

Thèse

**Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité
et des effets non-Newtoniens dans les contacts
sévéres lubrifiés**

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le grade de DOCTEUR

Spécialité :
GENIE MECANIQUE

Formation doctorale :
GENIE MECANIQUE

École doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique
MEGA

Par
KANE Malal

Soutenue le 10 mars 2003 devant la Commission d'examen

Jury MM.

BOU-SAÏD Benyebka	Maître de conférences HDR	INSA de Lyon	Directeur de thèse
DALMAZ Gérard	Professeur	INSA de Lyon	Président de Jury
FLAMAND Louis	Professeur	INSA de Lyon	
JAÏ Mohamed	Maître de conférences	INSA de Lyon	
NAJJI Brahim	Professeur	ENIM de Rabat	Rapporteur
VILLECHAISE Bernard	Professeur	IUT d'Angoulême	Rapporteur

INSA DE LYON

DEPARTEMENT DES ETUDES DOCTORALES ET RELATIONS INTERNATIONALES SCIENTIFIQUES

MARS 2002

Ecoles Doctorales et Diplômes d'Etudes Approfondies

habilités pour la période 1999-2003

ECOLES DOCTORALES n° code national	RESPONSABLE PRINCIPAL	CORRESPONDANT INSA	DEA INSA n° code national	RESPONSABLE DEA INSA
CHIMIE DE LYON (Chimie, Procédés, Environnement) EDA206	M. D. SINOUE UCBL1 04.72.44.62.63 Sec 04.72.44.62.64 Fax 04.72.44.81.60	M. R. GOURDON 87.53 Sec 84.30 Fax 87.17	Chimie Inorganique 910643 Sciences et Stratégies Analytiques 910634 Sciences et Techniques du Déchet 910675	M. R. GOURDON Tél 87.53 Fax 87.17
<u>ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS</u> (E ² MC) EDA417	M.A. BONNAFOUS LYON 2 04.72.72.64.38 Sec 04.72.72.64.03 Fax 04.72.72.64.48	Mme M. ZIMMERMANN 84.71 Fax 87.96	Villes et Sociétés 911218 Dimensions Cognitives et Modélisation 992678	Mme M. ZIMMERMANN Tél 84.71 Fax 87.96 M. L. FRECON Tél 82.39 Fax 85.18
<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> (E.E.A.) EDA160	M. G. GIMENEZ INSA DE LYON 83.32 Fax 85.26		Automatique Industrielle 910676 Dispositifs de l'Electronique Intégrée 910696 Génie Electrique de Lyon 910065 Images et Systèmes 992254	M. M. BETEMPS Tél 85.59 Fax 85.35 M. D. BARBIER Tél 85.47 Fax 60.81 M. J.P. CHANTE Tél 87.26 Fax 85.30 Mme I. MAGNIN Tél 85.63 Fax 85.26
<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> (E2M2) EDA403	M. J.P FLANDROIS UCBL1 04.78.86.31.50 Sec 04.78.86.31.52 Fax 04.78.86.31.49	M. S. GRENIER 79.88 Fax 85.34	Analyse et Modélisation des Systèmes Biologiques 910509	M. S. GRENIER Tél 79.88 Fax 85.34
<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> (EDIIS) EDA 407	M. J.M. JOLION INSA DE LYON 87.59 Fax 80.97		Documents Multimédia, Images et Systèmes d'Information Communicants 992774 Extraction des Connaissances à partir des Données 992099 Informatique et Systèmes Coopératifs pour l'Entreprise 950131	M. A. FLORY Tél 84.66 Fax 85.97 M. J.F. BOULICAUT Tél 89.05 Fax 87.13 M. A. GUINET Tél 85.94 Fax 85.38
<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> (EDISS) EDA205	M. A.J. COZZONE UCBL1 04.72.72.26.72 Sec 04.72.72.26.75 Fax 04.72.72.26.01	M. M. LAGARDE 82.40 Fax 85.24	Biochimie 930032	M. M. LAGARDE Tél 82.40 Fax 85.24
MATERIAUX DE LYON UNIVERSITE LYON 1 EDA 034	M. J. JOSEPH ECL 04.72.18.62.44 Sec 04.72.18.62.51 Fax 04.72.18.60.90	M. J.M. PELLETIER 83.18 Fax 84.29	Génie des Matériaux : Microstructure, Comportement Mécanique, Durabilité 910527 Matériaux Polymères et Composites 910607 Matière Condensée, Surfaces et Interfaces 910577	M. J.M.PELLETIER Tél 83.18 Fax 85.28 M. H. SAUTEREAU Tél 81.78 Fax 85.27 M. G. GUILLOT Tél 81.61 Fax 85.31
<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u>	M. NICOLAS UCBL1 04.72.44.83.11	M. J. POUSIN 88.36 Fax 85.29	Analyse Numérique, Equations aux dérivées partielles et Calcul Scientifique	M. G. BAYADA Tél 83.12 Fax 85.29

(Math IF) EDA 409	Fax 04.72.43.00.35		910281	
<u>MECANIQUE,</u> <u>ENERGETIQUE, GENIE</u> <u>CIVIL, ACOUSTIQUE</u> (MEGA) EDA162	M. J. BATAILLE ECL 04.72.18.61.56 Sec 04.72.18.61.60 Fax 04.78.64.71.45	M. G.DALMAZ 83.03 Fax 04.72.89.09.80	Acoustique 910016 Génie Civil 992610 Génie Mécanique 992111 Thermique et Energétique 910018	M. J.L. GUYADER Tél 80.80 Fax 87.12 M. J.J.ROUX Tél 84.60 Fax 85.22 M. G. DALMAZ Tél 83.03 Fax 04.78.89.09.80 M. J. F. SACADURA Tél 81.53 Fax 88.11

En grisé : Les Ecoles doctorales et DEA dont l'INSA est établissement principal

OCTOBRE 2002

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur : STORCK A.

Professeurs :

AUDISIO S.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOT D.	CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENT IONISANTS
BABOUX J.C.	GEMPPM***
BALLAND B.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BAPTISTE P.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BARBIER D.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASTIDE J.P.	LAEPSI****
BAYADA G.	MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON
BENADDA B.	DEPT GEN
BETEMPS M.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BIENNIER F.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BLANCHARD J.M.	LAEPSI****
BOISSON C.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
BOIVIN M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES SOLIDES
BOTTA H.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOULAYE G. (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BOYER J.C.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRAU J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment
BREMOND G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BRISAUD M.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
BRUNET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRUNIE L.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUREAU J.C.	CEGELY*
CAVAILLE J.Y.	GEMPPM***
CHANTE J.P.	CEGELY*- Composants de puissance et applications
CHOCAT B.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
COMBESURE A.	MECANIQUE DES CONTACTS
COUSIN M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
DAUMAS F. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique
DOUTHEAU A.	CHIMIE ORGANIQUE
DUFOUR R.	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY J.C.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H.	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
ESNOUF C.	GEMPPM***
EYRAUD L. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
FANTOZZI G.	GEMPPM***
FAVREL J.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
FAYARD J.M.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
FAYET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
FERRARIS-BESSO G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L.	MECANIQUE DES CONTACTS
FLORY A.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
FOUGERES R.	GEMPPM***
FOUQUET F.	GEMPPM***
FRECON L.	REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLÉS
GERARD J.F.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
GERMAIN P.	LAEPSI****
GIMENEZ G.	CREATIS**
GOBIN P.F. (Prof. émérite)	GEMPPM***
GONNARD P.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GONTRAND M.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GOUTTE R. (Prof. émérite)	CREATIS**
GOUJON L.	GEMPPM***
GOURDON R.	LAEPSI****
GRANGE G.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GUENIN G.	GEMPPM***
GUICHARDANT M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLOT G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
GUYADER J.L.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
GUYOMAR D.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
HEIBIG A.	MATHEMATIQUE APPLIQUEES LYON
JACQUET RICHARDET G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
JAYET Y.	GEMPPM***
JOLION J.M.	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
JULLIEN J.F.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
JUTARD A. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE

LISTE DES PROFESSEURS

KASTNER R.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
KOULOUMDJIAN J.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LALLEMAND M. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LAREAL P.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
LAUGIER A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
LAUGIER C.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LEJEUNE P.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
LUBRECHT A.	MECANIQUE DES CONTACTS
MASSARD N.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
MAZILLE H.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P.	GEMPPM***
MERLIN J.	GEMPPM***
MIGNOTTE A. (Mle)	INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
MILLET J.P.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MIRAMOND M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
MOREL R.	MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES
MOSZKOWICZ P.	LAEPSI****
MOURA A.	GEMPPM***
NARDON P. (Prof. émérite)	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
NIEL E.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
NORTIER P.	DREP
ODET C.	CREATIS**
OTTERBEIN M. (Prof. émérite)	LAEPSI****
PARIZET E.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PASCAULT J.P.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
PAVIC G.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PELLETIER J.M.	GEMPPM***
PERA J.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL – Matériaux
PERRIAT P.	GEMPPM***
PERRIN J.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PINARD P. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON J.M.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
PONCET A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
POUSIN J.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
PREVOT P.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PROST R.	CREATIS**
RAYNAUD M.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
REYNOUARD J.M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
RIGAL J.F.	MECANIQUE DES SOLIDES
RIEUTORD E. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D.	GEMPPM***
ROUX J.J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON – Thermique de l'Habitat
RUBEL P.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
RUMELHART C.	MECANIQUE DES SOLIDES
SACADURA J.F.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTEREAU H.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SCAVARDA S.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
SOUIFI A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
SOUROUILLE J.L.	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
UBEDA S.	CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES
THUDEROZ C.	ESCHIL – Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon
UTERREINER R.	CREATIS**
VELEX P.	MECANIQUE DES CONTACTS
VIGIER G.	GEMPPM***
VINCENT A.	GEMPPM***
VRAY D.	CREATIS**
VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
 <i>Directeurs de recherche C.N.R.S. :</i>	
BERTHIER Y.	MECANIQUE DES CONTACTS
CONDEMINÉ G.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
COTTE-PATAT N. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
FRANCIOSI P.	GEMPPM***
MANDRAND M.A. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
POUSIN G.	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
ROCHE A.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SEGUELA A.	GEMPPM***
 <i>Directeurs de recherche I.N.R.A. :</i>	
FEBVAY G.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

LISTE DES PROFESSEURS

GRENIER S.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
RAHBE Y.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. :

PRIGENT A.F. (Mme)	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
MAGNIN I. (Mme)	CREATIS**

* **CEGELY** CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON

** **CREATIS** CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL

*****GEMPPM** GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

******LAEPSI** LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

REMERCIEMENTS

Je ne saurais présenter ce travail sans exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont permis de le mener à bien.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à Monsieur BOU-SAÏD, mon directeur de thèse, pour ses conseils tout au long de ce travail et pour la qualité de son encadrement.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur JAÏ, Maître de conférences, INSA de Lyon, pour avoir accepté de faire partie du jury et pour toutes les discussions que nous eues sur l'homogénéisation, Monsieur CIUPERCA, Maître de conférences, Université Claude Bernard Lyon1, pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

Je tiens à remercier Monsieur NAJJI, Professeur, ENIM de RABAT (Maroc), Monsieur VILLECHAISE, Professeur, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur DALMAZ, Professeur, Université CLAUDE BERNARD Lyon 1, INSA de Lyon, d'avoir accepté de présider mon jury, Monsieur FLAMAND, Professeur à l'INSA de Lyon, directeur du Laboratoire de Mécanique des Contacts (LMC), de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Mécanique des Contacts pour leur sympathie ainsi que pour l'ambiance chaleureuse qui règne à l'intérieur du laboratoire.

Je tiens à remercier Fanta SENE KANE, ma femme, pour sa patience et sa compréhension pendant toute la durée de ma thèse.

NOMENCLATURE

SYMBOLES

x, y, z	Coordonnées cartésiennes
r, θ, z	Coordonnées cylindriques
x_1, y_1, z_1	Coordonnées cartésiennes homogénéisées
x_2, y_2, z_2	Coordonnées cartésiennes homogénéisées locales
P	Pression (Pa)
$\bar{P} = \frac{Ph^2}{\mu Ub}$	La pression addimentionnée
F	Force de frottement (N)
$\bar{F} = \frac{F}{\mu Ua} \left(\frac{h}{b} \right)$	La force de frottement addimentionnée
Q	Débit ($m^3.s^{-1}$).
$\bar{Q} = \frac{Q}{LUh}$	Débit addimentionné
W	Charge portante (W)
$\bar{W} = \frac{W}{\mu Ua} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	Charge addimentionnée
T	Température absolue (K)
h	Epaisseur (m)
h_0	Epaisseur sans rugosités (m)
$h_{\min}$	Epaisseur minimale (m)

H_1	Hauteur de la surface inférieure (m)
H_2	Hauteur de la surface supérieure (m)
μ	Viscosité dynamique ($Pa.s$)
ν	Viscosité cinématique (m^2 / s)
u, v et w	Vitesses du fluide suivant x, y et z (m)
U_1, V_1, W_1	Vitesses de la surface inférieure suivant les trois directions (m / s)
U_2, V_2, W_2	Vitesses de la surface supérieure suivant les trois directions (m / s)
C	Jeu radial (m)
e	Excentricité (m)
ε_r	Excentricité relative (Sans dimension)
a, b	Longueur et largeur du contact (m)
δ_1, δ_2	Amplitudes des rugosités des deux surfaces (m)
$\delta = \delta_1 + \delta_2$	Rugosité combinée (m)
ϕ_x, ϕ_y	Facteurs correcteurs au débit de Poiseuille
ϕ_s	Facteur correcteur au débit de couette
γ	Paramètre directionnelle de la rugosité
σ	Variance
w_1, w_2, w_3, χ	Solutions des problèmes locaux
ε	Variable introduite pour l'homogénéisation
R	Rayon de l'arbre (m)
n_r	Nombre de rugosité
α	Amplitude des rugosités (m)
$a, b, c, m, n,$	Constantes dépendant du lubrifiant
VI	Indice de viscosité

τ_{ij}	Contraintes de cisaillement (Pa)
τ_e	Contrainte équivalente de Von Mises (Pa)
τ_r	Contrainte de référence (Pa)
τ_L	Contrainte limite (Pa)
$\dot{\gamma}_{ij}$	Taux des vitesses de déformations (s^{-1})
$\dot{\gamma}_{ij}^v$	Taux des vitesses de déformations visqueuses (s^{-1})
$\dot{\gamma}_{ij}^e$	Taux des vitesses de déformations élastiques (s^{-1})
G	Module de cisaillement du fluide.
A	Paramètre de comportement rhéologique
I_m, I_{m2}, J_m, J_{m2}	Coefficients intervenant dans l'expression des vitesses du fluide
$K_{mx}, K_{mx2}, K_{my}, K_{my2}$	Coefficients intervenant dans l'expression des vitesses du fluide de l'équation de Reynolds non newtonien
L_{mx}, L_{my}, G_m, F_m	Coefficients intervenant dans l'expression des vitesses du fluide de l'équation de Reynolds non newtonien

INDICES

0,1,2...	L'ordre de développement de la formule de Taylor intervenant dans l'homogénéisation.
----------	--

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	7
NOMENCLATURE	8
TABLE DES MATIERES	12
TABLE DES ILLUSTRATIONS	16
TABLE DES TABLEAUX	17
INTRODUCTION GENERALE	19
CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	23
I introduction.....	23
II Lubrification hydrodynamique	26
III Géométrie locale.....	29
Rugosité de surface.....	29
IV Prise en compte de la rugosité :	29
Analyse stochastique	30
Analyse déterministe	33
Analyse « homogénéisation »	34
V Conclusion	35
CHAPITRE 2 : HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS	
NEWTONIEN	36
I Introduction	36
II Equations de base	37
III Homogénéisation de l'équation de Reynolds newtonien	39
IV Résolution des problèmes locaux et du problème homogénéisé	43
V Géométrie du contact.....	44
Epaisseur globale sans rugosités	44
Forme des rugosités considérées	45

VI	Comparaison entre la méthode homogénéisée et la méthode directe.....	46
VII	Deux dimensions	47
	Variation du nombre de rugosités (n_r).....	47
	Variation de l'amplitude des rugosités (α)	50
VIII	Trois dimensions	52
	Rugosités anisotropes	52
	Variation du nombre de rugosités (n_r).....	52
	Variation de l'amplitude des rugosités (α)	54
	Rugosités quelconques	57
	Variation du nombre de rugosités (n_r).....	57
	Variation de l'amplitude des rugosités (α)	59
	Variation du nombre de rugosités (n_r).....	61
	Variation de l'amplitude des rugosités (α)	63
IX	Synthèse des différents résultats.....	64
X	Conclusion.....	65
CHAPITRE 3 : EQUATION DE REYNOLDS NON-NEWTONIEN		66
I	introduction.....	66
II	Fluides non-newtoniens :.....	67
	Chronologie des travaux dans ce domaine	69
	Les lois définies explicites :	69
	Les lois définies implicites :	70
III	Rhéologie :.....	71
	Modèle Newtonien :	71
	Modèle visqueux non linéaire :	72
	Modèle viscoélastique linéaire :	73
	Modèle viscoélastique non linéaire:	74
IV	Equation généralisée de la mécanique des films minces non-newtonien :.....	75
	Equations d'équilibre :.....	75
	Equation de comportement :.....	76
	Equation de continuité.....	77
V	Résolution de l'équation de Reynolds non-newtonien.....	80
	Equation de Reynolds non-Newtonien pour un palier :	80

Résolution de l'équation de Reynolds Modifiée :	81
VI Résultats :	82
Modèle Newtonien :	83
Variation de l'amplitude des rugosités (α)	83
Modèle visqueux non linéaire :	84
Modèle viscoélastique de type Ree-Eyring	85
Variation de la contrainte de référence (τ_r)	85
Variation du nombre de rugosités (n_r)	88
Variation de l'amplitude des rugosités (α)	90
Modèle viscoplastique de type Winer	91
Variation de la contrainte limite (τ_L)	92
Variation du nombre de rugosités (n_r)	93
Variation de l'amplitude des rugosités (α)	94
VII Conclusion	96
CHAPITRE 4: HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN	97
I Introduction	97
II Homogénéisation de l'équation de Reynolds « non-newtonien »	98
III Résolution des problèmes locaux et du problème homogénéisé	101
IV Paramètres et résultats	103
Les caractéristiques étudiés	103
Types de rugosités étudiés	104
Les lois étudiées	104
Résultats : Modèle newtonien	106
Charge supportée par le contact	106
Maximum de pression	107
Résultats : Modèle viscoélastique de type Ree-Eyring	108
Charge supportée par le contact	108
Débit axial	113
Force de frottement	118
Maximum de pression	123
V Conclusion	128

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	129
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	131
ANNEXE 1: EXPRESSIONS DE $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$ [42].....	137
I Dérivée de JAUMAN	137
II Dérivée d'OLDROYD.....	138
III Dérivée intrinsèque.....	138
ANNEXE 2 : ETABLISSEMENT DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON NEWTONIEN [42].....	139
ANNEXE 3 : EXPRESSION DES COEFFICIENTS HOMOGENEISES DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON-NEWTONIEN	143
ANNEXE 4 : LES RESULTATS DU MODELE VISCOPLASTIQUE.....	149
I Charge supportée par le contact.....	150
II Débit axial	153
III Force de frottement.....	155
IV Maximum De Pression	157
V Analyse et conclusion.....	159

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Zoom sur le contact dans un palier	24
Figure 2 : Section droite d'un palier	26
Figure 4 : Epaisseur du film local	31
Figure 5 : Système d'axes	37
Figure 6 : Algorithme de résolution de la pression homogénéisée	43
Figure 7 : Epaisseur du film d'huile sans rugosités.	45
Figure 8 : Variation de la viscosité avec la température pour une huile minérale [31].	67
Figure 9 : Définition de l'indice de viscosité.	69
Figure 10 : Système d'axes.	71
Figure 11 : Système d'axes.	75
Figure 12 : Equilibre d'un élément infiniment petit.....	76
Figure 13 : Palier et son développé.	80
Figure 14 : Algorithme de résolution de l'équation de Reynolds Modifiée	82
Figure 15 : Système d'axes.	98

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1 : les trois formes de rugosités à étudier	45
Tableau 2 : Variation du nombre de rugosité en deux dimensions avec les trois formes	48
Tableau 3 : Variation de l'amplitude des rugosités en deux dimensions avec les trois formes	51
Tableau 4 : rugosité anisotrope, variation du nombre de rugosités.....	54
Tableau 5 : rugosité anisotrope, variation de l'amplitude des rugosités.	56
Tableau 6 : rugosité quelconque, variation du nombre de rugosités.....	58
Tableau 7 : rugosité quelconque, variation de l'amplitude des rugosités.	60
Tableau 8 : rugosité transversale, variation du nombre de rugosités.	62
Tableau 9 : rugosité transversale, variation de l'amplitude des rugosités.....	64
Tableau 10 : Les types de rugosités étudiés	83
Tableau 11 : Modèle Newtonien avec variation de l'amplitude des rugosités.....	84
Tableau 12 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation de la Contrainte de référence	87
Tableau 13 : Tableau 14 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation du nombre des rugosités.....	89
Tableau 15 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation de l'amplitude des rugosités.	91
Tableau 16 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation de la contrainte limite.....	93
Tableau 17 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation du nombre des rugosités..	94
Tableau 18 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation de l'ampitude des rugosités.	95
Tableau 19 : formes de rugosités étudiées.	104
Tableau 20 : Variation de la charge dans le modèle Newtonien.....	106
Tableau 21 : Variation de la pression dans le modèle Newtonien	107
Tableau 22 : Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.....	108
Tableau 23 : Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.....	109

Tableau 24 : Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.....	110
Tableau 25 : Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.....	111
Tableau 26 : Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.....	112
Tableau 27 : Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.	113
Tableau 28 : Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.	114
Tableau 29 : Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.	115
Tableau 30 : Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.	116
Tableau 31 : Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.	117
Tableau 32 : Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.....	118
Tableau 33 : Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.....	119
Tableau 34 : Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.....	120
Tableau 35 : Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.....	121
Tableau 36 : Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.....	122
Tableau 37 : Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.....	123
Tableau 38 : Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.....	124
Tableau 39 : Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.....	125
Tableau 40 : Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.....	126
Tableau 41 : Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.....	127
Tableau 42 : Orientations étudiées.	149
Tableau 43 : Variation de la charge, modèle viscoplastique.....	152
Tableau 44 : Variation du débit, modèle viscoplastique.	155
Tableau 45 : Variation de la force de frottement, modèle viscoplastique.....	157
Tableau 46 : Variation de la pression, modèle viscoplastique.	159

INTRODUCTION GENERALE

Un système mécanique est un ensemble de pièces liées entre elles et en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces frottent les unes contre les autres et on lubrifie généralement le contact pour ainsi éviter une usure trop rapide de ces pièces.

La surface des ces pièces n'est pas lisse, car portant les traces de mouvement de la machine outils qui les a usinées. L'étude de l'influence de ces rugosités présentes sur la surface des pièces en même temps que la lubrification du contact peut contribuer à l'amélioration des performances et la durée de vie des mécanismes . Il est utile de préciser que l'existence des défauts de forme sur ces surfaces n'est pas toujours nuisible et même que certains mécanismes tels que les joints d'étanchéité, ne fonctionneraient pas sans leurs présences. Il n'en reste pas moins que leur présence modifie considérablement le comportement des machines.

Depuis très longtemps, ayant compris l'importance de la lubrification des machines sur leurs performances , on a cherché à améliorer les huiles qui servent de corps séparateur entre les surfaces frottantes pour augmenter ces performances . Les changements intervenus dans la composition de ces huiles lubrifiantes a modifié la réponse de ces dernières dans certaines conditions de fonctionnement et ainsi a changé les caractéristiques de fonctionnement des mécanismes .

Par ailleurs s'étant rendu compte que la performance et la durée de vie des pièces dépendaient largement de la qualité de leur usinage, donc de la rugosité des surfaces, des études furent entreprises pour mieux comprendre afin de maîtriser l'influence de ce paramètre rugosité des surfaces sur les systèmes mécaniques.

Ainsi la détermination des performances d'un contact lubrifié dépend entre autres, d'une caractérisation rigoureuse des surfaces en présence et d'une représentation aussi fidèle et complète que possible du lubrifiant soumis aux sollicitations internes et externes . Lorsque les conditions de fonctionnement sont dites 'sévéres' il est impératif de caractériser et de modéliser le plus correctement possible ces deux aspects. Des modèles ont été mis en place

pour prévoir le comportement des contacts lubrifiés. Ainsi, l'élaboration de la théorie de la lubrification par film mince apparaît en 1886 avec le modèle mathématique établi par Reynolds connu sous le nom « d'équation de Reynolds ». Cette équation qui peut s'écrire sous différentes formes, est le plus souvent une équation non linéaire aux dérivées partielles. La plus part des techniques numériques existantes ont été utilisées pour la résoudre.

La résolution de cette équation permet d'accéder à la distribution du champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi à ses caractéristiques de fonctionnement (capacité de charge, débit, force de frottement,...). Une des principales hypothèses émises par Reynolds est que le lubrifiant possède un comportement newtonien, c'est à dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse dans l'épaisseur du film. A partir des années 1960 des étapes décisives ont pu être franchies dans le domaine de la lubrification hydrodynamique, lorsque l'ordinateur est venu ajouter aux connaissances physiques sa puissance de calcul, et ainsi permettre d'élaborer des modèles numériques capables de représenter très ' finement ' des comportements complexes des films d'huile dans les contacts tels que les paliers et les butées.

En effet compte tenu des sollicitations très sévères du fluide lors de certaines situations telles que le démarrage du système mécanique (roulements, engrenages, cames, ...) et de l'apparition sur le marché de divers produits lubrifiants de composition complexe (graisse, bitume, ...), la réponse du lubrifiant ne peut plus être modélisée par une loi de type visqueux linéaire. L'équation de Reynolds classique n'est plus adaptée dans ce cadre. Ainsi de nouvelles équations, prenant en compte toute la complexité de la réponse du fluide, on été mises en place et nommées généralement : équation de Reynolds Modifiée non-Newtonienne. Parmi ces équations nous avons retenu celle proposée par Najji et al [46] équation qui nous a parue très générale et très adaptée à notre étude et que nous développerons plus loin dans ce mémoire.

Cette équation est une équation aux dérivée partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solutions analytiques. Des méthodes numériques ont été mises en place pour sa résolution et qui prennent en compte les phénomènes intervenant dans un contact lubrifié présentés plus haut.

Notre contribution par cette étude sera de mettre en place un nouveau modèle qui prend en compte ces phénomènes , explicitement les effets de rugosité des surfaces et les effets non-Newtoniens, en utilisant une nouvelle technique de calcul dite « homogénéisation » technique que l'on exposera dans ce mémoire.

Ainsi dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode pour prédire les différentes caractéristiques d'un contact (pression, débit, charge, force de frottement...) où le lubrifiant est soumis à un cisaillement continu. Cette modélisation peut tenir en compte la plus part des lois rhéologiques (newtonien, viscoélastique, viscoplastique, ...) généralement rencontrées en lubrification.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, une étude bibliographique sera présentée pour essayer de situer l'intérêt de notre contribution par rapport à ce qui se fait dans le domaine de la lubrification. On verra comment la géométrie locale est décrite et est prise en compte dans les calculs des contacts. On passera en revue les méthodes de calcul utilisées jusque là pour tenir compte des rugosités (stochastique, déterministe et homogénéisation) et la non linéarité de la loi rhéologique du fluide. Après analyse de ces méthodes de calcul pour déterminer les avantages et inconvénients de chacune d'elle, une conclusion sera tirée quand à celle qui sera retenue pour nos développements.

Dans le second chapitre, l'équation de base de la lubrification dite «équation de Reynolds» sera rapidement décrite avec ces hypothèses. Les techniques classiques et la nouvelle technique dite de «l'homogénéisation» lui seront appliquées afin de les comparer et de valider notre approche. Ainsi, une présentation détaillée sur la technique de l'homogénéisation sera faite. Après analyse des résultats, une conclusion sera tirée quant à la validité de cette technique.

Dans le troisième chapitre, une étude bibliographique sur le comportement des fluides sera réalisée. Les différentes lois rhéologiques du fluide seront passées en revue, la mise en place de l'équation de Reynolds «non-newtonien» retenue prenant en compte ces lois rhéologiques sera exposée. Une résolution numérique classique de cette équation sera effectuée afin d'évaluer l'influence des paramètres comme les propriétés de la géométrie du contact et les paramètres de la loi rhéologique du fluide sur les caractéristiques du contact telles que la pression, la force de frottement, le débit axial et la charge que peut supporter le contact. On analysera l'influence de ces paramètres sur les caractéristiques du contact pour pouvoir ensuite les comparer aux résultats obtenus dans la dernière partie de ce mémoire dans laquelle on appliquera l'homogénéisation à l'équation de Reynolds «non-newtonien».

Dans le dernier chapitre, l'homogénéisation sera appliquée à l'équation de Reynolds «non-newtonien» et les développements effectués seront exposés. L'algorithme pour la résolution numérique sera décrit. Une étude paramétrique sera proposée afin de déterminer les paramètres influents sur les caractéristiques d'un contact lubrifié en condition dites

sévères. Les résultats seront discutés et comparés à ceux obtenus à partir d'une manière classique.

Enfin une conclusion générale sera présentée pour rappeler l'essentiel des résultats obtenus ainsi que l'intérêt de notre contribution. Des perspectives seront dégagées.

CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I INTRODUCTION

Le fonctionnement de tous les systèmes mécaniques obéit obligatoirement à des phases de démarrage et d'arrêt plus ou moins fréquentes. En dehors de l'aspect instationnaire non abordé ici nous nous retrouvons en conditions de contact dites sévères La maîtrise de ces étapes et de leurs conséquences tel que l'usure sur le système mécanique a indéniablement un impact sur l'économie. Ainsi, la connaissance du déroulement de ces phases permettra entre autre de réaliser des améliorations dans la conception et la fabrication des composantes concernées afin d'augmenter leur fiabilité et mettre en place une sérieuse campagne de maintenance pouvant augmenter leur durée de vie. Cette durée de vie est entièrement liée à ce qu'on peut appeler par la suite « la cinétique d'usure ».

Mais déterminer cette cinétique n'est pas une chose aisée, car cette étude est pluridisciplinaire. Prenons l'exemple des paliers: lors du démarrage ou de l'arrêt du rotor, nous pouvons identifier trois phases bien distinctes où les lois régissant le contact dans le palier sont différentes :

- La première, il y a contact « Solide/Solide » entre l'arbre et le coussinet. Cette phase correspond au moment où l'arbre est posé sur le fond du coussinet, le rotor ne tourne pas.*
- La deuxième, le rotor commence à accélérer ou est en fin de décélération, il y a contact entre l'arbre et le coussinet mais dans cette phase, nous nous trouvons en lubrification mixte à cause de l'existence de lubrifiant dans certaines zones localisées du contact. Dans le cas du démarrage, la génération de pression hydrodynamique n'est pas encore suffisante pour faire décoller l'arbre et dans le cas de l'arrêt, elle n'est pas suffisante pour continuer à assurer la portance donc l'arbre entre en contact avec le coussinet.*

- La troisième, le rotor tourne à une vitesse suffisamment importante pour créer une portance hydrodynamique. Nous nous retrouvons donc dans une phase de lubrification hydrodynamique. Il n'y a plus de contact partiel entre l'arbre et le coussinet.

Pour étudier ces phases, on se propose de réaliser un « zoom » au niveau du contact et voir localement les mécanismes mis en jeu pour en dégager une approche plus systémique nous permettant de scinder le problème en sous-problèmes. Ces sous-problèmes identifiés, nous essayerons d'identifier les travaux qui s'y rapportent pour dégager ce qui a été déjà réalisé et ainsi mettre en exergue notre contribution.

Pour une approche plus schématique aidant à mieux localiser la position relative des deux surfaces en regard en fonction des phases de contact sévères, nous allons prendre l'exemple du palier et faire un zoom sur la zone de contact. On va se rapporter aux schémas suivants :

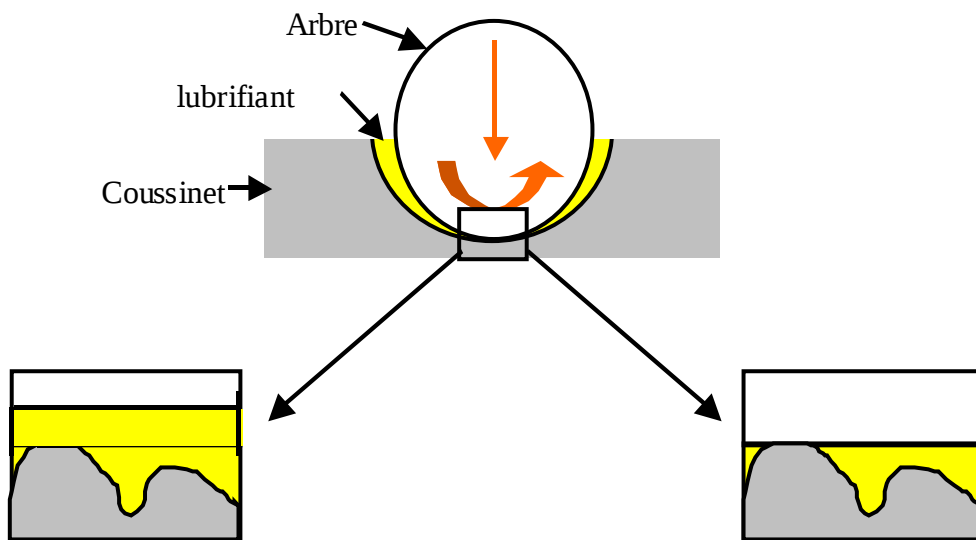


Figure 1: zoom sur le contact dans un palier

En se plaçant dans des conditions de contact sévères, nous allons essayer de décrire ce qui se passe au niveau du contact en essayant de dégager les régimes de lubrification en cours. Ainsi, on pourra mieux cibler notre bibliographie et essayer de développer les thèmes rencontrés lors de ces phases. Nous nous limiterons ici aux paliers.

En fonctionnement, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident pas, il existe un coin convergent-divergent, le lubrifiant est entraîné dans cet espace convergent par la rotation de l'arbre (en supposant bien entendu qu'il y a adhérence du fluide aux parois) et il y a création d'un champ de pression qui s'oppose à la charge. Cette pression générée par le déplacement relatif des surfaces tend à entraîner le fluide à séparer complètement les surfaces : on est en présence d'un régime de lubrification hydrodynamique (HD).

Ce film fluide peut séparer totalement les surfaces du contact, ce qui suppose que les défauts de surfaces tel que les aspérités peuvent ne pas être prises en compte dans les calculs car leurs dimensions sont largement inférieures à celles de l'épaisseur du film.

Pour des épaisseurs de film mince, la pression hydrodynamique peut être très importante et engendrer des déformations élastiques sur les surfaces en contact. Dans cette configuration, on se trouve en régime de lubrification élastohydrodynamique (EHD).

Si cette épaisseur de film est très mince de l'ordre de grandeurs des rugosités, il y aura par endroits contact entre les deux surfaces, on parlera alors de lubrification limite et de lubrification mixte. Tout ceci nous conduit à nous intéresser à la géométrie locale des surfaces en contact.

Ce film fluide obéit à une loi de comportement . L'étude de ces lois de comportement fait partie du domaine de la rhéologie, elle établit une relation entre le taux des vitesses de déformation de cisaillement et la contrainte de cisaillement.

Cette loi de comportement peut dépendre de la nature du fluide, de la température et de la pression dans le contact.

II LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

En régime hydrodynamique pur, le film d'huile sépare complètement les deux surfaces en contact. On supposera que l'écoulement du fluide à travers le contact est laminaire et isotherme et sans effets d'inertie.

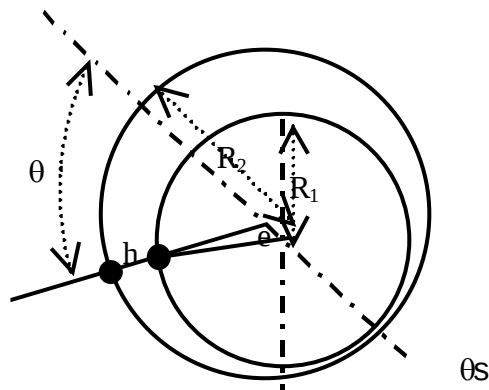


Figure 2 : Section droite d'un palier

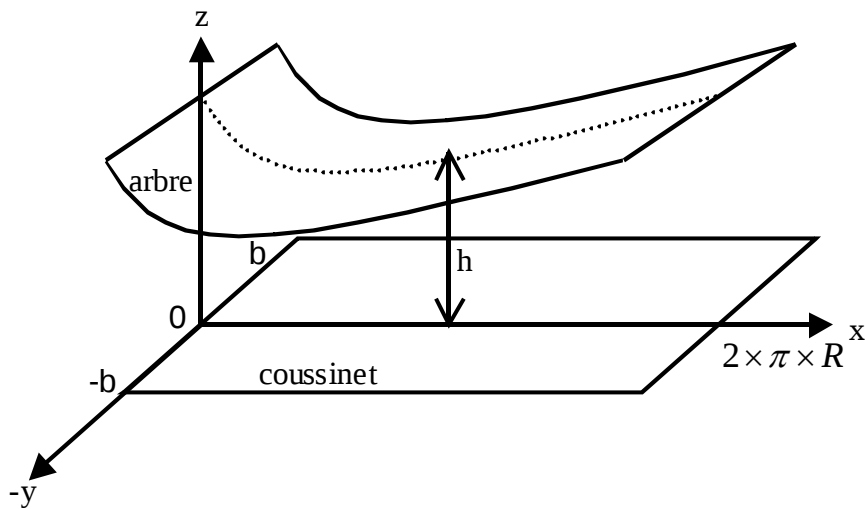


Figure 3: Palier développé

L'équation permettant de décrire le film fluide entre les deux surfaces en contact est l'équation de **Reynolds** dont on reviendra sur les hypothèses dans le prochain chapitre. L'équation de Reynolds classique la plus connue pour un fluide **newtonien** incompressible et isovisqueux s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 6\mu \left[(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2W_2 \right]$$

Dans cette expression,

- P : représente la pression,
- x et y : les coordonnées circonférentielles et axiale,
- h : l'épaisseur du film lubrifiant,
- W_2 : la vitesse linéaire de l'arbre suivant l'axe z ,
- U_1 et U_2 : sont les vitesses suivant l'axe x de l'arbre et le coussinet et
- μ : la viscosité dynamique du fluide.

Pour un palier aligné, l'épaisseur, h , du film d'huile est indépendante de y et en négligeant la courbure des surfaces s'écrit classiquement:

$$h = C(1 + \varepsilon_r \cos \theta)$$

- Avec $\varepsilon_r = e/C$ l'excentricité relative variant entre 0 et 1.

Les conditions aux limites donnant les solutions les plus exactes et vérifiées dans de nombreuses expériences sont celles de **SIFT**, dites encore conditions de **REYNOLDS**. Ces

conditions respectent le mieux la continuité du débit, contrairement à celles de **GÜMBEL** ou **SOMMERFELD** et supposent que pour une abscisse inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent. En supposant l'existence d'une rainure axiale en $\theta = 2\pi$:

- $P(\theta, y = b) = P(\theta, y = -b) = 0$
- $P(\theta, y) = 0 \Leftrightarrow \theta_s \leq \theta \leq 2\pi$
- $P(\theta = 0, y) = 0$
- $\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, y) = 0$

Équation 1

De nombreux développements concernant le traitement de non linéarités telles que la turbulence ,les effets d'inertie, les effets thermiques [1] ainsi que les effets **non-newtoniens** [43] ont conduit à la réécriture de cette équation pour en tenir compte. Nous ne détaillerons pas la nouvelle écriture de cette équation pour les fluides non-newtoniens ici, mais serons amenés à établir son développement au fur et à mesure du déroulement du manuscrit.

La résolution de l'équation de Reynolds, n'est pas évidente car c'est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique non linéaire n'admettant pas de solutions analytiques à part quelques cas particuliers qui sont les paliers infiniment courts et infiniment long ou certaines conditions particulières de fonctionnement qui simplifient le problème. La difficulté d'obtenir une solution analytique satisfaisante n'est pas due seulement à la forme de l'équation mais également aux conditions limites.

Il est donc nécessaire de faire appel aux méthodes numériques. Les plus utilisées sont la méthode des différences finies et celle des éléments finis. Pour résoudre cette équation il est nécessaire de définir parfaitement entre autres la géométrie du contact.

III GÉOMÉTRIE LOCALE

Plus l'épaisseur du film diminue, plus les défauts de forme des surfaces qui l'entourent prennent de l'importance et plus les conditions réelles de formation ou de maintien du film s'éloignent de celles calculées, en considérant des surfaces idéales : cylindres de révolution. Ces défauts de forme peuvent provenir d'origines diverses : lors de la fabrication par exemple.

Rugosité de surface

La rugosité est l'un des défauts de forme introduite pendant la fabrication. Elle s'ajoute à d'autres imperfections que l'on peut relever sur une surface finie, telles que :

- **L'erreur de forme**, qui entraîne des écarts de grandes longueurs d'ondes par rapport à la surface nominale. Elle se situe entre les erreurs géométriques et les erreurs de finitions.
- **La texture**, qui est une combinaison d'écarts de longueurs d'ondes assez petites de la surface par rapport à la surface nominale. Elle comprend :
 - **La rugosité**, composée des plus fines irrégularités (de plus petites longueurs d'onde) ;
 - **L'ondulation**, qui est une erreur située en terme de longueur d'onde entre la rugosité et l'erreur de forme ;
 - **L'orientation**, qui se réfère à la direction prédominante de la texture de la surface. Cette orientation se présente sous forme de stries directionnelles en travers de la surface. Elle peut être transversale, longitudinale ou anisotrope.

Après la définition des termes utilisés pour la description de la géométrie locale des surfaces en contact, nous allons voir comment cette dernière intervient dans notre étude.

IV PRISE EN COMPTE DE LA RUGOSITÉ :

La prise en compte de la rugosité des surfaces dans l'étude de la lubrification peut se faire en considérant les paramètres statistiques de la rugosité : on va parler dans ce cas **d'analyse stochastique**, soit en faisant une description géométrique de celle-ci : cette fois le terme utilisé est : **analyse déterministe**. En ce qui nous concerne , nous allons introduire une

troisième analyse que l'on nommera « **analyse homogénéisation** » qui revient à diviser le problème en deux : un problème local et un problème global. Chacune de ces approches sera discutée pour apprécier ses avantages et ses inconvénients.

Analyse stochastique

L'approche stochastique a été introduite pour la première fois par TZENG et SAIDEL en 1967 pour étudier un patin avec une rugosité transverse unidimensionnelle [2].

En 1971 CHRISTENSEN et TONDER [3] développent l'équation de Reynolds moyennée pour analyser la répartition de la pression en présence de rugosités unidirectionnelles. Dans cette équation, ils introduisent des facteurs de correction provenant de la théorie stochastique pour tenir compte des effets de la rugosité dans les patins. En 1978, PATIR et CHENG [4] proposent une équation de Reynolds moyennée dans laquelle plusieurs facteurs de correction des débits sont introduits pour tenir compte de l'effet de la rugosité dans les trois directions.

Ces facteurs de correction sont obtenus par simulation numérique des débits sur les paliers. Cette méthode est basée sur la résolution numérique de l'équation de Reynolds pour un modèle de contact avec une rugosité de surface générée aléatoirement, et sur la dérivation de l'équation de Reynolds moyennée à partir des quantités moyennes de flux.

