

THESE

**DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS EN REGIME
TRANSITOIRE**

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir

le **GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Formation doctorale :

MECANIQUE - GENIE MECANIQUE - GENIE CIVIL

Par

Guillaume SIKA

**Ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques
de Besançon**

Soutenue le 7 Novembre 2008 devant la Commission d'examen

Jury

LE HOUEDDEC D.	Professeur (EC Nantes)	Rapporteur
HADDAR M.	Professeur (ENI Sfax)	Rapporteur
VELEX P.	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de thèse
PERRET-LIAUDET J.	Maître de Conférences (EC Lyon)	Examineur
JURAN F.	Responsable études (Valeo Transmissions)	Examineur

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, Avenue Albert Einstein, 69621, Villeurbanne Cedex (France)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quadrinial 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.ope.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 48 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.48 18 95 Fax : lancelin@tikari.cpa.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE</u> <u>ELECTROTECHNIQUE AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 48 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME,</u> <u>MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 48 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 28 59 50 Fax 04 26 28 59 49 06 07 53 89 18 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION</u> <u>POUR LA SOCIETE</u> http://edis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Neutibus 48 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 58 adis@iris.cnrs.fr - alain.mille@iris.cnrs.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-</u> <u>SANTÉ</u> Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
Matériaux	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.48 88 18 Fax 04 72 48 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE</u> <u>FONDAMENTALE</u> M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M. Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatime Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE</u> <u>CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SeSo	<u>ScSo*</u> M. BRAVARD Jean Paul Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. BRAVARD Jean Paul Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.87.28.04.48 Jean-paul.bravard@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

*A mes parents avec toute ma reconnaissance
A mes grands parents
A ma famille*

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR CNRS 5259, de l'INSA de Lyon, dirigé par le Professeur Alain COMBESCURE.

Je tiens en premier lieu à exprimer ma gratitude envers Monsieur Philippe VELEX, Professeur à l'INSA de Lyon, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour la confiance qu'il m'a accordé dans ce travail de thèse. Par ses multiples conseils et encouragements au cours de ces trois années, il m'a permis d'aboutir à la réussite de ce projet.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance envers les Professeurs Donatien LE HOUEDDEC de l'Ecole Centrale de Nantes et Mohamed HADDAR de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs Joël PERRET-LIAUDET, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lyon et François JURAN, Responsable études et simulations de la société VALEO Transmissions, ainsi qu'au Professeur Philippe VELEX de l'INSA de Lyon, pour l'honneur qu'ils me font de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie également tous les membres du laboratoire pour leur soutien et leur bonne humeur qu'ils ont pu manifester tout au long de ces trois années.

Je pense particulièrement aux compères cyclistes Fabrice, Nans, Vincent et Mathilde. Je remercie particulièrement Mathilde pour ses encouragements lors des moments difficiles. Je pense également à Philippe, Sébastien, Mondher, Christelle, Jean-Michel, Anne, Anne-Marie, Najib et Pierre pour sa bonne humeur de tous les jours.

Je tiens aussi à remercier les anciens doctorants que j'ai pu côtoyer et les futurs docteurs François, Thaer et Gilles pour leur soutien.

Mes remerciements vont également à mes amis Meuh-Meuh, notamment Marie et Adrien, pour leurs encouragements.

A titre personnel, je tiens à avoir cette pensée pour ma famille, en particulier mes parents pour leur précieux soutien et présence tout au long de ces trois années.

RESUME

Ce travail vise à prédire le comportement dynamique d'engrenages évoluant à des vitesses de rotation variables. Un modèle d'engrenages à paramètres concentrés est développé, il inclut la possibilité de contacts directs et de contacts sur les faces arrière des dents, les influences des excentricités, du jeu de denture et des variations de vitesse de rotation. Les arbres sont introduits via des éléments finis de poutres de Timoschenko et les paliers par l'intermédiaire de ressorts de traction - compression et de torsion. Les différents états des conditions de contacts, ainsi que les paramètres nécessaires à la simulation de l'engrènement, sont analysés. Un schéma numérique d'intégration pas à pas est couplé à un algorithme de contact afin de résoudre les équations de mouvement. Différents modèles de complexité croissante sont exploités afin de caractériser les contributions de variations périodiques de vitesses (acyclisme). Pour un système à un seul degré de liberté, des résultats originaux relatifs à la stabilité de la solution en sont déduits. Des approches analytiques sont également proposées afin de valider et calibrer les méthodes numériques. Les résultats confirment l'influence certaine de certains régimes transitoires sur le comportement dynamique des engrenages, particulièrement dans le cas de l'acyclisme [131 - 132 - 133].

Mots-Clés : Dynamique, transmission, engrenage droit, engrenage hélicoïdal, acyclisme, stabilité, modélisation d'engrenages, modélisation numérique, excentricité, jeu de denture

ABSTRACT

This present work is aimed at predicting the dynamic behaviour of geared transmissions submitted to unsteady rotational speeds. The proposed gear model is based on lumped parameter elements; it also accounts for contact losses between the teeth and back strikes, the influence of eccentricities, backlash and variable rotational speeds. The pinion and the gear shafts are modelled using Timoschenko's beam elements whereas bearings are simulated via lumped stiffness elements. The various possible contact conditions and parameters controlling the gear meshing characteristics are analysed. The equations of motion are solved by combining a time-step numerical integration scheme and a normal contact algorithm. Several models are investigated in the particular case of fluctuating input speed caused by engine acyclism and, for a one degree of freedom system, original results about parametric instabilities are presented. Analytical approaches are proposed in order to validate and calibrate the numerical methods. The results confirm a significant influence of some transient regimes on the dynamic behaviour of gears, particularly in the case of engine acyclism.

Key-Words : Gear dynamics, transmission, spur gear, helical gear, acyclism, stability, gear modelling, numeric modelling, eccentricity, backlash

TABLES DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	5
RESUME.....	7
ABSTRACT	7
TABLES DES MATIERES	9
TABLE DES FIGURES.....	15
LISTE DES TABLEAUX	19
PRINCIPALES NOTATIONS.....	21
INTRODUCTION GENERALE	23

CHAPITRE I : DYNAMIQUE DES ENGRENAGES : UNE APPROCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I. INTRODUCTION	27
II. LES PARAMETRES DE LA DYNAMIQUE DES ENGRENAGES.....	28
II.1. L'ERREUR DE TRANSMISSION.....	28
II.1.1. Erreur de transmission quasi-statique sans charge ou erreur cinématique	29
II.1.2. Erreur de transmission statique ou quasi-statique sous charge.....	29
II.1.3. Erreur de transmission dynamique	30
II.2. LE FACTEUR OU COEFFICIENT DYNAMIQUE	31
II.3. LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT	32
II.3.1. Calcul de la raideur d'un couple de dents.....	33
II.3.1.1. Raideur d'engrènement selon la norme ISO 6336	33
II.3.1.2. Contribution de la raideur de flexion et de fondation de la dent	34
II.3.1.3. Raideur de contact.....	38
II.3.2. Raideur globale d'engrènement.....	39
III. LES SOURCES D'EXCITATION EN DYNAMIQUE DES ENGRENAGES.....	41
III.1. LES SOURCES INTERNES À L'ENGRENEMENT.....	41
III.1.1. Erreurs de forme.....	41
III.1.2. Erreurs de positions.....	43
III.2. RAIDEUR D'ENGRENEMENT ET INSTABILITE PARAMETRIQUE	45
III.3. LES SOURCES EXTERNES D'EXCITATIONS.....	47
III.3.1. Le groupe moteur : source de régimes transitoires	47

III.3.1.1. Les moteurs à combustion interne.....	47
III.3.1.2. Le mésalignement du moteur - les moteurs électriques	49
III.3.1.3. Les accélérations et décélérations	50
III.3.2. Modélisation et problèmes posés par l'acyclisme.....	50
III.3.2.1. Les phénomènes vibroacoustiques	50
III.3.2.2. Modélisation de l'acyclisme	53
IV. SYNTHÈSE DES DIFFÉRENTS MODÈLES DÉVELOPPÉS EN DYNAMIQUE DES ENGRENAGES	55
IV.1. LES MODÈLES LINÉAIRES	56
IV.2. LES MODÈLES NON-LINÉAIRES : PHÉNOMÈNES DE VIBRO-IMPACTS.....	58
IV.3. ÉTAT ACTUEL ET POSITION DU PROBLÈME	61
V. CONCLUSION.....	62

CHAPITRE II : MODÉLISATION GLOBALE D'UN RÉDUCTEUR SOUS RÉGIME TRANSITOIRE

I. INTRODUCTION	67
II. MODÈLE GLOBAL D'UN COUPLE D'ENGRENAGES	68
II.1. MODÉLISATION - INTRODUCTION DU JEU DENTURE	68
II.1.1. Modèle à paramètres concentrés avec jeu de denture.....	68
II.1.2. Modélisation de l'interface d'engrènement.....	70
II.2. EXPRESSION DE L'ÉCRASEMENT DES DENTURES	71
II.2.1. Expression des conditions de corps rigides	71
II.2.2. Introduction des défauts d'excentricités	73
II.2.4. Expression de l'écrasement des dentures	75
III. MISE EN ÉQUATION GÉNÉRALE	78
III.1. MISE EN ÉQUATION D'UN COUPLE D'ENGRENAGES	78
III.2. INTRODUCTION DES ARBRES SUPPORT	80
III.2.1. Définition de l'élément d'arbre	80
III.2.2. Expression de l'énergie cinétique	81
III.2.3. Expression de l'énergie de déformation.....	82
III.3. INTRODUCTION DES PALIERS, ACCOUPLEMENTS, MOTEUR ET FREIN ...	82
III.3.1. Modèle de palier.....	82
III.3.2. Modèle d'accouplement élastique.....	83
III.3.3. Modèle de moteur et de frein	83

III.4. ECRITURE DES EQUATIONS GENERALES DE MOUVEMENT	84
III.4.1. Assemblage des divers éléments du réducteur	84
III.4.2. Introduction de l'amortissement	85
IV. RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	86
IV.1. DEPLACEMENT DES POINTS DE CONTACTS POTENTIELS.....	87
IV.2. ALGORITHME GENERAL DE RESOLUTION	90
V. CONCLUSION.....	92

CHAPITRE III : ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE D'UN MODELE TORSIONNEL EN PRESENCE D'ACYCLISME

I. INTRODUCTION	95
II. MODELE TORSIONNEL D'UN COUPLE D'ENGRENAGE.....	95
II.1. RESTRICTION DU MODELE GLOBAL A UN MODELE TORSIONNEL	95
II.1.1. Modèle masse - ressort avec jeu de denture	95
II.1.2. Mise en équation.....	97
II.2. DEFINITION DE LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT.....	97
II.2.1. Approche simplifiée	97
II.2.2. Raideur adoptée - mise en équation finale.....	98
III. RESOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT.....	100
III.1. APPROCHE DANS LE CAS DE DENTURES DROITES	101
III.1.1. Développement théorique	101
III.1.2. Comparaison avec la résolution numérique	104
III.2. APPROCHE DANS LE CAS DE DENTURES HELICOIDALES	107
III.2.1. Présentation de la méthode : introduction des fonctions de Bessel.....	107
III.2.2. Développement théorique par la méthode des petites perturbations.....	109
III.2.3. Analyse du second membre de l'ordre 1	114
<i>III.2.3.1. Pulsations critiques d'engrènement</i>	114
<i>III.2.3.2. Amplitudes des excitations</i>	116
III.2.4. Applications	118
<i>III.2.4.1. Comparaison analytique - numérique : vérification des pulsations d'engrènement</i>	119
<i>III.2.4.2. Etude des amplitudes des excitations</i>	121
III.3. CONCLUSION SUR LES DEVELOPPEMENTS ANALYTIQUES.....	126

IV. ANALYSE DE LA STABILITE D'UN COUPLE D'ENGRENAGES SOUS REGIME D'ACYCLISME.....	126
IV.1. INTRODUCTION	126
IV.2. DEVELOPPEMENT DE LA THEORIE.....	127
IV.2.1. Idée directrice.....	127
IV.2.2. Calcul de la matrice de monodronie	128
IV.3. APPLICATION A UN COUPLE D'ENGRENAGES	130
IV.3.1. Influence du pourcentage d'acyclisme.....	130
IV.3.3. Influence de l'amortissement.....	133
IV.4. CONCLUSION SUR LA STABILITE.....	135
V. ETUDE PARAMETRIQUE D'UN COUPLE D'ENGRENAGES EN PRESENCE D'ACYCLISME	135
V.1. INTRODUCTION.....	135
V.2. DONNEE DE LA MODELISATION - VITESSE CRITIQUE DE VOL LIBRE.....	136
V.2.1. Définition du couple d'engrenages.....	136
V.2.2. Définition d'une vitesse critique de vol libre	137
V.3. INFLUENCE DES PARAMETRES PHYSIQUES.....	138
V.3.1. Influence du pourcentage d'acyclisme	138
V.3.2. Influence des harmoniques.....	142
V.3.3. Influence du couple résistant.....	143
V.4. INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DES ENGRENAGES.....	144
V.4.1. Influence de la forme de la raideur.....	144
V.4.2. Influence de la modulation de raideur.....	145
V.4.3. Influence du jeu de denture	146
V.4.4. Influence du rapport de réduction	147
V.5. CONCLUSION SUR L'ETUDE PARAMETRIQUE	148
VI. CONCLUSION	149

CHAPITRE IV : ETUDE D'UN REDUCTEUR SOUS ACYCLISME EN PRESENCE DE DEFAUTS D'EXCENTRICITES

I. INTRODUCTION	153
II. ETUDE TORSIONNELLE EN PRESENCE D'EXCENTRICITES.....	153
II.1. QUELQUES RESULTATS DE CALCULS DU JEU DE DENTURE	153
II.2. MODELE TORSIONNEL EN PRESENCE D'EXCENTRICITES	156

II.2.1. Restriction du modèle global.....	156
II.2.2. Données de l'étude	157
II.2.3. Redéfinition de la vitesse critique de vol libre	158
II.3. APPLICATIONS.....	159
II.3.1. Etude sans acyclisme	159
II.3.2. Etude avec acyclisme : influence des déphasages lors des phases d'impacts	160
II.3.3. Influence du jeu denture nominal	165
II.3.4. Note sur les coefficients dynamiques	167
II.4. LIMITES DU MODELE	168
III. ETUDE GLOBALE EN PRESENCE D'EXCENTRICITES	168
III.1. PRESENTATION DU REDUCTEUR	168
III.2. ETUDE DE LA PARTIE ACTIVE DU REDUCTEUR.....	170
III.2.1. Fréquences critiques d'engrènement.....	170
III.2.2. Introduction des déphasages.....	172
III.2.3. Influence du couple moteur.....	175
III.3. INFLUENCE DES INERTIES ADDITIONNELLES	176
III.3.1. Influence de l'inertie du frein.....	177
III.3.2. Influence de l'inertie du moteur.....	179
III.4. CONCLUSION	181
IV. ETUDE DE L'ACYCLISME SUR UN REDUCTEUR INDUSTRIEL.....	182
IV.1. DEFINITION DU REDUCTEUR ET DES CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT	182
IV.2. INFLUENCE DE QUELQUES PARAMETRES CARACTERISTIQUES	184
IV.2.1. Influence du pourcentage d'acyclisme.....	184
IV.2.2. Influence de l'harmonique	187
IV.2.3. Influence de l'angle d'hélice.....	189
IV.3. CONCLUSION DE L'ETUDE PARAMETRIQUE	190
V. CONCLUSION.....	191
CONCLUSION GENERALE	193
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	197
ANNEXE I	211
ANNEXE II.....	215

TABLE DES FIGURES

Figure I-1 : Emission de bruit dans les transmissions par engrenages (Ligier & Baron [1])...	27
Figure I-2 : Définition de l'erreur de transmission (Munro [21])	29
Figure I-3 : Erreur de transmission quasi-statique sous charge sans défauts de géométrie (Lin & Col. [26])	30
Figure I-4 : Modèle de Remmers [30].....	30
Figure I-5 : Réponses expérimentales de Grégory & Col. [23]	30
Figure I-6 : Courbe de réponse dynamique d'après Kubo [44]	32
Figure I-7 : Liaison élastique par engrenage, définition selon Blankenship [48]	32
Figure I-8 : Modèle de Tuplin d'après Özgüven [20]	33
Figure I-9 : Paramètres pour la formule de Weber - Banaschek.....	34
Figure I-10 : Modélisation de la fondation d'une dent	35
Figure I-11 : Fondation élastique de type Pasternak	36
Figure I-12 : Déformée d'une fondation élastique par une charge concentrée normale	36
Figure I-13 : Modélisation d'une dent par une fondation élastique	37
Figure I-14 : Demi-plan élastique soumis à une distribution de pression hertzienne	38
Figure I-15 : Demi-espace élastique et chargement pour la formule de Lundberg.....	39
Figure I-16 : Raideur d'engrènement globale d'Iwatsubo & Col. [62].....	40
Figure I-17 : Décomposition de la raideur d'engrenage hélicoïdale de Seireg & Houser [43]	40
Figure I-18 : Raideurs d'engrènement non-linéaires (Kasuba & Evans [13])	41
Figure I-19 : Erreurs de profils (Henriot [65])	42
Figure I-20 : Erreurs de distorsion (Henriot [65]).....	42
Figure I-21 : Erreur de pas (Henriot [65]).....	43
Figure I-22 : Définition des angles de déviation et d'inclinaison (Umezawa [9]).....	44
Figure I-23 : Modulation d'amplitude caractéristique d'un défaut d'excentricités	44
Figure I-24 : Localisation des bandes latérales dues aux excentricités (Welbourn [68])	45
Figure I-25 : Evolutions des zones d'instabilités paramétriques (Benton & Seireg [75])	46
Figure I-26 : Différentes configurations de moteurs (Bosch [76]).....	48
Figure I-27 : Divers formes d'acyclisme (Ligier & Baron [77]).....	49
Figure I-28 : Vue éclatée d'un embrayage mécanique à disque VALEO [77]	49
Figure I-29 : Représentation fréquence - régime d'une accélération mesurée sur une boîte de vitesse montée sur un banc de simulation d'acyclisme (Develay [81])	51
Figure I-30 : Illustration des phénomènes de chocs de dentures (Johnson & Hirami [82]).....	52
Figure I-31 : Evolution du niveau d'acyclisme en fonction du régime moteur	52
Figure I-32 : Modèle linéaire de Cai & Hayashi [63]	56
Figure I-33 : Modèle linéaire de Sener & Özgüven [105]	57
Figure I-34 : Modèle à excitation paramétrique d'un système pignon - roue (Benton & Seireg [108]).....	57

Figure I-35 : Modèle à excitations paramétriques à 4 ddls en torsion (Lin & Col. [25] - [26])	58
Figure I-36 : Mise en évidence expérimentale des séparations de dentures pour plusieurs amortissements (Gregory & Col. [23])	59
Figure I-37 : Représentation du modèle non-linéaire de Kahraman & Singh [33]	60
Figure I-38 : Algorithme global de résolution de la dynamique d'un réducteur à engrenages (Velex [5])	61
Figure I-39 : Modèle torsionnel (a) et banc d'essai de caractérisation (b) d'Ottewill & Col. [121]	62
Figure II-1 : Modèle à paramètres concentrés de Blankenship & Singh [48]	67
Figure II-2 : Modèle à paramètres concentrés avec jeu	69
Figure II-3 : Orientation des plans d'action et des normales au contact	70
Figure II-4 : Modélisation de l'interface d'engrènement	71
Figure II-5 : Conditions de contacts selon une coupe normale aux dentures	72
Figure II-6 : Cas du contact direct en condition de corps rigides : coupe normale aux dentures	72
Figure II-7 : Illustration des excentricités	73
Figure II-8 : Modélisation de la fonction porte	77
Figure II-9 : Élément d'arbre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud de type Timoschenko	80
Figure II-10 : Interface d'engrènement dans le cas direct à un instant donné	87
Figure II-11 : Interface d'engrènement dans le cas rétro à un instant donné	88
Figure II-12 : Coupe dans un plan normal aux axes de rotation à un instant donné	89
Figure II-13 : Algorithme général de résolution	91
Figure III-1 : Modèle torsionnel	96
Figure III-2 : Variation de la raideur d'engrènement pour une denture hélicoïdale (Küçükay [12])	98
Figure III-3 : Diagramme de raideur utilisée par Velex [5]	98
Figure III-4 : Evolution de la fonction $\Phi(t)$	99
Figure III-5 : Définition de la fonction $\Phi(\Theta_m)$ utilisée (cas d'harmoniques entiers)	101
Figure III-6 : Comparaison analytique - numérique du maximum du coefficient dynamique	106
Figure III-7 : Fonctions de Bessel de première espèce	107
Figure III-8 : Comparaison analytique - numérique sans la prise en compte du jeu de denture	120
Figure III-9 : Comparaison analytique - numérique avec la prise en compte du jeu de denture	121
Figure III-10 : Influence du pourcentage sur les amplitudes des excitations	122
Figure III-11 : Différences des amplitudes	123

Figure III-12 : Influence des harmoniques.....	124
Figure III-13 : Influence du nombre de dents	125
Figure III-14 : Influence du rapport de réduction	125
Figure III-15 : Diagramme de stabilité autour du rapport $\frac{1}{2}$	131
Figure III-16 : Diagramme de stabilité autour du rapport $\frac{2}{3}$	131
Figure III-17 : Diagramme de stabilité pour un pourcentage de 5 %.....	132
Figure III-18 : Diagramme de stabilité pour une variation en sinus autour du rapport $\frac{2}{3}$	133
Figure III-19 : Comparaison des limites de stabilité pour un pourcentage de 5 %	133
Figure III-20 : Diagramme de stabilité pour un amortissement de 0.01 autour du rapport $\frac{2}{3}$ (créneau).....	134
Figure III-21 : Comparaison des limites de stabilité pour un pourcentage de 5 %	134
Figure III-22 : Exemples d'évolution de vitesse de rotation du pignon.....	137
Figure III-23 : Influence du pourcentage d'acyclisme	139
Figure III-24 : Evolution des erreurs de transmission autour de la vitesse de vol libre (3.75 % d'acyclisme)	140
Figure III-25 : Influence du pourcentage sur les évolutions autour des vitesses critiques d'engrènement.....	141
Figure III-26 : Influence du pourcentage dépendant de la vitesse de rotation.....	141
Figure III-27 : Influence des harmoniques.....	142
Figure III-28 : Coefficients dynamiques	143
Figure III-29 : Influence du couple résistant.....	144
Figure III-30 : Influence du modèle de variation de raideur	145
Figure III-31 : Influence de la modulation de raideur.....	146
Figure III-32 : Influence du jeu de denture	146
Figure III-33 : Evolution des erreurs de transmission pour les 2 jeux de dentures.....	147
Figure III-34 : Influence du rapport de réduction	148
Figure IV-1 : Calcul du jeu pour $e_1 = 50 \mu m, e_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$	154
Figure IV-2 : Calcul du jeu pour $e_1 = e_2 = 50 \mu m, \lambda_2 = 0$	155
Figure IV-3 : Calcul des jeux de denture pour un rapport de réduction unitaire	155
Figure IV-4 : Evolution pour le couple d'engrenages sans acyclisme.....	160
Figure IV-5 : Evolution pour différents déphasages avec acyclisme.....	161
Figure IV-6 : Evolution du facteur dynamique autour de la vitesse critique de vol libre.....	161
Figure IV-7 : Evolution en fonction des vitesses et des déphasages.....	162
Figure IV-8 : Evolution de l'erreur de transmission et du jeu de denture pour plusieurs déphasages.....	164
Figure IV-9 : Evolution pour un jeu de 0.4 mm.....	165

Figure IV-10 : Evolution pour un déphasage de 0 rad	166
Figure IV-11 : Evolution pour un déphase de π rad	166
Figure IV-12 : Evolution du coefficient R_{\max} pour les 2 jeux de dentures nominaux	166
Figure IV-13 : Comparaison des coefficients dynamiques	168
Figure IV-14 : Schéma du réducteur	169
Figure IV-15 : Schéma du réducteur dans sa partie active.....	170
Figure IV-16 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage	173
Figure IV-17 : Evolution pour différents déphasages	174
Figure IV-18 : Evolution du facteur dynamique autour de la vitesse critique de vol libre....	174
Figure IV-19 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage	176
Figure IV-20 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation ...	176
Figure IV-21 : Comparaison pour chaque vitesse.....	178
Figure IV-22 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage	180
Figure IV-23 : Evolution pour différents déphasages	180
Figure IV-24 : Evolution pour diverses vitesses	181
Figure IV-25 : Schéma du réducteur dans sa partie active.....	183
Figure IV-26 : Evolution pour divers pourcentages.....	185
Figure IV-27 : Différence relative pour un pourcentage de 2.5 % et un harmonique d'ordre 1	186
Figure IV-28 : Evolution du coefficient dynamique à 5115 tr/min.....	186
Figure IV-29 : Evolution du coefficient dynamique à 5410 tr/min.....	186
Figure IV-30 : Evolution pour divers harmoniques	187
Figure IV-31 : Evolution du coefficient dynamique sans excentricités à 5410 tr/min	188
Figure IV-32 : Evolution du coefficient dynamique avec excentricités à 5410 tr/min	188
Figure IV-33 : Evolution du coefficient dynamique avec excentricités à 5705 tr/min	189
Figure IV-34 : Evolution pour deux angles d'hélices à divers pourcentages.....	190

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III-1 : Caractéristiques pour la comparaison analytique - numérique en dentures droites	104
Tableau III-2 : Valeurs en fonction de l'indice de modulation et de l'ordre.....	108
Tableau III-3 : Table des solutions élémentaires	113
Tableau III-4 : Amplitudes du second membre de l'ordre 1 de la partie permanente du second membre.....	117
Tableau III-5 : Amplitudes du second membre de l'ordre 1 de la partie transitoire du second membre.....	117
Tableau III-6 : Repérages des rapports critiques d'engrènement.....	119
Tableau III-7 : Caractéristiques de l'étude pour le calcul des amplitudes des excitations.....	122
Tableau III-8 : Données géométriques du couple d'engrenages pour l'étude de stabilité	130
Tableau III-9 : Rapports critiques d'engrènement (théoriques).....	132
Tableau III-10 : Caractéristiques des engrenages et de l'acyclisme	136
Tableau III-11 : Vitesses et rapports critiques de vol libre	138
Tableau IV-1 : Caractéristiques des couples d'engrenages pour le calcul du jeu de denture	154
Tableau IV-2 : Caractéristiques du couple d'engrenages.....	157
Tableau IV-3 : Données numériques de la simulation	158
Tableau IV-4 : Vitesses critiques du couple d'engrenages sans acyclisme	159
Tableau IV-5 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages	162
Tableau IV-6 : Comparaison des conditions de contacts pour les 2 jeux de denture nominaux	167
Tableau IV-7 : Caractéristiques des éléments d'arbres.....	169
Tableau IV-8 : Caractéristiques des accouplements	169
Tableau IV-9 : Caractéristiques des paliers.....	169
Tableau IV-10 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et 2 nd e vitesse critique d'engrènement.....	171
Tableau IV-11 : Vitesses critiques d'engrènement dues aux excentricités (mode 1)	172
Tableau IV-12 : Vitesses critiques d'engrènement dues à l'acyclisme (mode 1)	172
Tableau IV-13 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages	175
Tableau IV-14 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et 2 nd e vitesse critique d'engrènement.....	177
Tableau IV-15 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages	179
Tableau IV-16 : Caractéristiques des engrenages	183
Tableau IV-17 : Caractéristiques des paliers.....	183
Tableau IV-18 : Caractéristiques de fonctionnement.....	183
Tableau IV-19 : Vitesses critiques de vol libre	184

Tableau IV-20 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et vitesse critique
d'engrènement..... 184

PRINCIPALES NOTATIONS

$\dot{A} = \frac{dA}{dt}, \ddot{A} = \frac{d^2A}{dt^2}$	Dérivée temporelle première, seconde de la variable A
${}_m$	Variable du mobile m : $m = pig$ pour le pignon, $m = rou$ pour la roue
Θ_1, Θ_2	Angle de rotation du pignon, de la roue
Ω_1, Ω_2	Vitesse de rotation du pignon, de la roue
$\dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2$	Accélération angulaire du pignon, de la roue
Ω_{10}	Vitesse de rotation moyenne constante du pignon
Ω_m	Pulsation d'engrènement
Ω_{m0}	Pulsation d'engrènement moyenne constante
T_{01}	Période de rotation moyenne
T_m	Période d'engrènement
Θ_m	Angle d'engrènement
n	Numéro d'ordre de l'harmonique de l'acyclisme
φ_n	Phase associée à l'harmonique d'ordre n
$\rho_n(\Omega_{10})$	Pourcentage 0 - crête de l'acyclisme associé à l'harmonique d'ordre n
ω	Pulsation de l'acyclisme d'harmonique d'ordre n
C_m, C_R	Couple moteur, résistant
k_m	Raideur d'engrènement moyenne
α_{km}	Amplitude relative 0 - crête de la fluctuation de raideur d'engrènement
$\Phi(t)$	Fonction temporelle de la variation de la raideur d'engrènement
δ_m	Déflexion statique
m_{rn}	Indice de modulation de l'harmonique d'ordre n
J_i	Fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce d'ordre i
$F_m(t)$	Effort de denture
$R_m(t)$	Coefficient ou facteur dynamique
R_{max}	Maximum du coefficient ou facteur dynamique
Z_1, Z_2	Nombre de dents du pignon, de la roue
m_n, m_t	Module nominal, module apparent
Rb_1, Rb_2	Rayon de base du pignon, de la roue
a_0, a_f	Entraxe nominal, entraxe de fonctionnement
e_1, e_2	Excentricité du pignon, de la roue
λ_1, λ_2	Phase associée à l'excentricité du pignon, de la roue
$u = \frac{Rb_1}{Rb_2}$	Rapport de réduction
I_1, I_2	Inertie polaire du pignon, de la roue
I_{t1}, I_{t2}	Inertie transverse du pignon, de la roue
L_{pig}, L_{rou}	Largeur du pignon, largeur de la roue

p_n, p_t	Pas réel, pas apparent
p_b, p_{bt}	Pas de base, pas de base apparent
p_{jf}	Pas apparent de fonctionnement
s_p^m, s_{pt}^m	Épaisseur curviligne, épaisseur apparente d'une dent du mobile m
s_b^m, s_{bt}^m	Épaisseur de base, épaisseur de base apparente d'une dent du mobile m
s_{pf}^m	Épaisseur de fonctionnement du mobile m
$J, J(t)$	Jeu de denture normal moyen et jeu normal dépendant du temps
$J_t, J_t(t)$	Jeu de denture moyen apparent et jeu apparent dépendant du temps
$J_b, J_b(t)$	Jeu de denture moyen normal et jeu normal dépendant du temps donné sur le plan de base
β, β_b	Angle d'hélice, angle d'hélice de base
β_f	Angle d'hélice de fonctionnement
α_n, α_t	Angle de pression de taillage, angle de pression apparent
α_{nf}, α_{jf}	Angle de pression de fonctionnement, apparent de fonctionnement
X	Vecteur des degrés de liberté du réducteur
X_{eng}	Vecteur des degrés de liberté du couple d'engrenages
V_{1i}	Vecteur de structure au point i indépendant des conditions de contacts
V_{2i}	Vecteur de structure au point i dépendant des conditions de contacts
V_i	Vecteur de structure global
ε_i	Paramètre de gestion du contact au point i
Δ_i^ε	Ecrasement normal au point i (dépendant de ε_i)
Δ_{tr}	Erreur de transmission
θ_1, θ_2	Déplacements torsionnels du pignon, de la roue
\vec{n}_1, \vec{n}_2	Normale unitaire au profil du pignon, de la roue
$\vec{R} = R(\vec{s}, \vec{t}, \vec{Z})$	Repère global de calcul
$\vec{R}_1 = R_1(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$	Repère du plan d'action théorique
M_{glob}	Matrice de masse du réducteur
K_{glob}	Matrice de raideur du réducteur
C_{glob}	Matrice d'amortissement du réducteur
F_{glob}	Vecteur des forces s'appliquant sur le réducteur
M_{eng}	Matrice de masse du couple d'engrenage
K_{eng}	Matrice de raideur du couple d'engrenage
F_{eng}	Vecteur des forces s'appliquant sur le couple d'engrenages
c	Facteur d'amortissement
ξ	Facteur d'amortissement visqueux réduit
E, G	Module d'Young, de Coulomb

INTRODUCTION GENERALE

Les transmissions par engrenages sont très fréquemment utilisées pour transformer et transmettre à un organe récepteur le couple et le mouvement de rotation générés par un organe moteur. En fonctionnement, ces systèmes se déforment, vibrent et génèrent du bruit. Les incidences sur la tenue mécanique du système mécanique complet et sur les nuisances acoustiques sont loin d'être négligeables et justifient, entre autre, le travail de recherche présenté dans ce mémoire. Les engrenages sont reconnus comme des sources internes de vibrations significatives et comme des éléments clés dans les mécanismes de transfert et d'amplification de ces vibrations. A ce titre, leur comportement dynamique a fait l'objet de nombreux travaux principalement au cours des 25 dernières années. Les modèles de la littérature peuvent être regroupés selon deux thématiques principales : a) l'étude des phénomènes localisés au niveau des contacts entre dentures (conditions de chargement instantanées, influence des corrections de forme, séparations des dents et chocs, etc.) et b) des approches plus globales à l'échelle du système mécanique, qui traitent des couplages induits par les engrènements, des phénomènes de vitesses critiques par exemple.

Quelque soit l'objectif poursuivi, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (modèle de raideur, modèles à paramètres concentrés, etc.) sont utilisées et, dans ce contexte, la très large majorité des modélisations mises en œuvre considère un régime de rotation établi avec une vitesse imposée constante sur l'organe moteur. Dans le domaine des transports en particulier, il est bien connu que les vitesses sont modulées par le cycle de fonctionnement des moteurs à explosion et, pour des transmissions non chargées, ces phénomènes peuvent conduire à des niveaux de bruit gênants (rattle noise, bruit de grailonnement). Les conséquences de fluctuations de vitesses et de couples dans des engrenages chargés n'a, à notre connaissance, fait l'objet que de très peu d'études et nous nous proposons, dans ce mémoire, d'apporter une contribution à cette problématique.

Le texte se décompose en quatre parties. Dans le premier chapitre, les modèles couramment utilisés et les paramètres qui sont à la source des vibrations dans les engrenages (la raideur d'engrènement et les écarts de forme) sont explicités en s'appuyant sur une analyse exhaustive de la littérature existante. Le deuxième chapitre introduit une nouvelle formulation des conditions de contact dynamique qui inclut i) la possibilité de contacts directs et sur les faces arrières des dentures, ii) les contributions d'excentricités et des jeux de dentures, iii) l'influence de vitesses et couples variables. Les développements théoriques nécessaires à la simulation de l'engrènement et des évolutions des conditions de contact au cours du mouvement sont décrits et la résolution des équations est effectuée, dans la continuité de travaux antérieurs [5 - 37], en couplant un algorithme de contact normal et un schéma d'intégration pas à pas dans le temps. Dans le troisième chapitre, le modèle développé est exploité dans le cas particulier de modèles torsionnels plus simples et se prêtant ainsi à des comparaisons entre approches analytiques et numériques. Le cas de l'acyclisme (fluctuations périodiques multiharmoniques de la vitesse d'entrée) est considéré et une étude paramétrique est proposée. La stabilité des équations du mouvement est également analysée dans ce contexte particulier. Enfin, le dernier chapitre est consacré aux simulations en dynamique avec la prédiction des efforts instantanés sur les contacts entre dentures pour des applications de type industriel.

CHAPITRE I

DYNAMIQUE DES ENGRENAGES : UNE APPROCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I. INTRODUCTION

Les engrenages demeurent à l'heure actuelle les organes de transmission de puissance les plus couramment utilisés et suscitent toujours de nombreux travaux en recherche et développement. Parmi les thématiques les plus fréquemment abordées, le comportement dynamique de transmissions constitue un champ d'investigation relativement récent qui a pris toute son importance dans un contexte de durée de vie et de réduction des nuisances sonores dans les transmissions mécaniques. Les caractéristiques vibratoires sont connues pour dépendre de l'ensemble des constituants d'une transmission avec, en particulier, les contributions importantes associées :

- aux engrenages qui sont généralement reconnus comme les composants les plus influents
- aux arbres supports des engrenages
- aux paliers (roulements, paliers hydrostatiques ou hydrodynamiques)
- au carter

Les critères de confort acoustique, de tenue mécanique et de gain de poids sont de plus en plus prégnants dans la conception des architectures de trains d'engrenages modernes et induisent de nouvelles voies d'études. Une approche globale s'avère fréquemment nécessaire afin de caractériser les phénomènes vibroacoustiques associés aux excitations liées aux conditions de contacts entre les dentures et à la propagation des vibrations par voies solide et aérienne vers le milieu extérieur (Figure I-1).

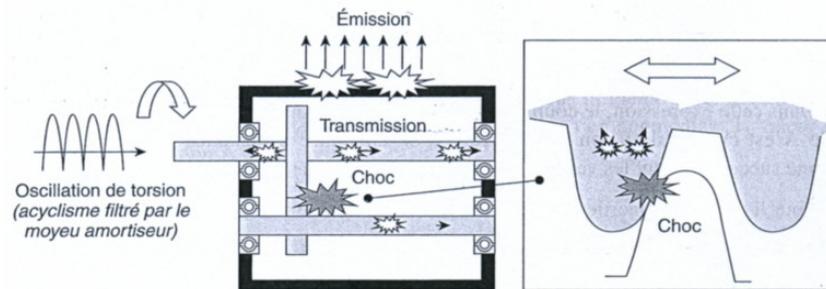


Figure I-1 : Emission de bruit dans les transmissions par engrenages (Ligier & Baron [1])

Historiquement, deux types d'approches sont fréquemment rencontrés dans l'analyse du comportement dynamique de transmissions par engrenages :

- Soit l'engrènement est modélisé de façon succincte et le comportement des autres éléments constitutifs du réducteur est considéré. Ce type d'étude relève alors principalement de la dynamique des rotors et des mécanismes. On peut citer entre autres, Bourdon [2], Lalanne & Col. [3], Kahraman & Col. [4].
- Soit les éléments extérieurs à l'engrenage sont considérés d'une façon simplifiée et les contacts entre les dentures sont simulés de la façon la plus complète possible. Ces travaux relèvent de la mécanique des contacts et de la dynamique de l'engrenage. On

peut citer ici les travaux de Velez [5], Umezawa & Col. [6] à [11], Küçükay [12], Kasuba & Col. [13], Kohler [14].

Récemment des travaux ont jeté des ponts entre ces deux domaines qui, tout en essayant de conserver un niveau de modélisation élevé des engrenages, permettent l'introduction de modèles de paliers, arbres, carters, organes moteurs, etc. Les principales sources d'excitation prises en compte comprennent :

- Les fluctuations de raideur d'engrènement qui constituent une des sources majeures de vibrations
- Les déformations élastiques des arbres supports des engrenages et des paliers
- Les défauts de formes des engrenages au niveau des dentures (erreurs de profil, d'hélice, de pas, etc.) ainsi que les corrections de profil et d'hélice
- Les défauts de positionnement des arbres et des engrenages (désalignements, erreur de montage)
- Les fluctuations de couples et de vitesses en entrée du réducteur qui peuvent être dues au moteur mais également au positionnement de l'axe moteur par rapport aux axes de la transmission.

Dans cette introduction bibliographique, les principaux paramètres conditionnant les niveaux vibratoires dans des transmissions par engrenages sont analysés. Un état de l'art sur la problématique de la modélisation du comportement dynamique de transmissions par engrenages (sources d'excitations, modélisation des élasticités, etc.) est ensuite présenté.

La première partie de ce chapitre recense les principaux paramètres caractéristiques en dynamique des transmissions. Dans la seconde partie, les nombreuses sources d'excitation aussi bien internes qu'externes, sont abordées. Enfin, la dernière partie est consacrée à une présentation des divers modèles utilisés en dynamique des engrenages.

II. LES PARAMETRES DE LA DYNAMIQUE DES ENGRENAGES

II.1. L'ERREUR DE TRANSMISSION

La notion d'erreur de transmission, introduite pour la première fois par Harris [15] en 1958, est une caractéristique fondamentale dans l'étude d'un réducteur à engrenage, aussi bien en régime statique que dynamique. L'erreur de transmission caractérise l'écart de la position de la roue menée, pour une position donnée du pignon, par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les engrenages étaient rigides et indéformables. Elle peut être exprimée sous forme angulaire ou sous forme linéaire si elle est ramenée dans le plan d'action (Figure I-2) tangent aux cylindres de bases des engrenages (Welbourn [16], Mark [17] à [19], Özgüven [20]).

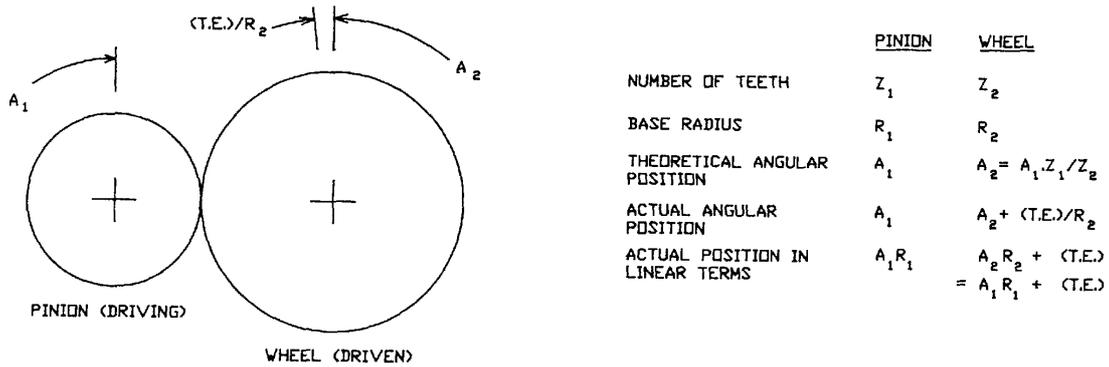


Figure I-2 : Définition de l'erreur de transmission (Munro [21])

On distingue classiquement :

- L'erreur de transmission statique ou quasi-statique sans charge ou erreur cinématique
- L'erreur de transmission statique ou quasi-statique sous charge
- L'erreur de transmission dynamique

II.1.1. Erreur de transmission quasi-statique sans charge ou erreur cinématique

Cette erreur correspond à des engrenages ne transmettant aucune puissance pour une vitesse de rotation quasiment nulle, elle intègre donc l'influence des défauts de géométries des dents, c'est-à-dire la non-conformité entre le profil théorique de la dent et le profil réel. Ces défauts globaux de non conformité résultent de la fabrication de l'engrenage (défauts de faux ronds, erreurs de pas, excentricités, etc.) mais également du montage des engrenages sur les lignes d'arbre (parallélisme, excentricité, etc.). Ajoutons également que les écarts de forme introduits intentionnellement tels que les corrections d'hélice ou de profil de la denture participent également à cette erreur. L'erreur de transmission quasi-statique à vide est donc purement géométrique et permet de caractériser la géométrie de l'engrenage et sa métrologie (Faure [22]).

II.1.2. Erreur de transmission statique ou quasi-statique sous charge

L'erreur de transmission statique sous charge (TE_s) résulte, en plus des erreurs liées à l'erreur cinématique, des déflexions de dentures lorsque l'engrenage transmet une charge à très faible vitesse. Cette erreur inclut donc les déformations de l'engrenage mais également de ses composants extérieurs (arbres, paliers, roulements,...). TE_s est couramment utilisée afin d'étudier les effets des écarts géométriques tels que les corrections de profils, les défauts de montage, etc. Grégory & Col. [23] et [24], Lin & Col. [25] et [26].

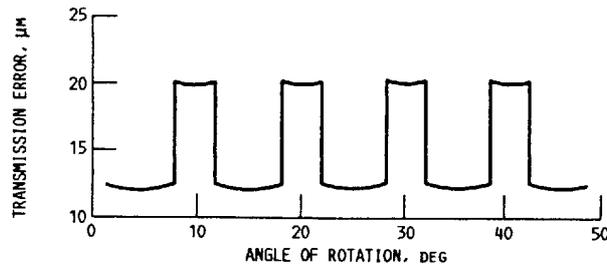


Figure I-3 : Erreur de transmission quasi-statique sous charge sans défauts de géométrie (Lin & Col. [26])

On montre également (Valex & Ajmi [27]) que, sous certaines conditions de linéarité, l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est représentative des sources d'excitation associées à l'engrènement. Des auteurs comme Kohler & Col. [14], Özgüven et Houser [28], Mark [17] et [18], Munro [29], Remmers [30] l'introduisent d'ailleurs directement comme fonction excitatrice dans leurs simulations numériques.

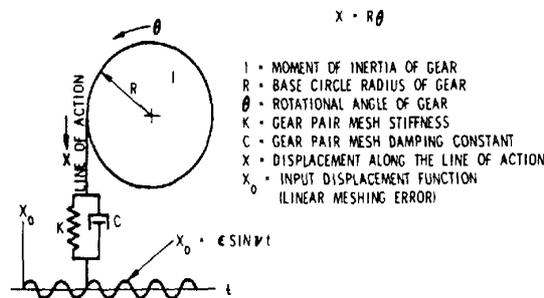


Figure I-4 : Modèle de Remmers [30]

II.1.3. Erreur de transmission dynamique

L'erreur de transmission dynamique est une image du comportement vibratoire et acoustique d'engrenages en fonctionnement sous charge. Certains auteurs, Grégory & Col. [23] et [24], Munro [31], ont ainsi pu mettre en évidence des phénomènes de séparation momentanée de dentures suivis de chocs à travers la mesure de ce paramètre. Ces phénomènes ont depuis été maintes fois observés expérimentalement [31] - [44] et retrouvés par simulations numériques [32] ou quasi-analytiques [44].

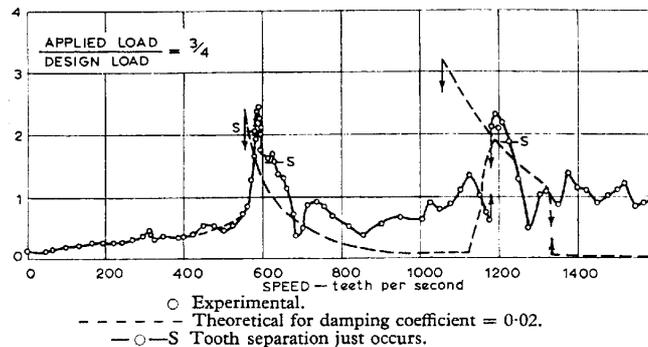


Figure I-5 : Réponses expérimentales de Grégory & Col. [23]

Velex & Saada [34-36], puis Maatar [37] et Velex & Maatar [38] et [39] ont proposé quand à eux une méthodologie basée sur la description locale des conditions de contacts entre les dentures, pour laquelle cette erreur ne constitue plus une source d'excitation mais le résultat du comportement du réducteur. Les équations du mouvement et les conditions associées aux contacts normaux entre dentures sont résolus simultanément et les erreurs de transmission apparaissent alors comme des résultats de la simulation et non pas comme des données du problème.

En conclusion, malgré certaines limitations [27], le concept d'erreur de transmission s'avère particulièrement bien adapté pour caractériser le comportement dynamique d'engrenages (principalement pour des largeurs de denture faibles) et constitue un indicateur intéressant en termes de vibroacoustique.

II.2. LE FACTEUR OU COEFFICIENT DYNAMIQUE

Ce paramètre est défini comme le rapport entre le chargement dynamique global à l'engrènement, et le chargement statique ou quasi-statique global. Il peut s'exprimer, selon les auteurs, en termes de charge ou de contraintes en pied de dents. Il correspond à l'intégrale des pressions sur l'aire de contact effective, définie par le rapport de conduite, et permet d'évaluer les effets d'inertie et de masse, les surcharges dynamiques, et de détecter les éventuelles séparations de dentures, notamment à l'approche de vitesses critiques de dentures.

Initialement, ce facteur a été évalué uniquement sur des engrenages à dentures droites sans pertes de contacts, grâce à des formules empiriques (I-1) (Buckingham [40], Tuplin [41]) faisant essentiellement intervenir la vitesse linéaire de défilement des dentures dans le plan d'action. A titre indicatif, nous donnons en (I-1) la formule de Wellauer d'après Houser & Seireg [43] (NB : le facteur dynamique est ici défini comme le rapport entre la charge statique et la charge dynamique).

$$DF = \frac{\text{static load}}{\text{dynamic load}} = \sqrt{\frac{78}{78 + \sqrt{V}}} \quad (\text{I-1})$$

V : vitesse linéaire de défilement (en ft/mn)

Houser & Seireg [42] et [43], à partir d'investigations expérimentales et théoriques, ont ensuite introduit les effets des variations temporelles de raideur d'engrènement, d'inertie et de masse, ainsi que les contributions d'écarts de géométrie (erreurs de pas notamment) pour étendre le champ d'application de ces formules aux engrenages à dentures droites et hélicoïdales.

Kubo [44] a montré, analytiquement et expérimentalement, que l'intensité de la charge transmise et les écarts de forme influent sur le chargement aux dentures. Ses courbes de réponses font alors apparaître un saut d'amplitude (Figure I-6), typique de pertes de contact momentanées entre dentures et de chocs lors des reprises de contact. Ces résultats expérimentaux font référence et sont fréquemment utilisés à fin de validation des modèles numériques non-linéaires (Özgülven & Houser [28] et [45], Kahraman & Singh [33], Velex & Maatar [38]).

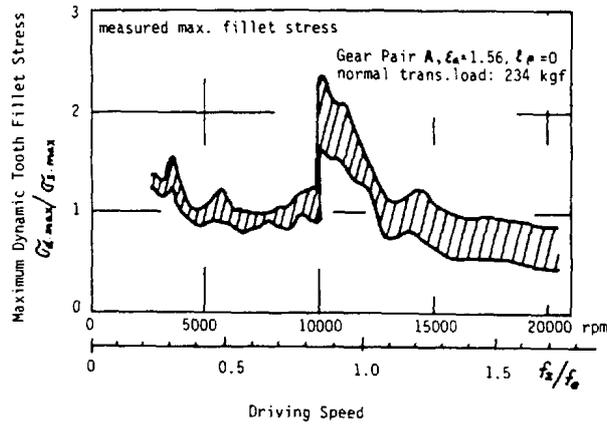


Figure I-6 : Courbe de réponse dynamique d'après Kubo [44]

II.3. LA RAIDEUR D'ENGREMENT

La raideur globale d'engrènement caractérise les déformations élastiques qui gèrent les positions relatives des deux roues d'un engrenage, sous l'action des efforts transmis. Cette liaison élastique, sur laquelle repose largement la problématique de la dynamique de l'engrenage, est assurée par les contacts entre dentures conjuguées des deux roues au cours de l'engrènement. Elle témoigne donc des conditions d'engrènement et met en évidence les fonctionnements non-linéaires, synonymes de pertes de contact partielles, voire totales, entre dentures.

Par hypothèse, la majorité des études concernant l'engrènement s'effectue dans le plan théorique de la denture, représenté par un plan tangent aux rayons de base du pignon et de la roue (Figure I-7), même si des auteurs ont tenté des modélisations avec des contacts hors du plan d'action, Kasuba & Evans [13], Honda [46], Vexel & Col. [47].

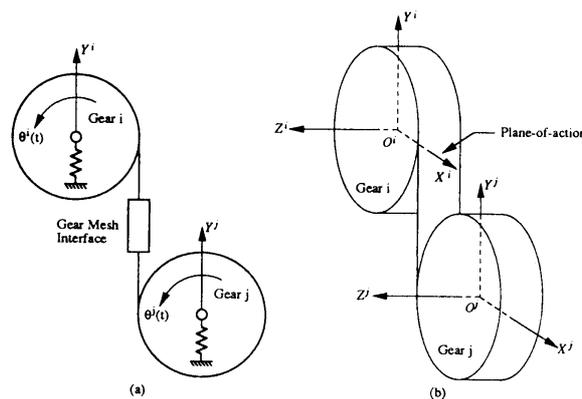


Figure I-7 : Liaison élastique par engrènement, définition selon Blankenship [48]

Parmi les premières modélisations proposées, Tuplin [41] a matérialisé cette raideur comme un simple ressort et a modélisé les écarts de forme des profils par des coins de géométries données se déplaçant entre la raideur et une partie indéformable simulant les aspects inertiels associés à l'engrenage (Figure I-8).

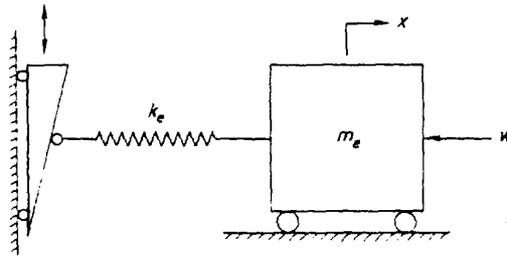


Figure I-8 : Modèle de Tuplin d'après Özgüven [20]

Strauch [49] et Harris [15] ont mis en évidence le rôle prépondérant de la variation temporelle de la longueur de contacts entre les dentures, qui est largement contrôlée par le rapport de conduite et qui est représentatif de l'évolution de la longueur de contact au cours de la rotation ou plus simplement du nombre de dents en prise dans la cas de dentures droites.

Afin de déterminer la raideur globale d'engrènement, il est nécessaire de connaître à priori les propriétés de rigidité (ou de compliance) caractérisant un couple de dents en contact.

II.3.1. Calcul de la raideur d'un couple de dents

Lors des calculs en dynamique des engrenages, il est nécessaire de calculer la raideur d'un couple de dents en prise, pour ensuite extrapoler à l'ensemble des dents en contact à un instant considéré. Des modèles plus ou moins sophistiqués ont été proposés. La plupart des approches sont bidimensionnelles et se basent sur une décomposition des dents en tranches minces. L'alternative la plus courante repose sur des calculs par éléments finis dont les résultats sont ensuite intégrés dans des modèles dynamiques de manière plus ou moins précise (modèles de fondations élastiques de Wrinckler [55] (sans couplage entre points adjacents), de Pasternak [55] (avec couplages), coefficients d'influence [55], etc.). Le calcul global de la raideur d'engrènement se décompose généralement :

- En une contribution locale, à savoir les rigidités de contact généralement considérées comme Hertiennes entre les dents du pignon et de la roue
- En contributions globales avec notamment les raideurs de flexion de denture, le pivotement de la dent par rapport au corps de l'engrenage et la raideur de fondation entre la dent et le corps.

La raideur globale d'engrènement est ensuite déterminée en combinant ces raideurs en série et en parallèle.

II.3.1.1. Raideur d'engrènement selon la norme ISO 6336

Un ordre de grandeur peut être fourni par les formules de la norme ISO 6336 [50], valables pour des engrenages monoblocs (i.e. sans voile mince) à dentures en développante de cercle. Le calcul intègre essentiellement les caractéristiques géométriques des engrenages et il

conduit à une valeur raisonnable de la raideur par unité de longueur en considérant toutes les contributions élastiques de l'engrenage.

II.3.1.2. Contribution de la raideur de flexion et de fondation de la dent

Une brève présentation des diverses techniques de calcul de ces raideurs est présentée. Les formules retenues sont celles de Weber & Banaschek [51], des alternatives sont possibles, voir par exemple Cornell [52] et Ishikawa [53].

Une dent d'engrenage est assimilée à une poutre de section variable encastree - libre selon l'axe \bar{Y} (Figure I-9). La section d'encastrement S_j est définie par le point de tangence à la trochoïde de raccordement inclinée d'un angle de 20° par rapport à l'axe \bar{Y} (axe de symétrie de la dent). En égalant l'énergie de déformation de la dent soumise à une charge concentrée et le travail de cette charge, il est possible d'exprimer la déflexion de la ligne moyenne dans la direction de la charge sous la forme :

$$\delta_{fle} = \frac{W}{b} \frac{1}{E^*} \cos^2(\alpha'_j) \left[10.92 \int_0^{u_j} \frac{(u_j - y)^2}{z_j(y)^3} dy + 3.1 (1 + 0.294 \tan^2(\alpha'_j)) \int_0^{u_j} \frac{1}{z_j(y)} dy \right] \quad (I-2)$$

Avec :

- W : charge concentrée sur le flanc de la dent
- b : largeur de la dent ou de la tranche pour une denture hélicoïdale
- $E^* = E$: module d'Young en contraintes planes (dentures peu larges)
- $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ en déformations planes (dentures larges), ν coefficient de Poisson

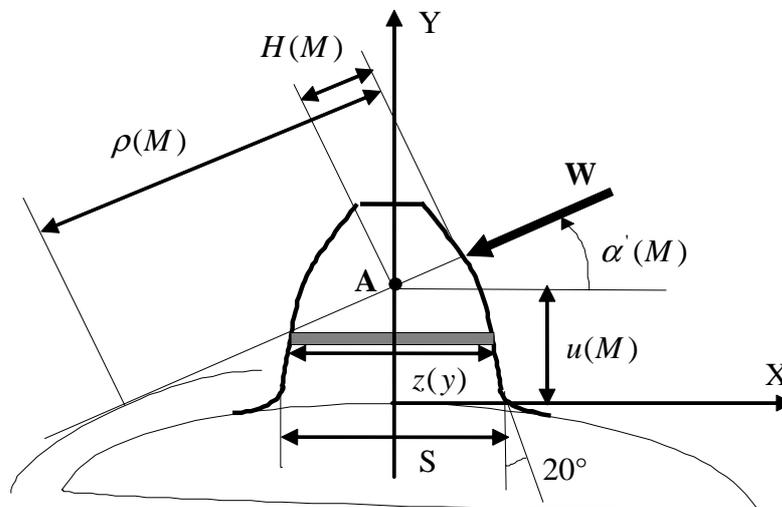


Figure I-9 : Paramètres pour la formule de Weber - Banaschek

La raideur de flexion de la dent est couramment calculée à l'aide de (I-2) ou de la norme ISO. Dans le cas du calcul avec (I-2), il est également nécessaire de calculer la raideur due à la fondation de la dent sur le corps de l'engrenage.

La liaison entre la dent et le corps de l'engrenage n'est pas infiniment rigide et il convient alors de prendre en compte cette élasticité supplémentaire. Pour cela, l'encastrement entre une dent et le corps est assimilé à un massif semi-infini bidimensionnel soumis à une distribution de contraintes représentant de manière plus ou moins fine l'influence du chargement sur le profil (Figure I-10).

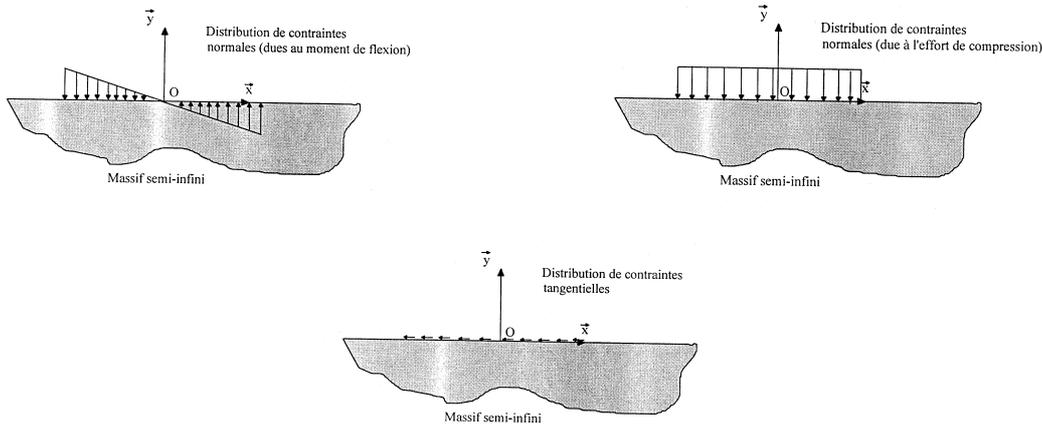


Figure I-10 : Modélisation de la fondation d'une dent

La solution finale est obtenue en résolvant de manière indépendante, par les formules classiques de l'élasticité bidimensionnelle, chacun des problèmes de la Figure I-10 et en utilisant le principe de superposition.

La formule (I-2) obtenue par Weber et Banaschek s'écrit :

$$\delta_{fon} = \frac{W}{b} \frac{1}{E^*} \cos(\alpha'_j) \left[5.2 \left(\frac{u_j}{S_j} \right)^2 + \left(\frac{u_j}{S_j} \right) + 1.4 (1 + 0.294 \tan^2(\alpha'_j)) \right] \quad (I-3)$$

Suite aux développements informatiques récents, les calculs par éléments finis ont pris de plus en plus d'importance. Ainsi une modélisation complète de la dent est envisageable, mais ce type de calculs tridimensionnels est généralement assez lourd et s'avère peu adaptés à la simulation du comportement dynamique. Une approche hybride basée sur la théorie des fondations élastiques de Pasternak [54] a alors été développée par Vexé & Ajmi [55] et [56]. Celle-ci permet de tenir compte des couplages élastiques de la denture sur le corps de l'engrenage et se prête assez bien au calcul vibratoire.

La dent est assimilée à une fondation élastique de Pasternak [54] constituée par des éléments de flexion et des éléments de cisaillement transversal posés sur des ressorts indépendants reliés à un bâti (Figure I-11).

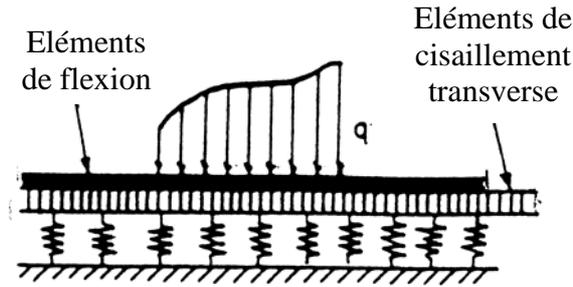


Figure I-11 : Fondations élastiques de type Pasternak

Les éléments de flexion et de cisaillement permettent de lier les ressorts et de simuler (au moins qualitativement) les couplages élastiques entre points voisins (Figure I-12).

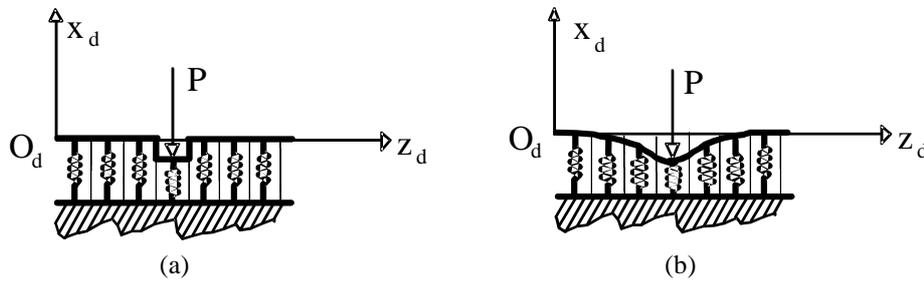


Figure I-12 : Déformée d'une fondation élastique par une charge concentrée normale
 (a) Modèle sans couplage
 (b) Modèle avec couplage

En s'inspirant des travaux en quasi-statique de Seager [57], Schmidt & Col. [58], les déplacements élastiques des dentures seules peuvent être décrits par des fondations élastiques de Pasternak rapportées sur le plan d'action de l'engrenage (plan tangent aux deux cylindres de bases). La dent et son embase sont ainsi découpées en tranches minces, chacune d'elles étant matérialisée par un ressort lié à des éléments de dimensions variables travaillant en flexion et en cisaillement pour assurer le couplage entre les tranches (Figure I-13). Le déplacement relatif des flancs de denture est simulé en réajustant les paramètres de raideurs au cours du temps.

Les valeurs de k_{ij}^{dm} , G_{ij}^{dm} et D_{ij}^{dm} sont données par des formules semi-empiriques en comparant les calculs de déflexions à partir de code éléments finis tridimensionnels et les valeurs fournies par les fondations élastiques [55] :

$$k_{ij}^m = C_f k_{0ij}^{dm} \quad (I-4)$$

$$G_{ij}^{dm} = C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4}\right)^2 k_{0ij}^{dm} \quad (I-5)$$

$$D_{ij}^{dm} = C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4}\right)^4 k_{0ij}^{dm} \quad (I-6)$$

Avec :

- k_{0ij}^{dm} la raideur de Weber et Banaschek déduite des relations (I-2) et (I-3)
- $f_m(z) = 1$ si la denture est droite, $f_m(z) = A f_1(\alpha) + B f_2(Z_m) f_3\left(\frac{b_m}{m_n}\right) e^{-Cz}$ si elle est hélicoïdale
- m_n le module de taillage
- b_m la largeur du mobile m
- Z_m le nombre de dents du mobile m
- A , B et C des constantes à déterminer
- $\bar{z} = \frac{z}{m_n}$ la coordonnée adimensionnée du point M_{ji} selon la largeur
- f_0 , f_1 , f_2 et f_3 des fonctions qui dépendent de la géométrie de la denture
- $C_f = 0.8$ pour des engrenages massifs (en s'inspirant des résultats de la norme ISO 6336)

Dans le cas des dentures hélicoïdales, la fonction $f_m(z)$ est introduite afin de tenir compte de la dissymétrie axiale des déplacements sur les bords pour une charge concentrée appliquée à rayon constant. Les coefficients A , B et C sont ajustés en utilisant les résultats des éléments finis tridimensionnels. La raideur d'un couple de dents est alors recomposée à partir des déplacements issus des déformations de contact et de structure de la dent.

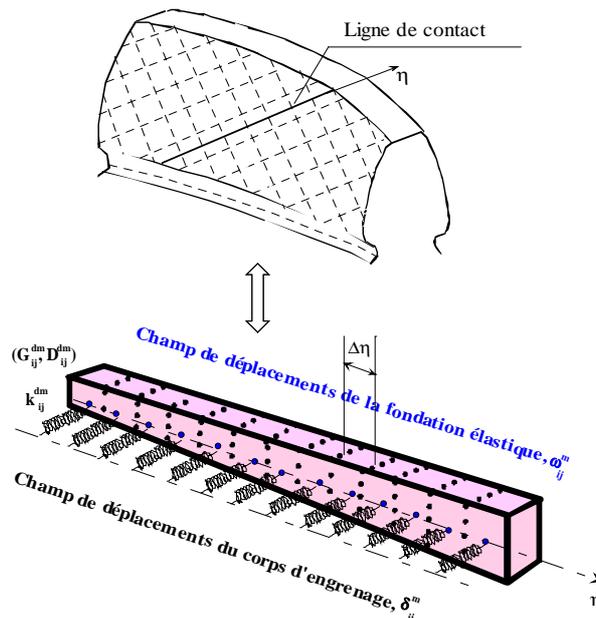


Figure I-13 : Modélisation d'une dent par une fondation élastique

II.3.1.3. Raideur de contact

Après s'être intéressé aux rigidités associées à la structure de la dent, les formulations les plus couramment utilisés pour calculer les rigidités de contacts entre deux flancs de dentures sont exposés. Deux formules sont généralement utilisées pour le calcul de cette raideur.

La première a été formulée par Weber & Banaschek. Cette formule est purement bidimensionnelle. Le contact entre deux dents est assimilé à deux massifs élastiques semi-infinis soumis chacun à une distribution hertzienne de pressions normales (Figure I-14). En notant la demi-largeur de contact a_H , la déflexion au centre du contact par rapport à un point de référence B situé sur la même verticale à une profondeur d , s'écrit d'après Johnson [59] :

$$\delta_c = 2 \frac{W}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left[\log \left(\frac{2d}{a_H} \right) - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \right] \quad (I-7)$$

Avec :

- $\frac{W}{b}$ la charge par unité de largeur de contact (selon l'axe \vec{Z})
- $a_H = \sqrt{8 \frac{W}{b} \kappa \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$ la demi-largeur du contact hertzien
- d la profondeur de référence pour le calcul de la déflexion au centre du contact O
- $\kappa = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$ le rayon de courbure équivalent au point de contact considéré, κ_m étant celui du mobile m

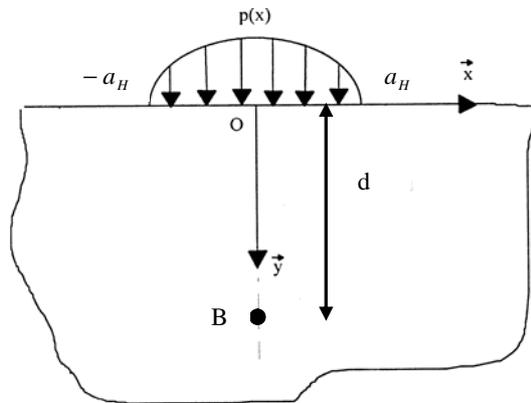


Figure I-14 : Demi-plan élastique soumis à une distribution de pression hertzienne

La principale hypothèse consiste à considérer que la déformée de contact demeure localisée au voisinage de la zone chargée et que sa contribution au niveau de la fibre médiane de la dent peut être négligée devant les effets de flexion. En effet, les valeurs de déplacements calculées tendent vers l'infini à mesure que l'on s'éloigne de la zone chargée. En notant H la distance entre le point de contact et la fibre neutre d'une dent selon la direction de la charge (Figure I-9), la déflexion de contact d'une dent s'écrit :

$$\delta_{WB}^c = 2 \frac{W}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left[\log\left(\frac{2H}{a_H}\right) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right] \quad (I-8)$$

La deuxième formule de calcul de la raideur de contact a été introduite par Lundberg [60] qui propose une formulation tridimensionnelle, en supposant que la pression de contact est uniforme sur la largeur de contact b et semi-elliptique selon la direction transverse (Figure I-15). L'expression de la déflexion au centre de la zone chargée s'exprime alors en conservant les notations de (I-7) et (I-8) :

$$\delta_L^c = 2 \frac{W}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left[\frac{1}{2} + \log(2) + \log\left(\frac{b}{a_H}\right) \right] \quad (I-9)$$

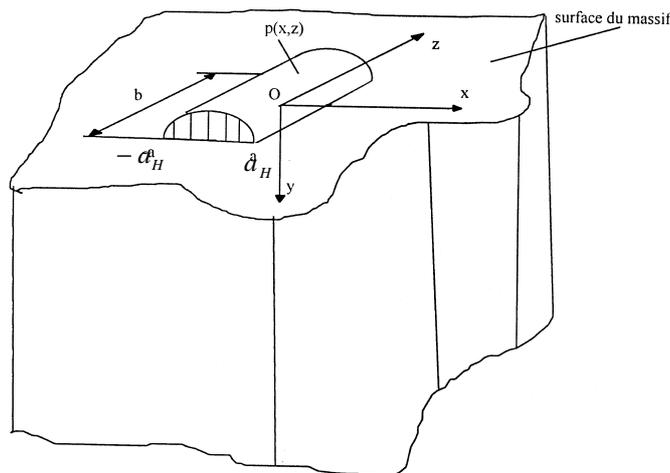


Figure I-15 : Demi-espace élastique et chargement pour la formule de Lundberg

II.3.2. Raideur globale d'engrènement

Connaissant les propriétés de rigidité d'un couple de dents en prise, le calcul de la raideur globale instantanée consiste à intégrer la raideur unitaire de contact, à chaque instant, sur la longueur de contact effective. En considérant que les portées de dentures sont complètes, la raideur globale d'engrènement est approximativement proportionnelle à la longueur de contact théorique qui est très largement contrôlée par le rapport de conduite total de l'engrenage. La raideur d'engrènement est alors une fonction périodique, dont la période correspond à l'apparition des couples de dents qui défilent à l'intérieur du plan d'action : c'est la période d'engrènement.

