N ° d'ordre 2008-ISAL–0055 Année 2008

THÈSE

Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Johann RANNOU

Agrégé de mécanique

Thèse soutenue le 3 octobre 2008 devant la commission d'examen

Jury

Pierre-Alain BOUCARD	Professeur	Rapporteur
Dominique LEGUILLON	Directeur de recherche	Rapporteur
François HILD	Directeur de recherche	Examinateur
Patrick MASSIN	Ingénieur chercheur	Examinateur
Michel RAOUS	Directeur de recherche	Examinateur
Marie-Christine BAIETTO	Directeur de recherche	Directeur de thèse
Anthony GRAVOUIL	Maître de Conférence	Co-encadrant
Pascal SOUQUET	Ingénieur	Invité

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon

20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://sakura.cpe.fr/ED206** M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://www.insa-lyon.fr/eea** M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2** M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	**INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE** http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
Matériaux	**MATERIAUX DE LYON** M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Comment est-i; plus simple de procéder? On le fais là-bas comme d'habitude où **Math IF**	**MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE** M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M.Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	**ScSo*** M. BRAVARD Jean Paul Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. BRAVARD Jean Paul Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Jean-paul.bravard@univ-lyon2.fr

Remerciements

Ces deux pages sont pour moi l'occasion de remercier les personnes qui ont compté pour moi au cours de mes trois années de thèse, et elles sont nombreuses !

Il y a en tout premier lieu Marie-Christine et Anthony, mes directeurs de thèse. Ils m'ont tout d'abord donné les moyens de réaliser ce travail mais ont également fait preuve d'une disponibilité hors pair et leur indéfectible soutient tant scientifique que moral m'a été très précieux. Ils ont toutes mes amitiés et mes remerciements.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury pour le temps qu'il m'ont accordé et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Merci donc à Monsieur Michel Raous qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Messieurs Pierre-Alain Boucard et Dominique Leguillon ont accepté d'être mes rapporteurs. C'est une tâche importante, je les remercie vivement de l'avoir acceptée. Merci ensuite à Messieurs François Hild, Patrick Massin et Pascal Souquet d'avoir été présent dans ce jury.

Je tiens également à remercier Alain Combescure, directeur de LaMCoS pour m'avoir accueilli dans son laboratoire dès le stage de Master. C'est également grâce à lui que j'ai pu participer au projet Propavanfis. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler dans son laboratoire.

En ce qui concerne le projet Propavanfis justement. Je remercie la Fondation CETIM et en particuler Messieurs Mansour Afzali et Pascal Souquet qui m'ont donné l'opportunité de participer à un travail extrêmement riche et interessant. Ce fut en particulier l'occasion pour moi de rencontrer et de travailler avec un certain nombre de personnes que je tiens à saluer. Du côté de MATEIS il y a : Henry, Jean-Philippe, Nathalie, Wolfgang et Jean-Yves. Du côté du LMT-Cachan : François et Stéphane et du côté du LaMCoS : Marie, Anthony, Alain et Julien. Mon souvenir le plus vif restera certainement le week-end que nous avons passé à l'ESRF à faire pousser des fissures et à faire quelques petits tours de vélo à l'intérieur de l'anneau entre deux scans. J'ai vraiment passé du bon temps là-bas avec eux. Mais bien au-delà de ça, travailler régulièrement avec ces personnes a été quelque chose de très important pour moi, tant d'un point de vue personnel que profesionnel, je les en remercie vivement.

Il est temps à présent de remercier les personnes qui ont partagé mon quotidien au LaMCoS et avec qui j'ai passé de si bons moments. Merci donc à vous tous : Pierre (je suis certain que tu démontreras très bientôt que le bois est un matériau d'avenir pour l'aérospatiale), Thomas (ton aide concernant le code et tes nombreux conseils m'ont été très très précieux), Tomtom (on navigue ensemble quand tu veux), David (le voleur de blindes), Nico (il y aura toujours un peu de lambic pour toi chez moi), Stéphane, Pascal, Yann, Fabien, Rachelle, Pierre, Manu, Sébastien, Ewen, Najib,

Florent, Emilien et Emilien, Aline, Tong, Ludo, Vincent, Benoit, François, Isabelle, Fabrice, Michel, Viviane, Camille ... et tous les autres ! Je salue également Richard et Willy, avec eux, la méca géné a de l'avenir en Asinsa.

Enfin, je tiens à adresser une pensée particulière à ma famille. Merci infiniment à mes parents, Anita et Jean-Laurent : sans l'éducation qu'ils m'ont donnée, je n'en serais sûrement pas là. Merci à ma petite sœur Stéphanie. Enfin, je ne saurais conclure ces pages sans souligner toute l'importance qu'elle a pour moi, elle qui a partagé mon quotidien, elle qui m'encourage et me soutient depuis le début : merci à toi Aurélie.

Résumé

La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente. Elle a connu la majeure partie de ses développements au cours du XXème siècle parallèlement à un besoin croissant des ingénieurs d'être capables de prévoir le comportement des structures qu'ils conçoivent jusqu'à leur ruine. Depuis l'avènement de la mécanique numérique, la méthode des éléments finis a été une des méthodes les plus utilisées dans l'industrie pour simuler la propagation de fissures. Cependant, cette méthode fait face à une difficulté majeure. La géométrie des fissures évoluant au cours du temps, il faut avoir recourt à des procédés de remaillage et de projection de champs coûteux en temps et dont la validité théorique pose encore un certain nombre de questions. La dernière décennie a vu le développement de nouvelles méthodes permettant de lever cette difficulté. L'une d'entre elle, la méthode des éléments finis étendus, permet, via un enrichissement des fonctions d'interpolation, de prendre en compte une discontinuité mobile indépendamment de la discrétisation.

Par ailleurs, les problèmes de mécanique de la rupture présentent souvent un caractère multiéchelle. On peut ainsi distinguer trois échelles caractéristiques qui sont celle de la structure, celle de la fissure et celle des non-linéarités en front de fissure. Ces échelles pouvant différer de plusieurs ordres de grandeur, cela peut poser quelques difficultés. Pour les contourner, nous proposons de coupler la méthode des éléments finis étendus avec des techniques multigrilles localisées. Tout en étant efficace du point de vue du temps de calcul, ce couplage permet de modéliser des défauts très localisés telles des fissures, tout en prenant en compte leur influence à l'échelle globale. Pour modéliser la géométrie évolutive de la fissure, nous utilisons des fonctions de niveau discrétisées sur un maillage auxiliaire indépendant de ceux de la structure. Ceci permet d'appliquer des algorithmes d'évolution en différences finies très robustes et simples à mettre en œuvre. De plus, tout ceci s'intègre naturellement dans notre stratégie à plusieurs grilles.

Les résultats de simulations tridimensionnelles sont confrontés à des données expérimentales issues de techniques d'imagerie par microtomographie aux rayons X. Malgré la robustesse et les potentialités de la méthode proposée, il en ressort la nécessité de prendre en compte la plasticité confinée pour modéliser la refermeture. Ce phénomène étant très local, la possibilité d'utiliser une stratégie multigrille localisée non-linéaire est étudiée.

Mots clés: X-FEM, techniques multigrilles, mécanique de la rupture, fatigue

Table des matières

Table des matières i

Table des figures v

Liste des tableaux ix

Introduction 1

1 Mécanique de la rupture 5
1.1 Théorie de la mécanique linéaire de la rupture 6
1.1.1 Problème de référence 6
1.1.2 Approche énergétique globale 7
1.1.3 Approche asymptotique 9
1.1.4 Hypothèse de plasticité confinée 12
1.1.5 Intégrales indépendantes du contour 13
1.1.6 Aspects tridimensionnels 16
1.1.7 Fissuration par fatigue 17
1.2 Méthodes numériques pour la mécanique de la rupture 20
1.2.1 État de l'art de la simulation numérique en mécanique de la rupture 21
1.2.2 Méthode des éléments finis étendus 23
1.2.3 Représentation numérique de la géométrie de la fissure 29

2 Méthodes multigrilles en éléments finis 31
2.1 État de l'art des stratégies multiéchelles 32
2.1.1 Méthodes de superposition 32
2.1.2 Méthodes de décomposition de domaines 33
2.1.3 Méthodes de raffinement automatique 34
2.1.4 Autres méthodes 34
2.2 Historique des techniques multigrilles en éléments finis 35
2.3 Solveurs itératifs et propriété de lissage 36
2.4 Techniques multigrilles globales pour les problèmes d'élasticité linéaire 38
2.4.1 Le schéma CS pour les problèmes linéaires 38
2.4.2 Les opérateurs de changement d'échelle 42

2.5 Techniques multigrilles localisées 45
2.5.1 Définition du problème 46
2.5.2 Formulation variationnelle multiéchelle 49
2.5.3 Un problème fin local et un problème grossier global 51
2.5.4 Algorithme 53
2.6 Exemple d'une poutre en flexion 53
2.7 D'autres variantes multigrilles 57
2.8 Conclusion 58

3 Méthodes multigrilles et éléments finis étendus 61
3.1 Opérateurs intergrilles et enrichissements 62
3.1.1 Approche nodale 62
3.1.2 Approche variationnelle 68
3.1.3 Bilan 72
3.2 Application à l'algorithme CS 73
3.2.1 Plaque fissurée en traction 73
3.2.2 Propagation de fissure dans une plaque trouée 76
3.3 Application à l'algorithme MG-L et stratégie d'enrichissement multi-échelle 79
3.3.1 Plaque fissurée quasi-infinie 79
3.3.2 Fissure circulaire dans une barre 3D 84
3.4 Conclusion 85

4 Propagation de fissures tridimensionnelles 91
4.1 Représentation multiéchelle d'une fissure par fonctions de niveau . . . 92
4.1.1 Généralités sur les fonctions de niveau 92
4.1.2 Application à la description de fissures 94
4.1.3 Maillage auxiliaire et localisation 95
4.1.4 Propagation 97
4.2 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 3D 102
4.2.1 Calcul numérique des intégrales J et d'interaction 102
4.2.2 Choix du champ d'extension virtuelle et prise en compte des bords libres 106
4.2.3 Influence du domaine d'intégration 107
4.3 Conclusion 109

5 Confrontation de la simulation à des données expérimentales 113
5.1 Dispositif expérimental 114
5.1.1 Microtomographie à rayonnement synchrotron 114
5.1.2 Matériau et machine de fatigue 115
5.2 Loi de propagation 3D et confrontation 119
5.2.1 Loi de Paris et phénomène de refermeture 119
5.2.2 Simulation de la propagation de 120 kcycles à 140 kcycles . . . 120

5.3 Discussion 126

6 Vers la prise en compte de non linéarités 127

6.1 Techniques multigrilles globales : le *Full Approximation Scheme* . . . 128

6.2 Techniques multigrilles locales et plasticité 129

6.2.1 Proposition d'algorithmes 129

6.2.2 Application à une poutre en flexion 133

6.2.3 Application de la version MG-NL-L-EP à une poutre fissurée en flexion 137

6.3 Bilan 140

Conclusions et perspectives 145

A Prise en compte des bords libres dans le VCE 151

B Mise en œuvre dans le code de calcul ELFE_3D 155

C Approximation continue des intégrales de domaine sur le front 159

Bibliographie 163

Table des figures

1 Trois échelles caractéristiques en mécanique de la rupture 3

1.1 Problème de référence 7
1.2 Repère local 9
1.3 Les trois modes de rupture 10
1.4 Zones de K-dominance et zones plastiques 13
1.5 Contour d'intégration 14
1.6 Loi de Paris 19
1.7 Construction de la fonction saut 24
1.8 Fonctions d'enrichissement singulier 26
1.9 Maillage X-FEM et enrichissement topologique 28

2.1 Méthode Arlequin 33
2.2 Problème à résoudre 36
2.3 Effet du gradient conjugué pré-conditionné 37
2.4 Les maillages utilisés dans l'algorithme CS à deux niveaux 38
2.5 deux V-cycles et deux W-cycles 42
2.6 Opérateurs intergrille 43
2.7 Champs de déplacement sur maillages imbriqués 44
2.8 Construction de l'opérateur de prolongation. 45
2.9 Les différents maillages envisagés 47
2.10 Problème de référence. 48
2.11 Poutre en flexion et discrétisations multigrilles 55
2.12 Second membre du problème grossie 56
2.13 Évolution de la flèche 56
2.14 Déplacement total et composantes HF 57

3.1 Maillages grossiers et fins superposés 64
3.2 fonction d'enrichissement et son support 64
3.3 Prolongation des enrichissements compatibles 67
3.4 Maillages imbriqués et fonctions de forme 72
3.5 Plaque fissurée en traction 74
3.6 Quelques uns des sept maillages utilisés dans la stratégie CS 75
3.7 Temps de calcul pour le GCP et le CS 77

3.8 Plaque fissurée en traction 78
3.9 Les trois maillages utilisés ainsi que la fissure initiale 79
3.10 Taux de convergence de l'algorithme CS 79
3.11 Fissure dans un milieu quasi-infini. 80
3.12 Nouvelle configuration d'enrichissements à différentes échelles 81
3.13 Nombre de cycles multigrilles et premier niveau d'enrichissement . . . 83
3.14 Temps de calcul GCP/MG-L 85
3.15 Maillages multigrilles incompatibles et maillage compatible 86
3.16 Barreau fissuré en traction 87
3.17 Les six niveaux utilisés pour modéliser le problème de la fissure circulaire 87
3.18 K_I pour une fissure semi-circulaire 88

4.1 Fissure semi-circulaire et iso-0 correspondantes 94
4.2 Fonctions de niveau discrétisées sur un maillage auxiliaire 97
4.3 Définition locale des fonctions de niveau sur un maillage auxiliaire . . 98
4.4 Noeuds des éléments traversés par le front et leur projection 100
4.5 Détermination des projections et extension des vitesses 100
4.6 Détermination itérative de la projection orthogonale d'un noeud . . . 101
4.7 Extension du champ de vitesse V_φ au volume 102
4.8 Propagation en mode mixte 103
4.9 Surfaces et volumes d'intégration (a) et extension virtuelle en $\cos^2$ (b) 105
4.10 Bases locales dans le voisinage du front de fissure 106
4.11 Domaine d'intégration et extension virtuelle 107
4.12 Facteurs K_I et correction près des bords libres 108
4.13 Points de mesure des contraintes σ_{yy} 110
4.14 Influence de la taille de boîte sur le calcul de K_I 111

5.1 Principe de la tomographie 115
5.2 Partie de l'éprouvette modélisée et géométrie de la fissure 116
5.3 Machine de fatigue 117
5.4 Section d'un bloc tomographique 118
5.5 Chargement appliqué à l'éprouvette c46 118
5.6 Image de l'entaille initiale 121
5.7 Construction de ψ 122
5.8 Maillages pour la simulation de c46 122
5.9 Propagation de la fissure c46 124
5.10 surface iso-contraintes 125

6.1 Les deux variantes MG-NL-L 130
6.2 Restriction des variables internes 132
6.3 Algorithme MG-NL-L-PP 133
6.4 Algorithme MG-NL-L-EP 134
6.5 Chargement appliqué à l'éprouvette 135
6.6 Indicateurs de convergence des algorithmes de Newton et MG-NL-L . 136

6.7 Déformée et erreur du MG-NL-L 137
6.8 Poutre fissurée en flexion 138
6.9 Paramètres du modèle élasto-plastique du second exemple 138
6.10 Déformée et déformation plastique 139
6.11 Contrainte et erreur le long de la ligne de mesure 140
6.12 Convergence de l'algorithme MG-NL-L 143
6.13 Passerelles et interfaces entre les outils d'imagerie, X-DIC et X-FEM 149

A.1 Fonction rampe 152

B.1 Diagramme UML partiel de l'architecture du code ELFE_3D 157

C.1 Discrétisation de $L(s)$ le long du front 160
C.2 Couverture de l'extension virtuelle 161
C.3 Second membre perturbé et solution du système linéaire 162

Liste des tableaux

2.1 Algorithme CS à plusieurs niveaux 41
2.2 Algorithme multigrille linéaire localisé à deux niveaux. 54

3.1 Algorithme utilisé pour construire l'opérateur de prolongation 69
3.2 Convergence de l'algorithme CS pour le maillage 3 et pour les deux opérateurs de projection 74
3.3 Convergence de l'algorithme CS pour le maillage 6 et pour les deux opérateurs de projection 75
3.4 Temps de calcul pour le maillage 4 76
3.5 Temps de calcul pour le maillage 5 76
3.6 Temps de calcul pour le maillage 6 77
3.7 Taille des éléments pour chacun des neuf niveaux utilisés et stratégie d'enrichissement 82
3.8 Nombre de cycles multigrille à convergence en fonction du premier niveau d'enrichissement 88

4.1 Erreurs commises sur le calcul de K_I en fonction de la taille du domaine d'intégration. 109

5.1 Caractéristiques de l'alliage d'aluminium Al–Li 5091 115
5.2 paramètres de chargement de l'échantillon c46 118

6.1 Paramètres du modèle élastoplastique 135

Introduction

La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente. Elle a connu la majeure partie de ses développements au cours du XXe siècle parallèlement à un besoin croissant des ingénieurs d'être capables de prévoir le comportement des structures qu'ils conçoivent jusqu'à leur ruine. Les avancées scientifiques dans la prévision du comportement des structures et la nécessité de réduire les coûts rendent en effet les problématiques portées par la mécanique de la rupture de plus en plus importantes dans le processus de conception ou dans les études de tenue en service dans l'industrie, et en particulier dans les secteurs de l'aéronautique ou du nucléaire.

En mécanique de la rupture, on fait généralement la différence entre rupture fragile et rupture ductile. Dans le premier cas, on considère un matériau élastique linéaire et on fait l'hypothèse que la zone plastique ne se développe en front de fissure que dans une zone très réduite par rapport aux dimensions caractéristiques de la fissure et de la structure. Le cadre théorique de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR) [BUI 78] est alors tout à fait adapté. Dans le cas de la rupture ductile, la zone plastique est beaucoup plus étendue et les développements de la théorie MELR ne suffisent généralement pas à décrire correctement le problème.

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre de la rupture par fatigue. Dans ce cas, la mécanique élastique linéaire de la rupture est très largement utilisée car de nombreuses lois de propagation sont fondées sur des critères énergétiques globaux tels que les facteurs d'intensité des contraintes. Les modes de sollicitation sont multiples : chargements à spectres complexes, fretting, roulement, *etc.* Aussi influent-ils sur les phénomènes non-linéaires localisés en front de fissure tels que la plasticité, le contact ou le frottement entre les lèvres. Ces phénomènes peuvent avoir un impact important sur la propagation, pour les matériaux métalliques notamment. Les ingénieurs utilisent alors souvent des modèles permettant de prendre en compte ces non-linéarités sans sortir du cadre de la MELR [NEW 81].

L'augmentation du nombre de problèmes accessible par les méthodes numériques modernes s'est accompagnée d'une importance croissante de la simulation numérique dans les processus de gestion des cycles de vie des produits industriels. Parmi toutes ces techniques, la méthode des éléments finis est l'une des plus utilisées en mécanique des structures. Sa robustesse, son aptitude à représenter des géométries complexes et la possibilité de pouvoir y intégrer des lois de comportement de matériaux sophis-

tiquées en font un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes. Un certain nombre d'entre eux est cependant plus difficilement accessibles à la méthode des éléments finis, c'est notamment le cas des problèmes à discontinuités mobiles. La difficulté vient du fait que la discrétisation doit être conforme à la surface de discontinuité, quelle que soit sa nature : interface entre deux matériaux, changement de phases, interface fluide-structure ou fissuration. Toute évolution de cette surface nécessite par conséquent une opération de remaillage. Malgré les améliorations appportées aux mailleurs automatiques, le coût de cette opération peut rapidement devenir rédhibitoire dans le cas de problèmes tridimensionnels. Par ailleurs, au-delà de ces aspects topologiques, le transfert d'informations lors de la procédure de remaillage fait appel à des techniques de projection de champs qui soulèvent encore aujourd'hui de nombreuses questions liées notamment à la vérification des équations de conservation.

C'est pour palier ces difficultés que de nouvelles techniques numériques autorisant une description des discontinuités indépendantes de la discrétisation ont été récemment développées. Dans ce travail, nous nous intéresserons tout particulièrement à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [BEL 99]. Il s'agit d'une extension de la méthode des éléments finis qui exploite la propriété de partition de l'unité afin d'enrichir l'approximation cinématique. Ainsi la discontinuité ne sera plus portée par la topologie de la discrétisation mais par de nouvelles fonctions de forme elles-même discontinues. L'opération de remaillage est alors remplacée par une mise à jour des fonctions d'enrichissement. Un autre atout majeur de cette méthode est la possibilité d'intégrer des bases de solutions physiques dans les enrichissements, comme par exemple les singularités présentes en front de fissure. Afin de modéliser l'évolution de la géométrie de fissures complexes, la méthode X-FEM est souvent associée à la technique des fonctions de niveau [MOË 02]. Cette méthode a atteint un degré de maturité tel qu'elle est désormais implémentée dans un nombre croissant de codes commerciaux et industriels.

L'ingénieur désirant simuler la propagation d'une fissure peut être confronté à une autre difficulté. Dans les applications industrielles, les dimensions des fissures peuvent être de plusieurs ordres de grandeur inférieures à celle de la structure. Néanmoins, leur propagation peut avoir des conséquences importantes sur la réponse globale du système étudié. On peut d'une manière générale exhiber trois échelles caractéristiques dans ce genre de problème, comme cela est illustré sur la figure 1. Par taille caractéristique décroissante, on identifie tout d'abord l'échelle globale de la structure (quelques cm à quelques m), puis l'échelle de la fissure (quelques mm) et enfin l'échelle des phénomènes non-linéaires au voisinage du front (quelques μm) dont on sait qu'ils peuvent avoir un influence importante sur la propagation. Toutes ces échelles peuvent différer de plusieurs ordres de grandeur et c'est en ce sens que les problèmes de mécanique de la rupture peuvent souvent être considérés comme des problèmes multiéchelles. Une analyse complète de ce type de problèmes par une méthode éléments finis classique ou étendue peut être délicate à mener. Tout

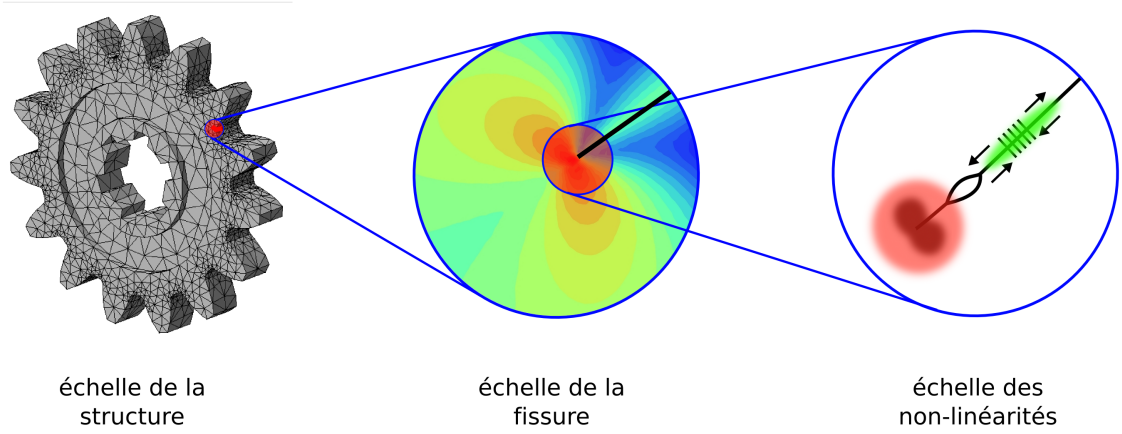


Fig. 1: Trois échelles caractéristiques présentes dans les problèmes de mécanique de la rupture

d'abord, il existe des difficutés liées à la discrétisation qui doit être localement raffinée dans le voisinage du détail structural à prendre en compte (la fissure en l'occurence) [ELG 07]. Ceci peut conduire à des problèmes de conditionnement et mène généralement à des systèmes de très grandes tailles dont le coût de résolution peut devenir rédhibitoire.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire de thèse est de développer un outil numérique capable de simuler de manière robuste la propagation de fissures de fatigue dans un contexte multiéchelle et tridimensionnel. La démarche envisagée met en synergie deux techniques : les éléments finis étendus d'une part et les méthodes multigrilles d'autre part. Ces dernières ont été introduites par Brandt dans les années soixante-dix [BRA 77a, BRA 84] comme une famille de solveurs très performants pour résoudre les problèmes à grand nombre d'inconnues. Les méthodes multigrilles ne sont donc pas à proprement parler des techniques multiéchelles. Nous verrons cependant que l'utilisation d'une variante localisée permet d'atteindre nos objectifs. Couplé à la méthode des éléments finis étendus, l'algorithme proposé permet, à partir du maillage d'une structure non nécessairement conçu pour modéliser un défaut, d'atteindre les échelles pertinentes du problème tout en présentant des propriétés de convergence et de temps cpu très intéressantes. La structure itérative des méthodes multigrilles autorise, via des opérateurs de changement d'échelles spécifiques aux enrichissements, un couplage entre les différentes échelles mises en jeu. De cette manière, la réponse de la structure globale tient compte des phénomènes locaux. Tous les développements évoqués ici ont été réalisés au sein du code de calcul prototype ELFE_3D développé au laboratoire LaMCoS.

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante. Le chapitre 1 présente une étude bibliographique concernant d'une part la théorie de la MELR et d'autre part certaines techniques numériques permettant de traiter la fissuration. La méthode des éléments finis étendus y sera détaillée. Dans le second chapitre, un état de l'art de certaines techniques multiéchelles est présenté. Les méthodes multigrilles linéaires globales y sont également décrites de manière classique. Une version linéaire localisée est ensuite introduite par l'intermédiaire d'une formulation variationnelle multiéchelle. Le couplage de cet algorithme avec la méthode des éléments finis étendus et la description d'opérateurs de changement d'échelle spécifiques sont developpés dans le chapitre 3. Un certain nombre d'exemples permet de valider le bon comportement de la stratégie mise en place. Les aspects liés à la propagation n'ayant pas encore été évoqués, le chapitre 4 décrit la méthode des fonctions de niveau et la manière particulière dont nous les intégrons dans la stratégie multigrille. Ce chapitre décrit également les techniques d'intégrales de domaines dont nous nous servons pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes. Dans un cinquième chapitre, les résultats obtenus à partir de la stratégie multigrille X-FEM linéaire sont confrontés à des données expérimentales de propagation tridimensionnelle. Il en ressort la nécessité de prendre en compte certaines non-linéarités, et en particulier la plasticité confinée, afin de représenter le phénomène de refermeture. C'est pourquoi une première tentative d'élaboration d'algorithmes multigrilles localisés non-linéaires est développée dans le chapitre 6. L'approche qui y est présentée permet d'utiliser un modèle élasto-plastique sur la grille la plus fine uniquement, les autres grilles étant associées à un modèle élastique. Cela est tout a fait adapté aux problèmes de fatigue où la plasticité est confinée dans le voisinage du front de fissure. Ce chapitre ouvre des perspectives quant à la prise en compte du contact ou du frottement dans les modèles de propagation avec ce formalisme.

Comme dans tout problème de simulation numérique, il nous paraît essentiel de pouvoir nous appuyer sur des résultats expérimentaux afin de valider un modèle et d'identifier les points d'amélioration potentiels. La confrontation expérimentale du chapitre 5 est le fruit d'une collaboration avec l'équipe du professeur J-Y Buffière du laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon. Cette collaboration s'inscrit dans le cadre plus général du projet PROPAVANFIS soutenu par la fondation CETIM et qui regroupe des équipes du LaMCoS, du laboratoire MATEIS et du LMT-Cachan. Ce projet a pour objectif de coupler des techniques numériques et expérimentales pour l'étude de propagation tridimensionnelle de fissure sous chargement de fatigue.

Chapitre 1

Mécanique de la rupture

Sommaire

1.1 Théorie de la mécanique linéaire de la rupture 6

1.1.1 Problème de référence 6

1.1.2 Approche énergétique globale 7

1.1.3 Approche asymptotique 9

1.1.4 Hypothèse de plasticité confinée 12

1.1.5 Intégrales indépendantes du contour 13

1.1.6 Aspects tridimensionnels 16

1.1.7 Fissuration par fatigue 17

1.2 Méthodes numériques pour la mécanique de la rupture . . 20

1.2.1 État de l'art de la simulation numérique en mécanique de la rupture 21

1.2.2 Méthode des éléments finis étendus 23

1.2.3 Représentation numérique de la géométrie de la fissure 29

Ce chapitre a pour objectif, dans un premier temps, de présenter les principaux aspects de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR). L'approche traditionnelle de Griffith ainsi qu'une description plus locale des phénomènes en front de fissure sont développés. Les paramètres clés que sont les facteurs d'intensité des contraintes ainsi que certaines intégrales indépendantes du contour sont introduites.

Dans un second temps, une description de différentes méthodes numériques communément utilisées pour résoudre les problèmes de mécanique de la rupture seront présentées. Nous nous attarderons tout particulièrement sur la méthode des éléments finis étendus qui est la technique numérique que nous retiendrons dans cette étude pour traiter les problèmes de fissuration.

1.1 Théorie de la mécanique linéaire de la rupture

1.1.1 Problème de référence

Nous considérons la déformation statique d'un corps élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit de petites déformations et de petits déplacements. Il occupe un domaine Ω (voir figure 1.1) dont la frontière est notée $\partial\Omega$. $\partial\Omega$ est divisée en deux parties complémentaires, $\partial_1\Omega$ où un déplacement $\underline{u}_d$ est imposé et $\partial_2\Omega$ où des efforts $\underline{F}_d$ sont imposés. Le solide est également soumis à des forces volumiques $\underline{f}_d$ sur tout le domaine. La fissure est représentée par ses deux lèvres S^+ et S^-. Le front de la fissure est défini par la courbe $F = S^- \cap S^+$. On fait généralement l'hypothèse que les surfaces S^+ et S^- sont libres. Dans ce premier chapitre, nous nous placerons dans ce cadre.

Les grandeurs à déterminer pour résoudre ce type de problème sont le champ de déplacement $\underline{u}$, le champ de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le champ de contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$. Les équations locales de la mécanique qui relient ces grandeurs sont :

i. les équations d'équilibre locales

$$\underline{\nabla}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_d = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega \tag{1.2}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur } S^- \cup S^+ \tag{1.3}$$

où $\underline{n}$ est le vecteur normal sortant à la frontière $\partial\Omega$.

ii. les relations de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{avec } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\,\underline{u}\right) \tag{1.4}$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$ est le tenseur d'ordre 4 de Hooke qui s'exprime, pour des matériaux élastiques homogènes isotropes, en fonction des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} = \lambda\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \tag{1.5}$$

iii. les équations de liaison

$$\underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \tag{1.6}$$

Remarque 1 *La particularité des problèmes de mécanique de la rupture par rapport aux problèmes plus classiques tient à deux choses :*

i. La frontière du domaine évolue au cours du temps car les surfaces $S^- \cup S^+$ évoluent lors de la propagation de la fissure.

ii. Les champs de contrainte et de déformation présentent une singularité au voisinage du front de fissure (voir la section 1.1.3).

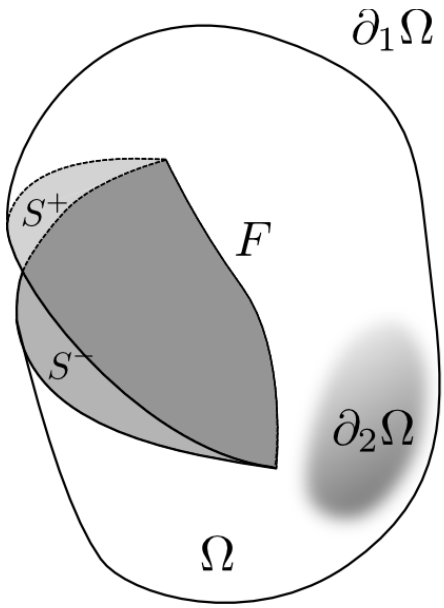


Fig. 1.1: Problème de référence

1.1.2 Approche énergétique globale

L'approche de Griffith figure parmi les premiers travaux importants en mécanique de la rupture. Il s'agit d'une approche globale qui consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus de propagation de la fissure. Cette théorie présuppose l'existence d'une fissure initiale et ne prévoit pas l'initiation. L'idée de Griffith consiste à associer la variation d'énergie nécessaire à l'accroissement de la fissure, dW_{fis}, à la variation d'aire ainsi créée dA, et à une énergie superficielle caractéristique du matériau γ :

$$dW_{fis} = 2\gamma dA \tag{1.7}$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors [LEM 04] :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t} = P_{\text{ext}} + Q - 2\gamma dA \tag{1.8}$$

où E est l'énergie interne à Ω, K est son énergie cinétique, P_{ext} est la puissance des efforts extérieurs et Q est la chaleur reçue. De plus, la variation d'énergie interne s'écrit aussi :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = Q + \frac{\partial W_{\text{élas}}}{\partial t} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial W_{\text{élas}}}{\partial t} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\, d\Omega \tag{1.9}$$

où $W_{\text{élas}}$ est l'énergie élastique. Par ailleurs, la puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\, dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\, d\Omega \tag{1.10}$$

où $\underline{F}_d$ représente les forces surfaciques appliquées sur $\partial_2\Omega$ et $\underline{f}_d$ les forces volumiques s'exercant sur Ω. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\, dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\, d\Omega - \frac{\partial W_{\text{élas}}}{\partial t} - 2\gamma dA \tag{1.11}$$

La théorie MELR est une théorie à un seul paramètre, l'aire de la fissure en l'occurence : A. La dérivée de l'énergie cinétique peut donc s'écrire en fonction de la variation d'aire de la fissure et du temps de manière découplée :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left(\int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial A}\, dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial A}\, d\Omega - \frac{\partial W_{\text{élas}}}{\partial A} - 2\gamma \right) \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.12}$$

La stabilité du processus est dictée par le signe de la variation de l'énergie cinétique. Comme A est la seule variable du bilan énergétique, si K s'accroît, le processus est instable et la fissure se propage. Par ailleurs, le processus de fissuration est irréversible et le scalaire $\frac{\partial A}{\partial t}$ est nécessairement positif. On introduit alors la quantité G :

$$G = \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial A}\, dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d . \frac{\partial \underline{u}}{\partial A}\, d\Omega - \frac{\partial W_{\text{élas}}}{\partial A} \tag{1.13}$$

De cette quantité, appelée le taux de restitution de l'énergie, dépend la stabilité du système. On identifie en effet les trois cas suivants :

- $G < 2\gamma$: pas de propagation
- $G = 2\gamma$: propagation stable de la fissure
- $G > 2\gamma$: propagation instable de la fissure

La théorie de Griffith permet de déterminer le risque de propagation d'une fissure à partir d'une quantité scalaire, le taux de restitution de l'énergie, qui ne dépend que de l'aire de la fissure. Physiquement, G correspond au taux de diminution (de restitution) de l'énergie potentielle stockée dans le solide quand la fissure croît :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = G \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.14}$$

Le taux de restitution de l'énergie constitue à lui seul un critère de propagation mais ne permet pas d'énoncer une loi de propagation complète. La direction de propagation et les effets locaux dans les problèmes tridimensionnels ne peuvent pas être pris en compte par une seule quantité scalaire. Une analyse plus fine des champs locaux au voisinage du front de fissure s'avère nécessaire.

1.1.3 Approche asymptotique

Nous nous intéressons aux champs de déplacement et de contrainte au voisinage du front de fissure. Nous plaçons un repère dont l'origine se trouve sur un point P du front de fissure (voir figure 1.2). Le vecteur $\underline{e}_1$ est dans le prolongement de la fissure et orthogonal au front, $\underline{e}_2$ est dans le plan du problème et est orthogonal à $\underline{e}_1$. Le vecteur $\underline{e}_3$ correspond à la direction hors-plan. À ce repère orthogonal, on associe également un système de coordonnées polaires (r, θ) dans le plan $(P, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ La généralisation aux problèmes tridimensionnels sera présentée dans la section 1.1.6.

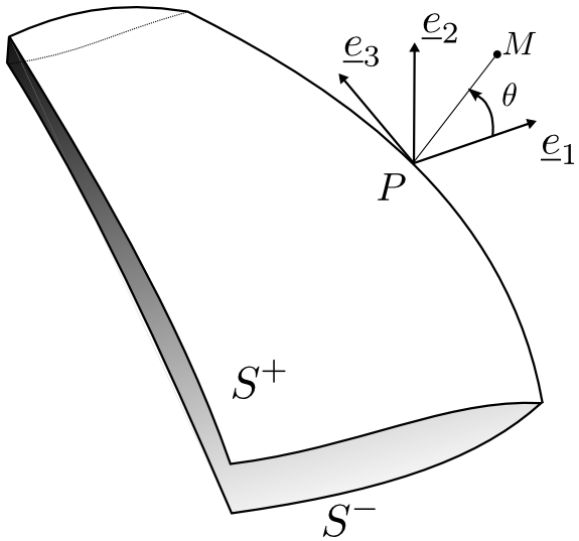


Fig. 1.2: Repère local

Quand le solide est soumis à une charge, une discontinuité en déplacement $[\![\underline{u}]\!] = \underline{u}^+ - \underline{u}^-$ apparaît de part et d'autre de la fissure S. On identifie alors cinématiquement trois modes de rupture (ou de sollicitation) correspondant aux trois situations suivantes (voir figure 1.3) :

mode I :	$[\![u_2]\!] > 0$	mode d'ouverture
mode II :	$[\![u_1]\!] \neq 0$	mode de cisaillement plan
mode III :	$[\![u_3]\!] \neq 0$	mode de cisaillement antiplan

Ces trois modes de sollicitation sont très utiles pour caractériser les champs de contrainte et de déplacement au voisinage du front de fissure. En s'appuyant sur

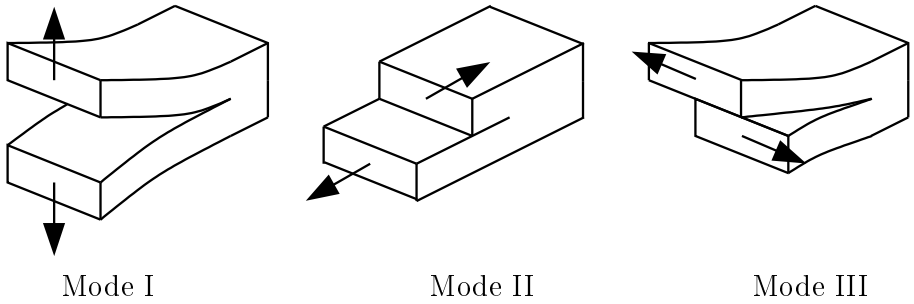


Fig. 1.3: Les trois modes de rupture

les travaux de Griffith et de Westergaard, Irwin a montré plus précisément que les composantes du tenseur de contrainte sont de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + O\left(\sqrt{r}\right) \tag{1.15}$$

où les composantes σ_{ij}^0 sont les contraintes finies en fond de fissure et où les fonctions f_{ij} sont connues et détaillées plus bas. On observe dans cette expression que le champ de contrainte tend vers l'infini en s'approchant du front avec une singularité en $1/\sqrt{r}$. Irwin a également introduit les trois valeurs scalaires K_I, K_{II} et K_{III} associées aux trois modes de sollicitation : ce sont les *facteurs d'intensité des contraintes*. Leur définition est donnée, pour chacun des trois modes, par les expressions suivantes :

$$K_I = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{22}(\theta = 0) \tag{1.16}$$

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{21}(\theta = 0) \tag{1.17}$$

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{23}(\theta = 0) \tag{1.18}$$

Dans la mesure où les contraintes sont infinies sur le front de fissure, il est difficile de les utiliser pour énoncer un critère de propagation. Étant donné leur rôle dans l'expression (1.15), les facteurs d'intensités des contraintes "quantifient" l'intensité de la singularité des contraintes. C'est pour cette raison qu'ils interviennent dans de nombreux critères de propagation.

Remarque 2 *Les facteurs d'intensité des contraintes dépendent uniquement de la géométrie (de la structure et de la fissure) et du chargement. En aucun cas ils ne dépendent du matériau (dans le cas homogène isotrope).*

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement à un problème plan et à un domaine infini présentant une fissure rectiligne de longueur $2a$ soumise à chacun des trois modes de sollicitation en l'absence de forces volumiques ($\underline{f}_d = 0$). Westergaard a obtenu une solution à ce problème à partir d'une fonction de contrainte d'Airy [BUI 78]. Le développement de cette solution au voisinage du

front de fissure ($r \ll a$) a permis d'obtenir les expressions suivantes pour les champs de contrainte et de déplacement pour chacun des trois modes de sollicitation :

mode *I*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \\ \sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

mode *II*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta + 2) \\ -\cos\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta - 2) \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

mode *III*

Le mode *III* ne correspond pas à un problème plan, les déplacements se font uniquement selon la direction de $\underline{e}_3$: $u_1 = u_2 = 0$ et $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$. On a dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

$$u_3 = \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.24}$$

Le paramètre κ est appelé la constante de Kolosov et dépend du type de problème plan :

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \\ 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \end{cases} \tag{1.25}$$

Remarque 3 *Comme on le montrera dans la section 1.1.6, l'état de contrainte plane n'existe pas au voisinage du front de fissure. Les seuls états possibles sont un état de déformation plane ou un véritable état tridimensionnel. L'utilisation des formules précédentes dans la cas de plaques de faible épaisseur par exemple, n'est en fait qu'une approximation.*

mode mixte

Toujours dans le domaine linéaire, si les trois types de sollicitation sont combinés, les trois champs de contrainte (1.19), (1.21) et (1.23) d'une part et les trois champs de déplacement (1.20), (1.22) et (1.24) d'autre part s'additionnent. On parle alors de sollicitation en mode mixte.

En réécrivant le taux de restitution de l'énergie sous la forme d'une intégrale de contour et en y injectant les expressions (1.19) à (1.24), on peut établir un lien entre G, K_I, K_{II} et K_{III}. Ces calculs qui sont développés dans [BUI 78] aboutissent, en mode I et pour un état de déformations planes, à la *formule d'Irwin* :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \tag{1.26}$$

En mode mixte ($I + II + III$) la formule d'Irwin est :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \tag{1.27}$$

En mode I pur, la rupture fragile est caractérisée par la ténacité K_{Ic} qui est liée à l'énergie de surface de Griffith par :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{1-\nu^2}} \tag{1.28}$$

Remarque 4 *La singularité des contraintes dans un problème plan est en $r^{-1/2}$. Nous verrons dans la section 1.1.6 que pour un problème tridimensionnel, il est admis que cette singularité puisse être d'un ordre différent dans le voisinage d'un vertex (c.à.d un point où le front débouche sur une surface libre) [BEN 77, BAZ 79, HEY 05].*

1.1.4 Hypothèse de plasticité confinée

L'analyse précédente a montré que les contraintes tendent vers l'infini vers le front de fissure. Bien évidemment aucun matériau réel ne peut satisfaire aux hypothèses d'élasticité dans ces conditions. Aussi, quels que soient la charge, la géométrie de la fissure et le matériau, une zone plastique existe autour du front. La question est de savoir dans quelle mesure la redistribution des contraintes liée à la prise en compte de la plasticité modifie les champs élastiques. Dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, on peut faire l'hypothèse de "plasticité confinée". On estime que si la taille de la zone plastique, assimilée à une longueur caractéristique r_p est suffisamment petite par rapport à la taille de la zone de dominance de la singularité élastique (zone de K-dominance), les expressions (1.19) à (1.24) sont toujours valides. La zone de K-dominance étant liée à a, la taille caractéristique de la fissure, on estime que l'hypothèse de plasticité confinée est satisfaite lorsque $r_p/a < 3\%$ (voir figure 1.4).

Dans le cas contraire, on sort du cadre de la MELR pour rentrer dans celui de la MEPR (mécanique élasto-plastique de la rupture). On sort alors du cadre du travail présenté dans ce manuscript. Nous pouvons néanmoins citer les travaux de Rice, Hutchinson et Rosengren [HUT 68, RIC 68b] qui ont approximé les champs de déplacement et de contraintes pour des matériaux élastiques non-linéaires obéissant à une loi puissance de type Ramberg-Osgood (champs HRR).

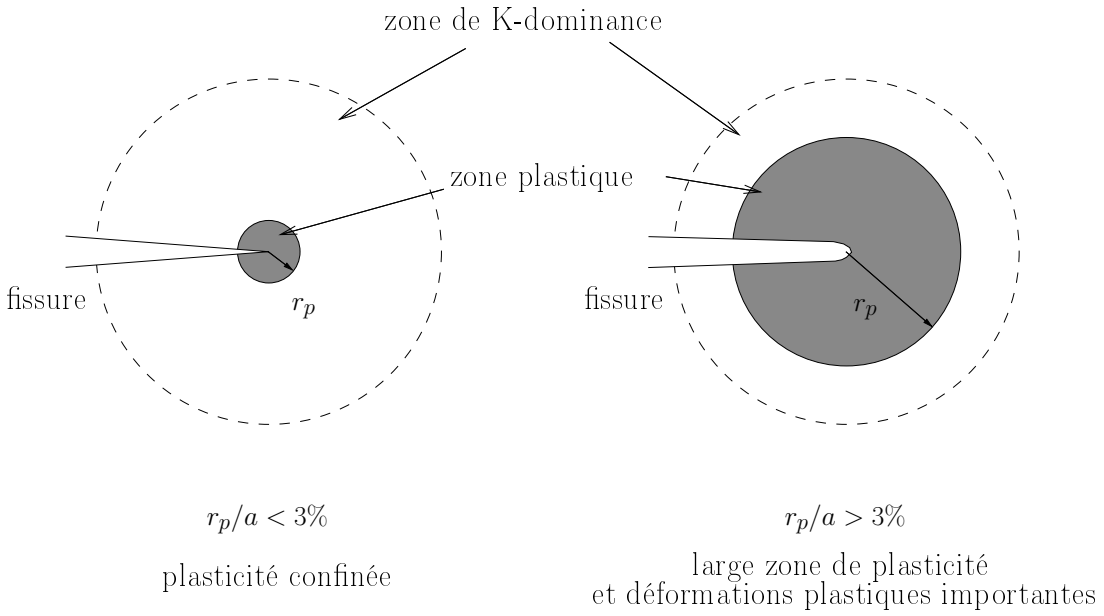


Fig. 1.4: Zones de K-dominance et zones plastiques

1.1.5 Intégrales indépendantes du contour

Les facteurs d'intensité des contraintes sont accessibles via les champs de contrainte ou de déplacement. Les outils numériques de calcul ou certaines techniques expérimentales comme la corrélation d'images permettent d'avoir accès à des approximations de ces champs. La nature singulière du problème fait que la qualité de ces approximations ou de ces mesures est médiocre au voisinage du front de fissure et l'identification des facteurs d'intensité des contraintes peut s'avérer difficile.

Les intégrales indépendantes du contour sont des quantités liées aux facteurs d'intensité des contraintes qui peuvent être calculées à l'aide de champs plus lointains et pour lesquels on a, en principe, une meilleure estimation. Dans ce travail, nous avons essentiellement utilisé deux types d'intégrales, l'intégrale J et l'intégrale d'interaction.

Intégrale J

L'intégrale J a été formulée simultanément par Rice (1968) et Cherepanov (1968) à partir des travaux de Eshelby (1951). Elle est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} \mathcal{P}_{1j} n_j \, d\Gamma \tag{1.29}$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal extérieur au contour d'intégration Γ (voir figure 1.5) et $\mathcal{P}_{ij}$ est le tenseur de Eshelby défini par :

$$\mathcal{P}_{ij} = W\delta_{ij} - \sigma_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tag{1.30}$$

où W est la densité d'énergie de déformation qui vaut, pour un matériau élastique linéaire :

$$W = \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} \tag{1.31}$$

Il est montré dans [RIC 68a, BUI 78] que la valeur de cette intégrale est indépendante du contour Γ si :

i. Γ est un contour ouvert entourant la pointe de la fissure et ayant ses deux extrémités sur chacune des lèvres de la fissure (voir figure 1.5)

ii. les lèvres de la fissure ne sont pas chargées et il n'y a aucune force volumique

iii. la fissure est rectiligne (en 2D) entre les extrémités du contour choisi et la pointe de la fissure

J est en fait la première composante J_1 du vecteur des forces configurationnelles défini par $J_i = \int_{\Gamma} \mathcal{P}_{ij} n_j \, d\Gamma$ [MAU 92]. En prenant le contour Γ comme étant un cercle centré sur la pointe de fissure et dont le rayon tend vers 0, on peut montrer que J est identique au taux de restitution de l'énergie : $J \equiv G$. On peut ainsi relier l'intégrale J aux facteurs d'intensité des contraintes par l'intermédiaire de la formule d'Irwin (1.27). L'intégrale J ne permet cependant pas de découpler les trois facteurs d'intensité des contraintes en cas de sollicitation en mode mixte. Pour cela, il existe d'autres techniques et notamment l'intégrale d'interaction.

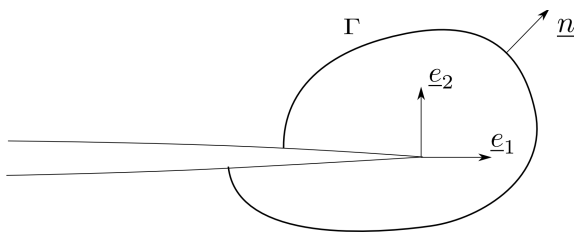


Fig. 1.5: Contour d'intégration

Intégrale d'interaction

Considérons deux états d'équilibre du corps fissuré. L'état 1 est l'état de référence qui satisfait les conditions aux limites et l'état 2 est un état auxiliaire fictif. L'intégrale J de ces deux états superposés est :

$$J^{(1+2)} = \int_\Gamma \left(W^{(1+2)}\delta_{1j} - \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}\right) \frac{\partial \left(u_i^{(1)} + u_i^{(2)}\right)}{\partial x_1} \right) n_j \, d\Gamma \tag{1.32}$$

avec

$$W^{(1+2)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}\right) \tag{1.33}$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \tag{1.34}$$

où $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ sont les intégrales J des états 1 et 2 respectivement et $I^{(1,2)}$ est l'intégrale d'interaction des deux états :

$$I^{(1,2)} = \int_\Gamma \left(W^{(1,2)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j \, d\Gamma \tag{1.35}$$

où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation mutuelle définie par :

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right) \tag{1.36}$$

D'un aute côté, nous développons la formule d'Irwin (1.27) pour la superposition des deux états :

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\left(K_I^{(1)} + K_I^{(2)}\right)^2 + \left(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)}\right)^2\right) + \frac{1}{2\mu}\left(K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)}\right)^2 \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + 2\frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}\right) + \frac{1}{\mu}\left(K_{III}^{(1)}K_{III}^{(2)}\right) \end{aligned}$$

Ce qui aboutit à :

$$I^{(1,2)} = 2\frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}\right) + \frac{1}{\mu}\left(K_{III}^{(1)}K_{III}^{(2)}\right) \tag{1.37}$$

où $I^{(1,2)}$ est obtenu par (1.35). On choisissant l'état auxiliaire comme étant successivement l'état des trois modes purs développés dans la section 1.1.3, on est capable d'évaluer chacun des trois facteurs d'intensité des contraintes séparément. Par exemple si l'état auxiliaire est celui obtenu avec $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$ et $K_{III}^{(2)} = 0$, le facteur d'intensité des contraintes associé au mode I s'obtient par :

$$K_I^{(1)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} I^{(1,\text{mode } I \text{ pur})} \tag{1.38}$$

Dans la pratique, l'intégrale J et l'intégrale d'interaction ne sont pas calculées directement à partir des expressions (1.29) et (1.35). Dans le cadre des éléments finis une intégale de contour en 2D, ou de surface en 3D, est difficile à calculer avec suffisamment de précision. Comme on le verra dans le chapitre 4, on préfère généralement transformer ces intégrales en intégrales de surface (de volume en 3D) qui sont beaucoup plus faciles à calculer à précision équivalente.

1.1.6 Aspects tridimensionnels

L'étude des structures fissurées tridimensionnelles pose de nombreuses difficultés théoriques et pratiques. Alors que les problèmes de propagation de fissures planes sollicitées seulement en ouverture et qui croissent donc dans leur plan sont relativement bien connus, il n'existe pas encore de nos jours de théorie qui soit largement acceptée pour la croissance des fissures gauches. Le modèle le plus répandu consiste à appliquer la théorie à deux dimensions en état plan dans chaque plan orthogonal au front de fissure. Nous attachons en chaque point P du front un repère local défini comme dans la section 1.1.3 (voir figure 1.2). Dans le plan $(P, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ainsi défini, les solutions données par les expressions (1.19) à (1.25) sont utilisées. Les facteurs d'intensités des contraintes sont donc définis localement en tout point P (nous verrons au chapitre 4 quelques méthodes numériques permettant de les calculer) et la propagation du front se fait donc "point par point".

Les solutions analytiques utilisées correspondent à un problème plan (modes I et II) ou antiplan (mode III). La question délicate du choix du type d'état plan (en contrainte ou en déformation) et de la valeur à affecter à la constante de Kolosov se pose alors. Si en volume le choix d'un état plan de déformation semble judicieux, la question est plus délicate en surface. On montre en effet que la condition de contraintes planes n'est en fait jamais vérifiée au voisinage du front de fissure. La condition de compatibilité entre les composantes du tenseur des déformations impose notamment que $\varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} = 0$ [BUI 06]. Ceci implique que la composante ε_{33} est une fonction linéaire des coordonnées x_1 et x_2 :

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 \tag{1.39}$$

Or, dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes, la relation $\varepsilon_{33} = -\nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)/E$ et les relations (1.19) et (1.21) indiquent que ε_{33} présente une singularité en $O(1/\sqrt{r})$ ce qui est incompatible avec la condition (1.39). Cette incompatibilité n'existe pas pour un état de déformations planes qui est donc le seul état plan admissible. L'hypothèse de contraintes planes est cependant très communément utilisée, notamment pour modéliser les plaques fissurées de faible épaisseur. Il faut être conscient que dans ce cas, les solutions présentées ici ne sont que des approximations.

Une autre difficulté spécifique aux problèmes de fissuration tridimensionnelle concerne les singularités de coin. Sur les points non réguliers du front comme les points anguleux [LEG 95, LEB 99] ou les vertex (intersections du front avec une surface libre), la singularité n'est plus nécessairement en $\sqrt{r}$. Ce phénomène a d'abord été étudié d'un point de vue théorique par Benthem [BEN 77, BEN 80] pour une fissure débouchante dont le front est orthogonal à la surface libre. Bažant et Estenssoro ont généralisé ces travaux au cas de fronts inclinés [BAZ 79]. Le champ de déplacement au voisinage de ce point singulier est cherché sous la forme :

$$u_i = \rho^\lambda f_i(\theta, \varphi) \tag{1.40}$$

où ρ, θ et φ sont les coordonnées sphériques dans un repère dont l'origine est le vertex. Ceci conduit à un problème aux valeurs propres qui permet de déterminer des valeurs λ et des vecteurs propres associés qui doivent vérifier les équations d'équilibre. Les différents travaux mentionnés plus haut montrent que les valeurs de λ ne dépendent que de la géométrie (et tout particulièrement de l'angle d'incidence du front avec la surface libre) et du coefficient de Poisson. Les calculs de Benthem conduisent, dans le cas où le front est orthogonal à la surface libre et où le coefficient de Poisson vaut 0.3, à une première valeur de λ de 0.5477. Si on conserve la définition classique des facteurs d'intensité des contraintes associés à une singularité en $\sqrt{r}$, on peut dire qu'en mode I :

$$K_I(s) = O(s^{0.5477-0.5}) = O(s^{0.0477}) \tag{1.41}$$

où s est la distance à la surface libre du point du front considéré. On comprend alors que dans ce cas, les facteurs d'intensité des contraintes tendent vers 0 au voisinage de la surface libre. Si $\lambda < 0.5$ en revanche, ils tendent vers l'infini. C'est également une autre interprétation du fait que l'hypothèse de contrainte plane n'est pas exacte et que son utilisation n'est qu'une approximation où le K_I calculé peut être interprété comme une moyenne $< K_I(s) >$ sur une faible épaisseur près de la surface libre [BUI 06].

Bažant et Estenssoro on introduit un angle γ entre le front et la surface libre. Il ont estimé l'angle γ_l qui permet d'obtenir une valeur de $K_I(0)$ finie en surface et ont déterminé que $\gamma_l = 11^\circ$ pour $\nu = 0.3$. Des travaux expérimentaux ont été menés par Heyder *et al.* [HEY 05]. Ils ont montré que lors d'une propagation de fissure par fatigue dans du PMMA ($\nu \approx 0.365$) le front tend à conserver un angle constant $\gamma_l = 14^\circ$ qu'ils ont numériquement estimé correspondre à une valeur de $K_I(0)$ finie.

1.1.7 Fissuration par fatigue

L'observation macroscopique des phénomènes de rupture indique qu'il en existe plusieurs types. La rupture fragile concerne tous les processus où la majeure partie de l'énergie dissipée l'est par fissuration. C'est le cas, par exemple, de ruptures dans le verre ou les céramiques. La rupture fragile est caractérisée par la quasi-absence de plasticité sur la courbe déplacement-chargement.

À l'inverse, dans le cas de la rupture ductile, on observe généralement une grande déformation plastique avant que la fissure ne se propage. La majeure partie de l'énergie dissipée l'est par plasticité. Les cuves de réacteurs nucléaires, fabriquées avec un acier inoxydable, présentent ce genre de comportement.

La rupture par fatigue constitue le cadre de cette étude. Elle est caractérisée par la propagation relativement lente de fissures sous l'influence de sollicitations cycliques. On caractérise généralement la fatigue à l'aide d'un diagramme da/dN fonction de ΔK où ΔK est la variation de K au cours d'un cycle de chargement et da/dN est la vitesse de propagation exprimée en unité de longueur par cycle. En mode I, $K = K_I$ et en mode mixte on utilise généralement un K équivalent calculé à partir de la formule d'Irwin (1.27). Le tracé d'un tel diagramme montre que la rupture par fatigue se déroule en trois phases (voir figure 1.6) :

1. La propagation débute lorsque ΔK est supérieur à une valeur seuil K_s. La coalescence de micro-fissures initiées à partir de cavités ou d'inclusions finit par former une ou plusieurs macro-fissures.
2. La phase de propagation stable. Elle est très souvent modélisée par la loi empirique de Paris [PAR 61, PAR 63], définie par :

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \tag{1.42}$$

   et paramétrée par les constantes du matériau C et m. La longueur de la fissure (en 2D) est notée a et N est le nombre de cycles de charge. $\frac{da}{dN}$ est donc une vitesse de propagation. ΔK correspond à la variation de K quand la contrainte oscille entre σ_{min} et σ_{max} :

$$\Delta K = K_{\text{max}} - K_{\text{min}} \tag{1.43}$$

   Pour les aciers, m est généralement compris entre 2 et 5.
3. La phase de ruine est caractérisée par une augmentation de la vitesse de la propagation. Quand $K > K_{\text{c}}$, la fissure croît de manière instable.

La loi de Paris s'applique généralement aux fissures longues (au sens de la taille de la fissure par rapport à la microstructure). Sinon la propagation de la fissure peut être fortement influencée par la microstructure et le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture n'est pas adapté [FER 06b].

La propagation en fatigue est très fortement liée aux phénomènes non-linéaires au voisinage du front de fissure. Localement, une zone plastique se forme au voisinage du front de fissure. Au cours des différents cycles de charge-décharge, des zones de contact et de frottement aparaissent sur les lèvres. Ces phénomènes, difficiles à modéliser, influencent l'état de contrainte en front de fissure [ELG 06]. Un certain nombre de lois de propagations purement phénoménologiques et dérivées de la loi de Paris ont été proposées. Elles sont de la forme : $da/dN = f(\Delta K, R, \Delta K_s, K_{\text{Ic}})$ où $R = \sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{max}}$ est le rapport de charge. En mesurant l'évolution charge/déplacement

au cours du cyclage d'un échantillon fissuré, Elber [ELB 70] a constaté que la fissure ne commençait pas à s'ouvrir dès le début de la recharge mais seulement à partir d'une valeur de contrainte $\sigma = \sigma_{\text{ouv}} > \sigma_{\text{min}}$ appelée contrainte d'ouverture. Ainsi, même avec des rapports de charge positifs, la fissure est fermée pendant une partie du cycle. La "force motrice" vue par la fissure n'est pas ΔK mais une valeur plus faible appelée facteur d'intensité des contraintes effectif et défini par :

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{ouv}} \tag{1.44}$$

où K_{ouv} est le facteur d'intensité des contraintes lié à σ_{ouv}. Généralement déterminé expérimentalement, il dépend du rapport de charge R, mais aussi du matériau, de la géométrie et de l'histoire du chargement car il rend compte des non-linéarités (voir certains détails dans le chapitre 5).