En 1997, BOEDO et BOOKER [5] utilisent la théorie des éléments finis pour l'analyse de la performance d'un palier avec une rugosité isotropique et ses effets sur la déformation élastique du palier. Dans cette étude, le fluide est supposé newtonien. Récemment, ZHANG et CHENG [6], en 2000, utilisent le modèle de lubrification mixte pour étudier les effets non-newtoniens et thermiques en régime hydrodynamique dans les paliers chargés en mode transitoire.

Dans un travail plus récent encore, en 2001, WANG et KEITH [7] ont utilisé la théorie de cavitation développée par ELROD en 1981 [8], par VIJAYARAGHAVAN et KEITH [9] pour analyser les effets de la rugosité et les effets non-newtoniens. Les trois types de rugosité ont été étudiés : longitudinal, axial et isotrope, avec un chargement dynamique dans les paliers.

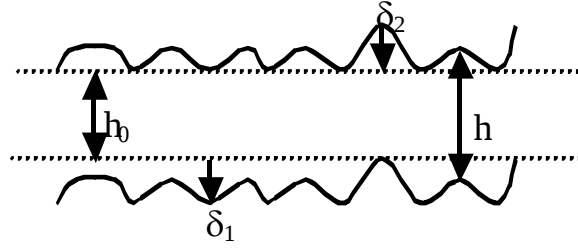


Figure 4: Epaisseur du film local

L'épaisseur locale du film :

$$h = h_0 + \delta_1 + \delta_2$$

Avec :

- h_0 : l'épaisseur nominale du film, définie comme la distance entre le niveau moyen de chacune des deux surfaces.
- δ_1 et δ_2 : les amplitudes des rugosités des deux surfaces mesurées par rapport à leur niveau moyen. Chacune de ces deux grandeurs peut être assimilée à une distribution gaussienne des hauteurs, de valeur moyenne nulle et de variance respectives σ_1^2 et σ_2^2 . La rugosité combinée $\delta = \delta_1 + \delta_2$ a pour variance σ^2 égale à la somme des variances.

Par exemple l'équation de Reynolds moyennée en compressible sera :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho \phi_p h^3}{12\eta} \nabla p \right) = \nabla (\rho \phi_c h U) + \frac{U_1 + U_2}{2} \sigma \frac{\partial (\rho \phi_s)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \phi_c h)}{\partial t}$$

Équation 1: Equation de Reynolds homogénéisée en compressible

En incompressible, ρ devient une constante, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_y \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial h_T}{\partial x} + \frac{U_1 + U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \frac{\partial h_T}{\partial t}$$

Équation 2: Equation de Reynolds homogénéisée en incompressible

Avec :

- p : la pression moyenne,
- U_1 et U_2 : les vitesses des deux surfaces en regard,
- η : la viscosité du lubrifiant,

- ϕ_x et ϕ_y : les facteurs correcteurs au débit de Poiseuille. Ils traduisent la perturbation du débit générée par la différence de pression entre les limites du volume élémentaire représentatif due aux rugosités. Ils sont inférieurs à 1,
- ϕ_s : le facteur correcteur au débit de couette. Il traduit le fait que, par le jeu de la cinématique, des poches se forment et contribuent à alimenter ou non le contact de lubrifiant.

Les expressions de ces facteurs empiriques peuvent se trouver dans les travaux de PATIR et CHENG [10], [11], CHRISTENSEN et TONDER [12] et WU et ZHENG (1989) [13].

Connaissant la variance σ de la rugosité et la hauteur nominale de film h , un rapport $\frac{h}{\sigma}$ a été défini [14]. Il permet de déterminer l'importance de la rugosité sur la lubrification. On retrouve ce rapport dans tous les travaux utilisant l'équation de Reynolds homogénéisée [13].

- Pour $\frac{h}{\sigma} > 3$: les effets de la rugosité ne sont pas importants, et l'équation de Reynolds classique pour les surfaces lisses est suffisante.
- Pour $\frac{h}{\sigma} \rightarrow 3$: les effets commencent à devenir non négligeables.
- Pour $\frac{h}{\sigma} < 3$, on considère que les aspérités interagissent les unes avec les autres, et le régime de lubrification est mixte.

Les propriétés directionnelles de la rugosité sont décrites par un paramètre empirique de forme γ , introduit par KUBO et PEKLENIK [15].

Il est défini comme étant le rapport des longueurs de corrélation en x et y.

$$\gamma = \frac{\lambda_{0,5x}}{\lambda_{0,5y}}$$

Il peut être interprété comme le rapport de la longueur sur la largeur d'une aspérité représentative des rugosités purement transversale, isotrope ou purement longitudinale correspondant à des valeurs de γ respectivement de 0, 1 et ∞ .

Pour résumer, on peut dire que l'approche stochastique est basée sur l'introduction de facteurs d'écoulement dans l'équation de Reynolds et d'une rugosité aléatoire sur les surfaces en contact. La génération de rugosité se fait suivant une loi gaussienne et les paramètres importants dans ce type d'analyse sont $\frac{h}{\sigma}$ traduisant l'importance de la rugosité

et γ désignant son orientation. L'approche stochastique connaît des limites. En effet, seule une description globale est possible, on ne peut avoir accès aux informations locales. Ainsi, deux profils de rugosités différents mais possédant les mêmes propriétés statistiques conduiront aux mêmes répartitions de pression. Il est nécessaire donc d'envisager d'autres types d'analyses car notre étude doit tenir compte de l'aspect local et global de la rugosité ainsi du possible caractère anisotropique.

Analyse déterministe

Ce type d'analyse est basée sur une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels.

Ainsi, il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous sa forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont pris en compte les rugosités.

En 1992, KWEH et AL [16], [17] se sont intéressés au cas d'un contact introduisant une rugosité transverse sinusoïdale tridimensionnelle. Un aplatissement des rugosités est constaté après contact pour un contact EHD fortement chargé et à haute température.

En 1992, VENNER et AL [18] introduisent un profil de rugosité mesuré au cas d'un contact linéique.

En 1994, GRENEWOOD et AL [19] traitent le problème inverse c'est à dire qu'à partir des variations sinusoïdales de la pression, ont recherché la rugosité de la surface qui s'y rapporte. La reproduction de la rugosité de la surface revient à regarder les variations de la pression et ne reprendre que les petites variations : Les composantes de basses fréquences (l'ondulation) d'une rugosité de surface sont très aplaties alors que les composantes de hautes fréquences (rugosité) sont encore présentes après déformation.

En 1994, AI et CHENG [20] utilisent dans leurs travaux un profil de surface mesuré.

En 1997, ZHU et AI [21] ont utilisé un relevé tridimensionnel de rugosité de surface pour étudier un contact ponctuel. Ils montrent que le pic maximum de pression est une variable locale qui dépend largement des aspérités et de leurs pentes.

L'approche déterministe permet de prendre en compte de manière plus réaliste les rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de

l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche reste très coûteuse en espace mémoire car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

Analyse « homogénéisation »

L'approche de l'homogénéisation revient à réécrire le problème posé en deux autres : un **problème local** et un **problème homogénéisé**. Cependant les coefficients du problème global dépendent de la solution des problèmes locaux.

La difficulté de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global à cause de la présence de non-linéarités [42]. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution du problème local et ne peuvent être calculés qu'après traitement de ce dernier.

En 2000 cette technique a été exposée et appliquée à l'équation de Reynolds compressible par BUSCAGLIA G. et JAÏ M. [22] en se basant sur les travaux de BENSOUSSAN et LIONS concernant les structures périodiques non linéaires. De cette étude, il en ressort que cette méthode est bien adaptée aux problèmes avec une rugosité anisotrope. Cependant elle présente peu d'intérêt pour les problèmes avec une rugosité transversale et longitudinale ou d'une manière générale quelconque par rapport au flux du fluide.

C'est aussi une technique qui ne nécessite pas un maillage très fin pour prendre en compte l'effet de la rugosité, car cette dernière est prise en compte pendant le calcul des problèmes locaux, d'où un temps de calcul moindre comparé aux techniques classiques.

Cette technique nous a semblé aussi comme étant très bien adaptée aux besoins d'économie de place mémoire et aux exigences de rapidité de calcul que l'on recherche de plus en plus. Elle sera utilisée par la suite pour le calcul des paramètres de contact. La technique de programmation introduite ici va inclure d'autres 'astuces' qui permettront par exemple de libérer de la place mémoire au fur et à mesure de l'exécution des programmes.

Dans la suite, cette technique sera détaillée et appliquée à l'équation de Reynolds newtonien en incompressible et à l'équation de Reynolds non-Newtonien.

V CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, nous avons commencé par situer le contexte de notre étude dans les systèmes mécaniques en général, et l'exemple du palier mécanisme très important par exemple dans les systèmes rotoriques a été retenu. Une étude bibliographique liée à la thématique de l'étude a été faite afin de répertorier une bonne partie des travaux qui ont été réalisés dans le domaine d'étude des paliers. Pour une analyse plus fine du contact, la notion de géométrie locale a été introduite, et la rugosité a été définie. Les différentes techniques d'analyse des paramètres de contact prenant en compte ces rugosités ont été répertoriées et expliquées. L'analyse de ces techniques nous a aidé à en choisir la plus récente qui est la technique de l'homogénéisation. Cette technique nous semble être la mieux adaptée et la plus performante pour la prise en compte des rugosités non quelconques . Elle présente aussi des avantages quant aux besoins actuels de rapidité de calcul et aux exigences d'occupation minimum d'espace mémoire donc de coût de calcul.

CHAPITRE 2 : HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NEWTONIEN

I INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but de présenter la technique de l'homogénéisation puis de la valider en comparant les résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus des techniques classiques.

Le contexte de notre étude ayant été défini, l'homogénéisation ayant été choisie parmi les techniques d'analyse des rugosités de surface que l'on a répertoriées, nous allons appliquer cette technique à l'équation de Reynolds classique en ne prenant pas en compte dans un premier temps le comportement non newtonien du fluide dans nos conditions de contact dites sévères. Les hypothèses et les équations de base ayant conduit à l'obtention de l'équation homogénéisée seront posées. La technique de l'homogénéisation sera détaillée et l'algorithme de résolution des équations homogénéisées sera exposé. La géométrie de notre contact sera définie et les expressions analytiques des rugosités utilisées seront présentées.

Une fois les équations et le programme numérique de résolution mis en place, l'influence des divers paramètres mis en jeu sera étudiée . Les résultats seront présentés sous forme comparative avec ceux obtenus avec les techniques dites classiques. Les résultats seront discutés pour évaluer les avantages et les inconvénients de la technique « homogénéisation » comparée aux techniques classiques. Enfin une synthèse sera réalisée en conclusion.

II EQUATIONS DE BASE

Dans un article publié en 1886, Osborne REYNOLDS établit les bases de la lubrification hydrodynamique. Les hypothèses utilisées pour l'obtention de cette équation sont :

- L'épaisseur du film est très faible devant ses autres dimensions,
- L'écoulement est laminaire,
- Le lubrifiant obéit à la loi de Newton, sa viscosité est constante et il est incompressible,
- Les forces massiques et les forces d'inertie dans le fluide sont négligées,
- La courbure générale du film est négligée,
- La vitesse du fluide selon l'épaisseur est très faible devant les autres vitesses,
- Les gradients de vitesse selon l'épaisseur du film sont prépondérants devant les autres.

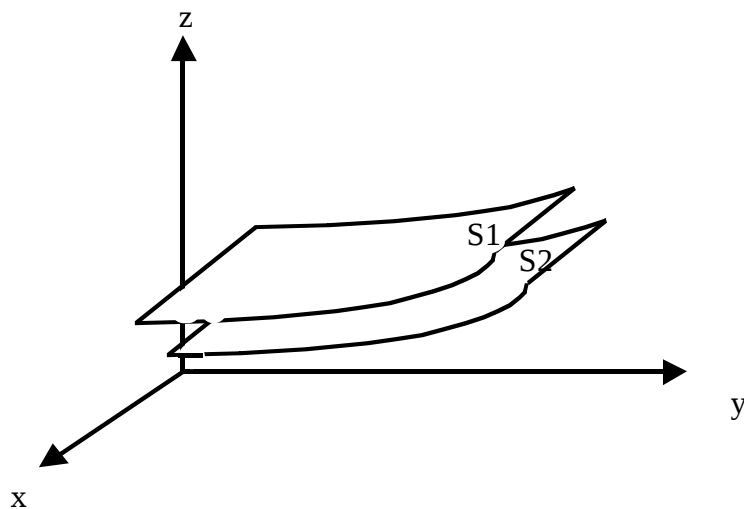


Figure 5: Système d'axes

On notera :

- μ : la viscosité dynamique du fluide,
- P : la pression qui règne dans le fluide,
- h : l'épaisseur du fluide,

- u , v et w : la vitesse du fluide suivant les directions x , y et z ,
- U_1 et U_2 : les vitesses des parois 1 et 2 suivant la direction x ,
- V_1 et V_2 : les vitesses des parois 1 et 2 suivant la direction y .

Compte tenu de ces hypothèses, les équations de Navier-Stokes [23] se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Équation 3

Par intégration et en supposant qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les surfaces en contact, on obtient le champ de vitesse dans le fluide :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (z-h)z + U_1 \frac{h-z}{h} + U_2 \frac{z}{h} \\ v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} (z-h)z \\ w = 0 \end{cases}$$

Équation 4

Ces expressions reportées dans l'équation de continuité [Équation 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Équation 5

et intégrée à travers l'épaisseur du film donnent l'équation de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 6\mu \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2W_2 \right]$$

Équation 6

Cette équation [Équation 6] est à la base de la lubrification hydrodynamique.

III HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS NEWTONIEN

En partant de l'Équation 6 , et en posant pour plus de simplicité :

- $V = U_1 - U_2$
- $W_2 = 0$
- $x_1 = x$
- $x_2 = y$
- $x_3 = z$

et

- $6\mu V = \Lambda$

on obtient :

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}$$

Équation 7

Avec x_1, x_2, x_3 les coordonnées de notre repère cartésien ($\Omega = (x_1, x_2)$).

On introduit la notion de coordonnées locales en posant [22]:

$$h(x_1, x_2) = h_0(x_1, x_2) + h_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$$

Équation 8

Avec h_1 , une fonction périodique de période ε , caractérisant la partie rugueuse de la hauteur du film.

Introduisons les variables locales en posant $(y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$, et faisons un développement asymptotique de TAYLOR de la pression en écrivant :

$$p(x_1, x_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \varepsilon^2 p_2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$$

Équation 9

Où $p_1, p_2, \dots$, sont des fonctions périodiques par rapport aux variables (y_1, y_2) .

Utilisons la règle de différenciation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Équation 10

reportons l'Équation 9 dans l'Équation 7.

Après identification par rapport à ε^i , on obtient les équations suivantes :

Identification par rapport à ε^0 :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial y_2} \right) \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} - \nabla_y \cdot (h^3 \nabla_x p_1)$$

Équation 11

Identification par rapport à ε^{-1} :

$$\nabla_y \cdot (h^3 \nabla_y p_1) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \nabla_y h^3 \cdot \nabla_x p_0$$

Équation 12

Identification par rapport à ε :

$$\nabla_x \cdot (h^3 \nabla_x p_1) = 0$$

Équation 13

Avec ∇_x et ∇_y équivalents respectivement à $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ et $(\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$.

Pour découpler p_0 et p_1 on considère les problèmes locaux suivants :

$$-\nabla_y \cdot (h^3 \nabla_y w_1) = \frac{\partial h^3}{\partial y_1}$$

Équation 14

$$-\nabla_y \cdot (h^3 \nabla_y w_2) = \frac{\partial h^3}{\partial y_2}$$

Équation 15

$$\nabla_y \cdot (h^3 \nabla_y \chi) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1}$$

Équation 16

Les conditions aux limites pour les problèmes locaux sont : w_1, w_2 et χ sont nulles sur la frontière et sont des fonctions périodiques.

On remplace ces dernières équations (Équation 14, Équation 15, Équation 16) dans l'Équation 12 et on intègre sur le domaine normalisé $Y =]0,1[\times]0,1[$:

On obtient :

$$p_1 = w_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \chi + C(x_1, x_2)$$

Équation 17

En remplaçant cette expression dans l'Équation 11 et en intégrant par rapport à y , on obtient l'équation du problème homogénéisé :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ([A] \nabla p_0) = \nabla \cdot [\theta] & \text{sur le domaine } \Omega \\ p_0 = 0 & \text{sur les bords } \partial\Omega \end{cases}$$

Équation 18

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A] = \begin{pmatrix} \int_Y h^3 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \right) dy & \int_Y h^3 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1} \right) dy \\ \int_Y h^3 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_2} \right) dy & \int_Y h^3 \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y_2} \right) dy \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ [\theta] = \begin{pmatrix} \int_Y \left(h^3 \frac{\partial \chi}{\partial y_1} - \Lambda h \right) dy \\ \int_Y \left(h^3 \frac{\partial \chi}{\partial y_2} \right) dy \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Équation 19

Ainsi, on obtient les problèmes locaux [Équation 14, Équation 15 et Équation 16] et le problème homogénéisé [Équation 18].

Ces problèmes n'ont pas de solutions analytiques, il est donc nécessaire d'utiliser des techniques numériques.

IV RÉSOLUTION DES PROBLÈMES LOCAUX ET DU PROBLÈME HOMOGENÉISÉ

Les équations représentant les problèmes locaux et celui homogénéisé sont des équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admettent pas de solutions analytiques. Ainsi, pour résoudre ces équations, on utilise ici la méthode des différences finies méthode facile à mettre en œuvre et qui a déjà largement fait ses preuves. Cette technique est développée dans la littérature tant du point de vue mathématique que du point de vue de son utilisation [25], [26], [27], [27], [29]. La méthode utilisée sera celle des relaxations successives (S.O.R).

On présente ci-dessous l'algorithme de résolution mis en place pour la résolution du problème homogénéisé:

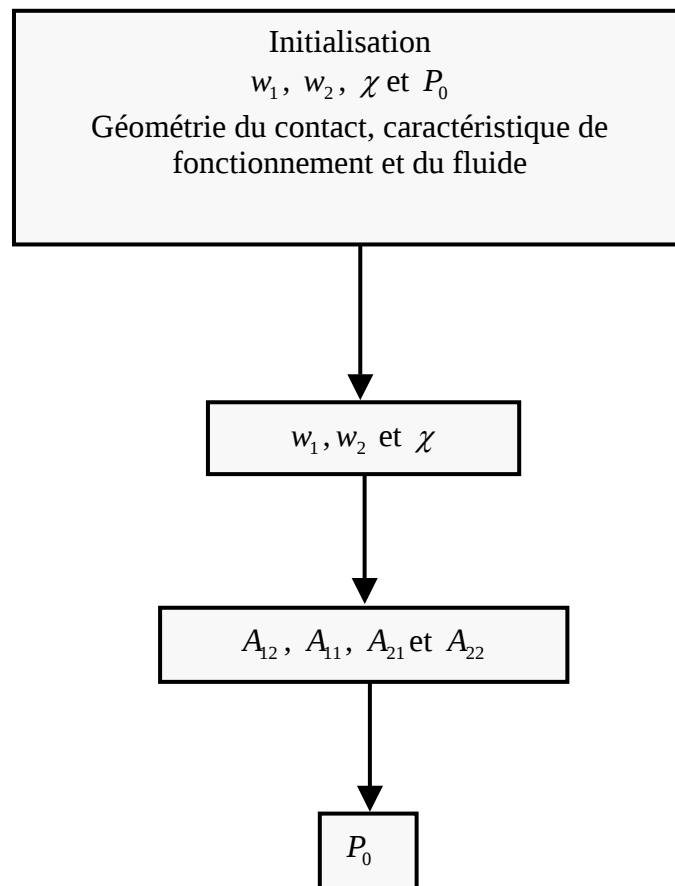


Figure 6 : Algorithme de résolution de la pression homogénéisée

V GÉOMÉTRIE DU CONTACT

Avant d'effectuer le calcul de la pression homogénéisée, il y a lieu de définir la géométrie du contact. Cette définition revient à décrire analytiquement la forme de l'épaisseur du film lubrifiant piégé entre les deux surfaces en regard . La hauteur du film peut s'écrire:

$$h = h_0 + \delta$$

Équation 20

Avec :

- h : l'épaisseur globale du film,
- h_0 : l'épaisseur globale sans rugosités,
- δ : amplitude des rugosités.

Epaisseur globale sans rugosités

L'épaisseur du film considérée sera celle d'un contact cylindre-plan puisque l'on ne s'intéresse ici qu'à une géométrie confinée. Cette géométrie équivalente peut s'écrire:

$$h_0 = h_{\min} + \frac{(x - a)^2}{2 * R}$$

Équation 21

Avec :

- $h_{\min}$: l'épaisseur minimale,
- R : le rayon équivalent,
- a : demi largeur de contact.

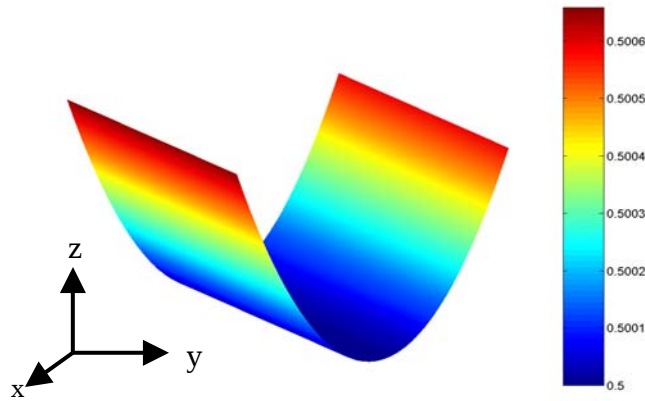


Figure 7 : épaisseur du film d'huile sans rugosités.

Forme des rugosités considérées

Trois formes de rugosité seront considérées par la suite : une forme de rugosité anisotrope, une rugosité quelconque et enfin une rugosité transversale [Tableau 1].

- Rugosités anisotropes : $\delta = \alpha \sin\left(2\pi n_r \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right)$
- Rugosités quelconques : $\delta = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_r y}{b}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi n_r x}{a}\right)$
- Rugosités transversales : $\delta = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_r x}{a}\right)$

Avec:

- α : amplitude des rugosités,
- n_r : nombre de rugosités,
- a et b : demi largeur et demi longueur du contact.

Rugosités anisotropes	Rugosités quelconques	Rugosités transversales

Tableau 1 : les trois formes de rugosités à étudier

La géométrie du contact est obtenue en ajoutant à l'épaisseur globale « lisse » et les rugosités.

VI COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE HOMOGENÉISÉE ET LA MÉTHODE DIRECTE

L'homogénéisation de l'équation de Reynolds pour un fluide Newtonien étant effectuée, le logiciel réalisant la résolution numérique des équations utiles étant élaboré, nous allons effectuer des simulations numériques pour comparer les résultats obtenus avec ceux issues du programme basé sur une discrétisation directe par la méthode des différences finies de l'équation de Reynolds. Les deux programmes seront soumis aux mêmes conditions de fonctionnement et les mêmes paramètres leur seront appliqués afin de pouvoir réaliser une comparaison exhaustive.

Nous réalisons des simulations numériques en faisant varier les trois paramètres principaux de la rugosité qui sont :

- la forme des rugosités : elle peut être anisotrope, quelconque ou transversale,
- le nombre de rugosité : qui est défini comme étant le nombre de périodes
- l'amplitude de rugosité : qui sera donnée comme une valeur relative par rapport à la hauteur minimale du film.

Une étude en deux dimensions sera d'abord effectuée afin d'obtenir une première vue sur la comparaison entre les deux approches et sur l'efficacité de la technique de l'homogénéisation en deux dimensions, puis des représentations en trois dimensions seront accomplis enfin de parfaire l'analyse.

Les valeurs choisies sont toutes normalisées puisqu'il s'agit ici uniquement de recherche de comparaison entre deux approches différentes.

VII DEUX DIMENSIONS (COUPES EFFECTUÉS SUR LA PLAN MÉDIAN)

Les calculs seront faits en trois dimensions pour pouvoir prendre en compte les trois formes de rugosité cités plus haut. Des coupes seront effectuées en $y = \frac{b}{2}$, c'est à dire au milieu de la longueur du contact et suivant le sens de la vitesse de la surface supérieure. Ainsi le représentations obtenues seront en deux dimensions.

Les résultats sont présentés sous forme de tableau dont les colonnes représentent les différentes formes de rugosités et les lignes soit le nombre de rugosité soit leurs amplitudes.

La solution dite exacte sur les légendes est celle obtenue par résolution directe de l'équation de Reynolds par différences finies, elle est superposée à la solution homogénéisée.

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $\alpha = 0.3 \bar{h}_{\min}$

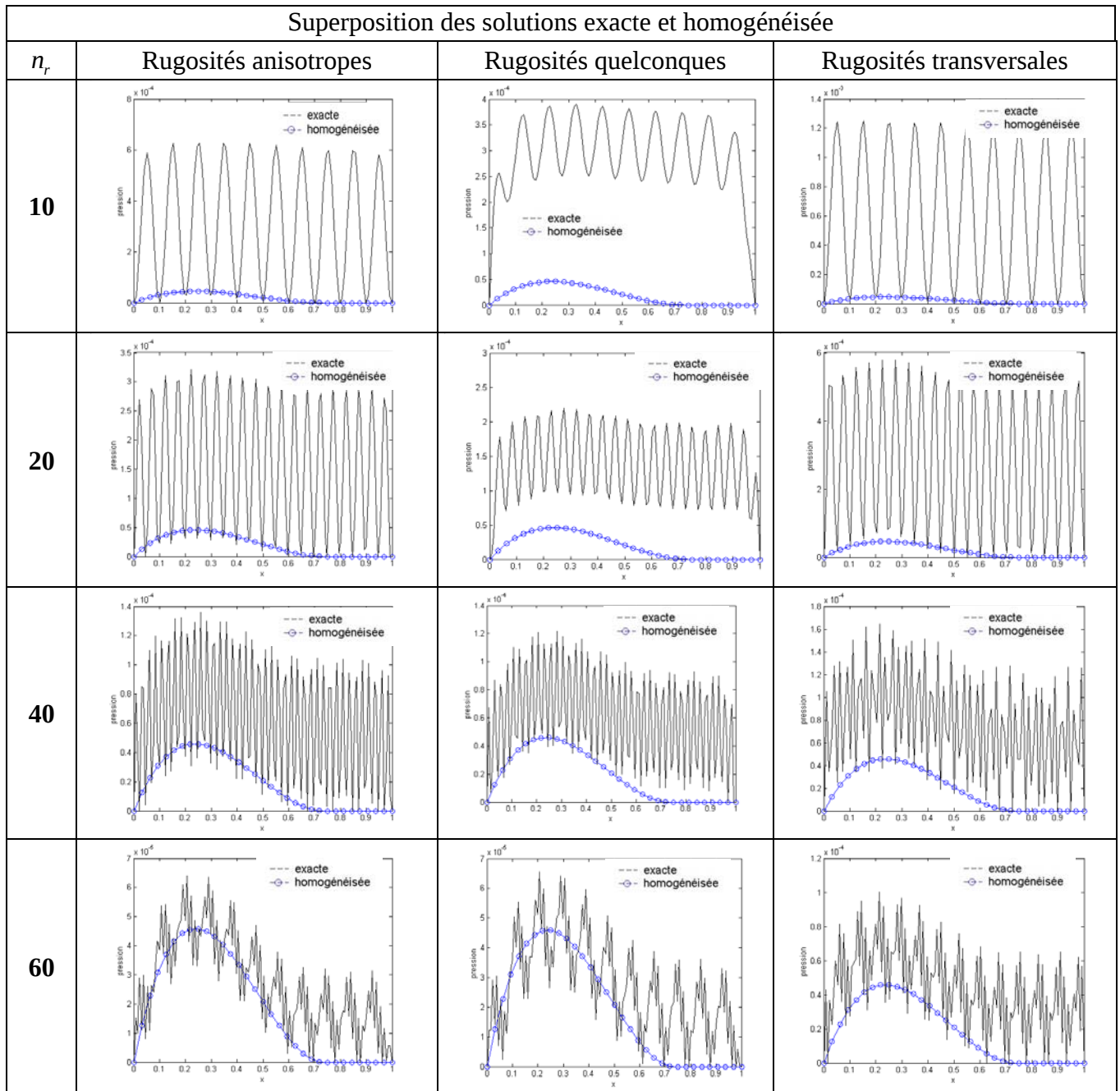


Tableau 2 : Variation du nombre de rugosité en deux dimensions avec les trois formes

On voit que la solution dite exacte devient irrégulière quand le nombre de rugosité devient important. Ceci est dû à la limitation de la machine en espace mémoire, car pour avoir une solution régulière, il faut augmenter la finesse de la discrétisation.

Mais néanmoins, on remarque que l'augmentation du nombre de rugosités tant à ramener la solution dite exacte sur la solution homogénéisée qui, elle, reste insensible à cette variation.

On remarque que pour des nombres de rugosités faibles, la solution quelconque est éloignée de la solution homogénéisée.

Ces observations me mènent à dire que:

- L'homogénéisation reste efficace quand le nombre de rugosité est grand par rapport à la longueur du contact quelque soit le type de rugosité. La répartition de la pression obtenue par la technique de l'homogénéisation est la limite de celle obtenue classiquement quand le nombre de rugosité tend vers l'infini.
- On remarque aussi que par rapport à la technique classique, on n'a pas besoin d'aussi grand besoin d'espace mémoire pour traiter un nombre de rugosité important.
- L'observation de la solution quelconque pour des nombres de rugosités faibles montre un écart assez important entre l'homogénéisée et la classique. Donc de la non efficacité de cette technique dans ces conditions.

On peut conclure que la méthode permet d'obtenir des résultats de champs de pression, avec des surfaces rugueuses, en considérant un nombre de points de calcul considérablement inférieur à celui d'une discrétisation classique par différence finies. On se rend compte aussi que plus le nombre de période de rugosité est élevé, plus la solution classique se rapproche de la solution homogénéisée.

Ceci permet de valider le modèle dans les conditions où le nombre de rugosité est grand.

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $n_r = 10$

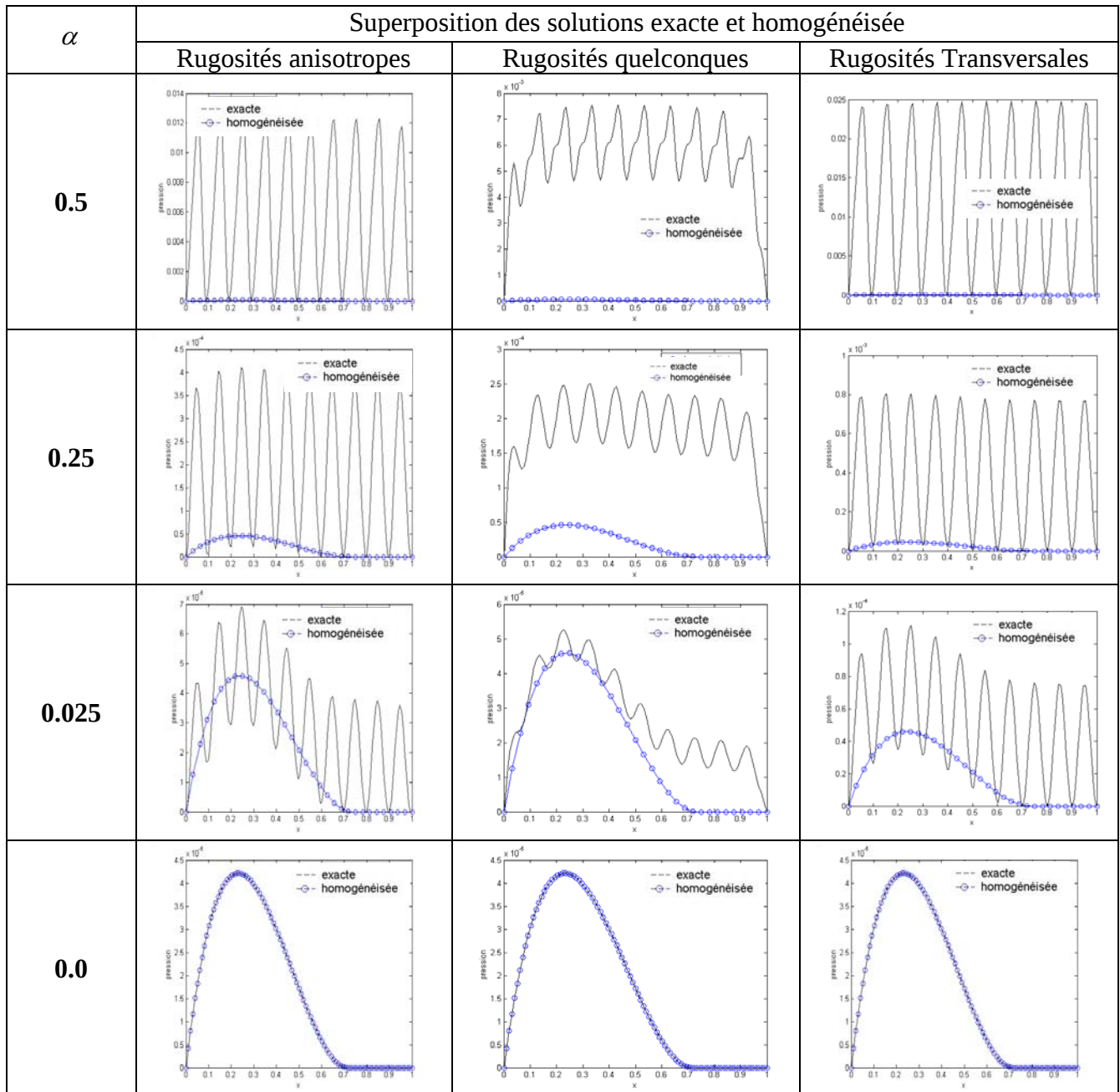


Tableau 3 : Variation de l'amplitude des rugosités en deux dimensions avec les trois formes

La diminution du nombre de rugosité fait tendre les deux solutions vers une même. Donc, ceci permet de valider le modèle dans le cas de faibles amplitudes de rugosités quelque soit leur nombre. Les deux solutions homogénéisée et classique dans le cas quelconque, restent toujours éloignées quand le nombre de rugosité est petit et leur amplitude grand par rapport à l'épaisseur du film, d'où la non efficacité de la méthode face à ce type de rugosité dans ces conditions.

VIII TROIS DIMENSIONS

Dans cette partie, on s'intéressera à l'influence de la forme des rugosités. Ainsi, la répartition de la pression sur la zone de contact sera représentée.

Les résultats sont présentés sous forme de tableau dont les colonnes représentent les solutions exacte et homogénéisée, les lignes, le nombre de rugosités ou la variation de l'amplitude des rugosités.

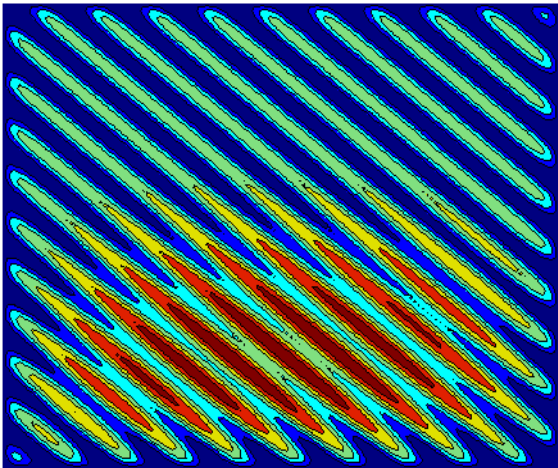
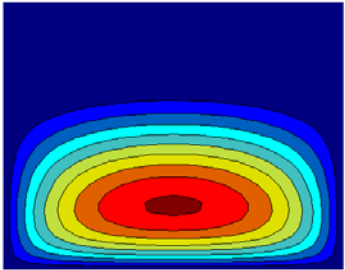
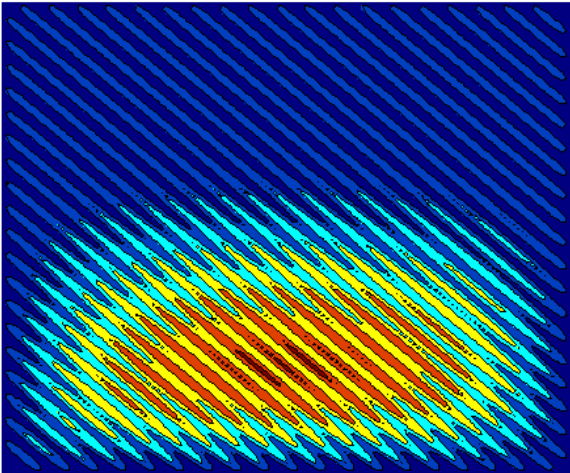
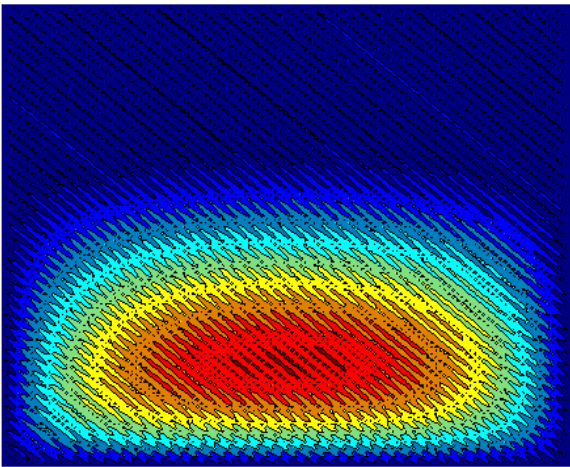
Etant donné que la solution homogénéisée est insensible à la variation du nombre de rugosités, une seule représentation de la solution homogénéisée sera faite quand on fera varier le nombre de rugosités.

Rugosités anisotropes

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $\alpha = 0.25 \bar{h}_{\min}$

n_r	Pression exacte	Pression homogénéisée
10		
20		
40		

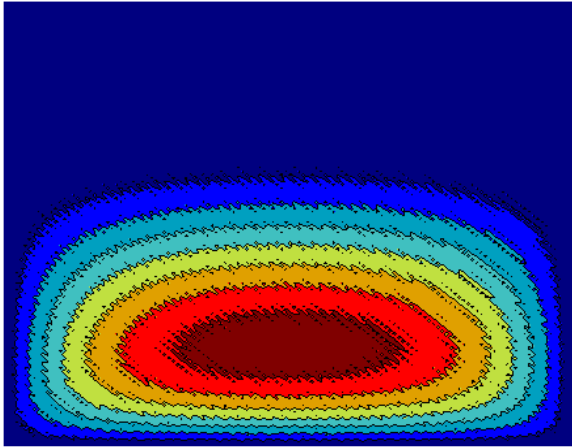
80		
----	---	--

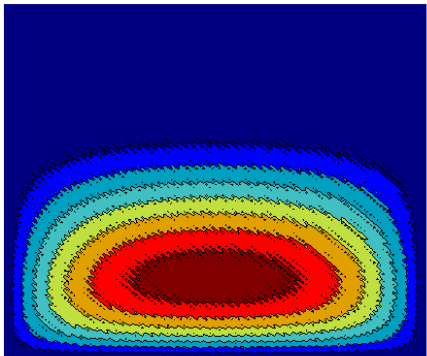
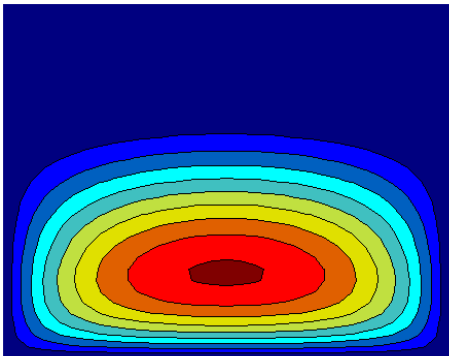
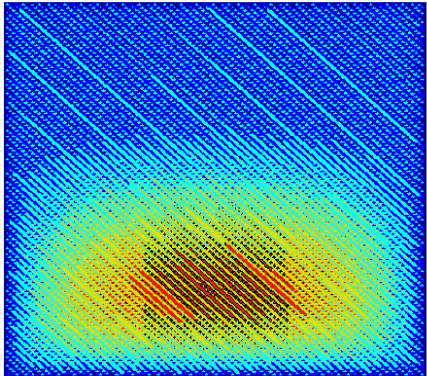
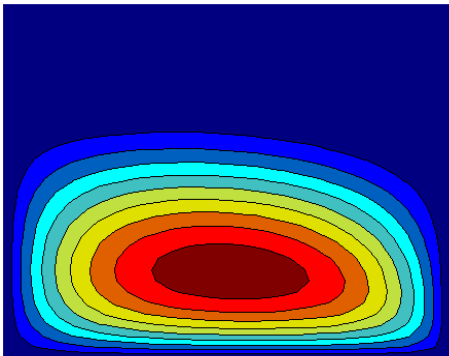
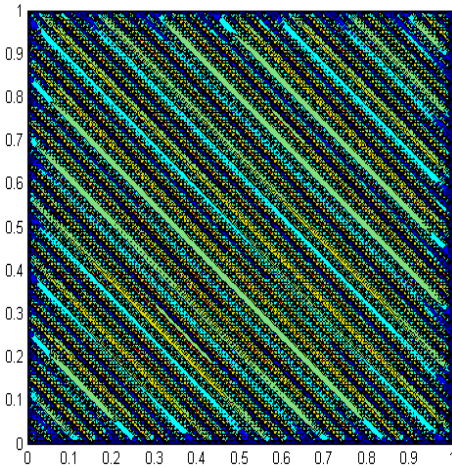
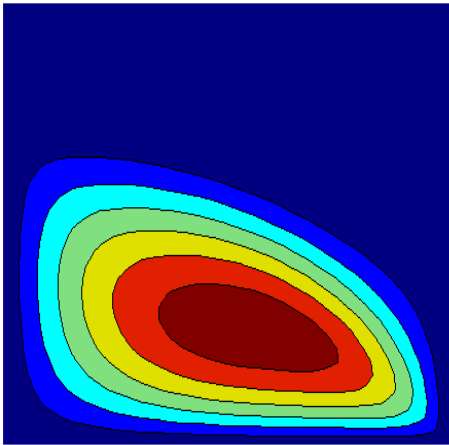
Tableau 4 : rugosité anisotrope, variation du nombre de rugosités.

On remarque que l'augmentation du nombre de rugosité fait tendre la Pression classique vers la Pression homogénéisée. Il est nécessaire néanmoins d'un nombre considérable de points de discrétisation pour que la Pression exacte se rapproche au mieux de la Pression homogénéisée.