Des modèles simplifiés supposent que la raideur d'un couple de dents reste constante quel que soit la position du point d'application de la charge sur les profils conjugués. Ainsi la raideur globale d'engrènement devient directement proportionnelle à la longueur de contact instantanée. Kiyono & Col. [61], Küçükay [12], Iwatsubo & Col. [62], Cai & Hayashi [63], Neriya & Col. [64], Velex [5], Velex & Saada [34] à [36] représentent alors la raideur globale d'engrènement d'engrenages à dentures droites par une fonction en créneaux (Figure I-16), et en trapèze pour les dentures hélicoïdales (Figure I-17).

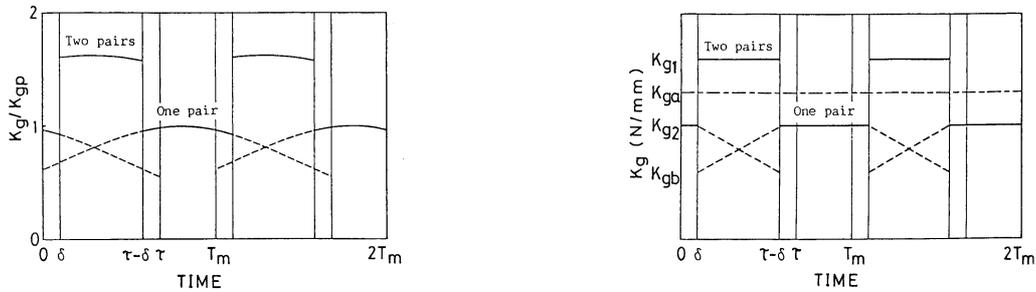


Figure I-16 : Raideur d'engrènement globale d'Iwatsubo & Col. [62]

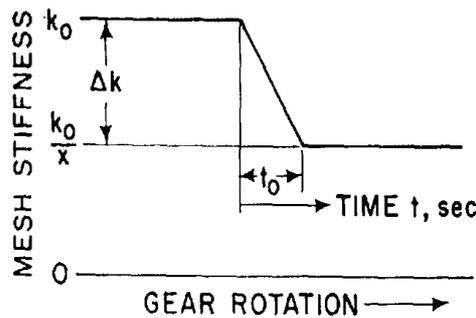


Figure I-17 : Décomposition de la raideur d'engrenage hélicoïdale de Seireg & Houser [43]

A certaines vitesses de fonctionnement de l'engrenage appelées vitesses critiques d'engrènement, et/ou en présence d'écarts de géométries ou de montage, des pertes de contacts partielles ou totales entre les dentures peuvent apparaître. La longueur effective de contact diminue et il y a alors un abaissement instantané du niveau de la raideur globale d'engrènement. Dans ce cas, le régime de fonctionnement devient non-linéaire et dépend à la fois de la charge transmise et de la vitesse de rotation. Ce phénomène a été mis en évidence en particulier par Kasuba & Evans [13] pour des engrenages en présence d'écailles ou d'écarts sinusoïdaux suivant le profil des dentures (Figure I-18).

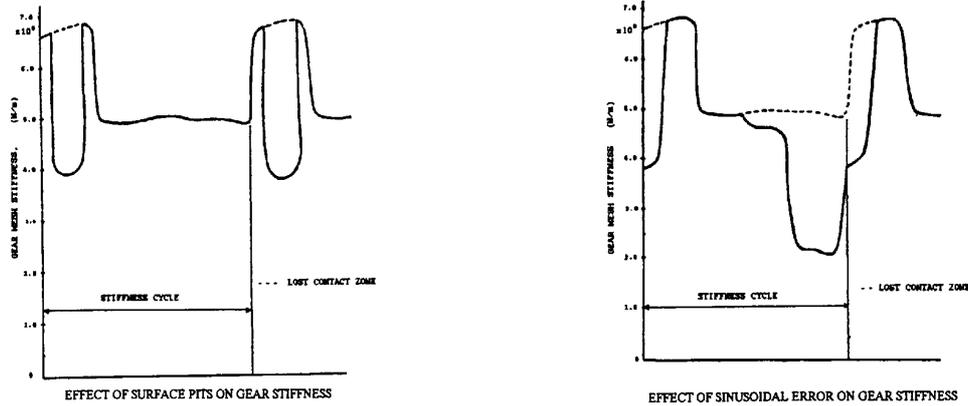


Figure I-18 : Raideurs d'engrènement non-linéaires (Kasuba & Evans [13])

III. LES SOURCES D'EXCITATION EN DYNAMIQUE DES ENGRENAGES

Les sources d'excitation vibratoire ou acoustique d'une transmission sont multiples. On distingue les sources internes, propres au fonctionnement de la transmission, des sources externes mais la majeure partie des auteurs s'accorde à reconnaître la prééminence des engrenages à proprement parler et des conditions de contact instantanées sur les dents. Concernant les sources externes, elles sont associées aux fluctuations des couples moteur et résistant, aux variations de vitesses des mobiles mais également aux vibrations transmises via les points de fixation sur la structure d'accueil.

III.1. LES SOURCES INTERNES À L'ENGRENEMENT

III.1.1. Erreurs de forme

Les écarts de forme sur les dents proviennent essentiellement du processus de fabrication qui débute par une opération de taillage des dents suivie éventuellement de traitements thermiques visant à améliorer les caractéristiques mécaniques de la denture, puis enfin d'une opération de finition. Chaque étape de ce processus génère des écarts de forme plus ou moins importants sur la denture. Ces erreurs se retrouvent au niveau de la denture de l'engrenage par des erreurs de profils, de distorsion, de division.

Les erreurs de profil (Figure I-19), écart entre le profil réel et conjugué, et de distorsion (Figure I-20), écart entre la trace de l'hélice réelle et idéale, sont généralement dues à des défauts de taillage et/ou de rectification.

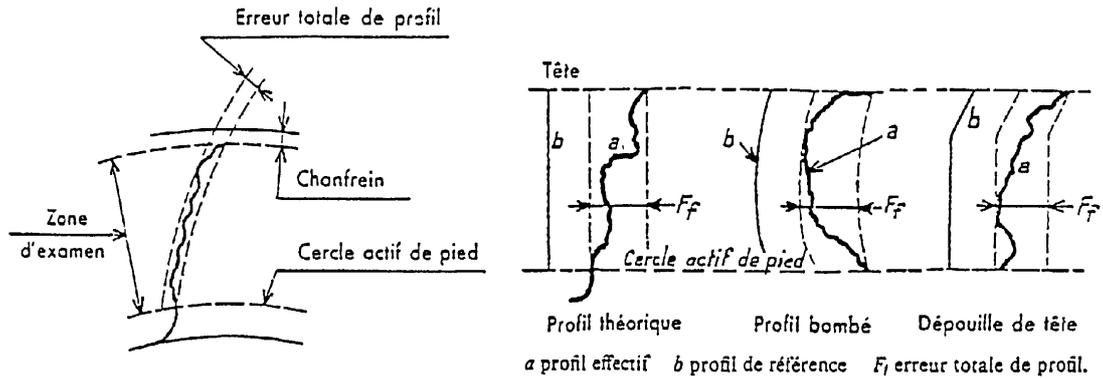


Figure I-19 : Erreurs de profils (Henriot [65])

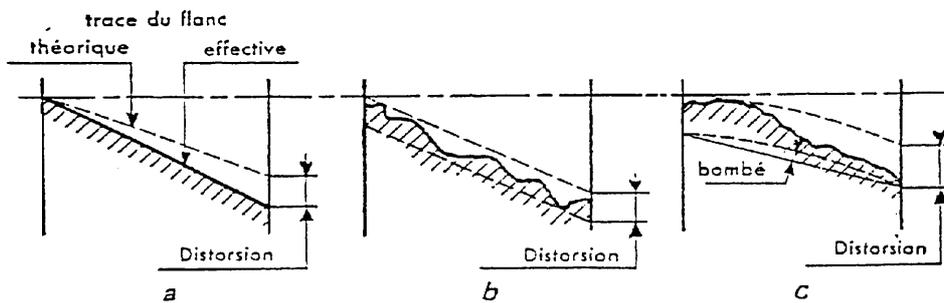


Figure I-20 : Erreurs de distorsion (Henriot [65])

Les erreurs de pas (Figure I-21) se divisent en trois catégories : l'erreur individuelle ou de division, l'erreur cumulée sur un secteur contenant k pas et l'erreur totale de division.

La première est définie comme l'écart entre la valeur réelle du pas considéré, qu'il soit circulaire, apparent, réel ou de base réel et sa valeur théorique.

La deuxième est définie comme la différence algébrique entre la longueur mesurée (réelle) et la longueur théorique (arc de cercle de contrôle) compris entre deux profils homologues extrêmes séparés par un nombre k de pas circulaires. L'erreur cumulée représente aussi la somme algébrique des erreurs individuelles des k pas compris dans le secteur considéré. L'erreur de division cumulée est une quantité qui dépend du nombre de dents contrôlées.

Enfin, l'erreur totale de division représente la variation crête à crête de l'erreur de division cumulée sur un tour de rotation, dans ce cas k est égal au nombre de dents de l'engrenage.

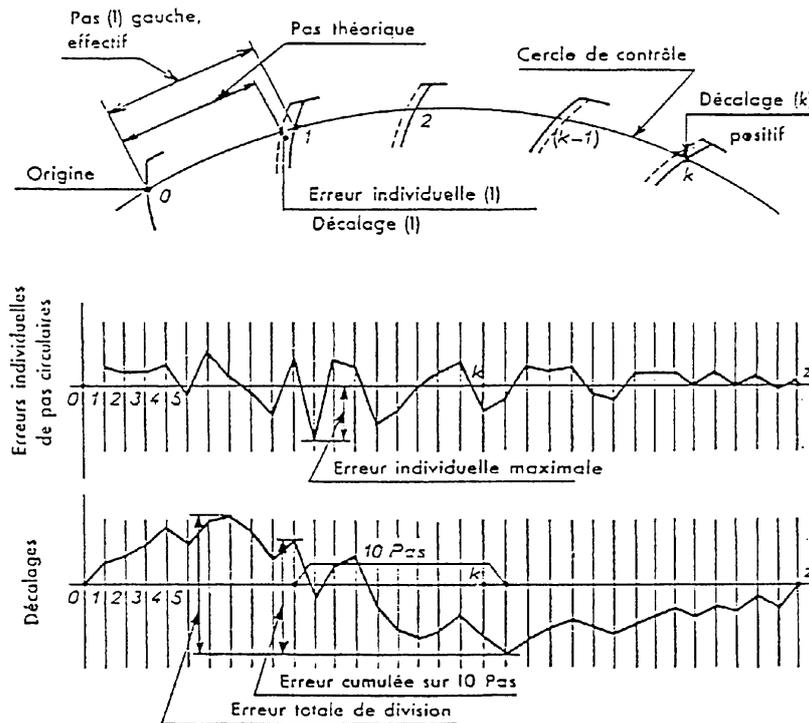


Figure I-21 : Erreurs de pas (Henriot [65])

Afin d'améliorer le comportement vibratoire de l'engrenage et d'améliorer la répartition de la charge sur le flanc de la denture, des corrections sur les dentures peuvent être apportées. Concernant la correction de profil, des dépouilles sur les dentures sont effectuées, correspondant à des enlèvements de matière en sommet et/ou en pied de dent. Pour la correction des distorsions et des défauts d'alignement, des bombés combinés ou non avec des modifications linéaires, seront pratiqués selon la largeur de la dent et éventuellement selon le profil.

III.1.2. Erreurs de positions

Les erreurs de position sont principalement dues à l'assemblage des divers constituants du réducteur. Ils regroupent principalement deux types de défauts que sont les erreurs d'alignement ou de parallélisme et les erreurs d'excentricités.

L'erreur d'alignement caractérise le non-parallélisme des axes supportant les engrenages. Elle peut être définie par deux angles :

- Le premier est un angle d'inclinaison (Figure I-22) correspondant à un écart angulaire entre l'axe réel de l'arbre et son axe théorique dans le plan des deux axes de rotation de référence des engrenages.
- Le second est un angle de déviation (Figure I-22) correspondant à un écart angulaire entre l'axe réel de l'arbre et son axe théorique mais dans un plan normal au précédent et parallèles aux axes.

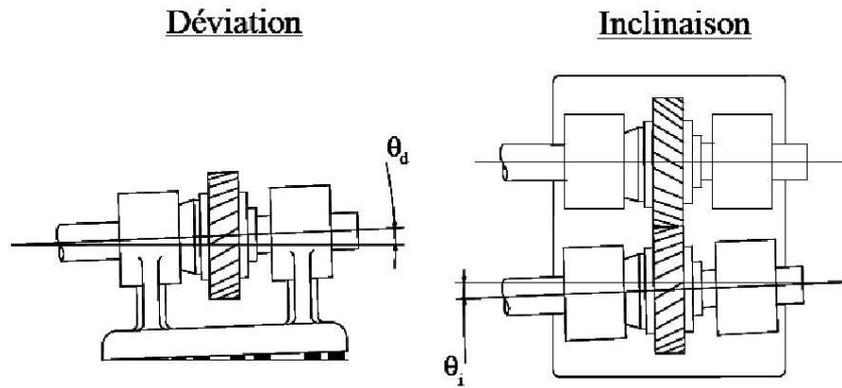


Figure I-22 : Définition des angles de déviation et d'inclinaison (Umezawa [9])

Des résultats expérimentaux menés par Umezawa [9] mettent en évidence l'influence de ces défauts de déviation et d'inclinaison sur le comportement dynamique de l'engrenage, notamment sur l'augmentation du niveau vibratoire.

Le défaut d'entraxe est également important car il intervient directement sur le jeu de fonctionnement et modifie la géométrie de l'engrènement (rapport de conduite). Mitchell [66] et Welbourn [67 - 68] soulignent son influence et montrent des résultats expérimentaux obtenus sur une boîte de transmission de camion, silencieuse pour un jeu minimum et bruyante pour un jeu modéré.

Les erreurs d'excentricités traduisent la non-concentricité entre l'axe du cylindre de base de l'engrenage et l'axe de rotation de l'arbre auquel il est lié. Ce défaut est présent dans la totalité des transmissions par engrenages. Il se traduit par la modulation d'amplitude harmonique à la rotation des arbres sur les signaux d'erreurs de transmissions (Figure I-23).

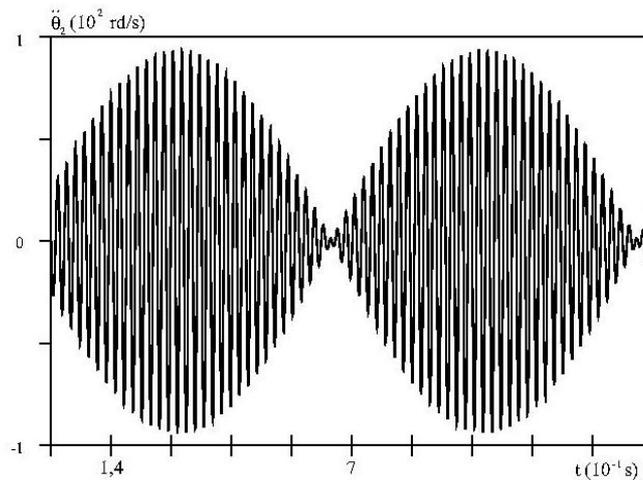


Figure I-23 : Modulation d'amplitude caractéristique d'un défaut d'excentricités (Sabot & Perret-Liaudet [69])

Cette modulation se traduit par l'apparition de deux raies (dans le cas d'un seul étage de réduction) de fréquences la fréquence de rotations des arbres, et par deux bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement, définie comme le produit du nombre de dent de la roue menante par la vitesse de rotation. Ces bandes sont situées à $\pm f_{1,2}$, f_j représentant la fréquence de rotation de l'arbre j (Figure I-24).

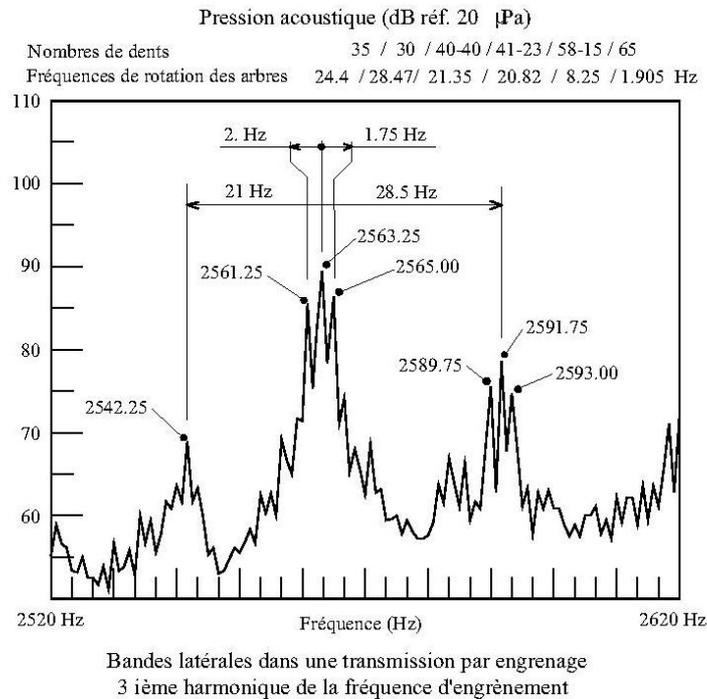


Figure I-24 : Localisation des bandes latérales dues aux excentricités (Welbourn [68])

Les effets caractéristiques de ces défauts sont connus. Brière [70] a proposé une technique de calcul de ces erreurs et a obtenu de bonnes corrélations expérimentales. Mitome & Ishida [71], Vexel [5] donnent une solution analytique directe dans le cas où les excentricités sont faibles devant les rayons de l'engrenage, ce qui est toujours le cas pour des engrenages de classe de qualité courante.

III.2. RAIDEUR D'ENGRENEMENT ET INSTABILITE PARAMETRIQUE

Les variations de raideur d'engrènement sont principalement causées par l'évolution du nombre de dents en prise et constitue une excitation interne puissante dans le cas de dentures droites. Sa fréquence d'évolution est égale à la fréquence d'engrènement et peut conduire à l'apparition de régimes critiques de fonctionnement pour lesquels l'amplitude vibratoire augmente fortement. A l'approche de ces vitesses critiques, des phénomènes de type vibro-impact peuvent se produire indiquant un comportement dynamique non-linéaire et des pertes de contacts partielles ou totales entre les dentures.

Les équations différentielles associées à des systèmes mécaniques à raideur et amortissement variables sont des équations de Hill qui s'expriment :

$$M \ddot{X} + C(t) \dot{X} + K(t) X = F(t) \tag{I-10}$$

Ces équations n'admettent pas de solutions analytiques exactes. Floquet [72] a montré qu'il y a possibilité d'apparition de résonances lorsque les fonctions $C(t)$ et $K(t)$ sont périodiques de période T à partir de l'équation homogène plus connue sous le nom d'équation de Mathieu-Hill. Ces résonances sont plus communément appelées résonances paramétriques ou instabilités paramétriques. Une forme particulière de ce type d'équation est l'équation de Mathieu (I-11), pour laquelle le terme d'amortissement est nul.

$$M \ddot{X} + K(t) X = 0 \tag{I-11}$$

Ce type d'équation a fait l'objet de nombreux travaux synthésés dans les ouvrages classiques de Bolotin [73] et de Nayfeh & Mook [74] (Figure I-25). Gregory & Col. [24] illustrent ce problème mathématique sur leur modèle torsionnel à un seul degré de liberté d'engrenage droit, pour lequel la raideur d'engrènement est représentée sous la forme d'un sinus pur. Ils montrent alors que les instabilités dépendent de la pulsation propre du système et mettent en évidence l'apparition de perte de contact totales entre dentures à des fréquences d'excitation proches de celles pour lesquelles le rapport entre la pulsation d'engrènement ω_m et la pulsation propre du système ω_0 est tel que :

$$\omega_m = \frac{2 \omega_0}{n}, n = 1, 2, \dots \tag{I-12}$$

Benton et Seireg [75] ont montré l'aspect bénéfique de l'amortissement qui réduit les tailles des zones d'instabilités et ont mis en évidence le fait que des variations en créneau sont potentiellement plus dangereuses que des variations sinusoïdales (Figure I-25).

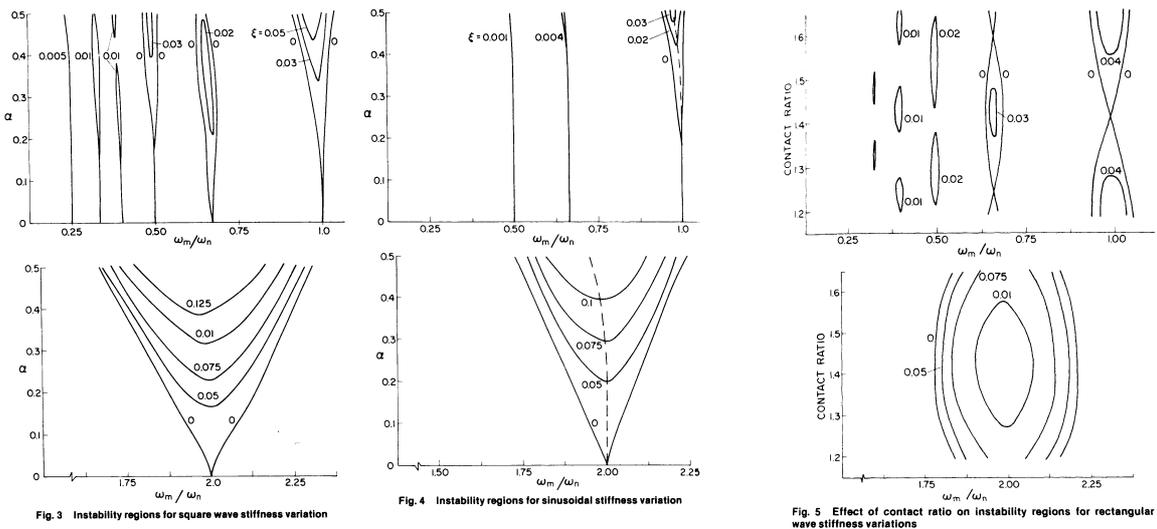


Figure I-25 : Evolutions des zones d'instabilités paramétriques (Benton & Seireg [75])

D'autres auteurs tel Velex [5] ont appliqués l'étude de l'instabilité dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle d'un réducteur simple étage. Les principaux constats sont listés ci-dessous :

- la forme et l'amplitude de la raideur jouent sur le nombre et la taille des zones d'instabilités paramétriques
- le facteur d'amortissement a un effet stabilisant, car il supprime les zones d'instabilités à basses fréquences et réduit leur taille à hautes fréquences
- la taille de ces zones varie avec le rapport de conduite

Les méthodes de recherches de ces zones d'instabilités paramétriques seront exposées au chapitre III.

III.3. LES SOURCES EXTERNES D'EXCITATIONS

Un réducteur à engrenages est un organe complexe intervenant au sein d'une chaîne cinématique de transmissions. Il permet de transmettre la puissance entre un organe moteur et un organe récepteur tout en réduisant ou augmentant la vitesse de rotation entre son entrée et sa sortie. Il est donc assujettit à subir lors de son fonctionnement une multitude d'excitations provenant des organes auxquels il est accouplé.

III.3.1. Le groupe moteur : source de régimes transitoires

Parmi les différentes sources d'excitation vibratoires externes d'une chaîne de transmission cinématique, l'organe moteur est le plus souvent considéré comme la principale. Le but de cette partie est de présenter les diverses sources d'excitation produites par le moteur, et les problèmes engendrés sur le comportement dynamique des engrenages. Il est à remarquer que l'influence du moteur sur le comportement dynamique des chaînes de transmissions de puissance n'a été qu'étudiée si ce n'est dans un contexte d'engrenages déchargés (bruit de cliquetis ou graillonnement).

III.3.1.1. Les moteurs à combustion interne

Le moteur à explosion est connu depuis plus d'un siècle. Son évolution technologique ne cesse et est passée par des stades d'amélioration tant mécanique qu'électronique sous la pression de l'accroissement et le développement des solutions de transport, aussi bien terrestres, aéronautiques que navals. Ceci étant de par sa conception et son fonctionnement, il demeure une source de vibrations importante.

Un moteur à explosion possède plusieurs pistons disposés selon diverses configurations, parmi lesquelles celles en ligne et V sont les plus fréquentes (Figure I-26).

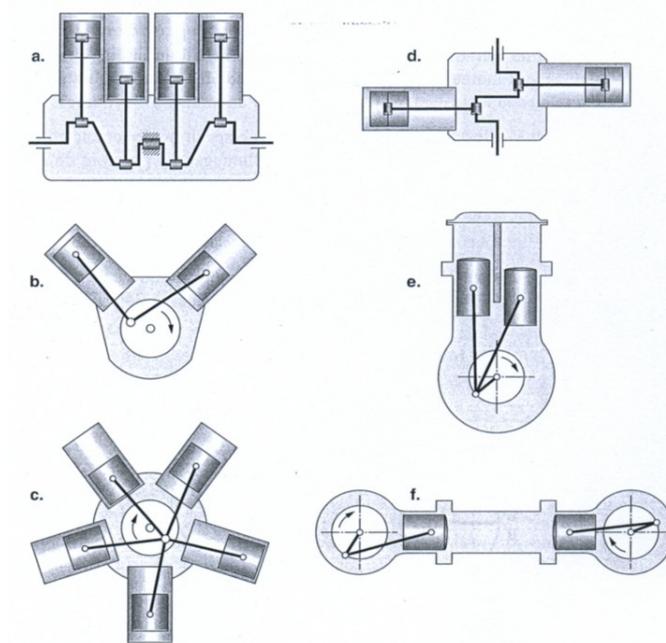


Figure I-26 : Différentes configurations de moteurs (Bosch [76])
 a. Moteur en ligne, b. moteur en V, c. moteur en étoile, d. moteur à cylindres opposés,
 e. Moteur en U, f. moteur à pistons opposés

Lors de son fonctionnement, les pistons subissent tour à tour des cycles de combustion internes à 2 ou 4 temps qui interagissent. Lors de la combustion, de nombreuses forces sont mises en jeu excitant à la fois le moteur dans sa globalité, mais également les constituants de la chaîne cinématique. Le détail de ces forces n'étant pas le but de ce paragraphe, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Ligier & Baron [77].

La combustion ayant eut lieu, l'énergie mécanique créée est transformée en énergie mécanique de rotation par un système bielle - manivelle. L'espacement entre les forces de pression créées dans les cylindres combinés aux effets des couples d'inerties des systèmes de bielles engendre alors une variation de couple et de vitesse transmis au volant moteur, créent ainsi l'acyclisme. Le couple (la vitesse) apparaît ainsi comme la superposition d'un couple moyen (vitesse moyenne) constant et d'un couple (vitesse) oscillant autour de cette valeur moyenne (Figure I-27). Il est à noter que ces différentes courbes sont données pour un cycle de combustion d'un moteur 4 temps à 4 cylindres, soit un tour de rotation du vilebrequin.

Les phénomènes d'acyclisme sont bien connus des constructeurs de moteurs. Dans le cas de moteurs 4 temps, le spectre fréquentiel est essentiellement composé d'harmonique pairs H_{2n} du régime de rotation car il se produit deux explosions par tour. L'acyclisme d'un moteur à explosion dépend alors du nombre de cylindres, mais également de l'ordre d'allumage de ceux-ci et du régime moteur (Figure I-27).

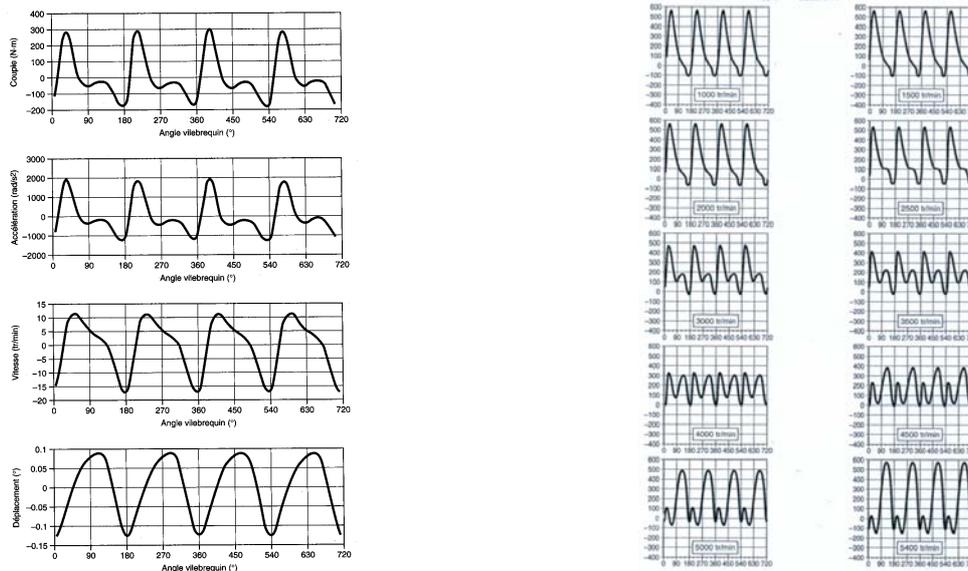


Figure I-27 : Divers formes d'acyclisme (Ligier & Baron [77])
à gauche de haut en bas : couple, accélération angulaire, vitesse angulaire et angle de rotation en fonction de l'angle du vilebrequin
à droite : évolution du couple moteur en fonction de l'angle du vilebrequin pour différents régimes

III.3.1.2. Le mésalignement du moteur - les moteurs électriques

Dans la majorité de ces transmissions de puissance, les machines de charge (moteur et génératrice) sont directement liées aux engrenages via des accouplements. Pour les groupes moto-réducteur dans le secteur automobiles, le moteur transmet la puissance via l'embrayage qui est généralement précédé d'un volant moteur situé à l'extrémité du vilebrequin se comportant comme un volant d'inertie (Figure I-28). Ce dernier régule l'acyclisme du moteur en restituant pendant les phases de temps morts l'énergie cinétique de rotation emmagasinée lors des phases de combustion.

Lors de l'assemblage du moteur et de la boîte de vitesse, des différences d'alignement peuvent se produire engendrant alors un non-homocinétisme entre la vitesse à la sortie du moteur et la vitesse à l'entrée de boîte. Il y a alors apparition d'une source d'excitation synchrone comparable à de l'acyclisme. Cette dernière est composée d'un harmonique unique H_1 du régime moteur du fait du non-homocinétisme.

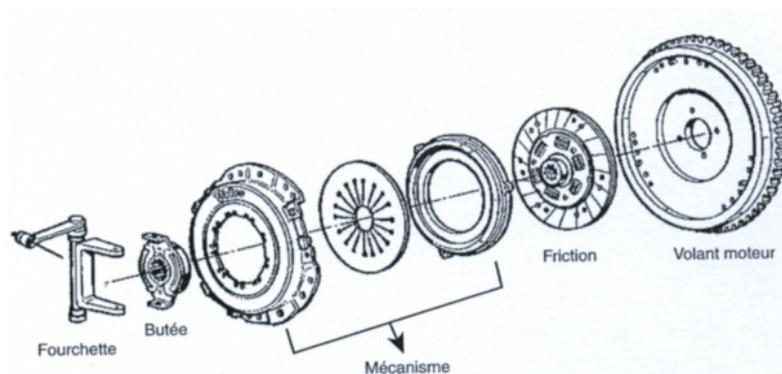


Figure I-28 : Vue éclatée d'un embrayage mécanique à disque VALEO [77]

Dans le cas de réducteurs industriels, ou dans le domaine des transports autres que l'automobile, les réducteurs à engrenages sont le plus souvent liés aux organes moteurs par le biais d'accouplements rigides ou élastiques. Dans le cas de liaison rigide, la transmission de la vitesse et du couple moteur vers le réducteur s'effectue par obstacles. Une grande précision de montage doit alors être requise afin d'aligner l'axe du moteur et l'axe récepteur du réducteur. Pour pallier à ce problème, la majorité des accouplements rigides possèdent des libertés de mouvement de rotation, le joint de cardan en est un exemple. Dans les accouplements élastiques, la liberté de mouvements est apportée par l'élastomère permettant également de transmettre la puissance.

L'introduction de désalignement entre le moteur et le réducteur est donc une source d'excitation non négligeable et même dans le cas d'un moteur électrique monophasé générant un couple et/ou une vitesse constante, des phénomènes assimilés à de l'acyclisme peuvent apparaître. Dans le cas de moteurs synchrones triphasés, l'acyclisme naturel lié au nombre de pôles peu se combiner aux effets induits par un mauvais alignement des axes moteur et réducteur et conduire ainsi à des combinaisons fréquentielles complexes.

III.3.1.3. Les accélérations et décélérations

Suite à la résistance à l'avancement variable, aux besoins de l'utilisateur etc...., un moteur ne fonctionne pas toujours à la même vitesse de rotation et, dans le cadre des automobiles en particulier, sa vitesse et/ou son couple nominal ne cesse d'évoluer. Les accélérations et les décélérations sont également introduites lorsque le moteur doit atteindre sa vitesse nominale de fonctionnement, qui elle-même peut fluctuer et des coïncidences fréquentielles critiques peuvent alors apparaître sur les plages de vitesses balayées.

L'étude de transitoire de type montée et descente en vitesse est relativement répandue en dynamique des rotors mais n'a, à notre connaissance, fait l'objet que de très peu d'études dans le domaine des transmissions par engrenages. Hugues [78] a analysé le comportement au démarrage de chaînes cinématiques entraînées par un moteur électrique et Vernay [79 - 80] a abordé la problématique du redémarrage en vol d'un démarreur de moteur d'avion. Dans ces deux cas, la chaîne cinématique est simulée en torsion pure et est soumise à des vitesses et couples variables.

III.3.2. Modélisation et problèmes posés par l'acyclisme

L'acyclisme de part sa composition fréquentielle pose de nombreux problèmes dans les chaînes cinématiques de transmissions et il est reconnu comme une source majeure d'excitation qui doit être prise en compte au stade du développement. Dans la majorité des cas, l'acyclisme a été étudié sur les boîtes de vitesses automobiles.

III.3.2.1. Les phénomènes vibroacoustiques

Deux types de nuisances vibroacoustiques ressortent des diverses études sur les engrenages : le bruit de sirènement ou « *whine noise* » et le bruit de grailonnement ou « *rattle noise* ».

- Le sirènement

Cette source vibroacoustique est de loin la plus courante et la plus importante en fonctionnement sous charge. Elle est principalement due aux variations de longueur de contact et par conséquent de raideur d'engrènement au cours de la rotation auxquelles peuvent se superposer des défauts de forme ou des corrections mal adaptées. L'erreur de transmission sous charge rend compte de ce phénomène tant que le fonctionnement demeure linéaire. Sa fréquence est égale à la fréquence d'engrènement, c'est-à-dire, le produit du nombre de dents du pignon menant par la fréquence de rotation de cet arbre menant.

Le sirènement est particulièrement perceptible lors de l'utilisation de la marche arrière, car le couple de pignons utilisé possède une denture droite, configuration particulièrement nuisible pour l'acoustique. Les causes de ce bruit sont bien connues car les acousticiens l'ont étudié en premier et des modifications de géométrie de la denture permettent de l'atténuer.

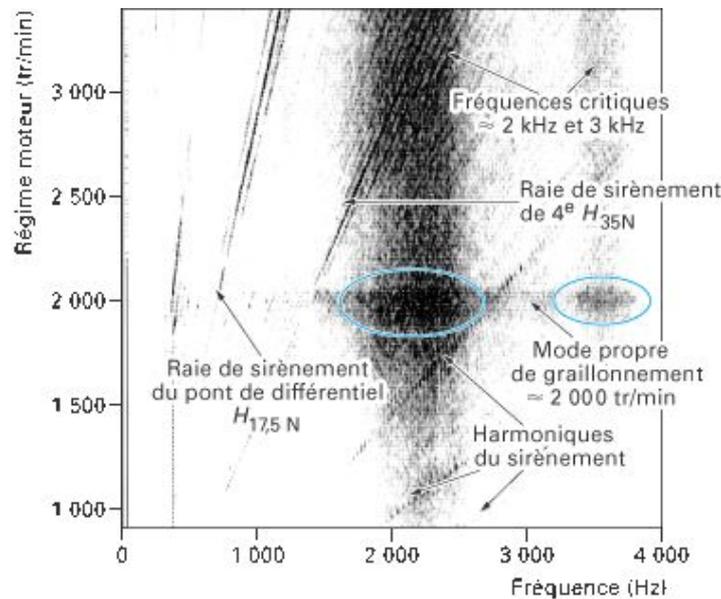


Figure I-29 : Représentation fréquence - régime d'une accélération mesurée sur une boîte de vitesse montée sur un banc de simulation d'acyclisme (Develay [81])

- Le grailonnement

Le bruit de grailonnement est provoqué par les vibrations émises par l'ensemble des éléments de la boîte de vitesse non chargés et possédant un mouvement de va-et-vient dans la limite de leur jeu de denture fonctionnel. Les irrégularités cycliques dues en particulier à l'acyclisme, même filtrées en entrée de boîte de vitesses, vont solliciter les pignons qui vont s'entrechoquer. La transmission des chocs est principalement solidienne et l'ensemble des pignons, ainsi que des paliers à roulements, constituent une voie privilégiée vers le carter qui rayonne ensuite vers le milieu extérieur.

D'une manière générale, le bruit de grailonnement est causé par les chocs intervenants du fait du jeu de denture entre les engrenages non chargés. La Figure I-30 représente les phases d'évolution du mouvement relatif entre les dentures du fait de l'apparition du choc de denture.

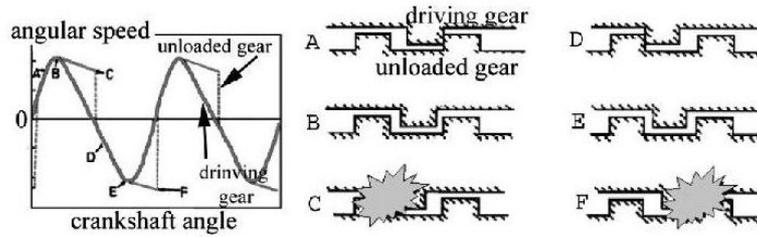


Figure I-30 : Illustration des phénomènes de chocs de dentures (Johnson & Hiramí [82])

Durant la première phase du cycle, la vitesse du pignon menant (en trait plein) augmente et la roue menée (en trait pointillé) reste en contact. A partir du point B, le pignon menant décélère plus vite que la roue du fait que le couple de traînée de boîte est insuffisant. Ce dernier est en général de l'ordre de 0.1 à 0.5 N.m. Il y a alors décollement de denture et phase de « *vol libre* ». Le mouvement de la roue est alors uniquement conditionné par le couple résistant. Au point C, le pignon mené tournant moins vite a rattrapé le jeu de denture et est donc rattrapé par le pignon menant et un « *choc rétro* » se produit. Pendant la phase D, le pignon menant et la roue menée décélèrent ensemble jusqu'au point E où la décélération devient moins importante que le couple de traînée. Il y a à nouveau perte de contact jusqu'au point F précisant l'instant pour lequel le pignon menant est rattrapé par le pignon mené. Il y a alors un « *choc direct* » qui termine le cycle.

Les phénomènes de gaillonnement et donc de chocs de dentures dépendent des conditions de fonctionnement de la boîte de vitesses et sous certain régimes de vitesse allant de 1400 tr/min à 4000 tr/min. Ces conditions se classent en trois catégories :

- Le gaillonnement sous faible charge : il se manifeste en accélération ou décélération lente, dans une plage de régime de 3000 à 4000 tr/min, où l'acyclisme présente les plus faibles écarts entre faible charge et pleine charge (Figure I-31).
- Le gaillonnement sous forte charge : il se manifeste à la reprise du couple moteur en bas régime. Ce dernier est d'autant plus important que le rapport de la boîte est élevé.
- Le gaillonnement modulé : il est modulé par la première fréquence propre de la cinématique. Il apparaît lors de sollicitations de couple, de lever de pieds et en retenue dans une légère descente.

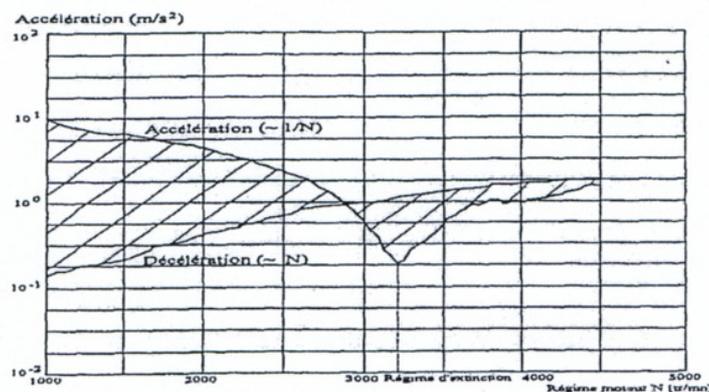


Figure I-31 : Evolution du niveau d'acyclisme en fonction du régime moteur

Outre les paramètres de la boîte, les éléments suivants contribuent au phénomène :

- L'amplitude de l'excitation, donc de l'acyclisme
- La nature de la boîte avec, en particulier, le nombre de pièces en mouvement
- La température de l'huile de la boîte

De nombreux auteurs se sont préoccupés du grailonnement ou « *rattle* ». Les études expérimentales se sont attachées à établir les critères d'apparition, à identifier les éléments de la boîte responsable du bruit et également les influences des excitations et des paramètres géométriques des engrenages. Il ressort de ces études que les paramètres clés ayant un effet direct sur le grailonnement sont l'inertie du pignon fou, l'accélération angulaire imposée par le moteur ou le volant moteur, et donc le couple d'inertie, le couple de traînée, les éléments dissipatifs lors des impacts et le jeu de denture (Rust & Col. [83]).

Plusieurs travaux traitent du comportement global de la chaîne de transmission (Sakai & Col. [84], Singh & Col. [85] ou Padmanabhan & Singh [86]) alors que d'autres auteurs se concentrent sur le comportement du pignon fou (Pfeiffer [87], Weidmer & Lechner [88]). Il est à noter que la plupart de ces études considèrent une excitation purement harmonique. Plus récemment, Barthod & Col. [89] et [90] ont étudié l'influence de l'introduction d'une excitation multiharmonique et Perret - Liaudet & Rigaud [91] ont abordé l'influence de défauts d'excentricités sur le « *rattle* » d'une boîte de vitesses et sur l'existence de plusieurs phases d'impacts en fonction des paramètres géométriques des engrenages et des excitations. Tangasawi & Col. [92] se sont intéressés à l'influence de la lubrification sur les impacts entre dents et, dans le même esprit, Brancati & Col. [93] ont étudié l'effet amortissant du film de lubrifiant. Pour finir, Vidal & Col. [94] propose une architecture permettant de limiter les effets de l'acyclisme.

III.3.2.2. Modélisation de l'acyclisme

L'acyclisme est fréquemment défini en termes d'accélération angulaire mais il est également possible de le caractériser en fonction du couple moteur, de la vitesse angulaire ou de l'angle de rotation (Figure I-27). Deux paramètres fondamentaux permettent de le décrire :

- Ordre d'acyclisme

La notion d'ordre d'acyclisme est directement influencée par le nombre de cylindres dans le cas d'un moteur à explosion. Lorsque l'organe moteur délivre une vitesse quasi-constante mais est désalignée par rapport à l'axe de l'arbre primaire du réducteur, la fréquence d'excitation dépend alors du mésalignement

Comme dans tous systèmes mécaniques évoluant suivant des perturbations fréquentielles, l'acyclisme peut être décomposé en spectres d'harmoniques et de sous-harmoniques. Il y a alors apparition d'une fréquence fondamentale et de fréquences secondaires.

Deux types d'approches peuvent être trouvés dans la littérature :

- Perret-Liaudet & Rigaud [91], Couderc [95], Develay [81], Philippe-Damagnez [96], Blomqvist [97] etc. considèrent des excitations purement sinusoïdales dont la fréquence est deux fois la fréquence de rotation moyenne.
- Lang & Col. [98], Dogan [99], Forcelli [100] utilisent pour leurs expériences des moteurs synchrones triphasés générant des excitations multifréquentielles susceptibles de représenter le spectre d'un moteur à 4 ou 6 cylindres. Barthod & Col. [89] effectuent, quand à eux, des expériences avec des excitations dont le spectre fréquentielle est composé de fréquences égales au double, quadruple et sextuple de la vitesse de rotation moyenne.

Lors d'utilisation de moteurs à explosion, l'ordre est sensible au nombre de cylindres mais également aux nombres d'explosions par tour, l'expression de l'harmonique fondamentale s'exprime (Ligier & Baron [77]) :

$$H_n = \frac{n_{cyl}}{m_{temps}/2} \quad (I-13)$$

Avec :

- n_{cyl} le nombre de cylindres
- m_{temps} le nombre de temps (4 ou 2)

Les sous harmoniques générés par le fonctionnement du moteur sont alors des multiples de ce fondamental (le lecteur pourra se référer à [77] pour une description exhaustive des sources d'excitation dans les moteurs à explosion). Dans la plupart des cas, l'ensemble des harmoniques significatifs pour les moteurs à explosion sont les harmoniques H_n , $n = 0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 6$. Il est communément admis qu'en pratique, les plus marquants sont les H_2 , H_4 et le H_6 pour un moteur 4 temps, et que l'amplitude associée au H_2 est généralement dominante.

Pour des moteurs multicylindres, un ordre d'allumage des chambres de combustion est défini afin d'obtenir le meilleur rendement et de répartir les efforts de façon homogène. Le fonctionnement d'un moteur multicylindre est donc un assemblage de moteurs monocylindres déphasés. A chaque harmonique H_n sera donc associée une phase φ_n .

- Amplitude d'acyclisme

Comme pour tous modèles d'excitations d'un système mécanique, la caractérisation de l'amplitude est primordiale car elle contrôle l'amplitude de la réponse. Barthod & Col. [89] définit l'amplitude de l'acyclisme par l'accélération RMS (Root Mean Square) tandis que Perret-Liaudet & Rigaud [91] le définit comme un déplacement. Dans la majorité des moteurs, il est souvent difficile de quantifier l'amplitude de l'acyclisme, toutefois, Ligier & Baron [77] donnent quelques règles concernant les moteurs à explosion selon lesquelles l'amplitude représente sensiblement 10 % de la vitesse de rotation nominale pour une vitesse

de 1000 tr/min dans le cas d'un moteur diesel à pleine charge et 3 % dans le cas d'un moteur essence.

L'amplitude est fonction du nombre de pièces en mouvement, de la technologie du moteur, des moyens de filtrage,... Elle est également fonction du régime de vitesse du moteur. Une approche unanime veut que celle-ci soit prise comme un pourcentage de la vitesse de rotation moyenne dans le cas d'étude en fonctionnement, et comme une valeur crête (i.e. 0 - crête) dans le cas d'étude au point mort (Barthod & Col. [89]). La représentation est alors donnée par (I-14) :

$$A_{H_n} = \rho_n(\Omega_{10}) \Omega_{10} \quad (\text{I-14})$$

Avec :

- Ω_{10} la vitesse de rotation moyenne du premier pignon menant
- $\rho_n(\Omega_{10})$ le pourcentage 0 - crête de l'harmonique n , dépendant de la vitesse Ω_{10}
- A_{H_n} représente la variation crête à crête de la vitesse angulaire

Des définitions de ce présent paragraphe, le modèle d'acyclisme adopté dans la suite de ce mémoire conduira à la fonction vitesse de rotation suivante :

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10} \left(1 + \sum_n \rho_n(\Omega_{10}) \sin(n \Omega_{10} t + \varphi_n) \right) \quad (\text{I-15})$$

Avec :

- Ω_{10} la vitesse de rotation moyenne du premier pignon menant
- n le numéro de l'harmonique
- φ_n la phase associée à l'harmonique n
- $\rho_n(\Omega_{10})$ le pourcentage 0 - crête associé à l'harmonique n

IV. SYNTHÈSE DES DIFFÉRENTS MODÈLES DÉVELOPPÉS EN DYNAMIQUE DES ENGRENAGES

Au cours des 30 dernières années, le comportement dynamique des engrenages a fait l'objet de nombreux travaux et les modèles torsionnels à un seul degré de liberté initiaux ont été remplacés par des approches de type éléments finis intégrant les couplages entre mouvements de torsion, de flexion et de traction - compression. Il existe désormais des modèles susceptibles de tenir compte d'une transmission complète avec, toutefois, des

niveaux de raffinement variables en ce qui concerne la description des conditions de contact sur les dentures et éventuellement les éléments roulants dans les paliers à roulements. Le but de ce paragraphe est de présenter dans un premier temps un état des lieux sur ces modèles en dynamique des engrenages, puis de préciser les modèles existants intégrant la simulation des chocs entre dentures.

IV.1. LES MODELES LINEAIRES

Les modèles linéaires correspondent i) à des portées de dentures complètes, ii) à des conditions de chargement telles que la contribution de la non-linéarité hertzienne puisse être négligée. Dans ces conditions, la fonction raideur d'engrènement est connue a priori et est indépendante de la vitesse de rotation. Il est clair que les éventuels décollements de dentures partiels ou totaux ne sont pas pris en compte par une telle approche.

IV.1.1. Raideur d'engrènement constante

Les modèles relevant de cette catégorie supposent que les variations temporelles de la raideur d'engrènement sont négligeables ou introduites de façon détournée via l'erreur de transmission par exemple, de sorte que les équations différentielles régissant le comportement dynamique soient à coefficients constants. Ce type de modélisation est particulièrement approprié pour des engrenages à forts rapports de conduite.

Cai & Hayashi [63], entre autres, ont montré qu'en dehors des zones de vitesses critiques pour les dentures définies en III.2., les modélisations du comportement dynamique d'engrenages peuvent rester de type linéaire (Figure I-32). Lund [101], de même que Iida & Tamura [102] considèrent une raideur d'engrènement constante pour calculer les fréquences propres en flexion-torsion. Kahraman [103 - 104] procède de façon similaire pour quantifier l'influence de l'angle d'hélice sur la prédiction des fréquences propres de réducteurs simple et double étage de réduction. L'auteur montre également que les excitations basses fréquences (excentricités, balourds) ont des effets relativement faibles sur la réponse dynamique de l'engrènement.

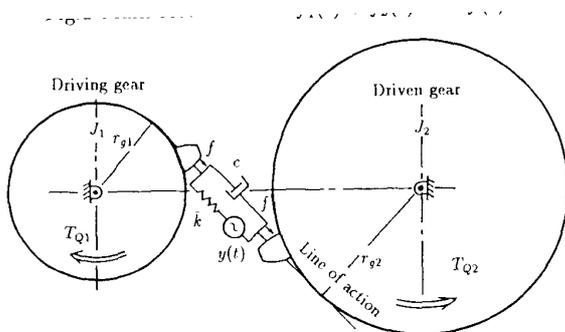


Fig.3 Linear model of vibration system

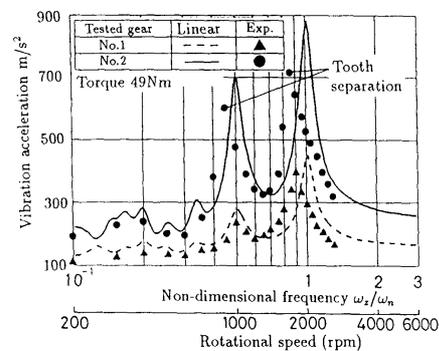


Fig.14 Relation between acceleration amplitude and the rotational speed of driving gear (Comparison between experiment and linear equation)

Figure I-32 : Modèle linéaire de Cai & Hayashi [63]

Sener & Özgüven [105], Özgüven & Kesan [106] ou encore Vinayak & Col. [107] introduisent les excitations d'engrènement via l'erreur de transmission quasi-statique sous charge combinée à une raideur d'engrènement constante. Les arbres sont modélisés par des éléments finis à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Par ce biais, les équations du mouvement restent des équations différentielles à coefficients constants dont le traitement est relativement simple.

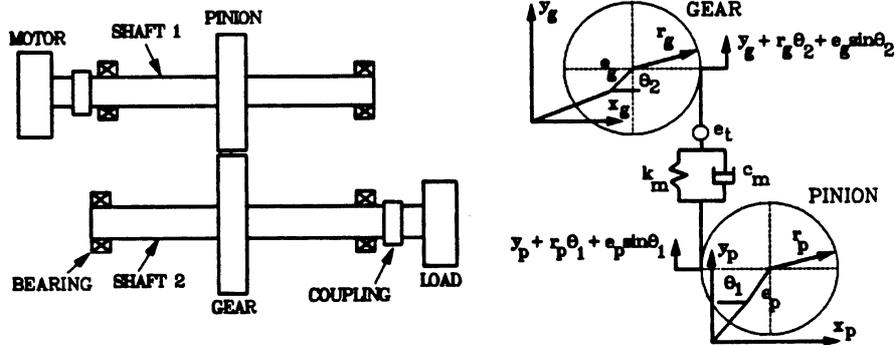


Figure I-33 : Modèle linéaire de Sener & Özgüven [105]

L'avantage de l'utilisation de ce type de modèle à caractère linéaire est de fournir des solutions analytiques exactes. Le désavantage est de ne pouvoir modéliser de façon précise les variations de la raideur au cours du temps, et également les variations dues aux défauts ou corrections de dentures.

IV.1.2. Raideur d'engrènement variable

Les modèles à raideur variable conduisent à des équations différentielles à coefficients généralement périodiques. Pour une vitesse de rotation constante, cette variation de raideur est périodique de période égale à la période d'engrènement et des équations de Mathieu-Hill sont obtenues (cf. paragraphe III.2).

Les premiers modèles relatifs aux systèmes avec excitations paramétriques comportaient peu de degrés de liberté (généralement torsionnels) et traitaient essentiellement des engrenages droits dont la raideur peut être approchée par une fonction en créneaux. Gregory & Col. [23 - 24], Benton & Seireg [108], Wang et Cheng [109 - 110], Masuda & Col. [111] ont développé des modèles de trains simple étage à un seul degré de liberté (Figure I-34), dont la vocation était de déterminer les zones d'instabilités paramétriques, et de calculer le chargement dynamique sur les contacts entre dents.

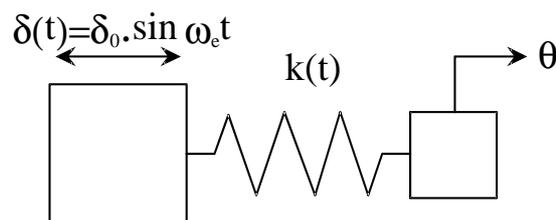


Figure I-34 : Modèle à excitation paramétrique d'un système pignon - roue (Benton & Seireg [108])

Lin & Col. [26] ont étudié les corrections de denture sur un modèle torsionnel d'engrenages droits à quatre degrés de liberté, en introduisant notamment les inerties motrices et réceptrices du réducteur (Figure I-35). Tordion & Gauvin [112] ont analysés les zones d'instabilités d'un train double étage à engrènements décalés sur un modèle torsionnel à trois degrés de liberté, où les raideurs d'engrènement des deux engrenages sont identiques et représentées par des fonctions créneaux. Plus récemment, Rashidi & Krantz [113] ont abordé l'influence du déphasage entre engrènements sur un modèle d'une transmission d'hélicoptère à engrènements multiples.

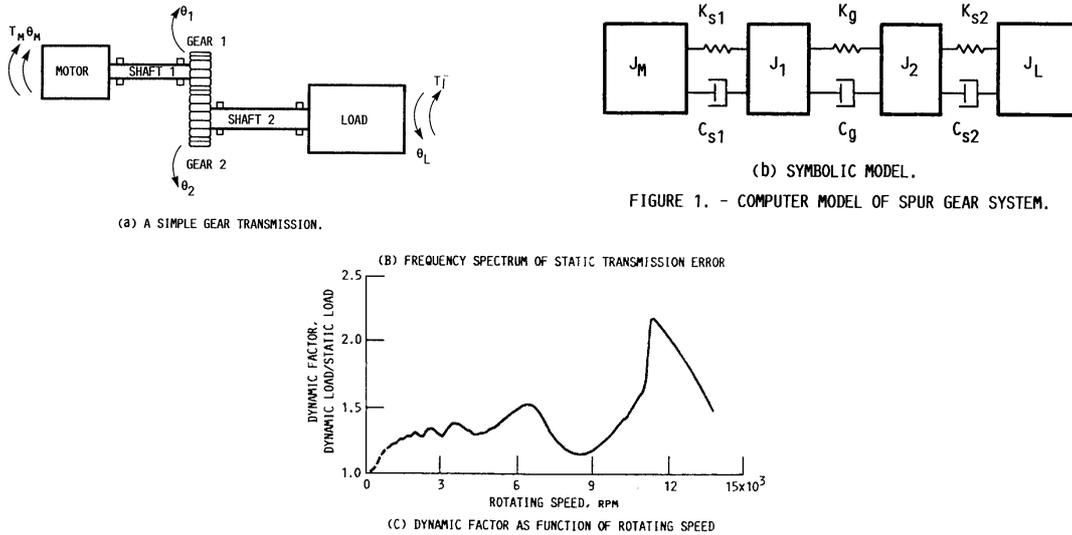


Figure I-35 : Modèle à excitations paramétriques à 4 ddls en torsion (Lin & Col. [25] - [26])

Velex [5] à proposer un élément de connexion, pour engrenages à dentures droites et hélicoïdales, utilisable dans des modélisations modulaires de type éléments finis. L'écriture de l'énergie potentielle de déformation de l'engrenage conduit à une matrice de rigidité à coefficients périodiques, issue d'une analyse tridimensionnelle des conditions de contact instantanées entre dentures, et permet de simuler différentes architectures de trains d'engrenages à plusieurs étages ([34 - 35]), planétaires ou épicycloïdaux ([114]). Des approches hybrides [27 - 115] ont été récemment développées sur une base d'analyse par sous-structuration. Les structures à comportement linéaire (corps de roue, support de porte-satellites, arbre de sortie, etc.) sont condensées par la méthode de Craig et Bampton et sont ensuite assemblées avec des modélisations à paramètres concentrés, de sorte que les non-linéarités de contact éventuelles puissent être traitées sur un modèle avec un nombre de degrés de liberté raisonnable.

IV.2. LES MODELES NON-LINEAIRES : PHENOMENES DE VIBRO-IMPACTS

Les modèles non-linéaires considèrent les séparations de dentures pouvant intervenir selon certaines conditions de fonctionnement, notamment à l'approche des fréquences critiques d'engrènement. Parmi les autres paramètres susceptibles de générer ce type de comportement, on peut citer de manière non exhaustive :

- les écarts de géométrie (suivant le profil) ou de montage d'amplitudes importantes
- un amortissement global faible
- de faibles charges transmises en présence de défauts de géométrie
- des fluctuations importantes du couple d'entrée et/ou de la vitesse de rotation
- des phénomènes de balourds sur les mobiles
- etc.

Gregory & Col. [23] et [24] sont parmi les premiers à avoir observé expérimentalement l'influence de la charge et de l'amortissement sur l'apparition des sauts d'amplitude dans les courbes de réponse aux abords des vitesses critiques (Figure I-36). Les auteurs ont développé une théorie s'appuyant sur un modèle torsionnel à un seul degré de liberté et ont montré que ce phénomène pouvait se produire même en l'absence d'écarts de géométrie. Wang [116 - 117] a déterminé la valeur minimale du couple d'entrée permettant d'assurer un contact permanent entre dentures droites d'un modèle torsionnel dans le cas de présence de défauts d'excentricités.

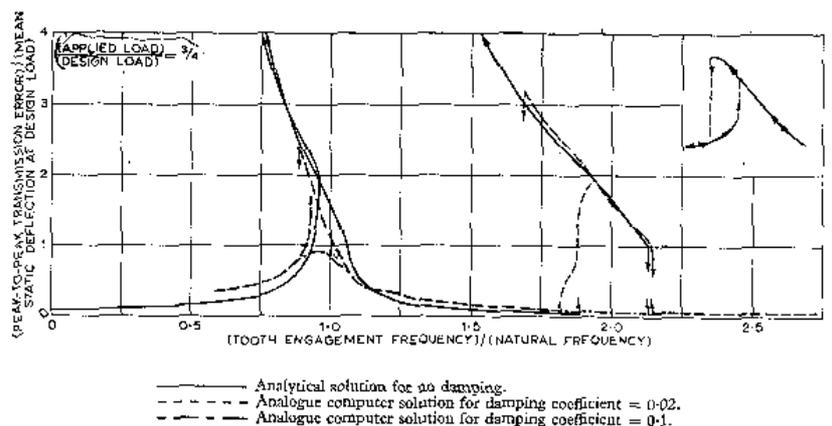


Fig. 4. Response curves from the approximate equation

Figure I-36 : Mise en évidence expérimentale des séparations de dentures pour plusieurs amortissements (Gregory & Col. [23])

Les séparations de dentures sont généralement suivies d'impacts, lors de la reprise de contact soit sur le flanc actif (« choc direct »), soit lorsque la totalité du jeu de denture a été franchi et qu'il y a impact sur le flanc opposé (« choc rétro »). Ce phénomène, de type vibro-impact, est plus connu sous le nom de « backlash » lorsque le choc est direct et de « backstrike » lorsqu'il est rétro.

La plupart des modélisations dans la littérature utilisent des diagrammes force - déplacement comme celui de la Figure I-37. Wang [118] améliore la représentation en faisant varier la pente de la courbe, afin de prendre en compte les variations temporelles du nombre de couples de dents en prise d'un engrenage droit de rapport de conduite compris entre un et deux.

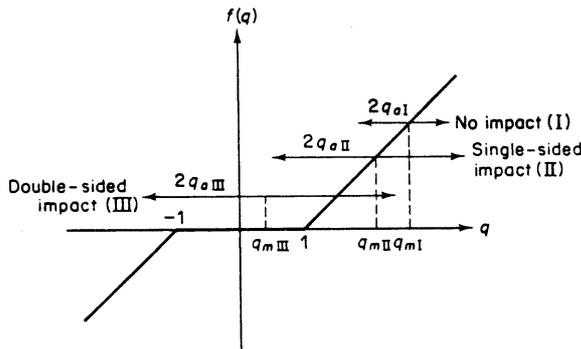


Figure 9. Illustration of different impact regimes.

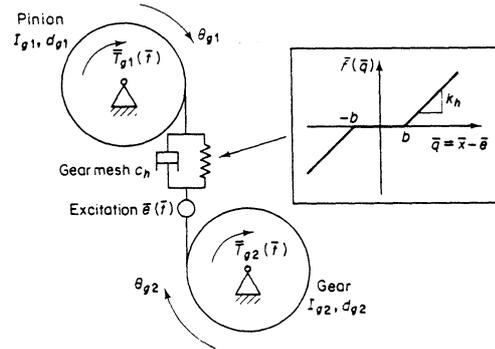


Figure 1. Gear pair model.

Figure I-37 : Représentation du modèle non-linéaire de Kahraman & Singh [33]

Kahraman & Singh [33], Özgüven & Houser [28] et [45] superposent les phénomènes de « backlash » à la variation temporelle de la raideur d'engrènement et aux écarts de géométrie pris en compte sous forme d'excitation forcée par l'erreur de transmission quasi-statique sous charge (Figure I-37). Ils comparent leurs résultats avec les courbes de réponses expérimentales de Munro [31] et Kubo [44], et montrent l'efficacité de leur modèle en faisant également apparaître des sauts d'amplitude à l'approche de vitesses critiques de dentures pour des amortissements relativement faibles. Ils observent également l'existence d'interactions fortes entre l'amplitude de la variation de la raideur d'engrènement et l'apparition des phénomènes non-linéaires. Enfin, Küçükay [12], puis Neriya & Col. [64] élaborent des modèles à excitations paramétriques non-linéaires en introduisant simultanément la variation temporelle de la raideur d'engrènement sous forme d'excitation paramétrique, et les phénomènes de « backlash ».

La plupart des modélisations des phénomènes de vibro-impacts sont bidimensionnelles et reposent sur des modèles purement torsionnels d'engrenages droits. Dans ces conditions, les pertes de contact modélisables ne peuvent être que des séparations totales entre dentures ce qui limitent les champs d'application et les études globales sur les dentures. Peu d'auteurs modélisent les impacts de façon tridimensionnelle. Valex [5] résout les problèmes de la dynamique avec pertes de contacts en couplant un schéma d'intégration temporel et un algorithme de contact normal (Figure I-38), permettant un calcul rapide du comportement dynamique des réducteurs à engrenages comportant des pertes de contacts. Les phénomènes de « backlash » sont pris en compte à chaque instant et les raideurs d'engrènement sont réactualisées selon qu'il y ait ou non contact.

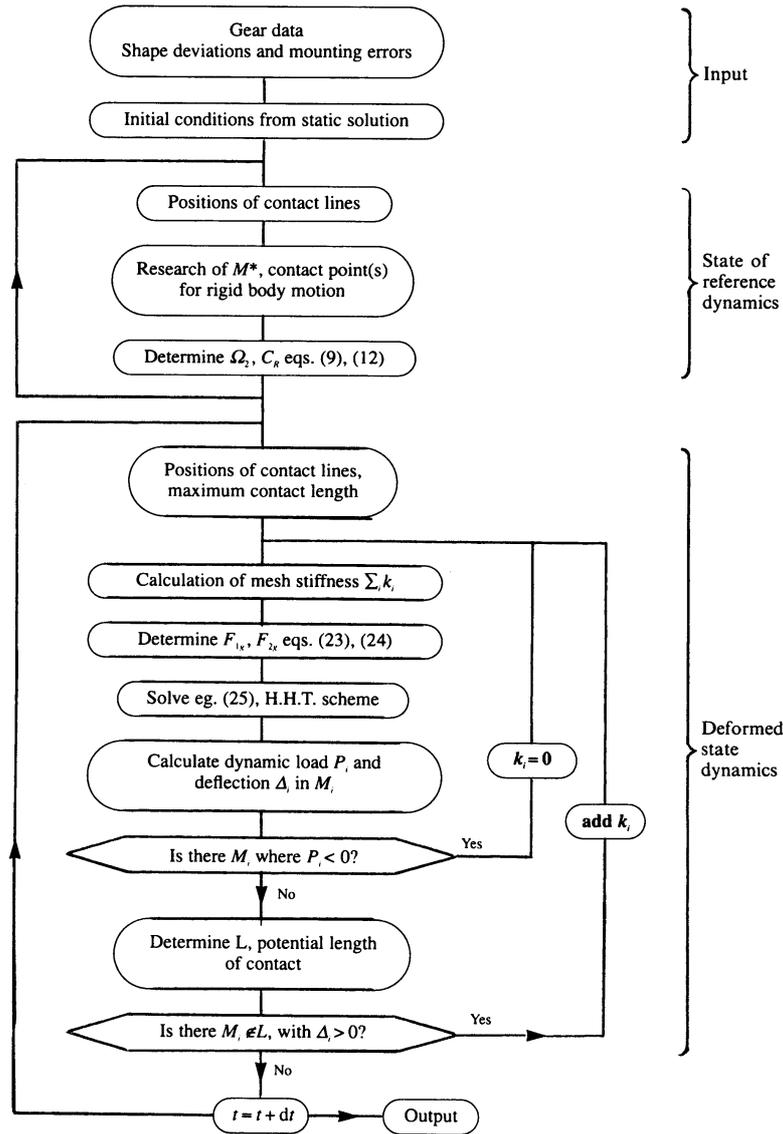


Figure I-38 : Algorithme global de résolution de la dynamique d’un réducteur à engrenages (Velex [5])

IV.3. ETAT ACTUEL ET POSITION DU PROBLEME

La prise en compte des phénomènes de « *backstrike* » est plus rare. Les auteurs modélisant les chocs rétro sont principalement ceux modélisant les effets de « *rattle* » tels Perret – Liaudet & Rigaud [91], Barthod & Col. [89]. Halse & Col. [119], Theodossiades & Natsiavas [120] ou encore Ottewill & Col. [121] qui considèrent les phénomènes de chocs rétro dans leurs modèles mais considèrent généralement des engrenages peu ou pas chargés, proches des conditions de fonctionnement favorables à l’apparition du gaillonnement.

La plupart des modèles sont purement torsionnels sans introduction d’éléments d’arbres ou paliers (Figure I-39). Les analyses sur le comportement dynamique se concentrent majoritairement sur les paramètres de l’acyclisme, et très peu sur les influences géométriques des engrenages.