L'effet d'histoire est également très important. Le phénomène de surcharge en est un exemple. Quand une fissure s'est propagée sous l'influence d'un chargement cyclique régulier, une augmentation ponctuelle de σ_{max} provoque une diminution temporaire de la vitesse de propagation.

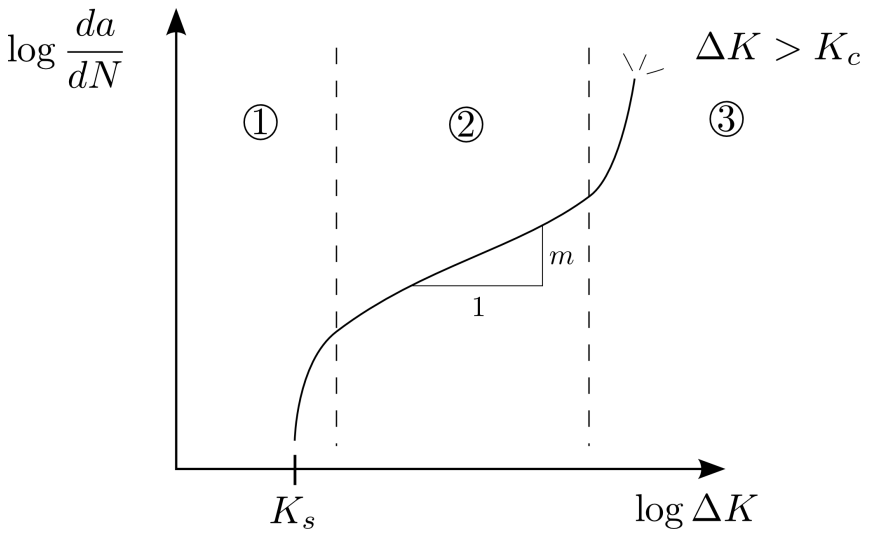


Fig. 1.6: Loi de Paris représentée dans un diagramme log-log. La première phase de propagation apparait dès que ΔK atteint un seuil K_s : $\Delta K > K_s$, c'est la phase d'initiation. La seconde phase correspond à une propagation stable. La troisième phase correspond à une augmentation de la vitesse de propagation précédant la ruine.

1.2 Méthodes numériques pour la mécanique de la rupture

D'une manière générale, le phénomène de fissuration est simulé par une méthode numérique à l'aide d'une succession d'analyses :

1. Une première analyse permet de résoudre les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en respectant les conditions aux limites. Cette première analyse nous fournit une estimation des champs de déplacement, de déformation et de contrainte.

2. Dans un second temps, les grandeurs caractéristiques du modèle de fissuration sont estimées en post-traitement à partir des champs précédemment calculés (les facteurs d'intensité des contraintes par exemple). Moyennant une loi de propagation, l'extension de la fissure est déterminée et le cycle peut recommencer à partir de ce nouvel état.

En mécanique des solides, la méthode des éléments finis (MEF) demeure la méthode de simulation numérique la plus répandue dans le milieu industriel. Sa robustesse, son aptitude à représenter des géométries complexes et la possibilité de pouvoir y intégrer des lois de comportement de matériaux sophistiquées en font un outil privilégié pour traiter une grande variété de problèmes.

Appliquée à la mécanique de la rupture, la MEF doit faire face à deux difficultés majeures. La première provient du fait que la fissure fait partie de la frontière du domaine et doit donc être conforme au maillage (c.a.d que les faces de la fissure doivent correspondre aux bords des éléments). Lorsque la fissure se propage, cela pose des problèmes de remaillage qui peuvent être très complexes et coûteux, tout particulièrement dans le cas de modèles tridimensionnels. De plus, pour les problèmes dépendant du temps (dynamique, élasto-plasticité, ...), il est souvent nécessaire de projeter des champs de l'ancien vers le nouveau maillage. Cette opération est souvent délicate à mettre en œuvre car il faut préserver les équations de conservation [RÉT 05, ELG 07]. La seconde difficulté concerne la description correcte des champs singuliers près du front de fissure. Cette singularité est en effet très difficile à "capter" avec des éléments finis standards.

Dans cette partie nous décrirons certaines techniques et alternatives utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis classique qui demeure, malgré les difficultés évoquées ci-dessus, la technique la plus utilisée dans l'industrie en mécanique de la rupture. D'autres méthodes alternatives telles la méthode des éléments de frontière ou les méthodes sans maillage sont également évoquées. On peut également citer certaines techniques semi-analytiques comme la méthode des distributions continues de dislocation [HIL 96, DUB 92b, DUB 92a]. Enfin, nous nous attarderons plus longuement sur le principe de partition de l'unité et notamment sur la méthode des éléments finis étendus qui est la technique utilisée dans ce travail.

1.2.1 État de l'art de la simulation numérique en mécanique de la rupture

Méthode des éléments frontière

La méthode des éléments de frontière (*boundary element method* ou BEM en anglais) [BON 95a] permet de résoudre des problèmes aux dérivées partielles qui ont été formulés sous forme d'équations intégrales sur la frontière par le biais d'une solution fondamentale appelée solution de Green. Appliquée à de nombreux domaines de la physique comme la mécanique des fluides, l'acoustique et l'électromagnétisme, elle est aussi très utilisée en mécanique de la rupture [POT 92, MI 94, BON 95b, HEL 05]. Concrètement, la BEM utilise un maillage de la surface de la structure uniquement (et pas du volume). En mécanique de la rupture, l'opération de remaillage est donc facilitée. L'accès aux valeurs des champs en volume se fait en post-traitement.

La BEM est très efficace pour modéliser des structures ayant un rapport surface/volume faible ou présentant des interfaces mobiles au cours du temps (des fissures par exemple). En revanche elle conduit à manipuler des matrices assez denses contrairement au éléments finis où les matrices de rigidité sont relativement creuses. Par ailleurs, bien que la BEM s'applique facilement aux problèmes d'élasticité linéaire car la solution de Green existe, ce n'est pas le cas en présence de non-linarités matérielles. La modélisation d'une zone plastique doit par exemple s'accompagner d'une discrétisation volumique explicite de cette région, ce qui limite l'efficacité de la méthode.

Méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage sont plus proches des éléments finis que ne l'est la méthode des éléments de frontière. En effet, elles sont fondées sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin. En revanche, la définition de l'espace d'approximation du champ de déplacement introduite dans la formulation variationnelle ne nécessite pas de maillage. Un ensemble de noeuds est réparti sur l'ensemble du domaine. Une fonction poids evanescente est associée à chacun d'entre eux, ce qui permet de construire les fonctions de base de l'espace d'approximation par la méthode des moindres carrés mobiles (MSL pour *moving least squares*). À la différence des éléments finis, les fonctions de forme MLS ne sont pas interpolantes dans le sens où elle ne valent pas 1 aux noeuds auquels elles sont asssociées et ne valent pas nécessairement 0 à tous les autres noeuds. En revanche elles vérifient la partition de l'unité (voir la section 1.2.2.1) ce qui permet d'enrichir l'approximation [DUF 04]. Les méthodes sans maillage présentent quelques particularités. La prise en compte de conditions aux limites de type Dirichlet est plus délicate que dans la méthode des éléments finis (car il ne s'agit pas d'une interpolation). Des précautions doivent également être prises lors de l'intégration numérique de la forme faible. Ces difficultés sont néanmoins bien maitrîsés. Les

inconvénients majeurs demeurent la largeur de bande relativement importante de la matrice de rigidité due à une plus forte connectivité des noeuds et un pré-traitement plus long, ce qui rend la méthode sans maillage plus lente que la méthode des éléments finis.

En revanche, la méthode sans maillage est très adaptée aux problèmes de rupture car la notion de remaillage n'existe pas. La fissure est prise en compte en jouant sur les fonctions poids des noeuds proches de la fissure. De nombreux travaux dans ces domaines ont été publiés, notamment par Belytschko [BEL 94, KRY 99].

Méthode des éléments finis et dérivées

La première difficulté liée à la nécessité de compatibilité entre la fissure et le maillage peut néanmoins être traitée. Le cas le pus simple concerne les fissures sollicitées en mode I et dont on connait *a priori* le trajet (rectiligne en 2D ou plan en 3D). La technique du "déboutonnage" ou de "relâchement de noeuds" est alors couramment utilisée [MCC 89a, MCC 89b, SOL 03]. Certaines difficultés demeurent cependant, notamment en ce qui concerne la manière de relâcher (progressive ou non) et le moment de relâchement au cours d'un cycle charge/décharge. Enfin, une certaine dépendance au maillage peut intervenir car la longueur minimale de propagation est liée à la taille des faces des éléments.

En mode mixte, le trajet de la fissure n'est *a priori* pas connu et un remaillage s'avère nécessaire à chaque pas de propagation. Cette opération peut en elle-même être problématique car son coût peut être important. Elle pose également la question délicate du transfert de champs d'un maillage à l'autre lorsque que le modèle est non linéaire ou dynamique.

Par ailleurs, les fonctions de forme polynomiales utilisées en élément finis ne permettent pas de "capter" correctement la singularité en pointe de fissure. L'obtention de solutions de bonne qualité requiert un important raffinement du maillage en front de fissure car la convergence est pilotée par la nature de la singularité. On emploie couramment un maillage rayonnant centré sur la pointe de fissure. Des solutions alternatives existent. On peut citer les éléments de Barsoum [BAR 74] qui sont dotés de noeuds supplémentaires aux quart des côtés et qui pemettent une meilleure prise en compte de la singularité élastique pour des problèmes bidimensionnels. On peut également mentionner les éléments hybrides HCD (*Hybrid Crack Element*) [TON 73] sur lesquels déplacements et contraintes sont interpolés à l'aide de fonctions de formes inspirées de la solution asymptotique en pointe de fissure.

L'incorporation de la méthode de partition de l'unité (voir section suivante) dans les formulations éléments finis a abouti à de nouvelles techniques très utiles pour modéliser des problèmes à interfaces mobiles et en particulier les problèmes de fissuration. Parmi ces techniques, on peut citer la méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) ou la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). Cette dernière fait l'objet de la section suivante où elle décrite en détail.

1.2.2 Méthode des éléments finis étendus

1.2.2.1 La méthode de la partition de l'unité

La méthode de la partition de l'unité a été développée par Babuska et Melenck [BAB 97, MEL 96]. Elle a été appliquées à de très nombreuses classes de problèmes parmi lesquelles on peut citer : la mécanique des fluides [WAG 01, WAG 03], les interactions fluide-structure [LEG 06], la modélisation d'inclusions [SUK 01], de transformation de phase [VAL 07a] et enfin la mécanique de la rupture. Pour cette dernière application, on peut citer la méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) initialement proposée par Strouboulis [STR 01], les travaux de de Borst [BOR 03] mais aussi la méthode des éléments finis étendus proposée par Belytschko et Moës et qui sera détaillée ici [BEL 99, DAU 00, SUK 00].

Soit un domaine Ω discrétisé par un ensemble d'éléments $\mathcal{E}$ et un ensemble de N noeuds $\mathcal{N}$ associés à N fonctions de forme notées N_i. On peut alors représenter une approximation éléments finis $\bar{u}$ d'un champ u de la manière suivante :

$$\bar{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) U_i \tag{1.45}$$

Les termes U_i représentent les déplacements nodaux. Il a été démontré que si les N_i constituent une partition de l'unité du domaine Ω, c'est à dire que :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{1.46}$$

on peut enrichir l'approximation de $u(\underline{x})$ avec une fonction d'enrichissement $\varphi(\underline{x})$ comme ceci :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} N_i(\underline{x}) U_i^e \varphi(\underline{x}) \tag{1.47}$$

où $\mathcal{N}^e$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ où l'on place des degrés de liberté *d'enrichissement* U_i^e. La condition de partition de l'unité (1.46) est une condition suffisante pour que l'approximation (1.47) soit interpolante.

Pour illustrer ce concept, on peut choisir d'enrichir l'ensemble des noeuds ($\mathcal{N}^e = \mathcal{N}$) et de mettre tous les degrés de liberté "standards" à 0 ($U_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}$) et tous les degrés de liberté enrichis à 1 ($U_i^e = 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}^e$). Dans ce cas, l'approximation éléments finis enrichie reproduit exactement la fonction d'enrichissement sur l'ensemble du domaine :

$$\bar{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) \tag{1.48}$$

L'attrait principal de cette méthode est la possibilité de choisir une (ou plusieurs) fonction d'enrichissement adaptée au problème physique à résoudre en limitant la dépendance au maillage. On peut ainsi choisir une fonction discontinue qui permet,

par exemple, de prendre en compte une inclusion ou une interface fluide/structure indépendamment de la discrétisation choisie [LEG 06]. Une fonction de classe $\mathcal{C}_0$ peut être choisie pour modéliser un problème de transition de phase pour lequel le champ de déplacement présente une discontinuité faible [VAL 07a]. Nous allons voir dans la section suivante comment la partition de l'unité peut être utilisée dans le cadre de la mécanique de la rupture.

1.2.2.2 La méthode des éléments finis étendus pour la mécanique linéaire de la rupture

L'approximation éléments finis classique ne permet pas de modéliser une discontinuité de déplacement introduite par la présence d'une fissure. Ceci parce que les fonctions de forme utilisées sont continues. Les discontinuités doivent donc être compatibles avec le maillage et les fissures sont maillées explicitement. Pour palier ce problème, la méthode des éléments finis étendus propose d'enrichir l'approximation du champ de déplacement avec des fonctions d'enrichissement adéquates en vertu du principe de partition de l'unité. On attribue à ces fonctions d'enrichissement trois rôles essentiels :

- représenter la discontinuité
- localiser le front de fissure
- "capter" la solution singulière en front de fissure

Représentation de la discontinuité Pour représenter la discontinuité du champ de déplacement, on utilise une fonction d'enrichissement discontinue $H(\underline{x})$, dite fonction "saut" et définie de la façon suivante :

$$H(\underline{x}) = \text{signe}\left((\underline{x} - \underline{x}^*).\underline{e_n}\right) \tag{1.49}$$

$\underline{e_n}$ est un vecteur normal à la surface de la fissure au point $\underline{x}^*$, la projection de $\underline{x}$ sur la fissure (figure 1.7). L'orientation du repère curviligne est purement arbitraire. La fonction $H(\underline{x})$ prend donc les valeurs $+1$ ou -1 suivant le côté de la fissure sur lequel on se place.

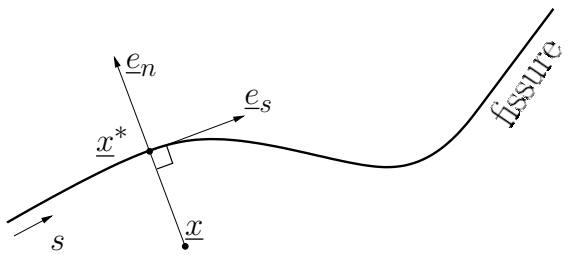


Fig. 1.7: Construction de la fonction saut

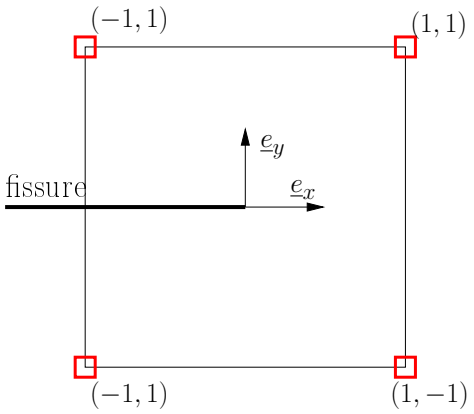
Dans certaines applications, la fonction H est la seule fonction d'enrichissement utilisée [MEN 06]. Elle permet de représenter une discontinuité indépendamment de la discrétisation. En revanche, elle est insuffisante pour localiser précisément la pointe (ou le front) de la fissure qui doit dans ce cas être conforme au maillage (i.e. localisé sur les faces des éléments). Dans les modèles bi-dimensionnels, cette restriction est tout à fait acceptable si la discrétisation utilisée est suffisamment fine. L'erreur faite sur la localisation de la pointe est faible et les champs singuliers sont relativement bien capturés. Dans les modèles tri-dimensionnels en revanche, la forme du front peut être crénelée, ce qui peut fortement pertuber la forme des champs locaux qui seront utilisés pour calculer les quantités qui interviendront dans les lois de propagation (K_I, K_{II} et K_{III} notamment).

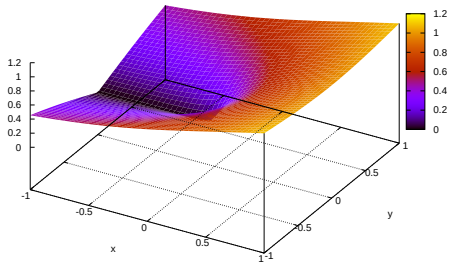
Localisation de la pointe et représentation de la singularité L'introduction d'une nouvelle classe de fonctions d'enrichissement permet de lever la difficulté qui vient d'être évoquée. Ces fonctions ont deux rôles : elle permettent de localiser le front de fissure mais aussi de "capter" la singularité du champ de déplacement. De nombreux travaux [BEL 99, MOË 99, SUK 00] ont montré que les quatre fonctions suivantes forment une très bonne base d'enrichissement en élasticité linéaire 2D ou 3D :

$$\begin{aligned}
\gamma_1(r,\theta) &= \sqrt{r}\cos(\theta/2) \\
\gamma_2(r,\theta) &= \sqrt{r}\sin(\theta/2) \\
\gamma_3(r,\theta) &= \sqrt{r}\sin(\theta/2)\sin(\theta) \\
\gamma_4(r,\theta) &= \sqrt{r}\cos(\theta/2)\sin(\theta)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

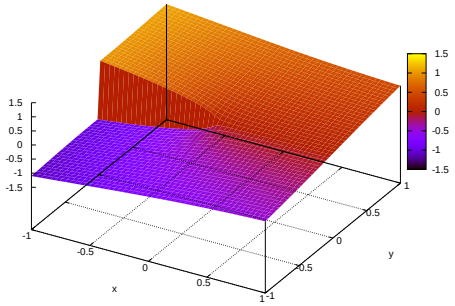
Ce sont des fonctions de r et θ, les coordonnées polaires dans le repère lié au front de fissure (voir figure 1.2). Elles forment une base de la solution asymptotique (1.20), (1.22) et (1.24). La présence du terme $\sqrt{r}$ permet d'introduire la singularité dans l'approximation du champ de déplacement. Le choix de cette base plutôt qu'une autre est guidé par des considérations numériques. L'enrichissement doit permettre de représenter la discontinuité en arrière du front de fissure, ceci est réalisé par $\gamma_2(r,\theta)$ et de son terme $\sin(\theta/2)$ discontinu en $\theta = \pm\pi$. La présence d'autres fonctions discontinues dégraderait considérablement le conditionnement de la matrice de raideur, les trois autres fonctions sont donc continues. Par ailleurs le calcul des matrices de masse ou de raideur nécessite une intégration discrète de ces fonctions ou de leur gradient par une méthode de Gauss. Afin de maîtriser au mieux cette étape, il faut limiter leur variation pour diminuer le nombre de points d'intégration sans dégrader la qualité du calcul.

Approximation du champ de déplacement et stratégie d'enrichissement En vertu du principe de partition de l'unité et en suivant l'expression (1.47), le

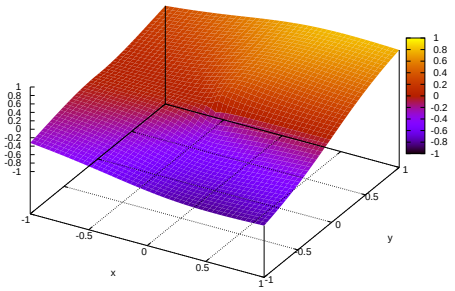




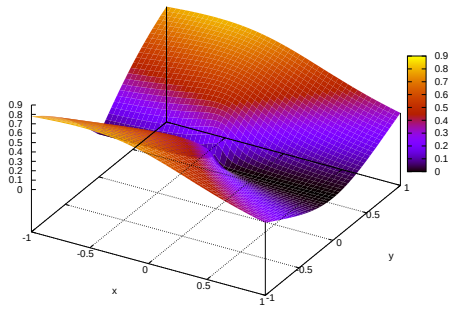
γ_1



γ_2



γ_3



γ_4

Fig. 1.8: Fonctions d'enrichissement singulier

champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ est décrit de la manière suivante :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}}^{n} N_i(\underline{x})\underline{u}_i + H(\underline{x}) \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\underline{x})\underline{a}_i + \sum_{j=1}^{4} \gamma_j(\underline{x}) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}_{sing}} N_i(\underline{x})\underline{b}_{ji} \right) \tag{1.51}$$

où les termes $\underline{u}_i$ sont les degrés de libertés classiques et les termes $\underline{a}_i$ et $\underline{b}_{ij}$ sont des degrés de liberté associés aux fonctions d'enrichissement saut et singuliers respectivement.

Pour des raisons de coût de calcul, seule une partie du domaine est enrichie afin de limiter le nombre de degrés de liberté. On parle d'enrichissement local. Différentes stratégies permettent de déterminer $\mathcal{N}_{cut}$ et $\mathcal{N}_{sing}$, les ensembles de noeuds supports des enrichissements. La méthode classique, dite de l'enrichissement topologique, propose d'enrichir, avec les fonctions singulières uniquement, les noeuds dont le support contient le front de fissure (représenté par des carrés sur la figure 1.9). Les autres noeuds ayant leur support coupé par la fissure sont enrichis avec des fonctions saut (représentés par des cercles). Cette technique permet de limiter au maximum le nombre de degrés de liberté introduits par les enrichissements. Une autre stratégie, dite d'enrichissement géométrique, propose d'étendre la zone d'enrichissement singulière à une région de taille fixée indépendamment de la discrétisation, la zone d'enrichissement discontinu restant inchangée [LAB 05, BÉC 05]. Cette technique offre l'avantage d'améliorer l'ordre de convergence de la méthode, par contre le conditionnement de la matrice de raideur est fortement détérioré et un pré-conditionneur très performant et sans doute coûteux est requis. Pour cette dernière raison, et parce que l'ordre de convergence nous paraît satisfaisant dans les applications traitées dans cette étude, nous utiliserons l'enrichissement topologique.

Remarque 5 *Dans le cas d'un enrichissement local, il existe une couche d'éléments partiellement enrichis qui ne vérifient pas la partition de l'unité (blending elements en anglais). Ces éléments sont localisés entre les éléments enrichis et les éléments non enrichis ou entre des éléments dont les enrichissements sont de natures différentes. Il a été montré [CHE 03] que la manière de traiter cette zone peut avoir une influence sur l'ordre de convergence de la méthode. Plusieurs méthodes ont été proposées pour palier ce problème. On peut par exemple modifier les fonctions d'enrichissement de telle sorte qu'elles soient nulles sur les blending elements [CHE 03]. Dans cette étude, aucun traitement particulier des blending elements n'a été utilisé, l'ordre de convergence étant jugé satisfaisant.*

1.2.2.3 Intérêts et limitations

L'introduction de composantes singulières dans l'approximation du champ de déplacement dans la méthode X-FEM permet d'obtenir de bons résultats avec un

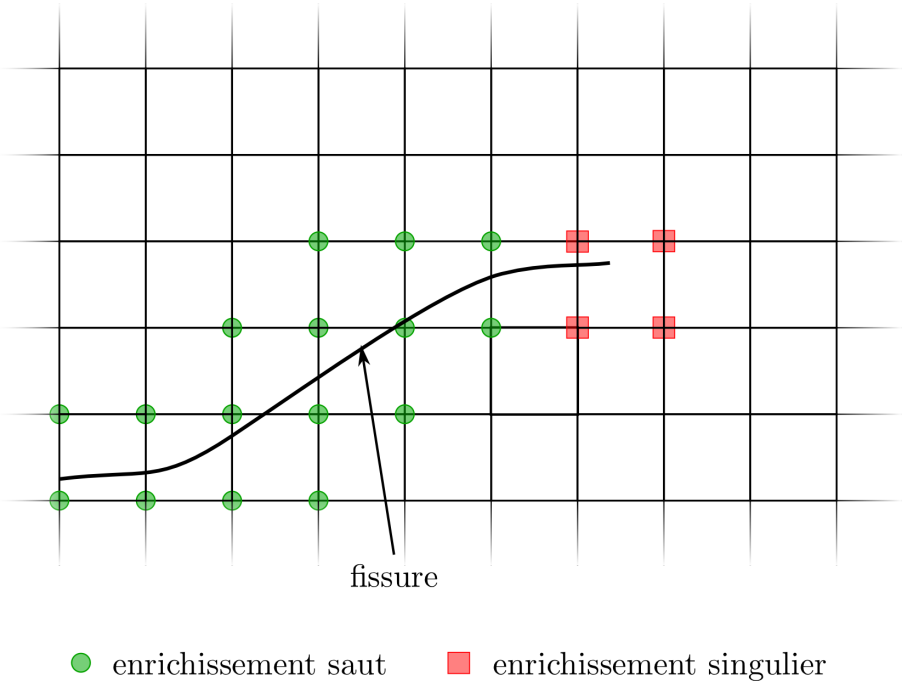


Fig. 1.9: Maillage X-FEM et enrichissement topologique

maillage relativement grossier là où une discrétisation beaucoup plus fine aurait été nécessaire dans le cadre des éléments finis classiques.

De nombreux développements ont eu lieu autour de la méthode des éléments finis étendus au cours de la décennie qui vient de s'écouler. En mécanique de la rupture, des applications ayant trait à la rupture par fatigue [ELG 07, RIB 07], à la rupture fragile élasto-dynamique [RÉT 05, MEN 06, GRÉ 07], à la déchirure ductile [BOR 06] ou encore à la fissuration multiple [BUD 04] ont clairement montré l'intérêt de la méthode X-FEM. Cette technique a atteint un niveau de maturité qui lui vaut désormais d'être implantée dans un nombre croissant de codes commerciaux et industriels.

Son atout principal est qu'elle peut s'intégrer relativement facilement dans des codes éléments finis existants : la méthode des éléments finis étendus est une méthode éléments finis ! Elle présente toutefois quelques particularités qui imposent de prendre certaines précautions. Les problèmes liés à l'intégration numérique par exemple ont été évoqués plus haut. La méthode classique, utilisée dans cette étude, consiste à sous-découper les éléments enrichis en sous-éléments d'intégration compatible avec la fissure (TRI3 en 2D ou TET4 en 3D) de manière à mieux prendre en compte la discontinuité et la singularité des fonctions d'enrichissement. Des améliorations concernant l'intégration numérique des éléments enrichis ont également été proposées par Bechet *et al.* [BÉC 05] et Ventura *et al.* [VEN 06]. D'autres stratégies peuvent être utilisées comme dans le cas, par exemple, de modélisations élasto-

plastiques. Il faut en effet éviter toute modification de la position des points de Gauss (sur lesquels sont définis les variables internes) lors du sous-découpage éventuel d'un élément lorsque la fissure se propage. Dans [ELG 07], il a été proposé d'utiliser un sous-découpage régulier et relativement fin des éléments enrichis. La position des points de Gauss est alors indépendante de celle de la fissure et la qualité de l'intégration numérique reste acceptable. Par ailleurs, bien que la base des fonctions singulières soit optimale du point de vue du conditionnement, des problèmes subsistent néanmoins. C'est le cas par exemple lorsque la fissure tranche un élément en deux parties de taille très inégales. C'est pourquoi la méhode X-FEM nécessite un pré-conditionneur très performant.

Dans l'introduction, nous avons fait état du fait qu'en mécanique de la rupture, différentes échelles peuvent co-exister : celle de la structure, mais aussi celle de la fissure ou celle des non-linéarités en front de fissure. Ces échelles peuvent différer les unes des autres de plusieurs ordres de grandeur. La méthode des éléments finis étendus comme celle des éléments finis classiques ne peut pas, telle quelle, manipuler des échelles physiques si différentes. La mise au point d'un outil levant cette difficulté majeure est au coeur de cette étude. Le chapitre 2 a pour objectif de faire le point sur différentes techniques multiéchelles déjà utilisées dans le cadre de la MEF. Nous verrons dans le chapitre 3 comment nous pouvons utiliser l'une d'entre elles, la famille des techniques multigrilles, dans le cadre de la méthode X-FEM.

1.2.3 Représentation numérique de la géométrie de la fissure

La représentation numérique de la géométrie des fissures est une question importante dans les simulations de mécanique de la rupture. Il faut non seulement savoir décrire finement une surface mais aussi pouvoir la faire évoluer dans le temps car les fissures forment une surface de discontinuité mobile.

Dans le cadre des éléments finis classiques, nous avons vu que la surface de la fissure doit être compatible avec les éléments. La réponse à la question de sa représentation géométrique se résume alors à un problème de maillage. De ce point de vue, la méthode X-FEM autorise plus de souplesse et différentes techniques ont déjà été utilisées. Dans les problèmes bi-dimensionnels, la fissure peut être représentée explicitement par un ensemble de segments. À chaque pas de propagation un nouveau segment y est ajouté [BEL 99]. L'extension de cette méthode aux problèmes tri-dimensionnels passe par une triangulation de la surface de discontinuité. Son remaillage lors de la propagation peut toutefois s'avérer complexe.

Les techniques de représentation implicites issues des domaines de la mécanique des fluides, de l'imagerie ou de la CAO ont également été envisagées. On peut citer entre autre la méthode des volumes finis ou la *fast marching method* [SUK 03] mais c'est la méthode des fonctions de niveau (*level set method*) qui semble être la plus adaptée à la mécanique de la rupture et qui a été adoptée dans ce travail. Le chapitre 4 est dédié à la propagation des fissures dans les milieux tridimensionnels. Des généralités sur les fonctions de niveau et les particularités liées à leur utilisation

dans le contexte multiéchelle/multigrille y seront décrites.

Chapitre 2

Méthodes multigrilles en éléments finis

Sommaire

2.1 État de l'art des stratégies multiéchelles 32
2.1.1 Méthodes de superposition 32
2.1.2 Méthodes de décomposition de domaines 33
2.1.3 Méthodes de raffinement automatique 34
2.1.4 Autres méthodes 34
2.2 Historique des techniques multigrilles en éléments finis . . . 35
2.3 Solveurs itératifs et propriété de lissage 36
2.4 Techniques multigrilles globales pour les problèmes d'élasticité linéaire 38
2.4.1 Le schéma CS pour les problèmes linéaires 38
2.4.2 Les opérateurs de changement d'échelle 42
2.5 Techniques multigrilles localisées 45
2.5.1 Définition du problème 46
2.5.2 Formulation variationnelle multiéchelle 49
2.5.3 Un problème fin local et un problème grossier global 51
2.5.4 Algorithme 53
2.6 Exemple d'une poutre en flexion 53
2.7 D'autres variantes multigrilles 57
2.8 Conclusion 58

L'objectif de cette étude est de mettre au point une méthode numérique permettant de traiter des problèmes de mécanique de la rupture possédant plusieurs échelles caractéristiques intrinsèques, éventuellement localisées. Dans le premier chapitre, nous avons décrit la méthode des éléments finis étendus et énoncé un certain nombre de ses propriétés. Au même titre que la méthode des éléments finis classiques, la méthode X-FEM n'est cependant pas adaptée au traitement de problèmes fortement multiéchelles.

Cette problématique n'est pas propre à la mécanique de la rupture, et de nombreuses stratégies de calcul multiéchelle ont été développées dans le cadre général de la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps faire le point sur certaines d'entre elles qui sont susceptibles de répondre à la problématique de cette étude tout en nous détachant temporairement du cadre de la mécanique de la rupture et des éléments finis étendus. Dans un second temps nous nous attacherons à détailler plus particulièrement la famille des techniques multigrilles. Nous verrons pourquoi et comment ces techniques peuvent être utilisées dans notre contexte.

Nous nous restreignons dans ce chapitre à la résolution de problèmes d'élasticité linéaire. L'extension à des problèmes non-linéaires et notamment à des problèmes élasto-plastiques sera décrite dans le chapitre 6.

2.1 État de l'art des stratégies multiéchelles

2.1.1 Méthodes de superposition

Les méthodes de superposition cherchent à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique lié à des détails structuraux (fissure, inclusions, zones à forts gradient, ...) ou à un modèle mécanique plus fin. Ces stratégies de calcul sont basées sur une décomposition de la solution du problème $\underline{u}$ en une partie macroscopique $\underline{u}^M$ et une partie microscopique $\underline{u}^m$ telles que :

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \underline{u}^m \tag{2.1}$$

On peut citer la méthode de projection de Dirichlet Hiérarchique de Oden et Zohdi [ZOH 96] ou encore la méthode variationnelle multiéchelle proposée par Hughes [HUG 95]. Ces stratégies proposent de résoudre un problème macroscopique puis des problèmes microscopiques définis sur des domaines locaux éventuellement identifiés à l'aide d'estimateurs d'erreur. La détermination des conditions aux limites de ces problèmes locaux et de leur espace d'approximation constituent les points cruciaux de ces techniques.

La méthode Arlequin introduite par Ben Dhia [BEN 05] permet de superposer plusieurs modèles qui diffèrent tant au niveau de leur discrétisation que de leur nature physique. La figure 2.1 représente deux domaines Ω_M et Ω_m auxquels sont associés un modèle macro et un modèle micro ainsi que leur zone de recouvrement

$\Omega_{Mm} = \Omega_M \cap \Omega_m$. Le raccord des deux modèles est réalisé de manière faible dans cette zone de recouvrement également appelée "volume de jonction". La compatibilité des champs de déplacement y est assurée par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. La concurrence des modèles sur Ω_{Mm} est gérée par un paramètre vérifiant la partition de l'unité. Ainsi un calcul à deux modèles se résume au problème de minimisation suivant :

chercher $(u_1, u_2) \in \{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2\}$ tel que :

$$\alpha E_1(u_1) + (1-\alpha)E_2(u_2) = \min_{(c_1,c_2)\in\{\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\}} (\alpha E_1(c_1) + (1-\alpha)E_2(c_1)) \quad (2.2)$$

où u_M et u_m sont les inconnues et $\mathcal{U}_M$ et $\mathcal{U}_m$ sont les espaces dans lesquels ils sont recherchés. E_M et E_m sont les énergies potentielles associées à chacun des deux modèles. Les coefficients α_M et α_m respectent la partition de l'unité :

$$\begin{cases} \alpha_M = 1 \text{ et } \alpha_m = 0 \text{ sur } \Omega_M \setminus \Omega_m \\ \alpha_M = 0 \text{ et } \alpha_m = 1 \text{ sur } \Omega_m \setminus \Omega_M \\ \alpha_M + \alpha_m = 1 \text{ sur } \Omega_{Mm} = \Omega_M \cup \Omega_m \end{cases} \quad (2.3)$$

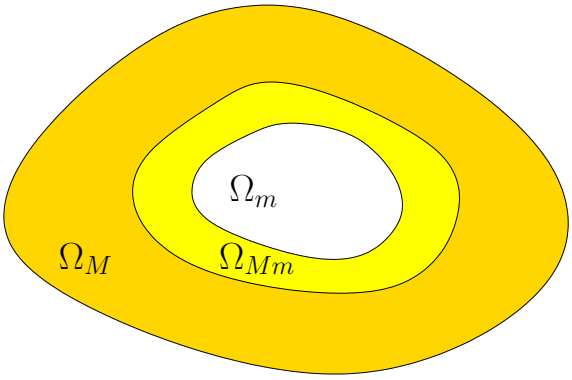


Fig. 2.1: Définition de deux domaines ainsi que de la zone de jonction pour une application à la méthode Arlequin

La méthode Arlequin a déjà été appliquée avec succès à des problèmes de fissuration avec propagation [BEN 08]. Néanmoins, bien que très rigoureusement établie, la méthode Arlequin est parfois délicate à mettre en œuvre numériquement parlant. Le choix des paramètres α_i et de l'espace des multiplicateurs de Lagrange permettant de recoller les deux modèles dans la zone de jonction est difficile. De plus, l'intégration numérique dans cette zone est délicate et souvent coûteuse si les discrétisations des deux modèles sont différentes.

2.1.2 Méthodes de décomposition de domaines

Les méthodes de décomposition de domaines peuvent également trouver une application aux problèmes nécessitant un "zoom" sur des détails structuraux localisés.

Dans ce cas en effet, la partition entre une zone “fine” et une zone “grossière” est naturelle et une approche locale-globale peut être adaptée.

Les techniques de condensation statique et de ré-analyse locale consistent à effectuer un premier calcul à une échelle grossière. Les résultats sont utilisés pour définir les conditions aux limites (en effort et/ou en déplacement) d'un problème fin défini sur un sous-domaine contenant le détail à prendre en compte. Lors du premier calcul, l'échelle grossière n'est pas affectée par le détail et une ré-analyse est alors nécessaire [MAO 91].

L'approche micro-macro développée par Ladevèze et Dureisseix [LAD 00] par exemple, est basée sur une partition de la structure en sous-structures et interfaces. Chaque sous-structure est soumise à l'action de ses voisines par l'intermédiaire des interfaces, ce qui se traduit par une distribution d'effort et de déplacement sur ses frontières. Cette méthode de décomposition de domaine est donc une méthode mixte. La séparation des échelles se fait au niveau des interfaces uniquement (méthode sans recouvrement), contrairement à la méthode Arlequin par exemple. Une technique d'homogénisation est utilisée pour relier les quantités interfaciales d'effort et de déplacement des différentes échelles. L'algorithme itératif LATIN est ensuite utilisé pour résoudre simultanément les équations d'admissibilité (statiques, cinématiques) sur chaque sous-domaine d'une part, et les relations de comportement (des matériaux et d'interface) d'autre part.

Cette méthode a été appliquée à la mécanique de la rupture et aux éléments finis étendus par Guidault [GUI 07]. Elle nécessite des traitements particuliers liés aux enrichissements X-FEM, notamment en ce qui concerne les opérateurs d'homogénéisation.

2.1.3 Méthodes de raffinement automatique

De nombreuses méthodes utilisent la notion d'estimateurs ou d'indicateurs d'erreur. Bien que nécessitant une description du détail à prendre en compte sur toutes les échelles, ces techniques permettent un raffinement automatique des modèles afin d'atteindre une échelle “numérique” satisfaisante. La méthode de raffinement automatique de Cavin [CAV 05] par exemple, pourrait être comparée aux méthodes de condensation et de ré-analyse. La différence provient de l'utilisation d'un indicateur d'erreur en espace ou espace-temps permettant d'identifier automatiquement les zones “fines” et d'y imposer des conditions aux limites cinématiques. Pour une analyse linéaire, ces conditions étant supposées exactes, à la tolérance spécifiée près, aucune ré-analyse du problème grossier n'est nécessaire, ce qui en fait une méthode extrêmement performante en termes de temps de calcul.

2.1.4 Autres méthodes

Bien entendu, les quelques stratégies multiéchelles présentées ci-dessus n'en constituent pas une liste exhaustive. De nombreux travaux et approches différentes

existent et le présent masnuscript n'a pas vocation à les décrire toutes. Dans le cadre des techniques issues de la partition de l'unité, on peut tout de même citer les récents travaux de Fish [FIS 05, WAI 07] qui utilisent des principes d'homogénéisation pour relier des modèles et des échelles très différents allant jusqu'à la dynamique moléculaire. De nombreuses études sont également en cours pour tenter de coupler la mécanique de la rupture (à l'échelle macroscopique) à une échelle atomique [BEL 02].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons décrire plus en détail les techniques multigrilles. Bien que n'ayant pas été introduites à leur origine comme des méthodes multiéchelles, nous verrons néanmoins que nous pourrons les utiliser de manière efficace pour traiter nos problèmes localisés.

2.2 Historique des techniques multigrilles en éléments finis

Les techniques multigrilles ont été initialement introduites en mécanique des fluides dans le cadre des différences finies pour résoudre des équations elliptiques de manière très efficace. Elles constituent une famille de solveurs qui ont tous la particularité d'exploiter la propriété de lissage des solveurs itératifs. Pour tirer partie de cette propriété qui sera illustrée dans la section 2.3, plusieurs grilles (ou maillages) sont utilisées et des opérateurs permettant à ces différentes échelles de communiquer sont définis. La première description d'un algorithme à plusieurs niveaux est attribuée à Fedorenko dans les années soixante [FED 64]. Cependant ces travaux n'exploitaient pas toutes les potentialités de cette approche. C'est Brandt qui décrit les fondements des techniques multigrilles dans ses publications pionnières [BRA 77a, BRA 77b, BRA 84]. La localisation des grilles n'a été introduite qu'une dizaine d'années plus tard par Bai et Brandt [BAI 87]. Depuis lors, les multigrilles ont fait l'objet d'intenses développements. Dans le cadre des différences finies, on peut citer par exemple les travaux de Lubrecht et Venner qui ont appliqué les multigrilles à des problèmes de lubrification [LUB 00] ou encore des travaux traitant de la résolution des équations d'Euler [SOU 76], de Navier-Stokes [WES 92]. Des problème de turbulence ont également été traités dans [SHE 95]. Les techniques multigrilles ont été adaptées aux éléments finis pour la mécanique des solides dans le début des années quatre-vingt-dix par Parsons et Hall [PAR 90b, PAR 90a]. Ont suivi de nombreux travaux portant entre autres sur la résolution de problèmes élastoplastiques [KAC 93, FIS 95, FEN 97, EKE 04], le parallélisme [ADA 00b, ADA 00a] ou la gestion de maillages non hiérarchiques avec l'introduction des techniques multigrilles algébriques [ADA 02].

Les solveurs multigrilles, bien que plus complexes à mettre en œuvre que des solveurs plus classiques comme Gauss-Seidel ou les gradients conjugués ont montré une très grande efficacité à résoudre une grande variété de problèmes. n étant la taille du problème, les techniques multigrilles ont une complexité en $O(n\log(n))$ voire en

$O(n)$ pour certains types de problèmes [LUB 00, PAR 90b, RAN 07d]. Ceci est à comparer avec les complexités de Gauss-Seidel (en $O(n^2)$) ou du gradient conjugué préconditionné (en $O(n^{3/2})$).

2.3 Solveurs itératifs et propriété de lissage

Les solveurs itératifs comme Gauss-Seidel ou les gradients conjugués ont une propriété remarquable dénommée "propriété de lissage des erreurs". Cela signifie qu'ils sont très efficaces pour capter la partie de la solution à petite longueur de variation (relativement à la discrétisation) et peu efficace pour capter la partie à grande longueur de variation. L'erreur est donc très rapidement "lissée" et la majeure partie de l'effort de résolution est consacrée à capter les composantes basses fréquences [LUB 00].

On peut illustrer cette propriété à l'aide du problème proposé par Parsons et Hall [PAR 90b] et illustré sur la figure 2.2. Il s'agit d'une plaque rectangulaire élastique linéaire soumise à une charge ponctuelle.

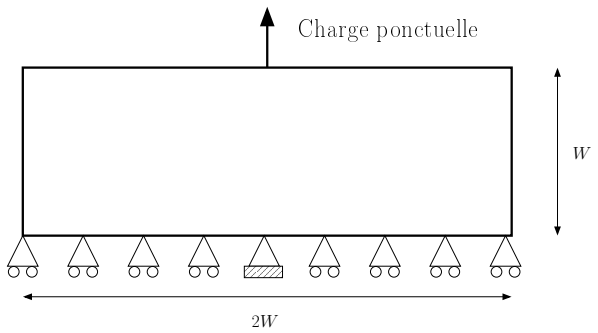


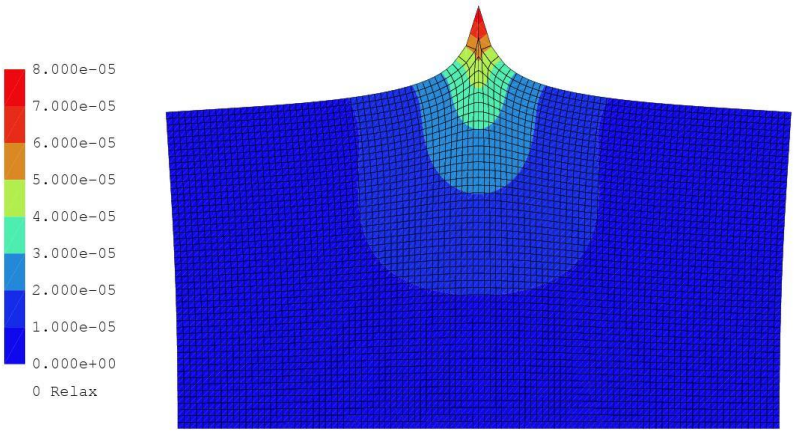
Fig. 2.2: Problème à résoudre

Le problème linéaire qui en découle est résolu par un gradient conjugué avec un préconditionnement de Jacobi. On défini l'erreur courante à l'itération k par :

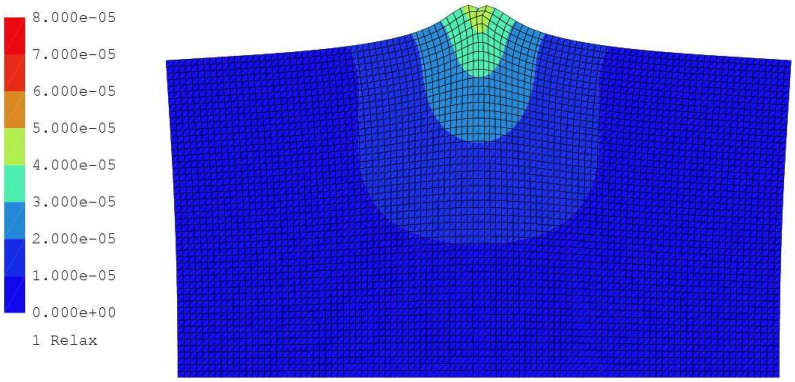
$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{U}}^{(k)} \tag{2.4}$$

où $\mathbf{U}$ est la solution numérique exacte et $\widetilde{\mathbf{U}}^{(k)}$ est la solution courante à l'itération k. Les erreurs pour $k = 0$ (erreur initiale), $k = 1$ et $k = 10$ sont représentées sur la figure 2.3 sous la forme de déformées. Le solveur est initialisé par un vecteur nul, on a donc $\underline{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{U}$. Par ailleurs, une erreur nulle serait représentée par un rectangle non déformé.

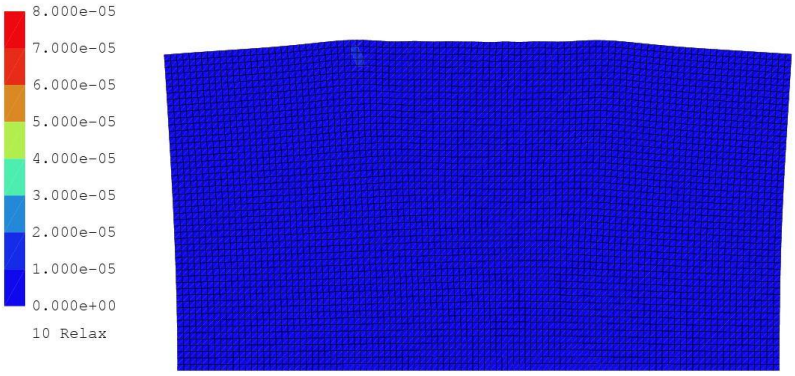
On observe que la singularité de déplacement due à la charge ponctuelle (correspondant à une variation haute fréquence) est "lissée" dès les premières itérations. L'erreur relative au déplacement d'ensemble est en revanche beaucoup plus longue à disparaitre car elle est associée à des fréquences beaucoup plus basses.



Erreur initiale : $E^{(0)}$



Erreur après 1 relaxation de gradient conjugué : $E^{(1)}$



Erreur après 10 relaxations de gradient conjugué : $E^{(10)}$

Fig. 2.3: Effet du gradient conjugué pré-conditionné

2.4 Techniques multigrilles globales pour les problèmes d'élasticité linéaire

Le bilan de la section précédente est donc simple : la plus grande partie de l'effort de résolution est consacrée au calcul des composantes basses fréquences de la solution, or ces fréquences sont relatives à la discrétisation. Ceci conduit au principe fondamental des multigrilles :

Les composantes à petite longueur de variation sont calculées sur une grille fine. La fréquence des erreurs à grande longueur de variation est numériquement augmentée en les transférant sur une grille plus grossière de manière à continuer à tirer profit de la propriété de lissage.

Ce transfert est légitime dans la mesure où les erreurs à transférer sont précisément associées à de grandes longueurs de variation qu'une grille grossière peut tout à fait représenter.

2.4.1 Le schéma CS pour les problèmes linéaires

Nous allons maintenant décrire l'un des schémas multigrilles les plus simples dans sa version à deux niveaux, il s'agit du *correction scheme* (CS). On considère un problème de référence linéaire associé à une discrétisation fine (voir figure 2.4). On définit également un maillage auxiliaire plus grossier associé au même problème physique. Ces maillages couvrent tous les deux l'ensemble du domaine, ce qui justifie le titre de technique multigrille "globale" (en opposition avec les techniques locales définies dans la section 3.3).

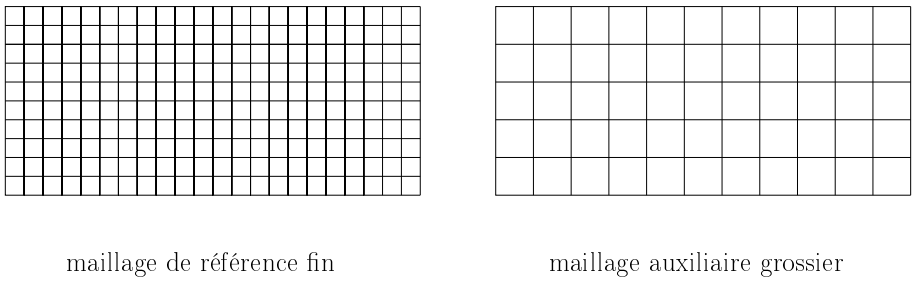


Fig. 2.4: Les maillages utilisés dans l'algorithme CS à deux niveaux

Le problème d'élasticité linéaire associé à la discrétisation de référence se réduit au système linéaire suivant :

$$\mathbf{K}_f \mathbf{U}_f = \mathbf{F}_f \tag{2.5}$$

L'indice $_f$ signifie que la quantité à laquelle il se rapporte est défini sur l'espace du problème fin. $\mathbf{K}_f$ est la matrice de rigidité de la structure, $\mathbf{U}_f$ est le vecteur des

déplacements nodaux inconnu et $\mathbf{F}_f$ est le vecteur des forces extérieures. La première étape consiste à effectuer un nombre réduit ν_1 d'itérations de solveur itératif de manière à capter uniquement les composantes à petites longueurs de variation. À l'issue de cette première étape de "relaxation", la solution courante est notée $\widetilde{\mathbf{U}}_f$. On y associe un résidu défini par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} = \mathbf{F}_f - \mathbf{K}_f \widetilde{\mathbf{U}}_f \tag{2.6}$$

$\mathbf{U}_f$ étant la solution numérique exacte et K_f étant un opérateur linéaire, on peut écrire :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} = \mathbf{K}_f \left(\mathbf{U}_f - \widetilde{\mathbf{U}}_f \right) \tag{2.7}$$

où on identifie l'erreur précédemment introduite par l'expression (2.4), ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{K}_f \mathbf{E}_f = \mathbf{R}_{\mathbf{es}f} \tag{2.8}$$

Nous savons que $\mathbf{E}_f$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{es}f}$ sont associés à de grandes longueurs de variation, ils peuvent donc être représentés sur la grille grossière. On introduit l'opérateur de restriction $\mathbf{R}$ (décrit dans la section 2.4.2) qui permet de transférer le résidu de la grille fine vers la grille grossière :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}g} = \mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} \tag{2.9}$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{es}g}$ représente le résidu équivalent à $\mathbf{R}_{\mathbf{es}f}$ sur la grille grossière. Les quantités indicées $_g$ se réfèrent au problème grossier. On définit alors le problème grossier équivalent au problème fin (2.8) :

$$\mathbf{K}_g \, \Delta \mathbf{U}_g = \mathbf{R}_{\mathbf{es}g} \tag{2.10}$$

où $\mathbf{K}_g$ est la matrice de rigidité associée à la grille grossière et $\Delta\mathbf{U}_g$ est l'approximation de l'erreur $\mathbf{E}_f$ sur le niveau grossier. La résolution de ce problème permet de calculer la correction $\Delta\mathbf{U}_g$ (d'où le nom *correction scheme*) qui est appliquée à la solution courante $\widetilde{\mathbf{U}}_f$ à l'aide de l'opérateur de prolongation $\mathbf{P}$ (décrit dans la section 2.4.2) :

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{U}}}_f = \widetilde{\mathbf{U}}_f + \mathbf{P}\Delta\mathbf{U}_g \tag{2.11}$$

$\widetilde{\widetilde{\mathbf{U}}}_f$ est la nouvelle solution courante. Le terme $\mathbf{P}\Delta\mathbf{U}_g$ porte les composantes basses fréquences qui n'ont pas été "capturées" lors de la première étape de relaxation. L'opération de prolongation peut introduire des erreurs hautes fréquences. Pour les éliminer, on procède à une seconde étape de relaxation où un petit nombre ν_2 d'itérations de solveur itératif est effectué.

Cet ensemble d'opérations constitue un cycle multigrille. Il ne suffit pas à lui seul à atteindre une précision importante sur l'approximation de la solution, c'est pourquoi un critère de convergence associé à la norme du résidu est appliqué à la fin de chaque cycle. Tant qu'il n'est pas satisfait, on reprend la procédure à partir de la première étape de relaxation. L'algorithme CS tient son efficacité à deux choses :

i. On constate que quelle que soit la taille du problème de référence, un cycle multigrille permet de diviser la norme du résidu d'un facteur 5 à 10 voire plus encore (voir Chapitre 3). Le nombre total de cycles nécessaire pour atteindre une précision fixée est dans la plupart des cas très peu dépendant de la taille du problème.

ii. Un très petit nombre d'itérations de solveur itératif est réalisé sur le problème de référence, et ceci indépendamment de sa taille. On verra par la suite que des valeurs de ν_1 et ν_2 telles que $\nu_1+\nu_2 < 8$ sont généralement largement suffisantes.

L'effort de calcul se reporte donc majoritairement sur la résolution du problème grossier. Si ce problème est associé à une discrétisation trop fine, il peut être utile d'introduire un troisième grille encore plus grossière et d'appliquer récursivement la procédure CS au problème (2.10). Par ailleurs, une précision importante sur l'estimation de $\Delta\mathbf{U}_g$ n'est pas nécessaire et on procède alors à un nombre limité γ de cycles multigrilles pour approximer la solution du problème grossier. Suivant la taille du problème de référence, on peut utiliser autant de grilles auxiliaires que nécessaire. La figure 2.5 schématise la manière dont s'agencent les cycles multigrilles en fonction de la valeur de γ pour trois niveaux de discrétisation, le niveau 2 étant le plus fin et le niveau 0 le plus grossier. Quand $\gamma = 1$, on parle de V-cycles, quand $\gamma = 2$ on parle de W-cycles et dans le cas général, on parle de γ-cycles. Suivant la nature du problème à résoudre, il est important d'ajuster au mieux la valeur de γ afin de trouver un bon compromis entre un coefficient de réduction de l'erreur par γ-cycle intéressant et un coût raisonnable de ce cycle car plus γ est grand, plus son coût est important. Dans le chapitre 3, de nombreux détails seront donnés sur les propriétés de convergence du *correction scheme* et sur l'influence des différents coefficients (ν_1, ν_2 γ).

L'algorithme *correction scheme* à plusieurs niveaux est détaillé dans le tableau 2.1.

Remarque 6 *D'une manière générale, et dans cette étude en particulier, le facteur d'échelle entre deux niveaux est toujours fixé à 2. Par expérience, ce facteur 2 est optimal dans la mesure où il offre le meilleur compromis entre un bon coefficient de réduction des erreurs hautes fréquences et un nombre de grilles acceptable [LUB 00]. Si le facteur d'échelle est supérieur à 2, les relaxations seront plus coûteuses car elles devront capter un spectre de fréquences plus large. Dans cette étude, les grilles fines sont générées à partir des grilles grossières par le sous-découpage de ses éléments par un facteur 2. Ainsi, un quadrangle est découpé en quatre sous-quadrangles, un hexaèdre en huit sous-hexaèdres, etc. Une conséquence importante en est que les maillages utilisés sont tous imbriqués (ou hiérarchiques). Notons cependant que les stratégies multigrilles sont tout à fait extensibles à des maillages non hiérarchiques [FEN 97].*

Procédure CS (l, γ, $\mathbf{F}_l$)

1. initialisation :
$$\mathbf{U}_l^0 = 0, \quad k = 0 \tag{2.12}$$

2. 1ère relaxation. Faire ν_1 itérations sur le problème de niveau l en partant de l'approximation courante $\mathbf{U}_l^k$:
$$\mathbf{U}_l^k \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_l\mathbf{U}_l = \mathbf{F}_l \quad \rightarrow \overline{\mathbf{U}}_l^k$$
$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}_l}^k = \mathbf{F}_l - \mathbf{K}_l\overline{\mathbf{U}}_l^k$$

3. Problème grossier.
   si $l = 0$, résoudre :
$$\mathbf{K}_{l-1}\,\Delta\mathbf{U}_{l-1} = \mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{es}_l}^k \quad \rightarrow \quad \Delta\mathbf{U}_{l-1}$$
   sinon appeler récursivement :
$$\text{Procédure CS (l-1, } \gamma\text{, } \mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{es}_l}^k) \quad \rightarrow \quad \Delta\mathbf{U}_{l-1}$$

4. Correction de l'approximation sur le niveau l
$$\overline{\overline{\mathbf{U}}}_l^k = \overline{\mathbf{U}}_l^k + \mathbf{P}\Delta\mathbf{U}_{l-1}$$

5. 2nde relaxation. Faire ν_2 itérations sur le problème de niveau l en partant de l'approximation courante $\overline{\mathbf{U}}_l^k$:
$$\overline{\overline{\mathbf{U}}}_l^k \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_l\mathbf{U}_l = \mathbf{F}_l \quad \rightarrow \overline{\mathbf{U}}_l^{k+1}$$

6. critère d'arrêt
   si $||\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_l\mathbf{U}_l^{k+1}||_2/||\mathbf{F}_l||_2 > \varepsilon$ ou $k+1 < \gamma$:
$$k \leftarrow k+1 \text{ et reprendre à l'étape 1}$$
   sinon
$$\text{renvoyer } \overline{\mathbf{U}}^{k+1} \text{ et sortir}$$

Tab. 2.1: Algorithme CS à plusieurs niveaux. L'appel se fait par Procédure CS (l_{max}, ∞, $\mathbf{F}_{l_{max}}$)

.

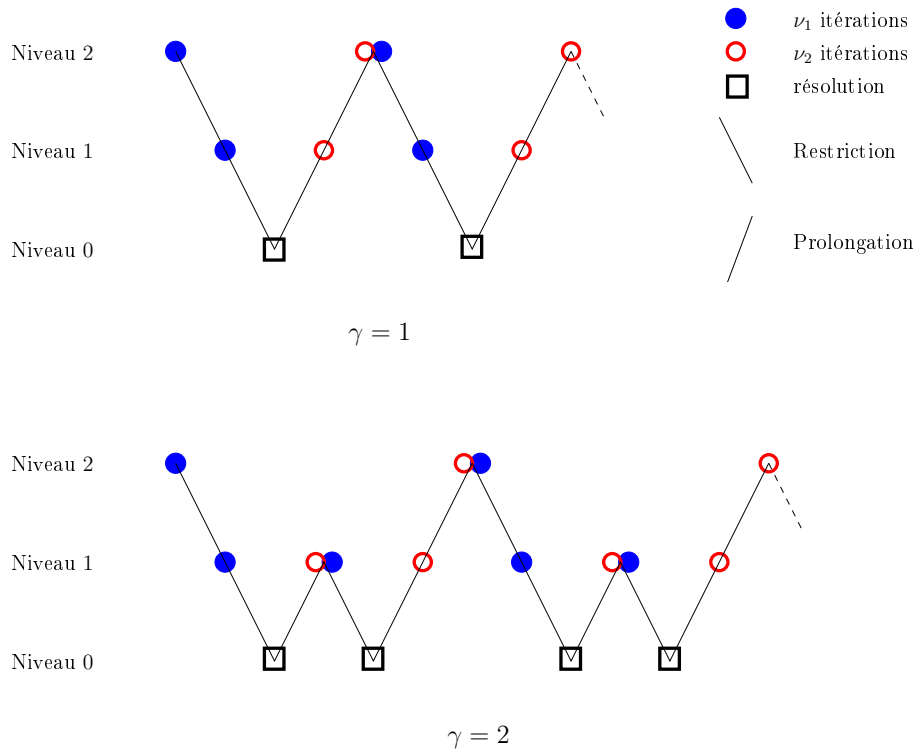


Fig. 2.5: deux V-cycles et deux W-cycles

2.4.2 Les opérateurs de changement d'échelle

Les modèles mécaniques et les modèles physiques en général sont élaborés afin de correspondre à des niveaux d'échelle particuliers. Ainsi, suivant les phénomènes que l'ont veut prendre en compte, on choisira une modélisation adaptée. Il est souvent indispensable, lorsque plusieurs d'entre eux sont mis en jeu, de définir des techniques de changement d'échelle. L'introduction de la notion de volume élémentaire représentatif (VER) [LEM 04] par exemple permet d'élaborer des techniques d'homogénéisation qui sont en quelque sorte des techniques de changement d'échelle. En mécanique des structures, c'est également le cas lorsque l'on passe du modèle tridimensionnel d'un bareau élancé à un modèle poutre au sens de la résistance des matériaux.

