

**Thèse de Doctorat
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

**Construction et implémentation
de lois cohésives extrinsèques**

Présentée devant
l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir
le Grade de Docteur

par
Fabien Cazes
Agrégé de Mécanique

École doctorale :
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :
Mécanique

Directeur de thèse : **Alain Combescure**
Co-encadrement de la thèse : **Michel Coret**

Thèse présentée le 28 septembre 2010 devant le jury composé de :

Jacky MAZARS	Professeur émérite, Grenoble INP	Président
Nicolas MOËS	Professeur, École Centrale de Nantes	Rapporteur
François HILD	Directeur de recherche, ENS de Cachan	Rapporteur
Jean-Jacques MARIGO	Directeur de recherche, École Polytechnique	Examineur
Arnaud SUFFIS	Docteur, Snecma - groupe Safran	Examineur
Alain COMBESCURE	Professeur, INSA de Lyon	Examineur
Michel CORET	Maître de conférences, INSA de Lyon	Examineur

INSA, direction de la recherche - Écoles doctorales - Quadriennal 2007-2010

Sigle	École doctorale	Nom et coordonnées du responsable
CHIMIE	Chimie de Lyon M. Jean Marc Lancelin Insa : R. Gourdon http://sakura.cpe.fr/ED206	M. Jean Marc Lancelin Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment CPE 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.43.13.95 lancelin@hikari.cpe.fr
EEA	Électronique, Électrotechnique, Automatique M. Alain Nicolas Insa : C. Plossu ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. Laboune AM. 64.43 – Fax : 64.54 http://www.insa-lyon.fr/eea	M. Alain Nicolas Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 Écully Tél : 04.72.18.60.97, Fax : 04.78.43.37.17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. Havgoudoukian
E2M2	Évolution, Écosystème, Microbiologie, Modélisation M. Jean-Pierre Flandrois Insa : H. Charles http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2	M. Jean-Pierre Flandrois CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment G. Mendel 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.26.23.59.50, Fax : 04.26.23.59.49 Port : 06.07.53.89.13 E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	Interdisciplinaire sciences-santé M. Didier Revel Insa : M. Lagarde Secrétariat : S. Boudjema	M. Didier Revel Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 avenue Doyen Lépine 69500 Bron Tél : 04.72.68.49.09, Fax : 04.72.35.49.16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	Informatique et mathématiques M. Alain Mille Secrétariat : C. Dayeyan http://infomaths.univ-lyon1.fr	M. Alain Mille Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.44.82.94, Fax : 04.72.43.13.10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr alain.mille@liris.cnrs.fr
MATÉRIAUX	Matériaux de Lyon M. Jean Marc Pelletier Secrétariat : C. Bernavon 83.85	M. Jean Marc Pelletier INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.43.83.18, Fax : 04.72.43.85.28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique M. Jean Louis Guyader Secrétariat : M. Laboune PM : 71.70 – Fax : 87.12	M. Jean Louis Guyader INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne cedex Tél : 04.72.18.71.70, Fax : 04.72.43.72.37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* M. Lionel Obadia Insa : J.Y. Toussaint	M. Lionel Obadia Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 Lyon cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76, Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Introduction

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de Lyon sous la direction d'Alain Combescure et de Michel Coret avec le soutien financier de la Snecma - groupe Safran. L'objectif était d'étudier les couplages possibles entre les modèles décrivant la rupture de manière continue (modèles d'endommagement, modèles élasto-plastiques endommageables, ...) et ceux décrivant la rupture de manière discontinue (modèles cohésifs, modèle de Griffith). Ce travail a fait suite à un stage de master recherche effectué au LaMCoS intitulé « Couplage de l'endommagement et de la fissuration » [Cazes *et al.*, 2007] encadré par Anthony Gravouil, Michel Coret, et Alain Combescure.

Mécanique de l'endommagement et de la rupture La mécanique de la rupture est une science qui s'est élaborée principalement à partir des années 1950 sous l'impulsion des milieux industriels des transports. Deux approches distinctes se sont développées indépendamment l'une de l'autre. D'abord une approche continue a permis de modéliser finement la rupture des matériaux quasi-fragiles et ductiles avec les modèles d'endommagement et de plasticité. Ces modèles ont nécessité le développement d'un cadre thermodynamique des milieux continus aujourd'hui utilisé par l'ensemble de la communauté scientifique. Le traitement de la phase adoucissante du comportement du matériau est resté problématique jusque dans les années 1980, lorsque des techniques de régularisation ont été introduites pour imposer une largeur minimale à la zone endommagée. Parallèlement, une approche discontinue s'est développée plus spécifiquement pour les matériaux fragiles à partir des travaux pionniers de Griffith, la rupture étant alors due à la propagation de fissures dans le matériau. L'introduction de la notion de facteur d'intensité des contraintes [Irwin, 1957] et l'utilisation d'intégrales de contours [Rice, 1968] a permis de développer des critères fiables de propagation de ces fissures.

La différence entre ces deux approches continue et discontinue est surtout une question d'échelle d'observation : une étude fine des phénomènes apparaissant autour d'une fissure dans un matériau fragile montre de l'endommagement au voisinage de la pointe, et un endommagement dans un matériau quasi-fragile peut être vu comme une fissure si on étudie une grande structure dans sa globalité. Dans tous les cas, l'endommagement entourant la pointe peut être considéré comme le phénomène précurseur de la rupture finale du matériau. Il n'est donc pas étonnant que la recherche actuelle tende à aller vers une jonction de ces deux théories

dont les objectifs sont similaires. Ceci explique l'émergence récente des modèles cohésifs (pour lesquels l'endommagement est surfacique), pouvant être considérés comme une approche intermédiaire entre endommagement continu (donc volumique) et fissuration de Griffith (endommagement linéique). Un avantage important des modèles cohésifs sur l'utilisation de la théorie énergétique de Griffith est leur capacité à prédire l'apparition d'une fissure dans un matériau sain.

Ces trente dernières années ont été marquées par de nombreux travaux portant sur l'implémentation numérique des modèles de rupture, qui, couplés à l'augmentation exponentielle de la puissance des ordinateurs, permettent aujourd'hui de simuler la rupture de manière satisfaisante. Les modèles discontinus conservent dans ce domaine un avantage certain par rapport aux modèles continus dont l'implémentation numérique n'est pas encore assez performante pour permettre des calculs fins sur des structures complexes. L'implémentation numérique la plus simple des modèles discontinus consiste à laisser passer la fissure entre certains éléments du maillage en dédoublant les nœuds sur le chemin de la discontinuité. D'autres méthodes ont été introduites plus récemment pour donner plus de liberté au trajet de la fissure, parmi lesquelles on peut citer la méthode des éléments-finis étendus (X-FEM) qui permet d'autoriser la propagation de discontinuités coupant les éléments du maillage.

Contexte industriel Les ingénieurs sont souvent confrontés à des problèmes de fiabilité et de durabilité dans des domaines variés appartenant au génie mécanique (aéronautique, automobile, naval, armement, ...), au génie civil (fabrication de ponts, de tunnels, d'installations nucléaires, ...), ou à la biomécanique (fabrication de prothèses, simulations d'accidents, ...), ce qui explique la forte implication des milieux industriels dans le développement de la mécanique de la rupture. Un enjeu actuel pour l'industrie, et en particulier pour la Snecma - groupe Safran, est la simulation numérique avec des modèles capables de représenter le processus de rupture dans sa globalité depuis l'initiation de la rupture dans un matériau sain jusqu'à la ruine de la structure. De ce point de vue, les modèles continus et discontinus semblent complémentaires :

- les modèles continus sont bien adaptés à la modélisation de la phase initiale de la rupture mais conduisent souvent à des problèmes d'instabilités numériques lorsque l'endommagement devient trop important ;
- les modèles discontinus ne permettent pas de modé-

liser un endommagement diffus, mais représentent bien la phase finale de la rupture. De plus, ils permettent de connaître l'ouverture des fissures qui est une information importante pour les études de durabilité.

Faire cohabiter ces deux types de descriptions dans une approche globale pour bénéficier de leurs avantages combinés pourrait faciliter le travail des ingénieurs souvent confrontés aux limitations des modèles de rupture utilisés séparément.

Contexte scientifique Après s'être beaucoup préoccupée pendant une vingtaine d'années de l'implémentation numérique des modèles de rupture, il semble que la recherche actuelle en mécanique de la rupture porte à nouveau de plus en plus sur l'amélioration des modèles utilisés. Dans ce domaine, on peut distinguer les axes de recherches suivants :

- *aller chercher des informations aux échelles inférieures.* Ceci peut être fait en utilisant des techniques d'homogénéisation pour obtenir le comportement macroscopique du matériau à partir de la modélisation d'un volume élémentaire représentatif (échelle mésoscopique). Ce thème de recherche est particulièrement important pour tous les matériaux ayant une structure périodique ;
- *développer des approches probabilistes.* Si les données concernant la micro-structure sont aléatoires, et donc souvent inconnues, le manque d'information peut être traité par l'utilisation de probabilités. Pour souligner l'importance de ces méthodes, on peut rappeler que la thermodynamique est fondée sur une vision probabiliste du comportement des particules élémentaires composant le matériau ;
- *tester de nouveaux modèles.* On cherche avec cette approche à trouver de nouveaux modèles ou de nouvelles lois de comportement décrivant mieux le comportement réel du matériau ;
- *tester de nouveaux principes d'évolution.* Cette approche consiste à intervenir sur les lois physiques plutôt que sur les modèles et leurs lois de comportement, comme cela est fait par exemple dans [Francfort et Marigo, 1998] pour traiter un problème de rupture fragile ;
- *développer des méthodes expérimentales plus précises.* De gros progrès ont été effectués ces dernières années dans ce domaine, notamment grâce à l'apparition de méthodes permettant d'estimer les champs mécaniques à l'intérieur d'une structure.

Le couplage de l'endommagement et de la fissuration peut jouer un rôle pour chacun de ces axes de recherche. Les travaux présentés dans cette thèse correspondent plutôt au premier point de la liste avec l'idée qu'un état d'endommagement peut être vu comme une fissure macroscopique à une échelle plus grossière.

La mécanique de la rupture au LaMCoS Plusieurs thèses réalisées au LaMCoS ont porté sur l'implémentation numérique de modèles de rupture avec la méthode des éléments-finis étendus (X-FEM), développée

dans [Belytschko et Black, 1999] et [Moës *et al.*, 1999], qui permet de faire propager des fissures sans avoir à changer le maillage pendant la propagation. En particulier, Julien Réthoré [Réthoré, 2005] et Thomas Menouillard [Menouillard, 2007] ont utilisé ce type d'éléments pour des problèmes de propagation de fissure en dynamique ; Rachelle Ribeaucourt [Ribeaucourt, 2006] a utilisé ces éléments avec un algorithme de résolution LATIN pour des problèmes de contact-frottement ; Thomas Elguedj [Elguedj, 2006] a utilisé des éléments-finis étendus avec une formulation comportant un lagrangien augmenté pour traiter le contact avec des enrichissements de pointe de fissure basés sur des solutions analytiques de plasticité confinée ; Benoit Prabel [Prabel, 2007] a développé un critère de propagation en contraintes pour des fissures évoluant dans un matériau plastique avec des éléments-finis étendus ; et Johann Rannou [Rannou, 2008] a développé une méthode X-FEM multi-grilles et l'a utilisée sur des problèmes de fatigue en 3D. Toujours dans le domaine de la fissuration, Pascal Aubertin [Aubertin, 2008] a utilisé la méthode Arlequin pour coupler un modèle atomique en pointe de fissure avec un modèle continu éléments-finis sur le reste de la structure. Enfin, Nicolas Tardif [Tardif, 2009] a utilisé un modèle de plasticité couplé à un modèle de zone cohésive pour simuler le comportement d'un acier à haute température. Ces travaux ont permis de modéliser la propagation de fissures dans divers types de matériaux, mais il reste souvent difficile de simuler correctement l'initiation d'une fissure dans un matériau sain. Les modèles cohésifs permettent de traiter l'initiation d'une fissure, mais constituent souvent une modélisation assez grossière du comportement réel du matériau, ce qui rend difficile l'identification de leur loi de comportement. Un objectif à long terme du LaMCoS serait d'utiliser un modèle d'endommagement pour modéliser la phase d'initiation d'une fissure, puis de basculer vers un modèle discontinu plus performant numériquement pour la simulation de la propagation de cette fissure.

Objectifs L'objectif initial de ce travail était de déterminer comment une fissure peut être introduite dans un modèle d'endommagement de façon physiquement acceptable. Cet objectif a ensuite été complété par la volonté de construire un modèle de zone cohésive dont le comportement global soit équivalent à un modèle d'endommagement connu. Par ailleurs, deux autres objectifs sont apparus pendant la thèse :

- d'abord celui de construire un modèle d'endommagement pour lequel la régularisation n'intervient qu'à partir du moment où le comportement devient adoucissant ;
- ensuite, celui de développer une méthode pour l'implémentation d'une loi cohésive ayant une rigidité initiale infinie (loi extrinsèque).

Travaux réalisés Dans un premier temps, une étude bibliographique sur les modèles de rupture et leurs domaines de validité a permis de sélectionner deux types

de modèles offrant une description complète du processus de rupture :

- d’abord, les *modèles continus régularisés* avec la méthode du second-gradient ;
- ensuite, les *modèles mixtes continus/discontinus* associant un modèle continu durcissant à un modèle de zone cohésive.

Une méthode a ensuite été développée pour construire un modèle mixte continu/discontinu à partir d’un modèle continu régularisé en utilisant la notion de fissure équivalente développée dans [Mazars, 1984, Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996] selon laquelle deux modèles de rupture peuvent être considérés équivalents s’ils dissipent la même quantité d’énergie pour un même problème. Une première étude analytique réalisée sur un cas test unidimensionnel a permis de montrer que la donnée de la dissipation d’énergie dans la zone cohésive à chaque instant permet de calculer la solution du problème mécanique sans connaître *a priori* la loi cohésive. Si ces incréments d’énergie dissipée sont calculés à partir d’un modèle d’endommagement (que l’on appellera modèle de référence), on obtient une méthode permettant de calculer une loi cohésive à partir de la donnée d’un modèle d’endommagement.

Cette méthode de changement de modèle a ensuite été formulée dans un cadre éléments-finis et implémentée dans le logiciel Matlab. Deux calculs numériques sont alors effectués pour un même cas test :

- un premier calcul utilisant le modèle continu régularisé (modèle de référence) permet de calculer l’énergie dissipée par la structure durant chaque pas de temps ;
- un deuxième calcul utilisant le modèle mixte continu/discontinu (modèle équivalent) permet de construire incrémentalement la loi cohésive à partir de l’énergie dissipée calculée lors du premier calcul.

Il est possible de montrer que cette méthode de changement de modèle permet de conserver non seulement l’énergie dissipée mais aussi l’énergie libre et le travail des efforts extérieurs du modèle de référence lors de la construction du modèle équivalent.

La méthode a ensuite été étendue pour prendre en compte la présence de plasticité dans le modèle de référence. Cette partie de l’étude a été réalisée en collaboration avec Anita Simatos, doctorante au LaMCoS et au CEA, dont la thèse porte sur l’étude de la transition endommagement/fissuration dans les modèles de porosité. Nous avons alors défini un nouveau critère de changement de modèle permettant de tenir compte de la dissipation d’énergie par plasticité, et une propriété énergétique similaire à celle obtenue pour l’endommagement a été démontrée. Une pré-étude a été réalisée pour étudier la faisabilité de l’utilisation de la méthode sur des problèmes multidimensionnels.

Afin de disposer d’un modèle de référence faisant clairement apparaître la différence entre endommagement diffus et endommagement localisé, un modèle comportant deux variables d’endommagement a ensuite été développé. La variable d’endommagement diffus correspond au comportement durcissant du matériau et

n’a donc pas besoin d’être régularisée. La deuxième variable d’endommagement est à l’origine du comportement adoucissant du matériau et de l’endommagement localisé. Pour éviter le phénomène de localisation des déformations, cette variable est régularisée en utilisant la méthode du second-gradient implicite. Ce modèle a été implémenté et testé dans le logiciel Matlab pour des problèmes unidimensionnels et bidimensionnels.

Enfin, la loi cohésive obtenue avec la méthode de changement de modèle étant une loi extrinsèque, une formulation faible à deux champs permettant l’implémentation de ce type de lois a été développée. Cette formulation est assez proche de celle utilisée pour la construction de la loi cohésive à partir de l’énergie dissipée dans la discontinuité. Cette formulation ayant du mal à gérer la rupture des éléments, une deuxième formulation a été développée pour éliminer ce problème. Ces deux formulations ont également été implémentées et testées dans le logiciel Matlab pour des problèmes unidimensionnels et bidimensionnels.

Plan La thèse est divisée en trois parties. Dans la première partie, on étudie dans un cadre thermodynamique commun trois familles de modèles permettant de modéliser la rupture (modèles d’endommagement, modèles cohésifs, et modèle de Griffith). L’étude des critères de stabilité permet d’identifier les domaines de validité de ces modèles et conduit à s’intéresser à la notion de limiteur de localisation. Enfin, le modèle à double endommagement permettant de séparer l’endommagement diffus de l’endommagement localisé est présenté. La deuxième partie traite de la méthode de changement de modèle développée pendant la thèse. On se place d’abord dans le cas de modèles d’endommagement ne présentant pas de plasticité, puis dans le cas de modèles endommageables pouvant présenter de la plasticité. Des lois cohésives sont identifiées pour des exemples unidimensionnels et des pistes sont données pour aller vers une implémentation multidimensionnelle de la méthode. Dans la troisième partie, les deux formulations faibles pour l’implémentation numérique de lois cohésives extrinsèques sont présentées. Enfin, une pré-étude sur la possibilité d’une transition d’un modèle cohésif vers un modèle de Griffith pendant un calcul de rupture est effectuée dans le dernier chapitre.

Table des matières

Introduction générale	5
Notations	11
I Les modélisations de la rupture	15
Introduction	17
1 Outils pour l'étude de la rupture	18
1.1 Variables mécaniques	18
1.2 Étude thermodynamique	19
1.3 Stabilité	21
1.4 Naissance et propagation de discontinuités	23
2 Modèles de rupture	25
2.1 Modèles continus	25
2.2 Modèles discontinus	27
3 Étude de la stabilité	32
3.1 Matériau continu	32
3.2 Matériau avec une discontinuité	34
3.3 Bilan	36
4 Limiteurs de localisation	37
4.1 Localisation numérique	37
4.2 Modèles continus régularisés	38
4.3 Modèles mixtes continus/discontinus	40
4.4 Conclusion	40
5 Modèle à double endommagement	42
5.1 Construction du modèle	42
5.2 Exemple unidimensionnel	44
5.3 Exemple bidimensionnel	46
Conclusion	48
II Construction d'une loi cohésive à partir d'un modèle continu	51
Introduction	53
6 Étude bibliographique	54
6.1 Juxtaposition	54
6.2 Superposition	57
6.3 Juxtaposition et superposition	58

7 Cas d'un modèle de référence endommageable	59
7.1 Critère pour le changement de modèle	59
7.2 Modèle cohésif	59
7.3 Validité du changement de modèle	60
7.4 Construction analytique d'une loi cohésive	61
7.5 Construction numérique d'une loi cohésive	63
8 Cas d'un modèle de référence élasto-plastique endommageable	66
8.1 Bilan énergétique	66
8.2 Validité du changement de modèle	69
8.3 Calcul des énergies dissipées	69
8.4 Critère de changement de modèle	71
8.5 Construction analytique d'une loi cohésive	71
8.6 Construction numérique d'une loi cohésive	73
9 Vers une extension au cas multidimensionnel	77
9.1 Changement de modèle en mode I	77
9.2 Changement de modèle en mode mixte	78
9.3 Cas d'une fissure courbe	79
Conclusion	80
III Implémentation d'une loi cohésive extrinsèque et transition vers un modèle de Griffith	83
Introduction	85
10 Étude bibliographique	87
10.1 Trajet de fissure connu par avance	87
10.2 Trajet de fissure <i>a priori</i> inconnu	88
10.3 Lois cohésives usuelles	93
11 Problème mécanique	95
11.1 Équations locales	95
11.2 Modèle cohésif	96
12 Formulation en contraintes	99
12.1 Problème éléments-finis	99
12.2 Implémentation numérique	101
13 Formulation en contraintes modifiées	106
13.1 Notion de contrainte modifiée	106
13.2 Problème éléments-finis	107
13.3 Implémentation numérique	108
14 Transition vers un modèle de Griffith	111
14.1 Propagation stationnaire	111
14.2 Construction de la théorie de Griffith	113
14.3 Notions d'échelles	115
14.4 Modèle cohésif se comportant comme un modèle de Griffith	115
14.5 Changement de modèle	116
Conclusion	118

Conclusion générale	119
Implémentation numérique des modèles	123
A Éléments-finis avec non-linéarités matérielles	125
A.1 Problème mécanique	125
A.2 Cinématique	125
A.3 Méthodes d'intégration numérique	126
A.4 Écriture globale du problème mécanique	127
A.5 Discrétisation en espace	128
A.6 Ajout des conditions aux limites en déplacement	129
A.7 Discrétisation en temps	130
A.8 Algorithme	131
A.9 Comportement du matériau	132
A.10 Éléments bidimensionnels	133
A.11 Éléments unidimensionnels	134
B Implémentation d'un modèle à second-gradient implicite	136
B.1 Équations locales	136
B.2 Problème éléments-finis	136
B.3 Calcul des dérivées partielles	138
C Formulation imposant la dissipation dans l'élément	140
C.1 Équations locales	140
C.2 Problème éléments-finis	140
C.3 Cas d'un modèle élasto-plastique endommageable	142
C.4 Algorithme	142
D Éléments d'interface implémentés et opérateurs tangents	144
D.1 Éléments implémentés	144
D.2 Opérateurs tangents	145
E Pilotage du calcul	148
E.1 Problème général	148
E.2 Pilotage en déplacement	149
E.3 Pilotage en énergie cinétique	149
F Formulations mixtes	151
F.1 Définition et inversibilité	151
F.2 Condition <i>inf-sup</i>	151
F.3 Cas de l'élément cohésif en contraintes	152
G Programme Matlab	153
G.1 Organisation du code	153
G.2 Maillage	154
G.3 Principales structures du programme	154
G.4 Résolution des systèmes	156

Notations

Notations générales

- a : variable scalaire ;
 \underline{a} : tenseur d'ordre 1 ;
 $\underline{\underline{a}}$: tenseur d'ordre 2 ;
 $\underline{\underline{\underline{A}}}$: tenseur d'ordre 4 ;
 \mathbf{A} : vecteur colonne ou matrice ;
 A : vecteur nodal ou de fonctions de forme (implémentation numérique) ;
 \otimes : produit tensoriel ;
 \cdot : produit tensoriel contracté ;
 $\cdot\cdot$: produit tensoriel doublement contracté ;
 \mathcal{T}_i : ensemble des tenseurs d'ordre i ;
 $\underline{\underline{I}}_d$: tenseur identité d'ordre 2.

On notera les composantes d'un tenseur dans un base $\mathcal{B} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ de la manière suivante :

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Si \mathbf{A} est la matrice contenant ces composantes, on la notera :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}.$$

Fonctions mathématiques

- $\text{sign}(\cdot)$: fonction signe (-1 si strict. négatif, 0 si nul, 1 si strict. positif),
 $H(\cdot)$: fonction de Heaviside ;
 $\delta(\cdot)$: fonction de Dirac ;
 $\langle \cdot \rangle$: partie positive d'un nombre ;
 $\min(\cdot, \cdot)$: minimum de deux nombres ;
 $\max(\cdot, \cdot)$: maximum de deux nombres ;
 $\det(\underline{\underline{a}})$: déterminant ;
 $\nabla(\underline{a}), \underline{\nabla}(\underline{a})$: divergence ;
 $\underline{\nabla}(\underline{a}), \underline{\underline{\nabla}}(\underline{a})$: gradient ;
 $\underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{a})$: gradient symétrisé ;
 $\|\cdot\|_i$: norme i d'un tenseur ;

- $\arg(\cdot)$: argument (1 si vrai, 0 si faux) ;
 $\text{vol}(\Omega)$: volume d'un domaine volumique ;
 $\text{surf}(\Gamma)$: surface d'un domaine surfacique.

Géométrie

On fait dans tout le document l'hypothèse des petits déplacements, le domaine et les surfaces sont donc définis dans la configuration initiale de la structure.

Domaine continu

- Ω : partie continue du domaine ;
 Γ_1 : surface d'application des conditions aux limites en déplacement ;
 Γ_2 : surface d'application des conditions aux limites en effort ;
 Γ : contour du domaine ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$).

Domaine avec une discontinuité

- $\Omega^{-/+}$: partie inférieure/supérieure de Ω ;
 Γ_s : surface de la discontinuité ;
 $\Gamma_s^{-/+}$: partie inférieure/supérieure de Γ_s ;
 Γ_{zc} : surface de la zone cohésive ($\Gamma_{zc} \subset \Gamma_s$) ;
 $\Gamma_{zc}^{-/+}$: partie inférieure/supérieure de Γ_{zc} ;
 Σ : domaine entier ($\Sigma = \Omega \cup \Gamma_s$).

Espaces de champs

- \mathcal{F} : espace des champs de déplacements continus et réguliers définis sur Ω ;
 \mathcal{G} : espace des champs de contraintes et de sauts de déplacements continus définis sur Γ_s ;
 \mathcal{H} : espace des champs de variables régularisées continus définis sur Ω ;
 \mathcal{F}_c : espace des champs de déplacements continus, réguliers, et cinématiquement admissibles sur Ω ;
 \mathcal{F}_0 : espace des champs de déplacements continus, réguliers, et cinématiquement admissibles à 0 sur Ω .

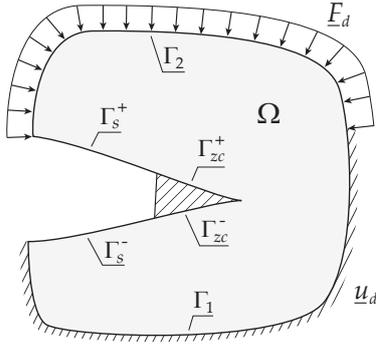


FIG. 1 – Notations pour le domaine continu et les surfaces de discontinuité

Partie continue du modèle

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: tenseur des déformations ;
 $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes ;
 E : module d'Young ;
 ν : coefficient de Poisson ;
 T : température ;
 θ : écart à la température de référence ;
 \underline{q} : vecteur courant de chaleur ;
 C : chaleur spécifique ;
 ρ : masse volumique ;
 k : coefficient de dilatation thermique ;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$: tenseur des déformations élastiques ;
 $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$: tenseur des déformations plastiques ;
 $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$: tenseur des contraintes effectives ;
 D : variable d'endommagement ;
 Y : taux de restitution d'énergie élastique ;
 z : variable pilotant l'endommagement ;
 κ : variable de mémoire ;
 ε_{eq} : déformation équivalente de Mazars ;
 p : déformation plastique cumulée ;
 \bar{z} : variable régularisée de z ;
 \bar{c} : paramètre de régularisation (second-gradient) ;

$\underset{\circ}{\underline{\underline{K}}}$: tenseur de Hooke élastique ;
 $\hat{\underline{\underline{K}}}$: tenseur de Hooke effectif ;
 $\underset{\circ}{L}$: opérateur tangent de raideur en 2D ou en 3D ;
 \mathcal{L} : opérateur tangent de raideur en 1D ;
 $\underline{\underline{A}}$: tenseur acoustique.

Partie discontinue du modèle

$\llbracket \underline{u} \rrbracket$: saut de déplacement ;
 $\llbracket \underline{u} \rrbracket^e$: saut de déplacement élastique ;
 $\llbracket \underline{u} \rrbracket^p$: saut de déplacement plastique ;
 σ^s : contrainte cohésive ;
 ζ : contrainte cohésive modifiée ;
 $\llbracket \underline{u} \rrbracket_{eq}$: saut de déplacement équivalent ;
 σ_{eq}^s : contrainte cohésive équivalente ;
 ζ_{eq} : contrainte cohésive équivalente modifiée ;
 $\llbracket \underline{u} \rrbracket_c$: saut de déplacement équivalent critique (rupture) ;
 σ_c : contrainte cohésive équivalente critique (initiation) ;
 $\llbracket \underline{q} \rrbracket$: vecteur de saut de courant de chaleur ;

$\underline{\underline{K}}^s$: opérateur tangent de raideur ;
 $\underline{\underline{S}}$: opérateur de souplesse ;
 $\underline{\underline{M}}^s$: opérateur tangent de souplesse ;
 $\underline{\underline{N}}^s$: opérateur tangent de souplesse modifié ;

G : taux de restitution d'énergie élastique ;
 G_c : taux de restitution d'énergie élastique critique ;
 \mathcal{A} : aire de la fissure.

Implémentation numérique

Maillage

n_{no} : nombre de nœuds du maillage volumique ;
 n_{no}^s : nombre de nœuds du maillage de l'interface ;
 n : nombre de nœuds d'un élément ;
 n_g : nombre de points de Gauss d'un élément ;
 Ω_{el} : domaine occupé par un élément continu ;
 Γ_s^{el} : domaine occupé par un élément d'interface ;
 $\hat{\Omega}_{el}, \hat{\Gamma}_s^{el}$: domaines occupés par les éléments de référence de volume ou de surface ;
 \mathbf{J} : matrice jacobienne ;
 J : déterminant de la matrice jacobienne ;
 J^s : jacobien pour un élément d'interface.

Vecteurs représentant des tenseurs

- \mathbf{u} : vecteur déplacements ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$: vecteur déformations ;
- $\boldsymbol{\sigma}$: vecteur contraintes ;
- $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$: vecteur sauts de déplacements ;
- $\boldsymbol{\sigma}^s$: vecteur contraintes cohésives ;
- $\boldsymbol{\zeta}$: vecteur contraintes cohésives modifiées.

Variables nodales

- U : valeurs nodales des déplacements (vecteur colonne) ;
- Σ : valeurs nodales des contraintes cohésives (vecteur colonne) ;
- Z : valeurs nodales des contraintes cohésives modifiées (vecteur colonne) ;
- \bar{Z} : valeurs nodales de la variable régularisée ;

- $U_{el}, \Sigma_{el}, Z_{el}, \bar{Z}_{el}$: valeurs nodales des champs pour un élément.

Opérateurs matriciels

- \mathbf{K} : opérateur de raideur du matériau continu (matrice) ;
- \mathbf{L} : opérateur tangent de raideur du matériau continu (matrice) ;
- \mathbf{S} : opérateur de souplesse de la zone cohésive (matrice) ;
- \mathbf{M}^s : opérateur tangent de souplesse de la zone cohésive (matrice) ;
- \mathbf{N}^s : opérateur tangent de souplesse modifié de la zone cohésive (matrice) ;
- T : matrice de projection des inconnues nodales sur la discontinuité ;
- N : vecteur contenant les fonctions de forme de l'élément ;
- C : matrice pour le calcul de \mathbf{u} en un point ;
- B : matrice pour le calcul de $\boldsymbol{\varepsilon}$ en un point ;
- \mathbf{C}^s : matrice pour le calcul de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ en un point ;
- \mathbf{D}^s : matrice pour le calcul de $\boldsymbol{\sigma}^s$ et $\boldsymbol{\zeta}$ en un point ;
- E : matrice pour le calcul de \bar{z} en un point.

Algorithme de Newton

- I_t : piquet de temps courant ;
- $(.)^{(I_t)}$: valeur d'une variable au piquet de temps I_t ;
- i : itération courante ;
- $(.)^i$: valeur d'une variable à l'itération i du pas de temps courant.

Espaces et ensembles

- $\bar{\mathcal{F}}$: espace des champs de vecteurs déplacements continus et réguliers définis sur Ω ;
- $\bar{\mathcal{G}}$: espace des champs de vecteurs contraintes cohésives continus et réguliers définis sur Γ_s ;
- $\bar{\mathcal{H}}$: espace des champs de variables régularisées continus et réguliers définis sur Ω ;
- \bar{F} : ensemble des vecteurs colonnes de la taille de U ;
- \bar{G} : ensemble des vecteurs colonnes de la taille de Σ et Z ;
- \bar{H} : ensemble des vecteurs colonnes de la taille de \bar{Z} .

Énergies, puissances, entropies

Volumique	Surfacique	Globale	Discontinuité	Grandeur
		\mathcal{E}_t	$(\mathcal{E}_t)_s$	énergie totale
		\mathcal{E}		énergie potentielle
ρe	e_s	\mathcal{E}_{int}	$(\mathcal{E}_{int})_s$	énergie interne
$\rho \psi$	ψ_s	Ψ		énergie libre
$\rho \psi^t$	ψ_s^t	Ψ^t	Ψ_s^t	énergie libre thermique
$\rho \psi^e$	ψ_s^e	Ψ^e	Ψ_s^e	énergie libre mécanique
ρs	s_s	S		entropie
ρs_e	$(s_e)_s$	S_e		entropie d'échange
ρs_i	$(s_i)_s$	S_i		entropie interne
ϕ	ϕ_s	Φ	Φ_s	énergie dissipée
ϕ^e	ϕ_s^e	Φ^e		énergie dissipée par endommagement
ϕ^p	ϕ_s^p	Φ^p		énergie dissipée par plasticité
ϕ^c	ϕ_s^c	Φ^c		énergie dissipée de calcul
ϕ^1	ϕ_s^1	Φ^1	Φ_s^1	énergie dissipée intrinsèque
ϕ^2	ϕ_s^2	Φ^2		énergie dissipée thermiquement
		Q	Q_s	chaleur reçue
			E_s	énergie de surface
		\mathcal{W}_{int}		travail des efforts intérieurs
		\mathcal{W}_{ext}		travail des efforts extérieurs
		K		énergie cinétique
		\mathcal{P}_{int}		puissance des efforts intérieurs
		\mathcal{P}_{ext}		puissance des efforts extérieurs
		\mathcal{P}_a		puissance des quantités d'accélération

Première partie

Les modélisations de la rupture

Introduction

Le phénomène de rupture On considère une éprouvette rectangulaire soumise à un chargement de traction jusqu'à sa rupture. L'éprouvette comprend déjà un certain nombre de micro-fissures avant le début du chargement (figure 2).

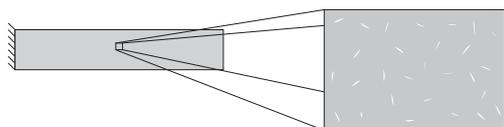


FIG. 2 – Éprouvette avant le chargement

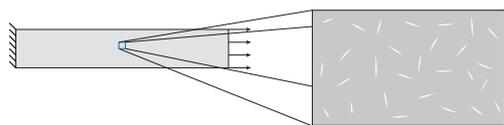


FIG. 3 – Propagation des micro-fissures

Après avoir atteint un certain niveau de chargement, les micro-fissures se propagent (figure 3) jusqu'à ce que certaines coalescent dans une zone de plus grandes déformations appelée zone de localisation (figure 4).

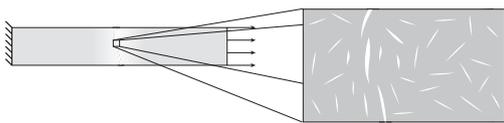


FIG. 4 – Formation d'une zone de localisation

L'éprouvette est complètement rompue lorsqu'une fissure macroscopique traverse l'éprouvette au niveau de la zone de localisation (figure 5).

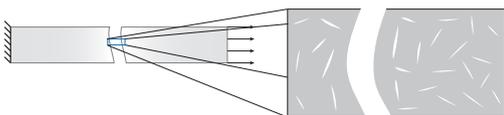


FIG. 5 – Rupture de l'éprouvette

Dans cet exemple, et pour beaucoup de problèmes de rupture, on peut distinguer trois zones selon leur degré d'endommagement :

- la zone d'endommagement diffus ;
- la zone d'endommagement localisé ;
- La surface fissurée.

Dans la zone d'endommagement diffus, les défauts se développent indépendamment de leurs voisins. La zone d'endommagement localisé se forme lorsque certains défauts interagissent pour former un plus gros défaut qui prend le dessus sur les autres et conduit à la rupture totale de l'éprouvette.

Remarque : la rupture de la structure est ici initiée par la micro-fissuration mais pourrait aussi être amorcée par d'autres phénomènes tels que des micro-retassures, inclusions, joints de grains, stries de fatigue . . .

Objectif Cette première partie, qui est essentiellement bibliographique (à l'exception du dernier chapitre sur le modèle à double endommagement), donne un aperçu des modèles et techniques disponibles pour l'étude de la rupture afin de sélectionner pour la suite de l'étude des modèles capables de modéliser le processus de rupture dans sa globalité.

Plan de la partie Dans le premier chapitre, on commence par se donner, en se basant sur les travaux existants :

- un cadre thermodynamique commun pour les modèles continus et discontinus ;
- une définition de la stabilité et des critères la caractérisant ;
- un critère pour l'initiation et un critère pour la propagation des discontinuités dans le matériau.

Dans le deuxième chapitre, on présente successivement les modèles d'endommagement, les modèles de plasticité, les modèles cohésifs et le modèle de Griffith. Dans le chapitre suivant, une étude de la stabilité est utilisée pour identifier les domaines de validité de ces modèles, ce qui conduit à étudier la notion de limiteur de localisation dans le chapitre 4. Un modèle développé pendant la thèse et comportant deux variables d'endommagement est finalement présenté dans le chapitre 5. Dans un chapitre de bilan, deux familles de modèles permettant de modéliser les phases diffuses et localisées de la rupture sont sélectionnées pour la suite de l'étude.

Chap. 1

Outils pour l'étude de la rupture

1.1 Variables mécaniques

1.1.1 Partie continue

On considère un domaine Ω de contour Γ . La cinématique de ce domaine est décrite par le champ de déplacements \underline{u} . Le tenseur des déformations infinitésimales $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est calculé grâce à l'opérateur gradient symétrisé $\underline{\underline{\nabla}}^s$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}). \quad (1.1)$$

Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est défini à partir de l'expression de la puissance des efforts intérieurs d'un champ virtuel $d\underline{u}^*$:

$$\mathcal{P}_{int}^*(d\underline{u}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}^*}{dt} d\Omega, \quad \forall d\underline{u}^* \in \mathcal{F}, \quad (1.2)$$

\mathcal{F} étant l'espace des champs de déplacements continus et réguliers définis sur Ω , et $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ la déformation associée à \underline{u}^* . Les efforts extérieurs \underline{F} sont définis de telle sorte que la puissance des efforts extérieurs s'écrive, sans tenir compte d'une distribution volumique d'efforts extérieurs,

$$\mathcal{P}_{ext}^*(d\underline{u}^*) = \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{u}^* dS, \quad \forall d\underline{u}^* \in \mathcal{F}. \quad (1.3)$$

Pour un problème de statique, le principe des puissances virtuelles s'écrit

$$\mathcal{P}_{int}^*(d\underline{u}^*) + \mathcal{P}_{ext}^*(d\underline{u}^*) = 0, \quad \forall d\underline{u}^* \in \mathcal{F}. \quad (1.4)$$

Le choix de certains champs virtuels particuliers permet d'obtenir les équations locales d'admissibilité statique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T, \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.5)$$

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.6)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (1.7)$$

$\underline{\underline{\nabla}}$ étant l'opérateur divergence, \underline{n} la normale extérieure au contour Γ , et \underline{F}_d les efforts surfaciques appliqués sur Γ_2 . L'admissibilité cinématique s'écrit

$$\underline{u} = \underline{u}_d, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (1.8)$$

\underline{u}_d étant le champ de déplacement imposé sur Γ_1 .

1.1.2 Discontinuité

Saut de déplacement Dans cette section, le domaine comporte une surface de discontinuité Γ_s de géométrie régulière. Une orientation est donnée à la fissure en prolongeant la définition de \underline{n} sur Γ_s de telle sorte que \underline{n} soit normal au plan tangent à Γ_s en tout point de la discontinuité. Ceci permet de définir les bords supérieurs et inférieurs de la fissure notés respectivement Γ_s^+ et Γ_s^- (voir figure 1.1). Le saut de déplacement $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ est défini sur Γ_s comme étant la différence du déplacement \underline{u}^+ sur le bord supérieur et du déplacement \underline{u}^- sur le bord inférieur :

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{u}^+ - \underline{u}^-, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (1.9)$$

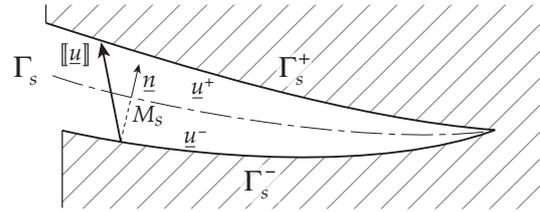


FIG. 1.1 – Discontinuité et saut de déplacement

\underline{n} est complété de deux vecteurs \underline{t} et \underline{b} permettant de définir en chaque point M_s de Γ_s un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_s = (M_s, \underline{n}, \underline{t}, \underline{b})$. Les composantes de $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ dans \mathcal{R}_s sont notées $\llbracket u \rrbracket_n$, $\llbracket u \rrbracket_t$, et $\llbracket u \rrbracket_b$:

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket = \llbracket u \rrbracket_n \underline{n} + \llbracket u \rrbracket_t \underline{t} + \llbracket u \rrbracket_b \underline{b}. \quad (1.10)$$

Contrainte cohésive et équations d'équilibre

On note \mathcal{G} l'ensemble des champs continus définis sur Γ_s . Le principe des puissances virtuelles appliqué à la discontinuité s'écrit

$$\mathcal{P}_{int}^*(d\llbracket \underline{u} \rrbracket^*) + \mathcal{P}_{ext}^*(d\llbracket \underline{u} \rrbracket^*) = 0, \quad \forall d\llbracket \underline{u} \rrbracket^* \in \mathcal{G}. \quad (1.11)$$

On définit le vecteur des contraintes cohésives $\underline{\underline{\sigma}}^s$ tel que

$$\mathcal{P}_{int}^*(d\llbracket \underline{u} \rrbracket^*) = - \int_{\Gamma_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \frac{d\llbracket \underline{u} \rrbracket^*}{dt} d\Gamma_s, \quad \forall d\llbracket \underline{u} \rrbracket^* \in \mathcal{G}. \quad (1.12)$$

Les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^s$ dans \mathcal{R}_s sont notées σ_n^s , σ_t^s et σ_b^s :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \sigma_n^s \underline{n} + \sigma_t^s \underline{t} + \sigma_b^s \underline{b}. \quad (1.13)$$

\mathcal{P}_{ext}^* peut s'exprimer en fonction des contraintes du matériau aux bords de la fissure de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_{ext}^*(d\underline{u}^*) = \int_{\Gamma_s} (\underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} \cdot \frac{d\underline{u}^{*+}}{dt} + \underline{\sigma}^- \cdot (-\underline{n}) \cdot \frac{d\underline{u}^{*-}}{dt}) d\Gamma_s, \quad (1.14)$$

avec $\underline{\sigma}^+$ le tenseur des contraintes sur Γ_s^+ et $\underline{\sigma}^-$ le tenseur des contraintes sur Γ_s^- . L'expression 1.11 peut donc s'écrire

$$- \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^s \cdot \frac{d[[u]]^*}{dt} d\Gamma_s \quad (1.15)$$

$$+ \int_{\Gamma_s} (\underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} \cdot \frac{d\underline{u}^{*+}}{dt} - \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n} \cdot \frac{d\underline{u}^{*-}}{dt}) d\Gamma_s = 0. \quad (1.16)$$

En choisissant un champ de déplacement virtuel tel que $\underline{u}^{*+} = \underline{u}^{*-}$, et donc $[[u]]^* = 0$, cette équation devient

$$\int_{\Gamma_s} (\underline{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^-) \cdot \underline{n} \cdot \frac{d\underline{u}^{*+}}{dt} d\Gamma_s = 0, \quad (1.17)$$

ce qui permet d'écrire

$$\underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n}. \quad (1.18)$$

L'équation 1.16 devient, pour un champ virtuel quelconque, en tenant compte de 1.18,

$$- \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^s \cdot \frac{d[[u]]^*}{dt} d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} \cdot \frac{d[[u]]^*}{dt} d\Gamma_s = 0, \quad (1.19)$$

ce qui permet d'écrire

$$\underline{\sigma}^s = \underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n}. \quad (1.20)$$

Ces équations garantissent l'équilibre de la structure au voisinage de la zone cohésive. Les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ sont notées dans \mathcal{R}_s

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{nt} & \sigma_{nb} \\ & \sigma_{tt} & \sigma_{tb} \\ \text{sym} & & \sigma_{bb} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}, \quad (1.21)$$

donc l'équilibre peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} \sigma_n^s \\ \sigma_t^s \\ \sigma_b^s \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{nb} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}^+ = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{nb} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}^-. \quad (1.22)$$

1.2 Étude thermodynamique

On utilise pour la partie continue du domaine le cadre thermodynamique défini dans [Lemaitre et Chaboche, 1988], et pour la partie discontinue un cadre thermodynamique similaire défini dans [Gurtin, 1979]. Ceci permet d'obtenir une description thermodynamique similaire pour la partie continue et la partie discontinue du domaine.

1.2.1 Partie continue

Une expression locale du premier principe de la thermodynamique est, sans tenir compte d'éventuelles sources de chaleur,

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} - \nabla(\underline{q}), \quad (1.23)$$

avec ρ la masse volumique, ∇ l'opérateur divergence, e la densité massique d'énergie interne, et \underline{q} le vecteur courant de chaleur. La forme locale du second principe de la thermodynamique est

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) \geq 0, \quad (1.24)$$

avec s l'entropie massique et T la température. Les expressions 1.23 et 1.24 permettent d'obtenir l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\rho \left(s \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) + \underline{\sigma} : \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla(T) \geq 0, \quad (1.25)$$

avec ∇ l'opérateur gradient, et ψ l'énergie libre massique définie par

$$\psi = e - Ts. \quad (1.26)$$

À partir de l'inégalité de Clausius-Duhem (équation 1.25), on peut obtenir les expressions suivantes des forces associées (voir [Lemaitre et Chaboche, 1988]) :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}, \quad (1.27)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (1.28)$$

L'énergie dissipée volumique est notée ϕ et la dissipation volumique ($\frac{d\phi}{dt}$) est égale, par définition, à

$$\frac{d\phi}{dt} = \rho T \frac{ds_i}{dt}, \quad (1.29)$$

avec s_i l'entropie interne massique. À partir de cette définition, il est possible de montrer que le terme de gauche de l'inégalité de Clausius-Duhem 1.25 est égal à la dissipation volumique, soit

$$\frac{d\phi}{dt} = -\rho \left(s \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) + \underline{\sigma} : \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla(T). \quad (1.30)$$

On sépare habituellement l'énergie dissipée en un terme ϕ^1 intrinsèque volumique et un terme ϕ^2 thermique définis comme suit :

$$\frac{d\phi^1}{dt} = -\rho \left(s \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) + \underline{\sigma} : \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt}, \quad (1.31)$$

$$\frac{d\phi^2}{dt} = - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla(T). \quad (1.32)$$

Le potentiel d'énergie libre massique est ensuite décomposé en un terme ψ^e ne dépendant que de la déformation et de variables internes notées v_k , et en un terme ψ^t ne dépendant que de la température :

$$\psi(\underline{\varepsilon}, v_k, T) = \psi^e(\underline{\varepsilon}, v_k) + \psi^t(T). \quad (1.33)$$

L'entropie volumique vérifie donc

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T} = -\frac{d\psi^t}{dT}. \quad (1.34)$$

Par conséquent,

$$d\psi^t = -s dT, \quad (1.35)$$

ce qui permet de simplifier l'expression de l'incrément d'énergie dissipée intrinsèque volumique en

$$d\phi^1 = -\rho d\psi^e + \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.36)$$

En définissant les forces A_k associées aux variables internes v_k par

$$A_k = \frac{\partial\psi^e}{\partial v_k}, \quad (1.37)$$

on peut obtenir l'expression suivante d'un incrément d'énergie dissipée intrinsèque :

$$d\phi^1 = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{[u]}}^p - A_k dv_k. \quad (1.38)$$

1.2.2 Discontinuité

Premier principe Le premier principe de la thermodynamique appliqué à la zone surfacique Γ_s s'écrit

$$\frac{d(\mathcal{E}_{int})_s}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \frac{dQ_s}{dt}, \quad (1.39)$$

avec $(\mathcal{E}_{int})_s$ l'énergie interne totale de la discontinuité et Q_s la chaleur reçue par la discontinuité. Cette équation s'écrit en fonction des grandeurs locales

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_s} e_s d\Gamma_s &= \int_{\Gamma_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \frac{d\underline{\underline{[u]}}}{dt} d\Gamma_s \\ &\quad - \int_{\Gamma_s} (\underline{\underline{q}}^+ \cdot \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{q}}^- \cdot (-\underline{\underline{n}})) d\Gamma_s, \end{aligned} \quad (1.40)$$

avec e_s l'énergie interne surfacique, $\underline{\underline{q}}^+$ et $\underline{\underline{q}}^-$ les vecteurs courant de chaleur sur les bords supérieurs et inférieurs de la discontinuité. En définissant le saut du vecteur flux de chaleur par

$$\underline{\underline{[q]}} = \underline{\underline{q}}^+ - \underline{\underline{q}}^-, \quad (1.41)$$

l'expression locale du premier principe devient

$$\frac{de_s}{dt} = \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \frac{d\underline{\underline{[u]}}}{dt} - \underline{\underline{[q]}} \cdot \underline{\underline{n}}. \quad (1.42)$$

Second principe Le second principe de la thermodynamique appliqué à la zone cohésive s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_s} s_s d\Gamma_s = - \int_{\Gamma_s} \frac{\underline{\underline{[q]}} \cdot \underline{\underline{n}}}{T} d\Gamma_s + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_s} (s_i)_s d\Gamma_s, \quad (1.43)$$

avec s_s l'entropie surfacique et $(s_i)_s$ la production interne d'entropie surfacique, soit en fonction des grandeurs locales,

$$\frac{ds_s}{dt} = -\frac{\underline{\underline{[q]}} \cdot \underline{\underline{n}}}{T} + \frac{d(s_i)_s}{dt}. \quad (1.44)$$

La dissipation d'énergie surfacique de la zone cohésive est définie par

$$\frac{d\phi_s}{dt} = T \frac{d(s_i)_s}{dt}. \quad (1.45)$$

En multipliant l'équation 1.44 par la température, on obtient donc l'expression suivante de la dissipation surfacique :

$$\frac{d\phi_s}{dt} = T \frac{ds_s}{dt} + \underline{\underline{[q]}} \cdot \underline{\underline{n}}. \quad (1.46)$$

Énergie dissipée surfacique À partir des expressions locales du premier et du second principe de la thermodynamique, on peut obtenir une expression de l'énergie dissipée surfacique. Pour cela, on commence par ajouter les deux équations locales 1.42 et 1.46 pour obtenir sous forme incrémentale

$$d\phi_s = \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d\underline{\underline{[u]}} - de_s + T ds_s. \quad (1.47)$$

En faisant apparaître l'énergie libre surfacique ψ_s définie par

$$\psi_s = e_s - T s_s, \quad (1.48)$$

on obtient l'expression recherchée de la dissipation d'énergie :

$$d\phi_s = \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d\underline{\underline{[u]}} - d\psi_s - s_s dT. \quad (1.49)$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas de terme associé au gradient de température dans la zone cohésive. Il n'y a donc pas de dissipation thermique surfacique, et l'énergie dissipée surfacique ϕ_s est égale à l'énergie dissipée surfacique intrinsèque ϕ_s^1 de la zone cohésive ($\phi_s = \phi_s^1$).

Potentiel thermodynamique Le saut de déplacement est décomposé en une partie élastique $\underline{\underline{[u]}}^e$ et une partie plastique $\underline{\underline{[u]}}^p$:

$$\underline{\underline{[u]}} = \underline{\underline{[u]}}^e + \underline{\underline{[u]}}^p. \quad (1.50)$$

On choisit d'utiliser un potentiel énergie libre ψ_s dépendant du saut de déplacement élastique $\underline{\underline{[u]}}^e$, de la température T , et de variables internes notées w_k :

$$\psi_s = \psi_s(\underline{\underline{[u]}}^e, T, w_k). \quad (1.51)$$

Comme pour la partie continue, on suppose que ce potentiel se décompose en une partie ψ_s^e ne dépendant que du saut de déplacement élastique et des variables internes, et une partie ψ_s^t ne dépendant que de la température :

$$\psi_s = \psi_s^e(\underline{\underline{[u]}}^e, w_k) + \psi_s^t(T). \quad (1.52)$$

On nomme B_k les forces associées aux variables internes w_k , soit par définition :

$$B_k = \frac{\partial\psi_s}{\partial w_k}. \quad (1.53)$$

L'incrément élémentaire d'énergie libre surfacique peut donc s'écrire

$$d\phi_s = \frac{\partial\psi_s^e}{\partial[[\underline{u}]]^e} \cdot d[[\underline{u}]]^e + \frac{\partial\psi_s^t}{\partial T} dT + B_k dw_k. \quad (1.54)$$

En introduisant les équations 1.50 et 1.54 dans 1.49, on obtient l'expression suivante d'un incrément d'énergie dissipée intrinsèque :

$$d\phi_s = \underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]]^p + \left(\underline{\sigma}^s - \frac{\partial\psi_s^e}{\partial[[\underline{u}]]^e} \right) \cdot d[[\underline{u}]]^e - \left(\frac{\partial\psi_s^t}{\partial T} + s_s \right) dT - B_k dw_k. \quad (1.55)$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute transformation, on a

$$\underline{\sigma}^s = \frac{\partial\psi_s^e}{\partial[[\underline{u}]]^e}, \quad (1.56)$$

$$s_s = -\frac{\partial\psi_s^t}{\partial T}. \quad (1.57)$$

Ces deux équations permettent d'obtenir les expressions suivantes d'un incrément d'énergie dissipée :

$$d\phi_s = \underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]] - d\psi_s^e, \quad (1.58)$$

$$d\phi_s = \underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]]^p - B_k dw_k. \quad (1.59)$$

1.2.3 Énergie totale

Première expression L'intégration des équations 1.36 et 1.58 sur Ω et Γ_s donne l'équation globale suivante :

$$d\Phi^1 = -d\Psi^e - d\mathcal{W}_{int}, \quad (1.60)$$

avec Φ^1 l'énergie dissipée intrinsèque totale, Ψ^e la partie élastique de l'énergie libre total, et \mathcal{W}_{int} le travail des efforts intérieurs. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on peut en déduire l'équation incrémentale suivante :

$$d\Psi^e + dK - d\mathcal{W}_{ext} + d\Phi^1 = 0, \quad (1.61)$$

avec K l'énergie cinétique de la structure et \mathcal{W}_{ext} le travail des efforts extérieurs. À partir de cette équation, on définit l'énergie totale \mathcal{E}_t , ayant la propriété de rester constante au cours du temps, et vérifiant

$$\mathcal{E}_t = \Psi^e + K - \mathcal{W}_{ext} + \Phi^1. \quad (1.62)$$

Remarques :

- si la transformation est isotherme, l'énergie libre thermique Ψ^t n'a plus besoin d'être définie ; la dissipation thermique est donc nulle et la dissipation intrinsèque est égale à la dissipation totale ($\Phi^1 = \Phi$). L'énergie totale s'écrit alors

$$\mathcal{E}_t = \Psi + K - \mathcal{W}_{ext} + \Phi ; \quad (1.63)$$

- on trouve parfois la définition suivante de l'énergie totale (par exemple dans [Germain, 1973] p. 87) :

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{int} + K, \quad (1.64)$$

\mathcal{E}_{int} étant l'énergie interne totale de la structure. Cette définition garantit que l'énergie totale d'un système isolé mécaniquement et thermiquement reste constante au cours du temps. Si le système n'est pas isolé mécaniquement ou thermiquement, il faut rajouter des termes pour assurer la conservation de l'énergie totale, ce qui explique la présence de termes supplémentaires dans les équations 1.62 et 1.63.

Deuxième expression Une autre expression de l'énergie totale peut être obtenue à partir du théorème de l'énergie cinétique s'écrivant

$$\mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} = \frac{dK}{dt}. \quad (1.65)$$

En intégrant cette équation sur le temps, on obtient l'expression suivante de l'énergie totale :

$$\mathcal{E}_t = -\mathcal{W}_{int} + K - \mathcal{W}_{ext}. \quad (1.66)$$

1.3 Stabilité

1.3.1 Définition

L'étude de la stabilité a fait l'objet de nombreux travaux. Pour une revue complète, on peut se reporter à [van der Heijden, 2009] pour la stabilité des matériaux élastiques, et à [Nguyen, 1999] pour la stabilité des matériaux non-linéaires. Pour ce travail, la stabilité est définie de la manière suivante :

Un système est stable s'il ne peut pas évoluer de lui même vers un autre état que son état actuel.

Énergie potentielle On définit l'énergie potentielle \mathcal{E} de telle sorte que l'énergie totale s'écrive

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E} + K. \quad (1.67)$$

En utilisant l'expression 1.62 de l'énergie totale, on a donc

$$\mathcal{E} = \Psi^e - \mathcal{W}_{ext} + \Phi^1; \quad (1.68)$$

et en utilisant l'équation 1.66, on obtient

$$\mathcal{E} = -\mathcal{W}_{int} - \mathcal{W}_{ext}. \quad (1.69)$$

On étudie la stabilité d'un champ de déplacement \underline{u}^r (champ de référence) solution du problème. Sur un voisinage de \underline{u}^r , \mathcal{E} est écrit comme une fonction du champ de déplacement \underline{u} .

Remarque : l'énergie potentielle \mathcal{E} n'est pas une fonction de \underline{u} mais on suppose qu'elle est une fonction de $d\underline{u}$

sur un voisinage de \underline{u}^r . Cette hypothèse est contestable d'un point de vue mathématique, mais nous semble crédible pour tout problème pouvant être traité de manière incrémentale.

Théorème de l'énergie potentielle On considère un champ \underline{u}^r tel que $\mathcal{E}(\underline{u}^r)$ soit un minimum local strict de $\mathcal{E}(\underline{u})$. À un instant t , on se place dans cette position avec un champ de vitesse nul (et donc une énergie cinétique nulle). Si la structure s'écarte de sa position initiale, il y a augmentation de $\mathcal{E}(\underline{u})$ (qui était auparavant dans sa configuration minimale). Puisque l'énergie totale \mathcal{E}_t reste constante au cours du temps, cette augmentation de $\mathcal{E}(\underline{u})$ s'accompagne d'une diminution de l'énergie cinétique K . Celle-ci étant initialement nulle et par définition positive, tout mouvement est impossible et la position est nécessairement stable. Une position minimisant \mathcal{E} constitue donc un équilibre stable de la structure, ce qui redémontre pour l'exemple traité le théorème de Lejeune-Dirichlet (voir par exemple [Mandel, 1966]).

1.3.2 Critères

Les critères de stabilité utilisés sont approximativement les mêmes que dans [Charlotte *et al.*, 2006]. Le critère de stabilité présenté ci-dessous correspond au critère de stabilité locale avec la terminologie de cet article, une différence étant que le problème est ici supposé dissipatif.

Un premier critère On définit l'espace \mathcal{F}_c des champs de vecteurs continus, réguliers et cinématiquement admissibles sur Ω . Un champ \underline{u}^r solution du problème à un instant donné est stable si il existe une boule de rayon r , centrée sur \underline{u}^r , à l'intérieur de laquelle l'énergie potentielle est strictement supérieure à $\mathcal{E}(\underline{u}^r)$:

$$\exists r > 0 \ / \ \forall \underline{u} \in \mathcal{F}_c, \quad \|\underline{u} - \underline{u}^r\| < r \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(\underline{u}^r) < \mathcal{E}(\underline{u}). \quad (1.70)$$

La norme utilisée peut être définie de la manière suivante :

$$\|\underline{u}\| = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \|\underline{\underline{\varepsilon}}\|_2 \, d\Omega + \frac{1}{\text{surf}(\Gamma_s)} \int_{\Gamma_s} \|\llbracket \underline{u} \rrbracket\|_2 \, d\Gamma_s. \quad (1.71)$$

vol étant la fonction donnant le volume d'un domaine volumique, surf la fonction donnant la surface d'un domaine surfacique, et $\|\cdot\|_2$ désignant la norme 2 d'un tenseur en un point :

$$\|\llbracket \underline{u} \rrbracket\|_2 = \sqrt{\llbracket \underline{u} \rrbracket \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket}, \quad (1.72)$$

$$\|\underline{\underline{\varepsilon}}\|_2 = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}. \quad (1.73)$$

Stabilité directionnelle La stabilité directionnelle est testée en comparant l'énergie potentielle de la position de référence avec celle de tous les champs voisins écrits sous la forme

$$\underline{u} = \underline{u}^r + h \underline{v}, \quad \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \, h \in \mathbb{R}^+, \quad (1.74)$$

\mathcal{F}_0 étant un espace de champs de déplacements continus, réguliers, et cinématiquement admissibles à 0. La décomposition de Taylor à l'ordre n de l'énergie potentielle \mathcal{E} s'écrit

$$\mathcal{E}(\underline{u}) = \mathcal{E}_0(\underline{v}) + h \mathcal{E}_1(\underline{v}) + \frac{h^2}{2} \mathcal{E}_2(\underline{v}) + \dots + \frac{h^n}{n!} \mathcal{E}_n(\underline{v}), \quad (1.75)$$

avec,

$$\mathcal{E}_n(\underline{v}) = \frac{\partial^n \mathcal{E}}{\partial^n h}. \quad (1.76)$$

Pour montrer qu'une position est stable, il suffit de montrer que l'un des critères suivants est vrai :

– *stabilité d'ordre 0* :

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) > \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \quad (1.77)$$

– *stabilité d'ordre 1* :

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad (1.78)$$

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \quad (1.79)$$

– *stabilité d'ordre 2* :

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad (1.80)$$

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = 0, \quad (1.81)$$

$$\mathcal{E}_2(\underline{v}) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.82)$$

Ces critères de stabilité peuvent se généraliser pour un ordre n quelconque :

– *stabilité d'ordre n* :

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad (1.83)$$

$$\mathcal{E}_k(\underline{v}) = 0, \quad \forall k \in [1, n-1], \quad (1.84)$$

$$\mathcal{E}_n(\underline{v}) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.85)$$

Pour déterminer si une position est stable, on commence par étudier le critère de stabilité d'ordre 0. On peut alors différencier 3 cas :

- si $\mathcal{E}_0(\underline{v}) > \mathcal{E}(\underline{u}^r)$, le critère de stabilité est vérifié, il n'est pas nécessaire de tester les critères de stabilité d'ordres supérieurs : la position est stable ;
- si $\mathcal{E}_0(\underline{v}) < \mathcal{E}(\underline{u}^r)$, le critère de stabilité n'est pas vérifié, et tous les critères d'ordres supérieurs ne sont pas vérifiés non plus à cause de la condition nécessaire $\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r)$. La position est donc instable ;
- si $\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r)$, on ne peut conclure ni sur la stabilité ni sur l'instabilité de la position. Dans ce cas, il faut tester la stabilité d'ordre 1, pour laquelle on retrouve 3 cas dont un nécessitera de tester la stabilité d'ordre 2, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on puisse déterminer si la position est stable ou non.

Cette méthode de recherche de la stabilité est résumée sur la figure 1.2.

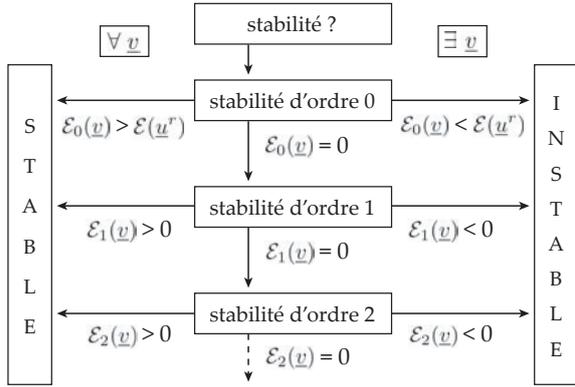


FIG. 1.2 – Procédure de détermination de la stabilité

Remarque : si une position est directionnellement stable dans toutes les directions, alors elle est stable. À l'inverse, pour qu'une position soit instable, il suffit qu'il existe une direction telle que la stabilité directionnelle ne soit pas vérifiée.

Exemple : la figure 1.3 représente l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre dans deux directions. L'équilibre est directionnellement stable dans la direction \underline{v}_1 et instable dans la direction \underline{v}_2 , ce qui rend la position d'équilibre instable.

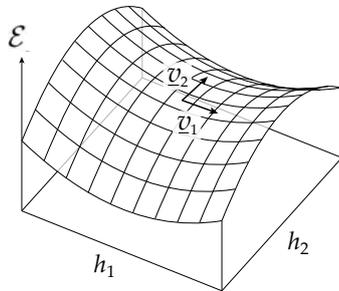


FIG. 1.3 – Exemple de position instable

1.3.3 Cas d'une énergie potentielle régulière

Fonction C^0 Si $\mathcal{E}(\underline{u})$ est de classe C^0 , la continuité s'écrit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(\underline{u}^r + h \underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad h \in \mathbb{R}^+, \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.86)$$

Le critère de stabilité d'ordre 0 est alors indéterminé car

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.87)$$

La continuité de $\mathcal{E}(\underline{u})$ impose donc d'étudier les critères de stabilité d'ordres supérieurs.

Fonction C^1 Si en plus d'être C^0 , l'énergie potentielle est C^1 ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(\underline{u}^r + h \underline{v}) - \mathcal{E}(\underline{u}^r)}{h} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{v}}(\underline{u}^r), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.88)$$

On a donc

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = -\mathcal{E}_1(-\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \quad (1.89)$$

et une position stable doit vérifier simultanément

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \quad (1.90)$$

$$-\mathcal{E}_1(\underline{v}) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.91)$$

On obtient donc la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = 0. \quad (1.92)$$

En utilisant la définition 1.68 de l'énergie potentielle, cette condition peut s'écrire

$$\Psi_1^e(\underline{v}) - (\mathcal{W}_{ext})_1(\underline{v}) + \Phi_1^1(\underline{v}) = 0. \quad (1.93)$$

Il est également possible d'utiliser la définition 1.69 de l'énergie potentielle pour obtenir

$$-(\mathcal{W}_{int})_1(\underline{v}) - (\mathcal{W}_{ext})_1(\underline{v}) = 0. \quad (1.94)$$

Si l'énergie potentielle est C^1 , la position ne peut donc être stable que si le critère de stabilité d'ordre 1 est indéterminé.

Lien avec l'équilibre On veut montrer qu'il existe un lien entre la condition nécessaire de stabilité 1.92 et l'équilibre de la structure. Si le champ \underline{u} vérifie l'équation 1.74 sur un voisinage de l'instant t , alors

$$d\underline{u} = dh \underline{v}. \quad (1.95)$$

Si l'équilibre de la structure est vérifié, le principe des puissances virtuelles appliqué au champ \underline{v} s'écrit

$$\mathcal{P}_{int}^*(\underline{v}) + \mathcal{P}_{ext}^*(\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0, \quad (1.96)$$

soit encore,

$$(\mathcal{W}_{int})_1(\underline{v}) + (\mathcal{W}_{ext})_1(\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (1.97)$$

La condition nécessaire de stabilité écrite sous la forme donnée par l'équation 1.94 est donc satisfaite, et le critère de stabilité d'ordre 1 est indéterminé. Si l'énergie potentielle est de classe C^1 , il sera donc nécessaire de tester la stabilité au moins jusqu'à l'ordre 2.

1.4 Naissance et propagation de discontinuités

On donne dans cette section un critère pour l'initiation d'une fissure dans un matériau sain et un critère pour la propagation d'une fissure déjà initiée.

Initiation On définit le critère d'initiation d'une discontinuité de la manière suivante :

Une discontinuité est initiée s'il existe un état fissuré plus stable (de moindre énergie potentielle) que l'état non fissuré le plus stable.

Le champ de déplacement de la position de référence non fissurée est noté \underline{u}^r . Si aucune discontinuité ne s'initie dans le matériau, la condition de stabilité s'écrit

$$\exists r > 0 / \forall \underline{u} \in \mathcal{F}_c, \quad \|\underline{u} - \underline{u}^r\| < r \Rightarrow \mathcal{E}(\underline{u}^r) < \mathcal{E}(\underline{u}). \quad (1.98)$$

On définit l'espace \mathcal{F}'_c des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur tout domaine Ω' pouvant présenter une surface de discontinuité. L'énergie potentielle \mathcal{E} des champs appartenant à \mathcal{F}'_c et voisins de \underline{u}^r est calculée. La condition de non initiation d'une discontinuité est

$$\exists r > 0 / \forall \underline{u} \in \mathcal{F}'_c, \quad \|\underline{u} - \underline{u}^r\| < r \Rightarrow \mathcal{E}(\underline{u}^r) < \mathcal{E}(\underline{u}). \quad (1.99)$$

Le domaine Ω et un domaine Ω' sont représentés sur la figure 1.4.



FIG. 1.4 – Domaine avant et après l'initiation

Propagation On définit le critère de propagation suivant :

Il y a propagation s'il existe un état avec augmentation de la taille de la discontinuité plus stable que l'état le plus stable sans augmentation de la taille de la discontinuité.

On suppose qu'à l'instant t , le domaine Ω est traversé par une discontinuité Γ_s (qui n'est pas incluse dans Ω). \mathcal{F}_c représente toujours l'espace des champs de déplacements continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur Ω . On cherche à déterminer si la position d'équilibre représentée par le champ \underline{u}^r vérifiant

$$\exists r > 0 / \forall \underline{u} \in \mathcal{F}_c, \quad \|\underline{u} - \underline{u}^r\| < r \Rightarrow \mathcal{E}(\underline{u}^r) < \mathcal{E}(\underline{u}), \quad (1.100)$$

est bien la position la plus stable ou s'il existe une position plus stable pour laquelle la discontinuité se serait propagée. On définit l'espace \mathcal{F}'_c des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur tout domaine Ω' pouvant être coupé par une surface de discontinuité Γ'_s prolongeant Γ_s et n'étant pas

incluse dans Ω' . La condition de non propagation de la discontinuité est

$$\exists r > 0 / \forall \underline{u} \in \mathcal{F}'_c, \quad \|\underline{u} - \underline{u}^r\| < r \Rightarrow \mathcal{E}(\underline{u}^r) < \mathcal{E}(\underline{u}). \quad (1.101)$$

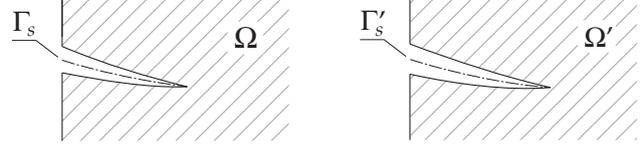


FIG. 1.5 – Domaine avant et après la propagation

Remarques :

- d'après [Charlotte *et al.*, 2000], ce type de critères peut être vu comme une généralisation de la théorie de Griffith car on ne précise pas *a priori* de quelle manière la présence de la discontinuité va modifier l'énergie potentielle ;
- pour introduire la théorie de Griffith, on considère plus simplement que l'énergie potentielle est une fonction de l'aire \mathcal{A} de la discontinuité.

Chap. 2

Modèles de rupture

2.1 Modèles continus

2.1.1 Modèle d'endommagement

Surface utile Dans [Lemaitre et Chaboche, 1988], l'endommagement est représenté comme la conséquence d'une diminution de la section utile d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) du matériau. On note S la section d'un VER sain et S_u la section utile d'un volume élémentaire endommagé (voir figure 2.1) représentant la surface de matériau non dégradé dans le VER.

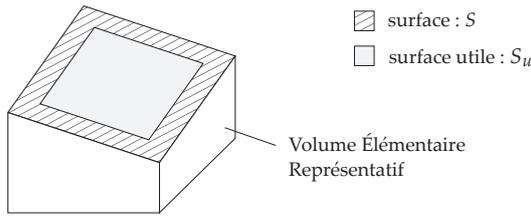


FIG. 2.1 – Section utile d'un VER endommagé

Variable d'endommagement La variable d'endommagement D représente la diminution de la section utile par rapport à la section totale en un point de la structure, donc

$$D = 1 - \frac{S_u}{S}. \quad (2.1)$$

L'endommagement est dit *isotrope* si D ne dépend pas de l'orientation de la surface de coupe du volume élémentaire, et *anisotrope* dans le cas contraire. On s'intéresse par la suite uniquement aux modèles d'endommagement isotropes.

Opérateur de Hooke On applique un effort \underline{F} sur un volume élémentaire pour voir l'effet d'une diminution de la section utile sur le comportement mécanique global du VER. La figure 2.2 montre à gauche un VER endommagé avec une coupure dans la direction \underline{n} et à droite un VER homogène sensé avoir le même comportement mécanique que le VER endommagé.

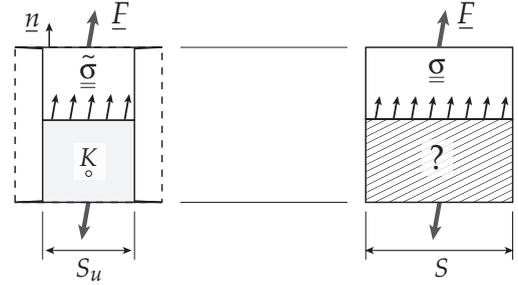


FIG. 2.2 – VER endommagement et matériau continu équivalent

La contrainte effective $\underline{\tilde{\sigma}}$ est par définition la contrainte sur la surface utile du VER endommagé. Pour un endommagement isotrope, on a

$$\underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} = \frac{F}{S_u}, \quad \forall \underline{n} \in \mathcal{T}_1, \quad (2.2)$$

\mathcal{T}_1 étant l'ensemble des tenseurs d'ordre 1. La contrainte s'appliquant sur le VER homogène équivalent doit vérifier

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \frac{F}{S}, \quad \forall \underline{n} \in \mathcal{T}_1. \quad (2.3)$$

On a donc

$$\underline{\sigma} = \frac{S_u}{S} \underline{\tilde{\sigma}}, \quad (2.4)$$

$$\underline{\sigma} = (1 - D) \underline{\tilde{\sigma}}, \quad (2.5)$$

$$\underline{\sigma} = (1 - D) \underset{\circ}{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (2.6)$$

avec $\underset{\circ}{K}$ le tenseur de Hooke du matériau sain. Le tenseur de Hooke effectif du matériau endommagé est noté $\tilde{\underset{\circ}{K}}$ et vérifie

$$\tilde{\underset{\circ}{K}} = (1 - D) \underset{\circ}{K}. \quad (2.7)$$

Potentiel thermodynamique L'énergie libre du modèle d'endommagement étudié dépend de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, de l'endommagement D , et de θ représentant l'écart à la température de référence :

$$\psi = \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, D, \theta). \quad (2.8)$$

L'énergie libre massique ψ s'écrit

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (1-D) (\underline{\underline{\varepsilon}} - k\theta \underline{\underline{I}}_d) : \underset{\circ}{K} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - k\theta \underline{\underline{I}}_d) + C\theta^2, \quad (2.9)$$

ρ étant la masse volumique, k le coefficient de dilatation thermique, $\underline{\underline{I}}_d$ le tenseur identité d'ordre 2, et C la chaleur spécifique du matériau. Pour rentrer dans le cadre énergétique défini dans le chapitre précédent, cette expression de l'énergie libre massique doit pouvoir se mettre sous la forme donnée par l'équation 1.33, soit ici

$$\psi = \psi^e(\underline{\underline{\varepsilon}}, D) + \psi^t(\theta). \quad (2.10)$$

Cette décomposition est possible si la constante k est nulle, donc si la dilatation thermique du matériau est négligée. Le potentiel énergie libre massique s'écrit alors

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (1-D) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underset{\circ}{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} + C\theta^2, \quad (2.11)$$

ce qui donne les valeurs de $\underline{\underline{\sigma}}$ et s suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-D) \underset{\circ}{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (2.12)$$

$$s = -2 \frac{C}{\rho} \theta. \quad (2.13)$$

Remarque : on retrouve bien l'expression 2.6 de la contrainte.

Dissipation intrinsèque Le taux de restitution de densité d'énergie élastique Y est défini par

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}. \quad (2.14)$$

En utilisant l'expression 2.11 du potentiel énergie libre, on obtient

$$Y = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underset{\circ}{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (2.15)$$

et le calcul de la dissipation intrinsèque donne

$$d\phi^1 = -Y dD. \quad (2.16)$$

Modèle exponentiel On utilise ici un modèle obtenu en simplifiant le modèle d'endommagement isotrope de Mazars [Mazars, 1984], qui fut initialement développé pour modéliser le comportement du béton, et est utilisé plus généralement pour les matériaux quasi-fragiles. On appelle ε_1 , ε_2 , et ε_3 les déformations principales obtenues dans la base principale \mathcal{R}_p :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_p}. \quad (2.17)$$

On note ε_1^+ , ε_2^+ , et ε_3^+ les parties positives de ces déformations principales :

$$\varepsilon_i^+ = \langle \varepsilon_i \rangle, \quad \forall i \in [1, 3]. \quad (2.18)$$

La déformation équivalente de Mazars ε_{eq} (voir [Mazars, 1984]) est définie par

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{(\varepsilon_1^+)^2 + (\varepsilon_2^+)^2 + (\varepsilon_3^+)^2}. \quad (2.19)$$

L'endommagement débute lorsque la déformation équivalente ε_{eq} atteint le seuil ε_0 . La surface seuil d'initiation de l'endommagement correspondante est représentée dans la base principale sur la figure 2.3.

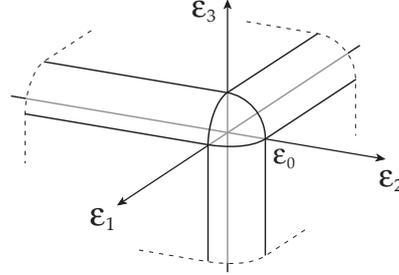


FIG. 2.3 – Surface seuil d'endommagement de Mazars

La déformation équivalente est nulle pour une sollicitation de compression isotrope et non nulle pour une sollicitation de traction isotrope. Cette dissymétrie traduit le fait que le béton résiste mieux en compression qu'en traction. L'endommagement étant un phénomène irréversible, la variable D ne peut qu'augmenter au cours du temps. L'endommagement est donc calculé à partir d'une variable de mémoire κ égale au maximum de ε_{eq} au cours du temps :

$$\kappa = \max_t(\varepsilon_{eq}). \quad (2.20)$$

La loi donnant D en fonction de κ et des paramètres du matériau doit ensuite être définie. On utilise la loi simplifiée

$$D = 1 - \frac{1}{\exp(A(\kappa - \varepsilon_0))}, \quad (2.21)$$

ε_0 et A étant les deux paramètres du matériau. La loi d'endommagement du modèle de Mazars comprend plus de paramètres et distingue l'endommagement de traction simple (correspondant à un essai de traction unidirectionnel) et l'endommagement de compression simple (correspondant à un essai de compression unidirectionnel). Le modèle exponentiel défini dans cette section ne peut être utilisé que pour des chargements de traction.

2.1.2 Les modèles élasto-plastiques endommageables

Pour prendre en compte la présence de contraintes résiduelles dans le matériau après une décharge, on peut rajouter de la plasticité dans le modèle.

Comportement mécanique On suppose que le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ se décompose en une partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ et une partie plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p. \quad (2.22)$$

La déformation élastique se substitue alors à la déformation dans le calcul du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-D) K : \underline{\underline{\varepsilon}}^e. \quad (2.23)$$

Potentiel thermodynamique On suppose que le potentiel énergie libre ψ peut se décomposer en un terme ψ^{mac} correspondant au comportement macroscopique du matériau et un terme ψ^{mic} correspondant à l'énergie stockée dans la microstructure :

$$\psi = \psi^{mac}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, D, \theta) + \psi^{mic}(v_k), \quad (2.24)$$

avec,

$$\rho \psi^{mac}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, D, \theta) = \frac{1}{2} (1-D) \underline{\underline{\varepsilon}}^e : K : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + C \theta^2, \quad (2.25)$$

ce qui donne les valeurs de $\underline{\underline{\sigma}}$ et s suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = (1-D) K : \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (2.26)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = -2 \frac{C}{\rho} \theta. \quad (2.27)$$

Les variables associées à D et v_k sont Y et A_k :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}, \quad (2.28)$$

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial v_k}. \quad (2.29)$$

Domaine d'élasticité La contrainte effective $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ vérifie désormais

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = K : \underline{\underline{\varepsilon}}^e. \quad (2.30)$$

Le domaine d'élasticité est décrit par la fonction seuil $f(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, v_k, D)$ telle que tout état de contrainte admissible vérifie

$$f(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, v_k, D) \leq 0. \quad (2.31)$$

2.2 Modèles discontinus

Dans cette partie, les zones cohésives sont introduites à partir des modèles de fissuration diffuse, comme cela est fait dans [Broberg, 1999] ; puis la théorie énergétique de Griffith est présentée.

2.2.1 Modèles cohésifs

Les modèles cohésifs ont été introduits par Barenblatt [Barenblatt, 1959, Barenblatt, 1962] et Dugdale [Dugdale, 1960]. L'objectif de Barenblatt était de tenir compte des efforts inter-atomiques de cohésion entre les deux bords de la fissure au voisinage de la pointe pour un matériau fragile afin d'obtenir un profil de fissuration plus réaliste au voisinage de la pointe (bout pointu et non arrondi). Dugdale a lui utilisé une zone cohésive pour prendre en compte la zone plastique entourant la pointe de la fissure.