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $n_r = 80$

α	Pression exacte	Pression homogénéisée
0.025		
0.2		
0.25		

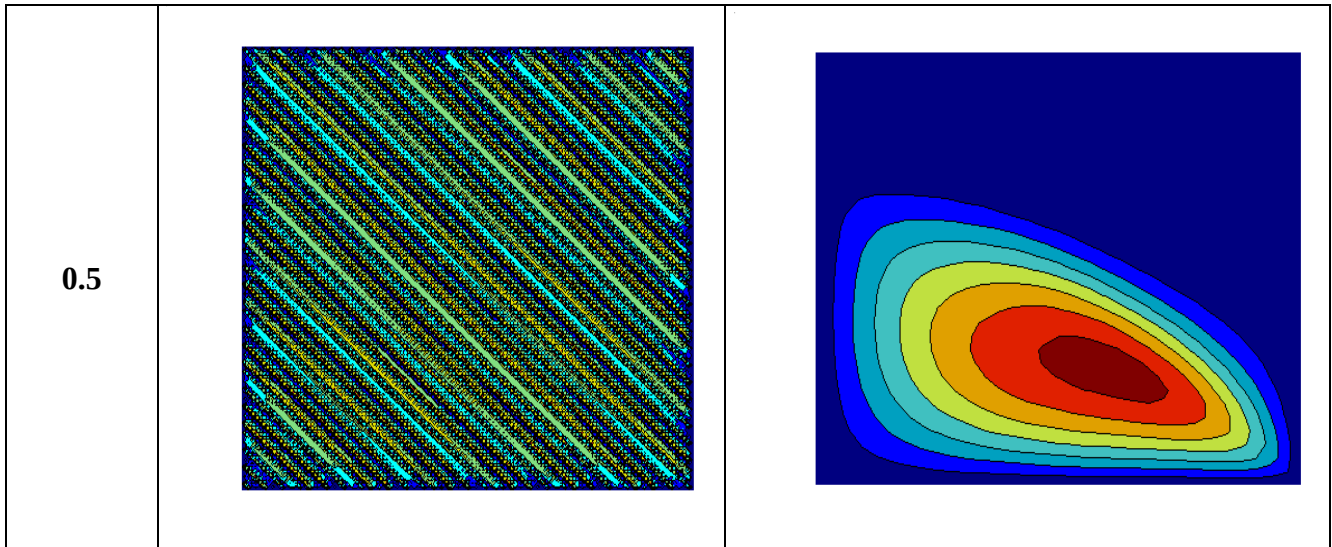


Tableau 5 : rugosité anisotrope, variation de l'amplitude des rugosités.

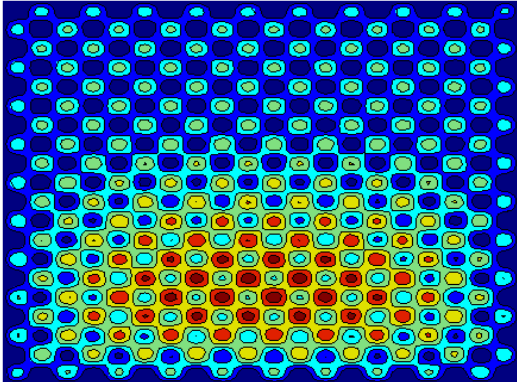
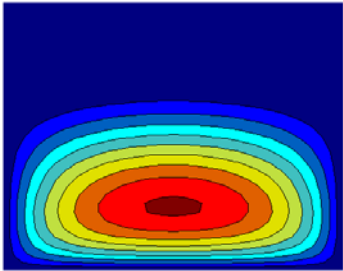
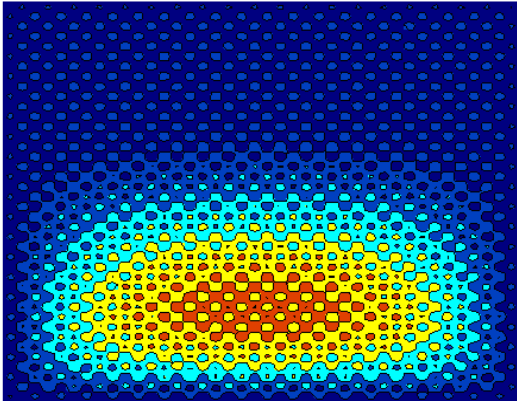
On peut remarquer que l'augmentation de l'amplitude des rugosités rend la Pression classique en trois dimension difficile à exploiter à cause du nombre insuffisant de point de discrétisation. Par contre elle oriente la Pression homogénéisée dans la direction des rugosités. Ainsi, plus l'amplitude des rugosités augmente, plus la Pression homogénéisée suit cette orientation. On peut évaluer la direction des rugosités uniquement en observant la forme de la Pression homogénéisée. Ainsi il est clair que pour des surfaces où les rugosités sont de forte amplitude la Pression classique s'avère inexploitable et que l'approche 'homogénéisation' est indispensable.

Rugosités quelconques

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $\alpha = 0.25 \bar{h}_{\min}$

n_r	Pression exacte	Pression homogénéisée
10		
20		

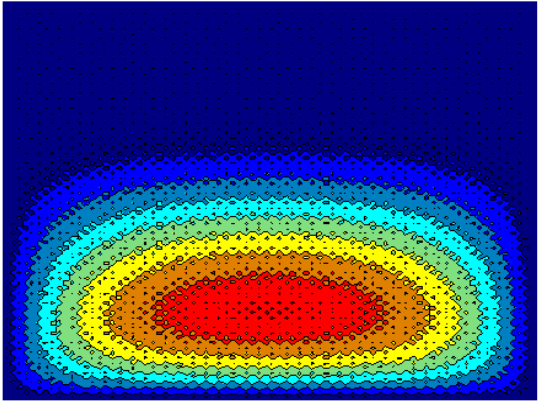
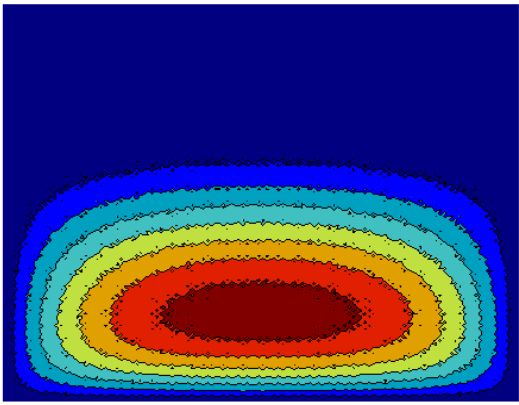
40		
80		

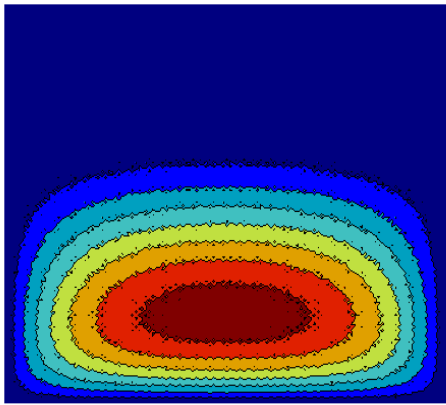
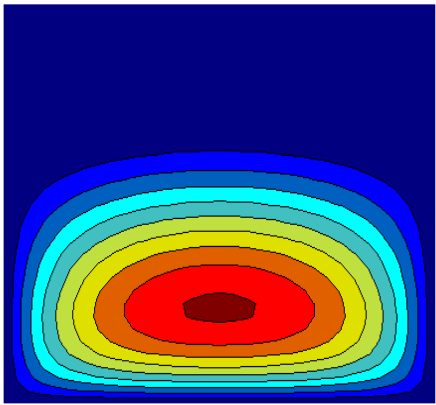
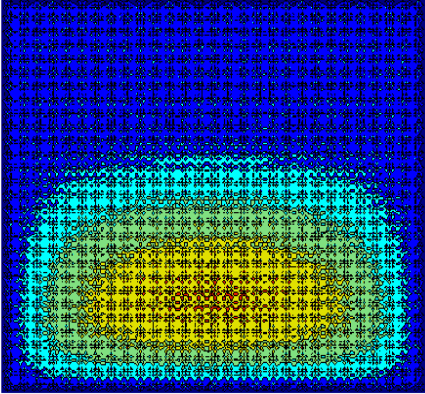
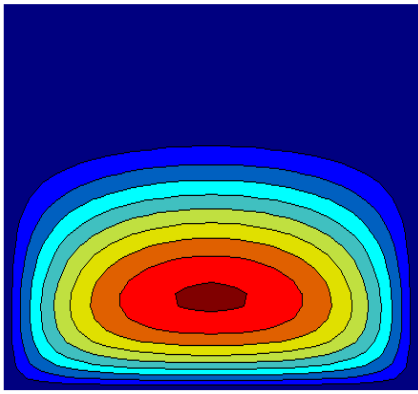
Tableau 6 : rugosité quelconque, variation du nombre de rugosités.

On remarque que l'augmentation du nombre de rugosité fait tendre la Pression classique vers la Pression homogénéisée. La Pression homogénéisée n'offre ici aucun attrait en dehors du temps de calcul et l'espace mémoire occupé via le nombre de points de discrétisation utilisé pour obtenir la Pression exacte.

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $n_r = 80$

α	Pression exacte	Pression homogénéisée
0.025		
0.25		

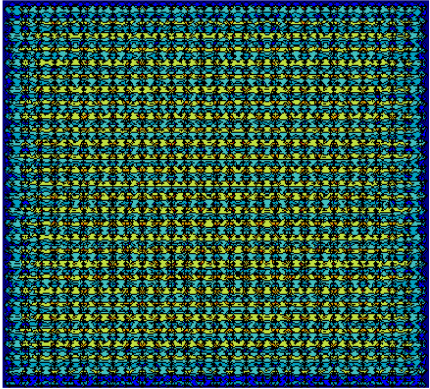
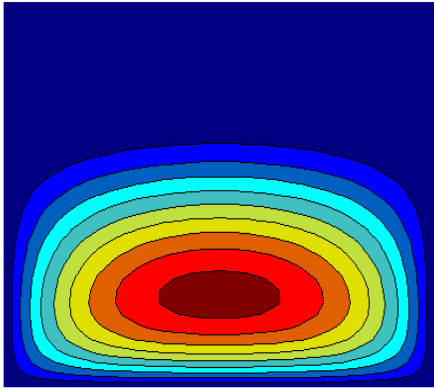
0.5		
-----	---	--

Tableau 7 : rugosité quelconque, variation de l'amplitude des rugosités.

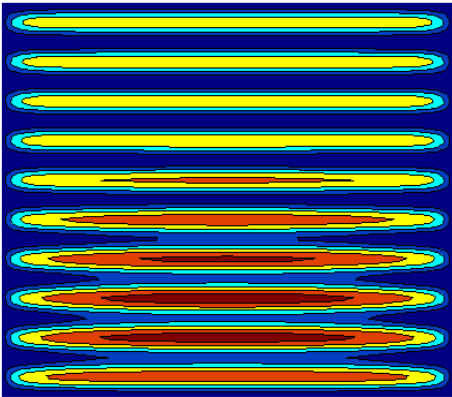
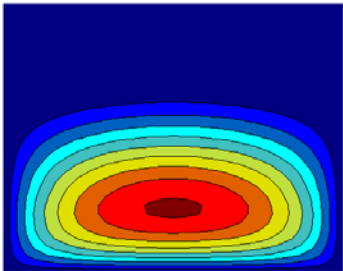
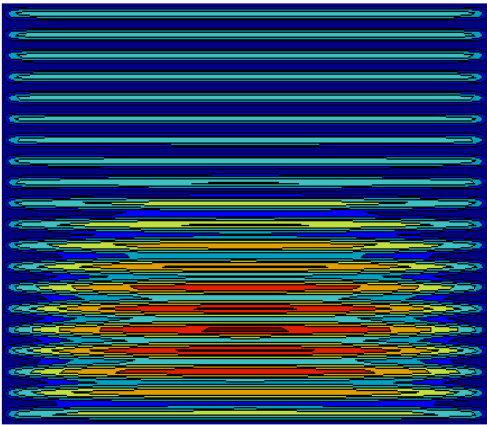
L'augmentation de l'amplitude des rugosités rend la Pression classique inexploitable. L'augmentation de l'amplitude des rugosités n'a aucune influence sur la forme de la Pression homogène. A partir d'une certaine valeur de l'amplitude des rugosités la méthode d'homogénéisation est indispensable pour obtenir une Pression au problème.

Rugosités transversales.

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $R = 200 \bar{h}_{\min}$
- $\alpha = 0.25 \bar{h}_{\min}$

n_r	Pression exacte	Pression homogénéisée
10		
20		

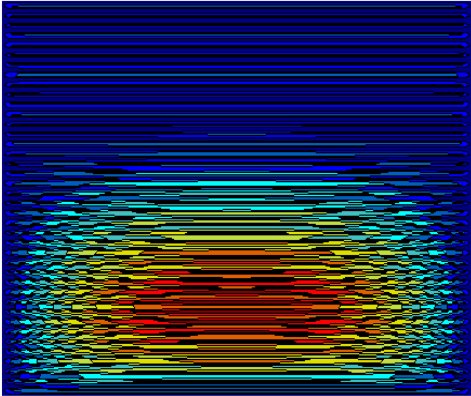
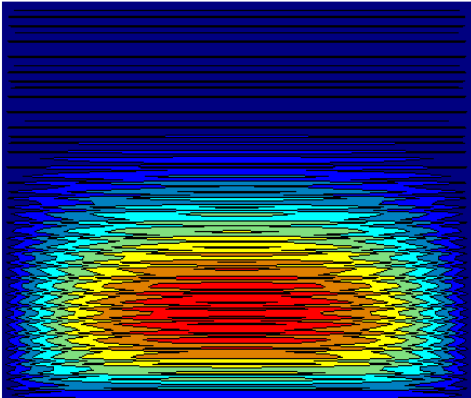
40		
80		

Tableau 8 : rugosité transversale, variation du nombre de rugosités.

On remarque que l'augmentation du nombre de rugosité fait tendre la Pression classique vers la Pression homogène. Dans ce cas hormis le temps de calcul pour obtenir la Pression finale du fait de la nécessité d'une discrétisation fine pour la Pression classique la Pression homogène offre peut d'attrait du point de vue fondamental.

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\overline{h_{\min}} = 1$
- $\overline{\mu} = 1$
- $\overline{V} = 1$
- $R = 200 \overline{h_{\min}}$
- $n_r = 80$

α	Pression exacte	Pression homogénéisée
0.025		
0.25		

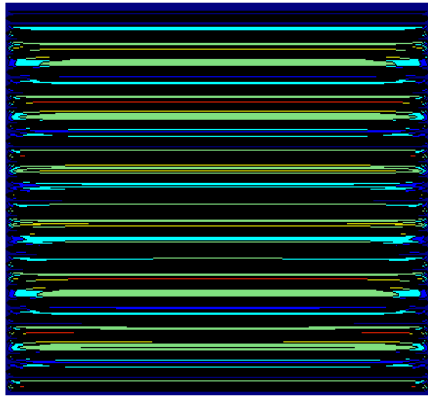
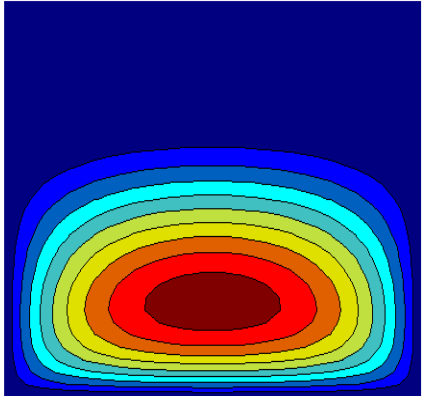
0.5		
-----	---	--

Tableau 9 : rugosité transversale, variation de l'amplitude des rugosités.

Comme dans les autres cas l'augmentation de l'amplitude des rugosités rend la Pression classique inexploitable. L'augmentation de l'amplitude des rugosités n'a aucune influence sur la Pression homogène.

IX SYNTHÈSE DES DIFFÉRENTS RESULTATS

Après analyse des différents résultats, des conclusions peuvent être tirées quant à l'efficacité de la technique de l'homogénéisation :

Pour des petites amplitudes par rapport à la hauteur minimale du film et un nombre important de rugosités, l'homogénéisation reste efficace quelque soit la forme de la rugosité. Dans ces conditions cette technique donne une bonne vue générale de distribution de la pression sur la surface de contact.

Pour une rugosité anisotrope, la technique de l'homogénéisation est indispensable pour donner des renseignements sur l'amplitude et la direction de cette dernière contrairement aux approches classiques qui s'avèrent déficientes dans ce cas . Cependant, l'attrait au sens fondamental de cette méthode reste moindre (à part l'espace mémoire et le temps de calcul) dans le cas d'une rugosité quelconque ou transversale.

X CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre était d'expliquer et de valider la méthode de l'homogénéisation. Cette technique a été appliquée à l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien, ce qui nous a permis de comparer les résultats obtenus grâce à cette technique et ceux issus d'une approche dite classique.

Les résultats ont été concluants et leur analyse nous a permis de valider la méthode de l'homogénéisation et de montrer ses avantages et son indispensabilité dans certaines configurations.

Le prochain objectif de notre mémoire sera d'appliquer cette méthode à l'équation de Reynolds pour un fluide non Newtonien, équation qui est la plus à même de décrire le comportement de notre fluide au vu des conditions de « contact sévère » qu'on lui impose.

CHAPITRE 3 : EQUATION DE REYNOLDS NON-NEWTONIEN

I INTRODUCTION

Comme présenté précédemment, la théorie de la lubrification par film mince apparaît en 1886 avec le modèle mathématique établi par REYNOLDS connu sous le nom « d'équation de Reynolds ». La résolution de cette équation permet d'accéder à la distribution du champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi à ses caractéristiques de fonctionnement. Une des principales hypothèses émises par Reynolds est que le lubrifiant possède un comportement newtonien, c'est à dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse dans l'épaisseur du film.

Mais, compte tenu des sollicitations très sévères du fluide lors de certaines situations telles que le démarrage du système mécanique qu'il lubrifie, sa réponse ne peut plus être modélisée par une loi de type visqueux linéaire. L'équation de Reynolds classique n'est plus adaptée dans ce cadre.

Dans ce chapitre, une bibliographie sera faite sur le comportement non newtonien des fluides. Les lois de comportement rhéologiques seront présentées et discutées. Partant de ces lois de comportement et de certaines hypothèses que l'on précisera, on montrera le cheminement pour l'obtention de l'équation de Reynolds non newtonien ainsi que l'algorithme de résolution classique de cette dernière. Une fois l'algorithme et le logiciel de calcul mis en place, on fera varier tous les paramètres importants de la géométrie locale (nombre de rugosité, amplitude des rugosité, l'orientation des rugosités...) ainsi que les lois de comportement du fluide lubrifiant (newtonien, viscoélastique, viscoplastique,...). Les résultats seront discutés et des conclusions seront tirées quant à l'influence de tous ces paramètres en fonction des lois de comportement choisies.

II FLUIDES NON-NEWTONIENS :

Lors d'un démarrage ou de conditions sévères de fonctionnement d'un palier, le lubrifiant est soumis à de forts taux de cisaillement, et une montée de température brutale. En général les fluides ont une viscosité qui dépend très largement de la température. La viscosité est une fonction décroissante de la température, elle chute très rapidement aux basses températures puis plus lentement aux températures élevées .

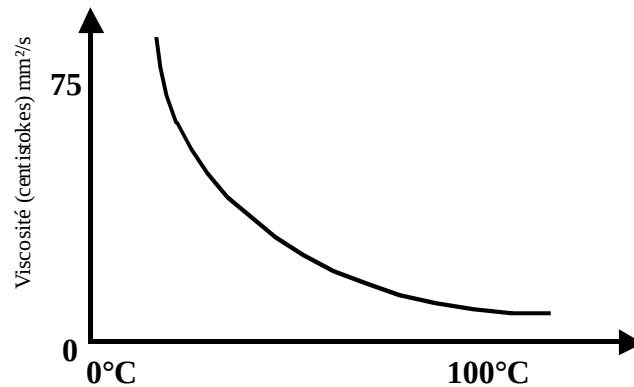


Figure 8 : Variation de la viscosité avec la température pour une huile minérale [31].

La relation de MAC COULL et WALTHER [30] peut être utilisée pour représenter cette évolution :

$$\text{Log}_{10}(\text{Log}_{10}(\nu + a)) = -m \times \text{Log}(T) + n$$

Équation 22

Avec :

- ν : la viscosité cinématique,
- a, m, n : des constantes dépendant du lubrifiant,
- T : la température absolue.

La valeur de a dépend de l'unité de la viscosité ; si ν est en centistokes a est compris entre 0.6 et 0.75.

D'autres relations ont été proposées, on peut citer :

la relation de BARR [31]:

$$(\text{Log}_{10}(\nu + a))^{0.3} = A + \frac{B}{T}$$

Équation 23

la relation de HUGEL et CLAIRBOIS [31]:

$$\text{Log}_{10}(\mu + a)(T + b) = c$$

Équation 24

où

- ν et μ : sont respectivement les viscosités cinématique et dynamique de l'huile,
- T : la température absolue,
- a, b, c, A et B : des constantes dépendant du lubrifiant.

Ainsi, il y a près de quarante ans, la nécessité de produire des lubrifiants qui présentent un meilleur comportement à hautes températures, ont conduit les pétroliers à ajouter à leur huiles minérales de base de longues chaînes de polymères. Celles-ci gonflent et s'étirent, et ainsi compensent la chute de viscosité. L'effet épaississant qu'ils génèrent permet aux lubrifiants additivés d'augmenter la viscosité des huiles de base. Les huiles automobiles qui étaient précédemment spécifiées soit à hautes températures (210°F), soit à basses températures (0°F), par leur niveau de viscosité ou grade, peuvent être caractérisées à ces deux températures. L'appellation « multigrade » a été donnée aux lubrifiants qui obéissent à de telles propriétés. Cette amélioration des performances en température a permis de garantir une certaine épaisseur de film d'huile dans les paliers et donc repousser les risques de grippage et prolonger la durée de vie du mécanisme.

Pour caractériser la viscosité du film, une grandeur est utilisée et est appelée **indice de viscosité** (indice VI). Pour déterminer l'indice de viscosité d'une huile de viscosité U à 100°F et P à 210°F, DEAN et DAVIS, en 1929 [27] proposèrent une formule d'usage universel qui revient à rechercher les viscosités respectives des huiles L et H à 100°F des huiles de référence à caractère paraffinique et naphthénique ayant la viscosité P à 210°F. L'indice de viscosité VI est alors donné par :

$$VI = 100 \frac{L - U}{L - H}$$

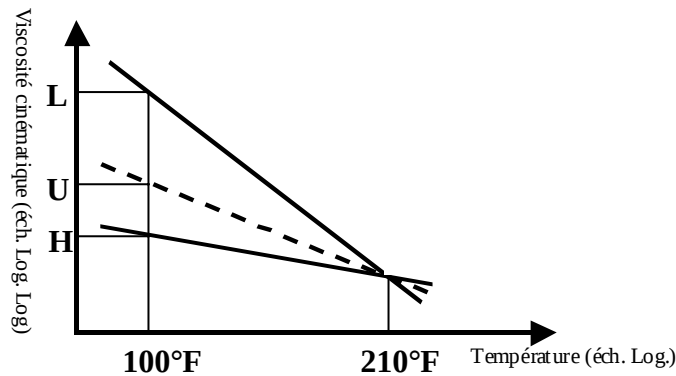


Figure 9: Définition de l'indice de viscosité.

Néanmoins, ce progrès s'est accompagné par une modification du comportement de ces huiles qui ne correspond plus au comportement newtonien, où la viscosité ne dépend que de la pression et de la température, et où une relation linéaire entre les taux de déformations et les contraintes suffit pour décrire le comportement du lubrifiant. Leur comportement est dénommé en général « non-newtonien », regroupant ainsi une grande multitude de lois constitutives dont regorge la littérature concernant la rhéologie.

Chronologie des travaux dans ce domaine

De nombreux auteurs se sont penchés sur le problème de la caractérisation soit théorique, soit expérimentale de ces effets non-newtoniens. Nous citons essentiellement et chronologiquement les travaux d'OKRENT [32], de TANNER [33], de TAO et PHILIPPOFF [34], de HARNOY et HANIN [35], de NICOLAS [36], de TAYAL et AL [37], de DIEN et ELROD [38], de HUTTON et AL [39], de FRANCOIS [40] et de DERDOURI et AL [41] dans le domaine des paliers.

D'une manière générale, les différents modèles rhéologiques de type Maxwell utilisés en lubrification peuvent être classés en deux groupes :

Les lois définies explicites :

Les équations représentatives de ce type de lois peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\tau_{ij} = \mu(P, T, \dot{\gamma}_{ij}, \dots) \dot{\gamma}_{ij}$$

Équation 25

L'utilisation de ce type de relations permet d'accéder aux caractéristiques principales d'un contact lubrifié par la résolution des équations classiques de la mécanique des films minces. La non-linéarité du modèle rhéologique est exprimée par les variations de la viscosité apparente introduite dans les équations de Navier-Stokes ou dans l'équation de Reynolds Modifiée.

Les lois définies implicites :

Dans ce cas, les contraintes de cisaillement ne peuvent plus s'exprimer de manière directe en fonction de $\dot{\gamma}$, et en général ce type de loi peut s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}_{ij} = C_1 \frac{d\tau_{ij}}{dt} + C_2 \tau_{ij}$$

Équation 26

Les fonctions C_1 et C_2 peuvent dépendre du taux des déformations, de la contrainte de cisaillement, de la température, de la pression ou d'un seuil exprimé par une contrainte caractérisant l'écoulement du fluide [43]. Les modèles rhéologiques représentées par cette équation ne permettent plus l'utilisation des équations de Navier-Stokes ou de Reynolds classique. Une modification de ces équations ou l'établissement de nouvelles équations s'imposent afin de tenir compte de la forme différentielle de ces lois de comportement. Rappelons que dans le cadre de la lubrification hydrodynamique, en régime établi, on néglige dans ce type de lois (explicites ou implicites) l'influence des contraintes normales et élongationnelles [42], [43].

La dérivée totale $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$ peut être exprimée de trois manières différentes [annexe1]:

La dérivée de Jauman qui tient compte de l'effet de rotation de la particule fluide. Cette dérivée est utilisée lorsque les contraintes sont référencées à un repère fixe.

Lorsque les déformations dans le fluide sont importantes, la dérivée de Jauman est insuffisante et doit contenir des termes supplémentaires. Dans ces conditions, c'est la dérivée d'Oldroyd qui est utilisée.

Si les déformations élastiques du lubrifiant sont petites, la dérivée $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$ est approchée par la dérivée intrinsèque.

Dans la suite, nous passons en revue quelques modèles rhéologiques significatifs qui sont utilisés en lubrification en régime stationnaire.

III RHÉOLOGIE :

L'étude du comportement rhéologique du lubrifiant permet d'accéder à un modèle mathématique exprimant la relation entre τ_{ij} et les vitesses de déformations en utilisant les caractéristiques intrinsèques du fluide.

Nous passons en revue ci-après quelques modèles rhéologiques qui sont utilisés en lubrification et plus particulièrement en cisaillement continu.

Modèle Newtonien :

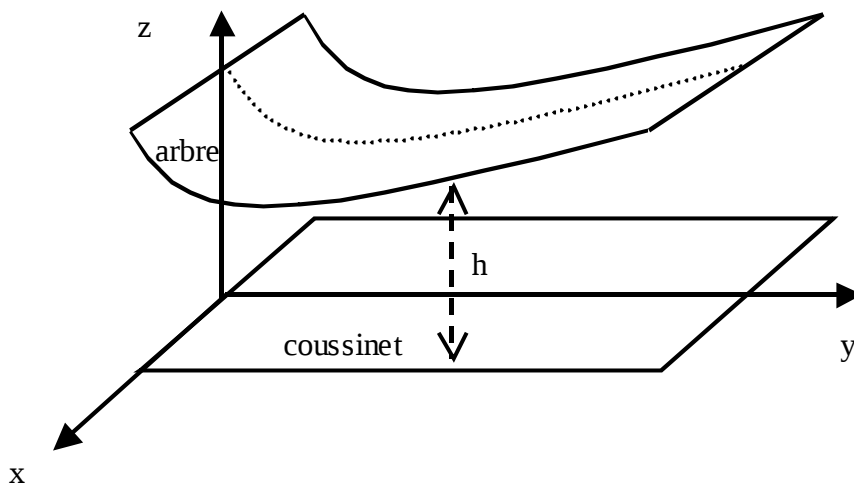


Figure 10: Système d'axes.

Les relations contraintes-vitesses de déformation sont linéaires. En mécanique des films minces où une dimension est très petite devant les autres, le gradient des vitesses est prépondérant suivant la direction de l'épaisseur du film. Les lois constitutives d'un fluide newtonien s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$$

Équation 27

Avec :

- μ : la viscosité dynamique,
- u et v : les vitesses des particules du fluide suivant les directions x et y ,
- τ_{xz} et τ_{yz} : les contraintes de cisaillement.

Modèle visqueux non linéaire :

Les vitesses des déformations visqueuses sont gouvernées par le second invariant du tenseur des contraintes [42], [43]. Une contrainte équivalente est alors définie suivant le critère de Von Mises :

$$\tau_e = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ji}}$$

Équation 28

Dans notre cas, seules les contraintes de cisaillement sont considérées, alors la contrainte équivalente s'exprime par :

$$\tau_e = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

Équation 29

Le modèle visqueux non-linéaire peut être donné par des relations qui sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{xz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_{yz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases}$$

Équation 30

$\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ est une fonction qui relie indirectement les contraintes aux taux de déformation sous diverses formes dont on verra quelques exemples significatifs.

Modèle viscoélastique linéaire :

Ce modèle superpose deux types de déformations de la particule fluide :

une déformation élastique linéaire qui, en supposant le lubrifiant incompressible et isotrope, peut être décrit par la loi de type Hooke :

$$\dot{\gamma}_{ij}^e = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{ij}}{dt}$$

Équation 31

avec G étant le module de cisaillement du fluide ,une partie visqueuse linéaire qui est décrite par la loi de Newton :

$$\dot{\gamma}_{ij}^v = \frac{1}{\mu} \tau_{ij}$$

Équation 32

Donc, le taux des déformations total s'exprime par :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^v = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{ij}}{dt} + \frac{1}{\mu} \tau_{ij}$$

Équation 33

Dans le cas du cisaillement continu où seules les contraintes τ_{xz} et τ_{yz} sont prises en compte, ce modèle se traduit par deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \frac{\tau_{xz}}{\mu} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \frac{\tau_{yz}}{\mu} \end{cases}$$

Équation 34

Modèle viscoélastique non linéaire:

Les expressions les plus simples de ce type de comportement sont des expressions de type Maxwell non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \tau_{xz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \tau_{yz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases}$$

Équation 35

avec $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ pouvant prendre différentes formes proposées dans la littérature. Ainsi, par exemple ,un sinus hyperbolique rend compte des résultats de REE et EYRING [44], [45].

La dérivée $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$ peut s'exprimer de trois façons différentes selon que l'on utilise la dérivée intrinsèque de JAUMAN ou d'OLDROYDS [annexe 1].

Pour généraliser la formulation pour la détermination des caractéristiques d'un contact lubrifié, en rendant possible la prise en compte de plusieurs types de modèles rhéologiques, les lois de comportement sont mises sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \tau_{xz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = A \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \tau_{yz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases}$$

Équation 36

avec :

$A=0$, quand on ne tient pas compte de l'élasticité du fluide

$A=\frac{1}{G}$, quand le lubrifiant se comporte en partie comme un corps élastique avec G le module de cisaillement du fluide

Par ailleurs, les variations des caractéristiques du lubrifiant avec la pression et la température sont supposés de la forme et ce pour des variations limitées de température [48], [49]:

$$C(P, T) = C_0 \exp \left[\alpha_c P + \beta_c \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

Équation 37

Avec :

- $C(P,T)$: valeur de la caractéristique C du lubrifiant à une pression et température données. Elle peut représenter une viscosité, un module de cisaillement ou une contrainte. C_0 représente la valeur initiale de cette caractéristique.
- α_c, β_c : coefficients exprimant la variation de cette caractéristique avec la pression et la température.
- T_0 : température de référence

IV EQUATION GÉNÉRALISÉE DE LA MÉCANIQUE DES FILMS MINCES NON-NEWTONIEN :

Pour obtenir l'équation généralisée de la mécanique des films minces non-newtoniens, les équations suivantes ont été utilisées [50], [47]:

- Les équations d'équilibre,
- Les deux lois de comportement,
- L'équation de continuité.

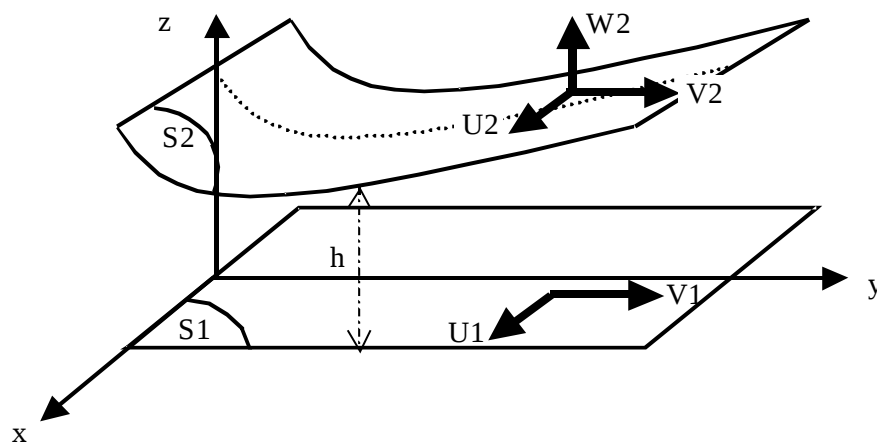


Figure 11: Système d'axes.

Equations d'équilibre :

Les équations d'équilibre s'écrivent [23], [42]:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Équation 38

On peut remarquer que ces équations sont celles de Navier-Stokes dans le cas de la mécanique des films minces visqueux.

On peut donner une interprétation physique à ces équations d'équilibre en se référant à la figure en deux dimensions [42] suivante:

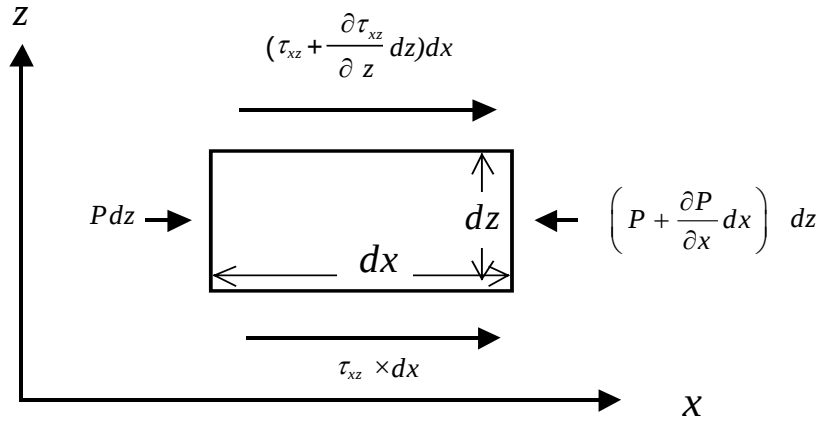


Figure 12: Equilibre d'un élément infiniment petit

Equation de comportement :

Les équations qui régissent le comportement rhéologique du lubrifiant sont rappelées ci dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \tau_{xz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \tau_{yz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases}$$

Équation 39

Equation de continuité

En supposant que le régime est laminaire et le fluide incompressible, l'équation de la conservation de la masse se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Équation 40

Ces équations aux dérivées partielles [Équation 38, Équation 39 et Équation 40] après quelques manipulations [annexe 2] peuvent être remplacées par une seule équation [Équation 41]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m) + \frac{\partial}{\partial y} (V_2(R_2 - F_m) + V_1 F_m) \\ + U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} - U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} - V_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} + (W_2 - W_1) - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Équation 41

Avec :

- H_1 et H_2 : les hauteurs des surfaces S_1 et S_2 .
- U_1, V_1 et W_1 : les vitesses de S_1 suivant les trois directions,
- U_2, V_2 et W_2 : les vitesses de S_2 suivant les trois directions,
- $R_2 = H_2, R = h$
- $F_m = \frac{1}{J_{m_2}} \int_{H_1}^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz$
- $G_m = \int_{H_1}^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z^2 dz - I_{m_2} F_m$
- $L_{m_x} = \int_{H_1}^h A \frac{d\tau_{xz}}{dt} z dz - K_{m_{x2}} F_m$

- $L_{m_y} = \int_{H_1}^h A \frac{d\tau_{xz}}{dt} dz - K_{m_{y2}} F_m$
- $I_{m_2} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz$
- $J_{m_2} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dz$
- $K_{m_{x2}} = \int_{H_1}^{H_2} A \frac{d\tau_{xz}}{dt} dz$
- $K_{m_{y2}} = \int_{H_1}^{H_2} A \frac{d\tau_{yz}}{dt} dz$

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente à celle-ci, l'équation peut se simplifier. En effet, en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on peut poser :

- $H_1=0$ et $H_2=h$ (ici h est l'épaisseur totale du film)

Les conditions aux limites sur le champ des vitesses s'écrivent alors :

- Sur S_1 , pour $z=0$: $U=U_1$, $V=V_1$, $W=0$
- Sur S_2 , pour $z=h$: $U=U_2$, $V=V_2$, $W=W_2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m) + \frac{\partial}{\partial y} (V_2(R_2 - F_m) + V_1 F_m) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y} + W_2 \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right)$$

Équation 42

Cette nouvelle équation généralisée des films minces peut prendre en compte tous les modèles rhéologiques que l'on a cité dans la partie précédente.

Dans l'équation de Reynolds classique, les coefficients I_{m_2} , J_{m_2} , F_m sont exprimés en fonction de l'inverse de la viscosité dynamique μ qui est fonction de la pression et de la température seulement. Par contre dans l'équation de Reynolds modifiée, les expressions de ces différents coefficients font apparaître le terme visqueux $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ des équations de

comportement qui, en plus de la pression et de la température, dépend de la contrainte équivalente τ_e et d'une contrainte caractéristique du lubrifiant.

Deux fonctions supplémentaires L_{mx} et L_{my} apparaissent dans l'équation de Reynolds modifiée. Ces fonctions ont la dimension d'un débit volumique. Les $\frac{\partial L_{mx}}{\partial x}$ et $\frac{\partial L_{my}}{\partial y}$ correspondent donc à des variations du débit volumique dans le contact induits par les déformations élastiques du lubrifiant.

V RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS NON-NEWTONIEN

L'équation de Reynolds pour un fluide non-Newtonien est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solutions analytiques. Il est nécessaire d'utiliser une méthode numérique ici la méthode des différences finies pour la résoudre.

Equation de Reynolds non-Newtonien pour un palier :

Dans la configuration d'un palier développé on a :

- la surface inférieure fixe,
- pas de déplacement de l'arbre suivant sa longueur,
- pas de mésalignement,
- jeu faible.

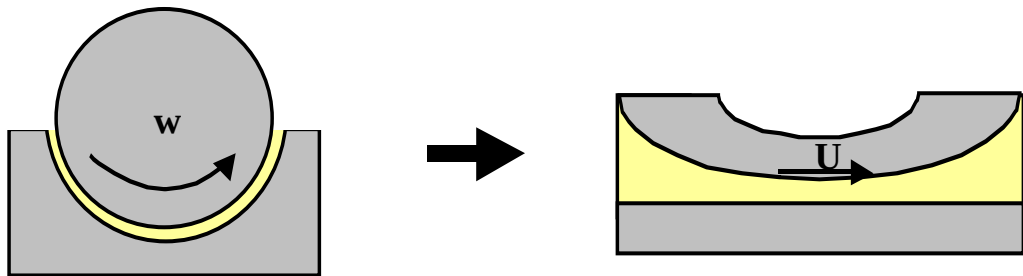


Figure 13: Palier et son développé.

Ainsi, l'équation générale de Reynolds Modifiée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m) + \frac{\partial}{\partial y} (V_2(R_2 - F_m) + V_1 F_m) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y} + W_2 - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right)$$

puis se simplifie dans notre cas de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (U F_m) - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right)$$

Équation 43: Equation de Reynolds Modifiée

Résolution de l'équation de Reynolds Modifiée :

La résolution analytique de l'équation de Reynolds pour un fluide non-Newtonien est impossible. La résolution numérique revient à initialiser le fluide dans un premier temps en tant que newtonien, puis le considérer par la suite comme non-Newtonien. L'organigramme suivant résume le processus de calcul.

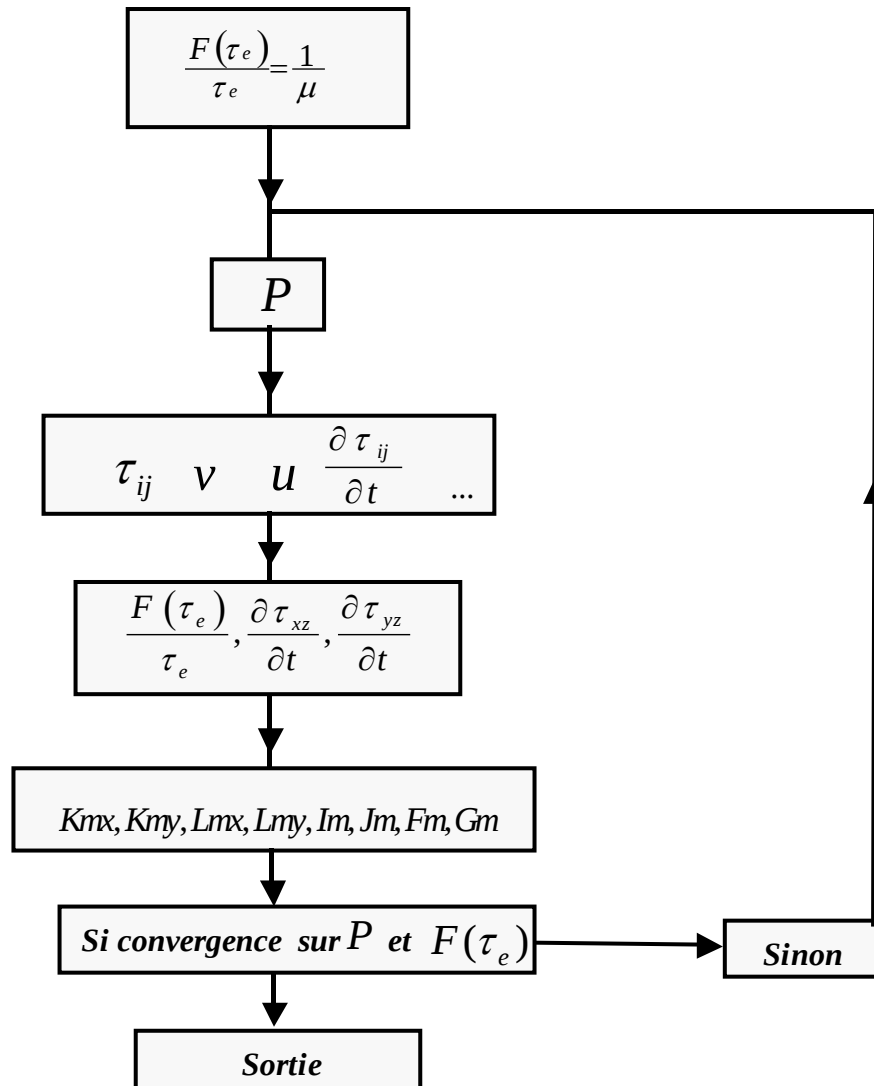


Figure 14: Algorithme de résolution de l'équation de Reynolds Modifiée

VI RÉSULTATS :

Différentes lois vont être testées par la suite afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux issus du modèle de base c'est à dire le modèle Newtonien, ainsi le premier modèle que l'on va présenter sera le modèle Newtonien puis ensuite le modèle viscoélastique de type Ree-Eyring [53] et enfin le modèle viscoplastique de type Winer [52] Nous feront évoluer tous les paramètres importants du contact afin d'évaluer leur influence. Celle du module de cisaillement se fera au prochain chapitre.

Les valeurs choisies sont toutes normalisées car notre objectif ici est uniquement comparatif.

Modèle Newtonien :

Dans le modèle newtonien, la partie élastique est nulle et la partie visqueuse est constante et est égale à l'inverse de la viscosité .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{\mu} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{\mu} \end{cases}$$

Ce qui revient à écrire que :

$$\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{1}{\mu}$$

Le fluide est caractérisé par sa viscosité μ .