Au delà de leur application aux modèles mécaniques eux-mêmes, ces opérations de changement d'échelle peuvent être utilisées dans le cadre de la résolution numérique de problèmes discrétisés. C'est bien entendu dans ce cadre que rentrent les techniques multigrilles où deux opérateurs intergrilles sont définis :

- l'opérateur de prolongation P qui transfère des quantités cinématiques (déplacements ou corrections de déplacement) d'une grille grossière vers une grille fine.
- l'opérateur de restriction R qui transfère des quantités duales (forces nodales

ou résidus) d'une grille fine vers une grille grossière.
Considérons deux couples déplacements/efforts intérieurs discrétisés sur les maillages $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{M}_f$:

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{U}_g, \mathbf{F}_g) & \in & \mathcal{U}_g \times \mathcal{S}_g \\ (\mathbf{U}_f, \mathbf{F}_f) & \in & \mathcal{U}_f \times \mathcal{S}_f \end{array} \tag{2.13}$$

où $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{S}_i$ sont respectivement les espaces fonctionnels éléments finis de déplacement et de forces internes associés aux maillages $\mathcal{M}_i$. Les opérateurs intergrilles sont définis par :

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{P}\mathbf{U}_g \tag{2.14}$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}\mathbf{F}_f \tag{2.15}$$

Le diagramme de la figure 2.6 illustre le rôle de ces deux opérateurs dans les changements d'échelle pour un problème linéaire où les lois de comportement permettent le passage des quantités duales aux quantités primales et inversement.

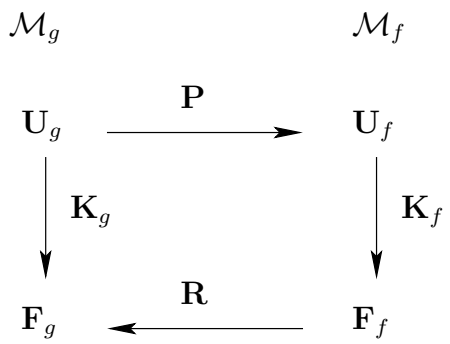


Fig. 2.6: Opérateurs intergrille

Comme pour les techniques d'homogénéisation, les opérateurs intergrilles sont soumis à des conditions de conservation. Ils doivent laisser invariant le travail des efforts intérieurs :

$$(\mathbf{U}_g, \mathbf{F}_g) = (\mathbf{U}_f, \mathbf{F}_f) \quad \text{avec} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}^T\mathbf{B} \tag{2.16}$$

on en déduit la relation suivante entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{R}$:

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{U}_g, \mathbf{F}_g) & = & (\mathbf{U}_f, \mathbf{F}_f) & \forall \mathbf{U}_g \in \mathcal{U}_g, \forall \mathbf{F}_f \in \mathcal{S}_f \\ \mathbf{U}_g^T\mathbf{F}_g & = & \mathbf{U}_f^T\mathbf{F}_f & \forall \mathbf{U}_g \in \mathcal{U}_g, \forall \mathbf{F}_f \in \mathcal{S}_f \\ \mathbf{U}_g^T\mathbf{R}\mathbf{F}_f & = & \mathbf{U}_g^T\mathbf{P}^T\mathbf{F}_f & \forall \mathbf{U}_g \in \mathcal{U}_g, \forall \mathbf{F}_f \in \mathcal{S}_f \\ & \Downarrow & & \\ \mathbf{R} & = & \mathbf{P}^T & \end{array} \tag{2.17}$$

Construction de l'opérateur de prolongation

Dans toute cette étude, les maillages utilisés sont imbriqués. Dans le cadre des éléments finis, ceci implique que $\mathcal{U}_g$, l'espace d'approximation éléments finis associé au maillage grossier est inclus dans $\mathcal{U}_f$ l'espace d'approximation associé au maillage fin :

$$\mathcal{U}_g \subset \mathcal{U}_f \tag{2.18}$$

Comme illustré sur la figure 2.7, il est donc possible de préserver un champ continu $u_g \in \mathcal{U}_g$ lors de son tansfert vers $\mathcal{M}_f$:

$$u^f(\underline{x}) = u^g(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{2.19}$$

L'approximation par éléments finis est interpolante, ce qui signifie que la valeur en un noeud n de coordonnées x_n d'un champ continu discrétisé u est égal au degré de liberté de ce noeud u_n :

$$u(\underline{x}_n) = u_n \tag{2.20}$$

Pour construire l'opérateur de prolongation, il suffit donc d'écrire que :

$$u_n^f = u^g(\underline{x}_n) \tag{2.21}$$

$$u_n^f = \mathbf{U}_g^T \mathbf{N}_g(\underline{x}_n) \tag{2.22}$$

où $\mathbf{N}_g(\underline{x})$ est le vecteur des fonctions de forme du maillage grossier. Appliquée à tous les noeuds de $\mathcal{M}_f$, cette relation définit tous les degrés de liberté du problème fin en fonction de ceux du problème grossier. La construction de $\mathbf{P}$ ne nécessite donc que les valeurs des fonctions de forme du maillage grossier aux coordonnés naturelles des noeuds de $\mathcal{M}_f$. Les fonctions de forme étant définies sur un support très restreint, le calcul de l'expression (2.22) est réalisé très rapidement au niveau élémentaire. De plus, l'opérateur ainsi construit peut être stocké sous la forme d'une matrice rectangulaire creuse.

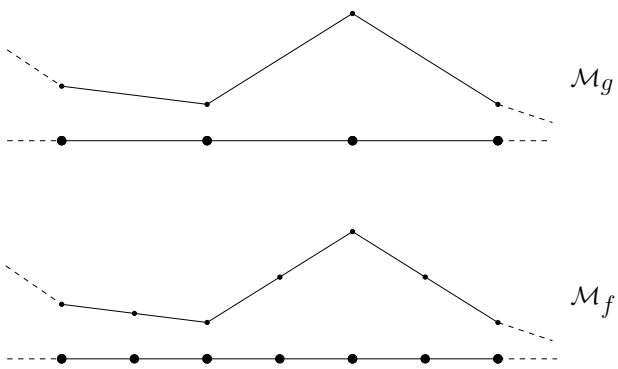
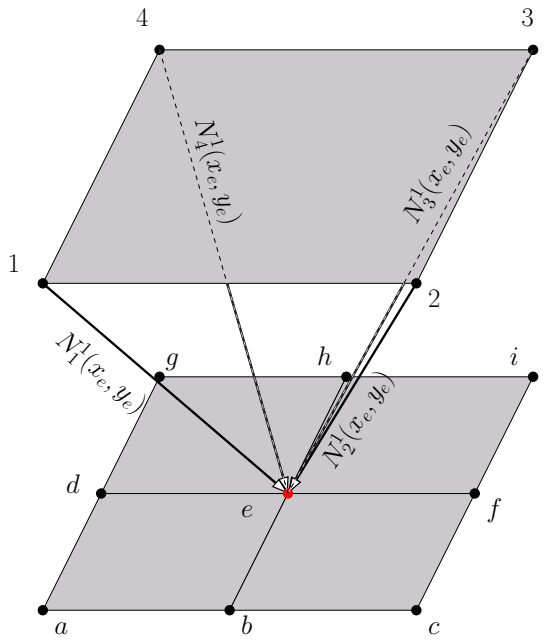


Fig. 2.7: Champs de déplacement sur deux maillages imbriqués avec des fonctions de forme linéaires

L'opération de prolongation est illustrée sur la figure 2.8 représentant deux maillages bidimensionnels imbriqués. On y voit que cette opération peut être réalisée au niveau élémentaire. Dans le cas où la propriété (2.18) n'est pas vérifiée, d'autres techniques existent comme la projection de mortar [DUR 06] qui sera utilisée dans la section 3.1.2 du chapitre 3.



$$u_a = u_1$$

$$u_b = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$$

$$u_e = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_4$$

Fig. 2.8: Construction de l'opérateur de prolongation.

2.5 Techniques multigrilles localisées

L'algorithme décrit dans la section précédente utilise des maillages définis sur l'ensemble de la structure (voir figure 2.4). Les trois grilles $a1$, $a2$ et $a3$ de la figure 2.9 en sont un exemple pour une structure présentant des concentrations de contrainte. Le maillage $a3$ n'est pas optimisé et conduit à un problème trop coûteux. Certes les multigrilles appportent un gain très important en terme de temps cpu, mais une économie substantielle de mémoire pourrait être réalisée en ne raffinant que localement la discrétisation près de la région singulière. Nous pouvons alors envisager d'utiliser les maillages $b1$, $b2$ et $b3$, toujours au sein de l'algorithme CS. L'inconvénient de cette approche réside dans la redondance liée à l'utilisation de trois discrétisations identiques dans les zones non raffinées. De plus, la génération

de ces maillages est plus complexe que celle des trois grilles $c1$, $c2$ et $c3$ très simplement définies comme des sous-parties raffinées et localisées du maillage le plus grossier. Cette dernière approche est effectivement plus satisfaisante, mais le *correction scheme* ne peut pas manipuler ce type de maillage. Dans cette section, nous allons décrire un algorithme multigrille localisé (MG-L) qui autorise l'utilisation d'une telle discrétisation. Il sera introduit à l'aide d'une formulation variationnelle en y incorporant une décomposition du déplacement en termes de hautes et basses fréquences. Cette approche, déjà utilisée par Gravouil dans le cadre d'algorithmes de décomposition de domaines [GRA 00, GRA 01] permet de décrire correctement les conditions à respecter sur les interfaces artificielles générées par la localisation. Elle permet aussi de déterminer précisément la forme du problème grossier, plus complexe que dans le cas du *correction scheme*. Notons que bien que décrit de manière classique dans la section précédente, le schéma CS peut également être dérivé d'une formulation variationnelle.

2.5.1 Définition du problème

Notations

Le maillage de référence du problème discrétisé est représenté sur la figure 2.10. Il comporte une zone discrétisée grossièrement Ω_A et une zone discrétisée finement Ω_B. Il est de plus séparé en deux nouveaux maillages :

- un maillage grossier noté $\overline{\mathcal{M}}$ couvrant l'ensemble du domaine $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$
- un maillage fin localisé noté $\mathcal{M}_B$ restreint à Ω_B

Le maillage grossier est lui-même coupé en deux parties, on distingue $\overline{\mathcal{M}}_A$ et $\overline{\mathcal{M}}_B$ définis sur Ω_A et Ω_B respectivement. L'interface commune entre ces deux maillages est notée $\overline{\Gamma}$ et est définie par : $\overline{\Gamma} = \overline{\mathcal{M}}_A \cap \overline{\mathcal{M}}_B$. La zone correspondante à $\overline{\Gamma}$ sur $\mathcal{M}_B$ est appelée Γ. Dans cette section, les quantités $\mathbf{X}$ seront notées $\overline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{X}}^A$, $\overline{\mathbf{X}}^B$ ou $\mathbf{X}^B$ suivant qu'elles sont définies sur les espaces associés à $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}}_A$, $\overline{\mathcal{M}}_B$ ou $\mathcal{M}_B$.

Les inconnues du problème sont $\overline{\mathbf{U}}^A$ et $\mathbf{U}^B$, les vecteurs des déplacements nodaux relatifs à $\overline{\mathcal{M}}_A$ et $\mathcal{M}_B$ respectivement. On décompose $\mathbf{U}^B$ en une partie "haute fréquence" $\mathbf{U}^B_{HF}$ et une partie "basse fréquence" U^B_{BF} telles que :

$$\mathbf{U}^B = \mathbf{U}^B_{HF} + \mathbf{U}^B_{BF} \tag{2.23}$$

Nous verrons plus loin que la distinction entre "haute fréquence" et "basse fréquence" est naturellement établie par l'algorithme. Faisons l'hypothèse pour l'instant que la partie basse fréquence puisse être représentée sur l'espace d'approximation de $\overline{\mathcal{M}}_B$. En introduisant l'opérateur de prolongation, cela se traduit par :

$$\mathbf{U}^B_{BF} = P\overline{\mathbf{U}}^B \tag{2.24}$$

où $\overline{\mathbf{U}}^B$ est le vecteur de déplacements nodaux relatif à $\overline{\mathcal{M}}_B$. La relation (2.23) se réécrit alors :

$$\mathbf{U}^B = \mathbf{U}^B_{HF} + P\overline{\mathbf{U}}^B \tag{2.25}$$

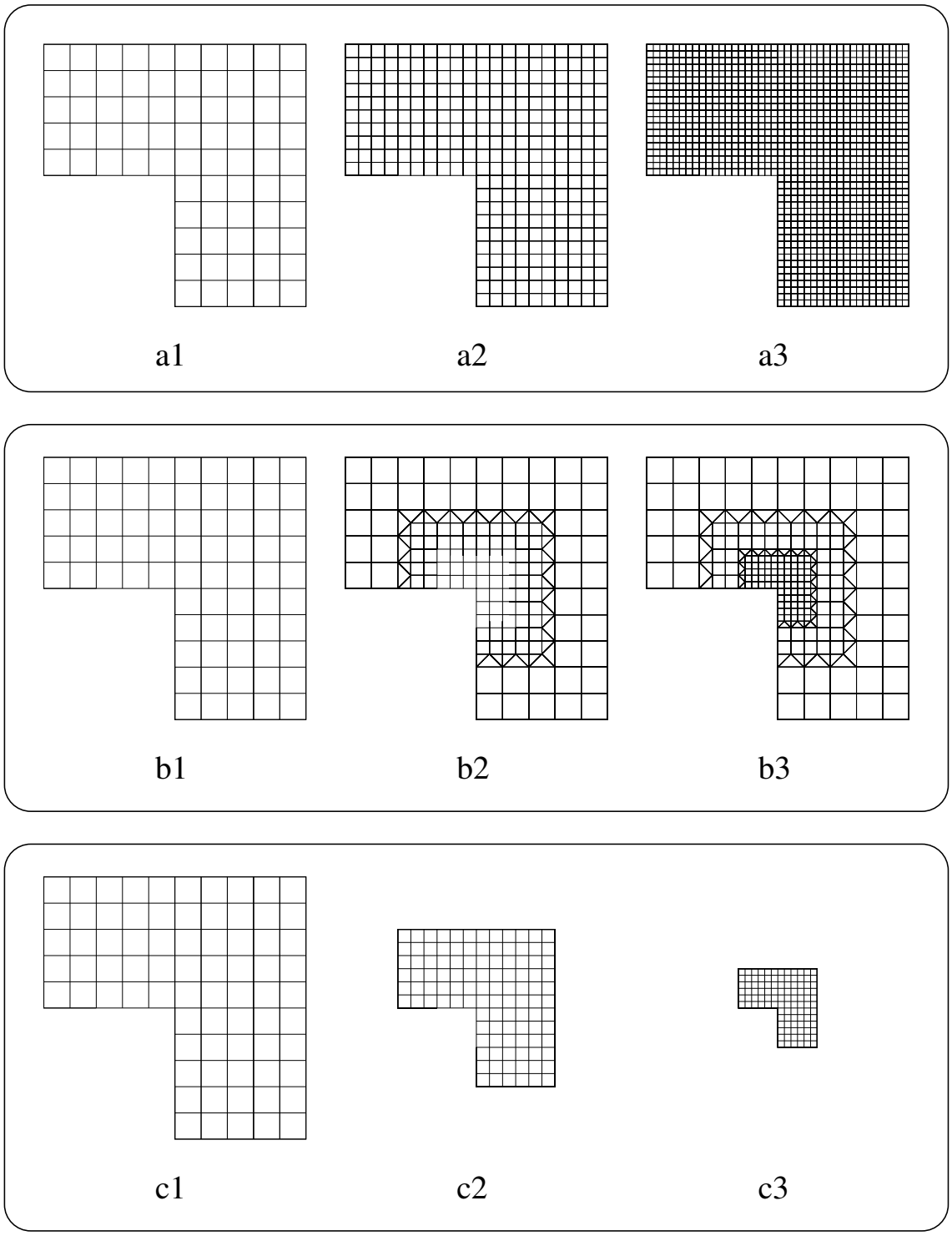


Fig. 2.9: Les différents maillages envisagés

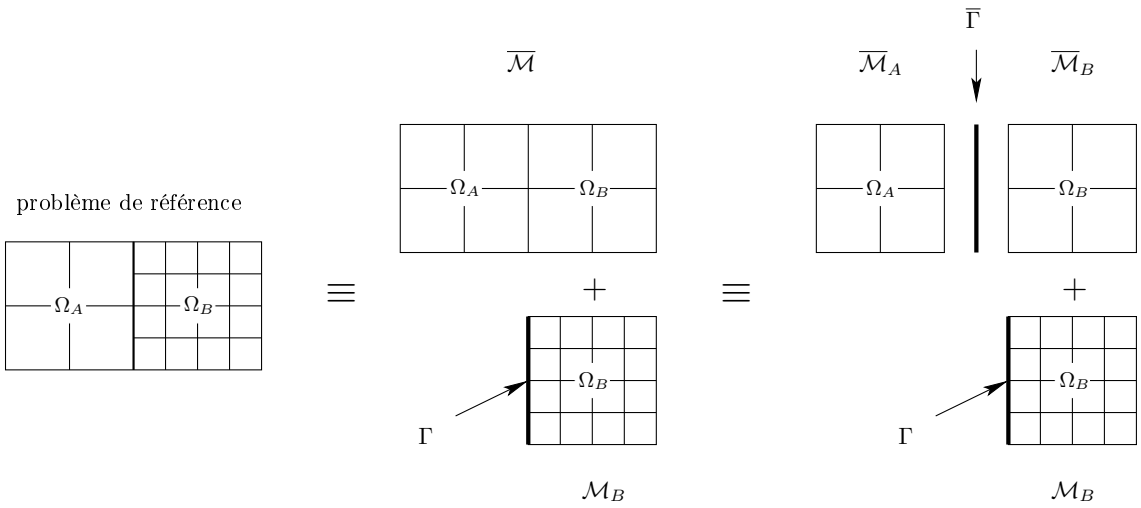


Fig. 2.10: Problème de référence.

On introduit également les matrices de rigidité et les vecteurs de forces extérieures :
- $\overline{\mathbf{K}}^A$ et $\overline{\mathbf{F}}^A_{\text{ext}}$ sont relatifs à $\overline{\mathcal{M}}_A$.
- $\overline{\mathbf{K}}^B$ et $\overline{\mathbf{F}}^B_{\text{ext}}$ sont relatifs à $\overline{\mathcal{M}}_B$.
- $\mathbf{K}^B$ et $\mathbf{F}^B_{\text{ext}}$ sont relatifs à $\mathcal{M}_B$.

On peut désormais expliciter la relation qui existe entre $\overline{\mathbf{K}}^B$, $\mathbf{K}^B$ et $\mathbf{P}$ (voir [PAR 90b, KAC 93]). Il s'agit de réécrire l'équivalence du travail des forces intérieures exprimée par la relation (2.16) en introduisant les matrices de rigidité :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{U}}^{B^T}\overline{\mathbf{F}}_{int} &= \mathbf{U}^B_{BF}{}^T\mathbf{F}_{int} \qquad \forall\overline{\mathbf{U}}^B \in \overline{\mathcal{U}} \\
\overline{\mathbf{U}}^{B^T}\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^B &= \mathbf{U}^B_{BF}{}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B_{BF} \qquad \forall\overline{\mathbf{U}}^B \in \overline{\mathcal{U}} \\
\overline{\mathbf{U}}^{B^T}\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^B &= \overline{\mathbf{U}}^{B^T}\mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^B \qquad \forall\overline{\mathbf{U}}^B \in \overline{\mathcal{U}} \\
&\Downarrow \\
\overline{\mathbf{K}}^B &= \mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{P}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Compatibilité des déplacements

Une relation de compatibilité doit être énoncée pour relier $\overline{\mathbf{U}}^A$ et $\mathbf{U}^B$ sur l'interface Γ. On peut les traduire par les contraintes suivantes :

$$\mathbf{L}^B\mathbf{U}^B_{HF} = 0 \tag{2.27}$$

$$\overline{\mathbf{L}}^B\overline{\mathbf{U}}^B + \overline{\mathbf{L}}^A\overline{\mathbf{U}}^A = 0 \tag{2.28}$$

où $\mathbf{L}^B$, $\overline{\mathbf{L}}^B$ and $\overline{\mathbf{L}}^A$ sont trois opérateurs de projection qui restreignent $\mathbf{U}^B$ sur Γ, et $\overline{\mathbf{U}}^B$ et $\overline{\mathbf{U}}^A$ sur $\overline{\Gamma}$ respectivement. L'équation (2.28) exprime la compatibilité des

déplacements de $\overline{\mathcal{M}}_A$ et $\overline{\mathcal{M}}_B$ sur $\overline{\Gamma}$. Sur Γ, le déplacement ne peut pas être associé à des hautes fréquences à cause de la connectivité de Ω_A et Ω_B sur Γ. L'équation (2.27) exprime donc que la contribution haute fréquence de $\mathbf{U}^B$ est nulle sur Γ. Bien entendu, la qualité de la solution obtenue nécessite une bonne identification de la zone raffinée afin que le champ de déplacement sur sa frontière soit effectivement associé à des basses fréquences. Cette analyse n'est pas différente de celle qu'il faut tenir de manière classique en éléments finis [CAV 05]. Les contraintes (2.27) et (2.28) sont associées à des multiplicateurs de Lagrange $\overline{\mathbf{\Lambda}}$ et $\mathbf{\Lambda}$ qui représentent les forces de liaison de telle sorte que $\overline{\mathbf{L}}^{A^T}\overline{\mathbf{\Lambda}}$ soit du même signe que $\overline{\mathbf{F}}^A_{\text{ext}}$ d'une part et que $\overline{\mathbf{L}}^{B^T}\overline{\mathbf{\Lambda}}$ et $\mathbf{L}^{B^T}\mathbf{\Lambda}$ soient du même signe que $\overline{\mathbf{F}}^B_{\text{ext}}$ et $\mathbf{F}^B_{\text{ext}}$ d'autre part.

2.5.2 Formulation variationnelle multiéchelle

À partir des définitions introduites plus haut, nous pouvons maintenant écrire la forme discrétisée du principe des travaux virtuels pour le problème de référence. Sur le domaine Ω, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{U}}^{A*T}\left(\overline{\mathbf{K}}^A\overline{\mathbf{U}}^A - \overline{\mathbf{F}}^A_{ext} - \overline{\mathbf{L}}^{A^T}\overline{\mathbf{\Lambda}}\right) + \mathbf{U}^{B*T}\left(\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B - \mathbf{F}^B_{ext} - \mathbf{L}^{B^T}\mathbf{\Lambda}\right) + \\
&\qquad \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(-\overline{\mathbf{L}}^A\overline{\mathbf{U}}^A - \overline{\mathbf{L}}^B\overline{\mathbf{U}}^B) + \mathbf{\Lambda}^*(-\mathbf{L}^B\mathbf{U}^B_{HF}) = 0 \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\overline{\mathbf{U}}^{A*} \in \overline{\mathcal{U}}^A_0 \\ \forall\mathbf{U}^{B*} \in \mathcal{U}^B_0 \\ \forall\overline{\mathbf{\Lambda}}^* \in \overline{\mathcal{L}}_0 \\ \forall\mathbf{\Lambda}^* \in \mathcal{L}_0 \end{array}\right. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

où $\overline{\mathcal{U}}^A_0$, $\mathcal{U}^B_0$, $\overline{\mathcal{L}}_0$ et $\mathcal{L}_0$ sont les espaces fonctionnels associés à $\overline{\mathcal{M}}_A$, $\mathcal{M}_B$, $\overline{\Gamma}$ et Γ respectivement et cinématiquement (ou statiquement) admissibles à 0. On en déduit un ensemble de quatre équations independantes. L'une d'entre elles est obtenue en choisissant $\mathbf{U}^{B*}$ à $\mathbf{1}$ et $\overline{\mathbf{U}}^{A*}$, $\overline{\mathbf{\Lambda}}^*$ et $\mathbf{\Lambda}^*$ à $\mathbf{0}$. En y introduisant la relation de découplage HF/BF par l'intermédiaire de la relation (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{U}}^{B*}(\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^B + \mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B_{HF} - \overline{\mathbf{F}}^B_{ext} - \overline{\mathbf{L}}^{B^T}\overline{\mathbf{\Lambda}}) + \\
&\qquad \mathbf{U}^{B*}_{HF}(\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B_{HF} + \mathbf{K}^B\mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^B - \mathbf{F}^B_{ext} - \mathbf{L}^{B^T}\mathbf{\Lambda}) = 0 \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\overline{\mathbf{U}}^{B*} \in \overline{\mathcal{U}}^B_0 \\ \forall\mathbf{U}^{B*}_{HF} \in \mathcal{U}^B_{HF0} \end{array}\right. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Cette relation conduit à deux nouvelles équations. Pour résumer, nous avons le système de cinq équations suivant :

$$\overline{\mathbf{K}}^A\overline{\mathbf{U}}^A - \overline{\mathbf{L}}^{A^T}\overline{\mathbf{\Lambda}} = \overline{\mathbf{F}}^A_{ext} \tag{2.31a}$$

$$\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^B + \mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B_{HF} - \overline{\mathbf{L}}^{B^T}\overline{\mathbf{\Lambda}} = \overline{\mathbf{F}}^B_{ext} \tag{2.31b}$$

$$-\overline{\mathbf{L}}^B\overline{\mathbf{U}}^B - \overline{\mathbf{L}}^A\overline{\mathbf{U}}^A = 0 \tag{2.31c}$$

$$\mathbf{K}^B\mathbf{U}^B_{HF} + \mathbf{K}^B\mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^B - \mathbf{L}^{B^T}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}^B_{ext} \tag{2.31d}$$

$$-\mathbf{L}^B\mathbf{U}^B_{HF} = 0 \tag{2.31e}$$

Des résidus sont associés à chacunes d'entre elles. Avec la perspective d'introduire un processus itératif pour les résoudre (les multigrilles en l'occurence), on les développe en série de Taylor à l'ordre 1 à l'itération $k+1$ en fonction de leur valeur à l'itération k :

$$\overline{\mathbf{R}}^{A^{k+1}} = \overline{\mathbf{R}}^{A^k} - \overline{\mathbf{K}}^A\Delta\overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}} + \overline{\mathbf{L}}^{A^T}\Delta\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1} \tag{2.32a}$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{B^{k+1}} = \overline{\mathbf{R}}^{B^k} - \overline{\mathbf{K}}^B\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} - \mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\Delta\mathbf{U}^B_{HF}{}^{k+1} + \overline{\mathbf{L}}^{B^T}\Delta\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1} \tag{2.32b}$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{k+1}_{\mathbf{\Lambda}} = \overline{\mathbf{R}}^k_{\mathbf{\Lambda}} + \overline{\mathbf{L}}^B\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} + \overline{\mathbf{L}}^A\Delta\overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}} \tag{2.32c}$$

$$\mathbf{R}^{B^{k+1}} = \mathbf{R}^{B^k} - \mathbf{K}^B\Delta\mathbf{U}^B_{HF}{}^{k+1} - \mathbf{K}^B\mathbf{P}\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} + \mathbf{L}^{B^T}\Delta\mathbf{\Lambda}^{k+1} \tag{2.32d}$$

$$\mathbf{R}^{k+1}_{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{R}^k_{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{L}^B\Delta\mathbf{U}^B_{HF}{}^{k+1} \tag{2.32e}$$

où la notation $\Delta\mathbf{X}^{k+1}$ correspond à $\Delta\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$. La résolution du système initial correspond à l'annulation de ces résidus. Cependant, tel qu'il est écrit, il n'y a encore aucun intérêt particulier à résoudre ce système complexe où les quantités hautes fréquences et basses fréquences sont couplées. De plus, on peut noter qu'il n'y a pas de solution unique. Dans la mesure où aucune spécification sur la définition des "hautes fréquences" et des "basses fréquences" n'a été fournie, il y a une infinité de couples $(\mathbf{U}^B_{HF}, \overline{\mathbf{U}}^B)$ solutions. Cette incertitude est levée en introduisant le principe de base des multigrilles : la restriction sur la grille la plus grossière de la correction "haute fréquence" est négligeable par rapport aux autres termes. Par conséquent, le terme $\Delta\mathbf{U}^B_{HF}{}^{k+1}$ n'est pris en compte que sur la grille fine et est négligé dans l'équation (2.32b) qui se réécrit :

$$\overline{\mathbf{R}}^{B^{k+1}} = \overline{\mathbf{R}}^{B^k} - \overline{\mathbf{K}}^B\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} + \overline{\mathbf{L}}^{B^T}\Delta\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1} \tag{2.33}$$

Avec cette modification, le système d'équations (2.32a), (2.33) et (2.32c) est indépendant et ne fait intervenir que des quantités définies sur le niveau grossier, il définit le "problème grossier". Ce problème est résolu en premier de telle sorte que les quantités définies sur le maillage grossier ne soient plus des inconnues du problème fin défini par le système (2.32d) et (2.32e). Ce dernier est résolu dans un second

temps. Une seule étape de résolution successive des problèmes grossier et fin ne suffit pas à calculer la solution exacte du problème à cause de l'approximation faite en (2.33). De plus, le problème fin n'a pas besoin d'être résolu de manière exacte et seul un petit nombre d'itérations sont nécessaires pour capter les composantes basses fréquences. C'est pourquoi un certain nombre de cycles de résolutions (cycles multigrille) "problème grossier / problème fin" sont nécessaires jusqu'à convergence.

2.5.3 Un problème fin local et un problème grossier global

La résolution des problèmes grossier et fin définis plus haut est suffisante à la définition de l'algorithme. Nous voulons cependant les réécrire sous une forme plus conventionnelle et plus proche du formalisme habituellement rencontré en multigrilles. Cela nécessite de condenser les termes de correction $\Delta\mathbf{X}^{k+1}$ en utilisant la relation $\Delta\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^{k}$. Les inconnues des deux problèmes seront donc les vecteurs déplacement complets, ce qui se rapproche de la variante *full approximation scheme* (FAS) utilisée pour résoudre des problèmes non-linéaires (voir chapitre 6). Par ailleurs, le problème grossier sera défini en un seul bloc sur le maillage $\mathcal{M}$, ce qui permettera de s'affranchir du formalisme particulier des multiplicateurs de Lagrange pour traiter l'interface $\overline{\Gamma}$.

problème grossier

Le problème grossier consiste à annuler les résidus à l'étape $k+1$ dans les équations (2.32a), (2.33) et (2.32c). L'expression (2.32a) peut donc se réécrire :

$$\overline{\mathbf{K}}^{A} \underbrace{\left(\overline{\mathbf{U}}^{A^k} + \Delta\overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}}\right)}_{\overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}}} - \overline{\mathbf{L}}^{A^T} \underbrace{\left(\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k} + \Delta\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1}\right)}_{\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1}} = \overline{\mathbf{F}}^{A}_{ext} \tag{2.34}$$

En ajoutant $\overline{\mathbf{K}}^{B}\overline{\mathbf{U}}^{B^k}$ dans les deux membres de (2.33), on obtient :

$$\overline{\mathbf{K}}^{B} \underbrace{\left(\overline{\mathbf{U}}^{B^k} + \Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}\right)}_{\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}} - \overline{\mathbf{L}}^{B^T} \underbrace{\left(\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k} + \Delta\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1}\right)}_{\overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1}} = \overline{\mathbf{F}}^{B}_{ext} \underbrace{-\overline{\mathbf{K}}^{B}\overline{\mathbf{U}}^{B^k} - P^T\mathbf{K}^{B}\mathbf{U}^{B}_{HF}{}^{k}}_{-\mathbf{P}^T\mathbf{K}^{B}\mathbf{U}^{B^k}} + \overline{\mathbf{K}}^{B}\overline{\mathbf{U}}^{B^k} \tag{2.35}$$

Remarquons que le résidu $\overline{\mathbf{R}}^{B^k}$ associé à (2.31b) fait intervenir $\mathbf{U}^{B}_{HF}{}^{k}$: le problème grossier, bien qu'indépendant de $\mathbf{U}^{B}_{HF}{}^{k+1}$ par hypothèse, n'est pas "aveugle" de l'influence du problème fin (seule la correction haute fréquence courante $\Delta\mathbf{U}^{B}_{HF}{}^{k+1}$ est négligée).

Pour finir, on réécrit l'équation (2.32c) :

$$\overline{\mathbf{L}}^A\overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}} + \overline{\mathbf{L}}^B\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} = 0 \tag{2.36}$$

Sous forme matricielle, le problème grossier se réécrit donc comme ceci :

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{K}}^A & \mathbf{0} & -\overline{\mathbf{L}}^{A^T} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}^B & -\overline{\mathbf{L}}^{B^T} \\ -\overline{\mathbf{L}}^A & -\overline{\mathbf{L}}^B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{U}}^{A^{k+1}} \\ \overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} \\ \overline{\mathbf{\Lambda}}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{F}}^A_{ext} \\ \overline{\mathbf{F}}^B_{ext} - \mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^k} + \overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^{B^k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

À partir de cette écriture, on identifie une formulation condensée du problème grossier définie sur $\overline{\mathcal{M}}$:

$$\overline{\mathbf{K}}^{AB}\overline{\mathbf{U}}^{k+1} = \overline{\mathbf{F}} - \left[\mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^k}\right] + \left[\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^{B^k}\right] \tag{2.37}$$

où $\overline{\mathbf{K}}^{AB}$ est la matrice de rigidité associée au maillage $\overline{\mathcal{M}}$. La notation $\left[\mathbf{X}^B\right]$ représente un vecteur $\overline{\mathbf{X}}^B$ initialement défini sur l'espace de $\overline{\mathcal{M}}^B$ et que l'on étend à la dimension de l'espace de $\overline{\mathcal{M}}$ en affectant la valeur 0 aux quantités relatives aux noeuds appartenant uniquement à $\overline{\mathcal{M}^A}$.

problème fin

Comme précédemment, les équations (2.32d) et (2.32e) peuvent aussi se réécrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^B & -\mathbf{L}^{B^T} \\ -\mathbf{L}^B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{B^{k+1}} \\ \mathbf{\Lambda}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^B_{ext} \\ -\mathbf{L}^B\mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^{B^k} \end{pmatrix}$$

Ce problème peut également se lire comme ceci :

$$\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^{k+1}} = \mathbf{F}^B_{ext} \qquad \text{avec } \mathbf{U}^{B^{k+1}}|_\Gamma = \mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}|_\Gamma \tag{2.38}$$

Nous rappelons que $\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}$ est connu car au cours d'un cycle, le problème grossier est résolu avant le problème fin. Le déplacement courant sur le niveau grossier sert donc à définir les conditions aux limites du problème fin sur l'interface Γ. La continuité des déplacements est donc automatiquement vérifiée, même si les deux maillages ne sont pas compatibles puisque $\mathbf{P}$, l'opérateur de prolongation intervient. On peut noter que quel que soit le type de raccord, la "bonne" solution (effort, déplacement) à l'interface n'est obtenue qu'à convergence. Notons par ailleurs que la technique des multiplicateurs de Lagrange permettant d'imposer des déplacements sur Γ n'a été utilisée que dans le but d'introduire l'algorithme. Dans la pratique, l'utilisation d'un gradient conjugué comme lisseur n'est pas compatible avec cette méthode, aussi nous adoptons la technique de substitution pour gérer les conditions aux limites sur l'interface Γ.

2.5.4 Algorithme

L'algorithme multigrille localisé est maintenant synthétisé. Sa structure est légèrement différente du *correction scheme* dans la mesure où les deux phases de relaxation sont condensées en une seule ($\nu = \nu_1 + \nu_2$) et sont effectuées à la fin du cycle. Par ailleurs, l'inconnue du problème grossier n'est plus une correction à apporter au déplacement, mais le déplacement complet. Cette variante est par conséquent proche du schéma *full approximation scheme* (FAS) utilisé pour résoudre les problèmes non linéaires et qui sera décrit dans le chapitre 6.

Le tableau 2.2 présente l'algorithme à deux niveaux. Après une étape d'initialisation, le cycle multigrille commence par la résolution du problème grossier. Comme pour le *correction scheme*, si le problème grossier est trop coûteux, ou s'il est lui-même localisé, on peut le résoudre par un appel récursif. Celui-ci n'est pas indépendant de l'échelle fine car $\mathbf{U}^{B^k}$, la solution du problème fin à l'étape précédente intervient dans le second membre.

2.6 Exemple d'une poutre en flexion

Dans cette section, nous allons illustrer le fonctionnement de l'algorithme MG-L à deux niveaux à partir de l'exemple simple d'une poutre en flexion. Les propriétés de convergence et l'influence des divers paramètres seront étudiées en détail dans le chapitre suivant pour des problèmes de fissuration faisant intervenir plus de deux niveaux. Il ne s'agit ici que de mettre en avant certains aspects de l'algorithme de manière qualitative.

La poutre considérée est encastrée à une extrémité et est soumise à un effort tranchant à l'autre extrémité conformément à ce qui est représenté sur la figure 2.11. Les deux maillages utilisés dans l'algorithme y sont également représentés.

Entre deux cycles MG-L, les conditions aux limites du problème fin sur Γ évoluent. Au cycle $k = 0$, elles sont issues de la solution du problème grossier $\overline{\mathbf{K}}^{AB}\overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{F}}$. Bien évidemment, ces conditions aux limites ne correspondent pas à la solution finale convergée. Au cours du calcul, le problème grossier est modifié en fonction de la solution du problème fin par l'intermédiaire du second membre de (2.37). Celui-ci est représenté à convergence sur la figure 2.12. On y voit le second membre initial correspondant à l'effort tranchant à l'extrémité de la poutre (en rouge et à l'échelle 1) mais également les termes supplémentaires qui tiennent compte de $\mathbf{U}^B$ (en bleu et à l'échelle 10). Nous savons que plus la discrétisation est grossière, plus le modèle associé est rigide. La figure 2.13 montre l'évolution de la flèche au point A au cours des cycles multigrille. On y observe effectivement "l'assouplissement" de la poutre. Le second membre de l'equation (2.37) rend compte de phénomènes hautes fréquences que le modèle grossier ne peut pas prendre en comptee.

`Procédure MG-L à deux niveaux`

1. `initialisation :`

$$k = 0, \quad \overline{\mathbf{U}}^{B^0} = 0, \quad \mathbf{U}^{B^0} = 0$$

2. `calculer la solution du problème grossier global :`

$$\overline{\mathbf{K}}^{AB}\overline{\mathbf{U}}^{k+1} = \overline{\mathbf{F}} - \left[\mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^k}\right] + \left[\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^{B^k}\right]$$

3. `correction :`

$$\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} = \overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}} - \overline{\mathbf{U}}^{B^k}$$
$$\mathbf{U}^{B^{k+1/2}} = \mathbf{U}^{B^k} + \mathbf{P}\Delta\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}$$

4. `relaxation (problème fin local) : faire` ν `relaxations sur le problème fin en partant de l'approximation courante` $\mathbf{U}^{B^{k+1/2}}$ `:`

$$\begin{array}{c} \mathbf{U}^{B^{k+1/2}} \\ \downarrow \\ \mathbf{K}^B\mathbf{U}^B = \mathbf{F}^B_{ext} \quad \texttt{avec} \quad \mathbf{U}^{B^{k+1}}|_\Gamma = \mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^{B^{k+1}}|_\Gamma \\ \downarrow \\ \mathbf{U}^{B^{k+1}} \end{array}$$

5. `test de convergence :`

$$\begin{cases} \texttt{si } \frac{||\mathbf{U}^{B^{k+1}} - \mathbf{U}^{B^k}||_2}{||\mathbf{U}^{B^{k+1}}||_2} < \varepsilon & : \texttt{fin du calcul} \\ \texttt{sinon} & : k \leftarrow k+1 \texttt{ et retourner à 2} \end{cases}$$

Tab. 2.2: Algorithme multigrille linéaire localisé à deux niveaux.

C'est également pour cette raison que le critère d'arrêt de l'algorithme est formulé en déplacement et non pas en résidu (voir l'algorithme du tableau 2.2). Contrairement au schéma CS, si on choisit de relaxer le problème fin jusqu'à convergence, le résidu est certes nul, mais la solution obtenue n'est pas nécessairement la bonne si les conditions aux limites sur Γ n'ont pas elles-même convergé. Un critère formulé en correction de déplacement assure donc l'arrêt du calcul quand l'état sur la grille fine et les conditions aux limites sont stables.

La figure 2.14 illustre la contribution des relaxations sur l'ensemble du processus. Le déplacement total ($\overline{\mathbf{U}}^A$ et $\mathbf{U}^B$) comportant tout le spectre de

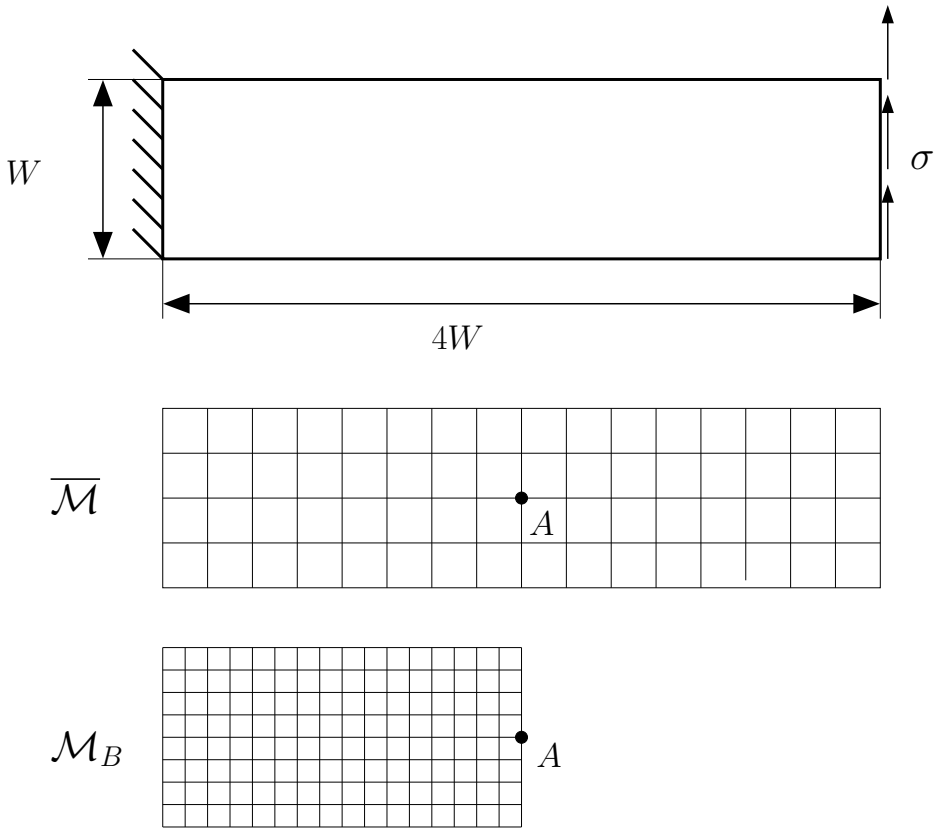


Fig. 2.11: Poutre en flexion et discrétisations multigrilles
Poutre encastrée en flexion ($W = 2m$ et $\sigma = 100MPa$) et maillages fin localisé ($\mathcal{M}_B$) et grossier ($\overline{\mathcal{M}}$)

fréquences y est représenté à l'échelle 1. Les composantes hautes fréquences $\mathbf{U}_{HF}^B$ calculées uniquement sur $\mathcal{M}_B$ ont été isolées et sont représentées à l'échelle 20. Les propriétés de convergence seront étudiées plus en détail dans le chapitre suivant.

Les méthodes multiéchelles sont souvent hiérarchisées en termes de "recouvrement de domaine". On distingue les méthodes sans recouvrement comme les méthodes de décomposition de domaines de Schur où l'intersection des sous-domaines de dimension n a une dimension $n-1$. Il existe également des méthodes avec recouvrement partiel, c'est le cas de la méthode Arlequin par exemple où les différents modèles coexistent sur un domaine non vide appelé zone de jonction. Dans le cas de la technique MG-L, le problème fin défini sur Ω_B est influencé par la solution grossière uniquement par l'intermédiaire des conditions aux limites sur l'interface Γ, mais ces conditions proviennent du problème grossier lui-même influencé par l'état du système sur la totalité de Ω_B (voir figure 2.12). C'est en ce sens que la technique multigrille localisée présentée ici rentre dans la catégorie des techniques à

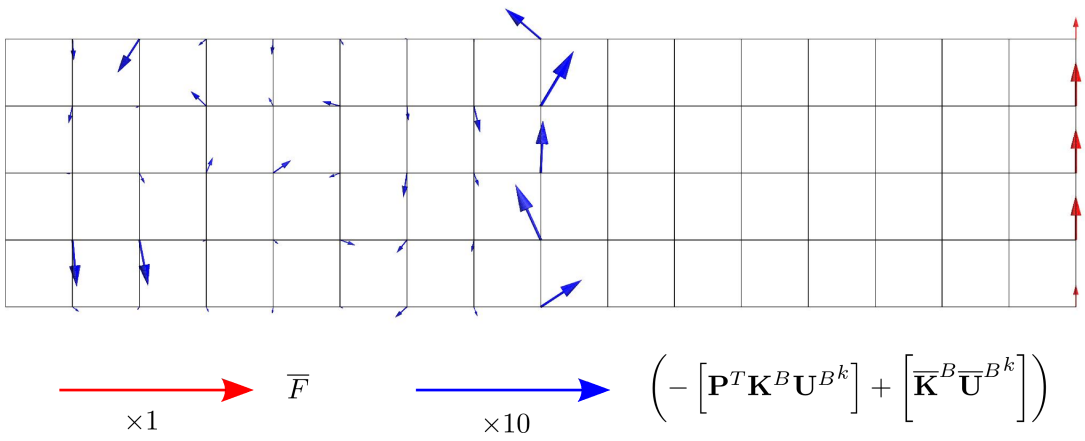


Fig. 2.12: Visualisation du second membre du problème grossier (2.37). Les forces extérieures $\overline{F}$ sont représentées en rouge à l'échelle $\times 1$ et le terme $\left(-[\mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^k}]+[\overline{\mathbf{K}}^B\overline{\mathbf{U}}^{B^k}]\right)$ est représenté en bleu à l'échelle $\times 10$

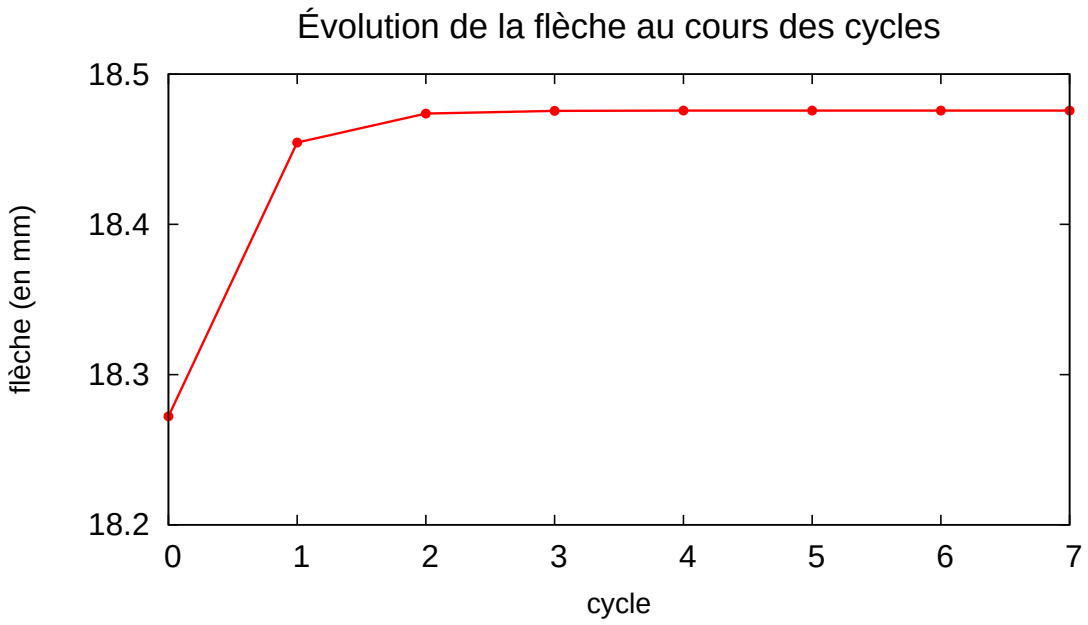


Fig. 2.13: Évolution de la flèche au point A. Les conditions aux limites sur Γ évoluent au cours du calcul

recouvrement total.

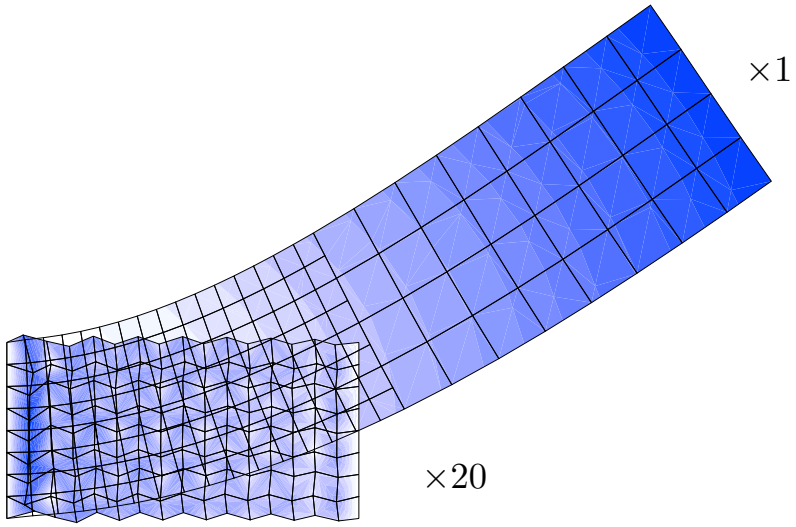


Fig. 2.14: Déplacement total $\mathbf{U}$ ($\overline{\mathbf{U}}^A$ et $\mathbf{U}^B = \mathbf{P}\overline{\mathbf{U}}^B + \mathbf{U}^B_{HF}$ à l'échelle $\times 1$) et les composantes hautes fréquences $\mathbf{U}^B_{HF}$ calculées uniquement sur la grille fine ($\times 20$).

2.7 D'autres variantes multigrilles

De nombreuses autres variantes existent. Très similaire au CS, le schéma *full multigrid* (FMG) permet de diminuer le temps de calcul. Il consiste à résoudre d'abord les problèmes grossiers et à s'en servir pour initialiser les problèmes les plus fins. Passer d'un algorithme CS à FMG se fait très simplement en modifiant l'agencement des V-cycles élémentaires entre deux niveaux, la structure d'un cycle multigrille restant inchangé [LUB 00].

De nombreux développements issus de l'application des multigrilles aux éléments finis ont eu lieu afin de définir des méthodes adaptées aux maillages non structurés. Ce type de maillage est en effet très courant et résulte souvent de la modélisation de géométries complexes. La vitesse de convergence des techniques multigrilles y est moins bien maîtrisée. L'introduction des multigrilles algébriques, par opposition aux multigrilles géométriques présentées jusqu'ici, permet de lever certaines difficultés. La nouveauté provient de la manière dont les problèmes grossiers sont générés. En multigrilles géométrique, un maillage de tous les niveaux est fourni, les maillages les plus fins sont issus du raffinement des plus grossiers. Procéder de la même manière avec des maillages non-structurés conduit à des problèmes mal conditionnés du fait de la détérioration du rapport de forme des éléments. La méthode des multigilles algébriques propose de partir de la discrétisation de référence (la plus fine) afin de générer les grilles grossières. Dans la pratique la construction de nouveaux

maillages n'est pas nécessaire et seuls les opérateurs de changement d'échelle sont générés (voir les techniques d'agrégation et des *maximum independent sets* dans [ADA 00b, ADA 02]). À partir des opérateurs intergrilles et de la matrice de rigidité du problème fin, l'opérateur linéaire du problème grossier est construit à l'aide de l'expression (2.26) :

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P} \tag{2.39}$$

Une dernière variante multigrille très répandue est le *full approximation scheme* ou FAS. Ce schéma a été introduit pour résoudre des problèmes non-linéaires et nécessite l'emploi d'un nouvel opérateur qui transfere des quantités cinématiques d'ue grille fine vers une grille grossière. Il sera décrit de manière détaillée dans le chapitre 6 consacré aux problèmes élasto-plastiques.

2.8 Conclusion

Toutes les stratégies multiéchelles ont leurs avantages et leurs inconvénients. Parmi toutes celles qui ont été évoquées dans ce chapitre, la famille des multigrilles parait être extrêmement intéressante pour atteindre les objectifs fixés, à savoir : développer une technique numérique capable de prendre en compte des détails structuraux localisés, tels des fissures, et présentant des rapports d'échelles importants sans affecter les performances globales en terme de coût de calcul. Les techniques multigrilles n'ont pas, il est vrai, été introduites comme des méthodes multiéchelles, mais comme des solveurs numériques très efficaces. Les maillages grossiers ne servent en effet qu'à définir des problèmes auxiliaires "au service" du problème de référence, mais au final, seul ce dernier a de l'intérêt pour l'utilisateur.

Ce rôle d'auxiliaire est cependant détourné dans la variante localisée. Les grilles les plus grossières ont toujours leur rôle à jouer dans le processus d'évaluation des composantes basses fréquences, mais constituent également le support de la solution sur les zones non raffinées. C'est en ce sens que la stratégie MG-L est une stratégie multiéchelle. Contrairement aux techniques multigrilles plus classiques, la grille la plus grossière est la grille de départ. Elle peut par exemple correspondre au maillage d'une structure industrielle initialement non conçu pour prendre en compte des défauts. Par la suite et en fonction des besoins, le maillage est raffiné localement plusieurs fois jusqu'à atteindre un niveau de discrétisation acceptable pour modéliser le détail. Dans la mesure où la zone de raffinement a été bien identifiée, cette opération est très simple à réaliser car il suffit de sous-découper les éléments déjà existants sans se soucier de la compatibilité avec l'échelle supérieure. Ceci présente un grand intérêt et tout particulièrement dans les modélisations tridimensionnelles où une opération de remaillage et de raffinement compatible peut être complexe et coûteuse. De plus, dans la mesure où chaque grille comporte des éléments de taille homogène, de nombreux problèmes de conditionnement sont évités.

Une critique souvent faite à l'égard des techniques multigrilles est qu'il est difficile de donner un sens physique aux grilles grossières, où dans le cas des multigrilles

localisées aux zones grossières raffinées. Ceci est vrai, mais sans importance puisque la solution retenue pour le post-traitement est celle obtenue sur la discrétisation la plus fine à un endroit donné. La solution du problème de référence de la section 2.5.1 est le couple $(\mathbf{U}^B, \overline{\mathbf{U}}^A)$ et le vecteur $\overline{\mathbf{U}}^B$ n'est pas conservé.

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons dire que les multigrilles localisées constituent un très bon cadre pour construire une stratégie multiéchelle permettant de répondre à notre problématique. La localisation permet de se focaliser sur les détails structuraux invisibles à l'échelle globale de la structure et la grande efficacité des techniques multigrilles en terme de temps de calcul est conservée. Dans le chapitre suivant, nous allons voir comment le couplage entre cette technique et la méthode des éléments finis étendus est possible.

Chapitre 3

Méthodes multigrilles et éléments finis étendus

Sommaire

3.1 Opérateurs intergrilles et enrichissements 62

3.1.1 Approche nodale 62

3.1.2 Approche variationnelle 68

3.1.3 Bilan 72

3.2 Application à l'algorithme CS 73

3.2.1 Plaque fissurée en traction 73

3.2.2 Propagation de fissure dans une plaque trouée 76

3.3 Application à l'algorithme MG-L et stratégie d'enrichissement multiéchelle 79

3.3.1 Plaque fissurée quasi-infinie 79

3.3.2 Fissure circulaire dans une barre 3D 84

3.4 Conclusion 85

Dans ce chapitre nous allons voir comment nous pouvons coupler les méthodes multigrilles et notamment l'algorithme multigrille localisé avec les éléments finis étendus. Étant une méthode élément finis à part entière, les particularités de la méthode X-FEM n'aparaissent pas dans les développements des algorithmes présentés dans le chapitre 2. Ces spécificités sont en revanche à prendre en compte dans les opérateurs intergrilles. En effet, du fait des enrichissements, un certain nombre de questions se posent : comment procéder à l'interpolation, comment gérer leur localisation, doit-on représenter la fissure à toutes les échelles ? Nous proposons donc ici des opérateurs intergrilles simples et robustes dont nous étudions les propriétés sur les algorithmes CS et MG-L. La possibilité de ne pas représenter la fissure sur certaines échelles trop grossières est ensuite envisagée et une stratégie d'enrichissement multiéchelle est proposée. Le chapitre se conclut par un certain nombre d'exemples illustrant la validité, la robustesse et les performances de l'approche proposée pour résoudre des probèmes linéaires.

Une partie du travail présentée ici a fait l'objet de publications [RAN 07d, RAN 08] et de présentations dans des congrès [RAN 07c, RAN 07a, RAN 07b, GRA 08].

3.1 Opérateurs intergrilles et enrichissements

3.1.1 Approche nodale

La section 2.4.2 du chapitre 2 décrit la construction des opérateurs intergrilles dans le cadre des éléments finis standards dans le cas où les maillages sont imbriqués. Pour construire l'opérateur de prolongation, il suffit de déterminer les valeurs des degrés de liberté du problème fin en fonction de ceux du problème grossier en écrivant qu'en chaque noeud, le déplacement nodal est égal au déplacement sur le niveau grossier. Si nous considérons un noeud n de $\mathcal{M}_f$ de coordonnées x_n, cela donne :

$$\underline{u}^f(\underline{x}_n) = \underline{u}^g(\underline{x}_n) \tag{3.1}$$

Par ailleurs, en chaque noeud le déplacement nodal est égal au vecteur des degrés de liberté du noeud $\underline{u}_n^f$ (propriété d'interpolation des éléments finis) :

$$\underline{u}_n^f = \underline{u}^f(\underline{x}_n) \tag{3.2}$$

ce qui définit directement les degrés de liberté du maillage fin en fonction de ceux du maillage grossier. De plus, comme les éléments sont imbriqués, l'espace fonctionnel d'approximation du maillage grossier $\mathcal{U}_g$ est inclu dans celui du problème fin $\mathcal{U}_f$. Ceci a été exprimé par l'expression (2.18) que nous rappelons ici :

$$\mathcal{U}_g \subset \mathcal{U}_f \tag{3.3}$$

Par conséquent, la procédure de prolongation conduit à une interpolation exacte du champ de déplacement grossier sur le niveau fin (voir la figure 2.7) :

L'introduction de fonctions d'enrichissements dans l'espace fonctionnel d'approximation modifie cette analyse pour deux raisons. D'une part, la relation (3.2) n'est plus aussi simple pour tous les noeuds car le déplacement nodal est fonction des degrés de liberté standards et enrichis suivant l'expression (1.51). Ainsi, selon que le noeud est enrichi "saut" ou "pointe", la relation (3.2) devient :

$$\text{enrichissement saut :} \quad \underline{u}^f(\underline{x}_n) = \underline{u}^f_n + \underline{a}^f_n H(\underline{x}_n) \tag{3.4}$$

$$\text{enrichissement pointe :} \quad \underline{u}^f(\underline{x}_n) = \underline{u}^f_n + \sum_{j=1}^{4} \underline{b}^f_{jn} \gamma_j(\underline{x}_n) \tag{3.5}$$

Les degrés de liberté u^f_n, a^f_n et b^f_{jn} ne peuvent plus être déterminés terme à terme à partir de (3.1). D'autre part, la relation d'inclusion des espaces d'approximation (3.3) n'est plus vérifiée partout. La figure 3.1 représente deux maillages fin et grossier superposés pour lesquels on a appliqué la règle de l'enrichissement topologique. Sur la figure 3.2, la fonction d'enrichissement γ_1 multipliée par son support sur chacune des deux discrétisations est tracée :

- sur la figure 3.2.a : $\gamma_1(\underline{x}) \times \sum_{i \in \mathcal{N}^g_{sing}} N^g_i(\underline{x})$ avec $\mathcal{N}^g_{sing} = \{2, 3, 4, 5\}$
- sur la figure 3.2.b : $\gamma_1(\underline{x}) \times \sum_{i \in \mathcal{N}^f_{sing}} N^f_i(\underline{x})$ avec $\mathcal{N}^f_{sing} = \{d, e, f, g\}$

À l'exception d'une petite zone délimitée par l'élément $defg$, sa valeur est différente sur les deux maillages. La localisation des enrichissements engendre par conséquent une différence des espaces fonctionnels d'approximation, la relation (3.3) n'est plus vérifiée partout. Notons que c'est également le cas pour un enrichissement géométrique.