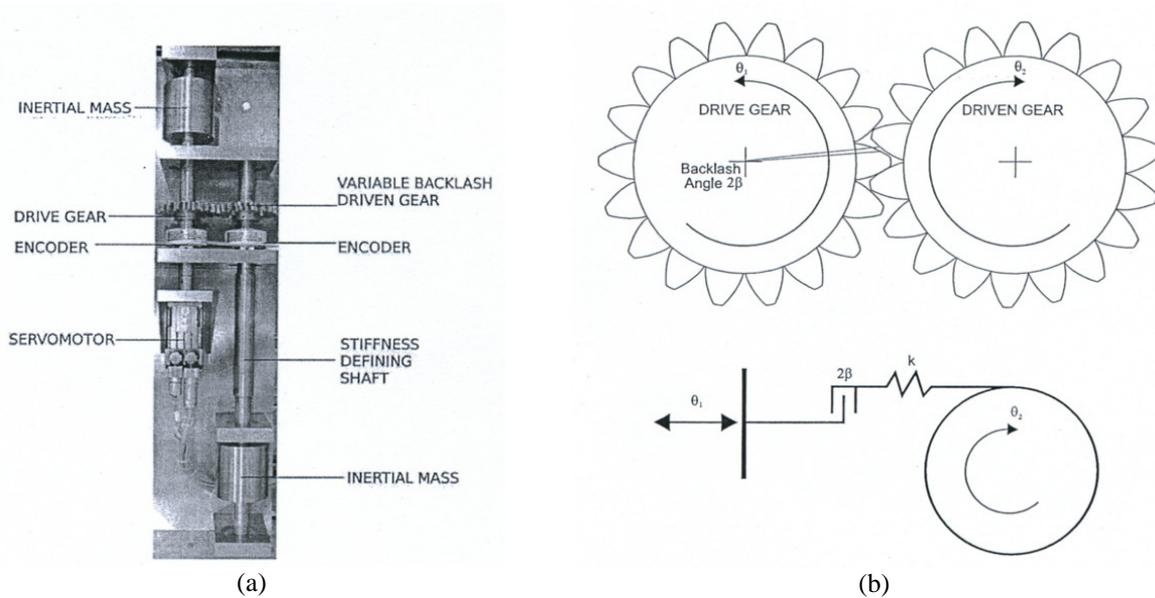


Figure I-39 : Modèle torsionnel (a) et banc d'essai de caractérisation (b) d'Ottewill & Col. [121]

Dans la littérature, les résultats relatifs aux modélisations de chocs et à leurs effets demeurent relativement rares. Ottewill & Col. [121] présentent des résultats expérimentaux (Figure I-39) sur la réponse d'un couple d'engrenage soumis à une fluctuation de vitesse sous faible chargement et faible amortissement. Theodossiades & Natsiavas [120] effectuent quand à eux une étude sur le comportement chaotique d'un réducteur, mais modélisé de façon torsionnel et mettent en évidence des instabilités de comportement pour certaines combinaisons de paramètres. Le comportement des engrenages soumis à de l'acyclisme est connu dans le cas du grailonnement, c'est à dire sans transmission de couple, mais beaucoup moins lorsqu'il s'agit de transmettre une charge. Dans ce contexte, il s'avère donc intéressant d'aborder le comportement dynamique d'engrenages chargés soumis à de l'acyclisme en incluant les phénomènes de chocs direct (« *backlash* ») et rétro (« *backstrike* »).

Concernant la dynamique des engrenages sous régimes de d'accélération ou décélération, quasiment aucune étude n'a été effectuée. Seul Vernay [79] a modélisé un démarreur d'avion, mais n'effectue aucune analyse quand à la contribution des paramètres de fonctionnement, et ne considère qu'une modélisation torsionnelle. Hugues [78] étudie quand à lui le comportement global d'une chaîne cinématique de transmission lors du démarrage, mais en aucun cas le comportement lors de phases d'accélération ou décélération en fonctionnement. Sur ce point, l'étude de la dynamique des engrenages sous accélération ou décélération est un point tout à fait nouveau.

V. CONCLUSION

Ce premier chapitre présente un panorama des différentes études relatives à l'analyse du comportement dynamique des engrenages. Les constats et conclusions suivants en sont déduits :

Tout d'abord, il apparaît que la caractérisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages s'effectue essentiellement au travers de deux paramètres : l'erreur de transmission et le coefficient dynamique. La littérature montre que les modélisations reposent essentiellement sur la représentation des propriétés de raideurs et des écarts de forme des engrenages au cours du mouvement.

Les excitations externes quant à elle sont principalement dues aux organes moteurs et/ou aux machines de charge. Une des sources principales est causée par les explosions successives dans les cylindres pour les moteurs à combustion interne ou par le mésalignement du moteur engendrant un non-homocinétisme entre l'arbre moteur et l'arbre d'entrée du réducteur. Ainsi une définition de ces excitations regroupées sous le terme global « d'acyclisme moteur » a été donnée. Celui-ci se caractérise par deux paramètres : une amplitude et des harmoniques chacun associée à une phase. L'acyclisme est connu dans la littérature car il entraîne les effets de « *rattle* ». Ces derniers sont des chocs « *backlash* » et « *backstrike* » des dentures de la pignonerie peu ou pas chargés, engendrant des vibro-impacts. Une autre source non négligeable est commenté : il s'agit des accélérations ou décélérations du moteur, lors de demande pour le franchissement d'un obstacle, le redémarrage d'une turbine suite à un calage ou tout autres conditions nécessitant un fonctionnement transitoire.

Parmi les modélisations proposées dans la littérature, une très large majorité demeurent basée sur des modèles simplifiés à un seul degré de liberté et il semble nécessaire de tenter des approches plus précises incluant les mouvements de flexion, torsion et traction - compression.

CHAPITRE II
MODELISATION GLOBALE D'UN
REDUCTEUR SOUS REGIME
TRANSITOIRE

I. INTRODUCTION

L'approche de la dynamique des engrenages en régimes transitoires est, en soi, un domaine d'étude relativement nouveau. L'introduction de vitesses non constantes peut engendrer de nombreux phénomènes dont certains néfastes pour la tenue en service des réducteurs.

Les résultats de la littérature sont, dans la majorité des cas, obtenus par des modélisations torsionnelles simples. Des modèles tridimensionnels existent mais ne sont à l'heure actuelle pas adaptés à la dynamique en régimes transitoires, et ne se prêtent pas à des analyses quantitatives.

Les modèles torsionnels reposent sur des approches traditionnelles de types masses - ressorts - amortisseurs à paramètres concentrés (Figure II-1). Les engrenages ne comportent qu'un seul degré de liberté de torsion et sont couplés entre eux par une raideur d'engrènement. Les autres éléments constitutifs du réducteur sont omis afin d'étudier le comportement propre du couple d'engrenages.

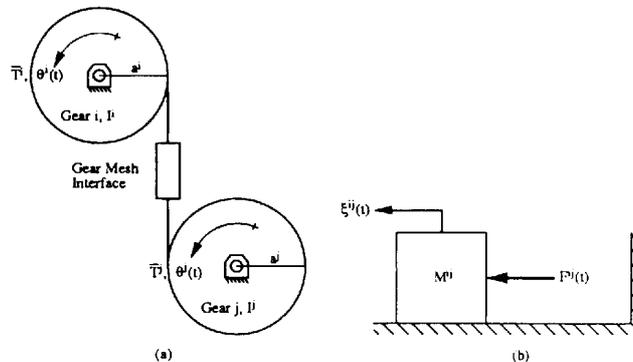


Figure II-1 : Modèle à paramètres concentrés de Blankenship & Singh [48]

D'un point de vue théorique, la représentation à paramètres concentrés n'est représentative que des premiers modes de vibrations du système, et ne tient compte de la contribution des corps d'engrenages que de façon approximative. De plus, les couplages flexion - torsion entre les différents éléments du réducteur sont négligés. Malgré cela, ce type d'approche n'a jamais été mis en cause pour des géométries conventionnelles et a été confirmé par l'expérimentation (Grégory & Col. [24], Kubo [44], Küçükay [12]).

Le but de ce chapitre est de mettre en place une modélisation globale d'un réducteur prenant en compte les effets de traction – compression torsion et flexion des engrenages, mais également les effets des arbres et paliers.

Dans un premier temps, une modélisation tridimensionnelle du fonctionnement d'engrenages en régime transitoire incluant les effets de backlash et backstrike est présentée. La mise en équations est détaillée avec, en particulier, l'introduction des arbres et paliers. Enfin la dernière partie de ce chapitre est consacrée à la mise au point d'un algorithme général de résolutions des équations de mouvements.

II. MODELE GLOBAL D'UN COUPLE D'ENGRENAGES

Cette partie est consacrée à la définition d'un modèle basé sur l'utilisation des paramètres concentrés très couramment utilisés en dynamique des engrenages. Ce type d'approches permet d'éviter de modéliser l'engrenage dans son ensemble par des éléments finis en le représentant par ses paramètres de masse et de géométrie. Le couplage entre le pignon et la roue s'effectue quant à lui par l'intermédiaire de la raideur d'engrènement.

II.1. MODELISATION - INTRODUCTION DU JEU DENTURE

L'introduction du jeu de denture dans les modèles d'engrenages est généralement effectuée à l'aide d'un diagramme effort - déplacement. La modélisation proposée introduit ce jeu au niveau des conditions de corps rigides, c'est-à-dire lorsque l'engrenage ne subit aucune déformation.

Les hypothèses relatives à la géométrie des engrenages et à leur fonctionnement sont les suivantes :

- Les mobiles sont assimilés à des cylindres indéformables parfaits et les flexibilités sont rapportées sur les plans d'action théoriques entre engrenages
- Chaque mobile possède 6 degrés de liberté (ddls en notation abrégée) : 3 degrés de torsion : φ , ψ , θ , et 3 degrés de translation : u , v , w , relatifs aux axes $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{Z})$
- Seuls les défauts d'excentricités des engrenages par rapport aux arbres supports sont considérés (les défauts de montage ou de fabrication ne le sont pas).

Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait que les excentricités sont toujours présentes dans un réducteur à engrenages. Sabot & Perret-Liaudet [69] ont montré notamment l'influence de ce défaut sur l'erreur de transmission. De plus, il modifie l'entraxe de fonctionnement, ce qui entraîne un jeu de denture non constant.

II.1.1. Modèle à paramètres concentrés avec jeu de denture

Le modèle du couple d'engrenages est représenté Figure II-2. Une coupe perpendiculaire à l'axe \vec{Z} permet de faire apparaître un jeu de denture J .

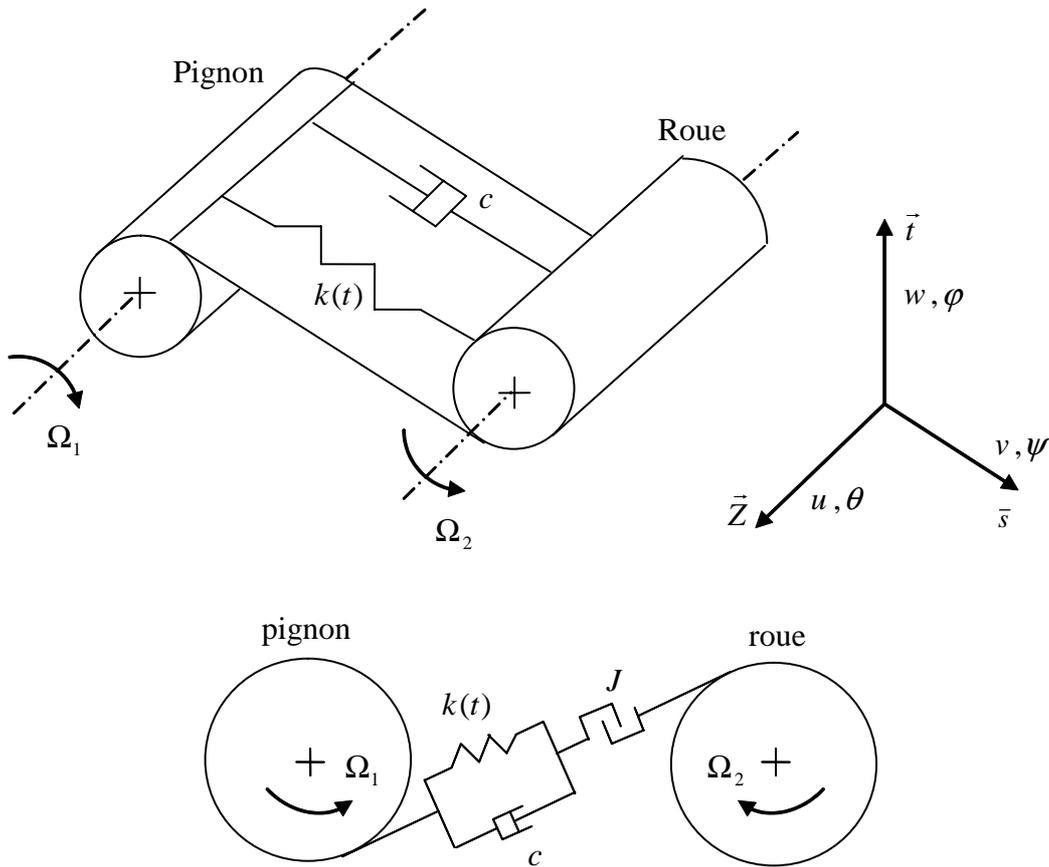


Figure II-2 : Modèle à paramètres concentrés avec jeu

L'introduction de jeux entre les dents conduit à des conditions de contact particulières puisque il y a la possibilité pour le plan d'action de se situer dans deux configurations distinctes (Figure II-3) :

- Soit un contact sur le flanc direct de la denture, nommé par la suite « *contact direct* »
- Soit un contact sur le flanc arrière de la denture désigné comme « *contact rétro* »

Sur la Figure II-3, le plan d'action pour des contacts directs est représenté en bleu tandis que celui correspondant à des contacts rétro est en rouge. Afin de faciliter la gestion des conditions de contacts, le paramètre ε est introduit tel que :

- $\varepsilon = 1$ si le contact est direct
- $\varepsilon = -1$ si le contact est rétro

Un second paramètre ε_v est utilisé afin de caractériser le sens de rotation du pignon avec les conventions suivantes :

- $\varepsilon_v = 1$ si le pignon tourne dans le sens trigonométrique
- $\varepsilon_v = -1$ si le pignon tourne dans le sens horaire

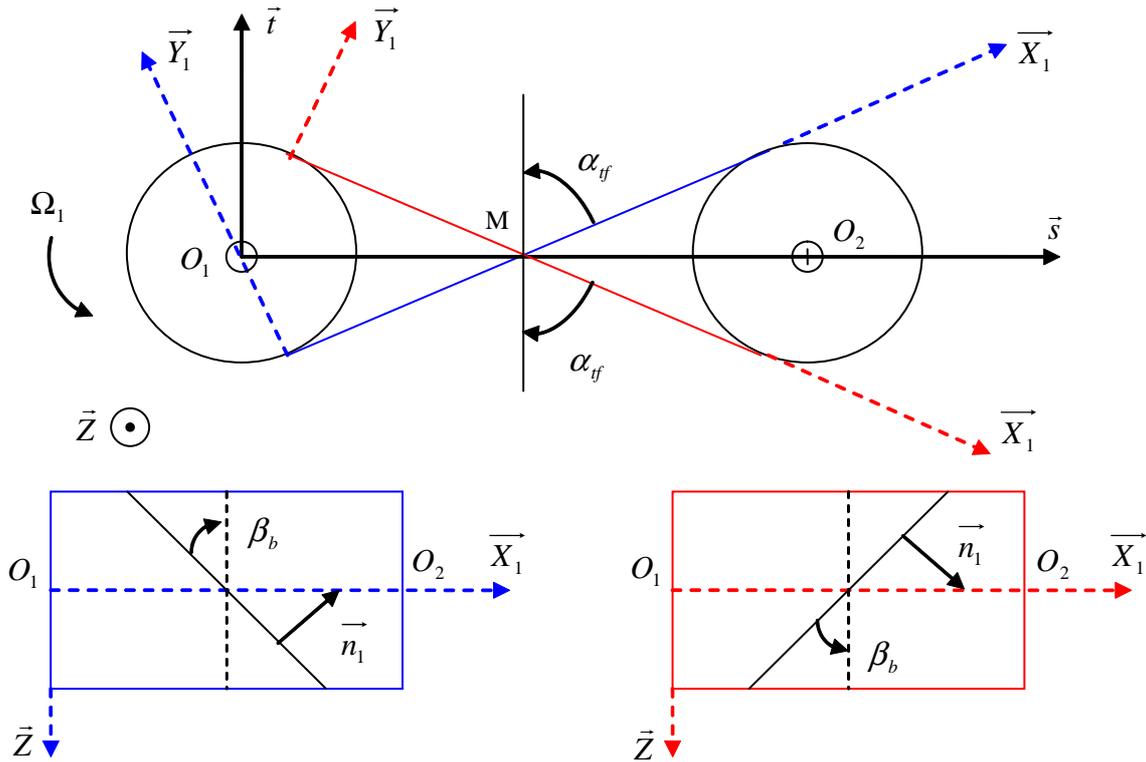


Figure II-3 : Orientation des plans d'action et des normales au contact

En supposant de manière classique que les normales aux contacts demeurent sur les plans d'action théoriques, la normale unitaire sortante par rapport à l'organe menant (pignon) s'exprime :

$$\vec{n}_1 = \sin(\alpha_t) \cos(\beta_b) \vec{s} + \varepsilon \varepsilon_v \cos(\alpha_t) \cos(\beta_b) \vec{t} + \varepsilon \varepsilon_v \sin(\beta_b) \vec{Z} \quad (\text{II-1})$$

II.1.2. Modélisation de l'interface d'engrènement

Dans le cas des modèles évoluant à vitesse de rotation constante, les lignes de contact représentant les contacts entre les dentures se déplacent à vitesse constante proportionnellement à la vitesse de rotation du pignon. Dans le cas de vitesses variables, il devient judicieux d'utiliser la variable angulaire associée à l'angle de rotation du pignon déduit de la vitesse par simple intégration.

En termes de déplacement ramené sur le plan d'action, il vient (II-2) :

$$d_{M_i} = Rb_1 \Theta_1 \quad (\text{II-2})$$

L'interface d'engrènement est représentée Figure II-4. L'indice j désigne le pignon s'il est égal à 1, la roue s'il est égal à 2. Chaque ligne de contact, supposée demeurer dans le plan d'action lors de l'engrènement, est discrétisée en N segments de longueur identique,

chacun possédant une raideur k_i constante. Le défilement de ces lignes est caractérisé par la cinématique sans charge de l'engrènement.

La raideur globale de denture à l'instant t est alors donnée par la sommation des différentes raideurs élémentaires de chaque cellule contenue dans l'interface d'engrènement

$T_1 T_2$ à cet instant, soit $k(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} k_i$, $N(t)$ représentant le nombre de cellules contenues dans l'interface à l'instant t .

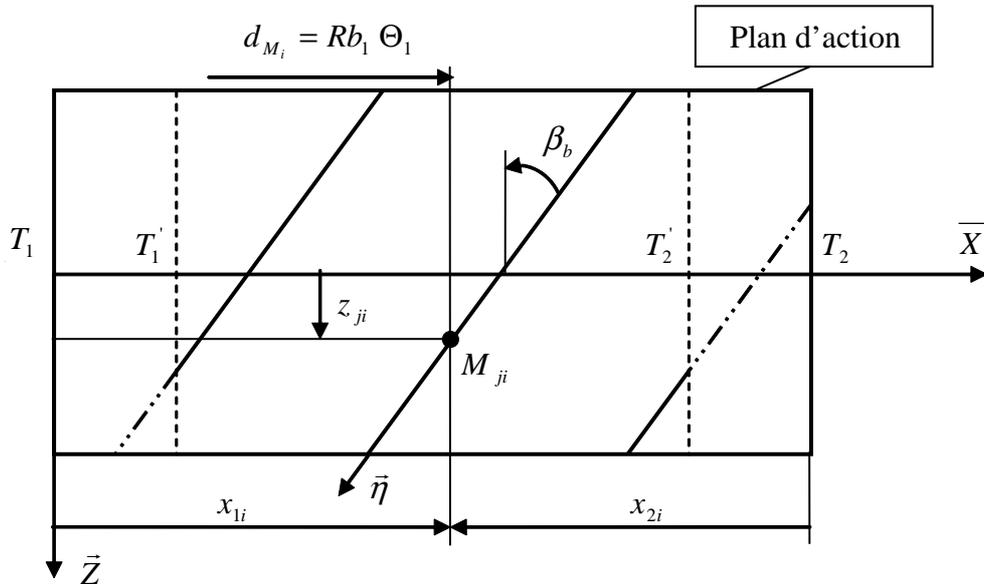


Figure II-4 : Modélisation de l'interface d'engrènement

II.2. EXPRESSION DE L'ECRASEMENT DES DENTURES

II.2.1. Expression des conditions de corps rigides

Les développements sont effectués en supposant que les déplacements généralisés sont des perturbations infinitésimales superposées aux mouvements de corps rigides. Dans la majorité des cas, cet état de référence est unique et ne pose aucun problème tant que les conditions de contacts n'engendrent pas une redéfinition du plan d'action théorique. L'introduction du jeu de denture dans les modèles dynamiques de la littérature traitant des pertes de contact et des chocs [119] - [121] est généralement réalisé pour des modèles torsionnels et les particularités associées aux variations instantanées de plan d'action restent masquées car n'affectant pas les degrés de liberté de torsion. Dans ce contexte, il paraît intéressant de développer les équations qui gouvernent ces transitions entre contacts directs et rétros pour des modélisations tridimensionnelles de dentures droites et hélicoïdales.

En effectuant une coupe transversale de la denture, les états de fonctionnement des contacts direct et rétro sont représentés de façon schématique sur la Figure II-5. La configuration directe est modélisée par une raideur de contact en bleu, celle rétro par une raideur de contact de couleur rouge. Le jeu J est le jeu normal à la denture. Les indices « + »

et « - » se rapportent aux conditions de contacts direct et rétro. Ainsi le point M_{ji}^+ sera-t-il le point discrétisé du mobile j dans le cas direct. La normale \vec{n}_{ji}^+ représente la normale sortante à ce point dans le cas du contact direct.

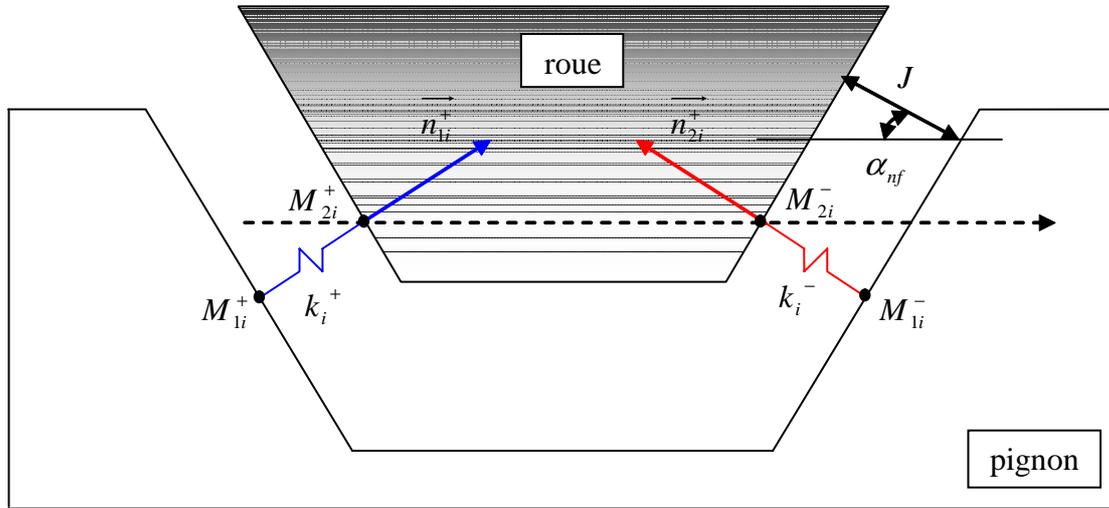


Figure II-5 : Conditions de contacts selon une coupe normale aux dents

Dans les conditions de corps rigides, l'engrenage ne subissant aucune déformation, les indices i n'apparaîtront pas. En effet, l'ensemble des points des lignes de contacts se déplace de façon identique.

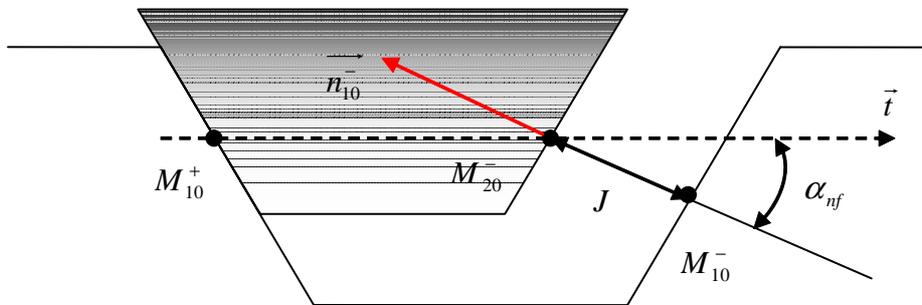


Figure II-6 : Cas du contact direct en condition de corps rigides : coupe normale aux dents

Les indices « $j0$ » ($j=1,2$) indiquent les positions dans les conditions de corps rigides. Ainsi la définition du point M_{j0}^+ sera le point du solide j relatif aux conditions de corps rigides en contact direct, M_{j0}^- sera le point relatif aux conditions de corps rigides en contact rétro.

D'après la Figure II-6, il vient :

$$\overrightarrow{M_{10}^+ M_{10}^-} \vec{t} = \left(\overrightarrow{M_{10}^+ M_{20}^-} + \overrightarrow{M_{20}^- M_{10}^-} \right) \vec{t} = M_{10}^+ M_{20}^- + \frac{J}{\cos(\alpha_{nf})} \quad (\text{II-3})$$

La condition dans le plan normal à la denture suivant la normale au contact s'exprime alors par :

$$\overrightarrow{M_{10}^-} \overrightarrow{M_{20}^-} \overrightarrow{n_{10}^-} = J \overrightarrow{n_{10}^-} \quad (\text{II-4})$$

Avec $\overrightarrow{n_{10}^-}$ la normale unitaire au pignon dans le cas rétro et J le jeu normal à la denture

II.2.2. Introduction des défauts d'excentricités

L'introduction des excentricités pose le problème d'un entraxe variable en fonction du temps, donc de l'ensemble des paramètres de fonctionnement tels l'angle de pression apparent, l'angle d'hélice, le module,... La modélisation adoptée repose sur une représentation bidimensionnelle de ce défaut en considérant que l'erreur introduite par ce dernier n'affecte que les conditions de corps rigides (Figure II-7).

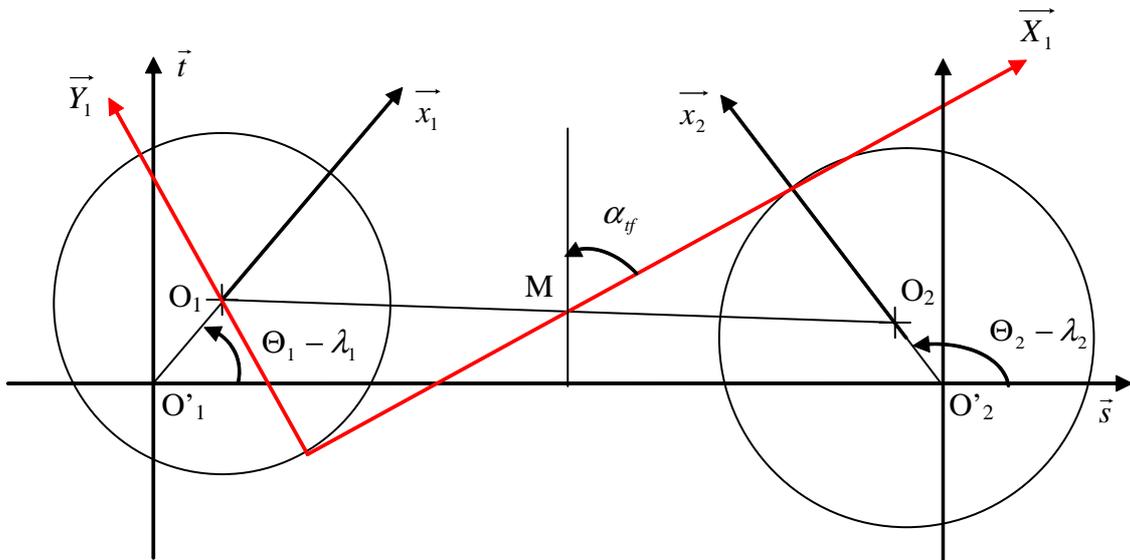


Figure II-7 : Illustration des excentricités

Sur la Figure II-7, i) la longueur $O_1'O_2'$ représente l'entraxe nominal a_0 correspondant à l'entraxe de montage, ii) O_1O_2 l'entraxe de fonctionnement a_f évoluant au cours du temps, iii) $O_1'O_1$ l'excentricité du pignon e_1 et iv) $O_2'O_2$ l'excentricité de la roue e_2 . L'angle α_{ff} représente ici l'angle apparent de fonctionnement dépendant du temps, λ_1 et λ_2 sont les déphasages initiaux des excentricités du pignon et de la roue respectivement.

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$, l'entraxe a_f s'écrit (II-5) :

$$a_f = \|\overrightarrow{O_1 O_2}\| = \|\overrightarrow{O_1 O_1'} + \overrightarrow{O_1' O_2'} + \overrightarrow{O_2' O_2}\| = \|-e_1 \vec{x}_1 + a_0 \vec{s} + e_2 \vec{x}_2\| \quad (\text{II-5})$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \vec{x}_1 = \cos(\Theta_1 - \lambda_1) \vec{s} + \sin(\Theta_1 - \lambda_1) \vec{t} \\ \vec{x}_2 = \cos(\Theta_2 - \lambda_2) \vec{s} + \sin(\Theta_2 - \lambda_2) \vec{t} \end{cases}$$

En effectuant les projections sur les axes du repère global, l'entraxe s'écrit en fonction des angles de rotation du pignon Θ_1 et de la roue Θ_2 sous la forme :

$$a_f = \sqrt{(a_0 - e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) + e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2))^2 + (e_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) - e_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2))^2} \quad (\text{II-6})$$

Les expressions des angles de rotation, des vitesses et accélérations angulaires de la roue sont développées en Annexe II.

II.2.3. Calcul du jeu de denture

Il existe au sein de chaque couple d'engrenage un jeu de fonctionnement permettant un bon engrènement qui, pour des engrenages supposés parfaits, est constant. La présence d'excentricités engendre alors une modification continue de l'angle de pression de fonctionnement dont la valeur peut être exprimée en fonction de l'entraxe de fonctionnement par :

$$\alpha_{ff} = \text{Arc cos} \left(\frac{a_0 \cos(\alpha_t)}{a_f} \right) \quad (\text{II-7})$$

Le jeu de denture normal à la denture s'exprime alors comme la somme d'une composante moyenne J et d'une composante variable $\Delta J(t)$, soit :

$$J(t) = J + \Delta J(t) \quad (\text{II-8})$$

La condition de fonctionnement des engrenages permet de relier la variation du jeu apparent $\Delta J_i(t)$ au pas de fonctionnement apparent et aux épaisseurs curvilignes de fonctionnement apparentes des dents du pignon et de la roue par la relation :

$$s_{ff}^{pig} + s_{ff}^{rou} + \Delta J_i(t) = p_{ff} \quad (\text{II-9})$$

La particularité de cette condition est de considérer un pas et des épaisseurs variables au cours du temps du fait de l'angle de pression α_{ff} . Ce pas de fonctionnement et ces épaisseurs de fonctionnement s'écrivent :

$$p_{tf} = m_t \pi \frac{\cos(\alpha_t)}{\cos(\alpha_f)} \quad (\text{II-10})$$

$$s_{tf} = \frac{2 R b_j (\text{inv}(\alpha_t) - \text{inv}(\alpha_f))}{\cos(\alpha_f)} + s_t \frac{\cos(\alpha_t)}{\cos(\alpha_f)}, \quad j = 1, 2 \quad (\text{II-11})$$

En injectant ces expressions dans (II-9), et en écrivant que les épaisseurs curvilignes des dents du pignon et de la roue sont identiques, l'écriture de la variation du jeu apparent de denture s'obtient par (II-12) :

$$\Delta J_t(t) = 2 a_0 [\text{inv}(\alpha_f) - \text{inv}(\alpha_t)] \frac{\cos(\alpha_f)}{\cos(\alpha_t)} \quad (\text{II-12})$$

Le jeu de denture normal à la denture sur le plan d'action s'exprime alors comme :

$$J_b(t) = (J + \Delta J_t(t) \cos(\beta_f)) \cos(\alpha_{nf}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta_f = \text{Arc tan} \left(\tan(\beta) \frac{\cos(\alpha_f)}{\cos(\alpha_t)} \right) \\ \alpha_{nf} = \text{Arc tan} (\tan(\alpha_f) \cos(\beta_f)) \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

II.2.4. Expression de l'écrasement des dentures

Les déplacements généralisés étant de petites quantités, ils peuvent être représentés par un torseur de petites perturbations pour le mobile j (translations et rotations infinitésimales autour des mouvements de corps rigides), exprimé au centre de rotation des lignes d'arbres par rapport au repère \vec{R} , soit :

$$\{\tau_j\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_j^R = \varphi_j \vec{s} + \psi_j \vec{t} + \theta_j \vec{Z} \\ \vec{U}_j^R(O_j) = v_j \vec{s} + w_j \vec{t} + u_j \vec{Z} \end{array} \right\}, \quad j = 1, 2 \quad (\text{II-14})$$

Dans la suite de ce chapitre, l'exposant ε sera relatif aux conditions de contacts direct et rétro. Ainsi le point M_{ji}^ε sera relatif au contact direct si $\varepsilon = 1$, au contact rétro si $\varepsilon = -1$. Il en sera de même pour la normale \vec{n}_{ji}^ε . Le rapprochement des points M_{ji}^ε s'exprime alors par (II-15) :

$$\vec{M}_{1i}^\varepsilon \vec{M}_{2i}^\varepsilon \vec{n}_{1i}^\varepsilon = \left[\vec{M}_{1i}^\varepsilon \vec{M}_{10}^\varepsilon + \vec{M}_{10}^\varepsilon \vec{M}_{20}^\varepsilon + \vec{M}_{20}^\varepsilon \vec{M}_{2i}^\varepsilon \right] \vec{n}_{1i}^\varepsilon \quad (\text{II-15})$$

La considération des déplacements par rapport à l'état de référence des corps rigides dans le repère \bar{R} permet d'écrire l'écrasement positif Δ_i entre les points M_{1i}^ε et M_{2i}^ε . En notant ε_i le paramètre des conditions de contacts pour chaque point de discrétisation et en remarquant que $\overrightarrow{M_{10}^\varepsilon M_{20}^\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_i}{2} J_b(t) \overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon}$, cet écrasement devient alors :

$$\Delta_i^\varepsilon = \left[\overrightarrow{U_1^R(M_{1i}^\varepsilon)} - \overrightarrow{U_2^R(M_{2i}^\varepsilon)} - \frac{1-\varepsilon_i}{2} J_b(t) \overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \right] \overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \quad (\text{II-16})$$

Avec $\overrightarrow{M_{10}^\varepsilon M_{1i}^\varepsilon} = \overrightarrow{U_1^R(M_{1i}^\varepsilon)}$ et $\overrightarrow{M_{20}^\varepsilon M_{2i}^\varepsilon} = \overrightarrow{U_2^R(M_{2i}^\varepsilon)}$

L'obtention finale de l'écrasement normal de chaque point s'obtient après l'écriture des déplacements des points M_{ji}^ε aux centres de rotations du pignon et de la roue (II-17) :

$$\Delta_i^\varepsilon = \left[\overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \quad \overrightarrow{O_1 M_{1i}^\varepsilon} \wedge \overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \quad -\overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \quad -\overrightarrow{O_2 M_{2i}^\varepsilon} \wedge \overrightarrow{n_{1i}^\varepsilon} \right]^T X_{eng} - \frac{1-\varepsilon_i}{2} J_b(t) \quad (\text{II-17})$$

Avec $X_{eng} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad \psi_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \psi_2 \quad \theta_2]^T$ le vecteur des degrés de liberté du couple d'engrenages.

Le regroupement vectoriel des termes V_{1i} dépendant et V_{2i} indépendant des conditions de contacts permet de réécrire (II-17) sous la forme (II-18) :

$$\Delta_i^\varepsilon = (V_{1i} + \varepsilon_i V_{2i})^T X_{eng} - \frac{1-\varepsilon_i}{2} J_b(t) \quad (\text{II-18})$$

Avec :

$$- V_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \\ 0 \\ (x_{1i} \cos(\alpha_{tf}) - Rb_1 \sin(\alpha_{tf})) \sin(\beta_b) \\ z_{1i} \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \\ -e_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \\ 0 \\ -\cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \\ 0 \\ (x_{2i} \cos(\alpha_{tf}) - Rb_2 \sin(\alpha_{tf})) \sin(\beta_b) \\ -z_{2i} \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \\ e_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2) \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{tf}) \end{bmatrix}$$

$$- V_{2i} = \varepsilon_v \begin{bmatrix} \sin(\beta_b) \\ 0 \\ \cos(\beta_b) \cos(\alpha_{tf}) \\ e_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) \sin(\beta_b) - z_{1i} \cos(\beta_b) \cos(\alpha_{tf}) \\ -(e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) + x_{1i} \sin(\alpha_{tf}) + Rb_1 \cos(\alpha_{tf})) \sin(\beta_b) \\ (e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) \cos(\alpha_{tf}) + Rb_1) \cos(\beta_b) \\ -\sin(\beta_b) \\ 0 \\ -\cos(\beta_b) \cos(\alpha_{tf}) \\ -(e_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2) \sin(\beta_b) - z_{2i} \cos(\beta_b) \cos(\alpha_{tf})) \\ -(-e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2) + x_{2i} \sin(\alpha_{tf}) + Rb_2 \cos(\alpha_{tf})) \sin(\beta_b) \\ (-e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2) \cos(\alpha_{tf}) + Rb_2) \cos(\beta_b) \end{bmatrix}$$

Le changement des conditions de contacts s'effectue de manière unilatérale car il ne peut y avoir simultanément contact direct et contact rétro :

- Si $\Delta_i^\varepsilon > 0$ le contact ne change pas. Si $\varepsilon = 1$ le contact est sur le flanc direct, ε et ε_i restent à 1. Si $\varepsilon = -1$, le contact est sur le flanc rétro, ε et ε_i restent à -1.
- Si $-J < \Delta_i^\varepsilon < 0$ il n'y a pas de contact, ε et ε_i ne changent pas de valeurs.
- Si $\Delta_i^\varepsilon < -J$ le contact change. Si $\varepsilon = 1$, le contact devient rétro, ε et ε_i prennent les valeurs -1. Si $\varepsilon = -1$, le contact devient direct, ε et ε_i prennent les valeurs 1.

Dans le but de simuler la phase de vol libre entre les deux phases de contact, une fonction porte $\Pi(x)$ est également introduite. Cette dernière est fonction de l'écrasement (donc de ε_i) et sera notée Π_i (Figure II-8).

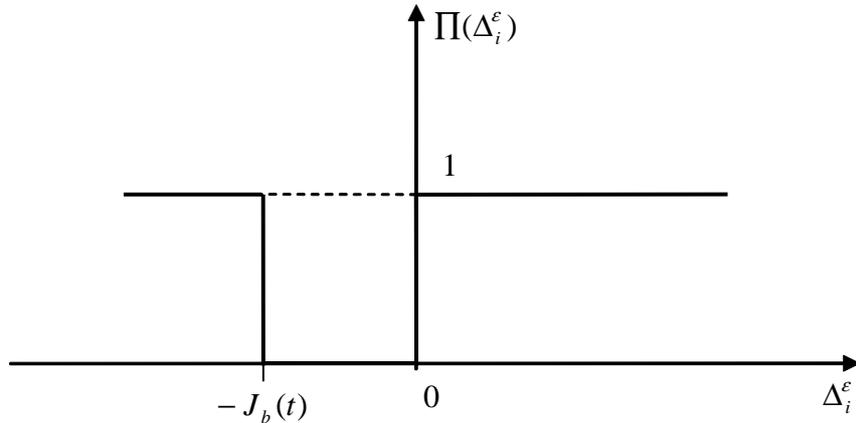


Figure II-8 : Modélisation de la fonction porte

L'écrasement est alors déduit sous la forme :

$$\Delta_i^\varepsilon = \Pi_i \left[(V_{1i} + \varepsilon_i V_{2i})^T X - \frac{1 - \varepsilon_i}{2} J_b(t) \right] \quad (\text{II-19})$$

Pour des raisons de lisibilité, l'ensemble $V_{1i} + \varepsilon_i V_{2i}$ sera noté dans le reste du mémoire par V_i représentant le vecteur de structure global.

III. MISE EN EQUATION GENERALE

Un système d'engrenages quelconque sera caractérisé d'un point de vue dynamique par des matrices de masses M_{glob} et de rigidités K_{glob} ainsi que des vecteurs second membre construits par l'assemblage des matrices élémentaires des divers composants du système. Ainsi, il est possible de séparer les diverses équations en les regroupant d'une part côté engrenages, d'autre part côté arbres, paliers, carters,... Dans le cadre de ce travail de thèse, les carters ne seront pas introduits et les effets gyroscopiques ne seront pas considérés car leur influence est jugée négligeable dans les gammes de vitesses exploitées.

III.1. MISE EN EQUATION D'UN COUPLE D'ENGRENAGES

La mise en équation des systèmes mécaniques s'effectue à partir des équations de Lagrange qui, pour un système à N degrés de liberté, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (\text{II-20})$$

q_j , \dot{q}_j représentent respectivement les déplacements et vitesses généralisés des N degrés de liberté, T l'énergie cinétique, D l'énergie de dissipation et U l'énergie potentielle, Q_j étant la force généralisée appliquées au degré q_j .

L'énergie de dissipation fait appel à l'amortissement visqueux, très difficile à quantifier dans le cas d'engrenages. Les équations consécutives à cette énergie seront introduites ultérieurement au paragraphe III.4.2.

Dans le cadre de la modélisation adoptée, les largeurs des engrenages sont considérées suffisamment petites devant les diamètres primitifs pour considérer que les cylindres de bases sont assimilables à des disques. Ainsi la matrice d'inertie au centre de gravité O_j d'un engrenage j sera exprimée dans le repère global \vec{R} par :

$$\overline{\overline{I_j(O_j)}} = \begin{bmatrix} I_{tj} & 0 & 0 \\ 0 & I_{tj} & 0 \\ 0 & 0 & I_j \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

Avec I_{tj} l'inertie transverse et I_j l'inertie polaire

En utilisant le théorème de Huygens, la matrice est transportée sur l'axe de rotation et s'exprime alors :

$$\overline{\overline{I_j(O'_j)}} = \overline{\overline{I_j(O_j)}} + \begin{bmatrix} m_j (b_j^2 + c_j^2) & -m_j a_j b_j & -m_j a_j c_j \\ -m_j a_j b_j & m_j (a_j^2 + c_j^2) & -m_j b_j c_j \\ -m_j a_j c_j & -m_j b_j c_j & m_j (a_j^2 + b_j^2) \end{bmatrix}, j = 1, 2 \quad (\text{II-22})$$

$$\text{Avec } \overline{\overline{O_j O'_j}} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_j \cos(\Theta_j - \lambda_j) \\ -e_j \sin(\Theta_j - \lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } m_j \text{ la masse du solide } j$$

Les énergies potentielle U_{eng} et cinétique T_{eng} du couple d'engrenages s'écrivent :

$$U_{eng} = \frac{1}{2} \left(X^T \left(\sum_{i=1}^{N(t)} \Pi_i k_i V_i V_i^T \right) X - \sum_{i=1}^{N(t)} \Pi_i (1 - \varepsilon_i) k_i \left(X^T V_i + \frac{J_b(t)}{2} \right) J_b(t) \right) \quad (\text{II-23})$$

$$T_{eng} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \overline{\overline{V^R(O'_j)}}^2 + \overline{\overline{\Omega_j^R(O'_j)}}^T \overline{\overline{I_j(O'_j)}} \overline{\overline{\Omega_j^R(O'_j)}} \right) \quad (\text{II-24})$$

$$\text{Avec } \overline{\overline{V^R(O'_j)}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{w}_j \end{bmatrix} \text{ et } \overline{\overline{\Omega_j^R(O'_j)}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_j \\ \dot{\psi}_j \\ \dot{\theta}_j + \Omega_j \end{bmatrix}$$

L'application des équations (II-20) permet de donner les matrices élémentaires de masse M_{eng} et de raideur K_{eng} du couple d'engrenages, ainsi que le vecteur second membre relatif aux conditions de contacts et à l'introduction de vitesses de rotation variables. Il est important de noter que dans ce cas les termes inertiels polaires des engrenages interviennent dans la modélisation, chose qui n'apparaît pas pour des vitesses constantes.

Les matrices M_{eng} et K_{eng} sont des matrices symétriques, la matrice de masse est de plus diagonale.

$$M_{eng} = \text{diag}(m_1 \quad m_1 \quad m_1 \quad I_{t1} \quad I_{t1} \quad I_1 \quad m_2 \quad m_2 \quad m_2 \quad I_{t2} \quad I_{t2} \quad I_2) \quad (\text{II-25})$$

$$K_{eng} = \sum_{i=1}^{N(t)} \Pi_i k_i V_i V_i^T \quad (\text{II-26})$$

$$F_{eng} = \sum_{i=1}^{N(t)} \Pi_i \frac{1-\varepsilon_i}{2} k_i V_i J_b(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ e_1 m_1 (\dot{\Omega}_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) - \Omega_1^2 \cos(\Theta_1 - \lambda_1)) \\ e_1 m_1 (-\dot{\Omega}_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) + \Omega_1^2 \sin(\Theta_1 - \lambda_1)) \\ 0 \\ 0 \\ -I_1 \dot{\Omega}_1 + C_m \\ 0 \\ e_2 m_2 (\dot{\Omega}_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2) - \Omega_2^2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2)) \\ e_2 m_2 (-\dot{\Omega}_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2) + \Omega_2^2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2)) \\ 0 \\ 0 \\ -I_2 \dot{\Omega}_2 + C_R \end{bmatrix} \quad (\text{II-27})$$

III.2. INTRODUCTION DES ARBRES SUPPORT

III.2.1. Définition de l'élément d'arbre

L'engrènement est un élément de couplage entre les différents modes de vibrations des arbres. Les modèles d'arbres utilisés doivent donc être représentatifs de ces effets. Classiquement dans le cas des transmissions par engrenages, les arbres sont introduits par des modèles éléments finis de poutres à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœuds (Valex [5], Bard [122], Perret-Liaudet [123]). Les éléments choisis sont à section constante (poutre de Timoschenko) prenant en compte les effets de traction - compression, flexion et torsion mais incluant également le raidissement dû à la compression de la poutre dans le cas d'utilisation d'engrenages hélicoïdaux.

Ce type d'élément est illustré sur la Figure II-9. Les degrés de liberté (u_{jk}, v_{jk}, w_{jk}) et $(\varphi_{jk}, \psi_{jk}, \theta_{jk})$ sont les degrés de translation et de rotation des nœuds j de l'élément k .

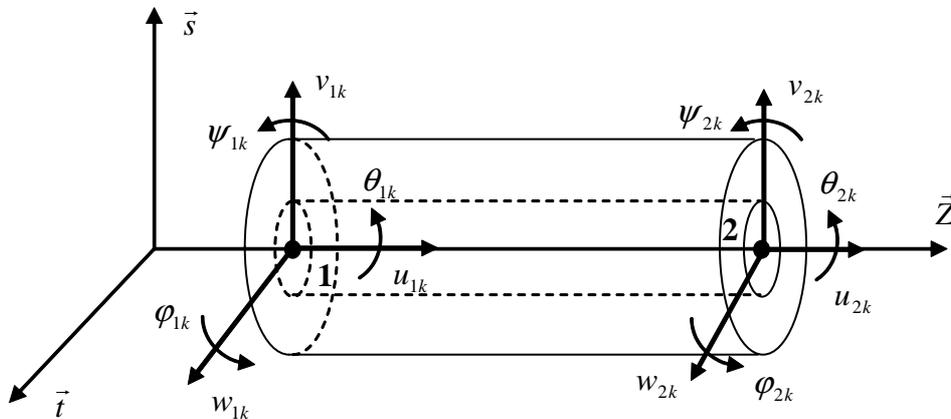


Figure II-9 : Élément d'arbre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud de type Timoschenko

III.2.2. Expression de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de l'élément de poutre k de section circulaire constante S_k et de longueur L_k s'écrit :

$$T_{ak} = \frac{1}{2} \rho \left(S_k \int_0^{L_k} (\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2) dz + I_{\theta k} \int_0^{L_k} (\dot{\theta}_k + \Omega_a)^2 dz + I_{xk} \int_0^{L_k} (\dot{\phi}_k^2 + \dot{\psi}_k^2) dz \right) \quad (\text{II-28})$$

Avec :

- I_{xk} le moment d'inertie transverse par rapport aux axes \vec{s} et \vec{t}
- $I_{\theta k}$ le moment d'inertie polaire de l'élément d'arbre par rapport à l'axe \vec{Z}
- ρ la masse volumique
- Ω_a la vitesse de rotation de l'arbre

L'application des équations de Lagrange conduit à l'expression de la matrice masse M_{ak} et au vecteur $F_{ak}(t)$ relatif aux effets d'inertie de l'élément k (II-29). Ce vecteur constitue une partie des excitations du système mécanique que l'on retrouve dans le second membre global du système d'équations du mouvement.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_{ak}}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial T_{ak}}{\partial q} \right] = M_{ak} \ddot{q} + F_a(t) \quad (\text{II-29})$$

Avec :

- q représente le vecteur des 12 degrés de liberté de l'élément
- M_{ak} la matrice de masse à termes constants (développée en Annexe I)
- $F_{ak}(t) = \dot{\Omega}_a \frac{\rho I_{\theta} L_k}{3} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

Il apparaît dans les composantes du vecteur $F_{ak}(t)$ des excitations produites par les variations temporelles de l'accélération angulaire du pignon amplifiées par des termes d'inerties polaires. Ces variations proviennent des régimes transitoires, mais peut également provenir des écarts de géométrie ou de montage introduits sur les éléments d'engrenage. Ils perturbent la cinématique du réducteur dans sa globalité et modifient la vitesse de rotation des arbres.

III.2.3. Expression de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation du même élément poutre de section circulaire constante S_k et de longueur L_k , est définie par :

$$U_{ak} = \frac{1}{2} \left(E S_k \int_0^{L_k} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + G I_{xk} \int_0^{L_k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz + E I_{\Theta k} \int_0^{L_k} \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz \right) \quad (\text{II-30})$$

Avec :

- $I_{\Theta k}$ le moment d'inertie transverse de l'élément d'arbre par rapport aux axes \vec{s} et \vec{t}
- I_{xk} le moment d'inertie polaire de l'élément d'arbre par rapport à l'axe \vec{Z}
- E , G les modules d'Young et de Coulomb

L'application des équations de Lagrange conduit à l'expression de la matrice raideur K_{ak} dont tous les termes sont constants (II-31) développée en Annexe I.

$$\frac{\partial U_{ak}}{\partial q} = K_{ak} q \quad (\text{II-31})$$

III.3. INTRODUCTION DES PALIERS, ACCOUPLEMENTS, MOTEUR ET FREIN

III.3.1. Modèle de palier

Compte tenu de la modélisation entreprise dans le cadre de ce travail, les paliers ne sont introduits que de façon simplifiée par l'intermédiaire de ressorts de traction - compression et de torsion. Ces raideurs additionnelles sont ajoutées au niveau des nœuds du modèle global du réducteur et constituent une matrice de raideur K_{pk} relative au palier k . En première approximation, les termes de couplage sont ignorés et les matrices correspondantes sont diagonales de dimension 6.

En notant (k_{pu}, k_{pv}, k_{pw}) les raideurs de traction associées aux degrés de liberté de translation (u, v, w) du nœud selon les axes $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{Z})$ et $(k_{p\varphi}, k_{p\psi}, k_{p\theta})$ les raideurs de rotation associées aux degrés de liberté de torsion (φ, ψ, θ) du même nœud selon les mêmes axes, la matrice se met alors sous forme diagonale (II-32) :

$$K_{pk} = \text{diag}(k_{pu}, k_{pv}, k_{pw}, k_{p\varphi}, k_{p\psi}, k_{p\theta}) \quad (\text{II-32})$$

III.3.2. Modèle d'accouplement élastique

Un accouplement élastique permet la liaison entre les parties motrice et réceptrice et le système d'engrenages. Ils sont introduits par des termes de raideurs entre les différents nœuds du modèle global. Des masses et inerties concentrées peuvent également être ajoutées de façon à prendre en compte les effets massiques et inertiels de ces accouplements.

Les raideurs et masses se regroupent sous formes matricielles et relient alors les nœuds des parties moteur et frein et le réducteur. Les matrices sont alors de dimension 12 et se définissent selon (II-33) pour la matrice masse et (II-34) pour la matrice de raideurs.

$$M_{acck} = \text{diag}(m_{ak}, m_{ak}, m_{ak}, I_{ak}, I_{ak}, I_{p_{acck}})$$

m_{ak} représente la masse

(II-33)

I_{ak} et $I_{p_{ak}}$ les inerties transverses et polaires

$$K_{acck} = I_{acck} \quad \text{et} \quad I_{acck} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II-34)

Les termes $(k_{au1}, k_{av1}, k_{aw1})$ et $(k_{a\varphi1}, k_{a\psi1}, k_{a\theta1})$ représentent les raideurs de traction et de torsion des degrés de liberté suivant les axes $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{Z})$.

III.3.3. Modèle de moteur et de frein

Le moteur et le frein sont caractérisés uniquement par leurs masses et leurs inerties. Ainsi, l'introduction dans le modèle global de ces éléments ne se fera que par ajout d'une matrice élémentaire diagonale de masses M_{mot} pour le moteur et M_{fr} pour le frein. L'ajout ne se fait alors que sur un seul nœud, elles sont de dimension 6.

En notant m_{mot} , I_{mot} , $I_{p_{mot}}$ la masse, l'inertie transverse et polaire du moteur, m_{fr} , I_{fr} , $I_{p_{fr}}$ la masse, l'inertie transverse et polaire du frein, les matrices élémentaires s'écrivent selon (II-35) et (II-36) :

$$M_{mot} = \text{diag}(m_{mot}, m_{mot}, m_{mot}, I_{mot}, I_{mot}, I_{p_{mot}}) \quad (\text{II-35})$$

$$M_{fr} = \text{diag}(m_{fr}, m_{fr}, m_{fr}, I_{fr}, I_{fr}, I_{p_{fr}}) \quad (\text{II-36})$$

L'introduction de ces éléments engendre des efforts consécutifs aux vitesses de rotation non constantes. Ces vecteurs de force se mettent sous la forme (II-37) et (II-38) :

$$F_{mot}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_{p_{mot}} \ \dot{\Omega}_1]^T \quad (\text{II-37})$$

$$F_{fr}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_{p_{fr}} \ \dot{\Omega}_2]^T \quad (\text{II-38})$$

III.4. ECRITURE DES EQUATIONS GENERALES DE MOUVEMENT

III.4.1. Assemblage des divers éléments du réducteur

L'assemblage des matrices masses et raideurs du couple d'engrenages (II-25) et (II-26), des éléments d'arbres (II-29) et (II-31), l'adjonction des matrices raideurs des paliers (II-32), de masses et de raideurs des accouplements élastiques (II-33) et (II-34), de masse du moteur et du frein (II-35) et (II-36) conduisent à un système d'équations dont la forme matricielle générale est la suivante :

$$M_{glob} \ddot{X} + K_{glob} X = F_{glob} \quad (\text{II-39})$$

Avec :

$$- \quad M_{glob} = M_{eng} + \sum_{i=1}^{N_a} M_{ai} + \sum_{k=1}^{N_{acc}} M_{ack} + M_{mot} + M_{fr} \quad \text{la matrice masse globale}$$

$$- \quad K_{glob} = K_{eng} + \sum_{i=1}^{N_a} K_{ai} + \sum_{j=1}^{N_p} K_{pj} + \sum_{k=1}^{N_{acc}} K_{ack} \quad \text{la matrice raideur globale}$$

$$- \quad F_{glob} = F_0(t) - F_{eng} - \sum_{i=1}^{N_a} F_{ai}(t) - F_{mot}(t) - F_{fr}(t) \quad \text{le second membre global}$$

$$- \quad N_a, N_p \text{ et } N_{acc} \quad \text{le nombre d'éléments d'arbres, de palier et d'accouplements}$$

Le vecteur $F_0(t)$ est issu de l'écriture du travail virtuel des efforts extérieurs au système. Il est alors composé uniquement des couples moteur et résistant s'appliquant aux degrés de liberté de torsion adéquats. Ces couples sont liés par le théorème de l'énergie cinétique (II-40) qui, en négligeant les pertes, conduit à la relation :

$$\sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{N_a} I_{ai} + \sum_{j=1}^2 I_j + \sum_{i=1}^{n_a} I_{acck} \right) \Omega_j \dot{\Omega}_j + I_{mot} \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + I_{fr} \Omega_2 \dot{\Omega}_2 = C_m \Omega_1 + C_R \Omega_2 \quad (\text{II-40})$$

Avec :

- I_{ai} l'inertie polaire de l'élément d'arbre
- I_j l'inertie polaire d'un engrenage
- I_{acck} l'inertie polaire d'un accouplement

Le couple résistant s'écrit alors en fonction du couple moteur, du rapport de réduction $u = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ mais également de l'accélération angulaire du pignon multipliée par les termes inertiels des arbres moteur et récepteur (II-41).

$$C_R = \frac{C_m}{u} + \left(\left(\sum_{i=1}^{N_a} I_{ai} + \sum_{j=1}^2 I_j + \sum_{i=1}^{n_a} I_{acck} \right) \left(u - \frac{1}{u} \right) + u I_{mot} - \frac{1}{u} I_{fr} \right) \dot{\Omega}_1 \quad (\text{II-41})$$

III.4.2. Introduction de l'amortissement

Un train d'engrenages est un mécanisme composé d'éléments liés par des liaisons nécessairement imparfaites. La localisation et la quantification exacte des sources dissipatives deviennent très complexes, voire impossibles. De plus, dans de tels mécanismes, l'amortissement peut se présenter sous différentes formes : structural, visqueux, etc.

Les engrenages se caractérisent plus particulièrement par un amortissement de type visqueux, puisque la liaison entre dentures est lubrifiée. Une partie de la dissipation semble provenir des effets d'écrasement de ce même film lubrifiant. Par ailleurs, pour un régime de fonctionnement de type élastohydrodynamique à film complet, la contribution des efforts de frottement est généralement négligée devant celle des efforts normaux.

D'un point de vue modélisation, l'insertion d'un élément d'engrenage nécessite la prise en compte d'un amortissement qui ne peut être que global. Non quantifiable a priori, il est alors introduit via un amortissement visqueux équivalent ξ . La matrice d'amortissement correspondante est obtenue à partir de la matrice masse globale M_{glob} et de la matrice de rigidité globale du réducteur $\overline{K_{glob}}$, moyennée sur le temps et dans l'espace afin de définir une base de modes propres ϕ à l'arrêt de la structure vis-à-vis de laquelle les matrices de masse et

de raideur moyenne sont orthogonales. La matrice d'amortissement est alors diagonale et s'écrit :

$$\tilde{C}_{glob} = \text{diag}(2 \xi \tilde{m}_k \sqrt{\lambda_k}) \quad (\text{II-42})$$

Avec :

- \tilde{m}_k la composante de la matrice masse modale globale $\tilde{M}_{glob} = \phi^T M_{glob} \phi$ associée au mode k
- λ_k valeur propre associés au mode propre ϕ_k résultant de l'égalité $\det(\overline{K}_{glob} - \Lambda M_{glob}) = 0$, Λ matrice diagonale des valeurs propres.

La matrice d'amortissement est alors exprimée dans la base physique par la transformation inverse (II-43) :

$$C_{glob} = \phi^{-T} \tilde{C}_{glob} \phi^{-1} \quad (\text{II-43})$$

Il est à noter que dans la suite de ce mémoire, les facteurs d'amortissement seront supposés constants et identiques pour tous les modes. La dernière hypothèse simplificatrice peut être relaxée sans difficulté théorique mais implique une identification de ces paramètres qui ne peut être qu'expérimentale. Les valeurs rencontrées dans la littérature se situent dans une plage allant de $\xi = 0.013$ pour Gregory & Col. [23] et [24] à $\xi = 0.17$ pour Ichimaru & Hirano [124]. L'ensemble des applications numériques de mémoire considérera des valeurs comprises entre 0.05 et 0.1, ce qui semble raisonnable et réaliste.

III.4.3. Ecriture globale des équations de mouvement

L'introduction des termes d'amortissement dans le système d'équations (II-39) conduit à la forme générale des équations du mouvement. Il s'agit d'un système d'équations différentielles du 2nd ordre non - linéaire (suite à l'introduction du jeu de denture et des phénomènes d'impacts) et à coefficients dépendant du temps afin de simuler les évolutions des portées sur les flancs de dentures :

$$M_{glob} \ddot{X} + C_{glob} \dot{X} + K_{glob} X = F_{glob} \quad (\text{II-44})$$

IV. RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

Les équations de mouvement étant trop nombreuses, une résolution numérique s'impose. Ces résolutions reposent sur l'utilisation de schémas numériques de toutes sortes,

les plus connus étant l'algorithme de Newmark à accélération constante ou Newmark implicite, les méthodes de Runge Kutta, l'algorithme HHT de Hilbert Hugues Taylor.

Dans le cas de régimes stationnaires, la résolution des équations est effectuée pas à pas dans le temps. Il convient donc de caractériser les changements de plan d'action lors des chocs directs et rétro ainsi que la cinématique instantanée des contacts.

IV.1. DEPLACEMENT DES POINTS DE CONTACTS POTENTIELS

Dans le cas d'une modélisation globale des éléments d'engrenages, 2 configurations de contacts peuvent intervenir. Ainsi les distances x_{ji} , $j=1,2$ définies au paragraphe II.1.2 peuvent être différentes pour ces 2 configurations.

Les Figures II-10 et II-11 représentent les plans d'action dans les cas respectifs du contact direct et rétro. L'état de référence étant celui du contact direct, la connaissance des distances x_{ji}^- n'est à priori pas connue. Les distances z_i^+ et z_i^- sont égales et de mêmes signes.

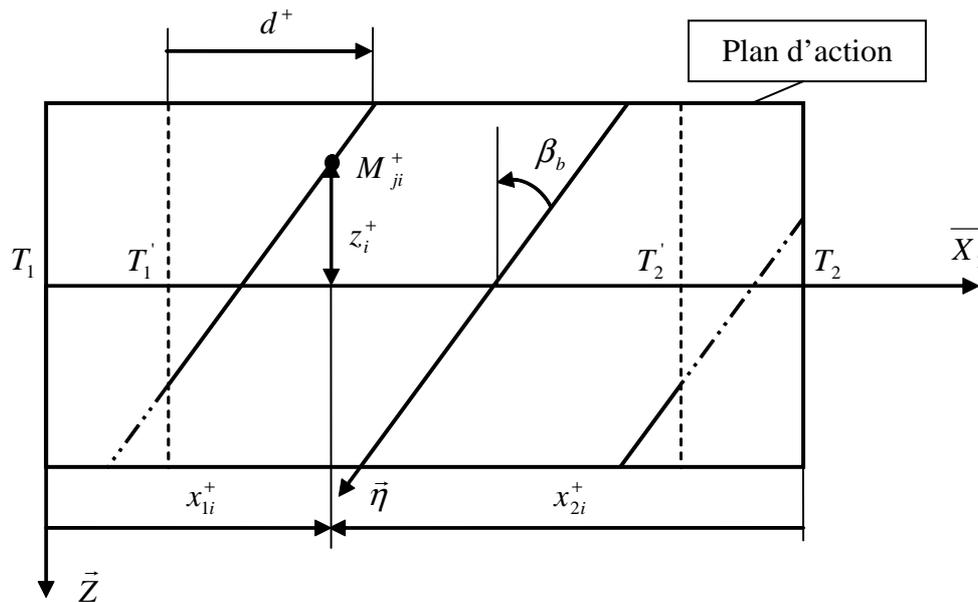


Figure II-10 : Interface d'engrènement dans le cas direct à un instant donné

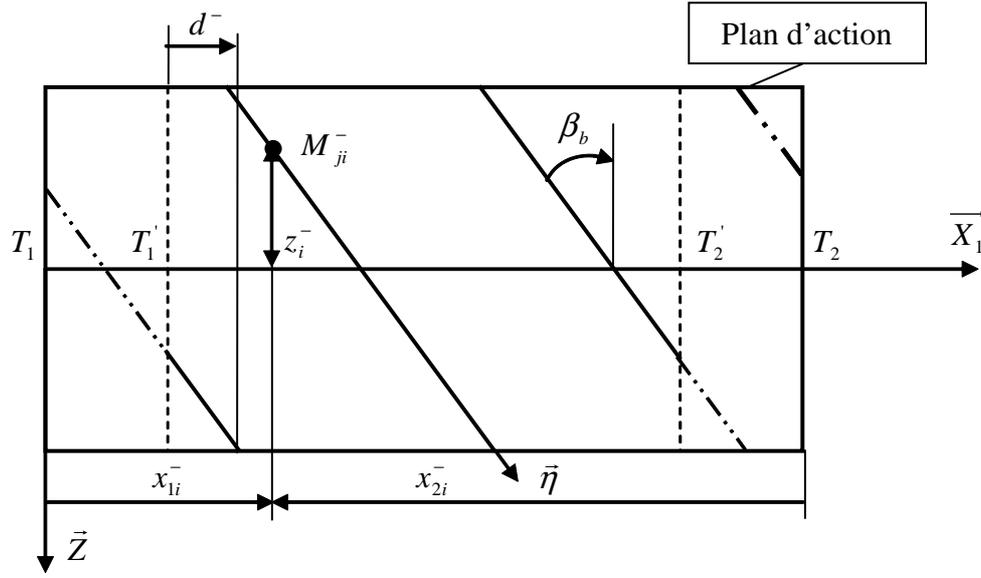


Figure II-11 : Interface d'engrènement dans le cas rétro à un instant donné

Le défilement des points de contacts de l'état de référence est déterminé à partir de $T_1 T_1'$. En notant d^+ la distance du premier segment de discrétisation de la première ligne de contacts entrant dans la fenêtre d'engrènement $T_1' T_2'$, le repérage de la totalité des points à un instant $t > 0$ est donné par $d^+ = T_1 T_1' + R b_1 |\Theta_1|$, avec $d^+ = T_1 T_1'$ à $t = 0$.

En notant x_η la coordonnée de M_{ji}^+ suivant $\vec{\eta}$, les coordonnées x_{1i}^+ et x_{2i}^+ projetées sur l'axe \vec{X}_1 sont pour les lignes de contact $N, N+1, N+2, \dots$:

$$\begin{cases} x_{1i}^+ = d^+ + T_1 T_1' - x_\eta \sin(\beta_b) + n p_{bt}, n = 0, 1, 2, \dots \\ x_{2i}^+ = -(T_1 T_2' - x_{1i}^+) \end{cases} \quad (\text{II-45})$$

$$d^+ + T_1 T_1' - \min(L_{pig}, L_{rou}) \tan(\beta_b) + n p_{bt} < T_1 T_2'$$

La coordonnée z_i^+ est elle donnée par :

$$z_i^+ = x_\eta \cos(\beta_b) - \frac{\min(L_{pig}, L_{rou})}{2} \tan(\beta_b) \quad (\text{II-46})$$

Dans le cas du contact rétro, il peut y avoir un nombre de lignes de contacts potentiels dans la fenêtre d'engrènement différent du cas du contact direct. Il est à noter que le défilement des lignes de contacts rétro s'effectue selon $-\vec{X}_1$ et que les distances $T_1 T_1'$, $T_1' T_2'$ et $T_1 T_2'$ sont identiques dans le cas direct et rétro.

En étudiant la position des points de contacts donnée sur la Figure II-12, avec en bleu le plan d'action dans le cas direct et en rouge le cas rétro, il apparaît que ces points ne se situent pas aux mêmes coordonnées et sont décalés.

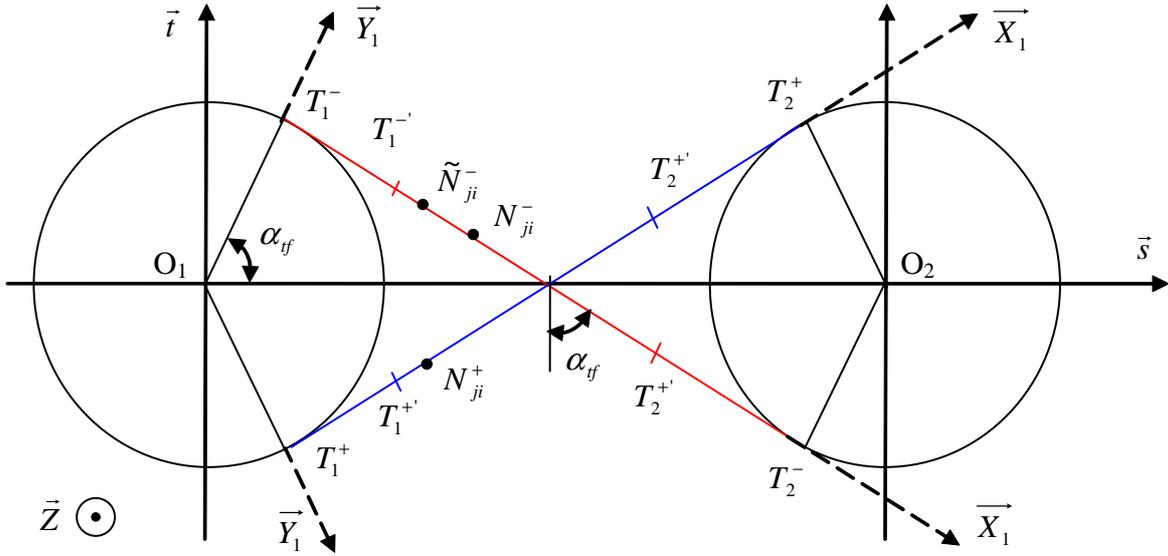


Figure II-12 : Coupe dans un plan normal aux axes de rotation à un instant donné

La position du premier segment N_{ji}^+ du cas de contact direct reproduit sur le plan d'action dans la configuration rétro (noté \tilde{N}_{ji}^-) est donnée par la relation (II-47) :

$$T_1^+ N_{ji}^+ + d^+ + T_1^+ T_1^- + T_1^- \tilde{N}_{ji}^- = n p_{bt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } \begin{cases} T_1^+ N_{ji}^+ = T_1^+ T_1^{+'} + d^+ \\ T_1^+ T_1^- = 2(\pi - \alpha_{tf}) Rb_1 \end{cases} \quad (\text{II-47})$$

Ainsi il suffit d'ajouter la quantité $\min(L_{pig}, L_{rou}) \tan(\beta_b)$ et l'épaisseur de base apparente d'une dent du pignon à la quantité précédente. De cette façon la position du premier segment N_{ji}^- de la première ligne de contact entrant dans la fenêtre d'engrènement du cas rétro devient :

$$T_1^- N_{ji}^- = n p_{bt} - T_1^+ T_1^+ - d^+ - 2(\pi - \alpha_{tf}) Rb_1 + s_{bt}^{pig} + \min(L_{pig}, L_{rou}) \tan(\beta_b) \quad (\text{II-48})$$

Avec n tel que $T_1^- N_{ji}^- > T_1^- T_1^+$

En effectuant les mêmes développements que dans le cas direct (avec $d^- = T_1^- N_{ji}^- - T_1^- T_1^+$), l'écriture des composantes x_{ji}^- s'obtient par (II-49) pour les lignes $N, N+1, N+2, \dots$, la coordonnée z_i^- étant la même qu'en (II-46) :

$$\begin{cases} x_{1i}^- = d^- + T_1^- T_1^+ - \min(L_{pig}, L_{rou}) \tan(\beta_b) + x_{\eta} \sin(\beta_b) + n p_{bt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x_{2i}^- = -(T_1^- T_2^- - x_{1i}^-) \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

$$d^- + T_1^- T_1^+ - \min(L_{pig}, L_{rou}) \tan(\beta_b) + n p_{bt} < T_1^- T_2^-$$

IV.2. ALGORITHME GENERAL DE RESOLUTION

L'idée directrice de la mise en place d'un algorithme général est de prendre en compte à chaque instant les différents états des engrenages à l'intérieur du processus de résolution. Le schéma implicite de Newmark est choisi pour sa stabilité numérique et son ratio temps de calcul - précision intéressant pour des applications industrielles.

