe utilisé dans les mètres de mesure. Déployées, les lames du STEM présentent une section circulaire de plus de 360° formant un tube (Fig. 1.9). Elles sont enroulées autour d'une bobine pour être stockées. Le passage d'une section aplatie à une section tubulaire par une zone de transition de profil ouvert emmagasine de l'énergie de déformation restituée lors du déploiement mais provoque une faible rigidité en torsion. La friction générée dans la surface de recouvrement peut être exploitée pour renforcer cette faiblesse en torsion mais est source de non-linéarités.

Utilisé sur le télescope Hubble, le Bi-STEM repose sur l'utilisation de deux lames de STEM identiques emboîtées l'une dans l'autre [MWG67]. Sa construction assure une réponse structurale plus symétrique, une rigidité en flexion plus élevée, avec une zone de transition plus petite offrant une plus grande compacité que le STEM.

Le Bi-stable Reeled Composite (BRC) est un concept stable dans les configurations compacte et déployée, permettant une simplification du mécanisme de rétraction, [IPDL00].

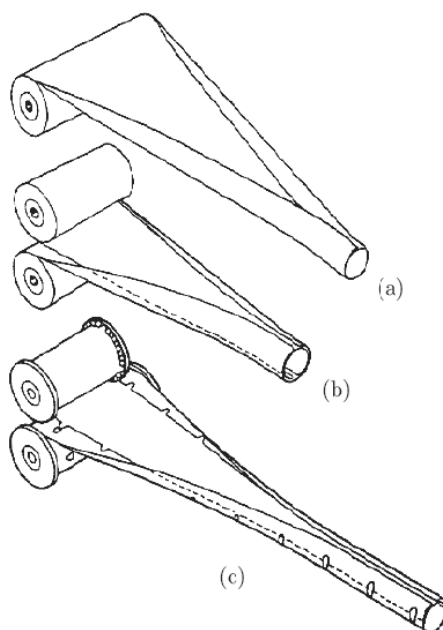


FIG. 1.9 – a) STEM [Rim65] b) Bi-STEM [MWG67] c) *Interlocking* Bi-STEM

Le CTM (*Collapsible Tubular Mast*)

Le CTM (*Collapsible Tubular Mast*) présente une section fermée qui peut être aplatie et enroulée de manière similaire au STEM (Fig. 1.10). L'avantage principal de cette section particulière est d'offrir une grande rigidité en torsion pour une faible densité (masse linéique de 0.1 kg/m).

En 1999, l'extension simultanée de quatre mâts de 14 m de long a été validée avec succès dans le cadre d'un essai de déploiement d'une voile solaire en zéro gravité mené

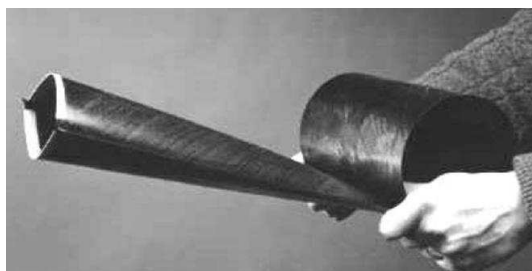


FIG. 1.10 – Collapsible Tubular Mast (CTM)

conjointement par l'ESA et le DLR (*Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt*, Centre Aérospatial Allemand) [UEH⁺02]. Le prototype pèse 35kg au total (Fig. 1.11).



FIG. 1.11 – Voile solaire (20 m x 20 m) déployée par quatre mâts CTM

Le principe de déploiement peut être étendu à plus de quatre mâts en parallèle pour le développement d'une grande antenne. La Figure 1.12 présente une antenne de cinq mètres de maillage supporté par huit mâts déployables.

Les deux mécanismes mentionnés précédemment, le STEM et le CTM, reposent sur le principe du stockage d'énergie. Cependant, les déploiements libres par libération des contraintes sont assez peu fréquents. Les mètres de mesure font exception car la friction entre le ruban et son boîtier permet de dissiper la majeure partie de l'énergie. Ainsi, le déploiement et la rétraction des STEM et CTM sont habituellement contrôlés par un moteur.

Le "wrap-rib reflector" développé par la société Lockheed et le NASA Jet Propulsion Laboratory consiste en un moyeu central autour duquel sont enroulées des baleines en composite. Par leur simple énergie de déformation, les baleines se déploient pour former une surface parabolique. Le principe de déploiement est illustré sur la Figure 1.13 ; il peut également être utilisé en sens inverse pour rétracter l'antenne. Dans le vide, la séquence de déploiement dure deux secondes. Le nombre de baleines dépend de la précision de surface requise et détermine le gain de l'antenne. Une antenne de 9,1 m de diamètre a été



FIG. 1.12 – Réflecteur de 5m déployé par huit mâts CTM

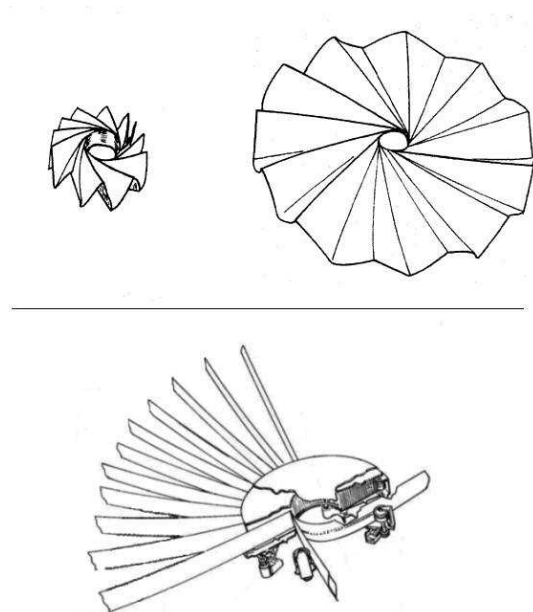
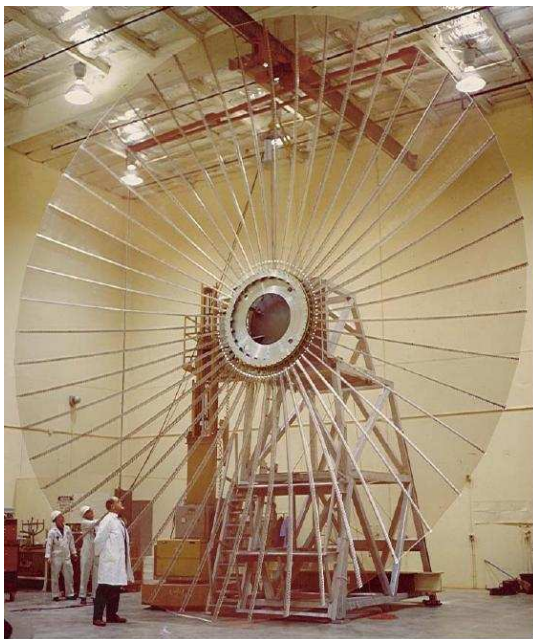


FIG. 1.13 – Antenne déployable ATS-6 : principe et mécanisme de déploiement

envoyée dans l'espace en 1974 sur l'ATS-6 (*Application Technology Satellite*). Celle-ci était composée de quarante-huit baleines, stockées dans un moyeu de 2 m d'une hauteur de 0,45 m pour une masse totale de 60kg [Red75]. Depuis, plusieurs versions de 15 à 20 mètres ont été proposées pour différentes applications (satellites de télécommunication, mission Quasat VLBI, [GP92], ...).

1.1.2 Structures de tensegrité

Le mot tensegrité de l'anglais *tensegrity* est une contraction de *tensile integrity*, inventé par R.B. Fuller dans son brevet de 1962 [Ful59]. La signification de ce mot a plusieurs interprétations. Sur la base des travaux de Fuller, Pugh [Pug76] définit un système de tensegrité comme une interaction entre un jeu de composants discontinus en compression et un jeu de composants continus en tension offrant un volume stable dans l'espace. Une telle structure est généralement faite de câbles et de tiges. La tensegrité a inspiré de nombreux artistes et architectes. Du point de vue des structures déployables, de telles structures articulées sont intéressantes car les éléments en compression disjoints permettent une grande compacité.

Le *Coilable Mast* (CM) inventé en 1967 [Web69] consiste en trois éléments longitudinaux reliés à intervalles réguliers par des membres perpendiculaires et diagonaux. L'enroulement des longerons permet le stockage du mât (Fig. 1.14). Il peut être déployé de manière autonome, en libérant l'énergie de déformation élastique des longerons, ou motorisée. La compacité d'un CM est très bonne (2 ou 3 % de la longueur déployée).



FIG. 1.14 – Déploiement d'un mât déroulable (CM)

Différentes technologies de mâts déployables ont été utilisées avec succès dans des missions spatiales : SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) (2000), Cassini (1997), ... Un treillis composé de joints bi-stables a été réalisé par H.Y.E. Pak et G. Tibert [Tib02]. Les tubes bi-stables sont de taille disproportionnée par rapport au mât complet (Fig. 1.15). Cependant, aucun tube bi-stable de plus petit diamètre fonctionnant de manière satisfaisante n'a été réalisé pour le moment.

La Figure 1.16 illustre la séquence de déploiement d'un autre mât de tensegrité déployable [TP03]. Les joints sont un agencement de deux rubans de 19 mm de large assemblés face à

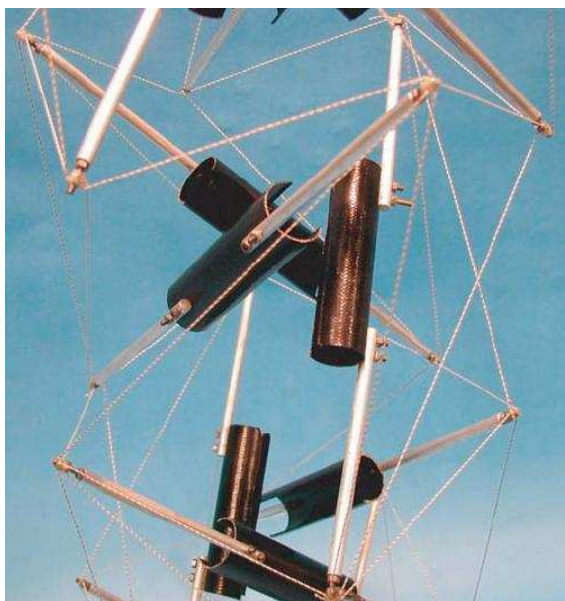


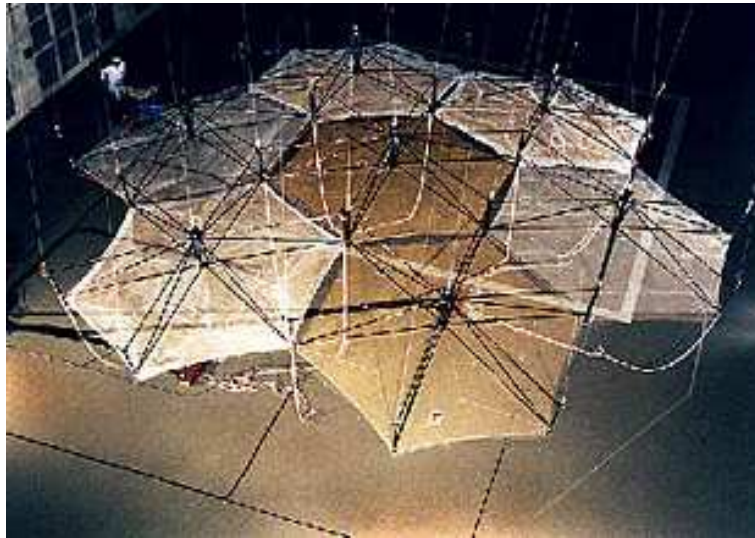
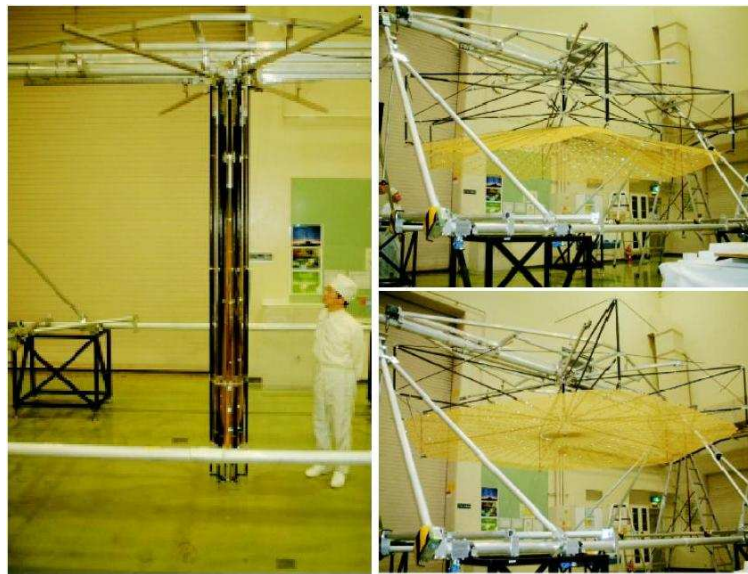
FIG. 1.15 – Mât composé de joints bi-stables

face. Le mât n'est pas complètement précontraint avant que le dernier étage ne soit déployé.



FIG. 1.16 – Séquence de déploiement d'un mât de huit étages

Le *Large Deployable Reflector* est une antenne de 9.10 mètres constituée de sept modules hexagonaux développée pour la mission japonaise VLBI-2 [MHN⁺05]. La courbure parabolique de la surface est réalisée en utilisant la déformation élastique de baleines radiales dont la tension est ajustée par des câbles (Fig. 1.17). Le principe de déploiement de chacun des modules est similaire au mécanisme poussoir automatique d'un parapluie (Fig. 1.18). En orbite, l'alignement du réflecteur peut être corrigé selon trois degrés de liberté.

FIG. 1.17 – *Large Deployable Reflector*FIG. 1.18 – Principe de déploiement d'un module du *Large Deployable Reflector*

1.1.3 Structures gonflables

Les structures déployables gonflables font l'objet d'études depuis le début des années 1950. Ultra-légères, elles reposent sur l'emploi de matériaux à la fois souples et rigidifiables : souples pour réduire le volume de stockage puisque la structure est pliée dans un conteneur et se déploie en orbite grâce à un gaz de gonflage, rigidifiables car, une fois la structure déployée, la résine se polymérise sous l'effet du rayonnement ambiant ou d'une élévation de température, ce qui lui confère sa tenue. Cette technologie peut être envisagée pour des structures de générateurs solaires, d'antennes, de pare-soleil, d'éléments de freinage, etc. Cependant, la mince épaisseur des membranes et la flexibilité des éléments lui confèrent

une faible capacité de chargement en compression.

Un exemple de structure gonflable est la *Inflatable Antenna Experiment* placée par la NASA et le *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) comme charge utile sur le satellite SPARTAN en mai 1996 [FBV⁺97]. Cette expérience a été conçue pour vérifier la précision d'une antenne lenticulaire parabolique gonflable déployée dans l'espace. Le système est composé d'une lentille de 14 m de diamètre d'une épaisseur de $6.5\ \mu\text{m}$ de Mylar, supportée par un tore gonflable. Cette structure de 14 par 28 m était stockée dans un conteneur d'environ $1 \times 1 \times 2\ \text{m}^3$. L'expérience a montré que le contrôle en boucle ouverte était très risqué. Les gaz résiduels et le relâchement des contraintes ont libéré la membrane prématurément. La séquence de déploiement résultante a été perturbée (Fig. 1.19) mais l'expérience a démontré avec succès la possibilité d'emploi d'une telle technologie dans le spatial.

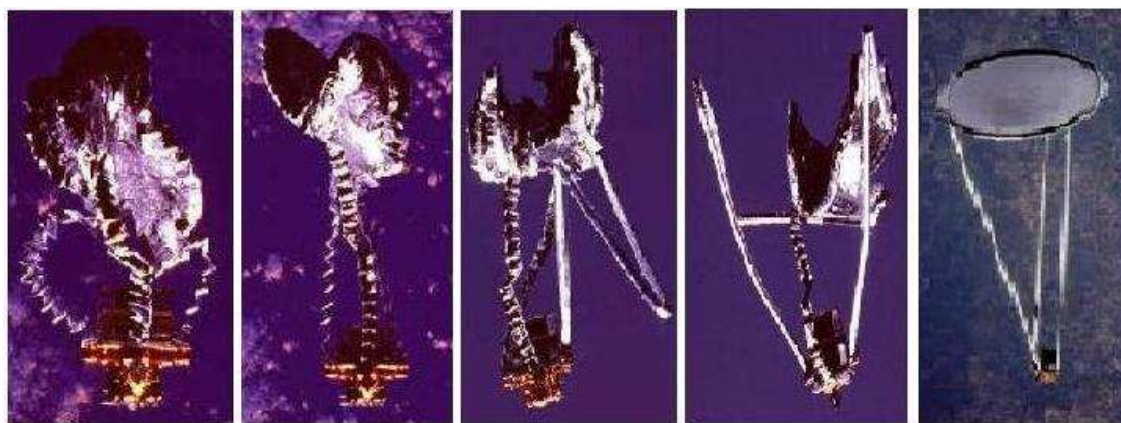


FIG. 1.19 – *Inflatable Antenna Experiment* (IAE)

Le déploiement par gonflage des mâts est un des axes d'études de l'Institut Technologique de Tokyo, Fig. 1.20. Des vols zéro-G ont permis de tester des mâts en structure aluminium avec différents types de pliages, inspirés de l'origami, pliage japonais traditionnel en papier. Le gonflage a pour but de déplier mais également de supprimer l'effet local du pliage de la feuille en aluminium dans sa position déployée.

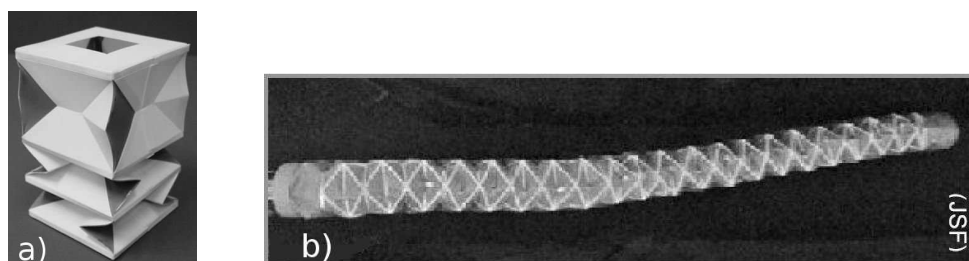


FIG. 1.20 – a) Exemple de pliage b) Mât en aluminium pliable

1.2 Architectures sérielles et parallèles

Les structures spatiales sont classiquement constituées de plates-formes faites d'armatures destinées à soutenir la charge utile (antennes, réflecteurs, miroirs, électronique, système de propulsion...). Il peut être intéressant de disposer d'éléments actifs afin de positionner au mieux certains instruments.

1.2.1 Les manipulateurs sériels

Dans les années soixante-dix, la majorité des robots sont constitués de bras manipulateurs dont les actionneurs sont placés en série. Ces robots sériels sont définis comme une structure articulée à chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons simples à un degré de liberté (caractère anthropomorphique).

Ils ont pour avantage d'offrir un grand espace de travail et d'être relativement simples à commander. Cependant, l'inertie élevée de la chaîne cinématique limite l'utilisation du robot pour des tâches de précision ou requérant la rapidité. La capacité de charge utile est faible. La disposition en série des éléments rend le robot sensible à la flexion et favorise la propagation des erreurs de transmission.

1.2.2 Les manipulateurs parallèles

Par opposition aux mécanismes sériels, un mécanisme parallèle peut être défini selon Merlet [Mer97] comme un mécanisme *en chaîne cinématique fermée, constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par n actionneurs simples*. Merlet propose une vue approfondie des différents types de structures parallèles. L'hexapode est une forme de manipulateur parallèle de plus en plus utilisée lorsque plusieurs axes de positionnement sont exigés (simulateurs de conduite ou de vol, robots médicaux, tables de machines-outils, télescopes). Il est constitué d'une plate-forme mobile reliée à une plate-forme fixe par six chaînes cinématiques en parallèle. L'actionnement des jambes d'un hexapode permet une commande des six degrés de liberté de la charge utile attachée à la plate-forme supérieure. Cette architecture permet une agilité accrue et une grande rigidité lui conférant une charge utile élevée et une bonne précision de positionnement. Par conséquent, les hexapodes sont des moyens efficaces pour positionner précisément des systèmes optiques de toutes tailles. Cependant, le principal inconvénient d'une structure parallèle est son espace de travail réduit. De plus, la géométrie à chaîne cinématique fermée complique les algorithmes de contrôle en introduisant un fort couplage entre les différentes chaînes cinématiques. Par ailleurs, la présence de singularités peut conduire à des pertes de contrôle, voire la ruine de la plate-forme mobile.

1.2.3 Désignation des architectures

Les chaînes cinématiques ouvertes sont désignées par les séquences de liaisons qui les composent. La notation suivante est utilisée :

P : liaison prismatique,

R : liaison pivot,

U : liaison Cardan ou universelle, également notée RR,

S : liaison rotule ou sphérique.

Les lettres soulignées (ex : P ou R) représentent les liaisons actives en opposition aux liaisons passives.

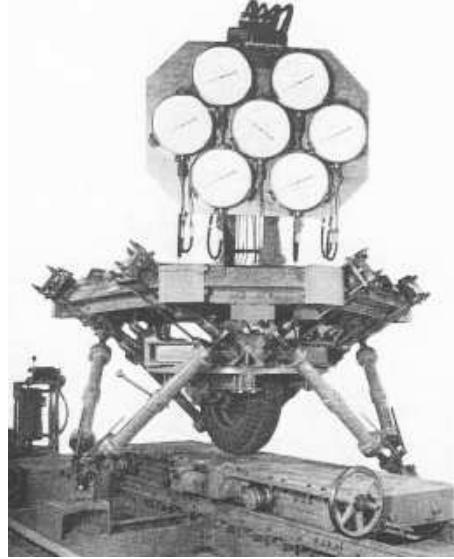


FIG. 1.21 – Plate-forme originelle de Gough

Dans les années soixante, avec l'essor de l'aéronautique, la plate-forme de Gough-Stewart, initialement conçue pour tester des pneumatiques (Fig. 1.21), a connu un succès remarquable pour son utilisation dans les simulateurs de vol. Il s'agit d'un mécanisme parallèle à six degrés de liberté (*ddl*) avec six chaînes cinématiques identiques composées d'une liaison Cardan, d'un actionneur prismatique et d'un joint sphérique. Ainsi, les chaînes cinématiques sérielles d'une plate-forme de Gough-Stewart sont de type UPS.

Le critère de Gr bler indique la mobilité F d'une structure parallèle à chaîne cinématique fermée :

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (1.1)$$

avec n , le nombre de sous-systèmes entre les liaisons (chaque vérin est constitué de deux sous-systèmes, chaque plate-forme est un sous-système), λ , le nombre de *ddl* de l'espace dans lequel la structure fonctionne, j , le nombre de liaisons, f_i , le nombre de *ddl* du joint i .

Ainsi, pour une plate-forme de Gough-Stewart : $n=14$, $\lambda = 6$, $j=18$, $\sum_{i=1}^j f_i = 36$, d'où : $F = 6$.

Il existe plusieurs variantes de robots parallèles, leurs différences concernant le nombre d'actionneurs donc le nombre de degrés de liberté, leurs positionnements et la forme du plateau. The *Agile Eye* (Laval University) est un mécanisme parallèle sphérique 3-RRR à trois *ddl* ; le Tripteron (Laval University) est un mécanisme parallèle 3-PRRR à trois *ddl* ; le

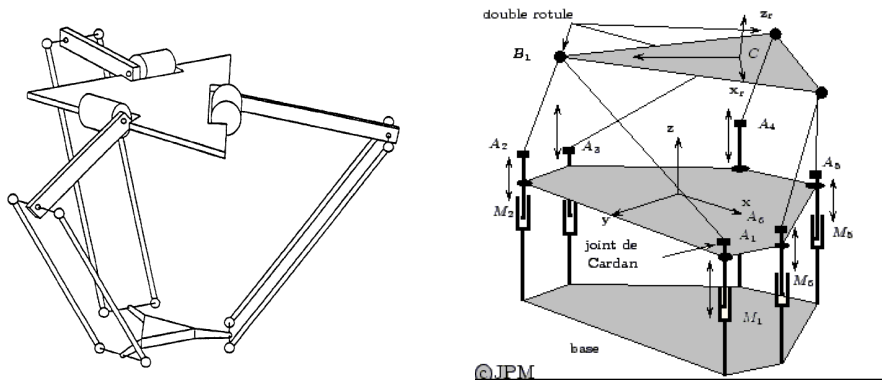


FIG. 1.22 – a) Robot DELTA b) Poignet actif de l'INRIA

robot DELTA [Cla91] possède quatre degrés de liberté (Fig. 1.22a). Le concept d'hexapode à "poignet actif" de l'INRIA [Mer86] [MG91] offre six degrés de liberté en utilisant une chaîne de type PUS dont les liaisons prismatiques se déplacent verticalement entre la base et l'extrémité inférieure des jambes (Fig. 1.22b). L'originalité du poignet actif provient du fait que les jambes sont de longueur fixe afin de diminuer l'inertie de la structure en positionnant les actionneurs en partie basse.

1.3 Contexte de l'étude

Pour répondre aux nouveaux enjeux spatiaux, Thalès Alénia Space étudie des concepts de systèmes d'observation déployables. Le but de ce projet est de concevoir un télescope de type Cassegrain pouvant être gerbé puis déployé en orbite. Ses caractéristiques reposent sur une focale de 4 m, un miroir primaire M_1 de 1 m de diamètre ayant pour masse 40 kg, un miroir secondaire M_2 de 250 mm de diamètre et d'une masse de 3 kg. Le miroir M_2 est situé à 2 m du M_1 .

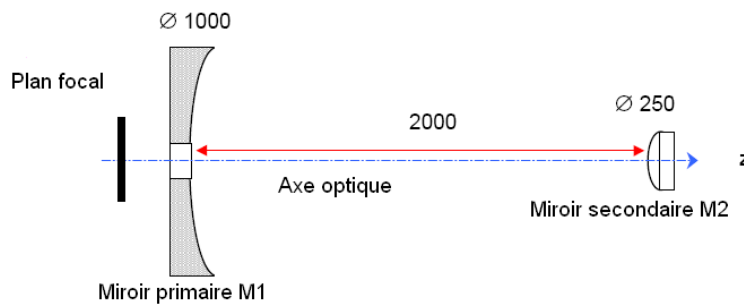


FIG. 1.23 – Schéma optique du télescope Cassegrain requis

Les incertitudes de positionnement entre le M_1 et le M_2 doivent être contenues dans 1 μm selon l'axe vertical, 5 μm latéralement et 10 μrad en inclinaison pour être acceptables.

1.3.1 Hexapode déployable à rubans

Thalès Alenia Space s'est inspiré d'une architecture parallèle pour concevoir une structure déployable et contrôlable selon six *ddl* [BFDM05]. Pendant la phase de tir, la structure est gerbée dans une configuration compacte favorable au maintien du miroir M_2 . En orbite, elle se déploie de manière à former un hexapode utilisant successivement deux types d'architectures différentes : de type UPS (plate-forme de Stewart-Gough) pendant le déploiement et de type PUS ("Poignet actif") pour corriger l'assiette de la plate-forme supérieure une fois déployée. Les corrections de second ordre seront ensuite compensées par l'optique adaptative (Fig. 1.24).

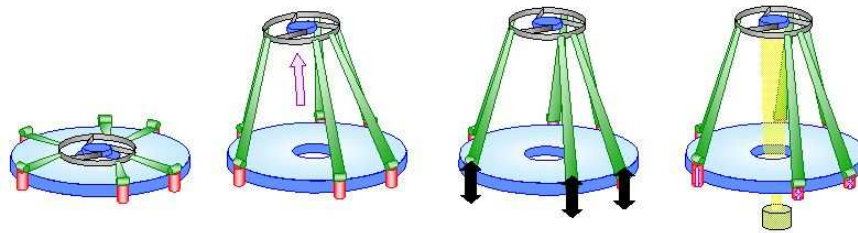


FIG. 1.24 – Concept du déploiement du télescope : position gerbée, déploiement, correction de la position déployée, optique adaptative

L'innovation réside dans l'utilisation d'actionneurs 1-D à rubans déployables pour le déploiement des jambes (Fig. 1.25). Ils reposent sur le principe inverse des mètres de mesure à ruban. Le ruban, lame à section naturelle incurvée, est en inox dans le prototype actuel, en attendant une version spatialisable. La partie du ruban enroulée autour de la bobine prend une forme aplatie et ses bords sont logés dans les gorges fraisées en spirale dans les deux flasques. L'énergie de déformation élastique du ruban incite celui-ci à se dérouler de manière autonome pour retrouver sa position d'équilibre déployée. De tels actionneurs ont déjà été utilisés sous forme motorisée dans des applications robotiques [HHK⁺01].



FIG. 1.25 – Actionneur 1-D à ruban

L'hexapode est constitué de six actionneurs à ruban montés dos à dos et par paire. Ce concept a été étudié avec le soutien de l'*Innovative Triangle Initiative* de l'Agence Spatiale Européenne afin de développer et construire un prototype démonstrateur d'hexapode et d'évaluer sa reproductibilité de déploiement et ses capacités de correction [BFDM05]. Une étude de l'INRIA [BFDM05], basée sur la méthode d'analyse par intervalles, a permis la

définition des paramètres géométriques d'un prototype de dimensions réduites (1/4), Fig. 1.26. Déployé, celui-ci atteint une hauteur de 66 cm. Le fonctionnement en "Poignet Actif" se doit d'optimiser la précision de positionnement de la plate-forme supérieure dans un espace de travail garanti. En effet, la position des points d'attache des jambes influe grandement sur les performances du robot. Pour un espace de travail donné sur six ddl $[\pm 2mm; \pm 2mm; \pm 2mm; \pm 2^\circ; \pm 2^\circ; \pm 3^\circ]$, la solution finale a abouti à la définition des paramètres de conception tels que les rayons R_b de la base et r_p de la plate-forme supérieure, la longueur l des jambes supposée identique pour chaque jambe, les angles θ_b et θ_a séparant deux points d'attache adjacents au niveau de la base et de la plate-forme ainsi que la course S des actionneurs verticaux situés à la base. La position des points d'attache A_i et B_i supérieurs et inférieurs des jambes de l'hexapode est précisée en Annexe. En ces positions, est situé l'ensemble des liaisons Cardan de centres A_i sur la base, et des liaisons rotules de centres B_i sur la plate-forme supérieure.

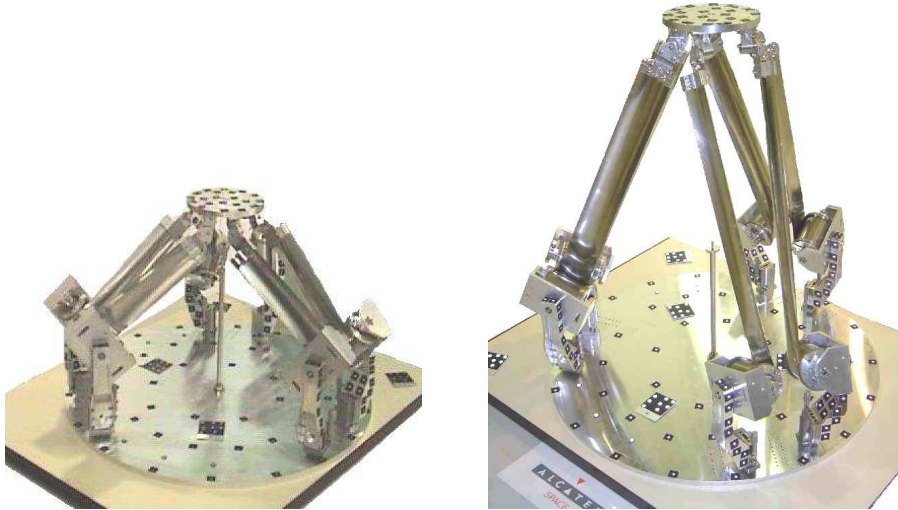


FIG. 1.26 – a) Prototype gerbé b) Prototype déployé

1.3.2 Problématique

Les procédures de conception des structures déployables sont un compromis entre la compacité, la raideur structurelle, et la précision de déploiement. Les structures déployables sont très différentes des structures conventionnelles car leurs fonctions et la faisabilité de la conception ne dépendent pas seulement de la réponse de la structure déployée en service mais également du comportement pendant le déploiement. Les aléas technologiques dans l'espace sont souvent difficilement réparables, voire insolubles et peuvent donc entraîner des pertes financières très conséquentes. L'exemple le plus connu est celui du *Hubble Space Telescope*, qui, en dehors de ses problèmes de lentilles, a expérimenté des niveaux de vibrations inattendus causés par le chargement thermique des panneaux solaires. Ce problème aurait pu être évité par une meilleure compréhension du comportement de la structure. Parce que les capacités des instruments à satisfaire les besoins ambitieux dépendent du

comportement dynamique de la structure, une étude approfondie est nécessaire.

Le chapitre 2 détaille le fonctionnement, le rôle et le comportement statique et dynamique de l'actionneur à ruban qui est au coeur du système de déploiement. Un ruban possède une section circulaire mince ouverte mono-symétrique et présente, de ce fait, une non-linéarité géométrique à l'origine de couplages flexion-torsion. L'actionneur à ruban est principalement caractérisé par deux phénomènes : (i) le stockage d'énergie provenant de la déformation élastique du ruban (ii) la dissipation d'énergie due au contact radial du ruban dans la gorge hélicoïdale. La modélisation de ces deux phénomènes incluant grandes déformations et friction est difficilement envisageable par des approches analytique ou numérique sans une caractérisation expérimentale préalable.

L'étude de la réponse de la structure déployée en service, présentée en Chapitre 3, est essentielle pour garantir les performances de l'instrument. Elle nécessite de prendre en compte la flexibilité des rubans dans l'élaboration d'un modèle global, lequel est confronté aux mesures issues de l'analyse modale du prototype. Les capacités de correction de la plate-forme supérieure sont gouvernées par la matrice Jacobienne reliant le déplacement vertical des actionneurs situés à la base aux coordonnées généralisées de la plate-forme. Il s'agit d'analyser l'influence de la flexibilité des actionneurs à rubans sur la dynamique d'ensemble de l'hexapode et de comparer les déplacements induits aux capacités de correction.

Enfin, l'établissement d'un modèle dynamique direct est nécessaire pour prévoir le déploiement de la structure mais sa résolution analytique est complexe. Les approches de Lagrange puis de Newton-Euler sont abordées dans le Chapitre 4 puis comparées aux mesures issues du déploiement en gravité compensée.

Le Chapitre 5 présente diverses analyses du déploiement rendues possibles grâce aux outils développés précédemment. La détection d'éventuelles singularités au cours du déploiement est étudiée à l'aide de la méthode d'analyse par intervalles permettant de prendre en compte des paramètres incertains. Une analyse de sensibilité modifie légèrement les paramètres des actionneurs afin de prendre en compte des incertitudes sur les forces d'actionnement et les vitesses de déploiement. L'évolution modale de l'hexapode au cours du déploiement détermine la gamme de fréquences balayée. Enfin, l'influence des micro-vibrations générées par les équipements du satellite en orbite est évaluée pour déterminer la pertinence d'un éventuel contrôle actif.