Introduction Les modèles de fissuration diffuse (*smeared crack* en anglais), aussi appelés modèles *crack band* [Bažant et Oh, 1983], sont basés sur l'hypothèse qu'il existe une bande homogène de largeur constante h à l'intérieur de laquelle ont lieu les phénomènes dissipatifs liés à la rupture. Un modèle de fissuration diffuse sollicité en mode I est représenté sur la figure 2.4 où la contrainte normale à la bande est notée σ^s et l'allongement d'ouverture de la bande est noté δ . On distingue une première phase où le matériau se déforme de manière élastique comme le reste de la structure, et une deuxième phase adoucissante où la bande se rompt progressivement. Une loi de comportement possible pour un modèle de fissuration diffuse est également présentée sur la figure 2.4.

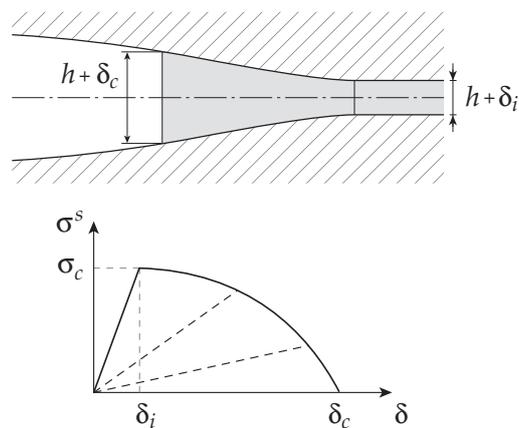


FIG. 2.4 – Modèle de fissuration diffuse

Si la longueur de la bande est grande devant sa largeur, on peut considérer qu'il s'agit d'une zone surfacique, on obtient alors un modèle cohésif. Le fait de supprimer l'épaisseur de la zone dissipative fait qu'il n'y a plus d'énergie libre dans cette zone avant l'initiation de la fissure, la rigidité de la zone cohésive doit donc être infinie tant que la zone cohésive n'est pas initiée, comme cela est représenté sur la figure 2.5. Par contre, d'après [Bažant et Oh, 1983], l'énergie dissipée doit être la même dans la zone cohésive que dans le modèle de fissuration diffuse pris pour référence.

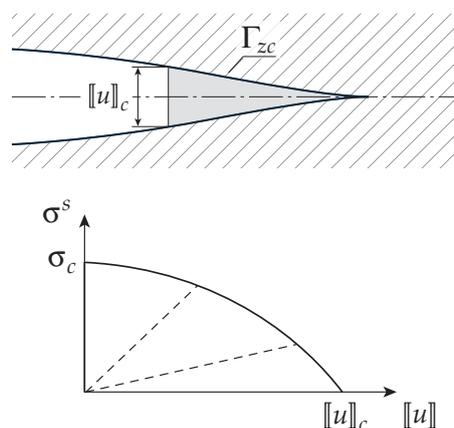


FIG. 2.5 – Modèle de zone cohésive

Décomposition du saut de déplacement Le saut de déplacement $[[u]]$ est décomposé en une partie plastique $[[u]]^p$ et une partie élastique $[[u]]^e$:

$$[[u]] = [[u]]^p + [[u]]^e. \quad (2.32)$$

Le saut de déplacement $[[u]]^e$ est lui-même décomposé en une partie normale $[[u]]_n^e$ et une partie tangentielle $[[u]]_\tau^e$:

$$[[u]] = [[u]]_n^e + [[u]]_\tau^e, \quad (2.33)$$

avec,

$$[[u]]_n^e = [[u]]_n^e \underline{n}, \quad (2.34)$$

$$[[u]]_\tau^e = [[u]]_\tau^e \underline{\tau}. \quad (2.35)$$

La condition de non pénétration des deux bords de la discontinuité s'écrit

$$[[u]]_n^e \geq 0, \quad (2.36)$$

et le vecteur unitaire $\underline{\tau}$ est construit de telle sorte que

$$[[u]]_\tau^e \geq 0. \quad (2.37)$$

Cas d'un matériau isotrope La zone cohésive est décrite avec le cadre thermodynamique présenté en 1.2.2. On note ψ_s^n le potentiel énergie libre surfacique d'une discontinuité orientée dans la direction \underline{n} :

$$\psi_s^n = \psi_s^n([[u]]^e, w_k, \theta). \quad (2.38)$$

Si le matériau est isotrope, la zone cohésive doit se comporter de la même manière quelle que soit l'orientation de la discontinuité. Cette propriété va être utilisée pour simplifier l'expression du potentiel énergétique comme cela est fait dans [Charlotte *et al.*, 2006]. Pour cela, on impose qu'une rotation représentée par un tenseur \underline{P} et appliquée à l'orientation de la zone cohésive laisse invariante le potentiel énergie libre. Cette rotation, n'a pas d'influence sur les variables scalaires mais doit être appliquée aux variables vectorielles. On note \underline{n}' et $[[u]]^{e'}$ le vecteur normal et le saut de déplacement élastique obtenus en appliquant la rotation à \underline{n} et $[[u]]^e$:

$$\underline{n}' = \underline{P} \cdot \underline{n}, \quad (2.39)$$

$$[[u]]^{e'} = \underline{P} \cdot [[u]]^e. \quad (2.40)$$

La condition d'isotropie s'écrit donc

$$\psi_s^{n'}([[u]]^{e'}, w_k, \theta) = \psi_s^n([[u]]^e, w_k, \theta). \quad (2.41)$$

Cette condition est satisfaite si ψ_s^n ne dépend que des invariants de $(\underline{n}, [[u]]^e)$ par rotation. Une isométrie conserve le produit scalaire, donc $[[u]]_n^e$ est un premier invariant. De plus

$$[[u]]_\tau^e = \|[[u]]^e - [[u]]_n^e \|, \quad (2.42)$$

$$= \|\underline{P} \cdot ([[u]]^e - [[u]]_n^e)\|, \quad (2.43)$$

$$= \|[[u]]^{e'} - [[u]]_n^{e'} \|, \quad (2.44)$$

$$= [[u]]_\tau^{e'}. \quad (2.45)$$

$[[u]]_\tau^e$ est donc un deuxième invariant. Le potentiel thermodynamique peut donc s'écrire :

$$\psi_s = \psi_s([[u]]_n^e, [[u]]_\tau^e, w_k, \theta). \quad (2.46)$$

L'équation 1.56 permet de calculer $\underline{\sigma}^s$ à partir du potentiel énergie libre surfacique :

$$\underline{\sigma}^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_n^e} \frac{\partial [[u]]_n^e}{\partial [[u]]^e} + \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_\tau^e} \frac{\partial [[u]]_\tau^e}{\partial [[u]]^e}, \quad (2.47)$$

donc,

$$\underline{\sigma}^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_n^e} \underline{n} + \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_\tau^e} \underline{\tau}. \quad (2.48)$$

On peut donc introduire la contrainte cohésive tangentielle σ_τ^s vérifiant

$$\underline{\sigma}^s = \sigma_n^s \underline{n} + \sigma_\tau^s \underline{\tau}. \quad (2.49)$$

Par identification de cette équation avec l'équation 2.48, σ_n^s et σ_τ^s vérifient

$$\sigma_n^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_n^e}, \quad (2.50)$$

$$\sigma_\tau^s = \frac{\partial \psi_s}{\partial [[u]]_\tau^e}. \quad (2.51)$$

Bilan énergétique en mode I Si on isole uniquement la discontinuité, l'énergie totale $(\mathcal{E}_t)_s$ s'écrit

$$(\mathcal{E}_t)_s = \Psi_s^e - \mathcal{W}_{vol/zc} + \Phi_s^1, \quad (2.52)$$

avec Ψ_s^e l'énergie libre élastique de la discontinuité, $\mathcal{W}_{vol/zc}$ le travail exercé par le volume sur la zone cohésive et Φ_s^1 l'énergie dissipée intrinsèque de la discontinuité. L'énergie totale étant constante au cours du temps, on a

$$d\mathcal{W}_{vol/zc} = d\Psi_s^e + d\Phi_s^1. \quad (2.53)$$

Le travail fourni par la structure à la zone cohésive est égal à la somme de la variation de l'énergie libre Ψ_s^e et de l'énergie dissipée intrinsèque Φ_s^1 . La différence entre ces deux énergies s'observe au moment de la décharge : l'énergie dissipée intrinsèque ne varie pas tandis que l'énergie libre est restituée en échange d'un travail reçu par la zone cohésive. Ceci est représenté pour une zone cohésive en mode I sur la figure 2.6.

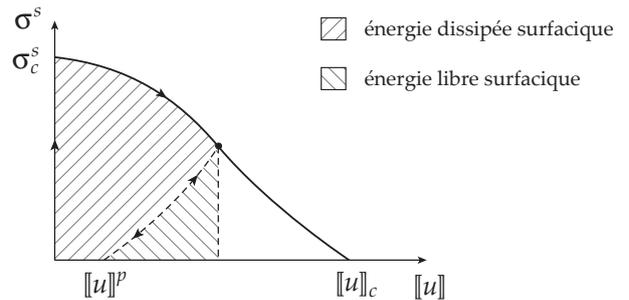


FIG. 2.6 – Identification des énergies pour un modèle cohésif en mode I

Lorsque le saut de déplacement est égal au saut de déplacement critique $\llbracket u \rrbracket_c$, la zone cohésive est rompue. L'énergie dissipée intrinsèque surfacique ϕ_s^1 atteint alors sa valeur maximale notée G_c et nommée « taux de restitution d'énergie élastique critique ». On a donc

$$\llbracket u \rrbracket \geq \llbracket u \rrbracket_c \quad \Rightarrow \quad \psi_s^e = 0, \quad (2.54)$$

$$\phi_s^1 = G_c. \quad (2.55)$$

En utilisant l'équation 2.53, on obtient pour un saut de déplacement croissant

$$\int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \sigma^s d\llbracket u \rrbracket = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} d\phi_s^1 + \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} d\psi_s^e. \quad (2.56)$$

D'après les équations 2.54 et 2.55, on a donc l'expression suivante du taux de restitution d'énergie élastique :

$$G_c = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \sigma^s d\llbracket u \rrbracket. \quad (2.57)$$

Cette équation fut utilisée pour la première fois dans [Hillerborg *et al.*, 1976].

Modèle à retour linéaire Pour tous les modèles continus utilisés dans ce travail (endommageables ou élastoplastiques-endommageables), la décharge du matériau se fera de manière linéaire. Cette hypothèse est appliquée à la décharge du modèle cohésif en supposant qu'il existe un opérateur \underline{K}^s , dépendant des variables internes w^k , tel que

$$\underline{\sigma}^s = \underline{K}^s(w^k) \cdot \llbracket u \rrbracket^e. \quad (2.58)$$

Cette expression des contraintes cohésives correspond, d'après 1.56, à un potentiel énergie libre surfacique de la forme

$$\psi_s = \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket^e \cdot \underline{K}^s(w^k) \cdot \llbracket u \rrbracket^e. \quad (2.59)$$

Aucune énergie n'est stockée dans la micro-structure du matériau car, si $\llbracket u \rrbracket^e$ est nul, alors ψ_s l'est aussi. En reconnaissant dans 2.59 l'expression de $\underline{\sigma}^s$ de 2.58, on peut écrire

$$\psi_s = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^s \cdot \llbracket u \rrbracket^e. \quad (2.60)$$

Cette expression introduite dans 1.58 permet d'obtenir l'expression suivante d'un incrément d'énergie dissipée :

$$d\phi_s = \underline{\sigma}^s \cdot d\llbracket u \rrbracket^e + \frac{1}{2} (\underline{\sigma}^s \cdot d\llbracket u \rrbracket^e - \llbracket u \rrbracket^e \cdot d\underline{\sigma}^s). \quad (2.61)$$

Ce modèle sera utilisé dans la partie II pour les calculs de zones cohésives équivalentes à des modèles continus régularisés.

Modèle cohésif en mode mixte On suppose que la contrainte cohésive peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\sigma}^s = k_{eq}(\kappa^s) \underline{K}_0^s \cdot \llbracket u \rrbracket, \quad (2.62)$$

avec,

$$\underline{K}_0^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}, \quad (2.63)$$

k_{eq} étant infini avant l'initiation de la discontinuité, et β étant un paramètre du matériau.

Remarques :

- cette loi ne permet pas de gérer le contact entre les deux bords de la discontinuité ;
- la présence de termes infinis dans l'expression de \underline{K}^s pose problème si cet opérateur doit être calculé numériquement, par exemple lors de l'implémentation numérique du modèle cohésif. Ce problème sera contourné dans la partie III en travaillant avec des opérateurs de souplesse.

Contrainte équivalente On définit une contrainte cohésive équivalente σ_{eq}^s pour laquelle les deux définitions suivantes sont proposées :

$$\text{a) } \sigma_{eq}^s = \max(\sigma_n^s, \gamma \sigma_\tau^s), \quad (2.64)$$

$$\text{b) } \sigma_{eq}^s = \sqrt{(\sigma_n^s)^2 + (\gamma^2 \sigma_\tau^s)^2}, \quad (2.65)$$

γ étant un paramètre du matériau. Les surfaces seuil d'initiation correspondant à ces deux définitions sont représentées sur la figure 2.7.

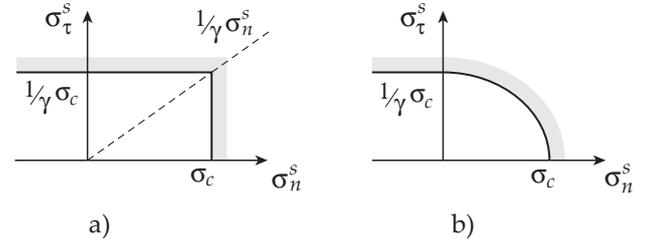


FIG. 2.7 – Seuil d'initiation pour les définitions (a) et (b) de la contrainte cohésive équivalente

Saut de déplacement équivalent On définit un saut de déplacement équivalent $\llbracket u \rrbracket_{eq}$ tel que la contrainte équivalente σ_{eq}^s puisse s'écrire

$$\sigma_{eq}^s = k_{eq} \llbracket u \rrbracket_{eq}. \quad (2.66)$$

En fonction de la définition de σ_{eq}^s choisie (équations 2.64 ou 2.65), on obtient

$$\text{a) } \llbracket u \rrbracket_{eq} = \max(\llbracket u \rrbracket_n, \frac{\gamma}{\beta} \llbracket u \rrbracket_\tau), \quad (2.67)$$

$$\text{b) } \llbracket u \rrbracket_{eq} = \sqrt{\llbracket u \rrbracket_n^2 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} \llbracket u \rrbracket_\tau^2}. \quad (2.68)$$

Remarque : dans [Camacho et Ortiz, 1996], un modèle cohésif avec un saut de déplacement équivalent et une contrainte équivalente est également défini. Le lien entre ce modèle et celui présenté sera étudié plus en détail dans la partie III.

2.2.2 Modèle de Griffith

La théorie originale La théorie de Griffith [Griffith, 1920] permet d'obtenir un critère de propagation des discontinuités à partir du théorème de l'énergie potentielle (voir section 1.3). D'après Griffith, les forces entre les atomes situés de part et d'autre de la discontinuité engendrent un travail résistif lors de la propagation d'une fissure qui doit être pris en compte dans le bilan énergétique global d'un système comprenant le matériau élastique linéaire et la zone d'élaboration de la fissure (voir figure 2.8). Griffith postule donc l'existence d'une loi donnant l'énergie de surface de la discontinuité en fonction de l'ouverture de la fissure.

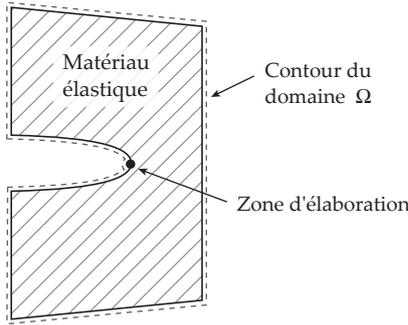


FIG. 2.8 – Système isolé pour la construction de la théorie de Griffith

Griffith fait ensuite deux hypothèses :

- *hypothèse 1* : la forme de la discontinuité reste inchangée pendant la propagation (hypothèse de stationnarité) ;
- *hypothèse 2* : la taille de la zone d'interactions atomiques est négligeable devant les dimensions de la structure.

Griffith affirme que si ces hypothèses sont vérifiées, l'énergie de surface E_s de la fissure peut être considérée proportionnelle à l'aire \mathcal{A} de la fissure. Un incrément d'énergie de surface peut donc s'écrire

$$dE_s = G_c d\mathcal{A}, \quad (2.69)$$

G_c étant l'unique paramètre du modèle utilisé par Griffith, appelé taux de restitution d'énergie élastique critique. Si le problème est quasi-statique, l'énergie potentielle de la structure s'écrit

$$\mathcal{E} = \Psi^e - \mathcal{W}_{ext} + E_s, \quad (2.70)$$

soit en tenant compte de 2.69 :

$$\mathcal{E} = \Psi^e - \mathcal{W}_{ext} + G_c \mathcal{A}. \quad (2.71)$$

Le critère de propagation de fissure donné au premier chapitre indique qu'il y a propagation s'il existe un état avec augmentation de la taille de la fissure plus stable que l'état le plus stable sans augmentation de la taille de la fissure. Ce critère se teste en regardant si la position étudiée minimise l'énergie potentielle lorsqu'on

faire varier l'aire \mathcal{A} de la fissure. Pour cela, on écrit le développement limité de \mathcal{E} à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}(\mathcal{A} + d\mathcal{A}) = \mathcal{E}_0 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{A}} d\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \mathcal{A}^2} \frac{(d\mathcal{A})^2}{2} + \dots \quad (2.72)$$

Si on définit le taux de restitution d'énergie élastique G par

$$G = - \frac{d(\Psi^e - \mathcal{W}_{ext})}{d\mathcal{A}}, \quad (2.73)$$

l'équation 2.72 peut s'écrire

$$d\mathcal{E}(d\mathcal{A}) = (G_c - G) d\mathcal{A} - \frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} \frac{(d\mathcal{A})^2}{2} + \dots \quad (2.74)$$

L'étude du critère de stabilité d'ordre 1 permet de distinguer 3 cas :

- si $G < G_c$, il y a refermeture de la fissure (position instable) ;
- si $G = G_c$, le critère de propagation est indéterminé (condition nécessaire de stabilité) ;
- si $G > G_c$, il y a propagation de la fissure (position instable).

Pour traiter le cas où $G = G_c$, on teste le critère de stabilité à l'ordre 2, qui donne à nouveau 3 cas :

- si $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} < 0$, il n'y a pas propagation de la fissure (position stable) ;
- si $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} = 0$, le critère de propagation est indéterminé ;
- si $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} > 0$, il y a propagation ou refermeture de la fissure (position instable).

Le deuxième cas nécessiterait de tester les critères de stabilité d'ordres supérieurs. Les cas de propagation sont associés à une diminution de l'énergie potentielle et donc à une production d'énergie cinétique (car l'énergie totale reste constante), ce qui contredit l'hypothèse de propagation quasi-statique. On dit alors que la propagation est instable.

Cas d'une propagation stable L'étude de stabilité précédente permet de savoir si une fissure se propage de manière instable à chargement constant. Il peut également arriver qu'une fissure se propage de manière stable si le chargement varie pendant la propagation. Pour étudier ce cas de figure, on suppose que le chargement de la structure peut s'écrire en fonction d'un facteur de chargement λ tel que

$$\underline{u}_d = \underline{u}_0 + \lambda \underline{u}_1, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (2.75)$$

$$\underline{F}_d = \underline{F}_0 + \lambda \underline{F}_1, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (2.76)$$

\underline{u}_d et \underline{F}_d étant les déplacements et efforts appliqués sur le bord de la structure, et \underline{u}_0 , \underline{u}_1 , \underline{F}_0 , et \underline{F}_1 étant des vecteurs constants. On décompose l'échelle temporelle en une succession de piquets de temps infinitésimaux. On définit une position de référence à un piquet

de temps I_t où l'éprouvette est en équilibre et vérifie la condition de stabilité à l'ordre 2 :

$$G = G_c, \quad \text{et}, \quad \frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} < 0. \quad (2.77)$$

Si cet équilibre est perturbé en ajoutant un incrément de chargement $d\lambda$, un nouvel état d'équilibre obtenu sans avancée de la fissure peut être défini à un piquet de temps intermédiaire $I_t + \frac{1}{2}$. On utilise ensuite le critère de Griffith pour savoir si la fissure se propage entre $I_t + \frac{1}{2}$ et $I_t + 1$. On note dG_1 l'incrément de G entre I_t et $I_t + \frac{1}{2}$, et dG_2 l'incrément de G entre $I_t + \frac{1}{2}$ et $I_t + 1$. On a alors

$$dG = dG_1 + dG_2, \quad (2.78)$$

avec,

$$dG_1 = \frac{\partial G}{\partial \lambda} d\lambda, \quad (2.79)$$

$$dG_2 = \frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} d\mathcal{A}. \quad (2.80)$$

Si dG_1 est strictement positif, la fissure se propage entre $I_t + \frac{1}{2}$ et $I_t + 1$ tant que le critère de Griffith est vérifié, donc

$$dG = 0. \quad (2.81)$$

On en déduit que l'aire de la fissure augmente d'une valeur $d\mathcal{A}$ telle que

$$d\mathcal{A} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial \lambda}}{\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}}} d\lambda. \quad (2.82)$$

Une augmentation infinitésimale du chargement provoque donc une propagation infinitésimale de la fissure, on dit alors que la propagation est stable.

La théorie de Griffith « améliorée » La théorie de Griffith ne définit pas clairement la nature de l'énergie de surface : il peut s'agir d'une énergie libre (contribuant à Ψ^e) ou d'une énergie dissipée (contribuant à Φ^1). Dans le cas traité par Griffith, l'énergie de surface est due au travail de forces inter-atomiques, on peut penser que le processus de fissuration est réversible et que l'énergie de surface contribue à l'énergie libre de la structure. Cependant, la rupture est en général plutôt un phénomène dissipatif, et il faut en tenir compte si le second principe de la thermodynamique est appliqué à la structure. Dans [Bui *et al.*, 1980] et [Leblond, 2003], l'énergie de surface est définie comme une énergie dissipée proportionnelle à l'aire de la fissure, donc si le matériau entourant la fissure est élastique,

$$d\Phi^1 = G_c d\mathcal{A}. \quad (2.83)$$

G_c étant positif, le second principe de la thermodynamique impose

$$d\mathcal{A} > 0. \quad (2.84)$$

D'après l'équation 1.68, l'énergie potentielle \mathcal{E} s'écrit

$$\mathcal{E} = \Psi^e - \mathcal{W}_{ext} + \Phi^1, \quad (2.85)$$

soit, en tenant compte de l'équation 2.83,

$$\mathcal{E} = \Psi^e - \mathcal{W}_{ext} + G_c \mathcal{A}. \quad (2.86)$$

On retrouve l'expression 2.71 de l'énergie potentielle déjà utilisée pour établir les critères de propagation de la fissure. Cette expression permet d'établir à nouveau les lois de propagation obtenues précédemment, avec en plus la condition 2.84 interdisant la refermeture de la fissure. En tenant compte de cette inéquation, les différents cas de propagation sont les suivants :

- si $G < G_c$, la fissure est à l'arrêt ;
- si $G = G_c$ et $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} < 0$, la fissure est à l'arrêt, ou se propage de manière quasi-statique si le chargement augmente ;
- si $G > G_c$, ou $G = G_c$ et $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} > 0$, la fissure se propage brutalement (sans nécessiter d'augmentation du chargement).

Remarques :

- dans la réalité, la fissuration est souvent un cas intermédiaire entre une fissuration complètement réversible et une fissuration complètement irréversible ;
- la propagation est souvent stable tant que la fissure est petite, puis instable après que la fissure a atteint une certaine longueur. La transition entre ces deux modes de rupture se fait lorsque $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}}$ devient positif ;
- si l'hypothèse de stationnarité est appliquée à un modèle cohésif, il est possible de retrouver le critère énergétique de propagation de Griffith (ceci sera étudié en détail dans la section 14.2) ;
- dans les calculs numériques, on fait souvent avancer la fissure petit à petit d'une longueur arbitraire si le critère de propagation est respecté. Une fois que la fissure s'est stabilisée, on augmente un peu le chargement de la structure avant de tester à nouveau le critère de propagation. Cette procédure est schématisée sur la figure 2.9 en notant $\Delta(\cdot)$ les incréments numériques entre deux piquets de temps et $\delta\mathcal{A}$ un incrément de propagation de la fissure choisi par l'utilisateur.

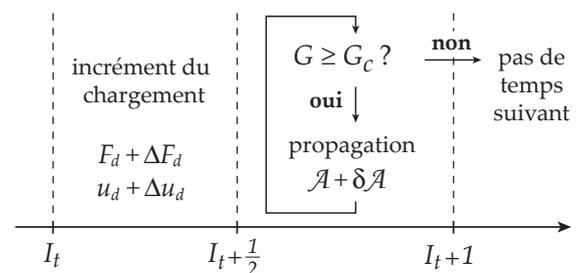


FIG. 2.9 – Procédure numérique d'utilisation de la théorie de Griffith

Chap. 3

Étude de la stabilité

Dans cette partie, on présente les conditions de stabilité des modèles étudiés. Les critères de stabilité donnés dans la section 1.3 sont utilisés pour un problème supposé isotherme.

3.1 Matériau continu

critères de stabilité On cherche à déterminer la stabilité d'un champ \underline{u}^r solution du problème mécanique appartenant à l'espace \mathcal{F}_c des champs de déplacements continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur Ω . \mathcal{F}_0 est l'espace des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles à 0 définis sur Ω . On définit un champ $\underline{u} \in \mathcal{F}_c$ et un champ $\underline{v} \in \mathcal{F}_0$ tels que

$$\underline{u} = \underline{u}^r + h \underline{v}, \quad h \in \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Les déformations associées à \underline{u} et \underline{u}^r sont notées respectivement $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}), \quad (3.2)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}^r), \quad (3.3)$$

donc,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^r + h \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}). \quad (3.4)$$

On suppose que l'énergie potentielle \mathcal{E} est suffisamment régulière pour pouvoir calculer sa décomposition de Taylor jusqu'à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}(\underline{u}) = \mathcal{E}_0(\underline{v}) + h \mathcal{E}_1(\underline{v}) + \frac{h^2}{2} \mathcal{E}_2(\underline{v}) + o(h^2). \quad (3.5)$$

Les termes de cette décomposition seront calculés à partir de l'expression 1.69 de \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = -\mathcal{W}_{int} - \mathcal{W}_{ext}. \quad (3.6)$$

Si h est nul alors l'expression 3.5 donne

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad (3.7)$$

donc le critère de stabilité d'ordre 0 est vérifié. Il reste à vérifier les critères de stabilité d'ordre 1 et 2. Un incrément du travail des efforts intérieurs s'écrit

$$d\mathcal{W}_{int}(d\underline{u}) = -\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega, \quad (3.8)$$

donc,

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{int}}{\partial h}(\underline{v}) = -\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h} d\Omega, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}_{int}}{\partial^2 h}(\underline{v}) = -\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial^2 \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial^2 h} + \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h} \right) d\Omega, \quad (3.10)$$

or,

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h}(\underline{v}) = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial^2 h}(\underline{v}) = \underline{\underline{0}}. \quad (3.12)$$

Les termes dérivés d'ordre 1 et 2 sont donc

$$(\mathcal{W}_{int})_1(\underline{v}) = -\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega, \quad (3.13)$$

$$(\mathcal{W}_{int})_2(\underline{v}) = -\int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega. \quad (3.14)$$

Un incrément du travail des efforts extérieurs s'écrit

$$d\mathcal{W}_{ext}(d\underline{u}) = \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{u} d\Gamma, \quad (3.15)$$

les termes dérivés d'ordre 1 et 2 sont donc

$$(\mathcal{W}_{ext})_1(\underline{v}) = \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{v} d\Gamma, \quad (3.16)$$

$$(\mathcal{W}_{ext})_2(\underline{v}) = 0. \quad (3.17)$$

Le critère de stabilité à l'ordre 1 est d'abord testé. Le calcul de $\mathcal{E}_1(\underline{v})$ donne

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{v} d\Gamma. \quad (3.18)$$

On reconnaît l'expression du principe des puissances virtuelles appliqué au champ \underline{v} , \mathcal{E}_1 est donc nul car le champ \underline{u}^r est solution du problème (et donc statiquement admissible). Le critère de stabilité d'ordre 1 est donc indéterminé. On examine ensuite le critère de stabilité à l'ordre 2. Le calcul de $\mathcal{E}_2(\underline{v})$ donne

$$\mathcal{E}_2(\underline{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h}(\underline{v}) : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega. \quad (3.19)$$

Le critère de stabilité d'ordre 2 est donc respecté si

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h}(\underline{v}) : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (3.20)$$

Stabilité matérielle Une condition suffisante pour que le critère de stabilité d'ordre 2 (équation 3.20) soit respecté est que l'inéquation suivante, appelée condition de *stabilité de Hill* [Hill, 1958] ou condition de *stabilité matérielle*, soit vérifiée en tout point de Ω :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h}(\underline{v}) : \underline{\nabla}^s(\underline{v}) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (3.21)$$

L'opérateur tangent $L_{\circ}(\underline{v})$ vérifiant

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h}(\underline{v}) = L_{\circ}(\underline{v}) : \underline{\nabla}^s(\underline{v}), \quad (3.22)$$

l'équation 3.21 devient

$$\underline{\nabla}^s(\underline{v}) : L_{\circ}(\underline{v}) : \underline{\nabla}^s(\underline{v}) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}_0. \quad (3.23)$$

On note f la fonction de charge du matériau, L_{\circ}^c l'opérateur tangent de raideur si le point considéré est en état de chargement, et L_{\circ}^d l'opérateur tangent de raideur si le point considéré n'est pas en état de chargement :

$$L_{\circ}^c = L_{\circ}(\underline{v}), \quad \text{si } f(\underline{u}^r) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial h}(\underline{v}) = 0, \quad (3.24)$$

$$L_{\circ}^d = L_{\circ}(\underline{v}), \quad \text{si } f(\underline{u}^r) < 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial h}(\underline{v}) < 0. \quad (3.25)$$

Avec ces notations, l'équation 3.23 revient à imposer que

$$d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} : L_{\circ}^c : d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} > 0, \quad \forall d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \in \mathcal{T}_2, \quad (3.26)$$

$$d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} : L_{\circ}^d : d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} > 0, \quad \forall d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \in \mathcal{T}_2, \quad (3.27)$$

\mathcal{T}_2 étant l'ensemble des tenseurs d'ordre 2. Cette inéquation est vérifiée si les tenseurs L_{\circ}^c et L_{\circ}^d sont *définis positifs*. La décharge se faisant dans le domaine élastique du comportement du matériau, on montre facilement que L_{\circ}^d est toujours défini-positif. La défini-positivité de L_{\circ}^c doit par contre être testée pour savoir si le comportement est stable ou non, ce qui revient à tester la stabilité d'un solide appelé *solide linéaire de comparaison* défini au voisinage de l'instant t considéré et pour lequel on suppose que le matériau est en état de chargement. Si L_{\circ} est défini-positif en tout point de la structure, l'*unicité de la solution* du problème éléments-finis obtenu en discrétisant le problème mécanique est garantie. Cette propriété d'unicité classique est démontrée dans l'annexe A.4.

Phénomène de localisation des déformations

D'après [Mandel, 1966], il est possible d'établir un lien entre la stabilité matérielle et la propagation des ondes planes dans un matériau supposé homogène. Pour cela,

on commence par écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme locale suivante :

$$\underline{\nabla}(\underline{\sigma}) = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2}, \quad (3.28)$$

$\underline{\nabla}$ étant l'opérateur divergence et ρ la masse volumique. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient

$$\underline{\nabla}\left(\frac{d\underline{\sigma}}{dt}\right) = \rho \frac{d^3 \underline{u}}{dt^3}. \quad (3.29)$$

On suppose que le matériau est en état de charge au point considéré. En faisant apparaître l'opérateur tangent L_{\circ}^c défini par l'équation 3.24, on obtient

$$\underline{\nabla}\left(L_{\circ}^c : \frac{d\underline{\varepsilon}}{dt}\right) = \rho \frac{d^3 \underline{u}}{dt^3}. \quad (3.30)$$

La solution de cette équation différentielle est recherchée sous la forme d'une onde plane dont la normale au plan d'onde est notée \underline{p} . On suppose donc que le champ de déplacement est de la forme

$$\underline{u} = \underline{u}^r + g(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) \underline{n}, \quad (3.31)$$

\underline{n} étant un vecteur constant, c la célérité de l'onde, et g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Les dérivées première, seconde, et tierce de g sont notées g' , g'' , et g''' . La déformation correspondant à ce champ de déplacement s'écrit

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \underline{\varepsilon}(\underline{u}^r) + g'(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) (\underline{p} \otimes \underline{n})^{sym}, \quad (3.32)$$

et on a donc,

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial t}(\underline{u}) = -c g''(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) (\underline{p} \otimes \underline{n})^{sym}. \quad (3.33)$$

En introduisant cette expression dans l'équation 3.30, on obtient

$$-c \operatorname{div}(g''(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) L_{\circ}^c : (\underline{p} \otimes \underline{n})^{sym}) = \rho \frac{d^3 \underline{u}}{dt^3}. \quad (3.34)$$

Si le matériau est homogène avant la perte de stabilité, L_{\circ}^c ne dépend pas du vecteur position \underline{x} et l'équation précédente devient

$$-c L_{\circ}^c : (\underline{p} \otimes \underline{n})^{sym} \cdot g'''(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) \underline{p} = \rho \frac{d^3 \underline{u}}{dt^3}. \quad (3.35)$$

En utilisant les propriétés de symétrie mineure de L_{\circ}^c ($L_{ijkl}^c = L_{ijlk}^c$ et $L_{ijkl}^c = L_{jikl}^c$), on obtient

$$-c (\underline{p} \cdot L_{\circ}^c \cdot \underline{p}) \cdot \underline{n} g'''(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) = \rho \frac{d^3 \underline{u}}{dt^3}. \quad (3.36)$$

Par ailleurs, l'équation 3.31 dérivée trois fois par rapport au temps donne

$$\frac{d^3 \underline{u}}{dt^3} = -c^3 g'''(\underline{p} \cdot \underline{x} - ct) \underline{n}, \quad (3.37)$$

donc l'équation 3.36 peut s'écrire plus simplement

$$(\underline{p} \cdot \underline{L}_0^c \cdot \underline{p}) \cdot \underline{n} = \rho c^2 \underline{n}. \quad (3.38)$$

En introduisant dans cette équation le tenseur acoustique $\underline{A}(\underline{p})$ défini par

$$\underline{A}(\underline{p}) = \underline{p} \cdot \underline{L}_0^c \cdot \underline{p}, \quad (3.39)$$

on obtient

$$\underline{A}(\underline{p}) \cdot \underline{n} = \rho c^2 \underline{n}. \quad (3.40)$$

Les couples $(\underline{p}, \underline{n})$ satisfaisant l'équation 3.38 sont donc ceux tels que \underline{n} soit vecteur propre et ρc^2 valeur propre de $\underline{A}(\underline{p})$. Le tenseur acoustique est dit singulier si

$$\det(\underline{A}(\underline{p})) = 0. \quad (3.41)$$

Si cette équation est vérifiée, alors \underline{A} a au moins une valeur propre nulle (car le déterminant est égal au produit des valeurs propres) et il est possible qu'une onde se propage à vitesse nulle dans le matériau. Ceci peut conduire à la *localisation de la déformation* dans une bande d'épaisseur nulle.

Remarques :

- la condition de localisation 3.41 correspond également à la perte d'ellipticité des équations du problème de dynamique. Cette propriété est expliquée dans [Chambart, 2009] dans le cas unidimensionnel ;
- le lien entre l'équation 3.41 et la localisation des déformations peut également se montrer par une étude de bifurcation (voir [Rice, 1976]).

Lien entre stabilité et localisation On suppose que le matériau est stable en un point, et on cherche à savoir s'il est possible qu'un mode de localisation passe par ce point. Conformément à l'équation 3.32, on choisit un champ test \underline{v} dont le gradient symétrisé peut s'écrire

$$\underline{\nabla}^s(\underline{v}) = \lambda (\underline{p} \otimes \underline{n})^{sym}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Si la condition de stabilité de Hill est vérifiée, la défini-positivité de \underline{L}_0^c donne

$$\underline{n} \cdot (\underline{p} \cdot \underline{L}_0^c \cdot \underline{p}) \cdot \underline{n} > 0, \quad \forall \underline{p} \in \mathcal{T}_1, \forall \underline{n} \in \mathcal{T}_1. \quad (3.43)$$

En faisant apparaître le tenseur acoustique \underline{A} dans cette équation, on obtient

$$\det(\underline{A}(\underline{p})) > 0, \quad \forall \underline{p} \in \mathcal{T}_1. \quad (3.44)$$

Il ne peut donc pas y avoir localisation de la déformation en un point si la condition de stabilité matérielle est vérifiée.

Conclusion Si la condition de stabilité matérielle est vérifiée en tout point d'un matériau continu, l'unicité de la solution du problème quasi-statique discrétisé est garantie et on ne peut pas voir apparaître de mode de localisation dans le matériau. On considérera par la suite que les modèles continus sont valides tant que la condition de stabilité de Hill est vérifiée en tout point du matériau continu.

3.2 Matériau avec une discontinuité

L'étude précédente est reprise en prenant en compte la présence d'une discontinuité dans le matériau. Le champ de déplacement de référence \underline{u}^r appartient à l'espace \mathcal{F}_c des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur le domaine Ω entaillé par une discontinuité Γ_s . Le champ \underline{u} appartient à l'espace \mathcal{F}'_c des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles définis sur le domaine Ω' traversé par une surface de discontinuité Γ'_s prolongeant Γ_s . \underline{u} est calculé en ajoutant à \underline{u}^r un multiple du champ \underline{v} appartenant à l'espace \mathcal{F}'_0 des champs continus, réguliers, et cinématiquement admissibles à 0 définis sur Ω' :

$$\underline{u} = \underline{u}^r + h \underline{v}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (3.45)$$

Le champ de saut de déplacement de référence $\llbracket \underline{u} \rrbracket^r$ est défini par

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket^r = (\underline{u}^r)^+ - (\underline{u}^r)^-, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (3.46)$$

On définit également le champ $\llbracket \underline{v} \rrbracket$ sur Γ'_s par

$$\llbracket \underline{v} \rrbracket = \underline{v}^+ - \underline{v}^-, \quad \text{sur } \Gamma'_s. \quad (3.47)$$

Le saut de déplacement $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ vérifie donc

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket = \llbracket \underline{u} \rrbracket^r + h \llbracket \underline{v} \rrbracket, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (3.48)$$

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket = h \llbracket \underline{v} \rrbracket, \quad \text{sur } \Gamma'_s \setminus \Gamma_s. \quad (3.49)$$

L'avancée de la discontinuité ne modifie pas en elle-même le travail des efforts extérieurs et des efforts intérieurs, donc

$$\mathcal{E}_0(\underline{v}) = \mathcal{E}(\underline{u}^r), \quad (3.50)$$

et le critère de stabilité à l'ordre 0 (équation 1.77) est indéterminé. Comme pour le matériau continu, les stabilités d'ordres 1 et 2 vont maintenant être testées. Un incrément de travail des efforts intérieurs s'écrit désormais en tenant compte de la présence de la discontinuité de la manière suivante :

$$d\mathcal{W}_{int}(d\underline{u}) = - \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Gamma'_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d\llbracket \underline{u} \rrbracket d\Gamma_s. \quad (3.51)$$

On a donc

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{int}}{\partial h}(\underline{v}) = - \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h} d\Omega - \int_{\Gamma'_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \frac{\partial \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial h} d\Gamma_s, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{W}_{int}}{\partial^2 h}(\underline{v}) = & - \int_{\Omega'} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h} + \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial^2 \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial^2 h} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma'_s} \left(\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \frac{\partial^2 \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial^2 h} + \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^s}{\partial h} \cdot \frac{\partial \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial h} \right) d\Gamma_s, \end{aligned} \quad (3.53)$$

or,

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial h}(\underline{v}) = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}), \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial^2 h}(\underline{v}) = \underline{\underline{0}}, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial h}(\llbracket \underline{v} \rrbracket) = \llbracket \underline{v} \rrbracket, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2 \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial^2 h}(\llbracket \underline{v} \rrbracket) = \underline{\underline{0}}. \quad (3.57)$$

Les termes dérivés d'ordre 1 et 2 sont donc

$$(\mathcal{W}_{int})_1(\underline{v}) = -\int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Gamma'_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{v}]] d\Gamma_s, \quad (3.58)$$

$$(\mathcal{W}_{int})_2(\underline{v}) = -\int_{\Omega'} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Gamma'_s} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^s}{\partial h} \cdot [[\underline{v}]] d\Gamma_s. \quad (3.59)$$

Le travail des efforts extérieurs se calcule comme dans la partie précédente. On teste d'abord le critère de stabilité d'ordre 1. Le calcul de $\mathcal{E}_1(\underline{v})$ donne

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma'_s} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot [[\underline{v}]] d\Gamma_s - \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{v} d\Gamma. \quad (3.60)$$

En reconnaissant l'expression du principe de puissances virtuelles appliqué au champ \underline{v} , on montre que le critère de stabilité à l'ordre 1 (1.79) est indéterminé :

$$\mathcal{E}_1(\underline{v}) = 0. \quad (3.61)$$

On teste ensuite le critère de stabilité d'ordre 2. Le calcul de \mathcal{E}_2 donne

$$\mathcal{E}_2(\underline{v}) = \int_{\Omega'} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial h} : \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma'_s} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^s}{\partial h} \cdot [[\underline{v}]] d\Gamma_s. \quad (3.62)$$

Stabilité et opérateur tangent La stabilité locale en un point de la discontinuité est garantie si

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^s}{\partial h} ([[u]] \cdot [[u]]) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}'_0. \quad (3.63)$$

Cette équation est l'équivalent pour la discontinuité du critère de stabilité matérielle 3.21 du matériau continu. L'opérateur tangent $\underline{\underline{L}}^s([[u]])$ vérifie en un point de la discontinuité

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^s}{\partial h} ([[u]]) = \underline{\underline{L}}^s([[u]]) \cdot [[u]], \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}'_0, \quad (3.64)$$

Le critère de stabilité locale s'écrit donc sur Γ_s

$$[[\underline{v}]] \cdot \underline{\underline{L}}^s([[u]]) \cdot [[\underline{v}]] > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}'_0, \quad (3.65)$$

soit encore,

$$\det(\underline{\underline{L}}^s([[u]])) > 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{F}'_0. \quad (3.66)$$

En distinguant l'opérateur $\underline{\underline{L}}^s_c$ correspondant à un chargement de la zone cohésive et l'opérateur $\underline{\underline{L}}^s_d$ correspondant à une décharge de la zone cohésive, on peut écrire ce critère plus simplement

$$\det(\underline{\underline{L}}^s_c) > 0, \quad (3.67)$$

car l'opérateur tangent est toujours défini-positif en décharge.

Remarque : cette étude est inspirée des travaux présentés dans [Laverne, 2004] et [Charlotte *et al.*, 2006], portant également sur une étude de stabilité avec un

modèle de fissuration cohésive. Dans ces travaux, les auteurs se donnent le potentiel énergétique de la discontinuité, puis déduisent de ce potentiel la contrainte critique d'initiation de la zone cohésive. Ce raisonnement peut être considéré comme une généralisation de la théorie de Griffith au cas des modèles cohésifs. Dans l'étude présentée précédemment, nous sommes partis des équations incrémentales du comportement de la zone cohésive pour faire apparaître les conditions locales de stabilité du matériau. On retrouve ainsi le critère de stabilité de Hill pour le matériau continu et un critère similaire pour la zone cohésive.

Stabilité et loi cohésive On considère que le modèle cohésif est celui défini dans la section 2.2.1. On veut montrer qu'avec ce modèle le critère de stabilité s'écrit de manière plus simple avec l'équation

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial [[u]]_{eq}} > 0. \quad (3.68)$$

Cette équation est démontrée dans le cas bidimensionnel en un point de la discontinuité dans le cas où on choisit la définition a) de la contrainte équivalente (équation 2.64). On considère dans un premier temps le cas où $[[u]]_n > \frac{\gamma}{\beta} |[u]_t|$ pour lequel l'opérateur tangent s'écrit

$$\underline{\underline{L}}^s_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial [[u]]_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{\beta} [[u]]_t \frac{\partial k_{eq}}{\partial [[u]]_n} & \frac{1}{\beta} k_{eq} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}. \quad (3.69)$$

On considère ensuite le cas où $[[u]]_n < \frac{\gamma}{\beta} |[u]_t|$ et pour lequel l'opérateur tangent vaut

$$\underline{\underline{L}}^s_c = \begin{pmatrix} k_{eq} & \frac{\partial k_{eq}}{\partial [[u]]_t} [[u]]_n \\ 0 & \frac{1}{\beta} \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial [[u]]_{eq}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}. \quad (3.70)$$

Dans les deux cas, on obtient

$$\det(\underline{\underline{L}}^s_c) = \frac{1}{\beta} k_{eq} \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial [[u]]_{eq}}. \quad (3.71)$$

Un point de la discontinuité est donc stable si la loi cohésive est strictement croissante en ce point et instable si elle est strictement décroissante en ce point.

Stabilité et initiations multiples de fissures On veut désormais montrer que la contrainte critique d'initiation de la zone cohésive majeure nécessairement la contrainte équivalente maximale de la loi cohésive en reprenant le raisonnement présenté dans [Planas *et al.*, 2003]. On considère dans cette section un modèle cohésif dont la loi cohésive est d'abord croissante jusqu'à ce qu'un seuil σ_{max}^s soit atteint, puis décroissante (voir figure 3.1).

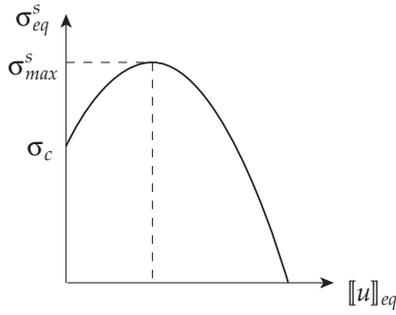


FIG. 3.1 – Loi cohésive croissante puis décroissante

Avec cette loi cohésive, on sait que pour toute discontinuité du matériau, il existe un point M_s où la contrainte équivalente σ_{eq}^s atteint une valeur $\sigma_{eq}^s(M_s)$ supérieure à la contrainte critique σ_c :

$$\sigma_{eq}^s(M_s) > \sigma_c. \quad (3.72)$$

On peut également définir une contrainte équivalente σ_{eq} sur Ω , égale au maximum d'une contrainte cohésive fictive calculée à partir de l'équation $\underline{\sigma}^s = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ lorsque le vecteur \underline{n} varie. Les contraintes étant continues sur Ω , la contrainte équivalente l'est également et il existe un rayon r tel que

$$\|M_s M\| \leq r \Rightarrow \sigma_{eq}(M) \geq \frac{\sigma_c + \sigma_{eq}^s(M_s)}{2} > \sigma_c. \quad (3.73)$$

Il est donc possible de définir un voisinage \mathcal{V} du point M_s à l'intérieur duquel la contrainte équivalente est supérieure à σ_c (voir figure 3.2) :

$$\mathcal{V} = \left\{ M \in \Omega \mid \|M_s M\| \leq r \right\}. \quad (3.74)$$

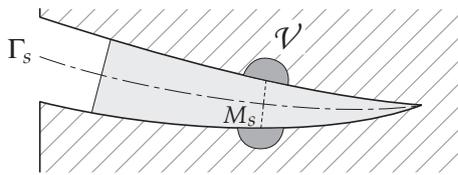


FIG. 3.2 – Voisinage de la discontinuité vérifiant le critère d'initiation de fissure

Tous les points de \mathcal{V} satisfont le critère d'initiation de la fissure, ce qui provoque la formation d'une infinité de fissures. Un modèle cohésif ne générant qu'une seule fissure macroscopique aura donc nécessairement une loi cohésive dont la contrainte équivalente maximale est égale à la contrainte critique d'initiation. Une loi cohésive de ce type conduira donc à une instabilité locale au moment de l'initiation de la fissure. On considérera par la suite, comme c'est le cas dans la majorité des travaux portant sur les zones cohésives, que les lois cohésives sont des fonctions décroissantes du saut de déplacement équivalent.

Cas du modèle de Griffith Un modèle de fissuration de Griffith peut être considéré comme un modèle cohésif dont l'ouverture critique de zone cohésive $\llbracket u \rrbracket_c$ tend vers 0 tout en conservant G_c constant (ceci sera étudié plus précisément dans le chapitre 14). Dans ce cas, on a

$$\sigma_c = \infty, \quad (3.75)$$

ce qui rend impossible l'initiation d'une fissure de Griffith dans un matériau sain.

3.3 Bilan

Tant que la condition de stabilité matérielle est vérifiée en tout point du matériau continu, le problème peut être considéré bien posé en quasi-statique car l'unicité de la solution du problème discrétisé est garantie et aucune bande de localisation ne peut apparaître.

Les modèles discontinus ont des caractéristiques inverses car une loi cohésive conduisant à un comportement localement stable entraînerait l'initiation d'une infinité de fissures dans le matériau. Par ailleurs, ces modèles pour lesquels l'endommagement est condensé sur une surface ne peuvent pas modéliser un endommagement réparti de manière diffuse dans le matériau.

On considérera par la suite que les modèles continus et discontinus sont des modèles complémentaires valides respectivement avant et après la perte de stabilité matérielle. Dans la famille des modèles discontinus, on peut distinguer le domaine de validité du modèle de Griffith et des modèles cohésifs. Le modèle de Griffith étant incapable de représenter l'initiation d'une fissure dans un matériau sain, il ne peut être utilisé que lorsque la fissure est suffisamment longue pour que la propagation puisse être considérée stationnaire (hypothèse 1 de Griffith). On obtient ainsi pour ces trois modèles les domaines de validité représentés sur la figure 3.3.

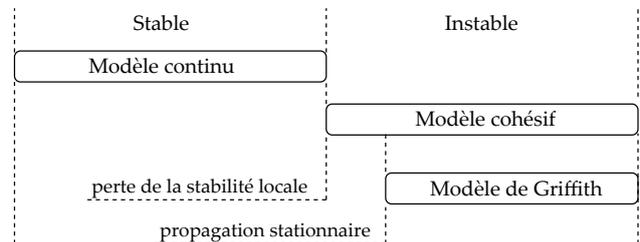


FIG. 3.3 – Validité des modèles continus et discontinus

L'objectif de ce travail est de construire un modèle discontinu à partir d'un modèle continu de référence en se plaçant à l'intersection des domaines de validité de ces deux types de modèles. À ce stade de l'étude, cela n'est pas possible car les domaines de validité sont disjoints. La notion de limiteur de localisation présentée dans le chapitre suivant va permettre de combler ce manque.

Chap. 4

Limiteurs de localisation

4.1 Localisation numérique

Exemple unidimensionnel On considère une poutre en traction discrétisée avec 5 éléments-fins linéaires identiques. On note L sa longueur et S sa section, avec $L=100\text{ mm}$ et $S=1000\text{ mm}^2$. Cette poutre est encadrée à son extrémité gauche et soumise à un effort de traction F_d à son extrémité droite (voir figure 4.1).

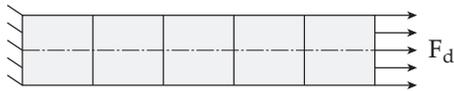


FIG. 4.1 – Maillage de la poutre avec des éléments linéaires identiques

On choisit une loi de comportement linéaire pour le matériau dont les paramètres sont $E = 40\text{ GPa}$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, $\varepsilon_r = 2 \times 10^{-4}$. Cette loi est représentée sur la figure 4.2.

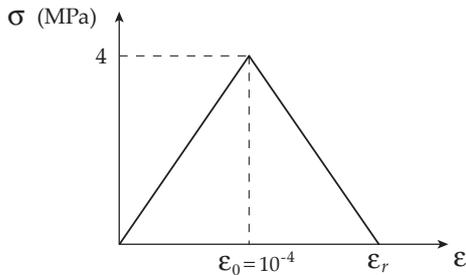


FIG. 4.2 – Loi de comportement du matériau

La loi de comportement d'un élément de la poutre est représentée sur la figure 4.3.

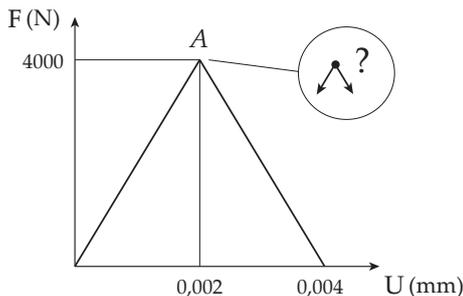


FIG. 4.3 – Loi de comportement d'un élément-fini

L'équilibre de la poutre impose que cet effort soit le même dans les 5 éléments. Si on atteint le sommet de la loi de comportement des éléments (point A), il n'est plus possible d'augmenter encore le chargement. Le chargement diminuant, il y a deux possibilités pour chaque élément : soit l'élément se décharge élastiquement, soit l'élément continue de se charger en suivant la partie adoucissante de la loi de comportement.

Cette indétermination est levée si la poutre n'est pas parfaitement homogène. Par exemple, on peut diminuer la section de l'élément central de 10% comme cela est représenté sur la figure 4.4.

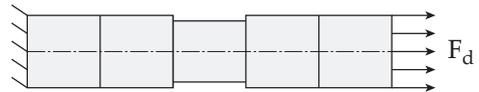


FIG. 4.4 – Maillage de la poutre avec un élément de section réduite

Les lois de comportement des 4 éléments latéraux et de l'élément central sont représentées sur la figure 4.5.

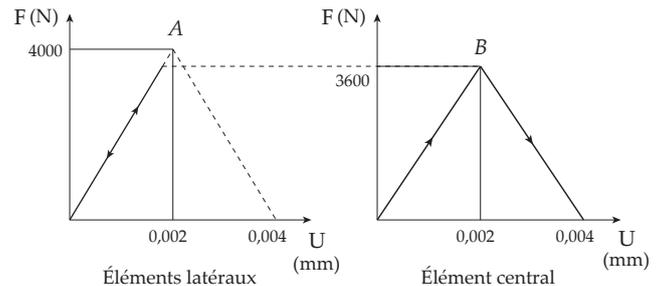


FIG. 4.5 – Lois de comportement des éléments latéraux et de l'élément central

Encore une fois, l'équilibre de la poutre impose que l'effort de traction soit le même dans les 5 éléments. On voit que les éléments latéraux ne peuvent pas atteindre leur chargement maximal (point A) à cause de l'élément central qui limite la valeur maximale de l'effort de traction (point B). Lorsque le point B est atteint, si on exclut le cas d'une décharge de tous les éléments du maillage, l'endommagement se concentre dans l'élément central tandis que les éléments latéraux se déchargent de manière élastique. La solution du problème éléments-fins est donc dépendante du maillage ; en particulier,

si la taille de l'élément central tend vers 0, l'énergie dissipée par la structure tend également vers 0.

Notion de limiteur de localisation L'incapacité des modèles continus à modéliser l'endommagement adoucissant peut s'interpréter par le fait que les hétérogénéités du matériau ne sont pas prises en compte par la modélisation. Pour éviter ce problème, on peut ajouter au modèle un *limiteur de localisation* (cette notion est introduite dans [Lasry et Belytschko, 1988]) dont la fonction est d'imposer une énergie dissipée non nulle lors de la rupture. On peut distinguer deux catégories de modèles avec limiteur de localisation :

- les *modèles continus régularisés* qui conservent une description continue de la rupture après la localisation mais ajoutent une dimension caractéristique au modèle permettant d'imposer une largeur minimale à la zone endommagée ;
- les *modèles mixtes continus/discontinus* qui introduisent une discontinuité dans le matériau au moment de la localisation.

Ces deux types de limiteurs de localisation sont étudiés dans ce chapitre.

4.2 Modèles continus régularisés

4.2.1 Régularisation sur l'espace

Cadre général Une première façon de limiter la localisation est de régulariser l'endommagement sur l'espace avec un modèle non-local [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] ou un modèle à second-gradient [Aifantis, 1984]. Ces modèles sont ici présentés de manière commune d'après [Peerlings *et al.*, 2001]. On note z la variable pilotant l'endommagement. Une variable régularisée \bar{z} est calculée en un point repéré par sa position \underline{x} en faisant une moyenne pondérée de z sur le domaine :

$$\bar{z}(\underline{x}) = \frac{1}{V_r(\underline{x})} \int_{\Omega} z(\underline{s}) \alpha(\underline{s} - \underline{x}) d\Omega, \quad (4.1)$$

avec,

$$V_r(\underline{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\underline{s} - \underline{x}) d\Omega, \quad (4.2)$$

\underline{s} étant le vecteur position du point parcourant Ω pendant l'intégration et α une fonction de pondération choisie par l'utilisateur. Cette fonction de pondération est souvent la fonction de Gauss représentée sur la figure 4.6 et s'écrivant

$$\alpha(\underline{s} - \underline{x}) = \frac{1}{k_i} \exp\left(-\frac{\|\underline{s} - \underline{x}\|^2}{2l_c^2}\right), \quad (4.3)$$

k_i étant une constante dépendant de la dimension du problème (k_1 en 1D, k_2 en 2D, et k_3 en 3D) et l_c une longueur caractéristique s'ajoutant aux paramètres du matériau.

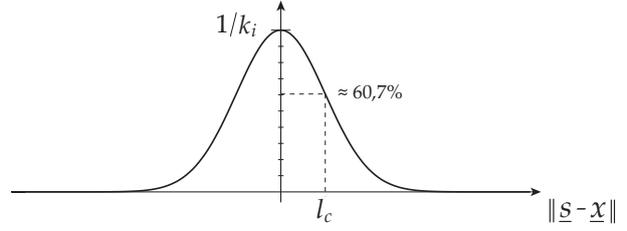


FIG. 4.6 – Fonction de Gauss pour la régularisation

Suivant si le problème est unidimensionnel, bidimensionnel, ou tridimensionnel, on pose

$$k_1 = \sqrt{2\pi} l_c, \quad \text{en 1D,} \quad (4.4)$$

$$k_2 = 2\pi l_c^2, \quad \text{en 2D,} \quad (4.5)$$

$$k_3 = (2\pi)^{3/2} l_c^3, \quad \text{en 3D.} \quad (4.6)$$

Le choix de ces facteurs permet que l'équation suivante soit satisfaite :

$$\int_{\mathbb{R}^i} \alpha(\underline{s} - \underline{x}) d\mathbb{R}^i = 1, \quad i \in [1, 3]. \quad (4.7)$$

Démonstration Les facteurs k_i sont calculés à partir de l'équation 4.7. Le terme de gauche de cette équation est calculé en effectuant un changement de variable pour intégrer sur r avec

$$r = \|\underline{s} - \underline{x}\|. \quad (4.8)$$

Calcul de k_1 :

$$k_1 = 2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) dr. \quad (4.9)$$

En utilisant le résultat connu de l'intégrale de Gauss, on retrouve l'expression 4.4.

Calcul de k_2 :

$$k_2 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) 2\pi r dr, \quad (4.10)$$

ce qui permet de retrouver l'expression 4.5.

Calcul de k_3 :

$$k_3 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) 4\pi r^2 dr. \quad (4.11)$$

Le calcul de cette intégrale avec une intégration par parties permet de retrouver l'expression 4.6.

Dans ce travail, la variable z est la déformation équivalente ε_{eq} pour un modèle d'endommagement :

$$z = \varepsilon_{eq}, \quad (4.12)$$

et la déformation plastique cumulée p pour un modèle élasto-plastique endommageable :

$$z = p. \quad (4.13)$$

Il faut ensuite choisir une méthode pour le calcul des intégrales des équations 4.1 et 4.2, ce qui fera la différence entre les modèles non-locaux et les modèles à second-gradient explicite et implicite.

Modèles non-locaux Une première façon d'obtenir la variable non-locale est de calculer numériquement les équations 4.1 et 4.2 avec un schéma d'intégration numérique (par exemple avec une quadrature de Gauss ou de Newton-Cotes dont le principe est rappelé dans l'annexe A.3). On néglige généralement la contribution des points d'intégration situés au delà d'une certaine distance du point considéré. La figure 4.7 illustre le calcul numérique de l'équation 4.2 pour une poutre discrétisée pour laquelle chaque élément comporte un seul point de Gauss.

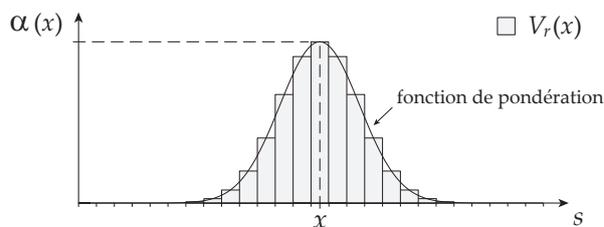


FIG. 4.7 – Calcul numérique de V_r pour un modèle unidimensionnel

Cette méthode est coûteuse numériquement car une intégration numérique doit être effectuée pour calculer les valeurs de \bar{z} et de V_r en chaque point d'intégration pour chaque itération.

Modèles à second-gradient explicite Pour introduire les modèles à second-gradient explicite, on calcule la variable régularisée \bar{z} (équation 4.1) pour un milieu infini à partir du développement limité à l'ordre 2 de z suivant :

$$z(\underline{s}) = z(\underline{x}) + \nabla(z) \cdot (\underline{s} - \underline{x}) + \frac{1}{2} (\underline{s} - \underline{x}) \cdot \underline{\nabla}^2(z) \cdot (\underline{s} - \underline{x}) + o(\|\underline{s} - \underline{x}\|^2), \quad (4.14)$$

et de l'expression de la fonction de pondération donnée en 4.3. On obtient

$$\bar{z}(\underline{x}) = z(\underline{x}) + \bar{c} \nabla^2(z(\underline{x})) + o(\|\underline{s} - \underline{x}\|^2), \quad (4.15)$$

\bar{c} vérifiant

$$\bar{c} = \frac{1}{2} l_c^2. \quad (4.16)$$

Démonstration On calcule $\bar{z}(\underline{x})$ en introduisant l'équation 4.14 dans l'équation 4.1. En effectuant un changement de variable pour intégrer sur $r = \|\underline{s} - \underline{x}\|$, on obtient en 1D :

$$\bar{z}(\underline{x}) = z(\underline{x}) + 2 \int_0^\infty \frac{1}{2} \nabla^2(z(\underline{x})) r^2 \alpha(r) dr, \quad (4.17)$$

en 2D :

$$\bar{z}(\underline{x}) = z(\underline{x}) + \int_0^\infty \frac{1}{2} \nabla^2(z(\underline{x})) \alpha(r) \pi r^3 dr, \quad (4.18)$$

en 3D :

$$\bar{z}(\underline{x}) = z(\underline{x}) + \int_0^\infty \frac{1}{2} \nabla^2(z(\underline{x})) \alpha(r) \frac{4}{3} \pi r^4 dr. \quad (4.19)$$

Quelle que soit la dimension, le calcul de ces intégrales donne le résultat suivant :

$$\bar{z}(\underline{x}) = z(\underline{x}) + \frac{l_c^2}{2} \nabla^2(z(\underline{x})). \quad (4.20)$$

Un inconvénient des formulations à second-gradient explicite est qu'elles nécessitent de calculer le laplacien de z , ce qui n'est possible que si l'approximation du champ de déplacement est suffisamment régulière. Pour contourner ce problème, des formulations implicites ont été développées.

Modèles à second-gradient implicite les modèles à second-gradient implicite sont introduits à partir des modèles à second-gradient explicite. En différenciant deux fois l'expression 4.15, on obtient

$$\nabla^2(\bar{z}(\underline{x})) = \nabla^2(z(\underline{x})) + \bar{c} \nabla^4(z(\underline{x})) + o(\|\underline{s} - \underline{x}\|^4), \quad (4.21)$$

ce qui montre que $\nabla^2(\bar{z}(\underline{x}))$ et $\nabla^2(z(\underline{x}))$ sont égaux si on se limite à un développement limité à l'ordre 2, et permet d'écrire l'équation implicite

$$\bar{z}(\underline{x}) - \bar{c} \nabla^2(\bar{z}(\underline{x})) = z(\underline{x}) + o(\|\underline{s} - \underline{x}\|^2). \quad (4.22)$$

La résolution de cette équation nécessite de connaître les conditions aux limites à appliquer sur le bord du domaine. On suppose généralement que

$$\underline{\nabla}(\bar{z}) \cdot \underline{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4.23)$$

\underline{n} étant la normale extérieure au domaine.

Remarque : on pourrait aussi imposer la valeur de \bar{z} sur le bord du domaine.

Comparaison des méthodes Dans [Peerlings *et al.*, 2001], les auteurs montrent pour un problème unidimensionnel qu'il existe une fonction de pondération pour laquelle un modèle à second-gradient implicite et un modèle non-local donnent des résultats très proches. Le temps de calcul est cependant plus faible en utilisant le modèle à second-gradient implicite.

Remarque : on peut considérer que les modèles régularisant l'endommagement sur l'espace remettent en cause l'hypothèse de l'état local selon laquelle le comportement d'un VER est indépendant de l'état des VER avoisinants. Pour autant, les modèles présentés ne contredisent pas les équations données lors de l'écriture du cadre thermodynamique général, car toutes les modifications apportées par la régularisation portent sur le calcul des variables internes du modèle qui n'est pas spécifié *a priori*. Les formules données dans la section 1.2 sont donc toujours valables si une méthode de régularisation sur l'espace est utilisée.

4.2.2 Régularisation sur le temps

Les modèles à *effet-retard* régularisent l'endommagement en limitant l'accroissement de l'endommagement dans le matériau au cours du temps. Avec ces modèles, la régularisation porte généralement directement sur la variable d'endommagement D . On note \bar{D} la variable d'endommagement régularisée. Les premiers modèles à effet-retard [Ladevèze, 1992] ont été élaborés pour des composites stratifiés et vérifiaient une loi du type :

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{1}{t_c} \langle D - \bar{D} \rangle^n, \quad (4.24)$$

t_c et n étant deux constantes matériau à ajouter au modèle initial, et $\langle \cdot \rangle$ indiquant que l'on sélectionne la partie positive de la quantité encadrée. L'endommagement étant compris entre 0 et 1, la grandeur $D - \bar{D}$ ne peut pas dépasser 1 et la vitesse de croissance de l'endommagement ne peut donc pas dépasser $\frac{1}{t_c}$. Le paramètre t_c joue donc le rôle d'un temps caractéristique limitant le taux de croissance de l'endommagement. Pour voir l'effet de la régularisation, on imagine qu'en un point D suit l'évolution brutale suivante :

$$D = 0, \quad \text{si } t \leq 0, \quad (4.25)$$

$$D = 1, \quad \text{si } t > 0. \quad (4.26)$$

Pour une valeur fixée de t_c ($t_c = 0,1$), l'influence du paramètre n est représentée sur la figure 4.8.

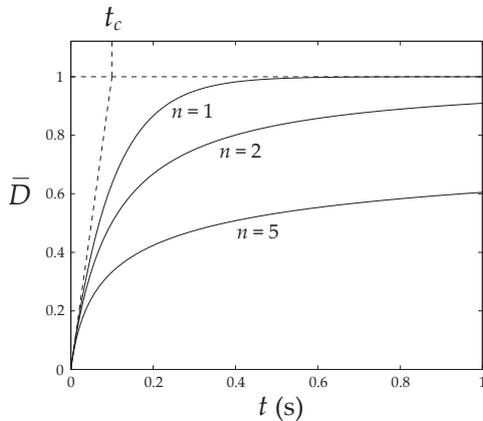


FIG. 4.8 – Influence du paramètre n sur l'évolution de l'endommagement

Cette technique de régularisation ne permettant pas de se débarrasser complètement de la dépendance au maillage (voir par exemple [Suffis, 2004]), la loi suivante est proposée dans [Allix et Deü, 1997] pour le calcul de la variable d'endommagement régularisée :

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{1}{t_c} \exp(-a \langle D - \bar{D} \rangle), \quad (4.27)$$

t_c et a étant les deux nouvelles constantes matériau de l'effet-retard. On peut vérifier qu'avec cette formule la vitesse d'endommagement ne peut pas dépasser non plus $\frac{1}{t_c}$ car le terme exponentiel est toujours inférieur à 1. Dans [Suffis, 2004], une longueur caractéristique est

calculée pour un modèle à effet-retard de ce type dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle et dynamique.

Remarque : on reproche parfois aux modèles à effet-retard d'être utilisables uniquement en dynamique, ce à quoi on peut opposer le fait que la régularisation est nécessaire seulement si le comportement est localement instable, et qu'un comportement globalement instable conduit nécessairement à un comportement dynamique de la structure (la perte de stabilité locale n'impliquant pourtant pas nécessairement la perte de stabilité globale). Un point faible de ces modèles est peut-être leur utilisation conjointe à des méthodes de pilotage de calculs (voir annexe E) pour lesquelles on impose artificiellement que le problème reste quasi-statique.

4.3 Modèles mixtes continus/discontinus

Les modèles mixtes continus/discontinus combinent un modèle continu durcissant et un modèle discontinu de zone cohésive jouant le rôle de limiteur de localisation. La présence d'une énergie surfacique de rupture (dont le maximum est G_c) empêche que la rupture se produise sans dissipation d'énergie. On peut considérer qu'une longueur caractéristique est introduite dans le modèle lorsque des fissures apparaissent car la quantité $\frac{G_c}{E}$ est homogène à une longueur :

$$\frac{G_c}{E} = \frac{\text{énergie surfacique}}{\text{énergie volumique}} = \text{longueur}. \quad (4.28)$$

La partie discontinue du modèle est souvent décrite avec le formalisme de la discontinuité forte [Simo *et al.*, 1993] qui sera étudié plus en détail dans les chapitres 6 et 10. Pour savoir quand une discontinuité s'initie, on choisit souvent un critère sur la définitivité du tenseur acoustique (équation 3.44). Ce type de critère garantit que le modèle continu ne localise pas avant l'initiation de la discontinuité et peut donner l'orientation de la discontinuité lorsqu'elle s'initie. Un modèle cohésif classique peut également être utilisé pour décrire la partie discontinue du domaine, comme cela est réalisé par exemple dans [Li et Chandra, 2003]. Un modèle de ce type a également été utilisé dans la thèse de Nicolas Tardif [Tardif, 2009] pour simuler le comportement d'un acier de cuve de réacteur nucléaire à très haute température.

4.4 Conclusion

Les modèles continus régularisés et les modèles mixtes continus/discontinus permettent tous deux d'étendre le domaine de validité des modèles d'endommagement et de plasticité à la zone adoucissante du comportement du matériau. Nous nous intéresserons donc par la suite principalement à ces deux types de modèles dont les domaines de validité sont résumés sur la figure 4.9.

Endommagement diffus	Endommagement localisé
modèle continu	+ régularisation
modèle continu	modèle cohésif

FIG. 4.9 – Validité des modèles continus et discontinus

Chap. 5

Modèle à double endommagement

Dans [Yaacoub Agha *et al.*, 1997], des modèles d'endommagement faisant intervenir deux variables d'endommagement sont développés : une première variable d'endommagement permet de prendre en compte le comportement diffus, et une deuxième variable d'endommagement permet de prendre en compte le comportement localisé. Ces endommagements sont choisis tantôt isotropes, et tantôt anisotropes. Dans [Brajer, 2004], une loi de comportement du même type est développée en se basant sur une étude probabiliste de la micro-fissuration d'un matériau fragile (verre). Les modèles obtenus ont un comportement similaire aux modèles mixtes continus/discontinus présentés dans le chapitre précédent, mais avec une approche entièrement continue. Ces modèles ne comportant pas de longueur caractéristique, la solution numérique obtenue dépend du maillage utilisé. Dans ce chapitre, nous chercherons de manière similaire à construire un modèle d'endommagement permettant de distinguer l'endommagement diffus et l'endommagement localisé. Le modèle sera construit à partir d'une étude du matériau sur deux échelles distinctes, et une régularisation de type second-gradient implicite permettra de régulariser la partie localisée de l'endommagement pour éviter les problèmes de dépendance au maillage.

5.1 Construction du modèle

VER micro et macro On considère que le matériau comporte des fissures de tailles variables pouvant être séparées en deux catégories :

- les fissures les plus petites appelées *micro-fissures* sont observées dans un volume élémentaire défini à une échelle microscopique qui sera appelé VER micro ;
- les fissures les plus grosses, résultant de la coalescence des micro-fissures, sont appelées *macro-fissures*. Elles sont observées dans un volume élémentaire défini à une échelle macroscopique et appelé VER macro.

Ces deux VER utilisés pour la construction du modèle sont représentés sur la figure 5.1.

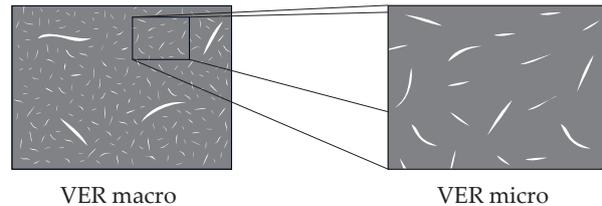


FIG. 5.1 – Schéma de micro-fissuration du matériau dans un VER macro et un VER micro

Séparation des échelles En faisant une hypothèse de séparation des échelles, les micro-fissures sont remplacées dans le VER macro par un endommagement diffus représenté par une variable scalaire ω_d . D'après [Saulnier, 2006], l'hypothèse de séparation des échelles peut être définie comme suit :

« S'il y a séparation des échelles, alors un niveau n'influence les niveaux supérieurs que par l'intermédiaire de *paramètres effectifs*. Ces paramètres effectifs résument un *phénomène sous-jacent complexe*, au sens où ils suffisent à rendre compte de ses *conséquences observables aux échelles supérieures*. »

Pour le modèle développé, on considère que

- le *paramètre effectif* est la variable ω_d ;
- le *phénomène sous-jacent complexe* est la micro-fissuration ;
- la *conséquence observable aux échelles supérieures* est l'endommagement diffus.

Variables d'endommagement À l'échelle du VER macro, on définit une section S , une section utile S_u (comme pour un modèle d'endommagement classique), et une section S_u^d égale à la section utile que l'on aurait en ne tenant compte que de la micro-fissuration à l'échelle fine. Ces sections sont schématisées sur la figure 5.2.

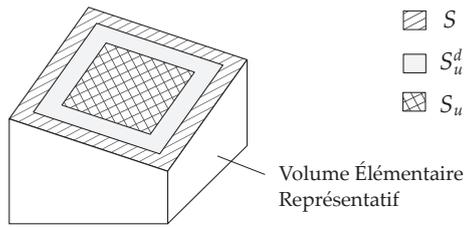


FIG. 5.2 – Section utile et section utile d'endommagement diffus

La variable d'endommagement D est définie de manière habituelle par

$$D = 1 - \frac{S_u}{S}. \quad (5.1)$$

Le variable d'endommagement diffus ω_d ne correspondant qu'à la diminution de section due à la fissuration à l'échelle microscopique est définie par

$$\omega_d = 1 - \frac{S_u^d}{S}. \quad (5.2)$$

On définit également une variable d'endommagement localisé ω_l correspondant à la diminution de section utile due à la prise en compte de la fissuration à l'échelle macroscopique :

$$\omega_l = 1 - \frac{S_u}{S_u^d}. \quad (5.3)$$

On remarque que D peut s'écrire

$$D = 1 - \frac{S_u}{S_u^d} \frac{S_u^d}{S}, \quad (5.4)$$

et est donc relié à ω_d et ω_l par la formule

$$1 - D = (1 - \omega_d)(1 - \omega_l), \quad (5.5)$$

pouvant également s'écrire

$$D = \omega_l + \omega_d - \omega_l \omega_d. \quad (5.6)$$

Ces formules sont similaires à celles utilisées dans [Yaacoub Agha *et al.*, 1997, Brajer, 2004]. D'après l'équation 5.5, la relation de comportement s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - \omega_d)(1 - \omega_l) \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (5.7)$$

$\underline{\underline{K}}$ étant le tenseur de Hooke du matériau sain.

Potentiel énergétique La loi de comportement 5.7 peut être retrouvée à partir du potentiel suivant :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (1 - \omega_d)(1 - \omega_l) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + C\theta^2, \quad (5.8)$$

ρ étant la masse volumique et C la chaleur spécifique du matériau. Les variables associées à ω_d et ω_l sont notées Y_d et Y_l , donc

$$Y_d = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega_d}, \quad (5.9)$$

$$Y_l = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega_l}. \quad (5.10)$$

Y_d et Y_l vérifient donc

$$Y_d = -\frac{1}{2}(1 - \omega_l) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (5.11)$$

$$Y_l = -\frac{1}{2}(1 - \omega_d) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (5.12)$$

et un incrément d'énergie dissipée intrinsèque volumique vaut

$$d\phi^1 = -Y_d d\omega_d - Y_l d\omega_l. \quad (5.13)$$

Déformation microscopique On définit une déformation microscopique $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ égale à la déformation vue par un volume élémentaire de l'échelle micro. On fait l'hypothèse que l'état de contrainte est le même dans le VER micro que dans le VER macro (hypothèse de Reuss) et vérifie donc

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - \omega_d) \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}. \quad (5.14)$$

En égalant cette équation avec l'équation 5.7, on obtient l'expression suivante la déformation micro :

$$\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = (1 - \omega_l) \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (5.15)$$

On définit la déformation équivalente microscopique de Mazars par

$$\tilde{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_1^+)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2^+)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3^+)^2}, \quad (5.16)$$

$\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$, $\tilde{\varepsilon}_3$ étant les déformations principales microscopiques. En faisant apparaître dans cette équation la déformation équivalente de Mazars ε_{eq} (équation 2.19), on obtient

$$\tilde{\varepsilon}_{eq} = (1 - \omega_l) \varepsilon_{eq}. \quad (5.17)$$

Remarque : la déformation équivalente microscopique $\tilde{\varepsilon}_{eq}$ est plus petite que la déformation équivalente macroscopique. L'hypothèse de Reuss permet donc de prendre en compte un effet de décharge du matériau dans la zone entourant la fissure macroscopique. On peut appeler ce phénomène *obscurcissement* du VER micro en reprenant le terme utilisé dans [Hild, 2007] pour un problème avec de multiples fissures.

Lois de comportement Il faut maintenant définir une loi de comportement pour le matériau à l'échelle microscopique et une autre pour le matériau à l'échelle macroscopique :

- la loi donnant ω_d (comportement microscopique) est choisie de telle sorte que le matériau soit durcissant à cette échelle ;
- la loi donnant ω_l (comportement macroscopique) est ajoutée pour que le comportement devienne adoucissant à un certain stade de la rupture à cette échelle.

La variable d'endommagement diffus ω_d dépend d'une variable de mémoire notée κ_d , et la variable d'endommagement localisé ω_l d'une variable de mémoire notée κ_l . La variable d'endommagement global D dépend donc à la fois de κ_d et κ_l :

$$D(\kappa_d, \kappa_l) = \omega_d(\kappa_d) + \omega_l(\kappa_l) - \omega_d(\kappa_d) \omega_l(\kappa_l). \quad (5.18)$$

On définit la variable z_d pour piloter l'endommagement diffus et la variable z_l pour piloter l'endommagement localisé. Pour éviter la localisation de l'endommagement, une variable \bar{z} est calculée en régularisant la variable z_l avec la méthode du second-gradient. Les variables de mémoires κ_d et κ_l sont égales au maximum sur le temps de z_d et \bar{z} :

$$\kappa_d = \max_t(z_d), \quad (5.19)$$

$$\kappa_l = \max_t(\bar{z}), \quad (5.20)$$

avec,

$$\bar{z} - \bar{c} \nabla^2(\bar{z}) = z_l, \quad (5.21)$$

\bar{c} étant le paramètre du matériau ajouté pour la régularisation. Les caractéristiques du modèle sont résumées dans le tableau 5.1.

Endommagement	Diffus	Localisé
échelle	micro	macro
loi matériau	durcissante	adoucissante
régularisation	sans	second-gradient
var. d'endom.	ω_d	ω_l
var. de pilotage	z_d	z_l
var. régularisée	sans	\bar{z}
var. de mémoire	κ_d	κ_l

TAB. 5.1 – Caractéristiques du modèle à double endommagement

Remarques :

- dans [Comi et Perego, 2001] un modèle avec deux variables d'endommagement vérifiant une relation de comportement similaire à l'équation 5.7 est introduit. Ce modèle comporte une variable pour l'endommagement en traction et une autre pour l'endommagement en compression, ce qui permet de mieux tenir compte de la dissymétrie du comportement du béton entre un essai de traction et un essai de compression.
- dans [Grassl et Jirásek, 2005], un modèle non-local est développé pour lequel la variable d'endommagement dépend à la fois d'une variable locale et de sa régularisée, ce qui permet de choisir plus précisément la forme du profil d'endommagement obtenu.

