

Thèse

# **Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X**

## **Présentée devant**

L'institut national des sciences appliquées de Lyon

## **Pour obtenir**

Le grade de docteur

## **Formation doctorale**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Mécanique

## **Par**

Pierre BADEL

Soutenue le 17 novembre 2008 devant la Commission d'examen

## **Jury**

---

Philippe BOISSE	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur
Francisco CHINESTA	Professeur (Ecole Centrale de Nantes)	Rapporteur
Samuël FOREST	Directeur de recherche (CNRS) (ENSMP Paris)	Rapporteur
Eric MAIRE	Directeur de recherche (CNRS) (INSA de Lyon)	Directeur
Laurent ORGEAS	Chargé de recherche (CNRS) (UJF Grenoble)	Examineur
François SIDOROFF	Professeur (Ecole Centrale de Lyon)	Président
Emmanuelle VIDAL-SALLE	Maître de conférence (INSA de Lyon)	Examineur

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) - UMR5259

## **Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant des résultats de tomographie aux rayons X**

### Résumé

La mise en forme de renforts tissés de composites par le procédé RTM mène à des déformations importantes, en particulier pour les géométries à double courbure. La connaissance du comportement mécanique des renforts et de leurs géométries mésoscopiques déformées est nécessaire dans de multiples applications. Une analyse mécanique à l'échelle mésoscopique des déformations de renforts tissés est proposée. Elle inclue un modèle de comportement hypo-élastique continu, isotrope transverse, spécifique au comportement d'une mèche. La dérivée objective associée est basée sur la rotation de la direction des fibres. Dans le plan transverse aux fibres, les contributions sphériques et déviatoriques sont découplées. La tomographie aux rayons X est utilisée pour obtenir les géométries expérimentales non déformées et déformées des renforts tissés. Les simulations réalisées sur un volume élémentaire représentatif sont validées à la fois à partir d'essais mécaniques et de ces images de tomographie.

### Mots-Clés

Renforts tissés, composites, mise en forme, propriétés mécaniques, analyse mésoscopique, hypo-élasticité, dérivée objective, méthode par éléments finis, tomographie aux rayons X

## **Mesoscopic analysis of the mechanical behavior of textile composite reinforcements - Validation with X-ray tomography**

### Abstract

The preforming stage of the RTM composite manufacturing process leads to fibrous reinforcement deformations which may be very large especially for double curvature shapes. The knowledge of the mechanical behavior of the reinforcements and their mesoscopic deformed geometry is necessary for various applications. A simulation method for woven composite fabric deformation at mesoscopic scale is presented. A specific continuum hypo-elastic constitutive model is proposed for the yarn behavior. The associated objective derivative is based on the fiber rotation. Spherical and deviatoric parts of the transverse behavior are uncoupled. X-ray tomography is used to obtain experimental undeformed and deformed 3D geometries of the textile reinforcements. The simulations performed on representative elementary volume are validated based on mechanical experimental tests and tomography images for the geometry.

### Keywords

Woven reinforcements, composites, forming, mechanical properties, mesoscopic analysis, hypo-elasticity, objective derivative, finite element analysis (FEA), X-ray tomography

# Remerciements

# Table des matières

<b>Remerciements .....</b>	<b>3</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>4</b>
<b>Introduction générale .....</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction à l'étude de la mécanique des renforts tissés .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Introduction .....</b>	<b>12</b>
<b>1.2 Matériaux composites et mise en forme .....</b>	<b>13</b>
1.2.1 Les types de matériaux composites .....	13
1.2.2 Les renforts tissés .....	14
(a) Structure d'un renfort tissé .....	14
(b) Constitution des mèches .....	15
(c) Renforts utilisés dans cette étude .....	16
1.2.3 Les procédés de mise en forme .....	18
<b>1.3 Comportement mécanique des renforts tissés .....</b>	<b>20</b>
1.3.1 Modes et mécanismes de déformation des renforts tissés .....	21
(a) Non glissement entre chaîne et trame .....	21
(b) Elongation dans la direction des mèches .....	21
(c) Déformation de cisaillement dans le plan .....	23
(d) Compaction transverse .....	23
(e) Flexion .....	23
(f) Importance des phénomènes mésoscopiques .....	24
1.3.2 Caractérisation expérimentale du comportement mécanique macroscopique ...	24
(a) Essais de tension biaxiale .....	24
(b) Essais de cisaillement .....	25
<b>1.4 Modélisations .....</b>	<b>28</b>
1.4.1 Modélisation de la mise en forme .....	28
1.4.2 Modèles mésoscopiques .....	29
(a) Objectifs et problématique .....	30
(b) Modèles géométriques de cellules élémentaires .....	31
(c) Modèles mécaniques .....	34

<b>1.5</b>	<b>Conclusions du chapitre 1 .....</b>	<b>39</b>
<b>2</b>	<b>Observations par tomographie aux rayons X</b>	<b>41</b>
<b>2.1</b>	<b>La technique de tomographie aux rayons X .....</b>	<b>42</b>
2.1.1	Atténuation des rayons X.....	42
	(a) Nature des rayons X.....	42
	(b) Propriétés des rayons X .....	43
2.1.2	Principe de reconstruction par tomographie .....	45
2.1.3	Sources et détecteurs de rayons X .....	46
	(a) Sources.....	46
	(b) Détecteurs.....	47
2.1.4	Présentation de l'équipement expérimental utilisé .....	48
<b>2.2</b>	<b>Application aux renforts de composites.....</b>	<b>49</b>
2.2.1	Observations mésoscopiques.....	50
	(a) Montage expérimental pour observations de tissus déformés in situ... ..	51
2.2.2	Observations microscopiques .....	53
	(a) Analyse de la covariance à deux points.....	54
<b>2.3</b>	<b>Conclusions du chapitre 2 .....</b>	<b>56</b>
<b>3</b>	<b>Modèle de comportement d'une mèche constituée de fibres .....</b>	<b>59</b>
<b>3.1</b>	<b>Hypothèses de comportement et aspects spécifiques.....</b>	<b>59</b>
3.1.1	Hypo-élasticité.....	59
3.1.2	Spécificités de comportement.....	60
<b>3.2</b>	<b>Suivi de la direction des fibres .....</b>	<b>60</b>
3.2.1	Grandes transformations et précautions.....	61
	(a) Objectivité.....	61
	(b) Indifférence matérielle et dérivée objective.....	61
3.2.2	Applications aux lois hypo-élastiques.....	62
	(a) Dérivée objective en rotation .....	62
	(b) Actualisation des contraintes .....	65
3.2.3	Application aux matériaux à une direction de fibres .....	66
	(a) Introduction - Choix de la rotation.....	66
	(b) Utilisation d'une dérivée objective basée sur la rotation des fibres.....	67
	(c) Calcul de la rotation $\Phi$ .....	67
	(d) Unicité du choix.....	68
	(e) Exemples élémentaires .....	69

<b>3.3</b>	<b>Comportement transverse.....</b>	<b>73</b>
3.3.1	Observations et hypothèses .....	74
	(a) <i>Isotropie transverse</i> .....	74
	(b) <i>Observations qualitatives</i> .....	74
3.3.2	Ecriture de la loi de comportement transverse .....	75
3.3.3	Paramètres de comportement.....	77
3.3.4	Conséquence sur le module d'Young longitudinal.....	77
<b>3.4</b>	<b>Implémentation dans le code de calcul.....</b>	<b>79</b>
3.4.1	Données d'entrée/sortie - Base de calcul.....	79
3.4.2	Adaptation des données .....	79
3.4.3	Algorithme .....	80
<b>3.5</b>	<b>Conclusions du chapitre 3 .....</b>	<b>81</b>
<b>4</b>	<b>Simulations à l'échelle mésoscopique de la déformation des renforts tissés.....</b>	<b>83</b>
<b>4.1</b>	<b>Périodicité et géométrie .....</b>	<b>83</b>
4.1.1	Extraction du VER.....	83
4.1.2	Conditions aux limites périodiques .....	86
	(a) <i>Périodicité du champ de déplacement</i> .....	86
	(b) <i>Ecriture des conditions aux limites</i> .....	87
4.1.3	Modèle géométrique et maillage .....	87
	(a) <i>Modèle géométrique</i> .....	87
	(b) <i>Maillage</i> .....	89
<b>4.2</b>	<b>Identification des paramètres matériaux.....</b>	<b>90</b>
4.2.1	Module d'Young longitudinal.....	90
4.2.2	Paramètres de comportement transverse .....	90
	(a) <i>Méthode inverse / essai expérimental</i> .....	90
	(b) <i>Méthode d'optimisation</i> .....	91
	(c) <i>Algorithme de la méthode inverse</i> .....	94
	(d) <i>Utilisation de la méthode</i> .....	94
	(e) <i>Résultats</i> .....	95
<b>4.3</b>	<b>Autres données de calcul .....</b>	<b>96</b>
<b>4.4</b>	<b>Cas de chargement étudiés .....</b>	<b>96</b>
4.4.1	Traction biaxiale.....	97
4.4.2	Cisaillement pur.....	98
4.4.3	Cisaillement sous tension biaxiale.....	98
4.4.4	Compression.....	99

<b>4.5</b>	<b>Conclusions du chapitre 4 .....</b>	<b>100</b>
<b>5</b>	<b>Résultats et validation .....</b>	<b>102</b>
<b>5.1</b>	<b>Expérimentations de référence et exploitation des données.....</b>	<b>102</b>
5.1.1	Comportement mécanique .....	102
	(a) <i>Traction biaxiale .....</i>	<i>102</i>
	(b) <i>Cisaillement - Picture frame.....</i>	<i>103</i>
	(c) <i>Cisaillement - bias test .....</i>	<i>104</i>
	(d) <i>Cisaillement - données numériques.....</i>	<i>105</i>
	(e) <i>Compression .....</i>	<i>106</i>
5.1.2	Géométries déformées .....	106
	(a) <i>Traitement des données expérimentales .....</i>	<i>106</i>
	(b) <i>Traitement des données numériques .....</i>	<i>108</i>
	(c) <i>Types de configurations observées .....</i>	<i>108</i>
<b>5.2</b>	<b>Taffetas de verre .....</b>	<b>109</b>
5.2.1	Traction biaxiale.....	109
	(a) <i>Comportement mécanique .....</i>	<i>109</i>
	(b) <i>Géométrie déformée .....</i>	<i>110</i>
5.2.2	Cisaillement pur .....	113
	(a) <i>Comportement mécanique .....</i>	<i>113</i>
	(b) <i>Géométrie déformée.....</i>	<i>114</i>
5.2.3	Cisaillement sous tension .....	114
	(a) <i>Comportement mécanique .....</i>	<i>115</i>
	(b) <i>Géométries déformées.....</i>	<i>115</i>
	(c) <i>Application au calcul de mise en forme.....</i>	<i>117</i>
5.2.4	Compression.....	118
<b>5.3</b>	<b>Sergé 2x2 de carbone .....</b>	<b>119</b>
5.3.1	Traction biaxiale.....	119
	(a) <i>Comportement mécanique .....</i>	<i>119</i>
	(b) <i>Géométries déformées.....</i>	<i>119</i>
5.3.2	Cisaillement pur .....	121
	(a) <i>Comportement mécanique .....</i>	<i>121</i>
	(b) <i>Géométrie déformée.....</i>	<i>121</i>
5.3.3	Remarques sur la qualité du maillage initial.....	124
5.3.4	Cisaillement sous tension .....	125
5.3.5	Conclusion partielle .....	126
<b>5.4</b>	<b>Renfort complexe G1151 (carbone).....</b>	<b>127</b>
5.4.1	Simulation de cisaillement pur.....	127
<b>5.5</b>	<b>Application au calcul de perméabilité de renforts tissés.....</b>	<b>129</b>

---

5.5.1	Détermination du VER fluide .....	130
5.5.2	Calcul de perméabilité.....	130
5.5.3	Résultats .....	132
	(a) <i>Analyse qualitative des champs de vitesse mésoscopiques.....</i>	<i>132</i>
	(b) <i>Perméabilité.....</i>	<i>132</i>
5.5.4	Conclusions .....	134
<b>5.6</b>	<b>Conclusions du chapitre 5 .....</b>	<b>134</b>
	 <b>Synthèse et conclusions .....</b>	 <b>136</b>
	 <b>Références bibliographiques.....</b>	 <b>138</b>
	 <b>Annexes .....</b>	 <b>147</b>

## Introduction générale

Le contexte de forte compétitivité dans le domaine aéronautique fait de l'utilisation des matériaux composites un point de passage obligatoire. Les enjeux se situent principalement au niveau de l'allègement des structures qui se chiffre directement en terme d'économies d'énergie, grande problématique actuelle en raison des problèmes environnementaux et de l'augmentation des coûts du pétrole. L'utilisation de matériaux composites est de plus en plus massive par les grands leaders de l'aéronautique et ce même pour des pièces structurelles majeures des appareils. Ainsi par exemple, le caisson central reliant les ailes de l'A380 est en composites, le futur A350 verra sa voilure complète et son fuselage en composites alors que le concurrent Boeing annonce son Boeing787 avec un fuselage composite.

Dans ce contexte, l'étude et la maîtrise de l'élaboration des pièces composites fait l'objet d'intenses recherches car ces matériaux restent encore peu connus devant les matériaux plus classiques (métaux principalement). Pour des applications à hautes performances, les renforts à fibres continues, par exemple tissés, sont très largement utilisés pour leur très bonne formabilité et la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe. La mise en œuvre par des procédés type Resin Transfer Moulding (RTM) nécessite tout d'abord un préformage du renfort avant d'y injecter la résine (matrice). Si les études sur les matériaux composites finis sont assez nombreuses, celles sur les renforts secs et le préformage le sont beaucoup moins. Pourtant leur comportement est très particulier et les caractéristiques mécaniques des pièces finales ou le succès de la mise en œuvre en dépendent largement. La phase de préformage peut faire apparaître des défauts majeurs qui altèrent la qualité de la pièce finale, comme des plis voire des ruptures de mèches. L'orientation finale des fibres dans la pièce dépend de cette même première phase du procédé.

L'étude de la mise en forme des renforts secs passe par la connaissance de leurs comportements et mécanismes de déformation élémentaires. Les simulations de mise en forme par éléments finis permettent de tenir compte du comportement mécanique des renforts. Durant le préformage, les renforts subissent des sollicitations de tension, de cisaillement, de compression, de flexion. Le mode de déformation privilégié, permettant d'obtenir des formes non développables, est le cisaillement. Cet exemple de mode de déformation illustre les aspects multi-échelle liés à l'étude des renforts tissés. En effet à un cisaillement macroscopique correspond un ensemble de mécanismes de déformation tout à fait différents à l'échelle mésoscopique, celle des mèches. Ceux-ci peuvent avoir une influence notable sur les propriétés mécaniques du renfort et aussi par exemple sur sa perméabilité (faculté à laisser s'écouler un fluide), caractéristique importante dans l'optique de la phase d'injection de résine.

L'étude proposée s'inscrit dans ce cadre là. Il s'agit de réaliser une analyse à l'échelle mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites. Ce type d'analyse permet de déterminer le comportement mécanique macroscopique des renforts ainsi que leur géométrie déformée locale, utiles dans plusieurs applications. La géométrie locale peut aussi être déterminée expérimentalement par tomographie aux rayons X, une technique non destructive d'observation d'objets massifs à cœur. Dans cette étude la tomographie sera utilisée à différentes échelles afin de fournir des géométries réelles de référence ou d'étudier la microstructure du matériau. Cela nous aidera à améliorer et justifier certaines hypothèses. Les simulations par éléments finis à échelle mésoscopique présentent différentes particularités. Le

modèle de matériau, nécessairement continu, ou encore la mise en place du modèle de simulation sur un volume représentatif sont deux aspects spécifiques à ce type d'analyse.

Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres qui nous plongent progressivement au cœur de la mécanique des renforts tissés et de leur modélisation vues sous des aspects mésoscopiques pour ensuite terminer sur les simulations et applications que nous avons réalisées.

Au cours du premier chapitre le lecteur est familiarisé à l'étude des renforts tissés de composites. Nous verrons que le comportement des renforts secs est très spécifique en raison de leur constitution et des aspects multi-échelle. Une brève revue des études et modèles mécaniques existants y est également proposée.

Le second chapitre est dédié à la tomographie aux rayons X, technique d'observation que nous avons largement utilisée dans ces travaux. Après un rappel sur les principes de base, nous présentons les atouts et méthodes utilisées dans le cadre d'une analyse mésoscopique des renforts textiles. Une première analyse sera abordée nous menant directement à l'entame du troisième chapitre.

Ce dernier constitue le cœur de cette étude. Le modèle de comportement du matériau fibreux que constitue une mèche y est détaillé sous ses deux aspects majeurs faisant la particularité de ce type de matériau. D'une part, le comportement longitudinal - de rigidité bien supérieure à toutes les autres rigidités - et d'autre part le comportement transverse - qui inclue les principaux modes de déformation de la mèche - nécessitent des modèles adaptés afin de traduire ces particularités.

Les différents éléments permettant de mener à bien les simulations mésoscopiques par éléments finis sont présentés au cours du quatrième chapitre. Identification des paramètres matériau, maillage et conditions aux limites sont les ingrédients de base qu'il convient de maîtriser afin de tirer le meilleur des modèles géométrique et de matériau mis en place.

Enfin, nous présentons les résultats obtenus pour trois différents renforts de complexité croissante. Des validations sur le plan mécanique et géométrique sont proposées. Nous mettrons en avant l'intérêt de ces analyses mésoscopiques au travers d'une application au calcul d'écoulement de résine dans laquelle l'influence des déformations mésoscopiques est clairement identifiée. Celle-ci a fait l'objet d'une collaboration avec le laboratoire 3S-R de Grenoble.

# 1

## Introduction à l'étude de la mécanique des renforts tissés

### 1.1 Introduction

### 1.2 Matériaux composites et mise en forme

#### 1.2.1 Les types de matériaux composites

#### 1.2.2 Les renforts tissés

(a) *Structure d'un renfort tissé*

(b) *Constitution des mèches*

(c) *Renforts utilisés dans cette étude*

#### 1.2.3 Les procédés de mise en forme

### 1.3 Comportement mécanique des renforts tissés

#### 1.3.1 Modes et mécanismes de déformation des renforts tissés

(a) *Non glissement entre chaîne et trame*

(b) *Elongation dans la direction des mèches*

(c) *Déformation de cisaillement dans le plan*

(d) *Compaction transverse*

(e) *Flexion*

(f) *Importance des phénomènes mésoscopiques*

#### 1.3.2 Caractérisation expérimentale du comportement mécanique macroscopique

(a) *Essais de tension biaxiale*

(b) *Essais de cisaillement*

### 1.4 Modélisations

#### 1.4.1 Modélisation de la mise en forme

#### 1.4.2 Modèles mésoscopiques

(a) *Objectifs et problématique*

(b) *Modèles géométriques de cellules élémentaires*

(c) *Modèles mécaniques*

### 1.5 Conclusions du chapitre 1

# 1 Introduction à l'étude de la mécanique des renforts tissés

## 1.1 Introduction

Démarrée quelques décennies auparavant, la forte croissance de l'utilisation des matériaux composites « plastiques » dans les produits industriels continue de nos jours. Malgré un coût plus élevé que les matériaux classiques auxquels on les compare (les métaux principalement), leurs avantages sont nombreux. Poids, absence de corrosion, grande liberté de forme, amortissement des vibrations, résistance aux chocs, propriétés thermiques et phoniques sont autant de ces atouts. Les problématiques énergétiques constituent aujourd'hui une raison supplémentaire d'en faire des matériaux de choix en raison des gains de poids importants qu'ils permettent de réaliser, en particulier dans les transports. Les secteurs consommateurs restent l'aéronautique et l'automobile mais l'on note également de fréquentes apparitions en bâtiments, électricité, articles de sport, téléphones portables...

La classification des matériaux composites se fait en différentes familles selon les types de renforts et de matrice qui les constituent. Pour le cas de matrices thermodurcissables ou thermoplastiques avec renforts de fibres, on retrouve deux grands groupes différents : les composites à grande diffusion qui se caractérisent par des fibres courtes et un matériau final sans direction privilégiée et les composites à fibres continues pour lesquels on recherchera une direction mécanique privilégiée par l'orientation des fibres. Les caractéristiques mécaniques des composites à fibres continues sont telles qu'elles surpassent largement celles des métaux et permettent d'obtenir des pièces à hautes performances mécaniques. Le coût de ces composites reste élevé et on les utilise principalement en aéronautique. Une des mises en œuvre de ces fibres continues consiste à les assembler sous forme de mèches qui sont ensuite tissées. On obtient des renforts tissés appelés aussi renforts textiles qui font l'objet de cette thèse.

Parmi leurs atouts, l'excellente formabilité de ces types de renforts rend possible la réalisation de formes complexes en une seule étape de fabrication. Dans ce cas, le matériau composite est créé en même temps que la pièce finale. L'utilisation d'un procédé de mise en forme adapté comme le procédé RTM (Resin Transfer Moulding) permet d'obtenir rapidement des composites de forme complexe. Le principe consiste à mettre en forme le tissu sec dans un couple poinçon-matrice (on parle aussi de drapage quand l'opération est manuelle) puis à injecter et faire polymériser la résine. L'obtention de formes non développables est facilitée en particulier par la grande souplesse de ces renforts en cisaillement qui permet le formage de ce type de géométrie. Parfois, les déformations sont très grandes et peuvent conduire à l'apparition de défauts (des plis par exemple) qui seront préjudiciables aux caractéristiques finales souhaitées. Le coût d'un tel procédé étant élevé en terme d'outillage, il est préférable de s'assurer de la faisabilité de la mise en forme avant la fabrication des différents éléments.

Les caractérisations expérimentales de ces renforts, nécessaires à toutes les phases de développement, sont difficiles et font l'objet d'investigations importantes. A l'heure actuelle, de gros efforts sont fournis pour développer également des outils de simulation qui doivent permettre de prédire la faisabilité des formes (apparition de défauts), de connaître la position et l'orientation des renforts dans la préforme pour anticiper la phase d'injection et les

caractéristiques finales du composite. Cela nécessite des investigations aux échelles plus basses, notamment à l'échelle mésoscopique, qui aident à la caractérisation des renforts.

## 1.2 Matériaux composites et mise en forme

### 1.2.1 Les types de matériaux composites

Par définition, les matériaux composites sont des matériaux réalisés à partir de plusieurs constituants non miscibles, généralement un renfort et une matrice. Dans ce cas, chacun de ces deux constituants a un rôle dans le comportement du composite final qui présente des propriétés finales que n'offrent pas chacun des constituants pris individuellement. La matrice enrobe le renfort et maintient celui-ci en position. Elle assure la transmission des efforts et la cohésion du composite final. Le renfort peut se présenter sous différentes formes. Selon les cas, il permet d'améliorer certaines propriétés de la matrice seule (résistance à l'usure, propriétés thermiques, poids...) qui reste l'élément principal du composite mais il peut aussi jouer un rôle mécanique majeur dans le comportement final du composite, auquel cas la matrice n'assure que son maintien en position. Une grande variété de matériaux composites nous entourent : des matériaux de construction (béton armé, torchis...), des matériaux naturels (bois, tissus musculaires...), des matériaux « plastiques »... Une des classifications des matériaux composites porte sur la nature de la matrice utilisée. Dans le domaine de la mécanique, on distingue :

- Les composites à matrice organique qui constituent aujourd'hui la très grande majorité des composites industriels.
- Les composites à matrice céramique qui sont utilisés dans des applications de haute technicité pour des conditions extrêmes (haute température).
- Les composites à matrice métallique.

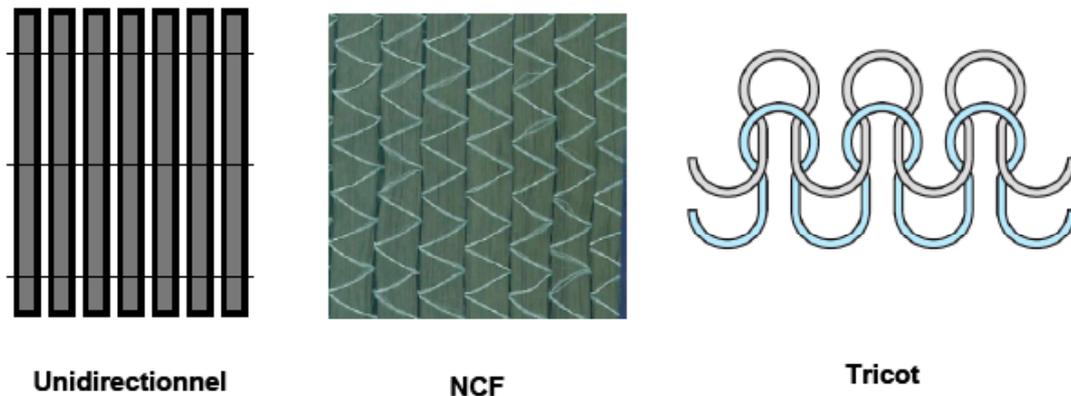
Nous ne nous intéressons qu'à la première de ces trois grandes catégories, celle des composites « plastiques ». Ces matériaux composites se voient généralement attribuer, par abus, le terme de « composites ». Ils sont réalisés à partir d'une matrice thermodurcissable ou thermoplastique et d'un renfort le plus souvent fibreux. La nature du renfort est fonction de l'application et du volume de pièces à réaliser, elle permet de distinguer deux grandes familles parmi ces composites :

- Les renforts à fibres courtes qui permettent d'améliorer le comportement de la matrice seule. Celle-ci reste l'élément de base et l'on obtient alors un « polymère renforcé ».
- Les renforts à fibres continues qui jouent un rôle majeur dans le comportement mécanique du composite. Dans ce cas, le rôle de la matrice est d'empêcher les mouvements des fibres et de les protéger.

Dans ce dernier cas, la structure fibreuse apporte toute la résistance et les caractéristiques mécaniques souhaitées. Ce type de composites est très présent dans les applications fortement sollicitées (aéronautique, aérospatial...) où ils sont utilisés pour leurs qualités résistance/poids qui permettent de les substituer à des matériaux plus traditionnels. Pour garantir une bonne tenue mécanique et la résistance souhaitée, les fibres utilisées dans ces

renforts sont à haut module d'élasticité (verre, carbone, kevlar...). Prix, performance et mise en œuvre comptent parmi les critères de choix du type de renfort à choisir.

Ces renforts sont constitués de fibres ou filaments qui sont alors assemblés (simplement superposés ou torsadés) pour former des mèches. Ces dernières sont ensuite combinées pour former le renfort final. Il existe une grande variété de renforts à fibres continues (voir **Figure 1**) : les unidirectionnels (UD), multiaxiaux à partir de mèches cousues entre elles (NCF), tricotés, enroulés, tissés... Les composites à renforts tissés sont très utilisés parmi les renforts à fibres continues en raison notamment des risques moindres de fissure et d'une manipulation aisée. On s'intéresse dans cette étude aux seuls renforts tissés et à leur mise en œuvre, que nous allons détailler dans les deux sections suivantes.



**Figure 1** : Différents types de renforts à fibres continues

### 1.2.2 Les renforts tissés

#### (a) Structure d'un renfort tissé

On distingue parmi ces renforts les tissés bidimensionnels (2D) et les tissés multidirectionnels (ou 3D). Les tissés 2D sont obtenus par entrecroisement de deux réseaux de mèches perpendiculaires. On peut ainsi obtenir des pièces composites minces avec des orientations privilégiées dans un plan. Les tissés multidirectionnels sont réalisés sur des modèles de tissage plus complexes où les mèches sont orientées dans plusieurs directions de l'espace (en particulier celle correspondant à la direction « hors plan » d'un renfort 2D). Cela permet d'éviter les risques de délaminage rencontrés lors de l'empilement de plusieurs couches ou de réaliser des composites très épais pour certaines applications spécifiques (par exemple des aubes de réacteur).

Nous nous intéresserons par la suite aux tissus plans ou quasi plans (des tissus 3D avec un faible nombre de couches liées entre elles peuvent être classés dans cette catégorie ; on les appelle parfois « 2,5D » ou interlock). Ces tissus sont fabriqués sur métier à tisser par entrelacement de deux fils de directions différentes : la chaîne et la trame. Chaîne dans la longueur du tissu et trame pour le fil transverse qui est entraîné par la navette afin de former le motif de tissage. Le mode d'entrecroisement de ces fils est appelé armure, il en existe trois grandes familles (voir **Figure 2**) :

- Le taffetas (ou toile) : le fil de trame passe alternativement dessus puis dessous chaque mèche de chaîne. Le produit obtenu est plat et relativement rigide mais peu déformable.
- Le sergé  $n \times m$  : le fil de trame passe au dessus de  $m$  fils de chaîne, chacun passant à son tour sur  $n$  fils de trame. Les points de liage successifs forment une diagonale. Cette armure est à la fois souple et dense.
- Le satin de  $n$  : chaque fil de trame flotte au dessus de  $(n-1)$  fils de chaîne ; les points de liage ne sont pas consécutifs. Ces tissus sont très souples, plats et déformables.

On peut combiner les armures de tissage, les mèches et la nature de leurs constituants pour obtenir des tissus aux caractéristiques spécifiques dans chaque direction. On parle de tissu équilibré quand les mèches de chaîne et de trame sont identiques (ou très semblables) et que l'armure est symétrique. Le comportement du renfort tissé dépendant fortement des constituants et de leur agencement, on le caractérise par :

- Le type de mèches.
- L'armure.
- Le taux de renfort exprimé en mèches/mm de tissu pour chaque direction.
- L'embuvage, qui caractérise l'ondulation du tissu, exprimé en %. On définit l'embuvage par :

$$\text{Embuvage} = \frac{\text{longueur de la mèche} - \text{longueur du tissu dont elle est extraite}}{\text{longueur de la mèche}} \times 100$$

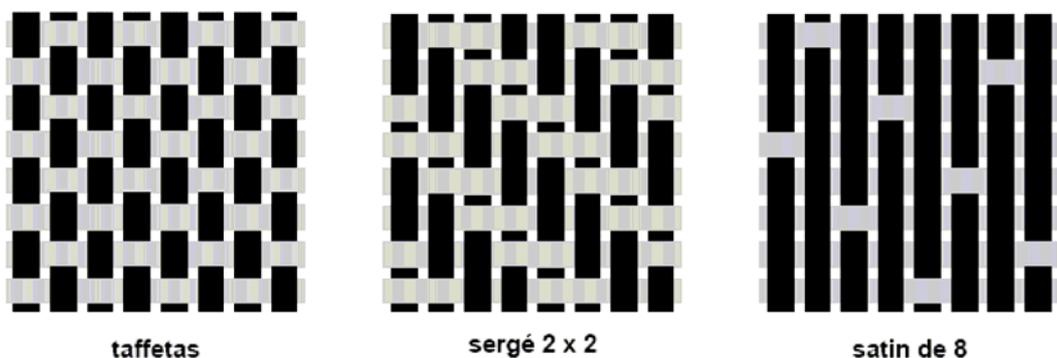


Figure 2 : Différents types d'armures de renforts tissés

### (b) Constitution des mèches

Les mèches à partir desquelles sont tissés les renforts sont elles mêmes constituées de milliers voire dizaine de milliers de fibres. Une fibre est un solide ayant une dimension privilégiée, on parle aussi de solide à une dimension. La longueur des fibres utilisées dans les matériaux composites varie de quelques mm (fibres courtes) à quelques km (fibres continues), alors que leur diamètre est généralement de l'ordre 1 à 30  $\mu\text{m}$ . Par définition, une mèche est un assemblage de fibres plus ou moins cohérentes entre elles suivant le mode de fabrication. Par exemple on peut rencontrer des mèches à fibres uniques, juxtaposées, courtes entrelacées, torsadées.

En raison de son coût relativement faible, le verre est très largement utilisé comme constituant des fibres. On le retrouve dans une multitude d'applications à grande diffusion (automobile, nautisme, bâtiment...). Ces fibres sont fabriquées par extrusion de la matière fondue dont la proportion des constituants permet d'obtenir différentes nuances. Les fibres sont ensuite assemblées entre elles et ensimées. L'ensimage des fibres est une opération de traitement de surface chimique qui vise à améliorer leur cohésion, l'affinité avec la résine utilisée, la résistance à l'abrasion ou encore à limiter les effets électrostatiques.

Pour des applications où l'on recherche des performances mécaniques plus élevées, on préférera les fibres de carbone qui sont plus rigides et vieillissent mieux. L'élaboration des fibres de carbone est différente de celle des fibres de verre. Elle passe par différentes étapes d'oxydation, carbonisation, graphitisation. Les matériaux primaires peuvent être des fibres acryliques, des résidus de pétrole ou encore de la houille (ces deux derniers étant plus économiques). Selon les séquences, on peut obtenir différents types de fibres pour une large variété de propriétés mécaniques (haute ténacité, haut module...). Ce procédé de fabrication explique leur coût plus élevé. On les retrouve dans des applications à haute performance pour des volumes de fabrication plus faibles, par exemple dans l'aéronautique ou dans l'industrie du sport.

Les fibres d'aramide (Kevlar) sont parfois utilisées pour leur légèreté et leurs propriétés d'amortissement et d'allongement à la rupture intéressantes, par exemple dans le domaine de la protection balistique, ou pour la fabrication de casques.

Certaines fibres naturelles offrent une alternative intéressante aux fibres précédemment citées pour des raisons écologiques évidentes tant sur le plan de la fabrication que du recyclage. Leur utilisation dans les domaines de pointe intéresse fortement l'industrie et elles font logiquement l'objet de nombreuses investigations.

Pour caractériser une mèche plusieurs éléments sont nécessaires :

- Le matériau, et le type d'assemblage des fibres.
- La masse linéique donnée en tex (1 tex = 1g/km).
- La rigidité, en Newton.
- La ténacité, ou résistance à la rupture en traction, en Newton.

Le comportement des mèches varie en fonction de la nature des constituants, du type d'assemblage, de leur taille... On présente les courbes du comportement des mèches concernées dans cette étude dans le paragraphe suivant.

### *(c) Renforts utilisés dans cette étude*

Trois types de renfort sont envisagés pour ces travaux (voir **Figure 3**). Nous les présentons ici afin d'illustrer cette section traitant de la constitution et des caractéristiques des renforts tissés.

Le premier, relativement simple, est un taffetas de verre équilibré. Ce type de tissu a été utilisé par exemple pour des carrosseries de F1. Dans le cadre de cette étude, l'intérêt de ce renfort réside dans la simplicité de sa géométrie, son motif élémentaire de faible taille et l'abondance d'essais expérimentaux [BUE98][BUE01][DUM03a][DUM03b]. Cela permettra de développer le modèle et les méthodes.

Le second est plus largement utilisé dans des applications hautes performances comme l'aéronautique. Il s'agit d'un sergé 2x2 de carbone équilibré dont l'armure et les caractéristiques offrent à la fois une meilleure formabilité et des performances mécaniques plus élevées.

Le dernier est un renfort plus complexe, appelé G1151. Il s'agit d'un renfort de type interlock dont le tissage est tridimensionnel mais quasi plan. En fait, il s'agit de lier grâce aux mèches de chaîne trois couches de tissu superposées. Cela permet de s'affranchir des problèmes de délaminage rencontrés par empilage de couches simples. Le G1151 présente également la particularité d'avoir certains fils de trame absents dans le but de faciliter l'injection de résine et les grandes déformations du renfort. L'intérêt des industriels pour l'étude de ces deux derniers types de renfort est très grand.

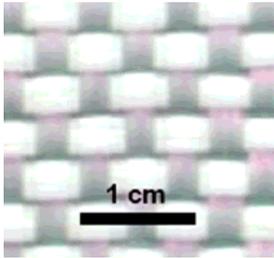
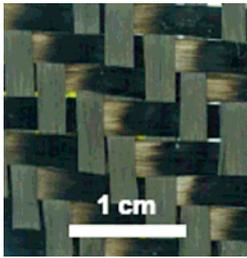
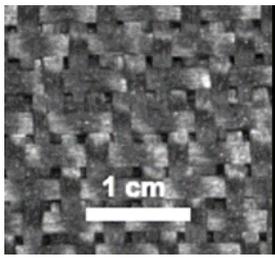
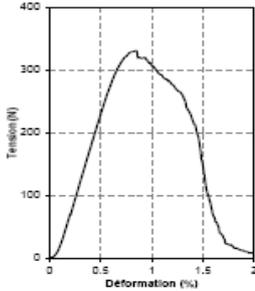
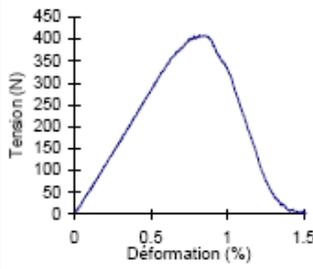
	Taffetas de verre	Sergé 2x2 de carbone	G1151 (carbone)
			
Nature des mèches	Assemblage sans torsion	Assemblage sans torsion (6000 fibres)	Assemblage sans torsion (6000 fibres)
Masse linéaire (tex)	1200	420	396
Tenacité (N)	340	420	5165
Rigidité (N)	47000	54000	
Essai de traction sur mèche			
Armure du renfort	Taffetas	Sergé 2x2	Type interlock
Largeur des mèches (mm)	3,2	2,4	1,9 (chaîne) 2,2 (trame)
Densité (mèches/mm)	0,25	0,35	0,75
Embuvage (%)	0,55	0,33	1,2 (chaîne) 0,5 (trame)
Densité surfacique (g/m <sup>2</sup> )	600		630

Figure 3 : Caractéristiques des trois renforts utilisées dans cette étude

### 1.2.3 Les procédés de mise en forme

Les procédés de mise en forme des matériaux composites sont nombreux et variés. Depuis les débuts avec des procédés essentiellement manuels, les techniques n'ont cessé d'évoluer pour

répondre à l'utilisation croissante de ces matériaux. Les besoins de cadences de plus en plus élevées, ou encore de pièces aux caractéristiques mieux maîtrisées, toujours optimisées, ont mené à différents types de procédés qui sont choisis en fonction du besoin (forme, cadence, série, caractéristiques mécaniques...).

Le moulage au contact est une des premières méthodes, elle consiste à appliquer manuellement dans un moule les différentes couches de renfort nécessaires à l'élaboration de la pièce (gelcoat, renfort puis résine). Malgré l'atout de la facilité et d'un coût faible, elle reste limitée du fait des cadences, du facteur humain qui influence grandement le résultat, notamment lors du drapage (dépose du renfort dans le moule), ou encore des conditions de travail difficiles. Le moulage par projection est similaire mais l'on appliquera au pistolet un mélange résine – fibres coupées dans le moule, ce qui laisse place à des incertitudes quant aux épaisseurs et donc des hétérogénéités dans la pièce finale. Cela n'est pas applicable pour des pièces de haute technologie. On peut encore citer le moulage sous vide, le moulage sous pression, les associations avec les semi-produits tels que les préimpregnés (SMC – Sheet Molding Compound) qui présentent sous un seul et même produit le renfort (fils coupés) et la matrice ainsi prêts à l'emploi ou encore l'enroulement filamentaire qui consiste à enrouler une mèche ou un tissu autour d'une forme de révolution en faisant varier régulièrement l'orientation des fils.

Le type de procédé sur lequel est porté notre intérêt concerne les renforts tissés et consiste à donner au tissu sec la forme à obtenir puis à l'enduire de résine. On dénombre deux techniques principales :

- Le drapage où l'opérateur applique sur la forme et à la main le tissu (souvent pré-impregné de résine non polymérisée, donc malléable) avec d'éventuelles découpes pour éviter les plis
- Le procédé de moulage par transfert de résine liquide (RTM), celui auquel nous allons nous intéresser [RUD97][POT99].

L'intérêt de ce procédé est de bénéficier des propriétés mécaniques des tissus concernant les fibres continues et la grande capacité de déformation, en particulier en cisaillement. Ils est ainsi particulièrement adapté pour les cas de formes non développables.

Le procédé RTM utilise dans un premier temps des tissus secs (sans résine) puis diverses étapes que l'on peut résumer comme suit (voir **Figure 4**) :

- Découpe du tissu à la dimension voulue.
- Mise en forme du tissu par estampage ou emboutissage (phase de préformage).
- Injection de la résine liquide (1 à 4 bars) à haute température dans le moule fermé.
- Polymérisation de la résine.
- Refroidissement et démoulage.

Les outils nécessaires sont donc au nombre de trois (hors presse et machine d'injection) :

- Le poinçon, contre moule ayant la forme intérieure de la pièce.
- La matrice, constituant le moule et ayant la forme extérieure de la pièce.
- Le serre-flanc, dont la fonction est d'assurer un glissement limité du tissu sur la matrice en le maintenant sur les bords.

De nombreux procédés similaires sont basés sur ce principe de mise en forme d'un renfort sec ou imprégné de résine à l'état liquide (LCM, moulage par compression basse pression...). Ces méthodes se sont largement développées après les années 80 bien que connues depuis les années 1950 [POT99], leurs avantages ayant attiré bon nombre d'industriels : maîtrise de l'anisotropie et des taux de renfort, régularité d'épaisseur, réalisation de formes complexes, rapidité de l'opération, automatisation du procédé.

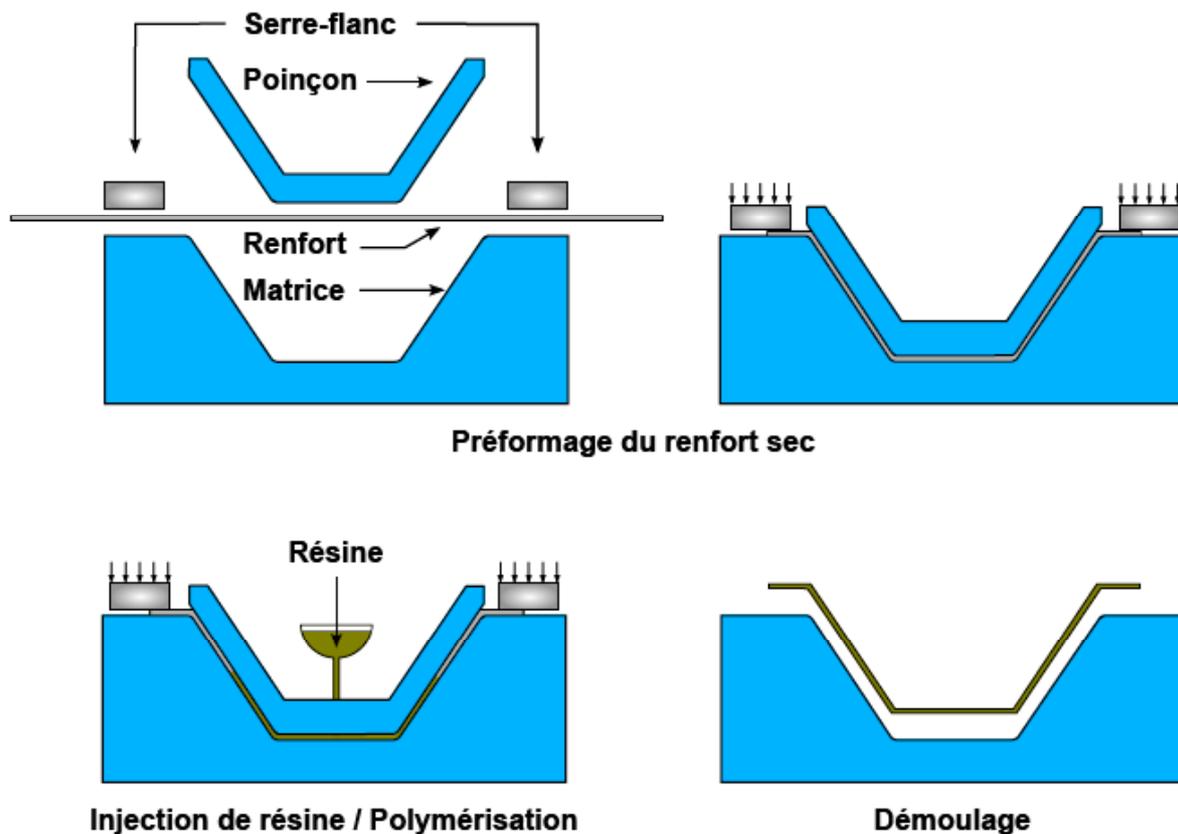


Figure 4 : Principe du procédé RTM (Resin Transfer Moulding)

### 1.3 Comportement mécanique des renforts tissés

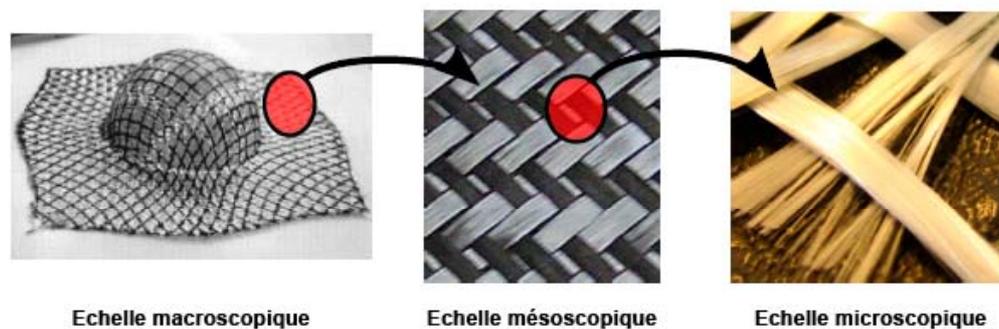
La description des renforts tissés faite en section 1.2.2 met en évidence trois échelles caractéristiques de ce type de renfort que nous qualifierons de la manière suivante (voir Figure 5) :

- L'échelle macroscopique qui est celle du renfort dans son ensemble, l'échelle de la pièce finale (de l'ordre du cm au m). Le renfort peut être assimilé à un milieu continu bidimensionnel.
- L'échelle mésoscopique qui est celle des mèches constituant le renfort (de l'ordre du mm). Cette échelle met en évidence les motifs de tissage, les formes et caractéristiques des mèches que l'on considère comme continues. Compte tenu de la périodicité des renforts tissés, on considère généralement à cette échelle un volume élémentaire représentatif, appelé parfois cellule ou maille élémentaire.

- L'échelle microscopique qui est celle des fibres constituant les mèches (de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ ). Cette échelle est la plus petite que nous considérons car c'est celle du constituant de base des renforts.

Cette distinction est fondamentale car le comportement macroscopique d'un renfort est directement hérité des phénomènes aux échelles inférieures. Le comportement des fibres, le mode d'assemblage sous forme de mèches puis sous forme de renfort va en déterminer les caractéristiques principales.

Les fibres ont une rigidité en traction longitudinale très élevée devant toutes les autres rigidités compte tenu de leur géométrie ; en particulier la rigidité de flexion est très faible. Par conséquent, les mèches formées par assemblage de fibres plus ou moins parallèles héritent de ces propriétés. Toutefois, les interactions et glissements possibles entre fibres au sein de la mèche procurent à cette dernière un comportement particulier qui lui est propre. Enfin l'assemblage des mèches par tissage donne au renfort des rigidités importantes dans les directions des mèches mais implique également un comportement fortement non linéaire et des modes de déformation privilégiés.



**Figure 5** : Les trois échelles caractéristiques de l'étude des renforts tissés (image de gauche de [BUE98])

### 1.3.1 Modes et mécanismes de déformation des renforts tissés

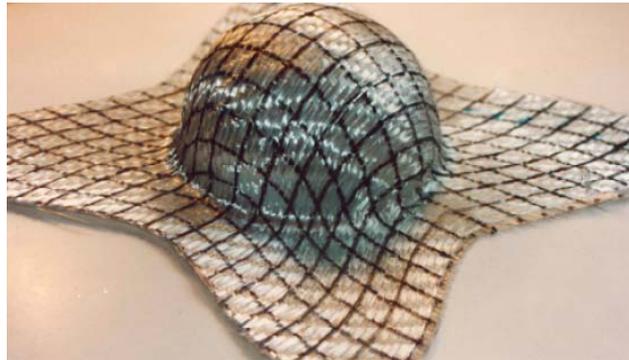
#### *(a) Non glissement entre chaîne et trame*

Une première remarque est que les réseaux de chaîne et de trame d'un renfort tissé ne glissent pas relativement l'un à l'autre. Des essais de formage ont été réalisés avec des renforts sur lesquels ont été tracés deux réseaux de lignes droites perpendiculaires. Durant le formage, ces lignes restent continues (voir **Figure 6**) ce qui soutient l'hypothèse de non glissement entre les réseaux de chaîne et de trame. Cette hypothèse est importante car elle permet d'utiliser des modèles de milieu continu pour les simulations de formage (méthodes par éléments finis). Elle permet également de faire l'hypothèse de déformations de type treillis pour le tissé, ce que nous utiliserons dans les simulations à échelle mésoscopique.

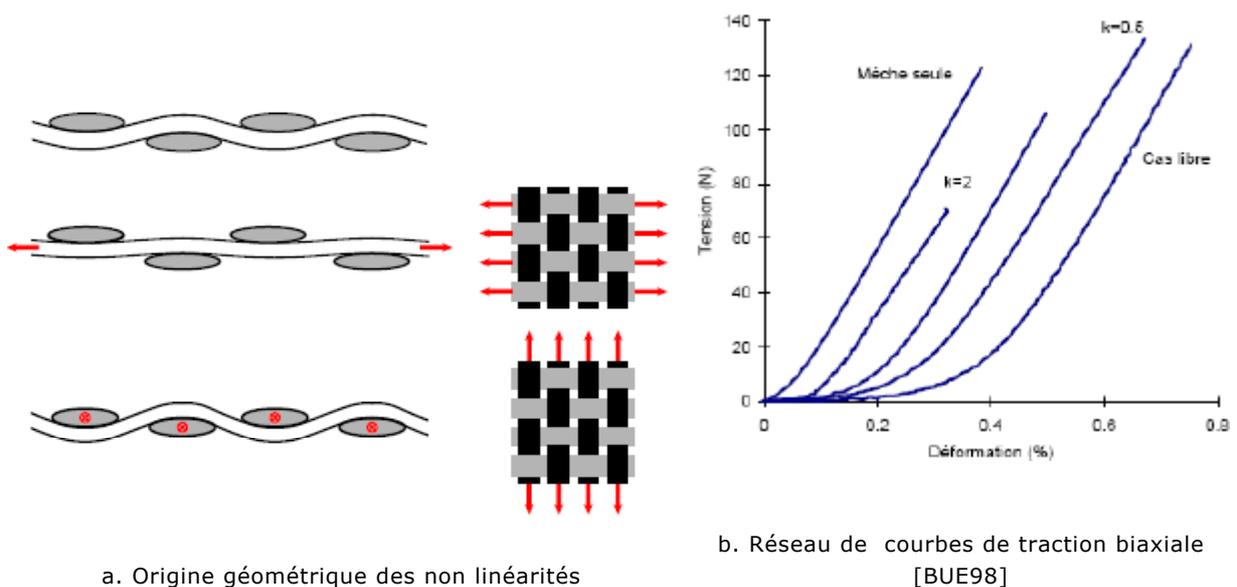
#### *(b) Elongation dans la direction des mèches*

Sollicité dans la direction de ses mèches, le renfort subit des déformations assez faibles (de l'ordre de quelques % au maximum). Celles-ci sont fortement non linéaires.

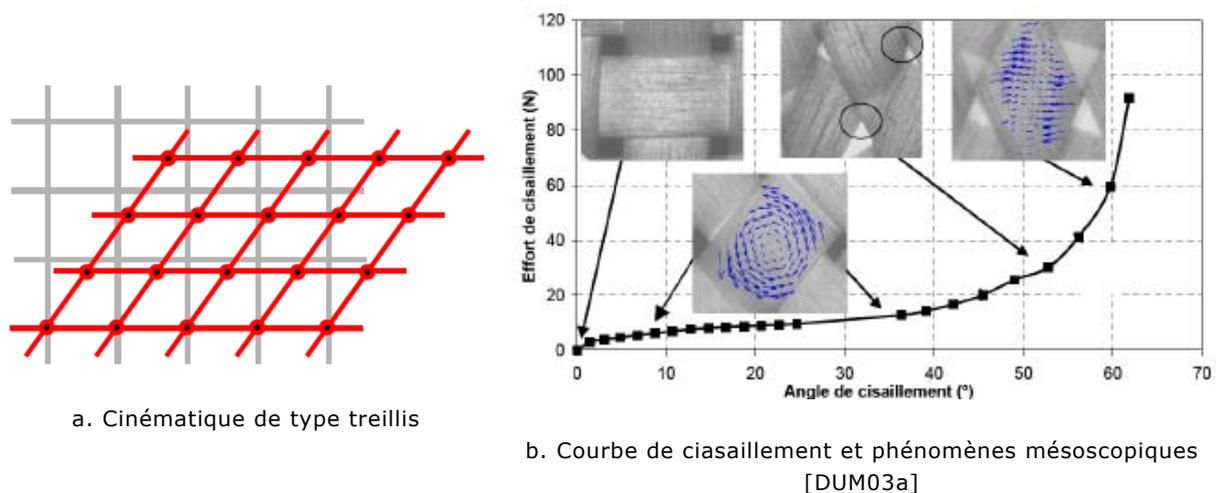
En effet, le mécanisme de déformation sous tension biaxiale est lié à la structure tissée du renfort : l'ondulation des mèches diminue sous l'action de la tension (voir **Figure 7a**). On observe alors des écrasements significatifs des mèches transversalement à leur direction longitudinale, et principalement au niveau des croisements entre les réseaux. Ce phénomène est à l'origine de la non linéarité des courbes de tension biaxiale des renforts tissés (voir **Figure 7b**). La seconde partie de ces courbes est caractérisée par la rigidité des mèches seules car un écrasement plus prononcé de celles-ci est devenu impossible (compaction maximale). Compte tenu de la rigidité des mèches, les énergies de déformations biaxiales sont souvent importantes.



**Figure 6** : Non glissement entre réseaux de chaîne et trame, illustration par un réseau de courbes initialement droites et continues [BUE98]



**Figure 7** : Mécanismes et comportement en traction biaxiale



**Figure 8** : Mécanismes et comportement en cisaillement

*(c) Déformation de cisaillement dans le plan*

En raison du tissage, de grandes rotations relatives des réseaux chaîne et trame sont possibles. Nous avons souligné que ces réseaux ne glissent pas l'un par rapport à l'autre, ainsi ce type de déformation correspond à celle d'un treillis dont les nœuds seraient les points de superposition des réseaux (voir **Figure 8a**). La rotation relative des réseaux est très libre (jusqu'à un angle de blocage), ce qui en fait le mode de déformation privilégié des renforts tissés. Les déformations peuvent être importantes sous des efforts très faibles (rigidité de cisaillement initialement très faible), on les quantifie souvent par la rotation relative des réseaux qui peut atteindre 40 à 50° selon les renforts.

Le comportement en cisaillement plan du renfort est toutefois fortement non linéaire (voir la courbe en **Figure 8b**). Quand est atteint l'angle de blocage (fermeture des interstices entre mèches), les mèches entrent progressivement en contact latéral et le mécanisme de déformation devient tout à fait différent. On rencontre un écrasement transverse significatif des mèches du renfort, qui se traduit par une augmentation notable de la rigidité en cisaillement du renfort. Les images obtenues par corrélation présentées en **Figure 8b** illustrent ces phénomènes. Bien au-delà de cet angle de blocage, la rigidité devient telle que l'on note la formation de plis dans le renfort. Ce phénomène peut apparaître entre 35 et 50° selon les renforts.

*(d) Compaction transverse*

Soumis à une compression transverse à son plan (par exemple entre deux plans parallèles), un renfort tissé présente encore une fois un comportement non linéaire lié à la compaction des différents réseaux de mèches. Celle-ci est d'abord relativement aisée mais elle est rapidement limitée par la densité maximale de fibres. Ce mode de déformation est important pour le procédé RTM car la préforme est souvent compactée avant injection de la résine afin d'augmenter le taux volumique de renfort dans la pièce finale.

*(e) Flexion*

Compte tenu de la rigidité de flexion des fibres quasi inexistante et des glissements possibles entre elles, les mèches et par voie de conséquence le tissu présente une rigidité de flexion

souvent négligeable. Cette hypothèse permet de modéliser les tissés par des membranes sauf dans certains cas de matériaux épais (ou peu flexibles) où il est fait usage de coques.

On notera toutefois que cette rigidité de flexion joue un rôle important dans la formation des plis lors d'une mise en forme.