Chapitre 2

Étude des actionneurs à rubans

Où l'actionneur à ruban, lieu de force motrice et de dissipation, cesse d'être une inconnue et devient une non-linéarité déterminée et localisée dans le système déployable [ARAM⁺ 06].

Sommaire

2.1	Complexité d'une structure mince à section ouverte	33
2.1.1	Non-linéarité géométrique : définitions préalables	33
2.1.2	Les modes de flambement élastiques	35
2.1.3	Couplage flexion-torsion d'un ruban	36
2.1.4	Calcul des charges et moments critiques d'un ruban	41
2.2	Modèle dynamique de force de restitution des actionneurs à ruban	42
2.2.1	Caractérisation expérimentale	43
2.2.2	Origine de la dissipation	45
2.2.3	Modèle de force de restitution	47
2.2.4	Identification des paramètres du modèle	48
2.3	Modèle éléments finis équivalent de l'actionneur	53
2.3.1	Rôle de la zone de transition	53
2.3.2	Analyse modale du ruban précontraint de l'actionneur	54

2.1 Complexité d'une structure mince à section ouverte

2.1.1 Non-linéarité géométrique : définitions préalables

Géométrie de la section d'un ruban

Un ruban a une section circulaire ¹ ouverte d'angle φ de rayon R et d'épaisseur t . Il s'agit d'une section mince mono-symétrique (Fig. 2.1).

Centre d'inertie Le centre d'inertie ² G appartient au plan de symétrie de la section du ruban. Sa position sur l'axe x (Fig. 2.2) est donnée par :

¹A.N. : $\varphi = 95.5^\circ$, $R = 36mm$, $t = 0.2mm$

²A.N. : $x_G = 31.88$ mm

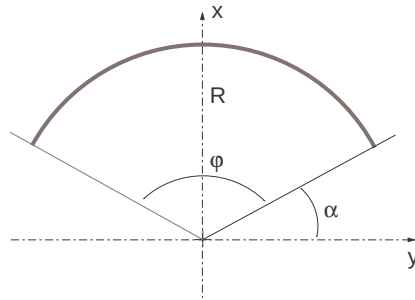


FIG. 2.1 – Géométrie de la section du ruban

$$x_G = \frac{1}{m} \int y dm \quad (2.1)$$

$$= \frac{4 \sin(\alpha/2)}{3} \frac{R^3 - r^3}{\alpha} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} \quad (2.2)$$

Centre de cisaillement ou centre de torsion "The shear center is that point through which the loads must act if there is to be no twisting, or torsion, of the beam." [Seg98].

La répartition particulière du flux de cisaillement dans les sections non-symétriques engendre un moment qui provoque la torsion de la poutre du fait de la non-coïncidence des centres de cisaillement et d'inertie. Le centre de cisaillement est le lieu où le moment des flux de cisaillement est équilibré par le moment des efforts tranchants. Ainsi, l'application d'un chargement longitudinal sur le centre de cisaillement de la section annihile la torsion. Ce centre de cisaillement est également appelé centre de torsion : il est toujours situé sur un axe de symétrie :

$$x_C = \int_{s_0}^s \left(r_y \frac{\partial x}{\partial s} - r_x \frac{\partial y}{\partial s} \right) q_s ds \quad (2.3)$$

avec s , l'abscisse curviligne et q_s , la répartition du flux de cisaillement pour une section ouverte :

$$q_s = \int_{s_0}^s \left(-t \frac{\partial \sigma z}{\partial z} \right) ds \quad (2.4)$$

où

$$\frac{\partial \sigma z}{\partial z} = \frac{x}{I_{yy}} \quad (2.5)$$

I_{yy} est le moment quadratique (ou second moment d'inertie) de la section.

$$I_{yy} = \int x^2 dS \quad (2.6)$$

Ainsi, après développements (voir l'Annexe)³ :

³A.N. : $x_C = 38.57$ mm

$$x_C = \frac{4R}{(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)} \left[\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha \right] \quad (2.7)$$

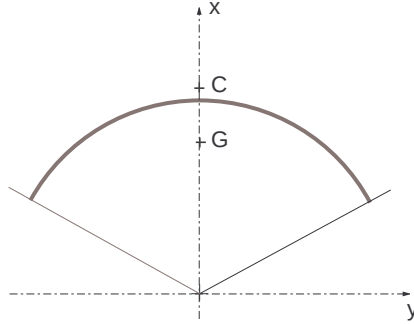


FIG. 2.2 – Position des centres d'inertie G et de cisaillement C sur la section d'un ruban

2.1.2 Les modes de flambement élastiques

Dans le cas où le centre de torsion est distinct du centre d'inertie et où les charges appliquées à la poutre ne passent pas par le centre de torsion, la flexion de la poutre s'accompagne d'une torsion. Pour les sections ouvertes composées de profils minces, les contraintes de cisaillement dues à la torsion peuvent devenir prépondérantes, surtout lorsque les sections sont libres de se gauchir. La rigidité à la torsion de la section est généralement très faible, la colonne risque alors de flamber par flexion et/ou torsion.

Le flambement élastique révèle principalement trois modes de flambement : local, transversal, et global. En plus de ces considérations générales, les imperfections et non-linéarités du matériau, les contraintes résiduelles et le potentiel d'interaction des différents modes de flambement doivent être gardés à l'esprit.

Flambement local : Un tel comportement est relativement intuitif. Le flambement local est principalement influencé par les rapports largeur-épaisseur des membrures formant la section et par le rapport d'élancement des membrures (Fig. 2.3). Lorsque le rapport déflexion / épaisseur augmente, la contrainte de flambement local diminue. La contrainte critique de flambement σ_{crit} d'une coque en compression est donnée par exemple par [AB80] :

$$\sigma_{crit} = \frac{Et}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (2.8)$$

avec E , le module d'Young et μ le coefficient de Poisson du matériau, d'où

$$P_{crit} = 2\beta R t \sigma_{crit} \quad (2.9)$$

Cependant, le risque de flambement local est accru lorsque la charge P est excentrée :

$$w = \frac{e}{\cos \sqrt{\frac{PL^2}{4EI}}} \quad (2.10)$$

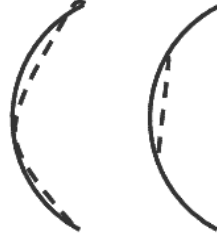


FIG. 2.3 – Flambement local

avec w , la déflexion centrale, e , l'excentricité, L , la longueur du ruban, et EI le module de rigidité.

D'où l'expression de la contrainte σ :

$$\sigma = P \left(\frac{1}{A} + \frac{e^2}{I \cos \sqrt{\frac{PL^2}{4EI}}} \right) \quad (2.11)$$

avec A , l'aire de la section.

Il est possible de déduire une valeur de charge critique P_{crit} en introduisant la valeur de contrainte maximum avant flambement déterminée par Timoshenko et Gere [TG61] pour un panneau cylindrique :

$$\sigma_{crit} = 0.6 \frac{Et}{R} \quad (2.12)$$

Flambement transversal : Ce type de flambement est caractéristique des membres avec des bords raidis (également appelé "*stiffener buckling*" ou "*distortional buckling*" [Sch97]) et ne concerne donc pas la section incurvée d'un ruban.

Flambement global : Il existe 3 modes de flambement en compression pour des barres profilées [Zie77] :

- Flambement en flexion ou celui d'Euler. Il peut apparaître dans toute structure en compression qui connaît une déflexion causée par de la flexion (Fig. 2.4 a)).
- Flambement en torsion : Il apparaît seulement dans les membres très élancés de section bi-symétrique. Il est provoqué par une rotation autour de l'axe longitudinal (Fig. 2.4 b)).
- Flambement en flexion et torsion : Il est caractéristique des sections mono-symétriques (sections angulaires, sections en T, C). Il s'agit d'un couplage de flexion et de torsion.

2.1.3 Couplage flexion-torsion d'un ruban

Approche analytique

Ainsi, le flambement d'une poutre ne s'effectue pas toujours par flexion dans le plan de symétrie de la section droite. Lorsque la rigidité en torsion de la section est faible, la poutre peut flamber par torsion ou par flexion et torsion. Dans ce dernier cas, la section subit une translation (déplacements u et v des points G et C devenant G' et C') et une

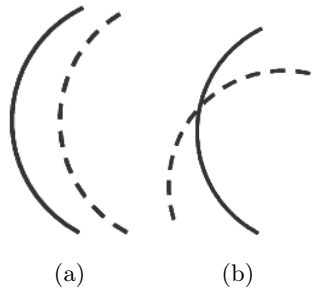


FIG. 2.4 – Flambement a) de flexion b) de torsion

rotation d'angle ϕ (supposé petit) autour de C' pendant le flambement (Fig. 2.5). Le centre d'inertie G devient G'' après la transformation suivante :

- Selon x : $u + y_0\phi$
- Selon y : $v - x_0\phi$

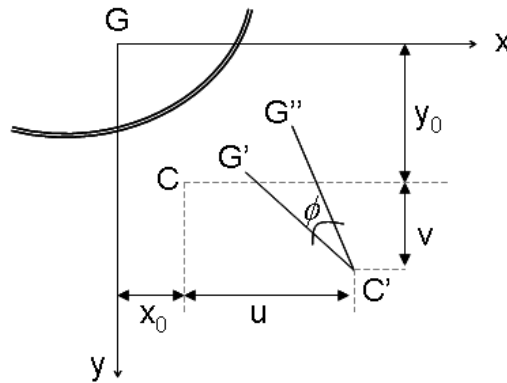


FIG. 2.5 – Flambement en torsion et flexion : transformations de la section

Les travaux de Mohri, Azrar et Potier-Ferry étudient le flambement de poutres de différentes sections sans l'approximation des petits angles [MAM01]. L'influence d'une rotation initiale de la section peut ainsi être considérée. Pour des raisons de simplicité de résolution n'affectant pas la compréhension, les calculs de Timoshenko [TG61] prenant en compte le cisaillement transversal et approximant les petits angles sont présentés. Ainsi, pour les barres à section mince ouverte, l'équation différentielle de la torsion non-uniforme s'écrit :

$$M = -EC_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} + G_e J \frac{d\theta}{dz} \quad (2.13)$$

La rigidité à la torsion de la barre est quantifiée par le produit $G_e J$, avec G_e le module d'élasticité au cisaillement et J la constante de torsion. La rigidité au gauchissement est EC_ω avec $C_\omega(m^6)$ la constante de gauchissement et E le module d'Young.

Au lieu de se baser sur la fonction de l'énergie potentielle, le principe repose sur la dérivation du système d'équations différentielles gouvernant le flambement des poutres à sections minces. Ce système d'équations inclut les déformations de flexion dans les directions verticales et latérales ainsi que les déformations de torsion autour du centre de

cisaillement. La formulation analytique finale est présentée sous une forme générale ne nécessitant pas de symétrie de section pour être appliquée.

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_y = -P(u + y_0 \phi) \quad (2.14)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x = -P(v - x_0 \phi) \quad (2.15)$$

$$EC_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (G_e J - \frac{I_0}{A} P) \frac{d^2 \phi}{dz^2} - P x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} + P y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (2.16)$$

P est la poussée appliquée au centre d'inertie G, M_x et M_y sont les moments de flexion par rapport aux axes principaux, I_x et I_y sont les moments principaux d'inertie de la section, I_0 le moment d'inertie par rapport au centre de torsion. Ce système d'équations permet d'obtenir les charges critiques de flambement par torsion et flexion.

Pour le cas particulier où les centres d'inertie et de torsion coïncident ($x_0 = y_0 = 0$), les équations se simplifient et se découplent de sorte que le flambement en torsion est indépendant du flambement en flexion. Les deux premières équations donnent les charges critiques d'Euler dans les plans principaux alors que la troisième concerne le flambement à la torsion. Seule la plus faible de ces valeurs présente un intérêt pratique.

Dans le cas où la poussée P est excentrée, des moments fléchissants M_1 et M_2 vont être générés. Soit e_x et e_y les coordonnées du point d'application de la charge P.

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + P(y_0 - e_y) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (2.17)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} + P(x_0 - e_x) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (2.18)$$

$$EC_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (G_e J - P e_y \beta_1 - P e_x \beta_2 - P \frac{I_0}{A}) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P(y_0 - e_y) \frac{d^2 u}{dz^2} - P(x_0 - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (2.19)$$

où les notations suivantes sont introduites :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2y_0 \\ \beta_2 &= \frac{1}{I_y} \left(\int_A x^3 dA + \int_A y^2 x dA \right) - 2x_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dans le cas d'extrémités reposant sur des appuis simples, supposons que la poussée P s'exerce dans le plan de symétrie xz du ruban. Alors, $e_y = y_0 = 0$. Ainsi, l'équation 2.17 se simplifie et le flambement dans le plan de symétrie se produit indépendamment. La charge critique est la même que celle d'Euler P_y . Les charges critiques de flambement en torsion et latéral dans le plan xz sont liées et s'obtiennent en annulant le déterminant des équations 2.18 et 2.19 :

$$(P_x - P) \left[\frac{I_0}{A} P_\phi - P(e_x \beta_1 + \frac{I_0}{A}) \right] - P^2 (x_0 - e_x)^2 = 0 \quad (2.21)$$

Avec :

$$P_y = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \quad (2.22)$$

$$P_x = \frac{\pi^2 E I_x}{l^2} \quad (2.23)$$

$$P_\phi = \frac{A}{I_0} (G_e J + E C_\omega \frac{\pi^2}{l^2}) \quad (2.24)$$

Ainsi, si P est appliquée au centre d'inertie ($e_x = 0$), on a :

$$P_1 = P_y \quad (2.25)$$

$$P_2 = 1/2 \frac{P_x I_0 + I_0 P_\phi + \sqrt{P_x^2 I_0^2 - 2 P_x I_0^2 P_\phi + I_0^2 P_\phi^2 + 4 P_x I_0 P_\phi A x_o^2}}{I_0 - A x_o^2} \quad (2.26)$$

$$P_3 = 1/2 \frac{P_x I_0 + I_0 P_\phi - \sqrt{P_x^2 I_0^2 - 2 P_x I_0^2 P_\phi + I_0^2 P_\phi^2 + 4 P_x I_0 P_\phi A x_o^2}}{I_0 - A x_o^2} \quad (2.27)$$

À la vue de ces équations, le couplage entre la torsion et la flexion est clair. La plus faible des deux racines P_2 et P_3 est la charge critique de flambement. Lorsque le rapport P_ϕ/P_x est faible, cette charge critique est proche de P_ϕ et le flambement est essentiellement dû à la torsion. Inversement, lorsque P_ϕ/P_x est élevé, la flexion prédomine dans la forme de flambement.

Si P est appliqué au centre de torsion ($e_x = x_0$), on a :

$$P_1 = P_y \quad (2.28)$$

$$P_2 = P_x \quad (2.29)$$

$$P_3 = \frac{P_\phi}{1 + e_x \beta_1 (\frac{A}{I_0})} \quad (2.30)$$

Les solutions ne font pas apparaître de couplage entre la torsion et la flexion. Le flambement sera composé de flexion ou de torsion.

Approche empirique

La bibliographie de Seffen [Sef99] [SP97] fait état de nombreuses études du comportement des rubans sous des approches expérimentales, numériques et analytiques. La flexion d'un ruban dans son plan de symétrie produit des réponses différentes selon le sens d'application de cette flexion. Un moment de flexion M est défini comme positif si la flexion du ruban engendrée provoque des courbures longitudinales et transverses de sens opposés, Fig. 2.6(a). Les rotations correspondantes θ entre les extrémités sont également définies positives. Inversement, une flexion, sous un moment M négatif, induit des courbures longitudinales et transverses de même sens et ainsi $\theta < 0$, Fig. 2.6(b).

Sous un moment de flexion négatif, le ruban présente une réponse continue. Une bifurcation apparaît à M_-^{max} après une phase de comportement linéaire relativement courte. Le mode de déformation résultant est un couplage de flexion-torsion (Fig. 2.6(b.ii)). Les plis de torsion naissent vers les extrémités. Au fur et à mesure que la rotation des extrémités

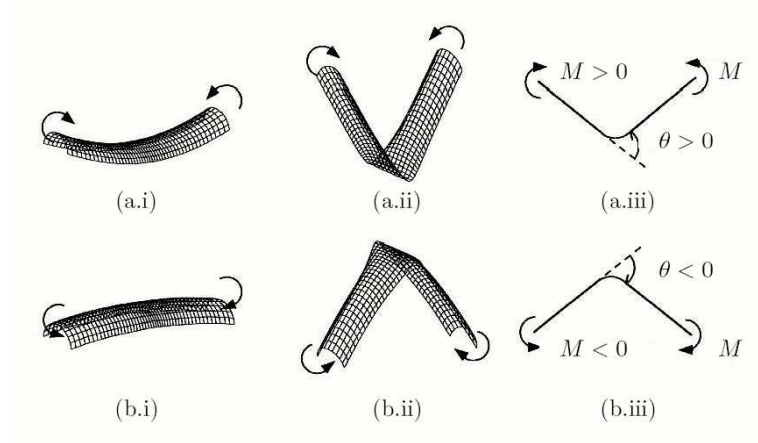


FIG. 2.6 – Ruban soumis à des moments de flexion [SP97]. (a) Flexion de sens opposé sous un moment positif (b) Flexion de même sens sous un moment négatif (i) Déformation initiale uniforme ; (ii) Profil après flambement ; (iii) Diagramme schématisant la rotation θ .

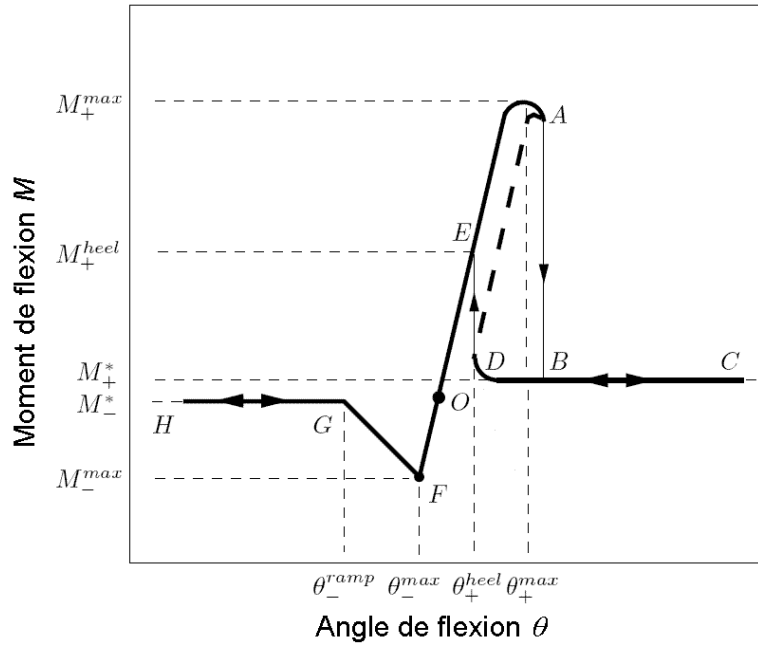


FIG. 2.7 – Diagramme du moment de flexion M en fonction de l'angle de rotation θ [SP97]

augmente, ces plis se déplacent vers le milieu du ruban et le moment appliqué diminue. Finalement, la coalescence de ces deux plis en M_-^* provoque un moment de flexion constant. Quand θ diminue, le chemin de déchargement coïncide pratiquement avec le chemin de chargement.

L'étude de Seffen rejoint les prévisions de comportement en flambement de Timoshenko. En effet, un moment de flexion négatif s'accompagnant d'un couplage de flexion-torsion

concorde avec la prédiction d'un flambement en flexion-torsion lorsque le chargement est appliqué au centre d'inertie G. De même, une charge excentrée appliquée en C provoque un flambement en flexion qui correspond à un moment de flexion positif.

A partir d'une analyse reposant sur la méthode énergétique, Calladine [Cal88] a montré que le rayon de courbure longitudinal est égal au rayon de courbure de la section transverse. Les relations théoriques entre le moment de flexion et la courbure des rubans ont été étudiées par trois auteurs principaux. Wüst [Wus54] s'est basé sur les notions d'état d'équilibre et de théorie linéarisée des coques. Rimrott [Rim66] utilisa les méthodes énergétiques pour obtenir l'expression non-linéaire de la flexion. Cependant, aucune de ces méthodes ne sont parvenues à décrire la torsion du ruban qui apparaît lors d'un moment négatif. C'est Mansfield [Man73] qui a résolu ce point en utilisant la théorie des coques avec de grandes déformations et des méthodes variationnelles. Ces méthodes analytiques ne sont valables que pour des rubans supposés infiniment longs et ne tiennent donc pas compte des effets de bords.

A partir de calculs numériques par éléments finis validés par des mesures expérimentales, Seffen a établi les formulations analytiques de M_+^{max} et M_-^{max} .

$$M_+^{max} = D \frac{R}{e} \left[\frac{1.152}{10^3} - \frac{2.210}{10^3 l} + \left(-\frac{2.061}{10^9} + \frac{7.096}{10^6 l^4} \right) \left(\frac{R}{e} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \varphi \left[2.840 + \frac{18.17}{l^2} + \left(\frac{-2.281}{10^3} + \frac{6.809}{10^2 l} - \frac{0.245}{l^2} \right) \frac{R}{e} \right] \quad (2.31)$$

$$|M_-^{max}| = D \left[\frac{2.600 R}{10^2 e} - \frac{2.143}{10^5} \left(\frac{R}{e} \right)^2 \right] \beta \left[2.224 + \frac{1.338 R}{10^3 e} \right] \quad (2.32)$$

avec $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, la constante des plaques en flexion. $l = \frac{L}{R\varphi}$ est une fonction de la géométrie du ruban.

2.1.4 Calcul des charges et moments critiques d'un ruban

Application de la charge	en G	en C
Flambement local	1164.1 N	1362.5 N
Flambement global (Timoshenko)	185.6 N	1566.5 N
Flambement global (Seffen)	2.1 N.m	4.99 N.m

TAB. 2.1 – Charges et Moments critiques d'un ruban de L=0.44 m

Le Tableau 2.1 présente les charges et moments critiques de flambement pour un ruban d'une longueur de 44 cm en fonction du lieu d'application de la charge. Lorsque le chargement est appliqué en G, le ruban flambe essentiellement en torsion. Déplacer le point d'application au centre de cisaillement C permet d'élever la charge critique du ruban qui flambera en flexion.

Le Tableau 2.2 présente l'influence des conditions aux limites sur les charges critiques de flambement global (calculé à l'aide des formules établies par Timoshenko présentées en 2.1.3). Les caractères en gras du Tableau 2.2 indiquent les charges retenues comme charges

	P_y	P_x	P_ϕ	Charge en G (N)			Charge en C (N)		
				P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
Appui-Appui	1566.5	32410.4	185.8	P_y	185.6	37592.5	P_y	P_x	-0.028
Enc.-Enc.	6265.9	1.29E5	642.2	P_y	641.8	1.49E5	P_y	P_x	-0.097
Enc.-Appui	3196.9	66143.7	344.1	P_y	343.8	76713.9	P_y	P_x	-0.052
Enc.-Libre	391.6	8102.6	71.7	P_y	71.6	9402.2	P_y	P_x	-0.011

TAB. 2.2 – Charges critiques de flambement en G et en C (Timoshenko) pour une longueur de ruban déployée $L=0.44\text{m}$

critiques. L'application numérique fait apparaître des racines négatives. Celles-ci indiquent que le ruban peut flamber sous l'action d'une tension excentrée.

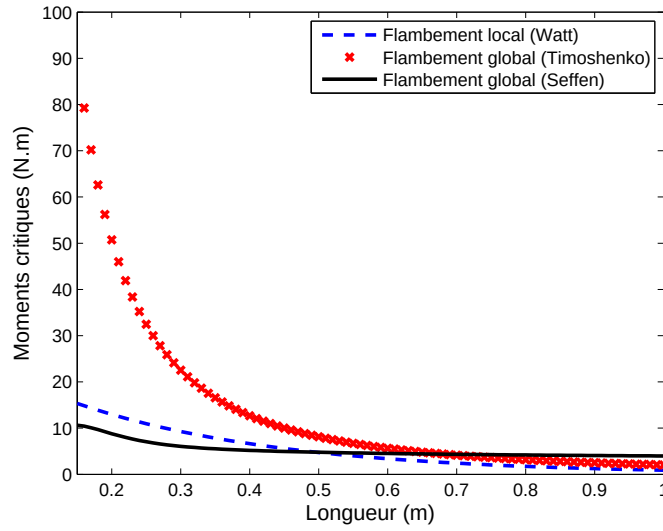


FIG. 2.8 – Moments critiques définis positifs en fonction de la longueur déployée

L'influence de la longueur du ruban sur les moments critiques définis positifs est illustrée sur la Figure 2.8. Pour de faibles longueurs, le flambement global de Timoshenko surestime la résistance du ruban au flambement. A l'instar du flambement d'Euler, celui-ci n'est valable que pour de grandes longueurs. Le calcul de flambement local, basé sur la détermination expérimentale d'une contrainte critique, est plus restrictif. Le comportement de flambement global déterminé par Seffen par un recalage expérimental est le plus sévère des trois approches dans la gamme de longueur qui nous intéresse (en dessous de 50 cm de longueur déployée).

2.2 Modèle dynamique de force de restitution des actionneurs à ruban

Dans cet hexapode, les actionneurs à ruban ont un impact majeur sur le comportement de la structure. Fonctionnant comme des actionneurs 1-D, ils contiennent une bobine avec

deux gorges hélicoïdales sur les flasques destinées au guidage du ruban. L'enroulement du ruban dans la bobine provoque un aplatissement de la section naturellement courbe du ruban (Fig. 2.9). Les contraintes générées par la déformation élastique du ruban poussent celui-ci à se dérouler de manière autonome vers une position déployée stable. Ce type d'actionneur linéaire est principalement caractérisé par deux phénomènes : (i) Emmagasinement d'énergie provenant de la déformation élastique du ruban. (ii) Dissipation d'énergie due au contact radial du ruban dans la gorge spirale. Parce que la section s'aplatit, la direction du contact est orthogonale à celle de l'enroulement. La modélisation de ces deux phénomènes (i) et (ii) incluant grandes déformations et friction requiert une caractérisation expérimentale préalable.

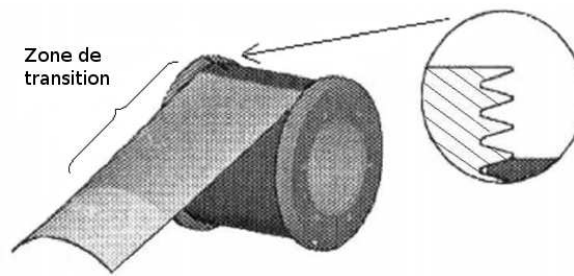


FIG. 2.9 – Actionneur à ruban

2.2.1 Caractérisation expérimentale

La stratégie adoptée consiste à considérer l'actionneur à ruban dans sa globalité en mesurant sa force de restitution pour différentes conditions de fonctionnement. L'enrouleur est soumis à un mouvement forcé sinusoïdal afin de mesurer la force d'enroulement et de déroulement restituée par le ruban ainsi que son élongation. La Figure 2.10 a) présente le dispositif expérimental.

L'axe de la bobine est monté sur un roulement et fixé sur une potence afin d'autoriser le changement de longueur initiale du ruban. La bobine est libre de tourner. L'extrémité du ruban est connectée à un capteur de force (force nominale 20 N, classe de précision 0.05%), lui-même fixé à un pot électrodynamique qui impose un déplacement sinusoïdal. L'amplitude de déplacement imposé est mesurée grâce à un capteur laser de 10 micromètres de résolution. Les deux signaux sont alors enregistrés simultanément avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz grâce à une carte d'acquisition National Instrument puis filtrés sous Matlab de manière à éliminer les bruits de mesure ainsi que les composantes fréquentielles parasites. La bande passante des filtres utilisés dépend de la fréquence d'excitation.

Le signal de force en fonction de l'élongation est recueilli pour différentes amplitudes d'élongation (de 0,5 mm à 4 mm), fréquences (0.2 Hz, 1 Hz, 2 Hz, 3 Hz, 4 Hz) et longueurs de rubans déroulés (29 cm, 44 cm et 50 cm). Les courbes obtenues forment des boucles caractéristiques d'un comportement non-linéaire hystérétique (Fig. 2.10b). Contrairement à une boucle de force-déflexion classique, le sens de parcours de la boucle est inverse à la rotation des aiguilles d'une montre : la force de déroulement fournie par le ruban est

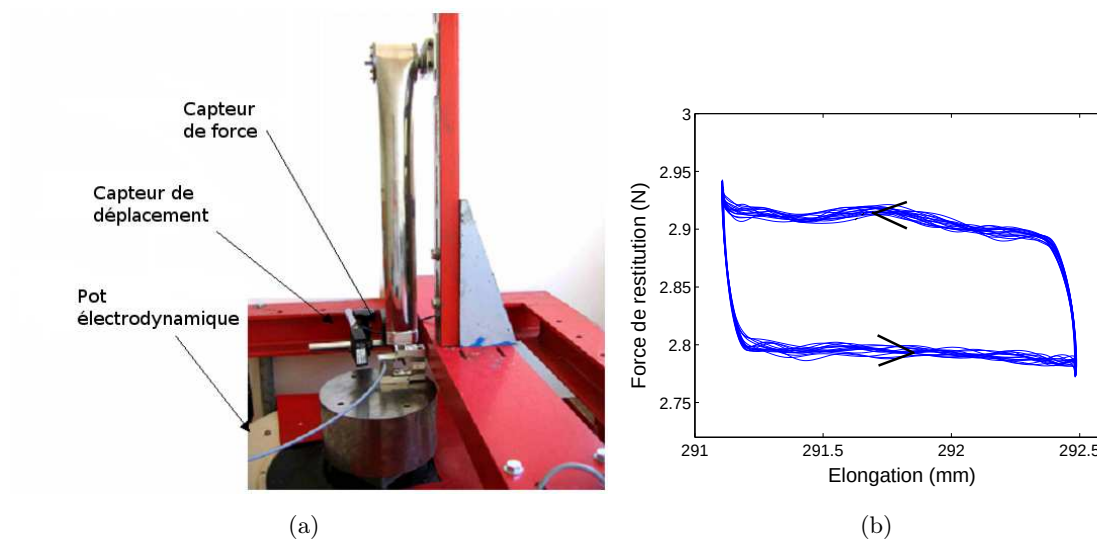


FIG. 2.10 – a) Montage expérimental b) Boucle d'hystérésis forcée à 1 Hz

inférieure de 0.1 N à la force nécessaire pour l'enrouler. Ces deux forces sont positives du fait de la précharge du ruban et de l'énergie de déformation emmagasinée.

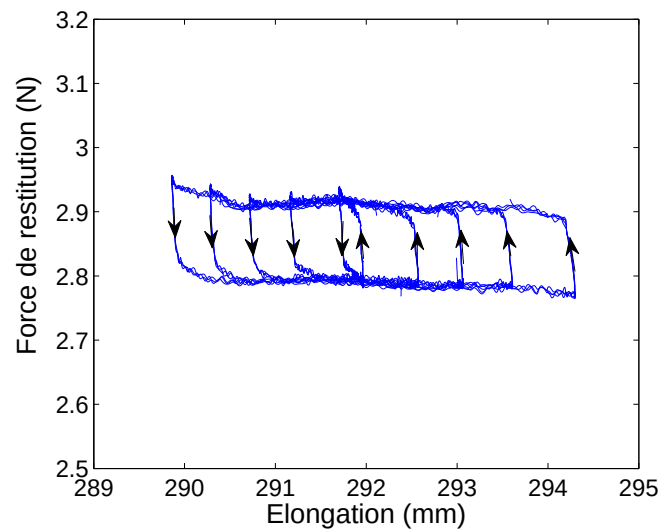


FIG. 2.11 – Boucles pour différentes elongations à 0.2 Hz

Il s'avère que les forces de déroulement et d'enroulement sont quasi-constantes quelle que soit l'amplitude du mouvement (Fig. 2.11). Cela signifie que la quantité d'énergie de déformation du ruban ne varie pas en fonction de la longueur déployée. Une hypothèse est formulée pour expliquer ce comportement : le système n'est pas équivalent à un simple ruban enroulé autour d'un axe à l'instar d'un ressort de torsion. La portion de ruban enroulée autour de la bobine est maintenue dans la gorge hélicoïdale et peut donc être considérée comme encastrée n'ayant donc pas d'influence. Ainsi, seule la zone déformée

à la sortie de l'enrouleur est apte à fournir de l'énergie. Cette zone est appelée zone de transition (Fig. 2.9). La Figure 2.12 présente son évolution en fonction de la longueur du ruban. La taille de cette zone de transition augmente progressivement à mesure que le ruban se déploie. A partir de 0.25 m de ruban déployé, lorsque les effets de bords n'interviennent plus, elle conserve une longueur constante (10.5 cm) quelque soit la longueur déployée. Ceci explique le fait que la poussée de l'enrouleur est constante.

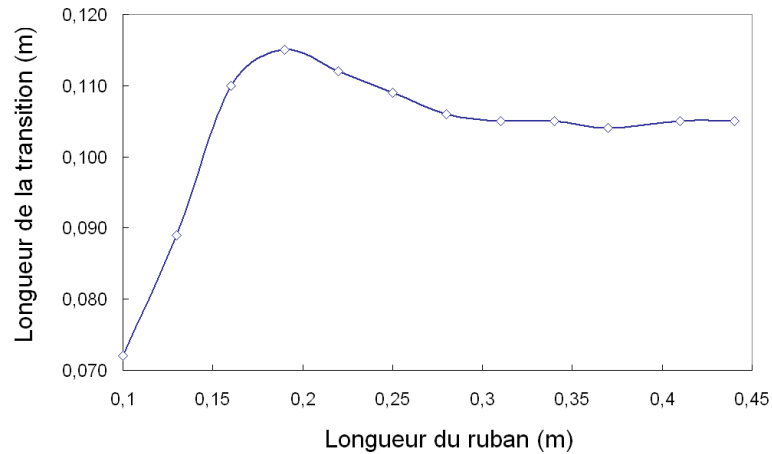


FIG. 2.12 – Mesure de la longueur de la zone de transition en fonction de la longueur du ruban

Les boucles hystérétiques de force-élongation sont également obtenues pour plusieurs fréquences d'excitation. Le faible niveau des efforts mesurés se traduit par une très grande sensibilité aux effets dynamiques, même pour des fréquences d'excitation de 2 ou 3 Hz. La Figure 2.13 présente les réponses de l'actionneur à deux fréquences d'excitation différentes (1 Hz et 3 Hz). L'inclinaison des boucles traduit l'influence de l'inertie de la bobine sur les efforts mesurés. Lorsque l'on soustrait la force liée à l'inertie de la bobine à la force de restitution mesurée, l'inclinaison des courbes disparaît.

2.2.2 Origine de la dissipation

L'origine de la dissipation contenue dans la boucle d'hystérésis provient certainement du frottement sec du ruban dans la gorge, mais la mesure peut-elle s'affranchir du frottement visqueux généré par le roulement supportant l'axe de la bobine ?

Dans des conditions normales de fonctionnement, le moment de friction généré dans un roulement à billes peut être estimé par (source SKF) :

$$M = 0.5\mu Fd \quad (2.33)$$

où M est le moment de friction⁴ (Nmm), μ le coefficient de friction, F la force sur le roulement (N) et d , le diamètre (mm). Il s'avère que l'effet du roulement à billes est donc négligeable.