Dans le but de modéliser les éventuelles pertes de contacts et de reprises sur les flancs direct et rétro, un algorithme de contact unilatéral est mis en place au sein même du processus de résolution par l'algorithme de Newmark. Ainsi après avoir calculé l'état du système à un temps donné, la résolution est effectuée et un test sur les conditions de contact intervient. Selon ce test, il y a soit contact entre les points des lignes de contacts, soit aucun contact. Dans ce dernier cas, la matrice de raideur est réactualisée et une nouvelle résolution est effectuée. Le processus est poursuivi jusqu'à convergence. Le schéma général de résolution de l'algorithme de Newmark implicite couplé à celui de contact est présenté Figure II-13.

Pour l'ensemble des simulations de ce mémoire, la condition initiale en déplacement sera la déformée statique du réducteur, les vitesses et accélérations étant mises à zéro. La déformée statique est calculée à l'aide de la matrice de raideur moyennée sur le temps et dans l'espace \overline{K}_{glob} et du second membre \overline{F}_{glob} constitué uniquement des couples moteur et résistant moyens soit :

$$\begin{cases} X_0 = \overline{K}_{glob}^{-1} \overline{F}_{glob} \\ \dot{X}_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II-50})$$

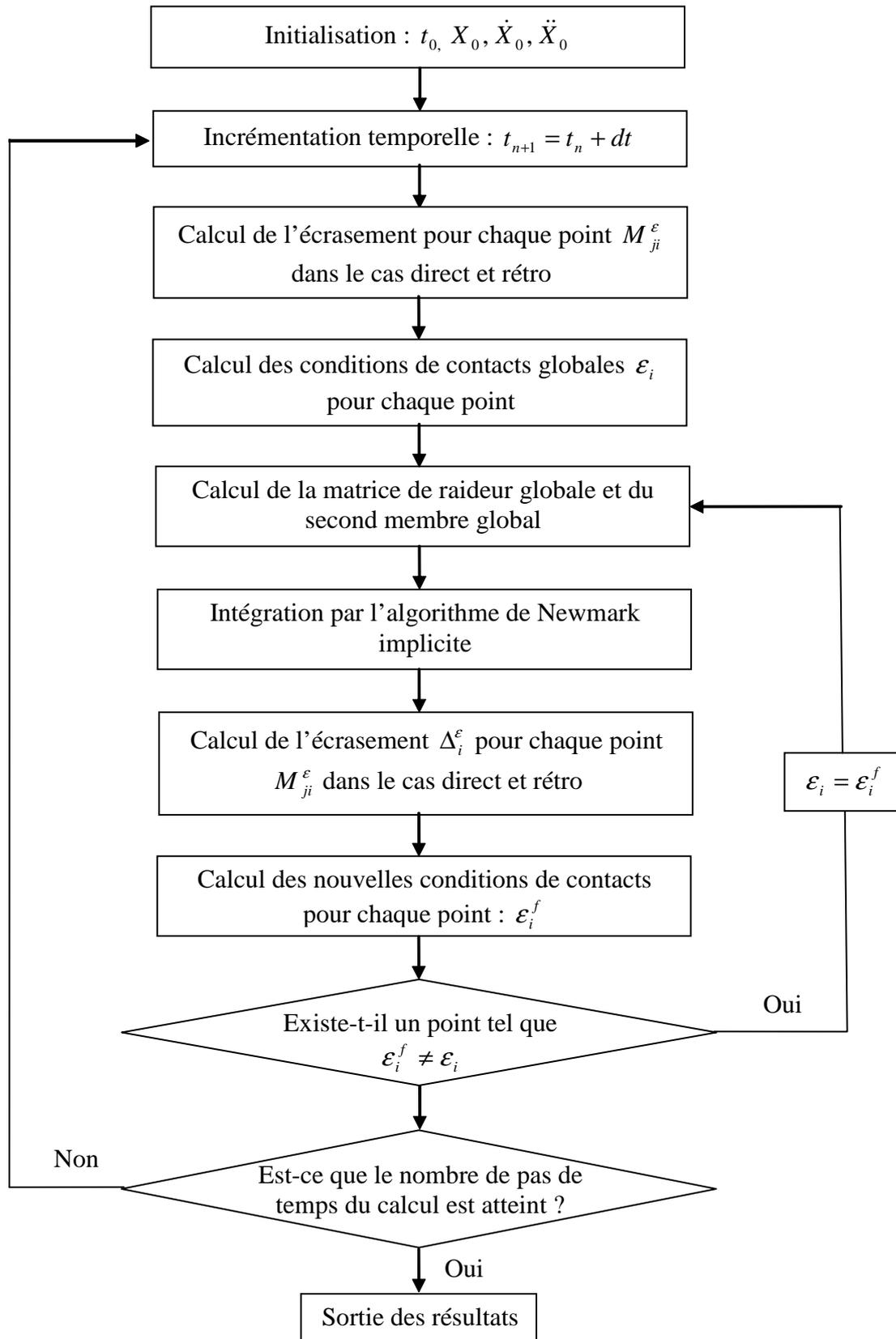


Figure II-13 : Algorithme général de résolution

V. CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place une modélisation globale d'un réducteur sous régimes transitoires. La base théorique repose sur une approche de type paramètres concentrés et le formalisme des torseurs de petits déplacements généralisés. Les résultats expérimentaux ont généralement validé cette modélisation pour des engrenages monoblocs qui constituent la majorité des applications industrielles.

L'influence des jeux de denture a été fréquemment introduite dans des modèles du comportement dynamique d'engrenages mais essentiellement pour des systèmes à un seul degré de liberté et/ou en torsion pure. La prise en compte précise dans des modélisations tridimensionnelles n'avait, à notre connaissance, jamais été entreprise (ou présentée). Les principaux constats sont que le passage de conditions de contact directes à rétro conduit à des changements de plan d'action et à des variations d'angle d'hélice (qui pour des engrenages hélicoïdaux se traduiront, entre autre, par des inversions des poussées axiales).

Les arbres de transmission sont, quant à eux modélisés, par des éléments finis de poutre de Timoshenko avec effets secondaires de cisaillement et de rotation des sections droites. Les autres composants sont simulés par l'intermédiaire de masses et de raideurs concentrées. Le modèle global ainsi créé est alors un modèle hybride comportant à la fois des éléments finis, des éléments d'engrenages et des masses et de raideurs localisées.

Un algorithme de résolution est développé, il combine à la fois les problèmes d'incrémentations temporelle et de gestion des paramètres de contacts et prend en compte le déplacement des lignes de contacts, aussi bien dans le cas direct que dans le cas rétro. Les équations du mouvement et les conditions de contact normales sur les dentures sont résolues simultanément en couplant un schéma d'intégration pas à pas dans le temps et un algorithme de contact.

CHAPITRE III

ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE D'UN MODELE TORSIONNEL EN PRESENCE D'ACYCLISME

I. INTRODUCTION

L'introduction de régimes transitoires en dynamique des engrenages est une voie d'étude relativement nouvelle et, en suivant, le même cheminement que pour les approches dédiées aux régimes permanents, nous nous intéresserons dans un premier temps à un modèle torsionnel. Les arbres et paliers ne sont pas considérés et un seul degré de liberté est affecté au pignon et à la roue respectivement, à ce stade, les défauts et écarts de forme ne sont pas introduits. L'intérêt principal est de pouvoir accéder à des solutions analytiques ou quasi-analytiques qui permettent des analyses qualitatives et quantitatives relativement générales des paramètres les plus influents. Par ailleurs, il semble opportun de définir ou redéfinir rigoureusement les hypothèses et la démarche de modélisation en se basant tout d'abord sur ces modèles simples. Le modèle adopté est donc un cas particulier simple (le plus simple) des développements présentés au chapitre II.

Dans un deuxième temps, des méthodes de résolutions analytiques originales sont développées pour des cas d'engrenages à dentures droites et hélicoïdales et comparées à des résolutions numériques. L'intérêt ici est de pouvoir calibrer les méthodes de résolution numériques afin de les appliquer dans des cas plus complexes où les approches analytiques sont inopérantes.

La troisième partie de ce chapitre traite de l'étude de la stabilité paramétrique des engrenages soumis à des fluctuations de vitesse périodiques. Le problème a été largement étudié pour des vitesses de rotation constantes mais n'a, à notre connaissance, jamais été abordé pour des mobiles soumis à de l'acyclisme.

Enfin une analyse paramétrique portant sur quelques uns des paramètres géométriques et de fonctionnement principaux conclut ce chapitre.

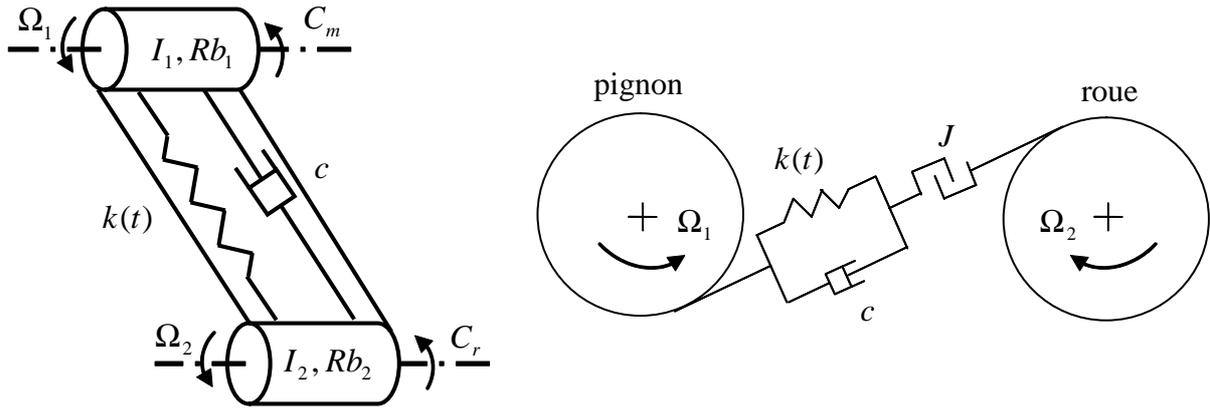
II. MODELE TORSIONNEL D'UN COUPLE D'ENGRENAGE

Cette partie est consacrée à la définition du modèle adopté, il découle directement de la modélisation globale du réducteur définie au chapitre II dans le cas particulier d'engrenages sans défauts ni écarts de forme.

II.1. RESTRICTION DU MODELE GLOBAL A UN MODELE TORSIONNEL

II.1.1. Modèle masse - ressort avec jeu de denture

La restriction du modèle global permet d'introduire le couple d'engrenages comme un modèle masse - ressort - amortisseur (Figure III-1). Chaque mobile est représenté par son inertie polaire et le pignon et la roue sont liés par la raideur d'engrènement. Le couple moteur est appliqué sur le pignon, le couple résistant sur la roue. Le jeu de denture est, quant à lui, supposé constant (les défauts d'excentricité ne sont pas considérés).


Figure III-1 : Modèle torsionnel

En ne considérant que les composantes de torsion autour de l'axe \vec{Z} , l'écrasement des dentures Δ^ε est donné par :

$$\Delta^\varepsilon = \varepsilon [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] \cos(\beta_b) - \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \quad (\text{III-1})$$

La déflexion au contact apparaît comme indépendante de la position du point de contact potentiel sur la plan de base et l'ensemble des paramètres de contacts ε_i et Π_i sera remplacé par les paramètres uniques ε et Π .

Dans la suite de ce chapitre, l'erreur de transmission sera définie par :

$$\Delta_{tr} = [Rb_1 \theta_1 + Rb_2 \theta_2] \cos(\beta_b) \quad (\text{III-2})$$

Le système ne possédant que deux degrés de libertés de torsion, les changements de conditions de contacts s'expriment alors :

- Si $\Delta_{tr} > 0$ le contact ne change pas. Si $\varepsilon = 1$ le contact est sur le flanc direct, ε reste à 1. Si $\varepsilon = -1$, le contact est sur le flanc rétro, ε reste à la valeur -1.
- Si $-J < \Delta_{tr} < 0$, il n'y a pas de contact, ε ne change pas de valeurs.
- Si $\Delta_{tr} < -J$ le contact change. Si $\varepsilon = 1$, le contact devient rétro et ε prend la valeur -1. Si $\varepsilon = -1$, le contact devient direct et ε prend la valeur 1.

La fonction porte est quand à elle inchangée et varie en fonction de l'écrasement.

II.1.2. Mise en équation

La mise en équation se déduit du modèle global en ne prenant que les équations de torsion relatives à l'axe \vec{Z} (III-3) :

$$\begin{cases} I_1 (\ddot{\theta}_1 + \dot{\Omega}_1) + c R b_1 \cos(\beta_b) \dot{\Delta}_{tr} + \Pi k(t) R b_1 \cos(\beta_b) \left(\Delta_{tr} + \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \right) = C_m \\ I_2 (\ddot{\theta}_2 + \dot{\Omega}_2) + c R b_2 \cos(\beta_b) \dot{\Delta}_{tr} + \Pi k(t) R b_2 \cos(\beta_b) \left(\Delta_{tr} + \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \right) = C_R \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

L'introduction du théorème de l'énergie cinétique (en négligeant les pertes) définit la dépendance du couple résistant en fonction du couple moteur et permet de ramener le système (III-3) à une seule équation dont l'inconnue est l'erreur de transmission :

$$\ddot{\Delta}_{tr} + \frac{c \cos(\beta_b)^2}{M_{eq}} \dot{\Delta}_{tr} + \Pi \frac{k(t) \cos(\beta_b)^2}{M_{eq}} \Delta_{tr} = \Gamma(t) - \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \frac{k(t) \cos(\beta_b)^2}{M_{eq}} \quad (\text{III-4})$$

Avec :

- $M_{eq} = \frac{I_1 I_2}{I_2 R b_1^2 + I_1 R b_2^2}$ la masse équivalente du couple d'engrenages
- $\Gamma(t) = \frac{\cos(\beta_b)}{R b_2 M_{eq}} (C_R + \dot{\Omega}_1 I_2 u)$

II.2. DEFINITION DE LA RAIDEUR D'ENGREMENT

II.2.1. Approche simplifiée

A ce stade, il est nécessaire de définir le terme de raideur $k(t)$. Dans le chapitre I, il a été démontré que la raideur d'engrènement était un élément fondamental à prendre en compte lors de calculs en dynamique. Le travail proposé dans ce présent chapitre a pour but d'étudier le comportement dynamique à l'aide de modèles simples mais néanmoins représentatifs.

Pour une vitesse constante de rotation Ω_1 du pignon, cette raideur d'engrènement est périodique de période la période d'engrènement T_m définie par :

$$T_m = \frac{2\pi}{Z_1 \Omega_1} = \frac{2\pi}{\Omega_m} \quad (\text{III-5})$$

La succession du nombre de dents en prises engendre une fluctuation de cette raideur autour d'une valeur moyenne. Dans le cas de dentures droites, il est ainsi possible de représenter la raideur d'engrènement comme une fonction créneau, la valeur maximale correspondant à deux paires de dents en prises, la valeur minimale à une seule paire (Figure III-3). Dans le cas de dentures hélicoïdales, la représentation est plus délicate. En fonction de l'angle d'hélice, la variation de la raideur évolue plus ou moins selon un diagramme en trapèze (Küçükay [12]). L'idée consiste alors à approximer cette fonction trapèze par une fonction sinus (Figure III-2).

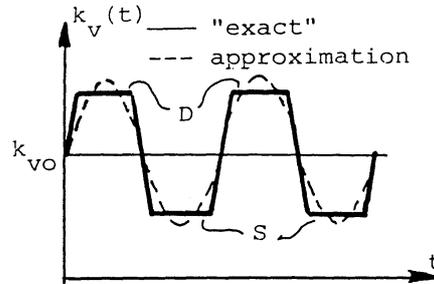
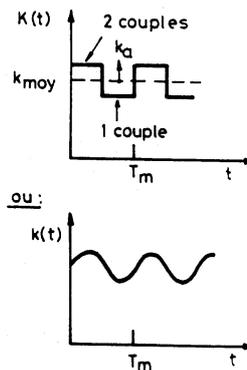


Figure III-2 : Variation de la raideur d'engrènement pour une denture hélicoïdale (Küçükay [12])

Velex [5] a montré que la fluctuation de raideur d'engrènement devient plus faible à mesure que l'angle d'hélice augmente et suggère 2 modèles d'évolution périodique de la raideur (Figure III-3) dans le cadre d'une modélisation torsionnelle pour des vitesses de rotation constantes :

- Un modèle en créneau correspondant au cas de dentures droites
- Un modèle en sinus correspondant au cas de dentures hélicoïdales à fort angle d'hélice



**Figure III-3 : Diagramme de raideur utilisée par Velex [5]
(haut : modèle créneau, bas : modèle sinus)**

II.2.2. Raideur adoptée - mise en équation finale

Dans le cas de vitesses de rotation constantes, la raideur d'engrènement peut s'exprimer comme la somme d'un terme constant et d'un terme périodique sous la forme :

$$k(t) = k_m (1 + \alpha_{km} \Phi(t)) \quad (\text{III-6})$$

Avec :

- Pour un modèle en créneau : $\Phi(t) = \pm 1$
- Pour un modèle de type sinus : $\Phi(t) = \sin(\Omega_m t)$, Ω_m la pulsation d'engrènement constante en rad/s

Dans le cas de l'acyclisme, la vitesse n'est plus constante mais évolue autour d'une vitesse moyenne, comme décrit dans (I-15) au chapitre I, paragraphe III.3.2.2. Il est alors judicieux de considérer la raideur d'engrènement comme une fonction périodique de l'angle de rotation qui est lié à la vitesse de rotation par une simple intégration :

$$\Theta_1 = \int_{t_0}^t \Omega_1(\tau) d\tau \quad (\text{III-7})$$

Dans la grande majorité des analyses en dynamique des engrenages, le temps initial t_0 est considéré comme nul. Dans le cadre de ce chapitre, il en sera de même. L'introduction de (I-15) dans (III-7) donne alors la formulation de la coordonnée angulaire :

$$\Theta_m = \Omega_{m0} t + \sum_{n=0,0.5,1,\dots} \frac{Z_1 \rho_n(\Omega_{10})}{n} (\cos(\varphi_n) - \cos(\omega_n t + \varphi_n)) \quad (\text{III-8})$$

Avec $\Omega_{m0} = Z_1 \Omega_{10}$ la pulsation moyenne d'engrènement en rad/s

L'étude dynamique à vitesses constantes apparaît alors comme un cas particulier d'acyclisme avec un pourcentage de fluctuation nul. L'introduction d'une phase initiale s'effectue en supposant $t_0 \neq 0$. L'introduction des variations de vitesses dans la fonction $\Phi(t)$ a pour conséquence de moduler la raideur d'engrènement. Un exemple d'évolution de cette fonction est donné Figure III-4 dans le cas d'évolution en créneau et en sinus.

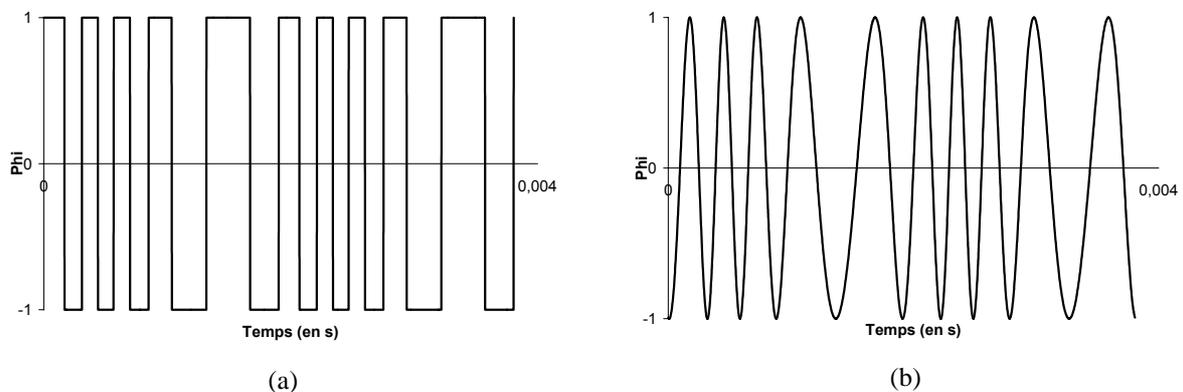


Figure III-4 : Evolution de la fonction $\Phi(t)$
(a) : modèle créneau - (b) : modèle sinus

Dans le cas particulier d'utilisation d'harmoniques entiers représentant les contributions les plus importantes, la période non constante T_m n'est plus la période de la raideur. Cette dernière est alors de période la période de rotation moyenne du pignon (III-9). Si l'ensemble des harmoniques définis par (I-15) est considéré, la période devient le double de cette dernière (III-10).

$$T_{acy} = T_{01} = \frac{2\pi}{\Omega_{10}} \text{ si } n = 0,1,2,\dots \quad (\text{III-9})$$

$$T_{acy} = 2T_{01} \text{ si } n = 0,0.5,1,1.5,\dots \quad (\text{III-10})$$

Les fonctions d'engrènement $\Phi(t)$ se résument suivant (III-11) :

$$\text{Modèle créneau : } \Phi(t) = \Phi(\Theta_m) = \pm 1 \quad (\text{III-11})$$

$$\text{Modèle sinus : } \Phi(t) = \Phi(\Theta_m) = \sin(\Theta_m)$$

Finalement l'équation différentielle (III-4) peut être réécrite en fonction de la pulsation propre du couple d'engrenages non amortie sous la forme :

$$\ddot{\Delta}_{ir} + 2\xi\omega_0\dot{\Delta}_{ir} + \Pi\omega_0^2(1 + \alpha_{km}\Phi(t))\left(\Delta_{ir} + \frac{1-\varepsilon}{2}J_b\right) = \Gamma(t) \quad (\text{III-12})$$

Avec :

- $\omega_0 = \cos(\beta_b) \sqrt{\frac{k_m}{M_{eq}}}$ la pulsation propre du système non amortie

- ξ le facteur d'amortissement visqueux réduit

- $\Gamma(t) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \dot{\Omega}_1$

- $\Gamma_0 = \frac{\cos(\beta_b)}{Rb_2 M_{eq}} C_R = \omega_0^2 \delta_m$, δ_m la déflexion statique et $\Gamma_1 = \frac{\cos(\beta_b)}{Rb_2 M_{eq}} u I_2$

III. RESOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

Lorsque cela est possible, la résolution analytique des équations du mouvement permet d'étudier directement l'influence des paramètres régissant leur comportement. Dans le cas d'équations à excitations paramétriques qui nous concerne, il n'existe généralement pas de solution exacte (Floquet [72]), toutefois, en introduisant des raideurs d'engrènement

simplifiées mais représentatives, il est possible de résoudre ces équations moyennant quelques hypothèses. Le fait que la vitesse de rotation soit variable impose des difficultés supplémentaires.

Dans un premier temps, le modèle de raideur en créneau (constante par morceau) sera abordé puis la seconde partie sera consacrée à la présentation d'une méthode de résolution originale pour le modèle de raideur en sinus. Une comparaison avec des méthodes d'intégration numériques sera également fournie et une nouvelle définition des vitesses critiques d'engrènement sera proposée. La troisième partie sera consacrée à une analyse paramétrique.

III.1. APPROCHE DANS LE CAS DE DENTURES DROITES

III.1.1. Développement théorique

Dans le cas de dentures droites, la fonction $\Phi(t)$ est approximée par un diagramme créneau dont les valeurs dépendent de l'angle de rotation (Figure III-5). Il est à noter que cette fonction est périodique de période $\frac{2\pi}{\Theta_m}$ si elle est tracée en fonction de Θ_m .

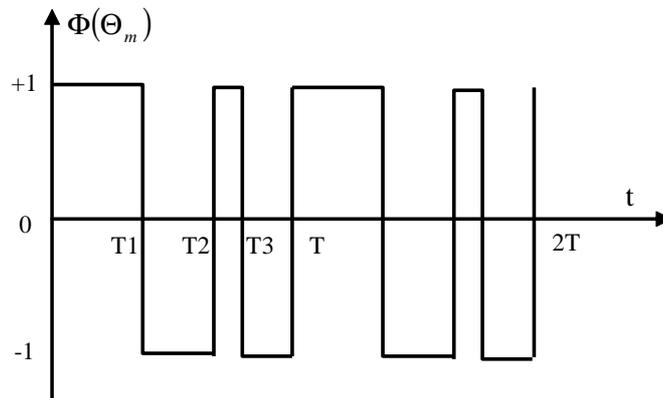


Figure III-5 : Définition de la fonction $\Phi(\Theta_m)$ utilisée (cas d'harmoniques entiers)

Dans le cas des contacts direct ou rétro, $\Phi(t)$ est constante par morceau et sera définie selon les relations (III-13). Chaque temps T_i est défini à partir des caractéristiques géométriques des engrenages. Dans le cas d'apparition de la phase de vol libre, la raideur s'annule.

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &= 1 \text{ si } 0 < t < T_1 \\
 \Phi(t) &= -1 \text{ si } T_1 < t < T_2 \\
 \Phi(t) &= 1 \text{ si } T_2 < t < T_3 \\
 &\text{etc.... jusqu'à } T_i = T_{acy}
 \end{aligned}
 \tag{III-13}$$

L'équation du mouvement (III-12) peut, dans ces conditions, être décomposée en trois équations (III-14), (III-15) et (III-16) relatives aux cas $\Phi(t) = 1$, $\Phi(t) = -1$ et au cas du vol libre :

$$\ddot{\Delta}_{1tr} + 2\xi\omega_0\dot{\Delta}_{1tr} + \Pi\omega_0^2(1+\alpha_{km})\Delta_{1tr} = \Gamma(t) - \Pi\frac{1-\varepsilon}{2}J_b\omega_0^2(1+\alpha_{km}) \quad (\text{III-14})$$

$$\ddot{\Delta}_{2tr} + 2\xi\omega_0\dot{\Delta}_{2tr} + \Pi\omega_0^2(1-\alpha_{km})\Delta_{2tr} = \Gamma(t) - \Pi\frac{1-\varepsilon}{2}J_b\omega_0^2(1-\alpha_{km}) \quad (\text{III-15})$$

$$\ddot{\Delta}_{3tr} + 2\xi\omega_0\dot{\Delta}_{3tr} = \Gamma(t) \quad (\text{III-16})$$

Les solutions obtenues sont alors raccordées par des conditions de continuité en vitesses et en déplacements aux temps de transition T_i (III-17) liés au changement du nombre de dents en prises. Les conditions de raccords des solutions dans le cas de changements des conditions de contacts sont repérées aux temps t_p (III-18). Ces dernières sont définies comme : direct - vol libre, vol libre - direct, vol libre - rétro, rétro - vol libre.

$$\begin{cases} \Delta_{1tr}(T_i) = \Delta_{2tr}(T_i) \\ \dot{\Delta}_{1tr}(T_i) = \dot{\Delta}_{2tr}(T_i) \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

$$\begin{cases} \Delta_{3tr}(t_p) = \Delta_{ktr}(t_p) \\ \dot{\Delta}_{3tr}(t_p) = \dot{\Delta}_{ktr}(t_p) \end{cases}, \quad k = 1, 2 \quad (\text{III-18})$$

Dans les cas des changements vol libre - rétro et rétro - vol libre, la condition de continuité en déplacement s'écrit $\Delta_{3tr}(t_p) = J_b$, dans les cas du changement direct - vol libre et vol libre - direct, la condition s'écrit $\Delta_{3tr}(t_p) = 0$.

➤ Résolution de (III-14) et (III-15)

La dérivation temporelle de (I-15) donne $\dot{\Omega}_1$ qui s'exprime alors :

$$\dot{\Omega}_1 = \sum_{n=0,0.5,1,\dots} \rho_n(\Omega_{10})\Omega_{10}\omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (\text{III-19})$$

Les équations étant à coefficients constants, la résolution s'effectue sans difficulté et conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta_{trk} = & e^{-\xi\omega_0 t} (A_{ki} \cos(\omega_{0k} t) + B_{ki} \sin(\omega_{0k} t)) + a_k \\ & + \sum_{n=0,0.5,1,\dots} b_{nk} \cos(\omega_n t + \varphi_n) + c_{nk} \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

Avec :

- $\omega_{01} = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha_{km} - \xi^2}$, $\omega_{02} = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha_{km} - \xi^2}$, les deux pulsations propres
- $a_1 = \frac{\Gamma_0}{\omega_0^2 (1 + \alpha_{km})} - \frac{1 - \varepsilon}{2} J_b$, $a_2 = \frac{\Gamma_0}{\omega_0^2 (1 - \alpha_{km})} - \frac{1 - \varepsilon}{2} J_b$
- $b_{1n} = \frac{\Omega_{10} \rho_n (\Omega_{10}) \Gamma_1 \omega_n (\omega_0^2 (1 + \alpha_{km}) - \omega_n^2)}{(\omega_0^2 (1 + \alpha_{km}) - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$, $b_{2n} = \frac{\Omega_{10} \rho_n (\Omega_{10}) \Gamma_1 \omega_n (\omega_0^2 (1 - \alpha_{km}) - \omega_n^2)}{(\omega_0^2 (1 - \alpha_{km}) - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$
- $c_{1n} = \frac{2 \xi \omega_0 \Omega_{10} \rho_n (\Omega_{10}) \Gamma_1 \omega_n^2}{(\omega_0^2 (1 + \alpha_{km}) - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$, $c_{2n} = \frac{2 \xi \omega_0 \Omega_{10} \rho_n (\Omega_{10}) \Gamma_1 \omega_n^2}{(\omega_0^2 (1 - \alpha_{km}) - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$
- A_{ki} et B_{ki} des constantes déterminées à partir des conditions initiales $\Delta_{rk}(t_0)$ et $\dot{\Delta}_{rk}(t_0)$, et des conditions de continuités aux temps T_i et t_p .

➤ Résolution de (III-16)

La résolution ne pose également pas de difficulté et s'effectue de manière classique (III-21) :

$$\Delta_{r3} = -\frac{A_v (e^{-2\xi\omega_0(t-t_p)} - 1)}{2\xi\omega_0} + \frac{\Gamma_0(t-t_p)}{2\xi\omega_0} + B_v + 2\xi\omega_0\Gamma_1\Omega_{10} \sum_{n=0,0.5,1,\dots} \rho_n(\Omega_{10})(S_1(t) + S_2(t))$$

$$S_1(t) = \frac{\sin(\omega_n t + \varphi_n) - \sin(\omega_n t_p + \varphi_n)}{\omega_n^2 + (2\xi\omega_0)^2} - \frac{\omega_n (\cos(\omega_n t + \varphi_n) - \cos(\omega_n t_p + \varphi_n))}{2\xi\omega_0 (\omega_n^2 + (2\xi\omega_0)^2)}$$

$$S_2(t) = \frac{\omega_n e^{-2\xi\omega_0(t-t_p)} - 1}{2\xi\omega_0 (\omega_n^2 + (2\xi\omega_0)^2)} \left(\cos(\omega_n t_p + \varphi_n) + \frac{\omega_n}{2\xi\omega_0} \sin(\omega_n t_p + \varphi_n) \right)$$

(III-21)

Les constantes A_v et B_v sont obtenues à partir des conditions de continuité aux temps t_p .

Les résolutions donnant chaque solution Δ_{r1} , Δ_{r2} et Δ_{r3} combinées aux conditions de continuité en vitesses et en déplacements permettent alors de reconstruire la réponse analytique dans le cas d'engrenages à dentures droites.

Si l'on observe l'équation (III-20), il y a possibilité de résonances d'amplitudes pour des pulsations $\Omega_{10} = \frac{\omega_0 (1 \pm \alpha_{km})}{n}$. Cette situation est peu probable car les pulsations propres des engrenages sont généralement supérieures à 10^4 rad/s.

III.1.2. Comparaison avec la résolution numérique

Le résultat du développement analytique est maintenant comparé à la méthode de résolution numérique. Afin de faciliter la compréhension, les résultats sont obtenus pour un acyclisme ne comportant qu'un seul harmonique, un déphasage φ_n associé à cet harmonique nul et un pourcentage d'acyclisme constant selon la vitesse de rotation. Les diverses caractéristiques des engrenages sont données dans le Tableau III-1. Ceux-ci sont considérés avec diamètre intérieur nul, c'est à dire un corps plein.

	Pignon	Roue
Nombre de dents	20	30
Module m_n (mm)	3	
Largeur (mm)	35	30
Rayon primitif (mm)	30	45
Angle de pression de taillage α_n (en °)	20	
Jeu de denture J_b (en mm)	0.1	
Amortissement ξ	0.05	
Raideur moyenne k_m (N/m)	$6 \cdot 10^8$	
Modulation de raideur α_{km}	0.15	
Rapport de conduite	1.605	
Harmonique n	2	
Pourcentage d'acyclisme ρ_2 (en %)	2.5	
Couple résistant C_R (N.m)	250	

Tableau III-1 : Caractéristiques pour la comparaison analytique - numérique en dentures droites

Lorsque la vitesse de rotation est constante, il est courant de donner le nombre de pas de temps par période d'engrènement. Dans le cas de l'acyclisme, la vitesse n'est plus constante mais possède une valeur moyenne T_{m0} donnée par $\frac{2\pi}{\Omega_{m0}}$. Ainsi le pas de temps sera conditionné par le nombre de pas par période d'engrènement moyenne.

La précision de l'algorithme de Newmark est déterminée par celui-ci, notamment lors des phases de changement de conditions de contacts. En se basant sur le théorème de Shannon, le pas de temps sera imposé inférieur à 20 fois la pulsation propre :

$$dt \leq \frac{2\pi}{20\omega_0} \quad (\text{III-22})$$

Les données de la résolution sont un nombre de pas par période d'engrènement moyenne de 64, le calcul total étant mené sur 4 tours de rotation du pignon. Ainsi le nombre de pas de temps total est de $64 \cdot 4 \cdot Z_1 = 256 Z_1$. Par ailleurs, les simulations sont menées en prenant une condition initiale en déplacement $\Delta_{rr}(t_0) = \delta_m$ et en vitesse $\dot{\Delta}_{rr}(t_0) = 0$.

La vitesse de rotation n'étant plus constante, les courbes de réponse seront représentées en fonction de la pulsation adimensionnelle moyenne définie par $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}$ où Ω_{m0} représente la vitesse d'engrènement moyenne $Z_1 \Omega_{10}$.

Le coefficient dynamique $R_m(t)$ utilisé par la suite est égal au rapport entre l'effort de denture instantané $F_m(t)$ et l'effort statique F_{m0} (III-23), R_{\max} représente la valeur maximale de $R_m(t)$ (III-24). La recherche de R_{\max} est effectuée sur le dernier tour de rotation, ce qui permet de s'affranchir du régime transitoire.

$$R_m(t) = \frac{F_m(t)}{F_{m0}} \quad (\text{III-23})$$

$$R_{\max} = \max(R_m(t)) \quad (\text{III-24})$$

La Figure III-6 montre l'évolution du coefficient R_{\max} en fonction du rapport moyen $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}$ ainsi que l'erreur relative entre la résolution numérique et analytique.

Une des difficultés consiste à repérer avec précision les temps de changements d'états T_i et t_p , que ce soit pour les variations du nombre de dents en prise ou pour le passage d'un état de contact à un autre. Pour résoudre ce problème, un algorithme de dichotomie est utilisé :

Si un changement est détecté à l'instant $t + dt$, l'itération revient au temps t et le temps est incrémenté de $\frac{dt}{2}$. Si le changement se produit après $t + \frac{dt}{2}$, le temps est incrémenté de $\frac{dt}{4}$ en partant de $t + \frac{dt}{2}$, sinon l'itération revient à l'instant t et le temps est cette fois incrémenté de $\frac{dt}{4}$. L'opération est répétée un certain nombre de fois avec un

maximum d'itérations possible tel que $nb_{iter} < \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{dt}{h_{lim}}\right)$, h_{lim} étant le pas de temps limite de la résolution. La précision temporelle obtenue est alors de $\delta_t = \frac{dt}{2^{nb_{iter}}}$.

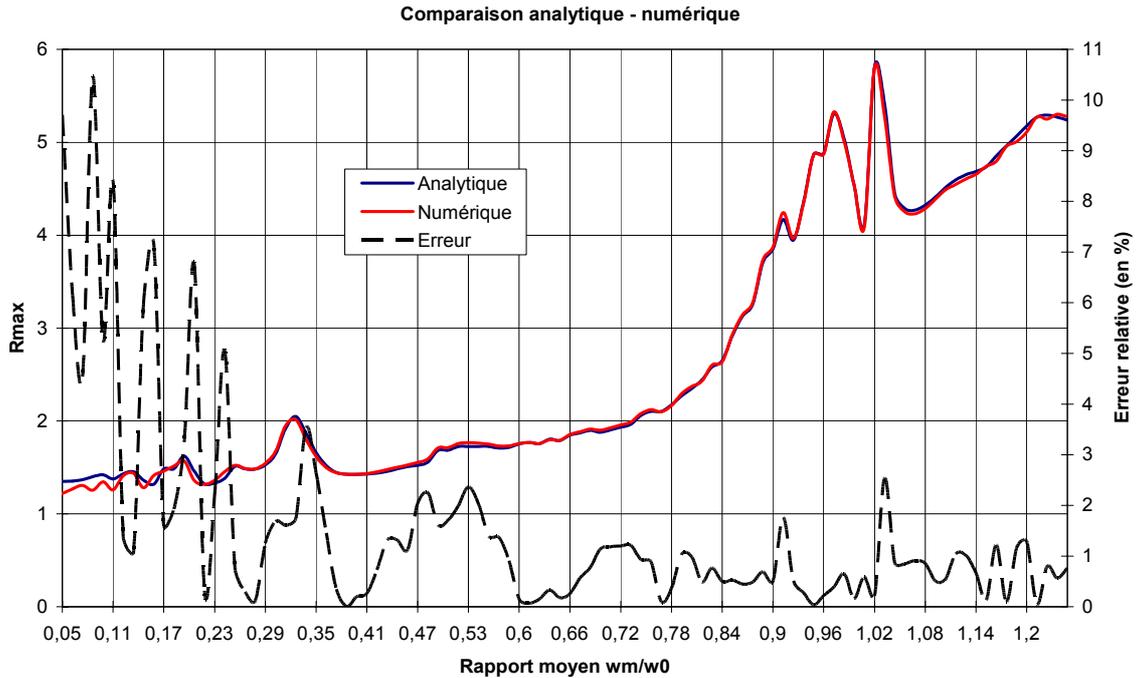


Figure III-6 : Comparaison analytique - numérique du maximum du coefficient dynamique

Les résultats issus de l'approche analytique sont en très bon accord avec les résultats des simulations numériques. Les différences obtenues pour les basses vitesses, correspondant à un rapport $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}$ faible, sont dues à l'utilisation d'un pas de temps trop important pour représenter correctement les réponses. Si l'on calcule le pas de temps critique donné par (III-23) et que l'on compare au pas de temps utilisé, on s'aperçoit que ces derniers ne respectent le critère qu'à partir de $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} = 0.305$. En se référant à la Figure III-6, on s'aperçoit effectivement qu'à partir de cette valeur, les erreurs sont de l'ordre de 1 à 2 %, alors qu'en dessous, elles sont bien plus importantes.

Comme rapporté par de nombreux auteurs (cf. Chapitre I), le coefficient R_{\max} augmente au voisinage de certains rapports d'engrènement moyens critiques et, d'une manière générale, il devient plus important au-delà d'une certaine vitesse de rotation suite à des pertes de contact et des chocs entre dentures. Il apparaît que, par rapport aux systèmes à vitesses constantes, ces effets sont amplifiés par les termes inertiels $I_1 \dot{\Omega}_1$ qui, à hautes vitesses, peuvent être du même ordre de grandeur que les couples nominaux.

La résolution analytique donne l'avantage d'être exacte, et permet donc de valider les résolutions numériques dans ce cas de variation en créneau. Ainsi on s'aperçoit que l'utilisation d'un pas de temps trop important peut engendrer des résultats erronés. Dans le cas où les conditions sont respectées, les erreurs sont ici très faibles de l'ordre 1 à 3 %, ce qui est tout à fait raisonnable.

III.2. APPROCHE DANS LE CAS DE DENTURES HELICOIDALES

III.2.1. Présentation de la méthode : introduction des fonctions de Bessel

Le principe de résolution est basé sur la modulation de fréquence et sur la décomposition en fonctions de Bessel de première espèce de la raideur d'engrènement.

En reprenant l'expression de $\Phi(t)$ dans le cas de dentures hélicoïdales et en y insérant l'expression (III-8), (III-25) révèle une modulation de fréquence par le terme $\sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_m (\cos(\varphi_n) - \cos(\omega_n t + \varphi_n))$ et de pulsation porteuse Ω_{m0} telles que :

$$\Phi(\Theta_m) = \sin\left(\Omega_{m0} t + \sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_m (\cos(\varphi_n) - \cos(\omega_n t + \varphi_n))\right) \quad \text{(III-25)}$$

Avec $m_m = \frac{Z_1 \rho_n(\Omega_{10})}{n}$ l'indice de modulation

Cette fonction peut être décomposée grâce à des fonctions de Bessel dont l'une des particularités est de ne dépendre que d'un paramètre unique m_{bes} appelé indice de modulation et de s'exprimer suivant un ordre i . Un exemple d'évolution de ces fonctions en fonction de m_{bes} est représenté Figure III-7 et quelques valeurs en fonction de l'ordre i et de l'indice m_{bes} sont portées dans le Tableau III-2.

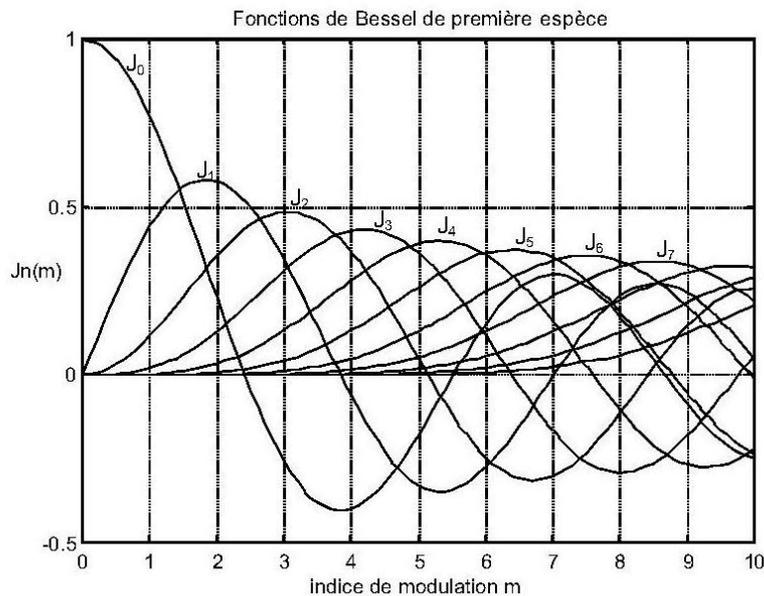


Figure III-7 : Fonctions de Bessel de première espèce

Ordre	Indice de modulation m													
	0,2	0,5	1	1,5	2	2,4	3	3,83	4	5	5,14	6	8	10
0	0,99	0,938	0,765	0,512	0,224	0	-0,26	-0,403	-0,397	-0,178	-0,131	0,15	0,172	-0,246
1	0,1	0,242	0,44	0,558	0,577	0,52	0,339	0	-0,066	-0,328	-0,34	-0,277	0,235	0,044
2	≈0	0,03	0,115	0,232	0,353	0,431	0,486	0,403	0,364	0,047	0	-0,243	-0,113	0,255
3	≈0	≈0	0,02	0,061	0,129	0,198	0,309	0,420	0,43	0,365	0,339	0,115	-0,291	0,058
4	≈0	≈0	≈0	0,012	0,034	0,064	0,132	0,255	0,281	0,391	0,397	0,358	-0,105	-0,22
5	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,016	0,043	0,113	0,132	0,261	0,279	0,362	0,186	-0,234
6	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,011	0,04	0,049	0,131	0,146	0,246	0,338	-0,015
7	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,012	0,015	0,053	0,062	0,13	0,32	0,217
8	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,018	0,022	0,057	0,223	0,318
9	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,021	0,127	0,292
10	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,06	0,208
11	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,026	0,123
12	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,009	0,063

Tableau III-2 : Valeurs en fonction de l'indice de modulation et de l'ordre

La forme de ces fonctions est donnée par (III-26) où $J_i(m_{bes})$ représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre i et d'indice de modulation m_{bes} définie par :

$$J_i(m_{bes}) = \left(\frac{m_{bes}}{2}\right)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{m_{bes}}{2}\right)^{2k}}{2^{2k} k!(i+k)!} \quad (\text{III-26})$$

Afin de ne pas surcharger le texte, les calculs seront menés en ne considérant qu'un seul harmonique pour la représentation de la vitesse de rotation du pignon, soit :

$$\Phi(t) = \sin(\Omega_{m0} t + m_m (\cos(\varphi_n) - \cos(\omega_n t + \varphi_n))) \quad (\text{III-27})$$

En utilisant les développements de fonctions trigonométriques classiques, les termes $\cos(m_m \cos(\omega_n t + \varphi_n))$ et $\sin(\cos(\omega_n t + \varphi_n))$ sont alors décomposés avec les fonctions de Bessel de premières espèces selon [125]. Pour plus de lisibilité, l'écriture des fonctions $J_i(m_m)$ à été réduite à J_i . Il vient alors :

$$\cos(m_m \cos(\omega_n t + \varphi_n)) = J_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i} \cos(2i(\omega_n t + \varphi_n)) \quad (\text{III-28})$$

$$\sin(m_m \cos(\omega_n t + \varphi_n)) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} J_{2i-1} \cos((2i-1)(\omega_n t + \varphi_n)) \quad (\text{III-29})$$

En reprenant (III-27) et en y insérant (III-28) et (III-29), la fonction d'engrènement s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &= J_0 \sin(\Omega_{m0} t + m_\varphi) \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[J_{2i} \left(\sin((\Omega_{m0} + 2i \omega_n) t + \Psi_{2i}) + \sin((\Omega_{m0} - 2i \omega_n) t + \Psi_{-2i}) \right) \right] \\
 &+ \left[J_{2i-1} \left(\cos((\Omega_{m0} + (2i-1) \omega_n) t + \Psi_{2i-1}) + \cos((\Omega_{m0} - (2i-1) \omega_n) t + \Psi_{-(2i-1)}) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{III-30}$$

Avec $m_\varphi = m_r \cos(\varphi_n)$ et $\Psi_p = m_r \cos(\varphi_n) + p \varphi_n$

Le développement de la raideur s'obtient en insérant (III-30) dans (III-6) et conduit au résultat :

$$\begin{aligned}
 k(t) &= k_m \left(1 + \alpha_{km} \left(J_0 \sin(\Omega_{m0} t + m_\varphi) \right. \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[J_{2i} \left(\sin((\Omega_{m0} + 2i \omega_n) t + \Psi_{2i}) + \sin((\Omega_{m0} - 2i \omega_n) t + \Psi_{-2i}) \right) \right] \\
 &\left. \left. + \left[J_{2i-1} \left(\cos((\Omega_{m0} + (2i-1) \omega_n) t + \Psi_{2i-1}) + \cos((\Omega_{m0} - (2i-1) \omega_n) t + \Psi_{-(2i-1)}) \right) \right] \right) \right)
 \end{aligned} \tag{III-31}$$

NB : Si l'on avait considéré un acyclisme caractérisé par plusieurs harmoniques, la fonction $\Phi(t)$ se serait écrite :

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &= \sin \left(\Omega_{m0} t + \sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_r \cos(\varphi_n) \right) \cos \left(\sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_r \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right) \\
 &- \cos \left(\Omega_{m0} t + \sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_r \cos(\varphi_n) \right) \sin \left(\sum_{n=0,0.5,1,\dots} m_r \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right)
 \end{aligned} \tag{III-32}$$

Il suffirait, en utilisant les décompositions de fonctions trigonométriques, de séparer les termes dépendant des sommes en sommes de termes en $m_r \cos(\varphi_n)$ et en $m_r \cos(\omega_n t + \varphi_n)$. Les développements précédents conduits pour un seul harmonique restent valables et un regroupement global donnerait alors la raideur d'engrènement.

III.2.2. Développement théorique par la méthode des petites perturbations

La méthode des petites perturbations est généralement adoptée lorsque les excitations paramétriques sont de faibles amplitudes. La solution est alors décomposée en une somme de termes comportant une partie principale et une partie associée aux perturbations dont l'importance décroît en fonction du degré de développement.

Dans le cas des engrenages hélicoïdaux, l'amplitude de raideur α_{km} est généralement faible, de l'ordre de 0.07 à 0.1. Pour des vitesses de rotation constantes, Velex [5] propose un développement asymptotique de la forme :

$$\Delta_{tr} = \Delta_{tr0} + \alpha_{km} \Delta_{tr1} + \alpha_{km}^2 \Delta_{tr2} + \dots \tag{III-33}$$

En ne considérant qu'un seul harmonique dans la vitesse de rotation et en limitant le développement au 1^{er} ordre, les équations à résoudre s'écrivent respectivement selon (III-34) pour la partie principale donnée pour l'ordre 0, et (III-35) pour les termes d'ordre 1. La troncature du développement à l'ordre 1 est justifiée par la valeur faible de α_{km} pour des engrenages hélicoïdaux :

$$\ddot{\Delta}_{ir0} + 2 \xi \omega_0 \dot{\Delta}_{ir0} + \Pi \omega_0^2 \Delta_{ir0} = \Gamma(t) - \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \omega_0^2 \quad (\text{III-34})$$

$$\text{Avec } \Gamma(t) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \rho_n(\Omega_{10}) \Omega_{10} \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

$$\ddot{\Delta}_{ir1} + 2 \xi \omega_0 \dot{\Delta}_{ir1} + \Pi \omega_0^2 \Delta_{ir1} = -\omega_0^2 \Phi(t) \left(\Delta_{ir0} + \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} J_b \right) \quad (\text{III-35})$$

➤ Résolution de (III-34)

La solution obtenue est classique et s'écrit :

$$\Delta_{ir0} = e^{-\xi \omega_0 t} (A_0 \cos(\omega_p t) + B_0 \sin(\omega_p t)) + a_1 + b_{1n} \cos(\omega_n t + \varphi_n) + c_{1n} \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (\text{III-36})$$

Avec :

- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
- $a_1 = \frac{\Gamma_0}{\omega_0^2} - \frac{1 - \varepsilon}{2} J_b$
- $b_{1n} = \frac{\rho_n(\Omega_{10}) \Omega_{10} \Gamma_1 \omega_n (\omega_0^2 - \omega_n^2)}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$, $c_{1n} = \frac{2 \xi \omega_0 \rho_n(\Omega_{10}) \Omega_{10} \Gamma \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2 \xi \omega_n \omega_0)^2}$
- A_0 et B_0 sont des constantes qui seront déterminées par la suite.

➤ Résolution de (III-35)

- Écriture du second membre global

L'introduction de la réponse à l'ordre 0 dans le second membre de (III-35) permet de décomposer celui-ci en une partie transitoire et une partie sans transitoire. Ces notions transitoires sont introduites par la présence de termes exponentiels.

Les notations suivantes seront adoptées afin de faciliter l'écriture : $\Psi_k = m_m \cos(\varphi_n) + k \varphi_n$ et $m_\varphi = m_m \cos(\varphi_n)$.

La partie transitoire $S_T(t)$ s'écrit selon (III-37) :

$$S_T(t) = -\omega_0^2 e^{-\xi \omega_0 t} \left[\frac{A_0}{2} \left(J_0 \left(\sin((\Omega_{m0} + \omega_p)t + m_\varphi) + \sin((\Omega_{m0} - \omega_p)t + m_\varphi) \right) + S_{T1}(t) \right) + \frac{B_0}{2} \left(J_0 \left(\cos((\Omega_{m0} - \omega_p)t + m_\varphi) - \cos((\Omega_{m0} + \omega_p)t + m_\varphi) \right) + S_{T2}(t) \right) \right] \quad (\text{III-37})$$

Avec :

$$S_{T1}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(J_{2i} \left(\sin((\Omega_{m0} + 2i\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{2i}) + \sin((\Omega_{m0} + 2i\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{2i}) \right) + \sin((\Omega_{m0} - 2i\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{-2i}) + \sin((\Omega_{m0} - 2i\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{-2i}) \right) + J_{2i-1} \left(\cos((\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{2i-1}) + \cos((\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{2i-1}) \right) + \cos((\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{-(2i-1)}) + \cos((\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{-(2i-1)}) \quad (\text{III-38})$$

$$S_{T2}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(J_{2i} \left(\cos((\Omega_{m0} + 2i\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{2i}) - \cos((\Omega_{m0} + 2i\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{2i}) \right) + \cos((\Omega_{m0} - 2i\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{-2i}) - \cos((\Omega_{m0} - 2i\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{-2i}) \right) + J_{2i-1} \left(\sin((\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{2i-1}) - \sin((\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{2i-1}) \right) + \sin((\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n + \omega_p)t + \Psi_{-(2i-1)}) - \sin((\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n - \omega_p)t + \Psi_{-(2i-1)}) \quad (\text{III-39})$$

En posant $a_2 = \frac{\Gamma_0}{\omega_0^2}$, la partie non transitoire $S_{ST}(t)$ s'écrit alors :

$$S_{ST}(t) = -\omega_0^2 \left(a_2 J_0 \sin(\Omega_{m0} t + m_\varphi) + \frac{b_{1n} J_0}{2} \left(\sin((\Omega_{m0} + \omega_n)t + \Psi_1) + \sin((\Omega_{m0} - \omega_n)t + \Psi_{-1}) \right) + \frac{c_{1n} J_0}{2} \left(\cos((\Omega_{m0} - \omega_n)t + \Psi_{-1}) - \cos((\Omega_{m0} + \omega_n)t + \Psi_1) \right) + S_{ST}(t) \right) \quad (\text{III-40})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 S_{ST} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot & \left[\left(a_2 J_{2i} + \frac{c_{1n} J_{2i-1}}{2} \right) \sin((\Omega_{m0} + 2i \omega_n)t + \Psi_{2i}) + \frac{b_{1n} J_{2i-1}}{2} \cos((\Omega_{m0} + 2i \omega_n)t + \Psi_{2i}) \right. \\
 & + \left(a_2 J_{2i} - \frac{c_{1n} J_{2i-1}}{2} \right) \sin((\Omega_{m0} - 2i \omega_n)t + \Psi_{-2i}) + \frac{b_{1n} J_{2i-1}}{2} \cos((\Omega_{m0} - 2i \omega_n)t + \Psi_{-2i}) \\
 & + \frac{b_{1n} J_{2i}}{2} \sin((\Omega_{m0} + (2i+1) \omega_n)t + \Psi_{2i+1}) - \frac{c_{1n} J_{2i}}{2} \cos((\Omega_{m0} + (2i+1) \omega_n)t + \Psi_{2i+1}) \\
 & + \frac{b_{1n} J_{2i}}{2} \sin((\Omega_{m0} - (2i+1) \omega_n)t + \Psi_{-(2i+1)}) + \frac{c_{1n} J_{2i}}{2} \cos((\Omega_{m0} - (2i+1) \omega_n)t + \Psi_{-(2i+1)}) \\
 & + \frac{b_{1n} J_{2i}}{2} \sin((\Omega_{m0} + (2i-1) \omega_n)t + \Psi_{2i-1}) + \left(a_2 J_{2i-1} + \frac{c_{1n} J_{2i}}{2} \right) \cos((\Omega_{m0} + (2i-1) \omega_n)t + \Psi_{2i-1}) \\
 & + \frac{b_{1n} J_{2i}}{2} \sin((\Omega_{m0} - (2i-1) \omega_n)t + \Psi_{-(2i-1)}) + \left(a_2 J_{2i-1} - \frac{c_{1n} J_{2i}}{2} \right) \cos((\Omega_{m0} - (2i-1) \omega_n)t + \Psi_{-(2i-1)}) \\
 & - \frac{c_{1n} J_{2i-1}}{2} \sin((\Omega_{m0} + (2i-2) \omega_n)t + \Psi_{2i-2}) + \frac{b_{1n} J_{2i-1}}{2} \cos((\Omega_{m0} + (2i-2) \omega_n)t + \Psi_{2i-2}) \\
 & \left. + \frac{c_{1n} J_{2i-1}}{2} \sin((\Omega_{m0} - (2i-2) \omega_n)t + \Psi_{-(2i-2)}) + \frac{b_{1n} J_{2i-1}}{2} \cos((\Omega_{m0} - (2i-2) \omega_n)t + \Psi_{-(2i-2)}) \right]
 \end{aligned}$$

(III-41)

- Méthode de résolution

La réponse totale à l'ordre 1 se déduit par superposition d'une solution élémentaire transitoire et d'une somme de solutions élémentaires permanentes dues aux différents termes du second membre.

La solution transitoire est alors donnée par (III-42) :

$$\Delta_{tr1}^{tran} = e^{-\xi \omega_0 t} (A_1 \cos(\omega_p t) + B_1 \sin(\omega_p t)) \tag{III-42}$$

A_1 et B_1 des constantes déterminées ultérieurement

La solution permanente étant trop volumineuse pour être exposée, un récapitulatif des solutions élémentaires est donné Tableau III-3. Elles correspondent à la réponse, en régime permanent, d'un oscillateur amorti à un seul degré de liberté x soumis à une excitation extérieure $F(t)$. L'équation différentielle est alors semblable à celle d'ordre 1, soit $\ddot{x} + 2\xi \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$.

Excitation $F(t)$	Solution permanente x_{perm}
$F_0 \sin(\omega_a t + \Psi_k)$	$F_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega_a^2) \sin(\omega_a t + \Psi_k) - 2 \xi \omega_0 \cos(\omega_a t + \Psi_k)}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2 \xi \omega_0)^2}$
$F_0 \cos(\omega_a t + \Psi_k)$	$F_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega_a^2) \cos(\omega_a t + \Psi_k) + 2 \xi \omega_0 \sin(\omega_a t + \Psi_k)}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2 \xi \omega_0)^2}$
$F_0 e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \Psi_k)$	$\frac{F_0}{\omega_0^2 (1 - \xi^2) - \omega_a^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \Psi_k)$
$F_0 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_a t + \Psi_k)$	$\frac{F_0}{\omega_0^2 (1 - \xi^2) - \omega_a^2} e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_a t + \Psi_k)$

Tableau III-3 : Table des solutions élémentaires

La solution finale Δ_{tr1} s'obtient en sommant la partie transitoire Δ_{tr1}^{tran} et la somme des réponses élémentaires. L'association des résultats de l'ordre 0 et de l'ordre 1 permet de reconstituer la réponse globale (III-43) :

$$\Delta_{tr} = \Delta_{tr0} + \alpha_{km} \Delta_{tr1} \quad (\text{III-43})$$

La réponse avec l'utilisation de plusieurs harmoniques s'obtient de manière identique, mais ne sera pas développée.

➤ Prise en compte de la phase de vol libre

La phase de vol libre s'exprime à l'aide de l'équation (III-16). Le lecteur se référera à (III-21) pour sa résolution. Les constantes A_v et B_v seront déterminées par la suite.

➤ Détermination des constantes A_0, B_0, A_1, B_1, A_v et B_v

La détermination des constantes porte sur les conditions de raccords entre les différentes configurations de contact. Ces conditions permettent d'établir A_0, B_0, A_1 et B_1 . Si l'on note t_p l'instant de changement d'état de ces configurations, Δ_{tr}^+ et Δ_{tr}^- les solutions respectives au temps t_p avant et après le changement d'état, les conditions de continuité en déplacement et en vitesse sont imposées par (III-44) :

$$\begin{cases} \Delta_{tr}^+ = \Delta_{tr}^- \\ \dot{\Delta}_{tr}^+ = \dot{\Delta}_{tr}^- \end{cases} \quad (\text{III-44})$$

Une difficulté provient de la différence entre le nombre de constantes à déterminer (4) et le nombre de conditions (2). Une réponse est apportée en supposant que les conditions de continuité ne portent que sur l'ordre principal du développement asymptotique. Cette hypothèse est justifiée du fait de la faible valeur de α_{km} donnant une faible contribution à l'ordre 1. Les conditions de raccords s'écrivent alors selon (III-45) :

$$\begin{cases} \Delta_{tr}(t_p) = \Delta_{tr0}(t_p) \\ \dot{\Delta}_{tr}(t_p) = \dot{\Delta}_{tr0}(t_p) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta_{tr1}(t_p) = 0 \\ \dot{\Delta}_{tr1}(t_p) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-45})$$

Ces conditions permettent d'accéder aux valeurs des constantes A_v et B_v .

III.2.3. Analyse du second membre de l'ordre 1

Dans le cas des systèmes mécaniques soumis à des excitations harmoniques ou pseudo-harmoniques, l'analyse du second membre des équations différentielles permet de donner les amplitudes des réponses. En effet, celles-ci sont directement proportionnelles à l'amplitude de l'excitation.

III.2.3.1. Pulsations critiques d'engrènement

Les développements précédents ont permis d'écrire les divers seconds membres en faisant apparaître des termes harmoniques. En prenant l'expression (III-34) relatif à l'ordre 0, il apparaît que la pulsation d'acyclisme ω_n est une pulsation de résonance.

Cette situation est peu probable du fait de la valeur élevée de la pulsation propre qui est (cf. paragraphe III.1.1) de l'ordre de 10^4 rad/s, soit une vitesse de rotation d'environ 95500 tr/min qui est au-delà des plages de vitesses rencontrées en pratique. Il est à noter que cette pulsation se retrouve également dans le cas du vol libre.

Velex [5] a montré pour des vitesses constantes sans prise en compte des termes transitoires que l'analyse des ordres supérieurs permet d'obtenir des pulsations critiques d'engrènement de la forme :

$$\Omega_m = \frac{\omega_0}{n} \text{ avec } \Omega_m \text{ constante} \quad (\text{III-46})$$

En prenant en compte ces termes, Gregory & Col. [24] montre cette fois que ces vitesses sont de la forme :

$$\Omega_m = \frac{2\omega_0}{n}, \Omega_m \text{ constante} \quad (\text{III-47})$$

Ces pulsations indiquent que le couple d'engrenages peut présenter des amplitudes de réponses très élevées pouvant conduire à des pertes de contacts partielles ou totales. Il est alors primordial de les repérer et de les définir avec précision.

En reprenant l'équation (III-35), et en analysant les seconds membres donnés par (III-37), (III-38), (III-39), (III-40) et (III-41), de nouvelles pulsations critiques apparaissent (en posant $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$) telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \Omega_{m0} \pm \omega_p \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm 2i \omega_n \pm \omega_p \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm (2i-1) \omega_n \pm \omega_p \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \Omega_{m0} \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm \omega_n \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm 2i \omega_n \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm (2i+1) \omega_n \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm (2i-1) \omega_n \\ \omega_0 = \Omega_{m0} \pm (2i-2) \omega_n \end{array} \right. , i = 1, 2, \dots \quad (\text{III-48}) - (\text{III-49})$$

L'indice i variant de 1 à l'infini permet de réécrire les systèmes (III-48) et (III-49) sous la forme suivante :

$$\omega_0 = \Omega_{m0} \pm i \omega_n \pm \omega_p, i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III-50})$$

$$\omega_0 = \Omega_{m0} \pm i \omega_n, i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III-51})$$

Le développement à des ordres supérieurs engendrera des combinaisons de celles des ordres inférieurs avec celles de $\Phi(t)$:

$$\omega_0 = k \Omega_{m0} \pm i \omega_n \pm \omega_p, i = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (\text{III-52})$$

$$\omega_0 = k \Omega_{m0} \pm i \omega_n, i = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (\text{III-53})$$

Les pulsations de résonances se déterminent la plupart du temps en considérant un amortissement nul, soit $\omega_p = \omega_0$. En sachant que $\omega_n = \frac{n \Omega_{m0}}{Z_1}$, les pulsations critiques d'engrènement d'un couple d'engrenages sous acyclisme sont alors données par (III-54) et (III-55) pour $i = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$ et un amortissement nul :

$$\Omega_{m0} = \frac{\omega_0}{k \pm \frac{i n}{Z_1}} \quad (\text{III-54})$$

$$\Omega_{m0} = \frac{2 \omega_0}{k \pm \frac{i n}{Z_1}} \quad (\text{III-55})$$

L'introduction de l'amortissement décale ces pulsations vers des vitesses inférieures en multipliant ces expressions par $\sqrt{1-\xi^2}$ (avec toujours $i = 0, 1, 2, \dots$ et $k = 1, 2, \dots$) :

$$\Omega_{m0} = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}{k \pm \frac{in}{Z_1}} \quad (\text{III-56})$$

$$\Omega_{m0} = \frac{2 \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}{k \pm \frac{in}{Z_1}} \quad (\text{III-57})$$

L'introduction de l'acyclisme conduit donc à de nouvelles pulsations critiques d'engrènement qui dépendent à la fois de l'harmonique n mais également du nombre de dents Z_1 . A noter que dans le cas d'une vitesse constante, c'est-à-dire pour $n = 0$, les pulsations classiques sont retrouvées.

L'émergence de ces nouvelles pulsations est importante dans le cas de pertes de contacts. En effet, si elles n'apparaissent pas, les termes transitoires des solutions en exponentiels n'interviennent plus, les pulsations sont alors données par (III-56). Dans le cas de pertes de contacts, les termes exponentiels interviennent continuellement et alors les pulsations sont données par (III-57).

Blankenship & Singh [126] ont analysé l'influence de la modulation sur des oscillateurs mécaniques. Ils montrent alors l'apparition de pics de résonances autour de fréquences porteuses en se basant sur l'utilisation des balances harmoniques. Ils indiquent qu'il y a possibilités de résonances pour ces fréquences mais ne donnent pas de formulations générales qui permettent de les déterminer.

Si des fluctuations de vitesse caractérisées par plusieurs harmoniques sont considérées, les pulsations critiques d'engrènement sont déterminées de la même façon et leurs définitions restent identiques.

Dans le cas d'engrenages à dentures droites, la raideur d'engrènement peut être décomposée en séries de Fourier. Dans ce cas, la forme du second membre des équations différentielles est la même que pour le cas de dentures hélicoïdales et l'ensemble des développements reste applicable conduisant à des résultats identiques.

III.2.3.2. Amplitudes des excitations

Comme évoqué précédemment, l'amplitude de la réponse est proportionnelle à l'excitation imposée pour des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La pulsation de résonance à l'ordre 0 n'étant pas directement excitée, l'étude se concentre sur les amplitudes de l'ordre 1.

En regroupant les termes en sinus et cosinus, les amplitudes sont alors regroupées dans le Tableau III-4 pour la partie permanente du second membre et dans le Tableau III-5 pour la partie transitoire.

Pulsations	Amplitudes
Ω_{m0}	$\omega_0^2 \sqrt{(a_2 J_0)^2 + (b_{1n} J_1)^2}$
$\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n$	$\frac{\omega_0^2}{2} \sqrt{b_{1n}^2 (J_{2i} - J_{2i-2})^2 + (2a_2 J_{2i-1} + c_{1n} (J_{2i} + J_{2i-2}))^2}$, $i = 1, 2, \dots$
$\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n$	$\frac{\omega_0^2}{2} \sqrt{b_{1n}^2 (J_{2i} - J_{2i-2})^2 + (2a_2 J_{2i-1} - c_{1n} (J_{2i} + J_{2i-2}))^2}$, $i = 1, 2, \dots$
$\Omega_{m0} + 2i\omega_n$	$\frac{\omega_0^2}{2} \sqrt{b_{1n}^2 (J_{2i-1} - J_{2i+1})^2 + (2a_2 J_{2i} + c_{1n} (J_{2i-1} + J_{2i+1}))^2}$, $i = 1, 2, \dots$
$\Omega_{m0} - 2i\omega_n$	$\frac{\omega_0^2}{2} \sqrt{b_{1n}^2 (J_{2i-1} - J_{2i+1})^2 + (2a_2 J_{2i} - c_{1n} (J_{2i-1} + J_{2i+1}))^2}$, $i = 1, 2, \dots$

Tableau III-4 : Amplitudes du second membre de l'ordre 1 de la partie permanente du second membre

Pulsations	Amplitudes
$\Omega_{m0} \pm \omega_p$	$\frac{\omega_0^2 J_0}{2} \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$
$\Omega_{m0} \pm 2i\omega_n \pm \omega_p$	$\frac{\omega_0^2 J_{2i}}{2} \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$, $i = 1, 2, \dots$
$\Omega_{m0} \pm (2i-1)\omega_n \pm \omega_p$	$\frac{\omega_0^2 J_{2i-1}}{2} \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$, $i = 1, 2, \dots$

Tableau III-5 : Amplitudes du second membre de l'ordre 1 de la partie transitoire du second membre

Il est alors possible d'étudier l'influence des caractéristiques des engrenages et de l'acyclisme sur l'évolution de l'amplitude de la réponse dynamique. Dans le cas d'engrenages pleins (diamètre intérieur nul), les expressions de ω_0^2 , a_2 , c_{1n} et b_{1n} peuvent se réécrire en fonction du module apparent m_t , du rapport de réduction u , du nombre de dents du pignon Z_1 , de la largeur du pignon L_{pig} et de la roue L_{roue} sous la forme :

$$\begin{aligned}
 - \quad \omega_0^2 &= k_m \frac{8(L_{pig} u^2 + L_{roue}) \cos^2(\beta_b) \cos^2(\alpha_t)}{\pi \rho (m_t Z_1)^2 L_{pig} L_{roue}}, \quad \rho \text{ la masse volumique} \\
 - \quad a_2 &= \frac{C_R}{k_m} \frac{2u}{m_t Z_1 \cos(\alpha_t) \cos(\beta_b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \quad b_{1n} &= \rho_n(\Omega_{10}) \frac{n}{Z_1} \left(\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} \right)^2 \frac{\left(1 - \left(\frac{n}{Z_1} \frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} \right)^2 \right) m_t \cos(\alpha_t) \cos(\beta_b) \left(1 + \frac{L_{rou}}{L_{pig} u^4} \right)}{2 \left(\left(1 - \left(\frac{n}{Z_1} \frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(2 \xi \frac{n}{Z_1} \frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} \right)^2 \right)} \\
 - \quad c_{1n} &= \frac{2 \xi \frac{n}{Z_1} \frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{n}{Z_1} \frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} \right)^2} b_{1n}
 \end{aligned}$$

Les quantités a_2 , c_{1n} et b_{1n} étant toujours positives, on remarque que les amplitudes associées aux pulsations $\Omega_{m0} + i \omega_n$ sont toujours supérieures à celles correspondant à $\Omega_{m0} - i \omega_n$. En effet, en notant $Amp_{\Omega_{m0} \pm i \omega_n}$ l'amplitude associée aux pulsations $\Omega_{m0} \pm i \omega_n$, la différence des amplitudes élevées au carré est alors :

$$Amp_{\Omega_{m0} + (2i-1)\omega_n}^2 - Amp_{\Omega_{m0} - (2i-1)\omega_n}^2 = 2 \omega_0^4 a_2 J_{2i-1} c_{1n} (J_{2i} + J_{2i-2}) \quad (\text{III-58})$$

$$Amp_{\Omega_{m0} + 2i\omega_n}^2 - Amp_{\Omega_{m0} - 2i\omega_n}^2 = 2 \omega_0^4 a_2 J_{2i} c_{1n} (J_{2i-1} + J_{2i+1}) \quad (\text{III-59})$$

Le signe des expressions précédentes est alors déterminé par la différence des amplitudes. Dans le cas des engrenages, l'indice de modulation m_r est faible si bien que les fonctions de Bessel sont toujours positives. A titre de comparaison, l'apparition de la première fonction négative correspond à un indice de 3 (voir Tableau III-2). Un exemple pour cet indice avec un harmonique d'ordre 1 et un pourcentage de 2.5 % correspondrait à un nombre de dents de 120, relativement peu probable dans le cas d'applications industrielles évoluant à des vitesses élevées.