#### *(f) Importance des phénomènes mésoscopiques*

Comme nous l'avons souligné tout au long de cette section, les caractéristiques mécaniques macroscopiques des tissés sont très étroitement liées aux phénomènes mésoscopiques. Parmi eux, l'écrasement transverse des mèches est à l'origine des principales non linéarités de comportement. L'écrasement transverse d'une mèche est le fruit de la compaction du paquet de fibres par comblement des vides entre fibres et par glissements relatifs de celles-ci.

Ces constatations nous permettent d'ores et déjà de comprendre l'importance d'une analyse à l'échelle mésoscopique du comportement des renforts tissés. Par passage méso-macro, on crée une passerelle permettant de déterminer les comportements macroscopiques des tissés.

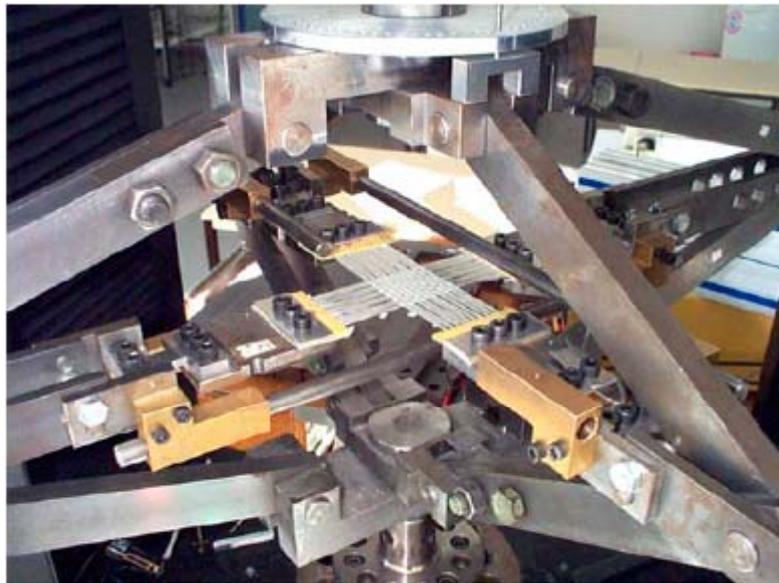
### 1.3.2 Caractérisation expérimentale du comportement mécanique macroscopique

Les renforts tissés sont des matériaux qui nécessitent des essais de caractérisation spécifiques, notamment pour déterminer les comportements principaux en tension biaxiale et en cisaillement dans le plan. Les résultats de ces types d'essais seront utilisés dans la suite de l'étude afin d'évaluer les résultats de simulation.

#### *(a) Essais de tension biaxiale*

Il est nécessaire de connaître le comportement en tension dans les deux directions du renfort car chacune est influencée par l'autre du fait du tissage. Des machines de tests spécifiques pour ces essais [KAW73][BUE98][WIL08] utilisent une éprouvette en croix, bien adaptée pour l'étude des tissus (voir **Figure 9**). En effet, les renforts tissés n'ont pas de rigidité de cisaillement dans le plan (elle reste largement négligeable dans ce type d'essais), ainsi les champs de déformation sont homogènes même dans les coins de la partie « efficace » de l'éprouvette (ce qui n'est pas le cas pour les matériaux continus classiques).

Les réseaux de courbe extraits de ces essais (exemple en **Figure 7b**) traduisent les phénomènes présentés en section 1.3.1. On note également que la réponse est fortement influencée par le rapport des déformations entre chaîne et trame. Par exemple, dans la direction 1, la non linéarité augmente si le rapport  $k = \varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$  diminue. Quand ce rapport est faible, les mèches de direction 1 tendent à devenir rectilignes alors que celles de direction 2 deviennent plus ondulées (voir **Figure 7a**). Cela engendre une forte non linéarité traduite par un long plateau caractérisant une faible rigidité suivie d'une augmentation nette quand la mèche est tendue.



**Figure 9** : Machine d'essai de traction biaxiale [BUE98]

On notera toutefois que ces tests sont difficiles à réaliser en raison de la grande importance de l'état initial : toutes les mèches d'une direction doivent entrer en tension simultanément, et les deux directions en même temps elles aussi. Par ailleurs la mesure des déformations (très faibles) et la détermination du point de départ de l'essai sont également très difficiles à fiabiliser. Les essais utilisés dans cette thèse ont été réalisés par une même personne afin de minimiser les aléas dus à l'appréciation de l'opérateur. Il conviendra cependant de conserver à l'esprit ces différents points de difficulté.

#### *(b) Essais de cisaillement*

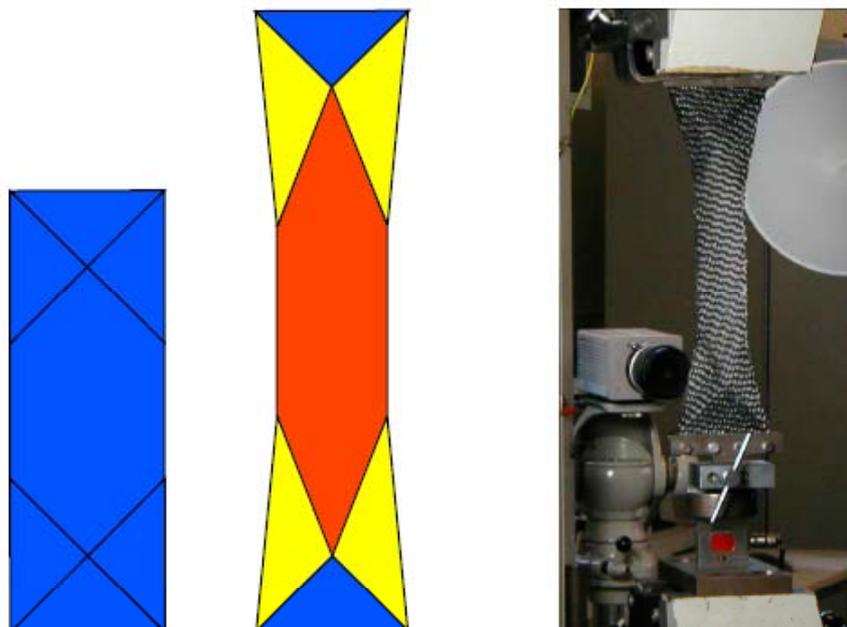
Lors de la mise en forme d'un tissu, le mode de déformation principal est le cisaillement : la faculté du tissu à voir ses angles entre chaîne et trame varier sur de grandes amplitudes permet l'obtention des formes complexes non développables. Ainsi les investigations pour déterminer le comportement de cisaillement sont-elles nécessaires, il existe différents tests :

- Cisaillement simple avec les machines de test KES-F (Kawabata Evaluation System for Fabrics) : une méthode qui n'offre pas des résultats satisfaisants car le dispositif ne permet pas d'obtenir de grands angles de cisaillement pur [WAN98]. Ce dispositif n'a pas été créé afin d'étudier les textiles techniques, mais plutôt les textiles pour l'habillement.
- Le « bias test » ou extension de biais qui offre une zone de cisaillement pur mais non homogène sur l'ensemble de l'échantillon. L'inconvénient majeur de ce test réside dans la limite (environ  $40^\circ$ ) à partir de laquelle apparaissent des glissements, où le test est alors difficile à exploiter. Mais il jouit d'une bonne popularité car il est très simple à mettre en œuvre.
- Le « picture frame » ou cadre de cisaillement donne une grande zone de cisaillement pur et théoriquement homogène. Cette méthode est largement utilisée malgré une manipulation assez difficile et des problèmes de fiabilité en raison de l'apparition possible de tensions parasites [LAU08].

### *Bias test*

Le bias test est très apprécié pour sa simplicité de mise en œuvre. Il consiste à découper une éprouvette de tissu de sorte à avoir les directions chaîne et trame inclinées à  $45^\circ$  par rapport à la direction de traction. On la soumet alors à un test de traction sur machine de traction traditionnelle (voir **Figure 10**). L'échantillon est généralement rectangulaire mais certains auteurs ont pu relever l'influence de la forme de celui-ci [POT06b].

Un test de ce type met en évidence trois types de zone dans l'échantillon. Une zone non déformée, une zone demi cisailée et une zone cisailée. La déformation de cisaillement n'est donc pas uniforme dans l'échantillon et la taille des zones dépend des dimensions de l'échantillon. Ceci doit être pris en compte lorsque l'on extrait le couple de cisaillement des données expérimentales brutes [CAO08][HAR08][LOM08]. La mesure de la déformation de cisaillement (ou de l'angle de cisaillement entre les réseaux de mèches) peut être réalisée par des moyens optiques avec des outils de corrélation d'images mais cela présente des difficultés qui ne sont pas encore totalement maîtrisées, ou alors par mesure quasi manuelle. On peut aussi la calculer théoriquement à partir du déplacement des mors de la machine de traction. C'est ce type de mesure qui est utilisée dans les essais auxquels nous ferons référence par la suite. Il est important de noter qu'un glissement entre les mèches (l'éprouvette est en traction) vient perturber de manière assez significative le champ de déformation, en fin d'essai principalement [ZHU07a][LOM08]. Ainsi, l'angle de cisaillement calculé est généralement supérieur à l'angle de cisaillement réel. Cet aspect est significatif en fin d'essai et nous devons ne pas l'oublier lorsque nous utiliserons ces résultats.



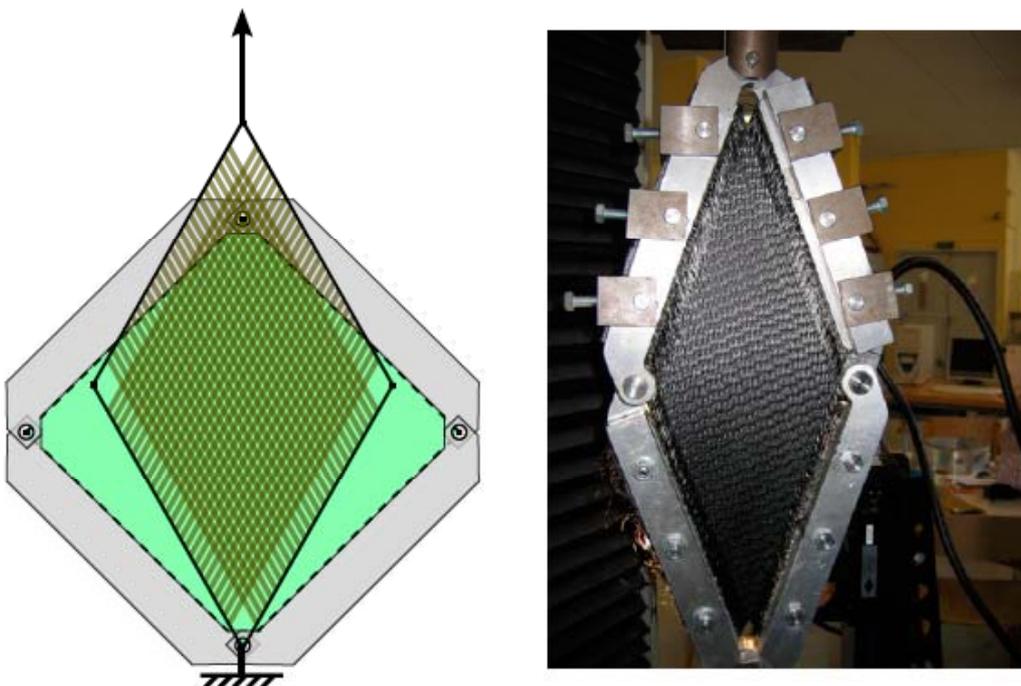
**Figure 10** : Essais de cisaillement du type bias test

### Picture frame

Le cadre de cisaillement (picture frame) est la seconde méthode classiquement utilisée pour réaliser des tests de cisaillement, il permet théoriquement d'obtenir une zone de cisaillement pur sur toute la zone tissée de l'éprouvette. On utilise un cadre articulé en ses quatre coins, dont deux coins opposés seront placés dans une machine de traction qui les éloigne l'un de l'autre pour offrir alors à l'éprouvette un état de cisaillement pur. Les mèches de l'éprouvette sont alignées avec les côtés du dispositif et sont maintenues par des mâchoires (voir **Figure 11**).

A partir de la cinématique du cadre, on peut définir les déformations théoriques associées au mouvement du cadre, elles ne dépendent que du déplacement imposé par la machine d'essai. L'angle de cisaillement  $\gamma$  est lié à l'allongement du cadre par simple relation géométrique.

Les difficultés majeures de cet essai résident dans les phases de préparation de l'échantillon et de mise en place dans le cadre. Il est important de réaliser des talons qui permettent une bonne tenue dans les bras du cadre, leur composition est importante [DUM03A]. Ensuite, il est impératif de respecter l'alignement des mèches par rapport aux directions du cadre lors de la construction de l'éprouvette et de son positionnement dans le cadre. Un désalignement des mèches par rapport aux directions du cadre aura pour effet d'introduire des déformations longitudinales dans les mèches [LEB03][CHA04]. Compte tenu de leur module longitudinal élevé, cela implique des tensions importantes qui faussent la mesure globale d'effort [HIV08b][LAU08]. La mise en place de l'échantillon dans le cadre apparaît aujourd'hui comme la source principale de variabilité rencontrée dans cet essai. Des essais réalisés sur le même renfort dans plusieurs laboratoires et regroupées dans [CAO08] illustrent ces difficultés.



**Figure 11** : Essai de cisaillement du type picture frame (cadre de cisaillement)

## 1.4 Modélisations

La modélisation des comportements et procédés de mise en forme des renforts tissés trouve une totale justification au regard des coûts importants (financiers et en temps) inhérents aux essais : conception et tissage du renfort, mise en place des essais, prototypes d'outillages de mise en forme... Dans un contexte de forte compétitivité, les intérêts liés aux simulations apparaissent comme évidents et indispensables de nos jours : gain de temps, essais et prototypes réduits voire supprimés, potentiel de test de renforts non encore inexistantes...

Nous allons nous intéresser ici principalement aux modèles de calcul par éléments finis (EF) et leurs problématiques associées. Cependant, il convient de noter qu'il existe d'autres types de modèles, par exemple analytiques, qui seront brièvement présentés.

On distingue à nouveau différents niveaux de modélisation : des modèles macroscopiques visant à des simulation de préformage de renforts tissés mais aussi plus récemment des modèles mésoscopiques visant à la détermination des lois de comportement utiles, entre autres, aux modèles macroscopiques. L'intérêt des modèles de simulation par méthode éléments finis est d'obtenir des données locales en termes de déformations, tensions, écrasements locaux...

### 1.4.1 Modélisation de la mise en forme

Une des étapes au cœur de la problématique de mise en forme concerne le préformage du renfort tissé, pour laquelle les outils de simulation des tissus sont en plein développement. Les types de modèles abordés ici considèrent le renfort tissé dans son ensemble, le flanc. L'objectif est de modéliser la mise en forme par emboutissage (dans le cadre du procédé RTM) afin de valider la faisabilité avec les outils définis, ou tout du moins prédire le comportement de la préforme afin d'anticiper d'éventuels défauts préjudiciables au résultat final :

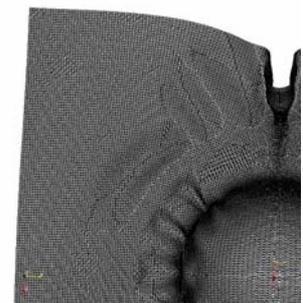
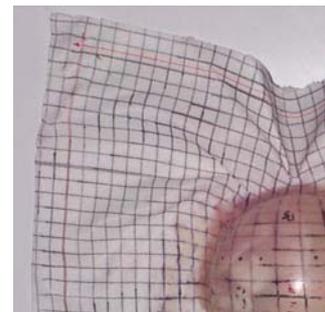
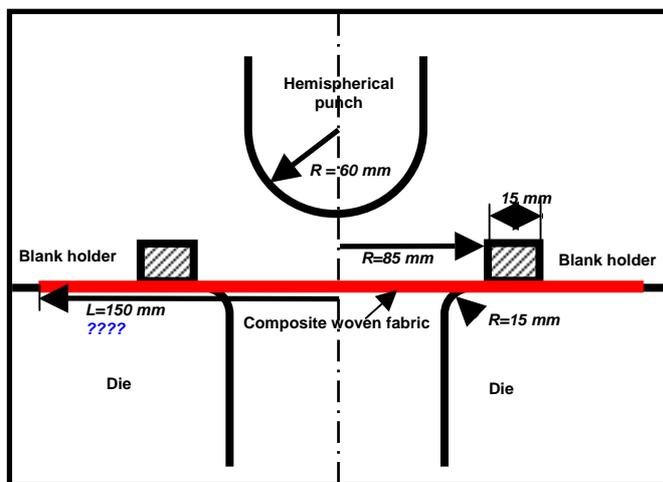
- Apparition de plis lorsque les formes imposent des variations angulaires au tissu qui dépassent ses capacités.
- Rupture des mèches si la tension est trop grande, due à une trop grande pression du serre-flanc le plus souvent.
- Formation de bouclettes due à des déformations axiales trop importantes, souvent imputée à une pression trop faible du serre-flanc.

Ces défauts engendrent des hétérogénéités au sein même du renfort qui doit assurer la tenue mécanique de la pièce finale. Les conséquences peuvent se retrouver dès la phase d'injection de résine qui est perturbée, puis dans la résistance mécanique de la pièce finale, ou dans tous les cas pour l'aspect extérieur final de la pièce qui sera altéré. L'étude du préformage se voit donc justifiée, elle aura pour but de vérifier la faisabilité de la mise en forme et de fournir la position des mèches après formage (caractéristiques mécaniques du produit final).

La méthode par éléments finis présente l'intérêt de prendre en compte un modèle de comportement mécanique du renfort et ainsi obtenir les informations qui ne sont pas fournies par les méthodes géométriques plus simples : validation de la mise en forme, tensions (assurer l'intégrité des mèches) et orientations des mèches (caractérisation de la préforme en terme de directions privilégiées). Les codes de calcul par éléments finis d'emboutissage de tôles minces sont à l'origine de ceux développés pour le préformage des renforts tissés. L'adaptation de ces codes aux cas de renforts tissés s'est faite par l'adaptation des éléments et des lois de

comportement aux caractéristiques particulières de ces derniers, c'est à dire comportements anisotropes, utilisation d'éléments de membranes voire de coques spécifiques... Cependant cela n'est qu'une adaptation de ce qui est utilisé pour les matériaux métalliques, ce qui peut s'avérer difficile. Le comportement des matériaux tissés est très particulier et rend complexe cette adaptation dans le cadre d'une approche continue.

Des approches continues [DON01][BOI05][PEN05][TEN07], discrètes [SHA04] ou semi discrètes ont été développées. L'une d'elles [BOI01][HAM08] consiste à construire des éléments finis spécifiques aux tissés. Ce type d'élément est constitué de mailles élémentaires tissées. Le comportement de chaque maille est défini à partir de résultats en tension biaxiale et en cisaillement (résultats expérimentaux ou résultats de simulations mésoscopiques, voir ci dessous). Les matrices de rigidité et des efforts intérieurs nodaux sont obtenues par sommation sur chaque maille élémentaire. L'expression de chaque composante est simple car il n'est tenu compte que des rigidités principales : tensions et cisaillement. Il en résulte des éléments finis très efficaces du point de vue de la rapidité du calcul. Les avantages de cette méthode avec élément dédié aux tissus sont multiples. D'une part il est proche de la physique du tissu en ne traitant que les rigidités effectives de celui-ci et permet de modéliser différents types de tissus et introduire des améliorations. Les résultats sont satisfaisants et permettent des simulations de préformage complexes (voir **Figure 12**).



**Figure 12** : Exemple de simulation de mise en forme, emboutissage hémisphérique d'un renfort déséquilibré [BOI08]. A droite, simulation (en bas) comparée à l'expérience (en haut).

#### 1.4.2 Modèles mésoscopiques

Si les progrès concernant les simulations à l'échelle macroscopique sont notables, il reste une nécessité incontournable, celle des données d'entrée du calcul qui concernent le matériau et son comportement. Les expérimentations habituelles et que nous avons présentées plus tôt permettent de fournir ces données. Cependant nous avons pu noter des difficultés inhérentes à certains de ces tests (section 1.3.2). Des simulations peuvent pallier ces difficultés et offrir des capacités encore améliorées avec notamment la possibilité de tester des tissus nouveaux non

existants. Le but est alors de caractériser les tissus directement par simulation afin de déterminer les lois de comportement mécanique par passage méso-macro. Pour cela il est nécessaire de descendre à l'échelle mésoscopique afin de tenir compte du comportement propre des mèches et de leurs interactions. En effet, c'est de ce comportement et des phénomènes locaux associés que découle le comportement à échelle globale du renfort tissé (section 1.3.1). Il est à préciser que descendre à l'échelle microscopique, celle des filaments, ne semble pas pertinent à l'heure actuelle pour des raisons techniques compte tenu du grand nombre de filaments contenus dans une seule mèche. Il existe toutefois des modèles basés sur cette échelle. Ceux-ci se rapprochent de la mécanique des câbles [DUR07].

#### *(a) Objectifs et problématique*

La détermination des comportements mécaniques élémentaires (tension biaxiale, cisaillement, compression...) par un passage méso-macro est utile pour alimenter les simulations macroscopiques, mais aussi pour déterminer avant même sa fabrication, en phase de conception, les propriétés mécaniques d'un renfort. En outre, ces simulations permettent de déterminer les géométries déformées à échelle locale de renforts tissés. Là encore, les applications directes sont multiples. Dans un premier temps, cela influence directement le comportement mécanique final de la pièce composite (tenue en service, modes de vibration). Ensuite, à partir de calculs d'écoulement autour d'un volume élémentaire représentatif du renfort, on peut déterminer les perméabilités de renforts tissés non déformés [SIM96a][TAK02] mais aussi surtout déformés. L'influence, par exemple, du cisaillement sur ces perméabilités est sensible [LOI08] et peut ensuite être prise en compte pour l'optimisation de la phase d'injection d'une pièce dont on connaîtra la carte des angles de cisaillement. Les calculs mésoscopiques d'endommagement de pièces composites requièrent également une description appropriée de la géométrie du renfort [ZAK03][EDG04][LAD06].

Il existe des modèles analytiques de comportement des mailles basés sur des simplifications de la géométrie de ces dernières. Les sections de mèches et leur trajectoire sont généralement approchées par des arcs de cercles, des ellipses, des sinusoides ou des portions de droite. Kawabata [KAW73] a schématisé les mèches par leur ligne moyenne sous forme de segments, modélisant ainsi un renfort tissé par un ensemble de barres en traction. Les interactions de contact aux intersections de mèches sont modélisées par des ressorts. Ce type de modèle, offre une première approche de la mécanique des renforts tissés mais présente des simplifications importantes sur la géométrie et la physique de déformation des renforts. Plus récemment, Hivet [HIV08a] a présenté un modèle analytique d'équilibre des renforts tissés en tension biaxiale. Basé sur une analyse détaillée de la géométrie des renforts tissés, ce modèle analytique est plus fidèle à la géométrie réelle, notamment pour ce qui concerne les trajectoires des mèches et les zones de contact qui assurent la non-interpénétration des mèches. Parmi ces modèles, certains ont également visé à l'étude du cisaillement, par exemple Kawabata a introduit un couple résistant aux points de croisement des barres afin de modéliser la rigidité de cisaillement. Lomov [LOM06] a proposé également un modèle analytique basé sur la notion d'équilibre mécanique du système de mèches d'un renfort tissé, obtenu par minimisation des énergies de déformation mises en jeu. Un système d'équations est construit à partir d'une description paramétrique de la géométrie du renfort et à partir des contributions mécaniques : tension des mèches, flexion des mèches, torsion des mèches, compression des mèches, contacts

aux intersections de mèches, contacts latéraux entre mèches et frottement entre mèches. Ce système est résolu sur des petites portions de mèches afin d'obtenir l'état d'équilibre mécanique du renfort. Une approche similaire basée sur un principe de stationnarité de l'énergie potentielle totale du système traduisant l'équilibre entre les efforts extérieurs appliqués et la réponse du système a été proposée par Potluri [SAG03][POT06a]. Dans cette méthode, la géométrie est définie de façon entièrement paramétrée, et un potentiel énergétique fonction de ces paramètres est défini. La stationnarité du potentiel est obtenue lorsque les dérivées partielles de ce potentiel par rapport aux paramètres sont nulles, ce qui mène à la résolution d'un système auquel peuvent s'ajouter d'autres contraintes (par exemple géométriques) entre les paramètres. Enfin, on évoque également des méthodes dérivées comme le modèle proposé par [LIU06], basé sur la mécanique des solides et sur des observations des mécanismes de déformations.

Ces méthodes permettent d'obtenir des résultats intéressants sur des problèmes précis. De manière générale, les modèles analytiques et leurs dérivés présentent divers inconvénients comme le recours indispensable à des coefficients arbitraires, ou encore les difficultés d'adaptation à des géométries complexes ou des cas de chargements mécaniques complexes. L'application au cisaillement semble difficile avec ces modèles.

Devant ces constats, la méthode par éléments finis apparaît comme une très bonne alternative [HAN98][GAS00][BOI01]. Cette approche se décompose en deux étapes principales :

- La création de modèles géométriques de mailles élémentaires.
- La création de modèles mécaniques à appliquer à chaque élément du maillage prenant en compte le comportement particulier des mèches.

#### *(b) Modèles géométriques de cellules élémentaires*

A la base d'une analyse mésoscopique par éléments finis se trouve le modèle géométrique de la cellule élémentaire. Celui-ci a une influence certaine sur les résultats [TAR01]. Nous verrons également par la suite son importance cruciale pour la qualité et la cohérence des résultats (paragraphe 5.3.3). Un modèle mésoscopique tridimensionnel de tissu représente le renfort à l'échelle de la mèche. Cette dernière est considérée comme un solide homogène dont l'entrelacement (avec les autres mèches) constitue le renfort. Pour identifier ce type de modèle, il faut caractériser la géométrie de ce solide, c'est à dire sa forme. Il est également nécessaire d'assurer la cohérence du modèle, c'est à dire la non pénétration mutuelle des mèches, aspect important pour mener des simulations par éléments finis.

Les mèches sont des éléments structurels des tissus qui, au sein d'un renfort donné, présentent des variations importantes de géométrie tridimensionnelle. Celle-ci est généralement déterminée par la forme des sections transverses et la trajectoire de leur ligne moyenne (position successive des centres géométriques de sections) : approche de type tuyau très largement utilisée dans la littérature. Afin de définir tous ces éléments, différentes techniques d'observation ont été utilisées. Les coupes transversales apparaissent comme la première des méthodes simples. Toutefois, réaliser la coupe transverse d'un renfort tissé sec modifie significativement la section des mèches à l'endroit de la coupe. Une seconde méthode consiste à figer le tissu dans une résine avant de réaliser la coupe afin de conserver la forme des mèches. Cette méthode est plus efficace et a été largement utilisée pour définir les formes de mèches que l'on peut alors observer à l'aide de microscopes [CHA04]. Ces types d'observations ont

largement contribué à la définition de modèles géométriques mésoscopiques. Cependant l'utilisation de résine peut aussi modifier la forme des mèches par pénétration entre les fibres, favorisant ainsi le glissement de ces dernières qui pourront se réorganiser (risque d'aplatissement des sections) [POT06a]. Un autre procédé expérimental utilisé consiste en une mesure 3D sans contact par dispositif optique [HIV03][HIV05]. Cette méthode ne possède pas les inconvénients cités précédemment mais elle ne permet en revanche d'observer que la surface du renfort.

Les modèles géométriques proposés ont d'abord été constitués de mèches à sections circulaires qui ne tenaient pas compte de l'écrasement du fil. Une amélioration a été apportée par des sections elliptiques ou oblongues. Ces modèles sont restreints à certains types de tissus et ne permettent pas de généraliser à des renforts dont l'armature est complexe ou plus serrée. D'autres modèles sont basés sur la définition de 4 sinusoïdes [MCB97] mais nous verrons qu'ils ne satisfont pas certaines conditions concernant la trajectoire des mèches nécessairement droite dans certaines portions. De plus il est restreint aux seuls taffetas. Les observations micrographiques de plus en plus nombreuses ont permis de se diriger vers des modèles de sections lenticulaires [LOM00][DAM01]. Il a également été montré par Hivet que les sections de mèches ne peuvent être symétriques (hormis le cas du taffetas) et changent le long de leur trajectoire [HIV03][HIV05]. Reste ensuite à définir la géométrie du tissu par les trajectoires des mèches, où de nouvelles hypothèses sont à établir. Ces trajectoires sont parfois supposées de même nature que la géométrie des sections (arcs de cercle, sinusoïdes) [MCB97] ou sont déterminées par calcul d'équilibre de la structure tissée [LOM00].

Ce dernier type de méthode est la base du logiciel « Wisetex » développé à l'Université de Louvain [LOM00][VER05][LOM06]. Elle consiste en une description de la structure des renforts textiles à l'échelle mésoscopique à l'aide d'un modèle mécanique analytique et d'une description paramétrique de la géométrie des renforts. La description géométrique de chaque mèche est composée d'une trajectoire de ligne moyenne (lieu des centres géométriques des sections) et de deux dimensions caractéristiques des sections (de type lenticulaire ou elliptique) définies en chaque intersection.

Les premières équations utilisées dans le modèle mécanique sont des équations de résistance des matériaux. L'énergie de flexion de chaque mèche est écrite sur chaque portion située entre deux intersections, connaissant le motif de tissage et la rigidité de flexion de la mèche déterminée expérimentalement. Ensuite, on y ajoute un système d'équations dans lequel apparaissent les efforts de réaction entre mèches au niveau des intersections (fonctions de la trajectoire et de la rigidité de flexion) et les deux dimensions caractéristiques des sections, fonctions des efforts de réaction (ces fonctions sont données par des résultats expérimentaux). On notera que le type de section (elliptique, lenticulaire) ne change pas le long de la mèche, seules les dimensions peuvent varier. Afin de déterminer l'état de repos du renfort, un algorithme de minimisation de l'énergie de déformation des mèches est utilisé. La résolution mène à déterminer la trajectoire de la ligne moyenne des mèches et les dimensions caractéristiques des sections.

Par extension, ce modèle est utilisé pour le calcul des géométries déformées en traction biaxiale ou cisaillement. Dans ce cas, l'énergie de déformation est complétée par des énergies de tension, de compression des mèches et de dissipation par frottement. Celles-ci sont à

nouveau calculées sur des portions de mèches ou aux intersections, à partir de relations analytiques et/ou expérimentales. Le système d'équation est alors réécrit en incluant les nouvelles contributions. L'équilibre de la structure soumise à une sollicitation extérieure correspond à une minimisation de l'énergie de déformation de la structure tissée. La résolution de ce problème mène à déterminer les paramètres géométriques.

L'approche « Wisetex » est une méthode polyvalente (description possible d'une large variété de renforts et de géométries déformées) mais présente certains inconvénients ou simplifications. De nombreux résultats expérimentaux (parfois difficiles à obtenir) sont nécessaires. Le type géométrique des sections est fixé a priori et ne peut changer, même sous sollicitation mécanique extérieure. Ces sections restent symétriques, ce qui se montre insuffisant [HIV03][HIV05]. Par ailleurs, ce type d'approche ne peut pas garantir l'absence d'interpénétration entre mèches. En conclusion, ce modèle basé sur la RDM et des relations mécaniques analytiques offre une approche globale du problème des géométries mésoscopiques de renforts tissés (déformés ou non) mais reste limitée dans l'optique d'une description détaillée de ces géométries pour de futures applications.

#### *Modèle utilisé dans cette étude*

Dans ces travaux de thèse, il sera fait usage du modèle de Hivet [HIV03][HIV05] pour les géométries mésoscopiques de renforts au repos. On constate à partir d'observations micrographiques ou optiques 3D que :

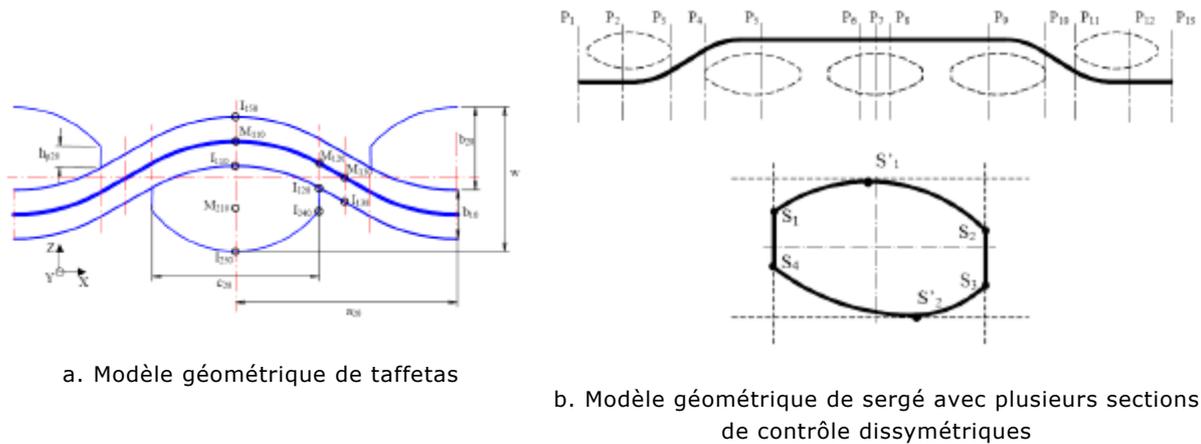
- Les sections des mèches observées sont dissymétriques.
- Pour des mèches à fibres « mobiles », c'est à dire dont la cohésion inter-fibres est faible, les parties latérales sont pointues et le contact s'effectue sur tout un côté de la section.
- Pour des mèches dont la cohésion inter-fibres est plus forte, la zone latérale est moins pointue, voire presque plate.
- La zone de contact est toujours très grande et semble être prépondérante pour la forme de la zone de section concernée.

La modélisation proposée consiste à distinguer trois différentes zones dans la section de mèche : la zone de contact, la zone libre et la (les) zone(s) latérale(s). La forme de ces zones peut être approchée par exemple par des coniques (paraboles, cercles). Pour les zones latérales, des droites voire des points seront utilisés pour représenter tous les types de tissus observés. Dans le cas particulier du taffetas, on peut rajouter que les sections seront nécessairement symétriques (voir **Figure 13a**).

Concernant la trajectoire de la ligne moyenne, l'approche est contrainte par les besoins de cohérence du modèle. La zone de contact devra présenter la même courbe que la section de mèche correspondante. Dans les zones libres de tout contact, aucun effort n'est appliqué sur les mèches. Etant donnée la faible rigidité de flexion des mèches, la trajectoire doit être droite. La trajectoire est donc formée de coniques et segments, avec des conditions de tangence. Ce modèle garantit l'absence de vides et d'interpénétrations dans les zones de contact entre mèches.

Hormis le cas du taffetas, qui présente des conditions de symétrie favorables, la forme de la section dépend de la position sur la trajectoire, et des lieux de contact. Le modèle développé par Hivet consiste à définir la section de la mèche en certains points de

contrôle bien précis de la trajectoire tenant compte ainsi de la dissymétrie selon les conditions de contact (voir **Figure 13b**). On obtient la mèche par un balayage avec interpolation entre les différentes sections. Nous serons amenés à utiliser, pour le sergé 2x2, ce type de modèle avec sections non constantes en comparaison avec un modèle simplifié à sections constantes.



**Figure 13** : Modèle géométrique mésoscopique utilisé dans cette étude [HIV03]

### (c) Modèles mécaniques

Outre l'aspect géométrique, le modèle de comportement mécanique du matériau est un des points importants d'une analyse par éléments finis. On parle ici de modèle de comportement d'une mèche seule. Du fait de la constitution des mèches par assemblages de fibres longues, le comportement est très particulier. Tout d'abord, il est fortement orienté du fait de la très grande rigidité des mèches dans la direction longitudinale devant toutes les autres directions. Ensuite, il est très spécifique en raison des glissements et réarrangements possibles entre les fibres qui procurent au matériau un comportement transverse particulier.

Les modèles mécaniques rencontrés font généralement état d'un matériau orthotrope élastique avec une rigidité longitudinale linéaire ou non linéaire déterminée à partir d'essais de traction sur la mèche [HAN98][DUM03A][HIV03] ou sur des principes d'homogénéisation [PEN02]. Dans ces modèles il est considéré que le comportement du matériau est celui d'un matériau continu orthotrope classique, ce qui ne peut pas convenir au cas de matériaux avec une direction d'anisotropie matérielle. Le comportement transverse à la direction de mèche étant plus difficile à identifier expérimentalement, les paramètres associés (modules d'élasticité, coefficients de Poisson) sont déterminés par homogénéisation [PEN02] ou encore par approche inverse en postulant une loi a priori [HAN98]. Notons également les travaux de Cai et Gutowski [CAI92] portés sur la compression de renforts tissés imprégnés de résine et pour lesquels un modèle de comportement d'un paquet de fibres imprégnées a été proposé. Il ne s'agit pas d'un modèle pour analyse par éléments finis mais plutôt d'un des rares modèles de comportement spécifique à une mèche. L'approche proposée est basée sur la micromécanique du paquet de fibres. Le comportement d'une fibre au sein du paquet est déterminé par des équations de résistance des matériaux puis homogénéisé au niveau de la mèche. Le comportement mécanique de la mèche est déterminé en fonction de la fraction volumique de fibre et du module d'Young de celles-ci principalement.

Plus récemment, des modèles de comportement ont été développés afin de traiter le problème spécifique de la forte anisotropie des matériaux fibreux. La plupart d'entre eux visent à traiter le cas de renforts à deux directions de fibres afin de simuler des cas de mise en forme de composites minces. Nous présentons ci-dessous trois méthodes actuelles ainsi que l'approche premièrement proposée dans les travaux de Hagège [HAG04][HAG05] et servant de base à cette thèse. Les deux premières méthodes de Yu [YU02] et de ten Thije [TEN07] sont proches sur le principe et permettent de ne traiter correctement que les contributions de tension. L'état de contraintes est déterminé à partir du calcul des déformations dans les directions matérielles des mèches et des modules d'Young dans ces directions.

#### *Approche de Yu*

L'approche de Yu [YU02] est basée sur la cinématique de la déformation du renfort. L'hypothèse principale est celle du non glissement relatif des réseaux de chaîne et trame. Celle-ci est largement admise, comme nous l'avons souligné au paragraphe 1.3.1(a).

Un élément de tissu est composé de  $n_\alpha$  mèches de chaîne (réseau  $\alpha$ , dont la direction est commune à celle d'un côté de l'élément fini) et  $n_\beta$  mèches de trame (réseau  $\beta$ ) (voir **Figure 14**). A partir de la donnée d'un tenseur de déformation exprimé dans le repère local  $\{\underline{x}, \underline{y}\}$  de l'élément, on calcule les allongements respectifs selon les directions  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces allongements permettent de remonter aux tensions dans chacun des réseaux de mèches qui sont alors sommées afin de déterminer les efforts sur chacun des côtés de l'élément. Ces efforts sont ensuite écrits en terme de contraintes compte tenu de l'épaisseur du renfort et des dimensions de l'élément.

Il est important de noter que l'ensemble de ces calculs ne fait appel qu'à des relations entre les grandeurs géométriques caractéristiques des réseaux initiaux et déformés, principalement les grandeurs vectorielles  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  définissant la géométrie des mailles du renfort (voir **Figure 14**). La relation entre ces grandeurs est connue par le tenseur gradient de la transformation  $\underline{F}$ . La matrice de rigidité de l'élément constitué de mèches est finalement obtenue à partir du tenseur de contraintes dans le repère local de l'élément et exprimé en fonction des déformations imposées et des rigidités connues des mèches.

En résumé, il s'agit de projeter le tenseur de comportement du renfort (celui-ci ne contenant que deux rigidités) dans une base donnée, en l'occurrence la base liée à l'élément et dont un côté correspond à la direction  $\alpha$ . On soulignera qu'à chaque instant les directions de mèches sont actualisées à partir du gradient de la transformation, ce qui garantit un suivi correct de ces directions matérielles. L'ensemble des grandeurs géométriques utilisées dans l'écriture du tenseur de comportement utilise donc les directions matérielles, ce qui constitue un aspect important (voir paragraphe 3.2.3(a)).

En conclusion, on note que l'alternative proposée pour la gestion du suivi des directions d'anisotropie fonctionne bien que la description du comportement du renfort soit simplifiée aux seules tensions. Plus tard, Yu a également proposé de superposer à cela un comportement de cisaillement [YU05].

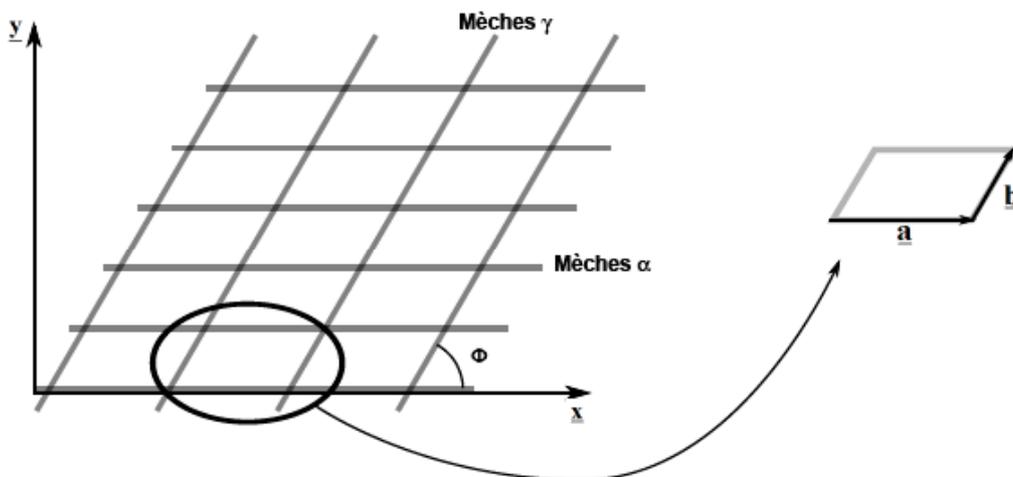


Figure 14 : Éléments géométriques utilisés dans l'approche de Yu [YU02]

#### Approche de ten Thije

L'approche proposée par ten Thije [TEN07] et Huetink [HUE06] est une approche hyper-élastique. Par soucis de simplicité le principe est présenté ci-dessous pour une seule direction de fibre.

On se donne comme point de départ un potentiel élastique fonction de  $\underline{\underline{C}}$  le tenseur de Cauchy-Green droit,  $\psi = \psi(\underline{\underline{C}})$ , dont dérive le second tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff  $\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{C}}}$  [SID82][BAS00]. Par suite, on détermine le tenseur de contraintes

de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  par la relation :  $\underline{\underline{\sigma}} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{C}}} \underline{\underline{F}}^T$  où  $\rho$  et  $\rho_0$  représentent les masses

volumiques actuelle et initiale. La définition du potentiel est le point important de ce type de méthode, il s'agit ici d'un potentiel purement élastique dans la direction des fibres donnée par :  $\psi = \frac{1}{2} E_f \varepsilon^2$  où  $E_f$  est le module élastique de tension des fibres et

$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{1}{l_0^2} \underline{\underline{a}}_0 \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{a}}_0$  est la déformation dans la direction des fibres (notée initialement  $\underline{\underline{a}}_0$ ).

Pour le cas de plusieurs directions de fibres, il est possible d'écrire les mêmes relations étendues avec un tenseur de comportement d'ordre 4 comprenant les seules rigidités de tension. La méthode proposée dans [TEN07] utilise un tenseur orthotrope constant, écrit en configuration initiale. Dans ce cas, il serait impératif d'utiliser une formulation lagrangienne totale. Dans le cas de la formulation lagrangienne réactualisée choisie par les auteurs, le tenseur de comportement ne peut être constant car il devient non orthotrope. Pour ce type de formulation, la solution proposée consiste alors à calculer individuellement les contributions de chaque direction puis les sommer. La gestion du comportement en cisaillement est entreprise par la superposition d'un matériau isotrope supplémentaire. Toutefois, cette solution revient à générer des tensions parasites dans les directions de fibres. Cette problématique a été traitée de façon plus détaillée par Aimene [AIM07]. En conclusion, cette approche est bien adaptée au cas

d'un matériau fibreux unidirectionnel et l'extension à plusieurs directions se fait par superposition.

Une alternative intéressante utilisant également une approche hyperélastique à des fins de simulation de mise en forme de renfort de composites est proposée par Aimene [AIM07][AIM08]. Le potentiel hyper-élastique est construit par l'addition de trois termes (supposés découplés) : deux énergies de tension et une de cisaillement. Ce choix est motivé par les principaux modes de déformation des renforts tissés que sont une elongation (faible) dans les directions des mèches et de grandes variations angulaires dans le plan du renfort (cisaillement). L'expression du potentiel proposé est fonction du tenseur de Cauchy Green droit et des invariants des tenseurs de structures, ces derniers caractérisant les directions matérielles. Des essais de traction et de cisaillement sur renforts tissés sont utilisés afin d'identifier les différents termes du potentiel proposé. Cette méthode présente des résultats satisfaisants sur différents tests de référence en grandes transformations. Des simulations de mise en forme offrent également des résultats qualitatifs pertinents et permettent la description de plis.

#### *Approche de Dong*

Il existe une autre approche basée sur la mécanique des milieux continus. Celle-ci a été proposée par Dong [DON01] et également utilisée par Peng [PEN05] qui l'a nommée « loi de comportement non orthogonale ».

Ces modèles utilisent une loi de comportement hypo-élastique basée sur l'utilisation de dérivées objectives classiques de type Green Naghdi ou Jaumann. La particularité de cette méthode vient du tenseur de comportement qui est projeté dans le repère de calcul en fonction des transformations des directions matérielles (direction des mèches). L'objectif est d'utiliser un tenseur de comportement actualisé tenant compte du suivi des directions d'anisotropie.

Cette méthode est la plus proche de celle que nous proposerons dans la section 3.2. Nous la présenterons plus en détail à cette occasion et verrons qu'elle pose problème dans certaines situations. On note toutefois qu'elle propose une alternative quant à la gestion de plusieurs directions matérielles ainsi que du cisaillement.

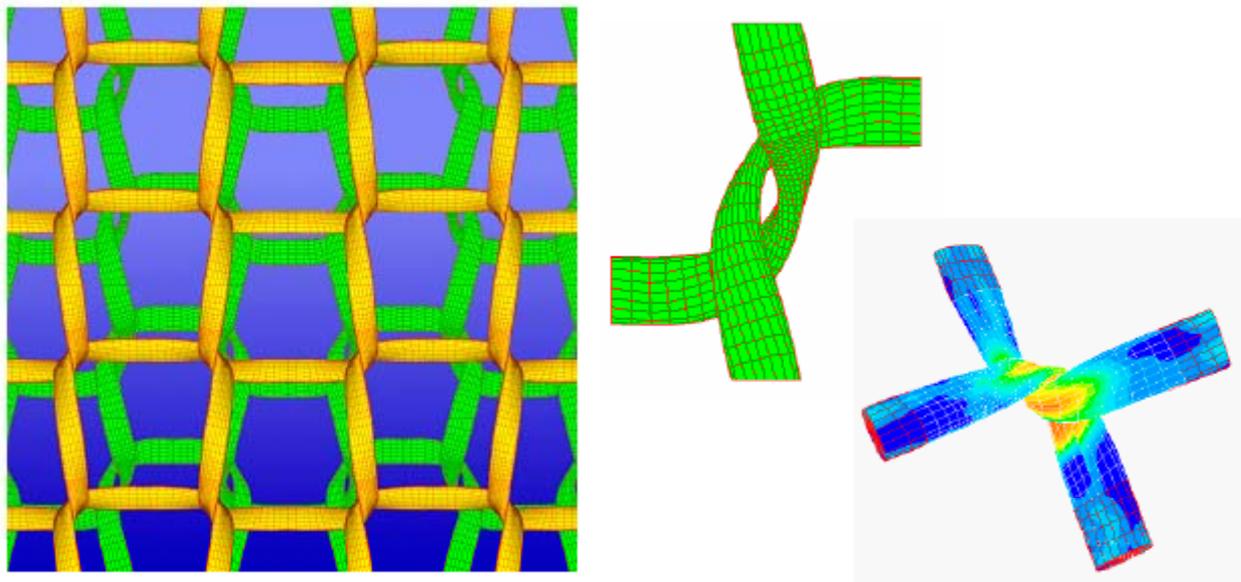
#### *Approche de Hagège*

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont bâtis sur la base de ceux développés par Hagège [HAG04][BOI05][HAG05] dans le cadre de l'étude mésoscopique de renforts tricotés (voir illustrations en **Figure 15**).

Le cœur de cette étude porte sur un modèle hypo-élastique de comportement d'un milieu fibreux à une direction de fibres (par exemple une mèche de renfort de composite). Il y est montré que l'utilisation des dérivées de Green Naghdi et Jaumann dans un modèle hypo-élastique n'est pas satisfaisante pour les matériaux fibreux en raison de la dérive des repères de calcul par rapport à la direction matérielle des fibres dans les zones de cisaillement de la mèche. Cette dérive est mise en évidence sur des calculs d'une maille de tricots en traction biaxiale, en particulier dans les zones de contact où les mèches sont cisailées. D'un point de vue macroscopique, il en découle une perte significative de rigidité en traction biaxiale en fin de transformation, celle-ci est liée à la formulation basée sur la dérivée objective de Green Naghdi.

Une formulation correctrice est proposée afin de pallier cette faiblesse du modèle hypo-élastique. Elle consiste à utiliser une dérivée objective basée sur la rotation matérielle des fibres. Cela conduit à travailler dans un repère de calcul animé de cette même rotation, qui reste donc aligné avec la direction forte d'anisotropie. Une première mise en œuvre de cette formulation est également présentée avec des résultats satisfaisants sur tests élémentaires.

On notera en outre une proposition d'extension du modèle au cas de matériaux à deux directions d'anisotropie, par exemple un renfort tissé.



a. Tricot en traction biaxiale : maillage initial et déformé

b. Modèle élément fini mésoscopique de tricot en traction biaxiale : maillage initial et déformé

**Figure 15** : Exemple de calcul mésoscopique sur renfort tricoté [HAG04]

### Conclusion

Les modèles présentés ci-dessus proposent différentes méthodes afin d'assurer le suivi d'une ou plusieurs directions d'anisotropie. Nous verrons à nouveau en section 3.2 qu'il est indispensable de respecter ces impératifs sous peine de générer d'importantes erreurs de calcul. L'application de ces approches au cas d'un matériau fibreux à une seule direction de fibres (mèche constituée de fibres) n'est pas directe. Outre la gestion de la forte anisotropie du matériau, le comportement dans la direction transverse présente également des spécificités fortes.

Ainsi le modèle de comportement continu en grandes transformations d'une mèche doit-il faire l'objet d'investigations propres. Un objectif de cette thèse est de présenter une approche entièrement continue répondant aux aspects importants que nous venons de soulever, en particulier pour les questions de l'anisotropie et du comportement transverse. Les travaux de Hagège que nous venons d'évoquer ont permis de tracer le sillon pour répondre à la première de ces deux problématiques. Le principe d'une loi hypo-élastique basée sur l'utilisation d'une dérivée objective adaptée constitue le point

de départ des travaux présentés dans ce manuscrit. Nous aborderons cette problématique et les développements associés en détail dans un chapitre dédié.

## 1.5 Conclusions du chapitre 1

La trame de ce chapitre d'introduction nous a menés à une première approche de la mécanique des renforts tissés de composites. Ceux-ci sont utilisés dans des applications à hautes performances mécaniques, par exemple dans l'aéronautique. Leur mise en œuvre se fait par des procédés adaptés tels que le RTM (Resin Transfer Moulding), un système de moulage sous pression où la résine est injectée dans un moule fermé contenant un renfort préformé. Le préformage du renfort est facilité par la grande faculté de déformation du renfort. Le mode de déformation principal d'un renfort tissé est le cisaillement qui permet la mise en forme sur des surfaces non développables. D'autres mécanismes importants caractérisent le comportement du renfort et jouent un rôle important dans le résultat final de mise en forme : le comportement sous tension biaxiale, sous compaction transverse ou encore en flexion. Différents essais expérimentaux permettent de déterminer ces comportements élémentaires dont les plus prépondérants sont la tension biaxiale et le cisaillement dans le plan. Ces essais sont généralement assez délicats à réaliser et font l'objet de discussions quant à leur exploitation ou leur normalisation.

D'importants efforts sont consentis afin de réaliser des simulations de mise en forme de renforts avec l'apparition de modèles dédiés. Les données sur le comportement mécanique des renforts peuvent être fournies par des essais qui, nous l'avons noté, sont encore très délicats. Des simulations à échelle mésoscopiques permettent par un passage méso-macro d'obtenir ces données de comportement mécanique. Mais là n'est pas le seul intérêt de ce type de modèles. On peut ainsi anticiper dès la conception le comportement d'un renfort et alléger les campagnes d'essais. Par ailleurs, les données locales obtenues par ces analyses permettent d'envisager d'autres applications. Parmi elles, des simulations d'écoulement de résine afin de calculer les perméabilités de renforts déformés et optimiser la phase d'injection, ou encore des simulations d'endommagement de pièces composites réalisées à échelle mésoscopique. On retiendra toutefois qu'il n'existe pas, à ce jour, de modèle universellement reconnu pour décrire le comportement mécanique de tissés en grandes déformations, que ce soit à l'échelle mésoscopique ou macroscopique.

L'analyse mécanique mésoscopique des tissés présente plusieurs aspects importants. Le modèle de comportement mécanique de la mèche est un point primordial que nous développerons dans le troisième chapitre de ce manuscrit en abordant les différents points clés et les solutions proposées. Par la suite, ce modèle sera mis en œuvre dans des simulations par éléments finis réalisées sur un code commercial. Nous évoquerons dans le quatrième chapitre les différents points de passage obligatoires afin de mener ces simulations mésoscopiques. Enfin, le cinquième chapitre sera dédié à l'exploitation et à la validation des résultats, ainsi qu'à la présentation d'une des applications principales en injection.

Sur le plan mécanique, les résultats seront confrontés à différents essais mécaniques. Pour le second objectif concernant la détermination des géométries déformées, il est nécessaire d'utiliser des observations de renforts aux échelles adéquates. Il n'existe pas de méthode courante pour réaliser ce type d'observations. Dans ce but, nous utiliserons des reconstructions

3D de renforts réalisées par tomographie aux rayons X. Cette technique d'observation à coeur d'objets massifs est idéalement adaptée à l'étude des renforts tissés car elle est non destructive et permet des observations aux échelles mésoscopique voire microscopique dont nous aurons besoin dans cette étude. Avant de poursuivre, nous devons donc présenter cette technique et les applications associées.

# 2

## Observations par tomographie aux rayons X

### **2.1 La technique de tomographie aux rayons X**

#### 2.1.1 Atténuation des rayons X

(a) *Nature des rayons X*

(b) *Propriétés des rayons X*

#### 2.1.2 Principe de reconstruction par tomographie

#### 2.1.3 Sources et détecteurs de rayons X

(a) *Sources*

(b) *Détecteurs*

#### 2.1.4 Présentation de l'équipement expérimental utilisé

### **2.2 Application aux renforts de composites**

#### 2.2.1 Observations mésoscopiques

(a) *Montage expérimental pour observations de tissus déformés in situ*

#### 2.2.2 Observations microscopiques

(a) *Analyse de la covariance à deux points*

### **2.3 Conclusions du chapitre 2**

## 2 Observations par tomographie aux rayons X

La tomographie par absorption de rayons X est une technique non destructive qui permet la reconstruction d'images en coupe ou en 3D d'un objet massif. Le principe repose sur les propriétés d'atténuation des rayons X par la matière et sur l'enregistrement du rayonnement transmis à travers l'objet, principe de la radiographie. Les données collectées suite à une investigation exhaustive de l'échantillon à étudier (un grand nombre de radiographies sous différents angles de vue) permettent de reconstruire via des méthodes mathématiques la géométrie 3D à cœur de l'échantillon. Le principe de la tomographie aux rayons X sera abordé en première partie.