Nous allons cependant chercher à écrire une relation similaire à ((3.1),(3.2)) prenant en compte les enrichissements. Pour cela définissons l'ensemble $\mathcal{F}$ comme étant l'ensemble des fonctions d'enrichissement utilisées dans le modèle. Rappelons que ces fonctions sont indépendantes de la discrétisation. Considérons à nouveau un noeud n de $\mathcal{M}_f$ de coordonnées $\underline{x}_n$. Ce noeud est enrichi avec les fonctions d'un sous-ensemble $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{F}$. En vertu du principe de partition de l'unité et quelles que soient les fonctions d'enrichissement utilisées, le déplacement nodal s'écrit :

$$\underline{u}^f(\underline{x}_n) = \underline{u}^f_n + \sum_{j \in \mathcal{F}_f} \underline{u}^f_{jn} f_j(\underline{x}_n) \qquad \forall \mathcal{F} \tag{3.6}$$

Pour construire l'opérateur de prolongation, il faut déterminer $\underline{u}^f_n$ et $\underline{u}^f_{jn}$, les degrés de liberté du noeud n, en fonction de ceux du problème grossier. On redéveloppe la relation (3.1) pour obtenir :

$$\underline{u}^g(\underline{x}_n) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N^g_i(\underline{x}_n) \left(\underline{u}^g_i + \sum_{j \in \mathcal{F}_f} \underline{u}^g_{ji} f_j(\underline{x}_n) + \sum_{j \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_f} \underline{u}^g_{ji} f_j(\underline{x}_n) \right) \quad \forall \mathcal{F} \tag{3.7}$$

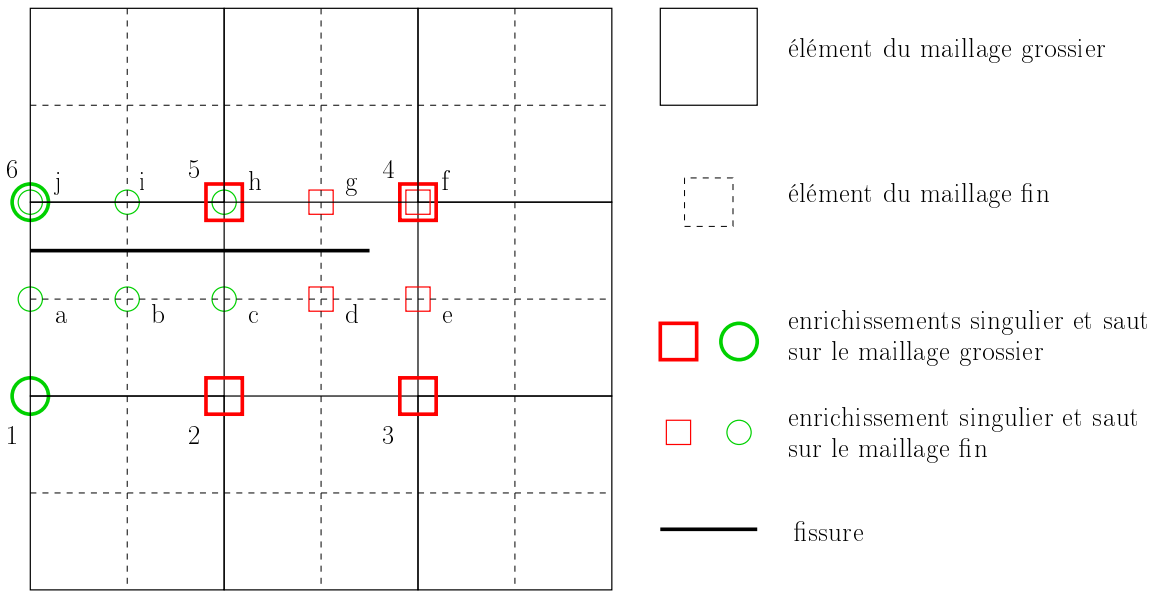


Fig. 3.1: Maillages grossier et fin superposés. Les numéros et les lettres se réfèrent aux noeuds des niveaux grossier et fin respectivement.

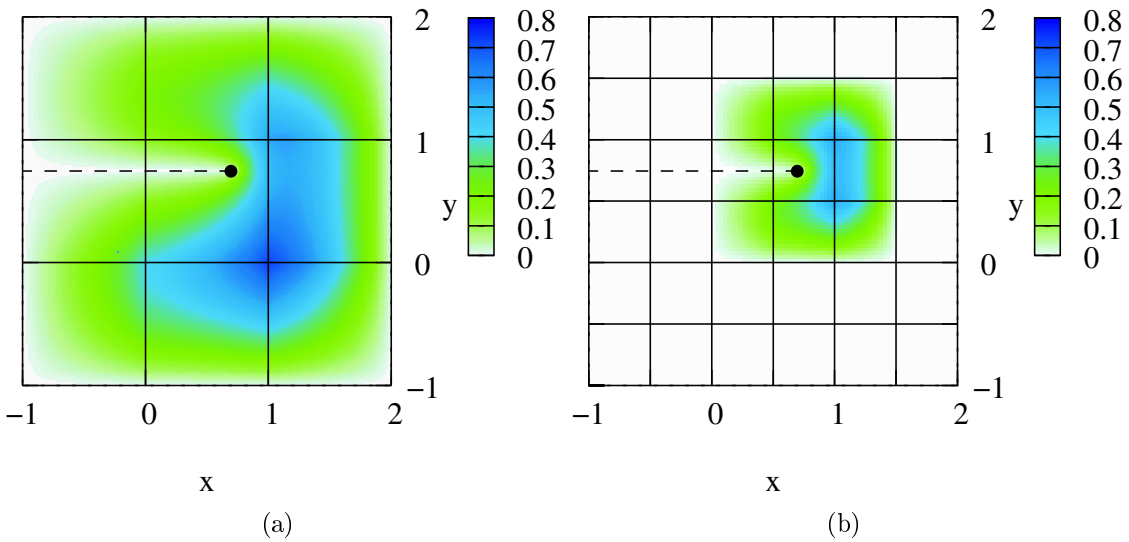


Fig. 3.2: Représentation de la même fonction d'enrichissement (γ_1) multipliée par son support pour les deux discrétisations de la figure 3.1. La fissure est représentée en pointillé.

C'est ici que se présentent deux possibilités qui se résument à la vérification ou pas

de l'expression suivante :

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} N_i^g(\underline{x}_n)\left(\sum_{j\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_f} \underline{u}_{ji}^g f_j(\underline{x}_n)\right) = 0 \tag{3.8}$$

Si la condition (3.8) est vérifiée, on dit que l'enrichissement du noeud n est compatible avec ceux du maillage grossier. Cela signifie tout simplement que les fonctions d'enrichissement intervenant dans l'expression du champ de déplacement grossier au point $\underline{x}_n$ sont les mêmes que celles qui interviennent dans l'expression du déplacement nodal du noeud n. Dans le cas contraire, les enrichissements sont dits incompatibles.

Traitement des enrichissements compatibles

Dans le cas ou la condition (3.8) est vérifiée, l'expression (3.7) peut se simplifier :

$$\begin{aligned} \underline{u}^f(\underline{x}_n) &= \underline{u}^g(\underline{x}_n) \\ \underline{u}_n^f + \sum_{j\in\mathcal{F}_f} \underline{u}_{jn}^f f_j(\underline{x}_n) &= \sum_{i\in\mathcal{N}} N_i^g(\underline{x}_n)\left(\underline{u}_i^g + \sum_{j\in\mathcal{F}_f} \underline{u}_{ji}^g f_j(\underline{x}_n)\right) \quad \forall\mathcal{F} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Il est par conséquent possible d'identifier terme à terme les degrés de liberté du maillage fin :

$$\left\{\begin{aligned} \underline{u}_n^f &= \sum_{i\in\mathcal{N}} N_i^g(\underline{x}_n)\underline{u}_i^g \\ \underline{u}_{jn}^f &= \sum_{i\in\mathcal{N}} N_i^g(\underline{x}_n)\underline{u}_{ji}^g \qquad \forall j\in\mathcal{F}_f \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

Dans le cas particulier de la figure 3.1, on peut identifier l'ensemble des noeuds de $\mathcal{M}_f$ ayant des enrichissement compatibles avec ceux du maillage grossier :

$$\mathcal{S}_{\text{compat}} = \{a, j, d, e, f, g\} \tag{3.11}$$

Pour les noeuds a et j, nous avons :

$$\mathcal{F}_f = \{H\} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_f = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\} \tag{3.13}$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.2.a, aux points $\underline{x}_a$ et $\underline{x}_j$ la condition de compatibilité (3.8) est vérifiée (valeur nulle). Pour le noeud a par exemple, l'expression (3.1) s'écrit :

$$\underline{u}_a + \underline{a}_a H(\underline{x}) = 1/2\,(\underline{u}_1 + \underline{u}_6) + 1/2\,(\underline{a}_1 + \underline{a}_6)\,H(\underline{x}) \tag{3.14}$$

Seule la fonction H intervient de part et d'autre de l'équation. La règle d'identification (3.10) conduit à :

$$\underline{u}_a = 1/2\,(\underline{u}_1 + \underline{u}_6) \tag{3.15}$$
$$\underline{a}_a = 1/2\,(\underline{a}_1 + \underline{a}_6) \tag{3.16}$$

Pour les noeuds d, e, f et g, l'analyse est la même mais avec :

$$\mathcal{F}_f = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\} \tag{3.17}$$
$$\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_f = \{H\} \tag{3.18}$$

La règle d'identification (3.10) peut se résumer ainsi : il faut interpoler séparément les différentes composantes du champ de déplacement relativement à la nature de leur enrichissement. En guise d'illustration, considérons l'exemple unidimensionnel de la figure 3.3. Il s'agit d'une discrétisation enrichie avec une fonction saut de manière à modéliser une discontinuité dans le champ de déplacement. Les enrichissements sont ici nécessairement compatibles car :

$$\mathcal{F}_f = \{H\} = \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_f = \emptyset \tag{3.19}$$

Le champ de déplacement peut être décomposé en une partie continue standard et une partie discontinue associées à l'enrichissement H qui seront interpolées séparément :

$$\underline{u}(x) = \underline{u}_{std}(x) + \underline{u}_H(x) \tag{3.20}$$

Enrichissements incompatibles

Si la condition (3.8) n'est pas vérifiée, on parle d'enrichissements incompatibles : les fonctions d'enrichissement qui interviennent dans l'expression du champ de déplacement grossier au point $\underline{x}_n$ sont alors différentes de celles qui interviennent dans l'expression du déplacement nodal du noeud n. L'expression (3.7) ne se simplifie pas et aucune identification directe des degrés de liberté n'est alors possible. Dans le contexte particulier de la méthode X-FEM, on peut distinguer trois cas dépendant de la nature de l'enrichissement du noeud du maillage fin :

- le noeud n'est pas enrichi. Il n'y a alors pas de problème car $\mathcal{F}_f = \emptyset$ et la relation (3.2) s'applique.
- le noeud est enrichi singulièrement (avec des fonctions asymptotiques). Ce noeud appartient à un élément qui contient la pointe de fissure. Dans la mesure où les maillages sont imbriqués, l'élément "père" contient donc aussi la pointe de fissure et on comprend alors que nous retombons sur le cas d'un enrichissement compatible (noeuds d, e, f et g sur la figure 3.1). Il n'y a donc pas de problème.
- le noeud est enrichi "saut". L'approche nodale conduit ici à une indétermination. Sur la figure 3.1, les noeuds concernés sont b, c, h et i.

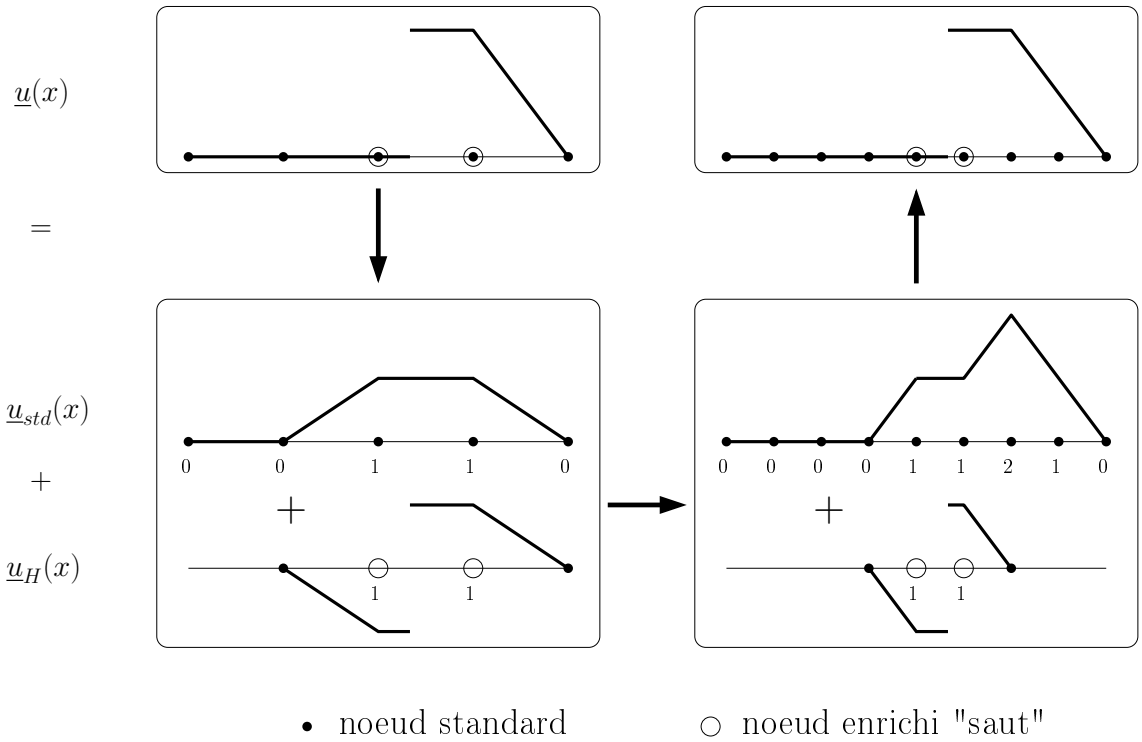


Fig. 3.3: Processus de prolongation avec des enrichissements compatibles. Seul un enrichissement saut est utilisé. Les nombres correspondent à la valeur affectée aux ddls de chaque noeud.

Pour lever l'indétermination évoquée ci-dessus, nous proposons une méthode consistant à interpoler séparément les composantes standards du déplacement et les composantes enrichies. L'équivalent des relations (3.10) s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{u}_n^f & = & \sum_{j\in\mathcal{N}} N_j^g(\underline{x}_n)\underline{u}_j^g \\ \underline{a}_n^f & = & \left(\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N}_{saut}} N_j^g(\underline{x}_n)H(\underline{x}_n)\underline{a}_j^g + \sum_{j\in\mathcal{N}_{sing}}\sum_{k=1}^{4} N_j^g(\underline{x}_n)\gamma_k(\underline{x}_n)\underline{b}_{jk}^g\right) \big/ H(\underline{x}_n) \end{array}\right. \tag{3.21}$$

La méthode proposée introduit des erreurs locales. Elles sont inévitables car les espaces fonctionnels d'approximation de la solution sont différents sur les deux maillages. Ces erreurs sont localisées sur une région restreinte autour des enrichissements singuliers. Cette localisation introduit des erreurs hautes fréquences qui seront très facilement lissées lors des phases de relaxation des algorithmes multigrilles décrits dans le chapitre 2. Nous verrons dans la section 3.2 que cet opérateur possède de très bonnes propriétés de convergence. Un organigramme synthétisant la méthode de construction de l'opérateur de prolongation est donné dans le tableau 3.1. L'opé-

rateur de restriction $\mathbf{R}$ est obtenu à partir de la formule (2.17) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T$$

3.1.2 Approche variationnelle

L'approche nodale précédente présente l'avantage d'être très facile et très rapide à mettre en œuvre. De plus, comme nous le verrons dans les sections 3.2 et 3.3, elle procure aux schémas CS et MG-L de bonnes propriétés de convergence. Son inconvénient réside dans le choix arbitraire fait pour établir les relations (3.21). Pour cette raison, nous avons considéré une formulation variationnelle pour contruire l'opérateur de prolongation.

Pour projeter une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sur un espace fonctionnel $\mathcal{U}_f$, on peut chercher à déterminer le champ $u^f \in \mathcal{U}_f$ qui vérifie :

$$\int_\Omega u^f(\underline{x}) u^{f^*}(\underline{x})\, d\Omega = \int_\Omega u(\underline{x}) u^{f^*}(\underline{x})\, d\Omega \qquad \forall u^{f^*} \in \mathcal{U}_f \tag{3.22}$$

Dans le cas où les espaces fonctionnels mis en jeux sont issus d'une modélisation par éléments finis, cette approche est appelée "méthode mortar" [DUR 06]. Si l'espace fonctionnel $\mathcal{U}_f$ s'appuit sur un maillage $\mathcal{M}_f$ d'une part et que $u(\underline{x})$ est un champ de déplacement provenant d'une autre discrétisation éléments finis $\mathcal{M}_g$ tel que $u(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_g} u_i^g N_i^g(\underline{x})$ d'autre part, le problème revient à chercher les coefficients u_i^f tels que :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i \in \mathcal{N}_f} u_i^f N_i^f(\underline{x}) \right) \times \left(\sum_{i \in \mathcal{N}_f} u_i^{f^*} N_i^f(\underline{x}) \right) d\Omega = \int_\Omega \left(\sum_{i \in \mathcal{N}_g} u_i^g N_i^g(\underline{x}) \right) \times \left(\sum_{i \in \mathcal{N}_f} u_i^{f^*} N_i^f(\underline{x}) \right) d\Omega \qquad \forall u_i^{f^*} \tag{3.23}$$

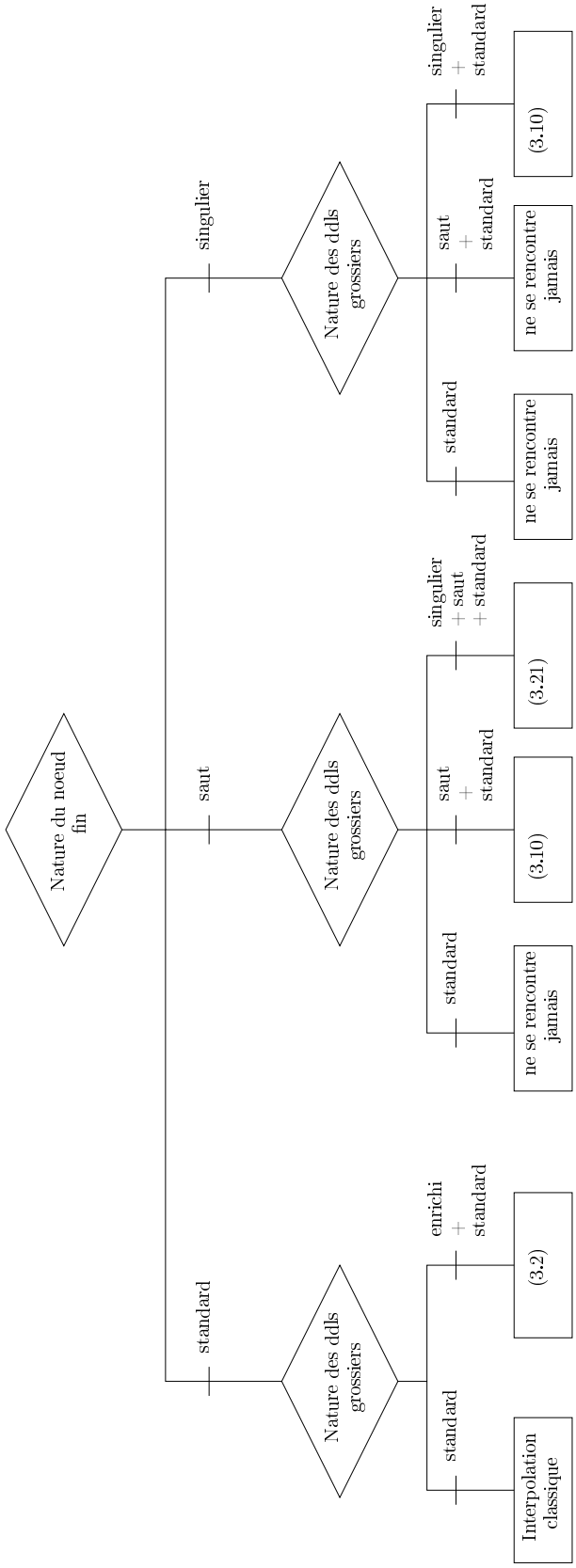
ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{U}^{f^{*T}} \mathbf{M}^{ff} \mathbf{U}^f = \mathbf{U}^{f^{*T}} \mathbf{M}^{fg} \mathbf{U}^g \qquad \forall \mathbf{U}^{f^*} \tag{3.24}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{M}^{ff} \mathbf{U}^f = \mathbf{M}^{fg} \mathbf{U}^g \tag{3.25}$$

où les vecteurs $\mathbf{U}^f$, $\mathbf{U}^{f^*}$ et $\mathbf{U}^g$ sont composés des degrés de liberté u_i^f, $u_i^{f^*}$ et u_i^g. La matrice $\mathbf{M}^{ff}$ est appelée de manière abusive la matrice de masse. Son calcul est en fait similaire à celui d'une véritable matrice de masse à la différence que la masse volumique n'est pas impliquée. Elle est cependant symétrique et définie positive. La



Tab. 3.1: Algorithme utilisé pour construire l'opérateur de prolongation

matrice $\mathbf{M}^{fg}$ est une matrice rectangle appelée matrice de masse croisée, elle couple les deux niveaux de discrétisation. Ces deux matrices se définissent comme ceci :

$$M_{ij}^{ff} = \int_{\Omega} N_i^f(\underline{x}) N_j^f(\underline{x})\, d\Omega \tag{3.26}$$

$$M_{ij}^{fg} = \int_{\Omega} N_i^f(\underline{x}) N_j^g(\underline{x})\, d\Omega \tag{3.27}$$

Selon la définition de l'opérateur de prolongation (2.14) : $\mathbf{U}_f = \mathbf{P}\mathbf{U}_g$, on obtient :

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{ff^{-1}}\mathbf{M}^{fg} \tag{3.28}$$

La prolongation du champ u^g sur $\mathcal{M}_f$ nécessite soit une inversion explicite de la matrice $\mathbf{M}^{ff}$ soit une résolution du système linéaire (3.25). Une inversion de la matrice n'est bien entendu pas envisageable car le coût de cette opération est rédhibitoire. La résolution du système linéaire est également très coûteuse. En effet, à chaque cycle multigrille il faut effectuer une prolongation. Les techniques multigrilles perdent alors tout leur intérêt si pour résoudre un système linéaire issu des équations de la mécanique, il faut en résoudre plusieurs autres de même taille. Une autre difficulté de la méthode mortar réside dans le calcul de la matrice de masse croisée dont le calcul par intégration numérique peut faire intervenir des fonctions de forme non compatibles.

Si la relation (2.18) est vérifiée, les choses se simplifient. Dans ce cas en effet la méthode mortar conduit au même opérateur de prolongation que la méthode nodale. Dans la mesure où une interpolation exacte est possible, les deux opérateurs donnent en effet le même résultat. Par ailleurs le calcul de la matrice de masse croisée ne pose pas de problème. L'espace des fonctions de forme de $\mathcal{M}_g$ formant un sous-espace de celui des fonctions de forme de $\mathcal{M}_f$, l'intégration numérique peut être rigoureusement faite sur la maillage fin. Mais l'intérêt principal réside dans le fait que si les maillages sont imbriqués, l'opération peut être faite au niveau élémentaire ce qui évite la résolution d'un système linéaire trop coûteux ou l'inversion d'une matrice de trop grande taille. Prenons l'exemple unidimensionnel de la figure 3.4.a. Deux maillages imbriqués ainsi que les fonctions de formes des éléments sur chaque niveau y sont représentés. Appliquons la méthode mortar sur l'élément E_a. Les vecteurs $\mathbf{U}^g$ et $\mathbf{U}^f$ sont définis par :

$$\mathbf{U}^g = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{U}^f = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Les matrices $\mathbf{M}^{ff}$ et $\mathbf{M}^{fg}$ associées s'expriment par :

$$\mathbf{M}^{ff} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}^{fg} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 5/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Et conformément à l'expression (3.28) l'opérateur de prolongation vaut :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

On retrouve bien $u_a = u_1$ et $u_b = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$. On pourrait appliquer la méthode mortar sur E_b, sur $E_a \cup E_b$ ou sur toute autre combinaison d'éléments possible. Bien entendu, le calcul de $\mathbf{P}$ est d'autant moins coûteux que le domaine d'application est petit. Si l'approximation éléments finis est enrichie par une fonction saut, la méthode mortar peut s'appliquer de la même manière. Prenons le même maillage et enrichissons le d'une fonction H pour représenter une discontinuité placée au tiers de E_a (figure 3.4.b). L'application de la méthode mortar sur E_a fournit les mêmes relations que celles fournies par l'approche nodale (3.10) :

$$\begin{array}{cc} u_a = u_1 & a_a = a_1 \\ u_b = \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2 & a_b = \dfrac{1}{2}a_1 + \dfrac{1}{2}a_2 \end{array}$$

En revanche il faut être vigilant car l'application de la méthode mortar sur certains sous-ensembles peut conduire à des matrices de masse singulières. C'est le cas par exemple si on choisit de faire l'intégration sur E_b. En effet, les fonctions de formes $N_b(x)$ et $H(x)N_b(x)$ sont identiques sur ce domaine, la matrice de masse qui en découle est singulière et donc non inversible. Pour être certain que $\mathbf{M}^{ff}$ soit inversible, il faut appliquer la méthode mortar sur un sous-ensemble dont au moins un élément connexe à chacun des noeuds enrichis contient la discontinuité.

L'utilisation d'enrichissements singuliers, on l'a vu, implique que localement $\mathcal{U}_g \not\subset \mathcal{U}_f$. L'application de la méthode mortar n'est donc pas aussi simple que précédemment car elle doit être appliquée à un sous-ensemble de Ω qui inclut la région où la relation (2.18) n'est pas vérifiée. Ce sous ensemble conduit à une matrice de masse de taille relativement petite et constante en 2D (enrichissement topologique). En revanche en 3D, sa taille est dépendante de la longueur du front et le coût de son inversion peut devenir rédhibitoire. Pour éviter ce problème, nous proposons de construire l'opérateur de projection en appliquant localement la méthode mortar. Il s'agit, pour chaque noeud du maillage fin, d'identifier sur le maillage grossier les "parents" des éléments auxquels ils sont connectés. De cette manière la taille de la matrice de masse est raisonnable mais seuls les degrés de liberté des noeuds grossiers les plus proches du noeud de $\mathcal{M}_f$ sont susceptibles d'apporter leur contribution dans l'opération de prolongation. Dans le cadre des éléments finis, ceci demeure une hypothèse raisonnable.

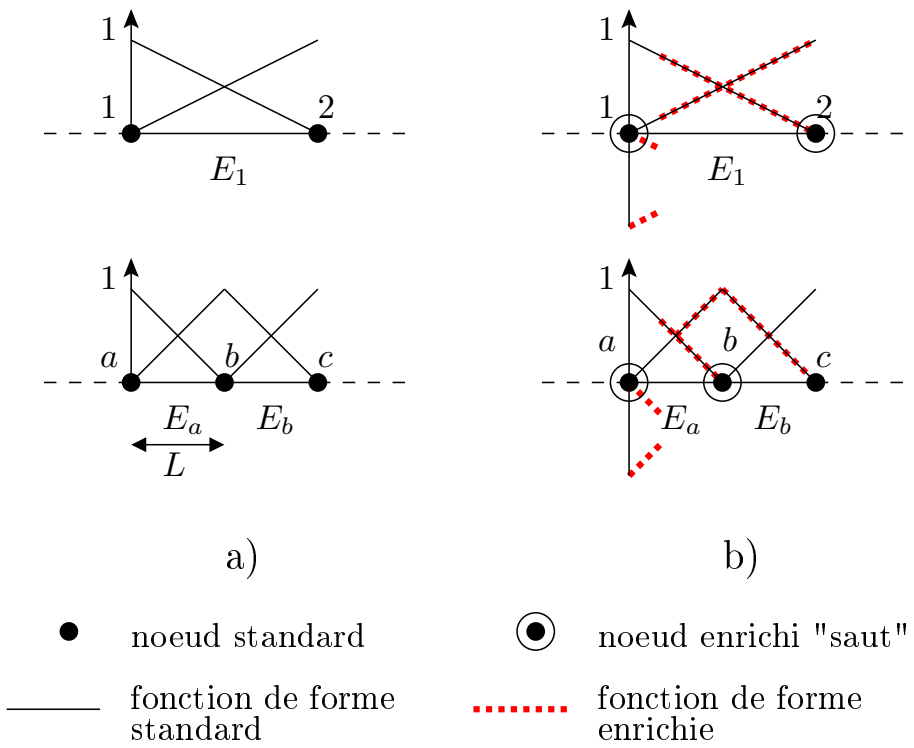


Fig. 3.4: Maillages imbriqués et fonctions de forme

3.1.3 Bilan

Du point de vue pratique, la méthode nodale est beaucoup plus facile à mettre en œuvre. Seules les valeurs des fonctions de forme et des fonctions d'enrichissement aux coordonnées naturelles des noeuds du maillage fin interviennent dans l'opérateur de prolongation. Le coût de la construction de $\mathbf{P}$ est très faible et si on le compare à celui de la matrice de rigidité du problème fin, il est négligeable. La méthode mortar requiert des opérations plus complexes. Il faut construire les matrices de masse et les inverser. Cette construction est par ailleurs assujettie aux mêmes difficultés que le calcul de la matrice de rigidité liée à la complexité des fonctions d'enrichissement singulières (nombre de points de Gauss élevé, sous-découpage conforme des éléments tranchés). Il faut de plus faire attention aux domaines auxquels on applique localement la méthode mortar afin de s'assurer que $\mathbf{M}^{ff}$ n'est pas singulière. Les approches nodales et mortar ont été testées toutes les deux et sont comparées dans la section 3.2. Il apparaît que dans le contexte des multigrilles, les erreurs introduites par chacune d'entre elles sont très rapidement éliminées lors des phases de relaxation et aucune méthode ne semble être plus performante que l'autre. Pour cette raison, la méthode nodale est préférée à la méthode mortar et sera la méthode utilisée par défaut dans la suite de ce travail.

Dans la suite de ce chapitre, différentes applications vont permettre d'illustrer le comportement des algorithmes CS et MG-L dans le contexte des éléments finis étendus. Les résultats présentés ont été obtenus à l'aide du code de calcul ELFE_3D développé au sein de l'équipe MSE du LaMCoS. C'est dans ce code écrit en C++ qu'ont été mis en œuvre les différents développements présentés jusqu'ici (voir l'annexe B).

3.2 Application à l'algorithme CS

Afin d'éprouver et de valider les différentes techniques décrites jusqu'à présent, différents cas tests ont été étudiés. Le premier concerne l'application au *correction scheme* des deux opérateurs de projection définis dans la section précédente. Un second exemple concerne toujours le *correction scheme* avec une application à la propagation bidimensionnelle.

3.2.1 Plaque fissurée en traction

Considérons la plaque carrée représentée sur la figure 3.5. Elle est encastrée sur une face et soumise à une contrainte de traction sur la face opposée ($\sigma = 10$ MPa). Le matériau est linéaire élastique homogène ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$). Une fissure horizontale est positionnée de telle sorte que $x_f = 3.4522$ cm et $y_f = 3.5522$ cm. Ainsi à tous les niveaux de discrétisation utilisés par la suite (figure 3.6), la fissure reste incompatible avec le maillage. Nous utilisons dans cet exemple un maximum de sept niveaux. Le maillage 6 est le plus fin et comporte 65536 éléments. Pour résoudre le problème physique posé dans le cadre de la méthode X-FEM, il n'est pas nécessaire de descendre à un tel niveau de discrétisation. L'un des intérêts de cette méthode est justement de pouvoir utiliser des éléments relativement grossiers en pointe de fissure. L'utilisation de maillages si fins permet cependant d'illustrer les propriétés de convergence des algorithmes multigrilles appliqués à des problèmes de grandes taille.

Les paramètres $\nu = \nu_1 + \nu_2$ et γ ont une influence importante sur l'efficacité des algorithmes multigrilles. Les quantités représentatives sont le temps cpu et le nombre de cycles multigrilles à convergence N_c. Le critère d'arrêt $\varepsilon = ||\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_l\mathbf{U}_l^{k+1}||/||\mathbf{F}_l||$ (voir le tableau 2.1) est ici fixé à 10^{-8}. Les temps cpu indiqués représentent le temps passé dans le gradient conjugué pré-conditionné et est noté t_{relax}. Le temps cpu relatif aux prolongations et aux restrictions, t_{PR} est négligeable. En effet, dans chaque cycle multigrille élémentaire cela concerne 2 produits matrice/vecteur alors que chaque itération de gradient conjugué en nécessite plusieurs. Notons par ailleurs que le nombre de cycles à convergence N_c n'apparaît pas comme un nombre entier. Il résulte d'une interpolation linéaire entre les deux derniers cycles afin de rendre compte du fait qu'à l'arrêt, l'indicateur de convergence est généralement inférieur au critère ε.

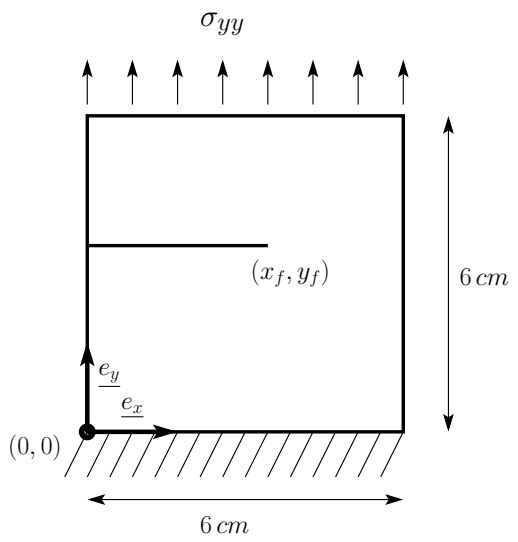
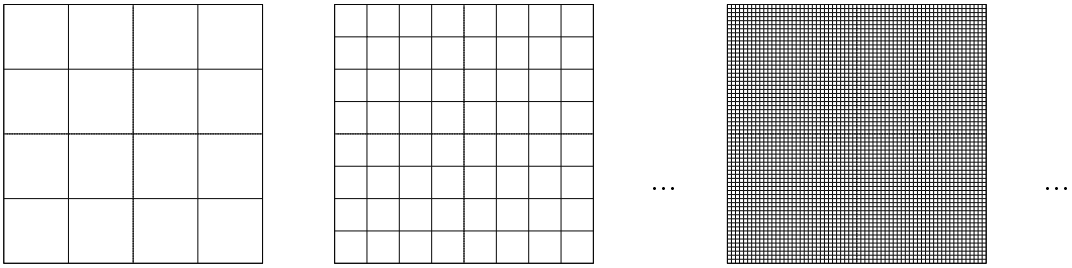


Fig. 3.5: Plaque fissurée en traction

Les tableaux 3.2 et 3.3 montrent la convergence de l'algorithme CS pour les deux opérateurs décrits dans la section 3.1 et pour deux niveaux de discrétisation cibles, le niveau 2 qui comprend 256 éléments et le niveau 6 qui en comprend 65536. Pour chacun des calculs, les paramètres $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$ et $\gamma = 1$ ont été choisis. On n'y observe aucune différence significative entre l'approche nodale et l'approche mortar. Comme expliqué dans la section 3.1, les erreurs introduites par chacun des deux opérateurs ne sont que très locales et associées à de petites longueurs de variation. Elles sont donc très vite éliminées dans les phases de relaxation. Dans la suite, tous les résultats fournis sont obtenus à partir de l'approche nodale.

cycle multigrille	indicateur de convergence pour l'opérateur nodal	indicateur de convergence pour l'opérateur mortar
1	$3.72\,10^{-1}$	$3.73\,10^{-1}$
2	$4.98\,10^{-3}$	$5.06\,10^{-3}$
3	$7.69\,10^{-4}$	$7.80\,10^{-4}$
4	$9.49\,10^{-5}$	$9.78\,10^{-5}$
5	$1.26\,10^{-5}$	$1.33\,10^{-5}$
6	$1.60\,10^{-6}$	$1.69\,10^{-6}$
7	$2.15\,10^{-7}$	$2.32\,10^{-7}$
8	$2.74\,10^{-8}$	$2.92\,10^{-8}$
9	$3.89\,10^{-9}$	$4.20\,10^{-9}$

Tab. 3.2: Convergence de l'algorithme CS pour le maillage 3 et pour les deux opérateurs de projection



maillage 0 : 16 éléments | maillage 1 : 64 éléments | ... | maillage 4 : 4096 éléments | ...

Fig. 3.6: Quelques uns des sept maillages utilisés dans la stratégie CS

cycle multigrille	indicateur de convergence pour l'opérateur nodal	indicateur de convergence pour l'opérateur mortar
1	$3.60\,10^{-1}$	$3.58\,10^{-1}$
2	$9.36\,10^{-3}$	$9.68\,10^{-3}$
3	$1.66\,10^{-3}$	$1.80\,10^{-3}$
4	$3.05\,10^{-4}$	$3.34\,10^{-4}$
5	$5.00\,10^{-5}$	$5.53\,10^{-5}$
6	$8.98\,10^{-6}$	$9.96\,10^{-6}$
7	$1.49\,10^{-6}$	$1.68\,10^{-6}$
8	$2.63\,10^{-7}$	$2.95\,10^{-7}$
9	$4.40\,10^{-8}$	$5.08\,10^{-8}$
10	$7.67\,10^{-9}$	$8.99\,10^{-9}$

Tab. 3.3: Convergence de l'algorithme CS pour le maillage 6 et pour les deux opérateurs de projection

Les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6 montrent les temps de calcul (t_{relax}) et le nombre d'itérations à convergence pour différentes valeurs de ν_1, ν_2 et γ. Chaque tableau correspond à un maillage cible différent. À chaque fois, le maillage le plus grossier utilisé est le maillage 0.

En ce qui concerne l'influence de $\nu = \nu_1 + \nu_2$, il apparaît nettement que son augmentation entraîne une diminution de N_c. Ceci est normal car contrairement aux multigrilles localisées, on pourrait résoudre le problème dès la première phase de relaxation en prenant ν_1 assez grand. En revanche l'augmentation de ν engendre une augmentation du temps de calcul. Pour $\gamma = 1$ c'est assez facile à comprendre car le coût du calcul est proportionnel à N_c et inversement proportionnel à ν. Prenons le cas du maillage 6 (tableau 3.6). En passant de $\nu = 3$ à $\nu = 8$, on réduit N_c d'un facteur 1.25 environ. Mais ce gain n'est pas compensé par l'augmentation de ν d'un

facteur 2.7. D'ailleurs le facteur 2.7/1.15 correspond au facteur qu'il y a entre les temps de calcul pour ces deux valeurs de ν.

L'influence de γ est également importante. On constate à chaque fois que le nombre de cycles à convergence ainsi que le temps de calcul est plus faible pour $\gamma = 2$ que pour $\gamma = 1$.

Pour conclure cette analyse, les temps de calculs pour divers paramètres multigrilles on été reportés sur la figure 3.7 en fonction de la taille du problème cible. Les temps de calcul obtenus avec le gradient conjugué préconditionné utilisé dans les relaxations sont également tracés. Les régressions linéaires permettent de vérifier que les techniques multigrilles ont une complexité en $O(n)$ alors qu'un gradient conjugué présente une complexité en $O(n^{3/2})$.

ν_1 et ν_2	γ	t_{relax} en s	N_c
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	1	$2.62\,10^{-1}$	8.6
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	1	$1.84\,10^{-1}$	9.7
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	1	$1.34\,10^{-1}$	11.1
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	2	$2.44\,10^{-1}$	5.0
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	2	$1.89\,10^{-1}$	6.5
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	2	$1.31\,10^{-1}$	7.7

Tab. 3.4: Temps de calcul et nombre de cycles à convergence pour le maillage 4 comprenant 8496 ddls. La méthode du gradient conjugué converge en $3.32\,10^{-1}$ s et 127 itérations.

ν_1 et ν_2	γ	t_{relax} en s	N_c
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	1	1.02	8.5
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	1	$7.17\,10^{-1}$	9.8
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	1	$4.76\,10^{-1}$	10.5
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	2	$8.04\,10^{-1}$	5.0
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	2	$5.85\,10^{-1}$	5.6
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	2	$4.63\,10^{-1}$	7.0

Tab. 3.5: Temps de calcul et nombre de cycles à convergence pour le maillage 5 comprenant 33348 ddls. La méthode du gradient conjugué converge en 2.71 s et 254 itérations.

3.2.2 Propagation de fissure dans une plaque trouée

Il s'agit ici d'appliquer l'algorithme CS à un problème de mécanique de la rupture avec propagation. Une plaque trouée pré-fissurée est soumise à une contrainte de traction (voir la figure 3.8). Le matériau est identique à celui de l'exemple précédent.

ν_1 et ν_2	γ	t_{relax} en s	N_c
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	1	5.25	8.6
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	1	3.65	9.9
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	1	2.41	10.5
$\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$	2	3.53	4.5
$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$	2	2.71	5.5
$\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$	2	2.17	7.2

Tab. 3.6: Temps de calcul et nombre de cycles à convergence pour le maillage 5 comprenant 132204 ddls. La méthode du gradient conjugué converge en 23.0 s et 509 itérations.

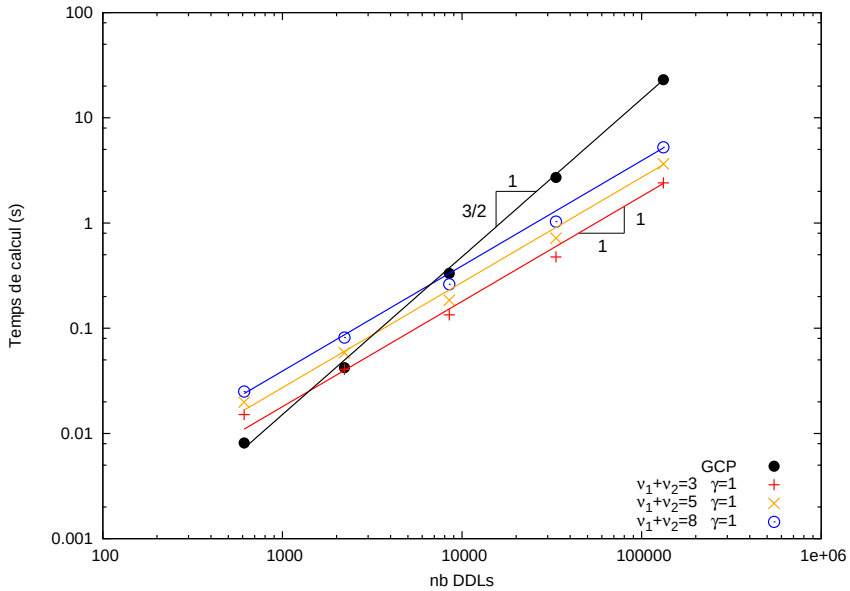


Fig. 3.7: Temps de calcul pour le gradient conjugué préconditionné (GCP) et le CS pour $\gamma = 1$ et différentes valeurs de $\nu_1 + \nu_2$. Les regressions linéaires sont en n pour les multigrilles et en $n^{3/2}$ pour le gradient conjugué.

Les trois maillages utilisés sont représentés sur la figure 3.9. Les maillages 1 et 2 sont issus du maillage 0 par raffinement localisé, mais une zone de compatibilité entre les niveaux de discrétisation est nécessaire. La zone de raffinement est figée dans le temps, mais dans la mesure où le calcul est linéaire nous aurions pu la faire évoluer au cours de la propagation. Le trou n'y est pas représenté, il est pris en compte dans le calcul par une fonction d'enrichissement spécifique : $H_T = 1$ dans la matière et $H_T = 0$ dans le vide. Cet enrichissement est en fait très similaire à l'enrichissement saut et les opérateurs intergrilles sont construits à partir de l'approche nodale (relation (3.10)).

On se place ici dans le cadre d'une évolution quasi-statique et on suppose que dès le début $K > K_c$ et qu'il y a donc propagation. À chaque pas de calcul, la longueur de la fissure est incrémentée de 15 mm. La direction de propagation est donnée par le critère de contrainte circonférentielle maximum [ERD 63] :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{3.32}$$

En mode (I+II) et en intégrant les champs asymtotiques de la section 1.1.3 dans (3.32), on trouve l'angle de propagation θ_0 :

$$\theta_0 = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{signe}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right) \tag{3.33}$$

La figure 3.10.b montre la fissure après 20 pas de propagation. La convergence de l'algorithme CS est représentée sur la figure 3.10.a pour différentes longueurs de fissure. Les paramètres du calcul multigrille sont $\gamma = 2$, $\nu_1 = 5$ et $\nu_2 = 3$. On observe que le taux de convergence est légèrement perturbé par la géométrie, notamment lorsque la pointe de fissure s'approche du trou mais qu'il reste toujours inférieur à une décade par cycle.

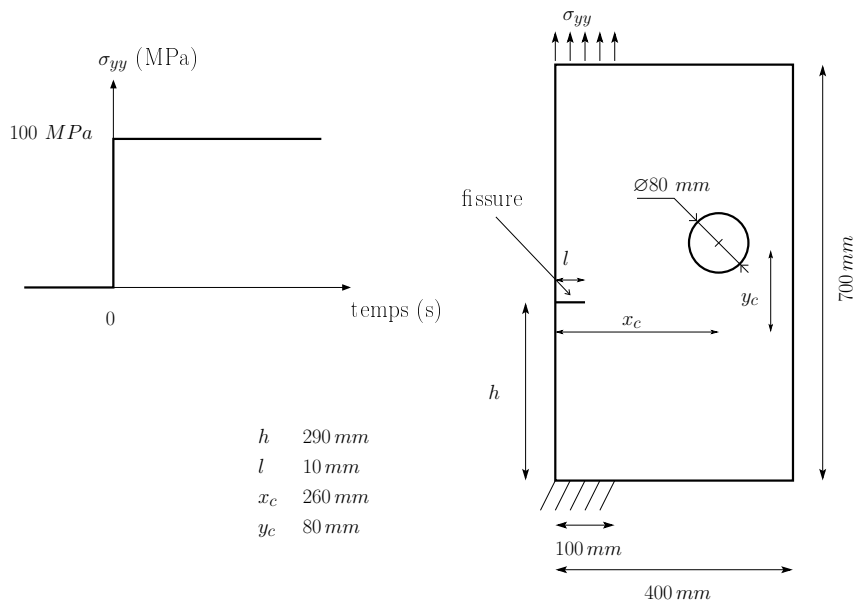
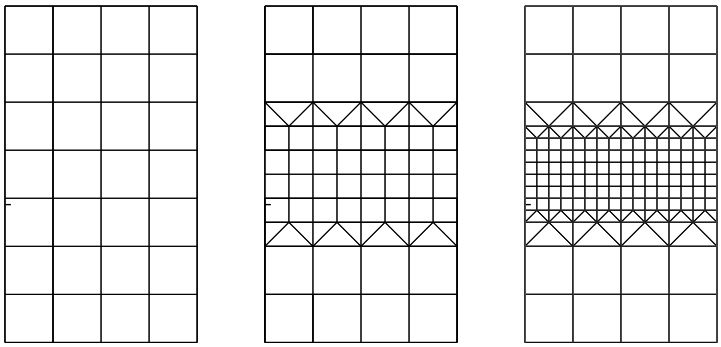
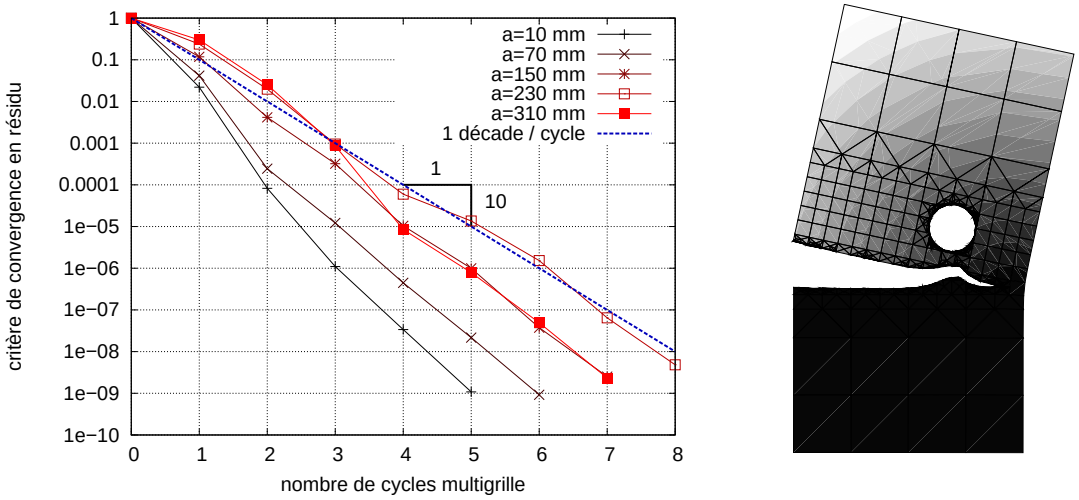


Fig. 3.8: Plaque fissurée en traction



maillage 0 maillage 1 maillage 2

Fig. 3.9: Les trois maillages utilisés ainsi que la fissure initiale



(a) (b)

Fig. 3.10: Taux de convergence de l'algorithme CS en fonction de a, la longueur de la fissure (a). Déformée de l'éprouvette pour $a = 310$ mm (b).

3.3 Application à l'algorithme MG-L et stratégie d'enrichissement multiéchelle

3.3.1 Plaque fissurée quasi-infinie

Les exemples précédents ne présentent pas véritablement de caractère multi-échelle, la taille caractéristique de la fissure est toujours du même ordre de grandeur que celle de la structure. Nous allons ici considérer un problème où ce n'est pas le cas. Comme l'illustre la figure 3.11, il s'agit d'une plaque carrée ($L = 5$ m) soumise

à une contrainte de traction $\sigma_\infty = 100$ MPa. Cette structure présente une fissure de longueur $a \ll L$ inclinée à 45 ° par rapport à la direction de traction. Nous considérerons trois valeurs de a : $a_1 = 0.08$ m, $a_2 = 0.04$ m, $a_3 = 0.02$ m. Le maillage de la figure 3.11.b est tout à fait satisfaisant pour modéliser cette structure saine. En revanche, si l'on veut prendre en compte la fissure, il est inadapté. Du fait de la différence d'échelle, un enrichissement de type X-FEM est délicat à utiliser. Dans [BEL 03], Bellec et Dolbow proposent une méthode permettant d'enrichir l'approximation éléments finis pour prendre en compte des fissures coupant seulement deux éléments. Cette technique ne permet cependant pas de prendre en compte des facteurs d'échelle trop grands et est limitée aux problèmes bidimensionnels. De plus dans le cas où la fissure est entièrement incluse dans un élément, les enrichissements ne sont plus définis (deux pointes dans le même élément).

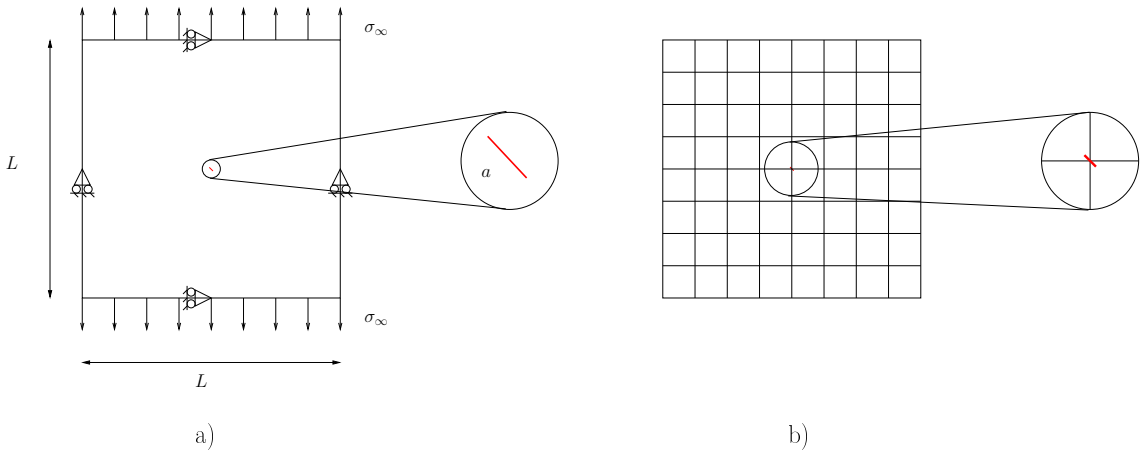


Fig. 3.11: Fissure dans un milieu quasi-infini.

Nous proposons, pour résoudre ce problème, d'utiliser l'algorithme multigrille localisé pour "zoomer" sur le défaut. Nous utilisons neuf grilles imbriquées et localisées représentées sur la figure 3.15.a de la page 86. Cependant les problèmes liés aux enrichissements qui viennent d'être évoqués subsistent sur les grilles les plus grossières. Dans la mesure où sur les zones raffinées, seule la solution supportée par la grille la plus fine a un sens physique, il est alors envisagé de ne pas enrichir les niveaux les plus grossiers. Nous allons voir sur cet exemple si cela influence la solution finale et comment les propriétés de convergence sont affectées.

Cette absence d'enrichissement sur les niveaux les plus grossiers est légitime pour plusieurs raisons. En premier lieu, si le facteur d'échelle entre la fissure et les éléments grossiers est importante, un enrichissement singulier n'a plus vraiment de sens car la zone de K-dominance est très vraisemblement beaucoup plus petite que la zone où seront définies les fonctions singulières. D'autre part, comme il l'a été mentionné dans la section 2.8, en chaque point, seule la solution supportée par la grille la plus fine a un sens physique. Si la discontinuité n'apparaît pas sur les problèmes grossiers,

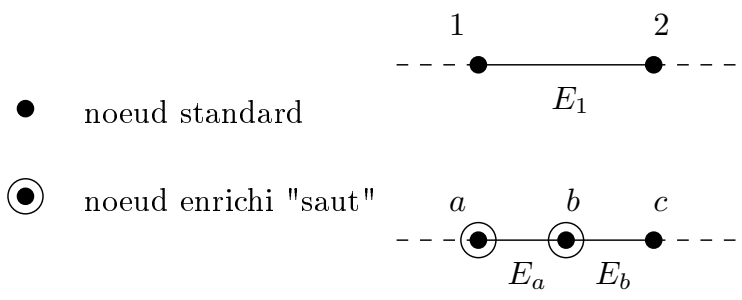


Fig. 3.12: Nouvelle configuration d'enrichissements à différentes échelles

elle apparaît au moins sur les problèmes les plus fins. Ceci ne signifie pas que les niveaux grossiers ne sont pas influencés par la présence de la fissure. La présence de la discontinuité au niveau inférieur est prise en compte dans le second membre du problème grossier par (2.37) et en particulier par le terme $\left[\mathbf{P}^T\mathbf{K}^B\mathbf{U}^{B^k}\right]$. Ceci nous amène cependant à reconsidérer l'opérateur de prolongation car un nouveau cas de figure très différent de ceux étudiés dans la section 3.1 se présente. La transition entre un niveau grossier non enrichi et un niveau plus fin enrichi est schématisé par la figure 3.12. L'opérateur de prolongation doit transmettre le champ de déplacement continu du niveau grossier vers le niveau fin. L'approche nodale comme l'approche mortar conduisent toutes les deux à négliger les enrichissements du niveau enrichi et à réaliser une interpolation entre les degrés de liberté "classiques". Ainsi, en référence avec la numérotation des noeuds de la figure 3.12, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} u_a = u_1 & a_a = 0 \\ u_b = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 & a_b = 0 \\ u_c = u_2 & \end{array}$$

Là encore des erreurs sont faites. Elles sont intévitables puisque le problème physique représenté sur les deux échelles est différent. Il faut dans ce cas se poser la question suivante : existe-t-il une échelle de discrétisation où les erreurs commises ne sont pas préjudiciables à la convergence de l'algorithme et à la qualité de la solution ? Et le cas échéant, y a-t-il un lien entre cette échelle et celles du problème physique ? Pour y répondre, nous introduisons un nouveau paramètre de calcul n_e qui correspond au "premier niveau d'enrichissement". De cette manière, aucun des niveaux $n < n_e$ (plus grossiers que le niveau n_e) n'est enrichi. En revanche, tous les autres le sont comme l'illustre le tableau 3.7.

Le nombre de cycles multigrilles à convergence est reporté sur la figure 3.13 en fonction du paramètre n_e et pour les trois longueurs de fissures : $a_1 = 0.08$ m, $a_2 = 0.04$ m et $a_3 = 0.02$ m. La taille de maille caractéristique correspondant à chaque niveau est également reportée sur l'axe de droite. Les paramètres multigrilles de chacun des calculs sont $\gamma = 1$ et $\nu = 5$ et le critère d'arrêt est fixé à $\varepsilon = 10^{-8}$.

On constate que pour les trois tailles de fissure, il y a une valeur de n_e qui

semble être optimale et qui correspond à un niveau dont la taille de maille est de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique de la fissure. En revanche, si n_e est trop faible ou trop élevé, l'ordre de convergence se détériore. Il y a plusieurs raisons à cela. Si n_e est trop faible, nous avons vu que l'enrichissement est inadapté aux échelles les plus grossières. Comme le traitement particulier proposé dans [BEL 03] n'a pas été utilisé, cela perturbe fortement la qualité de la solution obtenue sur les niveaux grossiers, bien trop éloignée de celle du problème physique que les grilles les plus fines tendent à approcher. Si n_e est trop élevé, les grilles intermédiaires modélisent un problème également trop éloigné du véritable problème physique. Le rôle "d'accélérateur de convergence" dévolu à ces grilles n'est plus rempli, ce qui conduit à l'augmentation du nombre de cycles multigrilles nécessaires.

		niveaux enrichis en fonction de n_e							
niveau n	h (m)	$n_e = 1$	...	$n_e = 4$	...	$n_e = 9$	h/a_1	h/a_2	h/a_3
1	6.25×10^{-1}	✓		×		×	7.8	15.6	31.3
2	3.12×10^{-1}	✓		×		×	3.9	7.8	31.3
3	1.56×10^{-1}	✓		×		×	2.0	3.9	7.8
4	7.80×10^{-2}	✓		✓		×	$\boxed{1.0}$	2.0	3.9
5	3.90×10^{-2}	✓		✓		×	0.5	$\boxed{1.0}$	2.0
6	1.95×10^{-2}	✓		✓		×	0.24	0.5	$\boxed{1.0}$
7	9.77×10^{-3}	✓		✓		×	0.12	0.24	0.5
8	4.88×10^{-3}	✓		✓		×	0.06	0.12	0.24
9	2.44×10^{-3}	✓		✓		✓	0.03	0.06	0.12

Tab. 3.7: Taille des éléments (h) pour chacun des neuf niveaux utilisés. Les colonnes centrales indiquent quels sont les niveaux enrichis en fonction du paramètre n_e. Le facteur entre la taille de maille h et la longueur des trois fissures étudiées a_1, a_2, a_3 est également indiqué pour chaque niveau.