Nous rappelons les trois formes de rugosité étudiées : une forme de rugosité anisotrope, une rugosité quelconque et une rugosité transversale.

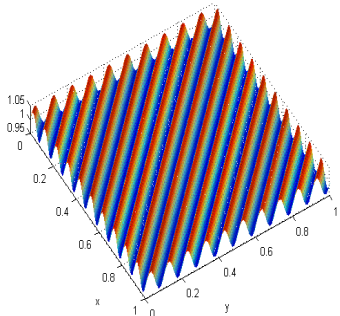
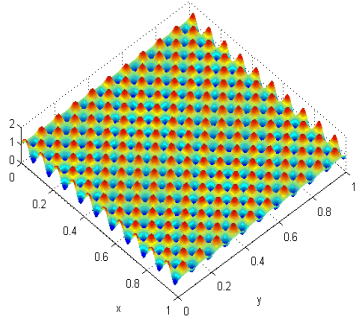
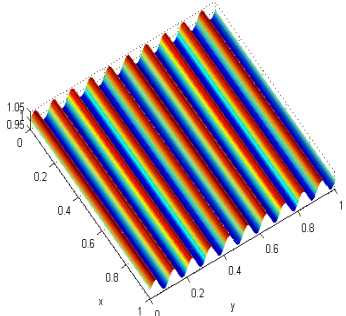
Rugosités anisotropes	Rugosités quelconques	Rugosités transversales
		

Tableau 10 : Les types de rugosités étudiés

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$

- $n_r = 10$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$

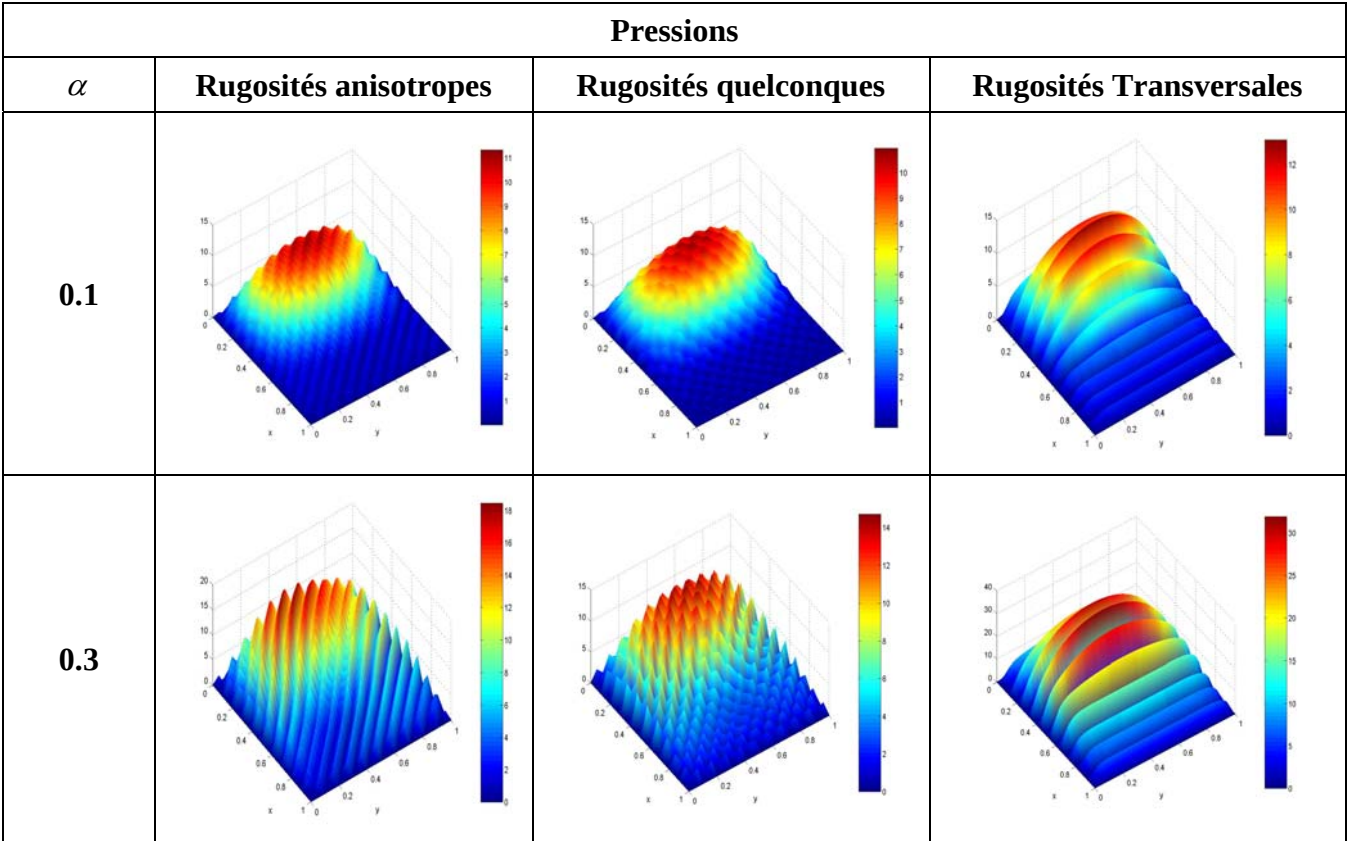


Tableau 11 : Modèle Newtonien avec variation de l’amplitude des rugosités.

On retrouve pour deux valeurs d’amplitude de rugosité une parfaite similitude des profils de pression. L’analyse des figures ci dessus confirme dans ce cas la validité du logiciel développé pour la théorie non-Newtonienne présentée plus haut, les figures sont exactement celles que l’on a obtenues avec la théorie utilisant l’équation de Reynolds classique.

Modèle visqueux non linéaire :

Les expressions les plus simples de ce type de comportement sont de type Maxwell non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \tau_{xz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \tau_{yz} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases}$$

Avec $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ pouvant se mettre sous différentes formes comme présenté précédemment.

Modèle viscoélastique de type Ree-Eyring

Ici la loi $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ est remplacée par une loi de type Ree-Eyring [53] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{xz}}{dt} + \frac{\tau_{xz}}{\mu} \frac{\tau_r}{\tau_e} \sinh\left(\frac{\tau_e}{\tau_r}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \frac{\tau_{yz}}{\mu} \frac{\tau_r}{\tau_e} \sinh\left(\frac{\tau_e}{\tau_r}\right) \end{cases}$$

Équation 44

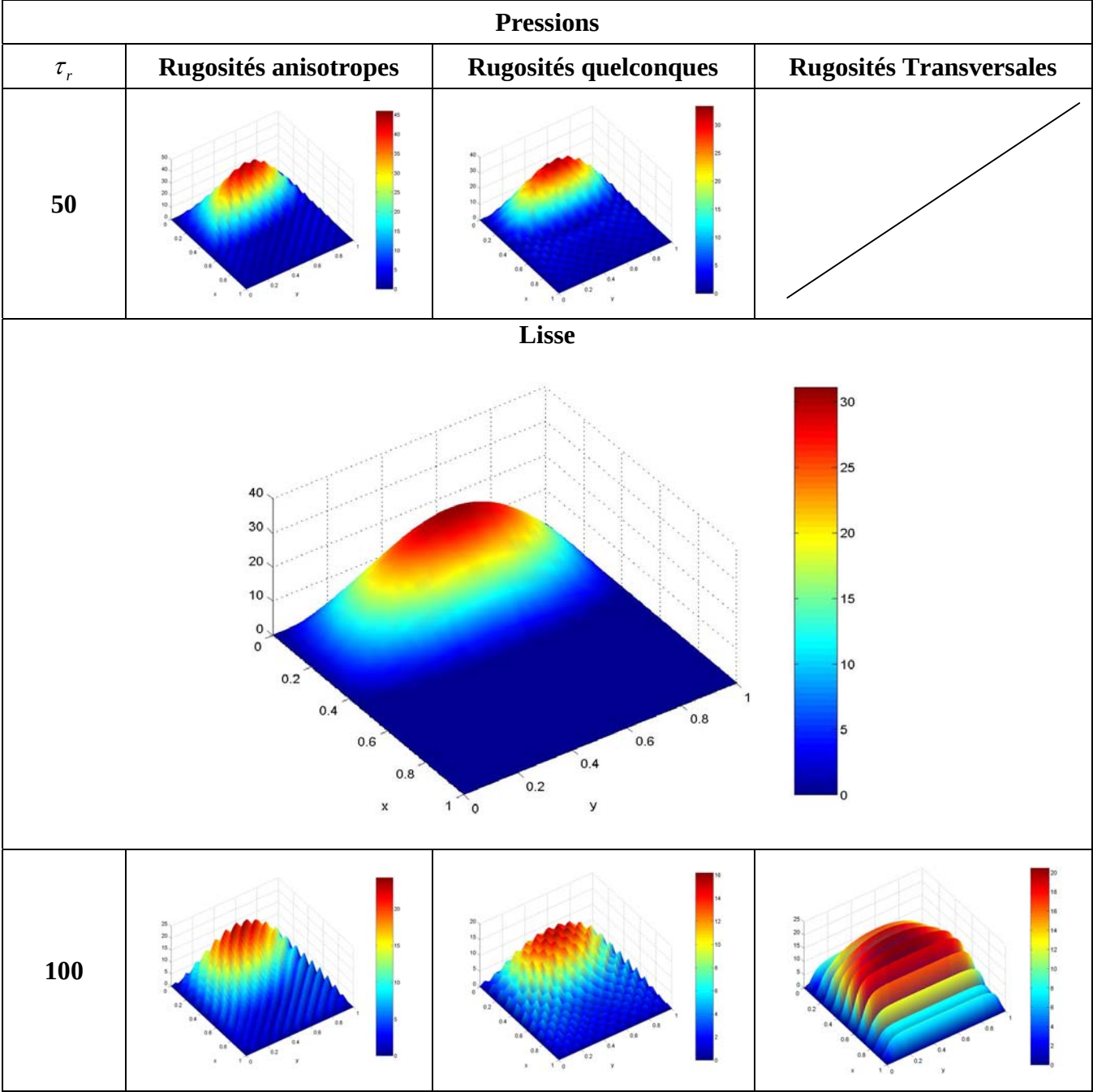
On se retrouve ici avec trois paramètres liés à la rhéologie du fluide qui sont G , μ et τ_r (module de cisaillement, viscosité dynamique et contrainte de référence) ainsi que d'autres paramètres intrinsèques à la géométrie du contact, tels que le nombre de rugosités dans le contact, leur amplitude, la hauteur minimale...etc.

Variation de la contrainte de référence (τ_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $n_r = 10$

- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$



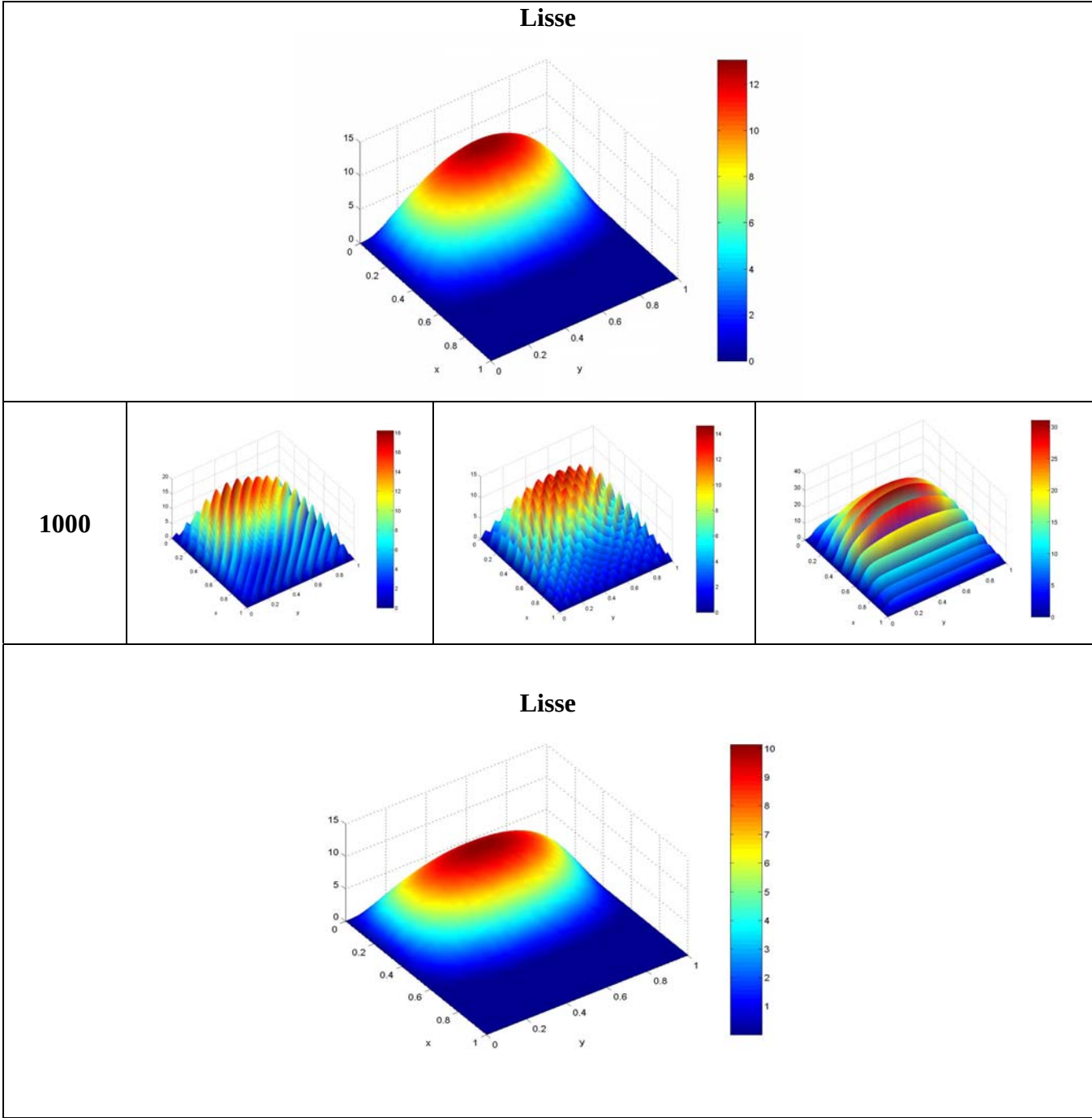
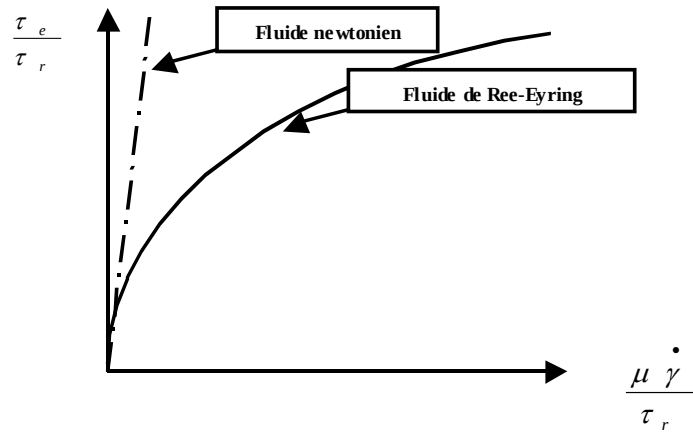


Tableau 12 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation de la Contrainte de référence

L'analyse des figures ci dessus nous montre que l'augmentation de τ_r la contrainte de référence fait diminuer la pression et fait tendre le comportement du fluide vers un fluide newtonien, ce qui confirme la théorie et est en accord avec les prévisions de JOHNSON et TEVAARWERK[53]. On remarquera aussi que l'augmentation de l'inclinaison des rugosités par rapport à la direction de l'écoulement a logiquement tendance à augmenter la pression.



Équation 45 : Loi de comportement rhéologique du fluide de Ree-Eyring

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées:

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $\tau_r = 100.0$
- $\alpha = 0.3 \bar{h}_{\min}$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$

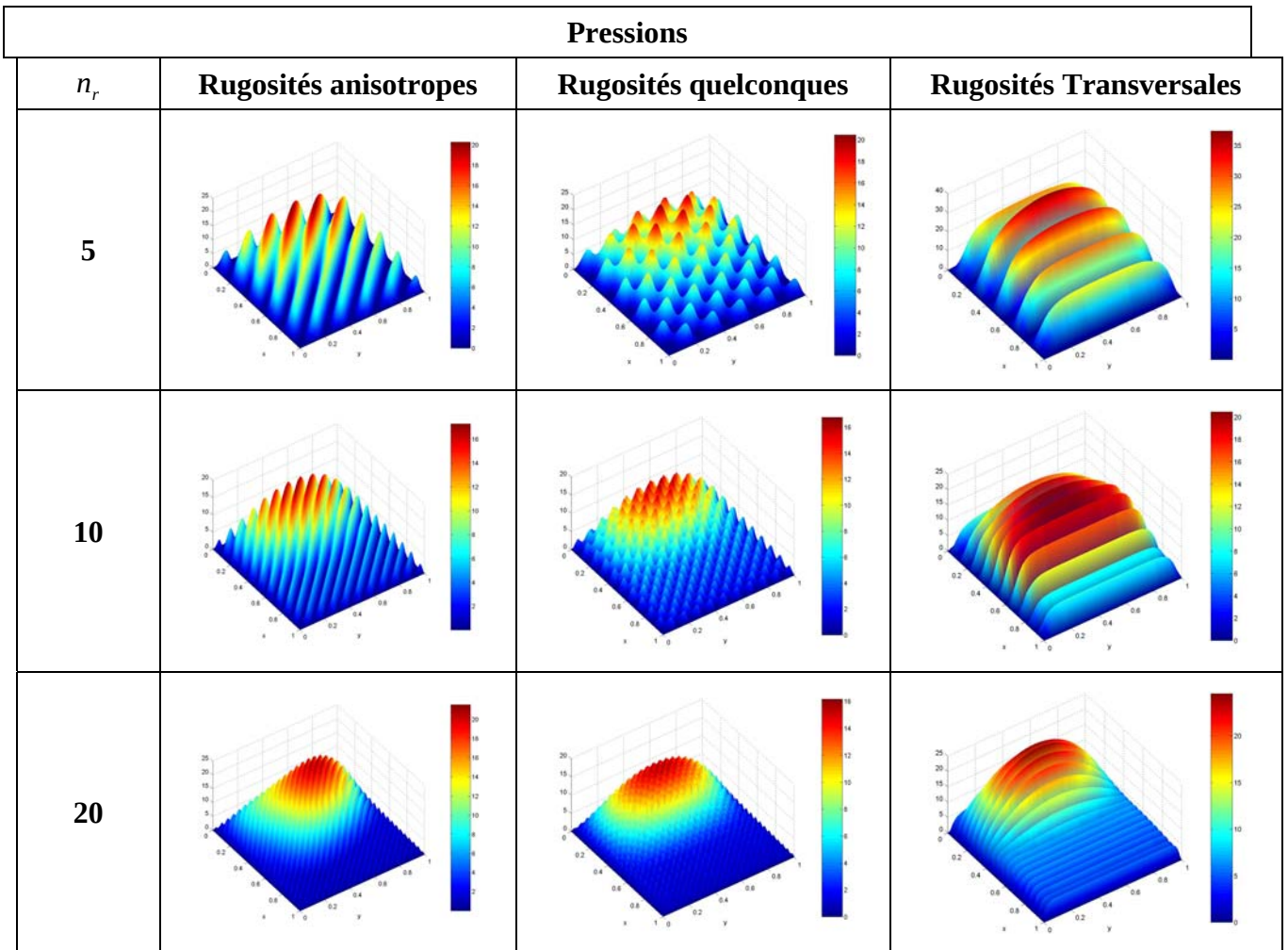


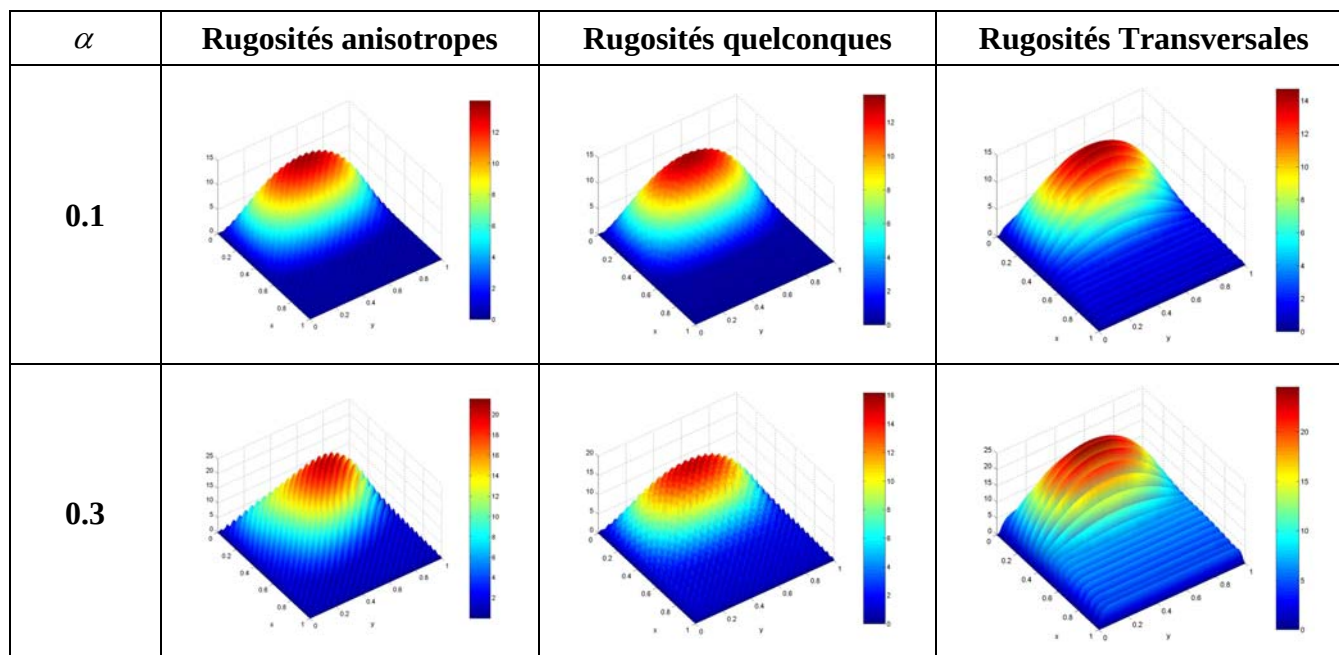
Tableau 13 : Tableau 14 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation du nombre des rugosités.

On remarque que l'augmentation du nombre de rugosité déplace le maximum de pression vers l'entrée du contact et fait tendre la répartition de pression vers celle d'un palier lisse de hauteur minimale de film $h_0 - \delta$. On remarquera aussi que pour les rugosités anisotropes, l'augmentation du nombre de ces rugosités modifie la forme de la répartition de la pression dans la zone de contact (cette dernière n'est plus symétrique par rapport au sens du mouvement), l'écoulement s'oriente dans le sens des rugosités ce qui est tout à fait prévisible et logique.

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées :

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $n_r = 20$
- $\tau_r = 100.0$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$



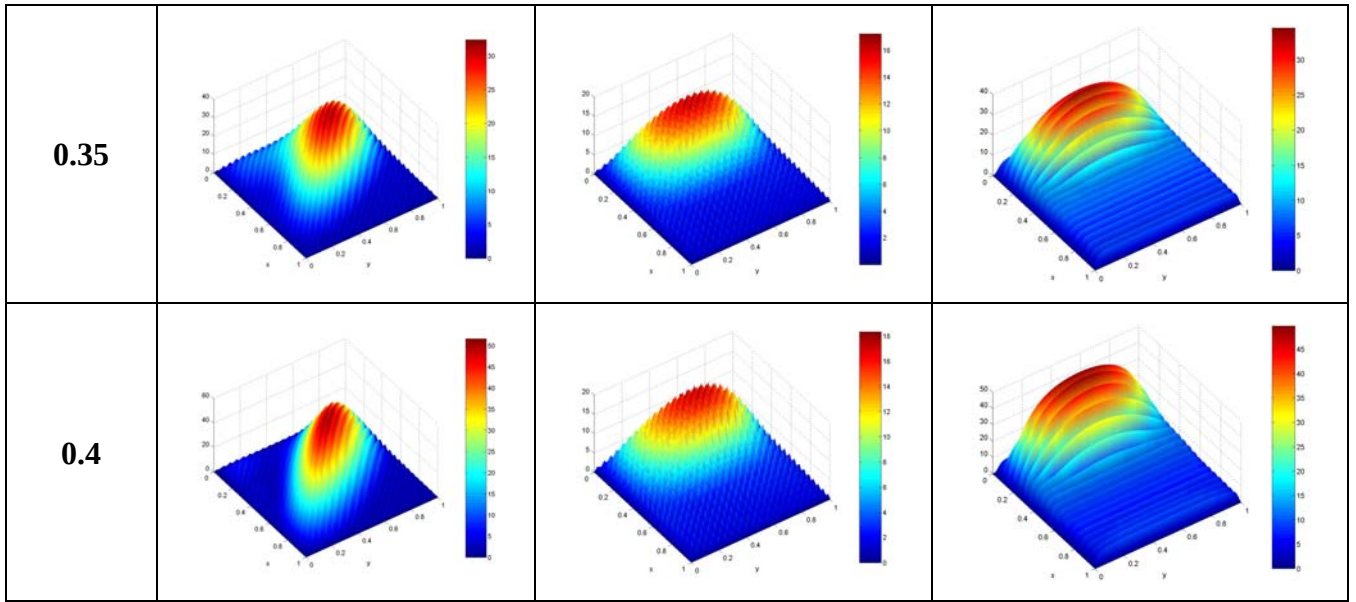


Tableau 15 : Modèle Viscoélastique de type Ree-Eyring avec variation de l'amplitude des rugosités.

L'augmentation de la hauteur des rugosités met en évidence le caractère anisotrope de la géométrie ce que les théories classiques ne prédisent pas [53]. Là encore l'homogénéisation permet de s'affranchir d'erreurs grossières.

Modèle viscoplastique de type Winer

Ici la loi $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ est remplacée par une loi de type Winer. La loi proposée par WINER

[53] de type viscoplastique est donnée par :

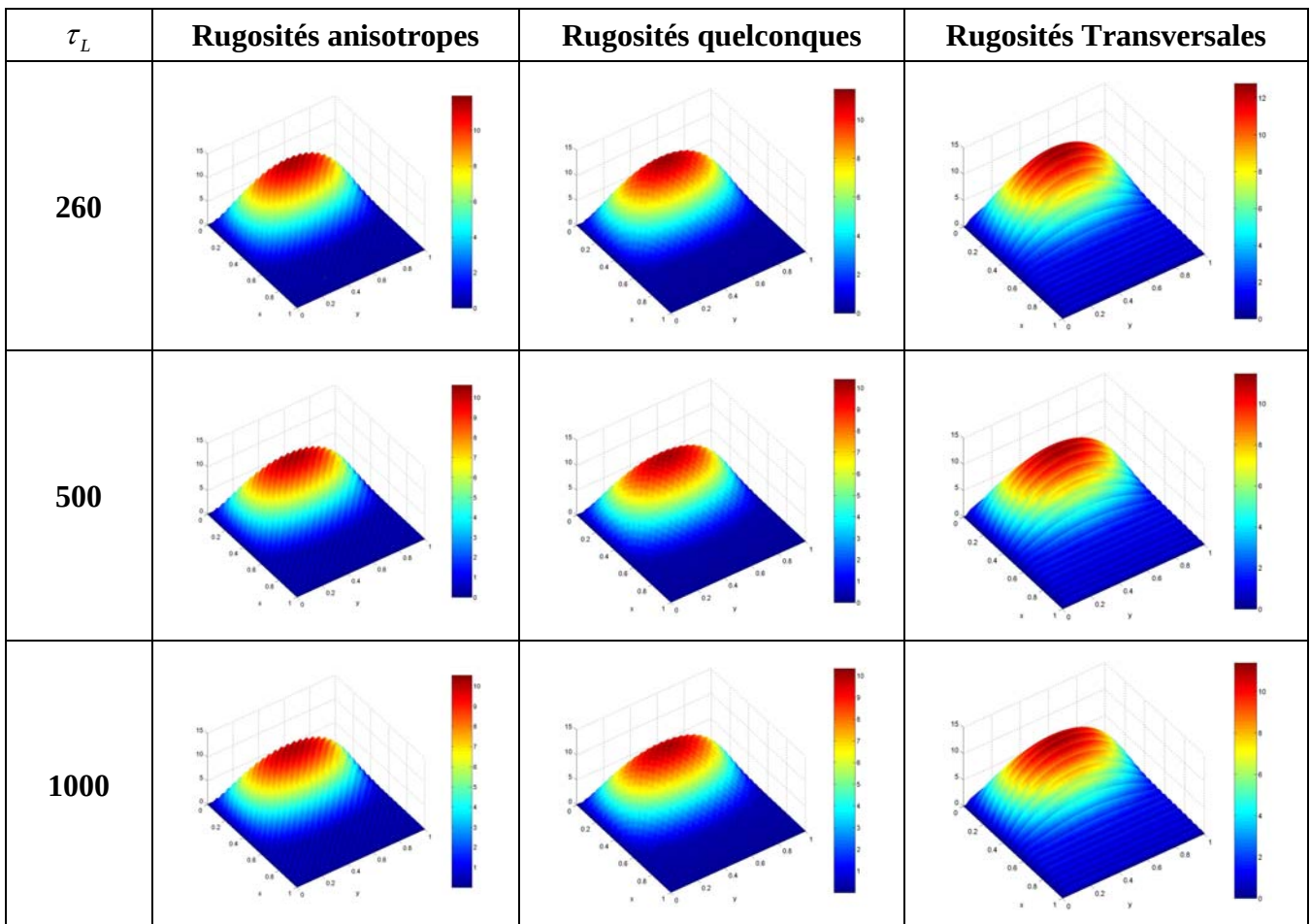
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} - \frac{\tau_{xz}}{\mu} \frac{\tau_L}{\tau_e} \ln(1 - \frac{\tau_e}{\tau_L}) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} - \frac{\tau_{yz}}{\mu} \frac{\tau_L}{\tau_e} \ln(1 - \frac{\tau_e}{\tau_L}) \end{cases}$$

Le fluide est caractérisé par τ_L qui est sa contrainte limite, G son module de cisaillement et μ sa viscosité.

Variation de la contrainte limite (τ_L)

Les caractéristiques sont normalisées :

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $n_r = 20$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$



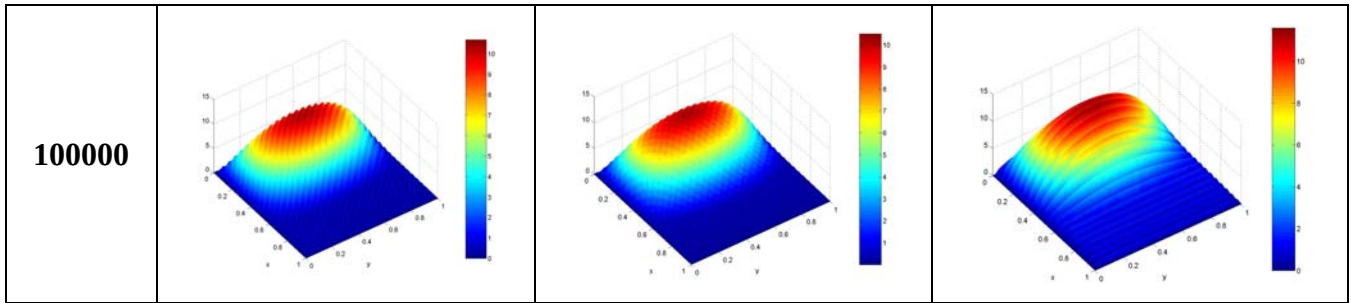


Tableau 16 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation de la contrainte limite.

La contrainte limite ne semble avoir aucune influence sur les différentes répartitions de pression. Le seuil introduit par τ_L uniformise la pression quelque soit l'orientation géométrique de la rugosité.

Variation du nombre de rugosités (n_r)

Les caractéristiques sont normalisées :

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$
- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $\alpha = 0.4 \bar{h}_{\min}$
- $\tau_L = 1000.0$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$

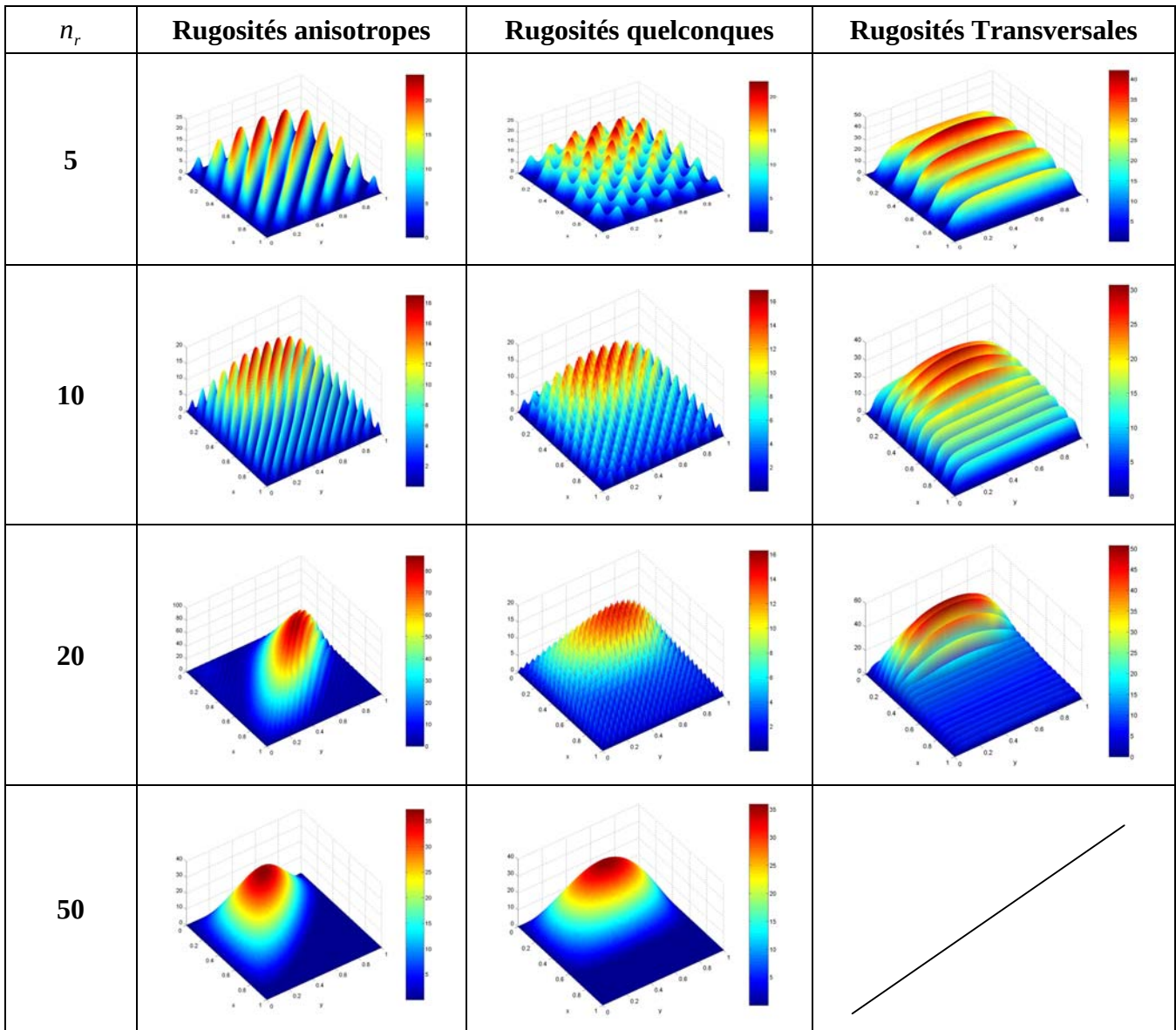


Tableau 17 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation du nombre des rugosités.

L'augmentation du nombre de rugosités met en évidence le caractère anisotrope de la géométrie ce que le analyse stochastique ne prédit pas [55].

Variation de l'amplitude des rugosités (α)

Les caractéristiques sont normalisées :

- $\bar{h}_{\min} = 1$
- $\bar{\mu} = 1$

- $\bar{V} = 1$
- $\bar{R} = 1$
- $\tau_L = 1000.0$
- $n_r = 20$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{1}{G} = 0$

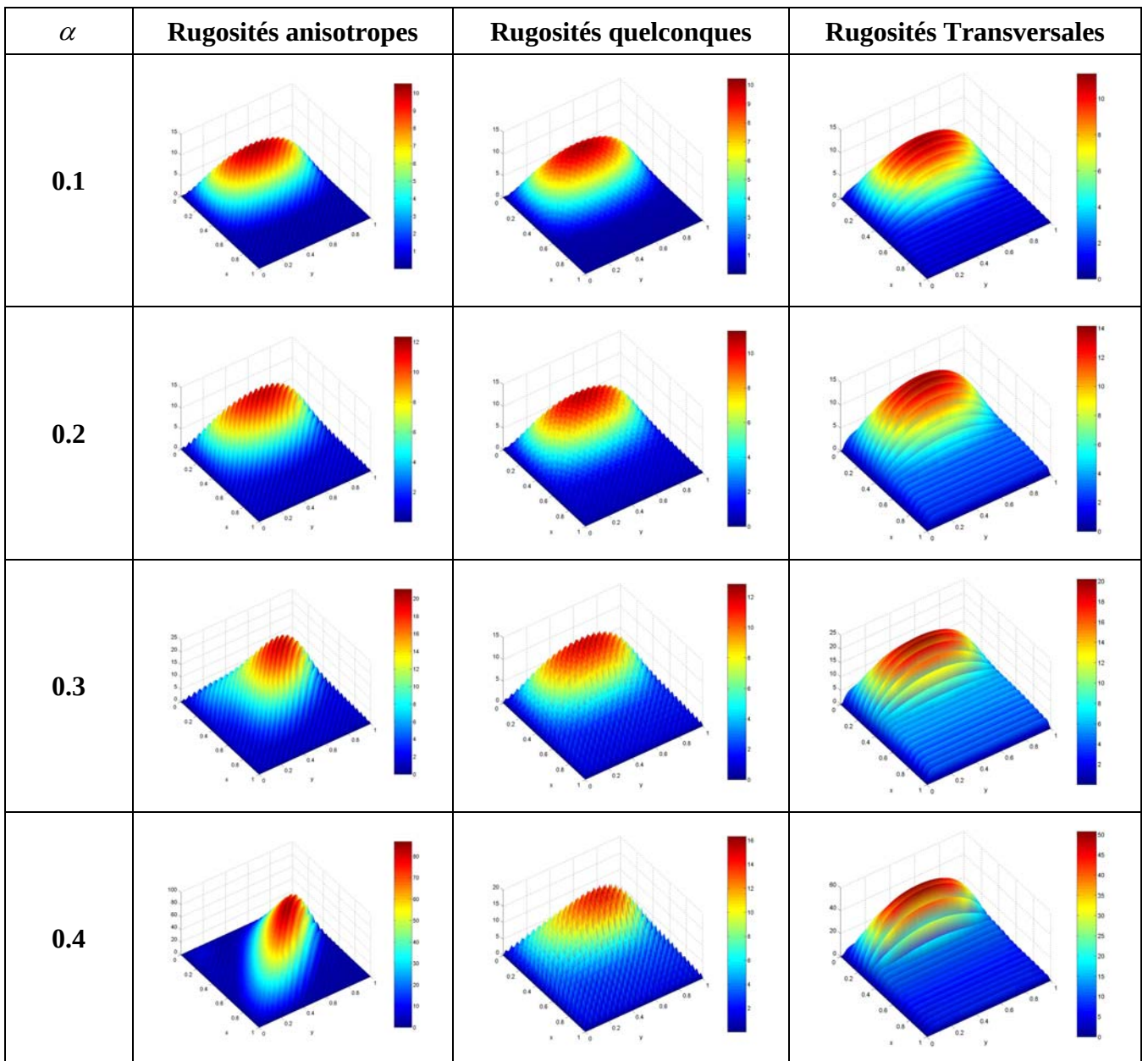


Tableau 18 : Modèle viscoplastique de type Winer avec variation de l'amplitude des rugosités.

On remarque clairement que plus l'amplitude de la rugosité augmente et plus le caractère anisotrope s'affirme alors que les solutions classiques (analyse stochastique) restent insensibles à l'évolution de ce paramètre en donnant des résultats totalement erronés [53].

VII CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre était de valider la théorie développée pour un fluide non Newtonien dans certaines conditions de contact. Ainsi, une revue bibliographique sur la modélisation des lois de comportement rhéologique des fluides a été faite, le cheminement pour l'obtention d'une nouvelle équation de Reynolds dite équation de Reynolds Modifiée pour les fluides non Newtoniens a été établie.

Les résultats présentés ont été discutés pour extraire les paramètres influents. Les résultats ont été concluants et leur analyse nous a permis de valider la théorie 'non Newtonien' de la lubrification .

En résumé ce chapitre nous a permis de valider la nouvelle équation de Reynolds dite équation de Reynolds Modifiée 'non-Newtonien', et la technique de l'homogénéisation peut être appliquée à cette équation ce qui fera l'objet du prochain chapitre et représente notre principal objectif .

CHAPITRE 4: HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN

I INTRODUCTION

Les deux derniers chapitres nous ont permis de valider la théorie 'non-Newtonien' et de présenter la méthode de l'homogénéisation . Dans ce chapitre , nous allons faire apparaître l'originalité de ce travail en appliquant cette méthode à l'équation de Reynolds pour un fluide non Newtonien. Pour ce faire, nous allons détailler les étapes de l'homogénéisation de cette équation, puis exposer l'algorithme de calcul utilisé. L'orientation des rugosités variera de la direction longitudinale à la direction transversale afin de représenter au mieux toutes les situations possibles.

Une fois l'algorithme et le logiciel de calcul mis en place, nous ferons varier les paramètres de la géométrie locale (nombre de rugosité, amplitude des rugosité, orientation des rugosités ...) et les lois de comportement du fluide lubrifiant (newtonien, viscoélastique, viscoplastique, ...). Les résultats seront discutés et des conclusions seront tirées quant à l'influence possible de tous ces paramètres . Ces résultats seront présentés sous forme comparative avec ceux obtenus avec les techniques dites classiques.

II HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS « NON-NEWTONIEN »

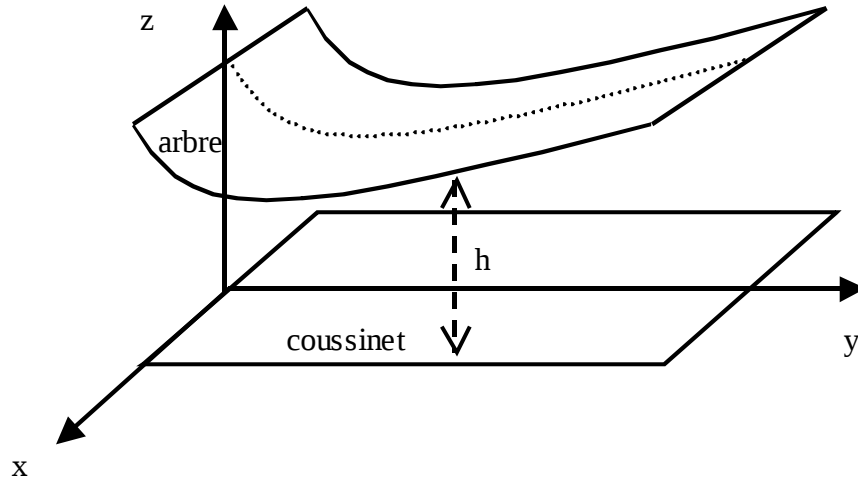


Figure 15: Système d'axes.