Cette technique s'adapte très bien à l'étude des renforts tissés de composites du fait des caractéristiques et performances des appareils de laboratoire. Nous verrons en seconde partie de ce chapitre comment tirer avantage de ce type d'outillage expérimental pour l'étude mésoscopique des renforts tissés de composites.

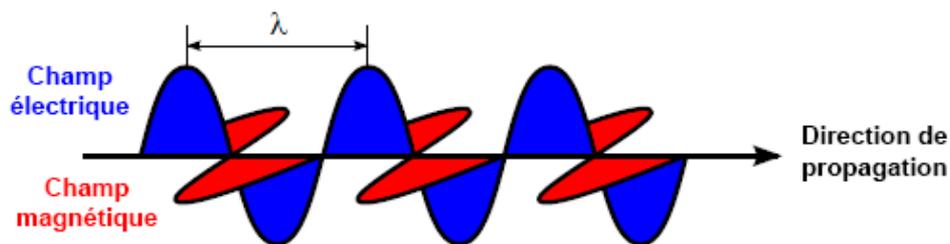
### 2.1 La technique de tomographie aux rayons X

#### 2.1.1 Atténuation des rayons X

##### *(a) Nature des rayons X*

Les rayons X ont été découverts par hasard en 1895 par Wilhelm Röntgen qui étudiait les rayons cathodiques. Il s'agit d'un rayonnement de type électromagnétique au même titre que la lumière visible, les ondes radio ou encore les rayons gamma. C'est-à-dire que l'on a une oscillation couplée d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui se propagent dans la même direction mais perpendiculaires entre eux (**Figure 16**). Rappelons la double nature de ces types de rayons : ondulatoire (que nous venons de voir) et corpusculaire. En effet, les propriétés des rayonnements électromagnétiques trouvent des explications, pour certaines, par leur nature ondulatoire et, pour d'autres, par leur nature corpusculaire. On introduit alors le concept de photon pour mieux représenter la nature corpusculaire de ces radiations : le photon est la particule élémentaire qui constitue le rayonnement. Selon ce concept, les rayons électromagnétiques seraient formés de grains d'énergie qui voyageraient à la vitesse de la lumière et nous verrons que cela est utile à l'explication de certaines propriétés, notamment lorsqu'il s'agit d'interactions avec la matière.

Tous les rayonnements évoqués (radio, X, gamma...) se différencient par leur gamme de longueur d'onde  $\lambda$ , qui est aussi reliée à l'énergie du rayonnement. Plus la longueur d'onde est faible, plus le niveau d'énergie est élevé (énergie =  $h \cdot \nu$ , avec  $h$  : constante de Planck et  $\nu$  : fréquence du rayonnement). Pour les rayons X, la longueur d'onde est d'environ 0.001 à 10 nm. Les rayons X peuvent être assez facilement produits en laboratoire. Il suffit de bombarder la surface d'un solide par des rayons cathodiques (faisceau d'électrons accélérés dans un champ électrique de l'ordre de  $10^3$  à  $10^6$  V). Deux phénomènes sont alors à l'origine de la production de rayons X : l'émission d'un spectre continu et celle de raies caractéristiques.



**Figure 16** : Rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda$

En phase d'accélération (ou de décélération), un électron émet une radiation électromagnétique continue. Quand un solide est bombardé, le faisceau d'électrons est brutalement décéléré, et il en résulte donc une émission de rayonnement X, dite de freinage. Ce type d'émission procure un spectre continu qui se caractérise par un seuil. La présence de ce seuil s'explique par la théorie quantique : l'énergie de l'électron incident est transformée en photon lors de l'interaction avec le solide, l'énergie de ce photon ne pourra pas dépasser celle de l'électron incident (énergie =  $e.V$ , avec  $e$  : charge élémentaire et  $V$  : tension). Ainsi on trouve une limite supérieure à la fréquence du rayonnement X, c'est-à-dire une limite inférieure à sa longueur d'onde par la relation :

$$h\nu = eV \text{ soit } \frac{hc}{\lambda} = eV \text{ où } c \text{ est la célérité}$$

Au spectre continu viennent s'ajouter des raies caractéristiques du matériau bombardé. En effet, lors de l'interaction des électrons avec le solide, certains électrons des couches internes des atomes sont expulsés. La position rendue libre est alors vite comblée par un électron d'une orbitale supérieure et ce saut vers un niveau d'énergie plus faible s'accompagne de l'émission d'un photon dont l'énergie correspond exactement à celle du saut entre les couches électroniques concernées. Dans ce cas, la raie est émise à la fréquence  $\nu$  vérifiant, par exemple pour le passage d'une couche L à une couche K, la relation :  $h.\nu = W_L - W_K$  où  $W$  correspond au niveau d'énergie de la couche considérée. Les spectres X correspondent donc aussi à des transitions électroniques des couches profondes.

*Remarque : la lumière visible naît du même phénomène, mais pour des couches externes, donc à plus faible énergie. Les rayons gamma répondent aussi à ce phénomène mais dans le cas de réorganisation au niveau du noyau de l'atome (noyaux radioactifs instables) d'où les gammes énergétiques très élevées.*

### (b) Propriétés des rayons X

Les propriétés de ces rayons sont diverses et permettent de multiples applications. Tout d'abord, ils peuvent provoquer la fluorescence de certains matériaux, on les utilise par exemple comme outil de détection d'un rayonnement X. Une autre caractéristique importante est leur pouvoir ionisant lié à leur niveau d'énergie. Cette propriété permet de créer un champ électrique dans les milieux traversés qui sont ionisés, et ainsi par exemple mesurer indirectement l'énergie des rayons (cas du compteur Geiger-Müller). Du fait de leur longueur d'onde proche des distances inter-atomiques de certains cristaux, ils sont aussi utilisés pour caractériser par diffraction ces cristaux : on peut reconstruire la structure des cristaux à partir de la lecture du rayonnement diffracté.

La propriété qui nous intéresse concerne leur grand pouvoir de pénétration à travers des matériaux denses. L'interaction des rayons X avec la matière se fait alors par deux grands mécanismes : la diffusion et l'absorption. En effet toute matière bombardée par des rayons X émet un rayonnement secondaire constitué de rayons X qui ont traversé directement la matière (non absorbés) et d'autres qui ont été déviés, ou diffusés.

#### *Diffusion*

La diffusion des rayons X se fait de deux façons dans une pièce massive : la diffusion dite de Compton et la diffusion cohérente.

La diffusion de Compton est le phénomène qui correspond à l'augmentation de longueur d'onde du photon diffusé. Lors de l'interaction entre le photon incident (rayon X) et un électron libre, les deux particules sont défléchies dans des directions différentes. Puisqu'une partie de l'énergie du photon incident est transférée à l'électron éjecté, il en résulte que le photon dévié émerge avec une énergie plus faible, donc une longueur d'onde plus grande.

La diffusion cohérente (aussi appelée diffusion élastique ou de Rayleigh) correspond à des interactions avec les électrons des atomes mais sans éjection de ces derniers. Dans ce cas le photon est simplement dévié de sa trajectoire sans perte d'énergie. Il conserve donc sa longueur d'onde. Cette diffusion caractérise la diffraction des rayons X par les cristaux et offre les possibilités évoquées plus haut en cristallographie.

#### *Absorption*

L'absorption des rayons X se traduit par la diminution d'intensité du faisceau traversant la matière. Si les photons disparus du faisceau incident n'ont pas été diffusés, ils ont réellement été absorbés par la matière, par un effet que l'on appelle photoélectrique. Le photon incident est ici absorbé par les électrons d'un atome. Si l'énergie de ce photon est faible, l'excitation provoquée poussera seulement l'électron à changer d'orbitale. Si elle est plus élevée, elle peut éjecter l'électron excité. On appelle cet électron un photoélectron. Dans chaque cas, le photon incident disparaît, c'est le phénomène d'absorption des rayons X.

Ce phénomène explique plusieurs propriétés mises en avant plus tôt. Par exemple, la fluorescence est la conséquence du changement d'orbitale des électrons.

Pour nos applications de tomographie, c'est principalement l'absorption qui est mise en jeu ; Les phénomènes de diffusion sont négligés. On parle de tomographie par absorption de rayons X.

Quand un faisceau parallèle de rayons X d'intensité  $I$  traverse une épaisseur infinitésimale de matière  $dx$ , le faisceau transmis est atténué de  $dI$  selon la loi  $dI = -I\mu dx$  qui conduit à la loi de Beer-Lambert donnant l'intensité transmise à travers une épaisseur  $x$  de matière par un faisceau incident d'intensité  $I_0$  :

$$I_x = I_0 e^{-\mu x}$$

où  $\mu$  (en  $m^{-1}$ ) est le coefficient d'absorption linéique du matériau.

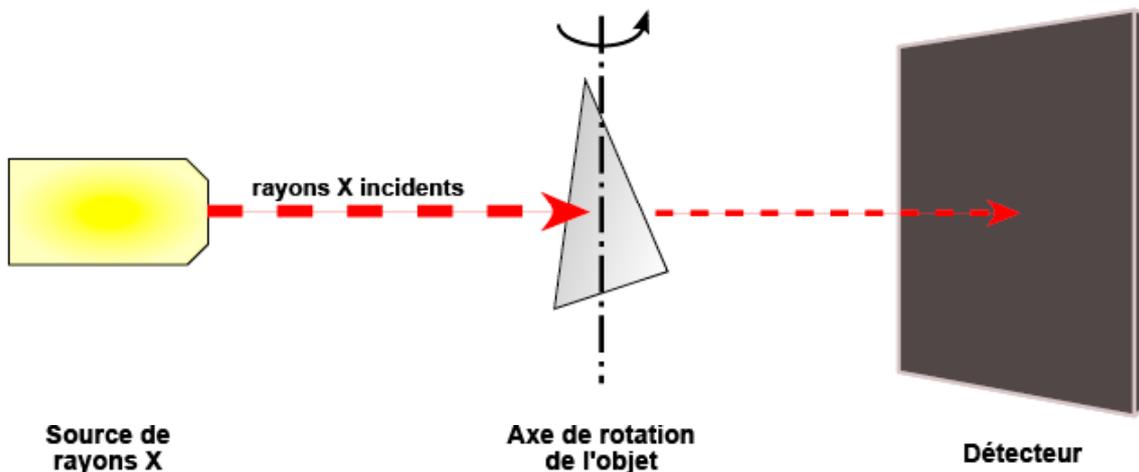
On peut traduire de manière simple cette loi en terme de nombres de photons incidents  $N_0$  et de photons transmis  $N$  (pour le cas général de  $\mu$  non constant) :

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\int_s \mu(s) ds\right)$$

Ainsi, si le matériau est homogène, N ne dépend que de l'épaisseur traversée, sinon, il dépendra de l'atténuation locale en tout point de l'échantillon. Cette variation est à l'origine des contrastes détectés sur les radiographies d'absorption des rayons X. C'est ce principe que l'on utilise en tomographie puisque la méthode consiste à réaliser une série de radiographies pour une multitude d'angles de vue de l'échantillon à étudier.

### 2.1.2 Principe de reconstruction par tomographie

Pour comprendre les principes de la reconstruction par tomographie en 3D, nous nous baserons sur le cas de reconstruction 2D, plus facile à aborder. Il s'agit de reconstruire une coupe de l'échantillon (coupe perpendiculaire à l'axe de rotation de l'objet). Le principe général est celui du scanner médical : on effectue des radiographies en faisant varier l'angle de vue de l'objet afin d'obtenir un jeu correspondant à un tour complet de l'objet. A partir de ce jeu de radios, on peut reconstruire la carte du coefficient local d'absorption en tout point de l'échantillon. Dans le cas du scanner médical, le patient est fixe et le dispositif tourne, pour la tomographie c'est l'inverse (voir **Figure 17**).



**Figure 17** : Schéma de principe d'un tomographe à rayons X

L'acquisition des données est faite de la façon suivante. On suppose un faisceau incident parallèle traversant la pièce. L'image à reconstruire est constituée de  $m \times n$  pixels avec pour chacun un coefficient d'absorption local  $\mu_{ij}$ . L'intensité mesurée par le détecteur k dans la position l c'est à dire le nombre de photons transmis, noté  $N_{lk}$  (voir **Figure 18**), est proportionnelle à la sommation des coefficients d'absorption sur chaque pixel de la bande hachurée :

$$\ln\left(\frac{N_0}{N_{lk}}\right) \propto \sum_j \mu_{lj}$$

Il en est de même pour tous les éléments sensibles du détecteur et pour chaque position angulaire successive. On obtient un système d'équations linéaires dans lequel le logarithme des intensités est donné par les mesures (chaque radiographie), les  $\mu_{ij}$  étant les inconnues.

L'algorithme de résolution de ce système permet de reconstruire la carte du coefficient d'absorption local. En pratique la méthode de reconstruction fait appel à une projection dans le plan de Fourier puis une transformée inverse, d'où la terminologie d'algorithme de rétroprojection.

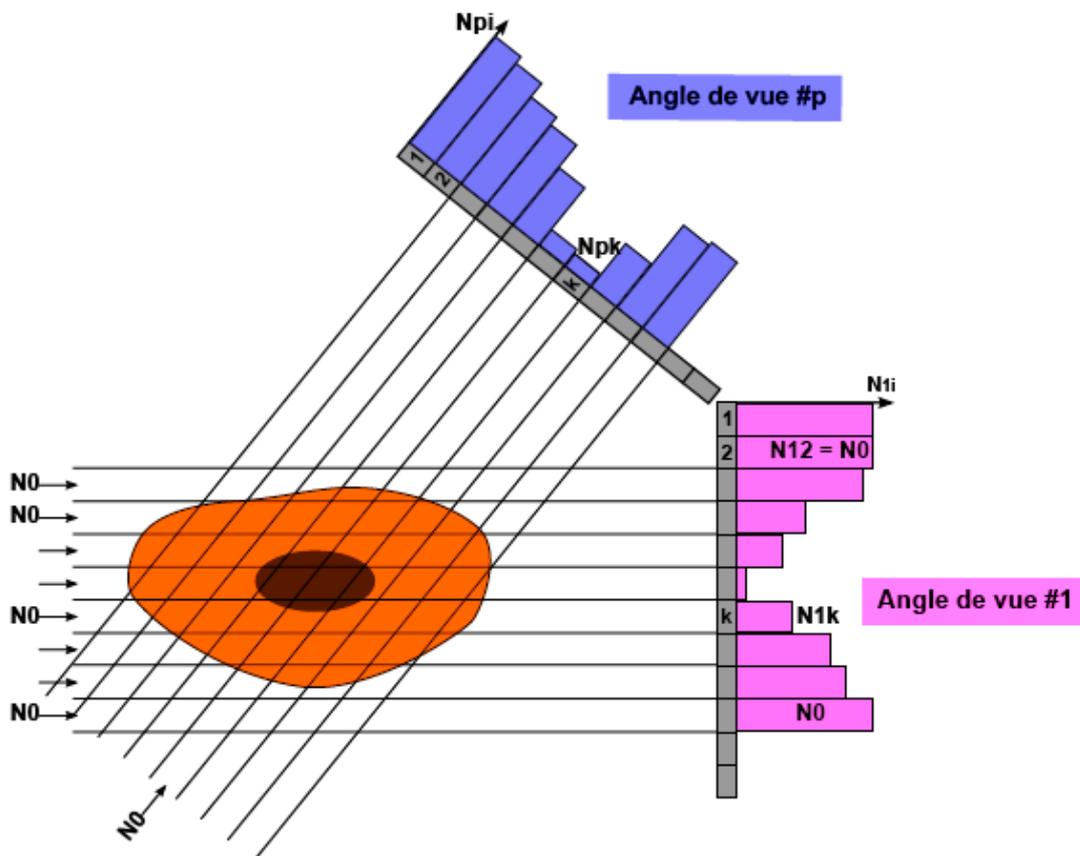


Figure 18 : Acquisition des données en tomographie

### 2.1.3 Sources et détecteurs de rayons X

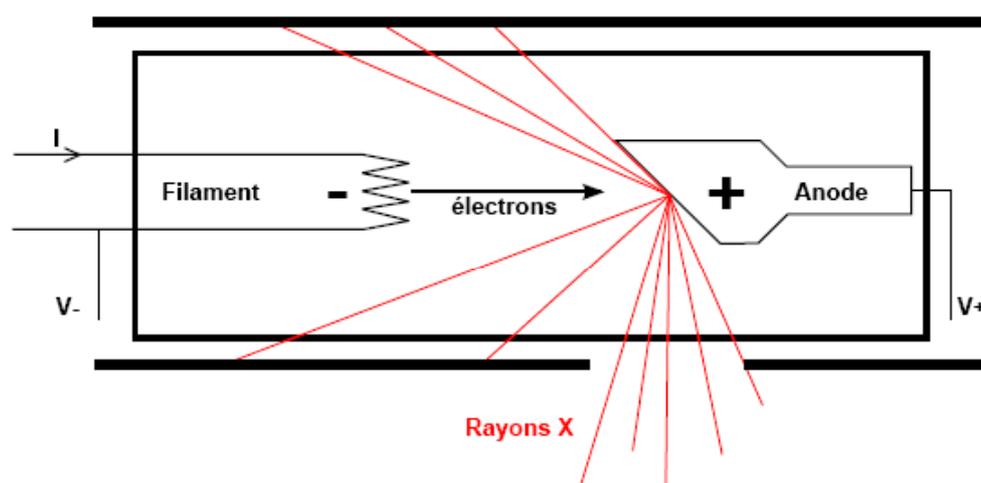
#### (a) Sources

Les sources « traditionnelles » de rayons X utilisent des tubes dans lesquels règne un vide poussé. Un filament est chauffé par la circulation d'un fort courant de sorte à arracher des électrons. Ces électrons sont accélérés vers une cible par un champ électrique élevé créé entre le filament qui fait office de cathode et la cible qui constitue l'anode. Les électrons entrent alors en collision avec l'anode et l'on a émission de rayons X par les deux mécanismes que nous avons évoqués plus haut : émission « de freinage » (spectre continu) et « de perturbation électronique » (raies caractéristiques). L'interaction entre les électrons accélérés et l'anode produit des rayons X mais aussi surtout une grande partie se transforme en chaleur. Un

dispositif de refroidissement est donc nécessaire, habituellement par air forcé ou par eau. Un schéma de principe de ce type de tube est présenté en **Figure 19**.

Ce type de source est le plus courant, utilisé notamment dans le domaine médical pour les applications telles que scanner et tomographie. Ce mode de production de rayons X présente avantages et inconvénients. Tout d'abord, le rayonnement est polychromatique (spectre continu) et il convient donc d'en tenir compte dans la formule de Beer-Lambert et dans la méthode de reconstruction. Ensuite, le faisceau n'est pas parallèle puisque l'on a un foyer d'émission. Cela doit être pris en compte également dans la méthode mathématique de reconstruction. En revanche, cela présente l'intérêt de pouvoir procéder de manière très simple à des agrandissements en jouant sur les distances entre le foyer, l'objet et le détecteur.

*Remarque : Un autre mode production de rayons X est celui des installations de type synchrotron. Dans une telle installation, des électrons sont tout d'abord accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière puis ils sont injectés dans un anneau de stockage où ils tournent en trajectoire circulaire imposée par des aimants tout autour de l'anneau. Ces électrons subissent donc une accélération centripète constante, et ainsi émettent un rayonnement X tangent à leur trajectoire. Ainsi, tout autour de l'anneau sont disposées des lignes de lumière qui permettent de recueillir le rayonnement pour les applications scientifiques. L'intensité et la qualité du rayonnement produit permettent des applications diversifiées de tomographie.*



**Figure 19** : Principe d'un tube à rayons X

### (b) Détecteurs

Les détecteurs sont placés dans l'axe du faisceau, derrière l'objet à analyser. Ils doivent générer des signaux analogiques issus de la création d'un courant proportionnel au nombre de photons reçus. Il existe différents types de détecteurs qui utilisent tous le pouvoir ionisant des rayons X.

Des détecteurs à gaz sont utilisés dans le milieu médical, ils utilisent le pouvoir ionisant des rayons X sur un gaz d'après le même principe que les compteurs Geiger-Müller (mesures des décharges électriques générées par l'ionisation). Ils sont bien adaptés pour les rayonnements de faible énergie. Utilisant aussi ce pouvoir d'ionisation, les détecteurs dits « solides » s'adaptent plutôt aux hautes énergies. Ces détecteurs sont constitués de cristaux semi-conducteurs soumis à une haute tension de polarisation. L'arrivée d'un photon va ioniser certains atomes et ainsi libérer une charge électrique proportionnelle à l'énergie du photon.

Enfin un dernier type de détecteur se base sur la conversion des rayons X en lumière visible par un matériau luminescent. Le principe de ces compteurs à scintillation est simple puisqu'il consiste à placer derrière l'écran fluorescent des photo-détecteurs dont l'intensité des impulsions électriques est proportionnelle à l'énergie des photons. Ce type de détecteurs est utilisé en bidimensionnel dans des installations avec source de rayonnement synchrotron ; on place derrière l'écran luminescent un ensemble optique de lentilles et une caméra CCD adaptés à l'environnement des rayons X.

Les détecteurs sont d'une importance cruciale dans une reconstruction tomographique pour différentes raisons. Leur taille conditionne évidemment une partie de la résolution finale. La vitesse est un autre paramètre clé car il faut acquérir un nombre très important de radiographies pour une seule reconstruction d'échantillon. Les temps de réponse, montée et descente du signal doivent être très brefs afin d'obtenir une réponse quasi instantanée aux fluctuations du rayonnement X.

#### 2.1.4 Présentation de l'équipement expérimental utilisé

Le tomographe de laboratoire utilisé pour cette étude est situé au laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon. Il contient un tube à émission de rayons X avec cible tungstène [PHO]. La taille du focus, et ainsi la résolution, est ajustable de 1 à 5  $\mu\text{m}$ . Le détecteur utilisé est constitué de  $1500 \times 1900$  éléments sensibles de taille  $127 \times 127 \mu\text{m}$ . Pour les scans réalisés dans cette étude, le faisceau est réglé à des valeurs proches de 90 keV et 170  $\mu\text{A}$  sans filtre additionnel. L'installation est présentée en **Figure 20**.

La source de rayons X étant conique, il est facile d'obtenir une large gamme de résolution en plaçant l'échantillon à différentes distances entre la source et le détecteur. Ainsi des résolutions de 1,5  $\mu\text{m}$  à 80  $\mu\text{m}$  sont possibles. Ces résolutions sont exprimées en terme de taille d'arête de voxel. Un voxel est un élément de volume : *pixel = picture element* et *voxel = volume element*. La résolution adoptée pour un scan est toujours le résultat d'un compromis entre la taille de l'échantillon et la résolution nécessaire pour les plus petits éléments à observer. En effet, il est impératif que l'ensemble de l'échantillon reste dans le champ de vision du détecteur durant la totalité du scan afin de garantir que chaque radiographie corresponde au même objet, et non à un objet tronqué. Cela implique que la dimension maximale de l'échantillon soit contenue dans le « cylindre de reconstruction » (voir **Figure 21**).

*Remarque : les incertitudes sur les reconstructions par tomographie sont estimées à  $\pm 1$  voxel.*

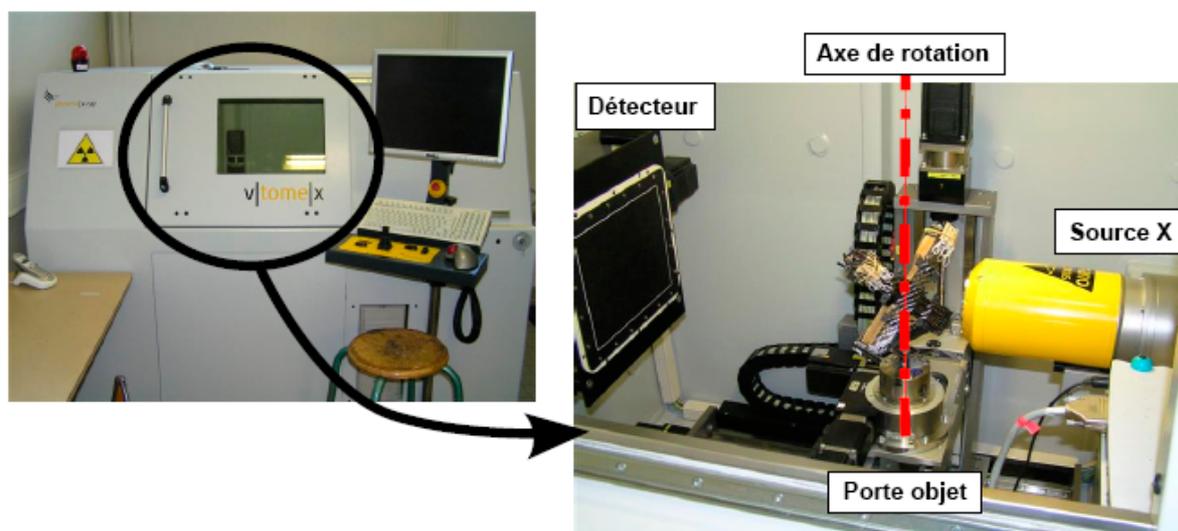


Figure 20 : Présentation de l'installation utilisée (laboratoire MATEIS)

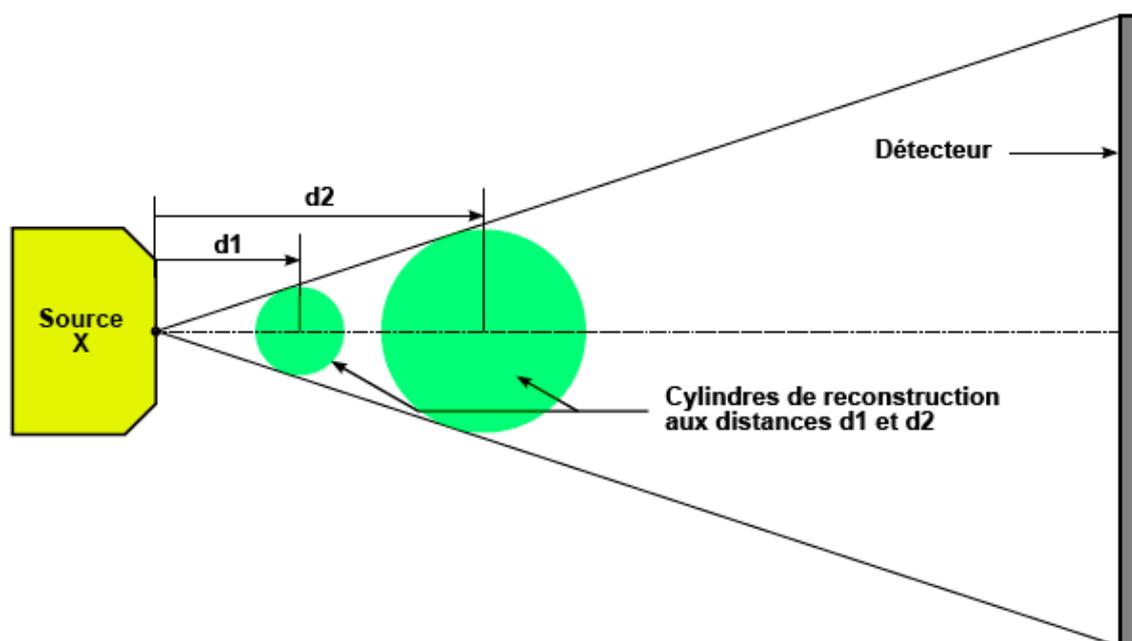


Figure 21 : Illustration du compromis taille/résolution pour un tomographe à source conique

## 2.2 Application aux renforts de composites

La tomographie aux rayons X trouve de multiples applications en sciences des matériaux [BAR00] et a déjà été utilisée comme technique d'observation non destructive des matériaux composites. En effet, comme nous l'avons souligné dans la section 1.4.2, les difficultés sont nombreuses avec certaines méthodes d'observation. Les coupes sont difficiles à réaliser en particulier sur des renforts secs, l'ajout de résine pour maintenir les renforts peut perturber la géométrie de ceux-ci... La tomographie présente un avantage certain : il n'est pas nécessaire de toucher l'échantillon pour l'observer à cœur, ce qui permet d'outrepasser les inconvénients mentionnés.

On retrouve principalement deux types d'utilisation de la tomographie pour les matériaux composites à renforts tissés. Tout d'abord dans le but d'observer des composites finis (c'est-à-dire avec résine) afin d'étudier des phénomènes tels que la rupture. On peut par exemple y faire la distinction entre zones de rupture de mèches ou zones de décohésion [RAZ06]. Ensuite pour observer des renforts secs à l'état de repos. La variabilité de l'état géométrique de repos d'un renfort tissé a été largement abordée par [DES05] en utilisant ce type d'observations. Une application directe des reconstructions par tomographie consiste également à générer des modèles géométriques à partir de ces données pour utilisation ultérieure, par exemple dans des codes de calcul [PAN03][SCH06].

Nous proposons au travers de cette étude d'étendre les analyses tomographiques à celles de renforts déformés dans le but d'enrichir nos modèles de comportement et valider les simulations effectuées. La gamme de résolution accessible avec l'équipement à disposition est parfaitement adapté à une étude mésoscopique avec des résolutions de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ . Mais des images à résolution plus haute (donc permettant la détection d'éléments de plus petite taille) de l'ordre de quelques  $\mu\text{m}$  permettent aussi une observation à échelle microscopique des fibres. Ces différents points font l'objet d'une publication [BAD08c].

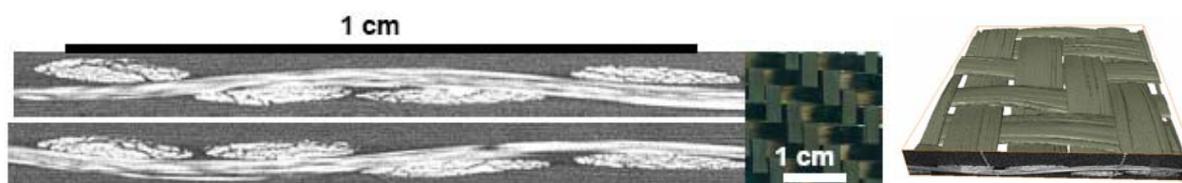
### 2.2.1 Observations mésoscopiques

A des résolutions de l'ordre de 10 à 20  $\mu\text{m}$  la taille du cylindre de reconstruction est particulièrement bien adaptée pour l'observation mésoscopique de renforts : ces résolutions rendent possible la reconstruction de plusieurs cellules élémentaires au sein d'un même renfort. En outre, ces résolutions restent convenables pour pouvoir identifier visuellement les contours des mèches.

Les observations réalisées à ces échelles, que nous qualifions donc de « mésoscopiques », sont utilisées afin d'exploiter les géométries mésoscopiques réelles des renforts, principalement les formes des sections de mèches. D'une part ceci permet d'évaluer la géométrie initiale du renfort modélisé, mais aussi surtout de caractériser les géométries déformées. La nature tridimensionnelle des données obtenues permet de réaliser des coupes ou encore des rendus 3D proches de ce qui est observé visuellement. Quelques exemples sont donnés en **Figure 22** pour les tissus utilisés dans cette étude.

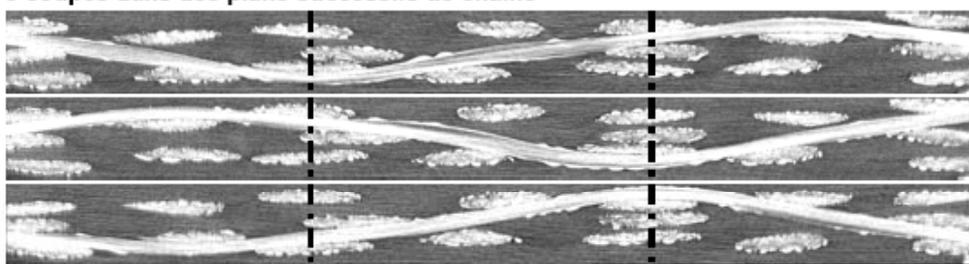
Les images du renfort G1151 non déformé (**Figure 22b**) soulignent la complexité de la structure tissée caractérisée par des géométries non triviales. On observe par exemple que les mèches de trame superposées ne restent généralement pas dans le même plan ou encore qu'une même mèche peut avoir des formes de section très différentes selon la situation dans le renfort (ces remarques sont illustrées en **Figure 22b**). Ces sections peuvent être elliptiques, très aplaties ou encore rectangulaires. Ces observations peuvent s'utiliser dans un but de modélisation géométrique de tels renforts.

Afin de valider les simulations que nous aborderons au chapitre 5, il est nécessaire d'acquérir des données sur des renforts déformés. Ceci n'est pas direct. En effet, un renfort sec n'est jamais figé et l'enduire de résine peut influencer les observations. Ainsi apparaît-il indispensable de pouvoir réaliser des essais mécaniques in situ, c'est-à-dire à l'intérieur même du tomographe.

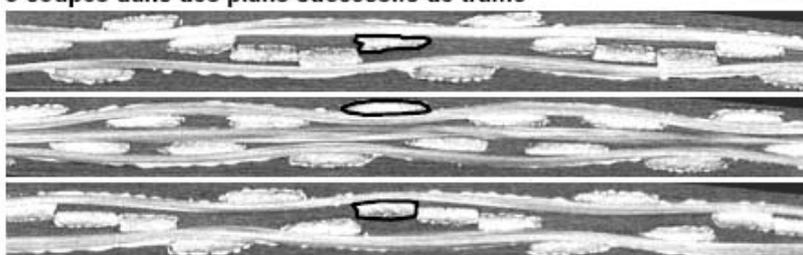


a. Sergé 2 x 2 de carbone

3 coupes dans des plans successifs de chaîne



3 coupes dans des plans successifs de trame



b. G1151

**Figure 22** : Exemples de coupes de renforts tissés reconstruites par tomographie

*(a) Montage expérimental pour observations de tissus déformés in situ*

L'objectif fixé pour un tel montage est de pouvoir solliciter un renfort tissé en tension biaxiale ou cisaillement tout en respectant les contraintes qu'impose la tomographie :

- Utilisation de matériaux non absorbants ou peu absorbants dans la zone utile où les images en transmission sont effectuées sous tous les angles.
- Dimensions adaptées afin de rester dans le cylindre de reconstruction. La résolution utilisable est fixée à 20  $\mu\text{m}$  dans le pire des cas.
- Dimensions adaptées à l'encombrement du tomographe.
- Résistance aux sollicitations de tension biaxiale de l'ordre de 20 N par mèche.

*Principe du montage proposé*

Afin de pouvoir solliciter le renfort en tension biaxiale, une éprouvette en forme de croix est utilisée. L'armature du montage est de même forme, elle sera placée dans un plan vertical et orientée à  $\pm 45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation du porte-objet. Ainsi, cela permet d'offrir une zone centrale étroite qui correspondra à la zone utile d'observation. Cette partie du montage est évidée afin de rester dans le cylindre d'observation à résolution de 20  $\mu\text{m}$ . Le choix de cette résolution permet un bon

compromis entre qualité des données obtenues et résistance de la zone centrale du montage. Un schéma du dispositif est présenté en **Figure 23**.

L'éprouvette en forme de croix est fixée en ses extrémités à celle du support par un dispositif de pinces revêtues d'une matière adhérente. On notera également l'utilisation d'un « peigne » afin de conserver au mieux l'écartement et l'alignement des mèches.

L'ensemble est réalisé en bois dur (chêne) pour satisfaire à la condition d'absorption faible des rayons X tout en conservant une résistance mécanique correcte. Le dispositif de serrage des mèches - situé hors du champ de vision - est métallique pour assurer un serrage suffisant.

#### *Cisaillement*

Afin de pouvoir cisailer la zone utile de l'éprouvette, les deux membres sont articulés au centre de la croix grâce à un axe en bois. Cette solution permet d'imposer localement, au centre de la croix, une cinématique de cisaillement pur. En périphérie du centre, des glissements entre les réseaux de mèches sont inévitables. Compte tenu des frottements faibles entre mèches et de la distance faible au centre de rotation, l'influence de ces glissements sur la géométrie finale sera négligée, de sorte que le renfort est considéré comme soumis à une cinématique de treillis, correspondant au cisaillement des renforts tissés (voir **Figure 24a**).

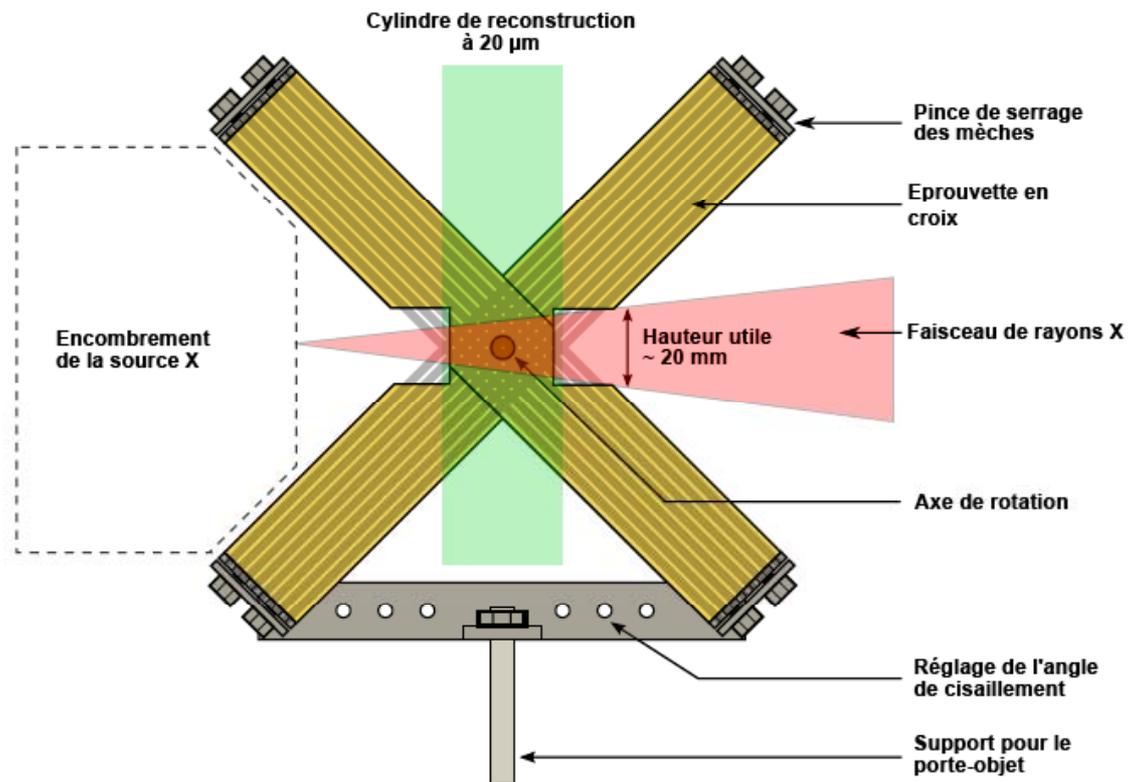
#### *Tension biaxiale*

Ce système permet évidemment de maintenir un échantillon en tension biaxiale. Cependant, la mise sous tension doit répondre à un protocole précis.

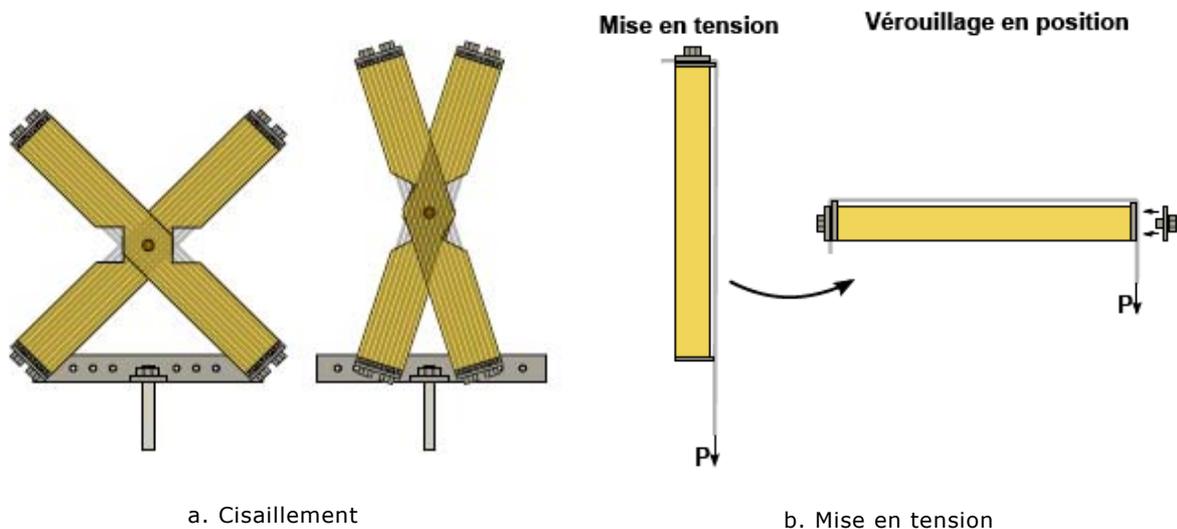
Afin de garantir l'homogénéité des tensions dans les mèches, celles-ci sont tendues individuellement à l'aide de poids. On place verticalement la direction de mèches à tendre et l'on suspend le poids correspondant à la tension souhaitée. En conservant le poids, le dispositif est remis en position horizontale afin de serrer les pinces et maintenir les mèches en position. Ce protocole permet à la fois de maîtriser une éventuelle déformation du montage sous l'effet des tensions et de s'affranchir des frottements au niveau des coudes que subissent les mèches (voir **Figure 24b**). Ces derniers assurent, en outre, un meilleur maintien des mèches face au glissement.

#### *Remarque*

Ce dispositif offre donc la possibilité supplémentaire de procéder à des sollicitations couplées, notamment de cisaillement sous tension biaxiale.



**Figure 23** : Schéma de principe du montage pour sollicitations de renforts in situ



**Figure 24** : Cisaillement et mise en tension de l'éprouvette en croix

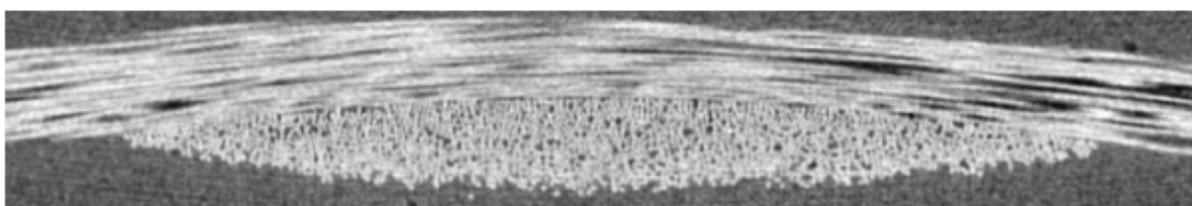
### 2.2.2 Observations microscopiques

La plage de résolution offerte par le tomographe balaie une gamme d'échelles suffisamment large pour envisager également des observations microscopiques de renforts. Ainsi est-il possible d'observer les fibres individuellement au sein de la mèche. Ce genre d'observations fournit des informations supplémentaires sur la microstructure de la mèche et la distribution spatiale des fibres en son sein.

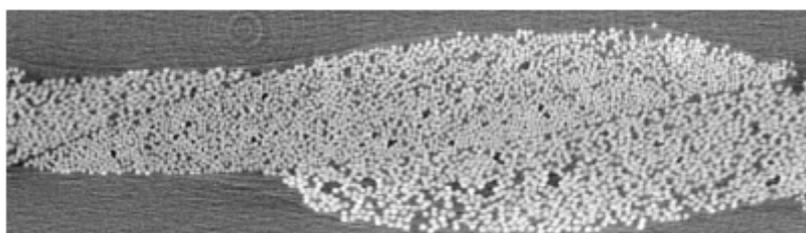
Les images présentées en **Figure 25** montrent des coupes de mèches du taffetas sous trois états : repos, tension biaxiale (arbitraire) et cisaillement. On note clairement que le paquet de fibres tend à se densifier sous les sollicitations mécaniques imposées bien que la distribution des fibres apparaisse, visuellement, aléatoire dans chacun des trois cas. On propose ici une analyse quantitative de la morphologie de ces images.



a. Section initiale d'une mèche du renfort



b. Section d'une mèche du renfort sous tension biaxiale



c. Section d'une mèche du renfort cisailé

**Figure 25** : Observations de taffetas avec une résolution de 2,85 à 5  $\mu\text{m}$  (échelle valable pour les trois images)

#### *(a) Analyse de la covariance à deux points*

L'analyse proposée consiste à calculer la covariance à deux points d'images binaires de la microstructure. Ce type de procédure est décrit dans [DOU03] et utilisé également dans [DEL03] pour d'autres types de microstructures.

La covariance à deux points  $C(x)$  est la probabilité pour deux points séparés d'une distance  $x$  d'appartenir à la même phase. Pour cette étude, il s'agit de la phase « fibre ». L'échelle de probabilité varie de 0 à 255, échelle du niveau de gris codée sur 8 bits. Bien que les données de tomographie soient tridimensionnelles par nature, la microstructure des mèches est bien connue dans la direction longitudinale, on ne s'intéresse alors qu'à des coupes transversales de mèche. En calculant la covariance selon deux directions perpendiculaires (ici selon l'épaisseur et la largeur de la mèche), les courbes obtenues (covariogrammes) renseignent sur la distribution spatiale des fibres dans la section transverse de la mèche. Si les

covariogrammes sont similaires dans les deux directions, alors la répartition géométrique de fibres peut être supposée isotrope.

Le calcul de covariance à deux points s'effectue à partir d'une succession assez rapide d'opérations : binarisation de l'image, transformée de Fourier de l'image binaire, calcul du carré de l'image transformée, calcul de l'inverse du résultat puis tracé des histogrammes selon les directions souhaitées. Voir [DOU03] pour plus de détails. La **Figure 26** présente les covariogrammes obtenus selon les directions 2 et 3 indiquées sur la figure. Chacune des courbes correspond à une moyenne réalisée sur un grand nombre de zones : quatre sections différentes de la mèche sont utilisées et pour chacune, plus d'une vingtaine de zones d'observations (contenant environ 70 fibres chacune) sont prélevées. Le résultat présenté ici est obtenu à partir du scan d'une mèche au sein d'un renfort cisailé, toutefois le résultat est similaire avec un échantillon sous tension biaxiale.

*Remarque : cette procédure n'est pas faite pour un renfort non déformé car la variabilité constatée sur les renforts non déformés [DES05] et la dispersion initiale importante des fibres rendent les résultats inexploitable.*

Les courbes obtenues peuvent s'interpréter de la façon suivante. Le premier minimum rencontré sur une courbe correspond à la distance moyenne du « vide » entre deux fibres voisines. De même, le premier pic rencontré correspond à la distance moyenne de la première fibre voisine dans la direction considérée. Ici, pour chacune des deux directions, le premier minimum et le premier pic se trouvent à la même distance, ce qui révèle une disposition isotrope des fibres dans la section. Les différences légères entre les deux covariogrammes sont attribuées à des artefacts de reconstruction dus à la forte anisotropie des échantillons. En effet des fluctuations du niveau de gris local moyen (visibles sur la coupe en **Figure 26**) à l'intérieur même des zones choisies induisent des différences après seuillage/binarisation des images. Cela a pour conséquence de modifier les covariogrammes sur les longues distances.

Hormis cet artefact, l'ensemble d'observations par tomographie et d'analyses présenté dans cette section permet de soutenir l'hypothèse de répartition quasi isotrope des fibres dans les sections transverses de mèches pendant la déformation du renfort. Cette hypothèse est utilisée dans la suite pour le modèle de comportement du matériau.

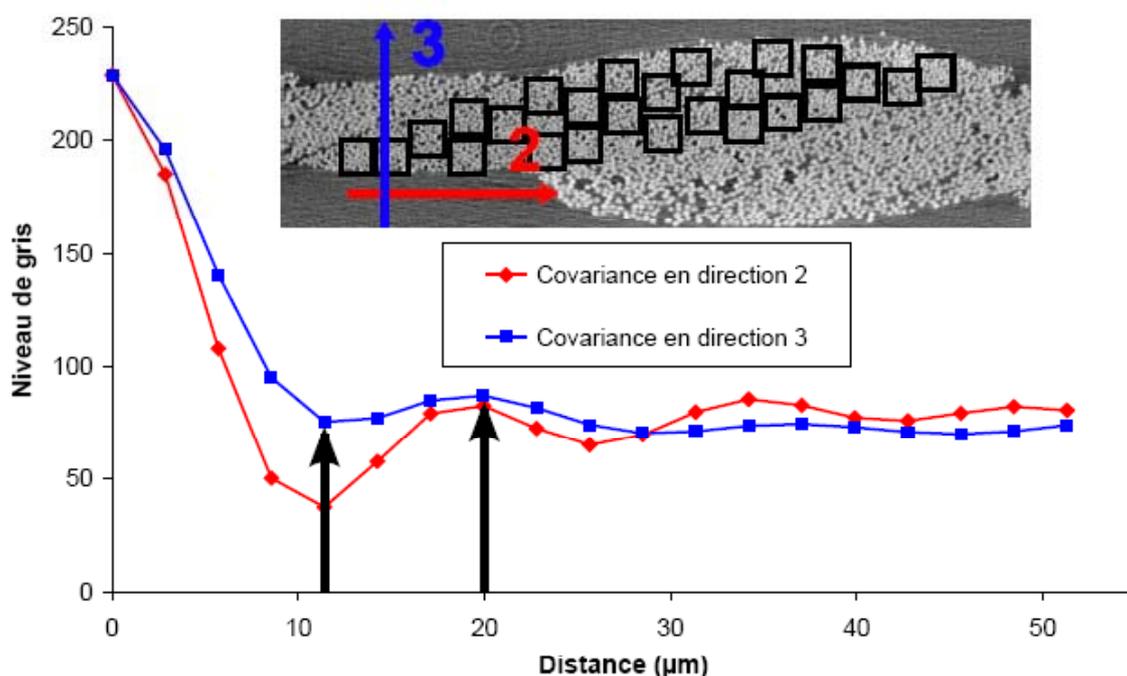


Figure 26 : Covariogrammes moyens réalisés sur taffetas déformé en cisaillement

### 2.3 Conclusions du chapitre 2

Nous avons rappelé au travers de ce chapitre les principes de base de la tomographie par absorption de rayons X, une technique de reconstruction de la géométrie 3D à cœur d'échantillons massifs. Le dispositif disponible au sein du laboratoire MATEIS offre une flexibilité particulièrement adaptée à l'étude mésoscopique des renforts tissés de composites.

En effet les résolutions possibles permettent de reconstruire les géométries sur un domaine de quelques cellules élémentaires du tissé (résolution de l'ordre de 10 µm pour une arête de voxel). Ainsi peut-on déterminer les géométries des renforts, à savoir principalement les formes des mèches. On pourra utiliser celles-ci de manière qualitative mais aussi quantitative quand il s'agira de valider les résultats de simulations sur le plan géométrique.

Par ailleurs, à des résolutions plus hautes (donc arête de voxel plus courte) de l'ordre de 3 µm, il est possible de distinguer les fibres au sein de la mèche. On aborde là l'échelle microscopique des renforts. Les analyses réalisées à cette échelle montrent que la distribution des fibres dans les sections transverses des mèches est quasi isotrope quand le renfort est sollicité.

De ce constat est tirée la première hypothèse du modèle de matériau fibreux constituant les mèches. Le comportement mécanique de la mèche est supposé isotrope transverse avec comme direction d'anisotropie la direction longitudinale des fibres. Bien que cette hypothèse soit difficile à vérifier expérimentalement, nous avons noté que la microstructure est isotrope dans le plan transverse après déformation. Des travaux réalisés sur des systèmes légèrement différents - des composites renforcés de particules - ont déjà montré [LEB01] que si la distribution spatiale de particules est aléatoire, donc isotrope, l'isotropie tend à se conserver. Bien qu'une légère anisotropie soit mesurable par analyse d'images, l'influence

sur les propriétés mécaniques s'est révélée indétectable. Ainsi l'hypothèse d'isotropie transverse mécanique pour la mèche semble-t-elle raisonnable.

Ceci constitue un premier pas vers le modèle du matériau « mèche de renfort tissé de composite » que nous devons établir. Le chapitre à venir est dédié au développement de ce modèle.

# 3

## Modèle de comportement d'une mèche constituée de fibres

### **3.1 Hypothèses de comportement et aspects spécifiques**

- 3.1.1 Hypo-élasticité
- 3.1.2 Spécificités de comportement

### **3.2 Suivi de la direction des fibres**

- 3.2.1 Grandes transformations et précautions
  - (a) *Objectivité*
  - (b) *Indifférence matérielle et dérivée objective*
- 3.2.2 Applications aux lois hypo-élastiques
  - (a) *Dérivée objective en rotation*
  - (b) *Actualisation des contraintes*
- 3.2.3 Application aux matériaux à une direction de fibres
  - (a) *Introduction - Choix de la rotation*
  - (b) *Utilisation d'une dérivée objective basée sur la rotation des fibres*
  - (c) *Calcul de la rotation  $\Phi$*
  - (d) *Unicité du choix*
  - (e) *Exemples élémentaires*

### **3.3 Comportement transverse**

- 3.3.1 Observations et hypothèses
  - (a) *Isotropie transverse*
  - (b) *Observations qualitatives*
- 3.3.2 Ecriture de la loi de comportement transverse
- 3.3.3 Paramètres de comportement
- 3.3.4 Conséquence sur le module d'Young longitudinal

### **3.4 Implémentation dans le code de calcul**

- 3.4.1 Données d'entrée/sortie - Base de calcul
- 3.4.2 Adaptation des données
- 3.4.3 Algorithme

### **3.5 Conclusions du chapitre 3**



$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt}$  (voir paragraphe 3.2.1). Une dérivée objective peut être vue comme la dérivée telle qu'elle apparaît pour un observateur fixe par rapport à la matière. Puisque la matière se déforme, la notion « d'observateur fixe par rapport à la matière » n'est pas unique. Cela peut être interprété de différentes manières, il existe ainsi différentes dérivées objectives qui approchent ce but et garantissent toutes un état constant sous mouvement de corps rigide. Le choix d'une dérivée objective adaptée est un aspect primordial pour le modèle de comportement que nous mettrons en place. Nous aborderons cela en détail au paragraphe 3.2.3.

Ce type de loi s'adapte bien au calcul incrémental par intégration de l'équation (3.1) et permet de garder un formalisme très proche de la physique, notamment pour le tenseur de comportement (tangent). Elles sont assez largement utilisées dans les codes de calcul par éléments finis [HUG80][BAT96][CRI97][BEL00], notamment dans Abaqus.

### 3.1.2 Spécificités de comportement

Le modèle de comportement du matériau continu équivalent à une mèche doit traduire un certain nombre de caractéristiques du matériau réel fibreux à une direction de fibres.

Le premier des points importants concerne le comportement longitudinal de la mèche qui va piloter les aspects principaux de la transformation du renfort fibreux et peut mobiliser des énergies de déformation importantes. En effet, la rigidité de la mèche selon sa direction longitudinale est très grande devant toutes les autres rigidités. Cet aspect est critique : il est nécessaire de suivre correctement cette direction sous peine de cumuler des erreurs importantes. Ce point sera validé par l'utilisation d'une dérivée objective adaptée au milieu à une direction de fibres (section 3.2).

Ensuite, le second point à traiter concerne le comportement transverse de la mèche, c'est-à-dire dans le plan normal à la direction longitudinale (des fibres). Nous avons relevé au paragraphe 1.3.1 l'importance de l'écrasement de la mèche dans la plupart des mécanismes de déformation des renforts tissés (cisaillement plan, tension biaxiale, compression). Il apparaît nécessaire d'apporter une écriture adaptée du comportement transverse de la mèche dans le modèle continu. Ceci sera abordé à partir d'hypothèses physiques simples, appuyées par des images de tomographie (section 3.3).

Enfin, le matériau doit conserver une des propriétés principales des mèches qu'est la faible rigidité de flexion. Il a été montré [GAS00] que pour avoir un comportement à rigidité de flexion faible, un milieu continu doit avoir un module de cisaillement (ici longitudinal) faible ou nul. Pour éviter les soucis numériques, les modules de cisaillement longitudinaux ne seront pas pris comme nuls mais de valeur négligeable devant le module d'Young longitudinal.