III.2.4. Applications

Après avoir présenté les éléments de théorie, 2 applications sont explicitées. Celles-ci permettent de mettre en évidence les raies latérales associées aux pulsations critiques d'engrènement et l'influence de quelques caractéristiques de fonctionnement sur l'amplitude des réponses dynamiques.

D'un point de vue pratique, il est nécessaire de limiter le nombre des fonctions de Bessel dans les développements. Le Tableau III-2 indique qu'à partir d'un certain ordre et pour un indice de modulation donné, les amplitudes deviennent négligeables. La règle de Carson, couramment employée en télécommunications, permet de limiter le nombre de fonctions :

Règle de Carson : 98 % de l'énergie des bandes latérales est contenue dans l'intervalle $[\Omega - (m + 1)\omega, \Omega + (m + 1)\omega]$, si Ω est la pulsation de la porteuse, ω la fréquence de modulation et m l'indice de modulation.

Dans le cas d'engrenages sous régime d'acyclisme, la pulsation de la porteuse est Ω_{m_0} , la fréquence de modulation ω_n et l'indice de modulation m_r . L'ordre maximal des fonctions de Bessel à retenir pour le développement de la raideur sera donc donné par la relation :

$$E(m_r + 1) + 1 \text{ avec } E(x) \text{ la partie entière de } x \quad (\text{III-60})$$

III.2.4.1. Comparaison analytique - numérique : vérification des pulsations d'engrènement

Le couple d'engrenages est celui défini au Tableau III-1 avec un angle d'hélice β de 30° , une modulation de raideur α_{km} de 0.1 et un facteur d'amortissement de 0.02. Les pertes de contacts ne sont pas prises en compte. Les conditions initiales et les autres caractéristiques du calcul restent inchangées.

La Figure III-8 montre les évolutions du coefficient dynamique maximal R_{\max} en fonction de la pulsation d'engrènement adimensionnelle dans le cas des résolutions analytique et numérique ainsi que l'erreur relative entre les deux méthodes.

Les résultats de la méthode de résolution analytique sont généralement assez proches de ceux du modèle numérique et les écarts principaux sont essentiellement liés à la limite du développement en petites perturbations à l'ordre 1. Un pic de réponse au voisinage de $\frac{\Omega_{m_0}}{\omega_0} = \frac{1}{2}$ est mis en évidence par la résolution numérique mais n'apparaît pas avec l'approche analytique.

En ne considérant pas le jeu de denture, les termes transitoires n'ont pas d'influence étant donné que le calcul de R_{\max} ne s'effectue que sur la solution stabilisée. Les pulsations critiques d'engrènement sont alors données par (III-56) et une comparaison autour du rapport critique unitaire est donnée dans le Tableau III-6. Cette dernière est alors très satisfaisante.

Rapports critiques $\frac{1}{1 \pm \frac{2i}{Z_1}}$	Calcul	Théorie
$i = 1$	0.91	0.901
$i = -1$	1.12	1.1109
$i = 2$	0.83	0.833
$i = -2$	1.22	1.25

Tableau III-6 : Repérages des rapports critiques d'engrènement

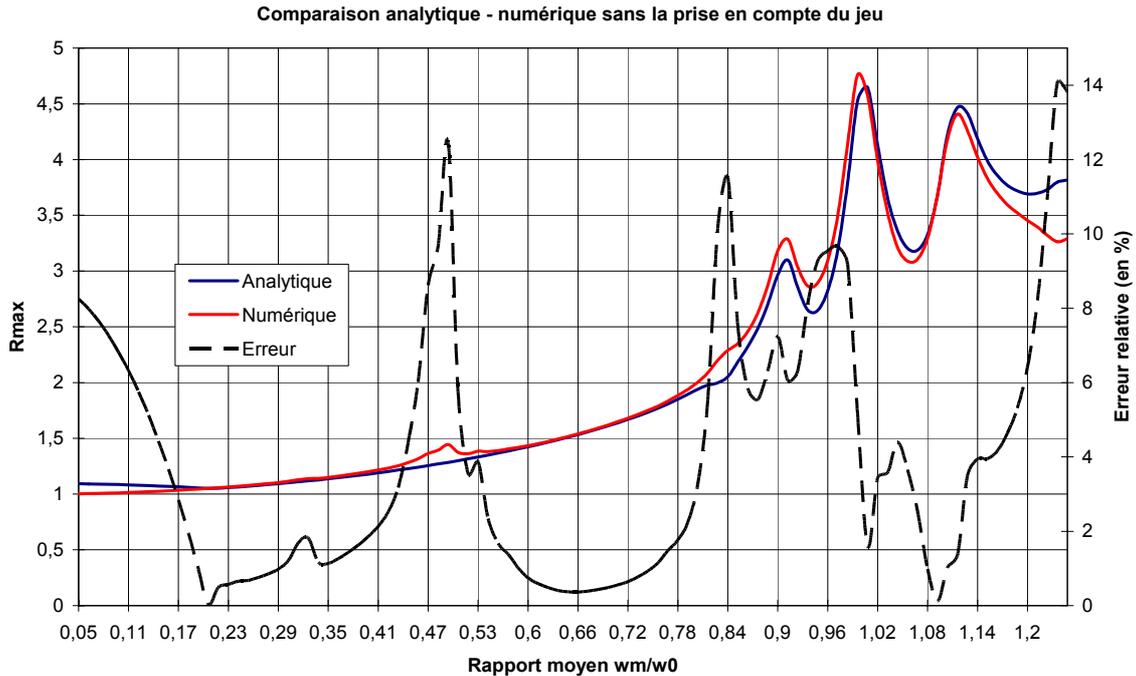


Figure III-8 : Comparaison analytique - numérique sans la prise en compte du jeu de denture

La Figure III-9 illustre l'évolution de R_{max} du même couple d'engrenages mais avec la prise en compte du jeu de denture et un amortissement plus important de 0.05.

La correspondance entre les deux modèles est satisfaisante en l'absence de pertes de contacts. Lorsque les dentures se séparent momentanément, il y a alors des différences importantes dues essentiellement aux conditions de raccord portant sur le développement de l'ordre 1. En effet, ce développement est suffisant tant que les pertes de contacts n'entraînent pas une dérivée temporelle de l'erreur de transmission trop importante. Dans le cas inverse, il s'avère insuffisant et engendre des conditions de continuité non satisfaisantes.

Malgré cela, le développement analytique présenté permet de repérer les pulsations critiques d'engrènement, et cela sans effectuer le calcul de la réponse globale. D'un point de vue pratique, on notera que la méthode analytique est dans ce cas plus lente que la résolution numérique. On privilégiera alors l'algorithme de Newmark avec contact pour les réponses dynamiques d'engrenages à dentures hélicoïdales.

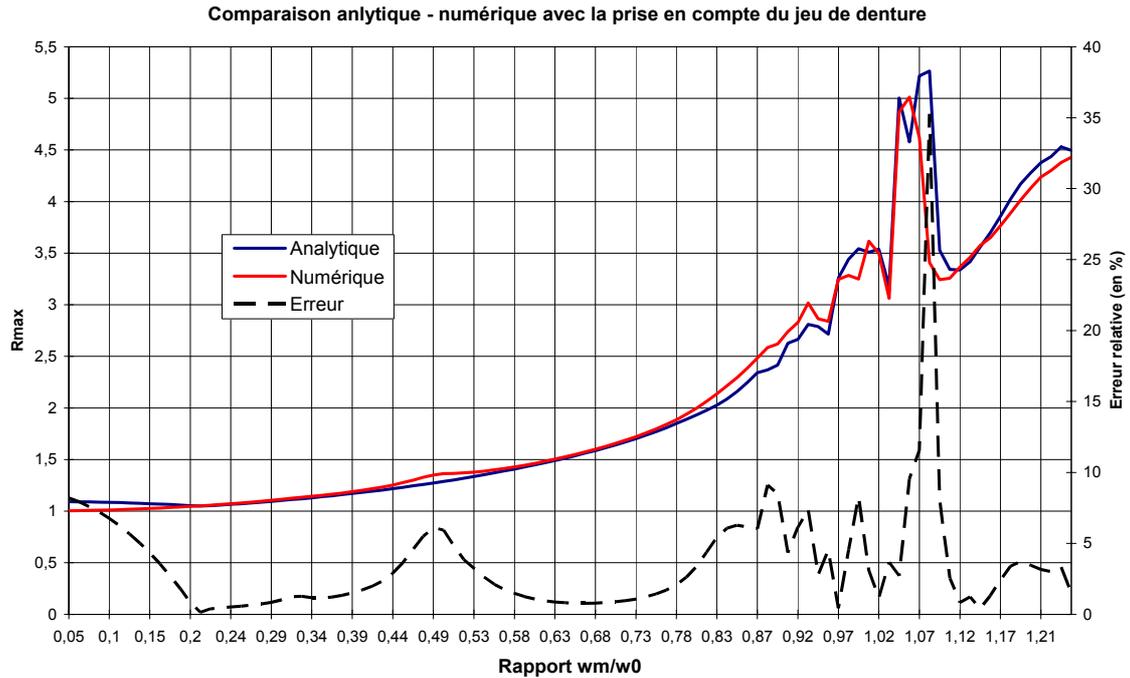


Figure III-9 : Comparaison analytique - numérique avec la prise en compte du jeu de denture

III.2.4.2. Etude des amplitudes des excitations

Les conditions d'étude sont regroupées dans le Tableau III-7. L'acyclisme est supposé monoharmonique et le pourcentage d'acyclisme est indépendant de la vitesse de rotation. Seules les premières bandes latérales à $\Omega_{m0} \pm \omega_n$ sont considérées. Les engrenages possèdent un corps plein et sont de largeurs identiques de sorte que le rapport des inerties polaires $\frac{I_2}{I_1}$ se réduit à $\frac{1}{u^4}$.

Du fait du volume conséquent de l'étude, seuls les résultats les plus pertinents seront présentés dans ce paragraphe.

Les évolutions dans les Figures qui suivent sont représentées sous forme logarithmique, soit $20 \log(Amp_{\Omega_{m0} \pm i \omega_n})$ pour les amplitudes, soit $20 \log(Amp_{\Omega_{m0} + i \omega_n}) - 20 \log(Amp_{\Omega_{m0} - i \omega_n})$ pour les différences ; les résultats sont exprimés en dB.

Les tracés des amplitudes ne sont effectués que pour les maxima des pulsations Ω_{m0} et $\Omega_{m0} + \omega_n$.

	Pignon	Roue
Angle de pression α_n (en $^\circ$)	20	
Angle d'hélice β (en $^\circ$)	30	
Raideur moyenne k_m (en N/m)	6.10^8	
Amortissement ξ	0.05	
Couple résistant (en N.m)	250	
Plage d'étude du module m_n (en mm)	1 à 10	
Plage d'étude du rapport de réduction u	$\frac{1}{6}$ à 1	
Plage d'étude du nombre de dents Z_1	20 à 40	
Harmonique H_n	2, 4, 6	
Phase φ_n (en rad)	0	
Plage d'étude du pourcentage ρ_n	0 à 5 %	

Tableau III-7 : Caractéristiques de l'étude pour le calcul des amplitudes des excitations

- Influence du pourcentage d'acyclisme

Les calculs des amplitudes et de leurs différences sont menés pour des pourcentages d'acyclisme de 1.25, 2.5 et 3.75 %. Les courbes sont tracées Figure III-10 en fonction du module nominal. La Figure III-11 représente les différences d'amplitudes qui sont très faibles, (justifiant le seul tracé des amplitudes pour $\Omega_{m0} + \omega_n$) et qui, comme prévu par les développements analytiques, sont toujours positives.

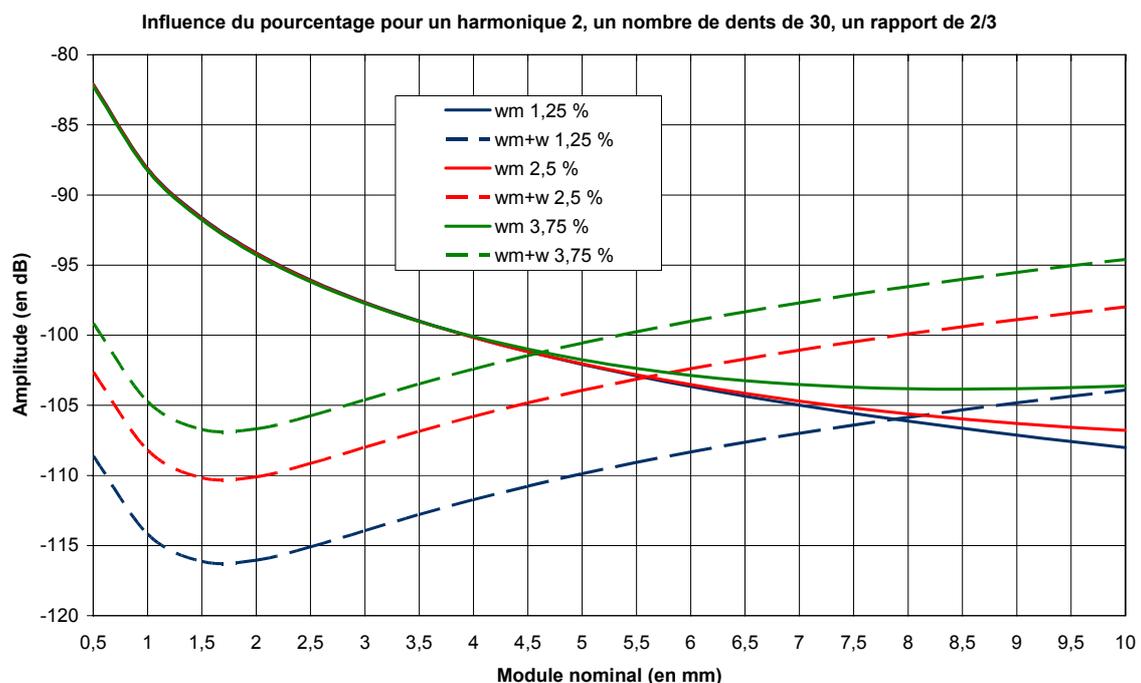


Figure III-10 : Influence du pourcentage sur les amplitudes des excitations

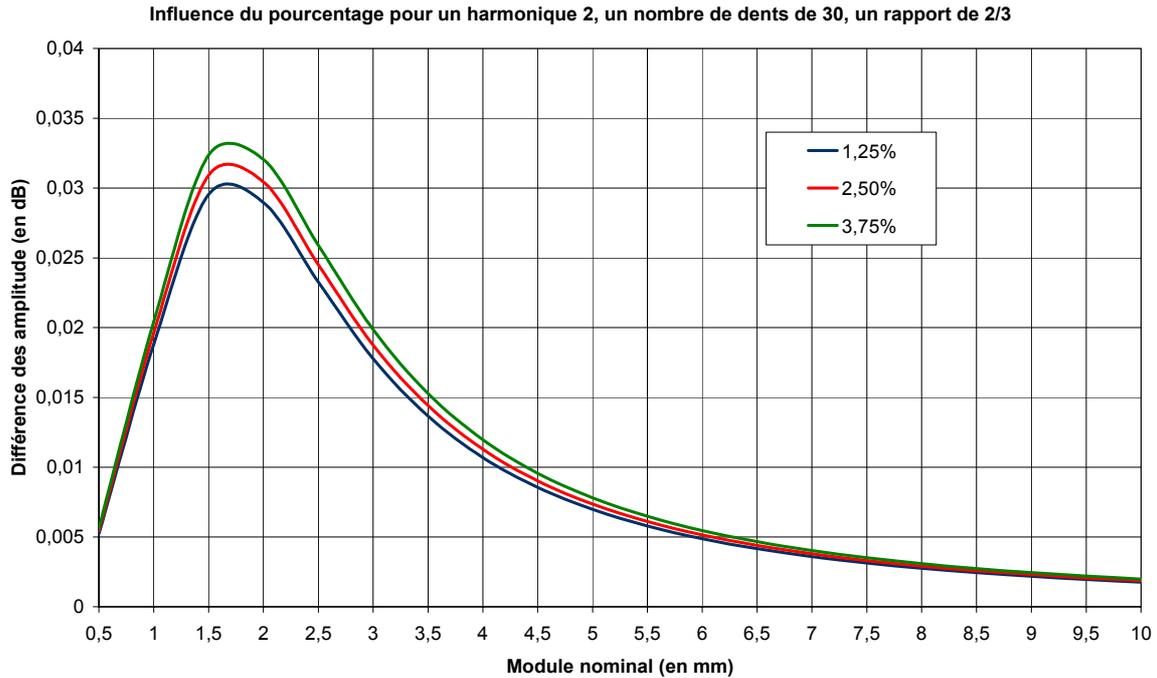


Figure III-11 : Différences des amplitudes

Pour des engrenages de faibles modules, les amplitudes des raies latérales sont très inférieures à celle de la raie porteuse. Par contre la tendance est inversée pour des modules plus importants pour lesquels les bandes latérales dominent la porteuse. On note l'existence d'un module « limite » dépendant du pourcentage d'acyclisme, pour lequel les amplitudes des raies latérales sont plus importantes que la raie porteuse. Ce module tend vers des valeurs faibles à mesure que le pourcentage d'acyclisme augmente. De plus, ce dernier n'a quasiment aucune influence sur les raies porteuses pour de faibles modules. Il est ainsi souhaitable de le limiter de sorte à minimiser l'influence des bandes latérales.

Ces observations ont également été vérifiées pour l'ensemble de la plage d'étude du rapport de réduction et du nombre de dents.

- Influence de l'harmonique

La Figure III-12 donne un comparatif en fonction du pourcentage pour un nombre de dents de 30, un module de 3 mm, un rapport de réduction de $\frac{2}{3}$ et des harmoniques d'ordre 2, 4 et 6.

On y observe que l'harmonique n'a quasiment aucune influence sur l'évolution des raies porteuses contrairement à ce qui est observé pour les raies latérales. En fonction de l'augmentation de l'ordre, les amplitudes des raies latérales augmentent jusqu'à être plus importantes que celles des raies porteuses. Il semble intervenir également un module limite pour ces évolutions et de la même façon, ce module tend vers de faibles valeurs au fur et à mesure de l'augmentation de l'ordre.

Ces observations sont valables pour l'ensemble des plages d'études considérées dans le Tableau III-7.

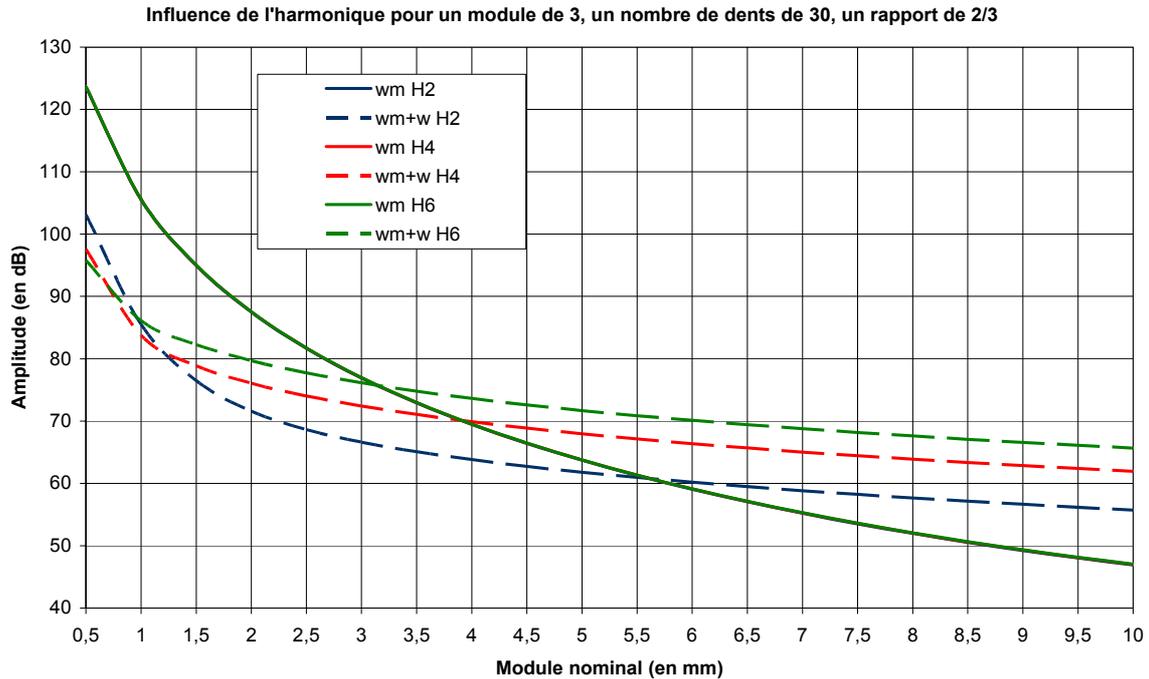


Figure III-12 : Influence des harmoniques

- Influence du nombre de dents

Le rapport de réduction est souvent un élément déterminant lors de la conception d'un réducteur. Ce paramètre étant figé, les nombres de dents sur les mobiles peuvent toutefois être encore modifiés. La Figure III-13 synthétise les résultats obtenus pour l'harmonique d'ordre 2, un pourcentage de 2.5 %, un module de 3 mm, un rapport de réduction de $\frac{2}{3}$ et des nombres de dents de 20, 30 et 40.

Un faible nombre de dents engendre des amplitudes de réponses plus importantes. Il apparaît ici le même phénomène que précédemment sur l'existence d'un pourcentage limite, ce dernier étant rejeté vers de fortes valeurs lorsque le nombre de dents augmente. Il est alors préférable, pour un même rapport, d'augmenter ce dernier de façon à limiter l'influence des bandes latérales mais également l'amplitude de la raie porteuse.

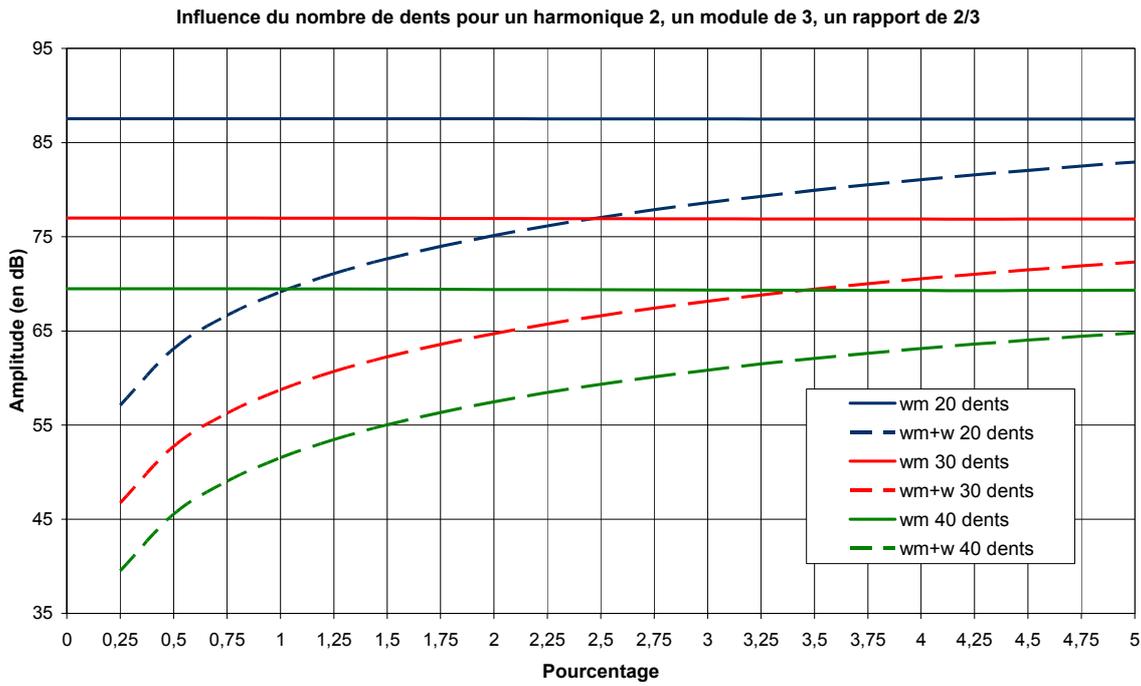


Figure III-13 : Influence du nombre de dents

- Influence du rapport de réduction

On considère dans ce cas un nombre de dents de 30, un harmonique d'ordre 2, un pourcentage de 2.5 % pour les rapports $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{6}$.

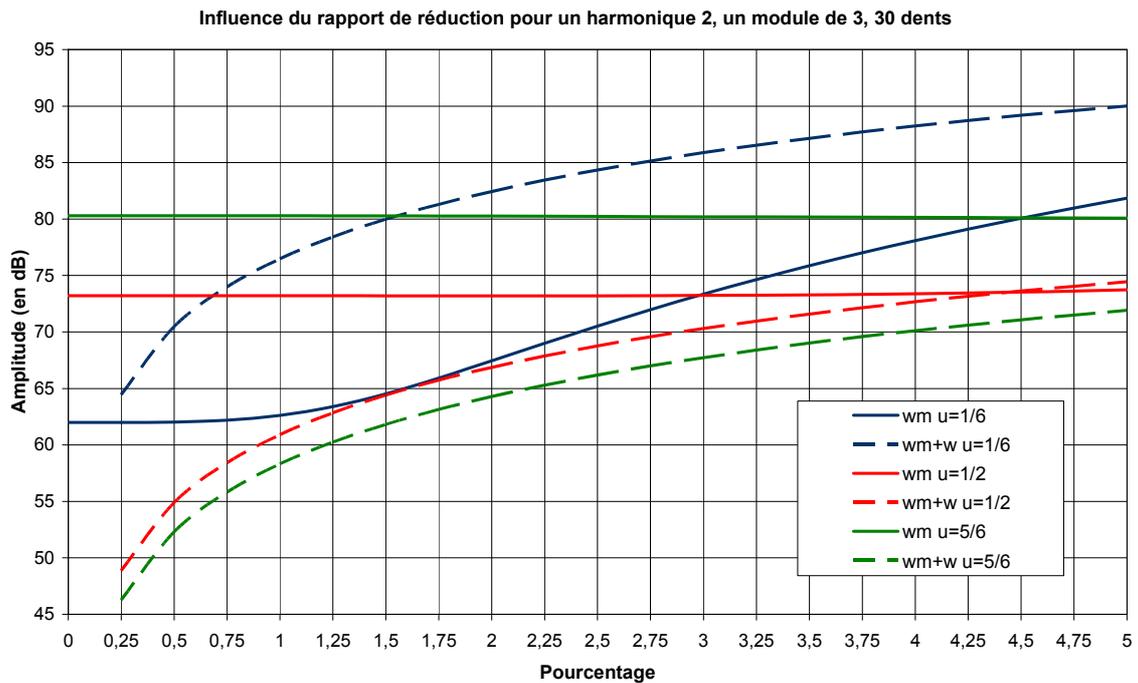


Figure III-14 : Influence du rapport de réduction

Les résultats montrent une forte dépendance vis à vis des amplitudes avec, en particulier, une forte influence des petits rapports de réduction sur l'amplitude de la raie porteuse qui provient de l'augmentation de l'inertie polaire de la roue.

Il apparaît également un pourcentage pour lequel les amplitudes des raies latérales auront plus d'importance que celles des raies porteuses. Bien que cela se vérifie sur le tracé, il n'y a pas de règles générales concernant son évolution en fonction du rapport de réduction. Il semble néanmoins que lorsque le rapport est proche de $\frac{1}{2}$, ce pourcentage se situe à des valeurs envisageables en pratique.

III.3. CONCLUSION SUR LES DEVELOPPEMENTS ANALYTIQUES

Les résolutions analytiques présentent l'avantage de pouvoir fournir des indications générales sur le comportement des systèmes soumis à de l'acyclisme [131] - [132]. Dans le cas des dentures droites, les solutions par morceau sont exactes et permettent de calibrer les méthodes de résolution numériques pour un fonctionnement fortement non-linéaire dans le cas des pertes de contact et chocs. Pour une raideur d'engrènement de type sinusoïdale (plutôt représentative de dentures hélicoïdales), les solutions obtenues sont approchées car reposant sur un développement asymptotique tronqué et sur des conditions de continuité ne portant que sur la partie principale de la réponse. Un développement original basé sur la modulation de fréquence et l'introduction de fonctions de Bessel a été utilisé afin de développer ces solutions. A partir de celles-ci, une analyse sur les propriétés des équations différentielles a permis de caractériser des pulsations critiques d'engrènement dans le cas sans amortissement (III-54) - (III-55) et avec amortissement (III-56) - (III-57), validées par comparaisons avec les courbes de réponse numériques. D'une manière générale, on note un très bon accord entre les résultats analytiques et numériques.

Des analyses conduites autour du rapport $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}$ ont permis d'étudier l'influence des paramètres de conception des engrenages et des caractéristiques d'acyclisme sur la réponse dynamique. Il a été montré en particulier que les amplitudes associées aux modulations peuvent être plus importantes que celles de la raie de la porteuse. Cette remarque peut être importante pour la caractérisation des vitesses de rotation critiques qui peuvent ainsi se trouver décalées par rapport aux conditions de vitesse de rotation constante.

Les résultats obtenus permettent d'esquisser les tendances générales concernant la dynamique des engrenages sous régime d'acyclisme.

IV. ANALYSE DE LA STABILITE D'UN COUPLE D'ENGRENAGES SOUS REGIME D'ACYCLISME

IV.1. INTRODUCTION

La stabilité est une notion couramment employée dans le comportement d'un système mécanique. A partir d'un système différentiel, il est possible d'évaluer si le comportement présente un danger pour la tenue en service du mécanisme. La notion de stabilité et sa

représentation en eux-mêmes sont ambiguës. Pour les mathématiciens, elle se traduit par un comportement chaotique et l'étude des bifurcations alors que pour le mécanicien, elle se traduira par l'évolution de la réponse, et de savoir si son amplitude augmentera ou non.

La théorie générale de la stabilité des équations différentielles a été introduite par Lyapunov en 1892 [127]. Lejeune-Dirichlet [128] reprend cette théorie et l'applique sur les notions d'équilibres des systèmes. Floquet [72] et [129] l'utilise quant à lui pour caractériser les équations différentielles à coefficients périodiques. L'ouvrage classique de Bolotin [73] présente une synthèse des résultats principaux pour les systèmes avec des raideurs périodiques. Dans le cas du comportement des engrenages sous vitesses constantes, l'utilisation de la théorie de Floquet est actuellement la méthode la plus rapide. Vexex [5] l'a appliquée à l'étude de l'influence de l'amortissement, de la forme de la raideur et du rapport de conduite.

L'objet de ce paragraphe est d'appliquer cette théorie de la stabilité dans le cas d'engrenages sous acyclisme qui, à notre connaissance, n'a jamais été entreprise. En premier lieu, la théorie sera développée, notamment sur les moyens mis en œuvre dans le but de calculer les exposants de Lyapunov. Dans un deuxième temps, une analyse paramétrique est effectuée pour caractériser l'influence des paramètres de conception du réducteur et des paramètres de l'acyclisme.

IV.2. DEVELOPPEMENT DE LA THEORIE

IV.2.1. Idée directrice

L'idée est ici de se baser sur la théorie de Floquet en l'adaptant à un couple d'engrenages sous acyclisme. Dans ce cas particulier, il a été vu au paragraphe II.2.2 que la raideur est périodique de période la période de rotation du pignon, soit $\frac{2\pi}{\Omega_{10}}$. L'équation (III-

12) prise sous forme homogène est alors une équation à excitation paramétrique dite équation de Mathieu-Hill. Dans le cas d'un amortissement nul, elle devient une équation de Hill.

Pour ces équations, Floquet [72] montre qu'il n'existe pas de solutions mais que celles-ci peuvent se mettre sous la forme (III-61) :

$$x = e^{\gamma t} G(t), \quad G(t) = G(t+T)$$

$$G \text{ une matrice périodique de période } T \tag{III-61}$$

x la solution de l'équation

La stabilité du système se résume alors à l'analyse du signe de l'exposant γ appelé exposant de Floquet. Dans le cas de coefficients non périodiques, G n'est plus périodique et l'exposant γ est alors appelé exposant de Lyapunov.

Selon son signe, le système sera dit stable ou instable :

- Si $\gamma > 0$ le système est dit instable
- Si $\gamma < 0$ le système est dit stable
- Si $\gamma = 0$ le système est à la limite de la stabilité. Il est ni stable, ni instable.

Plusieurs techniques sont couramment utilisées : Bolotin [73], Nayfeh & Mook [74] utilisent le calcul approché du déterminant infini de Hill, Friedmann & Col. [130], Küçükay [12] et Velez [5] déterminent le calcul de la matrice de monodronie du système. Cette matrice unique et indépendante des conditions initiales [74], [130] relie les déplacements et vitesses du temps t aux déplacements et vitesses au temps $t + T$. En notant $X(t)$ le vecteur d'état du système regroupant les déplacement et vitesses, la matrice de monodronie R permet donc d'écrire (III-62) :

$$X(t + nT) = R X(t + (n - 1)T), \quad n \text{ entier} \quad (\text{III-62})$$

La stabilité du système est alors conditionnée par les $2N$ valeurs propres λ_l de R . La base des solutions propres v_l associées à ces valeurs s'écrit :

$$v_l(t + nT) = \lambda_l^n v_l(t + (n - 1)T), \quad l = 1, 2N \quad (\text{III-63})$$

C'est sur cette base de solution que la stabilité est testée telle que :

$$v_l(t + nT) = \lambda_l^n v_l(t), \quad n \text{ entier, soit} \quad \begin{cases} a) \lim_{t \rightarrow \infty} v_l(t) = 0 \text{ pour } |\lambda_l| < 1 \\ b) \lim_{t \rightarrow \infty} v_l(t) = \infty \text{ pour } |\lambda_l| > 1 \end{cases} \quad (\text{III-64})$$

Le cas a) correspond à un mouvement à amplitude bornée : le système est stable, le cas b) correspond à une réponse tendant exponentiellement vers l'infini, le système est instable.

IV.2.2. Calcul de la matrice de monodronie

Le calcul de cette matrice s'effectue à chaque pas de temps à l'aide de l'algorithme de Newmark à accélération constante. Le système étant périodique de période T_{acy} , le calcul ne s'effectue que sur une seule période de rotation du pignon, le pas de temps est alors défini par (III-65), N_{pas} représente le nombre de pas de l'intégration numérique :

$$dt = \frac{T_{acy}}{N_{pas}} \quad (\text{III-65})$$

En notant Δ_{tr}^n et Δ_{tr}^{n+1} l'évolution de l'erreur de transmission au temps t et $t + dt$, l'écriture du schéma de Newmark sur le déplacement conduit à (III-66) :

$$\Delta_{tr}^{n+1} = \frac{B}{A} \Delta_{tr}^n + \frac{D}{A} \dot{\Delta}_{tr}^n \text{ avec } \begin{cases} A = \frac{4}{dt^2} + \frac{4\xi\omega_0}{dt} + \frac{k(t+dt)\cos(\beta_b)^2}{M_{eq}} \\ B = \frac{4}{dt^2} + \frac{4\xi\omega_0}{dt} - \frac{k(t)\cos(\beta_b)^2}{M_{eq}} \\ D = \frac{4}{dt} \end{cases} \quad (\text{III-66})$$

Par ailleurs, le schéma de Newmark sur les vitesses conduit à :

$$\dot{\Delta}_{tr}^{n+1} = \frac{2}{dt} \left(\frac{B}{A} - 1 \right) \Delta_{tr}^n + \left(\frac{2}{dt} \frac{D}{A} - 1 \right) \dot{\Delta}_{tr}^n \quad (\text{III-67})$$

En combinant (III-66) et (III-67), la matrice de monodronie pour la fréquence propre l s'écrit au temps $t + dt$ selon (III-68), le vecteur d'état X^{n+1} à cet instant selon :

$$R_l^{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{B}{A} & \frac{D}{A} \\ \frac{2}{dt} \left(\frac{B}{A} - 1 \right) & \frac{2}{dt} \frac{D}{A} - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-68})$$

$$X^{n+1} = R_l^{n+1} X^n \text{ avec } X^n = \begin{bmatrix} \Delta_{tr}^n \\ \dot{\Delta}_{tr}^n \end{bmatrix} \quad (\text{III-69})$$

La répétition de cette opération sur une période complète T_{acy} conduit à la matrice de monodronie globale R_l du système :

$$X^{N_{pas}} = R_l X^0 = R_l^{N_{acy}} R_l^{N_{acy}-1} \dots R_l^1 X^0 \quad (\text{III-70})$$

Avec $R_l = \prod_{j=1}^{N_{pas}} R_l^j$ et $N_{acy} = \frac{T_{acy}}{dt}$

La diagonalisation de R_l fournit alors les valeurs propres λ_l qui caractérisent la stabilité du système. Cette dernière s'exprime alors par :

$$|\lambda_i| < 1 \text{ le système est stable} \tag{III-71}$$

$$|\lambda_i| > 1 \text{ le système est instable}$$

IV.3. APPLICATION A UN COUPLE D'ENGRENAGES

Les données géométriques sont définies dans le Tableau III-8. Dans le but de visualiser les effets de divers paramètres, les calculs suivant sont présentés pour des évolutions autour des rapports moyens $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ et 1. Le nombre de pas de temps par période d'engrènement moyenne est de 64 dans les deux modèles de variation de raideur considérés. Le calcul n'est effectué que sur une seule période de rotation en ne considérant que l'harmonique H_2 dans la vitesse de rotation, mais l'ensemble des résultats est généralisable, aussi bien aux autres harmoniques que pour un acyclisme multiharmonique. Les pourcentages de fluctuation de vitesse sont considérés constants en fonction de la vitesse de rotation.

	Pignon	Roue
Nombre de dents	20	30
Module m_n (mm)	3	
Largeur des engrenages (en mm)	35	30
Angle de pression α_n (en °)	20	
Angle d'hélice β (en °)	0 (modèle créneau), 30 (modèle sinus)	
Raideur moyenne k_m (en N/m)	6.10^8	
Pourcentage d'acyclisme ρ_2 (en %)	0, 1.25, 2.5, 3.75, 5	

Tableau III-8 : Données géométriques du couple d'engrenages pour l'étude de stabilité

IV.3.1. Influence du pourcentage d'acyclisme

Dans le souci de ne pas surcharger ce mémoire, seuls les résultats pour le cas de la variation de raideur en créneau sont donnés. Les résultats dans le cas du modèle sinus ne sont pas présentés mais les observations du créneau sont généralisables [133].

Les Figures III-15 et III-16 donnent respectivement les résultats des zones d'instabilités autour des rapports $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ pour un amortissement nul. Les zones d'instabilités matérialisées en bleu évoluent ici selon le paramètre de modulation de raideur α_{km} .

L'étude montre que plus le pourcentage augmente, plus les bandes latérales autour de la zone principale de la raie porteuse prennent de l'importance. Cette zone principale

correspond à la pulsation porteuse Ω_{m0} , soit un rapport $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0} = \frac{2}{k}$, avec k entier. On observe également que la zone d'instabilité au voisinage de la porteuse se réduit au profit des zones des bandes latérales pour une modulation de raideur croissante. Il y a donc un effet de « pompage » entre zones d'instabilités principales et secondaires associées aux bandes latérales.

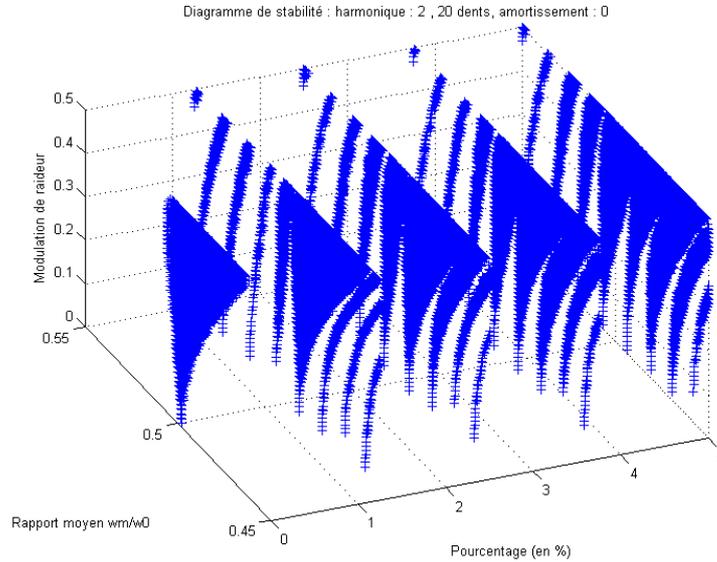


Figure III-15 : Diagramme de stabilité autour du rapport $\frac{1}{2}$

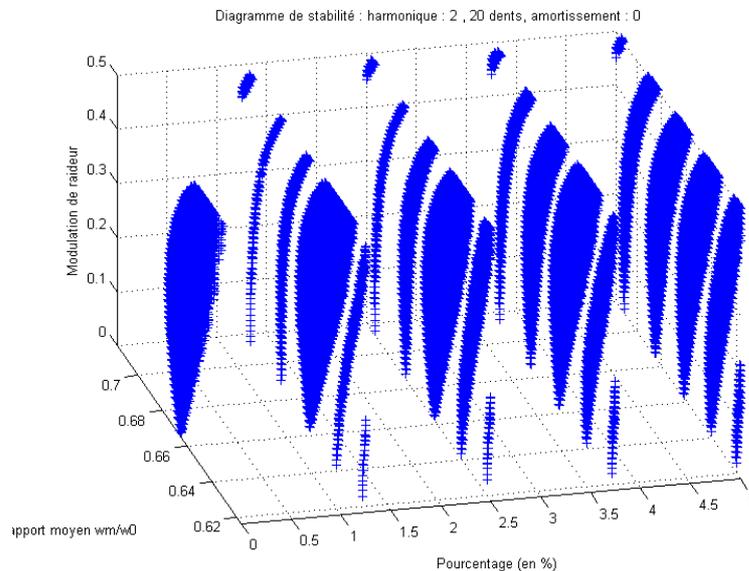
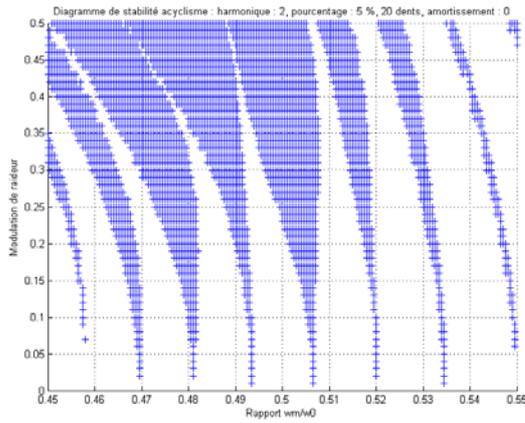


Figure III-16 : Diagramme de stabilité autour du rapport $\frac{2}{3}$

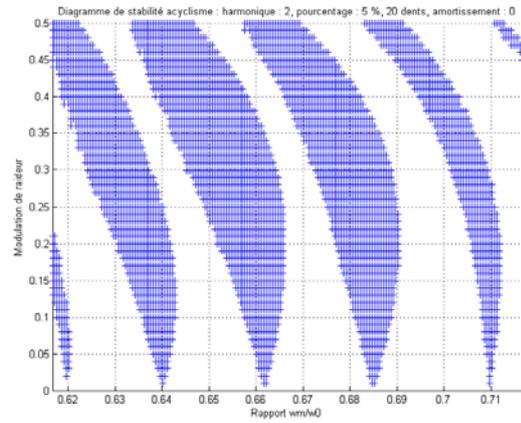
L'étude de stabilité confirme les développements analytiques. Si l'on compare les rapports critiques d'engrènement sans amortissement donné par (III-54) pour $k = 3$ et $k = 4$ du Tableau III-9, ceux-ci se retrouvent sur la Figure III-17 pour un pourcentage de 5 %. Les différences obtenues entre la théorie et le calcul proviennent des approximations numériques pour la représentation de la variation en créneau de la raideur.

	$k = 3$	$k = 4$
1 ^{ère} bande	0.645 - 0.69	0.488 - 0.513
2 ^{ème} bande	0.625 - 0.71	0.476 - 0.526
3 ^{ème} bande	/	0.465 - 0.541

Tableau III-9 : Rapports critiques d'engrènement (théoriques)



rapport $\frac{1}{2}$



rapport $\frac{2}{3}$

Figure III-17 : Diagramme de stabilité pour un pourcentage de 5 %

IV.3.2. Influence de la forme de la raideur

Dans le cas de vitesses de rotation constantes, les variations de forme de raideur en créneau et en sinus, engendrent des zones d'instabilités différentes. Il nous a semblé intéressant d'étendre cette étude au cas d'engrenages soumis à des fluctuations de vitesse de rotation.

Les rapports d'engrènement moyens considérés sont $\frac{2}{3}$ et 1. La Figure III-18 illustre le tracé des zones d'instabilités dans le cas du sinus pour le rapport de $\frac{2}{3}$. La Figure III-19 donne une comparaison des limites de stabilité entre les deux variations de raideur au voisinage du rapport de pulsation de 1, pour un pourcentage d'acyclisme de 5 %.

La comparaison montre que l'utilisation de dentures hélicoïdales (fonction de raideur sinusoïdale) est bénéfique car elles réduisent considérablement la taille des zones d'instabilités et limitent les contributions des bandes latérales.

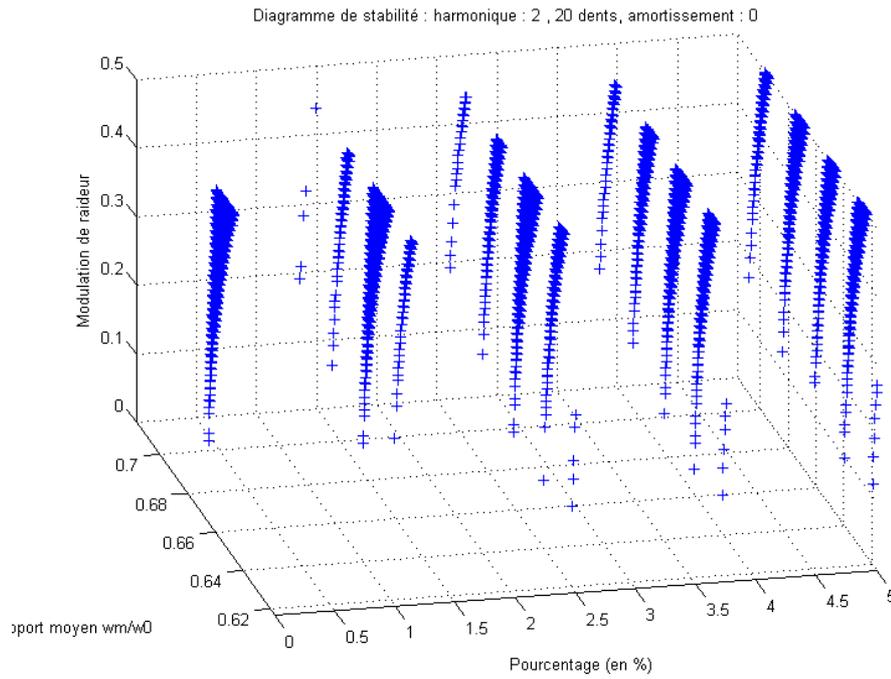


Figure III-18 : Diagramme de stabilité pour une variation en sinus autour du rapport $\frac{2}{3}$

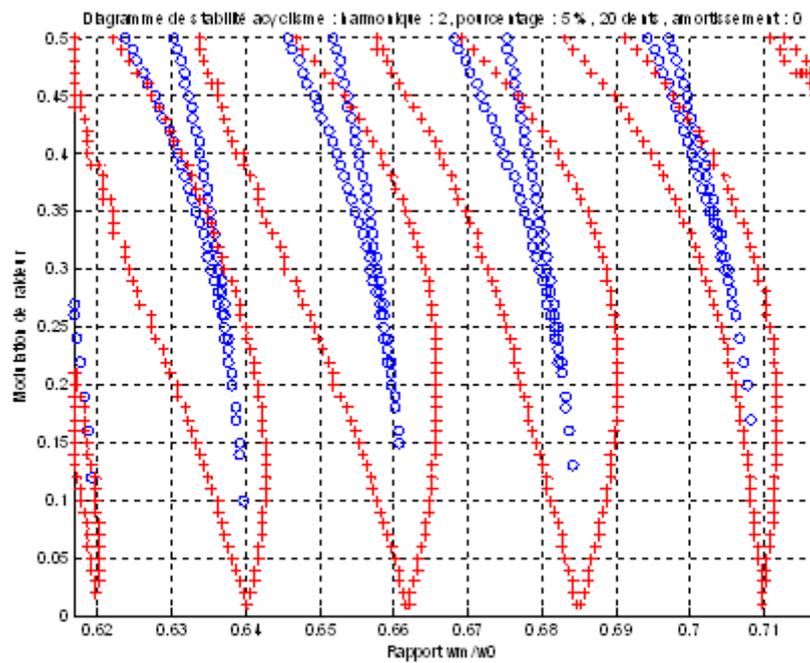


Figure III-19 : Comparaison des limites de stabilité pour un pourcentage de 5 %
o : sinus - + : créneau

IV.3.3. Influence de l'amortissement

Le calcul porte ici sur les rapports $\frac{2}{3}$ et 1 pour une variation de raideur en créneau avec un facteur d'amortissement visqueux ξ de 0 et 0.01. La Figure III-20 illustre les zones

d'instabilités pour le premier rapport. La Figure III-21 donne les limites de stabilité pour le rapport critique de 1 à un pourcentage de 5 % pour les 2 valeurs d'amortissement.

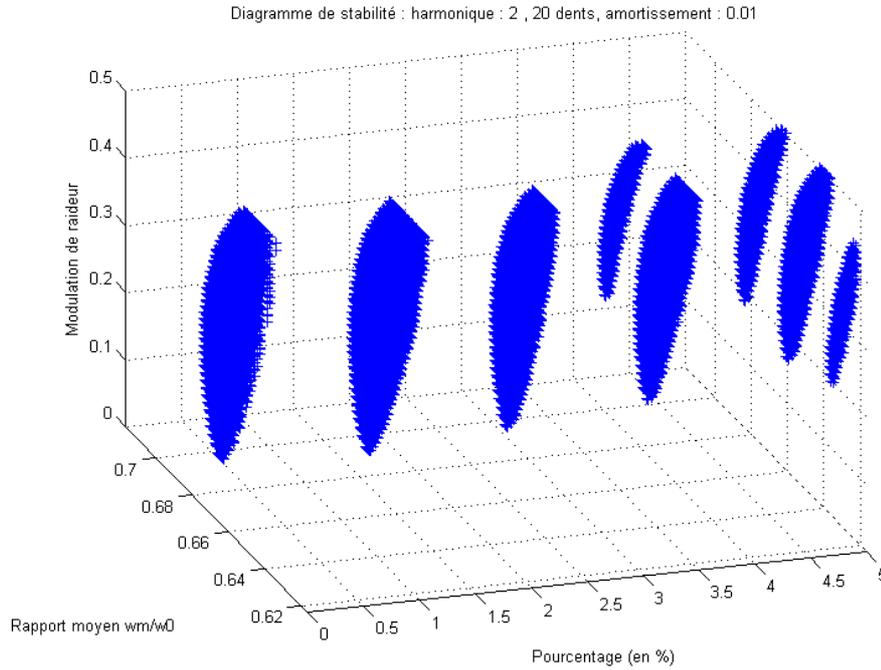


Figure III-20 : Diagramme de stabilité pour un amortissement de 0.01 autour du rapport $\frac{2}{3}$ (créneau)

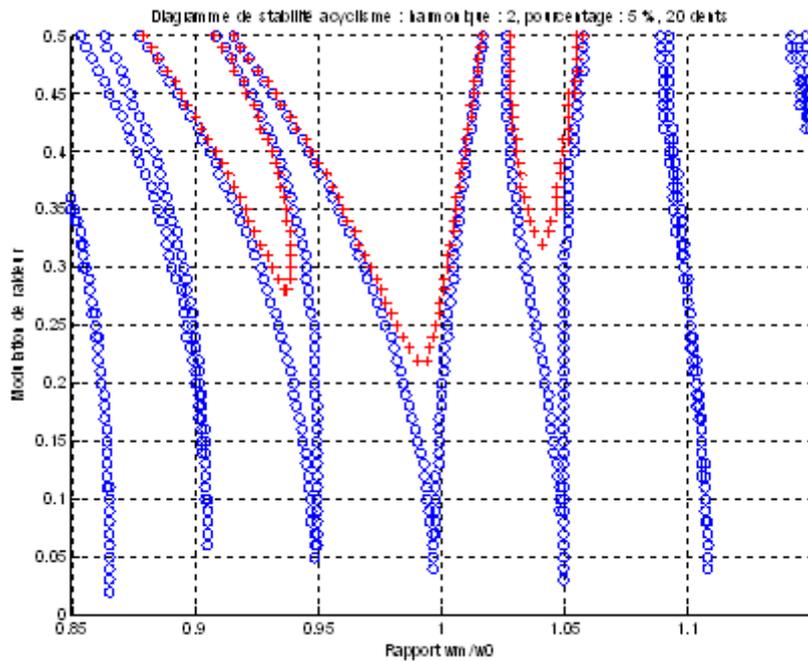


Figure III-21 : Comparaison des limites de stabilité pour un pourcentage de 5 %
o : $\xi = 0$ - + : $\xi = 0.01$

En comparant les Figures III-20 et III-16, les zones d'instabilités sont beaucoup moins larges en présence d'amortissement et elles n'apparaissent que pour des valeurs de fluctuations de raideur sensiblement plus élevées. L'amortissement permet également de limiter ou de faire disparaître les instabilités associées aux bandes latérales et ceci, même dans

le cas de valeurs très faibles (ici $\xi = 0.01$). L'ensemble de ces observations est confirmé par la Figure III-21 avec en rouge les limites pour un amortissement de 0.01, en bleu les limites pour un amortissement nul.

IV.4. CONCLUSION SUR LA STABILITE

L'étude de la stabilité des engrenages est un domaine relativement connu dans le cas de vitesses de rotation constantes. Le cas de fluctuations de vitesse périodiques liées à l'acyclisme n'a, à notre connaissance, pas été abordé et nous a conduit à mettre en place une méthode d'analyse spécifique. Les exploitations paramétriques qui en découlent ont conduit aux observations suivantes :

- Les zones d'instabilité sont multiples et les rapports critiques d'engrènement autour desquelles elles se développent peuvent être déterminés par les formules (III-56) et (III-57).
- La taille de ces zones augmente pour un pourcentage d'acyclisme croissant.
- Il semble y avoir un effet de « pompage » entre les zones principales données par les rapports critiques sans acyclisme et celles associées aux bandes latérales.
- Une fonction de raideur sinusoïdale (se rapprochant des conditions en dentures hélicoïdales) conduit à des zones d'instabilité plus réduites que pour une raideur variant en créneau.
- L'introduction d'amortissement, même minime, permet de limiter considérablement les zones d'instabilités.

V. ETUDE PARAMETRIQUE D'UN COUPLE D'ENGRENAGES EN PRESENCE D'ACYCLISME

V.1. INTRODUCTION

Les études paramétriques permettent de quantifier l'influence des caractéristiques du couple d'engrenages sur sa dynamique. Plusieurs méthodes existent afin d'éviter le calcul de la réponse du système. Parmi les plus courantes, ils existent les méthodes de sensibilité [134] qui fixent tous les paramètres sauf celui de l'étude, et donne son influence sur les fréquences de résonances. Ces méthodes sont bien adaptées dans le cas d'un faible nombre de paramètres et de faibles non-linéarités. Dans le cas des engrenages, ces méthodes sont difficilement applicables tant les paramètres à prendre en compte sont nombreux et les non-linéarités fortes. Ces derniers peuvent se regrouper en quatre catégories :

- Les paramètres géométriques tels que le module, le nombre de dents, la largeur, l'angle d'hélice,...

- Les paramètres physiques tels que la vitesse de rotation, le couple moteur,...
- Les paramètres de montage tels que le mésalignement, les excentricités,...
- Les paramètres du réducteur tels que les arbres, les paliers, les carters, le moteur,...

Ces derniers ne peuvent être considérés que lorsque la modélisation est tridimensionnelle, c'est-à-dire pour des modèles possédant un nombre de degré de liberté important et conduisant, par conséquent, à des exploitations coûteuses en temps de calcul. La modélisation torsionnelle utilisée dans ce chapitre permet d'étudier de manière rapide un panel de paramètres aussi bien géométriques que physiques (les paramètres de montage étant abordés dans le chapitre IV de ce mémoire). L'étude est donc focalisée sur les paramètres géométriques les plus pertinents représentatifs du comportement dynamique d'engrenages sous acyclisme. Les paramètres physiques de la vitesse de rotation que sont les harmoniques et le pourcentage d'acyclisme sont ensuite analysés dans un deuxième temps.

V.2. DONNEE DE LA MODELISATION - VITESSE CRITIQUE DE VOL LIBRE

V.2.1. Définition du couple d'engrenages

Les caractéristiques des engrenages et des paramètres de vitesses sont résumées dans le Tableau III-10.

	Pignon	Roue
Nombre de dents	30	45
Module m_n (mm)	3	
Largeur des engrenages (mm)	35	30
Angle de pression de taillage α_n (en °)	20	
Angle d'hélice β (en °)	0 (modèle créneau), 30 (modèle sinus)	
Modulation de raideur α_{km}	0.15 (modèle créneau), 0.1 (modèle sinus)	
Raideur moyenne k_m (N/m)	$6 \cdot 10^8$	
Harmoniques considérés	2, 4, 6	
Pourcentage d'acyclisme ρ_2 (en %)	0, 1.25, 2.5, 3.75	
Amortissement visqueux ξ	0.05	
Couple résistant C_R (N.m)	250	
Plage d'étude du rapport $\frac{\Omega_{m0}}{\omega_0}$	0.05 à 1.25	

Tableau III-10 : Caractéristiques des engrenages et de l'acyclisme

Les simulations sont conduites dans le cas du modèle créneau avec les développements analytiques et pour le modèle sinus à l'aide de l'algorithme général de Newmark. Les calculs sont menés sur 3 tours de rotation du pignon, le nombre de pas de

temps par période d'engrènement moyenne étant de 64. L'acyclisme de rotation du pignon est considéré soit en condition monoharmonique, soit multiharmonique. Dans ce dernier cas, des coefficients sont introduits sur les pourcentages de sorte à limiter les excitations dues aux harmoniques d'ordres supérieurs, la référence étant l'harmonique d'ordre 2. Les vitesses s'expriment alors selon (III-72) pour un acyclisme monoharmonique et selon (III-73) lorsque plusieurs harmoniques sont prises en compte. Un exemple d'évolution est donné Figure III-22 pour le H_2 et le multiharmonique respectivement. Les pourcentages d'acyclisme sont supposés ne pas dépendre de la vitesse de rotation et la phase φ_n est prise égale à zéro.

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10} (1 + \rho_n \sin(\omega_n t)) \quad (\text{III-72})$$

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10} \left(1 + \rho_2 \sum_{n=2,4,6} a_n \sin(\omega_n t) \right) \text{ avec } a_1 = 1, a_2 = 0.75, a_3 = 0.25 \quad (\text{III-73})$$

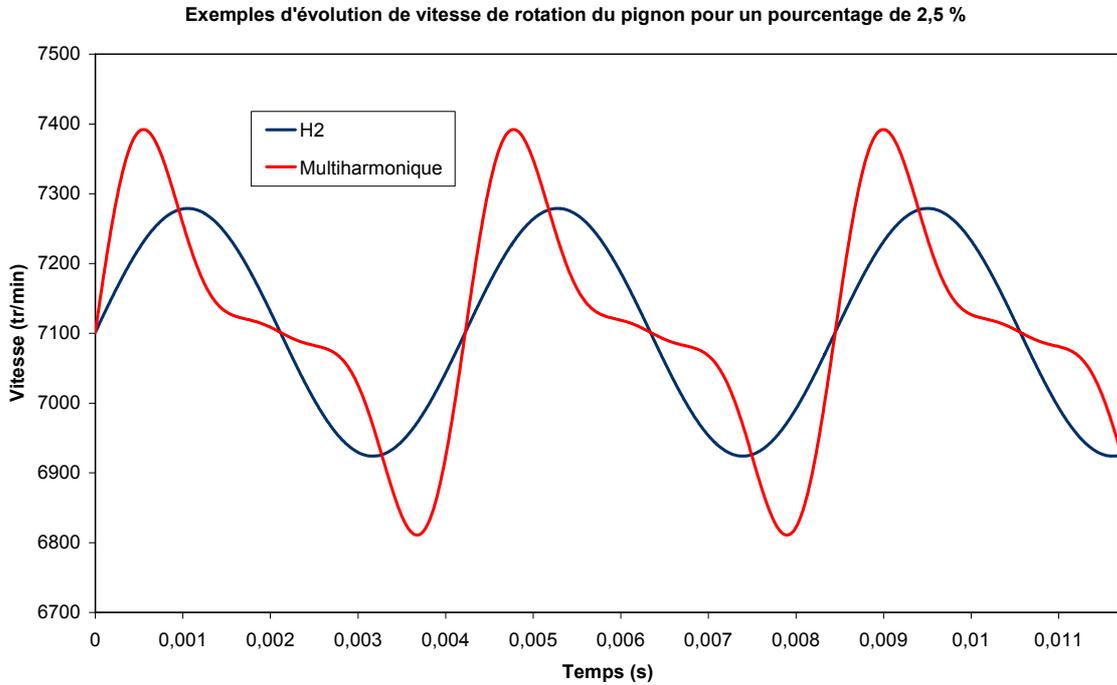


Figure III-22 : Exemples d'évolution de vitesse de rotation du pignon

V.2.2. Définition d'une vitesse critique de vol libre

En reprenant l'équation différentielle (III-12) dans le cas du contact direct (III-74), le second membre peut, sous certaines conditions, devenir négatif du fait de la présence du terme $\dot{\Omega}_1$. Dans de telles conditions, des pertes de contact entre dentures sont inévitables.

$$\ddot{\Delta}_{ir} + 2 \xi \omega_0 \dot{\Delta}_{ir} + \omega_0^2 (1 + \alpha_{km} \Phi(t)) \Delta_{ir} = \frac{\cos(\beta_b)}{Rb_2 M_{eq}} (C_R + u I_2 \dot{\Omega}_1) \quad (\text{III-74})$$

Dans le cas d'une vitesse modulée par un seul harmonique, le second membre s'écrit :

$$\frac{\cos(\beta_b)}{Rb_2 M_{eq}} (C_R + u I_2 n \rho_n \Omega_{10}^2 \cos(\omega_n t)) \quad (\text{III-75})$$

Une relation permet alors de lier une vitesse de rotation moyenne limite aux paramètres de l'acyclisme, mais également à l'influence de l'inertie polaire de la roue et du couple résistant. Elle sera notée Ω_{10}^{vl} (III-76) :

$$\Omega_{10}^{vl} = \sqrt{\frac{C_R}{u I_2 n \rho_n}} \quad (\text{III-76})$$

Dans le cas d'une vitesse à plusieurs composantes harmoniques, il est nécessaire de rechercher le minimum du second membre.

Cette vitesse critique théorique ne prend pas en compte l'ensemble de la dynamique du couple d'engrenages mais elle permet de situer (même qualitativement) les vitesses susceptibles de conduire à des pertes de contacts. Pour des vitesses de rotation constantes, les pertes de contacts apparaissent généralement au voisinage des seules vitesses critiques d'engrènement. On constate, par contre, que dans le cas d'acyclisme toute une gamme de vitesses (au-delà de Ω_{10}^{vl}) peut être affectée.

Les caractéristiques du couple d'engrenages considérés donnent les vitesses définies dans le Tableau III-11 dans les cas monoharmoniques. Le rapport $\frac{\Omega_{m0}^{vl}}{\omega_0}$ désigne le rapport critique de vol libre avec $\Omega_{m0}^{vl} = Z_1 \Omega_{m0}^{vl}$.

ρ_n (en %)	H_2		H_4	
	Ω_{10}^{vl} (tr/min)	$\frac{\Omega_{m0}^{vl}}{\omega_0}$	Ω_{10}^{vl} (tr/min)	$\frac{\Omega_{m0}^{vl}}{\omega_0}$
1.25	13388.8	1.38	7730	0.8
2.5	9467.3	0.98	5466	0.56
3.75	7730	0.8	4462.9	0.46

Tableau III-11 : Vitesses et rapports critiques de vol libre

V.3. INFLUENCE DES PARAMETRES PHYSIQUES

V.3.1. Influence du pourcentage d'acyclisme

Dans un premier temps, les pourcentages d'acyclisme ne dépendent pas de la vitesse de rotation. De cette façon, la caractérisation de ce paramètre est mit en évidence pour chaque

vitesse de rotation. La Figure III-23 donne l'évolution de R_{\max} pour une évolution monoharmonique d'ordre 2 avec un jeu de denture J_b de 0.1 mm.

Les résultats montrent une augmentation des coefficients d'autant plus importante que le pourcentage augmente. Cela signifie alors que les efforts maximums aux dentures augmentent.

En observant les courbes à 2.5 et 3.75 %, on se rend compte de l'influence de l'acyclisme. En effet, il apparaît pour le pourcentage de 1 % un saut d'amplitude relatif aux pertes de contacts à l'approche des vitesses critiques d'engrènement. Passé ce saut, la phase de vol libre existe toujours mais s'estompe au fur et à mesure de l'augmentation de la vitesse, le second membre ne devenant négatif qu'à partir du rapport 1.38. Pour les 2 autres valeurs de pourcentages, il devient négatif à partir de 0.98 et 0.8 et on observe alors de fortes oscillations. Celles-ci sont dues aux effets inertiels causés par la vitesse de rotation variable qui agissent pendant la phase de vol libre en augmentant les vitesses linéaires des dentures. Il apparaît alors soit des chocs importants sur les flancs rétro des dents avec des vitesses conséquentes, soit des reprises de contact sur le flanc direct avec des impacts d'autant plus important que la phase de vol libre est importante.

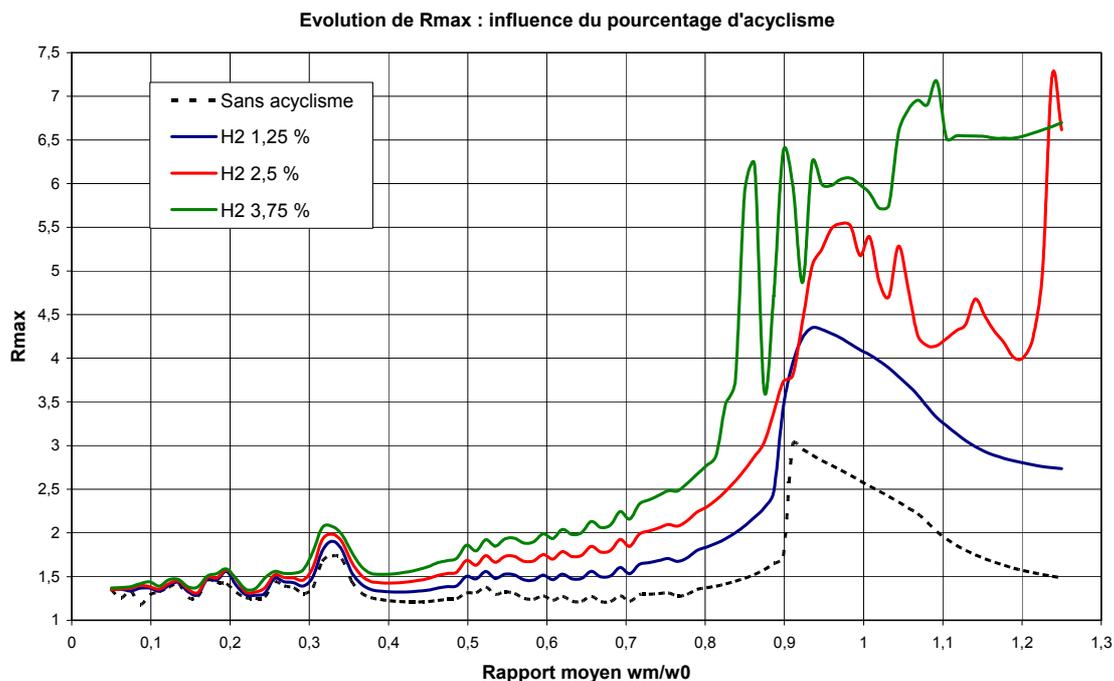


Figure III-23 : Influence du pourcentage d'acyclisme

La Figure III-24 donne les évolutions de l'erreur de transmission pour le pourcentage de 3.75 % aux vitesses immédiatement inférieure et supérieure à la vitesse de vol libre. Elle montre qu'au-delà de cette vitesse, l'erreur de transmission devient négative, il y a donc une phase de vol libre à l'intérieur du jeu de denture.