⁴A.N. : $M \approx 0.01$ Nmm

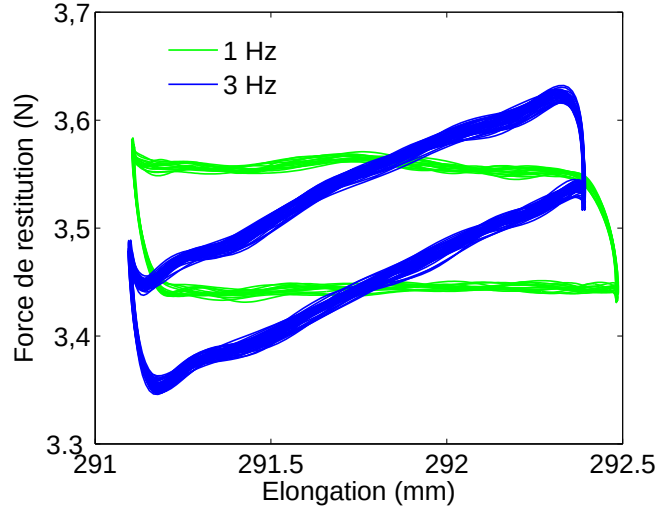


FIG. 2.13 – Influence de l'inertie de la bobine

La raideur dynamique équivalente K_{eq} de la boucle d'hystérésis (Fig. 2.14) sous régime harmonique est tracée en fonction des amplitudes d'élongation sur la Figure 2.15 pour différentes fréquences d'excitation [NJH85].

$$K_{eq} = \left| \frac{F_{max} - F_{min}}{X_{max} - X_{min}} \right| \quad (2.34)$$

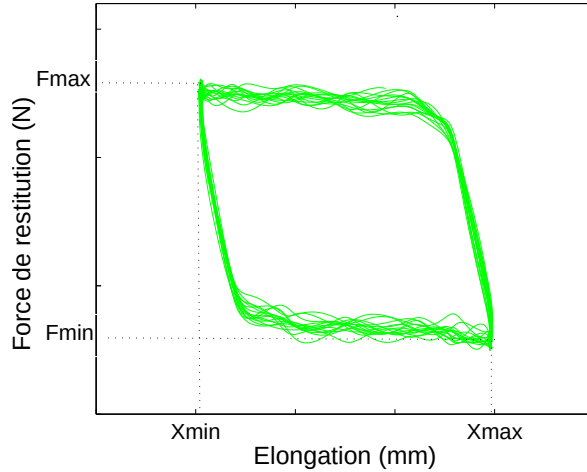


FIG. 2.14 – Représentation physique de la raideur dynamique effective

Le tracé des raideurs équivalentes mesurées K_{eq} sur des boucles pour lesquelles les effets dynamiques ont été soustraits montre une influence négligeable de la fréquence d'excitation. Cela prouve que les effets dissipatifs ne sont pas visqueux et proviennent du frottement sec causé par le contact entre le ruban et la gorge. Ainsi, le comportement de l'actionneur linéaire est équivalent à celui d'un système collé-glissant.

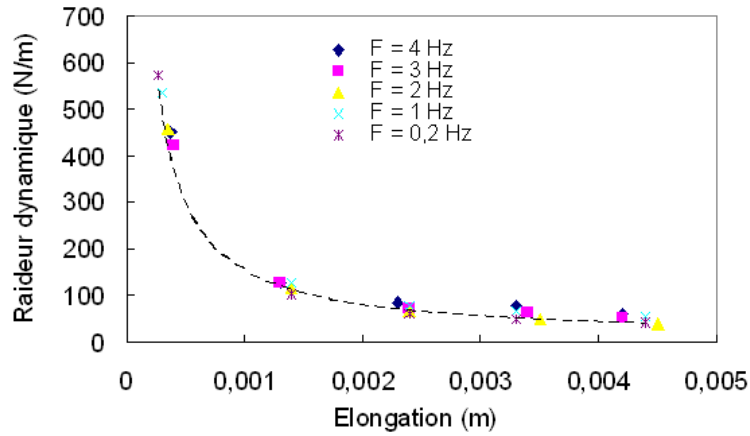


FIG. 2.15 – Raideur dynamique équivalente en fonction de l'élongation pour différentes fréquences forcées

2.2.3 Modèle de force de restitution

La friction peut être modélisée en utilisant la théorie de Coulomb mais celle-ci introduit une discontinuité de vitesse entre le non glissement et le glissement. Un déplacement nul engendre une pente infinie de changement de force. Ainsi, le modèle est suffisant pour de grandes amplitudes de frottement glissant mais il donne une description incomplète du comportement à petites amplitudes. En 1976, Dahl propose un modèle dynamique pour éviter cette discontinuité [Dah76]. Cette modélisation est initialement dédiée à l'étude des systèmes mécaniques avec frottement sec. Quand le glissement est établi, le frottement tend vers une valeur stationnaire. Lorsque le solide adhère, la force de frottement est indépendante de la vitesse de glissement. Celle-ci est traduite par une condition cinématique de vitesse de glissement nulle. Ainsi, le frottement est dépendant de la position et non de la vitesse (à l'instar du modèle de Karnopp).

Al Majid propose une généralisation du modèle de Dahl dans [AMD02]. Ce modèle de force de restitution est décrit par des courbes asymptotes fonction de paramètres tels que la température, la fréquence des oscillations, la déflexion. Il est suffisamment général pour prendre en compte des comportements élastoplastiques, viscoélastiques soumis à des excitations de type choc ou harmonique [AMD00]. C'est un modèle phénoménologique qui lie la force de restitution R au déplacement longitudinal du ruban u dans une équation différentielle du premier ordre dépendant du signe de u :

$$\dot{R} = \beta \cdot \dot{u} \cdot |h - R \cdot \text{sgn}(\dot{u})| \quad (2.35)$$

où β agit sur la pente de l'enveloppe de la boucle d'hystérésis. La fonction affine h borne la boucle d'hystérésis et est définie par :

$$h = \frac{(h_u + h_l) \text{sign}(\dot{u}) - (h_u - h_l)}{2} \quad (2.36)$$

où h_u et h_l représentent respectivement les frontières supérieures et inférieures de la boucle. Le principal intérêt du modèle de Al Majid est de décrire le comportement au travers de

courbes asymptotes [MD04], [MMD05]. Les asymptotes horizontales supérieures et inférieures correspondent à un contact glissant alors que les parties verticales correspondent à un contact bloqué .

2.2.4 Identification des paramètres du modèle

Dans le cas des boucles force-élongation de l'actionneur à ruban, les frontières supérieure et inférieure h_u et h_l peuvent être approximées par des droites (lignes en pointillés sur la Fig. 2.16).

$$\begin{cases} h_l = a_l u + b_l \\ h_u = a_u u + b_u \end{cases} \quad (2.37)$$

Les constantes a_l , b_l , a_u et b_u sont respectivement les raideurs des zones glissantes et les forces initiales de déroulement et d'enroulement. Deux méthodes différentes ont été utilisées pour identifier les paramètres du modèle de Al Majid ; l'une utilisant les énergies dissipées et la régression linéaire, la seconde les polynômes de Chebychev.

Méthode énergétique avec régression linéaire. Un programme de dépouillement, développé sous Matlab, permet l'extraction de nombreuses informations : raideur dynamique effective, énergie dissipée, coefficient d'amortissement équivalent mais également l'identification des paramètres du modèle de Al Majid. Les coefficients des équations des asymptotes sont déterminés par régression linéaire grâce à la méthode des moindres carrés en isolant les points de mesure appartenant aux asymptotes supérieures et inférieures. Le paramètre β est identifié en comparant les énergies dissipées théorique et expérimentale, c'est à dire les aires contenues dans les boucles de force-élongation. L'Équation 2.35 peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dR}{du} = \beta |h - R.sgn(\dot{u})| \quad (2.38)$$

Ainsi, l'intégration analytique de 2.38 pour une vitesse d'élongation négative conduit à :

$$R_u = K_u e^{-\beta(u-(u_0-u_1))} + b_u + a_u u - \frac{a_u}{\beta} \quad (2.39)$$

où R_u est la force d'enroulement. La constante d'intégration K_u est exprimée à partir de la valeur de R_u pour $u = u_0 - u_1$:

$$K_u = \frac{a_l}{\beta} - b_l - a_l(u_0 - u_1) + R_l|_{u=u_0-u_1} \quad (2.40)$$

Une expression comparable est obtenue dans le cas d'une vitesse d'élongation positive, c'est à dire pour une force de déroulement.

L'énergie dissipée issue du modèle E_{mod} correspond à la différence des travaux des forces pour les parties supérieure et inférieure de la boucle :

$$E_{mod} = \int_{u_0-u_1}^{u_0+u_1} (R_u - R_l) du \quad (2.41)$$

$$E_{mod} = \frac{1}{\beta} (e^{-2\beta u_1} (K_l - K_u) + (K_u - K_l) + 2\beta u_0 u_1 (a_u - a_l) + 2\beta u_1 (b_u - b_l) - 2u_1 (a_u + a_l)) \quad (2.42)$$

L'énergie dissipée mesurée E_{exp} est approximée par l'aire comprise à l'intérieur de la boucle force-élongation expérimentale. Cette dernière correspond à l'aire du parallélogramme constitué des courbes enveloppes h_u et h_l de la boucle ainsi que les frontières latérales de la boucle extraites numériquement. Égaler E_{mod} et E_{exp} permet d'identifier la valeur β . Pour le cas traité, $\beta = 35.4$. Introduire dans le modèle 2.35 la dérivée de la deflexion $u = u_0 + u_1 \sin \Omega t$ permet d'obtenir après intégration (Runge Kutta 4), la force de restitution simulée.

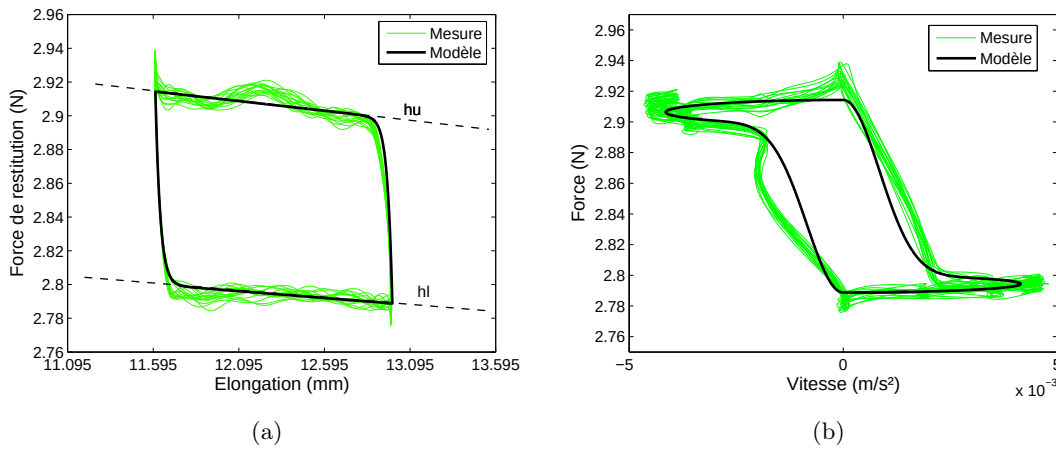


FIG. 2.16 – Boucles de force-élongation et force-vitesse de l'actionneur : mesures et modèle

La Figure 2.16 a) compare la mesure et le modèle pour une boucle de force-élongation. La Figure 2.16 b) donne la réponse du modèle de Al Majid à une vitesse d'élongation sinusoïdale exprimée dans le domaine temporel.

L'influence de l'inertie de la bobine peut être prise en compte par le modèle de Al Majid ce qui correspondrait à une rotation globale des boucles en fonction de la vitesse de cyclage. La Figure 2.17 montre l'évolution des coefficients des droites frontières des boucles en fonction de la vitesse de cyclage. Les pentes des droites correspondent aux raideurs de déroulement et d'enroulement a_l et a_u (Fig. 2.17b) alors que les ordonnées à l'origine correspondent aux forces initiales b_l et b_u (Figure 2.17a).

Un polynôme du second ordre permet d'approximer l'évolution de ces coefficients et de l'implémenter dans la fonction h du modèle de force de restitution afin de prendre en compte la dynamique des bobines. Cependant, dans la suite, pour établir le modèle global du déploiement de l'hexapode, il a été préféré de modéliser cette influence par l'établissement de l'énergie cinétique des bobines.

Méthode avec les polynômes de Chebyshev. La seconde méthode permet l'identification des paramètres en transformant l'équation différentielle en équations algébriques en utilisant les fonctions polynomiales de Chebyshev. Un polynôme de Chebyshev d'ordre n est défini dans l'intervalle $[-1, +1]$ par l'équation $T_n(\tau) = \cos(n \cdot \arccos(\tau))$ et compose une

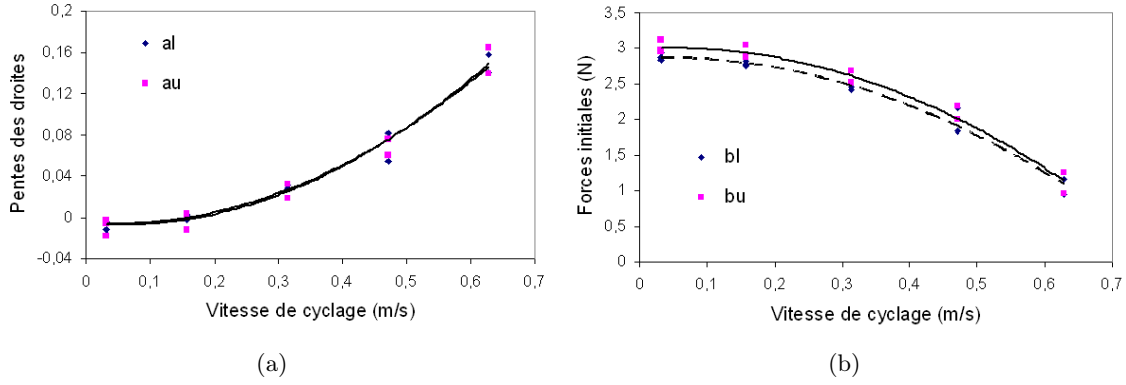


FIG. 2.17 – Évolution des coefficients des droites asymptotiques. a) Raideurs des zones glissantes a_l et a_u b) Forces initiales b_l et b_u

base orthogonale $\{T^n\} = \langle T_0 \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n \rangle^t$. Chaque fonction $x(\tau)$ peut être développée comme suit :

$$x(\tau) = \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle \{T^n(\tau)\} \quad (2.43)$$

La dérivée de chaque polynôme est une combinaison de polynômes d'ordre inférieur :

$$\frac{dT_n}{dt} = \begin{cases} T_0 & \text{pour } n = 1 \\ 2n \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} T_{2m+1} & \text{pour } n \geq 2 \text{ et } n \text{ pair} \\ nT_0 + 2n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} T_{2m} & \text{pour } n \geq 3 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \quad (2.44)$$

Ainsi, la dérivée d'une fonction dans le domaine temporel est :

$$\frac{dx}{dt} = \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle \left\{ \dot{T}^n \right\} = \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle [D] \{T^n\} \quad (2.45)$$

avec D, pour un ordre n pair :

$$[D]_{n \times n} = \frac{2}{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2n & 0 & 2n & 0 & 2n & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Soient deux polynômes $P(\tau)$ et $Q(\tau)$:

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \sum_{k=0}^n p_k T_k(\tau) = \langle P \rangle \cdot \{T^n\} \\ Q(\tau) &= \sum_{k=0}^n q_k T_k(\tau) = \langle Q \rangle \cdot \{T^n\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Leur produit est une combinaison linéaire des polynômes, une propriété particulièrement intéressante pour le traitement d'équations non-linéaires.

$$P(\tau) \cdot Q(\tau) = \sum_{i=0}^{2n} c_i T_i(\tau) \quad (2.48)$$

où

$$c_i = \begin{cases} p_0 q_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j q_j & si \quad i = 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i p_j q_{i-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-i} (p_j q_{j+i} + p_{j+i} q_j) & si \quad 1 \leq i \leq n \\ \frac{1}{2} \sum_{j=i-n}^n p_j q_{i-j} & si \quad i > n \end{cases} \quad (2.49)$$

Ainsi, l'expression de la force de restitution est développée dans une base de Chebyshev. A partir des équations 2.35, 2.36 et 2.37, on obtient :

$$[A \ B \ C \ D \ E] \begin{Bmatrix} \beta \cdot a_l \\ \beta \cdot b_l \\ \beta \cdot a_u \\ \beta \cdot b_u \\ \beta \end{Bmatrix} = \langle F \rangle \begin{Bmatrix} \beta \cdot a_l \\ \beta \cdot b_l \\ \beta \cdot a_u \\ \beta \cdot b_u \\ \beta \end{Bmatrix} = 2 \langle T^n \rangle [D]^t \{R\} \quad (2.50)$$

Avec :

$$\begin{aligned} R &= \langle R \rangle \{T^n\} & u &= \langle u \rangle \{T^n\} \\ A &= (\text{sgn}(\dot{u}) - 1) \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} \langle T^n \rangle \{u\} & B &= (\text{sgn}(\dot{u}) - 1) \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} \\ C &= (\text{sgn}(\dot{u}) + 1) \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} \langle T^n \rangle \{u\} & D &= (\text{sgn}(\dot{u}) + 1) \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} \\ E &= -2\text{sgn}(\dot{u}) \langle T^n \rangle \{R\} \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} \langle F(\tau_i) \rangle \\ \langle F(\tau_{i+1}) \rangle \\ \langle F(\tau_{i+2}) \rangle \\ \langle F(\tau_{i+3}) \rangle \\ \vdots \\ \langle F(\tau_j) \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \cdot a_l \\ \beta \cdot b_l \\ \beta \cdot a_u \\ \beta \cdot b_u \\ \beta \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \langle T^n(\tau_i) \rangle \\ \langle T^n(\tau_{i+1}) \rangle \\ \langle T^n(\tau_{i+2}) \rangle \\ \langle T^n(\tau_{i+3}) \rangle \\ \vdots \\ \langle T^n(\tau_j) \rangle \end{bmatrix} [D]^t \{R\} \quad (2.52)$$

La Figure 2.18 compare les deux estimations du modèle de Al Majid à la boucle force-élongation mesurée.

L'exemple suivant illustre la pertinence du modèle de Al Majid en modélisant les oscillations mesurées sur les enveloppes des boucles. Ces fluctuations en effort traduisent les contraintes générées dans le ruban lorsque celui-ci n'est pas parfaitement aligné et soumis à un déplacement imposé. Ainsi, l'équation de h_u est complétée par une sinusoïde d'amplitude A à déterminer, d'une fréquence angulaire ω et d'une phase ϕ données :

$$h_u = a_u u + b_u + A \sin(\omega u - \phi) \quad (2.53)$$

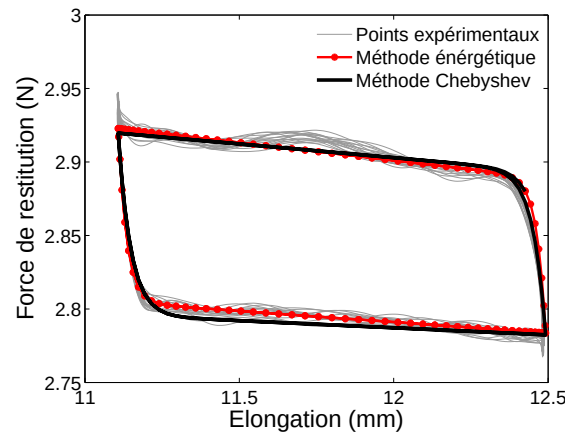


FIG. 2.18 – Comparaison des deux estimations du modèle de Al Majid sur la boucle force-élongation mesurée

L'équation à résoudre devient donc :

$$[A \ B \ C \ D \ E \ G] \begin{Bmatrix} \beta.a_l \\ \beta.b_l \\ \beta.a_u \\ \beta.b_u \\ \beta \\ \beta A \end{Bmatrix} = 2 \langle T^n \rangle [D]^t \{R\} \quad (2.54)$$

avec $G = \langle T^n \rangle \{\dot{u}\} (\text{sgn}(\dot{u}) \sin(\omega u - \phi) - \sin(\omega u - \phi))$

La Figure 2.19 présente la nouvelle corrélation du modèle sur les mesures dans le domaine temporel et sur les boucles force-élongation.

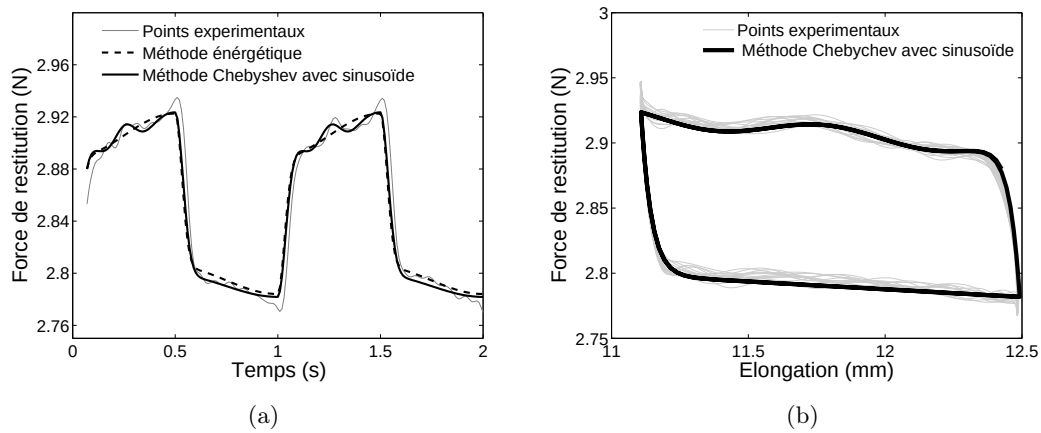


FIG. 2.19 – Comparaison des mesures de la force de restitution au modèle intégrant une sinusoïde a) dans le domaine temporel b) sur les boucles de force-élongation

2.3 Modèle éléments finis équivalent de l'actionneur

Le paragraphe précédent a permis d'établir un modèle de force de restitution de l'actionneur à ruban. Dans cette partie, il s'agit de modéliser, avec la méthode des éléments finis, le ruban incurvé dont une des extrémités est aplatie, car située sur la ligne de tangence avec la bobine. Le modèle éléments finis établi est alors exploité pour déceler le rôle de la zone de transition et pour connaître le contenu modal du ruban.

2.3.1 Rôle de la zone de transition

Les forces d'enroulement et de déroulement de l'actionneur sont constantes lorsque la longueur de ruban déployé est supérieure à la longueur de la zone de transition (Cf. Partie 2.2.1) car engendrées par l'énergie de déformation de la zone de transition. Elles ne dépendent donc pas de la longueur de ruban enroulée dans la bobine qui peut être considérée comme encastrée dans les gorges hélicoïdales. Cette remarque nous autorise à élaborer un modèle éléments finis équivalent de l'actionneur en ne considérant que la longueur déployée à partir de la ligne de tangence du ruban avec la bobine.

Un ruban, initialement non-déformé, est modélisé sous Ansys avec des éléments finis de coque à 8 noeuds. Une analyse non-linéaire, basée sur la méthode de Newton-Raphson, a été réalisée afin d'aplatir son extrémité (Fig. 2.20 a) pour reproduire les conditions aux limites de l'enroulement de celui-ci autour de la bobine. La section de l'une des extrémités du ruban, naturellement courbe, est aplatie en imposant comme champ de déplacement les coordonnées y des noeuds situés sur l'arc. La modélisation d'une telle caractéristique nécessite que le maillage éléments finis de cette zone soit la plus fine possible afin d'éviter le gauchissement des éléments. Le maillage de ce modèle éléments finis est paramétré en fonction de la longueur du ruban afin d'observer l'évolution de la zone de transition en fonction de la longueur déployée. Celle-ci est comparée aux mesures expérimentales présentées dans la Partie 2.2.1 sur la Figure 2.20. On observe une différence de 4 % entre la mesure et le modèle.

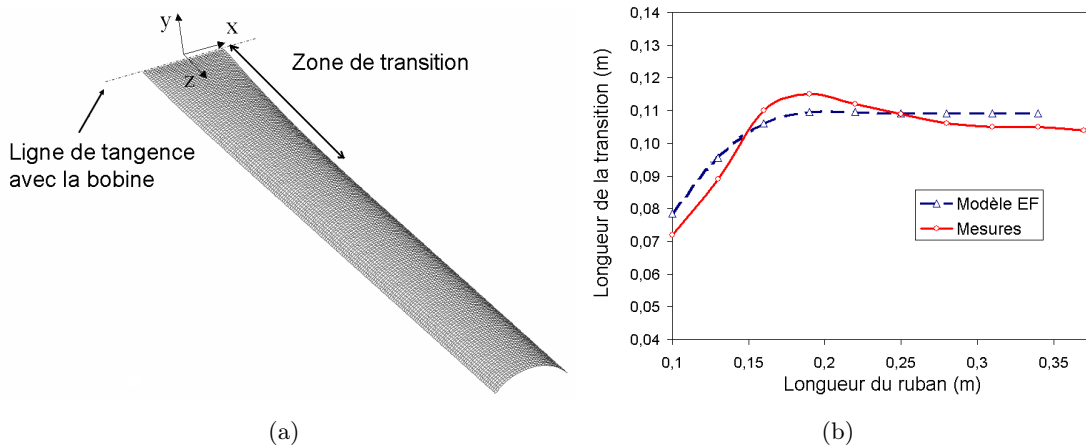


FIG. 2.20 – a) Modèle EF de la zone de transition d'un ruban aplati b) Taille de la zone de transition en fonction de la longueur déployée du ruban

2.3.2 Analyse modale du ruban précontraint de l'actionneur

L'analyse éléments finis non-linéaire réalisée précédemment pour aplatir l'extrémité du ruban conserve les contraintes générées ('stress stiffening'). La Figure 2.21 illustre le moment de flexion résultant et laisse présager l'influence du champ de contraintes imposé. Afin de dissocier l'influence de la géométrie déformée des contraintes résultantes, une analyse modale est réalisée sur un ruban non-déformé, un ruban aplati sans contraintes (c'est à dire en considérant que la géométrie déformée est la géométrie initiale), et un ruban aplati pré-contraint. Leurs fréquences naturelles sont comparées dans le Tableau 2.3 pour un ruban encastré-libre.

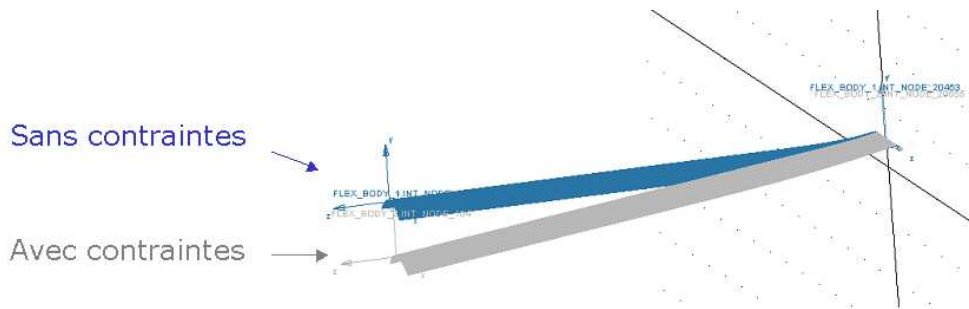


FIG. 2.21 – Influence des contraintes

Mode	Non-déformé	Aplati	Aplati pré-contraint
1 ^{er} Flexion - plan zy	51.9 Hz	4.21 Hz	11.1 Hz
2 nd Flexion - plan zy	239 Hz	201 Hz	203 Hz
1 ^{er} Torsion	22.2 Hz	21.2 Hz	99 Hz
2 nd Torsion	108 Hz	213 Hz	231 Hz
1 ^{er} Flexion - plan zx	252 Hz	113 Hz	135 Hz

TAB. 2.3 – Comparaison du contenu modal d'un ruban non-déformé, un ruban aplati sans contraintes et un ruban aplati pré-contraint

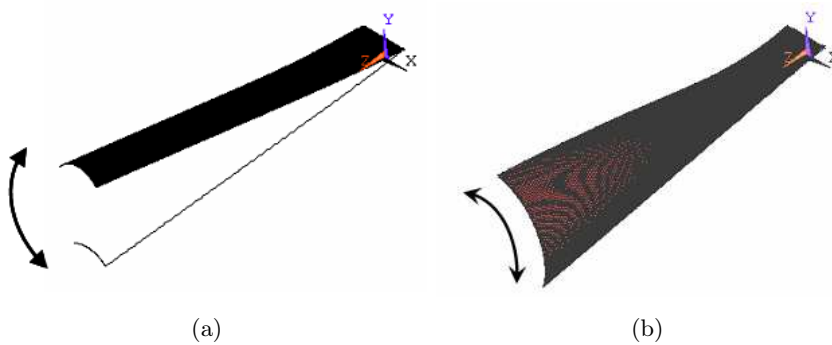


FIG. 2.22 – a) Mode de flexion zy b) Mode de torsion

Les Figures 2.22a et 2.22b illustrent les premiers modes de flexion et de torsion. L'apla-

tissement d'une extrémité du ruban produit une inversion des premiers modes et décroît significativement le mode de flexion hors du plan. Le changement de géométrie n'a pas d'influence sur la fréquence du premier mode de torsion (comparaison entre le ruban non-déformé et le ruban aplati sans contrainte). La prise en considération des contraintes montre le rôle majeur de celles-ci sur le comportement en torsion (augmentation de 21.2 Hz à 99 Hz). Le 1^{er} mode de flexion dans le plan zx , le 2nd mode de torsion et le 2nd mode de flexion hors du plan zy ne sont pas affectés de manière significative par les contraintes. Ainsi, les résultats montrent que la précontrainte générée par l'enroulement rend le ruban globalement plus rigide et est certainement un moyen judicieux de rendre la structure plus stable.

Chapitre 3

Analyse de l'instrument déployé

Où la flexibilité des rubans est intégrée dans la réponse de l'hexapode déployé [ABRD06] [ABA⁺07]. La conception d'un instrument de précision nécessite en effet une analyse fine de sa raideur structurelle dans sa configuration opérationnelle.

Sommaire

3.1	Architecture de l'hexapode	57
3.1.1	Description des liaisons	57
3.1.2	Modélisation de l'hexapode	58
3.2	Analyse modale de l'hexapode déployé	60
3.2.1	Configuration avec lames minces	60
3.2.2	Configuration avec lames épaisses	63
3.3	Capacités de correction de l'hexapode	64
3.3.1	Réponse de la plate-forme avec lames minces à un actionnement vertical q_1	65
3.3.2	Identification des matrices Jacobiennes	67
3.3.3	Dextérité	68
3.3.4	Méthode inverse : prévision de la commande	68
3.4	Discussion sur le choix de la liaison supérieure	70

3.1 Architecture de l'hexapode

3.1.1 Description des liaisons

La cinématique d'une plate-forme de Gough-Stewart, composée de liaisons supérieures sphériques et de liaisons inférieures de type Cardan pour chaque jambe, doit être respectée pour assurer l'élévation la plate-forme. Les deux degrés de liberté en rotation de la liaison inférieure du prototype, présenté dans le Chapitre 1.3.1, sont assurés par l'enroulement du ruban autour de la bobine et par un pivot supportant l'axe de l'enrouleur (Fig. 3.1a). La liaison supérieure est constituée de trois degrés de liberté en rotation afin d'être équivalente à une liaison sphérique sans frottement. Un pivot fournit le premier degré de liberté ; il est relié à une petite lame de connexion dont la flexion satisfait la seconde rotation (Fig. 3.1b). La faible raideur en torsion des rubans permet de fournir le dernier degré de liberté en rotation. Le prototype peut être monté dans deux configurations différentes : l'une avec

des lames de connexion minces souples (épaisseur : 1 mm) et la seconde avec des lames de connexion épaisses (épaisseur : 2 mm) pouvant être considérées comme infiniment rigides par rapport aux rubans. Ces dernières n'assurant plus le degré de liberté de rotation apporté par la flexion des lames, devraient reporter cette fonction sur les rubans flexibles.

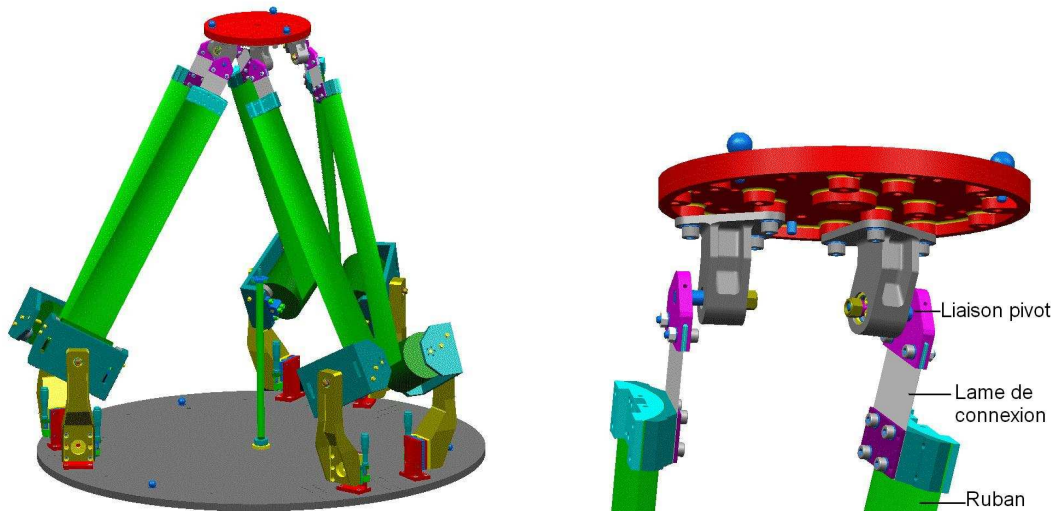


FIG. 3.1 – CAO réalisée avec Catia V4 a) Hexapode à ruban b) Liaison supérieure avec lame de connexion.

Le point de fixation des rubans est situé au centre de torsion du profil du ruban de manière à générer un moment de flexion défini positif (Cf. Partie 2.1.3) et augmenter la résistance du ruban au flambement.

3.1.2 Modélisation de l'hexapode

La modélisation de l'hexapode est réalisée grâce à la combinaison d'un logiciel de dynamique des multi-corps (Adams) et d'un logiciel d'éléments finis (Ansys). Le modèle est composé de deux plate-formes rigides connectées l'une par rapport à l'autre par six jambes flexibles constituées de six paires de lames et de rubans. Les éléments flexibles sont modélisés par importation de leur contenu modal depuis un modèle éléments finis externe grâce à la méthode de synthèse modale basée sur la condensation dynamique de Craig et Bampton. Ainsi, les modèles éléments finis des rubans sont importés dans Adams avec une géométrie aplatie précontrainte. Des joints Cardan et pivots assurent la cinématique de l'hexapode. Des caractéristiques équivalentes de masse et d'inertie sont appliquées à la plate-forme supérieure afin de prendre en compte les composants tels que les vis, roulements, ...

Un bref rappel théorique de la méthode de condensation dynamique est réalisé afin de souligner l'intérêt de son utilisation pour réduire de manière conséquente la taille d'un modèle. Le comportement dynamique de l'hexapode est gouverné par un système de n équations :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur, $\mathbf{F}$, le vecteur des forces extérieures et $\mathbf{u}$, le vecteur déplacement avec $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \dots \mathbf{u}_n]^T$ contenant n degrés de liberté (*ddl*).