## 3.2 Suivi de la direction des fibres

Une des problématiques principales du modèle de matériau continu équivalent à un matériau fibreux concerne le suivi de la direction forte d'anisotropie, et ce, pour les raisons que nous venons de citer dans la section 3.1.2 ci-dessus. Cette problématique se situe à la croisée de deux points importants : le principe d'objectivité (des contraintes) d'une part et l'actualisation des contraintes lors de l'intégration numérique en temps d'autre part.

Avant d'aborder en détail la manière de traiter cette question, il est proposé de rappeler certaines notions spécifiques aux grandes transformations qui nous mènent aux difficultés principales. Nous verrons alors comment les adapter à notre problème puis les implémenter dans le code de calcul.

### 3.2.1 Grandes transformations et précautions

#### (a) Objectivité

L'objectivité est un principe qui assure que certaines grandeurs soient fondamentalement les mêmes pour tout observateur [SID82]. Ceci revient à exprimer l'indépendance de ces grandeurs devant le choix de l'observateur. Par exemple, un tenseur de contraintes ne peut pas être nul pour un observateur fixe dans un référentiel alors qu'il ne l'est pas pour un observateur mobile dans ce même référentiel. A l'inverse, une grandeur telle que la vitesse d'une particule peut très bien être nulle pour un observateur et non pour un autre : la vitesse est, par nature, une grandeur non objective. Le principe d'objectivité se ramène donc à définir l'invariance de grandeurs devant des rotations, au sens large. Deux points de vue équivalents permettent d'illustrer cela [SID82] : l'entraînement en rotation ou le changement d'observateur. L'entraînement d'un tenseur par une rotation conserve-t-il ce tenseur ? Un tenseur fixe par rapport à un observateur fixe est-il le même pour un observateur mobile ?

Toutefois, une transformation objective (exemple, une rotation) n'est pas un simple changement de base, elle dépend de la nature de chaque grandeur à transformer. En effet, par un changement de base, un tenseur n'est pas affecté intrinsèquement, seule la matrice de ses composantes subit les règles de changement de base. Chaque grandeur, selon sa nature, aura des règles de transformation propres qui correspondent à l'entraînement en rotation. Cela peut se résumer comme suit. En notant  $\tilde{\mathbf{A}}$  la grandeur eulérienne  $\mathbf{A}$  tournée par un tenseur orthogonal  $\underline{\mathbf{Q}}$ , les formules de transformations objectives pour des grandeurs eulériennes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{A scalaire : } \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \\ \underline{\mathbf{A}} \text{ tenseur de premier ordre : } \tilde{\underline{\mathbf{A}}} &= \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \text{ tenseur de second ordre : } \tilde{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} &= \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces lois de transformation permettent aussi d'analyser si les tenseurs eulériens usuels, comme le tenseur des contraintes de Cauchy, répondent au principe d'objectivité.

#### (b) Indifférence matérielle et dérivée objective

Le principe d'indifférence matérielle traduit le fait que l'écriture des équations tensorielles est la même dans tout référentiel [SID82]. Une loi de comportement doit vérifier le principe d'indifférence matérielle, c'est-à-dire s'écrire sous une forme indépendante de l'observateur. On parle aussi d'universalité d'une loi de comportement [GAR02]. Par conséquent, les grandeurs en jeu doivent être objectives. Nous venons de voir que tous les tenseurs usuels ne sont pas objectifs (exemple, la vitesse), il convient donc d'y prêter attention dans l'écriture de lois de comportement.

Nous arrivons ainsi face au problème de l'objectivité des dérivées utilisées dans certaines lois, en particulier dans les lois hypo-élastiques (3.1). Illustrons cette difficulté en dérivant « directement » le tenseur  $\tilde{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ , obtenu par rotation de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  eulérien supposé objectif :



On peut écrire cette dérivée objective sous une autre forme. Pour cela, re-calculons la dérivée temporelle directe de  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Nous faisons apparaître cette fois-ci les vecteurs de base du repère tourné (voir **Figure 28**), notés  $\{\underline{\underline{e}}_i\} = \{\underline{\underline{e}}_1; \underline{\underline{e}}_2; \underline{\underline{e}}_3\}$ , et le spin de ce repère  $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{Q}}}\underline{\underline{Q}}^T$  tel que  $\dot{\underline{\underline{e}}}_i = \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{e}}_i$  :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \sigma_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}} &= \dot{\sigma}_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j + \sigma_{ij} \dot{\underline{\underline{e}}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j + \sigma_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \dot{\underline{\underline{e}}}_j \\ &= \dot{\sigma}_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j + \sigma_{ij} (\underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{e}}_i) \otimes \underline{\underline{e}}_j + \sigma_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes (\underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{e}}_j) \\ &= \underline{\underline{\sigma}}^\nabla + \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}\underline{\underline{\Omega}}^T \\ &= \underline{\underline{\sigma}}^\nabla + \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\underline{\underline{\Omega}}\end{aligned}$$

Le premier terme obtenu est bien la dérivée intrinsèque au repère tourné - c'est-à-dire la dérivée directe dans ce repère - et on obtient alors la forme suivante pour la dérivée objective en rotation  $\underline{\underline{\Omega}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\nabla = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}}\underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{\sigma}} \quad (3.3)$$

Pour conclure, une dérivée objective en rotation n'est autre que la vitesse d'un tenseur du second ordre eulérien dans la repère tournant. Cette notion est bien connue en mécanique des solides indéformables pour els tenseurs d'ordre 1 (théorème de la base mobile). Ici,  $\underline{\underline{\sigma}}$  représente la quantité relative au repère de référence,  $\underline{\underline{\sigma}}^\nabla$  représente la quantité relative à la base tournante et les deux derniers termes représentent les termes d'entraînement.

En mécanique des milieux continus en grandes transformations, il convient de faire un choix pour la rotation  $\underline{\underline{\Omega}}$ . En effet, compte tenu des déformations de la matière, il n'est pas possible de suivre rigoureusement celle-ci avec une simple rotation. On ne peut que suivre au mieux la matière. Il existe différentes alternatives pour répondre à cette difficulté. Parmi elles les dérivées de Green Naghdi et de Jaumann sont très largement utilisées dans les codes de calcul, elles utilisent :

- Pour Green Naghdi, la rotation polaire  $\underline{\underline{R}}$  issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation :  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}$ .
- Pour Jaumann, la rotation  $\underline{\underline{R}}_S$  du repère corotationnel. Ce repère est défini par son spin  $\underline{\underline{W}}$  égal au tenseur des taux de rotation (partie antisymétrique du gradient des vitesses) :  $\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}}^T) = \dot{\underline{\underline{R}}}_S \underline{\underline{R}}_S^T$ .

Le logiciel Abaqus/explicit utilise la première de ces deux alternatives. Nous verrons par la suite que nous ne pouvons nous en satisfaire (section 3.2.3).

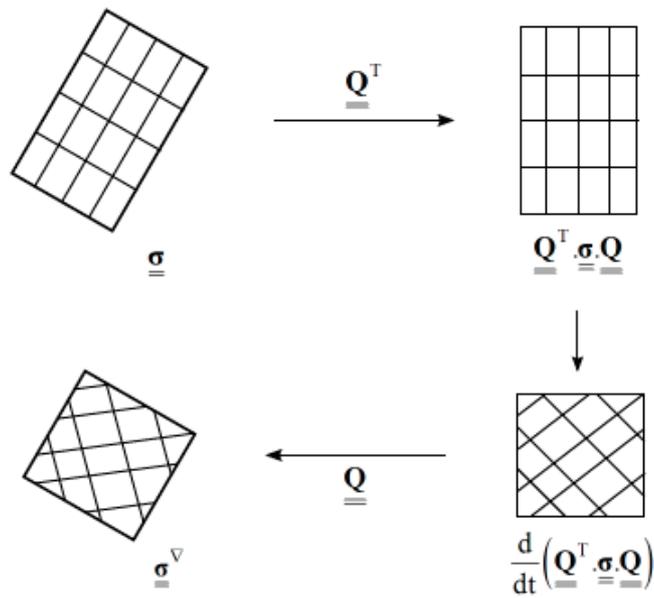


Figure 27 : Calcul de dérivée objective

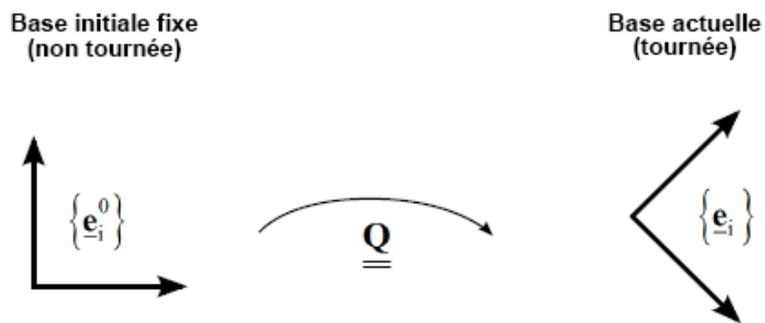


Figure 28 : Base tournée et non tournée

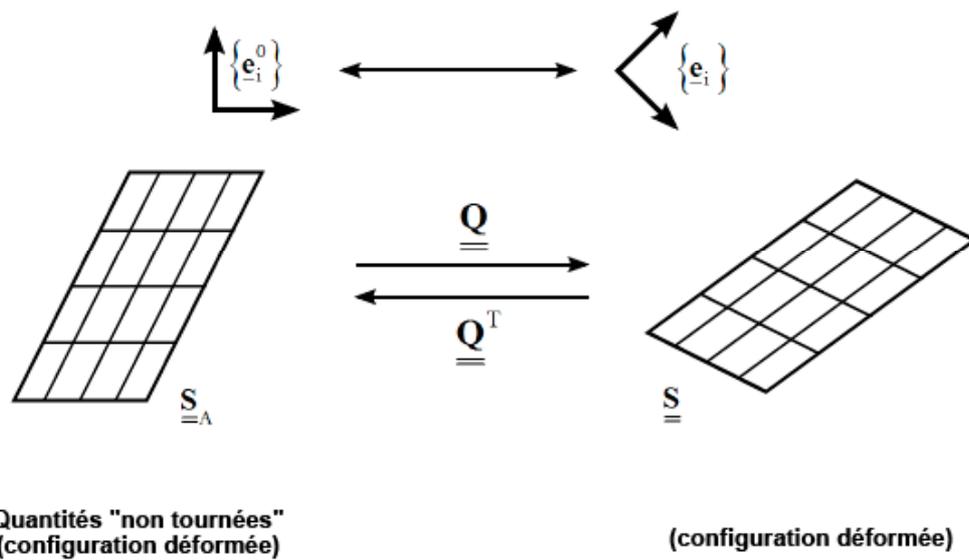


Figure 29 : Quantités non tournées en configuration déformée

(b) Actualisation des contraintes

C'est lors du calcul des contraintes que le comportement mécanique joue son rôle majeur. Connaissant l'état de contraintes à un instant  $t^n$  et les champs de déplacement aux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , il s'agit de calculer l'état de contraintes à l'instant  $t^{n+1}$ .

Plaçons nous du point de vue de l'observateur tourné, et notons d'un indice  $A$  les quantités dites non tournées :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_A &= \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{G}}_A \cdot \underline{\underline{S}}_A &= \underline{\underline{Q}}^T \cdot \left( \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{S}} \right) \cdot \underline{\underline{Q}} \end{aligned}$$

pour tous tenseurs  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{G}}$  de second et quatrième ordre.  $\underline{\underline{S}}_A$  représente donc  $\underline{\underline{S}}$  pour un observateur qui est fixe dans le repère tourné (voir **Figure 29**). Il est important de remarquer que le tenseur  $\underline{\underline{S}}_A$  exprimé (ou projeté) dans la base initiale non tournée  $\{\underline{\underline{e}}_i^0\}$  a les mêmes composantes que  $\underline{\underline{S}}$  exprimé dans la base tournée  $\{\underline{\underline{e}}_i\}$ . Ceci est montré en Annexe A.

Ainsi, l'équation (3.1) peut se réécrire :

$$\left( \underline{\underline{\sigma}}^\nabla \right)_A = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}}_A$$

Et puisque les quantités sont non tournées, dérivée objective et dérivée temporelle directe sont égales :  $\left( \underline{\underline{\sigma}}^\nabla \right)_A = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \left( \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_A$ , on peut donc encore écrire :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_A = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}}_A \quad (3.4)$$

Dès lors, on peut réaliser une intégration directe de l'équation (3.4) entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . En supposant que l'incrément  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  est suffisamment petit pour linéariser l'intégration, elle mène à la formule suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_A^{n+1} &= \underline{\underline{\sigma}}_A^n + \underline{\underline{\Delta\sigma}}_A \\ \text{avec } \underline{\underline{\Delta\sigma}}_A &= \underline{\underline{C}}_A^{n+1/2} : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_A = \underline{\underline{C}}_A^{n+1/2} : \underline{\underline{D}}_A^{n+1/2} \Delta t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cette relation donne la contrainte « finale » comme somme de la contrainte « initiale » et de l'incrément de contrainte sur  $\Delta t$ . Afin de l'implémenter dans un logiciel de calcul, il est nécessaire de projeter chaque grandeur tensorielle de cette relation dans une même base. Ainsi, puisque les composantes du tenseur  $\underline{\underline{S}}_A$  exprimé dans la base initiale (non tournée)  $\{\underline{\underline{e}}_i^0\}$  sont les mêmes que celles du tenseur  $\underline{\underline{S}}$  exprimé dans la base tournée  $\{\underline{\underline{e}}_i\}$ , les deux relations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{\sigma}}_A^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} &= \left[ \underline{\underline{\sigma}}_A^n \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} + \left[ \underline{\underline{C}}_A^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} \left[ \underline{\underline{D}}_A^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} \Delta t \\ \left[ \underline{\underline{\sigma}}_A^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}} &= \left[ \underline{\underline{\sigma}}_A^n \right]_{\underline{\underline{e}}_i^n} + \left[ \underline{\underline{C}}_A^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1/2}} \left[ \underline{\underline{D}}_A^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1/2}} \Delta t \end{aligned} \quad (3.6)$$

Remarque : la notation utilisée est la suivante,  $[\mathcal{S}]_{e_i^n}$  représente la matrice des composantes du tenseur  $\mathcal{S}$  exprimé dans la base  $\{\underline{e}_i\}$  à l'instant  $t^n$ .

L'équation (3.6) est la formule de Hughes & Winget [HUG80] très couramment utilisée dans les codes de calcul par éléments finis. Elle présente l'avantage d'être écrite dans la base tournée par la rotation  $\underline{\mathbf{Q}}$  qui définit la dérivée objective utilisée, ce qui lui confère cette forme simple.

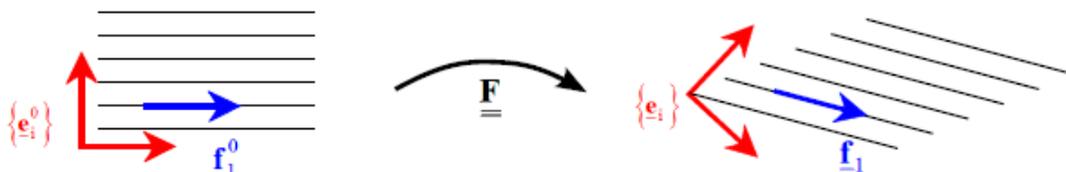
### 3.2.3 Application aux matériaux à une direction de fibres

#### (a) Introduction - Choix de la rotation

Le matériau considéré dans cette étude est constitué d'une seule direction de fibres que l'on notera  $\underline{\mathbf{f}}_1$  (vecteur unitaire). Par conséquent la rigidité globale du matériau est largement dominée par cette direction, c'est-à-dire que  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est fortement orienté par  $\underline{\mathbf{f}}_1$ . Ainsi la matrice des composantes de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  a une forme « simple » lorsque ce tenseur est projeté dans une base qui correspond au repère d'isotropie transverse. Dans ce cas on peut alors distinguer les composantes de rigidité longitudinale (liée à la rigidité de la mèche) et de rigidités transverses (caractéristiques du comportement transverse de la mèche).

Dans la base  $\{\underline{e}_i\}$  animée de la rotation  $\underline{\mathbf{Q}}$  introduite précédemment, la direction  $\underline{\mathbf{f}}_1$  n'est en général pas constante (voir **Figure 30**). En effet, il s'agit d'une direction matérielle : la direction initiale  $\underline{\mathbf{f}}_1^0$  est transportée par le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  gradient de la transformation :  $\underline{\mathbf{f}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{f}}_1^0$ . La base tournée vérifie quant à elle :  $\underline{e}_i = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{e}_i^0$ . Par conséquent, la projection de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  dans cette base n'est pas de forme simple et son utilisation est délicate.

Pour dépasser cette difficulté, l'approche proposée consiste à définir une nouvelle dérivée objective, basée sur la rotation de la direction de fibres [HAG04][HAG05]. Pour un matériau continu classique, il existe différentes façons de suivre au mieux la matière. Les rotations le plus fréquemment utilisées (Green Naghdi, Jaumann) sont deux choix possibles. Pour un matériau très fortement orienté, le choix devient plus évident : la rotation à considérer est celle de la direction d'anisotropie. Nous montrerons en outre que ce choix est le seul possible pour un matériau de ce type [BAD08a].



**Figure 30** : Cas général d'une transformation où  $\underline{\mathbf{f}}_1$  n'est pas fixe dans la base  $\{\underline{e}_i\}$

(b) Utilisation d'une dérivée objective basée sur la rotation des fibres

On propose dans cette section de réécrire les développements précédents en utilisant une dérivée objective en rotation basée sur la rotation de la direction  $\underline{\mathbf{f}}_1$ , direction des fibres dans le matériau. Bien qu'il en existe une infinité (toutefois, nous la définirons complètement ci dessous), on note cette rotation  $\underline{\Phi}$ .

Le point de départ est la loi de comportement hypo-élastique (3.1) qui se réécrit :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\nabla\Phi} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\nabla\Phi} = \underline{\underline{\underline{\Phi}}} \cdot \left( \frac{d}{dt} (\underline{\underline{\underline{\Phi}}}^T \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Phi}}}) \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\Phi}}}^T = \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Omega}}}_{\Phi} - \underline{\underline{\underline{\Omega}}}_{\Phi} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.8)$$

où  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\nabla\Phi}$  est la dérivée objective basée sur la rotation  $\underline{\underline{\underline{\Phi}}}$  des fibres, et  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}_{\Phi} = \dot{\underline{\underline{\underline{\Phi}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Phi}}}^T$  le spin correspondant. Cette rotation ne vise à suivre qu'une seule direction dans l'espace, il reste donc une indétermination lorsque l'on cherche à la calculer. La procédure adoptée afin de lever cette indétermination est développée dans la section suivante. Il est également montré en Annexe B que cette dérivée est objective.

Les développements menant à la formule d'actualisation des contraintes adaptée à ce nouveau choix de rotation sont identiques à ceux réalisés entre les équations (3.4) et (3.6). On définit la base  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\} = \{\underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_2, \underline{\mathbf{f}}_3\}$  comme base liée à la direction des fibres  $\underline{\mathbf{f}}_1$  et donc animée de la rotation  $\underline{\underline{\underline{\Phi}}}$ . La formule (3.6) devient alors :

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{n+1}]_{\underline{\mathbf{f}}_i^{n+1}} &= [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^n]_{\underline{\mathbf{f}}_i^n} + [\Delta\underline{\underline{\underline{\sigma}}}]_{\underline{\mathbf{f}}_i^{n+1/2}} \\ [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{n+1}]_{\underline{\mathbf{f}}_i^{n+1}} &= [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^n]_{\underline{\mathbf{f}}_i^n} + [\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{n+1/2}]_{\underline{\mathbf{f}}_i^{n+1/2}} [\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}^{n+1/2}]_{\underline{\mathbf{f}}_i^{n+1/2}} \Delta t \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'utilisation de cette formule nécessite de définir la base  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$ , ce qui est proposé ci-dessous.

On remarquera que dans cette formule, le tenseur de comportement est projeté dans la base  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$ , où sa forme est connue : composantes longitudinales et transverses sont distinguées. Dans certaines applications, ces composantes peuvent être supposées constantes. Dans d'autres cas, il peut être nécessaire de les réactualiser afin de tenir compte de l'état de déformation du matériau. Par exemple, la rigidité transverse d'une mèche augmente lorsque celle-ci se compacte. Les composantes de comportement concernées sont celles que l'on projette dans la base  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$ , d'où l'importance de travailler avec cette projection du tenseur de comportement.

(c) Calcul de la rotation  $\underline{\underline{\underline{\Phi}}}$

Afin de déterminer complètement la rotation d'un trièdre dans l'espace, connaître une direction initiale et cette même direction transportée ne suffit pas. Cela ne permet de déterminer que deux des trois paramètres nécessaires et laissent donc une indétermination : la rotation autour de cette direction, ici  $\underline{\mathbf{f}}_1$ . Il n'est pas possible de lever cette indétermination de façon arbitraire, car la dérivée en rotation calculée à partir de  $\underline{\underline{\underline{\Phi}}}$  doit rester objective. Cela implique que  $\underline{\underline{\underline{\Phi}}}$  suive les mouvements de corps rigide. La démarche proposée est la suivante (voir **Figure 31**) [BAD08a].

Premièrement, on calcule la direction actuelle des fibres à partir de la direction initiale (connue) et du gradient de la transformation car il s'agit d'une direction matérielle :

$$\underline{\mathbf{f}}_1 = \frac{\underline{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^0}{\|\underline{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^0\|} \quad (3.10)$$

Ensuite, les directions matérielles 2 et 3 ne restant pas, dans le cas général, orthogonales à la direction 1, il est fait le choix d'utiliser la projection de l'une d'elles dans le plan normal à  $\underline{\mathbf{f}}_1$  afin de construire la base orthonormée actuelle dont la direction 1 est confondue avec celle des fibres. La direction  $\underline{\mathbf{f}}_2$  est donc déterminée par :

$$\underline{\mathbf{f}}_2 = \frac{\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_2^0 - ((\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_2^0) \cdot \underline{\mathbf{f}}_1) \underline{\mathbf{f}}_1}{\left\| \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_2^0 - ((\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_2^0) \cdot \underline{\mathbf{f}}_1) \underline{\mathbf{f}}_1 \right\|} \quad (3.11)$$

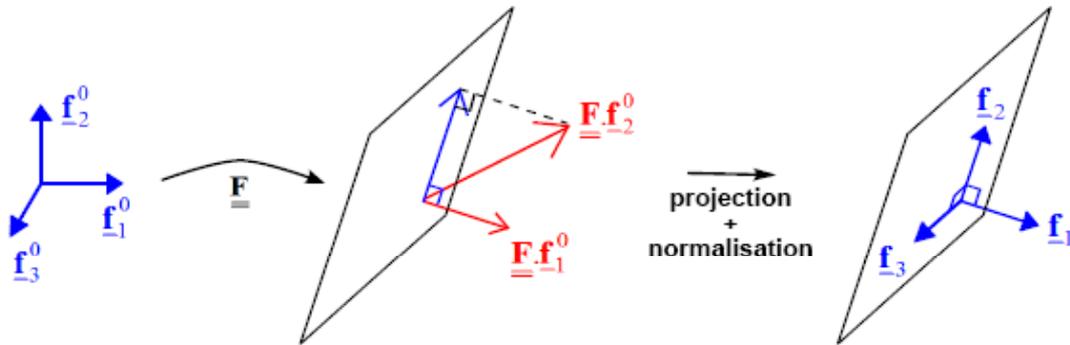
Et la dernière direction par la relation :

$$\underline{\mathbf{f}}_3 = \underline{\mathbf{f}}_1 \times \underline{\mathbf{f}}_2 \quad (3.12)$$

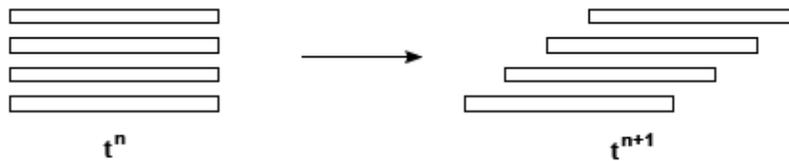
Enfin, la rotation  $\underline{\mathbf{Q}}$  est calculée par :

$$\underline{\mathbf{Q}} = \sum_{i,j} \underline{\mathbf{f}}_i \otimes \underline{\mathbf{f}}_j^0 = \sum_{i,j} (\underline{\mathbf{f}}_i \cdot \underline{\mathbf{f}}_k^0) \underline{\mathbf{f}}_k^0 \otimes \underline{\mathbf{f}}_j^0$$

*Remarque : Sans indication contraire, une sommation est faite sur les indices répétés.*



**Figure 31** : Calcul de la base actuelle  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$



**Figure 32** : Glissement longitudinale d'un réseau de fibres parallèles sans interactions

#### (d) Unicité du choix

On souhaite montrer dans cette section qu'il est indispensable d'appuyer la loi hypo-élastique sur une rotation qui suit la direction des fibres (et d'utiliser par conséquent la dérivée objective associée) [BAD08a].

Considérons un matériau constitué de fibres parallèles n'ayant aucune interaction entre elles. Plaçons nous sur un incrément de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  durant lequel l'incrément de contraintes  $\underline{\Delta \sigma}$  est nul. Cette situation correspond par exemple au glissement longitudinal décrit en **Figure 32** ci-dessus. Dans le cas général d'une loi hypo-élastique basée sur une rotation  $\underline{\mathbf{Q}}$  avec pour base associée  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ , l'état de contraintes calculé à partir de l'équation (3.6) est le suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}}^n = \sigma_{ij}^n \underline{\mathbf{e}}_i^n \otimes \underline{\mathbf{e}}_j^n \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} = \sigma_{ij}^n \underline{\mathbf{e}}_i^{n+1} \otimes \underline{\mathbf{e}}_j^{n+1}$$

Intéressons nous à la valeur de la contrainte longitudinale dans le matériau, c'est-à-dire la contrainte selon la direction des fibres  $\underline{\mathbf{f}}_1$  que l'on note  $\sigma_{\text{fibre}}$ . Aux deux instants considérés (on rappelle que cette valeur doit rester inchangée en raison de l'incrément de contraintes nul), celle-ci s'exprime :

$$\sigma_{\text{fibre}}^n = \underline{\mathbf{f}}_1^n \cdot \underline{\underline{\sigma}}^n \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^n = \sigma_{ij}^n \left( \underline{\mathbf{f}}_1^n \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^n \right) \left( \underline{\mathbf{e}}_j^n \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^n \right) \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\text{fibre}}^{n+1} = \underline{\mathbf{f}}_1^{n+1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^{n+1} = \sigma_{ij}^n \left( \underline{\mathbf{f}}_1^{n+1} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^{n+1} \right) \left( \underline{\mathbf{e}}_j^{n+1} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^{n+1} \right) \quad (3.14)$$

Afin d'évaluer le nouvel état de contraintes, on utilise les relations donnant les directions  $\underline{\mathbf{f}}_1$  et  $\underline{\mathbf{e}}_i$  actualisées :

$$\underline{\mathbf{f}}_1^{n+1} = \underline{\underline{\Phi}}^{n+1} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^0 = \left( \underline{\underline{\Phi}}^{n+1} \cdot \underline{\underline{\Phi}}^{nT} \right) \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^n = \underline{\underline{\Delta\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_1^n$$

$$\underline{\mathbf{e}}_i^{n+1} = \underline{\underline{Q}}^{n+1} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0 = \left( \underline{\underline{Q}}^{n+1} \cdot \underline{\underline{Q}}^{nT} \right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^n = \underline{\underline{\Delta Q}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^n$$

En introduisant ces relations dans (3.14), on obtient :

$$\sigma_{\text{fibre}}^{n+1} = \sigma_{ij}^n \left( \underline{\mathbf{f}}_1^n \cdot \underline{\underline{\Delta\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Delta Q}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^n \right) \left( \underline{\mathbf{f}}_1^n \cdot \underline{\underline{\Delta\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{\Delta Q}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_j^n \right) \quad (3.15)$$

En conclusion, par comparaison de (3.13) et (3.15), il vient que  $\sigma_{\text{fibre}}^n \neq \sigma_{\text{fibre}}^{n+1}$  si les rotations ne sont pas identiques  $\underline{\underline{Q}} \neq \underline{\underline{\Phi}}$ . Et ce malgré le fait que l'incrément de contraintes soit nul sur  $\Delta t$ . On prouve donc que pour un matériau fibreux à une direction de fibres, le choix de la dérivée objective utilisée dans une loi hypo-élastique doit garantir un suivi strict des fibres en rotation sous peine de cumuler des contraintes erronées.

#### (e) Exemples élémentaires

On propose dans cette section d'illustrer la démonstration ci-dessus sur des exemples élémentaires. Pour cela, nous devons présenter une autre approche [DON01][PEN05] qui utilise une dérivée objective classique (type Green Naghdi ou Jaumann). Dans cette approche, il est proposé de réactualiser le tenseur de comportement en fonction du repère d'écriture de la formule (3.6).

##### Approche alternative

La dérivée objective utilisée est une dérivée en rotation classique (pour raison pratique car celle-ci est incluse dans le code utilisé), habituellement Green Naghdi ou Jaumann. Nous resterons dans le cadre général d'une dérivée objective  $\underline{\underline{\sigma}}^V$  basée sur une rotation  $\underline{\underline{Q}}$  avec la base associée  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ .

Le principe est simple, il consiste à utiliser la formule d'actualisation des contraintes (3.6) en prenant soin de fournir le tenseur de comportement en projection dans la base  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ . Pour cela une manipulation est nécessaire car celui-ci n'est de forme connue qu'en projection dans  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$ . Cette manipulation consiste en un changement de base de la matrice de comportement entre  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$  et  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ .

Il est alors nécessaire de déterminer la rotation correspondante que l'on note  $\underline{\underline{\Theta}}$ . De la même façon que nous avons calculé  $\underline{\underline{\Phi}}$ , on utilise :

$$\underline{\underline{\Theta}} = \sum_{i,j} \underline{\mathbf{f}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j$$

En conjonction avec :

$$\underline{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0$$

$$\underline{\mathbf{f}}_i = \underline{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{f}}_i^0$$

Ainsi  $\underline{\mathbf{Q}}$  permet de réaliser le changement de base du tenseur de comportement fournissant  $[\mathbf{C}]_{\mathbf{e}_i}$  et l'équation (3.6) peut être utilisée directement.

### Tests élémentaires

Dans les tests suivants, on compare les deux approches présentées sur quelques tests élémentaires dont la géométrie initiale est un cube unitaire. Afin de faciliter l'exploitation de ces tests, le matériau considéré n'aura qu'une seule rigidité : la rigidité longitudinale (de 35400 MPa), ce qui correspond à la situation présentée au paragraphe (d) (voir **Figure 32**). En notation vectorielle :

$$[\mathbf{C}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} 35400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (11) \\ (22) \\ (12) \end{matrix}$$

A noter que l'on restreint ces exemples au plan  $(\underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_2)$  et par conséquent seules les composantes de contrainte  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  sont observées.

Chacun des quatre tests proposés est illustré en **Figure 33**. Les bases  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$  et  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$  sont confondues à l'instant initial. Enfin, les résultats sont donnés pour l'approche basée sur la rotation de la direction des fibres que nous avons développée au paragraphe (b) (notée FF) et pour l'approche alternative présentée ci-dessus dans laquelle la dérivée objective utilisée sera celle de Green Naghdi (notée GN), c'est-à-dire avec  $\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{R}}$ . Ces résultats sont donnés en termes de composantes de contraintes projetées dans la base liée aux fibres  $\{\underline{\mathbf{f}}_i\}$ , ce qui a le sens le plus physique.

### Test de cisaillement simple à 45° avec fibres horizontales

Un champ de déplacement correspondant à une cinématique de cisaillement simple est imposé au cube unitaire (**Figure 33a**). Le déplacement horizontal est égal à la coordonnée verticale alors que le déplacement vertical est nul. Résultats :

Approche FF	Approche GN
$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Etant données la cinématique du test et les interactions nulles entre fibres, l'état de contrainte doit rester nul. Les deux approches sont justes et cohérentes.

### Test de tension suivie d'une rotation

Une elongation de 2 est imposée dans la direction des fibres avant de procéder à une rotation de 45° sous déformation longitudinale constante (**Figure 33b**). Résultats après tension :

Approche FF

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approche GN

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résultats après rotation :

Approche FF

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approche GN

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On attend un état de tension constant dans le matériau durant la rotation (ceci constitue, par ailleurs, un test d'objectivité). Les deux approches sont justes et cohérentes.

*Test de tension suivie d'un cisaillement simple*

Une elongation de 2 est imposée dans la direction des fibres avant de procéder à la même transformation (cinématique de cisaillement simple) qu'au premier test (**Figure 33c**). Résultats après tension :

Approche FF

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approche GN

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résultats après cisaillement :

Approche FF

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,5.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approche GN

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,9.10^3 \\ 1,6.10^3 \\ -6.10^3 \end{bmatrix}$$

Compte tenu des interactions nulles entre fibres et de la cinématique du test, l'état de contrainte doit rester constant la seconde phase de ce test. Seule l'approche FF fournit un résultat correct sur ce test. L'état de contrainte obtenue par l'approche GN est significativement erroné.

*Test de cisaillement simple à 45° avec fibres verticales*

On propose de réaliser le même test que le premier présenté ci-dessus, avec cette fois ci les fibres orientées verticalement (**Figure 33d**). Résultats :

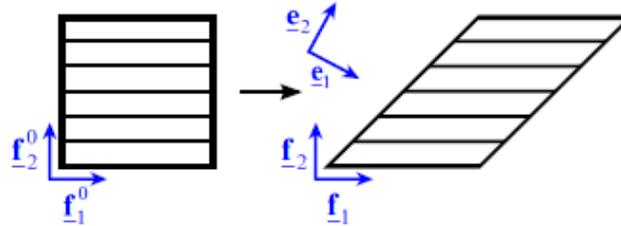
Approche FF

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,23 \cdot 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

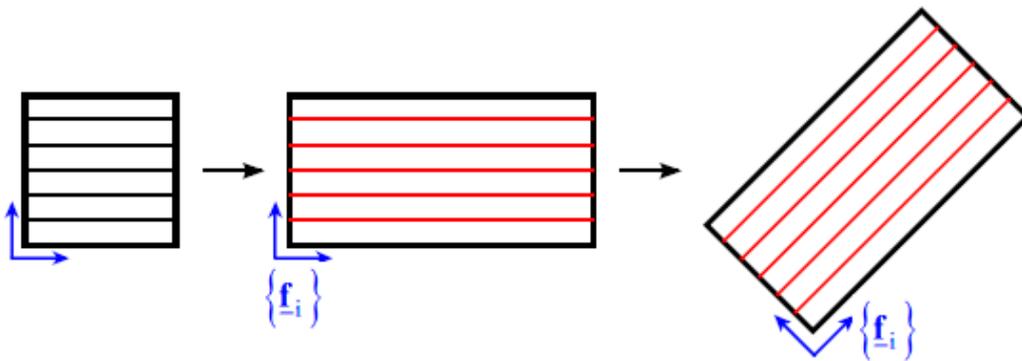
Approche GN

$$[\sigma]_{f_i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \cdot 10^4 \\ 1,23 \cdot 10^3 \\ 3,7 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

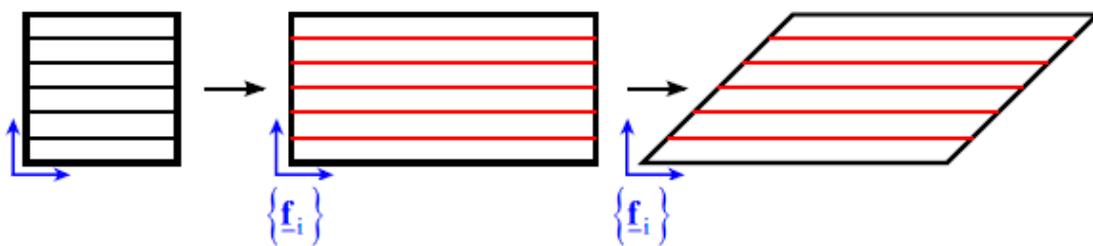
Etant donnée la structure du matériau, seule la contrainte longitudinale aux fibres devrait être non nulle. Cette fois encore, seule l'approche FF donne un résultat juste. Celui de l'approche GN est incohérent.



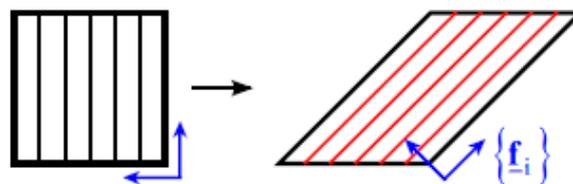
a. Test de cisaillement simple à 45° avec fibres horizontales



b. Test de tension suivie d'une rotation



c. Test de tension suivie d'un cisaillement simple



d. Test de cisaillement simple à 45° avec fibres verticales

**Figure 33** : Tests élémentaires sur un réseau de fibres parallèles sans interaction mutuelle

### *Analyse des tests élémentaires*

Les résultats des deux derniers tests mettent en évidence une faiblesse de la seconde approche.

Le cas du troisième test (**Figure 33c**) correspond à la situation décrite au paragraphe (d) de cette section, situation qui nous a menés à montrer que la rotation utilisée dans le calcul de dérivée doit suivre la direction des fibres. Dans le cas contraire - par exemple en utilisant la dérivée objective de Green Naghdi basée sur la rotation  $\underline{\mathbf{R}}$  issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation - l'actualisation des contraintes par l'équation (3.6) génère des contraintes erronées. Celles-ci sont dues au transport du terme de contrainte « initiale » durant l'incrément de temps. Nous l'avons montré dans le paragraphe (d).

Le premier test (**Figure 33a**) semble similaire. Cependant l'état de contrainte étant constamment nul, le terme de contrainte initiale de l'équation (3.6) est nul lui aussi, il ne pose plus de problème. Le second test (**Figure 33b**) est simplement un test d'objectivité, auquel les deux approches répondent correctement car les dérivées sont objectives.

Enfin, le quatrième test (**Figure 33d**) est une généralisation du troisième. Nous avons relevé au paragraphe (d) que l'erreur provenait du transport du terme « initial » de la configuration  $t^n$  vers la configuration  $t^{n+1}$ . Cette erreur est toutefois indépendante de l'incrément de contrainte sur  $\Delta t$ . Elle n'est due qu'au fait que  $\underline{\mathbf{Q}} \neq \underline{\mathbf{\Phi}}$  sur l'incrément considéré.

En conclusion, pour ce type de matériau, l'utilisation de la formule de Hughes et Winget (3.6) est assujettie au choix d'une dérivée objective adaptée. Cette dérivée, outre son caractère objectif, doit garantir le suivi de la direction de fibre.

### **3.3 Comportement transverse**

Nous venons de traiter le premier point majeur lié à la nature fibreuse du matériau « mèche constituée de fibres » : la nécessité de relier la très grande rigidité longitudinale des fibres au sein du modèle de matériau continu. Le second point important concerne le comportement transverse de la mèche. Il pilote les déformations de la mèche dans le plan normal à la direction des fibres. Cela revêt une grande importance car l'écrasement transverse des mèches présente (souvent) de grandes déformations et influence directement la réponse mécanique du renfort sous la plupart des sollicitations élémentaires : tension biaxiale où les mèches s'écrasent les unes sur les autres, cisaillement où les contacts sont prépondérants après l'angle de blocage, compression entre plan parallèles.

Traduire ce comportement mécanique transverse permettra aussi de garantir des géométries locales déformées de qualité. La mèche étant très rigide longitudinalement, les modes de déformation principaux de celle-ci sont nécessairement transverses. Il est important d'y apporter un modèle fiable afin de garantir l'objectif de détermination des géométries déformées de renforts tissés.

Compte tenu de ce qui vient d'être développé en section 3.2, la notion de plan transverse et l'ensemble de cette section du manuscrit concernent le plan  $(\underline{\mathbf{f}}_2, \underline{\mathbf{f}}_3)$ , normal à la direction des fibres. Dans un premier temps, des analyses par tomographie sont utilisées afin d'apporter les premières hypothèses au modèle et d'aider à l'écriture de celui-ci. Ensuite sont

abordés les développements théoriques correspondants. Pour terminer la mise en place de ce modèle, nous ferons quelques hypothèses physiques simples sur la forme des paramètres qu'il contient.

### 3.3.1 Observations et hypothèses

#### *(a) Isotropie transverse*

Une première partie du problème a déjà été abordée en section 2.2.2 dans laquelle des observations par tomographie aux rayons X ont été réalisées à échelle microscopique. L'analyse de covariance à deux points faite sur des coupes transverses a permis d'obtenir une première conclusion : sous sollicitation, la distribution géométrique de fibres dans le plan transverse est globalement isotrope.

Néanmoins, cette conclusion ne garantit pas l'isotropie transverse mécanique. Nous en ferons malgré tout l'hypothèse. Comme nous l'avons mentionné au paragraphe de conclusion 2.3, celle-ci est difficile à vérifier expérimentalement. Des travaux réalisés sur des composites renforcés de particules ont montré que l'isotropie de la structure du matériau tend à se conserver et que l'effet des déformations sur les propriétés mécaniques se révèle indétectable [LEB01]. Ainsi l'hypothèse d'isotropie transverse du comportement mécanique de la mèche nous semble raisonnable.

#### *(b) Observations qualitatives*

Afin de nous guider vers une écriture appropriée de la contribution transverse du modèle de comportement, d'autres images de tomographie sont utilisées. La **Figure 25** présentée en section 2.2.2 (page 53) nous montre des coupes de mèches d'un renfort en tension biaxiale et en cisaillement. Elles illustrent deux modes de déformation de la section transverse du paquet de fibres.

D'un côté la compaction (en particulier sur la **Figure 25b**) et de l'autre le réarrangement, ou changement de forme, de ce paquet (plus visible sur la **Figure 25c**), où il est toutefois cumulé à de la compaction). Ces deux modes de déformation correspondent à des transformations « sphériques » et déviatoriques de la section transverse : la partie « sphérique » est liée aux variations de densité de fibres et la partie déviatorique aux variations de forme.

*Remarque importante : en deux dimensions, le terme « sphérique » est un abus. Pour raison de praticité, nous l'utiliserons par la suite, mais uniquement dans ce contexte bidimensionnel, c'est-à-dire restreint au plan transverse.*

On suggère dans l'approche proposée de pratiquer une décomposition sphérique/déviatorique pour écrire le comportement transverse. Ceci ne constitue pas une hypothèse, mais simplement un choix sur la forme d'écriture. Pour un matériau isotrope bidimensionnel, une écriture classique avec module d'Young et coefficient de Poisson est possible mais nous préférons lui substituer une écriture plus proche de la physique des phénomènes en jeu. Cela nous permettra aussi d'utiliser des hypothèses basées sur des arguments simples pour déterminer la forme des coefficients utilisés. Par ailleurs, on pourra

vérifier que seuls deux coefficients (pour la partie transverse) sont nécessaires pour modéliser ce comportement, comme il en est le cas avec un module d'Young et un coefficient de Poisson.

L'hypothèse proposée pour la suite est de découpler les phénomènes sphériques et déviatoriques. De plus, comme il a été mentionné en début de chapitre, le comportement est supposé élastique, bien que non linéaire. Ce découplage mènera donc à utiliser un coefficient élastique pour chacune des deux contributions.

### 3.3.2 Ecriture de la loi de comportement transverse

Dans cette section, nous procédons à l'écriture de la contribution transverse du modèle de comportement du matériau fibreux. Il est rappelé que cette écriture concerne le plan  $(\underline{\mathbf{f}}_2, \underline{\mathbf{f}}_3)$  normal à la direction  $\underline{\mathbf{f}}_1$  des fibres. Pour cela, le tenseur des déformations noté  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ , qui correspond au cumul tensoriel [GIL93] de  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}\Delta t$  dans la base tournante, est tout d'abord décomposé en contributions longitudinale et transverse :

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}]_{f_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = [\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_L]_{f_i} + [\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_T]_{f_i}$$

où les indices L et T dénotent les éléments longitudinaux et transverses. Dans cette section, seule la contribution transverse est étudiée, il est donc possible de réduire l'étude pour ne considérer que la restriction de  $[\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_T]_{f_i}$  au plan  $(\underline{\mathbf{f}}_2, \underline{\mathbf{f}}_3)$ , noté d'un tilde :

$$[\tilde{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_T]_{f_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La décomposition de ce tenseur s'écrit :

$$[\tilde{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_T]_{f_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 \\ 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_d & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & -\varepsilon_d \end{bmatrix}$$

où  $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{2}$  est la composante sphérique de déformation et  $\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{2}$ ,  $\varepsilon_{23}$  sont les composantes déviatoriques. Ce formalisme où parties sphériques et déviatoriques sont séparées est très souvent utilisé dans les modèles de plasticité, il a aussi été utilisé dans des modèles de micromécanique des paquets de fibres [CAI92][SIM96b].

Pour l'instant, le modèle est supposé élastique (non linéaire) donc la même décomposition reste valable pour les contraintes. De plus, l'intégration étant une opération linéaire, cette décomposition peut être étendue aux incréments de déformations et contraintes :

$$[\Delta \tilde{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_T]_{f_i} = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_s & 0 \\ 0 & \Delta \varepsilon_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_d & \Delta \varepsilon_{23} \\ \Delta \varepsilon_{23} & -\Delta \varepsilon_d \end{bmatrix}$$

$$[\Delta \tilde{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}_T]_{f_i} = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_s & 0 \\ 0 & \Delta \sigma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \sigma_d & \Delta \sigma_{23} \\ \Delta \sigma_{23} & -\Delta \sigma_d \end{bmatrix}$$

Le découplage proposé entre chacune des contributions mène donc à la loi de comportement suivante dans laquelle on introduit trois coefficients élastiques A, B, C (a priori non constants) reliant les incréments sphérique et déviatoriques de contraintes et déformations :

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_s &= A\Delta\varepsilon_s \\ \Delta\sigma_d &= B\Delta\varepsilon_d \\ \Delta\sigma_{23} &= C\Delta\varepsilon_{23}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Cette loi comporte trois coefficients élastiques. Or, un milieu continu bidimensionnel élastique et isotrope n'est caractérisé que par deux coefficients (rappel de la section 3.3.1(b)). En fait, on montre que les coefficients B et C sont égaux :

Soit l'incrément de déformation suivant dans la base courante  $\{\mathbf{f}_i\}$  :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\varepsilon_{23} \\ \Delta\varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, d'après l'équation (3.16) l'incrément de contrainte associé est :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} 0 & C\Delta\varepsilon_{23} \\ C\Delta\varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}\quad (3.17)$$

Exprimons le même incrément de déformation dans la base de déformations principales, notée  $\{\mathbf{p}_i\}$  :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{p}_i} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{23} & 0 \\ 0 & -\Delta\varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Par suite, et compte tenu de l'hypothèse d'isotropie, on peut utiliser à nouveau (3.16) pour déterminer l'incrément de contrainte associé :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{p}_i} = \begin{bmatrix} B\Delta\varepsilon_{23} & 0 \\ 0 & -B\Delta\varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

En réécrivant cet incrément de contrainte dans la base courante  $\{\mathbf{f}_i\}$ , il vient :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} 0 & B\Delta\varepsilon_{23} \\ B\Delta\varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}\quad (3.18)$$

Finalement, par identification des équations (3.17) et (3.18), il est montré que :

$$B = C$$

*Remarque : Cette conclusion est logique d'un point de vue du sens physique. Ces coefficients B et C sont liés à des mécanismes de déformation microscopique identiques correspondant au glissement relatif de fibres.*

Nous pouvons désormais procéder à l'assemblage des deux contributions, et obtenir ainsi la forme du tenseur de comportement utilisé dans la formule d'actualisation des contraintes :

$$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{T}}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B)/2 & (A-B)/2 & 0 \\ (A-B)/2 & (A+B)/2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 Paramètres de comportement

La loi de comportement transverse vient d'être posée. Elle présente deux coefficients de comportement élastique. Ces coefficients sont liés aux modes de déformation sphérique et déviatorique. Ainsi le contenu physique de ces coefficients est il relativement simple.

De toute évidence, le comportement transverse est non linéaire : ces coefficients ne sont pas constants. Par exemple, la compaction du paquet de fibres ne peut se faire que jusqu'à un niveau maximum admissible. Afin de proposer une forme pour les coefficients A et B, il est suggéré de se baser sur des arguments physiques simples :

- Sous compaction, le comportement du paquet de fibres se rigidifie tant sur le plan sphérique que déviatorique en raison de la densification du réseau de fibres.
- Sous une tension longitudinale des fibres, le comportement sphérique doit, là encore, se rigidifier. En effet la compaction d'un réseau de fibres parallèles est plus difficile si celui-ci est pré tendu.
- L'influence de la tension longitudinale sur le comportement déviatorique est bien moins évidente, elle peut être supposée faible. Dans un soucis de simplicité, on négligera l'éventuelle influence de la tension des fibres sur le comportement déviatorique.

A partir de ces différentes hypothèses, la forme suivante est proposée pour les coefficients A et B :

$$A = A_0 e^{-p\epsilon_s} e^{n\epsilon_{11}}$$

$$B = B_0 e^{-p\epsilon_s}$$

Le modèle transverse proposé présente quatre paramètres à ajuster. Nous verrons plus loin en section 4.2 comment ceux-ci sont déterminés.

Ce modèle est élastique mais en raison du formalisme adopté (séparation sphérique-déviatorique) il pourrait s'étendre à l'élasto plasticité. La décomposition proposée correspond aux modèles classiques de plasticité au sein desquels seule la partie déviatorique correspond au comportement plastique.

Pour le cas de la mèche constituée de fibres, le comportement peut parfois s'approcher d'un comportement élasto-plastique (éléments de preuve en section 5.3). Ainsi les réorganisations importantes et les changements marqués de géométrie tels que nous les avons constatés sur les images du taffetas en cisaillement plan ne sont ils pas absolument réversibles. Tout du moins si l'on considère une échelle de temps assez courte (quelques minutes, échelle de temps d'une mise en forme), un tissu cisailé reste cisailé et se comporte donc de manière plastique. Par ailleurs, les mouvements relatifs des fibres lors de ces changements de forme conduisent nécessairement à de la dissipation d'énergie par frottement, ce qui peut soutenir l'idée d'irréversibilité. L'introduction de comportements irréversibles dans notre modèle est cependant une perspective d'évolution intéressante.

### 3.3.4 Conséquence sur le module d'Young longitudinal

Si l'identification de la raideur d'une mèche - ou module de tension longitudinale, homogène à une force - se fait sans problème par un essai de traction, l'utilisation dans un code de simulation par éléments finis en grandes déformations n'est pas directe. En effet, la grandeur utilisée dans les lois de comportement que nous implémentons n'est pas la raideur de la mèche

mais le module d'Young longitudinal. Par conséquent, il convient de prêter attention aux changements de section apparente de mèche. Un module d'Young constant mènerait à une variation erronée du module de tension lorsque la section de la mèche varie. Or cette dernière est toujours constituée du même nombre de fibres qui conditionne la raideur de la mèche en tension. Cela implique la nécessité de corriger le module d'Young.

Supposons initialement un module d'Young  $E_0$  et une section  $S_0$  pour une mèche de raideur  $k$ . On notera que la raideur  $k$  est non nécessairement constante (utile dans certaines applications), ce qui ne change rien au raisonnement établi ici. On a alors la relation :  $k=E_0.S_0$ . Sous sollicitation, on aura  $k=E.S$ , ce qui implique que  $E.S=E_0.S_0$ . C'est à dire que le module d'Young apparent, noté  $E$ , doit être corrigé en fonction de la section apparente :

$$E = E_0 \frac{S_0}{S} = \frac{k}{S} \frac{S_0}{S} \quad (3.19)$$

Il est nécessaire de calculer le rapport,  $S_0/S$ , entre les aires d'une surface élémentaire initiale et déformée telles que projetées dans le plan transverse. Le schéma en **Figure 34** illustre la situation et la méthode proposée. Une mesure de l'aire de la surface élémentaire initiale est donnée par :

$$dS_0 = \|\underline{\mathbf{f}}_2^0 \times \underline{\mathbf{f}}_3^0\| = 1$$

Ensuite, il est fait usage du gradient de la transformation qui permet de déterminer le transport matériel des directions initiales :  $\underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_2^0$  et  $\underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_3^0$ . Afin de considérer la variation de section apparente, il faut projeter ces directions dans le plan transverse, c'est-à-dire normal à  $\underline{\mathbf{f}}_1$ . On obtient alors les directions  $\underline{\mathbf{t}}_2$  et  $\underline{\mathbf{t}}_3$  :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{t}}_2 &= \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_2^0 - \left[ (\underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_2^0) \cdot \underline{\mathbf{f}}_1 \right] \underline{\mathbf{f}}_1 \\ \underline{\mathbf{t}}_3 &= \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_3^0 - \left[ (\underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{f}}_3^0) \cdot \underline{\mathbf{f}}_1 \right] \underline{\mathbf{f}}_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ce qui induit que :

$$dS = \|\underline{\mathbf{t}}_2 \times \underline{\mathbf{t}}_3\|$$

Finalement, le module d'Young longitudinal apparent que l'on intègre dans la loi de comportement vérifie :

$$E = E_0 \frac{dS_0}{dS} = E_0 \frac{1}{\|\underline{\mathbf{t}}_2 \times \underline{\mathbf{t}}_3\|}$$

ce qui garantit le respect de la raideur de mèche et peut être calculé aisément compte tenu des données accessibles lors du calcul (celles-ci sont mentionnées au paragraphe 3.4.1), et des relations (3.20).

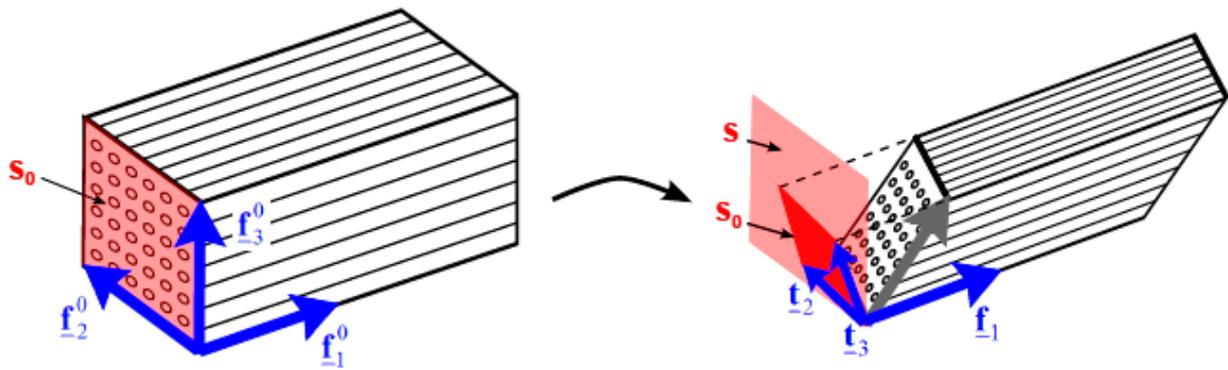


Figure 34 : Calcul du module d'Young apparent

### 3.4 Implémentation dans le code de calcul

Cette section vise à détailler les différents points pour implémenter l'approche présentée en section 3.2.3 dans un code de calcul par éléments finis commercial. Le logiciel utilisé ici est Abaqus/Explicit qui offre un accès par une subroutine VUMAT dans laquelle l'utilisateur code le comportement du matériau en grandes transformations. Cependant, le principe reste le même pour intégrer cette approche dans n'importe quel code éléments finis en grandes transformations, seules des adaptations mineures peuvent être nécessaires.

Cette subroutine est appelée par Abaqus pour le calcul des contraintes à chaque point d'intégration et à chaque incrément.

#### 3.4.1 Données d'entrée/sortie - Base de calcul

Abaqus/Explicit utilise, en grandes transformations, la dérivée objective de Green Naghdi (voir section 3.2.2(a)). Cette dérivée est basée sur la rotation polaire  $\underline{\mathbf{R}}$  issue de  $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{U}}$ . L'ensemble des grandeurs que fournit le code à l'utilisateur au travers de la VUMAT est écrit dans la base tournante associée. On note celle-ci  $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ , elle vérifie  $\underline{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}_i^0$ . De plus, les résultats à retourner doivent eux aussi être écrits dans cette base.