On suppose que la variable z_l pilotant l'endommagement localisé est égale à la déformation équivalente de Mazars :

$$z_l = \varepsilon_{eq} = \sqrt{(\varepsilon_1^+)^2 + (\varepsilon_2^+)^2 + (\varepsilon_3^+)^2}. \quad (5.22)$$

La variable pilotant l'endommagement diffus z_d est elle égale à la déformation équivalente microscopique :

$$z_d = \tilde{\varepsilon}_{eq}. \quad (5.23)$$

Nous utiliserons par la suite les lois d'évolutions suivantes pour ω_d et ω_l :

$$\omega_d = 0, \quad \text{si } \kappa_d \leq \varepsilon_0, \quad (5.24)$$

$$\omega_d = (1 - k) \frac{\kappa_d - \varepsilon_0}{\kappa_d}, \quad \text{si } \kappa_d > \varepsilon_0, \quad (5.25)$$

et,

$$\omega_l = 0, \quad \text{si } \kappa_l \leq \varepsilon_1, \quad (5.26)$$

$$\omega_l = 1 - \exp(-A(\kappa_l - \varepsilon_1)), \quad \text{si } \kappa_l > \varepsilon_1, \quad (5.27)$$

k , ε_0 , ε_1 , et A étant les paramètres du matériau. La loi de comportement de l'endommagement localisé reprend la loi d'endommagement exponentielle donnée dans la section 2.1.1.

5.2 Exemple unidimensionnel

cas test On étudie une poutre en traction de longueur L et de section S , avec au centre de la poutre une zone de longueur L_0 dont la section est multipliée par un facteur α légèrement inférieur à 1 (voir figure 5.3). Cette légère diminution de la section de la poutre permet d'imposer que la zone d'endommagement localisé soit au centre de la poutre.

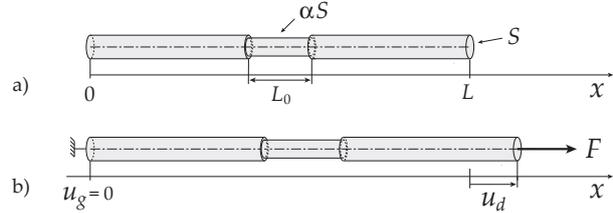


FIG. 5.3 – Poutre dans sa configuration initiale (a) et déformée (b)

Les calculs sont effectués avec les valeurs numériques suivantes : $L = 100$ mm, $S = 1000$ mm², $L_0 = 20$ mm, $\alpha = 0.99$. Le maillage comporte 161 éléments, quadratiques pour la discrétisation du champ de déplacement, et linéaires pour la discrétisation du champ de la variable régularisée. La formulation faible utilisée pour poser le problème éléments-finis est obtenue en adaptant la formulation classique développée dans [Peerlings *et al.*, 1996] au modèle à double endommagement (voir annexe B). Cette formulation a été implémentée dans le logiciel Matlab en utilisant un pilotage du calcul pour imposer l'évolution de la déformation de l'élément central de la poutre. On choisit les valeurs suivantes des paramètres du matériau : $E = 40000$ MPa, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 3 \times 10^{-4}$, $A = 10000$, et $\bar{c} = 16$ mm².

Obscurcissement de l'endommagement diffus

Le choix des paramètres du matériau permet d'assurer, conformément à la définition du modèle, que si on ne tient pas compte de la régularisation (si $\bar{c} = 0$ ou si

la déformation est supposée homogène dans la poutre), on a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} < 0, \quad \text{si } \frac{d\kappa_l}{dt} > 0, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} > 0. \quad (5.29)$$

Si on décompose la dérivée partielle de σ par rapport à ε de la manière suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}, \quad (5.30)$$

les équations 5.28 et 5.29 permettent d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} < 0, \quad \text{si } \frac{d\kappa_l}{dt} > 0. \quad (5.31)$$

Cette équation montre que la variable de mémoire κ_d , et donc également la variable d'endommagement diffus ω_d , n'augmentent plus dès qu'il y a de l'endommagement localisé. En ne tenant toujours pas compte de la régularisation, on superpose sur la figure 5.4 les lois d'évolution de l'endommagement diffus, de l'endommagement localisé, et de l'endommagement total. Les exemples numériques avec régularisation montreront également que l'endommagement diffus cesse de croître lorsque l'endommagement localisé apparaît.

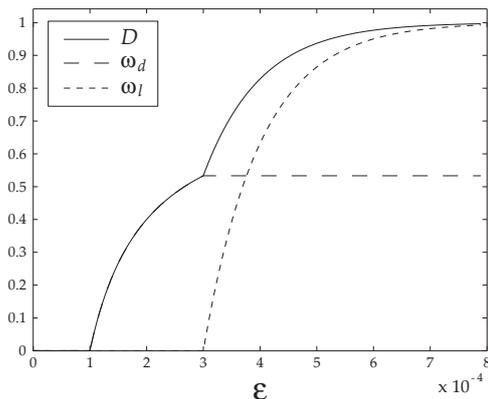


FIG. 5.4 – Évolution des endommagements sans tenir compte de la régularisation

La loi de comportement unidimensionnelle correspondante est représentée sur la figure 5.5.

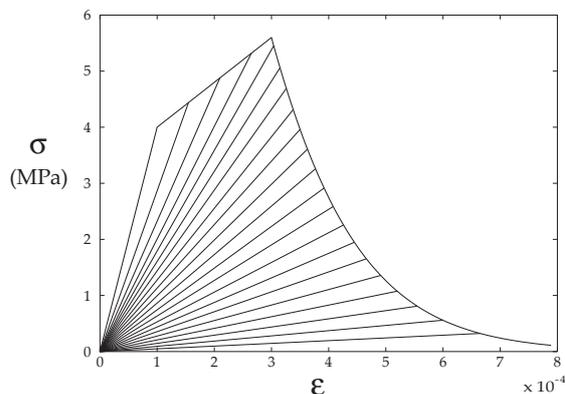


FIG. 5.5 – Courbe de traction unidimensionnelle « locale »

Résultats numériques La courbe de traction globale de la structure obtenue numériquement est représentée sur la figure 5.6.

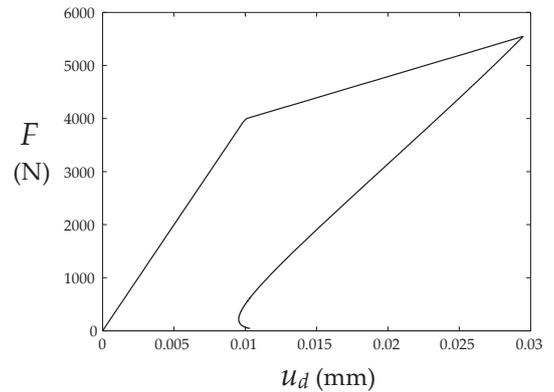


FIG. 5.6 – Courbe effort-déplacement

Les figures 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, et 5.11 représentent respectivement les profils de la déformation ε , de la déformation régularisée $\bar{\varepsilon}$, de l'endommagement diffus ω_d , de l'endommagement localisé ω_l , et de l'endommagement total D le long de la poutre.

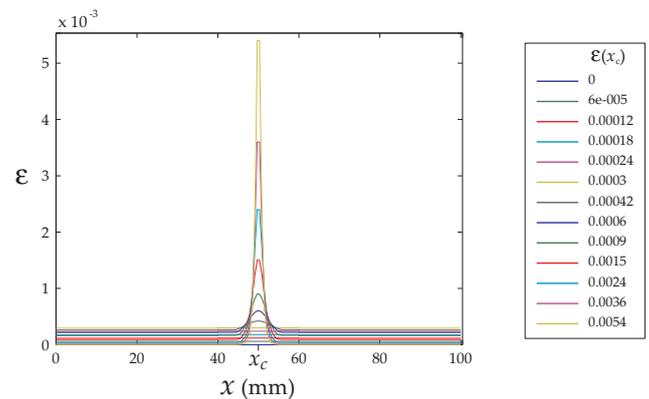


FIG. 5.7 – Profil de la déformation le long de la poutre

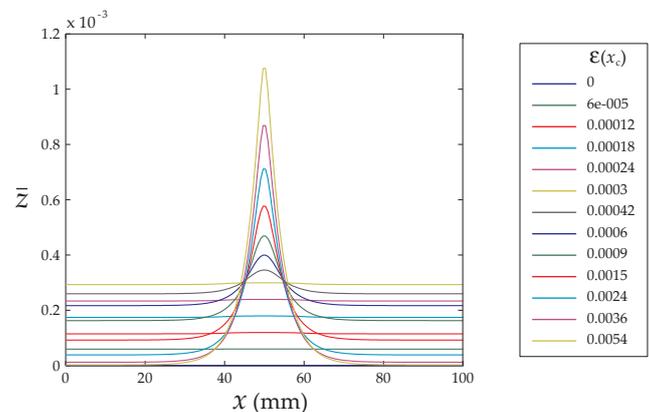


FIG. 5.8 – Profil de la déformation régularisée le long de la poutre

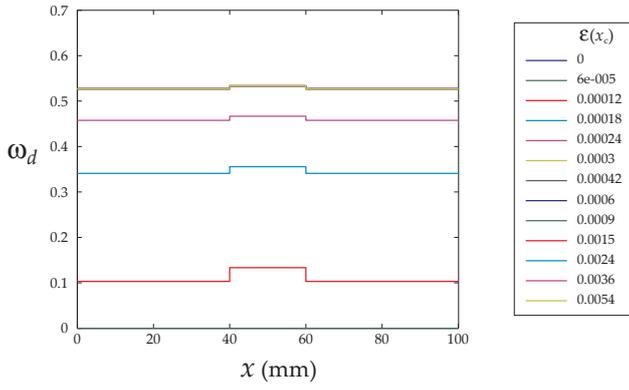


FIG. 5.9 – Profil de l'endommagement diffus le long de la poutre

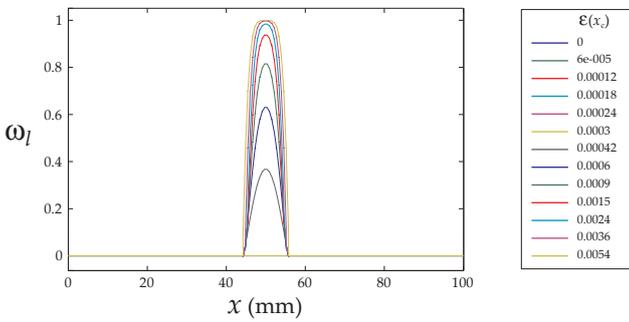


FIG. 5.10 – Profil de l'endommagement localisé le long de la poutre

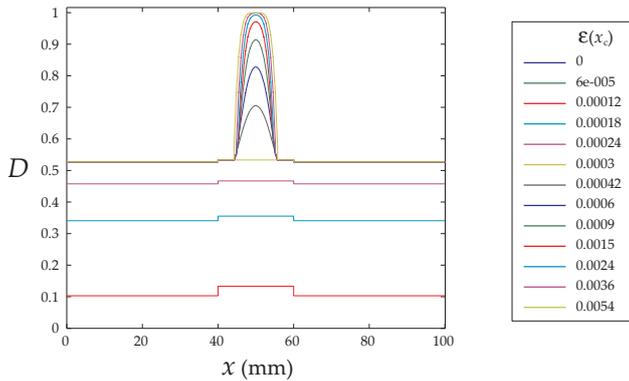


FIG. 5.11 – Profil de l'endommagement total le long de la poutre

On peut observer que l'endommagement diffus reste homogène le long de la poutre mis à part une légère discontinuité au moment du passage dans la zone de moindre section. L'endommagement localisé est lui uniquement présent au centre de la poutre dans une zone de taille réduite. On peut constater que l'endommagement diffus cesse de croître dès que l'endommagement localisé débute.

5.3 Exemple bidimensionnel

On étudie un cas test bidimensionnel en contraintes planes. La géométrie de la structure étudiée est définie sur la figure 5.12. En utilisant les notations de cette figure, les paramètres prendront les valeurs numériques suivantes : $l_1 = 40$ mm, $l_2 = 28$ mm, $d_1 = 20$ mm, $d_2 = 16$ mm.

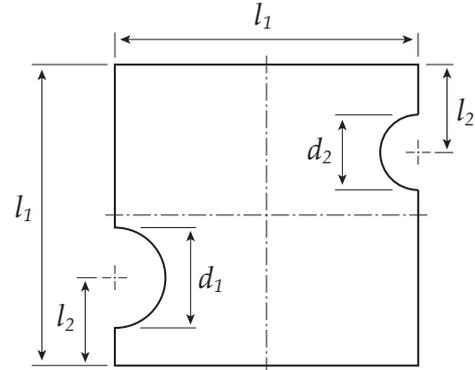


FIG. 5.12 – Géométrie du cas test

Le chargement de l'éprouvette consiste à bloquer les nœuds du bord inférieur selon \underline{e}_x et \underline{e}_y . Les nœuds du bord supérieur sont bloqués selon \underline{e}_x et soumis à un champ de déplacement vertical homogène selon \underline{e}_y , comme cela est représenté sur la figure 5.13.

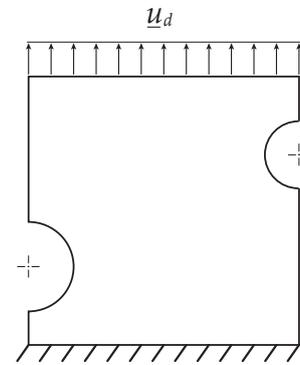


FIG. 5.13 – Chargement de la structure

Le matériau a les mêmes caractéristiques que dans le cas unidimensionnel ($E = 40000$ MPa, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 3 \times 10^{-4}$, $A = 10000$, $\bar{c} = 16$ mm²) avec un coefficient de Poisson valant $\nu = 0.2$. L'implémentation numérique dans Matlab est toujours basée sur la formulation faible à deux champs présentée en annexe B.

La figure 5.14 montre la répartition de l'endommagement dans la structure aux piquets de temps 801, 901, 1001, 1101, 1201, et 1701. Ces piquets de temps sont indiqués sur la figure 5.15 donnant la norme \bar{F} de la résultante des efforts appliqués sur le bord supérieur de la structure en fonction du déplacement \bar{U}_d appliqué.

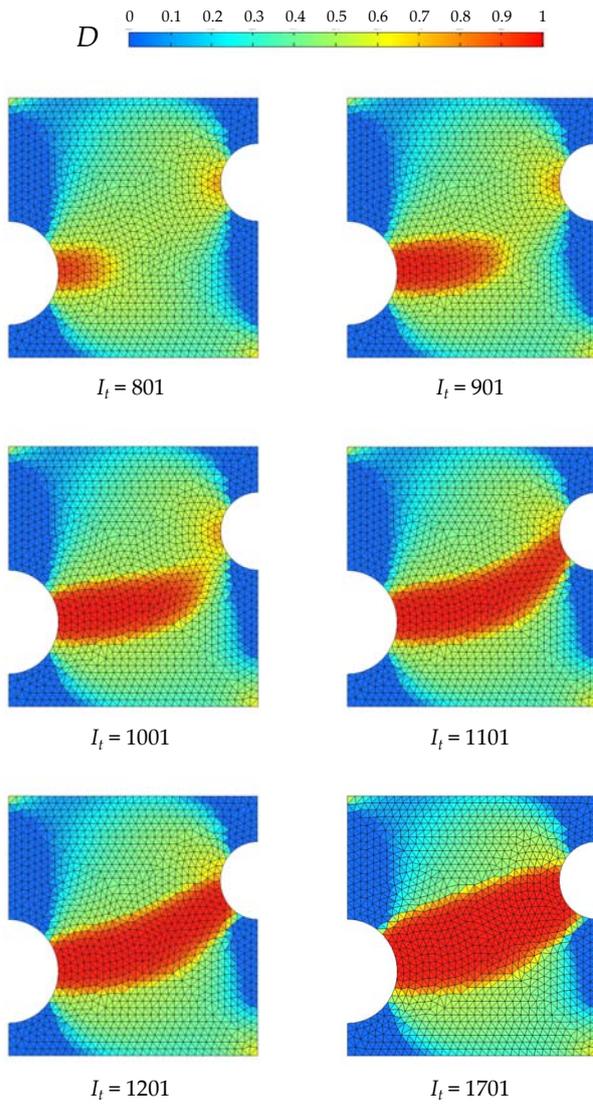


FIG. 5.14 – Évolution de l'endommagement total au cours du calcul

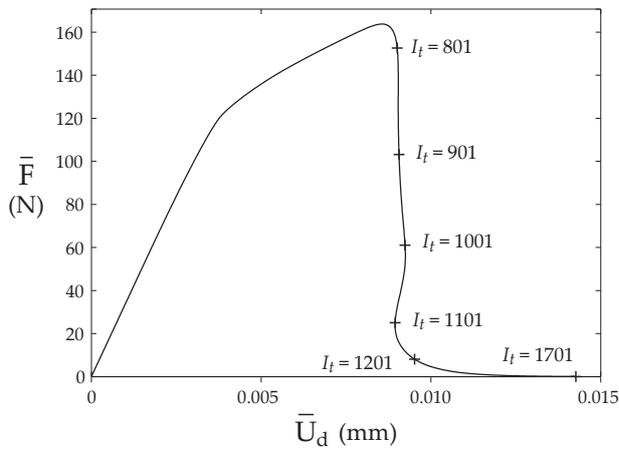


FIG. 5.15 – Courbe de traction de la structure et itérations étudiées

La figure 5.16 montre l'évolution de l'endommagement localisé ω_l pour ces mêmes piquets de temps, et la figure 5.17 représente la variable d'endommagement diffus ω_d

aux piquets de temps 801 et 1701. On peut constater que cet endommagement n'évolue pratiquement plus à partir du moment où il y a de l'endommagement localisé.

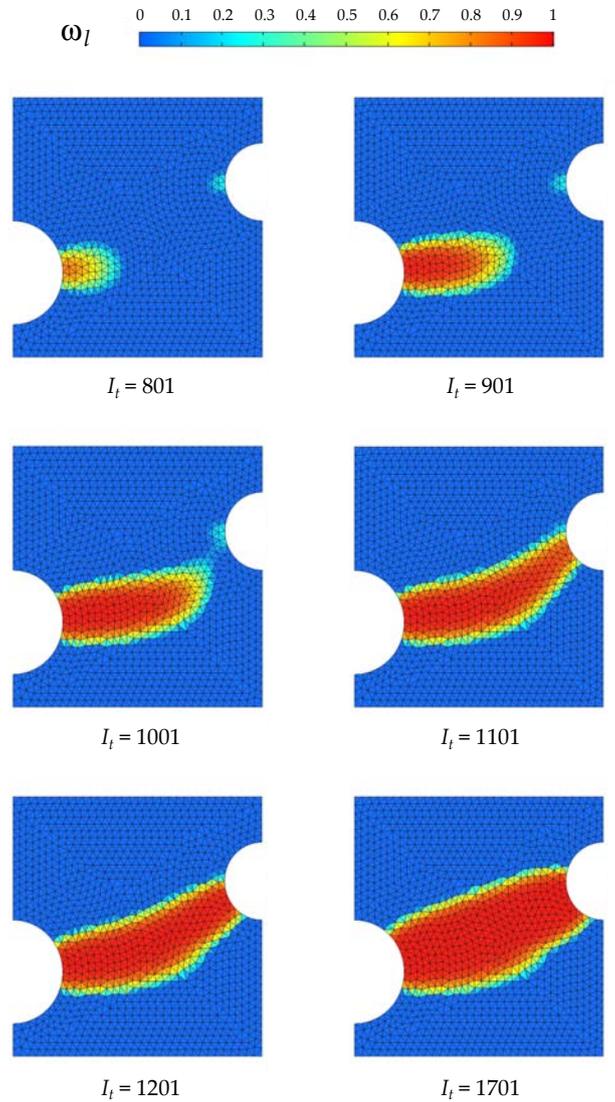


FIG. 5.16 – Évolution de l'endommagement localisé au cours du calcul

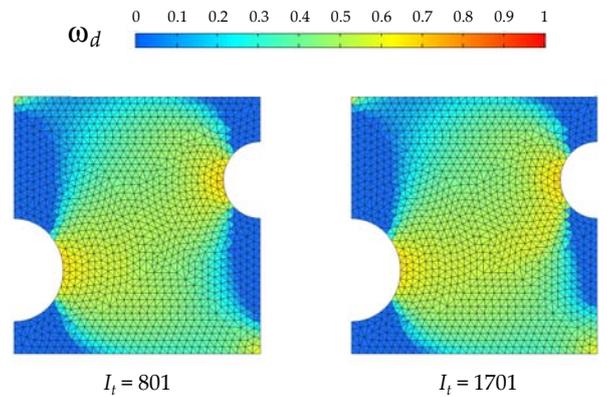


FIG. 5.17 – Évolution de l'endommagement diffus au cours du calcul

La convergence est testée en superposant sur la figure 5.18 les courbes effort-déplacement obtenues pour une série de maillages numérotés pour i allant de 1 à 3. Le maillage 3 est le maillage qui a été utilisé pour obtenir les résultats numériques présentés précédemment, et la densité du maillage $i + 1$ est égale à la moitié de la densité du maillage i . On peut observer que les courbes des maillages 2 et 3 sont assez proches, même s'il faudrait disposer de résultats de calculs pour plus de maillages afin de bien se rendre compte de la convergence.

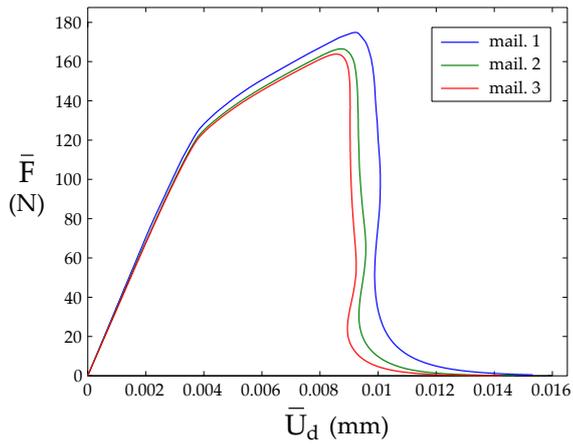


FIG. 5.18 – Superposition des courbes effort-déplacement pour différents maillages

Conclusion

Cadre thermodynamique Afin de pouvoir comparer plus facilement les modèles continus et discontinus, un cadre thermodynamique similaire a été choisi pour ces deux types de modèles dans le premier chapitre. Pour la partie continue du domaine il s'agit du cadre classique défini dans [Lemaitre et Chaboche, 1988], et pour la partie discontinue, il s'agit d'un cadre similaire défini dans [Gurtin, 1979].

Étude de la stabilité La stabilité a été étudiée de manière classique en testant si une position donnée, solution du problème mécanique à un instant t , constitue ou non un minimum de l'énergie potentielle \mathcal{E} lorsque l'on fait varier une variable décrivant la cinématique de la structure. La différence entre les études de stabilité réalisées se trouve dans le choix de la variable en fonction de laquelle on exprime l'énergie potentielle :

- la stabilité de la structure se teste en faisant varier le champ de déplacement global ;
- la stabilité matérielle se teste en regardant la contribution d'une variation de la déformation en un point de Ω ;
- la stabilité en un point de l'interface se teste en regardant la contribution d'une variation du saut de déplacement en un point de Γ_s ;
- la propagation instable d'une fissure se teste avec la théorie de Griffith en faisant varier l'aire \mathcal{A} de la fissure. La fissure se propage alors sans qu'il y ait besoin d'augmenter le chargement pendant la propagation.

Une propagation stable de la fissure est également possible si le chargement de la structure augmente. Ce dernier cas a été étudié en décomposant un incrément temporel en deux étapes :

1. Variation du chargement sans avancée de la fissure.
2. Avancée de la fissure sans variation du chargement tant que $G \geq G_c$.

Ces différents cas de stabilité sont résumés dans le tableau 5.2.

Var.	Stabilité	Critère
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	matérielle	$d\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} > 0$
$[[u]]$	d'un point de l'interface	$d\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[u]] > 0$
\mathcal{A}	non propagation de la fissure	$G < G_c$
\mathcal{A}	propagation stable	$G = G_c$ et $\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} < 0$

TAB. 5.2 – Différents critères de stabilités

L'étude de stabilité a également permis de séparer les domaines de validité des modèles continus et discontinus : les premiers sont valides tant que le matériau est stable et les seconds après la perte de la stabilité matérielle en un point. On obtient donc des domaines de validité disjoints pour ces deux types de modèles.

Domaines de validité La notion de limiteur de localisation permet de construire des modèles utilisables avant et après la perte de la stabilité matérielle. Une première façon de procéder est de *régulariser* une variable du modèle continu pour imposer une largeur minimale à la bande de localisation. Un modèle discontinu peut également être associé à un modèle continu durcissant pour former un modèle *mixte*. La figure 5.19 montre les domaines de validité de ces deux types de modèles.

Endommagement diffus	Endommagement localisé
modèle continu	+ régularisation
modèle continu	modèle cohésif

FIG. 5.19 – Validité des modèles avec limiteur de localisation

Modèle à double endommagement Afin de disposer d'un modèle permettant de faire la distinction entre endommagement diffus et endommagement localisé, un modèle à deux variables d'endommagement a été introduit dans le dernier chapitre de la partie. La variable d'endommagement localisé est responsable du comportement adoucissant et doit donc dépendre d'une variable régularisée. L'endommagement diffus est lui un endommagement « local » classique. Les critères d'unicité et de localisation devraient être étudiés plus en détail pour ce modèle afin de déterminer précisément

à quelle condition les lois de comportement microscopiques et macroscopiques garantissent la bonne séparation de l'endommagement diffus et de l'endommagement localisé.

Par ailleurs, ce modèle pourrait faire l'objet de modifications pour mieux modéliser le comportement de certains matériaux. Par exemple :

- on pourrait envisager de remplacer la variable d'endommagement diffus par une variable de porosité. Dans ce cas, l'endommagement diffus ne serait plus dû à de la micro-fissuration mais à la croissance de cavités dans le matériau ;
- la variable d'endommagement localisé pourrait être remplacée par un tenseur d'endommagement anisotrope dont l'orientation serait donnée par le tenseur acoustique au moment de la localisation.

Aspect multi-échelles de la rupture La rupture est due à un ensemble de phénomènes complexes observables à différentes échelles. Une possibilité de hiérarchisation de ces échelles est proposée sur la figure 5.20 où l'on distingue l'échelle de la *structure*, l'échelle de la *fissure*, l'échelle *mésoscopique*, l'échelle *microscopique*, et l'échelle *atomique*.

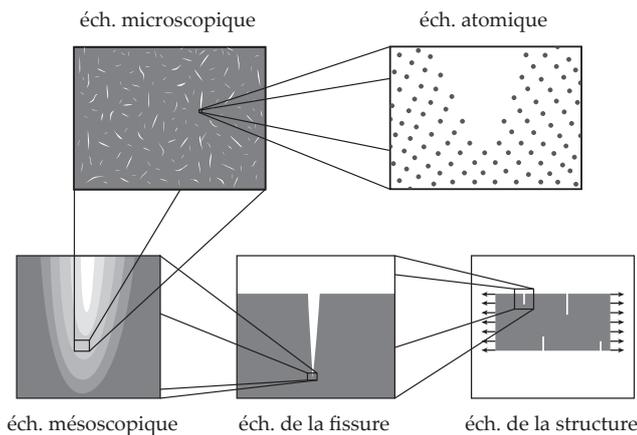


FIG. 5.20 – Différentes échelles d'observation de la rupture

On peut considérer que le rôle des modèles étudiés est d'affaiblir la rigidité de la structure en convertissant une partie de l'énergie libre en énergie dissipée. Ces modèles diffèrent par la manière dont est décrite la zone dissipative :

- les *modèles d'endommagement* sont construits à une échelle mésoscopique (basée sur la notion de volume élémentaire représentatif), la zone dissipative est donc décrite de manière *volumique* ;
- les modèles cohésifs sont définis à une échelle plus grossière pour laquelle la zone dissipative est supposée *surfactive* ;
- le modèle de Griffith est défini à une échelle encore plus grossière (que l'on pourrait associer à l'échelle de la fissure) pour laquelle la zone d'élaboration est *linéique*.

Parmi les modèles étudiés, les modèles d'endommagement sont donc ceux apportant la description la plus

fine du comportement du matériau, viennent ensuite les modèles cohésifs, et enfin le modèle de Griffith. Ces différences sont représentées sur la figure 5.21.

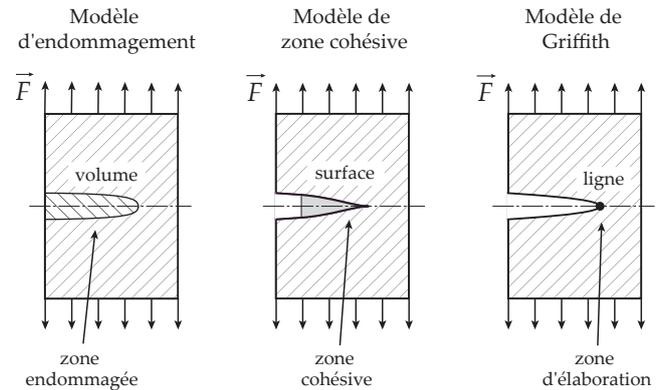


FIG. 5.21 – Zone dissipative pour les 3 modèles étudiés

Dans la partie suivante, une méthode de changement de modèle est développée pour identifier un modèle équivalent *mixte continu/discontinu* à partir d'un modèle de référence *continu régularisé*. Cette méthode peut être considérée comme une méthode de changement d'échelle permettant de construire un modèle grossier (le modèle cohésif) à partir d'un modèle plus fin (le modèle d'endommagement).

Deuxième partie

Construction d'une loi cohésive à partir d'un modèle continu

Introduction

Objectif Pour qu'un modèle d'endommagement puisse représenter la totalité du processus de rupture de façon physiquement acceptable, il doit comporter un limiteur de localisation. Les modèles à effet-retard sont performants numériquement mais plutôt réservés aux problèmes traités en dynamique. L'implémentation numérique des modèles non-locaux est assez complexe (calcul des opérateurs tangents), coûteuse en temps de calcul (intégrations numériques en chaque point d'intégration pour le calcul de la variable régularisée), et nécessite souvent de raffiner le maillage dans les zones endommagées [Patzák et Jirásek, 2004, Rodríguez-Ferran et Huerta, 2000]. Les modèles à second-gradient implicite sont également coûteux en temps de calcul car la formulation faible à deux champs généralement utilisée conduit à l'inversion d'une matrice non symétrique (voir annexe B), et nécessite également un maillage fin dans les zones à fort gradient d'endommagement. Les modèles cohésifs disposent eux d'implémentations numériques efficaces, notamment grâce aux développements importants dont ils ont fait l'objet ces dernières années (voir chapitre 10). Il peut donc être intéressant d'identifier un modèle cohésif à partir d'un modèle d'endommagement sur un cas test simple pour ensuite utiliser le modèle cohésif obtenu sur des cas test réels plus complexes et plus coûteux en temps de calcul.

Méthode de changement de modèle Dans cette partie, on cherchera à construire des lois cohésives pouvant être utilisées en remplacement d'une méthode de régularisation pour traiter la partie adoucissante du comportement du matériau. On dira que le modèle continu régularisé est le *modèle de référence* à partir duquel sera construit un modèle mixte continu/discontinu que l'on appellera *modèle équivalent*. Le modèle de référence sera régularisé avec la méthode du second-gradient implicite. Le modèle équivalent comblera lui un endommagement durcissant identique à celui du modèle de référence et une loi cohésive construite pour reproduire le comportement de ce modèle dans sa phase adoucissante. Pour construire cette loi cohésive, deux calculs seront effectués successivement : un premier calcul avec le modèle de référence permettra d'identifier la quantité d'énergie dissipée à transmettre à la zone cohésive, et un deuxième calcul utilisant le modèle équivalent permettra de construire la loi cohésive à partir des incréments d'énergie dissipée calculés lors du premier calcul. La validité du changement de modèle sera vérifiée en comparant les termes du bilan énergétique du modèle équivalent à ceux du modèle de référence

sur un cas test donné.

Plan de la partie La partie commence par une étude bibliographique sur les travaux existants couplant des modèles continus et des modèles discontinus. Dans les deux chapitres suivants, une loi cohésive est construite à partir d'un modèle d'endommagement puis à partir d'un modèle élasto-plastique endommageable. Une pré-étude est enfin effectuée sur la possibilité d'une extension de la méthode à des problèmes multidimensionnels.

Chap. 6

Étude bibliographique

On présente dans ce chapitre des travaux faisant intervenir à la fois des modèles continus et des modèles discontinus. On distingue le cas où ces deux types de modèles sont utilisés conjointement dans un calcul, pour lequel on dira que les modèles sont *juxtaposés*, du cas où un modèle discontinu est construit à partir d'un modèle continu, pour lequel on dira que les modèles sont *superposés*. On étudiera d'abord le cas de la juxtaposition des modèles continus et discontinus puis le cas de la superposition de ces modèles.

6.1 Juxtaposition

6.1.1 Endommagement critique causant la rupture

Une première façon de faire apparaître une fissure dans un matériau endommagé est de considérer qu'une discontinuité apparaît en un point lorsque l'endommagement atteint une valeur critique égale à 1 ou à une valeur très proche de 1. Dans ce cas, l'apparition de la fissure ne cause pas en elle-même d'augmentation de l'énergie dissipée, il s'agit plutôt de prendre en compte que le matériau est complètement endommagé sur une zone surfacique sans intervenir sur le bilan énergétique. Cette approche est souvent utilisée avec les modèles non-locaux et de second-gradient car la présence de la fissure permet d'améliorer la qualité de la solution :

- dans le cas d'un modèle non-local, la discontinuité empêche qu'il y ait de couplage non-local entre deux points situés de part et d'autre de la fissure [de Borst et Abellan, 2002, Simone *et al.*, 2003] ;
- dans le cas d'un modèle de second-gradient, la présence de la fissure permet de mettre des conditions aux limites nulles sur la composante normale du gradient de la variable régularisée sur les bords de la discontinuité [Mediavilla *et al.*, 2006a, Mediavilla *et al.*, 2006b].

Dans les deux cas, l'ajout d'une discontinuité empêche que l'endommagement ne croisse démesurément lorsqu'on se rapproche de la rupture complète. La figure 6.1 montre un trajet de fissuration obtenu dans [Simone *et al.*, 2003] pour un problème de flexion 4 points. La méthode X-FEM est utilisée pour introduire la discontinuité dans un modèle de second-gradient

lorsque l'endommagement atteint la valeur 0,99. La direction de propagation est obtenue à partir d'un critère sur la déformation équivalente mesurée sur un éventail devant la pointe de la discontinuité. Dans [Mediavilla *et al.*, 2006b], un algorithme de remaillage est utilisé entre chaque pas de temps de calcul avec un modèle à second-gradient. Lorsque l'endommagement est égal à 1 en un point de Gauss, une discontinuité est introduite dans le modèle pendant l'opération de remaillage. Un trajet de fissure obtenu dans cet article est montré sur la figure 6.2

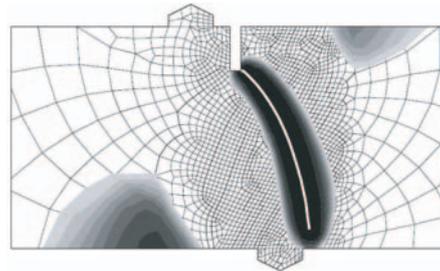


FIG. 6.1 – Un trajet de fissure obtenu dans [Simone *et al.*, 2003]

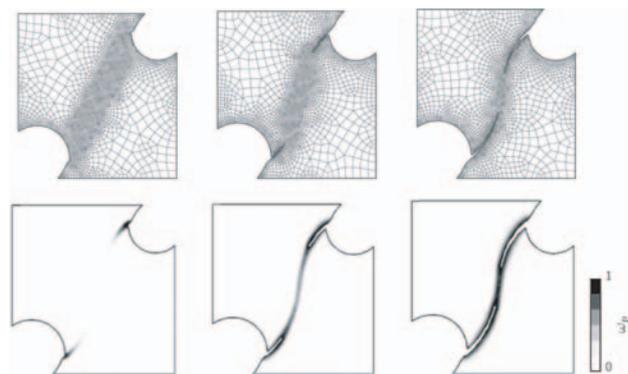


FIG. 6.2 – Trajet de fissure obtenu dans [Mediavilla *et al.*, 2006a]

6.1.2 Discontinuité forte

Le formalisme de la discontinuité forte [Simo *et al.*, 1993, Oliver, 1996] permet de modéliser de façon unifiée le comportement d'un matériau continu et d'une zone discontinue. Pour introduire

cette méthode, on scinde le domaine en deux parties Ω^- et Ω^+ délimitées par la surface de discontinuité Γ_s . Ω^- touche le bord inférieur Γ_s^- sans le contenir et Ω^+ touche le bord supérieur Γ_s^+ sans le contenir. On définit ensuite une fonction de Heaviside \mathcal{H}_s telle que

$$\mathcal{H}_s(\underline{x}) = 0, \quad \text{sur } \Omega^- \cup \Gamma_s, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{H}_s(\underline{x}) = 1, \quad \text{sur } \Omega^+. \quad (6.2)$$

On note Σ le domaine incluant les zones continues et discontinues :

$$\Sigma = \Omega \cup \Gamma_s. \quad (6.3)$$

Le champ de déplacement est supposé être de la forme

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{u}_2, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (6.4)$$

\underline{u}_1 et \underline{u}_2 étant des champs continus définis sur Σ . Contrairement aux modèles vus précédemment, le champ de déplacement est défini sur le domaine entier Σ et non plus Ω , ce qui permet d'étendre la définition de la déformation à Γ_s (voir tableau 6.1).

Modèle	Champ	Domaine
modèle continu	\underline{u}	Ω
modèle cohésif	$[[\underline{u}]]$	Γ_s
discontinuité forte	\underline{u}	$\Sigma = \Omega \cup \Gamma_s$

TAB. 6.1 – Domaines de définition des champs utilisés pour chaque modèle

Pour cela, on commence par calculer le gradient de \underline{u} :

$$\underline{\nabla}(\underline{u}) = \underline{\nabla}(\underline{u}_1) + \underline{\nabla}(\mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{u}_2), \quad (6.5)$$

$$\underline{\nabla}(\underline{u}) = \underline{\nabla}(\underline{u}_1) + \mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{\nabla}(\underline{u}_2) + \underline{u}_2 \otimes \underline{\nabla}(\mathcal{H}_s(\underline{x})). \quad (6.6)$$

Par ailleurs, on a

$$\underline{\nabla}(\mathcal{H}_s(\underline{x})) = \delta_s(\underline{x}) \underline{n}, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (6.7)$$

avec δ_s une fonction de type Dirac vérifiant

$$\delta_s(\underline{x}) = 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad (6.8)$$

$$\delta_s(\underline{x}) = +\infty, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (6.9)$$

$$\int_{\Sigma} \delta_s(\underline{x}) d\Sigma = \text{surf}(\Gamma_s), \quad (6.10)$$

surf étant la fonction donnant l'aire d'une surface. L'équation 6.6 peut donc s'écrire

$$\underline{\nabla}(\underline{u}) = \underline{\nabla}(\underline{u}_1) + \mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{\nabla}(\underline{u}_2) + \delta_s(\underline{x}) (\underline{u}_2 \otimes \underline{n}). \quad (6.11)$$

Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ vaut donc sur Σ

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_1) + \mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_2) + \delta_s(\underline{x}) (\underline{u}_2 \otimes \underline{n})^{sym}. \quad (6.12)$$

En détaillant, on obtient

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_1), \quad \text{sur } \Omega^-, \quad (6.13)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_1) + \mathcal{H}_s(\underline{x}) \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_2), \quad \text{sur } \Omega^+, \quad (6.14)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \delta_s(\underline{x}) (\underline{u}_2 \otimes \underline{n})^{sym}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (6.15)$$

La partition du domaine et les fonctions de Heaviside et de Dirac sont représentées sur la figure 6.3 pour un exemple bidimensionnel.

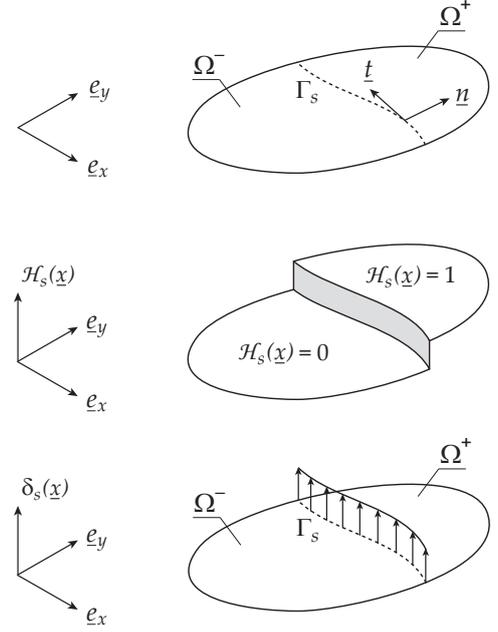


FIG. 6.3 – Discontinuité forte

Dans [Brancherie et Ibrahimbegovic, 2006], deux méthodes basées sur le formalisme de la discontinuité forte sont distinguées :

- la *discontinuité forte continue* pour laquelle un opérateur dérivant du tenseur de Hooke du matériau continu est utilisé pour obtenir le comportement de la discontinuité ;
- la *discontinuité forte discontinue* pour laquelle une loi de comportement indépendante du matériau continu est utilisée pour la discontinuité.

Dans le cas de la *discontinuité forte continue*, le fait que l'on puisse définir une déformation sur la discontinuité sert à faire le lien entre modèle continu et modèle discontinu. La *discontinuité forte discontinue* permet elle d'obtenir une modélisation similaire à celle obtenue avec un modèle cohésif, mais avec un formalisme un peu différent souvent lié à une implémentation numérique particulière basée sur une formulation mixte (voir chapitre 10). On parle alors d'éléments à discontinuité interne ou *embedded elements*.

Remarque : la déformation obtenue sur la discontinuité n'est pas quelconque car on peut facilement montrer que

$$\det(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (6.16)$$

Ceci montre qu'une description discontinue du matériau n'est pas aussi riche qu'une description continue, même avec le formalisme de la discontinuité forte permettant de calculer une déformation sur la discontinuité.

La discontinuité forte discontinue est utilisée dans [Ibrahimbegovic et Brancherie, 2003] pour modéliser la

partie adoucissante d'un modèle de plasticité. Un critère de localisation est utilisé pour détecter l'initiation de la discontinuité, comme c'est habituellement le cas lorsque la méthode de la discontinuité forte est utilisée. Dans [Wells *et al.*, 2002], ce critère de localisation est remplacé par un critère sur la déformation plastique équivalente pour un matériau viscoplastique.

Discontinuité faible Pour définir la notion de discontinuité faible, on remplace dans le formalisme de la discontinuité forte la fonction \mathcal{H}_s par une fonction plus régulière notée \mathcal{H}_s^h . On considère un point M de coordonnées \underline{x} dans le repère global \mathcal{R} . A est le point appartenant à Γ_s tel que la distance $\|\underline{AM}\|$ soit minimale :

$$A = \{ A \in \Gamma_s \ / \ \|\underline{AM}\| \text{ minimal} \}. \quad (6.17)$$

Ce point permet de définir une distance signée à la discontinuité notée l (voir figure 6.4) :

$$l = \underline{AM} \cdot \underline{n}. \quad (6.18)$$

On peut remarquer que l est positif si M appartient à Ω^+ et négatif si M appartient à Ω^- .

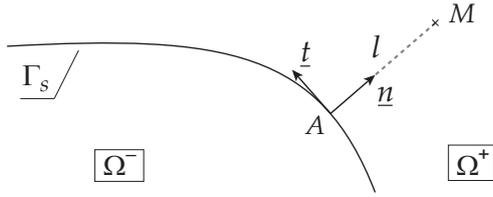


FIG. 6.4 – Distance signée entre un point M et la discontinuité

La distance signée l permet de définir les domaines Ω_h^- , Γ_s^h , et Ω_h^+ suivants :

$$\Omega_h^- = \{ M \ / \ l < -\frac{h}{2} \}, \quad (6.19)$$

$$\Gamma_s^h = \{ M \ / \ -\frac{h}{2} \leq l \leq \frac{h}{2} \}, \quad (6.20)$$

$$\Omega_h^+ = \{ M \ / \ \frac{h}{2} < l \}, \quad (6.21)$$

h étant l'épaisseur de la bande Γ_s^h à l'intérieur de laquelle se concentre l'endommagement du matériau (à la manière d'un modèle de fissuration diffuse). À partir de l , on peut définir la fonction de saut régularisée \mathcal{H}_s^h par

$$\mathcal{H}_s^h(l) = 0, \quad \text{sur } \Omega_h^-, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{H}_s^h(l) = \frac{2l+h}{2h}, \quad \text{sur } \Gamma_s^h, \quad (6.23)$$

$$\mathcal{H}_s^h(l) = 1, \quad \text{sur } \Omega_h^+. \quad (6.24)$$

La fonction δ_s^h est définie par

$$\delta_s^h(l) = 0, \quad \text{sur } \Omega_h^- \cup \Omega^+, \quad (6.25)$$

$$\delta_s^h(l) = \frac{1}{h}, \quad \text{sur } \Gamma_s^h. \quad (6.26)$$

Pour introduire la discontinuité faible, on suppose que le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \mathcal{H}_s^h(\underline{x}) \underline{u}_2, \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.27)$$

Le champ de déformation correspondant est le même que pour la discontinuité forte en remplaçant \mathcal{H}_s par \mathcal{H}_s^h et δ_s par δ_s^h :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_1) + \mathcal{H}_s^h(\underline{x}) \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}_2) + \delta_s^h(\underline{x}) (\underline{u}_2 \otimes \underline{n})^{sym}. \quad (6.28)$$

La partition du domaine et les fonctions \mathcal{H}_s^h et δ_s^h sont représentées sur la figure 6.3.

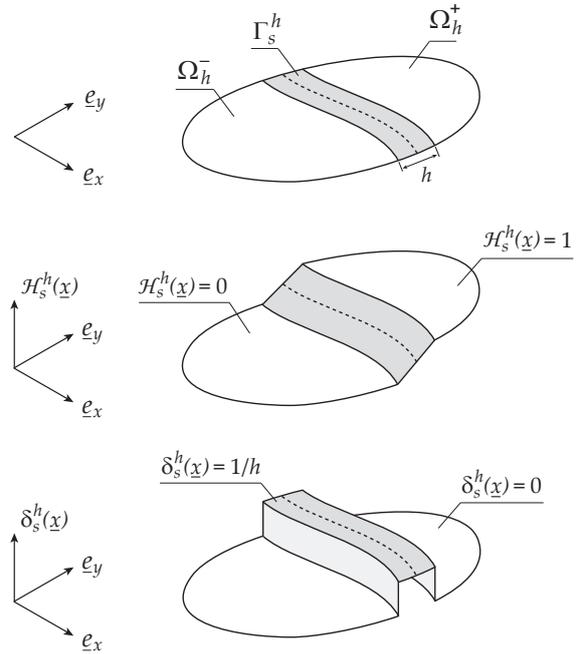


FIG. 6.5 – Discontinuité faible

Remarque : une discontinuité forte peut être obtenue à partir d'une discontinuité faible en faisant tendre h vers 0.

Transition discontinuité faible/discontinuité forte

Le formalisme de la discontinuité faible permet d'effectuer une transition progressive d'une description continue vers une description discontinue si la largeur h de la discontinuité faible est variable et tend vers zéro à la fin de la rupture. Cette méthode est utilisée dans [Oliver *et al.*, 2002] et [Yu *et al.*, 2008] avec des éléments à discontinuité interne, et dans [Benvenuti *et al.*, 2008] avec la méthode X-FEM. Le schéma de la figure 6.6, issu de [Yu *et al.*, 2008], montre la géométrie de la zone de rupture avec une discontinuité faible au voisinage de la pointe de la fissure qui devient progressivement forte à mesure que l'on s'éloigne de la pointe.

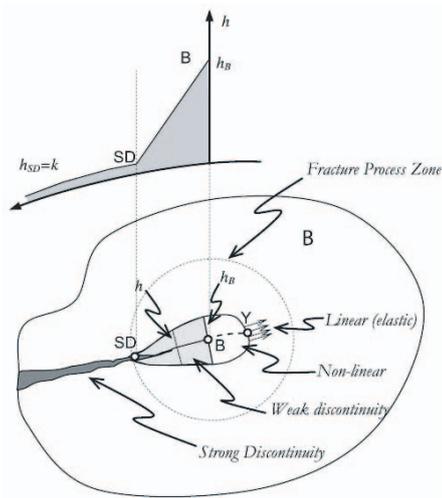


FIG. 6.6 – Transition d’une discontinuité faible vers une discontinuité forte [Yu *et al.*, 2008]

6.2 Superposition

6.2.1 Méthode mécanique

Dans [Planas *et al.*, 1993], une méthode est développée pour construire un modèle cohésif à partir d’un modèle non-local en utilisant l’étape de régularisation du modèle non-local pour passer d’un champ discontinu à un champ continu. On considère d’une part un modèle discontinu défini avec le formalisme de la discontinuité forte, et d’autre part un modèle continu non-local dont le champ de déformation est la régularisée du champ de déformation du modèle à discontinuité forte. Pour construire le modèle cohésif équivalent à un modèle non-local, on peut chercher à trouver des champs locaux discontinus permettant de retrouver la déformation régularisée du modèle non-local sur un cas test donné. Dans [Legrain *et al.*, 2007], cette méthode est utilisée pour extraire numériquement le saut de déplacement d’une fissure à partir des résultats d’un calcul d’endommagement non-local.

Pour illustrer cette méthode sur un exemple unidimensionnel, on considère une poutre encadrée au point d’abscisse $x = 0$ et soumise à un déplacement imposé u_d au point d’abscisse $x = L$. La force résultante en ce point est notée F . Le champ de déformation du modèle avec discontinuité forte est lui homogène sur $[0, L] \setminus x_c$. On appellera ε^{hom} cette déformation, ce qui permet d’obtenir l’expression suivante de $u(x)$:

$$u(x) = \varepsilon^{hom} x + \llbracket u \rrbracket H(x - x_c), \quad (6.29)$$

avec H la fonction de Heaviside. Si on dérive ce champ de déplacement par rapport à x , on obtient le champ de déformation suivant sur $[0, L]$:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{hom} + \llbracket u \rrbracket \delta(x - x_c), \quad (6.30)$$

avec δ la fonction de Dirac. Ce champ de déformation est utilisé pour calculer le champ de déformation régularisé $\bar{\varepsilon}$ comme suit :

larisé $\bar{\varepsilon}$ comme suit :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{V_r(\underline{x})} \int_0^L \alpha(s-x) \varepsilon(s) ds, \quad (6.31)$$

avec,

$$\alpha(x-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_c} \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{2l_c^2}\right), \quad (6.32)$$

l_c étant la longueur caractéristique du matériau, et

$$V_r(\underline{x}) = \int_0^L \alpha(s-x) ds, \quad (6.33)$$

étant approximé par

$$V_r(\underline{x}) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s) ds = 1. \quad (6.34)$$

En tenant compte de l’expression 6.30 de la déformation, le calcul 6.31 donne :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{hom} + \llbracket u \rrbracket \alpha(x - x_c). \quad (6.35)$$

La déformation ε et la déformation régularisée $\bar{\varepsilon}$ obtenues sont représentées sur la figure 6.7.

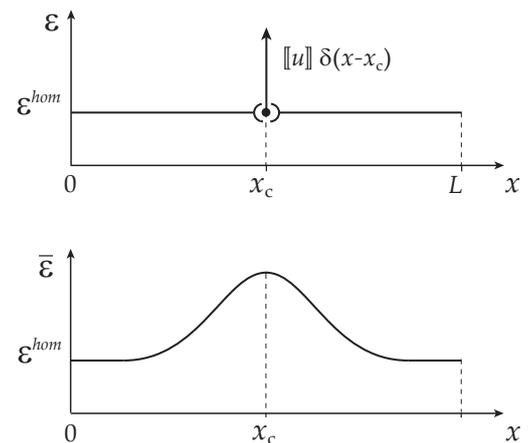


FIG. 6.7 – Champ de déformation avant (a) et après la régularisation (b)

À partir d’une solution connue du modèle continu, il est donc possible de construire avec cette méthode un modèle équivalent avec zone cohésive en cherchant le saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$ permettant de retrouver la déformation régularisée $\bar{\varepsilon}$.

6.2.2 Méthode énergétique

Une autre façon d’obtenir un modèle de fissuration équivalent à un modèle d’endommagement est d’imposer la préservation de l’énergie dissipée lors du changement de modèle. Cette idée est à la base de la notion de fissure équivalente introduite dans [Mazars, 1984] de la manière suivante :

« D’une façon générale, nous dirons que la fissure équivalente à une zone endommagée-fissurée est celle pour laquelle l’énergie nécessaire à sa création est égale à celle dissipée dans la formation de la zone endommagée-fissurée. »

Dans [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996], cette notion de fissure équivalente est reprise pour la construction d'un modèle de fissuration à partir d'un modèle de référence non-local. Pour le modèle de Griffith, l'incrément d'énergie dissipée s'écrit

$$d\Phi = G_c dA, \quad (6.36)$$

avec G_c le taux de restitution d'énergie élastique critique et A l'aire de la fissure. Pour le modèle d'endommagement, l'incrément d'énergie dissipée s'écrit

$$d\Phi = \int_{\Omega} (-Y dD) d\Omega, \quad (6.37)$$

avec Y le taux de restitution d'énergie élastique et D la variable d'endommagement. En égalisant ces deux expressions d'un incrément d'énergie dissipée, on obtient la formule

$$dA = \frac{1}{G_c} \int_{\Omega} (-Y dD) d\Omega. \quad (6.38)$$

Cette expression peut ensuite s'intégrer par rapport au temps et être utilisée pour vérifier que les paramètres d'un modèle d'endommagement correspondent bien au taux de restitution d'énergie élastique critique donné pour un même matériau. On peut également, comme cela est signalé dans [Mazars, 1984], utiliser un modèle cohésif au lieu d'un modèle de Griffith pour la modélisation de la fissure équivalente en se basant sur le fait que l'aire sous la courbe de traction du modèle cohésif est égale à G_c , ce qui s'écrit pour une ouverture de fissure en mode I,

$$G_c = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \sigma_n^s d\llbracket u \rrbracket_n. \quad (6.39)$$

Remarque : dans [Bažant et Oh, 1983], une équivalence en énergie dissipée est également utilisée pour calculer les paramètres d'un modèle *crack band* à partir de la donnée d'un modèle cohésif en fonction de la largeur de bande souhaitée. Dans ce cas, la démarche est inverse car c'est le modèle continu qui est calculé à partir du modèle discontinu.

6.3 Juxtaposition et superposition

Il est également possible de combiner les approches de juxtaposition et de superposition des modèles continus et discontinus. Ceci se fait en débutant un calcul avec un modèle d'endommagement qui est généralement régularisé, puis en introduisant après un certain niveau d'endommagement une loi cohésive dont le rôle est de dissiper l'énergie restant théoriquement à dissiper par le modèle d'endommagement. Une illustration de la construction d'une loi cohésive avec cette méthode est représentée sur la figure 6.8.

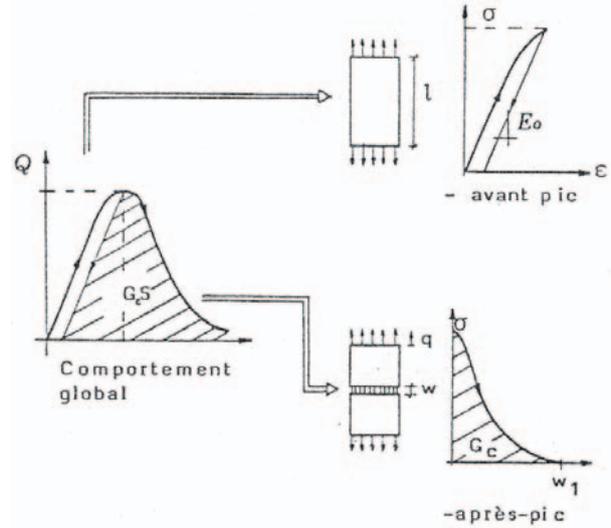


FIG. 6.8 – Construction d'une loi cohésive équivalente à la partie adoucissante d'un modèle d'endommagement [Mazars, 1984]

La discontinuité peut être introduite dans le matériau endommagé lorsqu'un critère de localisation est satisfait [Areias et Belytschko, 2005] ou lorsque le maillage n'est plus assez fin pour décrire de manière satisfaisante le profil d'endommagement [Comi *et al.*, 2002, Comi *et al.*, 2007] (voir figure 6.9). La zone cohésive reçoit alors la quantité d'énergie restant à dissiper par le matériau continu jusqu'à sa rupture. Ces méthodes permettent d'éviter de raffiner le maillage d'un modèle régularisé dans les zones fortement endommagées.

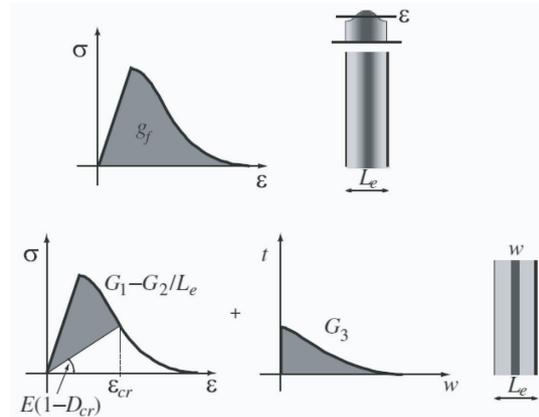


FIG. 6.9 – Modèle mixte continu/discontinu équivalent utilisé dans [Comi *et al.*, 2007]

C'est dans cette dernière famille de méthodes que s'inscrivent les travaux présentés dans cette partie, l'objectif étant d'obtenir la forme complète de la loi cohésive d'un modèle mixte continu/discontinu (juxtaposition) à partir d'un modèle de référence continu et régularisé (superposition).

Chap. 7

Cas d'un modèle de référence endommageable

Dans ce chapitre, on construit un modèle mixte continu/discontinu avec une zone cohésive dont le comportement est énergétiquement équivalent à un celui d'un modèle de référence endommageable et régularisé.

7.1 Critère pour le changement de modèle

D'après la notion de fissure équivalente, le changement de modèle doit se faire en préservant l'énergie dissipée globalement par chacun des modèles, soit

$$\hat{\Phi} = \check{\Phi}, \quad (7.1)$$

avec $\check{\Phi}$ l'énergie dissipée par la structure du modèle d'endommagement régularisé et $\hat{\Phi}$ l'énergie dissipée du modèle mixte continu/discontinu. Ces énergies peuvent être calculées à partir des énergies dissipées volumiques et surfaciques de chaque modèle :

$$\check{\Phi} = \int_{\Omega} \check{\phi} d\Omega, \quad (7.2)$$

$$\hat{\Phi} = \int_{\Omega} \hat{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \hat{\phi}_s d\Gamma_s. \quad (7.3)$$

On introduit un indicateur d'endommagement localisé i_{loc} défini sur Ω , initialement nul et prenant la valeur 1 si le comportement devient adoucissant. Ceci peut être caractérisé par la perte de la stricte positivité du produit $d\underline{\sigma}^{loc} : d\underline{\varepsilon}$ où $d\underline{\sigma}^{loc}$ est l'incrément de contrainte que l'on aurait sans la présence du limiteur de localisation. On a donc

$$i_{loc} = \arg(d\underline{\sigma}^{loc} : d\underline{\varepsilon} < 0). \quad (7.4)$$

On considère que l'endommagement est diffus lorsque i_{loc} est égal à 0 et localisé lorsque i_{loc} est égal à 1. Lorsque l'endommagement est diffus ($i_{loc} = 0$), le modèle de référence (non-local) et le modèle équivalent (local) sont supposés donner le même résultat et aucune énergie n'est à transmettre à la zone cohésive. Cette hypothèse est vérifiée avec le modèle à double endommagement introduit dans le chapitre 5 car il n'y pas de régularisation pour l'endommagement diffus avec ce modèle. Lorsque l'endommagement devient localisé

($i_{loc} = 1$), l'énergie dissipée par le modèle de référence est transmise à la zone cohésive du modèle équivalent. Si $\hat{\Phi}_s$ est l'énergie devant être dissipée dans la discontinuité du modèle équivalent, le changement de modèle sera basé sur le critère suivant :

$$d\hat{\Phi}_s = d\check{\Phi}_{loc}, \quad (7.5)$$

avec,

$$d\check{\Phi}_{loc} = \int_{\Omega} i_{loc} d\check{\phi} d\Omega. \quad (7.6)$$

Cette procédure de changement de modèle est résumée sur la figure 7.1.

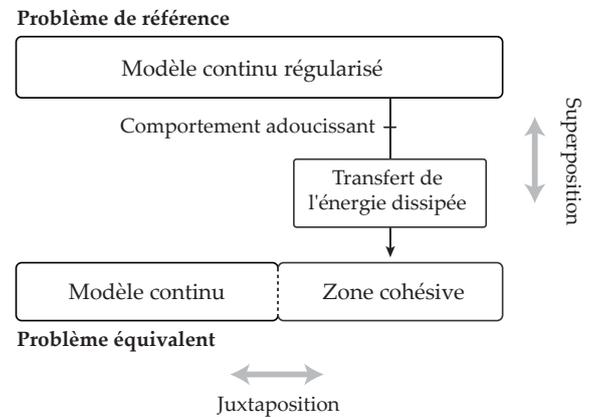


FIG. 7.1 – Méthode pour le changement de modèle

7.2 Modèle cohésif

Pour être cohérent avec le modèle d'endommagement de référence, le modèle cohésif à décharge linéaire introduit en 2.2.1 est utilisé pour la modélisation de la partie discontinue du modèle équivalent avec l'hypothèse que le saut de déplacement plastique $[[u]]^p$ est nul. Nous pourrions donc utiliser l'expression 2.61 de l'incrément d'énergie dissipée surfacique, s'écrivant pour une fissure sollicitée en mode I

$$d\hat{\phi}_s = \frac{1}{2} (\sigma^s d[[u]] - [[u]] d\sigma^s), \quad (7.7)$$

avec σ^s la contrainte cohésive et $[[u]]$ le saut de déplacement dans la direction normale à la discontinuité. Ce calcul est illustré par le schéma de la figure 7.2.

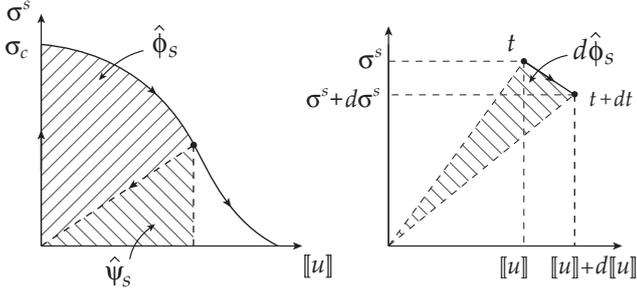


FIG. 7.2 – Énergie libre surfacique et énergie dissipée surfacique

7.3 Validité du changement de modèle

On cherche dans cette section à montrer que le fait d'imposer la conservation de l'énergie dissipée lors de la construction du modèle équivalent permet également de conserver les autres termes du bilan énergétique global. On part de l'expression 1.62 de l'énergie totale \mathcal{E}_t pour un problème quasi-statique :

$$\mathcal{E}_t = \Psi - \mathcal{W}_{ext} + \Phi. \quad (7.8)$$

Les grandeurs associées au modèle de référence sont désignées par la notation (\cdot) et les grandeurs associées au modèle équivalent sont désignées par la notation $(\check{\cdot})$. Pour montrer que ces deux modèles sont énergétiquement équivalents, il faut montrer que tous les termes du bilan énergétique sont égaux pour les deux modèles, c'est-à-dire que

$$(\hat{\mathcal{E}}_t, \hat{\Psi}, \hat{\mathcal{W}}_{ext}, \hat{\Phi}) = (\check{\mathcal{E}}_t, \check{\Psi}, \check{\mathcal{W}}_{ext}, \check{\Phi}). \quad (7.9)$$

Si le critère de changement de modèle 7.5 est vérifié, on a

$$\hat{\Phi} = \check{\Phi}. \quad (7.10)$$

De plus, l'énergie totale \mathcal{E}_t étant constante et définie à une constante près, on peut considérer que

$$\hat{\mathcal{E}}_t = \check{\mathcal{E}}_t. \quad (7.11)$$

Il faut donc montrer la conservation de Ψ et \mathcal{W}_{ext} pour les deux modèles. Le bilan énergétique 7.8 étant vérifié pour les deux modèles, il suffit de montrer que l'une de ces deux quantités est préservée par le changement de modèle pour que l'autre le soit également. Pour cela, on réalise un raisonnement par récurrence sur un problème subdivisé en une infinité de pas de temps infinitésimaux dt . Au piquet de temps t , on suppose qu'il y a équivalence énergétique des deux modèles, donc que

$$(\hat{\Psi}^t, \hat{\mathcal{W}}_{ext}^t) = (\check{\Psi}^t, \check{\mathcal{W}}_{ext}^t). \quad (7.12)$$

On veut montrer que cette égalité est également vérifiée à l'instant $t + dt$. Les deux modèles ayant un comportement linéaire en décharge, l'énergie libre élastique à l'intérieur d'une structure de contour Γ peut se calculer avec l'intégrale

$$\Psi^t = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{F}^t \cdot \underline{u}^t d\Gamma. \quad (7.13)$$

D'après l'expression 7.8 de l'énergie totale,

$$d\Phi = d\mathcal{W}_{ext} - d\Psi. \quad (7.14)$$

L'incrément d'énergie dissipée par la structure s'écrit donc

$$d\Phi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{F}^t \cdot d\underline{u} - \underline{u}^t \cdot d\underline{F}) d\Gamma. \quad (7.15)$$

Les conditions aux limites appliquées sont les mêmes pour le modèle de référence et le modèle équivalent. On suppose qu'il s'agit uniquement de déplacements imposés sur le bord de la structure ($\Gamma_1 = \Gamma$ et $\Gamma_2 = \emptyset$) et que ces déplacements peuvent être définis à partir d'un chargement unitaire de référence \underline{u}_1 et d'un coefficient de charge λ :

$$\hat{\underline{u}} = \check{\underline{u}} = \underline{u} = \lambda \underline{u}_1, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (7.16)$$

Par conséquent, un incrément du chargement s'écrit

$$d\hat{\underline{u}} = d\check{\underline{u}} = d\underline{u} = d\lambda \underline{u}_1, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (7.17)$$

Si le critère de changement de modèle 7.5 est vérifié, les incréments d'énergie dissipée sont les mêmes pour les deux modèles, donc

$$\int_{\Gamma} (\hat{\underline{F}}^t d\lambda - \lambda^t d\hat{\underline{F}}) \cdot \underline{u}_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} (\check{\underline{F}}^t d\lambda - \lambda^t d\check{\underline{F}}) \cdot \underline{u}_1 d\Gamma. \quad (7.18)$$

De plus, d'après 7.12, on sait qu'au pas de temps t ,

$$\hat{\Psi}^t = \check{\Psi}^t, \quad (7.19)$$

par conséquent, d'après 7.13,

$$\int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}^t \cdot \underline{u}^t d\Gamma = \int_{\Gamma} \check{\underline{F}}^t \cdot \underline{u}^t d\Gamma. \quad (7.20)$$

On obtient donc en utilisant 7.16

$$\int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}^t \cdot \underline{u}_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \check{\underline{F}}^t \cdot \underline{u}_1 d\Gamma. \quad (7.21)$$

Cette équation permet de simplifier la relation 7.18 pour obtenir

$$\int_{\Gamma} d\hat{\underline{F}} \cdot \underline{u}_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} d\check{\underline{F}} \cdot \underline{u}_1 d\Gamma. \quad (7.22)$$

En sommant les équations 7.21 et 7.22, on obtient

$$\int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}^{t+dt} \cdot \underline{u}_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \check{\underline{F}}^{t+dt} \cdot \underline{u}_1 d\Gamma. \quad (7.23)$$

ce qui montre que la relation 7.20 est encore valable à l'instant $t + dt$:

$$\int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}^{t+dt} \cdot \underline{u}^{t+dt} d\Gamma = \int_{\Gamma} \check{\underline{F}}^{t+dt} \cdot \underline{u}^{t+dt} d\Gamma, \quad (7.24)$$

et donc que $\hat{\Psi}^{t+dt} = \check{\Psi}^{t+dt}$. L'énergie libre est donc la même pour les deux modèles à l'instant $t + dt$. En utilisant le bilan énergétique 7.8, on obtient également l'égalité du travail des efforts extérieurs pour les deux modèles à l'instant $t + dt$. La relation de récurrence est donc bien vérifiée à l'instant $t + dt$:

$$(\hat{\Psi}^{t+dt}, \hat{\mathcal{W}}_{ext}^{t+dt}) = (\check{\Psi}^{t+dt}, \check{\mathcal{W}}_{ext}^{t+dt}). \quad (7.25)$$

Les deux modèles étant identiques sur la partie élastique du comportement du matériau, l'initialisation de la démonstration par récurrence est également garantie.

Dans la suite du chapitre, la méthode de construction de la loi cohésive est utilisée sur deux cas test unidimensionnels de poutre en traction. On étudie d'abord les équations d'un problème pour lequel la déformation est supposée homogène dans la structure. On développe ensuite une méthode numérique où la loi cohésive est construite en deux temps avec

- d'abord le calcul numérique d'une solution du modèle de référence régularisé ;
- puis le calcul numérique d'une solution du modèle équivalent en utilisant le critère de changement de modèle 7.5 à la place de loi cohésive qui est *a priori* inconnue. Pour ce deuxième calcul, une formulation faible spéciale est utilisée, pour laquelle la donnée de la loi cohésive est remplacée par la donnée des incréments d'énergie à dissiper entre deux piquets de temps.

7.4 Construction analytique d'une loi cohésive

Données du problème On étudie une poutre soumise à un chargement de traction pour un temps variant de 0 à t_{max} . Sa longueur est notée L , sa section S , et son module d'Young E . La poutre est encadrée à gauche et soumise à un déplacement imposé u_d au point d'abscisse $x = L$. Pour le modèle de référence, la variable d'endommagement est supposée homogène le long de la poutre, ce qui est une manière grossière d'empêcher la localisation de la déformation. Pour le problème équivalent, la poutre est tranchée par une discontinuité en son centre.

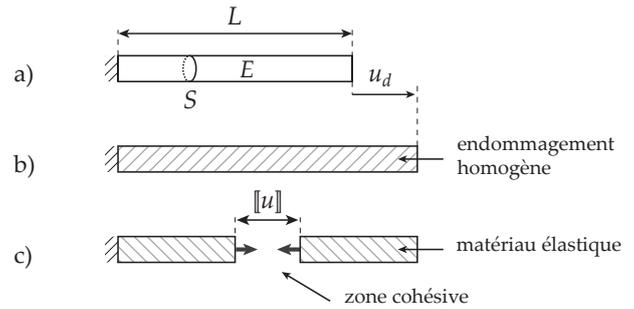


FIG. 7.3 – Géométrie de la poutre (a), modèle d'endommagement homogène (b) et modèle cohésif (c)

Le déplacement imposé u_d suit une loi de chargement linéaire, dépendant d'un paramètre a tel que :

$$u_d = a t. \quad (7.26)$$

La variable de mémoire κ est égale à la déformation maximale dans la poutre au cours du temps :

$$\kappa = \max_t(\varepsilon). \quad (7.27)$$

La variable d'endommagement D est calculée à partir de κ avec la loi suivante :

$$D = 0, \quad \text{si } \kappa < \varepsilon_0, \quad (7.28)$$

$$D = \frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_r - \varepsilon_0}, \quad \text{si } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_r, \quad (7.29)$$

$$D = 1, \quad \text{si } \kappa > \varepsilon_r. \quad (7.30)$$

Cette loi d'évolution est représentée sur la figure 7.4.

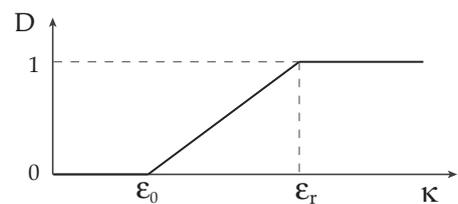


FIG. 7.4 – Loi d'évolution de l'endommagement

Les paramètres a et t_{max} sont choisis de telle sorte que le matériau soit complètement rompu ($D = 1$) à la fin du calcul. De plus, pour que le comportement soit adoucissant dès le début de l'endommagement, on pose

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_r}{2}. \quad (7.31)$$

Les calculs sont réalisés avec les valeurs numériques suivantes : $L = 10 \text{ mm}$, $S = 1000 \text{ mm}^2$, $E = 40 \text{ GPa}$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, $\varepsilon_r = 2 \times 10^{-4}$, $t_{max} = 2 \text{ s}$. La courbe de traction du matériau est représentée sur la figure 7.5.

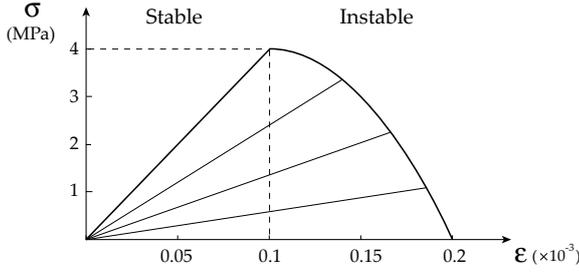


FIG. 7.5 – Courbe de traction du matériau

Modèle de référence La contrainte $\check{\sigma}$ du modèle de référence, homogène dans la poutre, vérifie

$$\check{\sigma} = (1 - D) E \varepsilon. \quad (7.32)$$

La déformation est croissante au cours du temps, donc

$$\kappa = \varepsilon, \quad (7.33)$$

et la contrainte vaut

$$\check{\sigma} = E \varepsilon, \quad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (7.34)$$

$$\check{\sigma} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon_0} E \varepsilon, \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0. \quad (7.35)$$

La variation d'énergie dissipée localisée $d\check{\Phi}_{loc}$ est égale à

$$d\check{\Phi}_{loc} = \int_{\Omega} -i_{loc} Y dD d\Omega, \quad (7.36)$$

avec Y le taux de restitution d'énergie élastique, valant pour une poutre en traction

$$Y = -\frac{1}{2} E \varepsilon^2, \quad (7.37)$$

et i_{loc} l'indicateur d'endommagement localisé, ici égal à 1 dès le début de l'endommagement. On note t_0 l'instant pour lequel l'endommagement débute, vérifiant pour ce cas test

$$t_0 = \frac{t_{max}}{2}. \quad (7.38)$$

On obtient l'expression suivante d'un incrément d'énergie dissipée localisée :

$$d\check{\Phi}_{loc} = 0, \quad \text{si } t \leq t_0, \quad (7.39)$$

$$d\check{\Phi}_{loc} = \frac{1}{2} E S \frac{u_d^2}{L^2} \frac{du_d}{\varepsilon_r - \varepsilon_0}, \quad \text{si } t > t_0. \quad (7.40)$$

Le modèle équivalent va maintenant être construit à partir de cette expression des incréments d'énergie dissipée à transmettre à la zone cohésive.

Modèle équivalent Un incrément d'énergie dissipée surfacique du modèle équivalent vaut

$$d\hat{\phi}_s = \frac{1}{2} (\sigma^s d[[u]] - [[u]] d\sigma^s), \quad (7.41)$$

avec σ^s la contrainte cohésive et $[[u]]$ le saut de déplacement dans la discontinuité. Si $\hat{\sigma}$ est la contrainte dans

le matériau autour de la zone cohésive, l'équilibre de la structure impose

$$\sigma^s = \hat{\sigma}. \quad (7.42)$$

Puisqu'il n'y a pas d'endommagement diffus pour ce cas test, le matériau autour de la zone cohésive ne s'endommage pas, ce qui permet d'obtenir l'expression suivante de $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \frac{u_d - [[u]]}{L} E. \quad (7.43)$$

Le critère de changement de modèle 7.5 impose

$$d\hat{\Phi}_s = d\check{\Phi}_{loc}. \quad (7.44)$$

Ces équations permettent d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$d[[u]] = 0, \quad \text{si } t \leq t_0, \quad (7.45)$$

$$d[[u]] = \frac{1}{t} \left(\frac{a^2 t^2}{L(\varepsilon_r - \varepsilon_0)} + [[u]] \right) dt, \quad \text{si } t > t_0. \quad (7.46)$$

dont une solution analytique est

$$[[u]] = 0, \quad \text{si } t \leq t_0, \quad (7.47)$$

$$[[u]] = \frac{a^2 t}{L(\varepsilon_r - \varepsilon_0)} (t - t_0), \quad \text{si } t > t_0. \quad (7.48)$$

Connaissant le saut de déplacement $[[u]]$, on peut calculer la contrainte cohésive σ^s à partir des équations 7.43 et 7.42, ce qui permet d'obtenir la loi cohésive tracée sur la figure 7.6.

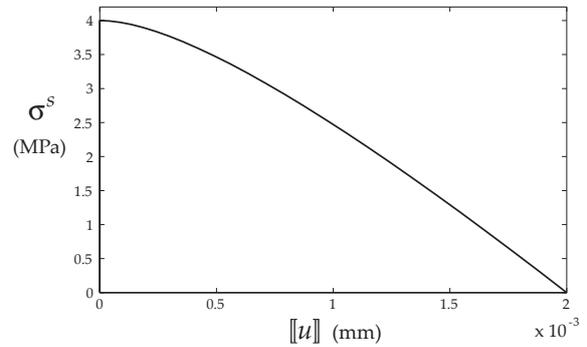


FIG. 7.6 – Loi cohésive équivalente

La figure 7.7 représente l'évolution au cours du temps des énergies dissipées par le modèle de référence ($\Phi_{ref} = \check{\Phi}$) et par le modèle équivalent ($\Phi_{eq} = \hat{\Phi}$). Le fait que ces deux courbes se superposent bien montre que le critère de changement de modèle est vérifié. Les énergies libres du modèle de référence ($\Psi_{ref} = \check{\Psi}$) et du modèle équivalent ($\Psi_{eq} = \hat{\Psi}$) sont comparées sur la figure 7.8. Le fait que les deux courbes se superposent bien confirme que les autres termes du bilan énergétique sont également conservés par le changement de modèle (conformément à la démonstration de la partie 7.3).

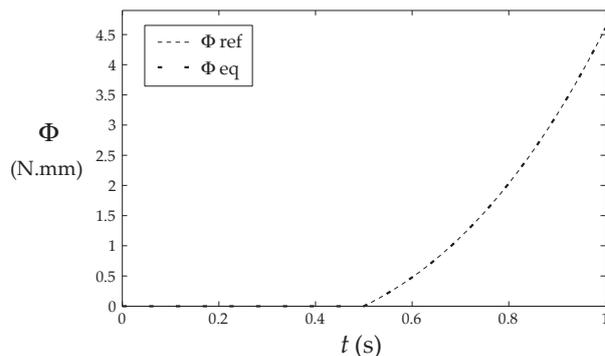


FIG. 7.7 – Comparaison des énergies dissipées

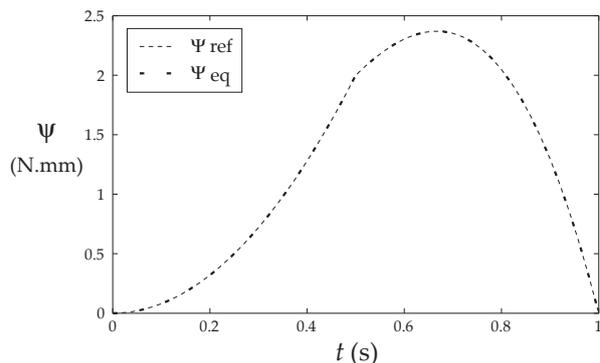


FIG. 7.8 – Comparaison des énergies libres

7.5 Construction numérique d'une loi cohésive

7.5.1 Méthodologie

On cherche dans cette section à déterminer numériquement la loi de comportement de la zone cohésive équivalente avec la méthode des éléments-finis. La méthode de construction de la loi cohésive est basée sur la réalisation de deux calculs successifs :

- le premier calcul est effectué en utilisant le modèle de référence et permet de calculer et de stocker les incréments d'énergie $\Delta \check{\Phi}_{loc}$ devant être dissipés dans la zone cohésive à chaque pas de temps. Si ce calcul est effectué en utilisant une méthode de pilotage (voir annexe E), les valeurs du facteur de chargement λ sont également stockées pour pouvoir être utilisées dans le second calcul ;
- le second calcul est ensuite effectué avec le modèle mixte continu/discontinu équivalent dont la loi cohésive est *a priori* inconnue. Les conditions aux limites appliquées à la structure sont les mêmes que pour le problème de référence. La loi cohésive est construite en imposant la quantité d'énergie s'y dissipant durant chaque pas de temps (cette information permet de se passer de la donnée du comportement incrémental de la loi cohésive).

Le modèle cohésif se construit progressivement au cours du deuxième calcul comme cela est schématisé

sur la figure 7.9.