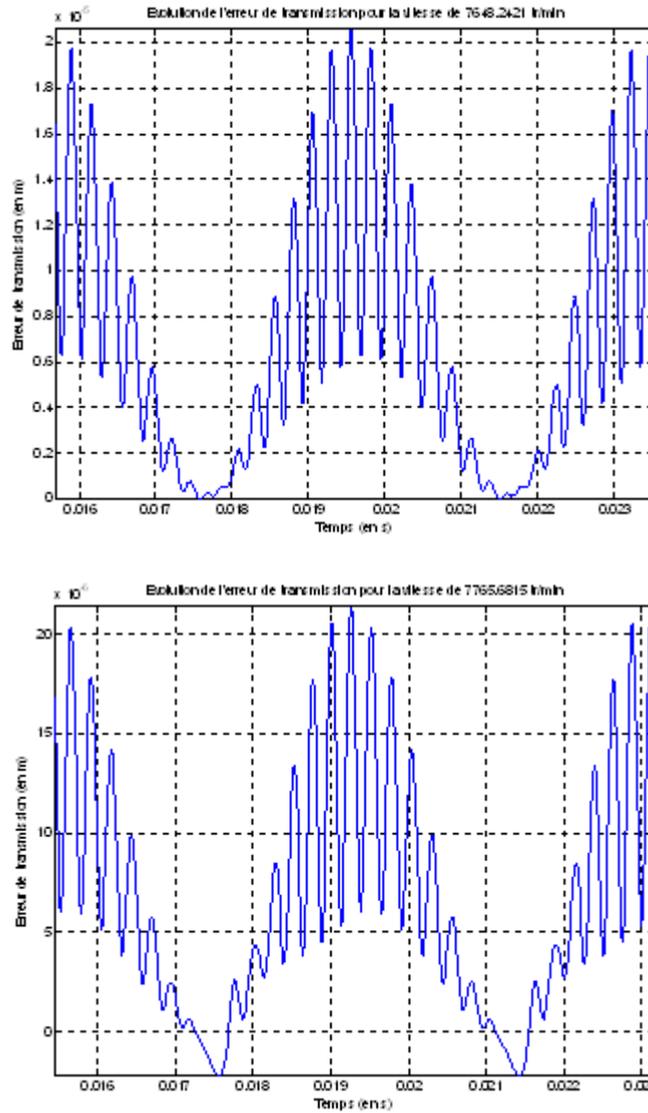


Figure III-24 : Evolution des erreurs de transmission autour de la vitesse de vol libre (3.75 % d'acyclisme)
haut : vitesse inférieure, *bas* : vitesse supérieure

Une augmentation de la largeur des pics de résonances apparaît également aux vitesses critiques d'engrènement. Ces augmentations sont dues à la forme sinusoïdale de la vitesse de rotation. Etant donné que les résonances sont données aux vitesses moyennes, il se peut que pour certaines vitesses et certains pourcentages, cette moyenne soit atteinte et dépassée par d'autres vitesses. Ce phénomène est causé par l'amplitude de la variation de la vitesse. En d'autres termes, pour une vitesse moyenne Ω_{01} au niveau ν , les fluctuations des niveaux $\nu-1$ et $\nu+1$ dépassent Ω_{01} .

Cette situation est illustrée Figure III-25 pour le rapport $\frac{1}{3}$. La courbe bleue donne la vitesse à ce rapport, celles en rouge et en vert aux rapports immédiatement inférieurs et supérieurs. Les lignes horizontales désignent les vitesses moyennes.

Ces dernières sont dépassées par les niveaux $\nu-1$ (rouge) et $\nu+1$ (vert). L'influence du pourcentage d'acyclisme est alors manifeste, il influe sur la largeur des pics de résonances et permet au système d'être excité sur une plus large gamme de vitesses.

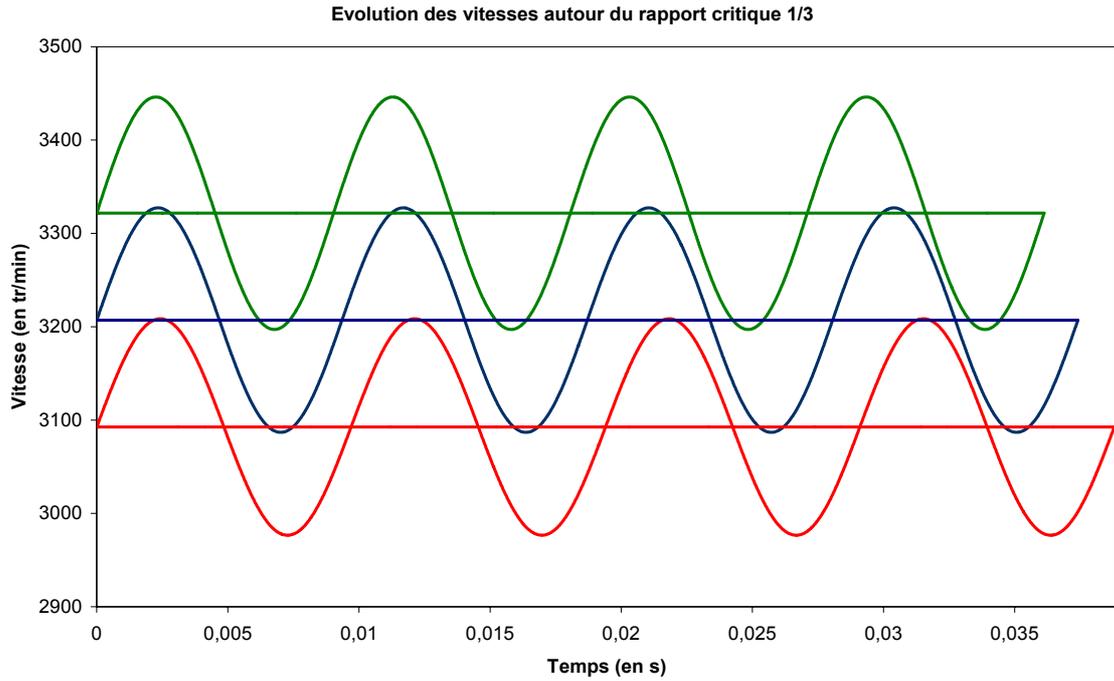


Figure III-25 : Influence du pourcentage sur les évolutions autour des vitesses critiques d'engrènement

La suite de l'étude porte sur l'influence d'un pourcentage d'acyclisme dépendant de la vitesse moyenne de rotation. Pour cela, son évolution sera linéairement décroissante de sorte qu'il prendra les valeurs de 3.75 % pour le rapport de 0.05 et de 0.5 % pour le rapport de 1.25. La Figure III-26 donne les évolutions de R_{max} pour l'harmonique 2, en comparant avec celles pour des pourcentages fixes de 1.25 et 2.5 %.

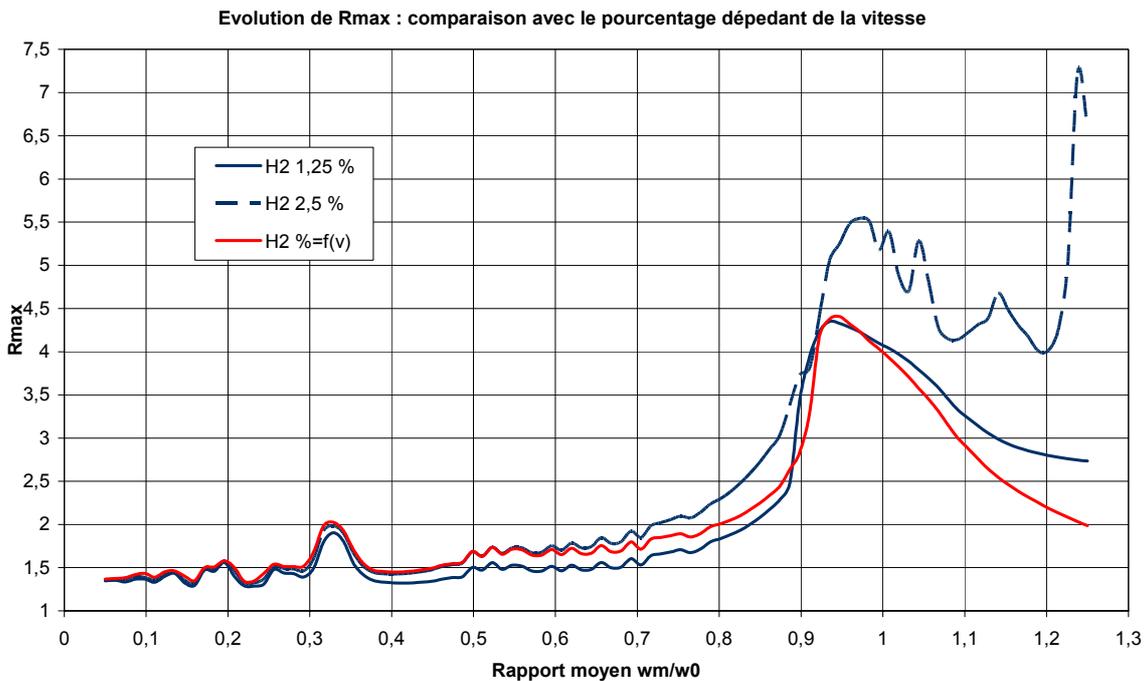


Figure III-26 : Influence du pourcentage dépendant de la vitesse de rotation

La comparaison montre qu'il est bénéfique de réduire le pourcentage aux abords des hautes vitesses. Les pertes de contacts sont alors limitées, hormis aux vitesses critiques d'engrènement. De plus, lorsque les situations de chocs rétro n'apparaissent pas dans le cas de pourcentage constant (1.25 %), il semble qu'une diminution du pourcentage en fonction de la vitesse abaisse les facteurs dynamiques en limitant les effets d'inerties.

V.3.2. Influence des harmoniques

L'analyse considère une vitesse d'harmonique d'ordre 2 et une vitesse multiharmonique. Le jeu de denture est de 0.1 mm. Les résultats sont donnés Figure III-27.

Dans la configuration monoharmonique, plus l'ordre est élevé et plus les efforts aux dentures sont élevés. Dans le cas multiharmonique, les résultats montrent une faible influence par rapport à l'harmonique 2. Ceci est en grande partie dû à la modélisation de la vitesse privilégiant l'ordre 2 par rapport aux ordres 4 et 6. La présence du terme $\omega_n = n \Omega_{10}$ introduit avec l'accélération angulaire du pignon introduit des effets d'inerties. Ceci est visible en considérant l'harmonique H_4 pour lequel les coefficients sont très importants. Ainsi en considérant un pourcentage d'acyclisme relativement faible, l'harmonique peut engendrer d'importants efforts.

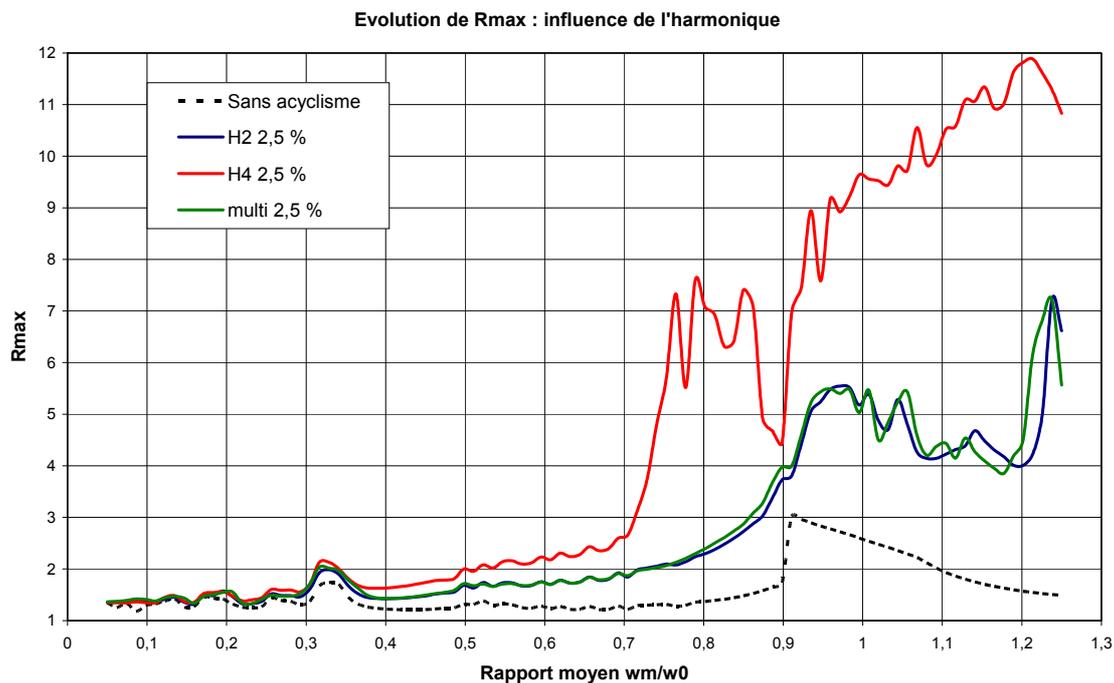


Figure III-27 : Influence des harmoniques

Il faut toutefois rester prudent concernant les valeurs de R_{max} . En effet, celles-ci sont données pour le maximum des efforts dynamiques. Or dans le cas de pertes de contacts ou de chocs rétro, ces efforts deviennent très importants sur des temps très courts. Ces situations se produisent lorsque le contact s'établit après la phase de vol libre soit sur le flanc direct, soit

sur le flanc rétro. De plus, des rebonds peuvent apparaître à la suite de ces reprises de contacts.

La Figure III-28 donne les évolutions des coefficients dynamiques pour les harmoniques 2 et 4 à un pourcentage de 2.5 %. Pour l'ordre 2, les valeurs présentent des augmentations à la reprise de contacts sur le flanc direct, mais oscillent ensuite autour de 2. L'harmonique 4 présente quand à lui des rebonds, mais oscille ensuite autour de 3.

Les chocs produisent des efforts intenses sur des temps très courts, ce qui semble négligeable. Mais il faut remarquer que si ces chocs se répètent sur des milliers de tours, il peut y avoir apparition d'usure de la denture ou de gêne acoustique.

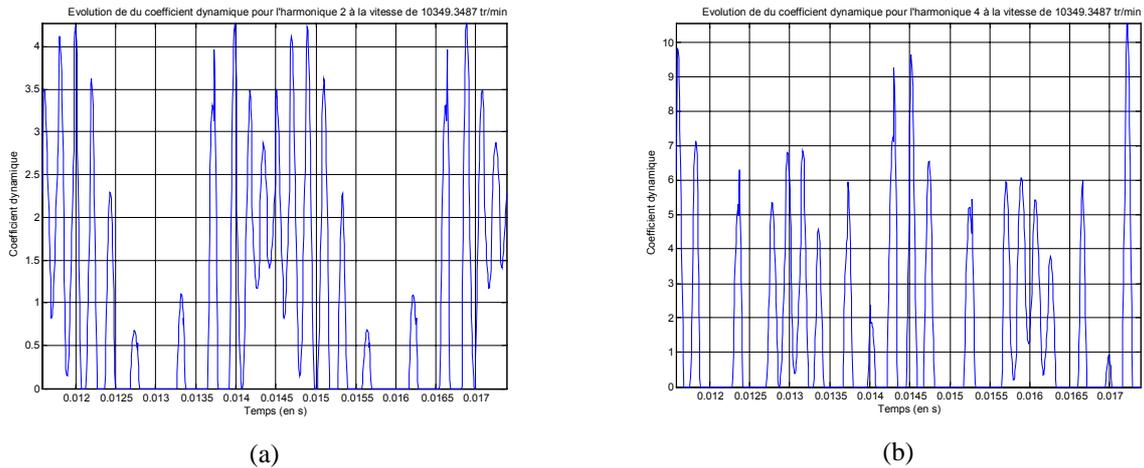


Figure III-28 : Coefficients dynamiques
(a) : ordre 2 - (b) : ordre 4

V.3.3. Influence du couple résistant

Il est démontré numériquement et expérimentalement que la charge n'influence pas les coefficients dynamiques dans le cas d'engrenages sans défauts à des vitesses de rotation constantes. Dans le cas de l'acyclisme, la majeure partie des études s'attache à caractériser les phénomènes de « rattle », c'est-à-dire à couple nul ou très faible.

Une analyse est effectuée en considérant un harmonique d'ordre 2, un pourcentage de 2.5 %, un jeu de dentures de 0.1 mm et un couple résistant de 250, 500 et 750 N.m. Les courbes sont superposées à l'évolution de R_{\max} sans acyclisme sur la Figure III-29.

L'augmentation du couple réduit l'apparition des chocs rétro de dentures comme l'illustre les courbes à 250 N.m et 500 N.m. Lorsque ceux-ci s'estompent, le coefficient se réduit d'autant plus que le couple est important (750 N.m) en diminuant les effets d'inerties. De plus, son augmentation permet de repousser la vitesse critique de vol libre vers des plus hautes valeurs. Dans le cas à 250 N.m, elle se situe au rapport 0.98. A celui-ci R_{\max} oscille dénotant des phénomènes de pertes de contacts alors qu'à 500 N.m ce n'est plus le cas, le rapport étant de 1.38.

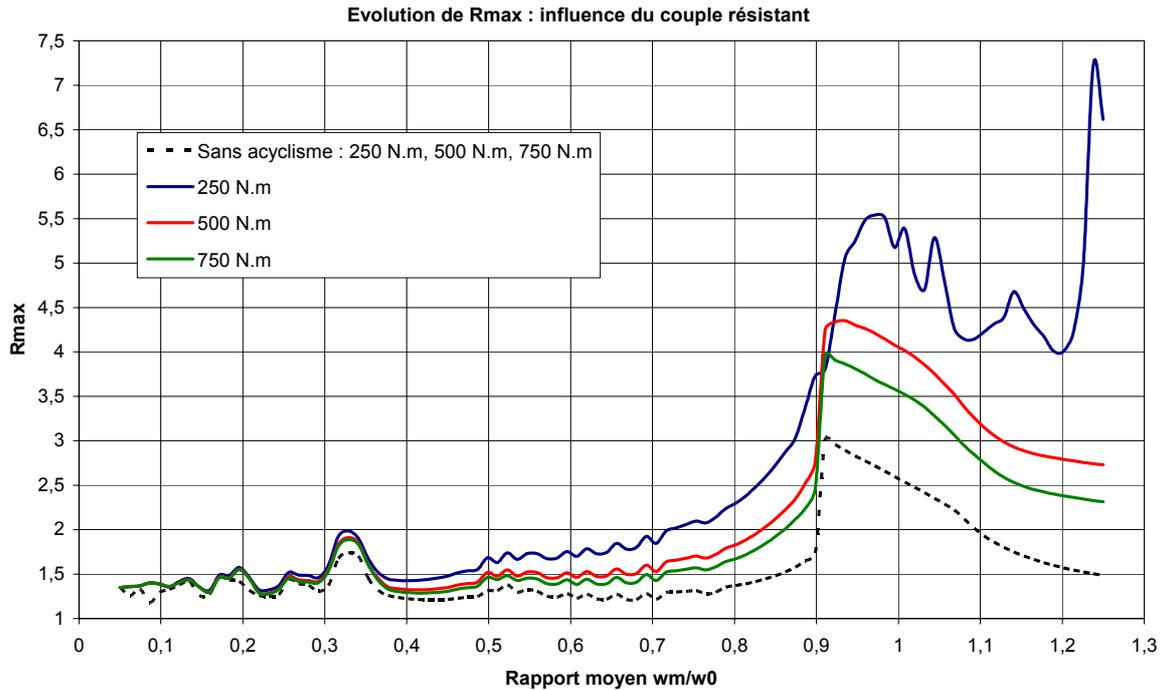


Figure III-29 : Influence du couple résistant

V.4. INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DES ENGRENAGES

V.4.1. Influence de la forme de la raideur

Les modèles de raideur jouent un rôle important sur la stabilité du système. Il a été démontré que l'utilisation de dentures hélicoïdales permet de réduire les zones d'instabilités. Le but est ici d'étudier l'impact des 2 types de dentures sur les réponses dynamiques.

La Figure III-30 propose le résultat d'un calcul comparant les 2 modèles de dentures pour une simulation considérant une modulation de raideur α_{km} de 0.1, un pourcentage de 2.5 %, l'harmonique H_2 et un jeu de denture de 0.1 mm.

Les résultats montrent que l'utilisation de dentures droites est préjudiciable par rapport aux dentures hélicoïdales. Dans ce dernier cas, les coefficients dynamiques sont beaucoup moins importants, qu'il y est ou pas pertes de contacts ou de chocs rétro. De plus le rapport critique d'apparition du vol libre dans le cas du sinus est de 0.977, inférieur à celui du modèle en créneau. Malgré cela et l'apparition de pertes de contacts prématurées, les maximums des coefficients dynamiques restent inférieurs.

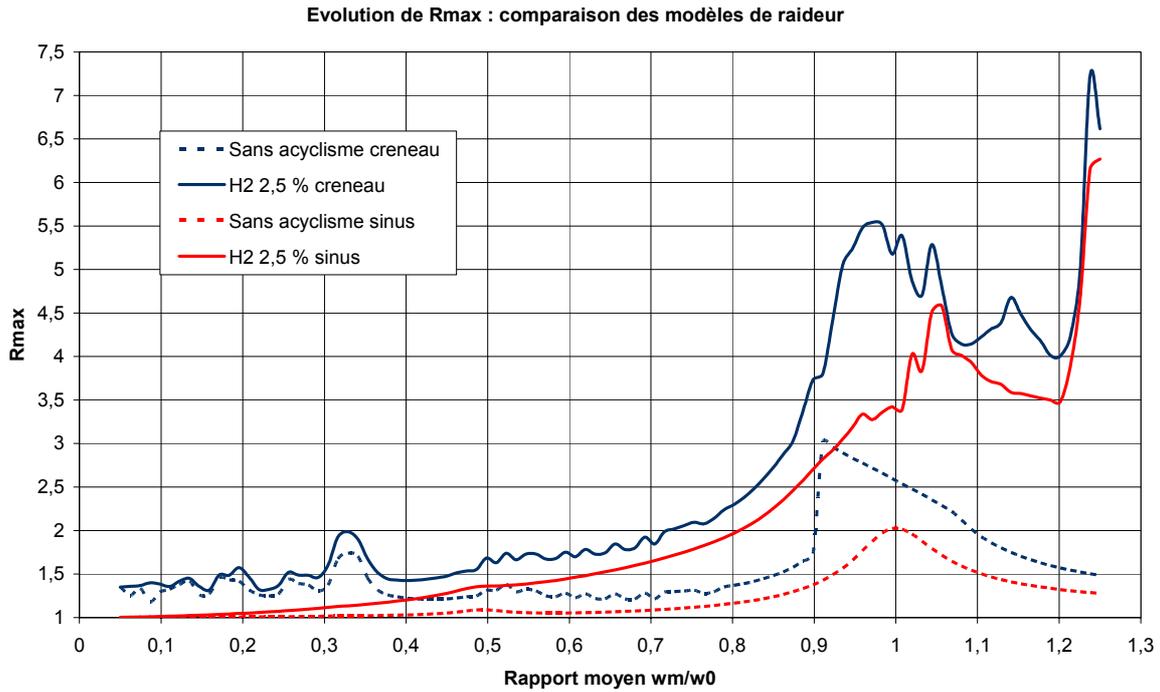


Figure III-30 : Influence du modèle de variation de raideur

V.4.2. Influence de la modulation de raideur

La modélisation de la raideur s'effectuant à l'aide de fonctions simples, tantôt en créneau, tantôt en sinus, son amplitude de variation est déterminée par le coefficient α_{km} . Ce dernier influe sur le comportement de l'engrenage comme il a été vu dans la partie IV sur la stabilité. Afin d'illustrer son influence sur les réponses dynamiques, la Figure III-31 est donnée. Elle représente l'évolution de R_{max} en considérant le couple d'engrenages du Tableau III-10 avec une modulation de raideur de 0.15 et 0.2. Le calcul est effectué pour un pourcentage de 2.5 % d'harmonique H_2 .

Les résultats montrent qu'une augmentation de α_{km} engendre des coefficients plus importants, donc des efforts maximaux plus intenses.

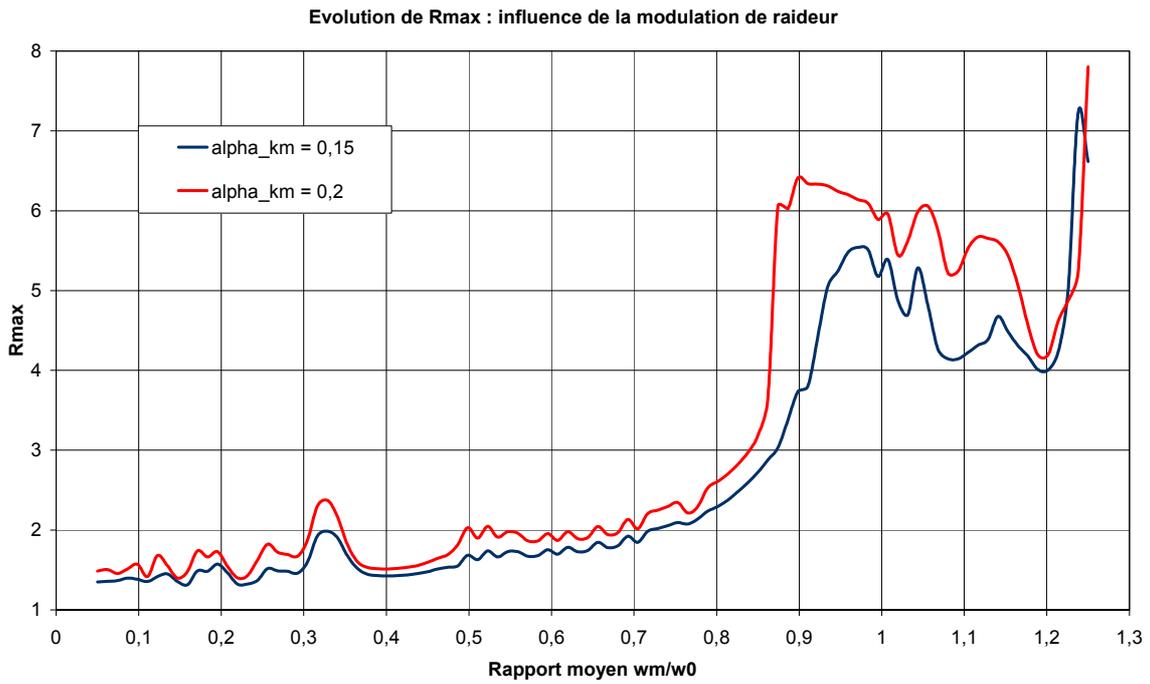


Figure III-31 : Influence de la modulation de raideur

V.4.3. Influence du jeu de denture

La Figure III-32 illustre le résultat de la simulation pour un harmonique d'ordre 2 et un pourcentage de 2,5 %. Les caractéristiques des engrenages sont celles définies au Tableau III-10. Les jeux considérés sont de 0,1 mm et 0,05 mm.

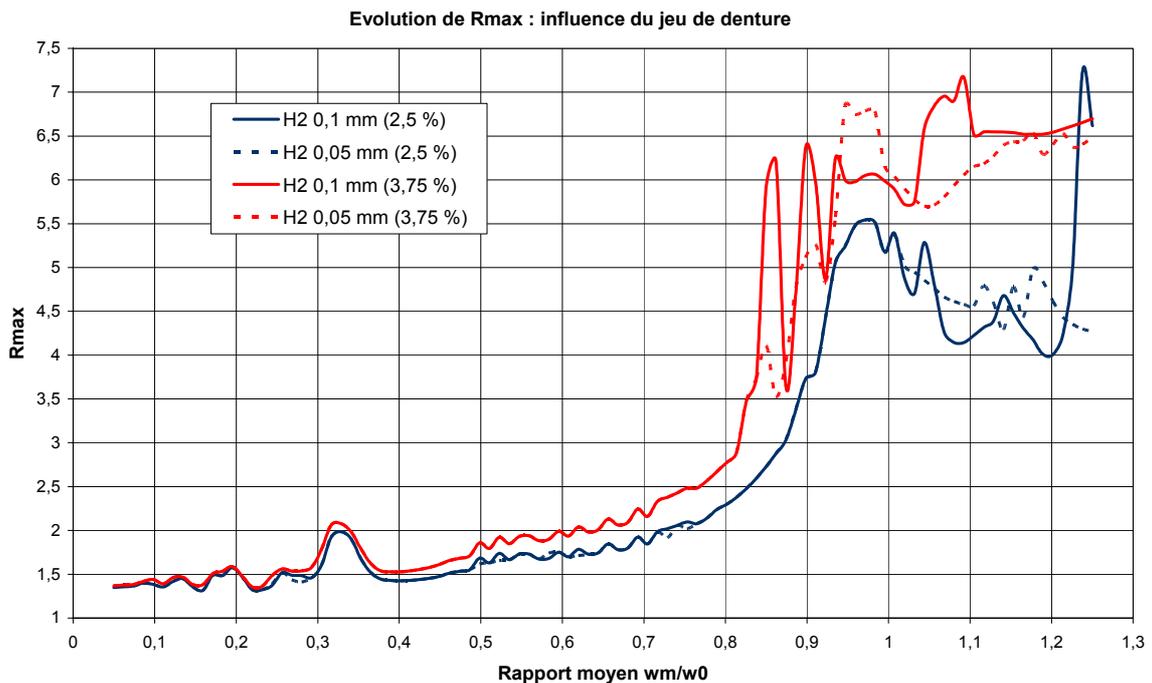


Figure III-32 : Influence du jeu de denture

La caractéristique principale d'une diminution du jeu est de filtrer les chocs. Il apparaît alors moins de phénomènes de rebonds, notamment après la reprise de contact sur le flanc direct. La Figure III-33 illustre ce propos par les évolutions des erreurs de transmission au rapport de 1.13. Celles-ci sont données pour le dernier tour de rotation du pignon.

En limitant ces phénomènes de rebonds, il y a également une limitation du bruit émis. De plus, une diminution du jeu réduit les efforts suite à la limitation du déplacement et de la vitesse de la dent en phase de vol libre.

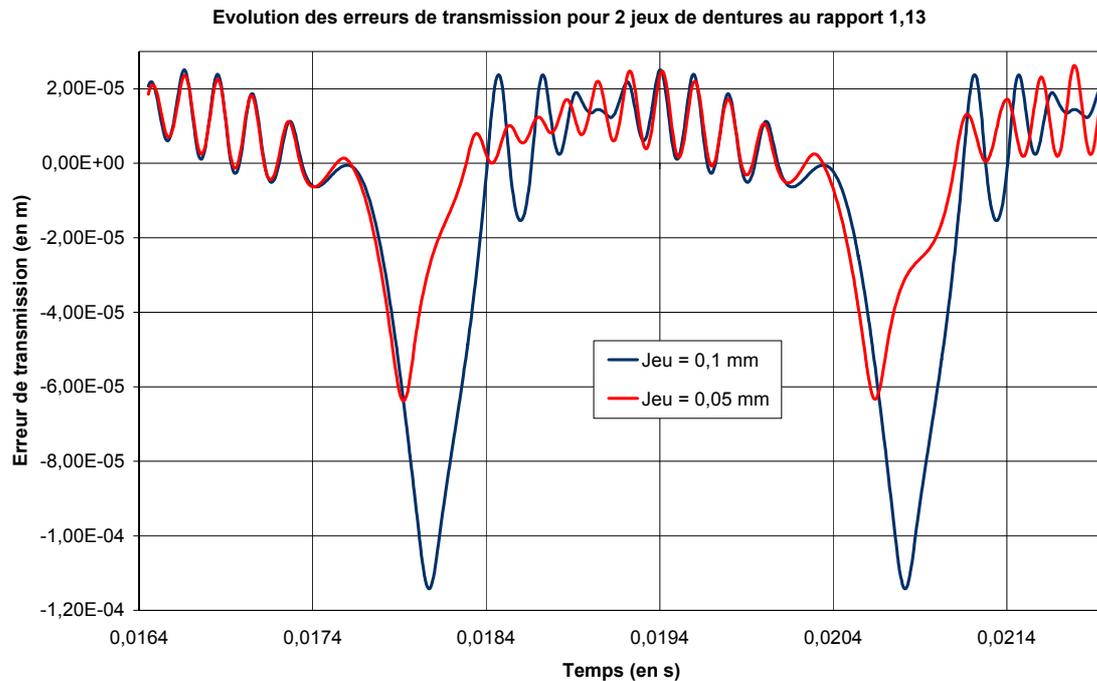


Figure III-33 : Evolution des erreurs de transmission pour les 2 jeux de dentures

V.4.4. Influence du rapport de réduction

Le rapport de réduction est caractérisé en comparant le couple d'engrenages utilisés jusqu'à présent avec un couple comprenant un pignon de 30 dents et une roue de 36 dents, soit un rapport de réduction de $\frac{5}{6}$ au lieu de $\frac{2}{3}$. Les largeurs des engrenages, les caractéristiques d'amortissement et de charge des 2 couples sont identiques. L'analyse est menée pour une variation en créneau et en sinus, un pourcentage de 2.5 % et un jeu de denture de 0.1 mm. Les résultats sont portés sur la Figure III-34.

Il semble qu'un rapport de réduction important soit bénéfique et conduise à des coefficients R_{\max} plus faibles. En abaissant le nombre de dents de la roue et en gardant la même largeur l'inertie polaire est ainsi diminuer. De cette façon, les effets inertiels sont réduits et les pertes de contacts ne perturbent plus autant la dynamique de la réponse. L'intérêt semble alors, lorsque le rapport de réduction ne peut être changé, de diminuer ces inerties de façon à limiter leurs effets dans les phases de vol libre.

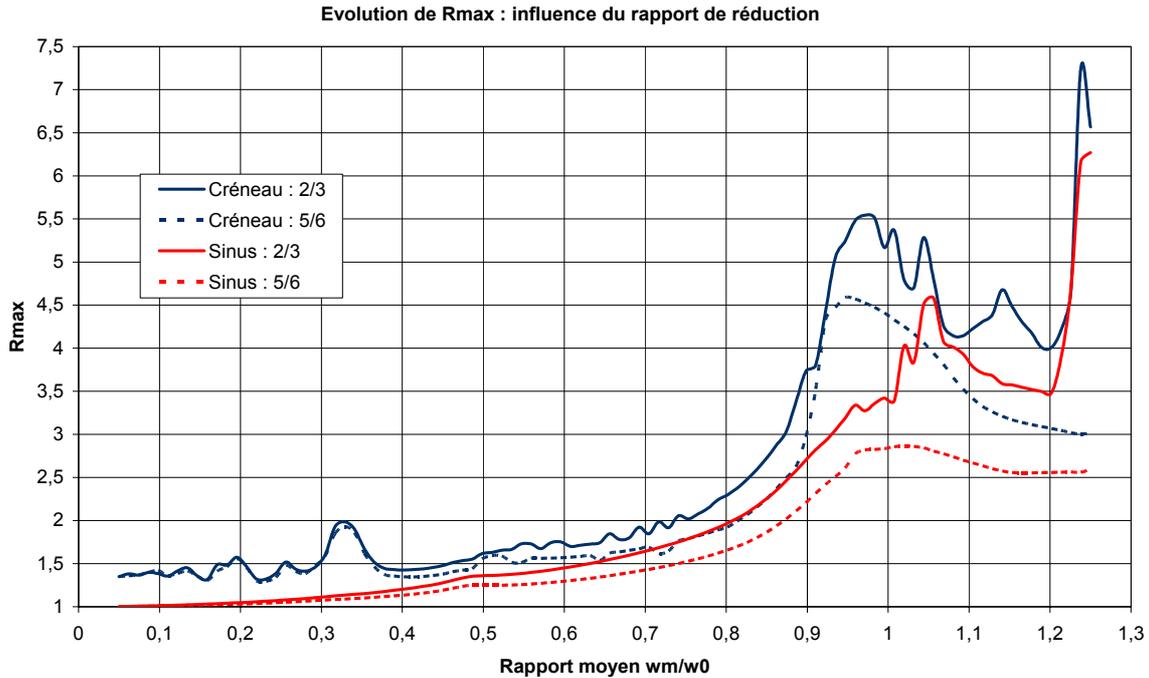


Figure III-34 : Influence du rapport de réduction

V.5. CONCLUSION SUR L'ETUDE PARAMETRIQUE

L'étude paramétrique a permis de faire ressortir des points importants quant à l'évolution des réponses dynamiques d'un couple d'engrenages sous acyclisme en ce qui concerne les caractéristiques des fluctuations de vitesses et les paramètres géométriques des engrenages. Il apparaît qu'en choisissant les paramètres de conception adéquats, les effets de l'acyclisme peuvent être réduits. Les principaux résultats et constats sont résumés ci-dessous :

- L'introduction de l'acyclisme génère des effets d'inerties entraînant des pertes de contacts entre dentures à des vitesses autres que les vitesses de rotation critiques déterminées pour des vitesses constantes. Il existe alors une vitesse critique appelée vitesse critique de vol libre au-delà de laquelle il y a des pertes de contacts. Cette vitesse est dépendante à la fois de l'acyclisme et de la géométrie des engrenages.
- Le pourcentage d'acyclisme et les ordres des harmoniques [132] augmentent les efforts aux dentures suite aux effets d'inerties. Il est alors souhaitable de réduire au maximum ce pourcentage, paramètre beaucoup plus flexible que l'harmonique qui est imposé par la technologie du moteur.
- L'introduction de charge élevée permet de diminuer les effets de l'acyclisme [132]. Ce point est particulièrement important car, en régimes constants, le chargement n'a pas d'influence sur les coefficients dynamiques.
- Il est préférable d'utiliser des dentures hélicoïdales. Un fort rapport de conduite est à envisager pour réduire les fluctuations de la raideur d'engrènement.
- Un jeu de denture faible permet de filtrer les chocs.

- Le rapport de réduction joue un rôle par l'intermédiaire de l'inertie de la roue. Il semble qu'une diminution de celle-ci procure moins d'efforts aux dentures. Ceci vérifie les observations du paragraphe III.2.4.2 sur les amplitudes des excitations.

VI. CONCLUSION

Ce chapitre propose une étude des transmissions par engrenages sous régimes transitoires, en prenant en compte l'acyclisme de rotation du pignon (et par conséquent de la roue). Un modèle torsionnel simple a été mis en place, ne prenant en compte que les engrenages de sorte que l'étude soit focalisée sur le comportement propre des engrenages.

Plusieurs méthodes de résolution analytiques ont été introduites dans le double objectif d'appréhender de manière analytique le comportement dynamique et de pouvoir calibrer des méthodes numériques qui demeurent clairement les seules alternatives réalistes pour des systèmes de tailles plus importantes. D'une manière générale, l'accord entre les résultats analytiques et numérique est très satisfaisant.

Le deuxième point concerne l'étude de la stabilité pour des systèmes à excitations paramétriques avec modulations de fréquences et amplitudes. Il a été montré que de nouvelles zones instables apparaissent autour des bandes latérales et qu'elles interagissent avec les zones d'instabilités principales. Il a été également confirmé que l'amortissement joue un rôle crucial en réduisant les largeurs des zones instables et en rejetant ces dernières vers les valeurs de fluctuations de raideur plus élevées. En comparant, les résultats obtenus avec des raideurs de type créneau (dentures droites) et sinusoïdale (proche des conditions en dentures hélicoïdales), il a été montré que l'avantage bien connu des dentures hélicoïdales en régime permanent se retrouve sous acyclisme.

Une étude paramétrique conclue ce chapitre et a permis de mettre en évidence quelques paramètres clés contrôlant la réponse dynamique d'engrenages soumis à des fluctuations périodiques de vitesses.

Cette étude est bien évidemment limitée à une modélisation très simplifiée d'engrenages, elle sera étendue à des modèles plus réalistes dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

ETUDE D'UN REDUCTEUR SOUS ACYCLISME EN PRESENCE DE DEFAUTS D'EXCENTRICITES

I. INTRODUCTION

Dans l'optique de caractériser le comportement dynamique global d'une transmission par engrenages réelle, il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des éléments mécaniques tels les arbres, paliers,... mais également les défauts de montage et de géométrie.

Le travail entrepris au chapitre précédent a permis de montrer l'importance de la prise en compte de l'acyclisme et son influence directe sur les courbes de réponse. Toutefois, la géométrie était supposée parfaite et le modèle était extrêmement simplifié (un seul degré de liberté). L'objectif de ce dernier chapitre consiste donc à introduire des défauts géométriques (des excentricités car elles influent fortement sur le jeu de denture) dans un modèle en flexion, torsion, traction - compression à même de décrire des systèmes mécaniques relativement complexes. Les analyses s'appuient pour une large part sur les développements théoriques relatifs aux conditions de contact instantanées décrits au chapitre II.

Dans un premier temps, l'analyse de l'influence d'excentricités sera abordée en considérant un modèle torsionnel de réducteur qui, à la différence du précédent chapitre, introduira une fonction raideur d'engrènement plus réaliste car déterminée numériquement au cours de la résolution des équations du mouvement. La seconde partie sera consacrée à l'extension du modèle afin de prendre en compte les mouvements de flexion et de traction - compression. Enfin, la troisième et dernière partie sera dédiée à l'étude d'un réducteur en présence d'excentricités et aux interactions entre excentricités et acyclisme.

II. ETUDE TORSIONNELLE EN PRESENCE D'EXCENTRICITES

Dans la continuité des travaux présentés plus avant, des modèles de complexité croissante sont successivement présentés et analysés.

II.1. QUELQUES RESULTATS DE CALCULS DU JEU DE DENTURE

Il est intéressant de tracer l'évolution du jeu de denture en fonction des excentricités. En effet, au chapitre précédent, il a été vu que l'acyclisme engendre des chocs rétro lorsque le chargement des engrenages est trop faible pour contrer les effets d'inerties. Les résultats suivants ont été obtenus pour 2 couples d'engrenages différents, l'un avec un rapport de réduction unitaire et l'autre non unitaire. Les caractéristiques des couples I et II sont données dans le Tableau IV-1. Les fluctuations de vitesse sont composées d'un seul harmonique. Les évolutions sont données pour 5 tours de rotation du pignon.

Le couple d'engrenages I correspond à un réducteur industriel avec des nombres de dents du pignon et de la roue premiers entre eux, de sorte à uniformiser l'usure des dentures. Le couple II est représentatif d'un inverseur.

	Couple I		Couple II	
	Pignon	Roue	Pignon	Roue
Nombre de dents	23	37	18	18
Module nominal (en mm)	4		4	
Jeu normal J (en μm)	150			
Harmonique n	1			
Phase φ_n	0			
Pourcentage	2.5			

Tableau IV-1 : Caractéristiques des couples d'engrenages pour le calcul du jeu de denture

La Figure IV-1 donne l'évolution du jeu pour le couple I avec une excentricité de 50 μm sur le pignon et égale à zéro sur la roue, les déphasages associés sont nuls ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

L'importance des excentricités est mise en évidence car pour des valeurs suffisamment élevées, le jeu peut devenir négatif (ce qui est en réalité impossible) et indique un risque de blocage en fonctionnement avec rupture éventuelle des dents.

Sur la Figure IV-2 le jeu est calculé pour le même couple mais avec une excentricité identique de 50 μm sur le pignon et la roue, un déphasage nul pour la roue, des déphasages pour le pignon de 0 et π rad. L'utilisation d'engrenages avec des nombres de dents premiers entre eux engendrent alors une périodicité beaucoup plus longue. L'introduction d'un déphasage ne fait que décaler temporellement l'évolution de ce jeu.

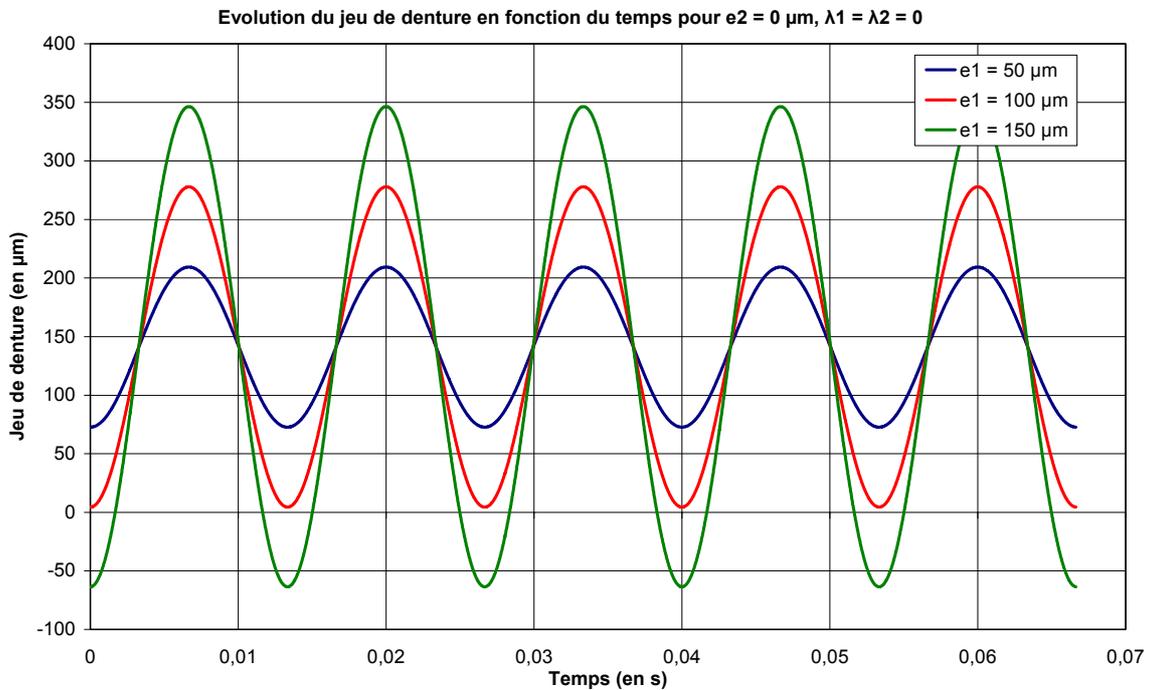


Figure IV-1 : Calcul du jeu pour $e_1 = 50 \mu\text{m}$, $e_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

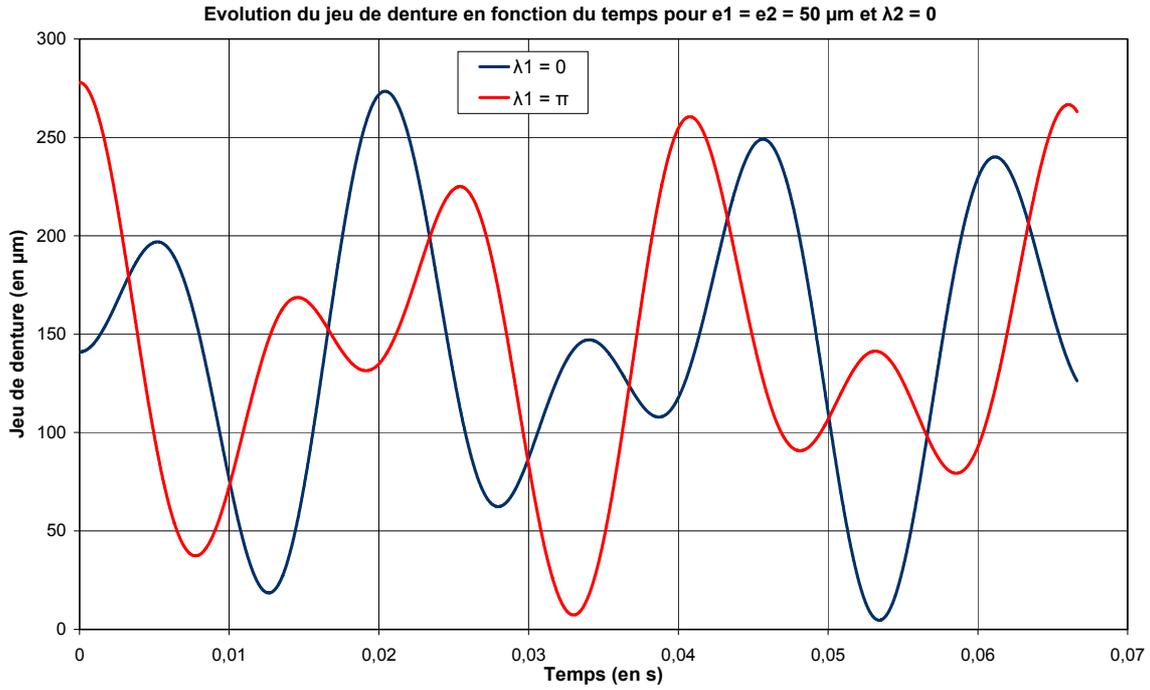


Figure IV-2 : Calcul du jeu pour $e_1 = e_2 = 50 \mu m$, $\lambda_2 = 0$

Le dernier résultat Figure IV-3 illustre le calcul de plusieurs jeux en fonction de diverses combinaisons d'excentricités. La phase initiale sur la roue est conventionnellement mise à zéro. Les excentricités du pignon sont de 50 et 75 μm alors que celle de la roue est de 50 μm . Pour des excentricités identiques sur le pignon et sur la roue de 50 μm , les phases du pignon sont de 0 et π rad.

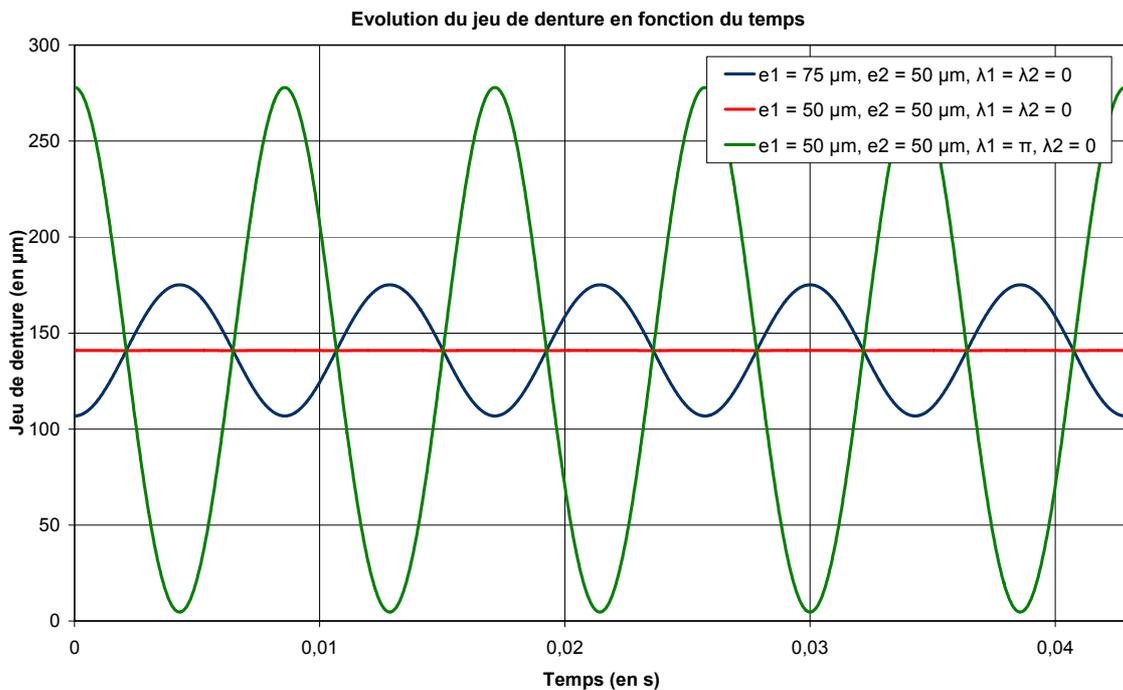


Figure IV-3 : Calcul des jeux de denture pour un rapport de réduction unitaire

On constate que des excentricités identiques avec déphasage nul sur le pignon et la roue conduisent à un jeu de denture quasi inchangé par rapport à sa valeur nominale tandis que les autres combinaisons modulent fortement les amplitudes de ce jeu. Ces résultats soulignent donc l'importance de la prise en compte de ce type de défaut, avec d'un point de vue pratique, la possibilité de blocage et rupture pour un jeu instantané qui s'annule.

II.2. MODELE TORSIONNEL EN PRESENCE D'EXCENTRICITES

II.2.1. Restriction du modèle global

La restriction du modèle définit au chapitre II permet de réécrire les vecteurs de structures selon (IV-1) et (IV-2) :

$$V_{1i} = \begin{bmatrix} -e_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{ff}) \\ e_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2) \cos(\beta_b) \sin(\alpha_{ff}) \end{bmatrix} \quad (IV-1)$$

$$V_{2i} = \begin{bmatrix} (e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) \cos(\alpha_{ff}) + Rb_1) \cos(\beta_b) \\ (-e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2) \cos(\alpha_{ff}) + Rb_2) \cos(\beta_b) \end{bmatrix} \quad (IV-2)$$

Dans ces conditions, on remarque que les vecteurs ne font plus apparaître de manière explicite la position du point de contact potentiel M_{ji} . Le défilement des lignes de contacts dans l'algorithme de calcul n'est alors plus nécessaire. Ainsi, l'écriture suivante sera adoptée pour cette partie : $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\Pi_i = \Pi$, $V_{ji} = V_j$, $V_i = V$, $j = 1, 2$.

La formulation des matrices masse M_{eng} et raideur K_{eng} ainsi que le second membre des efforts F_{eng} du système différentiel se déduit de la formulation globale par :

$$M_{eng} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (IV-3)$$

$$K_{eng} = \Pi \sum_{i=1}^{N(t)} k_i V V^T \quad (IV-4)$$

$$F_{eng} = \sum_{i=1}^{N(t)} \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} k_i V J_b(t) + \begin{bmatrix} -I_1 \dot{\Omega}_1 + C_m \\ -I_2 \dot{\Omega}_2 + C_R \end{bmatrix} \quad (IV-5)$$

Le calcul de la raideur s'effectue en considérant le défilement des lignes de contacts et en utilisant une formulation selon la norme ISO 6336 telle que définie au chapitre I.

Afin d'éliminer le mode de corps rigide classique dans les modèles torsionnels, la charge résistante est simulée par une raideur de torsion k_{charge} conduisant à la matrice de raideur et au vecteur second membre suivants :

$$K_{eng} = \Pi \sum_{i=1}^{N(t)} k_i V V^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{charge} \end{bmatrix} \quad (IV-6)$$

$$F_{eng} = \sum_{i=1}^{N(t)} \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} k_i V J_b(t) + \begin{bmatrix} -I_1 \dot{\Omega}_1 + C_m \\ -I_2 \dot{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (IV-7)$$

NB : Les inerties des moteurs et freins ne sont pas introduites dans ce type de modèle.

II.2.2. Données de l'étude

Les données des engrenages et les caractéristiques du calcul sont précisées dans les Tableaux IV-2 et IV-3. Le nombre total de périodes de rotation du pignon est de 4, le calcul du maximum du coefficient dynamique ne s'effectuant que sur le dernier tour. Le nombre de pas par période d'engrènement moyenne est de 64, le nombre de segments N de discrétisation des lignes de contacts est de 20, la raideur k_{charge} est de 10^5 N/m/rad. Enfin, l'amplitude des fluctuations de vitesse est supposée indépendante de la vitesse de rotation. En ce qui concerne le modèle d'excentricité, seule une excentricité sur le pignon sera considérée et les déphasages λ_1 et λ_2 seront nuls.

Le modèle de variation de vitesse adopté correspond à un acyclisme monoharmonique. L'accélération angulaire et l'angle de rotation du pignon se déduisent de cette expression, les expressions de l'angle de rotation de la roue, sa vitesse et son accélération angulaire sont calculées à l'aide des équations définies en Annexe II.

	Pignon	Roue
Angle de pression de taillage α_n (en °)	20	
Angle d'hélice primitive β (en °)	0	
Module réel (en mm)	6	
Nombre de dents Z_1	18	18
Largeur de l'engrenage (en mm)	20	20
Coefficient de saillie	1	1
Coefficient de creux	1.4	1.4
Jeu de denture J (en mm)	0.2	
Excentricités (en μm)	125	0
Déphasage λ_i des excentricités (en rad)	0	0

Tableau IV-2 : Caractéristiques du couple d'engrenages

Amortissement ξ	0.1
Plage de variation de vitesse moyenne (en tr/min)	100 – 6000
Harmonique n	1
Pourcentage de l'acyclisme ρ_n (en %)	5
Couple moteur C_m (en N.m)	25
Plage de variation du déphasage φ_1 (en rad)	0 - 2π

Tableau IV-3 : Données numériques de la simulation

II.2.3. Redéfinition de la vitesse critique de vol libre

Au chapitre II, une vitesse de rotation critique a été mise en évidence, au-delà de laquelle il y a apparition de séquences de vol libre et des chocs entre dentures. Celle-ci faisait intervenir le couple résistant qui est ici remplacé par une raideur de torsion. En reprenant la définition de (IV-5), le système de deux équations peut se réduire à une seule expression en fonction de l'erreur de transmission Δ_{tr}^e en présence des excentricités :

$$\tilde{m}_{eq} \ddot{\Delta}_{tr}^e + \Pi \sum_{i=1}^{N(t)} k_i \Delta_{tr}^e \cong \Pi \frac{1-\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N(t)} k_i J_b(t) + \frac{I_2 P_{e1} (C_m - I_1 \dot{\Omega}_1) + I_1 P_{e2} (C_R - I_2 \dot{\Omega}_2)}{I_2 P_{e1}^2 + I_1 P_{e2}^2} \quad (IV-8)$$

Avec :

- $\Delta_{tr}^e = P_{e1} \theta_1 + P_{e2} \theta_2$
- $P_{e1} = (-e_1 \sin(\Theta_1 - \lambda_1) \sin(\alpha_{ff}) + \varepsilon (e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1) + Rb_1)) \cos(\beta_b)$
- $P_{e2} = (e_2 \sin(\Theta_2 - \lambda_2) \sin(\alpha_{ff}) + \varepsilon (-e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2) + Rb_2)) \cos(\beta_b)$
- $\tilde{m}_{eq} = \frac{I_1 I_2}{I_2 P_{e1}^2 + I_1 P_{e2}^2}$

En supposant maintenant que les excentricités sont faibles devant les rayons de bases, telles que $P_{e1} \cong \varepsilon Rb_1 \cos(\beta_b)$ et $P_{e2} \cong \varepsilon Rb_2 \cos(\beta_b)$, le théorème de l'énergie cinétique appliqué aux mouvements de corps rigides conduit à :

$$C_r = \frac{1}{u} (C_m - I_1 \dot{\Omega}_1) + u I_2 \dot{\Omega}_1 \quad (IV-9)$$

L'équation du mouvement peut donc se réécrire sous la forme :

$$\ddot{\Delta}_{tr} + \Pi \omega_0^2 (1 + \alpha_{km} \Phi(t)) \Delta_{tr} \cong -\Pi \frac{1-\varepsilon}{2} \omega_0^2 (1 + \alpha_{km} \Phi(t)) J_b(t) + \frac{\cos(\beta_b)}{Rb_1 M_{eq}} (C_m - I_1 \dot{\Omega}_1) \quad (IV-10)$$

Avec :

$$- \sum_{i=1}^{N(t)} k_i = k_m (1 + \alpha_{km} \Phi(t))$$

$$- \omega_0^2 = \frac{k_m}{\tilde{m}_{eq}}$$

On retrouve alors une expression de la vitesse critique de vol libre en faisant apparaître le couple moteur constant et les paramètres de la vitesse monoharmonique qui s'exprime :

$$\Omega_{10}^{vl} = \sqrt{\frac{C_m}{I_1 n \rho_n}} \quad (\text{IV-11})$$

En utilisant les données des Tableaux IV-2 et IV-3, on obtient alors une vitesse critique de 4678 tr/min.

II.3. APPLICATIONS

II.3.1. Etude sans acyclisme

En considérant, dans un premier temps, une vitesse de rotation constante, les erreurs d'excentricités provoquent des pics de résonance de part et d'autre de la raie de fréquence la fréquence d'engrènement tels que :

$$\frac{\Omega_{10}}{\omega_0} = \frac{2}{k(Z_1 + i)}, \quad i = 0, 1, -1 \quad (\text{IV-12})$$

Le Tableau IV-4 regroupe les valeurs de Ω_{10} pour lesquelles il y a possibilités de résonances pour le couple d'engrenages considéré :

k	Ω_{10} (en tr/min)		
	$i = 0$	$i = 1$	$i = -1$
6	5200.69	4926.97	5506.62
7	4457.74	4223.12	4719.96
8	3900.52	3695.23	4129.96
9	3467.13	3284.65	3671.08
10	3120.42	2956.18	3303.97
11	2836.74	2687.44	3003.61
12	2600.35	2463.49	2753.31
13	2400.32	2273.99	2541.51

Tableau IV-4 : Vitesses critiques du couple d'engrenages sans acyclisme

La Figure IV-4 illustre l'évolution du coefficient R_{\max} du couple d'engrenages étudié pour une vitesse de rotation du pignon constante. Les droites en traits pleins représentent les vitesses critiques pour $i = 0$, les traits en pointillés longs pour $i = -1$, en pointillés courts pour $i = 1$. Pour ne pas surcharger la Figure, seules les vitesses significatives ont été tracées. On constate qu'il y a bien correspondances entre certaines vitesses du Tableau IV-4 et les pics observés sur la courbe de réponse.

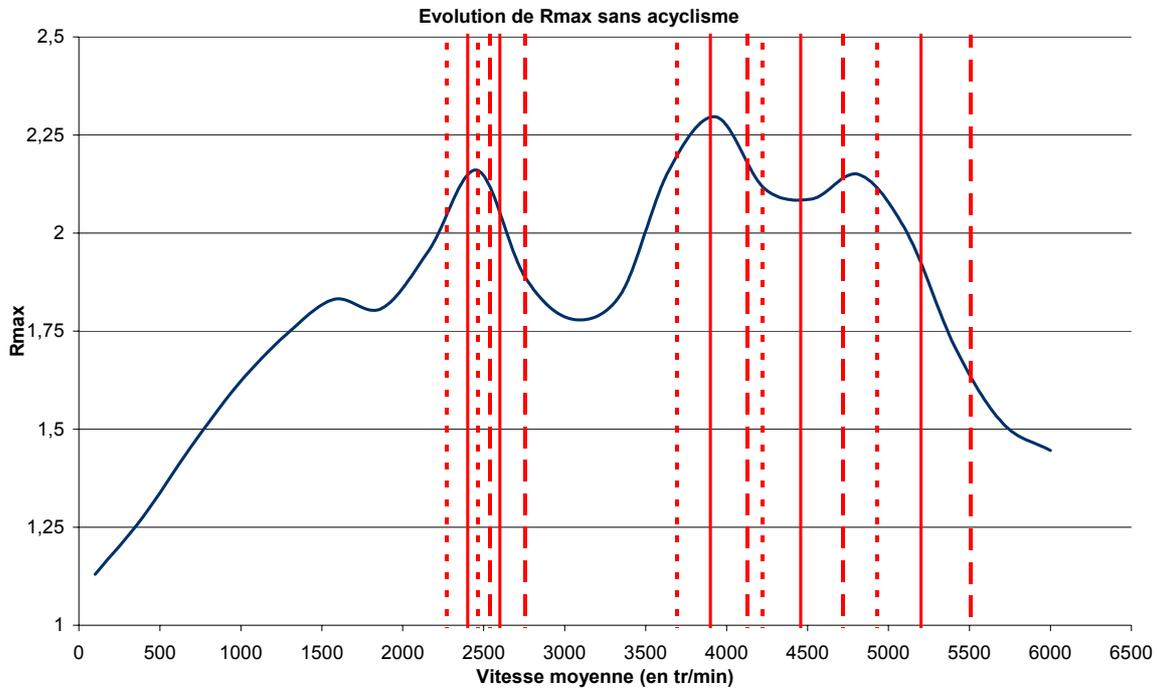


Figure IV-4 : Evolution pour le couple d'engrenages sans acyclisme
 - - - : $i = 1$ - ... : $i = -1$

II.3.2. Etude avec acyclisme : influence des déphasages lors des phases d'impacts

L'introduction de l'acyclisme fait apparaître les phénomènes de séparations de dents et des chocs comme le montre la Figure IV-5. A partir de la vitesse critique de vol libre, les coefficients augmentent très fortement et cela pour tous les déphasages considérés. Il semble que les déphasages jouent un rôle significatif dans les phases de vol libre ou lorsque les chocs rétro apparaissent.

On constate également une augmentation générale des coefficients dynamique en présence d'acyclisme en accord avec les observations faites au chapitre III pour un engrenage différent. La Figure IV-6 représente les évolutions temporelles des facteurs dynamiques en dessous et au dessus de la vitesse critique de vol libre. On y voit alors que les facteurs deviennent nuls juste au dessus de cette vitesse conduisant à une situation de perte de contacts.

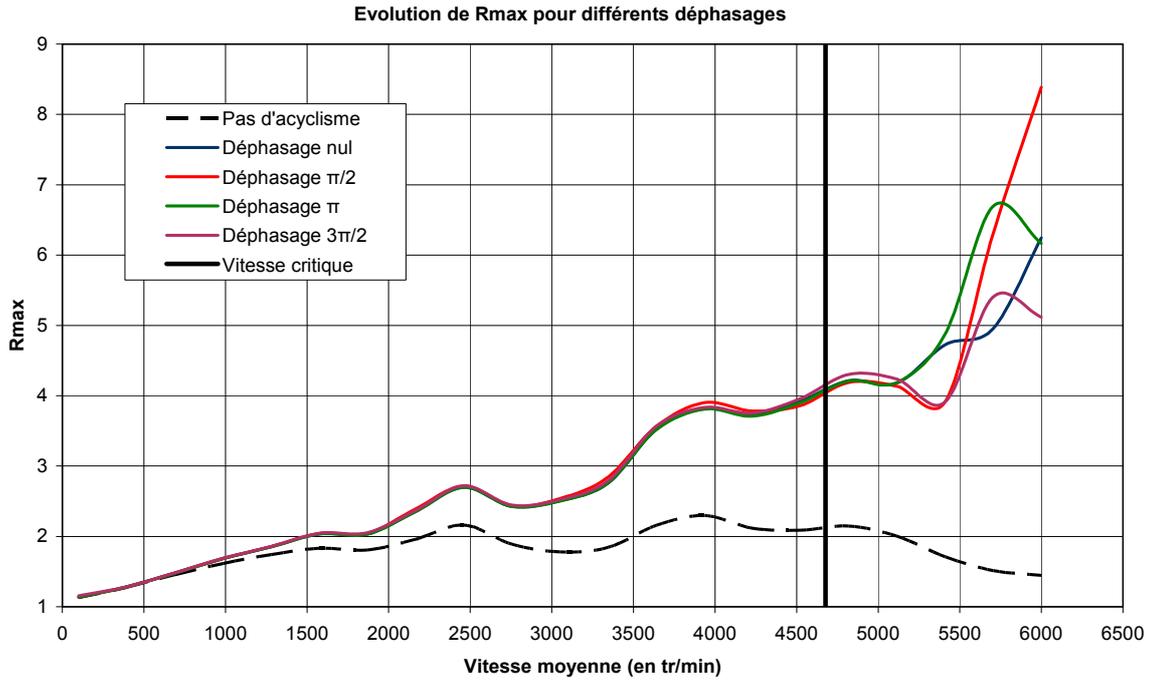
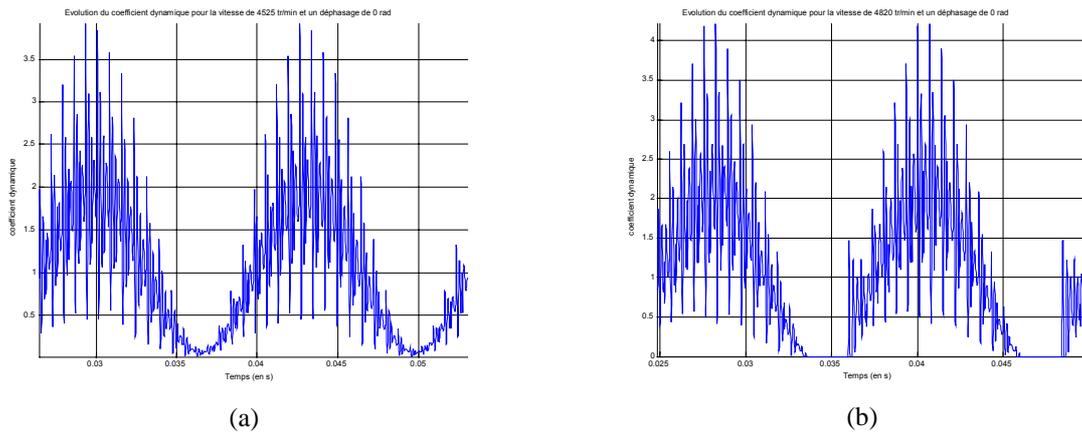


Figure IV-5 : Evolution pour différents déphasages avec acyclisme



**Figure IV-6 : Evolution du facteur dynamique autour de la vitesse critique de vol libre
(a) : en dessous - (b) : au dessus**

Afin de mieux cerner l'influence du déphasage, l'évolution simultanée des coefficients R_{max} en fonction des vitesses de rotation et du déphasage est donné Figure IV-7.

Une première analyse montre une influence notable sur le comportement dynamique aux vitesses les plus élevées lorsque les pertes de contact et chocs se manifestent. Dans ces conditions, certains déphasages semblent plus défavorables que d'autres avec, en particulier, des pics de réponse très prononcés entre 3 et 4 radians.

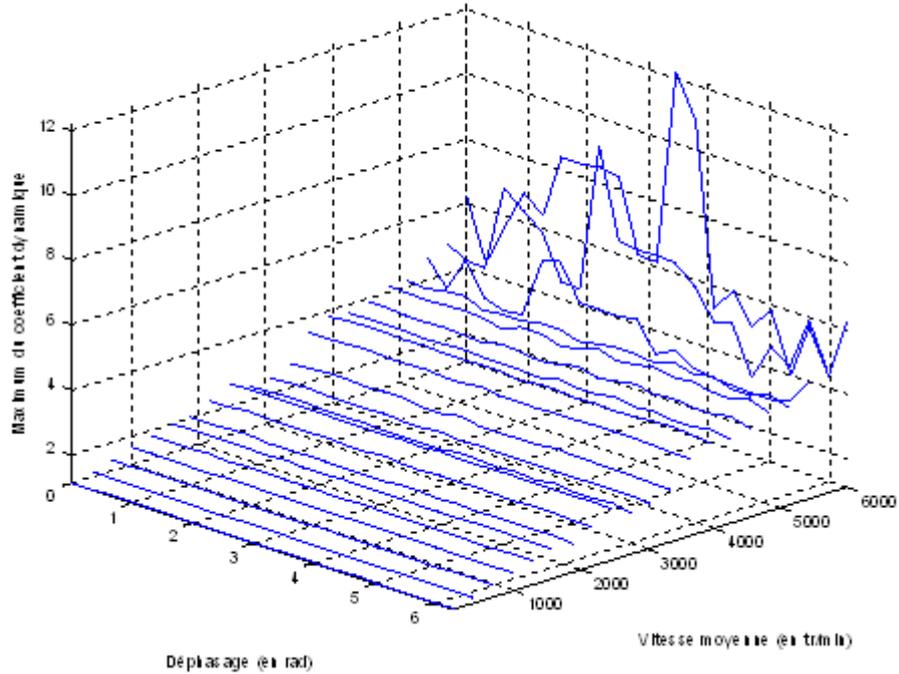


Figure IV-7 : Evolution en fonction des vitesses et des déphasages

L'influence des phases des excentricités est également mise en relief dans le Tableau IV-5 qui représente l'apparition de séquences de vol libre (VL) et de chocs rétro (R) pour différentes vitesses de rotation et différentes phases entre 0 et 2π sur le pignon. Un état des diverses conditions de contacts peut alors être donnée dans le cas de vitesses supérieures à la vitesse critique de vol libre.