Les données passées en paramètres de la VUMAT par le code sont les suivantes :

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}^{n+1} \right]_{\underline{\mathbf{e}}_i^0} ; \left[ \underline{\mathbf{U}}^{n+1} \right]_{\underline{\mathbf{e}}_i^0} ; \left[ \underline{\boldsymbol{\sigma}}^n \right]_{\underline{\mathbf{e}}_i^n} ; \left[ \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]_{\underline{\mathbf{e}}_i^{n+1/2}}$$

Les tenseurs caractérisant la cinématique de la transformation à  $t^{n+1}$  sont projetés dans la base initiale. Ceux caractérisant l'état de contrainte du matériau à  $t^n$  et l'incrément de déformation sur le pas de temps sont projetés en base tournante. Nous devons retourner :

$$\left[ \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} \right]_{\underline{\mathbf{e}}_i^{n+1}}$$

#### 3.4.2 Adaptation des données

Puisque  $\underline{\mathbf{F}}$  et  $\underline{\mathbf{U}}$  sont données à  $t^{n+1}$ , nous devons travailler dans la configuration de fin d'incrément pour le calcul de l'incrément de contrainte (et non à mi-incrément tel qu'il en est le cas dans l'équation (3.9)). Notons  $\underline{\underline{\Delta \mathbf{R}}} = \underline{\mathbf{R}}^{n+1} \cdot \left( \underline{\mathbf{R}}^{n+1/2} \right)^T$  la rotation entre ces deux configurations

et  $\underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}}$  la transformation correspondante :  $\underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}}(\underline{\underline{S}}) = \underline{\underline{\Delta R}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Delta R}}^T$ . Il est alors fait usage de la relation suivante (voir paragraphe 3.2.2(b)) :

$$\left[ \underline{\underline{D}}^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1/2}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}} \left( \underline{\underline{D}}^{n+1/2} \right) \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}$$

dont découlent successivement :

$$\Delta t \left[ \underline{\underline{D}}^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1/2}} = \Delta t \left[ \underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}} \left( \underline{\underline{D}}^{n+1/2} \right) \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}$$

$$\text{soit } \left[ \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}}^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1/2}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}} \left( \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}}^{n+1/2} \right) \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}} \quad (3.21)$$

Cette relation rend possible l'utilisation directe de l'incrément de déformation fourni par le code. De même, pour les tenseurs de comportement de quatrième ordre, il vient :

$$\left[ \underline{\underline{C}}^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1/2}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\underline{\underline{\Delta R}}} \left( \underline{\underline{C}}^{n+1/2} \right) \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1}} \quad (3.22)$$

Ensuite, pour utiliser la formule (3.9), les différents tenseurs doivent être projetés dans la base  $\{\underline{\underline{f}}_i\}$ . Il est donc nécessaire de réaliser un changement de base entre  $\{\underline{\underline{e}}_i\}$  et  $\{\underline{\underline{f}}_i\}$ . Ce dernier correspond à la rotation  $\underline{\underline{\Theta}}$  que nous avons déjà évoquée dans le paragraphe 3.2.3(e) :

$$\underline{\underline{\Theta}} = \sum_{i,j} \underline{\underline{f}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j = \sum_{i,j} (\underline{\underline{f}}_i \cdot \underline{\underline{e}}_k) \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_j \quad (3.23)$$

Nous venons de préciser tous les ingrédients nécessaires à l'implémentation de la formule d'actualisation des contraintes adaptée au matériau à une direction de fibres. On présente dans le paragraphe suivant l'algorithme implémenté dans la VUMAT.

### 3.4.3 Algorithme

- Calcul de l'inverse du tenseur des déformations pures droit :  $\left[ \underline{\underline{U}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0}^{-1}$ .
- Calcul du tenseur de rotation :  $\left[ \underline{\underline{R}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} = \left[ \underline{\underline{F}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} \left[ \underline{\underline{U}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0}^{-1}$ .
- Calcul de la base de calcul actuelle  $\{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}\}$  avec  $\left[ \underline{\underline{e}}_i^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} = \left[ \underline{\underline{R}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0} \cdot \left[ \underline{\underline{e}}_i^0 \right]_{\underline{\underline{e}}_i^0}$ .
- Calcul de la base matérielle actuelle  $\{\underline{\underline{f}}_i^{n+1}\}$  avec les équations (3.10) à (3.12).
- Calcul de la matrice de rotation  $\left[ \underline{\underline{\Theta}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}$  avec l'équation (3.23).
- Dédution de l'incrément de contrainte matériel à partir de l'incrément de contrainte fourni par le code :  $\left[ \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1}} = \left[ \underline{\underline{\Theta}} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}^T \left[ \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}} \left[ \underline{\underline{\Theta}} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}$ . Il est fait usage de (3.21).
- Actualisation du tenseur de contrainte à partir de la formule (3.9) :  $\left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1}} = \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^n \right]_{\underline{\underline{f}}_i^n} + \left[ \underline{\underline{C}}^{n+1/2} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1/2}} \left[ \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1/2}}$ . Il est fait usage de (3.21) et (3.22).
- Retour du tenseur de contrainte en projection dans la base de calcul actuelle :  $\left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}} = \left[ \underline{\underline{\Theta}} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}} \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{n+1} \right]_{\underline{\underline{f}}_i^{n+1}} \left[ \underline{\underline{\Theta}} \right]_{\underline{\underline{e}}_i^{n+1}}^T$ .

### 3.5 Conclusions du chapitre 3

Les deux aspects majeurs qui font la particularité d'un matériau fibreux à une direction de fibres comme une mèche de renfort tissé de composites viennent d'être abordés dans les sections 3.2 et 3.3. Un modèle de comportement hypo-élastique adapté a été proposé.

Le premier aspect lié au comportement longitudinal du matériau implique l'utilisation d'une dérivée objective en rotation basée sur le suivi de la direction de fibres. Il a été montré un résultat important : ce choix de dérivée objective est unique pour un matériau de ce type. Il mène à écrire la formule d'actualisation des contraintes dans un repère dont une direction est liée à celle des fibres (repère d'anisotropie transverse). Nous rappelons ici cette formule :

$$\left[ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \right]_{\mathbf{f}_i^{n+1}} = \left[ \boldsymbol{\sigma}^n \right]_{\mathbf{f}_i^n} + \left[ \mathbf{C}^{n+1/2} \right]_{\mathbf{f}_i^{n+1/2}} \left[ \mathbf{D}^{n+1/2} \right]_{\mathbf{f}_i^{n+1/2}} \Delta t$$

Dans cette formule, le tenseur de comportement est donc exprimé dans la base  $\{\mathbf{f}_i\}$  que nous avons définie au paragraphe 3.2.3(c).

Le second aspect lié au comportement transverse de la mèche nous a menés à proposer une écriture et des paramètres adaptés à inclure dans ce tenseur. La contribution longitudinale a été traitée en section 3.3.4 avec la définition du module d'Young apparent. Il faut y ajouter les modules de cisaillement longitudinaux  $G_{12}$  et  $G_{13}$ . En raison de l'isotropie transverse,  $G_{12} = G_{13} = G$ . Par ailleurs, nous avons rappelé l'hypothèse d'un comportement de type fil en section 3.1.2, celle-ci impose que  $G$  soit très faible devant le module d'Young longitudinal. Il sera choisi de manière arbitraire. La contribution transverse a été développée au long de la section 3.3.2. La forme finale du tenseur de comportement que nous avons défini au long de ce chapitre est donc la suivante :

$$[\mathbf{C}]_{\mathbf{f}_i} = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (11) \\ (A+B)/2 & (A-B)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (22) \\ & (A+B)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (33) \\ & & G & 0 & 0 & 0 & (12) \\ \text{symétrie} & & & B & 0 & 0 & (23) \\ & & & & G & 0 & (31) \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} A = A_0 e^{-p\epsilon_s} e^{n\epsilon_{11}} \\ B = B_0 e^{-p\epsilon_s} \end{cases}$$

Le modèle de comportement est entièrement posé. Le chapitre suivant présente la mise en place du modèle de simulation qui inclue la détermination des différents paramètres « matériau » nécessaires à ce modèle. Sera également introduit l'ensemble des points importants pour réaliser des simulations à échelle mésoscopique du comportement mécanique de renforts tissés.

# 4

## Simulations à l'échelle mésoscopique de la déformation des renforts tissés

### 4.1 Périodicité et géométrie

- 4.1.1 Extraction du VER
- 4.1.2 Conditions aux limites périodiques
  - (a) *Périodicité du champ de déplacement*
  - (b) *Ecriture des conditions aux limites*
- 4.1.3 Modèle géométrique et maillage
  - (a) *Modèle géométrique*
  - (b) *Maillage*

### 4.2 Identification des paramètres matériaux

- 4.2.1 Module d'Young longitudinal
- 4.2.2 Paramètres de comportement transverse
  - (a) *Méthode inverse / essai expérimental*
  - (b) *Méthode d'optimisation*
  - (c) *Algorithme de la méthode inverse*
  - (d) *Utilisation de la méthode*
  - (e) *Résultats*

### 4.3 Autres données de calcul

### 4.4 Cas de chargement étudiés

- 4.4.1 Traction biaxiale
- 4.4.2 Cisaillement pur
- 4.4.3 Cisaillement sous tension biaxiale
- 4.4.4 Compression

### 4.5 Conclusions du chapitre 4

## 4 Simulations à l'échelle mésoscopique de la déformation des renforts tissés

Les points théoriques majeurs pour la mise en place de modèles de simulation par éléments finis de la mécanique des renforts tissés concernent le modèle de matériau de la mèche. Dans le cas de simulations mésoscopiques, le matériau continu doit relater le comportement très spécifique des mèches du renfort. Cette problématique a fait l'objet du chapitre précédent.

Bâtir le modèle de simulation à échelle mésoscopique requiert également un certain nombre de précautions. En effet, différents aspects comme la fidélité du maillage, les conditions aux limites et l'identification des paramètres matériau sont d'une grande importance pour la qualité des résultats. Ce chapitre présente les différents points clés qui permettront de réaliser les calculs par éléments finis (logiciel Abaqus/explicit) à l'échelle mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites. Il se découpe en trois parties principales traitant respectivement de la géométrie et du maillage du modèle puis de l'identification des paramètres du modèle de matériau et enfin des conditions aux limites correspondant aux différentes simulations envisagées.

### 4.1 Périodicité et géométrie

Comme pour tout calcul par éléments finis, le maillage de départ revêt une grande importance. Le niveau de précision géométrique et la qualité du maillage sont des facteurs dont le modèle est dépendant, et par conséquent le résultat final.

Les renforts tissés de composites présentent en général une structure périodique, d'où l'intérêt des simulations à échelle mésoscopique. En effet, par un passage méso-macro assez simple, ce type de simulation permet de déterminer le comportement mécanique macroscopique du renfort sous des sollicitations élémentaires homogènes, et ainsi caractériser le comportement des renforts.

Cette première section vise à introduire les choix liés à ces problématiques de périodicité et géométrie initiale du modèle [BAD07].

#### 4.1.1 Extraction du VER

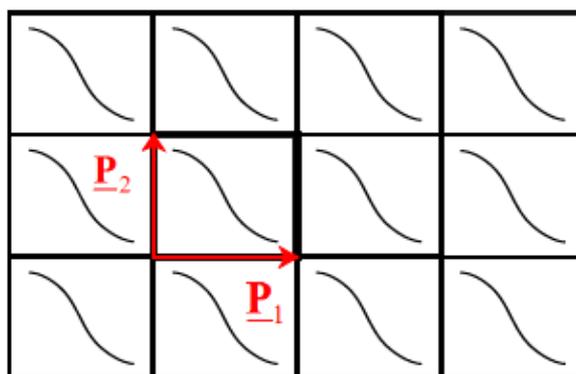
Pour des raisons de coût en terme d'espace mémoire, de temps de calcul, ou encore de nombre d'éléments à inclure dans le modèle afin d'être efficace, il est impératif de ne modéliser que la plus petite géométrie nécessaire. Compte tenu de la périodicité des structures étudiées, il est possible de restreindre l'étude à celle d'un volume élémentaire représentatif (VER) que nous avons aussi déjà appelé cellule élémentaire.

Le VER est le plus petit élément de volume permettant de reconstituer l'ensemble de la structure par simples translations, donc sans utiliser symétries et rotations. Dans certains cas, des conditions de symétrie peuvent également être ajoutées afin de réduire un peu plus la taille du modèle. Toutefois, il est impératif que les symétries « géométriques » du modèle soient les mêmes que celles du chargement mécanique et du matériau. Cela ne constitue pas le cas général. Par exemple les symétries longitudinales du taffetas (plan médian des mèches) ne correspondent pas à celle de la cinématique du cisaillement, elles ne peuvent donc pas être utilisées. Dans le cas des renforts tissés minces étudiés ici, la périodicité est plane, donc

bidimensionnelle (voir **Figure 35**). Ainsi, les translations permettant de reconstituer le renfort complet non déformé peuvent s'exprimer par des vecteurs construits par combinaison linéaire de deux vecteurs élémentaires  $\underline{P}_1$  et  $\underline{P}_2$  :

$$\underline{P} = \sum_{\alpha=1,2} m_{\alpha} \underline{P}_{\alpha}$$

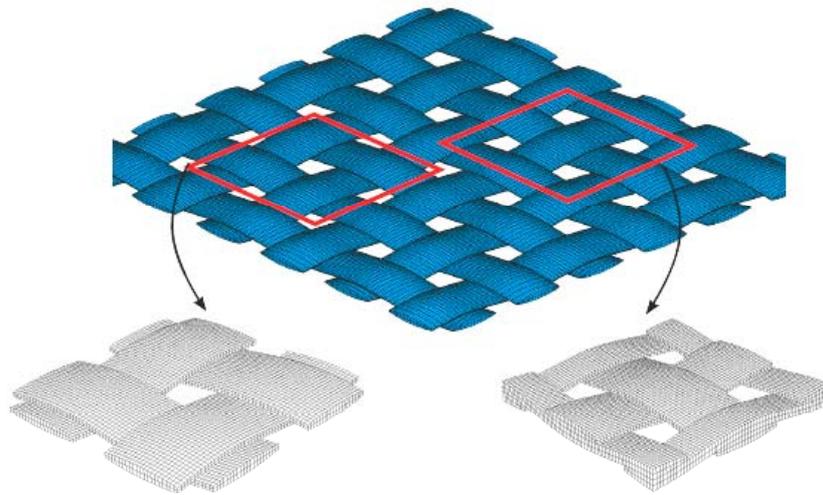
Les vecteurs élémentaires  $\underline{P}_1$  et  $\underline{P}_2$  sont tout simplement portés par les arêtes du VER. Pour des questions de simplicité et d'adéquation avec les structures tissées non déformées, ces deux vecteurs sont choisis orthogonaux. Par conséquent, le VER non déformé est rectangulaire.



**Figure 35** : Structure périodique plane

Etant donnée la définition ci dessus, il vient immédiatement que le choix d'un VER n'est pas unique. La **Figure 36** présente deux VER possibles du taffetas. Il est théoriquement possible d'utiliser l'un ou l'autre de ces deux VER. Cependant, nous verrons par la suite (section 4.1.2) que l'écriture des conditions aux limites périodiques est réalisée sur les frontières du VER. Le modèle éléments finis ne nous permet pas d'imposer des conditions aux limites sur des points non matériels, ce qui est discriminant pour le VER de type 1 (**Figure 36a**), en particulier sur certains tests où la frontière initialement non matérielle vient en contact/glissement avec des points matériels. L'exemple typique de cette situation est le cisaillement durant lequel les interstices entre mèches se ferment et laissent place à du contact/glissement entre mèches parallèles (voir l'illustration en **Figure 37**). Afin de pouvoir imposer des conditions aux limites correctes durant tout le test, les frontières des cellules doivent être entièrement matérielles. Un VER de type 2 est donc préférable. Ce type de VER sera systématiquement préféré pour les simulations de cisaillement.

En traction biaxiale ou compression, l'utilisation d'une cellule de type 1 ne pose pas de problème, il en sera également fait usage. A noter que des conditions de symétrie permettront parfois de réduire la taille du modèle.



a. VER de type 1

b. VER de type 2

Figure 36 : Deux VER possibles pour le taffetas

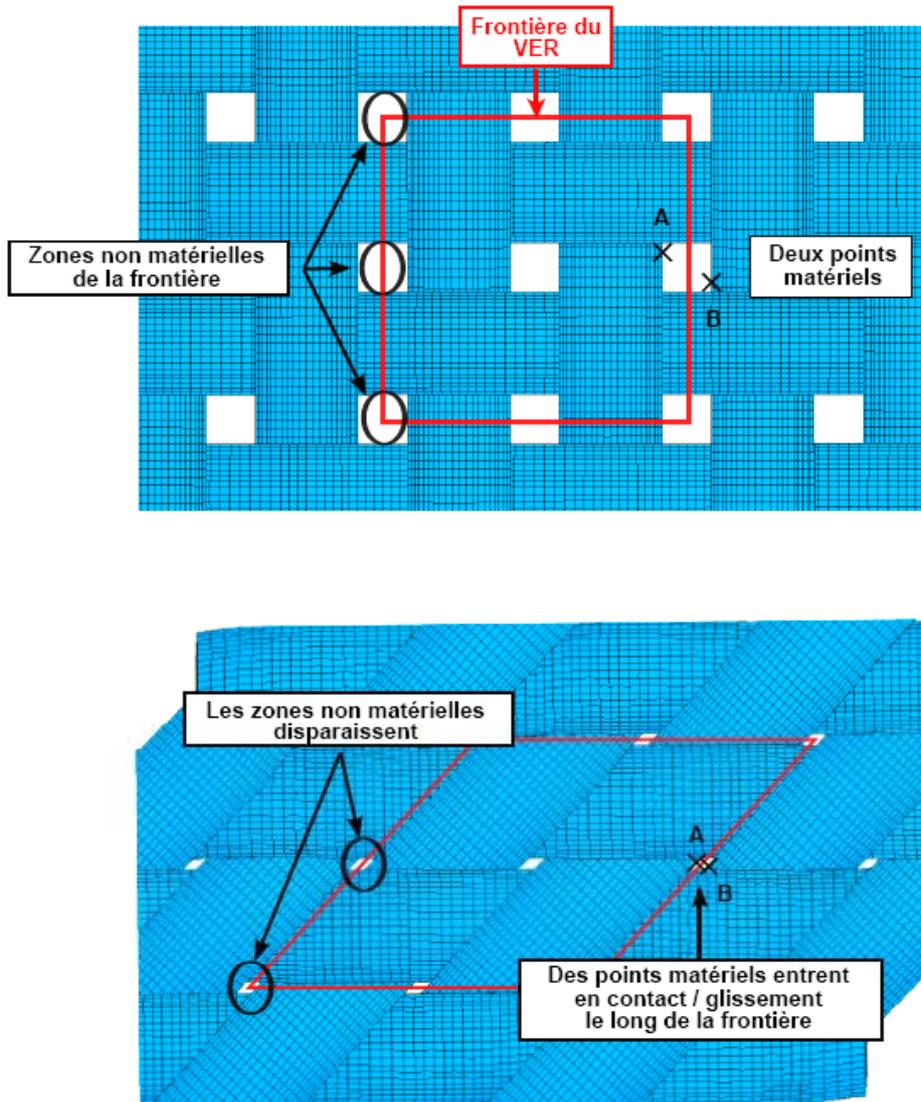


Figure 37 : Inconvénient du VER de type 1

#### 4.1.2 Conditions aux limites périodiques

Les conditions aux limites consistent à définir l'ensemble du chargement mécanique (efforts ou déplacements) imposé à la structure. Ici la particularité du problème réside dans la périodicité de la structure et la modélisation d'un VER. Il convient alors de lui imposer des conditions aux limites garantissant la conservation de la périodicité de la structure. Afin de traiter ce point, nous utilisons la périodicité du champ de déplacement qui mène ensuite à l'écriture de conditions aux limites en déplacement [MIE04].

##### (a) Périodicité du champ de déplacement

Considérons le VER extrait de la structure et divisons sa frontière  $\partial V$  en deux paires  $\{\partial V_\alpha^-, \partial V_\alpha^+\}_{\alpha=1,2}$  de sorte que  $\partial V = \bigcup_{\alpha=1,2} (\partial V_\alpha^-, \partial V_\alpha^+)$ . Considérons également deux points de la

frontière,  $\underline{\mathbf{X}}_\alpha^-$  et  $\underline{\mathbf{X}}_\alpha^+$ , images l'un de l'autre par une translation élémentaire  $\underline{\mathbf{P}}_\alpha$  ( $\alpha = 1$  ou  $2$ ) (voir **Figure 38**). Ces points sont dits « appairés » : ils sont superposés l'un à l'image de l'autre en raison de la périodicité de la structure :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}}_\alpha^- \in \partial V_\alpha^- \\ \underline{\mathbf{X}}_\alpha^+ \in \partial V_\alpha^+ \\ \underline{\mathbf{X}}_\alpha^+ - \underline{\mathbf{X}}_\alpha^- = \underline{\mathbf{P}}_\alpha \end{cases}$$

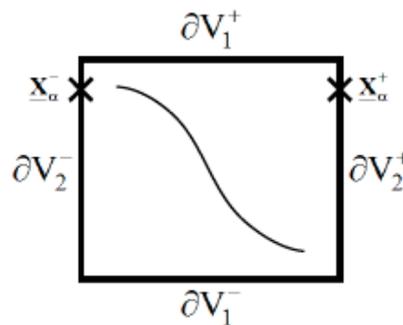
On suppose que la structure déformée reste périodique. Notons  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}$  le champ de déplacement associé à la transformation de la structure tel que  $\underline{\boldsymbol{\varphi}} : \underline{\mathbf{X}} \rightarrow \underline{\mathbf{x}}$  où  $\underline{\mathbf{x}}$  est la position actuelle du point matériel initialement en  $\underline{\mathbf{X}}$ . On peut décomposer la transformation de la structure en une partie macroscopique (ou moyenne), notée  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_m$ , et une partie périodique locale, notée  $\underline{\mathbf{w}}$  (voir **Figure 39**) :

$$\underline{\boldsymbol{\varphi}}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_m(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (4.1)$$

Pour les analyses à échelle mésoscopique,  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_m(\underline{\mathbf{X}})$  représente le champ de déplacement macroscopique connu, par exemple un champ de cisaillement ou de tension biaxiale, alors que  $\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{X}})$  représente le champ de déplacement local inconnu que l'on souhaite obtenir par simulation et qui traduira la géométrie déformée du VER. Afin d'assurer la périodicité de la structure macroscopique déformée, il est nécessaire que les points appairés vérifient :

$$\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{X}}_\alpha^-) = \underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{X}}_\alpha^+) \quad (\alpha = 1 \text{ ou } 2) \quad (4.2)$$

Nous venons d'établir la relation traduisant la périodicité du champ de déplacement. De celle-ci découle l'ensemble des conditions aux limites à appliquer au VER, que l'on détaille ci-dessous.



**Figure 38** : Frontière et points appairés d'un VER plan, notations utilisées.

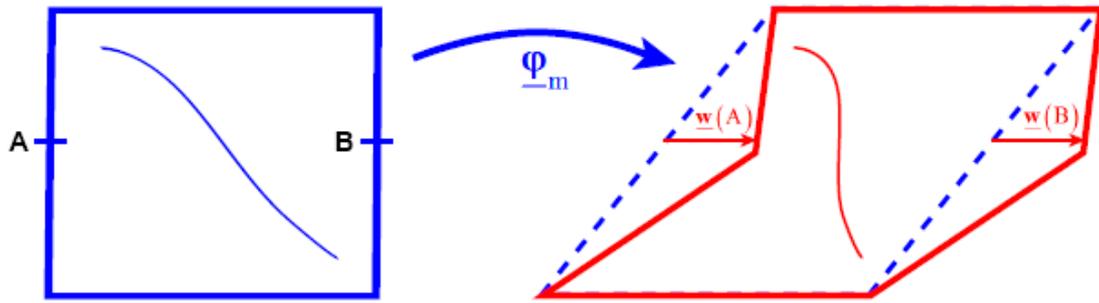


Figure 39 : VER déformé, champ de déplacement

(b) *Ecriture des conditions aux limites*

Comme première conséquence de l'équation (4.2), les déplacements locaux  $\underline{w}$  des sommets du VER - c'est-à-dire les points vérifiant simultanément  $\alpha = 1$  et  $2$  - doivent être identiques. Afin d'éviter les mouvements de corps rigide du VER, il est choisi d'imposer en ces sommets  $\underline{w} = \underline{0}$ . Le mouvement des quatre sommets du VER est ainsi directement donné par  $\underline{\varphi}_m$ , le champ macroscopique correspondant à la cinématique de l'essai réalisé :

$$\underline{w}(\underline{X}_\alpha^-) = \underline{w}(\underline{X}_\alpha^+) = 0 \quad (\alpha = 1 \cup 2) \quad (4.3)$$

Considérons à nouveau deux points appariés  $\underline{X}_\alpha^-$ ,  $\underline{X}_\alpha^+$  et leurs positions actuelles  $\underline{x}_\alpha^-$ ,  $\underline{x}_\alpha^+$  et développons le vecteur  $\underline{x}_\alpha^+ - \underline{x}_\alpha^- = \underline{\varphi}(\underline{X}_\alpha^+) - \underline{\varphi}(\underline{X}_\alpha^-)$ . L'introduction des relations (4.1) et (4.2) mène directement à :

$$\underline{x}_\alpha^+ - \underline{x}_\alpha^- = \underline{\varphi}_m(\underline{X}_\alpha^+) - \underline{\varphi}_m(\underline{X}_\alpha^-) \quad (4.4)$$

Finalement, puisque  $\underline{\varphi}_m$  est connu, les équations (4.3) et (4.4) procurent directement un ensemble de relations pour tous les points de la frontière  $\partial V$ . Elles constituent les conditions aux limites de notre modèle. Celles-ci s'expriment d'une part en terme de déplacements imposés (pour l'équation (4.3)) et d'autre part en terme de relations entre les déplacements des points des frontières (pour l'équation (4.4)).

*Ces relations sont programmées dans le logiciel Abaqus au moyen de la fonctionnalité \*Equation qui permet d'imposer des combinaisons linéaires entre degrés de liberté des nœuds du maillage. Cela souligne l'importance d'un maillage maîtrisé afin de garantir que chaque nœud du maillage de la frontière ait son image sur la frontière opposée.*

### 4.1.3 Modèle géométrique et maillage

Le domaine d'étude étant déterminé eu égard à la périodicité de la structure, il convient d'en définir la géométrie puis le maillage.

(a) *Modèle géométrique*

La modélisation géométrique des renforts tissés à l'échelle mésoscopique constitue un domaine d'étude à part entière. Nous avons abordé cette problématique en section 1.4.2(b) dans laquelle différentes approches ont été présentées. Dans ces travaux, il est fait usage du modèle géométrique de Hivet [HIV03][HIV05][HIV08a]. A partir d'observations de renforts et

d'hypothèses physiques simples, le modèle fournit une description géométrique des renforts à partir de quelques paramètres géométriques tels que la largeur des mèches, la densité de mèches, l'embuvage, la hauteur du tissu... Les hypothèses et le principe général sont présentés au paragraphe 1.4.2(b). L'intérêt majeur de ce modèle consiste en sa simplicité et en la garantie de cohérence qu'il procure : absence d'interpénétrations et de vides dans les zones de contact des mèches. Cet aspect est crucial pour une analyse par éléments finis.

- Pour un taffetas équilibré, le modèle est très simple en raison des nombreuses symétries. Il consiste à définir la géométrie par des arcs et segments tangents. Seuls trois paramètres géométriques sont nécessaires. Le modèle a été utilisé en incluant les équations obtenues par Hivet dans un programme permettant de générer directement le fichier de maillage.
- Pour un sergé, deux types de modèles existent. Un modèle simplifié basé sur trois paramètres seulement permet de fournir une première approche géométrique à base d'arcs et segments tangents. Toutefois celle-ci est simplifiée avec des sections de mèches supposées constantes et d'orientation fixe le long de la ligne moyenne (comme dans un taffetas). Ces simplifications mènent à des conditions de contact parfois peu réalistes dans certaines zones du renfort. Ce type de modèle a été utilisé en raison de sa simplicité d'utilisation dans le même programme de maillage que pour le taffetas. Cependant, nous verrons que les résultats sont affectés par ce choix (paragraphe 5.3.3). Le second modèle, plus élaboré, nécessite un plus grand nombre de paramètres et inclue des hypothèses réalistes sur les conditions de contact. Ces conditions changent le long d'une mèche de sergé, ce qui se traduit par une section transversale en constante évolution le long de la ligne moyenne. Il est alors proposé de définir des sections de contrôle en tenant compte de ces conditions de contact selon la configuration dans le renfort (ce modèle a été présenté au paragraphe 1.4.2(b)). Ce modèle est plus proche de la réalité : nous le verrons par des observations de tomographie. Il permet aussi d'obtenir des résultats de meilleure qualité (voir paragraphe 5.3.3). La **Figure 40** illustre la principale différence entre les 2 modèles. Le modèle de type a avec des sections constantes mène à des conditions de contact peu réalistes, et le modèle de type b, plus élaboré tient compte de conditions de contact sur chaque portion de mèche.
- Concernant le renfort complexe G1151, la modélisation géométrique est très complexe comme nous l'avons souligné en 2.2.1. Le modèle utilisé ici est très simplifié et correspond à une géométrie idéalisée du renfort. Par exemple les lignes moyennes des mèches sont supposées contenues dans un plan et la section des mèches est supposée constante, ce qui n'est clairement pas vérifié par les observations. L'intérêt de ce maillage consiste surtout à valider le principe des simulations à l'échelle mésoscopique sur renforts complexes. L'évaluation des résultats sera beaucoup plus qualitative.

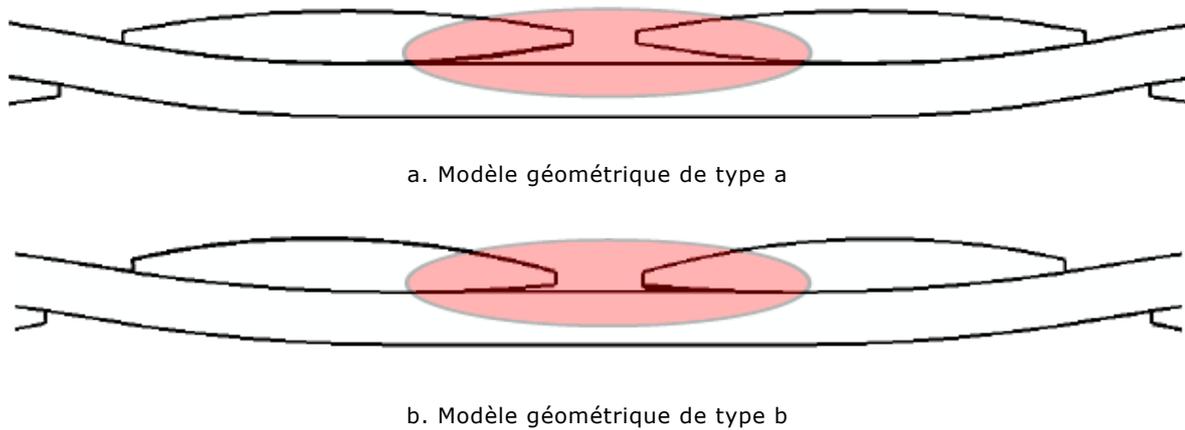


Figure 40 : Deux modèles géométriques de sergé

(b) Maillage

Si la phase de maillage présente généralement une influence majeure dans les analyses par éléments finis, l'utilisation du modèle géométrique de Hivet permet d'en faciliter la mise en œuvre. En effet, la géométrie étant connue analytiquement, un programme simple a permis de générer les maillages.

L'intérêt de la démarche est de pouvoir maîtriser la connectivité des éléments et la numérotation des nœuds. Ces aspects se révèlent importants en raison de l'utilisation du code de calcul commercial. La manière la plus abordable et réaliste de définir la direction des fibres  $\underline{f}_1$  au sein des éléments en début de calcul est d'utiliser les arêtes des éléments, telles que définies en numérotation locale. Ainsi est il nécessaire de maîtriser la numérotation et la connectivité des éléments. (voir Figure 41)

Des maillages réglés sont utilisés pour ces différentes raisons. Cela permet, en outre, un maillage de bonne qualité géométrique, propice à de meilleures performances en calcul. Les maillages présentent deux éléments dans leur épaisseur, ce qui s'est avéré suffisant après des tests de densité d'éléments.

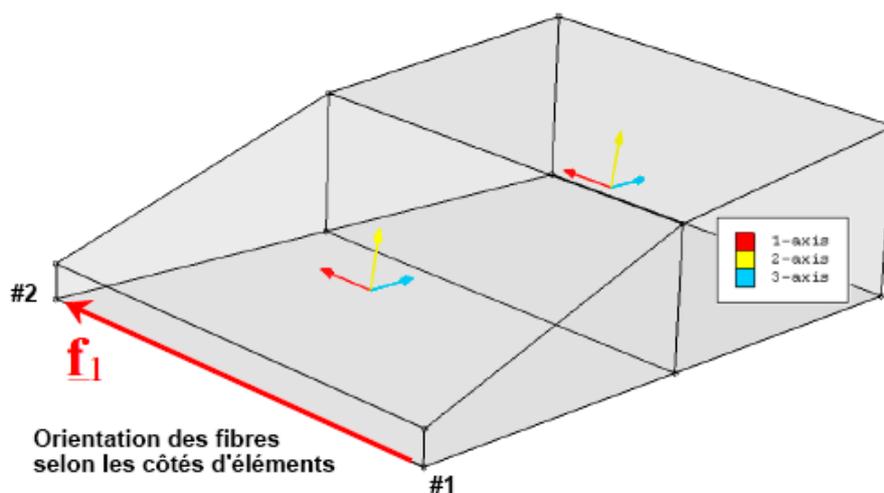


Figure 41 : Capture de deux éléments, orientation initiale du matériau basée sur les arêtes d'éléments (utilisation de la numérotation locale)

## 4.2 Identification des paramètres matériaux

Un des points importants de tout modèle de simulation est l'identification des paramètres du modèle de matériau utilisé. Ici le modèle développé au cours du chapitre 3 n'est pas classique et présente des paramètres assez difficiles à appréhender. Si le module de rigidité longitudinale est déterminé assez facilement, nous verrons qu'il est moins direct d'aborder les paramètres du comportement transverse.

### 4.2.1 Module d'Young longitudinal

Des essais de traction sur une mèche extraite du renfort permettent de déterminer aisément le module de tension (raideur) de la mèche. Dans cette étude, celui-ci est constant, ce qui n'est pas le cas du module d'Young longitudinal d'un matériau continu équivalent. Le module utilisé dans la loi de comportement mise en place est un module apparent qui doit garantir le respect de la raideur de mèche. On note ce module  $E$ , il doit vérifier (relation établie en section 3.3.4) :

$$E = E_0 \frac{S_0}{S} = \frac{k}{S_0} \frac{S_0}{S}$$

où  $k$  est la raideur de la mèche et  $S_0$  et  $S$  sont respectivement les aires de la section transverse initiale et déformée.

Puisque le facteur correctif  $S_0/S$  est calculé de manière intrinsèque au cours du calcul (voir section 3.3.4) il suffit de déterminer  $E_0$ . Pour cela une simulation de traction est réalisée sur une section de mèche extraite du maillage initial du renfort.  $E_0$  est alors ajusté de sorte que la raideur de la mèche corresponde à la valeur expérimentale mesurée.

### 4.2.2 Paramètres de comportement transverse

Bien que les paramètres de comportement transverse nécessaires à notre modèle aient une véritable signification physique, une caractérisation expérimentale sur la mèche seule semble particulièrement difficile en raison de la difficulté à travailler sur le matériau considéré. Une mèche extraite d'un renfort a très peu de tenue, d'éventuels essais de compression seraient très dépendants des conditions aux limites, l'ordre de grandeur des efforts à mesurer est très faible pour des moyens expérimentaux classiques...

Une autre approche est proposée, il s'agit de procéder par une méthode inverse [SCH92][GAS00]. Dans ce but, il est primordial de considérer un essai qui permette de mettre en jeu de manière significative le comportement à identifier. Nous développons dans les paragraphes suivants le principe de cette méthode et le choix des essais utilisés, puis la méthode d'optimisation des paramètres.

#### *(a) Méthode inverse / essai expérimental*

Le principe d'une méthode inverse consiste à ajuster certains paramètres d'un modèle en comparant les résultats fournis par ce modèle à un résultat de référence [SCH92]. Ici, les paramètres à identifier sont les paramètres du comportement transverse  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $n$  et  $p$  (introduits au paragraphe 3.3.3). Le résultat de référence est issu d'un essai expérimental. Il convient alors de faire usage d'un essai, si possible simple, dans lequel on sollicite de manière significative le comportement transverse des mèches et qui puisse être simulé à échelle mésoscopique. Deux essais peuvent être envisagés :

- Un essai de compression de renfort entre deux plans parallèles au plan du renfort est un essai assez simple à réaliser. Toutefois, les quantités à mesurer sont très faibles au départ et se pose la question de situer le début de l'essai. Autre inconvénient, majeur, ce test est réalisé sous tension longitudinale nulle. Il n'est donc pas possible d'identifier le paramètre  $n$  de cette manière.
- Un essai de traction biaxiale est plus difficile mais il met en jeu un fort écrasement des mèches sous tension. Il permet théoriquement d'identifier les paramètres que nous cherchons, nous utiliserons ce type d'essais. Délicats à mettre en œuvre, les essais et résultats que nous utilisons sont ceux de la thèse de Buet [BUE98][BUE01] entièrement consacrée à la traction biaxiale.

Le résultat de référence que nous utilisons consiste en une courbe de traction biaxiale, plus précisément de traction équibiaxiale (voir section 1.3.2(a)). On comparera donc la même courbe de traction équibiaxiale, simulée pour un même renfort, à cette courbe de référence. On utilise un indicateur d'erreur au sens des moindres carrés basé sur un ensemble de points des courbes que l'on aura discrétisées. Afin d'éviter de procéder par tâtonnement, on associe à cette méthode un algorithme d'optimisation visant à déterminer au plus vite les paramètres matériau.

### (b) Méthode d'optimisation

L'algorithme d'optimisation utilisé dans cette étude est l'algorithme de Levenberg-Marquardt [SCH92] qui est fréquemment utilisée pour la résolution de problèmes non linéaires aux moindres carrés. Cet algorithme offre un compromis entre les algorithmes de descente de gradient et celui de Gauss-Newton.

Le problème général résolu par ces types d'algorithmes est le suivant. Soit une fonction  $f$  d'un ensemble de paramètres, noté sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{p}$ .  $f$  est une fonction dont on sait calculer, numériquement, la valeur et la dérivée en un point donné. On cherche alors à trouver le vecteur  $\mathbf{p}^*$  qui minimise la fonction  $f(\mathbf{p})$ .

#### Algorithme de descente de gradient

Cet algorithme est un des plus simples. Il consiste à calculer, à partir d'un point donné, la direction de plus grande pente de la fonction – c'est-à-dire l'opposée du gradient d'où le nom de descente de gradient – puis déterminer le prochain point le long de cette direction. On choisit un point de départ  $\mathbf{p}_0$ . A chaque itération  $i$ , on calcule le gradient au point courant  $\mathbf{g}_i = \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}_i)$  duquel on tire les nouveaux paramètres :

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i - \alpha \mathbf{g}_i \quad (4.5)$$

où le facteur  $\alpha$  influera significativement sur la stabilité et la rapidité de la méthode. Si ce facteur est trop grand, l'algorithme n'est pas stable et l'on oscille autour de la solution. S'il est trop faible, la convergence est lente et demande un grand nombre d'itérations.

#### Algorithme de Gauss Newton

L'algorithme de Newton consiste à réaliser une approximation linéaire de  $f$  autour du point courant. La variante de Gauss Newton considère, elle, une approximation quadratique de  $f$  :

$$f(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}) \approx f(\underline{\mathbf{p}}_i) + \underline{\mathbf{g}}_i^T \cdot \underline{\Delta\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \underline{\Delta\mathbf{p}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\Delta\mathbf{p}}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  est la matrice hessienne de  $f$ . On peut alors chercher à minimiser la fonction quadratique par la résolution de  $\underline{\nabla}_p f(\underline{\mathbf{p}}) = \underline{\mathbf{0}}$ . Ce gradient s'écrit  $\underline{\nabla}_p f(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}) = \underline{\mathbf{g}}_i + \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\Delta\mathbf{p}}$  d'où l'on déduit :

$$\underline{\mathbf{p}}_{i+1} = \underline{\mathbf{p}}_i - \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{g}}_i \quad (4.6)$$

Cet algorithme présente l'avantage d'une meilleure approximation de la fonction menant à un nombre d'itérations plus faible. Cependant le calcul des dérivées secondes peut s'avérer très lourd.

#### Algorithme de Levenberg

L'idée de Levenberg fut de tirer bénéfice des deux algorithmes développés ci-dessus en calculant les nouveaux paramètres par la relation suivante établie à partir des équations (4.5) et (4.6) :

$$\underline{\mathbf{p}}_{i+1} = \underline{\mathbf{p}}_i - (\underline{\underline{\mathbf{H}}} + \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{g}}_i$$

où  $\lambda$  est appelé paramètre de Levenberg. Si  $\lambda$  est grand, on se rapproche de la descente de gradient, et inversement, s'il est faible, la méthode tend vers celle de Gauss Newton. A chaque itération, ce coefficient est modifié en fonction de la convergence du calcul. Si  $f$  diminue, on diminue  $\lambda$  afin de se rapprocher de la méthode plus fine de Gauss Newton. A l'inverse, si  $f$  croît, cela traduit une zone particulièrement non linéaire et l'on augmente  $\lambda$  afin de chercher la direction de plus grande pente.

#### Algorithme adapté aux moindres carrés

Dans le cas d'une fonction d'erreur au sens des moindres carrés de type :

$$f = E(\underline{\mathbf{p}}) = \sum_n (f_n(\underline{\mathbf{p}}))^2$$

classiquement utilisé pour approcher un jeu de données expérimentales, on peut simplifier les écritures de cet algorithme. Le gradient devient :

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\nabla}_p E(\underline{\mathbf{p}}) = 2 \sum_n f_n(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\nabla}_p f_n(\underline{\mathbf{p}}) = 2 \underline{\underline{\mathbf{J}}}^T \cdot \underline{\mathbf{f}}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$  est le gradient de  $\underline{\mathbf{f}}$  par rapport aux paramètres  $\underline{\mathbf{p}}$ . Ainsi, l'équation (4.5) s'écrit :

$$\underline{\mathbf{p}}_{i+1} = \underline{\mathbf{p}}_i - \alpha \underline{\underline{\mathbf{J}}}_i^T \cdot \underline{\mathbf{f}}_i$$

Ensuite, l'approximation quadratique de  $E$  écrite à l'itération  $i$  devient :

$$E(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}) = \sum_n (f_n(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}))^2 \approx \sum_n (f_n(\underline{\mathbf{p}}_i) + (\underline{\underline{\mathbf{J}}}_i \cdot \underline{\Delta\mathbf{p}})_n)^2$$

Minimiser cette fonction par annulation du gradient mène successivement à :

$$2 \sum_n f_n(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}) \underline{\nabla}_p f_n(\underline{\mathbf{p}}_i + \underline{\Delta\mathbf{p}}) = 0 \text{ soit } \underline{\underline{\mathbf{J}}}_i^T \cdot (\underline{\mathbf{f}}_i + \underline{\underline{\mathbf{J}}}_i \cdot \underline{\Delta\mathbf{p}}) = 0$$

$$\text{puis à : } \underline{\mathbf{p}}_{i+1} = \underline{\mathbf{p}}_i - (\underline{\underline{\mathbf{J}}}_i^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}}_i)^{-1} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{J}}}_i^T \cdot \underline{\mathbf{f}}_i)$$

Finalement, on obtient l'écriture de l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour le cas d'une fonction d'erreur au sens des moindres carrés. A l'itération  $i$  :

$$\underline{\mathbf{p}}_{i+1} = \underline{\mathbf{p}}_i - \left( \underline{\mathbf{J}}_i^T \underline{\mathbf{J}}_i + \lambda \underline{\mathbf{I}} \right)^{-1} \cdot \left( \underline{\mathbf{J}}_i^T \underline{\mathbf{f}}_i \right)$$

Cette écriture nous affranchit du calcul d'une matrice hessienne, d'où un net avantage par rapport à une fonction quelconque. C'est cette écriture que nous allons utiliser pour notre méthode d'optimisation des paramètres du modèle de comportement de matériaux fibreux.

*Avant de passer à la suite de cette introduction, il convient de souligner que les différents algorithmes présentés ne trouveront qu'un minimum local de la fonction si cette dernière ne présente pas uniquement un minimum global. Le minimum trouvé dépendra du point de départ choisi et des coefficients choisis. La convergence vers le minimum global n'est donc pas assurée, ce qu'il convient de remarquer.*

#### Application

Les paramètres à ajuster sont ceux du modèle que nous avons établi. Récapitulons :

- $\underline{\mathbf{p}} = \{p_i\}$  ;  $i=1\dots q$  : vecteur paramètres.  $q$  paramètres. Ici,  $q=4$ .
- $\underline{\mathbf{f}} = \{f_i\}$  ;  $i=1\dots n$  : vecteur erreur basé sur  $n$  valeurs expérimentales.
- $\underline{\mathbf{J}} = \{J_{ij}\}$  ;  $i=1\dots n$  ;  $j=1\dots p$  : gradient de  $\underline{\mathbf{f}}$  par rapport aux paramètres  $\underline{\mathbf{p}}$ .

Nous devons détailler chacun des deux derniers éléments mentionnés car ceux-ci ont une forme spécifique pour cette application.

L'erreur que nous calculons est basée sur les données expérimentales de tension équi-biaxiale, à savoir l'ensemble des  $n$  couples  $(\epsilon_i ; F^{\text{exp}}(\epsilon_i))$ . D'autre part, les résultats de simulation sous Abaqus sont sortis sous la forme de  $n$  couples  $(\epsilon_i ; F^{\text{simu}}(\epsilon_i, \underline{\mathbf{p}}))$ . Dès lors, nous pouvons calculer les éléments du vecteur erreur :

$$f_i = F^{\text{simu}}(\epsilon_i, \underline{\mathbf{p}}) - F^{\text{exp}}(\epsilon_i)$$

Développons l'expression du gradient :  $\underline{\mathbf{J}} = \nabla_{\underline{\mathbf{p}}} \underline{\mathbf{f}}$  soit  $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j}$  et par suite :

$$J_{ij} = \frac{\partial \left( F^{\text{simu}}(\epsilon_i, \underline{\mathbf{p}}) - F^{\text{exp}}(\epsilon_i) \right)}{\partial p_j} = \frac{\partial F^{\text{simu}}(\epsilon_i, \underline{\mathbf{p}})}{\partial p_j}$$

Puisque  $F^{\text{simu}}$  n'est connu qu'à partir des résultats numériques, nous devons déterminer ses dérivées de manière numérique également. Une approximation par différences finies est utilisée :

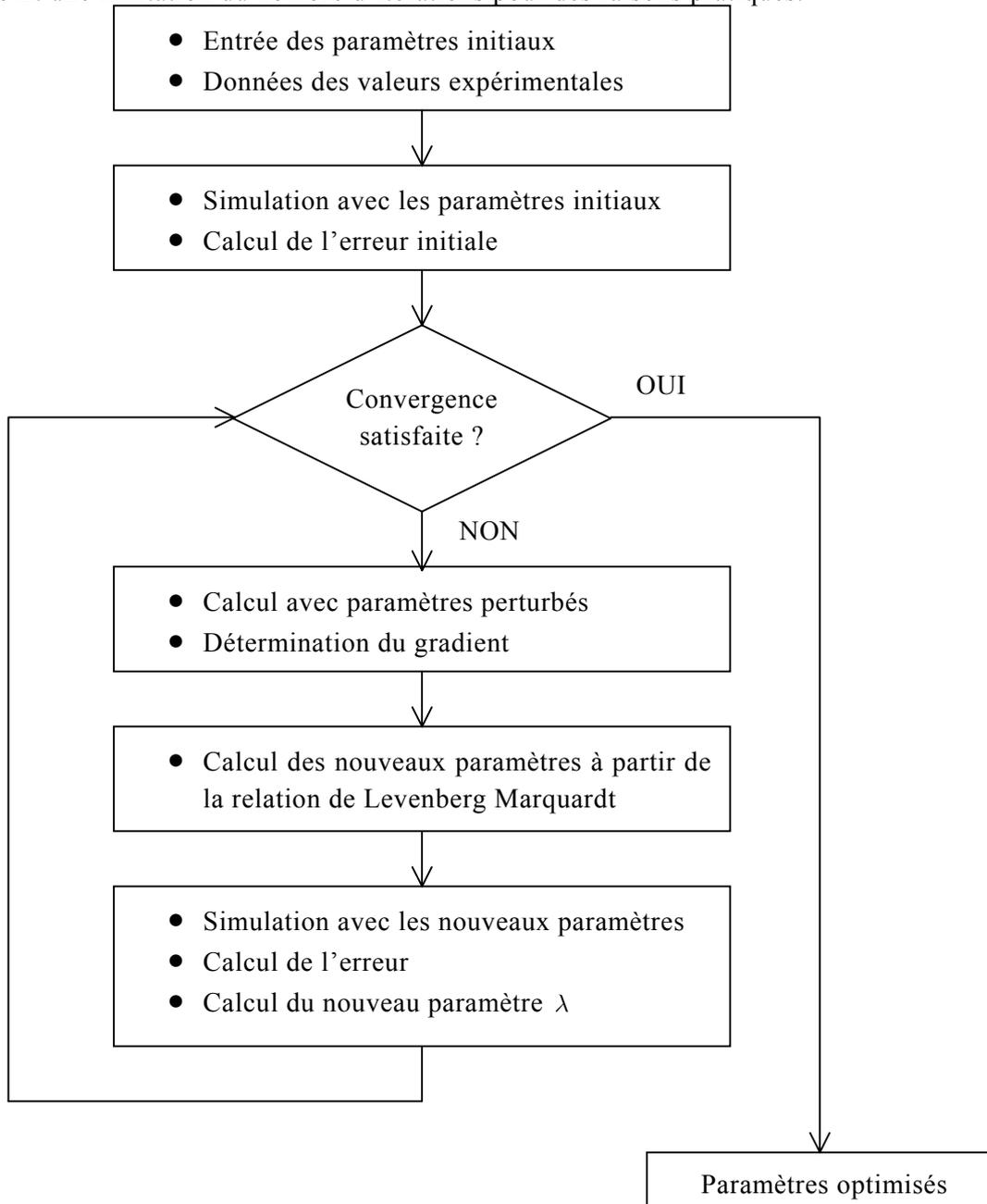
$$J_{ij} = \frac{F^{\text{simu}}(\epsilon_i, p_1 \dots p_j + \Delta p_j \dots p_q) - F^{\text{simu}}(\epsilon_i, p_1 \dots p_j \dots p_q)}{\Delta p_j}$$

On utilise une approximation d'ordre 1 car celle-ci demande à ne réaliser « que » une série de  $q$  simulations pour établir le gradient alors qu'à l'ordre 2,  $2q$  simulations seraient nécessaires. Il est à noter que les phases de simulation sont les plus longues au cours de la méthode d'optimisation des paramètres.

(c) *Algorithme de la méthode inverse*

On propose un schéma de l'algorithme global de la méthode en **Figure 42**.

Différents critères de convergence visant à stopper l'algorithme peuvent être envisagés : critères portant sur les paramètres, l'erreur, ou leurs variations relatives. Dans un premier temps, un critère d'arrêt basé sur la valeur de l'erreur au sens des moindres carrés est utilisé. On y adjoint une limitation du nombre d'itérations pour des raisons pratiques.



**Figure 42** : Algorithme d'optimisation des paramètres matériau par méthode inverse

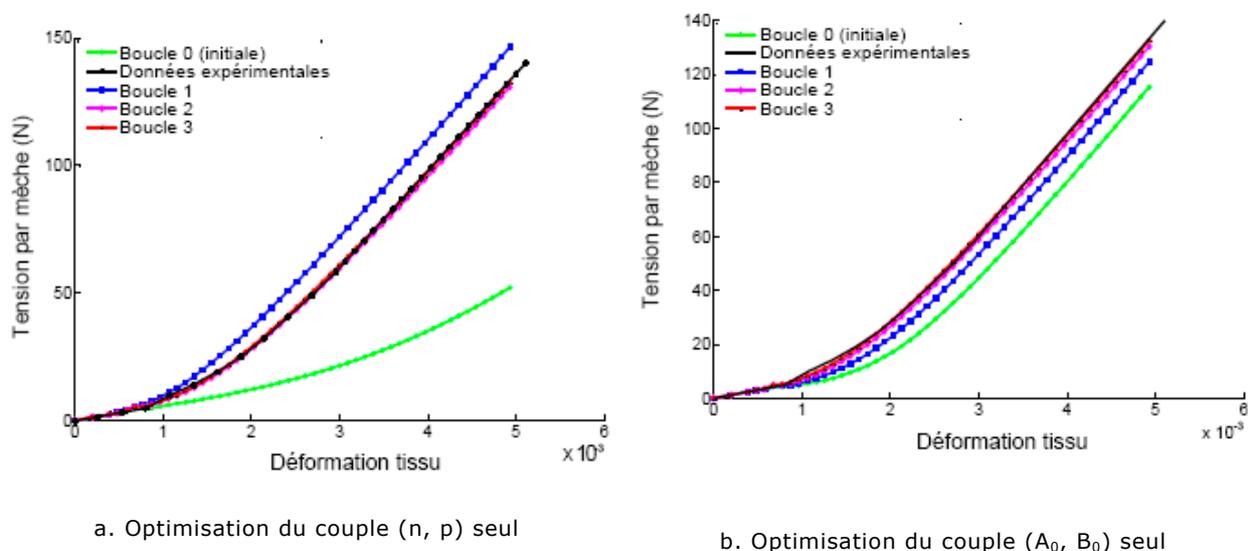
(d) *Utilisation de la méthode*

Cette méthode a été entièrement programmée dans Matlab qui offre des fonctionnalités intéressantes pour le calcul matriciel et la possibilité de piloter le logiciel de calcul Abaqus « à distance ».

L'optimisation simultanée des quatre paramètres s'avère assez délicate sur les premiers tests lancés. En effet l'influence relative des paramètres n'est pas la même et cela a des répercussions sur le résultat final, malgré que l'on ait pris soin de normaliser les paramètres afin qu'ils aient des ordres de grandeur similaires. De plus les valeurs initiales sont importantes pour la convergence de la méthode. Il est alors choisi d'optimiser les paramètres par paire (d'une part les exposants  $n$  et  $p$ , de l'autre les valeurs initiales  $A_0$  et  $B_0$ ) pour approcher des valeurs finales.

En pratique, l'optimisation par paire nous permet de converger très rapidement (deux à trois itérations) vers une solution convenable (voir **Figure 43**). Les graphes que l'on montre sont ceux obtenus pour le taffetas. Toutefois il est important de noter que deux des quatre paramètres ( $A_0$  et  $p$ ) semblent très bien identifiés par cette méthode - c'est-à-dire que les valeurs finales sont peu dépendantes des valeurs initiales - alors que les deux autres ( $B_0$  et  $n$ ) semblent peu influents sur le processus d'optimisation. Deux hypothèses sont envisagées.

- On peut supposer que le test de traction biaxiale utilisé ici ne permet pas de mettre suffisamment en évidence le rôle de ces deux derniers.
- $A_0$  et  $p$  sont les paramètres directement liés au mode de déformation « sphérique » de la section transverse :  $A_0$  est la valeur initiale de  $A$ , coefficient de comportement sphérique, et  $p$  représente l'influence de la déformation sphérique. On peut émettre l'hypothèse que, en traction biaxiale à  $k=1$ , le mode de déformation sphérique de la mèche est de premier ordre devant le mode de déformation déviatorique et l'influence des tensions.