L'équation de Reynolds « non-newtonien » s'écrit [47] (son développement est exposé annexe 2) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m) + \frac{\partial}{\partial y} (V_2(R_2 - F_m) + V_1 F_m) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y} + W_2 - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right)$$

Dans notre cas, l'équation de Reynolds Modifiée se simplifie et devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) = U \frac{\partial F_m}{\partial y} - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right)$$

Équation 46

Par commodité, des changements de variables vont intervenir et on écrit :

$$x = x_1 \quad \text{et} \quad y = x_2$$

On réécrit l'Équation 46 sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) = U \frac{\partial F_m}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial L_{mx1}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{mx2}}{\partial x_2} \right)$$

Équation 47

Puis on pose :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{i=1,2}$$

Équation 48

et

- $P(x_1, x_2) = P_0(x_1, x_2) + \varepsilon \times P_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$
- $G_m(x_1, x_2) = G_{m0}(x_1, x_2) + \varepsilon \times G_{m1}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$
- $F_m(x_1, x_2) = F_{m0}(x_1, x_2) + \varepsilon \times F_{m1}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$
- $L_{mx}(x_1, x_2) = L_{mx0}(x_1, x_2) + \varepsilon \times L_{mx1}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$
- $L_{my}(x_1, x_2) = L_{my0}(x_1, x_2) + \varepsilon \times L_{my1}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$

Équation 49

En introduisant l'Équation 49 et l'Équation 48 dans l'Équation 47 et en identifiant par rapport aux puissances de ε on trouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G_{m0} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(G_{m1} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G_{m0} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right\} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y_2} \left(G_{m1} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(G_{m0} \left\{ \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(G_{m1} \left\{ \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right\} \right) = \\ & U \left\{ \frac{\partial F_{m0}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{m1}}{\partial y_1} \right\} - \left\{ \frac{\partial L_{mx0}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{mx1}}{\partial y_1} + \frac{\partial L_{my0}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{my1}}{\partial y_1} \right\} \end{aligned}$$

Équation 50

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G_{m0} \frac{\partial P_0}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G_{m1} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(G_{m1} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G_{m0} \frac{\partial P_0}{\partial x_2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G_{m1} \left\{ \frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(G_{m1} \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) = U \frac{\partial F_{m1}}{\partial x_1} - \left\{ \frac{\partial L_{mx1}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{my1}}{\partial x_1} \right\} \end{aligned}$$

Équation 51

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left[G_{m0} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[G_{m0} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right) \right] = U \frac{\partial F_{m0}}{\partial y_1} - \left(\frac{\partial L_{mx0}}{\partial y_1} + \frac{\partial L_{my0}}{\partial y_1} \right)$$

Équation 52

On déduit de ces équations celles des **problèmes dits locaux** :

$$\nabla_y \cdot [G_{m0} \nabla_y \omega_1] = -\frac{\partial G_{m0}}{\partial y_1}$$

Équation 53

$$\nabla_y \cdot [G_{m0} \nabla_y \omega_2] = -\frac{\partial G_{m0}}{\partial y_2}$$

Équation 54

$$\nabla_y \cdot [G_{m0} \nabla_y \omega_3] = \frac{\partial}{\partial y_1} (UF_{m0} - L_{mx0} - L_{my0})$$

Équation 55

Ensuite on réintroduit les solutions des problèmes locaux dans l'Équation 52 puis on intègre sur Y, pour en déduire P_1 en fonction des solutions des problèmes locaux : ω_1 , ω_2 , ω_3 et des dérivées partielles de P_0 :

$$P_1 = \omega_1 \frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \omega_3 + Cte(x_1, x_2)$$

Équation 56

En remplaçant l'expression de P_1 dans l'Équation 50 et en intégrant sur le domaine Y, on obtient une équation en P_0 :

$$\nabla \cdot [A] \nabla P_0 = \nabla \cdot [\theta]$$

Équation 57

Avec :

$$\begin{cases} [A] = \begin{pmatrix} \int_Y G_{m0} \left(1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} \right) dy & \int_Y G_{m0} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y_1} \right) dy \\ \int_Y G_{m0} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} \right) dy & \int_Y G_{m0} \left(1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_2} \right) dy \end{pmatrix} \\ [\theta] = \begin{pmatrix} \int_Y \left(-G_{m0} \frac{\partial \omega_3}{\partial y_1} - L_{mx0} - L_{my0} + U \times F_{m0} \right) dy \\ \int_Y -G_{m0} \frac{\partial \omega_3}{\partial y_2} dy \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer G_{m0} , L_{mx0} , L_{my0} et F_{m0} [annexe 3].

III RÉSOLUTION DES PROBLÈMES LOCAUX ET DU PROBLÈME HOMOGENÉISÉ

Les équations représentant les problèmes locaux et celui homogénéisé sont des équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admettent pas de solutions analytiques. Ainsi, pour résoudre ces problèmes, on utilise ici la méthode des différences finies.

L'algorithme de résolution que l'on propose pour la résolution du problème homogénéisé est le suivant:

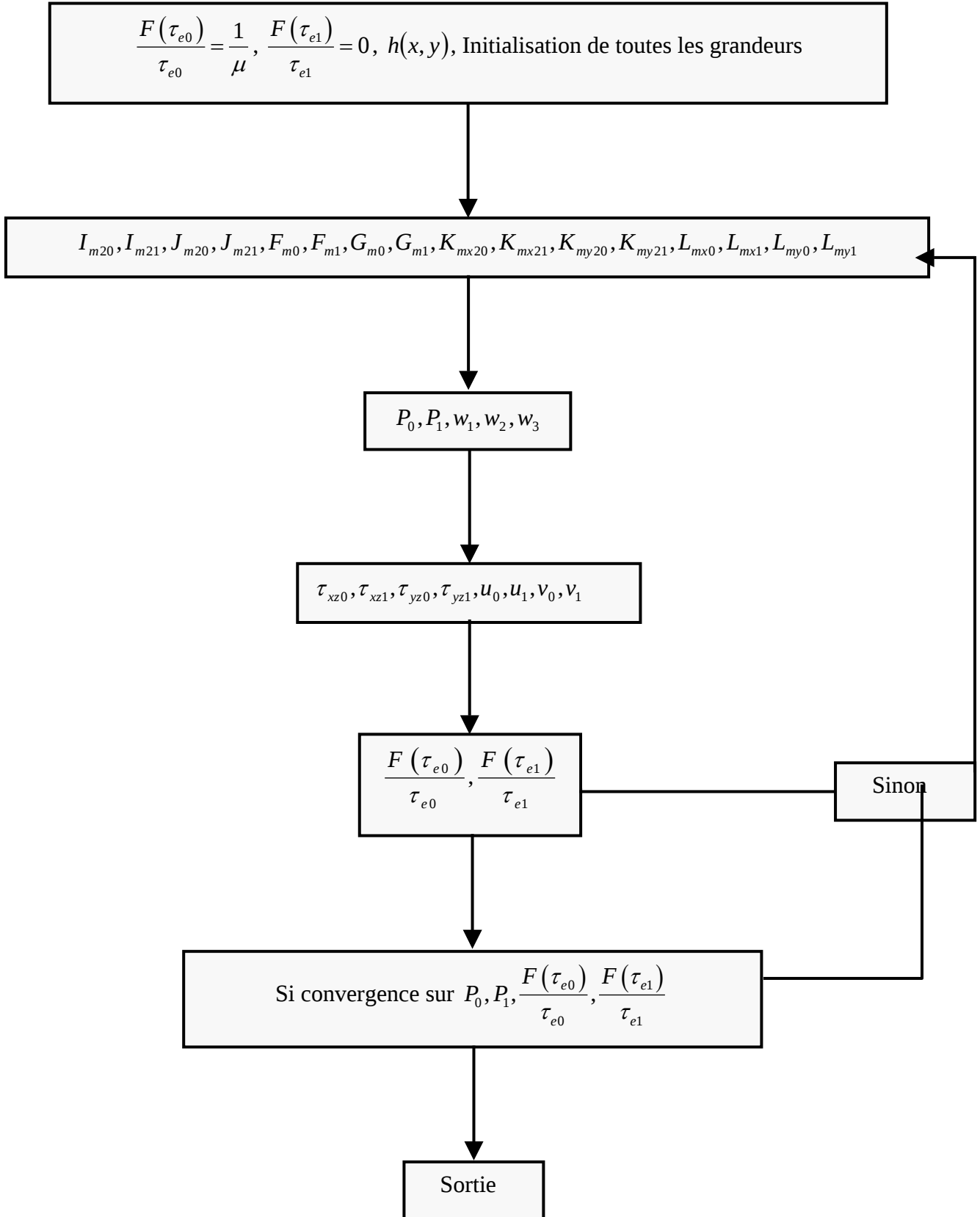


Figure 16 : Algorithme de résolution du problème non newtonien homogénéisé

IV PARAMÈTRES ET RÉSULTATS

Les caractéristiques étudiés

Dans cette partie, seront étudiés la charge que peut supporter le contact, le débit axial, la force de frottement et le maximum de pression.

La valeur des paramètres en entrée, sont des valeurs de fonctionnement réel d'un palier. Les valeurs des résultats en sortie sont des valeurs normalisées. La normalisation adoptée pour ces grandeurs est :

La pression normalisée:

$$\overline{P} = \frac{Ph^2}{\mu UB}$$

avec

- μ : la viscosité dynamique ($Pa.s$),
- h : l'épaisseur du film (m),
- U : la vitesse linéaire de l'arbre ($m.s^{-1}$),
- P : la pression (Pa).

La force de frottement :

$$\overline{F} = \frac{F}{\mu UL} \left(\frac{h}{B} \right)$$

avec

- L : la longueur de contact (m),
- B : la largeur du contact (m),
- F : la force de frottement (N).

Le débit axial :

$$\overline{Q} = \frac{Q}{LUh}$$

avec

- Q : le débit ($m^3.s^{-1}$).

La charge supportée par le contact :

$$\bar{W} = \frac{W}{\mu UL} \left(\frac{h}{B} \right)^2$$

avec

- W : la charge portante (W).

Types de rugosités étudiés

Ici, c'est l'orientation des rugosités qui sera à l'étude. Cinq de ces orientations seront examinées, en partant des rugosités transversales jusqu'aux longitudinales :

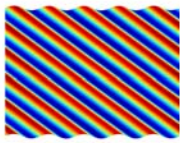
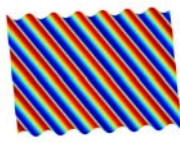
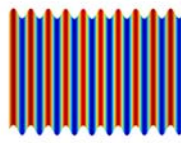
Orientation 1	Orientation 2	Orientation 3	Orientation 4	Orientation 5
				

Tableau 19 : formes de rugosités étudiées.

L'expression générale utilisée pour modéliser les rugosités est la suivante:

$$\delta = \alpha \sin(2\pi_r (\frac{ax + by}{a + b}))$$

avec

- a et b : des coefficients donnant la direction des rugosités et variant entre 0 et 1.
Exemple : $a = 1$ et $b = 0$ correspond à l'orientation 1 (rugosités transversales).

Les lois étudiées

Différentes lois seront étudiées (les mêmes qu'au chapitre 3) par la suite afin de comparer les résultats avec ceux obtenus à partir du modèle de base 'est à dite le modèle Newtonien, ainsi le premier modèle que l'on va présenter sera le modèle Newtonien puis le modèle viscoélastique de type Ree-Eyring. (Les résultats pour le modèle viscoplastique de type Winer sont en annexe 4).

Les résultats homogénéisés seront superposés aux résultats des calculs classiques pour réaliser une analyse directe. Les paramètres comme l'orientation des rugosités, le nombre des rugosités, l'amplitude des rugosité et le module de cisaillement du fluide entre autres varieront afin de quantifier leur influence. Les données communes à tous les calculs sont :

- $h_{\min}(m) = 1^{E-5}$
- $\mu(Pa.s) = 0.05$
- $R(m) = 80^{E-3}$
- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{t_r}{mn} = 3000$
- $\tau_r(Pa) = \mu \times h_{\min} \times t_r \times 2 \times \pi \times R$
- l'amplitude des rugosités est exprimée en microns.

Résultats : Modèle newtonien

Charge supportée par le contact

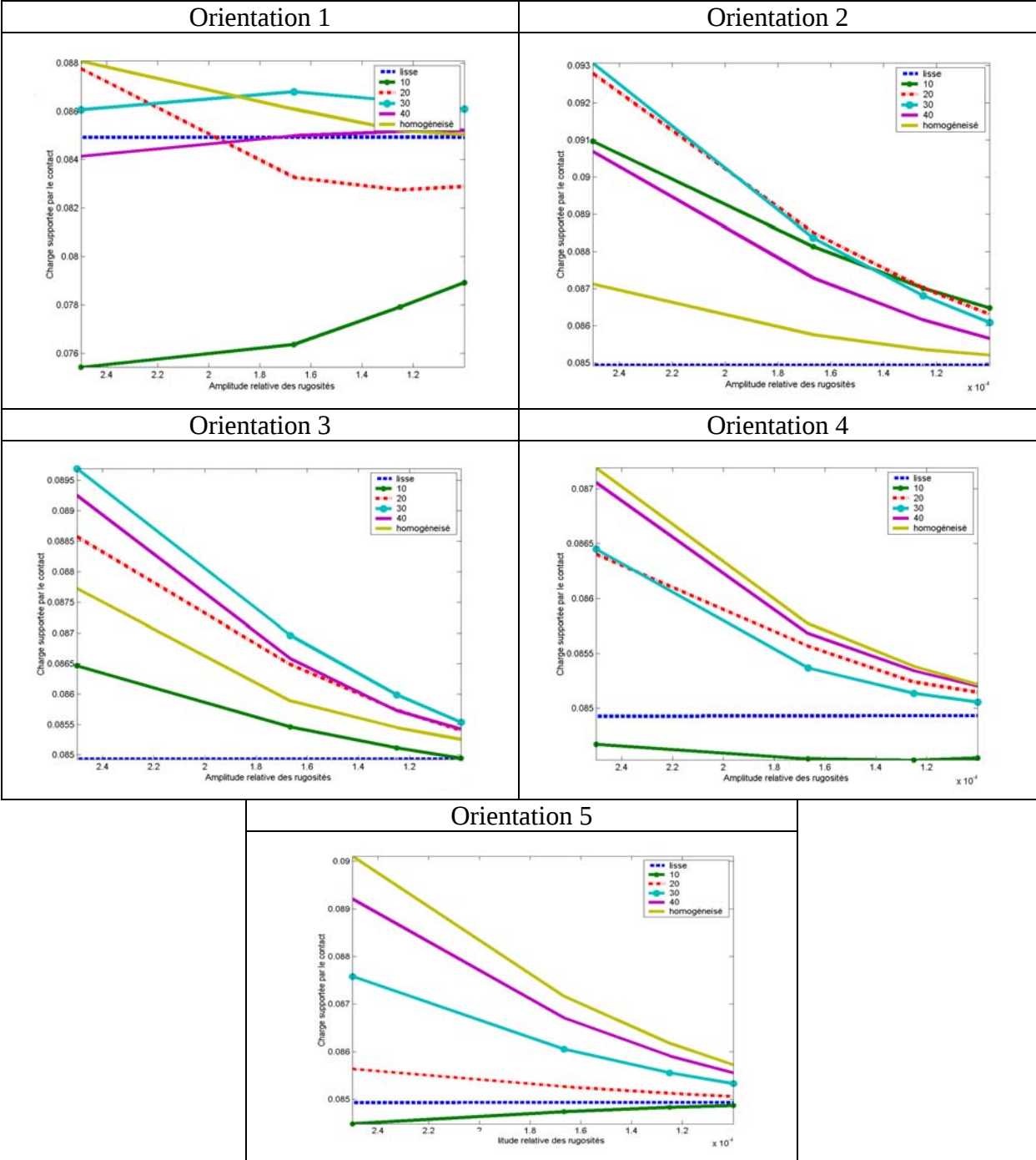


Tableau 20 : Variation de la charge dans le modèle Newtonien

Maximum de pression

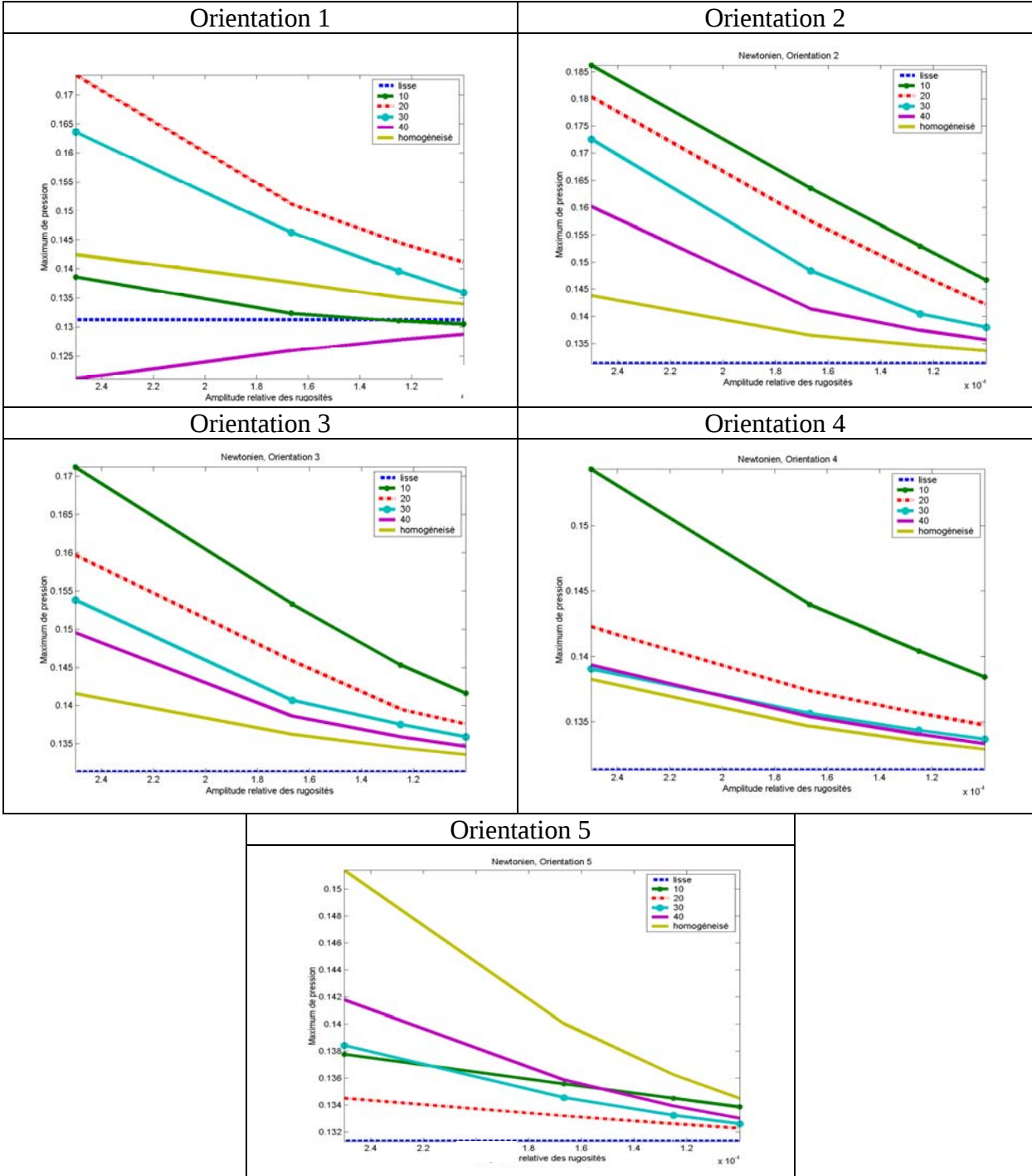


Tableau 21: Variation de la pression dans le modèle Newtonien

Que ce soit pour la charge ou le maximum de pression ,les évolutions de ces deux caractéristiques du contact sont fortement modifiées en fonction de l'orientation des rugosités et les solutions obtenues par la méthode directe convergent toutes vers la solution homogénéisée. Les tendances semblent logiques et permettent de valider la version Newtonienne de l'équation de Reynolds Modifiée non-newtonienne.

Résultats : Modèle viscoélastique de type Ree-Eyring

Charge supportée par le contact

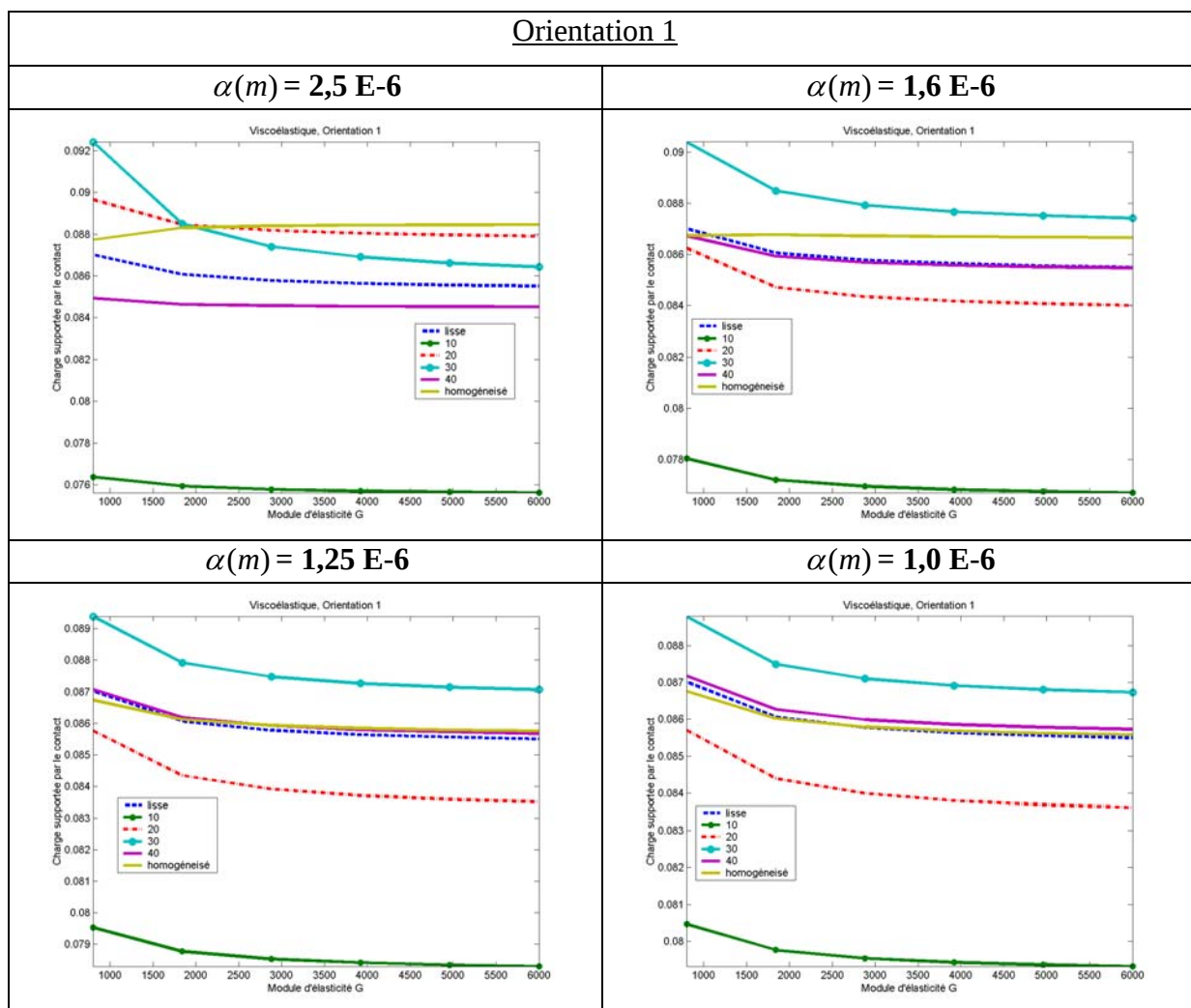


Tableau 22: Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.

Pour l'orientation 1 on peut remarquer que les courbes restent presque parallèles et ce quelque soit le nombre de rugosités et leurs amplitudes. Plus le nombre de rugosités augmente et plus les solutions exactes tendent vers la solution homogénéisée. Le

parallélisme des courbes peut s'expliquer par la direction privilégiée du drainage de l'écoulement. L'augmentation de la charge est logique du fait de l'élasticité du lubrifiant comme constaté par ailleurs [42].

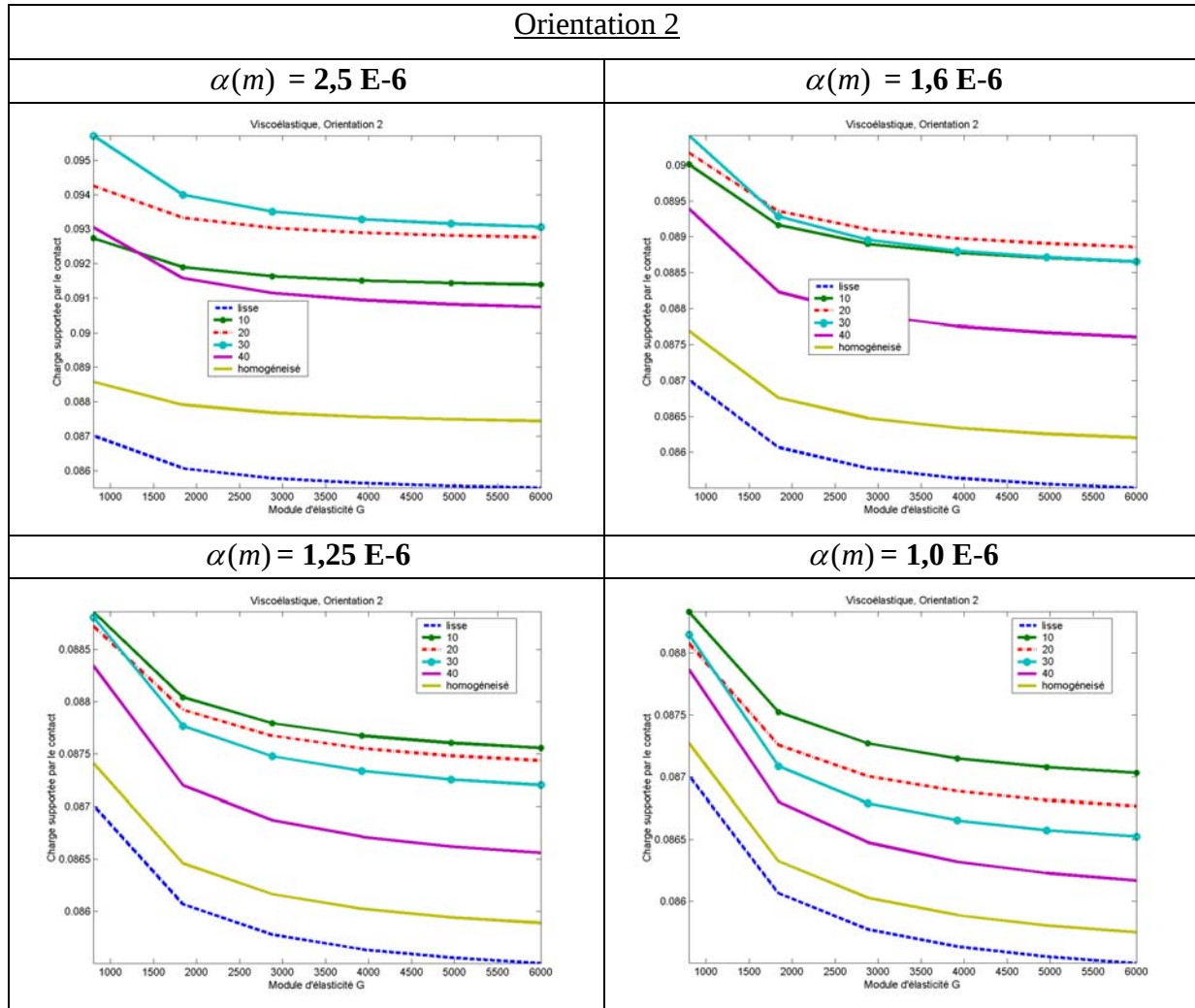


Tableau 23: Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.

L'orientation privilégiée du cas 2 modifie l'allure des courbes. L'anisotropie crée une résistance à l'écoulement ce qui résulte en une augmentation de la charge admissible et augmente l'écart entre les solutions exactes et la solution homogénéisée et ce quelque soit le nombre de rugosités et leurs amplitudes.

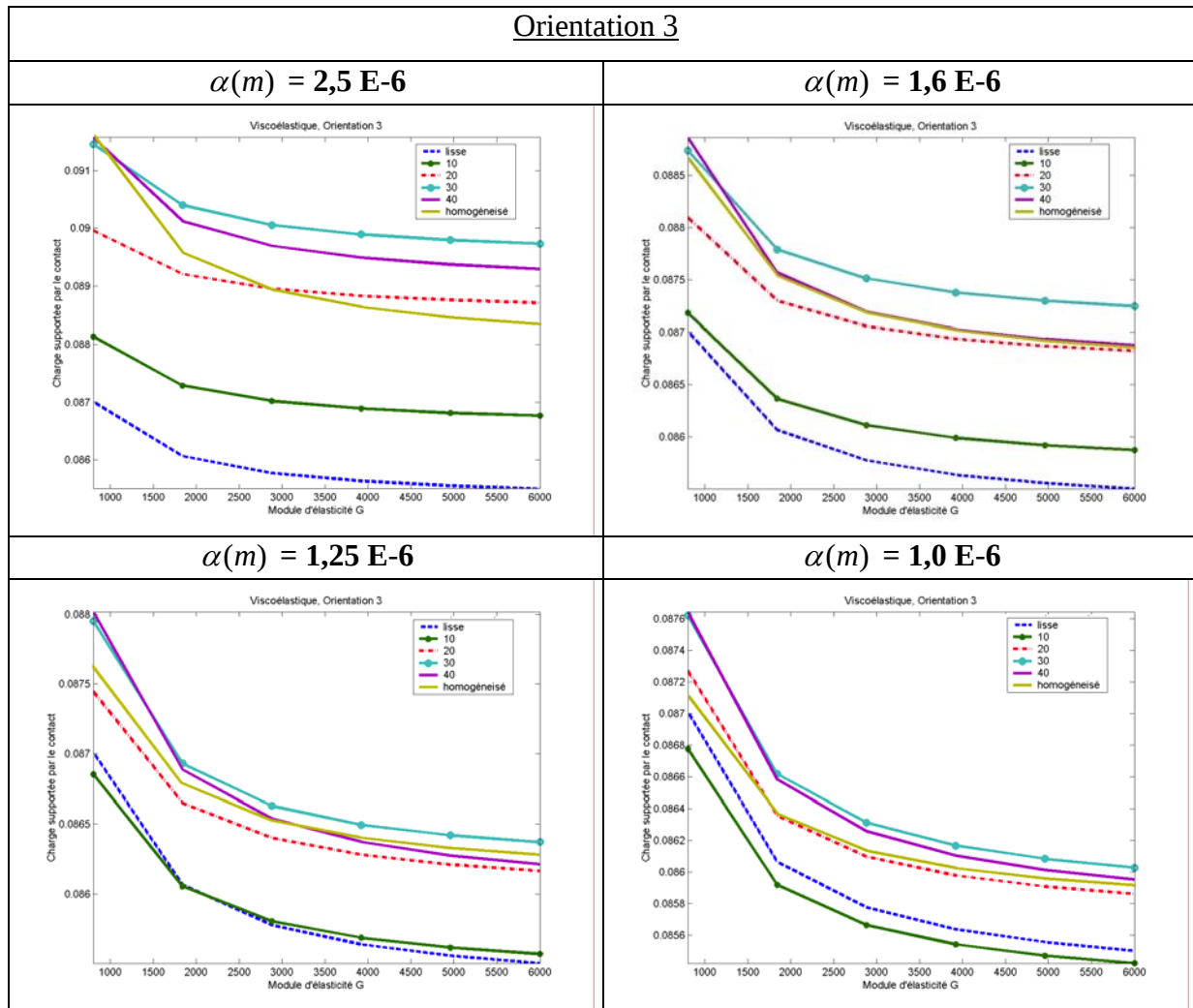


Tableau 24: Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.

Nous faisons les mêmes constatations que précédemment du fait de l'anisotropie de la géométrie. Les solutions exactes convergent bien vers la solution homogénéisée quelque soit le nombre de rugosités et leurs amplitudes mais avec une dispersion ou un écart non négligeable.

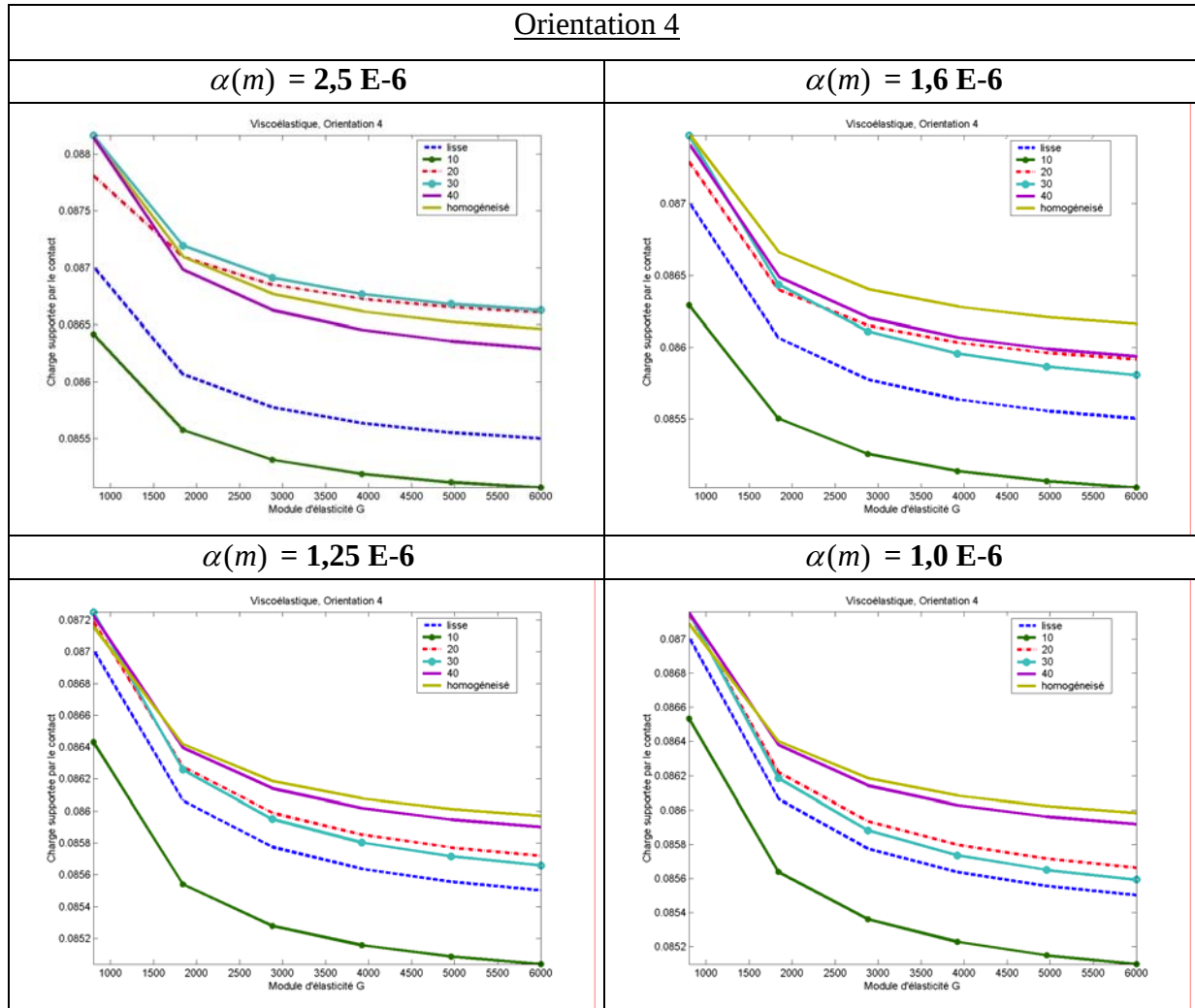


Tableau 25: Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.

Du fait de la faible propriété anisotrope du profil géométrique, les courbes obtenues sont presque parallèles. Il est à noter que l'augmentation des rugosités rapprochent ces courbes de la solution homogénéisée. Les solutions exactes sont largement surestimées par rapport à la solution homogénéisée peut-être du à un faible nombre de points de discrétisation et ce quelque soit l'amplitude de ces rugosités.

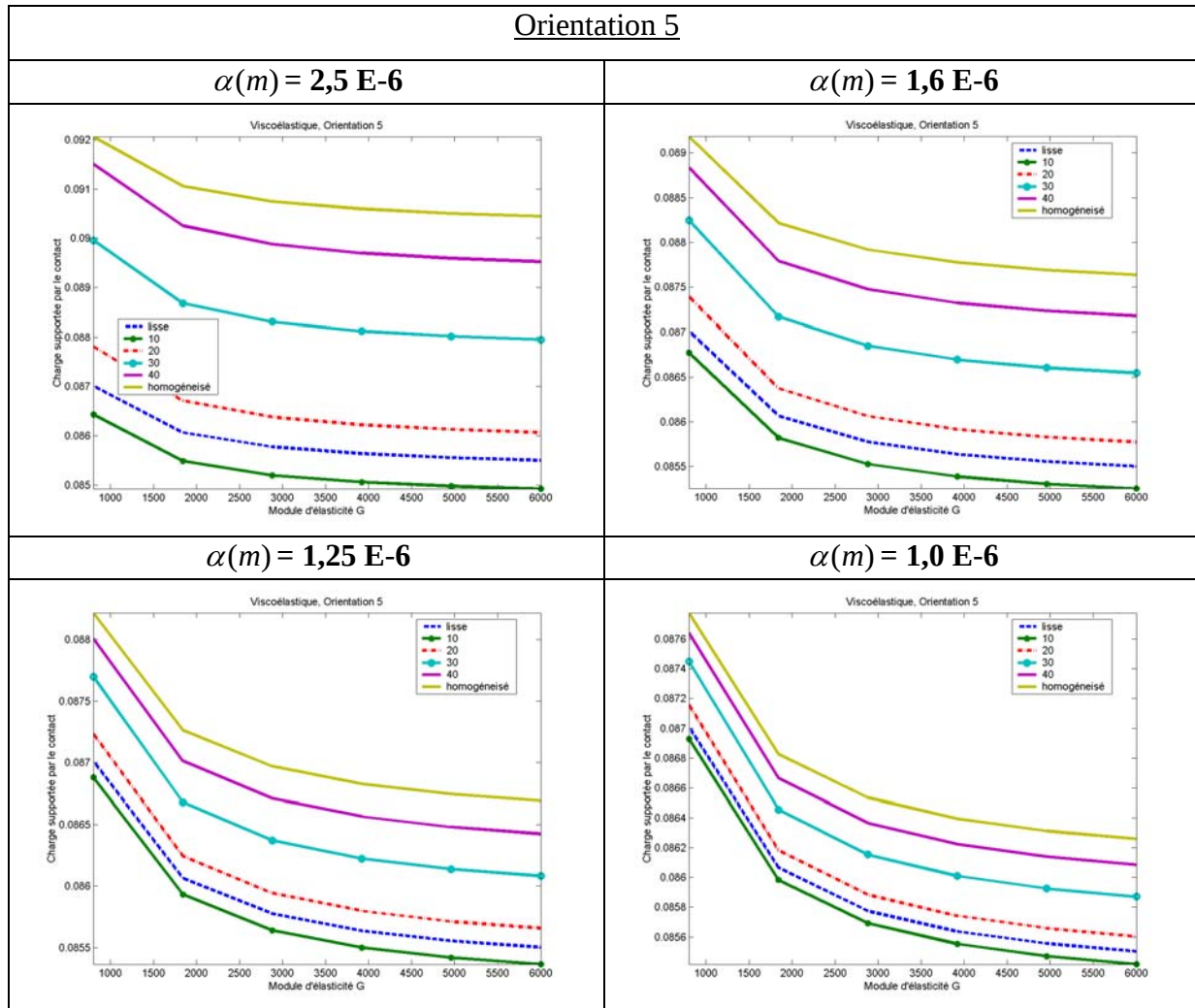


Tableau 26: Variation de la Charge dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.

Comme pour l'orientation 1 on peut remarquer que les courbes restent presque parallèles et ce quelque soit le nombre de rugosités et leurs amplitudes. Plus le nombre de rugosités augmente et plus les solutions exactes tendent vers la solution homogénéisée. Le parallélisme des courbes peut s'expliquer par la direction privilégiée de la résistance à l'écoulement. L'augmentation de la charge est logique du fait d'une part à l'élasticité du lubrifiant comme constaté par ailleurs [42] et à l'orientation des rugosités orthogonales à la direction du mouvement.

Débit axial

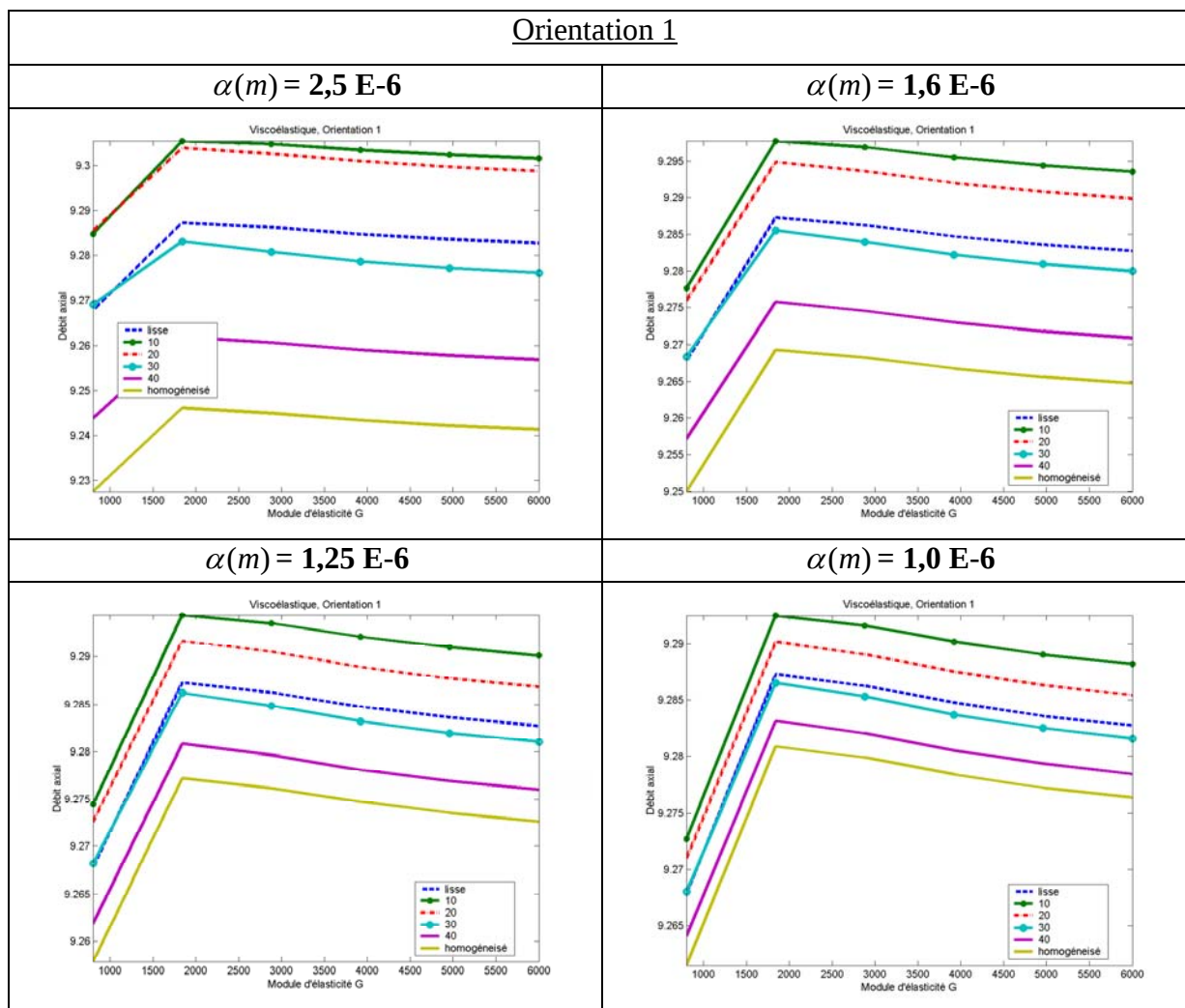


Tableau 27: Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.