L'hexapode à rubans est une structure flexible complexe mettant en jeu de nombreux *ddl*. Afin de réduire la taille du système d'équations, la réduction de Craig-Bampton est appliquée sur chaque élément flexible du modèle pour ensuite assembler ces sous-structures en parallèle. Ainsi, les *ddl* sont divisés en *ddl* de contour u_B , et en *ddl* intérieurs, u_I , de la manière suivante [CB68] :

- La première étape du changement de base consiste à encasttrer les *ddl* de contour afin de conserver les modes du système homogène conservatif. Une troncature modale est ensuite réalisée pour aboutir à :

$$\mathbf{u}_I = \Phi_{IN} \cdot \mathbf{q}_N \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{q}_N$ les coordonnées modales des premiers modes normaux m issus des conditions encasttrées, et Φ_{IN} la matrice modale tronquée. La qualité de l'expansion modale est bien sûr liée au nombre de modes retenus.

- Dans un second temps, les modes statiques sont obtenus en reliant les *ddl* internes aux *ddl* de contour au moyen de la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IC} \\ \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

ce qui aboutit à :

$$\mathbf{u}_I = -\mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IC} \mathbf{u}_B \quad (3.4)$$

Ainsi, la relation entre les *ddl* physiques et la base de Craig-Bampton est :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{IN} & \Phi_{IC} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ sont les matrices identité et zéro. L'équation 3.5 traduit le passage d'un petit jeu de coordonnées modales, q , à un plus grand jeu de coordonnées physiques, $\mathbf{u}$. Afin d'utiliser la base modale de Craig-Bampton dans la simulation du système dynamique, les modes de Craig-Bampton sont ortho-normalisés. Les précontraintes générées par l'extrémité aplatie du ruban sont prises en compte dans la matrice de raideur de l'Equation 3.1.

La Figure 3.2 montre les quatre noeuds de contour d'une lame de connexion et les trois noeuds de contour de l'extrémité supérieure du ruban. Trois autres noeuds de contour sont attachés à l'extrémité inférieure aplatie du ruban. Cinq modes sont retenus dans la base de Craig et Bampton pour chaque lame de connexion et neufs modes pour chaque ruban. Ainsi, l'Equation 3.5 permet de réduire le modèle des lames de 1980 *ddl* à 29 inconnues et celui du ruban de 124230 *ddl* à 45 inconnues. Finalement, le nombre total de *ddl* de l'hexapode est de 444 soit 0.06 % du nombre initial de *ddl*.

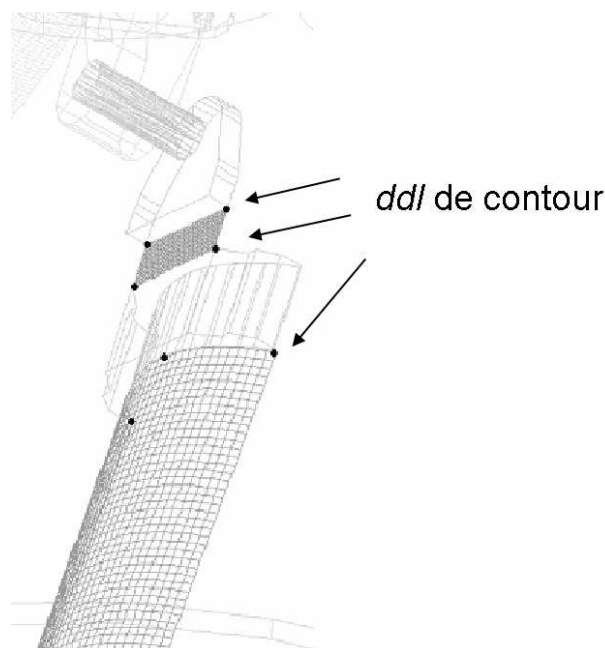


FIG. 3.2 – Position des noeuds de contour du modèle EF réduit sur la liaison supérieure

3.2 Analyse modale de l'hexapode déployé

Le modèle établi avec Adams permet la recherche des fréquences et modes propres par une analyse modale classique.

3.2.1 Configuration avec lames minces

Le Tableau 3.1 présente la prévision des six premières fréquences naturelles de l'hexapode modélisé avec des lames de connexion minces et leurs modes associés. Les deux premiers modes sont les modes de torsion et flexion des lames de connexion. Le mode suivant provient de la torsion des jambes, c'est-à-dire de la torsion combinée des rubans et des lames à 77.3 Hz. L'architecture de la structure repose sur trois couples de jambes montées en opposition deux à deux (Fig. 3.1). Ainsi, la flexion des jambes peut provoquer différents mouvements de la plate-forme supérieure. Selon si les jambes sont en phase ou non, les modes de flexion locaux peuvent produire des modes globaux de pompage, d'inclinaison ou de torsion de la plate-forme (Fig. 3.3).

Les analyses expérimentales ont été pratiquées chez Thalès Alénia Space à Cannes. Le prototype de l'hexapode est équipé avec des lames de connexion minces. Les actionneurs à ruban sont bloqués en position déployée. L'hexapode est soumis à une excitation harmonique imposée par un pot électrodynamique selon les axes vertical et latéraux successivement. Trois accéléromètres tri-axiaux, fixés sur la plate-forme supérieure, permettent de suivre le comportement global de la structure : Un accéléromètre A_1 est placé au centre de la plate-forme et deux autres, A_2 et A_3 , le long des axes x et y (Fig. 3.4). Ces essais d'identification modale ont été menés dans la gamme de fréquence [0-200 Hz].

Différents niveaux d'excitation sont appliqués : dans la direction verticale, trois essais

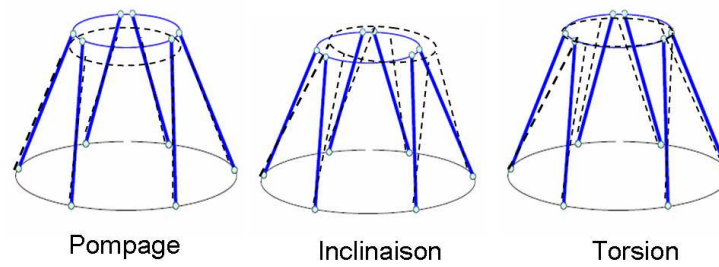
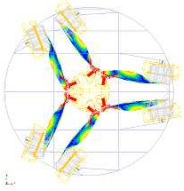
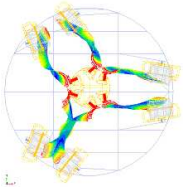
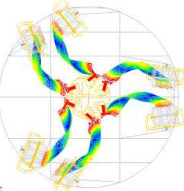
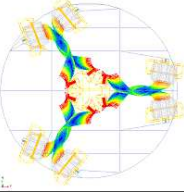


FIG. 3.3 – Modes globaux de pompage, d'inclinaison et de torsion de la plate-forme

Modes	Fréquences naturelles	Modes locaux		Modes globaux de la plate-forme
Mode 1	19 Hz	Flexion des lames		Inclinaison
Mode 2	26.6 Hz	Torsion des lames		Aucun
Mode 3	77.3 Hz	Torsion des jambes		Aucun
Mode 4	97.7 Hz	Flexion des jambes		Inclinaison
Mode 5	141.9 Hz	Flexion des jambes		Torsion
Mode 6	149.5 Hz	Flexion des jambes		Pompage

TAB. 3.1 – Prédiction des fréquences naturelles de l'hexapode avec lames minces

ont été réalisés avec des amplitudes d'excitation 0.239 m/s^2 , 1.180 m/s^2 et 1.350 m/s^2 ; trois autres selon un axe latéral avec des amplitudes de 0.310 m/s^2 , 0.390 m/s^2 et 0.417 m/s^2 et deux supplémentaires selon l'autre direction latérale pour 0.325 m/s^2 and 0.466 m/s^2 . Ces niveaux d'excitation sont faibles et ont pour unique but de permettre la caractérisation modale du prototype. Ils garantissent que rien ne sera endommagé pour de telles charges mais ce ne sont pas des essais de sollicitation. Les signaux des accéléromètres sont traités avec le logiciel MTS Viewer pour visualiser les déformées dynamiques associées aux

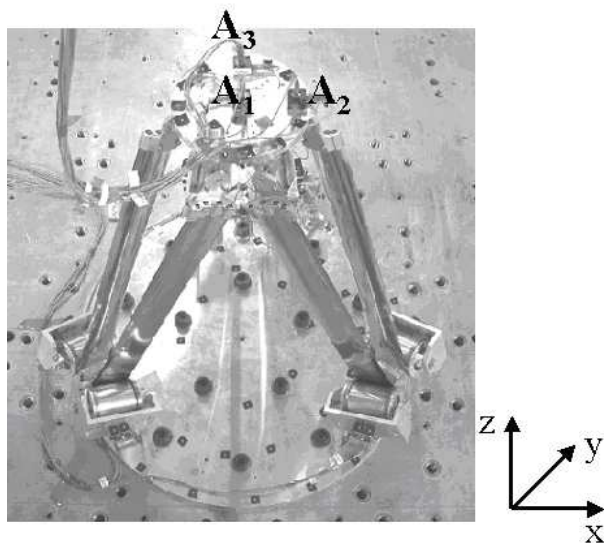
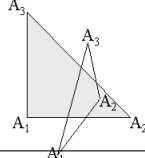
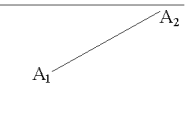
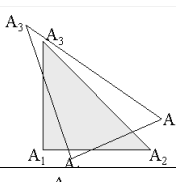
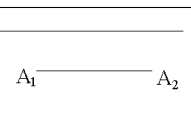
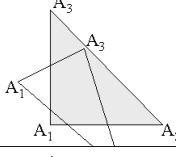
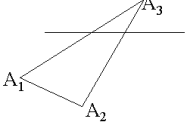
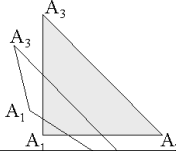
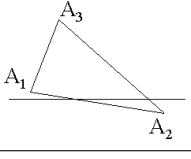
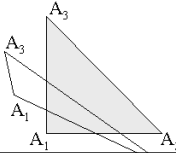
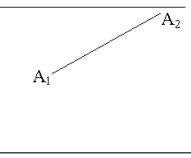
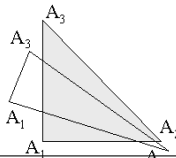
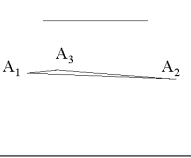


FIG. 3.4 – Montage expérimental avec trois accéléromètres tri-axiaux sur la plate-forme supérieure A_1 , A_2 , A_3

fréquences de résonance mesurées. Ainsi, l'observation des phases associées aux fréquences de résonance permet l'identification des modes. Le Tableau 3.2 présente la comparaison des fréquences calculées et mesurées avec les modes associés.

Dans le Tableau 3.2, la plate-forme supérieure est représentée par un triangle dont les sommets sont les lieux des trois accéléromètres A_1 , A_2 , and A_3 . Les positions non-déformées et déformées sont présentées selon les vues de dessus et de côté. Les essais de transmissibilité montrent que le comportement de l'hexapode en résonance est un couplage des modes naturels de pompage, d'inclinaison et de torsion. La contribution en pourcentage de ces modes est évaluée grossièrement. Certaines fréquences naturelles n'apparaissent qu'avec les niveaux d'excitation les plus élevés.

Des couples d'accéléromètres mono-axiaux sont également fixés sur les rubans et permettent de mettre en valeur des modes locaux à 30 Hz, 53.6 Hz, 80.3 Hz et 130 Hz. Les signaux provenant de deux accéléromètres placés sur la largeur d'un ruban et présentant des phases opposées sont représentatifs de modes locaux de torsion des rubans. Les modes locaux de flexion sont identifiés en comparant les signaux provenant de deux rubans adjacents dos-à-dos. Quelques disparités dans les fréquences naturelles sont observées ; elles sont vraisemblablement introduites par des jeux ou erreurs d'alignement du prototype mais également par les hypothèses de modélisation (le contact dans les liaisons, la masse des accéléromètres sont négligés). Les fréquences mesurées à 46.7 Hz et 55 Hz ne sont, par exemple, pas reproduites dans le modèle. Toutefois, la comparaison des résultats expérimentaux et numériques globalement satisfaisante permet de valider le modèle de l'hexapode équipé de lames minces.

Fréquences mesurées sur la plate-forme le ruban		Participation des modes globaux	Vue dessus 	Vue de côté 	Modes calculés
17.8 Hz	Aucune	80% Inclinaison 15% Torsion 5% Pompage			Mode 1 (19 Hz)
Aucune	30 Hz	mode local de torsion des rubans	Aucun	Aucun	Mode 2 (26.6 Hz)
46.7 Hz	Aucune	70% Pompage 30% Torsion			Aucune
55 Hz	53.6 Hz	50% Inclinaison 50% Torsion			Aucune
80.1 Hz	80.3 Hz	78% Inclinaison 20% Torsion			Mode 3 (77.3 Hz)
96.5 Hz	96.6 Hz	70% Inclinaison 20% Pompage 10% Torsion			Mode 4 (97.7 Hz)
118 Hz	Aucune	60% Pompage 30% Torsion 10% Inclinaison			Mode 5 (141.9 Hz)
Aucune	130 Hz	Mode local des rubans	Aucun	Aucun	Mode 6 (149.5 Hz)

TAB. 3.2 – Modes et fréquences naturelles mesurés sur l'hexapode avec lames fines.

3.2.2 Configuration avec lames épaisses

Les lames épaisses remplacent les lames minces dans le modèle Adams de l'hexapode. Ainsi, la première fréquence naturelle de l'hexapode provient de la torsion des rubans. De la même manière que précédemment, les modes suivants font intervenir la flexion des rubans et sont responsables de la stabilité de la plate-forme.

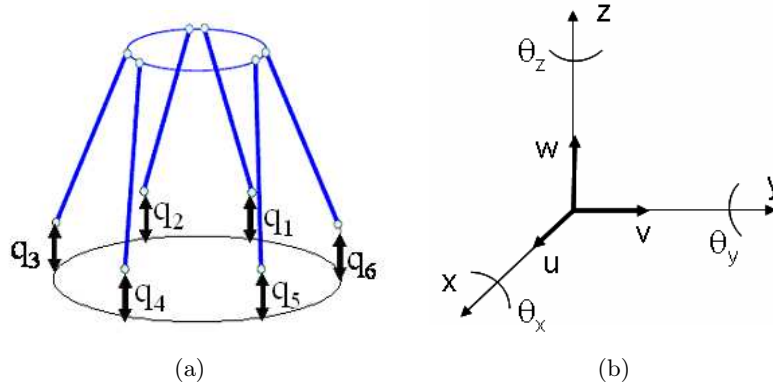
L'analyse montre que l'augmentation de l'épaisseur des lames améliore significativement le contenu modal de l'hexapode qui est plus élevé et plus condensé. La première fréquence, initialement située autour de 19 Hz augmente à 63.9 Hz. Des études réalisées par Thalès Alénia Space révèlent que, dans le cas d'une utilisation de l'hexapode comme un télescope

Fréquences	Modes	Mouvement de la plate-forme
63.9 Hz	Torsion des rubans	Aucun
106.6 Hz	Flexion des rubans	Inclinaison
120 Hz	Flexion des rubans	Pompage
124.4 Hz	Flexion des rubans	Torsion

TAB. 3.3 – Fréquences naturelles calculées de l'hexapode avec lames épaisses

Cassegrain pour une mission de synthèse d'ouverture optique par exemple, la déviation la plus critique pour la qualité de l'image serait le défocus donc directement dépendant du mode de pompage. Avec un mode de pompage décalé à 120 Hz, le prototype exhibe donc des propriétés intéressantes en terme de rigidité structurelle, d'autant plus que la masse de la plate-forme supérieure est représentative de celle d'un miroir secondaire M_2 équipé.

3.3 Capacités de correction de l'hexapode

FIG. 3.5 – a) Concept de poignet actif b) Composantes de X

Le concept de "poignet actif" permet de déplacer la plate-forme supérieure selon six degrés de liberté et donc de corriger les erreurs de déploiement du miroir secondaire situé sur celle-ci grâce au déplacement vertical des pieds. En robotique, un hexapode est caractérisé cinématiquement par la connaissance de la matrice Jacobienne $\mathbf{J}_{[6 \times 6]}$ [Mer97]. Elle relie les vitesses d'excursion $\dot{\mathbf{q}}$ aux vitesses généralisées de la plate-forme $\dot{\mathbf{X}}$.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.6)$$

Autrement dit, soumis à une commande, le **déplacement vertical des actionneurs** représenté par $\delta \mathbf{q}$ génère une variation de position linéaire de la plate-forme $\delta \mathbf{X}$:

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (3.7)$$

avec $\mathbf{X} = \{U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$ et $\delta \mathbf{q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4, \delta q_5, \delta q_6\}^T$.

Le but de cette partie est d'identifier la matrice Jacobienne de l'hexapode pour chacune de ses configurations, en utilisant le modèle élastique linéaire Adams, afin d'étudier ses capacités de correction. La base de l'hexapode est équipée de six plaquettes de positionnement micrométriques supportant les jonctions inférieures et jouant le rôle de six actionneurs 1-D verticaux avec une course maximale de 16 mm et une résolution de $20\text{ }\mu\text{m}$. Ceux-ci autorisent le déplacement vertical des actionneurs à ruban de l'hexapode déployé alors que la longueur des rubans est fixe (actionneurs à ruban bloqués), Fig. 3.6. La position de référence est l'hexapode déployé avec tous les actionneurs 1-D verticaux à mi-course. Il convient de préciser qu'une résolution de $20\text{ }\mu\text{m}$ n'est pas représentative d'une version spatialisable; elle ne suffirait pas pour une application optique finale mais est suffisante pour démontrer la faisabilité du prototype de démonstration.

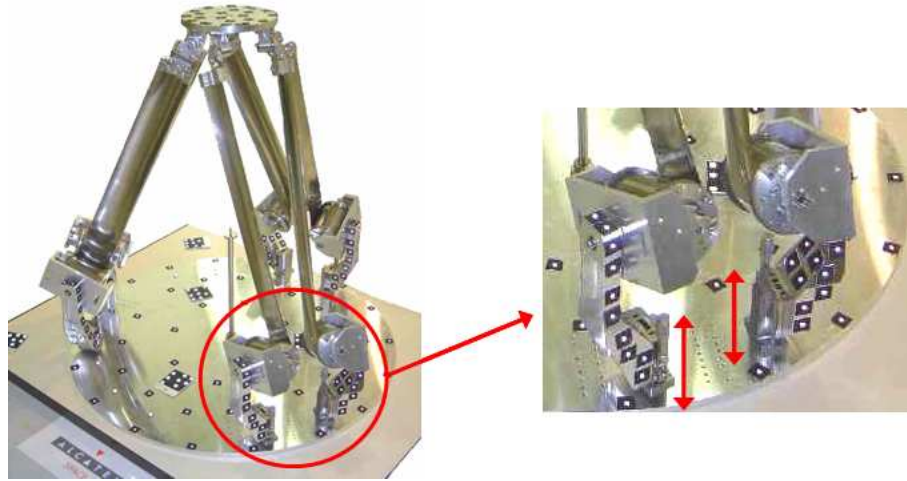
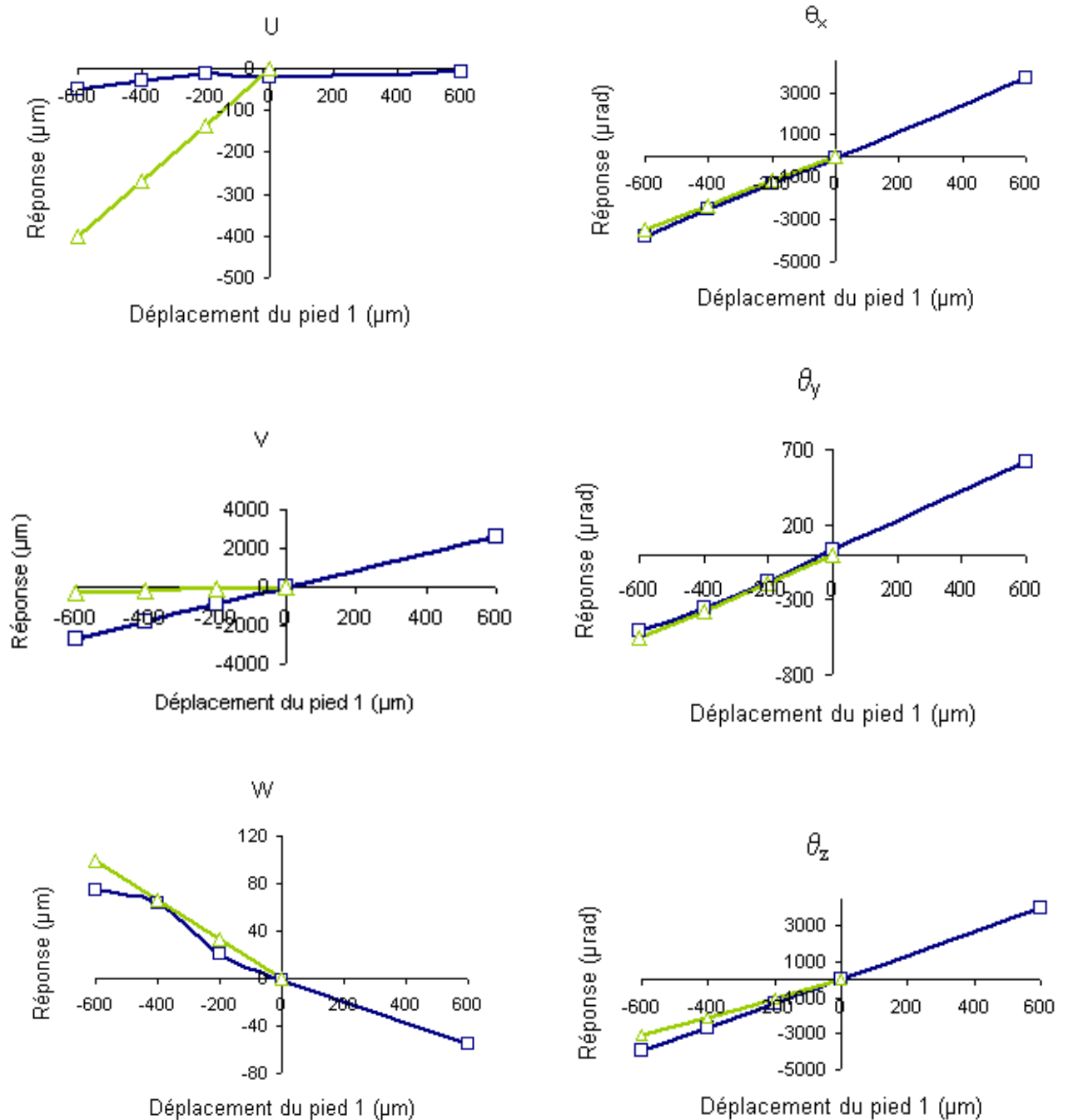


FIG. 3.6 – Hexapode prototype avec plaquettes de positionnement micrométriques pour le déplacement vertical des actionneurs à ruban

3.3.1 Réponse de la plate-forme avec lames minces à un actionnement vertical q_1

Il s'agit d'évaluer la réponse de la plate-forme supérieure de l'hexapode à un déplacement vertical q_1 de l'un des pieds. Des déplacements de $-600\mu\text{m}$, $-400\mu\text{m}$ et $-200\mu\text{m}$ sont successivement appliqués au pied n°1 de l'hexapode. La réponse de la plate-forme à ces consignes est mesurée selon les six degrés de liberté par photogrammétrie. Cette technique autorise des mesures de précision sans contact (quelques microns à l'échelle). Des photos du prototype équipé de cibles réfléchissantes sont prises à partir de positions distribuées uniformément autour de celui-ci. Les caractéristiques optiques des appareils photos employés permettent une mesure précise à $10\text{ }\mu\text{m}$. A partir du principe de triangulation, un algorithme convertit les images 2D en objets 3D. Des champs de prise de vue supérieurs à 30 degrés sont recommandés pour permettre une bonne triangulation des cibles. Ainsi, les séries de photos ont permis de reconstruire les déviations résultantes par rapport à la position déployée initiale.

De la même manière, le modèle développé et présenté au paragraphe 3.1.2 permet de prévoir le déplacement de la plate-forme à un actionnement vertical. Les résultats calculés sont comparés à ceux de la mesure dans le Tableau 3.4.



TAB. 3.4 – Réponses prédites [△] et mesurées [□] des six degrés de liberté de la plate-forme

Dans la gamme des déplacements considérés, la réponse de chacun des degrés de liberté de la plate-forme confirme la relation linéaire entre la base et la plate-forme prévue par l'Eq. 3.7. Les amplitudes des déplacements selon U sont très faibles par rapport aux autres

directions et proches de la précision de mesure. Cette remarque permet d'expliquer le comportement d'hystérésis présent selon la direction U . De plus, la corrélation entre la mesure et le calcul des déplacements dans les directions U et V est mauvaise avec des ordres de grandeur différents. Des jeux dans le système de blocage des actionneurs ou le frottement dans les liaisons sont vraisemblablement responsables de ces écarts importants.

3.3.2 Identification des matrices Jacobiennes

A partir de la réponse à la consigne de déplacement d'un seul pied, les résultats obtenus ont été extrapolés à la struture complète. Ainsi, on peut déduire les réponses des autres pieds par le biais d'une matrice de rotation en considérant une géométrie parfaite avec des plans de symétrie et une invariance à 120° . La réponse de la plate-forme à six déplacements verticaux de chacun des pieds permet d'identifier les matrices Jacobiennes $\mathbf{J}^p$, $\mathbf{J}^m$ et $\mathbf{J}^e$ respectivement celle mesurée du prototype, et celles calculées de l'hexapode équipé de lames minces ou épaisses avec l'Equation 3.7.

$$\mathbf{J}^p = \begin{bmatrix} 0.029 & 0.295 & -3.859 & 3.927 & 3.599 & -3.956 \\ 4.326 & -4.484 & -2.331 & 2.742 & -2.240 & 1.787 \\ -0.160 & -0.265 & -0.260 & -0.209 & -0.2850 & -0.216 \\ 6.058 & -6.324 & -4.287 & 2.882 & -2.333 & 3.317 \\ 0.923 & 0.586 & 4.781 & -6.011 & -5.738 & 5.147 \\ 6.571 & -6.733 & 6.782 & -7.553 & 6.717 & -6.851 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{J}^m = \begin{bmatrix} 0.672 & 0.672 & -0.712 & 0.040 & 0.040 & -0.712 \\ 0.434 & -0.434 & 0.365 & 0.799 & -0.799 & -0.365 \\ -0.166 & -0.166 & -0.166 & -0.166 & -0.166 & -0.166 \\ 5.163 & -5.163 & -3.390 & 1.773 & -1.773 & 3.390 \\ 0.934 & 0.934 & 4.004 & -4.938 & -4.938 & 4.004 \\ 5.831 & -5.831 & 5.831 & -5.831 & 5.831 & -5.831 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} 0.671 & 0.671 & -0.705 & 0.034 & 0.034 & -0.705 \\ 0.427 & -0.427 & 0.368 & 0.795 & -0.795 & -0.368 \\ -0.162 & -0.162 & -0.162 & -0.162 & -0.162 & -0.162 \\ 5.070 & -5.070 & -3.351 & 1.719 & -1.719 & 3.351 \\ 0.942 & 0.942 & 3.920 & -4.862 & -4.862 & 3.920 \\ 5.719 & -5.719 & 5.719 & -5.719 & 5.719 & -5.719 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Les six colonnes des matrices Jacobiennes résultantes correspondent aux six jambes de l'hexapode alors que les six lignes représentent les coordonnées généralisées de la plate-forme. La Figure 3.7 montre la position des actionneurs par rapport au repère de référence xy . La comparaison de la Jacobienne identifiée expérimentalement $\mathbf{J}^p$ avec la Jacobienne calculée $\mathbf{J}^m$ souligne à nouveau la mauvaise prévision des déplacements selon U et V (lignes 1 et 2 des matrices).

La formulation analytique des matrices Jacobiennes est décrite en détails dans [Laz97] et [HWI02]. Elle est donnée pour un hexapode constitué de jambes rigides basé sur le même principe de "poignet actif" pour corriger la plate-forme au moyen de consignes verticales

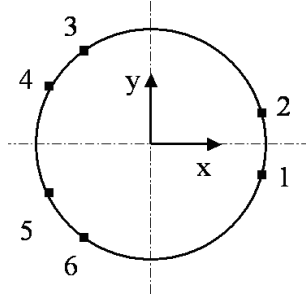


FIG. 3.7 – Numérotation des pieds de l'hexapode

de la base. La matrice Jacobienne permet de caractériser la précision minimale que doivent avoir les capteurs internes du robot pour obtenir une erreur donnée sur les coordonnées généralisées. La détermination des erreurs de positionnement maximales, par exemple pour toute posture d'un robot dans un espace de travail donné, est un sujet d'étude important. Par exemple, dans le cas du robot Delta [Cla91], Clavel a étudié de manière systématique les erreurs de positionnement de la plate-forme en fonction des erreurs articulaires.

3.3.3 Dextérité

Plus l'axe d'un robot est de grande dimension, plus il peut provoquer une erreur d'amplification. Ce facteur d'amplification est quantifié par le nombre de conditionnement [Mer06] défini ainsi :

$$\kappa(\mathbf{J}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (3.11)$$

avec $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$, les valeurs singulières maximum et minimum de la Jacobienne. Une valeur singulière est la racine carrée d'une valeur propre de $(\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{J}^{-1}$.

$$1 \leq \kappa(\mathbf{J}) < \infty \quad (3.12)$$

La matrice $\mathbf{J}$ est dite bien conditionnée lorsque le nombre de conditionnement est proche de 1 et mal conditionnée, c'est-à-dire proche des singularités, lorsque $\kappa(\mathbf{J})$ s'éloigne vers l'infini. κ est un indicateur de la qualité des performances du manipulateur en regard de la transmissibilité des efforts et des vitesses. Il qualifie ainsi la dextérité du mécanisme qui peut être considérée comme sa capacité à réaliser de petits déplacements dans son espace de travail à partir d'une position donnée. Le prototype présente un nombre de conditionnement relativement bon : $\kappa_e = 35.37$ et $\kappa_m = 35.21$ avec les lames épaisses ou minces. Dans les deux configurations, l'hexapode semble loin des singularités lorsqu'il est déployé. La raideur des lames n'a pas d'influence sur le nombre de conditionnement.

3.3.4 Méthode inverse : prévision de la commande

La connaissance des matrices Jacobiennes permet de caractériser cinématiquement le comportement de l'hexapode. Une position arbitraire $\delta \mathbf{X}$ du centre d'inertie de la plate-forme déployée est considérée. Celle-ci est contenue dans l'espace de travail de l'hexapode de

manière à simuler une erreur de déploiement. Soit ce vecteur $\delta\mathbf{X}$ contenant les coordonnées généralisées de la plate-forme :

$$\delta\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -705.1 \cdot 10^{-6} \\ 299.5 \cdot 10^{-6} \\ 300.1 \cdot 10^{-6} \\ -0.962 \cdot 10^{-3} \\ 0.333 \cdot 10^{-3} \\ -1.500 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

L'inversion de l'Equation 3.7 permet la prévision des consignes de déplacements $\delta\mathbf{q}$ pour corriger la position de la plate-forme. Les ordres de commande des pieds sont calculés pour chacune des configurations avec lames minces et épaisses : $\delta\mathbf{q}_m$ et $\delta\mathbf{q}_e$. La matrice Jacobienne d'un hexapode avec des liaisons sphériques et universelles parfaites et des jambes infiniment rigides est également établie. Celle-ci sert de référence pour calculer les ordres de commande $\delta\mathbf{q}_r$ d'une structure non-flexible. Le Tableau 3.5 présente les consignes de déplacement $\delta\mathbf{q}_r$ et le pourcentage d'erreur avec la prévision des configurations à lames minces et épaisses.

$\delta\mathbf{q}_r(\mu m)$		% d'erreur par rapport à $\delta\mathbf{q}_r$	
		Lames minces	Lames épaisses
q_1	-676.5	-0.114	-1.330
q_2	-528.2	-0.030	-0.913
q_3	33.3	0.013	-0.943
q_4	-43.5	-0.065	-1.294
q_5	-390.0	-0.128	-1.557
q_6	-205.2	0.001	-0.745

TAB. 3.5 – Comparaison des consignes de déplacement pour corriger la position de la plate-forme : configuration avec jambes rigides, lames minces et lames épaisses.

Les consignes de correction des pieds de la configuration avec lames minces sont plus proches de la configuration rigide que celles avec lames épaisses. En effet, il convient de remarquer qu'il existe un rapport variant de 12 à 750 sur les erreurs entre les lames minces et épaisses. Cela signifie, d'une part, que la conception de la liaison supérieure avec des lames de connexion est bien équivalente à une liaison sphérique (Cf. Section 3.1). D'autre part, des lames de connexion plus épaisses présentent une différence plus importante par rapport à la configuration avec jambes rigides mais qui reste dans des limites très acceptables. Ainsi, elle ne perturbent pas la cinématique de l'hexapode car le degré de liberté manquant est rattrapé par la flexibilité des rubans sans réduire significativement la capacité de correction.

Pour une future application optique, la précision de positionnement de la plate-forme supérieure atteinte avec le concept de "poignet actif" devra être proche des capacités de correction de l'optique adaptative, c'est à dire, proche de la taille des fronts d'ondes observés par l'instrument (inférieurs au micron pour des fronts d'ondes dans le visible).

3.4 Discussion sur le choix de la liaison supérieure

Deux configurations de la liaison supérieure ont été étudiées. La réflexion s'articule autour de la nécessité de conserver suffisamment de degrés de liberté pour garantir de bonnes capacités de correction de la plate-forme tout en conservant une bonne rigidité de la structure.

Les modèles éléments finis de rubans ont prouvé que les actionneurs à ruban tirent profit de l'aplatissement du ruban lors de son enroulement en le rigidifiant. Le modèle complet de l'hexapode déployé a été validé expérimentalement en comparant les fréquences naturelles calculées et mesurées. Le comportement dynamique modal est grandement influencé par la raideur des lames de connexion. Ainsi, les lames épaisses permettent une meilleure stabilité de la plate-forme supérieure ce qui est essentiel pour la qualité des images du télescope.

La partie 3.3 évalue les capacités de correction de l'hexapode à "poignet actif". Les matrices jacobiennes de chacune des configurations ont été identifiées à partir du modèle d'hexapode développé précédemment. Le critère de dextérité indique que l'hexapode ne présente pas de singularité dans l'espace considéré quelque soit la lame de connexion. La prévision de la commande des pieds de l'hexapode révèle que les lames minces, comme les lames épaisses, présentent une capacité de correction proche de celle réalisée à l'aide d'une liaison sphérique classique. La flexibilité des rubans fournit donc les degrés de liberté nécessaires à la cinématique de l'hexapode. Cependant, les efforts générés dans les liaisons supérieures dans le cas des lames épaisses sont importants et peuvent atteindre 8.7N (1.8N pour les lames minces). Ces valeurs ont été recueillies à partir du modèle de l'hexapode réalisé dans Adams en réaction à l'application de la consigne de déplacement vertical de l'un des pieds. Une attention particulière doit être portée sur ce point de manière à rester en dessous de la limite élastique des éléments flexibles et à ne pas provoquer leur flambage.