**Figure 43** : Courbes successives obtenues par l'algorithme proposé

### (e) Résultats

Pour le taffetas, les paramètres obtenus avec cette méthode sont les suivants :

$$A_0 = 18.10^{-3} \text{ MPa}$$

$$B_0 = 6.10^{-3} \text{ MPa}$$

$$n = 4.10^3$$

$$p = 4.10^1$$

Les valeurs obtenues pour le sergé nous permettent de soulever un autre problème : l'influence du maillage. En effet, selon le modèle géométrique utilisé, les valeurs sont sensiblement différentes. Ce point sera discuté dans le chapitre 5 traitant des applications et résultats. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Modèle géométrique simplifié de type a

$$A_0 = 2 \text{ MPa}$$

$$B_0 = 2 \text{ MPa}$$

$$n = 2 \cdot 10^3$$

$$p = 10^2$$

Modèle géométrique de type b

$$A_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$$

$$B_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$$

$$n = 10^3$$

$$p = 50$$

Enfin, l'identification des paramètres matériau pour le G1151 ne peut pas être réalisé en raison du manque d'essais expérimentaux. Par défaut, il est fait l'hypothèse que le comportement du matériau « mèche de carbone » est indépendant de l'armure du renfort de sorte que l'identification réalisée sur le sergé de carbone soit transposable à d'autres renforts constitués de mèches de carbone. Cette hypothèse semble tout à fait raisonnable si les caractéristiques des fibres et des mèches sont identiques (matériau, dimensions, nombres de fibres, mode de fabrication, d'assemblage...). Bien que ce ne soit pas rigoureusement le cas ici et à défaut d'autre alternative, les paramètres identifiés sur le sergé de carbone (avec modèle géométrique de type b) sont utilisés comme paramètres matériau du G1151.

### 4.3 Autres données de calcul

Outre les trois aspects importants que nous avons abordé dans les sections ci-dessus, il reste plusieurs données d'entrée du calcul à définir.

L'algorithme de gestion du contact entre mèches est laissé par défaut au logiciel Abaqus. Concernant les frottements, on utilise un modèle de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0,24, valeur empruntée à la littérature [LIU06][GOR07]. Les calculs ont été réalisés avec des éléments continus de briques à 8 nœuds avec intégration réduite. Le maillage compte environ 9600 éléments de type C3D8R (dans Abaqus) pour la simulation sur un VER de taffetas par exemple. La masse volumique est de  $2,53 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$  pour les mèches de verre contre  $1,76 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$  pour les mèches de carbone. La gestion des incréments de temps est laissée au logiciel. Ceux-ci varient généralement entre  $5 \cdot 10^9$  et  $9 \cdot 10^9$  s. Sur PC classique, les durées de calcul moyennes varient de l'ordre d'une heure pour les renforts les plus simples à quelques jours pour les renforts les plus complexes (selon cas de chargement).

### 4.4 Cas de chargement étudiés

Les chargements les plus simples à envisager à l'échelle mésoscopique et permettant de caractériser les aspects principaux du comportement macroscopique d'un renfort tissé sont la traction biaxiale et le cisaillement pur. Ils constituent à eux deux les modes de déformations principaux d'un renfort tissé qui sont mis en jeu lors de sa mise en forme. On peut aussi envisager un cas de chargement plus complexe comme un chargement en traction biaxiale + cisaillement permettant de caractériser le couplage entre ces deux modes élémentaires de déformations. Ce type de situation est plus proche des sollicitations réelles lors d'une mise en forme. Enfin, les lois de comportement en compression sont utiles à la simulation des procédés

type RTM dans lequel le renfort est comprimé avant l'injection de résine dans le but d'augmenter le taux de renfort dans la pièce finale.

En outre, il est important d'obtenir les géométries déformées dans chacun de ces cas pour différents objectifs. Les calculs d'écoulement au sein des renforts [SIM96a][TAK02][LOI08] permettent de déterminer la perméabilité de renforts déformés et d'optimiser la phase d'injection. La connaissance des géométries locales déformées est nécessaires pour les calculs d'endommagement à échelle locale [ZAK03][EDG04][LAD06].

#### 4.4.1 Traction biaxiale

La traction biaxiale est le cas le plus simple qui a fait l'objet des premiers modèles dans la littérature [HAN98][GAS00][BOI01]. Si ces simulations peuvent être utilisées afin d'extraire les caractéristiques de comportement macroscopique de renforts (par un passage méso-macro), elles sont d'abord utilisées pour établir les paramètres matériau correspondant au renfort étudié. Pour les raisons que nous avons déjà évoquées en section 4.2.2, des simulations de traction équibiaxiale nous servent à l'identification des paramètres de comportement que contient le modèle. Ensuite, elles peuvent être analysées pour les cas de traction biaxiale avec rapport de déformation différent de 1.

Les symétries que présentent la géométrie du modèle et le chargement sont utilisées afin de réduire la taille du maillage. Ainsi, dans le cas d'un taffetas uniquement, on peut distinguer (voir **Figure 44**) :

- Les plans longitudinaux, perpendiculaires au plan du tissu, ce sont les plans de symétrie des mèches et du renfort tissé pour le cas d'un taffetas.
- Les axes transversaux. Dans le plan du tissu et coupant transversalement chaque mèche, ce sont des axes de symétrie du renfort tissé de type taffetas.

Il n'est donc plus question de relations entre les points de la frontière du VER. En substitution, des nouvelles relations doivent être utilisées. Celles-ci doivent donc imposer :

- Des conditions de symétrie classiques sur les plans longitudinaux.
- Des conditions de symétrie axiale pour les axes transversaux.

Les premières citées sont imposées classiquement à chaque nœud appartenant aux plans de symétrie. Les secondes sont moins triviales. En effet, elles demandent à établir une relation cinématique entre les déplacements des nœuds concernés. (On rappelle encore une fois l'importance d'un maillage réglé qui permet de garantir l'application de ce type de conditions.) En se référant à la **Figure 45** et pour tous les triplets (O, A, B) concernés par cette symétrie, ces conditions s'écrivent :

$$\frac{\underline{u}_A + \underline{u}_B}{2} = \underline{u}_O$$

Le chargement vérifie lui aussi les mêmes symétries. Ainsi les tensions dans chaque mèche seront appliquées par déplacement des axes transversaux dans la direction longitudinale des mèches. Les conclusions évoquées ici ne correspondent qu'au cas d'un taffetas. Pour un sergé, les propriétés de symétrie étant différentes, un VER entier est étudié. Les conditions aux limites établies au paragraphe 4.1.2(b) sont alors utilisées.

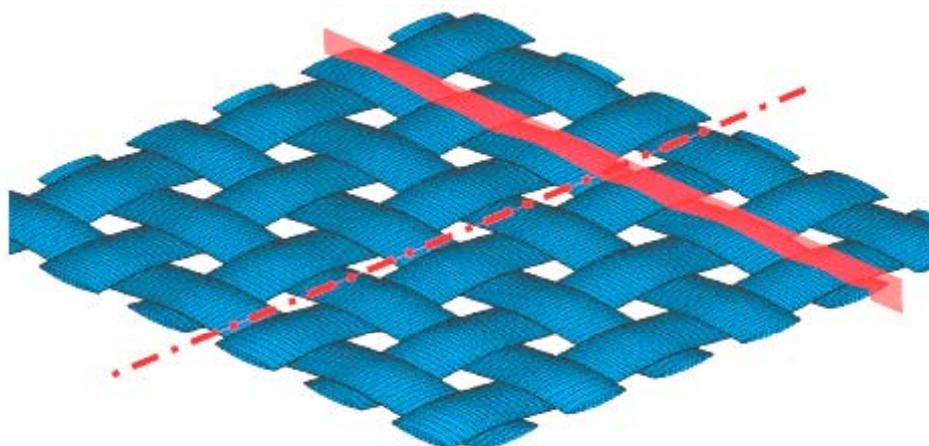


Figure 44 : Symétries remarquables d'un taffetas

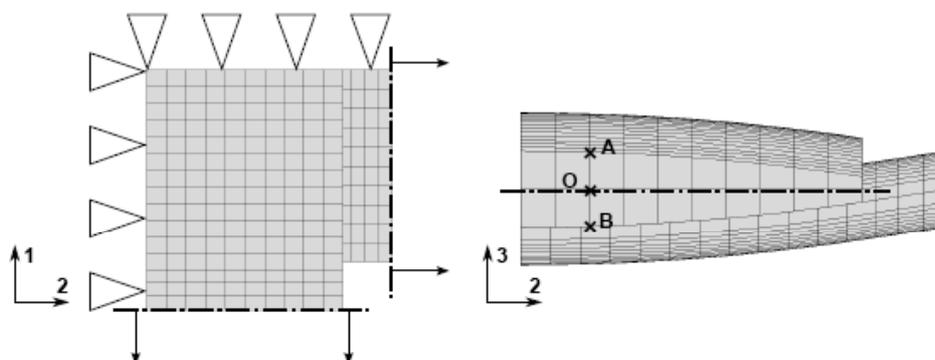


Figure 45 : Conditions aux limites en traction biaxiale sur le taffetas

#### 4.4.2 Cisaillement pur

En cisaillement pur, les éventuelles propriétés de symétrie du renfort ne coïncident pas avec celle du chargement. Il est donc indispensable de travailler avec un VER entier.

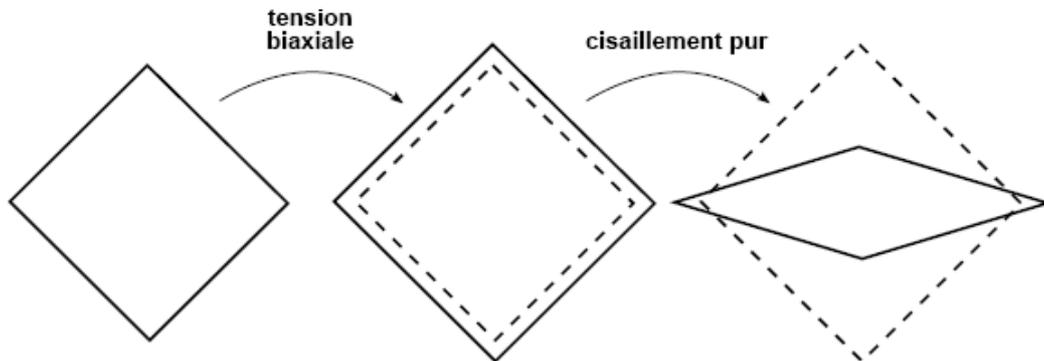
Le champ  $\varphi_m$  imposé est celui du cisaillement d'un treillis dont les articulations seraient celles des intersections de mèches. En effet nous avons vu en section 1.3.1(c) qu'à un cisaillement macroscopique de renfort tissé ne correspond pas un cisaillement à échelle mésoscopique, mais une cinématique de treillis dont les nœuds sont les intersections entre réseaux de chaîne et de trame. L'application des conditions aux limites se font donc selon les relations établies en section 4.1.2(b).

#### 4.4.3 Cisaillement sous tension biaxiale

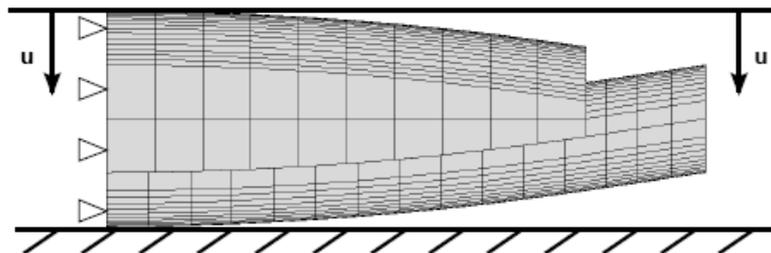
L'utilisation du modèle mésoscopique permet d'envisager des chargements couplés, par exemple pour déterminer l'influence des tensions sur le cisaillement du renfort. Ce type d'étude a été entrepris d'un point de vue expérimental [LAU08], mais très peu d'un point de vue numérique/analytique [LOM06]. Néanmoins elle est d'une grande importance pour l'étude des procédés type RTM. En effet, pendant la phase de préformage du renfort (en particulier avec l'emploi d'outils d'emboutissage) les tensions dans les mèches peuvent être importantes,

menant alors à des zones où le renfort va se cisailer sous une tension qui est généralement non négligeable.

La géométrie du modèle utilisé pour ce type de simulation est la même que pour le cisaillement pur. Concernant la cinématique et les conditions aux limites appliquées, une première phase de mise en tension du renfort précède la phase de cisaillement (voir **Figure 46**). Cette seconde phase est la même que celle présentée au paragraphe précédent mais elle est réalisée sur le renfort déformé, en tension. Etant donnée la rigidité de tension, la cinématique imposée en phase de cisaillement doit être très rigoureuse sous peine de subir des fluctuations de tension dans les mèches.



**Figure 46** : Simulation de cisaillement sous tension biaxiale



**Figure 47** : Conditions aux limites en compression

#### 4.4.4 Compression

Cet essai revêt toute son importance pour la mise au point du procédé de mise en forme RTM, et en particulier pour la maîtrise du taux de renfort dans la pièce finale. En effet, durant la phase de fermeture du moule, le renfort est comprimé entre poinçon et matrice afin d'augmenter le taux de renfort dans la pièce finale. Ainsi, pour évaluer les efforts à appliquer sur les outils il est nécessaire de connaître le comportement en écrasement du renfort.

Le modèle géométrique utilisé pour les simulations d'écrasement de renfort tissé est le même que pour la tension biaxiale. En effet, les conditions de symétrie sont les mêmes et elles sont toutes conservées durant l'essai. Le chargement, lui, est différent puisque les mèches sont libres dans les directions longitudinales. En revanche, on vient charger le tissé entre deux plans parallèles (**Figure 47**).

## **4.5 Conclusions du chapitre 4**

Les différents aspects principaux du modèle mésoscopique d'analyse mécanique des renforts tissés ont été abordés dans ce chapitre.

La géométrie à l'échelle mésoscopique est basée sur le modèle permettant une description précise et cohérente des mèches mais aussi des zones de contact. Ce modèle permet de générer des maillages réglés dont l'ensemble des nœuds doit être maîtrisé pour plusieurs raisons pratiques (orientation de la direction de fibres, prescription des conditions aux limites).

La périodicité des structures de type renfort tissé permet de déterminer le domaine minimal d'étude mais également les conditions aux limites à adopter. Celles-ci garantissent que la périodicité est conservée.

L'identification des paramètres du modèle de matériau est un point important pour la prédiction du comportement du renfort. Le module d'Young est déterminé avec des essais de traction, ce qui n'est pas le cas des paramètres du comportement transverse. Ceux-ci ne peuvent être déterminés directement. Une approche inverse est utilisée en se basant sur des essais de traction équibiaxiale qui engendrent un fort écrasement transverse des mèches.

Finalement, l'ensemble de ces données permet de définir le modèle de simulation d'un VER de renfort tissé sous différentes sollicitations. Quatre types de chargements élémentaires sont envisagés dans cette étude. Ceux-ci ont été décrits en dernière partie de ce chapitre. Les résultats des simulations réalisées sont présentés dans le chapitre suivant.

# 5

## Résultats et validation

### **5.1 Expérimentations de référence et exploitation des données**

- 5.1.1 Comportement mécanique
- 5.1.2 Géométries déformées

### **5.2 Taffetas de verre**

- 5.2.1 Traction biaxiale
- 5.2.2 Cisaillement pur
- 5.2.3 Cisaillement sous tension
- 5.2.4 Compression

### **5.3 Sergé 2x2 de carbone**

- 5.3.1 Traction biaxiale
- 5.3.2 Cisaillement pur
- 5.3.3 Remarques sur la qualité du maillage initial
- 5.3.4 Cisaillement sous tension
- 5.3.5 Conclusion partielle

### **5.4 Renfort complexe G1151 (carbone)**

- 5.4.1 Simulation de cisaillement pur

### **5.5 Application au calcul de perméabilité de renforts tissés**

- 5.5.1 Détermination du VER fluide
- 5.5.2 Calcul de perméabilité
- 5.5.3 Résultats
- 5.5.4 Conclusions

### **5.6 Conclusions du chapitre 5**

## 5 Résultats et validation

La finalité de l'ensemble des problématiques abordées au travers des chapitres précédents est de réaliser des simulations mésoscopiques de la déformation des renforts tissés de composites.

Ces simulations ont plusieurs objectifs. Tout d'abord sur le plan mécanique, elles visent à déterminer par un passage méso-macro le comportement mécanique des renforts tissés. Celui-ci est utile dans de nombreuses applications parmi lesquelles des simulations de mise en forme, d'éventuelles substitutions à des essais difficiles à maîtriser ou encore la possibilité d'évaluer les propriétés mécaniques de renforts avant même leur fabrication. Ensuite, le second objectif concerne les géométries déformées des renforts. Celles-ci peuvent être utilisées pour des calculs d'écoulement dans les renforts déformés afin de caractériser les lois d'écoulement en fonction de la déformation du renfort (tenseur de perméabilité fonction de l'angle de cisaillement par exemple [BIC97][FOU05][LOI08]) et ensuite envisager de simuler l'injection dans une pièce entière, par passage méso-macro. Les géométries déformées sont aussi utiles aux simulations d'endommagement de pièces composites où la géométrie locale joue un rôle majeur [ZAK03][EDG04][LAD06].

Ces deux aspects seront abordés dans ce chapitre. Afin de valider les résultats obtenus, différentes approches expérimentales sont utilisées. D'une part des essais mécaniques en traction biaxiale ou cisaillement sont utilisés pour les validations sur le plan du comportement mécanique. On compare les courbes de comportement expérimentales à celles obtenues par simulation. D'autre part, afin de valider les géométries déformées obtenues, les observations réalisées par tomographie aux rayons X sont parfaitement adaptées. A l'aide du montage réalisé (présenté en section 2.2.1(a)), différents cas de chargement sont étudiés.

Après avoir évoqué les principes d'exploitation des données expérimentales et numériques, il est proposé de développer pour chacun des renforts de cette étude les résultats obtenus. En raison des données existantes, toutes les sollicitations n'ont pas pu être envisagées pour tous les renforts.

### 5.1 Expérimentations de référence et exploitation des données

La validation du modèle mis en place et des simulations réalisées est faite, dans cette étude, à partir de différentes données expérimentales. D'une part sur le plan du comportement mécanique macroscopique des renforts et d'autre part sur le plan des géométries déformées locales. Nous détaillons dans cette section les méthodes employées pour extraire les différentes données, tout d'abord expérimentales puis numériques, utilisées pour validation.

#### 5.1.1 Comportement mécanique

Trois type d'essais mécaniques sont utilisés : essais de traction biaxiale, cisaillement pur par picture frame ou par bias test et enfin compression. Ceux-ci ont déjà été présentés en section 1.3.2. Toutefois l'exploitation des mesures expérimentales n'est pas toujours directe.

##### *(a) Traction biaxiale*

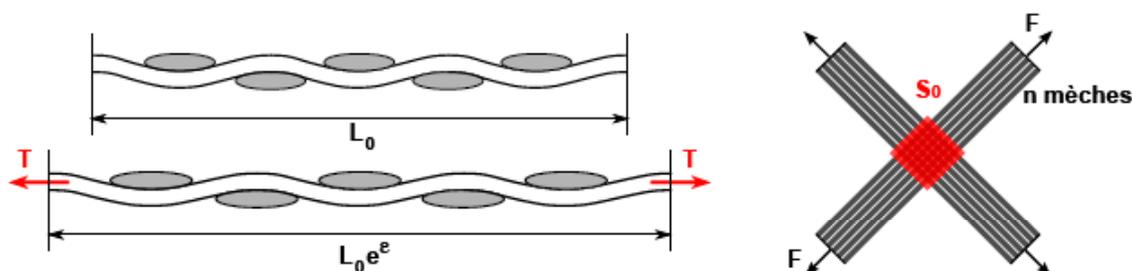
Les essais de traction biaxiale utilisés ici sont présentés dans [BUE98][BUE01]. Les données utilisées consistent en des courbes (ou réseau de courbes si on fait varier le rapport de

biaxialité) de tension par mèche en fonction de la déformation globale du tissu dans la direction considérée. La mesure de déformation considérée n'est pas celle des mèches mais celle du renfort tissé (voir **Figure 48**). A partir d'une éprouvette dont le nombre de mèches et les dimensions de la zone utile sont connus, de capteurs de force et de déplacement, ces différentes données peuvent être extraites.

*Note : le rapport de biaxialité, noté  $k$ , représente le rapport des déformations entre les deux directions de traction. Lorsque l'on considère le réseau de mèches  $l$  alors :*

$$k = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

Pour ce qui concerne les données numériques, il suffit d'extraire la somme des efforts nodaux dans la direction de traction et de ramener ce résultat à une tension par mèche. De même, pour la déformation équivalente du tissé extraite à partir des déplacements nodaux.



**Figure 48** : Mesures réalisées en traction biaxiale

### (b) Cisaillement - Picture frame

Les essais de picture frame présentés ici sont issus des travaux de [DUM03a][DUM03b]. Dans un essai de ce type, les données expérimentales directes sont l'effort de traction  $F$  sur le sommet du cadre et le déplacement  $d$  de ce même coin (voir **Figure 49**). Toutefois, nous utiliserons pour grandeurs caractéristiques l'angle de cisaillement et le couple de cisaillement. Considérons deux mèches de deux réseaux distincts, nous avons vu plus haut que le mécanisme de cisaillement peut être assimilé à une rotation des mèches les unes relativement aux autres (treillis), les actions mécaniques engendrées sont donc de type frottement et écrasement des mèches les unes sur les autres. De par la symétrie du contact, il est assez clair que l'action mécanique d'une mèche sur l'autre exprimée sur l'axe de rotation est un couple. L'action mécanique d'un réseau de mèches sur l'autre sera donc la somme des couples élémentaires. Ce couple résultant est proportionnel au nombre d'intersections au nombre de mailles, mais de manière générale il est proportionnel à la quantité de tissu, c'est à dire par exemple à sa surface initiale.

Les données utilisées seront donc des courbes de couple surfacique (couple / surface initiale de tissu) en fonction de l'angle de cisaillement  $\gamma$  tel que défini en **Figure 49**.

### Détermination de l'angle de $\gamma$

L'angle de cisaillement est déterminé par des relations géométriques qui mènent à :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{d}{L}\right) \quad (5.1)$$

Les différents paramètres géométriques sont définis en **Figure 49**.

*Couple surfacique de cisaillement*

Afin d'extraire le couple de cisaillement à partir de la mesure de  $F$ , il est proposé d'utiliser une méthode - que l'on peut qualifier d'énergétique - basée sur l'équilibre des puissances développées par la machine et au sein de l'éprouvette. Ainsi il vient :

$$F \cdot \dot{d} = S \cdot C(\gamma) \cdot \dot{\gamma} \quad (5.2)$$

où  $C$  représente le couple surfacique de cisaillement et  $S$  la surface initiale de tissé. Or

$$\dot{d} = \dot{\gamma} \cdot L \cdot \sqrt{2} \left( \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

Il vient donc :

$$C(\gamma) = F \frac{L}{S} \sqrt{2} \left( \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

*(c) Cisaillement - bias test*

Des essais de bias test sont également utilisés à des fins de validation des simulations. Ceux-ci sont issus des travaux de thèse de De Luycker [DEL09]. Dans un essai de bias test, on distingue trois zones de l'éprouvette dont une est cisailée, une est demi cisailée et la dernière n'est pas cisailée (voir **Figure 50**).

Sur le plan cinématique, on utilise pour valeur d'angle de cisaillement celui que l'on retrouve dans la zone cisailée. On détermine celui-ci à partir de la même expression que pour le picture frame (équation (5.1)) en considérant que la zone centrale de l'éprouvette est en cisaillement pur :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{d\sqrt{2}}{L_0 - l_0} \right)$$

*Note importante : il convient de considérer cette relation comme valeur théorique de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette. Si celle-ci est plutôt bonne en début de test, les efforts sur l'éprouvette mènent rapidement à des glissements entre les réseaux de mèche menant ainsi à une surestimation de l'angle de cisaillement par rapport à la valeur réelle [DEL09][ZHU07b].*

L'extraction du couple de cisaillement en fonction de l'angle  $\gamma$  se fait de la même façon que celle proposée pour le picture frame. Néanmoins, elle demande de plus amples précautions en raison des différentes zones de cisaillement. Ainsi, si l'on note  $S_\gamma$  et  $S_{\gamma/2}$  les surfaces initiales des zones cisailées et demi cisailées, (5.2) devient alors :

$$F \cdot \dot{d} = \left( S_\gamma \cdot C(\gamma) \cdot \dot{\gamma} \right) + \left( S_{\gamma/2} \cdot C(\gamma/2) \cdot \frac{\dot{\gamma}}{2} \right) \quad (5.3)$$

Connaissant  $\dot{d}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ , l'équation (5.3) doit être résolue afin de fournir  $C(\gamma)$ . Le comportement étant non linéaire,  $C(\gamma) \neq C(\gamma/2)$ , il est donc nécessaire de résoudre cette équation de manière incrémentale. Le calcul est initialisé en prenant  $C(\gamma/2) = C(\gamma)/2$  à l'instant initial.

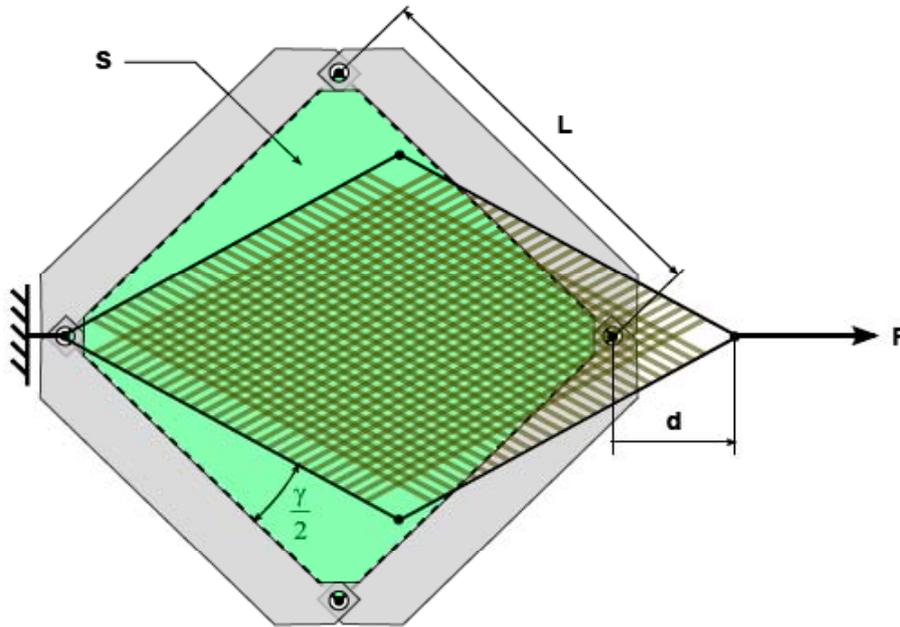


Figure 49 : Mesures et données dans l'essai de cadre de cisaillement

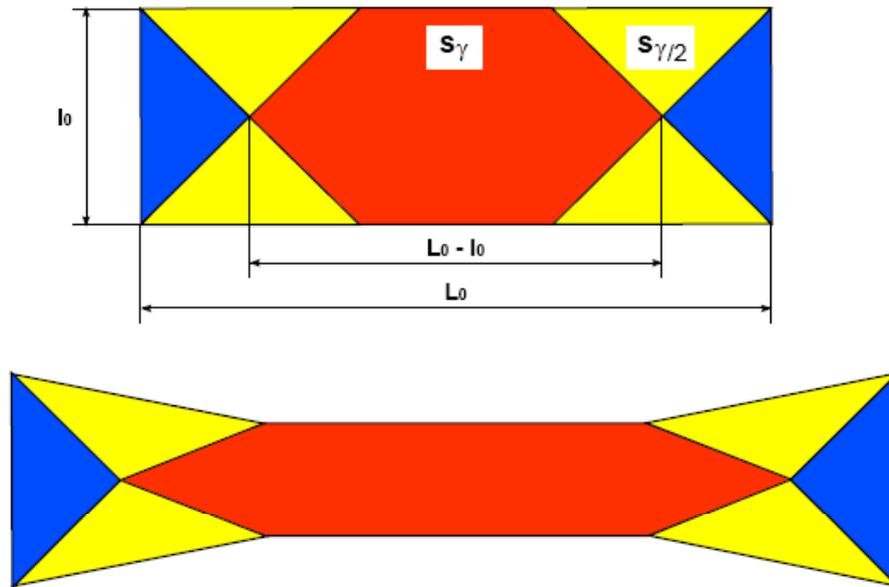


Figure 50 : Mesures et données dans l'essai de bias test

(d) Cisaillement - données numériques

L'extraction des données issues des simulations se fait d'après l'équation (5.1) pour ce qui est de l'angle de cisaillement. Concernant le couple surfacique de cisaillement, celui-ci est calculé par méthode énergétique également. Le travail des efforts extérieurs appliqués sur le VER étant une donnée fournie par le code de calcul, il ne reste qu'à en déduire le couple surfacique par les relations suivantes :

$$\frac{d}{dt}(W_{\text{ext}}) = \dot{W}_{\text{ext}} = S.C(\gamma).\dot{\gamma} \Rightarrow C(\gamma) = \frac{S.\dot{\gamma}}{\dot{W}_{\text{ext}}}$$

où  $W_{\text{ext}}$  est le travail des efforts extérieurs appliqués au VER,  $S$  la surface initiale du VER.

### *(e) Compression*

Ici, seule une preuve qualitative de la capacité à simuler ce type d'essai est apportée, les essais expérimentaux étant en cours actuellement.

On trace sur les courbes de compression présentées l'effort d'écrasement surfacique en fonction du taux volumique de fibres. L'effort de compression est ramené à la surface de tissu afin de s'affranchir de la taille de l'échantillon et pouvoir comparer simulations et essais. Pour les mêmes raisons, on n'utilise pas la mesure directe de distance entre plans parallèles mais le taux volumique de fibres, variable qui permet une comparaison correcte avec un essai expérimental. En effet, les efforts en début d'essai sont si faibles qu'il n'est pas possible de déterminer à partir de quelle valeur du déplacement l'essai commence réellement. En revanche, la quantité de fibre mise en jeu est parfaitement connue, et la distance entre plans également (à partir du déplacement machine). A partir de ces deux grandeurs, on détermine de manière précise une grandeur comparable entre essai et simulation : le taux volumique de fibres dans le volume utile.

### 5.1.2 Géométries déformées

Le principe général utilisé pour valider les géométries déformées du modèle consiste à comparer celles-ci avec des images obtenues par reconstruction de tomographie. La validation se fait sur la forme des sections transverses de mèche. Outre une évaluation qualitative, on propose de quantifier, entre états initial et déformé, certaines mesures telles que les ratios de hauteur ou largeur de mèches, les ratios d'aires des sections transverses, c'est à dire des grandeurs caractérisant les changements de géométrie globale de la section transverse. Les images de renforts sous traction biaxiale et/ou cisaillement sont réalisées à l'aide du dispositif présenté au paragraphe 2.1.4.

#### *(a) Traitement des données expérimentales*

La géométrie de renforts tissés à l'état de repos (également désigné par état initial) présente une forte variabilité. Concrètement, il peut exister des différences significatives de géométrie entre deux sections transverses observées en deux lieux de configuration similaire. En effet un tissé à l'état initial peut trouver un grand nombre de positions d'équilibre. Sous sollicitations mécaniques, la variabilité géométrique est beaucoup plus faible car les positions d'équilibre sont alors mieux déterminées en raison de la contrainte du chargement mécanique. On peut toutefois noter que la géométrie obtenue sous traction biaxiale étant proche de la géométrie initiale, il reste des traces de cette variabilité sur la géométrie du renfort déformé. Cela est gommé dans une situation de cisaillement par exemple car la géométrie finale est déterminée par la configuration des contacts entre mèches.

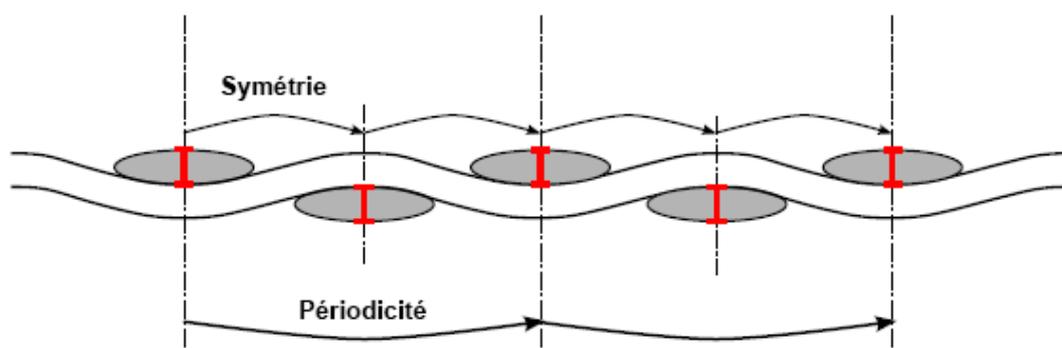
Afin de s'affranchir de ce problème de variabilité géométrique parfois importante, il est proposé de réaliser des moyennes sur l'ensemble de l'échantillon observé. La méthode consiste à relever les contours des sections de mèche qui sont situées dans une même configuration au sein du renfort. L'ensemble de ces configurations que nous appelons « configurations similaires » est obtenu grâce à la périodicité et aux symétries du renfort tissé. Les types de configurations choisies sont caractérisés par la situation de la section transverse choisie vis-à-vis des mèches voisines. Par exemple, pour un taffetas, à l'endroit des intersections avec une mèche transversale (voir **Figure 51**).

Ensuite, afin de calculer la géométrie moyenne de la section transverse dans la configuration choisie, le procédé utilisé est le suivant (voir **Figure 52**) :

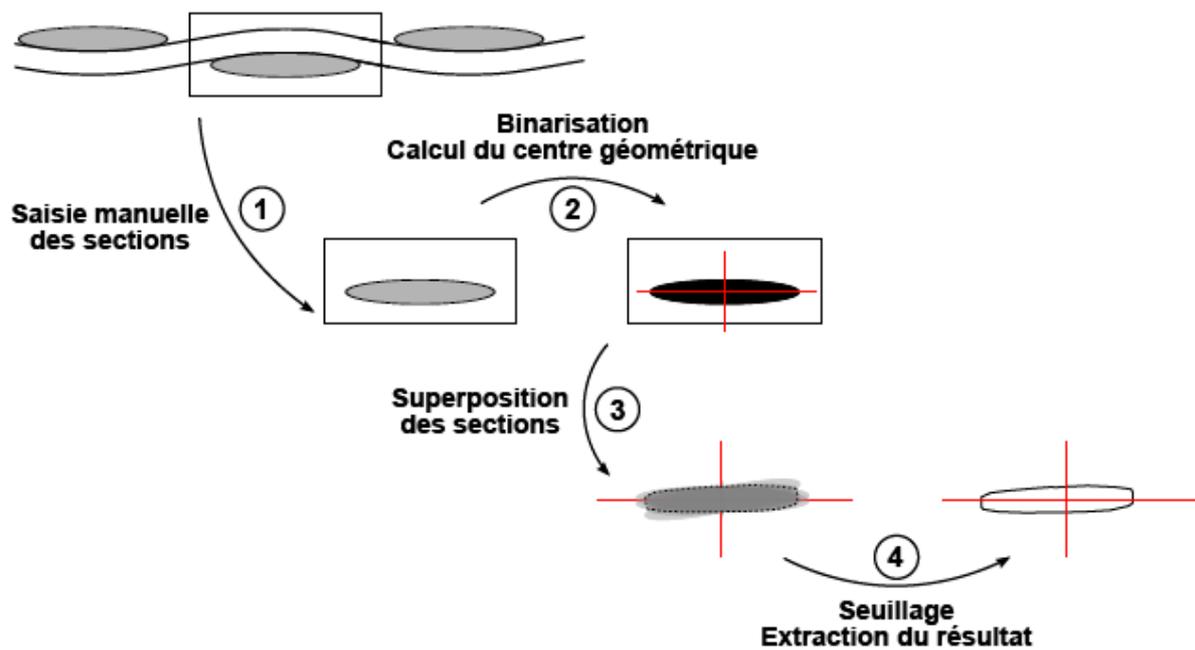
- Saisie manuelle du jeu de  $n$  sections transverses à partir de la reconstruction tomographique.
- Binarisation des images obtenues.
- Calcul du centre géométrique de chacune des sections.
- Superposition des images en s'alignant sur le centre de masse. On obtient une image dont le niveau de gris varie de 0 à  $n$ .
- Obtention de la section moyenne par seuillage de l'image au niveau de gris  $n/2$ .

Seule la première étape de ce processus requiert une longue saisie manuelle, les autres ont pu être programmées dans le logiciel Matlab qui offre des fonctionnalités intéressantes pour le traitement d'images. On notera que cette méthode requiert un nombre significatif de sections transverses afin de fournir un résultat de qualité. Cependant, la taille des échantillons observables étant limitée, certaines données souffrent de cette dispersion de géométrie.

Ce processus est adopté pour chacun des scans utilisés dans ce chapitre, sauf pour le G1151.



**Figure 51** : Configurations similaires se répétant par symétries ou périodicité



**Figure 52** : Procédé de moyennage des sections observées par tomographie

### (b) Traitement des données numériques

L'extraction des géométries déformées obtenues par simulation ne pose pas les problèmes soulevés ci-dessus car la périodicité est déjà supposée « parfaite ». L'obtention des géométries simulées que l'on souhaite valider est donc directe.

### (c) Types de configurations observées

Dans le paragraphe (a) ci-dessus est évoquée la notion de configuration d'une section. Ceci traduit la situation d'une section de mèche au sein du renfort. On caractérise celle-ci par l'entourage, c'est-à-dire les mèches voisines.

Dans un taffetas, seule une configuration est choisie pour caractériser l'état initial ou l'état sous tension biaxiale. Celle-ci est illustrée sur le schéma **Figure 53**, configuration #1. En revanche, en cisaillement, quatre configurations différentes sont utilisées pour support de validation géométrique. Elles sont illustrées sur le schéma en **Figure 53**.

Dans un sergé 2x2, trois configurations différentes sont utilisées en états initial ou déformé. Elles sont illustrées sur la **Figure 54**.

Le G1151 présentant une géométrie bien plus complexe, et le modèle géométrique initial étant particulièrement basique, seule une analyse qualitative par observations de coupe du renfort est proposée.

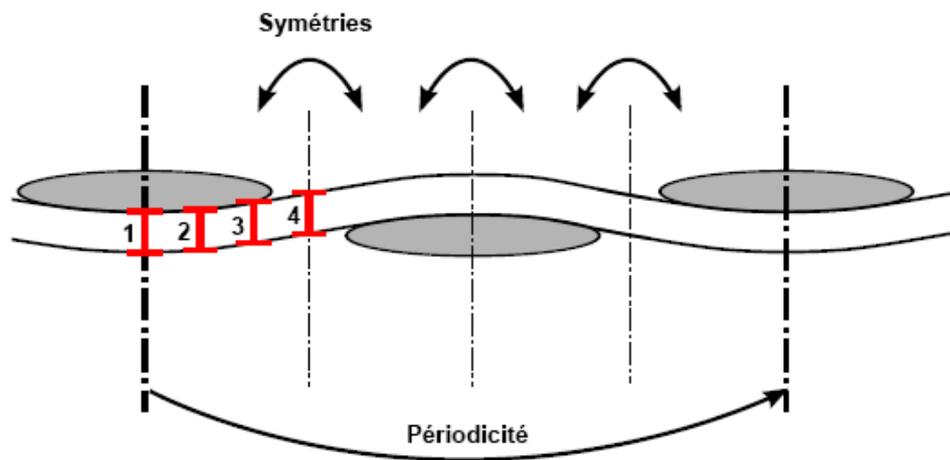


Figure 53 : Configurations observées dans le taffetas

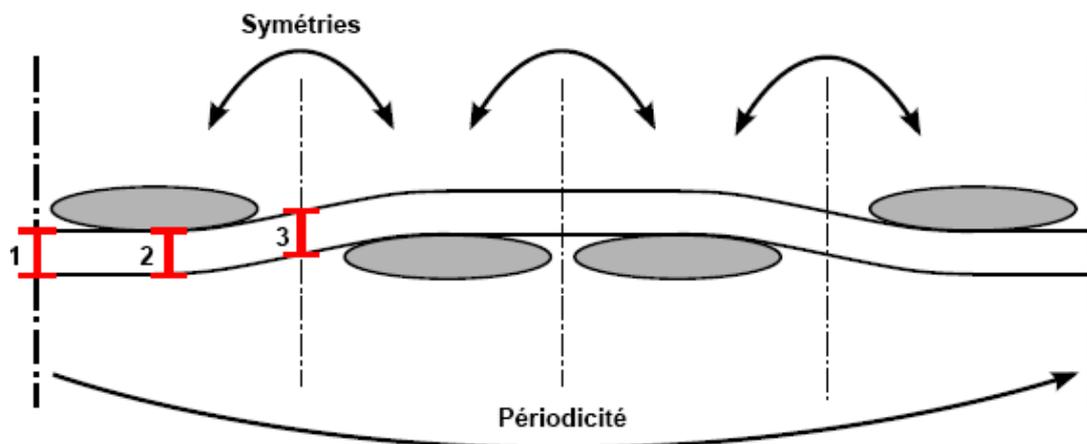


Figure 54 : Configurations observées dans le sergé 2 x 2

## 5.2 Taffetas de verre

Le premier renfort étudié dans cette étude offre la géométrie la plus simple, celle d'un taffetas. Ses caractéristiques sont présentées au paragraphe 1.2.2(c). Ce renfort, relativement simple avec un VER de taille raisonnable a servi de base à la mise au point de l'ensemble des modèles présentés dans les différents chapitres précédents. Par ailleurs, de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles pour ce renfort, notamment en traction biaxiale et cisaillement. Ainsi, les différentes sollicitations mécaniques envisagées en section 4.4 ont été simulées.

### 5.2.1 Traction biaxiale

La traction étant un des cas les plus simples à traiter en simulation, il est présenté en tout premier lieu. La **Figure 55a** donne un aperçu du modèle de simulation déformé.

#### (a) Comportement mécanique

La première simulation est réalisée en tension équi-biaxiale, c'est-à-dire à  $k=1$  afin d'ajuster les paramètres de comportement transverse par méthode inverse (voir section 4.2.2). A partir de ces

paramètres sont simulés les autres cas de tension biaxiale. Ici, le réseau de courbes présenté en **Figure 55b** correspond aux situations  $k=0$ ,  $k=0,5$ ,  $k=1$ ,  $k=2$  ainsi qu'à la situation où la seconde direction est laissée totalement libre (notée « cas libre »). Les courbes obtenues par simulation sont comparées aux courbes expérimentales.

- De toute évidence, l'accord est très bon pour  $k=1$  ainsi que pour la mèche seule puisque c'est là l'objectif de la méthode d'identification des paramètres.
- Pour les simulations à  $k=2$  et  $k=0,5$  on relève une légère différence. A cela, plusieurs explications peuvent être envisagées. On note que les courbes à  $k=0,5$  sont parallèles. Or nous avons précisé au paragraphe 1.3.2(a) la grande difficulté résidant dans la détection du début réel de l'essai de traction. Il est possible qu'un léger décalage des courbes soit imputable à cela. La courbe simulée à  $k=2$  présente, elle, une rigidité « asymptotique » supérieure à celle pour  $k=1$ . D'un point de vue physique cela semble logique : la déformation longitudinale dans la direction 2 (direction transverse) étant double, cela crée un effort supplémentaire en traction dans cette direction 1 par rapport à la situation  $k=1$ .
- Enfin, la courbe obtenue pour le cas libre est en très bon accord avec le résultat expérimental. A noter qu'aucune donnée expérimentale n'est à disposition pour la situation  $k=0$ .

Les simulations de tension biaxiale sont satisfaisantes sur le plan du comportement mécanique. Passons à l'évaluation des géométries déformées obtenues.

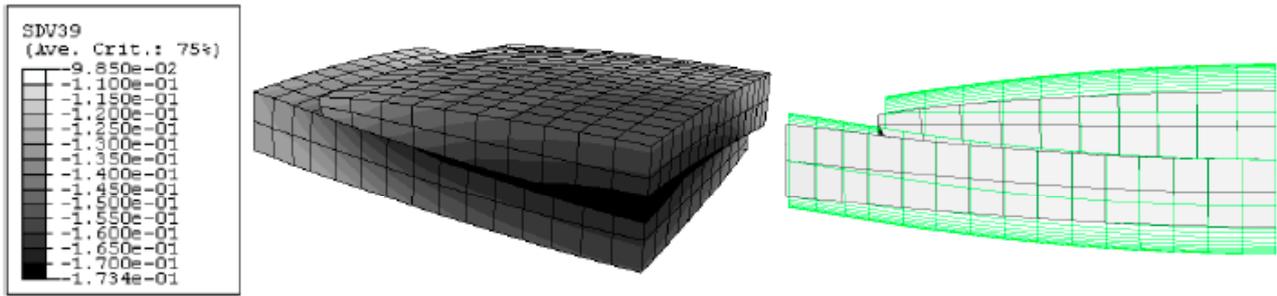
#### (b) Géométrie déformée

La validation des déformées obtenues n'est proposée que pour le cas de tension équi-biaxiale (à  $k=1$ ) en raison des scans réalisés par tomographie.

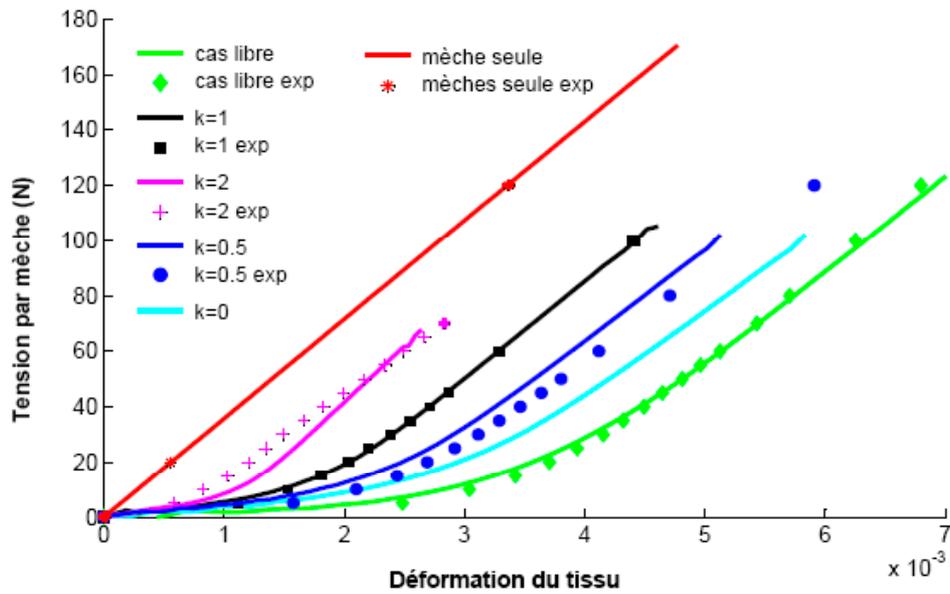
La **Figure 55c** présente la comparaison avec les coupes reconstruites pour le taffetas à l'état initial et sous tension de 11N par mèche. Cette tension est relativement faible en raison de la capacité du montage expérimental. Cependant, l'intérêt est entier car on se situe légèrement avant la fin de la zone non linéaire de la courbe (voir le réseau de courbes en **Figure 55b**), c'est-à-dire à des déformations transverses significatives.

Qualitativement, on peut noter un bon accord des géométries du modèle sauf au niveau des extrémités qui sont tronquées et doivent comporter des éléments suffisamment épais. De manière plus quantitative, les ratios d'épaisseur des mèches et d'aire des sections entre état initial et déformé ont été évalués. Compte tenu des incertitudes de mesures, l'accord est très bon avec des valeurs identiques pour les rapports de hauteur et à peine plus d'1 % de différence sur les rapports de surface.

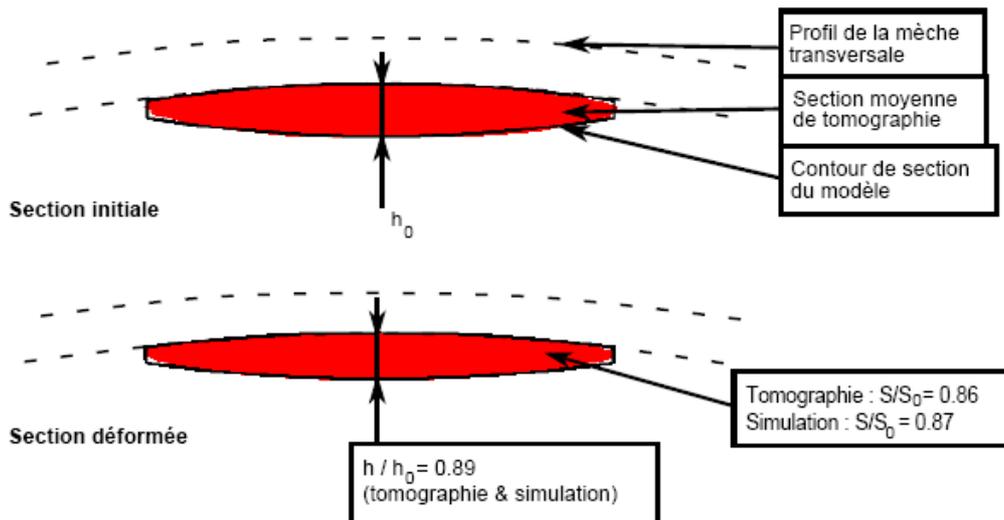
Tant sur le plan du comportement mécanique que sur le plan géométrique, le modèle utilisé en traction biaxiale est validé sur les aspects qui ont été considérés.



a. Modèle déformé en tension équi-biaxiale, iso valeurs de  $\epsilon_S$  et superposition au maillage initial

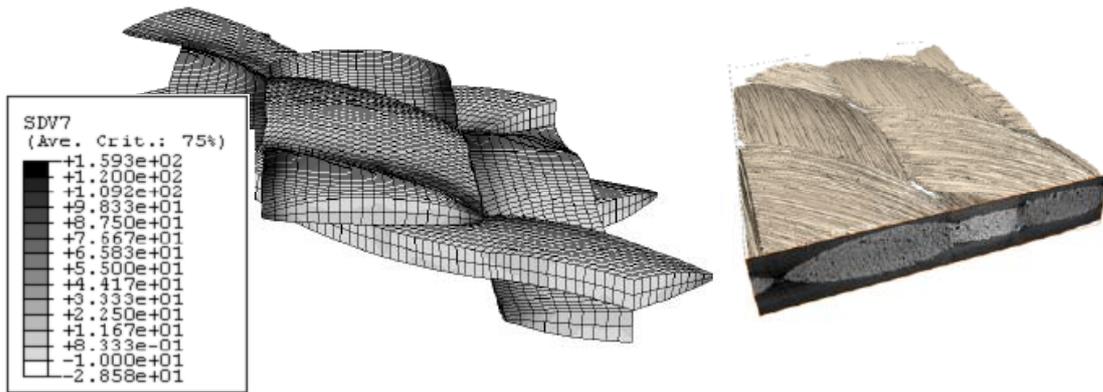


b. Réseau de courbes de traction biaxiale

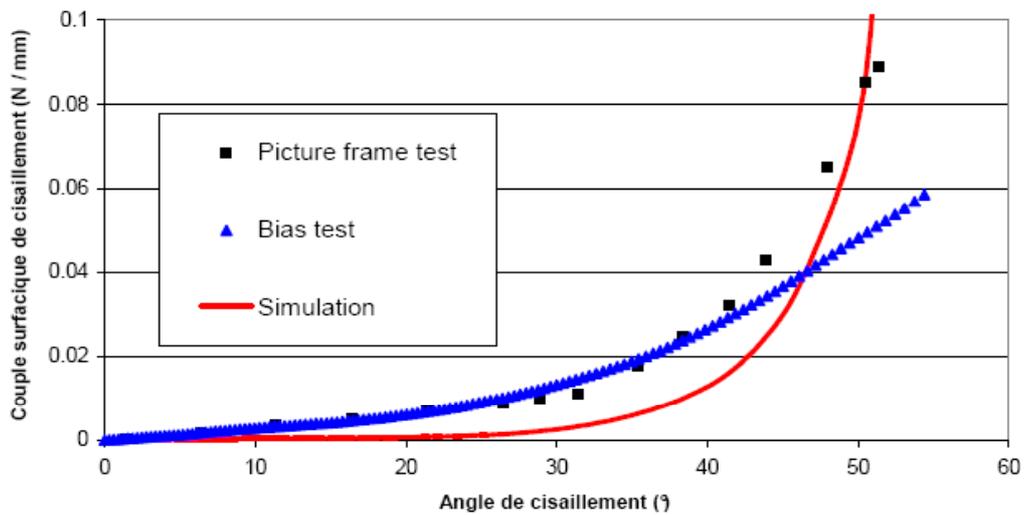


c. Evaluation de la géométrie déformée avec des résultats de tomographie ( $T=11\text{N/mèche}$ ). En rouge : sections obtenues par tomographie ; contours noirs : sections obtenues par simulation

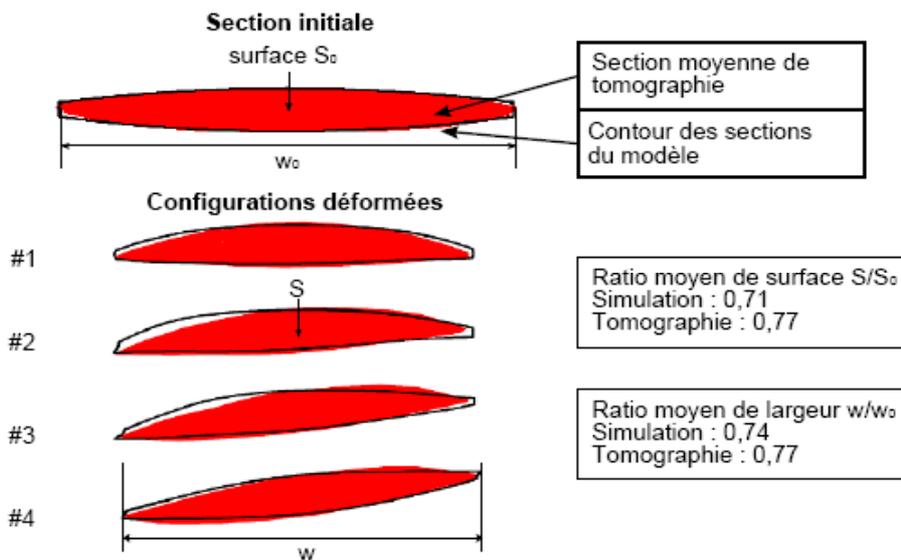
Figure 55 : Taffetas, résultats en traction biaxiale



a. Modèle déformé (iso-valeurs de contrainte longitudinale) et rendu 3D de tomographie



b. Courbes de cisaillement comparées (numérique et expérimentales)



c. Evaluation de la géométrie déformée par comparaison avec la tomographie (cisaillement de 46°). En rouge : sections obtenues par tomographie ; contours noirs : sections obtenues par simulation

Figure 56 : Taffetas, résultats en cisaillement

## 5.2.2 Cisaillement pur

Les simulations de cisaillement pur de renfort tissé sont plus rares dans la littérature [PEN02][LOM06] et ne répondent pas toujours, à notre sens, à l'ensemble des points primordiaux évoqués dans les chapitres 3 et 4 de ce manuscrit. La **Figure 56a** donne un aperçu du modèle de simulation ainsi qu'un rendu 3D du tissu réel cisailé. A nouveau, il est proposé d'évaluer successivement les résultats sur le plan mécanique et géométrique.

### (a) Comportement mécanique

La **Figure 56b** montre les courbes de cisaillement (couple surfacique en fonction de l'angle de cisaillement) issues de simulation et de test de picture frame. L'allure générale et l'évaluation de l'angle de blocage (inflexion nette de la courbe) sont satisfaisantes.