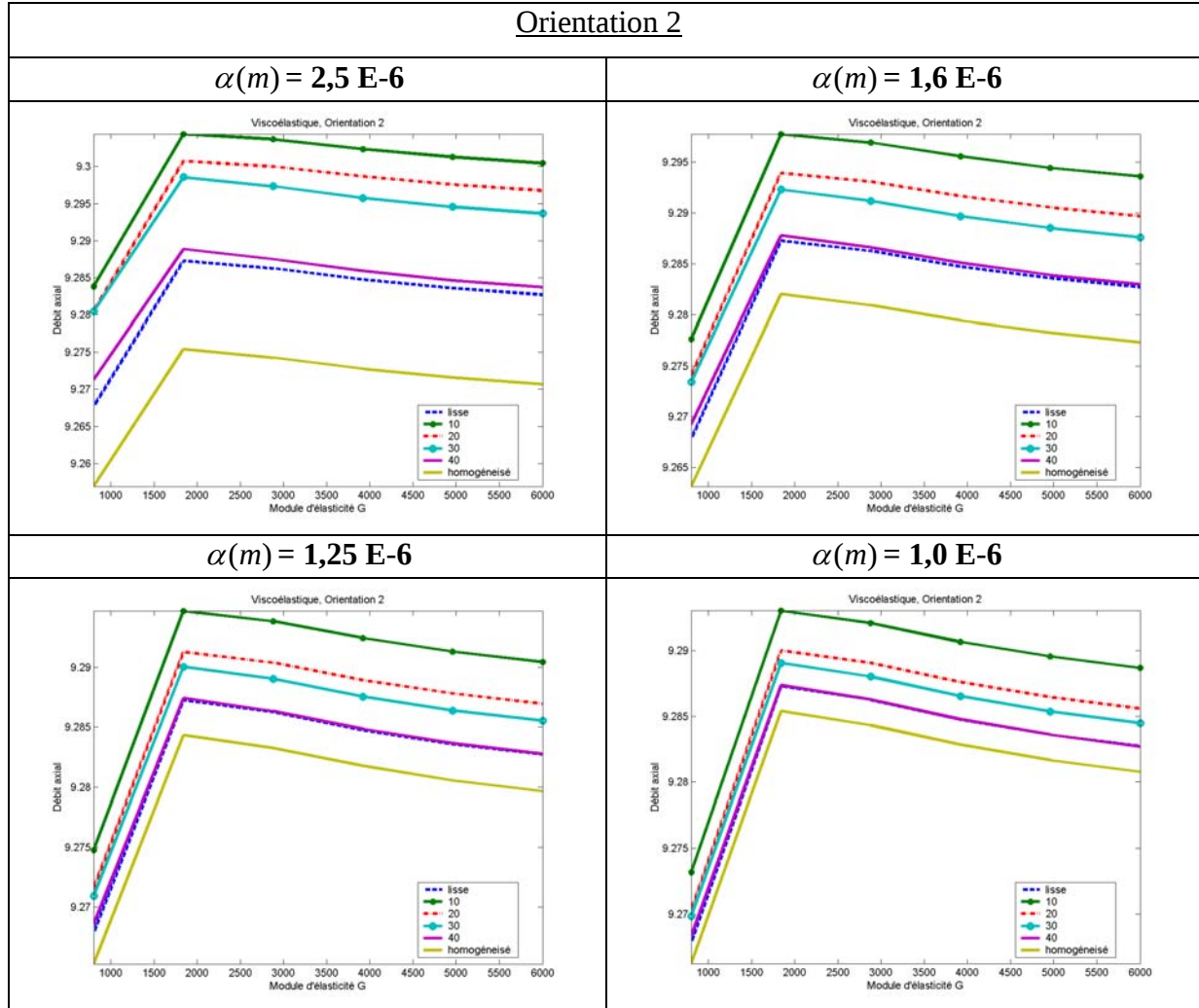


Tableau 28: Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.

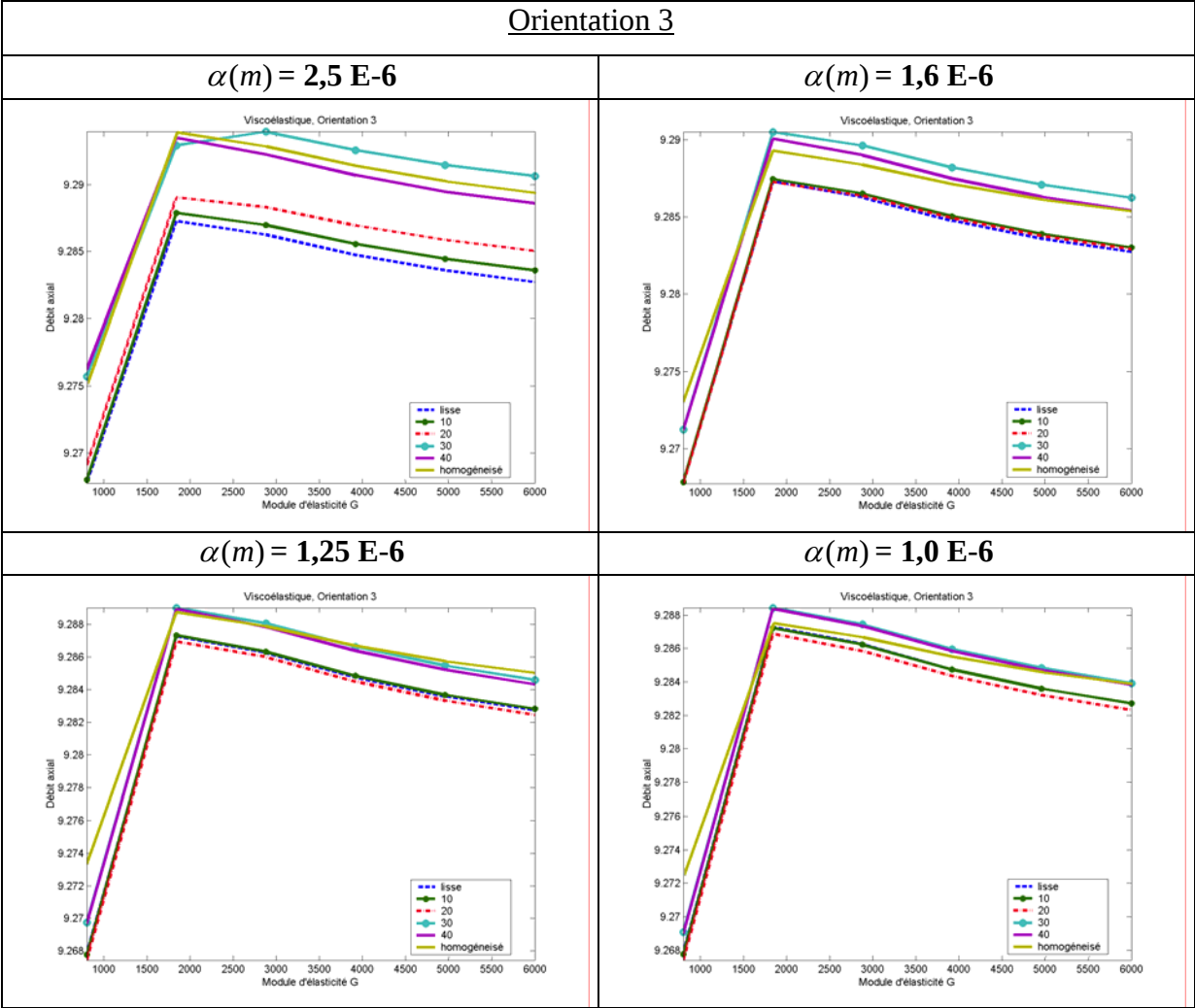


Tableau 29: Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.

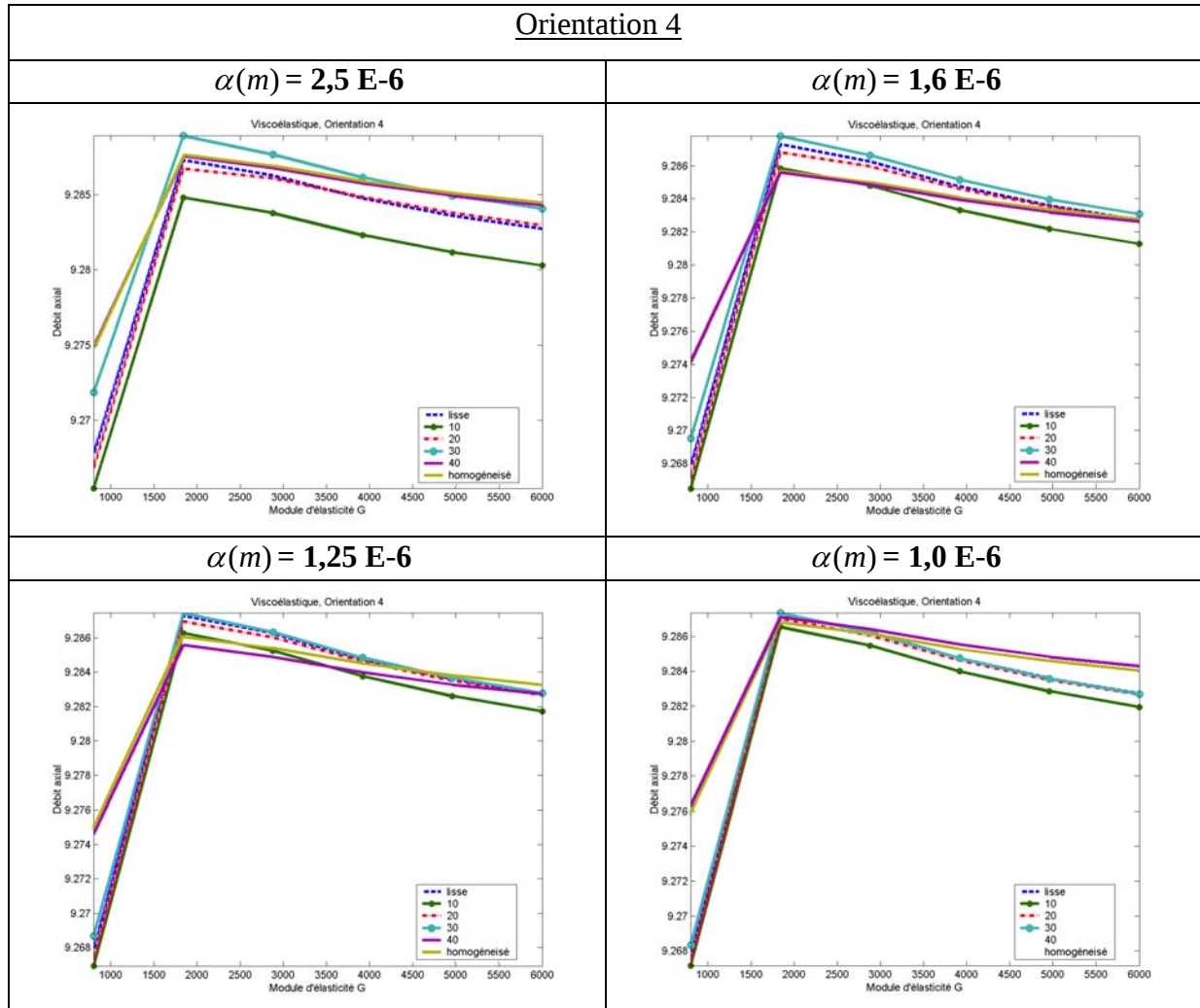


Tableau 30: Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.

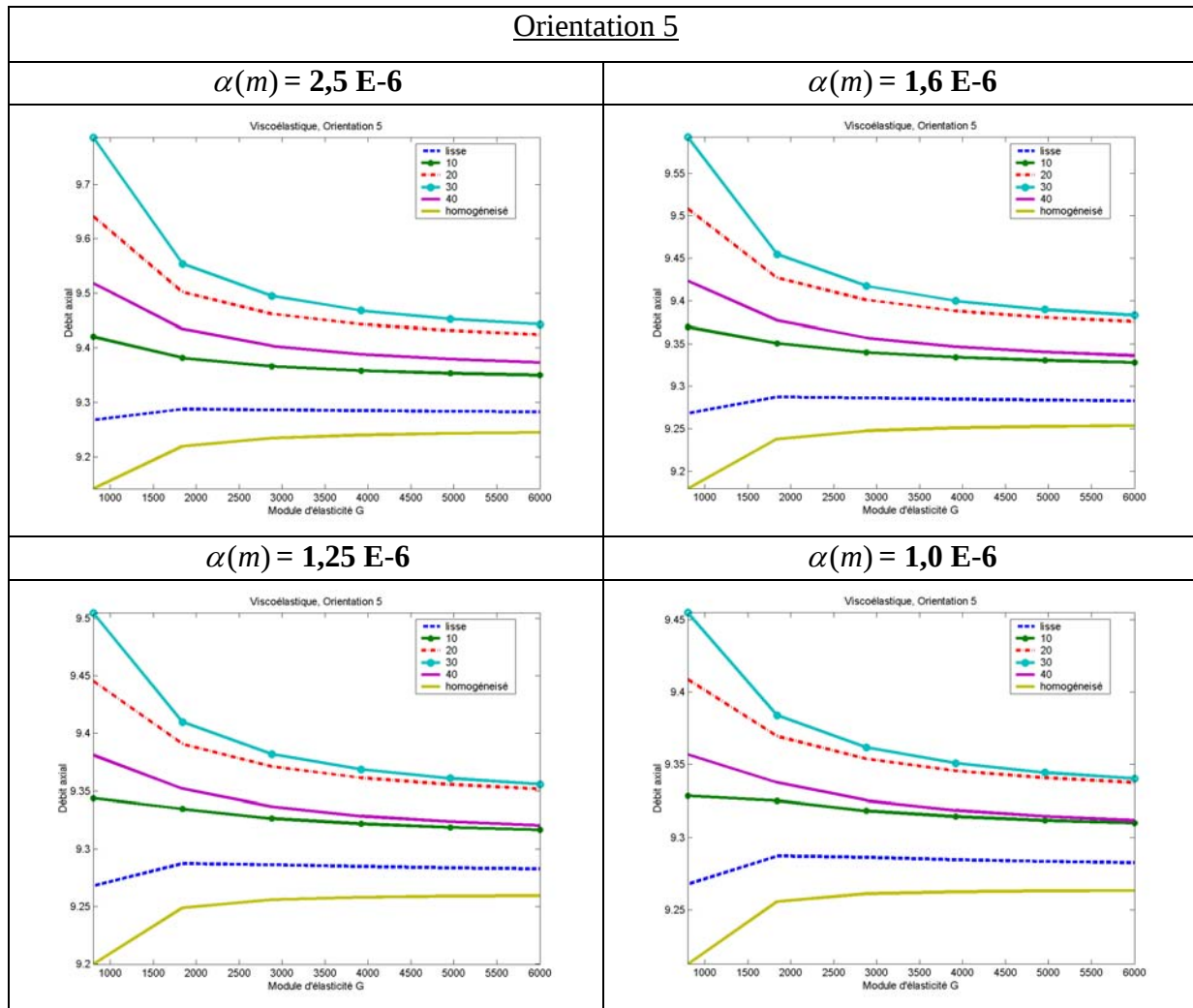


Tableau 31: Variation du débit axial dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.

Quelque soient les orientations des rugosités ainsi que leurs amplitudes les courbes obtenues restent parallèles. Il faut rappeler que le débit est obtenu par intégration du champ de vitesses à travers l'épaisseur du film et que l'orientation des rugosités ne doit jouer que peu d'influence ce qui peut expliquer le parallélisme des courbes. L'accroissement du débit à l'entrée du contact est dû essentiellement aux effets convectifs introduits par les différentes dérivées multiplicatives du terme élastique au fur et à mesure de son augmentation. L'augmentation de G fait décroître et même disparaître les effets élastiques et l'on se retrouve dans le cas visqueux classique. On peut noter que les solutions exactes convergent toutes vers la solution homogénéisée.

Force de frottement

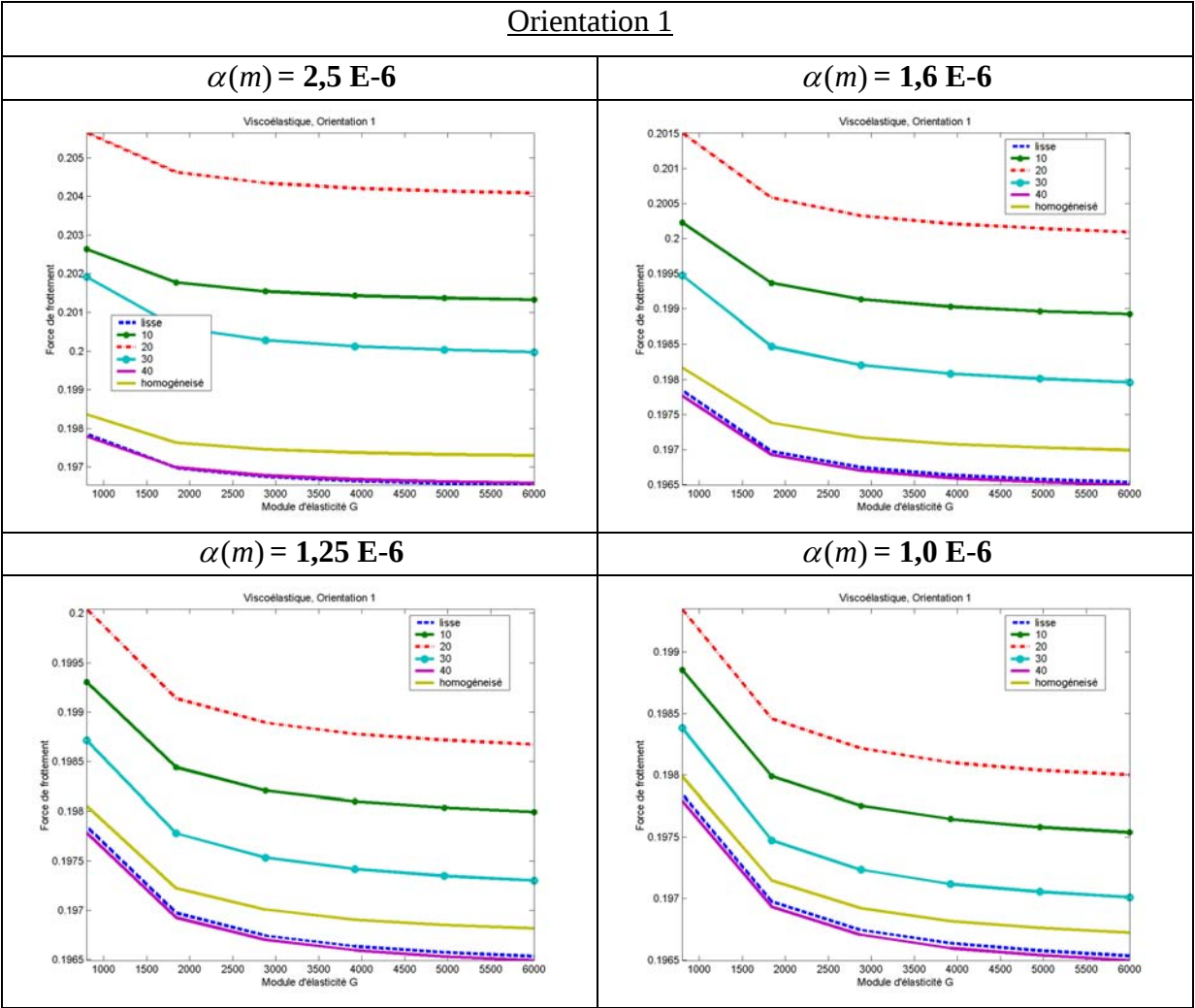


Tableau 32: Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.

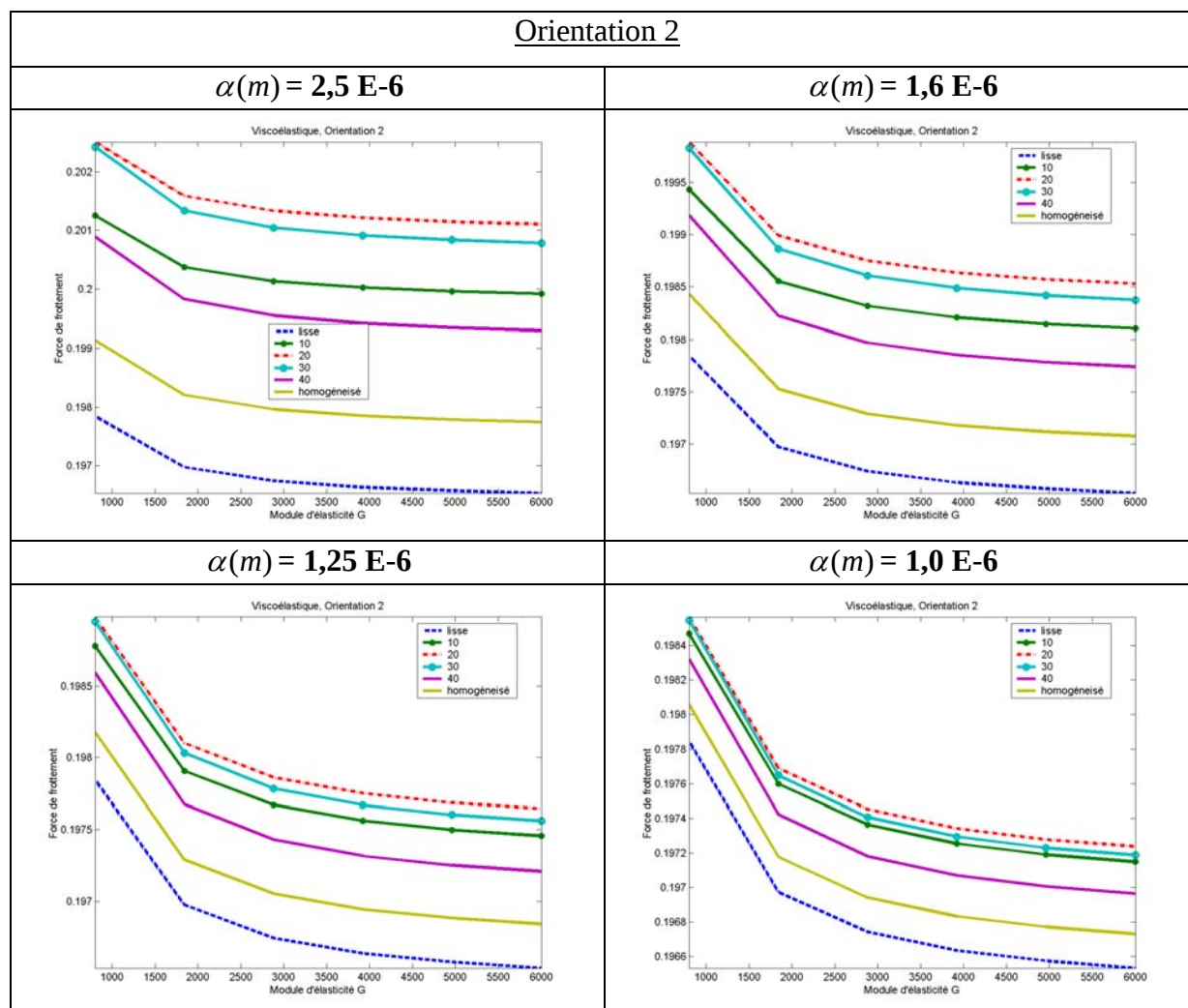


Tableau 33: Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.

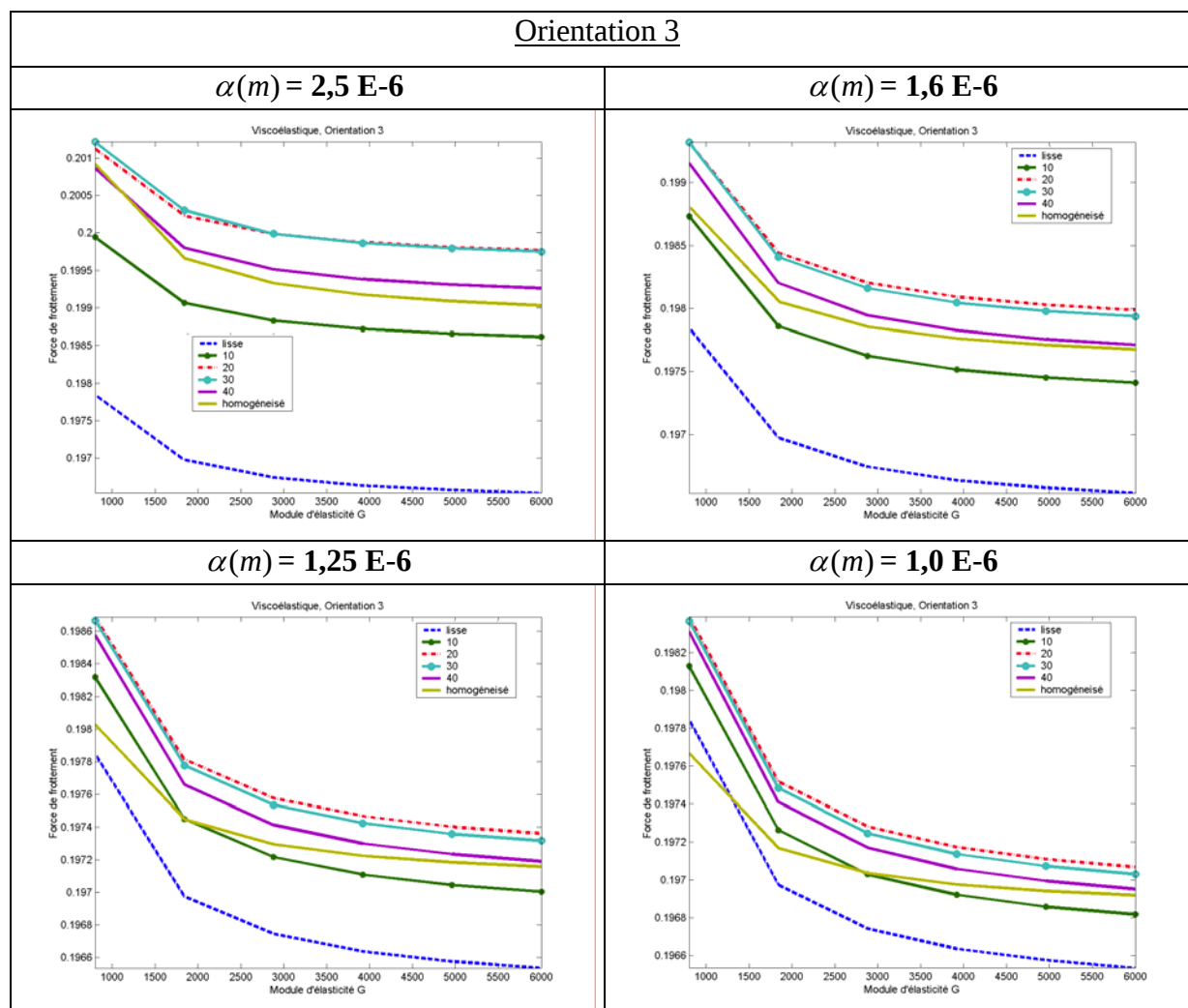


Tableau 34: Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.

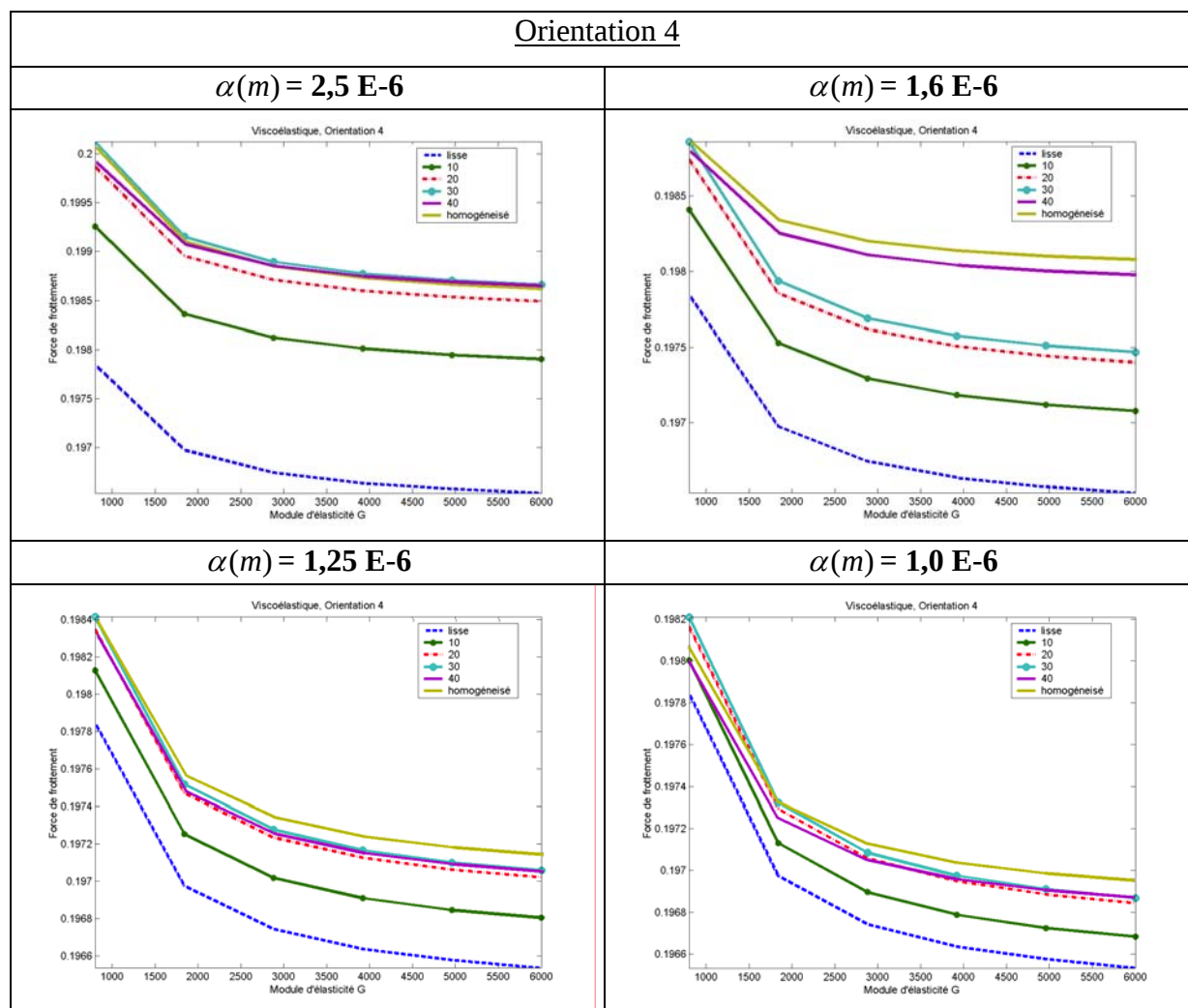


Tableau 35: Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.

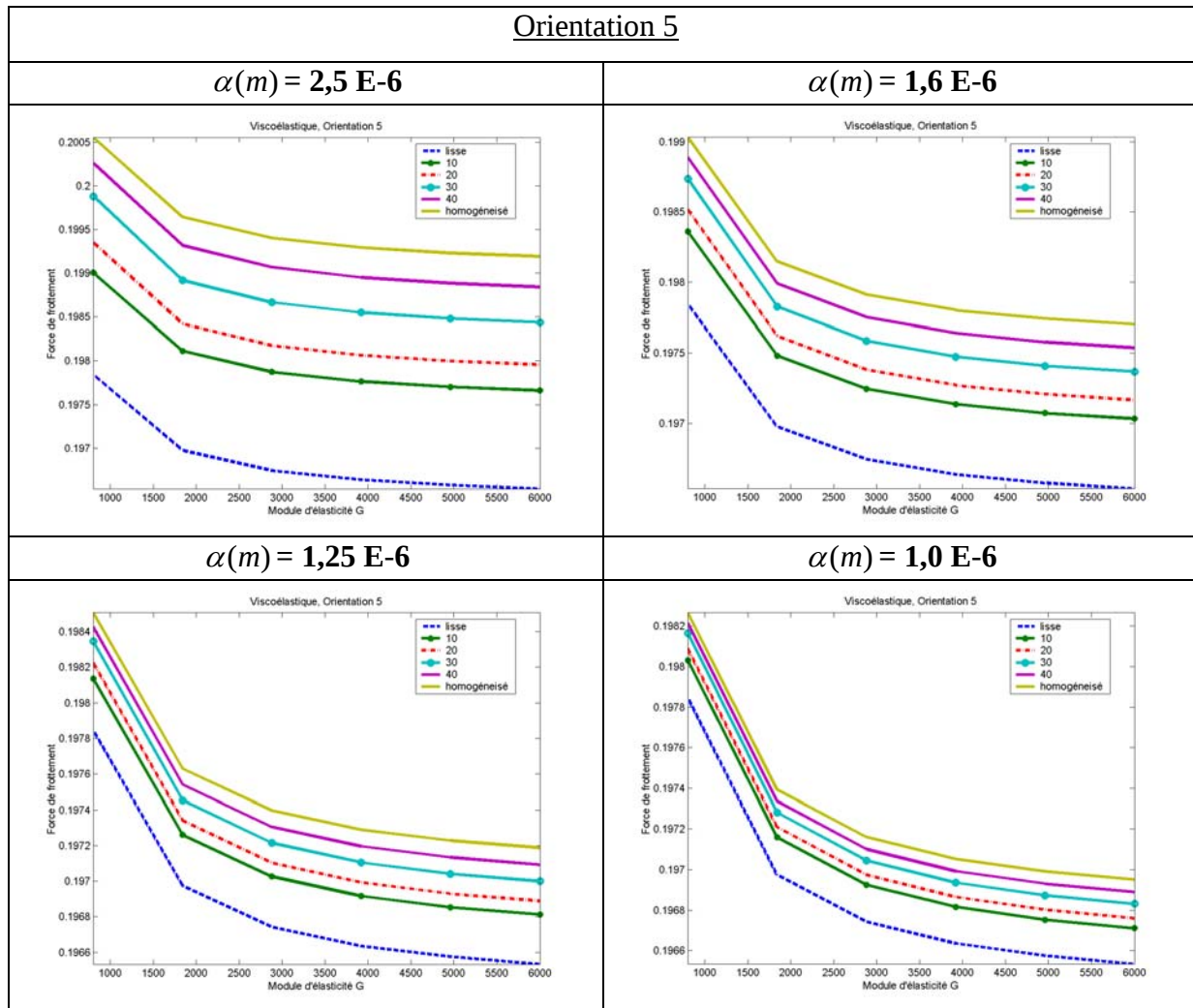


Tableau 36: Variation de la force dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.

Quelque soient les orientations des rugosités ainsi que leurs amplitudes les courbes obtenues restent parallèles. Il faut rappeler que la force de frottement est obtenue par intégration de la contrainte de cisaillement sur la surface mobile et que l'orientation des rugosités ne doit avoir que peu d'influence ce qui peut expliquer le parallélisme des courbes. L'augmentation de la force de frottement à l'entrée du contact est due essentiellement à la résistance de l'écoulement dû à l'élasticité du fluide. Cette résistance disparaît bien entendu lorsque le module de cisaillement augmente c'est à dire lorsque que l'on tend vers une situation purement visqueuse.

Maximum de pression

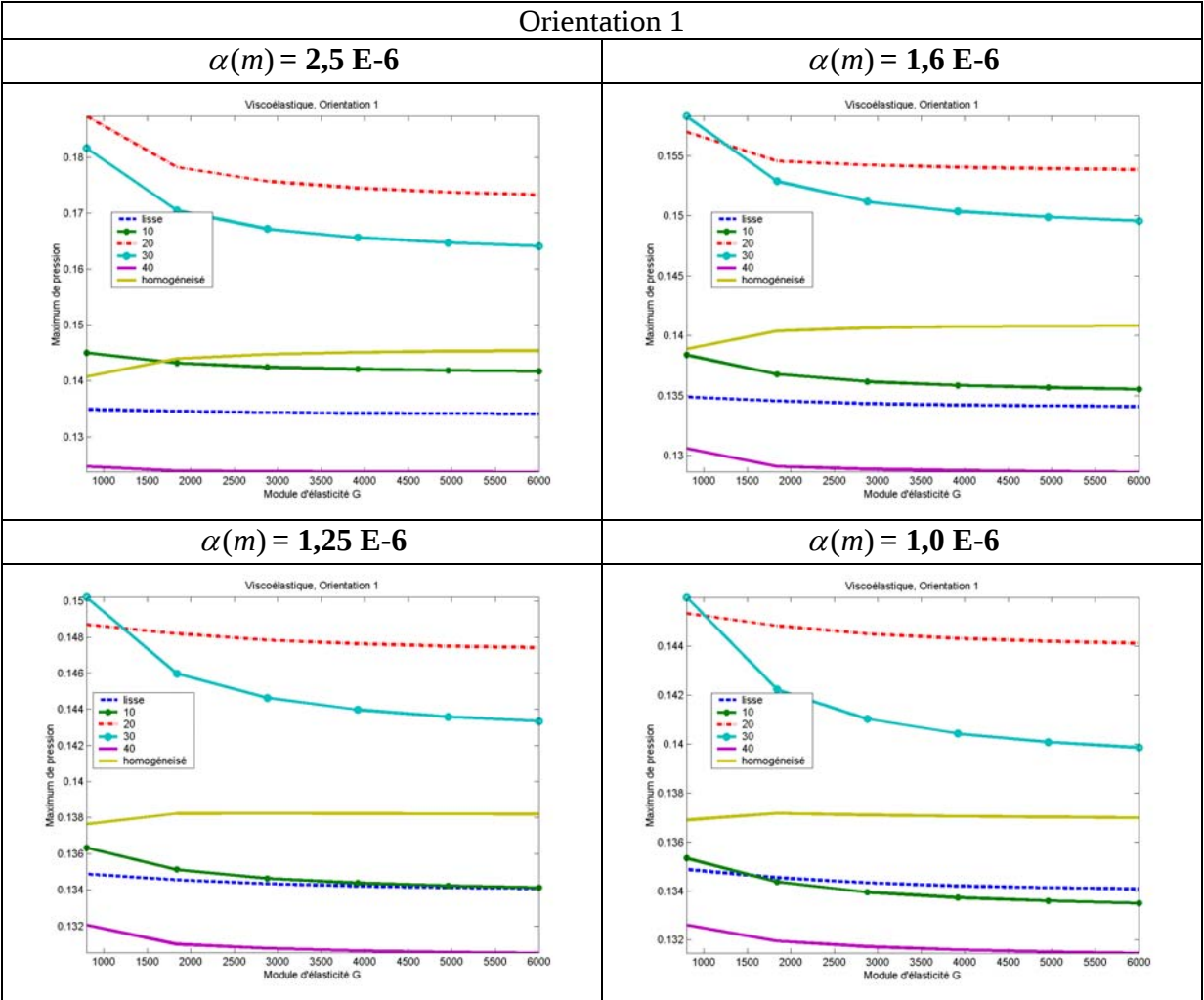


Tableau 37: Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 1.

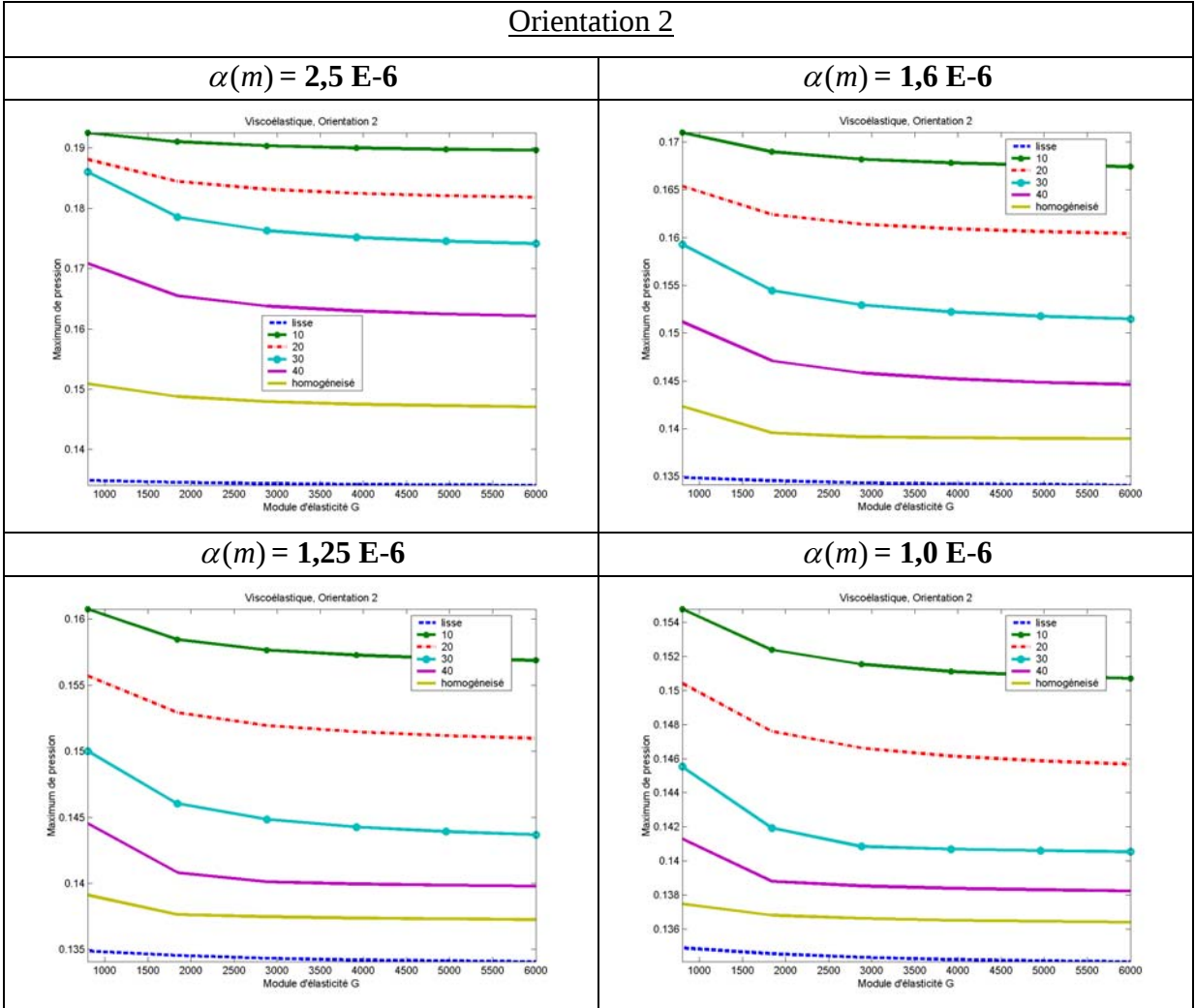


Tableau 38: Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 2.