Ainsi, la configuration avec des lames épaisses présente l'avantage d'un contenu modal plus élevé en fréquence, ce qui devrait se traduire par un positionnement du miroir secondaire plus précis pour des capacités de correction semblables, mais également par une moins grande sensibilité de la plate-forme aux vibrations pendant la mission. Il convient maintenant d'analyser la pertinence de cette liaison lors du déploiement.

Chapitre 4

Modèle dynamique direct d'une plate-forme de Gough-Stewart

Où il s'agit de développer des outils de prévision du déploiement en s'appropriant la dynamique d'une structure parallèle car le succès de la mission passe, avant tout, par une bonne compréhension du comportement de la structure pendant son déploiement [AAMRD07] [AAMR⁺07].

Sommaire

4.1	Formulation de Lagrange	75
4.1.1	Géométrie de l'hexapode	75
4.1.2	Développement des énergies	76
4.1.3	Équations de mouvement	78
4.2	Formulation récursive de Newton-Euler	80
4.3	Comparaison des deux méthodes	81
4.4	Essais de déploiement	84
4.4.1	Mesure de répétabilité du déploiement	84
4.4.2	Expérience de déploiement en gravité compensée	85
4.4.3	Validation des modèles	89

La recherche sur les hexapodes relève habituellement du domaine de la robotique et se concentre sur l'établissement de modèles géométrique, cinématique et dynamique. Ces différents types de modèles peuvent être établis avec une méthode de résolution soit directe soit inverse. Ils présentent un intérêt pratique évident pour la commande des manipulateurs et sont généralement non linéaires.

Le modèle géométrique

La conception de robots parallèles se base sur l'étude des postures, les modes d'assemblage, le calibrage, la propagation d'erreurs et nécessite l'établissement de modèles géométriques directs (MGD) et inverses (MGI). Le modèle géométrique décrit le déplacement des jambes et de la plate-forme sans tenir compte de la vitesse de déplacement ni des forces et moments qui créent le mouvement. Le MGD est la relation permettant de déterminer les coordonnées généralisées de la plate-forme supérieure, incluant sa position

et son orientation à partir des variables articulaires du robot, c'est à dire les longueurs des jambes. Le MGI est le modèle réciproque.

À l'aide du calcul formel, il est possible de résoudre le MGI de manière explicite en calculant la norme entre les points d'attache des chaînes cinématiques à la base et à la nacelle. Ainsi, le MGI est immédiatement obtenu en écrivant la fermeture de chaîne (Fig. 4.1) :

$$\|B_iO + OC + CA_i\| = \|B_iA_i\| \quad (4.1)$$

Soit

$$w_i = f(\mathbf{v}) \quad (4.2)$$

avec $i = 1, 6$, w_i les variables articulaires et v le vecteur contenant les coordonnées généralisées de la plate-forme $\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)^t$. Selon le type de robot considéré, le MGI conduit à un système de trois à neuf équations quadratiques à plusieurs variables (3 à 9).

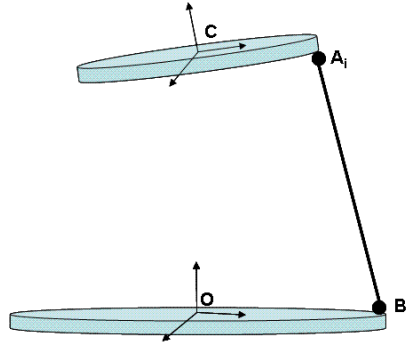


FIG. 4.1 – Géométrie

La construction du MGD n'est possible qu'avec le système d'équations du MGI. Il n'y a que rarement une formulation explicite dans des cas simplifiés (comme le robot Delta [Cla91]). La difficulté du MGD réside dans sa résolution. En effet, pour une position de la plate-forme donnée, on obtient un jeu de variables articulaires qui peut être assemblé de différentes manières. Ces différentes configurations sont appelées modes d'assemblage (Fig. 4.2).

Bien que le calcul de ces modes soit un problème toujours ouvert, on distingue deux approches pour l'aborder :

- déterminer le nombre maximum de solutions puis les solutions
- déterminer l'état effectif de la plate-forme.

Ronga [RV95] a été le premier à établir que le nombre maximum de solutions, complexes et réelles, est de 40 pour une plate-forme de Gough-Stewart. Les méthodes de résolution sont généralement des méthodes numériques itératives. L'établissement d'une formulation polynomiale de degré 40 a été obtenue par [Hus96] mais elle ne permet pas le calcul des coefficients du polynôme sous une forme symbolique (calcul formel).

Lorsque seule la position courante de la plate-forme est nécessaire (comme dans le cas de la planification de trajectoire de la plate-forme), la seconde approche est privilégiée. Cette

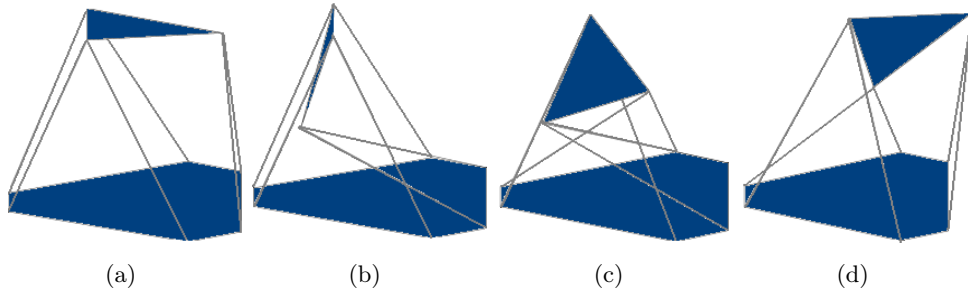


FIG. 4.2 – Exemple de modes d'assemblage pour un manipulateur à 6 ddl avec plate-forme supérieure triangulaire pour un même jeu de longueurs de jambes

approche se base en particulier sur des méthodes numériques qui estiment la configuration courante en recherchant la solution proche d'une configuration connue (ex : méthode itérative de Newton du 1er ordre). Cependant lors d'un calcul par continuation numérique, des sauts entre branches de solutions peuvent se produire à l'insu des concepteurs [Mer96] [CMML96].

Le modèle cinématique

Le modèle cinématique (MC) permet de décrire le déplacement des liaisons et de la plate-forme en fonction du temps sans prendre en compte les forces et moments qui créent le mouvement. Autrement dit, le modèle cinématique direct (MCD) permet de calculer la position, l'orientation et la vitesse de déplacement de la plate-forme vers sa cible, en fonction de la position, de l'orientation et de la vitesse de déplacement de ses liaisons, c'est-à-dire des vitesses d'excursion des actionneurs. Il consiste en la résolution d'un système d'équations non-linéaires dont la solution n'est pas unique.

La notion de modèle cinématique inverse (MCI) permet d'aborder des problèmes de déplacements infinitésimaux qui peuvent être transposés à des études de vitesses instantanées. On peut donc calculer le vecteur de vitesse de l'extrémité en fonction des vitesses des actionneurs. La dérivation par rapport au temps de la relation $\mathbf{v} = f_1(\mathbf{w})$ donne :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial f_1(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \quad (4.3)$$

On désigne par $\mathcal{G}$, la matrice Jacobienne telle que

$$\mathcal{G}(\mathbf{w}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{w}}(\mathbf{w}) \quad (4.4)$$

La relation 4.3 s'écrit alors

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{G}(\mathbf{w}) \cdot \dot{\mathbf{w}} \quad (4.5)$$

Pour un hexapode, $\mathcal{G}$ s'explicite ainsi :

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial w_1} & \frac{\partial v_1}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial w_6} \\ \frac{\partial v_2}{\partial w_1} & \frac{\partial v_2}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial w_6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_6}{\partial w_1} & \frac{\partial v_6}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial v_6}{\partial w_6} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Il s'agit du modèle cinématique direct. Dans la pratique, la résolution du modèle cinématique inverse, sa réciproque, est assez simple. Il s'obtient en dérivant les équations du modèle géométrique inverse et conduit à la détermination de la matrice jacobienne inverse. La difficulté se trouve dans la formule analytique de $\mathcal{G}$ et il est difficile d'inverser $\mathcal{G}^{-1}$.

Le modèle dynamique

Le modèle dynamique (MD) permet de décrire le déplacement des liaisons et de la plate-forme en fonction du temps en prenant en compte les forces et moments qui créent le mouvement. L'établissement du MD est nécessaire pour la commande des robots rapides mais sa résolution analytique est complexe. Il est employé dans cette étude pour modéliser le déploiement de l'hexapode. Le modèle dynamique direct (MDD) permet de calculer la position, l'orientation, la vitesse de déplacement, les accélérations cartésiennes et angulaires de la plate-forme, en fonction de la position, de l'orientation, de la vitesse de déplacement, de l'accélération, de la force motrice et du moment moteur aux autres liaisons. Sa réciproque est le MDI, liant les forces articulaires à l'accélération de la plate-forme. La difficulté réside dans la résolution analytique du MDD en raison de la structure à chaîne cinématique fermée et des contraintes cinématiques. Parmi les méthodes développées, trois approches principales se distinguent pour résoudre la dynamique des structures parallèles :

- Le formalisme récursif de Newton-Euler dans lequel chaque pièce du robot est considérée comme un sous-système. Les équations dynamiques résultantes sont un jeu d'équations récursives directes et inverses. Ce formalisme nécessite d'établir les équations du mouvement de chaque corps du système, impliquant l'utilisation de coordonnées articulaires (relatives) [KTF⁺93]. Ainsi, cette méthode permet l'obtention des forces de réaction aux articulations mais est plus difficile à implémenter. Dans le cas d'un robot sériel, une boucle de contrôle simple en temps réel peut être implémentée.
- Le principe des travaux virtuels est plus simple que la méthode précédente mais peut être difficile à utiliser par les transformations cinématiques complexes entre les joints et l'espace de travail.
- L'approche basée sur le Lagrangien requiert un calcul lourd des dérivées partielles du Lagrangien [LS88]. Ce formalisme est intéressant dans la mesure où il ne dépend pas des accélérations articulaires ; il utilise les coordonnées généralisées.

Beaucoup de modèles dynamiques nécessitent d'être simplifiés afin d'être implémentés en temps réel dans des boucles de contrôle. Ainsi, la réduction des temps de calcul a motivé d'autres travaux [KL92], [RB91], [KG04].

Khalil [KG04] a développé un modèle dynamique avec le formalisme de Newton-Euler. Le nombre minimum de paramètres d'inertie définis comme les paramètres d'inertie de base du robot est utilisé pour réduire la complexité du modèle. L'idée est d'écarter les paramètres qui n'ont pas d'effet sur le modèle dynamique en les exprimant en fonction d'autres paramètres.

Les différentes méthodes doivent être retenues selon les besoins de l'application et/ou selon que la dynamique est calculée pour des buts de simulation ou de contrôle.

Ce chapitre présente un modèle dynamique 3D développé avec le formalisme de Lagrange en coordonnées généralisées cartésiennes afin de disposer d'un outil de simulation

pour prévoir et, par la suite, maîtriser le comportement du déploiement autonome de l'hexapode. L'originalité du modèle proposé ici repose sur :

- l'utilisation de six modèles phénoménologiques de type force de restitution décrivant les six actionneurs à ruban libérant leur énergie de déformation.
- l'utilisation de l'approche d'Einstein en calcul tensoriel (convention de sommation sur les index répétés) pour condenser l'écriture des équations.

Il convient de mentionner que les calculs sont développés dans un espace Euclidien avec une base orthonormale, ainsi, les notations covariantes et contravariantes sont confondues et sont placées en indices inférieurs. Le modèle final est comparé à un modèle numérique similaire mais utilisant la méthode récursive de Newton-Euler.

4.1 Formulation de Lagrange

4.1.1 Géométrie de l'hexapode

La modélisation du comportement hystérétique d'un enrouleur à ruban déployable grâce à un modèle de force de restitution a été présenté dans le Chapitre 2. Ainsi, l'hexapode déployable peut être modélisé par une plate-forme supérieure rigide supportée par six forces de restitution représentant les enrouleurs, équipés, par hypothèse, d'articulations sphériques à leurs extrémités. Les lieux d'attache des actionneurs sont les points A_i de la plate-forme supérieure de rayon r et B_i de la base de rayon R avec $i=1,6$ (voir Annexe). S'agissant d'un hexapode, la symétrie cyclique $2\pi/3$ est exploitée. Les points sont définis dans le repère de référence O, z_1, z_2, z_3 . Un repère local C, X_1, X_2, X_3 au centre d'inertie de la plate-forme supérieure est lié à la plate-forme, et le repère C, x_1, x_2, x_3 est colinéaire à O, z_1, z_2, z_3 .

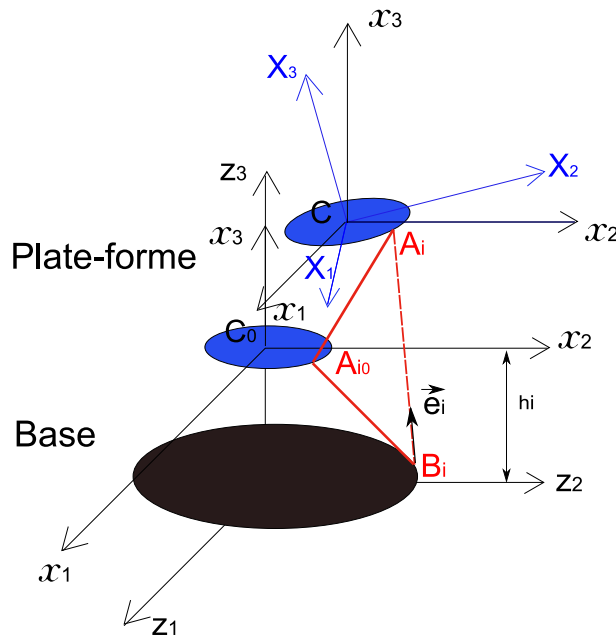


FIG. 4.3 – Définition des repères

4.1.2 Développement des énergies

Un solide rigide libre de se déplacer dans l'espace, nécessite six paramètres indépendants pour être localisé et orienté : trois déplacements d'un point de référence associé au solide et trois angles de rotation d'un repère qui lui est également associé. Ces six paramètres décrivent les coordonnées cartésiennes du solide. Les équations finales du mouvement vont être exprimées à partir du vecteur $\mathbf{v}$ des coordonnées généralisées de la plate-forme :

$$\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)^t \quad (4.7)$$

$\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{x_3}$ sont les angles de Cardan, c'est à dire correspondant aux rotations autour des axes x_1, x_2, x_3 respectivement. Ils sont équivalents aux angles d'Euler lorsque les déplacements angulaires de la plate-forme sont supposés petits. Le Lagrangien est $L = T - U$, T et U étant les énergies cinématiques et de déformation respectivement. $\mathfrak{R}$ est la fonction de dissipation de Rayleigh. Le vecteur Q_l contient les forces généralisées. Le formalisme de Lagrange permet d'aboutir au modèle dynamique.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_l} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{v}_l} = Q_l \quad (4.8)$$

où $l=1,6$. L'indice l correspond à la $l^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{v}$. L'Equation 4.8 peut également être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial v_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{v}_l} \right) + \frac{\partial U}{\partial v_l} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{v}_l} = Q_l \quad (4.9)$$

Avant tout, il convient d'exprimer les énergies de chaque composant de l'hexapode : la plate-forme mue par six actionneurs dont chacun se compose d'une butée de fin de course, d'une bobine et fournit une force de restitution.

Plate-forme

La plate-forme est modélisée par un cylindre supposé indéformable. Le vecteur position du centre C de la plate-forme, u_p , est exprimé dans le repère de référence (O, z_1, z_2, z_3) . Le vecteur x_k définissant la position d'un point M quelconque de la plate-forme, est exprimé dans le repère (C, x_1, x_2, x_3) . A_{pk} est la matrice de rotation entre X_k et x_k . Ainsi, la relation qui lie un point quelconque M dans le repère de référence (O, z_1, z_2, z_3) est définie grâce à la notation tensorielle suivante :

$$z_p = u_p + A_{pk} x_k \quad (4.10)$$

où $p = 1, 2, 3$ et la convention de sommation est utilisée pour $k = 1, 2, 3$. A partir de l'Eq. 4.10, les vitesses sont définies comme suit :

$$\dot{z}_p = \dot{u}_p + \frac{\partial A_{pk}}{\partial \phi_h} \dot{\phi}_h x_k \quad (4.11)$$

avec $p, k, h = 1, 2, 3$. L'énergie cinétique de la plate-forme T_P prend la forme de :

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} \iiint V^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \rho \iiint \delta_{pq} \dot{z}_p \dot{z}_q dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

où δ_{pq} est le symbole de Kronecker. En appliquant la transformation $x_k = A_{ki}^{-1} X_i$ et en prenant en compte l'Eq. 4.11, T_P devient :

$$T_P = \frac{1}{2} \rho (I_1 + I_2 + I_3) \quad (4.13)$$

avec

$$I_1 = \iiint \dot{u}_p \dot{u}_p \mathcal{J} dX_1 dX_2 dX_3 \quad (4.14)$$

$$I_2 = 2 \iiint \dot{u}_p \frac{\partial A_{pk}}{\partial \phi_h} \dot{\phi}_{x_h} A_{km}^{-1} X_m \mathcal{J} dX_1 dX_2 dX_3 \quad (4.15)$$

$$I_3 = \iiint \frac{\partial A_{pk}}{\partial \phi_h} \frac{\partial A_{pl}}{\partial \phi_m} \dot{\phi}_{x_h} \dot{\phi}_{x_m} A_{kn}^{-1} A_{lr}^{-1} X_n X_r \mathcal{J} dX_1 dX_2 dX_3 \quad (4.16)$$

où $\mathcal{J} = |A^{-1}|$. Cette expression contient un terme additionnel traduisant les effets de Coriolis et le couplage des trois rotations ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

Butées de fin de course des actionneurs

Les butées de fin de course sont modélisées par une raideur et un amortissement de contact. Elles sont inactives tant que w_i , le scalaire représentant l'élongation du $i^{ème}$ actionneur, est inférieur à la longueur de déploiement maximale L_{lim} du ruban de l'actionneur. Leur activation se fait au moyen d'une fonction d'erreur *erf*. Ainsi, $\bar{K}_{ii}$ et $\bar{a}_{ii}$, les termes des matrices diagonales de raideur et d'amortissement de la $i^{ème}$ butée s'expriment sous la forme :

$$\bar{K}_{ii} = \frac{1}{2} (K + erf(\sigma_K (w_i - L_{lim}))) \quad (4.17)$$

$$\bar{a}_{ii} = \frac{1}{2} (a + erf(\sigma_a (w_i - L_{lim}))) \quad (4.18)$$

où K et a sont respectivement les raideur et amortissement du contact. Les énergies de déformation U_B et dissipative $\mathfrak{R}_B$ sont fonctions de w_i et $\dot{w}_i$ et s'écrivent :

$$U_B = \frac{1}{2} \bar{K}_{ij} w_i w_j \quad (4.19)$$

$$\mathfrak{R}_B = \frac{1}{2} \bar{a}_{ij} \dot{w}_i \dot{w}_j \quad (4.20)$$

Forces de restitution des actionneurs à ruban

Chaque actionneur est modélisé par une force de restitution R_i orientée selon $A_i B_i$ et appliquée sur A_i (Fig. 4.3). Leur comportement hystérétique est décrit grâce au modèle d'Al Majid, présenté au chap.2.2 et qui repose sur l'équation différentielle suivante :

$$\dot{R}_i = \beta \dot{w}_i (h(w_i, \text{sgn}(\dot{w}_i)) - R_i \text{sgn}(\dot{w}_i)) \quad (4.21)$$

Soit w_{0i} , l'élongation initiale des actionneurs. L'intégration analytique de cette équation conduit à :

$$R_i = e^{-\beta w_i \text{sgn}(\dot{w}_i)} \left(\beta \int_{w_{0i}}^{w_i} h e^{-\beta w_i \text{sgn}(\dot{w}_i)} dw_i + R_{0i} e^{-\beta w_{0i} \text{sgn}(\dot{w}_{0i})} \right). \quad (4.22)$$

avec R_{0i} la force initiale. La masse de chaque actionneur est incluse dans le modèle de force de restitution. Les points d'application des forces évoluent au cours de l'élévation de la plate-forme. Ainsi, l'énergie potentielle résultante U_R est fonction de w_i :

$$U_R = - \int_{w_{0i}}^{w_i} R_i dw_i \quad (4.23)$$

Bobines des actionneurs à ruban

La rotation des bobines, modélisée par des cylindres de rayon r_b , et d'inertie I_b supposée constante, gouverne la longueur déployée des actionneurs. Elle permet de prendre en compte l'aspect inertiel des actionneurs à ruban. Ainsi, l'énergie cinétique T_E dépend de la vitesse d'élongation $\dot{w}_i$ des actionneurs :

$$T_E = \frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} \dot{w}_i \dot{w}_j \delta_{ij} \quad (4.24)$$

4.1.3 Équations de mouvement

Avant d'appliquer les équations de Lagrange, quelques considérations préliminaires sont nécessaires. Les énergies précédentes sont exprimées en fonction de l'élongation des actionneurs w_i . Il convient de les exprimer en fonction des coordonnées généralisées v_i . L'élongation w_i est la projection de $A_{i0} \vec{A}_i$ sur $\vec{e}$ le vecteur unité de $A_i \vec{B}_i$ (Fig. 4.3) et peut ainsi être exprimé en fonction de v_i par le biais de la Jacobienne inverse $\mathcal{G}^{-1} = g_{jl} = \frac{\partial w_j}{\partial v_l}$. Ainsi :

$$w_i = f_i(u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (4.25)$$

L'expression analytique de la matrice Jacobienne inverse g_{jl} est aisée dans le principe. Elle n'en reste pas moins relativement complexe dès que le nombre de degrés de liberté augmente, au point que l'obtention de la matrice Jacobienne $\mathcal{G}_{lj}$ par inversion symbolique est difficile. L'obtention pratique de la matrice Jacobienne repose donc sur une méthode numérique utilisant une procédure classique d'inversion de matrice, relativement coûteuse en temps de calcul. g_{jl} contient des termes non-linéaires qui dépendent de v_i . Le développement des équations de Lagrange fait également intervenir la matrice Jacobienne cinématique inverse $\frac{\partial \dot{w}_j}{\partial \dot{v}_l}$. Il est prouvé que :

$$\dot{w}_j = \frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial w_j}{\partial v_k} \frac{dv_k}{dt} = g_{jk} \frac{dv_k}{dt} = g_{jk} \dot{v}_k \quad (4.26)$$

et

$$\frac{\partial \dot{w}_j}{\partial \dot{v}_l} = \frac{\partial (g_{jk} \dot{v}_k)}{\partial \dot{v}_l} = g_{jk} \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial \dot{v}_l} = g_{jk} \delta_{kl} = g_{jl} \quad (4.27)$$

Les équations 4.26 et 4.27 prouvent que :

$$\frac{\partial w_j}{\partial v_l} = \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial \dot{v}_l} \quad (4.28)$$

Les travaux usuels utilisant les angles d'Euler différencient la matrice Jacobienne de la matrice Jacobienne cinématique [Mer93]. Une attention particulière doit être portée sur l'Equation 4.28 qui les égalisent grâce à l'hypothèse des petites rotations.

Il s'agit d'appliquer les équations de Lagrange par rapport à $\mathbf{v}$, coordonnées généralisées de la plate-forme en prenant en compte la participation des énergies cinétique, de déformation et de dissipation. Les énergies cinétiques aboutissent à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T_P + T_E)}{\partial \dot{v}_l} \right) - \frac{\partial (T_P + T_E)}{\partial v_l} = \left(\bar{M}_{lj} + M_{lj}^b \right) \ddot{v}_j + \left(C_{lj}^c + \left(C_{ljk}^{b1} - \frac{1}{2} C_{lkj}^{b2} \right) \dot{v}_k \right) \dot{v}_j \quad (4.29)$$

où

$$M_{lj}^b = \frac{I_b}{r_b^2} g_{il} g_{ij},$$

$$C_{lkj}^{b1} = \frac{I_b}{r_b^2} (\gamma_{ilk} g_{ij} + \gamma_{ijk} g_{il}),$$

$$C_{lkj}^{b2} = \frac{I_b}{r_b^2} (\gamma_{ikl} g_{ij} + \gamma_{ijl} g_{ik}),$$

avec $\gamma_{ilk} = \frac{\partial g_{il}}{\partial v_k}$, matrice hessienne.

$\bar{M}_{lj}$ sont les termes de la matrice $\bar{\mathbf{M}}$, matrice de masse symétrique et positive et M_{lj}^c les termes de la matrice antisymétrique de Coriolis $\mathbf{C}^c$ de la plate-forme (détaillés en Annexe). L'Equation 4.29 est exprimée grâce aux développements suivants :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T_P + T_E)}{\partial \dot{v}_l} \right) &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{w}_k} (T_H) \frac{\partial \dot{w}_k}{\partial \dot{v}_l} \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} \delta_{ij} \left(\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial \dot{w}_k} \dot{w}_j + \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial \dot{w}_k} \dot{w}_i \right) \frac{\partial \dot{w}_k}{\partial \dot{v}_l} \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} (\delta_{jk} \dot{w}_j + \delta_{ki} \dot{w}_i) g_{kl} \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{I_b}{r_b^2} \dot{w}_i g_{il} \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{I_b}{r_b^2} g_{il} g_{ij} \dot{v}_j \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{I_b}{r_b^2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial v_k} \dot{v}_k g_{ij} \dot{v}_j + g_{il} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v_k} \dot{v}_k \dot{v}_j + g_{il} g_{ij} \ddot{v}_j \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{I_b}{r_b^2} \left(\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial v_k} g_{ij} + g_{il} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v_k} \right) \dot{v}_j \dot{v}_k + g_{il} g_{ij} \ddot{v}_j \right) \\ &= \bar{M}_{lj} \ddot{v}_j + \frac{I_b}{r_b^2} ((\gamma_{ilk} g_{ij} + g_{il} \gamma_{ilk}) \dot{v}_j \dot{v}_k + g_{il} g_{ij} \ddot{v}_j) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (T_P + T_E)}{\partial v_l} &= C_{lj}^c \dot{v}_j + \frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} \frac{\partial}{\partial v_l} (\dot{w}_i \dot{w}_j \delta_{ij}) \\ &= C_{lj}^c \dot{v}_j + \frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} \frac{\partial}{\partial v_l} (g_{ik} \dot{v}_k g_{jm} \dot{v}_m \delta_{ij}) \\ &= C_{lj}^c \dot{v}_j + \frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial v_l} g_{jm} + g_{ik} \frac{\partial g_{jm}}{\partial v_l} \right) \dot{v}_k \dot{v}_m \delta_{ij} \\ &= C_{lj}^c \dot{v}_j + \frac{1}{2} \frac{I_b}{r_b^2} (\gamma_{ilk} g_{im} + g_{ik} \gamma_{iml}) \dot{v}_k \dot{v}_m \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les énergies de déformation donnent :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (U_R + U_B)}{\partial \dot{v}_l} \right) + \frac{\partial (U_R + U_B)}{\partial v_l} = -g_{jl} R_j + K_{lj} v_j \quad (4.32)$$

avec $K_{lj} = \bar{K}_{ik} g_{kl} g_{ij}$. Le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_R}{\partial \dot{v}_l} \right)$ est nul car les actionneurs dépendent du signe de la vitesse d'élongation des rubans. Enfin, grâce à l'Eq.4.28, l'énergie de dissipation donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_B}{\partial \dot{v}_l} &= \frac{\partial}{\partial \dot{w}_j} \left(\frac{1}{2} \bar{a}_{ij} \dot{w}_i \dot{w}_j \right) \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial \dot{v}_l} \\ &= a_{lj} \dot{v}_j \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec $a_{lj} = \bar{a}_{ik} g_{kl} g_{ij}$

Finalement, le déploiement de l'hexapode est gouverné par le système d'équations non-linéaires à coefficients variables, dépendants des coordonnées généralisées $\mathbf{v}$, suivant :

$$M_{lj} \ddot{v}_j + C_{lj} \dot{v}_j + K_{lj} v_j = g_{jl} R_j \quad (4.34)$$

Avec les matrices $M_{lj} = \bar{M}_{lj} + M_{lj}^b$ et $C_{lj} = C_{lj}^c + \left(C_{lj}^{b1} - \frac{1}{2} C_{lkj}^{b2} \right) \dot{v}_k + a_{lj}$ où l'indice l est dévolu à la $l^{ième}$ composante de $\mathbf{v}$ et j au $j^{ième}$ actionneur. Le vecteur $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & mg & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ traduit les effets de gravité qui peuvent être annulés pour simuler un déploiement en apesanteur. Les termes d'inertie dans M_{lj}^b et les effets de Coriolis avec $\left(C_{lj}^{b1} - \frac{1}{2} C_{lkj}^{b2} \right) \dot{v}_k$ font apparaître l'influence de la rotation des bobines dans le système. Ces termes dépendent de la Jacobienne inverse g_{jl} ainsi que la matrice hessienne γ_{jl} et compliquent énormément la résolution du système. En général, selon l'application, l'inertie des vérins peut être négligée dans la mesure où celle de la charge utile est largement supérieure. Son influence est discutée dans [Ji93]. Étant donné le faible niveau d'efforts mis en jeu dans l'hexapode à ruban, l'impact de la masse des bobines sur le déploiement ne peut être négligé.

L'Équation 4.34 est la forme du modèle dynamique inverse car elle exprime les forces de restitution R_i des actionneurs en fonction des coordonnées généralisées v_i . L'expression inverse est nécessaire pour exprimer le déploiement, c'est-à-dire le modèle dynamique direct :

$$\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}(v, \dot{v}) \left(-\mathbf{P} + \mathbf{g}^t(v) \mathbf{R}(v, \dot{v}) - \mathbf{C}(v, \dot{v}) \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{K}(v, \dot{v}) \mathbf{v} \right) \quad (4.35)$$

Les matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{g}$ ainsi que le vecteur $\mathbf{R}$ dépendent de v . Le système est donc auto-paramétrique et n'a pas de solution analytique. En considérant $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})^t$ et sa dérivée $\dot{\mathbf{x}}$, le MDD, système d'équations non-linéaires, peut être mis sous la forme d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 1_{6 \times 6} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1} f \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

L'ensemble de ces équations a été développé en calcul formel sous Maple et implanté sous l'environnement Matlab/Simulink pour sa résolution.

4.2 Formulation récursive de Newton-Euler

Un second modèle dynamique a été réalisé en utilisant des outils conventionnels et implémenté sous SimMechanics (Mathworks Inc.), outil de modélisation de systèmes multi-corps permettant la résolution des modèles directs de structures parallèles grâce à la technique récursive de Newton-Euler. Les équations de Newton-Euler d'un corps rigide sont

basées sur les théorèmes généraux de la dynamique :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a}_G \\ \sum \vec{M}_A = \vec{I}_A \alpha \end{cases} \quad (4.37)$$

avec G le centre de d'inertie du corps, A , un point fixe de ce corps rigide, $\sum \vec{F}$ est la résultante des forces appliquées, $\sum \vec{M}_A$ est le moment résultant au point A , $\vec{I}_A$ est le moment d'inertie au point A , $\vec{a}_G$ est le vecteur d'accélération du centre d'inertie G et α le vecteur d'accélération angulaire du corps.

Les notions de chaîne cinématique et de structure arborescente revêtent une importance capitale dans la résolution des systèmes articulés à chaîne cinématique fermée : pour un système ouvert, la position de chaque élément est définie par rapport à l'élément qui le précède, la récurrence commençant au niveau du repère fixe. Dans le cas de boucles cinématiques, certaines liaisons sont judicieusement coupées pour revenir à une structure arborescente. Des équations de contraintes sont alors associées pour tenir compte des coupures à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, la mise en oeuvre de coordonnées relatives plutôt que généralisées permet de réduire le nombre de contraintes, au prix d'une plus grande complexité d'implémentation. Une formulation récursive, ABM (*Articulated Body Method*), d'une complexité d'ordre N est utilisée pour générer les équations [Fea83]. Elles sont ensuite résolues à l'aide de schémas d'intégration d'équations différentielles.

L'hexapode à actionneurs à rubans a été conçu pour fonctionner de manière similaire à une plate-forme de Gough-Stewart pendant son déploiement. Chacune des six jambes du robot est reliée à la base (ground) par une liaison Cardan passive (universal) et à la plate-forme supérieure rigide par une liaison sphérique passive (Fig. 4.4). Une jambe est constituée de deux corps rigides (Body) de masses négligeables reliés entre eux par une liaison glissière dont la course est régie par le modèle de Al Majid présenté en 2.2 (la masse de chaque actionneur à ruban est prise en compte dans le modèle de force de restitution). A l'instar du modèle précédent, les butées de fin de course sont modélisées grâce à la fonction erreur. La modélisation de l'hexapode est illustrée sur la Figure 4.5.

4.3 Comparaison des deux méthodes

La Figure 4.6 compare l'évolution temporelle du centre d'inertie de la plate-forme au cours du déploiement obtenue avec les approches de Lagrange et de Newton-Euler. La résolution des modèles est réalisée à l'aide du schéma d'intégration à pas de temps adaptatif d'Adams-Moulton.