- La pente initiale (avant angle de blocage, soit pour  $\gamma$  inférieur à  $30^\circ$ ) est beaucoup plus faible, voire quasi nulle, pour la courbe numérique. Cet aspect est attribué aux conditions de contact aux intersections de mèches. En effet, avant blocage, l'essentiel des actions mécaniques rencontrées consiste en du frottement mèche contre mèche dans le mouvement de rotation relative des réseaux. L'ordre de grandeur des efforts résultants générés par frottement est fonction du coefficient de frottement (modèle de Coulomb) et aussi surtout des efforts normaux. Dans le modèle, les efforts normaux entre mèches sont initialement nuls car la géométrie initiale est idéale et sans « précontrainte ». Par conséquent, les efforts de frottement sont très faibles en début d'essai, ce qui explique la pente quasi nulle de la courbe. Dans le cas réel, la cohésion et l'équilibre mécanique du renfort après tissage impliquent nécessairement des efforts normaux aux intersections de mèches. Cela génère des efforts, certes faibles, que l'on retrouve au niveau du couple de cisaillement global du renfort. Cette hypothèse est confirmée par une simulation réalisée avec un coefficient de frottement volontairement trop élevé ( $f = 0,5$ ). Le résultat obtenu est présenté en **Figure 57** où la pente initiale est sensiblement plus importante. La fin de la courbe présente peu d'intérêt car les énergies dissipées par frottement sont surestimées.
- A partir et au-delà de l'angle de blocage, ce phénomène de frottement devient minoritaire devant les efforts mécaniques internes rencontrés lorsque les mèches s'écrasent latéralement les unes sur les autres. D'une manière générale, les courbes expérimentales présentent une évolution plus douce, avec un blocage moins marqué. De même, la courbe numérique est située en dessous des courbes expérimentales jusqu'à environ  $40^\circ$  puis présente une pente plus prononcée. On attribue cette progressivité au fait que les échantillons expérimentaux présentent un grand nombre de VER. Tous n'atteignent pas l'angle de blocage exactement au même instant, ce qui tend à lisser les courbes.
- Autre remarque : on présente sur la **Figure 56a** les valeurs de contraintes dans la direction des fibres, ce qui donne une image de la tension dans les fibres. On note pendant l'essai de cisaillement l'apparition de tensions dans les fibres, en particulier sur les bords extérieurs de mèche, où les ondulations « imposées » par la cinématique sont les plus importantes. Un essai de cisaillement macroscopiquement pur induit donc des tensions dans les mèches du renfort. Cela soulève une question intéressante, celle de la comparaison des essais de bias test et de picture frame. Le premier n'impose aucune tension aux mèches de la zone utile (les extrémités des mèches sont libres)

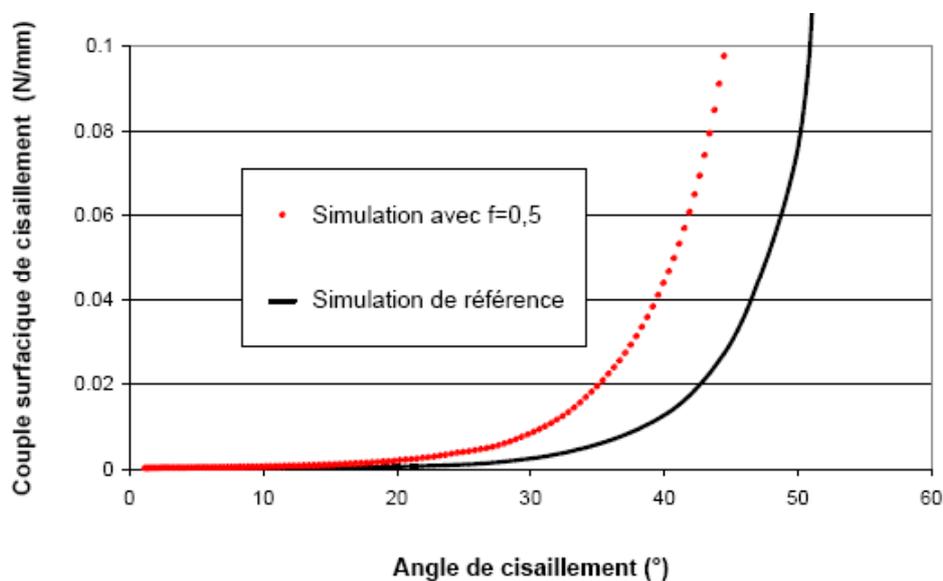
alors que le second garantit, théoriquement, l'absence d'élongation du tissu dans le sens des mèches (cinématique de cisaillement pur). Les simulations proposées correspondent exactement au second test, et prouvent l'apparition de tensions dans les mèches. Ce point est évoqué dans une contribution récente de Hivet [HIV08b].

### (b) Géométrie déformée

La validation des géométries déformées obtenues par simulation de cisaillement est faite de la même façon qu'en tension biaxiale. La **Figure 56c** montre les sections extraites d'après les configurations choisies au paragraphe 5.1.2(c), pour un angle de cisaillement de  $46^\circ$ .

D'un point de vue qualitatif, les résultats sont intéressants. Le modèle capture bien les tendances que l'on retrouve sur les géométries reconstruites par tomographie aux rayons X : dissymétries des sections, forte diminution de la largeur de mèche  $w$ , faces planes et bombées, diminution générale des aires des sections. Les différences les plus significatives se situent aux extrémités des sections : le maillage initial est à la source de ces différences car le modèle géométrique proposé ne permet pas de traduire correctement la géométrie de ces extrémités.

Plus en détail, il est proposé d'observer les ratios de largeur et de surface des sections de mèches. Pour la mèche la plus déformée, en configuration #4, le ratio de largeur atteint 74% pour le modèle numérique contre 77% pour le renfort réel. Concernant les ratios de surface pour cette même section, ils sont respectivement de 71 et 77%. On notera que le modèle a tendance à sous estimer les surfaces finales, c'est-à-dire qu'il se déforme légèrement trop. Le modèle en lui-même (notamment la forme des coefficients A et B), le procédé d'identification et/ou les essais associés peuvent être en cause.



**Figure 57** : Résultat complémentaire sur l'influence du coefficient de frottement entre mèches

### 5.2.3 Cisaillement sous tension

Les simulations de cisaillement sous tension permettent d'étudier l'influence de l'état de tension dans le renfort sur son comportement en cisaillement. D'un point de vue expérimental, les études sont assez rares [LAU08] mais soulignent l'importance de ce phénomène, en particulier durant la première partie de la courbe de cisaillement. Aucun résultat expérimental fiable n'est

disponible pour les courbes de comportement mécanique sur ce renfort, nous nous contenterons d'une appréciation qualitative. En revanche, le montage conçu dans le but de réaliser des sollicitations in situ de renforts tissés (voir paragraphe 2.2.1(a)) permet l'étude des géométries déformées sous ce type de chargement.

#### *(a) Comportement mécanique*

Deux réseaux de courbes sont présentés. En effet, par simulation, toutes les situations sont envisageables. Il est proposé d'étudier tout d'abord l'influence d'un état de tension équilibrée (voir **Figure 58a**) puis d'un état de tension non équilibré (voir **Figure 58b**). L'appréciation de ces résultats ne peut être que qualitative en raison du manque de données expérimentales.

L'influence des tensions sur la première partie de la courbe est nette. Outre une pente plus forte, on note une claire élévation des courbes dès le début de l'essai. Ce constat est également rencontré sur le plan expérimental [LAU08]. Une hypothèse expliquant ce phénomène est celle des interactions de contact/frottement aux intersections des mèches. Plus la tension est élevée, plus les efforts de contact normaux sont élevés générant ainsi des résultantes de frottement plus élevées. Celles-ci se traduisent directement par une augmentation du couple de cisaillement. Cette hypothèse rejoint celle déjà émise au paragraphe 5.2.2(a), ce qui lui confère une plus ample pertinence.

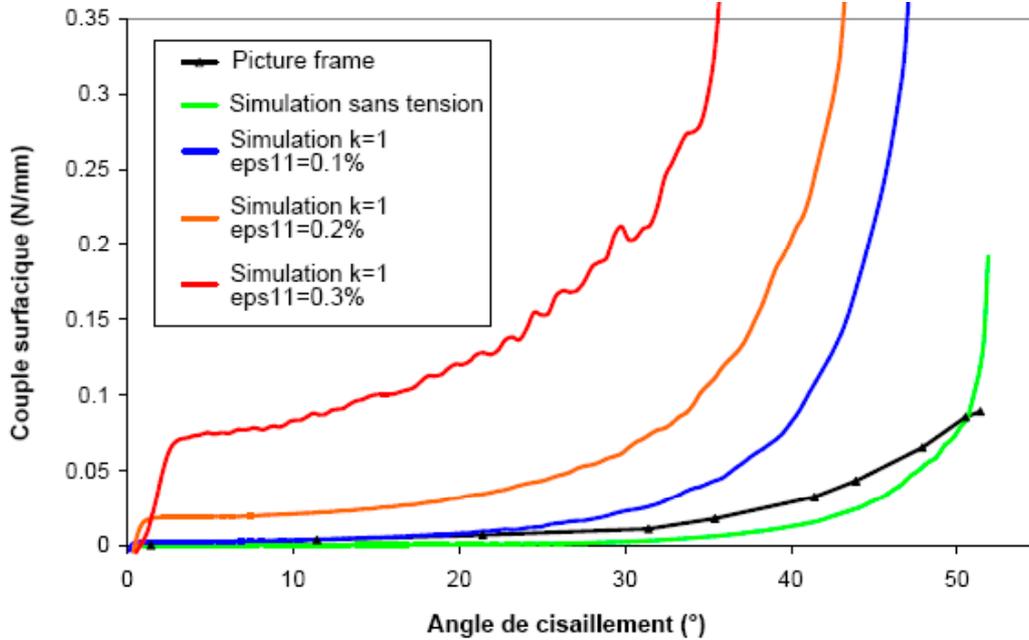
En seconde partie de test, c'est-à-dire à partir de la zone où la rigidité augmente de manière significative, on relève encore une forte influence de l'état de tension sur le couple de cisaillement. D'une part cette augmentation intervient pour des angles plus faibles, et d'autre part la rigidité en cisaillement est d'autant plus élevée que la traction dans les mèches est importante. Il est supposé que ce comportement est la conséquence de deux facteurs : d'une part la tension qui induit des résultantes de contact plus élevées dans les zones où des contacts complexes se forment (interstices entre mèches qui se ferment au moment du blocage) et d'autre part la rigidification du comportement transverse sous tension. En effet, le modèle de comportement transverse inclut une dépendance de la rigidité transverse du matériau « mèche » à la déformation longitudinale dans le sens des fibres. Ainsi les énergies mises en jeu pour déformer les mèches durant le cisaillement sont elles plus importantes et génèrent sur le plan macroscopique des couples plus élevés.

#### *(b) Géométries déformées*

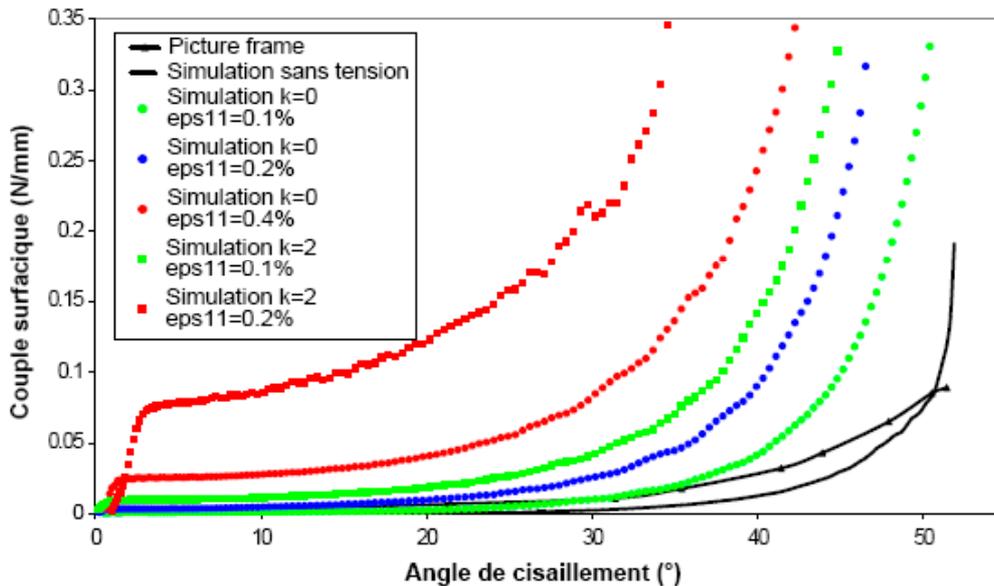
Ici, une validation est proposée à partir des images obtenues par reconstruction tomographique. Les coupes reconstruites et simulations utilisées ici (voir **Figure 59**) correspondent à un test de traction biaxiale à 20 N/mèche suivi d'un cisaillement pur de 38°.

On retrouve les mêmes types de conclusion que celles développées au paragraphe 5.2.2(b). Globalement, le modèle retranscrit l'écrasement des sections, les dissymétries... Les variations de surface des sections étudiées ont été considérées. Les résultats obtenus sont présentés sur la **Figure 59**. Cette fois-ci, il semble que les écarts entre simulation et tomographie soient plus importants. Il est possible que le modèle soit dans ses limites de validité. Une autre hypothèse envisagée concerne le dispositif expérimental. En effet, le maintien en tension des mèches dans les pinces de serrage peut être source de légers glissements. D'autre part il est possible que des réarrangements minimes se fassent au sein des mèches afin de tendre vers un équilibre minimisant les tensions, facteur d'autant plus important que le scan de l'échantillon

cisaillé sous tension n'est réalisé qu'après celui du même échantillon sous tension mais non cisaillé. Ces deux facteurs auraient pour conséquence d'amoindrir la tension dans les mèches et limiter l'écrasement des mèches dans la zone utile de l'échantillon, d'où les différences observées.

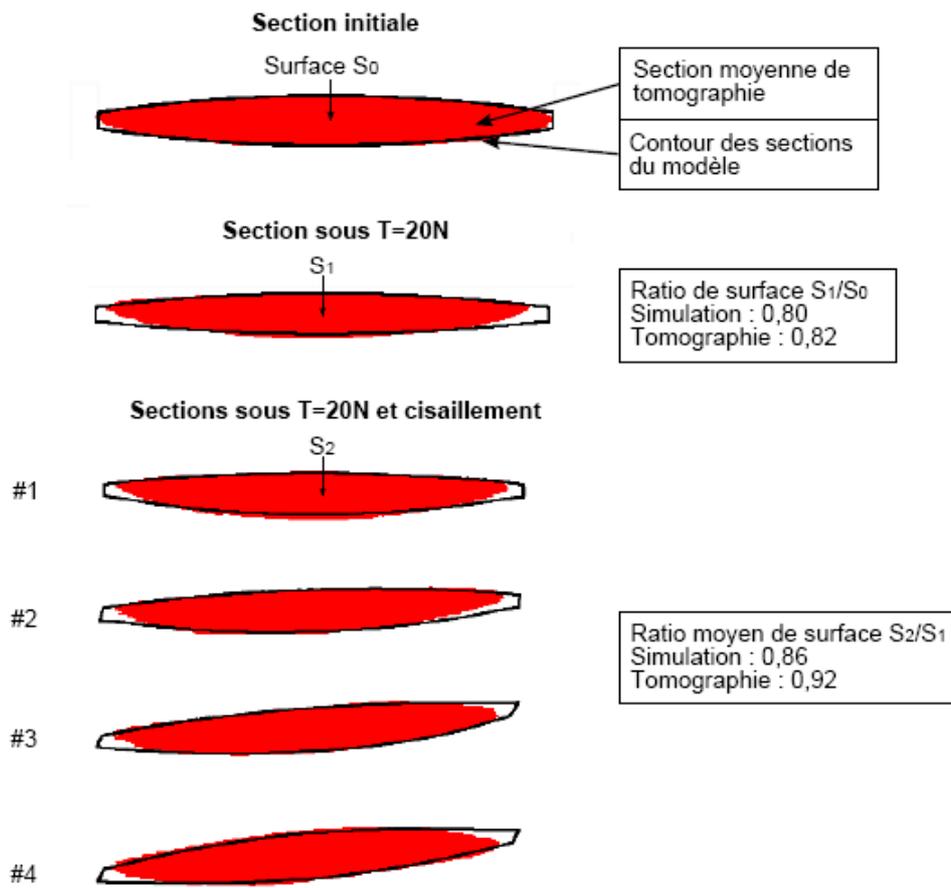


a. Cisaillement sous tension équi-biaxiale



b. Cisaillement sous tension non équi-biaxiale

**Figure 58** : Résultats en cisaillement sous tension, courbes sous différents états de tension



**Figure 59** : Résultats en cisaillement sous tension, évaluation de la géométrie déformée par comparaison avec la tomographie (traction équi-biaxiale, T=20N/mèche)

*(c) Application au calcul de mise en forme*

Les résultats de cas simulations ont également été utilisés pour application à la mise au point de modèles de comportement macroscopiques en membrane [LEE08]. Cela aspect a fait l'objet d'une collaboration avec J. Cao et W. Lee de Northwestern University.

Si il est fréquemment supposé que tension et cisaillement sont indépendants, des résultats expérimentaux ont montré l'influence des tensions sur le comportement en cisaillement [LAU08]. Grâce à cette collaboration, le modèle de comportement de renforts tissés de Cao [PEN05], dit « modèle non orthogonal », a été étendu et amélioré afin d'inclure la dépendance du cisaillement aux tensions dans les mèches. La rigidité de cisaillement incluse dans le modèle a été modifiée afin d'introduire cette dépendance. Une forme analytique adaptée a été proposée, puis identifiée sur la base des résultats des simulations mésoscopiques présentés en (a) pour le cas de la traction équi-biaxiale.

Ce modèle amélioré a été testé afin de simuler des cas de traction biaxiale et cisaillement sous tension non équi-biaxiale. La validation face aux simulations mésoscopiques présentées en 5.2.1(a) et ci-dessus en (a) présente un accord satisfaisant. Une utilisation ultérieure pour des calculs de mise en forme est en cours.

### 5.2.4 Compression

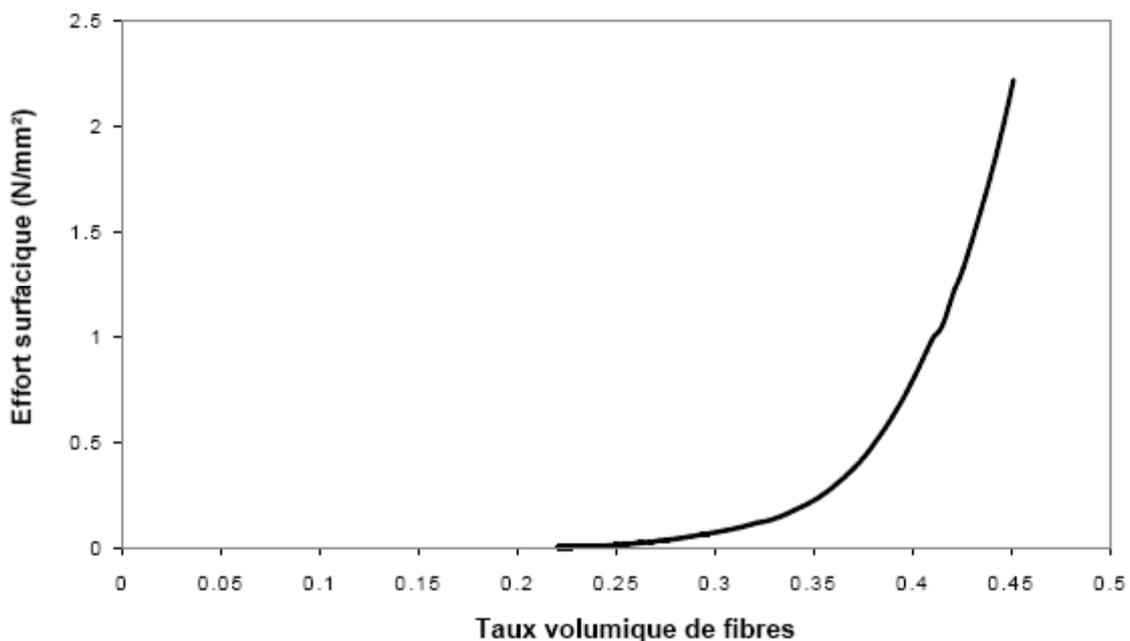
Ici, seule une preuve qualitative de la capacité à simuler ce type d'essai est apportée, les essais expérimentaux étant en cours actuellement. La **Figure 60** présente le renfort déformé tel qu'obtenu en fin de simulation ainsi que la courbe d'écrasement obtenue. L'allure de la courbe est typique d'un essai de compression de renfort tissé avec une tangente initialement nulle puis un comportement rigidifiant correspondant à la densification du réseau de fibres.

Il est évident que ce type d'essai permet de caractériser le comportement transverse (écrasement) des mèches. Il est envisagé de l'utiliser pour identification des paramètres du comportement transverse. Ces travaux sont en cours.

*Toutefois, il convient de noter encore une fois que les paramètres obtenus sont dépendants de l'identification réalisée et du modèle associé, ici la compression. De cette manière il est alors impossible d'identifier la dépendance du comportement transverse à la tension dans les mèches.*



a. Modèle déformé, iso-valeurs de  $\epsilon_S$  et superposition au maillage initial



b. Courbe de compression obtenue par simulation

**Figure 60** : Taffetas, résultats qualitatifs en compression

### 5.3 Sergé 2x2 de carbone

Le second renfort étudié lors de ces travaux de thèse est un renfort beaucoup plus courant dans des applications du domaine aéronautique. Il s'agit d'un sergé 2 x 2 de carbone, généralement préféré au simple taffetas en raison de ses bonnes capacités de formabilité, de son embuvage plus faible et, ici, des propriétés du carbone. Pour ce renfort, des essais de traction biaxiale ainsi que de bias test sont disponibles et sont utilisés ci-dessous. Concernant le modèle, deux types de maillage à disposition permettent d'évaluer l'influence de ce dernier et d'en tirer des conclusions. Le modèle présenté en premier lieu dont nous développerons les résultats utilise le modèle géométrique de type b, le plus évolué des deux disponibles (voir paragraphe 4.1.3).

#### 5.3.1 Traction biaxiale

Nous présentons tout d'abord les résultats en traction biaxiale car ces simulations sont nécessaires pour l'identification des paramètres matériau et présentent moins de difficultés que des simulations de cisaillement. Le modèle de simulation de traction biaxiale reprend les mêmes caractéristiques que celles du taffetas, mais ici un VER entier est utilisé.

##### *(a) Comportement mécanique*

Le réseau de courbes de traction biaxiale obtenu par simulation est donné en **Figure 61a**.

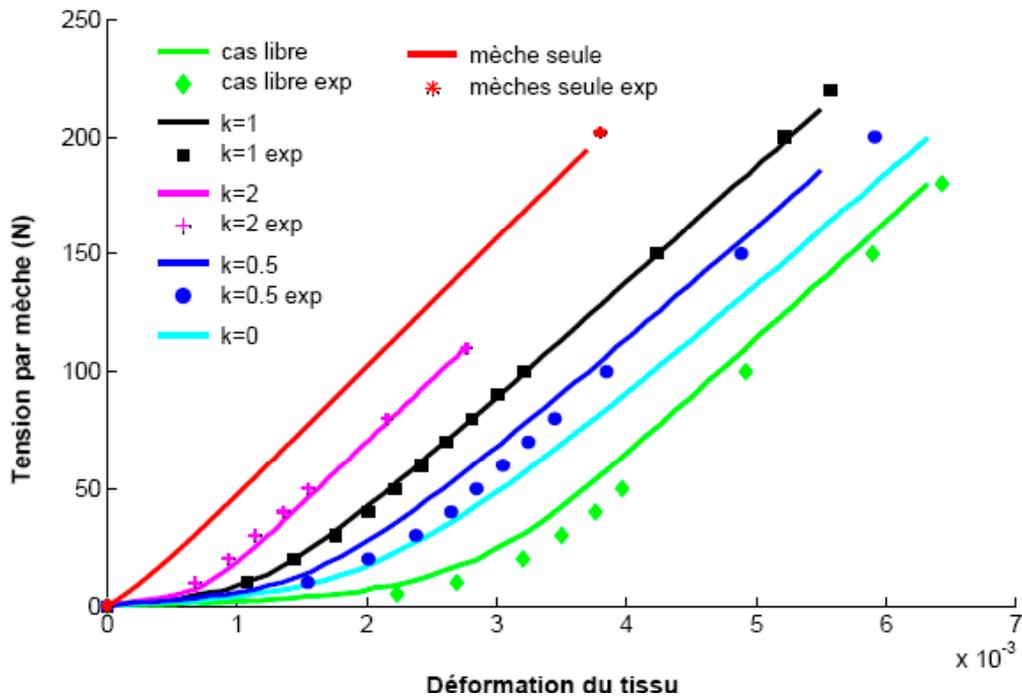
- La courbe à  $k=1$  présente un bon accord avec l'expérience puisqu'elle a été utilisée pour l'identification inverse des paramètres matériau.
- Pour  $k=0,5$  et le cas de la direction transverse libre, les courbes semblent offrir une allure intéressante mais il reste un décalage avec les courbes expérimentales. Il est possible que les sources d'erreur proviennent des courbes expérimentales dont nous avons souligné la difficulté à déterminer l'origine. Ces données expérimentales datent d'une dizaine d'années et toutes les conditions des essais ne sont pas parfaitement connues.
- La courbe à  $k=2$  est en très bon accord avec la courbe expérimentale.

##### *(b) Géométries déformées*

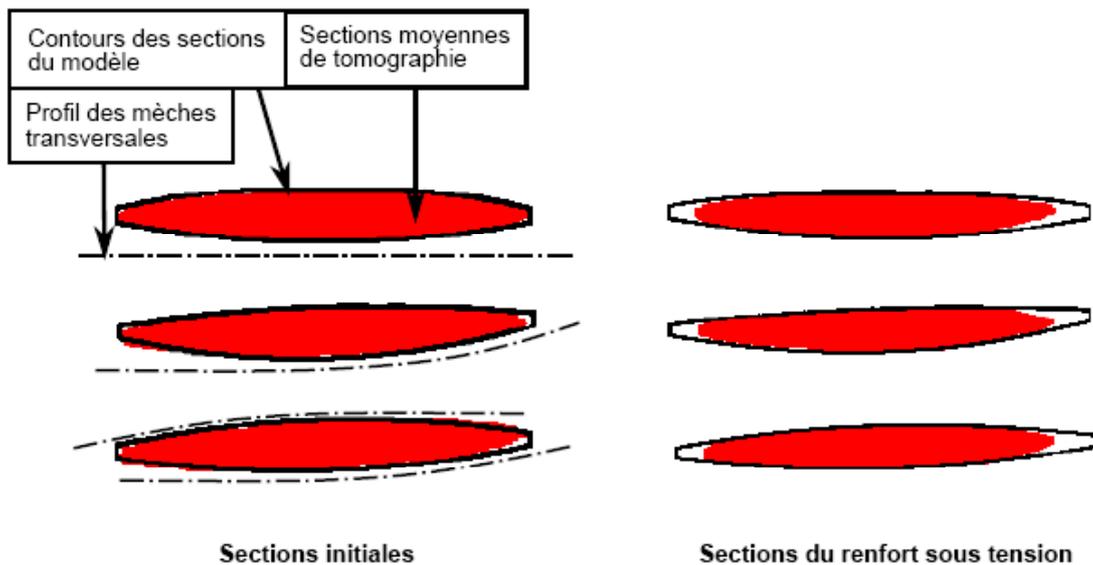
A l'aide du dispositif expérimental conçu pour les observations au tomographe (présenté au paragraphe 2.2.1(a)) il est possible d'acquérir des images reconstruites d'un renfort en tension biaxiale. Toutefois nous ne pourrions pas valider de manière fiable ces géométries car l'échantillon a subi, de toute évidence, l'histoire du chargement précédent. Il semble qu'il ait été endommagé par le cycle précédent de cisaillement sans tension puis retour à l'état initial. Ce point n'avait pas été envisagé plus tôt.

Sur la **Figure 61b** sont présentées les sections initiales du renfort ainsi que les sections sous tension. Pour chaque situation, le modèle et les coupes reconstruites sont comparés. Si l'accord est très bon pour la géométrie initiale du renfort, il est visible, pour le renfort sous tension, que les sections transverses des mèches sont très nettement écrasées latéralement. Le premier cycle de cisaillement influence donc fortement la géométrie mésoscopique du renfort. Les contacts latéraux rencontrés en fin de cisaillement mènent à un écrasement latéral des mèches qui réduit leur largeur. Après retour à un angle de cisaillement nul (c'est-à-dire en position initiale) la largeur des mèches est alors nettement inférieure à la largeur des mèches initiales.

Bien que gênant pour la validation des géométries déformées ce constat vient apporter un support intéressant à l'hypothèse de comportement élasto-plastique des mèches. Le modèle de matériau basé sur une loi hypo-élastique présente l'intérêt de pouvoir être étendu à des comportements de ce type.



a. Réseau de courbes de traction biaxiale



b. Evaluation de la géométrie avec la tomographie (tension équi-biaxiale, T=20N/mèche)

Figure 61 : Sergé, résultats en traction biaxiale

### 5.3.2 Cisaillement pur

La simulation de cisaillement pur sur un sergé se montre plus délicate que le « simple » taffetas, tout d'abord en raison du nombre plus élevé de mèches dans le modèle. En effet, durant le mouvement imposé à l'ensemble des mèches, certaines se trouvent fortement éloignées de leur centre instantané de rotation. Par conséquent elles subissent des effets d'inertie importants qu'il convient de minimiser (calcul explicite « quasi statique »). Par ailleurs, et nous y reviendrons dans la section 5.3.3, le maillage initial a une forte influence sur le résultat obtenu. Ici, le maillage le plus adapté (celui qui nous semble plus pertinent) est présenté, il s'agit du maillage de type b.

#### *(a) Comportement mécanique*

La courbe de cisaillement obtenue est comparée à un essai de bias test en **Figure 62b**. Malheureusement, peu de données expérimentales sont disponibles et l'essai de bias test peut faire l'objet de nombreuses critiques. Il faut donc garder un peu de recul par rapport à ces conclusions.

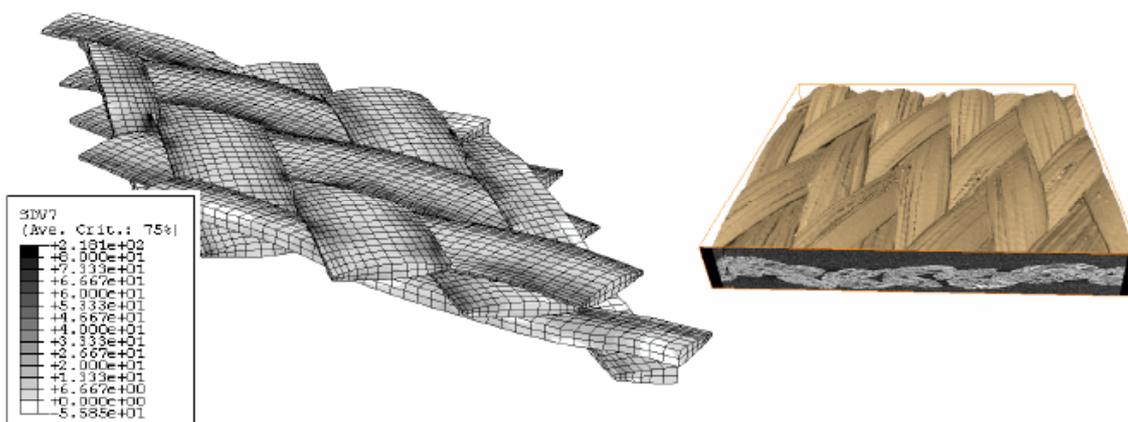
On notera toutefois que la pente de la courbe en début d'essai (avant blocage) est assez proche de l'expérience, bien que la courbe soit nettement plus basse (problématique des efforts de contact entre mèches déjà abordée au paragraphe 5.2.2(a)). Ensuite, l'angle de blocage est très marqué pour la simulation en raison de la géométrie idéalisée qui ne traduit pas la dispersion rencontrée dans le renfort réel (remarque similaire à celle émise en 5.2.2(a)). La courbe expérimentale est, elle, bien différente avec un angle de blocage très peu marqué et apparemment de valeur plus faible. Cependant il est nécessaire d'émettre certaines critiques et réserves quant à ces résultats.

Tout d'abord, il est très difficile de détecter ou d'estimer le début réel d'un essai en bias test. La raison en est la même que pour un essai de compression : les efforts sont très faibles en début d'essai. Ainsi, un décalage horizontal de la courbe est-il possible. Ensuite, à l'approche de l'angle de blocage durant un essai de bias test, les efforts rencontrés dans la structure tissée mènent irrémédiablement à des glissements entre les réseaux de chaîne et de trame. Cela conduit à une surestimation significative de l'angle de cisaillement calculé à partir du déplacement machine. Par conséquent, la seconde partie des courbes de bias test est étirée vers la droite du graphique. Pour ces différentes raisons, il n'est pas possible d'évaluer précisément la courbe de cisaillement obtenue.

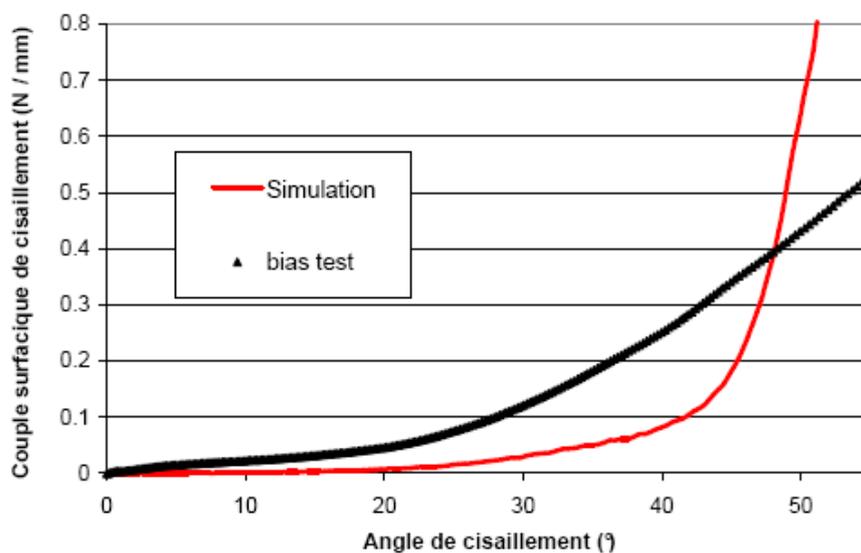
#### *(b) Géométrie déformée*

La géométrie du modèle déformé a pu être comparée à celle obtenue par tomographie. La **Figure 63a** montre une première comparaison qualitative des trois configurations de sections dans leur environnement. Les tendances sont intéressantes avec l'inclinaison des sections et leurs dissymétries, ou encore les zones de contact et de décollement que l'on retrouve dans les deux cas. Cette appréciation est très qualitative car elle est basée sur des coupes reconstruites non moyennées, donc présentant quelques particularités.

On montre sur la **Figure 63b** les sections simulées comparées aux sections moyennées obtenues par tomographie. Là encore, les surfaces bombées, les distorsions sont bien capturées par le modèle. Une comparaison chiffrée nous permet de confirmer cette tendance. Les graphiques en **Figure 63c** montrent l'évolution de la hauteur et la largeur des sections de mèches déformées qui présente un accord satisfaisant avec la tomographie.

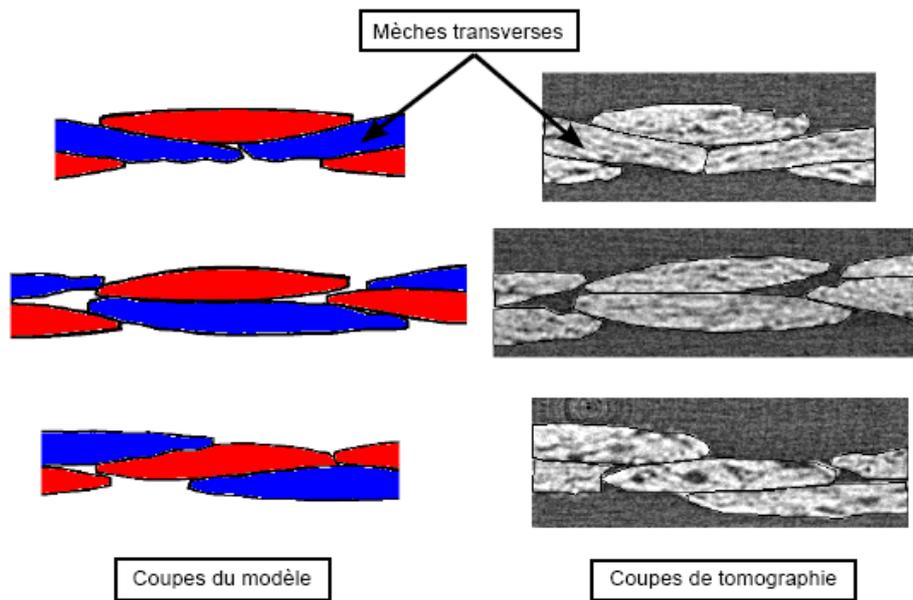


a. Modèle déformé (iso-valeurs de contrainte longitudinale) et rendu 3D de tomographie

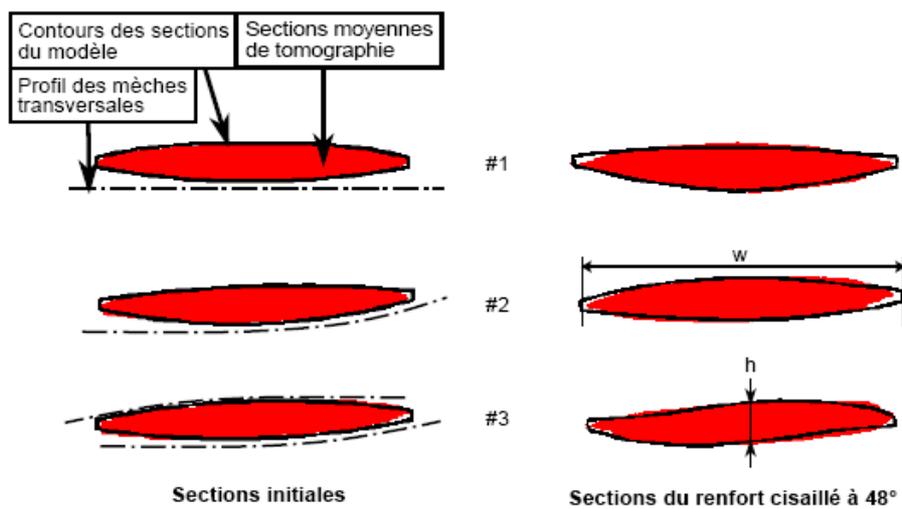


b. Courbes de cisaillement comparées (numérique et expérimentales)

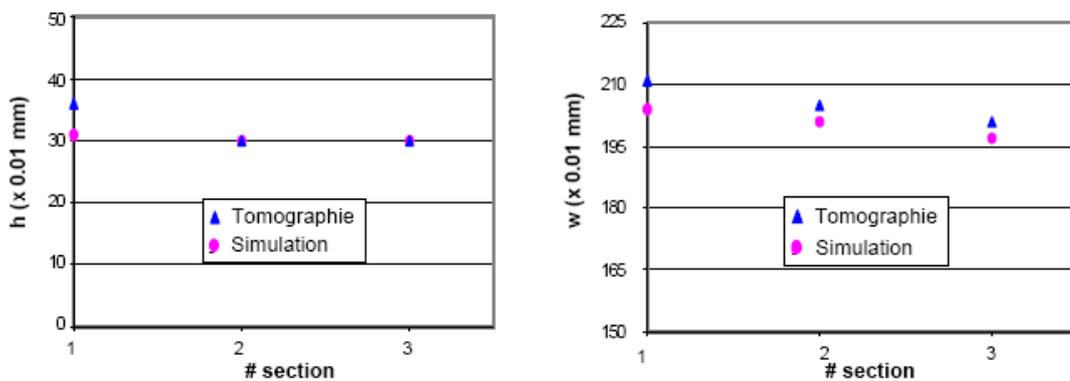
Figure 62 : Sergé, résultats en cisaillement, aspect mécanique



a. Evaluation qualitative de la géométrie déformée, visualisation en situation dans le renfort



b. Evaluation de la géométrie avec la tomographie (cisaillement de 48°)



c. Evolution comparée de h et w

Figure 63 : Sergé, résultats en cisaillement pour la géométrie déformée

### 5.3.3 Remarques sur la qualité du maillage initial

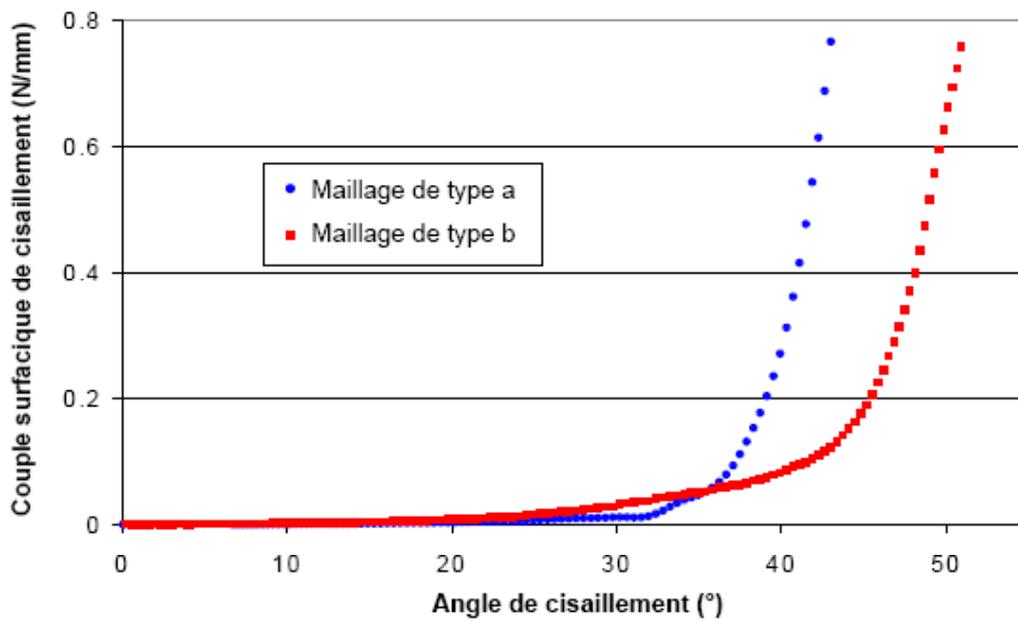
A ce stade, il convient de souligner certaines remarques constatées durant l'étude du sergé. Dans un premier temps il a été choisi de travailler avec le maillage « plus simple » de type a pour des raisons pratiques (évoquées au paragraphe 4.1.3). L'identification des paramètres transverses et la simulation de cisaillement ont été effectuées sur ce maillage.

Les résultats de l'identification des paramètres sont très différents, ceux-ci sont mentionnés au paragraphe 4.2.2(e). Cela traduit une réponse très différente des deux modèles à la traction biaxiale, et donc une influence nette de la géométrie initiale. Ensuite, en cisaillement, on présente en **Figure 64a** la comparaison des deux courbes obtenues. Le modèle de type a offre une pente initiale presque nulle, un angle de blocage plus faible et surtout une zone de transition très marquée. Il est donc clair que les modèles ne fournissent pas les mêmes résultats. Plusieurs raisons peuvent expliquer ces différences. Toutes reposent évidemment sur des questions géométriques, essentiellement basées sur la modélisation des zones initiales de contact entre mèches. La **Figure 64b** illustre les différences des deux modèles à ce niveau, ainsi qu'une coupe reconstruite par tomographie.

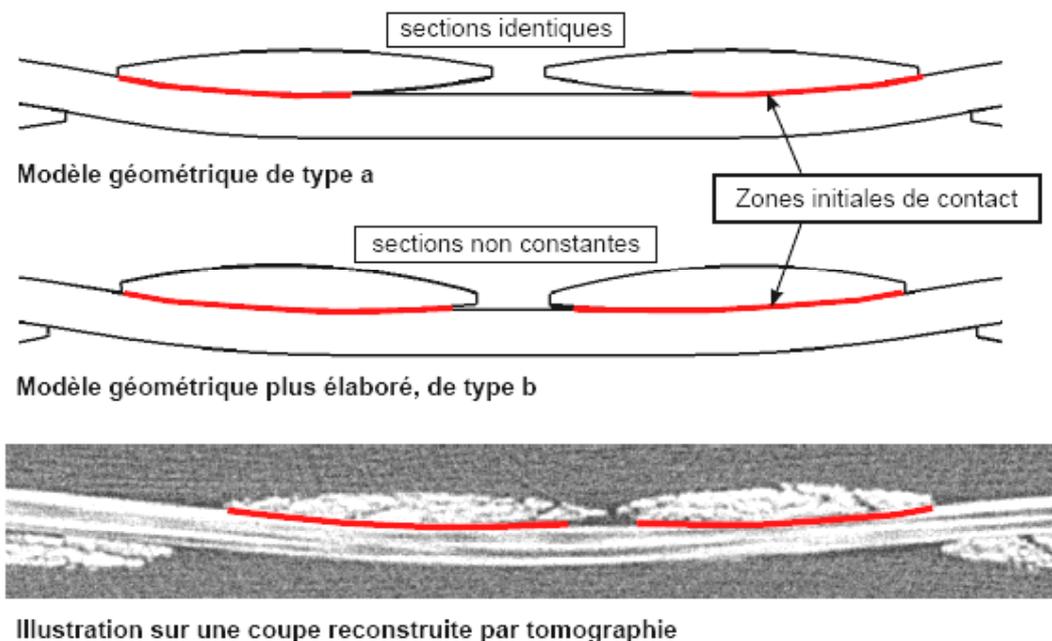
En traction biaxiale sur le modèle de type a, les premiers effets de la tension vont induire un aplatissement des mèches les menant vers un nouvel état d'équilibre. Cet état est, en fait, proche géométriquement de l'état initial observé en tomographie, et modélisé correctement par le modèle de type b. Afin que la courbe de traction biaxiale du modèle de type a reste proche de la courbe expérimentale (principe de la méthode inverse), il est nécessaire que cette première déformation demande des efforts significatifs, d'où l'obtention de paramètres matériau plus élevés.

En cisaillement, on retrouve une explication similaire à celle déjà évoquée pour le taffetas. Les zones de contact entre mèches sont plus petites dans le cas du modèle de type a (mises en évidence par un surlignage rouge en **Figure 64b**) ce qui semble expliquer la pente très faible avant blocage. Ensuite la transition de blocage est bien plus marquée car les mèches, jusque là peu déformées, entrent soudainement en contacts latéraux. Additionnés à des paramètres matériau élevés, ce phénomène accentue très nettement la transition de la courbe. Avec le modèle de type b, les mèches étant en contact sur des zones très larges, elles se déforment plus progressivement. Il serait possible de pousser la comparaison plus loin avec notamment l'étude des géométries déformées pour lesquelles le modèle de type a offre trop peu de déformation en raison des paramètres de comportement transverse trop élevés (comportement transverse trop rigide).

L'effet de la géométrie initiale prouve ici toute son importance. Il est également important d'avoir une largeur de mèche initiale la plus proche de la réalité car celle-ci va positionner la zone de transition, c'est-à-dire déterminer l'angle de blocage. Cette conclusion ramène à la nécessité d'études poussées de la géométrie des renforts tissés [HIV03].



a. Courbe de cisaillement avec les modèles de type a et b



b. Comparaison géométrique des modèles de type a et b

Figure 64 : Sergé, comparaison des deux modèles géométriques

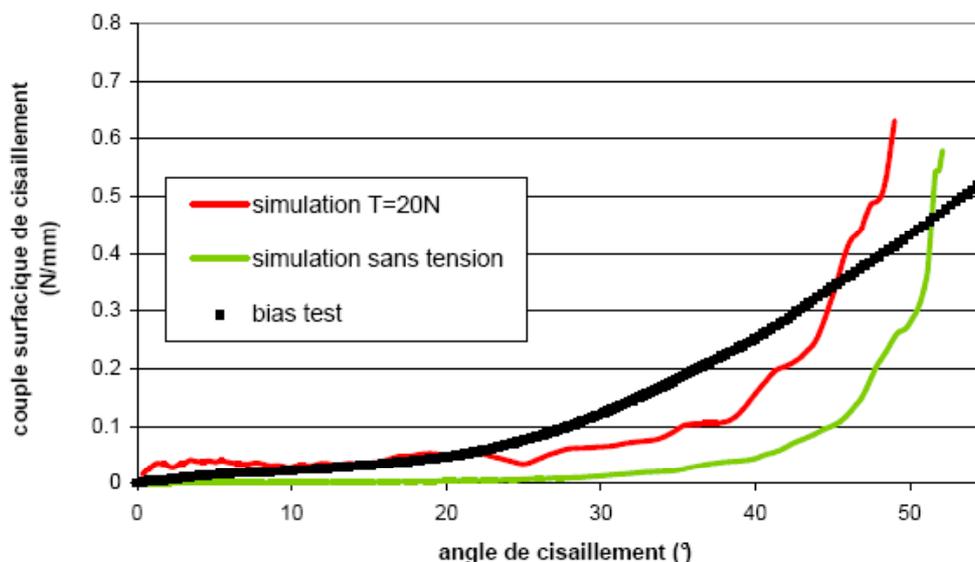
### 5.3.4 Cisaillement sous tension

Une dernière simulation de sergé concerne le chargement suivant : traction biaxiale de 20 N/mèche (soit une déformation longitudinale du tissu de  $1,46 \cdot 10^{-3}$ ) puis cisaillement.

On ne montre ici que la comparaison avec la courbe numérique obtenue précédemment (Figure 65) car il n'existe aucune donnée expérimentale. On obtient qualitativement l'effet attendu. La première partie de l'essai demande des efforts plus élevés en raison de la

contribution majorée du frottement entre mèche. Puis le blocage et la seconde partie de courbe génèrent également des couples plus importants. On les attribue principalement aux résultantes de contact plus élevées dans les zones où des contacts complexes se forment (interstices entre mèches qui se ferment) mais aussi à la tension longitudinale qui rend les mèches plus rigides dans leur plan transverse.

Il n'est malheureusement pas possible d'illustrer de manière fiable la qualité des géométries déformées. Bien qu'un scan par tomographie ait été réalisé, celui-ci est non utilisable pour les mêmes raisons que celle évoquées au paragraphe 5.3.1(b).



**Figure 65** : Sergé, résultat qualitatif de cisaillement sous tension équi-biaxiale de 20 N

### 5.3.5 Conclusion partielle

L'étude du sergé a mené à de nouvelles remarques et conclusions sur l'étude mésoscopique des renforts tissés.

- L'importance de la géométrie initiale du modèle a été clairement mise en avant dans cette section. En particulier, la qualité de la géométrie des zones de contact a une influence significative sur les résultats mécaniques obtenus.
- Par les expérimentations réalisées il a été mis en évidence une forte tendance élasto-plastique du comportement transverse des mèches. D'une part, cela soulève la nécessité de définir les protocoles expérimentaux de sorte à ne pas subir ces effets parfois indésirables. Par exemple, ne cisailier un renfort qu'après avoir réalisé toutes les observations non cisillées. D'autre part, cela encourage à introduire dans la loi de comportement transverse une notion d'élasto-plasticité. Ceci est envisageable car le formalisme utilisé s'y prête tout particulièrement.
- Enfin, les résultats exploitables ont permis de valider - à nouveau, et sur un renfort plus complexe - les calculs mécaniques réalisés à l'échelle mésoscopique, notamment en traction biaxiale et cisaillement, deux des mécanismes de déformation les plus importants pour un renfort tissé.

## 5.4 Renfort complexe G1151 (carbone)

Le dernier renfort présenté dans ce chapitre est un renfort très largement utilisé dans l'industrie aéronautique. Il présente une géométrie bien plus complexe avec l'équivalent de plusieurs couches liées entre elles (entre deux et trois). La **Figure 66a** propose une visualisation 3D du G1151. Ici, les difficultés rencontrées dans le cas du sergé concernant les effets d'inertie sont encore plus sensibles et nécessitent de ralentir le calcul. Mais la remarque principale à noter concerne la géométrie initiale à disposition qui est trop largement idéalisée par rapport à la géométrie réelle (certaines remarques précises ont été soulevées en section 2.2.1). Comme nous venons de le souligner au paragraphe 5.3.3, la géométrie initiale joue un rôle majeur. Par conséquent, l'ensemble des résultats et remarques qui vont suivre n'est à considérer que sur un plan qualitatif. Ces résultats prouvent toutefois la faisabilité de tels calculs.

Les simulations de tension biaxiale n'ont pas été réalisées sur ce renfort, ni même en tomographie car le nombre de mèche et la taille du VER ne nous permettent pas de l'installer dans le montage réalisé. On ne présente donc que les simulations de cisaillement car il est possible d'installer dans le tomographe un échantillon cisailé de taille assez faible.

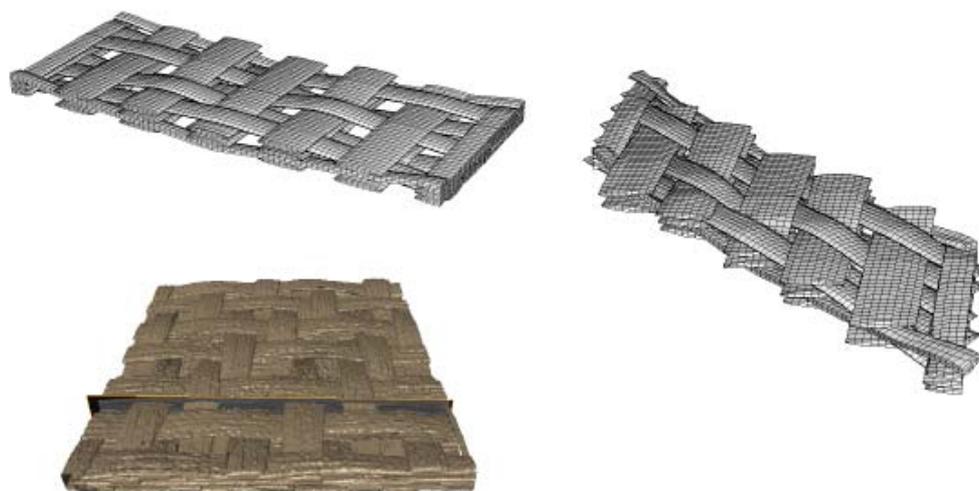
Par voie de conséquence, il n'a pas été possible d'identifier les paramètres matériau des mèches de carbone du G1151. Il est considéré que le comportement de ces mèches de carbone est proche de celles du sergé. Si les fibres utilisées étaient les mêmes, le comportement d'un paquet de ces fibres serait le même (sous réserve d'un procédé de fabrication identique). Par défaut, les paramètres de comportement transverse du sergé sont réutilisés ici.

### 5.4.1 Simulation de cisaillement pur

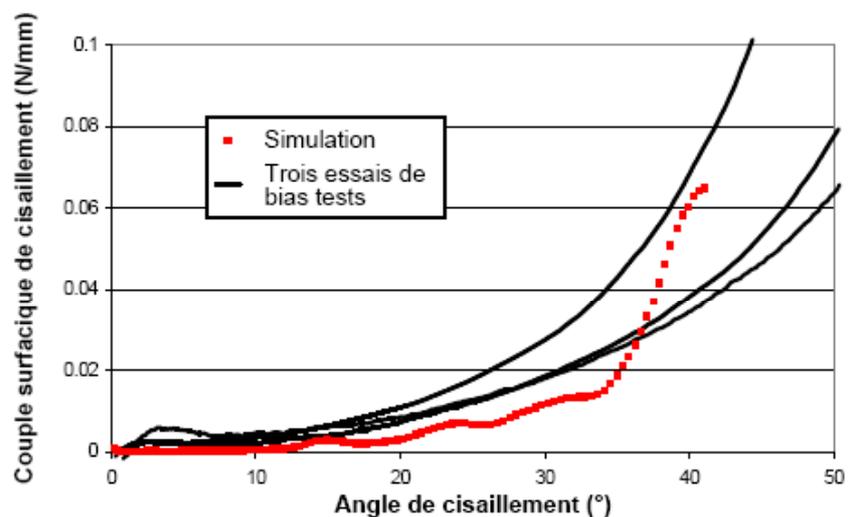
Les calculs réalisés en cisaillement ne présentent pas d'autres difficultés que celles rencontrées sur le sergé. En revanche, ceux-ci sont très longs en raison du grand nombre de solides en jeu et donc de la complexité de la gestion des contacts.