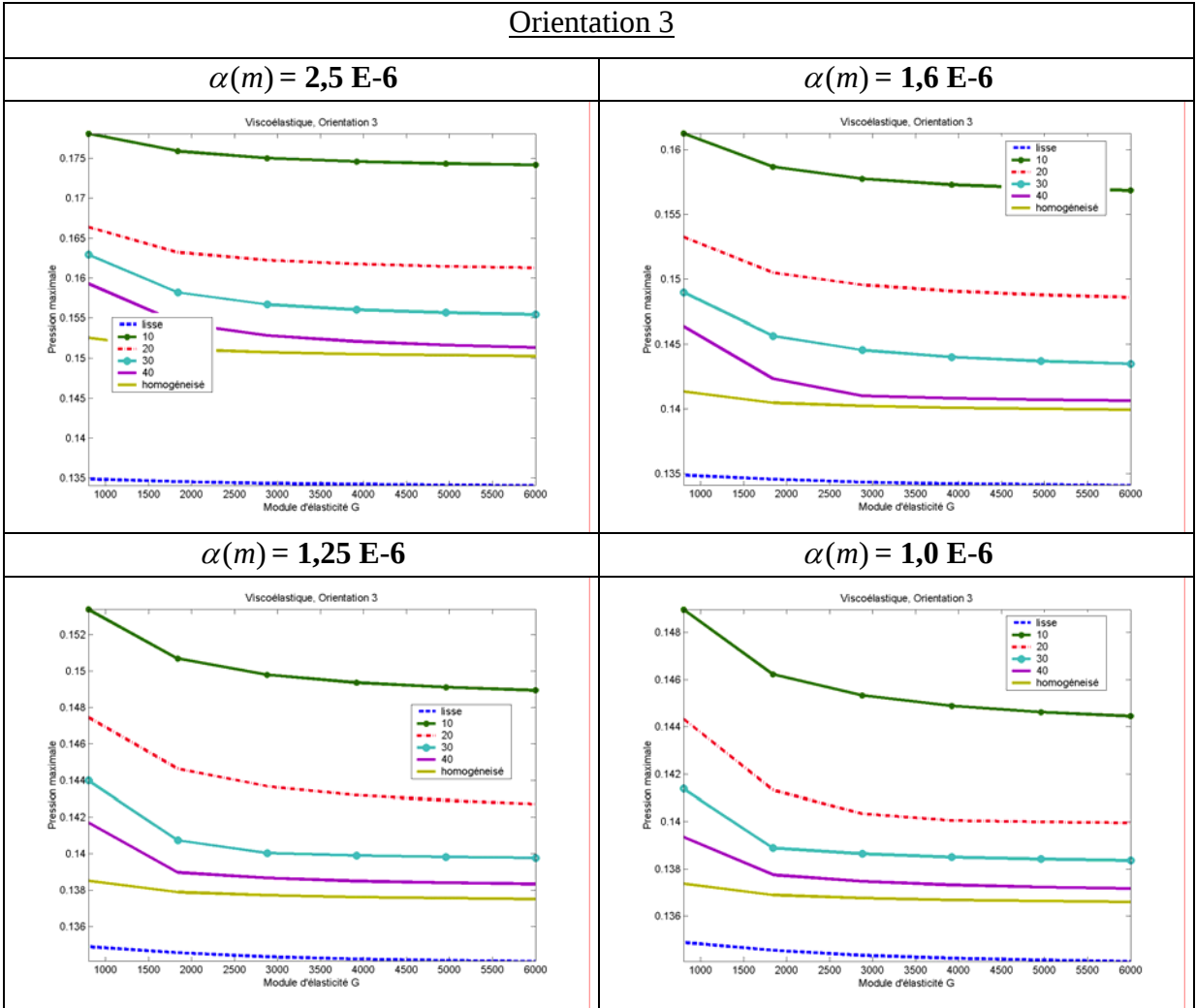


Tableau 39: Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 3.

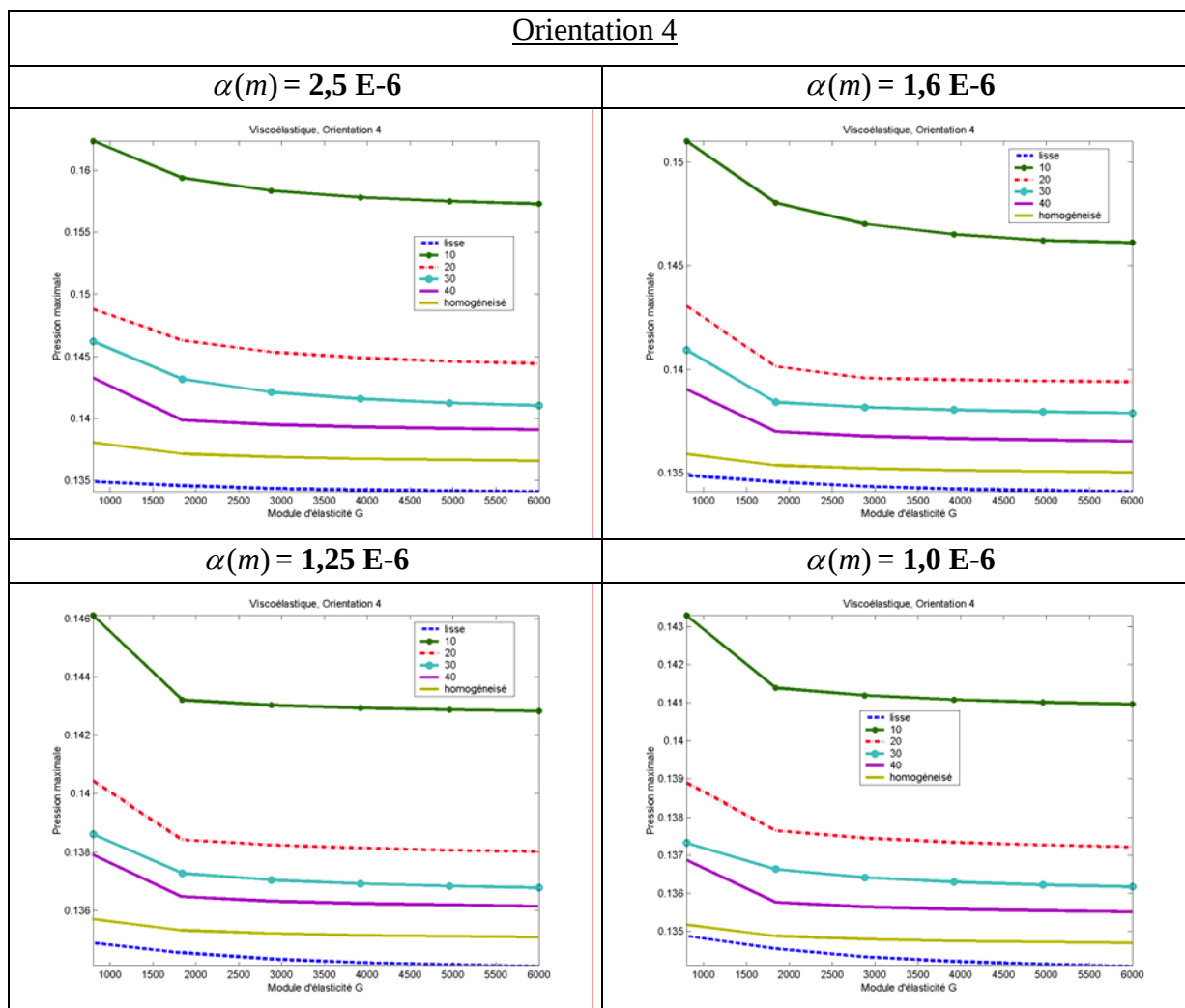


Tableau 40: Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 4.

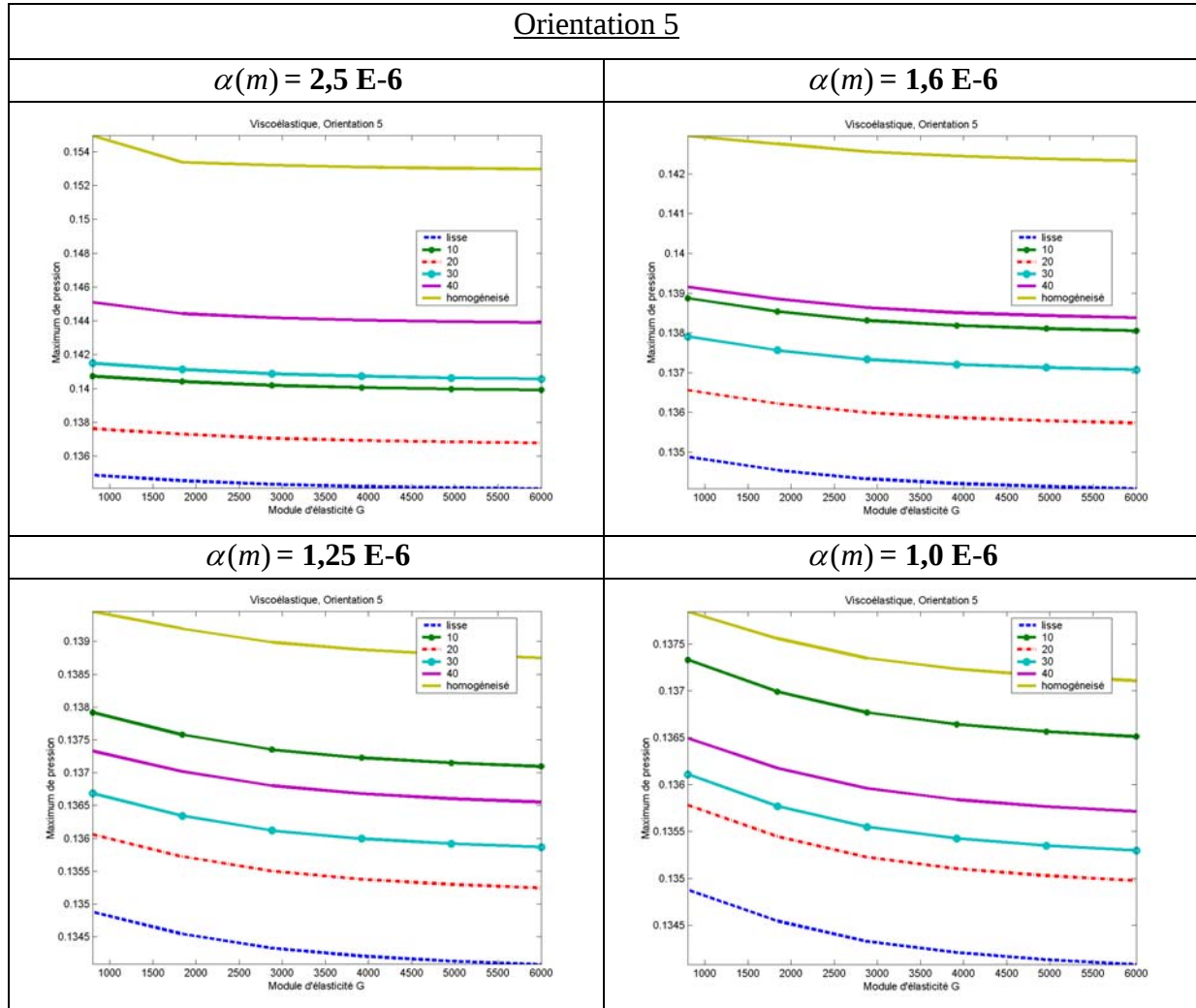


Tableau 41: Variation de la pression dans le modèle viscoélastique, Orientation 5.

En ce qui concerne les maximums de pression nous pouvons faire les mêmes constatations. Les courbes sont homothétiques et les solutions exactes tendent toutes vers la solution homogénéisée. Un maximum important est à observer pour des faibles valeurs de G (on rappelle que c'est le facteur $\frac{1}{G}$ qui est le facteur multiplicatif des termes dérivées des contraintes par rapport au temps) ; Lorsque G augmente la partie élastique perd de son importance et l'on se retrouve dans une situation d'écoulement visqueux classique.

V CONCLUSION

Après avoir validé la théorie 'non Newtonien' et la méthode de l'homogénéisation, notre objectif dans ce chapitre était de ressortir toute l'originalité de notre travail en homogénéisant l'équation de Reynolds pour un fluide non Newtonien.

Les calculs sont fastidieux et longs, mais nous ont permis d'avoir toutes les équations nécessaires à la résolution du problème homogénéisé. Les résultats obtenus ont été discutés et comparés avec les méthodes directes de calcul, et nous semblent valables pour une validation définitive de cette méthode dite d'homogénéisation.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'étude entreprise dans cette thèse visait à mettre en place un nouveau modèle composé d'une partie analytique et d'une partie numérique utilisant de nouvelles techniques d'analyse dite d'homogénéisation et pouvant prendre en compte la géométrie locale et un comportement non Newtonien des fluides.

Pour ce faire, dans le premier chapitre, une bibliographie a été entreprise pour nous permettre de situer notre problème dans le domaine de la lubrification et voir ce qui a été déjà fait dans le domaine d'analyse de contact prenant en compte la géométrie locale. Ainsi, trois types d'analyse ont été répertoriés : l'analyse stochastique, l'analyse déterministe et l'homogénéisation. Notre choix s'est porté sur l'homogénéisation car étant celle qui est la plus rigoureuse et la plus représentative dans le cas de rugosités anisotropes.

Une fois situés le problème ainsi que le choix des moyens de travail, l'homogénéisation a été appliquée à l'équation de Reynolds classique dans le deuxième chapitre. Ainsi, en partant des hypothèses de base et des équations de Navier Stokes réduites, l'équation de Reynolds a été établie. Les étapes de l'homogénéisation de cette équation ont été exposées et détaillées. La géométrie générale et locale de notre contact ont été définies. Les résultats de l'homogénéisation ont été comparés avec ceux obtenus d'une manière directe, cette analyse nous a permis de valider cette méthode.

Dans le chapitre 3, la première partie a été consacrée au comportement non Newtonien des fluides obéissant à certains types de réactions aux sollicitations. On a pu constater que le comportement du lubrifiant peut être Newtonien, visqueux, viscoélastique ou viscoélastique-plastique. La non-linéarité du terme visqueux peut se mettre sous différentes formes. En partant de ces lois rhéologiques et des équations de base de la mécanique des milieux continus appliquées aux films minces, une nouvelle équation de Reynolds Modifiée dite non Newtonienne a été présentée. La résolution de cette équation a été faite dans un premier temps d'une manière directe et les résultats étudiés pour extraire

les paramètres influents de la géométrie et de la rhéologie. L'analyse de ces résultats a permis de valider la théorie non Newtonienne.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, l'homogénéisation a été appliquée à la nouvelle équation de Reynolds Modifiée, la démarche a été exposée et les résultats commentés. Certes les calculs sont assez fastidieux, mais nous ont amené à trouver toutes les équations pour la résolution du problème homogénéisé. Une étude paramétrique a été menée afin de mettre en évidence l'influence des paramètres tels que la géométrie locale, la loi de comportement du fluide. L'analyse des résultats nous a permis de valider définitivement la méthode d'homogénéisation pour obtenir les caractéristiques importantes du contact. C'est à notre connaissance la première fois que cette méthode est appliquée aux fluides non-Newtoniens.

Les logiciels mis en place pour la résolution des problèmes de contact sont des logiciels généraux et peuvent être utilisés pour différentes géométries telles que les butées, les paliers, les engrenages,.... Ils peuvent aussi résoudre les lois de comportement rhéologiques de type Maxwell en partant initialement d'un comportement Newtonien, pour traiter ensuite un comportement visqueux, viscoélastique ou viscoélasto-plastique. Plusieurs types de rugosités peuvent être prises en compte (rugosités quelconques, quelconques, anisotropes, transversales ou longitudinales) et leurs orientations peuvent varier d'une manière quelconque en partant d'une direction longitudinale jusqu'à une direction transversale.

De nombreuses perspectives sont envisageables :

- la prise en compte de la variation de la pression et de la température dans le contact, d'où la nécessité de la résolution de l'équation de l'énergie dans le film et de la chaleur dans les massifs en contact,
- la prise en compte de la déformation des massifs en contact,
- une étude en régime non stationnaire pour illustrer les phénomènes de démarrage-arrêts,
- Une étude expérimentale qui permettrait de valider complètement le modèle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]: BOU-SAID B., Document de synthèse pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches, spécialité mécanique - Lyon : INSA , 1993 . - 77 p. + 129 p. d'annexes.
- [2]: TZENG S.T., SAIDEL E., , “Surface Roughness Effect on Slider Lubrification”, ASLE Transactions, 1967, Vol. 10, N°3, p. 334-337.
- [3]: CHRISTENSEN H., TONDER K. “The Hydrodynamique Lubrification of Rough Bearing Surfaces of Finite Width”, Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, July 1971 ,Vol. 93 Ser F, N° 3, P. 324-330.
- [4]: PATIR N., CHENG H. S., “Effect of Surface Roughness Orientation on Central Film-Thickness in EHD Contact”, in Proc. 5th Leeds-Lyon Symp. Trib., Lyon, (1978a), p. 15-21
- [5]: BOEDO S., BOOKER J.F. “Surface Roughness abd Structural Inertia in a Mode-Based Mass-Conserving Elastohydrodynamic Lubrification Model”, Transactions-of-the-ASME - Journal of Tribology, Jul. 1997, Vol. 119, N° 3, p. 449-455.
- [6]: ZHANG C., CHENG H.S. “Transient Non-Newtonien Thermohydrodynamic Mixed Lubrification of Dynamically Loaded Journal Bearing”, Transactions-of-the-ASME - Journal of Tribology, Jan. 2000, Vol. 122, N°1, p. 156-161.
- [7]: WANG P., KEITH T.G. “Combined Surface Roughness of Dynamically Loaded Journal Bearings”, Tribology Transactions, 2002, Volo. 45, N° 1, p 1-10.
- [8]: ELROD JR. “A Cavitation Algorithm”, Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, July 1981, Vol. 103, N° 3, p. 350-354.
- [9]: VIJAYARAGHAVAN D., KEITH JR “Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm”, Tribology Transactions, Apr. 1989, Vol. 32, NO 2, p. 225-233.

- [10]: PATIR N., CHENG H-S. "An Average Flow Model For Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, Jan. 1978, Vol. 100, N° 1, p.12-17.
- [11]: PATIR. N, CHENG H-S. "Application of Average Flow Model to Lubrication Between Rough Sliding Surfaces", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, April 1979, Vol. 101, N° 2, p. 220-230.
- [12]: CHRISTENSEN H., TONDER K. "The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearing", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology. July 1980, Vol. 102, N0 3, p. 368-73.
- [13]: WU C., ZHENG L. "An Average Reynolds Equation For Partial Film Lubrication With a contact Factor", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, Jan. 1989, Vol. 111, N°1, p. 188-191.
- [14]: LEUNG M., HSIEH C.K., GOSWANI D.Y. "Application of Boltzmann Statical Mechanics in the Validation of the Gaussian Summit Height Distribution in Rough Surfaces", Transactions-of-the-ASME.- Journal of Tribology, 1997, Vol. 119, N°3, p. 846-850.
- [15]: PEKLENIK J. "New Development in Surface Charaterization and Measurment by Means of Random Process Analysis", Proc.Inst. Mech. Engrs., 1967-1968, Vol.182, Part 3K, p. 108-111.
- [16]: KWEH C.C., EVENS H.P., SNIDLE R.W. "Micro-Elastohydrodynamic Lubrification of an Elliptical Contact With Transverse and Three-Dimensinal Sinusoidal Roughness", Transactions-of-the-ASME.- Journal of Tribology, Oct, 1989, Vol. 111, N° 4, p. 577-584.
- [17]: KWEH C.C., PATCHING M.J., EVANS H .P., SNIDLE R.W. "Simulation of Elastohydrodynamic Contacts Between Rough Surfaces", Transactions-of-the-ASME.- Journal of Tribology, Jul, 1992, Vol. 114, N° 3, p. 412-419.
- [18]: VENNER C.H, NAPEL W.E. "Surface Roughness Effects in a EHL Line Contact", Transactions-of-the-ASME.- Journal of Tribology, Jul. 1992, Vol. 114, N° 3, p. 616-622.

- [19]: GREENWOOD J.A.,MORALES, ESPEJEL G.E., “The Behaviour of Tranverse Roughness in EHL Contact”, Proceedings-of-the-Institution-of-Mechanical-Engineers, Part-Journal-of-Engineering-Tribology. 1994, Vol. 208, N° J2, p.121-32.
- [20]: AI X., CHENG H.S. “Transient EHL Analysis for Lie Contacts With Measured Surface Roughness Using Multigrid Technique”, Transactions-of-the-ASME, Journal of Tribology, July 1994, Vol. 116, N° 3, p. 549-558.
- [21]: ZHU D., AI X., “Point Contact ehl Based on Optically Measured Three-Dimensional Rough Surfaces”, Transactions-of-the-ASME, Journal of Tribology, Jul. 1997, Vol. 119, N° 3, p. 375-384.
- [22]: BUSCAGLIA G., JAÏ M., “A New Numerical Scheme For Non Uniform Homogenized Problems : Application to the Non Linear Reynolds Compressible Equation”, Math. Prob. In Engin., 2000, Vol 7, p. 355-378.
- [23]: NICOLAS P. D., FRENE J., “Lubrification hydrodynamique”, Paris, Editions EYROLLES, 1990. 488 p.
- [24]: VICHARD J.P., GODET M., “Hydrodynamics of lubricated contacts”, Revue de l’Institut Français du Pétrole et Annale des Combustibles Liquides, Hors-série, 1966, 21(7-8), p. 1088-1130.
- [25]: FORSYTHE G. E., WASOF W. R. “Finite difference methods for partial differential equations”, New York : John Willey and Sons, Inc., 1960. X-444 p.
- [26]: CARRIER G. F., PEARSON C. E., “Partial differential equations”, [New York : Academic Press](#), 1976, xi, 320 p.
- [27]: SERVAES H., “Contribution à l’étude de la lubrification du coussinet complet de largeur fini”, Publication des Sciences Appliquées de l’Université de Liège, 1967, n°4, p. 99-102.
- [28]: FRENE J. “Régime d’écoulement non laminaire en film mince, application aux paliers lisses”, Thèse de Doctorat d’Etat ès Sciences Physiques - Université Claude Bernard de Lyon, 1974, 161 p.
- [29]: LEGRAS J. “Méthodes et techniques de l’analyse numérique”, Paris : Dunod, 1971. XVI-324 p.
- [30]: WALTHER C. “The viscosity-temperature diagram”, Petroleum Z. 1930 Vol. 26, p. 755-757.

- [31]: FRENE J. «Lubrification hydrodynamique des paliers des machines tournantes : Hydrodynamic lubrication of rotating machine bearings», Clamart: EDF-DER , 1997 . 26 p.
- [32]: OKRENT, E. H., “ The Effect of Lubricant Viscosity and Composition on Engine Friction and Bearing Wear ”, ASLE Transactions, 1961, Vol. 4, p. 97-102.
- [33]: TANNER R. I. “Increase of Bearings Loads Due to Large Normal Stress Differences in Viscoelastic Lubricants”, Trans. ASME - Jour. of Applied Mechanics, 1969, Vol. 91, Serie F, N°4, p. 634-637.
- [34]: TAO F. F., PHILOPPOFF W. “Hydrodynamic Behavior of Viscoelastic Liquids in a Simulated Journal Bearing”, ASLE Transactions , Jul. 1967, Vol. 10, N°3, p. 302-315.
- [35]: HARNOY A., HANIN M. “Second Order, Elastico-Viscous Lubricants in Dynamically Loaded Bearings”, ASLE Transactions, Jul. 1974, Vol. 17, N° 3, p. 166-171.
- [36]: NICOLAS D. “les Régimes Non-Laminaires en Lubrification, Réduction du frottement par Addition de Polymères”, Th. Doct. Sciences : Lyon, Inst. Nat. Sc. Appl. et Lyon I : 1979, 148 p.
- [37]: TAYAL S. P., SINHASAN R., SINGH O. V. “Analysis of Hydrodynamic Journal Bearings Having Non-Newtonien Lubricants Using the Finite Element Method”, ASLE Transactions, Jul. 1982, Vol. 25, N° 3, p. 410-416.
- [38]: DIEN I. K., ELROD H. G. “A Generalized Steady-State Reynolds Equation for Non-Newtonian Fluids With Application to Journal Bearings”, Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology, Jul. 1983, Vol. 105, N° 3, p. 385-390.
- [39]: HUTTON J. F., JACKSON K. P., WILLIAMSON, B. P. “The Effects of Lubricant Rheology on the Performance of Journal Bearings”, ASLE Transactions, Jan. 1986, Vol. 29, N° 1, p. 52-60.
- [40]: FRANÇOIS J. M. “Modélisation en d'Ecoulements en Film Mince de Fluides Non-Newtoniens, Application à la Prédiction des Caractéristiques de Fonctionnement des Mécanismes Lubrifiés”, Thèse de Doctorat, Sciences, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1987, 146 p.

- [41]: DERDOURI A., CARREAU P. J., "Non-Newtonian and Thermal Effects in Journal Bearings", *Tribology Transactions*, v 32, n 2, Apr, 1989, p 161-169.
- [42]: NAJJI B. "Effets Non-Newtonien dans les paliers : Etude statique et dynamique par éléments finis", Thèse de Docteur d'Etat Es-Science. Ecole Mohammedia d'Ingénieurs. Université Mohammed 5, novembre 1989, 187 p.
- [43]: EHRET P., "Contribution à l'étude du comportement de mécanismes lubrifiés sous chargements transitoires", Thèse Docteur . Ingénieur Mécanique : Lyon, Inst. Nat Sc. Appl. : 1993, 246 p.
- [44]: TEVAARWERK J., JOHNSON K. L., "A Simple Non-Linear Constitutive equation for elastohydrodynamic oil films", *Wear*, Dec. 1975, Vol. 35, N° 2, p. 345-356.
- [45]: BELL J. C., "Lubrication of rolling surfaces by a Ree-Eyring fluid". *ASLE Transactions*, 1962, Vol. 5, N°1, p. 160-171.
- [46]: NAJJI B., BOU-SAID B., BERTHE D., "New formulation for lubrication with non-newtonian fluids", *Transactions-of-the-ASME. Journal of Tribology*, Jan. 1989, Vol. 111, N° 1, p. 29-34.
- [47]: NAJJI B., "Calculs des Contacts Lubrifiés à l'aide d'un Fluide Non-Newtonien, Méthodes Numériques Nouvelles", Thèse Docteur . Ingénieur Mécanique : Lyon, Inst. Nat Sc. Appl. : 1985, 204 p.
- [48]: HOUPERT L., FLAMAND L., BERTHE D, "Rheological and thermal effects in lubricated E.H.D contacts", *Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology*, Oct 1981, Vol. 103, N° 4, p. 526-532.
- [49]: CONRY T.F., "Thermal effects on traction in E.H.D lubrication", *Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology*, Oct, 1981, Vol. 103, N° 4, p. 533-538.
- [50]: KODNIR D.S., SALUKVADZE R.G., BAKASHIVILI, D.L., SCHWARTZMAN, V.S.H., "A Solution of the Elastohydrodynamic Problem for Non Newtonian Fluids", *Transactions-of-the-ASME.-Series-F,-Journal-of-Lubrication-Technology*. April 1975, Vol. 7, N° 2, p. 303-10, 320.

- [51]: CHOW T.S., SAIDEL E., "The Elastohydrodynamic Problem with a Viscoelastic Fluid", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology. Janvier 1971, Vol. 93, Serie F, N°1, p.25-31.
- [52]: BAIR S., WINER W.O., "A rheological model for elastohydrodynamic contacts based on primary laboratory data", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Lubrication-Technology. July 1979, Vol. 101, N° 3, p. 258-265.
- [53]: JOHNSON K. L., TEVAARWERK J. L., "Shear Behaviour of elastohydrodynamic oil films", Proceedings-of-the-Royal-Society-of-London,-Series-A-(Mathematical-and-Physical-Sciences). 1977, Vol. 356, N° 1685, p. 215-36.
- [54]: JAÏ M., BOU-SAÏD B. "A comparaison of homogenization and averaging techniques for the treatment of roughness in Boltzman flow modified Reynolds equation", Transactions-of-the-ASME.-Journal-of-Tribology. Vol. 124, N° 2, April 2002, p. 327-335.
- [55]: Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. "Asymptotic Analysis for Periodic Structures", North-Holland 1978.

ANNEXE 1: EXPRESSIONS DE $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$ [42]

L'expression de la dérivée de la contrainte de cisaillement par rapport au temps peut se mettre sous différentes formes selon que l'on tient compte de la rotation créée par le fluide ou d'une distorsion possible. Les expressions possibles sont celles suivantes :

- la dérivée de JAUMAN,
- la dérivée d'OLDROYD
- et la dérivée intrinsèque.

I DÉRIVÉE DE JAUMAN

Ici, l'effet de rotation est pris en compte . Ainsi, la dérivée se met sous forme :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_{xz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tau_{yz} \\ \frac{d\tau_{yz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tau_{xz} \end{cases}$$

II DÉRIVÉE D'OLDROYD

Si les déformations dans le fluide sont grandes, la dérivée de JAUMAN est insuffisante et doit contenir des termes supplémentaires. La dérivée d'OLDROYD est alors utilisée. Elle se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_{xz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tau_{xz} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{yz} \\ \frac{d\tau_{yz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tau_{yz} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xz} \end{cases}$$

III DÉRIVÉE INTRINSÈQUE

Si les déformations élastiques du lubrifiant sont relativement petites, la dérivée peut être approchée par la dérivée intrinsèque qui se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_{xz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{d\tau_{yz}}{dt} = u \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{cases}$$

Pour la résolution de l'équation de Reynolds non newtonien, nous avons utilisé la dérivée intrinsèque.

ANNEXE 2 : ETABLISSEMENT DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON NEWTONIEN [42]

On part des équations d'équilibre pour film mince que nous rappelons ci dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

et des équations de comportement rhéologique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - A \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right) \\ \tau_{yz} = \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - A \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right) \end{array} \right.$$

En remplaçant les expressions des contraintes de cisaillement extraites des expressions des équations de comportement rhéologique dans les équations d'équilibre, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - A \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right) \right] \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - A \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right) \right] \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Une première intégration permet d'avoir les gradients des vitesses à travers l'épaisseur du film :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial P}{\partial x} z + A \frac{d\tau_{xz}}{dt} + C_{u1}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial P}{\partial y} z + A \frac{d\tau_{yz}}{dt} + C_{v1}(x, y) \end{cases}$$

Avec $C_{u1}(x, y)$ et $C_{v1}(x, y)$ des constantes d'intégration indépendantes de z .

Une deuxième intégration donnera accès aux champs de vitesses u et v :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial P}{\partial x} I_m + K_{mx} + C_{u1} J_m + C_{u2}(x, y) \\ v = \frac{\partial P}{\partial y} I_m + K_{my} + C_{v1} J_m + C_{v2}(x, y) \end{cases}$$

Les expressions des termes I_m, K_{mx}, J_m sont notées à la fin de l'annexe, $C_{u2}(x, y)$ et $C_{v2}(x, y)$ sont des constantes d'intégration indépendante de z .

Les conditions aux limites sur les champs de vitesses sont obtenues en supposant qu'il n'y a pas de glissement du lubrifiant sur les parois:

$$\begin{aligned} u = U_1, v = V_1, w = W_1 &\Rightarrow z = H_1 \\ u = U_2, v = V_2, w = W_2 &\Rightarrow z = H_2 \end{aligned}$$

Ainsi, les quatre constantes d'intégration peuvent être déterminées :

$$\begin{cases} C_{u1}(x, y) = \frac{U_1 - U_2}{J_{m2}} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{I_{m2}}{J_{m2}} - \frac{K_{mx2}}{J_{m2}} \\ C_{v1}(x, y) = \frac{V_1 - V_2}{J_{m2}} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{I_{m2}}{J_{m2}} - \frac{K_{my2}}{J_{m2}} \\ C_{u2}(x, y) = 0 \\ C_{v2}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Avec les expressions de ces constantes, les champs de vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (U_2 - U_1 - K_{mx2}) \frac{J_m}{J_{m2}} + K_{mx} + U_1 \\ v = \frac{\partial P}{\partial y} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (V_2 - V_1 - K_{my2}) \frac{J_m}{J_{m2}} + K_{my} + V_1 \end{cases}$$

Et leurs gradients suivant l'épaisseur du film :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial P}{\partial x} \left(z - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left(\frac{U_2 - U_1}{J_{m2}} - \frac{K_{mx2}}{J_{m2}} \right) + A \frac{d\tau_{xz}}{dt} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial P}{\partial y} \left(z - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left(\frac{V_2 - V_1}{J_{m2}} - \frac{K_{my2}}{J_{m2}} \right) + A \frac{d\tau_{yz}}{dt} \end{cases}$$

L'intégration de l'équation de continuité à travers l'épaisseur du film:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

permet d'avoir accès à la troisième composante des vitesses :

$$w = - \int_{H_1}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + W_1$$

En $z = H_2$ cette relation devient :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial u}{\partial x} dz = W_1 - W_2$$

En intervertissant les intégrales et les dérivées, cette dernière équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{H_1}^{H_2} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{H_1}^{H_2} u dz = W_1 - W_2 + U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} - U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} - V_1 \frac{\partial H_1}{\partial y}$$

Intégrons cette dernière relation par partie :

$$\begin{cases} \int_{H_1}^{H_2} u dz = U_2 (H_2 + H_1) - \int_{H_1}^{H_2} (z - H_1) \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \int_{H_1}^{H_2} v dz = V_2 (H_2 + H_1) - \int_{H_1}^{H_2} (z - H_1) \frac{\partial v}{\partial z} dz \end{cases}$$

En remplaçant les dernières expressions des gradients de vitesses dans l'équation ci-dessus, on obtient l'équation de Reynolds Modifiée pour les fluides non Newtoniens :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (U_2 (R_2 - F_m) + U_1 F_m) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (V_2 (R_2 - F_m) + V_1 F_m) &- U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y} + W_2 - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Avec :

- H_1 et H_2 : les hauteurs des surfaces S_1 et S_2 .
- U_1, V_1 et W_1 : les vitesses de S_1 suivant les trois directions,
- U_2, V_2 et W_2 : les vitesses de S_2 suivant les trois directions,
- $R_2 = H_2$
- $F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz$
- $G_m = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z^2 dz - I_{m2} F_m$
- $L_{mx} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xz}}{dt} z dz - K_{mx2} F_m$
- $L_{my} = \int_0^h A \frac{d\tau_{yz}}{dt} z dz - K_{my2} F_m$
- $I_{m2} = \int_0^{H_2} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz$
- $J_{m2} = \int_0^{H_2} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dz$
- $K_{mx2} = \int_0^{H_2} A \frac{d\tau_{xz}}{dt} dz$
- $K_{my2} = \int_0^{H_2} A \frac{d\tau_{yz}}{dt} dz$

ANNEXE 3 : EXPRESSION DES COEFFICIENTS HOMOGENEISES DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON-NEWTONIEN

On part de l'expression de :

$$\tau_e = \tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1}$$

$\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$ que l'on développe :

$$\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{F(\tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1})}{\tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1}}$$

D'après le développement de TAYLOR, on a :

$$\begin{cases} F(\tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1}) = F(\tau_{e0}) + \varepsilon \tau_{e1} F'(\tau_{e0}) + \dots \\ \frac{1}{(\tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1})} = \frac{1}{\tau_{e0}} \left(1 - \varepsilon \frac{\tau_{e1}}{\tau_{e0}} \right) + \dots \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{F(\tau_{e0})}{\tau_{e0}} + \varepsilon \left(\frac{\tau_{e1}}{\tau_{e0}} F'(\tau_{e0}) - \frac{\tau_{e1}}{\tau_{e0}^2} F(\tau_{e0}) \right)$$

On pose :

$$\begin{cases} f_0(\tau_e) = \frac{F(\tau_{e0})}{\tau_{e0}} \\ f_1(\tau_e) = \frac{\tau_{e1}}{\tau_{e0}} F'(\tau_{e0}) - \frac{\tau_{e1}}{\tau_{e0}^2} F(\tau_{e0}) \end{cases}$$

On cherche maintenant les expressions de I_m et J_m que l'on exprimera sous la forme:

$$\begin{cases} I_m = I_{m0} + \varepsilon I_{m1} + \dots \\ J_m = J_{m0} + \varepsilon J_{m1} + \dots \end{cases}$$

En utilisant l'expression de $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e}$, on trouve :

$$\begin{cases} I_m = \int_0^z \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} s ds = \int_0^z f_0(\tau_e) s ds + \varepsilon \int_0^z f_1(\tau_e) s ds + \dots \\ J_m = \int_0^z \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} ds = \int_0^z f_0(\tau_e) ds + \varepsilon \int_0^z f_1(\tau_e) ds + \dots \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} I_{m0} = \int_0^z f_0(\tau_e) s ds \quad \text{et} \quad I_{m1} = \int_0^z f_1(\tau_e) s ds \\ J_{m0} = \int_0^z f_0(\tau_e) ds \quad \text{et} \quad J_{m1} = \int_0^z f_1(\tau_e) ds \end{cases}$$

Cherchons F_m :

$$F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz$$

Sachant que :

$$J_{m2} = J_{m20} + \varepsilon J_{m21} + \dots$$

Alors F_m devient :

$$F_m = \frac{1}{J_{m20}} \left(1 - \varepsilon \frac{J_{m21}}{J_{m20}} \right) \left(\int_0^z f_0(\tau_e) ds + \varepsilon \int_0^z f_1(\tau_e) ds \right) + \dots$$

Ecrivons F_m sous la forme :

$$F_m = F_{m0} + \varepsilon F_{m1} + \dots$$

Alors :

$$F_{m0} = \frac{1}{J_{m20}} \int_0^h f_0(\tau_e) s ds \quad \text{et} \quad F_{m1} = \frac{J_{m21}}{J_{m20}^2} \int_0^z f_0(\tau_e) s ds$$

De la même manière on calcule :

$$\begin{cases} G_m = G_{m0} + \varepsilon G_{m1} + \dots \\ K_{mx2} = K_{mx20} + \varepsilon K_{mx21} + \dots \\ K_{my2} = K_{my20} + \varepsilon K_{my21} + \dots \\ L_{mx} = L_{mx0} + \varepsilon L_{mx1} + \dots \\ L_{my} = L_{my0} + \varepsilon L_{my1} + \dots \end{cases}$$

Avec :

$$I_{m2} = I_{m20} + \varepsilon I_{m21} + \dots$$

- $G_{m0} = \int_0^h \frac{F(\tau_{e0})}{\tau_{e0}} z^2 dz - I_{m20} F_{m0}$
- $L_{mx0} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xz0}}{dt} z dz - K_{mx20} F_{m0}$
- $L_{my0} = \int_0^h A \frac{d\tau_{yz0}}{dt} z dz - K_{my20} F_{m0}$
- $I_{m20} = \int_0^h \frac{F(\tau_{e0})}{\tau_{e0}} z dz$
- $J_{m20} = \int_0^h \frac{F(\tau_{e0})}{\tau_{e0}} dz$
- $K_{mx20} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xz0}}{dt} dz$
- $K_{my20} = \int_0^h A \frac{d\tau_{yz0}}{dt} dz$

Passons au calcul des expressions de τ_e , $\frac{d\tau_{xz}}{dt}$ et $\frac{d\tau_{yz}}{dt}$.

On part des expressions suivantes :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial P}{\partial x} \left(z - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + \frac{U - K_{mx2}}{J_{m2}} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial P}{\partial y} \left(z - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) - \frac{K_{my2}}{J_{m2}} \end{cases}$$

En remplaçant chaque terme par son équivalent homogénéisé et en les écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{xz0} + \varepsilon \tau_{xz1} + \dots \\ \tau_{yz} = \tau_{yz0} + \varepsilon \tau_{yz1} + \dots \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \tau_{xz0} = \frac{\partial P_0}{\partial x_1} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) + \frac{U - K_{mx20}}{J_{m20}} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) \\ \tau_{yz0} = \frac{\partial P_0}{\partial x_2} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) - \frac{K_{mx20}}{J_{m20}} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) \\ \tau_{xz1} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right) \left(\frac{J_{m21} I_{m20}}{J_{m20}^2} - \frac{I_{m21}}{J_{m20}} \right) + \frac{J_{m21}}{J_{m20}} \left(\frac{U - K_{mx20}}{J_{m20}} \right) + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) - \frac{K_{mx20}}{J_{m20}} \\ \tau_{yz1} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right) \left(\frac{J_{m21} I_{m20}}{J_{m20}^2} - \frac{I_{m21}}{J_{m20}} \right) - \frac{K_{mx20}}{J_{m20}} \frac{J_{m21}}{J_{m20}} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \left(z - \frac{I_{m20}}{J_{m20}} \right) - \frac{K_{mx20}}{J_{m20}} \end{cases}$$

De la même façon pour les vitesses,

$$\begin{cases} u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + J_m \left(\frac{U - K_{mx2}}{J_{m2}} \right) + K_{mx} \\ v = \frac{\partial P}{\partial y} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) - J_m \left(\frac{K_{mx2}}{J_{m2}} \right) + K_{my} \end{cases}$$

On se retrouve avec :

$$\begin{cases} u_0 = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right) \left(I_{m0} - \frac{J_{m0} I_{m20}}{J_{m20}} \right) + (U - K_{mx20}) \frac{J_{m0}}{J_{m20}} + K_{mx0} \\ v_0 = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right) \left(I_{m0} - \frac{J_{m0} I_{m20}}{J_{m20}} \right) + (U - K_{my20}) \frac{J_{m0}}{J_{m20}} + K_{my0} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} I_{m0} + \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial y_1} \right) \left(I_{m1} + \frac{J_{m0} I_{m20} J_{m21}}{J_{m20}^2} - \frac{J_{m0} I_{m21}}{J_{m20}} - \frac{J_{m1} I_{m20}}{J_{m20}} \right) + \\ (U - K_{mx20}) \left(\frac{J_{m1}}{J_{m20}} - \frac{J_{m0} I_{m20}}{J_{m20}^2} \right) - K_{mx21} \frac{J_{m0}}{J_{m20}} + K_{mx1} \\ v_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x_2} I_{m0} + \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \right) \left(I_{m1} + \frac{J_{m0} I_{m20} J_{m21}}{J_{m20}^2} - \frac{J_{m0} I_{m21}}{J_{m20}} - \frac{J_{m1} I_{m20}}{J_{m20}} \right) - \\ K_{my20} \left(\frac{J_{m1}}{J_{m20}} - \frac{J_{m0} I_{m20}}{J_{m20}^2} \right) - K_{my21} \frac{J_{m0}}{J_{m20}} + K_{my1} \end{array} \right.$$

On peut donc calculer la dérivée temporelle des contraintes de cisaillement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau_{xz}}{dt} = \left\{ \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right\}_0 + \varepsilon \left\{ \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right\}_1 + \dots \\ \frac{d\tau_{yz}}{dt} = \left\{ \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right\}_0 + \varepsilon \left\{ \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right\}_1 + \dots \end{array} \right.$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right\}_0 = u_0 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_1} \right) + v_0 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_2} \right) + w_0 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_3} \right) \\ \left\{ \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right\}_0 = u_0 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_2} \right) + v_0 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_1} \right) + w_0 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_3} \right) \\ \left\{ \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right\}_1 = u_0 \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x_2} + w_0 \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x_3} \\ + u_1 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_1} \right) + v_1 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_2} \right) + w_1 \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial y_3} \right) \\ \left\{ \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right\}_1 = u_0 \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial x_2} + w_0 \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial x_3} \\ + u_1 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_1} \right) + v_1 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_2} \right) + w_1 \left(\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y_3} \right) \end{array} \right.$$

Pour le calcul de la contrainte équivalent, on a :

$$\tau_e = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\tau_e = \tau_{e0} + \varepsilon \tau_{e1} + \dots$$

En remplaçant les deux contraintes de cisaillement par leur expressions homogénéisées, on obtient :

$$\tau_{e0} = \sqrt{\tau_{xz0}^2 + \tau_{yz0}^2}$$

ANNEXE 4 : LES RESULTATS DU MODELE VISCOPLASTIQUE

L'influence de l'orientation des rugosités sur les caractéristiques du contact est examinée. Cinq de ces orientations seront étudiées, en partant des rugosités transversales jusqu'aux rugosités longitudinales :

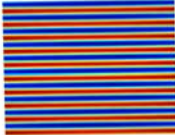
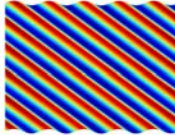
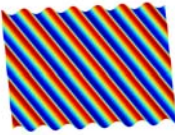
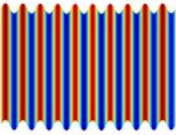
Orientation 1	Orientation 2	Orientation 3	Orientation 4	Orientation 5
				

Tableau 42: Orientations étudiées.