Afin de valider la solution obtenue et de vérifier le bon comportement de l'algorithme MG-L en termes de temps cpu, nous pouvons effectuer des comparaisons avec des problèmes de référence résolus à l'aide du gradient conjugué utilisé dans les phases de relaxation. À cette fin, nous définissons des maillages compatibles équivalents aux grilles successives utilisées par l'algorithme MG-L pour chaque niveau de discrétisation. Un maillage équivalent au niveau 9 est représenté sur la figure 3.15.b. La qualité de la solution peut être analysée en observant les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes issues du post-traitement qui sont très sensibles aux champs calculés dans la région proche de la pointe de fissure. Ces valeurs sont calculées à partir d'une intégrale d'interaction (voir les sections 1.1.5 et 4.2) sur des domaines carrés de dimension $6h \times 6h$, h étant la taille de la maille. Nous disposons par ailleurs

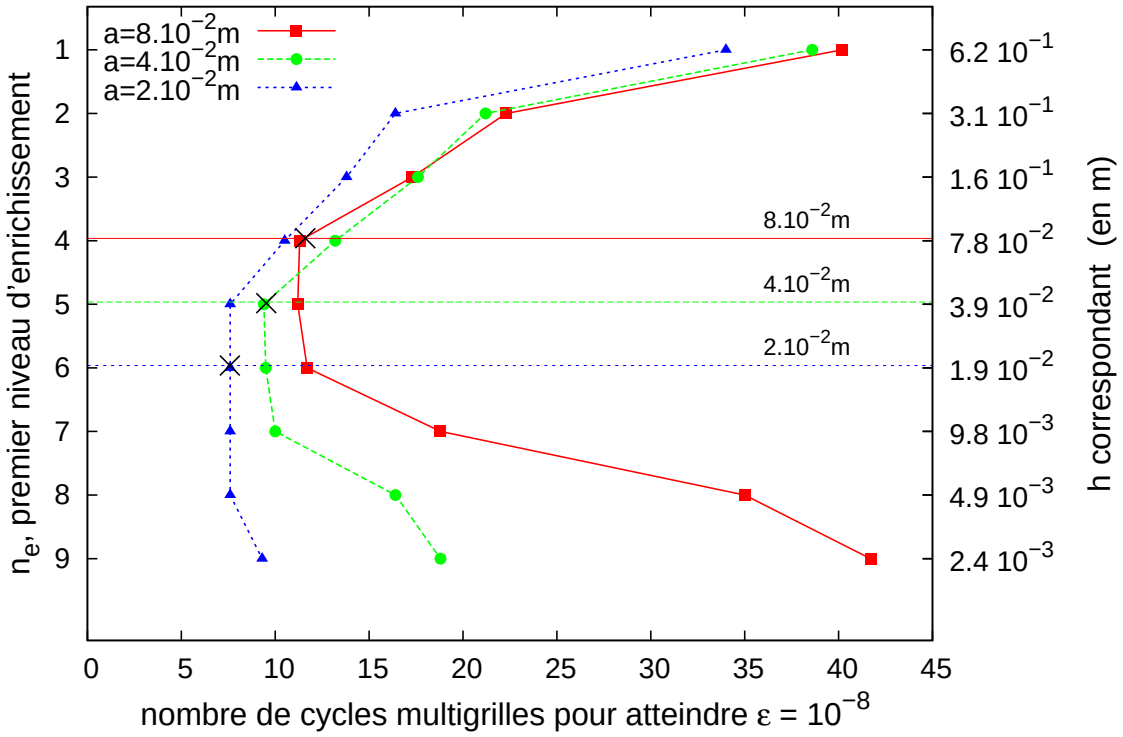


Fig. 3.13: Nombre de cycles multigrilles effectués pour atteindre une précision $\varepsilon = 10^{-8}$ en fonction du premier niveau d'enrichissement et pour trois longueurs de fissure. La taille de maille des éléments est également reportée sur l'échelle verticale à droite.

de la solution analytique du problème d'une plaque fissurée de dimensions infinies soumise à une contrainte de traction uniforme à l'infini [LEM 04] :

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a/2} \sin^2(\alpha) \tag{3.34}$$

$$K_{II} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a/2} \sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{3.35}$$

α étant l'angle que fait la fissure avec la direction de la charge. Dans notre exemple $\alpha = 45^\circ$ et $K_I = K_{II} = 1.772 \times 10^7 \text{Pa m}^{1/2}$.

Pour ce cas test particulier, les résultats obtenus ne semblent pas dépendre du premier niveau d'enrichissement. Pour toutes les valeurs de n_e testées, l'écart relatif des valeurs de K_I et K_{II} calculées est de l'ordre de 10^{-8}, ce qui correspond au critère d'arrêt sélectionné. Pour le niveau 9, nous obtenons $K_I = 1.773 \times 10^7$ Pa m$^{1/2}$ pour le calcul multigrille et $K_I = 1.765 \times 10^7$ Pa m$^{1/2}$ pour le calcul GCP s'appuyant sur le maillage de référence de la figure 3.15.b. La différence entre ces deux valeurs n'est pas significative car les deux discrétisations ne sont pas strictement identiques. Ces résultats nous permettent de conclure que la qualité de la solution obtenue par

l'algorithme MG-L n'est pas affectée par les différentes hypothèses introduites lors de l'élaboration des opérateurs de changement d'échelle.

Avec un critère d'arrêt en norme relative du résidu pour le gradient conjugué et un critère en norme relative de correction de déplacement pour l'algorithme MG-L, la comparaison directe de ces deux algorithmes est délicate. Afin d'analyser le comportement de l'algorithme MG-L en termes de temps de calcul, il peut tout de même être intéressant de comparer les évolutions de chacune des deux méthodes en fonction du niveau de discrétisation cible. Sur la figure 3.14 sont représentés les temps de calculs ayant permis d'atteindre pour chacun des deux algorithmes un critère d'arrêt de 10^{-8} avec leurs indicateurs de convergence respectifs. L'abscisse porte la taille du problème. Pour le GCP, il s'agit du nombre de degrés de liberté du problème mono-grille équivalent (figure 3.15.b). Pour le MG-L, il s'agit du nombre cumulé des degrés de liberté de chacune des grilles. À niveau de discrétisation équivalent la taille du problème multigrille est sensiblement plus importante que celle du problème classique car certains degrés de libertés sont redondants dans les zone où il y a recouvrement. La convergence en $O(n)$ observée sur la figure 3.7 n'apparaît plus ici car la taille du problème N_l n'est plus fonction uniquement de la taille de la grille initiale N_0 et du nombre de grilles utilisées comme c'est le cas pour l'algorithme CS ($N_l \simeq N_0 \times 2^{l+1}$ en 2D), mais dépend aussi de la localisation. Cependant, on constate que l'algorithme MG-L devient tout à fait intéressant quand la taille du problème augmente. Même si les critères de convergence des deux méthodes ne sont pas strictement identiques, la complexité de l'algorithme multigrille localisé est manifestement plus faible que celle du gradient conjugué.

Remarque 7 *Il existe une restriction liée à l'utilisation du gradient conjugué comme lisseur. En effet, imposer un déplacement sur des noeuds enrichis nécessite d'employer des multiplicateurs de Lagrange [MOË 06]. Cette méthode engendre un opérateur K défini non-positif incompatible avec l'emploi d'un gradient conjugué. Pour cette raison, l'interface Γ ne doit pas couper la fissure. Ceci ne constitue pas vraiment un handicap car l'objectif, dans cette analyse linéaire, est d'atteindre l'échelle de la fissure mais nous ne souhaitons pas aller au-delà. La méthode des éléments finis étendus autorise l'utilisation d'un discrétisation relativement grossière à cette échelle. Il n'est donc pas restrictif pour le niveau le plus fin d'englober l'ensemble de la fissure comme c'est le cas ici.*

3.3.2 Fissure circulaire dans une barre 3D

Pour conclure ce chapitre, nous présentons ici l'application de l'algorithme multigrille localisé à un problème de fissuration tridimensionnel. Il s'agit d'un barreau fissuré en traction présentant une fissure circulaire (voir la figure 3.16). Le rayon de la fissure est fixé à $R = 0.05$ mm et $\sigma = 220$ MPa. Nous utilisons les six maillages localisés représentées sur la figure 3.17 et les paramètres multigrilles ont été fixés à $\nu = 5$ et $\gamma = 1$.

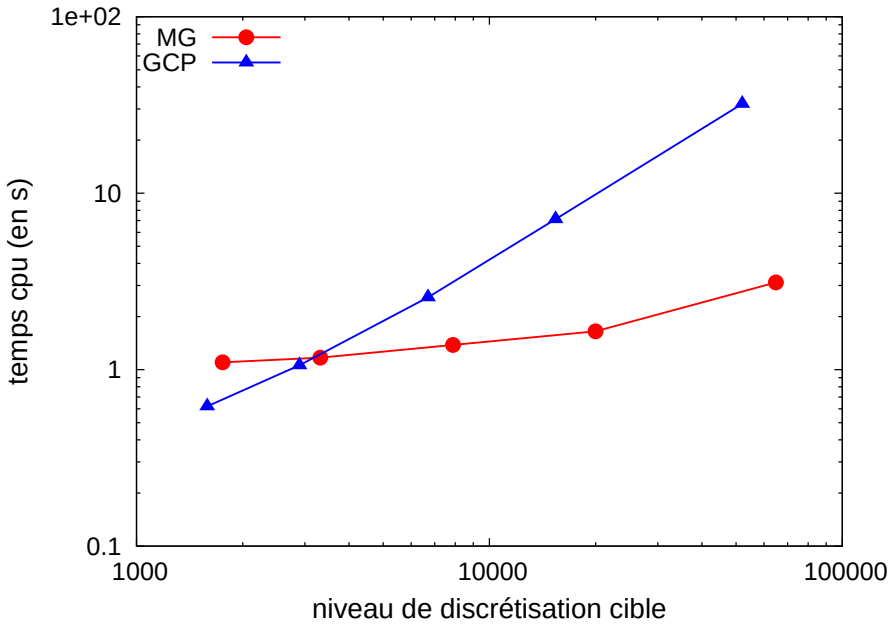


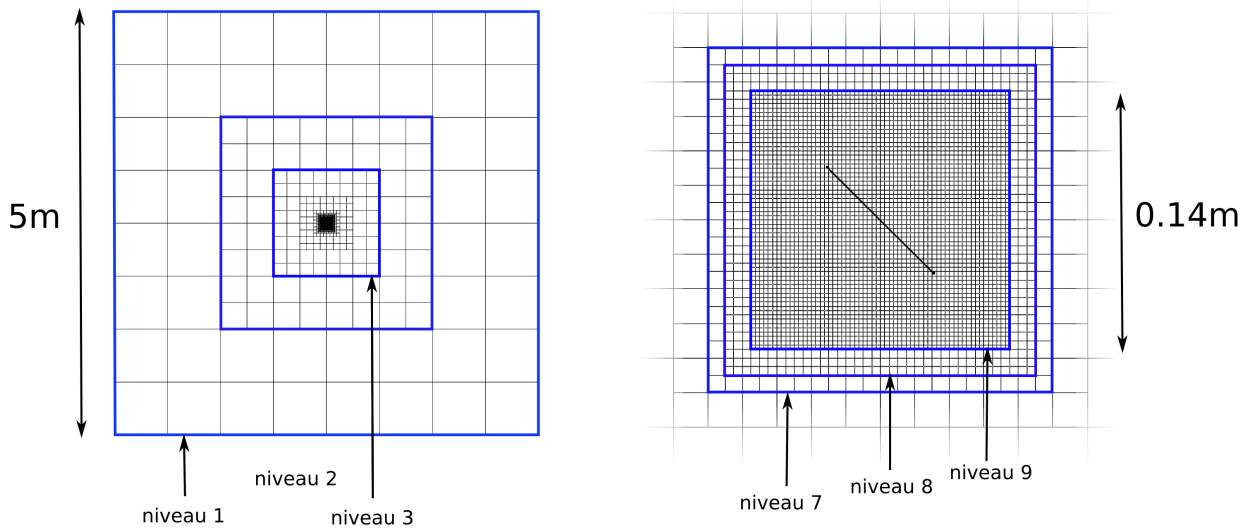
Fig. 3.14: Temps de calcul pour le gradient conjugué préconditionné (GCP) et le MG-L pour $\gamma = 1$ et $\nu = 5$

Le tableau 3.8.a montre l'influence du premier niveau d'enrichissement sur le comportement de l'algorithme. Ici encore, un bon taux de convergence est atteint lorsque le premier niveau d'enrichissement choisi correspond à une taille de maille du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique de la fissure (ici son rayon). Le tableau 3.8.b montre que pour $n_e = 2$, seules 35 itérations de GCP ($N_c \times \nu = 7 \times 5$) ont été nécessaires sur chacun des niveaux (sauf le plus grossier) et en particulier sur le niveau le plus fin comportant plus de 57000 degrés de liberté.

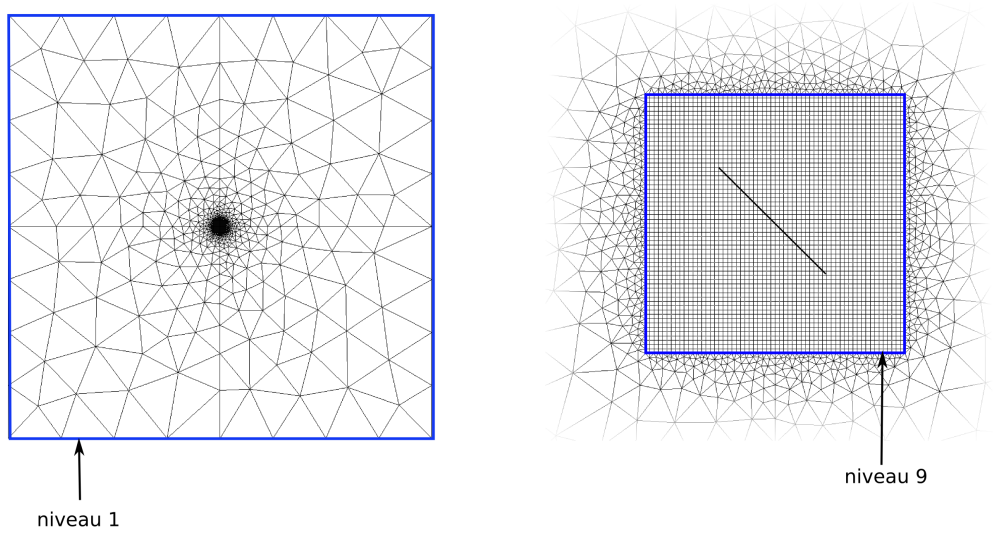
Les facteurs d'intensité des contraintes peuvent ici aussi servir à valider les résultats. Le détail de leur calcul numérique est donné dans le chapitre 4. En attendant, K_I est représenté sur la figure 4.12 ainsi que la solution semi-analytique fournie par Raju et Newman [NEW 84] (solution tenant compte des dimensions finies de la section de l'éprouvette).

3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons vu que l'algorithme multigrille localisé est un excellent outil pour traiter les problèmes de fissuration localisés dont il est question dans ce mémoire. Les deux approches décrites dans la section 3.1 ont été appliquées aux algorithmes CS et MG-L et fournissent toutes les deux de bons résultats en termes de convergence. Ceci montre que dans la mesure où la discontinuité est correctement décrite par ces opérateurs, les erreurs qu'ils introduisent inévitablement



a) maillages incompatibles



b) maillage compatible

Fig. 3.15: En haut, les neuf maillages incompatibles utilisés dans l'algorithme MG-L. En bas, un maillage équivalent utilisé pour le calcul GCP de référence.

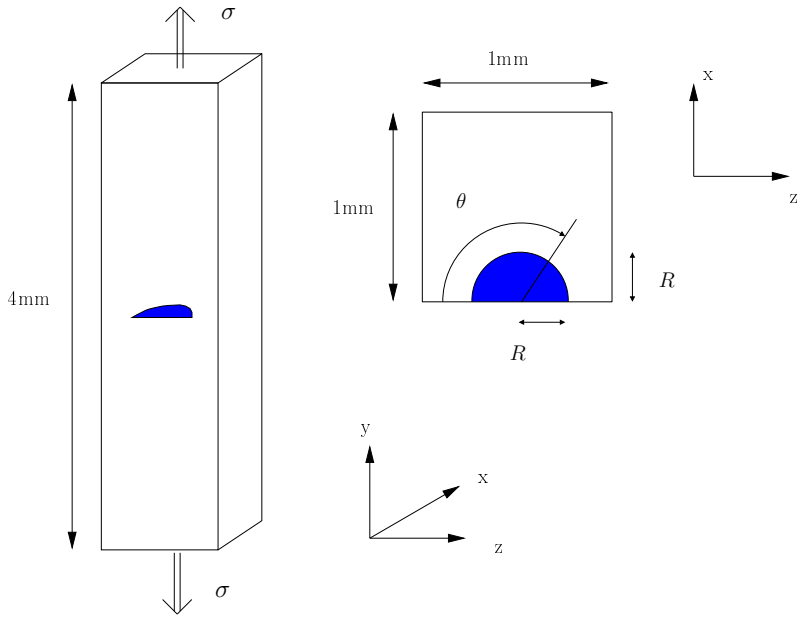


Fig. 3.16: Barreau fissuré en traction

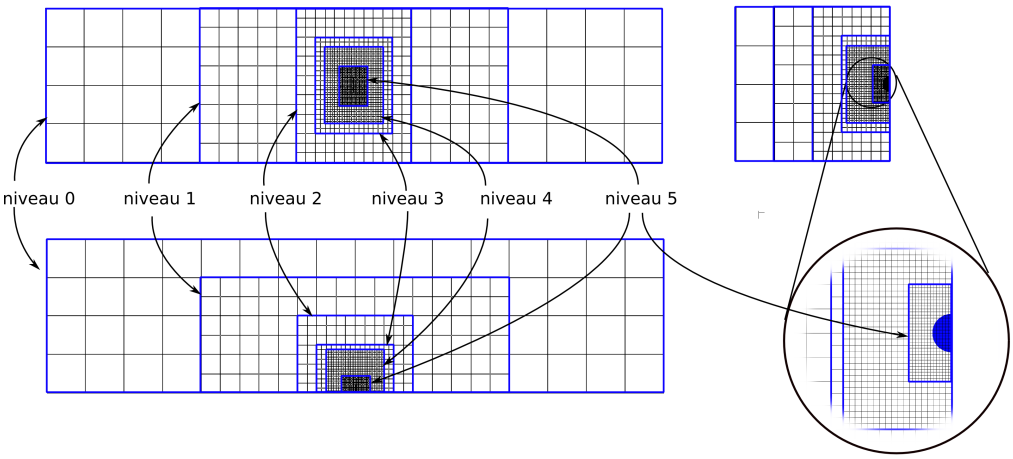


Fig. 3.17: Les six niveaux utilisés pour modéliser le problème de la fissure circulaire

de manière locale en pointe ou en front de fissure ne sont pas préjudiciables au bon fonctionnement des algorithmes multigrilles.

D'une manière générale, dans tous les problèmes traités par les techniques multigrilles (au delà du contexte restreint de la méthode X-FEM), le choix des paramètres

(a)

$n_e/n_{\max}$	nombre de cycles	h_{n_e}/R
2/5	6.6	1.25
3/5	6.6	0.62
4/5	7.2	0.31
5/5	10.5	0.16

(b)

n	taille du problème	nombre d'itérations de GCP
0	1200	194
1	2430	35
2	4632	35
3	8892	35
4	39276	35
5	57186	35

TAB. 3.8: Nombre de cycles multigrille à convergence ($\varepsilon = 10^{-8}$) en fonction du premier niveau d'enrichissement (a) et nombre d'itérations effectuées sur chaque niveau avec $n_e = 2$ (b)

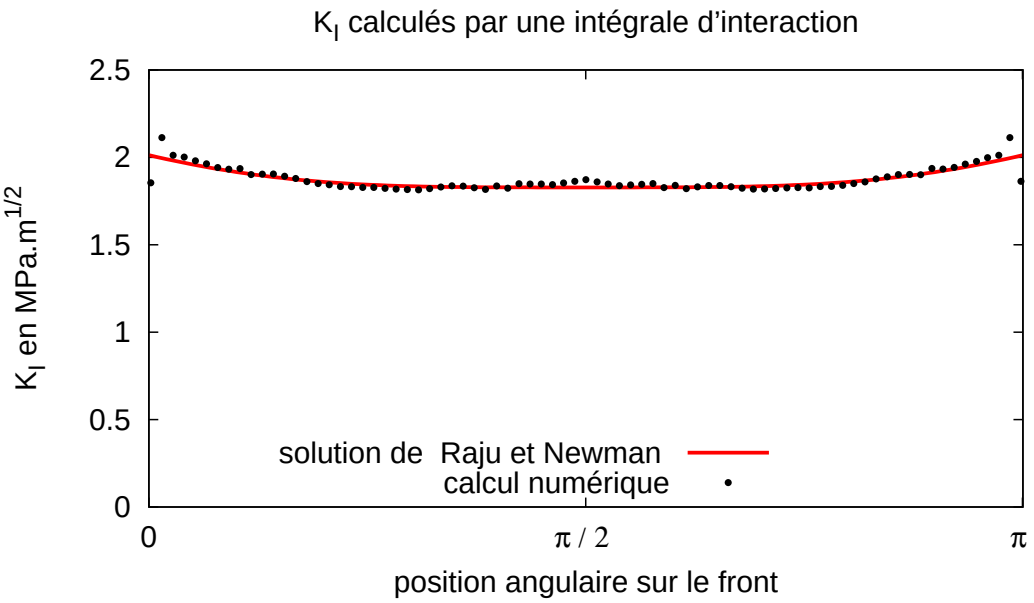


FIG. 3.18: Facteurs K_I calculés le long du front et solution semi-analytique de Raju et Newman [NEW 84]

de calcul est important et parfois délicat. Nous avons vu que des valeurs de ν_1 et ν_2 relativement faibles peuvent être choisies. Nous avons également mis en évidence sur le premier exemple que le choix de γ peut avoir une grande influence sur le calcul et

notamment sur le nombre total de cycles multigrille. Notre expérience nous a montré que le choix optimal de ces paramètres dépend beaucoup de la nature du problème à résoudre et qu'il est difficile de les déterminer *a priori*. Cependant, quelles que soient leurs valeurs, le comportement de l'algorithme reste tout à fait satisfaisant et demeure compétitif par rapport à un gradient conjugué (pour les problèmes de grande taille en tout cas). Aussi, dans la plupart des calculs, les valeurs $\gamma = 1$ et $\nu = 5$ (ou $\nu = 3$ et $\nu_2 = 2$ pour le CS) sont adoptées.

Appliquée aux cas tests de la section 3.3, la démarche d'analyse descendante évoquée dans le chapitre précédent prend tout son sens. À partir d'un maillage initialement non prévu pour prendre un compte une particularité structurale localisée, des "patchs" raffinés sont appliqués pour prendre en compte le défaut. Par ailleurs, la représentation de la fissure par la méthode X-FEM n'étant pas forcément opportune sur les échelles les plus grossières, une stratégie d'enrichissement multiéchelle a été mise en évidence. Elle consiste à n'enrichir l'approximation éléments finis qu'à partir d'un niveau de discrétisation où la taille de maille est de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique de la fissure. Le respect de cette "règle" conditionne fortement la convergence de la méthode.

La prochaine étape dans la démarche d'analyse de problèmes de fatigue concerne la propagation des fissures. Le chapitre suivant présente la manière de calculer les facteurs d'intensité des contraintes qui interviennent dans les lois de propagation. Nous y verrons également comment nous pouvons utiliser les fonctions de niveau dans un contexte multiéchelle localisé. Dans le chapitre 5, nous verrons que dans la mesure où le calcul est linéaire, la zone de raffinement peut évoluer entre deux pas de propagation en fonction de la progression de la fissure.

Chapitre 4

Propagation de fissures tridimensionnelles

Sommaire

4.1 Représentation multiéchelle d'une fissure par fonctions de niveau 92

4.1.1 Généralités sur les fonctions de niveau 92

4.1.2 Application à la description de fissures 94

4.1.3 Maillage auxiliaire et localisation 95

4.1.4 Propagation 97

4.2 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 3D 102

4.2.1 Calcul numérique des intégrales J et d'interaction 102

4.2.2 Choix du champ d'extension virtuelle et prise en compte des bords libres 106

4.2.3 Influence du domaine d'intégration 107

4.3 Conclusion 109

Dans les chapitres précédents, un certain nombre d'outils permettant de résoudre le problème de mécanique de référence (équations (1.1) à (1.6)) ont été décrits. Cependant, résoudre un problème de propagation de fissure requiert un certain nombre d'éléments supplémentaires.

À partir de la loi de propagation utilisée, il faut être capable de faire évoluer "numériquement" la géométrie de la fissure. Nous décrirons dans une première section la méthode des fonctions de niveau qui permet de faire cela. Nous verrons également comment nous pouvons l'adapter à notre contexte multiéchelle. D'un autre côté, les lois de propagation utilisées dans cette étude sont des lois de type Paris (1.42) qui font intervenir les facteurs d'intensité des contraintes. La manière de les calculer le long d'un front pour les problèmes tridimensionnels est abordée dans une seconde section. Les lois de propagation utilisées seront détaillées dans le chapitre 5 dédié à la comparaison des outils numériques développés avec des données expérimentales.

Notons que les étapes de calcul des facteurs d'intensité des contraintes et de propagation sont des étapes de post-traitement et les seules informations nécessaires sont les différents champs issus du calcul mécanique.

4.1 Représentation multiéchelle d'une fissure par fonctions de niveau

4.1.1 Généralités sur les fonctions de niveau

Initialement proposée par Sethian et Osher [OSH 88] pour répondre à des problèmes posés par diverses branches de la physique et des mathématiques appliquées, la méthode des fonctions de niveau (*level sets*) consiste en une représentation implicite d'une interface par un champ scalaire de distances signées défini sur l'ensemble du domaine. Les *level sets* présentent l'intérêt d'être régies par des lois d'évolution de type eulérienne qui sont tout à fait adaptées aux problèmes d'interface mobile et qui peuvent être traitées par des outils numériques robustes. On peut décrire mathématiquement une fonction de niveau $\phi(\underline{x})$ associée à une surface Γ comme ceci :

$$\phi(\underline{x}) = \text{signe}\left(\left(\underline{x} - \underline{x}_p\right).\underline{n}\right)\left|\underline{x} - \underline{x}_p\right| \tag{4.1}$$

où $\underline{x}$ désigne le point courant de l'espace et $\underline{x}_p$ est le point de Γ le plus proche de $\underline{x}$. $\underline{n}$ est le vecteur normal unitaire à la surface, suivant l'application son orientation peut être arbitraire. La fonction de niveau doit respecter les deux conditions suivantes :

$$\Gamma(t) = \{\underline{x}, \quad \phi(\underline{x}, t) = 0\} \tag{4.2}$$

$$||\underline{\nabla}\phi|| = 1 \tag{4.3}$$

L'expression (4.2) indique que la surface Γ est localisée par l'iso-0 du champ scalaire. L'expression (4.3) exprime que la fonction de niveau est un champ de distances, on dit alors qu'elle est initialisée à la distance signée. Nous verrons que cette relation

pourra être vérifiée *a posteriori* après les opérations de propagation pour vérifier que la propriété de distance signée est bien conservée.

Pour obtenir la loi d'évolution de la fonction de niveau, on peut partir de la relation (4.2) :

$$\underline{x}(t) \in \Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad \phi(\underline{x}(t), t) = 0 \tag{4.4}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient l'équation eulérienne d'évolution :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_\phi ||\underline{\nabla}\phi|| = 0 \tag{4.5}$$

$\underline{V}_\phi$ est un champ de vitesse défini sur tout le volume. Seule sa composante normale $V_\phi = \underline{V}_\phi.\underline{n}$ intervient dans la loi de propagation. On peut le comprendre en imaginant la fonction de niveau associée à un cercle et un champ de vitesses tangentielles : la fonction de niveau doit rester localement inchangée. Par ailleurs, la normale en tout point $\underline{x}$ à l'iso-surface $\phi(\underline{x})$ peut s'exprimer facilement par :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla}\phi}{||\underline{\nabla}\phi||} = \underline{\nabla}\phi \tag{4.6}$$

La réactualisation des fonctions de niveau au cours de leur éventuelle propagation consiste alors à discrétiser spatialement et temporellement l'équation (4.5). Un certain nombre d'études existe sur la résolution des équations de Hamilton-Jacobi qui sont des équations du type :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -H(\underline{x}, \phi, \underline{\nabla}\phi, ...) \tag{4.7}$$

et dont l'équation d'évolution fait partie. Concernant la discrétisation spatiale, la méthode de Godunov décrite dans [SET 99] fait intervenir un shéma en différences finies dit *upwind* (en regardant dans la direction du vent). Cette méthode très robuste propose de propager les informations en partant de l'interface Γ et en s'en éloignant. Ainsi, alors que l'expression de $\phi_{,x}$ dans un schéma classique de différences centrées s'écrit comme ceci au premier ordre :

$$\phi_{,x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \tag{4.8}$$

elle s'écrit dans un schéma *upwind* :

$$\phi_{,x} \approx \max\left(D_i^{+x}, 0\right) + \min\left(D_i^{-x}, 0\right) \tag{4.9}$$

où les opérateurs D_i^{+x} et D_i^{-x} sont définis par :

$$D_i^{+x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \qquad \text{et} \qquad D_i^{-x} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \tag{4.10}$$

Concernant la discrétisation temporelle, nous utilisons un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 également décrit dans [SET 99].

4.1.2 Application à la description de fissures

Les fonctions de niveau permettent de représenter et de faire évoluer dans le temps des surfaces non bornées. L'extension de cette méthode à la mécanique de la rupture nécessite donc un élément supplémentaire puisqu'une fissure est une surface bornée par le front. Dans [MOË 02, GRA 02], il a été proposé d'utiliser un jeu de deux fonctions de niveau pour modéliser la fissure. Une première, notée φ, est utilisée pour représenter la surface de discontinuité. La seconde, notée ψ, permet de modéliser le front de fissure qui est localisé par l'intersection de φ_0 et ψ_0.

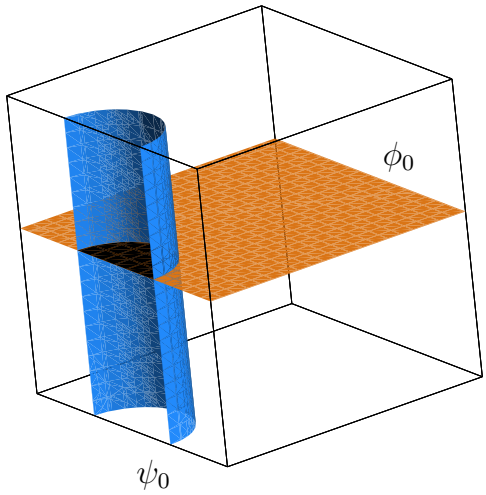


Fig. 4.1: Fissure semi-circulaire (en noir) et les iso-0 des deux fonctions de niveau associées

On peut également exploiter ces deux fonctions de niveau pour obtenir un repère et les coordonnées locales en front de fissure. Cela nécessite que les deux *level sets* soient localement orthogonales. En faisant intervenir l'expression (4.6) cela s'exprime par :

$$\underline{\nabla}\varphi(\underline{x}) \,.\, \underline{\nabla}\psi(\underline{x}) = 0 \tag{4.11}$$

Dans ces conditions, la base locale est facilement déterminée par :

$$\begin{array}{rcl} \underline{e}_1 & = & \underline{\nabla}\psi \\ \underline{e}_2 & = & \underline{\nabla}\varphi \\ \underline{e}_3 & = & \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 \end{array} \tag{4.12}$$

et les coordonnées locales en un point $\underline{x}$ se calculent par :

$$r = \sqrt{\varphi^2(\underline{x}) + \psi^2(\underline{x})} \tag{4.13}$$

$$\theta = \arctan(\varphi(\underline{x})/\psi(\underline{x})) \tag{4.14}$$

Les fonctions d'enrichissement sont donc faciles à construire. Nous verrons également dans la section 4.2 que ces informations sont exploitables dans le post-traitement et notamment pour construire un champ d'extension virtuelle permettant de calculer les facteurs d'intensité par une méthode intégrale.

Initialement, les deux fonctions de niveau ne vérifient pas nécessairement les relations d'orthogonalité et de distance signée. Il convient alors de les actualiser sans toutefois modifier la position de la fissure (φ_0) et du front ($\varphi_0 \cap \psi_0$). L'opération d'orthogonalisation de ψ par rapport à φ consiste à resoudre l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \text{signe}(\varphi)\underline{\nabla}\varphi.\underline{\nabla}\psi = 0 \tag{4.15}$$

où τ est une variable de temps virtuelle. À l'état stationnaire, la propriété (4.11) est vérifiée. Le terme signe(φ) permet, dans le cas où un schéma *upwind* est utilisé, de préserver la position du front de fissure. Dans la pratique la fonction signe est délicate à utiliser car elle est discontinue et des problèmes numériques peuvent modifier la position de l'iso-0. Des solutions ont été proposées par Osher [PEN 99] et Prabel [PRA 07] pour corriger ce problème en utilisant une fonction plus régulière.

De manière très similaire, l'opération de réinitialisation consiste à résoudre jusqu'à l'état stationnaire l'équation suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \text{signe}(\psi)\left(||\underline{\nabla}\psi|| - 1\right) = 0 \tag{4.16}$$

On constate également qu'à convergence, la propriété de distance signée (4.3) est vérifiée.

Remarque 8 *Avoir deux fonctions de niveau à la fois orthogonales et initialisées n'est possible que si la fissure est plane. Duflot [DUF 06] a étudié l'influence des erreurs commises dans le cas bi-dimensionnel où la fissure est courbe. Dans la pratique, on préfère généralement privilégier la propriété d'orthogonalité à celle de distance signée.*

4.1.3 Maillage auxiliaire et localisation

Le moyen le plus direct de discrétiser les fonctions de niveau est d'utiliser le maillage de la structure. Ceci est très simple à implanter dans un code de calcul éléments finis : sa structure permet de facilement interpoler les valeurs des *level sets* en un point quelconque (les points de Gauss par exemple), et très peu de ressources mémoires supplémentaires sont requises. Cela engendre néanmoins quelques difficultés car si le maillage utilisé est non structuré, la méthode des différences finies ne peut plus être utilisée pour faire propager les fonctions de niveau. Comme alternative, on peut par exemple utiliser des méthodes de Petrov-Galerkin pour intégrer l'équation (4.7) [GRA 02]. Valance [VAL 07b] propose également une formulation variationnelle permettant d'effectuer les opérations de propagation, de

réinitialisation, etc. D'autres alternatives existent, mais conduisent en général à des algorithmes relativement complexes. Dans notre contexte multigrille, une difficulté supplémentaire apparaît car nous ne souhaitons pas définir des *level sets* différentes sur tous les niveaux. En effet il faudrait faire propager chaque paire de fonctions de niveau indépendamment sur chaque grille ce qui conduirait à des géométries de fissures différentes du fait des approximations numériques.

Pour contourner ces difficultés, nous avons adopté une stratégie très simple déjà utilisée par Prabel [PRA 06] en deux dimensions. Elle consiste à définir les fonctions de niveau sur un unique maillage auxiliaire totalement indépendant du maillage de la structure. Si ce dernier est non structuré rien n'interdit d'utiliser un maillage auxiliaire structuré permettant d'utiliser les très robustes algorithmes différences finies évoqués plus haut. Les fonctions de niveau étant des champs de distances signées, ils sont très faciles à projeter sur un autre maillage. Toutes les informations requises lors du pré-traitement du calcul mécanique (définition des enrichissements, etc) ou du post-traitement (définition d'un repère local pour le calcul des K_i, etc) sont directement interpolées sur les maillages structure (en multigrille) à l'aide des fonctions de forme du maillage auxiliaire. Ceci présente un autre avantage important dans le contexte multiéchelle. Si les fissures sont très localisées, il n'y a aucun besoin de définir les fonctions de niveau sur l'ensemble de la structure et le maillage *level set* peut lui aussi être localisé. Ceci peut conduire, suivant les cas, à des gains de mémoire et de temps de calcul considérables.

Cette stratégie est illustrée par la figure 4.2. Les problèmes mécaniques et géométriques sont découplés. Les techniques multigrilles permettent de résoudre le premier et les algorithmes différences finies des sections 4.1.1 et 4.1.2 servent à résoudre le second. Le passage des informations géométriques se fait, nous l'avons évoqué, par une projection des deux champs scalaires sur les maillages de la structure. Le passage inverse, qui permet de remonter au problème géométrique les informations issues du calcul de mécanique (les facteurs d'intensité des contraintes le plus souvent) fait l'objet de la sous-section suivante.

Le cas de la fissure semi-circulaire dans un barreau en traction (section 3.3.2) est illustré par la figure 4.3. La fissure étant très petite par rapport à l'ensemble de la structure, le maillage auxiliaire support des fonctions de niveau est localisé. Il faut simplement faire attention à ce que les *level sets* soient définies sur les zones enrichies de chacunes des grilles. Ici par exemple les niveaux 0 et 1 ne peuvent pas être enrichis. Il faut également faire attention à ce que cette zone de définition couvre dès le départ la zone où la fissure est susceptible de s'étendre. L'expérience montre qu'un maillage auxiliaire ayant un degré de discrétisation équivalent à celui du maillage structure le plus fin est satisfaisant. Avoir un maillage auxiliaire plus grossier détériore la qualité de la représentation géométrique vis-à-vis de ce que le maillage de la structure est capable de prendre en compte. En revanche avoir une discrétisation plus fine n'apporte pas grand chose car en tout état de cause, le maillage de la structure joue un rôle de filtre en espace. Notons également que le

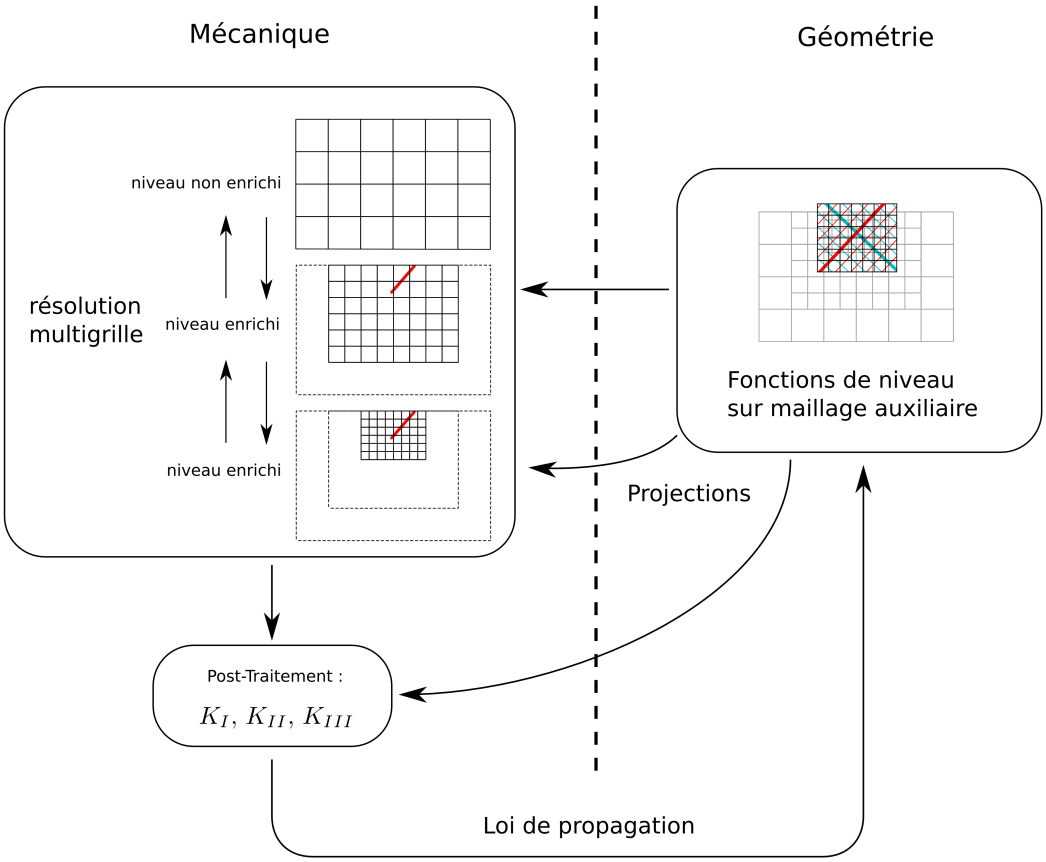


Fig. 4.2: Fonctions de niveau discrétisées sur un maillage auxiliaire

maillage auxiliaire est découplé du maillage structure et peut en être déphasé par exemple ou sortir du domaine de la structure.

4.1.4 Propagation

Dans la section 1.1.6, nous avons indiqué que le modèle de propagation tridimensionnel adopté dans cette étude consiste à appliquer la théorie bidimensionnelle dans les plans orthogonaux au front. La loi de propagation nous donne alors pour chaque point du front $P(s)$ d'abscisse s une avancée $a(s)$ et un angle de propagation $\theta(s)$ dans les plans orthogonaux, définissant ainsi une extension de surface de la fissure. Bien entendu, dans la pratique, seules les valeurs en un nombre limité de points P_f sont calculées. Le problème consiste alors à traiter ces informations discrètes de manière à faire évoluer les deux fonctions de niveau φ et ψ.

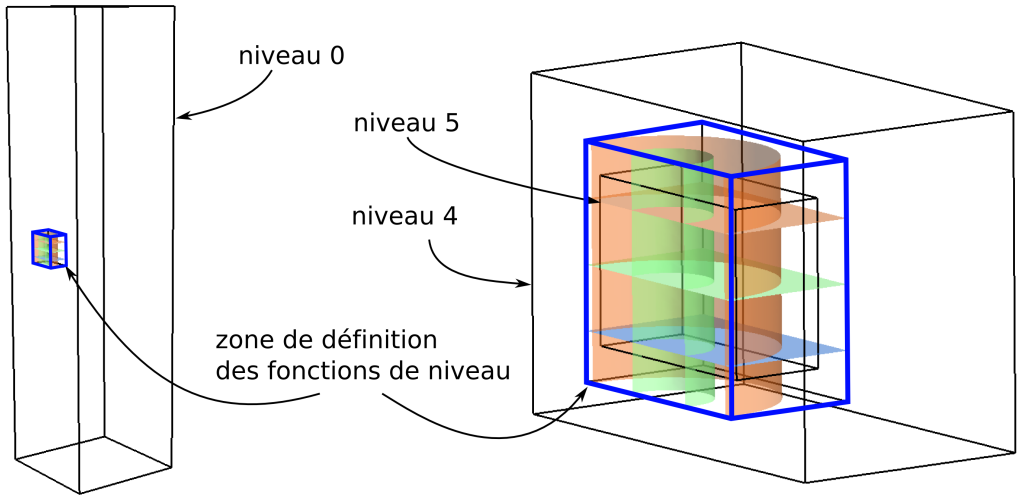


Fig. 4.3: Définition locale des fonctions de niveau sur un maillage auxiliaire

La vitesse de propagation est décomposée suivant les directions normales aux deux fonctions de niveau :

$$\underline{V} = V_\varphi \underline{n}_\varphi + V_\psi \underline{n}_\psi \tag{4.17}$$

de telle sorte qu'en chaque point P_f du front, les vitesses relatives à chaque fonction de niveau soient définies. L'équation (4.5) relative à l'évolution d'une fonction de niveau fait intervenir un champ de vitesse scalaire V_ϕ défini sur tout le volume. L'extension des vitesses connues sur les points P_f à l'ensemble du domaine nécessite trois étapes successives :

1. l'extension des informations des points du front aux noeuds du maillage auxiliaire voisins
2. l'extension des deux champs de vitesse des noeuds voisins du front à l'ensemble des noeuds
3. la modification du champ de vitesse relatif à φ afin que la géométrie de la fissure existante ne soit pas modifiée.

On peut montrer que, si le champ de vitesse V_ϕ est constant le long des normales aux iso-surfaces, l'équation (4.5) conserve la propriété de distance signée [SET 99]. Ceci se traduit par l'expression suivante :

$$\underline{\nabla} V_\phi . \underline{\nabla} \phi = 0 \tag{4.18}$$

La première étape d'extension des vitesses consiste à étendre les valeurs V_φ et V_ϕ aux noeuds du maillage auxiliaire les plus proches du front (points P_n). En pratique, ce sont les noeuds appartenant aux éléments traversés par la front. Afin de minimiser les erreurs, nous proposons de déterminer les points P_f où seront calculés les facteurs

d'intensité des contraintes de manière à tirer partie de la relation (4.18). Si les points P_f sont les projections orthogonales des points P_n sur le front (figure 4.5.a), on respecte (4.18) en écrivant (figure 4.5.b) :

$$\begin{array}{rcl} V_\varphi(P_n) & = & V_\varphi(P_f) \\ V_\psi(P_n) & = & V_\psi(P_f) \end{array} \tag{4.19}$$

Si les iso-surfaces de la fonction de niveau φ sont des plans, ψ peut être à la fois orthogonale à φ et être un champ de distances signées. Dans ce cas, la base $(\underline{n}_\varphi, \underline{n}_\psi)$ est orthonormée et la détermination des points P_f peut se faire de la manière suivante :

$$\underline{P_nP_f} = -\varphi(P_n)\underline{n}_\varphi(P_n) - \psi(P_n)\underline{n}_\psi(P_n) \tag{4.20}$$

Malheureusement dans le cas général, la base $(\underline{n}_\varphi, \underline{n}_\psi)$ n'est pas orthonormée (voir la remarque 8 page 95). La figure 4.6 illustre comment on peut dans ce cas déterminer itérativement le point P_f en calculant :

$$\begin{array}{rcl} \underline{P_nP_1} & = & -\psi(P_n)\underline{n}_\psi(P_n) \\ \underline{P_1P_2} & = & -\varphi(P_1)\underline{n}_\varphi(P_1) \\ & \vdots & \\ \underline{P_iP_f} & = & -\varphi(P_i)\underline{n}_\varphi(P_i) \end{array} \tag{4.21}$$

Le calcul s'arrête lorsque la distance du point déterminé au front est suffisamment petite :

$$\sqrt{\varphi(P_i)^2 + \psi(P_i)^2} < \epsilon \tag{4.22}$$

Ce processus itératif garantit que le point P_f ainsi déterminé est placé sur les surfaces iso-0 de φ et de ψ à l'erreur de discrétisation près. Il nécessite très peu d'itérations et permet d'obtenir une précision suffisante sur la position des points du front. Ceci a un impact non négligeable sur la précision du calcul des facteurs d'intensité des contraintes (voir la section suivante). La figure 4.4 montre le résultat sur une fissure s'étant propagé en mode mixte. Les noeuds des éléments traversés par le front sont représentés et un lien (trait noir) montre leur projection sur le front.

L'équation (4.18) est très similaire à la propriété (4.11) d'orthogonalité des fonctions de niveau φ et ψ. Aussi la résolution d'équations similaires à l'équation d'orthogonalisation (4.15) avec un schéma *upwind* permet-elle d'étendre les informations disponibles près du front à l'ensemble du volume de définition des deux fonctions de niveau. Dans [GRA 02], Gravouil propose alors de résoudre les deux ensembles d'équations suivants pour étendre V_φ et V_ψ respectivement :

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} + \text{signe}(\varphi)\underline{\nabla}\varphi.\underline{\nabla}V_\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} + \text{signe}(\psi)\underline{\nabla}\psi.\underline{\nabla}V_\varphi = 0 \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial V_\psi}{\partial \tau} + \text{signe}(\psi)\underline{\nabla}\psi.\underline{\nabla}V_\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_\psi}{\partial \tau} + \text{signe}(\varphi)\underline{\nabla}\varphi.\underline{\nabla}V_\psi = 0 \tag{4.24}$$

Cette extension est illustrée sur la figure 4.7 en deux dimensions. On observe que le champ V_φ ainsi défini modifie tout le champ scalaire et notamment la position de

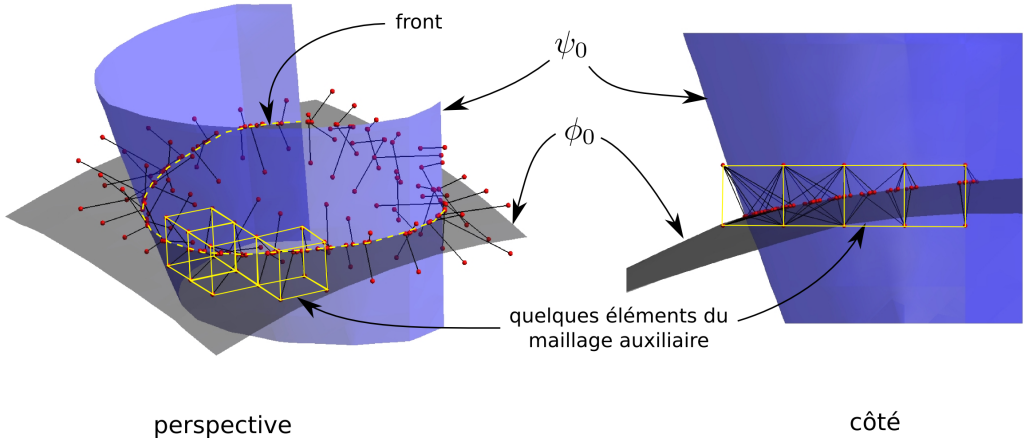


Fig. 4.4: Noeuds des éléments traversés par le front ainsi que leur projection sur celui-ci.

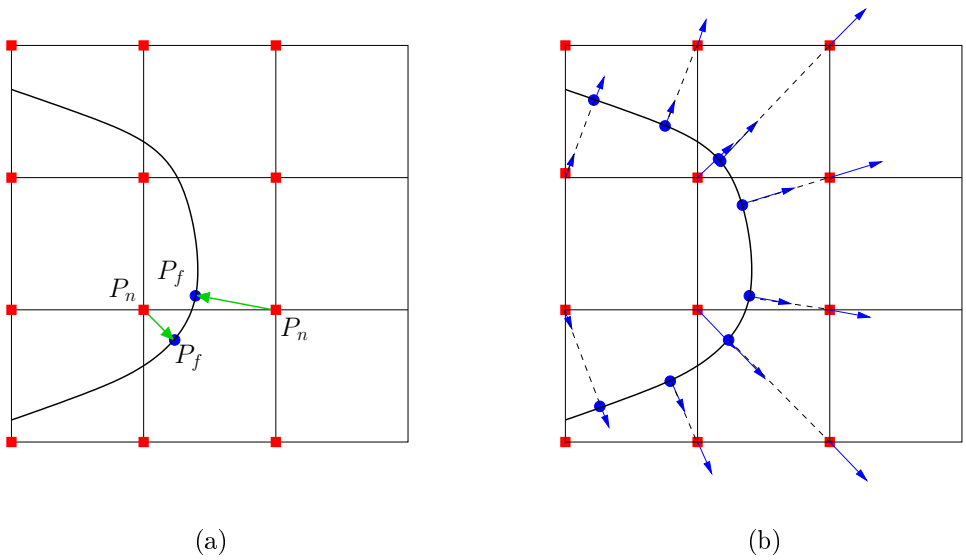


Fig. 4.5: (a) Détermination des points P_f (ronds bleus) à partir des noeuds P_n (carrés rouges). (b) Extension immédiate des vitesses calculées aux points P_f vers les points P_n selon la relation (4.19).

la fissure. Toujours selon [GRA 02] et pour un pas de temps dt, il convient alors de modifier ce champ de vitesse de la façon suivante :

$$\overline{V}_\varphi = V_\varphi H(\psi) \frac{\psi}{V_\psi dt} \tag{4.25}$$

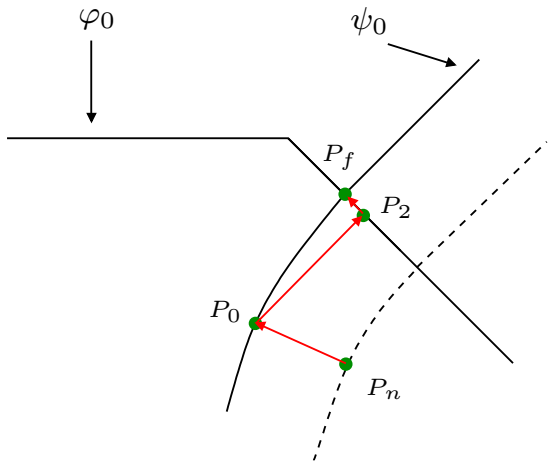
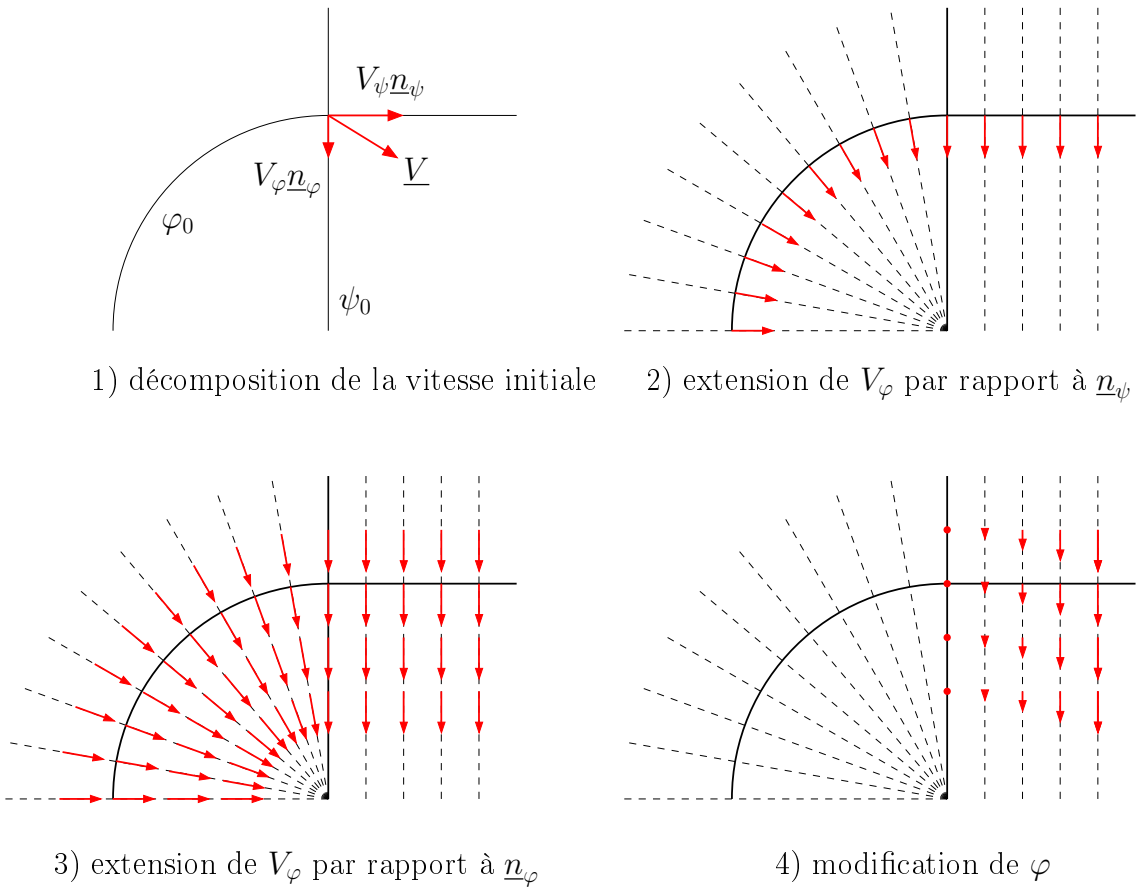


Fig. 4.6: Détermination itérative de la projection orthogonale d'un noeud sur le front

où H est la fonction de Heaviside. Cette modification permet de ne pas modifier la *level set* φ dans la région déjà fissurée ($\psi < 0$). Par ailleurs, le terme $\psi/V_\psi dt$ proportionnel à ψ permet d'obtenir une extension rectiligne de la fissure dans les directions orthogonales sans modifier la nouvelle position du front. Cela est également illustré sur la figure 4.4. Après avoir étendu les deux champs de vitesses, il faut résoudre l'équation de propagation (4.5) pour φ et ψ, réinitialiser ces deux fonctions de niveau à la distance signée (équation (4.16)) et orthogonaliser ψ par rapport à φ (équation 4.15). La figure 4.8 est un exemple de propagation en mode mixte. Un chargement de cisaillement suivant la direction x a été appliqué à l'éprouvette de la figure 3.16 page 87 et neuf pas de propagation ont été calculé à partir d'une loi de Paris. Les fonctions de niveau ainsi que les fissures correspondantes sont représentées pour le premier et le dernier pas temps.

L'ensemble des méthodes qui viennent d'être décrites permettent, à partir des informations relatives à la vitesse de propagation du front, de faire évoluer la géométrie de la fissure de manière robuste. Le découplage des problèmes mécaniques et géométriques permet non seulement de séparer les difficutés liées à leur résolution mais s'intègre aussi naturellement dans le contexte multiéchelle/localisation de cette étude. Dans la section suivante, nous nous intéressons au calcul des facteurs d'intensité des contraintes qui sont les quantités essentielles intervenant dans les lois de propagation que nous allons utiliser.



1) décomposition de la vitesse initiale

2) extension de V_φ par rapport à $\underline{n}_\psi$

3) extension de V_φ par rapport à $\underline{n}_\varphi$

4) modification de φ

Fig. 4.7: Extension du champ de vitesse V_φ au volume

4.2 Calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 3D

Dans cette section, nous nous intéressons au calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes par le biais des intégrales indépendantes du contour présentées dans le chapitre 1.

4.2.1 Calcul numérique des intégrales J et d'interaction

Considérons une fissure tridimensionnelle. Au point du front O d'abscisse s, la forme générale des intégrales de contour est [GOS 98] :

$$L(s) = \lim_{\Gamma \to 0} a_l(s) \int_{\Gamma(s)} P_{lj} n_j \, d\Gamma \tag{4.26}$$

où $\Gamma(s)$ est un contour dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ défini comme dans la section 1.1.5 et $\underline{n}$ est sa normale extérieure. Le vecteur $\underline{a}$ est défini par $\underline{a} = \delta l \underline{e}_1$ où δl est appelée

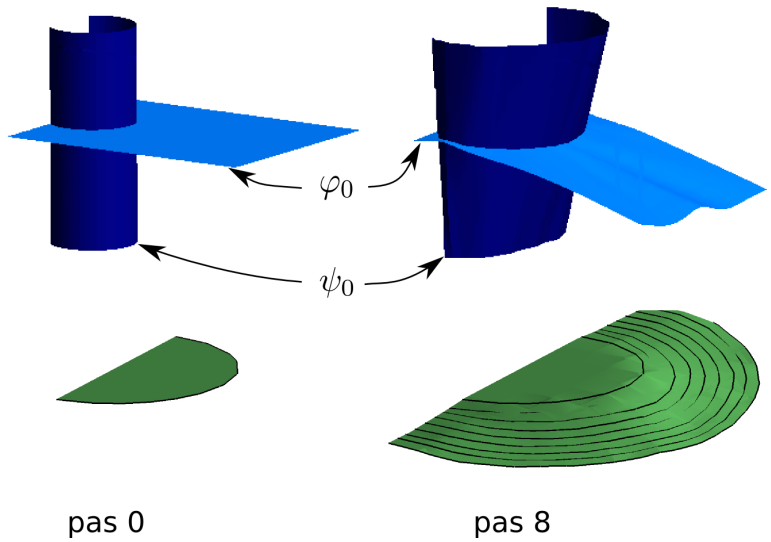


Fig. 4.8: Propagation en mode mixte. les surfaces φ_0 et ψ_0 ainsi que les fissures correspondantes sont représentées pour les pas 0 et 8. Les fronts successifs pour chacun des 9 pas de calcul sont représentés par des lignes noires sur la fissure en bas à droite.

l'extension virtuelle de la fissure. Si $\delta l(s) = 1$ et si la fissure est rectiligne (dans le plan de Γ), on retrouve les expressions des intégrales J et d'interaction selon le choix du tenseur $\underline{\underline{P}}$:

$$\begin{aligned} P_{ij} = P_{ij}^{J} = W\delta_{ij} - u_{l,i}\sigma_{lj} & \quad \Rightarrow \quad L(s) = J(s) \\ P_{ij} = P_{ij}^{\text{aux}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{kl}\varepsilon_{kl}^{\text{aux}} + \sigma_{kl}^{\text{aux}}\varepsilon_{kl}\right)\delta_{ij} - u_{l,i}^{\text{aux}}\sigma_{lj} - u_{l,i}\sigma_{lj}^{\text{aux}} & \quad \Rightarrow \quad L(s) = I(s) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Dans le cas où la fissure possède une forme quelconque, et notamment si elle est non plane, faire tendre le contour d'intégration vers le point O permet de se rapprocher des conditions de fissure rectiligne pour lesquelles ces deux intégrales ont été developpées dans la section 1.1.5.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'intégrale de contour (4.26) est délicate à calculer avec sufisamment de précision. En revanche, les intégrales de domaine (de surface en 2D ou de volume en 3D) permettent d'atteindre à moindre coût une précision plus élevée. On définit alors une nouvelle intégrale curviligne $\overline{L}$ définie sur une partie du front C [GOS 98, GOS 02, DOL 02, RAJ 00] :

$$\overline{L} = \int_C L(s)\delta l(s)\, ds \tag{4.28}$$

Afin de calculer $\overline{L}$, la première étape consiste à définir une surface S_i en balayant

orthogonalement le contour Γ le long de la courbe C. On peut alors écrire :

$$\overline{L} = \lim_{S_i \to 0} \int_{S_i} P_{1j} n_j \delta l \, dS \tag{4.29}$$

La seconde étape consiste à définir un domaine tubulaire $\mathcal{V}$ limité par S_i à l'intérieur, par S_e à l'extérieur, par S_g et S_d aux extrémités et par les surfaces de la fissure S_+ et S_- (voir figure 4.9.a). La normale unitaire extérieure à ce volume est notée $\underline{m}$.