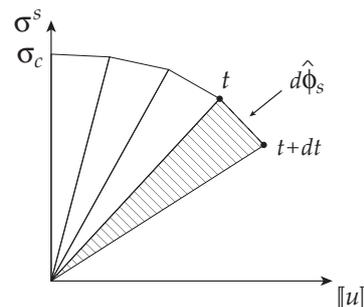


FIG. 7.9 – Calcul incrémental d'une loi cohésive équivalente

Problème de référence Pour le modèle de référence, on utilise le même cas test que dans la section 5 : une poutre unidimensionnelle de longueur $L = 100$ mm, de section $S = 1000$ mm², avec une zone de longueur $L_0 = 20$ mm dont la section est multipliée facteur $\alpha = 0.99$. La poutre est encastree à gauche ($u_g = 0$) et soumise à un effort F à son extrémité droite. La géométrie de la poutre est représentée sur la figure 7.10.

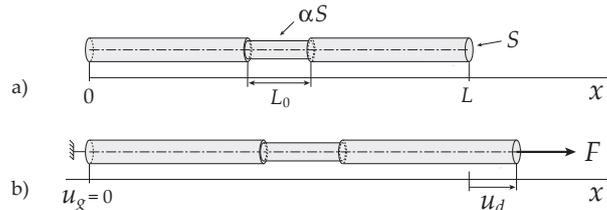


FIG. 7.10 – Poutre dans sa configuration initiale (a) et déformée (b)

Les incréments numériques d'énergie dissipée localisée $\Delta \check{\Phi}_{loc}$ sont stockés pendant le calcul pour pouvoir être utilisés lors de la résolution du problème équivalent.

Problème équivalent Pour le problème équivalent, la poutre ne comporte pas de réduction de section afin que chaque point du volume soit en vis-à-vis avec un point de la discontinuité et que la loi cohésive obtenue ne dépende pas du facteur α utilisé lors de la résolution du problème de référence. Une section équivalente \hat{S} est calculée de telle sorte que l'énergie de déformation soit la même pour les deux modèles dans la première phase de comportement élastique-linéaire. La résolution numérique du problème équivalent a nécessité le développement d'une formulation spécifique car la loi cohésive est construite incrémentalement à partir du critère de changement de modèle défini par l'équation 7.5. Les seules informations transitant du modèle de référence vers le modèle équivalent sont les incréments d'énergie dissipée $\Delta \check{\Phi}_{loc}$ et les valeurs du facteur de chargement données par la méthode de pilotage à chaque piquet de temps. La discontinuité est supposée apparaître au centre de la poutre, au point d'abscisse $x_c = \frac{L}{2}$ comme cela est représenté sur la figure 7.11.

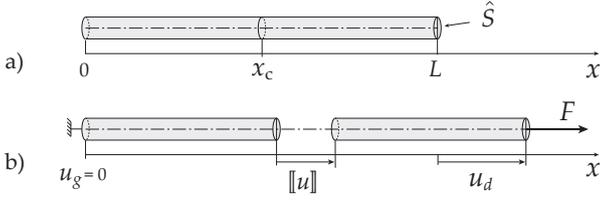


FIG. 7.11 – Poutre dans sa configuration initiale (a) et déformée (b)

7.5.2 Formulation faible pour le modèle équivalent

Un incrément d'énergie dissipée dans la discontinuité s'écrit, d'après 7.7,

$$d\hat{\Phi}_s = \frac{\hat{S}}{2} (\sigma^s d[[u]] - [[u]] d\sigma^s). \quad (7.49)$$

La formulation faible impose que le critère de changement de modèle 7.5 soit vérifié. Ce critère est écrit sous la forme

$$d\check{\Phi}_{loc} - d\hat{\Phi}_s = 0. \quad (7.50)$$

En introduisant l'expression 7.49 dans l'équation 7.50 et en multipliant par $\frac{2}{\sigma^s}$, on obtient

$$2 dv - \hat{S} d[[u]] + m d\sigma^s = 0, \quad (7.51)$$

avec,

$$m = \hat{S} \frac{[[u]]}{\sigma^s}, \quad (7.52)$$

$$dv = \frac{d\check{\Phi}_{loc}}{\sigma^s}. \quad (7.53)$$

On introduit le domaine $G = [x_g, x_c \cup x_c, x_d]$ et \mathcal{F} l'espace des champs de déplacements continus et dérivables définis sur G . La résolution est basée sur la formulation faible

$$\mathcal{A}(du^*) + \mathcal{B}(du^*) = \mathcal{C}(d\sigma^{s*}) + \mathcal{D}(du^*), \quad \forall (du^*, d\sigma^{s*}) \in (\mathcal{F}, \mathbb{R}), \quad (7.54)$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , et \mathcal{D} vérifiant

$$\mathcal{A}(du^*) = \hat{S} \int_G d\varepsilon^* \mathcal{L} d\varepsilon dx, \quad (7.55)$$

$$\mathcal{B}(du^*) = \hat{S} d[[u]]^* d\sigma^s, \quad (7.56)$$

$$\mathcal{C}(d\sigma^{s*}) = d\sigma^{s*} (2 dv - \hat{S} d[[u]] + m d\sigma^s), \quad (7.57)$$

$$\mathcal{D}(du^*) = du_d^* dF, \quad (7.58)$$

avec,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.59)$$

$$[[u]] = u^+(x_c) - u^-(x_c), \quad (7.60)$$

$$u_d = u(x_d), \quad (7.61)$$

$$d\sigma = \mathcal{L} d\varepsilon. \quad (7.62)$$

Cette formulation peut être obtenue à partir d'une écriture faible de l'équilibre (voir annexe A.4) dans laquelle on introduit l'équation 7.62 donnant le comportement incrémental du matériau continu, et en imposant la vérification de l'équation 7.51 avec σ^s jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Les matrices A_d , B et T , reliant les variables cinématiques au vecteur des déplacements nodaux U vérifient

$$u_d = A_d U, \quad (7.63)$$

$$\varepsilon(x) = B(x) U, \quad (7.64)$$

$$[[u]] = T U. \quad (7.65)$$

La contrainte cohésive σ^s est égale à la contrainte cohésive nodale notée Σ :

$$\sigma^s = \Sigma. \quad (7.66)$$

La discrétisation de l'équation 7.54 donne, si le champ $d\sigma^{s*}$ est choisi nul,

$$dU^{*\top} K dU + \hat{S} dU^{*\top} T^\top d\Sigma = dU^{*\top} A_d^\top dF, \quad \forall dU^* \in \bar{F}, \quad (7.67)$$

\bar{F} étant l'ensemble des vecteurs colonnes de dimension n_{no} (avec n_{no} le nombre de nœuds de la poutre) et K la matrice de rigidité tangente définie par

$$K = \hat{S} \int_G B^\top \mathcal{L} B dx. \quad (7.68)$$

Si le champ du^* est choisi nul, la discrétisation de l'équation 7.54 s'écrit

$$d\Sigma^{*\top} (2 dv - \hat{S} T dU + m d\Sigma) = 0, \quad \forall d\Sigma^* \in \mathbb{R}. \quad (7.69)$$

Les équations 7.67 et 7.69 donnent le système global

$$\begin{bmatrix} K & \hat{S} T^\top \\ \hat{S} T & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU \\ d\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^\top dF \\ 2 dv \end{bmatrix}. \quad (7.70)$$

Ce système est discrétisé en temps et résolu selon un algorithme de Newton-Raphson (pour plus de détail voir la formulation plus générale présentée dans l'annexe C).

7.5.3 Application sur un cas test

On utilise la méthode de changement de modèle pour calculer la loi cohésive équivalente au modèle à double endommagement introduit dans le chapitre 5 en conservant la même géométrie de la structure. Les résultats numériques obtenus dans la section 5.2 servent de référence pour la construction de la loi cohésive équivalente. La loi obtenue est représentée sur la figure 7.12.

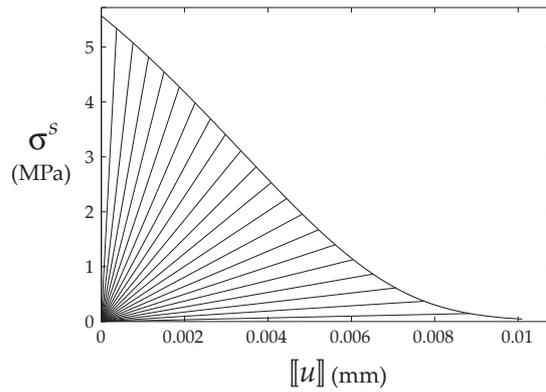


FIG. 7.12 – Loi cohésive équivalente

La figure 7.13 représente les énergies dissipées par le modèle de référence ($\Phi_{\text{ref}} = \hat{\Phi}$) et par le modèle équivalent ($\Phi_{\text{eq}} = \hat{\Phi}$). Il est normal que les deux courbes se superposent parfaitement si le critère de changement de modèle est vérifié. Les énergies libres du modèle de référence ($\Psi_{\text{ref}} = \hat{\Psi}$) et du modèle équivalent ($\Psi_{\text{eq}} = \hat{\Psi}$) sont comparées sur la figure 7.14. Le fait que les deux courbes se superposent bien confirme que les autres termes du bilan énergétique sont également conservés lors du changement de modèle.

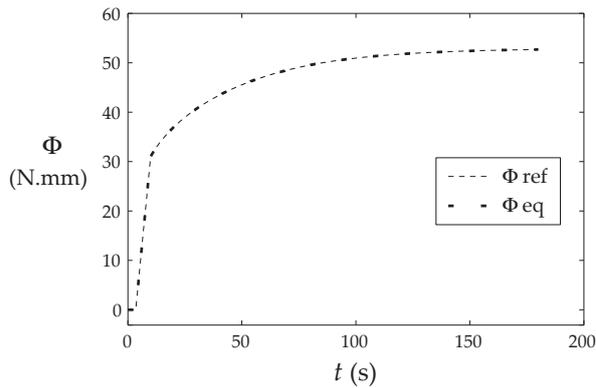


FIG. 7.13 – Comparaison des énergies dissipées du modèle de référence et du modèle équivalent

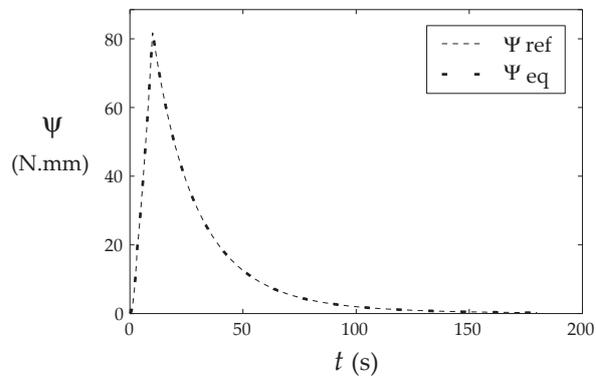


FIG. 7.14 – Comparaison des énergies libres du modèle de référence et du modèle équivalent

Chap. 8

Cas d'un modèle de référence élasto-plastique endommageable

8.1 Bilan énergétique

Dans ce chapitre, la méthode de changement de modèle est modifiée pour pouvoir prendre en compte la présence de plasticité dans le modèle de référence. Cette extension de la méthode a fait partie d'un projet commun avec Anita Simatos, doctorante au LaMCoS et au CEA, dont le travail porte plus spécifiquement sur la construction d'une loi cohésive équivalente à un modèle de porosité, et son implémentation dans le logiciel Cast3M en utilisant des éléments-finis étendus.

On fait à nouveau dans ce chapitre l'hypothèse que la décharge de la zone cohésive se fait de manière linéaire (voir section 2.2.1), mais contrairement à ce qui a été fait dans le chapitre 7, on considère qu'un saut de déplacement plastique peut apparaître dans la discontinuité. Afin de retrouver une propriété de conservation des énergies similaire à celle obtenue dans le cas d'un modèle de référence endommageable, on cherche dans un premier temps à obtenir l'expression des énergies intervenant dans le bilan énergétique en fonction des grandeurs mécaniques sur le contour du domaine. Ces expressions sont obtenues à partir de l'étude d'une décharge de la structure en supposant que l'état résiduel obtenu se trouve en tout point à l'intérieur du domaine élastique à l'instant t précédent la décharge.

8.1.1 Étude d'une décharge

On considère un domaine élasto-plastique endommageable comportant une discontinuité Γ_s . La partie continue du modèle est élasto-plastique endommageable et la discontinuité est décrite par le modèle cohésif défini dans la section 2.2.1. La solution du problème est supposée connue à un instant t , et les champs associés à cette solution sont notés $(\cdot)_t$. À cet instant, les fonctions seuil vérifient

$$f(\underline{\tilde{\sigma}}_t, p_t) \leq 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.1)$$

$$f_s(\underline{\sigma}_t^s, w_t^k) \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.2)$$

Ces fonctions seuil sont supposées être des fonctions convexes de $\underline{\tilde{\sigma}}$ et $\underline{\sigma}^s$ pour garantir que le principe du maximum de dissipation est bien vérifié (voir par

exemple [Salençon, 2002]). Si la structure est complètement relâchée jusqu'à l'obtention d'un bord libre sur Γ , l'état résiduel est obtenu. Les champs associés à cet état sont notés $(\cdot)_r$. Le tenseur des contraintes résiduelles $\underline{\sigma}_r$ vérifie

$$\underline{\sigma}_r \cdot \underline{n} = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.3)$$

La transformation permettant d'aller de l'état connu à t jusqu'à l'état résiduel est décrite par l'évolution d'un facteur de charge λ variant de 0 à 1 tel que

$$\underline{F}(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{F}_t, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.4)$$

On suppose qu'en tout point de la structure l'état déchargé est inclus dans le domaine élastique du matériau avant la décharge, donc

$$f(\underline{\tilde{\sigma}}_r, p_t) \leq 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.5)$$

$$f_s(\underline{\sigma}_r^s, w_t^k) \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.6)$$

Solution du problème de décharge Les variables sont notées comme des fonctions du paramètre de chargement λ pendant la décharge du matériau. On suppose que la solution du problème vérifie les champs de déplacements, de contraintes, de sauts de déplacement et de contraintes cohésives suivants :

$$\underline{u}(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{u}_t + \lambda \underline{u}_r, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.7)$$

$$\underline{\sigma}(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t + \lambda \underline{\sigma}_r, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.8)$$

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket(\lambda) = (1 - \lambda) \llbracket \underline{u} \rrbracket_t + \lambda \llbracket \underline{u} \rrbracket_r, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.9)$$

$$\underline{\sigma}^s(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t^s + \lambda \underline{\sigma}_r^s, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.10)$$

De plus, on suppose que les variables internes restent inchangées pendant la transformation :

$$\underline{\varepsilon}^p(\lambda) = \underline{\varepsilon}_t^p, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.11)$$

$$D(\lambda) = D_t, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.12)$$

$$p(\lambda) = p_t, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.13)$$

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket^p(\lambda) = \llbracket \underline{u} \rrbracket_t^p, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.14)$$

$$w^k(\lambda) = w_t^k, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.15)$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien de la solution du problème, il faut que l'admissibilité statique soit vérifiée

pour toutes les valeurs de λ comprises entre 0 et 1, soit :

$$\underline{\nabla}(\underline{\sigma}(\lambda)) = \underline{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.16)$$

$$\underline{\sigma}(\lambda) \cdot \underline{n} = \underline{F}(\lambda), \quad \text{sur } \Gamma, \quad (8.17)$$

$$\underline{\sigma}^s(\lambda) = \underline{\sigma}^+(\lambda) \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^-(\lambda) \cdot \underline{n}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.18)$$

Il faut également que les relations de comportement soient vérifiées, donc, en tenant compte de 8.12 et 8.15 :

$$\underline{\sigma}(\lambda) = (1 - D_t) K_\circ : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\lambda), \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.19)$$

$$\underline{\sigma}^s(\lambda) = \underline{K}^s(w_t^k) \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket^e(\lambda), \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.20)$$

Enfin, pour garantir que les variables internes restent inchangées pendant la transformation, il faut vérifier que l'on reste bien en tout point du domaine à l'intérieur du domaine élastique tel qu'il est défini à l'instant t , c'est-à-dire que

$$f(\underline{\tilde{\sigma}}(\lambda), p_t) \leq 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.21)$$

$$f_s(\underline{\sigma}^s(\lambda), w_t^k) \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.22)$$

Vérification de la solution L'équation 8.16 est satisfaite pour $\underline{\sigma}_t$ et $\underline{\sigma}_r$, qui sont solutions du problème pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, et donc statiquement admissibles. L'équation 8.16 est donc également vérifiée pour tout λ compris entre 0 et 1. L'expression 8.8 permet d'obtenir

$$\underline{\sigma}(\lambda) \cdot \underline{n} = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t \cdot \underline{n} + \lambda \underline{\sigma}_r \cdot \underline{n}, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.23)$$

Par ailleurs,

$$\underline{\sigma}_t \cdot \underline{n} = \underline{F}_t, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (8.24)$$

$$\underline{\sigma}_r \cdot \underline{n} = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (8.25)$$

donc,

$$\underline{\sigma}(\lambda) \cdot \underline{n} = (1 - \lambda) \underline{F}_t = \underline{F}(\lambda), \quad \text{sur } \Gamma, \quad (8.26)$$

ce qui montre que l'équation 8.17 est bien vérifiée pour tout λ compris entre 0 et 1. L'équation 8.8 donne également

$$\underline{\sigma}^+(\lambda) \cdot \underline{n} = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t^+ \cdot \underline{n} + \lambda \underline{\sigma}_r^+ \cdot \underline{n}, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.27)$$

$$\underline{\sigma}^-(\lambda) \cdot \underline{n} = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t^- \cdot \underline{n} + \lambda \underline{\sigma}_r^- \cdot \underline{n}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.28)$$

Les équations données dans 8.18 sont vérifiées pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$; et d'après 8.10, 8.27 et 8.28, ces équations sont également valables pour tout λ compris entre 0 et 1. D'après l'équation 8.7, le champ de déformation s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{\underline{\varepsilon}}_t + \lambda \underline{\underline{\varepsilon}}_r. \quad (8.29)$$

En utilisant cette équation et l'équation 8.11, on obtient

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\lambda) = (1 - \lambda) \underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \lambda \underline{\underline{\varepsilon}}_r^e. \quad (8.30)$$

L'équation 8.19 est vérifiée pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$; en utilisant l'équation 8.8, on a donc l'expression suivante des contraintes sur Ω :

$$\underline{\sigma}(\lambda) = (1 - D_t) K_\circ : ((1 - \lambda) \underline{\underline{\varepsilon}}_t^e + \lambda \underline{\underline{\varepsilon}}_r^e). \quad (8.31)$$

En reconnaissant l'expression de $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\lambda)$ donnée dans 8.30, on obtient

$$\underline{\sigma}(\lambda) = (1 - D_t) K_\circ : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\lambda), \quad (8.32)$$

donc l'équation 8.19 est bien vérifiée pendant toute la décharge. D'après les équations 8.9 et 8.14, on a

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket^e(\lambda) = (1 - \lambda) \llbracket \underline{u} \rrbracket_t^e + \lambda \llbracket \underline{u} \rrbracket_r^e. \quad (8.33)$$

L'équation 8.20 est vérifiée pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$; en utilisant les équations 8.10 et 8.15, on a donc l'expression suivante des contraintes cohésives :

$$\underline{\sigma}^s(\lambda) = \underline{K}^s(w_t^k) \cdot ((1 - \lambda) \llbracket \underline{u} \rrbracket_t^e + \lambda \llbracket \underline{u} \rrbracket_r^e). \quad (8.34)$$

En reconnaissant l'expression de $\llbracket \underline{u} \rrbracket^e(\lambda)$ de 8.33, on obtient

$$\underline{\sigma}^s(\lambda) = \underline{K}^s(w_t^k) \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket^e(\lambda). \quad (8.35)$$

L'équation 8.20 est donc bien vérifiée pendant toute la décharge. Il reste à vérifier que la transformation se fait à l'intérieur du domaine élastique. La convexité des fonctions seuil f et f_s se traduit par les inégalités

$$f(\lambda \underline{\tilde{\sigma}}_r + (1 - \lambda) \underline{\tilde{\sigma}}_t, p_t) \leq \lambda f(\underline{\tilde{\sigma}}_r, p_t) + (1 - \lambda) f(\underline{\tilde{\sigma}}_t, p_t), \quad (8.36)$$

$$f_s(\lambda \underline{\sigma}_r^s + (1 - \lambda) \underline{\sigma}_t^s, w_t^k) \leq \lambda f_s(\underline{\sigma}_r^s, w_t^k) + (1 - \lambda) f_s(\underline{\sigma}_t^s, w_t^k). \quad (8.37)$$

En utilisant les équations 8.1, 8.2, 8.5 et 8.6, on obtient donc

$$f(\underline{\tilde{\sigma}}(\lambda), p_t) \leq 0, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.38)$$

$$f_s(\underline{\sigma}^s(\lambda), w_t^k) \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.39)$$

On retrouve donc bien les équations 8.21 et 8.22, ce qui montre que l'on reste dans le domaine élastique pendant toute la décharge. Les champs proposés étant bien solutions du problème de décharge, ils peuvent être utilisés pour l'étude de son bilan énergétique.

Remarque : dans le cas d'une poutre en traction, le champ de contrainte résiduel est un champ de contrainte nulle car le champ de déformation plastique est compatible. Si ce champ est inclus dans la surface de charge, ce qui est le cas pour de l'écroutissage isotrope, l'hypothèse de décharge élastique est automatiquement vérifiée.

Bilan énergétique de la décharge Puisque la transformation est non dissipative pendant la décharge, le bilan énergétique de cette transformation vérifie

$$\Delta \Psi = \Delta \mathcal{W}_{ext}. \quad (8.40)$$

En développant les calculs, on obtient

$$\Delta \Psi = \int_{\Gamma} \int_{\lambda=0}^1 \underline{F}(\lambda) \cdot d\underline{u} \, d\Gamma, \quad (8.41)$$

$$\Delta \Psi = \int_{\Gamma} \int_{\lambda=0}^1 (1 - \lambda) \underline{F}_t \cdot (-\underline{u}_t + \underline{u}_r) \, d\lambda \, d\Gamma, \quad (8.42)$$

$$\Delta \Psi = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{F}_t \cdot (\underline{u}_t - \underline{u}_r) \, d\Gamma. \quad (8.43)$$

Cette énergie constitue la différence entre l'énergie libre résiduelle Ψ_r ($\lambda=1$) et l'énergie libre à l'instant t notée Ψ_t ($\lambda=0$). On a donc

$$\Psi_t = \Psi_r - \Delta\Psi, \quad (8.44)$$

et l'énergie libre de la structure peut s'écrire

$$\Psi = \Psi_r + \Psi_a, \quad (8.45)$$

avec,

$$\Psi_a = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot (\underline{u} - \underline{u}_r) d\Gamma. \quad (8.46)$$

Le calcul d'un incrément d'énergie dissipée à partir du bilan énergétique donne

$$d\Phi = d\mathcal{W}_{ext} - d\Psi, \quad (8.47)$$

donc, en utilisant 8.45 et 8.46, on obtient

$$d\Phi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{F} \cdot d\underline{u} - \underline{u} \cdot d\underline{F} + \underline{F} \cdot d\underline{u}_r + \underline{u}_r \cdot d\underline{F}) d\Gamma - d\Psi_r. \quad (8.48)$$

8.1.2 Grandeurs énergétiques pour le changement de modèle

Énergie libre microscopique On a supposé en introduisant le modèle plastique endommageable que l'énergie libre Ψ pouvait se séparer en une partie macroscopique Ψ^{mac} et une partie microscopique Ψ^{mic} . En appliquant cette décomposition à l'énergie libre résiduelle Ψ_r , on obtient

$$\Psi_r = \Psi^{mic} + \Psi_r^{mac}. \quad (8.49)$$

L'énergie dissipée correspond à une énergie évacuée sous forme de chaleur. Elle est perdue d'un point de vue mécanique car elle ne peut plus être transformée en travail (cela contredirait le second principe de la thermodynamique) et peut être vue comme une énergie changeant d'échelle car l'élévation de la température correspond à une augmentation de l'agitation moléculaire. L'énergie stockée microscopiquement Ψ^{mic} est également une énergie transférée vers une échelle inférieure (l'échelle de la micro-structure) et perdue d'un point de vue mécanique, cependant la création de cette énergie ne provoque pas d'élévation de la température. Le schéma 8.1 résume cette répartition des énergies dans le matériau et les échelles auxquelles elles sont associées.

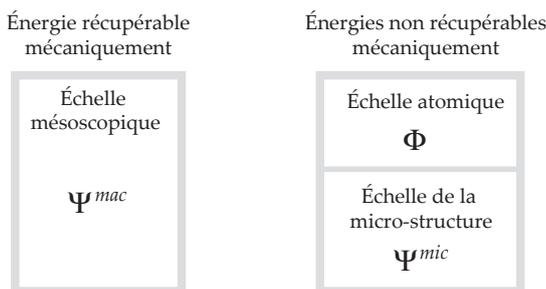


FIG. 8.1 – Énergies récupérables et non récupérables

Énergie libre modifiée Pour tous les modèles utilisés dans ce travail, l'énergie libre microscopique est nulle. Dans le cas contraire, il serait simple de définir un potentiel modifié, équivalent au potentiel réel du point de vue du comportement mécanique mais sans énergie stockée dans la microstructure du matériau. Si on note Ψ_* l'énergie libre et Φ_* l'énergie dissipée obtenue avec le potentiel modifié, on a

$$\Psi_* = \Psi^{mac}, \quad (8.50)$$

$$\Phi_* = \Phi + \Psi^{mic}, \quad (8.51)$$

ce qui revient à considérer que l'énergie stockée microscopiquement Ψ^{mic} est une énergie dissipée. Ce changement de la répartition des énergies dans le bilan énergétique ne modifie pas l'énergie totale de la structure donnée par l'équation 1.63 et n'a pas d'influence sur le comportement mécanique de la structure. Cette nouvelle répartition des énergies modifierait par contre le comportement thermique de la structure si celui-ci était étudié (on pourrait s'en apercevoir en écrivant l'équation de la chaleur).

Énergie dissipée de calcul Dans le chapitre précédent, la zone cohésive équivalente était construite en imposant la préservation de l'énergie dissipée lors du changement de modèle. La présence d'un saut de déplacement plastique dans la zone cohésive nécessite désormais de préserver deux grandeurs énergétiques. Dans ce but, une *énergie dissipée de calcul* Φ^c est définie de manière incrémentale à partir d'une transformation fictive :

$d\Phi^c$ est l'incrément d'énergie dissipée obtenu pour une transformation fictive identique à la transformation réelle du point de vue du comportement mécanique, mais se faisant sans variation de l'état de la structure déchargée.

On note (\cdot) les grandeurs associées à cette transformation. L'incrément du champ de déplacement résiduel ainsi que l'incrément d'énergie libre résiduelle associée à la transformation fictive sont nuls :

$$d\underline{u}_{res} = \underline{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.52)$$

$$d\Psi_{res} = 0. \quad (8.53)$$

On obtient donc l'expression suivante de $d\Phi^c$:

$$d\Phi^c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{F} \cdot d\underline{u} - \underline{u} \cdot d\underline{F} + \underline{u}_r \cdot d\underline{F}) d\Gamma. \quad (8.54)$$

On note toujours (\cdot) les grandeurs associées au modèle de référence et (\cdot^c) les grandeurs associées au modèle équivalent. Le nouveau critère de changement de modèle sera construit de telle sorte qu'à tout instant t

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\Phi}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\Phi} \\ \check{\Phi}^c \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

8.2 Validité du changement de modèle

Le bilan énergétique quasi-statique s'écrit

$$\mathcal{E}_t = \Psi_a + \Psi_r - \mathcal{W}_{ext} + \Phi. \quad (8.56)$$

Comme pour l'endommagement dans la section 7.3, on cherche à montrer par récurrence que les termes du bilan énergétique du modèle de référence et du modèle équivalent sont égaux à tout instant t . Le changement de modèle est effectué en imposant la conservation des énergies dissipées plastiques et élastiques (équation 8.55). Par ailleurs, on peut considérer que les énergies totales des deux modèles sont égales (comme pour le cas sans plasticité), et on fait l'hypothèse que les énergies libres résiduelles sont les mêmes pour les deux modèles. On peut donc écrire à chaque instant t

$$(\hat{\mathcal{E}}_t, \hat{\Phi}, \hat{\Phi}^c, \hat{\Psi}_r) = (\check{\mathcal{E}}_t, \check{\Phi}, \check{\Phi}^c, \check{\Psi}_r), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.57)$$

On suppose qu'à l'instant t on a l'équivalence énergétique complète des deux modèles, c'est-à-dire qu'on a en plus des relations précédentes

$$(\hat{\Psi}_a^t, \hat{\mathcal{W}}_{ext}^t) = (\check{\Psi}_a^t, \check{\mathcal{W}}_{ext}^t). \quad (8.58)$$

Cette expression est la relation de récurrence dont on cherche à vérifier la validité à l'instant $t + dt$. On fait l'hypothèse que les conditions aux limites sont composées uniquement d'efforts imposés sur le bord de la structure ($\Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_2 = \Gamma$) et peuvent être définies à partir d'un chargement de référence \underline{F}_1 et d'un coefficient de charge λ tel que

$$\hat{\underline{F}} = \check{\underline{F}} = \underline{F} = \lambda \underline{F}_1, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.59)$$

Par conséquent, l'incrément du chargement s'écrit

$$d\hat{\underline{F}} = d\check{\underline{F}} = d\underline{F} = d\lambda \underline{F}_1, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.60)$$

Le condition 8.55 de changement de modèle et l'hypothèse de conservation de l'énergie libre résiduelle permettent d'écrire, après quelques simplifications, les deux équations suivantes :

$$\int_{\Gamma} (\underline{F}^t \cdot d\hat{\underline{u}}_r) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\underline{F}^t \cdot d\check{\underline{u}}_r) d\Gamma, \quad (8.61)$$

$$\int_{\Gamma} (\underline{F}^t \cdot d\hat{\underline{u}} - (\hat{\underline{u}}^t - \hat{\underline{u}}_r^t) \cdot d\underline{F}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\underline{F}^t \cdot d\check{\underline{u}} - (\check{\underline{u}}^t - \check{\underline{u}}_r^t) \cdot d\underline{F}) d\Gamma. \quad (8.62)$$

En faisant apparaître le coefficient de chargement λ , on obtient

$$\int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (\lambda^t d\hat{\underline{u}}_r) d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (\lambda^t d\check{\underline{u}}_r) d\Gamma, \quad (8.63)$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (\lambda^t d\hat{\underline{u}} - (\hat{\underline{u}}^t - \hat{\underline{u}}_r^t) d\lambda) d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (\lambda^t d\check{\underline{u}} - (\check{\underline{u}}^t - \check{\underline{u}}_r^t) d\lambda) d\Gamma. \quad (8.64)$$

D'après l'initialisation de la récurrence, $\hat{\Psi}_a^t = \check{\Psi}_a^t$, donc

$$\int_{\Gamma} \lambda^t \underline{F}_1 \cdot (\hat{\underline{u}}^t - \hat{\underline{u}}_r^t) d\Gamma = \int_{\Gamma} \lambda^t \underline{F}_1 \cdot (\check{\underline{u}}^t - \check{\underline{u}}_r^t) d\Gamma. \quad (8.65)$$

En utilisant l'équation 8.65, le système composé des équations 8.63 et 8.64 permet d'écrire

$$\int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot d\hat{\underline{u}} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot d\check{\underline{u}} d\Gamma, \quad (8.66)$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot d\hat{\underline{u}}_r d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot d\check{\underline{u}}_r d\Gamma. \quad (8.67)$$

On a donc bien

$$\int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (d\hat{\underline{u}} - d\hat{\underline{u}}_r) d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}_1 \cdot (d\check{\underline{u}} - d\check{\underline{u}}_r) d\Gamma, \quad (8.68)$$

ce qui permet d'écrire en utilisant 8.65,

$$\int_{\Gamma} \underline{F}^{t+dt} \cdot (\hat{\underline{u}}^{t+dt} - \hat{\underline{u}}_r^{t+dt}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{F}^{t+dt} \cdot (\check{\underline{u}}^{t+dt} - \check{\underline{u}}_r^{t+dt}) d\Gamma. \quad (8.69)$$

Ψ_a est donc bien conservé aux deux échelles à l'instant $t + dt$:

$$\hat{\Psi}_a^{t+dt} = \check{\Psi}_a^{t+dt}. \quad (8.70)$$

L'utilisation de l'expression du bilan énergétique 8.56 permet d'établir à partir de cette expression la relation de récurrence à $t + dt$:

$$(\hat{\Psi}_a^{t+dt}, \hat{\mathcal{W}}_{ext}^{t+dt}) = (\check{\Psi}_a^{t+dt}, \check{\mathcal{W}}_{ext}^{t+dt}). \quad (8.71)$$

L'équivalence énergétique est donc vérifiée dans le cas plastique avec le critère de changement de modèle donné, sous condition que les hypothèses faites soient vérifiées (et en particulier l'équivalence des énergies libres résiduelles).

Remarque : dans le cas d'une poutre en traction, les contraintes sont nulles dans toute la poutre à l'état déchargé. Il n'y a donc pas d'énergie libre résiduelle. Dans ce cas l'hypothèse de conservation des énergies libres résiduelles est parfaitement respectée, on a donc une équivalence énergétique rigoureuse entre le modèle de référence et le modèle équivalent.

8.3 Calcul des énergies dissipées

On cherche à déterminer l'expression de l'énergie dissipée volumique de calcul ϕ^c et de l'énergie dissipée surfacique de calcul ϕ_s^c . On note $(\bar{\cdot})$ les grandeurs associées à la transformation fictive, vérifiant

$$d\bar{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\varepsilon}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.72)$$

$$d\llbracket \bar{\underline{u}} \rrbracket = d\llbracket \underline{u} \rrbracket, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.73)$$

$$d\bar{\underline{\sigma}} = d\underline{\sigma}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.74)$$

$$d\bar{\underline{\sigma}}^s = d\underline{\sigma}^s, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.75)$$

$$d\bar{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.76)$$

$$d\llbracket \bar{\underline{u}} \rrbracket^p = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (8.77)$$

$$d\bar{\underline{u}}_r = \underline{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.78)$$

$$d\llbracket \bar{\underline{u}} \rrbracket_r = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.79)$$

8.3.1 Énergies dissipées volumiques

Énergie dissipée volumique Un incrément d'énergie dissipée s'écrit

$$d\phi = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - Y dD. \quad (8.80)$$

On peut décomposer $d\phi$ en un terme $d\phi^p$ de dissipation plastique et un terme $d\phi^e$ de dissipation par endommagement :

$$d\phi = d\phi^p + d\phi^e, \quad (8.81)$$

avec,

$$d\phi^p = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad (8.82)$$

$$d\phi^e = -Y dD. \quad (8.83)$$

Énergie dissipée volumique de calcul L'incrément d'énergie dissipée de calcul $d\phi^c$ peut se calculer à partir des incréments des variables de transformation fictive :

$$d\phi^c = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - Y d\bar{D}. \quad (8.84)$$

En utilisant 8.76, on peut simplifier cette expression en

$$d\phi^c = -Y d\bar{D}. \quad (8.85)$$

Pour calculer $d\bar{D}$, on peut d'après 8.74 évaluer les expressions de $d\bar{\underline{\underline{\sigma}}}$ et $d\underline{\underline{\sigma}}$ pour obtenir

$$(1-D)K_{\circ} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^e - K_{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\bar{D} = (1-D)K_{\circ} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^e - K_{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e dD. \quad (8.86)$$

D'après 8.72 et 8.76, $d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = d\underline{\underline{\varepsilon}}$, donc on peut simplifier 8.86 en

$$K_{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e d\bar{D} = (1-D)K_{\circ} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p + K_{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e dD. \quad (8.87)$$

En prémultipliant de chaque coté par $\frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, on fait apparaître Y et $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$-Y d\bar{D} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - Y dD. \quad (8.88)$$

$d\phi^c$ vaut donc

$$d\phi^c = \frac{1}{2} d\phi^p + d\phi^e. \quad (8.89)$$

8.3.2 Énergies dissipées surfaciques

Énergie dissipée surfacique Le calcul de $d\phi_s$ se fait, pour un modèle cohésif à décharge linéaire, avec l'équation 2.61. On décompose à nouveau l'incrément d'énergie dissipée en un terme correspondant à l'incrément d'énergie dissipée plastique $d\phi_s^p$ et un terme correspondant à l'incrément d'énergie dissipée par endommagement $d\phi_s^e$:

$$d\phi_s = d\phi_s^p + d\phi_s^e, \quad (8.90)$$

avec,

$$d\phi_s^p = \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]]^p, \quad (8.91)$$

$$d\phi_s^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]]^e - [[\underline{\underline{u}}]]^e \cdot d\underline{\underline{\sigma}}^s). \quad (8.92)$$

Le calcul de ces incréments d'énergies dissipées est résumé par le schéma de la figure 8.2.

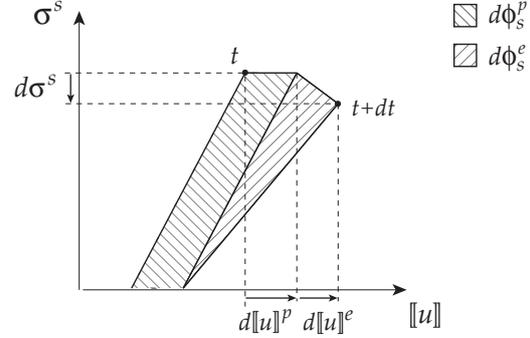


FIG. 8.2 – Incréments d'énergies dissipées surfaciques dans la zone cohésive

Énergie dissipée surfacique de calcul $d\phi_s^c$ se calcule en fonction des incréments définis pour la transformation fictive de la manière suivante :

$$d\phi_s^c = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]]^e - [[\underline{\underline{u}}]]^e \cdot d\underline{\underline{\sigma}}^s). \quad (8.93)$$

D'après 8.77 et 8.73, $d[[\underline{\underline{u}}]]^e = d[[\underline{\underline{u}}]]$, et d'après 8.75, $d\underline{\underline{\sigma}}^s = d\underline{\underline{\sigma}}^s$, donc

$$d\phi_s^c = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]] - [[\underline{\underline{u}}]]^e \cdot d\underline{\underline{\sigma}}^s). \quad (8.94)$$

Cette équation peut également s'écrire en utilisant la décomposition de $d[[\underline{\underline{u}}]]$ en une partie plastique $d[[\underline{\underline{u}}]]^p$ et une partie élastique $d[[\underline{\underline{u}}]]^e$:

$$d\phi_s^c = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]]^p + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^s \cdot d[[\underline{\underline{u}}]]^e - [[\underline{\underline{u}}]]^e \cdot d\underline{\underline{\sigma}}^s). \quad (8.95)$$

On retrouve donc une formule similaire à 8.89 pour le modèle cohésif :

$$d\phi_s^c = \frac{1}{2} d\phi_s^p + d\phi_s^e. \quad (8.96)$$

8.3.3 Énergies globales

Les énergies Φ^p et Φ^e intégrées sur la structure entière sont définies par

$$\Phi^p = \int_{\Omega} \phi^p d\Omega + \int_{\Gamma_s} \phi_s^p d\Gamma_s, \quad (8.97)$$

$$\Phi^e = \int_{\Omega} \phi^e d\Omega + \int_{\Gamma_s} \phi_s^e d\Gamma_s. \quad (8.98)$$

L'intégration des équations 8.81 et 8.90 sur Ω et Γ_s , et de 8.89 et 8.96 sur Ω et Γ_s permet d'obtenir les équations suivantes :

$$d\Phi = d\Phi^p + d\Phi^e, \quad (8.99)$$

$$d\Phi^c = \frac{1}{2} d\Phi^p + d\Phi^e. \quad (8.100)$$

8.4 Critère de changement de modèle

Cas général Le critère de changement de modèle doit préserver l'énergie dissipée et l'énergie dissipée de calcul (équation 8.55) :

$$\begin{bmatrix} d\hat{\Phi} \\ d\hat{\Phi}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\Phi} \\ d\check{\Phi}^c \end{bmatrix}. \quad (8.101)$$

On utilise à nouveau l'indicateur d'endommagement localisé i_{loc} défini par

$$i_{loc} = \arg(d\underline{\sigma}^{loc} : d\underline{\varepsilon} < 0), \quad \text{sur } \Omega, \quad (8.102)$$

$d\underline{\sigma}^{loc}$ étant l'incrément de contrainte que l'on aurait sans la régularisation. Comme pour le cas sans plasticité, l'énergie dissipée ne doit être transmise à la zone cohésive que si cet indicateur est égal à 1. Si $\hat{\Phi}_s$ et $\hat{\Phi}_s^c$ sont les énergies dissipées et dissipées de calcul dans la discontinuité par le modèle équivalent, le critère de changement de modèle s'écrit

$$\begin{bmatrix} d\hat{\Phi}_s \\ d\hat{\Phi}_s^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\Phi}_{loc} \\ d\check{\Phi}_{loc}^c \end{bmatrix}, \quad (8.103)$$

avec,

$$d\check{\Phi}_{loc} = \int_{\Omega} i_{loc} d\check{\phi} d\Omega, \quad (8.104)$$

$$d\check{\Phi}_{loc}^c = \int_{\Omega} i_{loc} d\check{\phi}^c d\Omega. \quad (8.105)$$

Remarques :

- le critère de changement de modèle 8.103 peut également s'écrire

$$\begin{bmatrix} d\hat{\Phi}_s^p \\ d\hat{\Phi}_s^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\Phi}_{loc}^p \\ d\check{\Phi}_{loc}^c \end{bmatrix}, \quad (8.106)$$

avec,

$$d\check{\Phi}_{loc}^p = \int_{\Omega} i_{loc} d\check{\phi}^p d\Omega. \quad (8.107)$$

Ceci se montre facilement car

$$d\Phi = d\Phi^c + \frac{1}{2} d\Phi^p. \quad (8.108)$$

Le critère de changement de modèle peut donc également s'écrire en imposant la préservation de l'énergie dissipée plastique et de l'énergie dissipée de calcul. C'est ce critère qui sera utilisé pour l'implémentation numérique de la méthode ;

- le critère 8.106 peut être écrit de manière équivalente

$$\begin{bmatrix} d\hat{\Phi}_s^p \\ d\hat{\Phi}_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\Phi}_{loc}^p \\ d\check{\Phi}_{loc}^e \end{bmatrix}, \quad (8.109)$$

avec,

$$d\check{\Phi}_{loc}^e = \int_{\Omega} i_{loc} d\check{\phi}^e d\Omega. \quad (8.110)$$

Ceci se montre facilement car

$$d\Phi^e = d\Phi^c - \frac{1}{2} d\Phi^p. \quad (8.111)$$

Le critère de changement de modèle revient donc à imposer la préservation des énergies dissipées plastiques et élastiques lors du changement de modèle.

Cas plastique Si le modèle de référence ne comporte pas d'endommagement mais seulement de la plasticité, $\check{\phi}^e$ est nul en tout point du modèle de référence ; par conséquent, $\hat{\phi}_s^e$ est nul en tout point de la discontinuité du modèle équivalent. Le comportement de la zone cohésive doit satisfaire la relation 8.92, ce qui implique pour un modèle de plasticité que

$$\frac{1}{2} (\underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]]^e - [[\underline{u}]]^e \cdot d\underline{\sigma}^s) = 0, \quad \forall t. \quad (8.112)$$

Puisque $[[\underline{u}]]^e$ est initialement nul, cette équation admet comme unique solution

$$[[\underline{u}]]^e = \underline{0}. \quad (8.113)$$

Le critère de changement de modèle peut donc s'écrire sous la forme suivante dans le cas plastique :

$$d\hat{\Phi}_s = d\check{\Phi}_{loc}, \quad (8.114)$$

$$[[\underline{u}]]^e = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.115)$$

Cas endommageable Si le modèle de référence ne comporte pas de plasticité, $\check{\phi}^p$ est nul en tout point du modèle de référence ; par conséquent, $\hat{\phi}_s^p$ est nul en tout point de la discontinuité du modèle équivalent. Le comportement de la zone cohésive devant satisfaire l'équation 8.91, on a l'équation suivante :

$$\underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]]^p = 0, \quad \forall t, \quad (8.116)$$

ce qui impose qu'en tout point de la discontinuité

$$[[\underline{u}]]^p = \underline{0}. \quad (8.117)$$

Le critère de changement de modèle peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$d\hat{\Phi}_s = d\check{\Phi}_{loc}, \quad (8.118)$$

$$[[\underline{u}]]^p = \underline{0}, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.119)$$

On retrouve donc bien le critère de changement de modèle utilisé précédemment pour les modèles d'endommagement sans plasticité.

8.5 Construction analytique d'une loi cohésive

On calcule dans cette section la loi cohésive équivalente à un modèle de référence de plasticité pour lequel la déformation est supposée homogène le long de la poutre de longueur L et de section S .

Modèle de plasticité étudié Les lois de comportement du modèle utilisé sont linéaires et dépendent de trois paramètres : le module d'Young E , la déformation critique ε_0 , et le module d'écroissage k . Les équations donnant le comportement du modèle sont les suivantes :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (8.120)$$

$$\sigma = E \varepsilon^e, \quad (8.121)$$

$$f(\sigma) = \sigma - R(\varepsilon^p), \quad (8.122)$$

$$R(\varepsilon^p) = E \varepsilon_0 - \frac{k}{k+1} E \varepsilon^p. \quad (8.123)$$

Dans le cas d'une décharge dans le domaine élastique ($f < 0$ ou $df < 0$), on a le comportement incrémental suivant :

$$d\varepsilon^e = d\varepsilon, \quad (8.124)$$

$$d\varepsilon^p = 0, \quad (8.125)$$

$$d\sigma = E d\varepsilon. \quad (8.126)$$

Si $f = 0$ et $df = 0$, il y a écroissage et

$$d\varepsilon^e = -k d\varepsilon, \quad (8.127)$$

$$d\varepsilon^p = (k+1) d\varepsilon, \quad (8.128)$$

$$d\sigma = -k E d\varepsilon. \quad (8.129)$$

En utilisant ces calculs, la courbe de traction du modèle est tracée sur la figure 8.3.

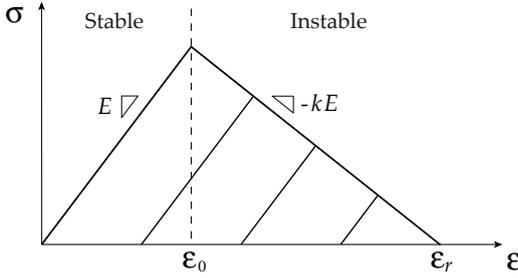


FIG. 8.3 – Courbe de traction du modèle de plasticité

L'écroissage étant négatif, le comportement de la structure est adoucissant dès que l'on dépasse la limite d'élasticité. Le chargement est réalisé pour un temps variant de 0 à t_{max} . La poutre est encastree à gauche et soumise à un déplacement imposé u_d à droite. Le chargement de la structure est linéaire au cours du temps et donné en fonction d'un paramètre a par la relation

$$u_d = a t. \quad (8.130)$$

a est choisi de telle sorte que la poutre soit rompue pour $t = t_{max}$ et on appelle t_0 le temps pour lequel $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Modèle de référence Pour le modèle de référence, on suppose, comme cela avait été fait dans la section 7.4, que la déformation et les variables internes sont homogènes le long de la poutre. On obtient par intégration de 8.126 et 8.129 la valeur de la contrainte $\check{\sigma}$ au cours du temps :

$$\check{\sigma} = E \varepsilon, \quad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (8.131)$$

$$\check{\sigma} = (1+k) E \varepsilon_0 - k E \varepsilon, \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0. \quad (8.132)$$

Le calcul du taux d'énergie dissipée localisée se fait alors grâce à la formule

$$d\check{\Phi}_{loc} = \int_{\Omega} i_{loc} \check{\sigma} d\varepsilon^p d\Omega, \quad (8.133)$$

avec pour cet exemple $i_{loc} = 1$ en un point dès qu'il y a plastification ($t = t_0$), ce qui donne

$$d\check{\Phi}_{loc} = 0, \quad \text{si } t \leq t_0, \quad (8.134)$$

$$d\check{\Phi}_{loc} = -S E \left((1+k) \varepsilon_0 - k \frac{a t}{L} \right) (k+1) a dt, \quad \text{si } t > t_0. \quad (8.135)$$

Modèle équivalent Pour le modèle équivalent, l'équilibre de la structure au niveau de la discontinuité impose l'égalité de la contrainte cohésive σ^s et de la contrainte $\hat{\sigma}$ dans la poutre :

$$\sigma^s = \hat{\sigma}. \quad (8.136)$$

La plasticité du modèle de référence étant adoucissante, le matériau entourant la zone cohésive ne plastifie pas, on a donc la relation

$$\hat{\sigma} = \frac{u_d - \llbracket u \rrbracket}{L} E. \quad (8.137)$$

Le modèle étant uniquement plastique, on peut utiliser le critère de changement de modèle donné par les équations 8.114 et 8.115 :

$$d\hat{\Phi}_s = d\check{\Phi}_{loc}, \quad (8.138)$$

$$\llbracket u \rrbracket^e = 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (8.139)$$

Le taux d'énergie dissipée $d\hat{\phi}_s$ s'écrit

$$d\hat{\phi}_s = \sigma^s d\llbracket u \rrbracket, \quad (8.140)$$

donc, en tenant compte de 8.137 et 8.130, on obtient

$$d\hat{\Phi}_s = \frac{E S}{L} (a t - \llbracket u \rrbracket) d\llbracket u \rrbracket, \quad (8.141)$$

ce qui, en appliquant le critère de changement de modèle 8.138, permet d'obtenir l'équation différentielle

$$\llbracket u \rrbracket = 0, \quad \text{si } t \leq t_0, \quad (8.142)$$

$$d\llbracket u \rrbracket = L \frac{(1+k) a \left((1+k) \varepsilon_0 - \frac{k a}{L} t \right)}{a t - \llbracket u \rrbracket} dt, \quad \text{si } t > t_0. \quad (8.143)$$

En prenant comme paramètres $L = 10$ mm, $S = 10$ mm², $E = 200\,000$ MPa, $\varepsilon_0 = 0.002$, $k = 1$, on obtient en résolvant numériquement cette équation différentielle la loi cohésive linéaire représentée sur la figure 8.4.

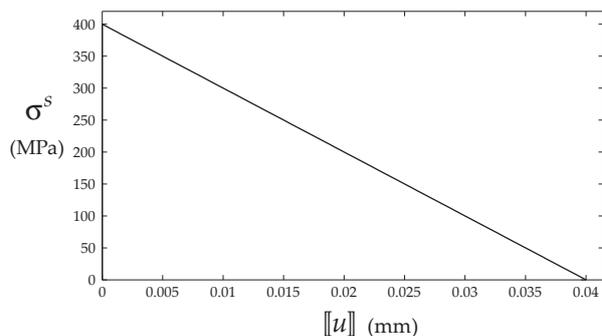


FIG. 8.4 – Loi cohésive équivalente

La figure 8.5 représente les énergies dissipées par le modèle de référence ($\check{\Phi} = \Phi_{\text{ref}}$) et par le modèle équivalent ($\hat{\Phi} = \Phi_{\text{eq}}$), et la figure 8.6 représente les énergies libres du modèle de référence ($\check{\Psi} = \Psi_{\text{ref}}$) et du modèle équivalent ($\hat{\Psi} = \Psi_{\text{eq}}$). Comme dans le cas endommageable, ces courbes se superposent bien, ce qui montre la validité du changement de modèle pour ce cas test.

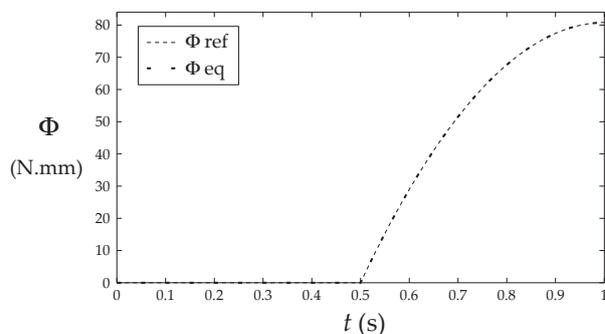


FIG. 8.5 – Comparaison des énergies dissipées

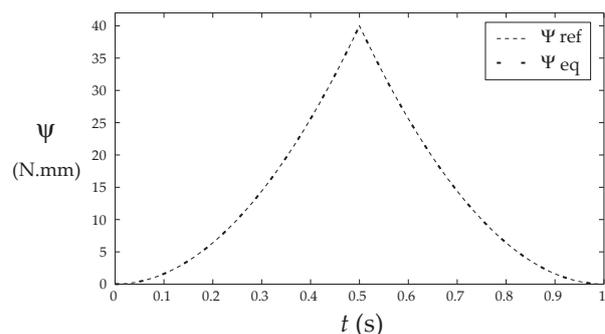


FIG. 8.6 – Comparaison des énergies libres

8.6 Construction numérique d'une loi cohésive

8.6.1 Méthodologie

L'objectif de cette section est de construire avec la méthode des éléments-finis une loi cohésive équivalente en adaptant la formulation faible développée dans la section 7.5 au cas d'un modèle de référence élasto-plastique

endommageable. Le calcul de la loi cohésive se fait toujours de manière incrémentale, et peut se représenter par le schéma 8.7.

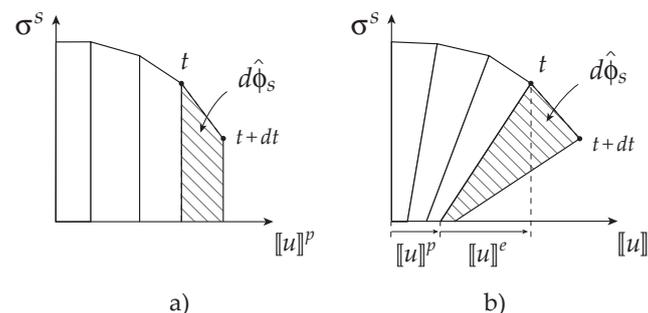


FIG. 8.7 – Calcul incrémental des lois cohésives dans le cas plastique (a) et élasto-plastique (b)

On étudie une poutre unidimensionnelle de longueur $L = 100 \text{ mm}$ et de section $S = 10 \text{ mm}^2$.

Problème de référence La géométrie de la poutre du problème de référence est la même que celle utilisée dans la section 7.5 pour l'implémentation numérique de la méthode dans le cas endommageable. Elle est rappelée sur la figure 8.8.

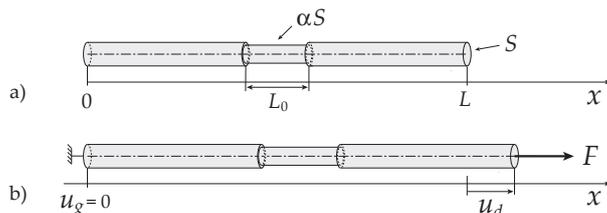


FIG. 8.8 – Poutre du problème de référence dans sa configuration initiale (a) et déformée (b)

Les matrices tangentes du problème sont calculées selon [de Borst *et al.*, 1999] avec la formulation présentée en annexe B. Comme dans le cas endommageable, une méthode de pilotage est utilisée pour imposer la déformation de l'élément central. Les incréments numériques d'énergie dissipée plastique $\Delta\check{\Phi}^p$ et de calcul $\Delta\check{\Phi}^c$ sont stockés pour pouvoir être utilisés lors de la résolution du problème équivalent.

Problème équivalent Pour le problème équivalent, on calcule à nouveau une section équivalente \hat{S} de telle sorte que l'énergie de déformation soit la même pour les deux modèles dans la première phase de comportement élastique-linéaire. La formulation faible développée en 7.5 a été modifiée pour construire la loi cohésive équivalente à partir du critère de changement de modèle défini par l'équation 8.106. Les seules informations transitant du modèle de référence vers le modèle équivalent sont cette fois les incréments d'énergie dissipée $\Delta\check{\Phi}^p$ et $\Delta\check{\Phi}^c$ et les pas de chargement issus de la résolution du problème de référence. La discontinuité est supposée apparaître au centre de la poutre, au point d'abscisse $x_c = \frac{L}{2}$ comme cela est représenté sur la figure 8.9.

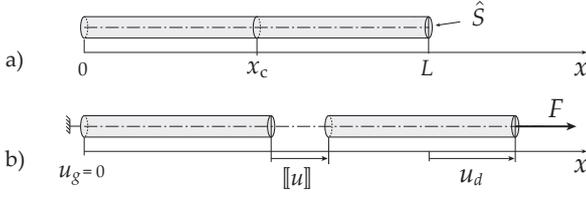


FIG. 8.9 – Poutre du problème équivalent dans sa configuration initiale (a) et déformée (b)

8.6.2 Formulation faible pour le problème équivalent

Énergie dissipée de calcul Les incréments d'énergie dissipée de calcul peuvent s'écrire, d'après 8.94,

$$d\hat{\Phi}_s^c = \frac{\hat{S}}{2} (\sigma^s d[[u]] - ([[u]] - [[u]]^p) d\sigma^s). \quad (8.144)$$

Cette énergie dissipée est imposée par le critère de changement de modèle 8.106 écrit sous la forme

$$d\check{\Phi}_{loc}^c - d\hat{\Phi}_s^c = 0. \quad (8.145)$$

En introduisant l'expression 8.144 dans cette équation et en prémultipliant par $\frac{2}{\sigma^s}$, on obtient

$$2 dv - \hat{S} d[[u]] + m d\sigma^s = 0, \quad (8.146)$$

avec,

$$m = \hat{S} \frac{[[u]] - [[u]]^p}{\sigma^s}, \quad (8.147)$$

$$dv = \frac{d\check{\Phi}_{loc}^c}{\sigma^s}. \quad (8.148)$$

Formulation faible On définit le domaine G par $G = [x_g, x_c[\cup]x_c, x_d]$ et l'espace \mathcal{F} des champs continus et dérivables définis sur G . La résolution est basée sur la formulation faible

$$\mathcal{A}(du^*) + \mathcal{B}(du^*) = \mathcal{C}(d\sigma^{s*}) + \mathcal{D}(du^*), \quad \forall (du^*, d\sigma^{s*}) \in (\mathcal{F}, \mathbb{R}), \quad (8.149)$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , et \mathcal{D} vérifiant

$$\mathcal{A}(du^*) = \hat{S} \int_G d\varepsilon^* \mathcal{L} d\varepsilon dx, \quad (8.150)$$

$$\mathcal{B}(du^*) = \hat{S} d[[u]]^* d\sigma^s, \quad (8.151)$$

$$\mathcal{C}(d\sigma^{s*}) = d\sigma^{s*} (2 dv - \hat{S} d[[u]] + m d\sigma^s), \quad (8.152)$$

$$\mathcal{D}(du^*) = du_d^* dF. \quad (8.153)$$

Discrétisation sur l'espace Les matrices A_d , B , et T , qui relient les variables cinétiques au vecteur des déplacements nodaux U , sont toujours définies par

$$u_d = A_d U, \quad (8.154)$$

$$\varepsilon(x) = B(x) U, \quad (8.155)$$

$$[[u]] = T U. \quad (8.156)$$

La contrainte cohésive σ^s , homogène sur la surface de la discontinuité, est égale à la contrainte cohésive nodale notée Σ :

$$\sigma^s = \Sigma. \quad (8.157)$$

La discrétisation de l'équation 8.149 donne, si le champ $d\sigma^{s*}$ est choisi nul,

$$dU^{*T} K dU + \hat{S} dU^{*T} T^T d\Sigma = dU^{*T} A_d^T dF, \quad \forall dU^* \in \bar{F}, \quad (8.158)$$

\bar{F} étant l'ensemble des vecteurs colonnes de dimension n_{no} (avec n_{no} le nombre de nœuds de la poutre) et K la matrice de raideur tangente du matériau continu. Si le champ du^* est choisi nul, l'équation 8.149 s'écrit sous forme discrétisée

$$d\Sigma^{*T} (2 dv - \hat{S} T dU + m d\Sigma), \quad \forall d\Sigma^* \in \mathbb{R}. \quad (8.159)$$

Les équations 8.158 et 8.159 donnent le système

$$\begin{bmatrix} K & \hat{S} T^T \\ \hat{S} T & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU \\ d\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^T dF \\ 2 dv \end{bmatrix}. \quad (8.160)$$

Énergie dissipée plastique Pour que le critère de changement de modèle 8.106 soit respecté, il faut également imposer la conservation de l'énergie dissipée par plasticité, soit :

$$d\hat{\Phi}_s^p = d\check{\Phi}_{loc}^p. \quad (8.161)$$

Ce critère, associé à l'équation 8.91, permet d'obtenir l'expression suivante de $d[[u]]^p$:

$$d[[u]]^p = \frac{d\check{\Phi}_{loc}^p}{\hat{S} \sigma^s}. \quad (8.162)$$

Discrétisation sur le temps Le système 8.160 est ensuite discrétisé en temps et résolu avec un algorithme de Newton-Raphson. La valeur de $[[u]]^p$ est calculée pour chaque piquet de temps grâce à l'équation 8.162 discrétisée en temps selon un schéma de Euler explicite. La valeur obtenue permet de calculer m au piquet de temps suivant avec l'équation 8.147. Le détail de la discrétisation en temps avec le calcul des résidus est présenté dans l'annexe C.

8.6.3 Exemple d'application

Modèle élasto-plastique endommageable étudié La fonction seuil de plasticité du modèle utilisé s'écrit

$$f(\tilde{\sigma}, p) = |\tilde{\sigma}| - R(p), \quad (8.163)$$

avec,

$$R(p) = E \left(\varepsilon_0 + \frac{k}{1-k} p \right), \quad (8.164)$$

k et ε_0 étant des paramètres du matériau. Le calcul de la variable d'endommagement se fait selon la loi exponentielle décroissante suivante :

$$D = 0, \quad \text{si } \kappa \leq \kappa_0, \quad (8.165)$$

$$D = 1 - \exp(-A(\kappa - \kappa_0)), \quad \text{si } \kappa > \kappa_0, \quad (8.166)$$

avec A et κ_0 des paramètres du matériau. La variable z est choisie égale à la déformation plastique cumulée :

$$z = p. \quad (8.167)$$

Pour le modèle de référence, on régularise z avec la méthode du second-gradient implicite :

$$\bar{z} - \bar{c} \nabla^2(\bar{z}) = z, \quad (8.168)$$

\bar{c} étant le paramètre de régularisation du matériau. La variable de mémoire κ est ensuite calculée à partir de la variable régularisée \bar{z}

$$\kappa = \max_t(\bar{z}). \quad (8.169)$$

Pour le modèle équivalent, κ est calculé directement à partir de z :

$$\kappa = \max_t(z). \quad (8.170)$$

Les calculs ont été réalisés avec les paramètres suivants : $E = 200\,000$ MPa , $\varepsilon_0 = 0.002$, $k = 0.2$, $\kappa_0 = 0.004$, $A = 800$, et $\bar{c} = 16$ mm². La figure 8.10 représente la courbe de traction du matériau continu.

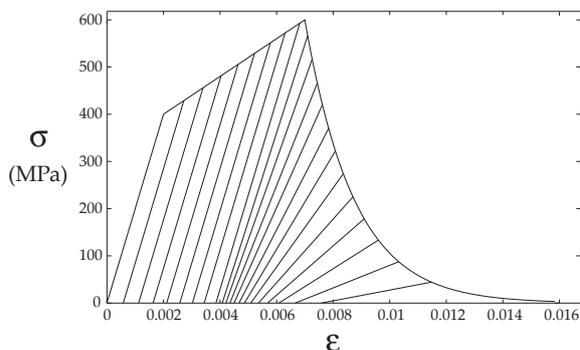


FIG. 8.10 – Courbe de traction du matériau continu

Problème de référence Le maillage de la poutre comporte 161 éléments quadratiques. La courbe effort-déplacement obtenue est présentée sur la figure 8.11.

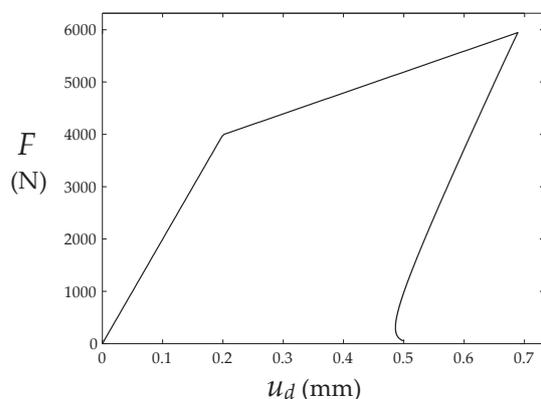


FIG. 8.11 – Courbe force-déplacement

Les figures 8.12, 8.13, 8.14, et 8.15 montrent les profils obtenus sur la longueur de la poutre pour la déformation ε , la déformation régularisée \bar{z} , la déformation plastique cumulée p , et l'endommagement D .

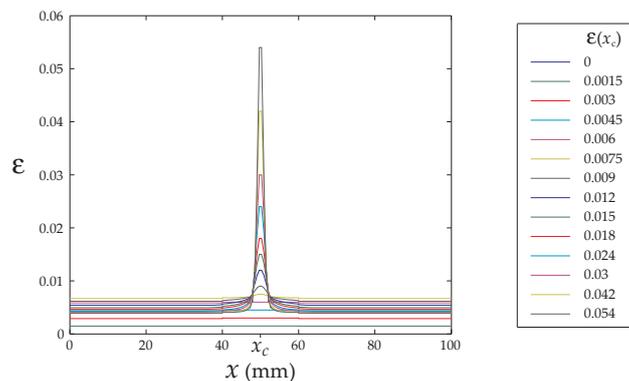


FIG. 8.12 – Profil de la déformation ε

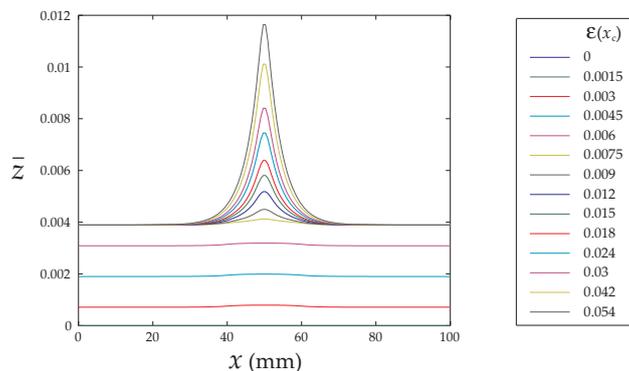


FIG. 8.13 – Profil de la variable régularisée \bar{z}

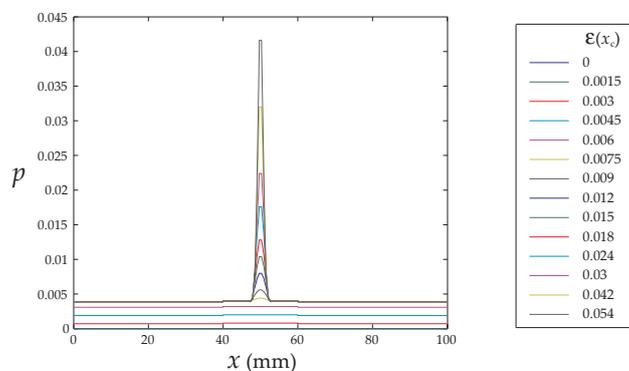


FIG. 8.14 – Profil de la déformation plastique cumulée p

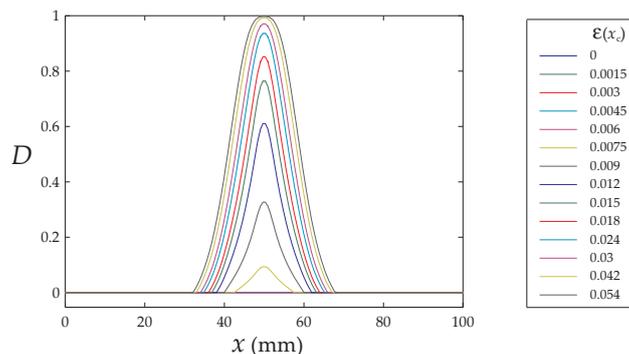


FIG. 8.15 – Profil de l'endommagement D

Problème équivalent La loi cohésive équivalente obtenue avec la méthode de changement de modèle est représentée sur la figure 8.16. La figure 8.17 représente les énergies dissipées par le modèle de référence ($\hat{\Phi} = \Phi_{\text{ref}}$) et par le modèle équivalent ($\hat{\Phi} = \Phi_{\text{eq}}$). Il est normal que les deux courbes se superposent parfaitement si le critère de changement de modèle est vérifié. Les énergies libres du modèle de référence ($\hat{\Psi} = \Psi_{\text{ref}}$) et du modèle équivalent ($\hat{\Phi} = \Psi_{\text{eq}}$) sont comparées sur la figure 8.18. Le fait que les deux courbes se superposent confirme que les autres termes du bilan énergétique sont également conservés par le changement de modèle (voir section 8.2).

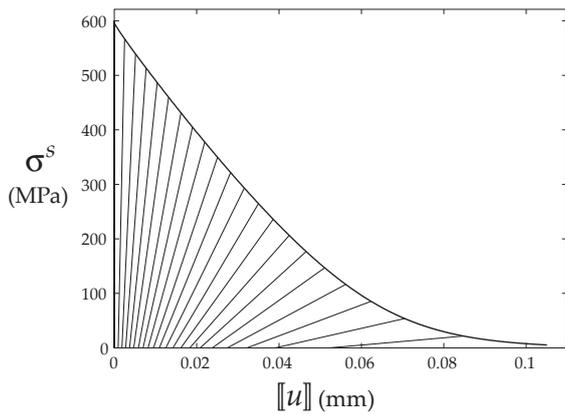


FIG. 8.16 – Courbe de traction du modèle cohésif

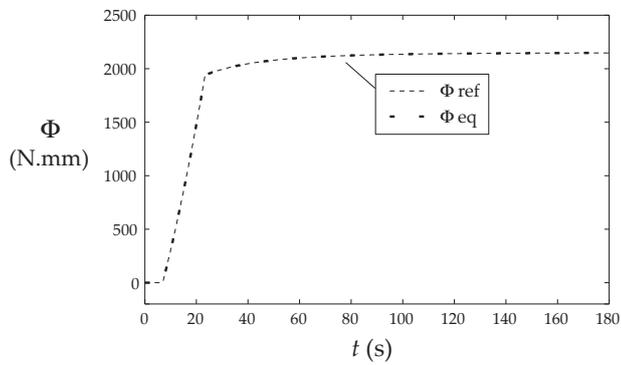


FIG. 8.17 – Énergies dissipées par les deux modèles

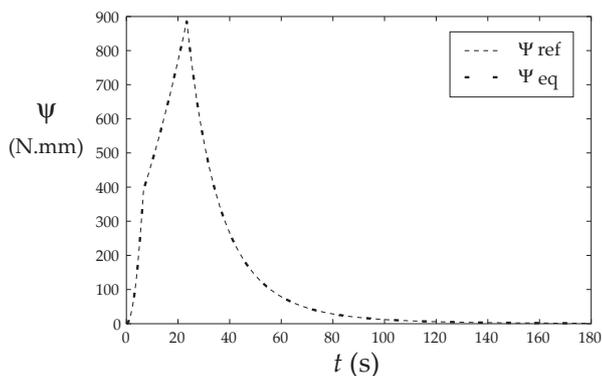


FIG. 8.18 – Énergies libres des deux modèles

Chap. 9

Vers une extension au cas multidimensionnel

On cherche dans cette partie à quelles conditions la méthode de changement de modèle peut être étendue au cas multidimensionnel si le modèle de référence est endommageable. On supposera dans un premier temps que la fissure est rectiligne et sollicitée en mode I, puis rectiligne et sollicitée en mode mixte. Enfin, on verra comment tenir compte de la courbure de la discontinuité dans l'écriture du critère de changement de modèle.

9.1 Changement de modèle en mode I

Décomposition du problème Le modèle de référence est sous-découpé en cylindres \mathcal{V} d'axes perpendiculaires à la surface de la fissure équivalente supposée connue et rectiligne (voir figure 9.1). Ces cylindres sont disposés symétriquement par rapport à la surface de la discontinuité. La demi-hauteur d'un cylindre est notée l_i et doit être suffisamment grande pour que le cylindre traverse complètement la zone d'endommagement localisé.

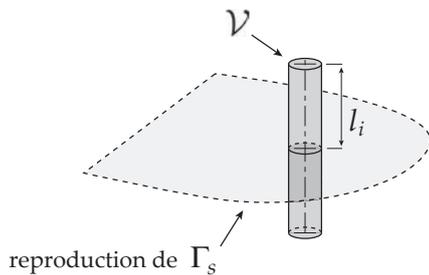


FIG. 9.1 – Définition d'un cylindre \mathcal{V} (modèle de référence)

Pour le modèle équivalent, l'intersection entre un cylindre \mathcal{V} et la surface de la discontinuité Γ_s est notée \mathcal{S} (voir figure 9.2) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{V} \cap \Gamma_s. \quad (9.1)$$

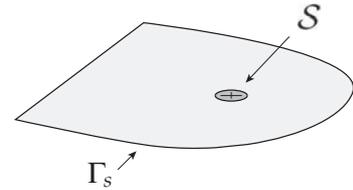


FIG. 9.2 – Définition de la surface \mathcal{S} (modèle équivalent)

Critère de changement de modèle Pour chaque cylindre, on impose l'égalité de l'énergie dissipée localisée du modèle de référence dans \mathcal{V} et de l'énergie dissipée par le modèle équivalent dans \mathcal{S} . Un incrément d'énergie dissipée localisée $(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}}$ d'un cylindre \mathcal{V} du modèle de référence est calculée à partir de l'énergie dissipée volumique $\check{\phi}$ et de l'indicateur d'endommagement localisé i_{loc} :

$$(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} i_{loc} d\check{\phi} d\mathcal{V}. \quad (9.2)$$

Cette intégrale peut également s'écrire

$$(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{S}} \left(\int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} d\check{\phi} dl \right) d\mathcal{S}. \quad (9.3)$$

Par ailleurs, un incrément d'énergie dissipée $\hat{\Phi}_{\mathcal{S}}$ sur la surface \mathcal{S} du modèle équivalent est exprimée en fonction d'un incrément d'énergie dissipée surfacique $\hat{\phi}_s$ de la manière suivante :

$$d\hat{\Phi}_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} d\hat{\phi}_s d\mathcal{S}. \quad (9.4)$$

Le critère de changement de modèle devra désormais satisfaire pour tout cylindre \mathcal{V}

$$d\hat{\Phi}_{\mathcal{S}} = (d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}}. \quad (9.5)$$

D'après les équations 9.3 et 9.4, une façon de garantir que cette équation est satisfaite est d'imposer le critère de changement de modèle

$$d\hat{\phi}_s = d\check{\phi}_s, \quad (9.6)$$

avec,

$$d\check{\phi}_s = \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} d\check{\phi} dl. \quad (9.7)$$

Remarque : on peut également obtenir ce critère en calculant les équations 9.5 et 9.2 divisées par la surface de \mathcal{S} lorsque celle-ci tend vers 0. On obtient alors

$$d\hat{\phi}_s = d\check{\phi}_s, \quad (9.8)$$

$$d\check{\phi}_s = \lim_{\substack{\text{surf}(\mathcal{S}) \\ \rightarrow 0}} \frac{1}{\text{surf}(\mathcal{S})} \int_{\mathcal{V}} i_{loc} d\check{\phi} dV = \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} d\check{\phi} dl. \quad (9.9)$$

Modèle cohésif Un incrément d'énergie dissipée surfacique s'écrit d'après l'équation 2.61

$$d\hat{\phi}_s = \frac{1}{2} (\sigma^s \cdot d[[u]] - [[u]] \cdot d\sigma^s). \quad (9.10)$$

Si la zone cohésive ne travaille qu'en mode I, cette équation se réduit à

$$d\hat{\phi}_s = \frac{1}{2} (\sigma_n^s d[[u]]_n - [[u]]_n d\sigma_n^s). \quad (9.11)$$

Implémentation numérique Les formulations faibles unidimensionnelles présentées dans les chapitres 7 et 8 peuvent être adaptées à un problème à plusieurs dimensions (voir annexe C). La formulation obtenue n'a pas été testée en 2D, on peut cependant s'attendre à des problèmes numériques car rien n'impose que la loi cohésive équivalente soit la même en chaque point de la discontinuité. Une solution pourrait être d'identifier la loi cohésive à partir d'une solution donnée par un modèle d'endommagement régularisé en régime stationnaire, car on pourrait alors ajouter l'hypothèse que la loi cohésive est identique en chaque point de la discontinuité.

9.2 Changement de modèle en mode mixte

Pour que le changement de modèle soit complètement défini, il faut identifier la contribution de chaque mode de rupture à l'incrément d'énergie dissipée devant être transmis à la zone cohésive. On rappelle pour les développements de cette section que les équations d'équilibre de l'interface obtenues au premier chapitre (équation 1.22) sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_n^s \\ \sigma_t^s \\ \sigma_b^s \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{nb} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}^+ = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \\ \sigma_{nb} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_s}^-. \quad (9.12)$$

9.2.1 Séparation de la contribution de chaque mode

Modèle de référence On suppose qu'il est possible de calculer séparément les dissipations surfaciques d'énergies dues aux modes I, II, et III, notées respectivement $d\hat{\phi}_s^n$, $d\hat{\phi}_s^t$, et $d\hat{\phi}_s^b$ pour le modèle de référence. Si la fissure équivalente ne travaille qu'en mode I, on s'attend à obtenir pour le modèle équivalent

$$\sigma_t^s = 0, \quad (9.13)$$

$$\sigma_b^s = 0. \quad (9.14)$$

On suppose que ces conditions aux limites se traduisent dans le modèle de référence par les équations

$$\sigma_{nt} = 0, \quad (9.15)$$

$$\sigma_{nb} = 0. \quad (9.16)$$

Si l'incrément d'énergie dissipée surfacique devant être transmis à la discontinuité dans la direction \underline{n} est noté $d\check{\phi}_s^n$, on peut écrire

$$d\check{\phi}_s^n = \frac{1}{2} \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} (\sigma_{nn} d\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{nn} d\sigma_{nn}) dl. \quad (9.17)$$

Le même raisonnement appliqué à une fissuration en mode II uniquement et en mode III uniquement, permet de calculer les incréments d'énergies dissipées surfaciques à transmettre à la discontinuité dans les directions \underline{t} et \underline{b} , notées respectivement $d\check{\phi}_s^t$ et $d\check{\phi}_s^b$:

$$d\check{\phi}_s^t = \frac{1}{2} \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} (\sigma_{nt} d\varepsilon_{nt} - \varepsilon_{nt} d\sigma_{nt}) dl, \quad (9.18)$$

$$d\check{\phi}_s^b = \frac{1}{2} \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} (\sigma_{nb} d\varepsilon_{nb} - \varepsilon_{nb} d\sigma_{nb}) dl. \quad (9.19)$$

Modèle équivalent Les incréments d'énergie dissipée surfacique de la discontinuité sont également décomposés en trois termes $\hat{\phi}_s^n$, $\hat{\phi}_s^t$, et $\hat{\phi}_s^b$:

$$d\hat{\phi}_s = d\hat{\phi}_s^n + d\hat{\phi}_s^t + d\hat{\phi}_s^b, \quad (9.20)$$

avec,

$$d\hat{\phi}_s^n = \frac{1}{2} (\sigma_n^s d[[u]]_n - [[u]]_n d\sigma_n^s), \quad (9.21)$$

$$d\hat{\phi}_s^t = \frac{1}{2} (\sigma_t^s d[[u]]_t - [[u]]_t d\sigma_t^s), \quad (9.22)$$

$$d\hat{\phi}_s^b = \frac{1}{2} (\sigma_b^s d[[u]]_b - [[u]]_b d\sigma_b^s). \quad (9.23)$$

Critère de changement de modèle Le critère de changement de modèle devient

$$\begin{bmatrix} d\hat{\phi}_s^n \\ d\hat{\phi}_s^t \\ d\hat{\phi}_s^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\phi}_s^n \\ d\check{\phi}_s^t \\ d\check{\phi}_s^b \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

9.2.2 Capacité d'une fissure à modéliser l'endommagement

On cherche dans cette partie à voir si une fissure est réellement capable de remplacer un état d'endommagement en ayant le même comportement énergétique. On se place d'abord dans le cas bidimensionnel, puis dans le cas tridimensionnel. Bien que la fissure soit chargée en mode mixte, on considère toujours qu'elle est rectiligne.

Cas bidimensionnel Dans le cas bidimensionnel, on peut remarquer que la somme de $d\hat{\phi}_s^n$ et $d\hat{\phi}_s^t$ n'est pas égale à $d\hat{\phi}_s^*$. Si on note $d\hat{\phi}_s^*$ le terme manquant, on a

$$d\hat{\phi}_s = d\hat{\phi}_s^n + d\hat{\phi}_s^t + d\hat{\phi}_s^*, \quad (9.25)$$

avec,

$$d\hat{\phi}_s^* = \int_{-l_i}^{l_i} (\sigma_{tt}^* d\varepsilon_{tt}^* - \varepsilon_{tt}^* d\sigma_{tt}^*) dl. \quad (9.26)$$

L'énergie dissipée en traction dans la direction \underline{t} n'est donc pas transférable à la fissure équivalente (voir figure 9.3).