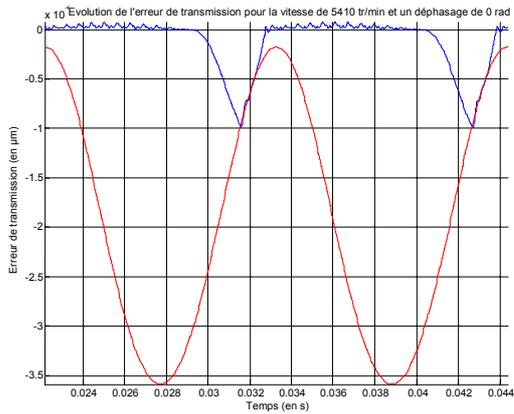
	Déphasage φ_1 (en rad)										
Vitesse (en tr/min)	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5410	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5705	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
6000	R	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL

	Déphasage φ_1 (en rad)										
Vitesse (en tr/min)	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{13\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{17\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{19\pi}{10}$	2π	
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	
5115	VL	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	
5410	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	
5705	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	
6000	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	R	

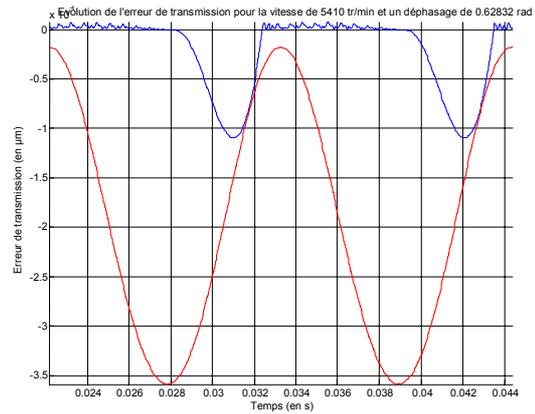
Tableau IV-5 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages

Sur la Figure IV-8 sont tracées les évolutions de l'erreur de transmission (en bleu) et du jeu de denture (en rouge) pour différents déphasages à la vitesse moyenne de 5410 tr/min. Les évolutions sont données par pas de $\frac{\pi}{5}$ rad, la Figure (a) correspond à un déphasage nul, la Figure (k) à un déphasage de 2π .

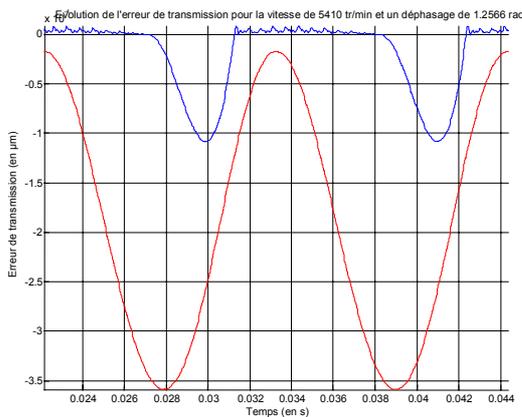
On note, qu'en fonction de ces déphasages, il y a soit des chocs rétro, soit des phases de vol libre sans chocs rétro. Ceci s'explique par la combinaison de l'acyclisme provoquant les pertes de contacts et par l'évolution temporelle du jeu de denture.



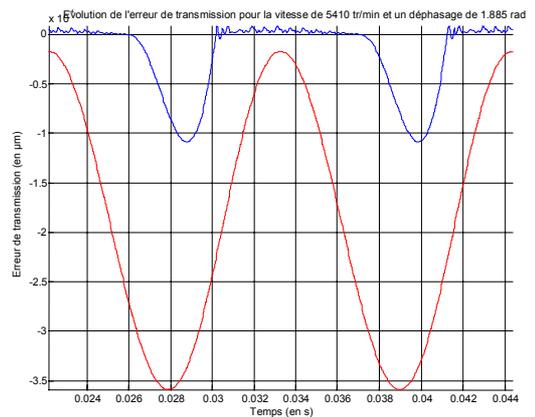
(a)



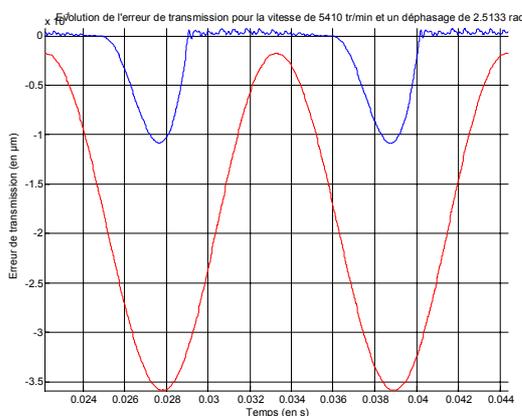
(b)



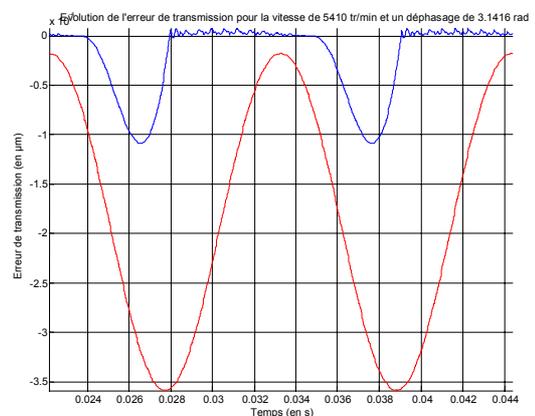
(c)



(d)



(e)



(f)

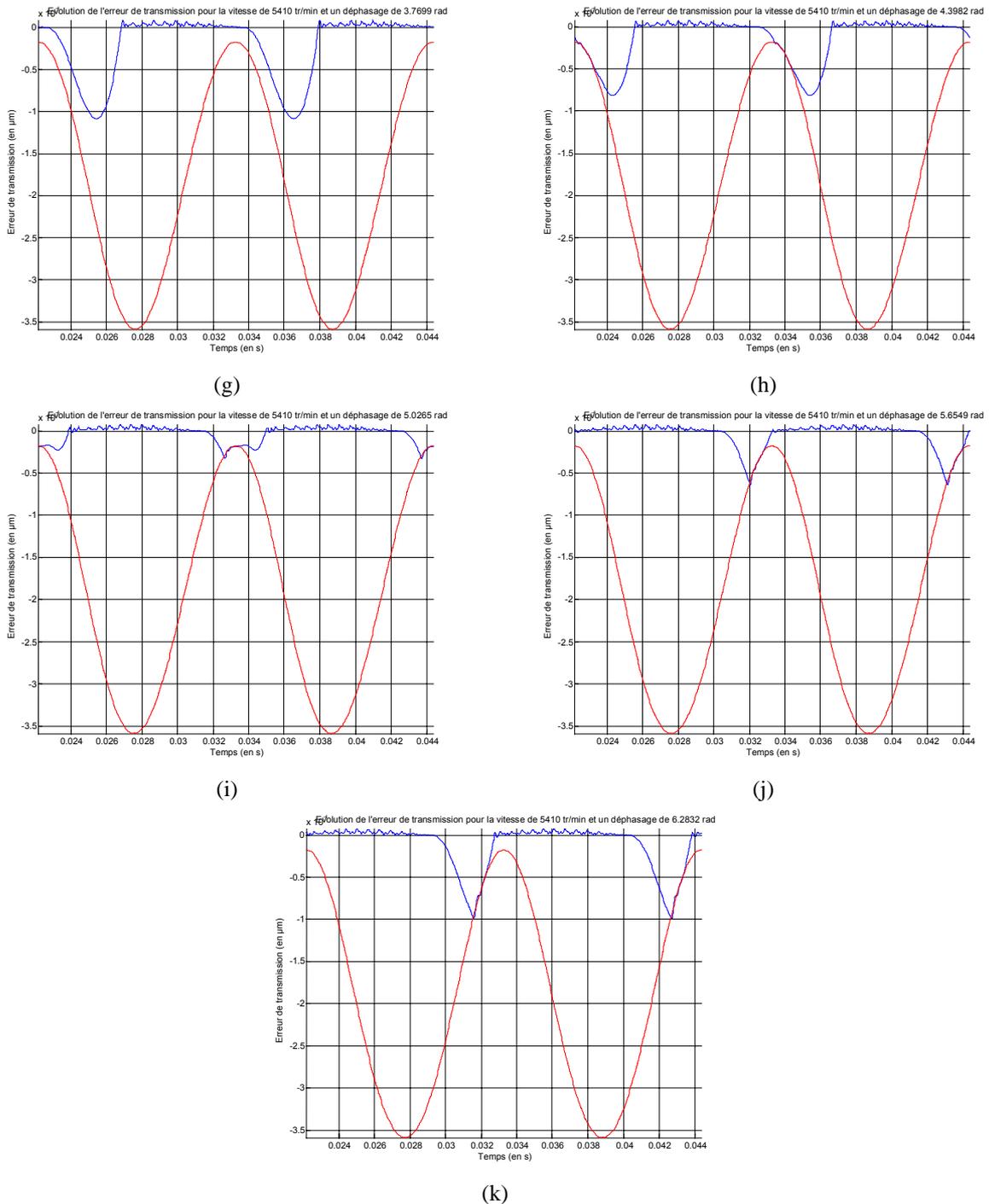


Figure IV-8 : Evolution de l'erreur de transmission et du jeu de denture pour plusieurs déphasages

La considération des déphasages couplés aux excentricités est un point novateur dans la dynamique des engrenages. Le jeu de denture évoluant en fonction de ces défauts combiné aux effets de l'acyclisme engendre des situations multiples :

- soit de vol libre suivi d'une reprise sur le flanc direct. Il n'y a pas de chocs rétro.
- soit de chocs rétro

Ainsi une compréhension des mécanismes déclencheurs de ces situations doit être envisagée de sorte à éviter l'usure prématurée des engrenages par chocs.

II.3.3. Influence du jeu denture nominal

Il est intéressant d'évaluer l'influence du jeu de denture nominal J . En effet, le jeu global évolue autour de cette composante moyenne. Pour cela une comparaison du modèle précédent avec un jeu de 0.4 mm est effectuée.

La Figure IV-9 illustre l'évolution de R_{\max} en fonction des déphasages et des vitesses. Une différence apparaît notamment sur l'instauration d'une périodicité dans les phases de vol libre sans chocs rétro. A l'inverse, une observation commune aux 2 jeux est l'augmentation des coefficients pour différents déphasages pour une même vitesse. Cela dénote bien l'apparition de résonances de phases.

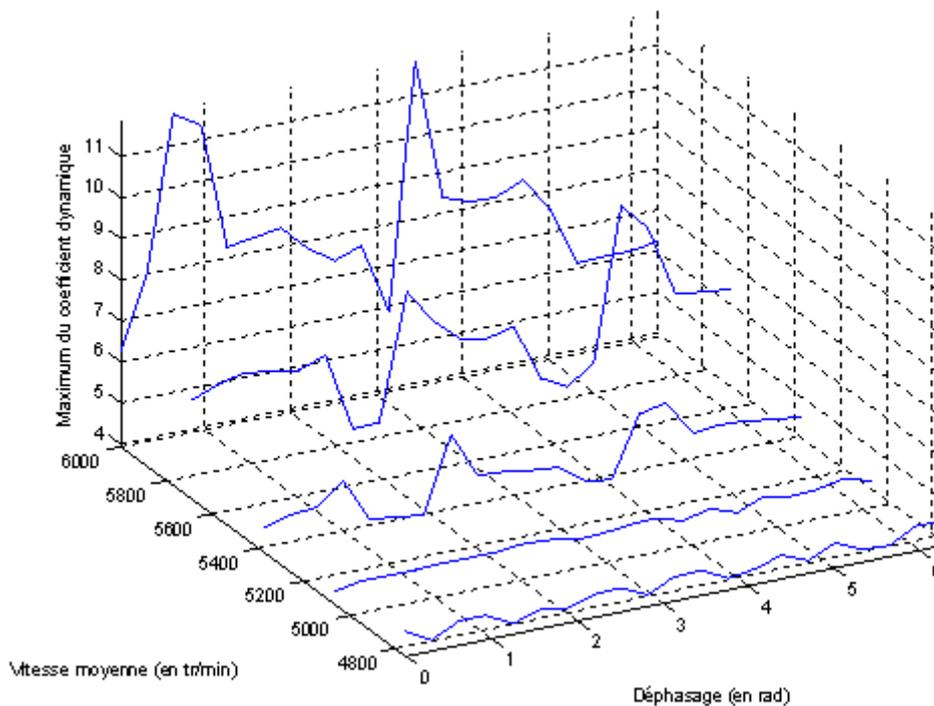
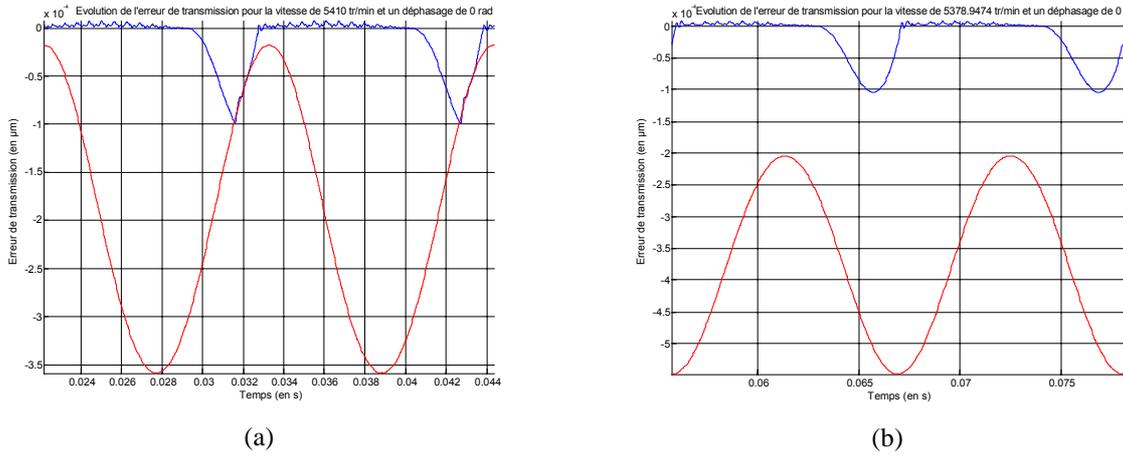


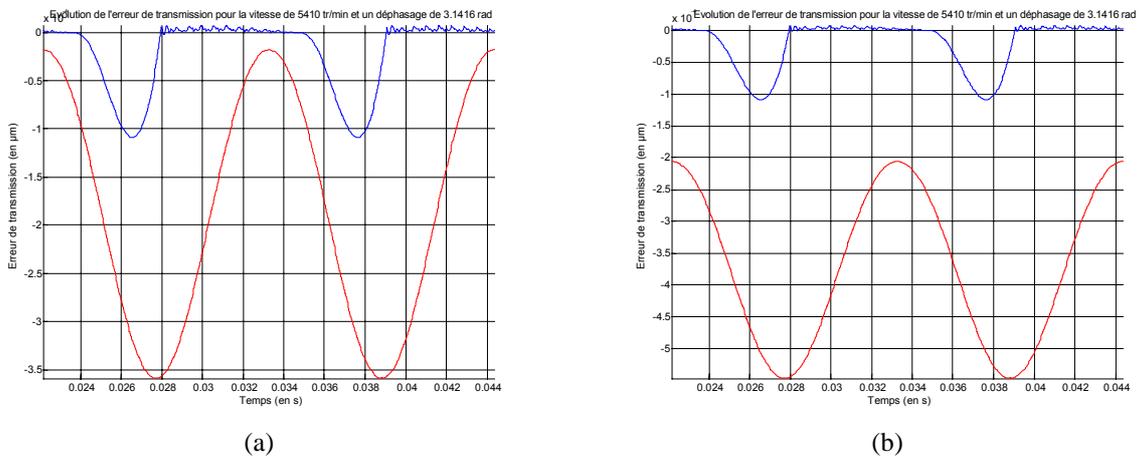
Figure IV-9 : Evolution pour un jeu de 0.4 mm

Pour un jeu nominal plus important, les maximums d'efforts sont plus élevés dans certains cas de déphasages et de vitesses. Ceci est dû à la non apparition de chocs rétro filtrant les réponses.

En traçant l'erreur de transmission et le jeu de denture (respectivement en bleu et rouge) dans le cas de jeux de 0.2 mm et 0.4 mm (Figures IV-10 et IV-11), un accroissement du nombre de chocs est observé pour un jeu faible mais que les coefficients dynamiques, donc les efforts maximums, sont diminués (Figure IV-12, courbe en bleu). Un jeu nominal faible permet bel et bien de filtrer les réponses en limitant le vol libre des dentures. Ce fait avait déjà été observé dans le cas d'un jeu constant, il est ici confirmé pour une évolution temporelle.



**Figure IV-10 : Evolution pour un déphasage de 0 rad
(a) : 0.2 mm - (b) : 0.4 mm**



**Figure IV-11 : Evolution pour un déphasage de π rad
(a) : 0.2 mm - (b) : 0.4 mm**

Comparaison pour les 2 jeux de denture à la vitesse de 5410 tr/min

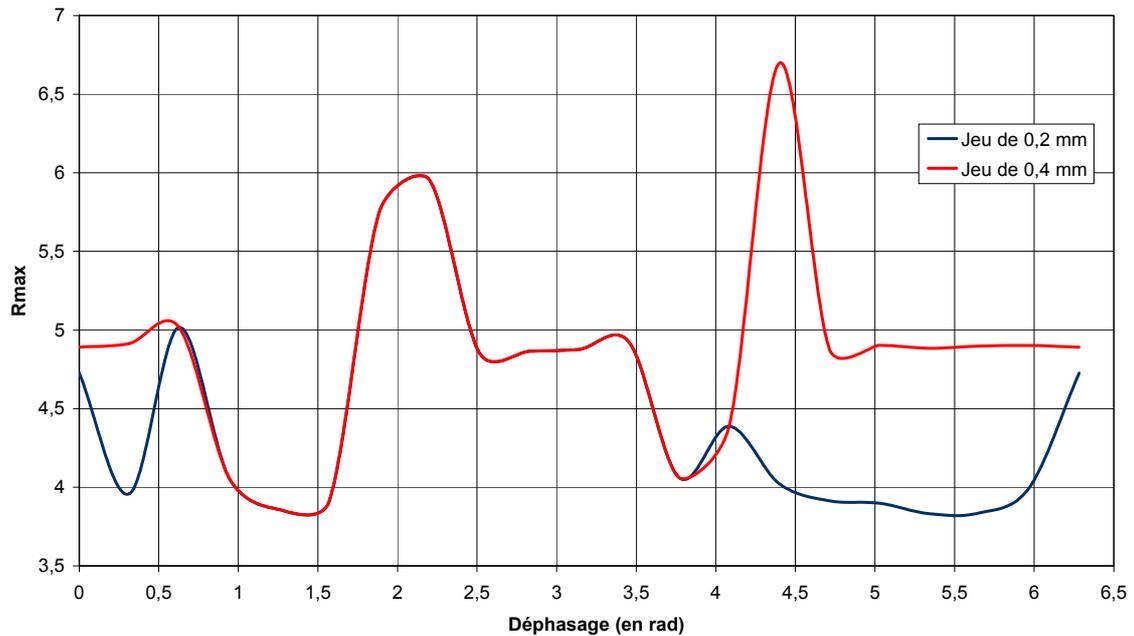


Figure IV-12 : Evolution du coefficient R_{max} pour les 2 jeux de dentures nominaux

Le Tableau IV-6 récapitule l'ensemble des conditions de contacts pour les 2 jeux nominaux justifiant la Figure IV-12, notamment pour les différences des courbes bleu et rouge. Le terme « R » désigne les chocs rétro, l'indice « VL » les phases de vol libre sans chocs rétro. L'écriture en gras indique les évolutions pour un jeu de 0.4 mm.

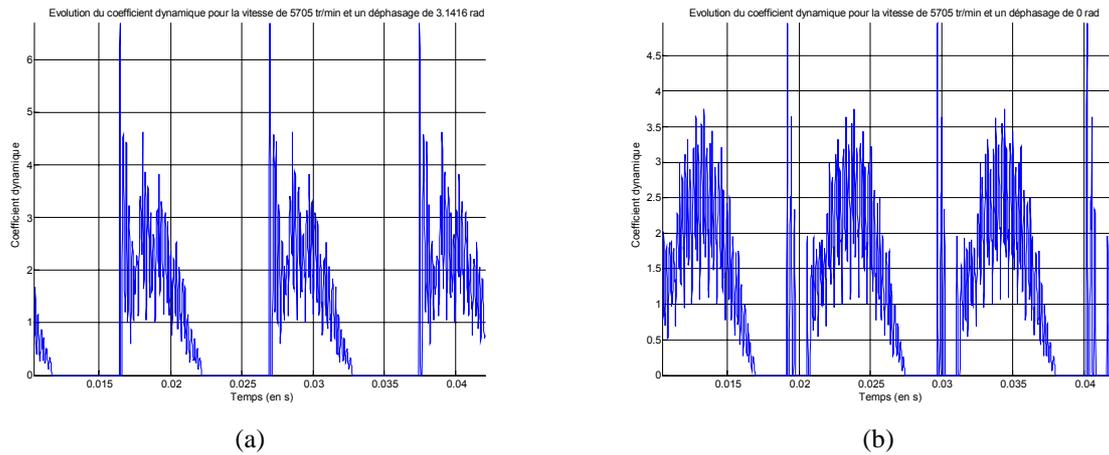
Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)										
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5410	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5410	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5705	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5705	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
6000	R	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL
6000	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL

Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)									
	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{13\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{17\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{19\pi}{10}$	2π
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115	VL	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R
5115	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5410	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R
5410	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5705	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	R
5705	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
6000	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	R
6000	VL	VL	VL	VL	VL	VL	R	R	R	R

Tableau IV-6 : Comparaison des conditions de contacts pour les 2 jeux de denture nominaux

II.3.4. Note sur les coefficients dynamiques

Un exemple d'évolutions temporelles des coefficients dynamiques pour une phase sans chocs rétro (a) et une évolution avec choc rétro (b) est donné Figure IV-13. Dans le cas (a), le maximum est aux alentours de 7, dans le cas (b) il est aux alentours de 5. En s'intéressant uniquement à l'évolution après la reprise de contact sur le flanc direct, ces coefficients évoluent aux valeurs relativement courantes de 3 à 4. Les conclusions du chapitre III sur la possibilité d'usure prématurée et sur la gêne auditive due aux chocs restent valables dans ce cas.



**Figure IV-13 : Comparaison des coefficients dynamiques
(a) : vol libre sans chocs rétro - (b) : vol libre avec chocs rétro**

II.4. LIMITES DU MODELE

Le modèle à 2 degrés de libertés présenté dans ce paragraphe permet essentiellement des analyses qualitatives des phénomènes et son application à des transmissions réelles reste limitée. Il ne permet pas d'observer les effets des inerties du moteur et du frein, ainsi que l'influence des arbres et autres constituants du réducteur tels les roulements, paliers ou accouplements. De plus, ce modèle est très sensible aux conditions aux limites, notamment à l'introduction de la charge par une raideur de torsion qui, si celle-ci est trop importante, peut bloquer la structure.

III. ETUDE GLOBALE EN PRESENCE D'EXCENTRICITES

Les excentricités sont maintenant introduites dans un modèle complet de réducteur simple étage soumis à de l'acyclisme. Le carter ne sera pas simulé conformément aux hypothèses et limites introduites au chapitre II.

III.1. PRESENTATION DU REDUCTEUR

La transmission étudiée est représentée sur la Figure IV-14. Le pignon et la roue sont identiques (Tableau IV-2) et les arbres supports sont modélisés par des éléments poutres de type Timoschenko à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud comme décrit au paragraphe III.2.1 du chapitre II. Ces éléments sont aux nombres de 6 par lignes d'arbres. Le moteur et le frein sont introduits, ainsi que les accouplements qui sont simulés par des raideurs concentrées. Les paliers sont supposés plus rigides en flexion que les autres composants et sont assimilés à des appuis simples. Le nombre de degrés de libertés total affectés au modèle de réducteur est de 96.

Les conditions limites imposées pour ce modèle sont un blocage des degrés de libertés de flexion et traction - compression (u, v, w, φ, ψ) du nœud 1 et 16 au niveau du moteur et du frein.

Les caractéristiques des éléments sont regroupées respectivement dans les Tableaux IV-7, IV-8 et IV-9 pour les éléments d'arbres, les accouplements et les paliers. Les arbres sont considérés pleins. Les données des Tableaux IV-8 et IV-9 sont en N/m pour les raideurs (k_u, k_v, k_w) et (k_{au}, k_{av}, k_{aw}), et en N/m/rad pour les raideurs ($k_\varphi, k_\psi, k_\theta$) et ($k_{a\varphi}, k_{a\psi}, k_{a\theta}$).

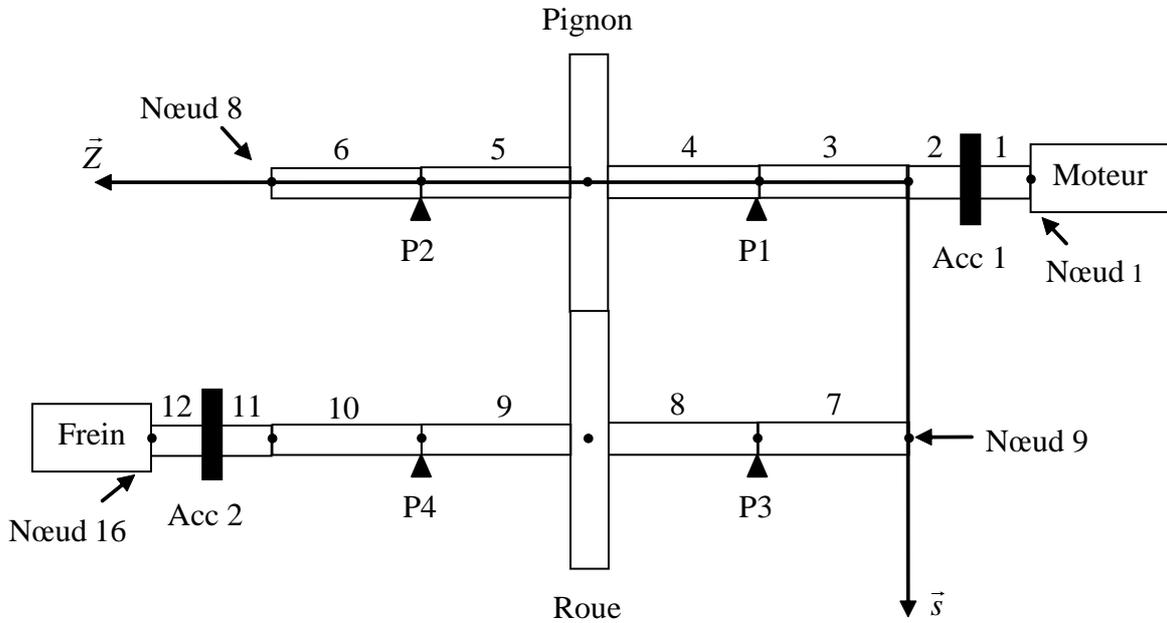


Figure IV-14 : Schéma du réducteur

	Eléments 3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10	Eléments 1, 2, 11, 12
Longueur (en mm)	100	50
Diamètre (en mm)	60	60

Tableau IV-7 : Caractéristiques des éléments d'arbres

	k_{au}	k_{av}	k_{aw}	$k_{a\varphi}$	$k_{a\psi}$	$k_{a\theta}$
Acc 1	10^8	10^8	10^8	10^3	10^3	10^5
Acc 2	10^8	10^8	10^8	10^3	10^3	10^5

Tableau IV-8 : Caractéristiques des accouplements

	k_u	k_v	k_w	k_φ	k_ψ	k_θ
P1	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P2	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P3	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P4	10^6	10^8	10^8	0	0	0

Tableau IV-9 : Caractéristiques des paliers

Les paramètres de calculs sont identiques à ceux du Tableau IV-3 avec comme seule différence d'appliquer un couple moteur de 50 N.m. L'intégration pas à pas est réalisée sur 4 périodes de rotation du pignon avec la recherche du maximum du coefficient dynamique effectuée sur le dernier tour afin de s'affranchir de tout transitoire numérique. Le nombre de pas par période d'engrènement moyenne est de 32 conduisant à un nombre de pas de temps total de 2304. Le nombre de segments N de discrétisation des lignes de contacts pour le calcul de la raideur d'engrènement est de 20.

III.2. ETUDE DE LA PARTIE ACTIVE DU REDUCTEUR

Dans un premier temps, l'étude ne considère que la partie active du réducteur, c'est-à-dire ne prenant pas en compte le moteur, le frein et les accouplements. Le nombre de degrés de libertés est alors restreint à 60. Comme précédemment, la charge est simulée par une raideur de torsion de 10^5 N/m/rad. Le schéma correspondant est donné Figure IV-15.

Les conditions aux limites sont modifiées avec le blocage des degrés de libertés (u, v, w) des nœuds 1 et 10.

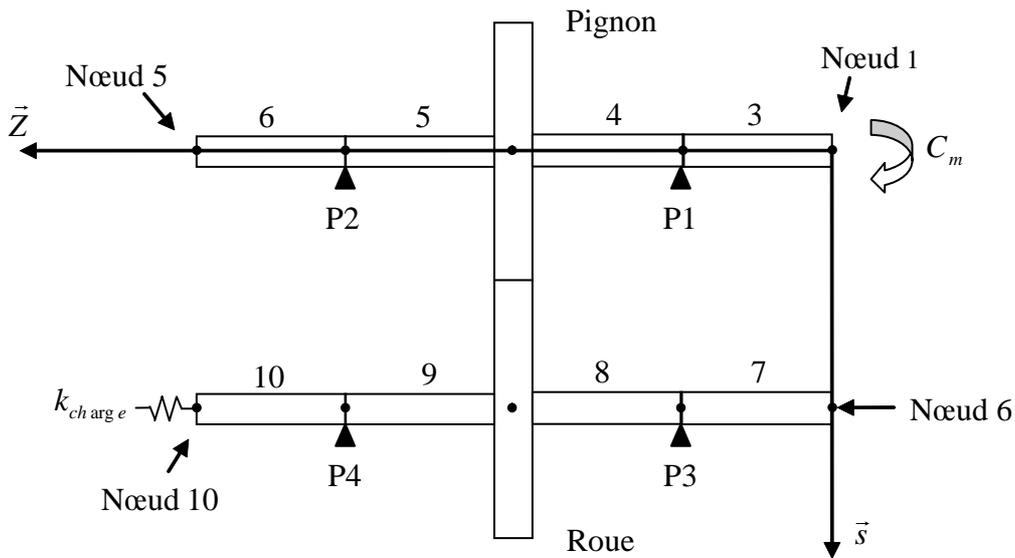


Figure IV-15 : Schéma du réducteur dans sa partie active

III.2.1. Fréquences critiques d'engrènement

Dans le cas de modèles globaux, il existe autant de pulsations propres que de degrés de libertés. Le choix des modes à retenir est classiquement basé sur la gamme d'excitation du système ou, si l'on s'intéresse à un élément en particulier, sur des considérations énergétiques. Afin de caractériser le chargement dynamique sur les dentures, les modes retenus sont ceux présentant une énergie de déformation importante au niveau de l'engrènement. Afin de quantifier cette propriété, on introduit pour chaque mode i le pourcentage d'énergie de déformation P_i stocké à la denture défini par :

$$P_i = \frac{[\Phi]^T \overline{K_{eng}} [\Phi]}{[\Phi]^T \overline{K_{glob}} [\Phi]} \quad (IV-13)$$

Avec :

- $[\Phi]$ la matrice des vecteurs propres
- $\overline{K_{eng}}$ la matrice de raideur d'engrènement moyenne
- $\overline{K_{glob}}$ la matrice de raideur globale moyenne du réducteur

La matrice des vecteurs propres peut devenir très conséquente pour des modèles de réducteurs à grand nombre de degrés de libertés. Aussi, il est courant dans cette situation de tronquer cette dernière à un ordre N , les pourcentages seront alors calculés de la même façon avec la matrice $[\Phi]_N$ tronquée à l'ordre voulu.

Dans le cas du réducteur étudié, le Tableau IV-10 donne les pourcentages de déformation P_i (en %), les vitesses propres Ω_0 (en tr/min) ainsi que la 2^{ème} fréquence critiques d'engrènement de la raie porteuse (en tr/min). Cette fréquence correspond au cas $\Omega_0 = \Omega_m$. Les pourcentages des modes supérieures au mode 5 n'excédant pas 1 % seront supposés négligeables et ne seront pas considérés.

Ordre du mode	P_i	Ω_0	$\frac{\Omega_0}{Z_1}$
1	58,06	167632,23	9312,90
2	28,71	424935,64	23607,54
3	6,28	213751,06	11875,06
4	2,80	23609,89	1311,66
5	2,11	64894,30	3605,24

Tableau IV-10 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et 2^{nde} vitesse critique d'engrènement

Il y a alors une possibilité pour chaque pulsation propre d'obtenir des fréquences critiques d'engrènement susceptibles d'engendrer des résonances d'amplitudes. Ainsi, en combinant les effets de l'acyclisme et des excentricités, une large gamme de pulsations peut-elle être balayée.

Dans le cas de régimes de rotation constants, seules les raies principales et celles dues aux excentricités apparaissent. Compte tenu des écarts entre les vitesses critiques, il y a alors beaucoup moins de risques d'évoluer au voisinage de résonances. Dans le cas de l'acyclisme, ce risque est beaucoup plus important du fait de la multiplicité des fréquences critiques d'engrènement [133]. De plus, l'évolution sinusoïdale de la vitesse peut exciter une pulsation proche de la vitesse moyenne de rotation (chapitre III, paragraphe V.3.1).

Afin d'illustrer ces propos, les Tableaux IV-11 et IV-12 donnent respectivement les vitesses critiques du mode 1 dans le cas de pulsations dues uniquement aux excentricités, et dans le cas des 3 premières raies dues à l'acyclisme.

k	Ω_{10}^{eng} (en tr/min)		
	$i = 0$	$i = 1$	$i = -1$
3	6208,60	5881,83	6573,81
4	4656,45	4411,37	4930,36
5	3725,16	3529,10	3944,29
6	3104,30	2940,92	3286,91
7	2660,83	2520,79	2817,35
8	2328,23	2205,69	2465,18
9	2069,53	1960,61	2191,27
10	1862,58	1764,55	1972,14
11	1693,25	1604,14	1792,86
12	1552,15	1470,46	1643,45
13	1432,75	1357,35	1517,03

Tableau IV-11 : Vitesses critiques d'engrènement dues aux excentricités (mode 1)

k	Ω_{10}^{eng} (en tr/min)						
	$i = 0$	$i = 1$	$i = -1$	$i = 2$	$i = -2$	$i = 3$	$i = -3$
3	6208,60	6095,72	6325,74	5986,87	6447,39	5881,83	6573,81
4	4656,45	4592,66	4722,03	4530,60	4789,49	4470,19	4858,91
5	3725,16	3684,22	3767,02	3644,18	3809,82	3604,99	3853,61
6	3104,30	3075,82	3133,31	3047,86	3162,87	3020,40	3192,99
7	2660,83	2639,88	2682,12	2619,25	2703,75	2598,95	2725,73
8	2328,23	2312,17	2344,51	2296,33	2361,02	2280,71	2377,76
9	2069,53	2056,84	2082,39	2044,30	2095,40	2031,91	2108,58
10	1862,58	1852,29	1872,99	1842,11	1883,51	1832,05	1894,15
11	1693,25	1684,75	1701,85	1676,32	1710,53	1667,98	1719,30
12	1552,15	1545,00	1559,37	1537,91	1566,66	1530,89	1574,01
13	1432,75	1426,66	1438,90	1420,61	1445,11	1414,62	1451,36

Tableau IV-12 : Vitesses critiques d'engrènement dues à l'acyclisme (mode 1)

III.2.2. Introduction des déphasages

Les évolutions du coefficient R_{\max} en fonction des vitesses de rotation moyennes et des déphasages sont représentées sur la Figure IV-16. Il semble que, comme pour le modèle torsionnel précédent, les déphasages prennent une importance croissante au-delà d'une certaine vitesse de rotation du pignon.

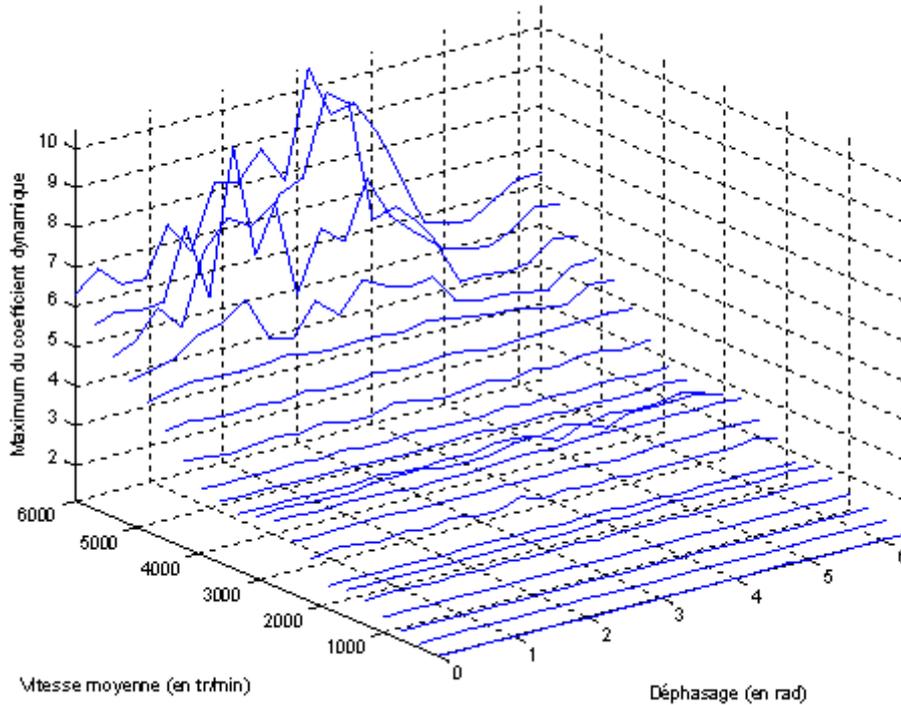


Figure IV-16 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage

La réécriture de la formule (IV-11), en considérant l'inertie polaire totale de la ligne d'arbre du pignon et non plus l'inertie seule du pignon, conduit à :

$$\Omega_{10}^{vl} = \sqrt{\frac{C_m}{I_{1_tot} n \rho_n}} \quad (IV-14)$$

I_{1_tot} l'inertie totale de la ligne d'arbre du pignon

Selon (IV-14), la vitesse critique calculée pour l'apparition des pertes de contacts est de 4486 tr/min. En traçant, Figure IV-17, les évolutions pour quelques déphasages, on s'aperçoit effectivement que, passée cette vitesse, l'importance des déphasages est de plus en plus marquée. Les courbes de facteurs dynamiques déterminées en dessous et au dessus de cette vitesse (Figure IV-18) confirment cette remarque et la pertinence de (IV-14).

En observant la Figure IV-16, le caractère non répétitif de l'évolution de R_{max} est retrouvé. Il semble, tout comme dans le modèle torsionnel, que les déphasages jouent un rôle important dans l'apparition ou non de chocs rétro. Ils influent également sur l'intensité des efforts selon les différentes situations de vol libre ou de vol libre suivi de chocs rétro et l'idée d'apparition de résonances de phases se confirme. Néanmoins, les évolutions des maxima d'efforts semblent se stabiliser dans certaines zones.

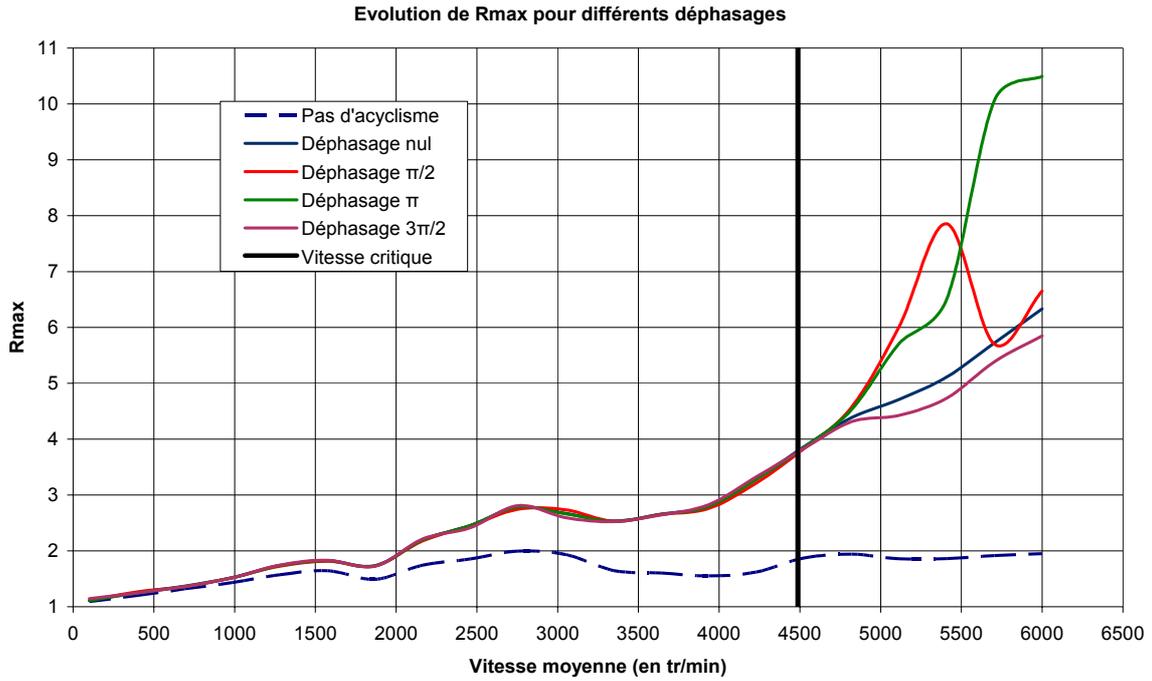
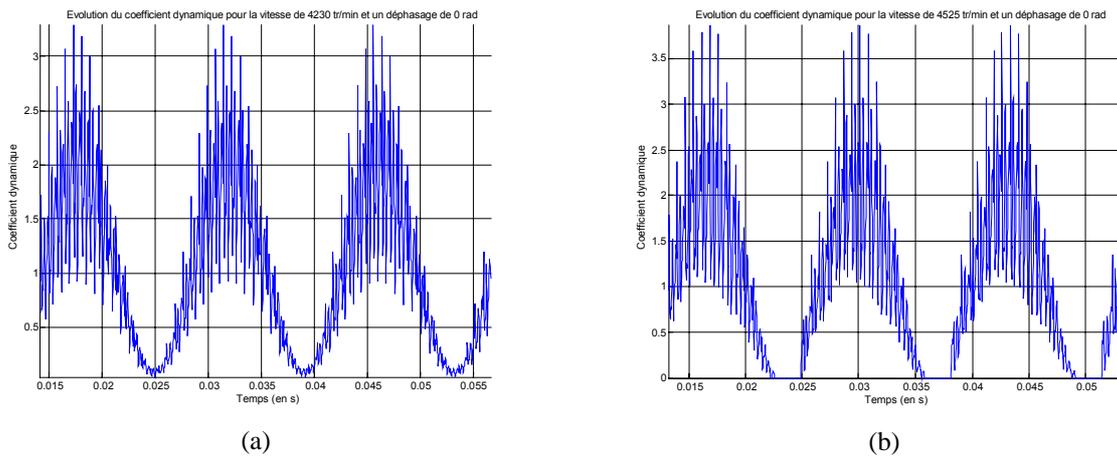


Figure IV-17 : Evolution pour différents déphasages



**Figure IV-18 : Evolution du facteur dynamique autour de la vitesse critique de vol libre
(a) : en dessous - (b) : au dessus**

En relevant Tableau IV-13 les différents états de contacts en fonctions des vitesses, ces zones correspondent aux impacts rétro pour toutes les vitesses, excepté celle de 4525 tr/min.

Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)										
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
4525	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4820	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5410	R	R	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL
5705	R	R	R	R	R	R	R	R	VL	VL	VL
6000	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)										
	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{13\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{17\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{19\pi}{10}$	2π	
4525	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	
4820	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	
5115	VL	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	
5410	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	
5705	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	
6000	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	R	

Tableau IV-13 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages

III.2.3. Influence du couple moteur

Au chapitre III et dans [132], il a été montré qu'une augmentation de la charge permettait de réduire les effets de l'acyclisme. Afin de confirmer ou non cette tendance dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle d'un réducteur, le couple moteur appliqué est désormais de 100 N.m, les caractéristiques du couple d'engrenages et les paramètres de simulation restant identiques.

Les Figures IV-19 et IV-20 donnent respectivement les évolutions de R_{\max} en fonction des déphasages et des vitesses de rotation moyennes, et en fonction des vitesses pour l'ensemble des déphasages.

La tendance évoquée précédemment se confirme. Les déphasages introduits influent également sur la dynamique mais leurs contributions restent limitées.

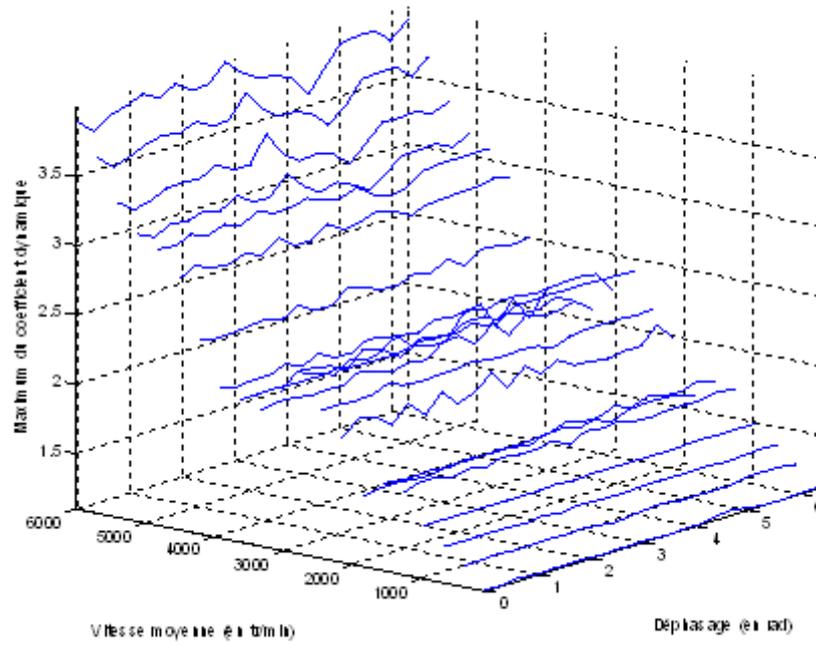


Figure IV-19 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage

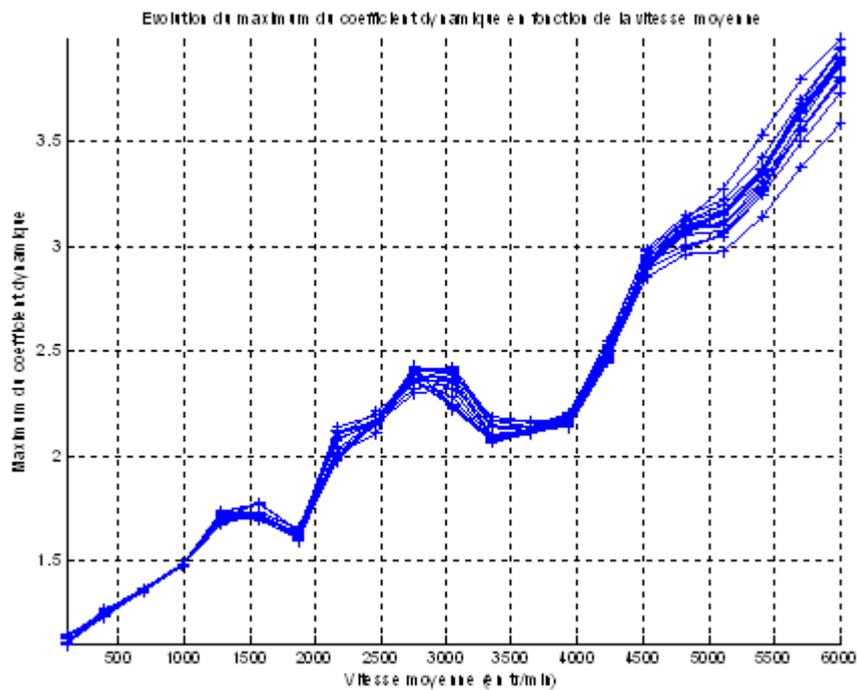


Figure IV-20 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation

III.3. INFLUENCE DES INERTIES ADDITIONNELLES

L'ensemble du réducteur est maintenant considéré en incluant le moteur, le frein et les accouplements.

III.3.1. Influence de l'inertie du frein

Barthod & Col. [89] ont montré expérimentalement que dans le cas des boîtes de vitesses d'automobiles en présence de « rattle », l'inertie sur la ligne d'arbre réceptrice joue un rôle important. Dans leurs études, la roue n'était que peu ou pas chargée, correspondant alors au cas d'un pignon fou freiné par un couple de traînée du au lubrifiant de l'ordre de 0.1 N.m. Dans un premier temps, seule l'inertie du frein est simulée via des inerties polaires de 0.005 et 0.01 kg.m². Dans le Tableau IV-14 sont regroupées les valeurs des pourcentages d'énergies de déformation de la denture P_i (en %), les vitesses propres Ω_0 (en tr/min) associées et la 2nde vitesse critique d'engrènement (en tr/min). L'ajout d'une inertie ne modifie que légèrement les fréquences propres potentiellement critiques pour l'engrènement et augmente leur nombre qui passe de 5 à 10.

Ordre du mode	$I_{pfr} = 0.005 \text{ kg.m}^2$			$I_{pfr} = 0.01 \text{ kg.m}^2$		
	P_i	Ω_0	$\frac{\Omega_0}{Z_1}$	P_i	Ω_0	$\frac{\Omega_0}{Z_1}$
1	55,73	165702,59	9205,70	55,78	165605,85	9200,32
2	27,78	412432,93	22912,94	27,78	412428,46	22912,69
3	3,48	213933,88	11885,22	3,45	213920,95	11884,50
4	2,11	227804,48	12655,80	2,17	227655,14	12647,51
5	1,62	94210,54	5233,92	1,71	36100,70	2005,59
6	1,21	53251,42	2958,41	1,66	94173,88	5231,88
7	1,17	352375,58	19576,42	1,35	68118,03	3784,34
8	1,14	16853,77	936,32	1,17	352367,05	19575,95
9	1,03	37993,38	2110,74	0,93	165605,85	899,11
10	1,01	68561,57	3808,98	0,83	412428,46	29851,09

Tableau IV-14 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et 2nde vitesse critique d'engrènement

Sur les différentes Figures IV-21 sont tracées les évolutions des coefficients R_{max} en fonction des déphasages et cela pour chaque vitesse où il y a des pertes de contacts. La courbe en bleu représente les évolutions pour une inertie de 0.005 kg.m², celle en rouge pour 0.01 kg.m², celle en pointillés sans inertie additionnelle.

On s'aperçoit que plus la vitesse est élevée et plus les déphasages prennent de l'importance, conformément à la définition de la vitesse critique de vol libre. On remarque également que les pics d'intensités diffèrent pour une même phase entre les 2 inerties.

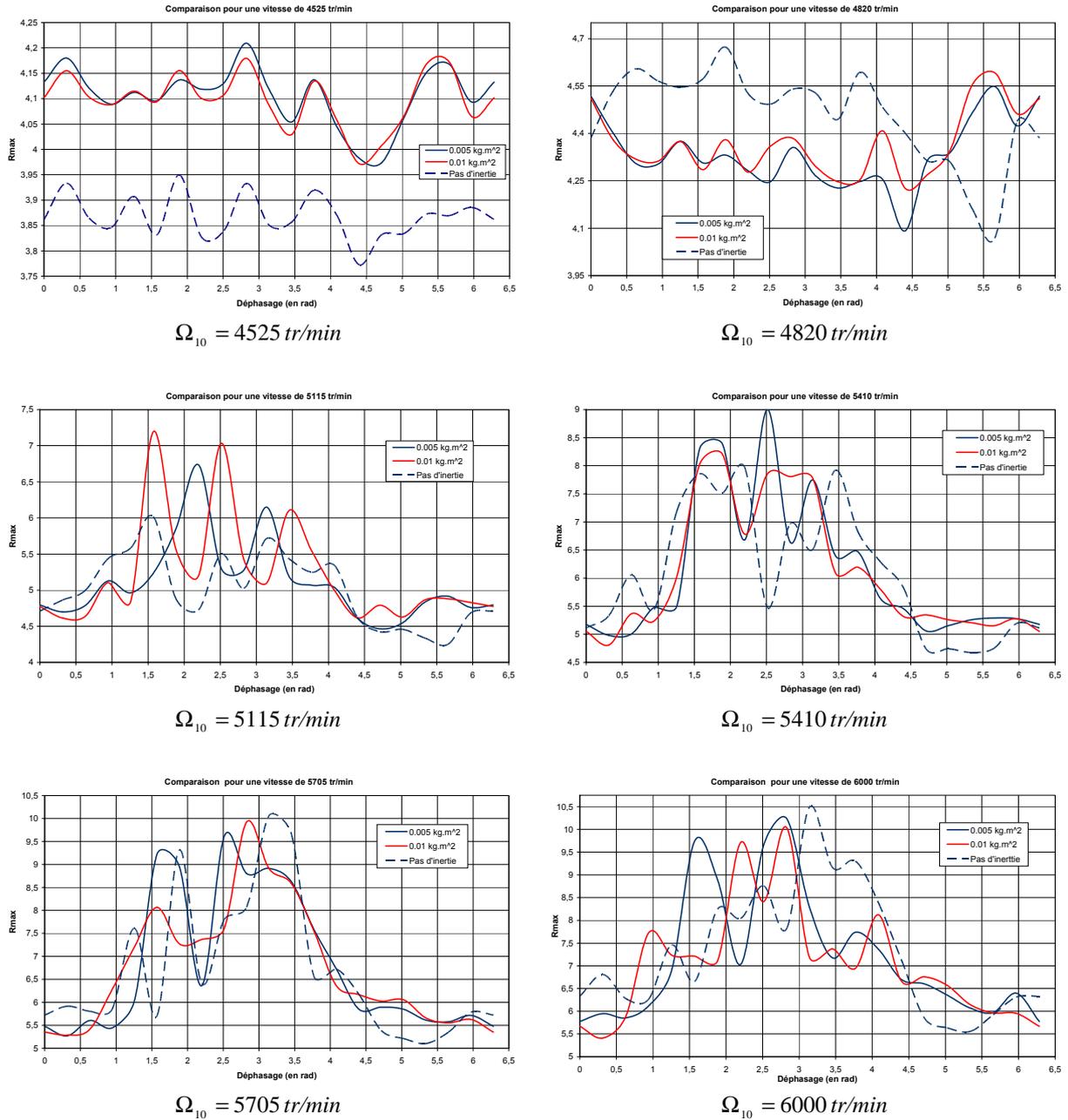


Figure IV-21 : Comparaison pour chaque vitesse
en bleu : 0.005 kg.m^2 , en rouge : 0.01 kg.m^2 , en pointillés : sans inertie

Le Tableau IV-15 regroupe les différents états de contacts pour les deux inerties avec en écriture normal $I_{p_{fr}} = 0.005 \text{ kg.m}^2$, et en écriture gras $I_{p_{fr}} = 0.01 \text{ kg.m}^2$. Cela montre l'intérêt d'élaborer des cartes de configurations de contacts pour chaque réducteur et de repérer les phases pour lesquelles les intensités sont les plus importantes.

Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)										
	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
4525 tr/min	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4525 tr/min	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4820 tr/min	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
4820 tr/min	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115 tr/min	R	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL	VL
5115 tr/min	R	R	R	R	R	R	VL	VL	VL	VL	VL
5410 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
5410 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
5705 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
5705 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
6000 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
6000 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

Vitesse (en tr/min)	Déphasage φ_1 (en rad)										
	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{13\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{17\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{19\pi}{10}$	2π	
4525 tr/min	VL	VL	VL	VL	VL	R	R	R	VL	VL	
4525 tr/min	VL	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	VL	
4820 tr/min	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	
4820 tr/min	VL	VL	VL	R	R	R	R	R	R	R	
5115 tr/min	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
5115 tr/min	VL	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
5410 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
5410 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
5705 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
5705 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
6000 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	
6000 tr/min	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	

Tableau IV-15 : Apparition des chocs rétro suivant les vitesses et déphasages

Cette étude montre que, dans le cas de réducteur présentant une charge non négligeable, l'inertie additionnelle au niveau de la roue ne semble jouer qu'un rôle limité sur les fréquences propres. Par contre pour un même réducteur, l'ajout de cette inertie permet de modifier les conditions d'existence de séquences de vols libres suivis de chocs rétro sans toutefois réellement limiter leur nombre.

III.3.2. Influence de l'inertie du moteur

L'inertie du moteur est maintenant ajoutée au modèle global en gardant une inertie additionnelle au niveau de la partie réceptrice. Les valeurs de ces inerties sont identiques et valent 0.005 kg.m^2 .

L'introduction de l'inertie du moteur engendre alors des valeurs de coefficient R_{\max} beaucoup plus importantes (Figure IV-22) et conduit à des pertes de contacts à plus basses vitesses en accord avec (IV-14). En effet, la vitesse limite calculée en ajoutant ce composant est de 2862 tr/min.

Les déphasages, comme dans les cas d'études précédents, prennent une importance croissante au-delà de cette vitesse comme le montre la Figure IV-23.

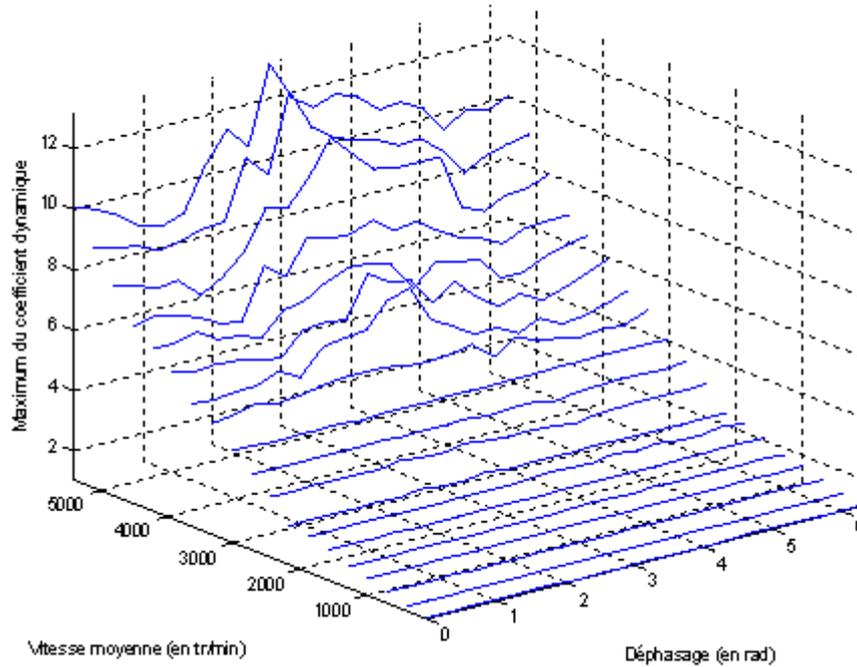


Figure IV-22 : Maximum du coefficient dynamique en fonction des vitesses de rotation et du déphasage

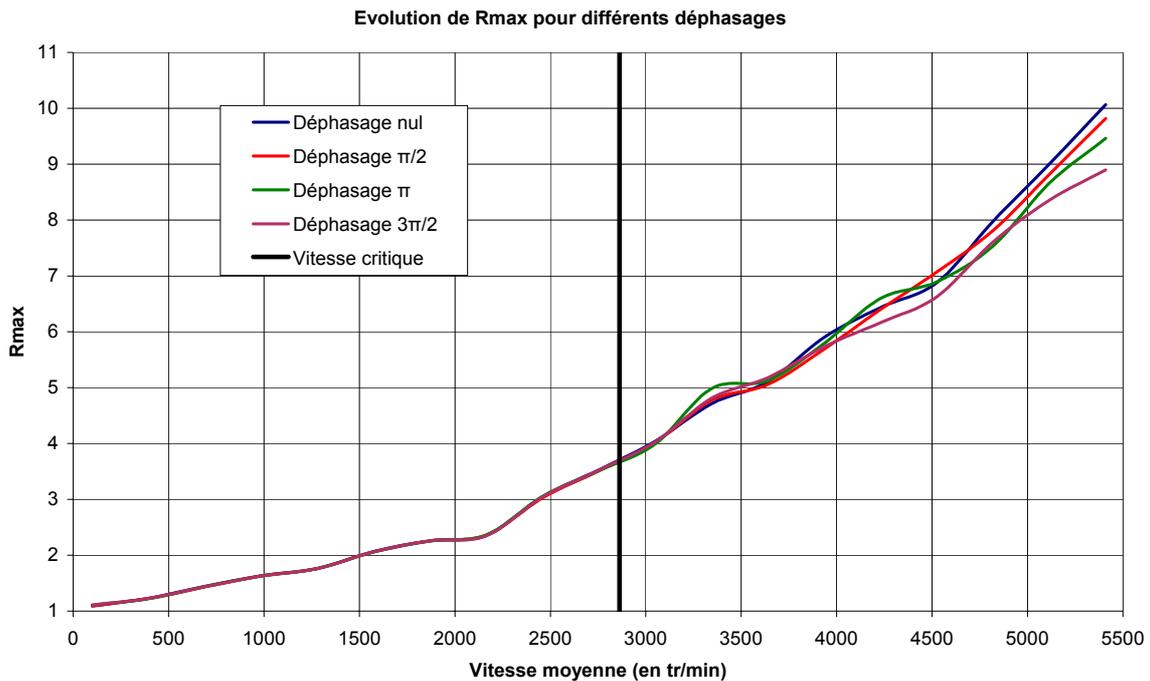


Figure IV-23 : Evolution pour différents déphasages

En traçant les évolutions de R_{\max} en fonction des déphasages, Figure IV-24, on s'aperçoit que les coefficients deviennent de plus en plus importants au fur et à mesure de l'augmentation des vitesses moyennes de rotation. Par contre à la différence des études précédentes sans moteur et frein, il semble que l'introduction de l'inertie du moteur simultanément à celle du frein augmente et stabilise les évolutions du chargement dynamique sur les dentures.

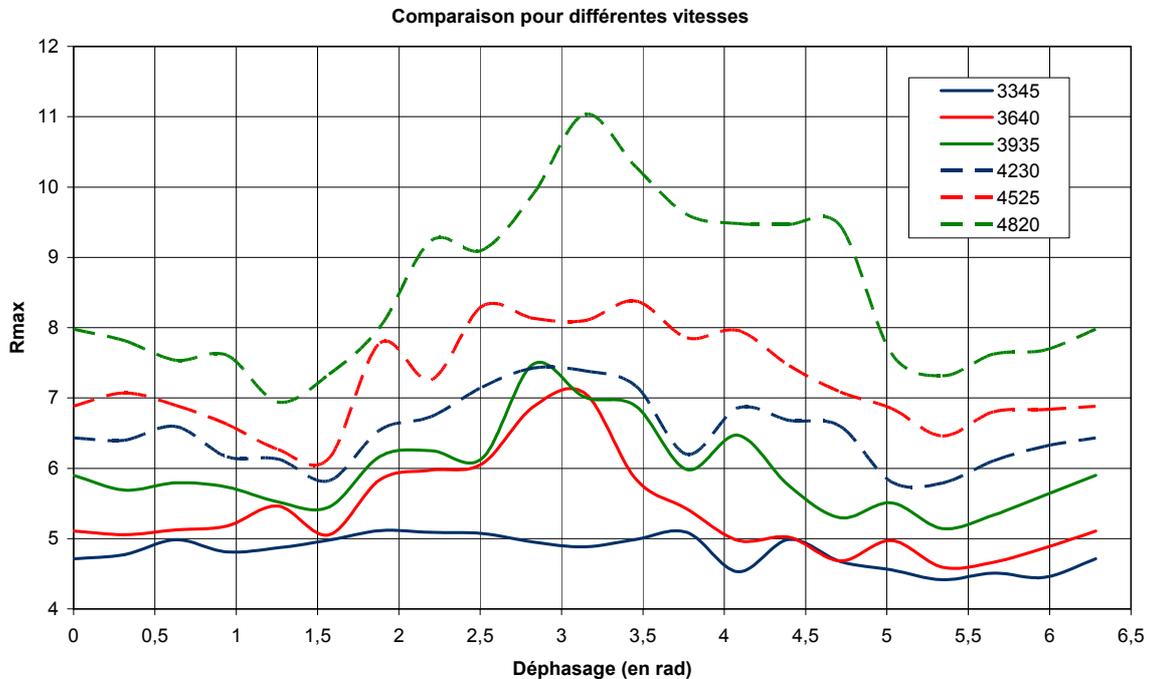


Figure IV-24 : Evolution pour diverses vitesses

III.4. CONCLUSION

Des développements, à notre connaissance originaux, ont été présentés. Ils portent sur l'introduction de déphasages entre la vitesse de rotation du pignon et la variation du jeu de denture pour une transmission transmettant du couple. Les couplages entre excentricités, jeu de denture et efforts dynamiques apparaissent comme non négligeables et les conclusions suivantes ont été établies :

- L'introduction d'excentricités engendre un jeu de denture évoluant en fonction du temps. Le couplage de ce dernier avec les déphasages initie des successions de phases de vol libre avec, soit une reprise sur le flanc direct de la denture, soit sur le flanc rétro.
- La succession des états de contacts semble être indépendante de la vitesse de rotation moyenne, i.e. les différents états ne se reproduisent pas en fonction des vitesses.
- Selon les vitesses et les déphasages, les intensités des efforts au delà de la vitesse critique de vol libre sont différentes. Il semble alors exister des résonances de phases pour lesquels le fonctionnement du réducteur est dangereux. Les déphasages modifient

également, dans une moindre mesure, les efforts dans le cas où les contacts entre dents sont permanents.

- En fonction des déphasages, il est possible de relever un état des diverses conditions de contacts.
- L'introduction d'inerties sur la roue ne modifie que légèrement les intensités des efforts. Par contre, elles changent les apparitions des conditions de vol libre du fait des phénomènes dynamiques d'inerties.
- Le moteur et son inertie joue un rôle essentiel. L'introduction de ce composant abaisse la vitesse critique de vol libre, vitesse définie au chapitre III et dont sa définition est adaptable aux modèles globaux. De plus, les efforts maximums sont beaucoup plus importants.
- L'introduction de charge plus élevée permet de réduire les effets de l'acyclisme, notamment les pertes de contacts.

IV. ETUDE DE L'ACYCLISME SUR UN REDUCTEUR INDUSTRIEL

La fin de ce chapitre est consacrée à une étude de réducteur industriel et à des comparaisons entre résultats issus de modèles complets et de modèle torsionnels simplifiés.

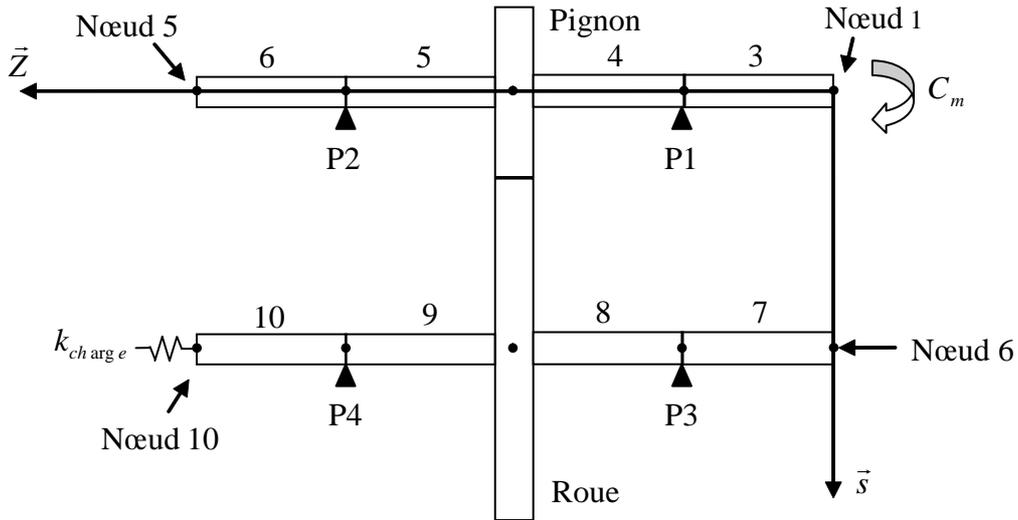
IV.1. DEFINITION DU REDUCTEUR ET DES CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT

Le réducteur est considéré dans sa partie active de fonctionnement, c'est-à-dire sans introduction des inerties moteurs et frein. Les fluctuations de vitesse de rotation seront décrites par une seule composante harmonique avec un déphasage nul, l'amplitude de l'acyclisme sera supposée indépendante de la vitesse de rotation moyenne. Il vient alors :

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10} (1 + \rho_n(\Omega_{10}) \sin(\omega_n t + \varphi_n)) \text{ avec } \varphi_n = 0 \quad (\text{IV-15})$$

Les données des engrenages sont définies Tableau IV-16, les paliers seront supposés rigides, les autres raideurs sont données Tableau IV-17 et les caractéristiques de fonctionnement dans le Tableau IV-18. Le couple résistant est introduit par l'intermédiaire d'une raideur de torsion.