L'élévation est une translation verticale pure ($\Delta\Theta_x = \Delta\Theta_y = \Delta\Theta_z = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$). La plate-forme met 0.33 s pour se déployer totalement dans un champ de gravité nul ; elle se stabilise ensuite dans sa configuration finale. Le tracé des courbes présente une très bonne corrélation. Les modèles sont effectivement similaires. L'approximation des petits angles faite dans l'approche de Lagrange est justifiée dans la mesure où seul un déploiement 'parfait' est simulé (i.e. un déploiement non-perturbé pour lequel la plate-forme s'élève sans inclinaison). Les équations de Lagrange sont exprimées avec les coordonnées généralisées. L'approche de Newton-Euler travaille, quant à elle, avec des coordonnées articulaires permettant l'obtention des forces et moments de réaction dans les liaisons, information utile

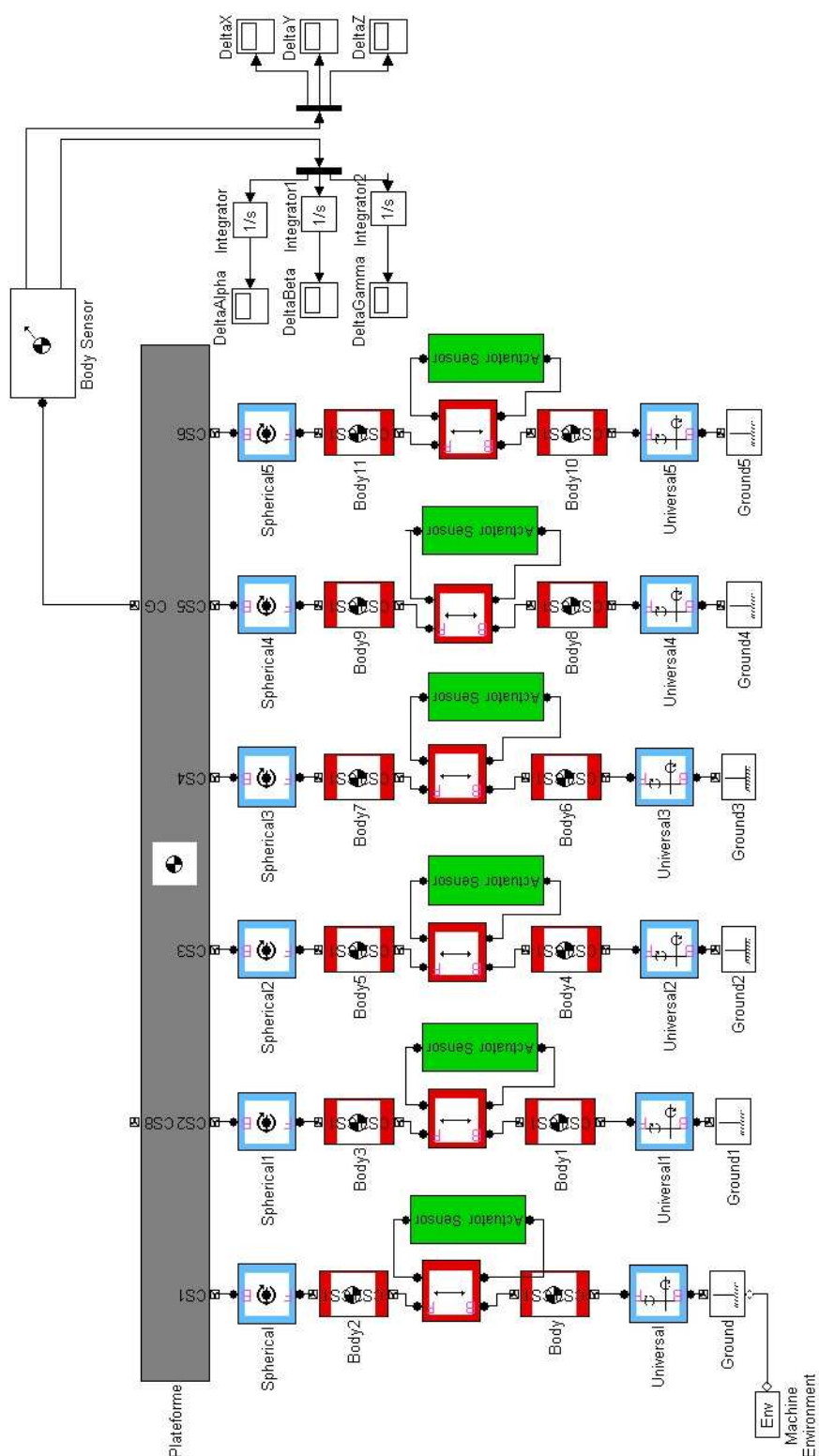


FIG. 4.4 – Modèle de l'hexapode sous SimMechanics

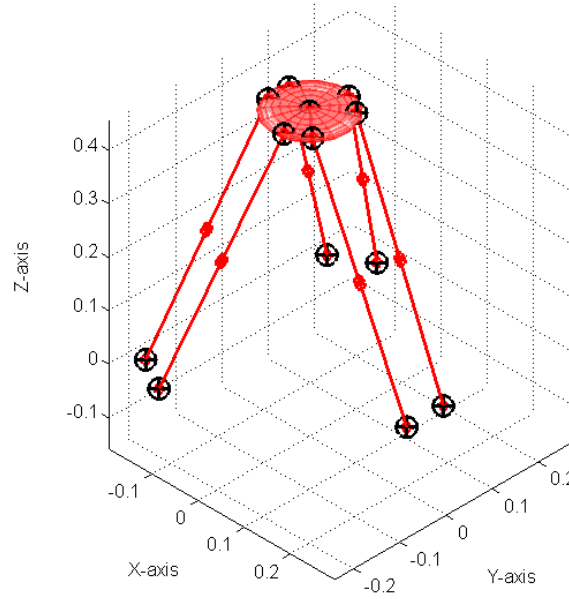


FIG. 4.5 – Schématisation de l'hexapode sous SimMechanics

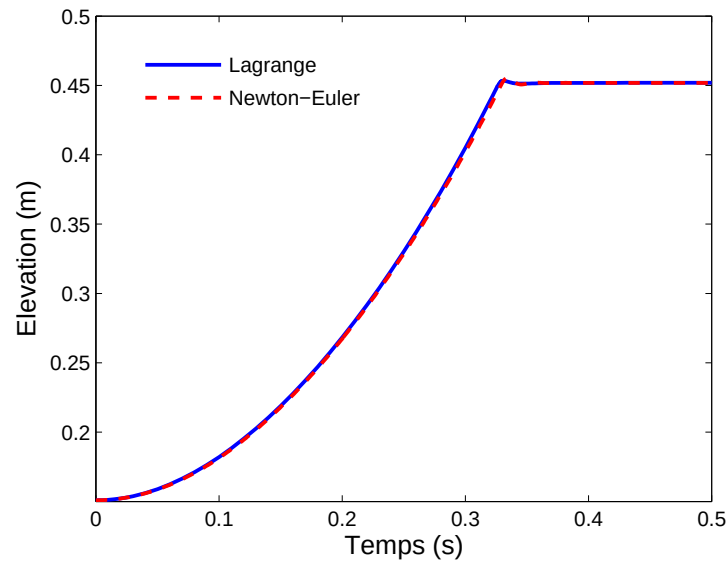


FIG. 4.6 – Élévation du centre d'inertie de la plate-forme en 0 gravité

pour être reliée aux moments critiques de flambage des rubans. Les liaisons inférieures sont supposées sphériques pour le modèle analytique (Lagrange) alors que le modèle réalisé à l'aide de schéma bloc (Newton-Euler) intègre les contraintes liées à la modélisation de liaisons inférieures Cardan. Dans le cas d'un déploiement parfait, cette contrainte cinématique n'a pas d'influence. Des études comparatives [LGF86] ont montré la supériorité en temps de calcul de l'approche de Newton-Euler en coordonnées relatives sur celle de Lagrange en coordonnées généralisées. Dans notre cas, il s'avère que la modélisation des bobines

ajoute des équations algébriques aux équations différentielles rendant le système difficile à résoudre pour le solveur du schéma bloc. Les temps de résolution des deux modèles sont alors quasi-équivalents. Cette comparaison sur un déploiement idéal non-perturbé a permis la validation du modèle de Newton-Euler par Lagrange. Par la suite, le modèle de Newton-Euler sera utilisé car moins restrictif.

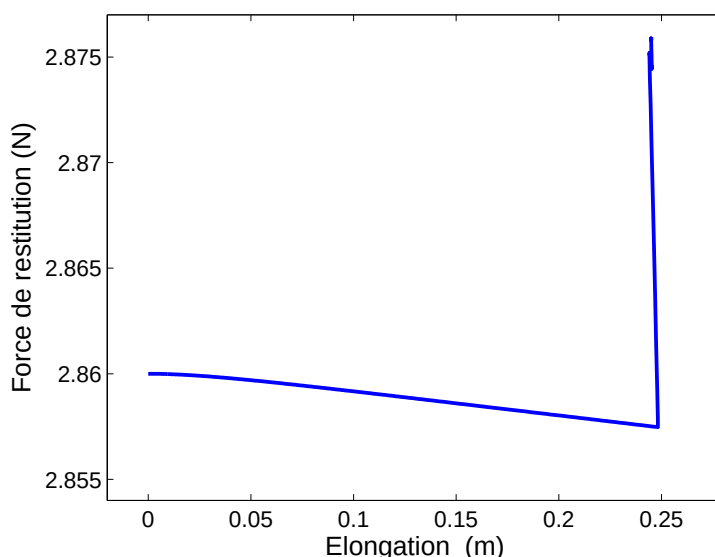


FIG. 4.7 – Force-élongation de l'actionneur n°1 pendant le déploiement

La Figure 4.7 présente la relation force-élongation de l'actionneur n°1 pendant le déploiement. On retrouve l'évolution quasi-constante de la force identifiée expérimentalement en 2.2. Le portrait de phase associé à l'élévation est tracé sur la Figure 4.8 pour le modèle de Newton-Euler. Une décroissance plus prononcée de l'effort permettrait une fin de course plus douce de l'hexapode. Dans cette perspective, il serait souhaitable d'obtenir une vitesse quasiment nulle en fin de course.

4.4 Essais de déploiement

4.4.1 Mesure de répétabilité du déploiement

La répétabilité du déploiement en quasi-statique a été mesurée par photogrammétrie chez Thalès Alenia Space [BFDM05]. Cette méthode a déjà montré son efficacité lors de mesures sur des structures ultra-légères [DEB02] [Bla03] et est donc idéale pour mesurer les erreurs de déploiement du prototype. Des séries de 12 déploiements non-autonomes successifs ont été réalisées avec une régulation de vitesse manuelle. La mesure de leurs positions finales a permis de reconstruire les géométries déployées et les déviations résultantes par rapport au déploiement initial. Les résultats sont reportés dans le Tableau 4.1 pour le prototype équipé de lames de connexion minces ou épaisses.

Les erreurs de déploiement sont incluses dans l'espace de travail de l'hexapode défini lors de sa conception [2 mm ; 2 mm ; 2 mm ; 2° ; 2° ; 3°] ; cela signifie qu'elles pourront être

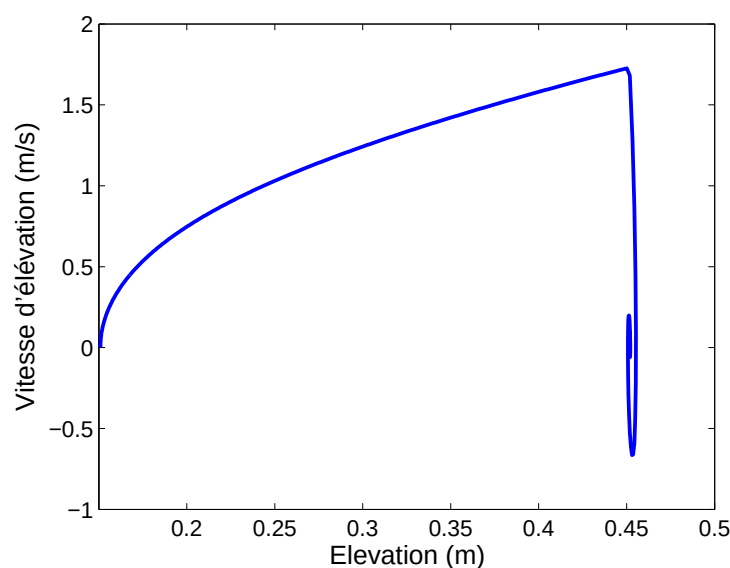


FIG. 4.8 – Portrait de phase durant le déploiement en zéro gravité

Configuration de l'hexapode	Déviations en translation		Déviations en rotation	
	maximales	moyennes	maximales	moyennes
Lames minces	940 μm	710 μm	2 mrad	1.3 mrad
Lames épaisses	240 μm	140 μm	0.7 mrad	0.42 mrad

TAB. 4.1 – Mesures de répétabilité de déploiement

corrigées par les actionneurs verticaux situés à la base. La répétabilité de déploiement de l'hexapode avec lames épaisses est trois fois meilleure que celle avec lames minces.

4.4.2 Expérience de déploiement en gravité compensée

Il s'agit de concevoir un essai de déploiement en gravité compensée afin, d'une part, de valider les modèles de déploiement développés, et, d'autre part, d'appréhender le comportement du prototype en gravité compensée lors d'un déploiement autonome.

Description du montage

L'expérience élaborée utilise des poulies de renvoi pour compenser le poids de la plate-forme avec une masse équivalente. La composante verticale de la force développée par les actionneurs à ruban devient alors suffisante pour déployer l'hexapode. Celui-ci est maintenu en position gérée sur un tube par la tension d'un fil. La hauteur initiale de déploiement peut varier selon la longueur du tube choisi. Une "mise à feu" du fil permet d'assurer un minimum de dispersion des conditions initiales. Ainsi, le fil est brûlé pour initier le déploiement. Les mécanismes de fin de course présents à l'intérieur de chaque enrouleur ont une raideur très importante pouvant provoquer le déraillement des rubans dans leur gorge lors du choc lié à la fin de course. La fin de course de la plate-forme est donc

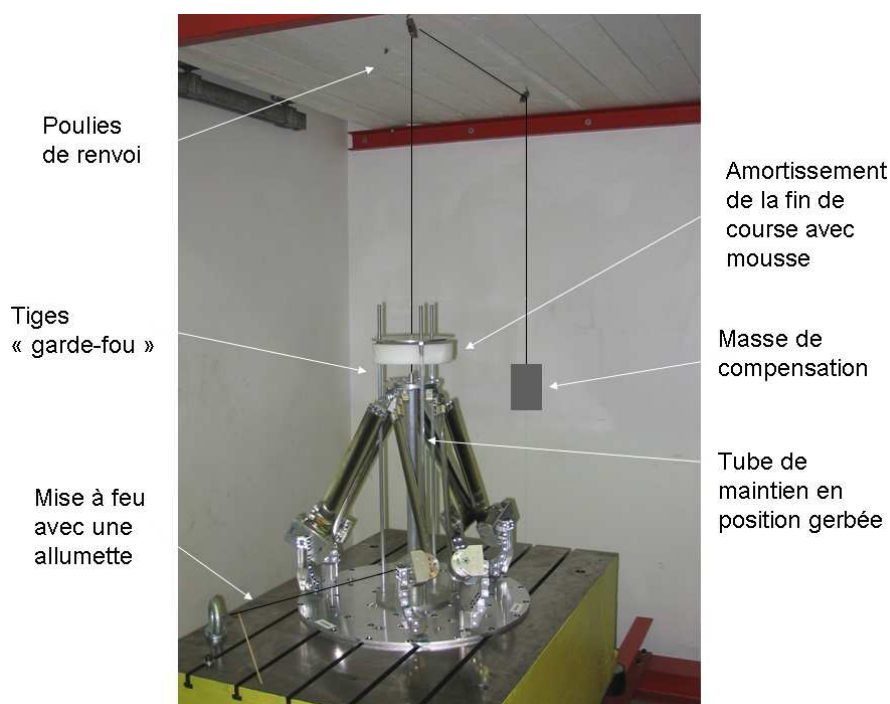


FIG. 4.9 – Expérience de déploiement en gravité compensée

amortie au moyen d'une mousse, l'objet de cette expérience ne concernant que la phase de déploiement et non l'optimisation de la fin de course.

Le prototype est testé avec des lames de connexion épaisses ; celles-ci ayant prouvé leur supériorité d'utilisation dans les études précédentes (voir 3.4). Le suivi de la trajectoire de la plate-forme est assuré grâce à l'utilisation d'une caméra rapide pouvant capturer 1000 images par secondes. L'enregistrement du déploiement est effectué à raison de 250 images par seconde pour conserver une bonne résolution (Cf Fig. 4.10).

L'expérience de gravité compensée telle qu'elle est conçue ne permet pas de reproduire des conditions de déploiement en zéro-gravité. La masse équivalente à celle de la plate-forme permet de compenser le poids de la plate-forme en annulant l'expression de l'énergie potentielle. Cependant, la participation de l'énergie cinétique est, quant à elle, doublée. Ainsi, il convient de doubler la masse de la plate-forme dans les modèles pour reproduire les mêmes conditions que l'expérience. L'influence de la gravité est illustrée sur la Figure 4.11 sur laquelle sont tracées les élévations de la plate-forme, issues du modèle de Lagrange, avec la gravité, avec compensation de gravité (effet de la masse annulé mais inertie doublée) et sans gravité.

Exploitation par corrélation d'images numériques

Le logiciel ICASOFT, développé au sein du laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures [MTMB97], permet la mesure de champ de déplacement sans contact au moyen de la technique de corrélation directe d'images numériques. Initialement, ce logiciel a été développé pour mesurer des contraintes dans la détermination des courbes limites de formage. Il apparaît cependant que son champ d'application est plus important : domaine

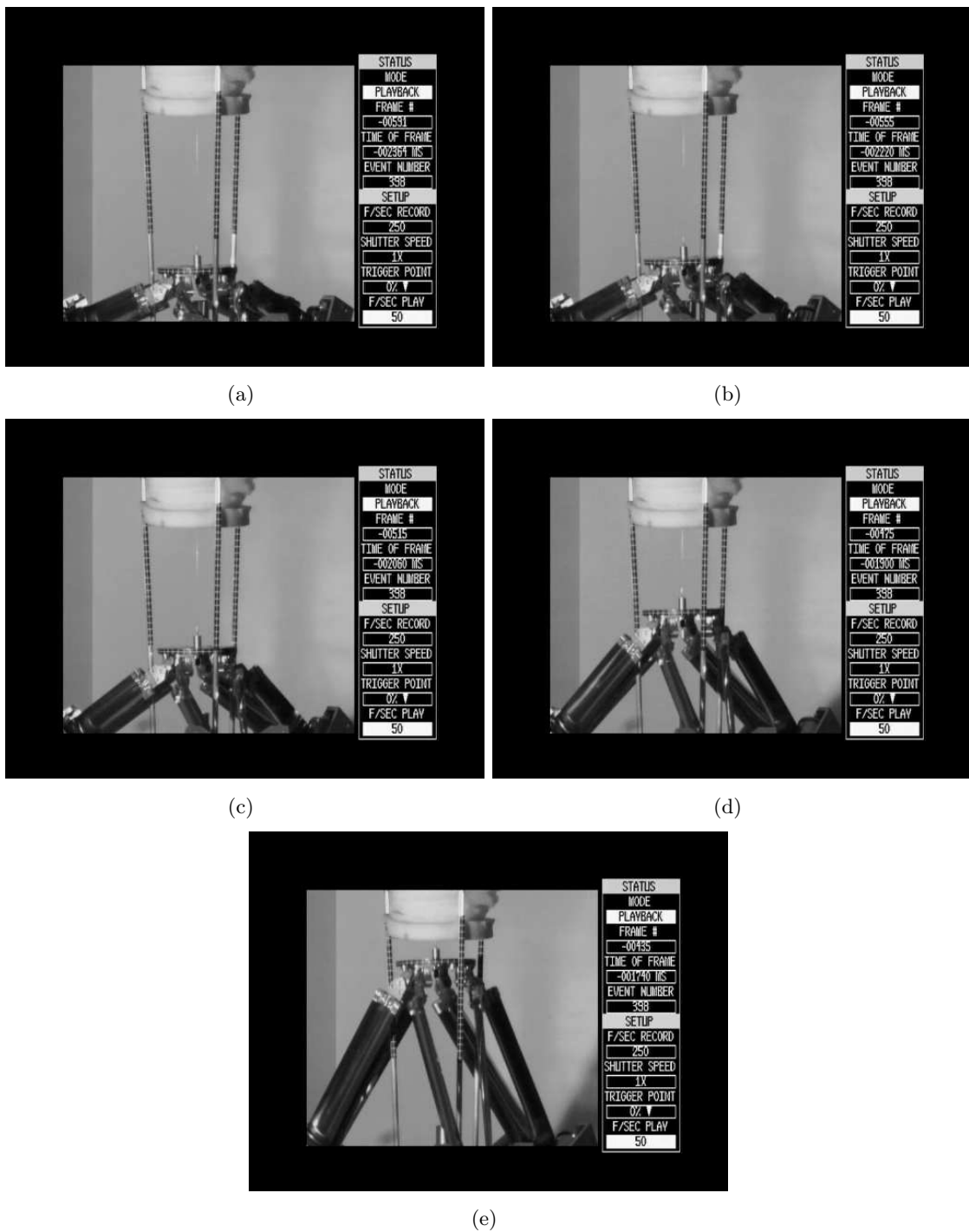


FIG. 4.10 – Séquence de déploiement en gravité compensé : a) b) c) d) et e) représentent une image toutes les 0.144s

biomédical, caractérisation de métaux, déplacement d'un lit de rivière, ...

Cette méthode nécessite au minimum deux images converties en niveaux de gris. La première étant prise comme référence avant la sollicitation et la seconde prise après la sollicitation. Un marquage du périmètre de la plate-forme a été réalisé pour faciliter l'ex-

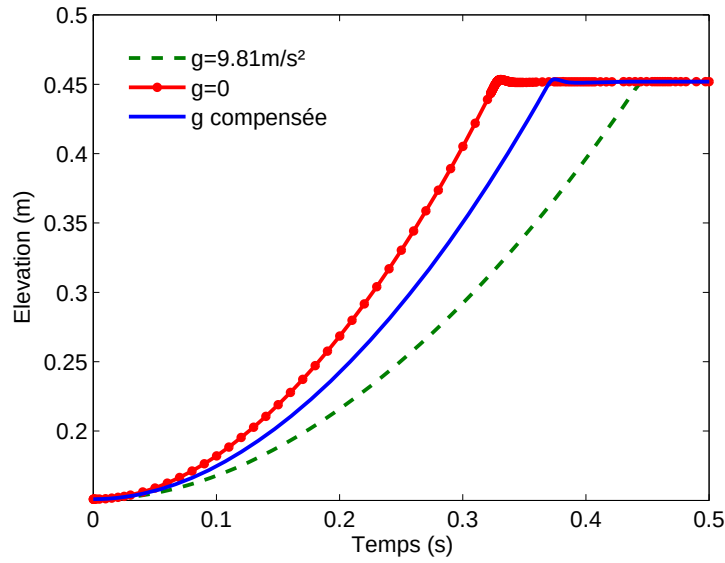


FIG. 4.11 – Elévation de la plate-forme : prévision de l'influence de la gravité sur le déploiement

exploitation des images. Les calculs sont réalisés pour un groupe de pixels dans une zone représentant une portion élémentaire de travail dans l'image. Le champ de déplacement est supposé homogène à l'intérieur. La recherche de la position de la zone de l'image initiale dans l'image finale est effectuée à l'aide d'un balayage vers le maximum de corrélation. Si besoin, la recherche du champ de déplacements est réalisée à l'aide d'une interpolation bilinéaire.

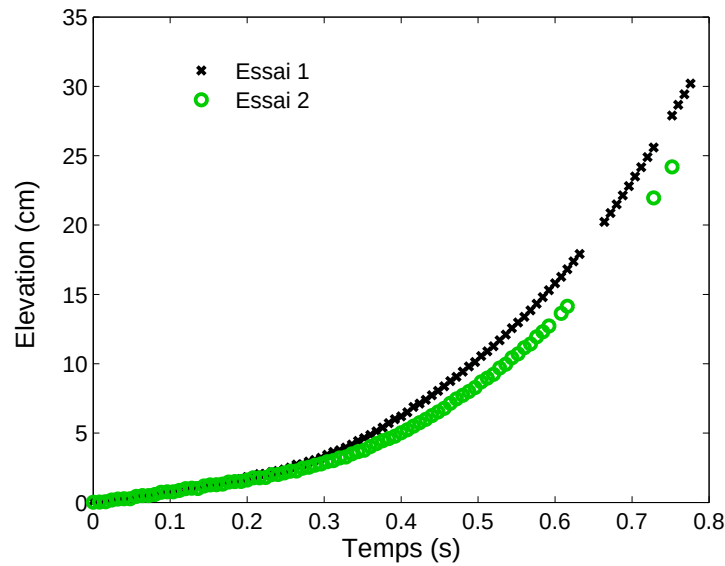


FIG. 4.12 – Mesures temporelles de l'élévation de la plate-forme en gravité compensée

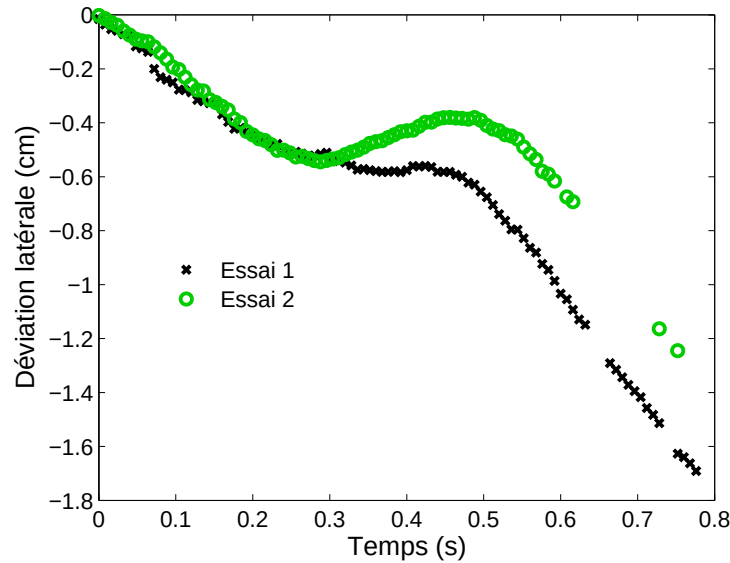


FIG. 4.13 – Mesures temporelles de la déviation latérale de la plate-forme en gravité compensée

Les Figures 4.12 et 4.13 présentent les mesures réalisées sur deux essais consécutifs de déploiement. La résolution des images recueillies n'a pas permis le dépouillement de l'essai 1 jusqu'à la fin de la course de l'hexapode. On peut noter une dispersion d'environ 5% entre les deux essais. Les déviations latérales sont de l'ordre de 1.7 cm. Elles traduisent les défauts d'orientation ou d'alignement des six actionneurs à ruban qui n'exercent pas une poussée parfaitement égale entre eux.

4.4.3 Validation des modèles

Les mesures d'élévation de la plate-forme (Fig. 4.12) présentent des allures proches de celles obtenues avec les modèles (Fig. 4.6). Un décalage des temps de déploiement est malgré tout observé : 0.33s de déploiement simulé contre 0.77s de déploiement mesuré. Ceci s'explique par le fait que les essais de déploiement ont été réalisés sur le prototype équipé de six actionneurs légèrement différents de celui caractérisé dans la Partie 2.2. Ces nouveaux actionneurs ont des rubans plus épais (0.2 mm au lieu de 0.15 mm) pour une même épaisseur de gorge hélicoïdale. La dissipation par frottement sec est donc accentuée et les forces de restitution nettement diminuées (estimation de la réduction à 3/4). Avec ces nouvelles données, les prévisions des deux modèles réalisés sont présentées sur la Figure 4.14 par rapport aux mesures de l'essai de déploiement n°2. La comparaison permet de conclure que les outils développés approximent le comportement de l'hexapode d'une manière satisfaisante.

Cette validation ne peut être menée sur les déviations latérales car le système de compensation de gravité exerce un léger couple de rappel sur la plate-forme lorsqu'elle tend à s'écarter de la verticale. De même, la mesure au moyen d'une seule caméra rapide ne permet d'obtenir que des déplacements dans un plan. Les défauts d'orientation de la plate-forme

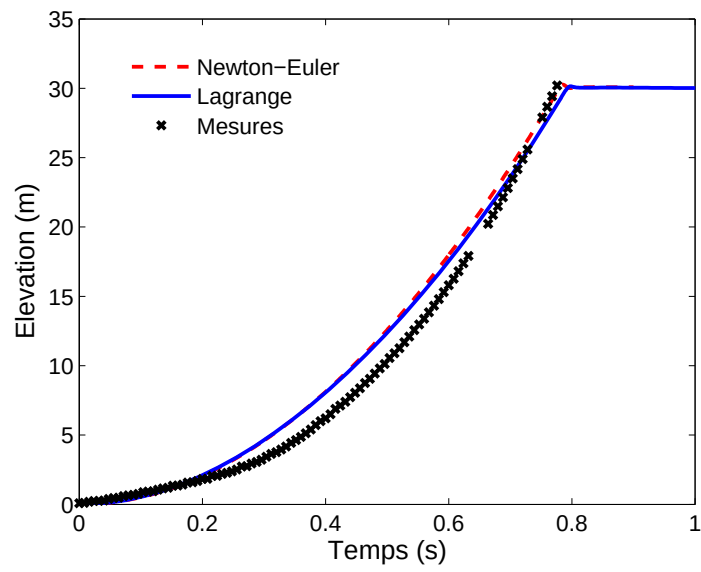


FIG. 4.14 – Elévation de la plate-forme : comparaison modèles/mesures

n'ont pu être estimés.

Chapitre 5

Analyses du déploiement

Où prévoir et maîtriser le comportement d'une structure dans son environnement nécessite l'exploitation des modèles développés afin de prendre en compte les sollicitations extérieures et incertitudes pour tendre vers une connaissance fine de la structure [ARBD07].

Sommaire

5.1	Déploiement sous excitation harmonique	91
5.2	Analyse de sensibilité	94
5.2.1	Plan factoriel complet	95
5.2.2	Conditions de succès du déploiement	96
5.2.3	Modèle de régression de la réponse en Θ_z	97
5.3	Comportement modal au cours du déploiement	98
5.3.1	Étude d'un actionneur à ruban pour différentes longueurs déployées	98
5.3.2	Étude de l'hexapode à différentes longueurs déployées	100
5.4	Introduction de paramètres incertains dans la Jacobienne In-	
	verse	103
5.4.1	Initiation à l'analyse par intervalles	103
5.4.2	Application : recherche de singularité pendant le déploiement . .	105

5.1 Déploiement sous excitation harmonique

En orbite, la structure est exposée aux vibrations générées par les équipements du satellite ou par des déformations thermo-élastiques de basses fréquences (<0.001 Hz). Ainsi, les boucles du système de contrôle SCAO (Système de Contrôle d'Attitude et d'Orientation) se situent typiquement entre 0 et 10 Hz alors que les roues de réactions et machines frigorifiques créent des micro-vibrations au dessus de 10 Hz. Ces perturbations se propagent à travers la structure jusqu'à la charge utile. Même si la plupart de ces vibrations peuvent être réduites lors de la phase de déploiement en mettant certains équipements ou fonctions en veille, il est important de déterminer quel est leur impact sur le processus de déploiement de l'hexapode.

Le modèle de déploiement d'hexapode de Newton-Euler est soumis à une excitation sinusoïdale de la base pour reproduire les sollicitations vibratoires détaillées ci-dessus. Des balayages en fréquence et en amplitude sont réalisés. Les trajectoires d'élévations, qui sont des mouvements transitoires, sont présentées pour une amplitude d'excitation

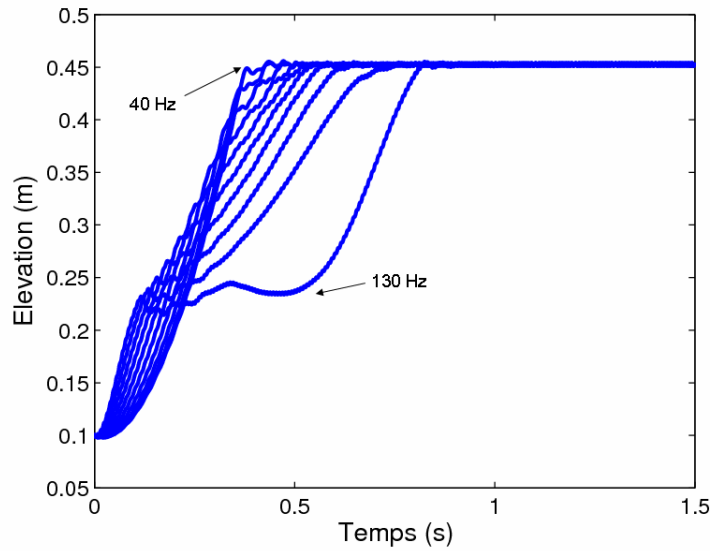


FIG. 5.1 – Élévation de la plate-forme sous une excitation harmonique pour $A = 2.1 \text{ mm}$ et $f = [40 - 130 \text{ Hz}]$ avec un incrément de 10 Hz

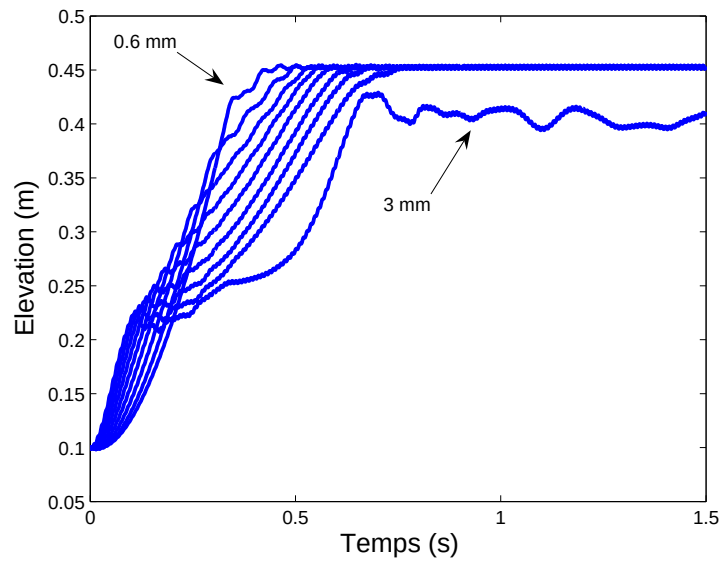


FIG. 5.2 – Élévation de la plate-forme sous une excitation harmonique pour $f = 110 \text{ Hz}$ et $A = [0.6 - 3 \text{ mm}]$ avec un incrément de 0.3 mm

fixée arbitrairement, $A = 2.1 \text{ mm}$, dans une gamme de fréquences $f = [40 - 130 \text{ Hz}]$ (Fig. 5.1) ou pour une fréquence d'excitation fixée arbitrairement $f = 110 \text{ Hz}$ dans une gamme d'amplitude $A = [0.6 - 3.2 \text{ mm}]$ (Fig. 5.2). Le temps nécessaire à la plate-forme pour atteindre la position finale est nommé *durée totale de déploiement*. La Figure 5.1 montre que cette durée totale de déploiement augmente progressivement avec la fréquence jusqu'à ce que le déploiement échoue. Cela signifie que la plate-forme n'atteint plus sa position

finale mais oscille ou s'effondre. Des phénomènes similaires sont observés à fréquence fixe pour différentes amplitudes (Fig. 5.2).

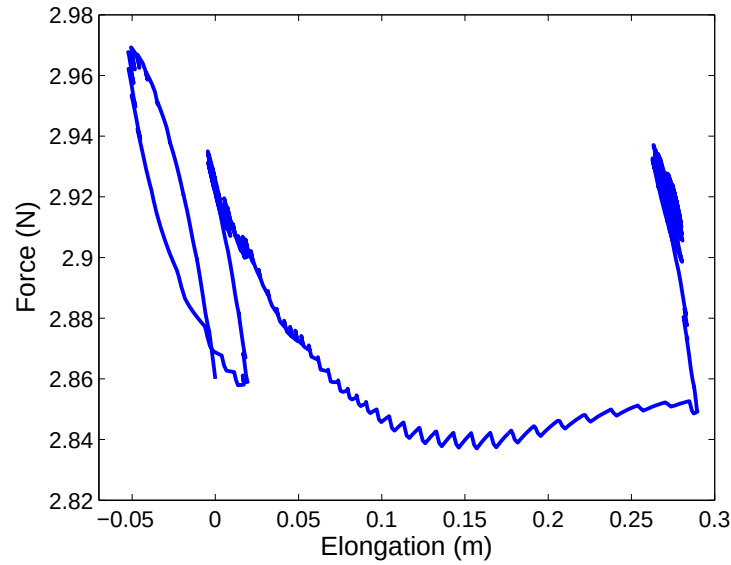


FIG. 5.3 – Réponse force-élongation d'un actionneur pour $f = 110Hz$ et $A = 3mm$

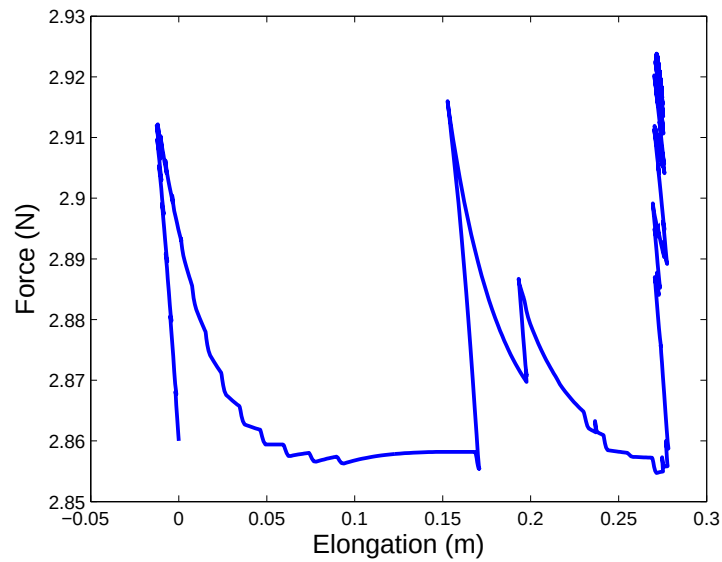


FIG. 5.4 – Réponse force-élongation d'un actionneur pour $f = 70Hz$ et $A = 2.1mm$

Les Figures 5.3 et 5.4 illustrent la réponse force-élongation d'un actionneur pour $f = 110Hz$ et $A = 3mm$ (Fig. 5.2) et $f = 70Hz$ et $A = 2.1mm$ (Fig. 5.1). L'utilisation des modèles de force de restitution permet de capturer la dissipation par frottement sec dans les actionneurs. Cela explique les changements de pente de l'élévation temporelle de la plate-forme.