Les résultats obtenus en terme de courbe de cisaillement sont comparés à titre indicatif à deux bias tests réalisés sur ce renfort (**Figure 66b**). Malgré les réserves et critiques émises sur le modèle géométrique utilisé, la comparaison est assez satisfaisante. On remarque néanmoins une transition de blocage marquée, probablement en raison de la géométrie trop idéalisée.

Concernant le maillage déformé, il peut être comparé à des reconstructions de tomographie. En effet, compte tenu des efforts faibles mis en jeu, il est aisé de cisailier un échantillon de renfort à la main et le maintenir en position dans le tomographe. La comparaison en **Figure 67c** est encore une fois très qualitative mais elle permet de noter des aspects pertinents dans ce modèle. La distorsion et l'écrasement des mèches de trame offre un faciès proche de celui observé en tomographie. Cette comparaison est très encourageante pour envisager des simulations de déformation de renforts complexes. Il reste toutefois que le maillage initial semble trop éloigné de la géométrie réelle (voir **Figure 67a et b**).

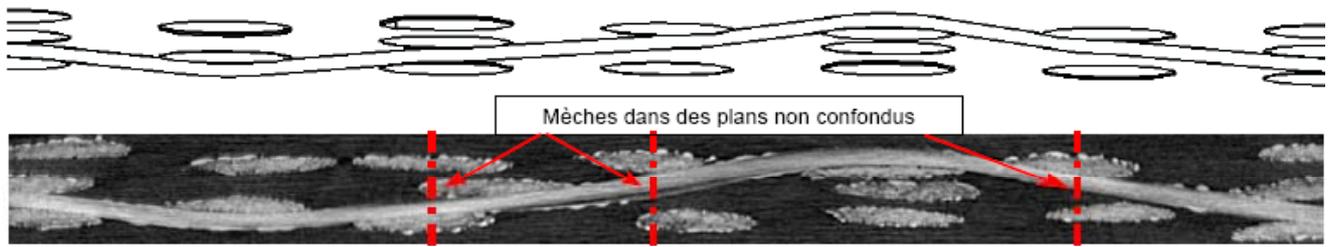


a. G1151, vue 3D du modèle et de tomographie, renfort initial et déformé

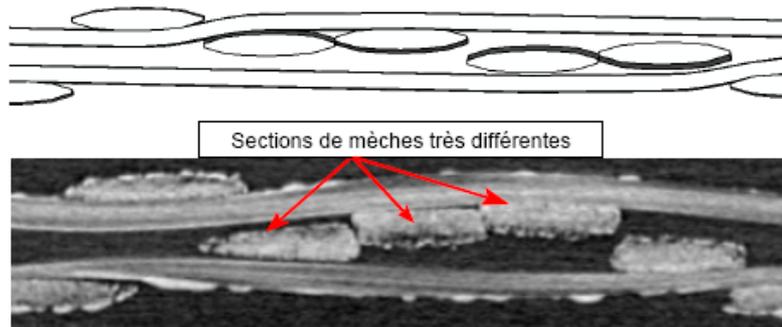


b. Courbes de cisaillement comparées, numérique et expérimentales

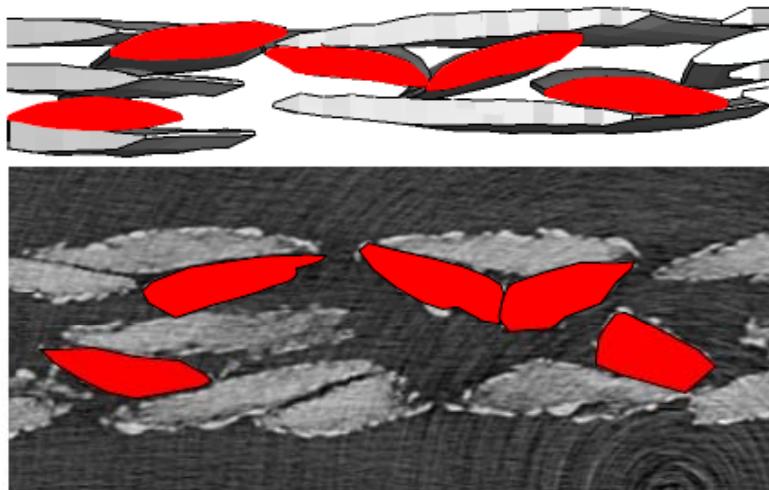
Figure 66 : G1151, résultats en cisaillement, aspect mécanique



a. Comparaison de la géométrie initiale, coupe dans un plan de chaîne



b. Comparaison de la géométrie initiale, coupe dans un plan de trame



c. Comparaison des géométries déformées en cisaillement, coupe dans un plan normal aux chaînes

**Figure 67** : G1151, résultats qualitatifs en cisaillement, géométrie déformée

## 5.5 Application au calcul de perméabilité de renforts tissés

Il est proposé dans cette section de présenter une des applications principales de ces travaux de thèse, qui a fait l'objet d'une collaboration avec le laboratoire 3S-R de Grenoble dans le cadre du post-doc CNRS (Federams) de F. Loix [LOI08]. A partir des résultats de simulation obtenus, il s'agit de réaliser des calculs d'écoulement afin de déterminer le tenseur de perméabilité des renforts (déformés) par un passage méso-macro. L'influence de la déformation du renfort, en particulier du cisaillement, est un des objectifs principaux. Ces résultats peuvent être utilisés

pour optimiser la phase d'injection des procédés type RTM en réalisant des calculs d'injection de pièces composites dont on connaît la géométrie ainsi qu'une carte des angles de cisaillement suite à une simulation du drapage de la préforme. Cette dernière permet alors de tenir compte des variations de perméabilité au sein de la préforme. La méthode permettant d'obtenir le tenseur de perméabilité macroscopique est tout d'abord présentée au travers des différents aspects difficiles qu'elle comporte puis les résultats et conclusions seront développés.

### 5.5.1 Détermination du VER fluide

La première difficulté consiste à déterminer et générer la géométrie du VER fluide à partir de celle du VER solide déformé. Il s'agit principalement d'une difficulté technique liée aux outils de modélisation.

En effet, les résultats obtenus se présentent sous forme de maillages pour chaque mèche contenue dans le VER solide. Ces maillages sont tout d'abord transformés en des entités solides qui sont alors assemblées pour ne former qu'un seul solide. Ces opérations étant très sensibles, elles peuvent demander des ajustements manuels. L'entité solide obtenue est alors soustraite d'un volume de base afin d'obtenir le VER fluide. La géométrie du VER solide déformé rend difficile la construction directe d'un VER fluide. Pour cette raison, le VER fluide est défini à partir d'un volume de base en forme de losange, ce qui permet en outre de faciliter l'application ultérieure de conditions aux limites périodiques. En **Figure 68** sont présentés, pour deux angles de cisaillement, les VER solides et fluides utilisés. Ici, il est fait le choix d'une distance  $h$  nulle où  $h$  représente la distance entre les mèches et les frontières du volume fluide en direction  $\underline{e}_3$  transverse au plan du renfort (dans l'épaisseur) :  $h = (h_{\text{fluide}} - h_{\text{renfort}})/2$ .

La porosité des VER obtenus est définie comme le rapport du volume fluide sur le volume total du VER. Elle est respectivement de 0,382, 0,403, 0,352 pour des angles de cisaillement de  $0^\circ$ ,  $28^\circ$  et  $53^\circ$ . Enfin, on notera que la perméabilité des mèches est supposée inférieure d'au moins deux ordres de grandeur à celle du renfort tissé. Ainsi, les écoulements à l'intérieur même des mèches sont-ils négligés, c'est-à-dire que l'on ne considère que les mésopores dont le volume tridimensionnel vient d'être déterminé.

### 5.5.2 Calcul de perméabilité

Le volume fluide étant défini, il convient de résoudre le problème d'écoulement sur ce domaine mésoscopique afin de déterminer la loi macroscopique d'écoulement.

Pour des raisons de simplicité, on considère le cas d'un écoulement lent isotherme d'un fluide newtonien incompressible de viscosité  $\eta$  constante. En outre, le domaine est supposé saturé en fluide afin de s'affranchir d'éventuels effets de capillarité. Le problème est étudié dans le cadre de la méthode d'homogénéisation à échelles multiples pour structures périodiques [ORG07]. Sous ces hypothèses, la description macroscopique du problème est la loi linéaire de Darcy :

$$\langle \underline{\mathbf{v}} \rangle = -\frac{1}{\eta} \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\nabla} \bar{p} \quad (5.4)$$

où  $\langle \underline{\mathbf{v}} \rangle$  est la moyenne volumique du champ de vitesse dans le VER fluide,  $\underline{\nabla} \bar{p}$  est le gradient macroscopique de pression et  $\underline{\mathbf{K}}$  le tenseur de perméabilité qui dépend des caractéristiques microscopiques du milieu considéré.  $\underline{\mathbf{K}}$  peut être obtenu à partir de simulations numériques sur

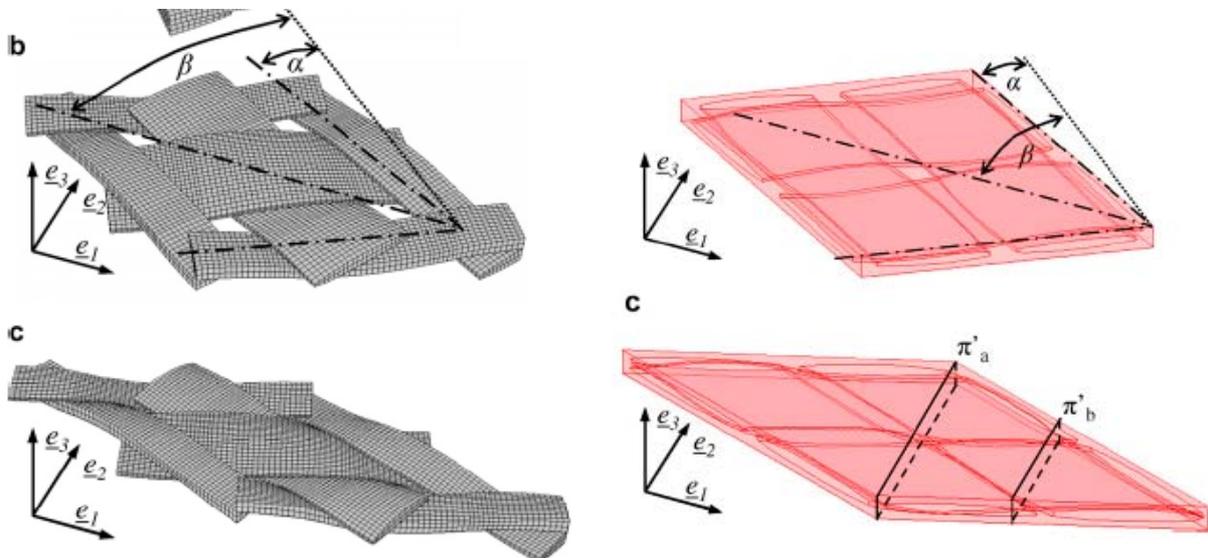
des VER périodiques tels que ceux de la **Figure 68**. Pour cela il est nécessaire de résoudre le problème fluide mésoscopique suivant qui découle de la méthode d'homogénéisation (on note  $\Omega_f$  le VER fluide,  $\partial\Omega_f^e$  et  $\partial\Omega_f^i$  ses frontières extérieures et intérieures) :

$$\begin{cases} 0 = \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}} & \text{sur } \Omega_f \text{ (conservation de la masse)} \\ 0 = \eta \Delta \underline{\mathbf{v}} - \nabla \bar{p} - \nabla \delta p & \text{sur } \Omega_f \text{ (conservation de la quantité de mouvement)} \\ \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}} & \text{sur } \partial\Omega_f^i \text{ (condition aux limite d'adhérence aux parois)} \\ \text{Conditions aux limites périodiques pour } \underline{\mathbf{v}} \text{ et } \delta p \text{ sur } \partial\Omega_f^e \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\underline{\mathbf{v}}$  est le champ de vitesse mésoscopique de gradient  $\nabla \underline{\mathbf{v}}$ , le gradient de pression macroscopique  $\nabla \bar{p}$  est une force volumique constante donnée dans le VER et  $\delta p$  est la fluctuation périodique de premier ordre de la pression autour de  $p$ . Ces équations traduisent le fait que l'écoulement résulte de l'équilibre entre les forces visqueuses locales et le gradient de pression imposé.

Dans cette étude, le problème (5.5) a été résolu à l'aide du code éléments finis Comsol. Le volume est maillé de tétraèdres, et les interpolations éléments finis ont été choisies respectivement linéaires et quadratiques pour les champs de fluctuation de pression  $\delta p$  et de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$ . Le maillage final contient 15000 éléments ce qui correspond à environ 100000 degrés de liberté.

Finalement, en résolvant le problème (5.5) pour des gradients de pression macroscopiques orientés suivant trois axes orthogonaux et en faisant des moyennes volumiques du champ de vitesse mésoscopique  $\underline{\mathbf{v}}$  calculé, on peut déterminer toutes les composantes du tenseur de perméabilité. Par exemple, si l'on considère  $\eta = 1 \text{ Pa.s}$  et  $\nabla \bar{p} = -\mathbf{e}_1$ , alors l'équation (5.4) donne la composante  $K_{1i} = \langle v_i \rangle$  ( $i \in \{1,2,3\}$ ).



**Figure 68** : VER solide et fluide pour des angles de cisaillement de 28° et 53°

### 5.5.3 Résultats

#### (a) Analyse qualitative des champs de vitesse mésoscopiques

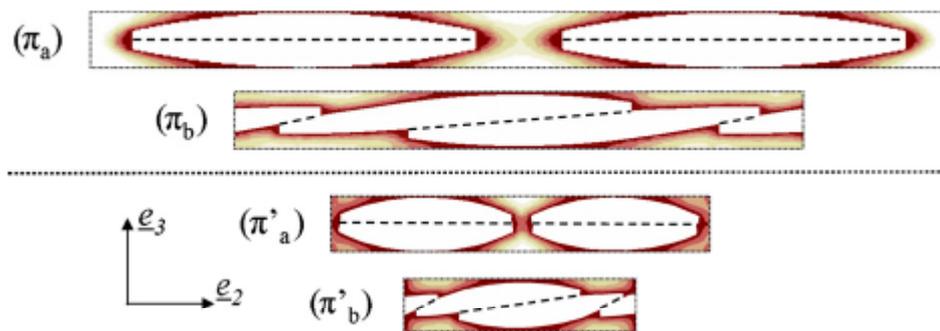
Sauf mention contraire, le renfort considéré ici est composé d'un ensemble de couches parallèles superposées (périodicité 3D). Des coupes représentant les champs de norme de vitesse sont visibles en **Figure 69a**. Celles-ci sont obtenues pour un gradient de pression macroscopique unitaire égal à  $-\underline{e}_1$ , et les angles de cisaillement  $0^\circ$  et  $53^\circ$ . En clair sont représentées les régions où la norme de vitesse est grande, en sombre celles où elle est faible. Les plans de coupe  $\pi_i$  sont définis sur la **Figure 68** précédente où l'on note également que les vecteurs  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{e}_2$  sont alignés avec les diagonales du losange alors que  $\underline{e}_3$  est selon l'épaisseur. La **Figure 69a** montre que l'intensité de l'écoulement est plus faible dans le cas du renfort cisailé, ce qui est corrélé avec une diminution de perméabilité (voir paragraphe suivant). Quel que soit l'angle de cisaillement, on remarque également que l'écoulement suit principalement deux canaux. La même remarque peut être soulevée lorsque le gradient de pression est suivant  $\underline{e}_2$ . En revanche, sous un gradient parallèle à  $\underline{e}_3$  l'écoulement suit quatre canaux qui correspondent aux quatre interstices entre les mèches.

#### (b) Perméabilité

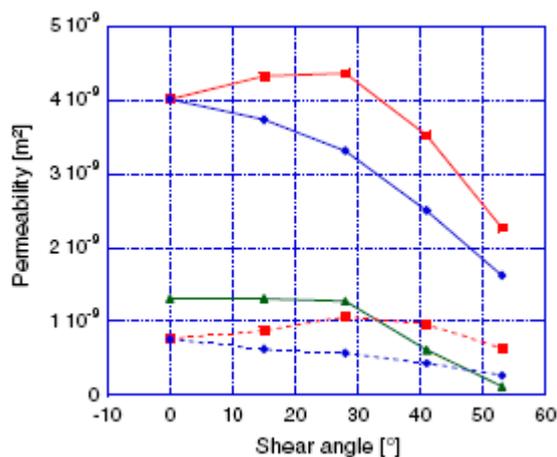
On présente en **Figure 69b1** l'évolution, en fonction de l'angle de cisaillement, des composantes  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  et  $K_{33}$  du tenseur de perméabilité  $\underline{K}$  exprimé dans le repère de référence  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ . Cette figure amène les commentaires suivants :

- Les composantes non diagonales n'ont pas été représentées car elles sont négligeables devant les composantes diagonales. Cela signifie que le repère de référence  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  est alignés avec les axes principaux du tenseur de perméabilité.
- Le renfort non déformé présente un tenseur de perméabilité isotrope transverse ( $K_{11} = K_{22} \neq K_{33}$ ) qui est perdu dès que le renfort est cisailé. Dans ce cas, on rencontre simplement de l'orthotropie ( $K_{11} \neq K_{22} \neq K_{33}$ ).
- Pour des angles de cisaillement inférieurs à  $30^\circ$ ,  $K_{11}$  croît alors que  $K_{22}$  décroît de façon monotone et  $K_{33}$  est quasi constant. Au-delà de  $30^\circ$ , toutes les composantes décroissent. Entre les configurations extrêmes ( $0^\circ$  et  $53^\circ$ ),  $K_{11}$  et  $K_{22}$  diminuent d'un facteur 2 alors que  $K_{33}$  chute d'un facteur 10. On notera que la tendance trouvée pour  $K_{11}$  est également observée sur le plan expérimental par Smith et Al. [SMI96]. Hammami et al. [HAM96] ont observé une tendance similaire pour  $K_{11}$  et  $K_{22}$  pour des angles de cisaillement jusqu'à  $30^\circ$ .
- Les tendances observées sont attribuées à des changements de porosité mais également de morphologie du renfort durant le cisaillement. En effet, ces changements dépendent de deux types de mécanismes mésoscopiques : les mouvements relatifs des mèches ainsi que leur déformation propre. Par exemple, la chute nette de  $K_{33}$  est due à la fois à la fermeture des interstices entre mèches et aux écrasements latéraux des mèches autour de ces zones de contact.
- En **Figure 69b2** sont tracées les évolutions des rapports  $K_{22}/K_{11}$  et  $K_{33}/K_{11}$  en fonction de l'angle de cisaillement. Celles-ci soulignent à nouveau la perte de l'isotropie transverse sous cisaillement :  $K_{22}/K_{11} < 1$ . On observe une diminution des deux rapports tracés, tendance également observée par Lai et Young [LAI97] et Slade et Sozer [SLA00].

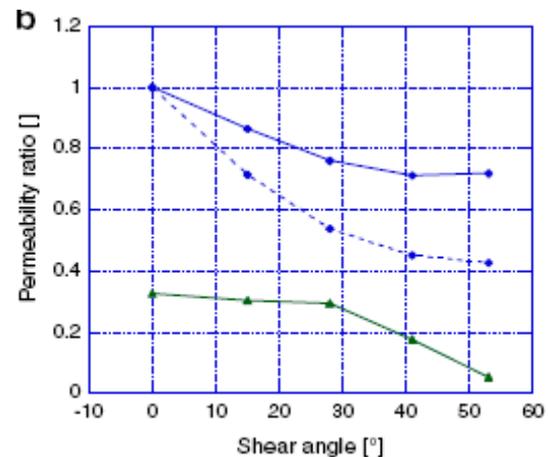
- Sur les **Figure 69b** sont également représentés les résultats correspondant au cas d'un renfort monocouche (en pointillés). Dans ce cas, les conditions aux limites sont différentes car les faces supérieure et inférieure du VER correspondent aux faces du moule. Les tendances sur les valeurs principales de perméabilité sont les mêmes que pour le cas multi-couches, avec toutefois des ordres de grandeur 5 fois plus faibles. En outre, on note également que le cisaillement induit une plus forte anisotropie. Lai et Young ont, eux, observés une diminution de perméabilité avec l'augmentation du nombre de couches. Une hypothèse sur cette contradiction apparente est attribuée à la séquence d'empilement des couches. En effet, le modèle présenté suppose un empilement parallèle parfait alors que sur le plan expérimental des effets de « nesting » mènent à une augmentation du taux volumique de fibres : les creux d'une couche sont comblés par les bosses de la couche voisine.



a. Coupes avec champ de la norme de vitesse. Maximum de couleur clair, et minimum sombre.



b1. Perméabilités selon les axes principaux.



b2. Rapport de perméabilités.

□ : K11 ; ◇ : K22 ; Δ : K33. Lignes continues : multi-couche, lignes pointillées : mono-couche.

◇ : K22/ K11 ; Δ : K33/ K11. Lignes continues : multi-couche, lignes pointillées : mono-couche.

**Figure 69** : Résultats des calculs de perméabilité sur le taffetas cisailé

#### 5.5.4 Conclusions

La méthode présentée permet de calculer la perméabilité de renforts tissés déformés. La perméabilité est une caractéristique du renfort qui est contenue dans la géométrie déformée du VER. La méthode proposée consiste en deux grandes étapes, la première afin de simuler la déformation du renfort (objet de cette thèse), et la seconde pour simuler les écoulements à échelle mésoscopique dans le VER déformé. Cette procédure mène alors à déterminer le tenseur de perméabilité macroscopique du renfort. Les résultats obtenus soulignent des changements importants de perméabilité sous l'influence du cisaillement : perte de l'isotropie transverse et évolution non triviale des composantes du tenseur de perméabilité.

Cette étude préliminaire laisse envisager de futurs travaux en appliquant cette méthode à d'autres types de renforts, d'autres types de sollicitations mécaniques. Sont également envisagés d'autres types d'écoulements ou de couplages physiques : écoulement de fluides non newtoniens, écoulement à travers des renforts déformables...

### 5.6 Conclusions du chapitre 5

Ce chapitre aborde la validation des différents modèles mis en place pour l'analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites. Deux types d'objectif sont fixés. D'une part le comportement mécanique macroscopique qui est obtenu par un passage méso macro et d'autre part la géométrie mésoscopique déformée. Trois renforts ont été présentés avec des niveaux de complexité croissants et des données expérimentales de moins en moins abondantes. Le premier renfort a permis de mettre au point les modèles et de réaliser l'ensemble des cas de chargement. Les résultats sont satisfaisants sur les deux aspects fixés. Les deux autres renforts sont plus complexes et en même temps, présentent un intérêt plus important pour les applications industrielles. Les modèles mis en place offrent des résultats pertinents sur le plan du comportement mécanique. Les géométries déformées mésoscopiques, en particulier les déformation transverses de mèches, sont également bien capturées. Ces résultats sont encourageants et permettent de souligner l'intérêt des analyses mésoscopiques par éléments finis dans un but de détermination des comportements mécaniques de renforts tissés même complexes.

Un ensemble de remarques et critiques importantes est à retenir à l'issue de ce chapitre :

- La géométrie initiale du renfort joue un rôle important. Ce point n'est pas forcément visible sur un renfort simple comme le taffetas, mais il est nettement mis en évidence en section 5.3.3 à l'aide du sergé. Il convient d'utiliser des modèles géométriques adaptés aux objectifs souhaités.
- Les expérimentations visant à des observations mésoscopiques (par exemple en tomographie aux rayons X) doivent faire l'objet de grandes précautions afin de ne pas les endommager avant observation. En section 5.3.1(b), nous avons soulevé l'influence de l'histoire de chargement du renfort. Les déformations transverses des mèches présentent de manière évidente un comportement élasto-plastique. Cela doit être considéré, à l'avenir, dans les protocoles expérimentaux (ne pas scanner un renfort qui a déjà été cisailé). On pourra également introduire ce type de comportement dans le modèle de matériau présenté dans ces travaux.

- Le dispositif expérimental conçu pour les observations in situ permet de fournir des reconstructions de renforts sous différentes sollicitations de cisaillement et/ou tension. Une amélioration du système garantissant un état de tension maîtrisé serait une évolution intéressante.
- Les données expérimentales de comportement mécanique font défaut dans certains cas, ou peuvent faire l'objet de réserves.

Enfin, on rappelle que ces analyses peuvent être utilisées dans de multiples applications plus ou moins directes. L'aspect mécanique est utile pour réaliser d'autres simulations (mise en forme), pour la conception de renforts... L'aspect géométrique est utilisable pour des analyses d'endommagement ou encore pour des simulations d'écoulement afin d'évaluer la perméabilité des renforts et l'influence de la déformation. Une méthode de calcul du tenseur de perméabilité de renforts déformés a été développée en collaboration avec le laboratoire 3S-R. Les résultats soulignent l'importance de la prise en compte de la déformation mésoscopique des renforts pour les problématiques d'injection de résine (par exemple dans le procédé RTM). Les modèles mésoscopiques permettent par ailleurs de simuler tous les types de sollicitations. Parmi les résultats présentés, certains n'existent encore pas d'un point de vue expérimental, ou ne sont pas maîtrisés (exemple : le cisaillement sous tension). Cela constitue un point fort de ces types de modèle car ils peuvent être envisagés comme un outil efficace de préconception de renfort.

## Synthèse et conclusions

L'utilisation des matériaux composites s'accompagne de besoins croissants en terme de connaissance sur ces matériaux. Le développement de modèles spécifiques s'inscrit dans cette logique de maîtrise accrue des composites et procédés associés. L'association de renforts tissés à des procédés de mise en forme adaptés permet l'obtention de pièces de performance mécanique maîtrisable. Cette maîtrise passe par l'étude du comportement mécanique de ce type de renforts. Il s'agit clairement d'un problème multi-échelle dans lequel les comportements macroscopiques découlent de ceux aux échelles inférieures. L'étude à échelle mésoscopique révèle donc toute son importance. C'est l'objet de cette étude.

La technique d'observation de tomographie aux rayons X particulièrement adaptée aux échelles mises en jeu a été utilisée dans ces travaux à des fins de validation mais également comme outil d'analyse expérimentale. Des coupes transverses de mèches au sein d'un renfort sous sollicitation mécanique ont été soumises à une analyse morphologique démontrant que la microstructure des mèches est isotrope transverse. Il est fait l'hypothèse, raisonnable, que cette caractéristique est également retrouvée dans le comportement mécanique de la mèche.

Un modèle de comportement mécanique continu hypo-élastique de mèche a été mis en place et répond aux différents aspects spécifiques que présente ce type de matériau fibreux. La très forte anisotropie est gérée au moyen d'une dérivée objective basée sur la rotation de la direction de fibres. Il a été établi un résultat montrant que seul ce choix de rotation est valable dans le cadre d'un modèle hypo-élastique pour ce type de matériau. L'écriture obtenue permet (et nécessite) d'utiliser un tenseur de comportement dans lequel sont distinguées les composantes longitudinales et transverses. Le module d'Young longitudinal doit assurer un module de tension constant sur la mèche, raison pour laquelle une correction a été mise en place. Le comportement transverse est utile à révéler les aspects très particuliers du matériau fibreux. Pour cela, une écriture proche des phénomènes physiques observés a été proposée. Il s'agit de réaliser un découplage sphérique/déviatorique dans le plan transverse seulement. Basé sur des arguments physiques simples, les coefficients élastiques associés sont fonction de l'état de déformation, notamment la compaction du paquet de fibres ou son état de tension.

Ce modèle a été implémenté dans un logiciel de calcul commercial en grandes transformations afin de réaliser des simulations mécaniques mésoscopiques. L'identification des paramètres matériau est réalisée par essais expérimentaux et méthode inverse. La géométrie mésoscopique fait appel à un modèle assurant la cohérence des contacts, c'est-à-dire la non interpénétration et l'absence de vides entre mèches. En vertu de la périodicité des structures étudiées, seul un volume élémentaire représentatif est modélisé, avec l'application de conditions aux limites adaptées.

Les résultats de ces simulations sont satisfaisants. L'accord avec les expérimentations sur le plan mécanique est bon pour différents types d'essais (en particulier tension biaxiale et cisaillement pur). Grâce à la tomographie et la conception d'un montage expérimental de sollicitation mécanique in situ, les géométries déformées obtenues par simulation ont été validées. Les résultats obtenus sur le renfort complexe bénéficiant de peu de données présentent des tendances très intéressantes. Cette étude a permis de soulever également certains points de grande importance : les géométries initiales du modèle ou les précautions nécessaires à l'observation de renforts déformés par tomographie.

L'ensemble de ces résultats souligne la pertinence du modèle mésoscopique mis en place. Cela ouvre la voie à diverses applications. En phase de préconception de renfort ou pour pallier les essais inexistantes ou non maîtrisés, ce type de méthode trouve une application directe. En outre, l'application au calcul d'écoulement dans les renforts déformés a clairement mis en évidence l'influence de la géométrie déformée. Cela souligne l'importance de cet aspect dans les simulations mésoscopiques. D'autres applications à plus ou moins long terme sont envisageables.

Suite à ces travaux, d'autres développements et perspectives sont envisageables sur plusieurs plans. Tout d'abord, une extension du modèle de matériau fibreux à une direction pourrait être envisagée pour deux directions. Cette question a déjà fait l'objet de travaux dans lesquels deux directions sont simplement superposées avec addition d'une contrainte de cisaillement [BAD08b] mais on peut également imaginer une extension de la dérivée utilisée au cas de deux directions à suivre simultanément par une dérivée convective [SID82] type dérivée de Lie (les premiers pas ont été effectués dans [HAG04]).

Ensuite, le modèle de comportement transverse de la mèche constitue une des questions fondamentales encore largement ouverte. Une identification simplifiée et plus universelle des paramètres de comportement transverse permettrait à court terme de faciliter cet aspect délicat. Il semble également pertinent, à plus long terme, d'implémenter un modèle transverse élasto-plastique afin de capturer certains phénomènes que nous avons mis en évidence. Une autre perspective intéressante consiste en une loi de comportement transverse intrinsèque ne nécessitant pas d'identification inverse. L'utilisation de modèles microscopiques adaptés (par exemple avec des méthodes issues des milieux granulaires) pourrait être envisagée.

Enfin, aborder la question de la flexion à l'échelle mésoscopique paraît important afin de maîtriser l'ensemble du comportement de la mèche et déterminer par extension celui des renforts.

## Références bibliographiques

- [AIM07] **AIMENE Y.** Approche hyper-élastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations. Thèse de doctorat LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 133 p.
- [AIM08] **AIMENE Y, HAGEGE B, SIDOROFF F, VIDAL-SALLE E, BOISSE P, DRIDI S.** Hyperelastic approach for composite reinforcement forming simulations. In : Proceedings of the 11th International ESAFORM conference on material forming, Lyon, France, 2008.
- [BAD07] **BADEL P, VIDAL-SALLE E, BOISSE P.** Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. Computational Materials Science, 2007, vol. 40, n°4, pp. 439-448.
- [BAD08a] **BADEL P, VIDAL-SALLE E, BOISSE P.** Large deformation analysis of fibrous materials using rate constitutive equations. Computers and Structures, 2008, vol. 86, n° 11-12, pp. 1164-1175.
- [BAD08b] **BADEL P, GAUTHIER S, VIDAL-SALLE E, BOISSE P.** Rate constitutive equations for computational analyses of textile composite reinforcement mechanical behaviour during forming. Composites: Part A, 2008, doi:10.1016/j.compositesa.2008.04.015.
- [BAD08c] **BADEL P, VIDAL-SALLE E, MAIRE E, BOISSE P.** Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale Composites Science and Technology, 2008, doi:10.1016/j.compscitech.2008.04.038.
- [BAR00] **BARUCHEL J, BUFFIERE JY, MAIRE E, MERLE P, PEIX G.** X ray tomography in material science. Paris : Hermès, 2000, 204 p.
- [BAS00] **BASAR Y, WEICHERT D.** Non linear continuum mechanics of solids. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2000, 193 p. ISBN 3-540-66601-x
- [BAT96] **BATHE KJ.** Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996, 1037 p.
- [BEL00] **BELYTSCHKO T, WING KL, MORAN B.** Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Chichester: John Wiley Ed., 2000.
- [BIC97] **BICKERTON S, SIMACEK P, GUGLIELMI SE, ADVANI SG.** Investigation of draping and its effects on the mold filling process during manufacturing of a compound curved composite part. Composites: Part A, 1997, vol. 28, pp. 801-816.
- [BIL03] **BILLOET JL.** Contribution à la compréhension des problèmes en grandes transformations. Cours de DEA. Paris : ENSAM, 2003.
- [BOI01] **BOISSE P, GASSER A, HIVET G.** Analyses of fabric tensile behavior : determination of the biaxiale tension-strain surface and their use in forming simulations. Composites Part A, 2001, vol. 32, pp. 1395-1414.

- [BOI05] **BOISSE P, GASSER A, HAGEGE B, BILLOET JL.** Analysis of the mechanical behaviour of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level. *International Journal of Material Science*, 2005, vol. 40, pp 5955-5962.
- [BOI08] **BOISSE P, CAO J, HAMILA N, HELENON F, HAGEGE B.** Different approaches for woven composite reinforcement forming simulation. *International Journal of Material Forming*, 2008, vol. 1, pp 21-29.
- [BUE98] **BUET K.** Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés. Thèse de doctorat LM2S. Orléans : Université d'Orléans, 1998, 129 p.
- [BUE01] **BUET K, BOISSE P.** Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements. *Experimental Mechanics*, 2001, vol. 41, n°3, pp. 260-269.
- [CAI92] **CAI Z, GUTOWSKI T.** The 3-D deformation behavior of a lubricated fiber bundle. *Journal of Composite Materials*, 1992, vol. 26, pp. 1207-1237
- [CAO08] **CAO J, AKKERMAN R, BOISSE P, ET. AL.** Characterization of mechanical behavior of woven fabrics: Experimental methods and benchmark results. *Composites: Part A*, 2008, vol. 39, pp. 1037–1053.
- [CHA04] **CHANG SH, SUTCLIFFE MPF, SHARMA SB.** Microscopic investigation of tow geometry changes in a woven prepreg material during draping and consolidation. *Composites Science and Technology*, 2004, vol. 64, pp. 1701–1707.
- [CRI97] **CRISFIELD MA.** Non linear Finite Element Analysis of Solids and Structure: Advanced Topics, Volume 2. Chichester: John Wiley Ed., 1997.
- [DAM01] **D'AMATO E.** Finite element modeling of textile composites. *Composite Structures*, 2001, vol. 54, pp. 467-475.
- [DEL03] **DELARUE A, JEULIN D.** 3D morphological analysis of composite materials with aggregates of spherical inclusions. *Image Analysis and Stereology*, 2003, vol. 22, pp. 153-161.
- [DEL09] **DE LUYCKER E.** Mise au point d'un outil de simulation de la mise en forme d'une aube de soufflante. Thèse de doctorat LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2009.
- [DES05] **DESPLENTERE F, LOMOV SV, WOERDEMAN DL, VERPOEST I, WEVERS M, BOGDANOVICH A.** Micro-CT characterization of variability in 3D textile architecture. *Composites Science and Technology*, 2005, vol. 65, pp. 1920–1930.
- [DON01] **DONG L, LEKAKOU C.** Processings of composites: Simulations of the draping of fabrics with updated material behaviour law. *Journal of Composite Materials*, 2001, vol. 35, pp. 138-163.
- [DOU03] **DOUMALIN P, BORNERT M, CREPIN J.** Characterisation of the strain distribution in heterogeneous materials. *Mécanique & Industries*, 2003, vol. 4, n°6, pp. 607-617.

- [DUM03a] **DUMONT F.** Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 6, 2003, 149 p.
- [DUM03b] **DUMONT F, HIVET G, ROTINAT R, LAUNAY J, BOISSE P, VACHER P.** Mesures de champs pour des essais de cisaillement sur des renforts tissés = Field measurements for shear tests on woven reinforcements. *Mécanique & industries*, 2003, vol. 4, n°6, pp. 627-635.
- [DUR07] **DURVILLE D.** Finite element simulation of textile materials at mesoscopic scale. In : Finite element modeling of textiles and textile composites conference, St-Petersburg, Russia, 2007.
- [EDG04] **EDGREN F, MATTSSON D, ASP LE, VARNA J.** Formation of damage and its effects on non-crimp fabric reinforced composites loaded in tension. *Composites Science and Technology*, 2004, vol. 64, pp. 675–692.
- [FOU05] **FOURNIER R, COUPEZ T, VINCENT M.** Numerical determination of the permeability of fibre reinforcement for the RTM process. *Revue européenne des éléments finis*, 2005, vol. 14, n° 6-7, pp. 803-818.
- [GAR02] **GARRIGUES J.** Mécanique des milieux continus en déformations finies [**en ligne**]. Cours de l'ESM2, 2002. Disponible sur : < <http://jgarrigues.perso.ec-marseille.fr/gd.pdf>> (consulté le 04.07.2008)
- [GAS00] **GASSER A, BOISSE P, HANKLAR S.** Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial test. *Computational Material Science*. 2000, vol. 17, pp. 7-20.
- [GIL93] **GILORMINI P, ROUDIER P, ROUGEE P.** Les déformations tensorielles cumulées. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 1993, vol. 316, pp. 1499-1504.
- [GOR07] **GORCZYCA J, SHERWOOD J, CHEN J.** A friction model for thermostamping commingled glass–polypropylene woven fabrics. *Composites part A*, 2007, vol. 38, pp. 393–406.
- [HAG04] **HAGEGE B.** Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations. Thèse de doctorat. Paris : ENSAM, 2004, 263 p.
- [HAG05] **HAGÈGE B, BOISSE P, BILLOËT JL.** Finite element analyses of knitted composite reinforcement at large strain. *Revue européenne des éléments finis*, 2005, vol. 14, n° 6-7, pp. 767-776.
- [HAM07] **HAMILA N.** Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multiplis. Thèse de doctorat. Lyon : INSA de Lyon, 2007.
- [HAM08] **HAMILA N, BOISSE P.** Simulations of textile composite reinforcement draping using a new semi-discrete three node finite element. *Composites: Part B*, 2008, vol. 39, pp. 999–1010.

- [HAM96] **HAMMAMI A, TROCHU F, GAUVIN R, WIRTH S.** Directional permeability measurement of deformed reinforcement. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1996, vol.15, pp. 552–62.
- [HAN98] **HANKLAR S.** Modélisation mécanique et numérique du comportement des tissus de fibres. Simulation du comportement mésoscopique de la maille élémentaire. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 6, 1998, 140 p.
- [HAR08] **HARRISON P, POTLURI P, BANDARA K, LONG AC.** A Normalisation Procedure for Biaxial Bias Extension Tests. In : *Proceedings of the 11th International ESAFORM conference on material forming*, Lyon, France, 2008.
- [HIV03] **HIVET G.** Modélisation mésoscopique pour le comportement bi-axial et la mise en forme des renforts de composites tissés. Thèse de doctorat LMSP. Orléans : Université d'Orléans, 2003, 146 p.
- [HIV05] **HIVET G, BOISSE P.** Consistent 3D geometrical model of fabric elementary cell. Application to a meshing preprocessor for 3D finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, vol. 42, pp. 25–49.
- [HIV08a] **HIVET G, BOISSE P.** Consistent mesoscopic mechanical behaviour model for woven composite reinforcements in biaxial tension. *Composites: Part B*, 2008, vol. 39, pp. 345–361.
- [HIV08b] **HIVET G, DUONG AV, LAUNAY J, BOISSE P.** Experimental analysis of the strain in a woven fabric during a shear test. In : *Proceedings of the 11th International ESAFORM conference on material forming*, Lyon, France, 2008.
- [HUE06] **HUETINK J.** On anisotropy, objectivity and invariancy in finite thermo-mechanical deformations. In: *Proceedings on the 9th International ESAFORM Conference on Material Forming*, Glasgow, United Kingdom, 2006, pp. 355–358.
- [HUG80] **HUGHES TJR, WINGET J.** Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, vol. 15, pp. 1862-1867.
- [KAW73] **KAWABATA S., NIWA M., KAWAI H.** The finite-deformation theory of plain weave fabrics – part I: the biaxial deformation theory. *Journal of the Textile Institute*, 1973, vol. 64, pp. 47-61.
- [LAD06] **LADEVEZE P, LUBINEAU G, MARSAL D.** Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 2006, vol. 66, pp. 698–712.
- [LAI97] **LAI CL, YOUNG WB.** Model resin permeation of fibre reinforcements after shear deformation. *Polymer Composites*, 1997, vol.18, n°5, pp. 642–648.
- [LAU08] **LAUNAY J, HIVET G, DUONG AV, BOISSE P.** Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, 2008, vol. 68, pp. 506-515.

- [LEB01] **LEBAIL H.** Caractérisations microscopiques et mécaniques de matériaux composites et étude des relations aux propriétés élastiques associées. Thèse de doctorat. Lyon : INSA de Lyon, 2001.
- [LEB03] **LEBRUN G, BUREAU MN, DENAULT J.** Evaluation of bias-extension and picture-frame test methods for the measurement of intraply shear properties of PP/glass commingled fabrics. *Composite Structures*, 2003, vol. 61, pp. 341–352.
- [LEE08] **LEE W, CAO J, BADEL P, BOISSE P.** Non-orthogonal constitutive model for woven composites incorporating tensile effect on shear behavior. In : *Proceedings of the 11th International ESAFORM conference on material forming*, Lyon, France, 2008.
- [LIU06] **LIU L, CHEN J, ZHU B, YU TX, TAO XM, CAO J.** The yarn-to-yarn friction of woven fabrics. In : *Proceedings of the 9th ESAFORM conference*, Glasgow, United Kingdom, 2006.
- [LOI08] **LOIX F, BADEL P, ORGEAS L, GEINDREAU C, BOISSE P.** Woven fabric permeability: From textile deformation to fluid flow mesoscale simulations. *Composites Science and Technology*, 2008, vol. 68, pp. 1624–1630.
- [LOM00] **LOMOV SV, GUSAKOV AV, HUYSMANS G, PRODRMOU A, VERPOEST I.** Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. *Composites Science and Technology*, 2000, vol. 60, pp. 2083-2095.
- [LOM06] **LOMOV SV, VERPOEST I.** Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements. *Composites Science and Technology*, 2006, vol. 66, pp. 919–933.
- [LOM08] **LOMOV SV, BOISSE P, DE LUYCKER E, MORESTIN F, VANCLOOSTER K, VANDEPITTE D, VERPOEST I, WILLEMS A.** Full-field strain measurements in textile deformability studies. *Composites Part A*, 2008, vol. 39, pp. 1232-1244.
- [MCB97] **MCBRIDE T.** The large deformation behavior of woven fabric and microstructural evolution in formed textile composites. Thèse de doctorat. Ann Arbor (USA) : University of Michigan, 1997, 219 p.
- [MIE04] **MIEHE C, DETTMAR J.** A framework for micro–macro transitions in periodic particle aggregates of granular materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, vol. 193, pp. 225–256.
- [ORG07] **ORGEAS L, GEINDREAU C, AURIAULT J-L, BLOCH JF.** Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 145, pp. 15–29.
- [PAN03] **PANDITA SD, VERPOEST I.** Prediction of the tensile stiffness of weft knitted fabric composites based on X-ray tomography images. *Composites Science and Technology*, 2003, vol. 63, pp. 311–325.
- [PEN02] **PENG X, CAO J.** A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites. *Composites : Part B*, 2002, vol. 33, pp. 45-56.

- [PEN05] **PENG X, CAO J.** A continuum mechanics-based non orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites: Part A*, 2005, vol. 36, pp. 859-874.
- [PHO] **PHOENIX.** 3D Computed Tomography - Applications - phoenix|x-ray [**en ligne**]. Disponible sur : <[http://www.phoenix-xray.com/en/applications/3d\\_computed\\_tomography/](http://www.phoenix-xray.com/en/applications/3d_computed_tomography/)> (consulté le 04.07.2008).
- [POT06a] **POTLURI P, PARLAK I, RAMGULAM R, SAGAR TV.** Analysis of tow deformations in textile preforms subjected to forming forces. *Composites Science and Technology*, 2006, vol. 66, pp. 297–305.
- [POT06b] **POTLURI P, PEREZ CIUREZU DA, RAMGULAM R.** Measurement of meso-scale shear deformations for modelling textile composites. *Composites: Part A*, 2006, vol. 37, pp. 303–314.
- [POT99] **POTTER KD.** History of the resin transfer moulding for aerospace applications. *Composites: Part A*, 1999, vol. 30, pp. 757-765.
- [RAZ06] **RAZ-BEN AROUSH D, MAIRE E, GAUTHIER C, YOUSSEF S, CLOETENS P, WAGNER HD.** A study of fracture of unidirectional composites using in situ high-resolution synchrotron X-ray microtomography. *Composites Science and Technology*, 2006, vol. 66, pp. 1348–1353.
- [RUD97] **RUDD CD, LONG AC, KENDALL KA, MANGIN CGE.** *Liquid Molding Technologies*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 1997, 457p.
- [SAG03] **SAGAR TV, POTLURI P, HEARLE JWS.** Mesoscale modelling of interlaced fibre assemblies using energy method. *Computational Materials Science*, 2003, vol. 28, pp. 49–62.
- [SCH06] **SHELL JSU, RENGGLI M, VAN LENTHE GH, MULLER R, ERMANNI P.** Micro-computed tomography determination of glass fibre reinforced polymer meso-structure. *Composites Science and Technology*, 2006, vol. 66, pp. 2016–2022.
- [SCH92] **SCHNUR DS, ZABARAS N.** An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 33, pp. 2039-2057.
- [SHA04] **SHARMA SB, SUTCLIFFE MPF.** A simplified finite element model for draping of woven material. *Composites: Part A*, 2004, vol. 35, pp. 637–643.
- [SID82] **SIDOROFF F.** Cours sur les grandes déformations [**en ligne**] Rapport Greco n°51/1982. Disponible sur : <<http://perso.ec-lyon.fr/francois.sidoroff/coursGD/GD82.pdf>> (consulté le 04.07.2008)
- [SIM96a] **SIMACEK P, ADVANI SG.** Permeability model for a woven fabric. *Polymer Composites*, 1996, vol. 17, pp. 887-899.
- [SIM96b] **SIMACEK P, KARBHARI VM.** Notes on the modeling of preform compaction: I-micromechanics at the fiber bundle level, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1996, vol. 15, pp.86-122.

- [SLA00] **SLADE J, SOZER EM, ADVANI SG.** Fluid Impregnation of deformed preforms. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2000, vol. 19, pp. 552–68.
- [SMI97] **SMITH P, RUDD CD, LONG AC.** The effect of shear deformation on the processing and mechanical properties of aligned reinforcements. *Composites Science and Technology*, 1997, vol. 57, pp. 327–44.
- [TAK02] **TAKANO N, ZAKO M, OKAZAKI T, TERADA K.** Microstructure-based evaluation of the influence of woven architecture on permeability by asymptotic homogenization theory. *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, pp.1347-1356.
- [TAR01] **TARFAOUI M, AKESBI S.** A finite element model of mechanical properties of plain weave. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2001, vol. 187–188, pp. 439–448.
- [TEN07] **TEN THIJE RHW, AKKERMAN R, HUETINK J.** Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, vol. 196, pp. 3141-3150.
- [TRU55a] **TRUESDELL C.** Hypo-elasticity. *Journal of Rational Mechanics Analysis*, 1955, vol. 4, pp. 83-133.
- [TRU55b] **TRUESDELL C.** The simplest rate theory of pure elasticity. *Communication of Pure Applied Mechanics*, 1955, vol. 8, pp. 123-132.
- [VER05] **VERPOEST I, LOMOV SV.** Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, 2005, vol. 65, pp. 2563–2574.
- [WAN98] **WANG J, PAGE JR, PATON R.** Experimental investigation of the draping properties of reinforcement fabrics. *Composites Science and Technology*, 1998, vol. 58, pp. 229–237.
- [WIL08] **WILLEMS A, LOMOV SV, VERPOEST I, VANDEPITTE D.** Optical strain fields in shear and tensile testing of textile reinforcements. *Composites Science and Technology*, 2008, vol. 68, pp. 807–819.
- [XIA97] **XIAO H, BRUHNS OT, MEYERS A.** Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *Journal of Elasticity*, 1997, vol. 47, pp. 51–68.
- [XIA98] **XIAO H, BRUHNS OT, MEYERS A.** On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, pp. 4001-4014.
- [YU02] **YU WR, POURBOGHRATA F, CHUNG K, ZAMPALONI M, KANG TJ.** Non-orthogonal constitutive equation for woven fabric reinforced thermoplastic composites. *Composites: Part A*, 2002, vol. 33, pp. 1095–1105.
- [YU05] **YU WR, HARRISON P, LONG A.** Finite element forming simulation for non-crimp fabrics using a non-orthogonal constitutive equation. *Composites: Part A*, 2005, vol. 36, pp. 1079–1093.

[ZAK03] **ZAKO M, UETSUJI Y, KURASHIKI T.** Finite element analysis of damaged woven fabric composite materials. *Composites Science and Technology*, 2003, vol. 63, pp. 507-516.

[ZHU07a] **ZHU B, YU TX, TAO XM.** An experimental study of in-plane large shear deformation of woven fabric composite. *Composites Science and Technology*, 2007, vol. 67, pp. 252-261.

[ZHU07b] **ZHU B, YU TX, TAO XM.** Large deformation and slippage mechanism of plain woven composite in bias extension. *Composites : Part A*, 2007, vol. 38, pp. 1821-1828.



## Annexes

### Annexe A : Composantes des tenseurs exprimés en base tournée et non tournée

On montre dans cette annexe que les composantes d'un tenseur non tourné  $\underline{\underline{S}}_A$  exprimé dans la base non tournée  $\{\underline{\underline{e}}_i^0\}$  sont identiques aux composantes du tenseur tourné  $\underline{\underline{S}}$  exprimé dans la base tournée  $\{\underline{\underline{e}}_i\}$ . C'est-à-dire :

$$[\underline{\underline{S}}]_{\underline{\underline{e}}_i} = [\underline{\underline{S}}_A]_{\underline{\underline{e}}_i^0} \quad (5.6)$$

Rappelons l'expression des composantes de  $\underline{\underline{S}}$  dans la base tournée :

$$\underline{\underline{S}} = S_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$$

Ainsi, on en déduit l'expression de  $\underline{\underline{S}}_A$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_A &= \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{Q}} \\ &= \underline{\underline{Q}}^T \cdot (S_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j) \cdot \underline{\underline{Q}} \\ &= S_{ij} (\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{e}}_i) \otimes (\underline{\underline{e}}_j \cdot \underline{\underline{Q}}) \\ &= S_{ij} (\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{e}}_i) \otimes (\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{e}}_j) \\ &= S_{ij} \underline{\underline{e}}_i^0 \otimes \underline{\underline{e}}_j^0 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité fournit directement le résultat énoncé dans l'équation (5.6).

## Annexe B : Objectivité de la dérivée basée sur la rotation $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$

On montre dans cette annexe que l'objectivité d'une dérivée basée sur une rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  (cas général tel que défini dans l'équation (3.3)) requiert seulement que la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  suive les mouvements additionnels de corps rigide lorsque le solide y est sujet. En d'autres termes, sous une rotation de corps rigide, il est nécessaire que  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  contienne les rotations de corps rigide.

### 1-Introduction du problème

Soit  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  un tenseur objectif du second ordre. La dérivée objective de  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  dans la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  est notée  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^\nabla$ . La base tournée  $\{\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i\}$  est définie à partir de  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  et  $\{\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^0\}$ . Le spin du repère associé est :

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_Q = \dot{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T.$$

Par convention dans cette annexe, le spin correspondant à une rotation  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  est noté

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_\beta = \dot{\underline{\underline{\mathbf{\beta}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\beta}}}^T.$$

Lorsque le solide est soumis à une rotation de corps rigide  $\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}$  (voir la **Figure 70** où les tenseurs de second ordre sont représentés par des vecteurs dans le plan), la base  $\{\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i\}$  devient  $\{\underline{\underline{\mathbf{e}}}'_i\}$  et l'on note  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}'$  la rotation définissant cette nouvelle base :  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}' = \underline{\underline{\mathbf{e}}}'_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^0$ . Sous ce mouvement de corps rigide, le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  et sa dérivée deviennent respectivement :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}' = \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}^T \quad (5.7)$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^\nabla)' = \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}^\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}^T \quad (5.8)$$

Pour que la dérivée en rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  soit objective, il est nécessaire et suffisant que, pour tout  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}$ , la dérivée de  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}'$  dans la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}'$  égale l'image par la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}$  de la dérivée de  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  dans la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ . C'est-à-dire que la dérivée ne soit pas affectée par la rotation de corps rigide  $\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}$  :

$$(\underline{\underline{\mathbf{M}}}')^\nabla = (\underline{\underline{\mathbf{M}}}^\nabla)' \quad (5.9)$$

### 2-Calcul des grandeurs nécessaires

- Pour le calcul du membre de gauche de l'équation (5.9), nous avons besoin de

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}' = \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_\Psi \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}' - \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_\Psi$$
 obtenu par dérivation de l'équation (5.7).

Exprimons également le spin associé à  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}'$ . Pour cela, on introduit la rotation

$\underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}' \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T$  tel que  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}'_i = \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i$ . Par dérivation, on en déduit :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}'_i &= \dot{\underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i + \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_i \\ &= \dot{\underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i + \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i \quad \text{soit : } \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}'_Q = \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_\alpha + \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}^T \\ &= \left( \dot{\underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{\alpha}}}^T \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}'_i \end{aligned}$$

Tous les éléments permettant de calculer la dérivée  $(\underline{\underline{\mathbf{M}}}')^\nabla$  de  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}'$  dans la base  $\{\underline{\underline{\mathbf{e}}}'_i\}$  ont été définis. Celle-ci s'obtient donc par les développements suivants :

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\mathbf{M}}}')^\nabla &= \underline{\underline{\dot{\mathbf{M}}}}' + \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{Q'} - \underline{\underline{\Omega}}_{Q'} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \\ &= \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{M}}}} \cdot \underline{\underline{\Psi}}^T + (\underline{\underline{\Omega}}_{\Psi'} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}' - \underline{\underline{\Omega}}_{\alpha'} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}') + (\underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{\alpha'} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{\Psi'}) \\ &\quad + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{Q'} \cdot \underline{\underline{\alpha}}^T - \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_{Q'} \cdot \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}' \cdot \underline{\underline{\Psi}}^T \end{aligned}$$

- Le second membre de l'équation (5.9) est donné par (5.8) :

$$(\underline{\underline{\mathbf{M}}}')^\nabla = \underline{\underline{\Psi}} \cdot (\underline{\underline{\dot{\mathbf{M}}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_Q - \underline{\underline{\Omega}}_Q \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}) \cdot \underline{\underline{\Psi}}^T$$

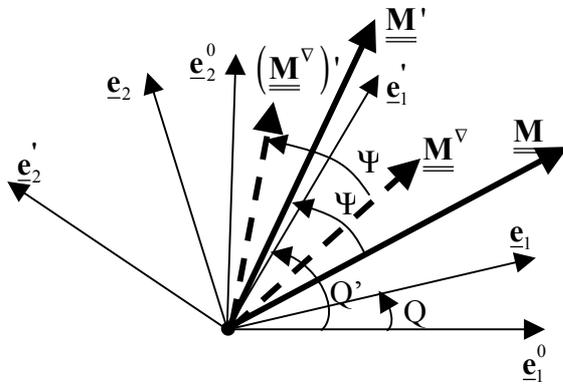
### 3-Conclusion

En conclusion, pour vérifier l'égalité (5.9), gage d'objectivité, il suffit que :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\Psi}} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\Omega}}' = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_Q$$

La condition portant sur la rotation utilisée dans le calcul de la dérivée est donc établie. Pour garantir l'objectivité, il suffit que cette rotation soit augmentée de la rotation de corps rigide lorsque le solide y est sujet.

Ceci est le cas de la rotation  $\underline{\underline{\Phi}}$  telle que nous l'avons définie au paragraphe 3.2.3(c) puisque celle-ci est calculée à partir des directions matérielles.



**Figure 70** : Repères tournés et rotation de corps rigide  $\underline{\underline{\Psi}}$