Le réducteur est représenté sur la Figure IV-25. Les arbres sont pleins et chaque élément de poutre a une longueur de 100 mm. Les diamètres extérieurs sont de 60 mm.


Figure IV-25 : Schéma du réducteur dans sa partie active

	Pignon	Roue
Angle de pression de taillage α_n (en $^\circ$)	20	
Angle d'hélice primitive β (en $^\circ$)	0 et 20	
Module de taillage (en mm)	4	
Nombre de dents	23	37
Largeur de l'engrenage (en mm)	27.5	25
Coefficient de saillie	1	1
Coefficient de creux	1.4	1.4
Jeu de denture J (en mm)	0.15	
Excentricités (en μm)	100	0
Déphasage λ_i des excentricités (en rad)	0	0

Tableau IV-16 : Caractéristiques des engrenages

	k_u	k_v	k_w	k_φ	k_ψ	k_θ
P1	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P2	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P3	10^6	10^8	10^8	0	0	0
P4	10^6	10^8	10^8	0	0	0

Tableau IV-17 : Caractéristiques des paliers

Amortissement visqueux ξ	0.1
Harmonique n	1 et 2
Pourcentage de l'acyclisme (en %)	2.5 et 5
Couple moteur C_m (en N.m)	50
Charge résistante k_{charge} (en N/m)	10^5

Tableau IV-18 : Caractéristiques de fonctionnement

Les vitesses critiques de vol libre décrites à l'aide de (IV-14) sont regroupées dans le Tableau IV-19 pour les différents cas de pourcentage et d'harmoniques d'acyclisme.

	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 20^\circ$	
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$
$\rho_n = 2.5 \%$	6854 tr/min	4847 tr/min	6506 tr/min	4600 tr/min
$\rho_n = 5 \%$	4847 tr/min	3427 tr/min	4600 tr/min	3253 tr/min

Tableau IV-19 : Vitesses critiques de vol libre

Les pulsations critiques de denture Ω_0 (en tr/min), les vitesses de rotation (en tr/min) correspondantes en supposant que l'excitation principale est à la fréquence d'engrènement ainsi que les pourcentages d'énergie de déformation P_i associés sont synthétisés dans le Tableau IV-20.

Ordre du mode	$\beta = 0^\circ$			$\beta = 20^\circ$		
	P_i	Ω_0	$\frac{\Omega_0}{Z_1}$	P_i	Ω_0	$\frac{\Omega_0}{Z_1}$
1	34,58	178649,77	7767,38	22,32	424872,91	18472,74
2	25,23	446817,80	19426,86	17,33	159405,13	6930,66
3	16,01	197798,74	8599,95	16,05	217535,33	9458,06
4	10,13	216050,37	9393,49	15,99	199394,63	8669,33
5	4,27	302598,43	13156,45	11,74	170600,31	7417,40
6	2,43	428109,29	18613,45	4,33	266895,75	11604,16
7	1,34	334625,29	14548,93	3,07	26679,70	1159,99
8	1,26	61649,64	2680,42	2,80	398904,77	17343,69
9	1,09	373040,74	16219,16	2,26	672852,92	29254,47
10	1,00	16439,90	714,78			

Tableau IV-20 : Pourcentages de déformation, vitesses propres et vitesse critique d'engrènement

IV.2. INFLUENCE DE QUELQUES PARAMETRES CARACTERISTIQUES

IV.2.1. Influence du pourcentage d'acyclisme

Il a été montré que pour des modèles torsionnels, l'amplitude de l'acyclisme était un paramètre clé conditionnant largement les efforts dynamiques sur les contacts entre dentures. Dans ce paragraphe, son influence est analysée pour un modèle plus complet en considérant des engrenages droits.

La Figure IV-26 présente les évolutions du coefficient R_{\max} en fonction des vitesses moyennes de rotation.

Les courbes donnant les évolutions sans la prise en compte de l'acyclisme avec et sans excentricités ne diffèrent que légèrement et sont confondues. Seule celle prenant en compte les excentricités sera alors représentée.

Les résultats montrent tout d'abord une augmentation des coefficients dynamiques et, par conséquent, des efforts maximum sur les contacts en fonction du pourcentage d'acyclisme. Il apparaît également un décrochage pour un pourcentage de 5 % correspondant à une perte de contact qui intervient à la vitesse critique de vol libre calculée par (IV-14).

Dans un deuxième temps, les résultats montrent que dans le cas où il n'y a pas de pertes de contacts (les courbes à 2.5 % et en dessous de la vitesse limite de vol libre), l'influence des excentricités reste mineure (voir la Figure IV-27 donnant la différence relative de R_{max} pour le pourcentage de 2.5 %).

A l'inverse dans le cas d'apparition de séquences de vol libre et de chocs rétro, la présence d'excentricités conduit à une diminution des efforts dans le cas de chocs rétro (courbe en pointillée rouge). On observe une atténuation des chocs liée à la réduction des vitesses des dents avant la reprise sur le flanc direct. Ainsi, en présence de défauts d'excentricités, les chocs rétro se produisent-ils en amont de ceux pour des engrenages parfaits.

Les Figures IV-28 et IV-29 illustrent les évolutions temporelles des coefficients dynamiques aux vitesses de 5115 tr/min et 5410 tr/min respectivement. L'influence des excentricités est mise en évidence, notamment Figure IV-28 pour les chocs rétro.

Ces observations prouvent qu'il est nécessaire de considérer le rôle d'excentricités pour la caractérisation du comportement dynamique de réducteurs soumis à un régime d'acyclisme.

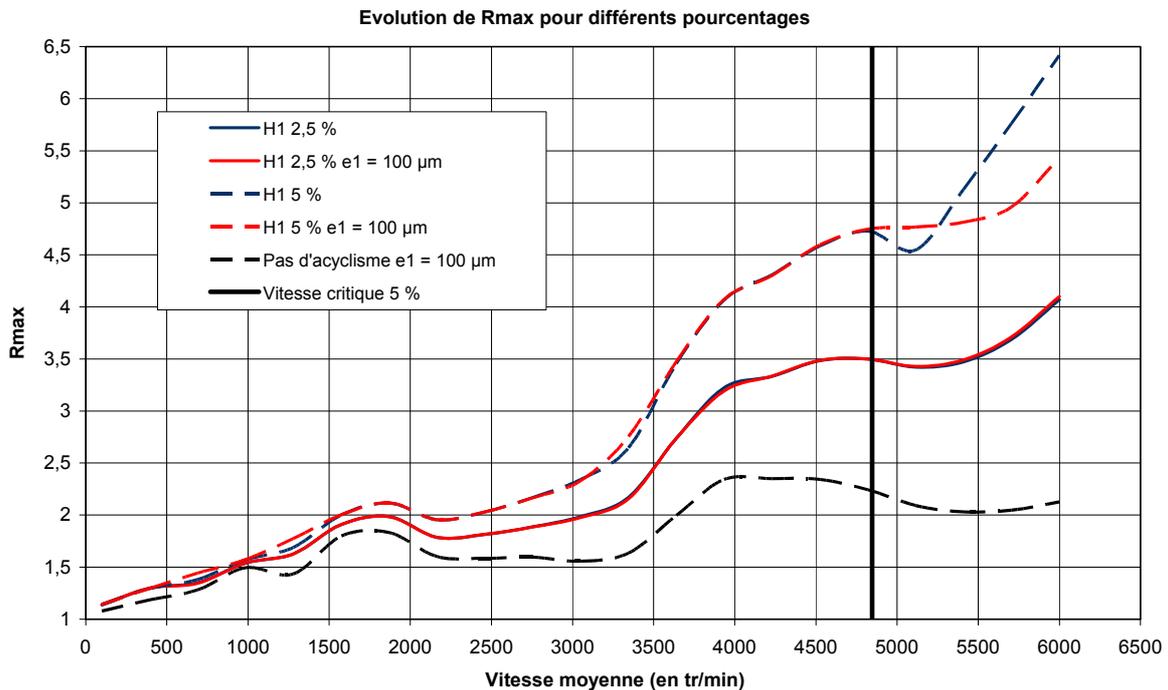


Figure IV-26 : Evolution pour divers pourcentages

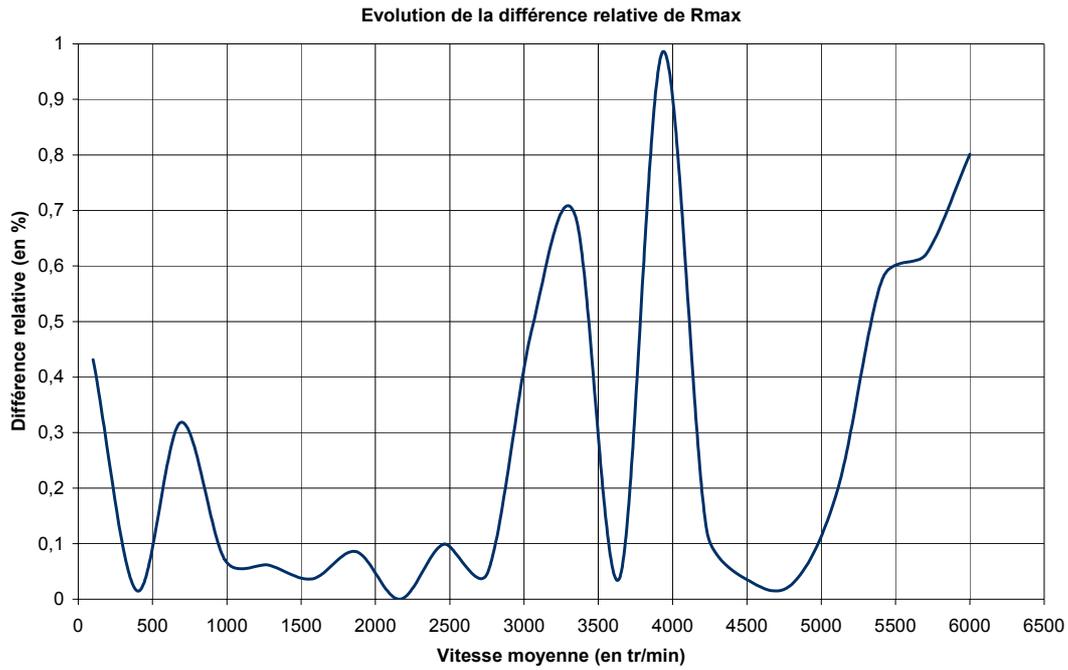


Figure IV-27 : Différence relative pour un pourcentage de 2.5 % et un harmonique d'ordre 1

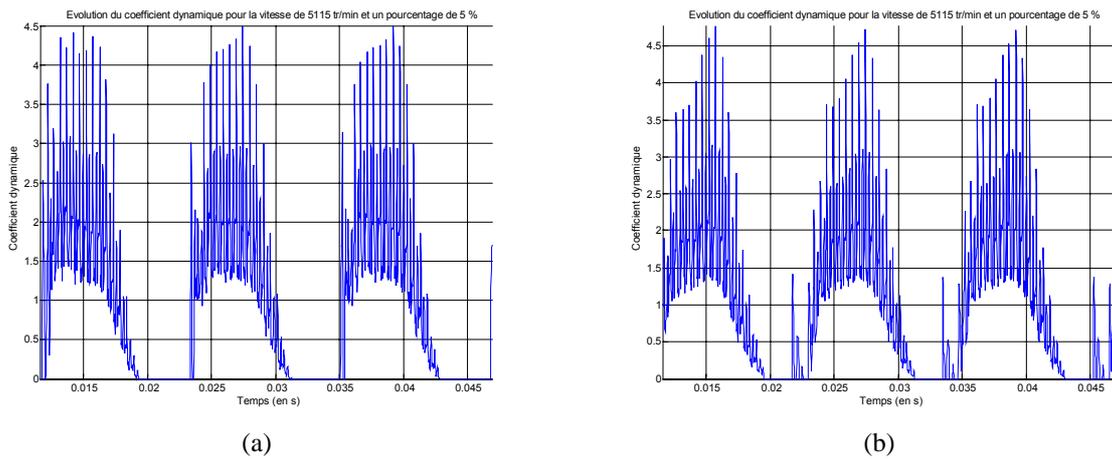


Figure IV-28 : Evolution du coefficient dynamique à 5115 tr/min
(a) : $e1=0 \mu\text{m}$ - (b) : $e1=100\mu\text{m}$

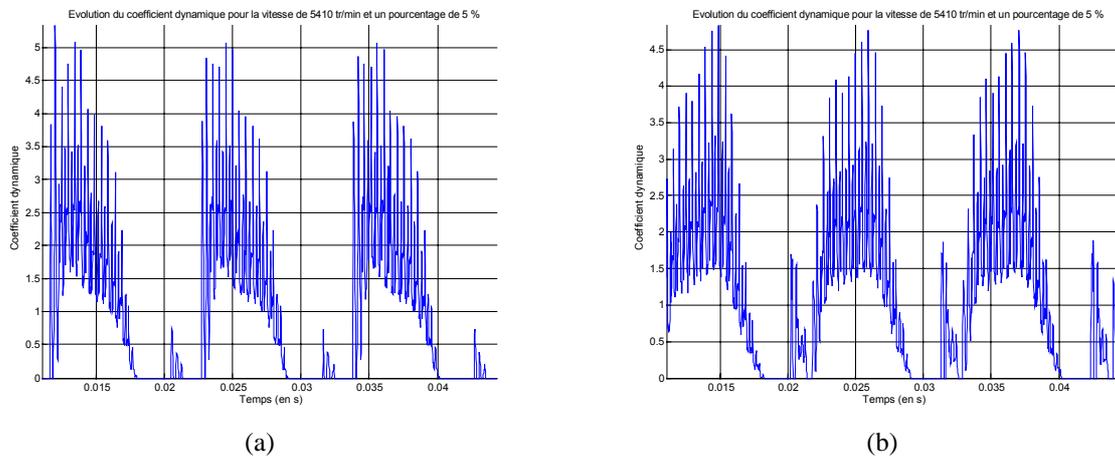


Figure IV-29 : Evolution du coefficient dynamique à 5410 tr/min
(a) : $e1=0 \mu\text{m}$ - (b) : $e1=100\mu\text{m}$

IV.2.2. Influence de l'harmonique

La Figure IV-30 donne l'évolution de R_{\max} pour un engrenage droit soumis à un pourcentage d'acyclisme de 2.5 %. Les courbes de réponse pour l'harmonique d'ordre 1 et un pourcentage de 2.5 % étant quasiment confondues (Figure IV-27), seule celle en présence d'excentricité sera présentée.

Les harmoniques d'ordres élevés engendrent une hausse des coefficients dynamiques, notamment après le passage de la vitesse de vol libre. Ce résultat a déjà été observé au chapitre III, § V.3.2, le lecteur pourra s'y référer.

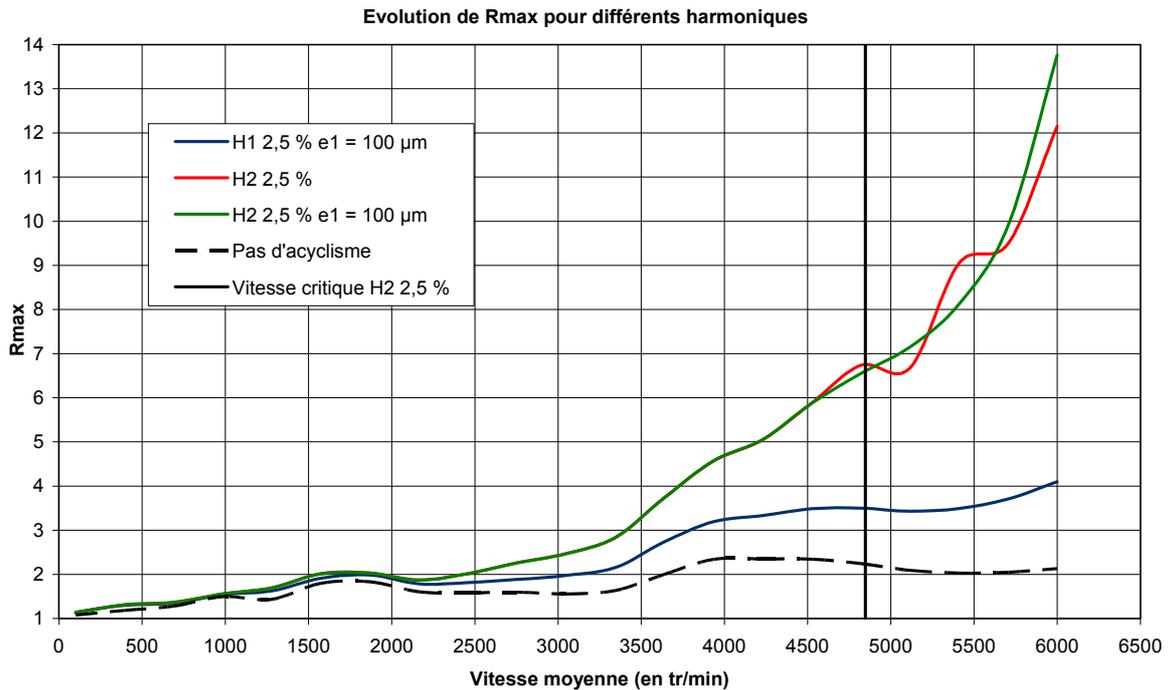


Figure IV-30 : Evolution pour divers harmoniques

En observant Figure IV-31 les coefficients dynamiques (en bleu) et les vitesses de rotation (en rouge) sans excentricités, les chocs se répètent autant de fois sur un tour de rotation qu'il y a d'ordres d'harmonique. Dans le cas présent, pour un harmonique d'ordre 2, il y a alors 2 chocs rétro par période de rotation. Ce constat pour une vitesse de 5410 tr/min demeure valable pour l'ensemble des vitesses au-delà de la vitesse critique de vol libre.

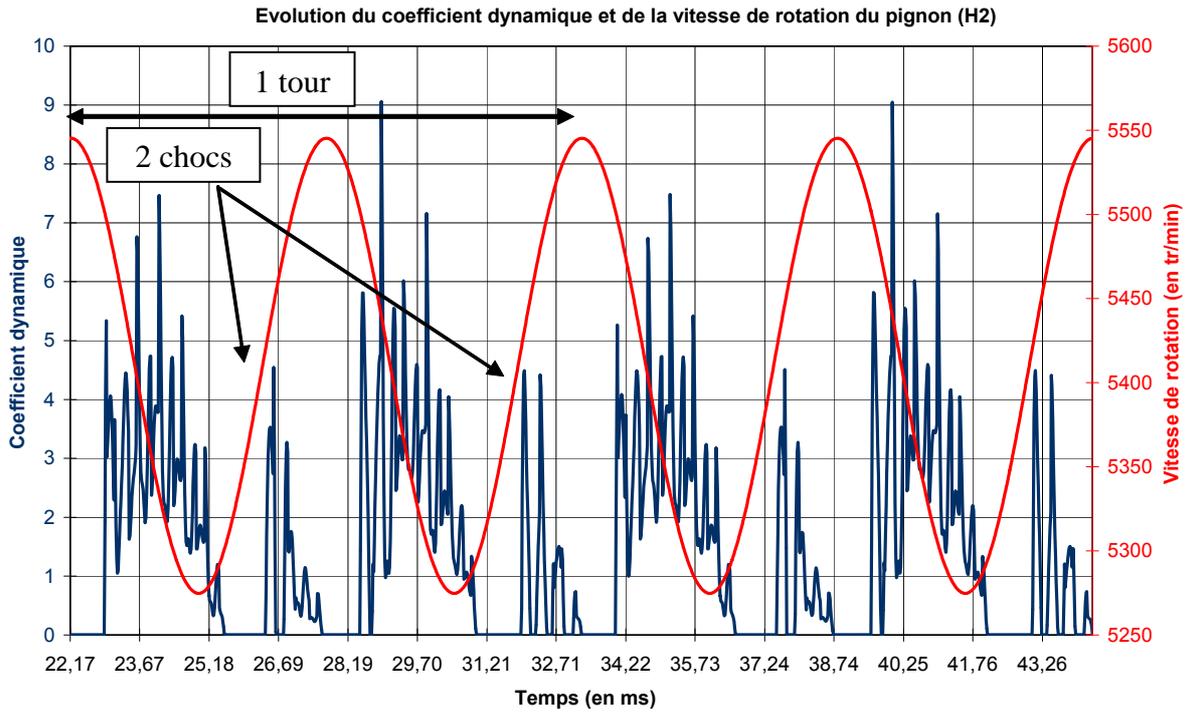


Figure IV-31 : Evolution du coefficient dynamique sans excentricités à 5410 tr/min

En introduisant une excentricité sur le pignon, le nombre de chocs rétro par période de rotation peut varier en fonction de la vitesse comme illustré sur les Figures IV-32 et IV-33 pour deux vitesses de rotation moyennes de 5410 tr/min et 5705 tr/min. Dans le premier cas, il n'y a qu'un seul choc par période alors qu'à 5705 tr/min, on observe 2 chocs par période.

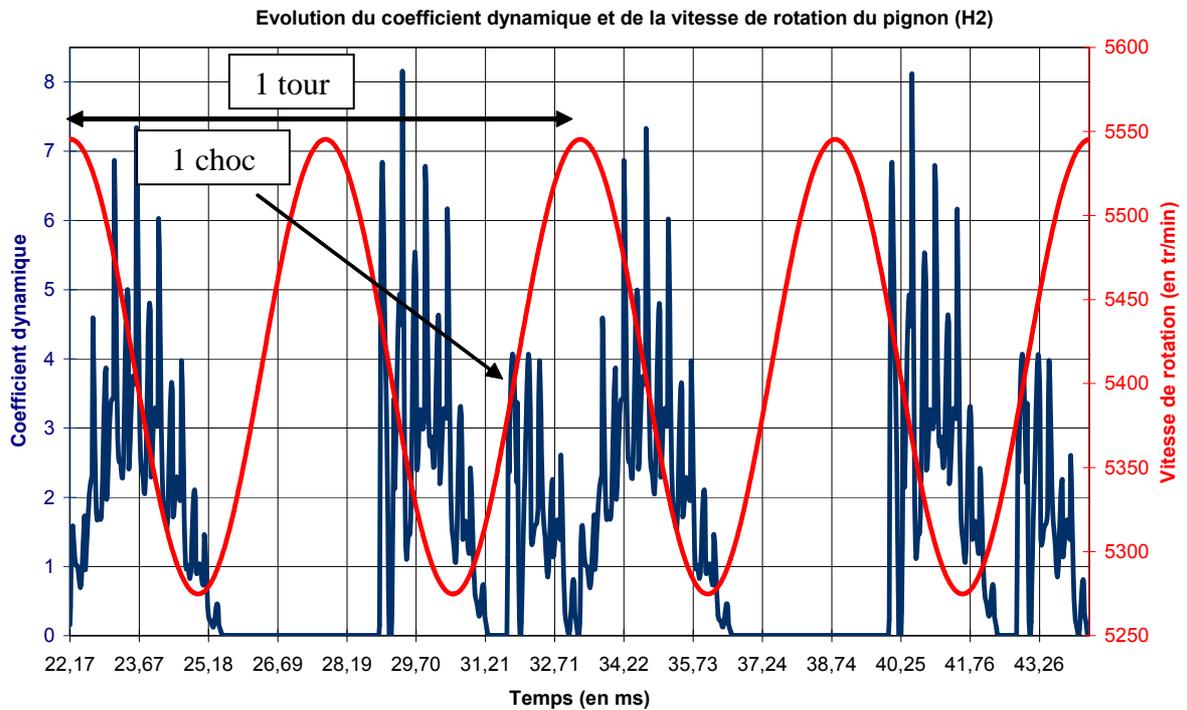


Figure IV-32 : Evolution du coefficient dynamique avec excentricités à 5410 tr/min

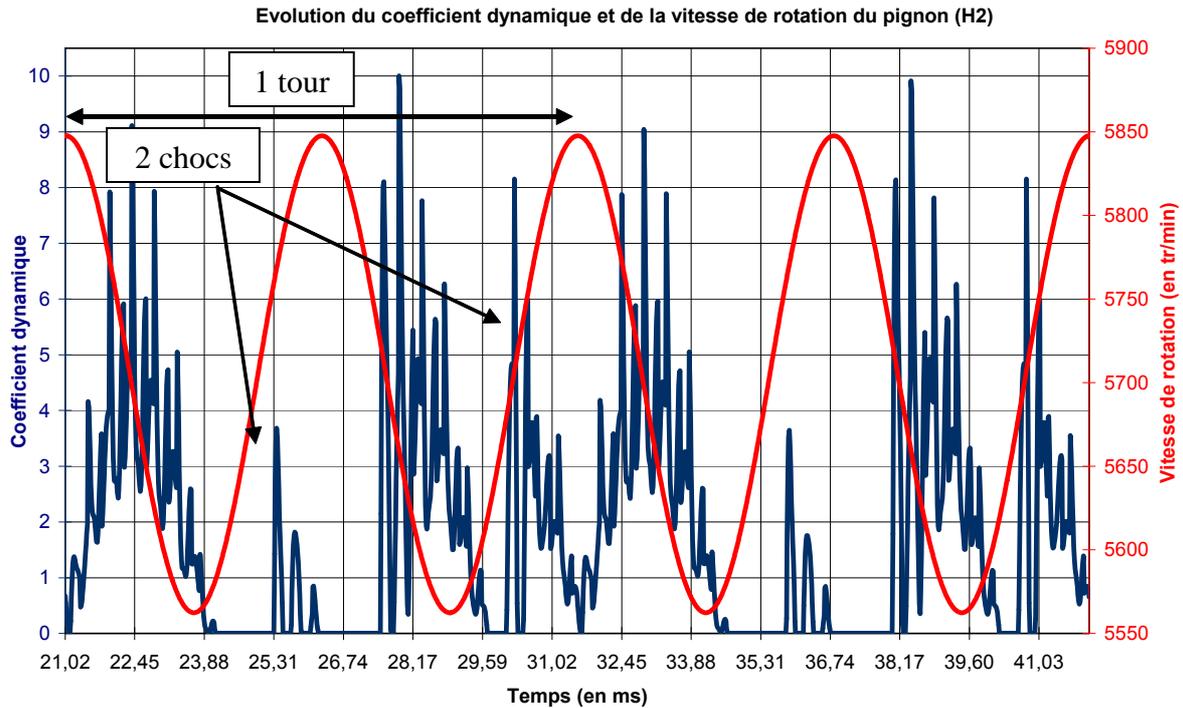


Figure IV-33 : Evolution du coefficient dynamique avec excentricités à 5705 tr/min

L'influence de l'ordre de l'harmonique est importante car plus il augmente, plus les efforts maxima sont intenses. De plus, combiné à la présence d'excentricités et donc à la variation du jeu de denture, il y a possibilité d'une multiplicité de chocs rétro selon les vitesses de rotation moyennes. Dans ce cas, il apparaît que pour un harmonique d'ordre n , il y a possibilité de $0, 1, \dots, n-1, n$ chocs rétro, alors que dans le cas d'engrenages sans excentricités, il y a soit 0 choc, soit n chocs.

IV.2.3. Influence de l'angle d'hélice

Il a été montré sur des modèles torsionnels que l'utilisation d'engrenages hélicoïdaux réduit de manière importante les efforts aux dentures pour des engrenages sans défauts sous acyclisme. L'objectif est ici de comparer l'utilisation de dentures droites avec des dentures hélicoïdales sur une modélisation globale en présence d'excentricité sur le pignon. Pour un acyclisme monoharmonique, la Figure IV-34 montre que les constats précédents peuvent être étendus aux modèles plus complexes.

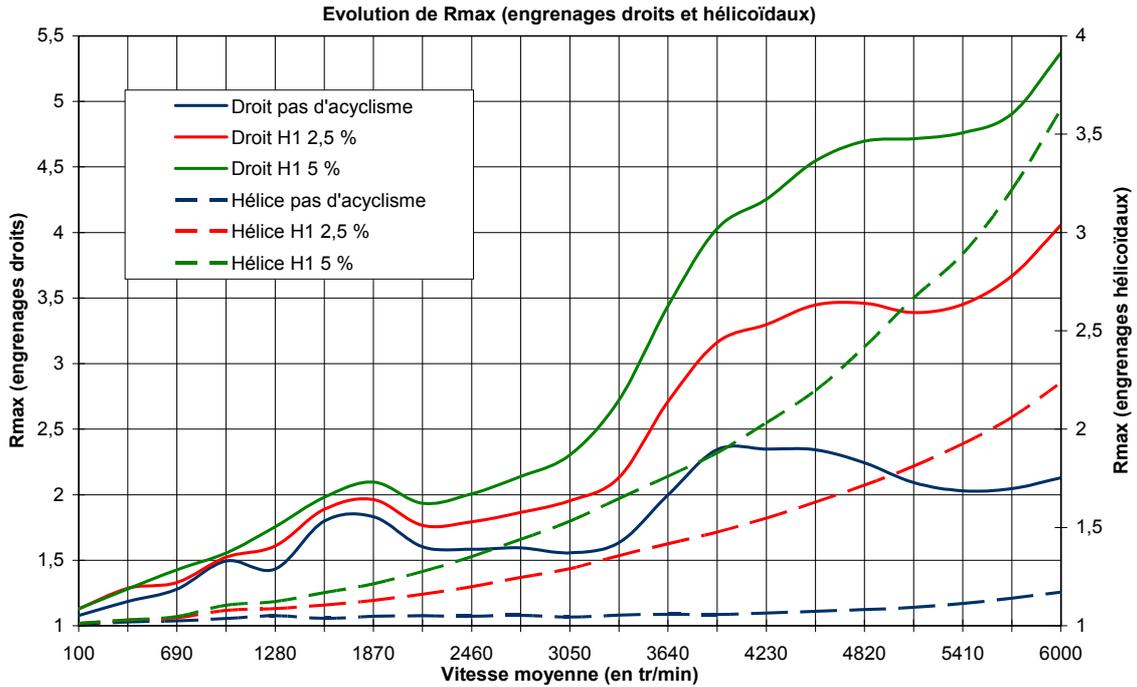


Figure IV-34 : Evolution pour deux angles d'hélices à divers pourcentages

IV.3. CONCLUSION DE L'ETUDE PARAMETRIQUE

L'étude paramétrique a permis de mettre en lumière un certain nombre de points importants, à notre connaissance originaux, relatifs au couplage entre acyclisme et défauts d'excentricités. Les principaux résultats portent sur les paramètres d'acyclisme et sur un des moyens d'en réduire les effets et sont résumés ci-dessous :

- L'élévation du niveau d'amplitude de la fluctuation de vitesse engendre une hausse des efforts aux dentures, de même que l'augmentation de l'ordre de l'harmonique.
- L'augmentation de ce pourcentage provoque des décollements de dentures qui, combinés aux excentricités, peuvent engendrer des chocs sur l'arrière des dentures. Les excentricités, toutefois, peuvent atténuer ces chocs en modifiant l'état de vitesse avant les reprises de contact sur les flancs directs.
- Les harmoniques, couplés aux effets des excentricités, provoquent plusieurs configurations de contacts selon les vitesses de rotation. Il y a alors, pour un harmonique d'ordre n donné, possibilité d'obtenir $0, 1, \dots, n-1, n$ chocs tandis que pour des engrenages parfaits, il n'y a possibilité que de 0 ou n chocs.
- L'augmentation de l'angle d'hélice permet de réduire les efforts aux dentures en augmentant la longueur active de contact.

V. CONCLUSION

Une modélisation globale de chaînes cinématiques de transmission de puissance par engrenages avec prise en compte d'acyclisme a été présentée et exploitée. Les fondements théoriques ont été développés au chapitre II et des modèles de complexité croissantes ont été introduits afin d'appréhender les phénomènes couplant les fluctuations de vitesses de rotation avec les évolutions de jeu de denture consécutives à l'introduction d'excentricités.

La première partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude d'un inverseur et à l'influence de l'introduction des déphasages entre l'évolution temporelle du jeu de denture et la vitesse de rotation du pignon. Il a été montré que ces derniers engendrent une succession de phases de contacts, tantôt de vol libre, tantôt rétro, et que dans ce dernier cas, les efforts étaient réduits. De plus, des phénomènes de résonance de phases apparaissent pour lesquelles des pics d'efforts ont été observés. La diminution du jeu de denture nominal permet de réduire les efforts avec le risque d'obtenir un blocage en fonctionnement des engrenages.

Des paramètres indépendants de la conception du réducteur ont également été étudiés et il est confirmé qu'une augmentation du chargement nominal permet de limiter les effets inertiels introduits par l'acyclisme. Inversement, ces effets sont amplifiés par les caractéristiques inertielles de l'arbre moteur qu'il convient d'ajuster afin d'éviter des surcharges sur les dentures ou des problèmes de bruit trop prononcés.

Dans un deuxième temps, une étude paramétrique sur un réducteur de type industriel a permis de relever des paramètres importants contrôlant l'influence de l'acyclisme sur une modélisation globale. Le pourcentage d'acyclisme et l'ordre d'harmonique jouent un rôle prépondérant et le contenu spectral de l'acyclisme peut conduire à un nombre de chocs plus au moins important selon la vitesse de rotation nominale. Il est également confirmé que l'utilisation d'engrenages hélicoïdaux réduit les surcharges sur les dentures.

Ce chapitre conclut l'étude des transmissions par engrenages soumis à des régimes d'acyclisme en présentant une modélisation globale applicable aux chaînes cinématiques couramment rencontrées dans l'industrie.

CONCLUSION GENERALE

Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de modélisation du comportement statique et dynamique de réducteurs à engrenages effectués au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR CNRS 5259. Ce travail, à caractère spécifiquement théorique et numérique, vise à dépasser le cadre des modèles usuels de la littérature en proposant une approche originale permettant d'intégrer les contributions de fluctuations de vitesses et de chargement.

Le travail décrit dans ce mémoire se caractérise par :

- la modélisation des conditions de contact instantanées incluant les chocs sur les faces arrière des dents, les couplages entre excentricités et jeux de denture ainsi que les contributions de fluctuations de vitesses.
- l'introduction de modèles tridimensionnels et la résolution des équations du mouvement en couplant un algorithme de contact normal et un schéma d'intégration pas à pas dans le temps.
- Une approche originale de l'étude de la stabilité pour un système soumis à de l'acyclisme.
- Des études paramétriques permettant de mettre en évidence les facteurs susceptibles d'influer sur le comportement dynamique d'une transmission.

Par ailleurs, un certain nombre d'approches analytiques originales ont été mises en œuvre afin, d'une part, de pouvoir obtenir des résultats les plus généraux possibles et, d'autre part, de tester et calibrer les méthodes numériques de résolution. Ces approches sont bien évidemment limitées à des modèles simples mais les indications qui en ont été déduites semblent pouvoir être généralisées à des systèmes plus complexes. De nombreux résultats, dont certains semblent originaux, illustrent le potentiel du modèle et son intérêt dans un contexte industriel.

Une vitesse critique vis-à-vis de l'apparition de chocs sur les dentures a été ainsi mise en évidence, les contributions d'excentricités ont été clarifiées et les influences des caractéristiques d'acyclisme en termes d'amplitudes et de contenu fréquentiel ont été précisées. Le cas particulier de régimes de montée ou descente en vitesse a été également abordé mais n'a pu être explicité dans ce mémoire.

Le travail effectué permet d'envisager différentes perspectives :

- Une étude plus poussée du comportement tribologique du film lubrifiant en cas de chocs semble nécessaire car le niveau d'effort instantané dépend fortement du modèle rhéologique considéré. Dans ce travail, un modèle visqueux linéaire simple a été considéré et il devra être confronté à des approches plus réalistes.

- Les perturbations induites par des écarts de forme sur les dentures (corrections de profil, corrections longitudinales, erreurs de pas, désalignements) devront être introduites dans ce contexte de vitesses variables.
- La prise en compte de l'interaction entre structure (corps du pignon et de la roue, arbres, carter, ...), paliers (tenant compte des conditions de contact sur les éléments roulants) et engrènement constitue une voie de développement privilégiée. La partie motrice et le carter pourraient être introduits comme deux sous-structures liées par des modèles de roulements ou de paliers fluides.

En conclusion, la méthodologie proposée apparaît comme une solution prometteuse ouverte à des développements futurs. Elle permet, pour l'heure, des simulations de systèmes relativement modestes et devra être étendue à des modèles plus complexes à la fois en nombre de degrés de liberté mais également en termes de modèles d'erreurs géométriques. Compte tenu de la problématique abordée et de son application privilégiée dans le domaine du transport, l'extension vers des modèles intégrant plusieurs étages de réduction semble indispensable, ainsi qu'une investigation plus approfondie concernant les cas particuliers de régimes de montée ou descente en vitesse.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **LIGIER, J.-L., BARON, E.** *Acyclisme et vibrations, Applications aux moteurs thermiques et aux transmissions*. Tome 2, Publications de l'Institut Français de Pétrole et des Moteurs, Paris : Editions TECHNIP, 2002, p. 483.
- [2] **BOURDON, A.** *Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1997, 221 p.
- [3] **LALANNE, M., BERTHIER, P., DER HAGOPIAN, J.** *Mécanique des vibrations linéaires*. 2^{ème} édition, Paris : Editions Masson, 1986, 306 p.
- [4] **KAHRAMAN, A., ÖZGÜVEN, H. N., HOUSER, D. R., ZAKRAJSEK, J.** *Dynamic analysis of geared rotors by finite elements*. Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol 1, p. 375-382.
- [5] **VELEX, P.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1988. 188 p.
- [6] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 1st report : The approximate formula for deflection of gear tooth*. Bulletin of JSME, 1972, Vol 15, N° 90, p. 1632-1639.
- [7] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 2nd report : The approximate formula for bending moment distribution of gear tooth*. Bulletin of JSME, 1973, Vol 16, N° 92, p. 407-413.
- [8] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 3rd report : The static behaviour of driven gear*. Bulletin of JSME, 1974, Vol 17, N° 112, p. 1348-1355.
- [9] **UMEZAWA, K., SUZUKI, T., HOUJOH, H., BAGIASNA, K.** *Influence of misalignment on vibration of helical gear*. Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing, Paris, 1986, p. 615-626.
- [10] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., ICHIKAWA, N., MATSUMURA, S.** *Simulation on rotational vibration of a helical gear pair transmitting light load*. Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 85-91.
- [11] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., MATSUMURA, S.** *The influence of flank deviations on the vibration of a helical gear pair transmitting light load*. Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing, Phoenix, 1992, Vol 2, p. 681-688.

- [12] **KÜCÜKAY, F.** *Dynamic behaviour of high speed gears.* Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, York, 1984, Paper C317/84, p. 81-90.
- [13] **KASUBA, R., EVANS, J. W.** *An extended model for determining dynamic loads in spur gearing.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 398-409.
- [14] **KOHLER, H. K., PRATT, A., THOMPSON, A. M.** *Dynamic and noise of parallel-axis gearing.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1970, Vol 184, p. 111-121.
- [15] **HARRIS, S. L.** *Dynamic loads on the teeth of spur gears.* Proceedings Institution of Mechanical Engineers, 1958, Vol 172, p. 87-112.
- [16] **WELBOURN, D. B.** *Gear errors and their resultant noise spectra.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1969-70, Vol 184, Part 30, p. 131-139.
- [17] **MARK, W. D.** *Analysis of the vibratory excitation of gear systems : Basic theory.* Journal of the Acoustical Society of America, 1978, Vol 63, N° 5, p.1409-1430.
- [18] **MARK, W. D.** *Analysis of the vibratory excitation of gear systems II : Tooth error representations, approximations and applications.* Journal of Acoustical Society of America, 1979, Vol 66, N° 6, p 1758-1787.
- [19] **MARK, W. D.** *The transfert function method for gear system dynamics applied to conventional and minimum excitation gearing designs.* Cambridge (USA) : NASA, 1982, Contract Report N° 3626, 107 p.
- [20] **ÖZGÜVEN, H. N., HOUSER, D. R.** *Mathematical models used in gear dynamics - A review.* Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol 121, N° 3, p. 383-411.
- [21] **MUNRO, R. G.** *The D.C. component of gear transmission error.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing, Chicago, 1989, Vol 1, p. 467-470.
- [22] **FAURE, L.** *Contrôle des engrenages, mesures de l'écart de transmission.* CETIM information, Février 1989, N° 109, p. 47 - 55.
- [23] **GREGORY, R. W., HARRIS, S. L., MUNRO, R. G.** *Dynamic behaviour of spur gears.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1963-64, Vol 178, Part 1, N° 8, p. 207-226.
- [24] **GREGORY, R. W., HARRIS, S. L., MUNRO, R. G.** *Torsional motion of a pair of spur gears.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1963-64, Vol 178, Part 3, p. 166-173.
- [25] **LIN, H. H., TOWNSEND, D. P., OSWALD, F. B.** *Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol 1, p. 409-419.

- [26] **LIN, H. H., TOWNSEND, D. P., OSWALD, F. B.** *Profile modification to minimize spur gear dynamic loading.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol 1, p. 455-465.
- [27] **VELEX, P., AJMI, M.** *On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors.* Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol 290, Issue 3-5, p. 882-909.
- [28] **ÖZGÜVEN, H. N., HOUSER, D. R.** *Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error.* Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol 125, N° 1, p. 71-83.
- [29] **MUNRO, R. G.** *Effect of geometrical errors on the transmission of motion between gears.* Proceedings Institution of Mechanical Engineers, 1969-70, Vol 184, Pt30, p. 79-83.
- [30] **REMMERS, E. P.** *Gear mesh excitation spectra for arbitrary tooth spacing errors, load and design contact ratio.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1978, Vol 100, p. 715-722.
- [31] **MUNRO, R. G.** *The dynamic behaviour of spur gears.* PhD, University of Cambridge, Cambridge, 1962, 95p.
- [32] **KAHRAMAN, A., SINGH, R.** *Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system.* Journal of Sound and Vibration, 1991, Vol 146, N° 1, p. 135-156.
- [33] **KAHRAMAN, A., SINGH, R.** *Non-linear dynamics of a spur gear.* Journal of Sound and Vibration, 1990, Vol 142, N° 1, p. 49-75.
- [34] **VELEX, P., SAADA, A.** *A model for the dynamic behaviour of multi-stage geared systems.* Proceedings of the 8th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Prague, 1991, Vol 2, p. 621-624.
- [35] **VELEX, P., SAADA, A.** *Modal analysis for the prediction of dynamic tooth loads in geared trains.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 117-122.
- [36] **VELEX, P., SAADA, A.** *Application d'une méthode de Ritz à l'analyse du comportement dynamique de trains d'engrenages simple ou multi-étages.* Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, 1992, p. 755-764.
- [37] **MAATAR, M.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1995, 192p.
- [38] **VELEX, P., MAATAR, M.** *A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour.* Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol 191, N° 5, p. 629-660.

- [39] **VELEX, P., MAATAR, M.** *Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications.* Proceedings of the 7th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, 1996, p. 181-193.
- [40] **BUCKINGHAM, E.** *Dynamic loads on gear teeth.* Report, New-York : Special Research Committee on the Strength of Gear Teeth, 1931, 221 p.
- [41] **TUPLIN, W. A.** *Dynamic loads on gear teeth.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing, London, 1958, p. 24-30.
- [42] **HOUSER, D. R., SEIREG, A.** *An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, 1970, p. 495-503.
- [43] **SEIREG, A., HOUSER, D. R.** *Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, 1970, p. 504-515.
- [44] **KUBO, A.** *Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1978, Vol 100, p. 77-84.
- [45] **ÖZGÜVEN, H. N.** *A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics.* Journal of Sound and Vibration, 1991, Vol 145, N° 2, p. 239-260.
- [46] **HONDA, S.** *Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 78-84.
- [47] **VELEX, P., DUVERGEY, O., SAINOT, P.** *Un modèle du comportement dynamique d'engrenages droits avec prise en compte des contacts hors du plan d'action.* Mécanique et Industries, AFM, EDP Sciences, 2004, N° 5, p. 701-708.
- [48] **BLANKENSHIP, G.W., SINGH, R.** *A comparative study of selected gear mesh interface dynamic models.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol 1, p. 137-146.
- [49] **STRAUCH, H.** *Zahnradschwringungen.* Zeitschrift des Veirenes Deutscher Ing., 1953, N° 95, p. 159-163.
- [50] **I.S.O. / DIS 6336/1** *Calculation of load capacity of spur and helical gears.* 1983, p. 74-80.
- [51] **WEBER, C., BANASCHEK, K.** *The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 5.* London : Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), 1950, Report N° 6.

- [52] **CORNELL R. W.** *Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth*. Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 447-459.
- [53] **ISHIKAWA J.** *Fundamental investigations on the design of power transmission spur gears*. Bulletin of Tokyo Institute of Technology, 1957, Series A, N° 3, p. 197-203.
- [54] **KERR, A. D.** *Elastic and viscoelastic foundation models*. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 1964, p. 491-498.
- [55] **AJMI, M.** *Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 2000, 151 p.
- [56] **VELEX, P., AJMI, M.** *Un modèle pour la simulation du comportement dynamique d'engrenages à dentures larges*. Proceedings of the 4th World congress on gearing and Power Transmission, Paris, 1999, Vol 3, p. 1991-2002.
- [57] **SEAGER, D. L.** *Some elastic effects in helical gear teeth*. PhD, University of Cambridge, Cambridge, 1967, 209 p.
- [58] **SCHMIDT, G., PINNEKAMP, L., WUNDER, A.** *Optimum tooth profile correction of helical gears*. Proceedings of the International Power Transmission and Gearing Conference, San Francisco, 1980, Paper 80-C2/DET-110, 12p.
- [59] **JOHNSON, K. L., BENTALL, R. H.** *A numerical method for finding elastic contact pressures*. Cambridge University Engineering, Department Report, 1977, C-MECH/TR14, 56 p.
- [60] **LUNDBERG, G.** *Elastische berührung zweier halbraume (Elastic contact of two half spaces)*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1939, Vol 10, N° 5, p. 201-211.
- [61] **KIYONO, S., AIDA, T., FUJII, Y.** *Vibration of helical gears - Part I : Theoretical analysis*. Bulletin of JSME, 1978, Vol 21, N° 155, p. 915-922.
- [62] **IWATSUBO, T., ARII, S., KAWAI, R.** *The coupled lateral torsional vibration of a geared rotor system*. Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 1984, paper C265/84, p. 59-66.
- [63] **CAI, Y., HAYASHI, T.** *The linear approximated equation of vibration for a pair of spur gears : theory and experiment*. Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol 2, p. 521-528.
- [64] **NERIYA, S. V., BHAT, R. B., SANKAR, T. S.** *On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of deterministic and filtered white noise inputs*. Transactions of ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1988, Vol 110, p. 501-506.

- [65] **HENRIOT, G.** *Traité théorique et pratique des engrenages, Tome 2 : Etude complète du matériel.* 4^{ème} édition, Paris : Dunod technique, 1978, 608 p.
- [66] **MITCHELL, L. D.** *Gear noise : the purchaser's and the manufacturer's views.* Proceedings of the Purdue Noise Control Conference, Lafayette-Indiana, 1971, p. 95-106.
- [67] **WELBOURN, D. B.** *Gear noise spectra - a rational explanation.* ASME, 77-DTE-38, p. 1-8.
- [68] **WELBOURN, D. B.** *Fundamental knowledge of gear noise - A survey.* Conference of noise and vibrations of engines and transmissions, Cranfield, 1979, Paper C117/79, p. 9-29.
- [69] **SABOT, J., PERRET-LIAUDET, J.** *Excitation d'un carter de boîte de vitesses par l'erreur de transmission.* 3^{ème} Congrès mondial des engrenages et des transmissions, Paris, 1992, p. 829-840.
- [70] **BRIERE, P., PREIS, L., SABOT, J.** *Engrenages à dentures droites : erreur cinématique de transmission induite par un défaut d'excentricité.* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 1989, T 308 série II, p. 1307-1311.
- [71] **MITOME, K. I., ISHIDA, K.** *Eccentric gearing.* Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, 1994, p. 94-100.
- [72] **FLOQUET, M. G.** *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.* Annales de l'Ecole Normale, 1883, 2^{ème} série, Tome XII, p. 47-89.
- [73] **BOLOTIN, V. V.** *The dynamic stability of elastic systems.* Holden-Day, San Francisco, 1964, p. 145-277.
- [74] **NAYFEH, A. H., MOOK D. T.** *Non linear oscillations.* New York, John Wiley, 1979, p. 258-365.
- [75] **BENTON, M., SEIREG, A.** *Factors influencing instability and resonances in geared systems.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 372-378.
- [76] **BOSCH** *Mémento de technologie automobile.* 1^{ère} édition, Stuttgart : R.Bosch, 1988, 732 p.
- [77] **LIGIER, J.-L., BARON, E.** *Acyclisme et vibrations, applications aux moteurs thermiques et aux transmissions.* Tome 1, Publications de l'Institut Français de Pétrole et des Moteurs, Paris : Editions TECHNIP, 2002, p. 57, p. 63, p. 102, p. 370.
- [78] **HUGUES, J.-G.** *Contribution à l'étude dynamique, lors du démarrage, de chaînes cinématiques à engrenages, entraînées par moteur électrique.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1993, 193 p.
- [79] **VERNAY, P.** *Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de réacteur d'avion.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1999, 117 p.

- [80] **VERNAY, P., FERRARIS, G.** *Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de réacteur d'avion.* Mécanique & Industries, 2006, Vol 7, p. 147-153.
- [81] **DEVELAY, C.** *Etude et réduction du bruit de gaillonnement des boîtes de vitesses automobiles.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 2000, 127 p.
- [82] **JOHNSON, O., HIRAMI, N.** *Diagnostic and objective evaluation of gear rattle.* SAE Technical paper series N° 911082, 1991, p. 381-396.
- [83] **RUST, A., BRANDL, F. K., THIEN, G. E.** *Investigations into gear rattle phenomena - key parameters and their influence on gearbox noise.* Institution of Mechanical Engineers, 1990, C404/001, p. 113-120.
- [84] **SAKAI, T., DOI, Y., YAMAMOTO, K., OGASAWARA, T., NARITA, M.** *Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox.* SAE Technical paper series 810773, 1981, p. 85-91.
- [85] **SINGH, R., XIE, H., COMPARIN, R.-J.** *Analysis of automotive neutral gear rattle.* Journal of Sound and Vibration, 1982, Vol 131, N° 2, p. 177-196.
- [86] **PADMANABHAN, C., SINGH, R.** *Influence of clutch design on the reduction and perception of automotive transmission rattle noise.* Noise conference, Williamsburg VA, 1993.
- [87] **PFEIFFER, F.** *Modelling problems of rattling in gear-boxes.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 43-48.
- [88] **WEIDNMER, G., LECHNER, G.** *Rattling vibrations in automotive transmissions.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 37-42.
- [89] **BARTHOD, M., HAYNE, B., TÉBEC, J.-L., PIN, J.-C.** *Experimental study of dynamic and noise produced by a gearing excited by a multi - harmonic excitation.* Journal of Applied Acoustics, 2007, Vol 68, N° 9, p. 982-1002.
- [90] **BARTHOD, M., TÉBEC, J.-L.** *Auditory perception of noise known as rattle in gearboxes.* Acta Acustica, 2005, Vol 90, N° 1, p. 180-191.
- [91] **PERRET-LIAUDET, J., RIGAUD, E.** *Some effects of eccentricities on automotive rattle noise.* Proceeding of the 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas, 2007, DETC2007-34794
- [92] **O. TANGASAWI, O., THEODOSSIADES, S., RAHNEJAT, H.** *Lightly loaded lubricated impacts : idle gear rattle.* Journal of Sound and Vibration, Vol 308, N° 3-5, 2007, p. 418-430.

- [93] **BRANCATI, R., ROCCA, E., RUSSO, R.** *An analysis of the automotive driveline dynamic behaviour focusing on the influence of the oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon.* Journal of Sound and Vibration, Vol 303, N° 3-5, 2007, p. 858-872.
- [94] **VIDAL, F., DRECQ, D., LOURADOUR, G.** *P.A.R.I.S : Pendulum Acyclism Reducer Integrated System.* Seoul 2000 FISITA World Automotive Congress, Seoul, 2000, paper N° F2000H219.
- [95] **COUDERC, P.** *Comportement dynamiques des chaînes de transmissions automobiles.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, Villeurbanne, 1997, 160 p.
- [96] **PHILIPPE-DAMAGNEZ, C.** *Correlation between gearbox housing vibration and teeth impacts.* EAEC European Automotive Congress, Bratislava, 2001
- [97] **BLOMQVIST, J.** *Detection of impact sources using an impulse response recognition technique. Applications on rattle sources in gearboxes.* Doctoral Thesis, Göteborg Chalmers University of Technology, 1999.
- [98] **LANG, C. H., LECHNER, G.** *Klappern und Rasseln von Fahrzeuggetrieben - simulation der losteilschwingungen und möglichkeiten zur geräuschminimierung.* VDI Berichte, Vol 1175, 1995, p. 99-122.
- [99] **DOGAN, S. N.** *Zur minimierung der Losteilgeräusche von Fahrzeuggetrieben.* PhD, Institut für Maschinenelemente, Fakultät Konstruktions, Produktions und Fahrzeugtechnik, Stuttgart, 1999.
- [100] **FORCELLI, A.** *The transmission gear rattle noise : parametric sensitivity study.* SAE Technical paper 2004-01-1225, 1996.
- [101] **LUND, J. W.** *Critical speeds, instability and response of a geared train of rotors.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1978, Vol 100, p. 535-539.
- [102] **IIDA, H., TAMURA, A.** *Coupled torsional-flexural vibration of a shaft in a geared system.* Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 1984, paper C272/84, p. 67-69.
- [103] **KAHRAMAN, A.** *Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair.* Journal of Vibration and Acoustics, 1993, Vol 115, p. 33-39.
- [104] **KAHRAMAN, A.** *Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol 1, p. 365-373.
- [105] **SENER, O. S., ÖZGÜVEN, H. N.** *Dynamic analysis of geared shaft systems by using continuous system model.* Journal of Sound and Vibration, 1993, Vol 166, N° 3, p. 539-556.

- [106] **ÖZGÜVEN, H. N., KESAN, M.** *Dynamic of geared rotors to internal excitation by using a finite element modal.* Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, 1992, Vol 2, p. 921-930.
- [107] **VINAYAK, H., SINGH, R., PADMANABHAN, C.** *Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external rigid gears.* Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol 185, N° 1, p. 1-32.
- [108] **BENTON, M., SEIREG, A.** *Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1978, Vol 100, p. 26-32.
- [109] **WANG, K. L., CHENG, H. S.** *A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears, part I : Analysis.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 177-187.
- [110] **WANG, K. L., CHENG, H. S.** *A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears, part II : Results.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 188-194.
- [111] **MASUDA, T., ABE, T., HATTORI, K.** *Prediction method of gear noise considering the influence of the tooth flank finishing method.* Transactions of ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1986, Vol 108, p. 95-100.
- [112] **TORDION, G. V., GAUVIN, R.** *Dynamic stability of a two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffness.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, 1977, p. 785-791.
- [113] **RASHIDI, M., KRANTZ, T. L.** *Dynamics of a split torque helicopter transmission.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol. 1, p. 347-358.
- [114] **SAADA, P.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrènements multiples.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1992, Villeurbanne, 169 p.
- [115] **BETTAÏEB, M. N., VELEX, P., AJMI, M.** *A Static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations - Applications to thin-rimmed gears.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 2007, Vol 129, p. 184-194
- [116] **WANG, C. C.** *Rotational vibration with backlash : part II.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol 103, p. 387-397.
- [117] **WANG, C. C.** *Calculating natural frequencies with extended Tuplin's method.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 1981, Vol. 103, p. 379-386.
- [118] **WANG, S. M.** *Analysis of nonlinear transient motion of a geared torsional.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, 1974, p. 51-59.

- [119] **HALSE, C. K., WILSON R. E., DI BERNARDO, M., HOMER, M. E.** *Coexisting solutions and bifurcations in mechanical oscillators with backlash*. Journal of Sound and Vibration, 2007, Vol 305, N° 4-5, p. 854-885.
- [120] **THEODOSSIADES, S., NATSIAVAS, S.** *Non-linear dynamics of gear-pair with periodic stiffness and backlash*. Journal of Sound and Vibration, 2000, Vol 229, N° 2, p. 287-310.
- [121] **OTTEWILL, J. R., WILSON, R. E., NEILD, S. A.** *An experimental analysis of the dynamics of lightly damped subcritically excited gear pairs*. Proceeding of the 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas, 2007, DETC2007-35096
- [122] **BARD, C.** *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, N° 95 ISAL 0031, 1995, 127 p.
- [123] **PERRET-LIAUDET, J.** *Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses automobiles*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992, 296 p.
- [124] **ICHIMARU, K., HIRANO, F.** *Dynamic behaviour of heavy-loaded spur gears*. Transactions of ASME Journal of Engineering for Industry, May 1974, p. 373-381.
- [125] **PREPARATION A L'AGREGATION DE PHYSIQUE** *Traitement du Signal - Télécommunications*. Cours de l'ENS PHYSIQUE MONTROUGE, 2002 - 2003
- [126] **BLANKENSHIP, G.W, SINGH, R.** *Analytical solution for modulation sidebands associated with a class of mechanical oscillators*. Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol 177, N° 1, p. 13-36.
- [127] **LIAPUNOV, A., M,** *The general problem of the stability of motion*. Biography, London : Taylor & Francis, 1950, 270 p.
- [128] **LEJEUNE-DIRICHLET, P., G.** *Note sur la stabilité de l'équilibre, Traduit de l'allemand, Journal de Crelle, tome XXXII*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1847, Série 1, N°12, p. 474-478.
- [129] **FLOQUET, M. G.** *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublements périodiques*. Annales de l'Ecole Normale, 1884, 3^{ème} série, Tome I, p. 181-238.
- [130] **FRIEDMANN, P., HAMMOND, C.E., WOO, T.H.** *Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problem*. 1977, International Journal for numerical methods in engineering, Vol 11, p. 1117-1136.
- [131] **SIKA, G., VELEX, P.** *Analytical and numerical analysis of gears in the presence of engine acyclism*. Proceeding of the 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas, 2007, DETC2007-34068

- [132] **SIKA, G., VELEX, P.** *Analytical and numerical analysis of gears in the presence of engine acyclism.* Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, 2008, Issue 12, disponible en ligne.
- [133] **SIKA, G., VELEX, P.** *Instability analysis in oscillators with velocity-modulated time-varying stiffness - Applications to gears submitted to engine speed fluctuations.* Journal of Sound and Vibration, 2008, Vol 318, N° 1-2, p. 166-175.
- [134] **BOUHADDI, N.** *Elastodynamique linéaire - Sensibilité.* Cours de Master Mécanique et Ingénieries 2^{ème} année, option Dynamique des Structures et Acoustique, Université de Franche-Comté, ENSMM, Besançon, Laboratoire de Mécanique Appliquée Robert Charléat, 2005

ANNEXES

ANNEXE I

LES MATRICES DES ELEMENTS D'ARBRES

La Figure I-1 représente l'élément d'arbre standard utilisé à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœuds.

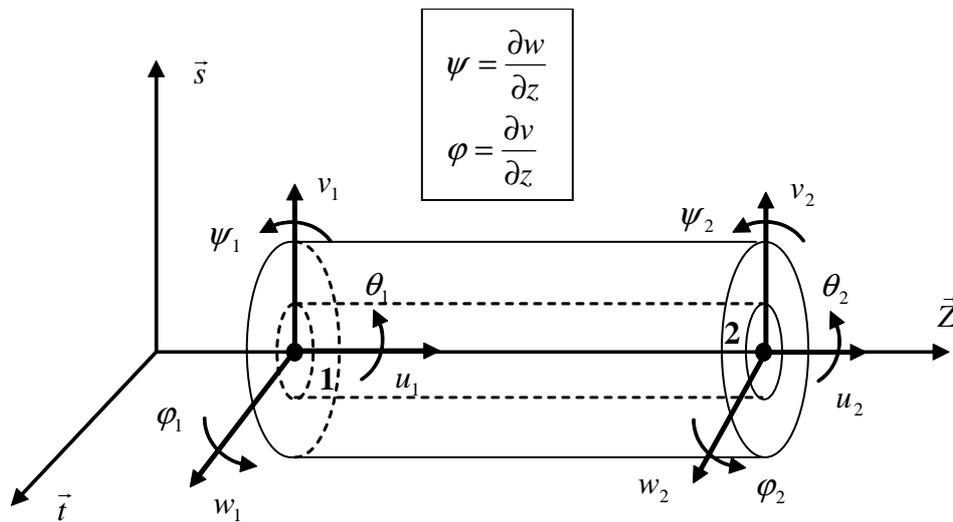


Figure I-1 : Élément d'arbre à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud de type Timoschenko

I. MATRICE DE MASSE

La matrice de masse M_a découle de l'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique T_a de l'élément de section S , de longueur L , d'inerties polaire I_θ et transverse I_x et de masse volumique ρ , tournant à la vitesse Ω_a :

$$T_a = \frac{1}{2} \left(\rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dz + I_\theta \int_0^L (\dot{\theta} + \Omega_a)^2 dz + I_x \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) dz \right)$$

En négligeant les effets d'inerties, la matrice de masse relative au vecteur $X = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \phi_1 \ \psi_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \phi_2 \ \psi_2 \ \theta_2]^T$ s'écrit :

$$M_a = \begin{bmatrix} 140 x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & a & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & e & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & f & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & e & 0 & 0 & d & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{mt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{mt}}{2} \\ 70 x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 x_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & b & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & f & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & f & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{mt}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{mt} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} - \quad x_m &= \frac{\rho S L}{420}, \quad x_{mt} = \frac{\rho I_\theta L}{3}, \quad x_{mf} = \frac{\rho I_x}{30 L} \\ - \quad a &= 156 x_m + 36 x_{mf}, \quad c = (22 x_m + 3 x_{mf}) L, \quad d = (13 x_m - 3 x_{mf}) L, \quad e = 4 L^2 (x_m + x_{mf}), \\ f &= -L^2 (3 x_m + L^2 x_{mf}) \end{aligned}$$

II. MATRICE DE RAIDEUR

La matrice de raideur K_a découle de l'application des équations de Lagrange à l'énergie de déformation U_a de l'élément de section S , de longueur L , de moments d'inertie transverse I_x et polaire I_θ , de modules d'Young E et de Coulomb G :

$$U_a = \frac{1}{2} \left(E S \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + G I_x \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz + E I_\theta \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz \right)$$

La matrice de raideur relative au vecteur $X = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad \psi_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \psi_2 \quad \theta_2]^T$ s'écrit :

$$K_a = \begin{bmatrix} K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & aL & 0 & 0 & -2a & 0 & 0 & aL & 0 \\ 0 & 0 & 2a & -aL & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a & -aL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aL & b & 0 & 0 & 0 & 0 & aL & c & 0 & 0 \\ 0 & aL & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\theta \\ -K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -aL & 0 \\ 0 & 0 & -2a & aL & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & aL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aL & c & 0 & 0 & 0 & 0 & aL & b & 0 & 0 \\ 0 & aL & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -aL & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

Avec :

- $a = \frac{12 E I_x}{G S L^2}$ le facteur d'influence au cisaillement
- $K_u = \frac{E S}{L}$, $K_f = \frac{E I_x}{(1+f)L^3}$, $K_\theta = \frac{G I_\theta}{L}$
- $a = 6 K_f$, $b = (4+f)^2 L^2 K_f$, $c = (2-f)^2 L^2 K_f$

ANNEXE II

ANGLE DE ROTATION, VITESSE ET ACCELERATION ANGULAIRE DE LA ROUE EN PRESENCE D'EXCENTRICITES

L'engrènement de 2 roues dentées en présence d'excentricités peut être modélisé par le roulement sans glissement d'une droite sur les deux cercles de base excentrés des quantités e_1 et e_2 (Figure II-1) :

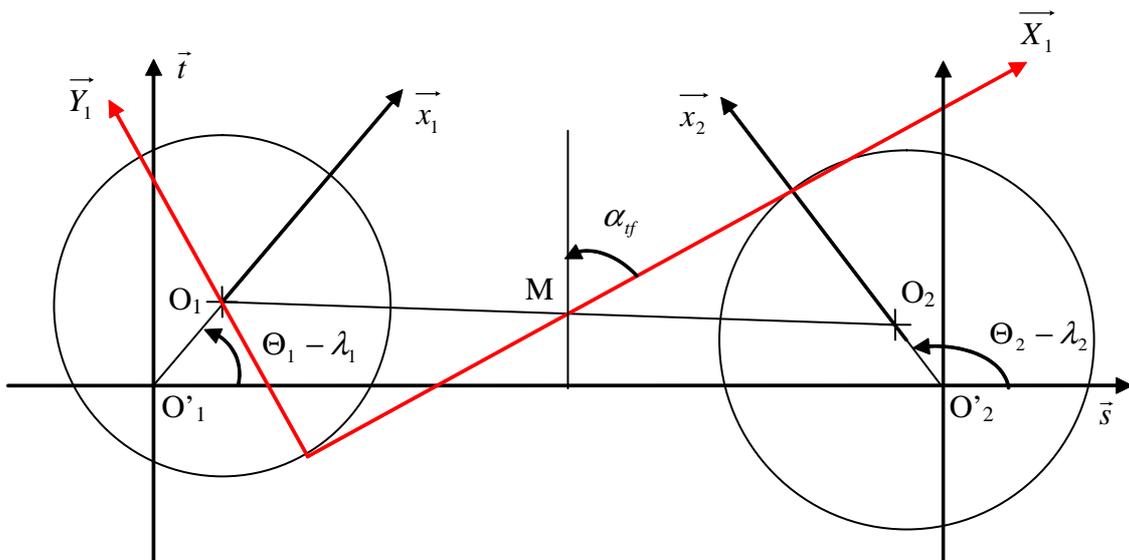


Figure II-1 : Illustration des excentricités

En écrivant que la vitesse différentielle du point M projetée sur \vec{X}_1 est nulle, soit $\overrightarrow{V_{1/2}^R(M)} \cdot \vec{X}_1 = 0$, la vitesse angulaire s'écrit :

$$\Omega_2 = - \frac{Rb_1 + e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_{ff})}{Rb_2 - e_2 \cos(\Theta_2 - \lambda_2 + \alpha_{ff})} \Omega_1$$

Or Θ_2 peut s'écrire $\Theta_2 = -\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \partial\Theta_2$. En supposant que la variation angulaire $\partial\Theta_2$ de la roue est infinitésimale, il vient en négligeant les termes en $e_2 \partial\Theta_2$:

$$\Omega_2 = - \frac{Rb_1 + e_1 \cos(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_{ff})}{Rb_2 - e_2 \cos\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_{ff}\right)} \Omega_1$$

En supposant également que la variation de l'angle de pression apparent α_f s'écrit $\alpha_t + \partial\alpha_f$ (avec α_t l'angle de pression apparent de fonctionnement en l'absence d'excentricités) et en négligeant les termes en $e_j \partial\alpha_t$, $j = 1, 2$, on obtient :

$$\Omega_2 = -\frac{Rb_1}{Rb_2} \Omega_1 \frac{1 + \frac{e_1}{Rb_1} \cos(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_t)}{1 - \frac{e_2}{Rb_2} \cos\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_t\right)}$$

Enfin en négligeant les termes en $\frac{e_i}{Rb_i} \frac{e_j}{Rb_j}$ la vitesse angulaire de la roue s'écrit :

$$\Omega_2 = -\frac{Rb_1}{Rb_2} \Omega_1 \left(1 + \frac{e_1}{Rb_1} \cos(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_t) + \frac{e_2}{Rb_2} \cos\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_t\right) \right)$$

En intégrant temporellement Ω_2 (avec t_0 le temps initial) l'expression de l'angle de rotation de la roue en présence d'excentricités est alors :

$$\begin{aligned} \Theta_2 = & -\frac{Rb_1}{Rb_2} (\Theta_1 - \Theta_1(t_0)) - \frac{e_1}{Rb_2} \sin(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_t) - \frac{e_2}{Rb_2} \sin\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_t\right) \\ & + \frac{e_1}{Rb_2} \sin(\Theta_1(t_0) + \alpha_t - \lambda_1) + \frac{e_2}{Rb_2} \sin\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1(t_0) + \lambda_2 - \alpha_t\right) \end{aligned}$$

La dérivation temporelle de la vitesse donne l'accélération angulaire :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 = & -\frac{Rb_1}{Rb_2} \dot{\Omega}_1 \left(1 + \frac{e_1}{Rb_1} \cos(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_t) + \frac{e_2}{Rb_2} \cos\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_t\right) \right) \\ & + \frac{Rb_1}{Rb_2} \Omega_1^2 \left(\frac{e_1}{Rb_1} \sin(\Theta_1 - \lambda_1 + \alpha_t) + \frac{e_2 Rb_1}{Rb_2^2} \sin\left(\frac{Rb_1}{Rb_2} \Theta_1 + \lambda_2 - \alpha_t\right) \right) \end{aligned}$$

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES
DE LYON

NOM : SIKA

DATE de SOUTENANCE : 07/11/2008

Prénoms : Guillaume

TITRE : Dynamique des transmissions en régime transitoire

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2008-ISAL-0080

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RESUME :

Ce travail vise à prédire le comportement dynamique d'engrenages évoluant à des vitesses de rotation variables. Un modèle d'engrenages à paramètres concentrés est développé, il inclut la possibilité de contacts directs et de contacts sur les faces arrière des dentures, les influences des excentricités, du jeu de denture et des variations de vitesse de rotation. Les arbres sont introduits via des éléments finis de poutres de Timoschenko et les paliers par l'intermédiaire de ressorts de traction - compression et de torsion. Les différents états des conditions de contacts, ainsi que les paramètres nécessaires à la simulation de l'engrènement, sont analysés. Un schéma numérique d'intégration pas à pas est couplé à un algorithme de contact afin de résoudre les équations de mouvement. Différents modèles de complexité croissante sont exploités afin de caractériser les contributions de variations périodiques de vitesses (acyclisme). Pour un système à un seul degré de liberté, des résultats originaux relatifs à la stabilité de la solution en sont déduits. Des approches analytiques sont également proposées afin de valider et calibrer les méthodes numériques. Les résultats confirment l'influence certaine de certains régimes transitoires sur le comportement dynamique des engrenages, particulièrement dans le cas de l'acyclisme.

MOTS-CLES :

Dynamique, transmission, engrenage droit, engrenage hélicoïdal, acyclisme, stabilité, modélisation d'engrenages, modélisation numérique, excentricité, jeu de denture

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA Lyon
20, Avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Philippe VELEX

Président de jury :

Composition du jury : D. LE HOUETEC
M. HADDAR
P. VELEX

J. PERRET-LIAUDET
F. JURAN