Le balayage des différentes trajectoires permet d'établir une carte de déploiement (Fig. 5.5). Celle-ci illustre les zones critiques en indiquant les durées totales de déploiement de l'hexapode. Un déploiement de 0.25 s indique une trajectoire parfaite non-perturbée. Les déploiements n'ayant jamais permis à la plate-forme d'atteindre sa position déployée sont représentés par une durée de déploiement nulle (illustrés en bleu foncé). Ainsi, les vibrations de fréquence inférieure à 30 Hz, même de grandes amplitudes, ne sont pas néfastes pour le déploiement. Pour une gamme de 0 à 200 Hz, les vibrations ne doivent pas excéder $230 \mu m$ pour garantir le déploiement. Cela signifie qu'un contrôle des micro-vibrations n'est pas nécessaire pendant le déploiement. Cette conclusion doit être pondérée par le fait qu'une excitation harmonique pourrait provoquer le déraillement des rubans à l'entrée de la gorge des actionneurs.

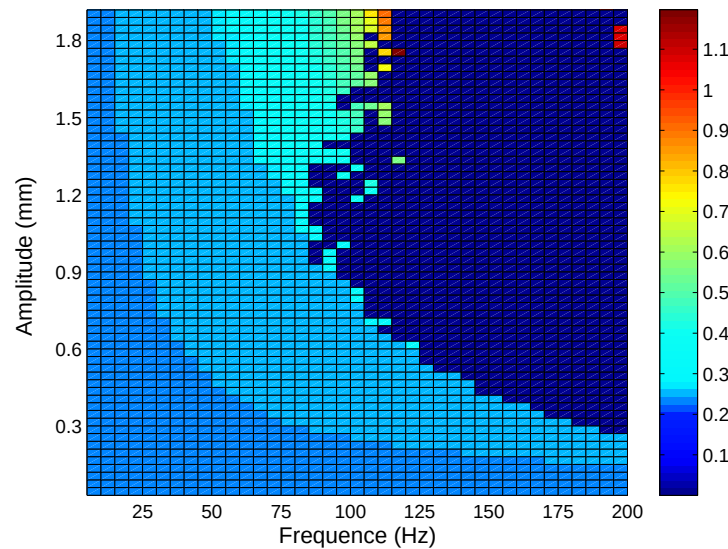


FIG. 5.5 – Durée totale de déploiement de l'hexapode sous excitation sinusoïdale

Cette étude pourra être réalisée avec de réelles spécifications de vibrations d'instruments lors de la conception d'un système utilisant ce type d'hexapode.

5.2 Analyse de sensibilité

Dans le modèle de déploiement, les actionneurs à ruban ont un rôle primordial. Le principal objectif de cette partie est de déterminer quelles tolérances maximales sont autorisées sur ceux-ci sans perturber le déploiement. Aussi, les paramètres du modèle de Al Majid sont légèrement modifiés pour chaque actionneur afin de prendre en compte des incertitudes sur les forces et les raideurs de déploiement des actionneurs. Selon la répartition des perturbations, les effets peuvent parfois se compenser sans perturber l'élévation vers la position finale déployée. Un plan d'expériences est utilisé sur le modèle de Newton-Euler pour déceler les combinaisons critiques de déploiement.

La méthode des plans d'expériences (Design of Experiments DOE) est une approche

connue pour déterminer l'influence des paramètres à partir de campagnes de mesures ([SS91] et [Mon05]). Ces méthodes sont généralement utilisées pour optimiser le nombre d'expériences à mener et comprendre les relations complexes entre plusieurs paramètres à partir de réponses mesurées ou simulées. Elles sont basées sur un outil de régression sur plusieurs dimensions et sur une analyse statistique. Ainsi, pour une grandeur mesurée, cette analyse consiste à diviser la variabilité globale enregistrée en variabilités élémentaires attribuées à chaque paramètre. Un paramètre est considéré comme influent si sa variabilité élémentaire est supérieure à la variabilité résiduelle pondérée d'un facteur de sécurité. Ceci est vrai, à la condition que la variabilité résiduelle soit obtenue en reproduisant plusieurs fois les expériences afin d'en avoir une bonne estimation. Dans cette étude, la méthode des plans d'expériences est appliquée à des simulations numériques. L'estimation de la variabilité résiduelle est donc impossible et une analyse de variance (ANOVA) ne peut donc être réalisée. Ainsi, les influences des paramètres et de leurs interactions seront uniquement estimées à partir du seuil de variabilité. La classification obtenue est utile pour détecter les agencements critiques perturbant le déploiement.

5.2.1 Plan factoriel complet

L'idée d'un plan factoriel réduit a été envisagée en utilisant la symétrie cyclique de l'hexapode pour diminuer le nombre de tests. Cependant, parce que le temps de simulation du déploiement est faible, et que le nombre de combinaisons à sélectionner est élevé, il est apparu plus simple de recourir à un plan factoriel complet. Celui-ci traite toutes les combinaisons possibles. Dans un premier temps, il importe d'étudier la réponse de toutes les combinaisons possibles entre les paramètres et leurs niveaux afin d'analyser les effets des paramètres influents et de leurs interactions.

Le choix des paramètres à faire varier pour chaque actionneur et la détermination de leurs niveaux de variation est une étape essentielle car elle conditionne la taille du plan et sa pertinence. Ainsi, l'effort b_l et la raideur de déploiement a_l de chaque actionneur (cf. Eq. 2.37) vont constituer les 12 paramètres du modèle (Tableau 5.1). Avec 12 paramètres, le nombre de simulations d'un plan à deux niveaux atteint 2^{12} c'est à dire 4096 tests. Un plan à deux niveaux assigne indépendamment chacun de ses paramètres à une valeur basse ou haute en considérant une approximation linéaire entre les deux valeurs.

Jambe n°	Effort de déploiement	Raideur de déploiement
1	A	B
2	C	D
3	E	F
4	G	H
5	J	K
6	L	M

TAB. 5.1 – Définition des codes lettrés pour les paramètres.

La différence entre les efforts d'enroulement et de déroulement des boucles d'hystérésis est de l'ordre de 0.1 N. Cela signifie que la moindre incertitude de réglage de l'actionneur peut avoir un effet sur la stabilité du déploiement. Ainsi, les niveaux de variation des

paramètres sont inspirés des incertitudes de mesure relevées lors de la caractérisation de l'enrouleur. La raideur et l'effort de chaque actionneur vont être soumis à une variation de $\pm 10\%$ afin de décrire des dispersions réalistes.

Les 4096 configurations de déploiement du plan factoriel complet ont été testées grâce au modèle de Newton-Euler décrit précédemment. La trajectoire du centre d'inertie de la plate-forme a été enregistrée au cours du déploiement à une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz sur une durée totale de 1s. Pour chaque simulation, les valeurs maximales des déviations latérales et angulaires de la plate-forme ont été retenues afin de détecter tout mauvais déploiement de la structure.

5.2.2 Conditions de succès du déploiement

Il s'avère que la stabilité dynamique du déploiement est gouvernée par un mouvement de torsion. En effet, le déplacement angulaire θ_z autour de l'axe vertical montre de grandes fluctuations si le déploiement est altéré. Un angle θ_z supérieur à ± 15 degrés traduit une perte de stabilité de la plate-forme pendant le déploiement. On considère qu'au delà d'une telle limite, le prototype se dégraderait par flambage de ses rubans. Si la coordonnée θ_z reste petite, les autres coordonnées ne sont pas sujettes à de profondes variations et la plate-forme atteint sa position finale déployée.

A partir de la réponse $\Theta_z = \text{Max}(\Delta\theta_z)$ pour chaque incrément de temps du déploiement, l'analyse permet de lister les influences des paramètres et de leurs interactions en fonction de leur pourcentage de variabilité totale (Tableau 5.2). Des interactions d'ordre deux (respectivement trois) traduisent l'effet d'un changement de niveau d'un paramètre sur l'effet de premier ordre d'un paramètre (respectivement d'une interaction d'ordre deux d'un autre paramètre).

Paramètres	Code en lettre	Variabilité totale
Source de 1 ^{er} ordre	A, C, E, G, J, L	98.4%
Interaction de 3 ^{ème} ordre	ACE, ACG, ACJ, ACL, AEG, AEJ, AEL, AGJ, AGL, AJL, CEG, CEJ, CEL, CGJ, CGL, CJL,EGJ, EGL, EJL, GJL,	1.4%
Interaction de 2 ^{ème} ordre	AE, AJ, CG, CL, EJ, GL	$\leq 0.2\%$

TAB. 5.2 – Influence et interactions des paramètres principaux

Les paramètres de raideur de déploiement ne sont pas représentés dans le Tableau 5.2 parce qu'ils ont un effet négligeable sur Θ_z , et donc sur le déploiement. Les efforts sont les **principaux paramètres** présentant une participation totale également répartie de 98.4% quel que soit l'actionneur concerné.

L'analyse fait apparaître des couplages d'ordre trois avec 20 interactions basées sur des combinaisons de paramètres principaux (c'est à dire les efforts). Ils ont une participation totale de 1.4% de la variance totale de Θ_z . Ces effets sont supérieurs aux effets de second ordre à cause de la géométrie cyclique.

Les interactions d'ordre deux ont une très faible participation sur la variabilité totale. Elles regroupent six couplages impliquant des paires d'actionneurs de même parité (voir Fig.

5.6.b). Cela signifie que la perturbation en effort de deux actionneurs successifs n'introduit aucun effet supplémentaire que ceux du premier ordre (Fig 5.6.a).

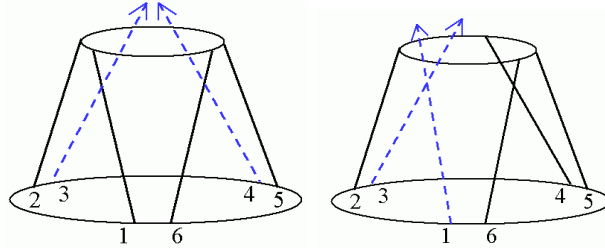


FIG. 5.6 – Efforts de deux actionneurs a) de parité différente b) de même parité

Ainsi, il est montré qu'un asservissement en effort doit être envisagé pour fiabiliser le déploiement.

5.2.3 Modèle de régression de la réponse en Θ_z

Le but de cette étude est d'établir une relation entre la réponse en Θ_z et les paramètres influents afin d'optimiser le design et réfléchir au contrôle du déploiement de l'hexapode. Sur la base des résultats précédents, un modèle de régression permet d'obtenir une formulation quasi-analytique de la réponse Θ_z en fonction des paramètres d'effort et de leurs interactions de premier et troisième ordres (Eq. 5.1). Les paramètres subissent un changement de variables permettant de coder leur niveau d'efforts compris entre 2.51 N et 3.07 N par $[-1; +1]$.

$$\begin{aligned} \Theta_z = & \varepsilon + 86.6(A - C + E - G + J - L) \\ & + 5.86(ACE - ACL - AEJ + AJL - CEG + CGL + EGJ - GJL) \\ & + 5.84(-ACG + ACJ + AEG - C JL - EGL + E JL) \\ & + 5.79(AEL + AGJ - AGL + CEJ - CEL - CGJ) \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec $\varepsilon \ll 1$. Les facteurs associés aux effets montrent que le comportement en torsion est très sensible aux faibles perturbations en effort même lorsque cela ne concerne qu'un seul actionneur. En effet, une perturbation de 10% de l'effort d'un actionneur suffit à perturber le déploiement de l'hexapode lorsque les autres efforts restent égaux. La Figure 5.7 présente les déviations angulaires résultantes de la plate-forme. Pour assurer un déploiement fiable en limitant le mouvement de torsion de la plate-forme à quelques degrés, les efforts des actionneurs devraient présenter des incertitudes inférieures à 10^{-3} N. Cela signifie qu'une régulation des actionneurs doit être envisagée en effort. De plus, il est évident qu'un tel niveau de précision en effort doit être associé à une bonne précision de positionnement des actionneurs entre eux. L'établissement de ce modèle de régression est utile pour choisir une procédure adéquate de contrôle.

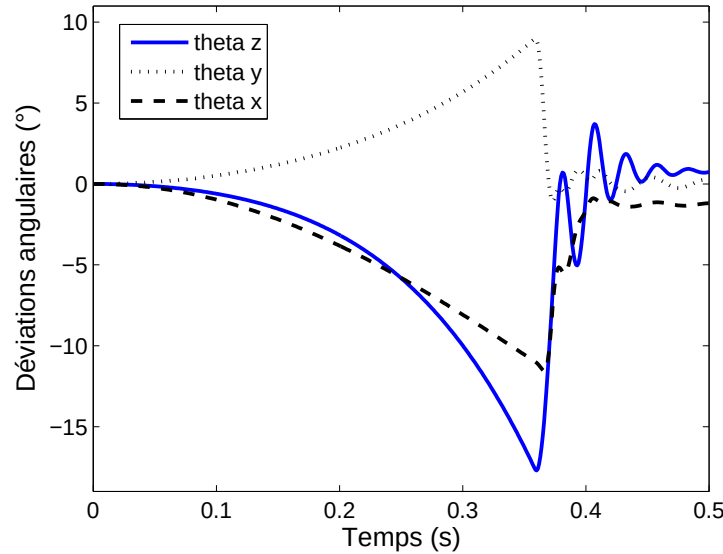


FIG. 5.7 – Déviations angulaires de la plate-forme consécutives à la perturbation en effort de 10 % d'un actionneur

5.3 Comportement modal au cours du déploiement



FIG. 5.8 – Séquences de déploiement

L'étude s'inspire de la Figure 5.8 en proposant de calculer le contenu modal de l'hexapode à différentes hauteurs déployées pour prévoir l'évolution modale de l'hexapode au cours du déploiement. Dans un premier temps, elle se concentre sur le contenu modal d'un actionneur à ruban à différentes longueurs déployées. La comparaison mesures/modèle permet de valider le modèle éléments finis de l'actionneur. Celui-ci est ensuite implanté dans le modèle global de l'hexapode paramétré en fonction de la hauteur déployée.

5.3.1 Étude d'un actionneur à ruban pour différentes longueurs déployées

Expérimentation

L'évolution des fréquences naturelles d'un enrouleur est mesurée en fonction de la longueur de ruban déployé. La bobine de l'actionneur est montée sur une liaison pivot bloquée ; l'extrémité du ruban est encastrée. Un pot d'excitation électro-dynamique ainsi qu'un capteur à courant de Foucault permettent d'effectuer la mesure illustrée en Figure 5.9.

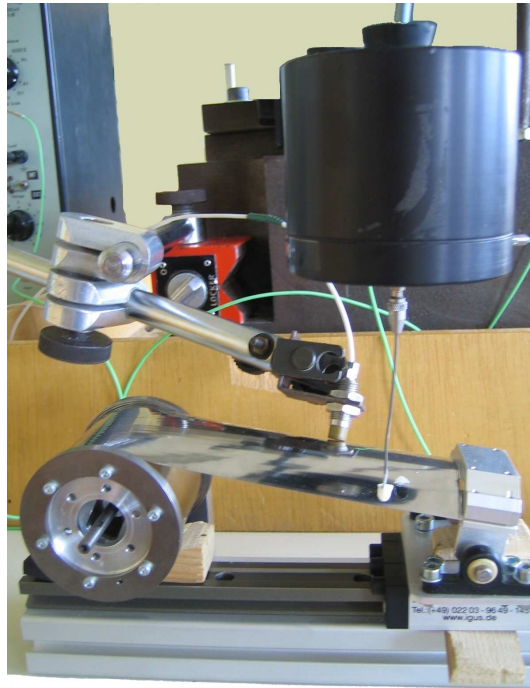


FIG. 5.9 – Montage expérimental autour de l'enrouleur avec pot d'excitation et capteur à courant de Foucault

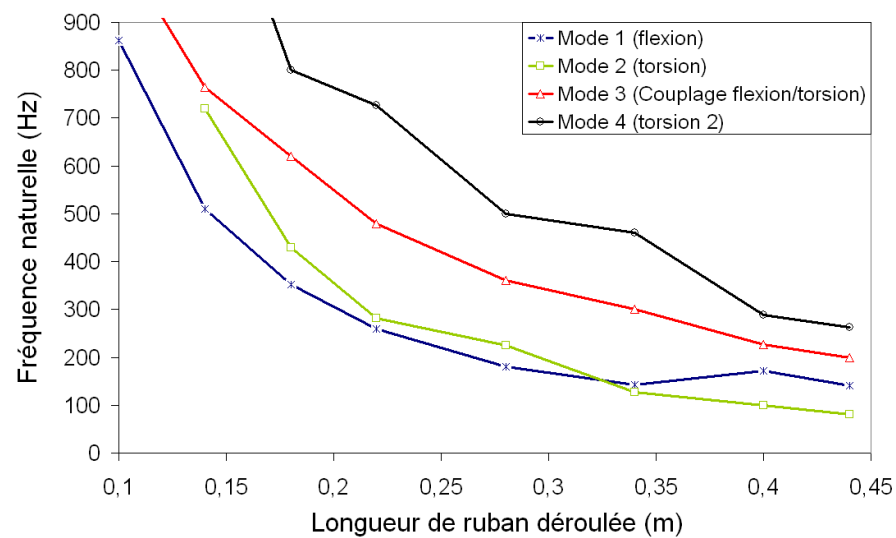


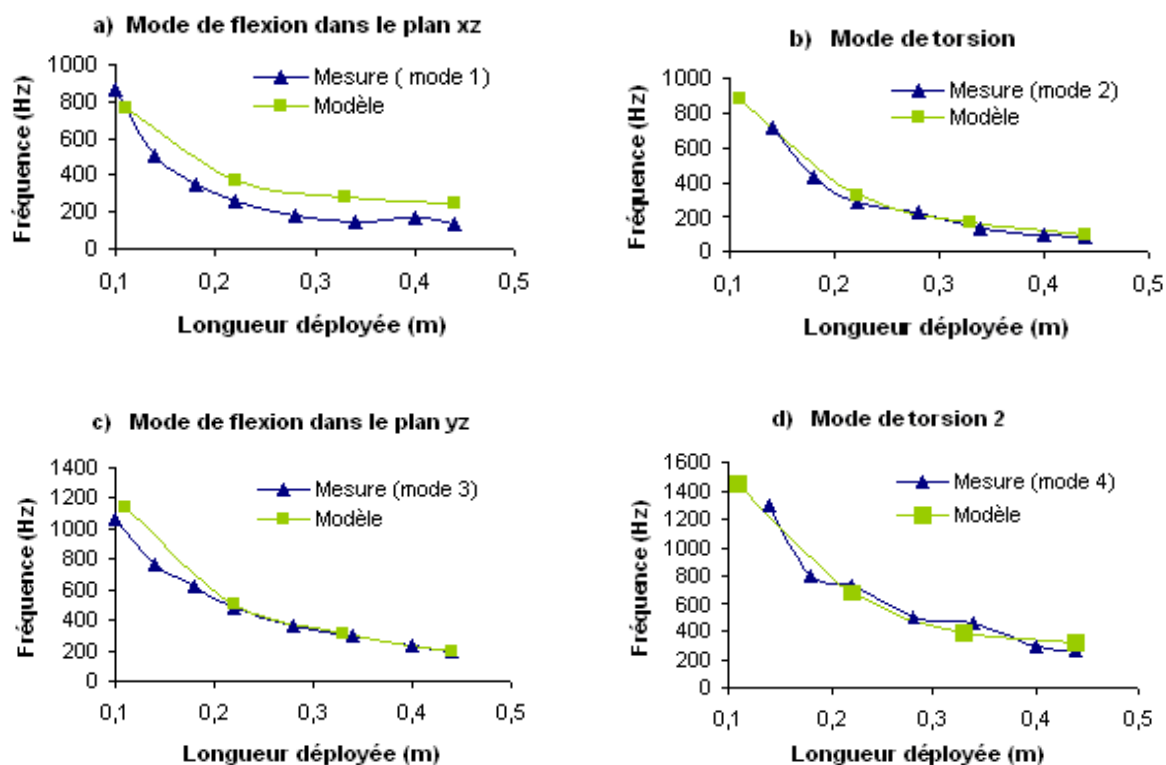
FIG. 5.10 – Évolution des fréquences naturelles d'un enrouleur en fonction de la longueur déployé

Les modes de flexion et de torsion se croisent à 33 cm de longueur déployée (Fig. 5.10). Afin d'autoriser la transition entre la section naturellement courbe du ruban et la section aplatie, l'épaisseur du ruban est nécessairement faible. Cela provoque une faible raideur en torsion qui devient prédominante lorsque la longueur du ruban augmente. Le troisième

mode mesuré est un couplage de torsion et de flexion hors-du-plan.

Modèle d'un ruban aplati précontraint

Un modèle de ruban aplati précontraint, à l'instar de celui élaboré dans la Partie 3.2, est étudié pour des conditions aux limites similaires aux conditions expérimentales. Ainsi, l'extrémité courbe est encastree; une rotation libre sur l'axe x et un déplacement libre selon z sont appliqués sur l'extrémité aplatie. Les résultats de l'analyse modale en fonction de la longueur du ruban sont comparés aux fréquences naturelles mesurées (Tableau 5.3). Les modes associés sont illustrés dans le Tableau 5.4.

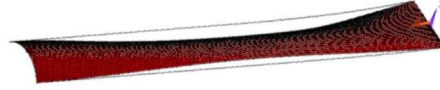


TAB. 5.3 – Évolution des fréquences naturelles mesurées et calculées en fonction de la longueur déployée d'un actionneur

Le modèle éléments finis du ruban aplati précontraint est satisfaisant au regard des mesures effectuées sur l'actionneur, à l'exception du premier mode qui présente quelques différences probablement à cause de la modélisation des conditions aux limites. Le mode de flexion dans le plan yz est un couplage de flexion et de torsion (Partie 2.1.3).

5.3.2 Étude de l'hexapode à différentes longueurs déployées

Le modèle éléments finis de l'hexapode développé en Section 3.2 a été paramétré afin de modéliser l'hexapode à différentes longueurs déployées (Fig. 5.11). La Figure 5.12 a) montre les résultats des analyses modales en fonction de la hauteur de plate-forme déployée. Le premier mode est un mode local sans influence sur le comportement de la plate-forme

Flexion dans le plan xz (Vue dessus)	
Torsion	
Flexion dans le plan yz (Vue de coté)	
2ème mode de torsion	

TAB. 5.4 – Modes d'un ruban aplati précontraint

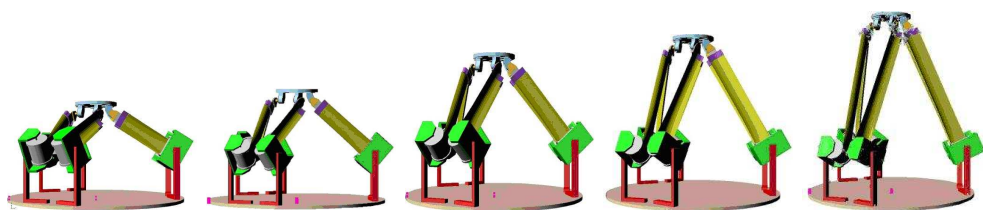
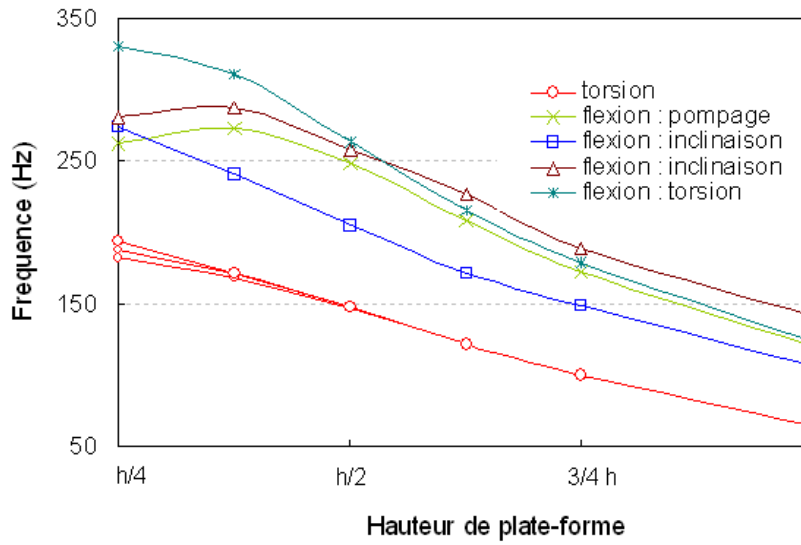


FIG. 5.11 – Modèle de l'hexapode à différentes hauteurs déployées

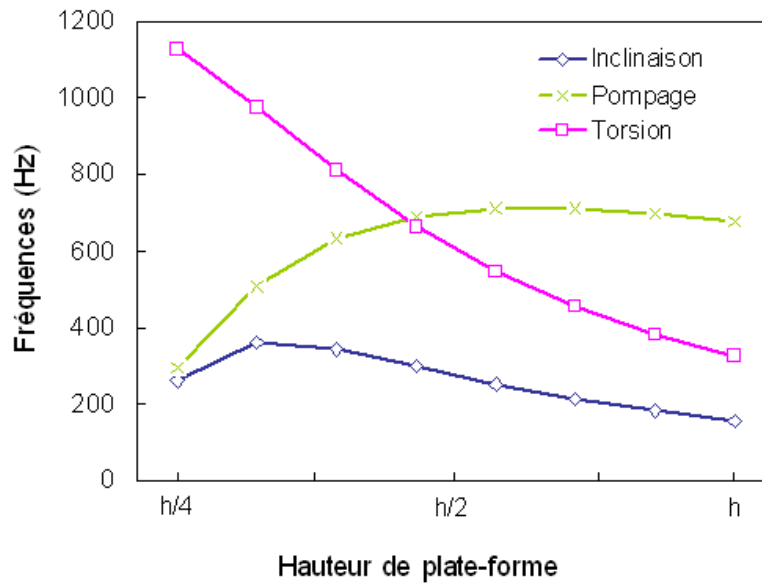
(torsion des rubans). Les modes suivants proviennent de la flexion dans le plan yz des rubans provoquant des mouvements de pompage, d'inclinaison ou de torsion de la plateforme. À faible hauteur déployée, une légère augmentation des modes de flexion des rubans est observée puis, à mesure que la plateforme se déploie, une nette diminution prend place. Ce comportement apparaît également dans l'étude modale d'un hexapode à jambes rigides (Fig. 5.12 b)). En effet, à faible hauteur déployée, les jambes sont sollicitées en flexion. Lorsque la plateforme s'élève, elles travaillent en compression et leur rigidité augmente. Cette dernière étant inversement proportionnelle à la longueur des rubans, elle diminue ensuite avec elle.

La première fréquence naturelle de la configuration gerbée est supérieure à 200 Hz. Cette propriété est encourageante pour la conception de tels systèmes destinés à supporter des niveaux de sollicitation importants pendant le lancement. De plus, il apparaît que le premier mode évolue de 200 Hz à 64 Hz pendant le déploiement. Ainsi, la connaissance des matrices des modèles d'état linéaires de l'hexapode à différentes hauteurs déployées serait utile pour l'établissement d'un éventuel contrôle actif adaptatif du déploiement.

Les modèles d'états linéaires peuvent être déduits des modèles éléments finis réalisés



(a)



(b)

FIG. 5.12 – Évolution modale d'un hexapode en fonction de la hauteur déployée a) hexapode à rubans b) hexapode rigide

pour différentes hauteurs déployées de l'hexapode, notées h_i :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(h_i)\mathbf{x} + \mathbf{B}(h_i)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(h_i)\mathbf{x} + \mathbf{D}(h_i)\mathbf{u} \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $\mathbf{x}$, la variable d'état, $\mathbf{u}$, les entrées, $\mathbf{y}$, les sorties. $\mathbf{A}$ est une matrice de dimension $[2N \times 2N]$, $\mathbf{B}$ est une matrice de dimension $[2N \times N]$, $\mathbf{C}$ est une matrice identité de dimension $[2N \times 2N]$ et $\mathbf{D}$ une matrice de zéros de dimension $[2N \times N]$. Le modèle d'hexapode contient $N=234$

degrés de liberté. A partir de ce modèle linéaire, une nouvelle condensation dynamique utilisant la méthode modale peut être utilisée pour définir un contrôleur optimal basé sur les premiers modes. Ainsi, au moyen d'une interpolation, l'évolution des termes de la matrice peut être observée le long de la trajectoire de déploiement. Ce modèle d'état pourrait être utile pour évaluer la participation de chaque mode afin de mettre en place un contrôle adaptatif du déploiement si nécessaire [GB05].

5.4 Introduction de paramètres incertains dans la Jacobienne Inverse

L'utilisation des nombres réels est théorique. En effet, toutes les grandeurs physiques que nous utilisons et modélisons par des réels ne sont pas forcément exactes. De même, l'écriture des nombres π ou e , ou bien encore $1/3$, ou $\sqrt{3}$ avec toutes leurs décimales ne peut être juste. Au mieux, ils peuvent être inclus dans un intervalle (par ex. $3.14 \leq \pi \leq 3.15$). Ainsi, une mesure, si précise soit-elle, ainsi que le traitement informatique sont générateur d'erreurs. Ces paramètres sont dits incertains. Ces incertitudes peuvent être traitées par une approche probabiliste dans laquelle les paramètres incertains sont généralement des variables aléatoires. La résolution de problèmes stochastiques est réalisable par plusieurs approches, la plus connue étant la simulation de Monte Carlo (simulation basée sur le tirage de nombres aléatoires). Celle-ci requiert cependant une grande quantité de calculs et ce type de problèmes nécessite de connaître la distribution de probabilité de chacun des paramètres. Une autre approche consiste à utiliser une représentation déterministe ensembliste. Dans ce contexte, l'arithmétique des intervalles permet de réaliser des calculs qui prennent en compte les erreurs physiques, expérimentales, numériques, en prédisant les bornes au-delà desquelles le résultat ne se trouvera pas. Ainsi, tout calcul réalisé par intervalle est un calcul *garanti* ou *certifié*.

Ainsi, c'est le seul outil déterministe capable de déterminer tous les zéros d'une fonction et de prouver en même temps leur existence et leur éventuelle unicité, ou encore, de déterminer l'image directe et inverse d'un ensemble par une fonction. Cette méthode aide à la résolution de problèmes pratiques ciblés, qui ne trouvent pas de réponses avec d'autres approches. L'intérêt croissant des roboticiens pour cette méthode achèvera de convaincre le lecteur sceptique grâce à l'étude suivante.

5.4.1 Initiation à l'analyse par intervalles

Pour réaliser un calcul par intervalles, il ne suffit pas de remplacer le réel par un intervalle dans un programme pour obtenir un encadrement fin de la solution [Moo66]. Cette approche naïve a desservi l'arithmétique par intervalles à ses débuts. On définit un intervalle réel $\mathbf{x}$ fermé et borné par des réels a et b , $a \leq b$ par

$$\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (5.3)$$

Les intervalles sont désignés en caractères gras. Pour éviter toute confusion, vecteur et matrice sont dans ce chapitre exprimés en caractère normal. Les bornes inférieures de l'intervalle sont représentées par les lettres soulignées $\underline{\mathbf{x}}$ et les bornes supérieures le sont par des lettres surlignées $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}]. \quad (5.4)$$

Les intervalles sont des sous-ensembles fermés connexes de l'ensemble des réels. Ainsi, $\mathcal{IR}$ est l'ensemble des intervalles réels de $\mathcal{R}$. On peut généraliser les intervalles en plusieurs dimensions : $\mathcal{IR}^n$ est l'ensemble des vecteurs intervalles de dimension n . De même, une matrice intervalle dont les composantes sont des intervalles appartient à $\mathcal{IR}^{m \times n}$. Ainsi, une représentation graphique d'un vecteur de $\mathcal{IR}^3$ est un parallélépipède de vecteurs. C'est pourquoi, on utilise également les termes de boîte, ou pavé pour un vecteur intervalle.

Le résultat d'une opération entre deux intervalles est le plus petit intervalle contenant tous les résultats possibles de l'opération. En appliquant cette définition aux opérations classiques de l'arithmétique, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}] \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}] \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= [\min(\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{y}}), \max(\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{y}})] \\ 1/\mathbf{y} &= [\min(1/\underline{\mathbf{y}}, 1/\bar{\mathbf{y}}), \max(1/\underline{\mathbf{y}}, 1/\bar{\mathbf{y}})] \quad si \quad 0 \notin \mathbf{y} \\ \mathbf{x}/\mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] \times (1/[\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}]) \quad si \quad 0 \notin \mathbf{y} \\ \sqrt{\mathbf{x}} &= [\sqrt{\underline{\mathbf{x}}}, \sqrt{\bar{\mathbf{x}}}] \quad si \quad 0 \leq \underline{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les opérations définies ci-dessus peuvent néanmoins poser un inconvénient lorsqu'elles sont généralisées dans des fonctions. Les propriétés de commutativité et d'associativité sont conservées pour l'addition et la multiplication, mais pas la distributivité. En effet, si $\mathbf{x}=[-2,3]$, $\mathbf{y}=[1,4]$ et $\mathbf{z}=[-2,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= [-2, 3] \times ([1, 4] + [-2, 1]) \\ &= [-2, 3] \times [-1, 5] \\ &= [-10, 15] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} &= [-2, 3] \times [1, 4] + [-2, 3] \times [-2, 1] \\ &= [-8, 12] + [-6, 4] \\ &= [-14, 16] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ainsi, la multiplication est sous-distributive par rapport à l'addition, seule une inclusion peut-être écrite :

$$x(y + z) \subset x \times y + x \times z \quad (5.8)$$

Par ailleurs, posons l'opération $2\mathbf{x} - \mathbf{x}$. Algébriquement, le résultat est $\mathbf{x}$. Avec l'arithmétique par intervalles $2\mathbf{x} - \mathbf{x} = [2\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}, 2\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}]$. Si $\mathbf{x}=[2,3]$, le résultat est $[1,4]$. Il s'agit du problème de pessimisme de la solution basé sur la dépendance des occurrences de $\mathbf{x}$. De même, si la fonction polynomiale f est définie par : $\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 1$ et si $\mathbf{x}=[-1,3]$, on obtient $[-5,12]$. Alors que $\mathbf{x}(\mathbf{x} - 2) + 1 = [-8,4]$ et $(\mathbf{x} - 1)^2 = [0,4]$. Algébriquement équivalentes, ces expressions ne sont pas équivalentes en arithmétique par intervalle. Il s'est produit un phénomène de surestimation à cause de la décorrélation des données. Chaque occurrence d'une variable est traitée comme une nouvelle variable par l'arithmétique d'intervalles. Il convient donc d'écrire les expressions de manière à limiter le nombre d'apparition des variables. Cette étape préalable de réécriture est déterminante sur le résultat final. Ce dernier

ne pourra cependant pas s'affranchir de l'effet enveloppant de la solution finale car celle-ci est représentée dans une boîte dont les bornes sont naturellement sur-estimées. La taille de cette boîte peut-être minimisée grâce à des techniques plus ou moins complexes dont quelques exemples sont présentés.