Nous imposons maintenant à l'extension virtuelle de la fissure (définie sur le front), $\delta l(s)$, d'être nulle sur la frontière de C et en dehors. Nous introduisons également le champ vectoriel d'extension virtuelle $\underline{q}$ vérifiant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \underline{q} = \delta l(s) \underline{e}_1(s) & \text{sur } S_i \\ \underline{q} = 0 & \text{sur } S_e \\ \underline{q} = 0 & \text{sur } S_g \cup S_d \\ \underline{q}.\underline{m} = 0 & \text{sur } S_+ \cup S_- \end{cases} \tag{4.30}$$

On définit maintenant H, l'intégrale de volume suivante :

$$H = \int_{\mathcal{V}} P_{lj,j} q_l \, dV \tag{4.31}$$

En intégrant H par parties et en utilisant le théorème de la divergence, nous obtenons la relation suivante :

$$H = \int_{\partial\mathcal{V}} q_l P_{lj} m_j \, dS - \int_{\mathcal{V}} P_{lj} q_{l,j} \, dV \tag{4.32}$$

Du fait que $\underline{q}$ soit nul sur $S_e \cup S_g \cup S_d$, le développement de l'intégrale de surface dans (4.32) se simplifie :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} q_l P_{lj} m_j \, dS = \int_{S_i} q_l P_{lj} m_j \, dS + \int_{S_+ \cup S_-} q_l P_{lj} m_j \, dS \tag{4.33}$$

Par ailleurs, si P est le tenseur de Eshelby et que les lèvres de la fissure sont libres, le terme $\sigma_{lj} m_j$ s'annule sur $S_+ \cup S_-$. Par ailleurs, le champ d'extension virtuelle étant tangent aux lèvres de la fissure par construction, le terme $W q_l m_j \delta_{lj}$ s'y annule également de telle sorte que

$$\int_{S_+ \cup S_-} q_l P^J_{lj} m_j \, dS = 0 \tag{4.34}$$

Le raisonnement précédent s'applique également si $P = P^{\text{aux}}$ sous certaines conditions relatives aux champs auxiliaires. En toute rigueur ces champs, issus des solutions analytiques en modes plan et anti-plan, sont obtenus pour une fissure rectiligne et sont donc développés dans la base fixe dans chaque plan normal $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (figure 4.10.a). En suivant les préconisations de [MOË 02], nous choisissons d'exprimer

ces champs auxiliaires dans la base $(\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \underline{\hat{e}}_3)$. Cette base locale est conforme à la géométrie de la fissure (figure 4.10.b) et se construit naturellement à partir du formalisme des fonctions de niveau et des relations (4.12). De cette manière, les mêmes simplifications s'appliquent sur les faces de la fissure et la relation (4.34) se vérifie aussi si $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^{\text{aux}}$. Lorsque l'on fait tendre S_i vers 0 (vers l'arc C), le volume $\mathcal{V}$ est appelé $\mathcal{V}_0$. En notant que $\underline{n} = -\underline{m}$ sur S_i, on identifie alors $\overline{L}$ à partir de l'expression (4.32) :

$$\overline{L} = -\int_{\mathcal{V}_0} P_{lj,j} q_l \, dV - \int_{\mathcal{V}_0} P_{lj} q_{l,j} \, dV \tag{4.35}$$

La dernière étape permettant de calculer l'intégrale d'interaction est de faire l'hypothèse que $L(s)$ est constante sur l'arc C. La relation (4.28) fournit alors l'expression suivante pour $L(s)$:

$$L(s) = \frac{\overline{L}}{\int_C \delta l(s) ds} \tag{4.36}$$

Rajaram *et al.* [RAJ 00] et d'autres avant eux ont envisagé une description continue de $L(s)$ sur le front. Cette approche ainsi que le lien qui la lie à la méthode de Gosz *et al.* [GOS 02] présentée ici sont détaillés dans l'annexe C.

Dans la suite de ce travail, c'est l'intégrale d'interaction qui sera utilisée par défaut. La possibilité de découpler les trois modes de sollicitation en font un outil plus général que l'intégrale J.

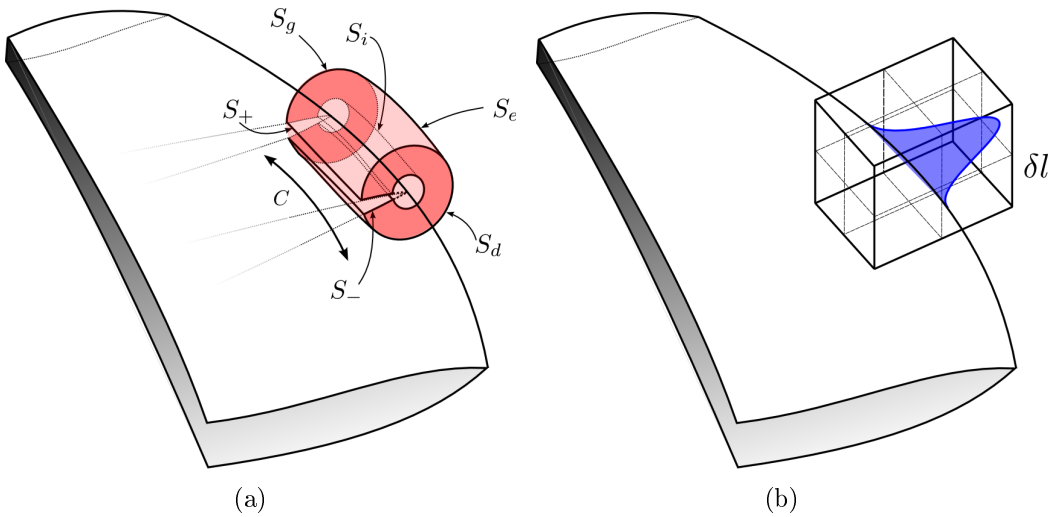


Fig. 4.9: Surfaces et volumes d'intégration (a) et extension virtuelle en $\cos^2$ (b)

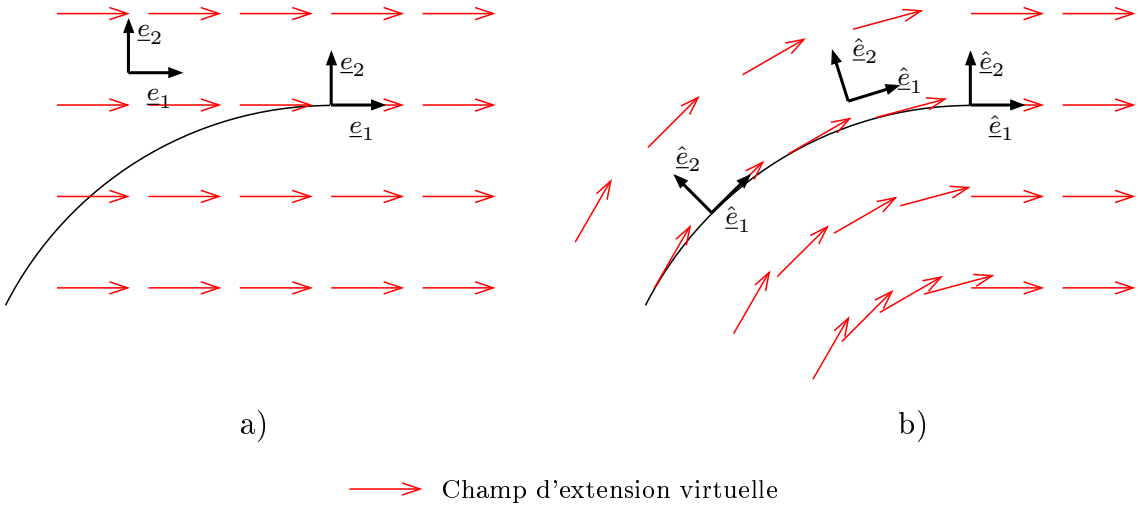


Fig. 4.10: Base locale fixe dans le plan orthogonal au front (a) et base locale conforme à la géométrie de la fissure (b). La construction du champ d'extension virtuelle s'appuie sur ces bases.

4.2.2 Choix du champ d'extension virtuelle et prise en compte des bords libres

L'intégrale d'interaction (ou l'intégrale J) s'exprime maintenant par une intégrale de volume faisant intervenir les champs numériques calculés, des champs auxiliaires et un champ d'extension virtuelle arbitraire mais vérifiant les contraintes (4.30). Concrètement, nous avons choisi de calculer ces intégrales sur un volume $\mathcal{V}_0$ parallélépipédique appelé "boîte". Cette boîte de taille $r_1 \times r_2 \times r_3$ (suivant les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) est maillée par huit hexaèdres indépendants du maillage de la structure (figure 4.9.b). Chacun d'entre eux est doté de 216 points d'intégration. L'extension virtuelle et le champ d'extension virtuelle suivent une loi en $\cos^2$:

$$\delta l = \cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_3}{r_3}) \tag{4.37}$$

$$\underline{q} = q\hat{\underline{e}}_1 = \cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{r_1})\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_2}{r_2})\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_3}{r_3})\hat{\underline{e}}_1 \tag{4.38}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées issues du formalisme des fonctions de niveau où pour un point P : $x_1 = \psi(P)$, $x_2 = \phi(P)$ et $x_3 = \underline{OP}.\hat{\underline{e}}_3$. De cette manière les conditions (4.30) sont respectées lorsque le parallélépipède est entièrement contenu dans le volume de la structure. Lorsque le volume $\mathcal{V}_0$ sort de la structure, cette définition ne convient plus (figure 4.11.a). Nous proposons alors de multiplier l'extension et le champ d'extension virtuelle par une fonction rampe valant 0 hors de la structure et atteignant linéairement la valeur 1 au centre du domaine d'intégration (voir la figure 4.11.b). Si la frontière est assimilable localement à un plan $(A, \underline{n})$, les quantités $\underline{\nabla} q$ et $\int_C \delta l(s) ds$ intervenant dans le calcul de $L(s)$ peuvent être calculées analytiquement.

La calcul de $\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{q}$ fait intervenir $\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{\hat{e}}_1$ qui peut être déterminé numériquement à partir des deux fonctions de niveau. Le détail de ces calculs est donné dans l'annexe A.

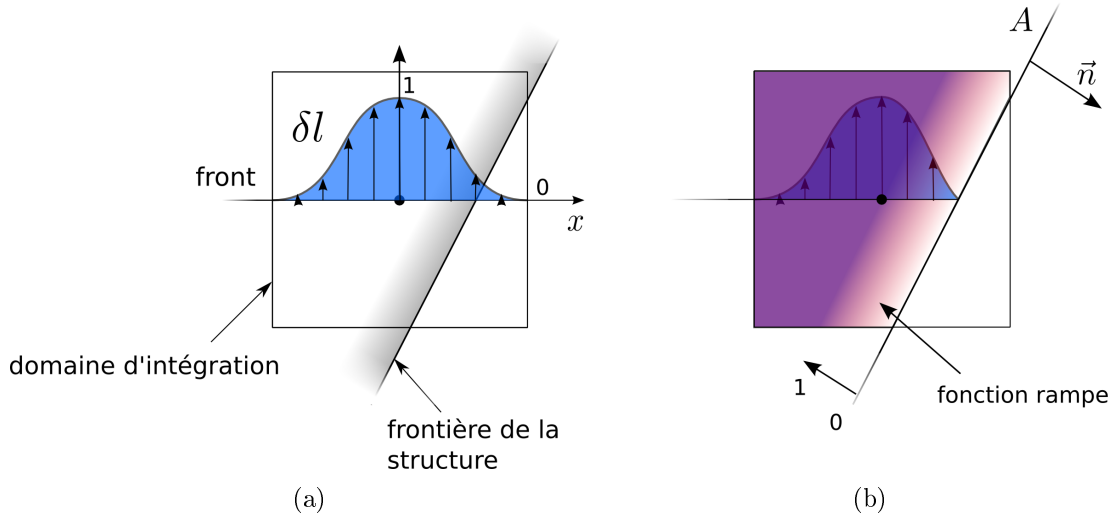


Fig. 4.11: Vue de dessus du domaine d'intégation, de la frontière de la structure et de l'extension virtuelle (a). Pour tenir compte de la frontière, nous multiplions δl et q par une fonction rampe (b).

Il faut noter que ce qui vient d'être proposé ne répond en aucun cas à la problématique des fissures débouchantes évoquées dans la section 1.1.6. À tout moment dans le calcul, la singularité est supposée être en $\sqrt{r}$, que ce soit dans les fonctions d'enrichissement ou dans les champs auxiliaires utilisés pour le calcul de l'intégrale d'interaction. Par ailleurs, ces champs auxiliaires sont issus de l'hypothèse de déformation plane et des erreurs liées à cette approximation peuvent persister. Néanmoins, dans la pratique, ces effets semblent être très localisés et ne seront pas pris en compte dans cette étude. Nous verrons par ailleurs dans le chapitre 5 que des sources d'erreurs bien plus importantes relatives aux lois de propagation existent. La prise en compte des bords libres dans la construction des champs d'extention virtuelle permet cependant de limiter les erreurs d'origine purement numérique comme en atteste la figure 4.12. Nous pouvons y observer que sans correction, le facteur K_I est sous-estimé à proximité des bords libres.

4.2.3 Influence du domaine d'intégration

Dans les problèmes à deux dimensions, l'intégrale L est théoriquement indépendante du contour et du domaine d'intégration choisis. En pratique, ce n'est bien entendu pas le cas car la qualité des champs numériques intervient. En trois dimensions, nous avons de plus introduit l'hypothèse d'invariance de $L(s)$ le long de

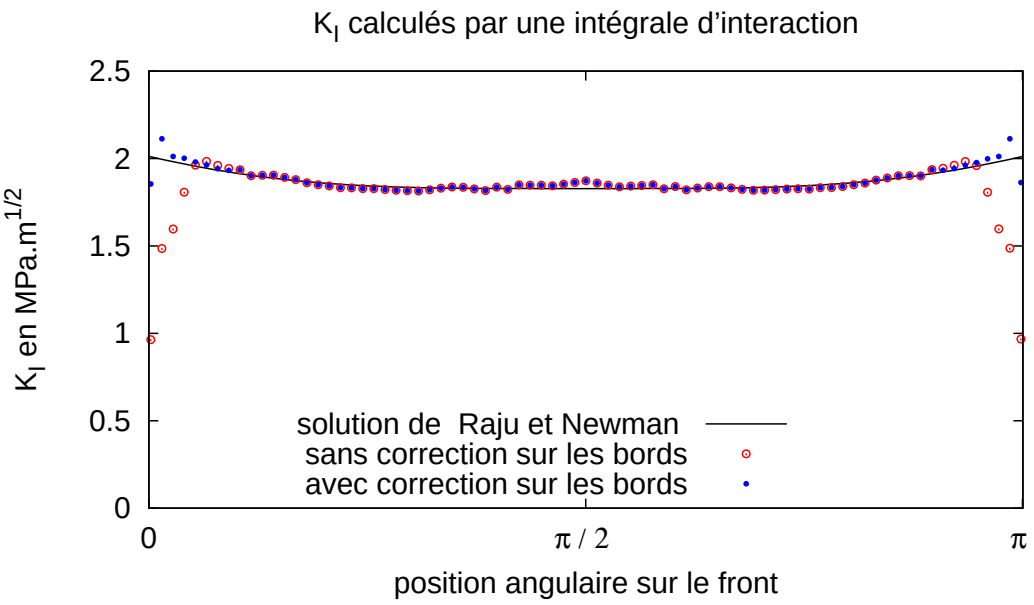


Fig. 4.12: Facteurs K_I calculés le long du front avec et sans prise en compte des bords libres. La solution semi-analytique de Raju et Newman est également représentée.

l'arc C. Pour ces différentes raisons, la taille du domaine d'intégration peut avoir une influence notable sur la qualité des résultats. Nous pouvons en étudier certains effets à partir de l'exemple du barreau fissuré pour lequel le facteur d'intensité des contraintes K_I a été calculé à partir de l'intégrale d'interaction ($L(s) = I(s)$) et avec des "boîtes" de différentes largeurs (direction $\underline{e}_3$). Les tailles de boîte sont exprimées en fonction de h, la longueur d'arête des éléments finis. Dans le contexte multigrille, le post-traitement se fait sur le niveau le plus fin. Dans les résultats présentés ici, 7 niveaux ont été utilisés de telle manière que h soit égal à $3.9\,10^{-3}$ mm. Le rayon de la fissure R étant de 0.05 mm, le rapport R/h vaut 12.8 environ. La figure 4.14 montre le facteur K_I obtenu à partir d'une intégrale d'interaction et avec des boîtes de tailles $3h \times 3h \times 1h$ d'une part et $3h \times 3h \times 3h$ d'autre part. Y sont également représentés à titre indicatif les contraintes de traction σ_{yy} (voir la figure 3.16) en différents points du plan d'extention de la fissure allant du front jusqu'à l'extrémité du domaine d'intégration (figure 4.13). On constate que le champ de contraintes est relativement fluctuant. Les fonctions de forme d'ordre 1 que nous utilisons engendrent une discontinuité des contraintes d'un élément à l'autre. Cet effet est amplifié du fait que les éléments finis ne sont pas compatibles avec la fissure, ce qui conduit à des

champs beaucoup moins réguliers que ceux obtenus avec des maillages rayonnants compatibles par exemple. Pour ces raisons, on observe effectivement qu'une boîte peu large (h, voir la fenêtre d'intégration sur la figure 4.14) est très sensible à ces variations et conduit à des solutions trop oscillantes bien qu'ayant une valeur moyenne proche de la solution. Ces oscillations peuvent être très préjudiciables en propagation par fatigue car elle peuvent être amplifiées en termes d'avancée dans la mesure où la loi de Paris (1.42) fait souvent intervenir des coefficients m compris entre 2 et 5 pour les métaux. De ce point de vue, les résultats obtenus avec une boîte plus large sont beaucoup plus satisfaisants car les erreurs des champs sont "moyennées" par l'intégration. En revanche, il ne faut pas choisir un domaine d'intégration trop large pour ne pas sortir du cadre de l'hypothèse d'invariance de $I(s)$ sur C. Ceci est intimement lié au rayon de courbure local du front de fissure dont la largeur de boîte doit dépendre. Le tableau 4.1 illustre l'erreur moyenne sur l'ensemble du front (révélatrice des oscillations) ainsi que l'erreur maximale locale commise en fonction de la largeur de boîte.

Il n'y a aucune méthode systématique à retirer de cet exemple, mais seulement des règles d'utilisation : il convient de choisir un domaine d'intégration suffisamment large pour s'affranchir des erreurs hautes fréquences des champs numériques. Cependant, la largeur de boîte doit rester relativement faible devant le rayon de courbure du front. On comprend qu'un calcul des facteurs d'intensité des contraintes optimal doit tenir compte des interactions entre les caractéristiques géométriques de la fissure, la taille des éléments finis et la taille du domaine d'intégration. Dans la pratique, nous adoptons des tailles de boîte de $3h \times 3h \times 3h$ ou $4h \times 4h \times 4h$ avec des tailles d'éléments telles que $R/h > 10$, R étant le rayon de courbure du front. On peut également envisager d'adapter la largeur du domaine d'intégration en fonction de la courbure locale que l'on peut calculer relativement facilement à l'aide des fonctions de niveau [SET 99].

taille de boîte	erreur moyenne	erreur maximale en un point
$3h \times 3h \times 1h$	2.6%	5.5%
$3h \times 3h \times 2h$	1.3%	3.8%
$3h \times 3h \times 3h$	0.8%	3.6%
$3h \times 3h \times 4h$	0.8%	3.5%

Tab. 4.1: Erreurs commises sur le calcul de K_I en fonction de la taille du domaine d'intégration.

4.3 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de décrire les méthodes de post-traitement que nous utilisons dans la simulation de propagation de fissure. Le calcul des facteurs

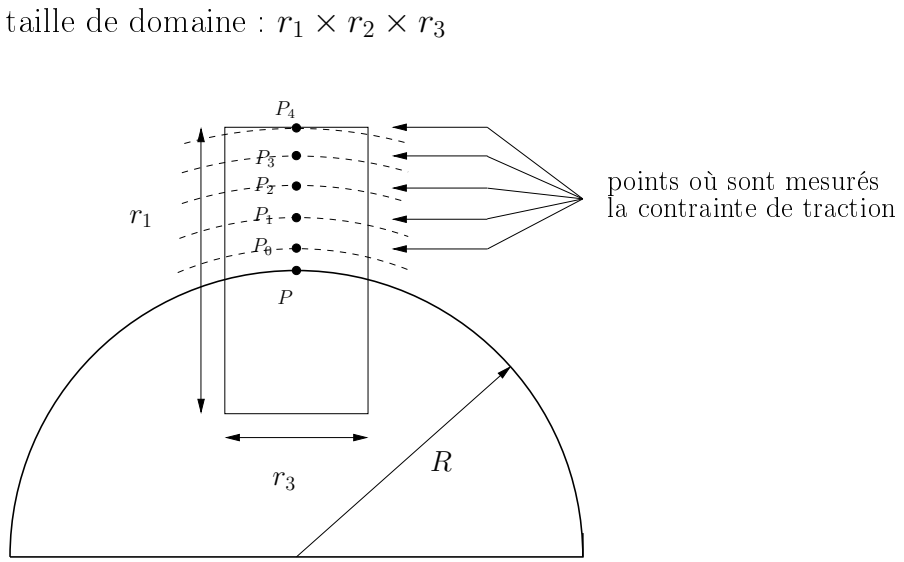


Fig. 4.13: Les points P_i sont les points où sont relevés les contraintes σ_{yy} tracées sur la figure 4.14.

d'intensité des contraintes à partir d'intégrales de domaine est une technique assez communément utilisée [GOS 02, RAJ 00]. Ces domaines sont souvent de forme parallélépipédique, ce qui permet d'utiliser la structure éléments finis présente dans les codes de calcul comme support d'intégration [MOË 02]. Ces intégrales sont très sensibles à la qualité des champs numériques qui sont assez fluctuants dans le voisinage du front de fissure. L'amélioration de ces champs nécessiterait une discrétisation adaptée, comme par exemple le maillage rayonnant souvent utilisé dans le cadre des éléments finis classiques. Or ce type de maillage n'est pas en accord avec la "philosophie" de la méthode X-FEM dont le principal intérêt est d'avoir une discrétisation totalement indépendante de la fissure. En choisissant judicieusement les paramètres de calcul et tout spécialement la taille du domaine d'intégration, il est cependant possible d'obtenir des résultats satisfaisants. Par ailleurs des améliorations ont permis de corriger certaines erreurs numériques en prenant en compte la présence des surfaces libres. On évite ainsi un retard de propagation causé par un calcul sous-évalué des facteurs d'intensité des contraintes près des bords. Ces améliorations ne prennent cependant pas en considération les difficultés théoriques rencontrées au niveau des vertex (voir chapitre 1). De plus, les champs auxiliaires utilisés dans le calcul de l'intégrale d'interaction ne tiennent pas compte de la nature triaxiale des champs, ce qui peut engendrer des erreurs, surtout près des surfaces libres. L'intégrale J qui ne fait pas intervenir de tels champs est de ce point de vue moins sensible à la nature tridimensionnelle du problème. Ces "lacunes" n'engendrent cependant que des erreurs supposées mineures et les résultats obtenus sont jugés satisfaisants. Nous

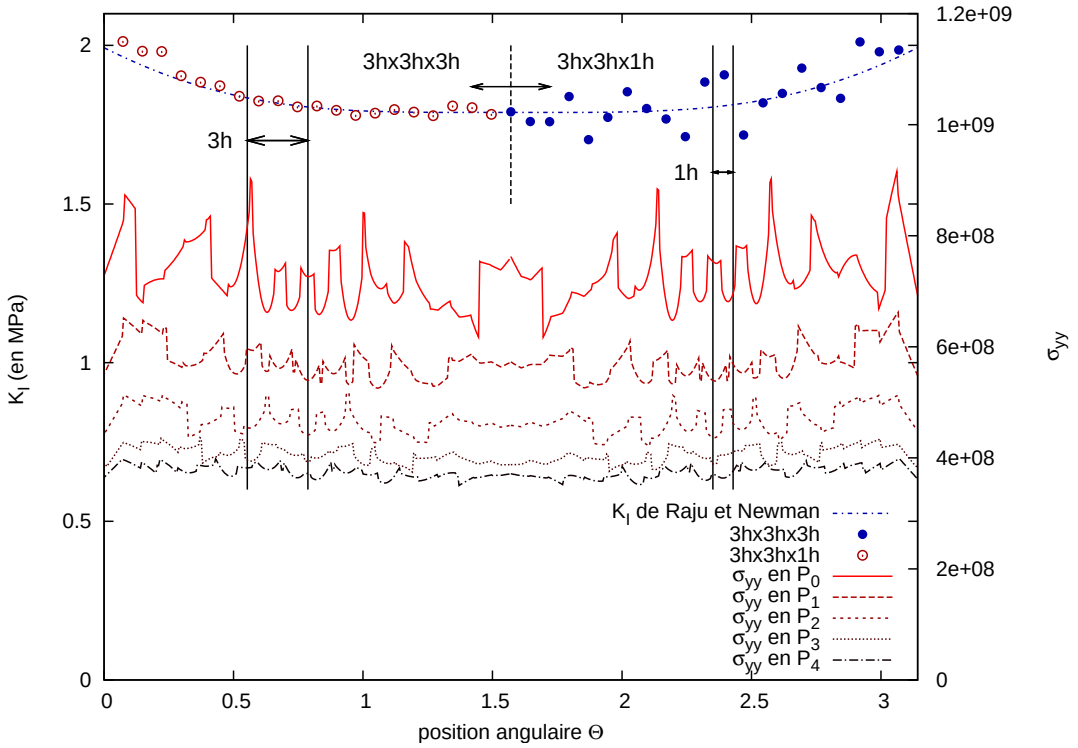


Fig. 4.14: Solutions numériques de K_I (intégrale d'interaction) pour deux largeurs de domaine d'intégration différents. La composante σ_{yy} des contraintes relevée en différents points devant le front (figure 4.13) est également représentée à titre indicatif. La "fenêtre" d'intégration pour chacune des largeurs de boîte est indiquée.

verrons d'ailleurs dans le chapitre suivant que d'autres sources d'incertitudes plus importantes interviennent dans les lois de propagation.

Ces facteurs d'intensité des contraintes sont ensuite utilisés dans les lois de propagation dont nous nous servons pour faire évoluer les fonctions de niveau. Des algorithmes différences finies très robustes et déjà éprouvés dans de nombreux domaines [OSH 88, SET 99] sont mis en œuvre afin de réaliser les différentes opérations nécessaires. Ceci est rendu possible par une séparation des problèmes mécaniques et géométriques. Ainsi, l'utilisation d'une discrétisation auxiliaire comme support des *level sets* s'avère être efficace. De plus, ce maillage auxiliaire s'intègre naturellement à la stratégie multigrille localisées proposée dans cette étude. L'interfaçage entre les données issues du post-traitement du problème de mécanique se fait très simplement en sélectionnant judicieusement les points où seront calculés les facteurs d'intensité des contraintes.

Ces différentes techniques sont finalement associées au sein du code calcul ELFE_3D afin de constituer un outil complet de simulation de propagation de fissures de fatigue. Un exemple concret sera fourni dans le chapitre suivant où les

résultats numériques seront confrontés à des données expérimentales.

Chapitre 5

Confrontation de la simulation à des données expérimentales

Sommaire

5.1 Dispositif expérimental 114
5.1.1 Microtomographie à rayonnement synchrotron 114
5.1.2 Matériau et machine de fatigue 115
5.2 Loi de propagation 3D et confrontation 119
5.2.1 Loi de Paris et phénomène de refermeture 119
5.2.2 Simulation de la propagation de 120 kcycles à 140 kcycles . . 120
5.3 Discussion 126

Un certain nombre d'outils permettant de résoudre les problèmes d'élasticité, de calculer les paramètres de fissuration et de faire évoluer la géométrie de la fissure ont été développés dans les chapitres précédents. Dans ce chapitre, nous allons les mettre en œuvre afin d'étudier un problème tridimensionnel de propagation de fissure par fatigue. Les résultats de simulation seront confrontés à des données expérimentales issues de techniques d'imagerie par microtomographie aux rayons X. Ces données sont fournies par l'équipe du professeur Jean-Yves Buffière du laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon. Cette collaboration s'inscrit plus largement dans le cadre du projet PROPAVANFIS soutenu par la fondation CETIM et regroupant les laboratoires suivants : le LaMCos, MATEIS et le LMT Cachan. Ce projet a pour objectifs de développer des techniques numériques et expérimentales pour l'étude de propagation tridimensionnelle de fissure sous chargement de fatigue.

Après une brève description du dispositif expérimental (microtomographie, machine de fatigue), les résultats seront confrontés et les lois de propagation utilisées seront discutées.

5.1 Dispositif expérimental

5.1.1 Microtomographie à rayonnement synchrotron

L'objectif du dispositif expérimental qui va être décrit est d'obtenir des informations précises sur la géométrie (tridimensionnelle) d'une fissure qui se propage par fatigue. La technique utilisée doit permettre d'obtenir ces informations à différentes étapes de la propagation et doit donc être non destructive et ne pas perturber le phénomène de fatigue.

Parmi les techniques expérimentales utilisées de manière courante, on peut mentionner les techniques indirectes comme les mesures de résistivité ou de complaisance, ou encore les méthodes magnéto-optiques [JOU 08]. Ces méthodes ne permettent cependant pas de déterminer précisément la géométrie des fissures. On peut également évoquer quelques techniques directes comme le marquage à l'encre ou le *beach marking*. Cette dernière technique consiste à diminuer la contrainte minimum pendant un nombre limité de cycles. Ceci a pour effet d'empêcher la formation de stries sur le faciès de rupture [PUT 92]. Dans tous les cas, ces techniques directes nécessitent une analyse *post mortem* du faciès de rupture et la position du front est souvent délicate à identifier précisément. De plus ces techniques peuvent perturber le phénomène de propagation en modifiant ponctuellement les phénomènes physiques mis en jeu.

Une des méthodes non destructive les plus précices permettant d'atteindre les objectifs fixés est la microtomographie à rayons X [BAR 00]. Le principe est celui d'un "scanner" médical et est basé sur la radiographie X. L'objet à scanner est placé sur une table rotative (voir la figure 5.1) et un certain nombre de radiographies sont prises sous différents angles. Les informations constituées par toutes ces "projections" sont post-traitées dans une étape dite de reconstruction afin d'obtenir un bloc de données tridimensionnel. Ces blocs tomographiques sont constitués de voxels

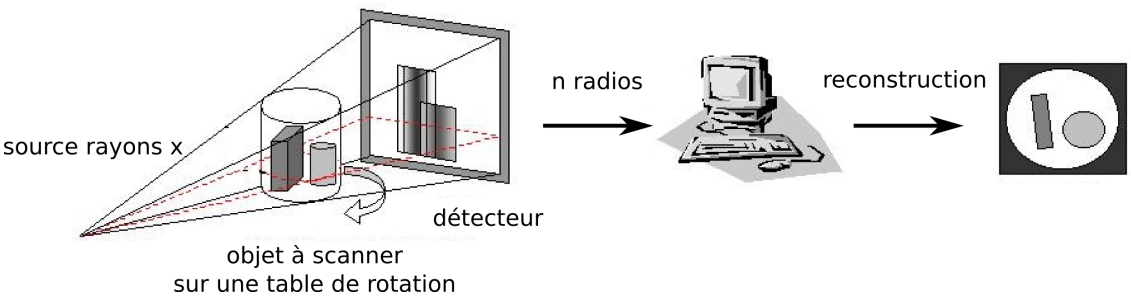


Fig. 5.1: Principe de la tomographie

(l'extension du pixel au 3D) dont les "couleurs" sont indicatrices de l'absorption des rayons X des volumes qu'ils représentent. Ainsi, les zones de faible absorption ou de vide (fissure ouverte par exemple) apparaîtront noires et les zones de forte absorption apparaîtront blanches.

Les essais de fatigue ont été effectués par l'équipe du Pr. Jean-Yves Buffière à l'ESRF (European Synchrotron Radiation Facility) à Grenoble. L'ESRF est un dispositif particulier qui permet d'obtenir un faisceau parallèle de rayons X monochromatiques extrêmement brillants. Le détecteur utilisé permet d'atteindre une résolution spatiale 0.7 μm $\times$ 0.7 μm $\times$ 0.7 μm par voxel pour des objets inscrits dans un cylindre de diamètre et de hauteur 1.4 mm. Dans le cas des éprouvettes à sections carrées qui seront utilisées, le volume maximum qu'il est possible de scanner n'excède donc pas 1 mm^3.

5.1.2 Matériau et machine de fatigue

Pour rester dans le cadre d'étude des fissures microstructurellement longues à cette échelle, il convient d'employer un matériau à grains très fins. Le choix d'un alliage d'aluminium–lithium (alliage 5091) élaboré par métallurgie des poudres a été fait. Sa microstructure est formée de grains équiaxes dont la taille est de l'ordre de 1 μm. Ses caractéristiques essentielles sont rappelées dans le tableau 5.1. Les coefficients C et m de la loi de Paris correspondent à des valeurs usuellement utilisées pour les fréquences et rapports de charge typiques de ces essais.

module de Young E	80 GPa
coefficient de poisson ν	0.33
limite élastique σ_Y	450 MPa
coefficient C de la loi de Paris	$4.13\,10^{-28}$ S I
coefficient m de la loi de Paris	3.04

Tab. 5.1: Caractéristiques de l'alliage d'aluminium Al–Li 5091

La zone utile des échantillons de fatigue est un volume de section carrée (1 mm × 1 mm) et de 1 mm de hauteur. Pour amorcer une fissure dans cette zone utile, une entaille horizontale de quelques dizaines de micromètres de profondeur est usinée soit au milieu d'une face, soit dans un coin. Après initiation, cela aboutira soit à une fissure semi-elliptique en surface (comme sur la figure 3.16), soit à une fissure quasi-circulaire en coin sollicitée en mode I (figure 5.2). C'est le second cas qui est étudié dans ce chapitre.

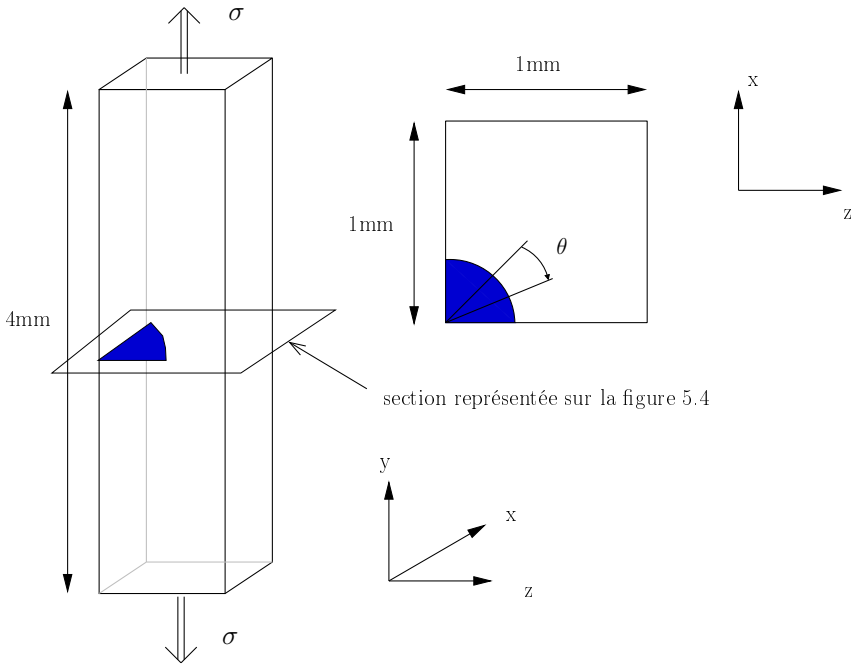


Fig. 5.2: Partie de l'éprouvette modélisée et géométrie de la fissure

L'échantillon est placé dans une machine de fatigue suffisamment compacte pour être intégrée dans le dispositif de microtomographie de manière à faire des observations *in situ*. Elle est représentée sur la figure 5.3. L'échantillon est fixé à un mors supérieur dont la position est réglable. De l'autre côté, il est fixé à un mors inférieur solidaire d'une poutre mise en flexion alternée à l'aide d'une came. Il s'agit donc d'un pilotage en déplacement mais un capteur placé sur le mors supérieur permetter de contrôler le chargement. Les parties supérieures et inférieures du bâti sont reliées par un cylindre en plexiglass transparent aux rayons X.

Le déroulement de l'opération s'effectue en une succession d'étapes de cyclage et de prise d'images. L'éprouvette est sollicitée pendant un certain nombre de cycles (quelques milliers typiquement) à une fréquence de 25 Hz. La machine de fatigue est ensuite arrêtée à la charge maximale de manière à scanner l'échantillon avec l'ouverture maximale de la fissure.

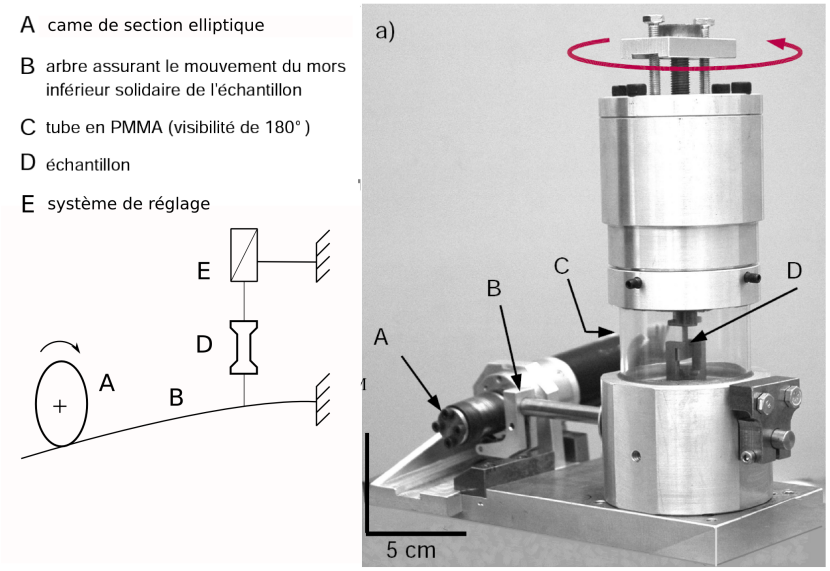


Fig. 5.3: Machine de fatigue [FER 06a]

L'échantillon auquel nous nous intéressons ici est dénommé "c46". Nous disposons de blocs tomographique aux stades 120, 130 et 140 kcycles. La figure 5.4 montre une de ses sections reconstruite après 120 000 cycles (section indiquée sur la figure 5.2). Les anneaux concentriques sont des artefacts liés à la reconstruction. Leur centre indique la position de l'axe de rotation de l'échantillon par rapport au faisceau. On observe que la fissure n'est pas exactement plane et l'image laisse apparaître une faible rugosité sur ses faces. L'identification du front se fait visuellement en identifiant la frontière entre la zone rugueuse et la zone "lisse". Nous attirons l'attention sur le fait que cette identification visuelle est possible car la fissure est ouverte. Son ouverture au voisinage du front étant très faible et par conséquent non visible, il est probable que le front identifié soit légèrement en retrait par rapport à sa position réelle. Par ailleurs, la fissure présente une forme légèrement asymétrique. Comme nous le verrons plus loin, les calculs n'indiquent pas que cela soit dû à un effet de la structure (géométrie de l'entaille initiale, légère asymétrie de la section de l'éprouvette). Notons également que les faces verticales sur la figure 5.4 ont été polies alors que les faces horizontales ne l'ont pas été. Peut-être cela influence-t-il la propagation de la fissure mais la cause la plus propable est une légere asymétrie du chargement provenant d'un moment de flexion parasite dû à la conception de la machine de fatigue. Les paramètres du chargement appliqué à l'échantillon c46 sont précisés sur la table 5.2 et sur la figure 5.5.

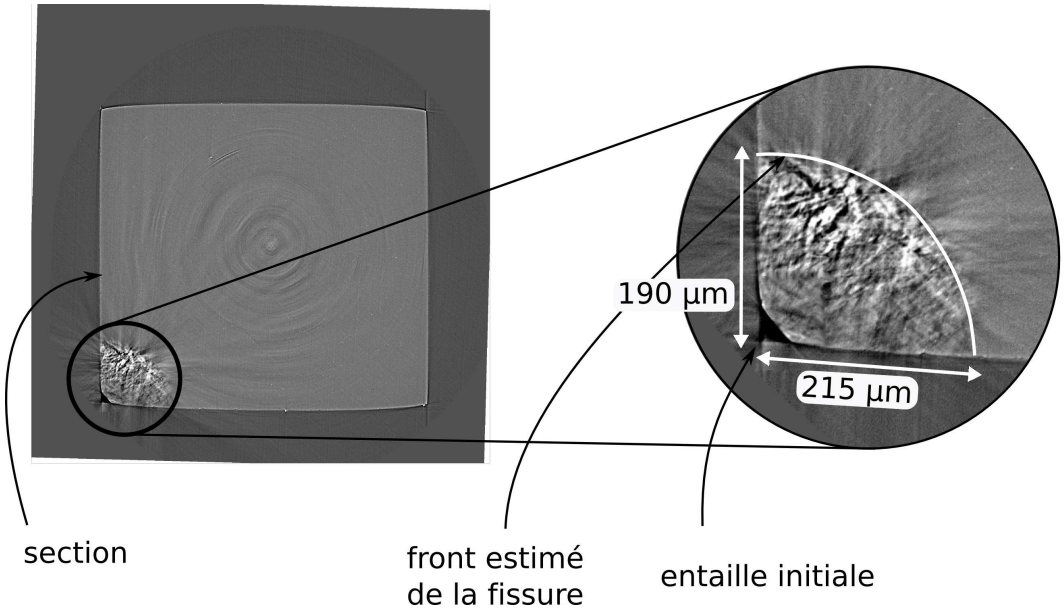


Fig. 5.4: Section d'un bloc tomographique (voir figure 5.2) permettant de visualiser la fissure à 120 kcycles et l'entaille initiale

paramètre	valeur
$\sigma_{\max}$	170 MPa
$\sigma_{\min}$	85 MPa
$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	0.5
fréquence	25 Hz

Tab. 5.2: paramètres de chargement de l'échantillon c46

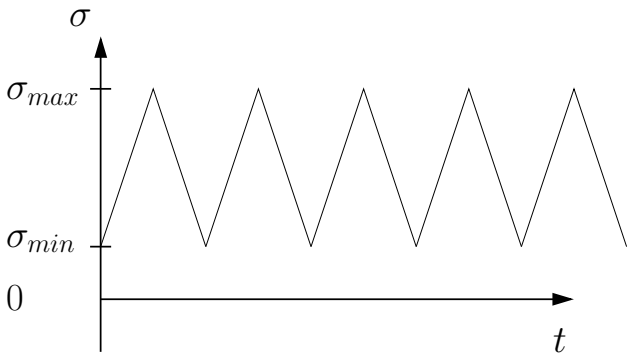


Fig. 5.5: Chargement appliqué à l'éprouvette c46

5.2 Loi de propagation 3D et confrontation

5.2.1 Loi de Paris et phénomène de refermeture

Établir une loi de propagation consiste en quelque sorte à établir une corrélation entre les concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) et les mécanismes physiques d'endommagement par fatigue. Dans la section 1.1.7 du chapitre 1, nous avons évoqué la loi de Paris qui est la loi de propagation la plus utilisée pour traiter les problèmes de propagation de fissure par fatigue [PAR 61, PAR 63]. Elle s'exprime par la relation (1.42) qui est rappelée ici :

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$$

Dans la section 1.1.6, nous avons fait l'hypothèse que la propagation pouvait être traitée de manière localisée en chaque point du front P. L'extension directe de la loi de Paris aux fissures tridimensionnelles devient alors :

$$\frac{da}{dN}(P) = C(P)\left(\Delta K(P)\right)^{m(P)} \tag{5.1}$$

Dans cette loi, les coefficients C et m ne sont *a priori* pas constants. On observe parfois, et nous verrons que c'est également le cas ici, une anisotropie de croissance. Cela signifie qu'à ΔK équivalent, la fissure ne se propage pas aussi vite en surface qu'en volume. Le tracé du diagrame de Paris (figure 1.6) à partir d'observation expérimentales en surface et en volume fait alors apparaître des coefficients C et m différents [FER 06b]. On peut alors choisir de les faire varier entre le volume et la surface. Dans notre cas, le matériau étant parfaitement isotrope, il n'y a pas de raison qui pourrait justifier *a priori* une telle variation, aussi nous choisissons des valeurs constantes pour C et m (voir table 5.1). Cette anisotropie de propagation sera justifiée à partir du phénomène de refermeture et sera prise en compte différemment.

L'expression (5.1) met en relation les paramètres matériau C et m avec ΔK, une quantité issue de la théorie MLER. Malheureusement cette loi de tient pas compte de certains phénomènes qui peuvent avoir beaucoup d'importance. Ainsi, la loi de Paris peut être complétée et la contribution majeure en ce sens a été effectuée par Elber [ELB 70]. Il propose de tenir compte dans la loi de Paris du phénomène de fermeture : la fissure ne s'ouvre pas immédiatement dès le début de la recharge, mais seulement à partir d'une contrainte $\sigma_{\text{ouv}} > \sigma_{\text{min}}$. La "force motrice" vue par la fissure n'est par conséquent pas ΔK mais une valeur plus faible appelée facteur d'intensité des contraintes effectif et défini par la relation (1.44) également rappelée ici :

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{ouv}}$$

où K_{ouv} est le facteur d'intensité des contraintes associé à la contrainte σ_{ouv}. Une autre manière de quantifier le phénomène de fermeture est d'utiliser le coefficient de Elber U défini comme ceci :

$$U = \frac{K_{\text{max}} - K_{\text{ouv}}}{K_{\text{max}} - K_{\text{min}}} \tag{5.2}$$

Avec cette définition, une valeur $U = 1$ correspond à l'absence de fermeture. ΔK_{eff} peut se reformuler ainsi :

$$\Delta K_{\text{eff}} = U \Delta K \tag{5.3}$$
$$= U(1 - R)K_{\max} \tag{5.4}$$

Parmi les principaux mécanismes à l'origine du phénomène de fermeture, nous pouvons citer :

- la plasticité confinée. La zone de déformation résiduelle présente en arrière du front (sillage plastique) joue un rôle important dans le phénomène de refermeture.
- la rugosité et le frottement. Lors de la décharge, un décalage des lèvres de la fissure peut entraîner un contact prématuré des deux faces. Lors de la recharge, la fissure ne s'ouvrira donc que pour $\sigma > \sigma_{\min}$.
- l'environnement. En milieu corrosif, des particules d'oxyde peuvent se former sur les lèvres de la fissure et se comporter comme des aspérités.

Dans l'essai que nous étudions ici, l'effet de la corrosion est quasiment inexistant à l'échelle de temps des phénomènes que nous observons. De plus la finesse des grains ainsi que le rapport de charge relativement élevé ($R = 0.5$) limitent les effets du frottement et de la rugosité. Par conséquent, la plasticité est la cause principale de refermeture.

Quantification du phénomène de refermeture

Le phénomène de refermeture est très difficile à quantifier. Les techniques expérimentales font souvent resortir une grande dispersion. De nombreuses tentatives de simulation numérique du phénomène ont également été réalisées. En deux dimensions, on peut notamment citer les travaux de Solanki *et al.* [SOL 03] dans lesquels les effets de la plasticité, du contact et du frottement sur la refermeture sont pris en compte dans une modélisation par éléments finis. Elguedj [ELG 07] et Ribeaucourt [RIB 07] font de même dans un contexte X-FEM. Des études tridimensionnelles sont également présentées dans [ZHA 98] et [SOL 04].

5.2.2 Simulation de la propagation de 120 kcycles à 140 kcycles

Nous allons ici appliquer l'algorithme multigrille et les outils de post-traitement développés jusqu'ici à la simulation de propagation de fissure de l'échantillon c46. L'état de départ correspond au stade 120 kcycles pour lequel nous disposons d'un bloc de données. La fissure initiale est supposée plane. À la vue de la figure 5.6 qui représente une section transversale de la fissure, cette hypothèse est tout à fait

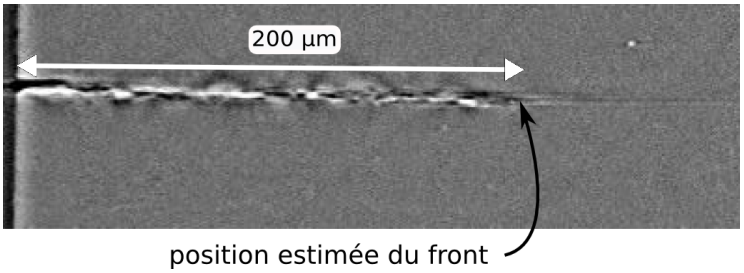


Fig. 5.6: Image de l'entaille initiale

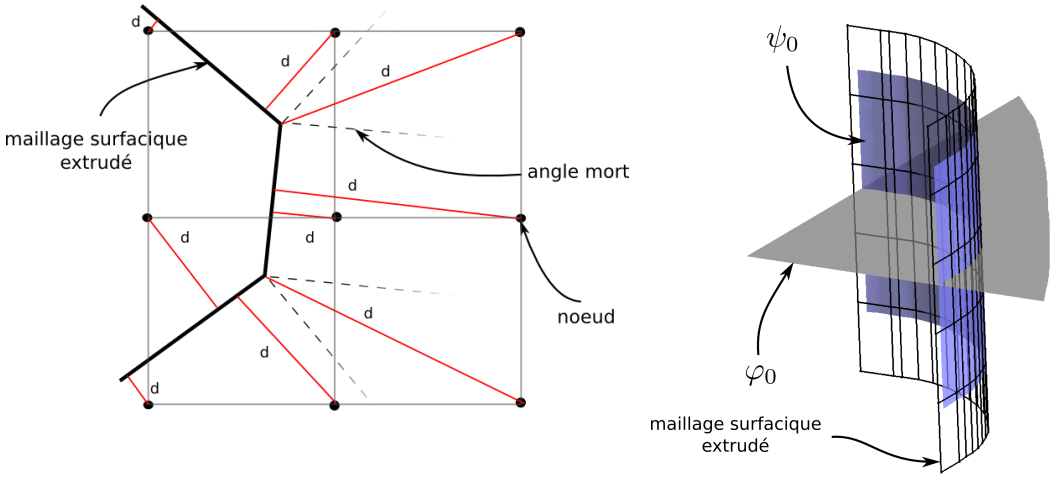
raisonnable. La fonction de niveau φ est donc initialisée de manière analytique pour obtenir une iso-0 plane. La fonction de niveau ψ doit quant à elle être représentative du front réel. Cela se fait en plusieurs étapes :

- Le front est tout d'abord discrétisé sur le plan de la fissure.
- À partir de la discrétisation linéique du front, une surface est générée par extrusion orthogonale à la fissure.
- La valeur de la fonction de niveau en chaque noeud est attribuée en calculant la distance à la facette la plus proche. Si le noeud est dans un "angle mort" la valeur affectée est la distance à la droite d'intersection des deux facettes les plus proches (voir la figure 5.7.a).
- les erreurs introduites par l'étape précédente sont éliminées après une étape d'initialisation et d'orthogonalisation.

La figure 5.7.b représente les surfaces iso-0 des deux fonctions de niveau. On remarque que la surface ψ_0 correspond bien au maillage surfacique extrudé à partir du front réel.

Remarque 9 *Dans le cas où la fissure est non plane, la même procédure peut être utilisée à partir d'un maillage de triangles de la surface gauche de la fissure. Ceci a été appliqué par Ferrié [FER 06a] pour représenter des fissures courtes fortement influencées par la microstructure. L'étape la plus difficile dans ce cas n'est pas la construction de la fonction de niveau initiale mais la construction du maillage surfacique à partir des blocs tomographiques.*

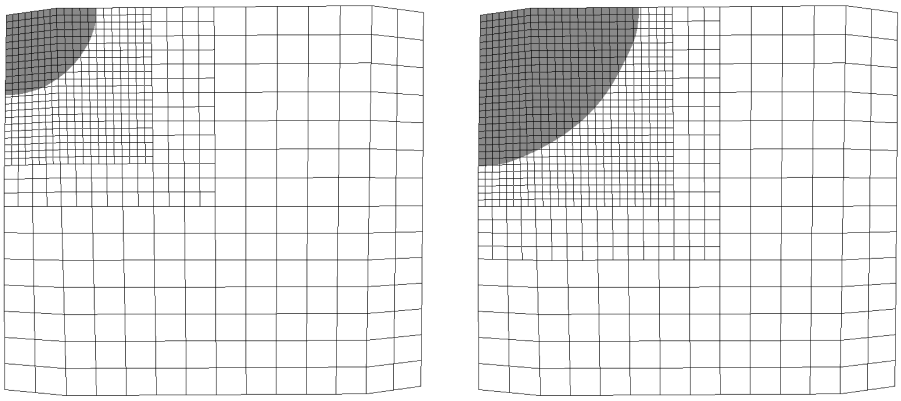
La fissure étant relativement petite par rapport à la structure, nous utilisons la stratégie multigrille MG-L avec 3 niveaux de discrétisation. Le calcul étant linéaire, les zones de raffinement peuvent s'adapter à la géométrie de la fissure au cours de sa propagation. La discrétisation utilisée lors du premier pas de propagation (à 120 kcycles) est représentée sur la figure 5.8.a. Après propagation jusqu'à 140 kcycles (simulation sans prise en compte de la refermeture), la zone de raffinement est réajustée (figure 5.8.b). Remarquons également que les maillages ne sont pas réguliers (prise en compte de certaines imperfections de la section dans les coins), ce qui illustre l'intérêt d'utiliser une discrétisation des fonctions de niveau indépendante.



(a) affectation

(b) après initialisation à la distance signée et orthogonalisation

Fig. 5.7: (a) Affectation de valeurs de distance signée sur tous les noeuds du maillage. (b) Après initialisation à la distance signée et orthogonalisation de ψ par rapport à φ, le front est correctement défini.



(a) 120 kcycles

(b) 140 kcycles (simulation sans prise en compte de la refermeture)

Fig. 5.8: La zone de raffinement peut évoluer au cours du temps en même temps que la fissure.

La propagation se fait par pas de 1000 cycles. L'ensemble de la simulation comporte donc 20 pas. Dans un premier temps, la loi de Paris non modifiée est utilisée. L'effet de refermeture n'est pas pris en compte : $U = 1$ sur l'ensemble du front. Les résultats sont présentés sur la figure 5.9.a. Le front réel est tracé en noir et les fronts simulés sont tracés tous les 5000 cycles en rouge. Entre 120 kcycles et 130 kcycles, la propagation en volume est relativement conforme à ce qui est observé. En revanche, le front avance beaucoup trop vite en surface. Ceci est tout à fait caractéristique de l'effet de refermeture et une analyse de la zone plastique en volume ou en surface va dans ce sens. Nous avons à notre disposition une estimation grossière de la taille de la zone plastique pour des milieus plans. Pour les obtenir, il faut déterminer la zone au delà de laquelle le critère de Von Mises n'est plus respecté [LEM 04]. En introduisant les champs asymptotiques de Westergaard dans la norme de Von Mises, nous obtenons une estimation du rayon de la zone plastique pour une sollicitation en mode I :

$$\text{en contraintes planes :} \qquad r_Y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}\cos^2(\frac{\theta}{2})\left(1 + 3\sin^2(\frac{\theta}{2})\right) \tag{5.5}$$

$$\text{en déformations planes :} \qquad r_Y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}\cos^2(\frac{\theta}{2})\left((1-2\nu)^2 + 3\sin^2(\frac{\theta}{2})\right) \tag{5.6}$$

où σ_Y est la limite élastique du matériau. Les valeurs maximales de r_Y en fonction de θ et pour $\nu = 0.33$ sont :

$$\text{en contraintes planes :} \qquad r_Y(\theta = 70.5°) = 0.66\frac{K_I^2}{\pi\sigma_Y^2} \tag{5.7}$$

$$\text{en déformations planes :} \qquad r_Y(\theta = 83.5°) = 0.46\frac{K_I^2}{\pi\sigma_Y^2} \tag{5.8}$$

Ces résultats ne correspondent évidemment pas à la véritable zone plastique car ils ne tiennent pas compte du rééquilibrage des contraintes. Ils indiquent néanmoins que cette zone est plus large près des surfaces libres, où on s'approche de l'état de contraintes planes, qu'en volume où l'état de déformations planes prévaut. En faisant beaucoup moins d'hypothèses sur la nature des éventuels états plans, l'analyse des contraintes en post-traitement de la simulation élastique 3D confirme ce résultat. La figure 5.10 représente un lissage de l'iso-surface de contrainte de Von Mises 200 MPa sur le calcul à 120 kcycles. Nous rappelons que la limite élastique du matériau est de 450 MPa, mais la visualisation en post-traitement à ce niveau de discrétisation est difficile à obtenir. Rappelons également qu'il s'agit d'un calcul élastique qui ne tient donc pas compte de la redistribution des contraintes en cas de plastification. Malgré cela, ces résultats suggèrent fortement un élargissement de la zone plastique en allant du volume vers les bords libres. Ils sont également conformes avec les résultats de la première simulation qui montrent que la fissure avance moins vite en surface que ne le prévoit la loi de Paris non modifiée, ce qui indique que l'effet de refermeture

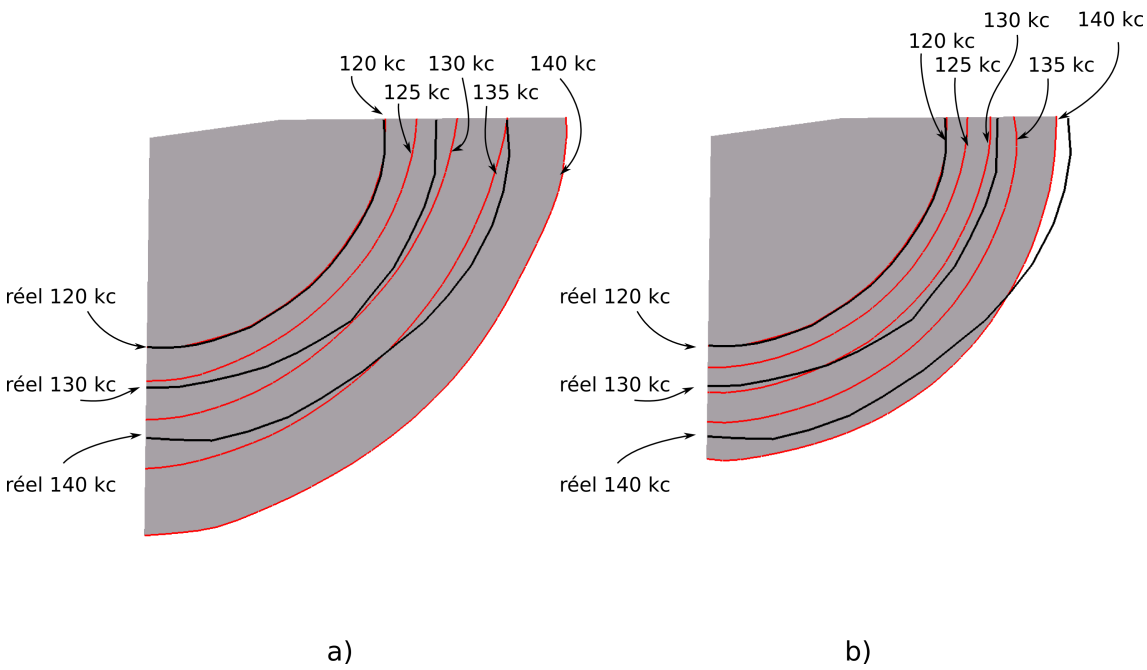


Fig. 5.9: Simulation de la propagation de la fissure avec une loi de Paris non modifiée (a) et avec une loi de Paris 3D modifée ($U_{\text{vol}} = 1$ et $U_{\text{surf}} = 0.85$) (b). Les fronts réels apparaissent en noir et les fronts simulés en rouge.

est plus important près des bords libres qu'en volume. Cette dernière hypothèse est cohérente avec les simulations numérique présentées dans [ZHA 98] et [SOL 04].