L'expression de la contrainte limite utilisée dans ces calcul est :

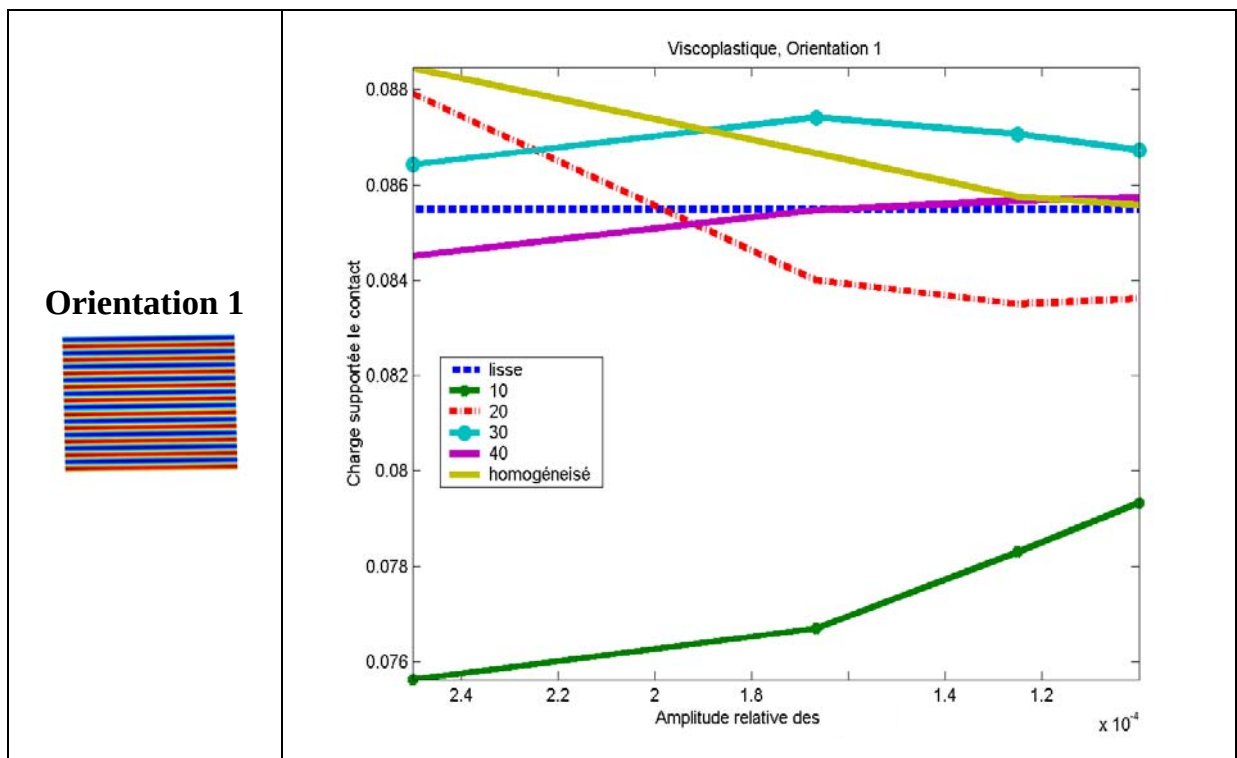
$$\tau_L (Pa) = 100 * \mu \times h_{\min} \times t_r \times 2 \times \pi \times R$$

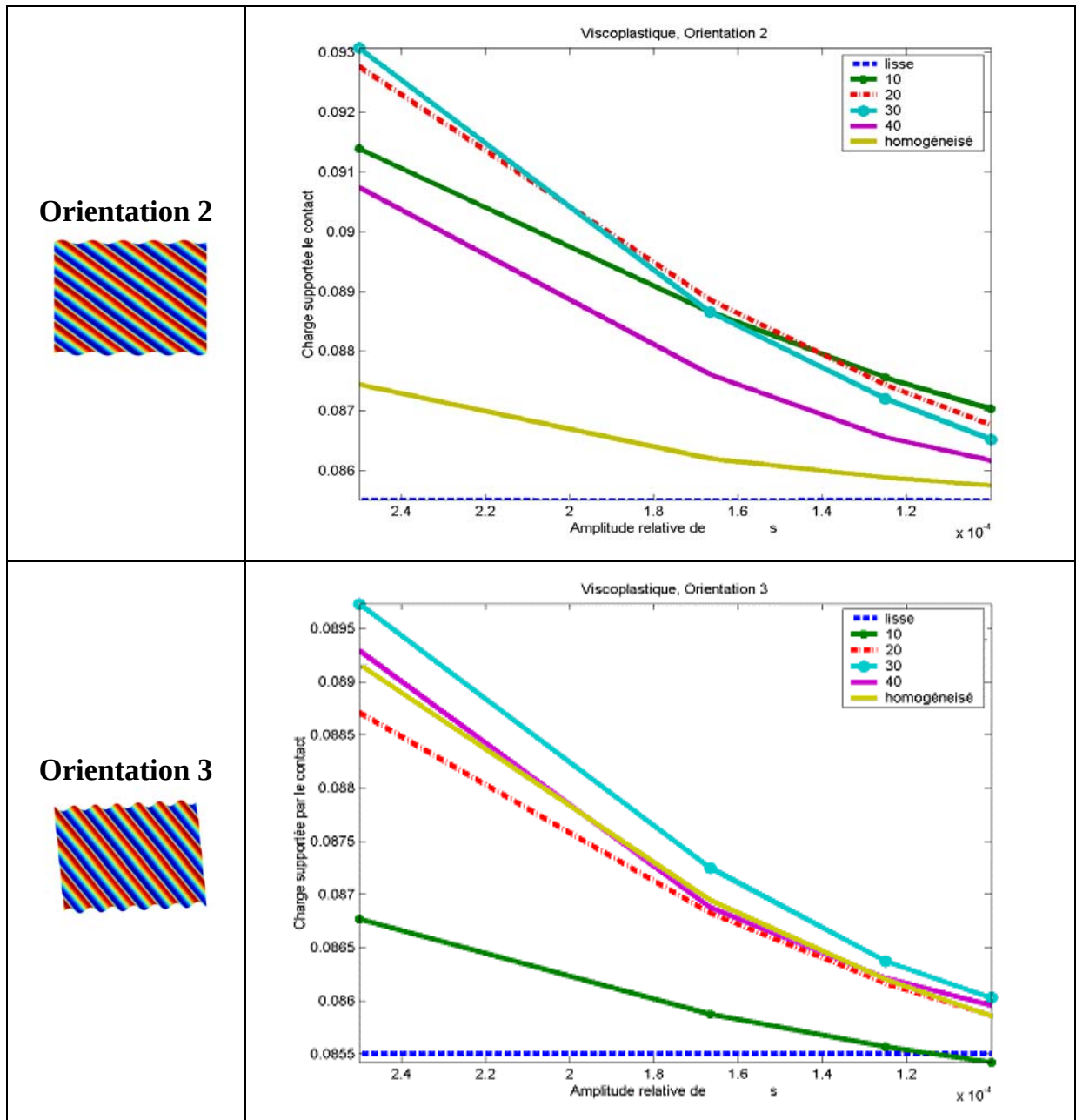
Les résultats homogénéisés seront comparés aux résultats des calculs classiques pour réaliser une analyse directe. Les paramètres comme l'orientation des rugosités, le nombre des rugosités, l'amplitude des rugosité et le module de cisaillement du fluide entre autres varieront afin de quantifier leurs influences respectives. Les données communes à tous les calculs sont :

- $h_{\min} (m)$ = 1E-5
- $\mu (Pa.s)$ = 0.05
- $R(m)$ = 80E-3

- $\frac{L}{D} = 1$
- $\frac{t_r}{mn} = 3000$
- l'amplitude des rugosités est exprimée en microns.

I CHARGE SUPPORTÉE PAR LE CONTACT





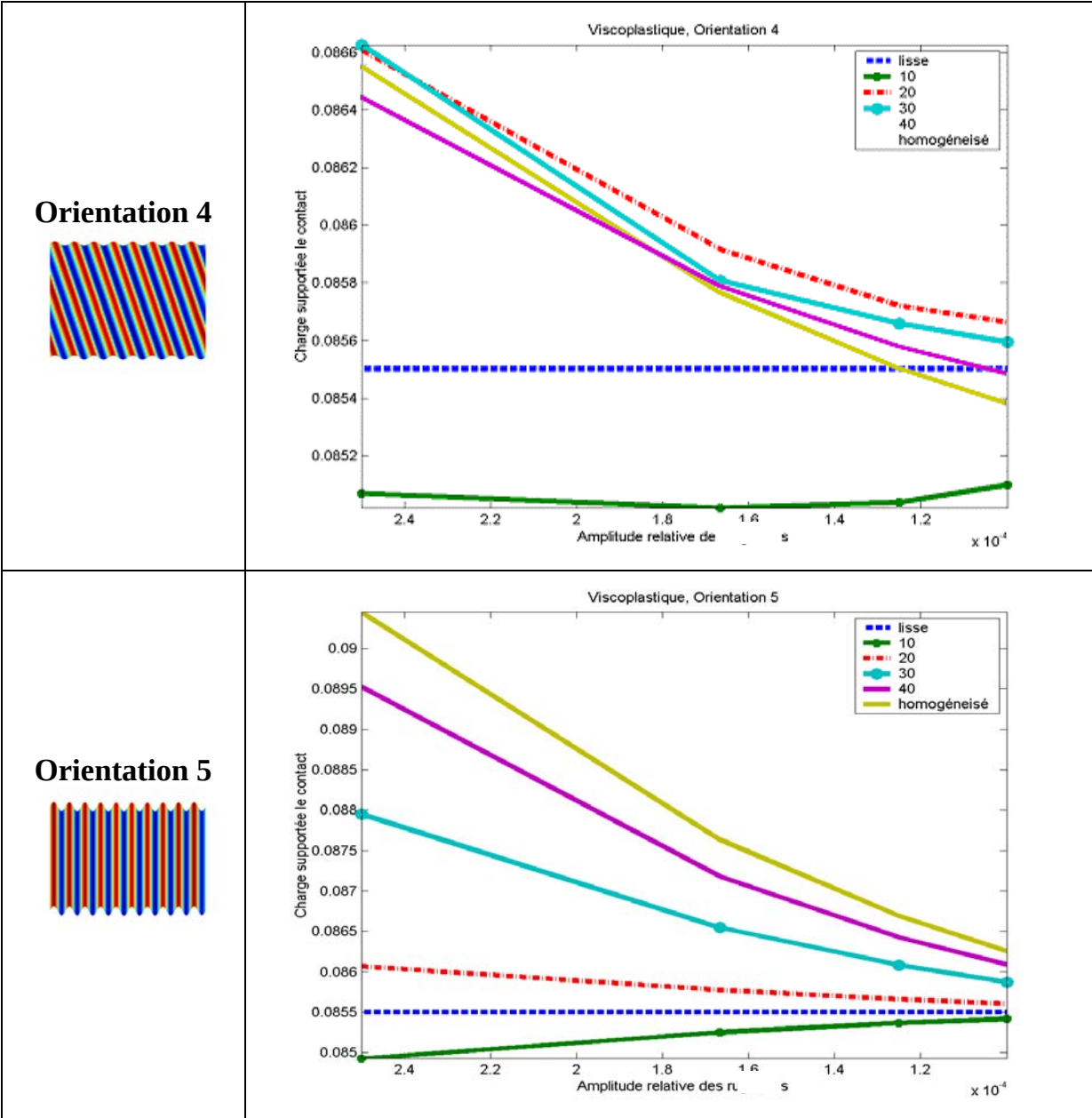
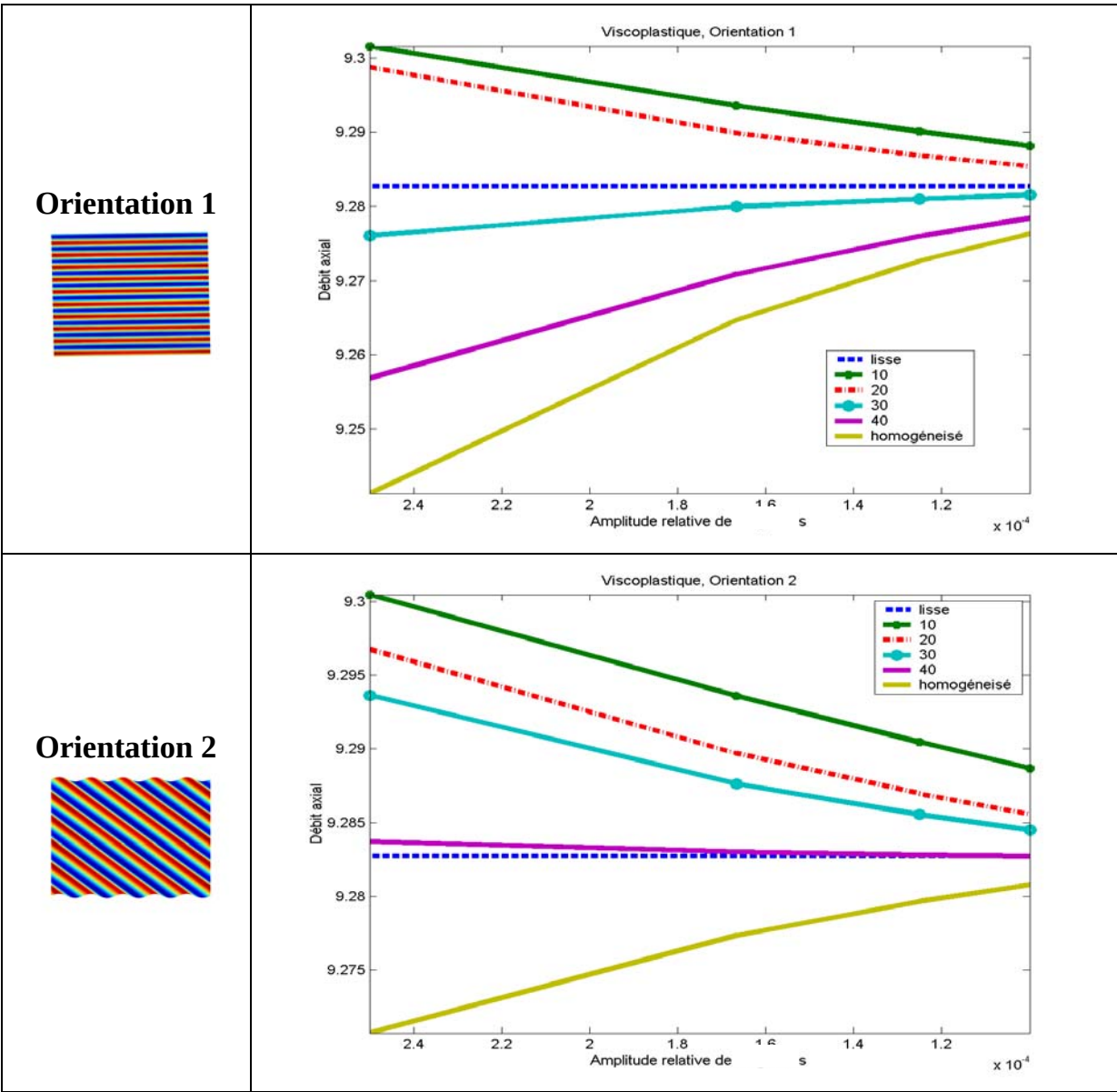
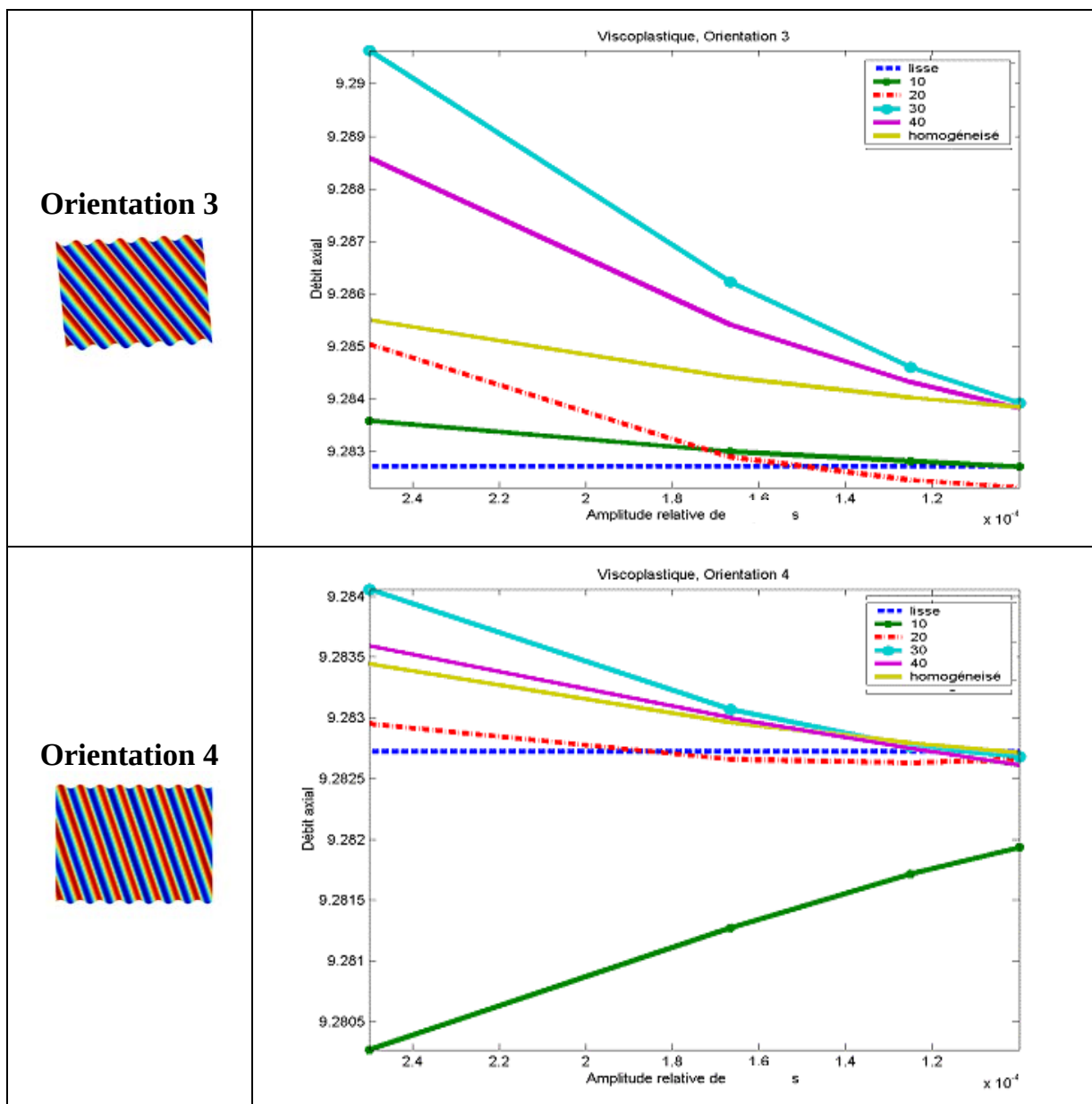


Tableau 43: Variation de la charge, modèle viscoplastique.

II DÉBIT AXIAL





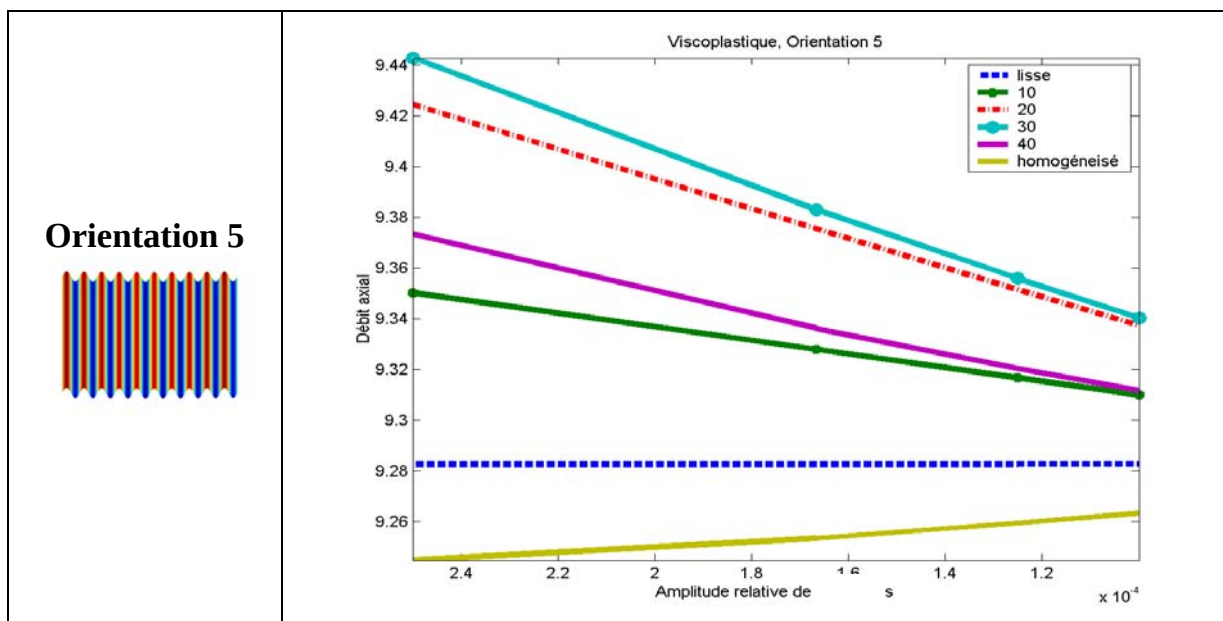
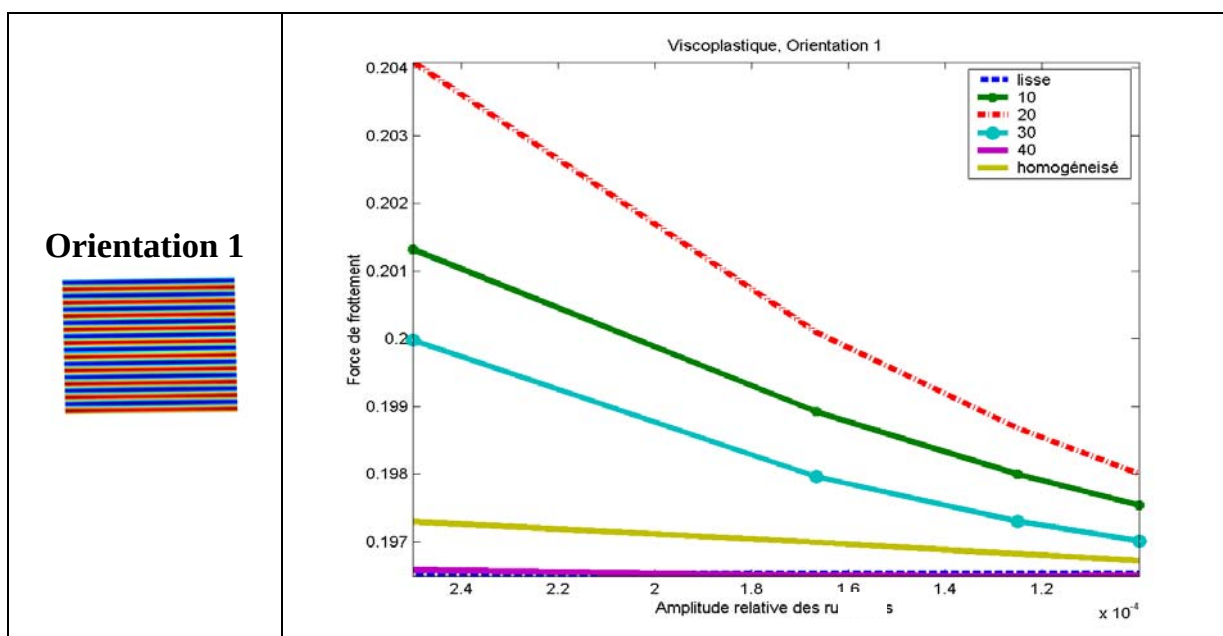
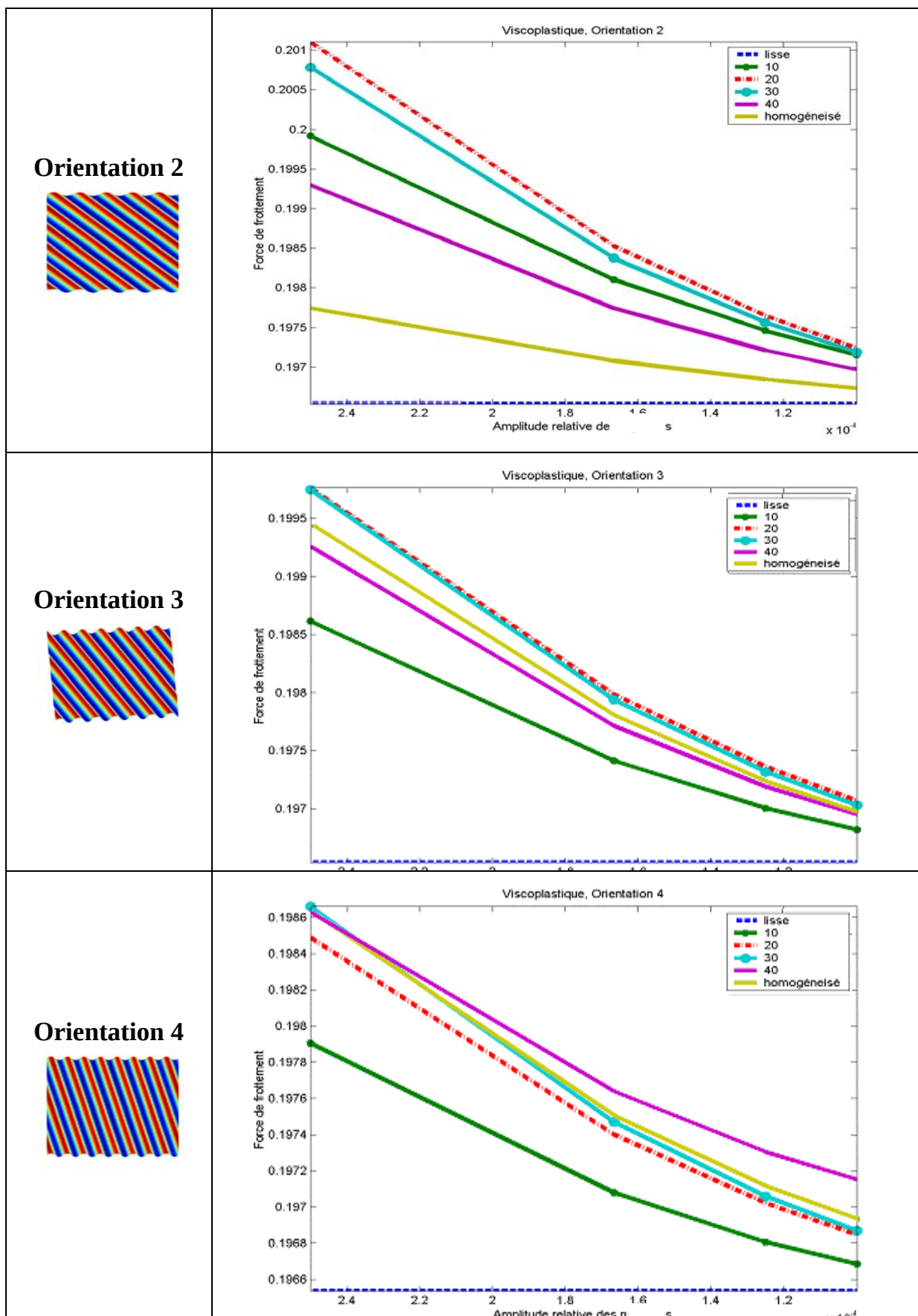


Tableau 44: Variation du débit, modèle viscoplastique.

III FORCE DE FROTTEMENT





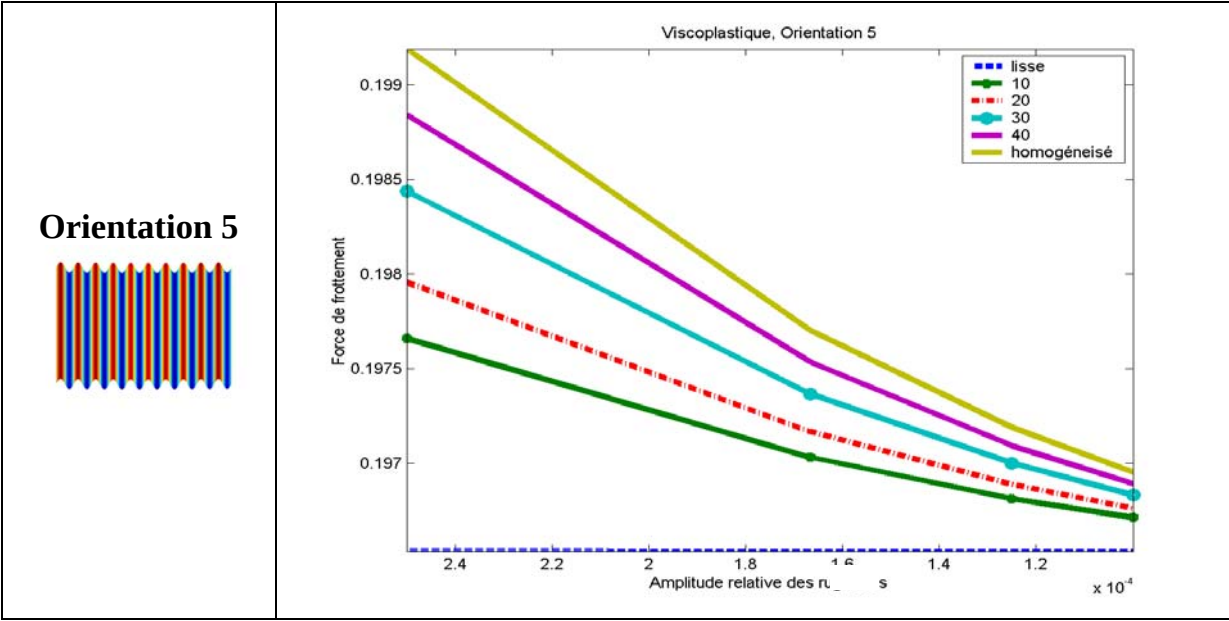
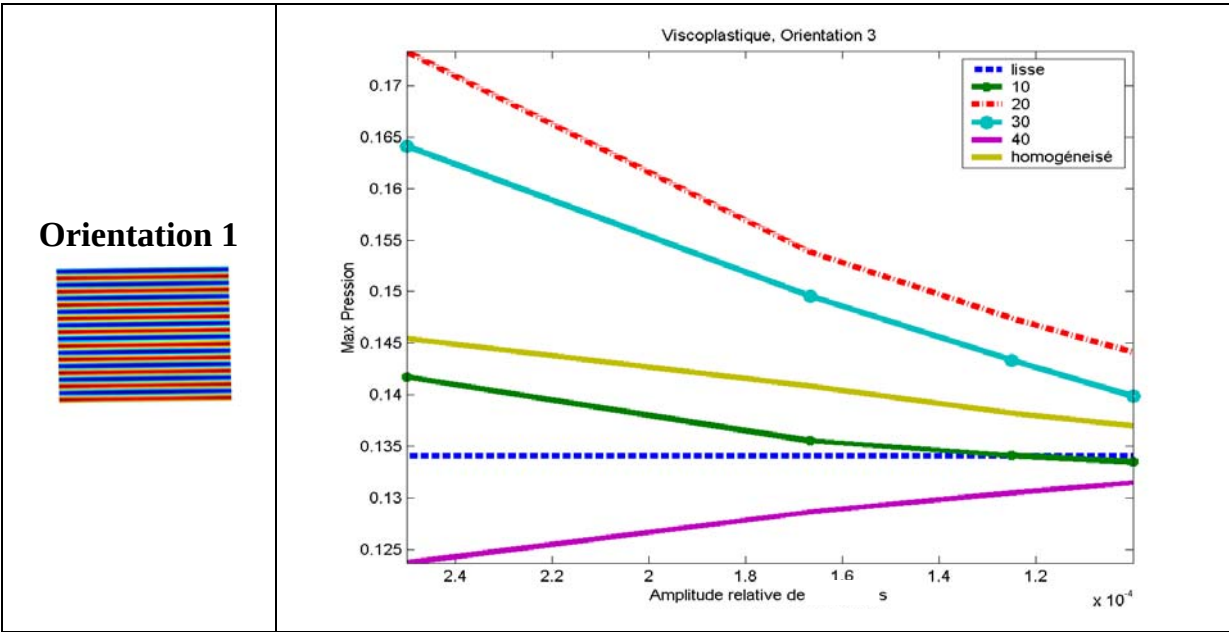
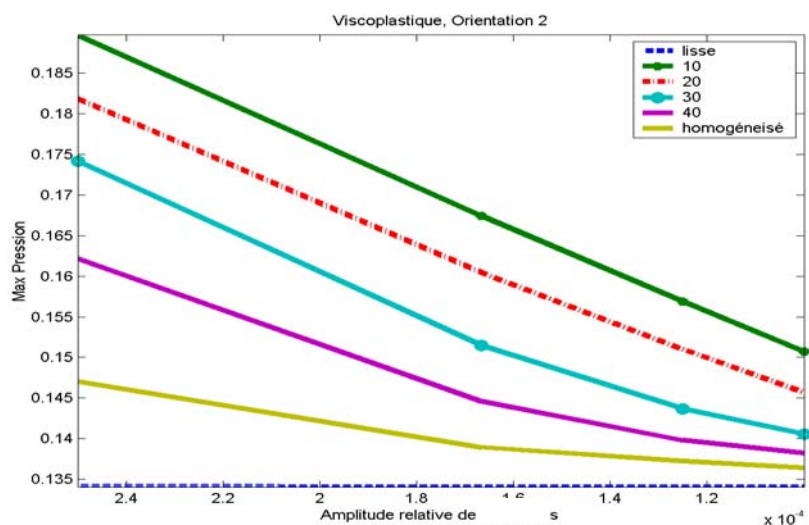
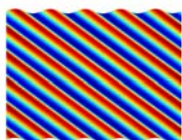


Tableau 45: Variation de la force de frottement, modèle viscoplastique.

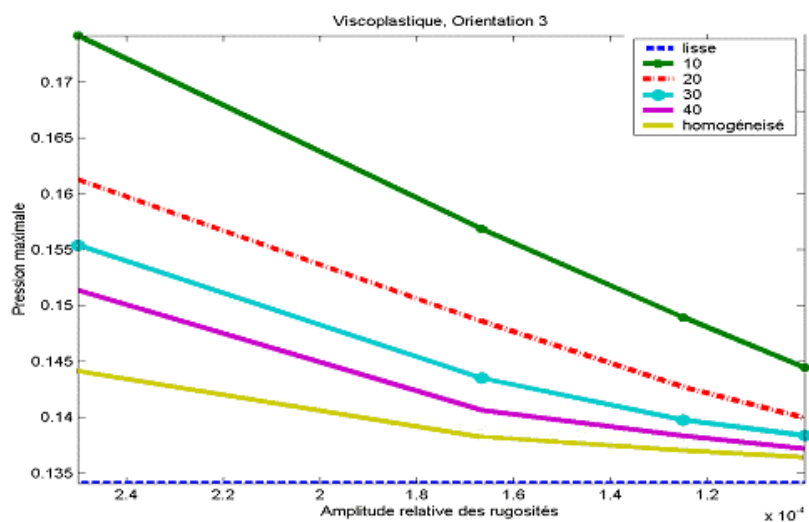
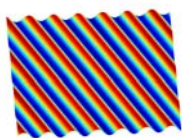
IV MAXIMUM DE PRESSION



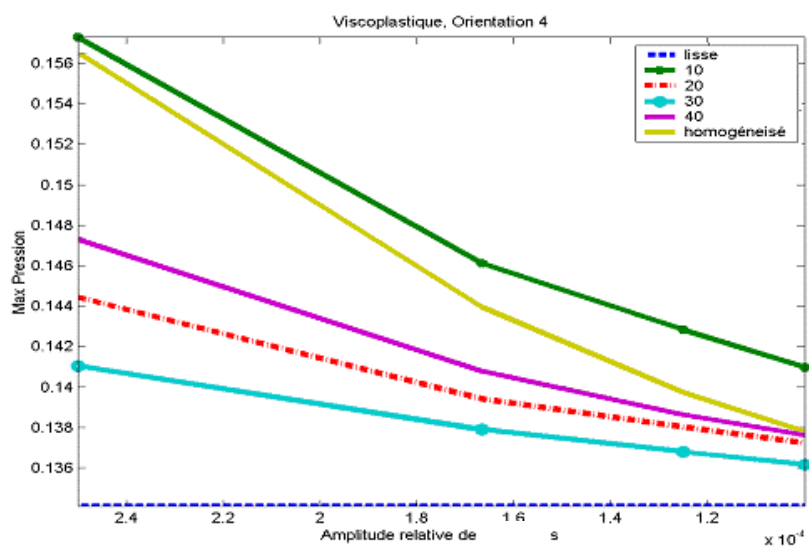
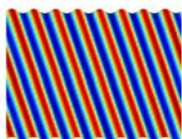
Orientation 2



Orientation 3



Orientation 4



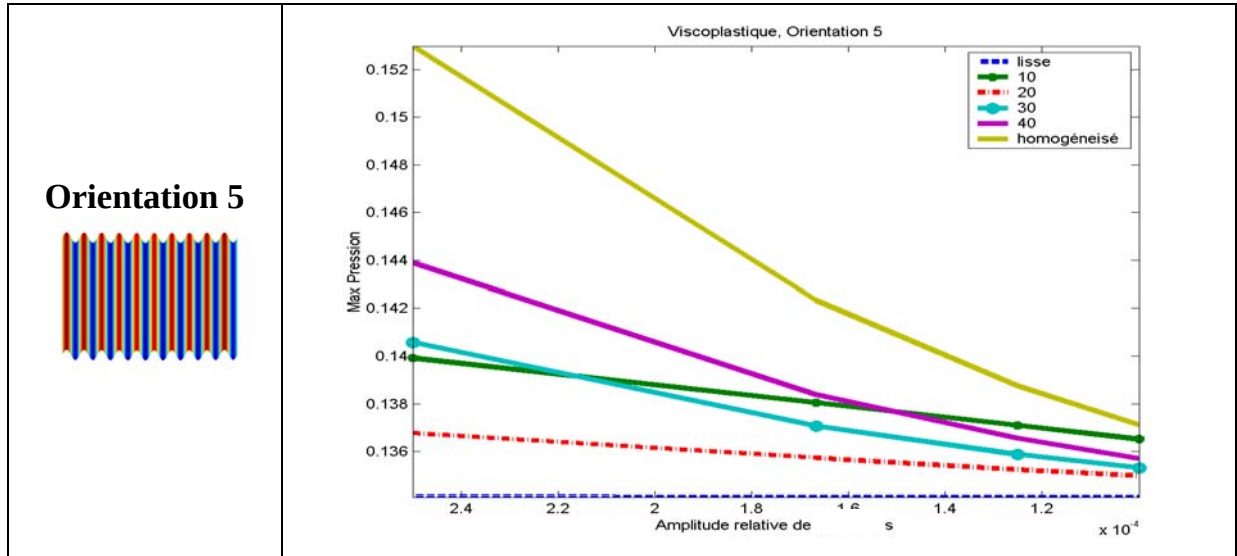


Tableau 46: Variation de la pression, modèle viscoplastique.

V ANALYSE ET CONCLUSION

Pour les données choisies les résultats diffèrent peu du cas viscoélastique. Néanmoins ceci nous a permis de valider le cas d'une loi de comportement viscoplastique. Dans tous les cas de figure et pour toutes les caractéristiques calculées ici (charge, débit, force de frottement ainsi que le maximum de pression) la solution obtenue d'une manière directe converge vers la solution homogénéisée. Le caractère limitatif de la contrainte limite a peu d'influence sur les résultats.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : KANE

DATE de SOUTENANCE : 10 Mars 2003

(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : Malal

TITRE :

Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non-newtoniens dans les contact sévères lubrifiés.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 03ISAL0008

Formation doctorale : MEGA

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 /

et

bis

CLASSE :

RESUME :

L'étude entreprise dans cette thèse vise à mettre en place un nouveau modèle composé d'une partie analytique et d'une partie numérique utilisant de nouvelles techniques d'analyse dite d'homogénéisation et pouvant prendre en compte la géométrie locale et un comportement non Newtonien des fluides. Les diverses simulations numériques que nous avons effectuées ont permis de valider les équations homogénéisées que nous avons établies ainsi que les modèles numériques mis en œuvre. Le logiciel développé permet de traiter avec rigueur n'importe quel type de rugosité (quelconque, anisotrope ou quelconques) et des lois de comportement de fluide de type Maxwell (visqueux, viscoélastique, viscoélastoplastique).

MOTS-CLES : rugosité, fluide non-Newtonien, homogénéisation

Laboratoire (s) de recherches :LamCos

Directeur de thèse: Benyebka Bou-Saïd

Président de jury :

Composition du jury :

BOU-SAÏD Benyebka	Maître de conférences HDR	INSA de Lyon	Directeur de thèse
DALMAZ Gérard	Professeur	INSA de Lyon	
FLAMAND Louis	Professeur	INSA de Lyon	
JAÏ Mohamed	Maître de conférences	INSA de Lyon	
NAJJI Brahim	Professeur	ENIM de Rabat	Rapporteur
VILLECHAISE Bernard	Professeur	IUT d'Angoulême	Rapporteur