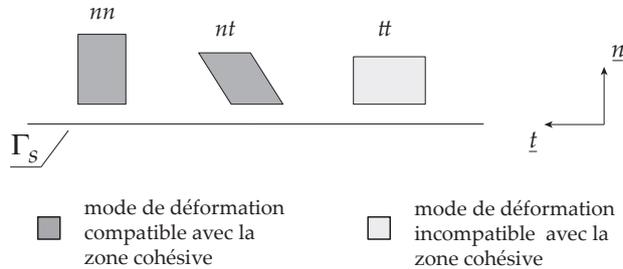


FIG. 9.3 – Modes de déformation compatibles ou non avec la discontinuité

Cas tridimensionnel Dans le cas tridimensionnel, le terme manquant $d\phi_s^*$ vérifie :

$$d\phi_s = d\phi_s^n + d\phi_s^t + d\phi_s^b + d\phi_s^*, \quad (9.27)$$

avec,

$$d\phi_s^* = \int_{-l_i}^{l_i} (\boldsymbol{\sigma}^{*T} d\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} d\boldsymbol{\sigma}^*) dl, \quad (9.28)$$

et,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tb} \\ \sigma_{tb} & \sigma_{bb} \end{bmatrix}, \quad (9.29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{tt} & \varepsilon_{tb} \\ \varepsilon_{tb} & \varepsilon_{bb} \end{bmatrix}. \quad (9.30)$$

Le terme $d\phi_s^*$ permet d'identifier les modes de déformation ne pouvant pas être pris en compte par une discontinuité : il s'agit des modes de traction dans les directions \underline{t} et \underline{b} et du mode de cisaillement dans le plan $(\underline{t}, \underline{b})$. Ces modes sont représentés sur la figure 9.4.

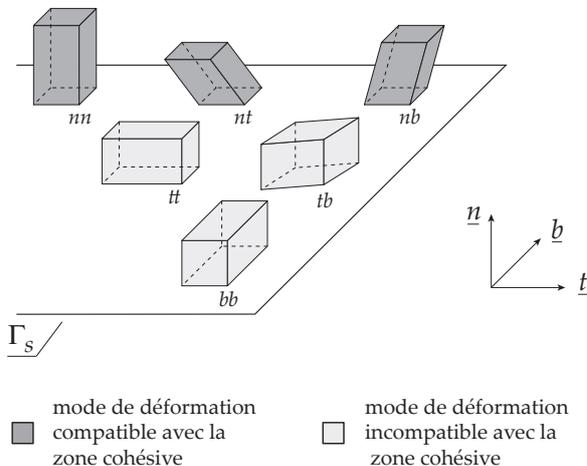


FIG. 9.4 – Modes de déformation compatibles ou non avec la discontinuité

Cas d'un endommagement anisotrope Pour empêcher le modèle d'endommagement de dissiper de l'énergie par les modes de déformation incompatibles avec la discontinuité, on pourrait imaginer d'empêcher l'endommagement localisé du modèle de référence pour ces modes de déformation. Ceci étant impossible avec un modèle d'endommagement isotrope, il pourrait être intéressant d'utiliser un modèle de référence comportant un endommagement localisé anisotrope. Cette anisotropie pourrait également être utilisée pour obtenir la direction de la fissure équivalente lors du changement de modèle.

9.3 Cas d'une fissure courbe

Dans cette section, on cherche à tenir compte de la courbure de la discontinuité dans l'écriture du critère de changement de modèle. Pour cela, on considère une fissure courbe pour laquelle les volumes d'intégration \mathcal{V} sont construits de telle sorte que leurs bords soient perpendiculaires à la surface de la fissure (voir figure 9.5). Une section d'intégration S_l est paramétrée par son excentration par rapport à la discontinuité notée l . Cette excentration correspond à la distance signée définie dans le chapitre 6 (équation 6.18), qui est négative si S_l appartient à Ω^- et positive si S_l appartient à Ω^+ . La surface S_l est confondue avec la surface \mathcal{S} si $l = 0$. Pour déterminer l'aire des surfaces S_l , on utilise les rayons de courbures R_t et R_b correspondant aux rotations autour de \underline{t} et \underline{b} . Ces grandeurs sont représentées sur la figure 9.5 dans un cas où R_t est positif et R_b est négatif.

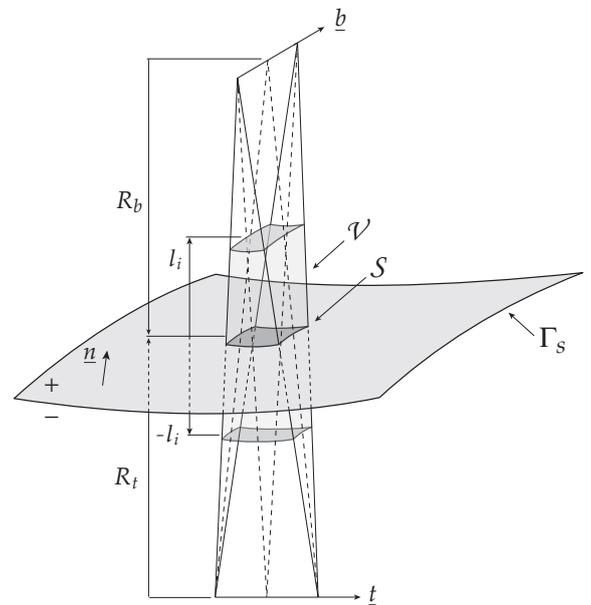


FIG. 9.5 – Géométrie et notations dans le cas d'une fissure courbe

En tenant compte de la courbure de la discontinuité, l'équation 9.3 devient

$$(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}} = \int_{-l_i}^{l_i} \left(\int_{S_l} i_{loc} d\check{\phi} dS_l \right) dl. \quad (9.31)$$

Dans cette intégrale, on réalise un changement de variable pour se ramener à la section de référence \mathcal{S} . La surface d'intégration $d\mathcal{S}_l$ est liée à la surface $d\mathcal{S}$ par la relation

$$d\mathcal{S}_l = J_l d\mathcal{S}, \quad (9.32)$$

avec,

$$J_l = \frac{R_b + l}{R_b} \frac{R_t + l}{R_t}. \quad (9.33)$$

On a donc l'expression suivante de $(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}}$:

$$(d\check{\Phi}_{loc})_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{S}} \left(\int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} d\check{\phi} J_l dl \right) d\mathcal{S}. \quad (9.34)$$

Si on fait tendre la surface de \mathcal{S} vers 0, on obtient

$$d\check{\phi}_s = \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} d\check{\phi} J_l dl. \quad (9.35)$$

À partir de cette équation, on peut adapter le calcul des équations 9.17, 9.18, et 9.19 pour tenir compte de la courbure de la discontinuité.

Conclusion

Bilan Dans cette partie, une méthode a été développée pour construire un modèle cohésif à partir d'un modèle continu en se basant sur la notion de fissure équivalente de Mazars. La méthode a d'abord été développée pour construire une loi cohésive énergétiquement équivalente à un modèle d'endommagement, ce qui permet de retrouver le même comportement global de la structure qu'avec le modèle d'endommagement de référence. L'implémentation numérique de la méthode se fait en deux temps : un premier calcul utilisant le modèle de référence permet de déterminer l'énergie dissipée à transmettre à la zone cohésive, le modèle équivalent est ensuite construit incrémentalement en imposant à chaque pas de temps la quantité d'énergie dissipée dans la zone cohésive. Les seules informations transitant du modèle de référence vers le modèle équivalent sont les incréments d'énergie dissipée et les incréments du facteur de chargement durant chaque pas de temps. La méthode a ensuite été étendue aux modèles pouvant présenter de la plasticité en plus de l'endommagement. Il faut alors faire la distinction entre l'énergie dissipée par plasticité et l'énergie dissipée par endommagement, et imposer séparément ces deux quantités lors du changement de modèle.

Utilisation de la méthode La méthode développée peut être utilisée dans les deux cas de figure suivants :

- pour identifier une loi cohésive en deux temps. Les lois cohésives sont souvent une modélisation assez éloignée du comportement réel du matériau car tous les phénomènes dissipatifs adoucissants sont supposés être condensés sur la surface de la discontinuité. Les lois cohésives sont donc souvent identifiées en utilisant des mesures réalisées loin de la zone de rupture. Par exemple, des courbes de résistance (courbes-R) sont utilisées dans [Cornec *et al.*, 2003] et [Sørensen et Jacobsen, 2003] pour identifier des paramètres de zones cohésives. Un modèle de second-gradient peut lui être plus simple à identifier en utilisant des grandeurs locales. Par exemple, dans [Iacono *et al.*, 2008] la longueur caractéristique est obtenue par une observation de la largeur de la zone endommagée. Il peut donc être intéressant d'identifier une loi cohésive en 2 temps, en commençant par identifier un modèle continu si celui-ci est plus proche des phénomènes observés ;
- pour identifier une loi cohésive à partir d'un modèle d'endommagement déjà connu sans avoir à réaliser de nouveaux essais.

Dans les deux cas, le modèle cohésif obtenu est moins coûteux en temps de calcul que le modèle régularisé ayant servi de modèle de référence, et peut donc être utilisé sur des cas test plus complexes.

Perspectives La méthode pourrait être utilisée pour étudier la relation entre une loi cohésive et le taux de triaxialité des contraintes au voisinage de la discontinuité. Ceci pourrait être étudié en appliquant une pression p sur le bord de la poutre servant à identifier la loi cohésive, comme cela est représenté sur la figure 9.6.

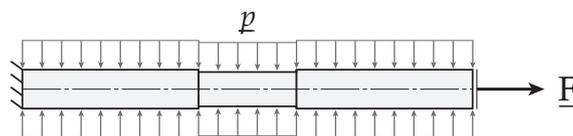


FIG. 9.6 – Cas test permettant d'étudier l'influence de la triaxialité

Pour étudier l'influence d'une sollicitation de la loi cohésive en mode mixte, il faudrait implémenter la méthode sur des cas test bidimensionnels. De notre point de vu, ceci serait envisageable après avoir apporté les modifications suivantes :

- identifier la loi cohésive à partir d'une solution du modèle de référence obtenue en régime stationnaire. On pourrait ainsi supposer que la loi cohésive est la même en tout point de la discontinuité ;
- utiliser comme modèle de référence un modèle d'endommagement pour lequel l'endommagement localisé serait anisotrope. Le comportement du modèle de référence serait alors plus proche d'un modèle discontinu et toute l'énergie dissipée par le modèle de référence pourrait être transmise à la discontinuité. De plus, l'orientation de l'anisotropie pourrait être utilisée pour obtenir la direction de la discontinuité du modèle équivalent.

Troisième partie

Implémentation d'une loi cohésive extrinsèque et transition vers un modèle de Griffith

Introduction

Intérêt des modèles cohésifs Cette partie porte sur l'utilisation des modèles cohésifs dans les calculs de rupture avec la méthode des éléments-finis. Si on compare ces modèles à l'utilisation de la théorie de Griffith, les principaux avantages sont les suivants :

- les deux hypothèses de la théorie de Griffith (zone d'élaboration petite devant la taille de la structure et propagation stationnaire) ne sont plus nécessairement vérifiées ;
- le profil de la discontinuité est plus proche de la réalité (bout pointu et non arrondi) ;
- les champs de contraintes et de déformations ne sont pas singuliers en pointe de fissure, ce qui permet d'utiliser un modèle de comportement non-linéaire pour le matériau entourant la fissure ;
- il est possible de faire apparaître une fissure dans un matériau initialement sain.

Si on compare les modèles cohésifs aux modèles d'endommagement régularisés, les principaux avantages sont les suivants :

- les modèles cohésifs peuvent jouer le rôle de limiteur de localisation sans poser de problèmes théoriques majeurs. Les modèles régularisés gardent eux quelques points inexplicables (hypothèse de l'état local non vérifiée pour les modèles non-locaux, condition aux limites sur la variable régularisée non démontrée pour les modèles de second-gradient, détermination du temps caractéristique parfois hasardeuse pour les modèles à effet-retard) ;
- les modèles cohésifs sont moins coûteux en temps de calcul, notamment du fait que les maillages utilisés peuvent être plus grossiers que pour les modèles continus régularisés. Ils sont mieux adaptés à la puissance des ordinateurs actuels pour des calculs complexes.

Enfin, on peut signaler que les modèles cohésifs peuvent être utilisés pour un large éventail de matériaux (fragiles, quasi-fragiles, ductiles). Tous ces avantages font que les modèles cohésifs sont fréquemment utilisés pour les calculs de rupture.

Difficultés L'implémentation numérique des modèles cohésifs présente pourtant quelques difficultés :

- d'abord, le traitement de la rigidité initiale infinie lorsqu'une loi cohésive extrinsèque est utilisée ;
- ensuite, la simulation de la propagation d'une fissure dont le trajet n'est pas connu par avance ;
- enfin, le problème du pilotage du calcul, nécessaire en quasi-statique lorsque le comportement global de la structure est instable.

Intérêt des lois extrinsèques Les lois extrinsèques, bien que plus dures à implémenter, présentent les avantages suivants :

- elles sont adoucissantes dès l'initiation de la fissure, ce qui est préférable d'un point de vue théorique (voir partie I) ;
- d'un point de vue numérique, les lois extrinsèques n'ajoutent pas de souplesse à la structure tant que la zone cohésive n'est pas initiée ;
- les lois extrinsèques permettent généralement d'obtenir des schémas numériques plus stables que les lois intrinsèques. Par exemple, dans la thèse de Jérôme Laverne [Laverne, 2004], une loi cohésive intrinsèque est d'abord implémentée avec un éléments cohésif classique, ce qui conduit à des oscillations dans la réponse globale de la structure (courbe effort-déplacement) lorsque la zone cohésive est initiée. Ce problème numérique est ensuite résolu avec l'utilisation d'un élément à discontinuité interne permettant d'implémenter une loi cohésive extrinsèque. Dans [Kubair et Geubelle, 2003], une loi cohésive intrinsèque et une loi cohésive extrinsèque sont comparées pour un problème de dynamique. L'implémentation numérique se révèle également plus stable avec la loi extrinsèque qu'avec la loi intrinsèque.

Dans cette partie, deux formulations développées pendant la thèse et compatibles avec l'utilisation de lois extrinsèques sont présentées. Outre les avantages propres à l'utilisation de ce type de lois, ceci permettra de disposer de formulations compatibles avec les lois cohésives obtenues en utilisant la méthode de changement de modèle développée dans la partie II. Les trajets de fissures seront supposés connus par avance et une méthode de pilotage sera utilisée pour traiter les cas d'instabilités globales de la structure (voir annexe E).

Plan de la partie Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur l'implémentation numérique des lois cohésives extrinsèques avec la méthode des éléments-finis. Dans le deuxième chapitre, on donne les équations locales du problème mécanique sous forme matricielle en vue de l'implémentation numérique, et on détaille les équations donnant le comportement du modèle cohésif utilisé. On présente dans le chapitre suivant une formulation ayant comme champs inconnus celui de déplacement pour le matériau continu et celui de contrainte cohésive pour l'interface. Cette formulation permet d'implémenter une loi extrinsèque en utilisant l'opérateur tangent de souplesse de l'interface

cohésive à la place de l'opérateur tangent de rigidité habituellement utilisé. Elle ne permet par contre pas de rompre complètement les éléments cohésifs à moins de les supprimer au fur et à mesure qu'ils se cassent. Pour résoudre ce problème, une deuxième formulation est introduite dans le chapitre 13 pour laquelle un changement de variable permet de remplacer la contrainte cohésive par une contrainte cohésive modifiée dans les équations de comportement de l'interface. La loi cohésive est alors remplacée par une loi croissante reliant une contrainte cohésive équivalente modifiée au saut de déplacement de la discontinuité. Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la possibilité d'une transition d'un modèle cohésif vers un modèle de Griffith pendant un calcul. L'obtention du modèle de Griffith ne pose pas de problème avec la plupart des modèles cohésifs car l'unique paramètre G_c du modèle de Griffith peut généralement s'obtenir en calculant l'aire sous la loi cohésive. Il faut par contre savoir à quelle condition ce changement de modèle est possible, et où placer la pointe de la fissure de Griffith équivalente au moment du changement de modèle.

Chap. 10

Étude bibliographique

Une première solution pour implémenter un modèle cohésif est de placer des éléments cohésifs entre certains éléments de volume après avoir dédoublé les nœuds correspondants du maillage. Cette méthode est surtout utilisée lorsque le trajet de la fissure est connu par avance, en construisant le maillage de telle sorte que le bord des éléments de volume épouse la forme de la discontinuité. On présentera d'abord les formulations utilisant cette méthode, puis d'autres méthodes permettant de traiter les cas pour lesquels le trajet de fissuration n'est pas connu par avance. On se limitera pour cette étude bibliographique aux solutions basées sur la méthode des éléments-finis, bien que d'autres méthodes numériques puissent être utilisées.

10.1 Trajet de fissure connu par avance

Formulations « classiques » On appellera ainsi les formulations pour lesquelles les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds du maillage. Les éléments cohésifs ainsi créés sont similaires à des éléments-finis de volume, la loi cohésive remplaçant la loi de comportement du matériau continu. Ce type de formulation a été d'abord utilisé dans [Hillerborg *et al.*, 1976] et [Pettersson, 1981] pour un matériau quasi-fragile, puis dans [Needleman, 1987] pour un problème de décohésion entre une inclusion rigide et une matrice élastoplastique durcissante dans un matériau ayant une structure périodique (voir figure 10.1).

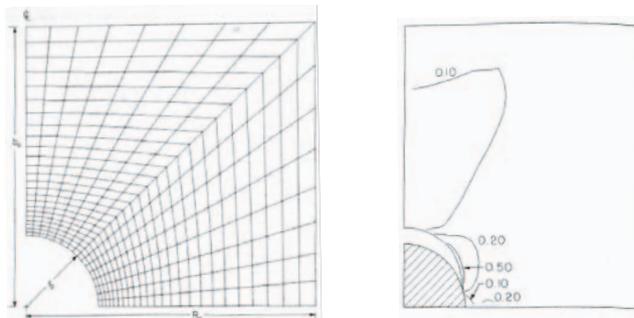


FIG. 10.1 – Maillage et résultats obtenus (déformation plastique cumulée) dans [Needleman, 1987]

Si on note \mathcal{F} l'espace des champs de déplacements

continus et réguliers définis sur Ω , ce type de formulation peut s'écrire à partir de l'équation faible suivante :

$$\mathcal{A}(\underline{u}^*) + \mathcal{B}(\underline{u}^*) = \mathcal{D}(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{F}, \quad (10.1)$$

avec,

$$\mathcal{A}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{\nabla}^s(\underline{u}^*) \cdot \underline{\tilde{K}} \cdot \underline{\nabla}^s(\underline{u}) d\Omega, \quad (10.2)$$

$$\mathcal{B}(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma_s} \llbracket \underline{u} \rrbracket^* \cdot \underline{K}^s \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket d\Gamma_s, \quad (10.3)$$

$$\mathcal{D}(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d d\Gamma, \quad (10.4)$$

où $\llbracket \underline{u} \rrbracket^*$ et $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ sont les sauts de déplacements associés à \underline{u}^* et \underline{u} , $\underline{\tilde{K}}$ et \underline{K}^s les opérateurs de rigidité du matériau continu et de la zone cohésive, et \underline{F}_d les efforts extérieurs appliqués sur Γ . Un inconvénient de ces formulations est qu'elles ne permettent pas d'implémenter les lois cohésives ayant une raideur initiale infinie (lois extrinsèques). Une solution est d'imposer l'adhérence avant l'initiation de la zone cohésive par pénalisation en donnant une raideur initiale très grande à la zone cohésive. On peut observer des problèmes de convergence si la raideur initiale est choisie trop grande [Laverne, 2004], ou une diminution significative de la raideur globale de la structure si elle est choisie trop petite. Dans [Schellekens et de Borst, 1993], une étude des modes propres montre qu'il vaut mieux utiliser des points de Newton-Cotes que des points de Gauss sur la discontinuité avec ce type de formulation, afin de ne pas observer d'oscillations parasites des contraintes cohésives.

Formulations « adaptatives » On appellera ainsi les formulations s'écrivant de la même manière que les précédentes mais pour lesquelles les éléments cohésifs sont introduits au fur et à mesure que la zone cohésive est initiée. Ceci permet de préserver la rigidité de l'interface avant l'initiation de la zone cohésive mais peut poser quelques difficultés :

- d'abord le test du critère d'initiation de la zone cohésive nécessite de pouvoir évaluer les contraintes entre les éléments du maillage. Ces contraintes peuvent être estimées à partir des valeurs aux points d'intégration en utilisant des techniques de projection ;

- ensuite, il faut changer la discrétisation pendant le calcul au fur et à mesure que les nœuds sont dédoublés.

Formulations mixtes Plusieurs formulations mixtes (voir annexe F) ont été utilisées pour l'implémentation de modèles cohésifs. Dans [Lorentz, 2008], une loi cohésive est implémentée en utilisant une formulation à 3 champs avec un multiplicateur de Lagrange augmenté dont les champs inconnus sont

- le déplacement \underline{u} pour la partie continue ;
- la contrainte cohésive $\underline{\sigma}^s$ et le saut de déplacement $\underline{\delta}$ pour la discontinuité.

On note toujours \mathcal{F} l'espace des champs de vecteurs continus et réguliers définis sur Ω , et on note \mathcal{G} l'espace des champs de vecteurs continus définis sur Γ_s . Cette formulation faible peut s'écrire

$$\mathcal{A}_1(\underline{u}^*) + \mathcal{A}_2(\underline{u}^*) + \mathcal{B}(\underline{\delta}^*) + \mathcal{C}(\underline{\sigma}^{s*}) = \mathcal{D}(\underline{u}^*),$$

$$\forall (\underline{u}^*, \underline{\delta}^*, \underline{\sigma}^{s*}) \in (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{G}), \quad (10.5)$$

avec,

$$\mathcal{A}_1(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{\nabla}^s(\underline{u}^*) : \underline{\tilde{K}} : \underline{\nabla}^s(\underline{u}^*) d\Omega, \quad (10.6)$$

$$\mathcal{A}_2(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma_s} \llbracket \underline{u} \rrbracket^* \cdot (\underline{\sigma}^s + r(\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta})) d\Gamma_s, \quad (10.7)$$

$$\mathcal{B}(\underline{\delta}^*) = \int_{\Gamma_s} \underline{\delta}^* \cdot (\underline{\tau} - \underline{\sigma}^s - r(\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta})) d\Gamma_s, \quad (10.8)$$

$$\mathcal{C}(\underline{\sigma}^{s*}) = \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^{s*} \cdot (\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}) d\Gamma_s, \quad (10.9)$$

$$\mathcal{D}(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d d\Gamma, \quad (10.10)$$

$$\text{et } \underline{\tau} \text{ satisfaisant la loi de comportement.} \quad (10.11)$$

$\underline{\delta}$ est le saut de déplacement vu par la zone cohésive, $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ le saut de déplacement vu par la partie continue du domaine (et donc relié à \underline{u}), r est un coefficient numérique de pénalisation, et $\underline{\tau}$ la contrainte vue par la zone cohésive, qui est ensuite éliminée de la formulation par condensation statique.

Il est également possible d'implémenter une loi cohésive en utilisant une formulation mixte de Hellinger-Reissner comme cela est fait dans [Bruggi et Venini, 2007] et [Bruggi et Venini, 2009]. Il s'agit d'une formulation à 2 champs dont les champs inconnus sont les déplacements \underline{u} et les contraintes $\underline{\sigma}$ sur toute la partie continue du domaine. Si \mathcal{J} est l'ensemble des tenseurs symétriques d'ordre 2 définis sur Ω , cette formulation s'écrit

$$\mathcal{A}_1(\underline{\sigma}^*) + \mathcal{A}_2(\underline{\sigma}^*) + \mathcal{B}(\underline{u}^*) = \mathcal{D}(\underline{\sigma}^*),$$

$$\forall (\underline{\sigma}^*, \underline{u}^*) \in (\mathcal{J}, \mathcal{F}), \quad (10.12)$$

avec,

$$\mathcal{A}_1(\underline{\sigma}^*) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{S} : \underline{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\nabla}(\underline{\sigma}^*) \cdot \underline{u} d\Omega, \quad (10.13)$$

$$\mathcal{A}_2(\underline{\sigma}^*) = \int_{\Gamma_s} (\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{S}^s \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) d\Gamma_s, \quad (10.14)$$

$$\mathcal{B}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}(\underline{\sigma}) d\Omega, \quad (10.15)$$

$$\mathcal{D}(\underline{\sigma}^*) = \int_{\Gamma} (\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}_d d\Gamma, \quad (10.16)$$

avec \underline{S} l'opérateur de souplesse en un point du matériau continu et \underline{S}^s l'opérateur de souplesse de la loi cohésive. La loi cohésive est introduite dans la formulation en ajoutant le terme \mathcal{A}_2 à la formulation classique de Hellinger-Reissner.

Ces deux formulations mixtes ont été utilisées pour implémenter des lois cohésives extrinsèques de manière satisfaisante, il est cependant important de choisir une discrétisation telle que la condition *inf-sup* propre aux formulations mixtes soit satisfaite. Dans le cas de la première formulation avec lagrangien augmenté, il faut que les éléments de volume soient d'un ordre supérieurs aux éléments d'interface. Dans le cas de la formulation de Hellinger-Reissner modifiée, un élément de Johnson-Mercier [Johnson et Mercier, 1978] est utilisé dans [Bruggi et Venini, 2009] pour garantir la stabilité de la formulation.

Remarque : le problème posé par l'implémentation d'une loi cohésive extrinsèque est similaire à celui posé par le traitement des conditions de contact entre les deux bords d'une discontinuité, il y a donc des ressemblances entre les formulations utilisées pour ces deux types de problèmes. Ainsi, les formulations « classiques » correspondent aux méthodes traitant le contact entre les deux bords de la discontinuité par pénalisation, et des formulations mixtes avec lagrangien augmenté peuvent également être utilisées pour imposer les conditions de contact [Alart et Curnier, 1991].

10.2 Trajet de fissure *a priori* inconnu

On présente dans cette section des méthodes ayant été développées pour traiter les cas où le trajet de la fissure n'est pas connu par avance.

10.2.1 Éléments cohésifs

Il est possible de placer des éléments cohésifs entre tous les éléments du maillage, comme cela est fait dans [Xu et Needleman, 1994] pour un problème de dynamique (voir figure 10.2). Ceci permet de donner une certaine liberté au trajet de fissure bien que celui-ci soit toujours influencé par le maillage.

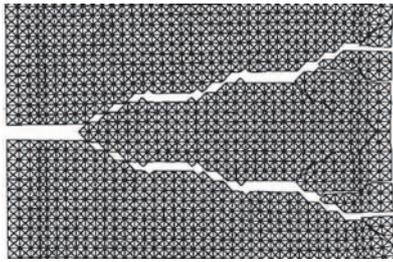


FIG. 10.2 – Propagation d'une fissure entre des éléments-finis [Xu et Needleman, 1994]

10.2.2 Éléments-finis étendus

La méthode des éléments-finis étendus (X-FEM) [Belytschko et Black, 1999, Moës *et al.*, 1999] permet d'ajouter des fonctions de forme discontinues à certains éléments du maillage pour prendre en compte le passage de la discontinuité. Elle entre dans le cadre plus général des méthodes basées sur la *partition de l'unité* (PUM) [Melenk et Babuška, 1996, Babuška et Melenk, 1997]. Dans cette section, on introduit d'abord la méthode X-FEM à partir de la méthode de partition de l'unité, puis on présente les différents types d'éléments pouvant être construits avec cette méthode.

X-FEM et méthode de partition de l'unité On considère que le domaine est maillé et subdivisé en un ensemble de sous-domaines notés Ω_{PUM} se recouvrant les uns les autres. Ces sous-domaines sont centrés sur un nœud du maillage bien que cela ne soit pas obligatoire (voir figure 10.3). Sur chaque sous-domaine, une fonction \underline{w}_{PUM} donnant une bonne approximation de la solution du problème mécanique est définie.

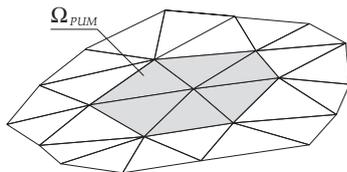


FIG. 10.3 – Un sous-domaine centré sur un nœud du maillage

La méthode partition de l'unité revient à supposer que, sur chaque élément Ω_{el} , le champ de déplacement est approché de la manière suivante :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \underline{w}_i(\underline{x}), \quad (10.17)$$

avec n le nombre de nœuds de l'élément considéré, \underline{w}_i la fonction \underline{w}_{PUM} du sous-domaine centré sur le i^e nœud de l'élément, et N_i les fonctions de forme de l'élément formant une partition de l'unité :

$$\sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) = 1, \quad \text{sur } \Omega_{el}. \quad (10.18)$$

Remarque : la contribution d'une fonction \underline{w}_{PUM} au champ de déplacement global est égale au produit de cette fonction par la fonction chapeau représentée sur la figure 10.4, obtenue en ajoutant les fonctions N_i correspondant au nœud central du sous-domaine. On peut remarquer que cette fonction est continue et de valeur nulle sur le bord du sous-domaine. Le champ de déplacement global obtenu avec la méthode de partition de l'unité est donc continu si les fonctions \underline{w}_{PUM} le sont également.

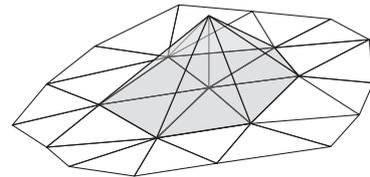


FIG. 10.4 – Fonctions de forme des éléments intervenant pour un sous-domaine

Intérêt D'après [Melenk et Babuška, 1996, Babuška et Melenk, 1997], si l'erreur sur les fonctions \underline{w}_i est bornée, alors l'erreur sur la fonction \underline{u} est également, ce qui suffit à garantir la bonne convergence des calculs numériques. On peut illustrer cette propriété de la méthode de partition de l'unité en supposant que, pour chaque sous-domaine, la fonction \underline{w}_i est égale à la solution exacte du problème notée \underline{u}^{th} :

$$\underline{w}_i = \underline{u}^{th}. \quad (10.19)$$

L'équation 10.18 permet alors de montrer que le champ \underline{u} obtenu avec l'équation 10.17 est égal au champ théorique \underline{u}^{th} :

$$\underline{u} = \underline{u}^{th}. \quad (10.20)$$

Une formulation éléments-finis basée sur une approximation du champ de déplacement vérifiant la partition de l'unité est alors sensée donner la solution exacte du problème mécanique.

On peut introduire la méthode X-FEM à partir de l'équation 10.17 en supposant que, pour chaque sous-domaine, le champ $\underline{w}_i(\underline{x})$ vérifie

$$\underline{w}_i(\underline{x}) = \sum_{j \in J_i} v_j^i(\underline{x}) \underline{A}_j^i, \quad (10.21)$$

v_j^i étant un ensemble de fonctions additionnelles permettant de générer une solution approchée du champ de déplacement du problème mécanique et \underline{A}_j^i les degrés de libertés associés à ces fonctions. Cette équation introduite dans l'équation 10.17 donne le champ de déplacement suivant :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in J_i} v_j^i(\underline{x}) \underline{A}_j^i \right). \quad (10.22)$$

Remarque : l'équation 10.22 peut être écrite en imposant que les fonctions v_j^i soient indépendantes de l'indice i . On note alors $J_i = J$ et $v_j^i = v_j$, et l'équation

10.22 devient

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in J} v_j(\underline{x}) \underline{A}_j^i \right). \quad (10.23)$$

Dans [Chessa *et al.*, 2003], les auteurs montrent que dans certains cas (et notamment le cas d'une discontinuité faible), les éléments vérifiant l'équation 10.23 ont un meilleur taux de convergence que s'ils vérifient seulement l'équation 10.22. On peut dire que ces éléments vérifient une *partition de l'unité locale* qui est une condition plus stricte que la partition de l'unité.

Élément-fini classique L'élément-fini classique peut être retrouvé comme un cas particulier de la méthode X-FEM en partant de l'équation 10.23 et en posant $J = \{1\}$ et $v_1(\underline{x}) = 1$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \underline{A}_1^i, \quad (10.24)$$

les degrés de liberté \underline{A}_1^i représentant alors les déplacements nodaux. L'élément construit comporte donc uniquement les fonctions de forme classiques représentées sur la figure 10.5 pour un élément triangle linéaire.

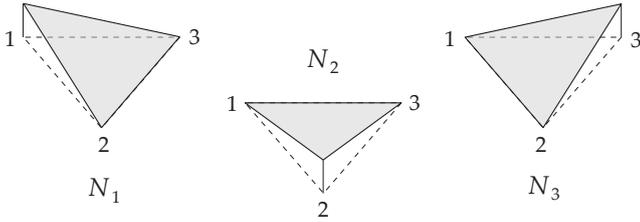


FIG. 10.5 – Fonctions de forme classiques de l'élément triangle linéaire

Élément avec saut On suppose qu'une fissure traverse une partie du maillage et que le domaine est séparé en deux parties Ω^- et Ω^+ épousant la forme de la discontinuité. On peut définir avec la méthode X-FEM des éléments de saut pouvant être traversés par une discontinuité. Pour cela, on pose $J = \{1, 2\}$ avec

$$v_1(\underline{x}) = 1, \quad (10.25)$$

$$v_2(\underline{x}) = \mathcal{H}_s(\underline{x}), \quad (10.26)$$

et,

$$\mathcal{H}_s(\underline{x}) = -1, \quad \text{sur } \Omega^-, \quad (10.27)$$

$$\mathcal{H}_s(\underline{x}) = 1, \quad \text{sur } \Omega^+. \quad (10.28)$$

On obtient

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\underline{x}) \underline{A}_1^i + \sum_{i=1}^n N_i^s(\underline{x}) \underline{A}_2^i, \quad (10.29)$$

avec,

$$N_i^s(\underline{x}) = N_i(\underline{x}) \mathcal{H}_s(\underline{x}). \quad (10.30)$$

Les fonctions de forme N_i^s s'ajoutant aux fonctions de forme classiques sont représentées sur la figure 10.6.

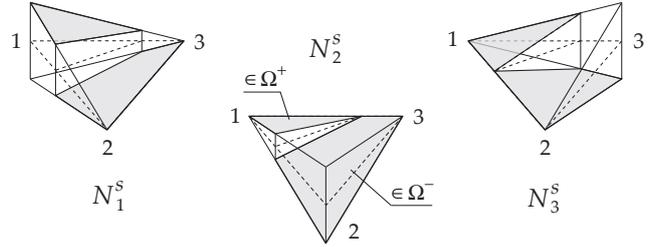


FIG. 10.6 – Fonctions de forme additionnelles

Une autre version de l'élément peut être utilisée, pour laquelle on remplace la fonction saut \mathcal{H}_s par une fonction \mathcal{H}_s^+ définie par

$$\mathcal{H}_s^+(\underline{x}) = 0, \quad \text{sur } \Omega^-, \quad (10.31)$$

$$\mathcal{H}_s^+(\underline{x}) = 1, \quad \text{sur } \Omega^+, \quad (10.32)$$

qui donne les fonctions de forme additionnelles $N_i^+(\underline{x})$ représentées sur la figure 10.7 et valant

$$N_i^+(\underline{x}) = N_i(\underline{x}) \mathcal{H}_s^+(\underline{x}). \quad (10.33)$$

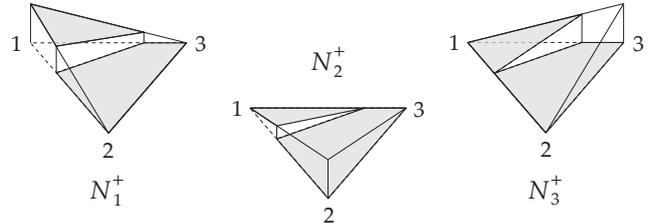


FIG. 10.7 – Autre choix possible pour les fonctions de forme additionnelles

Remarques :

- les nœuds pour lesquels des fonctions de forme additionnelles sont définies sont dits *enrichis* ;
- le choix de la fonction saut se fait en fonction du problème étudié, par exemple la deuxième forme est utilisée pour modéliser les trous dans [Sukumara *et al.*, 2001] ;
- les fonctions de forme obtenues avec les deux versions de l'élément de saut génèrent le même espace de déplacements admissibles. On peut le constater en remarquant que les fonctions de forme additionnelles de la deuxième version de l'élément sont des combinaisons linéaires des fonctions de forme de la première version :

$$N_i^+ = \frac{1}{2}(N_i + N_i^s), \quad \forall i \in [1, 3]. \quad (10.34)$$

Éléments de transition Lorsqu'on traite un problème de fissuration avec la méthode X-FEM, seuls les nœuds appartenant à des éléments tranchés par la discontinuité sont enrichis avec des fonctions de saut. Les

autres nœuds du maillage ne doivent pas être enrichis car certaines fonctions de forme seraient présentes en double dans les éléments continus, ce qui rendrait le problème éléments-finis mal posé. Ceci nécessite de définir des éléments de transition (*blended elements* en anglais) entre les éléments de saut et les éléments classiques, pour lesquels seulement certains nœuds sont enrichis avec des fonctions de saut. Ces éléments vérifient bien l'hypothèse de partition de l'unité (équation 10.22) mais pas l'hypothèse de partition de l'unité locale (équation 10.23). Une solution d'enrichissement pour un maillage composé de triangles est représentée sur la figure 10.8.

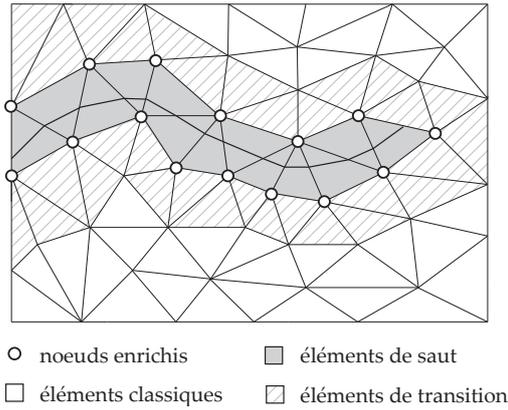


FIG. 10.8 – Maillage avec enrichissement de certains éléments

Implémentation de lois cohésives La méthode X-FEM a d'abord été utilisée avec des modèles de Griffith, mais elle peut également servir à l'implémentation de toutes sortes de problèmes présentant des surfaces de discontinuité, et donc en particulier des modèles cohésifs [Wells et Sluys, 2001, Moës et Belytschko, 2002, Mariani et Perego, 2003]. Les enrichissements étant introduits au fur et à mesure de la propagation, les lois cohésives extrinsèques peuvent être implémentées avec une formulation classique portant sur les déplacements nodaux. Malgré tout, il peut être intéressant d'utiliser une formulation mixte avec lagrangien augmenté pour traiter le contact entre les deux bords de la discontinuité. Ce type de formulation a été implémenté au LaMCoS pendant la thèse de Thomas Elguedj [Elguedj, 2006] sur un problème de fissuration par fatigue.

Éléments avec enrichissements singuliers Lorsqu'on utilise la méthode X-FEM avec un modèle de Griffith, il est possible d'utiliser pour les éléments entourant la pointe de la fissure des enrichissements basés sur les solutions asymptotiques de Williams (voir section 14.2.2). Ceci permet de placer la pointe de la fissure à n'importe quel endroit dans l'élément, ce qui est très utile en 3D pour ne pas avoir un front de fissure crénelé. Dans le cas bidimensionnel, on pose $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

et

$$v_1(\underline{x}) = 1, \quad (10.35)$$

$$v_2(\underline{x}) = \sqrt{r} \sin(\theta/2), \quad (10.36)$$

$$v_3(\underline{x}) = \sqrt{r} \cos(\theta/2), \quad (10.37)$$

$$v_4(\underline{x}) = \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \quad (10.38)$$

$$v_5(\underline{x}) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta). \quad (10.39)$$

Dans le cas d'une zone cohésive, les champs asymptotiques sont plus durs à obtenir et dépendent de la loi cohésive implémentée. Dans [Moës et Belytschko, 2002], le choix suivant est proposé pour les enrichissements singuliers avec $J = \{1, 2\}$ et

$$v_1(\underline{x}) = 1, \quad (10.40)$$

$$v_2(\underline{x}) = r^k \sin(\theta/2), \quad (10.41)$$

k pouvant être égal à 1, $\frac{3}{2}$, ou 2.

10.2.3 Méthode des nœuds fantômes

Ce type d'implémentation a été utilisé pour la première fois dans [Hansbo et Hansbo, 2004], même si la notion de nœud *virtuel* [Molino *et al.*, 2005] ou *fantôme* [Song *et al.*, 2006] n'est apparue que plus tard. Pour introduire cette méthode, on peut partir de l'équation 10.23 et poser $J = \{1, 2\}$ avec

$$v_1(\underline{x}) = \mathcal{H}_s^-(\underline{x}), \quad (10.42)$$

$$v_2(\underline{x}) = \mathcal{H}_s^+(\underline{x}). \quad (10.43)$$

\mathcal{H}_s^+ est défini comme précédemment et \mathcal{H}_s^- vérifie

$$\mathcal{H}_s^-(\underline{x}) = 1, \quad \text{sur } \Omega^-, \quad (10.44)$$

$$\mathcal{H}_s^-(\underline{x}) = 0, \quad \text{sur } \Omega^+. \quad (10.45)$$

On obtient donc

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n N_i^-(\underline{x}) \underline{A}_1^i + N_i^+(\underline{x}) \underline{A}_2^i, \quad (10.46)$$

N_i^+ étant défini comme précédemment et N_i^- par

$$N_i^-(\underline{x}) = N_i(\underline{x}) \mathcal{H}_s^-(\underline{x}). \quad (10.47)$$

Si on note I_{el}^- l'ensemble des nœuds de l'élément appartenant à Ω^- , I_{el}^+ l'ensemble des nœuds de l'élément appartenant à Ω^+ , et \underline{U}_i^{el} le déplacement du i^e nœud de l'élément, on observe que

$$\underline{A}_1^i = \underline{U}_i^{el}, \quad \text{si } i \in I_{el}^-, \quad (10.48)$$

$$\underline{A}_2^i = \underline{U}_i^{el}, \quad \text{si } i \in I_{el}^+. \quad (10.49)$$

Les degrés de liberté \underline{A}_1^i appartenant à I_{el}^+ et \underline{A}_2^i appartenant à I_{el}^- peuvent être interprétés comme les déplacements de nœuds fantômes obtenus en prolongeant la définition des demi-éléments tranchés sur l'autre moitié du domaine. Ces nœuds sont représentés sur la figure 10.9 en plus des nœuds habituels de l'élément triangle.

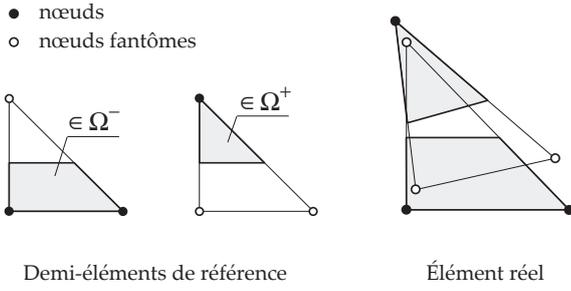


FIG. 10.9 – Nœuds réels et nœuds fantômes

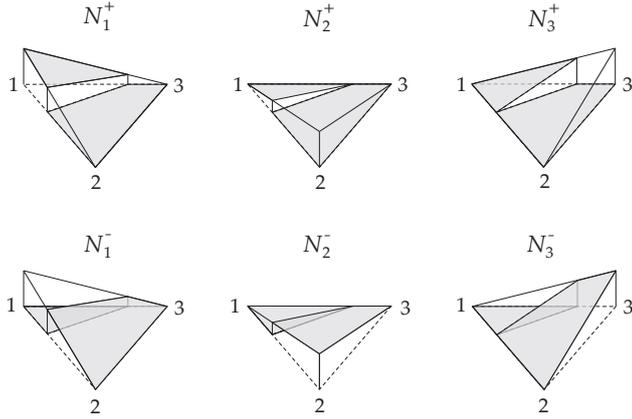


FIG. 10.10 – Fonctions de forme des éléments de saut avec la méthode des nœuds fantômes

On peut retrouver les fonctions de forme d'un élément de saut X-FEM à partir à partir des combinaisons linéaires suivantes :

$$N_i = N_i^+ + N_i^-, \quad \forall i \in [1, 3], \quad (10.50)$$

$$N_i^s = N_i^+ - N_i^-, \quad \forall i \in [1, 3]. \quad (10.51)$$

Les éléments n'étant pas traversés par une discontinuité peuvent être conservés tels quels (pas d'élément de transition) car la notion de nœud fantôme remplace la notion de nœud enrichi, et ces nœuds fantômes ne sont pas en contact avec les autres éléments du maillage. Dans [Song *et al.*, 2006], il apparaît sur un exemple de fissuration dynamique que la méthode X-FEM et la méthode des nœuds virtuels donnent exactement le même résultat. Ces deux méthodes peuvent donc être considérées équivalentes pour les problèmes de fissuration et ont donc les mêmes propriétés vis-à-vis de l'implémentation de lois cohésives.

Remarque : les méthodes basées sur la partition de l'unité ne sont pas équivalentes au fait de couper un élément en deux pour le remailler. Ceci peut se montrer facilement sur un exemple en considérant un élément triangle linéaire décomposé en la somme d'un élément triangle et d'un élément quadrangle. Pour cela, il suffit de constater que les deux éléments créés comprennent en tout 7 fonctions de forme (voir figure 10.11) au lieu de 6 pour un élément de saut X-FEM.

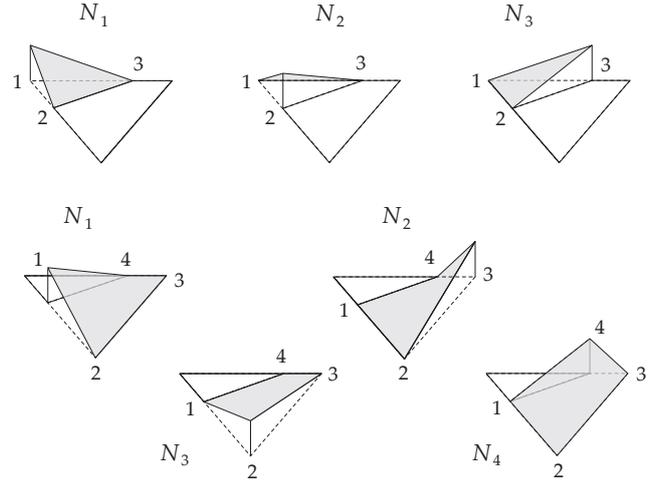


FIG. 10.11 – Fonctions de forme obtenue en remaillant l'élément

Cette différence apparaît clairement si on impose la refermeture d'un élément tranché. Avec des nœuds fantômes, ceci revient à imposer à chaque nœud fantôme de coïncider avec le nœud réel correspondant et permet de retrouver la cinématique de l'élément-triangle classique. Dans le cas du remaillage de l'élément, ceci revient à imposer le contact des nœuds en vis-à-vis sur la discontinuité et ne permet pas de retrouver la cinématique de l'élément initial.

10.2.4 Éléments à discontinuité interne

Les éléments à discontinuité interne (*embedded elements* en anglais) sont une manière d'implémenter des lois cohésives formulées avec la méthode de la discontinuité forte. On présente ici une implémentation basée sur la méthode *Enhanced Assumed Strain* (EAS) [Simo et Rifai, 1990] qui consiste à faire l'hypothèse que l'on peut ajouter à la déformation un terme non compatible avec le champ de déplacement pour corriger le comportement de l'élément (en l'occurrence ici pour tenir compte de la présence de la zone cohésive). On part d'une formulation à 3 champs de Hu-Washizu pouvant s'écrire

$$\mathcal{A}(\underline{u}^*) + \mathcal{B}(\underline{\underline{\varepsilon}}^*) + \mathcal{C}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \mathcal{D}(\underline{u}^*), \quad \forall (\underline{u}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*) \in (\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{J}), \quad (10.52)$$

avec,

$$\mathcal{A}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}^*) : \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega, \quad (10.53)$$

$$\mathcal{B}(\underline{\underline{\varepsilon}}^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^* : (\tilde{\underline{K}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\sigma}}) \, d\Omega, \quad (10.54)$$

$$\mathcal{C}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u})) \, d\Omega, \quad (10.55)$$

$$\mathcal{D}(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d \, d\Gamma. \quad (10.56)$$

La déformation est calculée en ajoutant un terme $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ au

gradient symétrisé du déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla^s(\underline{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^s, \quad (10.57)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{c*} = \nabla^s(\underline{u}^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{s*}, \quad (10.58)$$

ce qui modifie les termes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , et \mathcal{D} qui deviennent

$$\mathcal{A}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}^*) : \tilde{K}_{\circ} : (\underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^s) d\Omega, \quad (10.59)$$

$$\mathcal{B}(\underline{\underline{\varepsilon}}^s) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^{c*} : (\tilde{K}_{\circ} : (\underline{\underline{\nabla}}^s(\underline{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^s) - \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega, \quad (10.60)$$

$$\mathcal{C}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^s d\Omega, \quad (10.61)$$

$$\mathcal{D}(\underline{u}^*) = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d d\Gamma. \quad (10.62)$$

L'équation 10.61 impose que la déformation supplémentaire $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ soit orthogonale à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^*$. Les discrétisations de $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ et $\underline{\underline{\sigma}}^*$ sont généralement choisies de telle sorte que ces deux champs soient orthogonaux, ce qui permet d'éliminer le champ inconnu $\underline{\underline{\sigma}}$ de la formulation. Il est ensuite possible de se ramener à une formulation à un seul champ par condensation statique ou en utilisant la méthode B-bar [Hughes, 1980].

Remarque : d'après [Jirásek, 2000], on peut distinguer 3 méthodes pour implémenter des éléments à discontinuité interne :

- *Statically Optimal Symmetric* (SOS) : il s'agit de la formulation présentée ci-dessus, la déformation n'est pas compatible avec le déplacement mais la matrice obtenue est symétrique ;
- *Kinematically Optimal Symmetric* (KOS) : l'équilibre n'est pas assuré au niveau de la discontinuité mais la matrice obtenue est symétrique ;
- *Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric* (SKON) : il n'y a pas d'approximation supplémentaire sur la déformation ou la contrainte mais la matrice obtenue n'est pas symétrique.

L'implémentation numérique d'éléments à discontinuité interne représente généralement la fissure par un ensemble de segments comme on peut le voir sur la figure 10.12. Ce cas test, issu de [Ibrahimbegovic et Brancherie, 2003], montre le trajet de fissure pour une éprouvette comportant deux encoches, et sollicitée en traction dans le sens longitudinal.

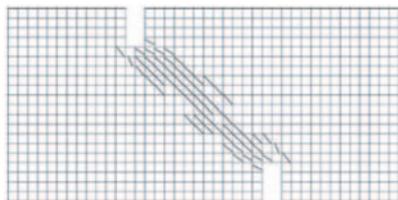


FIG. 10.12 – Trajet de fissuration obtenu dans [Ibrahimbegovic et Brancherie, 2003]

Dans [Laverne, 2004], une loi cohésive extrinsèque est implémentée numériquement en utilisant la méthode

KOS, ce qui permet de s'affranchir des instabilités numériques apparaissant lorsqu'une méthode de pénalisation de la raideur initiale est utilisée.

10.3 Lois cohésives usuelles

On donne ci-dessous quelques exemples de lois cohésives usuelles en se limitant au comportement en mode I et sans spécifier la manière dont la zone cohésive se décharge. D'abord, la loi linéaire suivante est utilisée dans [Hillerborg *et al.*, 1976] pour modéliser le comportement d'un béton :

$$\sigma^s = \sigma_c \frac{[[u]]_c - [[u]]}{[[u]]_c}, \quad (10.63)$$

σ_c et $[[u]]_c$ étant deux paramètres du matériau. Cette loi est représentée sur la figure 10.13.

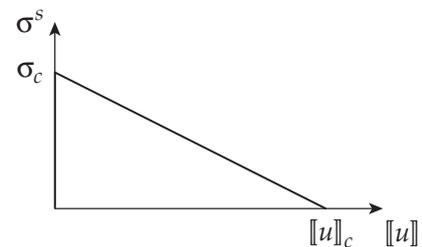


FIG. 10.13 – Loi cohésive utilisée dans [Hillerborg *et al.*, 1976]

Toujours pour du béton, une loi avec deux phases est utilisée dans [Pettersson, 1981]. Cette loi est représentée sur la figure 10.14 et s'écrit

$$\sigma^s = \sigma_c - \frac{\sigma_c - \sigma_1}{[[u]]_1} [[u]], \quad \text{si } [[u]] \leq [[u]]_1, \quad (10.64)$$

$$\sigma^s = \sigma_1 \frac{[[u]]_c - [[u]]}{[[u]]_c - [[u]]_1}, \quad \text{si } [[u]] > [[u]]_1, \quad (10.65)$$

σ_c , $[[u]]_1$, et $[[u]]_c$ étant trois paramètres du matériau.

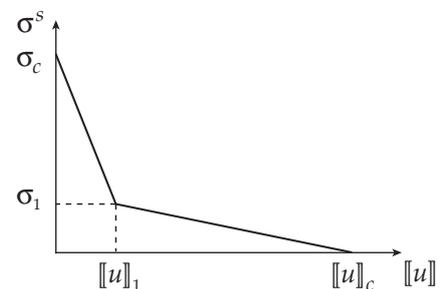


FIG. 10.14 – Loi cohésive utilisée dans [Pettersson, 1981]

Dans [Needleman, 1987], une loi intrinsèque est utilisée pour modéliser la décohéation entre une matrice plastique et une inclusion rigide. Cette loi est représentée sur la figure 10.15 et s'écrit

$$\sigma^s = \frac{27}{4} \sigma_c \frac{[[u]]}{[[u]]_c} \left(1 - 2 \frac{[[u]]}{[[u]]_c} + \frac{[[u]]^2}{[[u]]_c^2}\right), \quad (10.66)$$

σ_c et $[[u]]_c$ étant deux paramètres du matériau.

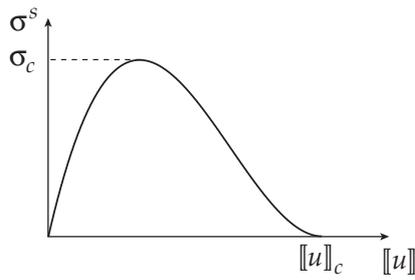


FIG. 10.15 – Loi cohésive utilisée dans [Needleman, 1987]

Dans [Tvergaard et Hutchinson, 1992], une loi intrinsèque avec un plateau est utilisée pour un matériau élasto-plastique. Cette loi s'écrit

$$\sigma^s = \frac{\sigma_c}{[[u]]_1} [[u]], \quad [[u]] < [[u]]_1, \quad (10.67)$$

$$\sigma^s = \sigma_c, \quad [[u]] \in [[u]]_1, [[u]]_2], \quad (10.68)$$

$$\sigma^s = \sigma_c \frac{[[u]]_c - [[u]]}{[[u]]_c - [[u]]_2}, \quad [[u]] > [[u]]_2, \quad (10.69)$$

σ_c , $[[u]]_1$, $[[u]]_2$, et $[[u]]_c$ étant des paramètres du matériau. Cette loi est représentée sur la figure 10.16.

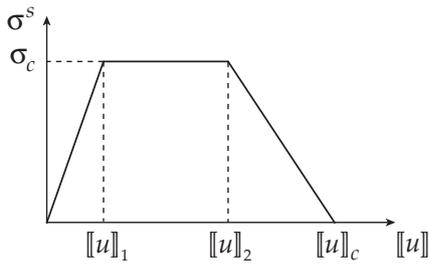


FIG. 10.16 – Loi cohésive utilisée dans [Tvergaard et Hutchinson, 1992]

Remarque : il existe de nombreuses autres formes de lois cohésives, et de nombreuses manières de généraliser ces lois dans le cas d'une sollicitation en mode mixte. On peut se référer à [Shet et Chandra, 2002] pour une liste de lois cohésives plus complète.

Chap. 11

Problème mécanique

11.1 Équations locales

Le problème étudié est composé d'un matériau élastique isotrope défini sur un domaine Ω de contour Γ et traversé par une interface Γ_s dont le comportement et la position sont connus. Le problème est bidimensionnel en contraintes planes et l'espace muni d'une base orthonormée $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On définit un vecteur colonne \mathbf{u} contenant les composantes u_x et u_y du champ de déplacement dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T. \quad (11.1)$$

Les vecteurs colonnes $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ contenant les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad (11.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (11.3)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est relié au champ de déplacement par l'équation 11.9. On définit sur Γ un vecteur unitaire \underline{n} normal au contour du domaine et dirigé vers l'extérieur. Γ est décomposé en une partie Γ_1 sur laquelle s'appliquent des déplacements imposés dont les composantes dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont notées u_d^x et u_d^y et rangées dans le vecteur \mathbf{u}_d , et une partie Γ_2 soumise à des efforts imposés dont les composantes dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont notées F_d^x et F_d^y et rangées dans \mathbf{F}_d . Ces vecteurs s'écrivent

$$\mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} u_d^x & u_d^y \end{bmatrix}^T, \quad (11.4)$$

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} F_d^x & F_d^y \end{bmatrix}^T. \quad (11.5)$$

Une orientation est donnée à la discontinuité en prolongeant la définition de \underline{n} sur Γ_s de telle sorte que \underline{n} soit normal au plan tangent de la discontinuité. Ce vecteur permet de distinguer les bords supérieurs et inférieurs de la discontinuité notés respectivement Γ_s^+ et Γ_s^- . Un autre vecteur \underline{t} est défini sur Γ_s pour que $(\underline{n}, \underline{t})$ soit une base orthogonale. Un vecteur colonne $[[\mathbf{u}]]$ est défini sur Γ_s pour contenir les composantes du saut de déplacement dans la base $(\underline{n}, \underline{t})$ et un vecteur $\boldsymbol{\sigma}^s$ est défini sur Γ_s pour contenir les composantes des contraintes cohésives dans cette même base. Ces vecteurs s'écrivent

$$[[\mathbf{u}]] = \begin{bmatrix} [[u]]_n & [[u]]_t \end{bmatrix}^T, \quad (11.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \begin{bmatrix} \sigma_n^s & \sigma_t^s \end{bmatrix}^T. \quad (11.7)$$

L'équilibre quasi-statique du matériau continu est garanti par l'équation 11.8. Le comportement de la partie volumique est supposé homogène, élastique, et isotrope, il est donné par l'opérateur tangent de rigidité \mathbf{L} (équation 11.10) calculé avec l'équation 11.18. Les équations 11.11 et 11.12 garantissent l'application des conditions aux limites sur la structure. Le comportement de la zone cohésive est défini par l'opérateur tangent de souplesse \mathbf{M}^s (équation 11.13). Le problème volumique (défini sur Ω) et le problème surfacique (défini sur Γ_s) sont reliés par les équations de couplage 11.14 et 11.15. L'équation 11.14 impose que la différence des champs \mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- (définis respectivement sur Γ_s^+ et Γ_s^-) projetée dans la base locale $(\underline{n}, \underline{t})$ soit égale au saut de déplacement $[[\mathbf{u}]]$ de la discontinuité. L'équation 11.15 garantit l'équilibre de la structure au niveau de la discontinuité Γ_s .

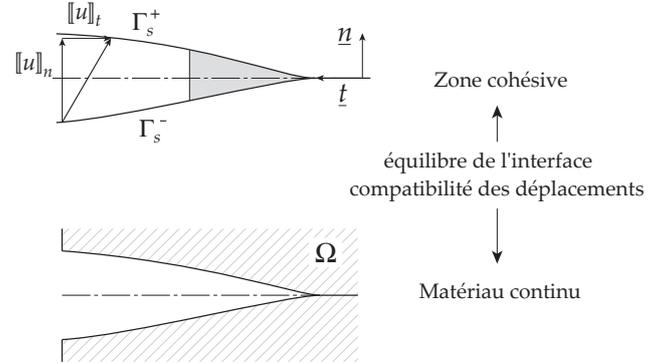


FIG. 11.1 – Décomposition du problème *volume/interface*

Le bilan des équations du problème s'écrit :

matériau continu :

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (11.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \quad \text{sur } \Omega, \quad (11.9)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (11.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (11.11)$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}_d, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (11.12)$$

discontinuité :

$$d[[\mathbf{u}]] = \mathbf{M}^s d\boldsymbol{\sigma}^s, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (11.13)$$

équations de couplage :

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{P}_u(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-), \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (11.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{P}_{\sigma^s}(\boldsymbol{\sigma}^-) = \mathbf{P}_{\sigma^s}(\boldsymbol{\sigma}^+), \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (11.15)$$

avec,

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (11.16)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (11.17)$$

$$\mathbf{L} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (11.18)$$

E étant le module d'Young et ν le coefficient de Poisson,

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \underline{n} \cdot \underline{e}_x & 0 & \underline{n} \cdot \underline{e}_y \\ 0 & \underline{n} \cdot \underline{e}_y & \underline{n} \cdot \underline{e}_x \end{bmatrix}, \quad (11.19)$$

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \underline{n} \cdot \underline{e}_x & \underline{n} \cdot \underline{e}_y \\ -\underline{n} \cdot \underline{e}_y & \underline{n} \cdot \underline{e}_x \end{bmatrix}, \quad (11.20)$$

$$\mathbf{P}_{\sigma^s} = \begin{bmatrix} (\underline{n} \cdot \underline{e}_x)^2 & (\underline{n} \cdot \underline{e}_y)^2 & 2(\underline{n} \cdot \underline{e}_x)(\underline{n} \cdot \underline{e}_y) \\ (\underline{n} \cdot \underline{e}_y)^2 & (\underline{n} \cdot \underline{e}_x)^2 & -2(\underline{n} \cdot \underline{e}_x)(\underline{n} \cdot \underline{e}_y) \end{bmatrix}. \quad (11.21)$$

11.2 Modèle cohésif

On utilise le modèle cohésif défini dans la section 2.2.1. On rappelle les propriétés de ce modèle en utilisant une matrice de souplesse à la place du tenseur de raideur utilisé dans la partie I. Le comportement de la zone cohésive est défini par

$$[[\mathbf{u}]] = s_{eq} \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}^s, \quad (11.22)$$

avec,

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} (1-c_0) & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad (11.23)$$

c_0 étant un indicateur de contact défini sur Γ_s et égal à 1 si les deux bords de la discontinuités sont en contact et à 0 dans le cas contraire, et β un coefficient faisant le lien entre la souplesse de la zone cohésive en cisaillement et la souplesse de la zone cohésive en traction. Le modèle cohésif est construit pour reproduire le comportement d'un modèle de fissuration diffuse pour lequel l'état d'endommagement est homogène dans une bande de largeur h . En simplifiant le comportement du matériau pour ne tenir compte que de la traction dans la direction normale ou que du cisaillement dans la direction transverse (voir figure 11.2), on obtient

$$\frac{[[u]]_n}{h} + \frac{\sigma_n^s}{E} = \frac{\sigma_n^s}{(1-D)E}, \quad (11.24)$$

$$\frac{[[u]]_t}{h} + \frac{\sigma_t^s}{G} = \frac{\sigma_t^s}{(1-D)G}, \quad (11.25)$$

E étant le module d'Young et G le module de Coulomb du matériau.

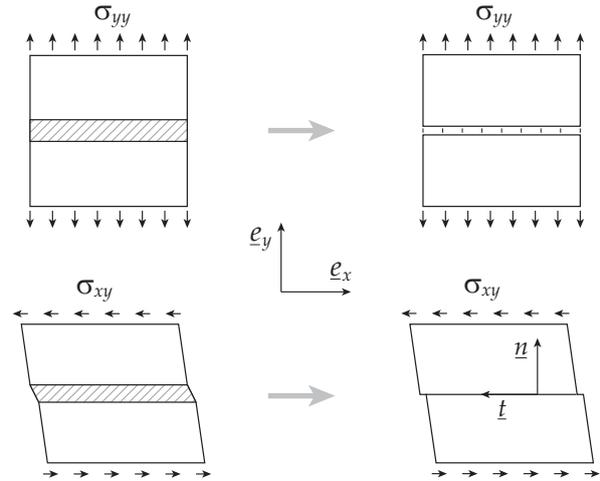


FIG. 11.2 – Construction du modèle cohésif par analogie avec un modèle de fissuration diffuse

À partir des relations 11.24 et 11.25, on obtient

$$[[u]]_t = s_{nn} (2(1+\nu)) \sigma_t^s, \quad (11.26)$$

ce qui donne la valeur suivante de β :

$$\beta = 2(1+\nu). \quad (11.27)$$

ν étant le coefficient de Poisson du matériau.

Contrainte équivalente On définit une contrainte équivalente σ_{eq}^s pour laquelle les deux définitions suivantes sont proposées :

$$a) \quad \sigma_{eq}^s = \max(\sigma_n^s, \gamma |\sigma_t^s|), \quad (11.28)$$

$$b) \quad \sigma_{eq}^s = \sqrt{(\sigma_n^s)^2 + \gamma^2 (\sigma_t^s)^2}, \quad (11.29)$$

avec γ un paramètre du matériau. On note σ_c la contrainte équivalente à l'initiation de la zone cohésive. Les seuils d'initiation pour les deux définitions de la contrainte équivalente sont représentés sur la figure 11.3.

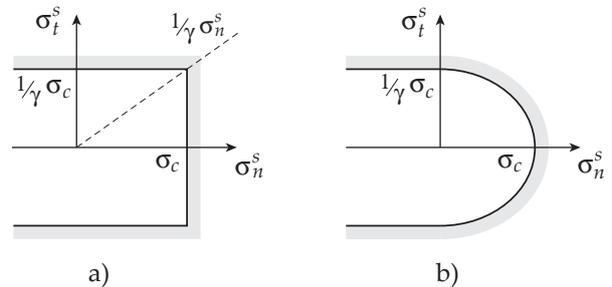


FIG. 11.3 – Seuil d'initiation pour les deux définitions de la contrainte cohésive équivalente

Saut de déplacement équivalent On définit un saut de déplacement équivalent $[[u]]_{eq}$ de telle sorte que l'on puisse écrire

$$[[u]]_{eq} = s_{eq} \sigma_{eq}^s. \quad (11.30)$$

En fonction de la définition de σ_{eq}^s choisie (équation 11.28 ou 11.29), on obtient

$$a) \quad \llbracket u \rrbracket_{eq} = \max(\llbracket u \rrbracket_n, \frac{\gamma}{\beta} |\llbracket u \rrbracket_t|), \quad (11.31)$$

$$b) \quad \llbracket u \rrbracket_{eq} = \sqrt{\llbracket u \rrbracket_n^2 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} \llbracket u \rrbracket_t^2}. \quad (11.32)$$

Remarque : un modèle cohésif similaire avec une contrainte cohésive équivalente et un saut de déplacement équivalent est défini dans [Camacho et Ortiz, 1996].

Fonction seuil Une variable de mémoire κ^s est définie égale à la valeur maximale de $\llbracket u \rrbracket_{eq}$ au cours du temps :

$$\kappa^s = \max_t(\llbracket u \rrbracket_{eq}). \quad (11.33)$$

La fonction g^s seuil est définie par

$$g^s(\llbracket u \rrbracket_{eq}, \kappa^s) = \llbracket u \rrbracket_{eq} - \kappa^s. \quad (11.34)$$

Potentiel thermodynamique On définit un potentiel ψ_s^* égal à la transformée de Legendre partielle du potentiel énergie libre surfacique ψ_s par rapport au saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$:

$$\psi_s^* = \psi_s - \boldsymbol{\sigma}^{sT} \llbracket u \rrbracket. \quad (11.35)$$

Ce potentiel est une fonction de $\boldsymbol{\sigma}^s$ et κ^s :

$$\psi_s^* = \psi_s^*(\boldsymbol{\sigma}^s, \kappa^s). \quad (11.36)$$

En reprenant la démarche de la section 1.2.2, on peut montrer qu'un incrément d'énergie dissipée surfacique $d\phi_s$ s'écrit

$$d\phi_s = -\llbracket u \rrbracket^T d\boldsymbol{\sigma}^s - d\psi_s^*. \quad (11.37)$$

À partir de cette équation, on peut obtenir les relations suivantes :

$$\llbracket u \rrbracket = -\frac{\partial \psi_s^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}^s}, \quad (11.38)$$

$$d\phi_s = -\frac{\partial \psi_s^*}{\partial \kappa^s} d\kappa^s. \quad (11.39)$$

L'expression 11.22 du saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$ peut être retrouvée à partir de l'équation 11.39 si le potentiel ψ_s^* vérifie

$$\psi_s^* = -\frac{1}{2} s_{eq}(\kappa^s) \boldsymbol{\sigma}^{sT} \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}^s. \quad (11.40)$$

Si on note B la variable associée de κ^s , on a

$$B = \frac{\partial \psi_s^*}{\partial \kappa^s}, \quad (11.41)$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} \boldsymbol{\sigma}^{sT} \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}^s, \quad (11.42)$$

et,

$$d\phi_s = -B d\kappa^s, \quad (11.43)$$

$$d\phi_s = \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} \boldsymbol{\sigma}^{sT} \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\sigma}^s d\kappa^s. \quad (11.44)$$

Énergie dissipée indépendante du chargement

Il peut être intéressant de définir une énergie libre surfacique ψ_s ne dépendant que de κ^s , car dans ce cas l'énergie dissipée de la zone cohésive à la rupture ne dépend pas de la manière dont elle a été chargée. Pour cela, on peut utiliser la contrainte équivalente (b) avec la condition

$$\gamma = \sqrt{\beta}. \quad (11.45)$$

B vaut alors

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} (\sigma_{eq}^s)^2, \quad (11.46)$$

et un incrément d'énergie dissipée surfacique s'écrit

$$d\phi_s = \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} (\sigma_{eq}^s)^2 d\kappa^s. \quad (11.47)$$

Le taux de restitution d'énergie élastique critique G_c étant par définition l'énergie surfacique dissipée en un point de la fissure pendant toute la décohesion, on a

$$G_c = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} (\sigma_{eq}^s)^2 d\kappa^s, \quad (11.48)$$

$\llbracket u \rrbracket_c$ étant le saut de déplacement équivalent à la rupture, pouvant éventuellement être infini. Puisque $s_{eq} = \frac{\llbracket u \rrbracket_{eq}}{\sigma_{eq}^s}$ (d'après l'équation 11.30), on a, si la loi cohésive est en état de charge

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} = \frac{1}{\sigma_{eq}^s} - \frac{\kappa^s}{(\sigma_{eq}^s)^2} \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \kappa^s}. \quad (11.49)$$

En introduisant cette expression dans 11.48, on obtient

$$G_c = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \frac{1}{2} (\sigma_{eq}^s d\kappa^s - \kappa^s d\sigma_{eq}^s). \quad (11.50)$$

Si on choisit la définition b) de la contrainte cohésive équivalente et que les paramètres γ et β vérifient l'équation 11.45, G_c est donc indépendant du chargement et égal à l'aire sous la loi cohésive donnant σ_{eq}^s en fonction de $\llbracket u \rrbracket_{eq}$. On retrouve alors exactement le modèle cohésif utilisé dans [Camacho et Ortiz, 1996] et [Mariani et Perego, 2003].

Loi cohésive On considère dans cette partie deux lois cohésives. D'une part une loi exponentielle, dont les paramètres du matériau sont notés σ_c et b , et pour laquelle s_{eq} vaut

$$s_{eq}(\kappa^s) = \frac{\kappa^s}{\sigma_c \exp(-b \kappa^s)}. \quad (11.51)$$

On peut vérifier qu'en cas de charge

$$\sigma_{eq}^s = \sigma_c \exp(-b \llbracket u \rrbracket_{eq}). \quad (11.52)$$

Cette loi est représentée sur la figure 11.4.

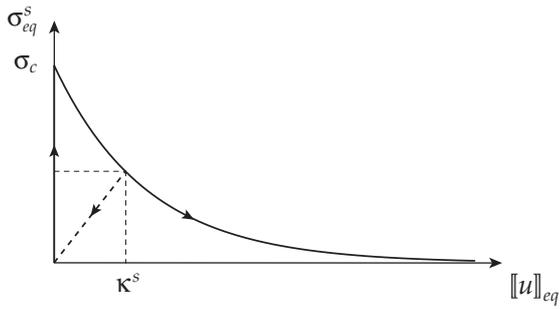


FIG. 11.4 – Loi cohésive exponentielle

On considère d'autre part une loi linéaire pour laquelle les paramètres du matériau sont notés σ_c et $[[u]]_c$, et pour laquelle s_{eq} vérifie

$$s_{eq}(\kappa^s) = \frac{[[u]]_c}{\sigma_c} \frac{\kappa^s}{[[u]]_c - \kappa^s}. \quad (11.53)$$

En cas de charge, on a

$$\sigma_{eq}^s = \sigma_c \left(1 - \frac{[[u]]_{eq}}{[[u]]_c}\right). \quad (11.54)$$

Cette loi est représentée sur la figure 11.5.

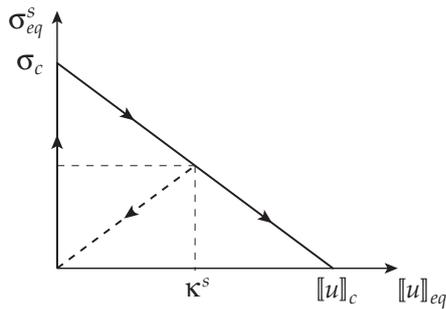


FIG. 11.5 – Loi cohésive linéaire

Le prochain chapitre porte sur l'implémentation numérique de ces lois cohésives extrinsèques. Le calcul des opérateurs tangents correspondants à ces lois est détaillé dans l'annexe D.

Chap. 12

Formulation en contraintes

Une formulation est présentée dans ce chapitre en utilisant les notations et le modèle cohésif définis dans le chapitre précédent. Cette formulation a comme champs inconnus le champ de déplacement \mathbf{u} pour la partie continue du domaine, et le champ des contraintes cohésives $\boldsymbol{\sigma}^s$ pour la discontinuité. Elle est discrétisée en utilisant la méthode des éléments-finis présentée de manière plus détaillée dans l'annexe A.

12.1 Problème éléments-finis

12.1.1 Formulation faible

L'implémentation numérique est basée sur une formulation faible écrite à partir d'une expression intégrée sur l'espace de l'équilibre de la structure. On définit l'espace $\bar{\mathcal{F}}$ des champs de vecteurs déplacements continus et réguliers définis sur Ω . Pour simplifier l'écriture du problème, on considère que la structure est soumise uniquement à des efforts imposés ($\Gamma_2 = \Gamma$ et $\Gamma_1 = \emptyset$). L'équilibre de la structure est vérifié si on a à tout instant

$$\mathcal{A}(\mathbf{du}^*) + \mathcal{B}(\mathbf{du}^*) = \mathcal{D}(\mathbf{du}^*), \quad \forall \mathbf{du}^* \in \bar{\mathcal{F}}, \quad (12.1)$$

avec,

$$\mathcal{A}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \, d\Omega, \quad (12.2)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]]^{*T} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^s \, d\Gamma_s, \quad (12.3)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Gamma} \mathbf{du}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F} \, d\Gamma, \quad (12.4)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et $[[\mathbf{u}]]^*$ étant reliés à \mathbf{u}^* par les équations 11.9 et 11.14.

La formulation faible est écrite à partir de l'équation 12.1 en choisissant \mathbf{u} comme champ inconnu sur Ω et $\boldsymbol{\sigma}^s$ sur Γ_s . L'équation 11.10 est utilisée pour calculer $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ dans l'équation 12.3. Le terme \mathcal{C} est rajouté dans la formulation pour prendre en compte le comportement de la zone cohésive (équation 11.13). En notant $\bar{\mathcal{G}}$ l'espace des champs de vecteurs contraintes cohésives continus définis sur Γ_s , on obtient la formulation faible suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{du}^*) + \mathcal{B}(\mathbf{du}^*) + \mathcal{C}(\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^{s*}) = \mathcal{D}(\mathbf{du}^*), \quad \forall (\mathbf{du}^*, \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^{s*}) \in (\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}), \quad (12.5)$$

avec,

$$\mathcal{A}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{L} \, \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega, \quad (12.6)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]]^{*T} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^s \, d\Gamma_s, \quad (12.7)$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^{s*}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^{s*T} (\mathbf{d}[[\mathbf{u}]] - \mathbf{M}^s \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^s) \, d\Gamma_s, \quad (12.8)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Gamma} \mathbf{du}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \quad (12.9)$$

12.1.2 Discrétisation en espace

Un maillage est construit pour le domaine Ω , et un autre est construit pour la discontinuité Γ_s . Ces deux maillages ne sont pas nécessairement compatibles, bien que ce choix soit le plus naturel. Pour le champ de déplacement, les inconnues discrètes sont les composantes des déplacements nodaux dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ rangées dans le vecteur colonne \mathbf{U} comme suit :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1^x \quad \mathbf{U}_1^y \quad \dots \quad \mathbf{U}_{n_{no}}^x \quad \mathbf{U}_{n_{no}}^y]^T, \quad (12.10)$$

avec n_{no} le nombre de nœuds du maillage de Ω . Pour le champ de contrainte cohésive, les inconnues discrètes sont les composantes des contraintes cohésives dans la base $(\underline{n}, \underline{t})$ rangées dans le vecteur colonne $\boldsymbol{\Sigma}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\boldsymbol{\Sigma}_1^n \quad \boldsymbol{\Sigma}_1^t \quad \dots \quad \boldsymbol{\Sigma}_{n_{no}}^n \quad \boldsymbol{\Sigma}_{n_{no}}^t]^T, \quad (12.11)$$

avec n_{no}^s le nombre de nœuds du maillage de Γ_s . Le choix des inconnues pour cette formulation est résumé dans le tableau 12.1.

Domaine	Volume	Discontinuité
champs inconnus	\mathbf{u}	$\boldsymbol{\sigma}^s$
inconnues nodales	\mathbf{U}	$\boldsymbol{\Sigma}$

TAB. 12.1 – Inconnues du problème

La restriction de \mathbf{U} à un élément de volume est notée \mathbf{U}_{el} . On définit la matrice \mathbf{B} permettant de calculer le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ à partir de \mathbf{U}_{el} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{U}_{el}, \quad (12.12)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ étant le vecteur position du point considéré sur l'élément de référence. La restriction de $\boldsymbol{\Sigma}$ à un élément d'interface est notée $\boldsymbol{\Sigma}_{el}$. La matrice de fonctions de forme

D^s est définie pour donner le vecteur des contraintes cohésives $\boldsymbol{\sigma}^s$ sur l'élément à partir de Σ_{el} :

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\hat{\boldsymbol{x}}) = D^s(\hat{\boldsymbol{x}}) \Sigma_{el}. \quad (12.13)$$

On définit également un vecteur $[[\mathbf{U}]]$ contenant les composantes des sauts de déplacements nodaux dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$:

$$[[\mathbf{U}]] = \left[\begin{array}{cccc} [[\mathbf{U}]]_1^x & [[\mathbf{U}]]_1^y & \dots & [[\mathbf{U}]]_{n_{no}}^x & [[\mathbf{U}]]_{n_{no}}^y \end{array} \right]^T. \quad (12.14)$$

La matrice T est définie pour donner la correspondance entre $[[\mathbf{U}]]$ et \mathbf{U} :

$$[[\mathbf{U}]] = T \mathbf{U}. \quad (12.15)$$

La matrice de fonctions de forme C^s et la matrice de changement de base P sont définies pour que $[[\mathbf{u}]]$ s'écrive

$$[[\mathbf{u}]](\hat{\boldsymbol{x}}) = C^s(\hat{\boldsymbol{x}}) P [[\mathbf{U}]]_{el}. \quad (12.16)$$

La matrice C^s dépend des éléments continus voisins de la zone cohésive. Par exemple, si les deux maillages sont compatibles et si le champ de déplacement est linéaire sur le bord d'un élément continu, le saut de déplacement obtenu sur un élément avec l'équation 12.16 doit également être linéaire. Les matrices K , H et le vecteur dF_{ext} sont définis de telle sorte que, si le champ test $d\boldsymbol{\sigma}^{**}$ est nul, l'équation 12.5 s'écrive sous forme discrète

$$dU^{*T} K dU + dU^{*T} H d\Sigma = dU^{*T} dF_{ext}, \quad \forall dU^* \in \bar{F}, \quad (12.17)$$

\bar{F} étant l'ensemble des vecteurs colonnes de dimension $2n_{no}$. La matrice K est calculée de manière usuelle par l'assemblage des matrices élémentaires K_{el} vérifiant

$$K_{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T \mathbf{L} B J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (12.18)$$

$\hat{\Omega}_{el}$ désignant le domaine occupé par l'élément de référence et J le déterminant du jacobien de la transformation amenant l'élément de référence sur l'élément réel. La matrice H est calculée à partir de la matrice G définie par

$$H = T^T G. \quad (12.19)$$

Cette matrice est obtenue par assemblage des matrices élémentaires G_{el} vérifiant

$$d[[\mathbf{U}]]_{el}^{*T} G_{el} d\Sigma_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} d[[\mathbf{u}]]^{*T} d\boldsymbol{\sigma}^s J^s d\xi, \quad (12.20)$$

avec ξ l'abscisse curviligne d'un point sur l'élément de référence, et J^s le jacobien de la transformation amenant l'élément de référence $\hat{\Gamma}_{el}^s$ sur l'élément réel Γ_{el}^s considéré. On a donc

$$G_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} P^T C^{sT} D^s J^s d\xi. \quad (12.21)$$

La matrice S est définie de telle sorte que, si le champ test $d\mathbf{u}^*$ est nul, l'équation 12.5 s'écrive sous forme discrète

$$d\Sigma^{*T} H^T dU - d\Sigma^{*T} S d\Sigma = 0, \quad \forall d\Sigma^* \in \bar{G}, \quad (12.22)$$

\bar{G} étant l'ensemble des vecteurs colonne de dimension $2n_{no}$. La matrice de souplesse S est obtenue par assemblage des matrices élémentaires S_{el} vérifiant

$$S_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} \mathbf{M}^s D^s J^s d\xi. \quad (12.23)$$

Les équations 12.17 et 12.22 donnent le système global suivant :

$$\begin{bmatrix} K & H \\ H^T & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU \\ d\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF_{ext} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.24)$$

12.1.3 Discrétisation en temps

Le problème est discrétisé en temps et résolu avec un algorithme de Newton. Les incréments permettant de passer d'un piquet de temps I_t à son suivant $I_t + 1$ sont notés $\Delta(\cdot)$. Les incréments permettant de passer de l'itération non linéaire $i - 1$ à l'itération i sont notés $\delta(\cdot)$.