La prise en compte dans la loi de propagation de l'effet de refermeture doit tenir compte de l'analyse précédente. Une loi de propagation de Paris modifiée tridimensionnelle a déjà été proposée par Ferrié [FER 06a, FER 06b]. Elle consiste à faire varier linéairement le coefficient d'Elber entre le volume et les bords libres. Cette loi empirique a donné de bon résultats pour la simulation de propagation de fissures semi-elliptiques et nous proposons également d'utiliser une loi linéaire pour le cas de la fissure de coin :

$$U(\theta) = U_{\text{vol}} - \left(\frac{U_{\text{vol}} - U_{\text{surf}}}{\pi/4}\right)|\theta| \tag{5.9}$$

où θ paramètre la position du point courant sur le front : $\theta = 0°$ en volume et $\theta = \pm 45°$ en surface (voir la figure 5.2). U_{vol} et U_{surf} sont les valeurs du coefficient d'Elber en volume et en surface, ils sont déterminés empiriquement. Les résultats de la première simulation (figure 5.9.a) semblaient indiquer que la refermeture a peu d'effet en volume. Bien que discutable, nous choisissons néanmoins une valeur $U_{\text{vol}} = 1$. Les résultats de propagation présentés sur la figure 5.9.b ont été obtenus avec une valeur $U_{\text{surf}} = 0.85$. Les fronts simulés sont relativement conformes aux fronts réels à 130 kcycles et 140 kcycles. À 140 kcycles, on remarque néanmoins de

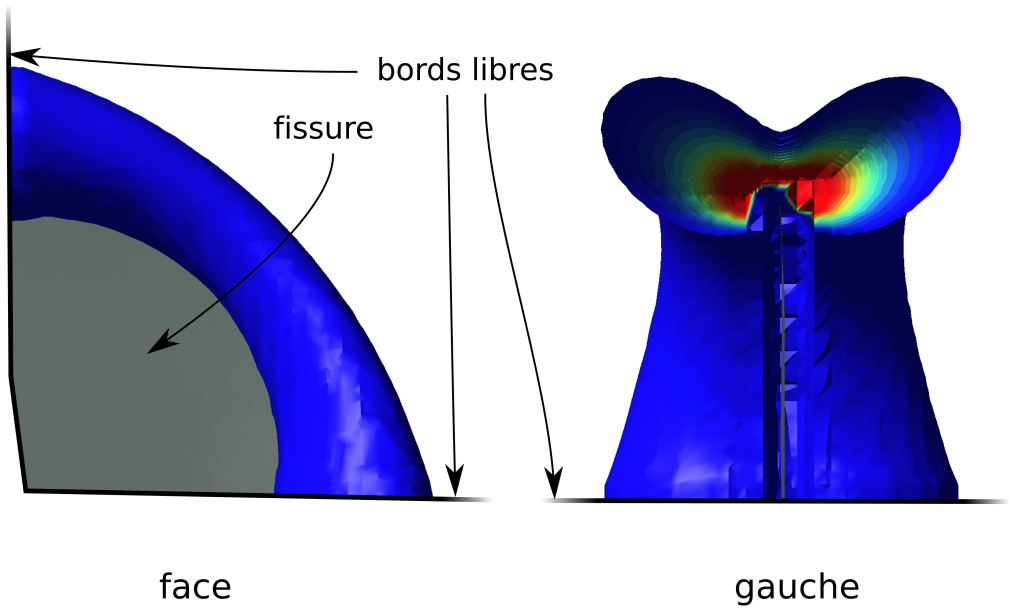


Fig. 5.10: Surface de l'iso-contrainte de Von Mises 200 MPa en vue de dessus et vue de gauche. La fissure apparait en gris sur la vue de face (stade 120 kcycles).

légères différences à $\theta = 45°$ et $\theta = -45°$. Ces retard ou avance sont dus à l'asymétrie déjà signalée plus haut. On remarque en effet qu'entre 130 et 140 kcycles, le front réel avance plus vite sur le bord du haut que sur le bord de gauche. Ce phénomène ne peut pas être simulé avec un chargement symétrique. On peut également noter qu'en volume ($\theta = 0$), la loi de Paris locale utilisée est la même pour les deux simulations car $U(0) = 1$. Cependant entre 130 kcycles et 140 kcycles, le front obtenu à partir de la première simulation est beaucoup trop en avance par rapport au front réel, ce qui n'est pas le cas du front obtenu avec la correction de la loi de Paris. Ceci est dû à l'influence structurale de la géométrie de la fissure qui a un effet global sur la structure. Une loi de propagation locale comme celle que nous utilisons peut engendrer des erreurs globales au cours de la propagation.

La loi de Paris modifiée prenant en compte l'effet de refermeture a permis d'effectuer une simulation relativement conforme à ce qui est observé expérimentalement. Malheureusement, les coefficients utilisés (U_{vol} et U_{surf}) ainsi que l'hypothèse de variation linéaire du paramètre d'Elber sont tout à fait empiriques et ne permettront probablement pas de réaliser des simulations prédictives sur des structures ayant des géométries différentes. Ces aspects vont être discutés dans la section suivante.

5.3 Discussion

La modification de la loi de Paris proposée par Elber est physiquement fondée sur le phénomène de refermeture. Ce phénomène est très difficile à mettre en évidence et à quantifier expérimentalement car il dépend d'un grand nombre de facteurs. L'environnement, la rugosité des lèvres de fissure mais aussi la plasticité et par conséquent le matériau et les effets de structure rentrent en ligne de compte. En ce qui concerne la simulation, nous avons mentionné les travaux de T. Elguedj [ELG 06] qui ont porté sur la prise en compte du phénomène de refermeture dans des simulations bidimensionnelles de propagation. Au delà des développements numériques spécifiques, le principe reposait sur une simulation élasto-plastique de plusieurs cycles de chargement sans propagation jusqu'à stabilisation. Un ΔK effectif en était déduit et une avancée de quelques milliers de cycles était appliquée à la fissure. Les résultats obtenus étaient tout à fait encourageants malgré des temps de calcul relativement importants. L'intérêt essentiel de ces travaux, comme ceux de Solanki *et al.* [SOL 03, SOL 04], est la prise en compte dans la simulation des effets de structure (plasticité notamment), ce qui limite la part de détermination empirique dans les modèles utilisés. L'introduction d'un modèle élasto-plastique dans nos simulations tridimensionnelles pourrait être une solution pour se diriger vers un outil plus prédictif. Les temps de calcul peuvent cependant être rédhibitoires et une approche multiéchelle/multigrille serait certainement intéressante. Un premier pas vers l'élaboration de ce type d'outil fera l'objet du chapitre 6.

Des alternatives à la loi de Paris peuvent également être envisagées comme l'utilisation de modèles cohésifs [ARE 05, ZI 03, BOR 06]. Ces modèles permettent de se passer du calcul des facteurs d'intensité des contraintes mais la nécessité de calculer chaque cycle de chargement réel [NGU 01] rend le coût numérique de la méthode très vite prohibitif. L'approche proposée par Pommier *et al.* semble être une alternative très intéressante [POM 05b, POM 05a, HAM 05]. Elle repose sur une formulation comportant un nombre limité de variables internes rendant compte de manière globale et simplifiée de l'état élasto-plastique en front de fissure. Il en découle un modèle de fissuration incrémental qui se présente sous la forme d'un jeu d'équations aux dérivées partielles permettant de calculer la vitesse instantannée de création d'aire par fissuration : da/dt. Cette stratégie permet de simuler de manière robuste la propagation de fissures sous chargement complexes en tenant compte des effets d'histoire de chargement et notamment des surcharges. Pour l'instant limitée à des sollicitations en mode I, on trouve des applications de ce modèle aussi bien en 2D qu'en 3D [RUI 08]. On peut noter que l'identification de certains paramètres du modèles fait appel à des simulations élasto-plastiques par éléments finis très fines. Nous pourrions envisager d'effectuer ces calculs avec l'approche multigrille non-linéaire développée dans le chapitre 6.

Chapitre 6

Vers la prise en compte de non linéarités

Sommaire

6.1 Techniques multigrilles globales : le *Full Approximation Scheme* 128

6.2 Techniques multigrilles locales et plasticité 129

6.2.1 Proposition d'algorithmes 129

6.2.2 Application à une poutre en flexion 133

6.2.3 Application de la version MG-NL-L-EP à une poutre fissurée en flexion 137

6.3 Bilan 140

Nous avons vu au cours du chapitre précédent que la prise en compte de certains phénomènes non linéaires, et en particuler la plasticité confinée en front de fissure et le contact/frottement sur les lèvres, peuvent avoir une grande influence sur la propagation. Dans ce chapitre, nous n'allons pas appliquer de modèles non linéaires à la propagation de fissure. Il s'agit uniquement de présenter certains développements des algorithmes multigrilles localisées permettant de prendre en compte des non linéarités matérielles. Nous présentons l'algorithme multigrille *Full Approximation Scheme* (FAS) déjà largement développé pour résoudre les équations non linéaires réversibles [LUB 00]. L'introduction de non linéarités matérielles en multigrilles est un sujet qui a également fait l'objet de nombreux travaux [KAC 93, FIS 95, FEN 97, WIE 99, ADA 00b, EKE 04]. Nous verrons comment nous pouvons nous en inspirer pour traiter les problèmes multiéchelles dont le présent manuscript fait l'objet.

6.1 Techniques multigrilles globales : le *Full Approximation Scheme*

L'algorithme FAS a initialement été introduit pour résoudre des problèmes non linéaires reversibles (pas de variables internes) du type :

$$L\left(\mathbf{U}\right) = \mathbf{F} \tag{6.1}$$

où $L\left(\mathbf{U}\right)$ est un opérateur non linéaire ne dépendant que de $\mathbf{U}$ (aucun effet d'histoire). C'est le type d'équations que l'on peut par exemple rencontrer en mécanique des solides avec des lois de comportement élastique non linéaires ou dans des problèmes en grande déformation (non linéarités géométriques).

L'algorithme FAS se dérive de manière similaire à l'algorithme CS présenté dans le chapitre 2. La définition du résidu demeure la même (expression (2.6)) et pour un opérateur L_f s'appuyant sur la discrétisation $\mathcal{M}_f$, on peut écrire :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} = \mathbf{F}_f - L_f\left(\widetilde{\mathbf{U}}_f\right) \tag{6.2}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} = L_f\left(\mathbf{U}_f\right) - L_f\left(\widetilde{\mathbf{U}}_f\right) \tag{6.3}$$

où $\widetilde{\mathbf{U}}_f$ est la solution courante et $\mathbf{U}_f$ est la solution exacte. En revanche, L_f étant un opérateur non linéaire, le passage de (2.6) à (2.7) n'est plus possible : L_f est par définition dépendant de la solution $\mathbf{U}_f$. L'erreur ne peut donc pas être traitée séparément de la solution complète. L'équation équivalente à (2.8) est une reformulation de l'expression (6.3) et s'écrit :

$$L_f\left(\widetilde{\mathbf{U}}_f + \mathbf{E}_f\right) = L_f\left(\widetilde{\mathbf{U}}_f\right) + \mathbf{R}_{\mathbf{es}f} \tag{6.4}$$

où $\mathbf{E}_f = \mathbf{U}_f - \widetilde{\mathbf{U}}_f$ est l'erreur déjà définie par la relation (2.4). Le transfert de cette équation sur la grille grossière définit le problème grossier de l'algorithme FAS :

$$L_g\left(\mathbf{U}_g\right) = L_g\left(\overline{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{U}}_f\right) + \mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{es}f} \tag{6.5}$$

où L_g est l'opérateur équivalent à L_f sur la grille grossière. L'opérateur $\mathbf{R}$ est l'opérateur de restriction défini dans la section (2.4.2). L'opérateur $\overline{\mathbf{R}}$ est nouveau. Il permet de restreindre un champ de déplacement défini sur un maillage fin vers un maillage grossier. En éléments finis classiques et avec des maillages imbriqués, cet opérateur est souvent défini comme un opérateur d'injection. Il s'agit alors d'affecter aux degrés de liberté des noeuds du maillage grossier la valeur des ddls des noeuds du maillage fin en vis-à-vis (les noeuds compatibles). L'inconnue du problème grossier est donc un champ de déplacement complet et non plus une correction (d'où l'appellation *Full Approximation Scheme*). Comme dans l'algorithme CS, la solution sur la grille fine est corrigée à partir du résultat du problème grossier :

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{U}}}_f = \widetilde{\mathbf{U}}_f + \mathbf{P}\left(\mathbf{U}_g - \overline{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{U}}_f\right) \tag{6.6}$$

Comme pour le CS, le problème grossier peut être approximé par un appel récursif à la procédure FAS et l'enchaînement des différents cycles reste inchangé (V-cycles, W-cycles ou γ-cycles de la figure 2.5).

6.2 Techniques multigrilles locales et plasticité

6.2.1 Proposition d'algorithmes

Parmi les problèmes non linéaires à traiter en mécanique des solides, les plus nombreux sont ceux qui présentent une non linéarité de comportement. Les problèmes de élasto-plastiques ou visco-plastiques par exemple en font partie. Ils présentent la particularité d'être sensibles à l'histoire du chargement et ne se formalisent plus par l'expression $L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}$ mais par :

$$L(\mathbf{U}, \phi) = \mathbf{F} \tag{6.7}$$

Ce qui s'écrit de manière plus standard en mécanique :

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}, \phi) = \mathbf{F}_{\text{ext}} \tag{6.8}$$

où $\mathbf{F}_{\text{int}}$ représente les forces internes obtenues par intégration des contraintes aux points de Gauss. Les variables internes sont par ailleurs représentées par ϕ. Ces problèmes ne rentrent donc pas directement dans le cadre de ceux qui ont été évoqués dans la section précédente. La raison principale en est que cette dépendance aux variables internes nécessite l'emploi de solveurs qui ne possèdent pas nécessairement la propriété de lissage. C'est tout particulièrement le cas du solveur de Newton que nous allons utiliser.

Pour résoudre les problèmes d'élasto-plasticité avec des techniques multigrilles, deux grandes classes de méthodes se distinguent dans la littérature. Dans la méthode illustrée sur la figure 6.1.a, les multigrilles interviennent lors de la résolution des problèmes linéarisés issus de la méthode de résolution non-linéaire (Newton, ...)

[KAC 93, ADA 02, REY 08, WIE 99]. Il ne s'agit donc pas à proprement parler de techniques multigrilles non linéaires. La seconde classe de méthodes (figure 6.1.b) utilise pleinement l'algorithme FAS malgré les différentes difficultés qui viennent d'être évoquées. Il s'agit d'appliquer un faible nombre d'itérations de solveur non linéaire au sein des phases de relaxation. Dans [FIS 95], Fish propose par exemple d'utiliser l'algorithme FAS en utilisant un solveur BFGS dans les phases de relaxation. Le solveur BFGS fait partie de la famille des méthodes quasi-Newton, dérivées de la méthode de Newton et faisant intervenir une approximation de la matrice Hessienne (correspondant à la dérivée seconde dans un développement de Taylor). Des informations sur les méthodes quasi-Newton sont disponibles dans [DEN 77]. La figure 6.1 ne représentant qu'un pas de temps, on comprend que la différence entre les deux méthodes correspond à une permutation des cycles multigrilles avec les itérations du solveur non linéaire.

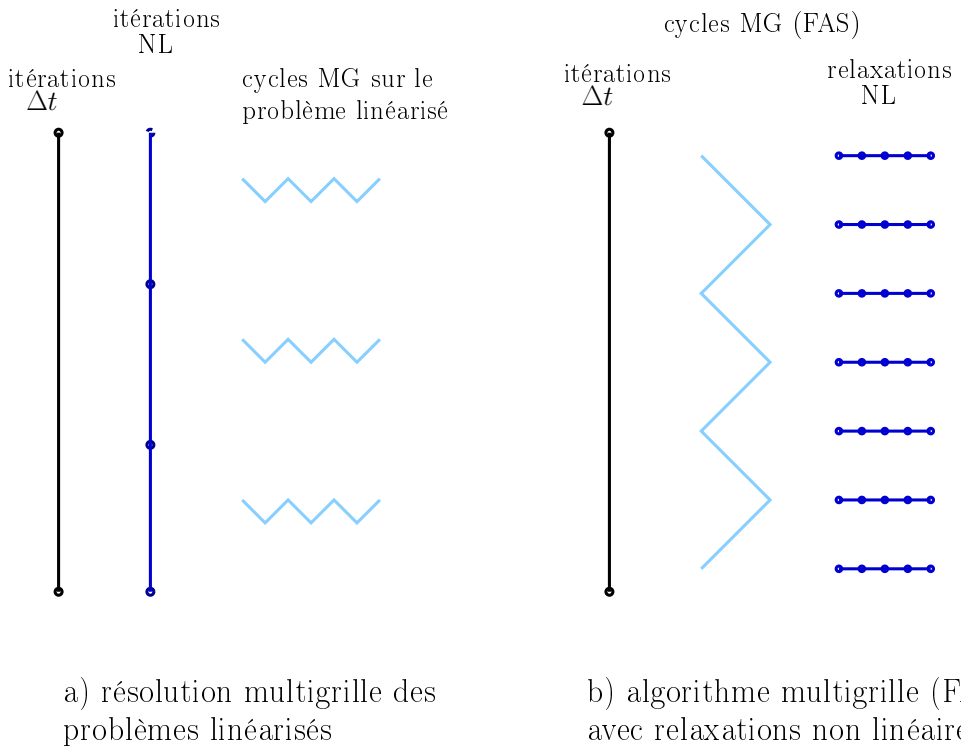


Fig. 6.1: Les deux grandes variantes de techniques multigrille non linéaires illustrées pour un pas de temps. (a) Les multigrilles sont utilisées pour résoudre les problèmes linéarisés issus de la méthode de résolution non linéaire (Newton par exemple). (b) Relaxations non linéaires (faible nombre d'itérations de Newton par exemple) au sein de l'algorithme FAS.

La première approche présente l'intérêt d'être très robuste puisqu'elle s'appuie sur les algorithmes multigrille linéaires déjà éprouvés. Certaines difficultés peuvent néanmoins apparaître comme par exemple la réduction de l'effet de lissage dans

des conditions de quasi-incompressibilité. Ceci se produit lorsque l'on calcule des opérateurs tangents puisque l'écoulement plastique est associé à des déformations incompressibles [KAC 93]. Un autre inconvénient de cette méthode apparaît si le temps de résolution des problèmes linéarisés n'est pas prépondérant devant ceux du calcul de l'écoulement ou de la construction de l'opérateur tangent qui peuvent être importants. C'est la raison pour laquelle Fish a tenté de diminuer le nombre total d'itérations non-linéaires en appliquant l'algorithme FAS à des problèmes élasto-plastiques. Couplés avec un algorithme BFGS pour les phases de relaxation, cette technique fournit des résultats très intéressants en termes de temps de calcul pour des problèmes de très grande taille largement plastifiés.

La première méthode ne convient pas tout à fait à notre problématique car l'application à la localisation n'est pas directe. La méthode proposée par Fish est en revanche séduisante car le FAS est très similaire à l'algorithme multigrille localisé décrit dans le chapitre 2. En effet, le schéma MG-L peut tout à fait s'appliquer sur le cas limite où la grille fine est globale : $\Omega_A = \emptyset$ et $\Omega_B = \Omega$. Le problème grossier (2.37) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{U}}^{k+1} &= \overline{\mathbf{F}} - \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{U}^k + \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{U}}^k \\ \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{U}}^{k+1} &= \mathbf{R}\mathbf{R}_{\mathbf{es}}{}_f^k + \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{U}}^k \end{aligned} \tag{6.9}$$

L'expression (6.9) est la même que l'équation (6.5) à la différence près que le problème FAS fait intervenir une restriction du champ de déplacement, ce qui est inutile dans l'algorithme MG-L (linéaire). Nous pouvons tenter d'adapter l'algorithme MG-L à la résolution de problèmes non linéaires en y introduisant ce nouvel opérateur de restriction. La différence fondamentale entre les types de problèmes traités par Fish et les nôtres est relative à la taille de la zone plastique qui est pour nous très localisée. Aussi l'emploi d'un algorithme tel que BFGS n'est peut être pas justifié. Dans cette étude nous nous limitons donc à l'utilisation, dans les phases de relaxation, d'un algorithme de Newton modifié (l'opérateur tangent n'est pas réacualisé, on utilise l'opérateur élastique) comme dans les travaux de Elguedj [ELG 06].

Avant de mettre en place le nouvel algorithme, il convient de déterminer comment seront gérées les variables internes du modèle élasto-plastique. Faut-il les interpoler ou les restreindre d'une échelle à l'autre ? Faut-il les laisser libres sur les différents niveaux ? Une méthode déjà utilisée par Cavin [CAV 06] consiste à restreindre les variables internes du niveau fin vers le niveau grossier à chaque cycle afin d'inialiser l'état du système grossier avant l'étape de résolution grossière. À partir de la configuration de maillages imbriqués illustrée sur la figure 6.2, une telle restriction peut par exemple prendre la forme suivante :

$$\phi_1 = \frac{1}{4}\left(\phi_a + \phi_b + \phi_c + \phi_d\right) \tag{6.10}$$

où ϕ_i représente les variables internes au point de Gauss i. Ces tranferts de champs sont toujours délicats à mettre en œuvre et leurs réalisations rigoureuse nécessite-

raient des opérations d'homogénéisation sophistiquées qui ne font pas l'objet de ce travail.

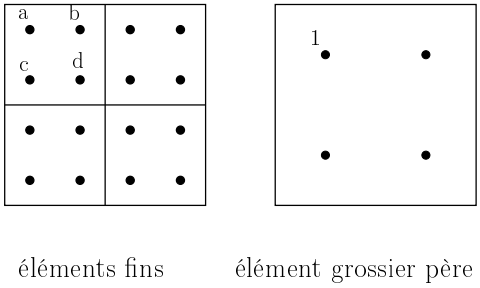


Fig. 6.2: Position des points de Gauss de deux maillage imbriqués

C'est pour contourner cette difficulté que Fish propose de laisser les variables internes de chacunes des échelles indépendantes. La figure 6.3 décrit l'algorithme FAS qu'il propose avec une adaptation à la localisation. Seul un pas de temps est décrit et par conséquent, aucun indice n'y est relatif. Seuls les cycles multigrilles sont symbolisés par des exposants. On peut constater qu'entre deux de ces cycles, les variables internes des échelles grossière et fine sont mises à jour séparément uniquement à partir des incréments de déformation provenant des opérations de prolongation ou de restriction. Cette mise à jour s'effectue à l'aide d'un algorithme de retour radial [BEL 00] par rapport à l'état au début du pas de temps : ϕ^0 ou $\overline{\phi}^0$ (juste avant le premier cycle). On peut noter par ailleurs que les problèmes fin et grossier à résoudre sont très similaires à ceux de l'algorithme MG-L du chapitre 2. Les termes $\mathbf{KU}$ sont remplacés par $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}, \phi)$. La seule différence, encore une fois, concerne la restriction du champ de déplacement dans le terme $\left[\mathbf{F}_{\text{int}}^{B}\left(\overline{\mathbf{R}}\mathbf{U}^{B^{k-1}}, \widetilde{\overline{\phi}}\right)\right]$ qui est équivalent au terme $\left[\overline{\mathbf{K}}^{B}\overline{\mathbf{U}}^{B^{k-1}}\right]$ de l'équation (2.37). Pour les mêmes raisons que celles expliquées dans le chapitre 2, le critère d'arrêt est en déplacement relatif. L'algorithme présenté sur la figure 6.3 est dénommé MG-NL-L-PP, ce qui signifie "non linéaire localisé avec modèle plastique sur la grille grossière et modèle plastique sur la grille fine".

Une troisième alternative pourrait consister à utiliser différents modèles sur les différentes échelles. La zone plastique étant très localisée on pourrait imaginer d'utiliser un modèle élasto-plastique uniquement sur la zone fine localisée et un modèle élastique sur les autres grilles. Ceci est très similaire à ce qui a été proposé dans la section 3.3 où un modèle linéaire fissuré (enrichissement X-FEM) était utilisé sur les grilles les plus fines et un modèle sain (sans enrichissement) était attribué aux maillages les plus grossiers. L'algorithme proposé est détaillé sur la figure 6.4. La limitation principale de cette méthode est que la zone plastique doit être restreinte à l'intérieur du domaine raffiné. Étant donné l'hypothèse de plasticité confinée dans laquelle nous nous sommes placés, cette limitation paraît raisonnable. Notons qu'ici

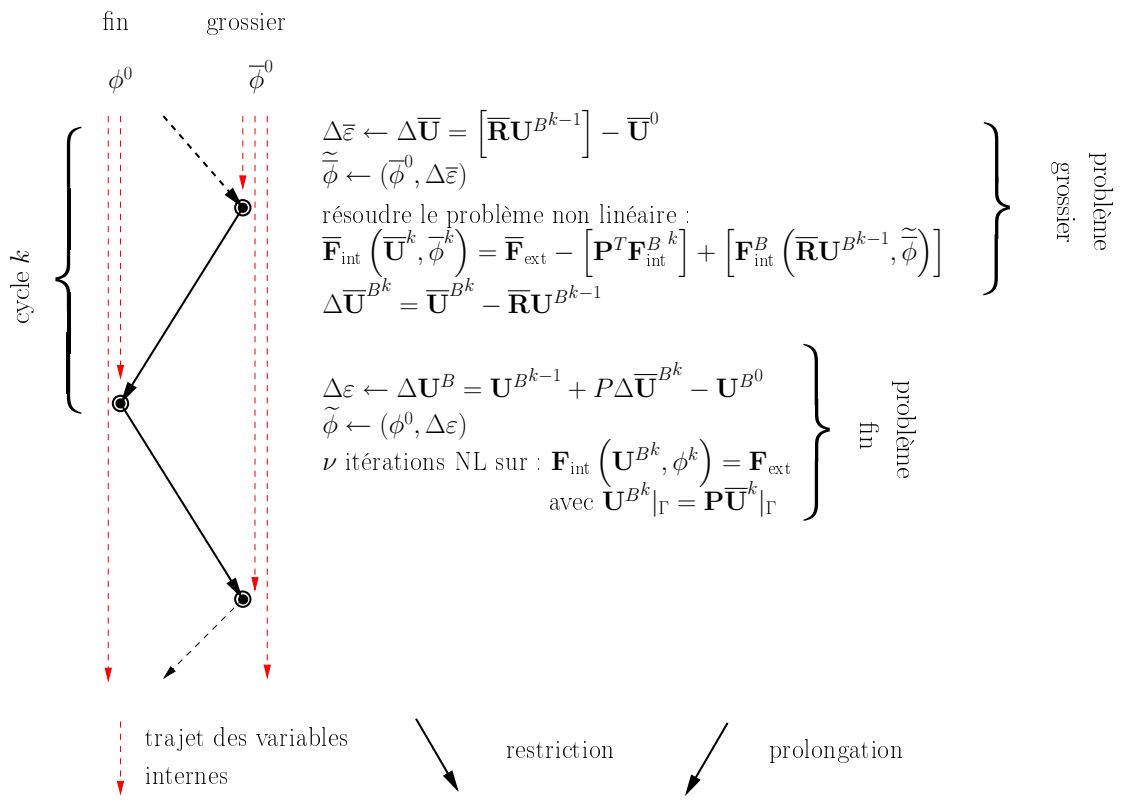


Fig. 6.3: Algorithme MG-NL-L-PP (MultiGrille Non Linéaire Localisé avec modèle Plastique sur grille grossière, modèle Plastique sur grille fine)

aussi, les variables internes sont mises à jour à partir de l'état au début du pas de temps et non pas à partir de l'état au cycle précédent. Ceci permet d'éviter certaines anomalies que l'on peut mettre en évidence en considérant une poutre en traction soumise à un cycle de charge-décharge. Une fois plastifiée après avoir atteint la charge maximale ($F = F_{\max}$), elle est complètement déchargée élastiquement ($F = 0$). La condition aux limites en déplacement imposée sur l'interface Γ est issue d'un calcul purement élastique sur la grille grossière et est donc nulle. Ceci peut entraîner une compression plastique sur la grille fine qui n'a pas de sens. Si l'état de référence est l'état au début du pas de temps, les erreurs commises ne sont pas irréversibles. L'algorithme de la figure 6.4 est dénommé MG-NL-L-EP (modèle élastique sur la grille grossière et plastique sur la grille grossière).

6.2.2 Application à une poutre en flexion

Nous proposons ici d'observer le comportement des deux algorithmes à deux niveaux qui viennent d'être décrits. Les résultats présentés dans cette sous-section sont obtenus à partir de développements réalisés au sein de Cast3M. Pour cela,

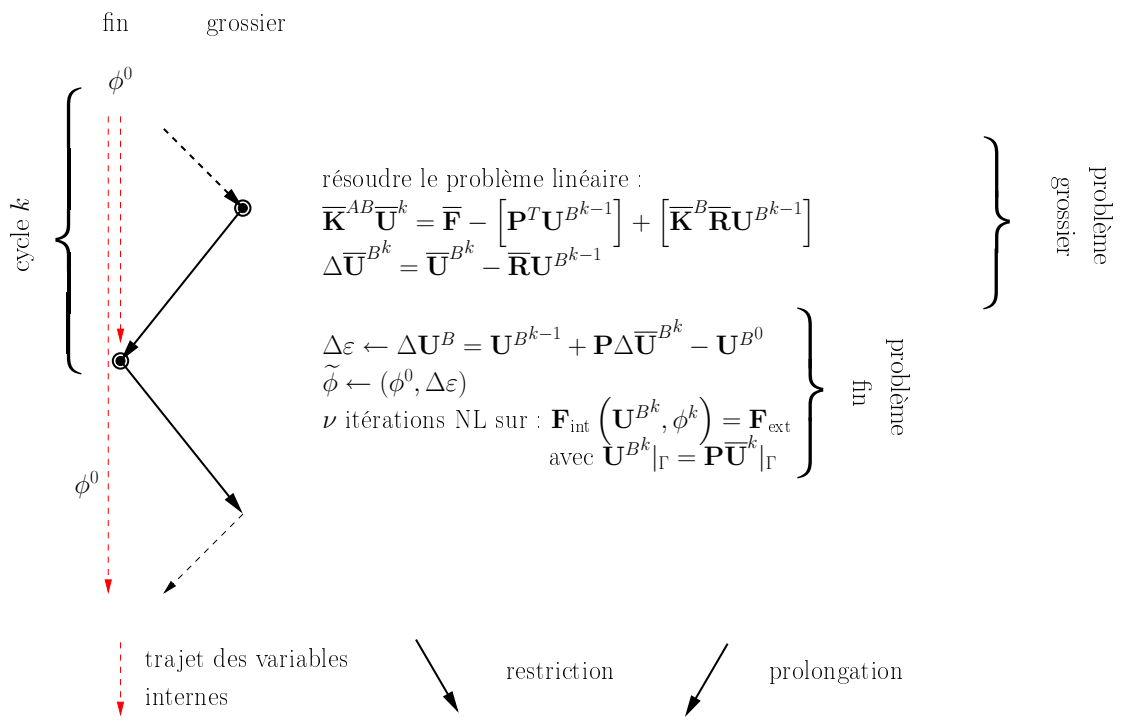


Fig. 6.4: Algorithme MG-NL-L-EP (MultiGrille Non Linéaire Localisé avec modèle Élastique sur grille grossière, modèle Plastique sur grille fine)

nous reprenons le cas test de la poutre en flexion déjà utilisé dans la section 2.6. Nous choisissons un modèle élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire dont les caractéristiques sont définies dans le tableau 6.1. Le modèle élastique utilisé sur la grille grossière du schéma à deux modèles a pour paramètres $E = 200$ GPa et $\nu = 0.3$. Le cycle de chargement (charge-décharge) est modélisé par deux intervalles de temps : $[t_0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ (figure 6.5).

Un calcul de référence réalisé avec l'algorithme de Newton modifié utilisé dans les relaxations sert de base de comparaison. Là encore, les critères d'arrêt étant différents pour les algorithmes de Newton et MG-NL-L (en résidu normé et en correction de déplacement normée rexpectivement), il est difficile de faire un comparaison directe des deux algorithmes. Sur la figure 6.6, les évolutions de deux indicateurs de convergence pour l'algorithme de Newton sont reportées. Il s'agit de l'indicateur en résidu normé et de l'indicateur en déplacement normé utilisé en multigrilles locali-

type d'écouissage	cinématique linéaire
module de Young E	200 GPa
module d'écrouissage H	2 GPa
limite élastique σ_Y	200 MPa
coefficient de Poisson ν	0.3

TAB. 6.1: Paramètres du modèle élastoplastique

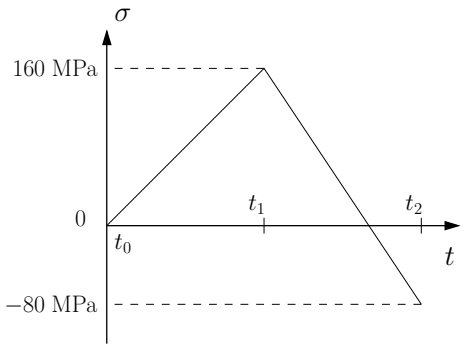


FIG. 6.5: Chargement appliqué à l'éprouvette

sées :

$$\varepsilon_{\text{res}}^k = \frac{||\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^k||_2}{||\mathbf{F}_{\text{ext}}||_2} \tag{6.11}$$

$$\varepsilon_{\Delta U}^k = \frac{||\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}||_2}{||\mathbf{U}^k||_2} \tag{6.12}$$

où $\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1} = \Delta\mathbf{U}^k$ est l'incrément de déplacement calculé dans chaque boucle locale de l'algorithme de Newton. Le critère d'arrêt est fixé à $\varepsilon_{\text{res}}^k < 10^{-6}$. L'évolution de l'indicateur $\varepsilon_{\Delta U}$ pour les deux variantes de MG-NL-L (avec $\nu = 1$) est également reportée. Dans ce cas, ΔU^k représente la correction en déplacement sur le niveau fin entre deux cycles multigrilles. Ajoutons que le critère d'arrêt sur le problème non-linéaire grossier de la variante MG-NL-L-PP est également fixé à $\varepsilon_{\text{res}}^k < 10^{-6}$. La comparaison directe des algorithmes de Newton et MG-NL-L est d'autant plus délicate que dans chaque cycle multigrille, deux mises à jour des variables internes sont réalisées : la première dans le calcul de $\widetilde{\phi}$ et la seconde dans l'itération de Newton (calcul de ϕ^k). Pour résumer, à nombre d'itérations de Newton équivalent (pour une même abscisse sur la figure 6.6), le nombre de résolutions de systèmes linéaires est le même pour les deux algorithmes (car $\nu = 1$). En revanche, il y a deux fois plus de mises à jour des variables internes dans l'algorithme multigrille. Suivant l'implémentation des diverses étapes de calcul, les performances en termes de temps de calcul peuvent être différentes. Elles peuvent également être différentes suivant la nature du problème et notamment la taille de la zone plastique qui conditionne la "charge de travail" à réaliser pour la mise à jour des variables internes. Notons également que dans la variante MG-NL-L-PP, la résolution du problème non linéaire grossier est bien plus coûteuse que la résolution du système linéaire de la variante MG-NL-L-EP.

La seule conclusion que l'on peut tirer est que l'algorithme multigrille localisé non linéaire proposé n'offre pas les même avantages en termes de temps de calcul et de complexité que la version linéaire. La raison ne vient pas seulement du fait que

deux modèles de matériaux différents soient utilisés sur les deux échelles, mais provient surtout de l'abscence de la propriété de lissage de l'algorithme de Newton. La solution proposée ne doit donc pas être vue comme une technique de résolution de problèmes élastoplastiques performante en termes de temps de calcul mais uniquement comme une méthode multiéchelle, voire multimodèle, adaptée à des problèmes localisés comme celui de la plasticité confinée en front de fissure.

La figure 6.7 représente la solution en termes de déformation plastique (norme de Von Mises) pour les pas de temps t_1 et t_2 ainsi que la carte des erreurs en contrainte de Von Mises sur le niveau fin calculée avec l'algorithme MG-NL-L-EP par rapport à la solution de référence de la manière suivante :

$$\varepsilon_{\mathrm{VM}} = \frac{|\sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{VM}} - \sigma_{\mathrm{MG}}^{\mathrm{VM}}|}{|\sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{VM}}|_{\Delta\sigma_{\max}}|} \tag{6.13}$$

où les indices N et MG sont relatifs aux résultats obtenus à partir des algorithmes de Newton et multigrille et où le dénominateur $\sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{VM}}|_{\Delta\sigma_{\max}}$ est une valeur constante désignant la valeur de la contrainte de Von Mises au point où l'écart (le numérateur) est maximal. Les expérimentations numériques considérées ici montrent que l'algorithme MG-NL-L-EP converge bien vers la solution de reférence obtenue à partir de l'algorithme de Newton. Bien que cela ne soit pas représenté, les résultats en termes d'erreur obtenus avec la variante MG-NL-L-PP sont similaires.

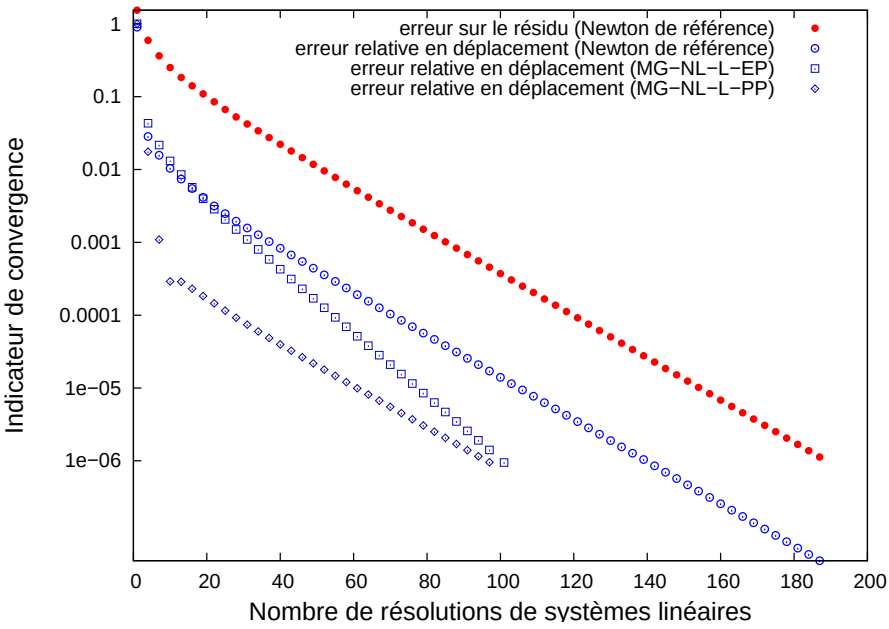


Fig. 6.6: Indicateurs de convergence pour les algorithmes de Newton et MG-NL-L

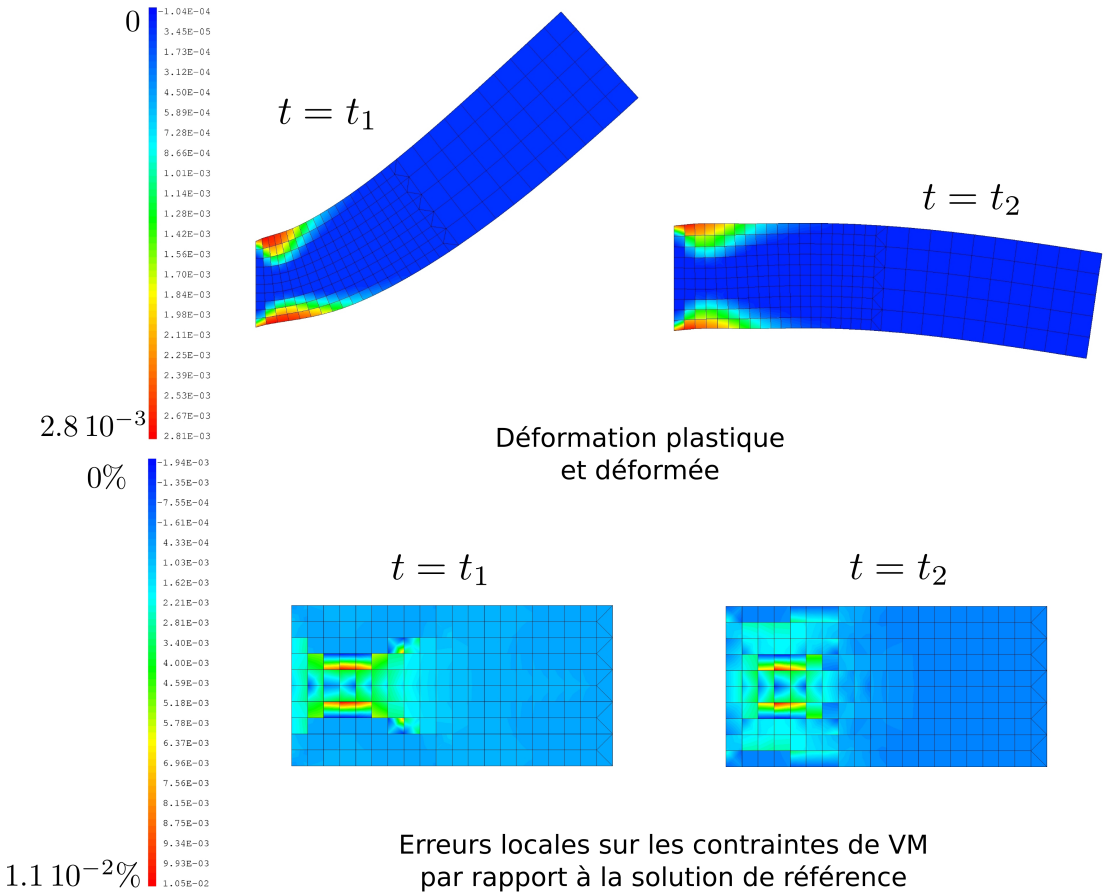


Fig. 6.7: Déformée et déformation plastique pour les deux pas de temps ainsi que la carte d'erreur par rapport au calcul de référence

6.2.3 Application de la version MG-NL-L-EP à une poutre fissurée en flexion

Le cas test présenté ici est similaire au précédent. La seule différence provient de la prise en compte d'une fissure (voir la figure 6.8). Celle-ci est modélisée à l'aide de la méthode X-FEM dans le code ELFE_3D. Le modèle élasto-plastique choisi est un modèle à écrouissage isotrope dont les paramètres sont indiqués sur la figure 6.9. Comme dans les exemples précédents, seule la moitié de la poutre du côté de l'encastrement est raffinée. En revanche, pour modéliser la zone plastique de manière suffisamment détaillée, les maillages sont plus fins que précédemment (voir la figure 6.10).

L'opérateur P est construit à partir de l'approche nodale décrite dans le chapitre 3. En revanche, comme nous ne sommes pas pour l'instant à la recherche de performances en termes de temps de calcul, la prise en compte des enrichissements dans la construction du nouvel opérateur de restriction $\overline{\mathbf{R}}$ a été négligée. $\overline{\mathbf{R}}$ est

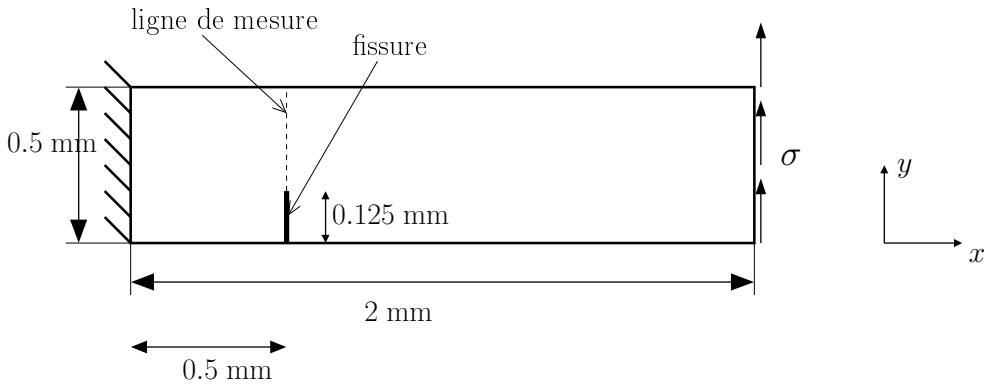


Fig. 6.8: Poutre fissurée en flexion

donc un opérateur d'injection qui met en correspondance uniquement les degrés de liberté classiques des deux niveaux qu'il relie.

type d'écouissage	isotrope
module de Young E	200 GPa
limite élastique σ_Y	200 MPa
coefficient de Poisson ν	0.3

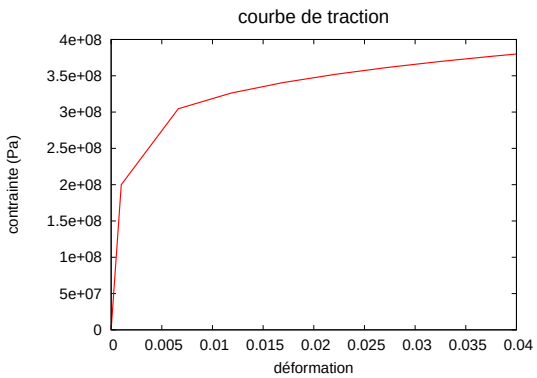
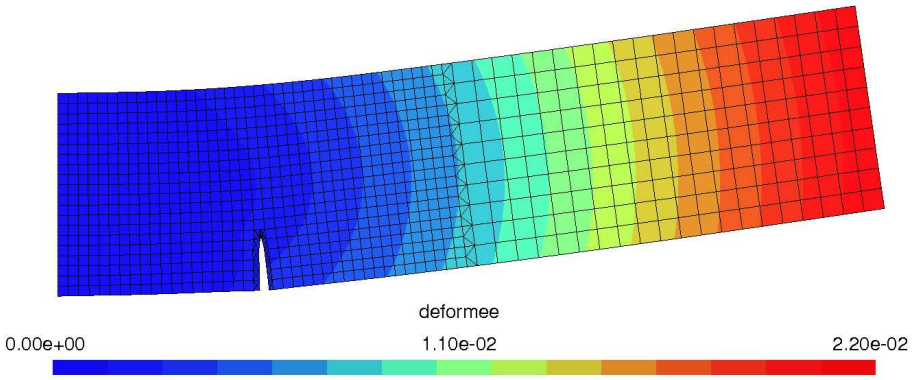


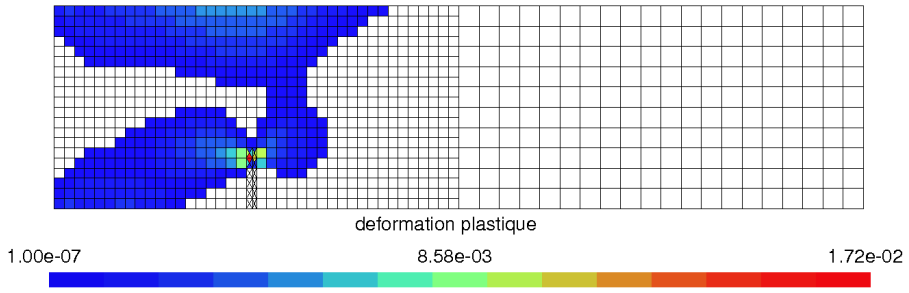
Fig. 6.9: Paramètres du modèle élasto-plastique du second exemple et courbe de traction

La figure 6.10 illustre les résultats des calculs à $t = t_1$ (charge maximale). La déformée issue du calcul de référence (Newton) ainsi que les déformations plastiques (norme de Von Mises) issues du calcul MG-NL-L-EP y sont représentées. On peut noter que le maillage utilisé pour le calcul de référence est le même que celui de la modélisation multigrille à la différence près que les éléments sont compatibles sur l'interface Γ. Sur la figure 6.11 la composante σ_{xx} du tenseur des contraintes est tracée. Il s'agit d'un relevé effectué sur la "ligne de mesure" définie sur la figure 6.8. Les contraintes affichées sont des moyennes par élément, ce qui justifie la présence de paliers sur le graphique. On note que la contrainte augmente considérablement au voisinage de la pointe de la fissure et qu'elle est quasiment nulle sur les faces. L'erreur commise sur σ_{xx} par rapport à la solution de référence est également tracée (critère du même type que (6.13)), elle ne dépasse pas $2.\,10^{-5}$. On remarque qu'elle

est maximale au niveau du front de fissure. Ces résultats montrent que malgré les lacunes des opérateurs de changement d'échelles et en particulier de $\overline{\mathbf{R}}$, la méthode proposée est robuste.



(a)



(b)

Fig. 6.10: Déformée (calcul de référence) et déformation plastique (calcul MG-NL-L) à la charge maximale ($t = t_1$)

L'influence du paramètre ν peut être analysée sur cet exemple. La figure 6.12 montre l'évolution de l'indicateur de convergence $\varepsilon_{\Delta U}$ en fonction du nombre de cycles multigrilles (le critère d'arrêt est fixé à 10^{-5}). À titre indicatif, nous y avons également représenté, de manière condensée à chaque cycle, la convergence "locale" de l'algorithme de Newton au sein de chaque étape de relaxation (petits points bleus). Le nombre d'itérations de Newton réalisées dans chaque cycle multigrille est représenté par des barres. Dans le premier cas, $\nu = 1$. Dans le second cas, $\nu = 10$ et le critère d'arrêt local est fixé à $\varepsilon_{\text{res}} < 10^{-5}$. On s'aperçoit que le choix d'une valeur de ν relativement élevée n'est pas vraiment bénéfique à la convergence de la méthode. Le gain en termes de nombre de cycles à convergence est négligeable et le "travail" consenti lors des phases de relaxation augmente de manière considérable ("aire" balayée par les pics bleus). Cela s'explique assez facilement en remarquant que

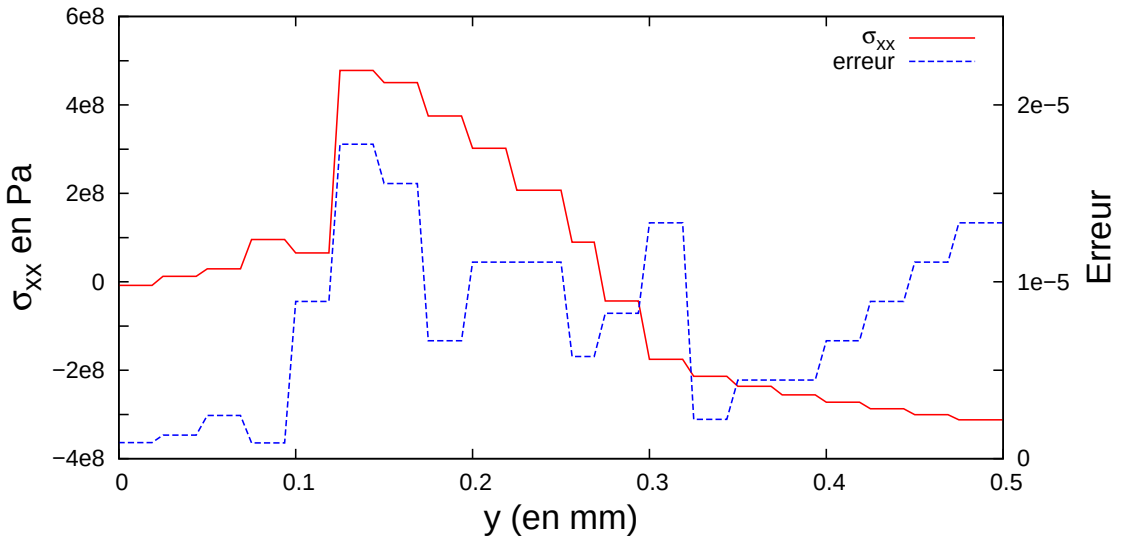


Fig. 6.11: Composante σ_{xx} le long de la ligne de mesure (voir figure 6.8) et les erreurs commises par rapport à la solution de référence

l'indicateur de convergence ε_{res} "saute" brutalement vers le haut entre deux cycles multigrille. En effet la correction apportée par la grille fine modifie les conditions aux limites et le problème fin n'est plus tout à fait le même. C'est également ce qui explique que la mise à jour des variables internes en début de cycle doit se faire à partir de l'état au début du pas de temps (avant le premier cycle multigrille) et non pas à partir de l'état à la fin du cycle précédent.

6.3 Bilan

Ce chapitre constitue un premier pas vers ce qui pourrait devenir une méthode multiéchelle/multimodèle intéressante pour traiter les problèmes de mécanique de la rupture avec plasticité confinée. Concernant les algorithmes multigrilles non linéaires à proprement parler, de nombreuses questions restent en suspend en ce qui concerne :

- la gestion des variables internes
- le choix de la loi de comportement sur les différentes grilles
- le choix des algorithmes non linéaires à utiliser dans les phases de relaxation
- les opérateurs intergrilles

En ce qui concerne les variables internes, nous avons évoqué trois possibilités : réaliser des restrictions, les laisser libres et indépendantes sur chaque niveau ou n'en avoir que sur le niveau le plus fin, les modèles grossiers étant élastiques. La restriction directe telle qu'elle a été décrite n'est probablement pas la bonne solution car l'équivalence des états des deux échelles n'est alors pas mécaniquement fondée. Il faudrait peut-être définir des opérations d'homogénéisation relativement sophistiquées permettant de définir un état plastique sur la grille grossière qui soit équivalent et qui permette éventuellement d'améliorer les propriétés de convergence de l'algorithme. Le choix de la loi de comportement à définir sur les différentes grilles relève également de ce problème. Il est certain que le modèle élastique de la grille grossière est trop éloigné du modèle élasto-plastique de la grille fine et que l'échelle grossière ne peut pas jouer son rôle "d'accélérateur" de convergence. On pourrait par exemple imaginer d'obtenir, toujours à partir d'opérateurs d'homogénéisation, un modèle élastique à raideur équivalente sur le maillage grossier.

Le choix des solveurs non linéaires peut également avoir une grande influence sur la convergence. Le solveur de Newton associé à la résolution de problèmes élasto-plastiques n'est pas un "lisseur". En utilisant un solveur de type BFGS, Fish [FIS 95] obtient des résultats, en termes de convergence et de temps de calcul, tout à fait intéressants. Le comportement du solveur est très dépendant du type de problème traité, mais il pourrait être intéressant de prospecter vers des méthodes telles que le BFGS ou le gradient conjugué non linéaire.

En ce qui concerne l'adaptation aux éléments finis étendus, l'opérateur de restriction peut bien entendu être amélioré. On peut envisager une approche nodale similaire à celle du chapitre 3 rendant compte de la discontinuité. Cette méthode est cependant plus délicate à mettre en œuvre car si avec des éléments imbriqués et des enrichissements sauts la propriété $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{U}_f$ est vérifiée, l'inverse n'est pas vrai :

$$\mathcal{U}_f \not\subset \mathcal{U}_g \tag{6.14}$$

et il faut être vigilant quant à la description correcte de la discontinuité. On peut également envisager une approche de type mortar qui prendrait la forme suivante :

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{M}^{gg^{-1}}\mathbf{M}^{gf} \tag{6.15}$$

Après avoir énoncé un certain nombre de perspectives concernant l'amélioration de la méthode, nous pouvons conclure ce chapitre en rappelant les points intéressants de la variante MG-NL-L-EP proposée. Il peut être utile pour un opérateur d'employer un maillage pré-existant initialement non conçu pour prendre en compte la présence d'une fissure. La possibilité d'ajouter à ce modèle des patchs raffinés localement ainsi que des enrichissements aux échelles pertinentes est alors intéressant. De plus, la mise en place d'un modèle élasto-plastique uniquement sur la grille la plus fine permet de réaliser une économie de mémoire substantielle par rapport à un calcul monomodèle/monoéchelle où des variables internes sont définies sur l'ensemble

de la structure. Le temps cpu nécessaire à leur mise à jour (boucle sur les points de Gauss) s'en trouve également fortement diminué. La méthode MG-NL-L-EP offre donc un potentiel intéressant et mérite d'être développée.

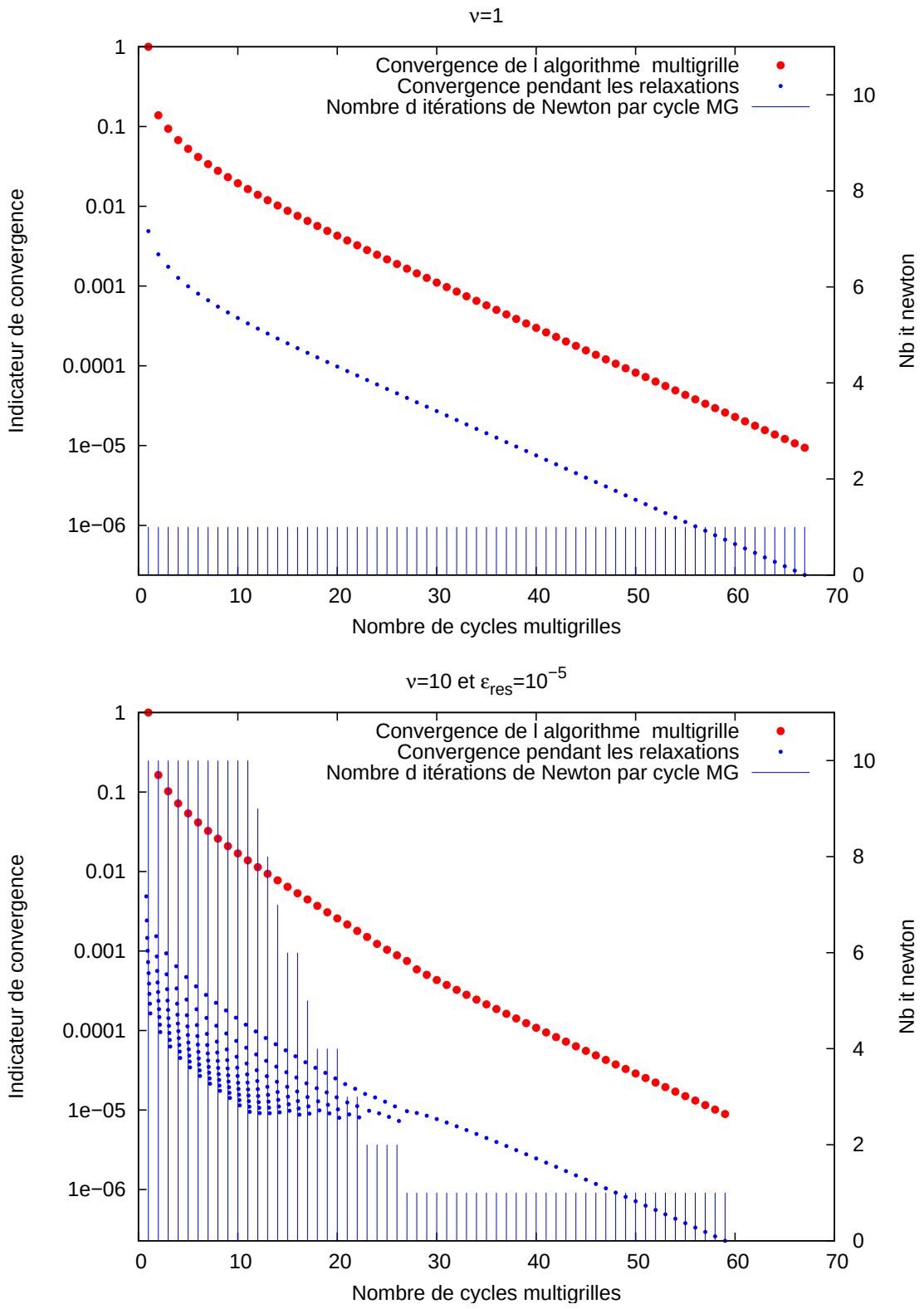


Fig. 6.12: Convergence de l'algorithme MG-NL-L pour des valeurs de $\nu = 1$ et $\nu = 10$

Conclusions et perspectives

L'étude de l'intégrité des structures, que ce soit dans les phases de conception ou dans les prévisions de tenue en service, contribue à réduire les coûts tout au long du processus de gestion des cycles de vie des produits. Les outils de simulation numérique occupent par conséquent une place de plus en plus importante dans l'industrie. Leur développement engendre de nombreuses études dans la communauté des chercheurs et des ingénieurs. Parmi les phénomènes importants à prendre en compte figure la propagation de fissures par fatigue qui fait l'objet de notre étude. La méthode des éléments finis demeure la technique la plus utilisée pour réaliser ce genre de simulation mais elle souffre de certaines limitations. Au cours de l'étude bibliographique présentée dans le chapitre 1, nous avons vu que de nombreuses alternatives existent. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis étendus figure en bonne place. Extension de la MEF, elle en conserve la plupart des avantages et permet de lever les difficultés liées aux aspects de remaillage et de projection de champs lors de la propagation de la fissure. De plus, son degré de maturité lui permet désormais d'être mise en œuvre dans un nombre croissant de codes de calcul commerciaux ou industriels.

L'aspect multiéchelle des problèmes de mécanique de la rupture évoqués dans l'introduction posent cependant un certain nombre de difficultés à la méthode des éléments finis classique ou étendue. La prise en compte dans la simulation de phénomènes présentant des facteurs d'échelle importants engendre notamment des problèmes au niveau du maillage et du coût de calcul. Un bref état de l'art des méthodes multiéchelles susceptibles de nous intéresser a été établi dans le chapitre 2. Un certain nombre d'entre elles ont déjà trouvé des applications en mécanique de la rupture. Cependant, la famille des techniques multigrilles a retenu notre attention. Ces méthodes n'ont certes pas été introduites en tant que méthodes multiéchelles à proprement parler, mais la présence de plusieurs niveaux de discrétisation est un potentiel qui peut être exploité. De plus, leurs excellentes propriétés de convergence et leur rapidité en tant que solveur offrent certains avantages. Ainsi, un raffinement local menant à un accroîssement important de la taille totale du problème ne conduit pas forcément à une augmentation rédhibitoire du temps de calcul.