La méthode de la bisection ou dichotomie est un algorithme, qui pour la recherche d'un zéro d'une fonction par exemple, consiste à partager un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle qui contient le zéro de la fonction. La division de l'intervalle est répétée jusqu'à obtenir un bon encadrement de la solution, i.e. lorsque le diamètre de la boîte est inférieur à un seuil. Cependant, la durée de l'analyse est proportionnelle au nombre de boîtes et peut atteindre $kOexp(n)$ avec k , un facteur qui dépend de la fonction considérée, O la complexité et n , le nombre de divisions. Bien entendu, le parallélisme peut être appliqué dans l'algorithme : le traitement d'une boîte est indépendant de celui des autres boîtes. Ceci permet une implantation distribuée des calculs.

Il est également possible d'améliorer l'évaluation en considérant la monotonie de la fonction au moyen de l'étude de ses dérivées. Par ailleurs, l'utilisation de développements de Taylor d'ordres 1 et 2 réduit le phénomène de surestimation.

L'opération de préconditionnement d'une matrice intervalle peut aider à diminuer la surestimation du résultat, notamment dans le cas de la résolution de systèmes linéaires. Ainsi, en pré-multipliant une matrice A par une matrice scalaire $(mid(A))^{-1}$, celle-ci se rapproche de la matrice identité en modifiant le centre ou le rayon des intervalles mis en jeu.

Les filtres permettent de réduire un ou des intervalles de la boîte, voir d'éliminer une boîte. Le filtrage local par 2B consistant est basé sur le principe de la réécriture. Par exemple, s'il s'agit de rechercher les zéros d'une fonction $F(x) = x^2 + \sin(x)$, celle-ci peut être réécrite sous la forme $x^2 = -\sin(x)$. Si l'évaluation des deux membres de gauche et de droite ont une intersection, l'égalité est vérifiée et il existe une solution pour laquelle la fonction F s'annule. Par exemple, si $\mathbf{x} = [0, 2\pi]$, l'expression aboutit à $[0; 4\pi^2] \cap [-1; 1]$, soit $\mathbf{x}^2 \in [0, 1]$. Une seconde itération est donc réalisée pour $\mathbf{x} = [0, 1]$. Elle donne $[0; 1] \cap [-\sin(1); 0]$ soit $\mathbf{x}^2 \in [-\sin(1); 0]$. Le gain de cette méthode est intéressant pour les premières itérations. Il est également possible de rechercher les solutions de F pour une valeur de F différente de zéro, dans le cas de problèmes d'optimisation par exemple [Mer96]. Il convient de vérifier l'unicité de la solution lorsque l'on obtient des intervalles qui contiennent la solution recherchée.

Ainsi, l'analyse par intervalle permet de résoudre des problèmes implicites dont on ne connaît pas la solution analytique. Mais il est souvent nécessaire de reformuler le problème de manière adaptée pour une utilisation pertinente des intervalles. En ce sens, le mode de pensée spécifique des analystes ensemblistes repose sur l'expérience.

5.4.2 Application : recherche de singularité pendant le déploiement

La position de la plate-forme, également appelée posture du robot, est définie par ses coordonnées généralisées $v = (u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)^t$. L'équilibre mécanique de la structure parallèle est gouverné par :

$$F = g^T(u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \tau \quad (5.9)$$

avec F , les forces et moments exercés sur la plate-forme, τ , les six forces exercées dans les jambes, et g , la matrice Jacobienne inverse de l'hexapode utilisée dans le modèle dynamique (Chapitre 4). Cette matrice paramétrique g peut être exprimée comme suit [MD01] :

$$g = \begin{pmatrix} \frac{B_i A_i}{\rho_i} & \frac{CA_i \wedge B_i A_i}{\rho_i} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

avec ρ_i la longueur des $i^{\text{ème}}$ jambes de l'hexapode, $B_i A_i$, le vecteur directeur des jambes de l'hexapode et CA_i définissant l'orientation de la plate-forme (Cf. Fig. 4.1). Soit M , la matrice dont les termes M_{ij} sont les numérateurs des termes de g_{ij}

$$M_i = \begin{pmatrix} B_i A_i & CA_i \wedge B_i A_i \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

La trajectoire de la plate-forme doit éviter les points annulant les déterminants de la Jacobienne inverse, appelés configurations singulières. Il s'agit de postures de la plate-forme supérieure où la rigidité naturelle du manipulateur subit une grande détérioration, c'est à dire que la plate-forme supérieure peut se déplacer sans qu'il y ait de mouvements des vérins et les forces articulaires peuvent devenir suffisamment grandes pour détériorer le mécanisme. L'expression analytique de ces singularités est donnée par [SOG00]. Le calcul des déterminants de la jacobienne inverse donne une équation polynomiale dont les zéros donnent les hypersurfaces du premier type de singularités. Le but de cette étude n'est pas de localiser d'éventuelles singularités mais de prouver leur existence ou leur absence dans une région donnée. Ainsi, il convient de calculer le déterminant de M pour s'assurer du signe de $|g|$. En effet, vérifier que $|g_{ij}| \neq 0$ revient à vérifier $|M_{ij}| \neq 0$. Ceci peut se faire de deux façons :

- La première consiste à calculer le déterminant de la matrice intervalle $\mathbf{M}$ dans laquelle les composantes ont été remplacées par des intervalles. L'inconvénient est que les méthodes classiques de calcul du déterminant conduisent à une surestimation du résultat. Le calcul du déterminant grâce à la décomposition LU permet de réduire l'intervalle du résultat.
- La seconde méthode repose sur la formulation analytique du déterminant de M_{ij} et de regarder son signe. Le déterminant de M est de la forme :

$$|M| = \sum a_i u_1^{j_1} u_2^{j_2} u_3^{j_3} \sin^{j_4}(\phi_1) \cos^{j_5}(\phi_1) \sin^{j_6}(\phi_2) \cos^{j_7}(\phi_2) \sin^{j_8}(\phi_3) \cos^{j_9}(\phi_3) \quad (5.12)$$

avec a_i , des coefficients constants pour une géométrie donnée, j_k des constantes.

L'étude d'optimisation des paramètres de conception de l'hexapode, réalisée à l'aide de l'analyse par intervalles, a garanti l'absence de singularités dans l'espace de travail du "poignet actif" $[\pm 2mm; \pm 2mm; \pm 2mm; \pm 2^\circ; \pm 2^\circ; \pm 3^\circ]$. L'objet de cette partie est de vérifier qu'il n'y a pas de risque de singularités au cours du déploiement. Plus précisément, il convient de s'assurer que le déterminant de la Jacobienne inverse ne s'annule pas quelque soit le jeu de trajectoires considéré dans un volume de déploiement.

Les mesures de déviations latérales relevées pendant le déploiement du prototype en gravité compensée sont inférieures à 2 cm. Le volume considéré est donc défini par un parallélépipède de 2.5 cm de côté pour une hauteur de déploiement $u_3 = [0.1, 0.45]$ m. Cette considération permet de borner les trois premières coordonnées généralisées de la plate-forme v_i . On peut raisonnablement espérer que les inclinaisons de la plate-forme au

cours du déploiement n'excèdent pas 15° (constaté lors des essais de déploiement), c'est à dire $\phi_j = [-15^\circ, 15^\circ]$ avec $j=1,3$.

L'approche consiste à remplacer les variables v_i des termes M_{ij} par des fonctions intervalles définies précédemment. Une fois le calcul de bisection effectué, l'analyse par intervalles certifie qu'il n'existe pas de singularité dans le volume défini.

Une seconde analyse prend en compte des erreurs de fabrication ou de montage dans l'hexapode. A cette fin, les coefficients a_i peuvent être définis par des intervalles de faible largeur et le déterminant de $\mathbf{M}$ est testé tout au long du déploiement avec les u_i et ϕ_i définis précédemment dans le parallélépipède. Si :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [70E - 3; 73E - 3] \\ \mathbf{R} &= [250E - 3; 255E - 3] \\ \theta_1 &= [18 * 2\pi/180; 18.88 * 2\pi/180] \\ \theta_2 &= [8.58 * 2\pi/180; 9.46 * 2\pi/180] \end{aligned} \tag{5.13}$$

Aucune singularité n'est détectée en prenant en compte les erreurs de fabrication ou de montage.

Les algorithmes de détection de singularité présentés ont été développés et validés par les résultats des algorithmes de calcul de la bibliothèque Alias (*Algorithms Library of Interval Analysis for Systems*) développée à l'INRIA depuis 1998. Ceux s'appuient sur la vérification de régularité d'une matrice pour déceler l'absence de singularités.

L'efficacité de l'analyse par intervalle sur des méthodes stochastiques est démontrée par cet exemple en terme de précision et temps de calcul. Mille tirages de Monte Carlo détectent 7 singularités avec une précision de calcul à 10^{-11} et plus aucune singularité avec une précision de 10^{-13} . Cependant, l'exemple précédent ne peut certifier l'absence de singularité car il se peut qu'il en existe une dans un endroit de l'espace qui n'a pas été vérifié. L'analyse par intervalle, quand à elle, garantit son résultat en prenant en compte les incertitudes dues à la précision de calcul.

L'étude des singularités reste un problème ouvert. Si on sait maintenant détecter leur présence et leur position dans l'espace, il n'est pas évident qu'elles correspondent à un mode destructif du manipulateur. En effet, si le dénominateur et le numérateur de l'Équation 5.9 tendent tous deux vers zéro, les forces τ peuvent demeurer finies. Elles doivent s'accompagner d'un torseur d'effort qui amènerait le manipulateur dans une position hors d'équilibre. A ce jour, une telle analyse n'a jamais été réalisée en dynamique et la question reste complexe en statique. Il s'agirait de classer les différents types de singularité et d'accompagner leur détection d'indices de proximité ayant un sens physique.

Conclusions et perspectives

La conception de l'hexapode à déploiement autonome, objet de cette thèse, se base sur deux architectures :

- une plate-forme de Gough-Stewart pour le déploiement
- un concept de "Poignet actif" pour la correction de l'assiette finale de la plate-forme supérieure.

La difficulté du projet réside sur la libération de l'énergie de déformation de structures minces non-linéaires pour le déploiement, et, sur le pari d'utiliser une telle structure à jambes flexibles pour réaliser un télescope, instrument optique de précision.

Afin de comprendre et prévoir le comportement dynamique de l'hexapode à actionneurs à rubans en cours de déploiement et de fonctionnement, la recherche entreprise a adopté une démarche pas-à-pas s'appuyant sur la double approche calcul-mesure pour élaborer des modèles les plus pertinents possibles.

Un premier modèle de l'hexapode déployé a été élaboré afin d'évaluer sa raideur structurelle dans sa configuration opérationnelle. La flexibilité des actionneurs à rubans repose sur un modèle éléments finis condensé et prend en compte leur géométrie déformée et précontrainte. La zone de transition entre section aplatie du ruban au sortir de la bobine et section naturellement courbe relâchée de toute contrainte a un rôle majeur dans le déploiement autonome. Validé par une analyse modale expérimentale, le modèle est considéré comme élastique et linéaire pour analyser les capacités de correction de la plate-forme supérieure grâce au concept de "Poignet actif". La linéarité de la réponse calculée est vérifiée expérimentalement par photogrammétrie sur le prototype. Des lames de connexion minces ou épaisses contribuent à la liaison sphérique supérieure rubans/plate-forme. A partir de la matrice Jacobienne, il est montré que les lames épaisses affectent peu les capacités de correction. De plus, elles offrent à l'hexapode un contenu modal en fréquence plus élevé qui garantit une meilleure stabilité dynamique de la plate-forme supportant le miroir secondaire. Des essais de répétabilité du déploiement sur le prototype ont également prouvé que les lames épaisses assuraient une position finale plus reproductible. Comme les lames épaisses sont par hypothèse rigides, cette réflexion sur les liaisons supérieures aboutit à la conclusion que la flexibilité des rubans suffit à la cinématique de l'hexapode. Ainsi, une prochaine version de l'hexapode pourrait s'affranchir des lames de connexion.

Prévoir le déploiement de l'hexapode nécessite de modéliser les actionneurs à ruban et de résoudre le modèle dynamique direct d'une structure parallèle. Deux approches différentes sont abordées :

- Une approche Lagrangienne analytique utilisant la notation tensorielle pour condenser l'écriture des dérivées partielles. Le système d'équations résultant est auto para-

métrique et n'a donc pas de solution analytique.

- L'approche récursive de Newton-Euler associée à un schéma-bloc de l'hexapode.

Les deux approches numériques proposées utilisent six modèles de forces de restitution en parallèle pour les actionneurs à ruban. L'expérience de déploiement du prototype en gravité compensée a utilisé une caméra rapide et la technique de corrélation d'images pour reconstruire une trajectoire. La comparaison des déploiements calculés et mesurés valide les deux modèles.

Diverses analyses du déploiement sont rendues possibles grâce aux outils développés.

L'influence des micro-vibrations générées par les équipements du satellite en orbite est évaluée et ne semble pas gêner le déploiement pour des amplitudes de vibrations inférieures à $230\text{ }\mu\text{m}$ dans la gamme [0-200 Hz]. Cette étude aura à être reprise avec les spécifications de vibrations du satellite porteur.

Une analyse de sensibilité sur les paramètres des actionneurs a été menée afin de prendre en compte des incertitudes sur les forces d'actionnement et les vitesses de déploiement. Celle-ci souligne la nécessité de synchroniser les actionneurs pour s'assurer d'un déploiement robuste.

L'évolution modale de l'hexapode au cours du déploiement permet de déterminer la gamme de fréquences balayée ainsi que les matrices des modèles d'état linéaires à différentes hauteurs déployées, utiles pour l'établissement d'un éventuel contrôle actif adaptatif du déploiement. La première fréquence naturelle de la configuration gerbée étant localisée à plus de 200Hz, cette propriété est encourageante pour la conception de tels systèmes destinés à supporter des niveaux de sollicitation importants pendant le lancement.

Enfin, la détection d'éventuelles singularités au cours du déploiement a été étudiée à l'aide de la méthode d'analyse par intervalles permettant de prendre en compte des paramètres incertains. De la collaboration avec l'INRIA, il résulte qu'aucune singularité n'est détectée dans l'espace de déploiement considéré. L'étude des singularités est une étape indispensable pour toute prochaine version de l'hexapode. Cependant, elle reste un problème ouvert. Si on sait maintenant détecter leur présence et leur position dans l'espace, il n'est pas évident qu'elles correspondent à un mode destructif du manipulateur. Elles doivent s'accompagner d'un torseur d'effort qui amènerait la plate-forme dans une position hors d'équilibre. A ce jour, une telle analyse n'a jamais été réalisée en dynamique et la question reste complexe en statique.

Pour le développement d'une version spatialisable de l'hexapode déployable, il conviendrait de remplacer les rubans métalliques par des rubans en composite avec des propriétés de dilatation thermique plus faibles. L'atout des modèles de déploiement proposés dans cette étude repose sur l'utilisation de modèles de force de restitution. Ainsi, avec l'emploi de nouveaux actionneurs, les modèles de déploiement restent valables s'ils sont actualisés par une simple caractérisation expérimentale.

D'une manière générale, une réflexion devrait être initiée sur la conception de ces actionneurs afin d'intégrer une régulation en vitesse pour les ralentir en fin de course. En effet, la raideur actuelle des butées de fins de course provoque le déraillement du ruban si aucun amortisseur auxiliaire n'est ajouté (mousse dans le montage de gravité compensée). A l'issue de cette thèse, une meilleure connaissance du comportement a permis d'initier une solution technologique pour les actionneurs à rubans.

Une version spatialisable de l'hexapode nécessitera l'implantation d'un contrôle du "poignet actif" via le positionnement 1-D vertical des actionneurs à rubans. Pour une future application optique, la précision de positionnement de la plate-forme supérieure atteinte avec ce concept devra être proche des capacités de correction de l'optique adaptative, c'est à dire, proche de la taille des fronts d'ondes observés par l'instrument (inférieurs au micron pour des fronts d'ondes dans le visible).

Bibliographie

- [Aa92] Auternaud and al. Self-motorized antifriction joint and an articulated assembly such as a satellite solar panel equipped with such joints, Feb. 11, 1992 1992.
- [AAMR⁺07] G. Aridon, A. Al Majid, D. Rémond, L. Blanchard, and R. Dufour. A direct dynamic model for a space hexapod deployment. In ASME, editor, ASME 2007 IDETC/CIE 2007, Las Vegas, Nevada, USA, 2007.
- [AAMRD07] G. Aridon, A. Al Majid, D. Rémond, and R. Dufour. Formulation analytique de la dynamique de déploiement d'un hexapode spatial. In 8 ème colloque national en calcul des structures, Giens (France), 2007.
- [AB80] H. Allen and P.S. Bulson. Background to Buckling. Book Company. UK, 1980.
- [ABA⁺07] G. Aridon, L. Blanchard, A. Allezy, D. Rémond, and R. Dufour. On the correction capability of a deployed tape-spring hexapod. Mechanism and Machine theory, 2007.
- [ABRD06] G. Aridon, L. Blanchard, D. Rémond, and R. Dufour. Modal identification for modeling a deployed tape-spring hexapod. In 48th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport (US), 2006.
- [AG02] D. Archer Galletly. Modelling the Equilibrium and Stability of Slit Tubes. PhD thesis, University of Cambridge, 2002.
- [AMD00] A. Al Majid and R. Dufour. An event dimension for modeling damping due to time-varying forcing frequency. Nonlinear Dynamics, 23(4) :303–318, 2000.
- [AMD02] A. Al Majid and R. Dufour. Formulation of a hysteretic restoring force model. application to vibration isolation. Nonlinear Dynamics, 27 :69–85, 2002.
- [ARAM⁺06] G. Aridon, D. Rémond, A. Al Majid, L. Blanchard, and R. Dufour. Hysteretic behaviour of tape-spring actuators : Influence on the deployment of a hexapod. In ISMA2006 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven (Belgium), 2006.
- [ARBD07] G. Aridon, D. Rémond, L. Blanchard, and R. Dufour. A model to predict the deployment of a space hexapod. In IFToMM, editor, 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), 2007.

- [BFD05] L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, and J.P. Merlet. Deployable hexapod using tape-springs. In Disruption in Space, ESA/CNES Symposium, Marseille, France, 2005.
- [Bla03] J. T. Black. Photogrammetry and videogrammetry methods development for solar sail structures, 2003.
- [Cal88] C.R. Calladine. The theory of thin shell structures 1988-1988. Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers, 202(3) :141–149, 1988.
- [CB68] R.R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructures of dynamic analysis. AIAA Journal, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [Cla91] R. Clavel. Conception d’un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1991.
- [CMML96] O. Chételat, J.P. Merlet, P. Myszkorowski, and R. Longchamp. Algorithmes itératifs à convergence démontrée pour les changements de coordonnées des mécanismes articulés. Technical Report IA-96-7, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, nov. 1996 1996.
- [Dah76] P.R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibration. AIAA Journal, 14(12) :1675–1682, 1976.
- [DEB02] U. K. Dharamsi, D. M. Evanchik, and J. R. Blandino. Comparing photogrammetry with a conventional displacement measurement technique on a square kapton membrane. In AIAA, editor, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, volume 1258, Denver, Colorado, 2002.
- [DL87] A. Daton-Lovett. An elongate hollow element, 1987.
- [FBV⁺97] R.E. Freeland, G.D. Bilyeu, G.R. Veal, M.D. Steiner, and D.E. Carson. Large inflatable deployable antenna flight experiment. In 48th International Astronautical Congress, volume 1301, Turin (Italy), 1997. IAF.
- [Fea83] R. Featherstone. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. Int. J. Robotics Research, 2(1) :13–30, 1983.
- [Ful59] R. B. Fuller. Tensile-integrity structures., 13 November 1962 1959.
- [GB05] L. Gaudiller and S. Bochard. Adaptive active control of flexible structures subjected to rigid body displacements. Journal of Sound and Vibration, 283 :311–339, 2005.
- [GG04] R. Gardia and P. Giulia. Realization and preliminary tests on an innovative deployable structure for a high resolution telescope for microsatellite. In Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers., editor, Spie’s Europe International Symposium, Remote Sensing Europe, Maspalomas, Canary Islands, Spain,, 2004.

- [GP92] S. Guest and S. Pellegrino. Inextensional wrapping of flat membranes. In R. Motro and T. Wester, editor, First International Seminar on Structural Morphology, pages 203–215, Montpellier, France, 1992. LMGC, Université Montpellier II.
- [HHK⁺01] J. Hesselbach, M. B. Helm, H. Kerle, S. Soetebier, and M. Krefft. A parallel robot with spread-band elements. In The 32nd International Symposium on Robotics, 2001.
- [Hus96] M.L. Husty. An algorithm for solving the direct kinematics of general stewart-gough platforms. Mechanism and Machine Theory, 31(4) :365–380, 1996.
- [HWI02] B. R. Hopkins and R. L. Williams II. Kinematics, design and control of the 6-psu platform. Industrial Robot, 29(5) :443–451, 2002.
- [IP00] K. Iqbal and S. Pellegrino. Bi-stable composite shells. In AIAA, editor, The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, volume 1385, Atlanta, GA, USA, 2000.
- [IPDL00] K. Iqbal, S. Pellegrino, and A. Daton-Lovett. Bi-stable composite slit tubes. In IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications, pages 153–162, Dordrecht, The Netherlands, 2000. Kluwer Academic Publishers.
- [Ji93] Z. Ji. Study of the effect of leg inertia in stewart platforms. In IEEE, editor, International Conference of Robotics and Automation, pages 121–126, Atlanta, GA, 1993.
- [KG04] W. Khalil and S. Guegan. Inverse and direct dynamic modeling of gough-stewart robots. IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, VOL. 20, NO. 4, :754–762, 2004.
- [KL92] S. Kim and S. Lee. Cartesian space dynamic model of a serial-parallel manipulator system and their dynamic performance evaluation. IEEE Decision and Control, 1 :327–328, 1992.
- [KTF⁺93] K. Kosuge, K. Takeo, T. Fukuda, K. Kai, T. Mizuno, and H. Tomimatsu. Computation of parallel link manipulator dynamics. Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 3 :1672–1677, 1993.
- [Kwa91] A.S.K. Kwan. A pantographic deployable mast. PhD thesis, University of Cambridge, 1991.
- [Laz97] Z. Lazarevic. Feasibility of a Stewart Platform with Fixed Actuators as a Platform for CABG Surgery Device. Master’s thesis, Columbia University, 1997.
- [LGF86] S. G. Lee, R. C. Gonzales, and K. S. Fu. Tutorial on Robotics. Second edition, 1986.

- [LPD⁺99] M. S. Lakea, J. E. Phelps, J. E. Dyer, D. A. Caudlec, A. Tamc, J. Escobedoc, and E. P. Kaslc. A deployable primary mirror for space telescopes. In SPIE, editor, International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, volume 3785-02, Denver, Colorado, 1999.
- [LS88] K.M. Lee and D. Shah. Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in parallel actuated manipulator. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 4(3), 1988.
- [MAM01] F. Mohri, L. Azrar, and Potier-Ferry M. Flexural-torsional post-buckling analysis of thin walled elements with open sections. Thin-walled structures, 39 :907–938, 2001.
- [Man73] E.H. Mansfield. Large-deflexion torsion and flexure of initially curved strips. In Proc. Roy. Soc. London, volume A 334, pages 279–298, 1973.
- [MD01] J-P. Merlet and D. Daney. A formal numerical approach to determine the presence of singularity within the workspace of a parallel robot. In F.C. Park C.C. Iurascu, editor, Computational Kinematics, pages 167–176, Seoul, 2001. EJCK.
- [MD04] A. Al Majid and R. Dufour. Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator : experiments and prediction. Journal of Sound and Vibration, 277 :391–403, 2004.
- [Mer86] J.-P. Merlet. Contribution à la formalisation de la commande par retour d'effort en robotique. Application à la commande de robots parallèles. PhD thesis, Université Paris 6, 1986.
- [Mer93] J-P. Merlet. Direct kinematics of parallel manipulators. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 9(6) :842–845, 1993.
- [Mer96] J.-P. Merlet. Modélisation géométrique de mécanismes de suspension automobile. Technical Report 2817, INRIA, 1996.
- [Mer97] J-P. Merlet. Les robots parallèles. Hermès, Paris, 1997.
- [Mer06] J-P. Merlet. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots. ASME Journal of Mechanical Design, 128 :199–206, 2006.
- [MG91] J.-P. Merlet and C.M Gosselin. New architecture for a six-degree-of-freedom parallel manipulator. Mechanism and Machine Theory, 2(26) :pp. 77–90., 1991.
- [MHN⁺05] Y. MURATA, H. HIRABAYASHI, M.C. NATORI, T. UMEMOTO, K. ASADA, and S. IIKURA. Development of the large and high accuracy deployable antenna for the vsop-2 mission. In XXVIIIth URSI General Assembly, New Delhi, India, 2005.

- [MMD05] G. Michon, L. Manin, and R. Dufour. Hysteretic behavior of a belt tensioner : Modeling and experimental investigation. Journal of Vibrations and Control, 11(9) :1147–1158, 2005.
- [Mon05] D.C. Montgomery. Design and Analysis of Experiments. Wiley, New York, 6th ed edition, 2005.
- [Moo66] R.E. Moore. Interval analysis. 1966.
- [MTMB97] S. Mguil-Touchal, F. Morestin, and M. Brunet. Various experimental applications of digital image correlation method. Transactions on Modelling and Simulation, 16(ISSN 1743-355X), 1997.
- [MWG67] J.D. MacNaughton, H.N. Weyman, and E. Groskopf. The bi-stem - a new technique in unfurlable structures. In Second Aerospace Mechanisms Symposium, pages 139–145, Univ. of Santa Clara, California, 1967. NASA JLP TM33-355.
- [NAB⁺04] J; Nella, C. Atkinson, A. Bronowicki, E. Bujanda, A. Cohen, D. Davies, M. Mohan, J. Pohner, P. Reynolds, S. Texter, D. Fitzgerald Simmons, D. Wal-die, R. Woods, R. Lynch, R. Lundquist, M. Menzel, B. Smith, P. Sullivan, P. Atcheson, and P. Lightsey. James webb space telescope (jwst) observatory architecture and performance. In Space 2004 Conference and Exhibit, volume 5986, San Diego, California, 2004. AIAA.
- [NJH85] A. D. Nashif, D. I. G. Jones, and J. P. Henderson. Vibration Damping. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [Pel95] S. Pellegrino. Large retractable appendages in spacecraft. Journal of Spacecraft and Rockets, 32(6) :1006–1014, 1995.
- [PGGA00] S. Pellegrino, C. Green, S. Guest, and Watt A. Sar advanced deployable struc-ture. Technical Report CUED/DSTRUCT/TR191, University of Cambridge, Department of Engineering,, 2000.
- [PKLW02] S. Pellegrino, E. Keadze, T. Lefort, and A.M. Watt. Low-cost hinge for deployable structures. Contract no. 24070108 for ASTRIUM CUED/D-STRUCT/TR202, University of Cambridge, July 2002 2002.
- [Pug76] A. Pugh. An introduction to tensegrity. University of California Press, Ber-keley, CA, USA, 1976.
- [RB91] C. Reboulet and T. Berthomieu. Dynamic models of a six degrees of freedom parallel manipulators. Robots in Unstructured Environments, 2(1153-1157), 1991.
- [Red75] W.N. Redisch. Ats-6 description. In The 11th International Conference on Communications, page 18, San Francisco, Californy, 1975. Provided by the Smithsonian/NASA Astrophysics Data System.

- [Rim65] F.P.J. Rimrott. Storable tubular extendible member : a unique machine element. Machine Design, 37 :156–163, 1965.
- [Rim66] F.P.J. Rimrott. Two secondary effects in bending of slit thin-walled tubes. Journal of Applied Mechanics, 1966.
- [RV95] F. Ronga and T. Vust. Stewart platforms without computer. In the 1992 International Conference on Real Analytic and Algebraic Geometry, pages 196–212, Trento, 1995.
- [Sch97] B.W. Schafer. Cold-formed steel behavior and design : Analytical and numerical modeling of elements and members with longitudinal stiffeners. PhD thesis, Cornell University, 1997.
- [Sef99] K.A. Seffen. Deployment dynamics of tape-springs. The Royal Society London, 455 :1003–1048, 1999.
- [Seg98] W. T. Segui. LRFD Steel Design. PWS Publishing Company, Boston, second edition, 1998.
- [SOG00] B. M. Saint-Onge and C.M. Gosselin. Singularity analysis and representation of the general gough-stewart platform. International Journal of Robotics Research, 19(3) :271–288, 2000.
- [SP97] K.A. Seffen and S. Pellegrino. Deployment of a rigid panel by tape-springs. Technical Report CUED/D-STRUCT/TR 168, University of Cambridge Department of Engineering, August 1997 1997.
- [SS91] G. Sado and M.C. Sado. Les plans d’expériences. De l’expérimentation à l’assurance qualité. AFNOR, Paris, 1991.
- [TG61] S. Timoshenko and J. Gere. Theory of elastic stability. McGraw-Hill Book Company, second edition edition, 1961.
- [Tib02] G. Tibert. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications. PhD thesis, Royal Institute of Technology, 2002.
- [TP03] A.G. Tibert and S. Pellegrino. Deployable tensegrity masts. In AIAA, editor, 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, volume 1978, Norfolk , VA, 2003.
- [UEH⁺02] W. F. Unckenbold, M. J. Eiden, L. Herbeck, M. Leipold, C. Schöppinger, and Chr. Sickinger. Boom deployment mechanism for large deployable antennas. In The 25th ESA Antenna Workshop on Satellite Technology, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2002.
- [Web69] J.E. Webb. Deployable lattice column, 30 December 1969 1969.
- [Wus54] W. Wust. Einige anwendungen der theorie der zylinderschale,. Z. angew. Math. Mech., 34 :444–454, 1954.

- [Zie77] H. Ziegler. Principles of structural stability. Birkhauser. Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften, stuttgart, second edition, 1977.

Annexes

Position des points d'attache A_i et B_i de l'hexapode

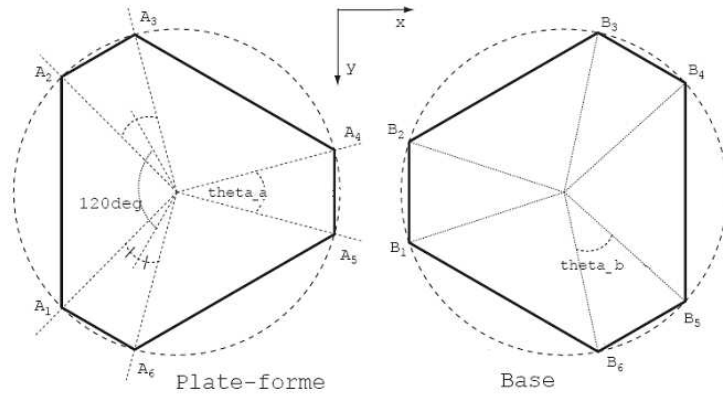


FIG. 5.13 – Position des points d'attache A_i et B_i des jambes de l'hexapode

Sur la base :

$$\begin{aligned}
 B_1 & \left(R_b \cos\left(\frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(\frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right) \\
 B_2 & \left(R_b \cos\left(2\pi - \frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(2\pi - \frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right) \\
 B_3 & \left(R_b \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right) \\
 B_4 & \left(R_b \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right) \\
 B_5 & \left(R_b \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right) \\
 B_6 & \left(R_b \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta_b}{2}\right), R_b \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta_b}{2}\right), 0 \right)
 \end{aligned}$$

Sur la plate-forme supérieure :

$$\begin{aligned}
A_1 & \left(r_p \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_a}{2}\right), r_p \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_a}{2}\right), h \right) \\
A_2 & \left(r_p \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\theta_a}{2}\right), -r_p \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\theta_a}{2}\right), h \right) \\
A_3 & \left(r_p \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\theta_a}{2}\right), r_p \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\theta_a}{2}\right), h \right) \\
A_4 & \left(r_p \cos\left(\pi + \frac{\theta_a}{2}\right), r_p \sin\left(\pi + \frac{\theta_a}{2}\right), h \right) \\
A_5 & \left(r_p \cos\left(\pi - \frac{\theta_a}{2}\right), r_p \sin\left(\pi - \frac{\theta_a}{2}\right), h \right) \\
A_6 & \left(r_p \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta_a}{2}\right), r_p \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta_a}{2}\right), h \right)
\end{aligned}$$

avec

- le rayon de la base $R_b = 252,5mm$,
- le rayon de la plate-forme supérieure $r_p = 71.5mm$,
- les angles séparant deux points d'attache adjacents au niveau de la base $\theta_b = 18.04^\circ$ et de la plate-forme $\theta_a = 36.88^\circ$,
- la course des actionneurs verticaux situés à la base $S = 16mm$
- la longueur des jambes supposée identique pour chaque jambe $l = 487.2mm$.

Calcul de la position du centre de cisaillement

$$I_y y = \int x^2 dS \quad (5.14)$$

$$= \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} R_b^2 \cos^2 \theta R_b e d\theta \quad (5.15)$$

$$= \frac{e R_b^3}{2} (\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) \quad (5.16)$$

ainsi q_s , la répartition du flux de cisaillement pour une section ouverte est :

$$q_s = \int_{s_0}^s \left(-t \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dS \quad (5.17)$$

$$= \int_{\alpha}^{\theta} -e \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r d\theta \quad (5.18)$$

$$= \frac{-2(\sin \theta - \sin \alpha)}{R_b (\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad (5.19)$$

La position du centre de torsion sur l'axe de symétrie est :

$$x_C = \int_{s_0}^s \left(r_y \frac{\partial x}{\partial S} - r_x \frac{\partial y}{\partial S} \right) q_s dS \quad (5.20)$$

$$= \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (-r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta) \frac{-2(\sin \theta - \sin \alpha)}{R_b (\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)} r d\theta \quad (5.21)$$

$$= \frac{4R}{(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)} \left[\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha \right] \quad (5.22)$$

Matrices de masse et d'amortissement

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_d + I_h) & 0 & (I_d - I_h)\phi_{x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (I_d + I_h) & -(I_d - I_h)\phi_{x_1} \\ 0 & 0 & 0 & (I_d - I_h)\phi_{x_2} & -(I_d - I_h)\phi_{x_1} & I_p \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(I_d - I_h)\dot{v}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2(I_d - I_h)\dot{v}_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

où $I_d = \frac{1}{4}mr^2$, $I_p = \frac{1}{2}mr^2$, $I_h = \frac{1}{12}me^2$ et e l'épaisseur de la plate-forme.