Première itération La première itération se calcule en remplaçant dans 12.24 les incréments infinitésimaux dU , $d\Sigma$ et dF_{ext} par les incréments discrets δU et $\delta\Sigma$ et ΔF_{ext} :

$$\begin{bmatrix} K & H \\ H^T & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_{ext} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.25)$$

Itérations suivantes Si les équations du problème sont vérifiées, on a à tout instant

$$dF_{int} + H d\Sigma = dF_{ext}, \quad (12.26)$$

le calcul de F_{int} étant détaillé dans l'annexe A (section A.7). Cette équation permet de définir un résidu R_1 tel que

$$R_1 = F_{ext} - H \Sigma - F_{int}. \quad (12.27)$$

D'autre part, on a à tout instant,

$$H^T dU - dY = 0, \quad (12.28)$$

avec,

$$dY = S d\Sigma, \quad (12.29)$$

ce qui permet de définir un résidu R_2 tel que

$$R_2 = -H^T U + Y. \quad (12.30)$$

dY peut être obtenu par assemblage des vecteurs dY_{el} vérifiant

$$dY_{el} = S_{el} d\Sigma_{el}, \quad (12.31)$$

$$dY_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} \mathbf{M}^s D^s d\Sigma_{el} J^s d\xi, \quad (12.32)$$

$$dY_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} d[[\mathbf{u}]] J^s d\xi. \quad (12.33)$$

On obtient donc après intégration sur le temps

$$Y_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} [\mathbf{u}] J^s d\xi. \quad (12.34)$$

Les résidus R_1 et R_2 sont minimisés de manière itérative. Ils sont notés R_1^i et R_2^i à l'itération i . Une prédiction de la valeur de R_1^i est calculée à partir de la linéarisation suivante :

$$R_1^i = R_1^{i-1} + \frac{\partial R_1}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_1}{\partial \Sigma} \delta \Sigma, \quad (12.35)$$

$$R_1^i = R_1^{i-1} - K \delta U - H \delta \Sigma. \quad (12.36)$$

Le calcul de R_2^i se fait de la même manière :

$$R_2^i = R_2^{i-1} + \frac{\partial R_2}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_2}{\partial \Sigma} \delta \Sigma, \quad (12.37)$$

$$R_2^i = R_2^{i-1} - H^T \delta U + S \delta \Sigma. \quad (12.38)$$

En imposant la nullité de R_1^i et R_2^i dans 12.36 et 12.38, on obtient le système

$$\begin{bmatrix} K & H \\ H^T & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{i-1} \\ R_2^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (12.39)$$

Après avoir résolu ce système, on calcule les résidus suivants R_1^i et R_2^i . Si la norme locale de ces résidus est inférieure à une tolérance fixée par avance, le pas de temps est terminé, sinon il faut itérer à nouveau dans l'algorithme de Newton.

12.2 Implémentation numérique

12.2.1 Pilotage du calcul

La formulation présentée a été implémentée dans le logiciel Matlab. Une méthode de pilotage (détaillée dans l'annexe E) est utilisée pour pouvoir traiter les cas d'instabilité globale de la structure (phénomène de *snap-back*). Le pilotage porte sur un facteur de chargement λ tel que le déplacement imposé \mathbf{u}_d et l'effort imposé \mathbf{F}_d s'écrivent

$$\mathbf{u}_d = \lambda \mathbf{u}_1, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (12.40)$$

$$\mathbf{F}_d = \lambda \mathbf{F}_1, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (12.41)$$

\mathbf{u}_1 et \mathbf{F}_1 étant des vecteurs constants. Le facteur λ est une nouvelle inconnue du problème, calculée à chaque itération pour obtenir une certaine valeur de la quantité Δp définie par

$$\Delta p = \Delta U^T M \Delta U, \quad (12.42)$$

M étant la matrice de masse de la structure. Si la matrice M est remplacée par une matrice identité de même dimension, on retrouve la méthode de pilotage à longueur d'arc cylindrique.

12.2.2 Algorithmes

L'algorithme 1 présente la procédure globale de résolution numérique du problème dans le cas où le matériau continu est élastique. On note I_t le numéro du piquet de temps courant, I_t^{max} le numéro du piquet de temps final défini par l'utilisateur, $(\cdot)^{(I_t)}$ la valeur convergée d'une variable au piquet de temps I_t , $(\cdot)^i$ la valeur d'une variable à l'itération i du pas de temps courant ($I_t \rightarrow I_{t+1}$), et p.i. les points d'intégration. L'algorithme 2 détaille le calcul des variables internes de la zone cohésive à partir des incréments de contraintes. On note *init* la variable donnant à chaque point d'intégration des éléments d'interface l'état d'initiation de la zone cohésive. Pour ce calcul, une difficulté est de savoir si, en un point d'intégration de Γ_s , la zone cohésive est en charge ou en décharge, car la contrainte équivalente diminue dans les deux cas (comme cela est illustré sur la figure 12.1). Pour simplifier l'implémentation, on suppose pour cette formulation que la zone cohésive est toujours chargée et qu'il n'y a jamais contact entre les deux bords de la discontinuité.

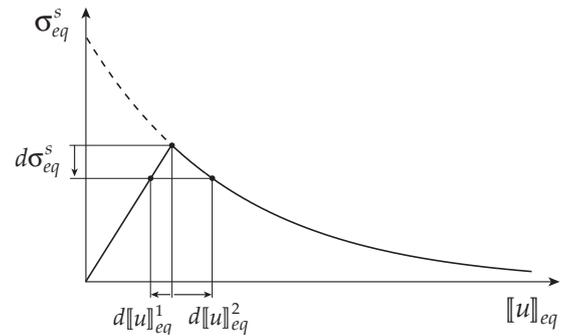


FIG. 12.1 – Calcul d'un incrément de saut de déplacement

L'algorithme 2 réel est en fait un peu plus compliqué, car une variable de mémoire numérique est introduite pour empêcher que la variable *init* change de signe trop souvent au cours des itérations non linéaires. Ceci évite en particulier, lors de l'initiation de la zone cohésive en un point d'intégration, de voir apparaître des oscillations où l'état de la variable *init* change à chaque itération.

12.2.3 Application sur un cas test

Cas test On étudie une structure rectangulaire de largeur $L_1 = 300$ mm, de hauteur $L_2 = 100$ mm, et de sommets A , B , C , et D représentés sur la figure 12.2. L'éprouvette est traversée à mi-hauteur par une interface horizontale d'épaisseur nulle dont le comportement est modélisé par la loi cohésive exponentielle définie dans le chapitre 11. Le chargement est tel que

$$\Gamma_1 = [AB] \cup [CD], \quad (12.43)$$

$$\Gamma_2 = [BC] \cup [DA], \quad (12.44)$$

avec des conditions de bord libre sur Γ_2 , et le vecteur

```

 $I_t := 1;$ 
initialisation de  $U^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(1)}$ , et des vecteurs
contenant les déformations, les contraintes, et les
variables internes à 0 ;
tant que  $I_t \leq I_t^{max}$  faire
   $U^0 := U^{(I_t)}$ ;
   $\Sigma^0 := \Sigma^{(I_t)}$ ;
   $i := 1;$ 
  calcul des matrices K et S ;
  calcul de  $\delta\lambda$  ;
  calcul de  $\delta U$  et  $\delta\Sigma$  ;
  tant que  $1 = 1$  faire
     $U^i := U^{i-1} + \delta U$ ;
     $\Sigma^i := \Sigma^{i-1} + \delta\Sigma$ ;
    pour tous les p.i. du volume faire
      calcul de  $\epsilon^i$  à partir de  $U^i$  ;
      calcul de  $\sigma^i$  à partir de  $\epsilon^i$  ;
    fin
    pour tous les p.i. de l'interface faire
      calcul de  $(\sigma^s)^i$  à partir de  $\Sigma^i$  ;
      calcul de  $[[u]]^i$ ,  $init^i$ , et  $(\kappa^s)^i$  à partir de
       $(\sigma^s)^i$ ,  $init^{(I_t)}$ , et  $(\kappa^s)^{(I_t)}$  (voir
      algorithme 2) ;
    fin
    calcul de  $R_1^i$  à partir de  $\sigma^i$  ;
    calcul de  $R_2^i$  à partir de  $[[u]]^i$  ;
    si erreurs inférieures à la tolérance alors
      | sortie de boucle ;
    fin
    mise à jour des matrices K et S ;
    calcul de  $\delta\lambda$  ;
    calcul de  $\delta U$  et  $\delta\Sigma$  ;
     $i := i + 1$ ;
  fin
sauvegarde de  $U^{(I_t+1)}$ ,  $\Sigma^{(I_t+1)}$ , et des vecteurs
contenant les déformations, contraintes, et
variables internes ;
 $I_t := I_t + 1$ .
fin

```

Algorithme 1 : Algorithme global

```

Données :  $(\sigma^s)^i$ ,  $init^{(I_t)}$ , et  $(\kappa^s)^{(I_t)}$  ;
calcul de  $(\sigma_{eq}^s)^i$  ;
test de l'initiation :
 $init^i := \max(init^{(I_t)}, \arg((\sigma_{eq}^s)^i > \sigma_c))$ ;
si  $init^i = 1$  alors
  calcul de  $(\kappa^s)^i := [[u]]_{eq}^i$  (en supposant un état
  de chargement) à partir de  $(\sigma_{eq}^s)^i$  ;
  calcul de  $s_{eq}$  à partir de  $(\kappa^s)^i$  ;
  calcul de  $[[u]]^i$  à partir de  $s_{eq}$  et  $(\sigma^s)^i$  ;
sinon
   $(\kappa^s)^i := (\kappa^s)^{(I_t)}$ ;
   $[[u]]^i := 0$ .
fin

```

Algorithme 2 : Algorithme d'écoulement

u_1 vérifiant,

$$u_1 = 0, \quad \text{sur } [AB], \quad (12.45)$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 - 0,02 \times x \end{bmatrix} \text{ mm}, \quad \text{sur } [CD], \quad (12.46)$$

$$(12.47)$$

A étant l'origine du repère.

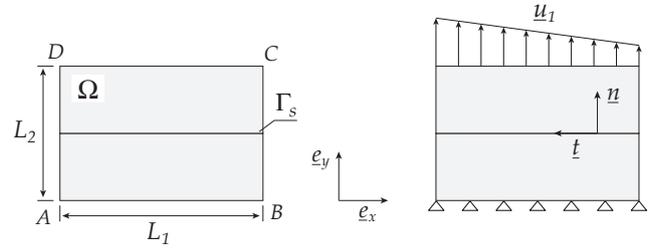


FIG. 12.2 – Géométrie et chargement du cas test

On se place dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes. Les paramètres du matériau continu et de la zone cohésive sont $E = 40$ GPa, $\nu = 0.2$, $\sigma_c = 4$ MPa, et $\beta = 2.4$ (conformément à la valeur du coefficient de Poisson), $\gamma = \sqrt{\beta}$, $b = 40$ (ce qui donne $G_c = 0.1$ N.mm⁻¹).

Calculs numériques On considère une série de maillages rectangulaires imbriqués et numérotés pour i allant de 1 à 5 (voir figure 12.3). Les éléments continus sont des quadrangles linéaires à 4 nœuds et 4 points de Gauss (voir annexe A.10), et les éléments d'interface sont linéaires à deux nœuds avec deux points d'intégration de Newton-Cotes (voir annexe D). Le i^e maillage comporte $6 \times 4^{(i-1)}$ éléments de surface et $3 \times 2^{(i-1)}$ éléments d'interface.

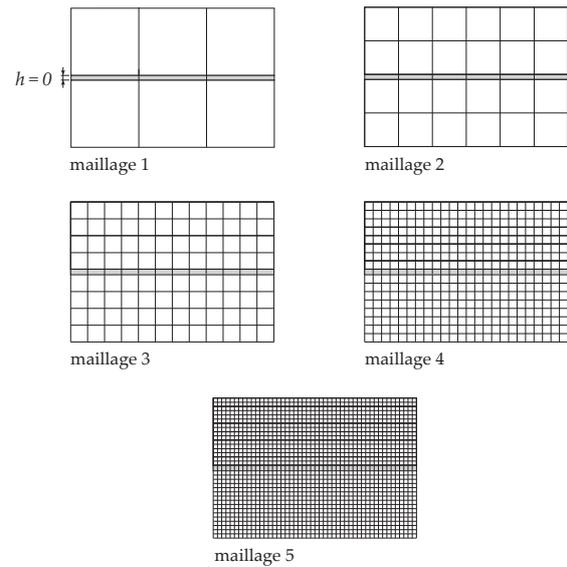


FIG. 12.3 – Construction des maillages

On utilise dans un premier temps le maillage 4. L'échelle de numérotation des piquets de temps est représentée sur la figure 12.4.



FIG. 12.4 – Numérotation des piquets de temps

Les profils des champs de contraintes obtenus sont représentés sur les figures 12.5 et 12.6.

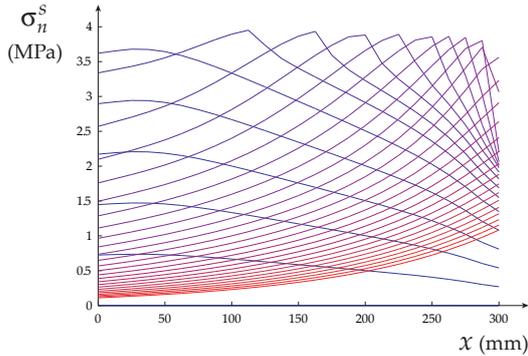


FIG. 12.5 – Contrainte cohésive normale

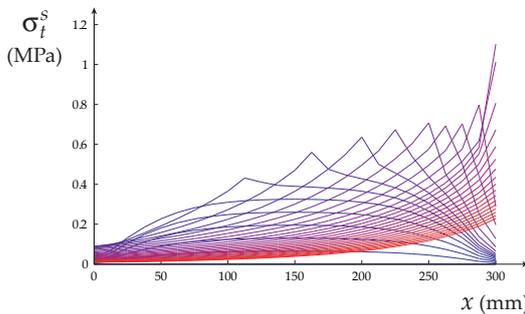


FIG. 12.6 – Contrainte cohésive tangentielle

Les profils des sauts de déplacements obtenus sont représentés sur les figures 12.7 et 12.8.

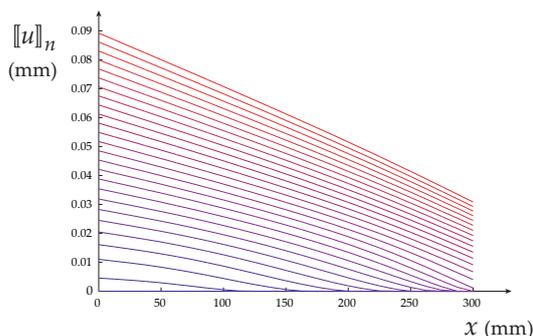


FIG. 12.7 – Saut de déplacement normal

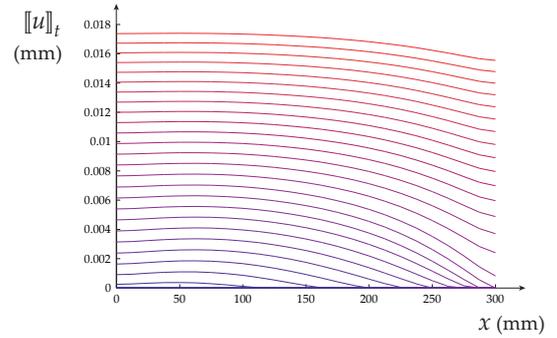


FIG. 12.8 – Saut de déplacement tangentiel

Convergence des calculs Pour se faire une idée de la convergence de la formulation, on a superposé sur la figure 12.9 les courbes représentant la norme \bar{F} de la résultante des efforts appliqués sur le segment $[CD]$ obtenues avec les maillages de niveaux 1 à 5.

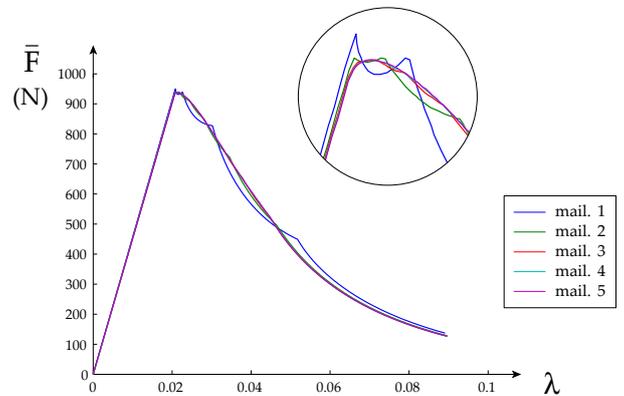


FIG. 12.9 – Superposition des courbes de chargement pour les différents maillages

On peut observer qu'il y a bien convergence de la solution du point de vue du comportement global de la structure.

12.2.4 Caractéristiques de la formulation

Influence du schéma d'intégration La méthode d'intégration numérique utilisée pour calculer les matrices S , G , et le vecteur Y , a une influence importante sur le résultat obtenu avec les éléments cohésifs utilisés.

La méthode des points de Gauss n'est en général pas utilisée pour les éléments cohésifs classiques car elle conduit à des oscillations des contraintes cohésives. Ces instabilités sont étudiées dans [Schellekens et de Borst, 1993] où les auteurs montrent en se basant sur une étude des modes propres que l'utilisation de points de Newton-Cotes permet de limiter les oscillations des contraintes cohésives. La formulation en contraintes que nous utilisons donne également de meilleurs résultats avec des points de Newton-Cotes. Ceci est illustré par les figures 12.10 et 12.11

schématisant le calcul des sauts de déplacement aux points d'intégration à partir d'un champ de contrainte fixé. Dans cet exemple, les éléments sont linéaires avec deux points d'intégration et s est l'abscisse curviligne d'un point de la fissure. Le champ de déplacement est reconstitué en supposant que des éléments linéaires continus sont accolés aux éléments cohésifs. La figure 12.10 montre que le champ de déplacement reconstitué avec des points de Gauss est discontinu, notamment à proximité de la pointe de la fissure. La figure 12.11 montre que ce même champ reconstitué avec des points de Newton-Cotes est bien continu.

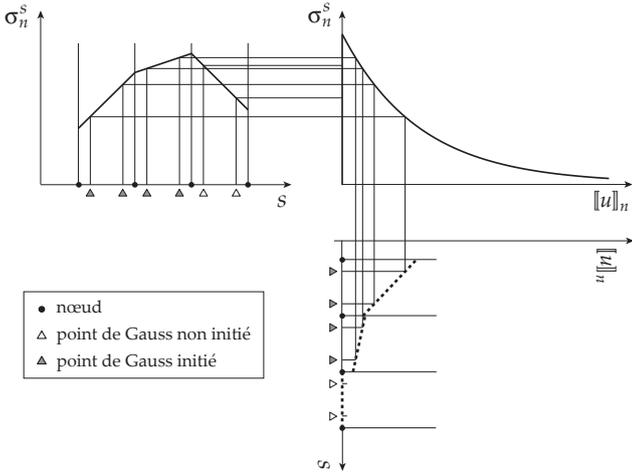


FIG. 12.10 – Sauts de déplacements aux points de Gauss

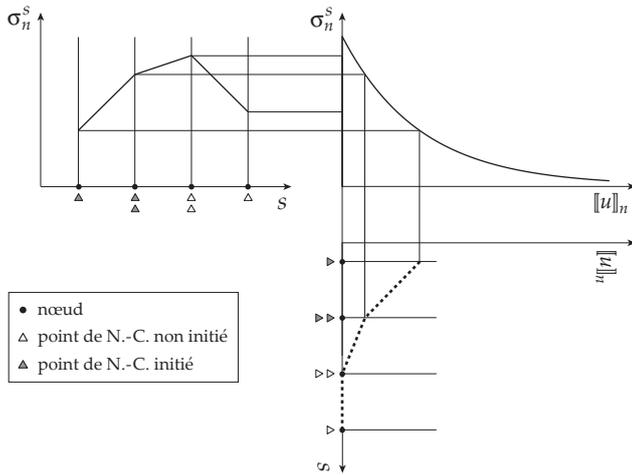


FIG. 12.11 – Sauts de déplacements aux points de Newton-Cotes

Les calculs ont montré que le schéma d'intégration qui fonctionne le mieux pour des éléments linéaires est le schéma de Newton-Cotes avec deux points d'intégration. Les calculs avec 3 points d'intégration montrent systématiquement des oscillations des champs de contraintes et de déplacements pour ce type d'élément.

Lien avec les formulations mixtes En reprenant la définition donnée dans [Auricchio *et al.*, 2004], une formulation est mixte si sa discrétisation conduit à la résolution d'un système de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (12.48)$$

La formulation présentée n'est pas rigoureusement mixte car il n'y a pas de matrice nulle dans les expressions des systèmes 12.25 et 12.39. Cependant, si pour un point d'intégration la matrice M^s comprend des termes nuls se retrouvant sur la diagonale de la matrice de souplesse globale, le système obtenu peut se mettre sous la forme donnée par l'équation 12.48 et la formulation devient mixte. Ceci se produit pour les points d'intégration n'ayant pas encore été initiés et pour les éléments dont les deux bords sont en contact. En particulier, avant que le premier élément de la discontinuité soit initié, tous les termes de la matrice S sont nuls. Ceci doit être pris en compte car les formulations mixtes doivent vérifier la condition inf-sup [Babuška, 1971, Babuška, 1973, Brezzi, 1974] pour garantir la stabilité des calculs numériques. En particulier, il est possible de montrer que si B^T (avec les notations de l'équation 12.48), ou H (pour la formulation à deux champs présentée) n'est pas injective, alors la condition *inf-sup* n'est pas vérifiée (voir annexe F).

L'exemple présenté sur la figure 12.12 illustre ce cas de figure. Il s'agit d'un maillage avec deux éléments cohésifs linéaires entre deux éléments de surface linéaires à 4 nœuds.

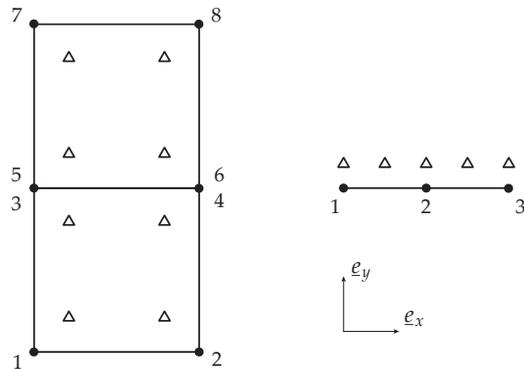


FIG. 12.12 – Exemple : maillage de la partie volumique et de la zone cohésive

Avant l'initiation de la fissure, la matrice de souplesse est nulle. On peut alors isoler les trois équations suivantes du système global :

$$\frac{5}{6}(U_5^y - U_3^y) + \frac{1}{6}(U_6^y - U_4^y) = 0, \quad (12.49)$$

$$(U_5^y - U_3^y) + (U_6^y - U_4^y) = 0, \quad (12.50)$$

$$\frac{1}{6}(U_5^y - U_3^y) + \frac{5}{6}(U_6^y - U_4^y) = 0. \quad (12.51)$$

Ces trois équations sont liées entre elles par la relation

$$(12.49) + (12.51) = (12.50). \quad (12.52)$$

La matrice globale n'est donc pas inversible. Par conséquent, on évitera de mettre plus de degrés de liberté pour la discrétisation des contraintes cohésives que pour la discrétisation des déplacements sur les bords de la discontinuité. Il n'y a de toute façon que peu d'intérêt à faire cela car le champ de saut de déplacement $[[\mathbf{u}]]$ est calculé à partir du champ de déplacement \mathbf{u} donné par les éléments du matériau continu, et serait alors discrétisé plus grossièrement que le champ des contraintes cohésives.

D'après les calculs numériques effectués, la condition *inf-sup* ne semble pas être très restrictive pour cette formulation si les maillages de Ω et Γ_s sont conformes, car on peut utiliser des éléments du même ordre pour le matériau continu et la discontinuité (linéaire-linéaire ou quadratique-quadratique) sans observer d'oscillation du champ de contrainte cohésive.

Limites de la formulation Cette première formulation permet d'implémenter assez facilement une loi cohésive extrinsèque dans un code de calcul. Un inconvénient est que si la zone cohésive est rompue en un point d'intégration, il n'est plus possible de calculer la matrice de souplesse élémentaire correspondante car des termes infinis devraient y apparaître (voir figure 12.13). Une solution peut être de supprimer les éléments rompus au cours du calcul, mais cela complique l'implémentation numérique ; en particulier, le calcul peut être déstabilisé si la contrainte n'est pas rigoureusement nulle aux points d'intégration d'un élément lorsqu'il est supprimé.

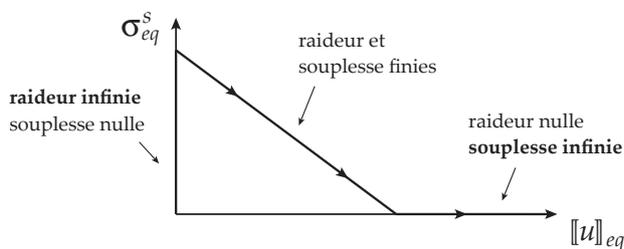


FIG. 12.13 – Raideur et souplesse de la zone cohésive

Un autre inconvénient déjà mentionné est qu'on ne peut pas déterminer directement pendant l'écoulement si la zone cohésive est en charge ou en décharge car dans les deux cas la contrainte équivalente décroît. Pour résoudre ces deux problèmes, une deuxième formulation est proposée dans le chapitre suivant pour laquelle un changement de variable permet de remplacer dans les équations du problème la contrainte cohésive σ^s par une contrainte cohésive modifiée ζ dépendant de la contrainte cohésive et du saut de déplacement.

Chap. 13

Formulation en contraintes modifiées

On introduit dans ce chapitre une deuxième formulation, construite à partir de la formulation en contraintes présentée dans le chapitre précédent, et plus apte à la simulation de modèles cohésifs pour lesquels la zone cohésive est rompue une fois qu'un saut de déplacement critique est atteint. Pour cela, on effectue un changement de variable permettant d'introduire une contrainte cohésive équivalente modifiée. On n'utilise alors plus directement la loi cohésive du modèle, mais une loi modifiée ayant l'avantage d'être une fonction croissante du saut de déplacement équivalent de la discontinuité.

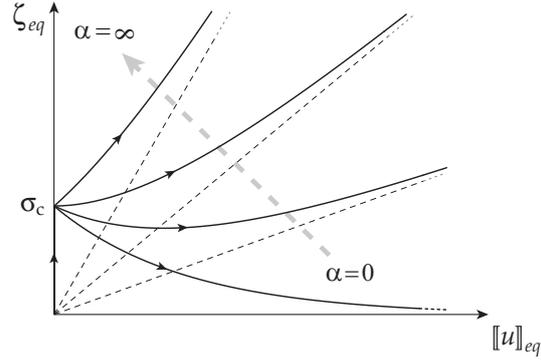


FIG. 13.1 – Influence du paramètre α sur la courbe $\zeta_{eq} - \llbracket u \rrbracket_{eq}$

13.1 Notion de contrainte modifiée

La nouvelle formulation diffère de la précédente de par le fait que la contrainte cohésive σ^s est remplacée dans les équations locales du problème par une contrainte cohésive modifiée notée ζ et définie par

$$\zeta = \sigma^s + \alpha \llbracket u \rrbracket, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (13.1)$$

avec,

$$\alpha = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

α étant une constante définie par l'utilisateur. Le comportement incrémental de la zone cohésive est donné par l'opérateur N^s vérifiant

$$d\llbracket u \rrbracket = N^s d\zeta, \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (13.3)$$

La loi cohésive est remplacée par une loi reliant le saut de déplacement équivalent $\llbracket u \rrbracket_{eq}$ à une contrainte équivalente modifiée ζ_{eq} définie par

$$\zeta_{eq} = \sigma_{eq}^s + \alpha \llbracket u \rrbracket_{eq}. \quad (13.4)$$

On note ζ_n et ζ_t les composantes du vecteur ζ . Avec la définition a) de σ_{eq}^s (équation 11.28), on obtient

$$a) \quad \zeta_{eq} = \max(\zeta_n, \gamma |\zeta_t|). \quad (13.5)$$

Avec la définition b) (équation 11.29) il n'y a pas de lien direct entre ζ et ζ_{eq} , on écrit donc directement

$$b) \quad \zeta_{eq} = \sqrt{(\sigma_n^s)^2 + \gamma^2 (\sigma_t^s)^2} + \alpha \sqrt{\llbracket u \rrbracket_n^2 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} \llbracket u \rrbracket_t^2}. \quad (13.6)$$

t_{eq} est défini par

$$\llbracket u \rrbracket_{eq} = t_{eq} \zeta_{eq}, \quad (13.7)$$

donc,

$$t_{eq} = \frac{s_{eq}}{1 + \alpha s_{eq}}. \quad (13.8)$$

En utilisant les équations 11.22 et 13.1, on montre que

$$\llbracket u \rrbracket = \frac{s_{eq}}{1 + \alpha s_{eq}} \mathbf{S}_0 \zeta, \quad (13.9)$$

soit,

$$\llbracket u \rrbracket = t_{eq} \mathbf{S}_0 \zeta. \quad (13.10)$$

Le comportement incrémental est donné par l'opérateur N^s vérifiant

$$d\llbracket u \rrbracket = N^s d\zeta. \quad (13.11)$$

13.2 Problème éléments-finis

13.2.1 Formulation faible

La formulation faible est écrite à partir de l'équation 12.1 en choisissant \mathbf{u} comme inconnue sur le domaine continu et ζ sur la discontinuité. La formulation en contraintes modifiées proposée est la suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) + \mathcal{B}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) + \mathcal{C}(\mathbf{d}\zeta^*) = \mathcal{D}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*), \quad \forall (\mathbf{d}\mathbf{u}^*, \mathbf{d}\zeta^*) \in (\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}), \quad (13.12)$$

avec,

$$\mathcal{A}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\varepsilon^{*T} \mathbf{L} \mathbf{d}\varepsilon \, d\Omega, \quad (13.13)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]]^{*T} (\mathbf{d}\zeta - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]]) \, d\Gamma_s, \quad (13.14)$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{d}\zeta^*) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{d}\zeta^{*T} (\mathbf{d}[[\mathbf{u}]] - \mathbf{N}^s \mathbf{d}\zeta) \, d\Gamma_s, \quad (13.15)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma} \mathbf{d}\mathbf{u}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \quad (13.16)$$

13.2.2 Discrétisation en espace

Les inconnues discrètes du problème sont d'une part les composantes de \mathbf{u} dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ rangées dans le vecteur \mathbf{U} défini comme précédemment (équation 12.10), et d'autre part les composantes nodales de ζ dans $(\underline{n}, \underline{t})$ rangées dans le vecteur colonne \mathbf{Z} défini par

$$\mathbf{Z} = [Z_1^n \quad Z_1^t \quad \dots \quad Z_{n_{no}}^n \quad Z_{n_{no}}^t]^T. \quad (13.17)$$

Le choix des inconnues pour cette formulation est résumé dans le tableau 13.1.

Domaine	Volume	Discontinuité
champs inconnus	\mathbf{u}	ζ
inconnues nodales	\mathbf{U}	\mathbf{Z}

TAB. 13.1 – Inconnues du problème

La restriction de \mathbf{Z} à un élément de l'interface est notée \mathbf{Z}_{el} . La matrice des fonctions de forme \mathbf{D}^s permet de reconstituer le champ de ζ sur l'élément à partir de \mathbf{Z}_{el} :

$$\zeta = \mathbf{D}^s(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{Z}_{el}. \quad (13.18)$$

Les matrices \mathbf{B} , \mathbf{T} , \mathbf{C}^s , et \mathbf{P} sont définies comme pour l'élément cohésif en contraintes. Les matrices \mathbf{K} , \mathbf{J} , \mathbf{H} et le vecteur $\mathbf{d}\mathbf{F}_d$ sont définies de telle sorte que, si le champ test $\mathbf{d}\zeta^*$ est nul, l'équation 13.12 s'écrit sous forme discrète

$$\mathbf{d}\mathbf{U}^{*T} (\mathbf{K} - \mathbf{J}) \mathbf{d}\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{U}^{*T} \mathbf{H} \mathbf{d}\mathbf{Z} = \mathbf{d}\mathbf{U}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F}_{ext}, \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{U}^* \in \bar{\mathcal{F}}, \quad (13.19)$$

$\bar{\mathcal{F}}$ étant toujours l'ensemble des vecteurs colonne de dimension $2n_{no}$. La matrice de raideur \mathbf{K} est calculée

comme précédemment. La matrice \mathbf{J} est calculée à partir de la matrice \mathbf{I} définie par

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^T \mathbf{I} \mathbf{T}, \quad (13.20)$$

et obtenue par assemblage des matrices élémentaires \mathbf{I}_{el} vérifiant

$$\mathbf{d}[[\mathbf{U}]]_{el}^{*T} \mathbf{I}_{el} \mathbf{d}[[\mathbf{U}]]_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]]^{*T} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{d}[[\mathbf{u}]] J^s \, d\xi, \quad (13.21)$$

et donc,

$$\mathbf{I}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{sT} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}^s \mathbf{P} J^s \, d\xi. \quad (13.22)$$

Comme pour la formulation en contraintes, la matrice \mathbf{G} est définie par

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^T \mathbf{G}. \quad (13.23)$$

On a donc toujours

$$\mathbf{G}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{sT} \mathbf{D}^s J^s \, d\xi. \quad (13.24)$$

La matrice \mathbf{S} est définie de telle sorte que, si le champ test $\mathbf{d}\mathbf{u}^*$ est nul, l'équation 13.12 s'écrit sous forme discrète

$$\mathbf{d}\mathbf{Z}^{*T} \mathbf{H}^T \mathbf{d}\mathbf{U} - \mathbf{d}\mathbf{Z}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{d}\mathbf{Z} = 0, \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{Z}^* \in \bar{\mathcal{G}}, \quad (13.25)$$

$\bar{\mathcal{G}}$ étant l'ensemble des vecteurs colonne de dimension n_{no}^s . La matrice \mathbf{S} est obtenue par assemblage des matrices \mathbf{S}_{el} vérifiant

$$\mathbf{S}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{D}^{sT} \mathbf{N}^s \mathbf{D}^s J^s \, d\xi. \quad (13.26)$$

Les équations 13.19 et 13.25 donnent le système global

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{J} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{U} \\ \mathbf{d}\mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{F}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.27)$$

13.2.3 Discrétisation en temps

Première itération La première itération se calcule en remplaçant dans 13.27 les incréments infinitésimaux $\mathbf{d}\mathbf{U}$, $\mathbf{d}\mathbf{Z}$ et $\mathbf{d}\mathbf{F}_{ext}$ par les incréments discrets $\delta\mathbf{U}$, $\delta\mathbf{Z}$ et $\Delta\mathbf{F}_{ext}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{J} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{F}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

Itérations suivantes Si les équations du problème global sont vérifiées, on a à tout instant

$$\mathbf{d}\mathbf{F}_{int} - \mathbf{J} \mathbf{d}\mathbf{U} + \mathbf{H} \mathbf{d}\mathbf{Z} = \mathbf{d}\mathbf{F}_{ext}. \quad (13.29)$$

On peut donc définir un résidu \mathbf{R}_1 tel que

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{J} \mathbf{U} - \mathbf{H} \mathbf{Z} - \mathbf{F}_{int}. \quad (13.30)$$

D'autre part, si les équations du problème sont vérifiées, on a

$$\mathbf{H}^T \mathbf{d}\mathbf{U} - \mathbf{d}\mathbf{Y} = 0, \quad (13.31)$$

avec,

$$dY = S dZ. \quad (13.32)$$

Le résidu R_2 s'écrit donc à nouveau

$$R_2 = -H^T U + Y. \quad (13.33)$$

Y peut être obtenu par assemblage des vecteurs Y_{el} vérifiant

$$dY_{el} = S_{el} dZ_{el}, \quad (13.34)$$

$$dY_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} N^s D^s dZ_{el}^s J^s d\xi, \quad (13.35)$$

$$dY_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} d[[u]] J^s d\xi, \quad (13.36)$$

et donc

$$Y_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} [[u]] J^s d\xi. \quad (13.37)$$

On retrouve donc la même valeur de Y que pour la formulation en contraintes. Les résidus R_1 et R_2 sont minimisés de manière itérative, on les note R_1^i et R_2^i à l'itération i . La valeur de ces résidus est obtenue à partir de la linéarisation suivante :

$$R_1^i = R_1^{i-1} + \frac{\partial R_1}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_1}{\partial Z} \delta Z, \quad (13.38)$$

$$R_1^i = R_1^{i-1} - K \delta U - H \delta Z. \quad (13.39)$$

De même, R_2^i vérifie approximativement

$$R_2^i = R_2^{i-1} + \frac{\partial R_2}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_2}{\partial Z} \delta Z, \quad (13.40)$$

$$R_2^i = R_2^{i-1} - H^T \delta U + S \delta Z. \quad (13.41)$$

En imposant la nullité de R_1^i et R_2^i dans 13.39 et 13.41, on obtient le système

$$\begin{bmatrix} K-J & H \\ H^T & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{i-1} \\ R_2^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (13.42)$$

13.3 Implémentation numérique

13.3.1 Algorithmes

L'algorithme de Newton est le même que pour la formulation en contraintes en remplaçant le vecteur Σ par le vecteur Z . L'algorithme 3 présente le calcul d'un incrément de saut de déplacement avec la définition a) de la contrainte équivalente (équation 13.5) et l'algorithme 4 présente ce même calcul avec la définition b) de la contrainte équivalente (équation 13.6). On note toujours $init$ la variable indiquant l'état d'initiation des points d'intégration de la zone cohésive et $rupt$ la variable indiquant la rupture de la zone cohésive. Pour l'algorithme 4, il faut calculer itérativement la contrainte cohésive modifiée équivalente; on note res le résidu sur cette contrainte dont la norme locale ne doit pas dépasser à la fin des itérations la grandeur tol .

Un avantage de la formulation en contraintes modifiées est que l'on peut facilement distinguer un chargement d'une décharge avec un test sur la variable ζ_{eq} , comme on peut le voir dans l'algorithme 3 et sur la figure 13.2.

Données : ζ^i , $init^{(I_t)}$, et $(\kappa^s)^{(I_t)}$;
calcul de ζ_{eq}^i à partir de ζ^i ;
test de l'initiation :
 $init^i := \max(init^{(I_t)}, \arg(\zeta_{eq}^i > \sigma_c))$;
si $init^i = 1$ **alors**
 test du chargement : $c_1^i := \arg(\zeta_{eq}^i > \zeta_{eq}^{(I_t)})$;
 si $c_1^i = 1$ **alors**
 calcul de $(\kappa^s)^i := [[u]]_{eq}^i$ à partir de ζ_{eq}^i ;
 sinon
 $(\kappa^s)^i := (\kappa^s)^{(I_t)}$;
 fin
 test de la rupture : $rupt^i := \arg((\kappa^s)^i > [[u]]_c)$;
 calcul de t_{eq}^i à partir de $(\kappa^s)^i$ et $rupt^i$;
 calcul de $[[u]]^i$ à partir de t_{eq}^i et ζ^i ;
 test du contact : $c_0^i := \arg([[u]]_n^i < 0)$;
 si $c_0^i = 1$ **alors**
 $[[u]]_n^i := 0$;
 fin
 calcul de $(\sigma^s)^i$ à partir de ζ^i et $[[u]]^i$;
sinon
 $(\kappa^s)^i := (\kappa^s)^{(I_t)}$;
 $[[u]]^i := \mathbf{0}$;
fin

Algorithme 3 : Algorithme d'écoulement avec la contrainte équivalente a)

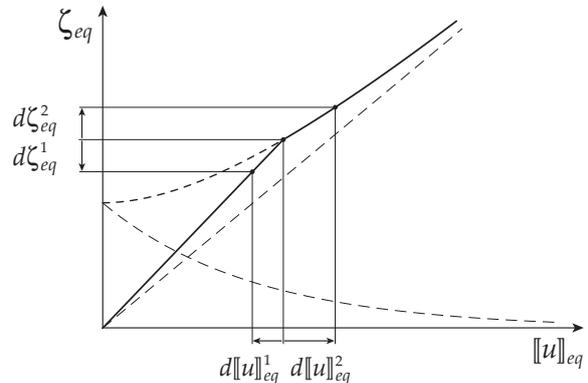


FIG. 13.2 – Charge et décharge avec la loi cohésive modifiée

Données : ζ^i , $\zeta^{(I_t)}$, $init^{(I_t)}$, et $(\kappa^s)^{(I_t)}$;
 $j := 0$;
 $(\zeta_{eq})_j := (\zeta_{eq})^{(I_t)}$;
calcul de $(\zeta_{eq})_{j+1}$ à partir de $\zeta^{(I_t)}$ et ζ^i en linéarisant la variation de ζ_{eq} au voisinage de $(\zeta_{eq})^{(I_t)}$;
définition de la tolérance sur le résidu tol ;
 $res := (\zeta_{eq})_{j+1} - (\zeta_{eq})_j$;
tant que $res > tol$ **faire**
test de l'initiation :
 $init^i := \max(init^{(I_t)}, \arg((\zeta_{eq})_j > \sigma_c))$;
si $init^i = 1$ **alors**
test du chargement :
 $c_1^i := \arg((\zeta_{eq})_j > \zeta_{eq}^{(I_t)})$;
si $c_1^i = 1$ **alors**
| calcul de $(\kappa^s)^i := \llbracket u \rrbracket_{eq}^i$ à partir de ζ_{eq}^i ;
sinon
| $(\kappa^s)^i := (\kappa^s)^{(I_t)}$;
fin
test de la rupture :
 $rupt^i := \arg((\kappa^s)^i > \llbracket u \rrbracket_c)$;
calcul de t_{eq}^i à partir de $(\kappa^s)^i$ et $rupt^i$;
calcul de $\llbracket u \rrbracket^i$ à partir de t_{eq}^i et ζ^i ;
test du contact : $c_0^i := \arg(\llbracket u \rrbracket_n^i < 0)$;
si $c_0^i = 1$ **alors**
| $\llbracket u \rrbracket_n^i := 0$;
fin
calcul de $(\sigma^s)^i$ à partir de $\llbracket u \rrbracket^i$ et ζ^i ;
sinon
| $(\kappa^s)^i := (\kappa^s)^{(I_t)}$;
| $\llbracket u \rrbracket^i := \mathbf{0}$;
fin
calcul de $(\zeta_{eq})_{j+1}$ à partir de $\llbracket u \rrbracket^i$ et $(\sigma^s)^i$;
 $res := (\zeta_{eq})_{j+1} - (\zeta_{eq})_j$;
 $j := j + 1$;
fin
 $(\zeta_{eq})^i := (\zeta_{eq})_j$;

Algorithme 4 : Algorithme d'écoulement avec la contrainte équivalente b)

13.3.2 Application sur un cas test

Cas test On reprend le cas test en contraintes planes utilisé dans le chapitre précédent. Le matériau continu ne change pas mais on utilise cette fois la loi cohésive linéaire définie dans la section 11.2. Les paramètres du matériau sont les suivants : $E = 40$ GPa, $\nu = 0.2$, $\sigma_0 = 4$ MPa, $\beta = 2.4$ (conformément à la valeur de ν), $\gamma = \sqrt{\beta}$, $\llbracket u \rrbracket_c = 0.025$ mm (ce qui donne $G_c = 0.05$ N.mm⁻¹).

Résultats numériques On utilise à nouveau le maillage numéro 4 avec les mêmes éléments que précédemment (linéaires avec deux nœuds et deux points d'intégration de Newton-Cotes pour les éléments d'in-

terface). Le paramètre numérique α vaut

$$\alpha = 2 \frac{\sigma_c}{\llbracket u \rrbracket_c}, \quad (13.43)$$

ce qui permet de garantir que la loi cohésive modifiée soit une fonction croissante du saut de déplacement équivalent. L'échelle de numérotation des piquets de temps est représentée sur la figure 13.3.

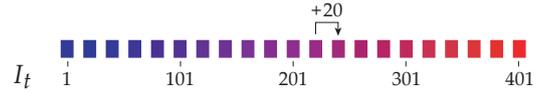


FIG. 13.3 – Numérotation des piquets de temps

Le profils des champs de contraintes obtenus sont représentés sur les figures 13.4 et 13.5.

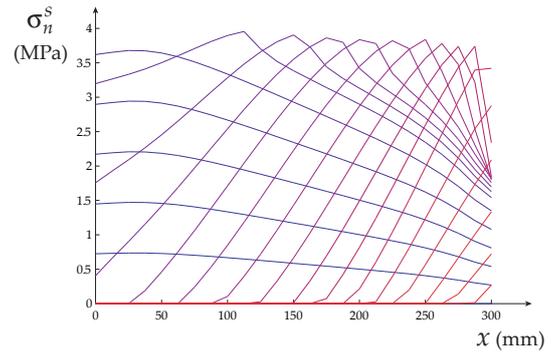


FIG. 13.4 – Contrainte cohésive normale

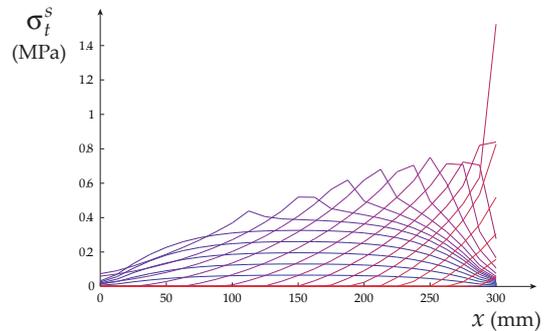


FIG. 13.5 – Contrainte cohésive tangentielle

Les profils des champs de sauts de déplacements obtenus sont représentés sur les figures 13.6 et 13.7.

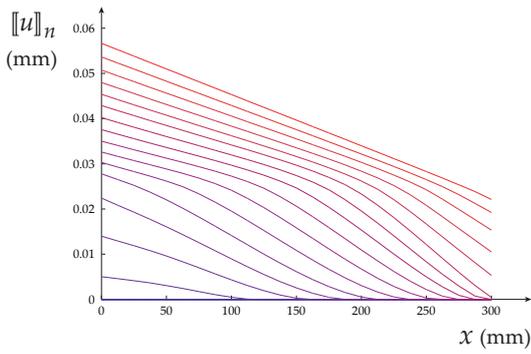


FIG. 13.6 – Saut de déplacement normal

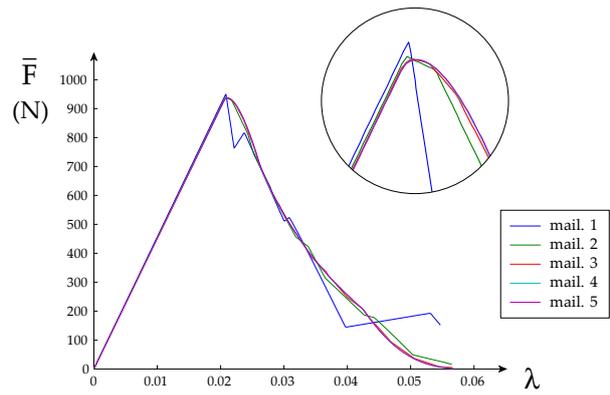


FIG. 13.9 – Convergence des courbes de chargement

On peut observer qu'il y a bien convergence de la solution du point de vue du comportement global de la structure.

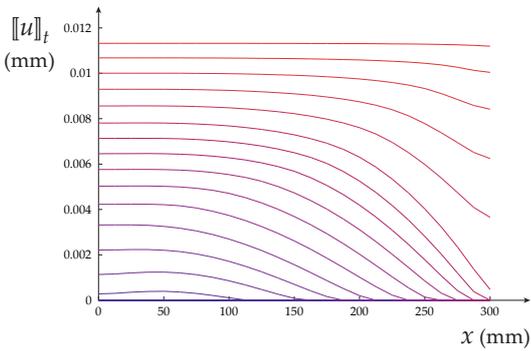


FIG. 13.7 – Saut de déplacement tangentiel

Le profil de la contrainte cohésive modifiée est représenté sur la figure 13.8.

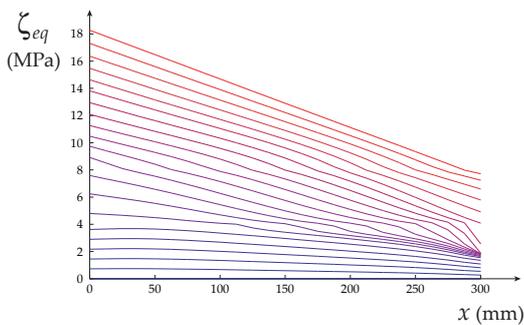


FIG. 13.8 – Contrainte cohésive modifiée

On a pu observer une influence du paramètre α sur le comportement de l'algorithme de Newton. En particulier le pilotage du calcul peut être rendu plus instable si α est choisi trop grand.

Convergence numérique Pour se faire une idée de la convergence des calculs avec le raffinement du maillage, on a superposé sur la figure 13.9 les courbes de l'effort résultant \bar{F} appliqué sur le segment $[CD]$ en fonction du facteur de charge λ obtenues avec les maillages de niveau 1 à 5.

Chap. 14

Transition vers un modèle de Griffith

On rappelle dans ce chapitre quelques résultats connus sur les modèles cohésifs et la théorie de Griffith en vue de donner les conditions d'une transition d'un modèle cohésif vers un modèle de Griffith dans un calcul de rupture. On commence par étudier l'hypothèse de propagation stationnaire nécessaire à l'utilisation d'intégrales de contour en mécanique de la rupture. La théorie de Griffith est ensuite reconstruite à partir d'un modèle cohésif et des hypothèses de Griffith [Griffith, 1920] en reprenant la démarche des travaux de Barenblatt [Barenblatt, 1962], Rice [Rice, 1968], et Hillerborg *et al.* [Hillerborg *et al.*, 1976]. Suivant le modèle cohésif pris pour référence, on retombe exactement sur un modèle de Griffith, ou sur un modèle dont l'énergie dissipée surfacique dépend du rapport entre la contrainte normale et la contrainte tangentielle. Nous supposons ensuite que les deux hypothèses de Griffith découlent d'une hypothèse plus générale de séparation des échelles entre une échelle liée à l'observateur et une échelle liée au matériau étudié. Enfin, nous proposerons un critère pour savoir quand une transition d'un modèle cohésif vers un modèle de Griffith est possible pendant un calcul. La notion de fissure équivalente sera alors utilisée pour déterminer la position de la pointe de la fissure de Griffith équivalente à une fissure cohésive.

14.1 Propagation stationnaire

Définition L'hypothèse de *propagation stationnaire* peut être définie de la manière suivante :

La propagation est stationnaire si le champ de déplacement autour de la pointe de la fissure reste inchangé pendant la propagation dans un repère se déplaçant avec la pointe de la fissure.

Cette hypothèse a déjà été utilisée dans la section 2.2.2 pour la construction de la théorie de Griffith. Elle est parfois appelée hypothèse d'*autonomie* de la pointe de la fissure [Barenblatt, 1959, Broberg, 1971].

Remarques :

- la définition de la stationnarité s'accorde mal avec la propagation d'une fissure tournante. On considère donc dans ce chapitre que la propagation se fait en ligne droite ;

- l'hypothèse de stationnarité implique que le profil de la discontinuité au voisinage de la pointe de la fissure à l'instant $t + dt$ peut s'obtenir à partir du profil à l'instant t par un mouvement de translation (ce mouvement de translation ne correspond pas au mouvement des points matériels).

On se place dans ce chapitre dans le cadre d'un problème bidimensionnel, et on fait l'hypothèse que le matériau entourant la discontinuité est élastique et linéaire.

14.1.1 Traduction mathématique

On étudie la propagation d'une fissure dont la longueur est notée a . On définit un repère $\mathcal{R} = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ fixe par rapport au domaine Ω et un repère $\mathcal{R}_{zc} = (A_s, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ se déplaçant avec la pointe A_s de la fissure (voir figure 14.1).

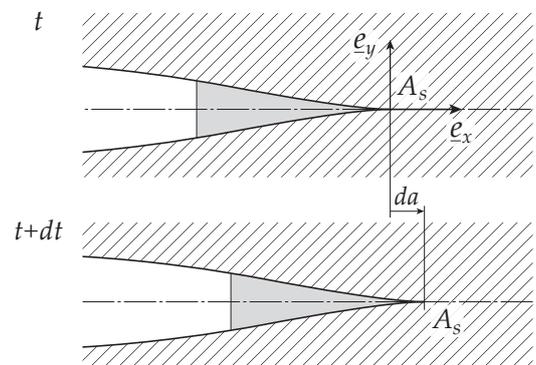


FIG. 14.1 – Avancée stationnaire de la fissure

On étudie le déplacement \underline{u}^+ d'un point M^s appartenant à Γ_s^+ . Le vecteur position de ce point est noté \underline{x} dans \mathcal{R} et $\underline{\xi}$ dans \mathcal{R}_{zc} (voir figure 14.2).

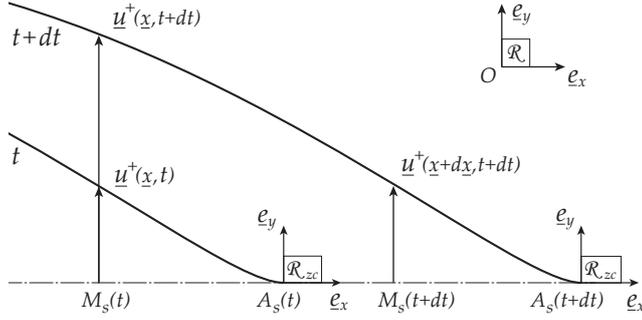


FIG. 14.2 – Repères et champs de déplacements

Si le champ \underline{u}^+ est vu comme une fonction de \underline{x} et t , un incrément temporel de \underline{u}^+ s'écrit

$$d\underline{u}^+ = \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial \underline{x}} \cdot d\underline{x} + \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial t} dt. \quad (14.1)$$

On note $d(\cdot)|_{\xi}$ un incrément calculé dans le repère \mathcal{R}_{zc} (avec ξ constant) et $d(\cdot)|_{\underline{x}}$ un incrément calculé dans le repère \mathcal{R} (avec \underline{x} constant). L'autonomie de la pointe de la fissure se traduit par

$$d\underline{u}|_{\xi} = 0. \quad (14.2)$$

Entre t et $t+dt$ la zone cohésive s'est translátée de da dans la direction \underline{e}_x , donc

$$d\underline{x} = d\underline{\xi} + da \underline{e}_x. \quad (14.3)$$

En se plaçant dans le repère mobile, on a

$$d\underline{x}|_{\xi} = da \underline{e}_x. \quad (14.4)$$

En se plaçant dans le repère fixe, on a

$$d\underline{x}|_{\underline{x}} = 0. \quad (14.5)$$

Par conséquent,

$$d\underline{u}|_{\xi} = \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{e}_x da + d\underline{u}|_{\underline{x}}. \quad (14.6)$$

Si la propagation est autonome, on a donc

$$d\underline{u}|_{\underline{x}} = - \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{e}_x da. \quad (14.7)$$

Si les coordonnées de \underline{x} dans \mathcal{R} sont notées (x, y) , cette équation peut s'écrire plus simplement

$$d\underline{u}|_{\underline{x}} = - \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial x} da. \quad (14.8)$$

On pourrait développer le même raisonnement avec le champ de déplacement sur le bord inférieur \underline{u}^- , et donc également avec le champ de saut de déplacement $[[\underline{u}]]$. Ce champ vérifie donc en cas de propagation stationnaire

$$d[[\underline{u}]]|_{\underline{x}} = - \frac{\partial [[\underline{u}]]}{\partial x} da. \quad (14.9)$$

Remarque : on peut considérer que la stationnarité se traduit par l'équation plus générale (voir par exemple [Broberg, 1999]) :

$$d(\cdot) = - \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} da, \quad (14.10)$$

(\cdot) pouvant désigner n'importe quelle variable dans la zone de stationnarité.

14.1.2 Calcul de G

Le système isolé est composé de la partie continue Ω du domaine et de la zone cohésive Γ_{zc} . Nous allons calculer le taux de restitution d'énergie élastique G à partir de sa définition, soit

$$G = \frac{d(\mathcal{W}_{ext} - \Psi)}{da}. \quad (14.11)$$

Remarque : dans ce chapitre, G est une énergie linéique (et non une énergie surfacique) car le problème est supposé bidimensionnel.

On décompose Ψ en une contribution Ψ_{zc} venant de la zone cohésive et une contribution Ψ_{vol} venant du matériau continu :

$$\Psi = \Psi_{zc} + \Psi_{vol}. \quad (14.12)$$

Si la propagation est stationnaire, alors $d\Psi_{zc} = 0$, donc

$$d\Psi = d\Psi_{vol}. \quad (14.13)$$

En isolant uniquement Ω , le bilan énergétique 1.62 donne

$$d\Psi_{vol} = d\mathcal{W}_{ext} + d\mathcal{W}_{zc/vol}. \quad (14.14)$$

D'après les équations 14.11, 14.13, et 14.14, l'expression de G devient

$$G = - \frac{d\mathcal{W}_{zc/vol}}{da} = \frac{d\mathcal{W}_{vol/zc}}{da}. \quad (14.15)$$

On a donc,

$$G da = \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^s \cdot d[[\underline{u}]]|_{\underline{x}} d\Gamma_s. \quad (14.16)$$

L'équation 14.9 donne alors

$$G = - \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma}^s \cdot \frac{\partial [[\underline{u}]]}{\partial x} d\Gamma_s. \quad (14.17)$$

14.1.3 Intégrale J

L'intégrale J , introduite par Rice [Rice, 1968] est une manière d'évaluer G en mécanique de la rupture. Elle est définie par

$$J = \int_{\Gamma'} (\psi \underline{e}_x - \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x}) \cdot \underline{n} d\Gamma', \quad (14.18)$$

Γ' étant le contour d'un volume Σ' qui est une partie du domaine $\Sigma = \Omega \cup \Gamma_s$. Si Γ' n'entoure pas la zone cohésive, l'intégrale de Rice est nulle. Par contre, si Γ' entoure la zone cohésive et si la propagation est stationnaire, l'intégrale de Rice est égale au taux de restitution d'énergie élastique. On a donc

$$J = 0, \quad \text{si } \Gamma_{zc} \not\subset \Omega', \quad (14.19)$$

$$J = G, \quad \text{si } \Gamma_{zc} \subset \Omega'. \quad (14.20)$$

Ces deux équations sont démontrées ci-dessous d'après [Rice, 1968].

Démonstration de l'équation 14.19 On suppose que Γ' entoure un volume élastique linéaire de Ω . En appliquant le théorème de la divergence à l'équation 14.18, on obtient

$$J = \int_{\Sigma'} (\nabla(\psi \underline{e}_x) - \nabla(\underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x})) d\Sigma', \quad (14.21)$$

$$J = \int_{\Sigma'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{u}}{\partial x \partial x} \right) d\Sigma'. \quad (14.22)$$

On peut remarquer que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial x} = \underline{\sigma} : \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right)^{sym}, \quad (14.23)$$

donc, $\underline{\sigma}$ étant symétrique,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{u}}{\partial x \partial x} = \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{u}}{\partial x \partial x}. \quad (14.24)$$

En introduisant cette équation dans l'expression 14.22 de J , on montre que $J = 0$. L'intégrale J est donc nulle si Σ' est uniquement constitué d'un volume du domaine élastique linéaire. On peut en déduire que tout contour Γ' entourant la zone cohésive donne la même valeur de J (ce résultat sera utilisé dans la démonstration suivante).

Démonstration de l'équation 14.20 Pour cette démonstration, Γ' est le contour de la zone cohésive (voir figure 14.3).

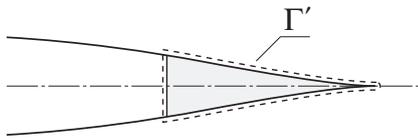


FIG. 14.3 – Contour choisi pour le calcul de J

Avec ce choix du contour d'intégration, l'intégrale de Rice s'écrit

$$J = - \int_{\Gamma_{zc}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_y) \cdot \frac{\partial \underline{u}^+}{\partial x} d\Gamma_{zc} + \int_{\Gamma_s} (\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_y) \cdot \frac{\partial \underline{u}^-}{\partial x} d\Gamma_{zc}. \quad (14.25)$$

En faisant apparaître dans cette expression le saut de déplacement dans la discontinuité, on obtient

$$J = - \int_{\Gamma_{zc}} \underline{\sigma}^s \cdot \frac{\partial \llbracket \underline{u} \rrbracket}{\partial x} d\Gamma_{zc}. \quad (14.26)$$

Cette équation est égale à l'expression de G donnée en 14.17. Si la propagation est stationnaire, on a donc $J = G$.

14.2 Construction de la théorie de Griffith

L'objectif de cette partie est de reconstruire la théorie de Griffith à partir d'un modèle cohésif en appliquant les deux hypothèses de Griffith présentées dans la section 2.2.2 et qui peuvent s'exprimer dans le cas d'un modèle cohésif de la manière suivante :

- *hypothèse 1* : la propagation de la zone cohésive est stationnaire ;

- *hypothèse 2* : la taille de la zone cohésive est petite devant la taille de la structure.

14.2.1 Hypothèse 1 : obtention du critère de propagation

Pour la théorie de Griffith, le taux de restitution d'énergie élastique critique G_c est l'unique paramètre du modèle. Par définition, G_c est la densité d'énergie de surface supposée constante et vérifiant l'équation 2.69 :

$$dE_s = G_c da. \quad (14.27)$$

Pour un modèle cohésif, G_c est le travail surfacique reçu par la zone cohésive pendant toute la décohésion (d'après [Rice, 1968] et [Hillerborg *et al.*, 1976]) :

$$G_c = \int_0^{\llbracket \underline{u} \rrbracket_c} \underline{\sigma}^s \cdot d\llbracket \underline{u} \rrbracket, \quad (14.28)$$

avec $\llbracket \underline{u} \rrbracket_c$ le saut de déplacement à la rupture de la zone cohésive. On peut remarquer que cette équation suppose que G_c est indépendant de la direction de chargement, ce qui n'est pas vrai pour tous les modèles cohésifs. L'équation 14.17 donnant G dans le cas d'une propagation stationnaire peut se calculer en faisant un changement de variable pour intégrer non plus sur l'abscisse x mais sur le saut de déplacement $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ de la discontinuité (un changement de variable similaire est fait dans [Rice, 1968] pour le calcul de l'intégrale J avec un modèle cohésif). On obtient

$$G = \int_0^{\llbracket \underline{u} \rrbracket_c} \underline{\sigma}^s \cdot d\llbracket \underline{u} \rrbracket. \quad (14.29)$$

D'après les équations 14.28 et 14.29, si la zone cohésive se propage de façon stationnaire, on a

$$G = G_c. \quad (14.30)$$

On en déduit que si l'hypothèse 1 de Griffith est vérifiée, le critère de propagation en contrainte de la zone cohésive concorde avec le critère énergétique de la théorie de Griffith.

Remarque : si on fait tendre la longueur d'une fissure vers 0, on peut montrer que G tend également vers 0, la pointe d'une fissure ne peut donc être stationnaire lors de son initiation.

14.2.2 Hypothèse 2 : obtention des champs asymptotiques

Si l'hypothèse 2 est vérifiée, il est possible de calculer analytiquement les champs mécaniques entourant la pointe de la fissure (aussi appelés champs de Williams [Williams, 1952]). Pour cela, on définit le repère circulaire $\mathcal{R}_\theta = (A_s, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ représenté sur la figure 14.4.

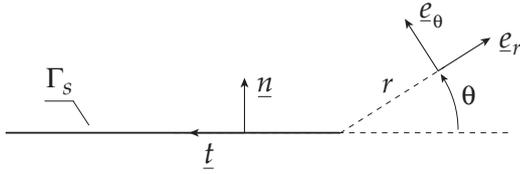


FIG. 14.4 – Repère circulaire autour de la pointe

Dans ce repère, les composantes du déplacement \underline{u} sont notées u_r et u_θ , et les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrivent

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\theta}, \quad (14.31)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\theta}. \quad (14.32)$$

On définit le vecteur colonne $\underline{\sigma}$ par

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{r\theta}]^T. \quad (14.33)$$

On peut montrer que le vecteur des contraintes s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$\underline{\sigma} = K_I \underline{\sigma}_I + K_{II} \underline{\sigma}_{II}, \quad (14.34)$$

K_I et K_{II} étant les facteurs d'intensité des contraintes en mode I et en mode II, et $\underline{\sigma}_I$ et $\underline{\sigma}_{II}$ des vecteurs dépendant de r et θ dont l'expression est donnée plus loin. On définit le vecteur colonne $\underline{\varepsilon}$ par

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad 2\varepsilon_{r\theta}]^T. \quad (14.35)$$

Ce vecteur s'écrit sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = K_I \underline{\varepsilon}_I + K_{II} \underline{\varepsilon}_{II}, \quad (14.36)$$

$\underline{\varepsilon}_I$ et $\underline{\varepsilon}_{II}$ étant également des vecteurs dépendant de r et θ . On définit le vecteur colonne \underline{u} par

$$\underline{u} = [u_r \quad u_\theta]^T. \quad (14.37)$$

Ce vecteur est exprimé sous la forme

$$\underline{u} = K_I \underline{u}_I + K_{II} \underline{u}_{II}, \quad (14.38)$$

\underline{u}_I et \underline{u}_{II} dépendant encore de r et θ . Les champs de déplacements \underline{u}_I et \underline{u}_{II} sont représentés sur la figure 14.5 en se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes (la structure non déformée comprend une grille et trois cercles concentriques).

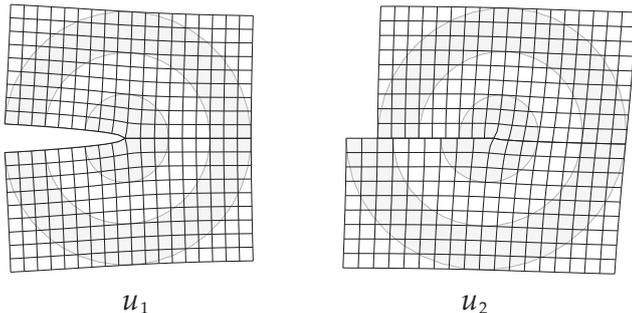


FIG. 14.5 – Champs de déplacements de Williams

Toujours en déformations planes, les expressions des vecteurs $\underline{\sigma}_I$, $\underline{\sigma}_{II}$, $\underline{\varepsilon}_I$, $\underline{\varepsilon}_{II}$, \underline{u}_I , et \underline{u}_{II} en fonction de r et θ sont les suivantes :

$$\underline{\sigma}_I = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 5 \cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\frac{3\theta}{2}) \\ 3 \cos(\frac{\theta}{2}) + \cos(\frac{3\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\sigma}_{II} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -5 \sin(\frac{\theta}{2}) + 3 \sin(\frac{3\theta}{2}) \\ -3 \sin(\frac{\theta}{2}) - 3 \sin(\frac{3\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) + 3 \cos(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\varepsilon}_I = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\frac{3\theta}{2}) \\ (-3-8\nu) \cos(\frac{\theta}{2}) + \cos(\frac{3\theta}{2}) \\ 2 \sin(\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\varepsilon}_{II} = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} (-5+8\nu) \sin(\frac{\theta}{2}) + 3 \sin(\frac{3\theta}{2}) \\ (-3+8\nu) \sin(\frac{\theta}{2}) + 3 \sin(\frac{3\theta}{2}) \\ 2 \cos(\frac{\theta}{2}) + 6 \cos(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{u}_I = \frac{1}{4\mu\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(\frac{3\theta}{2}) \\ (-7+8\nu) \sin(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{u}_{II} = \frac{1}{4\mu\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} (-5+8\nu) \sin(\frac{\theta}{2}) + 3 \sin(\frac{3\theta}{2}) \\ (-7+8\nu) \cos(\frac{\theta}{2}) + 3 \cos(\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix}.$$

On peut se référer à [Leblond, 2003] pour le calcul de ces champs.

Remarques :

- les champs de contraintes peuvent être utilisés pour calculer l'intégrale J sur un contour circulaire centré sur la pointe de la fissure et de rayon quelconque. D'après [Rice, 1968], on obtient en déformations planes :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2); \quad (14.39)$$

- les champs de contraintes et de déformations obtenus sont singuliers sur la pointe de la fissure. Pour interpréter ce résultat, on peut faire l'analogie suivante avec un modèle de poutre circulaire en flexion :

- le modèle poutre est construit en supposant que la section de la poutre est négligeable devant sa longueur. Cette section doit pourtant être prise en compte pour calculer la contrainte maximale dans la structure. Si on fait tendre la section de la poutre vers 0, la contrainte maximale tend vers l'infini,
- le modèle de Griffith est construit en supposant que la taille de la zone cohésive est négligeable devant la taille de la structure. La taille de la zone cohésive doit cependant être prise en compte pour calculer les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure. Si on fait tendre la taille de la zone cohésive vers 0, la contrainte maximale tend vers l'infini.

On peut également remarquer que le tenseur des actions mécaniques joue le même rôle pour le modèle poutre que les facteurs d'intensité des contraintes pour le modèle cohésif : ce sont des grandeurs globales qui permettent de reconstituer le champ de contraintes.

14.3 Notions d'échelles

Champs mécaniques Pour un modèle cohésif, on peut distinguer les zones suivantes autour de la pointe de la fissure :

- la zone cohésive ;
- la zone voisine de la pointe : les champs sont déterminés principalement par la zone cohésive ;
- la zone de Williams : les champs sont déterminés principalement par la fissure comme s'il s'agissait d'une fissure de Griffith ;
- la zone d'obscurcissement : les conditions de bords libres sur les bords de la fissure sont déterminantes dans cette zone (la notion d'obscurcissement a déjà été utilisée dans le chapitre 5 d'après [Hild, 2007]) ;
- la zone de radialité : l'influence de la fissure est négligeable, l'état de contrainte est proche de celui qu'il y aurait sans la fissure.

Ces zones sont représentées sur la figure 14.6.

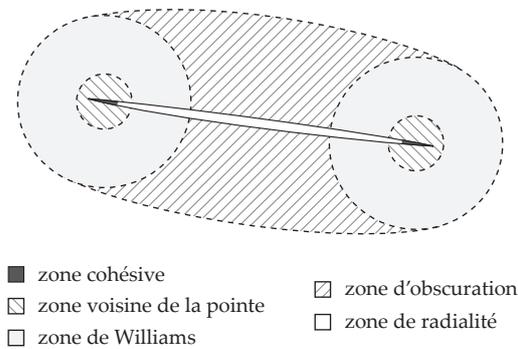


FIG. 14.6 – Zones entourant la fissure

Principe de Saint-Venant La présence de la zone de Williams peut se justifier en appliquant le principe de Saint-Venant. D'après [Sanchez, 2001], ce principe peut s'énoncer de la manière suivante pour une poutre :

« Suffisamment loin des extrémités de la poutre, la solution ne dépend plus des distributions exactes des charges sur les bases mais dépend uniquement de certaines de leurs caractéristiques. »

Cette hypothèse peut se traduire pour la zone cohésive par l'énoncé suivant :

« Suffisamment loin de la pointe de la fissure, la solution ne dépend plus des distributions exactes de contraintes cohésives sur les bords de la fissure mais dépend uniquement de la valeur des facteurs d'intensité des contraintes. »

Séparation des échelles On définit une longueur caractéristique l_{stru} pour la structure prise dans sa globalité. On note l_{fiss} la longueur totale de la fissure, et l_{zc} la longueur de la zone cohésive. Si l_{zc} est négligeable devant l_{fiss} et l_{stru} , on peut supposer qu'il existe une zone importante sur laquelle les champs asymptotiques de Williams sont vérifiés. On définit la séparation des

échelles entre une échelle locale associée à la zone cohésive et une échelle globale associée à la structure et la fissure par

$$l_{zc} \ll \min(l_{stru}, l_{fiss}). \quad (14.40)$$

Cette équation valide l'hypothèse 2 de Griffith si elle est vérifiée. D'après [Bažant, 2002], on peut supposer que c'est le cas si

$$\frac{l_{mat}}{\min(l_{stru}, l_{fiss})} < \frac{1}{100}. \quad (14.41)$$

Pour interpréter cette condition, on reprend la description suivante de la séparation des échelles, issue de [Saulnier, 2006], et déjà utilisée dans le chapitre 5 :

« S'il y a séparation des échelles, alors un niveau n'influence les niveaux supérieurs que par l'intermédiaire de *paramètres effectifs*. Ces paramètres effectifs résument un *phénomène sous-jacent complexe*, au sens où ils suffisent à rendre compte de ses *conséquences observables aux échelles supérieures*. »

Cette propriété s'applique s'il y a stationnarité de la propagation de la zone cohésive car, dans ce cas

- le *paramètre effectif* est le taux de restitution d'énergie élastique G ;
- le *phénomène sous-jacent complexe* est le comportement de la zone cohésive ;
- la *conséquence observable aux échelles supérieures* est la propagation ou non de la fissure.

On peut donc penser que la séparation des échelles englobe les deux hypothèses de Griffith car elle nécessite à la fois que la propagation soit stationnaire et que le taille de la zone d'élaboration de la fissure soit négligeable devant les dimensions de la structure et de la fissure (équation 14.40).

14.4 Modèle cohésif se comportant comme un modèle de Griffith

14.4.1 Modèle de Griffith

Pour construire un modèle cohésif se comportant comme un modèle de Griffith, on utilise le modèle cohésif défini dans le chapitre 11 avec la définition b) de la contrainte cohésive équivalente et des paramètres vérifiant $\gamma = \sqrt{\beta}$ (ce qui revient à utiliser le modèle de Camacho et Ortiz [Camacho et Ortiz, 1996]). La loi cohésive est supposée être de la forme

$$\sigma_{eq}^s = G_c \delta(\llbracket u \rrbracket_{eq}), \quad (14.42)$$

δ étant la fonction de Dirac. La loi cohésive construite se comporte comme un modèle de Griffith de taux de

restitution d'énergie élastique critique G_c . Avec cette loi cohésive, une fissure ne peut se propager que depuis un point où la contrainte est infinie. L'initiation d'une fissure dans un matériau sain et sans aucune singularité due à la géométrie est donc impossible.

Remarque : on peut également construire le modèle de Griffith en faisant tendre la contrainte d'initiation de la zone cohésive vers l'infini tout en conservant G_c constant, comme cela est fait dans [Feyel, 2003]. Pour cela, on peut considérer une loi cohésive vérifiant

$$\sigma_{eq}^s = h \sigma_c, \quad \text{si } \llbracket u \rrbracket_{eq} < \frac{\llbracket u \rrbracket_c}{h}, \quad (14.43)$$

$$\sigma_{eq}^s = 0, \quad \text{sinon.} \quad (14.44)$$

Si h tend vers l'infini, on retrouve le modèle précédent avec

$$G_c = \sigma_c \llbracket u \rrbracket_c. \quad (14.45)$$

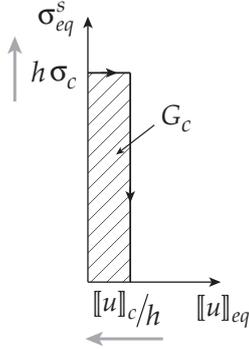


FIG. 14.7 – Loi cohésive d'un modèle cohésif se comportant comme un modèle de Griffith

14.4.2 Modèle de Griffith à plusieurs paramètres

On se place cette fois dans le cas où $\gamma \neq \sqrt{\beta}$ et où le taux de restitution d'énergie élastique critique G_c ne peut donc pas être défini. On suppose que le rapport entre la valeur absolue de la contrainte tangentielle et la contrainte normale μ défini par

$$\mu = \frac{|\sigma_t^s|}{\sigma_n^s}, \quad \text{avec } \mu > 0, \quad (14.46)$$

est constant pendant toute la décohésion. D'après les calculs de la section 11.2, un incrément d'énergie dissipée surfacique s'écrit

$$d\phi_s = \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} ((\sigma_n^s)^2 + \beta (\sigma_t^s)^2) d\kappa^s. \quad (14.47)$$

On note G_c^I l'énergie surfacique totale dissipée en mode I ($\mu = 0$) vérifiant

$$G_c^I = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} (\sigma_n^s)^2 d\kappa^s, \quad \text{avec } \mu = 0. \quad (14.48)$$

Si la zone cohésive est sollicitée en mode I, $\sigma_n^s = \sigma_{eq}^s$, G_c^I est donc aussi égal à l'aire sous la loi cohésive pouvant s'écrire

$$G_c^I = \int_0^{\llbracket u \rrbracket_c} \frac{1}{2} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} (\sigma_{eq}^s)^2 d\kappa^s. \quad (14.49)$$

Avec la définition a) de la contrainte cohésive équivalente, on obtient si $\mu \leq \frac{1}{\gamma}$:

$$\sigma_n^s = \sigma_{eq}^s, \quad (14.50)$$

$$|\sigma_t^s| = \mu \sigma_{eq}^s; \quad (14.51)$$

et si $\mu > \frac{1}{\gamma}$:

$$\sigma_n^s = \frac{1}{\gamma \mu} \sigma_{eq}^s, \quad (14.52)$$

$$|\sigma_t^s| = \frac{1}{\gamma} \sigma_{eq}^s. \quad (14.53)$$

À partir de ces valeurs, on obtient un taux de restitution critique G_c dépendant de μ :

$$G_c = (1 + \beta \mu^2) G_c^I, \quad \text{si } \mu \leq \frac{1}{\gamma}, \quad (14.54)$$

$$G_c = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\mu^2} + \beta \right) G_c^I, \quad \text{si } \mu > \frac{1}{\gamma}. \quad (14.55)$$

Avec la définition b) de la contrainte cohésive équivalente, σ_n^s et σ_t^s vérifient

$$(\sigma_n^s)^2 = \frac{(\sigma_{eq}^s)^2}{1 + \gamma^2 \mu^2}, \quad (14.56)$$

$$(\sigma_t^s)^2 = \frac{\mu^2 (\sigma_{eq}^s)^2}{1 + \gamma^2 \mu^2}, \quad (14.57)$$

ce qui donne l'expression suivante de G_c :

$$G_c = \left(\frac{1 + \beta \mu^2}{1 + \gamma^2 \mu^2} \right) G_c^I. \quad (14.58)$$

Pour utiliser un modèle de ce type, il faudrait pouvoir déterminer le coefficient μ à partir des champs mécaniques entourant la fissure, ce qui est rendu difficile par la singularité des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure.

14.5 Changement de modèle

On s'intéresse maintenant à la possibilité d'une transition d'un modèle cohésif vers un modèle de Griffith au cours d'un calcul. Le modèle de Griffith n'étant utilisable lors de l'initiation de la fissure, la transition vers le modèle de Griffith doit se faire après que la fissure a atteint une certaine longueur.