À la suite de la description du classique *correction scheme* dans le chapitre 2, nous avons développé un algorithme multigrille linéaire localisé (MG-L) à partir d'une formulation variationnelle multiéchelle. Cette formulation découple les composantes

hautes fréquences et basses fréquences, ce qui permet d'identifier des problèmes définis sur chaque grille et d'exploiter le potentiel de lissage des solveurs itératifs. Le processus itératif permet aux solutions associées aux grilles les plus grossières de prendre en compte les informations issues des calculs les plus fins. Et réciproquement, le calcul de la solution sur les niveaux fins, potentiellement coûteux, est accéléré grâce à l'influence des calculs basses fréquences réalisés sur les niveaux les plus grossiers.

Dans le chapitre 3, les opérateurs de changement d'échelles (opérateurs intergrilles) permettant de coupler les techniques multigrilles avec la méthode des éléments finis étendus ont été introduits. Deux approches ont été présentées : une première méthode nodale simple à mettre en œuvre et une méthode variationnelle un peu plus complexe à implémenter. Nous avons vu que les deux approches conduisent à des opérateurs qui introduisent des erreurs hautes fréquences localisées au niveau du front de fissure du fait de la différence de description cinématique entre deux grilles consécutives dans cette région. Ces erreurs sont néanmoins lissées dans les phases de relaxation et nous avons pu observer qu'en termes de convergence de l'algorithme multigrille, ils présentent des comportements très similaires. Les exemples présentés dans la suite de ce chapitre ont pu mettre en évidence les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme MG-L appliqué à la méthode X-FEM. La stratégie descendante consistant à raffiner localement un maillage grossier pour se focaliser sur un détail y a également pris tout son sens. La stratégie d'enrichissement multiéchelle proposée présente par ailleurs un certain nombre d'avantages. Elle permet d'une part d'éviter le problème posé par l'enrichissement d'éléments trop grossiers. D'autre part, il est possible d'utiliser comme grille de départ (la plus grossière), le maillage d'une structure n'ayant pas été initialement conçu pour prendre en compte la présence d'une fissure.

Les divers exemples présentés ont mis en évidence les bonnes capacités de la méthode proposée à résoudre des problèmes de mécanique de la rupture. Simuler la propagation de fissures et analyser un problème de fatigue nécessite de plus la mise en œuvre de certains outils de post-traitement. Les fonctions de niveaux, déjà utilisées dans le cadre de la méthode X-FEM, semblent être une méthode pertinente pour représenter la géométrie mobile d'une fissure. Leur intégration dans un contexte multigrille consiste à utiliser un unique maillage auxiliaire indépendant des grilles utilisées dans le calcul mécanique. Ce maillage étant régulier, des algorithmes aux différences finies très robustes peuvent être utilisés pour mettre à jour les *level sets*. L'implémentation de cet outil au sein d'un code de calcul éléments finis est très peu intrusif et l'interfaçage avec la "partie" mécanique est très simple. Le chapitre 4 décrit également la méthode utilisée pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes qui sont, dans cette étude, les paramètres qui rentrent en jeu dans les lois de propagation. Une modification des champs d'extension virtuelle permettant de corriger certaines erreurs d'origines numériques commises lors du calcul des facteurs d'intensité des contraintes près des bords libres a également été proposée. L'ensemble de ces outils a été mis en œuvre au sein du code de calcul

ELFE_3D développé au LaMCoS.

Dans le chapitre 5, les résultats de simulation ont été confrontés à des données expérimentales de propagation de fissure tridimensionnelle. Il en ressort qu'une extrapolation 3D directe de la loi de Paris bidimensionnelle ne permet pas de rendre compte de tous les phénomènes mis en jeu. Le phénomène de refermeture, ici principalement dû aux effets de la plasticité confinée, ne joue pas le même rôle en volume qu'en surface. Une loi corrective du même type que celle proposée par Ferrié *et al.* [FER 06b] donne de bons résultats mais requiert de caler empiriquement un certain nombre de paramètres à partir de résultats expérimentaux. La mise en place d'une démarche systématique nécessite de développer un formalisme intégrant notamment la plasticité confinée. C'est avec cet objectif que nous proposons, dans le chapitre 6, un algorithme multigrille localisé non-linéaire permettant de prendre en compte la plasticité confinée. Le solveur de Newton utilisé dans les phases de relaxation ne possède pas les propriétés de lissage de la plupart des solveurs itératifs linéaires. Les performances, en termes de convergence et de temps de calcul, de l'algorithme proposé ne sont donc pas aussi bonnes que celles de l'algorithme linéaire MG-L. En revanche, cette approche présente l'avantage de n'avoir à définir un modèle élasto-plastique que sur la grille fine. Cela convient tout à fait à notre cadre d'étude où la plasticité est confinée en front de fissure. Contrairement à des calculs classiques où des variables internes sont définies sur l'ensemble de la structure et où leur mise à jour peut être très coûteuse, cette stratégie est de ce point de vue plus optimisée. L'extension à la prise en compte du contact et du frottement est à envisager. Ces phénomènes physiques jouent en effet un rôle important dans la propagation de fissure de fatigue sous chargement tribologique (roulement, fretting).

Une extension intéressante de ce travail serait l'incorporation d'un estimateur ou d'un indicateur d'erreur. Une technique inspirée des travaux de Ekevid *et al.* [EKE 04] ou de Cavin [CAV 05, CAV 06] pourrait être envisagée et s'intégrer relativement naturellement dans la stratégie multigrille localisée. En analysant la différence en termes de déplacement ou d'énergie locale entre deux solutions associées à deux niveaux de discrétisation successifs, nous pourrions obtenir une indication des erreurs locales et des zones à raffiner.

En ce qui concerne l'efficacité des solveurs multigrilles en non-linéaire, Fish *et al.* [FIS 95] utilisent un solveur BFGS dans les relaxations non-linéaires. Ils obtiennent ainsi un véritable gain tant en nombre d'itérations qu'en temps cpu total. Une investigation plus poussée vers l'utilisation d'autres solveurs permettrait peut être de gagner en temps cpu. Le manque de performance provient également du fait que les modèles sur les deux grilles sont différents. Même lorsqu'ils sont tous les deux élasto-plastiques, l'indépendance des variables internes peut conduire à des états plastiques différents. L'application d'opérateurs d'homogénéisation sur la grille grossière pourrait alors être envisagée [ZOH 05].

La nécessité de prendre en compte la plasticité confinée vient du fait qu'un mo-

dèle élastique ne peut pas représenter le phénomène de refermeture. La plasticité n'est d'ailleurs pas la seule chose à prendre en compte, et des modèles incorporant du contact et du frottement ont déjà été développés. L'application de tels modèles non-linéaires à la détermination d'un ΔK effectif et l'utilisation directe de la loi de Paris est une stratégie qui a déjà été envisagée [SOL 04, ELG 07]. Elle a fourni des résultats intéressants, mais le coût d'une telle stratégie pour des structures tridimensionnelles soumises à des chargements complexes peut rapidement devenir rédhibitoire. De plus, dans le cas d'un chargement complexe, il faut le plus souvent faire appel à des modèles de chargement cyclique équivalent. De ce point de vue, une alternative à la loi de Paris envisageable est l'approche développée par Pommier *et al.* [POM 05a, POM 05b]. Pour l'instant limité au mode I en 3D, ce modèle est basé sur une formulation du problème de propagation en termes de dérivée par rapport au temps et non par rapport au nombre de cycles. On peut ainsi utiliser directement le chargement réel. Les phénomènes non-linéaires et les effets d'histoire sont incorporés dans cette loi par l'intermédiaire d'un nombre limité de variables internes condensées sur le front de fissure et qui représentent l'état global dans le voisinage du front. L'effet sur la propagation en fatigue des termes d'ordre supérieur du champ asymptotique (la contrainte T notamment) peuvent également être intégrés [HAM 05]. L'identification de certains paramètres du modèle nécessite un recalage à partir de simulations élasto-plastiques par éléments finis très précises. L'utilisation de l'approche multigrille localisée non-linéaire couplée avec la méthode X-FEM pourrait ici trouver tout son intérêt.

Nous avons déjà mentionné le projet PROPAVANFIS qui regroupe des équipes du laboratoire MATEIS, du LMT-Cachan et du LaMCoS. Il constitue un environnement idéal pour le développement conjoint et la confrontation de techniques expérimentales et de simulation pour l'étude de propagation tridimensionnelle de fissure de fatigue. Le dispositif expérimental décrit au chapitre 5 (machine de fatigue, microtomographie) est au cœur de ce projet. Une technique de mesure de champs tridimensionnels par des techniques de corrélation d'images ont été développées par le LMT-Cachan [RÉT 08a, ROU 07, RÉT 08b]. Cette technique repose sur la résolution de la forme faible de l'équation de conservation du flux optique classiquement utilisée en corrélation d'images. La base de projection utilisée est celle des fonctions de forme éléments finis enrichies pour tenir compte de la discontinuité et de la singularité du champ de déplacement, d'où le nom de la méthode : X-DIC (*extended digital image correlation*). À partir de blocs tomographiques, cette méthode permet d'avoir accès non seulement à la géométrie de la fissure mais aussi à une bonne estimation des champs de déformation dans tout le volume. Différentes passerelles et interfaces ont été établies entre les outils d'imagerie, de mesure et de simulation comme l'illustre la figure 6.13. Les résultats déjà obtenus [BAI 08, RAN is] font ressortir un certain nombre de pistes à suivre pour mieux appréhender les phénomènes mis en jeu. Du point de vue numérique, outre les problèmes déjà évoqués, l'amélioration du calcul des facteurs d'intensité des contraintes semble être nécessaire lorsque les fissures ont une forme plus complexe que celles étudiées dans ce

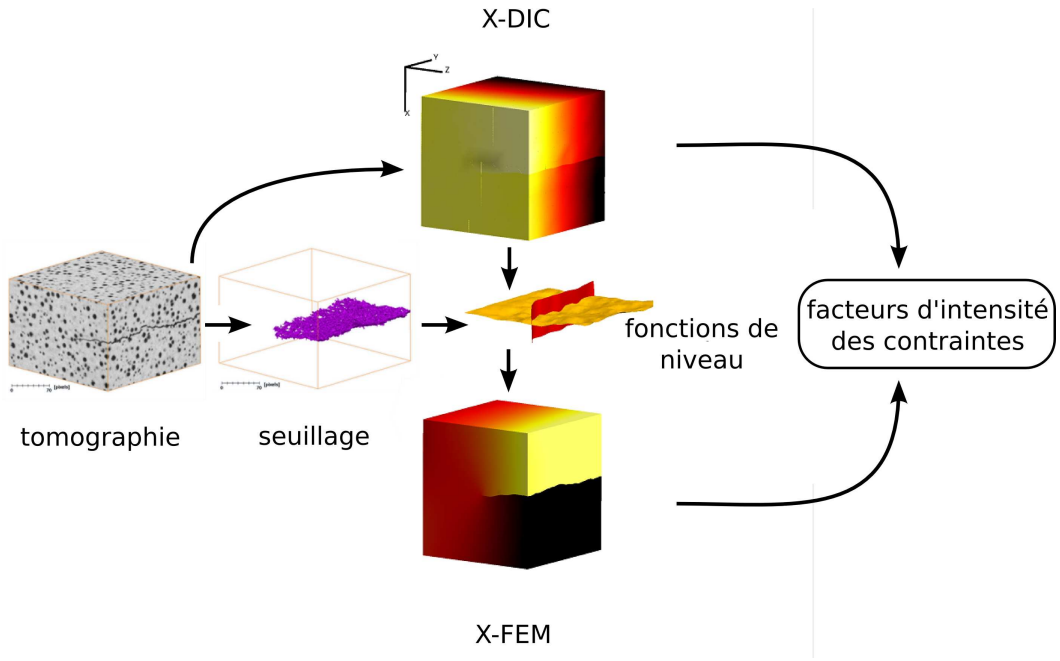


Fig. 6.13: Passerelles et interfaces entre les outils d'imagerie, de mesure par corrélation et de simulation (d'après [RAN is])

mémoire. Ceci peut nécessiter l'abandon des intégrales de domaine au profit, par exemple, de techniques d'identification par les moindres carrés de coefficients de développements asymptotiques d'ordres élevés [HAM 07]. L'analyse de propagation en mode mixte est également une piste à suivre afin de valider et d'identifier les potentiels d'amélioration de l'outil proposé dans cette étude.

Annexe A

Prise en compte des bords libres dans le VCE

Dans la section 4.2 du chapitre 4, nous avons évoqué une méthode permettant de prendre en compte la présence d'un bord libre dans le champ d'extension virtuelle (VCE en anglais) intervenant dans le calcul de l'intégrale de domaine (4.36). Nous allons en donner les détails dans cette annexe.

Les relations (4.30) de la page 104 donnent les conditions que le champ d'extension virtuelle doit respecter afin de vérifier que l'intégrale $L(s)$ (4.36) soit indépendante du domaine. Le calcul numérique de cette intégrale se fait sur un domaine parallélépipédique tel que celui qui est représenté sur la figure 4.9.b de la page 105. Ce domaine est appelé une "boîte" et est constitué de huit éléments HEX8 qui sont les supports de l'intégration numérique. Un champ d'extension virtuelle vérifiant alors les conditions (4.30) est exprimé par la relation (4.38) qui est rappelée ici :

$$\underline{q} = q\hat{\underline{e}}_1 \tag{A.1}$$

avec

$$q(P) = \cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{r_1})\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_2}{r_2})\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{x_3}{r_3}) \tag{A.2}$$

Nous rappellons que r_1, r_2 et r_3 sont les dimensions du parallélépipède centré sur le point O suivant les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ respectivement. Les coordonnées du point courant P dans le repère $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont x_1, x_2 et x_3.

Lorsque le point O où nous voulons calculer les facteurs d'intensité des contraintes se rapproche d'un bord libre, la "boîte" sort de la structure et le champ d'extension virtuelle exprimé par (A.2) ne vérifie alors plus les conditions (4.30) comme l'illustre la figure 4.11.a de la page 107.Nous proposons alors de le multiplier par une fonction rampe $f(P)$ variant linéairement entre 0 hors de la structure et 1 au centre du domaine d'intégration. Si le bord libre est localement assimilable à un plan de normale

$\underline{n}$ passant par un point A, cette fonction s'exprime par :

$$f(P) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d(O) \leq d(P) \\ d(P)/d(O) & \text{si} \quad 0 \leq d(P) < d(O) \\ 0 & \text{si} \quad d(P) < 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

où $d(P)$ est la distance du point courant P au plan $(A, \underline{n})$:

$$d(P) = \underline{PA}.\underline{n} \tag{A.4}$$

Si (a_1, a_2, a_3) et (n_1, n_2, n_3) sont les coordonnées du point A et les composantes du vecteur $\underline{n}$ respectivement, on a :

$$d(P) = (a_1 - x_1)n_1 + (a_2 - x_2)n_2 + (a_3 - x_3)n_3 \tag{A.5}$$

La fonction rampe f est représentée sur la figure A.1 dans le cas particulier où la surface libre est orthogonale au plan de la fissure.

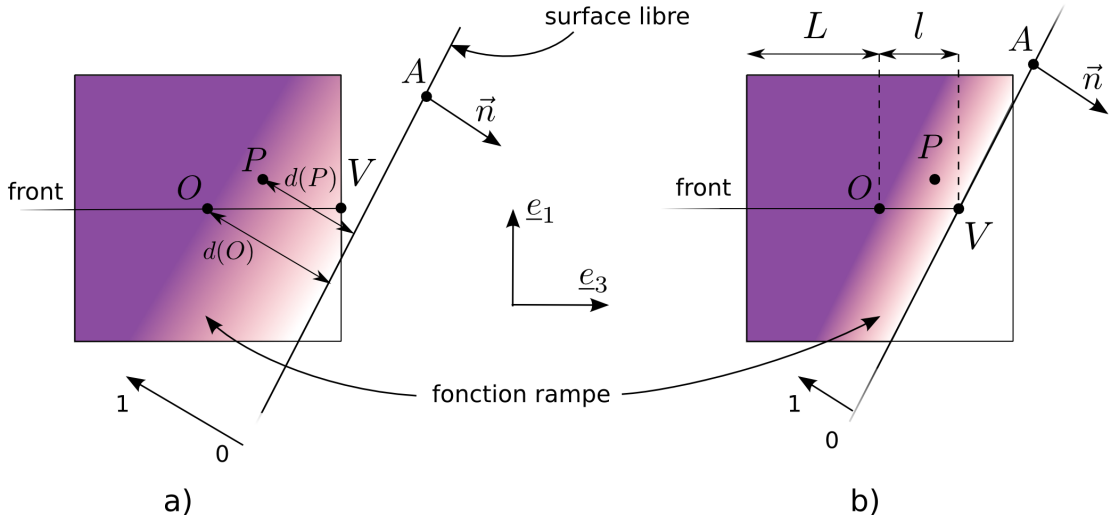


Fig. A.1: Fonction rampe dans les deux cas de figure identifiés : (a) le point V est sur une face du parallélépipède, (b) le point V n'est pas sur une face du parallélépipède

Le champ d'extension virtuelle s'exprime maintenant par :

$$\underline{q}(P) = f(P)q(P)\underline{\hat{e}}_1(P) \tag{A.6}$$

Le calcul de $L(s)$ (4.36) et de $\overline{L}$ (4.35) font intervenir le champ $\underline{q}$ qui vient d'être défini, mais aussi son gradient $\underline{\underline{\nabla}}q$ qui peut se développer comme ceci :

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{q} = \underline{\underline{\nabla}}(fq\underline{\hat{e}}_1) \tag{A.7}$$

$$= \underline{\hat{e}}_1 \otimes \underline{\nabla}(fq) + fq\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\hat{e}}_1 \tag{A.8}$$

Le terme fq est analytique et son gradient est simple à calculer. Le terme $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\hat{e}}_1$ peut quant à lui être calculé numériquement à l'aide de la fonction de niveau ψ. Tout d'abord, on écrit :

$$\underline{\hat{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2}} \begin{pmatrix} \psi_{,x} \\ \psi_{,y} \\ \psi_{,z} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

Il vient ensuite :

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\hat{e}}_1 = \frac{1}{\left(\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} \psi_{,xx}(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2) - \psi_{,x}(\psi_{,y}\psi_{,yx} + \psi_{,z}\psi_{,zx}^2) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

Le terme $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{q}$ peut donc être calculé numériquement en chacun des points de Gauss des huit éléments du domaine d'intégration. La détermination de $L(s)$ nécessite également le calcul du terme suivant :

$$\int_C \delta l(s)\, ds \tag{A.11}$$

Ce terme peut être calculé analytiquement. Le lien qui existe entre δl et $\underline{q}$ impose que :

$$\delta l = f \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_3}{r_3}\right) \tag{A.12}$$

Afin d'intégrer l'expression (A.11), il convient d'étudier les deux cas représentés sur la figure A.1 : celui où le point V est sur une face du parallélépipède et celui où il ne l'est pas. Dans le premier cas, l'expression (A.11) se décompose comme ceci :

$$\int_{-L}^{0} \delta l(s)\, ds + \int_{0}^{L} \delta l(s)\, ds \tag{A.13}$$

avec $L = r_3/2$. Le résultat n'est pas explicité ici mais son obtention ne pose aucun problème particulier. Dans le second cas, l'expression A.11 se réécrit :

$$\int_{-L}^{0} \delta l(s)\, ds + \int_{0}^{l} \delta l(s)\, ds \tag{A.14}$$

La longueur l correspond à la distance OV. Pour la déterminer, on exprime l'équation du plan $(A, \underline{n})$:

$$0 = (a_1 - x_1)n_1 + (a_2 - x_2)n_2 + (a_3 - x_3)n_3 \tag{A.15}$$

Le point V correspond à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = l$. Nous obtenons donc :

$$l = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3}{n_3} \tag{A.16}$$

Ici encore le résultat de l'intégrale n'est pas explicité mais il est à noter que son obtention ne pose aucun problème.

Annexe B

Mise en œuvre dans le code de calcul ELFE_3D

Les différents développements dont il a été question dans ce mémoire ont été réalisés dans le code de calcul ELFE_3D développé au LaMCoS afin de mettre en œuvre la méthode X-FEM. Écrit en C++, il est construit autour de "formulations" spécifiques à chaque type de problème. Un diagramme UML partiel de son architecture est donné sur la figure B.1. Toutes les classes de formulations sont dérivées d'une classe initiale dénommée `Formulation_c` qui contient les informations liées aux maillages, aux degrés de liberté, aux matériaux et à la géométrie des fissures (via la classe `Data_c` dont elle contient une instanciation unique). Il existe ensuite deux grandes catégories de formulations. Celles qui sont héritées de la classe `Mechanics_c` concernent les problèmes qui ne présentent aucune dépendance au temps. Toutes les formulations d'élasticité en font partie. Seule la formulation `MechanicsMultigrid_c` relative à l'implantation de l'algorithme MG-L linéaire est représentée sur le diagramme UML mais il en existe beaucoup d'autres (formulation de poro-élasticité, formulation de zones cohésives, ...). Les autres formulations héritent de la classe `Dynamics_c`. Elles sont relatives aux problèmes dépendants du temps. C'est bien évidemment le cas des formulations de dynamique, mais c'est aussi le cas des formulations élasto-plastiques telles que `MechanicsPlasticity_c` ou `PlasticityMultigrid_c`. C'est dans cette dernière qu'est implanté l'algorithme MG-NL-L-EP. Chacune de ces deux classes mères contiennent les procédures de pré-traitement et de post-traitement communes à toutes leurs classes filles. C'est également elles qui contiennent les procédures d'enrichissement. Celles-ci sont très différentes suivant que le problème dépende du temps ou pas car la gestion des enrichissements en cas de propagation sont alors spécifiques [RÉT 05, ELG 07]. C'est ce qui justifie la présence de deux grandes familles de formulations.

Toutes les classes représentées en rouge sur le diagramme de la figure B.1 sont celles qui ont été créées ou fortement modifiées pour mettre en œuvre les différents développements présentés dans ce mémoire. Les classes `MechanicsMultigrid_c` et `MultigridPLasticity_c` héritent de deux classes différentes. Afin de gérer les as-

pects multiéchelles des techniques proposées, nous avons créé une nouvelle classe commune `MultiScaleTools_c`, dont elles héritent également toutes les deux. Cette classe comporte un certain nombre de méthodes dont on peut citer en particulier les procédures de raffinement ou de construction des opérateurs intergrilles. Des procédures de pré et post-traitement spécifiques liées aux différentes échelles mises en jeu sont développées au sein de chacune de ces deux formulations.

Les fonctions de niveau sont implantées dans une classe spécifique dénommée `lField_c`. Elle comporte un pointeur vers un maillage auxiliaire au format AOMD [REM 03] ainsi que tous les outils spécifiques au traitement des fonctions de niveau (propagation, orthogonalisation, ...). Les informations issues de ces objets interagissent avec la classe `Data_c` mais aussi avec les classes mères `Mechanics_c` et `Dynamics_c` pour le post-traitement des facteurs d'intensité des constraintes et l'importation des informations liées à la propagation.

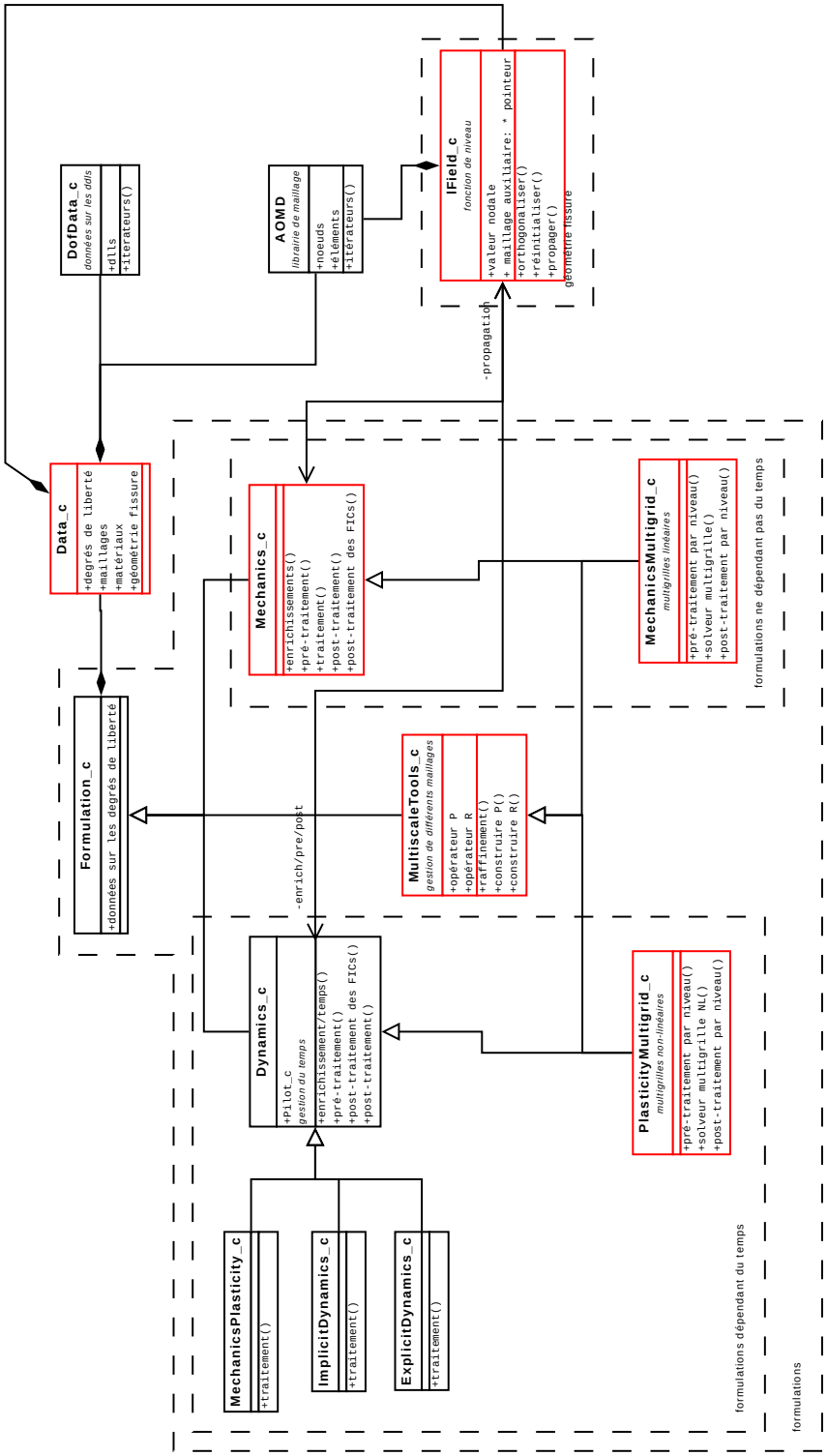


Fig. B.1: Diagramme UML partiel de l'architecture du code ELFE_3D

Annexe C

Approximation continue des intégrales de domaine sur le front

Dans la section 4.2 du chapitre 4, nous avons introduit l'intégrale $\overline{L}$ qui est définie par l'expression (4.28) qui est rappelée ici :

$$\overline{L} = \int_C L(s)\delta l(s)\, ds \tag{C.1}$$

où $L(s)$ est l'intégrale de contour que nous voulons calculer (4.26). Dans la pratique, $\overline{L}$ est calculée à partir de l'expression (4.35) également rappelée ici :

$$\overline{L} = -\int_{\mathcal{V}_0} P_{lj,j} q_l \, dV - \int_{\mathcal{V}_0} P_{lj} q_{l,j} \, dV \tag{C.2}$$

Nous avons ensuite fait l'hypothèse que $L(s)$ est constante le long du segment C, ce qui aboutit à l'expression (4.36) :

$$L(s) = \frac{\overline{L}}{\int_C \delta l(s) ds} \tag{C.3}$$

Cette hypothèse d'invariance peut être levée. C'est ce que proposent par exemple Rajaram *et al.* dans [RAJ 00] pour le calcul de l'intégrale J. Leur approche consiste à approximer $L(s)$ le long du front à l'aide d'une interpolation de type éléments finis :

$$L(s) = \sum_{I \in \mathcal{N}} L_I N_I(s) \tag{C.4}$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des noeuds permettant de discrétiser le front et les $N_i(s)$ sont les fonctions de formes associées à ces noeuds (voir la figure C.1.a).

L'équation (C.1) se réécrit alors comme suit :

$$\sum_{I \in \mathcal{N}} \left(L_I \int_C N_I(s)\delta l(s)\, ds \right) \;=\; -\int_{\mathcal{V}_0} P_{lj,j} q_l + P_{lj} q_{l,j} \, dV \tag{C.5}$$

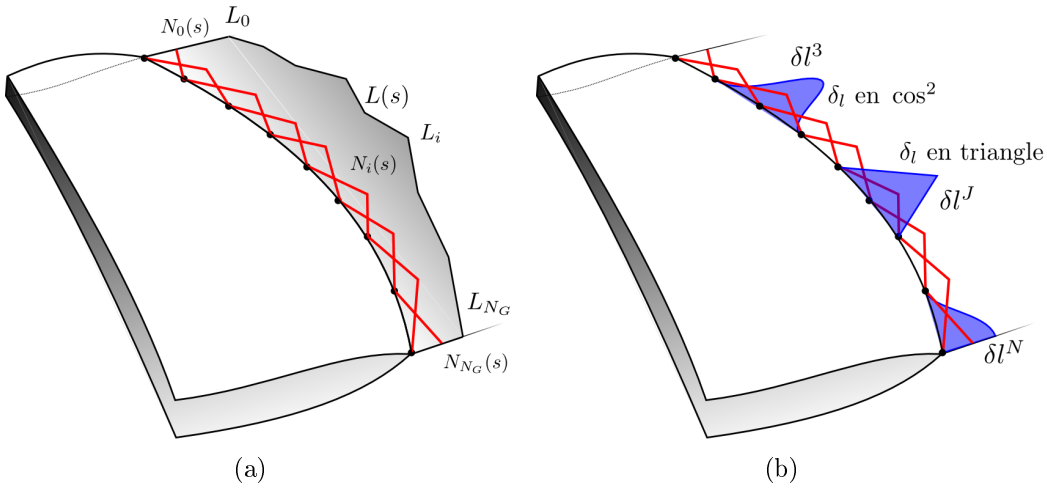


Fig. C.1: (a) Discrétisation de $L(s)$ le long du front et (b) les extensions virtuelles définies en chaque noeud

Nous pouvons écrire cette équation en chaque noeud I du front, ce qui nous donne un système de N équations à N inconnues, N étant le nombre de noeuds. À chaque noeud I correspondent une extension virtuelle δl^I et un champ d'extension virtuelle $\underline{q}^I$ (voir la figure C.1.b). On définit ainsi le système linéaire suivant :

$$\mathbf{AL} = \overline{\mathbf{L}} \tag{C.6}$$

avec

$$A_{IJ} = \int_C N_J(s)\delta l^I(s)\, ds \tag{C.7}$$

$$\overline{L}_I = -\int_{\mathcal{V}_0} P_{lj,j}q_l^I + P_{lj}q_{l,j}^I\, dV \tag{C.8}$$

La résolution de ce système linéaire permet de déterminer les composantes de $\mathbf{L}$, L_I, et par conséquent de connaître une approximation continue de $L(s)$ le long du front.

Les extensions virtuelles choisies sont totalement indépendantes des fonctions de forme. Notons simplement que si l'on choisit des extensions δl semblables aux fonctions de forme (comme l'extension δl^J représentée sur la figure C.1.b), la matrice $\mathbf{A}$ est similaire à une matrice de masse à la masse volumique près. Un paramètre important que l'on peut cependant définir est la couverture c qui correspond au nombre d'éléments du front que l'extension virtuelle couvre (voir la figure C.2).

Cette technique a été testée dans différents cas avec des couvertures allant de $c = 1$ à $c = 4$ et avec des fonctions de forme d'ordre 1 et des extension virtuelles en $\cos^2$ ou en chapeau. Les résultats obtenus ont montré une forte sensibilité de la méthode aux perturbations du second membre. Le conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$

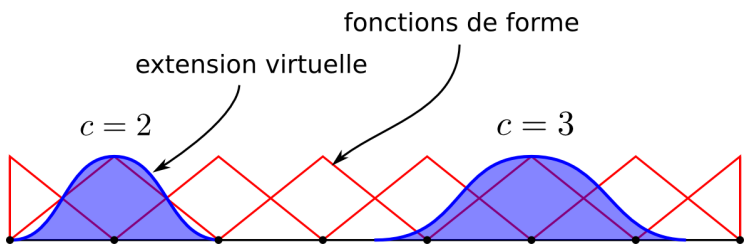


Fig. C.2: Couverture de l'extension virtuelle relativement à la taille des éléments discrétisant le front

n'est en effet pas forcément très bon. Il en résulte que les oscillations observées sur les facteurs d'intensité des contraintes (voir la figure 4.14 page 111 par exemple) et les erreurs commises dans le calcul de $\overline{L}$ sont amplifiées. Ceci est illustré d'un point de vue numérique sur la figure C.3 où nous avons représenté un second membre permettant d'obtenir une solution constante $L(s) = 1$. Notons qu'à ce stade, la physique du problème n'intervient plus car elle a déjà été pris en compte dans les termes $\mathbf{A}$ et $\overline{\mathbf{L}}$. Le second membre est perturbé de 10% sur un noeud au centre du front (à $s = 0.5$, la longueur du front étant égale à 1). Nous observons que la perturbation est amplifiée sur la solution $L(s)$. Nous avons pu constater que plus la couverture c augmente, plus la solution est sensible à une perturbation du second membre (dégradation du conditionnement de $\mathbf{A}$).

Finalement, un moyen de limiter cette sensibilité est d'annuler le couplage entre les composantes du vecteur $\mathbf{L}$. On peut alors envisager de "lumper" la matrice $\mathbf{A}$ comme on le fait pour la matrice de masse en dynamique explicite (rappelons que la matrice $\mathbf{A}$ ressemble beaucoup à la matrice $\mathbf{M}$). Ce *lumping* permet de diagonaliser la matrice en sommant tous les termes d'une ligne et en les affectant sur la diagonale. Ceci donne un nouvel opérateur $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$\widetilde{A}_{IJ} = \delta_{IJ} \int_C \overbrace{\sum_{J \in \mathcal{N}} N_J(s)}^{1} \delta l^I(s)\, ds \tag{C.9}$$

$$= \delta_{IJ} \int_C \delta l^I(s)\, ds \tag{C.10}$$

Dans la mesure où les fonctions de forme vérifient la partition de l'unité, on aboutit à une matrice diagonale composée des termes $\int_C \delta l^i(s)\, ds$. Ceci correspond à l'hypothèse d'invariance de $L(s)$ le long du segment C et correspond exactement à la méthode décrite dans la section 4.2 où le calcul de $L(s)$ est local.

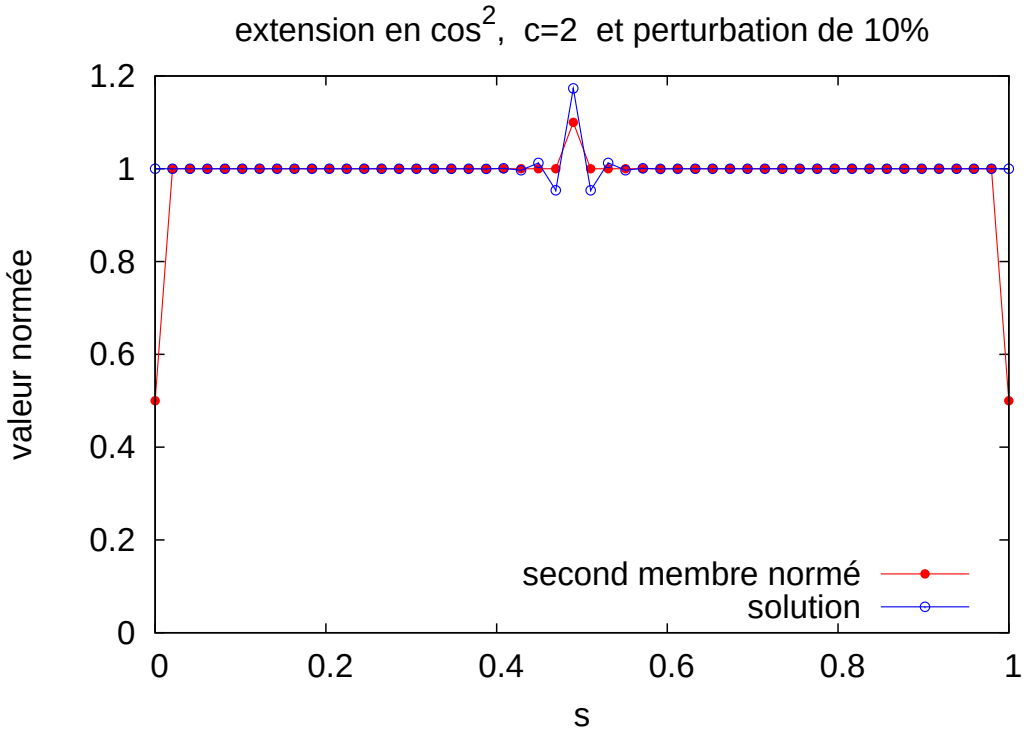


Fig. C.3: Second membre perturbé et solution du système linéaire

Bibliographie

[ADA 00a] Adams M., Taylor R.
Parallel multigrid solvers for 3D-unstructured large deformation elasticity and plasticity finite element problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 36, n° 3-4, 2000, p. 197–214, Elsevier Science Publishers BV Amsterdam, The Netherlands.

[ADA 00b] Adams M.
Parallel multigrid solvers for 3D unstructured finite element problems in large deformation elasticity and plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1241–1262.

[ADA 02] Adams M.
Evaluation of three unstructured multigrid methods on 3D finite element problems in solid mechanics. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 55, 2002, p. 519–534.

[ARE 05] Areias P., Belytschko T.
Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng*, vol. 63, 2005, p. 760–788.

[BAB 97] Babuska I., Melenk J.
The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 4, 1997, p. 727–758.

[BAI 87] Bai D., Brandt A.
Local Mesh Refinement Multilevel Techniques. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 8, 1987, page 109, SIAM.

[BAI 08] Baietto-Dubourg M.-C., Buffière J.-Y., Combescure A., Gravouil A., Hild F., Limodin N., Ludwig W., Rannou J., Réthoré J., Roux S., Tinnes J.-P.
X-Ray Microtomography, X-3D-Digital Image Correlation and X-FEM Multigrid, a General Tool for 3D Crack Growth Law Identification - PROPAVANFIS Collaboration. *8th World Congress On Computational Mechanics, Venice, Italy*, july 2008.

[BAR 74] Barsoum R.
Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, vol. 10, n° 4, 1974, p. 603–605, Springer.

[BAR 00] Baruchel J., Buffière J.-Y., Maire E., Merle P., Peix G.
X-Ray Tomography in Material Sciences. Hermes Science, Paris (France), 2000.

[BAZ 79] Bazant Z., Estenssoro L.
Surface Singularity and Crack Propagation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, n° 5, 1979, p. 405–426.

[BÉC 05] Béchet E., Minnebo H., Moës N., Burgardt B.
Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n° 8, 2005, p. 1033–1056.

[BEL 94] Belytschko T., Lu Y., Gu L.
Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n° 2, 1994, p. 229–256.

[BEL 99] Belytschko T., Black T.
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n° 5, 1999, p. 601–620.

[BEL 00] Belytschko T., Liu W., Moran B.
Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Wiley, Chichester, 2000.

[BEL 02] Belytschko T., Xiao S., Schatz G., Ruoff R.
Atomistic simulations of nanotube fracture. *Physical Review B*, vol. 65, n° 23, 2002, page 235430, APS.

[BEL 03] Bellec J., Dolbow J.
A note on enrichment functions for modelling crack nucleation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, n° 12, 2003, p. 921–932.

[BEN 77] Benthem J.
State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 13, 1977, p. 479–492.

[BEN 80] Benthem J.
The quarter-infinite crack in a half-space ; alternative and additional solutions. *Int. J. Solids Struct*, vol. 16, n° 2, 1980, page 119.

[BEN 05] Ben Dhia H., Rateau G.
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 62, 2005, p. 1442–1462.

[BEN 08] Ben Dhia H., M. T.
How the multiscale arlequin framework could help for sheet metal forming simulation. *11th ESAFORM conference on material forming, Lyon, France*, april 2008.

[BON 95a] Bonnet M.
Équations intégrales et éléments de frontiere. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1995.

[BON 95b] Bonnet M., Xiao H.
Computation of energy release rate using material differentiation of elastic BIE for 3-D elastic fracture. *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 15, n° 2, 1995, p. 137–149, Elsevier.

[BOR 03] de Borst R.
Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 14, 2003, p. 1743–1757, Elsevier.

[BOR 06] de Borst R., Remmers J., Needleman A.
Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, n° 2, 2006, p. 160–177, Elsevier.

[BRA 77a] Brandt A.
Multi-level adaptative technique (mlat) for fast numerical solution to boundary value problems. *Lecture Notes in Physics*, vol. 18, 1977.

[BRA 77b] Brandt A.
Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. *Mathematics of Computation*, vol. 31, n° 138, 1977, p. 333–390, JSTOR.

[BRA 84] Brandt A.
Multigrid Techniques : 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1984.

[BUD 04] Budyn É., Zi G., Moës N., Belytschko T.
A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 61, 2004, p. 1741–1770.

[BUI 78] Bui H. D.
Mécanique de la rupture fragile. Masson, 1978.

[BUI 06] Bui H.
Fracture Mechanics : Inverse Problems and Solutions. Springer, 2006.

[CAV 05] Cavin P., Gravouil A., Lubrecht A., Combescure A.
Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, n° 11-12, 2005, p. 1043–1055, Elsevier.

[CAV 06] Cavin P.
Methode elements finis avec raffinement spatial et temporel adaptatif et automatique : "star-method" (space time automatic refinement). Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.

[CHE 03] Chessa J., Wang H., Belytschko T.
On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, 2003, p. 1015–1038.

[DAU 00] Daux C., Moës N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T.
Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element me-

thod. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1741–1760.

[DEN 77] Dennis Jr J., More J.
Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*, vol. 19, n° 1, 1977, p. 46–89, JSTOR.

[DOL 02] Dolbow J., Gosz M.
On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n° 9, 2002, p. 2557–2574, Elsevier.

[DUB 92a] Dubourg M., Villechaise B.
Analysis of multiple fatigue crack — Part II : result. *Journal of Tribology*, vol. 114, 1992, p. 462–468.

[DUB 92b] Dubourg M., Villechaise B.
Analysis of multiple fatigue cracks — Part I : Theory. *Journal of Tribology(Transactions of the ASME)(USA)*, vol. 114, n° 3, 1992, p. 455–461.

[DUF 04] Duflot M., Nguyen-Dang H.
A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 59, 2004, p. 1945–1961.

[DUF 06] Duflot M.
A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, n° 11, 2006, p. 1261–1302.

[DUR 06] Dureisseix D., Bavestrello H.
Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44-47, 2006, p. 6523–6541, Elsevier.

[EKE 04] Ekevid T., Kettil P., Wiberg N.
Adaptive multigrid for finite element computations in plasticity. *Computers and Structures*, vol. 82, n° 28, 2004, p. 2413–2424, Elsevier.

[ELB 70] Elber W.
Fatigue crack closure under cyclic tension . *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, 1970, p. 37–45.

[ELG 06] Elguedj T.
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.

[ELG 07] Elguedj T., Gravouil A., Combescure A.
A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modelling elastic–plastic fatigue crack growth with unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, n° 13, 2007, p. 1569–1597.

[ERD 63] Erdogan F., Sih G.
On the crack extension in plates under loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 519–527.

[FED 64] Fedorenko R.
The speed of convergence of one iterative process. *USSR Comp. Math. and Math. Physics*, vol. 4, 1964, p. 227–235.

[FEN 97] Feng Y., Peric D., Owen D.
A non-nested Galerkin multi-grid method for solving linear and nonlinear solid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, n° 3, 1997, p. 307–325, Elsevier Science.

[FER 06a] Ferrié E.
Caractérisation et modélisation tridimensionnelle de la propagation de fissures de fatigue dans des alliages d'aluminium modèles. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.

[FER 06b] Ferrié E., Buffière J., Ludwig W., Gravouil A., Edwards L.
Fatigue crack propagation : In situ visualization using X-ray microtomography and 3 D simulation using the extended finite element method. *Acta Materialia*, vol. 54, n° 4, 2006, p. 1111–1122.

[FIS 95] Fish J., Pandheeradi M., Belsky V.
An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, 1995, p. 1597–1610.

[FIS 05] Fish J., Yuan Z.
Multiscale Enrichment based on Partition of Unity. *Inter. J. Numer. Meth. Eng*, vol. 62, 2005, p. 1341–1359.

[GOS 98] Gosz M., Dolbow J., Moran B.
Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 15, 1998, p. 1763–1783, Elsevier Science.

[GOS 02] Gosz M., Moran B.
An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, n° 3, 2002, p. 299–319, Elsevier.

[GRA 00] Gravouil A.
Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures. Thèse de doctorat, ENS Cachan / LMT, 2000.

[GRA 01] Gravouil A., Combescure A.
Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2001, p. 199–225.

[GRA 02] Gravouil A., Moës N., Belytschko T.
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2569–2586.

[GRA 08] Gravouil A., Rannou J., Baietto-Dubourg M.
A local multigrid X-FEM approach for 3d fatigue crack growth. *11th ESAFORM Conference On Material Forming, Lyon, France*, april 2008.

[GRÉ 07] Grégoire D., Maigre H., Réthoré J., Combescure A.
Dynamic crack propagation under mixed-mode loading–Comparison between experiments and X-FEM simulations. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n° 20, 2007, p. 6517–6534, Elsevier.

[GUI 07] Guidault P., Allix O., Champaney L., Navarro J.
A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures. *Computers and Structures*, vol. 85, n° 17-18, 2007, p. 1360–1371, Elsevier.

[HAM 05] Hamam R., Pommier S., Bumbieler F.
Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, n° 10-12, 2005, p. 1342–1346, Elsevier.

[HAM 07] Hamam R., Hild F., Roux S.
Stress Intensity Factor Gauging by Digital Image Correlation : Application in Cyclic Fatigue. *Strain*, vol. 43, n° 3, 2007, p. 181–192, Blackwell Synergy.

[HEL 05] Hello G., Kébir H., Chambon L., Roelandt J., Rassineux A.
Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution de problèmes élastoplastiques. *7ème Colloque National en Calcul des Structures. Lavoisier Giens (France)*, may 2005.

[HEY 05] Heyder M., Kolk K., Kuhn G.
Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3 D fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, n° 13, 2005, p. 2095–2105, Elsevier.

[HIL 96] Hills D.
Solution of Crack Problems : The Distributed Dislocation Technique. Springer, 1996.

[HUG 95] Hughes T.
Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, n° 1-4, 1995, p. 387–401, Elsevier.

[HUT 68] Hutchinson J.
Singular Behaviour At The end Of A Tensile Crack In A Hardening Material. *J Mech Phys Solids*, vol. 16, n° 1, 1968, p. 13–31.

[JOU 08] Joubert P., Le Diraison Y., Pinassaud J.
A Linear Magneto-optical Imager for non-destructive evaluation. *accepted in International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, , 2008.

[KAC 93] Kacou S., Parsons I.
A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 108, n° 1-2, 1993, p. 1–21, Elsevier.

[KRY 99] Krysl P., Belytschko T.
The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 44, 1999, p. 767–800.

[LAB 05] Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M.
High order extended finite element method for cracked domains. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 64, 2005, p. 354–381.

[LAD 00] Ladevèze P., Dureisseix D.
A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, vol. 1, 2000, p. 18–28.

[LEB 99] Leblond J., Leguillon D.
Asymptotic behavior of stress intensity factors near an angular point of a crack front. *European Journal of Mechanics/A Solids*, vol. 18, n° 1, 1999, p. 135–145, Elsevier.

[LEG 95] Leguillon D.
Computation of 3d singularities in elasticity. *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains*, vol. 167, 1995, p. 161–170.

[LEG 06] Legay A., Chessa J., Belytschko T.
An Eulerian–Lagrangian method for fluid–structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 17-18, 2006, p. 2070–2087, Elsevier.

[LEM 04] Lemaitre J., Chaboche J.
Mécanique des matériaux solides. Dunod, 2004.

[LUB 00] Lubrecht A., Venner C.
Multilevel methods in lubrication. Elsevier, 2000.

[MAO 91] Mao K., Sun C.
A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 1, 1991, p. 29–43.

[MAU 92] Maugin G., Trimarco C.
Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity : variational formulations and application to brittle fracture. *Acta Mechanica*, vol. 94, n° 1, 1992, p. 1–28, Springer.

[MCC 89a] McClung R., Sehitoglu H.
On the Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure. I. Basic Modeling Issues. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 33, n° 2, 1989, p. 237–252.

[MCC 89b] McClung R., Sehitoglu H.
On the Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure. II. Numerical Results. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 33, n° 2, 1989, p. 253–272.

[MEL 96] Melenk J., Babuska I.
The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n° 1, 1996, p. 289–314.

[MEN 06] Menouillard T., Réthoré J., Combescure A., Bung H.
Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM). *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 68, 2006, p. 911–939.

[MI 94] Mi Y., Aliabadi M.
Three-dimensional crack growth simulation using BEM. *Computers & structures*, vol. 52, n° 5, 1994, p. 871–878, Elsevier Science.

[MOË 99] Moës N., Dolbow J., Belytschko T.
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 1, 1999, p. 131–150.

[MOË 02] Moës N., Gravouil A., Belytschko T.
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2549–2568.

[MOË 06] Moës N., Bechet E., Tourbier M.
Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 67, n° 12, 2006, p. 354–381.

[NEW 81] Newman Jr J.
A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading. *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, , 1981, p. 53–84, ASTM STP.

[NEW 84] Newman J., Raju I.
Stress-intensity Factor Equations for Cracks in Three-dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center ; For sale by the National Technical Information Service, 1984.

[NGU 01] Nguyen O., Repetto E., Ortiz M., Radovitzky R.
A cohesive model of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, vol. 110, n° 4, 2001, p. 351–369, Springer.

[OSH 88] Osher S., Sethian J.
Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the

Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, vol. 79, n° 1, 1988, p. 12–49.

[PAR 61] Paris P., Gomez M., Anderson W.
A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, vol. 13, 1961, p. 9–14.

[PAR 63] Paris P., Erdogan F.
A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 528–534.

[PAR 90a] Parsons I., Hall J.
The multigrid method in solid mechanics. II : Practical applications. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 29, n° 4, 1990, p. 739–753, Wiley.

[PAR 90b] Parsons I., Hall J.
The multigrid method in solid mechanics : part I-algorithm description and behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, p. 719–737.

[PEN 99] Peng D., Merriman B., Osher S., Zhao H., Kang M.
A PDE-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, vol. 155, n° 2, 1999, p. 410–438.

[POM 05a] Pommier S., Risbet M.
Time-derivative equations for fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fracture*, vol. 131, n° 1, 2005, p. 79–106, Springer.

[POM 05b] Pommier S., Risbet M.
Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, n° 10-12, 2005, p. 1297–1306, Elsevier.

[POT 92] Potela A., Aliabadi M., Rooke D.
The dual boundary element method- Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n° 6, 1992, p. 1269–1287.

[PRA 06] Prabel B., Combescure A., Gravouil A., Marie S.
Level set X-FEM non-matching meshes : Application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, 2006, p. 1553–1569.

[PRA 07] Prabel B.
Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Thèse de doctorat, INSA de Lyon / LaMCoS, septembre 2007.

[PUT 92] Putra I., Schijve J.
Crack opening stress measurements of surface cracks in 7075-T6 aluminium alloy plate specimen through electron fractography. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 15, n° 4, 1992, p. 323–338, Blackwell Synergy.

[RAJ 00] Rajaram H., Socrate S., Parks D.
Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 66, n° 5, 2000, p. 455–482, Elsevier Science.

[RAN 07a] Rannou J., Baietto-Dubourg M., Gravouil A.
A localized multigrid extended finite element method for efficient 3D linear fracture simulations. *International Conference on Thermo-Mechanical Modeling of Solids. Palaiseau (France)*, july 2007.

[RAN 07b] Rannou J., Baietto-Dubourg M., Gravouil A.
An X-FEM multigrid algorithm for multiscale crack growth simulations in industrial structures. *9th US National Congress on Computational Mechanics. San Francisco (USA)*, july 2007.

[RAN 07c] Rannou J., Gravouil A., Baietto-Dubourg M.
Éléments finis étendus multi-grilles avec raffinement local pour la mécanique de la rupture. *8ème Colloque National en Calcul des Structures. Lavoisier Giens (France)*, may 2007.

[RAN 07d] Rannou J., Gravouil A., Combescure A.
A multi-grid eXtended Finite Element Method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16, 2007, p. 161–182.

[RAN 08] Rannou J., Baietto-Dubourg M., Gravouil A.
A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *accepted in International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. in press, 2008.

[RAN is] Rannou J., Limodin N., Réthoré J., Gravouil A., Ludwig W., Baietto-Dubourg M.-C., Buffière J.-Y., Combescure A., Hild F., Roux S.
Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *submitted to Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. soumis, soumis.

[REM 03] Remacle J., Shephard M.
An algorithm oriented mesh database. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 58, 2003, p. 349–374.

[RÉT 05] Réthoré J., Gravouil A., Combescure A.
An energy conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*, vol. 63, 2005, p. 631–659.

[RÉT 08a] Réthoré J., Hild F., Roux S.
Extended digital image correlation with crack shape optimization. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 73, 2008, p. 248–272.

[RÉT 08b] Réthoré J., Tinnes J., Roux S., Buffière J., Hild F.
Extended three-dimensional digital image correlation (X3D-DIC). *Comptes rendus-Mécanique*, , 2008, Elsevier.

[REY 08] Rey B., Mocellin K., Fourment L.
A node-nested Galerkin multigrid method for metal forging simulation. *Computing and Visualization in Science*, vol. 11, n° 1, 2008, p. 17–25, Springer.

[RIB 07] Ribeaucourt R., Baietto-Dubourg M., Gravouil A.
A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 33-34, 2007, p. 3230–3247, Elsevier.

[RIC 68a] Rice J.
A Path Independent Integral and the Approxirnate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics Transactions of A8ME*, , 1968, p. 379–386.

[RIC 68b] Rice J., Rosengren G.
PLane-strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J Mech Phys Solids*, vol. 16, n° 1, 1968, p. 1–12.

[ROU 07] Roux S., Hild F., Viot P., Bernard D.
Three dimensional image correlation from X-Ray computed tomography of solid foam. *Composites A : Applied Science and Manufacturing*, , 2007, p. 1253–1265.

[RUI 08] Ruiz-Sabariego J.
Loi incrémentale de prévision de durée de vie en fissuration par fatigue sous chargement complexe, anisotherme et avec prise en compte des effets liés à l'environnement. Thèse de doctorat, ENS Cachan, janvier 2008.

[SET 99] Sethian J.
Level set methods and fast marching methods. Cambridge University Press Cambridge, 1999.

[SHE 95] Sheng C., Taylor L., Whitfield D.
Multigrid algorithm for three-dimensional incompressible high-Reynolds number turbulent flows. *AIAA J*, vol. 33, n° 11, 1995, p. 2073–2079.

[SOL 03] Solanki K., Daniewicz S., Newman J.
Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 12, 2003, p. 1475–1489, Elsevier.

[SOL 04] Solanki K., Daniewicz S., Newman J.
Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure : an overview. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n° 2, 2004, p. 149–171, Elsevier.

[SOU 76] South J.
The multigrid method : Fast relaxation. *Advan. in Eng. Sci,*, vol. 4, 1976.

[STR 01] Strouboulis T., Copps K., Babuška I.
The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 32-33, 2001, p. 4081–4193, Elsevier.

[SUK 00] Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T.
Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1549–1570.

[SUK 01] Sukumar N., Chopp D., Moës N., Belytschko T.
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 46-47, 2001, p. 6183–6200, Elsevier.

[SUK 03] Sukumar N., Chopp D., Moran B.
Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 1, 2003, p. 29–48.

[TON 73] Tong P., Pian T., Lasry S.
A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, n° 3, 1973, p. 297–308.

[VAL 07a] Valance S., Coret M., Combescure A.
Strain simulation of steel during a heating-cooling cycle including solid-solid phase change. *European Journal of Mechanics and Solids*, vol. 26, n° 3, 2007, p. 460–473, Elsevier.

[VAL 07b] Valance S., Coret M., Réthoré J., de Borst R.
Solid phase change observation using digital image correlation. Springer, Ed., *Proceedings of the 13th International Conference on Experimental Mechanics, Alexandroupolis, Greece*, 2007.

[VEN 06] Ventura G.
On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *Int J Numer Meth Eng*, vol. 66, 2006, p. 761–795.

[WAG 01] Wagner G., Moës N., Liu W., Belytschko T.
The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 51, 2001, p. 293–313.

[WAG 03] Wagner G., Ghosal S., Liu W.
Particulate flow simulations using lubrication theory solution enrichment. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 56, 2003, p. 1261–1289.

[WAI 07] Waisman H., Fish J.
A heterogeneous space-time full approximation storage multilevel/ method for molecular dynamics simulations. *Inter. J. Numer. Meth. Eng*, vol. 73, 2007, p. 407–426.

[WES 92] Wesseling P.
An introduction to multigrid methods. John Wiley & Sons, 1992.

[WIE 99] Wieners C.
Multigrid Methods for Prandtl–Reuss Plasticity. *Numer. Linear Algebra Appl*, vol. 6, 1999, p. 457–478.

[ZHA 98] Zhang J., Bowen P.
On the finite element simulation of three-dimensional semi-circular fatigue crack growth and closure. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 60, n° 3, 1998, p. 341–360, Elsevier.

[ZI 03] Zi G., Belytschko T.
New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 57, 2003, p. 2221–2240.

[ZOH 96] Zohdi T., Oden J., Rodin G.
Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 138, n° 1-4, 1996, p. 273–298, Elsevier.

[ZOH 05] Zohdi T., Wriggers P.
Introduction to Computational Micromechanics. Springer, 2005.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : RANNOU DATE de SOUTENANCE : 3 octobre 2008

Prénoms : Johann

TITRE : Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2008-ISAL-0055

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :

La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente. Elle a connu la majeure partie de ses développements au cours du XXème siècle parallèlement à un besoin croissant des ingénieurs d'être capables de prévoir le comportement des structures qu'ils conçoivent jusqu'à leur ruine. Depuis l'avènement de la mécanique numérique, la méthode des éléments finis a été une des méthodes les plus utilisées dans l'industrie pour simuler la propagation de fissures. Cependant, cette méthode fait face à une difficulté majeure. La géométrie des fissures évoluant au cours du temps, il faut avoir recourt à des procédés de remaillage et de projection de champs coûteux en temps et dont la validité théorique pose encore un certain nombre de questions. La dernière décennie a vu le développement de nouvelles méthodes permettant de lever cette difficulté. L'une d'entre elle, la méthode des éléments finis étendus, permet, via un enrichissement des fonctions d'interpolation, de prendre en compte une discontinuité mobile indépendamment de la discrétisation.
Par ailleurs, les problèmes de mécanique de la rupture présentent souvent un caractère multiéchelle. On peut ainsi distinguer trois échelles caractéristiques qui sont celle de la structure, celle de la fissure et celle des non-linéarités en front de fissure. Ces échelles pouvant différer de plusieurs ordres de grandeur, cela peut poser quelques difficultés. Pour les contourner, nous proposons de coupler la méthode des éléments finis étendus avec des techniques multigrilles localisées. Tout en étant efficace du point de vue du temps de calcul, ce couplage permet de modéliser des défauts très localisés telles des fissures, tout en prenant en compte leur influence à l'échelle globale. Pour modéliser la géométrie évolutive de la fissure, nous utilisons des fonctions de niveau discrétisées sur un maillage auxiliaire indépendant de ceux de la structure. Ceci permet d'appliquer des algorithmes d'évolution en différences finies très robustes et simples à mettre en œuvre. De plus, tout ceci s'intègre naturellement dans notre stratégie à plusieurs grilles. Les résultats de simulations tridimensionnelles sont confrontés à des données expérimentales issues de techniques d'imagerie par microtomographie aux rayons X. Malgré la robustesse et les potentialités de la méthode proposée, il en ressort la nécessité de prendre en compte la plasticité confinée pour modéliser la refermeture. Ce phénomène étant très local, la possibilité d'utiliser une stratégie multigrille localisée non-linéaire est étudiée.

MOTS-CLÉS : X-FEM, techniques multigrilles, mécanique de la rupture, fatigue

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Madame Marie-Christine BAIETTO

Président du jury :

Composition du jury : Pierre-Alain BOUCARD, François HILD, Michel RAOUS, Marie-Christine BAIETTO, Dominique LEGUILLON, Patrick MASSIN, Pascal SOUQUET, Anthony GRAVOUIL