14.5.1 Critère pour l'autonomie de la pointe

Lors de la phase d'initiation (fissure courte), la propagation d'une fissure entre un instant t et son suivant $t + dt$ peut se décomposer en deux phases :

1. Propagation autonome avec translation du profil de la fissure.
2. Ouverture de la fissure sans propagation.

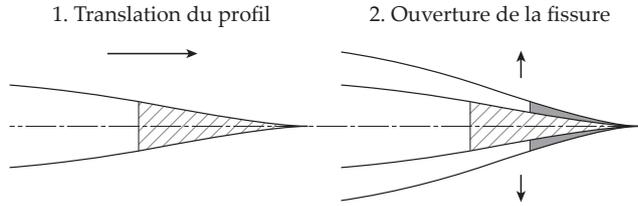


FIG. 14.8 – Propagation de la discontinuité pendant la phase d'initiation

G peut donc se décomposer en une partie égale à l'intégrale J (correspondant à la phase de propagation stationnaire) et une partie notée G_{ouv} (correspondant à la phase d'ouverture) :

$$G = J + G_{ouv}. \quad (14.59)$$

La zone cohésive oppose un travail résistif à la structure pendant la phase d'ouverture. L'équation 14.15 impose donc que G_{ouv} soit positif :

$$G_{ouv} > 0, \quad (14.60)$$

par conséquent,

$$J < G. \quad (14.61)$$

On pourrait donc utiliser un indicateur de stationnarité I_{stat} , compris entre 0 et 1, et vérifiant

$$I_{stat} = 1 - \frac{J}{G}. \quad (14.62)$$

Si on considère que la propagation est stationnaire quand I_{stat} est supérieur à une valeur fixée par avance notée I_G , le critère de stationnarité s'écrit

$$I_{stat} \geq I_G. \quad (14.63)$$

Remarque : la stationnarité peut également s'observer sur les courbes de résistance ou courbes-R (*R-curves* en anglais) donnant le taux de restitution d'énergie élastique G en fonction de l'avancée de la fissure a . Ces courbes atteignent généralement un plateau une fois qu'une certaine longueur de fissure est atteinte, on peut alors considérer que la propagation est stationnaire et que $G = G_c$ (voir par exemple [Tvergaard et Hutchinson, 1992, Morel *et al.*, 2010]).

14.5.2 Position de la pointe de la fissure de Griffith

Fissure de Griffith irréversible Pour pouvoir effectuer la transition vers un modèle de Griffith à un certain stade de la rupture, il faut savoir où placer la pointe de la fissure de Griffith au moment du changement de modèle. Pour cela, on peut envisager d'utiliser à nouveau la notion de fissure équivalente de Mazars

avec le modèle cohésif jouant le rôle de modèle de référence, et le modèle de Griffith jouant le rôle de modèle équivalent. Ce changement de modèle sera donc effectué en imposant que l'énergie dissipée par la fissure équivalente de Griffith soit égale à l'énergie dissipée par le modèle cohésif de référence, soit

$$\Phi_G = \Phi_s, \quad (14.64)$$

avec Φ_G l'énergie dissipée par le modèle de Griffith équivalent et Φ_s l'énergie dissipée dans la discontinuité. Si on note a_G la longueur de la fissure de Griffith, on obtient

$$a_G = \frac{\Phi_s}{G_c}. \quad (14.65)$$

Pour que le critère 14.64 soit respecté, la pointe de la fissure de Griffith doit donc se trouver au niveau du point C_s , tel que l'aire \mathcal{A}_1 soit égale à l'aire \mathcal{A}_2 sur la figure 14.9.

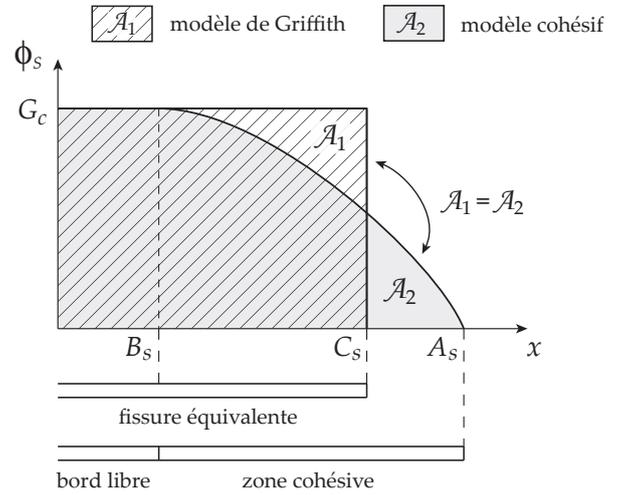


FIG. 14.9 – Détermination de la pointe de la fissure de Griffith

Si on considère que la pointe de la fissure cohésive se trouve au point B_s (point où la zone cohésive est rompue), la fissure de Griffith est un peu plus longue que la fissure avec zone cohésive.

Fissure de Griffith partiellement réversible La méthode présentée précédemment est bien adaptée au cas d'un modèle cohésif plastique, car alors aucune énergie libre n'est stockée dans la zone cohésive. Dans le cas d'un modèle cohésif endommageable, l'énergie de surface s'écrit

$$E_s = \Psi_s + \Phi_s, \quad (14.66)$$

Ψ_s étant l'énergie libre de la discontinuité. Ψ_s peut diminuer si la zone cohésive se décharge, ce qui doit se traduire par une refermeture de la fissure de Griffith équivalente. On distingue donc la pointe de la fissure C_s correspondant au cas où la zone cohésive est chargée, et la pointe D_s correspondant au cas où la zone cohésive

est complètement déchargée. Ces deux points donnent un encadrement de la position réelle de la pointe de la fissure équivalente. La longueur de la fissure en charge est notée a_G^{max} et la longueur minimale de la fissure est notée a_G^{min} . Le critère de changement de modèle est modifié pour que l'énergie libre de la discontinuité soit également préservée. On obtient

$$\begin{bmatrix} \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_s \\ \Psi_s \end{bmatrix}, \tag{14.67}$$

avec Ψ_G l'énergie libre du modèle de Griffith équivalent. On obtient à partir de ce critère la longueur minimale a_G^{min} et la longueur maximale a_G^{max} de la fissure équivalente :

$$a_G^{min} = \frac{\Phi_s}{G_c}, \tag{14.68}$$

$$a_G^{max} = \frac{\Phi_s + \Psi_s}{G_c}. \tag{14.69}$$

La construction de la fissure de Griffith est résumée sur la figure 14.10.

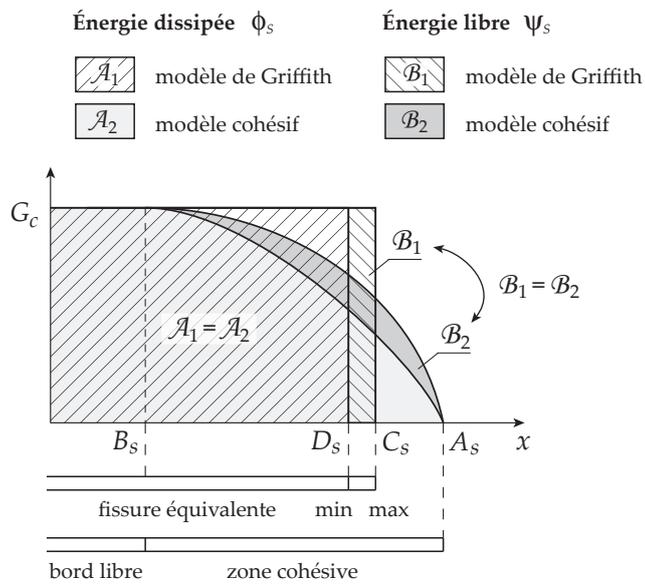


FIG. 14.10 – Détermination des points min et max de la fissure de Griffith

Conclusion

Bilan Dans cette partie, une loi cohésive a été construite par analogie avec un modèle de fissuration diffuse, ce qui permet d'établir un lien entre les souplesses de la zone cohésive dans la direction normale et la direction tangentielle. Il est possible de retrouver à partir de cette loi le modèle classique de Camacho et Ortiz [Camacho et Ortiz, 1996] avec un choix particulier des paramètres du matériau. Une formulation faible à deux champs permettant d'implémenter des lois cohésives extrinsèques a ensuite été présentée. Les champs inconnus de cette formulation sont d'une part le champ de déplacement sur le volume, et d'autre part le champ de contrainte cohésive sur la discontinuité. L'implémentation numérique de cette formulation présente quelques difficultés, notamment pour traiter la rupture des éléments cohésifs. Pour résoudre ce problème, une modification de la formulation consistant à remplacer la contrainte cohésive par une contrainte cohésive modifiée dans les inconnues du problème a été proposée. Ceci conduit à ne plus utiliser la loi cohésive originale du modèle mais une loi croissante reliant la contrainte équivalente modifiée au saut de déplacement équivalent. On a ensuite rappelé comment un modèle de Griffith peut être obtenu à partir d'un modèle cohésif en lui appliquant les hypothèses de la théorie de Griffith. Nous pensons que ces deux hypothèses reviennent à considérer qu'il y a séparation des échelles entre une échelle associée à la zone cohésive et une échelle associée à la structure et à la fissure. On a finalement étudié la faisabilité d'un changement de modèle qui permettrait de basculer d'un modèle cohésif vers un modèle de Griffith au cours d'un calcul. Un critère de validité a été proposé pour savoir quand introduire la fissure de Griffith, et la position de la pointe de cette fissure a été calculée en utilisant la notion de fissure équivalente de Mazars.

Perspectives L'implémentation d'une loi cohésive extrinsèque ne pose pas de problème particulier avec des éléments-finis étendus car les éléments cohésifs sont introduits au fur et à mesure qu'ils sont initiés. Le traitement des conditions de contact entre les deux bords de la discontinuité doit par contre faire l'objet d'un traitement particulier. La formulation en contrainte modifiée pourrait être utilisée avec la méthode X-FEM pour traiter des problèmes de contact. Ceci nécessiterait d'ajouter au modèle cohésif un critère pour calculer la direction de propagation de la discontinuité. Le pilotage du calcul pourrait également être amélioré. En particulier, puisque la contrainte cohésive équivalente modifiée augmente avec l'ouverture de la discontinuité, on pourrait imaginer de piloter l'évolution du chargement avec cette

Conclusion générale

Bilan L'objectif de ce travail était d'utiliser conjointement l'endommagement et la fissuration dans des problèmes de rupture. La première étape fut de choisir un cadre thermodynamique similaire pour les modèles continus et discontinus. Trois types de modèles permettant de modéliser le processus de rupture ont ensuite été étudiés : les modèles d'endommagement (avec ou sans plasticité), les modèles cohésifs et le modèle de Griffith. Chacun de ces modèles a des avantages et des inconvénients :

- les modèles d'endommagement captent bien l'endommagement diffus mais ne permettent pas de modéliser la rupture du matériau lorsque le comportement devient adoucissant à moins de leur adjoindre une méthode de régularisation ;
- les modèles de fissuration permettent de prendre en compte l'adoucissement mais sont incapables de modéliser un endommagement diffus ;
- le modèle de Griffith est le plus simple de tous, mais ne peut être utilisé qu'une fois que la fissure a atteint une certaine longueur et que la propagation peut être considérée stationnaire.

Le modèle de Griffith n'a pas été utilisé dans un premier temps car il n'est pas adapté à la modélisation de l'initiation d'une fissure. L'étude de la stabilité du matériau a permis d'identifier les domaines de validité des modèles continus et discontinus, ce qui nous a conduit à considérer la zone cohésive comme un limiteur de localisation pouvant s'insérer en remplacement d'une technique de régularisation dans un matériau continu lorsque le comportement devient adoucissant.

Les travaux ont d'abord porté sur la construction d'un modèle mixte continu/discontinu de ce type à partir d'un modèle de référence continu et régularisé. Ce modèle devant être construit à partir d'un modèle régularisé faisant clairement apparaître la différence entre endommagement diffus et endommagement localisé, un modèle comportant deux variables d'endommagement a été développé. Une première variable d'endommagement correspond au comportement durcissant du matériau et permet de modéliser l'endommagement diffus. Une deuxième variable correspondant au comportement adoucissant permet de modéliser l'endommagement localisé. Cette variable est régularisée avec la méthode du second-gradient implicite pour éviter le phénomène de localisation des déformations dû à l'adoucissement. À partir de ce modèle, une loi cohésive équivalente a été construite conformément à la notion de fissure équivalente développée dans [Mazars, 1984], en imposant la conservation de l'énergie dissipée lors du changement de modèle. L'implémentation numérique de cette méthode

repose sur une formulation faible développée pendant la thèse et permettant d'imposer les incréments d'énergie dissipée dans la zone cohésive durant chaque pas de temps. Cette énergie dissipée est calculée au préalable en utilisant le modèle continu de référence sur un cas test identique. Dans le cadre d'un travail commun avec Anita Simatos (doctorante au LaMCoS et au CEA), la méthode a ensuite été généralisée pour traiter le cas où le modèle de référence présente également de la plasticité, et des pistes ont été données pour une généralisation de la méthode à des problèmes bidimensionnels.

Les lois cohésives obtenues avec la méthode de changement de modèle sont des lois extrinsèques qui nécessitent une implémentation numérique particulière pour empêcher l'ouverture des éléments d'interface avant que le seuil d'initiation soit atteint. Pour cela, une formulation faible à deux champs inspirée de la formulation faible utilisée pour imposer l'énergie dissipée dans la zone cohésive a été développée. Cette formulation a ensuite été modifiée pour mieux gérer la rupture des éléments cohésifs. La possibilité d'une transition entre un modèle cohésif et un modèle de Griffith a finalement été étudiée. Un critère basé sur une étude des hypothèses de la théorie de Griffith a été proposé pour savoir quand effectuer le changement de modèle, et la notion de fissure équivalente de Mazars a été à nouveau utilisée pour déterminer la position de pointe de la fissure de Griffith équivalente à une fissure cohésive.

La méthode de changement de modèle développée peut s'inscrire dans une logique plus générale où les modèles sont construits à partir d'informations provenant des échelles inférieures. Pour les problèmes étudiés dans cette thèse, il semble que la meilleure méthode soit d'effectuer les changements d'échelles progressivement, en reliant des échelles assez proches les unes des autres.

Perspectives Les modèles qui ont été étudiés dans ce travail sont généralement utilisés pour des types de matériaux différents : les modèles de Griffith sont plutôt utilisés pour des matériaux fragiles, les modèles continus régularisés sont eux plutôt utilisés pour les matériaux quasi-fragiles, et les modèles cohésifs peuvent être utilisés pour ces deux types de matériaux. Ces domaines d'utilisation sont résumés dans le tableau 14.1.

Matériau	Fragile	Quasi-fragile
modèle continu		✓
modèle cohésif	✓	✓
modèle de Griffith	✓	

TAB. 14.1 – Utilisation courante des modèles étudiés

La méthode de construction d'un modèle cohésif à partir d'un modèle continu régularisé semble donc plus adaptée pour l'étude de matériaux quasi-fragiles, tandis que le passage d'un modèle cohésif à un modèle de Griffith semble plus adapté à l'étude de matériaux fragiles.

Cependant, comme cela est signalé dans [Bažant, 2002], le choix du modèle devant être utilisé dépend non seulement du matériau considéré mais également de la taille de la structure étudiée. En calculant le rapport de la longueur caractéristique de la zone dissipative, notée l_{mat} , par la longueur caractéristique de la structure, notée l_{stru} , les règles d'utilisation suivantes peuvent être définies (d'après ce même article) :

$$\begin{aligned} \frac{l_{mat}}{l_{stru}} < \frac{1}{100} & \quad \text{modèle de Griffith,} \\ \frac{l_{mat}}{l_{stru}} \in \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{5} \right] & \quad \text{modèle cohésif,} \\ \frac{l_{mat}}{l_{stru}} > \frac{1}{5} & \quad \text{modèle continu.} \end{aligned}$$

Un objectif pourrait être de rassembler les méthodes de changement de modèle présentées dans les parties II et III pour effectuer un changement de modèle couvrant les trois types de modèles étudiés dans le cas d'un matériau fragile. Un modèle continu régularisé servirait alors à construire un modèle de Griffith, un modèle cohésif permettant de faire la transition entre ces deux modèles. Ceci semble difficile à réaliser *a priori* car le modèle régularisé nécessiterait un maillage particulièrement fin au niveau de la zone endommagée. On pourrait donc envisager d'utiliser une méthode numérique multi-échelles pour raffiner le maillage localement au niveau de la zone endommagée (par exemple, une méthode multi-grilles comme cela avait été fait dans [Rhazi Jerniti, 2006]).

Annexe : Implémentation numérique des modèles

Annexe A

Éléments-finis avec non-linéarités matérielles

On rappelle dans cette annexe des généralités sur la méthode des éléments-finis utilisée pour l'implémentation numérique de modèles non-linéaires. On se place dans le cadre d'un problème bidimensionnel en déformations planes ou en contraintes planes. Le comportement mécanique est supposé isotrope et indépendant de la température.

A.1 Problème mécanique

Le problème étudié est composé d'un matériau continu défini sur un domaine Ω de contour Γ . L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Un vecteur colonne \mathbf{u} contient les composantes u_x et u_y du champ de déplacement dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.1})$$

Les vecteurs colonnes $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ contenant les composantes de la déformation et de la contrainte dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.3})$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est relié au champ de déplacement par l'équation A.7. On définit sur Γ un vecteur unitaire \underline{n} normal au contour du domaine et dirigé vers l'extérieur. Γ est décomposé en deux parties Γ_1 et Γ_2 sur lesquelles s'appliquent respectivement les déplacements imposés et les efforts imposés. Les composantes des déplacements imposés dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont notées u_d^x et u_d^y et rangées dans le vecteur \mathbf{u}_d . Les composantes des efforts imposés dans cette même base sont notés F_d^x et F_d^y et rangées dans \mathbf{F}_d . Ces vecteurs s'écrivent donc

$$\mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} u_d^x & u_d^y \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} F_d^x & F_d^y \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.5})$$

L'équation A.6 permet d'imposer l'équilibre local de la structure, l'équation A.8 donne le comportement incrémental du matériau, et les équations A.9 et A.10 garantissent l'application des conditions aux limites sur le bord de la structure. Le bilan des équations du problème s'écrit :

matériau continu :

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{A.6})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{A.7})$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{A.8})$$

conditions aux limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}_d, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{A.10})$$

avec,

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{L} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \underline{n} \cdot \underline{e}_x & 0 & \underline{n} \cdot \underline{e}_y \\ 0 & \underline{n} \cdot \underline{e}_y & \underline{n} \cdot \underline{e}_x \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A.2 Cinématique

Déplacements La position initiale d'un point M est donnée par le vecteur \underline{x} . La décomposition de ce vecteur dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ s'écrit

$$\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y. \quad (\text{A.15})$$

Le domaine Ω est maillé et on note Ω_{el} le volume occupé par un élément. Les calculs numériques se font en utilisant un changement de variable pour se ramener à un élément de référence occupant le volume $\hat{\Omega}_{el}$ défini dans un repère $\hat{\mathcal{R}}_{el} = (O_{el}, \underline{e}_{\xi}, \underline{e}_{\eta})$. Le vecteur $\hat{\underline{x}}$ désigne la position du point M sur l'élément de référence, ses composantes dans $\hat{\mathcal{R}}_{el}$ sont notées ξ et η :

$$\hat{\underline{x}} = \xi \underline{e}_{\xi} + \eta \underline{e}_{\eta}. \quad (\text{A.16})$$

Les composantes du champ de déplacement dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sont rangées dans le vecteur colonne \mathbf{U} des inconnues nodales comme suit :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^x & \mathbf{U}_1^y & \dots & \mathbf{U}_{n_{no}}^x & \mathbf{U}_{n_{no}}^y \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.17})$$

avec n_{no} le nombre de nœuds du maillage. La restriction de U sur un élément est notée U_{el} . Le champ de déplacement sur un élément peut ensuite être reconstruit à partir des fonctions de forme N_i de la manière suivante :

$$\underline{u}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\hat{x}) ((U_{el})_i^x \underline{e}_x + (U_{el})_i^y \underline{e}_y), \quad (A.18)$$

avec n le nombre de nœuds de l'élément. On définit l'opérateur C donnant \underline{u} à partir des déplacements nodaux dans un élément :

$$\underline{u}(\hat{x}) = C(\hat{x}) U_{el}. \quad (A.19)$$

On a donc

$$C(\hat{x}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}. \quad (A.20)$$

Matrice jacobienne On note \mathbf{J} la matrice jacobienne de la transformation vérifiant

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}, \quad (A.21)$$

et donc

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x,\xi & x,\eta \\ y,\xi & y,\eta \end{bmatrix}. \quad (A.22)$$

X_{no} et Y_{no} sont les vecteurs contenant les coordonnées des nœuds de l'élément réel dont les composantes sont notées comme suit :

$$X_{no} = [X_1 \dots X_n]^T, \quad (A.23)$$

$$Y_{no} = [Y_1 \dots Y_n]^T. \quad (A.24)$$

\mathbf{J} peut s'exprimer en fonction de ces vecteurs et des fonctions de forme de l'élément de la manière suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} N_{,\xi} X_{no} & N_{,\eta} X_{no} \\ N_{,\xi} Y_{no} & N_{,\eta} Y_{no} \end{bmatrix}, \quad (A.25)$$

avec,

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n]. \quad (A.26)$$

Déformation La matrice B est définie pour que

$$\underline{\varepsilon}(\hat{x}) = B(\hat{x}) U. \quad (A.27)$$

D'après les équations A.7 et A.12, le calcul de ε_{xx} , ε_{yy} , et ε_{xy} donne pour un élément à n nœuds

$$\varepsilon_{xx}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n N_{i,x}(\hat{x}) U_i^x, \quad (A.28)$$

$$\varepsilon_{yy}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n N_{i,y}(\hat{x}) U_i^y, \quad (A.29)$$

$$\varepsilon_{xy}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (N_{i,x}(\hat{x}) U_i^y + N_{i,y}(\hat{x}) U_i^x). \quad (A.30)$$

La matrice B s'écrit donc

$$B(\hat{x}) = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix}. \quad (A.31)$$

Les vecteurs N_x et N_y utilisés pour la construction de $B(\hat{x})$ sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi,x & \eta,x \\ \xi,y & \eta,y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (A.32)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{bmatrix}. \quad (A.33)$$

A.3 Méthodes d'intégration numérique

A.3.1 Sur une ligne

Quadrature de Gauss La méthode des points de Gauss est utilisée pour calculer les intégrales de manière approchée, notamment lors du calcul des matrices de rigidité et du vecteur des efforts intérieurs. Cette méthode est basée sur l'approximation polynomiale suivante des fonctions $p(x)$ à intégrer sur chaque élément :

$$p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, \quad (A.34)$$

les termes a_j étant des coefficients définis pour j compris entre 0 et k . On cherche ensuite les couples (x_i, ω_i) tels que

$$\int_{\Gamma_{el}} p(x) dx = \sum_{i=1}^{n_g} p(x_i) \omega_i, \quad (A.35)$$

avec Γ_{el} l'élément réel, n_g le nombre de points de Gauss, x_i la position, et ω_i le poids du i^e points de Gauss. On peut remarquer que les deux fonctions

$$p \rightarrow \int_{\Gamma_{el}} p(x) dx, \quad (A.36)$$

$$p \rightarrow \sum_{i=1}^{n_g} p(x_i) \omega_i, \quad (A.37)$$

sont des formes linéaires. Pour que l'égalité A.35 soit vérifiée, il suffit donc qu'elle le soit pour les éléments d'une base de l'ensemble des polynômes de degré k . En choisissant la base usuelle $\{1, x, \dots, x^k\}$, on obtient les $k+1$ conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma_{el}} x^j dx = \sum_{i=1}^{n_g} (x_i)^j \omega_i, \quad \forall j \in [0, k]. \quad (A.38)$$

Le nombre de points de Gauss est choisi de telle sorte que le problème ait une solution, sachant que chaque point de Gauss apporte 2 inconnues (x_i et ω_i). Les positions et les poids des points de Gauss sont ensuite déterminés de telle sorte que l'équation A.38 soit vérifiée pour toutes les valeurs de j , en ajoutant éventuellement des conditions de symétrie. Ces points de

Gauss peuvent ensuite être utilisés pour calculer des intégrales avec l'équation A.35. Avec la méthode des éléments-finis, ces intégrations se font généralement en introduisant le changement de variable $x \rightarrow \xi$ pour se ramener sur un élément de référence $\hat{\Gamma}_{el}$:

$$\int_{\Gamma_{el}} p(x) dx = \int_{\hat{\Gamma}_{el}} \hat{p}(\xi) J d\xi, \quad (\text{A.39})$$

avec,

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{p}(\xi) = p(x). \quad (\text{A.41})$$

D'une manière générale, si p est une grandeur physique, on note plus simplement

$$p(\xi) = p(x), \quad (\text{A.42})$$

ainsi l'équation A.39 devient

$$\int_{\hat{\Gamma}_{el}} p(x) dx = \sum_{i=1}^{n_g} p(\xi_i) J \omega_i. \quad (\text{A.43})$$

Quadrature de Newton-Cotes La quadrature de Newton-Cotes diffère de la quadrature de Gauss de par le fait que les points d'intégration sont disposés régulièrement le long de la courbe d'intégration. Les positions x_i des points d'intégration sont donc fixées par avance et chaque point d'intégration supplémentaire apporte une seule nouvelle inconnue (ω_i). On retrouve la méthode des rectangles si on place un point d'intégration par élément, et la méthode des trapèzes si on place deux points d'intégration par élément.

A.3.2 Sur une surface

Quadrature de Gauss La fonction à intégrer est cette fois approximée par une fonction polynomiale à deux variables $p(x, y)$ s'écrivant sous la forme :

$$p(x, y) = \sum_{j,l}^{j+l \leq k} a_{jl} x^j y^l, \quad j \in \mathbb{N}^+, l \in \mathbb{N}^+, \quad (\text{A.44})$$

avec a_{jl} les coefficients du polynôme au nombre de $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. On cherche ensuite les couples (x_i, y_i, ω_i) tels que

$$\int_{\Omega_{el}} p(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{n_g} p(x_i, y_i) \omega_i, \quad (\text{A.45})$$

avec Ω_{el} l'élément réel et n_g le nombre de points de Gauss de cet élément. Cette condition est cette fois imposée pour chaque élément de la base contenant toutes les combinaisons possibles de $x^j y^l$, ce qui donne les $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ conditions suivantes :

$$\int_{\Omega_{el}} x^j y^l dx dy = \sum_{i=1}^{n_g} (x_i)^j (y_i)^l \omega_i, \quad \forall (j, l) \in \mathbb{N}^{+2} / j+l < k. \quad (\text{A.46})$$

Le nombre de points de Gauss est choisi sachant que chaque nouveau point de Gauss apporte 3 inconnues (x_i, y_i et ω_i). Les positions et poids des points de Gauss sont ensuite calculés à partir de l'équation A.46 avec éventuellement des conditions de symétrie. Les intégrations numériques se font ensuite en introduisant le changement de variable $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ dans l'équation A.45 pour se ramener sur l'élément de référence $\hat{\Omega}_{el}$:

$$\int_{\Omega_{el}} p(x, y) dx dy = \int_{\hat{\Omega}_{el}} \hat{p}(\xi, \eta) J d\xi d\eta, \quad (\text{A.47})$$

avec,

$$J = \det(\mathbf{J}), \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{p}(\xi, \eta) = p(x, y). \quad (\text{A.49})$$

Si p est une grandeur physique, on considère que $p(\xi, \eta) = p(x, y)$, l'équation A.47 devient donc

$$\int_{\Omega_{el}} p(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{n_g} p(\xi_i, \eta_i) J \omega_i. \quad (\text{A.50})$$

Quadrature de Newton-Cotes Si on utilise la méthode de Newton-Cotes pour calculer une intégrale de surface, les points d'intégration sont disposés de manière régulière sur la surface à intégrer en partant des bords. Les x_i et les y_i sont donc fixés par avance et chaque point d'intégration supplémentaire apporte une seule nouvelle inconnue (ω_i).

A.4 Écriture globale du problème mécanique

On présente dans cette section deux manières d'écrire le problème mécanique avec des équations globales intégrées sur le domaine Ω . Ces deux méthodes seront ensuite utilisées pour introduire la méthode des éléments-finis de deux manières différentes.

Formulation faible On note $\bar{\mathcal{F}}$ l'espace des champs de vecteurs colonnes à trois composantes continus et réguliers définis sur Ω . L'équilibre de la structure s'écrit

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}}, \quad (\text{A.51})$$

ε^* étant la déformation associée au champ \mathbf{u}^* . Cette équation s'écrit à l'instant $t + dt$

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} (\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{*T} (\mathbf{F} + d\mathbf{F}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}}. \quad (\text{A.52})$$

La différence de ces deux équations appliquée à un incrément $d\mathbf{u}^*$ du champ de déplacement virtuel donne l'équation incrémentale

$$\int_{\Omega} d\varepsilon^{*T} d\boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^{*T} d\mathbf{F} d\Gamma, \quad \forall d\mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}}. \quad (\text{A.53})$$

La formulation faible est écrite dans un premier temps pour un problème avec des conditions aux limites en efforts imposés uniquement ($\Gamma_2 = \Gamma$ et $\Gamma_1 = \emptyset$) en introduisant l'équation de comportement A.8 dans l'équation A.53. On obtient

$$\mathcal{A}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \mathcal{D}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*), \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}}, \quad (\text{A.54})$$

avec,

$$\mathcal{A}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega, \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma} \mathbf{d}\mathbf{u}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \quad (\text{A.56})$$

Formulation énergétique Le problème peut également être écrit sous forme intégrale en utilisant le principe de Greenberg (voir par exemple [Besson *et al.*, 2001]). Pour cela, on introduit une fonction \mathcal{W} définie par

$$\mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{d}\mathbf{u}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \quad (\text{A.57})$$

On ajoute à $\mathbf{d}\mathbf{u}$ un champ de déplacement $\mathbf{d}\mathbf{v}$ quelconque auquel on associe une déformation $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}). \quad (\text{A.58})$$

La fonction \mathcal{W} appliquée au champ $\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v)^T \mathbf{L} (\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v})^T \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

En retranchant A.57 à A.59, on obtient, si \mathbf{L} est symétrique,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v}) - \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v^T \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v^T \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{d}\mathbf{v}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Si le champ $\mathbf{d}\mathbf{u}$ est solution du problème mécanique incrémental, l'équation A.53 est vérifiée. Cette équation appliquée au champ $\mathbf{d}\mathbf{v}$, donne

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v^{*T} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{d}\mathbf{v}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{v}^* \in \mathcal{F}. \quad (\text{A.61})$$

On peut donc simplifier A.60 en

$$\mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v}) - \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v^T \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_v \, d\Omega. \quad (\text{A.62})$$

Si \mathbf{L} est défini-positif, on a donc

$$\mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{v}) > \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u}), \quad (\text{A.63})$$

et le champ solution $\mathbf{d}\mathbf{u}$ minimise la fonction \mathcal{W} . On peut donc écrire

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \left\{ \mathbf{d}\mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}} / \mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{u}^*) \text{ minimal} \right\}. \quad (\text{A.64})$$

A.5 Discrétisation en espace

À partir de la formulation faible \mathbf{K} et \mathbf{F}_{ext} sont définis pour que l'équation A.54 s'écrive sous forme discrète

$$\mathbf{d}\mathbf{U}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{U} = \mathbf{d}\mathbf{U}^{*T} \mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{U}^* \in \bar{\mathcal{F}}, \quad (\text{A.65})$$

$\bar{\mathcal{F}}$ étant l'ensemble des vecteurs colonnes à $2n_{no}$ composantes. La restriction de \mathbf{U} à un élément est notée \mathbf{U}_{el} . \mathbf{K} et $\mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}$ sont obtenus par assemblage des matrices de raideur \mathbf{K}_{el} et des vecteurs de second membre élémentaires $\mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}^{el}$ vérifiant

$$\mathbf{d}\mathbf{U}_{el}^T \mathbf{K}_{el} \mathbf{d}\mathbf{U}_{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, J \, d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{d}\mathbf{U}_{el}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}^{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}} \mathbf{d}\mathbf{u}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, J^s \, d\hat{\Gamma}_{el}, \quad (\text{A.67})$$

et donc, par identification,

$$\mathbf{K}_{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{B} \, J \, d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{A.68})$$

$$\mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}^{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}} \mathbf{C}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_d \, J^s \, d\hat{\Gamma}_{el}. \quad (\text{A.69})$$

L'équation A.65 étant valable pour tout vecteur $\mathbf{d}\mathbf{U}^* \in \bar{\mathcal{F}}$, un incrément du champ de déplacement vérifie

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{U} = \mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (\text{A.70})$$

Ce système peut ensuite être discrétisé en temps et résolu avec la méthode de Newton-Raphson.

À partir de la formulation énergétique La fonction \mathcal{W} peut s'écrire en fonction des variables discrètes de la manière suivante :

$$\mathcal{W}(\mathbf{d}\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{U} - \mathbf{d}\mathbf{U}^T \mathbf{d}\mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (\text{A.71})$$

La solution du problème minimisant \mathcal{W} , vérifie

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial (\mathbf{d}\mathbf{U})} = 0, \quad (\text{A.72})$$

ce qui permet de retrouver l'équation A.70. La solution de ce problème de minimisation est unique si le potentiel \mathcal{W} est convexe.

Démonstration de la convexité \mathcal{W} est deux fois continûment différentiable, donc \mathcal{W} est strictement convexe si

$$\mathbf{d}\mathbf{U}^T \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial^2 (\mathbf{d}\mathbf{U})} \mathbf{d}\mathbf{U} > 0, \quad \forall \mathbf{d}\mathbf{U} \in \bar{\mathcal{F}}. \quad (\text{A.73})$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial^2 (\mathbf{d}\mathbf{U})} = \mathbf{K}, \quad (\text{A.74})$$

donc \mathcal{W} est strictement convexe si \mathbf{K} est défini-positif. D'après l'équation A.68, la défini-positivité de \mathbf{K} est garantie si l'opérateur \mathbf{L} est lui-même défini-positif, donc si la condition de stabilité matérielle est vérifiée (voir chapitre 3) en tout point de Ω .

Démonstration de l'unicité On suppose qu'il existe deux vecteurs distincts dU_1 et dU_2 solutions du problème de minimisation :

$$\mathcal{W}(dU_1) = \mathcal{W}(dU_2) = \inf_{dU \in \bar{F}} (\mathcal{W}), \quad (\text{A.75})$$

$$dU_1 \neq dU_2. \quad (\text{A.76})$$

Si \mathcal{W} est strictement convexe, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathcal{W}(\alpha dU_1 + (1-\alpha) dU_2) < \alpha \mathcal{W}(dU_1) + (1-\alpha) \mathcal{W}(dU_2), \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (\text{A.77})$$

En utilisant l'équation A.75, on obtient

$$\mathcal{W}(\alpha dU_1 + (1-\alpha) dU_2) < \inf_{dU \in \bar{F}} (\mathcal{W}), \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (\text{A.78})$$

dU_1 et dU_2 ne sont donc pas solution du problème, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

A.6 Ajout des conditions aux limites en déplacement

Formulation faible modifiée On définit le vecteur $\underline{\lambda}$ des efforts surfaciques au niveau de la surface Γ_1 recevant les conditions aux limites en déplacement. Ce vecteur se décompose dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ de la manière suivante :

$$\underline{\lambda} = \lambda_x \underline{e}_x + \lambda_y \underline{e}_y. \quad (\text{A.79})$$

Les composantes de $\underline{\lambda}$ sont rangées dans le vecteur colonne $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.80})$$

On note $\bar{\mathcal{I}}$ l'espace des champs de vecteurs colonnes à deux composantes continus définis sur Γ_1 . En prenant en compte les conditions aux limites en déplacement ($\Gamma_1 \neq \emptyset$), la formulation faible peut s'écrire

$$\mathcal{A}(d\mathbf{u}^*) + \mathcal{B}(d\boldsymbol{\lambda}^*) + \mathcal{C}(d\boldsymbol{\lambda}^*) = \mathcal{D}(d\mathbf{u}^*), \quad \forall (d\mathbf{u}^*, d\boldsymbol{\lambda}^*) \in \bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{I}}, \quad (\text{A.81})$$

avec,

$$\mathcal{A}(d\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{L} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (\text{A.82})$$

$$\mathcal{B}(d\mathbf{u}^*) = - \int_{\Gamma_1} d\mathbf{u}^{*T} d\boldsymbol{\lambda} d\Gamma, \quad (\text{A.83})$$

$$\mathcal{C}(d\boldsymbol{\lambda}^*) = \int_{\Gamma_1} d\boldsymbol{\lambda}^{*T} (d\mathbf{u} - d\mathbf{u}_d) d\Gamma, \quad (\text{A.84})$$

$$\mathcal{D}(d\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma_2} d\mathbf{u}^{*T} d\mathbf{F}_d d\Gamma. \quad (\text{A.85})$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ sont rangées dans le vecteur Λ comme suit :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1^x & \Lambda_1^y & \dots & \Lambda_{n_1}^x & \Lambda_{n_1}^y \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.86})$$

avec n_1 le nombre de nœuds sur Γ_1 . La restriction de Λ à un élément de l'interface est notée Λ_{el} . La matrice

D permet de reconstruire le champ de multiplicateur $\boldsymbol{\lambda}$ sur l'élément à partir de Λ_{el} :

$$\boldsymbol{\lambda}(\hat{x}) = D(\hat{x}) \Lambda_{el}. \quad (\text{A.87})$$

Si le champ $d\boldsymbol{\lambda}^*$ est nul, on définit la matrice A telle que l'équation A.81 s'écrive sous forme discrétisée

$$dU^{*T} K dU + dU^{*T} A d\Lambda = dU^{*T} dF_{ext}, \quad \forall dU^* \in \bar{F}. \quad (\text{A.88})$$

Les composantes du vecteur des déplacements imposés aux nœuds du maillage sont rangées dans le vecteur U_d comme suit :

$$U_d = \begin{bmatrix} (U_d)_1^x & (U_d)_1^y & \dots & (U_d)_{n_1}^x & (U_d)_{n_1}^y \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.89})$$

La matrice A est obtenue par assemblage des matrices A_{el} vérifiant

$$dU_{el}^{*T} A_{el} d\Lambda_{el} = - \int_{\Gamma_1} d\mathbf{u}^{*T} d\boldsymbol{\lambda} d\Gamma, \quad (\text{A.90})$$

et donc

$$A_{el} = - \int_{\Gamma_1} C^T D d\Gamma. \quad (\text{A.91})$$

On définit la matrice A_d telle que, si le champ $d\mathbf{u}^*$ est nul, l'équation A.81 s'écrive sous forme discrétisée

$$d\Lambda^{*T} A^T dU - d\Lambda^{*T} A_d^T dU_d = 0, \quad \forall dU^* \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (\text{A.92})$$

$\bar{\mathcal{I}}$ étant l'ensemble des vecteurs colonnes à $2 \times n_1$ composantes. La matrice A_d est également assemblée à partir des matrices A_{el} . Les équations A.88 et A.92 donnent le système

$$\begin{bmatrix} K & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU \\ d\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF_{ext} \\ A_d^T dU_d \end{bmatrix}. \quad (\text{A.93})$$

La forme de ce système montre que cette formulation appartient à la famille des formulations mixtes (voir annexe F).

Formulation énergétique modifiée Pour prendre en compte les conditions aux limites en déplacement, on peut également chercher $d\mathbf{u}$ vérifiant :

$$d\mathbf{u} = \left\{ d\mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}} / \mathcal{W}(d\mathbf{u}^*) \text{ minimal} \right. \\ \left. \text{et } d\mathbf{u}^* = d\mathbf{u}_d, \text{ sur } \Gamma_1 \right\}. \quad (\text{A.94})$$

Le problème peut se poser de manière équivalente en cherchant un extremum de la fonction \mathcal{W}^* définie par

$$\mathcal{W}^*(d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{L} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_2} d\mathbf{u}^T d\mathbf{F}_d d\Gamma - \int_{\Gamma_1} d\boldsymbol{\lambda}^T (d\mathbf{u} - d\mathbf{u}_d) d\Gamma, \quad (\text{A.95})$$

et s'écrivant en fonction des variables discrétisées

$$\mathcal{W}^*(dU, d\Lambda) = \frac{1}{2} dU^T K dU - dU^T dF_{ext} - d\Lambda^T A^T dU \\ + d\Lambda^T A_d^T dU_d. \quad (\text{A.96})$$

Un extremum est obtenu si les équations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial (dU)} = 0, \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial (d\Lambda)} = 0, \quad (\text{A.98})$$

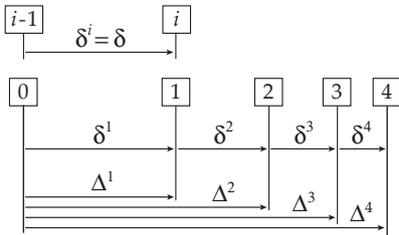
ce qui permet de retrouver le système A.93.

Remarque : il ne s'agit pas d'un problème de minimisation de la fonction \mathcal{W}^* car le point solution est un point selle.

A.7 Discrétisation en temps

Notations Le problème est discrétisé en temps, les piquets de temps, notés I_t , sont compris entre 1 et I_t^{max} . Les incréments permettant de passer du piquet de temps I_t à son suivant I_{t+1} sont notés $\Delta^{(I_t)}(\cdot)$. Le calcul sur un pas de temps se fait itérativement avec un algorithme de Newton. Les incréments pour passer de l'itération $i-1$ à l'itération i du pas de temps courant sont notés $\delta^i(\cdot)$, que l'on notera souvent plus simplement $\delta(\cdot)$. Les incréments allant du dernier piquet de temps convergé à l'itération i du pas de temps courant sont notés $\Delta^i(\cdot)$. Ces notations sont résumées sur la figure A.1.

Algorithme de Newton



Discrétisation en temps

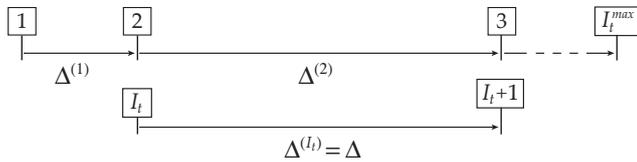


FIG. A.1 – Notations des incréments

Première itération On résout à la première itération le système

$$\begin{bmatrix} K & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{ext}} \\ A_d^T \Delta U_d \end{bmatrix}. \quad (\text{A.99})$$

Itérations suivantes Si les équations du problème sont vérifiées, on a à tout instant

$$dF_{\text{int}} = dF_{\text{ext}} - A d\Lambda, \quad (\text{A.100})$$

avec dF_{int} l'incrément du vecteur des efforts intérieurs défini par

$$dF_{\text{int}} = K dU. \quad (\text{A.101})$$

On peut donc définir un résidu R_1 tel que

$$R_1 = F_{\text{ext}} - F_{\text{int}} - A \Lambda. \quad (\text{A.102})$$

Le vecteur F_{int} est obtenu par assemblage du vecteur des efforts intérieurs $F_{\text{int}}^{\text{el}}$ vérifiant

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = K_{\text{el}} dU_{\text{el}}, \quad (\text{A.103})$$

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T L B dU_{\text{el}} J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{A.104})$$

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T d\sigma J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{A.105})$$

En intégrant cette équation sur le temps, on obtient

$$F_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T \sigma J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{A.106})$$

Par ailleurs, si les équations incrémentales du problème sont vérifiées, on a à tout instant

$$A^T dU = A_d^T dU_d, \quad (\text{A.107})$$

on peut donc définir un autre résidu R_2 par

$$R_2 = A_d^T U_d - A^T U. \quad (\text{A.108})$$

Ces résidus sont notés R_1^i et R_2^i à l'itération i . Une prédiction de la valeur de R_1^i est calculée à partir de la linéarisation suivante :

$$R_1^i = R_1^{i-1} + \frac{\partial R_1}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_1}{\partial \Lambda} \delta \Lambda, \quad (\text{A.109})$$

$$R_1^i = R_1^{i-1} - K \delta U - A \delta \Lambda. \quad (\text{A.110})$$

Le calcul de R_2^i se fait de la même manière :

$$R_2^i = R_2^{i-1} + \frac{\partial R_2}{\partial U} \delta U, \quad (\text{A.111})$$

$$R_2^i = R_2^{i-1} - A^T \delta U. \quad (\text{A.112})$$

En imposant la nullité de R_1^i et R_2^i dans A.110 et A.112, on obtient le système

$$\begin{bmatrix} K & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{i-1} \\ R_2^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.113})$$

Les résidus sont ensuite recalculés avec les équations A.102 et A.108. Si la norme locale de chaque résidu est inférieure à une tolérance fixée, le calcul sur ce pas de temps est terminé, sinon il faut itérer à nouveau jusqu'à ce que le critère soit vérifié.

Remarque : le résidu R_2 est théoriquement nul dès la première itération non linéaire.

Calcul de F_{int} La procédure permettant de calculer le vecteur des efforts intérieurs F_{int} comprend les trois étapes suivantes :

1. *Dérivation* : Calcul de ε^i en chaque point d'intégration à partir de U^i par dérivation du champ de déplacement, avec la formule

$$\varepsilon^i = B U^i. \quad (\text{A.114})$$

2. *Écoulement* : calcul des variables internes v_k^i et des contraintes σ^i à partir de $v_k^{(I_t)}$ et de ε^i en utilisant la loi de comportement du matériau :

$$(v_k^{(I_t)}, \varepsilon^i) \longrightarrow (v_k^i, \sigma^i). \quad (\text{A.115})$$

3. *Intégration* : calcul des efforts intérieurs F_{int}^i par intégration des contraintes σ^i sur chaque élément (avec l'équation A.106), puis assemblage des vecteurs élémentaires obtenus.

Exemple Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme de Newton, on considère un problème pour lequel une partie de la structure est encastree et un effort concentré \bar{F}_{ext} est imposé sur un nœud. Le déplacement, l'effort interne, et le résidu d'équilibre correspondants à ce degré de liberté sont notés \bar{U} , F_{int} et \bar{R}_1 . Le fonctionnement de l'algorithme de Newton est schématisé sur la figure A.2.

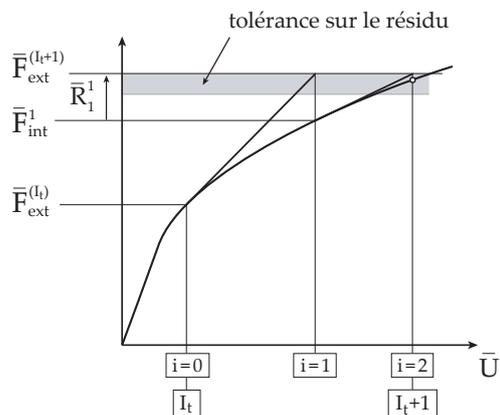


FIG. A.2 – Algorithme de Newton

Algorithme de Newton modifié Il arrive de remplacer dans les calculs la matrice de rigidité tangente par la matrice de rigidité *élastique* (matrice de rigidité initiale du calcul) ou par la matrice de rigidité *sécante* (matrice que l'on aurait pour une décharge de la structure). Les schémas associés à ces algorithmes de Newton modifiés sont représentés sur les figures A.3 et A.4. Il faut alors plus d'itérations pour obtenir le même niveau de convergence du résidu d'équilibre.

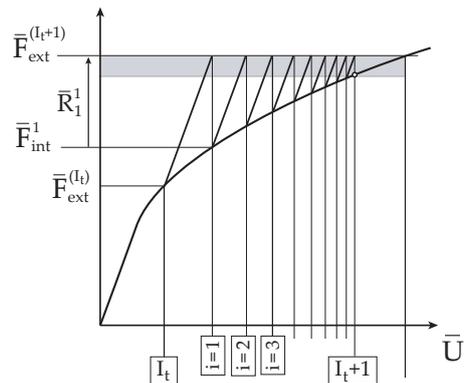


FIG. A.3 – Algorithme de Newton modifié avec matrice de rigidité élastique

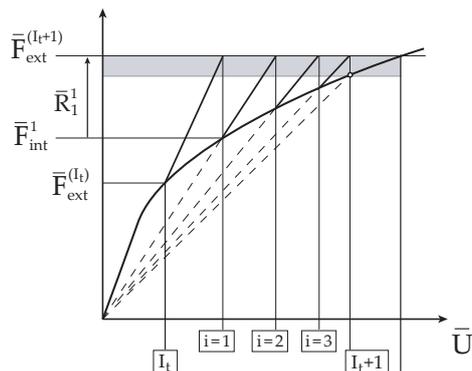


FIG. A.4 – Algorithme de Newton modifié avec matrice de rigidité sécante

A.8 Algorithme

L'algorithme 5 présente la procédure globale de résolution numérique du problème dans le cas où le matériau continu est élastique avec p.i. désignant les points d'intégration.

```

 $I_t := 1;$ 
initialisation de  $U^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(1)}$ , et des vecteurs
contenant les déformations, les contraintes et les
variables internes pour le premier pas de temps ;
tant que  $I_t \leq I_t^{max}$  faire
   $U^0 := U^{(I_t)}$ ;
   $\Lambda^0 := \Lambda^{(I_t)}$ ;
   $i := 1;$ 
  calcul de la matrice  $K$  ;
  calcul de  $\delta F_{ext}$  et  $\delta U_d$  ;
  calcul de  $\delta U$  et  $\delta \Lambda$  ;
  tant que  $l = 1$  faire
     $U^i := U^{i-1} + \delta U$ ;
     $\Lambda^i := \Lambda^{i-1} + \delta \Lambda$ ;
    pour tous les p.i. du volume faire
      calcul de  $\varepsilon^i$  à partir de  $U^i$  ;
      calcul de  $\sigma^i$  et des  $v_k^i$  à partir de  $\varepsilon^i$  et
      des  $v_k^{(I_t)}$  ;
    fin
    calcul de  $R_1^i$  à partir de  $\sigma^i$  ;
    calcul de  $R_2^i$  à partir de  $u^i$  ;
    si erreurs inférieures à la tolérance alors
      | sortie de boucle ;
    fin
    mise à jour de la matrice  $K$  ;
    calcul de  $\delta U$  et  $\delta \Lambda$  ;
     $i := i + 1$ ;
  fin
sauvegarde de  $U^{(I_t+1)}$ ,  $\Lambda^{(I_t+1)}$ , et des vecteurs
contenant les déformations, contraintes et
variables internes ;
 $I_t := I_t + 1$ .
fin

```

Algorithme 5 : Algorithme global

A.9 Comportement du matériau

A.9.1 Opérateur élastique

Déformations planes En déformations planes, le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ exprimé dans $\mathcal{R} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ est de la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.116})$$

et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.117})$$

Le produit tensoriel doublement contracté de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ devient donc un produit scalaire pour σ et ε :

$$\sigma^T \varepsilon = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (\text{A.118})$$

La matrice de Hooke K étant définie pour un matériau élastique par

$$\sigma = K \varepsilon, \quad (\text{A.119})$$

ce qui permet d'obtenir l'expression suivante de K :

$$K = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (\text{A.120})$$

λ et μ étant les coefficients de Lamé du matériau.

Contraintes planes Avec l'hypothèse des contraintes planes, les tenseurs des contraintes et des déformations prennent la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad (\text{A.121})$$

et,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}. \quad (\text{A.122})$$

La matrice K^{-1} peut s'exprimer en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν de la manière suivante :

$$K^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.123})$$

L'inversion de cette matrice donne K :

$$K = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.124})$$

Relation entre les paramètres élastiques du matériau Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont reliés aux coefficients de Lamé λ et μ par les relations

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{et}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (\text{A.125})$$

Les relations inverses sont

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \text{et}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \quad (\text{A.126})$$

A.9.2 Opérateur tangent

On se place dans le cas d'un modèle élasto-plastique endommageable. La contrainte vérifie alors

$$\sigma = (1-D) K \varepsilon^e, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{A.127})$$

donc,

$$L = (1-D) K \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} - K \varepsilon^e \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}, \quad \text{sur } \Omega. \quad (\text{A.128})$$

Modèle à double endommagement Pour le modèle à double endommagement décrit au chapitre 5, le calcul de l'opérateur tangent se fait à partir des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \omega_d}{\partial \varepsilon} (1 - \omega_l) + \frac{\partial \omega_l}{\partial \varepsilon} (1 - \omega_d), \quad (\text{A.129})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \omega_d}{\partial \kappa_d} c_d \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon} (1 - \omega_l)^2 \\ &- \frac{\partial \omega_d}{\partial \kappa_d} c_d \frac{\partial \omega_l}{\partial \kappa_l} c_l \varepsilon_{eq} \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon} (1 - \omega_l) + \frac{\partial \omega_l}{\partial \kappa_l} c_l \frac{\varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon} (1 - \omega_d), \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

avec,

$$\frac{\partial \omega_d}{\partial \kappa_d} = (1 - k) \frac{\varepsilon_0}{\kappa_d^2}, \quad (\text{A.131})$$

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial \kappa_l} = \frac{A}{\exp(-A(\kappa - \varepsilon_0))}, \quad (\text{A.132})$$

et,

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon_p^T} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varepsilon}, \quad (\text{A.133})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \varepsilon_p^T} = \frac{1}{\varepsilon_{eq}} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^+ & \varepsilon_2^+ & \varepsilon_3^+ \end{bmatrix}, \quad (\text{A.134})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + b & \frac{1}{2} - b & d \\ \frac{1}{2} - b & \frac{1}{2} + b & -d \\ \frac{-\nu}{1-\nu} & \frac{-\nu}{1-\nu} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.135})$$

avec,

$$b = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\gamma_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.136})$$

$$d = \frac{\varepsilon_{xy}}{((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\gamma_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.137})$$

Modèle élasto-plastique endommageable (1D)

Pour le modèle élasto-plastique endommageable unidimensionnel utilisé dans le chapitre 8, le calcul de l'opérateur tangent se fait à partir des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \varepsilon} = c_p (1 - k), \quad (\text{A.138})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon}, \quad (\text{A.139})$$

avec,

$$c_p = \arg(f = 0 \text{ et } df = 0), \quad (\text{A.140})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \kappa} = \frac{A}{\exp(-A(\kappa - \varepsilon_0))}, \quad (\text{A.141})$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon} = c_p (1 - k). \quad (\text{A.142})$$

A.10 Éléments bidimensionnels

A.10.1 Éléments triangle linéaire

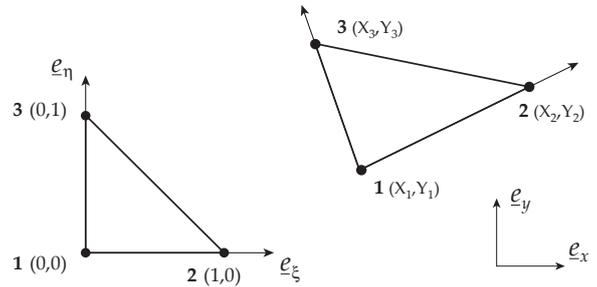


FIG. A.5 – Éléments triangle linéaire

Les fonctions de forme de cet élément sont :

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta,$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi,$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta.$$

Cet élément possède un seul point de Gauss. L'identification de la position du point de Gauss et de ses pondérations se fait dans la base $\{1, \xi, \eta\}$, avec les 3 équations suivantes :

$$\omega_1 = 1/2, \quad (\text{A.143})$$

$$\xi_1 \omega_1 = 1/6, \quad (\text{A.144})$$

$$\eta_1 \omega_1 = 1/6. \quad (\text{A.145})$$

Ces conditions donnent :

i	ξ_i	η_i	ω_i
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

A.10.2 Éléments quadrangle linéaire

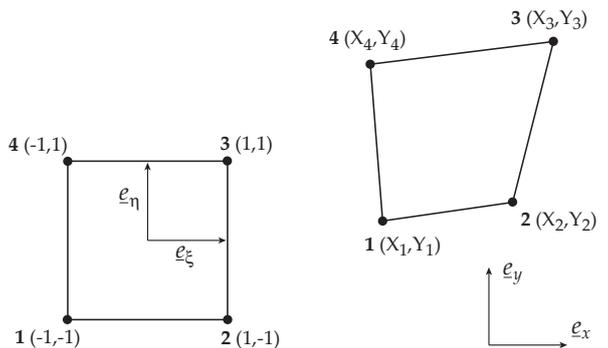


FIG. A.6 – Éléments quadrangle linéaire

Les fonctions de forme sont :

$$N_1(\xi, \eta) = 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta),$$

$$N_2(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta),$$

$$N_4(\xi, \eta) = 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta).$$

Points de Gauss Avec les fonctions de la base usuelle $\{1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2\}$, on obtient les cinq conditions

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 4, \\ \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2 + \xi_3 \omega_3 + \xi_4 \omega_4 &= 0, \\ \eta_1 \omega_1 + \eta_2 \omega_2 + \eta_3 \omega_3 + \eta_4 \omega_4 &= 0, \\ \xi_1 \eta_1 \omega_1 + \xi_2 \eta_2 \omega_2 + \xi_3 \eta_3 \omega_3 + \xi_4 \eta_4 \omega_4 &= 0, \\ \xi_1^2 \omega_1 + \xi_2^2 \omega_2 + \xi_3^2 \omega_3 + \xi_4^2 \omega_4 &= 4/3, \\ \eta_1^2 \omega_1 + \eta_2^2 \omega_2 + \eta_3^2 \omega_3 + \eta_4^2 \omega_4 &= 4/3. \end{aligned}$$

Il y a 5 équations à respecter pour 12 inconnues, ce qui permet de rajouter 7 équations garantissant la symétrie des points de Gauss dans l'élément :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_4, & \xi_2 &= \xi_3, \\ \eta_1 &= \eta_2, & \eta_3 &= \eta_4, \\ \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 = \omega_4. \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne les coordonnées et pondérations suivantes :

i	ξ_i	η_i	ω_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

A.10.3 Éléments triangle quadratique

Les fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (-1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\ N_4(\xi, \eta) &= 4(1 - \xi - \eta)\xi, \\ N_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ N_6(\xi, \eta) &= 4(1 - \xi - \eta)\eta. \end{aligned}$$

Points de Gauss Les coordonnées et pondérations des points de Gauss sont :

i	ξ_i	η_i	ω_i
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

A.10.4 Éléments quadrangle quadratique

Les fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1/4 (-1 - \xi - \eta)(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= 1/4 (-1 + \xi - \eta)(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= 1/4 (-1 + \xi + \eta)(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= 1/4 (-1 - \xi + \eta)(1 - \xi)(1 + \eta), \\ N_5(\xi, \eta) &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta), \\ N_6(\xi, \eta) &= 1/2 (1 - \eta^2)(1 + \xi), \\ N_7(\xi, \eta) &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta), \\ N_8(\xi, \eta) &= 1/2 (1 - \eta^2)(1 - \xi). \end{aligned}$$

Les coordonnées et pondérations des points de Gauss sont :

i	ξ_i	η_i	ω_i
1	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{25}{81}$
2	0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{40}{81}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{25}{81}$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{40}{81}$
5	0	0	$\frac{64}{81}$
6	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{40}{81}$
7	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{25}{81}$
8	0	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{40}{81}$
9	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$\frac{25}{81}$

A.11 Éléments unidimensionnels

A.11.1 Éléments barre linéaire

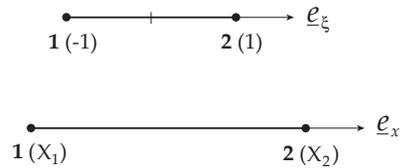


FIG. A.7 – Éléments barre linéaire

N et B valent

$$N = \frac{1}{2} [1 - \xi \quad 1 + \xi], \tag{A.146}$$

$$B = \frac{1}{2} [-1 \quad 1]. \tag{A.147}$$

A.11.2 Éléments barre quadratique

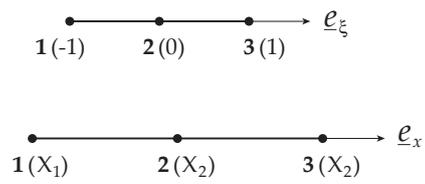


FIG. A.8 – Éléments barre quadratique

N et B valent

$$N = \left[\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad -\xi^2 + 1 \quad \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \right], \quad (\text{A.148})$$

$$B = \left[\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \quad -2\xi \quad \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.149})$$

Annexe B

Implémentation d'un modèle à second-gradient implicite

Dans cette annexe, on modifie la formulation faible présentée dans le chapitre précédent pour prendre en compte les équations supplémentaires apportées par le modèle à second-gradient implicite, comme cela est fait dans [Peerlings *et al.*, 1996] pour un modèle d'endommagement, et [de Borst *et al.*, 1999] pour un modèle élasto-plastique endommageable. La formulation présentée dans cette annexe est également compatible avec le modèle à double endommagement présenté dans le chapitre 5.

B.1 Équations locales

Les équations du problème mécanique portant sur les contraintes et les déplacements (équations B.1, B.2, B.3, et B.5, B.6) sont les mêmes que dans l'annexe A pour un modèle non régularisé. On note z la variable interne sur laquelle porte la régularisation, et \bar{z} la variable régularisée vérifiant l'équation B.4 sur le volume et B.7 sur le bord du domaine. Le bilan des équations locales s'écrit :

matériau continu :

$$\nabla_{\sigma}(\sigma) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{B.1})$$

$$\varepsilon = \nabla_{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{B.2})$$

$$d\sigma = \mathbf{L} d\varepsilon, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{z} - \bar{c} \nabla^2(\bar{z}) = z, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{B.4})$$

conditions aux limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{P}_{\sigma} \sigma = \mathbf{F}_d, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla(\bar{z})^T \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{B.7})$$

avec ∇^2 l'opérateur laplacien :

$$\nabla^2(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad (\text{B.8})$$

∇ l'opérateur gradient :

$$\nabla(\bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.9})$$

\mathbf{n} le vecteur colonne contenant les coordonnées du vecteur normal \underline{n} dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.10})$$

∇_{σ} , ∇_{ε} , \mathbf{L} , et \mathbf{P}_{σ} gardant la même définition que dans le chapitre précédent.

B.2 Problème éléments-finis

Formulation faible L'équilibre de la structure est écrit sous forme intégrale à partir de l'équation A.53 :

$$\int_{\Omega} d\varepsilon^{*T} d\sigma d\Omega = \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^{*T} d\mathbf{F} d\Gamma, \quad \forall d\mathbf{u}^* \in \bar{\mathcal{F}}. \quad (\text{B.11})$$

Une particularité du modèle régularisé est qu'on calcule $d\sigma$ en fonction de $d\varepsilon$ et $d\bar{z}$. Un incrément du vecteur des contraintes vaut

$$d\sigma = (1 - D) \mathbf{K} d\varepsilon^e - \mathbf{K} \varepsilon^e dD. \quad (\text{B.12})$$

Pour que la formulation soit compatible avec le modèle à double endommagement présenté dans le chapitre 5, on considère que D est une fonction de la déformation ε et de la variable non-locale \bar{z} , donc

$$dD = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^T} d\varepsilon + \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (\text{B.13})$$

Les équations B.12 et B.13 donnent

$$d\sigma = \mathbf{L}_{\varepsilon} d\varepsilon - \mathbf{K} \varepsilon^e \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad (\text{B.14})$$

avec,

$$\mathbf{L}_{\varepsilon} = (1 - D) \mathbf{K} \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} - \mathbf{K} \varepsilon^e \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^T}. \quad (\text{B.15})$$

Si z est vu comme une fonction de la déformation ε , alors

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon^T} d\varepsilon. \quad (\text{B.16})$$

On cherche maintenant à obtenir une équation globale garantissant que l'équation B.4 soit vérifiée sur le domaine ainsi que la condition aux limites B.7. Dans un

premier temps, ces équations sont écrites sous la forme incrémentale suivante :

$$d\bar{z} - \bar{c} \nabla^2(d\bar{z}) = dz, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{B.17})$$

$$\nabla(d\bar{z})^T \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (\text{B.18})$$

On note $\bar{\mathcal{H}}$ l'espace des champs scalaires continus définis sur Ω . L'équation B.17 est prémultipliée par un champ test $d\bar{z}^*$ appartenant à $\bar{\mathcal{H}}$ et intégrée sur Ω . L'application du théorème de la divergence à cette équation donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (d\bar{z}^* d\bar{z} + \bar{c} \nabla(d\bar{z}^*)^T \nabla(d\bar{z})) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \bar{c} d\bar{z}^* \nabla(d\bar{z})^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} d\bar{z}^* dz d\Omega, \quad \forall d\bar{z}^* \in \bar{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

En tenant compte de la simplification apportée par l'équation B.18, l'intégrale de surface disparaît et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (d\bar{z}^* d\bar{z} + \bar{c} \nabla(d\bar{z}^*)^T \nabla(d\bar{z})) d\Omega = \int_{\Omega} d\bar{z}^* dz d\Omega, \\ & \forall d\bar{z}^* \in \bar{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On note $\bar{\mathcal{F}}$ l'espace des champs de vecteurs continus et réguliers définis sur Ω . La formulation faible est obtenue en introduisant l'équation B.12 dans l'équation B.11, l'équation B.16 dans l'équation B.20, et en sommant les deux équations obtenues. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{du}^*) + \mathcal{B}(d\bar{z}^*) + \mathcal{C}(d\bar{z}^*) = \mathcal{D}(\mathbf{du}^*), \\ \forall (\mathbf{du}^*, d\bar{z}^*) \in (\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{H}}), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , et \mathcal{D} étant définis par

$$\mathcal{A}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{L}_\varepsilon d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} d\bar{z} d\Omega, \quad (\text{B.22})$$

$$\mathcal{B}(d\bar{z}^*) = - \int_{\Omega} d\bar{z}^* \frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (\text{B.23})$$

$$\mathcal{C}(d\bar{z}^*) = \int_{\Omega} (d\bar{z}^* d\bar{z} + \bar{c} \nabla(d\bar{z}^*)^T \nabla(d\bar{z})) d\Omega, \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{du}^*) = \int_{\Gamma} \mathbf{du}^{*T} d\mathbf{F}_d d\Gamma. \quad (\text{B.25})$$

B.2.1 Discrétisation en espace

Deux maillages sont construits : un pour la discrétisation du champ de déplacement \mathbf{u} , et un autre pour la discrétisation de la variable régularisée \bar{z} . Pour le champ de déplacement, les inconnues nodales sont les composantes des déplacements nodaux dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ rangées dans le vecteur \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1^x \quad \mathbf{U}_1^y \quad \dots \quad \mathbf{U}_{n_{no}}^x \quad \mathbf{U}_{n_{no}}^y]^T. \quad (\text{B.26})$$

avec n_{no} le nombre de nœuds du maillage. Pour le champ de variable non-locale \bar{z} , les inconnues nodales

sont les valeurs prises par ce champ aux nœuds du maillage rangées dans le vecteur $\bar{\mathbf{Z}}$ comme suit :

$$\bar{\mathbf{Z}} = [\bar{\mathbf{Z}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{Z}}_{n_z}]^T, \quad (\text{B.27})$$

n_z étant le nombre de nœuds du maillage utilisés pour la discrétisation de \bar{z} . La matrice \mathbf{B} permet toujours de calculer la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur un élément à partir de la restriction \mathbf{U}_{el} du vecteur déplacement à un élément :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{U}_{el}. \quad (\text{B.28})$$

La restriction du vecteur $\bar{\mathbf{Z}}$ sur un élément est notée $\bar{\mathbf{Z}}_{el}$. Le vecteur de fonctions formes \mathbf{N}_z permet de calculer la valeur \bar{z} en un point à partir de $\bar{\mathbf{Z}}_{el}$:

$$\bar{z}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{N}_z(\hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{Z}}_{el}. \quad (\text{B.29})$$

De plus, la matrice \mathbf{E} est définie pour obtenir $\nabla(\bar{z})$ à partir de $\bar{\mathbf{Z}}_{el}$:

$$\nabla(\bar{z})(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{Z}}_{el}. \quad (\text{B.30})$$

Cette matrice vérifie donc

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_z)_{,x} \\ (\mathbf{N}_z)_{,y} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Les matrices \mathbf{K}_{uu} et \mathbf{K}_{uz} , et le vecteur \mathbf{F}_{ext} , sont définis pour que l'équation B.21 s'écrive, si le champ $d\bar{z}^*$ est nul, sous la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}^{*T} \mathbf{K}_{uu} d\mathbf{U} + d\mathbf{U}^{*T} \mathbf{K}_{uz} d\bar{\mathbf{Z}} = d\mathbf{U}^{*T} d\mathbf{F}_{ext}, \\ \forall d\mathbf{U}^* \in \bar{\mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$\bar{\mathcal{F}}$ étant l'ensemble des vecteurs colonne de dimension $2 n_{no}$. Les matrices \mathbf{K}_{uu} et \mathbf{K}_{uz} sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires \mathbf{K}_{uu}^{el} et \mathbf{K}_{uz}^{el} vérifiant

$$\mathbf{K}_{uu}^{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{B} J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{K}_{uz}^{el} = - \int_{\hat{\Omega}_{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \mathbf{N}_z J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.34})$$

$d\mathbf{F}_{ext}$ est calculé comme pour un calcul éléments-finis classique (avec l'équation A.69). On introduit \mathbf{K}_{zu} et \mathbf{K}_{zz} tels que, si le champ \mathbf{du}^* est nul, l'équation B.21 s'écrive sous forme discrétisée

$$d\bar{\mathbf{Z}}^{*T} \mathbf{K}_{zu} d\mathbf{U} + d\bar{\mathbf{Z}}^{*T} \mathbf{K}_{zz} d\bar{\mathbf{Z}} = 0, \quad \forall d\bar{\mathbf{Z}}^* \in \bar{\mathcal{H}}, \quad (\text{B.35})$$

$\bar{\mathcal{H}}$ étant l'ensemble des vecteurs de dimension n_z . La matrice \mathbf{K}_{zu} est donc calculée en assemblant les matrices élémentaires \mathbf{K}_{zu}^{el} vérifiant

$$\mathbf{K}_{zu}^{el} = - \int_{\hat{\Omega}_{el}} \mathbf{N}_z^T \frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T} \mathbf{B} J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.36})$$

La matrice \mathbf{K}_{zz} est obtenue en assemblant les matrices élémentaires \mathbf{K}_{zz}^{el} vérifiant

$$\mathbf{K}_{zz}^{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} (\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z + \bar{c} \mathbf{E}^T \mathbf{E}) J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.37})$$

Le système incrémental global est obtenu à partir des équations B.32 et B.35 et s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uz} \\ \mathbf{K}_{zu} & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U} \\ d\bar{\mathbf{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{F}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

B.2.2 Discrétisation en temps

Première itération À la première itération, on résout le système

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uz} \\ K_{zu} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{ext}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Itérations suivantes Si les équations incrémentales du problème sont vérifiées, on doit avoir à tout instant

$$dF_{\text{int}} = dF_{\text{ext}}, \quad (\text{B.40})$$

avec dF_{int} un incrément du vecteur des efforts intérieurs désormais défini par

$$dF_{\text{int}} = K_{uu} dU + K_{uz} d\bar{Z}, \quad (\text{B.41})$$

ce qui permet de calculer le résidu sur l'équilibre R_1 de manière habituelle par

$$R_1 = F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}. \quad (\text{B.42})$$

Le vecteur dF_{int} peut s'obtenir par assemblage des vecteurs élémentaires $dF_{\text{int}}^{\text{el}}$ vérifiant

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T (\mathbf{L}_\varepsilon B dU_{el} - \mathbf{K} \varepsilon^e \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} N_z d\bar{z}_{el}) J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{B.43})$$

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T (\mathbf{L}_\varepsilon d\varepsilon - \mathbf{K} \varepsilon^e \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} d\bar{z}) J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{B.44})$$

$$dF_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T d\boldsymbol{\sigma} J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.45})$$

En intégrant cette équation sur le temps, on obtient donc toujours

$$F_{\text{int}}^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} B^T \boldsymbol{\sigma} J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.46})$$

Si les équations du problème sont vérifiées, on a également à tout instant

$$K_{zz} d\bar{Z} = dF_z, \quad (\text{B.47})$$

avec dF_z vérifiant

$$dF_z = -K_{zu} dU. \quad (\text{B.48})$$

Ceci permet de définir un résidu R_2 par

$$R_2 = F_z - K_{zz} \bar{Z}. \quad (\text{B.49})$$

Le vecteur dF_z peut être obtenu par assemblage des vecteurs dF_z^{el} vérifiant

$$dF_z^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} N_z^T \frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T} B dU_{el} J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{B.50})$$

$$dF_z^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} N_z^T dz J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.51})$$

En intégrant cette équation sur le temps, on obtient

$$F_z^{\text{el}} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} N_z^T z J d\hat{\Omega}_{el}. \quad (\text{B.52})$$

Les résidus sont notés R_1^i et R_2^i à l'itération i . Une prédiction de la valeur de R_1^i est obtenue à partir d'une linéarisation de sa variation depuis l'itération $i-1$:

$$R_1^i = R_1^{i-1} + \frac{\partial R_1}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_1}{\partial \bar{Z}} \delta \bar{Z}, \quad (\text{B.53})$$

$$R_1^i = R_1^{i-1} - K_{uu} \delta U - K_{uz} \delta \bar{Z}. \quad (\text{B.54})$$

Une estimation de la valeur de R_2^i est obtenue de la même manière :

$$R_2^i = R_2^{i-1} + \frac{\partial R_2}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_2}{\partial \bar{Z}} \delta \bar{Z}, \quad (\text{B.55})$$

$$R_2^i = R_2^{i-1} - K_{zu} \delta U - K_{zz} \delta \bar{Z}. \quad (\text{B.56})$$

Le système global à résoudre est donc

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uz} \\ K_{zu} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{i-1} \\ R_2^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.57})$$

B.3 Calcul des dérivées partielles

Le calcul de la matrice de rigidité tangente nécessite de calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$, $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$, $\frac{\partial D}{\partial \bar{z}}$, et $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$, qui apparaissent dans les équations B.15, B.34, et B.36. On donne dans cette section le calcul de ces dérivées pour le modèle à double endommagement et le modèle élasto-plastique endommageable.

B.3.1 Modèle à double endommagement

Pour ce modèle, la variable z est égale à la variable z_l en utilisant les notations du chapitre 5. $\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ est égal à la matrice identité de dimension 3×3 et $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ se calcule comme $\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ dans le paragraphe A.9.2. $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\frac{\partial D}{\partial \bar{z}}$ vérifient

$$\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \omega_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (1 - \omega_l) = \frac{\partial \omega_d}{\partial \kappa_d} c_d \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (1 - \omega_l)^2, \quad (\text{B.58})$$

et,

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{z}} (1 - \omega_l) + \frac{\partial \omega_l}{\partial \bar{z}} (1 - \omega_d), \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \omega_d}{\partial \kappa_d} c_d \varepsilon_{eq} \frac{\partial \omega_l}{\partial \kappa_l} c_l (1 - \omega_l) + \frac{\partial \omega_l}{\partial \kappa_l} c_l (1 - \omega_d). \quad (\text{B.60})$$

B.3.2 Modèle élasto-plastique endommageable (1D)

$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ se calcule comme $\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ dans la section A.9.2. $\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ vérifient

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = c_p k + (1 - c_p), \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad (\text{B.62})$$

avec,

$$c_p = \arg(f = 0 \text{ et } df = 0), \quad (\text{B.63})$$

$$c_e = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}. \quad (\text{B.64})$$

Par ailleurs, $\frac{\partial D}{\partial \bar{z}}$ vérifie

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{A}{\exp(-A(\kappa - \varepsilon_0))}. \quad (\text{B.65})$$

Annexe C

Formulation imposant la dissipation dans l'élément

Dans cette annexe, on présente une formulation permettant de construire une loi cohésive à partir de la donnée des incréments d'énergie dissipée surfacique dans la discontinuité à chaque pas de temps. Le problème est supposé bidimensionnel en contraintes planes ou en déformations planes. Les éléments cohésifs sont construits pour que la solution du problème soit calculée sans connaître la loi cohésive, à partir de la donnée des incréments d'énergie dissipée surfacique dont on sépare les contributions dans les directions normales et tangentielles. On se place d'abord dans le cas d'un modèle de référence endommageable, puis on complète le problème éléments-finis pour tenir compte de la présence de plasticité dans le matériau.

C.1 Équations locales

Critère de changement de modèle Pour le modèle équivalent, les incréments d'énergie dissipée surfacique s'écrivent, en séparant les contributions de chaque mode :

$$d\hat{\phi}_s^n = \frac{1}{2} (\sigma_n^s d[[u]]_n - [[u]]_n d\sigma_n^s), \quad (\text{C.1})$$

$$d\hat{\phi}_s^t = \frac{1}{2} (\sigma_t^s d[[u]]_t - [[u]]_t d\sigma_t^s). \quad (\text{C.2})$$

Ces incréments doivent vérifier le critère de changement de modèle s'écrivant pour un modèle de référence endommageable

$$\begin{bmatrix} d\hat{\phi}_s^n \\ d\hat{\phi}_s^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\check{\phi}_s^n \\ d\check{\phi}_s^t \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

avec,

$$\begin{bmatrix} d\check{\phi}_s^n \\ d\check{\phi}_s^t \end{bmatrix} = \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} \begin{bmatrix} d\check{\phi}^n \\ d\check{\phi}^t \end{bmatrix} dl. \quad (\text{C.4})$$

Les équations C.3, C.1, et C.2 permettent d'obtenir l'équation suivante :

$$2 \, d\mathbf{v} - d[[\mathbf{u}]] + \mathbf{m} \, d\boldsymbol{\sigma}^s = 0, \quad (\text{C.5})$$

avec,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_n & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

$$d\mathbf{v} = \begin{bmatrix} dv_n \\ dv_t \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

et,

$$m_n = \frac{[[u]]_n}{\sigma_n^s}, \quad (\text{C.8})$$

$$dv_n = \frac{d\check{\phi}_s^n}{\sigma_n^s}, \quad (\text{C.9})$$

$$m_t = \frac{[[u]]_t}{\sigma_t^s}, \quad (\text{C.10})$$

$$dv_t = \frac{d\check{\phi}_s^t}{\sigma_t^s}. \quad (\text{C.11})$$

Bilan des équations Le bilan des équations locales du problème équivalent s'écrit :

matériau continu :

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{C.12})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{C.13})$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \, d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{C.14})$$

discontinuité :

$$2 \, d\mathbf{v} - d[[\mathbf{u}]] + \mathbf{m} \, d\boldsymbol{\sigma}^s = 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \quad (\text{C.15})$$

conditions aux limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}_d, \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{C.17})$$

$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}$, $\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, \mathbf{L} , et $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\sigma}}$ étant définis comme dans l'annexe A.

C.2 Problème éléments-finis

C.2.1 Formulation faible

On note $\bar{\mathcal{F}}$ l'espace des champs de vecteurs déplacements continus, réguliers, et définis sur Ω , et $\bar{\mathcal{G}}$ l'espace des champs de vecteurs continus et réguliers définis sur Γ_s . Les conditions aux limites en déplacement ne sont pas prises en compte pour simplifier l'écriture du problème ($\Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_2 = \Gamma$). La formulation faible est écrite de la manière suivante :

$$\mathcal{A}(d\mathbf{u}^*) + \mathcal{B}(d\mathbf{u}^*) + \mathcal{C}(d\boldsymbol{\sigma}^{s*}) = \mathcal{D}(d\mathbf{u}^*), \quad \forall (d\mathbf{u}^*, d\boldsymbol{\sigma}^{s*}) \in (\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}), \quad (\text{C.18})$$

avec,

$$\mathcal{A}(d\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{L} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{B}(d\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma_s} d[[\mathbf{u}]]^{*T} d\boldsymbol{\sigma}^s d\Gamma_s, \quad (\text{C.20})$$

$$\mathcal{C}(d\boldsymbol{\sigma}^{s*}) = \int_{\Gamma_s} d\boldsymbol{\sigma}^{s*T} (2d\mathbf{v} - d[[\mathbf{u}]] + \mathbf{m} d\boldsymbol{\sigma}^s) d\Gamma_s, \quad (\text{C.21})$$

$$\mathcal{D}(d\mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^{*T} d\mathbf{F} d\Gamma. \quad (\text{C.22})$$

C.2.2 Discrétisation en espace

Les inconnues discrètes sont les composantes des déplacements nodaux dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ rangées dans le vecteur colonne \mathbf{U} , et les composantes des contraintes cohésives dans la base $(\underline{n}, \underline{t})$ rangées dans le vecteur colonne Σ . Les matrices \mathbf{K} et \mathbf{H} et le vecteur $d\mathbf{F}_d$ sont définis de telle sorte que, si le champ $d\boldsymbol{\sigma}^{s*}$ est nul, l'équation C.18 s'écrit sous forme discrète

$$d\mathbf{U}^{*T} \mathbf{K} d\mathbf{U} + d\mathbf{U}^{*T} \mathbf{H} d\Sigma = d\mathbf{U}^{*T} d\mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \forall d\mathbf{U}^* \in \bar{F}, \quad (\text{C.23})$$

\bar{F} étant l'ensemble des vecteurs colonnes de dimension $2n_{no}$. La matrice \mathbf{K} et le vecteur $d\mathbf{F}_{\text{ext}}$ sont calculés comme dans l'annexe A (en assemblant les matrices et vecteurs élémentaires donnés par les équations A.68 et A.69). Comme pour la formulation en contraintes présentée dans le chapitre 12, la matrice \mathbf{G} est définie par

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^T \mathbf{G}, \quad (\text{C.24})$$

\mathbf{T} étant la matrice donnant le vecteur $[[\mathbf{U}]]$ en fonction du vecteur \mathbf{U} . La matrice \mathbf{H} se calcule par assemblage des matrices élémentaires \mathbf{G}_{el} vérifiant

$$d[[\mathbf{U}]]_{el}^{*T} \mathbf{G}_{el} d\Sigma_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} d[[\mathbf{u}]]^{*T} d\boldsymbol{\sigma}^s J^s d\xi. \quad (\text{C.25})$$

On a donc toujours

$$\mathbf{G}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{sT} \mathbf{D}^s J^s d\xi. \quad (\text{C.26})$$

La matrice \mathbf{M} et le vecteur $d\mathbf{V}$ sont définis de telle sorte que, si le champ $d\mathbf{u}^*$ est nul, l'équation C.18 s'écrit sous forme discrète

$$d\Sigma^{*T} \mathbf{H}^T d\mathbf{U} - d\Sigma^{*T} \mathbf{M} d\Sigma = 2 d\Sigma^{*T} d\mathbf{V}. \quad (\text{C.27})$$

\mathbf{M} et $d\mathbf{V}$ sont obtenus par assemblage des vecteurs \mathbf{M}_{el} et $d\mathbf{V}_{el}$ définis par

$$d\Sigma_{el}^{*T} \mathbf{M}_{el} d\Sigma_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} d\boldsymbol{\sigma}^{s*T} \mathbf{m} d\boldsymbol{\sigma}^s J^s d\xi, \quad (\text{C.28})$$

$$d\Sigma_{el}^{*T} d\mathbf{V}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} d\boldsymbol{\sigma}^{s*T} d\mathbf{v} J^s d\xi, \quad (\text{C.29})$$

et vérifiant donc,

$$\mathbf{M}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{D}^{sT} \mathbf{m} \mathbf{D}^s J^s d\xi, \quad (\text{C.30})$$

$$d\mathbf{V}_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} \mathbf{D}^{sT} d\mathbf{v} J^s d\xi. \quad (\text{C.31})$$

Les équations C.23 et C.27 donnent le système incrémental suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U} \\ d\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 2d\mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.32})$$

C.2.3 Discrétisation en temps

Première itération La première itération se calcule en remplaçant dans l'équation C.32 les incréments infinitésimaux $d\mathbf{U}$, $d\Sigma$, $d\mathbf{F}_{\text{ext}}$, et $d\mathbf{V}$ par les incréments discrets $\delta\mathbf{U}$, $\delta\Sigma$, $\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}$, et $\Delta\mathbf{V}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 2\Delta\mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.33})$$

avec,

$$\mathbf{m}^{(I_t)} = \begin{bmatrix} m_n^{(I_t)} & 0 \\ 0 & m_t^{(I_t)} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.34})$$

$$\Delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_n \\ \Delta v_t \end{bmatrix}, \quad (\text{C.35})$$

et,

$$m_n^{(I_t)} = \frac{[[u]]_n^{(I_t)}}{(\sigma_n^s)^{(I_t)}}, \quad (\text{C.36})$$

$$\Delta v_n = \frac{\Delta \check{\phi}_s^n}{(\sigma_n^s)^{(I_t)}}, \quad (\text{C.37})$$

$$m_t^{(I_t)} = \frac{[[u]]_t^{(I_t)}}{(\sigma_t^s)^{(I_t)}}, \quad (\text{C.38})$$

$$\Delta v_t = \frac{\Delta \check{\phi}_s^t}{(\sigma_t^s)^{(I_t)}}. \quad (\text{C.39})$$

Itérations suivantes Si les équations du problème couplé sont vérifiées, on a

$$d\mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{H} d\Sigma = d\mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (\text{C.40})$$

On peut donc définir un résidu \mathbf{R}_1 tel que

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{H} \Sigma - \mathbf{F}_{\text{int}}. \quad (\text{C.41})$$

D'autre part,

$$\Delta\mathbf{W} = 2\Delta\mathbf{V}, \quad (\text{C.42})$$

avec,

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{H}^T \Delta\mathbf{U} - \mathbf{M} \Delta\Sigma, \quad (\text{C.43})$$

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{G}^T \Delta[[\mathbf{U}]] - \mathbf{M} \Delta\Sigma. \quad (\text{C.44})$$

On peut donc définir un résidu \mathbf{R}_2 tel que

$$\mathbf{R}_2 = 2\Delta\mathbf{V} - \Delta\mathbf{W}. \quad (\text{C.45})$$

ΔW est obtenu par assemblage des vecteurs élémentaires ΔW_{el} vérifiant

$$\Delta W_{el} = G_{el}^T \Delta \llbracket U \rrbracket_{el} - M_{el} \Delta \Sigma_{el}, \quad (C.46)$$

$$\Delta W_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} (C^s P \Delta \llbracket U \rrbracket_{el} - \mathbf{m}^{(I_t)} D^s \Delta \Sigma_{el}) J^s d\xi, \quad (C.47)$$

$$\Delta W_{el} = \int_{\hat{\Gamma}_{el}^s} D^{sT} (\Delta \llbracket u \rrbracket - \mathbf{m}^{(I_t)} \Delta \boldsymbol{\sigma}^s) J^s d\xi. \quad (C.48)$$

Les résidus sont notés R_1^i et R_2^i à l'itération i et leur valeur est approximée par

$$R_1^i = R_1^{i-1} + \frac{\partial R_1}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_1}{\partial \Sigma} \delta \Sigma, \quad (C.49)$$

$$R_1^i = R_1^{i-1} - K \delta U - H \delta \Sigma. \quad (C.50)$$

De même, R_2^i vérifie approximativement

$$R_2^i = R_2^{i-1} + \frac{\partial R_2}{\partial U} \delta U + \frac{\partial R_2}{\partial \Sigma} \delta \Sigma, \quad (C.51)$$

$$R_2^i = R_2^{i-1} - H^T \delta U + M \delta \Sigma. \quad (C.52)$$

En imposant la nullité de R_1^i et R_2^i dans les équations C.50 et C.52, on obtient le système

$$\begin{bmatrix} K & H \\ H^T & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{i-1} \\ R_2^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (C.53)$$

C.3 Cas d'un modèle élasto-plastique endommageable

Énergie dissipée de calcul Dans le cas d'un modèle élasto-plastique endommageable, la formulation précédente est reprise en remplaçant les termes d'énergie dissipée par des termes d'énergie dissipée de calcul, et le saut de déplacement par le saut de déplacement élastique. Ainsi, on écrit

$$m_n = \frac{\llbracket u \rrbracket_n^e}{\sigma_n^s}, \quad (C.54)$$

$$dv_n = \frac{d(\check{\phi}_s^c)_n}{\sigma_n^s}, \quad (C.55)$$

$$m_t = \frac{\llbracket u \rrbracket_t^e}{\sigma_t^s}, \quad (C.56)$$

$$dv_t = \frac{d(\check{\phi}_s^c)_t}{\sigma_t^s}, \quad (C.57)$$

ce qui donne dans l'algorithme de Newton :

$$m_n^{(I_t)} = \frac{\llbracket u \rrbracket_n^{(I_t)} - (\llbracket u \rrbracket_n^p)^{(I_t)}}{(\sigma_n^s)^{(I_t)}}, \quad (C.58)$$

$$\Delta v_n = \frac{(\Delta \check{\phi}_s^c)_n}{(\sigma_n^s)^{(I_t)}}, \quad (C.59)$$

$$m_t^{(I_t)} = \frac{\llbracket u \rrbracket_t^{(I_t)} - (\llbracket u \rrbracket_t^p)^{(I_t)}}{(\sigma_t^s)^{(I_t)}}, \quad (C.60)$$

$$\Delta v_t = \frac{(\Delta \check{\phi}_s^c)_t}{(\sigma_t^s)^{(I_t)}}. \quad (C.61)$$

Énergie dissipée plastique Il faut également ajouter à cette formulation le critère de changement de modèle sur la dissipation plastique qui s'écrit, en séparant les contributions de chaque mode :

$$\begin{bmatrix} d(\hat{\phi}_s^p)_n \\ d(\hat{\phi}_s^p)_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(\check{\phi}_s^p)_n \\ d(\check{\phi}_s^p)_t \end{bmatrix}, \quad (C.62)$$

avec,

$$\begin{bmatrix} d(\check{\phi}_s^p)_n \\ d(\check{\phi}_s^p)_t \end{bmatrix} = \int_{-l_i}^{l_i} i_{loc} \begin{bmatrix} d(\check{\phi}^p)_n \\ d(\check{\phi}^p)_t \end{bmatrix} dl. \quad (C.63)$$

Par ailleurs, on a

$$d(\hat{\phi}_s^p)_n = \sigma_n^s d\llbracket u \rrbracket_n^p, \quad (C.64)$$

$$d(\hat{\phi}_s^p)_t = \sigma_t^s d\llbracket u \rrbracket_t^p. \quad (C.65)$$

Le critère de changement de modèle est donc vérifié si

$$d\llbracket u \rrbracket_n^p = \frac{d(\hat{\phi}_s^p)_n}{\sigma_n^s}, \quad (C.66)$$

$$d\llbracket u \rrbracket_t^p = \frac{d(\hat{\phi}_s^p)_t}{\sigma_t^s}, \quad (C.67)$$

ce qui s'écrit sous forme discrétisée en temps avec la méthode d'Euler :

$$\Delta \llbracket u \rrbracket_n^p = \frac{\Delta(\hat{\phi}_s^p)_n}{(\sigma_n^s)^{(I_t)}}, \quad (C.68)$$

$$\Delta \llbracket u \rrbracket_t^p = \frac{\Delta(\hat{\phi}_s^p)_t}{(\sigma_t^s)^{(I_t)}}. \quad (C.69)$$

C.4 Algorithme

L'algorithme 6 présente la procédure globale de résolution numérique du problème. On note I_t le numéro du piquet de temps courant, I_t^{max} le numéro du piquet de temps final, $(\cdot)^{(I_t)}$ la valeur convergée d'une variable au piquet de temps I_t , $(\cdot)^i$ la valeur d'une variable à l'itération i du pas de temps courant ($I_t \rightarrow I_{t+1}$), et p.i. les points d'intégration.

```

 $I_t := 1;$ 
initialisation de  $U^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(1)}$ , et des vecteurs
contenant les déformations, les contraintes et les
variables internes à 0 ;
tant que  $I_t \leq I_t^{max}$  faire
   $U^0 := U^{(I_t)}$ ;
   $\Sigma^0 := \Sigma^{(I_t)}$ ;
   $i := 1;$ 
  importation de  $\Delta\lambda$  ;
  importation de  $\Delta\Phi^c$  et  $\Delta\Phi^p$  ;
  calcul des matrices K et M ;
  calcul du vecteur  $\Delta V$  ;
  calcul de  $\delta U$  et  $\delta\Sigma$  ;
  tant que  $1 = 1$  faire
     $U^i := U^{i-1} + \delta U$ ;
     $\Sigma^i := \Sigma^{i-1} + \delta\Sigma$ ;
    pour tous les p.i. du volume faire
      calcul de  $\epsilon^i$  à partir de  $U^i$  ;
      calcul de  $\sigma^i$  et des  $v_k^i$  à partir de  $\epsilon^i$  et
      des  $v_k^{(I_t)}$  ;
    fin
    pour tous les p.i. de l'interface faire
      calcul de  $(\sigma^s)^i$  à partir de  $\Sigma^i$  ;
    fin
    calcul de  $R_1^i$  à partir de  $\sigma^i$  ;
    calcul de  $R_2^i$  à partir de  $\Delta[[u]]$  et  $\Delta\sigma^s$  ;
    si erreurs inférieures à la tolérance alors
      sortie de boucle ;
    fin
    mise à jour de la matrice K ;
    calcul de  $\delta U$  et  $\delta\Sigma$  ;
     $i := i + 1$ ;
  fin
  calcul de  $[[u]]^p$  à partir de  $\Delta\Phi^p$  et  $(\sigma^s)^{(I_t)}$  ;
  sauvegarde de  $U^{(I_t+1)}$ ,  $\Sigma^{(I_t+1)}$ , et des vecteurs
  contenant les déformations, contraintes et
  variables internes ;
   $I_t := I_t + 1$ .
fin

```

Algorithme 6 : Algorithme de Newton

Annexe D

Éléments d'interface implémentés et opérateurs tangents

On présente dans cette annexe les fonctions de forme et opérateurs des deux éléments-finis d'interface implémentés (élément linéaire à deux nœuds et quadratique à trois nœuds). On donne également les opérateurs tangents des lois cohésives présentées dans le chapitre 11 (loi exponentielle et loi linéaire) pour les deux formulations présentées dans les chapitres 12 et 13.

D.1 Éléments implémentés

Le vecteur position d'un point M sur la configuration réelle est noté \underline{x} et ses projections sur \underline{e}_x et \underline{e}_y sont notées x et y :

$$\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y. \quad (\text{D.1})$$

Le vecteur position de M sur l'élément de référence est noté $\underline{\hat{x}}$. Ce vecteur est porté par \underline{e}_ξ et sa projection sur ce vecteur est notée ξ :

$$\underline{\hat{x}} = \xi \underline{e}_\xi. \quad (\text{D.2})$$

Jacobien On définit J^s par

$$d\Gamma_s = J^s d\xi, \quad (\text{D.3})$$

or,

$$d\Gamma_s = \sqrt{x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2} d\xi, \quad (\text{D.4})$$

donc par identification,

$$J^s = \sqrt{x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2}. \quad (\text{D.5})$$

On appelle X_{no} et Y_{no} les vecteurs colonne contenant les coordonnées des nœuds de l'élément réel. N est un vecteur ligne contenant les fonctions de forme et vérifiant

$$x(\xi) = N(\xi) X_{\text{no}}, \quad (\text{D.6})$$

$$y(\xi) = N(\xi) Y_{\text{no}}. \quad (\text{D.7})$$

J^s peut donc s'exprimer en fonction de X_{no} et Y_{no} et des fonctions de forme de l'élément de la manière suivante :

$$J^s = \sqrt{(N_{,\xi} X_{\text{no}})^2 + (N_{,\xi} Y_{\text{no}})^2}. \quad (\text{D.8})$$

Élément linéaire

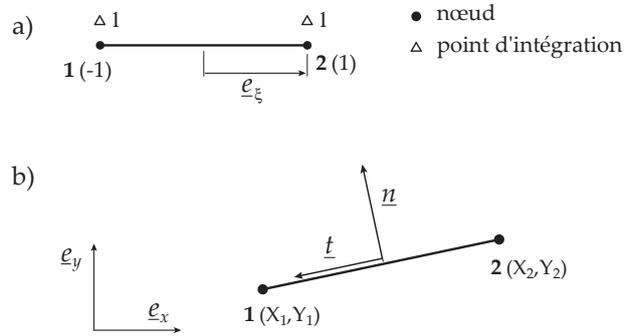


FIG. D.1 – Élément de référence (a) et élément réel (b)

Les nœuds 1 et 2 de l'élément réel ont pour coordonnées (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) dans $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Les vecteurs X_{no} et Y_{no} valent donc

$$X_{\text{no}} = [X_1 \quad X_2]^T, \quad (\text{D.9})$$

$$Y_{\text{no}} = [Y_1 \quad Y_2]^T. \quad (\text{D.10})$$

On introduit les fonctions de forme

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (\text{D.11})$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (\text{D.12})$$

La matrice de rotation P s'exprime à partir de la matrice \mathbf{P}_u définie par l'équation 11.20 de la manière suivante :

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_u \end{bmatrix}. \quad (\text{D.13})$$

La matrice D^s vaut

$$D^s(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.14})$$

Si les maillages de Ω et Γ_s sont compatibles, et si les éléments touchant la discontinuité sont linéaires, la matrice C^s vaut

$$C^s(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Élément quadratique

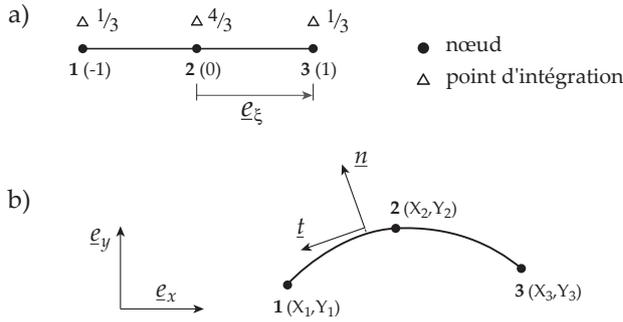


FIG. D.2 – Élément de référence a) et élément réel b)

Pour cet élément, les vecteurs X_{no} et Y_{no} vérifient

$$X_{no} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T, \quad (D.16)$$

$$Y_{no} = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]^T. \quad (D.17)$$

On introduit les fonctions de forme

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi), \quad (D.18)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2, \quad (D.19)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi). \quad (D.20)$$

La matrice de rotation P est toujours construite à partir de la matrice P_u définie en 11.20 :

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} P_u & 0 & 0 \\ 0 & P_u & 0 \\ 0 & 0 & P_u \end{bmatrix}. \quad (D.21)$$

La matrice D^s s'exprime à partir des fonctions de forme de la manière suivante :

$$D^s(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}. \quad (D.22)$$

Si les maillages de Ω et Γ_s sont compatibles et si les fonctions de forme des éléments continus touchant l'élément cohésif sont quadratiques, la matrice C^s vaut

$$C^s(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}. \quad (D.23)$$

D.2 Opérateurs tangents

D.2.1 Formulation en contraintes

Équations générales On a

$$d[[u]] = (s_{eq} \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \sigma^s \frac{\partial s_{eq}}{\partial \sigma^{sT}}) d\sigma^s, \quad (D.24)$$

donc,

$$M^s = s_{eq} \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \sigma^s \frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} c_1 \frac{\partial [[u]]_{eq}}{\partial \sigma_{eq}^s} \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma^{sT}}, \quad (D.25)$$

avec,

$$c_1 = \frac{\partial \kappa^s}{\partial [[u]]_{eq}}, \quad (D.26)$$

soit,

$$c_1 = 1, \quad \text{en charge,} \quad (D.27)$$

$$c_1 = 0, \quad \text{en décharge.} \quad (D.28)$$

Suivant la définition de σ_{eq}^s (11.28 ou 11.29) choisie, on obtient

$$a) \quad \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma^{sT}} = [1 \ 0], \quad \text{si } |\sigma_t^s| < \frac{1}{\gamma} \sigma_n^s, \quad (D.29)$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma^{sT}} = [1 \ \text{sign}(\sigma_t^s) \gamma], \quad \text{si } |\sigma_t^s| = \frac{1}{\gamma} \sigma_n^s, \quad (D.30)$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma^{sT}} = [0 \ \text{sign}(\sigma_t^s) \gamma], \quad \text{si } |\sigma_t^s| > \frac{1}{\gamma} \sigma_n^s, \quad (D.31)$$

$$b) \quad \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma^{sT}} = \frac{1}{\sigma_{eq}^s} [\sigma_n^{s+} \ \gamma^2 \sigma_t^s], \quad (D.32)$$

avec sign la fonction signe. L'équation D.30 est une hypothèse car la dérivée n'est théoriquement pas calculable pour ce point.

Modèle exponentiel Pour ce modèle, le calcul de s_{eq} se fait avec la formule

$$s_{eq}(\kappa^s) = \frac{\kappa^s}{\sigma_c \exp(-b \kappa^s)}, \quad (D.33)$$

σ_c et b étant deux constantes caractéristiques du matériau. On peut vérifier qu'en cas de charge ($g^s = 0$ et $dg^s = 0$)

$$\sigma_{eq}^s = \sigma_c \exp(-b [[u]]_{eq}), \quad (D.34)$$

$$[[u]]_{eq} = -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{\sigma_{eq}^s}{\sigma_c}\right). \quad (D.35)$$

Les dérivées partielles nécessaires au calcul de l'opérateur tangent sont

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} = \frac{1 + b \kappa^s}{\sigma_c \exp(-b \kappa^s)}, \quad (D.36)$$

et,

$$\frac{\partial [[u]]_{eq}}{\partial \sigma_{eq}^s} = -\frac{1}{b \sigma_{eq}^s}, \quad \text{en charge,} \quad (D.37)$$

$$\frac{\partial [[u]]_{eq}}{\partial \sigma_{eq}^s} = s_{eq}, \quad \text{sinon.} \quad (D.38)$$

Modèle linéaire Le calcul de s_{eq} se fait avec la formule

$$s_{eq}(\kappa^s) = \frac{[[u]]_c}{\sigma_c} \frac{\kappa^s}{[[u]]_c - \kappa^s}, \quad (D.39)$$

σ_c et $\llbracket u \rrbracket_c$ étant deux constantes caractéristiques du matériau. En cas de charge, on a

$$\sigma_{eq}^s = \sigma_c \left(1 - \frac{\llbracket u \rrbracket_{eq}}{\llbracket u \rrbracket_c}\right), \quad (D.40)$$

$$\llbracket u \rrbracket_{eq} = \llbracket u \rrbracket_c \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^s}{\sigma_c}\right). \quad (D.41)$$

Les dérivées partielles nécessaires au calcul de l'opérateur tangent sont

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \kappa^s} = \frac{\llbracket u \rrbracket_c^2}{\sigma_c (\llbracket u \rrbracket_c - \kappa^s)^2}, \quad (D.42)$$

et,

$$\frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \sigma_{eq}^s} = -\frac{\llbracket u \rrbracket_c}{\sigma_c}, \quad \text{en charge,} \quad (D.43)$$

$$\frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \sigma_{eq}^s} = s_{eq}, \quad \text{sinon.} \quad (D.44)$$

D.2.2 Formulation en contraintes modifiées

Équations générales On a

$$d\llbracket u \rrbracket = (t_{eq} \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \zeta \frac{\partial t_{eq}}{\partial \zeta^T}) d\zeta, \quad (D.45)$$

donc,

$$\mathbf{N}^s = t_{eq} \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \zeta \frac{\partial t_{eq}}{\partial \zeta^T}, \quad (D.46)$$

$$\mathbf{N}^s = t_{eq} \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \zeta \frac{\partial t_{eq}}{\partial \kappa^s} c_1 \frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \zeta_{eq}} \frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T}. \quad (D.47)$$

Avec la définition a) de ζ_{eq} (équation 13.5), on obtient

$$\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{si } \zeta_t < \frac{1}{\gamma} \zeta_n, \quad (D.48)$$

$$\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \text{si } \zeta_t = \frac{1}{\gamma} \zeta_n, \quad (D.49)$$

$$\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \text{si } \zeta_t > \frac{1}{\gamma} \zeta_n. \quad (D.50)$$

Avec la définition b) de ζ_{eq} (équation 13.6), le calcul de $\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T}$ se fait de la manière suivante :

$$\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T} = \frac{\partial \sigma_{eq}^s}{\partial \sigma_{eq}^s} (\mathbf{I}_2 - \alpha \mathbf{N}^s) + \alpha \frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \llbracket u \rrbracket^T} \mathbf{N}^s, \quad (D.51)$$

or,

$$\frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \llbracket u \rrbracket^T} = \frac{1}{\sigma_{eq}^s} \begin{bmatrix} \sigma_n^+ & \frac{\gamma^2}{\beta} \sigma_t^s \end{bmatrix}, \quad (D.52)$$

donc,

$$\frac{\partial \zeta_{eq}}{\partial \zeta^T} = \frac{1}{\sigma_{eq}^s} \begin{bmatrix} (\sigma_n^s)^+ & \gamma^2 \sigma_t^s \end{bmatrix}. \quad (D.53)$$

Zone cohésive rompue Si la zone cohésive est rompue, alors

$$\zeta = \alpha \llbracket u \rrbracket, \quad (D.54)$$

donc,

$$\zeta_{eq} = \alpha \llbracket u \rrbracket_{eq}, \quad (D.55)$$

$$t_{eq} = \frac{1}{\alpha}, \quad (D.56)$$

$$\mathbf{N}^s = \frac{1}{\alpha} \mathbf{S}_0. \quad (D.57)$$

Modèle exponentiel Pour le modèle exponentiel, on a

$$t_{eq} = \frac{\kappa^s}{\sigma_c \exp(-b \kappa^s) + \alpha \kappa^s}. \quad (D.58)$$

En cas de charge, on a

$$\zeta_{eq} = \sigma_c \exp(-b \llbracket u \rrbracket_{eq}) + \alpha \llbracket u \rrbracket_{eq}, \quad (D.59)$$

$$\llbracket u \rrbracket_{eq} = \frac{1}{b} W(a \sigma_c \exp(a \zeta_{eq})) + \frac{\zeta_{eq}}{\alpha}, \quad (D.60)$$

avec $a = -\frac{b}{\alpha}$, et W la fonction de Lambert.

Note La fonction de Lambert est la fonction inverse de la fonction $z \rightarrow z \exp(z)$:

$$W(z) = (z \exp(z))^{-1}, \quad (D.61)$$

dont la dérivée s'écrit

$$\frac{dW}{dz} = \frac{W(z)}{(1 + W(z))z}. \quad (D.62)$$

Cette fonction n'a pas d'expression analytique, elle est donc calculée de manière approchée dans les calculs numériques.

Les dérivées nécessaires au calcul de l'opérateur tangent sont

$$\frac{\partial t_{eq}}{\partial \kappa^s} = \frac{(1 + \kappa^s b) \sigma_c \exp(-b \kappa^s)}{(\sigma_c \exp(-b \kappa^s) + \alpha \kappa^s)^2}, \quad (D.63)$$

et,

$$\frac{\partial \llbracket u \rrbracket_{eq}}{\partial \zeta_{eq}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{W(z)}{\alpha(1 + W(z))}, \quad (D.64)$$

avec,

$$z = a \sigma_c \exp(a \zeta_{eq}). \quad (D.65)$$

Modèle linéaire Pour le modèle linéaire, on a

$$t_{eq} = \frac{\llbracket u \rrbracket_c \kappa^s}{\sigma_c \llbracket u \rrbracket_c - \sigma_c \kappa^s + \alpha \llbracket u \rrbracket_c \kappa^s}. \quad (D.66)$$

En cas de charge, on a

$$\zeta_{eq} = \sigma_c \left(1 - \frac{\llbracket u \rrbracket_{eq}}{\llbracket u \rrbracket_c}\right) + \alpha \llbracket u \rrbracket_{eq}, \quad (D.67)$$

$$\llbracket u \rrbracket_{eq} = \frac{\zeta_{eq} - \sigma_c}{\alpha - \frac{\sigma_c}{\llbracket u \rrbracket_c}}. \quad (D.68)$$

Les dérivées nécessaires au calcul de l'opérateur tangent sont donc

$$\frac{\partial t_{eq}}{\partial \kappa^s} = \frac{[[u]]_c^2 \sigma_c}{(\sigma_c [[u]]_c - \sigma_c \kappa^s + \alpha [[u]]_c \kappa^s)^2}, \quad (\text{D.69})$$

et,

$$\frac{\partial [[u]]_{eq}}{\partial \zeta_{eq}} = \frac{1}{\alpha - \frac{\sigma_c}{[[u]]_c}}. \quad (\text{D.70})$$

Annexe E

Pilotage du calcul

On considère un problème non-linéaire et quasi-statique résolu de manière itérative avec un algorithme de Newton. Si la structure est globalement stable, une augmentation de la dissipation d'énergie (par plasticité, augmentation de l'endommagement, propagation d'une fissure, ...) nécessite au préalable une augmentation du chargement. Par contre, si la structure est globalement instable, il y a théoriquement production d'énergie cinétique ; si le problème est quand même traité en quasi-statique, la dissipation d'énergie n'augmente alors plus continûment avec le chargement. Une résolution itérative avec un algorithme de Newton nécessitant que les solutions successives soient proches les unes des autres, la méthode de Newton ne converge généralement pas si le comportement est instable.

Si la structure est soumise à un déplacement imposé \bar{U}_d en un point, et si la force de réaction à ce déplacement est notée $\bar{F}_{\text{réac}}$, l'instabilité de la structure se traduit par une courbe force-déplacement revenant sur elle-même (voir figure E.1). Ce type de comportement est appelé *snap-back* en anglais, ce qui pourrait être traduit par *retour de force* en français.

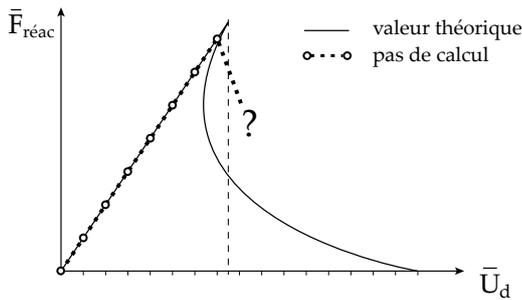


FIG. E.1 – Exemple de *snap-back*

Pour contourner ce problème, il est possible de piloter le calcul en imposant une évolution adaptative du chargement selon un critère défini au préalable. Les premiers travaux dans ce domaine sont ceux de Wempner et de Riks [Wempner, 1971, Riks, 1972], ayant donné lieu à de nombreux autres travaux par la suite. Quelques méthodes de pilotage sont présentées dans ce chapitre pour une formulation dont les inconnues sont les déplacements nodaux rangés dans un vecteur U , et les valeurs nodales d'un champ de multiplicateurs de Lagrange rangés dans un vecteur Λ .

E.1 Problème général

Le système incrémental global est de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU \\ d\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF_{\text{ext}} \\ dU_d \end{bmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

On suppose que le chargement s'écrit en fonction du paramètre de chargement λ de la manière suivante :

$$F_{\text{ext}} = F_0 + \lambda F_1, \quad (\text{E.2})$$

$$U_d = U_0 + \lambda U_1, \quad (\text{E.3})$$

F_0, F_1, U_0 , et U_1 étant des vecteurs constants. Un calcul classique se ferait en imposant l'évolution de λ au cours du temps. Lorsqu'une méthode de pilotage est utilisée, on impose généralement l'évolution d'une grandeur que l'on sait croissante au cours du temps. Cette grandeur est ici notée p et définie soit à partir des vecteurs U et Λ :

$$(U, \Lambda) \rightarrow p, \quad (\text{E.4})$$

soit de manière incrémentale entre deux piquets de temps :

$$(\Delta U, \Delta \Lambda) \rightarrow \Delta p. \quad (\text{E.5})$$

Parmi les méthodes classiques de pilotage, il y a d'abord la méthode à longueur d'arc sphérique [Crisfield, 1981], pour laquelle on pose

$$\Delta p = \Delta U^T \Delta U + \psi_1 \Delta \Lambda^T \Delta \Lambda, \quad (\text{E.6})$$

ψ_1 étant un facteur d'échelle choisi par l'utilisateur. Un cas particulier de cette méthode est la méthode de pilotage à longueur d'arc cylindrique pour laquelle on pose

$$\Delta p = \Delta U^T \Delta U. \quad (\text{E.7})$$

Nous allons maintenant voir comment la méthode de pilotage modifie les calculs itératifs de l'algorithme de Newton utilisé pour passer d'un piquet de temps au suivant.

Première itération À la première itération d'un pas de temps, on doit vérifier le système

$$\begin{bmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta \Lambda \end{bmatrix} = \delta \lambda \begin{bmatrix} F_1 \\ U_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.8})$$

Ce système ne peut être résolu directement car $\delta\lambda$ est *a priori* inconnu. On résout donc dans un premier temps le système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\text{ref}} \\ \Lambda_{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

$\delta\mathbf{U}$ et $\delta\Lambda$ vérifient

$$\delta\mathbf{U} = \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.10})$$

$$\delta\Lambda = \delta\lambda \Lambda_{\text{ref}}, \quad (\text{E.11})$$

ce qui permet de calculer Δp en fonction $\delta\lambda$, \mathbf{U}_{ref} , et Λ_{ref} . On peut ensuite déduire de cette expression la valeur de $\delta\lambda$ pour que p ou Δp prennent la valeur souhaitée pour le pilotage du calcul (équation E.4 ou E.5).

Itérations suivantes Aux itérations suivantes, on doit vérifier le système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{i-1} \\ \mathbf{R}_2^{i-1} \end{bmatrix} + \delta\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

Pour calculer $\delta\lambda$, on commence par résoudre les systèmes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}_{\text{res}} \\ \delta\Lambda_{\text{res}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{i-1} \\ \mathbf{R}_2^{i-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.13})$$

et,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\text{ref}} \\ \Lambda_{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.14})$$

Les incréments de déplacements et de multiplicateurs de Lagrange entre les itérations $i-1$ et i s'écrivent

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.15})$$

$$\delta\Lambda = \delta\Lambda_{\text{res}} + \delta\lambda \Lambda_{\text{ref}}. \quad (\text{E.16})$$

Ces expressions permettent de calculer p ou Δp en fonction de $\delta\lambda$, \mathbf{U}_{ref} , Λ_{ref} , \mathbf{U}_{res} , Λ_{res} , et d'en déduire la valeur de $\delta\lambda$ permettant de satisfaire la condition de pilotage.

E.2 Pilotage en déplacement

Pour réaliser un pilotage en déplacement, on impose l'incrément de la variable de pilotage p définie par

$$p = \mathbf{V}^T \mathbf{U}. \quad (\text{E.17})$$

Le vecteur \mathbf{V} permet de choisir la combinaison des déplacements nodaux sur lesquels porte le pilotage.

Première itération La variable de pilotage doit valoir $p^{(I_t+1)}$ à la fin de l'itération. On impose donc

$$\mathbf{V}^T (\mathbf{U}_0 + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}) = p^{(I_t+1)}. \quad (\text{E.18})$$

$\delta\lambda$ vérifie donc

$$\delta\lambda = \frac{p^{(I_t+1)} - \mathbf{V}^T \mathbf{U}_0}{\mathbf{V}^T \mathbf{U}_{\text{ref}}}. \quad (\text{E.19})$$

Itérations suivantes La variable de pilotage p doit valoir à la fin de l'itération

$$p^{(I_t+1)} = \mathbf{V}^T (\mathbf{U}^{i-1} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}). \quad (\text{E.20})$$

En isolant $\delta\lambda$, on obtient

$$\delta\lambda = \frac{p^{(I_t+1)} - \mathbf{V}^T \mathbf{U}^{i-1} - \mathbf{V}^T \delta\mathbf{U}_{\text{res}}}{\mathbf{V}^T \mathbf{U}_{\text{ref}}}. \quad (\text{E.21})$$

E.3 Pilotage en énergie cinétique

Bien que le problème soit traité en quasi-statique, on peut définir une échelle de temps pour calculer l'énergie cinétique développée par la structure. En notant \mathbf{M} la matrice de masse de la structure, on obtient

$$K = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}, \quad (\text{E.22})$$

soit entre deux pas de temps du calcul

$$K = \frac{1}{(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{U}. \quad (\text{E.23})$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit sous forme discrétisée en temps :

$$\Delta \mathcal{W}_{\text{int}} + \Delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \frac{\Delta K}{\Delta t}. \quad (\text{E.24})$$

Dans cette équation, le terme de droite doit rester négligeable si le problème est réellement quasi-statique. On peut envisager de réaliser le pilotage du calcul de telle sorte que ce terme reste bien négligeable pendant le calcul. Pour cela, on peut imposer un incrément constant de la variable de pilotage Δp définie par

$$\Delta p = \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{U}. \quad (\text{E.25})$$

Première itération En utilisant le champ \mathbf{U}_{ref} donné par la résolution du système E.1, on obtient l'expression suivante de $\delta\mathbf{U}$:

$$\delta\mathbf{U} = \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.26})$$

donc,

$$\Delta p = \delta\lambda^2 \mathbf{U}_{\text{ref}}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\text{ref}}. \quad (\text{E.27})$$

Cette équation du second ordre possède deux solutions :

$$\delta\lambda_a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\mathbf{U}_{\text{ref}}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\text{ref}}}}, \quad (\text{E.28})$$

$$\delta\lambda_b = -\delta\lambda_a. \quad (\text{E.29})$$

À partir de ces 2 incréments de la variable de chargement, on calcule les deux incréments de déplacement possibles $\delta\mathbf{U}_a$ et $\delta\mathbf{U}_b$:

$$\delta\mathbf{U}_a = \delta\lambda_a \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.30})$$

$$\delta\mathbf{U}_b = \delta\lambda_b \mathbf{U}_{\text{ref}}. \quad (\text{E.31})$$

On calcule ensuite les cosinus directeurs \cos_a et \cos_b entre ces incréments de déplacement et l'incrément de

déplacement $\Delta^{(i-1)}\mathbf{U}$ obtenu au pas de temps précédent :

$$\cos_a = \frac{\Delta^{(i-1)}\mathbf{U}^T \mathbf{M} \delta\mathbf{U}_a}{\Delta p^2}, \quad (\text{E.32})$$

$$\cos_b = \frac{\Delta^{(i-1)}\mathbf{U}^T \mathbf{M} \delta\mathbf{U}_b}{\Delta p^2}. \quad (\text{E.33})$$

On choisit finalement l'incrément de déplacement dont le cosinus directeur est maximal. D'après [Ritto-Corrêa et Camotim, 2008], cette méthode permet de sélectionner à chaque fois la bonne racine.

Itérations suivantes On exprime l'incrément du vecteur déplacement à partir des vecteurs \mathbf{U}_{res} et \mathbf{U}_{ref} obtenus par la résolution des systèmes E.13 et E.14 :

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}. \quad (\text{E.34})$$

L'incrément du vecteur déplacement depuis le dernier pas de temps convergé s'écrit donc

$$\Delta^i \mathbf{U} = \Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}. \quad (\text{E.35})$$

La condition de pilotage s'écrit

$$\Delta p = \Delta^i \mathbf{U}^T \mathbf{M} \Delta^i \mathbf{U}, \quad (\text{E.36})$$

soit encore,

$$\Delta p = (\Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}})^T \mathbf{M} (\Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda \mathbf{U}_{\text{ref}}). \quad (\text{E.37})$$

En développant les termes de cette équation, on obtient une équation d'ordre 2 en $\delta\lambda$:

$$a_1 \delta\lambda^2 + 2b_1 \delta\lambda + c_1 = 0, \quad (\text{E.38})$$

avec,

$$a_1 = \mathbf{U}_{\text{ref}}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.39})$$

$$b_1 = (\Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}})^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.40})$$

$$c_1 = (\Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}})^T \mathbf{M} (\Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_{\text{res}}) - \Delta p. \quad (\text{E.41})$$

Le discriminant réduit Δ' de l'équation E.38 vaut

$$\Delta' = b_1^2 - a_1 c_1. \quad (\text{E.42})$$

Si $\Delta' > 0$, on obtient deux solutions :

$$\delta\lambda_a = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta'}}{a_1}, \quad (\text{E.43})$$

$$\delta\lambda_b = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta'}}{a_1}. \quad (\text{E.44})$$

À partir de ces deux incréments de chargement possibles, on calcule deux incréments de déplacement $\delta\mathbf{U}_a$ et $\delta\mathbf{U}_b$:

$$\delta\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda_a \mathbf{U}_{\text{ref}}, \quad (\text{E.45})$$

$$\delta\mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{\text{res}} + \delta\lambda_b \mathbf{U}_{\text{ref}}. \quad (\text{E.46})$$

Les deux incréments possibles de déplacement depuis le dernier piquet de temps convergé s'écrivent donc

$$\Delta^i \mathbf{U}_a = \Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_a, \quad (\text{E.47})$$

$$\Delta^i \mathbf{U}_b = \Delta^{i-1} \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}_b. \quad (\text{E.48})$$

On calcule ensuite les angles entre ces incréments et l'incrément de déplacement $\Delta^{i-1} \mathbf{U}$ obtenu à l'itération précédente :

$$\cos_a = \frac{\Delta^{i-1} \mathbf{U}^T \mathbf{M} \Delta^i \mathbf{U}_a}{\Delta p^2}, \quad (\text{E.49})$$

$$\cos_b = \frac{\Delta^{i-1} \mathbf{U}^T \mathbf{M} \Delta^i \mathbf{U}_b}{\Delta p^2}. \quad (\text{E.50})$$

On choisit finalement l'incrément de déplacement pour lequel le cosinus directeur est maximal. Si $\Delta' \leq 0$, il n'y a pas de solution réelle et le calcul est repris au début du pas de temps en diminuant l'incrément de la variable de pilotage.

Calcul de la matrice de masse Le calcul de la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\mathcal{P}_a^*(\dot{\mathbf{u}}^*)$ vérifie

$$\mathcal{P}_a^*(\dot{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{*T} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (\text{E.51})$$

et la matrice de masse \mathbf{M} est définie par

$$\mathcal{P}_a^*(\dot{\mathbf{U}}^*) = \dot{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}. \quad (\text{E.52})$$

Elle s'obtient par assemblage des matrices de masse élémentaires \mathbf{M}_{el} vérifiant

$$\mathbf{M}_{el} = \int_{\hat{\Omega}_{el}} \rho \mathbf{C}^T \mathbf{C} J d\hat{\Omega}_{el}, \quad (\text{E.53})$$

avec J le déterminant du jacobien de la transformation amenant l'élément de référence sur l'élément réel, et la matrice \mathbf{C} définie comme précédemment (équation A.20).

Annexe F

Formulations mixtes

F.1 Définition et inversibilité

Définition En reprenant la définition donnée dans [Auricchio *et al.*, 2004], une formulation est mixte si sa discrétisation conduit à un système de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{F.1})$$

la matrice A étant symétrique de dimension $n_1 \times n_1$ et la matrice B de dimension $n_2 \times n_1$.

Condition nécessaire d'inversibilité Le raisonnement suivant, issu de [Zienkiewicz *et al.*, 2004], illustre les problèmes d'inversibilité pouvant apparaître lors de la résolution de systèmes de la forme F.1. Si A est inversible, on peut éliminer le vecteur X_1 du système F.1 et résoudre

$$C X_2 = B A^{-1} F_1 - F_2, \quad (\text{F.2})$$

avec,

$$C = B A^{-1} B^T. \quad (\text{F.3})$$

Ce système peut être résolu si C est inversible. Cette matrice étant de dimension $n_2 \times n_2$, elle est inversible si son rang est égal à n_2 . D'après les propriétés des déterminants, l'équation F.3 donne

$$\text{rang}(C) \leq \text{rang}(A^{-1}), \quad (\text{F.4})$$

donc,

$$\text{rang}(C) \leq n_1. \quad (\text{F.5})$$

La matrice C ne peut donc être inversible que si

$$n_2 \leq n_1, \quad (\text{F.6})$$

ce qui donne une condition nécessaire d'irréversibilité du système F.1.

F.2 Condition *inf-sup*

On présente dans cette section la condition *inf-sup* introduite dans [Babuška, 1971, Babuška, 1973].

Définition La condition *inf-sup* est vérifiée s'il existe une constante β indépendante de la taille h du maillage telle que

$$\forall X_2, \exists X_1 \neq 0 / X_1^T B^T X_2 \geq \beta \|X_1\|_2 \|X_2\|_2, \quad (\text{F.7})$$

$\|\cdot\|_2$ désignant la norme 2 des vecteurs colonnes.

Propriété Si la condition *inf-sup* est vérifiée, alors

$$X_2 \neq 0 \Rightarrow B^T X_2 \neq 0, \quad (\text{F.8})$$

ce qui signifie que la matrice B^T est injective. Si la condition *inf-sup* est vérifiée, la condition nécessaire d'inversibilité F.6 est donc également vérifiée.

Exemple On étudie la condition de stabilité pour un exemple avec une géométrie rectangulaire dont les nœuds du bord gauche sont bloqués (voir figure F.1).

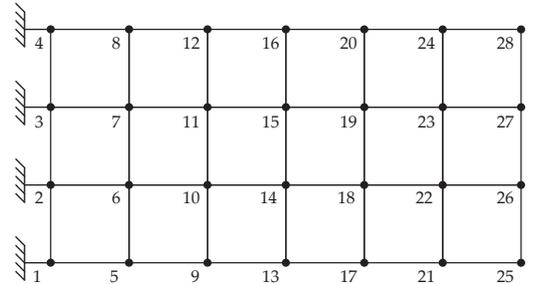


FIG. F.1 – Maillage du cas test

On considère un problème d'élasticité linéaire avec comme inconnues principales les déplacements nodaux du maillage stockés dans le vecteur X_1 . La formulation est mixte du fait des multiplicateurs de Lagrange imposant le blocage des nœuds 1, 2, 3, et 4 stockés dans le vecteur X_2 . La matrice B, de dimension 8×56 , vérifie

$$B_{ij} = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in [1, 8] \times [1, 56], \quad (\text{F.9})$$

avec,

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{si } i = j, \quad (\text{F.10})$$

$$\delta_{ij} = 0, \quad \text{sinon.} \quad (\text{F.11})$$

Si on pose

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{F.12})$$

on obtient

$$X_1^T B^T X_2 = \|X_1\|_2 \|X_2\|_2, \quad \forall X_2. \quad (\text{F.13})$$

La condition *inf-sup* (équation F.7) est donc satisfaite avec ce choix de X_1 en prenant $\beta = 1$.

F.3 Cas de l'élément cohésif en contraintes

On s'intéresse dans cette section à la mixité des formulations présentées dans les chapitres 12 et 13 pour l'implémentation numérique de lois cohésives extrinsèques.

Définition de Auricchio Pour les formulations en contraintes et en contraintes modifiées, le problème de zone cohésive et le problème continu, étudiés indépendamment l'un de l'autre, ne peuvent pas être considérés comme des formulations mixtes (même avant l'initiation de la discontinuité). Par contre, le problème global formé du couplage de ces deux problèmes constitue une formulation mixte avant que tous les éléments ne soient initiés.

Définition de Zienkiewicz D'après [Zienkiewicz *et al.*, 2004], une formulation est mixte si plus aucune inconnue ne peut être éliminée dans le système d'équations différentielles définissant le problème local. Avec cette définition, le résultat est approximativement le même car si le problème continu et le problème de zone cohésive sont étudiés séparément, il n'y a pas de simplification possible. Par contre, si on considère le problème global, il est possible d'éliminer les contraintes cohésives des inconnues du problème, et la formulation peut être considérée mixte.

Annexe G

Programme Matlab

Tous les développements numériques ont été introduits dans un code Matlab développé pendant la thèse. Ce programme fonctionne avec des cas test 1D ou 2D. Il permet de faire des calculs de rupture avec zone cohésive (avec les formulations développées dans les chapitres 12 et 13) ou de faire des calculs d'endommagement, avec éventuellement une régularisation de type second-gradient implicite (voir chapitre 4 et annexe F), et éventuellement construction de la loi cohésive équivalente (voir chapitres 7 et 8). Les maillages bi-dimensionnels sont construits avec le logiciel Cast3M (<http://www-cast3m.cea.fr>) et le post-traitement est effectué dans Matlab.

Les notations utilisées dans le programme sont approximativement les mêmes que dans le rapport. On désigne de la manière suivante les fonctions, structures, tableaux, et variables :

- fonction : `ma_fonction` (*func.*);
- structure : `ma_structure` (*stru.*);
- tableau : `mon_tableau` (*tab.*);
- variable : `ma_variable` (*var.*).

Les structures permettent de hiérarchiser les variables et les tableaux. Par exemple on pourra appeler une variable `var_1` stockée dans une structure `struc_2` elle-même stockée dans une structure `struc_1` de la manière suivante :

```
var_1 = struc_1.struc_2.var_1.
```

On présente dans un premier temps l'organisation du code (dossiers dans lesquels les fonctions sont stockées ainsi que quelques fonctions importantes), puis l'importation du maillage à partir d'un fichier de données. On présente ensuite les principales structures du programme et les variables et tableaux qu'elles contiennent. Enfin, on donne les formules de changement de variables utilisées pour garantir le bon conditionnement des matrices avec les formulations à plusieurs champs.

G.1 Organisation du code

Les fonctions sont stockées dans les dossiers suivants :

- `algo_newton` : contient les fonctions appelées par les fonctions principales propres à chaque formulation;

- `cas_test` : contient les jeux de données des cas test, qui sont également les fichiers devant être exécutés pour lancer un calcul;
- `elements` : contient les fonctions permettant de créer les éléments;
- `energies` : contient les fonctions utilisées pour les calculs d'énergies;
- `formulations` : contient les fonctions principales de chaque formulation;
- `loi_cohesive` : contient les fonctions donnant le comportement des lois cohésives implémentées;
- `maillages` : contient les fonctions utiles pour la construction des maillages 1D et l'importation des maillages 2D;
- `maillages_castem` : contient les fichiers `dgibi` pour la construction des maillages avec Cast3M et les fichiers AVS construits;
- `materiaux` : contient les fonctions donnant le comportement des modèles implémentés;
- `pilotage` : contient les fonctions utilisées pour le calcul du facteur de chargement à chaque nouvelle itération (voir annexe E);
- `post_traitement` : contient les fonctions permettant d'afficher les résultats dans Matlab;
- `pre_traitement` : contient les fonctions aidant à construire le jeu de données dans le fichier de cas test;
- `rigidite` : contient les fonctions permettant de calculer les matrices de rigidité;
- `utilitaires` : contient les fonctions auxiliaires;
- `variables internes` : contient les fonctions permettant de manipuler les variables internes.

On donne ci-dessous les fonctions utilisées pour les actions les plus courantes du programme :

- *lancer un cas test* : aller dans le dossier `cas_test/mon_cas_test`, `mon_cas_test` étant `zoneCoh_1D` ou `zoneCoh_2D` pour les problèmes de zone cohésive, `chEch_1D` ou `chEch_2D` pour les problèmes d'endommagement régularisé avec construction ou non d'une loi cohésive équivalente. Lancer ensuite le fichier Matlab `mon_cas_test.m`;
- *lancer le post-traitement d'un cas test* : aller dans le dossier `cas_test`, puis afficher l'interface graphique en lançant le programme `af_fich_mon_cas_test.m`;
- *changer les paramètres du matériau* : modifier la valeur des paramètres du matériau définis dans `ma-`

- teriaux/mon_modele/param_mat.m;
- *modifier un maillage* : modifier le fichier `.dgibi` correspondant au maillage dans le dossier `maillages_castem/mon_maillage` et lancer ce programme dans Cast3M pour créer le nouveau fichier de maillage;
 - *ajouter un modèle* : créer le dossier `matériaux/mon_modele` contenant les fichiers `calc_mon_modele_1D.m`, `calc_mon_modele_2D.m`, `calc_deriv_mon_modele.m`, `calc_deriv_regu_mon_modele.m`, `param_mon_modele.m` en s'inspirant des autres modèles implémentés;
 - *ajouter un élément continu* : créer dans le dossier `elements/continus` les fichiers `def_elem_mon_element.m`, `const_elem_mon_element.m`, et `const_elem_mon_element_regu.m` en s'inspirant des autres éléments implémentés.

G.2 Maillage

Les maillages sont créés dans Cast3M et enregistrés au format AVS dont le formatage est le suivant :

```

nbno  nbel   0   0   0
ino   x_no  y_no  0
|     |     |   0
|     |     |   0
iel   zone  type  no1  no_2  ...  no_n
|     |     |   |   |   |   |
|     |     |   |   |   |   |

```

Les maillages sans discontinuité comprennent une seule zone (`zone = 1`). Les maillages comprenant une discontinuité comprennent 6 zones :

- 1 : maillage de la partie inférieure du domaine continu;
- 2 : maillage de la partie supérieure du domaine continu;
- 3 : maillage de la partie inférieure de la discontinuité pour le champ de contraintes cohésives;
- 4 : maillage de la partie supérieure de la discontinuité pour le champ de contraintes cohésives;
- 5 : maillage de la partie inférieure de la discontinuité pour le champ de sauts de déplacements;
- 6 : maillage de la partie supérieure de la discontinuité pour le champ de sauts de déplacements.

D'une manière générale, les tables d'éléments des zones 3 et 5, et 4 et 6 sont les mêmes.

G.3 Principales structures du programme

Dans le programme, les données associées au problème de référence sont notées avec le suffixe `mes` (échelle mésoscopique) et les variables associées au problème équivalent sont notées avec le suffixe `mac` (échelle

macroscopique). On présente dans cette section les principales structures du programme et les variables et tableaux qu'elles contiennent.

G.3.1 Construction des données

Ces structures aident à la construction de la structure de données :

`def_geometrie (stru.)` (1D uniquement)

- `longueur (var.)` : longueur L de la poutre;
- `section (var.)` : section S de la poutre;
- `nb_elem_mes (var.)` : nombre d'éléments de la poutre méso.

`def_chargement (stru.)`

- `d_varpilot (var.)` : incrément de la variable de pilotage à chaque pas de calcul;
- `d_dissip_max (var.)` : incrément de dissipation à ne pas dépasser;
- `d_tps (var.)` : incrément de temps à chaque pas de calcul;
- `opti_pilot (var.)` : option de pilotage (`depl` : pilotage en déplacement, `Ecin` : pilotage en énergie cinétique).

G.3.2 Données

Toutes les variables de mise en données sont stockées dans la structure `donnees` contenant les structures suivantes :

`modele (stru.)` :

- `nom (var.)` : nom du modèle utilisé;
- `endo (var.)` : type de loi d'endommagement (`exp` ou `lin`);
- **Si zone cohésive :**
- `loiCoh (var.)` : nom de la loi cohésive utilisée;
- `sig_s_eq (var.)` : définition de la contrainte équivalente.

`maillage (stru.)` :

- `nbno (var.)` : nombre de nœuds du maillage;
- `coord_no (tab.)` : coordonnées des nœuds;
- `nbel (var.)` : nombre d'éléments du maillage;
- `elem(i) (stru.)` : i^{e} élément;
- `typg (var.)` : type suivi du nombre de points de d'intégration,
- `nbpg (var.)` : nombre de points d'intégration,
- `pg(i) (stru.)` : i^{e} point d'intégration,
- `jac (var.)` : jacobien,
- `B (tab.)` : matrice pour le calcul des déformations,
- `det_jac (var.)` : déterminant du jacobien;
- `nbno_max (var.)` : nombre de nœuds maximal dans un élément;
- `nbpg_max (var.)` : nombre de points d'intégration maximal dans un élément;
- `elem_inf (tab.)` : numéros des éléments de la partie inférieure du maillage;
- `elem_sup (tab.)` : numéros des éléments de la partie supérieure du maillage;

- `noeuds_inf (tab.)` : numéros des nœuds de la partie inférieure du maillage ;
- `noeuds_sup (tab.)` : numéros des nœuds de la partie supérieure du maillage ;
- **Si second-gradient :**
- `nbno_regu (var.)` : nombre de nœuds du maillage de régularisation ;
- `elem_regu(i) (stru.)` : i^{e} élément de régularisation ;
- **Si fissure :**
- `zc_2_glo (tab.)` : numéros des nœuds de la zone cohésive ;
- `disc_2_glo (tab.)` : numéros des nœuds de la discontinuité ;
- `nbno_disc (var.)` : nombre de nœuds de la discontinuité ;
- `nbel_disc (var.)` : nombre d'éléments de la discontinuité ;
- `elem_disc(i) (stru.)` : i^{e} élément de la discontinuité ;
- `nbno_zc (var.)` : nombre de nœuds de la zone cohésive ;
- `nbel_zc (var.)` : nombre d'éléments de la zone cohésive ;
- `elem_zc(i) (stru.)` : i^{e} élément de la zone cohésive ;
- `nbno_max_zc (var.)` : nombre de nœuds maximal dans un élément de zone cohésive ;
- `nbpg_max_zc (var.)` : nombre de points d'intégration maximal dans un élément de zone cohésive.

`chargement (stru.) :`

- `cond_lim (tab.)` : conditions aux limites ;
 - `type (var.)` : type de la condition aux limites,
 - `dir (var.)` : direction du chargement (x ou y),
 - `noeuds (var.)` : numéro des nœuds sur lesquels s'applique le chargement,
 - `val_const (var.)` : valeur initiale du chargement,
 - `val_pilot (var.)` : valeur de référence du chargement pour le pilotage ;
- `opti_pilot (tab.)` : option de pilotage ;
- `d_varpilot (var.)` : incrément de la variable de pilotage à chaque pas de calcul ;
- `d_dissip_max (var.)` : incrément de dissipation à ne pas dépasser ;
- `d_tps (var.)` : incrément de temps à chaque pas de calcul ;
- **Si pilotage en déplacement :**
- `V (tab.)` : numéros des nœuds sur lesquels le chargement est appliqué.

`materiau (stru.) :`

- `young (var.)` : module d'Young ;
- `nu (var.)` : coefficient de Poisson ;
- `hooke (tab.)` : matrice de Hooke ;
- d'autres variables dépendant du modèle choisi.

`options (stru.) :`

- `formulation (var.)` : type de la formulation (`cont` ou `zeta`) ;
- `tol (tab.)` : tolérance sur les résidus ;
- `raideur (var.)` : méthode de calcul de la rigidité (`elast`, `secante`, ou `tangente`) ;
- `IT_max (var.)` : nombre de pas de temps maximal ;
- `IN_max (var.)` : nombre d'itérations maximal ;
- `nb_pas_ecou (var.)` : nombre d'incrémentes pour le calcul des variables internes.

G.3.3 Solution du problème

Toutes les variables mémorisées pendant le calcul sont stockées dans la structure `solution`. Les tableaux commençant par une majuscule contiennent des données définies aux nœuds du maillage, et les tableaux commençant par une minuscule contiennent des données définies aux points d'intégration du maillage.

`solution (stru.) :`

- `U (tab.)` : déplacements ;
- `Lambda (tab.)` : multiplicateurs de Lagrange ;
- `Fint (tab.)` : efforts intérieurs ;
- `eps (tab.)` : déformations ;
- `sig (tab.)` : contraintes ;
- `eps_p (tab.)` : déformation plastique ;
- `varInt (stru.)` : variables internes (suivant le modèle) ;
- **Si zone cohésive :**
- `Sig (tab.)` : contrainte cohésive (si formulation en cont.) ;
- `Zeta (tab.)` : contrainte cohésive modifiée (si formulation en cont. modifiées) ;
- `integ_J (var.)` : intégrale J ;
- `long_grif (var.)` : longueur de la fissure de Griffith ;
- `phi_s (tab.)` : éner. dissipée surfacique ;
- **Si mes ou mac :**
- `Psi (var.)` : éner. libre ;
- `Phi_tot (var.)` : éner. dissipée totale ;
- `Phi_endo_inst (var.)` : éner. dissipée par endommagement localisé ;
- `Phi_plast_inst (var.)` : éner. dissipée par plasticité localisée ;
- `Phi_calc_inst (var.)` : éner. dissipée de calcul localisée ;
- `Phi_tot_inst (var.)` : éner. dissipée totale localisée ;
- **Si mac :**
- `psi_s (tab.)` : éner. libre surfacique ;
- `phi_s_tot (tab.)` : éner. dissipée surfacique totale ;
- `phi_s_endo (tab.)` : éner. dissipée surfacique d'endommagement ;
- `phi_s_plast (tab.)` : éner. dissipée surfacique de plasticité ;
- `phi_s_calc (tab.)` : éner. dissipée surfacique de calcul ;
- `phi_s_tot (tab.)` : éner. dissipée surfacique totale ;
- `Phi_tot (var.)` : éner. dissipée totale ;
- `Phi_endo_inst (var.)` : éner. dissipée par endommagement localisé ;
- `Phi_plast_inst (var.)` : éner. dissipée par plasticité localisée ;
- `Phi_calc_inst (var.)` : éner. dissipée de calcul localisée ;
- `Phi_tot_inst (var.)` : éner. dissipée totale localisée ;
- `saut_u (var.)` : saut de déplacement ;
- `sig_s (var.)` : contraintes cohésive.

G.4 Résolution des systèmes

Les systèmes provenant de formulations à plusieurs champs peuvent être mal conditionnés si les termes non nuls des sous-matrices ne sont pas du même ordre de grandeur. Dans ce cas, on effectue un changement de variable pour obtenir une matrice bien conditionnée. On suppose que le système à résoudre est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{G.1})$$

Le changement de variable se fait en résolvant le système

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 K_{11} & a_1 b_2 K_{12} \\ a_2 b_1 K_{21} & a_2 b_2 K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 R_1 \\ a_2 R_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.2})$$

avec,

$$X_1 = b_1 Y_1, \quad (\text{G.3})$$

$$X_2 = b_2 Y_2. \quad (\text{G.4})$$

Idéalement, il faut imposer indépendamment les coefficients multiplicateurs devant chaque sous-matrice K_{ij} . Ces coefficients sont notés γ_{ij} et stockés dans la matrice γ vérifiant

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{G.5})$$

Le déterminant de cette matrice étant nul, ses coefficients doivent vérifier

$$\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12} \gamma_{21} = 0. \quad (\text{G.6})$$

Dans un premier temps, une matrice γ^* est calculée pour que chaque coefficient γ_{ij}^* soit égal à l'inverse de la moyenne des termes non nuls de la matrice K_{ij} . On calcule ensuite une matrice γ proche de γ^* telle que l'équation G.6 soit vérifiée. Les termes de γ^* sont définis à partir de γ^* de la manière suivante :

$$\gamma_{11} = \gamma_{11}^* + \Delta\gamma^*, \quad (\text{G.7})$$

$$\gamma_{22} = \gamma_{22}^* + \Delta\gamma^*, \quad (\text{G.8})$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^* - \Delta\gamma^*, \quad (\text{G.9})$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{21}^* - \Delta\gamma^*. \quad (\text{G.10})$$

$\Delta\gamma^*$ est calculé pour que l'équation G.6 soit vérifiée :

$$\Delta\gamma^* = \frac{\gamma_{12}^* \gamma_{21}^* - \gamma_{22}^* \gamma_{11}^*}{\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^* + \gamma_{22}^* + \gamma_{11}^*}. \quad (\text{G.11})$$

Si on pose $a_1 = 1$, b_1 , a_2 , et b_2 sont obtenus avec les relations

$$b_1 = \frac{\gamma_{11}}{a_1}, \quad (\text{G.12})$$

$$a_2 = \frac{\gamma_{21}}{b_1}, \quad (\text{G.13})$$

$$b_2 = \frac{\gamma_{22}}{a_2}. \quad (\text{G.14})$$

Bibliographie

- [Aifantis, 1984] E.C. AIFANTIS. On the structural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 106, p. 326–330, 1984.
- [Alart et Curnier, 1991] P. ALART et A. CURNIER. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92, p. 353–375, 1991.
- [Allix et Deü, 1997] O. ALLIX et J.F. DEÜ. Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions/Rozprawy Inzynierskie*, 45(1), p. 29–46, 1997.
- [Areias et Belytschko, 2005] P.M.A. AREIAS et T. BELYTSCHKO. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5), p. 760–788, 2005.
- [Aubertin, 2008] P. AUBERTIN. *Couplage de modèles atomique et continu, propagation dynamique de fissures*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Décembre 2008.
- [Auricchio et al., 2004] F. AURICCHIO, F. BREZZI, et C. LOVADINA. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 1. J. Wiley & Sons, 2004.
- [Babuška, 1971] I. BABUŠKA. Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4), p. 322–333, 1971.
- [Babuška, 1973] I. BABUŠKA. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3), p. 179–192, 1973.
- [Babuška et Melenk, 1997] I. BABUŠKA et J.M. MELENK. The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4), p. 727–758, 1997.
- [Barenblatt, 1959] G.I. BARENBLATT. Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture. the stability of isolated cracks. relationships with energetic theories. *PMM Applied Mathematics and Mechanics*, 23, p. 1273–1282, 1959.
- [Barenblatt, 1962] G.I. BARENBLATT. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7, p. 55–129, 1962.
- [Bažant, 2002] Z.P. BAŽANT. Concrete fracture models : testing and practice. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2), p. 165–205, 2002.
- [Bažant et Oh, 1983] Z.P. BAŽANT et B.H. OH. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16(3), p. 155–177, 1983.
- [Belytschko et Black, 1999] T. BELYTSCHKO et T. BLACK. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), p. 601–620, 1999.
- [Benvenuti et al., 2008] E. BENVENUTI, A. TRALLI, et G. VENTURA. A regularized XFEM model for the transition from continuous to discontinuous displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(6), p. 911–944, 2008.
- [Besson et al., 2001] J. BESSON, G. CAILLETAUD, J.-L. CHABOCHE, et S. FOREST. Mécanique non linéaire des matériaux. *Hermès*, 2001.
- [Brajner, 2004] X. BRAJNER. *Comportement dynamique du verre sous impact*. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan (ENS-Cachan), Novembre 2004.
- [Brancherie et Ibrahimbegovic, 2006] D. BRANCHERIE et A. IBRAHIMBEGOVIC. *La méthode des éléments finis : extensions et alternatives*. Hermès-Lavoisier, 2006.
- [Brezzi, 1974] F. BREZZI. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Anal. Numer*, 8(2), p. 129–151, 1974.
- [Broberg, 1971] K.B. BROBERG. Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 19(6), p. 407–418, 1971.
- [Broberg, 1999] K.B. BROBERG. *Cracks and Fracture*. Academic Press, 1999.
- [Bruggi et Venini, 2007] M. BRUGGI et P. VENINI. A Truly Mixed Approach for Cohesive-Crack Propagation in Functionally Graded Materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), p. 643–654, 2007.
- [Bruggi et Venini, 2009] M. BRUGGI et P. VENINI. Modeling cohesive crack growth via a truly-mixed formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(47-48), p. 3836–3851, 2009.
- [Bui et al., 1980] H.D. BUI, A. EHRLACHER, et Q.S. NGUYEN. Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique. *Journal de Mécanique*, 19, p. 697–725, 1980.

- [Camacho et Ortiz, 1996] G.T. CAMACHO et M. ORTIZ. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20), p. 2899–2938, 1996.
- [Cazes et al., 2007] F. CAZES, A. GRAVOUIL, M. CORET, et A. COMBESURE. Couplage de l'endommagement et de la fissuration. Rapport de Master, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Septembre 2007.
- [Chambart, 2009] M. CHAMBERT. *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine*. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan (ENS-Cachan), 2009.
- [Charlotte et al., 2000] M. CHARLOTTE, G. FRANCFORT, J.-J. MARIGO, et L. TRUSKINOVSKY. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : Comparisons of Griffith and Barenblatt surface energy models. *Continuous Damage and Fracture*, p. 7–18, 2000.
- [Charlotte et al., 2006] M. CHARLOTTE, J. LAVERNE, et J.-J. MARIGO. Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 25(4), p. 649–669, 2006. 6th EUROMECH Solid Mechanics Conference.
- [Chessa et al., 2003] J. CHESSA, H. WANG, et T. BELYTSCHKO. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7), p. 1015–1038, 2003.
- [Comi et al., 2002] C. COMI, S. MARIANI, et U. PEREGO. On the transition from continuum nonlocal damage to quasi-brittle discrete crack models. *GIMC_2002 Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering*, 2002.
- [Comi et al., 2007] C. COMI, S. MARIANI, et U. PEREGO. An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(2), p. 213–238, 2007.
- [Comi et Perego, 2001] C. COMI et U. PEREGO. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 38(36), p. 6427–6454, 2001.
- [Cornec et al., 2003] A. CORNEC, I. SCHEIDER, et K.H. SCHWALBE. On the practical application of the cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14), p. 1963–1987, 2003.
- [Crisfield, 1981] M.A. CRISFIELD. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, 13(1-3), p. 55–62, 1981.
- [de Borst et Abellan, 2002] R. de BORST et M.A. ABELLAN. A numerical framework for continuum damage - Discontinuum transition. *Archives of Mechanics*, 54(5-6), p. 377–387, 2002.
- [de Borst et al., 1999] R. de BORST, J. PAMIN, et M.G.D. GEERS. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 18(6), p. 939–962, 1999.
- [Dugdale, 1960] D.S. DUGDALE. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2), p. 100–108, 1960.
- [Elguedj, 2006] T. ELGUEDJ. *Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Septembre 2006.
- [Feyel, 2003] F. FEYEL. Application des modèles d'interface pour la simulation de l'endommagement puis de la rupture. *Tiré à part - Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)*, 2003.
- [Francfort et Marigo, 1998] G.A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, p. 1319–1342, 1998.
- [Germain, 1973] P. GERMAIN. *Mécanique des Milieux Continus*. Masson et Cie, 1973.
- [Grassl et Jirásek, 2005] P. GRASSL et M. JIRÁSEK. Plastic model with non-local damage applied to concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(1), p. 71–90, 2005.
- [Griffith, 1920] A. GRIFFITH. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, CCXXI (A), p. 163–198, 1920.
- [Gurtin, 1979] M.E. GURTIN. Thermodynamics and the cohesive zone in fracture. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 30(6), p. 991–1003, 1979.
- [Hansbo et Hansbo, 2004] A. HANSBO et P. HANSBO. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35), p. 3523–3540, 2004.
- [Hild, 2007] F. HILD. *Multiscale approaches to damage and fracture of brittle and quasi-brittle materials*. KMM-NoE Integrated Post-Graduate School Doctoral Path on Micromechanical Modelling, 2007.
- [Hill, 1958] R. HILL. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6, p. 236–249, 1958.
- [Hillerborg et al., 1976] A. HILLERBORG, M. MODÉER, et P.E. PETERSSON. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6, p. 773–782, 1976.

- [Hughes, 1980] T.J.R. HUGHES. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(9), p. 1413–1418, 1980.
- [Iacono et al., 2008] C. IACONO, L.J. SLUYS, et J.G.M. van MIER. Calibration of a higher-order continuum model using global and local data. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(16), p. 4642–4665, 2008.
- [Ibrahimbegovic et Brancherie, 2003] A. IBRAHIMBEGOVIC et D. BRANCHERIE. Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : precursor to shear slip line failure. *Computational Mechanics*, 31(1-2), p. 88–100, 2003.
- [Irwin, 1957] G.R. IRWIN. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, p. 361–365, 1957.
- [Jirásek, 2000] M. JIRÁSEK. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1-3), p. 307–330, 2000.
- [Johnson et Mercier, 1978] C. JOHNSON et B. MERCIER. Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems. *Numerische Mathematik*, 30(1), p. 103–116, 1978.
- [Kubair et Geubelle, 2003] D.V. KUBAIR et P.H. GEUBELLE. Comparative analysis of extrinsic and intrinsic cohesive models of dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15), p. 3853–3868, 2003.
- [Ladevèze, 1992] P. LADEVÈZE. A damage computational method for composite structures. *Computers and Structures*, 44(1-2), p. 79–87, 1992.
- [Lasry et Belytschko, 1988] D. LASRY et T. BELYTSCHKO. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6), p. 581–597, 1988.
- [Laverne, 2004] J. LAVERNE. *Formulation Énergétique de la Rupture par des Modèles de Forces Cohésives : Considérations Théoriques et Implantations Numériques*. Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, 2004.
- [Leblond, 2003] J.-B. LEBLOND. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Lavoisier, 2003.
- [Legrain et al., 2007] G. LEGRAIN, F. DUFOUR, A. HUERTA, et G. PIJAUDIER-CABOT. Extraction of crack opening from a nonlocal damage field. *IX International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS), Fundamentals and Applications*, vol. 1, p. 462–465, 2007.
- [Lemaître et Chaboche, 1988] J. LEMAITRE et J.-L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1988.
- [Li et Chandra, 2003] H. LI et N. CHANDRA. Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile materials using cohesive zone models. *International Journal of Plasticity*, 19(6), p. 849–882, 2003.
- [Lorentz, 2008] E. LORENTZ. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(2), p. 302–317, 2008.
- [Mandel, 1966] J. MANDEL. *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.
- [Mariani et Perego, 2003] S. MARIANI et U. PEREGO. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(1), p. 103–126, 2003.
- [Mazars, 1984] J. MAZARS. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat, ENSET, 1984.
- [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996] J. MAZARS et G. PIJAUDIER-CABOT. From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20), p. 3327–3342, 1996.
- [Mediavilla et al., 2006a] J. MEDIAVILLA, R.H.J. PEERLINGS, et M.G.D. GEERS. Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(4), p. 661–688, 2006.
- [Mediavilla et al., 2006b] J. MEDIAVILLA, R.H.J. PEERLINGS, et M.G.D. GEERS. An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(7), p. 895–916, 2006.
- [Melenk et Babuška, 1996] J.M. MELENK et I. BABUŠKA. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), p. 289–314, 1996.
- [Menouillard, 2007] T. MENOULLARD. *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Septembre 2007.
- [Moës et Belytschko, 2002] N. MOËS et T. BELYTSCHKO. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7), p. 813–833, 2002.
- [Moës et al., 1999] N. MOËS, J. DOLBOW, et T. BELYTSCHKO. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), p. 131–150, 1999.
- [Molino et al., 2005] N. MOLINO, Z. BAO, et R. FEDKIW. A virtual node algorithm for changing mesh topology during simulation. *SIGGRAPH '05 : ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, page 4, 2005.
- [Morel et al., 2010] S. MOREL, C. LESPINE, J.-L. COUREAU, J. PLANAS, et N. DOURADO. Bilinear softening parameters and equivalent LFM R-curve in

- quasibrittle failure. *International Journal of Solids and Structures*, 47(6), p. 837–850, 2010.
- [Needleman, 1987] A. NEEDLEMAN. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 54(3), p. 525–531, 1987.
- [Nguyen, 1999] Q.S. NGUYEN. *Stabilité et mécanique non linéaire*. Hermès science publications, 1999.
- [Oliver, 1996] J. OLIVER. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1 : Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(21), p. 3575–3600, 1996.
- [Oliver et al., 2002] J. OLIVER, A.E. HUESPE, M.D.G. PULIDO, et E.W. CHAVES. From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2), p. 113–136, 2002.
- [Patzák et Jirásek, 2004] B. PATZÁK et M. JIRÁSEK. Adaptive resolution of localized damage in quasibrittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(6), p. 720–732, 2004.
- [Peerlings et al., 1996] R.H.J. PEERLINGS, R. de BORST, W.A.M. BREKELMANS, et J.H.P. de VREE. Gradient enhanced damage for quasibrittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19), p. 3391–3403, 1996.
- [Peerlings et al., 2001] R.H.J. PEERLINGS, M.G.D. GEERS, R. de BORST, et W.A.M. BREKELMANS. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45), p. 7723–7746, 2001.
- [Pettersson, 1981] P.-E. PETERSSON. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. *Lund Institute of Technology, report TVBM - 1006*, 1981.
- [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] G. PIJAUDIER-CABOT et Z.P. BAŽANT. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10), p. 1512–1533, October 1987.
- [Planas et al., 1993] J. PLANAS, M. ELICES, et G.V. GUINEA. Cohesive cracks versus nonlocal models : Closing the gap. *International Journal of Fracture*, 63(2), p. 173–187, 1993.
- [Planas et al., 2003] J. PLANAS, M. ELICES, G.V. GUINEA, F.J. GÓMEZ, D.A. CENDÓN, et I. ARBILLA. Generalizations and specializations of cohesive crack models. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14), p. 1759–1776, 2003.
- [Prabel, 2007] B. PRABEL. *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Septembre 2007.
- [Rannou, 2008] J. RANNOU. *Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Octobre 2008.
- [Rhazi Jerniti, 2006] A. RHAZI JERNITI. Simulation du passage de l'endommagement à la macro fissuration. Rapport de Master, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Septembre 2006.
- [Ribeaucourt, 2006] R. RIBEAUCOURT. *Des faces de fissures dans le cadre de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Octobre 2006.
- [Rice, 1968] J.R. RICE. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 35, p. 379–386, 1968.
- [Rice, 1976] J.R. RICE. The localization of plastic deformation. W.T. KOITER, Ed., *Theoretical and Applied Mechanics*, p. 207–220, 1976.
- [Riks, 1972] E. RIKS. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 39, p. 1060–1065, 1972.
- [Ritto-Corrêa et Camotim, 2008] M. RITTO-CORRÊA et D. CAMOTIM. On the arc-length and other quadratic control methods : Established, less known and new implementation procedures. *Computers and Structures*, 86(11-12), p. 1353–1368, 2008.
- [Rodríguez-Ferran et Huerta, 2000] A. RODRÍGUEZ-FERRAN et A. HUERTA. Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50), p. 7501–7528, 2000.
- [Réthoré, 2005] J. RÉTHORÉ. *Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : Application à la propagation dynamique des fissures*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Juin 2005.
- [Salençon, 2002] J. SALENÇON. *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Éditions de l'École Polytechnique, 2002.
- [Sanchez, 2001] P. SANCHEZ. *Mise en œuvre et illustrations de la théorie exacte des poutres*. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2001.
- [Saulnier, 2006] B. SAULNIER. *Aspects multi-échelles de l'information : de la physique à la biologie*. Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2006.
- [Schellekens et de Borst, 1993] J.C.J. SCHELLEKENS et R. de BORST. On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(1), p. 43–66, 1993.
- [Shet et Chandra, 2002] C. SHET et N. CHANDRA. Analysis of energy balance when using cohesive zone models to simulate fracture processes. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, p. 440–450, 2002.

- [Simo *et al.*, 1993] J.C. SIMO, J. OLIVER, et F. ARMERO. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5), p. 277–296, 1993.
- [Simo et Rifai, 1990] J.C. SIMO et M.S. RIFAI. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8), p. 1595–1638, 1990.
- [Simone *et al.*, 2003] A. SIMONE, G.N. WELLS, et L.J. SLUYS. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41), p. 4581–4607, 2003.
- [Song *et al.*, 2006] J.H. SONG, P.M.A. AREIAS, et T. BELYTCHKO. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6), p. 868–893, 2006.
- [Sørensen et Jacobsen, 2003] B.F. SØRENSEN et T.K. JACOBSEN. Determination of cohesive laws by the J integral approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14), p. 1841–1858, 2003.
- [Suffis, 2004] A. SUFFIS. *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Octobre 2004.
- [Sukumar *et al.*, 2001] N. SUKUMAR, D.L. CHOPP, N. MOËS, et T. BELYTCHKO. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47), p. 6183–6200, 2001.
- [Tardif, 2009] N. TARDIF. *Étude du comportement à haute température d'une fissuration instable dans l'acier « 16MND5 » et application au calcul de la rupture d'un fond de cuve REP en cas d'accident grave*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA-Lyon), Decembre 2009.
- [Tvergaard et Hutchinson, 1992] V. TVERGAARD et J.W. HUTCHINSON. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6), p. 1377–1397, 1992.
- [van der Heijden, 2009] A.M.A. van der HEIJDEN. *W.T. KOITER'S Elastic Stability of Solids and Structures*. Cambridge University Press, 2009.
- [Wells et Sluys, 2001] G.N. WELLS et L.J. SLUYS. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12), p. 2667–2682, 2001.
- [Wells *et al.*, 2002] G.N. WELLS, L.J. SLUYS, et R. de BORST. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(5), p. 1235–1256, 2002.
- [Wempner, 1971] G.A. WEMPNER. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11), p. 1581–1599, 1971.
- [Williams, 1952] M.L. WILLIAMS. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, 19(4), p. 526–528, 1952.
- [Xu et Needleman, 1994] X.-P. XU et A. NEEDLEMAN. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9), p. 1397–1434, 1994.
- [Yaacoub Agha *et al.*, 1997] H. YAACOUB AGHA, F. HILD, et R. BILLARDON. Microscopic and mesoscopic damage localization. D.L. MCDOWELL, Ed., *Applications of continuum damage mechanics to fatigue and fracture*, p. 119–130. American Society for Testing and Materials (ASTM), 1997.
- [Yu *et al.*, 2008] R.C. YU, G. RUIZ, et E.W.V. CHAVES. A comparative study between discrete and continuum models to simulate concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(1), p. 117–127, 2008.
- [Zienkiewicz *et al.*, 2004] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, et J.Z. ZHU. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. J. Wiley & Sons, 2004.

Folio administratif

Thèse soutenue devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Nom : CAZES

Date de soutenance : 28 septembre 2010

Prénoms : Fabien, Laurent, Thomas

Titre : Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques

Nature : Doctorat

Numéro d'ordre : 2010-ISAL-0075

École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. : Lyon : T 50/210/19

Résumé :

Cette thèse porte sur l'utilisation conjointe de modèles continus (endommagement, plasticité) et discontinus (modèles cohésifs, théorie de Griffith) dans des calculs de rupture.

Deux types de modèles sont retenus pour modéliser aussi bien la phase diffuse de la rupture que la phase localisée apparaissant lorsque la loi de comportement du matériau devient adoucissante :

- les modèles continus régularisés avec la méthode du second-gradient implicite ;
- les modèles mixtes continus/discontinus associant un modèle continu durcissant à un modèle de zone cohésive pour la prise en compte du comportement adoucissant.

L'objectif principal de la thèse est la construction d'un modèle *mixte continu/discontinu* à partir d'un *modèle continu régularisé* servant de modèle de référence. La méthode développée est basée sur la notion de fissure équivalente de Mazars selon laquelle deux modèles sont équivalents si ils dissipent la même quantité d'énergie pour un même cas test. L'implémentation numérique de la méthode se fait en réalisant deux calculs successifs : un premier calcul utilisant le modèle continu de référence permet d'extraire la quantité d'énergie dissipée durant chaque pas de temps, puis un deuxième calcul permet de calculer incrémentalement la loi cohésive du modèle équivalent en utilisant les incréments d'énergie dissipée calculés pendant le premier calcul.

Par ailleurs, un modèle d'endommagement pour lequel la régularisation n'intervient qu'à partir du moment où le comportement devient adoucissant a été développé. Ce modèle comporte deux variables d'endommagement, ce qui permet de traiter séparément l'endommagement diffus et l'endommagement localisé. Enfin, deux formulations sont proposées pour l'implémentation de lois cohésives ayant une rigidité initiale infinie (lois extrinsèques).

Mots clés : endommagement, plasticité, second-gradient, modèle cohésif, fissure équivalente.

Laboratoire de recherche :

Université de Lyon, CNRS
INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, France

Directeur de thèse : Alain COMBESURE

Co-encadrement de la thèse : Michel CORET

Président du jury : Jacky MAZARS

Composition du jury :	Alain COMBESURE	Michel CORET
	François HILD	Jean-Jacques MARIGO
	Jacky MAZARS	Nicolas MOËS
	Arnaud SUFFIS	